BÀI GIẢNG
XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Biên soạn: PGS.TS LÊ TIẾN THƯỜNG

Tp.HCM, 02-2005

CHUONG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.2. Phương pháp xử lý mẫu.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Các phương pháp DSP trong thực tế gồm 2 nhóm cơ bản:

- Phương pháp xử lý khối.
  (Block Processing Methods)
- Phương pháp xử lý mẫu.
  (Sample Processing Methods)

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

- **Trong phương pháp xử lí khối:** dữ liệu được thu thập và xử lý thành từng khối. Một số ứng dụng điển hình gồm mạch lọc FIR cho các tín hiệu có chiều dài hữu hạn dùng tích chập, fast convolution cho tín hiệu dài bằng cách chia thành các đoạn ngắn, tính phổ dùng giải thuật DFT/FFT, phân tích và tổng hợp ngôn ngữ, và xử lý hình ảnh.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

- **<u>Trong phương pháp xử lý mẫu</u>: dữ liệu được xử lí từng mẫu ở từng thời điểm qua giải thuật DSP để cho ra output sample. Phương pháp này chủ yếu dùng trong các ứng dụng thời gian thực như mạch lọc thời gian thực cho long signal, xử lí các hiệu ứng âm thanh số, các hệ thống điều khiển số, và xử lí tín hiệu thích nghi. Giải thuật xử lí mẫu là bản chất *state-space* để nhận ra các mạch lọc LTI.**

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

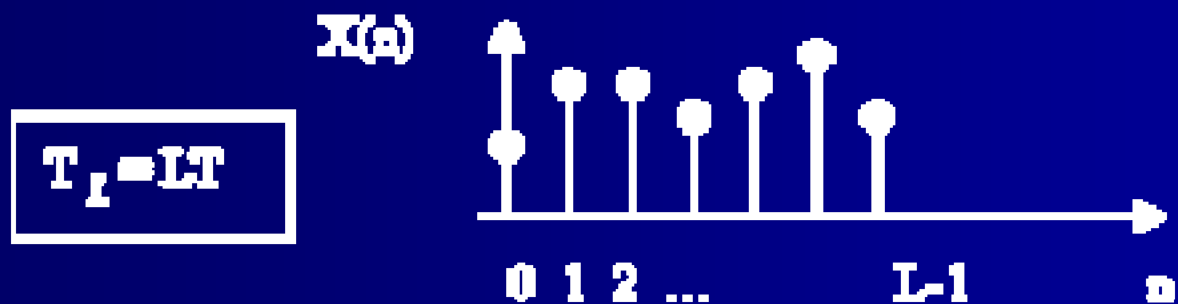
Trong chương này ta sử dụng 2 phương pháp trên trong các ứng dụng của mạch lọc FIR. Và quan tâm đến khía cạnh tính toán của phương trình tích chập (3.3.2) và (3.3.3) khi dùng cho mạch lọc FIR và tín hiệu vào có chiều dài hữu hạn, và trình bày các dạng khác của tích chập như:

- Dạng trực tiếp.
- Bảng tích chập.
- Dạng LTI.
- Dạng ma trận.
- Dạng Flip-and-slide.
- Dạng Overlap-add block.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.1. Tích chập



(4.1.1)

Với T: Thời gian giữa 2 lần lấy mẫu, $T=1/f_s$.

Số mẫu của mỗi đoạn tín hiệu là: $L = T_L f_s$ (4.1.2)

Có thể xem L mẫu tín hiệu là 1 tập hợp của x(n) với n = 0, 1, ..., L – 1:

$$x = [x_0, x_1, \dots , x_{L-1}] \tag{4.1.3}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Dạng trực tiếp và dạng LTI của tích chập cho bởi phương trình (3.3.3) và (3.3.2) của 1 hệ LTI tổng quát:

$$y(n) = \sum_{m} h(m)x(n-m) = \sum_{m} x(m)h(n-m) \qquad (4.1.4)$$

Dạng khác là bảng tích chập:

$$y(n) = \sum_{i.j} h(i)x(j) \qquad (i + j = n) \qquad (4.1.5)$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Xét 1 mạch lọc FIR bậc M có đáp ứng xung h(n), với n = 0, 1, ..., M có thể viết dưới dạng:

$$h = [h_0, h_1, ..., h_M] \tag{4.1.6}$$

Lưu ý số phần tử bằng số bậc cộng 1:

$$L_H = M + 1 \tag{4.1.7}$$

Tích chập giữa ngõ vào x có chiều dài L với mạch lọc h bậc M cho ra tín hiệu y(n) :

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Với điều kiện : $0 \le m \le M$

và $0 \le n - m \le L - 1$

$\Leftrightarrow \quad m \le n \le L - 1 + m$

Như vậy, ta có giới hạn của n:

$$0 \le m \le n \le L - 1 + m \le L - 1 + M$$

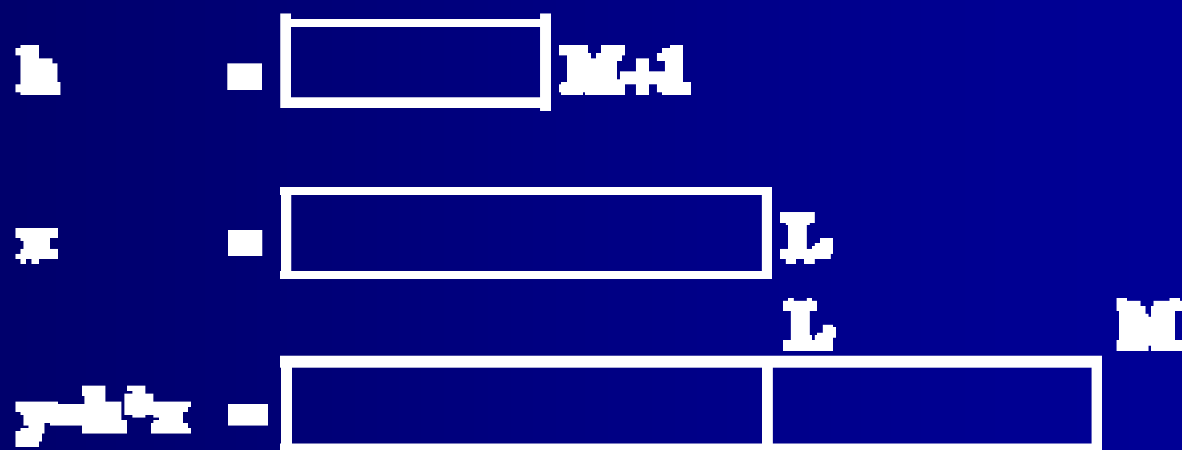
$$\Leftrightarrow 0 \le n \le L - 1 + M \qquad (4.1.10)$$

$$\Rightarrow y = [y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{L-1+M}] \qquad (4.1.11)$$

Chiều dài của y là $L_y = L + M$ dài hơn ngõ vào x là M mẫu: $L_y = L_x + L_h - 1$ **(4.1.12)**

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1.2. Dạng trực tiếp



Hình 4.1.1 Chiều dài tương đối của mạch lọc, ngõ vào và ngõ ra

Với chiều dài ngõ vào và ngõ ra (L và n) cố định thì m phải thỏa:

$$0 \leq m \leq M$$

$$n - L + 1 \leq m \leq n$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Vậy điều kiện của m là:

max(0, n – L + 1) ≤ m ≤ min(n,M) **(4.1.15)**

Do đó với mạch lọc FIR bậc M và ngõ vào dài L thì tích chập dạng trực tiếp là:

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{\min(n,M)} h(m)x(n-m)$$ **dạng trực tiếp (4.1.16)**

Ví dụ 4.4.0: Xét mạch lọc bậc 3 có ngõ vào gồm 5 mẫu:

$h = [h_0, h_1, h_2, h_3]$

$x = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

$y = h * x = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7]$

CHUƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Vậy pt (4.1.16) trở thành:

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,n-4)}^{\min(n,3)} h(m)x(n-m) \qquad n = 0,1,\ldots,7$$

Khi n thay đổi từ 0 ÷ 7 thì hệ số m có giá trị:

max (0, 0 – 4) ≤ m ≤ min(0, 3) => m = 0
max (0, 1 – 4) ≤ m ≤ min(1, 3) => m = 0, 1
max (0, 2 – 4) ≤ m ≤ min(2, 3) => m = 0,1 ,2
max (0, 3 – 4) ≤ m ≤ min(3, 3) => m = 0, 1, 2, 3
max (0, 4 – 4) ≤ m ≤ min(4, 3) => m = 0, 1, 2, 3
max (0, 5 – 4) ≤ m ≤ min(5, 3) => m = 1, 2, 3
max (0, 6 – 4) ≤ m ≤ min(6, 3) => m = 2, 3
max (0, 7 – 4) ≤ m ≤ min(7, 3) => m = 3

Ví dụ, với n = 5 thì ngõ ra y_5 sẽ là:

$$y_5 = h_1x_4 + h_2x_3 + h_3x_2$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

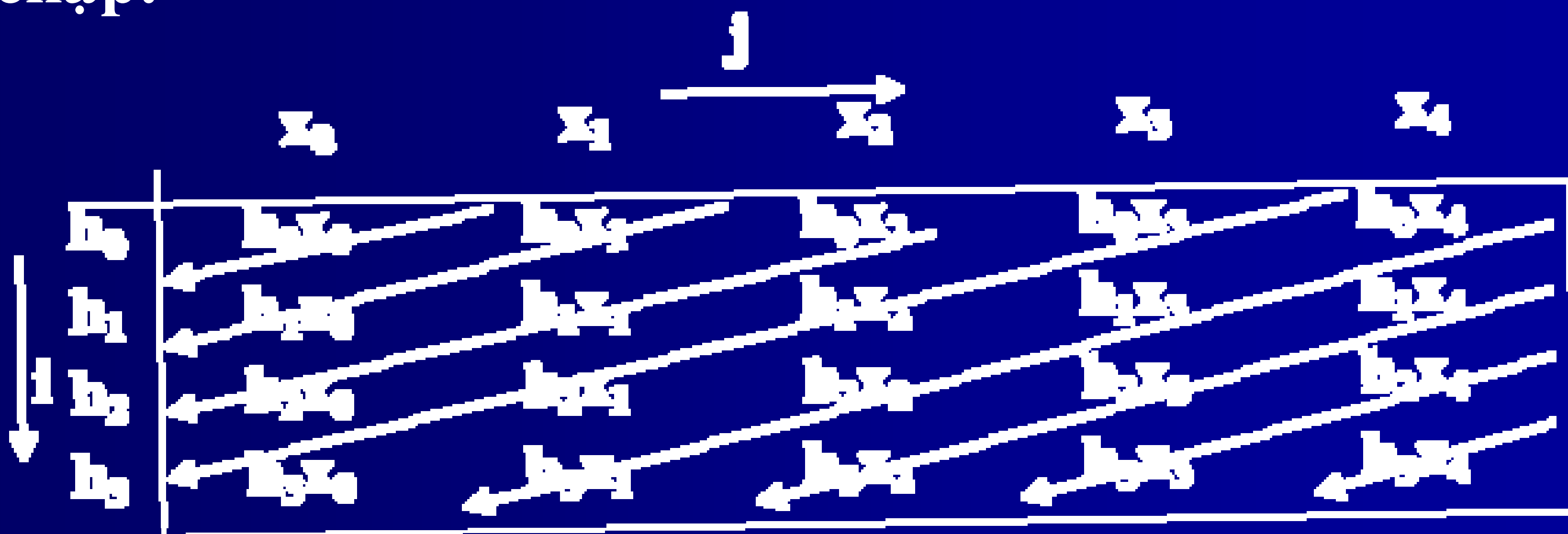
Ta có đáp ứng ngõ ra là :

$$
\begin{aligned}
y_0 &= h_0x_0 \\
y_1 &= h_0x_1 + h_1x_0 \\
y_2 &= h_0x_2 + h_1x_1 + h_2x_0 \\
y_3 &= h_0x_3 + h_1x_2 + h_2x_1 + h_3x_0 \\
y_4 &= h_0x_4 + h_1x_3 + h_2x_2 + h_3x_1 \\
y_5 &= h_1x_4 + h_2x_3 + h_3x_2 \\
y_6 &= h_2x_4 + h_3x_3 \\
y_7 &= h_3x_4
\end{aligned}
\qquad (4.1.18)
$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1.3. Bảng tính chập

Từ ví dụ trên ta thấy y_n là tổng các tích $h_i x_j$ thoả $i + j = n$. Do đó ta có thể tính đáp ứng ra thông qua bảng tích chập:



Hình 4.1.2 Bảng tích chập

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Từ bảng tích chập, có thể xác định y_n sẽ là tổng các thành phần trên đường chéo tương ứng.

Ví dụ $y_0 = h_0x_0$

$y_1 = h_1x_0 + h_0x_1$

$y_2 = h_2x_0 + h_1x_1 + h_0x_2$

...

Ví dụ 4.1.1: Tìm tích chập của mạch lọc và input như sau:

$h = [1, 2, -1, 1]$

$x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Giải : Ta lập bảng tích chập

h/x	1	1	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	1	1
2	2	2	4	2	4	4	2	2
-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1
1	1	1	2	1	2	2	1	1

Từ đó ta được y = [1, 3, 3, 5, 3, 7, 4, 3, 3, 0, 1]

Lưu ý là $L_y = L + M = 8 + 3 = 11$: có 11 mẫu ở tín hiệu ra.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1.4. Dạng tuyến tính bất biến thời gian

Một cách trực quan để hiểu dạng LTI của tích chập là hiểu tính tuyến tính và tính bất biến theo thời gian của mạch lọc. Xét lại ví dụ trên:

$$h = [h_0, h_0, h_2, h_3]$$

$$x = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Ngõ vào x có thể viết lại dưới dạng kết hợp tuyến tính của các xung dirac trì hoãn.

$$x = x_0[1, 0, 0, 0, 0] + x_1[0, 1, 0, 0, 0] + x_2[0, 0, 1, 0, 0] + x_3[0, 0, 0, 1, 0] + x_4[0, 0, 0, 0, 1]$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Hoặc: $x(n)=x_0\delta(n)+x_1\delta(n-1)+x_2\delta(n-2)+x_3\delta(n-3)+x_4\delta(n-4)$

Mạch lọc sẽ thay thế các xung dirac trì hoãn bằng các đáp ứng xung trì hoãn tương ứng:

$$y(n)=x_0h(n)+x_1h(n-1)+x_2h(n-2)+x_3h(n-3)+x_4h(n-4)$$

Dạng khối:

$$\begin{array}{lcl}
x = x_0[1,0,0,0,0] & & y = x_0[h_0,h_1,h_2,h_3,0,0,0,0] \\
\quad +x_1[0,1,0,0,0] & & \quad +x_1[0,h_0,h_1,h_2,h_3,0,0,0] \\
\quad +x_2[0,0,1,0,0] & \xrightarrow{H} & \quad +x_2[0,0,h_0,h_1,h_2,h_3,0,0] \\
\quad +x_3[0,0,0,1,0] & & \quad +x_3[0,0,0,h_0,h_1,h_2,h_3,0] \\
\quad +x_4[0,0,0,0,1] & & \quad +x_4[0,0,0,0,h_0,h_1,h_2,h_3]
\end{array}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Do đó ta có bảng tích chập dưới dạng LTI:

	h_0	h_1	h_2	h_3	0	0	0	0
x_0	x_0h_0	x_0h_1	x_0h_2	x_0h_3	0	0	0	0
x_1	0	x_1h_0	x_1h_1	x_1h_2	x_1h_3	0	0	0
x_2	0	0	x_2h_0	x_2h_1	x_2h_2	x_2h_3	0	0
x_3	0	0	0	x_3h_0	x_3h_1	x_3h_2	x_3h_3	0
x_4	0	0	0	0	x_4h_0	x_4h_1	x_4h_2	x_4h_3
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Hình 4.1.3 Dạng tuyến tính LTI của tích chập

Để tính tích chập cho trường hợp này chỉ cần cộng theo cột tương ứng cho mỗi y_n

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ví dụ 4.1.2: Xét lại ví dụ 4.1.1 sử dụng dạng LTI

h = [1, 2, -1, 1] và x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]

Giải: Bảng LTI tương đương trong trường hợp này là:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	partial output
x/h	1	2	-1	1								
1	1	2	-1	1								x_0h_n
1		1	2	-1	1							x_1h_{n-1}
2			2	4	-2	2						x_2h_{n-2}
1				1	2	-1	1					x_3h_{n-3}
2					2	4	-2	2				x_4h_{n-4}
2						2	4	-2	2			x_5h_{n-5}
1							1	2	-1	1		x_6h_{n-6}
1								1	2	-1	1	x_7h_{n-7}
y_n	1	3	3	5	3	7	4	3	3	0	1	$\sum x_m h_{n-m}$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Tương tự như dạng trực tiếp, ta có công thức tổng quát cho dạng LTI bằng cách đổi vai trò của x và h cũng như các cận của chúng (L – 1 và M).

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,n-M)}^{\min(n,L-1)} x(m)h(n-m) \quad \textbf{(Dạng LTI)} \quad \textbf{(4.1.19)}$$

với n = 0, 1, ..., L + M – 1

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1.5. Dạng ma trận

Tích chập ở p/t (4.1.16) và (4.1.19) có thể viết lại dưới dạng ma trận tuyến tính như sau:

$$y = Hx \qquad (4.1.20)$$

Với H là ma trận chữ nhật xây dựng từ đáp ứng xung của mạch lọc h có chiều xác định bởi độ dài của ngõ vào và ngõ ra:

$$L_y * L_x = (L + M) * L$$

Để hiểu rõ hơn, hãy xét lại ví dụ của p/t (4.1.18) bằng cách sắp xếp lại ngõ ra thành dạng ma trận.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = Hx$$

Có 2 điểm lưu ý:

• Mỗi cột của H chính là các vectơ đáp ứng xung h có trễ (hay trì hoãn) và có số cột bằng số mẫu của ngõ vào.

• H còn được gọi là ma trận *Toeplitz* vì các phần tử trên đường chéo bằng nhau. Tính chất toeplitz là hệ quả trực tiếp của tính bất biến theo thời gian của mạch lọc.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ví dụ 4.1.3: Tính lại ví dụ 4.1.1 sử dụng dạng ma trận.

Giải : Vì $L_y = 11$ và $L_x = 8$ nên ma trận của mạch lọc sẽ có kích thước là 11x8.

$$Hx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = y$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Có thể viết ma trận ở dạng khác:

$$\mathbf{y = Xh} \qquad (4.1.22)$$

với X là ma trận có kích thước L_y x L_h = (L+M)(M+1)

Ở ví dụ trên thì dạng cụ thể là:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & x_4 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ví dụ 4.1.4: Làm lại ví dụ 4.1.1 sử dụng dạng ma trận trên

Giải: Ma trận X có kích thước L_y x L_h = 11 x 4

$$Xh = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y$$

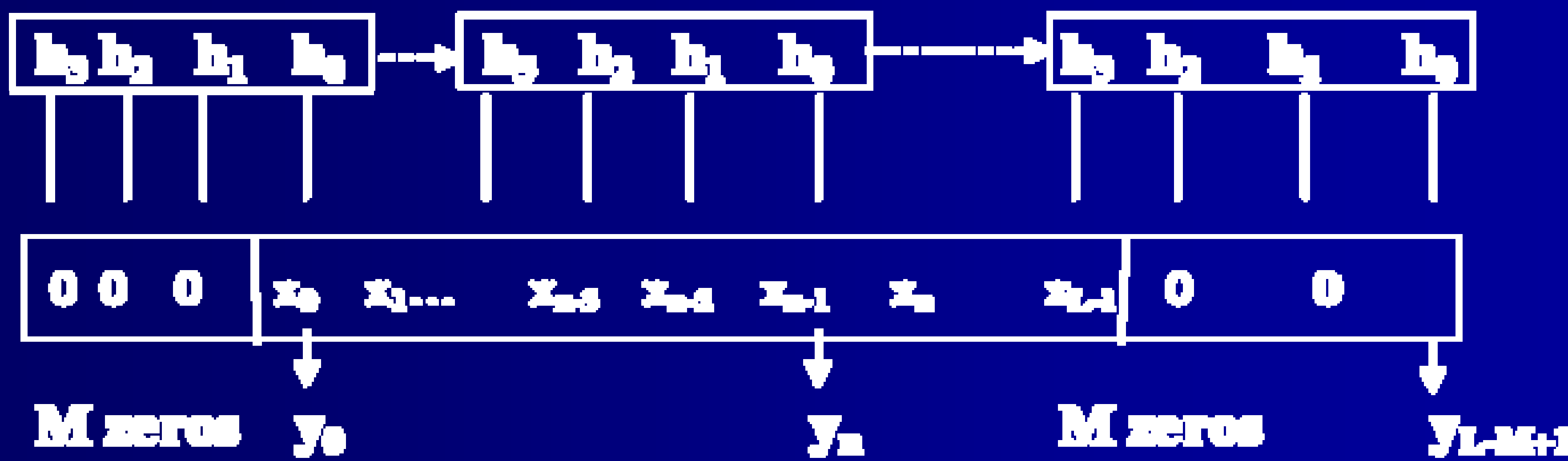
CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Tích chập dạng ma trận rất tiện lợi trong các ứng dụng như xử lí ảnh, và trong các phương pháp DSP cao cấp khác như parametric spectrum estimation, mạch lọc thích nghi ...

4.1.6. Dạng trượt và lật

Trong dạng tích chập này hàm h(n) của mạch lọc lật ngược thứ tự và sau đó trượt trên chuỗi dữ liệu vào. Lưu ý là chuỗi input chiều dài L sẽ được thêm vào M zeros ở đầu và cuối chuỗi, sau đó ngõ ra sẽ xác định bằng tổng các tích các phần tử tương úng trong qúa trình chuỗi h(n) trượt trên chuỗi ngõ vào.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR



Ta đã biết công thức xác định chuỗi đáp ứng ngõ ra:

$$y_n = h_0x_n + h_1x_{n-1} + h_2x_{n-2} + \ldots + h_Mx_{n-M}$$

Từ sơ đồ ta thấy có M outputs ở đầu và cuối chuỗi tạo bởi mạch lọc khi không có tín hiệu vào, ta gọi đây là quá trình quá độ input-on/off của mạch lọc. Còn lại là trạng thái xác lập của mạch lọc.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ta cũng có thể cho input x trượt trên đáp ứng xung h theo chiều ngược lại gọi là giải thuật xử lí sample-by-sample của mạch lọc FIR.

4.1.7. Transient and Steady-State Behavior

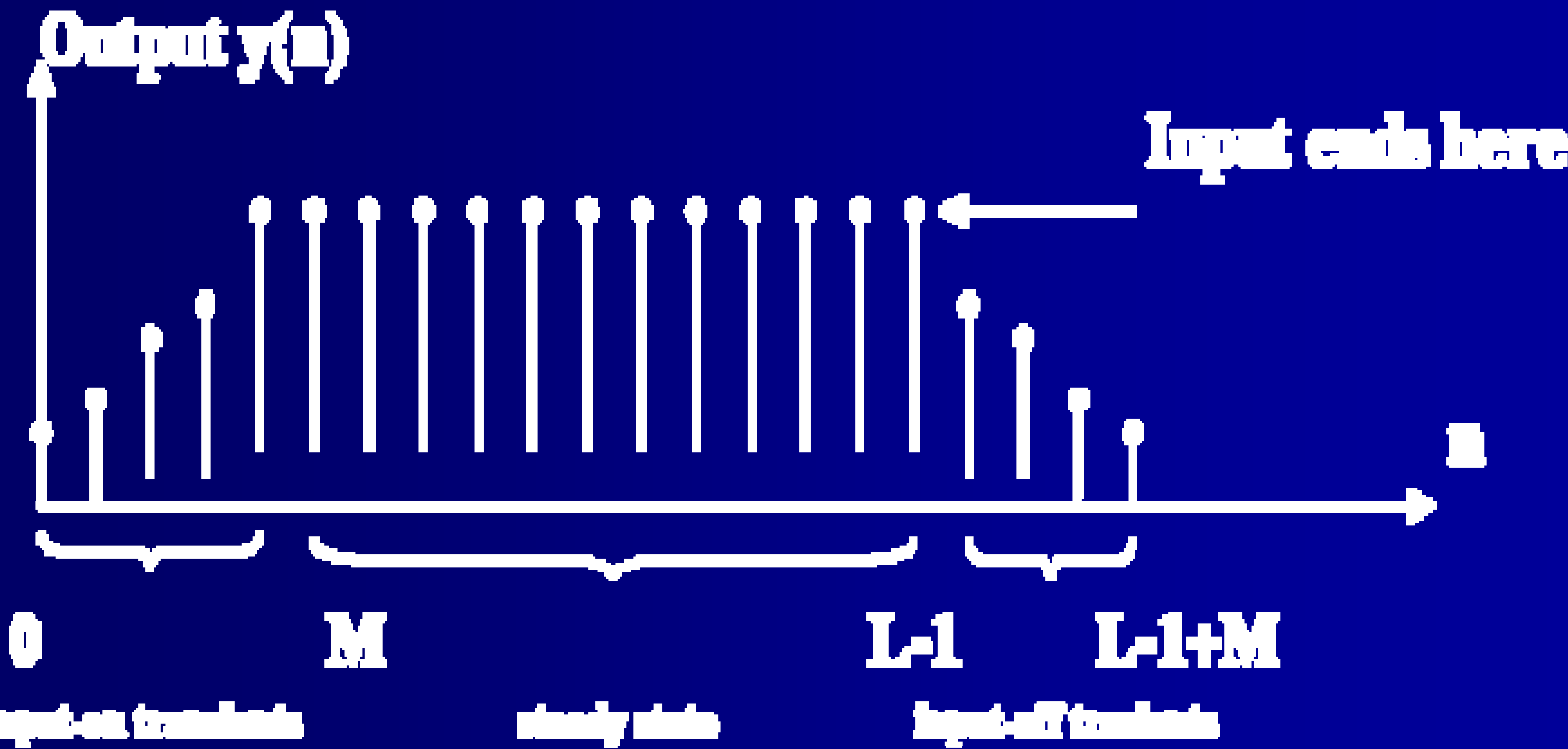
Như đã trình bày ở trên, vói tín hiệu vào gồm L phần tử cho qua mạch lọc bậc M thì chuỗi tín hiệu ra có thể được chia thành 3 phần:

$0 \le n < M$ (các quá độ khi ngõ vào bật)

$M \le n \le L - 1$ (trạng thái thường trực)

$L - 1 < n \le L - 1 + M$ (các quá độ khi ngõ vào tắt)

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR



CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ở đây ta đã sử dụng giả thiết là chiều dài chuỗi inputs L>>M – chiều dài đáp ứng xung mạch lọc. Từ công thức (4.1.16):

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,\,n-L+1)}^{\min(n,\,M)} \mathrm{h(m)x(n\ -m)}$$

Ta xác định được các cận trong từng đoạn của n:

$$y_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n} h_m x_{n-m} & \text{nếu } 0 \le n < M & \text{(ngõ vào bật)} \\ \sum_{m=0}^{M} h_m x_{n-m} & \text{nếu } M \le n \le L-1 & \text{(thường trực)} \\ \sum_{m=n-L+1}^{M} h_m x_{n-m} & \text{nếu } L-1 < n \le L-1+M & \text{(ngõ vào tắt)} \end{cases}$$

Vậy pt I/O ở trạng thái xác lập có số phần tử cố định:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} \mathrm{h(m)x(n\ -m)} \qquad \text{(trạng thái ổn định)}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1.8. Tích chập của những chuỗi vô hạn

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,\, n-L+1)}^{\min(n,\, M)} h_m x_{n-m}$$

Ta có 3 trường hợp sau:

1. Mạch lọc vô hạn, tín hiệu vào hữu hạn:

$$M = \infty, \quad L < \infty$$

2. Mạch lọc hữu hạn, tín hiệu vào vô hạn:

$$M < \infty, \quad L = \infty$$

3. Mạch lọc vô hạn, tín hiệu vào vô hạn:

$$M = \infty, \; L = \infty$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Với M = ∞ ta có min(n,M) = n; với L = ∞ ta có max(0,n – L + 1) = 0

Vậy với 3 trường hợp trên ta có:

$$y_n = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{n} h_m x_{n-m} \qquad \text{nếu } M = \infty,\ L < \infty$$

$$y_n = \sum_{m=0}^{\min(n,M)} h_m x_{n-m} \qquad \text{nếu } M < \infty,\ L = \infty$$

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_m x_{n-m} \qquad \text{nếu } M = \infty,\ L = \infty$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Khi mạch lọc vô hạn, có thể định nghĩa trạng thái xác lập của mạch lọc là giới hạn của y(n) khi n rất lớn.

Ví dụ 4.1.5: Một mạch lọc IIR có đáp ứng xung $h(n) = (0.75)^n u(n)$. Dùng tích chập tìm y(n) khi tín hiệu vào là:

a) Hàm đơn vị: $x(n) = u(n)$

b) Hàm chuyển đổi đơn vị: $x(n) = (-1)^n u(n)$

c) Hàm xung vuông độ rộng L = 25 xung:

$$x(n) = u(n) - u(n - 25)$$

Trong mỗi trường hợp tìm đáp ứng xác lập của mạch lọc.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Giải:

a) Vì cả mạch lọc và tín hiệu vào là nhân qủa dài vô hạn nên ta dùng công thức:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{h(m)x(n-m)} = \sum_{m=0}^{n} (0.75)^{\mathrm{n}} \mathrm{u(m)u(n-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (0.75)^{n} = \frac{1-(0.75)^{n+1}}{1-0.75} = 4-3(0.75)^{n}$$

Đáp ứng ở xác lập là giới hạn lim của y(n) khi n→ ∞. Vậy

$$y(n)->\frac{1}{1-0.75} = 4$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

b) $$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{h(m)x(n-m)} = \sum_{m=0}^{n} (0.75)^{\mathrm{m}} (-1)^{\mathrm{n-m}}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \sum_{m=0}^{n} (-0.75)^{\mathrm{m}}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \frac{1-(-0.75)^{n+1}}{1+0.75} = (-1)^{\mathrm{n}} \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(0.75)^{\mathrm{n}}$$

Đáp ứng xác lập:

$$\mathrm{y(n)} -> (-1)^{\mathrm{n}} \frac{1}{1+0.75} = (-1)^{n} \frac{4}{7}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ta sẽ thấy rằng đáp ứng xác lập tương đương với các trường hợp đặc biệt của đáp ứng hàm sin của mạch lọc tại tần số ω = 0 và ω = π và dễ dàng tìm được thông qua hàm truyền đạt H(z) của mạch lọc tại

z = 1 (câu a) y(n) → H(1)

z = -1 (câu b) y(n) → $(-1)^n H(-1)$

Trong ví dụ này thì

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.75z^{-1}} \rightarrow H(1) = 4; H(-1) = \frac{4}{7}$$

CHUƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

c) Vì ngõ vào là hữu hạn L = 25 nên ta sử dụng công thức:

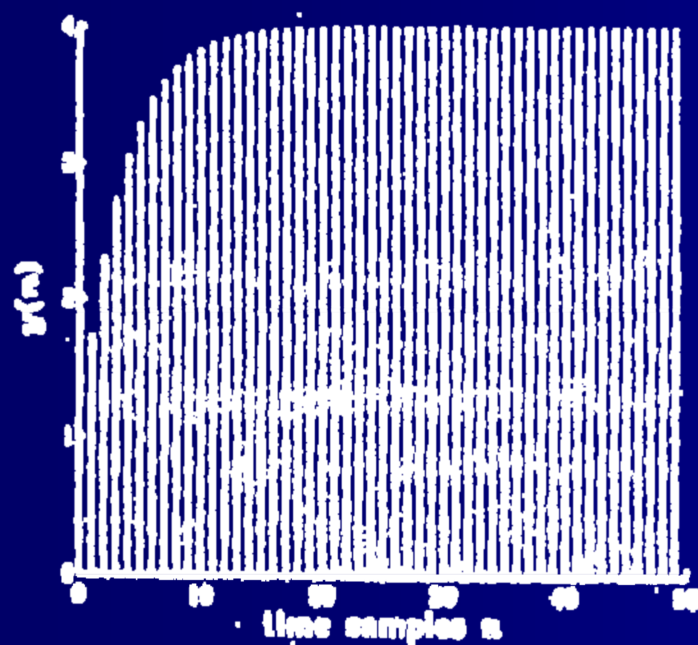
$$y_n = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{n} h_m x_{n-m} = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{n} (0.75)^m$$

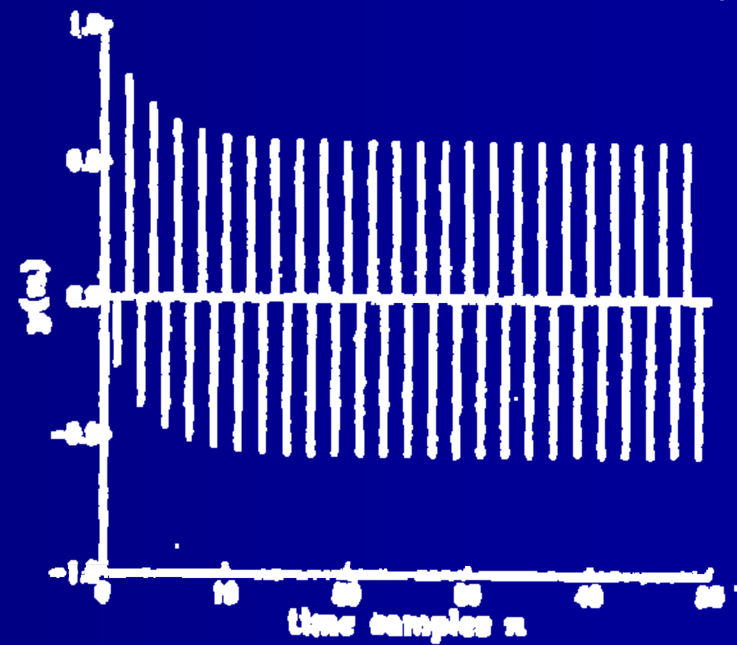
Ta phải chia 2 trường hợp:

- **$0 \le n \le 24$:** $$y_n = \sum_{m=0}^{n} (0.75)^m = \frac{1-(0.75)^{n+1}}{1-0.75} = 4-3(0.75)^n$$
- **$25 \le n \le \infty$:** $$y_n = \sum_{m=n-24}^{n} (0.75)^m = (0.75)^{n-24} \frac{1-(0.75)^{25}}{1-0.75}$$

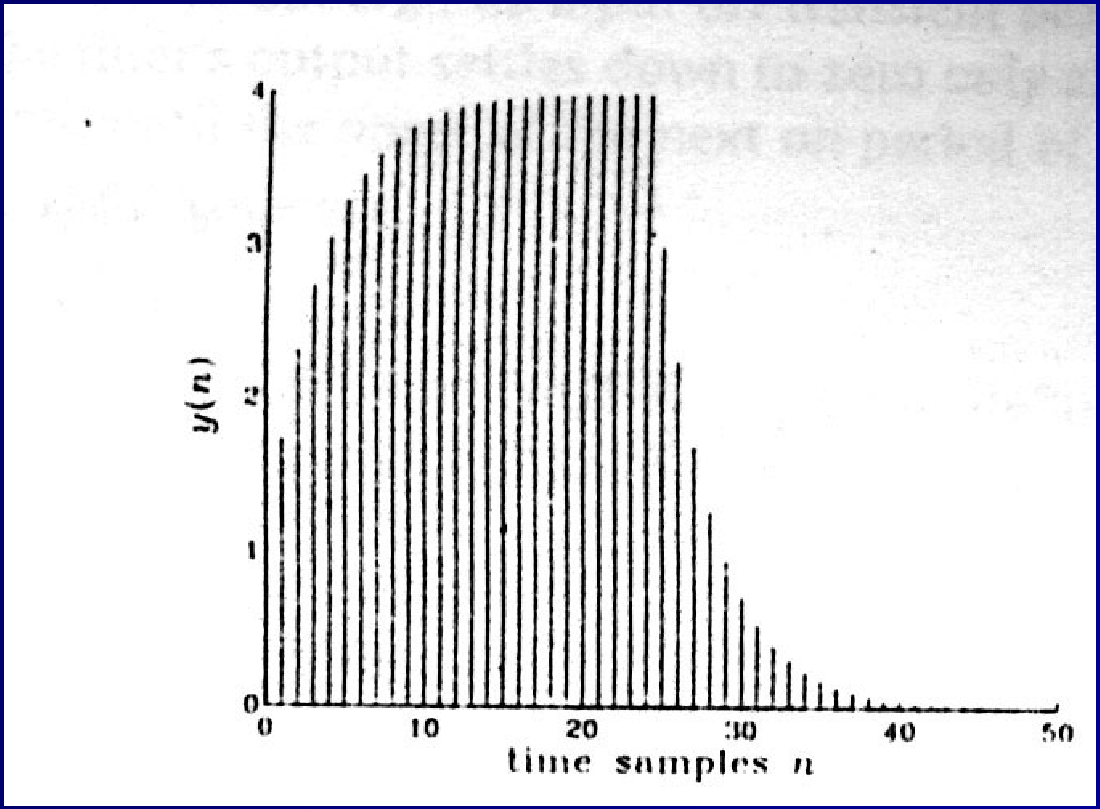
Vì bản chất suy hao theo hàm mũ của đáp ứng xung nên mạch lọc này hoạt động như mạch RC – cũng có các quá trình như qúa trình tích xả của tụ. Quan sát trên đồ thị đáp ứng mạch lọc sẽ thấy điều này.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR





CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR



CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

Ví dụ 4.1.6: Trong ví dụ 3.4.5 ta biết mạch lọc có đáp ứng xung $h(n) = (0.75)^n u(n)$ thỏa mãn p/t sai phân

$$y(n) = 0.75y(n-1) + x(n)$$

CMR y(n) tìm được trong ví dụ 4.1.5 là nghiệm của p/t trên, với các sơ kiện nhân qủa.

Giải :

a) Ta có $x(n) = u(n) \Rightarrow y(n) = 0.75y(n-1) + 1$ (Với $n \geq 0$)

- $n = 0$, $y(0) = 1$ trùng với giá trị biểu thức cũ

$$y(n) = 4 - 3(0.75)^n.$$

- $n \geq 1$, vế phải $= 0.75y(n-1) + 1$

$$= 0.75[4 - 3(0.75)^{n-1}] + 1$$

$$= 4 - 3(0.75)^n = y(n).$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

b) $x(n) = (-1)^n u(n)$

$$0.75y(n-1)+x(n)=0.75\left[(-1)^{n-1}\frac{4}{7}+(0.75)^{n-1}\frac{3}{7}\right]+(-1)^n$$

$$=(-1)^n\frac{4}{7}+(0.75)^n\frac{3}{7}=y(n)$$

c) Phương trình vi phân trở thành:

$y(n) = 0.75y(n-1) + 1$ với $0 \le n \le 24$

$y(n) = 0.75y(n-1)$ với $n \ge 25$

Với $n \ge 25$ ta cần xác định sơ kiện $y(24)$ vì có thể viết lại như sau : $y(n) = 0.75^{n-24}\,y(24)$ với $n \ge 25$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

b) $x(n) = (-1)^n u(n)$

$0.75y(n-1) + x(n) = 0.75[4(-1)^{n-1}/7 + 3(0.75)^{n-1}/7] + (-1)^n = 3(-1)^n/7 + 4(0.75)^n/7 = y(n)$

c) Phương trình sai phân trở thành:

$$y(n) = 0.75y(n-1) + 1 \qquad \text{với } 0 \le n \le 24$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.8. Tích chập của những chuỗi vô hạn

$y(n) = 0.75y(n-1)$ với $n \geq 25$

Với $n \geq 25$ ta cần xác định sơ kiện $y(24)$ vì có thể viết lại như sau:

$y(n) = 0.75^{n-24}\, y(24)$ với $n \geq 25$

$y(24) = [1 - (0.75)^{25}]/[1 - 0.75] = 4 - 3(0.75)^{24}$

Hoàn toàn trùng với giá trị tính từ p/t sai phân thứ nhất với $0 \leq n \leq 24$.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

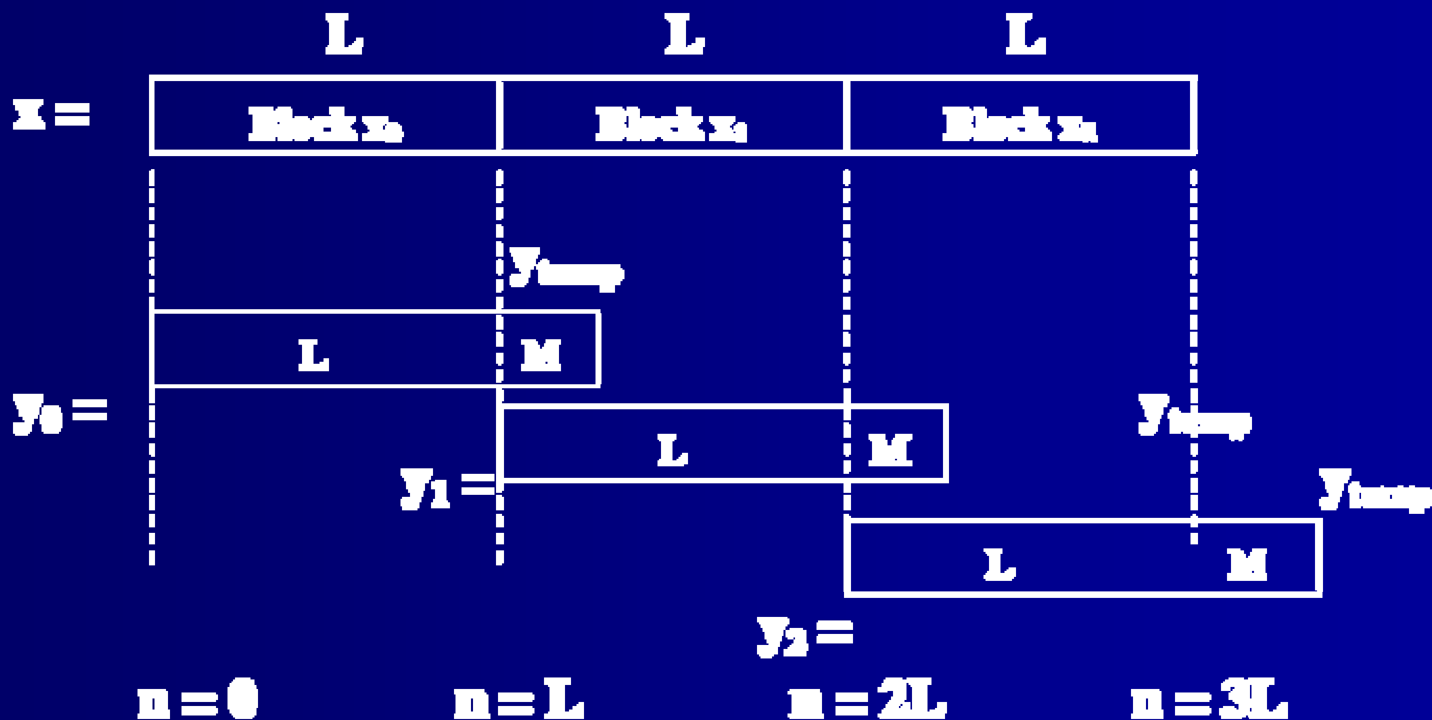
4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

Trong các ví dụ trên, ngõ vào chỉ là từng đoạn các mẫu riêng biệt. Điều này là bất khả thi trong các ứng dụng khi ngõ vào là tín hiệu rất dài hoặc ngẫu nhiên. Trong thực tế chuỗi ngõ vào được chia thành các khối liên tiếp không trùng lấp chiều dài L. Mạch lọc sẽ xử lí từng khối và tín hiệu ra sẽ được ghép hợp lí theo sơ đồ:

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method



Hình 4.1.6 Overlap-add convolution method

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

Từng đoạn tín hiệu vào qua mạch lọc bậc M cho ra các đoạn tín hiệu ra:

$y_0 = h * x_0$

$y_1 = h * x_1$

$y_2 = h * x_2$ ...

Theo hình vẽ ta thấy các ngõ ra bắt đầu thực sự từ các thời điểm là n = 0, L, 2L... trong khi chiều dài của chúng là L +M. Do đó có sự chồng lấp tín hiệu ra (với L > M).

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

Để có tín hiệu ra chính xác ta phải cộng các chồng lấp này. (Do đó có tên Overlap-add)

Ví dụ 4.1.10: Làm lại ví dụ 4.1.1 sử dụng phương pháp tích chập khối Overlap-add. Chia ngõ vào thành các khối có L = 3. Trong đó sử dụng bảng tích chập để tính cho từng khối.

Giải: Ban đầu : x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1],

h = [1, 2, -1, 1]

thêm vào : x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1,0]

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

(Lập bảng)

$y_0 = h*x_0 = [1, 3, 3, 4, -1, 2]$

$y_1 = h*x_1 = [1, 4, 5, 3, 0, 2]$

$y_2 = h*x_2 = [1, 3, 1, 0, 1, 0]$

Ngõ ra:

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

	h_0	h_1	h_2	h_3	0	0	0	0
x_0	x_0h_0	x_0h_1	x_0h_2	x_0h_3	0	0	0	0
x_1	0	x_1h_0	x_1h_1	x_1h_2	x_1h_3	0	0	0
x_2	0	0	x_2h_0	x_2h_1	x_2h_2	x_2h_3	0	0
x_3	0	0	0	x_3h_0	x_3h_1	x_3h_2	x_3h_3	0
x_4	0	0	0	0	x_4h_0	x_4h_1	x_4h_2	x_4h_3
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

Giải thuật:

for each length - L input block do:

1. compute length-$(L+M)$ output : $y = h*x$
2. for $i = 0 \ldots M-1$:

   $y(i) = y(i) + y_{temp}(i)$ (overlap)

   $y_{temp}(i) = y(i+L)$ (save tail)
3. for $i = 0 \ldots L-1$:

   output $y(i)$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.1. Phương pháp xử lý khối

4.1.9. Overlap-Add Block Convolution Method

Trong thực tế khi tìm tích chập của từng khối ta không thực hiện trong miền thời gian mà dùng thuật toán FFT. Với mạch lọc FIR bậc M và phép biến đổi FFT N phần tử thì tín hiệu vào sẽ chia thành các khối gồm L = N – M mẫu. So sánh phương pháp fast convolution này với phương pháp trong miền thời gian "slow" sẽ thấy ưu thế: $\frac{fast}{slow} = \frac{\log_2 N}{M}$

Ví dụ: Với M = 100 và N = 1024 = 2^{10} thì $\frac{fast}{slow} = \frac{\log_2 N}{M} = 0.1$

Giải thuật FFT nhanh hơn 10 lần

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

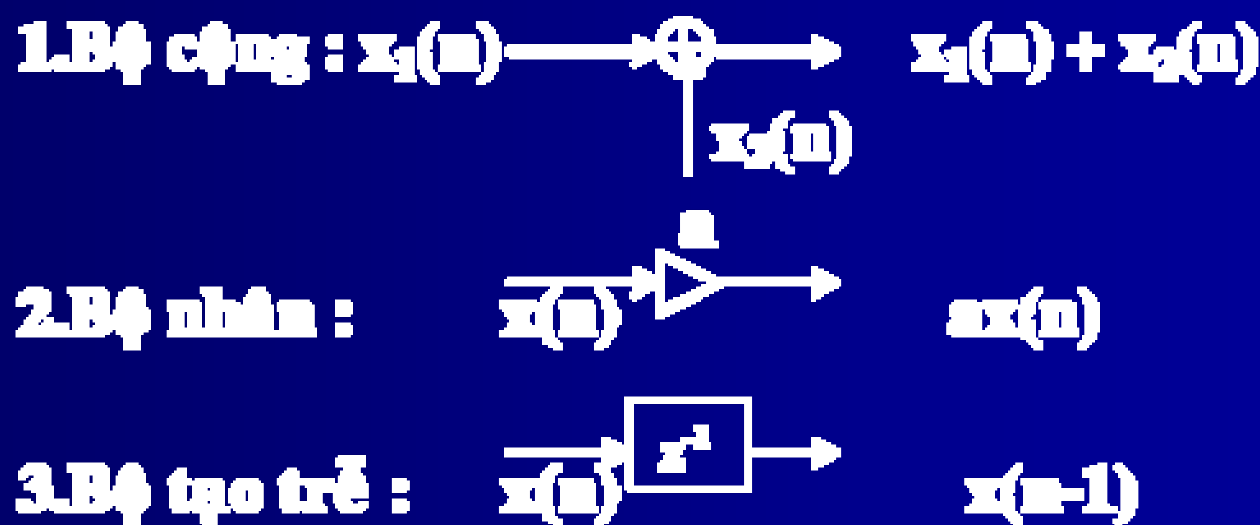
4.2. Phương pháp xử lý mẫu

Các phương pháp sử dụng tích chập xử lí tín hiệu vào theo từng khối block-by block. Bây giờ ta sẽ khảo sát các công thức khác của mạch lọc FIR hoạt động trên nguyên tắc xử lý từng mẫu sample-by-sample, rất tiện lợi trong các ứng dụng thời gian thực đòi hỏi qúa trình xử lý liên tục tín hiệu vào.

Giải thuật xử lí mẫu xây dựng theo 1 sơ đồ khối. Có 3 khối cơ bản:

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

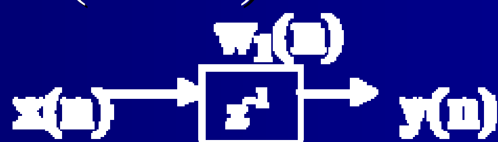


CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

Để làm quen với khái niệm giải thuật xử lí mẫu, ta hãy xét 1 hệ LTI đơn giản, bộ tạo trễ đơn với quan hệ I/O: $y(n) = x(n-1)$



Hoạt động của nó như 1 thanh ghi dịch 1 bit và ta định nghiã giá trị của thanh ghi tại thời điểm n là trạng thái nội cuả mạch lọc $w_1(n)$.

$$w_1(n) = x(n-1) \quad \text{(trạng thái nội tại thời điểm n)}$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

Như vậy qúa trình xử lí của bộ tạo trễ gồm 2 bước:

$$y(n) = w_1(n)$$

$$w_1(n+1) = x(n)$$

Giải thuật:

```
for each sample x do :
        y:=w1
        w1:=x
```

Thông thường thanh ghi trễ có giá trị bằng 0 trước khi có tín hiệu vào: $w_1(0) = 0$

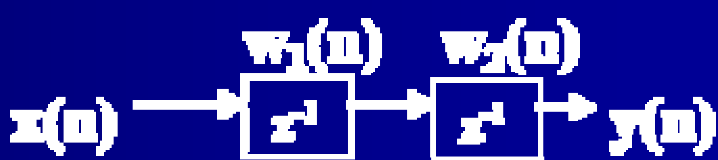
CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

n	$x(n)$	$w_1(n)$	$y(n)$
0	x_0	0	0
1	x_1	x_0	x_0
2	x_2	x_1	x_1
3	x_3	x_2	x_2
.	.	.	.
.	.	.	.

Xét bộ tạo trễ đôi:



CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

Phương trình I/O: $y(n) = x(n-2)$

Có 2 thanh ghi trễ: $w_1(n)$ và $w_2(n)$

$$w_2(n) = w_1(n-1)$$

$$w_1(n) = x(n-1)$$

Phương trình I/O của bộ tạo trễ đôi:

$$y(n) = w_2(n)$$

$$w_2(n+1) = w_1(n)$$

$$w_1(n+1) = x(n)$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

Giải thuật:

```
For each input sample x do :
    y:=w2
    w2:=w1
    w1:=x
```

Tổng quát, để tạo trễ D đơn vị thời gian cần D thanh ghi $w_i(n)$, i = 1,..., D. Để tiện ta quy ước $x(n)=w_0(n)$, và ta có p/t biểu diễn quan hệ I/O cho từng thanh ghi:

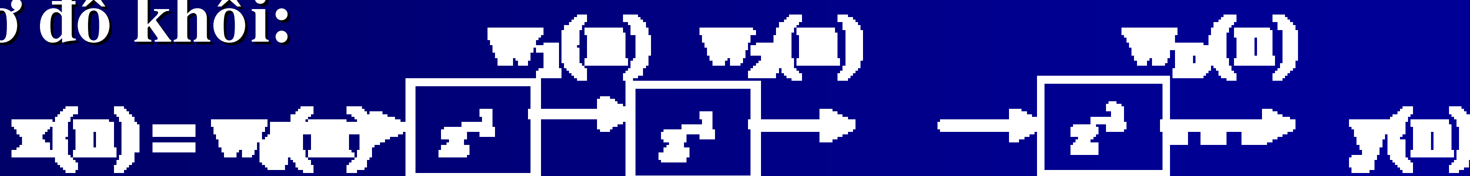
CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

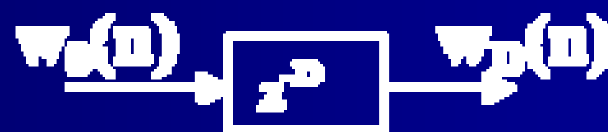
4.2.1. Pure Delays

$$\boxed{w_i(n) = w_{i-1}(n-1)\text{, với } i = 1, 2, \ldots, D}$$

Sơ đồ khối:



Giải thuật: ⇔



CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.1. Pure Delays

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form

Xét mạch lọc FIR bậc 3 có đáp ứng xung $h = [h_0, h_1, h_2, h_3]$. Theo tích chập dạng trực tiếp ta có pt I/O:

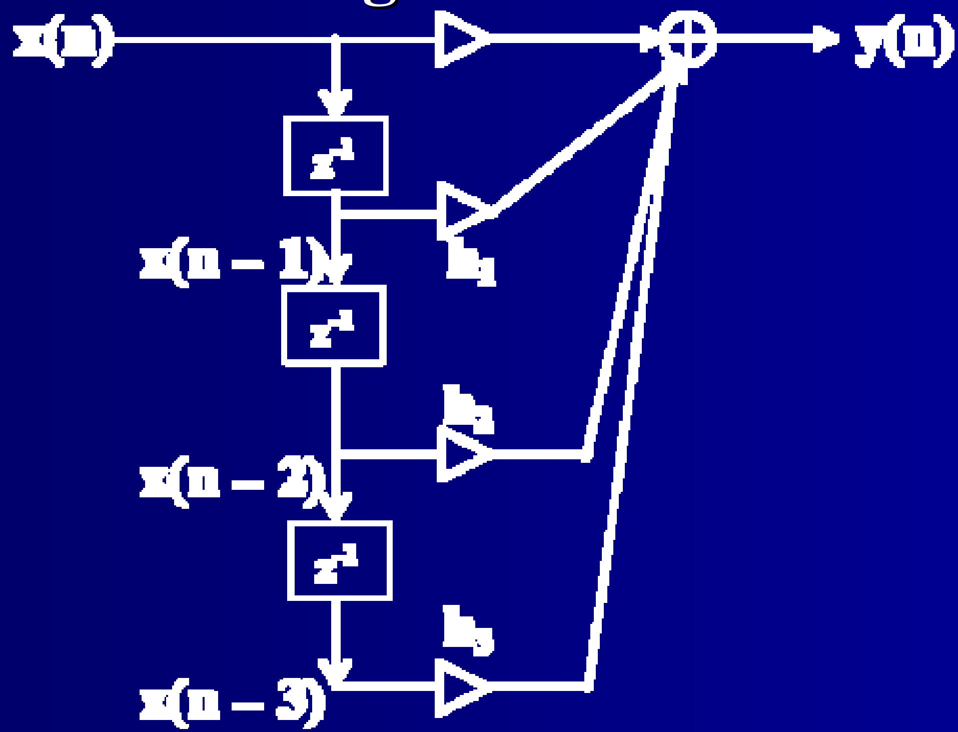
$$y(n) = h_0x(n) + h_1x(n-1) + h_2x(n-2) + h_3x(n-3)$$

Để lập sơ đồ khối cho p/t này ta cần sử dụng cả 3 khối cơ bản: bộ cộng, bộ tạo trễ và bộ nhân. Sơ đồ khối dạng trực tiếp:

CHUƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form



Hình 4.2.6 Direct form realization of third-order filter.

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form

Sử dụng trạng thái nội, tức giá trị của các thanh ghi, thay cho các tín hiệu trễ, ta có:

$$\boxed{\begin{aligned} w_0(n) &= x(n) \\ w_1(n) &= x(n-1) = w_0(n-1) \\ w_2(n) &= x(n-2) = w_1(n-1) \\ w_3(n) &= x(n-3) = w_2(n-1) \end{aligned}}$$

Ta viết lại pt sai phân:

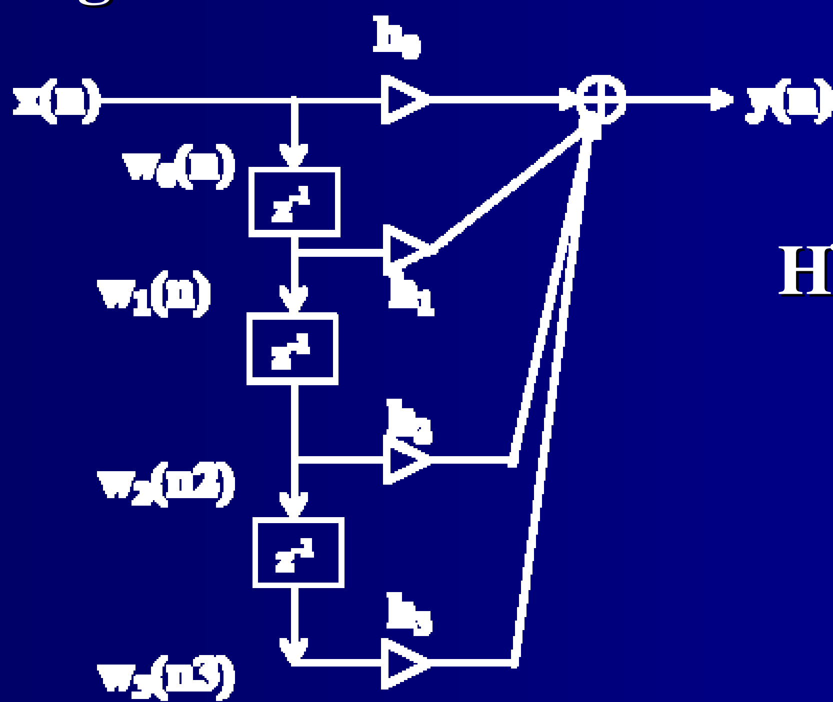
$$y(n) = h_0 w_0(n) + h_1 w_1(n) + h_2 w_2(n) + h_3 w_3(n)$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form

Lợi điểm của p/t này là các yếu tố đều được xét tại cùng 1 thời điểm n.



Hình 4.2.7 Direct form with internal states

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form

Giải thuật xử lý sample-by-sample:

For each input sample x do :

$$w_0 = x$$

$$y = h_0 w_0 + h_1 w_1 + h_2 w_2 + h_3 w_3$$

$$w_3 = w_2$$

$$w_2 = w_1$$

$$w_1 = w_0$$

CHƯƠNG 4: BỘ LỌC ĐÁP ỨNG XUNG HỮU HẠN VÀ TÍCH CHẬP FIR

4.2. Phương pháp xử lý mẫu

4.2.2. FIR Filtering in Direct Form

Như vậy, từng mẫu tín hiệu vào sẽ được xử lí theo giải thuật sample-by-sample để cho ra mẫu tín hiệu ra tương ứng. Lưu ý trước khi xử lí thì các thanh ghi, hay sơ kiện của bộ lọc, phải được reset về zero.