

BÀI GIẢNG XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Biên soạn: PGS.TS LÊ TIẾN THƯỜNG

Tp.HCM, 02-2005

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

- 6.1. Các dạng mô tả tương đương của bộ lọc số.**
- 6.2. Các hàm truyền.**
- 6.3. Đáp ứng hình sine.**
- 6.4. Thiết kế cực và zero.**
- 6.5. Mạch lọc ngược, giải chập và tính ổn định.**

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

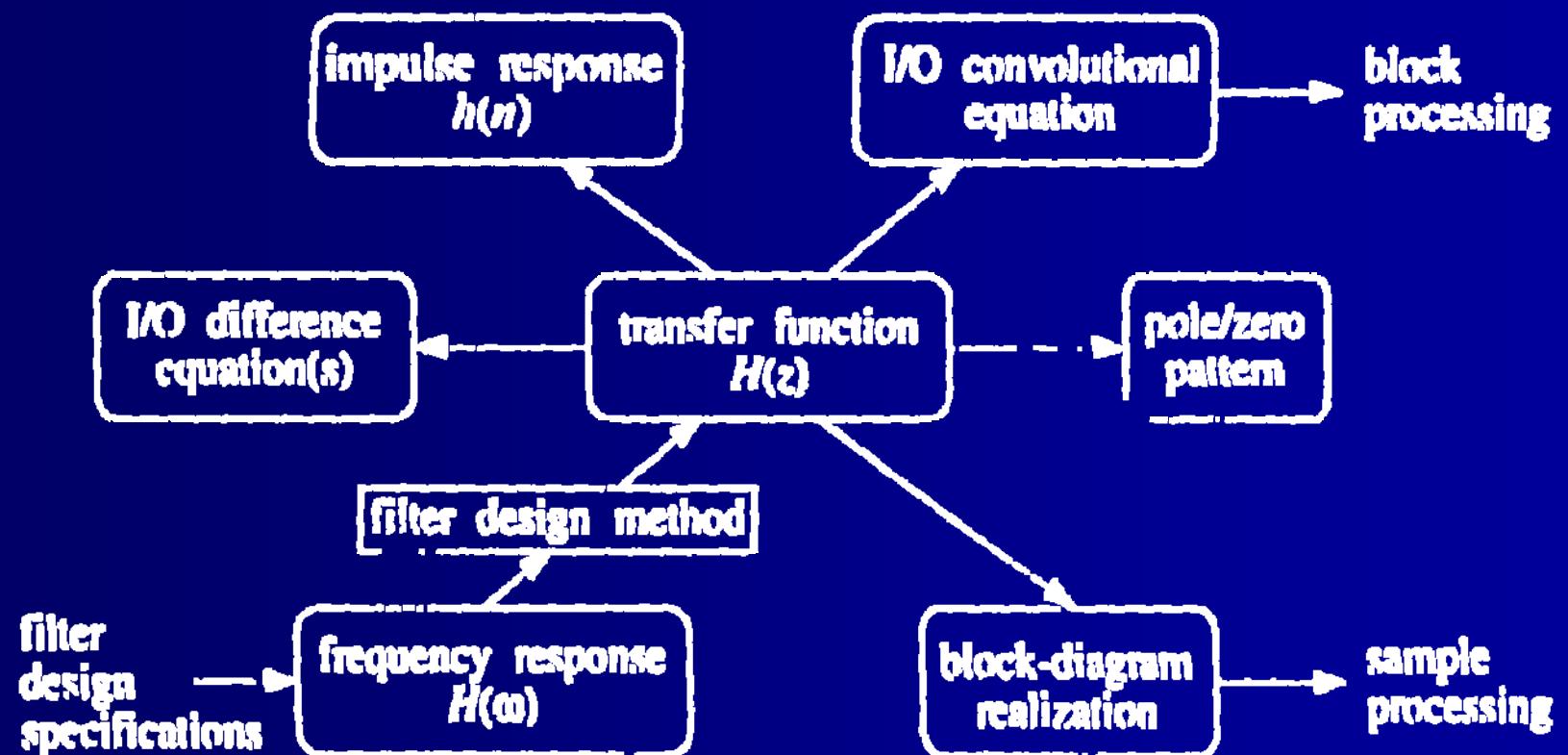
6.1. Các dạng mô tả tương đương của bộ lọc số

Trong chương này, biến đổi z được dùng để dẫn ra các biểu thức tương đương toán học nhằm mô tả đặc điểm các bộ lọc FIR và IIR, đó là:

- Hàm truyền $H(z)$; Đáp ứng tần số $H(\omega)$.
- Thực hiện sơ đồ khối. (*block diagram realization*) và thuật toán xử lý mẫu. (*sample processing algorithm*)
- Phương trình sai phân I/O. (*I/O difference equation*)
- Sơ đồ cực/zero. (*pole/zero pattern*)
- Đáp ứng xung $h(n)$; Phương trình chập I/O. (*I/O convolution equation*)

Trong đó hàm truyền đóng vai trò quan trọng nhất vì từ đó có thể suy ra các dạng khác.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN



Hình 6.1.1: Mô tả tương đương của các mạch lọc số

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Phần này chứng minh vai trò trung tâm của hàm truyền $H(z)$ với bộ lọc bằng cách dẫn ra cách biến đổi qua lại giữa các dạng mô tả. Từ một hàm truyền $H(z)$ cho trước có thể có: (a) Đáp ứng xung $h(n)$, (b) Phương trình sai phân mà đáp ứng xung thỏa mãn, (c) Phương trình sai phân I/O liên hệ giữa ngõ vào $y(n)$ và ngõ ra $x(n)$, (d) Biến đổi sơ đồ khôi của bộ lọc, (e) Thuật toán xử lý sample - by - sample, (f) Sơ đồ cực/zero, (g) Đáp ứng tần số $H(\omega)$. Ngược lại, cho bất kỳ từ (a) – (g) có thể tính $H(z)$ và bất kỳ các dạng còn lại từ (a) ÷ (g).

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Ví dụ xét hàm truyền sau: $H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$ (6.2.1)

Để có đáp ứng xung, dùng khai triển phân số từng phần

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = A_0 + \frac{A_1}{1 - 0.8z^{-1}} = -2.5 + \frac{7.5}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Giả sử bộ lọc là nhân quả, ta có:

$$\begin{aligned} h(n) &= -2.5\delta(n) + 7.5(0.8)^n u(n) \\ (1 - 0.8z^{-1})H(z) &= 5 + 2z^{-1} \Rightarrow H(z) = 0.8z^{-1}H(z) + 5 + 2z^{-1} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Biến đổi z ngược hai vế

$$h(n) = 0.8h(n-1) + 5\delta(n) + 2\delta(n-1) \quad (6.2.3)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Nhắc lại một lần nữa, tiến trình chuẩn là loại bỏ mâu số và trở lại miền thời gian. Ví dụ ta có:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} X(z) \Rightarrow (1 - 0.8z^{-1})Y(z) = (5 + 2z^{-1})X(z)$$

có thể viết là $Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z) = 5X(z) + 2z^{-1}X(z)$

Biến đổi z ngược cả hai vế

$$y(n) - 0.8y(n-1) = 5x(n) + 2x(n-1) \quad (6.2.4)$$

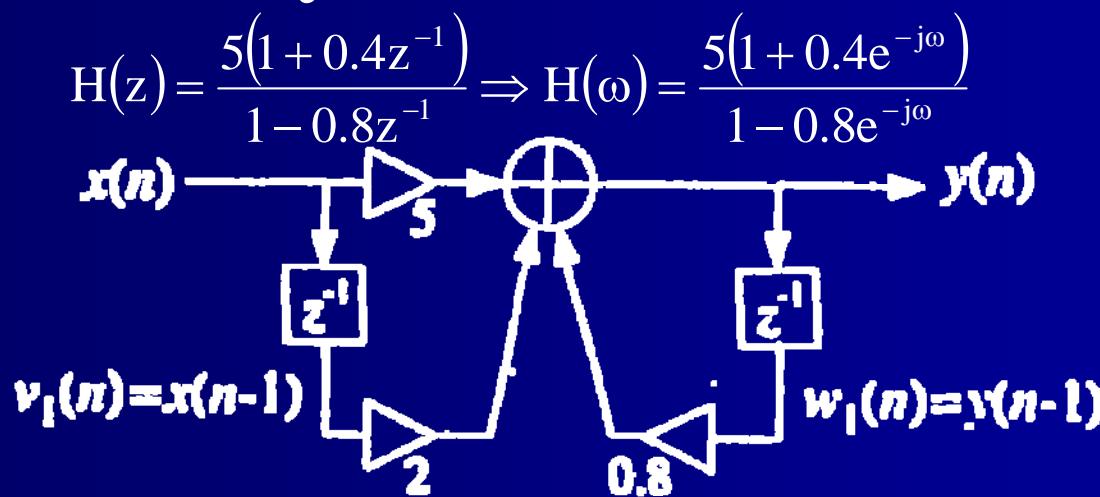
Phương trình sai phân I/O là:

$$y(n) = 0.8y(n-1) + 5x(n) + 2x(n-1)$$

Thay z bởi $e^{j\omega}$ vào $H(z)$ được đáp ứng tần số của bộ lọc tương ứng. Sự thay thế này là hợp lý vì bộ lọc ổn định và do ROC của nó, $|z| > 0.8$, nằm trong vòng tròn đơn vị.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền



Hình 6.2.1 Thực hiện dạng trực tiếp

Dùng tính chất sau: $|1 - ae^{j\omega}| = \sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}$

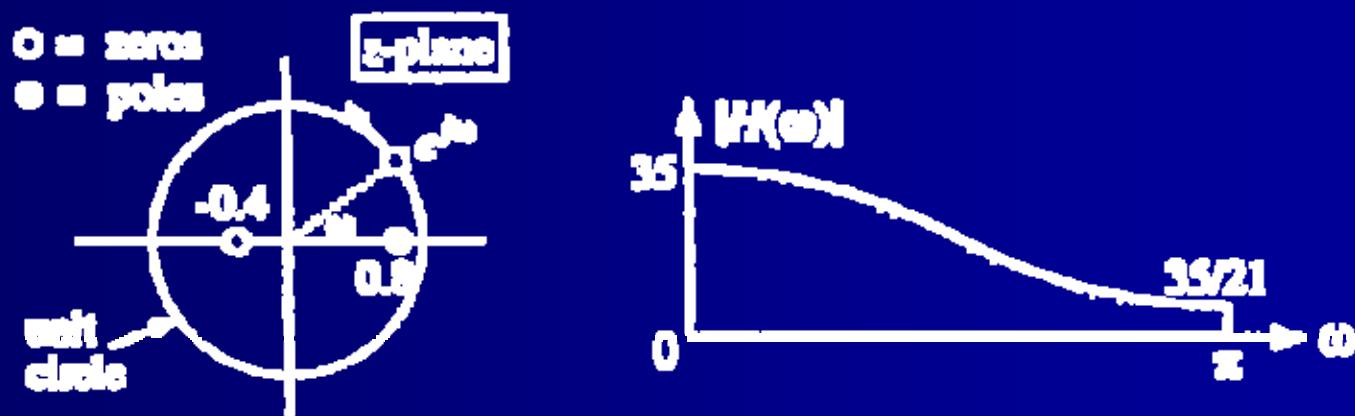
với bất kỳ giá trị a thực, đáp ứng biên độ

$$|H(\omega)| = \frac{5\sqrt{1 + 0.8\cos \omega + 0.16}}{\sqrt{1 - 1.6\cos \omega + 0.64}}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Vẽ đồ thị đại lượng này nhờ sự trợ giúp của sơ đồ hình học cực/zero (*pole/zero geometric pattern*). Bộ lọc có một zero tại $z = -0.4$ và một cực tại $z = 0.8$. Hình 6.2.2 chỉ ra vị trí cực và zero liên hệ với vòng tròn đơn vị.



Hình 6.2.2 Sơ đồ cực/zero và đáp ứng xung

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

$$H(\omega)|_{\omega=0} = H(z)|_{z=1} = \frac{5+2}{1-0.8} = 35$$

$$H(\omega)|_{\omega=\pi} = H(z)|_{z=-1} = \frac{5-2}{1+0.8} = \frac{5}{3} = \frac{35}{21}$$

Bộ lọc này hoạt động giống như một bộ lọc thông thấp. Tân số cao nhất bị suy hao 21 lần so với tân số thấp nhất.

$$\left| \frac{H(\pi)}{H(0)} \right| = \frac{1}{21} \text{ hoặc theo decibels } 20 \log_{10} \left| \frac{H(\pi)}{H(0)} \right| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{21} \right) = -26.4 \text{ dB}$$

Có nhiều cách để biến đổi sơ đồ khối một hàm truyền. Tuy khác nhau nhưng các dạng tương đương toán học của hàm truyền có thể dẫn tới các phương trình sai phân I/O khác nhau và do các sơ đồ khối khác nhau và thuật toán xử lý mẫu tương ứng tạo ra. Trong ví dụ này, dạng khai triển phân số từng phần ở phương trình (6.2.1)

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

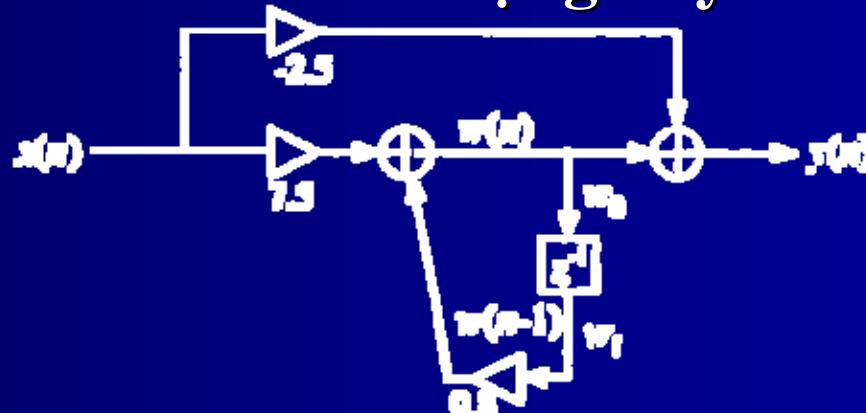
6.2. Các hàm truyền

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = -2.5 + \frac{7.5}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Có thể xem như phương pháp song song, nghĩa là cộng hai hàm truyền.

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \text{ với } H_1(z) = -2.5 \text{ và } H_2(z) = 7.5 / (1 - 0.8z^{-1})$$

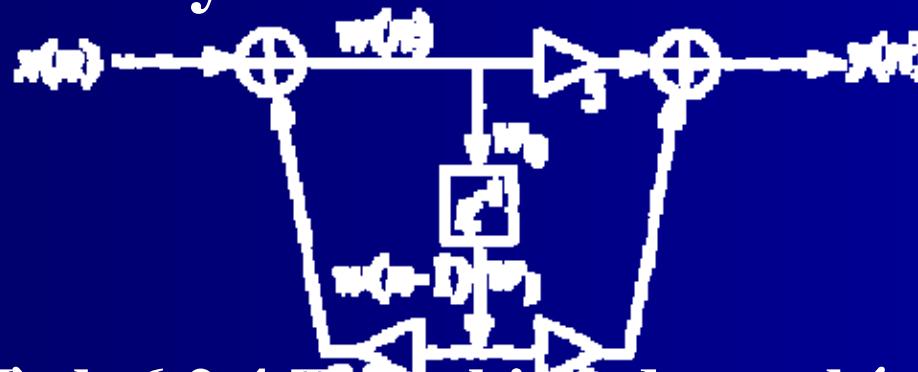
Hình 6.2.3 là sơ đồ khối của dạng này.



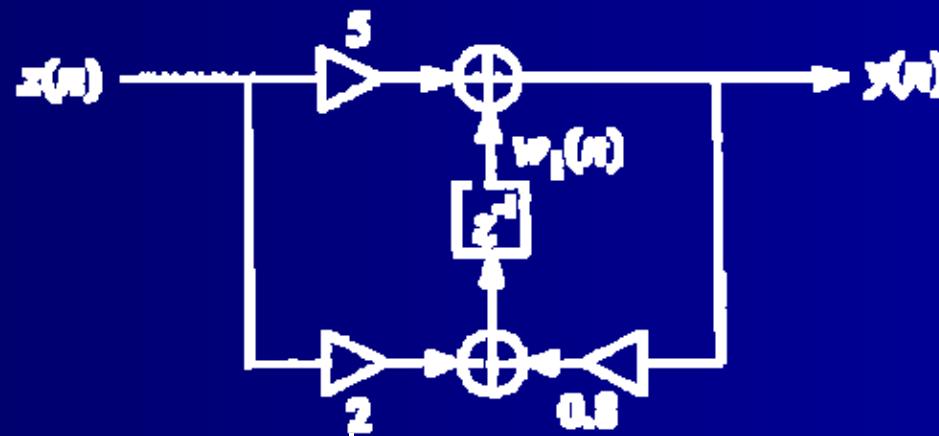
Hình 6.2.3: Thực hiện dạng song song

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền



Hình 6.2.4 Thực hiện dạng chính tắc



Hình 6.2.5 Dạng chuyển vị (chương 7)

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Một cách tổng quát, hàm truyền của bộ lọc IIR được cho ở dạng tỉ số các đa thức bậc L và M:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (\text{IIR}) \quad (6.2.11)$$

Chú ý rằng để dễ dàng, hệ số bậc không của đa thức mẫu được đặt bằng một $a_0 = 1$. Bộ lọc $H(z)$ sẽ có L zero và M cực. Giả sử các hệ số tử số và mẫu số đều là thực, nếu có bất kỳ zero và cực nào là số phức thì phải có một cặp liên hợp.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Để có đáp ứng xung ổn định, ROC phải chứa vòng tròn đơn vị. Nhắc lại, để có $h(n)$ ổn định và cũng là nhân quả, tất cả các cực của $H(z)$, tức là các zero của $D(z)$ phải nằm nghiêm ngặt trong đường tròn đơn vị.

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} X(z)$$

Nhân hai vế với mẫu số
 $(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L})X(z)$
và cuối cùng

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_M y_{n-M} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_L x_{n-L} \quad (6.2.12)$$

Có thể viết là

$$y_n = -a_1 y_{n-1} - \dots - a_M y_{n-M} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_L x_{n-L}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Lưu ý rằng nếu các hệ số mẫu số là zero, nghĩa là, $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$, đa thức mẫu không quan trọng $D(z) = 1$ và $H(z) = N(z)$, tức là bộ lọc FIR.

$$H(z) = N(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L} \quad (\text{FIR}) \quad (6.2.13)$$

Trong trường hợp này, phương trình sai phân (6.2.12) trở thành phương trình chập I/O bình thường của bộ lọc FIR:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_l x_{n-L} \quad (\text{Phương trình I/O FIR}) \quad (6.2.14)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Ví dụ 6.2.1: Xác định hàm truyền bộ lọc FIR bậc ba với đáp ứng xung: $h = [1, 6, 11, 6]$

Giải: Phương trình I/O của bộ lọc là:

$$y(n) = x(n) + 6x(n - 1) + 11x(n - 2) + 6x(n - 3)$$

Biến đổi z của chuỗi đáp ứng xung hữu hạn là

$$H(z) = 1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-3}$$

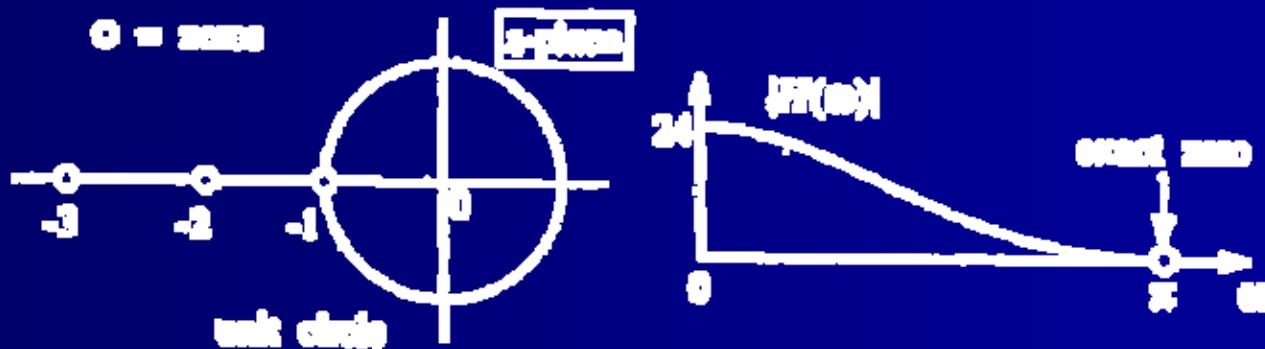
Chú ý rằng $H(z)$ có một zero tại $z = -1$, phân tích thừa số được: $H(z) = (1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})$

Thay $z = e^{-j\omega}$ vào ta được đáp ứng tần số tương ứng.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

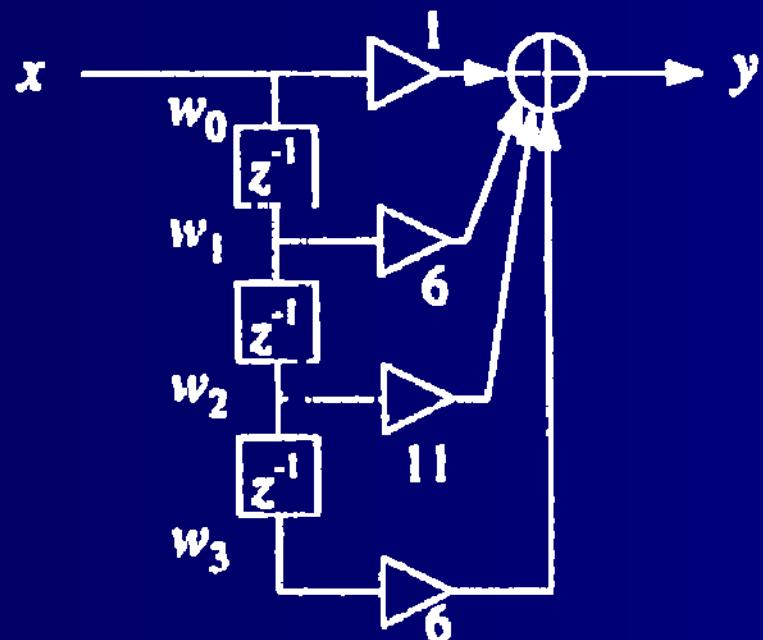
$$H(\omega) = (1 + e^{-j\omega})(1 + 2e^{-j\omega})(1 + 3e^{-j\omega})$$



Bộ lọc là bộ lọc thông thấp. Tại $z = -1$ hay $\omega = \pi$ đáp ứng bằng không. Tại $z = 1$ hay $\omega = 0$, $H(\omega) = 24$. Sơ đồ khối và thuật toán xử lý mẫu là:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền



nhà trì số với z, thay kinh:

$$y = 0.25m_1 + x$$
$$m_2 = m_1$$
$$m_3 = y$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Ví dụ 6.2.3: Xác định hàm truyền và đáp ứng xung nhân quả của hai bộ lọc có phương trình sai phân sau:

(a) $y(n) = 0.25y(n-2) + x(n)$

(b) $y(n) = -0.25y(n-2) + x(n)$

Giải: Với trường hợp (a), biến đổi z hai vế p/t sai phân

$$Y(z) = 0.25Y(z)z^{-2} + X(z)$$

Tìm $Y(z)/X(z)$ để có hàm truyền $H(z) = \frac{1}{1-0.25z^{-2}} = \frac{A_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1+0.5z^{-1}}$

với $A_1 = A_2 = 0.5$. Đáp ứng xung nhân quả là

$$h(n) = A_1(0.5)^n u(n) + A_2(-0.5)^n u(n)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

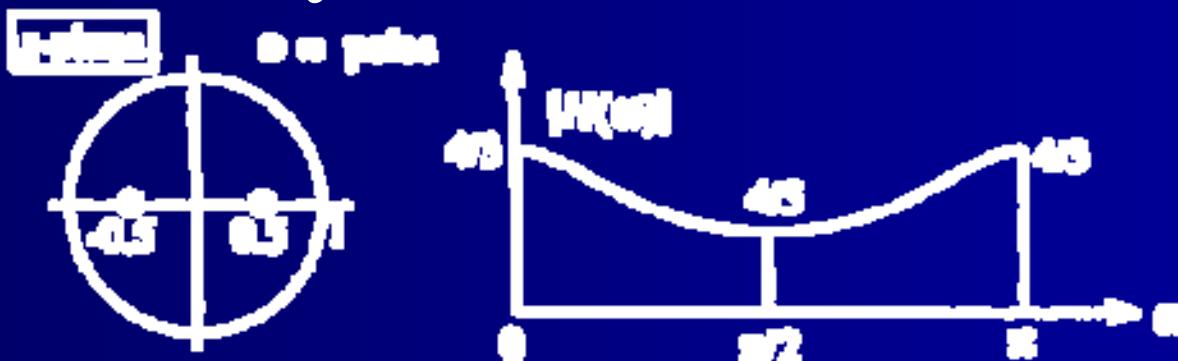
Cực tại $z = 0.5$ nằm trong phần tần số thấp của đường tròn đơn vị và cực tại $z = -0.5$ nằm trong phần tần số cao. Đây là bộ lọc thông hai dải hay còn gọi là lọc chấn dải, làm suy yếu các tần số ở giữa tần số thấp và cao. Giá trị $H(z)$ tại $\omega = 0, \pi$ hay $z = \pm 1$ là $H(0) = H(\pi) = H(z)|_{z=\pm 1} = \frac{1}{1 - 0.25} = \frac{4}{3}$ lớn hơn giá trị $H(z)$ tại tần số ở giữa, $\omega = \pi/2$. hay $z = j$, đó là

$$H(\pi/2) = H(z)|_{z=j} = \frac{1}{1 - 0.25(-1)} = \frac{4}{5}$$

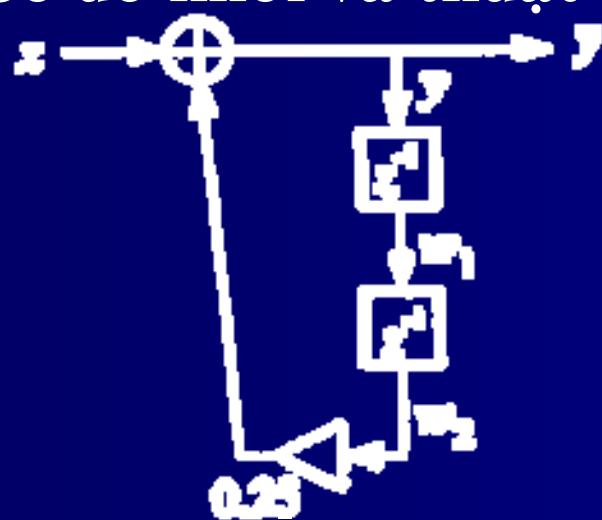
Sơ đồ cực/zero và phổ biên độ được biểu diễn ở hình dưới. Các đỉnh tại tần số cao và thấp không quá cao vì các cực không gần đường tròn đơn vị.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền



Sơ đồ khối và thuật toán xử lý mẫu là:



với mỗi ngõ vào x , thực hiện :

$$y = 0.25w_2 + x$$

$$w_2 = w_1$$

$$w_1 = y$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền

Với trường hợp (b), phương trình sai phân trong miền z là $Y(z) = -0.25Y(z)z^{-2} + X(z)$

Tìm $Y(z)/X(z)$ để có hàm truyền $H(z) = \frac{1}{1+0.25z^{-2}} = \frac{A_1}{1-0.5jz^{-1}} + \frac{A_1^*}{1+0.5jz^{-1}}$

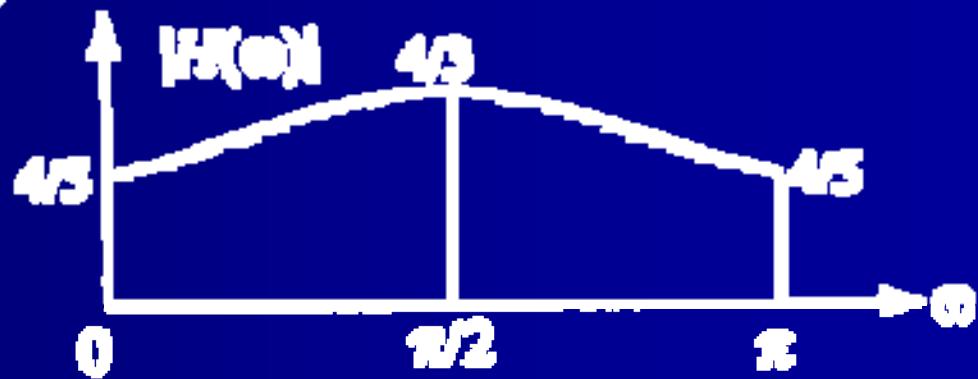
Có thể viết lại

$$h(n) = 2 \operatorname{Re}[A_{e^{jn\omega}} (0.5)^n j^n] u(n) = 2 \operatorname{Re}[0.5 (0.5)^n e^{j2\pi/2}] u(n) = (0.5)^n \cos(\pi n/2) u(n)$$

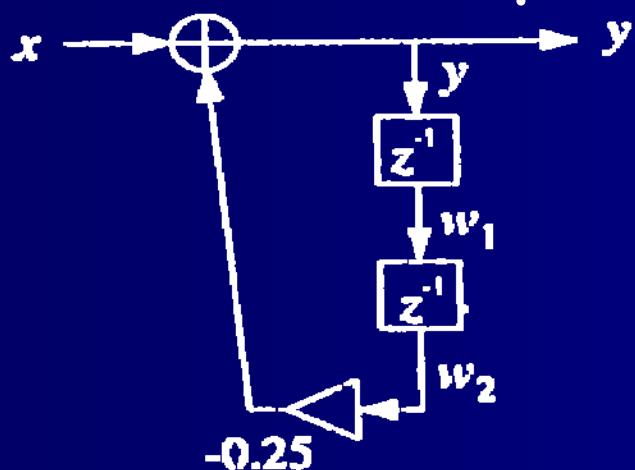
Hai cực liên hiệp nằm trong khoảng “trung tâm”, $z = \pm 0.5j = e^{\pm j\pi/2}$. Do vậy bộ lọc sẽ có đáp ứng tốt đối với các tần số ở khoảng giữa, tức là lọc thông dải. Giá trị đáp ứng biên độ tại $\omega = \pi/2$ hay $z = j$ là $1/(1 + 0.25(-1)) = 4/3$; giá trị tại $\omega = 0, \pi$ hay $z = \pm 1$ là $1/(1 + 0.25) = 4/5$.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.2. Các hàm truyền



Sơ đồ khối và thuật toán xử lý mẫu tương ứng là:



với mảng vào x , thực hiện:

$$y = -0.25w_2 + x$$

$$w_2 = w_1$$

$$w_1 = y$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

Đáp ứng của bộ lọc đối với tín hiệu hình sin được gọi là đáp ứng hình sin. Hiểu biết về những ảnh hưởng của bộ lọc lên tín hiệu sin rất quan trọng vì đó là những yếu tố cơ bản để xây dựng các khối cho các tín hiệu phức tạp hơn.

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}, -\infty < n < \infty$$

Xét tín hiệu sin phức, hai biên, dài vô hạn, tần số ω_0 đưa vào bộ lọc:

Ngõ ra có thể xác định bằng hai cách: (1) dùng phép chập trong miền thời gian, hoặc (2) dùng phép nhân trong miền tần số. Dùng phương pháp thứ nhất:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m) = \sum_m h(m)e^{j(n-m)\omega_0} = e^{j\omega_0 n} \sum_m h(m)e^{-j\omega_0 m} \text{ hoặc}$$
$$y(n) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} \quad (6.3.1)$$

với $H(\omega_0)$ là đáp ứng tần số của bộ lọc tại ω_0 .

$$H(\omega_0) = \sum_m h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

Dùng phương pháp miền tần số, trước hết tính phổ tín hiệu vào: $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + (\text{các phiên bản})$

Dùng công thức nhân miền tần số (5.4.10) tính phổ ngo ra (phiên bản thứ nhất):

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H(\omega)2\pi X(\omega - \omega_0) = H(\omega_0)2\pi X(\omega - \omega_0)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

với ω được thay bởi ω_0 trong argument $H(\omega)$ của do hàm delta $\delta(\omega - \omega_0)$. Áp dụng phép DTFT ngược, ta được:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega$$

Do có $\delta(\omega - \omega_0)$, tích phân chỉ cần tính tại ω_0 và cho kết quả như ở phương trình (6.3.1). Như vậy tín hiệu sin sau khi qua bộ lọc chỉ thay đổi một hệ số $H(\omega_0)$.

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{H(\omega_0)} H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} \quad (6.3.2)$$

Do $H(\omega)$ là đại lượng phức, có thể viết lại ở dạng biên độ và pha:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega_0)}$$

Phương trình (6.3.2) có thể viết dưới dạng

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{H} H(\omega_0)e^{j\omega_0 n + j\arg H(\omega_0)} \quad (6.3.3)$$

chỉ ra rằng bộ lọc có thể làm thay đổi biên độ một lượng $|H(\omega_0)|$, cũng như dịch pha một lượng $\arg H(\omega_0)$. Tách phần ảo và phần thực của cả hai vế sẽ được các thành phần sin và cos:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 n) &\xrightarrow{H} |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 n + \arg H(\omega_0)) \\ \sin(\omega_0 n) &\xrightarrow{H} |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 n + \arg H(\omega_0)) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

Hình 6.3.1 minh họa kết quả này. Lưu ý rằng độ dịch pha tương ứng với sự dịch tín hiệu sin một khoảng $\arg H(\omega_0)$ so với tín hiệu vào. Với $\arg H(\omega_0)$ âm sẽ tạo nên một khoảng trễ, nghĩa là tín hiệu dịch sang phải.

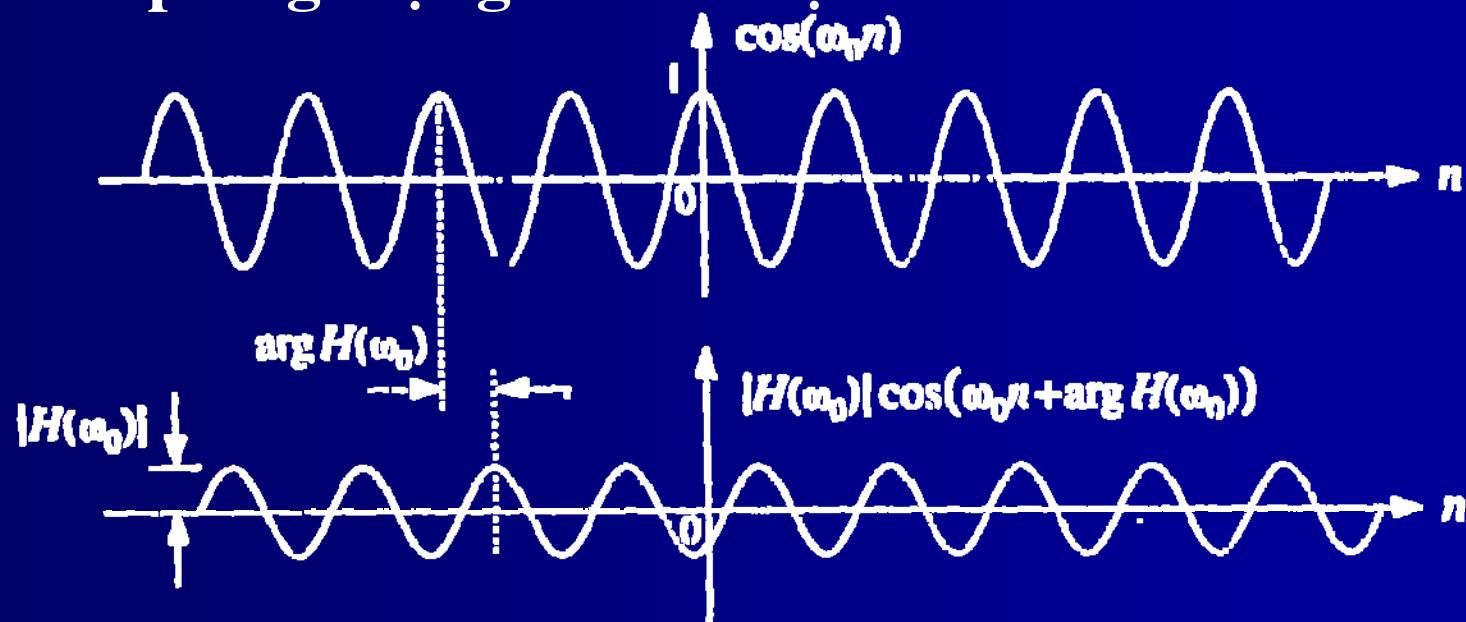
Dùng đặc tính tuyến tính của bộ lọc, áp dụng phương trình (6.3.2) cho tín hiệu vào gồm hai tín hiệu sin tần số ω_1 và ω_2 kết hợp tuyến tính, kết quả là kết hợp tuyến tính các ngõ ra tương ứng.

$$A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n} \xrightarrow{H} A_1 H(\omega_1) e^{j\omega_1 n} + A_2 H(\omega_2) e^{j\omega_2 n}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định



Hình 6.3.1 Thay đổi biên độ và dịch pha
do quá trình lọc

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

Kết quả này cho thấy tác động của bộ lọc là thay đổi các biên độ và pha tương ứng của hai sóng sin từ giá trị $\{A_1, A_2\}$ sang giá trị $\{A_1H(\omega_1), A_2H(\omega_2)\}$. Trong miền tần số, phổ ngõ vào và ngõ ra là:

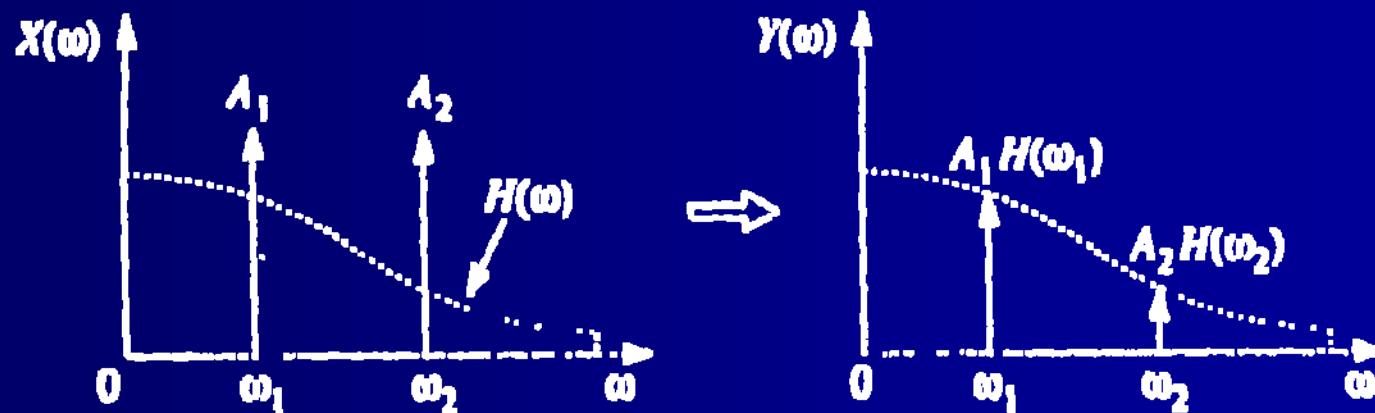
$$A\delta(\omega-\omega_1)+A_2\delta(\omega-\omega_2) \xrightarrow{H} [A_1H(\omega_1)\delta(\omega-\omega_1)+A_2H(\omega_2)\delta(\omega-\omega_2)]$$

Hình 6.3.2 đưa ra phổ ngõ vào, ngõ ra và minh họa tác động cân bằng của bộ lọc nhờ nhân với hệ số đáp ứng tần số tương ứng.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định



Hình 6.3.2: Biên độ trước và sau khi lọc

Nếu một trong các dạng sin, tần số ω_1 , là tín hiệu mong muốn và các tín hiệu khác là nhiễu không mong muốn, cần phải thiết kế bộ lọc để loại bỏ nhiễu. Ví dụ, chọn $H(\omega_1) = 1, H(\omega_2) = 0$.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

tín hiệu mong muốn sẽ không bị tác động và nhiễu bị loại bỏ. Tín hiệu ra trong trường hợp này là:

$$y(n) = A_1 H(\omega_1) e^{j\omega_1 n} + A_2 H(\omega_2) e^{j\omega_2 n} = A_1 H(\omega_1) e^{j\omega_1 n}$$

Một ngõ vào tổng quát có phổ $X(\omega)$ phức tạp hơn sẽ được phân tích thành các thành phần sin nhờ biến đổi DTFT ngược: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$

Bộ lọc định dạng lại phổ vào thành phổ ngõ ra $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. Có thể điều khiển sự thay đổi biên độ và pha tương ứng của các thành phần tần số khác nhau của tín hiệu vào. Tín hiệu ra

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (6.3.5)$$

Khái niệm lọc còn có lợi về độ trễ pha, được định nghĩa theo đáp ứng pha $\arg H(\omega)$ như sau:

$$d(\omega) = -\frac{\arg H(\omega)}{\omega} \Rightarrow \arg H(\omega) = -\omega d(\omega) \quad (6.3.6)$$

Tương tự *group delay* của bộ lọc là:

$$d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(\omega) \quad (6.3.7)$$

Đáp ứng sin của phương trình (6.3.2) hay (6.3.3) có thể biểu diễn theo trễ pha như sau:

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{H} |H(\omega)| e^{j\omega(n-d(\omega))} \quad (6.3.8)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

Phương trình trên cho thấy, các thành phần tần số khác nhau có lượng trễ khác nhau, phụ thuộc vào trễ pha của bộ lọc.

Các bộ lọc pha tuyến tính có tính chất là trễ pha $d(\omega)$ không phụ thuộc tần số, tức là $d(\omega) = D$, do đó đáp ứng pha tuyến tính theo ω , $\text{arg}H(\omega) = -\omega D$. Các bộ lọc như vậy tạo ra một lượng trễ D như nhau cho mỗi thành phần tần số, do đó ngõ ra có lượng trễ chung.

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{H} |H(\omega)| e^{j\omega(n-D)} \quad (6.3.9)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.1 Đáp ứng trạng thái ổn định

Lượng trẽ này cũng có thể thấy trong các công thức DTFT ngược:

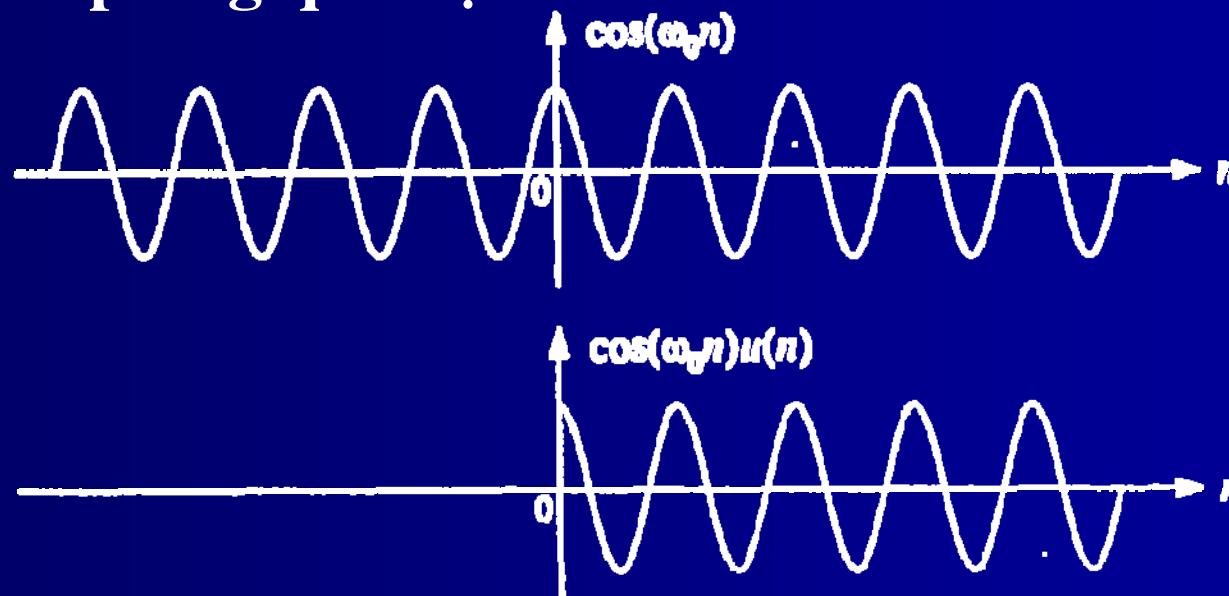
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} \frac{d\omega}{2\pi} \xrightarrow{H} y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega(n-D)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Cách thiết kế các bộ lọc pha tuyến tính FIR sẽ được đề cập ở chương 10. Các bộ lọc IIR có pha tuyến tính trên toàn biểu đồ Nyquist không thể thiết kế. Tuy nhiên, có thể thiết kế để có pha gần tuyến tính trên dải thông của chúng (ví dụ các bộ lọc Bessel).

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ



Hình 6.3.3 Dạng sóng hai bên và một bên

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Nếu bắt đầu tạo và lọc sóng vào tại $n = 0$, bộ lọc không nhận biết ngay lập tức đó là dạng sin. Cần một khoảng thời gian để bộ lọc ổn định được đáp ứng với tín hiệu sin như phương trình (6.3.2). Dùng biến đổi z phân tích đáp ứng của bộ lọc. Xét ngõ vào sin, nhân quả và biến đổi z

của nó: $x(n) = e^{j\omega_0 n} u(n) \xrightarrow{H} X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$

Có ROC $|z| > |e^{j\omega_0}| = 1$. Giả sử bộ lọc có dạng:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})}$$

Giả sử bậc đa thức tử $N(z)$ nhỏ hơn bậc $M+1$ của mẫu số để có thể khai triển:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

$$Y(z) = \frac{C}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})} + \frac{B_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{B_2}{(1 - p_2 z^{-1})} + \dots + \frac{B_N}{(1 - p_N z^{-1})}$$

Tính các hệ số khai triển PF theo phương trình (5.5.2).

$$C = (1 - e^{j\omega_0} z^{-1}) Y(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} = \left[(1 - e^{j\omega_0} z^{-1}) \frac{H(z)}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \right]_{z=e^{j\omega_0}}$$

Loại bỏ các hệ số $(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})$, C chính là đáp ứng tần số $H(\omega)$ tại $\omega = \omega_0$, đó là: $C = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} = H(\omega_0)$ (6.3.10)

Do đó khai triển PF sẽ là:

$$Y(z) = \frac{H(\omega_0)}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{B_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{B_M}{1 - p_M z^{-1}}$$

Áp dụng biến đổi z ngược (ROC $|z| > 1$), $n > 0$, ta có

$$y(n) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} + B_1 p_1^n + B_2 p_2^n + \dots + B_M p_M^n \quad (6.3.11)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Do đã giả sử bộ lọc có các cực nằm trong đường tròn đơn vị, $|p_i| < 1$, với n lớn, thành phần p_i^n sẽ tiến đến 0 theo hàm mũ và ngõ ra ở trạng thái ổn định:

$$y(n) \rightarrow H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Với n nhỏ, p/t (6.3.11) sẽ cho đáp ứng quá độ của bộ lọc.

Ví dụ 6.3.1: Xác định đáp ứng quá độ đầy đủ của bộ lọc

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Với tín hiệu vào dạng sin, phức, tần số ω_0 .

Giải:

Khai triển phân số biến đổi z ngõ ra $Y(z) = H(z)X(z)$:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

$$Y(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} = \frac{H(\omega_0)}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{B_1}{(1 - 0.8z^{-1})}$$

Với B_1 là $B_1 = (1 - 0.8z^{-1})Y(z)|_{z=0.8} = \left[\frac{5 + 2z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})} \right]_{z=0.8} = \frac{7.5}{1 - 1.25e^{j\omega_0}}$

Biến đổi z ngược - nhân quả sẽ là

$$y(n) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} + B_1 (0.8)^n, \quad n \geq 0$$

Với n lớn thành phần $(0.8)^n$ tiến đến 0 và ngoi ra đạt trạng thái sin ổn định.

$$y(n) \rightarrow H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} \quad \text{Với} \quad H(\omega_0) = \frac{5 + 2e^{-j\omega_0}}{(1 - 0.8e^{-j\omega_0})}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Từ phương trình (6.3.11) có thể rút ra bốn kết luận. Thứ nhất, bộ lọc cần phải có tính ổn định. Nếu bất kỳ cực p_i nào của bộ lọc nằm ngoài đường tròn đơn vị, giả sử $|p_1| > 1$, hệ số p_i^n sẽ không ổn định khi $n \rightarrow \infty$. Hệ số này gây ảnh hưởng đến các phần còn lại của phương trình (6.3.11) và làm đáp ứng không ổn định. (Đi nhiên, ta đã biết trong trường hợp này, định nghĩa các chuỗi của đáp ứng tần số bộ lọc $H(\omega)$, phương trình (5.4.3), không hội tụ vì đường tròn đơn vị không nằm trong vùng nhân quả của miền hội tụ $|z| > |p_1| > 1$.)

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Thứ hai, giả sử rằng bộ lọc ổn định nghiêm ngặt, tất cả các hệ số quá độ p_i^n tiến đến 0. Nhưng các hệ số tiến nhanh khác nhau. Hằng số thời gian hiệu quả để đạt đến trạng thái sin ổn định được minh họa bởi thành phần cực hội tụ chậm nhất, nghĩa là cực có biên độ lớn nhất, $\max |p_i|$. Nói một cách tương đương, đó là cực nằm gần đường tròn đơn vị nhất (từ phía trong). Ký hiệu biên độ cực lớn nhất là $\rho = \max_i |p_i|$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Định nghĩa hằng số thời gian hiệu quả n_{eff} là thời gian tại đó ρ^n nhỏ hơn một giá trị nào đó, ví dụ nhỏ hơn 1% giá trị khởi đầu. Về định lượng: $\rho^{n_{eff}} = \epsilon$ với ϵ mức độ nhỏ mong muốn, ví dụ $\epsilon = 1\% = 0.01$. Công thức tính n_{eff} là

$$n_{eff} = \frac{\ln \epsilon}{\ln \rho} = \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(1/\rho)} \quad (\text{hằng số thời gian}) \quad (6.3.12)$$

Vì ρ và ϵ đều nhỏ hơn một, log hai hệ số này âm, nhưng tỉ số là dương. Trong biểu thức cuối, ta có tỉ số hai số dương. n_{eff} càng lớn nếu cực chậm nhất càng tiến dần đến đường tròn đơn vị, nghĩa là ρ tiến đến một hoặc chọn ϵ nhỏ hơn.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

Ví dụ 6.3.2: Sóng sin có tần số $\omega_0 = 0.1\pi$ và 300 mẫu, nghĩa là $x(n) = \sin(\omega_0 n)$ với $0 \leq n \leq 300$, là ngõ vào mạch lọc nhân quả với hàm truyền:

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}, \text{ trong đó } a = 0.97.$$

Xác định hằng số thời gian 1% của bộ lọc. Chỉnh hệ số tỷ lệ b để độ lợi bộ lọc tại ω_0 bằng 1. Xác định và vẽ ngõ ra bộ lọc $y(n)$ trong khoảng $0 \leq n \leq 450$, bằng cách lấy tích phân phương trình sai phân của bộ lọc.

Giải: Tính hằng số thời gian 1% của bộ lọc từ phương trình (6.3.12)

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ

$$n_{eff} = \frac{\ln \epsilon}{\ln \rho} = \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.97)} = 151.2 \text{ mầu}$$

Đáp ứng biên độ và tần số là: $H(\omega) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}}$ $\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{b}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$

Để $|H(\omega)| = 1$, b phải thỏa mãn

$$|H(\omega_0)| = \frac{b}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega_0 + a^2}} = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1 - 2a\cos\omega_0 + a^2} = 0.390$$

Giá trị đáp ứng tần số tại ω_0 là:

$$H(\omega) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega_0}} = 0.2502 - 0.9682j = 1.e^{j1.3179}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

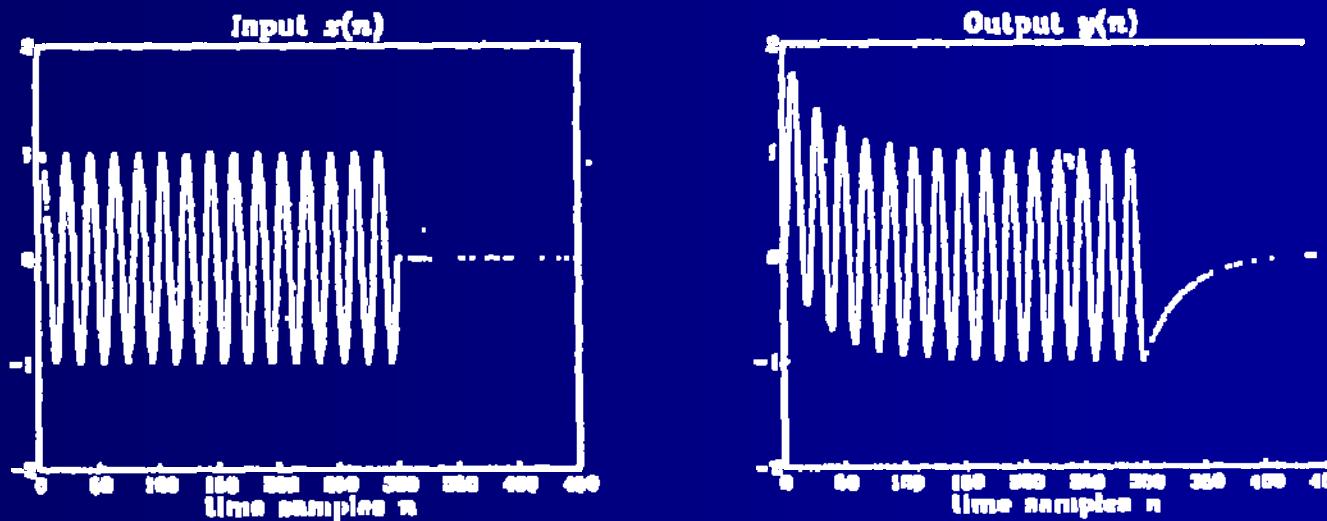
6.3.2 Đáp ứng quá độ

lưu ý rằng quá trình quá độ khi có ngõ vào và khi ngắt ngõ vào, mỗi lần gần $n_{eff} = 151$ các mẫu thời gian (*time sample*). Khoảng thời gian $150 < n < 300$ tương ứng với giai đoạn ổn định, trong khoảng thời gian này ngõ ra ổn định ở dạng sin theo như phương trình (6.3.4). Biên độ ngõ ra ở trạng thái ổn định bằng một do $H(\omega_0) = 1$. Có sự trễ pha nhỏ so với đầu vào, $\arg H(\omega_0) = -1.3179$ rad.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.3. Đáp ứng hình sine

6.3.2 Đáp ứng quá độ



Hình 6.3.4: Ngõ vào và ngõ ra của ví dụ 6.3.2.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.1. Các bộ lọc bậc nhất

Tạo cực/zero có thể dùng thiết kế các bộ lọc đơn giản, như smoother bậc nhất, bộ lọc, mạch cộng hưởng. Để minh họa cho kỹ thuật này, thiết kế hàm truyền

$$H(z) = \frac{5+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} = \frac{5(1+0.4z^{-1})}{1-0.8z^{-1}}$$

đã sử dụng trong phần 6.2. bắt đầu với hàm truyền tổng quát:

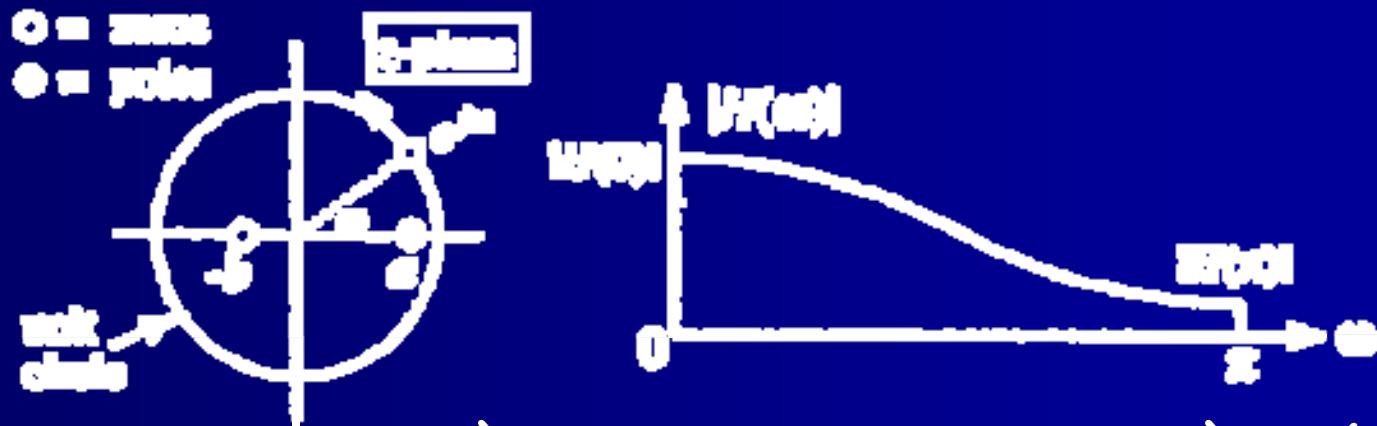
$$H(z) = \frac{G(1 + bz^{-1})}{1 - az^{-1}}$$

a, b là số dương, nhỏ hơn 1. Hệ số độ lợi G là tùy ý.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.1. Các bộ lọc bậc nhất



Hình 6.4.1. Sơ đồ cực/zero và đáp ứng tần số

Điểm zero tại $z = -b$ nằm nửa bên trái (phần tần số cao) của đường tròn đơn vị, và cực tại $z = a$ nằm nửa bên phải (phần tần số thấp). Cực sẽ tăng cường các tần số thấp và zero làm suy hao các tần số cao, nói cách khác, bộ lọc hoạt động như bộ lọc thông thấp.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.1. Các bộ lọc bậc nhất

Giá trị đáp ứng tần số tại các tần số thấp nhất và cao nhất $\omega = 0, \pi$ có bằng cách thay $z = \pm 1$ vào phương trình (6.4.1).

$$H(0) = \frac{G(1+b)}{1-a}, \quad H(\pi) = \frac{G(1-b)}{1+a}$$

Độ suy hao của tần số cao so với tần số thấp là:

$$\frac{H(\pi)}{H(0)} = \frac{(1-b)(1-a)}{(1+a)(1+b)} \quad (6.4.2)$$

Để xác định hai thông số chưa biết a và b trong phương trình (6.4.1), cần hai phương trình thiết kế. Một có thể là phương trình (6.4.2). Nếu biết a và với mức suy hao $H(\pi)/H(0)$ có thể giải b .

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.1. Các bộ lọc bậc nhất

Để xác định a , có thể tạo một ngưỡng về tốc độ đáp ứng của bộ lọc, nghĩa là ta có thể xác định hằng số thời gian hiệu quả n_{eff} , do a điều khiển. Ví dụ $n_{eff} = 20$ mẫu thời gian và $\epsilon = 0.01$, có thể a từ giải phương trình (6.3.12)

$$a = \epsilon^{1/n_{eff}} = (0.01)^{1/20} \approx 0.8$$

Với giá trị a này và yêu cầu $H(\pi)/H(0) = 1/21$, phương trình (6.4.2) sẽ cho:

$$\frac{(1-b)(1-0.8)}{(1+0.8)(1+b)} = \frac{1}{21} \Rightarrow b = 0.4$$

Từ đó bộ lọc thiết kế với độ lợi G là: $H(z) = \frac{G(1+0.4z^{-1})}{1-0.8z^{-1}}$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.1. Các bộ lọc bậc nhất

Do b phải nằm trong khoảng $(0,1)$, ta xét hai trường hợp biên, $b = 0$ và $b = 1$. Đặt $b = 0$ vào phương trình (6.4.1) và

$$(6.4.2), \text{ ta có: } H(z) = \frac{G}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad \frac{H(\pi)}{H(0)} = \frac{1}{9}$$

Và đặt $b = 1$,

$$H(z) = \frac{G(1 + z^{-1})}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad \frac{H(\pi)}{H(0)} = 0$$

Tương ứng với $H(\pi) = 0$. Hai tiêu chuẩn thiết kế đã dùng không chỉ là những tiêu chuẩn duy nhất. Trong phần 8.3.1, chúng ta thay phương trình thiết kế (6.4.2) bằng một tiêu chuẩn thay thế, phù hợp hơn trong thiết kế bộ lọc loại nhiễu.

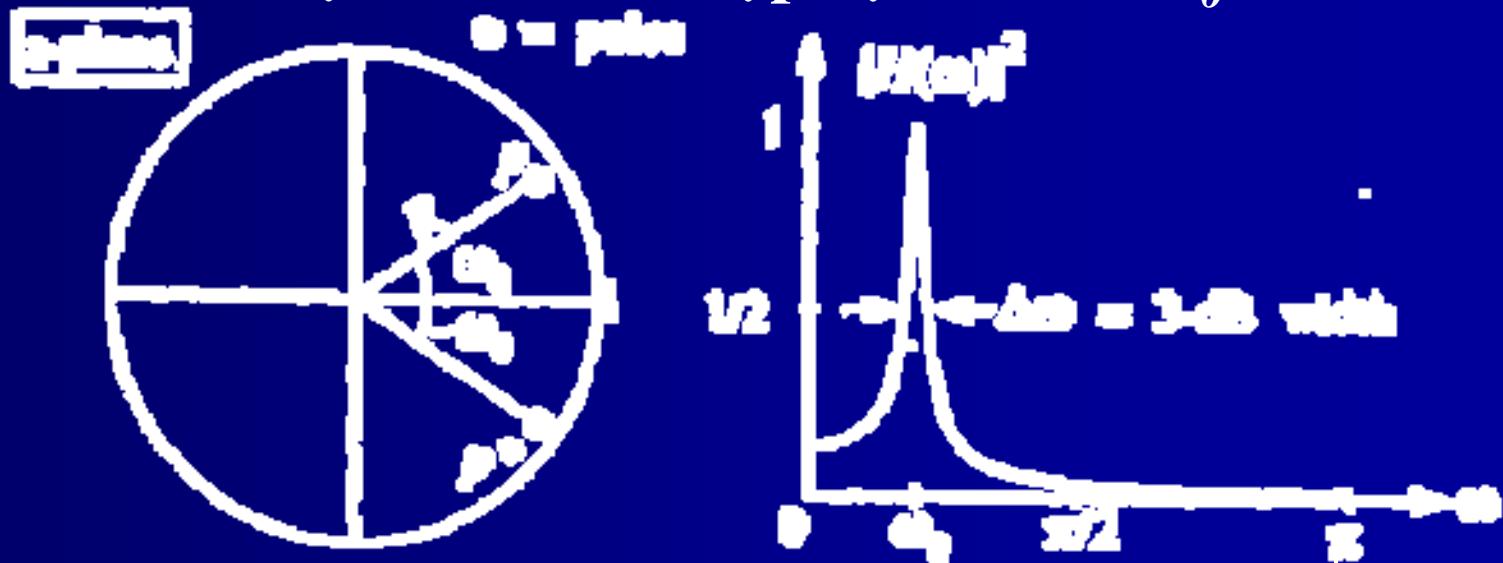
CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Thiết kế một bộ lọc cộng hưởng bậc hai đơn giản, đáp ứng tần số có một đỉnh đơn hẹp tại tần số ω_0 như hình

6.4.2.



Hình 6.4.2. Sơ đồ cực/zero và đáp ứng tần số
của bộ lọc cộng hưởng

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Để tạo một đỉnh tại $\omega = \omega_0$, đặt một cực ở trong đường tròn đơn vị và nằm trên một tia có góc pha ω_0 , tọa độ phức là $p = \text{Re}^{j\omega_0}$.

Biên độ cực là $0 < R < 1$. Và cực liên hợp là $p^* = \text{Re}^{-j\omega_0}$, ta có hàm truyền

$$H(z) = \frac{G}{(1 - \text{Re}^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \text{Re}^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{G}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (6.4.3)$$

với a_1, a_2 liên hệ với R và ω_0 theo công thức sau
 $a_1 = -2R \cos \omega_0, \quad a_2 = R^2$

Độ lợi G có thể được cố định bằng một tại ω_0 nhằm chuẩn hóa bộ lọc, nghĩa là $|H(\omega)| = 1$.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Thay $z = e^{j\omega}$ vào để có đáp ứng tần số của bộ lọc:

$$H(\omega) = \frac{G}{(1 - \operatorname{Re}^{j\omega_0} e^{-j\omega})(1 - \operatorname{Re}^{-j\omega_0} e^{-j\omega})} = \frac{G}{1 + a_{au}e^{-j\omega} + a_{a\phi}e^{-2j\omega}}$$

Yêu cầu chuẩn hóa $|H(\omega_0)| = 1$ dẫn đến

$$H(\omega_0) = \frac{G}{|(1 - \operatorname{Re}^{j\omega_0} e^{-j\omega})(1 - \operatorname{Re}^{-j\omega_0} e^{-j\omega})|} = 1$$

Giải G :

$$G = (1 - R)\sqrt{1 - 2R \cos(2\omega_0) + R^2}$$

Bình phương đáp ứng biên độ:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{G^2}{(1 - 2R \cos(\omega - \omega_0) + R^2)(1 - 2R \cos(\omega + \omega_0) + R^2)}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Độ rộng 3-dB $\Delta\omega$ của đỉnh được định nghĩa là độ rộng đầy đủ (full width) tại một phần hai cực đại của đáp ứng biên độ bình phương. Có thể tính $\Delta\omega$ từ phương trình

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} |H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{2}$$

Theo dB, điều kiện này trở thành

$$20 \log_{10} \left| \frac{H(\omega)}{H(\omega_0)} \right| = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) = -3 \text{ dB}$$

Phương trình này có hai lời giải, ω_1 và ω_2 , nằm hai bên ω_0 . Độ rộng đầy đủ được định nghĩa là $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Hai tần số này được gọi là tần số 3-dB.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Có thể thấy là khi p nằm gần đường tròn, nghĩa là $R \leq 1$, độ rộng đầy đủ có thể xấp xỉ là $\Delta\omega = 2(1 - R)$ (6.4.4)

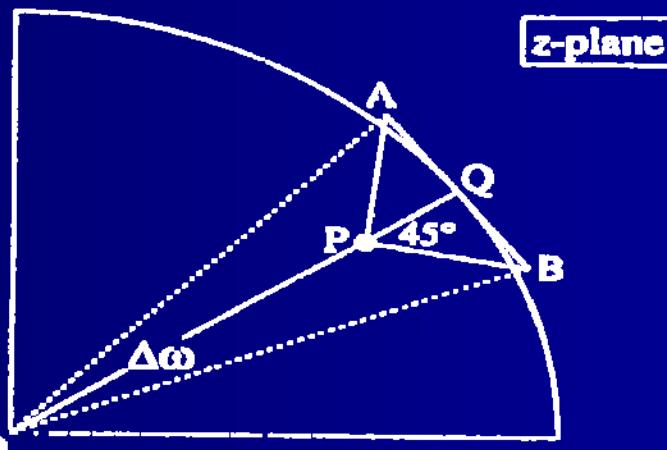
Vì vậy khi R càng gần một, đỉnh càng nhọn nhưng bộ lọc chậm đạt đến đáp ứng trạng thái ổn định như đã thảo luận trong phần trước.

Đưa phương trình (6.4.4) về dạng hình học. Cực p được biểu thị bởi điểm P với $|PQ| = R$. Do đó $|PQ| = 1 - R$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng



Hình 6.4.3: Dạng hình học của độ rộng 3-dB.

Giả sử cực P rất gần đường tròn, góc 3-dB nhỏ co dãn về phía OQ và cắt đường tròn tại hai điểm, có thể xấp xỉ thành hai điểm A, B nằm trên tiếp tuyến đường tròn tại Q. Ký hiệu các điểm A, Q bởi hai số phức z_A và z_Q , ta có các giá trị hàm truyền

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

$$H(z_A) = \frac{G}{|z_A - p||z_A - p^*|}, \quad H(z_Q) = \frac{G}{|z_Q - p||z_Q - p^*|}$$

Giả sử P rất gần đường tròn, tất cả bốn điểm P, Q, A, B rất gần nhau. Do đó khoảng cách từ chúng đến cực liên hợp p^* sẽ xấp xỉ bằng nhau, nghĩa là $|z_A - p^*| \approx |z_Q - p^*|$. Ta có tỷ số:

$$\frac{|H(z_A)|}{|H(z_Q)|} = \left| \frac{z_Q - p}{z_A - p} \right| = \frac{PQ}{PA}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Điều kiện 3-dB, $|H(z_A)/H(z_B)| = 1/\sqrt{2}$ trở thành $|PQ|/|PA| = 1/\sqrt{2}$ hoặc $|PA| = \sqrt{2} |PQ|$, có nghĩa là tam giác vuông PQA sẽ cân với góc $OPA = 45^0$. Tam giác PQB cũng là tam giác vuông cân. Nhờ đó $|AB| = 2|QA| = 2|PQ| = 2(1 - R)$. Nhưng cung bị chắn bởi góc $\Delta\omega$ bằng bán kính đường tròn, tức là có số đo bằng $\Delta\omega$. Cung này xấp xỉ bằng $|AB|$ nên $\Delta\omega = |AB| = 2(1 - R)$.

Phương trình (6.4.4) có thể dùng như một tiêu chuẩn thiết kế quyết định giá trị R ứng với băng thông $\Delta\omega$ cho trước. Nhờ dùng các phân số từng phần ở phương trình (6.4.3) có thể tìm đáp ứng xung nhân quả của bộ lọc. Với $n \geq 0$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

$$h(n) = \frac{G}{\sin \omega_0} R^n \sin(\omega_0 n + \omega_0)$$

Phương trình sai phân cho bộ lọc biến đổi từ phương trình (6.4.3). ta có:

$$H(z) = H(z)X(z) = \frac{G}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z)$$

Suy ra $(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(z) = GX(z)$

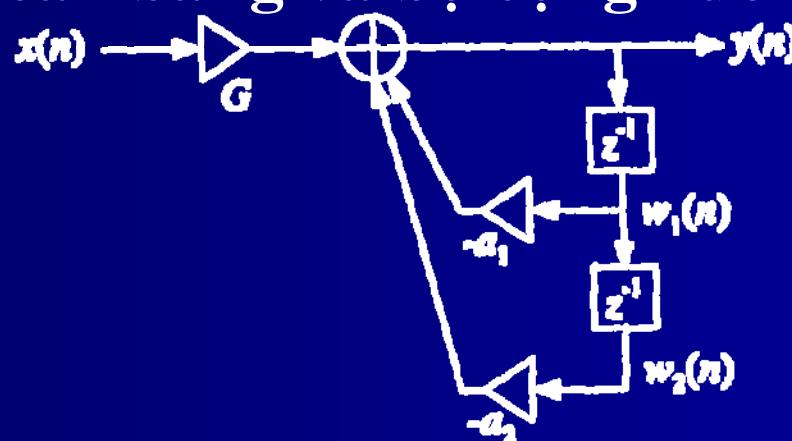
Và trong miền thời gian $y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = Gx(n)$

Hoặc $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) = Gx(n)$ (6.4.5)

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng



Hình 6.4.4. Cách thực hiện dạng
trực tiếp bộ lọc cộng hưởng

Ví dụ 6.4.1 Thiết kế bộ lọc cộng hưởng hai cực với đỉnh
tại $f_0 = 500$ Hz và độ rộng $\Delta\omega = 32$ kHz, tốc độ lấy mẫu
 $f_S = 10$ kHz.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Giải: Tần số cộng hưởng chuẩn hóa là $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} = 0.1\pi$ [rad/mẫu]

Độ rộng tương ứng $\Delta\omega = \frac{2\pi\Delta f}{f_s} = 0.02$

Phương trình (6.4.4) dẫn đến $2(1-R) = 0.02 \Rightarrow R = 0.99$

Với giá trị tìm được của R, ta tính được các thông số của bộ lọc: $G = 0.0062$, $a_1 = -1.8831$, $a_2 = 0.9801$

Và hàm truyền bộ lọc $H(z) = \frac{0.0062}{1 - 1.8831z^{-1} + 0.9801z^{-2}}$

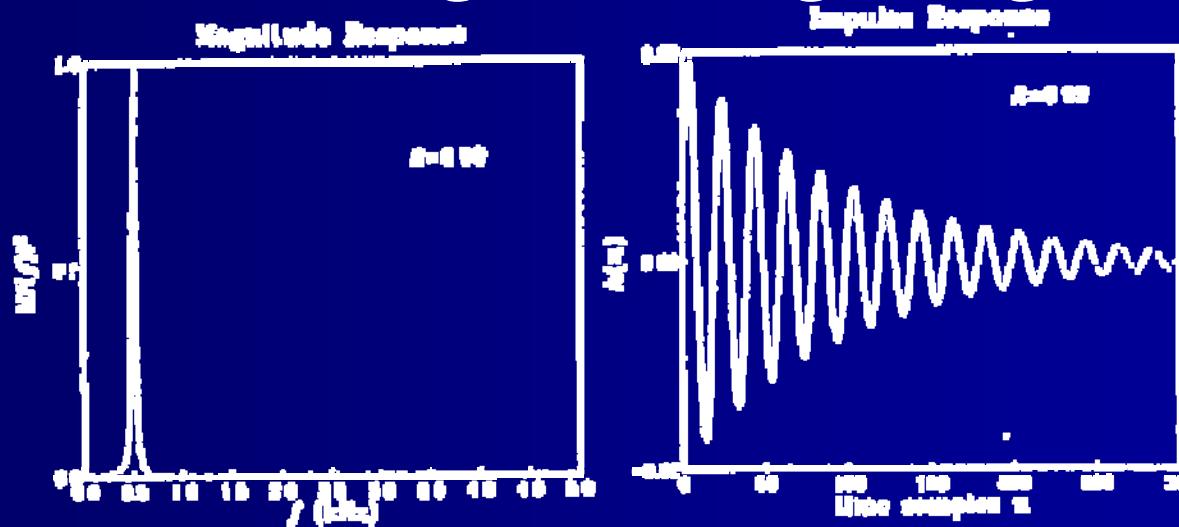
Đáp ứng biên độ và đáp ứng xung ở hình dưới.

Hàng số thời gian hiệu quả của bộ lọc là $n_{eff} = \ln(\epsilon) / \ln(R) = 458$ các mẫu thời gian.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng



Đồ thị chỉ vẽ đến $n = 300$. Một phương pháp chung cho bộ lọc cộng hưởng là đặt một cặp zero ở gần các cực theo cùng hướng các cực, tức là tạo các vị trí

$$a_1 = re^{j\omega_0}, \quad a_1^* = re^{-j\omega_0}$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

Với r nằm trong khoảng $0 \leq r \leq 1$. Hàm truyền trở thành

$$H(z) = \frac{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - \text{Re}^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \text{Re}^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (6.4.6)$$

Các hệ số bộ lọc tính theo r, R, ω_0

$$a_1 = -2R \cos \omega_0, \quad a_2 = R^2 \quad (6.4.7)$$

$$b_1 = -2r \cos \omega_0, \quad b_2 = r^2$$

Đáp ứng bình phương biên độ tương ứng là

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1 - 2r \cos(\omega - \omega_0) + r^2)(1 - 2r \cos(\omega + \omega_0) + r^2)}{(1 - 2R \cos(\omega - \omega_0) + R^2)(1 - 2R \cos(\omega + \omega_0) + R^2)}$$

Hình 6.4.5 đưa ra sơ đồ cực/zero. Khi $r < R$, cực mạnh hơn zero, tức là nó gần đường tròn đơn vị hơn và tạo ra một đỉnh nhọn trong đáp ứng tần số tại $\omega = \omega_0$.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng

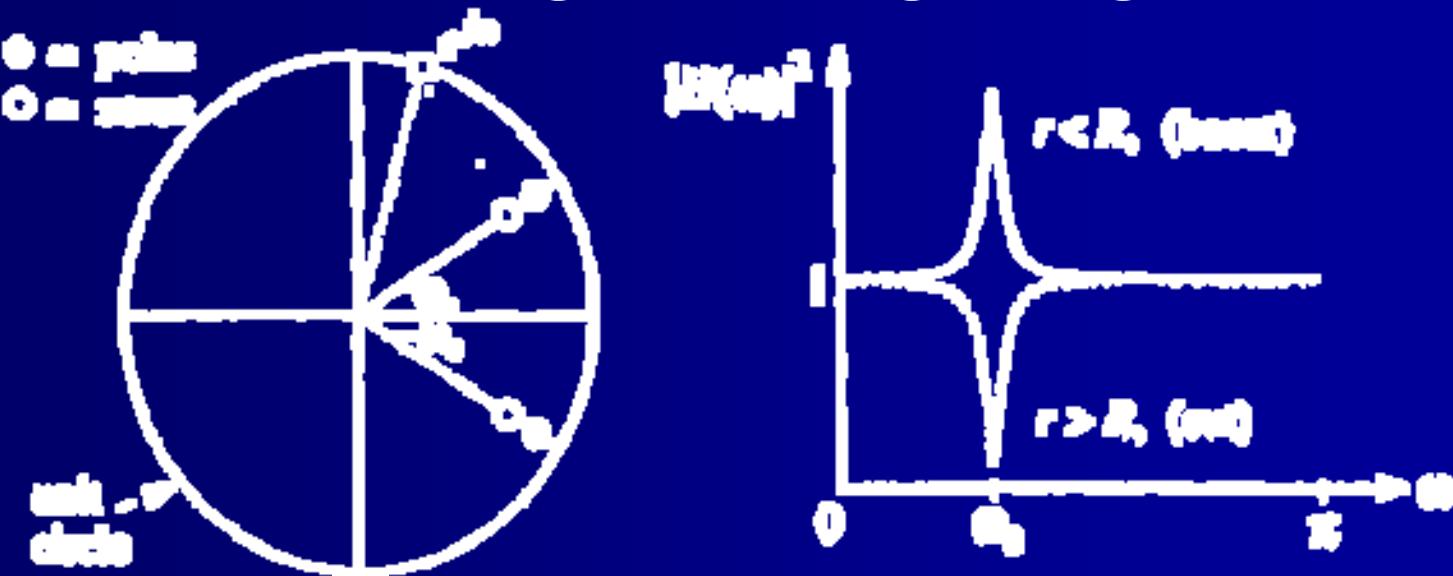
Cộng hưởng có thể xem là một trường hợp đặc biệt với $r = 0$. Khi $r > R$, zero mạnh hơn cực và tạo nên một dip trong đáp ứng tần số. Đặc biệt nếu $r = 1$, ta có một zero chính xác, một notch, tại $\omega = \omega_0$.

Khi cực và zero rất gần nhau, nghĩa là $r \leq R$ hoặc $r \geq R$, đáp ứng tần số khá bằng phẳng trong khoảng tần số khác $\omega = \pm \omega_0$, do khoảng cách từ điểm chuyển động $e^{j\omega}$ so với cặp cực/zero gần bằng nhau, nên $|H(\omega)| \approx 1$. Chỉ khi ở gần khoảng $\omega = \pm \omega_0$ thì $|H(\omega)|$ mới thay đổi rất nhanh và tạo ra một đỉnh hoặc một dip.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.2. Các bộ cân bằng và bộ cộng hưởng



Hình 6.4.5 Bộ lọc cân bằng tham số
(*Parametric equalizer filter*).

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

Trường hợp $r = 1$ ứng với bộ lọc notch sẽ dẫn đến những thảo luận sau. Trong trường hợp này, các hệ số bộ lọc trong phương trình (6.4.7) có thể viết là:

$$a_1 = Rb_1 = -2R\cos\omega_0, \quad a_2 = R^2 b_2$$

Và hàm truyền có dạng: $H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + Rb_1 z^{-1} + Rb_2 z^{-2}} = \frac{N(z)}{N(R^{-1}z)}$

Với $N(z)$ là đa thức tử số có các zero tại hai vị trí notch $z = e^{\pm j\omega_0}$:

$$N(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = 1 - 2z^{-1} \cos\omega_0 + z^{-2} = (1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

Phương pháp này có thể tổng quát hóa để xây dựng bộ lọc notch với các notch tại tại một loạt (hữu hạn) bất kỳ các tần số. Đa thức tử số $N(z)$ được định nghĩa là đa thức có các zero trên đường tròn đơn vị tại những vị trí notch mong muốn. Ví dụ có N tần số notch mong muốn ω_i , $i = 1, 2, \dots, M$, $N(z)$ là đa thức bậc M có các zero tại

$$z_i = e^{j\omega_i}, i = 1, 2, \dots, M$$

$$N(z) = \prod_{i=1}^M (1 - e^{j\omega_i} z^{-1}) \quad (\text{phương trình notch}) \quad (6.4.8)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

Đa thức mẫu số $D(z) = N(\rho z^{-1})$ với $0 < \rho < 1$ là

$$D(z) = N(\rho^{-1}z) = \prod_{i=1}^M (1 - e^{j\omega_i} \rho z^{-1})$$

Các zero của $D(z)$ nằm cùng hướng với các zero notch, nhưng dịch vào phía trong đường tròn đơn vị tại bán kính ρ . Do đó với mỗi zero mong muốn $z_i = e^{j\omega_i}$ có một cực tương ứng $\rho_i = \rho e^{j\omega_i}$. Khai triển phương trình (6.4.8)

$$N(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}$$

Ta có hàm truyền ứng với bộ lọc notch

$$H(z) = \frac{N(z)}{N(\rho^{-1}z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + \rho b_1 z^{-1} + \rho^2 b_2 z^{-2} + \dots + \rho^M b_M z^{-M}} \quad (6.4.9)$$

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

Các hệ số mẫu số được chọn tỉ lệ với các hệ số tử số.

$$a_i = \rho^i b_i, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Nếu ρ gần một, $\rho \leq 1$, các khoảng cách từ điểm chuyển động $e^{j\omega}$ tới cặp cực/zero gần bằng nhau, ngoại trừ vùng quanh cặp này, nghĩa là không gần $\omega = \omega_i$. Do đó $H(\omega)$ vẫn bằng phẳng ngoại trừ trong vùng xung quanh các tần số notch mong muốn.

Ví dụ 6.4.3: Hệ thống DSP hoạt động tại tần số lấy mẫu 600 Hz, bị nhiễu tại tần số 60 Hz và các hài của nó. Thiết kế bộ lọc notch loại bỏ tất cả các hài mà vẫn phẳng với các tần số khác.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

Giải: Hài cơ bản là

Các hài khác tại $f_i = \frac{\omega}{2\pi f_1} = \frac{\omega}{2\pi 60} = \frac{0.2\pi}{2\pi} \text{ [rad/mẫu]}$. Có 10 hài nằm trong khoảng tần số Nyquist $[0, f_s]$, ký hiệu là f_i , ứng với $i = 0, 1, \dots, 9$. Do $f_s = 10f_1$, tất cả các hài nằm ngoài khoảng tần số Nyquist (nếu không bị lọc bởi bộ lọc chống aliasing) sẽ bị aliase thành các hài nằm trong khoảng này. Ví dụ, hài $f_{11} = 11f_s$ bị aliase $f_{11} - f_s = 11f_1 - 10f_1 = f_1$, và cứ như thế. Do đó bộ lọc notch số phải được thiết kế sao cho có các notch tại 10 tần số trong khoảng tần số Nyquist.

Suy ra 10 nghiệm của đa thức

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ lọc Comb và Notch

$$N(z) = 1 - z^{-10} = \prod_{i=0}^9 \left(1 - e^{j\omega_i} z^{-1}\right)$$

Bộ lọc notch tìm được là:

$$H(z) = \frac{N(z)}{N(\rho^{-1}z)} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - \rho^{10}z^{-10}} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - Rz^{-10}}$$

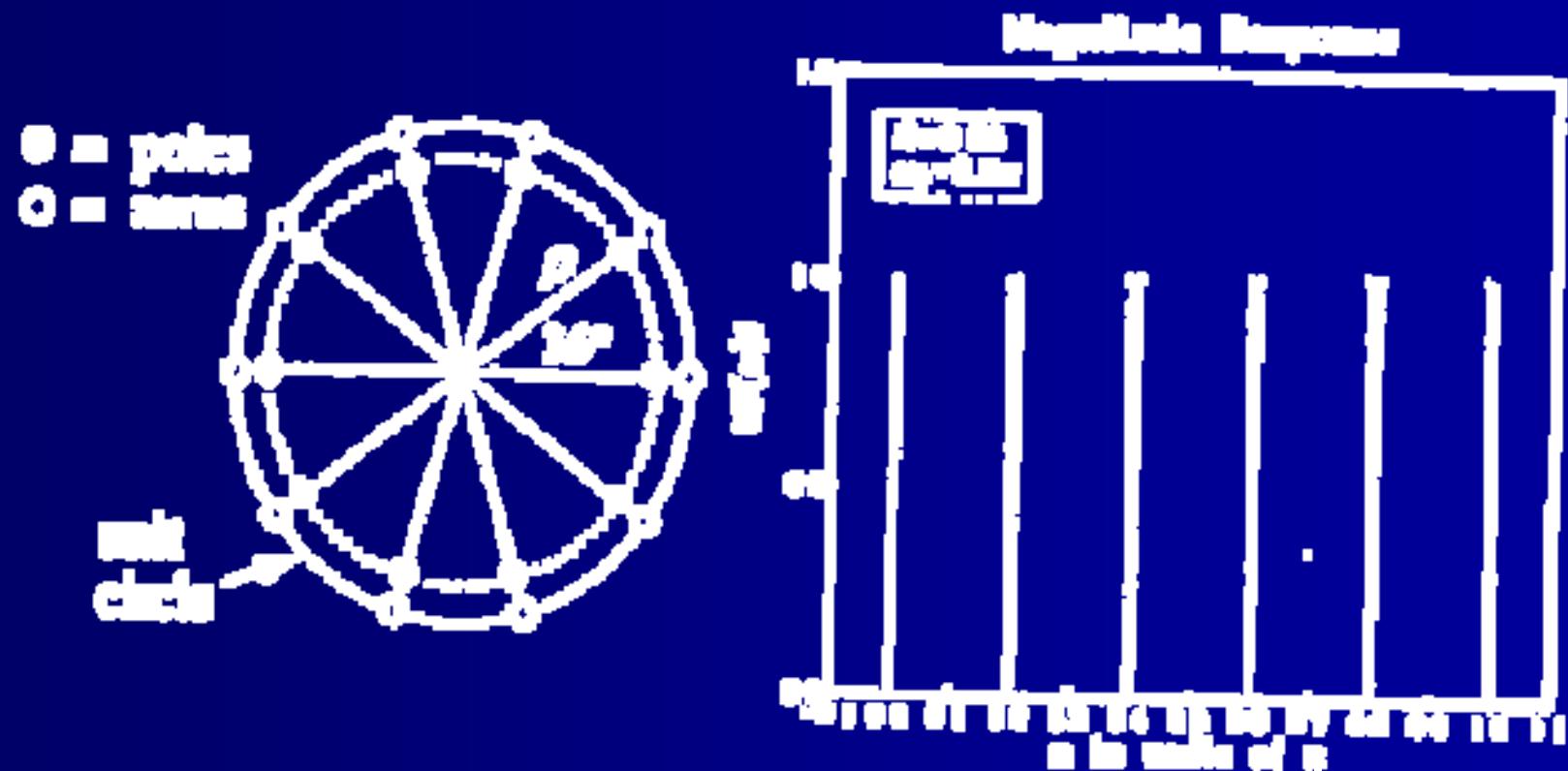
với $R = \rho^{10}$. Hình sau đưa ra sơ đồ cực/zero ứng với hàm truyền này và đáp ứng biên độ tương ứng (chỉ tính toán giữa $0 \leq \omega \leq \pi$).

Chọn $R = 0.98$, hoặc $\rho = R^{0.1} = (0.98)^{0.1} = 0.998$. Bán kính ρ của các cực rất gần đường tròn đơn vị và do đó tạo ra các notch rất nhọn tại các hài mong muốn. Tại các tần số khác, đáp ứng biên độ bằng phẳng.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.4. Thiết kế cực và zero

6.4.3. Bộ Lọc Comb Và Notch



CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chập và tính ổn định

Trong một số ứng dụng có thể cần loại bỏ tác dụng lọc trước đó và khôi phục lại tín hiệu vào từ tín hiệu ra sẵn có. Tín hiệu ra $y(n)$ liên hệ với tín hiệu vào theo phương trình chập: $y(n) = h(n) * x(n)$ (6.5.1)

Mục đích của phương pháp giải chập là nhằm khôi phục $x(n)$ từ tín hiệu đã biết $y(n)$ và $h(n)$. Theo lý thuyết, điều này có thể thực hiện nhờ lọc ngược, tức là lọc tín hiệu $y(n)$ qua bộ lọc ngược:

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} (6.5.2)$$

Thực sự, trong miền z từ phương trình (6.5.1) ta có:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

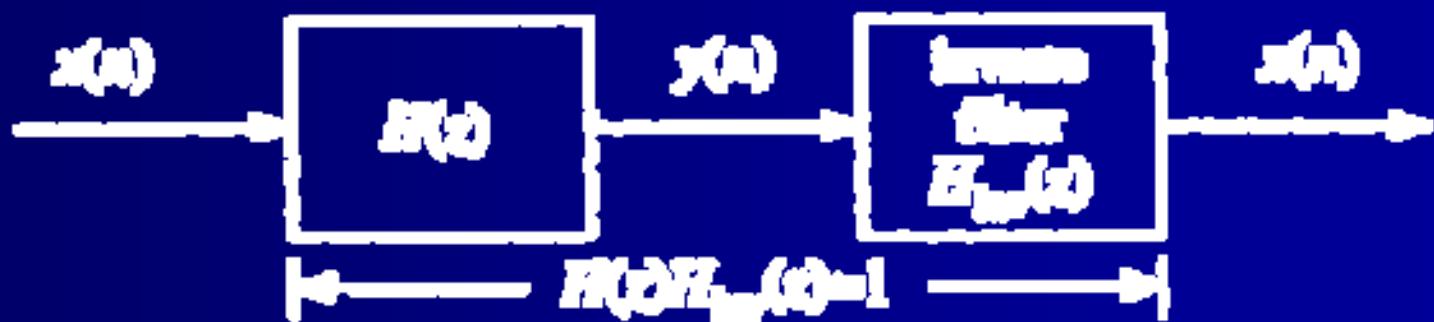
6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{H(z)}Y(z) = H_{inv}(z)Y(z)$$

và trong miền thời gian:

$$x(n) = h_{inv}(n) * y(n) \quad (6.5.3)$$

$h_{inv}(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc ngược $H_{inv}(z)$. Hình 6.5.1 minh họa quá trình:

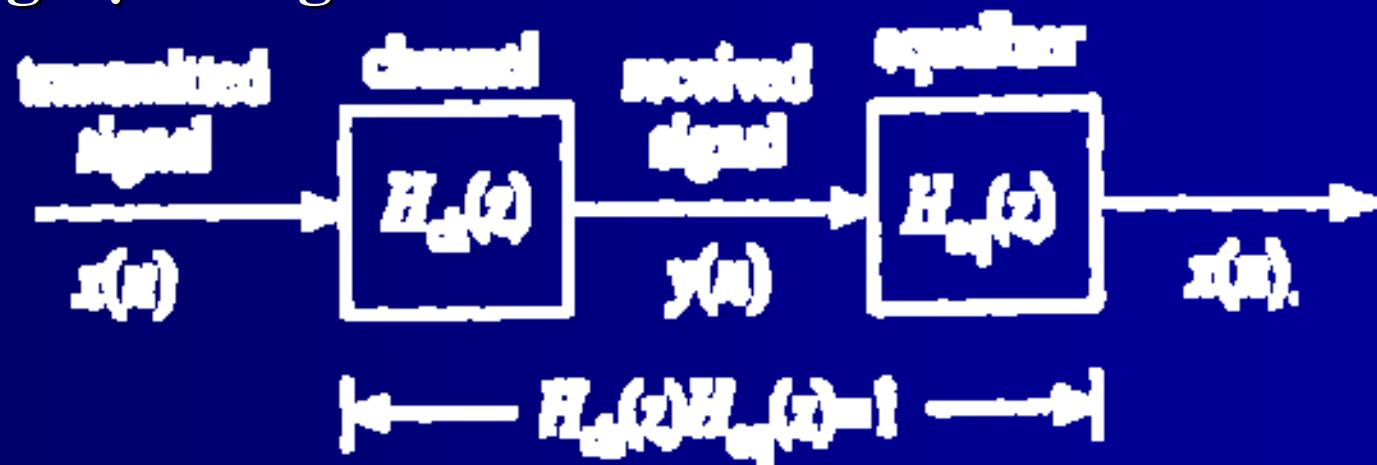


Hình 6.5.1: Lọc ngược để khôi phục tín hiệu ban đầu.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chập và tính ổn định

Hai ứng dụng điển hình của lọc ngược là cân bằng kênh (*channel equalization*) trong truyền dữ liệu hoặc âm thanh số và cân bằng trong âm thanh xe hoặc phòng trong hệ thống âm tần.



Hình 6.5.2: Bộ kênh bằng kênh.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chập và tính ổn định

Âm thanh tạo bởi hệ thống âm tần trong phòng nghe bị thay đổi do đặc tính phản xạ và hấp thụ của đồ vật và hình dạng tường của phòng. Tác động của phòng có thể mô hình bởi đáp ứng xung phản xạ $h_{room}(n)$, sóng âm thanh thực sự đến tai người nghe là phiên bản đã bị nhiễu của tín hiệu nguyên thủy $x(n)$ do hệ thống tạo ra:

$$y_{room}(n) = h_{room}(n) * x(n) \quad (6.5.4)$$

Đáp ứng xung $h_{room}(n)$ phụ thuộc vào vị trí người nghe trong phòng, nhưng có thể đo được và giải chập bằng cách lọc ngược:

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định

$$Y_{room}(z) = H_{room}(z)X(z) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{H_{room}(z)}Y_{room}(z)$$

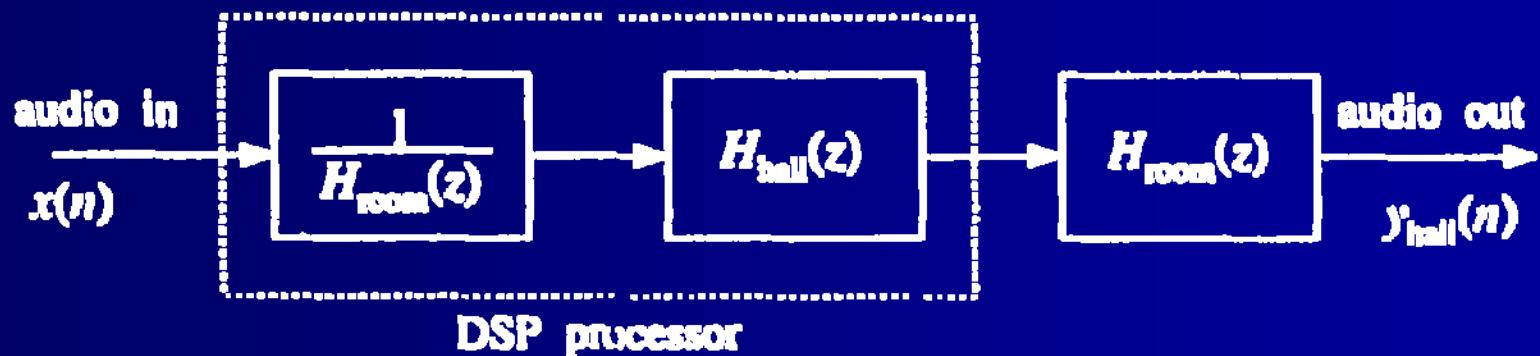
Bên cạnh việc loại tác động phản xạ nội trong phòng, người ta có thể muốn thêm tiếng phản xạ xung quanh phòng hòa nhạc để tăng phần ấm áp và sinh động. Nếu tín hiệu $x(n)$ được nghe trong phòng hòa nhạc có đáp ứng phản xạ $h_{hall}(n)$, âm thanh nghe được thực sự là:

$$y_{hall}(n) = h_{hall}(n) * x(n) \quad (6.5.5)$$

Bộ xử lý tác động âm tần DSP (DSP audio effects processor) có sẵn có thể mô phỏng đặc tính phản xạ của một phòng hòa nhạc điển hình và thực hiện phép lọc trên. Hình 6.5.3 là bộ xử lý tác động âm tần lý tưởng.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chập và tính ổn định



Hình 6.5.3 Bộ xử lý tác động âm tần lý tưởng.

Trước tiên, giải chập âm thanh trong phòng nhờ tiền lọc tín hiệu âm tần $x(n)$ bằng bộ lọc ngược của hàm truyền phòng, dự đoán trước tác động của phòng, và chập nó với đáp ứng phản xạ mong muốn của phòng hòa nhạc. Hàm truyền khi ấy là hàm truyền hiệu quả, có dạng

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định

$$H_{eff}(z) = H_{room}(z)H_{hall}(z) \frac{1}{H_{room}(z)} = H_{hall}(z)$$

Với bộ xử lý tác động DSP, sóng âm thanh trong phòng sẽ nghe giống như ở phòng hòa nhạc, phương trình (6.5.5). Bộ xử lý này sẽ được đề cập chi tiết trong chương 8.

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ DỰA VÀO HÀM TRUYỀN

6.5. Mạch lọc ngược, giải chấp và tính ổn định