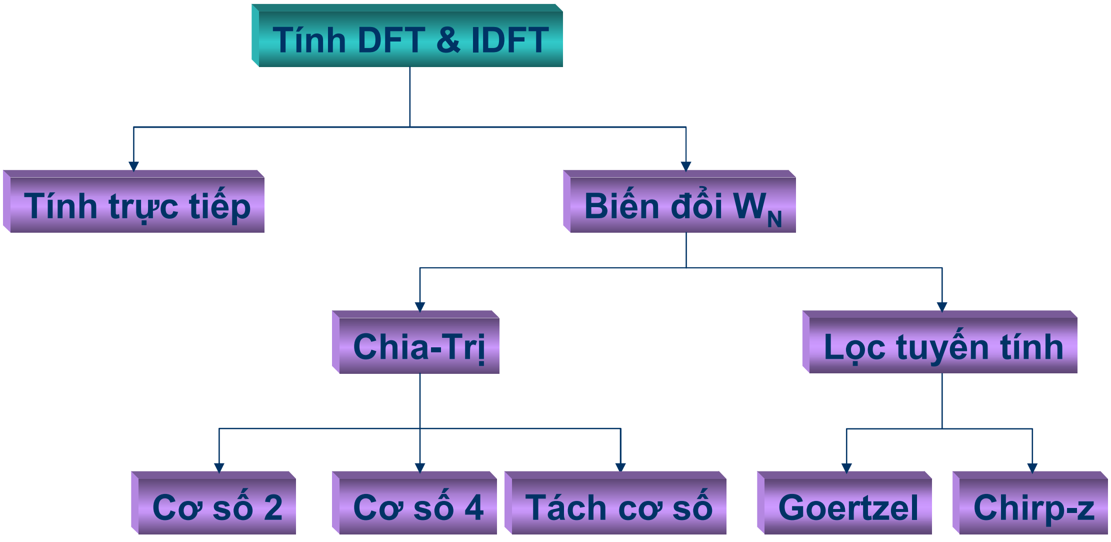
Chương 6
BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT)

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Nội dung



DFT & IDFT

- Tính DFT: xác định chuỗi N giá trị phức {X(k)} khi biết trước chuỗi {x(n)} chiều dài N

DFT $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad 0\le k\le N-1$$

IDFT $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} \qquad 0\le n\le N-1$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

  - Giải thuật tính DFT cũng được áp dụng cho việc tính IDFT
- Tính trực tiếp
  - N^2 phép nhân phức
  - N(N-1) phép cộng phức
  - → Độ phức tạp: $O(N^2)$

$$\begin{cases} X_R(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[x_R(n)\cos(\frac{2\pi kn}{N})+x_I(n)\sin(\frac{2\pi kn}{N})] \\ X_I(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}[x_R(n)\sin(\frac{2\pi kn}{N})-x_I(n)\cos(\frac{2\pi kn}{N})] \end{cases}$$

- Biến đổi W_N
  - $2N^2$ phép tính lượng giác
  - $4N^2$ phép nhân số thực
  - 4N(N-1) phép cộng số thực
  - Một số phép toán chỉ số và địa chỉ để nạp x(n)

Giải thuật tính DFT tối ưu mỗi phép toán theo những cách khác nhau

Đối xứng $\quad W_N^{k+N/2}=-W_N^k$

Tuần hoàn $\quad W_N^{k+N}=W_N^k$

Phương pháp chia-trị

- Nguyên tắc: phân rã nhỏ việc tính DFT N điểm thành việc tính các DFT kích thước nhỏ hơn → các giải thuật FFT
- PP
  - Giả sử N=L.M
  - Lưu trữ x(n) vào mảng 2 chiều LxM (l: chỉ số hàng, m: chỉ số cột)

n →	0	1	2	…	N-1
	x(0)	x(1)	x(2)	…	x(N-1)

l \ m	0	1	…	M-1
0	x(0,0)	x(0,1)	…	x(0,M-1)
1	x(1,0)	x(1,1)	…	x(1,M-1)
2	x(2,0)	x(2,1)	…	x(2,M-1)
	…	…	…	…
L-1	x(L-1,0)	x(L-1,1)	…	x(L-1,M-1)

  - Cách lưu trữ
    - Theo dòng n = Ml + m
    - Theo cột n = l + mL
  - Tương tự, các giá trị DFT X(k) tính được cũng sẽ được lưu trữ trong ma trận LxM (p: chỉ số hàng, q: chỉ số cột)
    - Theo dòng k = Mp + q
    - Theo cột k = p + qL

Phương pháp chia-trị

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

Với:

x(n) : theo cột

X(k) : theo hàng

$$X(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)}$$

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)} = W_N^{MLmp} W_N^{mLq} W_N^{Mpl} W_N^{lq}$$

$$W_N^{Nmp} = 1$$

$$W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}$$

$$W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$$

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp}$$

1 DFT M điểm F(l,q)

2 G(l,q)

3 DFT L điểm X(p,q)

(1): Tính L DFT M điểm
- Nhân phức: LM^2
- Cộng phức: LM(M-1)

(2): Tính G(l,q)
- Nhân phức: LM

(3): Tính X(p,q)
- Nhân phức: ML^2
- Cộng phức: ML(L-1)

➔ Độ phức tạp
- Nhân phức: N(M+L+1)
- Cộng phức: N(M+L-2)

Phương pháp chia-trị

- Hiệu quả

PP tính trực tiếp
- Nhân phức : N^2
- Cộng phức : N(N-1)

PP chia-trị
- Nhân phức : N(M+L+1)
- Cộng phức : N(M+L-2)

N=1000 → L=2, M=500

106 nhân phức → 503,000 (~ N/2)

- PP chia-trị rất hiệu quả khi $N = r_1 r_2 r_3 \ldots r_v$
  - Phân rã nhỏ hơn đến (v-1) lần
  - Hiệu quả hơn

- Giải thuật

n = l + mL

k = Mp + q

Giải thuật 1
1. Lưu trữ t/h theo cột
2. Tính DFT M điểm của mỗi hàng
3. Nhân ma trận kết quả với hệ số pha W_N^{lq}
4. Tính DFT L điểm của mỗi cột
5. Đọc ma trận kết quả theo hàng

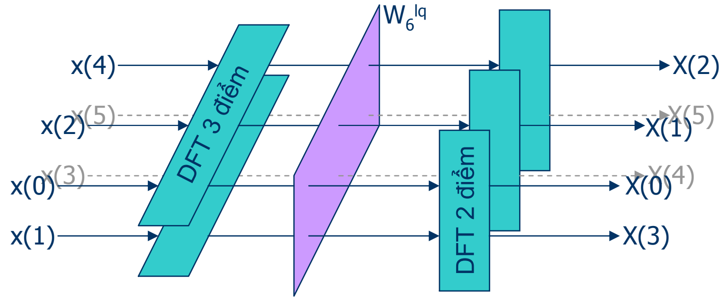
n = Ml + m

k = qL + p

Giải thuật 2
1. Lưu trữ t/h theo hàng
2. Tính DFT L điểm của mỗi cột
3. Nhân ma trận kết quả với hệ số pha W_N^{pm}
4. Tính DFT M điểm của mỗi hàng
5. Đọc ma trận kết quả theo cột

Phương pháp chia-trị

- Mô hình tính toán DFT 6 điểm thông qua việc tính DFT 3 điểm và DFT 2 điểm



- Giải thuật tính FFT cơ số 2
  - Nếu $N = r_1 r_2 r_3 \ldots r_v = r^v \rightarrow$ mô hình tính DFT có cấu trúc đều (chỉ dùng một DFT r điểm)
  - $r = 2 \rightarrow$ FFT cơ số 2
  - Chọn M = N/2 và L = 2

Giải thuật chia theo thời gian

x(0)	x(1)	x(2)	…	…	…	…	x(N-1)

	m=0	m=1		m=M-1	
l=0	x(0)	x(2)	…	x(N-2)	$f_1(2n)$
l=1	x(1)	x(3)	…	x(N-1)	$f_2(2n+1)$

n= 0,1, …, N/2-1

FFT cơ số 2

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$= \sum_{n\ even} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\ old} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)}$$

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km}$$

$$= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f_1(m) \xleftrightarrow{DFT_{N/2}} F_1(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N/2$$

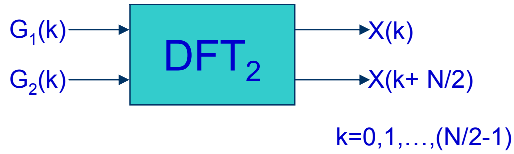
$$f_2(m) \xleftrightarrow{DFT_{N/2}} F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N/2$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(k), F_2(k) \text{ tuần hoàn chu kỳ } N/2 \\ F_1(k+N/2) = F_1(k) \\ F_2(k+N/2) = F_2(k) \\ W_N^{k+N/2} = -W_N^k \end{array}\right.$$

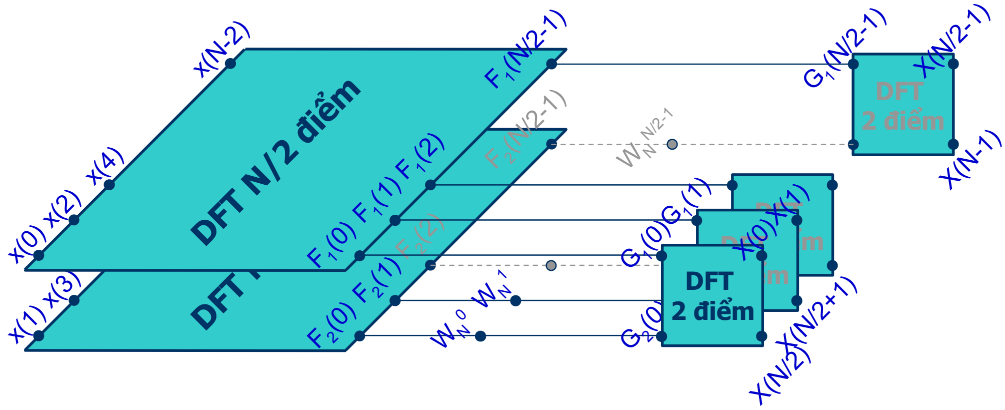
$$\begin{cases} X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

FFT cơ số 2

$$\begin{cases} G_1(k) = F_1(k) & k = 0,1,.., \frac{N}{2} - 1 \\ G_2(k) = W_N^k F_2(k) & k = 0,1,.., \frac{N}{2} - 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} X(k) = G_1(k) + G_2(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + \frac{N}{2}) = G_1(k) - G_2(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{2} - 1 \end{cases}$$



FFT cơ số 2

- Tiếp tục phân $f_1(n)$ và $f_2(n)$ thành các chuỗi N/4 điểm

$$\begin{cases} v_{11}(n) = f_1(2n) & n = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ v_{12}(n) = f_1(2n+1) & n = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ v_{21}(n) = f_2(2n) & n = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ v_{22}(n) = f_2(2n+1) & n = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ F_1(k + \frac{N}{4}) = V_{11}(k) - W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ F_2(k) = V_{21}(k) + W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \\ F_2(k + \frac{N}{4}) = V_{21}(k) - W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0,1,..., \frac{N}{4} - 1 \end{cases}$$

- Hiệu quả

DFT trực tiếp $N=2^v$ điểm

Nhân phức: N^2
Cộng phức: $N^2 - N$

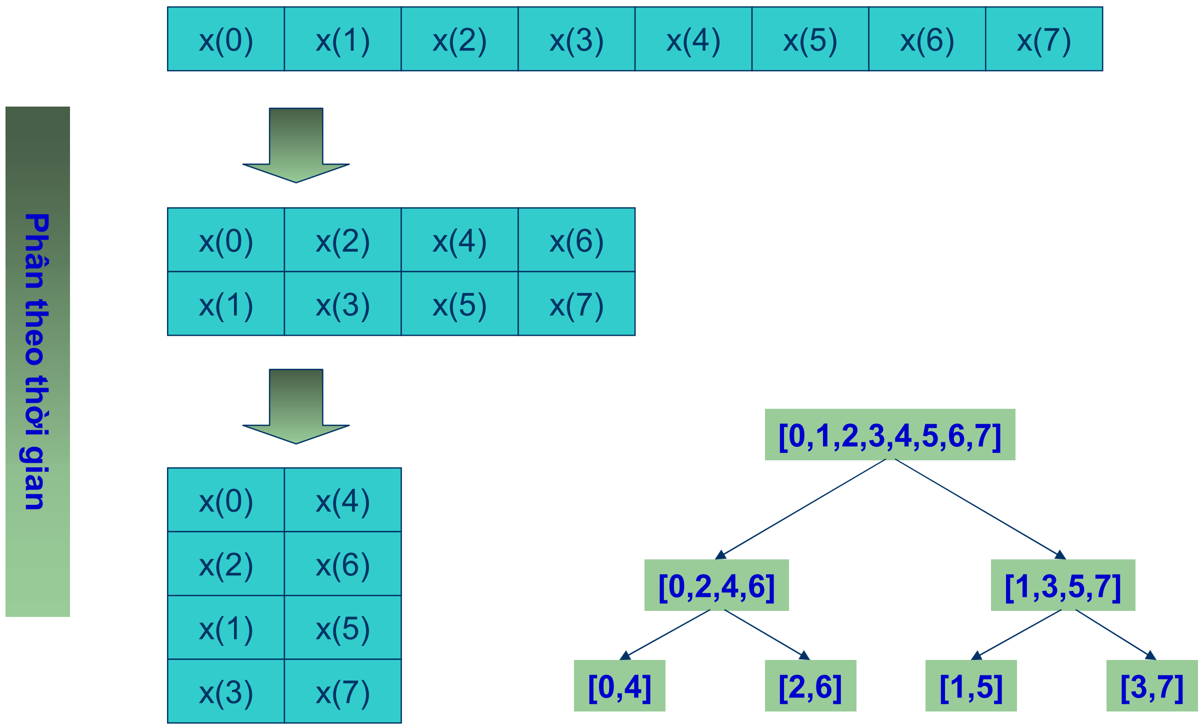
FFT cơ số 2

Các DFT 2 điểm

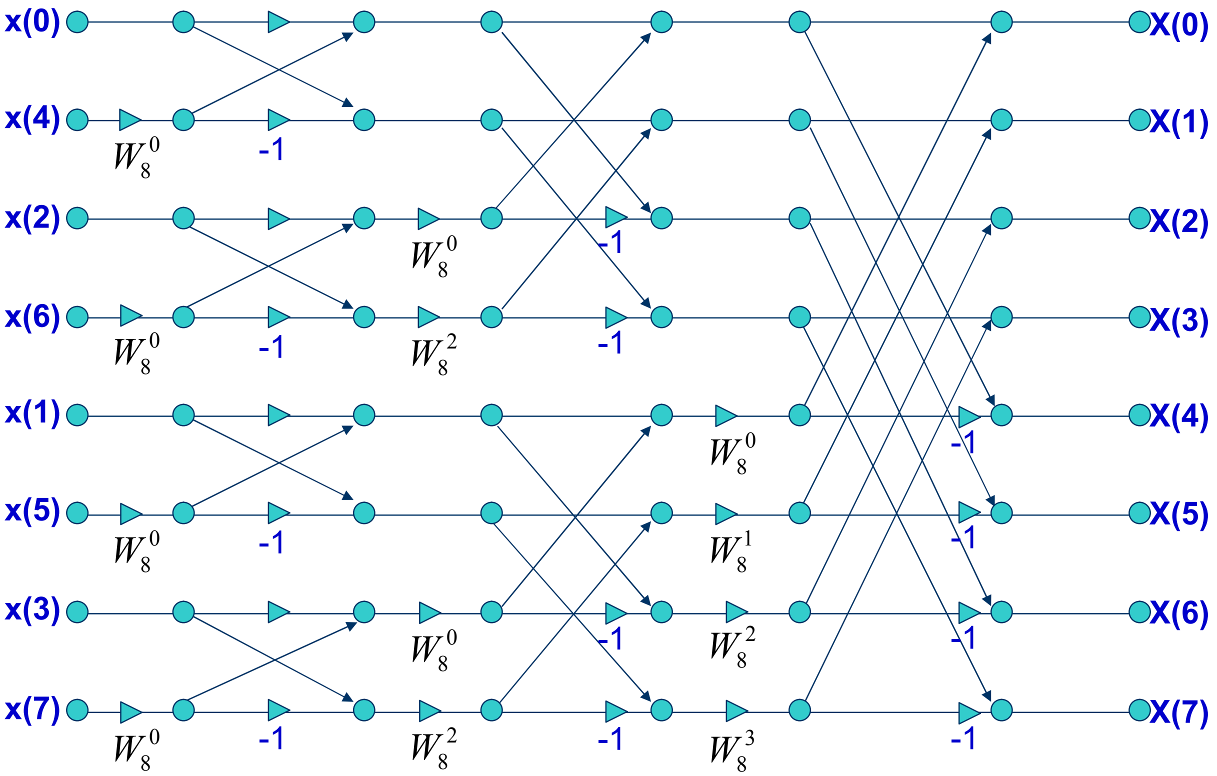
Nhân phức: $(N/2)\log_2 N$
Cộng phức: $N\log_2 N$

FFT cơ số 2

- Ví dụ: tính DFT 8 điểm

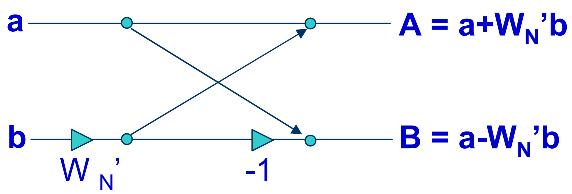


FFT cơ số 2



FFT cơ số 2

- Khối tính toán cơ bản cho DFT 2 điểm (hình con bướm)



Độ phức tạp
- 1 nhân phức
- 2 cộng phức

N= 2^v:
- + Log_2N : tầng tính toán
- + N/2 : khối tính toán cơ bản cho mỗi lớp

Bộ nhớ:
- + Vào : (a,b) - số phức
- + Ra : (A,B) - số phức
- + Có thể lưu (A,B) đè lên (a,b)
  - ➔ Chỉ cần N ô nhớ phức (2N ô nhớ thực)
  - ➔ Tính toán tại chỗ

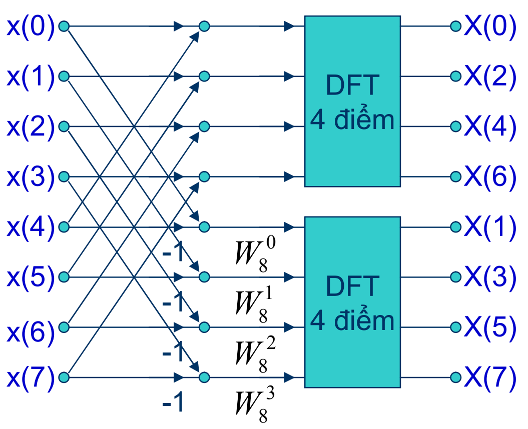
FFT cơ số 2

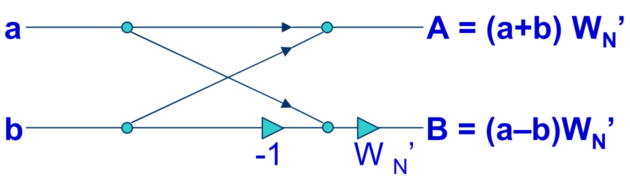
- Thứ tự chuỗi dữ liệu vào sau khi phân (v-1) lần
  - Biểu diễn các chỉ số ở dạng nhị phân
  - Chuỗi sau khi phân chia sẽ là lấy theo thứ tự đảo các bit

Bộ nhớ	Địa chỉ	Phân chia	Bộ nhớ	Địa chỉ	Phân chia	Bộ nhớ	Địa chỉ
x(0)	000		x(0)	000		x(0)	000
x(1)	001		x(2)	010		x(4)	100
x(2)	010		x(4)	100		x(2)	010
x(3)	011		x(6)	110		x(6)	110
x(4)	100		x(1)	001		x(1)	001
x(5)	101		x(3)	011		x(5)	101
x(6)	110		x(5)	101		x(3)	011
x(7)	111		x(7)	111		x(7)	111

FFT cơ số 2

- Phân chia theo tần số
  - Phương pháp chia và trị
  - M = 2, L = N/2
  - Chuỗi dữ liệu nhập được sắp xếp theo cột
  - Phân chia X(k) thành X(2k) và X(2k+1)
  - Sau đó có thể phân chia tiếp tục mỗi X(k chẵn) và X(k lẻ)





FFT cơ số 4

x(0)	x(2)	x(4)	…	…	…	x(N-1)

$N = 4^v$

L = 4, M = N/4

l,p = 0,1,2,3
m,q = 0,1,…,N/4 – 1

→ n = 4m + l
k = (N/4)p + q

	m=0	m=1			m=(N/4)-1	
l=0	x(0)	x(4)	…	…	x(N-4)	→ x(4n)
l=1	x(1)	x(5)	…	…	x(N-3)	→ x(4n+1)
l=2	x(2)	x(6)	…	…	x(N-2)	→ x(4n+2)
l=3	x(3)	x(7)	…	…	x(N-1)	→ x(4n+3)

n = 0,1,…,N/4-1

FFT cơ số 4

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}\left\{W_N^{lq}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)W_M^{mq}\right]\right\}W_L^{lp}$$

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{3}\left[W_N^{lq}F(l,q)\right]W_4^{lp}\qquad p=0,1,2,3$$

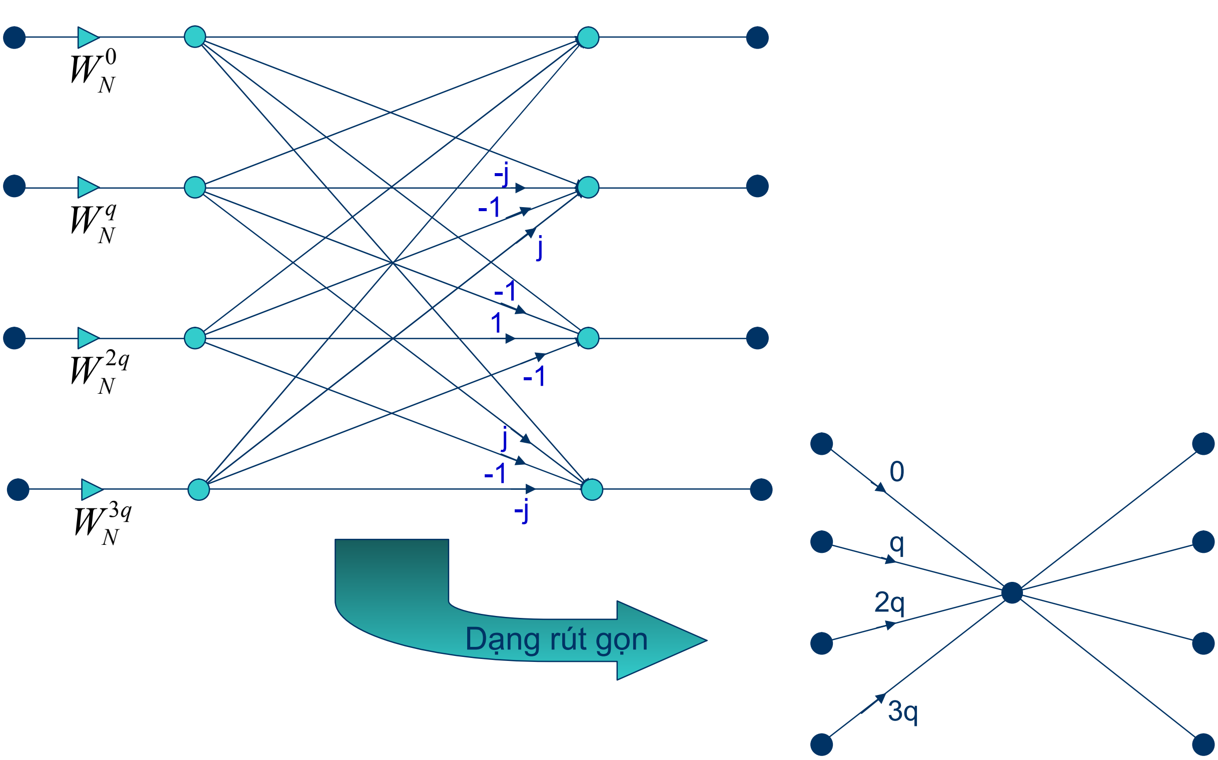
$$F(l,q)=\sum_{m=0}^{N/4}x(l,m)W_{N/4}^{mq}\qquad \begin{cases} l=0,1,2,3 \\ q=0,1,..,(\frac{N}{4}-1)\end{cases}$$

DFT N/4 điểm

$$\begin{cases} x(l,m)=x(4m+l) \\ X(p,q)=X(\frac{N}{4}p+q)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X(0,q) \\ X(1,q) \\ X(2,q) \\ X(3,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_N^0F(0,q) \\ W_N^qF(1,q) \\ W_N^{2q}F(2,q) \\ W_N^{3q}F(3,q)\end{bmatrix}$$

FFT cơ số 4



FFT cơ số 4

Độ phức tạp: 1 khối tính toán cần

+ 3 nhân phức
+ 12 cộng phức

$N=4^v$

+ Tầng tính toán : $v = \log_4 N$
+ Mỗi tầng có : N/4 khối tính toán

→ $3vN/4 = (3N/8)\log_2 N$: Nhân phức (giảm 25% vs FFT_2)
$12vN/4 = (3N/2)\log_2 N$: Cộng phức (tăng 50% vs FFT_2)

Biểu diễn lại nhân ma trận

$$\begin{bmatrix} X(0,q) \\ X(1,q) \\ X(2,q) \\ X(3,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0,q) \\ W_N^q F(0,q) \\ W_N^{2q} F(0,q) \\ W_N^{3q} F(0,q) \end{bmatrix}$$

→ $(3N/8)\log_2 N$: Nhân phức (giảm 25% vs FFT_2)
$N\log_2 N$: Cộng phức (bằng FFT_2)

Hiện thực các giải thuật FFT

- FFT cơ số 2
  - Tính toán hình bướm: $(N/2)\log_2 N$ lần
  - Hệ số quay W_N^k: được tính một lần và lưu trong bảng
  - Bộ nhớ: 2N nếu muốn việc tính toán được thực hiện tại chỗ
    - 4N nếu muốn đơn giản hóa các tác vụ chỉ số và điều khiển; đồng thời cho phép chuỗi nhập và xuất theo đúng thứ tự
- IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le N-1$$

  - Khác nhau cơ bản giữa việc tính DFT và IDFT là hệ số 1/N và dấu của hệ số pha W_N
    - Đảo chiều sơ đồ tính DFT, đổi dấu hệ số pha, và chia kết quả cuối cùng cho N → IDFT
- DFT với số điểm khác 2^v hoặc 4^v → đệm thêm các số 0
- Độ phức tạp
  - Tác vụ số học (nhân phức, cộng phức)
  - Cấu trúc hiện thực của giải thuật (qui tắc vs bất qui tắc)
  - Kiến trúc của các bộ DSPs (xử lý song song các tác vụ)

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Tính DFT của 2 chuỗi thực
  - $x_1(n)$ và $x_2(n)$: chuỗi thực độ dài N cần tính DFT
  - Định nghĩa chuỗi $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ $\quad 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_1(k) + jX_2(k)$ (tính tuyến tính của DFT)

$$x_1(n) = \frac{x(n) + x^*(n)}{2} \qquad X_1(k) = \frac{1}{2}\left\{DFT[x(n)] + DFT[x^*(n)]\right\}$$

$$x_2(n) = \frac{x(n) - x^*(n)}{2j} \qquad X_2(k) = \frac{1}{2}\left\{DFT[x(n)] - DFT[x^*(n)]\right\}$$

$$x^*(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*(N-k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} X_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right] \\ X_2(k) &= \tfrac{1}{2}\left[X(k) - X^*(N-k)\right] \end{aligned}}$$

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Tính DFT của chuỗi thực 2N điểm
  - $g(n)$: chuỗi thực độ dài 2N cần tính DFT
  - Tách thành 2 chuỗi $x_1(n) = g(2n)$ và $x_2(n) = g(2n+1)$ $\quad 0 \le n \le N-1$
  - Định nghĩa chuỗi $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ $\quad 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_1(k) + jX_2(k)$ (tính tuyến tính của DFT)

$$X_1(k) = \tfrac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right]$$

$$X_2(k) = \tfrac{1}{2}\left[X(k) - X^*(N-k)\right]$$

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(2n) W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} g(2n+1) W_{2N}^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{nk} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N^{nk} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(k) &= X_1(k) + W_{2N}^{k} X_2(k) \quad & k = 0,1,\ldots,N-1 \\ G(k+N) &= X_1(k) - W_{2N}^{k} X_2(k) \quad & k = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned}}$$

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Lọc tuyến tính các chuỗi dữ liệu dài
  - Overlap-add
  - Overlap-save

  } DFT **+ FFT**
- Phương pháp
  - h(n) – Đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc (chiều dài M)
    - Được đệm thêm L-1 số không sao cho $N = L + M - 1 = 2^v$
    - H(k): DFT N điểm của h(n), theo thứ tự đảo nếu h(n) được sắp theo thứ tự thuận (Giải thuật FFT suy giảm theo tần số)
  - $x_m(n)$ – khối dữ liệu chiều dài L (đã được phân cắt)
    - Được đệm thêm M–1 điểm (giá trị tùy theo PP lọc được dùng)
    - $X_m(k)$: DFT N điểm của $x_m(n)$, cũng theo thứ tự đảo (Giải thuật FFT suy giảm theo tần số)
  - $Y_m(k) = H(k)X_m(k)$
    - H(k) và $X_m(k)$ cùng có thứ tự đảo → $Y_m(k)$ theo thứ tự đảo
    - $y_m(n) = IDFT_N\{Y_m(k)\}$ sẽ đúng theo thứ tự thuận nếu dùng giải thuật FFT suy giảm theo thời gian
  - Không cần thiết đảo vị trí các dữ liệu trong việc tính DFT và IDFT
- Tính tương quan (tương tự)

Phương pháp lọc tuyến tính

- FFT không hiệu quả khi tính DFT (IDFT) tại một số điểm ($< \log_2 N$) → tính trực tiếp
- Giải thuật Goertzel
  - Dựa vào tính chu kỳ của W_N^k và biểu diễn việc tính toán DFT như lọc tuyến tính

$$X(k) = W_N^{-kN}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(N-m)}$$

$$\text{Đăt } y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(n-m)} = x(n) * h_k(n)$$

$$\text{vói} \quad h_k(n) = W_N^{-kn}u(n)$$

$$\Rightarrow \quad X(k) = y_k(n)\big|_{n=N}$$

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k}z^{-1}}$$

Một pole trên vòng tròn đơn vị tại tần số $\omega_k=2\pi k/N$

Việc tính DFT tại một điểm k có thể được thực hiện bằng cách cho t/h đi vào bộ cộng hưởng một pole tại tần số $\omega_k=2\pi k/N$

Thay vì tính tổng chập trực tiếp, ta có thể dùng PTSP

$$y_k(n) = W_N^{-k}y_k(n-1) + x(n) \qquad y_k(-1) = 0$$

Giải thuật Goertzel

- Kết hợp từng cặp các bộ cộng hưởng có pole liên hợp phức

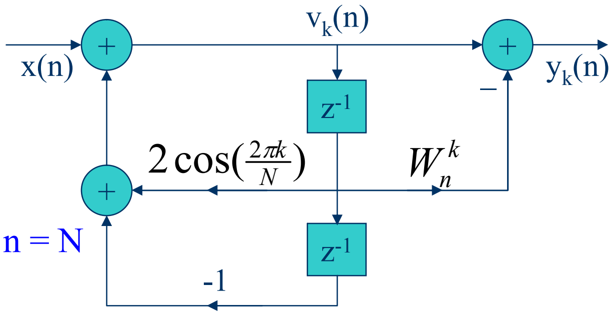
$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^{-k} z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2}}$$

- Hiện thực bằng dạng chuẩn tắc (dạng II)

$$v_k(n) = 2\cos\tfrac{2\pi k}{N} v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n) \qquad n = 0,1,\ldots,N$$

$$y_k(n) = v_k(n) - W_N^k v_k(n-1) \qquad n = N$$

  - Với đ/k đầu
    $$v_k(-1) = v_k(-2) = 0$$



- $v_k(n)$ được lặp lại cho n = 0, 1, …, N
  - Mỗi vòng cần 1 phép nhân thực
- $y_k(n)$ được tính duy nhất một lần cho n = N
- Nếu x(n) là t/h thực, cần N+1 phép nhân thực để tính X(k) và X(N-k) {do tính đối xứng}
- Giải thuật Goertzel chỉ thích hợp khi số giá trị DFT cần tính khá nhỏ ($\leq \log_2 N$)

Giải thuật BĐ Chirp-z

- DFT N điểm ~ $X(z_k)$ với $z_k = e^{j2\pi kn/N}$, k=0,1,…,N-1 (các điểm cách đều trên vòng tròn đơn vị)
- BĐ Z của x(n) tại các điểm z_k

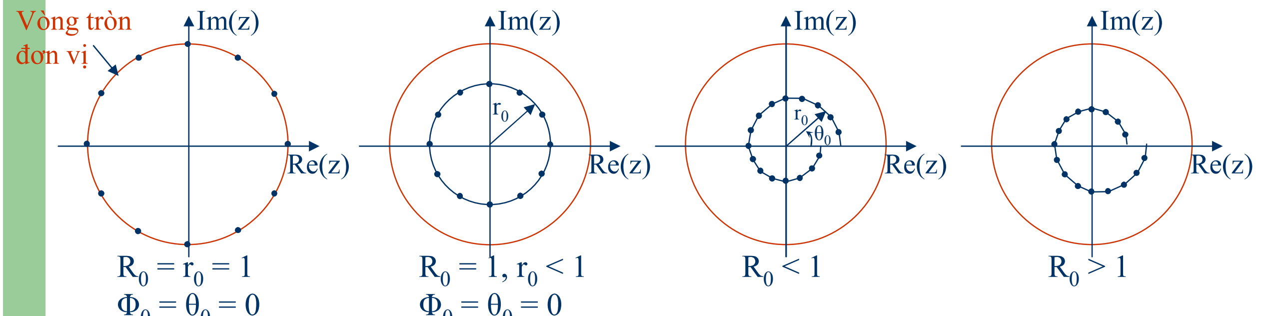
$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$

- Nếu $z_k = re^{j2\pi kn/N}$ (z_k là N điểm cách đều nhau trên vòng tròn bk r)

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) r^{-n}] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

  - Việc tính DFT có thể được thực hiện bằng giải thuật FFT cho chuỗi $x(n)r^{-n}$
- Tổng quát, z_k nằm trên cung xoắn ốc bắt đầu từ điểm $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ (đi vào hoặc đi ra gốc tọa độ)

$$z_k = r_0 e^{j\theta_0} (R_0 e^{j\phi_0})^k \qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$



Giải thuật BĐ Chirp-z

$$X(z_k) = \frac{y(k)}{h(k)} \quad k = 0,1,\ldots,L-1$$

BĐ chirp-z

$$V = R_0 e^{j\phi_0}$$

$$h(n) = V^{n^2/2}$$

$$g(n) = x(n)(r_0 e^{j\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2}$$

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n) \qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$

$$R_0 = 1 \quad \Rightarrow h(n) = e^{j\phi_0 n^2/2} = e^{j(n\phi_0/2)n} \equiv e^{j\omega n}$$

$\omega = n\phi_0 / 2$ Tần số của t/h mũ phức h(n), tăng tuyến tính theo thời gian
→ h(n): chirp signal

Giải thuật BĐ Chirp-z

- Xác định tổng chập vòng của chuỗi g(n) N điểm và chuỗi h(n) M điểm (M > N)
  - N-1 điểm đầu là các điểm lặp lại
  - M-(N-1) điểm còn lại chứa kết quả

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n) \qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$

- Giả sử M = L + (N-1)
- M điểm của chuỗi h(n) được xác định $-(N-1) \le n \le (L-1)$
- Định nghĩa chuỗi M điểm $h_1(n) = h(n-N+1)$ $n = 0,1,\ldots,M-1$
- $H_1(k) = DFT_M\{h_1(n)\}$
- $G(k) = DFT_M\{g(n)\}$ (sau khi đã đệm thêm vào g(n) L-1 số 0)
- $Y_1(k) = G(k)H(k) \to y_1(n) = IDFT\{Y_1(k)\}$ $n = 0,1,\ldots,M-1$
- N-1 điểm đầu tiên của $y_1(n)$ là các điểm lặp → loại bỏ chúng
- Các điểm kết quả là giá trị của $y_1(n)$ khi $N-1 \le n \le M-1$
  - $y(n) = y_1(n+N-1)$ $n = 0,1,\ldots,L-1$
- $X(z_k) = y(k)/h(k)$ $k = 0,1,\ldots,L-1$