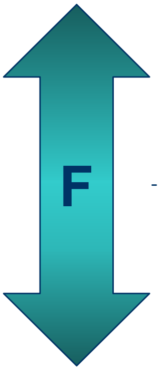
Chương 5
BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Giới thiệu về DFT

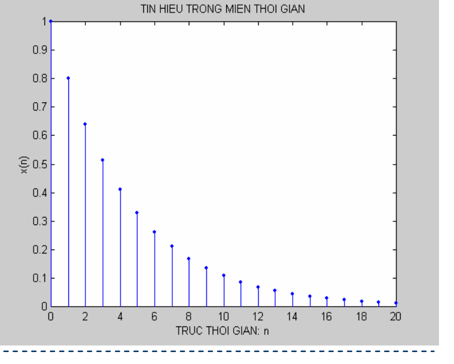
- Biến đổi Fourier liên tục

x(n)



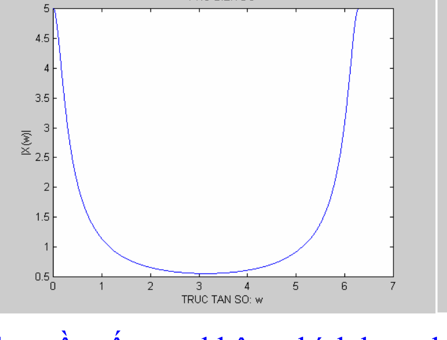
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

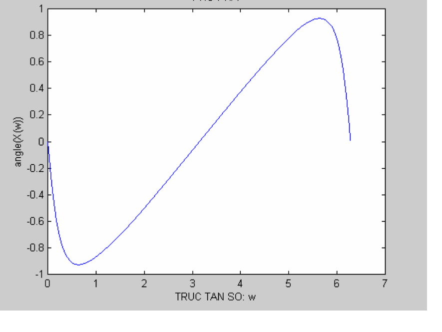
$x(n) = 0.8^n u(n)$



Miền thời gian

Miền tần số





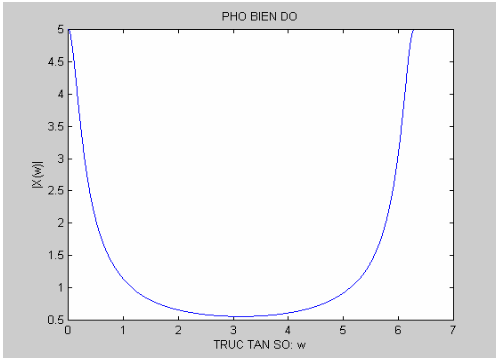
- Vấn đề: X(ω) liên tục theo tần số ω → không thích hợp cho việc tính toán trên máy tính

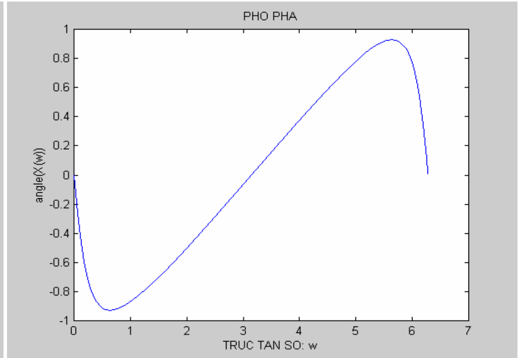
Lấy mẫu miền tần số

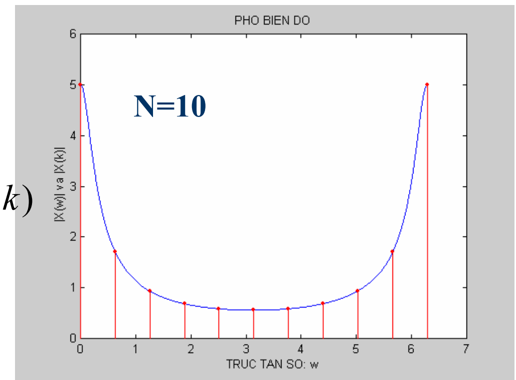
$X(\omega)$

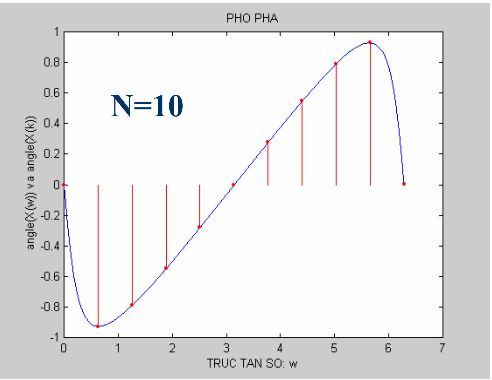
Lấy mẫu

$$X(k) \equiv X(\omega = \tfrac{2\pi}{N}k)$$









Lấy mẫu miền tần số

$$X(\omega)\Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(k) = \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \cdots$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ Thay n bằng (n-lN)

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ với $$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

- T/h $x_p(n)$ – lặp chu kỳ của x(n) mỗi N mẫu – là t/h tuần hoàn với chu kỳ cơ bản N

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,\ldots N-1$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

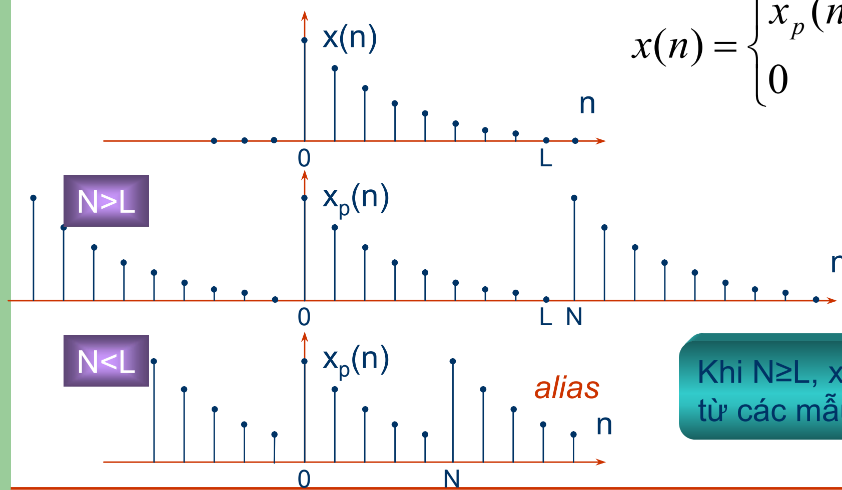
Lấy mẫu miền tần số

$$c_k = \frac{1}{N}X(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

- Có thể phục hồi t/h $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ $X(\omega)$

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$$



Khi N≥L, x(n) có thể được khôi phục từ các mẫu phổ tần số tại $\omega_k = 2\pi k/N$

Lấy mẫu miền tần số

- Có thể phục hồi $X(\omega)$ từ các mẫu $X(k)$ với k=0,1,…,N-1
  - Giả sử N≥L → $x(n) = x_p(n)$ khi $0 \le n \le N-1$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - 2\pi k/N)n}\right]$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)P(\omega - \tfrac{2\pi}{N}k) \qquad N \ge L}$$

$$P(\tfrac{2\pi}{N}k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

Lấy mẫu miền tần số

- Tóm tắt

x(n)
có chiều dài L≤N

BĐ F

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Lấy mẫu

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Phục hồi

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) P(\omega - \omega_k)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \qquad \omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

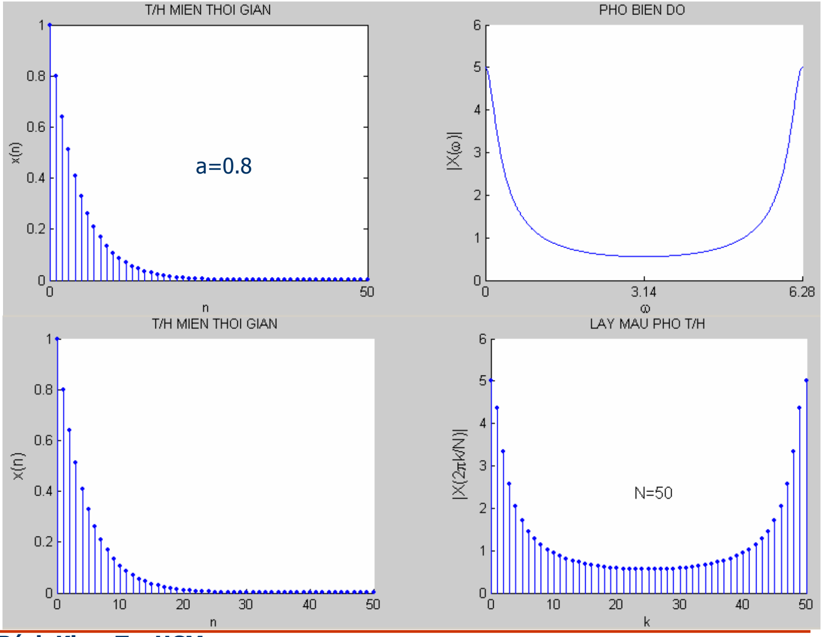
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Lấy mẫu miền tần số

- Ví dụ: $x(n)=a^n u(n)$, $0<a<1$
  - Phổ t/h được lấy mẫu tại các tần số $\omega_k=2\pi k/N$, k=0, 1, …, N-1

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$$

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \sum_{l=-\infty}^{0} a^{n-lN} = \frac{a^n}{1-a^N}$$



Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Chuỗi không tuần hoàn, năng lượng hữu hạn x(n)
- Các mẫu tần số X(2πk/N), k=0, 1,…,N-1 không đặc trưng cho x(n) khi x(n) có chiều dài vô hạn
- Nó đặc trưng cho chuỗi tuần hoàn, chu kỳ N $x_p(n)$
- $x_p(n)$ là lặp tuần hoàn của x(n) nếu x(n) có chiều dài hữu hạn $L \le N$
- Do đó, các mẫu tần số X(2πk/N), k=0, 1,…,N-1 đặc trưng cho chuỗi chiều dài hữu hạn x(n); i.e. X(n) có thể được phục hồi từ các mẫu tần số {X(2πk/N)}
- $x(n)=x_p(n)$ trên một chu kỳ N (được đệm vào N-L zero). Mặc dù L mẫu của X(ω) có thể tái tạo lại được X(ω), nhưng việc đệm vào N-L zero giúp việc tính toán DFT N điểm của X(ω) đồng nhất hơn

DFT	IDFT
$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$k=0,1,\ldots,N-1$	$n=0,1,\ldots,N-1$

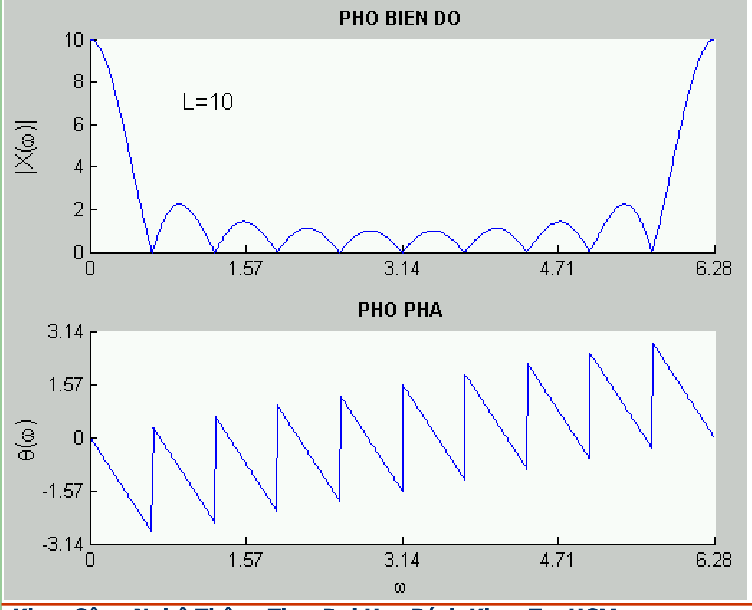
Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Ví dụ: xác định DFT N điểm của chuỗi x(n) có độ dài L hữu hạn (N≥L)

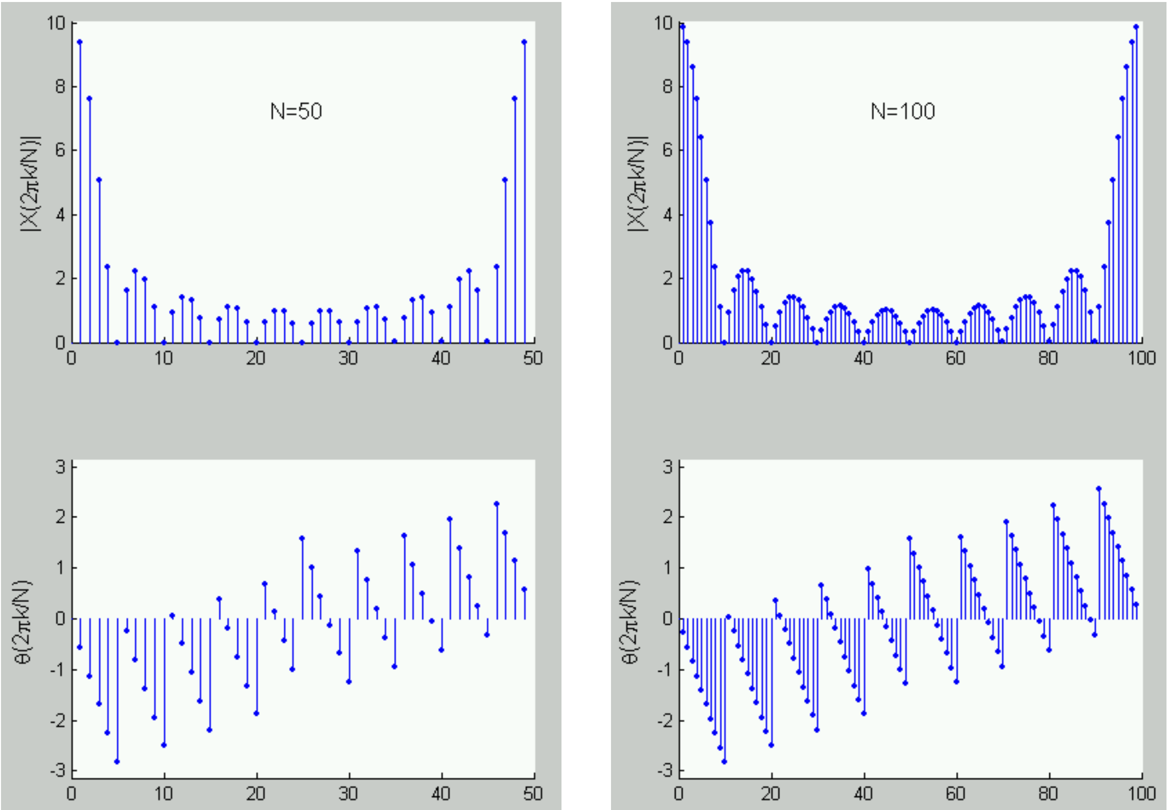
$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le L-1\\ 0 & others\end{cases}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(L-1)/2}$$



Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)



DFT – BĐ tuyến tính

DFT	IDFT
$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k=0,1,\ldots,N-1$	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n=0,1,\ldots,N-1$

$$W_N=e^{-j2\pi/N}$$

Nghiệm thứ N của đơn vị

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$n=0,1,\ldots,N-1$$

DFT – BĐ tuyến tính

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Các mẫu miền thời gian

$$X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

Các mẫu miền tần số

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Ma trận BĐ tuyến tính

- BĐ DFT N điểm

$$X_N = W_N x_N$$

$$x_N = W_N^{-1} X_N$$

$$x_N = \tfrac{1}{N} W_N^* X_N$$

$$W_N^{-1} = \tfrac{1}{N} W_N^*$$

$$W_N W_N^* = N I_N$$

W_N là ma trận đường chéo

DFT – Quan hệ với các phép BĐ khác

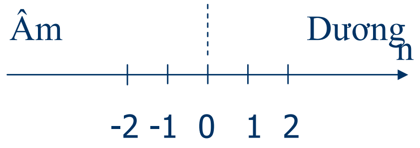
- Với hệ số Fourier của chuỗi chu kỳ

Chuỗi $\{x_p(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N		DFT N điểm của chuỗi x(n)
$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $-\infty \le n \le \infty$	$X(k) = Nc_k$	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n = 0,1,\ldots,N-1$
$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k = 0,1,\ldots,N-1$	DFT N điểm cho chính xác phổ vạch của chuỗi tuần hoàn chu kỳ N	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k = 0,1,\ldots,N-1$

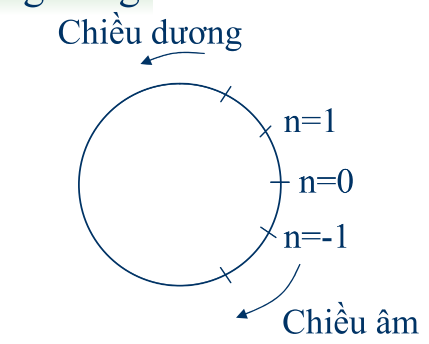
- Với BĐ Fourier của chuỗi không chu kỳ
  - DFT N điểm cho phổ vạch của chuỗi không chu kỳ x(n) nếu x(n) hữu hạn có độ dài L ≤ N
- SV xem thêm mối quan hệ giữa DFT và BĐ Z; giữa DFT và hệ số Fourier của t/h LTTG

DFT – Biểu diễn tín hiệu

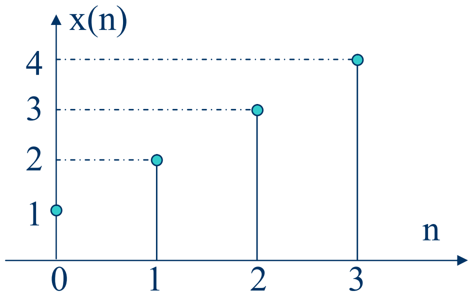
Dạng thẳng

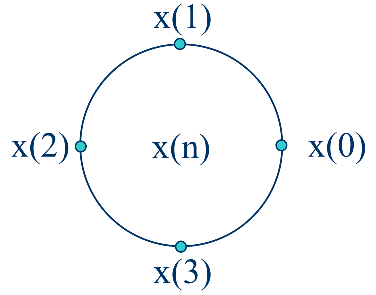


Dạng vòng



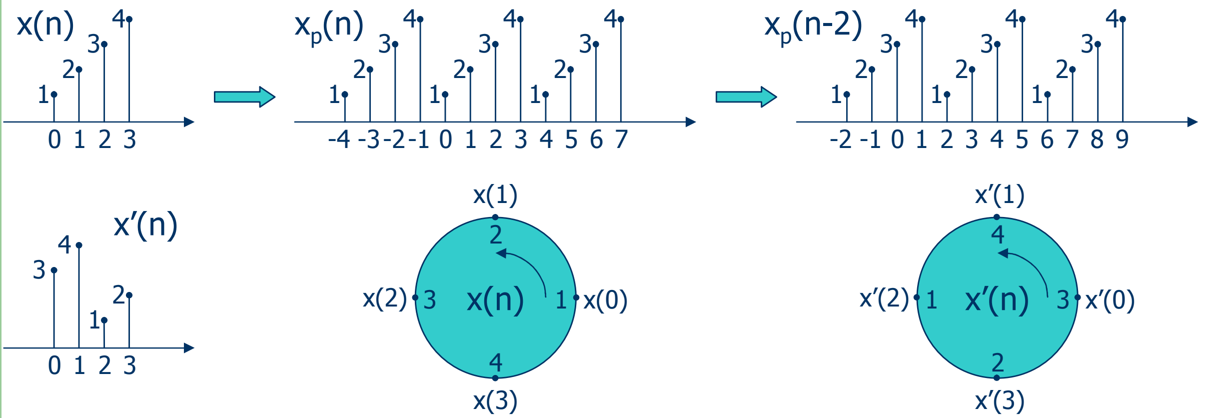
x(n) = {1 2 3 4}





DFT – Biểu diễn tín hiệu theo vòng

- Chuỗi tuần hoàn chu kỳ N, mở rộng từ x(n) $x_p(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$
- Chuỗi dịch $x_p(n)$ đi k mẫu $x_p^{'}(n) = x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN - k)$
- Chuỗi có chiều dài hữu hạn từ $x'_p(n)$ $x'(n) = \begin{cases} x_p^{'}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
- Quan hệ giữa x(n) và x'(n): dịch vòng x'(n) = x(n-k, MOD N) ≡ $x((n-k))_N$



DFT – Tính đối xứng vòng

- Phép dịch vòng của một chuỗi N điểm tương đương với phép dịch tuyến tính của chuỗi mở rộng tuần hoàn của nó
- Chuỗi N điểm là *chẵn* theo vòng nếu nó đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N-n) = x(n),\ 0 \le n \le N-1$
- Chuỗi N điểm là *lẻ* theo vòng nếu nó phản đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N-n) = -x(n),\ 0 \le n \le N-1$
- Đảo theo thời gian của chuỗi N điểm: đảo các mẫu của chuỗi quanh điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x((-n))_N = x(N-n),\ 0 \le n \le N-1$
  - Phép đảo được thực hiện bằng cách vẽ x(n) theo chiều kim đồng hồ

DFT – Tính đối xứng vòng

- Giả sử x(n) và BĐ DFT X(k) là t/h phức
  - $x(n) = x_R(n) + jx_I(n),\ 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_R(k) + jX_I(k),\ 0 \le k \le N-1$

$$\begin{cases} X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} + x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \\ X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} - x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_R(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} - X_I(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \\ x_I(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} + X_I(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \end{cases}$$

- Nếu x(n) thực: $X(N-k) = X^*(k) = X(-k)$

$$|X(N-k)| = |X(k)| \quad \text{và} \quad \angle X(N-k) = -\angle X(k)$$

- Nếu x(n) thực và chẵn: $x(n) = x(N-n) \rightarrow X_I(k) = 0$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thực và lẻ: $x(n) = -x(N-n) \rightarrow X_R(k) = 0$

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = j\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thuần ảo: $x(n) = jx_I(n)$

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}$$

DFT – Tính chất

- Tuần hoàn

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x(n) = x(n+N) & \forall n \\ X(k) = x(k+N) & \forall k \end{cases}$$

- Tuyến tính

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

- Tổng chập vòng

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(n) \, N \, x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k)X_2(k)$$

N Tổng chập vòng N điểm

$$x_1(n) \, N \, x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

DFT – Tổng chập vòng

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$x(m) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k) = X_1(k)X_2(k)$$

$$\begin{aligned} x(m) &= IDFT\{X(k)\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(m-n-l)} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases}$$

$$Trong\ do \qquad a = e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n-l)}$$

$$a = 1, khi: m-n-l = pN, p \in Z$$

$$a \neq 1 \Rightarrow a^N = e^{j2\pi(m-n-l)} = 1 \Rightarrow 1 - a^N = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & m-n-l = pN \Leftrightarrow l = ((m-n))_N \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N \qquad m = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

DFT – Tính chất

- Đảo theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x((-n))_N = x(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X((-k))_N = X(N-k)$$

- Dịch vòng theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x((n-l))_N \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)e^{-j2\pi kl/N}$$

- Dịch vòng theo tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x(n)e^{j2\pi nl/N} \xleftrightarrow{DFT_N} X((k-l))_N$$

- Liên hợp phức

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^*(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \\ x^*((-n))N = x^*(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*(k) \end{cases}$$

DFT – Tính chất

- Tương quan vòng

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \tilde{r}_{xy}(l) \xleftrightarrow{DFT_N} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

với

$$\tilde{r}_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))_N$$

- Nhân 2 chuỗi

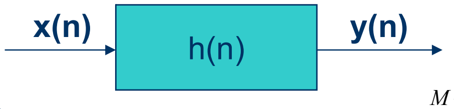
$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} \tfrac{1}{N} X_1(k)\, N\, X_2(k)$$

- Định lý Parseval

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

DFT – Lọc tuyến tính

- $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
  - Hàm liên tục theo tần số ω
  - Khó thực hiện trên các máy tính số
  - → DFT: một cách tính hiệu quả của tổng chập miền thời gian
- Lọc tuyến tính
  - Tín hiệu ngắn



x(n) chiều dài = L (n=0,1,…,L-1)
h(n) chiều dài = M (n=0,1,…,M-1)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

y(n) chiều dài N = M+L-1

Số mẫu phổ (tần số) cần thiết để biểu diễn duy nhất chuỗi y(n) ≥ L+M-1

Y(k) = H(k)X(k), k=0,1,…,N-1
H(k), X(k): DFT N điểm của h(n), x(n)
(các số 0 được đệm vào để tăng kích thước chuỗi lên N)

y(n) = IDFTN{Y(k)}

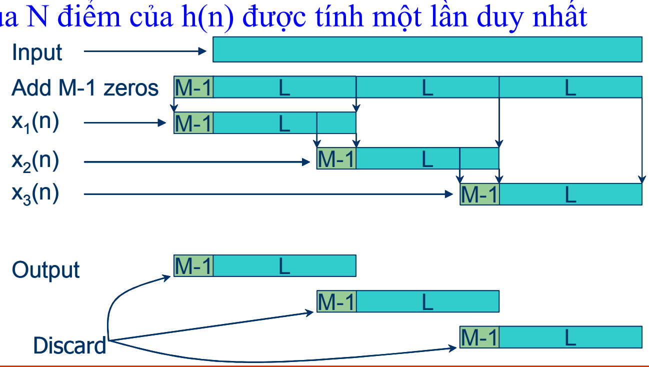
- Tổng chập vòng N điểm của h(n) và x(n) tương đương với tổng chập tuyến tính của h(n) với x(n).
- DFT có thể được dùng để lọc tuyến tính (bằng cách đệm thêm các số 0 vào chuỗi tương ứng)

DFT – Lọc tuyến tính

- Tín hiệu nhập dài: chia nhỏ x(n) thành từng block có độ dài cố định
  - Overlap-Save
  - Overlap-Add

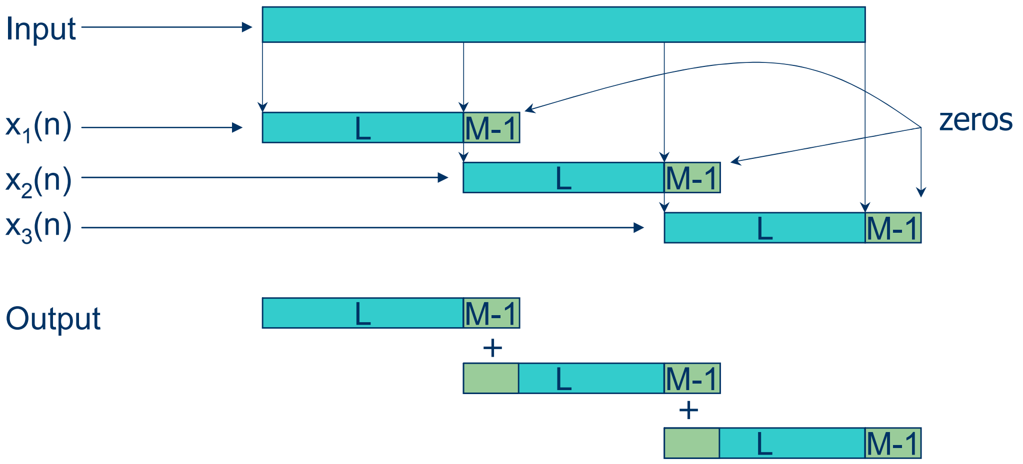
Bộ lọc có h(n): chiều dài M
T/h nhập x(n): được chia nhỏ thành từng block có chiều dài L >> M

- PP Overlap-Save
  - DFT_N và $IDFT_N$ với N = L+M-1
  - Mỗi block dữ liệu được xử lý bao gồm M-1 điểm của block trước và L điểm mới của t/h nhập
    - M-1 điểm của block đầu tiên được set bằng 0
  - Đáp ứng xung của bộ lọc được đệm thêm L-1 số 0 để tăng chiều dài lên N
    - DFT của N điểm của h(n) được tính một lần duy nhất



DFT – Lọc tuyến tính

- PP Overlap-Add
  - Đệm thêm M-1 số không vào mỗi block dữ liệu đầu vào



Phương pháp hiệu quả hơn dùng để xác định bộ lọc tuyến tính được trình bày trong chương 6

DFT – Phân tích tần số

- T/h ngắn
  - Tính DFT từ x(n)
- T/h dài
  - Cửa sổ hoá

x(n): t/h cần phân tích
Giới hạn chiều dài chuỗi một khoảng L mẫu
⇔ Nhân chuỗi với cửa sổ chiều dài L

$x_w(n) = x(n)w(n)$
w(n): hàm cửa sổ

Hàm cửa sổ có chiều dài L chỉ phân biệt được nếu các tần số cách nhau ít nhất một đoạn

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$$

Cửa sổ chữ nhật

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Cửa sổ Hanning

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{L-1}n\right) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

DFT – Phân tích tần số

- Ví dụ

$$x(n) = \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n \qquad w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\hat{X}(\omega) = \tfrac{1}{2}\left[W(\omega-\omega_1) + W(\omega-\omega_2) + W(\omega+\omega_1) + W(\omega+\omega_2)\right]$$

$\omega_1 = 0.2\pi$
$\omega_2 = 0.22\pi$

Rò rỉ công suất