BÀI GIẢNG XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Biên soạn: PGS.TS LÊ TIẾN THƯỜNG

Tp.HCM, 02-2005

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.1 Những tính chất cơ bản

5.2 Miền hội tụ

5.3 Nhân quả và sự ổn định

5.4 Phổ tần số

5.5 Biến đổi Z ngược

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.1 Những tính chất cơ bản

Biến đổi z là công cụ cơ bản để thiết kế, phân tích và biểu diễn của các bộ lọc số. Biến đổi z của tín hiệu rời rạc về thời gian x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n} \qquad \text{(biến đổi z)} \qquad (5.1.1)$$

hoặc dưới dạng các số hạng:

$$X(z) = \ldots + x(-2)z^{2} + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

Nếu tín hiệu x(n) là nhân quả thì chỉ luỹ thừa âm z^{-n}, $n \geq 0$ xuất hiện trong công thức khai triển.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Định nghĩa (5.1.1) có thể được áp dụng cho chuỗi đáp ứng xung h(n) của bộ lọc số. Biến đổi z của h(n) được gọi là hàm truyền của bộ lọc được định nghĩa:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(n) z^{-n} \quad \text{(hàm truyền)} \qquad (5.1.2)$$

Ví dụ 5.1.1: Xác định hàm truyền H(z) của hai bộ lọc nhân quả của ví dụ 3.4.3

(a) $h = \{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \{2,3,5,2\}$

(b) $h = \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\} = \{1,0,0,0,-1\}$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Giải:

Dùng định nghĩa (5.1.2), ta có:

$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} = 2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$

đối với câu a, và

$H(z) = h0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} = 1 - z^{-4}$

đối với câu b.

Có 3 tính chất của biến đổi z mà thuận lợi cho việc phân tích và tổng hợp của các hệ thống tuyến tính:

- Tính tuyến tính
- Tính trễ
- Tính chập

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tính tuyến tính: biến đổi z của tổ hợp tuyến tính các tín hiệu bằng tổ hợp tuyến tính của các biến đổi z đó.

$$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\xrightarrow{Z}a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \qquad \textbf{(5.1.3)}$$

Tính trễ: trễ tín hiệu bởi D mẫu sẽ tương đương với tích biến đổi z của nó với hệ số z-D.

$$x(n)\xrightarrow{Z}X(z)\Rightarrow x(n-D)\xrightarrow{Z}z^{-D}X(z) \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

Tính chập: chập trong miền thời gian trở thành tích trong miền z.

$$y(n)=h(n)*x(n)\Rightarrow Y(z)=X(z)H(z) \qquad \textbf{(5.1.5)}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.1.2: Hai bộ lọc của ví dụ trên và của ví dụ 3.4.3 có thể được viết dưới dạng "đóng" sau:

(a) h(n) = 2δ(n) + 3δ(n-1) + 5δ(n-2) + 2δ(n-3)

(b) h(n) = δ(n) - δ(n-4)

Hàm truyền có thể đạt được bằng cách dùng tính trễ và tính tuyến tính như sau:

Trước hết, chú ý biến đổi z của δ(n) là 1.

$$\delta(n) \xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^{-0} = 1$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.1.2:

Kế đó, từ tính trễ ta có

$$\delta(n-1) \xrightarrow{Z} z^{-1}.1 = z^{-1},$$

$$\delta(n-2) \xrightarrow{Z} z^{-2}.1 = z^{-2},$$

$$\delta(n-3) \xrightarrow{Z} z^{-3}.1 = z^{-3},\ldots$$

Dùng tính tuyến tính, chúng ta có:

$$2\delta(n)+3\delta(n-1)+5\delta(n-2)+2\delta(n-3) \xrightarrow{Z} 2+3z^{-1}+5z^{-2}+2z^{-3}$$

đối với (a), và

$$h(n)=\delta(n)-\delta(n-4) \xrightarrow{Z} H(z)=1-z^{-4}$$

đối với (b).

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.1.3: Dùng u(n)-u(n-1)=δ(n), đối với mọi n, và tính chất biến đổi z. Hãy xác định biến đổi z của 2 tín hiệu.

(a) x(n) = u(n) **(b) x(n) = -u(-n-1)**

Giải:

Đối với (a), chúng ta có phương trình vi phân

$$x(n) - x(n-1) = u(n) - u(n-1) = \delta(n)$$

Lấy biến đổi z hai vế và dùng tính trễ và tính tuyến tính, ta có:

$$x(n) - x(n-1) = \delta(n) \xrightarrow{Z} X(z) - z^{-1}X(z) = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.1.3:

Tương tự: đối với (b), chúng ta có phương trình vi phân

x(n)-x(n-1)=-u(-n-1)+u(-(n-1)-1)= u(-n)-u(-n-1)=δ(-n)

Phương trình cuối cùng, chúng ta dùng định nghĩa cho trước bằng cách thay n bằng –n. Chú ý δ(-n)= δ(n) và lấy biến đổi z hai vế, ta có

$$x(n)-x(n-1)=\delta(-n)\xrightarrow{Z}X(z)-z^{-1}X(z)=1\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Vì thế mặc dù hai tín hiệu u(n) và –u(-n-1) là hoàn toàn khác nhau trong miền thời gian (một nhân quả và một phản nhân quả) nhưng biến đổi z của chúng giống nhau.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.1.4: Tính ngõ ra của ví dụ 4.1.1 bằng cách thực hiện tính chập như là phép nhân trong miền z.

Giải:

Hai chuỗi h={1,2,-1,1}, x={1,1,2,1,2,2,1,1} có biến đổi z:

$$H(z)= 1 + 2z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}$$

$$X(z)= 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} + z^{-7}$$

Nhân hai đa thức, ta có tích Y(z) = X(z)H(z)

$$Y(z)= 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4} + 7z^{-5} + 4z^{-6} + 3z^{-7} + 3z^{-8} +z^{-10}$$

Hệ số lũy thừa của z là những mẫu chập ngõ ra:

y=h*x={1, 3, 3, 5, 3, 7, 4, 3, 3, 3, 0, 1}

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.2 Miền hội tụ

Miền hội tụ ROC của X(z) là tập con của mặt phẳng phức z mà các chuỗi (5.1.1) hội tụ, nghĩa là

$$ROC = \left\{ z \in C \,\middle|\, X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n} \neq \infty \right\} \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

Miền hội tụ là một khái niệm quan trọng về nhiều phương diện: nó cho biến đổi ngược duy nhất của biến đổi z và cho các đặc tính tiện lợi của tính chất nhân quả và ổn định của tín hiệu hay hệ thống.

Miền hội tụ phụ thuộc vào tín hiệu x(n) cần biến đổi.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ, xét tín hiệu nhân quả sau:

$$x(n)=(0.5)^n u(n)=\{1,0.5,0.5^2,...\}$$

Biến đổi z là

Ở đây, tổng bị giới hạn với n ≥ 0 vì x(n) nhân quả. Dùng công thức chuỗi hình học vô hạn để tính tổng vô hạn:

$$1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (5.2.2)$$

Mà hội tụ với $|x| < 1$ và ngược lại thì phân kỳ.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Cho x = 0.5z^{-1}, ta có tổng

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(0.5z^{-1}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$ hoặc

$$X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}=\frac{z}{z-0.5}$$

Điều kiện để hội tụ chuỗi hình học là:

$$|x|=\left|0.5z^{-1}\right|<1\Rightarrow |z|>0.5$$

Vì thế, miền hội tụ là tập của các z trong miền z mà nằm ngoài vòng tròn bán kính 0.5.

ROC={z∈C||z|>0.5}

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Chú ý, biến đổi z có cực tại z=0.5. Tóm lại, ta có:

$$(0.5)^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \quad \text{với } |z| > 0.5$$

Biến đổi z và ROC của nó được xác định duy nhất bởi tín hiệu thời gian x(n). Tuy nhiên cũng có thể có hai tín hiệu có cùng biến đổi z như ví dụ 5.1.3. Các tín hiệu như thế chỉ có thể phân biệt trong miền z bởi ROC của chúng. Ví dụ xét tín hiệu phản nhân quả $x(n)=-(0.5)^n u(-n-1)$

Biến đổi z sẽ là:

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left((0.5)^{-1} z\right)^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left((0.5)^{-1} z\right)^{m}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ở đây chúng ta chuyển các biến tổng từ n thành m=-n. Để tính tổng chúng ta dùng:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} x^m = \frac{x}{1-x}$$

Mà hội tụ với |x| < 1 và ngược lại thì phân kỳ. Cho x=0.5z^{-1}, ta có

$$X(z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\left((0.5)^{-1} z\right)^m = -\sum_{m=1}^{\infty} x^m = -\frac{x}{1-x} = -\frac{0.5^{-1} z}{1-0.5^{-1} z} \quad \text{hoặc}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

Mà giống như ví dụ nhân quả trên.

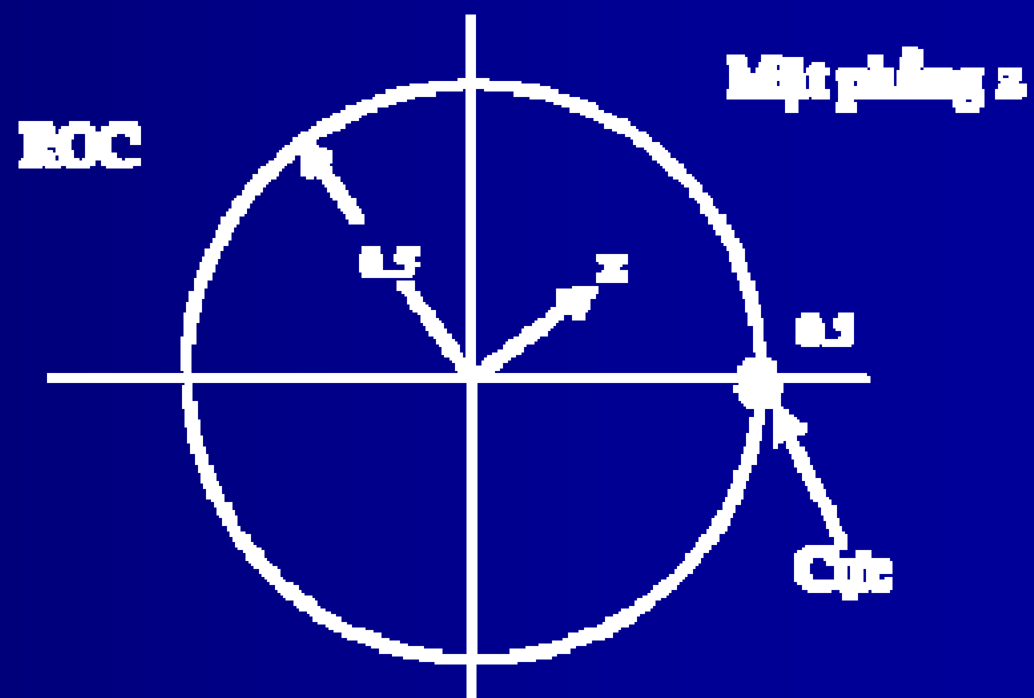
CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tuy nhiên, ROC trong trường hợp này thì khác. Nó được xác định từ điều kiện hội tụ của chuỗi

$$|x| = |0.5^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < 0.5$$

là tập của các z bên trong vòng tròn bán kính 0.5.

$$ROC = \{z \in C \| z| < 0.5\}$$



CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tóm lại, chúng ta có biến đổi z:

$$(0.5)^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \text{ với } |z| > 0.5$$

$$-(0.5)^n u(-n-1) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \text{ với } |z| < 0.5$$

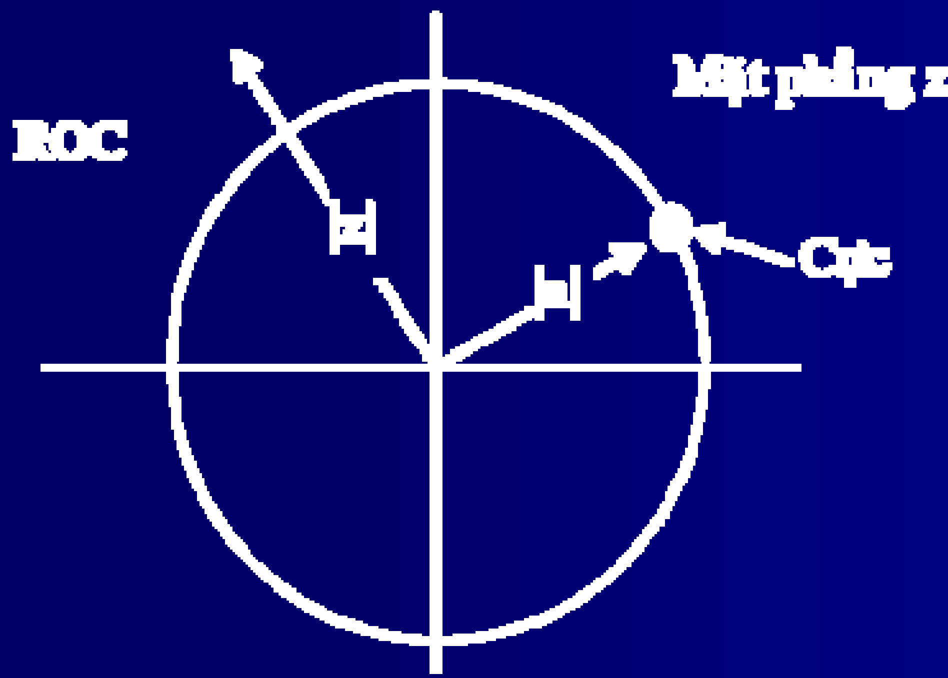
Hai tín hiệu có cùng biến đổi z nhưng ROC thì hoàn toàn khác nhau. Tổng quát, chúng ta có các kết quả sau:

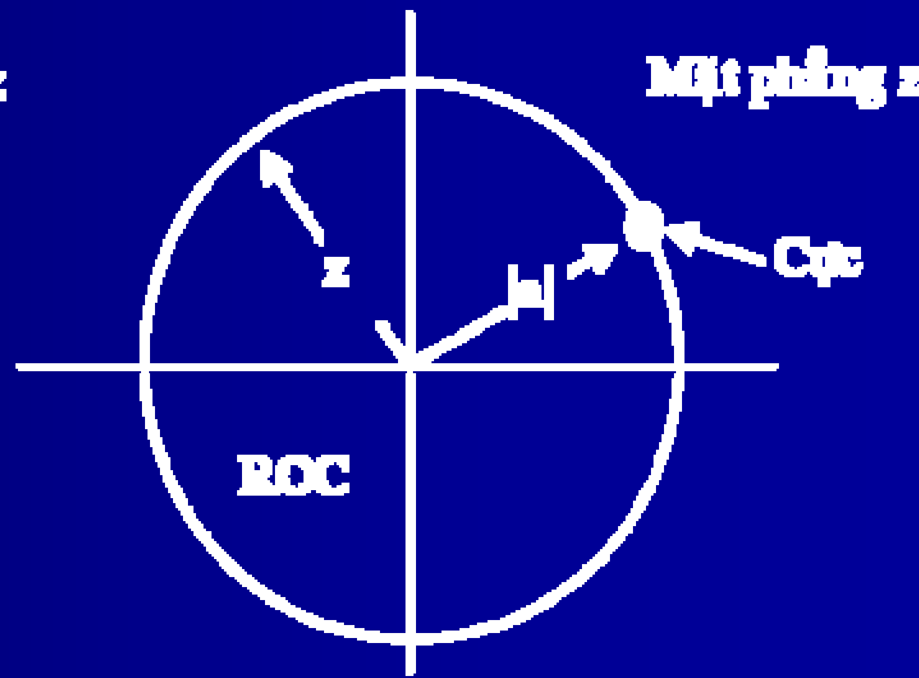
$$a^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ với } |z| > |a|$$

$$-a^n u(-n-1) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ với } |z| < |a| \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ở đây a là số phức bất kỳ. ROC của chúng như sau:





Biến đổi z (5.2.3) cùng với tính tuyến tính và tính trễ có thể xây dựng nhiều biến đổi phức tạp hơn.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.2.1: cho a= ±1 trong (5.2.3), chúng ta có biến đổi z của tín hiệu bước nhân quả, phản nhân quả và các tín hiệu bước khác:

$$u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{với} \quad |z| > 1$$

$$-u(-n-1) \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{với} \quad |z| < 1$$

$$(-1)^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1+z^{-1}}, \quad \text{với} \quad |z| > 1$$

$$-(-1)^n u(-n-1) \xrightarrow{z} \frac{1}{1+z^{-1}}, \quad \text{với} \quad |z| < 1$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.2.2: Xác định biến đổi z và ROC tương ứng

1. $x(n) = u(n\text{-}10)$

2. $x(n) = (\text{-}0.8)^n u(n)$

3. $x(n) = (\text{-}0.8)^n \left[u(n)\text{-}\ u(n\text{-}10)\right]$

4. $x(n) = \dfrac{1}{2}\left[u(n) + \left(-1\right)^n u(n)\right] = \left\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\right\}$

5. $x(n) = \dfrac{1}{2}\left[(0.8)^n u(n) + (\text{-}0.8)^n u(n)\right]$

6. $x(n) = \cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right) u\left(n\right) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.2.2: xác định biến đổi z và ROC tương ứng

$$7.\ x(n) = (0.8)^{\mathrm{n}} \cos\left(\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\right) \mathrm{u(n)}$$

$$8.\ \mathrm{x(n)} = \frac{1}{2}\left[(0.8\mathrm{j})^{\mathrm{n}}\mathrm{u(n)} + (-0.8\mathrm{j})^{\mathrm{n}}\mathrm{u(n)}\right]$$

$$9.\ x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n) \quad \text{và} \quad x(n) = \sin(\omega_0 n)u(n)$$

$$10.\ x(n) = \{1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots\}, \text{ lặp lại tuần hoàn } \{1,2,3\}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Giải:

(1) Dùng tính chất trễ, chúng ta có:

$$X(z) = z^{-10}U(z) = \frac{z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

với ROC |z| > 1.

(2) Dùng (5.2.3) với a = -0.8

$$X(z) = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1}}, \text{ với ROC} : |z| > |-0.8| = 0.8$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

(3) $x(n) = (-0.8)^n u(n) - (-0.8)^{10}(-0.8)^{n-10} u(n-10))$

Ở số hạng thứ hai, chúng ta nhân & chia cho hệ số $(-0.8)^{10}$ để tạo lại phiên bản trễ 10 đơn vị của số hạng thứ nhất. Vì thế dùng tính trễ và tuyến tính và kết quả của trường hợp (2), ta có:

$$X(z) = \frac{1}{1+0.8z^{-1}} - (-0.8)^{10} \frac{z^{-10}}{1+0.8z^{-1}} = \frac{1-(-0.8)^{10} z^{-10}}{1+0.8z^{-1}}$$

Cho a=-0.8, ta có:

$x(n)=a^n[u(n)-u(n-10)]=\{1,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7,a^8,a^9,0,0,0,...\}$

Vì thế, biến đổi z có thể được tính bởi tổng hữu hạn:

$$X(z)=1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + ... + a^9z^{-9}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Sử dụng chuỗi hình học vô hạn

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

Lấy tổng các chuỗi trên

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots + a^9 z^{-9} = \frac{1 - a^{10} z^{-10}}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - (-0.8)^{10} z^{-10}}{1 + 0.8z^{-1}}$$

(4) Sử dụng tính tuyến tính và (5.2.3) với a=1 và a=-1:

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}}\right] = \frac{1}{1 - z^{-2}}$$

với ROC |z| > 1.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Có thể đạt được cùng kết quả khi dùng (5.1.1) và tổng các chuỗi: $X(z) = 1 + 0z^{-1} + z^{-2} + 0z^{-3} + z^{-4} + \ldots = 1 + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6} + \ldots$ là một chuỗi hình học vô hạn có dạng như (5.2.2) với $x = z^{-2}$.

Vì thế

$$X(z) = \left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=z^{-2}} = \frac{1}{1-z^{-2}}$$

Để chuỗi hội tụ thì $|x| = |z^2| < 1$ hay $|z| > 1$.

(5) Sử dụng tính tuyến tính và (5.2.3):

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0.8z^{-1}} + \frac{1}{1+0.8z^{-1}}\right] = \frac{1}{1-0.64z^{-2}}$$

với ROC $|z| > 0.8$.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

(6) Có thể tìm trực tiếp bằng định nghĩa (5.1.1):

$$X(z)=1 - z^{-2}+z^{-4}-z^{-6}+z^{-8}+...=1+x+x^2+x^3+x^4+...$$

Với $x=-z^{-2}$. Chuỗi này sẽ hội tụ thành $X(z)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+z^{-2}}$

với $|x|=|z^{-2}|<1$ hay $|z|>1$. Sử dụng công thức Euler để tách hàm cos thành các tín hiệu lũy thừa dạng (5.2.3):

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)=\frac{1}{2}\left[e^{j\pi n/2}u(n)+e^{-j\pi n/2}u(n)\right]=\frac{1}{2}\left[a^n u(n)+a^{*n}u(n)\right]$$

trong đó a=ejπ/2=j và a*=e-jπ/2=-j. Do đó:

$$X(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-jz^{-1}}+\frac{1}{1+jz^{-1}}\right]=\frac{1}{1+z^{-2}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

(7) Dùng công thức Euler như trên, ta có:

$$x(n) = (0.8)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n) = \frac{1}{2}\left[(0.8)^n e^{j\pi n/2}u(n) + (0.8)^n e^{-j\pi n/2}u(n)\right]$$

mà có thể viết như tín hiệu trường hợp (8):

$$x(n) = \frac{1}{2}\left[(0.8j)^n u(n) + (-0.8j)^n u(n)\right]$$

Vì thế, (7) và (8) là giống nhau. Sử dụng a=±0.8j ở (5.2.3) ta tìm được biến đổi z của chúng:

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0.8jz^{-1}} + \frac{1}{1+0.8jz^{-1}}\right] = \frac{1}{1+0.64z^{-2}}$$

với ROC $|z| > |0.8j| = 0.8$.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

(9) Biến đổi tương tự, ta có:

$$\cos(\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

Rút gọn lại: $X(z) = \dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$

Thay ω_0=π/2, chúng ta có tương tự trường hợp (6). Tương tự, đối với dạng sin

$$\sin(\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right]u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

Rút gọn lại:

$$X(z) = \frac{1-\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

(10) Dùng định nghĩa (5.1.1) và nhóm các số hạng, ta có:

$$X(z) = \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right) + \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)z^{-3} + \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)z^{-6} + \ldots$$

$$= \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)\left(1 + z^{-3} + z^{-6} + z^{-9} + \ldots\right) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-3}}$$

Chuỗi hội tụ khi $|z^{-3}| < 1$ hay $|z| > 1$. Một cách khác là làm trễ x(n) 3 đơn vị thời gian x(n-3) = {0,0,0,1,2,3,1,2,3,...} và tính x(n)-x(n-3)={1,2,3,0,0,0,0,0...}=δ(n)+ 2δ(n-1)+3δ(n-2)

Kế đó, lấy biến đổi z hai vế, ta có:

$$X(z) - z^{-3}X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \Rightarrow X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-3}}$$

Phương pháp này có thể được tổng quát hóa cho chuỗi tuần hoàn bất kỳ.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.3 Nhân quả và sự ổn định

Kết quả cơ bản (5.2.3) có thể suy ra tính nhân quả và ổn định ở miền z. Tính hiệu nhân quả dạng

$$x(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_2 p_2^n u(n) + \ldots \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

sẽ có biến đổi z

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots \qquad \textbf{(5.3.2)}$$

với ràng buộc $|z| > |p_1|, |z| > |p_2|$ **,... Vì vậy, ROC chung của tất cả các số hạng sẽ là:**

$$|z| > \max_i |p_i| \qquad \textbf{(5.3.3)}$$

nghĩa là bên ngoài vòng tròn xác định bởi cực có biên độ lớn nhất.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tương tự nếu tín hiệu là hoàn toàn phản nhân quả

$$x(n) = -A_1 p_1^n u(-n-1) - A_2 p_2^n u(-n-1) - \ldots \qquad \textbf{(5.3.4)}$$

Biến đổi z của nó giống như (5.2.3) nhưng ràng buộc ROC sẽ là $|z| < |p_1|, |z| < |p_2|$ **,... Vì thế, ROC trong trường hợp này là:**

$$|z| < \min_i |p_i| \qquad \textbf{(5.3.3)}$$

nghĩa là, bên ngoài vòng tròn xác định bởi cực có biên độ nhỏ nhất. ROC của hai trường hợp này biểu diễn ở hình 5.3.1.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tóm lại, tín hiệu nhân quả có ROC nằm ngòai vòng tròn cực lớn nhất và tín hiệu phản nhân quả có ROC nằm trong vòng tròn cực nhỏ nhất. Nếu tín hiệu là tổ hợp nhân quả và phản nhân quả sẽ có ROC là miền giữa hai vòng tròn với các cực nằm trong vòng tròn nội có phân bố nhân quả và các cực nằm ngòai vòng tròn ngọai có phân bố phản nhân quả.

Sự ổn định có thể được diễn tả trong miền z theo các số hạng có lựa chọn của ROC. Điều kiện cần và đủ để tín hiệu x(n) ổn định là ROC của biến đổi z tương ứng chứa vòng tròn đơn vị. Đối với hệ thống h(n), điều kiện này tương đương với điều kiện (3.5.4) được trình bày ở chương 3.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Sự ổn định thì không cần phải đi kèm với tính nhân quả. Đối với một tín hiệu hay hệ thống ổn định và nhân quả, điều cần thiết là tất cả các cực của nó nằm trong vòng tròn đơn vị ở miền z. Điều này suy ra từ (5.3.3) là điều kiện hội tụ của tín hiệu nhân quả. Nếu ROC này tương ứng với tín hiệu ổn định thì nó phải chứa vòng tròn đơn vị. Mặt khác, chúng ta cho $|z|=1$ trong (5.3.3): $I > \max |p_i|$, nghĩa là tất cả các cực phải có biên độ nhỏ hơn 1. Một tín hiệu hay hệ thống cũng có thể ổn định và phản nhân quả nhưng trong trường hợp này các cực phải nằm ngòai vòng tròn đơn vị. Thật ra, điều kiện phản nhân quả ở (5.3.5) với điều kiện ổn định mà ROC chứa các điểm $|z|=1$, ngầm hiểu $I < \min|p_i|$, nghĩa là tất cả các cực phải có biên độ nhỏ hơn 1.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

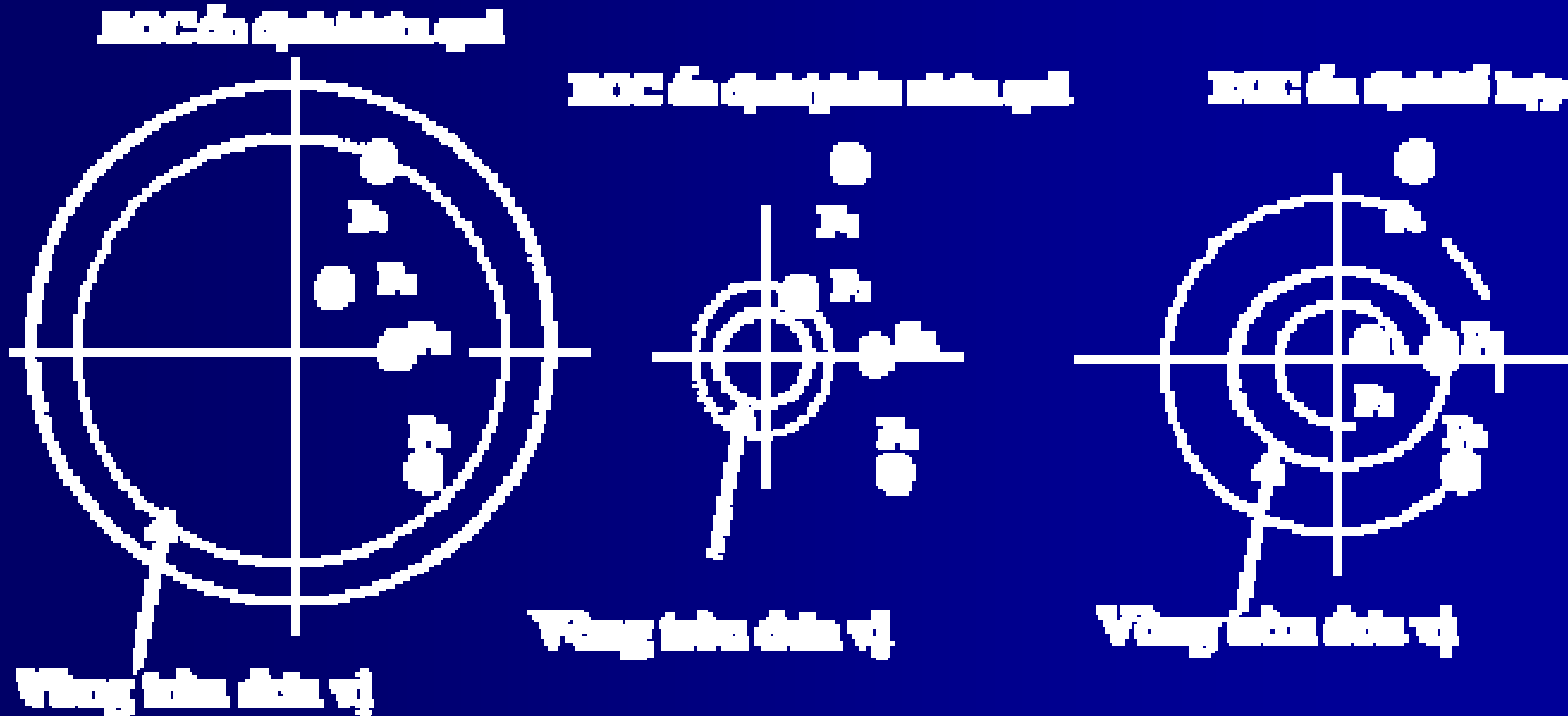
Nếu một số cực có biên độ nhỏ hơn 1 và một số lớn hơn 1 thì tín hiệu có thể ổn định nhưng sẽ là lọai tổ hợp.

Những cực mà nằm trong vòng tròn đơn vị sẽ có phân bố nhân quả và nằm ngoài vòng tròn đơn vị sẽ có phân bố phản nhân quả.

Hình 5.3.2 minh họa 3 trường hợp ổn định có thể. Trong tất cả trường hợp, biến đổi z có cùng dạng

$$X(z)=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\frac{A_3}{1-p_3z^{-1}}+\frac{A_4}{1-p_4z^{-1}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Hình 5.3.2 ROC ổn định

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Trong trường hợp ổn định và nhân quả, tất cả cực phải có biên độ nhỏ hơn 1, nghĩa là $|p_i| < 1$, i=1, 2, 3, 4 và tín hiệu x(n) sẽ là $x(n) = \left[A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + A_3 p_3^n + A_4 p_4^n\right] u(n)$

Với tất cả các số hạng hội tụ về 0 khi n là dương lớn. Trong trường hợp ổn định/phản nhân quả, tất cả các cực có biên độ lớn hơn 1, $|p_i| > 1$, i=1, 2, 3, 4 và x(n) sẽ là

$$x(n) = -\left[A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + A_3 p_3^n + A_4 p_4^n\right] u(-n-1)$$

trong đó, n < 0 nên mỗi số hạng sẽ tiến về 0 khi n âm lớn. Ta có thể viết lại một số hạng

$$-A_1 p_1^n u(-n-1) = -A_1 p_1^{-|n|} u(-n-1) = -A_1 \left(\frac{1}{p_1}\right)^{|n|} u(-n-1)$$

với n = -$|n|$ khi n<0. Vì $|p_1|$>1 nên $|1/p_i|$< 1 và các lũy thừa liên tiếp của nó sẽ tiến về 0.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Trong trường hợp tổ hợp, chúng ta có $|p_1| < |p_2| < 1$ và $|p_3| > |p_4| > 1$. Do đó, tín hiệu ổn định sẽ là

$$x(n) = \left[A_1 p_1^n + A_2 p_2^n\right]u(n) - \left[A_3 p_3^n + A_4 p_4^n\right]u(-n-1)$$

với p_1, p_2 phân bố nhân quả và p_3, p_4 phân bố phản nhân quả. Ví dụ về một tín hiệu ổn định nhưng không phải là tổ hợp chính là trường hợp (2) trong ví dụ 5.2.3

$$x(n)=(0.8)^n u(n)-(1.25)^n u(-n-1)$$

Như được nhấn mạnh trong chương 3, tính ổn định quan trọng hơn tính nhân quả để tránh việc tính toán không hội tụ. Tính nhân quả có thể được hòa hợp một cách chính xác nếu tất cả các cực nằm trong vòng tròn đơn vị nhưng chỉ sắp xỉ nếu một số cực nằm ngoài. Chúng tôi sẽ trình bày điều này sau.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Một lớp tín hiệu quan trọng là các tín hiệu ổn định biên mà không hội tụ cũng không phân kỳ về 0 khi nhân quả lớn. Dĩ nhiên chúng bị bao. Các tín hiệu bước đơn vị, bước đơn vị thay đổi và sin tổng quát hơn thuộc lớp này. Các tín hiệu như thế có cực nhưng trên vòng tròn đơn vị.

Một số ví dụ là trường hợp (1, 4, 6, 9, 10) của ví dụ 5.2.2. Một ví dụ đơn giản hơn là trường hợp của tín hiệu sin phức tần số ω_0

(nhân quả) $x(n)=e^{j\omega_0 n}u(n)$

(phản nhân quả) $x(n)= -e^{j\omega_0 n}u(-n-1)$

mà là trường hợp đặc biệt của (5.2.3) với $a = e^{j\omega_0}$.

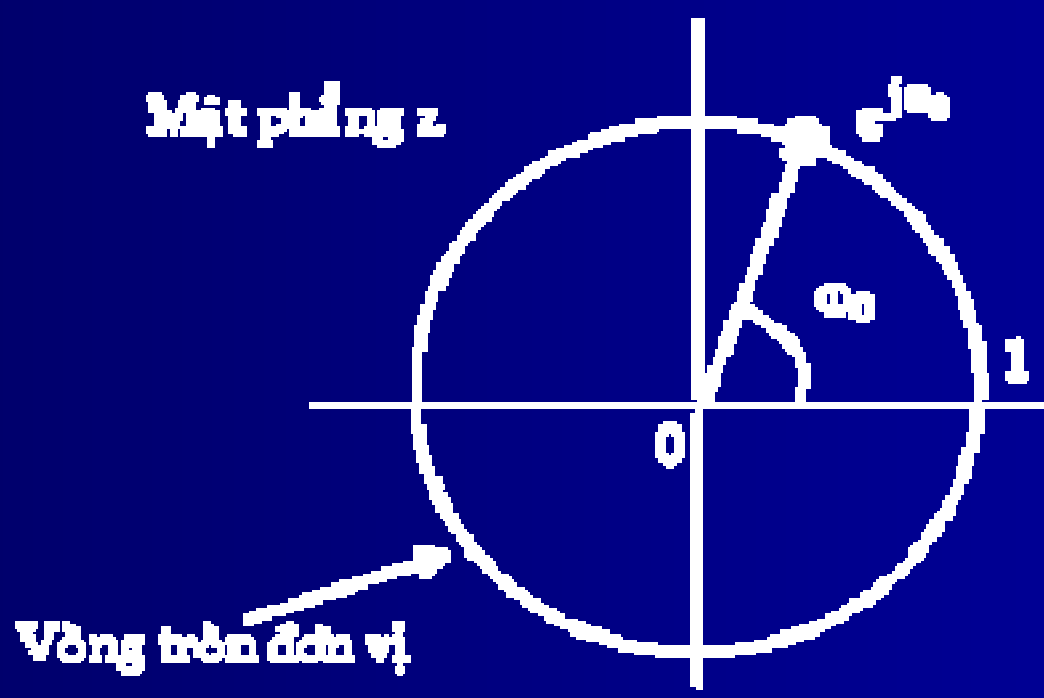
CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Chú ý là bước đơn vị phẳng u(n) và bước đơn vị thay đổi $(-1)^n u(n)$ cũng là các trường hợp đặc biệt với $\omega_0 = 0$ và $\omega_0 = \pi$. Biến đổi z tương ứng suy ra từ (5.2.3):

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$$

với ROC là $|z| > 1$ đối với tín hiệu nhân quả hoặc $|z| < 1$ đối với tín hiệu phản nhân quả.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.4 Phổ tần số

Phổ tần số hay biến đổi Fourier thời gian rời rạc (DTFT) của tín hiệu x(n) được định nghĩa là:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \textbf{(DTFT)} \qquad \textbf{(5.4.1)}$$

Đây chính là biến đổi z trên vòng tròn đơn vị, nghĩa là các điểm z: $z = e^{j\omega_0}$ **(5.4.2)**

Thật vậy, ta có: $X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) e^{-j\omega} = X(\omega)$

Đáp ứng tần số H(ω) của hệ thống h(n) với hàm truyền H(z) được định nghĩa:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(n) e^{-j\omega n} \qquad \textbf{(Đáp ứng tần số)} \qquad \textbf{(5.4.3)}$$

Nó cũng được suy ra từ biến đổi z trên vòng tròn đơn vị:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

Như đã trình bày trong chương 1, tần số số (rad/ sample) có quan hệ với tần số f(Hz) như sau:

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$$ **(Tần số số) (5.4.4)**

Khoảng Nyquist [-f_s/2, f_s/2] là khoảng tính theo đơn vị ω: -π < ω < π (khoảng Nyquist) (5.4.5)

Trong chương 1, đại lượng X(ω) được biểu diễn bởi:

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{2\pi jfn/f_s}$$

Đây là phổ tần Fourier của tín hiệu x(nT) và được tính bằng cách lặp lại tuần hòan phổ tần tín hiệu tương tự gốc tại bội số f_s.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Theo đơn vị ω, sự tuần hoàn của f với chu kỳ f_s trở thành sự tuần hoàn của ω với chu kỳ 2π. Vì vậy, X(ω) chỉ xét trong một chu kỳ, ví dụ như khoảng Nyquist (5.4.5).

DTFT ngược khôi phục chuỗi thời gian x(n) từ phổ của nó X(ω) qua khoảng Nyquist:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega n}d\omega \quad \text{(DTFT ngược)} \qquad (5.4.6)$$

x(n) được biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của các sin $e^{j\omega n}$ rời rạc thời gian có những tần số khác nhau. Biên độ và pha của các thành phần sin này được cho bởi DTFT X(ω). (5.4.6) có thể được chứng minh nhanh bằng cách xem (5.4.1) là khai triển chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn X(ω). Kế đó, (5.4.6) sẽ cho các hệ số khai triển chuỗi Fourier. DTFT ngược tính theo các số hạng tần số f(Hz):

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$x(n) = \frac{1}{f_S} \int_{-f_S}^{f_S} X(f) e^{2\pi j f n / f_S} df$$

Ví dụ: tín hiệu sin phức tần số ω_0:

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}, \quad -\infty < n < \infty$$

sẽ có DTFT là: X(ω) = 2πδ(ω - ω_0) + (lặp lại Nyquist)

trong đó, số hạng "lặp lại Nyquist" chính là sự lặp lại tuần hoàn của số hạng thứ nhất ở các khoảng 2π. Điều này là cần thiết để X(ω) tuần hoàn chu kỳ 2π. Chính xác hơn, biểu thức đầy đủ là:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Để chứng minh, chúng ta chèn nó vào DTFT ngược và khôi phục tín hiệu sin cho trước. Điều này đã được trình bày ở chương 1 (ví dụ 1.5.1). Giả sử ω_0 nằm trong khoảng Nyquist [-π, π] thì giới hạn của X(ω) sẽ được xác định bởi số hạng miền z = 0, nghĩa là:

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),\ -\pi < \omega < \pi$$

Do đó, (5.4.6) cho $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n}$

Tương tự, tổ hợp tuyến tính của hai tín hiệu sin, ta có:

$$x(n) = A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n} \rightarrow X(\omega) = 2\pi A_1\delta(\omega-\omega_1) + 2\pi A_2\delta(\omega-\omega_2)$$

Điều này có thể được chứng minh tương tự, nếu chúng ta giả sử cả ω_1 và ω_2 cùng nằm trong khoảng Nyquist. Cụ thể, đối tín hiệu sin và cos thực, ta có:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$\cos(\omega_0 n) \longrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

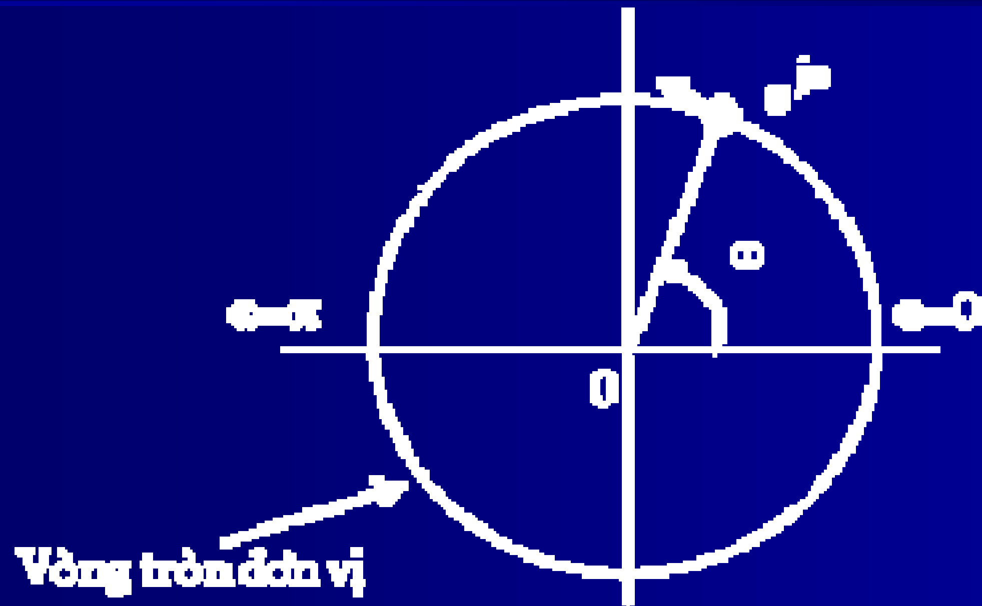
$$\sin(\omega_0 n) \longrightarrow -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Một quan hệ hữu ích khác là đẳng thức Parseval (quan hệ giữa năng lượng của một chuỗi với phổ của nó):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \qquad \textbf{(Parseval)} \qquad \textbf{(5.4.7)}$$

DTFT có thể biểu diễn hình học bằng cách nhận ra rằng những điểm $z = e^{j\omega}$ nằm trên vòng tròn đơn vị trong miền z. Khi ω thay đổi qua khoảng Nyquist $[-\pi, \pi]$ thì điểm $z = e^{j\omega}$ di chuyển xung quanh vòng tròn đơn vị như hình 5.4.1. Gốc pha của z là ω.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Hình 5.4.1 Dự đoán biến đổi z trên vòng tròn đơn vị.

Để phổ X(ω) tồn tại, ROC của X(z) phải chứa vòng tròn đơn vị, ngược lại biến đổi z sẽ phân kỳ tại những điểm trên vòng tròn đơn vị $z = e^{j\omega}$. Nhưng nếu ROC chứa vòng tròn đơn vị thì tín hiệu x(n) phải ổn định. Do đó, biến đổi Fourier X(ω) chỉ tồn tại đối với các tín hiệu ổn định.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Những tín hiệu ổn định biên chẳng hạn sin, nói một cách chính xác sẽ không có phổ nhưng các cực nằm trên vòng tròn đơn vị và vì thế tính X(z) trên vòng tròn đơn vị sẽ làm X(z) phân kỳ ở những điểm z nào đó. Tuy nhiên, điều này lại hữu ích khi xét phổ của chúng. Ví dụ, đối với tín hiệu sin phức của các phần trước, chúng ta có:

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}u(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$$

và do đó, thay thế z = $e^{j\omega}$ cho

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)}}$$

mà phân kỳ tại $\omega = \omega_0$. Tuy nhiên, đây là điều mong muốn bởi vì nếu tín hiệu là thuần sin x(n) = $e^{j\omega_0 n}$ thì phổ của nó sẽ là một đường tập tại $\omega = \omega_0$, nghĩa là $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (với lặp lại Nyquist). Tuy nhiên, tín hiệu không phải thuần sin mà là nhân quả, một phiên bản triệt tiêu của thuần sin và vì thế các tần số hài sẽ hiện diện. Tuy nhiên, tần số chính vẫn là ω_0.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Dạng cực/zero của biến đổi z X(z) hay H(z), nghĩa là vị trí hình học tương đối của các cực và zero trong mặt phẳng z, sẽ ảnh hưởng đến dạng phổ của X(ω) hay H(ω). Để hiểu rỏ vấn đề này, xét một biến đổi z đơn giản có một cực $z = p_1$ và một zero $z = z_1$.

$$X(z) = \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} = \frac{z - z_1}{z - p_1}$$

Phổ tương ứng và biện độ của nó tìm được bằng cách thay z bởi $e^{j\omega}$.

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - z_1}{e^{j\omega} - p_1} \Rightarrow |X(\omega)| = \frac{|e^{j\omega} - z_1|}{|e^{j\omega} - p_1|}$$

Hình 5.4.2 cho thấy vị trí tương đối của các điểm cố định z_1, p_1 và các điểm di động $z = e^{j\omega}$. Đồ thị $|X(\omega)|$ dựa trên dạng cực/zero cũng được biểu diễn.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

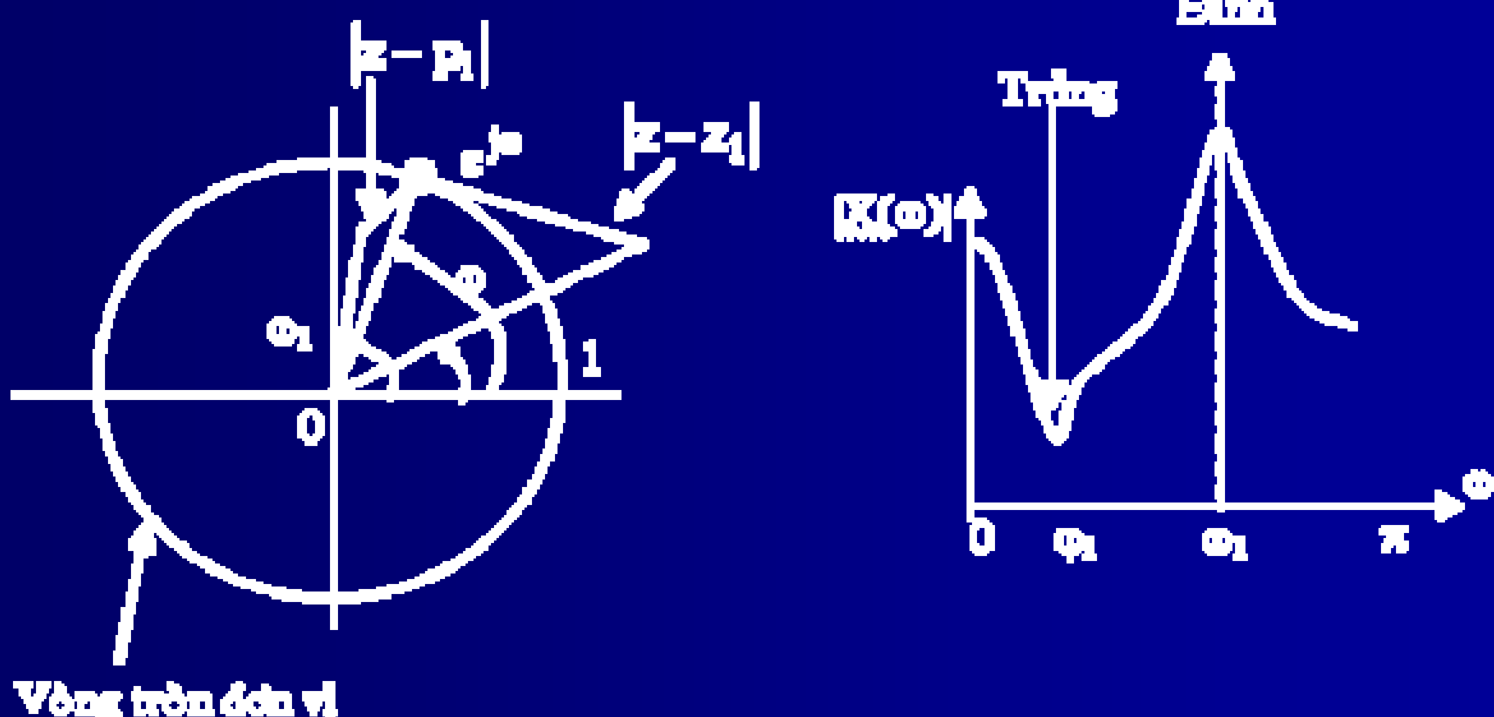
Phổ biên độ $|X(\omega)|$ là tỉ số giữa khoảng cách từ $e^{j\omega}$ đến cực p_1 và khoảng cách từ $e^{j\omega}$ đến cực z_1.

Khi $e^{j\omega}$ di chuyển trên vòng tròn đơn vị, các khoảng cách này sẽ thay đổi. Khi $e^{j\omega}$ gần qua điểm cực, khoảng cách mẫu số sẽ nhỏ làm cho $|X(\omega)|$ tăng. Nếu ω_1 là góc pha của cực p_1 thì điểm gần nhất tiến đến p_1 sẽ xảy ra tại $\omega = \omega_1$ tạo một đỉnh của $|X(\omega)|$ tại đó. Cực càng gần với vòng tròn đơn vị, khoảng cách mẫu số càng nhỏ tại $\omega = \omega_1$, và đỉnh của $|X(\omega)|$ càng nhọn.

Tương tự, khi $e^{j\omega}$ gần qua điểm zero, khoảng cách tử số sẽ nhỏ làm cho $|X(\omega)|$ giảm. Tại góc pha của zero, $\omega = \phi_1$, khoảng cách này sẽ nhỏ nhất và gây ra một điểm trủng của $|X(\omega)|$ tại đó.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Zero càng gần với vòng tròn đơn vị, điểm trủng càng nhọn. Zero z_1 có thể nằm trên vòng tròn đơn vị, trong trường hợp đó $|X(\omega)|$ sẽ triệt tiêu tại $\omega = \phi_1$.



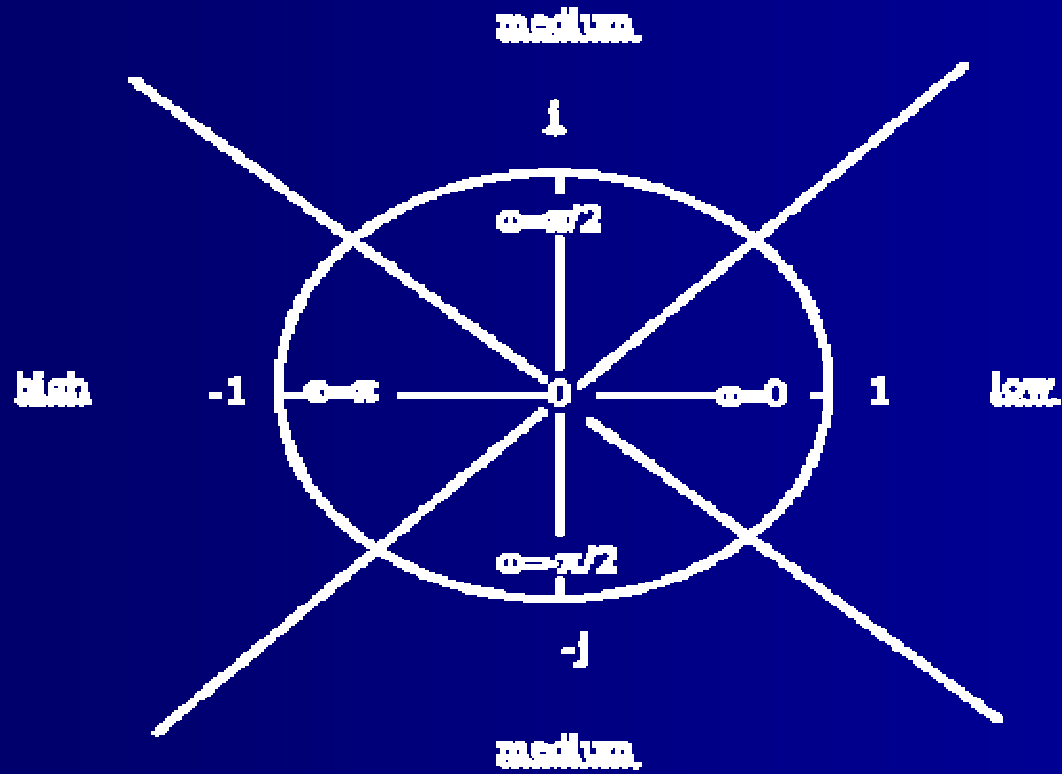
Hình 5.4.2 Biểu diễn hình học của phổ tần số.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tóm lại, chúng ta có thể vẽ phổ của $|X(\omega)|$ bằng cách cho $e^{j\omega}$ lần theo vòng tròn đơn vị và vẽ các đỉnh khi $e^{j\omega}$ gần qua các cực, và điểm trủng khi nó gần qua zero. Từ vị trí hợp lý của các cực và zero của X(z), người ta có thể thiết kế bất kỳ dạng mong muốn nào của X(ω) hay H(ω).

Để thuận tiện, chúng ta chia vòng tròn đơn vị thành các vùng tần số thấp, trung bình, cao như hình 5.4.3. Việc phân chia này là tùy ý vì tần số nào là cao hay thấp còn tùy thuộc vào ứng dụng. Tuy nhiên, việc này nhằm thay thế các cực và zero. Ví dụ, để thiết kế bộ lọc thông thấp mà làm nổi bật tần số thấp và suy hao tần số cao, người ta sẽ đặt các cực bên trong vòng tròn vào một vị trí nào đó trong cung tần số thấp và/hoặc zero trong cung tần số cao.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Hình 5.4.3 Các phần tần số thấp, trung bình, cao của vòng tròn đơn vị .

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Các phương pháp thiết kế bộ lọc như thế thì hơi thô thiển và trong thực tế chỉ được sử dụng để thiết kế các bộ lọc đơn giản hoặc đặc biệt, chẳng hạn bộ lọc cộng hưởng hoặc các phần của bộ lọc trùng phương cho các bộ cân bằng tham số và đồ họa âm thanh số. Những ví dụ thiết kế như vậy sẽ được xét sau.

DTFT $X(\omega)$ của tín hiệu $x(n)$ là một đại lượng phức và vì thế, nó được biểu diễn bởi phần thực và phần ảo $Re(\omega)$, $Im(\omega)$ hoặc ở dạng cực bởi đáp ứng pha và biên độ $|X(\omega)|$, $\arg X(\omega)$. Do đó:

$$X(\omega) = Re\{X(\omega)\} + jIm\{X(\omega)\} = |X(\omega)|e^{j\arg\{X(\omega)\}}$$

Đối với tín hiệu thực $x(n)$, đại lượng $X(\omega)$ thỏa mãn tính chất hermitan sau:

$$X(\omega)^* = X(-\omega) \tag{5.4.8}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Từ đó, ta có các mối quan hệ sau:

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad (5.4.9)$$

$$\arg\{X(\omega)\} = -\arg\{X(-\omega)\}$$

nghĩa là, đáp ứng biên độ là chẵn theo ω và đáp ứng pha là lẻ. Định nghĩa tương tự và áp dụng các kết quả cho đáp ứng tần số H(ω) của hệ thống thực h(n).

Cuối cùng chúng ta chú ý rằng tính chất Y(z) = H(z).X(z) được tính trên vòng tròn đơn vị sẽ có dạng trong miền tần số là:

$$Y(\omega) = H(\omega).X(\omega) \text{ (lọc trong miền tần số)} \quad (5.4.10)$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

5.5 Biến đổi z ngược

Bài toán nghịch của một biến đổi z cho trước X(z) là tìm tín hiệu thời gian x(n) mà biến đổi z là X(z). Như chúng ta đã biết, đáp số cho x(n) là không nhất thiết phải duy nhất. Tuy nhiên có thể là duy nhất nếu xác định ROC tương ứng.

Trong biến đổi z ngược, chúng ta khai triển X(z) thành từng phân số nghĩa là, thành tổng của các số hạng cực riêng rẽ có dạng (5.3.2).

Một khi X(z) được viết dưới dạng (5.3.2), chúng ta cần biết bằng cách nào để đảo mỗi số hạng này, nghĩa là nhân quả hay phản nhân quả. Điều này phụ thuộc vào việc lựa chọn ROC.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tổng quát, các vòng tròn qua cực tại $z = p_1$, $z = p_2$, ..., chia mặt phẳng z thành những miền không chồng chéo mà là các ứng viên có thể cho ROCs. Một trong các miền ROC này sẽ tạo ra x(n) khác nhau. Trong số tất cả x(n) có khả năng, chỉ có duy nhất một x(n) là ổn định bởi vì vòng tròn đơn vị nằm chính xác ở một trong các ROC có thể.

Ví dụ 5.5.1: Trong ví dụ (5.2.3), ba tín hiệu đầu tiên có chung biến đổi z:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1.25z^{-1}}$$

Hai vòng tròn qua các cực tại z = 0.8 và z = 1.25 sẽ chia mặt phẳng z thành 3 vùng I, II, III, được biểu diễn trong ví dụ 5.2.3.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Do đó, có 3 biến đổi z ngược có thể nghĩa là ba tín hiệu x(n) tương ứng với ba lựa chọn ROC. Nhưng chỉ II là ổn định.

Phương pháp khai triển phân số từng phần PF có thể áp dụng cho biến đổi z mà tỉ số của hai đa thức theo z^{-1} có dạng:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Các cực của đa thức mẫu D(z) là các cực của X(z). Giả sử D(z) có bậc M, nghĩa là có M zero mẫu số là p_1, p_2, ..., p_M, và D(z) có thể giả sử có dạng:

$$D(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})\ldots(1 - p_M z^{-1})$$

Khai triển phân số từng phần X(z) :

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\ldots(1-p_Mz^{-1})}$$
$$=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\ldots+\frac{A_M}{1-p_Mz^{-1}} \qquad \textbf{(5.5.1)}$$

Để có thể khai triển dạng z^{-1} thì bậc đa thức tử số N(z) phải nhỏ hơn bậc M đa thức mẫu số. Hệ số khai triển A_i có thể tính theo công thức:

$$A_i=\left[\left(1-p_iz^{-1}\right)X(z)\right]_{z=p_1}=\left[\frac{N(z)}{\prod_{j\neq i}\left(1-p_jz^{-1}\right)}\right]_{z=p_1} \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

với I = 1, 2, ..., M. Mặt khác, thừa số $(1 - p_I z^{-1})$ bị bỏ khỏi mẫu số và biểu thức còn được tính tại cực $z = p_i$.

Ví dụ 5.5.2: Trong ví dụ 5.2.3 biến đổi z được viết dưới dạng:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$X(z) = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 2.05z^{-1} + z^{-2}} = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{\left(1 - 0.8z^{-1}\right)\left(1 - 1.25z^{-1}\right)}$$

Bởi vì đa thức tử số có bậc 1 theo biến z^{-1}, khai triển PF có dạng:

$$X(z) = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 2.05z^{-1} + z^{-2}} = \frac{A_1}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 1.25z^{-1}}$$

Hai hệ số đạt được nhờ (5.5.2):

$$A_1 = \left[\left(1 - 0.8z^{-1}\right)X(z)\right]_{z=0.8} = \left[\frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1}}\right]_{z=0.8} = \frac{2 - 2.05/0.8}{1 - 1.25/0.8} = 1$$

$$A_2 = \left[\left(1 - 1.25z^{-1}\right)X(z)\right]_{z=1.25} = \left[\frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}\right]_{z=1.25} = 1$$

Nếu bậc của đa thức tử số N(z) chính xác bằng với bậc M của mẫu số D(z) thì khai triển (5.5.1) phải hiệu chỉnh bằng cách thêm số hạng phụ dạng:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\ldots(1-p_Mz^{-1})}$$
$$=A_0+\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\ldots+\frac{A_M}{1-p_Mz^{-1}} \quad \textbf{(5.5.3)}$$

Các hệ số A_i, i = 1, 2, ..., M được tính tương tự bởi (5.5.2). hệ số phụ A_0 chính là biến đổi z tại z = 0, nghĩa là:

$$A_0 = X(z)\big|_{z=0} \quad \textbf{(5.5.4)}$$

Nếu bậc của N(z) lớn hơn M thì người ta có thể chia đa thức D(z) cho N(z), tìm số thương và đa thức dư, để mà

$$\mathbf{N(z) = Q(z)D(z) + R(z)}$$

và kế đó viết $X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{Q(z)D(z)+R(z)}{D(z)}=Q(z)+\frac{R(z)}{D(z)}$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Bây giờ, số hạng thứ hai sẽ thỏa mản khai triển PF thông thường dạng (5.5.1) bởi vì bậc của đa thức dư R(z) nhỏ hơn M. Một cách khác, người ta có thể khử hoàn toàn đa thức tử số N(z), kế đó tính khai triển PF thông thường của đại lượng

$$W(z) = \frac{1}{D(z)}$$

và cuối cùng khôi phục tử số bằng cách viết:

$$X(z) = N(z)W(z)$$

Chúng ta có thể xem phương pháp này như phương pháp "khử/phục hồi". Một số ví dụ sẽ minh họa phương pháp này.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ 5.5.3: Chúng ta nhấn mạnh rằng khai triển PF có thể tồn tại trên một biến độc lập, z^{-1} nhưng không trên biến khác, z. Ví dụ biến đổi z:

$$X(z) = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{\left(1 - 0.8z^{-1}\right)\left(1 - 1.25z^{-1}\right)} = \frac{z(2z - 2.05)}{(z - 0.8)(z - 1.25)}$$

có tử số bậc 1 tương ứng với biến z^{-1} nhưng bậc 2 ứng với z. Vì thế, nó thỏa mản khai triển dạng (5.5.1) tương ứng với z^{-1} nhưng không với z.

Nhiều sách thích sử dụng z hơn và do đó để có thể khai triển PF, hệ số z được chia để làm giảm bậc của tử số và kế đó khôi phục khi kế thúc, nghĩa là

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z(2z - 2.05)}{(z - 0.8)(z - 1.25)} = \frac{A_1}{z - 0.8} + \frac{A_2}{z - 1.25}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Khi z được khôi phục, ta có:

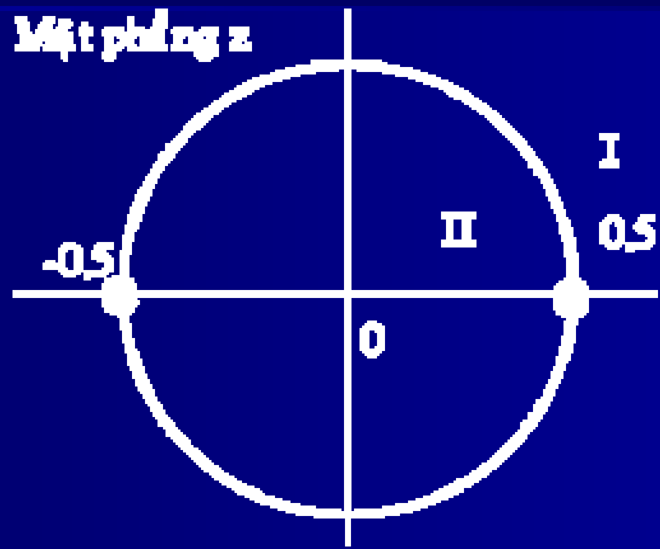
$$X(z) = \frac{zA_1}{z-0.8} + \frac{zA_2}{z-1.25} = \frac{A_1}{1-0.8z^{-1}} + \frac{A_2}{1-1.25z^{-1}}$$

Dễ dàng chứng minh rằng các hệ số khai triển PF sẽ giống nhau theo 2 cách. Trong sách này, chúng tôi thích z^{-1} hơn và tránh các bước số học phụ mà yêu cầu viết mọi thứ theo số hạng z, cho chia z, khôi phục z, và viết lại kết quả cuối cùng theo số hạng z^{-1}.

Ví dụ 5.5.4: Tính các biến đổi z ngược hợp lý của

$$X(z) = \frac{6+z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Giải: Bởi vì tử số có bậc 1 theo z^{-1}, chúng ta có khai triển PF:

$$X(z)=\frac{6+z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}=\frac{6+z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}\right)}=\frac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.5z^{-1}}$$

trong đó:

$$A_1=\left[\frac{6+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\right]_{z=0.5}=4,\qquad A_2=\left[\frac{6+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right]_{z=-0.5}=2$$

Hai cực tại ± 0.5 có cùng biên độ và vì thế chia mặt phẳng z thành 2 miền ROC I và II: |z| > 0.5 và |z| < 0.5.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Đối với ROC thứ nhất, cả hai số hạng trong khai triển PF được biến đổi nhân quả thành:

$$x(n) = A_1(0.5)^n u(n) + A_2(-0.5)^n u(n)$$

Bởi vì ROC này cũng chứa vòng tròn đơn vị, tín hiệu x(n) sẽ ổn định. Với ROC thứ hai, cả hai khai triển PF được biến đổi phản nhân quả thành:

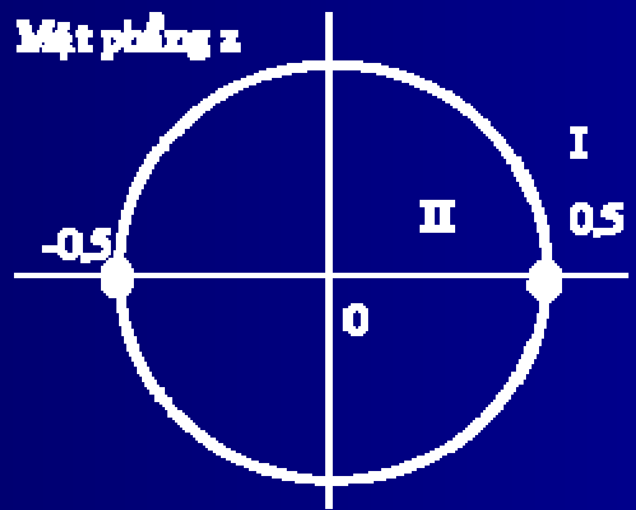
$$x(n) = -A_1(0.5)^n u(-n-1) - A_2(-0.5)^n u(-n-1)$$

Đáp số này không ổn định bởi vì ROC không chứa vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 5.5.5: Xác định tất cả biến đổi z ngược của

$$X(z) = \frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Giải: Trong trường hợp này, không sử dụng được khai triển PF thông thường vì bậc của tử số bằng bậc của mẫu số. Tuy nhiên, chúng ta vẫn có thể có khai triển dạng (5.5.3).

$$X(z)=\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}=\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}\right)}=A_0+\frac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.5z^{-1}}$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Trong đó, A_1 và A_2 được xác định theo cách thông thường và A_0 được xác định bằng cách tính X(z) tại z = 0:

$$A_0 = \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}\right]_{z=0} = \left[\frac{10z^2 + z^1 - 1}{z^2 - 0.25}\right]_{z=0} = \frac{-1}{-0.25} = 4$$

$$A_1 = \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 + 0.5z^{-1}}\right]_{z=0.5} = 4, \qquad A_2 = \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}}\right]_{z=-0.5} = 2$$

Một lần nửa, chỉ có hai ROC I và II: |z| > 0.5 và |z| < 0.5. Đối với ROC thứ nhất, cả hai số hạng A_1 và A_2 được biến đổi nhân quả thành và số hạng A_0 đơn giản biến đổi ngược là δ(n).

$$x(n) = A_0\delta(n) + A_1(0.5)^n u(n) + A_2(-0.5)^n u(n)$$

Với ROC thứ hai, ta có:

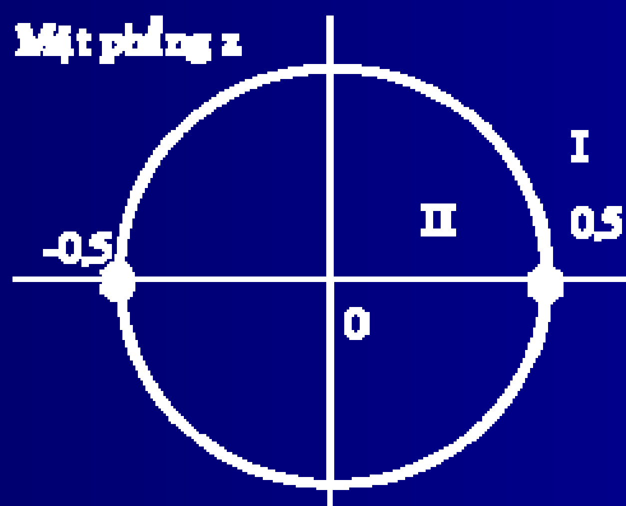
$$x(n) = A_0\delta(n) - A_1(0.5)^n u(-n-1) - A_2(-0.5)^n u(-n-1)$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Chỉ biến đổi ngược thứ nhất là ổn định vì ROC chứa vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 5.5.6: Xác định biến đổi z ngược nhân quả của

$$X(z)=\frac{6+z^{-5}}{1-0.25z^{-2}}$$



CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Giải: Bậc của tử số hoàn toàn lớn hơn bậc của mẫu số. Phương pháp thứ nhất là chia tử số cho mẫu số, ta có:

$$(6 + z^{-5}) = (1 - 0.25z^{-2})(-16z^{-1} - 4z^{-3}) + (6 + 16z^{-1})$$

Trong đó $(6 + 16z^{-1})$ là đa thức dư và $(-16z^{-1} - 4z^{-3})$ là số thương. Kế tiếp: $X(z) = \dfrac{6 + z^{-5}}{1 - 0.25z^{-2}} = -16z^{-1} - 4z^{-3} + \dfrac{6 + 16z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$

và khai triển số hạng cuối cùng thành dạng PF:

$$X(z) = -16z^{-1} - 4z^{-3} + \frac{19}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{13}{1 + 0.5z^{-1}}$$

Biến đổi z nhân quả có ROC sẽ là $|z| > 0.5$:

$$x(n) = -16\,\delta(n-1) - 4\delta(n-1) + 19(0.5)^n u(n) - 13(-0.5)^n u(n)$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Phương pháp thứ hai là "khử/khôi phục". Bỏ qua tử số chúng ta có: $W(z) = \frac{1}{1-0.25z^{-2}} = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$

mà có biến đổi z nhân quả:

$$x(n) = 0.5(0.5)^n u(n) + 0.5(-0.5)^n u(n)$$

Khi đã biết w(n) thì x(n) có thể tìm được bằng cách khôi phục tử số: $X(z) = (6 + z^{-5})W(z) = 6W(z) + z^{-5}W(z)$

Lấy biến đổi z ngược cả hai vế và sử dụng tính chất trễ, ta có:

$$x(n) = 6w(n) + w(n-5) = 3(0.5)^n u(n) + 3(-0.5)^n u(n)$$

$$+0.5(0.5)^{n-5} u(n-5) + 0.5(-0.5)^{n-5} u(n-5)$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Hai kết quả thu được từ hai phương pháp là tương đương.

Ví dụ 5.5.7: Xác định tất cả biến đổi z ngược có thể có của:

$$X(z) = \frac{7 - 9.5z^{-1} - 3.5z^{-2} + 5.5z^{-3}}{\left(1 - z^{-2}\right)\left(1 - 0.5z^{-1}\right)\left(1 - 1.5z^{-1}\right)}$$

Giải: X(z) thỏa khai triển PF

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}} + \frac{3}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 - 1.5z^{-1}}$$

trong đó các hệ số khai triển PF dễ dàng tìm được. Bốn cực tại z = 0.5, 1, -1, 1.5 chia miền z thành 4 miền ROC I, II, III, IV. Miền I tương ứng với đảo hoàn toàn phản nhân quả và miền IV tương ứng với đảo hoàn toàn nhân quả.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Đối với miền II, cực tại z = 0.5 sẽ biến đổi ngược nhân quả và phần còn lại phản nhân quả. Còn miền III, z = 0.5 và z = ±1 sẽ biến đổi ngược nhân quả và z = 1.5 thì đảo phản nhân quả. Do đó, bốn biến đổi z ngược có thể có là:

$$x_1(n) = -\left[1 + (-1)^n + 3(0.5)^n + 2(1.5)^n\right]u(-n-1)$$

$$x_2(n) = 3(0.5)^n u(n) - \left[1 + (-1)^n + 2(1.5)^n\right]u(-n-1)$$

$$x_3(n) = \left[1 + (-1)^n + 3(0.5)^n\right]u(n) - 2(1.5)^n u(-n-1)$$

$$x_4(n) = \left[1 + (-1)^n + 3(0.5)^n + 2(1.5)^n\right]u(n)$$

Nói chính xác, không có kết quả nào là ổn định bởi vì hai cực z = ± 1 nằm trên vòng tròn đơn vị. Tuy nhiên, $x_2(n)$ và $x_3(n)$ là ổn định biên, nghĩa là không hội tụ cũng phân kỳ về 0 khi nhân quả lớn.

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Trong cả hai trường hợp, số hạng phản nhân quả $(1.5)^n$ tiến về 0 với nhân quả âm lớn. Thật vậy, do nhân quả âm, chúng ta viết $n = -|n|$ và $(1.5)^n = (1.5)^{-|n|} \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$.

Các số hạng do cực $z = \pm 1$ là nhân quả hoặc phản nhân quả trong trường hợp II và III, nhưng chúng vẫn bị chặn. Hai tín hiệu khác $x_1(n)$ và $x_4(n)$ là không ổn định vì vòng tròn đơn vị không nằm trong ROC của chúng.

Giả sử rằng đa thức tử số và mẫu số N(z) và D(z) có các hệ số thực nghĩa là các cực phức của X(z) là các cặp liên hợp phức. Trong trường hợp đó, khai triển PF có dạng:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_1^*}{1 - p_1^* z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Trong đó, các hệ số khai triển PF cũng là các cặp liên hợp phức. Vì thế, chỉ cần xác định một là đủ, không cần cả hai. Biến đổi z ngược tương ứng sẽ là thực, thật vậy, xét trường hợp nhân quả chúng ta có:

$$x(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_1^* p_1^{*n} u(n) + A_2 p_2^n u(n) + \ldots$$

Bởi vì hai số hạng đầu tiên là liện hợp phức của nhau nên chúng ta có thể dùng kết quả C + C* = 2Re(C) cho bất kỳ số phức C nào để viết số hạng thứ nhất.

$$A_1 p_1^n u(n) + A_1^* p_1^{*n} u(n) = 2\,Re\left[A_1 p_1^n\right]$$

Viết A_1 và p_1 dưới dạng cực: $A_1 = B_1 e^{j\alpha_1}$ và $p_1 = R_1 e^{j\omega_1}$ **với $B_1 >$ 0 và $R_1 > 0$, ta có:** $Re\left[A_1 p_1^n\right] = Re\left[B_1 e^{j\alpha_1} R_1^n e^{j\omega_1 n}\right] = B_1 R_1^n\, Re\left[e^{j\omega_1 n + j\alpha_1}\right]$

và lấy phần thực của lũy thừa, ta có:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$A_1 p_1^n u(n) + A_1^* p_1^{*n} u(n) = 2\,\mathrm{Re}\left[A_1 p_1^n\right] = 2B_1 R_1^n \cos(\omega_1 n + \alpha_1)$$

và $$x(n) = 2B_1 R_1^n \cos(\omega_1 n + \alpha_1) + A_2 p_2^n u(n) + \ldots$$

Do đó, các cực phức tương ứng hàm sin suy giảm theo lũy thừa (nếu $R_1 < 1$). Đường bao suy giảm R_1^n **và tần số ω_1 phụ thuộc vào cực phức** $p_1 = R_1 e^{j\omega_1}$**.**

Các số hạng bậc một trong khai triển PF tương ứng với các cực liên hợp phức có thể được tổ hợp lại thành số hạng bậc hai với các hệ số thực như sau:

$$\frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_1^*}{1 - p_1^* z^{-1}} = \frac{\left(A_1 + A_1^*\right) - \left(A_1 p_1^* + A_1^* p_1\right) z^{-1}}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_1^* z^{-1}\right)}$$

Sử dụng đồng nhất thức:

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$\left(1-p_1z^{-1}\right)\left(1-p_1^*z^{-1}\right)=1-2\,\mathrm{Re}\left(p_1\right)z^{-1}+\left|p_1\right|^2z^{-2}$$

Hoặc $\left(1-R_1e^{j\omega_1}z^{-1}\right)\left(1-R_1e^{-j\omega_1}z^{-1}\right)=1-2R_1\cos\left(\omega_1\right)z^{-1}+R_1^2z^{-2}$

và viết $A_1 + A_1^* = 2\mathrm{Re}(A_1) = 2B_1\cos(\alpha_1)$

$$A_1p_1^* + A_1^*p_1 = 2\mathrm{Re}(A_1p_1^*) = 2B_1R_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)$$

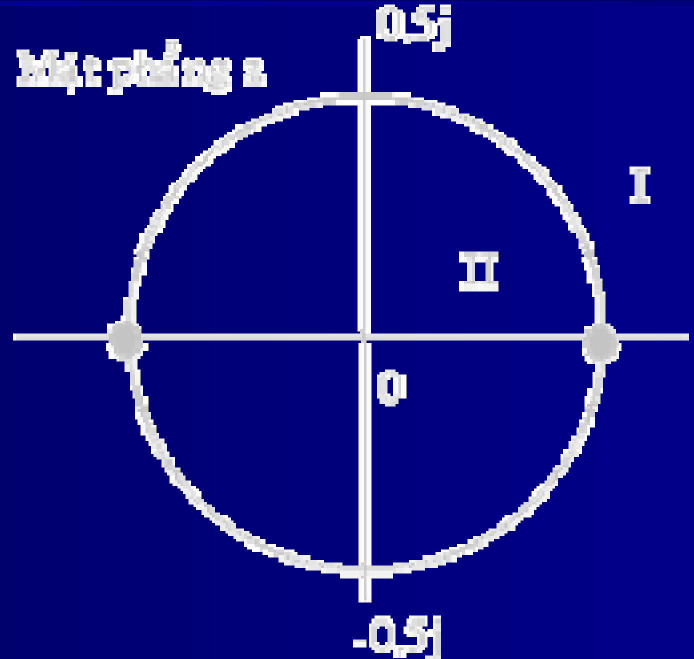
chúng ta tìm được:

$$\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_1^*}{1-p_1^*z^{-1}}=\frac{2B_1\cos\left(\alpha_1\right)-2B_1R_1\cos\left(\alpha_1-\omega_1\right)z^{-1}}{1-2R_1\cos\left(\omega_1\right)z^{-1}+R_1^2z^{-2}}$$

có các hệ số thực.

Ví dụ 5.5.8: Xác định tất cả biến đổi z ngược có thể có của: $X(z)=\dfrac{4-3z^{-1}+z^{-2}}{1+0.25z^{-2}}$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z



Giải:

$$X(z) = \frac{4 - 3z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.25z^{-2}} = \frac{4 - 3z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + 0.5jz^{-1}\right)\left(1 - 0.5jz^{-1}\right)}$$

$$= A_0 + \frac{A_1}{1 - 0.5jz^{-1}} \frac{A_2}{1 + 0.5jz^{-1}}$$

với các giá trị

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

$$A_0 = \left[\frac{4-3z^{-1}+z^{-2}}{1+0.25z^{-2}}\right]_{z=0} = 4, \quad A_1 = \left[\frac{4-3z^{-1}+z^{-2}}{1+0.5jz^{-1}}\right]_{z=0.5j} = 3j$$

Vì thế: $X(z) = 4 + \dfrac{3j}{1-0.5jz^{-1}} - \dfrac{3j}{1+0.5jz^{-1}} = 4 - \dfrac{3z^{-1}}{1+0.25z^{-2}}$

ROC nhân quả là |z| > |0.5j| = 0.5 sẽ cho:

$$x(n) = 4\delta(n) + 3j(0.5j)^n u(n) - 3j(-0.5j)^n u(n)$$

Vì hai số hạng cuối cùng là liên hợp phức của nhau nên chúng ta viết lại thành:

$$x(n) = 4\delta(n) + 2\,Re\left[3j(0.5j)^n u(n)\right] = 4\delta(n) + 6(0.5)^n u(n) Re\left[j^{n+1}\right]$$

Viết $j^{n+1} = e^{j\pi(n+1)/2}$, ta tìm được phần thực:

$$Re\left[j^{n+1}\right] = cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) = -sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

và $\quad x(n) = 4\delta(n) - 6(0.5)^n sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right) u(n)$

CHƯƠNG 5: BIẾN ĐỔI Z

Tương tự, chúng ta tìm được

$$x(n) = 4\delta(n) + 6(0.5)^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(-n-1)$$

đối với phiên bản phản nhân quả có ROC $|z| < 0.5$. Một số ví dụ khác với các cực liên hợp phức là các trường hợp (6 – 9) của ví dụ 5.2.2.