BÀI GIẢNG XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Biên soạn: PGS.TS LÊ TIẾN THƯỜNG

Tp.HCM, 02-2005

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

- **1.1. Giới thiệu**
- **1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự**
- **1.3. Định lý lấy mẫu**
- **1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine**
- **1.5. Phổ của các tín hiệu được lấy mẫu**
- **1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự**
- **1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.1. Giới thiệu

- **Quá trình xử lý số các tín hiệu tương tự thường gồm 3 bước:**
- **- Số hoá các tín hiệu tương tự, tức là lấy mẫu và lượng tử hoá các mẫu này. Quá trình này được gọi là biến đổi A/D (Analog to Digital).**
- **- Dùng bộ xử lý tín hiệu số để xử lý các mẫu vừa thu được.**
- **- Các mẫu sau khi xử lý xong sẽ được khôi phục lại dạng tương tự bằng bộ khôi phục tín hiệu tương tự gọi là bộ biến đổi D/A (Digital to Analog).**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

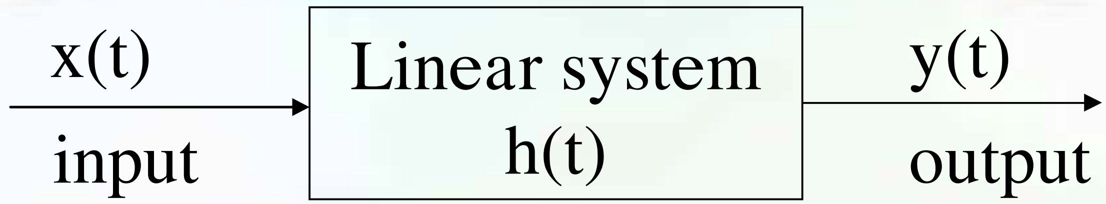
•1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự

- **Biến đổi FOURIER X(Ω) của x(t) chính là phổ tần số của tín hiệu này:**
- $$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad \textbf{(1.2.1)}$$
- **trong đó Ω là tần số góc (rad/s).**
- **Tần số f liên hệ với : Ω = 2πf** **(1.2.2)**
- **Biến đổi Laplace được định nghĩa như sau :**
-
- $$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st} dt \qquad \textbf{(1-2-3)}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự

- **Xét đáp ứng của một hệ thống tuyến tính (linear system)**



- **Hệ thống này được đặc trưng bởi đáp ứng xung h(t). Đầu ra y(t) thu được bằng cách lấy tích chập (convolution) trong miền thời gian:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')x(t')dt$$

- **hay phép nhân trong miền tần số:**
- $$Y(\Omega) = H(\Omega).X(\Omega) \qquad \textbf{(1.2.4)}$$
- **trong đó H(Ω) là đáp ứng tần số của hệ thống trên.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự

- **H(Ω) được định nghĩa là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h(t):**
- $$H(\Omega) = \int h(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad (1.2.5)$$
- **Đáp ứng xác lập dạng sine của hệ thống được định nghĩa là đáp ứng của hệ thống khi đầu vào là tín hiệu dạng sine:**

x(t) = exp(jΩt) → Sinusoid in	Linear system H(Ω)	→ y(t) = H(Ω)exp(jΩt) Sinusoid out

- **Đầu ra là tín hiệu sine tần số (Ω), có độ lớn bằng độ lớn tín hiệu vào nhân cho hệ số H(Ω), và pha được dịch đi lượng arg (H(Ω)):**

$$x(t) = e^{j\Omega t} \Rightarrow y(t) = H(\Omega)e^{j\Omega t} = |H(\Omega)|.e^{j\Omega t + j\arg H(\Omega)}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự

- **Vì là chồng chập tuyến tính, nếu đầu vào gồm hai tín hiệu sine có các tần số Ω_1, Ω_2 và biên độ là A_1, A_2 tương ứng:**

$$x(t) = A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_2 e^{j\Omega_2 t}$$

- **Sau khi qua bộ lọc, tín hiệu ra xác lập thu được:**

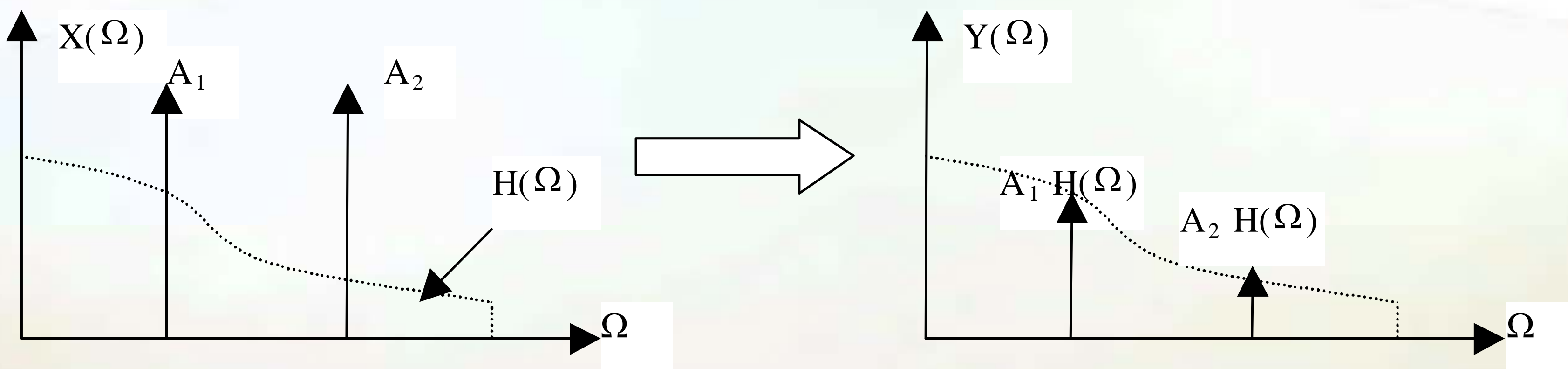
$$y(t) = A_1 H(\Omega) e^{j\Omega_1 t} + A_2 H(\Omega) e^{j\Omega_2 t}$$

- **Chú ý là bộ lọc chỉ làm thay đổi biên độ các thành phần tín hiệu, chứ không làm thay đổi tần số.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.2. Một số cơ bản liên quan đến các tín hiệu tương tự

- **Ảnh hưởng của bộ lọc cũng có thể được quan sát trong miền tần số bằng cách dùng pt (1.2.4) như sau:**



- **Phổ tín hiệu vào X(Ω) gồm hai vạch phổ tại tần số Ω_1 và Ω_2 thu được bằng cách lấy biến đổi Fourier của x(t):**

$$X(\Omega) = 2\pi A_1 \delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 \delta(\Omega - \Omega_2)$$

- **Phổ đầu ra tương ứng Y(Ω) thu được từ pt (1.2.4):**

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = H(\Omega)(2\pi A_1 \delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 \delta(\Omega - \Omega_2))$$

$$= 2\pi A_1 H(\Omega_1)\delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 H(\Omega_2)\delta(\Omega - \Omega_2)$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

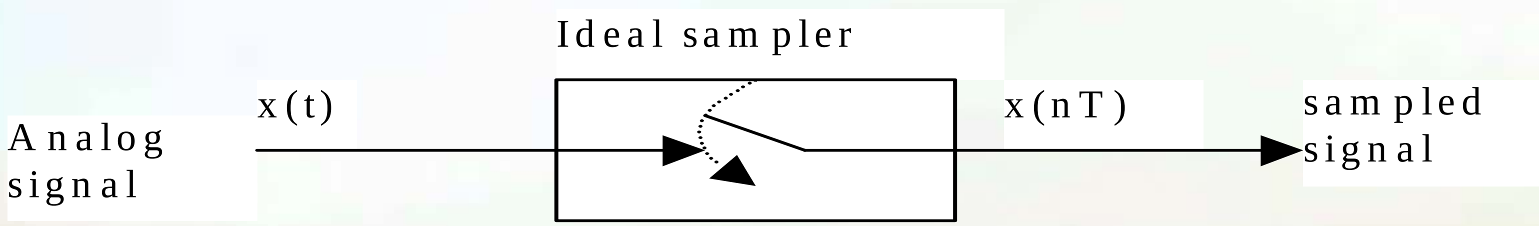
•1.3. Định lý lấy mẫu

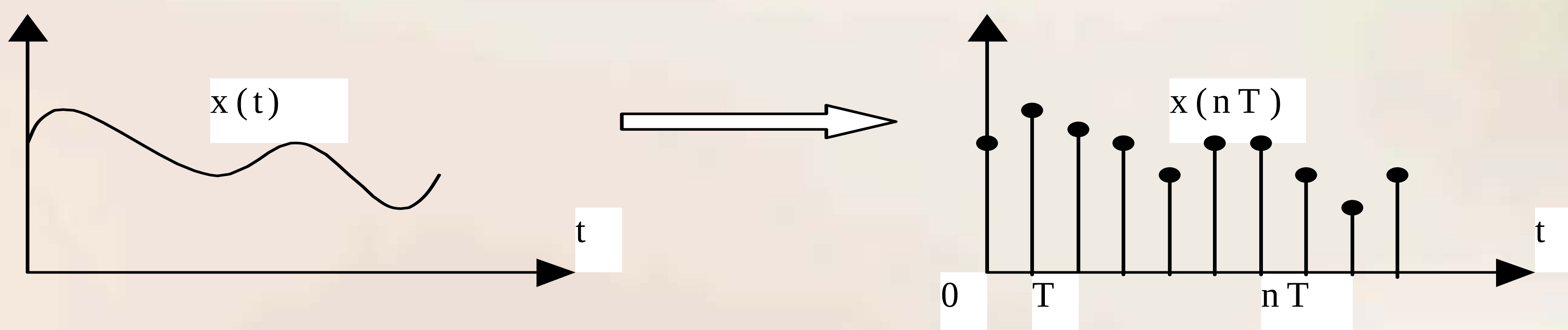
- **Xét quá trình lấy mẫu (được minh họa trong H1.3.1). Tín hiệu x(t) được lấy mẫu tuần hoàn theo chu kỳ T. Do đó, thời gian được rời rạc hoá theo các đơn vị của T như sau: t=nT với n=0,1,2,... Do đó, sẽ có nhiều thành phần cao tần không thể xác định được chen vào phổ tần số tín hiệu. Chính vì thế, để có thể thiết kế hệ thống thành công, 2 câu hỏi sau luôn gợi ý cho người thiết kế:**
- **1. Ảnh hưởng của quá trình lấy mẫu lên phổ của tín hiệu như thế nào?**
- **2. Ta nên chọn khoảng cách lấy mẫu ra sao?**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu

- **Quá trình lấy mẫu sẽ tạo các thành phần cao tần, các thành phần này xuất hiện đều đặn theo quy luật, theo chu kỳ tương ứng với tốc độ lấy mẫu: f_s=1/T**





- **Hình 1.3.1 Bộ lấy mẫu lý tưởng.**

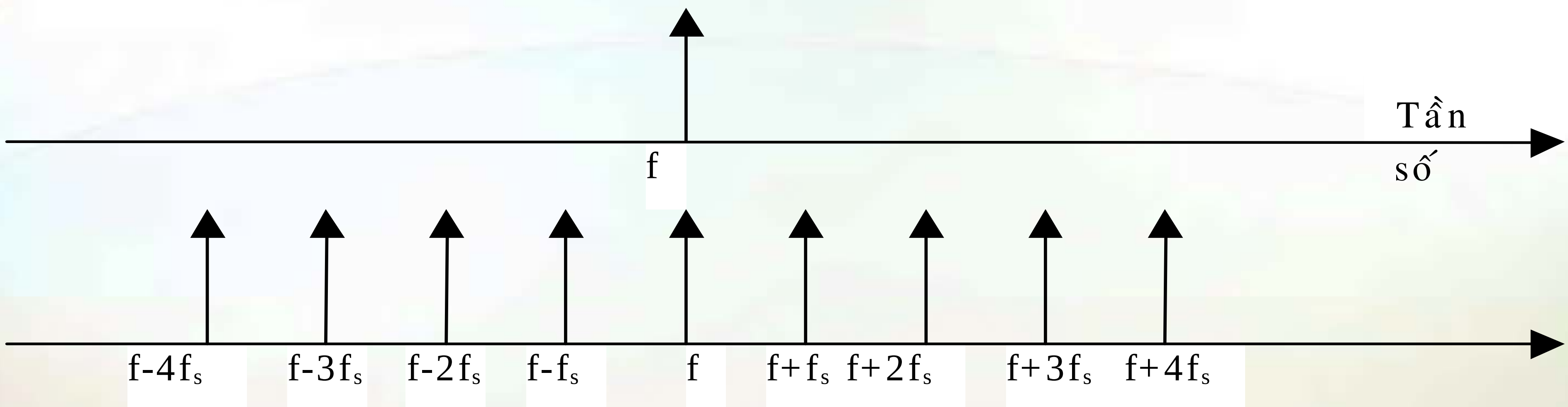
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu

- **Cũng nên lưu ý rằng nếu bắt đầu bằng việc xem xét phổ (mang tính chất lặp lại) của tín hiệu đã được lấy mẫu, không thể xác định được tần số của tín hiệu ban đầu. Nó có thể là thành phần nào đó trong các tần số f'=f+mfs,với m=0, ±1, ±2,... Đó là do bất kỳ tần số nào thuộc f' cũng đều có phổ giống nhau sau khi lấy mẫu. Hiện tượng trùng lắp này được gọi là hiện tượng chồng lấn phổ "aliasing" và có thể tránh được nếu thoả mãn các điều kiện của định lý lấy mẫu.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu



Hình 1.3.2 Phổ bị lặp do lấy mẫu.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu

- **1.3.1. Định lý lấy mẫu**
- **Có thể biểu diễn chính xác tín hiệu x(t) bởi các mẫu x(nT), cần phải thoả mãn 2 điều kiện sau:**
- **- Điều kiện 1: Tín hiệu x(t) phải được giới hạn trong một dải, tức là phổ của tín hiệu phải được giới hạn là chỉ chứa những thành phần tần số nhỏ hơn một tần số lớn nhất nào đó thôi (f_{max}) và hoàn toàn không tồn tại tần số nào trên vùng ngoài của f_{max}.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu

- **1.3.1. Định lý lấy mẫu**
- **Điều kiện 2: Tần số lấy mẫu phải được chọn lớn hơn ít nhất là hai lần f_{max}, tức là $f_s \geq 2f_{max}$**
- **hay biểu diễn theo khoảng cách thời gian lấy mẫu:**

$$T \leq \frac{1}{2f_{\max}}$$

- **$f_s=2f_{max}$ được gọi là tốc độ Nyquist.**
- **Đại lượng $f_s/2$ được gọi là tần số Nyquist hay tần số gấp (folding frequency)**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

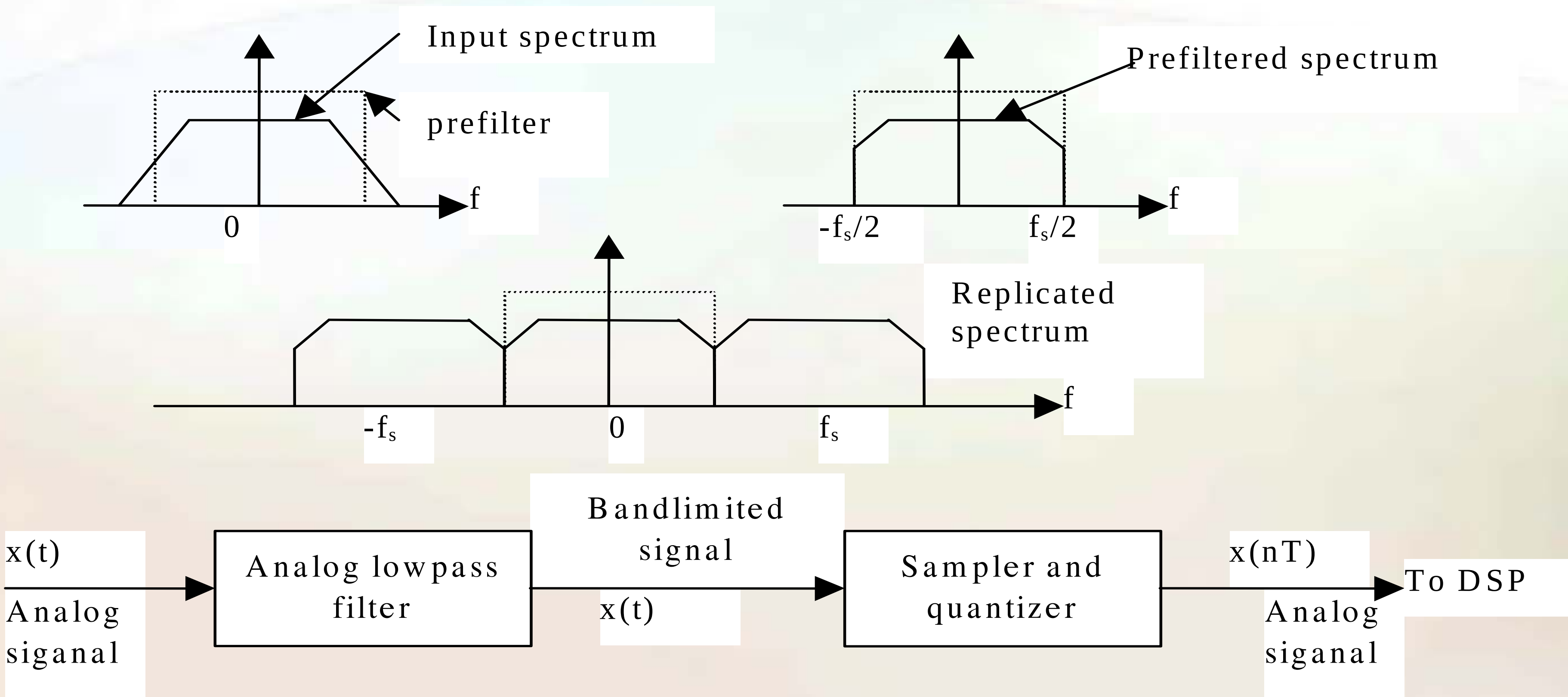
•1.3. Định lý lấy mẫu

- **1.3.2. Antialiasing Prefilter**
- **Việc thực hiện thực tế định lý lấy mẫu rất quan trọng. Do hầu hết các tín hiệu không được giới hạn trong một dải, vì thế cần phải đưa những tín hiệu này qua bộ lọc thông thấp (prefilter) trước khi lấy mẫu.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.3. Định lý lấy mẫu

• 1.3.2. Antialiasing Prefilter



Hình 1.3.5 Bộ lọc antialiasing prefilter.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **Số mẫu trên chu kỳ được cho bởi tỷ số f_s/f:**

$$\frac{f_s}{f} = \frac{samples/\sec}{cycles/\sec} = \frac{samples}{cycle}$$

- **1.4.1. Khôi phục tín hiệu và hiện tượng chồng lấn phổ (aliasing)**
- **Nhận thấy rằng, dù các tín hiệu $x_m(t)$ thì khác nhau, nhưng các mẫu của chúng lại hoàn toàn giống nhau. Thực vậy:**

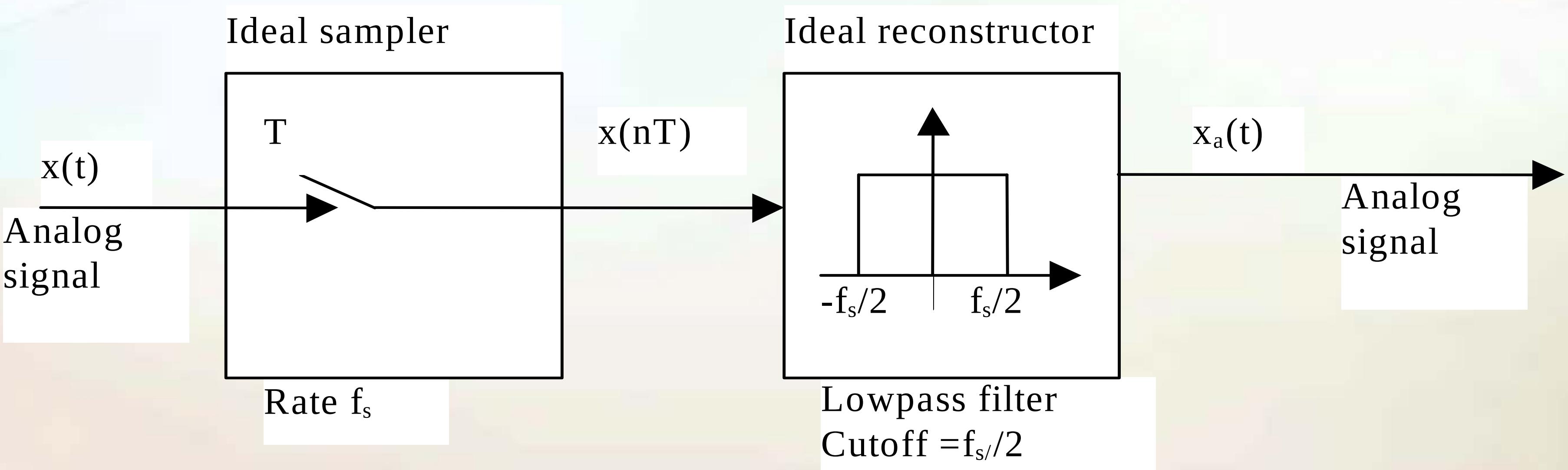
$$x_m(nT) = e^{2\pi j(f+mf_s)Tn} = e^{2\pi jfTn} e^{2\pi jmf_sTn} = e^{2\pi jfTn} = x(nT)$$

- **tập hợp các tần số:** $f,\ f \pm f_s,\ f \pm 2f_s, \ldots, f \pm mf_s, \ldots$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

• 1.4.1. Khôi phục tín hiệu và hiện tượng chồng lấn phổ (aliasing)



Hình 1.4.2 Bộ lọc thông thấp làm bộ khôi phục tín hiệu lý tưởng

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **1.4.1. Khôi phục tín hiệu và hiện tượng chồng lấn phổ**
- **Tần số này thu được bằng cách lấy tần số ban đầu module cho f_s, f_a=f mod(f_s). Đây chính là tần số trong tập (1.4.2) thu được từ bộ khôi phục tín hiệu. Vì thế, tín hiệu sine được khôi phục là:**

$$x_a(t) = e^{2\pi j f_a t}$$

- **Và dễ dàng thấy rằng, f_a=f chỉ nếu tần số f nằm trong khoảng tần số Nyquist; tức là chỉ nếu $|f| \le f_s/2$ hay chỉ khi định lý lấy mẫu được thỏa. Còn nếu f nằm ngoài khoảng tần số Nyquist, vi phạm điều kiện của định lý lấy mẫu. Lúc này, tần số bị chồng lấn f_a sẽ khác với f; vì thế tín hiệu được khôi phục x_a(t) sẽ khác với x(t) mặc dù x_a(nT)=x(nT).**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

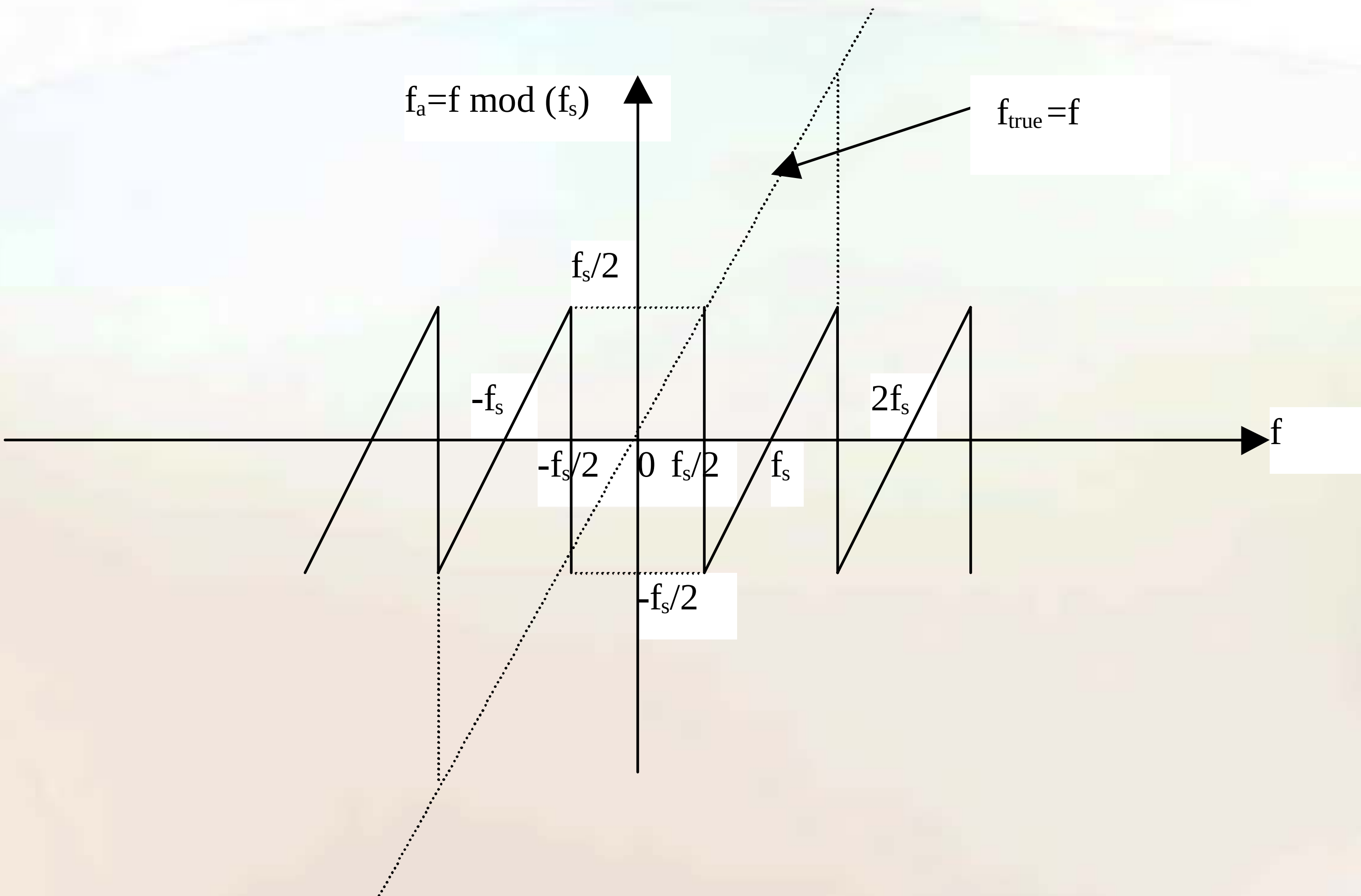
•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **1.4.1. Khôi phục tín hiệu và hiện tượng chồng lấn phổ**
- **Sẽ thấy rõ ràng hơn nếu xem đồ thị f_a=f mod (f_s) theo tần số f (H1.4.3). Đường thẳng f_{true}=f được bẻ thành nhiều đường thẳng song song nếu ta dịch đoạn thẳng trong khoảng [-f_s/2,f_s/2] trên trục tần số đi các bội số của f_s.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

• 1.4.1. Khôi phục tín hiệu và hiện tượng chồng lấn phổ



Hình 1.4.3 Đồ thị f mod (fs) theo f.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **Ví dụ 1.4.1:**
- **Xem tín hiệu sin tần số f=10 Hz, được lấy mẫu với tốc độ f_s=12Hz. Tín hiệu được lấy mẫu sẽ chứa tất cả các tần số có tính tuần hoàn 10+m.12Hz, m = 0, ±1, ±2,... hay là: ..., -26, -14, -2, 10, 22, 34, 46, ... và trong số này chỉ có f_a = 10 mod(12) = 10 – 12 = -2 Hz là nằm trong khoảng tần số Nyquist [-6,6] Hz. Vậy, tần số khôi phục được là sóng sine có tần số –2 Hz thay vì đúng phải là 10 Hz.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **Ví dụ 1.4.2:**
- **Năm tín hiệu sau được lấy mẫu với tốc độ 4Hz:**
- $-\sin(14\pi t), -\sin(6\pi t), \sin(2\pi t), \sin(10\pi t), \sin(18\pi t)$ **(t tính theo giây).**
- **Hãy chứng tỏ rằng chúng sẽ chồng lấn nhau do các mẫu thu được của các tín hiệu này đều giống nhau.**
- **Giải: Các tần số của 5 tín hiệu này lần lượt là: -7, -3, 1, 5, 9 Hz. Chúng cách nhau một lượng bằng bội số của f_s=4Hz.**
- **Năm tần số này có thể được viết gọn lại: f_m=1+4m, m=-2, -1, 0, 1, 2. Có thể biểu diễn 5 tín hiệu này dưới dạng:**

$$x_m(t) = \sin(2\pi f_m t) = \sin(2\pi(1+4n)), \quad \mathrm{m} = \text{-2,-1,0,1,2}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **Ví dụ 1.4.2:**
- **Thay t=nT=n/fs=n/4 giây, thu được các mẫu:**

$$x_m(nT) = \sin(2\pi(1+4m)nT) = \sin(2\pi(1+4m)n/4)$$

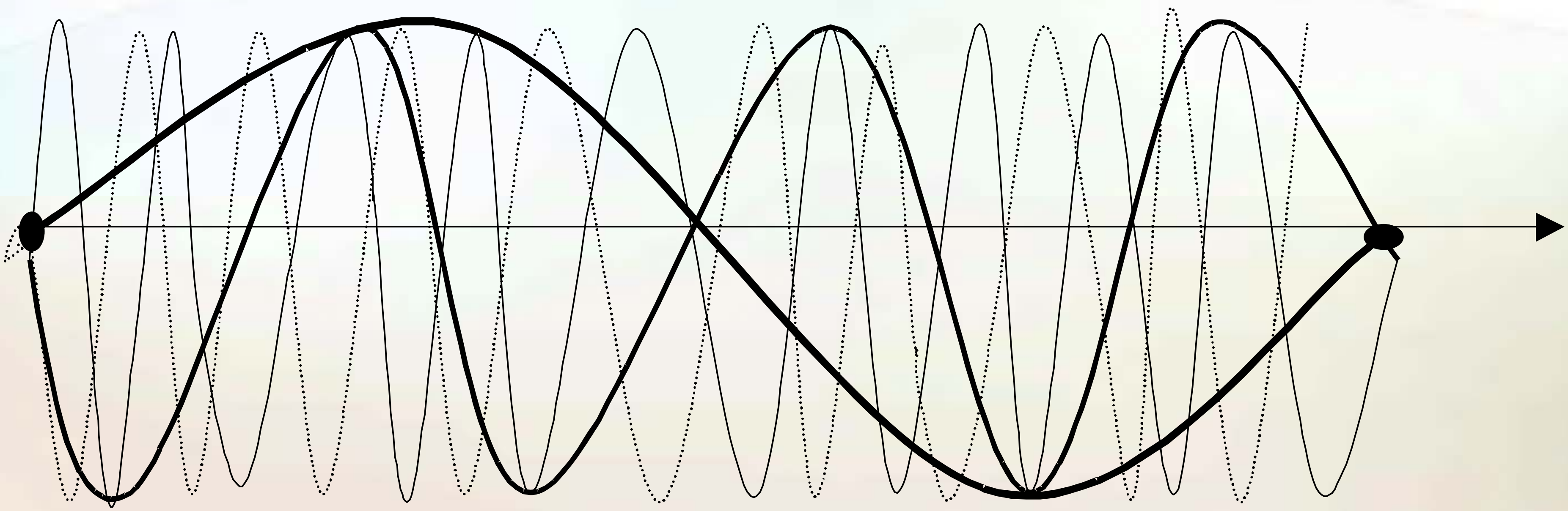
$$= \sin(2\pi n/4 + 2\pi mn) = \sin(2\pi n/4)$$

- **Vậy các mẫu này hoàn toàn giống nhau, và không phụ thuộc m. Hình sau biểu diễn 5 tín hiệu trong khoảng $0 \le t \le 1s$**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **Ví dụ 1.4.2:**
-



CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **1.4.2 Chuyển động tròn**
- **Một cách khác trực quan hơn để hiểu các tính chất lấy mẫu của các tín hiệu sine là xem tín hiệu sine (dưới dạng phức) $x(t) = e^{2\pi jft}$ là bánh xe quay tròn với tần số f vòng/giây. Giống như đặt bánh xe trong phòng tối, dùng đèn flash để thấy nó và đèn flash sáng f_s lần trong một giây. Tần số góc là $\Omega = 2\pi f$ (rad/s). Khoảng thời gian giữa hai lần đèn sáng T, bánh xe quay được 1 góc:**

$$\omega = \Omega T = 2\pi f T = \frac{2\pi f}{f_s}$$

- **Đại lượng này được gọi là tần số số (digital frequency) và có đơn vị [radians/sample]. Nó có tính chuẩn hoá và thuận tiện sử dụng hơn tần số vất lý f.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **1.4.2 Chuyển động tròn**
- **Theo ω, tín hiệu sine được lấy mẫu có thể viết gọn lại như sau:**

$$x(nT) = e^{2\pi jfTn} = e^{j\omega n}$$

- **Nếu viết theo ω, tần số Nyquist $f=f_s/2$ trở thành ω = π và khoảng Nyquist là [- π, π]. Tập hợp các tần số $f+mf_s$ trở thành:**

$$\frac{2\pi(f+mf_s)}{f_s} = \frac{2\pi f}{f_s} + 2\pi m = \omega + 2\pi m$$

- **Do $f=f_s$ tương ứng với ω = 2π, tần số bị chồng lấn được viết theo ω:** $\omega_a = \omega \bmod(2\pi)$
- **Đại lượng $f/f_s=fT$ cũng được gọi là tần số số và tính bằng chu kỳ/mẫu, biểu diễn chuẩn hoá khác cho trục tần số vật lý, với khoảng Nyquist ứng với [-0.5,0.5].**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.4. Lấy mẫu các tín hiệu sine

- **1.4.2 Chuyển động tròn**
- **Nếu xét bánh xe quay, fT chính là số vòng quay được trong khoảng nghỉ giữa hai lần đèn sáng T. Nếu bánh xe thực sự đang quay với tốc độ cao hơn f+mfs, trong khoảng thời gian T, nó quay được (f+mfs) T=fT+mfsT=fT+m vòng, tức là nó đã hoàn thành m vòng. Vì vậy, một người quan sát sẽ hoàn toàn không thấy m vòng này. Tốc độ quay người quan sát cảm nhận được là f_a=f mod(fs). Hai ví dụ sau sẽ giải thích những điểm này.**

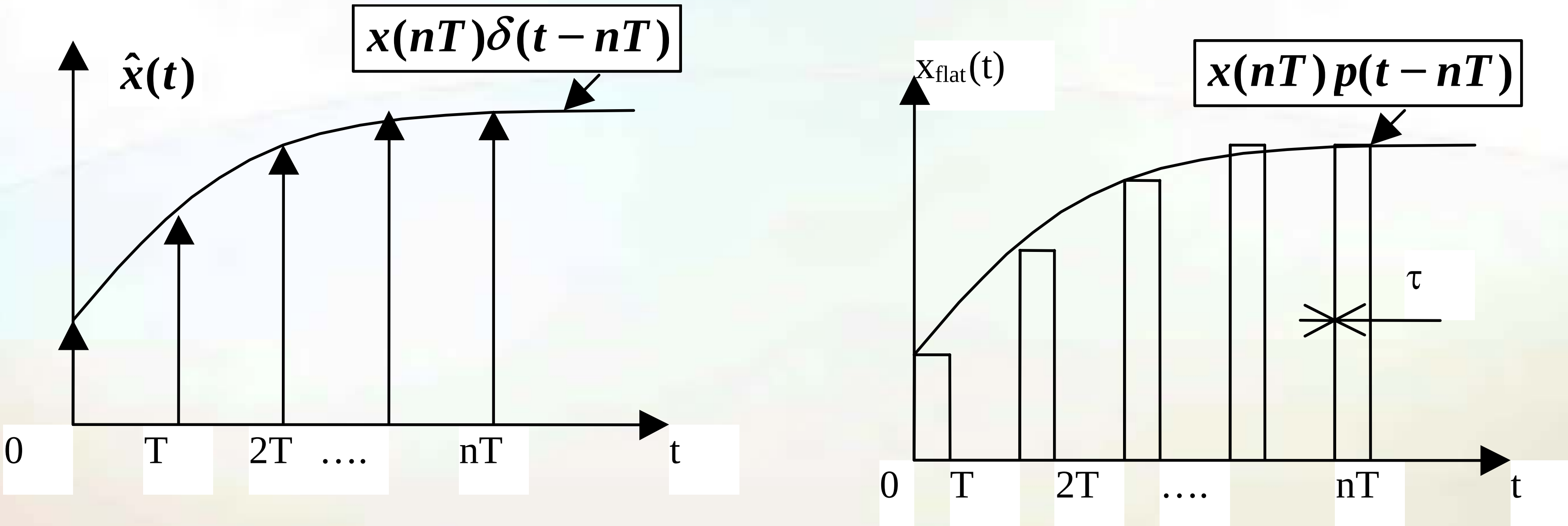
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **Tín hiệu được lấy mẫu có thể viết:**
- $$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \qquad (1.5.1)$$
- **Đối với lấy mẫu thực tế, tín hiệu được lấy mẫu là:**
- $$x_{flat}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)p(t - nT) \qquad (1.5.2)$$
- **Trong đó, p(t) là xung đỉnh ngang có độ rộng τ giây sao cho CT. Quá trình lấy mẫu lý tưởng ứng với τ dần về 0. Hình 1.5.1 minh hoạ trường hợp lấy mẫu lý tưởng và thực tế.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu



Hình 1.5.1 Lấy mẫu thực tế và lý tưởng.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **Phổ của tín hiệu được lấy mẫu $\hat{x}(t)$ chính là khai triển Fourier:**
- $$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-2\pi jft} dt \qquad (1.5.3)$$
- **Thay pt (1.5.1) vào pt (1.5.3)và hoán đổi phép tính tích phân và tổng với nhau, thu được:**
- $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-2\pi jft} dt \qquad (1.5.4)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)e^{-2\pi jft} dt \quad \text{hay}$$

- **Đây là cách thứ nhất biểu diễn $\hat{X}(f)$.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **Có nhiều vấn đề cần quan tâm như sau:**
- ***1. DTFT:*** **Hàm $\hat{X}(f)$ tính theo công thức (1.5.4) được gọi là biến đổi Fourier rời rạc trong miền thời gian DTFT.**
- $\hat{X}(f)$ **chỉ tính được khi biết trước *x*(*nT*).**
- ***2. Tính tuần hoàn:*** $\hat{X}(f)$ **là hàm tuần hoàn theo chu kỳ f_s:**

$$\hat{X}(f + f_s) = \hat{X}(f)$$

- **Điều này là do hệ số $e^{2\pi jfTn}$ tuần hoàn theo *f*. Khoảng [$-f_s/2, f_s/2$] giới hạn trong một chu kỳ, gọi là dải Nyquist.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **3. Chuỗi Fourier: xét về phương diện toán học, phương trình (1.5.4) xem như là khai triển Fourier của hàm tuần hoàn $\hat{X}(f)$, trong đó x(nT) là các hệ số tương ứng của chuỗi. Do đó x(nT) có thể được tính theo $\hat{X}(f)$ bằng công thức Fourier ngược:**
-
- $$X(nT) = \frac{1}{f}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \hat{X}(f) e^{2\pi jfTn} df = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(\omega) e^{e\ddot{\imath}\omega n} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \textbf{(1.5.5)}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **4. Xấp xỉ toán học: dựa vào định nghĩa của phép tích phân, phổ tần số của tín hiệu x(t) có thể được tính xấp xỉ bằng phương trình (1.5.6):**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi jft}dt \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-2\pi jfnT}T$$

- **hoặc:** $X(f) \cong T\hat{X}(f)$ **(1.5.6)**
- **Xấp xỉ này đúng khi T tiến đến 0:** $X(f) = \lim_{T\to 0} T\hat{X}(f)$ **(1.5.7)**
- **Kết quả này chứng tỏ rằng có thể dùng biến đổi Fourier rời rạc để tính phổ thực của tín hiệu tương tự.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **5. Xấp xỉ thực tế: khi tính toán phổ thực của tín hiệu, cần phải thực hiện trước hai phép xấp xỉ sau:**
- **(a) Chỉ dùng một số lượng hữu hạn các mẫu $x(nT)$ với chiều dài L (n = 0, 1, 2, ...,L-1), và phương trình (1.5.4) được tính gần đúng theo:**
- $$\hat{X}(f) \cong \hat{X}_L(f) = \sum_{n=0}^{L-1} x(nT)e^{-2\pi jfTn} \qquad \textbf{(1.5.8)}$$
- **Xấp xỉ này dẫn đến ý tưởng phân tích tín hiệu theo từng cửa sổ thời gian. Điều này sẽ được trình bày cụ thể ở chương 9.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

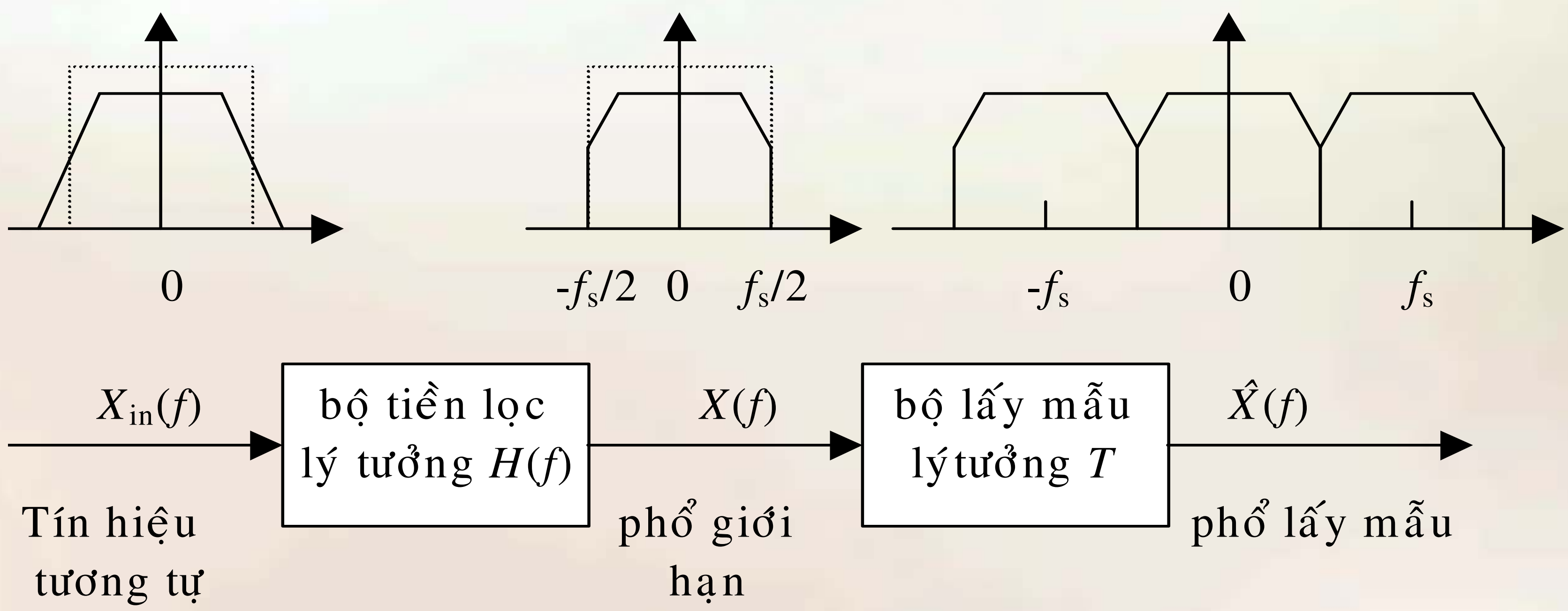
•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.1. Biến đổi Fourier rời rạc thời gian**
- **(b) Ta chỉ cần tính $\hat{X}(f)$ tại một số giá trị f nào đó được chọn trước. Việc chọn lựa thích hợp một tập hợp các giá trị f này sẽ tạo thành các thuật giải hiệu quả để tìm biến đổi Fourier rời rạc DFT, chẳng hạn như thuật giải FFT sẽ được đề cập ở chương 9.**
- **6. Biến đổi z: phương trình (1.5.4) dẫn đến biến đổi z sau:**
- $$\hat{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$
- **với** $z = e^{ej\omega} = e^{2\pi jfT}$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.2. Bộ antialiasing prefilter thực tế:**
- **Hình 1.5.5 minh họa một bộ lọc prefilter tương tự lý tưởng. Nó hoạt động giống như một bộ lọc thông thấp lý tưởng chỉ cho các thành phần tần số thấp hơn tần số Nyquist $f_s/2$ đi qua.**

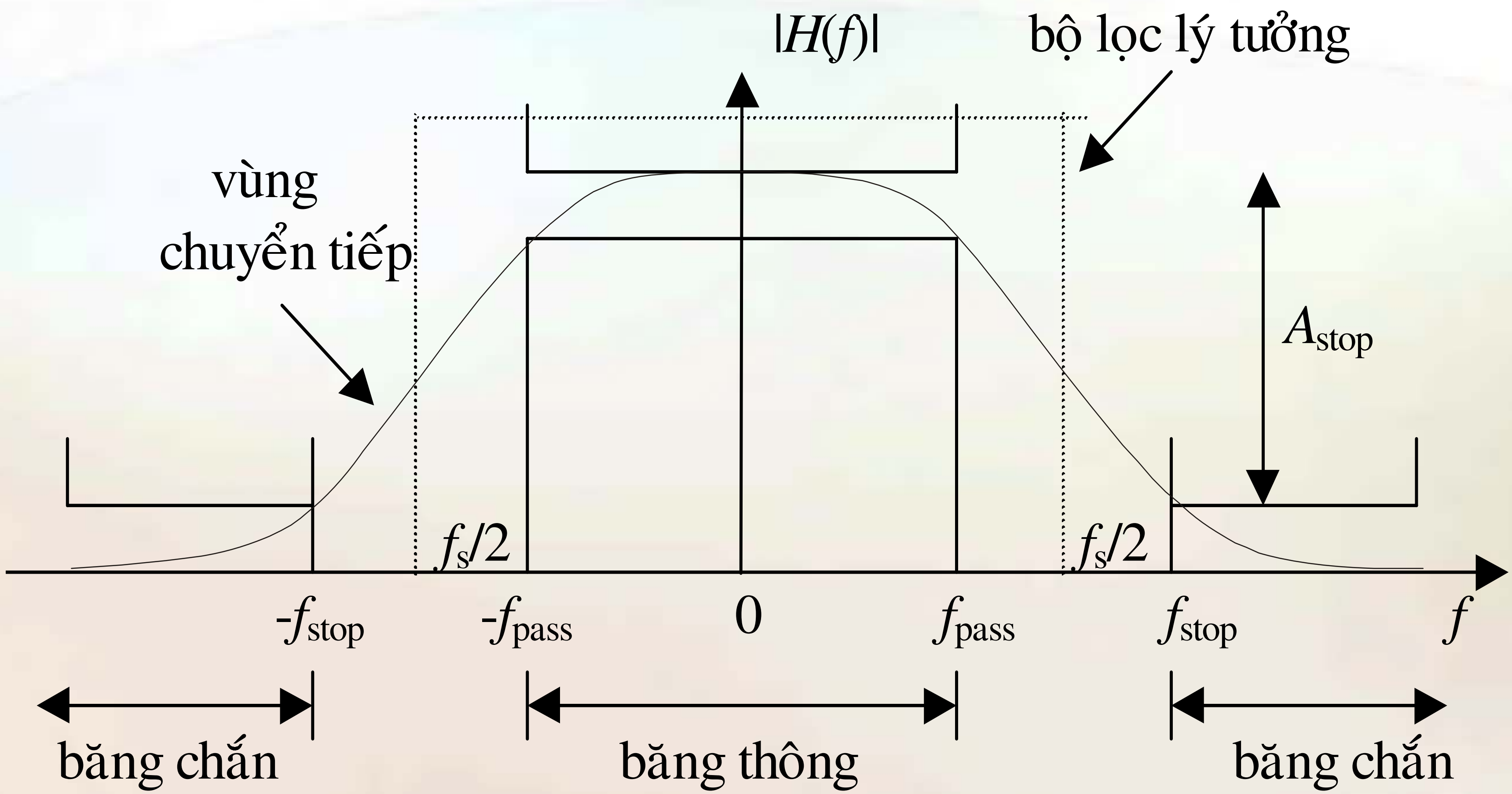


•Hình 1.5.5 Bộ antialiasing prefilter lý tưởng.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

• 1.5.2. Bộ antialiasing prefilter thực tế:



Hình 1.5.6 Bộ lọc antialiasing prefilter thực tế

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

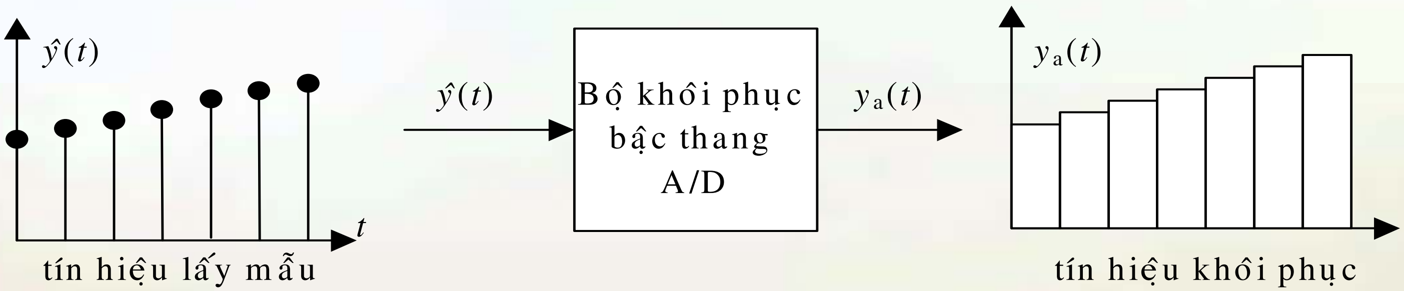
•1.5. Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

- **1.5.2. Bộ antialiasing prefilter thực tế:**
- **Bộ antialiasing prefilter dùng trong thực tế là không lý tưởng, không loại bỏ được hết các thành phần tần số nằm ngoài dải Nyquist. Vì vậy hiện tượng chồng phổ vẫn xảy ra. Tuy nhiên việc thiết kế một bộ lọc thích hợp sẽ làm cho sự chồng phổ suy giảm đến mức chấp nhận được. Một bộ lọc prefilter thực tế được trình bày ở hình 1.5.6. Dải thông [$-f_{pass}$, f_{pass}] được gọi là quảng tần số hữu ích, cần phải nhỏ hơn dải Nyquist.**

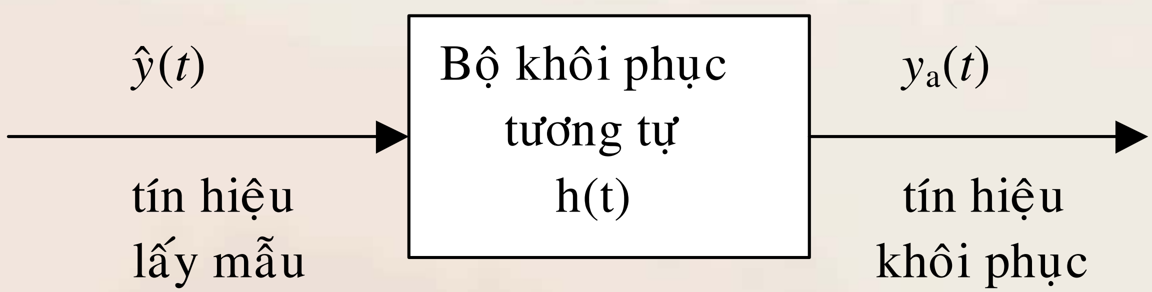
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

Ở phần 1.4.1, việc khôi phục tín hiệu được thực hiện bằng các bộ lọc thông thấp lý tưởng với tần số cắt là tần số Nyquist. Trong phần này, sẽ đề cập đến các bộ khôi phục thực tế.



Hình 1.6.1 Bộ khôi phục bậc thang.



Hình 1.6.2 Bộ khôi phục tương tự như một bộ lọc thông thấp.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

Ta cần xác định đáp ứng của bộ khôi phục *h*(*t*) cả trong hai trường hợp lý tưởng và thực tế. Quan hệ giữa tín hiệu khôi phục ở ngõ ra với tín hiệu lấy mẫu ở đầu vào *y*(*nT*) được tìm như sau:

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

thay vào $y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)h(t - nT)$

ta có

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)h(t - nT) \qquad \textbf{(1.6.1)}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

Biểu thức trên cho thấy việc lấp khoảng trống được thực hiện bằng cách bắt đầu từ mẫu tín hiệu hiện tại $y(nT)$ và nội suy theo hàm $h(t)$ cho đến khi gặp mẫu mới. Nói cách khác, một bản sao của $h(t)$ được ghép vào sau mỗi mẫu tín hiệu $y(nT)$, và tất cả tạo thành tín hiệu tương tự được khôi phục. Trong miền tần số, biểu thức (1.6.1) trở thành:

$$Y_a(f) = H(f)\hat{Y}(f) \qquad \textbf{(1.6.2)}$$

với $\hat{Y}(f)$ là phổ lặp cho bởi (1.5.11):

$$\hat{Y}(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} Y(f - mf_s)$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

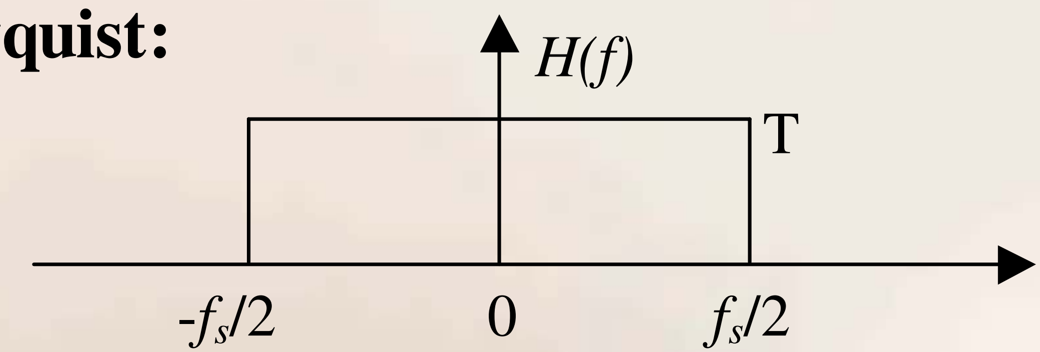
1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Một bộ khôi phục là lý tưởng nếu tạo ra được $Y_a(f)$ giống như phổ tín hiệu gốc $Y(f)$. Nếu phổ $Y(f)$ giới hạn trong một băng thông và các phổ lặp không chồng lấn lên nhau, $T\hat{Y}(f)$ coi như giống với $Y(f)$ trong dải Nyquist theo (1.5.15):

$$\hat{Y}(f) = \frac{1}{T} Y(f) \quad \text{với} \quad -\frac{f_s}{2} \le f \le \frac{f_s}{2} \qquad (1.6.3)$$

Bộ lọc khôi phục $H(f)$ là một bộ lọc LP lý tưởng với tần số cắt là tần số Nyquist:



CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Giá trị độ lợi *T* của bộ lọc sẽ được tính dưới đây. Trên hình 1.6.3, bộ lọc loại bỏ tất cả các phổ lặp, giữ lại thành phần bên trong dải Nyquist. Công thức (1.6.3):

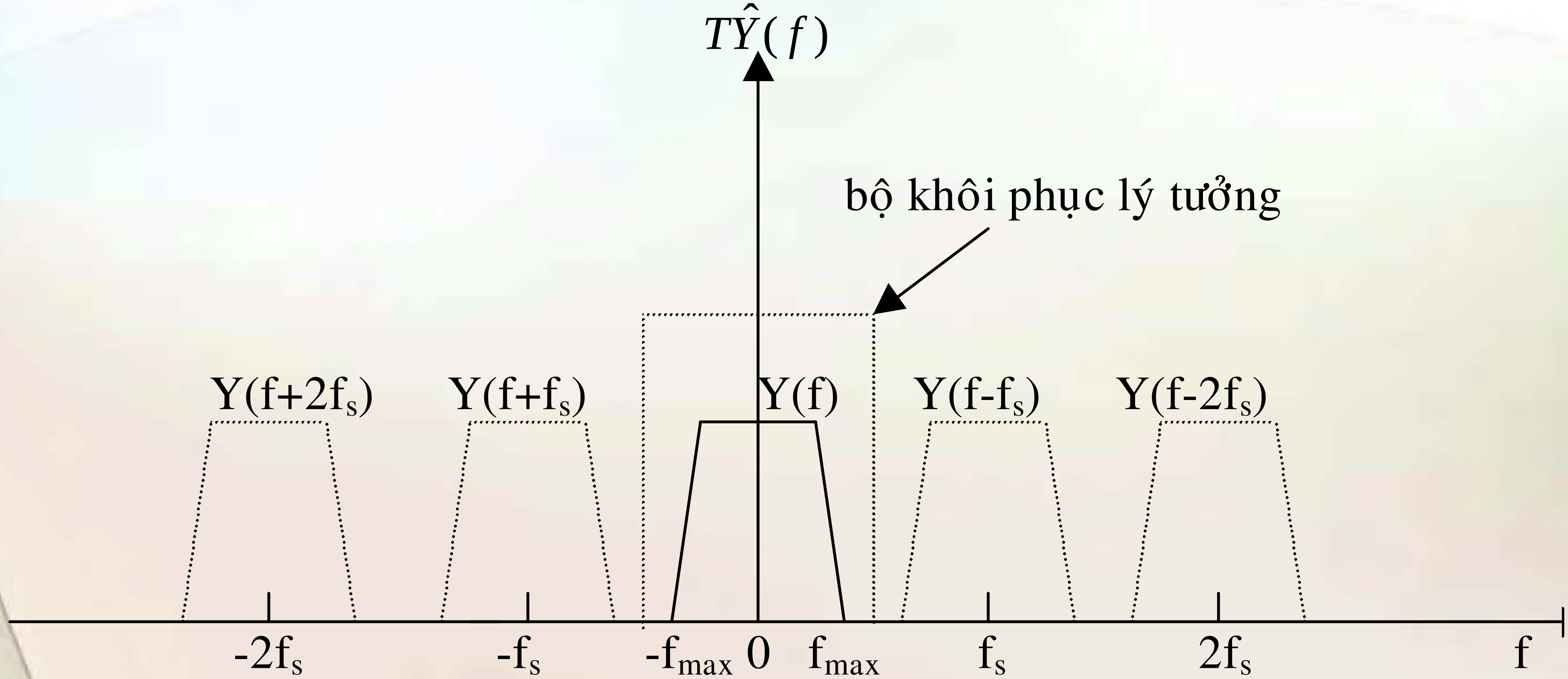
$$\hat{Y}_a(f) = H(f)\hat{Y}(f) = T.\frac{1}{T}Y(f) = Y(f)$$

độ lợi *T* của bộ lọc làm cho triệt tiêu hệ số 1/*T* của phổ tín hiệu lấy mẫu.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng



Hình 1.6.3 Bộ khôi phục lý tưởng trên miền tần số.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Bên ngoài dải Nyquist các thành phần phổ đều bị triệt tiêu. Do đó $Y_a(f) = Y(f)$ với mọi f, nghĩa là tín hiệu $y_a(t)$ được khôi phục giống hệt như tín hiệu gốc ban đầu $y(t)$. Kết hợp với (1.6.1), có được định lý lấy mẫu Shannon [35-39]:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)h(t-nT)$$

Đáp ứng xung của bộ khôi phục lý tưởng có thể được tìm bằng biến đổi ngược Fourier:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{2\pi jft}df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} Te^{2\pi jfT}df$$

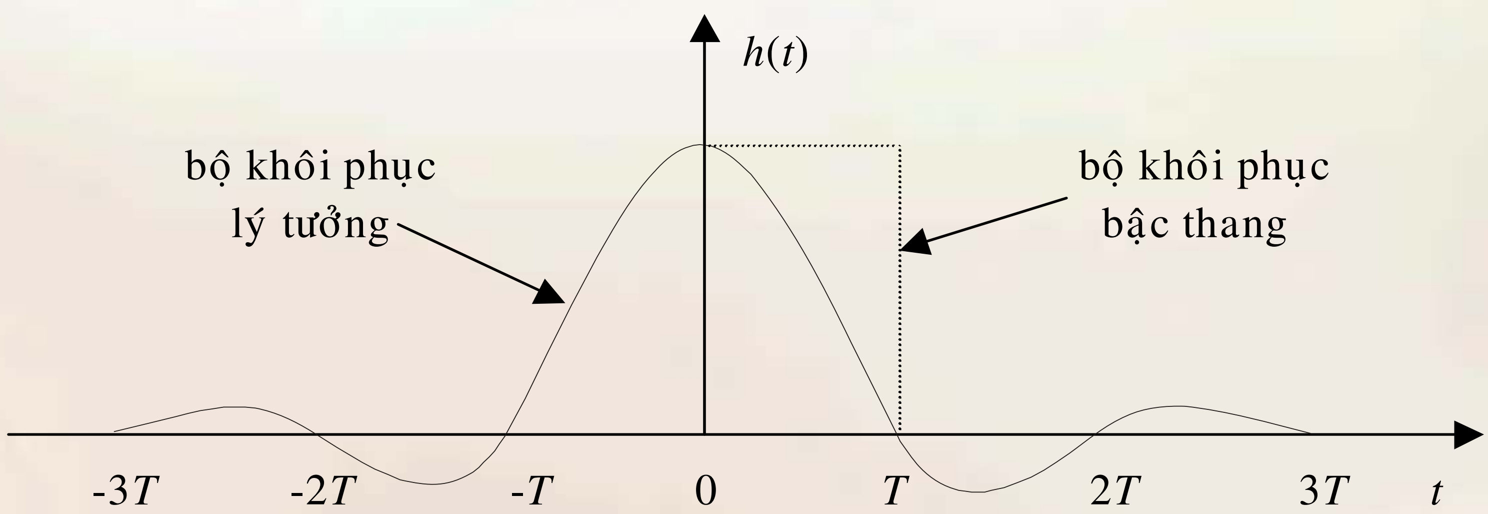
hoặc: $$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Hình vẽ 1.6.4 là đồ thị của bộ khôi phục lý tưởng. Tuy nhiên trên thực tế một bộ khôi phục như vậy không bao giờ tồn tại bởi vì đáp ứng xung của nó là phi nhân quả và vô hạn. Vì vậy trên thực tế người ta thay thế bằng các bộ khôi phục khác, chẳng hạn như bộ giữ bậc thang.



Hình 1.6.4 Đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Tuy nhiên có thể tạo ra bộ khôi phục gần với lý tưởng bằng cách cắt bớt đáp ứng xung của nó để trở nên hữu hạn, dùng thiết kế bộ lọc số nội suy FIR cho kỹ thuật *oversampling* và các ứng dụng chuyển đổi tần số lấy mẫu. Bộ khôi phục bậc thang.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Bộ khôi phục bậc thang ở hình 1.6.1 là bộ khôi phục tín hiệu đơn giản nhất và thường dùng trong thực tế. Nó tạo ra tín hiệu hình bậc thang xấp xỉ với tín hiệu gốc. Lưu ý rằng nó không giống như quá trình lấy mẫu mà ở đó xung lấy mẫu $p(t)$ có độ rộng rất hẹp t << T. Đáp ứng xung của bộ khôi phục bậc thang có chiều dài là T để lấp đầy khoảng trống giữa hai mẫu tín hiệu:

$$h(t) = u(t) - u(t-T)$$ **với $u(t)$ là hàm nấc đơn vị.**

Ngõ ra của bộ khôi phục tuy có phẳng hơn tín hiệu lấy mẫu nhưng vẫn chứa các thành phần tần số cao tạo ra bởi sự thay đổi đột ngột giữa các bậc thang. Có thể thấy rõ điều này qua việc tìm đáp ứng tần số của bộ khôi phục.

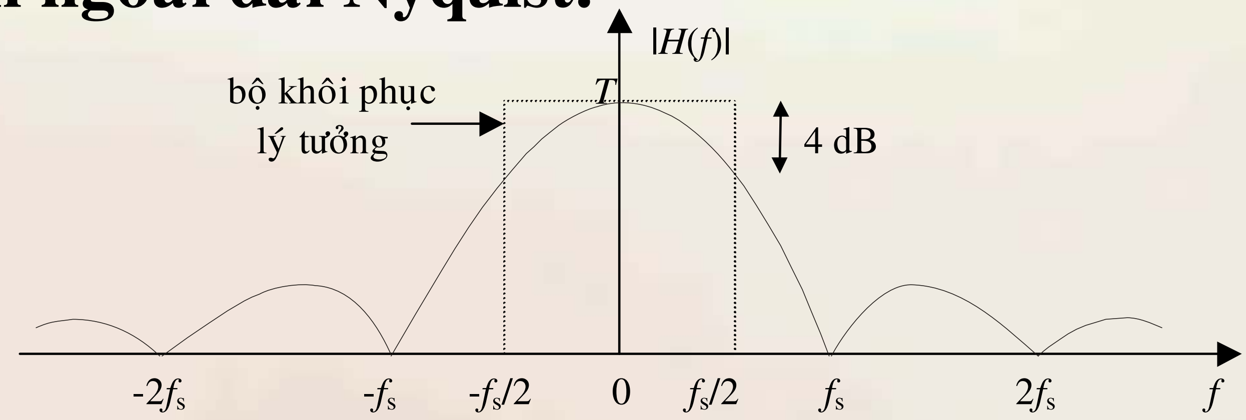
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Biến đổi Laplace của *h*(*t*) là: $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}$

Đáp ứng tần số bộ khôi phục bậc thang được so sánh với bộ khôi phục lý tưởng trên hình 1.6.5. Lưu ý rằng đáp ứng này triệt tiêu ở các vị trí tần số là số nguyên lần của tần số lấy mẫu. Các thành phần tần số cao được đề cập ở đây là phần phổ nằm ngoài dải Nyquist.



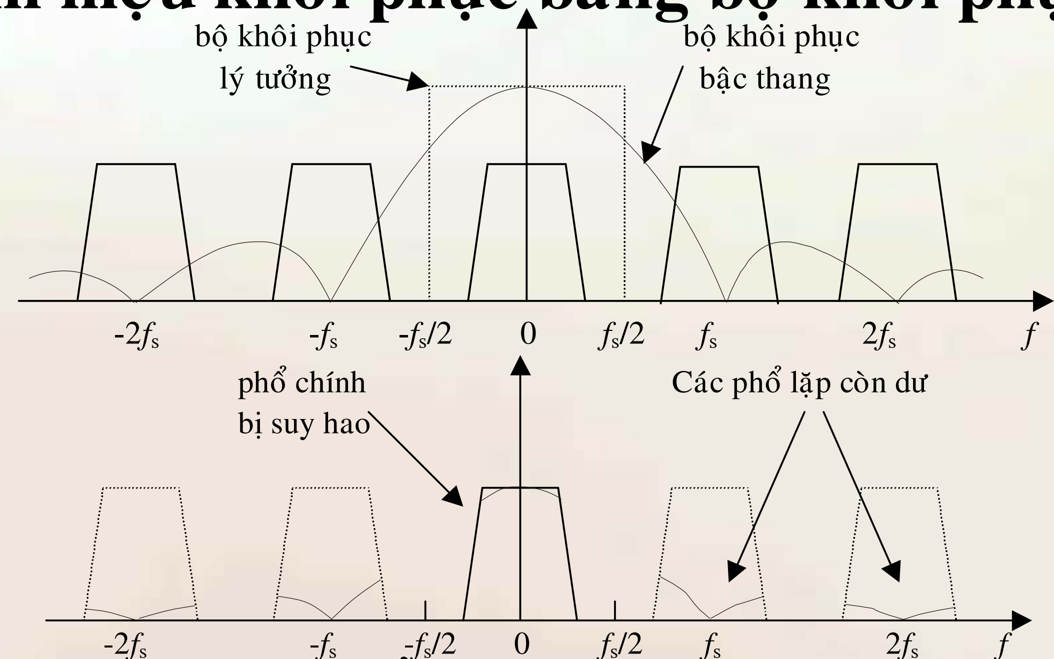
Hình 1.6.5 Đáp ứng tần số của bộ khôi phục bậc thang.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Có thể thấy rõ bộ khôi phục bậc thang không loại bỏ hết được các thành phổ lặp giống như bộ khôi phục lý tưởng. Hình 1.6.6 cho ta so sánh giữa phổ của tín hiệu lấy mẫu và phổ của tín hiệu khôi phục bằng bộ khôi phục bậc thang.



Hình 1.6.6. Đáp ứng tần số của bộ khôi phục bậc thang.

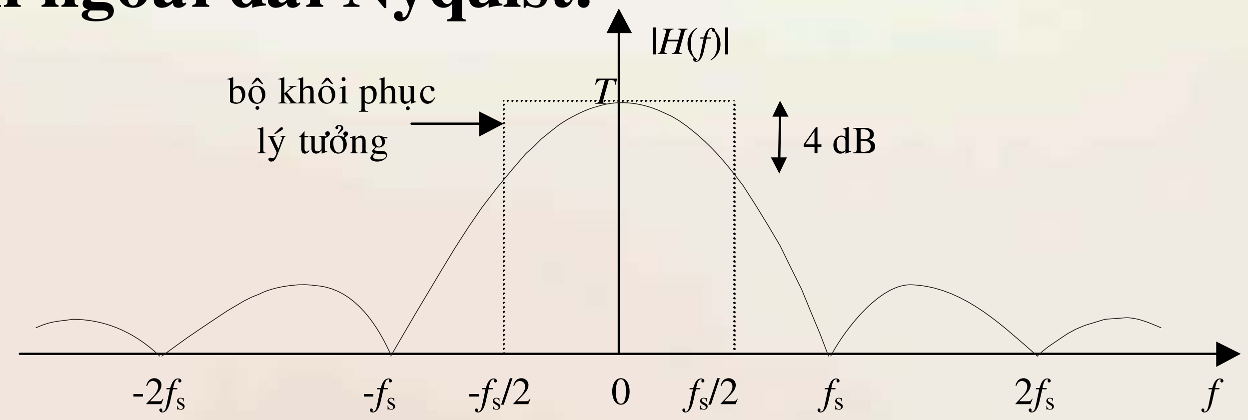
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

1.6.1. Bộ khôi phục lý tưởng

Biến đổi Laplace của *h*(*t*) là: $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}$

Đáp ứng tần số bộ khôi phục bậc thang được so sánh với bộ khôi phục lý tưởng trên hình 1.6.5. Lưu ý rằng đáp ứng này triệt tiêu ở các vị trí tần số là số nguyên lần của tần số lấy mẫu. Các thành phần tần số cao được đề cập ở đây là phần phổ nằm ngoài dải Nyquist.

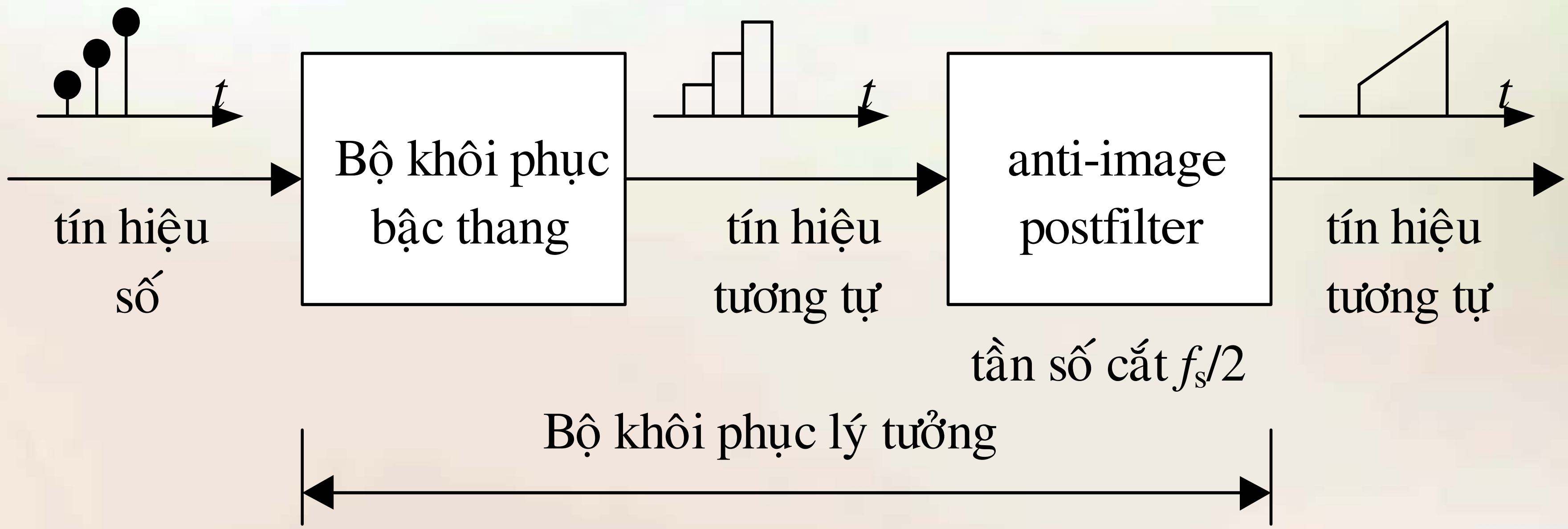


Hình 1.6.5 Đáp ứng tần số của bộ khôi phục bậc thang.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

- **1.6.2. Bộ lọc thông thấp anti-image postfilter**
- **Các thành phần phổ lặp còn lại có thể được loại bỏ bằng một bộ lọc thông thấp khác gọi là bộ lọc anti-image postfilter, với tần số cắt của bộ lọc là tần số Nyquist. Hoạt động của nó được thể hiện trên hình 1.6.7.**



Hình 1.6.7 Bộ lọc anti-image postfilter.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

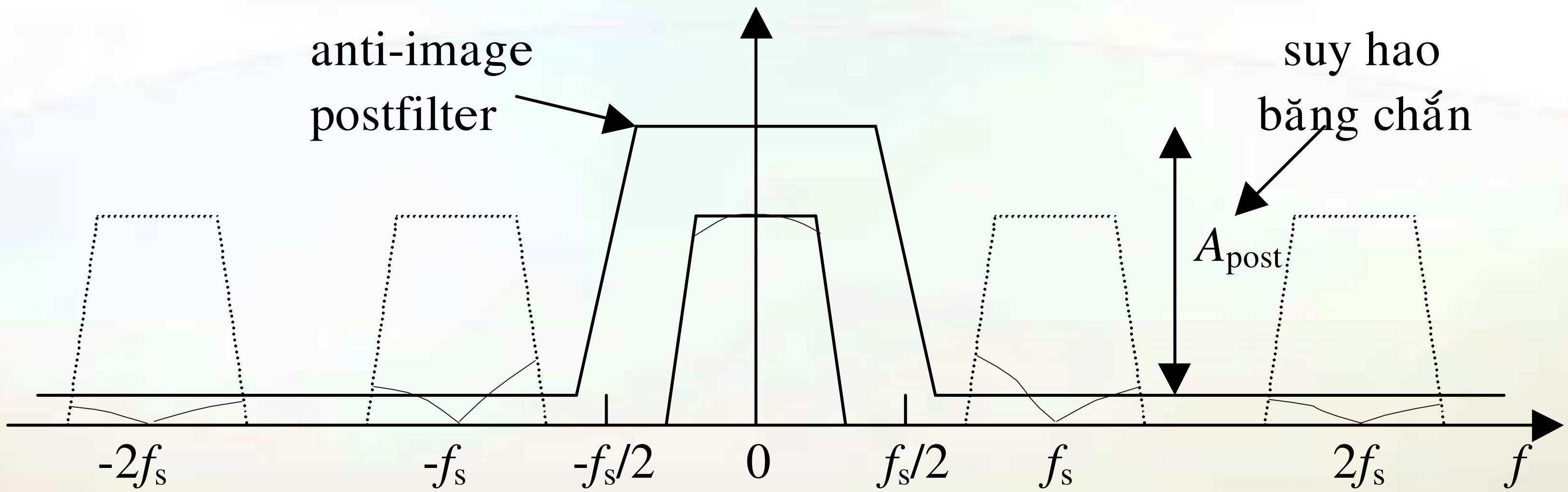
•1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

- **1.6.2. Bộ lọc thông thấp anti-image postfilter**
- **Trên miền thời gian, tác dụng của bộ postfilter thể hiện ở chỗ các góc giữa các bậc thang được nắn lại cho phẳng. Trên miền tần số, bộ postfilter kết hợp với bộ khôi phục bậc thang làm cho hầu hết các thành phần phổ lặp được loại bỏ, nhờ đó có đáp ứng giống như là một bộ khôi phục lý tưởng.**
- **Các thông số của bộ lọc postfilter cũng giống như của bộ lọc antialiasing prefilter, bao gồm băng thông phẳng với tần số cắt bằng với tần số Nyquist. Các ứng dụng DSP chất lượng cao, chẳng hạn như thông tin vô tuyến kỹ thuật số, đòi hỏi thông số của các bộ lọc prefilter và postfilter phải có độ chính xác nghiêm ngặt.**

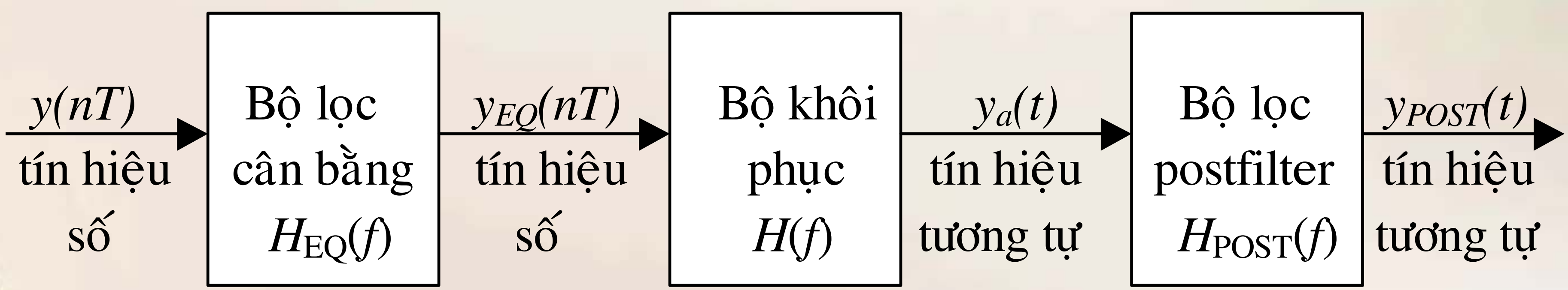
CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

• 1.6.2. Bộ lọc thông thấp anti-image postfilter



Hình 1.6.8 Phổ tín hiệu sau bộ postfilter.

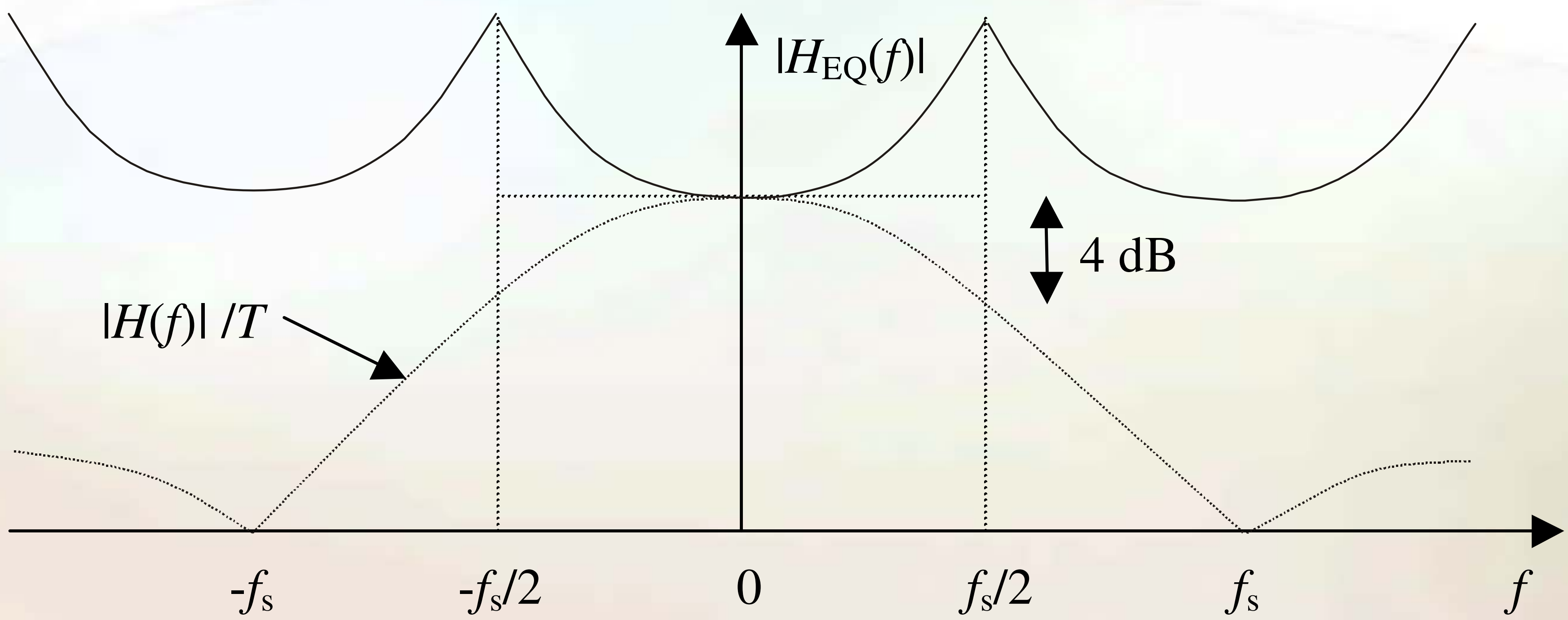


Hình 1.6.9 Bộ lọc số cân bằng cho biến đổi D/A.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

• 1.6.2. Bộ lọc thông thấp anti-image postfilter



Hình 1.6.10 Đáp ứng tần số của bộ cân bằng DAC.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

•1.6. Khôi phục tín hiệu tương tự

- **1.6.2. Bộ lọc thông thấp anti-image postfilter**
- **Bộ lọc cân bằng biến đổi chuỗi $y(nT)$ thành chuỗi "cân bằng" $y_{EQ}(nT)$ và đưa vào bộ biến đổi ADC và bộ lọc postfilter. Phổ của $y_{EQ}(nT)$ là $\hat{Y}_{EQ}(f) = H_{EQ}(f)\hat{Y}(f)$. Phổ của ngõ ra bộ DAC là $Y_a(f) = H(f)\hat{Y}_{EQ}(f)$. Cuối cùng phổ của tín hiệu khôi phục sau cùng sẽ là:**
  - $Y_{POST}(f) = H_{POST}(f)Y_a(f) = H_{POST}(f)H(f)H_{EQ}(f)\hat{Y}(f)$
- **Bên trong dải Nyquist, kết hợp (1.6.7) và (1.5.15) và dùng bộ lọc postfilter có băng thông phẳng $H_{POST}(f) = 1$, ta có:**
  - $Y_{POST}(f) = H_{POST}(f)H(f)H_{EQ}(f)\hat{Y}(f) = 1 \,.\, T \,.\, 1/T.Y(f) = Y(f)$
- **Bên ngoài dải Nyquist, coi như $H_{POST}(f) = 0$, ta có $Y_{POST}(f) = 0$. Việc kết hợp bộ cân bằng, bộ biến đổi DAC và bộ lọc postfilter sẽ tạo thành một bộ khôi phục lý tưởng.**

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP

Như đã trình bày ở các phần 1.5 và 1.6, các thành phần tối thiểu của một hệ thống xử lý số tín hiệu bao gồm:

1. Một bộ lọc thông thấp antialiasing prefilter để giới hạn phổ tín hiệu trong một băng thông thuộc dải Nyquist.

2. Một bộ biến đổi A/D (lấy mẫu và lượng tử hóa).

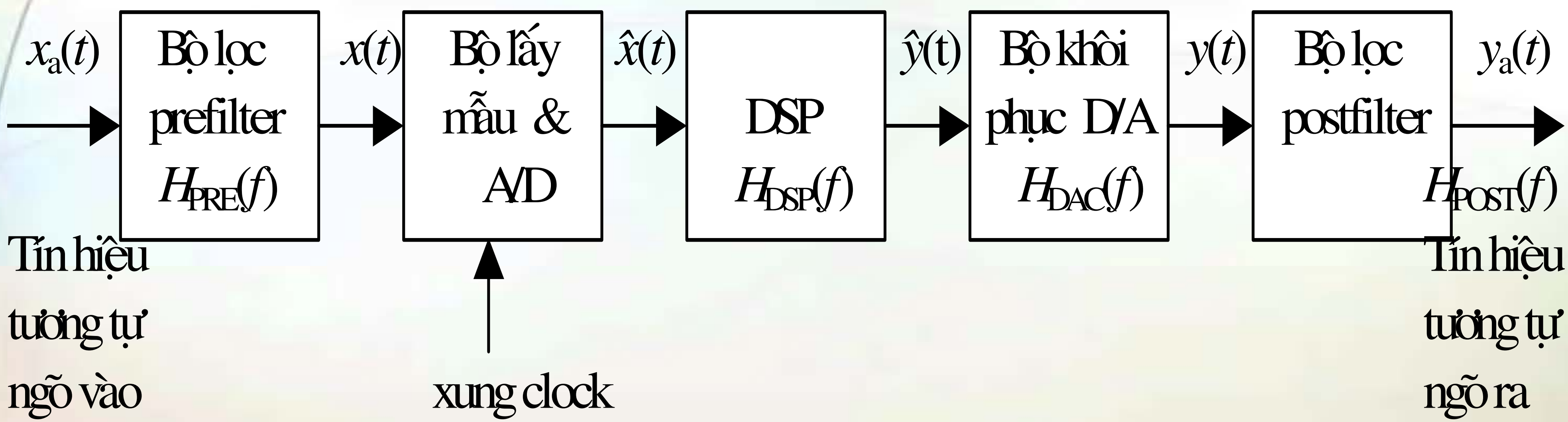
3. Một bộ xử lý số tín hiệu.

4. Một bộ biến đổi D/A (bộ khôi phục bậc thang), có thể đi kèm với một bộ lọc số cân bằng.

5. Một bộ lọc thông thấp anti-image postfilter có tác dụng loại bỏ hết các thành phần phổ ảnh còn sót lại do quá trình lấy mẫu.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP



Hình 1.7.1 Các thành phần của hệ thống DSP.

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP

- **Bộ lọc antialiasing prefilter $H_{\mathrm{PRE}}(f)$ có tác dụng giới hạn phổ tín hiệu vào trong một băng thông trên dải Nyquist [-f_s/2, f_s/2]. Ngõ ra $x(t)$ được đưa vào bộ lấy mẫu với tốc độ f_s mẫu trong một giây. Theo đúng thiết kế thì các phổ lặp do quá trình lấy mẫu sinh ra sẽ không bị chồng lấn lên nhau.**
- **Chất lượng của bộ lọc prefilter ảnh hưởng rất lớn đến cả hệ thống, mức độ chồng lấn của các phổ lặp hoàn toàn phụ thuộc vào đặc tuyến đáp ứng tần số của bộ lọc này.**
- **Tín hiệu sau khi được lấy mẫu (và lượng tử hóa) được đưa vào bộ xử lý số tín hiệu DSP có tác dụng chỉnh sửa lại dạng phổ tín hiệu với hàm truyền đạt là $H_{\mathrm{DSP}}(f)$, do đó ta có:**
  - $\hat{Y}(f) = H_{\mathrm{DSP}}(f)\hat{X}(f)$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP

Ngõ ra ŷ(t) hay y(nT) được đưa vào khôi phục DAC tạo thành tín hiệu bậc thang y(t). Cuối cùng y(t) được làm trơn qua bộ postfilter tạo ra tín hiệu tương tự ở ngõ ra của hệ thống. Từ (1.5.11) ta có:

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) = \frac{1}{T}\,[X(f) + \text{phổ lặp}]$$

Dựa vào hàm truyền đạt của các tầng ta tìm được phổ tín hiệu ngõ ra cuối cùng như sau:

$$Y_a(f) = H_{POST}(f)Y(f) = H_{POST}(f)H_{DAC}(f)\hat{Y}(f)$$

$$= H_{POST}(f)H_{DAC}(f)H_{DSP}(f)\hat{X}(f)$$

$$= H_{POST}(f)H_{DAC}(f)H_{DSP}(f)(1/T)[X(f) + \text{phổ lặp}]$$

$$= H_{POST}(f)H_{DAC}(f)H_{DSP}(f)(1/T)[H_{PRE}(f)X(f) + \text{phổ lặp}]$$

CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

1.7. Các thành phần cơ bản của hệ thống DSP

Tác dụng của bộ lọc prefilter đã đảm bảo cho các phổ lặp không chồng lấn lên nhau. Cuối cùng vì bộ lọc prefilter coi như là bộ lọc thông thấp gần lý tưởng nên độ lợi trong băng thông coi như bằng 1. Kết quả cuối cùng tín hiệu ngõ ra có phổ hầu như nằm gọn trong dải Nyquist.

$H_{POST}(f)H_{DAC}(f) \approx T$; Phổ lặp ≈ 0; $H_{PRE}(f) \approx 1$

Với các xấp xỉ trên thỏa mãn nhằm nâng cao chất lượng hệ thống, ta có kết quả:

$$Y_a(f) = T \cdot H_{DSP}(f)\frac{1}{T}\left[1 \cdot X_a(f) + 0\right]$$ **hoặc là**

$$Y_a(f) = H_{DSP}(f)X_a(f) \qquad \text{với} \qquad |f| \le \frac{f_s}{2} \qquad \textbf{(1.7.1)}$$

Như vậy, cách sắp xếp các tầng như trên tạo thành một bộ lọc tuyến tính cho tín hiệu tương tự ở ngõ vào, với hàm truyền *H*DSP(*f*) tạo bởi bộ xử lý DSP.