BỘ ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ

Bộ đề được biên soạn do Bk-khongsotach

Bộ đề gồm 2 phần

Phần 1: Tổng hợp các đề thi cuối kỳ giải tích 1 từ năm 2014 - 2018

Phần 2: Lời giải chi tiết và các trình bày một số đề tiêu biểu ở kỳ chính, phù hợp cho sinh viên các nhóm ngành tham khảo.

Tập tài liệu này vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể có chứa những lỗi ký hiệu và những lỗi đánh máy chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tài liệu ngày càng được hoàn thiện. Mọi đóng góp xin vui lòng gửi về: bk.khongsotach@gmail.com

Fanpage: Bách Khoa -Không sợ tạch

Group Facebook: Bk-không sợ tạch

Website: bkkhongsotach.edu.vn

Truy cập website , đăng ký thành viên / tham gia group facebook để cập nhật tài liệu các môn đại cương ở BK

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

==========***==========

ĐỀ II	ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20182

Mã HP: MI1141 – Tín chỉ - Thời gian 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho A, B, C là 3 tập hợp bất kỳ. Chứng minh rằng $(B\backslash A) \cap C = (B\backslash A)\backslash(A \cup \bar{C})$.

Câu 2 (1đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ và tập $A = [-1; 1]$. Xác định $f^{-1}(A)$.

Câu 3 (1đ). Cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Tìm ma trận X sao cho $(XA)^{-1} = B$.

Câu 4 (1đ). Tìm a, b sao cho hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + ax_4 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3b - 9 \\ -7x_1 + 11x_2 - 15x_3 + 2x_4 = 10b - 39 \end{cases}$$

Câu 5 (1đ). Trong không gian vector $P_3[x]$, đặt

$V = span\{u_1 = 1 + 2x - 2x^2 + x^3, u_2 = -2 - 3x + 6x^2 - x^3\}$

$W = span\{u_3 = 3 + 3x - 11x^2 + 2x^3, u_4 = -3 - 4x + 13x^2 + 5x^3\}$

Tìm số chiều và một cơ sở của $V + W$.

Câu 6 (2đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$f(4 + x + x^2) = -1 - x - 2x^2, f(1 + 2x + x^2) = 4 + 5x + 9x^2,$

$f(x^2) = 1 + x^2$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(x + x^2)$.

b) Tìm số chiều của $\operatorname{Im} f$ và 1 cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

Câu 7 (1đ). Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho $H = \{x, y, z | x - y + z = 0\}$. Tìm hình chiếu của $u = \{1, -2,1\}$ lên H.

Câu 8 (1.5đ). Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, đưa dạng toàn phương $\omega = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của ω khi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

Câu 9 (0.5đ). Cho A là ma trận thực vuông cấp 2019 thỏa mãn điều kiện $A^TA = 0$, ở đó A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A. Chứng minh rằng $A = 0$.

========================HẾT========================

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và đề nghị giám thị ký xác nhận số đề

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [1;3], B = (m; m+3)$. Tìm m để $(A\backslash B) \subset (A \cap B)$.

Câu 2 (1đ). Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} - 4i$, i là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ). Giải phương trình ma trận $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - X$.

Câu 4 (4đ). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + (m-3)x_2 - 3x_3 + 7x_4 = m, \end{cases}$ (trong đó m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véc tơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v = (4; 5; -6; -9)$ lên không gian con U ở câu c.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi;

$f(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 + 3x_2 + x_3; -x_1 - x_2 + x_3; -3x_1 + 2x_2 + 2x_3)$.

a) Tìm m để véc tơ $u = (1; 3; m) \in Im(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ). Trong không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véc tơ $B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin 10x, \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [2;4], B = (m; m+1)$. Tìm m để $(B \setminus A) \subset (A \setminus B)$.

Câu 2 (1đ). Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} + 4i, i$ là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ). Giải phương trình ma trận ;

Câu 4 (4đ). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = m, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + mx_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ (trong đó m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véc tơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v = (5; 2; 4; -3)$ lên không gian con U ở câu c.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 - 2x_2 + 2x_3)$.

a) Tìm m để véc tơ $u = (3; 5; m) \in Im(f)$. Ảnh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ). Trong không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véc tơ $B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin 10x, \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $(A \vee B) \rightarrow \overline{C}$.

Câu 2 (1.5đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 - 1$. Ánh xạ f có phải là đơn ánh không vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-3}(\{5 + 2i\})$.

Câu 3 (2đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tính $det(A + 2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $XA = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

Câu 4 (1.5đ). Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véc tơ $u_1 = 1 + 2x - x^3, u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3$, $u_3 = -1 + x - x^2 - x^3$, $u_4 = 4 + 2x^2$ và các không gian véc tơ con $V_1 = span\{u_1, u_2\}$, $V = span\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và 1 cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(1; 2; -1) = (2; 2; 4), f(2; 1; 3) = (1; 2; -1), f(1; 1; 2) = (2; 3; 1)$.

a) Xác định $\dim \operatorname{Im}(f)$ b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6 (2đ). Cho dạng toàn phương

$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với $a = 2$, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v \rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\langle u, u \rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hóa Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $\overline{A} \to (B \wedge C)$.

Câu 2 (1.5đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 + 1$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5 - 2i\})$.

Câu 3 (2đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $det(A - 2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $XA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 4 (1.5đ). Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véc tơ $u_1 = 1 - 2x - x^3, u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3$, $u_3 = -1 + x - x^2 - x^3$, $u_4 = 4 - 4x + 2x^2 + 2x^3$ và các không gian véc tơ con $V_1 = span\{u_1, u_2\}$, $V_2 = span\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và 1 cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

l$f(2;3;-1) = (6;2;-2), f(1;1;3) = (2;3;-1), f(3;1;-1) = (5;4;-2)$.

a) Xác định $\dim \operatorname{Im}(f)$ b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6 (2đ). Cho dạng toàn phương

$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với $a = 2$, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v\rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\langle u, u\rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hóa Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Đề 5:

ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ 20181

Nhóm ngành 2. Mã HP 1142

Câu 1: Tìm các nghiệm phức của phương trình thỏa mãn điều kiện $z^4 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6$ thỏa mãn điều kiện $\left|z-2i\right|<3$

Câu 2 : Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 14 & 11\end{bmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa mãn AX= B – X

Câu 3: Trong không gian $P_2\left[x\right]$ cho các vecto

$$v_1 = 1+x+x^2, v_2 = 2+mx-x^2,\ v_3 = 4+5x+x^2, v = 10+11x-5x^2$$

a) Xác định m để hệ $B=\left\{v_1,v_2,v_3\right\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Với m =2, chứng minh B lập thành cơ sở của không gian $P_2\left[x\right]$. Tìm tọa độ của vecto v đối với cơ sở B

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f\left(1,1,0\right)=\left(3,3,9\right)$, $f\left(2,-1,1\right)=\left(-1,3,1\right)$, $f\left(0,1,1\right)=\left(1,1,3\right)$

a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Xác định $f\left(3,4,5\right)$

c) Xác định số chiều và một cơ sở của kerf

Câu 5: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vecto:

$$v_1 = \left(1;1;2;-1\right), v_2 = \left(1;2;1;1\right), v_3\left(3;4;5;-1\right)$$

Đặt $V = Span\left\{v_1,v_2,v_3\right\}$

a) Xác định số chiều và một cơ sở của V

b) Tìm hình chiếu trực giao của vecto $V=\left(4,1,0,4\right)$ lên V

Câu 6: Cho ma trận A và mxn với $m \le n$, có hạng bằng m. CM tồn tại ma trận B cỡ nxm sao cho AB=E, với E là ma trận đơn vị.

ĐỀ 7 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - 20181**

Mã số *MI1143* – **Nhóm ngành 3 – Thời gian: 90 phút**

Câu 1. (1đ) Cho mệnh đề P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: y > x$"

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2. (1đ) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Câu 3. (2đ) Cho các vector:

$v_1 = (2,1,5,8); v_2 = (1,-1,3,5); v_3 = (0,2,1,6); v_4 = (-3,5,2,1)$

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $v = (-5,15,15,13)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4. (3đ) Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(3,2,1) = (8,3,3); f(3,2,0) = (6,5,3); f(3,0,0) = (6,3,9)$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5. (2đ) Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector; $v_1 = (-1,1,1,-1,-1)$; $v_2 = (2,1,4,-4,2)$; $v_3 = (5,-4,-3,7,1)$. Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gramm-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = (1,2,3,4,5)$ lên V.

Câu 6. (1đ) Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

ĐỀ 8 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - 20181**

Mã số *MI1143* **– Nhóm ngành 3 – Thời gian: 90 phút**

Câu 1. (1đ) Cho mệnh đề P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}: y < x$".

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2. (1đ) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Câu 3. (2đ) Cho các vector:

$\upsilon_1 = (2,1,0,-3); \upsilon_2 = (1,-1,2,5); \upsilon_3 = (5,3,1,2); \upsilon_4 = (8,5,6,1)$

a) Chứng minh $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_3$ lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $\upsilon = (23,14,17,-5)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4. (3đ) Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(1,2,3) = (13,-7,-2); f(1,2,0) = (4,2,-2); f(2,0,0) = (4,0,4)$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5. (2đ) Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector: $\upsilon_1 = (1,-1,-1,1,1); \upsilon_2 = (2,1,4,-4,2); \upsilon_3 = (4,-3,-2,6,0)$. Ký hiệu V là không gian sinh bởi $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gramm-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $\upsilon = (0,2,4,6,8)$ lên V.

Câu 6. (1đ) Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ HÈ 20173**
MÃ HP: MI 1141, Nhóm 1, Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1(2đ). 1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề
$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)$ và $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$
có tương đương hay không? Tại sao?

2. Ánh xạ $f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1+i)^{10}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}$.

Câu 3 (1đ). Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & m \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Chứng minh rằng $F\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2 : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ là không gian con của không gian M_2 các ma trận vuông cấp 2. Tìm số chiều của F.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x - y + z; -x + 2y - z; z).$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6 (1đ). Nhận dạng đường bậc hai $4xy - 4\sqrt{2}y = 1$.

Câu 7 (1đ). Cho $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 1+a_1^2 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Câu 8 (1đ). Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng hệ các véc tơ $\{f_1(x) = e^{\lambda_1 x}; f_2(x) = e^{\lambda_2 x}; \ldots; f_n(x) = e^{\lambda_n x}\} \subset C(\mathbb{R})$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ HÈ 20173**
MÃ HP: MI 1141, Nhóm 1, Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1 (2đ).

1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề
$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ và $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

2. Ánh xạ $f: \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x-5}{x-3}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (1-i)^{20}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}$.

Câu 3 (1đ). Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Chứng minh rằng $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - z + t = 0\right\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều của F.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x - y + z; x + 3z; y + z).$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6 (1đ). Nhận dạng đường bậc hai $2xy + 2\sqrt{2}x = 1$.

Câu 7 (1đ). Cho $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch

$$M = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -\left(1+t^2\right) \\ y & x & -1\left(1+t^2\right) & z \\ z & 1+t^2 & x & -y \\ 1+t^2 & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

Câu 8 (1đ). Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng hệ các véc tơ $\left\{f_1(x) = e^{\lambda_1 x}; f_2(x) = e^{\lambda_2 x}; \ldots; f_n(x) = e^{\lambda_n x}\right\} \subset C(\mathbb{R})$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20173**
MÃ HP MI 1143 Nhóm 3 Thời gian: 90 phút

Câu 1 (2đ).

1) Cho ánh xạ $f: [1; +\infty) \to (-2; +\infty)$ xác định bởi $f(x) = 2x - 2$. Ánh xạ f là ánh xạ toàn ánh không? Tại sao?

2) Cho số phức $z = \frac{1+2i}{2-i}$, $(i^2 = -1)$. Tính $\sqrt[6]{z}$.

Câu 2 (2đ). Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 15 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, m là tham số.

1) Khi $m = 1$, tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$.

2) Tìm m để ma trận A có hạng nhỏ nhất.

Câu 3 (3đ). Kí hiệu G là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -7x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh G là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của G.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ $u = (1; -2; 0; 1)$ trên G.

Câu 4 (2đ). Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(2; 1; -1) = (0; 1; 3), f(1; 2; 1) = (3; 2; 3), f(1; -1; 2) = (1; 3; 0)$.

1) Tìm ma trận A của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (nếu có) để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 (1đ).

Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh $det(A^2 + 4E) \geq 0$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và phải làm đúng số đề được phát. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 6 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20173**
Mã HP MI 1143 Nhóm 3 Thời gian: 90 phút

Câu 1(2đ).

1) Cho ánh xạ $g: (-\infty; -1] \to [-2; +\infty)$ xác định bởi $g(x) = -2x - 2$. Ánh xạ g là ánh xạ đơn ánh không? Tại sao?

2) Cho số phức $z = \frac{5+i}{3-2i}, (i^2 = -1)$. Tính z^{2018}.

Câu 2(2đ). Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & n & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 19 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, n là tham số.

1) Khi $n = 0$, tìm ma trận X thỏa mãn $XA = C$.

2) Tìm n để ma trận A có hạng lớn nhất.

Câu 3(3đ). Kí hiệu S là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh S là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của S.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ $x = (0; 1; 2; 5)$ trên S.

Câu 4(2đ). Kí hiệu $P_2[x]$ là không gian các đa thức hệ số thựuc, có bậc ≤ 2. Cho toán tử tuyến tính $g: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi:

$g(2 + x - x^2) = x + 3x^2, g(1 + 2x + x^2) = 3 + 2x + 3x^2, g(1 - x + 2x^2) = 1 + 3x.$

1) Tìm ma trận B của g theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

2) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ (nếu có) để ma trận của g theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5(2đ).

Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh $det(A^2 + 9E) \geq 0$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và phải làm đúng số đề được phát. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***<u>Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.</u>***

<u>Câu 1</u> *(1đ)* Giải phương trình trong trường số phức:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^2 - 3(1+2i)\left(\frac{z+1}{z}\right) - 8 + 6i = 0.$$

<u>Câu 2</u> *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

<u>Câu 3</u> *(1,5đ)* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + a^2 x_4 = 0, \\ x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (2-a)x_2 + (6-a)x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>Câu 4</u> *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x,y,z,s) = (x + 2y + z - 3s, 2x + 5y + 4z - 5s, x + 4y + 5z - s), \quad \forall (x,y,z,s) \in \mathbb{R}^4$.

a) Tìm một cơ sở và số chiều của $\ker f$.

b) Trên $\mathbb{R}^4$ xét tích vô hướng chính tắc, cho $u = (1;0;1;0)$, tìm $\omega \in \ker f$ sao cho $||u-\omega|| \le ||u - v||$, với mọi véc tơ $v \in \ker f$.

c) Hãy bổ sung thêm các véc tơ vào hệ cơ sở tìm được trong câu (a) để được hệ mới trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

<u>Câu 5</u> *(1,5đ)* Rút gọn dạng toàn phương sau bằng phương pháp chéo hóa trực giao $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy nhận dạng mặt bậc hai sau $\varphi(x) = 6x_3 + 6$.

<u>Câu 6</u> *(1đ)* Cho $G = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ và $*$ là một phép toán hai ngôi trên G xác định bởi $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$. Hỏi $(G,*)$ có phải là một nhóm không? Tại sao?

<u>Câu 7</u> *(1đ)* Giả sử rằng $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ký hiệu $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$ là tập các giá trị riêng của AB. Chứng minh rằng: $\sigma_{\mathbb{R}}(AB) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(BA)$.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trong trường số phức:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^2-(5+i)\left(\frac{z+1}{z}\right)+8+i=0.$$

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $X^2-2X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 8 & 15\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ))* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3+a^2x_4=0,\\ x_1+(2-a)x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(4-a)x_2+(10-a)x_3+4x_4=0\end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x,y,z,s,t)=(x+2y+z-3s+4t,2x+5y+4z-5s+5t,x+4y+5z-s-2t)$ $\forall(x,y,z,s,t)\in\mathbb{R}^5$,

a) Tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

b) Trên $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng chính tắc, cho $u=(1;0;2)$, tìm $\omega\in\operatorname{Im} f$ sao cho $||u-\omega||\le||u-v||$, với mọi véc tơ $v\in\operatorname{Im} f$.

c) Hãy bổ sung thêm các véc tơ vào hệ cơ sở tìm được trong câu (a) để được hệ mới trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5 *(1,5đ)* Rút gọn dạng toàn phương sau bằng phương pháp chéo hóa trực giao $\varphi(x)=(x_1-2x_2+x_3)^2,\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Hãy nhận dạng mặt bậc hai sau $\varphi(x)=6x_2+6$.

Câu 6 *(1đ)* Cho $G=(\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}$ và $*$ là một phép toàn hai ngôi trên G xác định bởi $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_2y_1+y_2)$. Hỏi $(G,*)$ có phải là một nhóm không? Tại sao?

Câu 7 *(1đ)* Giả sử rằng $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ký hiệu $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$ là tập các giá trị riêng của AB. Chứng minh rằng: $\sigma_{\mathbb{R}}(BA)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$.

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^7 = (z-i)^7$.

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ)* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ ax_2 + (1-a)x_3 + (a^2+1)x_4 = 0, \\ x_1 + (2-a)x_2 - x_3 - 2a^2x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, -2x + y - z, 2x - y + z)$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $\omega = (1;0;1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\phi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 5 *(1,5đ)* Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho $V_1 = Span\{v_1 = (1;2;3;1), v_2 = (1;3;3;2)\}$;
$V_2 = Span\{v_3 = (1;2;5;3), v_4 = (1;3;4;3)\}$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1 + V_2$. Tìm hình chiếu của véc tơ $\omega = (1;1;2;0)$ lên $V_1 + V_2$

Câu 6 *(1đ)* Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi: P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi\big(p(x)\big) = \big(p(0), p(1), p(-1)\big)$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1đ)* Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n \times 1$. Giả sử rằng A, B là hai ma trận vuông thực cấp n, với $0 < n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $X^tAY = X^tBY, \forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A = B$.

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**
Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^9=(z-i)^9$.

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ))* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-x_4=0, \\ ax_2+(1-a)x_3+(a^2+1)x_4=0, \\ 2x_1+(4-a)x_2-4x_3-2(a^2+1)x_4=0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(4x+2y-2z,2x+y-z,-2x-y+z)$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $\omega=(1;0;1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\phi(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=16$.

Câu 5 *(1,5đ)* Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho $V_1=Span\{v_1=(1;2;3;1),v_2=(2;0;-2;1)\}$;
$V_2=Span\{v_3=(1;3;5;2),v_4=(3;8;13;3)\}$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1\cap V_2$. Tìm hình chiếu của véc tơ $\omega=(1;1;0;1)$ lên $V_1\cap V_2$

Câu 6 *(1đ)* Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi:P_2[x]\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi\big(p(x)\big)=\big(p(0),p(-1),p(1)\big)$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1đ)* Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n\times 1$. Giả sử rằng A,B là hai ma trận vuông thực cấp n, với $0<n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $X^tAY=X^tBY,\forall X,Y\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A=B$.

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm học: 2, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***<u>Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.</u>***

<u>Câu 1 (2đ)</u>: Giải phương trình trong tập số phức:

a) $z^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)iz - 1 - \sqrt{3} + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0.$

b) $\frac{1}{(2z+9)^{22}} - \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)i}{(2z+9)^{11}} - 1 - \sqrt{3} + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0.$

<u>Câu 2 (1đ):</u> Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -6\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Tìm ma trận X sao cho $AX - B = CX$.

<u>Câu 3 (1đ):</u> Tìm m và n sao cho không gian nghiệm của hệ phương trình sau có số chiều là 2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + mx_3 + 3x_4 = 0\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + nx_4 = 0. \end{cases}$$

<u>Câu 4 (1đ)</u>: Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ với

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3, -7x_1 + 7x_2 - 12x_3. -5x_1 + 4x_2 - 7x_3)$

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và cơ sở của không gian $\mathrm{Im}\ f$.

<u>Câu 5 (2đ)</u>: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 4\\ 4 & 4 & -2\\ -14 & -7 & 9\end{pmatrix}$.

Hãy tính các giá trị riêng của A, sau đó chéo hóa ma trận A.

<u>Câu 6 (2đ)</u>: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho ba véc-tơ

$$v_1 = (1; 0; -1; 0), v_2 = (1; -2m; m; 1), v_3 = (1; 1; 1; 0).$$

a) Tìm m để hai véc-tơ v_1, v_2 trực giao với nhau, và với m tìm được đó hãy chứng minh rằng hệ véc-tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là độc lập tuyến tính.

b) Với m tìm được ở trên hãy tính hình chiếu trực giao của véc-tơ $u = (0; 2; 1; -1)$ lên không gian $Span\{v_1, v_2, v_3\}$.

<u>Câu 7 (1đ)</u>: Cho A là ma trận thực vuông cấp n chéo hóa được và $p(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A (tức là $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ với $\lambda \in \mathbb{R}$). Chứng minh rằng $p(A) = O$.

Đề 7

ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ HỌC KÌ 20171

MÃ HP MI 114

Câu 1: Xét ánh xạ xác định bởi: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2;x_1^3)\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

CM f là song ánh. Xác định ánh xạ ngược của f

Câu 2: Tìm các nghiệm phức của phương trình: $(x^4+16)(x^2-2ix+8)=0$

Câu 3: Cho ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\8&5\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Tìm ma trận X thỏa AX – B = C

Câu 4: Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vecto $v_1=(1;1;1;0),v_2(0;1;2;3),v_3(2;1;0;2)$

a) CM $\{v_1;v_2;v_3\}$ lập thành cơ sở của $V=Span(v_1;v_2;v_3)$

b) CM $v=(4;2;0;9)$ thuộc V. Tìm tọa độ của v đối với cơ sở trên.

Câu 5: Trong $P_2[x]$ Xét cơ sở $B=\{u_1;u_2;u_3\}$, trong đó $u_1=1+x;\ u_2=x;\ u_3=1+x+x^2$

. Cho toán tử tuyến tính f: $P_2[x]\to P_2[x]$ có ma trận đối với cơ sở B là $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\2&3&2\end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc: $S=\{1,x,x^2\}$

b) Xác định v trong $P_2[x]$ để $f(v)=7+4x+2x^2$

c) Xác định một cơ sở của Kerf

Câu 6: Trên R^3 cho dạng toàn phương w xác định bởi:

$$w(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$$

Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm cơ sở trực chuẩn để w có dạng chính tắc. Viết dạng chính tắc đó.

Câu 7: Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^4=0$, với O là ma trận không. CM: $A^2=0$

ĐỀ I **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ - HỌC KỲ 20163**

Thời gian: 90 phút

Câu 1. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $A \subset X$. Chứng minh $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

Câu 2. Cho phương trình $z^2 - (5+3i)z + (8+4i) = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 với các điểm biểu diễn là A, B. Tính độ dài đoạn AB.

Câu 3. Tìm điều kiện của m để ma trận $\begin{bmatrix} 1+m & 2+m & -m \\ 3+m & -1+m & 2-m \\ -1+m & m & 1-m \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$

có nghiệm không tầm thường và khi đó tìm công thức nghiệm.

Câu 5. Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ $u_1 = 1 + x - x^2$, $u_2 = 3x - x^2$, $u_3 = 2 - 2x + x^2$, $u_4 = 3 + 2x = 2x^2$. Chứng minh mỗi hệ gồm 3 trong 4 véc tơ kể trên đều là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1 - 12x_2 + 4x_3, 4x_1 + 7x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2)$

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{(1;0;1), (0;1;1), (0;0;1)\}$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 7. Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc <,> và cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$.

a) Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$. Chứng minh $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3$.

b) Ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn bất kỳ có chéo hóa trực giao được không ? Tại sao ?

Câu 8. Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017E = 0$. Chứng minh $det(A) > 0$.

ĐỀ II **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ - HỌC KỲ 20163**

Thời gian: 90 phút

Câu 1. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $B \subset Y$. Chứng minh $f[f^{-1}(B)] \subset B$.

Câu 2. Cho phương trình $z^2 - (5-3i)z + (8-4i) = 0$ có hai nghiệm với các điểm biểu diễn là A, B. Tính độ dài đoạn AB.

Câu 3. Tìm m để ma trận $\begin{bmatrix} 1-m & 2+m & m \\ 3-m & -1+m & 2+m \\ -1-m & m & 1+m \end{bmatrix}$ không khả nghịch.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - mx_4 = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm và khi đó tìm công thức nghiệm.

Câu 5. Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ $u_1 = 3 + x + x^2$, $u_2 = 2 - x^2$, $u_3 = 1 + 2x - 2x^2$, $u_4 = -4x + 3x^2$. Tìm hệ gồm 3 trong 4 véc tơ kể trên mà chúng không là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x_1, x_2, x_3) = (9x_1 - 12x_2 + 4x_3, 4x_1 - 5x_2 + 2x_3, -8x_1 + 10x_2 - 4x_3)$

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{(1;1;0), (0;1;1), (0;0;1)\}$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 7. Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc <,> và cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$.

a) Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(e_1) = e_3, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2$. Chứng minh $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3$.

b) Ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn bất kỳ có chéo hóa trực giao được không ? Tại sao?

Câu 8. Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017E = 0$. Chứng minh $det(A) > 0$.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Giải phương trình phức $z^6 + iz^4 - z^2 - i = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+y, x-y)$ và $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.Tìm a biết

$$f^{-1}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\}$$

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B^T$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1:

$$\begin{cases} bx + 3y + z = 0 \\ (1+2b)x + (a+5)y + 2z = 0 \\ (2b-1)x + (a+2)y + z = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ

$$v_1 = (1;2;-1;0), v_2 = (2;2;-1;3), v_3 = (-1;-2;2;-1), v_4 = (1;0;1;2)$$

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn :

$$f(1+x^2) = 2 + 5x + 3x^2 \qquad f(-1+2x+3x^2) = 7(x+x^2)$$
$$f(x+x^2) = 3(x+x^2)$$

a) Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

b) Xác định m để véc tơ $v = 2 + mx + 5x^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2$$

a) Tìm a để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid

b) Khi $a = -5$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận thực A vuông cấp 2017.Chứng minh rằng

$$det(A - A^7)^{2017} = 2017(det\, A - det\, A^T)$$

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Giải phương trình phức $z^6 - iz^4 - z^2 + i = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-y, x+y)$
và $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.Tìm a biết

$$f^{-1}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\}$$

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $XA^T = B$.

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1 :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ (1+3a)x + (b+4)y + 3z = 0 \\ -2x - by - z = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ

$$v_1 = (-1;3;2;1), v_2 = (2;1;0;-1), v_3 = (1;4;3;1), v_4 = (2;8;5;1)$$

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn :

$$f(1+x^2) = 4 + x + 5x^2 \qquad f(1+2x+3x^2) = 10 + 13x + 23x^2$$
$$f(-x+x^2) = -1 - 2x - 3x^2$$

c) Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$
d) Xác định m để véc tơ $v = 1 + mx - 5x^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + ax_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

c) Tìm a để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid
d) Khi $a = 1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận thực A vuông cấp 2017.Chứng minh rằng

$$det(A - A^T)^{2017} = 2017(det\, A - det\, A^T)$$

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho A, B là các tập hợp thỏa mãn $A\backslash B \subset B\backslash A$.Chứng minh $A \subset B$

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4-i)z - 9i$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$

Câu 3 (1 đ).Tìm x biết $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6-x^2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6-x \end{vmatrix} = 0$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ sau có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số :

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad +ax_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + (3a+1)x_4 = b+6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 13x_3 + (2a-2)x_4 = -b-1 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$ - các đa thức bậc không vượt quá 3, cho các véc tơ $v_1 = 1 + x + x^2 + 2x^3, v_2 = x - x^2 - x^3, v_3 = 2 + 5x - 2x^2, v_4 = 3 + 7x + 3x^3$.

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 \cap V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

a) Tính $f\{1 + x + x^2\}$.Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc $Kerf$
b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các véc tơ

$$u_1 = (1;1;0), u_2 = (1;2;1), u_3 = (3;4;1), v = (2;2;3)$$

và đặt $H = span\{u_1, u_2, u_3\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H
b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ .Chứng minh rằng $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ở đó $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho A, B là các tập hợp thỏa mãn $B\backslash A \subset A\backslash B$. Chứng minh $B \subset A$

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (2-5i)z - 7$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{-9i\})$

Câu 3 (1 đ).Tìm x biết $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6-x & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 7-x^2 \end{vmatrix} = 0$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ sau có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số :

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +ax_4 & = 2 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +(3a+1)x_4 & = b+6 \\ 3x_1 & +4x_2 & -13x_3 & +(2a-2)x_4 & = -b+2 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$ - các đa thức bậc không vượt quá 3, cho các véc tơ $v_1 = 1 + 2x + x^3, v_2 = x - x^2 - x^3, v_3 = 3 + 7x - 2x^2, v_4 = 3 + 7x + 3x^3$.

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 \cap V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

c) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = m - x + 2x^2$ thuộc $Kerf$
d) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các véc tơ

$$u_1 = (1; 0; 1), u_2 = (1; 1; 2), u_3 = (3; 1; 4), v = (2; 3; 2)$$

và đặt $H = span\{u_1, u_2, u_3\}$

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H
d) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ .Chứng minh rằng $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ở đó $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

<u>Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*</u>

Câu 1 (1 đ). Cho số tự nhiên n .Mệnh đề sau đúng hay sai ? Vì sao ?

A: " Nếu n là số lẻ và n chia hết cho 2 thì nó là số chẵn "

Câu 2 (1 đ). Giải phương trình phức $\bar{z}^2 + 2iz - 1 = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.Tính $f(A)$ với $f(x) = x^2 - 4x$.Tìm ma trận X thỏa mãn $(4A^2 - A^3)X = B$

Câu 4 (1 đ).Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +12x_3 & +11x_4 & = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & -x_3 & -5x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +4x_4 & = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$B_1 = \{u_1 = (1;0;0), u_2 = (1;1;0), u_3 = (1;1;1)\}$ sang cơ sở

$$B_2 = \{v_1 = (1;2;3), v_2 = (2;0;3), v_3 = (3;2;5)\}$$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$f(1+x) = 5 + 5x^2$ $\quad f(1+3x+x^2) = 12 + 3x + 15x^2$

$$f(1+2x-x^2) = 7 + 7x^2$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$.Ánh xạ f có là một đơn cấu hay không ? Vì sao ?

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phuong $\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$

a) Đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

b) Tìm $\underset{S}{Max}\,\omega$ và $\underset{S}{Min}\,\omega$ với $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận vuông cấp $n \geq 1$, thỏa mãn $A^2 = E$ với E là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng A chéo hóa được

ĐỀ 6 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

<u>Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*</u>

Câu 1 (1 đ).Cho số tự nhiên $n \geq 3$. Mệnh đề sau đúng hay sai ? Vì sao ?

B: "Nếu n là số nguyên tố và n chia hết cho 2 thì nó là hợp số"

Câu 2 (1 đ).Giải phương trình phức $\bar{z}^2 - 4iz - 4 = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ).Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.Tính $f(A)$ với $f(x) = x^2 - 6x$. Tìm ma trận X thỏa mãn $X(A^3 - 6A^2) = B$

Câu 4 (1 đ).Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x_1 & +7x_3 & +8x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ).Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$B_1 = \{u_1 = (0;0;1), u_2 = (0;1;1), u_3 = (1;1;1)\}$ sang cơ sở

$$B_2 = \{v_1 = (1;3;2), v_2 = (2;3;0), v_3 = (3;5;2)\}$$

Câu 6 (2 đ).Cho toán tử tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$f(1-x) = -1 + x,\ \ f(1 + 3x + x^2) = 4(x + x^2)$

$$f(1 + 2x + x^2) = -3(x + x^2)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$.Ánh xạ f có là một đơn cấu hay không ? Vì sao ?

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $Im\, f$

Câu 7 (2 đ).Cho dạng toàn phương $\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_3$

a) Đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

b) Tìm $\underset{S}{Max}\,\omega$ và $\underset{S}{Min}\,\omega$ với $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$

Câu 8 (1 đ).Cho ma trận vuông cấp $n \geq 1$, thỏa mãn $A^2 = E$ với E là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng A chéo hóa được

ĐỀ 7 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y) = (2x+1, y-1)$ và $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.Phần tử $(1;2)$ có thuộc $f(A)$ không ? Vì sao ?

Câu 2 (1 đ).Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn

$(1+i)^{14}(2-z) = \left(\sqrt{3}+i\right)^8$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} 3x_1 & +7x_2 & +x_3 & +7x_4 & = 42 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 22 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & +6x_4 & = 33 \\ 5x_1 & +11x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = 50 \end{cases}$$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{bmatrix}$ có hạng bé nhất

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ

$$v_1 = 1 + x + 2x^2, v_2 = 1 - x^2, v_3 = 3 + x, v = 3 - 2x + mx^2$$

Tìm m để $v \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{(1;1;1),(1;1;2),(1;2;3)\}$

b) Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của f

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$,

cho các vecto $u = (1;2;-1), v = (-5;-2;3)$và đặt $H = \{z \in \mathbb{R}^3 | z \perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp 2016 , thỏa mãn $A^{2017} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2016E)$ là khá nghịch , với E là ma trận đơn vị cấp 2016

ĐỀ 8 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y) = (2x-1, x+y)$ và $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.Phần tử $(1;0)$ có thuộc $f(A)$ không ? Vì sao ?

Câu 2 (1 đ).Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn

$(1-i)^{14}(z-i) = \left(\sqrt{3}-i\right)^8$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 15x_4 = 58 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 17 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 16x_4 = 55 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 13x_4 = 42 \end{cases}$$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & m+5 & 4 & -1 \\ 3 & m+7 & 6 & m-4 \end{bmatrix}$ có hạng bé nhất

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ

$$v_1 = 1 + x, v_2 = 1 - x^2, v_3 = 3 + x - x^2, v = 1 - x + mx^2$$

Tìm m để $v \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) Tìm ma trận của fđối với cơ sở $B = \{(1;1;1),(2;1;1),(3;2;1)\}$
d) Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của f

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$,

cho các vecto $u = (1;-2;1), v = (3;-2;5)$ và đặt $H = \{z \in \mathbb{R}^3 | z \perp u\}$

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H
d) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp 2016 , thỏa mãn $A^{2017} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2016E)$ là khả nghịch , với E là ma trận đơn vị cấp 2016

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ).Hãy dùng các kí hiệu diễn tả và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau : "Với mọi số tự nhiên n chia hết cho 2 và 3 thì n chia hết cho 6"

Câu 2 (1 đ).Giải phương trình phức $z^2 + (i - 10)z + 23 - 11i = 0$ với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B^T$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + ax_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = b + 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2b - 1 \end{cases}$$

Câu 5 (2 đ).Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$thỏa mãn :

$$f(1 - x^2) = -3 + 3x - 6x^2, f(3x + 2x^2) = 17 + x + 16x^2, f(2 + 6x + 3x^2) = 32 + 7x + 25x^2$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1 + x^2)$

b) Xác định m để vecto $v = 1 + x + mx^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 6 (2 đ).Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2$$

a) Tìm a để ω xác định dương

b) Khi $a = 1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 7 (1 đ).Cho không gian $P_{2015}[x]$- các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_1 = \{p \in P_{2015}[x] | p(-x) = p(x), \forall x \in R\}$. Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh)

Câu 8 (1 đ).Cho ma trận A vuông cấp $n > 2$. Chứng minh rằng $r(A) = r(A^T A)$ với $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ).Hãy dùng các kí hiệu diễn tả và viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau : “Với mọi số tự nhiên n chia hết cho 6 thì n chia hết cho 2 và 3”

Câu 2 (1 đ).Giải phương trình phức $z^2+(i-1)z-6+17i=0$ với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Cho$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 10 & 1\\ -1 & -4 & 0\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $XA=B^T$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases}-x_1-2x_2-3x_3+ax_4=3\\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=b\\ 3x_1+3x_2+x_3+x_4=2b\end{cases}$$

Câu 5 (2 đ).Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn :

$$f(1-x^2)=-1+3x+2x^2, f(3x+2x^2)=7-8x-x^2, f(1+5x+3x^2)$$
$$=12-11x+x^2$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ .Tính $f(1+x^2)$

b) Xác định m để vecto $v=m+x+x^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 6 (2 đ).Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2-x_3^2+4x_2x_3$$

a) Tìm a để ω xác định dương

b) Khi $a=-1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 7 (1 đ).Cho không gian $P_{2015}[x]$- các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_2=\{p\in P_{2015}[x] | p(-x)=-p(x), \forall x\in R\}$.Chứng minh rằng W_2 là không gian con của $P_{2015}[x]$.Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_2 (không cần chứng minh)

Câu 8 (1 đ).Cho ma trận A vuông cấp $n>2$. Chứng minh rằng $r(A)=r(A^TA)$ với $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+y, x-y)$ và tập $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$

Câu 2 (1 đ).Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

Câu 3 (1 đ). Cho các số thực a, b, c .Không khai triển tính định dạng thức , chứng minh rằng : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$-các đa thức bậc không vượt quá 3 , cho các vecto $v_1 = 1 + x + x^2, v_2 = x - x^2 + x^3, v_3 = 1 + 2x + x^2 + x^3, v_4 = 2 + 2x + 4x^2, V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.

Tìm số chiều và một cơ sở của $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$

a) Xác định $f^2(1 + x + x^2)$ với $f^2 = f \circ f$

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc , cho các vecto $u = (1;2;-1), v = (3;6;3)$ và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 | w \perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp n .CHứng minh rằng có thể thay thế các phần tử trên đường chéo chính của A bởi số 0 hoặc 2015 để được một ma trận khả nghịch

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x, 3y)$ và tập$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$

Câu 2 (1 đ).Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 + 4\overline{z} - 11 = 0$

Câu 3 (1 đ). Cho các số thực a, b, c .Không khai triển tính định dạng thức , chứng minh rằng : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 3:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + mx_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$-các đa thức bậc không vượt quá 3 , cho các vecto $v_1 = 1 - x + x^2, v_2 = x + x^2 + x^3, v_3 = 1 + x + 2x^2 + x^3, v_4 = 2 - x + 2x^2, V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.

Tìm số chiều và một cơ sở của $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 2 \\ -3 & 15 & -3 \\ 1 & -1 & 13 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$

a) Xác định $f^2(1 + x + x^2)$ với $f^2 = f \circ f$

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc , cho các vecto $u = (1; -1; 3), v = (3; 5; 8)$ và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 | w \perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp n .CHứng minh rằng có thể thay thế các phần tử trên đường chéo chính của A bởi số 0 hoặc 2015 để được một ma trận khả nghịch

ĐỀ 5 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1 (1 đ).Cho các tập hợp A, B, C .Chứng minh

$$[(A \cup B)\backslash C] \subset [(A\backslash B) \cup (B\backslash C)]$$

Câu 2 (1 đ).Giải phương trình phức $\frac{z^2-3z+8}{z+1} = i$ (i là đơn vị ảo)

Câu 3 (1 đ).Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + mx_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = m \end{cases}$ có số nghiệm duy nhất

Câu 4 (2 đ).Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

a) Xác định ma trận $f(A)$ với $f(x) = 2x^2 - 10x + 2$

b) Tìm tất cả các ma trận X thỏa mãn $AX = XA$

Câu 5 (1 đ). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vecto $u_1 = (1;3;-2;1), u_2 = (-2;3;1;1), u_3 = (2;1;0;1), u = (1;-1;-3;m)$. Tìm m để $u \in span\{u_1, u_2, u_3\}$

Câu 6 (2 đ).Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$f(1;2;-1) = (3;7;-1), f(1;3;1) = (3;8;1), f(1;2;0) = (0;0;0)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Chứng minh tồn tại cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để f có dạng chéo

Câu 7 (2 đ).

a) Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao : $h = 3x^2 - 4xy + 6y^2$

b) Từ đó tìm (x;y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 9$ làm cho h kể trên đạt nhỏ nhất

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

,ĐỀ 6 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1 (1 đ).Cho các tập hợp A, B, C .Chứng minh

$$[(B \cup C)\backslash A] \subset [(B\backslash C) \cup (C\backslash A)]$$

Câu 2 (1 đ).Giải phương trình phức $\frac{z^2-z-8}{3z+1} = i$ (i là đơn vị ảo)

Câu 3 (1 đ).Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + mx_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = m \end{cases}$ có số nghiệm duy nhất

Câu 4 (2 đ).Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

a) Xác định ma trận $f(A)$ với $f(x) = 2x^2 - 14x + 4$

b) Tìm tất cả các ma trận X thỏa mãn $AX = XA$

Câu 5 (1 đ). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vecto $u_1 = (1;1;-2;3), u_2 = (2;3;1;1), u_3 = (2;-1;0;1), u = (1;5;-1;m)$. Tìm m để $u \in span\{u_1, u_2, u_3\}$

Câu 6 (2 đ).Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$f(1;1;1) = (4;5;4), f(2;3;2) = (5;7;5), f(-1;1;0) = (0;0;0)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Chứng minh tồn tại cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để f có dạng chéo

Câu 7 (2 đ).

a) Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao : $h = 6x^2 + 4xy + 3y^2$

b) Từ đó tìm (x;y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$ làm cho h kể trên đạt nhỏ nhất

<u>Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*</u>

ĐỀ 7 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1 (1 đ). Cho các mệnh đề A, B, C .Chứng minh các mệnh đề $A \to (B \to C)$ và $(A \wedge B) \to C$ là tương đương logic

Câu 2 (1 đ). Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2015}$ là 2015 căn bậc 2015 phức phân biệt của số phức $1 + i$. Chứng minh $\sum_{i=1}^{2015} a_i^2 = 0$

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $XA + 3B = C^T$

Câu 4 (1 đ). Cho hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + mx_4 = 2 \\ x_1 - mx_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + mx_3 + x_4 = n \end{cases}$ (m, n là tham số)

a) Tìm m, n để hệ có nghiệm duy nhất

b) Giải và biện luận theo n hệ phương trình khi $m = 2$

Câu 5 (1 đ). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vecto $u_1 = (m; 0; 1; 1), u_2 = (-3; 2; 1; -1), u_3 = (2; 1; 0; 2), u_4 = (1; 2; 1; m)$

Tìm m để $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính

Câu 6 (2 đ). Cho biến đổi tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi :

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) + (2a_0 - a_1 + 2a_2)x + (3a_1 - 2a_2)x^2$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tính $r(f)$

b) Tìm các trị riêng của f

Câu 7 (2 đ). Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc , cho

$$W = Span\{(1; 2; -1; 1), (2; 1; 1; 2), (1; 1; 0; 1)\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.Tìm hình chiếu trực giao của $u = (2; 3; 1; 5)$ lên không gian W

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

ĐỀ 8 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20151**

KHÓA : 60 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1 (1 đ).Cho các mệnh đề A, B. Chứng minh các mệnh đề $(A \leftrightarrow B)$ và $(A \to B) \wedge (B \to A)$ là tương đương logic

Câu 2 (1 đ).Cho $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2015}$ là 2015 căn bậc 2015 phức phân biệt của số phức $1 - i$. Chứng minh $\sum_{i=1}^{2015} a_i^3 = 0$

Câu 3 (1 đ).Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $AX - 2B = C^T$

Câu 4 (1 đ).Cho hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + mx_4 = 0 \\ x_1 - mx_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + mx_3 + nx_4 = 0 \end{cases}$ (m, n là tham số)

a) Tìm m, n để hệ có nghiệm duy nhất

b) Giải và biện luận theo n hệ phương trình khi $m = 2$

Câu 5 (1 đ).Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vecto $u_1 = (1; 2; 1; 1), u_2 = (-3; 2; 1; -1), u_3 = (2; 1; -1; 2), u_4 = (1; 3; 0; m)$

Tìm m để $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính

Câu 6 (2 đ).Cho biến đổi tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi :

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1) + (-a_0 + a_1 - 3a_2)x + (2a_1 - 2a_2)x^2$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tính $r(f)$

b) Tìm các trị riêng của f

Câu 7 (2 đ).Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc , cho

$$W = Span\{(-1; 2; 1; 1), (-2; 1; -1; 2), (-1; 1; 0; 1)\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.Tìm hình chiếu trực giao của $u = (2; 3; 1; 5)$ lên không gian W

<u>Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*</u>

ĐỀ 1 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Cho các tập hợp $A = \{n | n \in \mathbb{Z}, 1 \le n \le 2014, n \vdots 5\}$ và $B = \{n | n \in \mathbb{Z}, 1 \le n \le 2014, n \vdots 9\}$.Xác định số phần tử của các tập hợp A, B và $A \cup B$

Câu 2 .Xác định phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn
$(1+i)^{22}(2z-1) = \left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$, trong đó i là đơn vị ảo

Câu 3 .Tìm điều kiện của m để ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & m & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ có hạng bằng 2

Câu 4 .Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 5 .Xác định số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 6 .Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xác định ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở
$B_1 = \{u_1 = (1;1;-2), u_2 = (1;0;2), u_3 = (1;1;-1)\}$ sang cơ sở

$$B_2 = \{u_1 = (2;1;3), u_2 = (1;2;5), u_3 = (-2;1;1)\}$$

Câu 7 .Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$, xác định bởi
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3; mx_1 - x_2 + x_3)$, với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn cấu

Câu 8 .Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của toán tử tuyến tính trên không gian $P_1[x]$ xác định bởi $f(a+bx) = (-2a+6b) + (2a-b)x$

Câu 9 .Chứng minh ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi
$f[(x_1;x_2;x_3),(y_1;y_2;y_3)] = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$ là một tích vô hướng trên không gian vecto $\mathbb{R}^3$. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng kể trên , tìm hình chiếu trực giao của vecto $u = (1;2;3)$ lên vecto $v = (-2;3;1)$

Câu 10 .Đưa dạng toàn phương $h = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 - 5x_3^2$ về dạng chính tắc bằng phuương pháp trực giao và nhận dạng mặt $x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 - 5x_3^2 = 1$

ĐỀ II **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Cho các tập hợp $A = \{n | n \in \mathbb{Z}, 1 \le n \le 2014, n \vdots 3\}$ và $B = \{n | n \in \mathbb{Z}, 1 \le n \le 2014, n \vdots 7\}$. Xác định số phần tử của các tập hợp A, B và $A \cup B$

Câu 2 .Xác định phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn

$(1-i)^{22}(2z+1) = \left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$, trong đó i là đơn vị ảo

Câu 3 .Tìm điều kiện của m để ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & m & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ có hạng bằng 2

Câu 4 .Tìm ma trận X thỏa mãn $XA = B^T$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 5 .Xác định số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 6 .Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xác định ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$B_1 = \{u_1 = (1;-1;2), u_2 = (1;0;-2), u_3 = (1;-1;1)\}$ sang cơ sở

$$B_2 = \{u_1 = (2;-1;3), u_2 = (3;2;1), u_3 = (-2;1;2)\}$$

Câu 7 .Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$, xác định bởi

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3; x_1 - x_2 + x_3; x_1 + mx_2 - x_3)$, với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn cấu

Câu 8 .Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của toán tử tuyến tính trên không gian $P_1[x]$ xác định bởi $f(a+bx) = (-3a+2b) + (-2a+2b)x$

Câu 9 .Chứng minh ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$f[(x_1;x_2;x_3),(y_1;y_2;y_3)] = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$ là một tích vô hướng trên không gian vecto $\mathbb{R}^3$. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng kể trên , tìm hình chiếu trực giao của vecto $u = (1;2;3)$ lên vecto $v = (-2;3;1)$

Câu 10 .Đưa dạng toàn phương $h = x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 7x_3^2$ về dạng chính tắc bằng phuong pháp trực giao và nhận dạng mặt $x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 7x_3^2 = 1$

ĐỀ III **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Cho ánh xạ $f: [1; +\infty) \to (-\infty; 4]$ xác định bởi

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$ .Chứng minh f là song ánh và tìm ánh xạ ngược

Câu 2 .Giải phương trình phức sau : $z^2 - (2+i)z - 13 + 13i = 0$

Câu 3 .Tìm điều kiện của x và y sao cho $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ x & 0 & 0 & y \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Câu 4 .Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + mx_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ có nghiệm

Câu 5 .Trong không gian vecto $\mathbb{R}^4$ cho các vecto $u_1 = (1; 2; 1; 3), u_2 = (2; 1; 1; 2), u_3 = (-1; 1; 0; 1), u_4 = (1; 2; 1; 3)$

Đặt $U_1 = Span\{u_1, u_2\}, U_2 = Span\{u_3, u_4\}$. Xác định số chiều và một cơ sở của không gian $U_1 \cap U_2$

Câu 6 .Trong không gian $P_2[x]$, cho hệ vecto $u_1 = 1 + 2x - x^2, u_2 = 1 + 3x, u_3 = 2 + 3x - 2x^2$. Chứng minh hệ $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$. Tìm tọa độ của vecto $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$ theo cơ sở B

Câu 7 .Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1; x_2; x_3) = (10x_1 + 10x_2 + 2x_3; -3x_1 - x_2; -9x_1 - 15x_2 - 4x_3)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\{(1; -1; 2), (2; -1; -1), (1; -1; 1)\}$

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để f có dạng chéo đối với cơ sở đó

Câu 8 .Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc , tìm tất cả các vecto u trực giao với cả ba vecto $u_1 = (1; 1; 1; 0), u_2 = (0; 1; 1; 1); u_3 = (1; 0; 1; 1)$

Câu 9 .Chứng minh ánh xạ $f: P_2[x] \times P_2[x] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$f[p(x), q(x)] = p(1)q(1) + p(2)q(2)$ là một dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$

ĐỀ IV **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Cho ánh xạ $f:(-\infty;2]\to[2;+\infty)$ xác định bởi
$f(x)=x^2-4x+6$ .Chứng minh f là song ánh và tìm ánh xạ ngược

Câu 2 .Giải phương trình phức sau : $z^2-(2-i)z-13-13i=0$

Câu 3 .Tìm điều kiện của x và y sao cho $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 2 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & b\end{vmatrix}=0$

Câu 4 .Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1\\ 2x_1+mx_2+x_3=2\\ 3x_1-x_2+x_3=6\\ -x_1+2x_2+x_3=4\end{cases}$ có nghiệm

Câu 5 .Trong không gian vecto $\mathbb{R}^4$ cho các vecto

$$u_1=(-1;2;-1;-3), u_2=(-2;1;-1;-2), u_3=(1;1;0;-1), u_4=(1;-2;1;3)$$

Đặt $U_1=Span\{u_1,u_2\}, U_2=Span\{u_3,u_4\}$. Xác định số chiều và một cơ sở của không gian $U_1\cap U_2$

Câu 6 .Trong không gian $P_2[x]$, cho hệ vecto $u_1=1+2x-2x^2, u_2=1+x-2x^2, u_3=-2+8x+5x^2$. Chứng minh hệ $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$. Tìm tọa độ của vecto $u=a_0+a_1x+a_2x^2$ theo cơ sở B

Câu 7 .Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1;x_2;x_3)=(-15x_1-27x_2-5x_3; 9x_1+17x_2+3x_3; 7x_1+9x_2+3x_3)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\{(1;-1;2),(2;-1;-1),(1;-1;1)\}$
b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để f có dạng chéo đối với cơ sở đó

Câu 8 .Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc , tìm tất cả các vecto u trực giao với cả ba vecto

$$u_1=(1;1;-1;0), u_2=(0;1;-1;1); u_3=(1;0;-1;1)$$

Câu 9 .Chứng minh ánh xạ $f:P_2[x]\times P_2[x]\to\mathbb{R}$ xác định bởi
$f[p(x),q(x)]=p(1)q(1)-p(2)q(2)$ là một dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$.Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{1,x,x^2\}$

ĐỀ 5 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

Nhóm ngành CN-KT THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Tìm các số phức z thỏa mãn : $z^6 = (1+i)^6$

Câu 2 .Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2)$. Chứng minh f là song ánh

Câu 3 .Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = b \end{cases}$, với a, b là tham số

a) Giải hệ phương trình với $a = 1, b = -4$

b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo các tham số a, b

Câu 4 .Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận đối với cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Cho $u = 1 - 2x + 2x^2$, tìm $f(u)$.Tìm v để $f(v) = 2 + 3x + 4x^2$

b) Xác định số chiều của $Im\,f$ và một cơ sở của $Kerf$

Câu 5 .Trong R^4 cho các vecto $v_1 = (1,1,0,1), v_2 = (2,1,-1,2), v_3 = (1,1,1,-1), v_4 = (2,1,2,-4)$. Đặt $V_1 = Span\{v_1, v_2\}, V_2 = Span\{v_3, v_4\}$. Xét tích vô hướng $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ trong R^4

a) Xác định chiều và một cơ sở của $V_1 + V_2$

b) Cho $v = (4; 2; 0; 5)$.Tìm vecto u trong V_1

Câu 6 .Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận trực giao P và ma trận chéo D sao cho $P^{-1}AP = D$

Câu 7 .Cho ánh xạ tuyến tính f từ V vào V' là đơn cấu .Giả sử $v_1, v_2, \dots v_m$ là các vecto độc lập tuyến tính trong V. Chứng minh các vecto $f(v_1), f(v_2), \dots, f(m)$ độc lập tuyến tính trong V'

<u>Chú ý :</u> Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

ĐỀ 7 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Tìm nghiệm phức của phương trình : $z^6 - 4iz^3 + 5 = 0$

Câu 2 .Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1^3, 2x_1 + 3x_2)$.CHứng minh f là song ánh

Câu 3 .Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = b \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + ax_4 = 4 \end{cases}$, với a, b là tham số

a) Giải hệ phương trình với $a = 2, b = 1$

b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo các tham số a,b

Câu 4 .Trong R^4 cho các vecto $v_1 = (1,0,1,1), v_2 = (2,1,-1,0), v_3 = (1,2,1,1), v_4 = (2,3,-1,0)$. Đặt $V_1 = Span\{v_1, v_2\}, V_2 = Span\{v_3, v_4\}$

a) Xác định số chiều và một cơ sở $V_1 + V_2$

b) Xác định số chiều và một cơ sở của $V_1 \cap V_2$

Câu 5 .Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(1 + 2x^2) = -1 + 5x + 4x^2; f(1 + x) = 3 + x + 5x^2; f(2x + x^2) = 3 + 2x + 7x^2$$

Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$.Tính f(u), với $u = 2 + 2x + x^2$

Câu 6 .Trong R^3 với tích vô hướng thông thường cho dạng toàn phương ω xác định bởi $\omega(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2$ với $x = (x_1, x_2, x_3)$

a) Tìm cơ sở trực chuẩn của R^3 để ω có dạng chính tắc với cơ sở đó

b) Trong tập hợp các vecto x có độ dài bằng 1 , tìm x để $\omega(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 7 .Cho ánh xạ tuyến tính f từ V vào V. Ký hiệu $f^k = f \circ f \circ ... \circ f$ (tích ánh xạ k lần). Giả sử v là một véc tơ trong V mà $f^m(v)$ là vecto khác vecto không θ và $f^{m+1}(v) = \theta$. Chứng minh hệ vecto $\{v, f(v), \dots, f^m(v)\}$ là độc lập tuyến tính

<u>Chú ý :</u> Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

ĐỀ 8 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 1-20141**

THỜI GIAN : 90 PHÚT

Câu 1.Tìm nghiệm phức của phương trình : $z^6 - 6iz^3 + 7 = 0$

Câu 2 .Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, x_2^3)$. Chứng minh f là song ánh

Câu 3 .Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = b \end{cases}$, với a, b là tham số

c) Giải hệ phương trình với $a = 0, b = 6$

d) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo các tham số a,b

Câu 4 .Trong R^4cho các vecto $v_1 = (1,1,2,1), v_2 = (2,1,-1,0), v_3 = (1,0,1,1), v_4 = (2,0,0,1)$.Đặt $V_1 = Span\{v_1, v_2\}, V_2 = Span\{v_3, v_4\}$

c) Xác định số chiều và một cơ sở $V_1 + V_2$

d) Xác định số chiều và một cơ sở của $V_1 \cap V_2$

Câu 5 .Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$$f(1 + 2x + x^2) = 4 - 2x^2; f(x - x^2) = 1 + x - 3x^2; f(1 + x) = 3 + x - x^2$$

Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$. Tính f(u), với $u = 1 - 2x + 3x^2$

Câu 6 .Trong R^3 với tích vô hướng thông thường cho dạng toàn phương ω xác định bởi $\omega(x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ với $x = (x_1, x_2, x_3)$

c) Tìm cơ sở trực chuẩn của R^3 để ω có dạng chính tắc với cơ sở đó

d) Trong tập hợp các vecto x có độ dài bằng 1 , tìm x để $\omega(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 7 .Cho ánh xạ tuyến tính f từ $V^{'}$ vào V. Ký hiệu $f^k = f \circ f \circ ... \circ f$ (tích ánh xạ k lần). Giả sử v là một vecto trong V mà $f^m(v)$ là vecto khác θ và $f^{m+1}(v) = \theta$. Chứng minh hệ vecto $\{v, f(v), \dots, f^m(v)\}$ là độc lập tuyến tính

Chú ý : Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi