

## I. LÝ THUYẾT

Có nhiều tài liệu đã trình bày về Giải thuật tìm kiếm nhị phân (Binary Search) . Tôi xin phép trình bày ngắn gọn như sau:

Tìm kiếm nhị phân (Binary Search) là một giải thuật tìm kiếm nhanh với độ phức tạp thời gian chạy là  $O(\log n)$ . Giải thuật tìm kiếm nhị phân làm việc dựa trên nguyên tắc chia để trị (Divide and Conquer). Để sử dụng giải thuật này thì tập dữ liệu thường phải trong dạng đã được sắp xếp theo một trật tự nào đó.

Tìm kiếm nhị phân (Binary Search) là tìm kiếm một phần tử cụ thể bằng cách so sánh phần tử tại vị trí giữa nhất của tập dữ liệu. Nếu tìm thấy kết nối thì chỉ mục của phần tử được trả về. Nếu phần tử cần tìm là lớn hơn giá trị của phần tử đứng giữa thì phần tử cần tìm được sẽ chỉ cần tìm trong mảng con nằm ở bên phải phần tử giữa, khi đó phạm vi tìm kiếm thu hẹp lại còn một nửa; nếu phần tử cần tìm là giá trị nhỏ hơn phần tử đứng giữa thì sẽ tìm ở trong mảng con nằm ở bên trái phần tử giữa. quá trình cũng thu hẹp lại phạm vi tìm kiếm. Tiến trình sẽ tiếp tục như vậy trên mảng con cho tới khi tìm hết mọi phần tử trên mảng con này.

Trước kia khi dạy học sinh sử dụng ngôn ngữ lập trình pascal thì Giáo viên cần trang bị cho học sinh hai hàm tìm kiếm first và last. Tuy nhiên ngày nay chúng ta đều khai thác lợi ích của C++ nên trong C++ đã có sẵn các hàm dùng để khai thác. Ta lần lượt xét các bài toán sau để hiểu về cách sử dụng các hàm đó:

Bài toán 1: Cho một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một số nguyên  $x$ . Giả sử dãy số đã được sắp theo thứ tự  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Hãy tìm vị trí đầu tiên trong mảng có giá trị  $\geq x$ ?

Rào  $a[0] = -\infty; a[n+1] = +\infty;$

Khi đó để biết được chỉ số của phần tử đầu tiên có giá trị  $\geq x$  ta sử dụng các hàm:

**`lower_bound(a+1, a+n+1, x) - a;`**

Bài toán 2: Cho một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một số nguyên  $x$ . Giả sử dãy số đã được sắp theo thứ tự  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Hãy tìm vị trí cuối cùng trong mảng có giá trị  $\leq x$ ?

Rào  $a[0] = -\infty; a[n+1] = +\infty;$

**`upper_bound(a+1, a+n+1, x) - a - 1;`**

Bài toán 3: Cho một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một số nguyên  $x$ . Giả sử dãy số đã được sắp theo thứ tự  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Tìm chỉ số đầu tiên của phần tử trong dãy  $a > x$  là hàm:

Rào  $a[0] = -\infty; a[n+1] = +\infty;$

**`upper_bound(a+1, a+n+1, x) - a;`**

Nếu tất cả các phần tử trong mảng  $a$  đều nhỏ hơn  $x$  thì nó trả về  $n+1$ ;

**Hệ quả 1:** Để đếm số lượng các phần tử trong dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có giá trị bằng  $x$ . Giả sử dãy số đã được sắp theo thứ tự  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Ta chỉ cần gọi:

$t := \text{upper\_bound}(a+1, a+n+1, x) - \text{lower\_bound}(a+1, a+n+1, x);$

Khi đó  $t$  là giá trị cần tìm.

**Hệ quả 2:** Để đếm xem có bao nhiêu phần tử trong dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ) có giá trị thỏa mãn  $x < a[i] < y$  ( $x, y$  là hai giá trị cho trước) khi đó ta gọi

$u := \text{lower\_bound}(a+1, a+n+1, y) - \text{upper\_bound}(a+1, a+n+1, x);$

Khi đó  $u$  là giá trị cần tìm.

**Hệ quả 3:** Cho một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một số nguyên  $x$ . Giả sử dãy số đã được sắp theo thứ tự  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Đếm xem có bao nhiêu phần tử có giá trị  $> x$ :

$v := n+1 - (\text{upper\_bound}(a+1, a+n+1, x) - a);$

Khi đó  $v$  là giá trị cần tìm.

## CHẶT NHỊ PHÂN

### 1. Chặt nhị phân trên miền nguyên

**Bài toán:** Cho hàm  $f(n)$  không giảm trên đoạn  $[a, b]$  và số nguyên  $y_0$ . Hãy tìm số nguyên nhỏ nhất  $n_0 \in [a, b]$  sao cho:

$$f(n_0) \geq y_0$$

Hàm dưới đây thực hiện điều trên:

```
int calc() {
    if (f(a) ≥ y0) return a;
    if (f(b) < y0) return b+1; // Không tìm thấy
    int lo=a, hi=b;
    while (hi-lo>1) {
        int mid=(lo+hi)/2;
        if (f(mid) ≥ y0) hi=mid; else lo=mid;
    }
    return hi;
}
```

### 2. Chặt nhị phân trên miền thực

**Bài toán:** Cho hàm  $f(x)$  liên tục, không giảm trên đoạn  $[a, b]$  và số thực  $y_0$ . Hãy tìm số thực  $x_0 \in [a, b]$  nhỏ nhất sao cho:

$$f(x_0) \geq y_0$$

Hàm dưới đây thực hiện điều trên

```
double calc() {
```

```

    if (f(a) ≥ y0) return a;
    if (f(b) < y0) return b+1; // Không tìm thấy
    double lo=a, hi=b;
    int k=int(log2((hi-lo)/EP))+1;
    for(int i=1; i ≤ k; ++i) {
        double mid=(lo+hi)/2;
        if (f(mid) ≥ y0) hi=mid; else lo=mid;
    }
    return hi;
}

```

Chú ý EP là sai số được định nghĩa tùy theo đề bài.

## II. BÀI TẬP

### Bài 1. Pair.cpp

Cho một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Hãy đếm xem trong dãy số đã cho có bao nhiêu cặp số  $a_i, a_j$  với  $i < j$  thỏa mãn  $a_i + a_j = 0$ ?

- Input: File PAIR.INP gồm có dòng đầu tiên ghi số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^5$ ) các dòng tiếp theo lần lượt ghi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có  $|a_i| \leq 2 \cdot 10^9$
- Output: File PAIR.OUT một số nguyên duy nhất là số lượng cặp số tìm được.
- Ví dụ:

PAIR.INP	PAIR.OUT
5 1 -2 -1 3 2	2

### Bài 2. Cặp đôi hoàn hảo

Hai số nguyên được gọi là một “Cặp số hoàn hảo” nếu như tổng của chúng bằng giá trị  $S$  cho trước. Hãy đếm xem trong dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có bao nhiêu cặp số hoàn hảo.

- Input: capso.inp gồm có:
  - Dòng thứ nhất ghi số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^5$ ) và số nguyên  $S$  ( $|S| \leq 10^9$ ).
  - Các dòng tiếp theo lần lượt ghi các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $|a_i| \leq 10^9$ ).
- Output: capso.out một số nguyên duy nhất là số lượng cặp hoàn hảo.
- Ví dụ:

capso.inp	capso.out
10 7 5 2 5 3 4 3 1 6 4 0	7

### Bài 3 Tổng bằng x

Cho hai dãy số nguyên  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  và  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  và một số nguyên  $x$ . Hãy đếm xem có bao nhiêu cặp  $(i, j)$  thỏa mãn  $a_i + b_j = x$ .

Input: File sumx.inp:

- Dòng đầu tiên ghi ba số nguyên dương  $m, n, x$  ( $1 \leq m, n \leq 100000$ ).
- Dòng thứ hai ghi các số nguyên  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  ( $|a_i| \leq 10^9$ ).
- Dòng thứ ba ghi các số nguyên  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ( $|b_j| \leq 10^9$ ).

Output: File sumx.out một số nguyên duy nhất là số cặp  $(i, j)$  tìm được

Example:

SUMX.INP	SUMX.OUT
4 5 5	4
3 1 4 2	
1 6 4 3 4	

### Bài 4 seagame (Bài 3.18 sách chuyên Tin quyển 1- VOI2008)

Hai bạn học sinh lúc ngồi nhàn rồi nghĩ ra trò chơi sau đây, Mỗi bạn chọn trước một dãy số gồm  $n$  số nguyên, Giải sử dãy số mà bạn thứ nhất chọn là  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , còn dãy số mà bạn chọn thứ 2 là  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Mỗi lượt chơi, mỗi bạn đưa ra một số hạng trong dãy số của mình. Nếu bạn thứ nhất chọn số  $b_i$  ( $0 < i \leq n$ ), bạn thứ 2 chọn số  $c_j$  ( $0 < j \leq n$ ) thì giá trị của lượt chơi sẽ là  $|b_i + c_j|$ . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của một lượt chơi trong số các lượt chơi có thể.

File input sgame.inp gồm có:

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương  $n$  ( $-n \leq 10^5$ )
- Dòng thứ hai chứa dãy số nguyên  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ( $|b_i| \leq 10^9, i=1, \dots, n$ );
- Dòng thứ ba chứa dãy số nguyên  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ( $|c_j| \leq 10^9, j=1, 2, \dots, n$ );

File output sgame.out một số nguyên duy nhất là giá trị nhỏ nhất tìm được.

Ví dụ:

sgame.inp	sgame.out
2	0
1 -2	
2 3	

### Bài 5 Trắc nghiệm tâm lí

Trắc nghiệm tâm lí là phương pháp thông dụng để có thể đoán nhận được tính cách của mỗi người trong cuộc sống và cũng là một trò chơi khá phổ biến trên truyền hình. Trong một trò chơi như vậy được phát trên kênh NTTV. Trước tiên, ban tổ chức

phát cho mỗi khán giả ngồi xem trực tiếp một phiếu thăm dò trong đó có các câu hỏi trắc nghiệm. Tất cả các phương án trả lời đều có điểm và mỗi người sau khi trả lời xong sẽ được tổng điểm là một số nguyên dương. Có  $m$  người tham gia cuộc chơi trên sân khấu. Với người chơi thứ  $i$ , sau khi nghe speaker đọc các câu hỏi trắc nghiệm sẽ đưa ra hai số nguyên  $s_i$  và  $f_i$  với ý nghĩa rằng những khán giả có tổng điểm nằm trong đoạn  $[s_i, f_i]$  sẽ là những người có tính cách phù hợp với mình nhất.

Viết chương trình tính xem mỗi người chơi sẽ tìm thấy bao nhiêu khán giả có tính cách phù hợp với mình nhất.

Input: File prefer.inp:

- + Dòng đầu tiên chứa số nguyên  $n$  ( $0 < n \leq 10^5$ ) là số khán giả.
- + Dòng thứ hai chứa  $n$  số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_i \leq 10^9$ ) là tổng điểm của mỗi khán giả.
- + Dòng thứ 3 ghi số nguyên  $m$  ( $1 \leq m \leq 10^5$ ) là số người chơi
- +  $M$  dòng tiếp theo, dòng thứ  $i$  ghi hai số nguyên  $s_i, f_i$  ( $1 \leq s_i \leq f_i \leq 10^9$ ) là khoảng điểm của những người có tính cách phù hợp nhất với người  $i$  nhất.

Output: File prefer.out gồm  $m$  dòng, dòng thứ  $i$  ghi số lượng khán giả có tính cách phù hợp với người thứ  $i$  nhất.

Ví dụ:

PREFER	PREFER
5	3
7 2 4 5 3	4
2	
1 4	
3 10	

## Bài 6. ESEQ

Cho dãy số nguyên  $A$  gồm  $n$  phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Hãy đếm số cặp chỉ số  $i, j$  thỏa mãn

$$\sum_{p=1}^i a_p = \sum_{q=j}^n a_q \quad \text{Với } 1 \leq i < j \leq n.$$

Input: Vào từ file ESEQ.INP có dạng:

- + Dòng đầu ghi số nguyên dương  $n$  ( $2 \leq n \leq 10^5$ )
- + Dòng tiếp theo ghi  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_i \leq 10^9$ ) các số cách nhau bởi dấu cách

Output: Ghi ra file văn bản ESEQ.OUT một số duy nhất là số cặp tìm được

Ví dụ:

eseq.inp	eseq.out
3 1 0 1	3

## Bài 7. Nối điểm

"Trên Hai đường thẳng song song L1 và L2, Người ta đánh dấu trên mỗi đường N Điểm, Các điểm trên đường thẳng L1 Được đánh số từ 1 đến N, từ trái qua phải, còn các điểm trên đường thẳng L2 được đánh số bởi  $P[1], P[2], \dots, P[N]$  cũng từ trái qua phải, trong đó  $P[1], P[2], \dots, P[N]$  là một hoán vị của các số  $1, 2, \dots, N$

Ta gọi các số gán cho các điểm là số hiệu của chúng. Cho phép nối hai điểm trên 2 đường thẳng có cùng số hiệu. **Yêu cầu:** Tìm cách nối được nhiều cặp điểm nhất với điều kiện các đoạn nối không được cắt nhau.

**Dữ liệu:** Vào từ File WIRES.INP:

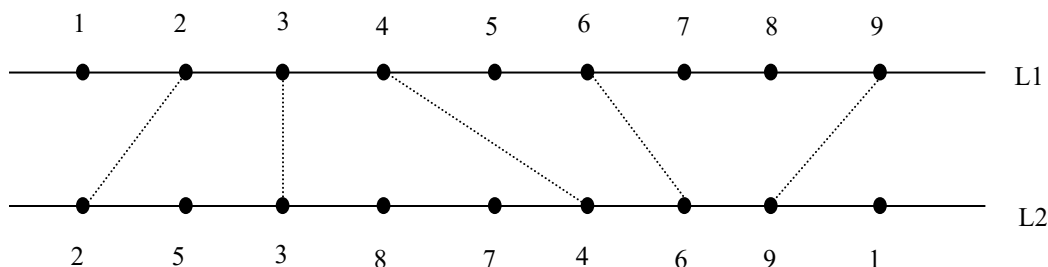
- Dòng Đầu tiên chứa số Nguyên Dương N ( $N \leq 10^5$ )
- Dòng thứ hai chứa các số  $P[1], P[2], \dots, P[N]$

**Kết quả** Ghi ra File: WIRES.OUT

- Dòng Đầu tiên chứa K là số lượng đoạn nối tìm được
- Dòng tiếp theo chứa K số hiệu của các đầu mút của các đoạn nối được ghi theo thứ tự tăng dần.

Ví dụ:

WIRES. INP	WIRES. OUT
9 2 5 3 8 7 4 6 9 1	5 2 3 4 6 9



## Bài 8. Bán kính phủ sóng

Quốc lộ 5 đi qua địa phận Hưng Yên, Hải Dương, Hải Phòng được mô hình hóa như một trục tọa độ (mỗi điểm trên đường thẳng tương ứng với một số thực được gọi là

tọa độ của điểm này). Dọc theo Quốc lộ có  $n$  điểm dân cư, mỗi điểm dân cư có thể được mô hình như một điểm trên trục tọa độ. Điểm dân cư thứ  $i$  có  $a_i$  người dùng điện thoại mạng ABC và đặt tại điểm có tọa độ  $x_i$ .

Hãng ABC cần đặt một trạm BTS thu sóng điện thoại từ các điểm dân cư. Trạm BTS có thể đặt tại một điểm bất kỳ trên trục tọa độ mô tả Quốc lộ 5 và có bán kính phủ sóng là  $k$  (các máy điện thoại có khoảng cách đến trạm thu không vượt quá  $k$  thì thu và nhận được tín hiệu từ trạm BTS này).

Hãy tìm số máy điện thoại lớn nhất mà trạm BTS có thể phục vụ nếu đặt tại một vị trí thích hợp.

**Dữ liệu:** Vào từ file văn bản ABCTEL.INP

- Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương  $n, k$  ( $n \leq 10^5, k \leq 2 \cdot 10^6$ )
- $n$  dòng tiếp theo, dòng thứ  $i$  ghi hai số nguyên  $a_i, x_i$  ( $1 \leq a_i \leq 10000, 0 \leq x_i \leq 10^6$ )

Các số liên tiếp trên cùng một dòng cách nhau ít nhất một dấu trống

**Kết quả:** Ghi ra file văn bản ABCTEL.OUT một số nguyên duy nhất là số máy điện thoại lớn nhất mà trạm BTS có thể phục vụ nếu đặt tại một vị trí thích hợp.

**Ví dụ**

ABCTEL.INP	ABCTEL.OUT
4 3	11
4 7	
10 15	
2 2	
5 1	

## Bài 9. ĐẾM BI

Sống tại nhà Phú Ông từ nhỏ, Bờm và Cuội là đôi bạn rất thân. Một hôm, do làm việc siêng năng, chăm chỉ nên hai bạn đã được Phú Ông thưởng cho  $M \times N$  viên bi. Có bi rồi, nhưng vấn đề nảy sinh hết sức phức tạp là hai bạn không làm sao chia nhau số viên bi được. Bởi vì ai cũng muốn giành được nhiều viên bi về mình. Băn khoăn suốt mấy ngày đêm, cuối cùng hai bạn đành dặt nhau đến nhờ Phú Ông chia giúp, nghĩ mãi nghĩ mãi rồi Phú Ông cũng tìm ra được một cách chia mà có lẽ theo ông hai bạn sẽ vui vẻ sau khi nhận được số viên về mình. Dắt hai bạn ra sân đình, Phú Ông yêu cầu Bờm vẽ  $N$  đường thẳng khác nhau song song với trục Oy có hoành độ  $X_i (0 < i \leq n)$ , Cuội vẽ  $M$  đường thẳng khác nhau song song với trục Ox có tung độ  $Y_i (0 < i \leq m)$ , rồi đặt vào các giao điểm của các đường thẳng, mỗi giao điểm 1 viên bi. Sau đó Phú Ông vẽ một đường tròn với tọa độ tâm  $(U; V)$  bán kính  $R$ , cho Bờm lấy số viên bi ở phía ngoài đường tròn, Cuội lấy số viên bi còn lại.

**Yêu cầu :** Tính số viên bi chênh lệch của hai bạn.

**Input:** Vào file marbles.inp

- Dòng đầu tiên theo thứ tự là 5 số  $N, M, U, V, R$ .
- Dòng thứ hai ghi  $N$  số mô tả hoành độ các đường thẳng Bòm vẽ.
- Dòng thứ ba ghi  $M$  số mô tả tung độ các đường thẳng Cuội vẽ.

**Output:** Ghi ra file marbles.out

Một số nguyên duy nhất là số viên bi chênh lệch của Bòm và Cuội.

Giới hạn:  $0 < N, M \leq 50000$ ; Các số nguyên  $U, V, R, X_i, Y_i$  có giá trị tuyệt đối  $\leq 10^7$ . Có 60% test  $N, M \leq 2000$

**Example:**

marbles.inp	marbles.inp
3 4 3 3 3 1 5 6 1 7 6 3	2

## Bài 10. NỐI DÂY

Đề thi vào trường mẫu giáo SuperBabies khá đơn giản: Có  $n$  đoạn dây xanh,  $n$  đoạn dây đỏ,  $n$  đoạn dây tím và  $n$  đoạn dây vàng. Độ dài các đoạn dây được cho trước. Mỗi bé được cho một số nguyên  $L$  và cần cho biết có bao nhiêu cách chọn đúng 1 đoạn dây xanh, 1 đoạn dây đỏ, 1 đoạn dây tím và 1 đoạn dây vàng để nối lại thành một sợi dây trang trí có độ dài bằng  $L$ . Hai cách chọn được gọi là khác nhau nếu có đoạn dây được chọn trong một cách nhưng không được chọn trong cách còn lại.

**Yêu cầu:** Viết chương trình tìm đáp án để chấm cho các bé.

**Dữ liệu:** Vào từ file văn bản TERA.INP

- Dòng 1 chứa hai số nguyên dương  $n \leq 1000$ ;  $L \leq 10^9$
- Dòng 2 chứa  $n$  số nguyên dương là độ dài  $n$  đoạn dây xanh.
- Dòng 3 chứa  $n$  số nguyên dương là độ dài  $n$  đoạn dây đỏ.
- Dòng 4 chứa  $n$  số nguyên dương là độ dài  $n$  đoạn dây tím.
- Dòng 5 chứa  $n$  số nguyên dương là độ dài  $n$  đoạn dây vàng.

*Các số trên một dòng của input file được ghi cách nhau bởi dấu cách, độ dài các đoạn dây không quá  $10^9$*

**Kết quả:** Ghi ra file văn bản TERA.OUT một số nguyên duy nhất là số cách chọn tính được

**Ví dụ**



TERA.INP	TERA.OUT
3 28	18
1 1 1	
1 1 1	
10 11 12	
13 14 15	

*Chú ý: Ít nhất 40% số điểm ứng với các test có  $n \leq 50$*

### Bài 11. Chạy đua

Bờm được Cuội mời lên mặt trăng để tham quan cơ ngơi của mình. Đã lâu không gặp đôi bạn quyết định tổ chức chạy thi tranh giải. Do đã sống lâu trên mặt trăng nên Cuội luôn chạy nhanh gấp đôi Bờm (tuy vậy nhanh hơn nữa là điều không thể!). Biết ưu thế đó của chồng mình, Hằng Nga tổ chức chạy thi như sau:

Có  $n$  vị trí phân biệt được đánh dấu dọc theo một đường thẳng. Bờm xuất phát từ vị trí  $X$  và chạy về bên phải còn Cuội xuất phát từ vị trí  $Z$  chạy về phía bên trái. Tại một vị trí  $Y$  nào đó nằm giữa hai vị trí trên Hằng Nga đặt một phần thưởng và vì là vợ của Cuội nên tất nhiên cô ta sẽ chọn vị trí  $Y$  sao cho Bờm không thể tới  $Y$  trước Cuội. Tuy vậy, Cuội luôn muốn mình không xuất phát ở điểm ở gần đích hơn so với Bờm.

Hãy đếm xem có bao nhiêu cặp vị trí  $(X, Y, Z)$  với  $X < Y < Z$  thỏa mãn điều kiện trên?

Input: vào file running .inp

- Dòng đầu tiên ghi số nguyên  $N$  - số vị trí đánh dấu ( $N \leq 1000$ )
- $N$  dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên là một vị trí đánh dấu (có giá trị nằm trong khoảng  $[0 \dots 10^9]$ )

Output: Ghi ra file running .out

Một dòng ghi một số nguyên duy nhất là số bộ  $(X, Y, Z)$  tìm được

*Example*

running .inp	running .out
5	4
3	
1	
10	
7	
4	

### Bài 12. Giá trị lớn nhất

Bạn được cho một dãy số nguyên  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của  $a_i \bmod a_j$  (phần dư của phép chia số nguyên  $a_i$  cho  $a_j$ ) với  $1 \leq i, j \leq n$  và  $a_i \geq a_j$ .

Input: vào file MAXVAL.INP

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương  $n$  - độ dài của dãy ( $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$ )
- Dòng thứ hai chứa  $n$  số nguyên cách nhau bởi dấu trống  $a_i$  ( $1 \leq a_i \leq 10^6$ )

*Output:* Ghi ra file MAXVAL.OUT Kết quả tìm được

*Example:*

MAXVAL.INP	MAXVAL.OUT
3 2 4 5	1

Ghi chú: 50% số test có  $n \leq 5000$

### III. BÀI TẬP THAM KHẢO

#### BÀI 1. TRẠM THU SÓNG BTS

Vịnh Hạ Long là một trong những thắng cảnh thiên nhiên nổi tiếng không chỉ ở Việt Nam mà còn trên Toàn thế giới. Trên Vịnh có rất nhiều hòn đảo đẹp là nơi tham quan của khách du lịch mỗi khi đến thăm vịnh. Để phục vụ nhu cầu của các khách tham quan, công ty viễn thông VNPT quyết định đặt một trạm thu sóng điện thoại (BTS) sao cho mọi khách tham quan trên các đảo có thể sử dụng điện thoại thông minh để liên lạc cũng như ghi nhận những cảm xúc của mình trên các mạng xã hội.

Để đơn giản, ta có thể coi bờ biển là đường thẳng trùng với trục Ox trên mặt phẳng tọa độ Đề-các. Mỗi hòn đảo như là một điểm có tung độ dương trên mặt phẳng này. Có tất cả  $n$  hòn đảo như vậy. Trạm BTS cần xây dựng là một điểm nằm ngay trên bờ biển (trục hoành) và vùng phủ sóng của trạm là hình tròn bán kính  $R$  với tâm là điểm đặt trạm. Tất cả các hòn đảo nằm trong hình tròn này (kể cả trên biên) đều bắt được sóng. Tất nhiên, để giảm chi phí đầu tư thì bán kính phủ sóng  $R$  càng nhỏ càng tốt

*Yêu cầu:* Hãy tìm vị trí đặt trạm BTS sao cho bán kính phủ sóng tối thiểu để phủ sóng toàn bộ số đảo trên vịnh là nhỏ nhất?. Để đơn giản, bạn chỉ cần tính giá trị nhỏ nhất này.

**Input:**

- Dòng 1: Ghi số nguyên dương  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^5$ )
- Dòng 2... $n + 1$ : Dòng  $i + 1$  ghi hai số nguyên  $x_i, y_i$  ( $|x_i| \leq 10^9, 0 < y_i \leq 10^9$ ) là tọa độ của hòn đảo thứ  $i$ .

**Output:** Ghi một số thực  $R$  duy nhất là bán kính phủ sóng tối thiểu tìm được.  $R$  được ghi với 2 chữ số sau phần thập phân.

**Example:**

Input	Output
2 1 2 2 2	2.06

## Bài 2. TÌM VỊ TRÍ

Một đại lý kinh doanh xăng dầu có  $n$  trạm bán xăng dầu (gọi tắt là cây xăng) đánh số từ 1 đến  $n$  trên một đường cao tốc muốn tìm vị trí đặt  $k$  bể chứa xăng để cung cấp xăng cho các cây xăng. Trên đường cao tốc người ta đặt các cột mốc cây số, bắt đầu từ cột mốc số 0. Biết vị trí của cây xăng thứ  $i$  là ở cột cây số  $d_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ .

**Yêu cầu:** Tìm vị trí đặt  $k$  bể chứa xăng tại  $k$  trong số  $n$  cây xăng sao cho khoảng cách lớn nhất từ cây xăng không có bể chứa xăng đến cây xăng có bể chứa xăng gần nó nhất là nhỏ nhất.

**Input:**

- Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương  $n, k$  ( $n \leq 10000, k \leq n$ )
- Dòng thứ hai ghi hai ghi các số  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ( $d_i$  là các số nguyên dương không quá  $2 \cdot 10^9$ ). Các số nguyên trên cùng một dòng ghi cách nhau ít nhất một dấu cách.

**Output:** Gồm  $k$  dòng, mỗi dòng ghi chỉ số của cây xăng đặt bể chứa xăng.

**Example:**

vitri.inp	vitri.out
6 3	2
5 6 12 19 20	4
27	6

Ghi chú:

- Trong cách đặt bể xăng như trên khoảng cách xa nhất từ cây xăng không có bể chứa xăng đến cây xăng có bể chứa xăng gần nó nhất là 6
- Có 50% số test có  $N \leq 10$ , 30% số test có  $10 < n \leq 200, k \leq 30$

## Bài 3. LỐI ĐI BỘ CHO KHÁCH DU LỊCH (OAKTREE.\*)

Chính phủ có kế hoạch xây dựng một lối đi bộ dành cho khách du lịch ở giữa một khu rừng sồi. Khu rừng có thể được mô tả như là mặt phẳng có  $N$  điểm đặc biệt mô tả các cây sồi.

Lối đi cho khách du lịch là một đường vòng có dạng hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ. Nếu như cạnh của hình chữ nhật này đi qua cây sồi nào thì cây sồi đó phải được đốn bỏ. Các cây sồi không nằm trên các cạnh của hình chữ nhật thì không cần phải đốn hạ.

Một danh sách  $P$  lối đi bộ cho khách du lịch được đệ trình lên chính phủ. Ljuko, một quan chức cao cấp của Bộ Lâm nghiệp - người rất yêu cây cối quan tâm đến việc với kế hoạch xây dựng được đệ trình thì có bao nhiêu cây sồi bị đốn hạ trong quá trình xây dựng các lối đi bộ.

Viết chương trình xác định với mỗi lối đi bộ được xây dựng thì có bao nhiêu cây sồi bị đốn hạ.

**Input:** File OAKTREE.INP

- Dòng đầu tiên ghi số  $N$  là số lượng cây sồi ( $N \leq 300000$ )
- $N$  dòng tiếp theo, dòng thứ  $i$  ghi hai số nguyên  $X_i, Y_i$  là tọa độ của một cây sồi ( $1 \leq X_i, Y_i \leq 10^9$ )
- Dòng kế tiếp ghi  $P$  là số lối đi bộ trên kế hoạch ( $P \leq 100000$ )
- $P$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 4 số nguyên  $X1, Y1, X2, Y2$  với ý nghĩa  $(X1, Y1)$  là tọa độ của góc trái dưới và  $(X2, Y2)$  là tọa độ của góc phải trên của 1 lối đi bộ lần lượt được xây dựng ( $1 \leq X1 \leq X2 \leq 10^9, 1 \leq Y1 \leq Y2 \leq 10^9$ )

**Output:** File OAKTREE.OUT

Gồm  $P$  dòng, dòng thứ  $i$  ghi số lượng cây sồi bị đốn hạ khi xây dựng lối đi bộ thứ  $i$  (theo trình tự trong file input)

*Example:*

OAKTREE.INP	OAKTREE.OUT
6	3
1 2	4
3 2	0
2 3	1
2 5	
4 4	
6 3	
4	
2 2 4 4	
2 2 6 5	
3 3 5 6	
5 1 6 6	

#### Bài 4. DÂY CON DÀI NHẤT

Cho  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $|a_i| < 10^9, 0 \leq n \leq 100\,000$ ). Hãy xác định dãy con nhiều phần tử nhất từ dãy đã cho, sao cho không có hai phần tử nào của dãy con có tổng chia hết cho  $m$  ( $2 \leq m \leq 100\,000$ ).

**Input:**

- Dòng thứ nhất chứa 2 số nguyên  $n$  và  $m$ ,
- Dòng thứ 2 chứa  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Output:** Đưa ra file văn bản MODM.OUT: Ghi ở dòng thứ nhất số nguyên  $k$  – số phần tử của dãy con tìm được,

**Example:**

modm.inp	modm.out
3 2 1 100 10	2

Ghi chú: Có 60% số test có  $N \leq 20$

## Bài 5. TẶNG HOA

Nhân dịp ngày Quốc tế phụ nữ (8-3), các bạn nam trong lớp quyết định mua hoa tặng các bạn nữ trong lớp mình. Tuy nhiên, đây là một kế hoạch tự phát, mỗi bạn nam tự mình đi mua hoa không bàn bạc với bạn khác. Chính vì vậy cuối cùng có  $M$  loại hoa khác nhau được đem đến lớp (các loại hoa đánh số từ 1 đến  $M$ ), loại hoa thứ  $i$  có  $a_i$  bông hoa.

Một vấn đề đau đầu được đặt ra cho lớp trưởng - một bạn nam đẹp trai nhất trong lớp- là làm thế nào chia hết các bông hoa này cho các bạn nữ trong lớp để **số bông hoa của bạn nữ nhận được nhiều hoa nhất là nhỏ nhất**. Biết rằng mỗi bạn nữ chỉ nhận các bông hoa cùng một loại (hoặc không nhận được bông hoa nào).

Viết chương trình tính số lượng hoa của bạn nữ nhận được nhiều hoa nhất trong phương án trên.

**Input:**fgift.inp

- Dòng đầu tiên ghi hai số nguyên dương  $N$  ( $1 \leq N \leq 10^9$ ) là số lượng bạn nữ trong lớp và  $M$  ( $1 \leq M \leq 3 \cdot 10^5; M \leq N$ ) là số lượng loại hoa khác nhau
- $M$  dòng tiếp theo, dòng thứ  $i$  ghi số  $a_i$  là số lượng hoa của loại hoa thứ  $i$  ( $1 \leq a_i \leq 10^9$ )

**Output:**fgift.out

Một số nguyên duy nhất là số bông hoa của bạn nữ nhận được nhiều hoa nhất trong phương án tối ưu (là phương án mà số hoa của bạn nữ có nhiều hoa nhất là nhỏ nhất)

**Example:**

fgift.inp	fgift.out
5 2 7 4	3

7 5	4
7	
1	
7	
4	
4	

## Bài 6. SÓC VÀ HẠT DẼ

Có  $n$  chú sóc đứng chờ dưới gốc của  $m$  cây hạt dẻ. Cây hạt dẻ thứ  $i$  sẽ bắt đầu rụng quả đầu tiên sau  $T_i$  giây nữa và cứ sau  $P_i$  giây nó lại rụng thêm một quả. Sóc mẹ muốn các cậu con trai của mình đem về tổ không ít hơn  $k$  quả hạt dẻ để chuẩn bị tránh cơn sóng thần dữ dội đến từ biển Đông xa xôi, nhưng cũng phải thật nhanh chóng trước khi cơn sóng ập đến chứ chẳng thể nhõn nhõn! Vậy nên các chú sóc đang bàn nhau xem đứng ở những gốc cây nào để có thể hứng đủ số quả cần thiết trong thời gian nhanh nhất. Thời gian để chú sóc đi về vị trí cần đứng không đáng kể, các chú sóc cũng không di chuyển sang gốc cây nào khác trong lúc hứng hạt dẻ.

**Yêu cầu:** Hãy tìm thời gian sớm nhất (sau bao nhiêu giây nữa) các chú sóc có thể hứng đủ số quả cần thiết.

**Input:**squirr.inp

- Dòng đầu tiên chứa các số nguyên  $m, n, k$  ( $0 < m, n \leq 50000; 0 < k \leq 10^9$ )
- Dòng thứ hai chứa lần lượt các số nguyên  $T_i$  ( $0 < T_i \leq 100; i = 1, \dots, m$ )
- Dòng thứ ba chứa lần lượt các số nguyên  $P_i$  ( $0 < P_i \leq 100; i = 1, 2, \dots, m$ )

**Output:** squirr.out

Ghi ra một số nguyên duy nhất là thời gian sớm nhất tìm được

**Example:**

squirr.inp	squirr.out
3 2 5	4
5 1 2	(hai chú sóc đứng ở
1 2 1	cây 2 và 3

## Bài 7. KHỈ HÁI DỪA

Có một khu vườn rộng nằm ngay bên cạnh một sở thú, ở đó có rất nhiều dứa.

Sở thú đã huấn luyện được 2 loại khỉ đặc biệt: Loại thứ nhất có khả năng hái dứa và loại thứ hai có khả năng bỏ những quả dứa để chế biến thành sản phẩm (nước, cùi,...).

Có  $N$  con khỉ thuộc loại thứ nhất, con khỉ thứ  $k$  của loại này sẽ mất  $A_k$  thời gian để leo lên cây và bắt đầu hái quả dứa đầu tiên. Cứ sau mỗi  $B_k$  giây nó hái được một quả. Có  $M$  con khỉ

thuộc loại thứ hai, con khỉ thứ  $k$  của loại này sẽ mất  $C_k$  thời gian để tìm công cụ và bắt đầu chế biến quả dừa đầu tiên, cứ sau  $D_k$  giây nó chế biến xong một quả dừa.

Loại khỉ thứ hai là loại khỉ rất hung hãn nên chúng sẽ đuổi đánh loại khỉ thứ nhất nếu như cùng ở trong vườn tại một thời điểm. Chính vì vậy, đầu tiên người ta cho các con khỉ loại thứ nhất vào hái dừa. Sau khi hái hết những quả dừa, người ta mới đưa con khỉ loại thứ hai vào để chế biến. Thời gian đưa các con khỉ vào/ra khỏi vườn xem như bằng 0.

Chúng ta không biết trong vườn có bao nhiêu quả dừa. Tuy nhiên biết rằng  $T$  giây là thời gian kể từ khi đưa những con khỉ thứ nhất vào vườn đến khi số dừa được chế biến hoàn toàn.

Hãy xác định sau thời gian bao nhiêu lâu, kể từ khi đưa những con khỉ thứ nhất vào hái dừa đến khi những con khỉ thứ hai được đưa vào vườn.

#### Input:

- Dòng đầu tiên ghi  $T$  là tổng thời gian hai loại khỉ ở trong vườn ( $1 \leq T \leq 10^9$ )
- Dòng thứ hai ghi số nguyên dương  $N$  ( $1 \leq N \leq 100$ )
- $N$  dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi hai số  $A_k, B_k$  ( $1 \leq A_k, B_k \leq 10^9$ )
- Dòng tiếp theo ghi số nguyên dương  $M$  ( $1 \leq M \leq 100$ )
- $M$  dòng cuối, mỗi dòng ghi hai số  $C_k, D_k$  ( $1 \leq C_k, D_k \leq 10^9$ )

**Output:** Một số nguyên là khoảng thời gian từ khi đưa con khỉ thứ nhất đến vườn đến khi đưa con khỉ thứ hai đến vườn

#### Example:

12	5
1	
3 1	
1	
5 1	

#### Giải thích:

Giải thích: Trong vườn có 3 quả dừa

- Ở giây thứ 3 bắt đầu hái quả dừa đầu tiên
- Ở giây 4, 5 hái các quả dừa thứ 2 và thứ 3
- Sau 5 giây đưa loại khỉ thứ hai vào vườn
- Ở giây thứ 10 bắt đầu chế biến quả dừa đầu tiên
- Ở giây 11, 12 bắt đầu chế biến quả dừa thứ 2 và thứ 4
- Sau 12 giây đưa con khỉ thứ hai ra khỏi vườn.