ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

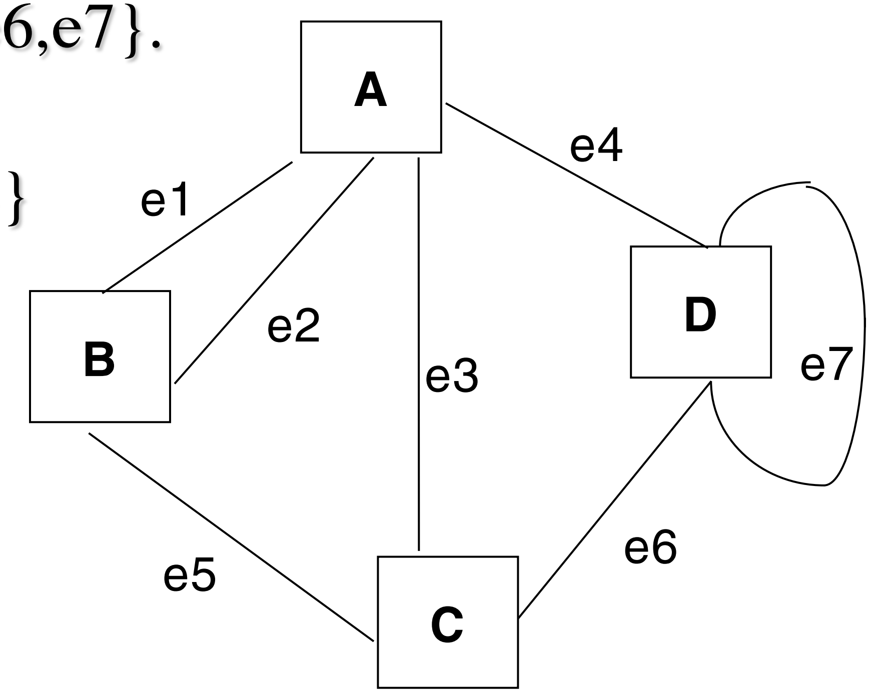
ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

- Nếu chúng ta không phân biệt thứ tự của cặp đỉnh liên kết với mỗi cạnh thì sẽ có được đồ thị vô hướng. Đồ thị vô hướng G=(X, E) được định nghĩa bởi:
  - tập hợp $X \neq \emptyset$ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
  - tập hợp E là tập các cạnh của đồ thị.
  - mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh $\{i, j\} \subseteq X$ không phân biệt thứ tự.

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Hình vẽ dưới là minh họa hình học của một đồ thị có:

- Tập đỉnh là {A, B, C, D}.
- Tập cạnh là {e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7}.
- Ánh xạ φ định nghĩa như sau:
  - e1 và e2 liên kết với {A, B}
  - e3 liên kết với {A, C}
  - e4 liên kết với {A, D}
  - e5 liên kết với {B, C}
  - e6 liên kết với {C, D}
  - e7 liên kết với {D}.



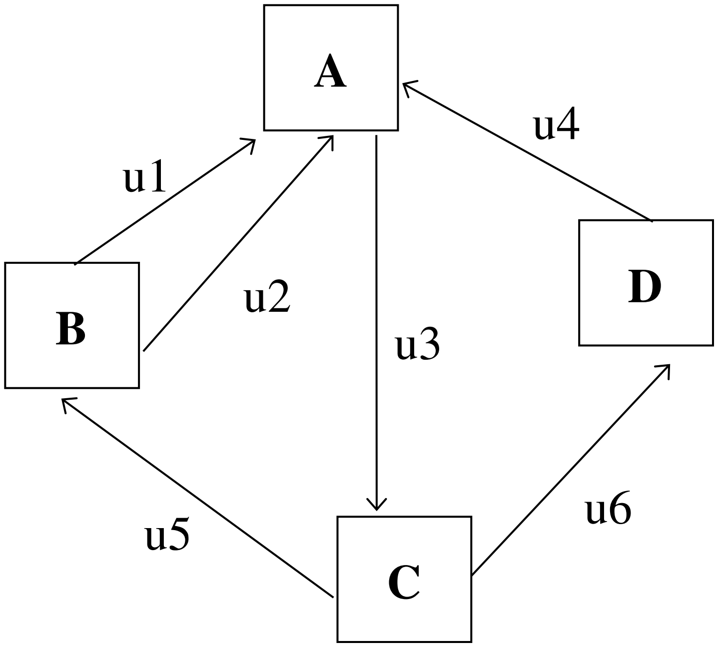
ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- Một đồ thị có hướng G=(X, U) được định nghĩa bởi:
  - tập hợp X ≠ ∅ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
  - tập hợp U là tập các cạnh của đồ thị;
  - mỗi cạnh u∈U được liên kết với một cặp đỉnh (i, j)∈X2.

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Hình vẽ bên là minh họa hình học của một đồ thị có:

- Tập đỉnh là {A, B, C, D}.
- Tập cạnh là {u1,u2,u3,u4,u5,u6}.
- Ánh xạ φ định nghĩa như sau:
  - u1 và u2 liên kết với cặp (A, B)
  - u3 liên kết với cặp (A, C)
  - u4 liên kết với cặp (D, A)
  - u5 liên kết với cặp (C, B)
  - u6 liên kết với cặp (C, D).



MỘT SỐ TỪ NGỮ và QUI ƯỚC

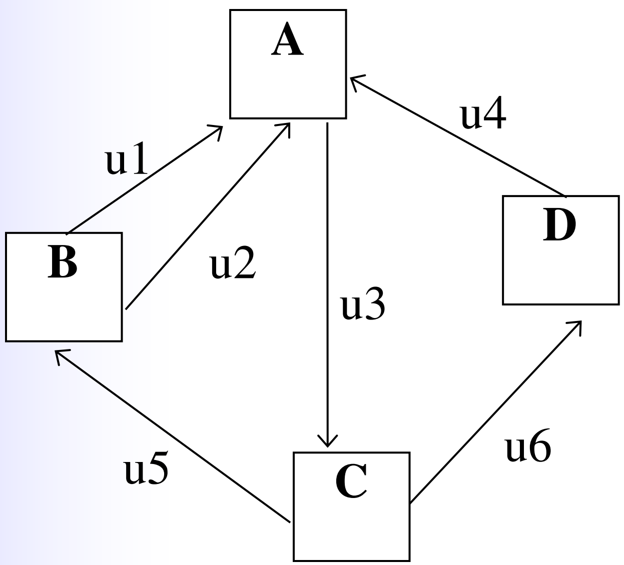
- Khi một cạnh u được liên kết với cặp đỉnh (i, j):
  - ta nói cạnh u kề với đỉnh i và kề với đỉnh j (hay cũng nói đỉnh i và đỉnh j kề với cạnh u);
  - ta có thể viết tắt u=(i, j), như vậy có lúc ta viết u=(i, j) và v=(i, j) nhưng lại hiểu u ≠ v;
  - nếu đồ thị vô hướng, ta nói hai đỉnh i và j được nối với nhau, nếu đồ thị có hướng (tức cặp đỉnh (i, j) được tôn trọng thứ tự) ta nói đỉnh i được nối tới đỉnh j.
  - nếu đồ thị có hướng thì ta nói cạnh u bắt đầu từ đỉnh i và kết thúc tại đỉnh j, ta cũng nói cạnh u đi ra khỏi đỉnh i và đi vào đỉnh j.

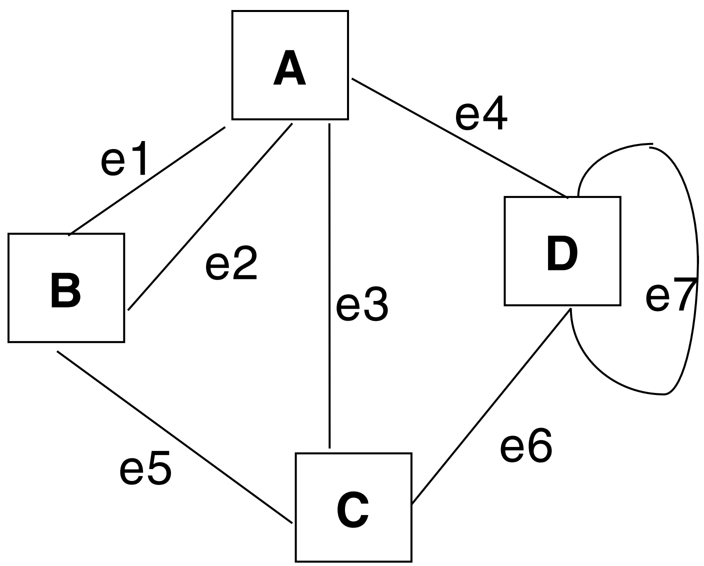
MỘT SỐ TỪ NGỮ và QUI ƯỚC

- Ngoài ra, trong giáo trình nầy chúng ta chỉ làm việc với trường hợp các đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn. Để cho chính xác thì phải nhấn mạnh là ĐỒ THỊ HỮU HẠN, tuy nhiên để ngắn gọn chúng ta chỉ dùng thuật ngữ ĐỒ THỊ và hiểu ngầm đó là đồ thị hữu hạn.

MỘT SỐ TỪ NGỮ và QUI ƯỚC

- Ví dụ: Trong hai ví dụ trên u1 và u2 là hai cạnh song song trong đồ thị thứ nhất, e1 và e2 là hai cạnh song song và e7 là một khuyên trong đồ thị thứ hai.





BẬC CỦA ĐỈNH

- BẬC (ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG)
  - Bậc của một đỉnh x trong đồ thị vô hướng là tổng số các cạnh kề với đỉnh x, qui ước là mỗi khuyên phải được tính hai lần. Bậc của đỉnh x trong đồ thị G được ký hiệu là dG(x) (hay d(x) nếu đang xét một đồ thị nào đó).
  - Ví dụ: đồ thị vô hướng trong ví dụ 2 có d(B)=3 và d(D)=4.

BẬC CỦA ĐỈNH

- BẬC (ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG)
  - Nửa bậc ngoài của đỉnh x: ký hiệu d+(x) là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh x (hay khởi đầu từ đỉnh x).
  - Nửa bậc trong của đỉnh x: ký hiệu d-(x) là số các cạnh đi vào đỉnh x (hay kết thúc tại đỉnh x).
  - Bậc của đỉnh x: d(x) = d+(x) + d-(x)
  - <u>Ví dụ</u>: đồ thị có hướng trong ví dụ 1 có d+(A)=1 và d-(A)=3.

BẬC CỦA ĐỈNH

- ĐỈNH TREO, ĐỈNH CÔ LẬP
  - Đỉnh treo là đỉnh có bậc bằng 1.
  - Đỉnh cô lập là đỉnh có bậc bằng 0.

BẬC CỦA ĐỈNH

- ĐỊNH LÝ (công thức liên hệ giữa bậc và số cạnh)
  - a) Xét đồ thị có hướng G=(X, U). Ta có:

$$\sum_{x\in X} d^{+}(x) = \sum_{x\in X} d^{-}(x) = |U| \text{ và } \sum_{x\in X} d(x) = 2|U|.$$

  - b) Xét đồ thị vô hướng G=(X, E). Ta có:

$$\sum_{x\in X} d(x) = 2|E|.$$

- <u>Hệ quả</u>: số lượng các đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

- Xét đồ thị G=(X, U) (có hướng hay vô hướng).
- Giả sử tập X gồm n đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tập U gồm n cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$.

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

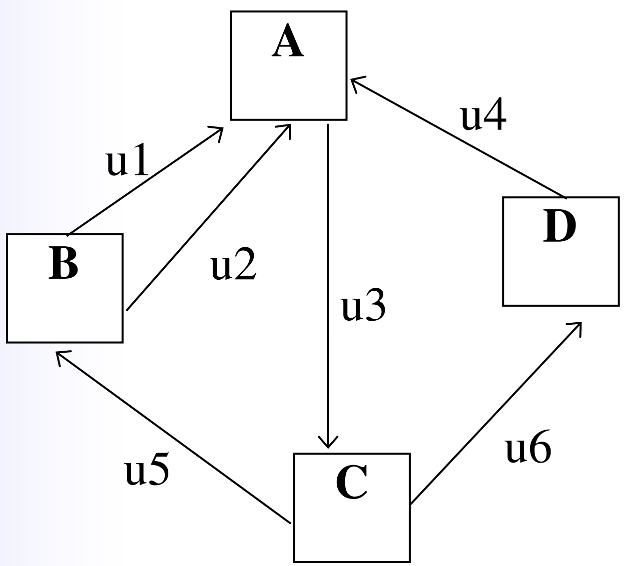
- Ma trận kề của đồ thị G, ký hiệu B(G), là một ma trận nhị phân cấp n x n được định nghĩa như sau: $B=(B_{ij})$ với
  - $B_{ij}=1$ nếu có cạnh nối x_i tới x_j,
  - $B_{ij}=0$ nếu ngược lại.
- Nếu G là đồ thị vô hướng, ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của đồ thị G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp n x m được định nghĩa như sau: $A=(A_{ij})$ với
  - $A_{ij}=1$ nếu đỉnh x_i kề với cạnh u_j,
  - $A_{ij}=0$ nếu ngược lại.

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

- Nếu G là đồ thị có hướng không có khuyên, ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của đồ thị G, ký hiệu A(G), là ma trận n x m được định nghĩa là $A=(A_{ij})$ với qui ước:
  - $A_{ij} = 1$ nếu cạnh uj hướng ra khỏi đỉnh x_i ,
  - $A_{ij} = -1$ nếu cạnh uj hướng vào đỉnh x_i ,
  - $A_{ij} = 0$ nếu cạnh uj không kề đỉnh x_i .

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

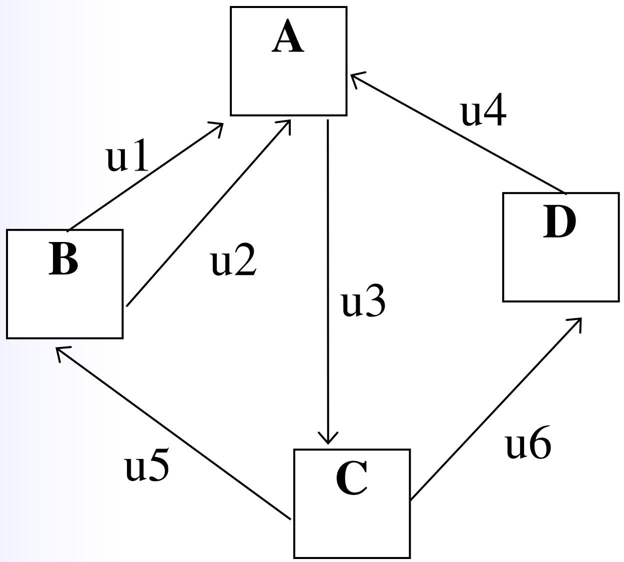
- Nếu ta sắp thứ tự các đỉnh và cạnh của đồ thị G là X={A, B, C, D} và U={u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6} thì ma trận liên thuộc của đồ thị là:



$$A(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

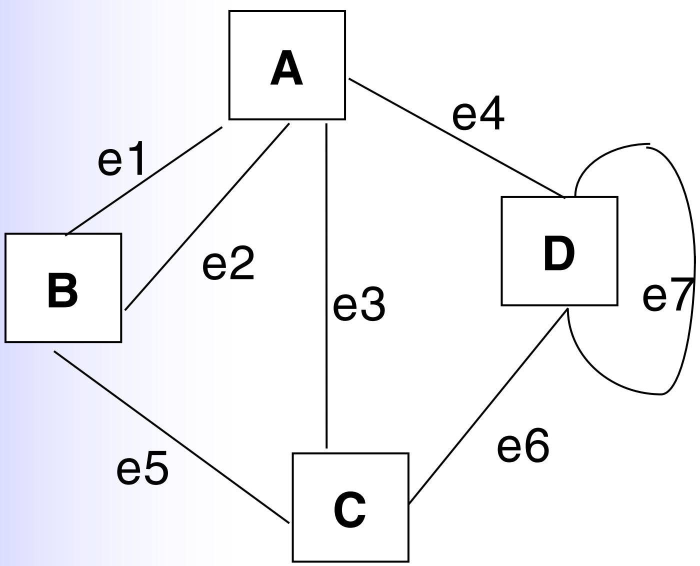
- Nếu ta sắp thứ tự các đỉnh và cạnh của đồ thị G là X={A, B, C, D} và U={u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6} thì ma trận kề của đồ thị là:



$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

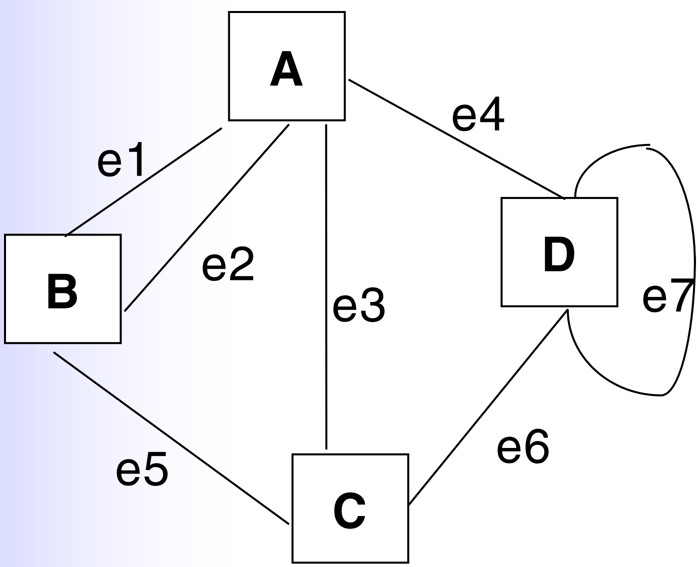
- Gọi H là đồ thị có được từ đồ thị G nói trên bằng cách bỏ đi hướng các cạnh và ta sắp thứ tự các đỉnh, cạnh như trên thì ma trận liên thuộc của đồ thị là: :



$$A(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

- Gọi H là đồ thị có được từ đồ thị G nói trên bằng cách bỏ đi hướng các cạnh và ta sắp thứ tự các đỉnh, cạnh như trên thì ma trận kề của đồ thị là:



$$B(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ

CÁC THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

- Cho đồ thị G=(X, U) vô hướng hay có hướng. Ta định nghĩa một quan hệ ~ như sau trên tập đỉnh X:

  $\forall i, j \in X, i \sim j \Leftrightarrow$

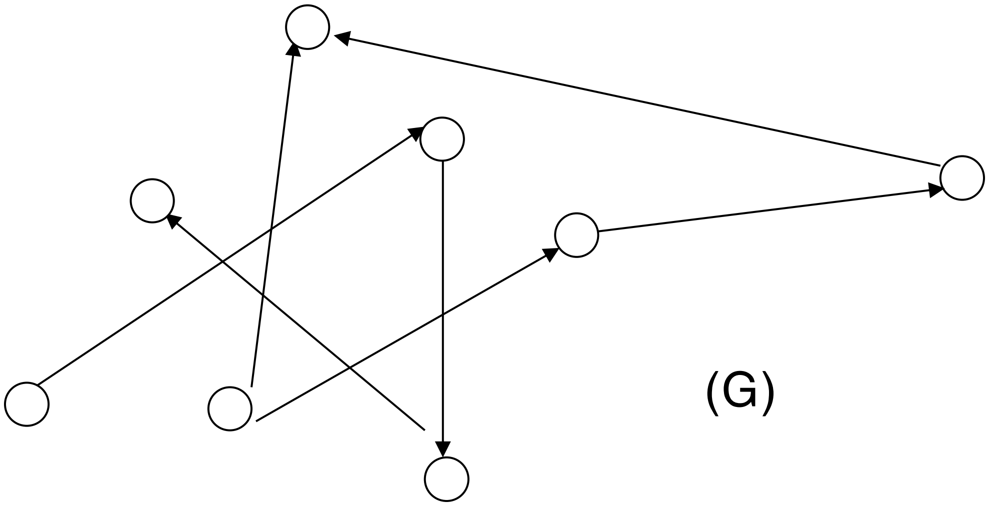
  (i=j hay có dây chuyền đỉnh đầu là i và đỉnh cuối là j).

CÁC THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

- Quan hệ nầy có ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ tương đương. Do đó tập X được phân hoạch thành các lớp tương đương và ta định nghĩa:
  - một thành phần liên thông của đồ thị là một lớp tương đương được xác định bởi quan hệ ~ nói trên;
  - số thành phần liên thông của đồ thị làsố lượng các lớp tương đương;
  - một đồ thị liên thông là một đồ thị chỉ có một thành phần liên thông.

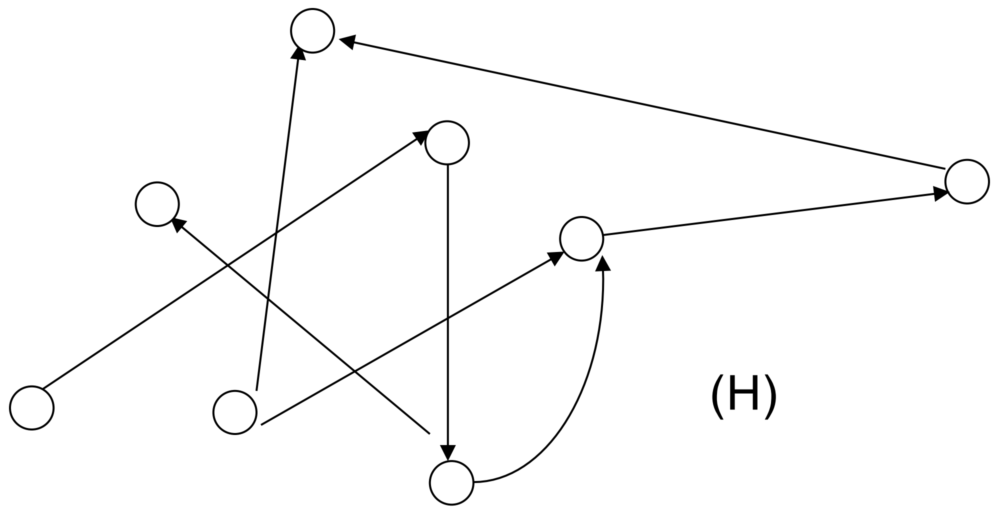
CÁC THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

- Đồ thị (G) gồm 2 thành phần liên thông,
- Khi một đồ G gồm p thành phần liên thông G1, G2, ..., Gp thì các đồ thị Gi cũng là các đồ thị con của G và chúng ta có dG(x) = dGi(x) với mọi đỉnh x của Gi.


(G)

CÁC THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

- Đồ thị (H) là một đồ thị liên thông.



(H)

Thuật toán tìm các thành phần liên thông (Depth first search)

- Giả sử đồ thị G=(X, E) gồm n đỉnh.
- Thuật toán được tóm tắt như sau:
- Bước 1. Khởi tạo biến *label=0* và gắn nhãn 0 cho tất cả các đỉnh
- Bước 2. Lặp i=1, 2, ..., n làm
  - Nếu đỉnh i có nhãn 0 thì
    - *label=label+1*
    - Viếng vàgắn nhãn đỉnh i với nhãn là *label*.
  - Cuối nếu
- Cuối lặp i

Thuật toán tìm các thành phần liên thông (Depth first search)

- Việc viếng và gắn nhãn được thực hiện bằng một thủ tục đệ qui *Visit* như sau:
- Thủ tục *Visit* (đỉnh i, nhãn *label*)
  - Gắn nhãn *label* cho đỉnh i
  - Với mọi đỉnh j mà có cạnh nối i với j và j có nhãn 0 ta gọi đệ qui *Visit*(j, *label*).

Thuật toán tìm các thành phần liên thông (Depth first search)

- Chú ý: Khi thuật toán kết thúc thì các đỉnh nằm trong cùng một thành phần liên thông sẽ được gắn cùng một nhãn.