TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ

BÀI TẬP TUẦN 4

Lớp: **19TN**

Họ tên: **Nguyễn Đại Nghĩa**

MSSV: **19120735**

<u>Yêu cầu:</u>

Bài 1: Chứng minh nếu hai ma trận vuông cùng kích thước n*n A và B khác nhau đúng một dòng $\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} + c_{ij} \\ b_{i'j} = a_{i'j} \end{cases}$ thì $|B| = |A| + |A'|$ với $\begin{cases} a'_{ij} = c_{ij} \\ a'_{i'j} = a_{i'j} \end{cases}$

Bài 2: Chéo hóa các ma trận

a/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

b/ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

<u>Bài làm:</u>

Bài 1:

Gọi i là chỉ số dòng mà A và B khác nhau và M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận B sau khi bỏ đi dòng i và cột j. Ta có

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot |M_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} + c_{ij}) \cdot |M_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |M_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot c_{ij} \cdot |M_{ij}| \\ &= |A| + |A'| \end{aligned}$$

(đpcm)

Bài 2:

a/

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Suy ra phương trình $\det(\lambda I - A) = 0$ có 2 nghiệm $\lambda = 1,\ \lambda = 2$

Với $\lambda = 1$ ta có $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_1]{d_2 * (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 \leftrightarrow d_2]{\substack{d_3 - 3d_1 \\ d_3 * -1/8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Khi đó phương trình $(\lambda I - A)x = 0$ có nghiệm là $x = \left(\frac{1}{8}s, \frac{-1}{8}s, s\right) = s\left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{8}, 1\right)$

Với $\lambda = 2$ ta có $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{d_3 * -1/5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Khi đó phương trình $(\lambda I - A)x = 0$ có nghiệm là $x = (0, 0, s) = s(0, 0, 1)$

Kết luận: chỉ tìm được 2 vector đặc trưng $\left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{8}, 1\right)$ và $(0, 0, 1)$ nên A không thể chéo hóa b/

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\lambda \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Suy ra phương trình $\det(\lambda I - A) = 0$ có 2 nghiệm $\lambda = 1,\ \lambda = 2$

Với $\lambda = 1$ ta có $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2+d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Khi đó phương trình $(\lambda I - A)x = 0$ có nghiệm là $x = (-2s, s, s) = s(-2,1,1)$

Với $\lambda = 2$ ta có $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2+d_1 \\ d_3+d_1}]{d_1 * 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Khi đó phương trình $(\lambda I - A)x = 0$ có nghiệm là $x = (-s, t, s) = s(-1,0,1) + t(0,1,0)$

Ta tìm được 3 vector đặc trưng là $(-2,1,1)$, $(-1,0,1)$, $(0,1,0)$

Suy ra $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$