

TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ

BÀI TẬP TUẦN 6

Lớp: 19TN
Họ tên: Nguyễn Đại Nghĩa
MSSV: 19120735

Yêu cầu:

Cho tập dữ liệu Ω

y	x_1	x_2	x_3
7	1	2	3
4	2	0	1
7	3	1	2

a/ Tìm $f(x)$ theo x_1, x_2, x_3

b/ Tìm $f(x_1, x_2, x_3)$

Bài làm:

a/ Giả sử hàm $f(x_1) = \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 + \theta_3$

Khi đó $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ và $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, suy ra

$$\begin{aligned} \theta &= (A^T A)^{-1} A^T y = \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 86 \\ 36 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $f(x_1) = 3x_1^2 - 12x_1 + 16$.

Giả sử $f(x_2) = \theta_1 x_2^2 + \theta_2 x_2 + \theta_3$.

$$\text{Khi đó } A = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y = \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 9 & 5 \\ 9 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 35 \\ 21 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 9 \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } f(x_2) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 4.$$

Giả sử $f(x_3) = \theta_1 x_3^2 + \theta_2 x_3 + \theta_3$

$$\text{Khi đó } A = \begin{bmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ suy ra}$$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y = \left(\begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 95 \\ 39 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 15/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } f(x_3) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 2$$

b/ Tìm $f(x_1, x_2, x_3)$.

Giả sử $f(x_1, x_2, x_3) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3$.

Khi đó $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T y = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 5 & 11 \\ 5 & 5 & 8 \\ 11 & 8 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 36 \\ 21 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$.