

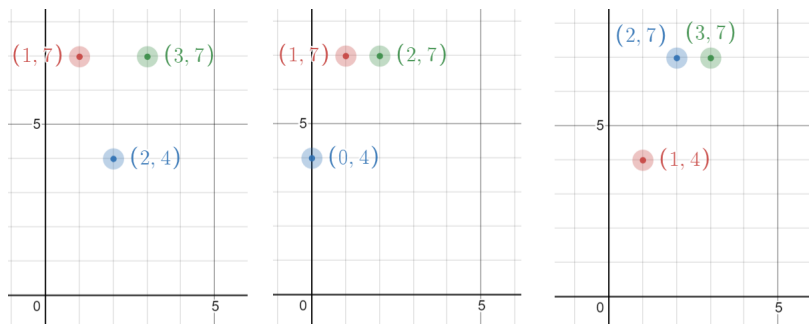
Bài tập về nhà Toán ứng dụng và thống kê

Lê Minh Tú - 19120701

November 2021

1 Cho bảng quan hệ $\Omega = \left[\begin{array}{c|ccc} y & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right]$, tìm công thức sao cho khớp với dữ liệu trên của các hàm:

1.1 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$



Ta thấy y có thể có dạng phương trình bậc hai theo x_i ($1 \leq i \leq 3$), nên ta xét hàm $f(x) = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3$. Xét:

* $f(x_1)$:

Ta có các ma trận

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\
(A^T A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1.5 & -6 & 5 \\ -6 & 24.5 & -21 \\ 5 & -21 & 19 \end{bmatrix} \\
\Theta &= (A^T A)^{-1} A^T y \\
&= \begin{bmatrix} 1.5 & -6 & 5 \\ -6 & 24.5 & -21 \\ 5 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Khi đó công thức của hàm $f(x_1)$ là:
 $f(x_1) = \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 + \theta_3 = 3x_1^2 - 12x_1 + 16$

* $f(x_2)$:
Ta có các ma trận

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
A^T A &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 17 & 9 & 5 \\ 9 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
(A^T A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1.5 & -3 & 0.5 \\ -3 & 6.5 & -1.5 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \\
\Theta &= (A^T A)^{-1} A^T y \\
&= \begin{bmatrix} 1.5 & -3 & 0.5 \\ -3 & 6.5 & -1.5 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Khi đó công thức của hàm $f(x_2)$ là:
 $f(x_2) = \theta_1 x_2^2 + \theta_2 x_2 + \theta_3 = -1.5x_2^2 + 4.5x_2 + 4$
 * $f(x_3)$:
 Ta có các ma trận

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
A^T A &= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\
(A^T A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1.5 & -6 & 5 \\ -6 & 24.5 & -21 \\ 5 & -21 & 19 \end{bmatrix} \\
\Theta &= (A^T A)^{-1} A^T y \\
&= \begin{bmatrix} 1.5 & -6 & 5 \\ -6 & 24.5 & -21 \\ 5 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 7.5 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Khi đó công thức của hàm $f(x_3)$ là:
 $f(x_3) = \theta_1 x_3^2 + \theta_2 x_3 + \theta_3 = -1.5x_3^2 + 7.5x_3 - 2$

1.2 $f(x_1, x_2, x_3)$

Giả sử hàm $f(x_1, x_2, x_3) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3$ Ta có các ma trận

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 5 & 11 \\ 5 & 5 & 8 \\ 11 & 8 & 14 \end{bmatrix} \\ (A^T A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 2/3 & 2 & -5/3 \\ 2 & 25/3 & -19/3 \\ -5/3 & -19/3 & 5 \end{bmatrix} \\ \Theta &= (A^T A)^{-1} A^T y \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 2 & -5/3 \\ 2 & 25/3 & -19/3 \\ -5/3 & -19/3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Khi đó công thức của hàm $f(x_1, x_2, x_3)$ là:
 $f(x_1, x_2, x_3) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = x_1 + 2x_3$