TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ
BÀI TẬP TUẦN 3

Lớp: **19TN**

Họ tên: **Nguyễn Đại Nghĩa**

MSSV: **19120735**

<u>Yêu cầu:</u>

Bài 1: Viết mã giả cho phân rã LU của ma trận A kích thước n x n

Bài 2: Tìm phân rã QR của ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

<u>Bài làm:</u>

Bài 1: Mã giả cho phân rã LU của ma trận A nxn

Nếu các phần tử trên đường chéo chính của A đều khác 0

```
U := A, L := I(n)
for i = 1 → n:
      // Duyệt các dòng dưới dòng i
      for j = i + 1 → n:
            // Cố định phần tử L_ji
            L_ji = U_ji / U_ii
            // Xử lý dòng j của U
                  U_j = U_j - L_ji * U_i
Kết luận A = L.U
```

Nếu tồn tại một phần tử bằng 0 trên đường chéo chính thì phép chia cho U_{ii} của giải thuật trên sẽ bị lỗi. Ma trận A lúc này không thể đơn thuần phân rã thành A = L . U, mà phải dùng giải thuật PLU, tức phân tích A = P.L.U, với P là một ma trận hoán vị dòng từ ma trận đơn vị I(n)

```
U := A, L := I(n), P := I(n)
for i = 1 → n:
    k := i
    while(Uii == 0 and k < n): // Tìm dòng thay thế
        Hoán đổi dòng Ui với dòng Uk+1
        Hoán đổi dòng Pi với dòng Pk+1
        k := k + 1
    if(Uii == 0): // Không tìm được dòng thay thế
        Kết luận không có lời giải duy nhất
        Thoát

    // Duyệt các dòng dưới dòng i
    for j = i + 1 → n:
        // Cố định phần tử Lji
        Lji := Uji / Uii
        // Xử lý dòng j của U
            Uj := Uj - Lji * Ui
Kết luận P.A = L.U
```

Bài 2: Tìm phân rã QR của ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Viết lại $A = [u_1\ u_2\ u_3]$ với $u_1 = (6,9,3)^T$, $u_2 = (-2,-1,7)^T$, $u_3 = (0,1,5)^T$

Để đơn giản bài toán, ta lược bỏ ký hiệu chuyển vị (ký hiệu T) và xem xét các vector trong bài toán là các vector cột của ma trận

Xét tập $S=\left\{u_1=(6,9,3),\ u_2=(-2,-1,7),\ u_3=(0,1,5)\right\}$

Gọi $V=\left\{v_1,\ v_2,\ v_3\right\}$ là một cơ sở trực giao của S. Thực hiện tiến trình Gram – Schmidt ta được

$$v_1=u_1=(6,9,3)$$

$$q_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{\sqrt{14}}{7},\frac{3\sqrt{14}}{14},\frac{\sqrt{14}}{14}\right)$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=(-2,-1,7)-0(6,9,3)=(-2,-1,7)$$

$$q_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(\frac{-\sqrt{6}}{9},\frac{-\sqrt{6}}{18},\frac{7\sqrt{6}}{18}\right)$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{\langle u_3,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2=(0,1,5)-\frac{24}{126}(6,9,3)-\frac{34}{54}(-2,-1,7)=\left(\frac{22}{189},\frac{-16}{189},\frac{4}{189}\right)$$

$$q_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\left(\frac{11\sqrt{21}}{63},\frac{-8\sqrt{21}}{63},\frac{2\sqrt{21}}{63}\right)$$

Do đó

$$Q=[q_1\ q_2\ q_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{-\sqrt{6}}{9} & \frac{11\sqrt{21}}{63}\\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & \frac{-\sqrt{6}}{18} & \frac{-8\sqrt{21}}{63}\\ \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{7\sqrt{6}}{18} & \frac{2\sqrt{21}}{63}\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}\langle u_1,q_1\rangle & \langle u_2,q_1\rangle & \langle u_3,q_1\rangle\\ 0 & \langle u_2,q_2\rangle & \langle u_3,q_2\rangle\\ 0 & 0 & \langle u_3,q_3\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\sqrt{14} & 0 & \frac{4\sqrt{14}}{7}\\ 0 & 3\sqrt{6} & \frac{17\sqrt{6}}{9}\\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{21}}{63}\end{bmatrix}$$