Bài 3: Tô màu đồ thị

Tô màu đỉnh, với số màu ít nhất, sau cho 2 đỉnh nối với nhau được tô khác màu

Thuật toán tô màu tuần tự như sau (thuật toán tham lam)
Lặp lại cho đến khi tô hết các đỉnh
[
- Giả sử bạn đã dùng k màu
- Chọn đỉnh có bậc cao nhất
- k > 0
{ Chọn màu từ 1 đến k để tô cho đỉnh đó.
- Nếu tồn tại màu i khác với màu các đỉnh kề với nó thì chọn màu i.
- Nếu k tồn tại màu i thì đánh dấu đỉnh đó chưa tô màu.
}
Nếu đỉnh chưa tô màu. Tô màu cho đỉnh đó màu mới k +1.
]

Tô màu	1	3	2	3	2	1	2	3
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	1	1				
B	1		1		1			
C	1	1		1		1		
D	1		1			1	1	
E		1				1		1
F			1	1	1		1	1
G				1		1		1
H					1	1	1	
Bậc	3	3	4	4	3	5	3	3

Khởi đầu: Đỉnh(Bậc): A(3), B(3), C(4), D(4), E(3), F(5), G(3), H(3)
Tô màu lần 1: chọn đỉnh có bậc lớn nhất F(5)
Hạ bậc lần 1: A(3), B(3), C^1(3), D^1(3), E^1(2), F(0), G^1(2), H^1(2) (Đỉnh mới tô màu bậc = 0, các đỉnh nối trực tiếp với đỉnh vừa tô giảm 1 bậc và các đỉnh này được đánh dấu để k tô lại màu 1)
Tô màu lần 2: chọn đỉnh có bậc lớn nhất khác F: A(3), B(3), C^1(3), D^1(3), E^1(2), G^1(2), H^1(2) ---> Do nhiều đỉnh có bậc là 3, là bậc lớn nhất. Nên chọn theo thứ tự là A(3). Vì A k bị đánh dấu, nên ưu tiên tô màu 1 cho A
Hạ bậc lần 2: A(0), B^1(2), C^1(2), D^1(2), E^1(2), G^1(2), H^1(2) các đỉnh có cung nối trực tiếp đến A giảm đi 1 bậc và được đánh dấu k tô màu 1
Tô màu lần 3: chọn đỉnh có bậc lớn nhất khác F, A: B^1(2), C^1(2), D^1(2), E^1(2), G^1(2), H^1(2) ---> Các đỉnh có bậc bằng nhau, nên chọn đỉnh nào cũng được ----> Chọn đỉnh B, do đỉnh B k được tô màu 1, nên tô màu 2 cho B
Hạ bậc lần 3: B(0), $C^{1,2}$(2), D^1(2), $E^{1,2}$(1), G^1(2), H^1(2) các đỉnh có cung nối trực tiếp đến B giảm đi 1 bậc và được đánh dấu k tô màu 1 và màu 2
Tô màu lần 4 : chọn đỉnh có bậc lớn nhất khác F, A, B --->$C^{1,2}$(2), D^1(2), $E^{1,2}$(1), G^1(2), H^1(2)

<u>Bài 6</u>: Bài toán đèn giao thông (Thuật toán tô màu)

Hãy xây dựng các cột đèn sao cho việc lưu thông không bị giao nhau (số màu đèn là bao nhiêu).

- Lưu ý: Đường nối EC chỉ có tuyến một chiều EC.
- Gợi ý:
  - Xác định tại giao lộ có bao nhiêu tuyến đường:
    - Từ A: AB AC AD
    - Từ B: BA BC BD
    - Từ D: DA DB DC
    - Từ E: EA EB EC ED
  - Lấy 13 tuyến đường làm đỉnh đồ thị.
  - Cung nối những tuyến đường không thể cùng đi một lúc
    - Các tuyến đường giao nhau: EC, AD, DA; EB, AC, AD, DA; AC, EB, BD,DB
    - Các tuyến đường ngược nhau: AB,BC; ED,DC; EA, AB;
  - BA, DC, ED: không giao nhau với các tuyến khác (được phép rẽ phải).
  - Các tuyến cùng đỉnh xuất phát hay cùng đích thì không giao nhau: ED,EA; BC, BA; BC,DC; BA, EA;
  - Các tuyến song song thì không giao nhau (AB và BA, AC và CA,...)
- Xây dựng ma trận M các tuyến đường với M[i][j] = 1, nếu 2 tuyến không thể cùng đi một lúc

Tô màu	1	1	1	1	2	2	3	3	1	2	4	4	1
	AB	AC	AD	<u>BA</u>	BC	BD	DA	DB	<u>DC</u>	EA	EB	EC	<u>ED</u>
AB					1	1	1			1			
AC						1	1	1		1	1		
AD										1	1	1	
<u>BA</u>													
BC	1							1			1		
BD	1	1					1				1	1	
DA	1	1				1					1	1	
DB		1			1							1	
<u>DC</u>													
EA	1	1	1										
EB		1	1		1	1	1						
EC			1			1	1	1					
<u>ED</u>													
Bậc	4	5*	3	0	3	5**	5***	3	0	3	5****	4	
Hạ bậc	3	0	2	0					0				0
Hạ bậc					2	0				2			
Hạ bậc							0	2					
Hạ bậc											0	3	

Kết quả dùng 4 màu cho đèn giao thông:

- Màu 1: AB, AC, AD, BA, DC, ED
- Màu 2: BC, BD, EA
- Màu 3: DA, DB
- Màu 4: EB, EC.

Bài 5: (Thuật toán Robinson) (Mệnh đề đối ngẫu: P và ¬P)

1. CMR: ¬p ∨ q, ¬q ∨ r, ¬r ∨ s, ¬u ∨ ¬s → ¬p, ¬ u
2. Cho {p → q, q → r, r → s, p} Hỏi p ∧ s ?
3. Cho{a ∧ b → c, b ∧ c → d, a ∧ b}. Hỏi d ?

Giải a: CMR: ¬p ∨ q, ¬q ∨ r, ¬r ∨ s, ¬u ∨ ¬s → ¬p, ¬ u

B3: { ¬p ∨ q, ¬q ∨ r, ¬r ∨ s, ¬u ∨ ¬s , **p** , **u** }
B4 : Có tất cả 6 mệnh đề nhưng chưa có mệnh đề nào đối ngẫu nhau.
B5 : tuyển một cặp mệnh đề (chọn hai mệnh đề có biến đối ngẫu). Chọn 2 mệnh đề đầu : ¬p ∨ q , ¬q ∨ r   ¬p ∨ r
Danh sách mệnh đề thành : { ¬p ∨ r , ¬r ∨ s , ¬u ∨ ¬s , p , u } Chưa có mệnh đề đối ngẫu.

Tuyển tiếp hai cặp mệnh đề đầu tiên ¬p ∨ r , ¬r ∨ s   ¬p ∨ s
Danh sách mệnh đề thành { ¬p ∨ s , ¬u ∨ ¬s , p , u } Vẫn chưa có 2 mệnh đề đối ngẫu

Tiếp tục hai cặp mệnh đề đầu tiên ¬p ∨ s , ¬u ∨ ¬s   ¬p ∨¬u
Danh sách mệnh đề thành : {¬p ∨ ¬u , p , u } Vẫn chưa có hai mệnh đề đối ngẫu

Tiếp tục với hai cặp mệnh đề : ¬p ∨ ¬u , u   ¬p
Danh sách mệnh đề trở thành : { ¬p, p } Có hai mệnh đề đối ngẫu nên biểu thức ban đầu đã được chứng minh.

Giải b: Cho {p → q, q → r, r → s, p} Hỏi p ∧ s ?

Biến đổi: p → q = ¬p ∨ q
q → r = ¬q ∨ r
r → s = ¬r ∨ s

B1: Phát biểu có dạng chuẩn: ¬p ∨ q, ¬q ∨ r, ¬r ∨ s, p → p ∧ s
B2: Chuyển vế kết luận: { ¬p ∨ q, ¬q ∨ r, ¬r ∨ s, p ∨ p, **¬p ∨ ¬s** }
B3: Tuyển từng cặp mệnh đề, xét tính đối ngẫu:

- ¬p ∨ q , ¬q ∨ r , ¬r ∨ s , p ∨ p , ¬p ∨ ¬s
- ¬p ∨ r
- ¬p ∨ r , ¬r ∨ s , p ∨ p , ¬p ∨ ¬s
- ¬p ∨ s
- ¬p ∨ s , p ∨ p , ¬p ∨ ¬s
- s ∨ p
- s ∨ p , ¬p ∨ ¬s
- s ∨ ¬s   Được chứng minh.

Giải c: Cho {a ∧ b → c, b ∧ c → d, a ∧ b}. Hỏi d ?

Biến đổi: a ∧ b → c = ¬(a ∧ b) ∨ c = ¬a ∨ ¬b ∨ c
b ∧ c → d = ¬(b ∧ c) ∨ d = ¬b ∨ ¬c ∨ d

B1: Phát biểu có dạng chuẩn: ¬a ∨ ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, a ∧ b → d
B2: Chuyển vế kết luận: { ¬a ∨ ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, a ∧ b, **¬d** }
B3: Tuyển từng cặp mệnh đề, tính đối ngẫu:

- ¬a ∨ ¬b ∨ c , ¬b ∨ ¬c ∨ d , a ∧ b, ¬d
- ¬a ∨ ¬b ∨ d
- ¬a ∨ ¬b ∨ d, a ∧ b, ¬d
- ¬(a ∧ b) ∨ d , (a ∧ b), ¬d
- d, ¬d   Được chứng minh.

Thuật giải Robinson

B1: Phát biểu lại giả thiết và kết luận của vấn đề theo dạng chuẩn sau : GT_1, GT_2, ..., GT_n KL_1, KL_2, ..., KL_m
Trong đó các GT_i và KL_i là các mệnh đề được xây dựng từ các biến mệnh đề và 3 phép nối cơ bản : ∧ (dấu tuyển), ∨ (dấu hội) , ¬ (dấu bù)

B2 : Nếu GT_i có phép ∧, KL_i có phép ∨ thì thay thế bằng dấu ","

B3:(Khử dấu →) Biến đổi dòng chuẩn ở B1 về thành danh sách mệnh đề như sau:
{ GT_1, GT_2, ..., GT_n , $¬KL_1$, $¬KL_2$, ..., $¬KL_m$ }

B4 : Nếu trong danh sách mệnh đề ở bước 2 có 2 mệnh đề đối ngẫu nhau thì bài toán được chứng minh. Ngược lại thì chuyển sang B4. (a và ¬a gọi là hai mệnh đề đối ngẫu nhau)

B5 : Xây dựng một mệnh đề mới bằng cách tuyển một cặp mệnh đề trong danh sách mệnh đề ở bước 2. Nếu mệnh đề mới có các biến mệnh đề đối ngẫu nhau thì các biến đó được loại bỏ.
Ví dụ : p ∨ **¬q**   ∨   ¬r ∨ s ∨ **q**
Hai mệnh đề **q**, **¬q** là đối ngẫu nên sẽ được loại bỏ
p ∨ ¬r ∨ s

B6 : Thay thế hai mệnh đề vừa tuyển trong danh sách mệnh đề bằng mệnh đề mới.
Ví dụ : { p ∨ **¬q** , ¬r ∨ s ∨ **q** , w ∨ r , s ∨ q }
{p ∨ ¬r ∨ s , w ∨ r , s ∨ q}

B7 : Nếu không xây dựng được thêm một mệnh đề mới nào và trong danh sách mệnh đề không có 2 mệnh đề nào đối ngẫu nhau thì vấn đề không được chứng minh.

Bài 4: Chứng minh

1. Cho {p → q, q → r}. Kết luận: {p → r}
2. Cho {(a ∧ b) → c, (b ∧ c) → d, ¬d. CM: a → b

Giải a:
Ta có: p → q = ¬p ∨ q
q → r = ¬q ∨ r
p → r = ¬p ∨ r

B1: Dạng chuẩn: ¬p ∨ q, ¬q ∨ r → ¬p ∨ r
B3: ¬p ∨ q, ¬q ∨ r → ¬p, r
B4: Phân thành 2 dòng: (1) ¬p, ¬q ∨ r → ¬p, r (CM)
(2) q, ¬q ∨ r → ¬p, r

B2: Chuyển vế: (2) p, q, ¬q ∨ r → r
B4: Phân thành 2 dòng: (1') p, q, r → r (CM)
(2') p, q, ¬q → r
B2 : Chuyển vế (2') : p, q → r, q (CM)
KL : Tất cả các nhánh con đều được chứng minh Bài toán đã được chứng minh

----

Giải b: Ta có : (a ∧ b) → c = ¬(a ∧ b) ∨ c = ¬a ∨ ¬b ∨ c
(b ∧ c) → d = ¬(b ∧ c) ∨ d = ¬b ∨ ¬c ∨ d
a → b = ¬a ∨ b

B1 : Dạng chuẩn : ¬a ∨ ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, ¬d → ¬a ∨ b
B2: Chuyển vế: ¬a ∨ ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, → ¬a ∨ b, d
B3: ¬a ∨ ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, → ¬a , b, d
B4: Phân dòng:

- (1) ¬a , ¬b ∨ ¬c ∨ d, → ¬a , b, d (CM)
- (2) ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d, → ¬a , b, d

B2: Chuyển vế (2): a, ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c ∨ d → b, d
B4: Phân dòng:
(1') a, ¬b ∨ c, ¬b ∨ ¬c → b, d
(2') a, ¬b ∨ c, d, → b, d (CM)
B2: (1') a, ¬b ∨ c, ¬(b ∧ c) → b, d
Chuyển vế: a, ¬b ∨ c → b, d, b ∧ c
B4: Phân dòng:
(1") a, ¬b → b, d, b ∧ c
(2") a, c → b, d, b ∧ c
B2: Chuyển vế (1") a → (b),b, d, b ∧ c
(2") a, c → b, d, b ∧ c
B4: Phân dòng:
(1"') a → b, d (không CM)
(2"') a → b, d, c

Kết luận: Bài toán không được chứng minh.

Thuật giải Vương Hạo

B1: Phát biểu lại giả thiết và kết luận của vấn đề theo dạng chuẩn sau : GT_1, GT_2, ..., GT_n KL_1, KL_2, ..., KL_m
Trong đó các GT_i và KL_i là các mệnh đề được xây dựng từ các biến mệnh đề và 3 phép nối cơ bản : ∧ (dấu tuyển), ∨ (dấu hội) , ¬ (dấu bù)

Phủ định của phủ định	¬ (¬ p) ≡ p
	(p ∨ q) ≡ (¬ p → q)
Tương phản	(p → q) ≡ (¬ p → ¬ q)
De Morgan	¬ (p ∨ q) ≡ (¬ p ∧ ¬ q)
	¬ (p ∧ q) ≡ (¬ p ∨ ¬ q)
Giao hoán	(p ∧ q) ≡ (q ∧ p)
	(p ∨ q) ≡ (q ∨ p)
Kết hợp	(p ∧ q) ∧ r ≡ (p ∧ (q ∧ r))
	(p ∨ q) ∨ r ≡ (p ∨ (q ∨ r))
Phân phối	p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
	p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

B2 (Khử dấu ¬) Chuyển vế các GT_i và KL_i có dạng phủ định.
Ví dụ : p ∨ q, ¬(r ∧ s), ¬g, p ∨ r → s, ¬p
p ∨ q, p ∨ r, p → (r ∧ s), g, s

B3 (Khử dấu ∧, ∨): Nếu GT_i có phép ∧, KL_i có phép ∨ thì thay thế bằng dấu ","
Ví dụ : p ∧ q, r ∧ (¬p ∨ s) → ¬q, ¬s
p, q, r, ¬p ∨ s → ¬q, ¬s

B4 : Nếu GT_i có phép ∨ hay ở KL_i có phép ∧ thì tách thành hai dòng con.

Ví dụ : p, ¬p ∨ q → q p, ¬p →q
p, q →q

B5 : Một dòng được chứng minh nếu tồn tại chung một mệnh đề ở ở cả hai phía.
Ví dụ : p, q → q được chứng minh
p, ¬p → q p → p, q

B6 :
a) Nếu một dòng không còn phép nối ∨ hoặc ∧ ở cả hai vế và ở 2 vế không có chung một biến mệnh đề thì dòng đó không được chứng minh.
b) Một vấn đề được chứng minh nếu tất cả dòng dẫn xuất từ dạng chuẩn ban đầu đều được chứng minh.

Bài 1: Tính chi phí hành trình tốt nhất (tiết kiệm nhất): (Thuật toán GTS_2- Greedy)

	A	B	C	D	E	F
A	∞	20	42	30	6	25
B	12	∞	16	7	33	19
C	23	5	∞	28	14	9
D	12	9	24	∞	31	15
E	14	7	21	15	∞	45
F	36	15	16	5	205	∞

- Với số thành phố xuất phát p = 4:
  - イ. tp 1 xuất phát từ A,
  - ロ. tp2 từ B,
  - ハ. tp 4 từ D
  - ニ. tp 6 từ F
- tương ứng với 4 hàng v_1=**A**, v_2=**B**, v_3=**D**, v_4=**F**.

GIẢI:

- Bước 1: cost = ∞; // Tổng trọng số của cung (chi phí đi đường)
-
  - Best = {}; // lộ trình tiết kiệm nhất
  - k = 0; // duyệt lần lượt các điểm xuất phát
- Bước 2: Do k=0 <p → Bước 3
  - Bước 3: k = 1
    - Gọi GTS_1(1)
      - T_1 = A → E → B → D → F → C → A (lộ trình v_1: bắt đầu từ tp 1)
      - C_1 = 6 + 7 + 7 + 15+ 16+ 23 = 74 (chi phí cho lộ trình v_1)
  - Bước 4: do C_1< cost cost=74; best=T_1;
- Bước 2: Do k = 1 <p → Bước 3
  - Bước 3: k = 2
    - Gọi GTS_1(2)
      - T_2 = B → D → A → E → C → F → B (lộ trình v_2: bắt đầu từ tp 2)
      - C_2 = 7 + 12 + 6 + 21 + 9 + 15 = 70 (chi phí cho lộ trình v_2)
  - Bước 4: do C_2 < cost (C_1=74) cost =70; best=T_2
- Bước 2: Do k=2 <p → Bước 3
  - Bước 3: k=3
    - Gọi GTS_1(4)
      - T_3 = D → B → A → E → C → F → D (lộ trình v_3: bắt đầu từ tp 4)
      - C_3 = 9 + 12 + 6 + 21 + 9 + 15 = 72 (chi phí cho lộ trình v_3)
  - Bước 4: do C_3 > cost (C_2=70) cost=70; best=T_2;
- Bước 2: Do k=3 <p → Bước 3
  - Bước 3: k=4
    - Gọi GTS_1(6)
      - T_4 = F → D → B → A → E → C → F (lộ trình v_4: bắt đầu từ tp 6)
      - C_4 = 5 + 9 + 12 + 6 + 21 + 9 = 62 (chi phí cho lộ trình v_4)
  - Bước 4: do C_4 < cost (C_2=70) cost=62; best=T_4;
- Bước 2: do k= 4 = p → dừng
-
- Kết luận: Hành trình tốt nhất T_4: F → D → B → A → E → C → F với chi phí là 62.

Phát biểu GTS_2

- Bước 1: cost=∞; (giá trị rất lớn)
  - Best={};
  - k=0;
- Bước 2: Nếu k<p thì qua Bước 3, Ngược lại thì dừng;
- Bước 3: Tăng k=k+1;
  - Gọi GTS_1 với thành phố xuất phát là v_k
  - Tính T_k
  - Chi phí C_k
- Bước 4: Cập nhật lại hành trình với chi phí thấp nhất;
  - Nếu C_k< C thì cost=C_k; Best=T_k
- Bước 5: Quay lại Bước 2
  -

BÀI 2: Sắp xếp hội thảo (Thuật toán tô màu)

Giả sử có 9 cuộc mitting a,b,c,d,e,f,g,h,i được tổ chức. Mỗi cuộc mitting được tổ chức trong một buổi. Các cuộc mitting sau không được xảy ra đồng thời: ae, bc, cd, ed, abd, ahi, bhi, dfi, dhi, fgh. Hãy sử dụng thuật toán tô màu tối ưu để bố trí các cuộc mitting vào các buổi sao cho số buổi diễn ra là ít nhất.

Giải:
Xây dựng ma trận M các cuộc mitting diễn ra với:
M[i][j] = 1 , nếu các buổi mitting không được diễn ra đồng thời;
Xác định bậc của các buổi mitting, mitting có bậc cao nhất là mitting đã ghép nhiều buổi nhất
Ưu tiên chọn cuộc mitting có số bậc cao nhất. và hạ bậc các cuộc liên quan..Ta có
Chọn d=7, hạ bậc lần 1: a(4) , b(4), c(1), **d(0)**, e(1), f(3), **g(2)**, h(5), i(4) → tô màu 1: d,g
Chọn h=5, hạ bậc lần 2: a(3) , b(3), **c(1)**, d(0), **e(1)**, f(2), g(2), **h(0)**, i(3) → tô màu 2: h, c, e
Chọn a=3, hạ bậc lần 3: **a(0)** , b(2), c(1), d(0), e(1), **f(2)**, g(2), h(0), i(2) → tô màu 3: a, f
Chọn b=2, hạ bậc lần 4: a(0) , **b(0)**, c(1), d(0), e(1), f(2),g(2), h(0), i(1) → tô màu 4: b
Chọn i=1, Hạ bậc lần 5: a(0) , b(0), c(1), d(0), e(1), f(2),g(2), h(0), **i(0)** → tô màu 5: i

Kết quả tổ chức các buổi mitting (số màu bằng số buổi)
Buổi 1: d, g; Buổi 2: c, e, h; Buổi 3: a, f; Buổi 4: b và Buổi 5: i

Tô màu	3	4	2	1	2	3	1	2	5
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a		1		1	1			1	1
b	1		1	1				1	1
c		1		1					
d	1	1	1		1	1		1	1
e	1			1					
f				1			1	1	1
g						1		1	
h	1	1		1		1	1		1
i	1	1		1		1		1	
Bậc	**5**	**5**	**2**	**7**	**2**	**4**	**2**	**6**	**5**
Hạ bậc (d)	4	4	1	0	1	3	2	5	4
Hạ bậc (h)	3	3	1		1	2	1	0	3
Hạ bậc (a)	0	2	1		0	2	1		2
Hạ bậc (b)		0	0			2	1		1
Hạ bậc (i)									