TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ

BÀI TẬP TUẦN 1

Lớp: **19TN**

Họ tên: **Nguyễn Đại Nghĩa**

MSSV: **19120735**

Yêu cầu:

Cho các hệ phương trình tuyến tính

(I) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_1 - 8x_2 = -1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ -3x_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

Bài 1: Giải các hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss và thế ngược

Bài 2: Giải các hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss - Jordan

Bài 3: Viết mã giả cho giải thuật giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss – Jordan

Bài làm:

Bài 1:

a/ Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_1 - 8x_2 = -1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình (I) ta được ma trận mở rộng $\tilde{A} = [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & 0 & -1 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right]$

Sử dụng phép khử Gauss

$$\tilde{A} \xrightarrow[\substack{d_2+3d_1 \\ d_3-4d_1}]{d_1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3+3d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3/7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình (I) tương đương với $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Giải lần lượt các phương trình từ dưới lên bằng cách thế ngược ta được $x_3 = 1,\ x_2 = 2,\ x_1 = -5$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (-5, 2, 1)$

b/ Giải hệ phương trình (II) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình (II) có ma trận hệ số A có dạng ma trận tam giác trên.

Giải lần lượt các phương trình từ dưới lên bằng cách thế ngược ta được $x_3 = 1,\ x_2 = 2,\ x_1 = -6$

Vậy hệ (II) có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (-6, 2, 1)$

c/ Giải hệ phương trình (III) $\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ -3x_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình (III) có ma trận hệ số A có dạng ma trận tam giác dưới.

Giải lần lượt các phương trình từ trên xuống bằng cách thế ngược ta được $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1$

Vậy hệ (III) có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (2, 5, 1)$

Bài 2:

a/ Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_1 - 8x_2 = -1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình (I) ta được ma trận mở rộng $\tilde{A} = \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & 0 & -1 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right]$

Sử dụng phép khử Gauss – Jordan

$$\tilde{A}\xrightarrow[\substack{d_2+3d_1\\d_3-4d_1}]{d_1/2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&2\\0&1&3&5\\0&-3&-2&-8\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_1-3d_2\\d_3+3d_2}]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-8&-13\\0&1&3&5\\0&0&7&7\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_1+8d_3\\d_2-3d_3}]{d_3/7}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

Suy ra hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x_1,x_2,x_3)=(-5,2,1)$

b/ Giải hệ phương trình (II) $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3 &=1\\ \quad\;\; x_2+3x_3 &=5\\ \qquad\quad\;\; x_3 &=1\end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình (II) ta được ma trận mở rộng $\tilde{A}=[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&1&3&5\\0&0&1&1\end{array}\right]$

Sử dụng phép khử Gauss – Jordan

$$\tilde{A}\xrightarrow[d_1-3d_2]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-8&-14\\0&1&3&5\\0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{d_1+8d_3\\d_2-3d_3}]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-6\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

Suy ra hệ (II) có nghiệm duy nhất $(x_1,x_2,x_3)=(-6,2,1)$

c/ Giải hệ phương trình (III) $\begin{cases}2x_1 &=4\\ -3x_1+x_2 &=-1\\ 4x_1-3x_2+7x_3 &=0\end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình (III) ta được ma trận mở rộng $\tilde{A}=[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&4\\-3&1&0&-1\\4&-3&7&0\end{array}\right]$

Sử dụng phép khử Gauss – Jordan

$$\tilde{A}\xrightarrow[\substack{d_2+3d_1\\d_3-4d_1}]{d_1/2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&-3&7&-8\end{array}\right]\xrightarrow[d_3+3d_2]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&7&7\end{array}\right]\xrightarrow{d_3/7}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

Suy ra hệ (III) có nghiệm duy nhất $(x_1,x_2,x_3)=(2,5,1)$

Bài 3:

Xét hệ phương trình tuyến tính n ẩn m phương trình sau khi được ma trận hóa có dạng $A \cdot X = B$ trong đó kích thước các ma trận là A(m x n), X(n x 1), B(m x 1)

Giải thuật tìm nghiệm của hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss – Jordan như sau

Bước 0: Lập ma trận mở rộng (A|B)

Bước 1: Khởi tạo i := 1, j := 1

Bước 2: Nếu i > m hoặc j > n thì:

- Loại bỏ các dòng có tất cả phần tử bằng 0
- Sang Bước 5

Bước 3:

Nếu a_{ij} != 0, thực hiện các phép biến đổi sau:

- Chia dòng i cho a_{ij} (đưa phần tử cở sở về 1)
- dòng k = dòng k - a_{kj} * dòng i với mọi k != i (đưa phần tử a_{kj} về 0)
- i := i + 1, j := j + 1
- Quay về Bước 2

Nếu a_{ij} == 0 thì sang Bước 4

Bước 4:

Nếu tồn tại k > i thỏa a_{kj} != 0:

- Thực hiện phép hoán đổi dòng k <-> dòng i (chọn k bất kỳ thỏa điều kiện)
- Quay về Bước 3

Nếu a_{kj} == 0 với mọi k > i:

- j := j + 1
- Quay về Bước 2

Bước 5:

Nếu tồn tại dòng [0 0 0 ... 0 | b] với b != 0 trong ma trận mở rộng thu được thì kết luận hệ vô nghiệm

Ngược lại nếu phần ma trận bên trái là ma trận đơn vị I(n) thì kết luận hệ có nghiệm duy nhất tương ứng với phần ma trận (n x 1) bên phải

Ngược lại kết luận hệ có vô số nghiệm:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở nhận giá trị tự do
- Ẩn tương ứng với các cột có phần tử cơ sở sẽ được tính theo các ẩn tự do, theo thứ tự từ dưới lên