# TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ
# BÀI TẬP TUẦN 2

Lớp: **19TN**

Họ tên: **Nguyễn Đại Nghĩa**

MSSV: **19120735**

**Yêu cầu:**

**Bài 1:** Chứng minh định lý của tiến trình Gram – Schmidt:

a/ Gọi $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ là một tập trực giao trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng $\forall v \in \mathbb{R}^n$ đặt

$$u_{k+1} = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - ... - \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k \qquad (*)$$

Thì $\langle u_{k+1}, u_i \rangle = 0 \quad \forall\ 1 \le i \le k$

b/ (Em có sửa lại đề) Với $u_{k+1}$ ở (*) thỏa $u_{k+1} = \vec{0}$ thì $S^N = \{u_1, u_2, ... u_k, v\}$ phụ thuộc tuyến tính

**Bài 2:** Trực giao hóa các tập hợp

a/ $S_1 = \{u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (1,1,0)\}$

b/ $S_2 = \{u_1 = (-1,1,-1,1),\ u_2 = (-1,3,-1,3),\ u_3 = (0,2,0,2)\}$

c/ $S_3 = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (0,1,1),\ u_3 = (0,0,1)\}$

**Bài 3:** Viết mã giả cho tiến trình Gram - Schmidt

**Bài làm:**

**Bài 1:**

a/ Ta có $u_{k+1} = v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - ... - \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k$

Xét tích vô hướng $\langle u_{k+1},\ u_i \rangle$. Không mất tính tổng quát, chọn $i = 1$ ta có

$$\langle u_{k+1}, u_1 \rangle = \langle v, u_1 \rangle - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \langle u_1, u_1 \rangle - \sum_{j=2}^{k} \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_1, u_j \rangle \qquad (1)$$

Mặt khác $\langle u_1, u_1\rangle = \|u_1\|^2$ và $\langle u_i, u_j\rangle = 0\ \forall\ j \le k,\ j \ne i$ (do S là tập trực giao) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\langle u_{k+1}, u_1\rangle = 0$

Chứng minh tương tự cho mọi i từ 1 tới k ta có điều phải chứng minh

b/ Dễ thấy nếu $u_{k+1} = \vec{0}$ thì từ (*) suy ra $v = \dfrac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \dfrac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \ldots + \dfrac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$

Suy ra $S^N = \{u_1, u_2, \ldots u_k, v\}$ phụ thuộc tuyến tính (đpcm)

**Bài 2:**

**a/** $S_1 = \{u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (1,1,0)\}$

Gọi $V_1 = \{v_1, v_2\}$ là một cơ sở trực giao của $S_1$. Thực hiện tiến trình Gram – Schmidt

Bước 1: $v_1 = u_1 = (1,0,1)$

Bước 2: $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 = (1,1,0) - \dfrac{1}{2}(1,0,1) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{-1}{2}\right)$

Vậy $V_1 = \left\{v_1 = (1,0,1), v_2 = \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{-1}{2}\right)\right\}$ là một cơ sở trực giao của $S_1$

**b/** $S_2 = \{u_1 = (-1,1,-1,1),\ u_2 = (-1,3,-1,3),\ u_3 = (0,2,0,2)\}$

Gọi $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở trực giao của $S_2$. Thực hiện tiến trình Gram – Schmidt

Bước 1: $v_1 = u_1 = (-1,1,-1,1)$

Bước 2: $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 = (-1,3,-1,3) - \dfrac{8}{4}(-1,1,-1,1) = (1,1,1,1)$

Bước 3: $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 = (0,2,0,2) - \dfrac{4}{4}(-1,1,-1,1) - \dfrac{4}{4}(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$

Vì $v_3 = (0,0,0,0)$ nên $S_2$ không là một cơ sở ($S_2$ phụ thuộc tuyến tính)

**c/** $S_3 = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (0,1,1),\ u_3 = (0,0,1)\}$

Gọi $V_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở trực giao của $S_3$. Thực hiện tiến trình Gram – Schmidt

Bước 1: $v_1 = u_1 = (1,1,1)$

Bước 2: $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0,1,1) - \dfrac{2}{3}(1,1,1) = \left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

Bước 3: $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (0,0,1) - \dfrac{1}{3}(1,1,1) - \dfrac{1/3}{2/3}\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \left(0, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Vậy $V_3 = \left\{v_1 = (1,1,1), v_2 = \left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right), v_3 = \left(0, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$ là một cơ sở trực giao của $S_3$

**Bài 3:** Mã giả của tiến trình Gram – Schmidt

Xét tập $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$

$V = \varnothing$

for i = 1 to k:

  $v_i = u_i$

  for j = 1 to i – 1:

$$v_i := v_i - \frac{\langle u_i, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} v_j$$

  if $v_i == \vec{0}$ :

    Kết luận tập S không là tập cơ sở, dừng chương trình

  else:

$$v_i := \frac{1}{\|v_i\|} v_i$$

    Thêm $v_i$ vào $V$

Kết luận $V = \{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ là cơ sở trực chuẩn của S