2. BÀI TẬP VỀ PHỤ THUỘC HÀM

MỤC TIÊU CỦA BÀI NÀY GIÚP NGƯỜI HỌC

- Hiểu được tầm quan trọng của lý thuyết của phụ thuộc hàm
- Vận dụng các thuật toán tính bao đóng, định nghĩa suy diễn theo tiên đề, theo quan hệ, tìm phủ tối thiểu, bài toán thành viên để giải quyết các bài tập cụ thể.
- Áp dụng các thuật toán để giải quyết các bài tập liên quan: Tìm bao đóng, chứng minh một phụ thuộc hàm có dư thừa trong tập các phụ thuộc hàm không,...

A/ NHẮC LẠI LÝ THUYẾT

I. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa phụ thuộc hàm

Định nghĩa: cho U là một tập thuộc tính, một phụ thuộc hàm trên U là một phát biểu có dạng $X \rightarrow Y$, trong đó $X, Y \subseteq U$.
Cho R là quan hệ trên tập thuộc tính U, nói rằng quan hệ R thoả mãn phụ thuộc hàm $X \rightarrow Y$, nếu với 2 bộ bất kì trong R mà chúng giống nhau trên tập thuộc tính X thì chúng cũng giống nhau trên tập thuộc tính Y, nghĩa là $\forall u,v \in R$, nếu u.X=v.X thì u.Y=v.Y.

Nếu f= $X \rightarrow Y$ là một phụ thuộc hàm trên U thì ta nói tập thuộc tính Y phụ thuộc hàm vào tập thuộc tính X (Y functional dependent on X) hoặc tập thuộc tính X xác định hàm tập thuộc tính Y (X functional determines Y).

Cho f là một phụ thuộc hàm trên U, nếu quan hệ R thoả mãn phụ thuộc hàm f thì ta ký hiệu R(f), nếu R không thoả mãn phụ thuộc hàm thì ta ký hiệu $\urcorner$R(f).

Cho F là một tập các phụ thuộc hàm trên U, nói rằng quan hệ R thoả mãn tập phụ thuộc hàm F, ký hiệu là R(F) nếu và chỉ nếu với $\forall f \in F$ thì R(f) hay nói một cách tương đương quan hệ R thoả mãn tập phụ thuộc hàm F nếu như nó thoả mãn từng phụ thuộc hàm trong tập đó.

Định nghĩa: Lược đồ quan hệ là một cặp α=(U, F) trong đó U là tập hữu hạn các thuộc tính còn F là tập các phụ thuộc hàm trên U.

2. Một số tính chất của phụ thuộc hàm:

1) *Tính chất phản xạ:* $\forall X, Y \subseteq U, Y \subseteq X$, *thì* $X \rightarrow Y$
2) *Tính chất bắc cầu:* $\forall X, Y, Z \subseteq U$, *nếu có* $X \rightarrow Y$ *và* $Y \rightarrow Z$ *thì* $X \rightarrow Z$
3) *Tính chất gia tăng:* $\forall X, Y \subseteq U$, *nếu* $X \rightarrow Y$ *và* $\forall Z \subseteq U$ *thì* $XZ \rightarrow YZ$
4) *Tính chất tựa bắc cầu:* $\forall X, Y, Z, W \subseteq U$, *nếu* $X \rightarrow Y$, $YZ \rightarrow W$ *thì* $XZ \rightarrow W$
5) *Tính chất phản xạ chặt:* $\forall X \subseteq U$ *thì* $X \rightarrow X$
6) *Luật tách:* $\forall X, Y, Z \subseteq U$, *nếu có* $X \rightarrow YZ$ *thì có:*

$$\begin{cases} X \rightarrow Y \\ X \rightarrow Z \end{cases}$$

7) Luật hợp: $\forall X, Y, Z \subseteq U$, nếu có $X \rightarrow Y$ và $X \rightarrow Z$ thì có $X \rightarrow YZ$
8) Tính chất cộng tính: $\forall X, Y, Z, W \subseteq U$, nếu $X \rightarrow Y$, $Z \rightarrow W$ thì $XZ \rightarrow YW$

3. Hệ tiên đề Amstrong

F1 - Luật phản xạ $\forall X,Y \subseteq U$, nếu $X \subseteq Y$ thì $Y \rightarrow X$
F2 - Bắc cầu $\forall X, Y, Z \subseteq U$ nếu có

$$\left\{\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \end{array}\right. \quad \text{thì } X \rightarrow Z$$

F3 - Luật gia tăng $\forall X, Y, Z \subseteq U$, nếu có $X \rightarrow Y$ thì $XZ \rightarrow YZ$

4. Định nghĩa suy dẫn theo hệ tiên đề

Cho F là tập phụ thuộc hàm trên U, f là một phụ thuộc hàm trên U (f có thể không thuộc F), nói rằng f suy dẫn được từ F theo hệ tiên đề Amstrong và kí hiệu là $F \vdash f$ nếu như f có thể nhận được từ tập F sau một số hữu hạn lần áp dụng các luật của hệ tiên đề Amstrong.

Nhận xét:

Với $\forall f \in F$ thì $F \vdash f$

Kí hiệu F^+ là tập tất cả các phụ thuộc hàm được suy dẫn từ tập F theo hệ tiên đề Amstrong.

Ta thấy $F \subseteq F^+$

F^+ được gọi là bao đóng của tập phụ thuộc hàm F, nếu $F^+ = F$ thì ta nói F là một tập đầy đủ các phụ thuộc hàm, đôi khi ta còn nói F là tập đóng.

5. Định nghĩa suy dẫn theo quan hệ

Cho F là một tập các phụ thuộc hàm trên tập thuộc tính U, f là một phụ thuộc hàm trên U, (f có thể không thuộc F), nói rằng f được suy dẫn từ tập F theo quan hệ và ký hiệu $F \models f$, nếu và chỉ nếu với mọi quan hệ R trên U, nếu R thoả mãn F thì R cũng thoả mãn f.

Ký hiệu F* là tập tất cả các phụ thuộc hàm được suy dẫn từ tập F theo quan hệ.

$F^* = \{f: X \rightarrow Y \mid X,Y \subseteq U, F \models f\}$

Tính chất của F:*

Cho F và G là hai tập phụ hàm trên tập thuộc tính U khi đó ta có:

1. Tính phản xạ: Với $\forall f \in F$ thì $F \models f$ từ đây ta suy ra $F \subseteq F^*$.
2. Tính đơn điệu: Nếu $F \subseteq G$ thì $F^* \subseteq G^*$.
3. Tính luỹ đẳng: Với mọi tập phụ thuộc hàm F thì ta luôn có $(F^*)^* = F^*$.

6. Bao đóng của tập thuộc tính

Cho tập phụ thuộc hàm F trên U, $X \subseteq U$, bao đóng của tập thuộc tính X, kí hiệu là X^+ được xác định như sau:

$$X^+ = \{ A \mid A \in U \text{ và } X \rightarrow A \in F^+ \}$$

**** Thuật toán tìm bao đóng của một tập thuộc tính***

Input $\alpha = (U,F)$, $X \subseteq U$
Output $X^+ = ?$

Thuật toán

Ta xác định dãy $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ theo quy nạp như sau
1. Đặt $X^{(0)} = X$
2. Giả sử rằng đã xây dựng được đến bước thứ i tức là đã biết $X^{(i)}$ $(i>=0)$
3. Xây dựng tiếp bước i+1 như sau

$X^{(i+1)} = X^{(i)} \cup Z^{(i)}$ *trong đó*

$Z^{(i)} = \cup Y_j$ *với điều kiện :*

$$\begin{cases} X_j \rightarrow Y_j \in F & (1) \\ X_j \subseteq X^i & (2) \\ Y_J \not\subset X^{(i)} & (3) \end{cases}$$

Vì vậy $Z^{(i)}$ chính là hợp của các vế phải của các phụ thuộc hàm trong tập F mà có vế trái là tập con của tập trước mà có vế phải chưa được thêm vào.
điều kiện (3) chỉ có tác dụng tăng tốc độ tính toán

Nhận xét:

$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)},...$ là một dãy không giảm và bị chặn trên bởi U, do đó tồn tại chỉ số i nào đó để $X^{(i)} = X^{(i+1)}$ (*), gọi i là chỉ số nhỏ nhất khi đó $X^+ = X^{(i)}$ hay khi $X^{(i)} = U$ thì $X^+ = X^{(i)} = U$.

7. Phụ thuộc hàm dư thừa

Cho F là một tập các phụ thuộc hàm trên U, f là một phụ thuộc hàm của F tức $f \in F$, f được gọi là dư thừa trong F nếu như $(F\text{-}f)^+ = F^+$

Hay có thể nói tương đương f được gọi là dư thừa trong F nến nó suy dẫn được từ tập F sau khi đã bỏ đi phụ thuộc hàm f.

Thuật toán thành viên

Input

- Tập phụ thuộc hàm F
- $f \in F$

Output

- True nếu như f là dư thừa trong F
- False nếu như f là không dư thừa trong F

Method

1) tạm xoá f khỏi F, gọi G là tập thu được

G=F-f, nếu $G \neq \phi$ thì chuyển qua bước 2, còn không thì kết thúc thuật toán và kết luận f là không dư thừa trong F

2) Giả sử $f = X \rightarrow Y$ nếu $G \vdash f$ tức $Y \subseteq X_G^+$ thì f là dư thừa trong F còn ngược lại f là không dư thừa.

Như vậy, ta chỉ cần tính X^+ và so sánh với tập con Y ta có ngay câu trả lời $X \rightarrow Y$ có thuộc vào F^+ hay không.

8. Phụ thuộc hàm dư thừa

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1:

Cho lược đồ quan hệ α = (U,F) với

U = ABCDEGH

F={ BC→ ADE, AC→ BDG, BE→ ABC, CD→ BDH, BCH→ ACG}

Hãy tính X^+ trong các trường hợp

a) X=BD
b) X=ABE
c) X=CDG

Giải
a) đặt X(0)=BD (=X)
$X^{(1)} = X^{(0)} \cup Z^{(0)}$ =BD $\cup$ Φ=BD
Suy ra X(0)= X(1) vậy X^+ =X=BD
b) đặt X(0)=ABE (=X)
$X^{(1)} = X^{(0)} \cup Z^{(0)}$ =ABE $\cup$ABC=ABCE
$X^{(2)} = X^{(1)} \cup Z^{(1)}$ =ABCE $\cup$ (ADE $\cup$ BDG)=ABCDEG
$X^{(3)} = X^{(2)} \cup Z^{(2)}$ = ABCDEG $\cup$ BDH=ABCDEGH=U
Vậy X^+=U

Ví dụ 2 : Áp dụng bài toán thành viên
Giả sử có tập F={X→YW, XW→Z, Z→Y, XY→Z}
Hãy cho biết XY→Z có dư thừa trong F hay không?
Giải
1) Tạm thời xoá XY→Z ra khỏi F
G:=F-{XY→Z}={X→YW, XW→Z, Z→Y}
2) Tính $(XY)^+_G$ (bao đóng của XY trong tập G)
ta có $(XY)^+_G$= XYWZ thế nên Z$\subseteq(XY)^+_G$ hay G├ (XY→Z) thế nên phụ thuộc hàm XY→Z là dư thừa trong F.

III. MỘT SỐ LƯU Ý

- Tiên đề Amstrong. Áp dụng hệ tiên đề amstrong trong các bài toán chứng minh.
- Phụ thuộc hàm theo quan hệ và theo tiên đề, bao đóng của tập các thuộc tính và của tập các phụ thuộc hàm.

<u>B/ BÀI TẬP MẪU</u>

Bài số 1:
Cho tập thuộc tính U=ABCDEGH
Cho tập phụ thuộc hàm F={ AB→CD, ACE→BG, BCD→ AE, CH→ DG}
f=BCDH →AG, hỏi rằng F├ f hay không (f $\in$ F^+) ?

Hướng dẫn:
Áp dụng hệ tiên đề Amstrong để chứng minh, đầu tiên cần làm xuất hiện vế trái của phụ thuộc hàm cần chứng minh sau đó lần lượt áp dụng 3 tiên đề để suy ra ĐPCM.

Giải
BCDH→ BCD (1) (tính chất phản xạ)
BCD→AE (gt) (2)
BCD→ACE (gia tăng) (3)
ACE→ A (phản xạ) (4)
Suy ra BCDH→ A theo tính chất bắc cầu(5)
ACE→ BG (6) giả thiết
BG→G (7) phản xạ
Suy ra ACE→ G(8) bắc cầu
Suy ra BCDH→ G (9) bắc cầu

Từ (5) và (9) theo luật cộng tính (luật ghép)
Suy ra BCDH→ AG $\in F^+$ (đpcm)

Bài số 2:

Cho α=(U,F); U=ABCDEGH
F={ AB→BCP, E→BGH, ACD →BG, D→AEH}
Hãy tính X^+ trong các trường hợp
a) X=AC
b) X=CD
c) X=ABG

Hướng dẫn:
Áp dụng lần lượt các bước của thuật toán tính bao đóng.

Giải

a) Vì X=AC
$X^{(0)}$= X=AC
$X^{(1)} = X^{(0)} \cup \phi = X^{(0)}$ nên X^+=AC
b) Vì X=CD
$X^{(0)}$=X=CD
$X^{(1)} = X^{(0)} \cup$ AEH =ACDEH
$X^{(2)}= X^{(1)} \cup$(BGH $\cup$ BG) = ACDEH $\cup$(BGH $\cup$ BG) = ABCDEGH =U
Do $X^{(2)}$=U nên X^+=U
c) Vì X=ABG
$X^{(0)}$=X=ABG
$X^{(1)}$= ABG $\cup$BCD=ABCDG
$X^{(2)}$= ABCDG $\cup$ (BCD $\cup$BG $\cup$ AEH)= ABCDEGH =U
Do $X^{(2)}$=U nên $X^{(3)}= X^{(2)}$ hay $X^{(3)}$=U

C/ BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1:
Cho lược đồ quan hệ α=(u, F) với
U=ABCDEGH và tập phụ thộc hàm
F={AB → C, B→ D, CD→ E, CE→ GH, G→A}
f=AB→E, chứng minh rằng với mọi quan hệ R trên U nếu R thoả F thì R cũng thoả f.

Bài tập 2:
Cho lược đồ quan hệ (=(U, F) với
U=ABCDEGHIJ và tập phụ thộc hàm
F={AB→ E, AG→J, BE→I, E→G, GI→ H}
f=AB→GH, chứng minh rằng f suy dẫn được từ F

Bài tập 3
Cho lược đồ quan hệ (=(u, F) với
U=ABCDEGH và tập phụ thộc hàm
F={AB→C, B→ D, CD→E, CE→GH, G→A}

Hãy chứng minh

a. AB→E
b. BG→C
c. AB→G

Bài tập 4

Cho lược đồ quan hệ (=(u, F) và tập phụ thộc hàm
F={AB→E, AG→I, BE→I, E→G, GI→H}
Chứng minh rằng AB→GH suy dẫn được từ F

Bài tập 5

Cho lược đồ quan hệ (=(u, F) và tập phụ thộc hàm
F={AB→C, B→D, CD→E, CE→GH, G→A}
Chứng minh rằng AB→E v à AB→G suy dẫn được từ F

Bài tập 6

Tìm phủ không dư của tập phụ thuộc hàm
F={A→C, AB→C, C→DI, EC→AB, EI→C}

Bài tập 7

Cho F={A→B, C→D} với C⊂B, hãy chứng minh A→D suy dẫn được từ F

Bài tập 8

Một phụ thuộc hàm X→Y được gọi là dư thừa trong tập phụ thuộc hàm F nếu như $F^+ = (F-\{X \to Y\})^+$
cho F={X→YW, XW→Z, Z→Y, XY→Z}
hãy cho biết phụ thuộc hàm XY→Z có dư thừa trong F hay không

Bài tập 9

Tìm phủ không dư của
F={ X→YZ, ZW→P, P→Z, W→XPQ, XYQ→YW, WQ→YZ}

Bài tập 10

Cho lược đồ quan hệ R(ABCD) v à F={A→B, BC→D}
hãy cho biết các phụ thộc hàm nào dưới đây có thể suy dẫn được từ F

1. AC→D
2. B→D
3. AD→B

Bài tập 11

F={XY→W, Y→Z, WZ→P, WP→QR, Q→X}
chứng minh rằng XY→P suy dẫn được từ F

Bài tập 12

Loại bỏ các phụ thuộc hàm dư thừa trong tập
F={X→Y, Y→X, Y→Z. Z→Y, X→Z, Z→X}

Bài tập 13

cho F={XY→W, Y→Z, WZ→P, WP→ QR, Q→X}
chứng minh rằng XY→Q suy dẫn được từ F

Bài tập 14
Cho F={A→BC, E→C, D→AEF, AF→B,AF→D}
phụ thuộc hàm AF(B có dư thừa trong F không

Bài tập 15
Nếu X→Y ∈F , A∈X, thuộc tính A được gọi là dư thừa nếu
{ X- A } → Y ∈F^+
hãy loại bỏ các thuộc tính dư thừa trong các tập sau:
a. F={X→YW, XW→Z, Z→Y, XY→Z }
b. F={A→BC, E→C, D→AEF, ABF→BD }

Bài tập 16
Sử dụng các luật của hệ tiên đề Amstrong chứng minh các tính chất sau:
a. Tính tựa bắc cầu: Nếu X→Y và YZ→W thì XZ→W
b. Tính phản xạ chặt X→X
c. Tính cộng tính : Nếu X→Y và Z→W thì XZ→YW
d. Tính chất hợp : Nếu X→Y và X→Z th ì X→YZ
e. Tính tách : Nếu X→YZ thì X→Y v à X→Z
f. Tính tích luỹ: Nếu X→YZ, Z→VW thì X→YVW

Bài tập 17
Cho lược đồ quan hệ α=(U, F) với U=ABCDEG và
F={A→C, BC→D, D→E, E→A}.
Hãy tính
a) $(AB)^+$
b) $((DE)^+A)^+$

Bài tập 18
Cho lược đồ quan hệ α=(U, F) với U=ABCDEG và
F={B→C, AC→D, D→G, AG→E} hãy cho biết
a) AB→G∈F^+
b) BD→AD∈F^+

Bài tập 19
Cho lược đồ quan hệ α=(U, F) với U=ABCDEGH
F={AB→GH, GD→AHE, C→AGH, HE→BC }
a) tính (CE)+
b) tính (CD)+
c) Chứng minh rằng ABE→DH không suy dẫn được từ F
d) Chứng minh rằng với mọi quan hệ R trên U Nếu R thoả F thì R cũng thoả ACD→BHE
e) Chứng minh rằng F ├ ABE

Bài tập 20
Cho lược đồ quan hệ α = (U, F) với U = ABCDEGH và
F = { B → AEG , ABE → CH , ACD → BEG } .

Bằng các luật của hệ tiên đề Armstrong hãy chứng tỏ phụ thuộc hàm f = $BD \rightarrow CGH$ suy dẫn được từ tập các phụ thuộc hàm F.

Bài tập 22

Cho lược đồ quan hệ α = (U,F) với U = ABCDEGH và
F = { $AE \rightarrow BEG$, $CEH \rightarrow BD$, $DG \rightarrow BCD$, $ABC \rightarrow DE$}
và một phụ thuộc hàm f = $ACE \rightarrow DEG$. Hãy chỉ ra rằng f có thể dẫn được từ tập F theo các luật của hệ tiên đề Armstrong.

Bài tập 23

Cho lược đồ quan hệ α = (U, F) và X,Y,Z là các tập con của tập thuộc tính U. Dựa vào các luật của hệ tiên đề Armstrong hãy chứng minh rằng phụ thuộc hàm $X \rightarrow YZ$ được suy dẫn từ tập F khi và chỉ khi các phụ thuộc hàm $X \rightarrow Y$ và $X \rightarrow Z$ cũng suy dẫn được từ tập F.

Bài tập 24

Cho lược đồ quan hệ α = (U,F) với U = ABCDEGH và
F = { $AE \rightarrow BEG$, $CEH \rightarrow BD$, $DG \rightarrow BCD$, $ABC \rightarrow DE$}
và một phụ thuộc hàm f = $ACE \rightarrow DEG$. Hãy chỉ ra rằng f dẫn được từ tập F bằng việc ứng dụng các luật của hệ tiên đề Armstrong.

D/ BÀI TẬP LÀM THÊM

Cài đặt thuật toán tìm bao đóng, bài toán thành viên trên một ngôn ngữ lập trình nào đó.