

- Giải thuật: (bài toán tô màu, hay bài toán tìm phủ tối tiểu) - bao gồm 4 bước)
 - Xét bài toán tô màu được phát biểu như sau: cho 1 hình gồm nhiều ô, những ô cùng nhóm được tô 1 màu, một ô có thể thuộc nhiều nhóm, tô làm sao kín hình ban đầu với số màu ít nhất và lượng màu dùng cho mỗi màu là ít nhất.
 - Giải thuật rút gọn trong biểu đồ Karnaugh thực chất là bài toán tô màu (hay là bài toán tìm phủ tối tiểu), với mỗi LOOP là 1 màu, số ô trong mỗi LOOP là khối lượng của mỗi màu. Rút gọn làm sao số LOOP ít nhất, và mỗi LOOP thì có ít biến nhất.
- Bước 1: liệt kê tất cả các LOOP8, LOOP4, LOOP2, LOOP1, lưu ý là không được có trường hợp $LOOP_i \subseteq LOOP_j$, và viết công thức rút gọn cho mỗi LOOP.
- Bước 2: tìm ô nào chỉ thuộc duy nhất 1 LOOP, ta chọn LOOP đó, lặp lại bước này đến khi nào khi nào không còn ô nào có tính chất trên. Nếu thực hiện xong bước này mà tô kín biểu đồ Karnaugh ban đầu, thì ta có duy nhất 1 kết quả rút gọn, và kết quả này là tối giản.
- Bước 3:
 - Nếu sau bước 2 mà biểu đồ Karnaugh vẫn chưa được tô kín, chọn tùy ý 1 LOOP, lặp lại bước này cho đến khi tô kín biểu đồ Karnaugh ban đầu. Ta có một kết quả rút gọn, nhưng do những ô ở bước này thuộc ít nhất là 2 LOOP trở lên, nên việc lựa chọn tùy ý 1 LOOP chứa những ô thuộc loại này để tô, dẫn đến kết quả là chưa bảo đảm tối giản.
 - Do đó, ta phải xét đến phản đề, là để tô ô được chọn tùy ý mà không dùng LOOP ở bước (3.i), thì phải dùng đến LOOP kia và ta sẽ có một kết quả khác. Và việc xét phản đề sẽ đi theo thứ tự ngược với bước (3.i).
- Bước 4:
- Sau bước 3, ta sẽ có nhiều kết quả rút gọn khác nhau, ở bước này, ta xét các kết quả theo tiêu chuẩn phát biểu ban đầu là số LOOP ít nhất, nếu số LOOP bằng nhau, thì xét kết quả nào chứa LOOP có ít biến hơn thì tối giản hơn. Và có khả năng là chỉ có một công thức tối giản duy nhất hay nhiều công thức tương đương.

Cho $x = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15)$
 với D là MSB, A là LSB

D	C	B	A	x	MinTerm	Số thứ tự
0	0	0	0	x0=		0
0	0	0	1	x1=		1
0	0	1	0	x2=		2
0	0	1	1	x3=		3
0	1	0	0	x4=		4
0	1	0	1	x5=		5
0	1	1	0	x6=		6
0	1	1	1	x7=		7
1	0	0	0	x8=		8
1	0	0	1	x9=		9
1	0	1	0	x10=		10
1	0	1	1	x11=		11
1	1	0	0	x12=		12
1	1	0	1	x13=		13
1	1	1	0	x14=		14
1	1	1	1	x15=		15

•

Cho $x = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15)$ với D là MSB, A là LSB

D	C	B	A	x	MinTerm	Số thứ tự
0	0	0	0	$x_0=1$	$\bar{D}.\bar{C}.\bar{B}.\bar{A}$	0
0	0	0	1	$x_1=1$	$\bar{D}.\bar{C}.\bar{B}.A$	1
0	0	1	0	$x_2=1$	$\bar{D}.\bar{C}.B.\bar{A}$	2
0	0	1	1	$x_3=1$	$\bar{D}.\bar{C}.B.A$	3
0	1	0	0	$x_4=1$	$\bar{D}.C.\bar{B}.\bar{A}$	4
0	1	0	1	$x_5=1$	$\bar{D}.C.\bar{B}.A$	5
0	1	1	0	$x_6=1$	$\bar{D}.C.B.\bar{A}$	6
0	1	1	1	$x_7=0$		7
1	0	0	0	$x_8=1$	$D.\bar{C}.\bar{B}.\bar{A}$	8
1	0	0	1	$x_9=0$		9
1	0	1	0	$x_{10}=1$	$D.\bar{C}.B.\bar{A}$	10
1	0	1	1	$x_{11}=1$	$D.\bar{C}.B.A$	11
1	1	0	0	$x_{12}=0$		12
1	1	0	1	$x_{13}=1$	$D.C.\bar{B}.A$	13
1	1	1	0	$x_{14}=0$		14
1	1	1	1	$x_{15}=1$	$D.C.B.A$	15

BA \ DC		00	01	11	10
00		x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01		x ₄	x ₅		x ₆
11			x ₁₃	x ₁₅	
10		x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Hình 1. Biểu đồ Karnaugh cho hàm 4 biến trên

- Bước 1: Liệt kê tất cả các LOOP của biểu đồ
- LOOP16: không có.
- LOOP8: không có.
- LOOP4: có 5 LOOP đặt tên là L4-1, L4-2, L4-3, L4-4, L4-5
- LOOP2: có 3 LOOP đặt tên là L2-1, L2-2, L2-3
- LOOP1: không có.

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Ta liệt kê cụ thể từng LOOP như sau

L4-1 là tập hợp 4 ô $x_0, x_1, x_3, x_2 \Rightarrow L4-1 = \{x_0, x_1, x_3, x_2\} = \bar{D} \cdot \bar{C}$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 1. $L4-1 = \bar{D} \cdot \bar{C}$ chứa 4 ô trên một hàng

L4-2 là tập hợp 4 ô $x_0, x_1, x_4, x_5 \Rightarrow L4-2 = \{x_0, x_1, x_4, x_5\} = \bar{D} \cdot \bar{B}$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 2. $L4-2 = \bar{D} \cdot \bar{B}$ chứa 4 ô tạo thành hình vuông

L4-3 là tập hợp 4 ô $x_0, x_2, x_4, x_6 \Rightarrow L4-3 = \{x_0, x_2, x_4, x_6\} = \bar{D} \cdot \bar{A}$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 3. $L4-3 = \bar{D} \cdot \bar{A}$ chứa 4 ô ở hai cạnh

L4-4 là tập hợp 4 ô $x_3, x_2, x_{11}, x_{10} \Rightarrow L4-4 = \{x_3, x_2, x_{11}, x_{10}\} = \bar{C} \cdot B$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 4. $L4-4 = \bar{C}.B$ chứa 4 ô ở hai cạnh

L4-5 là tập hợp 4 ô x₀, x₂, x₈, x₁₀ $\Rightarrow L4-5 = \{x_0, x_2, x_8, x_{10}\} = \bar{C}.\bar{A}$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 5. $L4-5 = \bar{C}.\bar{A}$ chứa 4 ô ở 4 góc

L2-1 là tập hợp 2 ô x₅, x₁₃ $\Rightarrow L2-1 = \{x_5, x_{13}\} = C.\bar{B}.A$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 6. $L2-1 = C.\bar{B}.A$ chứa 2 ô kề nhau

L2-2 là tập hợp 2 ô $x_{13}, x_{15} \Rightarrow L2-2 = \{x_{13}, x_{15}\} = D.C.A$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 7. L2-2 = D.C.A chứa 2 ô kề nhau

L2-3 là tập hợp 2 ô $x_{15}, x_{11} \Rightarrow L2-3 = \{x_{15}, x_{11}\} = D.B.A$

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 8. L2-3 = D.B.A chứa 2 ô kề nhau

Bảng 9.

Bước 2: ô x_6 thuộc duy nhất $L4-3 = \{x_0, x_2, x_4, x_6\} = \bar{D} \cdot \bar{A}$ và ô x_8 thuộc duy nhất $L4-5 = \{x_0, x_2, x_8, x_{10}\} = \bar{C} \cdot \bar{A} \Rightarrow x = \bar{D} \cdot \bar{A} + \bar{C} \cdot \bar{A} + \dots$ ở bước 2 ta đã tô được 6 ô, còn lại 6 ô $x_1, x_3, x_5, x_{13}, x_{15}, x_{11}$ chưa tô

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 10. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 2

➤ Bước 3:

Bước 3.1:

Để tô những ô còn lại, ta chọn tùy ý một LOOP, trong trường hợp này ta chọn $L4-1 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \bar{D} \cdot \bar{C} \Rightarrow$ tô thêm 2 ô $x_1, x_3 \Rightarrow x = \bar{D} \cdot \bar{A} + \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{D} \cdot \bar{C} + \dots$ còn 4 ô $x_5, x_{13}, x_{11}, x_{15}$ chưa tô.

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 11. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1

Bước 3.1.1:

Để tô những ô còn lại, ta chọn tùy ý một LOOP, trong trường hợp này ta chọn $L2-3 = \{x_{11}, x_{15}\} = C \cdot B \cdot A \Rightarrow$ tô thêm 2 ô $x_{11}, x_{15} \Rightarrow x = \bar{D} \cdot \bar{A} + \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{D} \cdot \bar{C} + C \cdot B \cdot A + \dots$ còn lại 2 ô x_5, x_{13} chưa tô

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 12. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.1

Bước 3.1.1.1:

Để tô hai ô x₅ và x₁₃ còn lại, ta chọn tùy ý L2-1 = {x₅, x₁₃} = D. \bar{B} .A \Rightarrow x = \bar{D} . \bar{A} + \bar{C} . \bar{A} + \bar{D} . \bar{C} + C.B.A + D. \bar{B} .A (**Công thức 1**) và biểu đồ Karnaugh đã được tô xong hay ta đã có một công thức rút gọn.

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 13. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.1.1

Bước 3.1.1.2: (phản đề của 3.1.1.1)

Trong bước 3.1.1.1 việc lựa chọn L2-1 để tô hai ô x₅ và x₁₃ là tùy ý, nên để tô 2 ô x₅, x₁₃ còn lại mà không dùng L2-1, bắt buộc phải dùng L4-2 = {x₀, x₁, x₄, x₅} = \bar{D} . \bar{B} và L2-2 = {x₁₃, x₁₅} = D.C.A \Rightarrow x = \bar{D} . \bar{A} + \bar{C} . \bar{A} + \bar{D} . \bar{C} + C.B.A + \bar{D} . \bar{B} + D.C.A (**Công thức 2**)

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 14. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.1.2

Bước 3.1.2: (phản đề của 3.1.1)

Để tô thêm hai ô x_{11} , x_{15} mà không dùng L2-3 thì bắt buộc phải dùng L2-2 = $\{x_{13}, x_{15}\} = D.C.A$ và L4-4 = $\{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}\} = \bar{C}.B \Rightarrow x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + D.C.A + \bar{C}.B + \dots$ còn lại 1 ô x_5 chưa tô

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 15. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.2

Bước 3.1.2.1:

Còn 1 ô x_5 chưa tô, ta chọn L4-2 = $\{x_0, x_1, x_4, x_5\} = \bar{D}.\bar{B}$ để tô xong $\Rightarrow x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + D.C.A + \bar{C}.B + \bar{D}.\bar{B}$ (**Công thức 3**)

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 16. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.2.1

Bước 3.1.2.2: (phản đề của 3.1.2.1)

Để tô ô x_5 mà không chọn L4-2 thì bắt buộc phải dùng L2-1 = $\{x_5, x_{13}\} = C.\bar{B}.A$ để tô xong $\Rightarrow x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + D.C.A + \bar{C}.B + C.\bar{B}.A$ (**Công thức 4**)

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 17. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.1.2.2

Bước 3.2: (phản đề của 3.1)

Để tô được hai ô x₁, x₃ mà không chọn L4-1 thì bắt buộc phải chọn L4-2 = {x₀, x₁, x₄, x₅} = $\bar{D} \cdot \bar{B}$ và L4-4 = {x₂, x₃, x₁₀, x₁₁} = $\bar{C} \cdot B \Rightarrow x = \bar{D} \cdot \bar{A} + \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{D} \cdot \bar{B} + \bar{C} \cdot B + \dots$ còn lại hai ô x₁₃, x₁₅ chưa tô.

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 18. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.2

Bước 3.2.1:

Để tô hai ô x₁₃, x₁₅ còn lại, ta chọn L2-2 = {x₁₃, x₁₅} = D.C.A để tô xong $\Rightarrow x = \bar{D} \cdot \bar{A} + \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{D} \cdot \bar{B} + \bar{C} \cdot B + D.C.A$ (**Công thức 5**)

BA \ DC	00	01	11	10
00	x ₀	x ₁	x ₃	x ₂
01	x ₄	x ₅		x ₆
11		x ₁₃	x ₁₅	
10	x ₈		x ₁₁	x ₁₀

Bảng 19. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.2.1

Bước 3.2.2 (phản đề của 3.2.1)

Để tô hai ô x_{13}, x_{15} còn lại, mà không chọn $L2-2 = \{x_{13}, x_{15}\} = D.C.A$ thì phải chọn $L2-1 = \{x_5, x_{13}\} = C.\bar{B}.A$ và $L2-3 = \{x_{11}, x_{15}\} = D.B.A$ để tô xong $\Rightarrow x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{B} + \bar{C}.B + C.\bar{B}.A + D.B.A$ (**Công thức 6**)

BA \ DC	00	01	11	10
00	x_0	x_1	x_3	x_2
01	x_4	x_5		x_6
11		x_{13}	x_{15}	
10	x_8		x_{11}	x_{10}

Bảng 20. Kết quả tô biểu đồ Karnaugh sau bước 3.2.2

Bước 4:

Sau bước 3 ta có sáu công thức:

$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + C.B.A + D.\bar{B}.A \quad (\text{Công thức 1})$$

$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + C.B.A + \bar{D}.\bar{B} + D.C.A \quad (\text{Công thức 2})$$

$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + D.C.A + \bar{C}.B + \bar{D}.\bar{B} \quad (\text{Công thức 3})$$

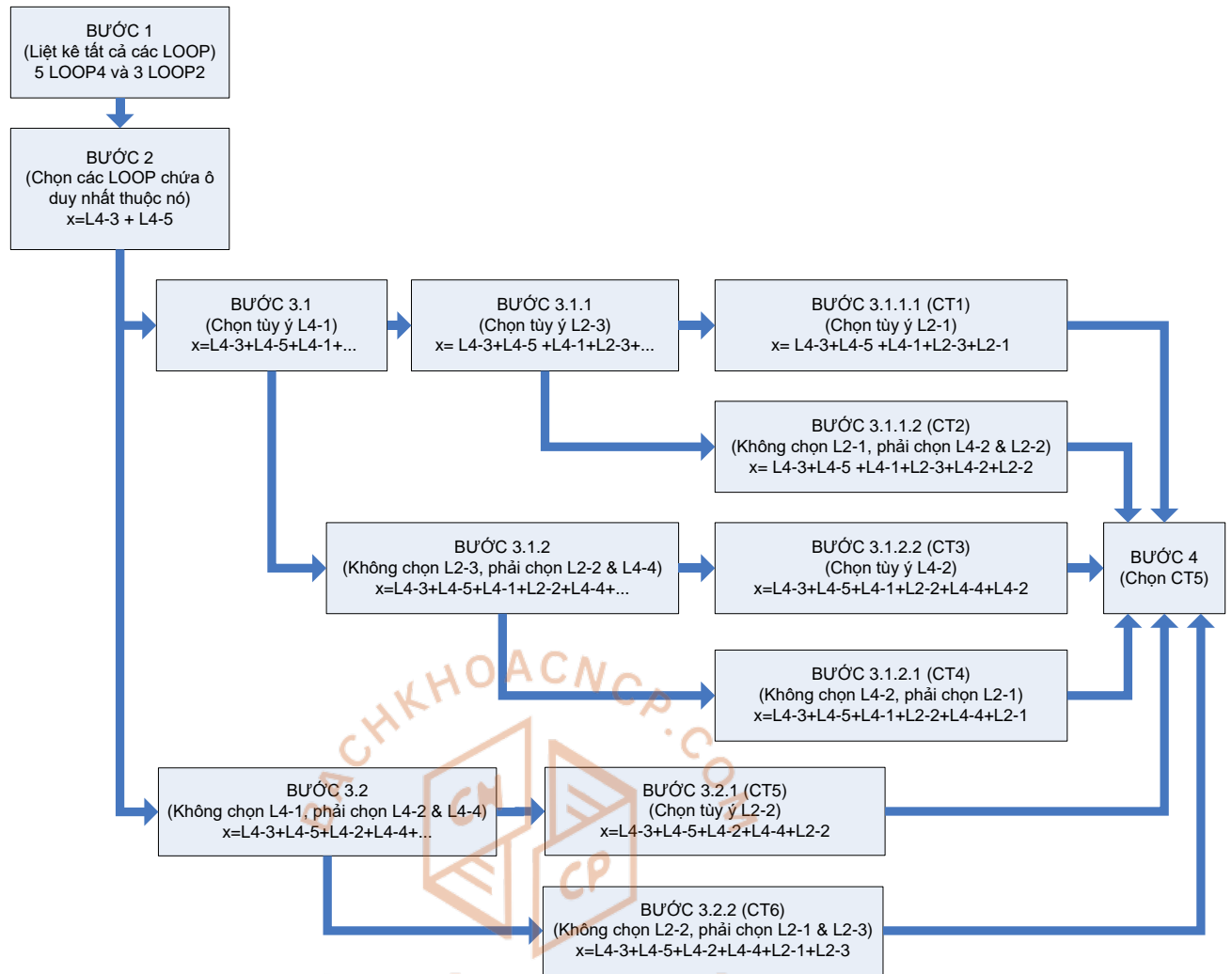
$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{C} + D.C.A + \bar{C}.B + C.\bar{B}.A \quad (\text{Công thức 4})$$

$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{B} + \bar{C}.B + D.C.A \quad (\text{Công thức 5})$$

$$x = \bar{D}.\bar{A} + \bar{C}.\bar{A} + \bar{D}.\bar{B} + \bar{C}.B + C.\bar{B}.A + D.B.A \quad (\text{Công thức 6})$$

Ta chọn công thức 5 vì đó công thức rút gọn nhất.

- Giải thuật dùng biểu đồ Karnaugh cho hàm 4 biến nói trên được minh họa bằng lưu đồ sau:



Hình 2. Lưu đồ cho giải thuật rút gọn hàm 4 biến đã cho bằng biểu đồ Karnaugh.