VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

MATHEMATICAL MODELING (CO2011)

Assignment

"Dynamics of Love"

Advisor: Nguyễn Tiến Thịnh
Nguyễn An Khương
Nguyễn Văn Minh Mẫn
Mai Xuân Toàn
Trần Hồng Tài
Students: Võ Tấn Hưng - 2113623
Đỗ Văn Bâng - 2110813
Võ Văn Dũng - 2110102
Cù Hoàng Nguyễn Sơn - 2112185

HO CHI MINH CITY, DECEMBER 2022

Contents

DANH SÁCH HÌNH VẼ 3

DANH SÁCH BẢNG 5

1 Phân công nhiệm vụ 6

2 Kiến thức chuẩn bị 6
2.1 Phương trình vi phân thường . . . 6
2.1.1 Định nghĩa . . . 6
2.1.2 Phương trình vi phân cấp 1 . . . 6
2.1.3 Phương trình vi phân cấp 1 với điều kiện đầu . . . 7
2.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một . . . 7
2.2.1 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một tổng quát . . . 7
2.2.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm . . . 7
2.2.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính . . . 8
2.2.4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất . . . 9
2.2.5 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng . . . 9
2.3 Chân dung pha . . . 12
2.3.1 Định nghĩa . . . 12
2.3.2 Phân loại chân dung pha . . . 13

3 Phân tích tình yêu theo các phong cách lãng mạn 13
3.1 Tình yêu giữa hai Eager Beavers . . . 13
3.1.1 Ví dụ 1 . . . 13
3.1.2 Ví dụ 2 . . . 14
3.2 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Cautious Love . . . 16
3.2.1 Ví dụ 1 . . . 16
3.2.2 Ví dụ 2 . . . 18
3.3 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Narcissistic Nerd . . . 20
3.3.1 Ví dụ 1 . . . 20
3.3.2 Ví dụ 2 . . . 22
3.4 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Hermit . . . 23
3.4.1 Ví dụ 1 . . . 23
3.4.2 Ví dụ 2 . . . 25
3.5 Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Cautious Lover . . . 27
3.5.1 Ví dụ 1 . . . 27
3.5.2 Ví dụ 2 . . . 28
3.6 Tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd . . . 30
3.6.1 Ví dụ 1 . . . 30
3.6.2 Ví dụ 2 . . . 32
3.7 Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Hermit . . . 34
3.7.1 Ví dụ 1 . . . 34
3.7.2 Ví dụ 2 . . . 35
3.8 Tình yêu giữa hai Cautious Lovers . . . 37
3.8.1 Ví dụ 1 . . . 37
3.8.2 Ví dụ 2 . . . 38
3.9 Tình yêu giữa một Cautious Lover và một Hermit . . . 40
3.9.1 Ví dụ 1 . . . 40

3.9.2 Ví dụ 2 41
3.10 Tình yêu giữa hai Hermits 43
3.10.1 Ví dụ 1 43
3.10.2 Ví dụ 2 44

4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất 46
4.1 Ví dụ 1 47
4.2 Ví dụ 2 49
4.3 Ví dụ 3 49
4.4 Ví dụ 4 50
4.5 Ví dụ 5 51
4.6 Các ví dụ về hệ không thuần nhất vô nghiệm 52

5 Non-linear Systems of Differential Equations 53
5.1 Local existence 53
5.2 Global existence 54
5.3 Five specific examples 54

6 Solve system ODE in a numerical way 55
6.1 Explicit Euler's method (review) 55
6.2 Implicit Euler's method (In-depth review) 56
6.3 So sánh giữa Explicit và Implicit Euler's method: 58
6.4 Five specific examples taken from exercise 3 using Implicit Euler's method to solve 59

7 Ứng dụng Neural Network, Machine learning, Deep learning vào việc giải IVP 64
7.1 Ý tưởng bài toán 64
7.2 Làm sạch dữ liệu 65
7.3 Training Process 67

TÀI LIỆU THAM KHẢO 72

Danh sách hình vẽ

1 Tình yêu giữa hai eager beavers với $R_0 = 9$ và $J_0 = 4$ 14
2 Tình yêu giữa hai eager beavers với $R_0 = 8$ và $J_0 = -4$ 15
3 Chân dung pha của tình yêu giữa hai eager beavers 16
4 Tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover với $R_0 = -\frac{3}{2}$ và $J_0 = 2$ . . 17
5 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover 18
6 Tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover $R_0 = 1$ và $J_0 = 4$ 19
7 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover 20
8 Tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd $R_0 = -2$ và $J_0 = 2$ . . 21
9 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd . . 21
10 Tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd $R_0 = -5$ và $J_0 = 3$ . . 22
11 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd . . 23
12 Tình yêu giữa một eager beaver với một hermit $R_0 = 2$ và $J_0 = 2$ 24
13 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một hermit 25
14 Tình yêu giữa một eager beaver với một hermit $R_0 = -2$ và $J_0 = -4$ 26
15 Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một hermit 26
16 Tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover $R_0 = 2$ và $J_0 = 3$ . . . 27
17 Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover . . 28
18 Tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover $R_0 = 5$ và $J_0 = 1$ . . . 29
19 Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover . . 30
20 Tình yêu giữa hai narcissistic nerds $R_0 = 4$ và $J_0 = 2$ 31
21 Chân dung pha của tình yêu giữa hai narcissistic nerd 32
22 Tình yêu giữa hai narcissistic nerds $R_0 = -5$ và $J_0 = -4$ 33
23 Chân dung pha của tình yêu giữa hai narcissistic nerd 33
24 Tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit $R_0 = 5$ và $J_0 = 5$ 34
25 Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit 35
26 Tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit $R_0 = -11$ và $J_0 = -11$ 36
27 Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit 36
28 Tình yêu giữa hai cautious lovers $R_0 = 4$ và $J_0 = 6$ 37
29 Chân dung pha của tình yêu giữa hai cautious lovers 38
30 Tình yêu giữa hai cautious lovers $R_0 = -4$ và $J_0 = -6$ 39
31 Chân dung pha của tình yêu giữa hai cautious lovers 39
32 Tình yêu giữa một cautious lover và một hermit $R_0 = 4$ và $J_0 = 2$ 40
33 Chân dung pha của tình yêu giữa một cautious lover và một hermit 41
34 Tình yêu giữa một cautious lover và một hermit $R_0 = 2$ và $J_0 = 2$ 42
35 Chân dung pha của tình yêu giữa một cautious lover và một hermit 42
36 Tình yêu giữa hai hermit $R_0 = 6$ và $J_0 = 3$ 43
37 Chân dung pha của tình yêu giữa hai hermits 44
38 Tình yêu giữa hai hermit $R_0 = 24$ và $J_0 = 20$ 45
39 Chân dung pha của tình yêu giữa hai hermits 45
40 Tình yêu giữa hai eager beavers bị ảnh hưởng bởi thời gian tuyến tính 48
41 Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover bị ảnh hưởng bởi thời gian điều hòa 50
42 Tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd bị ảnh hưởng bởi thời gian mũ 51
43 Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Hermit ảnh hưởng bởi thời gian mũ 52
44 Comparision between Explicit and Implicit Euler's method with step = 0.21 . . . 59
45 Mode 1 solved by Implicit Euler 60
46 Mode 2 solved by Implicit Euler 61

47 Mode 3 solved by Implicit Euler . . . 62
48 Mode 4 solved by Implicit Euler . . . 63
49 Mode 5 solved by Implicit Euler . . . 64
50 Hình mô tả phương pháp làm sạch với degree = 3 . . . 65
51 Hình mô tả phương pháp làm sạch với window = 7, degree = 3 . . . 66
52 Hình mô tả phương pháp làm sạch với window = 51, degree = 3 . . . 66
53 Loss value và Learned parameters sau 200 giai đoạn . . . 67
54 Loss value và Learned parameters qua các giai đoạn . . . 68
55 Loss value và Learned parameters qua các giai đoạn với tập dữ liệu gốc . . . 68
56 Với tập dữ liệu đã được làm sạch window = 7, degree = 3 . . . 69
57 Với tập dữ liệu đã được làm sạch window = 51, degree = 3 . . . 69
58 Các hệ số qua các giai đoạn learning . . . 70
59 Mô hình gộp chung R và J . . . 70
60 Mô hình R và J riêng biệt . . . 71

Danh sách bảng

1 Phân loại chân dung pha 13
2 Phong cách lãng mạn của Romeo 13
3 Phong cách lãng mạn của Juliet 13
4 Các nghiệm thử để tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất 47

1 Phân công nhiệm vụ

STT	Họ và tên	MSSV	Nhiệm vụ	Tỉ lệ hoàn thành
1	Võ Tấn Hưng	2113623	Exercise 4 & 5	100%
2	Đỗ Văn Bâng	2110813	Nonhomogeneous IVP	100%
3	Võ Văn Dũng	2110102	Exercise 1 & 2	100%
4	Cù Hoàng Nguyễn Sơn	2112185	Nonlinear IVP	100%

2 Kiến thức chuẩn bị

2.1 Phương trình vi phân thường

2.1.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân là một phương trình liên quan tới một hàm và đạo hàm của hàm đó, mục tiêu của phương trình là để tìm một hàm thoả phương trình đã nêu. Dạng tổng quát như sau: Giả sử ta được cho hàm $\phi(y, z)$ có hai biến với phương trình:

$$\phi(u(x), u'(x)) = 0 \tag{1}$$

Mục tiêu ta cần tìm hàm y = u(x) tren một miền thuộc x hay ta có thể nói là tìm hàm u(x) với biến x (biến độc lập) sao cho phương trình (1) trở nên đồng nhất trên một miền nào đó thuộc trục x.
Từ "thường" ở đây được dùng để chỉ các phương trình vi phân có một biến độc lập, so với các phương trình có nhiều hơn một biến độc lập.

2.1.2 Phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát hơn của phương trình vi phân so với phương trình (1). Giả sử $\phi = \phi(t, x, y)$ là một hàm được định nghĩa sẵn với 3 biến và ta cần tìm hàm x(t) sao cho

$$\phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \tag{2}$$

trên một miền thuộc trục t. Dạng tổng quát của phương trình này là

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

Trong đó hàm f có được khi ta giải phương trình $\phi(t, x, y) = 0$ với y là một hàm theo t và x. Có một họ các phương trình vi phân có nghiệm ta có thể giải được trực tiếp. Giả sử hàm f trong phương trình 3 không phụ thuộc và x: f = f(t). Từ đây ta có thể thấy nghiệm của phương trình trên là

$$x(t) = \int^{t} f(s)ds + C \tag{4}$$

với C là một hằng số tùy ý. Vậy để tìm được nghiệm ta chỉ cần thực hiện nguyên hàm một hàm đã biết.

2.1.3 Phương trình vi phân cấp 1 với điều kiện đầu

Nghiệm giải bằng cách nguyên hàm một hàm đã biết sẽ bao gồm 1 hằng số C tuỳ ý và vì vậy nghiệm này không chỉ bao gồm 1 mà gồm 1 họ các nghiệm, mỗi nghiệm ứng với 1 giá trị của hằng số C. Ta có thể xác định nghiệm duy nhất của hệ phương trình nếu có thể xác định được cụ thể giá trị của hằng số C. Một cách để thực hiện việc này là ràng buộc hàm x(t) sao cho x(t) không chỉ thoả điều kiện của phương trình vi phân mà còn phải thoả điều kiện ban đầu x0 tại một giá trị t0 cho trước. Ta định nghĩa bài toán điều kiện ban đầu như sau:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), x|_{t=t_0} = x_0 \tag{5}$$

Ở đây hàm f và điều kiện ban đầu t_0, x_0 được cho trước.

2.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một

2.2.1 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một tổng quát

Hệ phương trình vi phân tổng quát là hệ gồm các phương trình chứa biến độc lập, các hàm (nghiệm) cần tìm và phải chứa các đạo hàm của chúng theo biến độc lập. Nếu chỉ xuất hiện các đạo hàm cấp 1 của các ẩn, ta nói hệ đó là hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Một hệ phương trình vi phân bậc nhất được định nghĩa theo n biến $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Mỗi biến $x_i(t), i = 1, 2, ..., n$ là một hàm phụ thuộc vào biến liên tục t. N biến này liên kết với nhau bởi một hệ n phương trình có dạng tổng quát sau:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t) \\ \dot{x_2}(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t) \\ ... \\ \dot{x_n}(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t) \end{cases} \tag{6}$$

Hệ phương trình trên có thể viết lại dưới dạng thu gọn như sau:

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{7}$$

trong đó $\dot{x} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^T, f = (f_1, ..., f_n)^T, x = (x_1, ..., x_n)^T$

2.2.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Đối với hệ phương trình vi phân cấp 1, bài toán giá trị ban đầu được phát biểu một cách tương tự như trường hợp một phương trình:
Tìm nghiệm $y_1(x), ..., y_n(x)$ của hệ (1) thỏa điều kiện ban đầu

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

trong đó các giá trị $t_0 \in I, x_i^0$ cho trước, gọi là giá trị ban đầu.
Định lý 2.2.1 (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm).
Giả sử các hàm $f_1(x,t), ..., f_n(x,t)$ trong hệ (1) là liên tục trên một tập mở $G \subset R^{n+1}$ chứa $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0)$ và thỏa điều kiện Lipschitz theo biến x. Khi đó trong một lân cận nào đó của t_0 có tồn tại một nghiệm $x_1(t), ..., x_n(t)$ thỏa bài toán với điều kiện ban đầu đã cho và nghiệm đó là duy nhất.
Định nghĩa 2.2.2 Giả sử tập G thỏa mãn tất cả các giả thiết của định lý 2.2.1. Khi đó n hàm

$$x_i = x_i(C_1, ..., C_n, t) \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{9}$$

phụ thuộc vào n tham số $C_1, ..., C_n$ và có các đạo hàm riêng theo t được gọi là nghiệm tổng quát của hệ (1) nếu:

- Với mỗi $(x_1^0, ..., x_n^0, t_0)$ trong G, từ hệ (4) có thể giải được duy nhất các hằng số $C_1, ..., C_n$.
- Tập hợp n hàm trong (4) là nghiệm của hệ (1) với mỗi bộ giá trị của các tham số $C_1, ..., C_n$ giải ra đối với mỗi $(x_1, ..., x_n, t) \in G$

Định nghĩa 2.2.3 Nghiệm của hệ mà tại mỗi điểm của nó thỏa mãn các điều kiện của định lý 2.2.1 được gọi là nghiệm riêng của hệ. Ngược lại, nghiệm của hệ mà tính chất duy nhất nghiệm bị vi phạm được gọi là nghiệm kỳ dị.

2.2.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất là một hệ phương trình vi phân ở dạng:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + ... + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ ... \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

trong đó t là biến độc lập và $x_1(t), ..., x_n(t)$ là các ẩn hàm cần tìm, các hàm $a_{ij}(t)$ và $f_i(t)$ lần lượt được gọi là các hệ số và hệ số tự do của hệ. Chúng được giả thuyết liên tục trên khoảng $I = (a, b) \subset R$. Tên gọi hệ phương trình tuyến tính là do vế phải là các hàm bậc nhất theo các ẩn hàm $x_1(t), ..., x_n(t)$.
Gọi x(t) là vector cột của các hàm $x_i(t)$, A(t) là ma trận bao gồm các phần tử $a_{ij}(t)$, và $f(t)$ là vector cột của các hàm $f_i(t)$, i = 1, 2, 3, ..., n.
Khi đó, hệ phương trình có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{10}$$

Trong đó:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ .... \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \text{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ .... \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Khi f(t) = 0, hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất trở thành hệ thuần nhất:

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{11}$$

Khi tồn tại $f_j(t) \neq 0$, hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất là hệ không thuần nhất.
Định lý sau đây là một trường hợp riêng của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm tổng quát đối với bài toán có điều kiện đầu
Định lý 2.2.3.1 (Tồn tại và duy nhất nghiệm) Giả sử các hệ số $a_{ij}(t)$ và $f_i(t)$ là các hàm liên tục trên khoảng mở I, $t_0 \in I$. Khi đó hệ phương trình (5) có duy nhất một nghiệm x = x(t) thỏa điều kiện ban đầu (3) trên I.
Phương pháp tổng quát trong việc giải phương trình vi phân tuyến tính có giá trị ban đầu:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{12}$$

- **Bước 1**: Tìm nghiệm tổng quát $x_c(t) = c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_nx_n(t)$, với $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ là tập nghiệm độc lập tuyến tính, đối với hệ thuần nhất tương ứng, $x'(t) = A(t)x(t)$
- **Bước 2**: Tìm nghiệm riêng $x_p(t)$ của hệ không thuần nhất, $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$
- **Bước 3**: $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ là nghiệm tổng quát, và sử dụng $x(t_0) = x_0$ để xác định $c_1, x_2, ..., c_n$.

2.2.4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

2.2.5 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Xét một hệ phương trình vi phân thuần nhất với hệ số hằng, có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$x'(t) = Ax(t) \tag{13}$$

trong đó A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ .... \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$, x(t) = $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

Ta sử dụng phương pháp Euler để giải bài toán:
Tìm nghiệm của hệ phương trình (7) ở dạng $x(t) = e^{\lambda t}P$, với P là vector hằng.
Thế x(t) vào hệ phương trình (7) ta được $\lambda e^{\lambda t}P = APe^{\lambda t}$ ⇔AP $= \lambda P$
Vậy $x(t) = e^{\lambda t}P$ là nghiệm của hệ (7) khi và chỉ khi λ là trị riêng và P là vector riêng của ma trận A.
Định lý 2.2.5.1 (Chéo hóa được) Nếu ma trận A có n vector riêng độc lập tuyến tính $P_1, P_2, ..., P_n$ ứng với các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ thì các nghiệm $e^{\lambda_1 t}P_1, e^{\lambda_2 t}P_2, ..., e^{\lambda_n t}P_n$ tạo thành hệ nghiệm cơ bản. Khi đó nghiệm tổng quát của (7) có dạng $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}P_1 + C_2e^{\lambda_2 t}P_2 + ... + C_ne^{\lambda_n t}P_n$
Lưu ý: Định lý không yêu cầu các trị riêng phải phân biệt, nhưng các vector riêng phải độc lập tuyến tính.
a. Trường hợp: các trị riêng phân biệt
Nếu A có n trị riêng phân biệt thì n vector riêng tương ứng sẽ độc lập tuyến tính do đó ta có hệ quả sau:
Hệ quả 2.2.5.1 Nếu ma trận A có n trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ với các vector riêng tương ứng $P_1, P_2, ..., P_n$ thì nghiệm tổng quát của (7) có dạng

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}P_1 + C_2e^{\lambda_2 t}P_2 + ... + C_ne^{\lambda_n t}P_n$$

b. Trường hợp: trị riêng thực bội m và ma trận A không chéo hóa được
Ứng với λ_0 là trị riêng thực bội m thì các nghiệm cơ bản tương ứng của hệ (7) là $x_1 = P_1(t)e^{\lambda_0 t}, x_2 = P_2(t)e^{\lambda_0 t}, ..., x_m = P_m(t)e^{\lambda_0 t}$, ở đây $P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t)$ là các đa thức có bậc không lớn hơn $m-1$
c. Trường hợp: trị riêng phức

Nếu $\lambda = \alpha + i\beta$ là trị riêng phức của ma trận thực A và $P = U + iV = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \\ ... \\ u_n + iv_n \end{pmatrix}$ là vector riêng tương ứng với λ.
Nghiệm cơ bản có dạng
$e^{\lambda t}.P = e^{(\alpha+i\beta)t}.(U+iV) = e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t).(U+iV) = e^{\alpha t}[U.\cos\beta t-V\sin\beta t]+ie^{\alpha t}[U.\sin\beta t+$

$V\cos\beta t]$
Khi đó phương trình (7) có 2 nghiệm thực độc lập tuyến tính

$$e^{\alpha t}[U.\cos\beta t - V\sin\beta t], \qquad e^{\alpha t}[U.\sin\beta t + V\cos\beta t]$$

và là hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất. Vậy

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t}[U.\cos\beta t - V\sin\beta t] + C_2 e^{\alpha t}[U.\sin\beta t + V\cos\beta t]$$

Tìm nghiệm chính xác cho hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng có điều kiện đầu

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ, \\ \dot{J} = cR + dJ, \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{14}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ (8) sang dạng vector

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{15}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (R_0 \;\; J_0)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị.
Đa thức đặc trưng $p(\lambda)$ của A là $p(\lambda) = |A - \lambda I| = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb$
Vậy, $p(\lambda)$ là đa thức bậc hai của λ.
Cho $p(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A, trong $\dot{u} = Au$

- **Trường hợp 1**: $p(\lambda) = 0$, $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4cb > 0$. Vậy có hai trị riêng thực phân biệt λ_1 và λ_2
  Tìm các trị riêng.
  $\lambda_1 = \frac{(a+d)+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4cb}}{2}$
  $\lambda_2 = \frac{(a+d)-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4cb}}{2}$
  Tìm các vector riêng
  Tương ứng với trị riêng λ_1, giải hệ $(A - \lambda_1 I)P_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \mathrm{P}_1 = 0$

  Giả sử $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ là vector riêng tương ứng λ_1 $(AP_1 = \lambda_1 P_1)$. Ta có:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda_1)p_{11} + bp_{21} = 0 \\ cp_{11} + (d-\lambda_1)p_{21} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathrm{p}_{21} = \frac{\lambda_1 - a}{b} p_{11} = \frac{c}{\lambda_1 - d} p_{11}$$

  Suy ra $P_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}$
  Tương tự $P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ là vector riêng tương ứng với $\lambda_2 (AP_2 = \lambda_2 P_2)$
  Suy ra $P_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}$
  Nghiệm tổng quát là:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} P_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} P_2$$

Và

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} p_{11}e^{\lambda_1 t} & p_{12}e^{\lambda_2 t} \\ p_{21}e^{\lambda_1 t} & p_{22}e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận cơ sở (một ma trận cơ sở là một ma trận vuông có các cột là nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất)

- **Trường hợp 2**: $p(\lambda) = 0$, $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4cb = 0$. Vậy có một trị riêng kép λ_0.
  Tìm trị riêng λ_0.
  $\lambda_0 = \frac{a+d}{2}$
  Tìm các vector riêng
  (1) λ_0 có hai vector riêng độc lập tuyến tính.
  Giả sử $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, và $P_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ là hai vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng.
  Do đó, nghiệm tổng quát là:

  $$u(t) = (C_1 P_1 + C_2 P_2)e^{\lambda_0 t}$$

  Và

  $$\Phi(t) = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

  (2) λ_0 chỉ có một vector riêng tương ứng
  Giả sử $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ là vector riêng tương ứng duy nhất
  $P_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ là nghiệm của $(\lambda_0 I - A)P_2 = P_1$.
  Do đó, nghiệm tổng quát là:

  $$u(t) = (C_1 P_1 + C_2(tP_1 + P_2))e^{\lambda_0 t}$$

  Và

  $$\Phi(t) = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} p_{11} & (p_{11}t + p_{12}) \\ p_{21} & (p_{21}t + p_{22}) \end{bmatrix}$$

- **Trường hợp 3**: $p(\lambda) = 0$, $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4cb < 0$. Vậy có hai trị riêng phức $\lambda_1 = a' + b'i$ và $\lambda_2 = a' - b'i$.
  Tìm các trị riêng.
  $\lambda_1 = \frac{(a+d) + i\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2}$
  $\lambda_2 = \frac{(a+d) - i\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2}$
  Tìm các vector riêng
  Tương ứng với trị riêng λ_1, giải hệ $(A - \lambda_1 I)P_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \mathrm{P}_1 = 0$
  Giả sử $P = \begin{pmatrix} p_{11} + ip_{12} \\ p_{21} + ip_{22} \end{pmatrix}$ là vector riêng tương ứng $\lambda_1 = a' + b'i$ $(AP = \lambda_1 P)$
  $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$. Ta có:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}+ip_{12} \\ p_{21}+ip_{22} \end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda_1)(p_{11}+ip_{12})+b(p_{21}+ip_{22})=0 \\ c(p_{11}+ip_{12})+(d-\lambda_1)(p_{21}+ip_{22})=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathrm{p}_{21}=\frac{\lambda_1-a}{b}p_{11}=\frac{c}{\lambda_1-d}p_{11}$$

Suy ra $P=\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1-d \\ c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{P}_1=\begin{pmatrix} b \\ \frac{a+d}{2}-a \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2} \end{pmatrix}.$

Hoặc:

$\Rightarrow \mathrm{P}_1=\begin{pmatrix} \frac{a+d}{2}-d \\ c \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

Nghiệm tổng quát là:

$$u(t)=e^{a't}[C_1(P_1\cos(b't)-P_2\sin(b't))+C_2(P_1\sin(b't)+P_2\cos(b't))]$$

Và ma trận cơ sở:

$$\Phi(t)=e^{a't}\begin{bmatrix} p_{11}\cos(b't)-p_{12}\sin(b't) & p_{11}\sin(b't)+p_{12}\cos(b't) \\ p_{21}\cos(b't)-p_{22}\sin(b't) & p_{21}\sin(b't)+p_{22}\cos(b't) \end{bmatrix}$$

Từ đó, ta được: $\begin{cases} R=e^{a't}[C_1(b\cos(b't)+C_2(b\sin(b't))] \\ J=e^{a't}[C_1((\frac{a+d}{2}-a)\cos(b't)-\frac{\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2}\sin(b't)) \\ +C_2((\frac{a+d}{2}-a)\sin(b't)+\frac{\sqrt{|a^2+d^2-2ad+4cb|}}{2}\cos(b't))] \\ R(0)=R_0, J(0)=J_0 \end{cases}$

Cho $\Phi(t)$ là ma trận cơ sở và nghiệm tổng quát được cho bởi $u(t)=\Phi(t)c$, với c $=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, và nghiệm thõa điều kiện đầu $u(t_0)=u_0$ là:

$$u(t)=\Phi(t)\Phi(t_0)^{-t}u_0$$

2.3 Chân dung pha

2.3.1 Định nghĩa

Chân dung pha (tiếng Anh: Phase portrait) là biểu diễn hình học của quỹ đạo một hệ động lực (dynamical system) trong mặt phẳng pha, với mỗi tập hợp các điều kiện ban đầu sẽ ứng với một đường cong, hoặc một điểm trong chân dung pha. Mặt phẳng pha là một hình thức biểu diễn trực qua một số đặc tính của một phương trình vi phân như trường định hướng, các điểm cố định, các đường đẳng tăng trưởng (nullcline).

Re λ_1	Re λ_2	$\lvert$Im $\lambda_1\rvert$	$\lvert$Im $\lambda_2\rvert$	**Type**
+	+	0	0	Unstable Node
-	-	0	0	Stable Node
+	-	0	0	Saddle
0	+/-	0	0	Whole line of equilibrium points
0	0	0	0	"Algebraically unstable"
+	+	+	-	Spiral source
-	-	+	-	Spiral sink
0	0	+	+	Center
0	0	+	-	Center
0	0	-	+	Center
0	0	-	-	Center

Bảng 1: Phân loại chân dung pha

2.3.2 Phân loại chân dung pha

3 Phân tích tình yêu theo các phong cách lãng mạn

a	b	Style
+	+	Eager Beaver
+	-	Narcissistic Nerd
-	+	Cautious Lover
-	-	Hermit

Bảng 2: Phong cách lãng mạn của Romeo

c	d	Style
+	+	Eager Beaver
+	-	Cautious Love
-	+	Narcissistic Nerd
-	-	Hermit

Bảng 3: Phong cách lãng mạn của Juliet

3.1 Tình yêu giữa hai Eager Beavers

3.1.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet cũng yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 9 và J(0) = 4.

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J, \\ \dot{J} = R + 4J, \\ R(0) = 9, J(0) = 4 \end{cases} \tag{16}$$

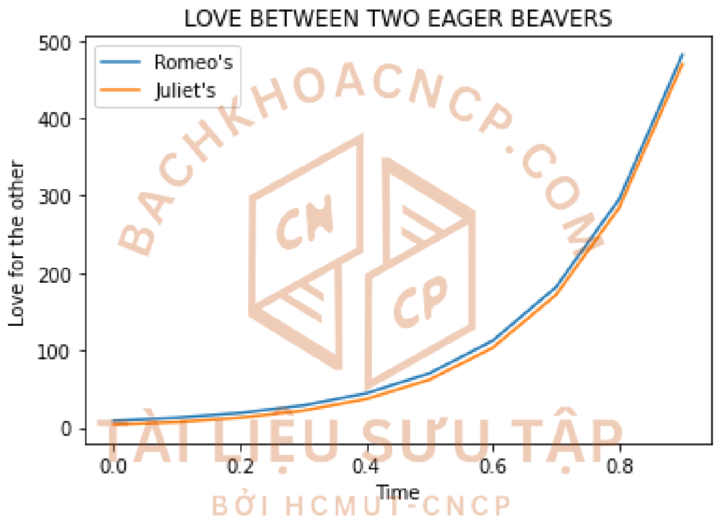
Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{17}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (9 \;\; 4)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 5$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{9}{4}e^t(e^{4t} + 3) + 3e^t(e^{4t} - 1) \\ J = \frac{9}{4}e^t(e^{4t} - 1) + e^t(3e^{4t} + 1) \end{cases} \tag{18}$$

Khi ta xem xét nghiệm (12), vì e^t là hàm mũ, nên khi t càng tăng, $R(t)$ và $J(t)$ tiến đến vô cùng.



Hình 1: Tình yêu giữa hai eager beavers với $R_0 = 9$ và $J_0 = 4$

3.1.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet nhiều hơn mức độ Juliet ghét Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 8 và J(0) = -4.

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J, \\ \dot{J} = R + 4J, \\ R(0) = 8, J(0) = -4 \end{cases} \tag{19}$$

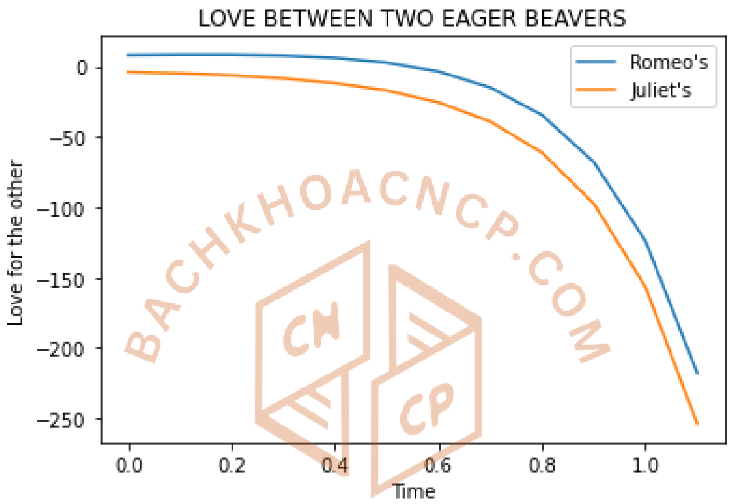
Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{20}$$

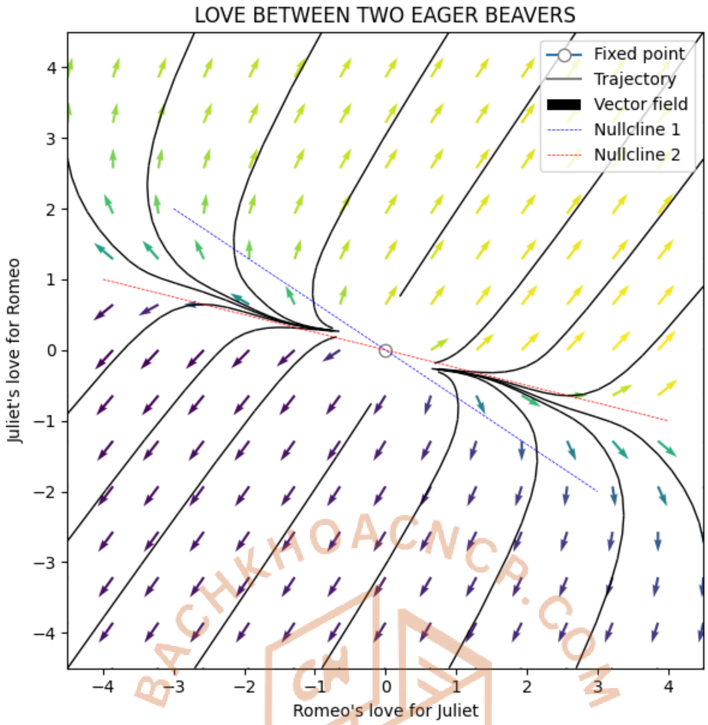
trong đó A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $u = (R \quad J)^T$, và $u_0 = (9 \quad -4)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 5$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 2e^t(e^{4t} + 3) - 3e^t(e^{4t} - 1) \\ J = 2e^t(e^{4t} - 1) - e^t(3e^{4t} + 1) \end{cases} \tag{21}$$

Khi ta xem xét nghiệm (15), dù Romeo yêu Juliet nhiều hơn mức độ mà cô ghét anh nhưng mức độ tình yêu Romeo dành cho Juliet vẫn chưa đủ chân thành để cô chuyển từ ghét thành yêu anh, do đó khi t tiến đến vô cùng, hai người sẽ càng ghét nhau.



Hình 2: Tình yêu giữa hai eager beavers với $R_0 = 8$ và $J_0 = -4$



Hình 3: Chân dung pha của tình yêu giữa hai eager beavers

3.2 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Cautious Love

3.2.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo ghét Juliet nhưng Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = $-\frac{3}{2}$ và J(0) = 2.

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 2J, \\ \dot{J} = 4R - J, \\ R(0) = -\frac{3}{2}, J(0) = 2 \end{cases} \tag{22}$$

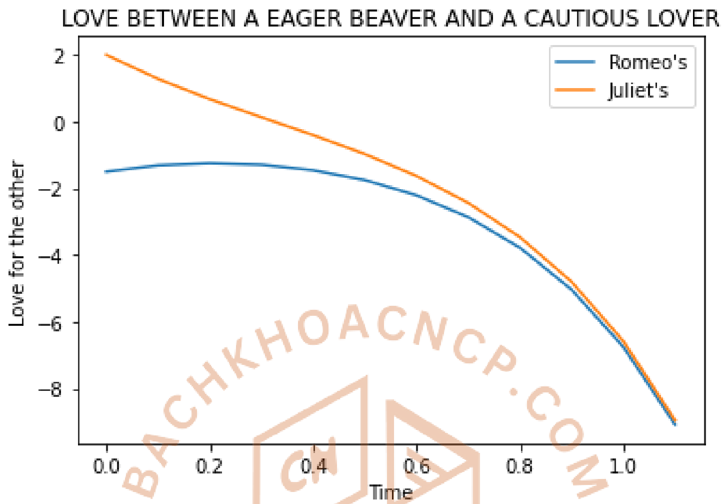
Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{23}$$

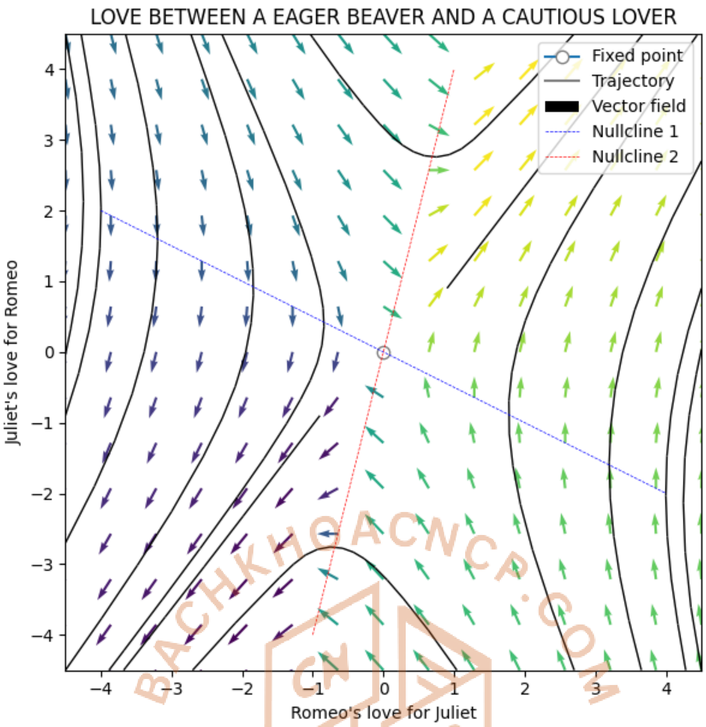
trong đó A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (-\frac{3}{2} \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -3$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = -\frac{1}{2}e^{-3t}(e^{6t} + 1) + \frac{2}{3}e^{-3t}(e^{6t} - 1) \\ J = -e^{-3t}(e^{6t} - 1) + \frac{2}{3}e^{-3t}(e^{6t} + 2) \end{cases} \tag{24}$$

Tại thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, mặc dù Romeo ghét Juliet nhưng tình cảm Romeo dành cho Juliet có xu hướng tăng vì tình yêu Juliet dành cho Romeo nhiều hơn sự ghét của anh dành cho cô ấy, $R'(t_0) > 0$ trong khoảng thời gian ngắn trước khi giảm vì tình cảm của Juliet dành cho Romeo không còn như lúc ban đầu. Điều này là do Juliet yêu Romeo nhưng Romeo lại không yêu Juliet, $J'(t_0) < 0$. Trong trường hợp này, Juliet là một người cautious lover và Romeo là một người eager lover.



Hình 4: Tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover với $R_0 = -\frac{3}{2}$ và $J_0 = 2$



Hình 5: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover

3.2.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet cũng yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 1 và J(0) = 4.

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 3J, \\ \dot{J} = R - J, \\ R(0) = 1, J(0) = 4 \end{cases} \tag{25}$$

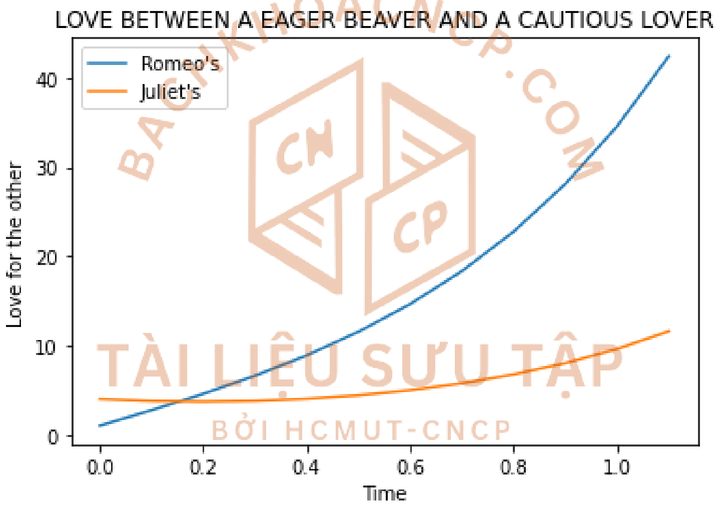
Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{26}$$

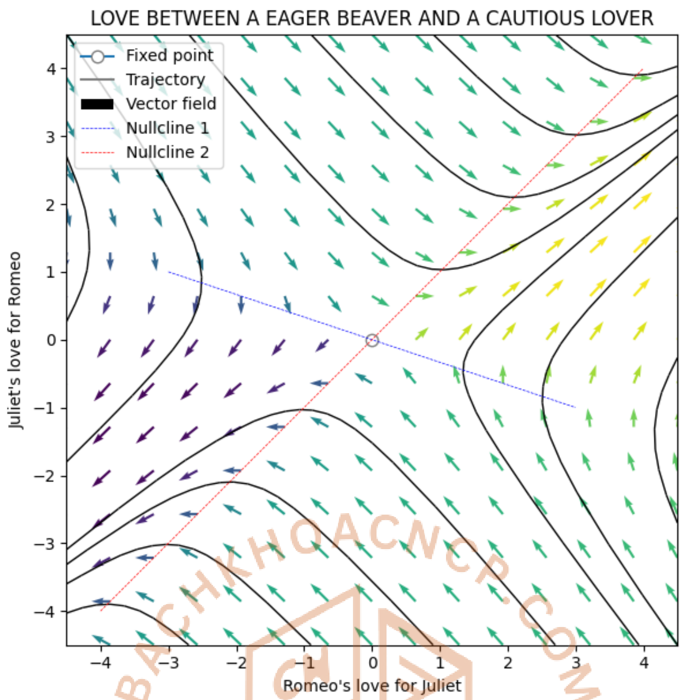
trong đó A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (1 \;\; 4)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = -2$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{1}{4}e^{-2t}(3e^{4t} + 1) + 3e^{-2t}(e^{4t} - 1) \\ J = \frac{1}{4}e^{-2t}(e^{4t} - 1) + e^{-2t}(e^{4t} + 3) \end{cases} \tag{27}$$

Theo định nghĩa, một "eager beaver" được khích lệ với tình yêu của chính bản thân và tình yêu của đối phương dành cho mình, $a > 0$ và $b > 0$, trong khi một "cautious lover" thì trốn tránh tình yêu của chính bản thân nhưng được khích lệ bởi tình yêu của đối phương, $c > 0$ và $d < 0$. Trong ví dụ ta đang xét, mức độ thay đổi tình yêu Romeo dành cho Juliet bằng tổng trọng số tình cảm của Romeo dành cho Juliet và tình cảm của Juliet dành cho Romeo, điều tương tự cho trường hợp của Juliet. Đầu tiên, khi ta phân tích tình yêu Romeo dành cho Juliet trong khoảng thời gian t, tình yêu ấy có xu hướng tăng vì $\dot{R}_t > 0$. Thứ hai, sự thay đổi tình yêu của Juliet dành cho Romeo đúng bằng $R - J$, sự chênh lệnh giữa tình yêu anh ấy dành cho cô và tình yêu cô dành cho anh, đối với toàn thời gian t. Nếu tại một thời điểm cố định t, tình yêu của Romeo dành cho Juliet lớn hơn tình yêu của cô ấy dành cho anh, tình yêu của Juliet đối với Romeo sẽ tăng vì $\dot{J} > 0$. Điều này có nghĩa là Juliet có xu hướng yêu Romeo nếu anh ta yêu Juliet nhiều hơn là cô ấy yêu anh. Ngược lại, nếu Juliet yêu Romeo nhiều hơn anh ta yêu cô, tình yêu đó sẽ vì $\dot{J} < 0$. Trong trường hợp này, Juliet là một người "cautious lover". Trong ví dụ mà ta đang xét, tại thời điểm ban đầu ($t_0 = 0$), tình yêu Romeo dành cho Juliet liên lục tăng vì Romeo là một "eager beaver" và cả hai đều yêu nhau lúc ban đầu. Ngược lại đối với Juliet, tại t_0, tình yêu của cô dành cho Romeo lớn hơn tình yêu anh ấy dành cho cô nên tình cảm đó có xu hướng giảm, nhưng sau đó vì tình cảm của Romeo dành cho cô tăng lên quá nhanh và lớn hơn tình cảm cô dành cho anh nên tình yêu Juliet tăng lên từ đó.



Hình 6: Tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover $R_0 = 1$ và $J_0 = 4$



Hình 7: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver và một cautious lover

3.3 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Narcissistic Nerd

3.3.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, tại thời điểm ta đang xét, Romeo ghét Juliet nhưng Juliet lại yêu Romeo, R(0) = -2 và J(0) = 2.

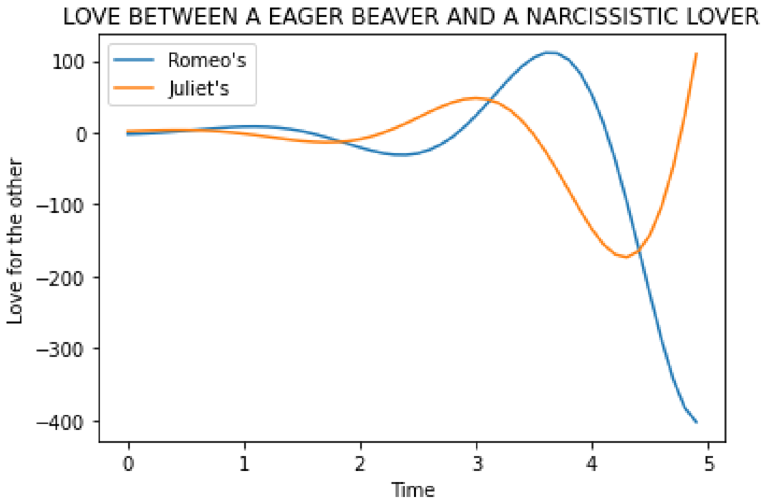
$$\begin{cases} \dot{R} = R + 3J, \\ \dot{J} = -2R + J, \\ R(0) = -2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{28}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

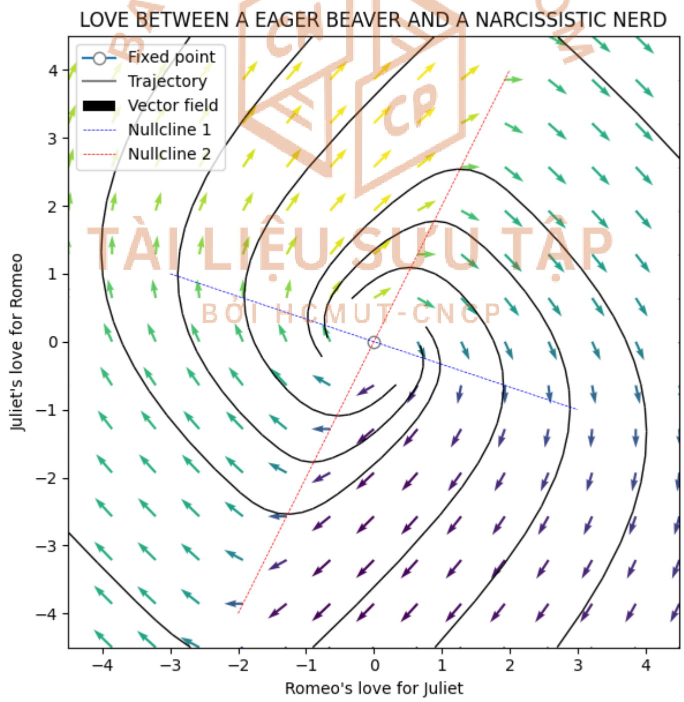
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{29}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (-2 \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 1 + \sqrt{6}i$ và $\lambda_2 = 1 - \sqrt{6}i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \sqrt{\frac{3}{2}} 2e^t \sin(\sqrt{6}t) + -2e^t \cos(\sqrt{6}t) \\ J = 2e^t \cos\sqrt{6}t + 2\sqrt{\frac{2}{3}} e^t \sin\sqrt{6}t \end{cases} \tag{30}$$



Hình 8: Tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd $R_0 = -2$ và $J_0 = 2$



Hình 9: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd

3.3.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, tại thời điểm ta đang xét, Romeo ghét Juliet nhưng Juliet lại yêu Romeo, R(0) = -5 và J(0) = 3.

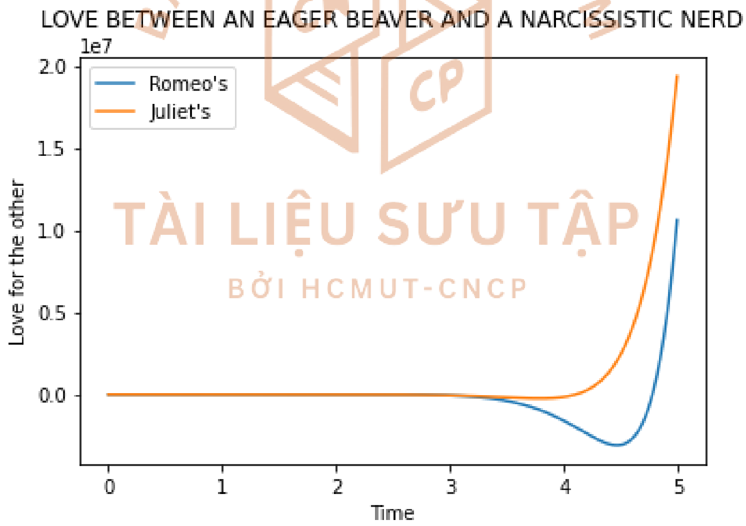
$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J, \\ \dot{J} = -R + 4J, \\ R(0) = -5, J(0) = 3 \end{cases} \tag{31}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

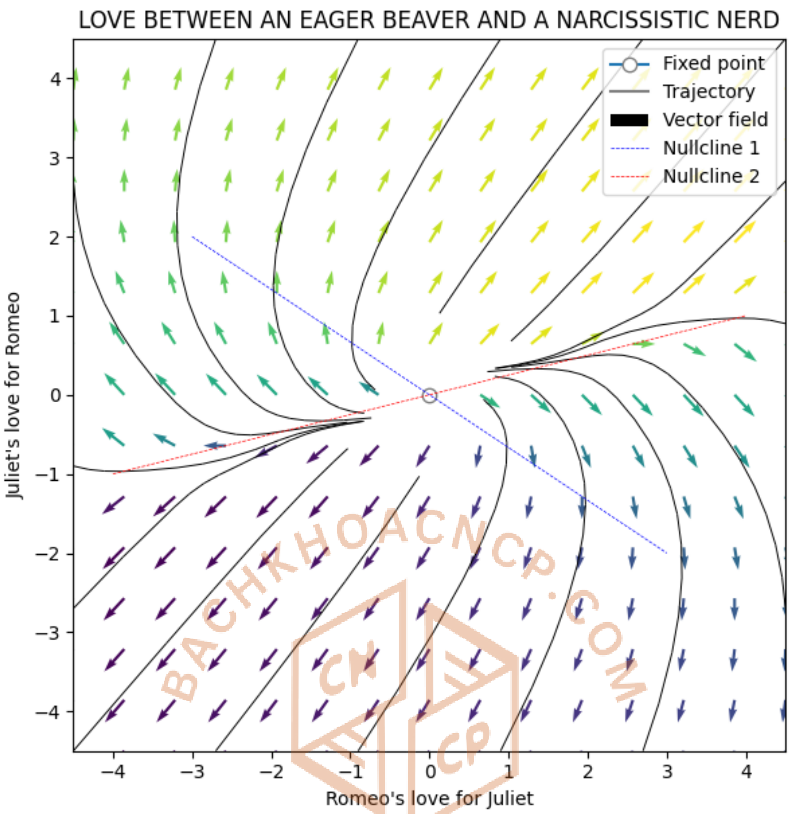
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{32}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $u = (R \ \ J)^T$, và $u_0 = (-5 \ \ 3)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng phức$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}i$ và $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{3t} sin(\sqrt{2}t) - \frac{5}{2} e^{3t} (2cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}sin(\sqrt{2}t)) \\ J = \frac{3}{2} e^{3t} (\sqrt{2}sin(\sqrt{2}t) + 2cos(\sqrt{2}t)) + \frac{5}{\sqrt{2}} e^{3t} sin(\sqrt{2}t) \end{cases} \tag{33}$$



Hình 10: Tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd $R_0 = -5$ và $J_0 = 3$



Hình 11: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một narcissistic nerd

3.4 Tình yêu giữa một Eager Beaver và một Hermit

3.4.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 2 và J(0) = 2.

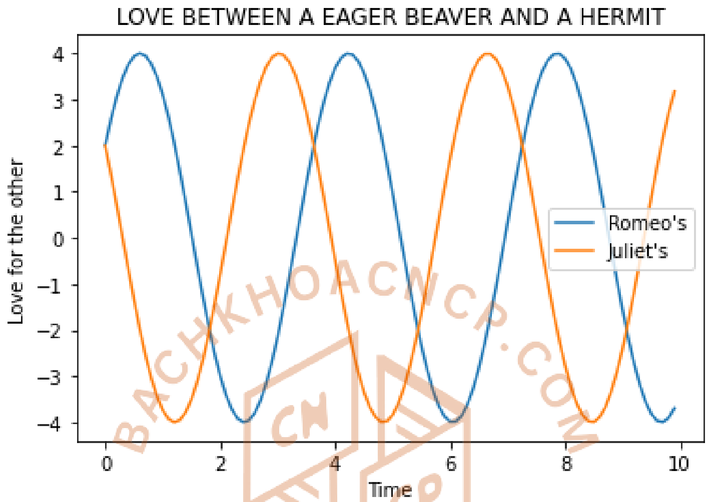
$$\begin{cases} \dot{R} = R + 2J, \\ \dot{J} = -2R - J, \\ R(0) = 2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{34}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

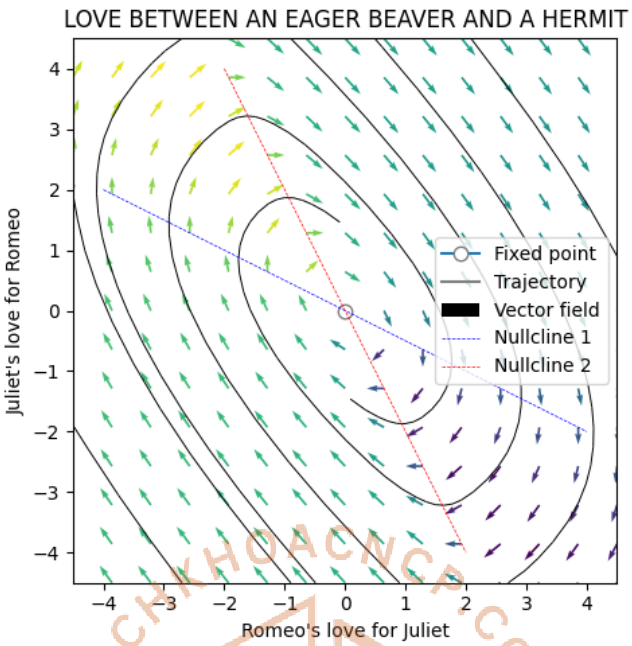
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{35}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \ \ J)^T$, và $u_0 = (2 \ \ 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng phức $\lambda_1 = \sqrt{3}i$ và $\lambda_2 = -\sqrt{3}i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{2}{3}(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + 3\cos(\sqrt{3}t)) \\ J = \frac{2}{3}(3\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)) - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) \end{cases} \tag{36}$$



Hình 12: Tình yêu giữa một eager beaver với một hermit $R_0 = 2$ và $J_0 = 2$



Hình 13: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một hermit

3.4.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo ghét Juliet và Juliet cũng ghét Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = -2 và J(0) = -4.

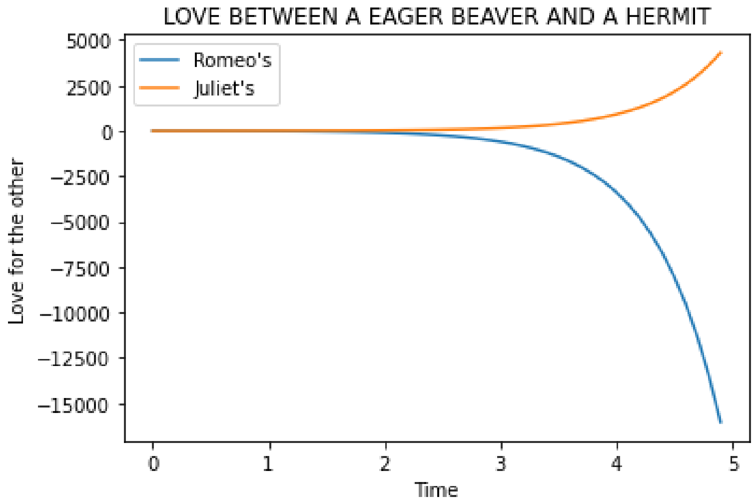
$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + J, \\ \dot{J} = -R - 2J, \\ R(0) = -2, J(0) = -4 \end{cases} \tag{37}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

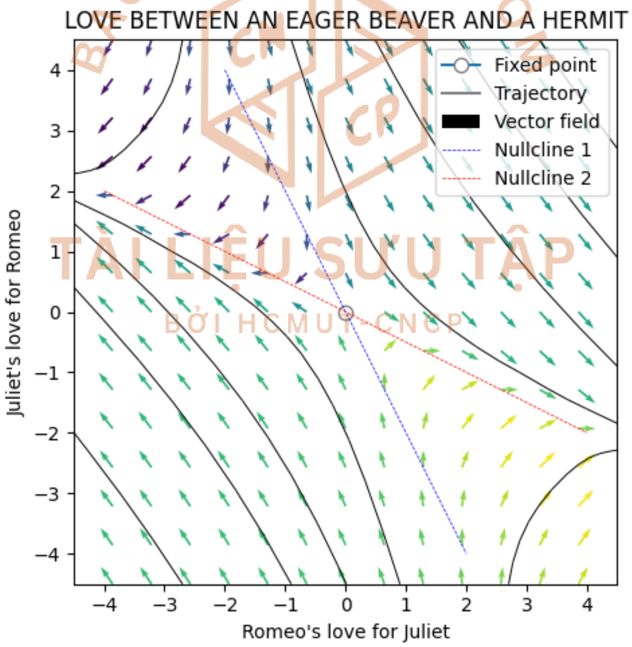
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{38}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $u = (R \quad J)^T$, và $u_0 = (-2 \quad -4)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = \sqrt{3}$ và $\lambda_2 = -\sqrt{3}$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{-1}{3} e^{-\sqrt{3}t}((3 + 2\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}t} + 3 - 2\sqrt{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}(e^{2\sqrt{3}t} - 1) \\ J = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}(e^{2\sqrt{3}t} - 1) + \frac{2}{3} e^{-\sqrt{3}t}((2\sqrt{3} - 3)e^{2\sqrt{3}t} - 3 - 2\sqrt{3}) \end{cases} \tag{39}$$



Hình 14: Tình yêu giữa một eager beaver với một hermit $R_0 = -2$ và $J_0 = -4$



Hình 15: Chân dung pha của tình yêu giữa một eager beaver với một hermit

3.5 Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Cautious Lover

3.5.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 2 và J(0) = 3.

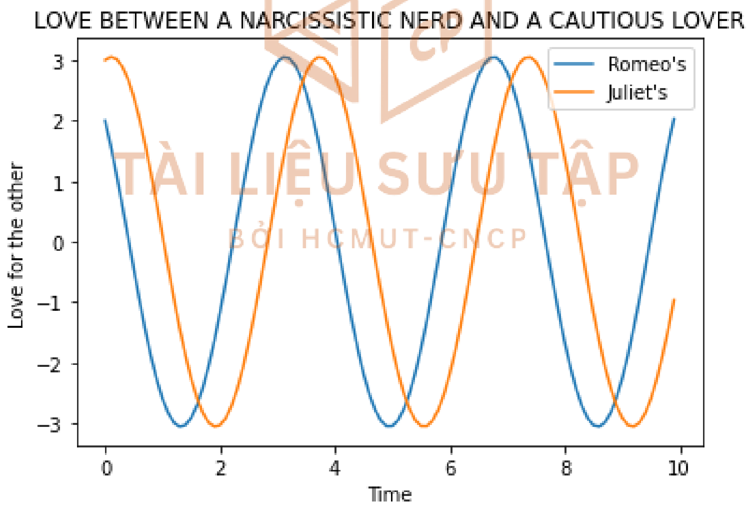
$$\begin{cases} \dot{R} = R - 2J, \\ \dot{J} = 2R - J, \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{40}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

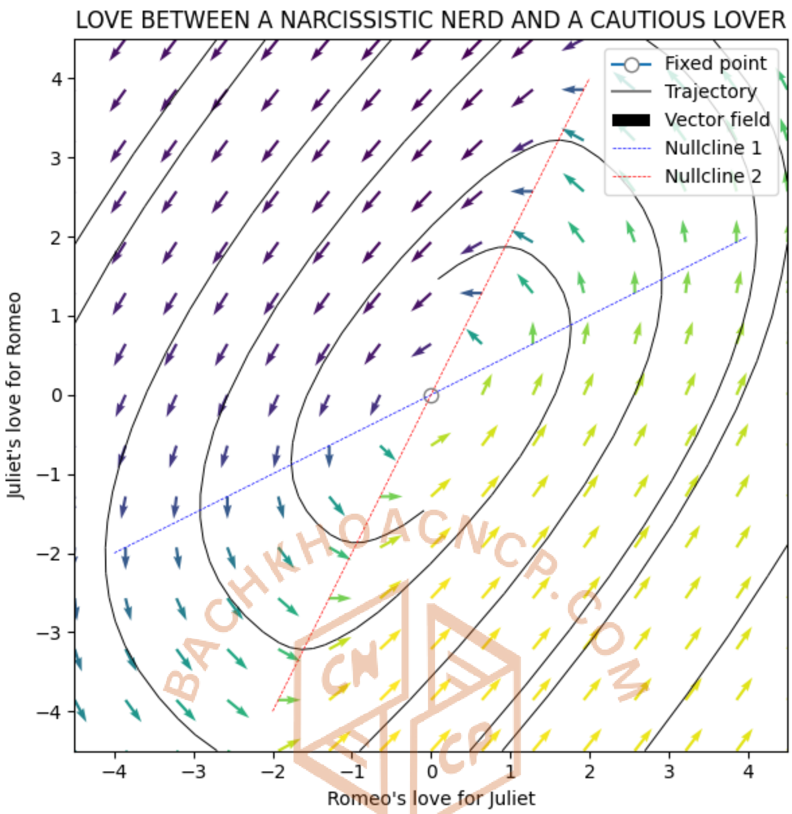
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{41}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (2 \;\; 3)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng phức $\lambda_1 = \sqrt{3}i$ và $\lambda_2 = -\sqrt{3}i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{2}{3}(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + 3\cos(\sqrt{3}t)) - \frac{6}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) \\ J = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) + 3\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{cases} \tag{42}$$



Hình 16: Tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover $R_0 = 2$ và $J_0 = 3$



Hình 17: Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover

3.5.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 5 và J(0) = 1.

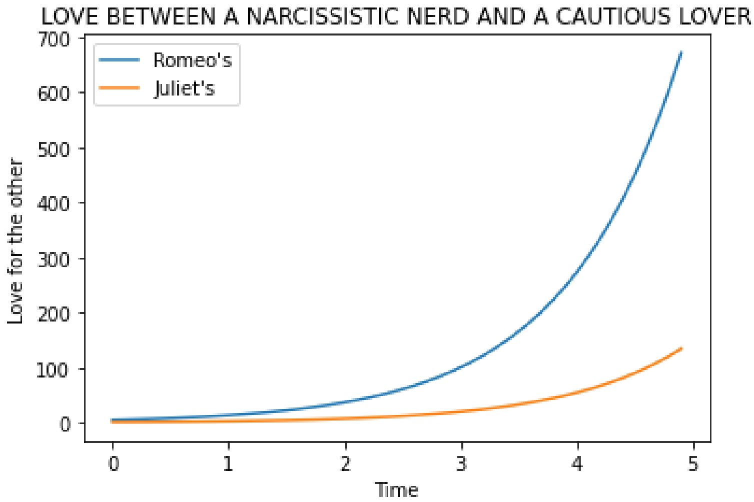
$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - 5J, \\ \dot{J} = R - 4J, \\ R(0) = 5, J(0) = 1 \end{cases} \tag{43}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

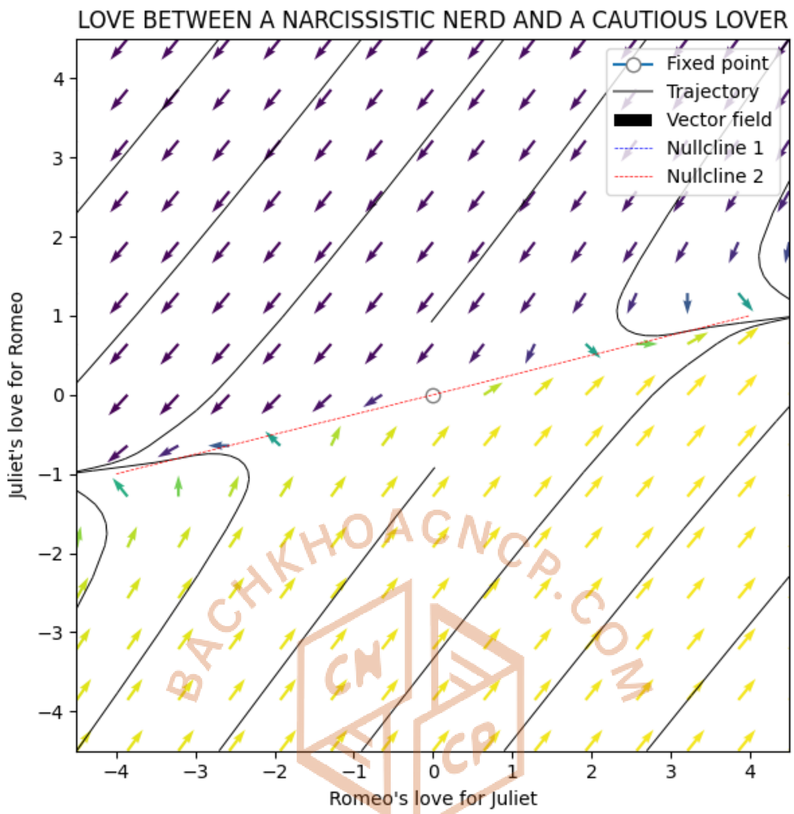
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{44}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (2 \;\; 3)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -3$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{5}{4}e^{-3t}(5e^{4t} - 1) - \frac{5}{4}e^{-3t}(e^{4t} - 1) \\ J = \frac{5}{4}e^{-3t}(e^{4t} - 1) - \frac{1}{4}e^{-3t}(e^{4t} - 5) \end{cases} \tag{45}$$



Hình 18: Tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover $R_0 = 5$ và $J_0 = 1$



Hình 19: Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd với một cautious lover

3.6 Tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd

3.6.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 4 và J(0) = 2.

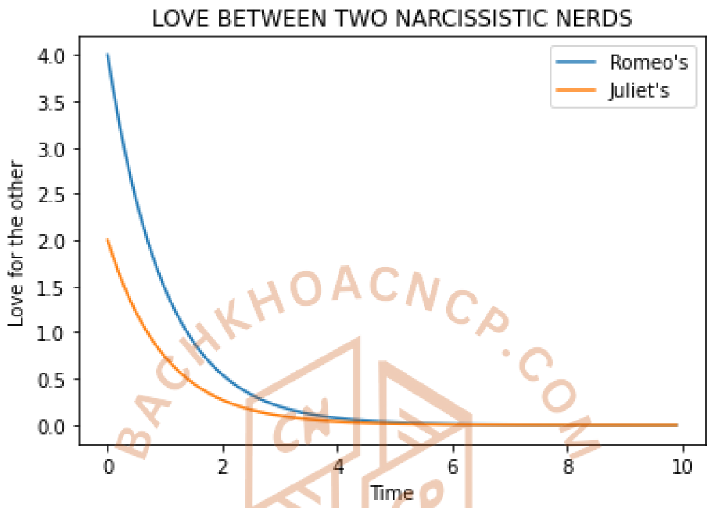
$$\begin{cases} \dot{R} = R - 4J, \\ \dot{J} = -R + J, \\ R(0) = 4, J(0) = 2 \end{cases} \tag{46}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

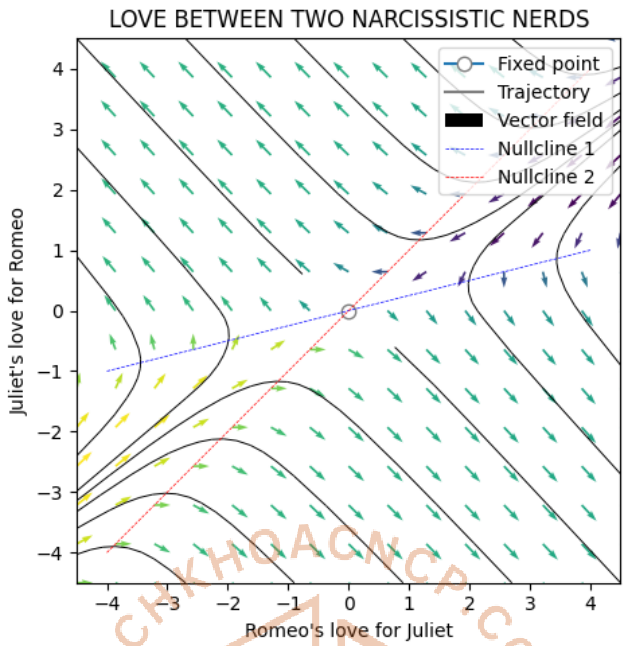
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{47}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (4 \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -1$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 2e^{-t}(e^{4t}+1) - 2e^{-t}(e^{4t}-1) \\ J = e^{-t}(e^{4t}+1) - e^{-t}(e^{4t}-1) \end{cases} \tag{48}$$



Hình 20: Tình yêu giữa hai narcissistic nerds $R_0 = 4$ và $J_0 = 2$



Hình 21: Chân dung pha của tình yêu giữa hai narcissistic nerd

3.6.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo ghét Juliet và Juliet ghét Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = -5 và J(0) = -4.

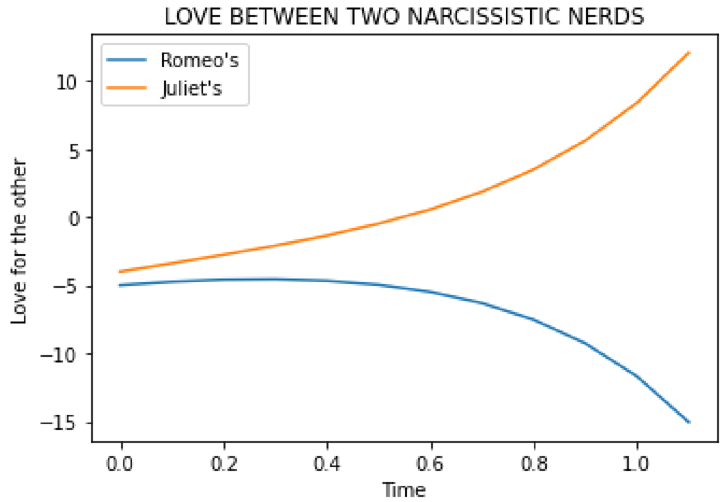
$$\begin{cases} \dot{R} = R - 2J, \\ \dot{J} = -2R + J, \\ R(0) = -5, J(0) = -4 \end{cases} \tag{49}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

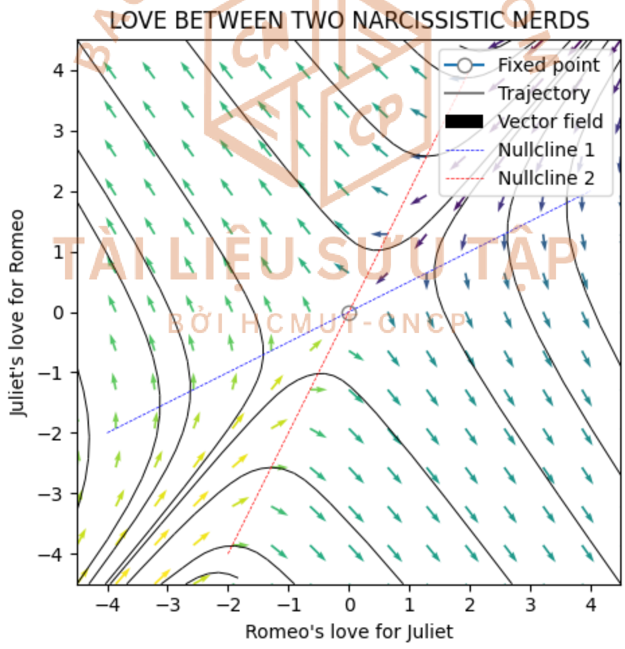
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{50}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (R \quad J)^T$, và $u_0 = (-5 \quad -4)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -1$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = \frac{-5}{2}e^{-t}(e^{4t} + 1) + 2e^{-t}(e^{4t} - 1) \\ J = -2e^{-t}(e^{4t} + 1) + \frac{5}{2}e^{-t}(e^{4t} - 1) \end{cases} \tag{51}$$



Hình 22: Tình yêu giữa hai narcissistic nerds $R_0 = -5$ và $J_0 = -4$



Hình 23: Chân dung pha của tình yêu giữa hai narcissistic nerd

3.7 Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Hermit

3.7.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 5 và J(0) = 5.

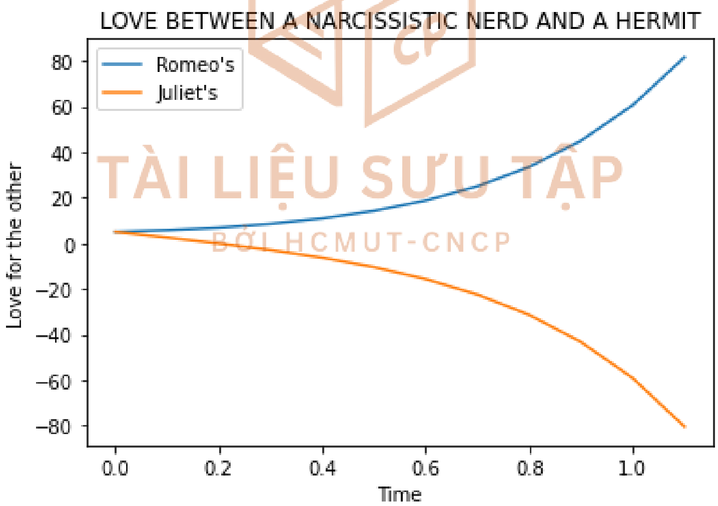
$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J, \\ \dot{J} = -4R - J, \\ R(0) = 5, J(0) = 5 \end{cases} \tag{52}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

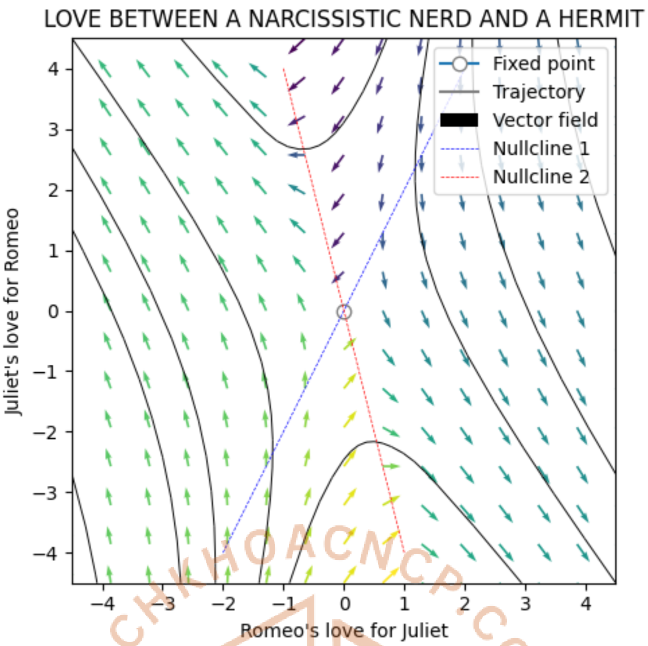
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{53}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (5 \;\; 5)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -2$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = e^{-2t}(4e^{5t} + 1) - e^{-2t}(e^{5t} - 1) \\ J = e^{-2t}(e^{5t} + 4) - 4e^{-2t}(e^{5t} - 1) \end{cases} \tag{54}$$



Hình 24: Tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit $R_0 = 5$ và $J_0 = 5$



Hình 25: Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit

3.7.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = -11 và J(0) = -11.

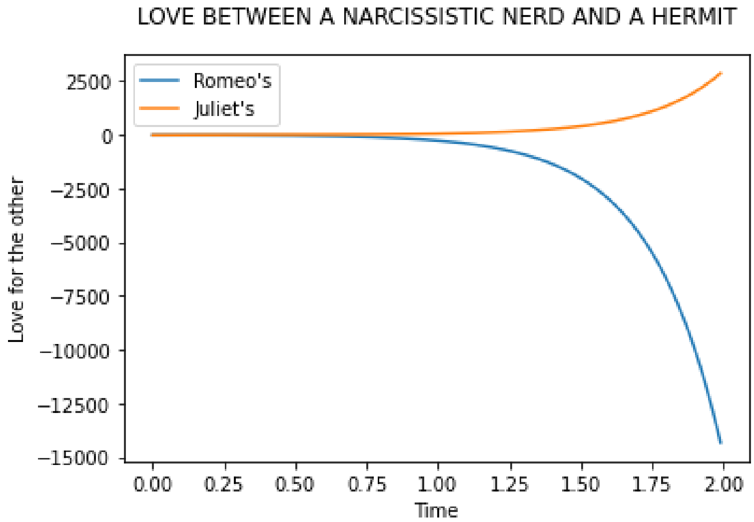
$$\begin{cases} \dot{R} = 3R - 5J, \\ \dot{J} = -2R - 6J, \\ R(0) = -11, J(0) = -11 \end{cases} \tag{55}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

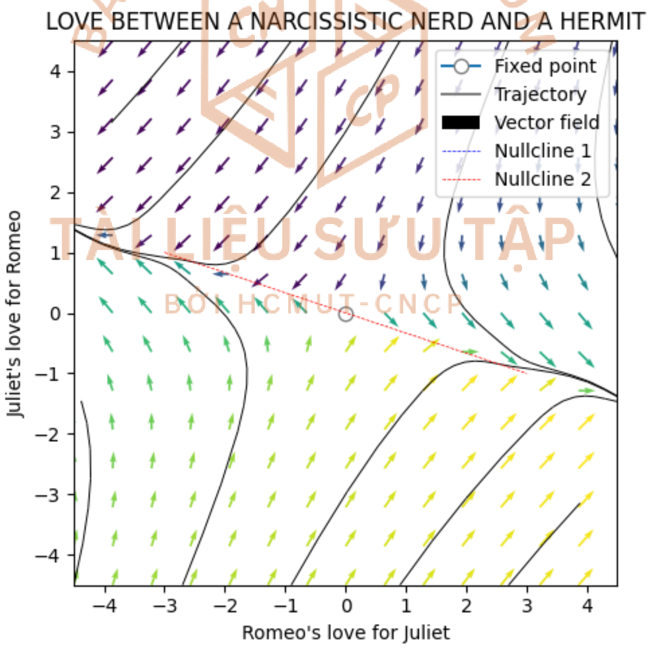
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{56}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, $u = (R \quad J)^T$, và $u_0 = (-11 \quad -11)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 4$ và $\lambda_2 = -7$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = -e^{-7t}(10e^{11t} + 1) + 5e^{-7t}(e^{11t} - 1) \\ J = -e^{-7t}(e^{11t} + 10) + 2e^{-7t}(e^{11t} - 1) \end{cases} \tag{57}$$



Hình 26: Tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit $R_0 = -11$ và $J_0 = -11$



Hình 27: Chân dung pha của tình yêu giữa một narcissistic nerd và một hermit

3.8 Tình yêu giữa hai Cautious Lovers

3.8.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 4 và J(0) = 6.

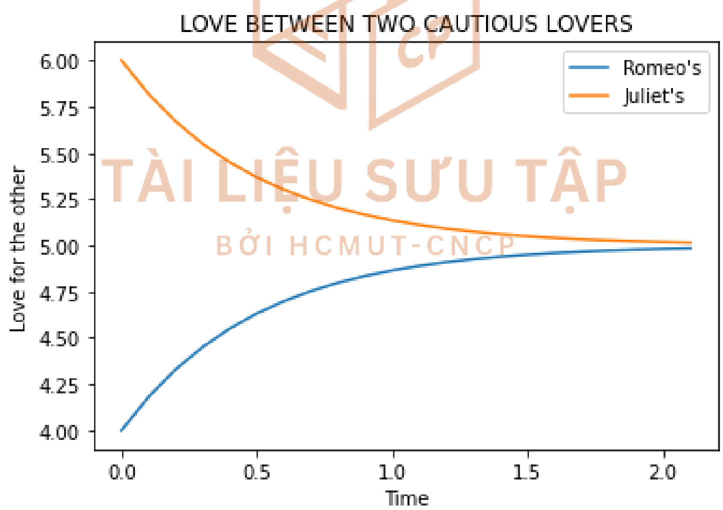
$$\begin{cases} \dot{R} = -R + J, \\ \dot{J} = R - J, \\ R(0) = 4, J(0) = 6 \end{cases} \tag{58}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

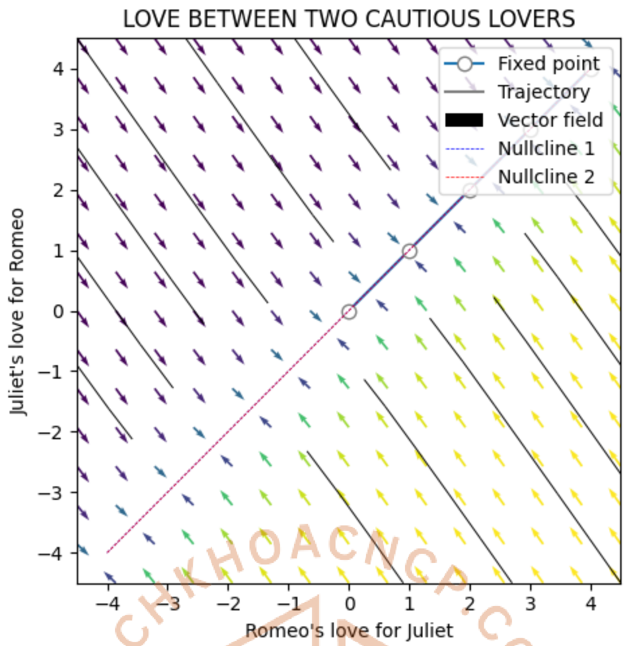
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{59}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (4 \;\; 6)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = -2$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 2e^{-2t}(e^{2t} + 1) + 3e^{-2t}(e^{2t} - 1) \\ J = 2e^{-2t}(e^{2t} - 1) + 3e^{-2t}(e^{2t} + 1) \end{cases} \tag{60}$$



Hình 28: Tình yêu giữa hai cautious lovers $R_0 = 4$ và $J_0 = 6$



Hình 29: Chân dung pha của tình yêu giữa hai cautious lovers

3.8.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo ghét Juliet và Juliet ghét Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = -4 và J(0) = -6.

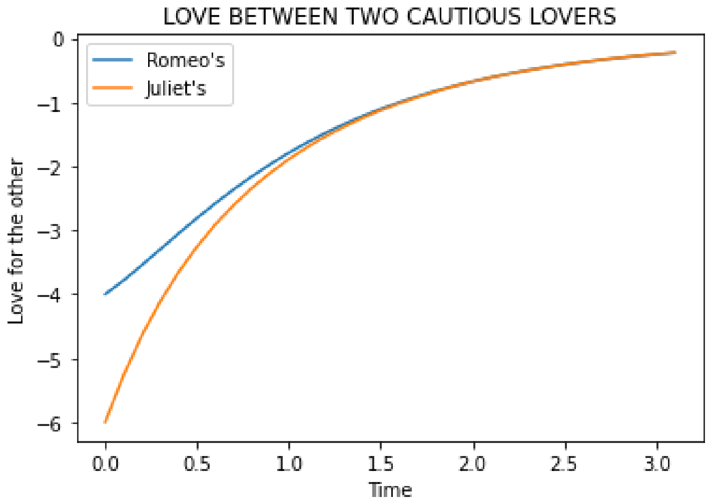
$$\begin{cases} \dot{R} = -2R + J, \\ \dot{J} = R - 2J, \\ R(0) = -4, J(0) = -6 \end{cases} \tag{61}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

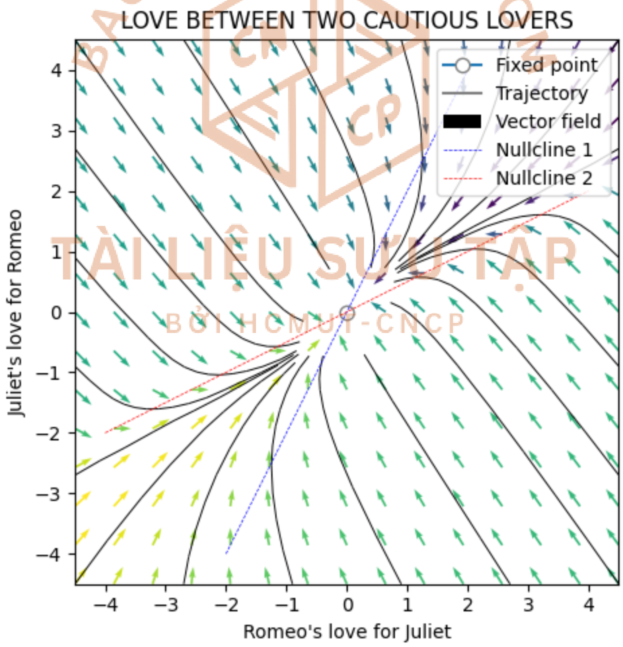
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{62}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $u = (R \quad J)^T$, và $u_0 = (-4 \quad -6)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -3$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = -2e^{-3t}(e^{2t} + 1) - 3e^{-3t}(e^{2t} - 1) \\ J = -2e^{-3t}(e^{2t} - 1) - 3e^{-3t}(e^{2t} + 1) \end{cases} \tag{63}$$



Hình 30: Tình yêu giữa hai cautious lovers $R_0 = -4$ và $J_0 = -6$



Hình 31: Chân dung pha của tình yêu giữa hai cautious lovers

3.9 Tình yêu giữa một Cautious Lover và một Hermit

3.9.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 4 và J(0) = 2.

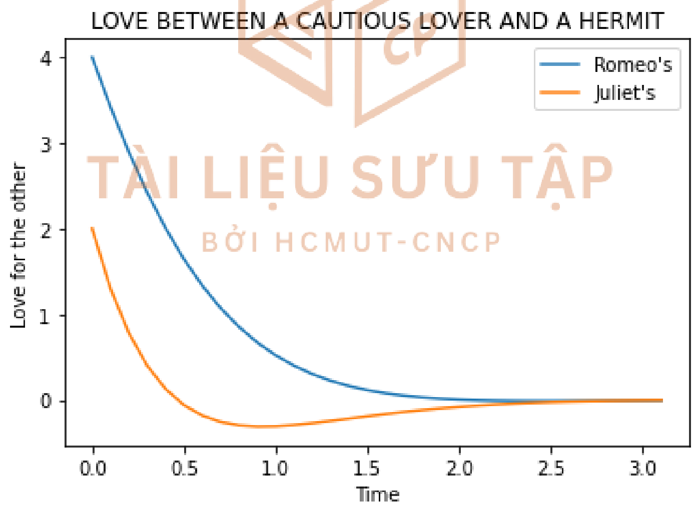
$$\begin{cases} \dot{R} = -2R + J, \\ \dot{J} = -R - 2J, \\ R(0) = 4, J(0) = 2 \end{cases} \tag{64}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

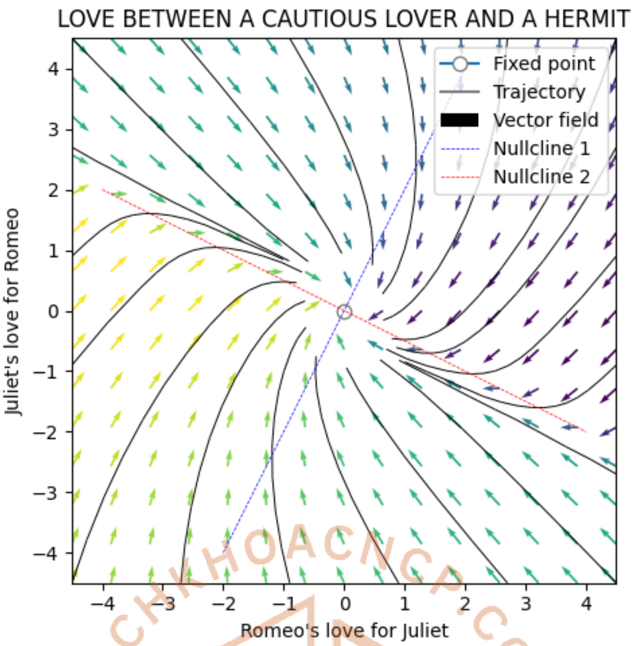
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{65}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (4 \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng phức $\lambda_1 = -2 + i$ và $\lambda_2 = -2 - i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 2e^{-2t}sin(t) + 4e^{-2t}cos(t) \\ J = 2e^{-2t}cos(t) - 4e^{-2t}sin(t) \end{cases} \tag{66}$$



Hình 32: Tình yêu giữa một cautious lover và một hermit $R_0 = 4$ và $J_0 = 2$



Hình 33: Chân dung pha của tình yêu giữa một cautious lover và một hermit

3.9.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 2 và J(0) = 2.

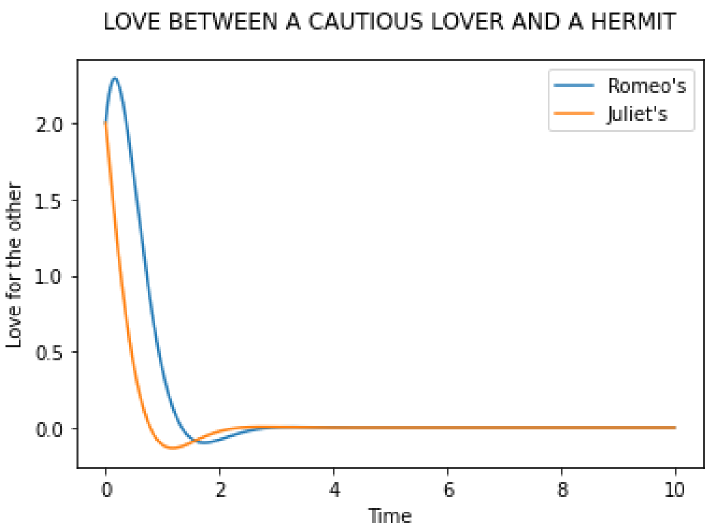
$$\begin{cases} \dot{R} = -3R + 5J, \\ \dot{J} = -R - J, \\ R(0) = 2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{67}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

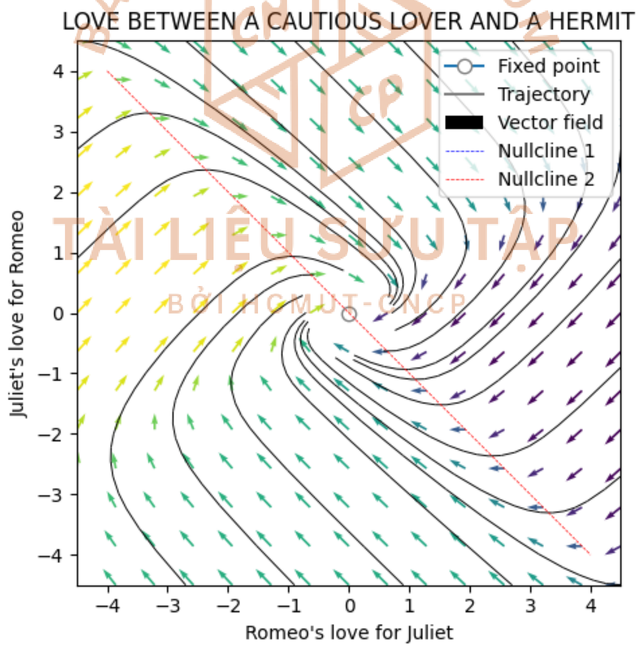
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{68}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (2 \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng phức $\lambda_1 = -2 + 2i$ và $\lambda_2 = -2 - 2i$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 5e^{-2t}sin(2t) + e^{-2t}(2cos(2t) - sin(2t)) \\ J = e^{-2t}(sin(2t) + 2cos(2t)) - e^{-2t}sin(2t) \end{cases} \tag{69}$$



Hình 34: Tình yêu giữa một cautious lover và một hermit $R_0 = 2$ và $J_0 = 2$



Hình 35: Chân dung pha của tình yêu giữa một cautious lover và một hermit

3.10 Tình yêu giữa hai Hermits

3.10.1 Ví dụ 1

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 6 và J(0) = 3.

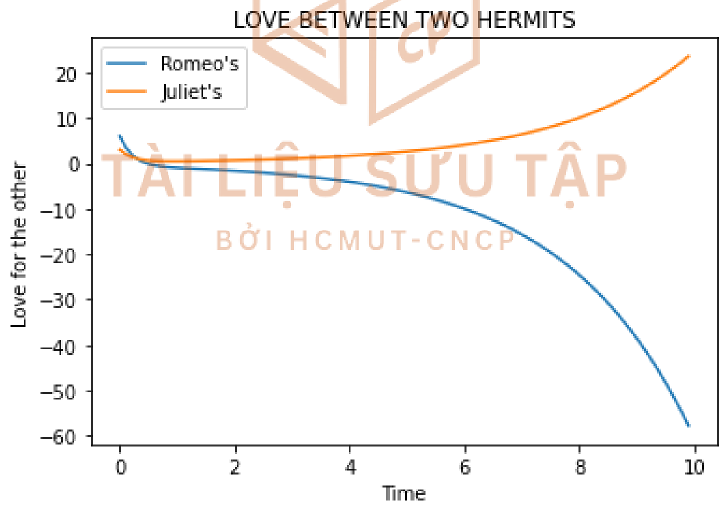
$$\begin{cases} \dot{R} = -2R - 6J, \\ \dot{J} = -R - 2J, \\ R(0) = 6, J(0) = 3 \end{cases} \tag{70}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

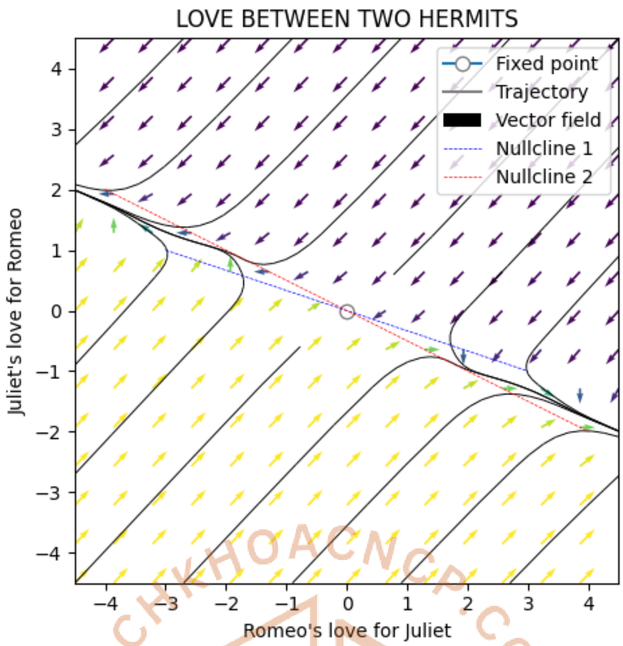
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{71}$$

trong đó A $= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (6 \;\; 3)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = -2 + \sqrt{6}$ và $\lambda_2 = -2 - \sqrt{6}$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 3e^{-(2+\sqrt{6})t}(e^{2\sqrt{6}t} + 1) - \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-(2+\sqrt{6})t}(e^{2\sqrt{6}t} - 1) \\ J = \frac{3}{2}e^{-(2+\sqrt{6})t}(e^{2\sqrt{6}t} + 1) - \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-(2+\sqrt{6})t}(e^{2\sqrt{6}t} - 1) \end{cases} \tag{72}$$



Hình 36: Tình yêu giữa hai hermit $R_0 = 6$ và $J_0 = 3$



Hình 37: Chân dung pha của tình yêu giữa hai hermits

3.10.2 Ví dụ 2

Trong ví dụ này, Romeo yêu Juliet và Juliet yêu Romeo tại thời điểm ta đang xét, R(0) = 24 và J(0) = 20.

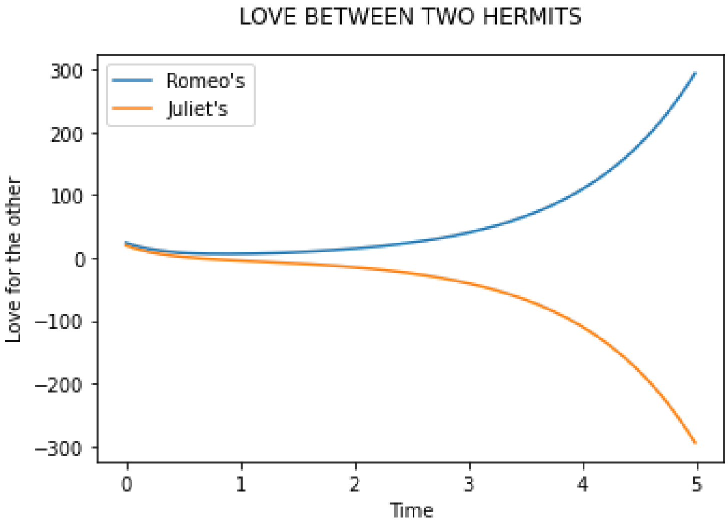
$$\begin{cases} \dot{R} = -R - 2J, \\ \dot{J} = -2R - J, \\ R(0) = 24, J(0) = 20 \end{cases} \tag{73}$$

Để tìm nghiệm, ta cần phải chuyển hệ sang dạng vector

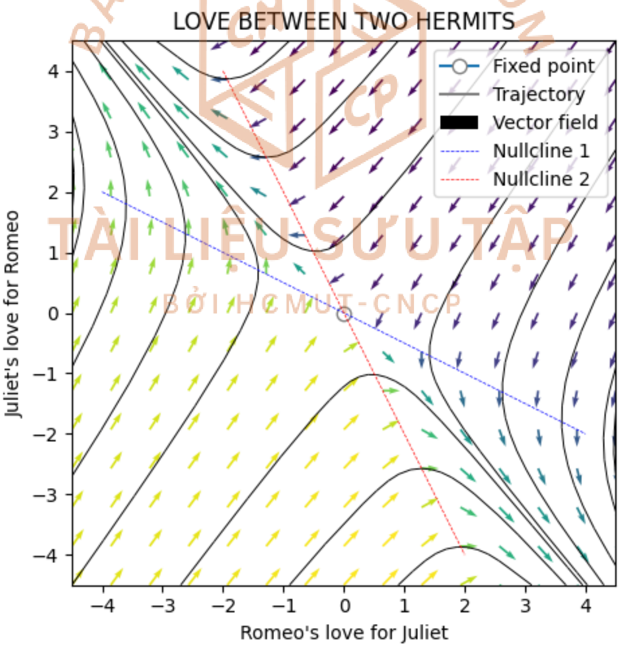
$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{74}$$

trong đó A = $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $u = (R \;\; J)^T$, và $u_0 = (4 \;\; 2)^T$. T thể hiện ký hiệu chuyển vị. Ma trận A có 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -3$. Khi đó, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R = 12e^{-3t}(e^{4t} + 1) - 10e^{-3t}(e^{4t} - 1) \\ J = 10e^{-3t}(e^{4t} + 1) - 12e^{-3t}(e^{4t} - 1) \end{cases} \tag{75}$$



Hình 38: Tình yêu giữa hai hermit $R_0 = 24$ và $J_0 = 20$



Hình 39: Chân dung pha của tình yêu giữa hai hermits

4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là trường hợp hàm $b(t)$ của hệ (7) có các hệ số khác không. Tổng quát hơn thì $b(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng vector $\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$.
Ví dụ hệ sau là một hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x + \sin t \\ \dot{y}(t) = -y + t \end{cases}$$

Hệ trên cũng có thể biểu diễn dưới dạng vector như sau:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Quay trở lại bài toán của chúng ta, Romeo và Juliet sống trong xã hội nên không tránh khỏi sự ảnh hưởng của các yếu tố tự nhiên và xã hội tác động đến họ và tình yêu của hai người họ. Ở đây ta xét trường hợp đơn giản, các yếu tố ngoại cảnh ảnh hưởng đến tình yêu của họ có thể biểu diễn dưới dạng một hàm số biến thiên theo thời gian t, làm cho hệ (9) biểu diễn sự biến thiên tình yêu của họ trở nên không thuần nhất:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t) \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{76}$$

Đặt $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}, u_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$, thì hệ (11) trở thành:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au + b(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{77}$$

Để tìm nghiệm cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với giá trị ban đầu được cho, ta thực hiện các bước sau:

1. Tìm nghiệm tổng quát $u_c(t) = \Phi(t)c$ của phương trình thuần nhất $\dot{u}(t) = Au(t)$, với $\Phi(t)$ là ma trận cơ sở của hệ.
2. Tìm nghiệm riêng u_p của $\dot{u}(t) = Au(t)$.
3. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$. Sử dụng điều kiện $u(0) = u_0$ để tìm hệ số cho vector hệ số c của phương trình

Hai định lí sau sẽ giúp ta tìm được một nghiệm cụ thể của bài toán dựa vào ma trận cơ sở $\Phi(t)$:
Định lí 4.1. *Gọi $\Phi(t)$ là ma trận cơ sở của $\dot{u}(t) = Au(t)$, một nghiệm riêng của $\dot{u}(t) = Au(t) + b(t)$ như sau:*

$$u_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) dt$$

Định lí 4.2. *Nếu $\Phi(t)$ là ma trận cơ sở của $\dot{u}(t) = Au(t)$, và $u_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) dt$, thì khi đó $u(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)(u_0 - u_p(0)) + u_p(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất có giá trị ban đầu,*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t), u(0) = u_0$$

Do đó, để nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất tồn tại, thì $\Phi(t)$ phải khả nghịch tức $\det\Phi(t) \neq 0$ và $\Phi(t)^{-1}b(t)$ khả tích. Thông thường thì điều kiện cần để một hàm số khả tích là nó phải liên tục trong một khoảng nào đó, nếu có các điểm gián đoạn thì số điểm đó phải hữu hạn. Tuy nhiên một số hàm số sơ cấp liên tục đôi khi không thể lấy được tích phân ra một hàm số sơ cấp khác, ví dụ như hàm số $f(x) = e^{-x^2}$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng nguyên hàm của nó thì không thể biểu diễn dưới dạng một hàm sơ cấp, mà phải biểu diễn dưới dạng một chuỗi vô hạn (xem thêm về **hàm Liouvillian**). Trong bài viết này ta tạm xem những hàm số như vậy sẽ làm cho bài toán vô nghiệm.
Ngoài hai định lí lên, chúng ta còn có hai phương pháp thông dụng để giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất, đó là phương pháp **biến thiên hằng số** và phương pháp **hệ số bất định**. Phương pháp hệ số bất định giải quyết bài toán bằng cách đưa ra một nghiệm thử một cách tổng quát nhất phù hợp với phương trình, đó là các hàm số sơ cấp. Hàm số sơ cấp là các hàm đa thức, hàm lũy thừa (x^α), hàm mũ (α^x), hàm logarit, hàm lượng giác và hàm lượng giác ngược, hàm hyperbol và hyperbol ngược, và tất cả các hàm số có được từ những hàm này nhờ năm phép tính cộng, trừ, nhân, chia, và hợp thành. Ví dụ hàm sau là một hàm số sơ cấp:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\sin 2x}$$

$b_i(t)$	**Nghiệm thử tương ứng**
Hằng số $c \neq 0$	Hằng số K
$P_n(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$	$Q_n(t) = c_nt^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1t + c_0$
ce^{at}	Ke^{at}
$a\cos rt + b\sin rt$	$\alpha\cos rt + \beta\sin rt$
$e^{Rt}(a\cos rt + b\sin rt)$	$e^{Rt}(\alpha\cos rt + \beta\sin rt)$
$P_n(t)e^{at}$	$Q_n(t)e^{at}$

Bảng 4: Các nghiệm thử để tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất

Dựa vào bảng 1 thì ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình không thuần nhất bằng cách đối chiếu phần không thuần nhất của phương trình đối với bảng, sau đó dùng kết quả đã đối chiếu với bảng thay ngược vào phương trình, cuối cùng thì cân bằng các hệ số các hạng tử vế trái và vế phải hàm số để tìm được nghiệm cuối cùng. Sau đây là một số ví dụ minh họa:

4.1 Ví dụ 1

Tình yêu giữa Romeo & Juliet ngoài phụ thuộc vào nhau như **ví dụ 3.1.1**, tình yêu của họ còn tăng thêm một lượng tuyến tính theo thời gian t như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J + t, \\ \dot{J} = R + 4J + 2t, \\ R(0) = 9, J(0) = 4 \end{cases}$$

Từ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, ta dễ dàng tìm được 2 trị riêng thực $\lambda_1 = 5$ và $\lambda_2 = 1$, và 2 vector riêng $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ và $P_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$ lần lượt ứng với hai trị riêng λ_1 và λ_2, do đó ma trận cơ sở

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & -3e^{t} \\ e^{5t} & e^{t} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, suy ra nghiệm tổng quát của hệ là:

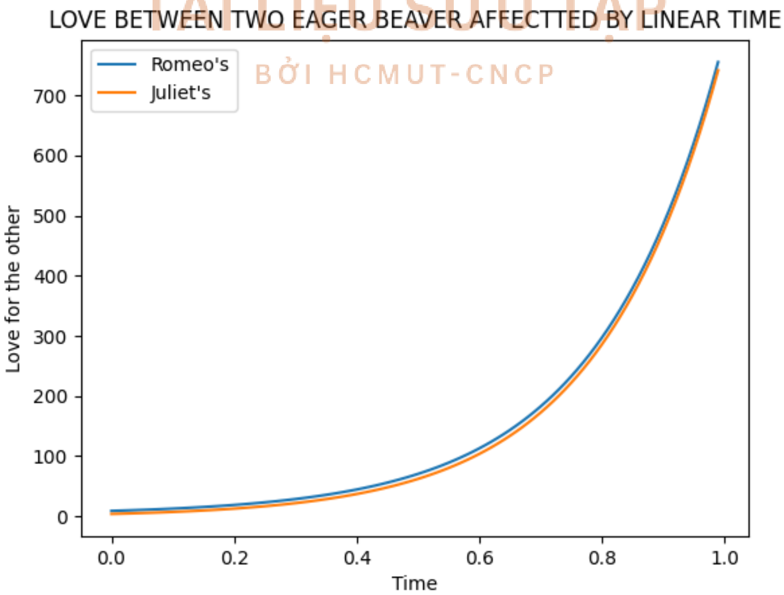
$$u_c = \begin{pmatrix} \dfrac{15e^{t} + 21e^{5t}}{4} \\ \dfrac{-5e^{t} + 21e^{5t}}{4} \end{pmatrix}$$

Sử dụng **Wolfram Alpha** ta tìm được $u_p = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}b(t)dt = \begin{pmatrix} -\dfrac{11}{25}t - \dfrac{41}{125} \\ -\dfrac{1}{25}t + \dfrac{9}{125} \end{pmatrix}$. Cho nên $\Phi(t)\Phi^{-1}(0)(u_0 - u_p(0)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{5t} & -3e^{t} \\ e^{5t} & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{41}{125} \\ \frac{9}{125} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2025e^{x}+2639e^{5x}}{500} \\ \frac{-675e^{x}+2639e^{5x}}{500} \end{pmatrix}$.
Và do đó nghiệm của bài toán là $u(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)(u_0 - u_p(0)) + u_p(t) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2025e^{x}+2639e^{5x}}{500} - \dfrac{11}{25}t - \dfrac{41}{125} \\ \frac{-675e^{x}+2639e^{5x}}{500} - \dfrac{1}{25}t + \dfrac{9}{125} \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ trên là:

$$\begin{cases} R = \frac{2025e^{x}+2639e^{5x}}{500} - \dfrac{11}{25}t - \dfrac{41}{125} \\ J = \frac{-675e^{x}+2639e^{5x}}{500} - \dfrac{1}{25}t + \dfrac{9}{125} \end{cases}$$



Hình 40: Tình yêu giữa hai eager beavers bị ảnh hưởng bởi thời gian tuyến tính

4.2 Ví dụ 2

Tình yêu giữa Romeo & Juliet ngoài được miêu tả như ở **ví dụ 3.3.1**, tình yêu của họ còn phụ thuộc vào thời gian đa thức như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 3J - t^2, \\ \dot{J} = -2R + J + t^3, \\ R(0) = -2, J(0) = 2 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, hai trị riêng phức của A là $\lambda_1 = 1 + \sqrt{6}i, \lambda_2 = 1 - \sqrt{6}i$, hai vector riêng tương ứng với hai trị riêng đó là $P_1 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$. Suy ra ma trận cơ sở của hệ là:

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cos\left(\sqrt{6}t\right) - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\sin\left(\sqrt{6}t\right) & \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cos\left(\sqrt{6}t\right) - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\sin\left(\sqrt{6}t\right) \\ \cos\left(\sqrt{6}t\right) - \sin\left(\sqrt{6}t\right) & \cos\left(\sqrt{6}t\right) + \sin\left(\sqrt{6}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\tfrac{3}{2}} & \sqrt{\tfrac{3}{2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{-t}t^2(\sin\sqrt{6}t + \cos\sqrt{6}t)}{-\sqrt{6}\sin^2\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos^2\sqrt{6}t} & \dfrac{e^{-t}t^2\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\sin\sqrt{6}t - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cos\sqrt{6}t\right)}{-\sqrt{6}\sin^2\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos^2\sqrt{6}t} \\ \dfrac{e^{-t}t^3(\sin\sqrt{6}t - \cos\sqrt{6}t)}{-\sqrt{6}\sin^2\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos^2\sqrt{6}t} & \dfrac{e^{-t}t^3\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\sin\sqrt{6}t - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cos\sqrt{6}t\right)}{-\sqrt{6}\sin^2\sqrt{6}t - \sqrt{6}\cos^2\sqrt{6}t} \end{pmatrix}$$

Đến đây ta thấy rằng các ô trong ma trận $\Phi(t)^{-1}b(t)$ đều là những hàm số sơ cấp, do đó $\Phi(t)^{-1}b(t)$ khả tích hay nói cách khác là hệ của chúng ta có nghiệm. Tính toán tương tự như **ví dụ 2.3.1** ta sẽ tìm được nghiệm của hệ đã cho.

4.3 Ví dụ 3

Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Cautious Lover phụ thuộc vào hàm điều hòa theo thời gian t như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = 3R - 4J + sin(t), \\ \dot{J} = R - J + cos(t), \\ R(0) = 1, J(0) = 0 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, A có trị riêng kép $\lambda = 1$, vector riêng ứng với trị riêng λ là $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Suy ra ma trận cơ sở của hệ là:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A)v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = (\lambda I - A)^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_{11} & (v_{11}t + v_{12}) \\ v_{21} & (v_{21}t + v_{22}) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

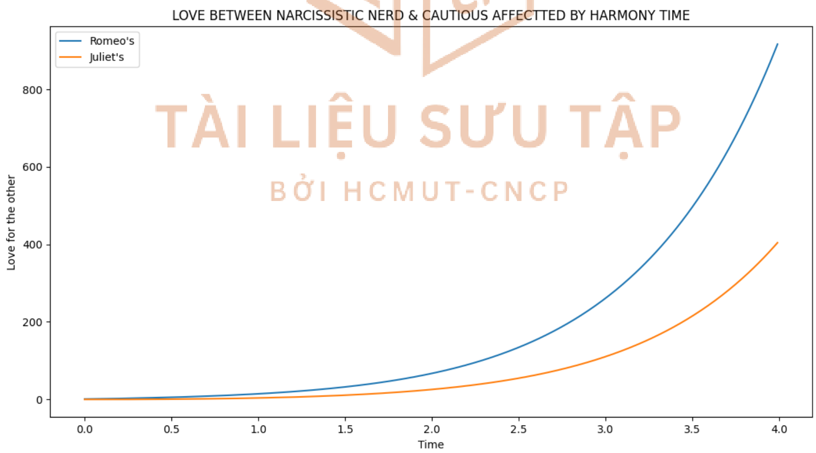
$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sử dụng **Wolfram Alpha** ta được $u_p = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}b(t)dt = \Phi(t)\int \begin{pmatrix} \dfrac{-t\sin t + \cos t(2t+1)}{e^t} \\ \dfrac{\sin t - 2\cos t}{e^t} \end{pmatrix} dt =$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t}\Big(3(t+1)\sin t - t\cos t\Big) \\ \frac{1}{2}e^{-t}\Big(\cos t - 3\sin t\Big) \end{pmatrix}$.
Và do đó nghiệm của bài toán là $u(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)(u_0 - u_p(0)) + u_p(t) =$

$$\begin{pmatrix} e^t(4t+1) \\ \dfrac{e^t(4t-1)}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t}\Big(3(t+1)\sin t - t\cos t\Big) \\ \frac{1}{2}e^{-t}\Big(\cos t - 3\sin t\Big) \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của bài toán là:

$$\begin{cases} R = e^t(4t+1) + \frac{1}{2}e^{-t}\Big(3(t+1)\sin t - t\cos t\Big) \\ J = \dfrac{e^t(4t-1)}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\Big(\cos t - 3\sin t\Big) \end{cases}$$



Hình 41: Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover bị ảnh hưởng bởi thời gian điều hòa

4.4 Ví dụ 4

Tình yêu giữa hai Nacissistic Nerd phụ thuộc vào thời gian mũ:

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J + e^t, \\ \dot{J} = -R + 2J - 2e^t, \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, A có 2 cặp trị riêng - vector riêng lần lượt là $\lambda_1 = 3, P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

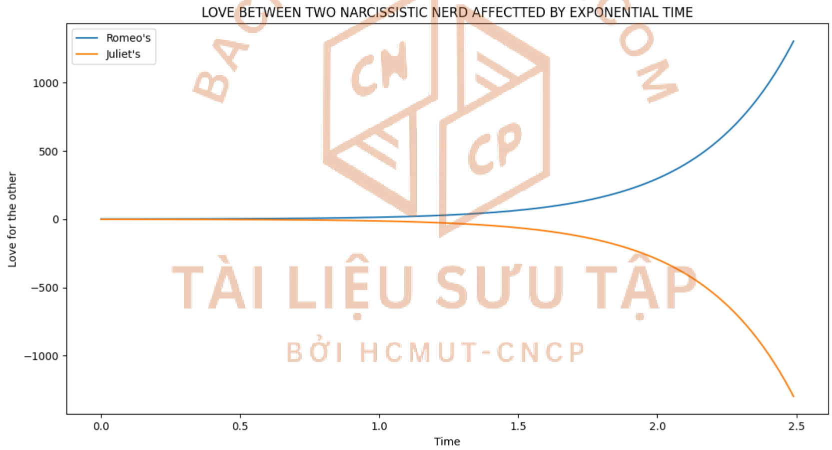
$\Phi(t) = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & e^t \end{pmatrix}, \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2e^{3t}} & \frac{1}{2e^{3t}} \\ \frac{1}{2e^t} & \frac{1}{2e^t} \end{pmatrix}, \Phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$u_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) dt = \begin{pmatrix} \frac{-3e^t - 2e^t t}{4} & \frac{3e^t - 2e^t t}{4} \end{pmatrix}^T$.

$u(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}(u_0 - u_p(0)) + u_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t(3e^{2t}+4)}{4} & \frac{e^t(-3e^{2t}+4)}{4} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \frac{-3e^t - 2e^t t}{4} & \frac{3e^t - 2e^t t}{4} \end{pmatrix}^T$

Vậy:

$$\begin{cases} R = \dfrac{e^t(3e^{2t}+4)}{4} - \dfrac{3e^t + 2e^t t}{4} \\ J = \dfrac{e^t(-3e^{2t}+4)}{4} - \dfrac{3e^t - 2e^t t}{4} \end{cases}$$



Hình 42: Tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd bị ảnh hưởng bởi thời gian mũ

4.5 Ví dụ 5

Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Hermit phụ thuộc vào hàm mũ của thời gian:

$$\begin{cases} \dot{R} = R - 4J + e^{7t}, \\ \dot{J} = -4R - 5J - 3e^{7t}, \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, A có 2 cặp trị riêng - vector riêng lần lượt là $\lambda_1 = 3, P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -7, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

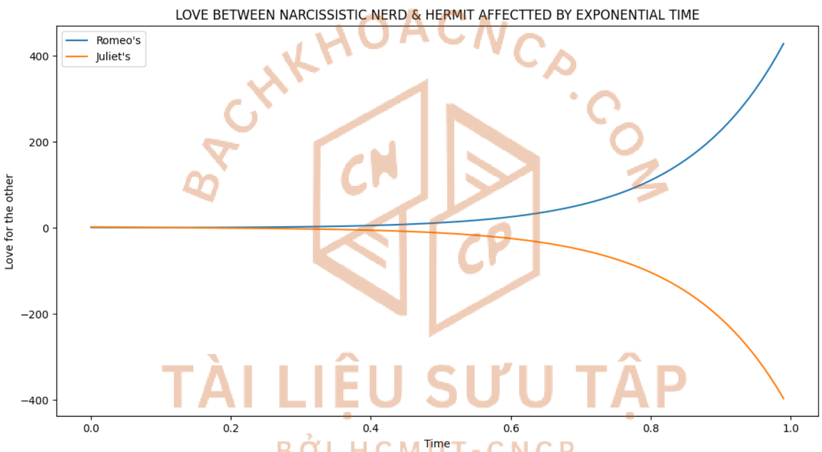
$\Phi(t) = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} & e^{-7t} \\ e^{3t} & 2e^{-7t} \end{pmatrix}, \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5e^{3t}} & \dfrac{1}{5e^{3t}} \\ \dfrac{e^{7t}}{5} & \dfrac{2e^{7t}}{5} \end{pmatrix}, \Phi(0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$u_p(t) = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}b(t)dt = \begin{pmatrix} \dfrac{3e^{7t}}{7} & \dfrac{-11e^{7t}}{28} \end{pmatrix}^T$

$u(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}(u_0 - u_p(0)) + u_p(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-7e^{3t}+15e^{-7t}}{14} & \dfrac{7e^{3t}+60e^{-7t}}{28} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \dfrac{3e^{7t}}{7} & \dfrac{-11e^{7t}}{28} \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm của hệ trên là:

$$\begin{cases} R = \dfrac{6e^{7t} - 7e^{3t} + 15e^{-7t}}{14} \\ J = \dfrac{-11e^{7t} + 7e^{3t} + 60e^{-7t}}{28} \end{cases}$$



Hình 43: Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Hermit ảnh hưởng bởi thời gian mũ

4.6 Các ví dụ về hệ không thuần nhất vô nghiệm

1. Hệ vô nghiệm do xuất hiện hàm có nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp $\left(e^{-t^2}\right)$

$$\begin{cases} \dot{R} = -5R - 4J + e^{-t^2}, \\ \dot{J} = -4R - 5J - \ln t, \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

2. Một trường hợp khác hệ vô nghiệm do xuất hiện hàm số có nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$\begin{cases} \dot{R} = R + 2J + \frac{\sin x}{x}, \\ \dot{J} = -3R - J - \cos x, \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

3. Hàm $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{khi } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{khi } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ không khả tích do gián đoạn tại vô số điểm trên $\mathbb{R}$, do đó hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} \dot{R} = 7R - 2J + f(t), \\ \dot{J} = 2R + 2J + \sin(6t), \\ R(0) = -1, J(0) = -2 \end{cases}$$

4. Hệ vô nghiệm do xuất hiện hàm có nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp $\left(\frac{\ln t}{t}\right)$

$$\begin{cases} \dot{R} = -5R - 4J + te^{t^2}, \\ \dot{J} = -4R - 5J - \frac{\ln t}{t}, \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

5. Hệ vô nghiệm do xuất hiện hàm có nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp $(\cos x^2)$

$$\begin{cases} \dot{R} = -5R - 4J + \cos x^2, \\ \dot{J} = -4R - 5J - t^3 + 3t^2 + 1, \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

5 Non-linear Systems of Differential Equations

$$\begin{cases} \dot{R} = f(t, R, J), \\ \dot{J} = g(t, R, J), \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{78}$$

Hệ phương trình trên có thể đưa về dạng tổng quát $\frac{du}{dt}$ và $u(t_0) = a$

5.1 Local existence

Định lý 5.1: (định lý tồn tại).
Nếu F(t,u) là một hàm số liên tục thì IVP:

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), u(t_0) = a \tag{79}$$

cho ta một nghiệm u = f(t) được định nghĩa trên khoảng lân cận của t_0, tức tồn tại $|t - t_0| < \delta$ với $\delta > 0$
Đặc biệt, nếu F(t,u) chỉ được định nghĩa trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ thì chúng ta có thể cho rằng điểm (t_0,a) $\in \Omega$ thỏa mãn điều kiện ban đầu thuộc miền xác định của nó.
Định lý 5.1 đảm bảo rằng nghiệm cho IVP tồn tại tại ít nhất trong khoảng lân cận đủ gần với t_0. Đây có thể là điều tối ưu nhất, mặc dù trong nhiều trường hợp khoảng cực đại $\alpha < t < \beta$ tồn tại nghiệm có thể lớn hơn nhiều so với thực tế, có thể là vô hạn $-\infty < t < \infty$, dẫn đến một định nghĩa mới là *nghiệm toàn cục*. Khoảng tồn tại của một nghiệm thường phụ thuộc vào cả chương trình và dữ liệu cụ thể ban đầu.
Trong thực tế, một hệ phương trình phi tuyến tính luôn mở rộng nghiệm đến khoảng tồn tại lớn nhất của nó.
Theo định lý tồn tại, có hai trường hợp để một nghiệm không bị mở rộng theo mốc thời gian t*:

- **Trường hợp 1**
  Nghiệm của nó trở nên vô hạn: $||u|| \to \infty$ khi $t \to t^*$

- **Trường hợp 2**
  Nếu cận bên phải của F(t,u) chỉ được định nghĩa trên tập $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, thì nghiệm u(t) dần đi đến $\partial\Omega$ khi $t \to t^*$

Nếu không có trường hợp nào xảy ra thì nghiệm khả năng cao là nghiệm toàn cục.
Định lý 5.1 có thể dễ dàng áp dụng với những hệ phương trình vi phân cấp cao hơn thông qua phương pháp biến đổi nó thành một hệ thống tương đương bằng cách thêm các biến bổ sung.
Định lý 5.2:
Nếu F(t,u) khả vi liên tục thì tồn tại và duy nhất nghiệm cho IVP:

$$\frac{du}{dt} = F(t,u), u(t_0) = a \tag{80}$$

5.2 Global existence

Định lý 5.3
Ta nói rằng bài toán có một nghiệm toàn cục duy nhất nếu nó chỉ có một nghiệm $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^{n+1}$, sao cho với mọi nghiệm y khác $\tilde{y}$, $y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ta được $I \subseteq \tilde{I}$ và $y = \tilde{y}$ trong I
Định lý 5.4

$$\forall (t,x_1),(t,x_2) \in A \Rightarrow |f(t,x_1) - f(t,x_2)|_{R^n} \le L|x_1 - x_2|_{R^n} \tag{81}$$

Áp dụng định lý giá trị trung bình, ta được

$$|f'(x_m)| = \frac{|f(t_0,x_0) - f(t_0,x_1)|}{|x_0 - x_1|} \le L \tag{82}$$

Định lý 5.5 (tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục)
Nếu hàm $f : A \to \mathbb{R}^n$ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục trong định lý 5.4, thì với mỗi cặp $(t_0,x_0) \in$ A, bài toán có nghiệm toàn cục duy nhất theo định lý 5.3.

5.3 Five specific examples

- **Ví dụ 1:**

$$\begin{cases} R'(t) = R(1-R) - RJ \\ J'(t) = 2J(1 - \frac{J^2}{2}) - 3\mathrm{R}^2\mathrm{J} \end{cases} \tag{83}$$

- **Ví dụ 2:**

$$\begin{cases} R'(t) = R(1-R-J) \\ J'(t) = 2J(1 - \frac{J}{2} - \frac{3}{2}R) \end{cases} \tag{84}$$

- **Ví dụ 3:**

$$\begin{cases} R'(t) = -R^2 + 1 \\ J'(t) = R(J-1) \end{cases} \tag{85}$$

- **Ví dụ 4:**

$$\begin{cases} R'(t) = R^2 - J^2 - 1 \\ J'(t) = R - J + 2 \end{cases} \tag{86}$$

- **Ví dụ 5:**

$$\begin{cases} R'(t) = 2R - RJ \\ J'(t) = -9J + 3RJ \end{cases} \tag{87}$$

6 Solve system ODE in a numerical way

6.1 Explicit Euler's method (review)

Khi điều kiện có nghiệm của hệ (13) và (14) đã được đảm bảo. Cách giải ước lượng đơn giản nhất đó là phương pháp explicit Euler:

```
def ExplicitEuler(f, g, t0, R0, J0, h):
    R1 = R0 + f(t0, R0, J0) * h
    J1 = J0 + g(t0, R0, J0) * h
    return R1, J1
```

Hàm này nhận giá trị R_0 và J_0 của $R(t)$ và $J(t)$ ở thời điểm t_0 và trả về giá trị xấp xỉ của R_1 và J_1 ở thời điểm $t_1 = t_0 + h$, với h là bước nhảy. "Sai số cục bộ " tại t_1 được định nghĩa bởi hàm sau:

$$\epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \tag{88}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh "sai số cục bộ" này tỉ lệ thuận với h^2

- **Đầu tiên chúng ta sẽ chứng minh:** *R và J có đạo hàm cấp 2 tại t_0.*

  Chúng ta đã biết rằng điều kiện có nghiệm của hệ (14) đã được đảm bảo ở bài 3. Nên chúng ta sẽ sử dụng định lí Picard - Lindelof. Với hệ có nghiệm thì $f(t, R, J)$ và $g(t, R, J)$ sẽ là 2 hàm liên tục Lipschitz trên R. Giả sử f là một hàm M - Lipschitz.

$$\forall t_0, t_1 \in \mathbb{R} : f(t_1, R(t_1), J(t_1)) - f(t_0, R(t_0), J(t_0))| \leq M|t_1 - t_0| \tag{89}$$

$$\Leftrightarrow |f(t_0 + h, R(t_0 + h), J(t_0 + h)) - f(t_0, R(t_0), J(t_0))| \leq M|t_0 + h - t_0| \tag{90}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(t_0 + h, R(t_0 + h), J(t_0 + h)) - f(t_0, R(t_0), J(t_0)}{h} \right| \leq M \tag{91}$$

  Khi h $\to$ 0 ta có:

$$\left| \frac{df(t, R, J)}{dt} \right| \leq M \tag{92}$$

Vì vậy, f có giới hạn tại t_0 nên f có đạo hàm tại t_0. Tương tự, ta cũng có thể chứng minh g có đạo hàm tại t_0.

- **Chúng ta chứng minh:** $R(t_1)$ **-** $R_1 \sim h^2$

$$\text{Ta đã biết: } R_1 = R_0 + hf(t_0, R_0, J_0) \tag{93}$$

Vì R có đạo hàm cấp 2 (chứng minh trên), nên chúng ta có thể sử dụng khai triển Taylor hàm R(t) tại lân cận t_0.

$$R(t_0 + h) \approx R_0 + (t_0 + h - t_0)f(t_0, R_0, J_0) + \frac{1}{2}(t_0 + h - t_0)^2 f'(t_0, R_0, J_0) \tag{94}$$

$$\Leftrightarrow R(t_1) \approx R_0 + hf(t_0, R_0, J_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(t_0, R_0, J_0) \tag{95}$$

$$\Leftrightarrow R(t_1) \approx R_1 + \frac{1}{2}h^2 f'(t_0, R_0, J_0) \tag{96}$$

$$\Rightarrow R(t_1) - R_1 \approx \frac{1}{2}h^2 f'(t_0, R_0, J_0) \tag{97}$$

Với h $\to$ 0 phần dư Taylor này sẽ càng nhỏ, làm cho xấp xỉ càng chình xác từ đó ta cũng có được:

$$\Rightarrow R(t_1) - R_1 \approx \frac{1}{2}h^2 f'(t_0, R_0, J_0) \sim h^2 \tag{98}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $J(t_1)$ - $J_1 \sim h^2$

$$\Rightarrow \epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \sim h^2 \text{ (đpcm)} \tag{99}$$

6.2 Implicit Euler's method (In-depth review)

Phương pháp Explicit Euler xử lí bài toán đơn giản vì thời gian tính toán nhanh. Tuy nhiên, với một số bài toán khác, phương pháp này trở nên "bất ổn định", nghĩa là nó cần có step nhỏ cho bài toán để vẽ ra được đường cong mượt hơn. Một giải pháp tốt hơn cho việc này đó là ta sẽ sử dụng phương pháp Implicit Euler mà ta sẽ được đọc trong mục này.Sau đó ta sẽ được xem một ví dụ so sánh giữa 2 phương pháp Explicit và Implicit Euler rõ hơn ở mục sau.

Phương pháp Implicit Euler tính toán xấp xỉ các giá trị tiếp theo được định nghĩa như hàm sau:

$$\begin{cases} R_1 = R_0 + hf(t_1, R_1, J_1) \\ J_1 = J_0 + hg(t_1, R_1, J_1) \end{cases} \tag{100}$$

Chúng ta cũng có thể chứng minh rằng sai số cục bộ của phương pháp Implicit Euler cũng tỉ lệ thuận với h^2. Tương tự như cách chúng ta đã chứng minh ở mục "Explicit Euler's method", ta cũng có được $R(t)$ và $J(t)$ cũng có đạo hàm cấp 2. Sử dụng khai triển Taylor trong tập R lân cận điểm t_1 ta có:

$$R(t_1 - h) \approx R(t_1) - hf(t_1, R_1, J_1) + \frac{1}{2}(-h)^2 f'(t_1, R_1, J_1) \tag{101}$$

Thay $t_0 = t_1$ - h ta được:

$$\begin{aligned}
R(t_0) &\approx R(t_1) - hf(t_1, R_1, J_1) + \frac{1}{2}h^2 f'(t_1, R_1, J_1) \\
R(t_1) &\approx R_0 + hf(t_1, R_1, J_1) - \frac{1}{2}h^2 f'(t_1, R_1, J_1) \\
&\Rightarrow R_1 - R(t_1) \approx \frac{1}{2}h^2 f'(t_1, R_1, J_1) \\
&\Rightarrow R_1 - R(t_1) \sim h^2
\end{aligned}$$

Sau phép chứng minh trên ta cũng có thể chứng minh tương tự rằng J_1 - $J(t_1)$ ~h^2. Từ đó suy ra sai số cục bộ của phương pháp Implicit Euler cũng tỉ lệ thuận với h^2 tương tự như cách suy luận khi chứng minh điều này ở mục "Explicit Euler's method".

Trong phương pháp này, vế phải đẳng thức của các hệ phương trình ta nhận thấy các giá trị xấp xỉ R_1 và J_1 đề xuất hiện thay vì R_0 và J_0 như phương pháp Explicit Euler, vì vậy để tính toán giá trị R_1 và J_1 ta cần phải giải thêm một hệ phương trình với ẩn là R_1 và J_1 chứ không suy ra liền như Explicit Euler.
Tức là ta cần giải hệ sau, với các tham số đã biết là h, t_1, R_0, J_0 :

$$\begin{cases} R_1 - hf(t_1, R_1, J_1) = R_0 \\ J_1 - hg(t_1, R_1, J_1) = J_0 \end{cases} \tag{102}$$

Để giải hệ phương trình này ta có hai phương pháp $Fixedpointiteration$ và $Newtoniteration$: Ta xem xét một ví dụ phương trình tuyến tính sau:

$$y'(t) = \lambda y(t) \tag{103}$$

với $\lambda \in \mathbb{C}$ là một hệ các trị riêng của hệ phương trình vi phân tuyến tính.

$Fixedpointiteration$:

$$u_{i+1}^{(k+1)} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}^{(k)}) \tag{104}$$

$Newtoniteration$:

$$\begin{aligned}
&u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}) \\
&u_{i+1} - u_i - hf(t_{i+1}, u_{i+1}) = 0 \\
&F(u_{i+1}) = 0 \\
&F'(u_{i+1}^{(k)})\Delta u_{i+1} = -F(u_{i+1}) \\
&u_{i+1}^{(k+1)} = u_{i+1}^{(k)} + \Delta u_{i+1}
\end{aligned}$$

Những cái "iterations" này được biểu diễn ở mọi bước nguyên hàm!
Chúng được bắt đầu với explicit Euler's method được gọi là "nghiệm sơ khai":

$$u_{i+1}^{(0)} = u_i + hf(t_i, u_i) \tag{105}$$

Khi phương trình vi phân có dạng:

nonstiff: explicit Euler hoặc

nonstiff: implicit Euler với fixed point iteration

stiff: explicit Euler với Newton iteration

Phương trình dạng $stiff$ là khi giải bằng phương pháp tính xấp xỉ,ta cần phải điều chỉnh bước nhảy rất nhỏ mới có thể giải gần đúng được. Còn phương trình dạng $nonstiff$ thì ngược lại.

6.3 So sánh giữa Explicit và Implicit Euler's method:

Để không gây khó khăn trong quá trình so sánh ta sẽ chọn ví dụ đơn giản sau:

$$\begin{cases} y'(t) = -10.y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{106}$$

Với phương pháp Explicit Euler ta có:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) \\ \Rightarrow y_{i+1} &= (1 - 10h).y_i \\ \Rightarrow y_{i+1} &= (1 - 10h)^{i+1}.y_0 \\ \Rightarrow y_i &= (1 - 10h)^i \end{aligned}$$

Lời giải chính xác của phương trình vi phân là y(t) $= e^{-10t}$, với giới hạn bằng 0 khi t tiến tới $+\infty$. Để thỏa điều này thì ta cần phải có |1 - 10h| $<$ 1, hay nói cách khác là h $<$ 0.2

Với phương pháp Implicit Euler ta có:

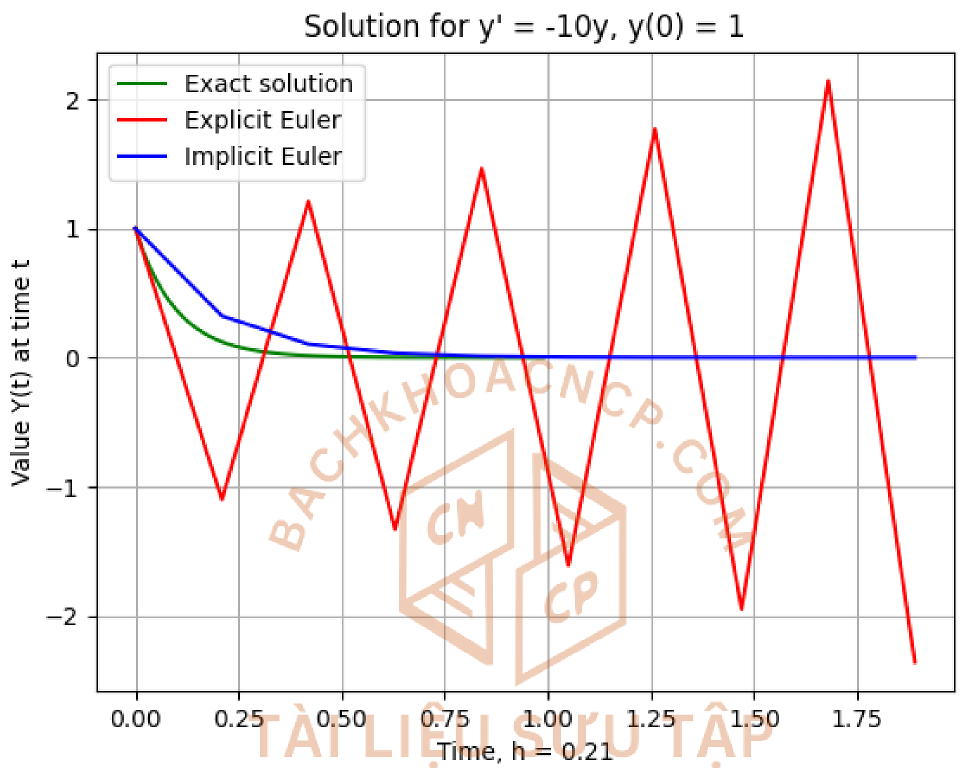
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \\ \Rightarrow y_{i+1} &= y_i - 10h.y_{i+1} \\ \Rightarrow y_{i+1} &= \frac{1}{1+10h}.y_i \\ \Rightarrow y_{i+1} &= \left(\frac{1}{1+10h}\right)^{i+1}.y_0 \\ \Rightarrow y_i &= \left(\frac{1}{1+10h}\right)^{i} \end{aligned}$$

Lời giải chính xác của phương trình vi phân là y(t) $= e^{-10t}$, với giới hạn bằng 0 khi t tiến tới $+\infty$ và vì theo lời giải bằng phương pháp Implicit ở trên ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+10h}\right)^n = 0 \tag{107}$$

Nên sẽ không có điều kiện gì ràng buộc h cả và đây là một điều có ý nghĩa vì ta sẽ không phải canh chuẩn h để giải

Hình dưới đây sẽ minh họa việc so sánh giữa 2 phương pháp bằng cách biểu diễn lời giải với h = 0.21 (không thỏa ràng buộc của Explicit) để tăng tính thuyết phục về sự "ổn định" cho những gì chúng ta đã chứng minh ở trên với phương pháp Implicit:



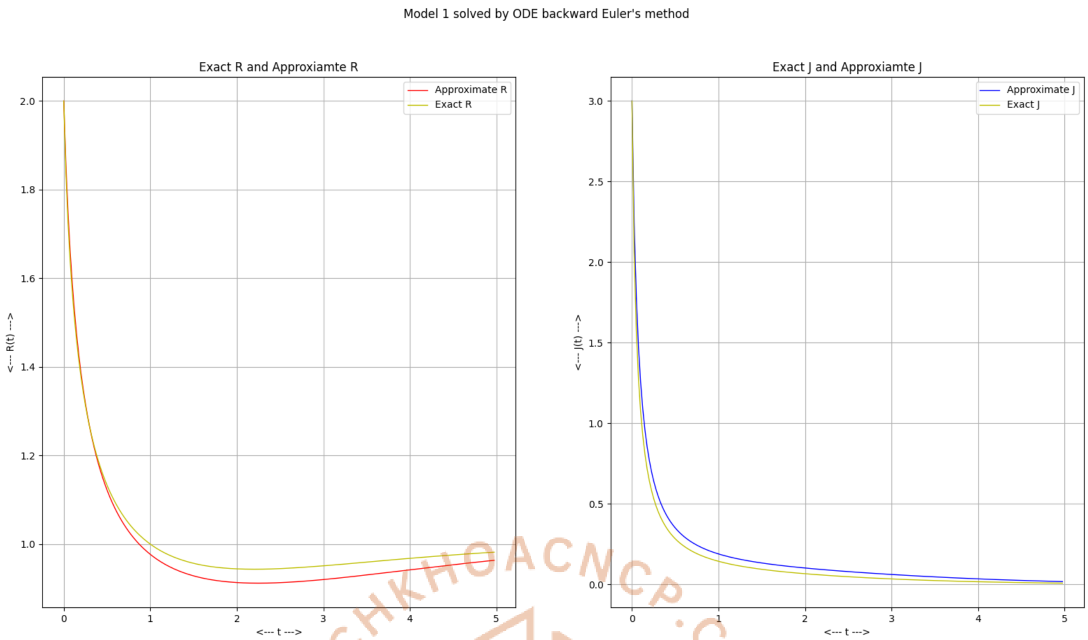
Hình 44: Comparision between Explicit and Implicit Euler's method with step = 0.21

6.4 Five specific examples taken from exercise 3 using Implicit Euler's method to solve

Ở các ví dụ sau đây ta sẽ đều chọn h = 0.025 (step)

- **Ví dụ 1:**

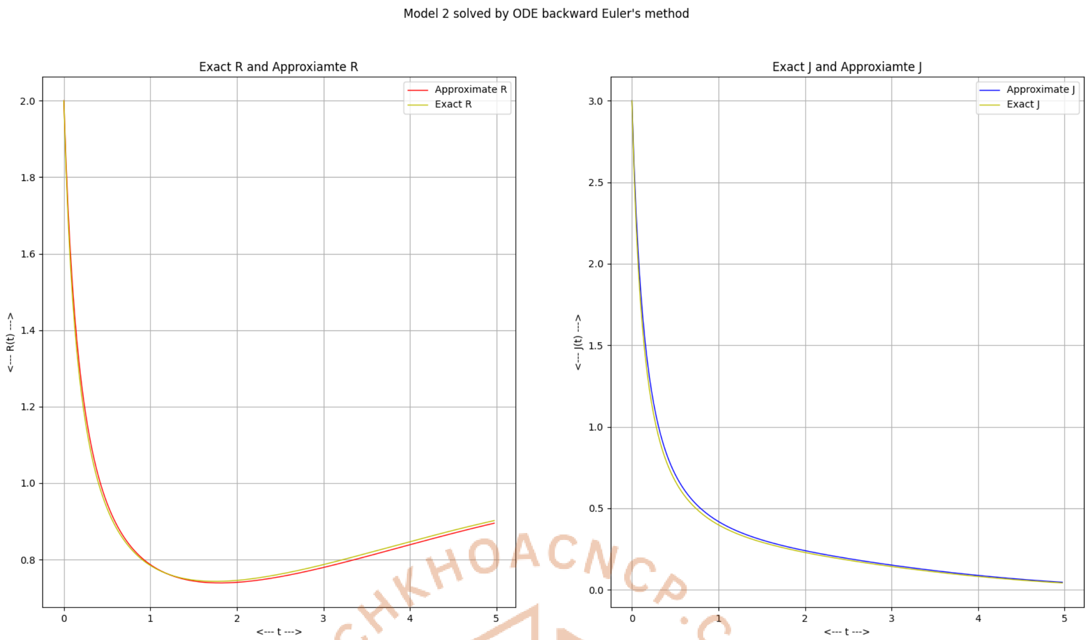
$$\begin{cases} R'(t) = R(1-R) - RJ \\ J'(t) = 2J(1-\frac{J^2}{2}) - 3\mathrm{R}^2\mathrm{J} \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{108}$$



Hình 45: Mode l solved by Implicit Euler

- **Ví dụ 2:**

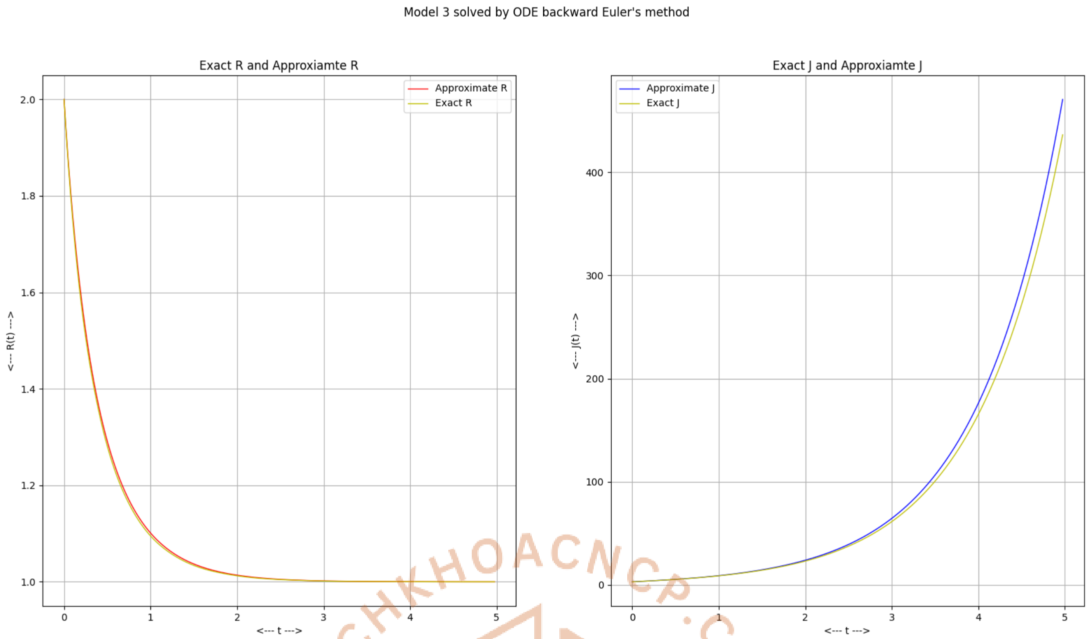
$$\begin{cases} R'(t) = R(1 - R - J) \\ J'(t) = 2J(1 - \frac{J}{2} - \frac{3}{2}R) \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{109}$$



Hình 46: Mode 2 solved by Implicit Euler

- **Ví dụ 3:**

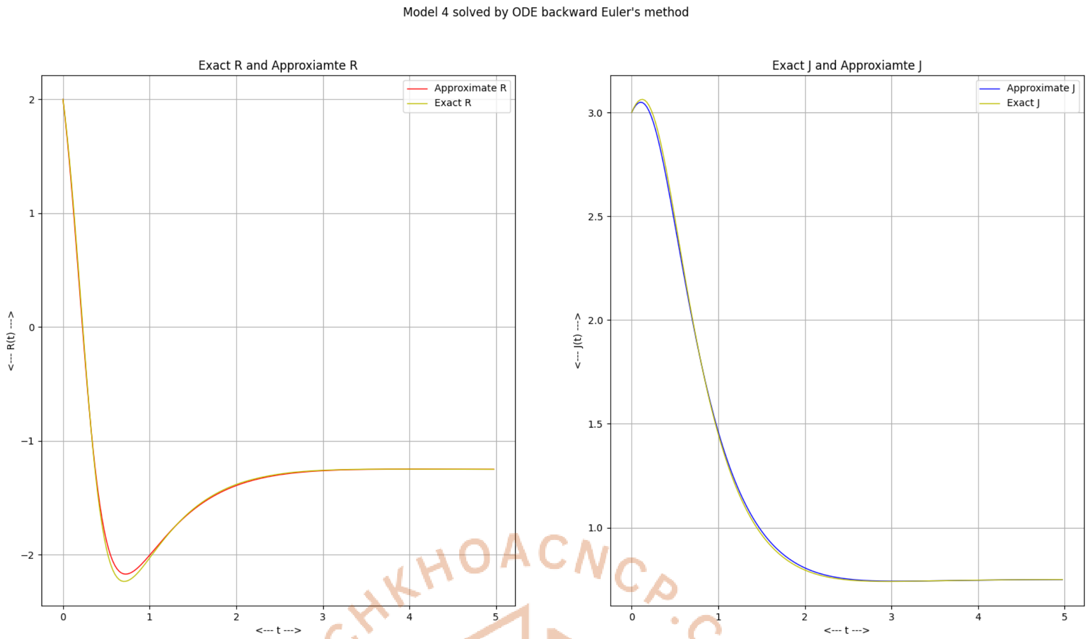
$$\begin{cases} R'(t) = -\mathrm{R}^2 + 1 \\ J'(t) = R(J-1) \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{110}$$



Hình 47: Mode 3 solved by Implicit Euler

- **Ví dụ 4:**

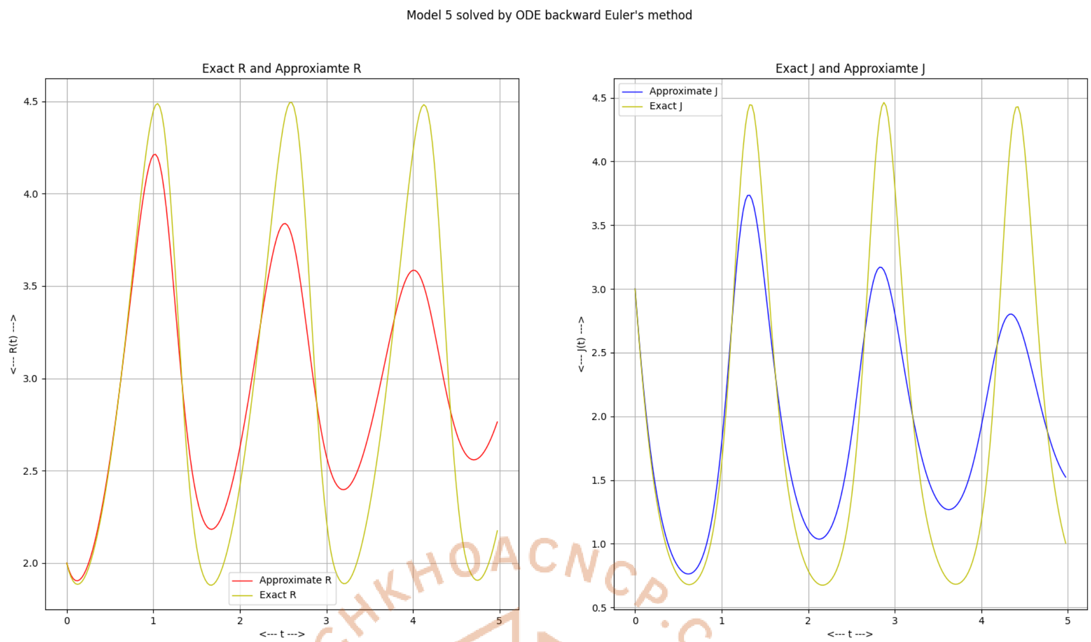
$$\begin{cases} R'(t) = R^2 - J^2 - 1 \\ J'(t) = R - J + 2 \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{111}$$



Hình 48: Mode 4 solved by Implicit Euler

- **Ví dụ 5:**

$$\begin{cases} R'(t) = 2R - RJ \\ J'(t) = -9J + 3RJ \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{112}$$



Hình 49: Mode 5 solved by Implicit Euler

7 Ứng dụng Neural Network, Machine learning, Deep learning vào việc giải IVP

Từ đề bài đã cho ta có thể viết lại mô hình bài toán như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R_0 = -2,\ J_0 = 3 \end{cases}$$

Xác định a, b, c, d với h = 0.001 từ tập dữ liệu R và J đã được thêm dữ liệu *"nhiễu"*.

7.1 Ý tưởng bài toán

Chúng ta sẽ giải quyết mô hình trên bằng cách đưa vào một bộ tham số a, b, c, d "sơ khai". Tính toán sai số toàn cục bình phương. Tìm cách giảm sai số này xuống thấp nhất có thể bằng cách "train" lại bộ tham số để có kết quả tốt hơn.

Bộ số a, b, c, d "sơ khai" mà ta đưa vào để bắt đầu công đoạn có giá trị lần lượt là 1, 1, 1, 1. Với bộ số này ta sẽ *"train"* nó với *"learning rate"* có giá trị là 0.05. Trong machine learning và thống kê thì *"learning rate"* hay còn gọi là *"tốc độ học"* là một tham số điều chỉnh trong thuật toán tối ưu hóa xác định kích thước bước ở mỗi lần lặp trong khi tiến tới mức tối thiểu của hàm mất mát (error). Vì nó ảnh hưởng đến mức độ thông tin mới thu được ghi đè thông tin cũ, nên nó biểu thị một cách ẩn dụ tốc độ mà mô hình học máy "học". Về số lần lặp để đưa ra bộ tham số mới tốt hơn thì sẽ được bàn chi tiết hơn trong phần "Training Process".

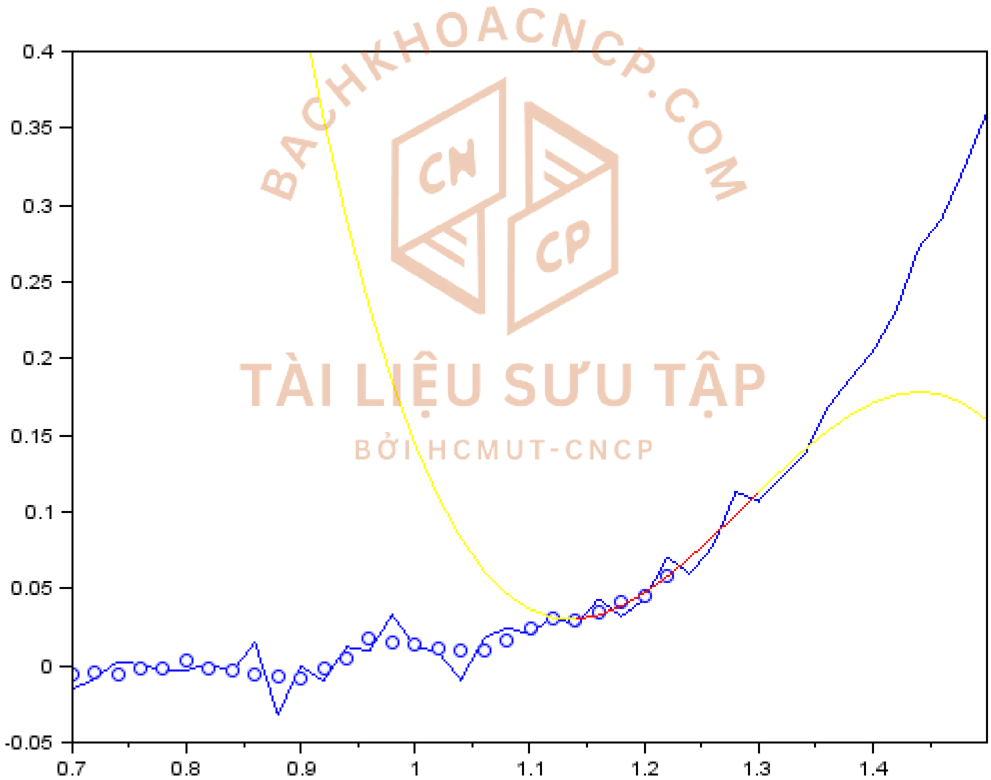
Hàm sai số toàn cục bình phương:

$$\epsilon := \sum_{i=1}^{1000}[R(t_i) - R\ \text{exact}_i]^2 + \sum_{i=1}^{1000}[J(t_i) - J\ \text{exact}_i]^2 \tag{113}$$

Với $R(t_i)$, $J(t_i)$ lần lượt là giá trị của R và J tại thời điểm t_i đối với bộ số a, b, c, d hiện tại. $R\ exact_i$ và $J\ exact_i$ là dữ liệu gốc tại thời điểm t_i.

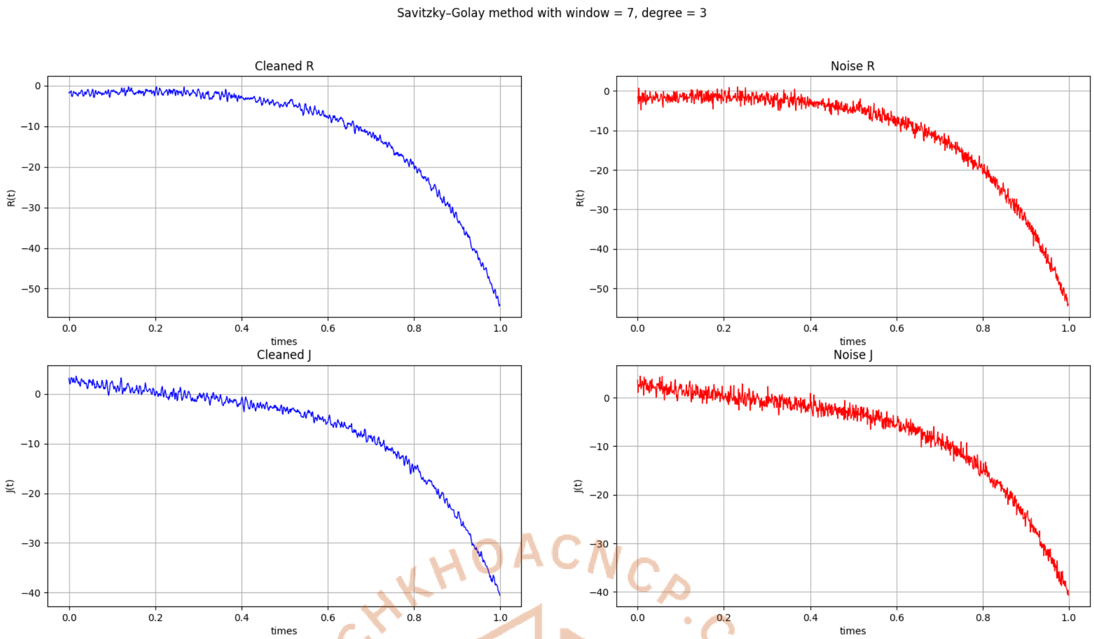
7.2 Làm sạch dữ liệu

Vì trong dữ liệu được cho có tồn tại dữ liệu bị *"nhiễu"* cho nên trước khi train các hệ số thì chúng ta phải làm sạch dữ liệu đã được cho sơ bộ. Một phương pháp khá hiệu quả trong việc làm sạch dữ liệu đó là phương pháp làm sạch "Savitzky–Golay". Phương pháp này sẽ gom một số điểm lại thành một nhóm cửa sổ gọi là *"window"* các điểm này sẽ được điều chỉnh sao cho hầu như nằm trên đường của một đồ thị hàm số có bậc thấp *"degree"*. Xem hình

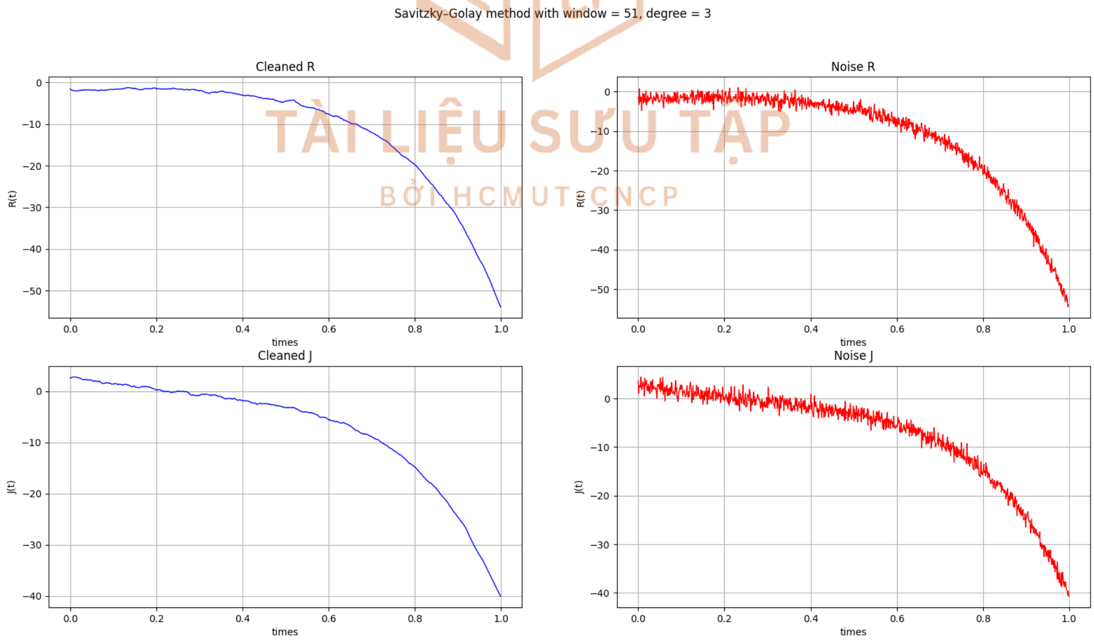


Hình 50: Hình mô tả phương pháp làm sạch với degree = 3

Trong ngôn ngữ python thì để sử dụng hàm phương pháp làm sạch này chúng ta sẽ xài hàm *savgol_filter* trong module *signal* của thư viện *scipy*.



Hình 51: Hình mô tả phương pháp làm sạch với window = 7, degree = 3



Hình 52: Hình mô tả phương pháp làm sạch với window = 51, degree = 3

Sau khi làm sạch bằng phương pháp trên với kích thước **window** lần lượt là 51, 7 và **degree** đều bằng 3 thì ta thấy có sự khác biệt rõ rệt. Đó là **window** có kích thước càng lớn thì các dự liệu *"nhiễu"* càng trở nên ít hơn hay còn nói cách khác là đường cong của dữ liệu mượt hơn. Vì thế chúng ta sẽ chọn kích thước **window** là 51 để train tập dữ liệu đã cho.

7.3 Training Process

Bây giờ chúng ta sẽ đến với công đoạn chính đó là "training". Như đã nói ở mục "ý tưởng bài toán" thì bộ số a, b, c, d ban đầu được đưa vào để "học" lần lượt là 1, 1, 1, 1. Để làm cho loss value giảm và đưa ra bộ số mới thì ta sẽ sử dụng thư viện *tensorflow* - một thư viện được sử dụng rất phổ biến và hiệu quả trong lĩnh vực AI hiện nay. Sau khi học ra được bộ tham số mới, để tính toán giá trị loss value thì chúng ta cần phải giải hệ IVP và hàm giải mà chúng ta sử dụng ở đây để phù hợp với tình huống bài toán đó chính là *odeint* thuộc thư viện *tfdiffeq*. *tfdiffeq* là một thư viện tự viết trên github và đây là link tải https://github.com/titu1994/tfdiffeq. Với **learning rate** = 0.05, số lượng *"epochs"* (hay còn gọi là chu kỳ, giai đoạn) ta sẽ thử đó là 200.

```
Epoch: 166  loss: 9591.158575963225
Epoch: 167  loss: 9498.724019328423
Epoch: 168  loss: 9407.254858237135
Epoch: 169  loss: 9316.750096078316
Epoch: 170  loss: 9227.207473594706
Epoch: 171  loss: 9138.624388000408
Epoch: 172  loss: 9050.998660768364
Epoch: 173  loss: 8964.328962961434
Epoch: 174  loss: 8878.614852895522
Epoch: 175  loss: 8793.856431128996
Epoch: 176  loss: 8710.05380083114
Epoch: 177  loss: 8627.206486935722
Epoch: 178  loss: 8545.312993978372
Epoch: 179  loss: 8464.370614151649
Epoch: 180  loss: 8384.375518555202
Epoch: 181  loss: 8305.323085164278
Epoch: 182  loss: 8227.208352666114
Epoch: 183  loss: 8150.026472821416
Epoch: 184  loss: 8073.773044484895
Epoch: 185  loss: 7998.444260527533
Epoch: 186  loss: 7924.036855136104
Epoch: 187  loss: 7850.547895310514
Epoch: 188  loss: 7777.974494324877
Epoch: 189  loss: 7706.313535854005
Epoch: 190  loss: 7635.561479632413
Epoch: 191  loss: 7565.714284713011
Epoch: 192  loss: 7496.767447239123
Epoch: 193  loss: 7428.716113679636
Epoch: 194  loss: 7361.5552175129005
Epoch: 195  loss: 7295.279587382989
Epoch: 196  loss: 7229.88399375894
Epoch: 197  loss: 7165.363127359718
Epoch: 198  loss: 7101.711529885999
Epoch: 199  loss: 7038.923874294815
Learned parameters: [3.0679794202251327, 1.2378169355916806, 3.1586576672319198, 0.3396771726693771]
```

Hình 53: Loss value và Learned parameters sau 200 giai đoạn

Tuy nhiên, với tập dữ liệu này thì 200 vẫn là con số khá nhỏ khiến cho lượng "mất mát" còn quá lớn (lượng mất mát ở đây sẽ được so với dữ liệu đã được làm sạch để thuận tiện cho việc training) nên chúng ta sẽ cho chạy và in ra liên tục các bộ số đã học được đồng thời cũng in ra "mất mát" . Và sẽ dừng công đoạn training bất cứ khi nào ta muốn.

```
Learned parameters: [2.2959396399491774, 3.5977771322477325, 5.41531023738944, -2.2144022066958513]
Epoch: 596  loss: 1895.1612205237475
Learned parameters: [2.295481372426474, 3.5984231023730806, 5.41623561513298, -2.215654274154025]
Epoch: 597  loss: 1895.1037256841405
Learned parameters: [2.2950240735257412, 3.5990676761893052, 5.417159024245072, -2.2169036592495]
Epoch: 598  loss: 1895.0465388261912
Learned parameters: [2.2945677414843475, 3.5997108563936275, 5.418080468407582, -2.218150367104318]
Epoch: 599  loss: 1894.9896582891265
Learned parameters: [2.29411237452741, 3.600352645690631, 5.418999951278519, -2.219394402818826]
Epoch: 600  loss: 1894.9330824212639
Learned parameters: [2.2936579708802642, 3.600993046788022, 5.419917476505489, -2.220635771481464]
Epoch: 601  loss: 1894.8768095799674
Learned parameters: [2.2932045287890603, 3.6016320623869786, 5.420833047747035, -2.221874478179975]
Epoch: 602  loss: 1894.8208381306567
Learned parameters: [2.292752046498445, 3.6022696951922275, 5.421746668649742, -2.223110527989196]
Epoch: 603  loss: 1894.7651664505224
Learned parameters: [2.2923005222425323, 3.6029059479034005, 5.422658342836094, -2.22434392596264]
Epoch: 604  loss: 1894.7097929281665
Learned parameters: [2.291849954271613, 3.6035408231931756, 5.423568073930004, -2.2255746771462883]
Epoch: 605  loss: 1894.6547159608322
Learned parameters: [2.291400340849382, 3.604174323723606, 5.424475865557636, -2.2268027865807816]
Epoch: 606  loss: 1894.5999339529249
```

Hình 54: Loss value và Learned parameters qua các giai đoạn

Sau khi train và phân tích hơn 5000 giai đoạn với nhiều lần train. Thì tôi đã nhận thấy rằng **loss value** dường như chững lại ở cùng một bộ số .

```
Epoch: 2645  loss: 1884.701377797827
Learned parameters: [2.1121699201830113, 3.854677062371812, 5.785519065787473, -2.7140343042881807]
Epoch: 2646  loss: 1884.7013766178247
Learned parameters: [2.112172242925157, 3.854673453366246, 5.785512390580244, -2.7140257178600757]
Epoch: 2647  loss: 1884.7013754746451
Learned parameters: [2.1121760923595256, 3.8546686381537545, 5.785507272921184, -2.7140183333783554]
Epoch: 2648  loss: 1884.701374389233
Learned parameters: [2.1121779219672, 3.8546654320465246, 5.7855001623295434, -2.7140094366876433]
Epoch: 2649  loss: 1884.701373398697 3
Learned parameters: [2.112182381024242, 3.8546601442817416, 5.785495713102667, -2.7140025857083887]
Epoch: 2650  loss: 1884.70137256913
Learned parameters: [2.112183353856345, 3.854657629682733, 5.78548780278907, -2.713993100121457 7]
Epoch: 2651  loss: 1884.7013720189848
Learned parameters: [2.112188912431958, 3.85465148038091, 5.785484512130645, -2.713987157241623]
Epoch: 2652  loss: 1884.7013719617185
Learned parameters: [2.1121883671151678, 3.8546501822438373, 5.785475139702072, -2.7139765762852 3]
Epoch: 2653  loss: 1884.7013727843996
Learned parameters: [2.1121959211833228, 3.854642460013203, 5.785473904276077, -2.713972269269 69]
Epoch: 2654  loss: 1884.701375192833 4
Learned parameters: [2.1121926409390417, 3.8546433441579664, 5.785461851332821, -2.713959619131916]
Epoch: 2655  loss: 1884.7013804821115
Learned parameters: [2.1122038481302035, 3.8546327328354724, 5.785464330307158, -2.7139581317767427]
Epoch: 2656  loss: 1884.7013910414216
Learned parameters: [2.1121955687313974, 3.8546375964395767, 5.785447329875345, -2.713941764264527 4]
Epoch: 2657  loss: 1884.7014113068515
Learned parameters: [2.1122135308416268, 3.854621632995941 3, 5.78545662820686, -2.71394551313008 9]
```

Hình 55: Loss value và Learned parameters qua các giai đoạn với tập dữ liệu gốc

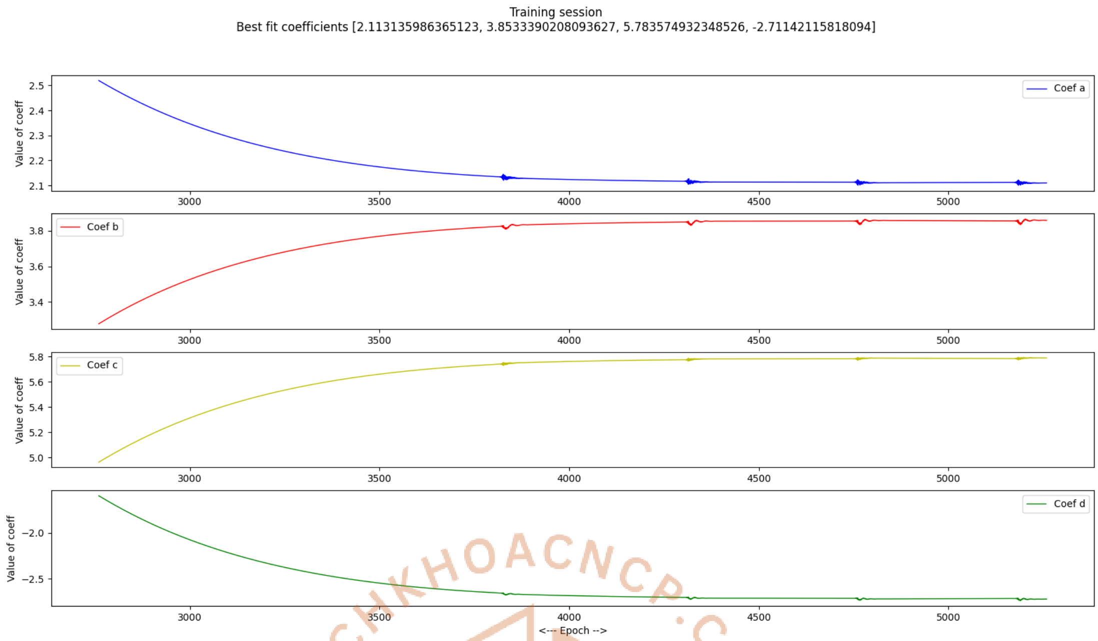
```
Learned parameters: [2.1097966759334943, 3.857921758932927, 5.790729075702864, -2.720927971680886 5]
Epoch: 5560  loss: 788.5767924866539
Learned parameters: [2.1095732934460902, 3.8582220301553196, 5.790471313986485, -2.7205712425931368]
Epoch: 5561  loss: 788.5579527815147
Learned parameters: [2.109686341056768, 3.8581691085831276, 5.7905497339618615, -2.7205770444933335]
Epoch: 5562  loss: 788.5480897403004
Learned parameters: [2.109774358276505, 3.8581246250948915, 5.790602224644803, -2.7205841037952156]
Epoch: 5563  loss: 788.549522231288
Learned parameters: [2.1095919528432967, 3.8583343872670746, 5.790383161945836, -2.7203454336853454]
Epoch: 5564  loss: 788.566292311107 9
Learned parameters: [2.1098523404613587, 3.8580764115441286, 5.790607037218731, -2.72058486476046 4]
Epoch: 5565  loss: 788.5673988361275
Learned parameters: [2.109647004144281, 3.8582707268254834, 5.7903646340713575, -2.72037381967712 9]
Epoch: 5566  loss: 788.5578213529623
Learned parameters: [2.109773499247357, 3.8581134248405182, 5.790455136755685, -2.7205157609260846]
Epoch: 5567  loss: 788.5489977764466
Learned parameters: [2.109786213931698, 3.8580589100023936, 5.790432906975488, -2.7205490772147853]
Epoch: 5568  loss: 788.549423177572
Learned parameters: [2.109675295707137, 3.858121346630057, 5.790288530263206, -2.720455459356016 6]
Epoch: 5569  loss: 788.5559836094628
Learned parameters: [2.1098598443396845, 3.857881345149877, 5.790441904169672, -2.7206537525201453]
Epoch: 5570  loss: 788.559621377914
Learned parameters: [2.1096833401573214, 3.8580069372108317, 5.790235672899586, -2.7204714956680127]
Epoch: 5571  loss: 788.5562728336129
Learned parameters: [2.1098157661674026, 3.8578247970000494, 5.790340418381527, -2.720586274871667]
Epoch: 5572  loss: 788.5502184940701
Learned parameters: [2.109782150990676, 3.857818294644082, 5.790280083643734, -2.720514836432189]
Epoch: 5573  loss: 788.5478629164281
Learned parameters: [2.1097381419292187, 3.857832366641819, 5.790209870559342, -2.72041697021435]
Epoch: 5574  loss: 788.550491860068
Learned parameters: [2.1098643562561494, 3.857685607521535, 5.790309908247905, -2.7204797579750912]
Epoch: 5575  loss: 788.5539236298437
Learned parameters: [2.109732094394611, 3.85781143052958, 5.7901502592492164, -2.720272523704625]
Epoch: 5576  loss: 788.5539896793207
Learned parameters: [2.109865401851138, 3.857679388606692, 5.79025503635092, -2.7203327105553763]
```

Hình 56: Với tập dữ liệu đã được làm sạch window = 7, degree = 3

```
Learned parameters: [2.126440992763558, 3.8355675899318826, 5.757103195246946, -2.675480649307566]
Epoch: 5243  loss: 60.16194468595511
Learned parameters: [2.1264165675770106, 3.835601650252349, 5.7571522927599155, -2.6755472534201736]
Epoch: 5244  loss: 60.161777247776
Learned parameters: [2.1263921769496643, 3.835635662320257, 5.757201320783762, -2.675613763215135]
Epoch: 5245  loss: 60.16161036869916
Learned parameters: [2.1263678208533077, 3.835669626175119, 5.757250279375113, -2.675680178769594]
Epoch: 5246  loss: 60.1614440471434
Learned parameters: [2.12634349925983, 3.8357035418564345, 5.757299168590759, -2.6757465001607232]
Epoch: 5247  loss: 60.161278281525725
Learned parameters: [2.126319212141012, 3.83573740940375, 5.757347988487362, -2.675812727465691 8]
Epoch: 5248  loss: 60.1611307027161
Learned parameters: [2.126294959468674, 3.8357712288566264, 5.757396739121668, -2.6758788607616895]
Epoch: 5249  loss: 60.16094841180649
Learned parameters: [2.1262707412146766, 3.835805000254625, 5.757445420550496, -2.675944900125924]
Epoch: 5250  loss: 60.16078430456208
Learned parameters: [2.1262465573507305, 3.8358387236373535, 5.757494032830475, -2.676010845635593]
Epoch: 5251  loss: 60.16062074696953 5
Learned parameters: [2.1262224078487484, 3.8358723990443777, 5.757542576018533, -2.6760766973679364]
Epoch: 5252  loss: 60.16045773747051
Learned parameters: [2.1261982926804595, 3.8359060265153175, 5.757591050171362, -2.6761424554001803]
Epoch: 5253  loss: 60.160295274504215
Learned parameters: [2.126174211817653, 3.835939606089785, 5.75763945534575, -2.676208119809572]
Epoch: 5254  loss: 60.160133356515885
Learned parameters: [2.126150165232174, 3.835973137807378 5, 5.75768779159858, -2.676273690673377]
Epoch: 5255  loss: 60.159971981952495
Learned parameters: [2.1261261528957363, 3.836006621707736, 5.757736058986567, -2.6763391680688553]
Epoch: 5256  loss: 60.159811149265494
Learned parameters: [2.1261021747801685, 3.836040057830473, 5.7577842575666045, -2.6764045520732975]
Epoch: 5257  loss: 60.15965085691186
Learned parameters: [2.1260782308572237, 3.836073446215228, 5.7578323873954975, -2.6764698427639964]
Epoch: 5258  loss: 60.15949110335111
```

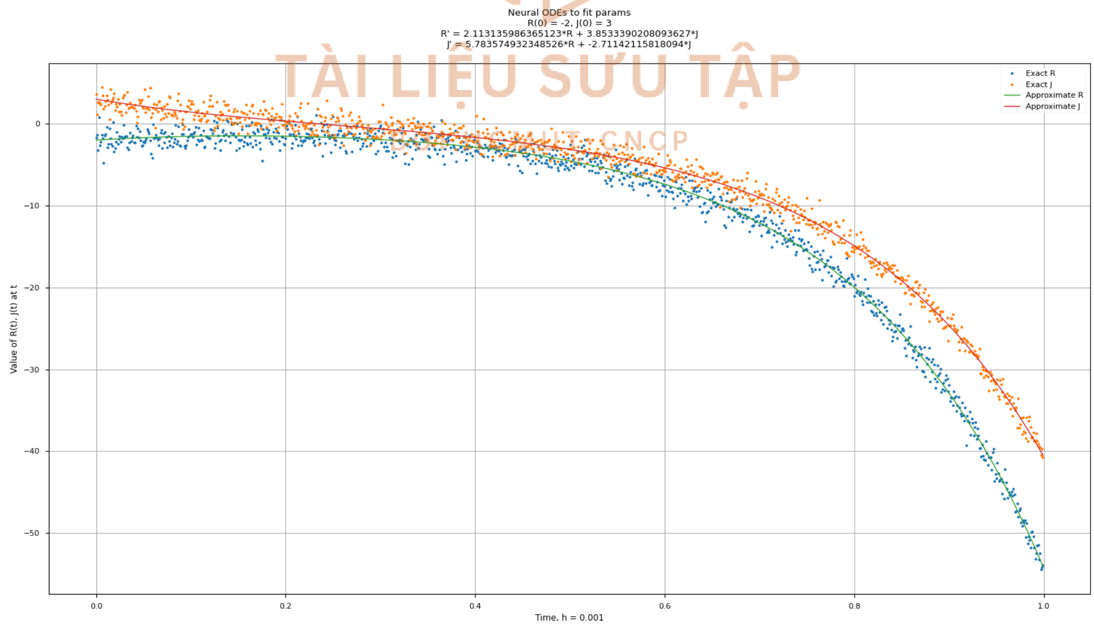
Hình 57: Với tập dữ liệu đã được làm sạch window = 51, degree = 3

Dấu hiệu hội tụ của bộ số này qua các giai đoạn với các tập dữ liệu được làm sạch khác nhau cho ta biết rằng đây chính là lúc chúng ta dừng công đoạn training lại. Nếu train quá nhiều giai đoạn thì chúng ta sẽ xảy ra một tình huống đó là đường cong được vẽ từ bộ dữ liệu học được sẽ bị *"overfit"* so với tập dữ liệu đối chiếu. "Overfitting" là hiện tượng khi mô hình xây dựng thể hiện được chi tiết bộ dữ liệu huấn luyện. Điều này có nghĩa là cả dữ liệu nhiễu, hoặc dữ liệu bất thường trong quá trình training đều được chọn và học để đưa ra quy luật mô hình. Những quy luật này sẽ không có ý nghĩa nhiều khi áp dụng với bộ dữ liệu mới có thể có dạng dữ liệu nhiễu khác. Khi đó, nó ảnh hưởng tiêu cực tới độ chính xác của mô hình nói chung.

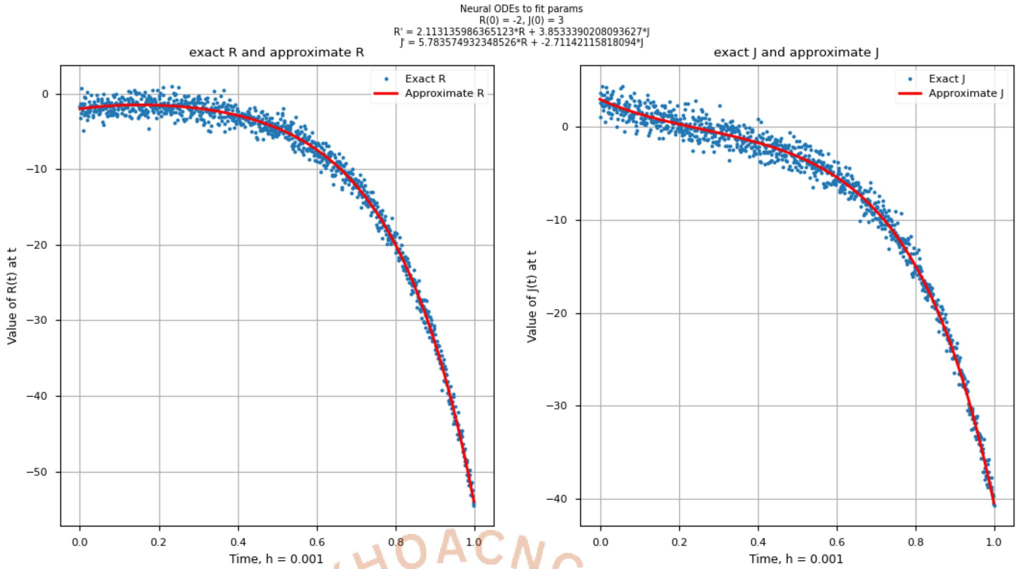


Hình 58: Các hệ số qua các giai đoạn learning

Và cuối cùng chúng ta sẽ vẽ ra đường cong từ bộ số chúng ta đã học được sau nhiều lần train.



Hình 59: Mô hình gộp chung R và J



Hình 60: Mô hình R và J riêng biệt

- **Kết luận** Chúng ta sẽ tổng kết lại số liệu chúng ta đã thu thập và học được sau cả quá trình trên:

  Sai số toàn cục bình phương (loss value): 60.15933188704432 cho tập dữ liệu được làm sạch

$$\begin{cases} a = 2.113135986365123 \\ b = 3.8533390208093627 \\ c = 5.783574932348526 \\ d = -2.71142115818094 \end{cases} \tag{114}$$

References

[Arn92] Vladimir I Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 1992.

[Duf21] Tamirat Temesgen Dufera. Deep neural network for system of ordinary differential equations: Vectorized algorithm and simulation. *Machine Learning with Applications*, 5:100058, 2021.

[HS74] Morris W Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.

[Lue79] David G Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, volume 1. Wiley New York, 1979.

[NVN+22] Duc Q Nguyen, Nghia Q Vo, Thinh T Nguyen, Khuong Nguyen-An, Quang H Nguyen, Dang N Tran, and Tho T Quan. Becaked: An explainable artificial intelligence model for covid-19 forecasting. *Scientific Reports*, 12(1):1–26, 2022.

[Str88] Steven H Strogatz. *Love affairs and differential equations*. Mathematics Magazine, 61(1):35–35, 1988.

[Hen96] Henry J.Ricardo, *Modern Introduction to Differential Equations*, third edition, Academic Press, 2021.

[UNF] University of North Florida, *System of First Order Differential Equations*, reference at:https://www.unf.edu/~mzhan/chapter4.pdf.

[GGQi] Geeksforgeeks, *Quiver Plot in Matplotlib*, reference at https://www.geeksforgeeks.org/quiver-plot-in-matplotlib/.

[PJO] Peter J.Oliver, University of Minnesota, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, reference at https://www-users.cse.umn.edu/~olver/ln_/odq.pdf.

[TB10] Tymothy Bui, University of Connecticut, *Explicit and Implicit Methods In Solving Differential Equations*, 2010.