

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING



MATHEMATICAL MODELING (CO2011)

Assignment topic: **Love Dynamics**

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Advisor: Nguyễn An Khương
Students: Bùi Khánh Vĩnh - 2010091.
Trần Đoàn Đức Huy - 2013332
Hồ Ngọc An - 2012548
Lưu Vũ Hà - 2013039
Bành Ngọc Phương Uyên - 2012397

HO CHI MINH CITY, AUGUST 2022



Contents

1	Member list & Workload	2
2	Exercise 1	3
3	Exercise 2	11
4	Exercise 3	20
5	Exercise 4	29
6	Exercise 5	41
	Tài liệu tham khảo	41



1 Member list & Workload

BẢNG CÔNG VIỆC TUẦN 1

No.	Fullname	Student ID	Problems	Percent
1	Bùi Khánh Vĩnh	2010091	Đọc, hiểu và nghiên cứu bài tập lớn	100%
2	Trần Đoàn Đức Huy	2013332	Đọc, hiểu và nghiên cứu bài tập lớn	100%
3	Hồ Ngọc An	2012548	Đọc, hiểu và nghiên cứu bài tập lớn	100%
4	Lưu Vũ Hà	2013039	Đọc, hiểu và nghiên cứu bài tập lớn	100%
5	Bành Ngọc Phương Uyên	2012397	Đọc, hiểu và nghiên cứu bài tập lớn	100%

BẢNG CÔNG VIỆC TUẦN 2

No.	Fullname	Student ID	Work
1	Bùi Khánh Vĩnh	2010091	Giải quyết 50% Ex3 và 25% Ex4
2	Trần Đoàn Đức Huy	2013332	Không hoàn thành nhiệm vụ
3	Hồ Ngọc An	2012548	Hoàn thành nội dung Ex1 vs Ex2
4	Lưu Vũ Hà	2013039	Hoàn 50% Latex Ex1 và Ex2
5	Bành Ngọc Phương Uyên	2012397	Không hoàn thành nhiệm vụ

BẢNG CÔNG VIỆC TUẦN 3

No.	Fullname	Student ID	Work
1	Bùi Khánh Vĩnh	2010091	Hoàn thành Ex3
2	Trần Đoàn Đức Huy	2013332	Hoàn thành Ex4
3	Hồ Ngọc An	2012548	Hoàn thành Ex1 và Ex2
4	Lưu Vũ Hà	2013039	Hoàn thành Ex1 và Ex2
5	Bành Ngọc Phương Uyên	2012397	Hoàn thành Ex4

BẢNG CÔNG VIỆC TUẦN 4

No.	Fullname	Student ID	Work
1	Bùi Khánh Vĩnh	2010091	Kiểm tra Ex3 và đọc hiểu BTL
2	Trần Đoàn Đức Huy	2013332	Kiểm tra Ex4 và đọc hiểu BTL
3	Hồ Ngọc An	2012548	Kiểm tra Ex1, Ex2 và đọc hiểu BTL
4	Lưu Vũ Hà	2013039	Kiểm tra Ex1, Ex2 và đọc hiểu BTL
5	Bành Ngọc Phương Uyên	2012397	Kiểm tra Ex4 và đọc hiểu BTL

No.	Fullname	Student ID	Problems	Percent
1	Bùi Khánh Vĩnh	2010091	- Exercise 3,4 - Latex Ex: 1, 2, 3, 4.	30%
2	Trần Đoàn Đức Huy	2013332	- Exercise 4 - Latex Ex: 4.	10%
3	Hồ Ngọc An	2012548	- Exercise 1,2 - Latex Ex: 1, 2.	20%
4	Lưu Vũ Hà	2013039	- Exercise 1,2 - Latex Ex: 1, 2.	20%
5	Bành Ngọc Phương Uyên	2012397	- Exercise 4 - Latex Ex: 4.	20%

Hình 1: Nhiệm vụ của các thành viên trong nhóm

2 Exercise 1

Problem. Write on the report a very detailed introduction to the IVPs Sys. (3) and the formulae of its exact solutions for general a , b , c , and d and initial condition $R0$ and $J0$. Then complete Tab. 2 for all possible cases of eigenvalues of general 2×2 matrix A .

Solution. Giới thiệu về IVPs Sys:

Thuật ngữ động lực đề cập đến các hiện tượng tạo ra các mô hình thay đổi theo thời gian, các đặc điểm của mô hình tại một thời điểm có liên quan lẫn nhau với các mô hình đó vào những thời điểm khác. Thuật ngữ này gần đồng nghĩa với sự tiến triển theo thời gian hoặc mô hình thay đổi. Nó đề cập đến sự xuất hiện của các sự kiện trong một quá trình phát triển liên tục.

Nhiều hệ thống động lực học có thể được hiểu và phân tích một cách trực quan, không cần dùng đến toán học và không cần phát triển lý thuyết động lực học. Thật vậy, chúng ta thường đối phó khá hiệu quả với nhiều tình huống động đơn giản trong cuộc sống hàng ngày, tuy nhiên, để tiếp cận những tình huống phức tạp không quen thuộc một cách hiệu quả, cần phải tiến hành một cách có hệ thống. Ví dụ, nếu chúng ta giả định 'h' là nhân tố hạnh phúc thì '-h' là nhân tố buồn bã và mọi người đều cố gắng đạt được lượng 'h' lớn hơn. Hạnh phúc có thể đạt được bằng cảm giác bên ngoài. Trong số các cảm giác bên trong, tình yêu là cảm giác nổi trội nhất ở một cá nhân. Cảm giác ở một cá nhân có thể dành cho cuộc sống, vị trí, con người hoặc đối tác của bản thân người đó. Những cảm giác này khác nhau ở mỗi người và tùy từng thời điểm. Mọi người đều có những cảm xúc này trong lòng nhưng tỷ lệ hoặc tỷ lệ phần trăm khác nhau. Rõ ràng là cảm giác của con người thay đổi tùy theo các điều kiện khác nhau, điều này không dễ nghiên cứu về mặt toán học. Vì vậy, các điều kiện và giả định khác nhau phải được áp dụng, do đó chúng ta cần hướng tới một thế giới có thể diễn giải hoặc suy nghĩ cho một mô hình có thể cung cấp động lực cho những cảm giác và trải nghiệm của con người, đặc biệt là hạnh phúc và tình yêu.

Trong phép tính đa biến, bài toán giá trị ban đầu (IVP) là một phương trình vi phân thông thường cùng với điều kiện ban đầu xác định giá trị của hàm chưa biết tại một điểm đã cho trong miền. Mô hình hóa một hệ thống trong vật lý hoặc các ngành khoa học khác thường giúp giải quyết một vấn đề về giá trị ban đầu. Trong bối cảnh đó, giá trị ban đầu của vi phân là một phương trình xác định cách hệ thống phát triển theo thời gian với các điều kiện ban đầu của bài toán. Phương trình vi phân mô tả mối quan hệ giữa một hàm chưa biết và các đạo hàm của nó. Để giải một phương trình vi phân là tìm một hàm thỏa mãn quan hệ, điển hình là đồng thời thỏa mãn một số điều kiện bổ sung.

Các mô hình động lực học rời rạc liên quan về sự tương tác bằng lời nói của các cặp vợ chồng đã kết hôn gần đây đã được đề xuất bởi Gottman, Murray, Swanson, Tyson và Swanson (2002). Mặc dù, mô hình của Strogatz ban đầu nhằm mục đích thúc đẩy sinh viên nhiều hơn là một mô tả nghiêm túc về các cuộc tình, nó đưa ra một số dự đoán thú vị và hợp lý, gợi ý các phần mở rộng tạo ra phạm vi hành vi thậm chí còn rộng hơn. Sprott (2004) cũng đã làm rất tốt khi mở rộng công việc của Strogatz sang tình yêu của các hình tam giác bao gồm cả các điểm phi tuyến tính, được cho là tạo ra sự hỗn loạn. Bài báo này được viết với tinh thần tương tự bằng cách áp dụng một bộ tích phân số mới được phát triển bởi Odekunle và Sunday (2012) trên trường hợp đặc biệt của mô hình tình yêu (của Romeo và Juliet). Điều này sẽ cho phép chúng tôi xem kết quả biến thiên theo thời gian của mô hình này một cách rõ ràng hơn. Khía cạnh khó khăn nhất trong bất kỳ mô hình tình yêu nào là xác định ý nghĩa của tình yêu và định lượng nó theo một cách có ý nghĩa nào đó (Sternberg và cộng sự, 1988). Có nhiều loại tình yêu, bao gồm cả sự thân mật, đam mê và cam kết (Sternberg, 1986), và mỗi loại bao gồm một hỗn hợp cảm xúc phức tạp. Ngoài tình yêu dành cho người khác, còn có tình yêu với chính mình, tình yêu cuộc sống, tình yêu nhân loại, v.v. Hơn nữa, trái ngược của tình yêu có thể không phải là sự ghét bỏ, vì hai cảm xúc có thể cùng tồn tại và một người có thể yêu một số điều về đối tác của mình và ghét người khác cùng một lúc, (Sprott 2004). Rõ ràng là không thực tế khi cho rằng tình yêu của một người chỉ bị ảnh hưởng bởi cảm xúc của chính mình và cảm xúc của người kia, không phụ thuộc vào các ảnh hưởng khác và các thông số đặc trưng cho sự tương tác là không thay đổi, do đó loại trừ khả năng học hỏi và thích nghi (Scharfe và Bartholomew, 1994). Tuy nhiên, mục tiêu chính trong nghiên cứu này là áp dụng tích phân số cho một trường hợp đặc biệt của mô hình tình yêu dưới dạng phương trình vi phân thông thường ghép nối (tức là hệ phương trình tuyến tính).

The Model Strogatz (1994) coi mối tình giữa Romeo và Juliet, trong đó $R(t)$ là tình yêu của Romeo (hoặc ghét nếu tiêu cực) dành cho Juliet tại thời điểm t và $J(t)$ là tình yêu của Juliet dành cho Romeo. Mô hình đơn giản nhất là tuyến tính với,

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (.)$$

Trong đó: R_0 và J_0 lần lượt là tình yêu của Romeo dành cho Juliet và tình yêu của Juliet dành cho Romeo ở thời điểm ban đầu. a và b chỉ định “phong cách lãng mạn” của Romeo trong khi c và d chỉ định phong cách của Juliet. Tham số a mô tả mức độ Romeo được khuyến khích bởi cảm xúc của chính mình và b là mức độ mà anh ta được khuyến khích bởi cảm xúc của Juliet. Gottman và cộng sự (2002) đã sử dụng thuật ngữ “quán tính hành vi” cho hàm trước và “hàm ảnh hưởng” cho hàm sau, mặc dù quán tính lớn nhất khi $a = 0$. Động lực học kết quả là hai chiều, bị chi phối bởi các điều kiện ban đầu và bốn tham số, có thể tích cực hoặc tiêu cực. Một mô hình tuyến tính tương tự đã được đề xuất bởi Rinaldi (1998), trong đó một số hạng không đổi được thêm vào mỗi đạo hàm trong (.) để giải thích sự hấp dẫn (hoặc sự đẩy lùi nếu tiêu cực) mà mỗi đối tác trình bày với nhau trong trường hợp không có cảm giác khác. Một mô hình như vậy thực tế hơn vì nó cho phép cảm xúc phát triển từ trạng thái thờ ơ và cung cấp một trạng thái cân bằng không được đặc trưng bởi sự thờ ơ hoàn toàn.

Initial Value Problem system (IVPs):

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (*)$$

Cách giải. Để giải quyết bài toán trên thì ta cần thực hiện các bước sau

Bước 1. Chuyển (*) về dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Trong đó: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u = (R \ J)^T$, $u_0 = (R_0 \ J_0)^T$

Bước 2. Giải phương trình đặc trưng để tìm trị riêng:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (1)$$

Phương trình trên tương đương với

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0$$

Điều này dẫn tới

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc \quad (2)$$

Bước 3. Tìm vector riêng và giải

Trường hợp 1. Nếu $\Delta > 0$ với $(bc > 0)$ thì với

$$\lambda_1 = \frac{(a + d) + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}$$

Khi đó ta suy ra được rằng

$$\begin{cases} \frac{a - d - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}x + by = 0 \\ cx + \frac{d - a - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}y = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \frac{a - d - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}x + by = 0 \\ \frac{a - d - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}x + \frac{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc} - (a - d)}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc} + (a - d)}{2c}y = 0 \end{cases}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + by = 0 \\ \frac{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + \frac{4bc}{4c}y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + by = 0 \\ \frac{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + by = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \alpha \\ x = \frac{-2\alpha b}{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây ta đặt

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2b}{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tương tự λ_1 thì ta xét

$$\lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}$$

Khi đó ta suy ra được rằng

$$\begin{cases} \frac{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + by = 0 \\ cx + \frac{d-a+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}y = 0 \end{cases}$$

Thực hiện tương tự như λ_1 thì

$$\frac{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}x + by = 0$$

Đặt

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2b}{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy nên ta có được rằng

$$\begin{aligned} & \begin{cases} R(t) = \frac{-2b}{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_1e^{\lambda_1 t} + \frac{-2b}{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_2e^{\lambda_2 t} \\ J(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} R_0 = \frac{-2b}{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_1 + \frac{-2b}{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_2 \\ J_0 = c_1 + c_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c_1 = J_0 + \frac{c}{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}(R_0 + \frac{J_0 * 2b}{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}) \\ c_2 = -\frac{c}{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}(R_0 + \frac{J_0 * 2b}{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, ta được nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} R(t) = \frac{-2b}{a-d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_1e^{\lambda_1 t} + \frac{-2b}{a-d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}c_2e^{\lambda_2 t} \\ J(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} c_1 = J_0 + \frac{c}{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}} \left(R_0 + \frac{J_0 \cdot 2b}{a-d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}} \right) \\ c_2 = -\frac{c}{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}} \left(R_0 + \frac{J_0 \cdot 2b}{a-d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}} \right) \\ \lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$, phương trình (2) có nghiệm kép $\lambda = \lambda_0$. Để thấy hệ (1) sẽ có λ_0 có 2 trị riêng độc lập tuyến tính. Giả sử

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

và là các vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với trị riêng λ_0 . Do đó, ta có công thức chung:

$$\begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix} = (c_1 v_1 + c_2 v_2) e^{\lambda_0 t} = (c_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}) e^{\lambda_0 t}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{cases} R(t) = (c_1 v_{11} + c_2 v_{12}) e^{\lambda_0 t} \\ J(t) = (c_1 v_{12} + c_2 v_{22}) e^{\lambda_0 t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(0) = c_1 v_{11} + c_2 v_{12} = R_0 \\ J(0) = c_1 v_{12} + c_2 v_{22} = J_0 \end{cases}$$

Từ đây ta giải được ra c_1, c_2

(2): λ_0 có 1 trị riêng là $v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$ là nghiệm của $(\lambda_0 I - A)v_2 = v_1$

Ta có công thức nghiệm:

$$\begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix} = (c_1 v_1 + c_2 (tv_1 + v_2)) e^{\lambda_0 t} = (c_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + c_2 (t \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix})) e^{\lambda_0 t}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{cases} R = (c_1 v_{11} + c_2 (tv_{11} + v_{12})) e^{\lambda_0 t} \\ J = (c_1 v_{12} + c_2 (tv_{12} + v_{22})) e^{\lambda_0 t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(0) = (c_1 v_{11} + c_2 v_{12}) = R_0 \\ J(0) = (c_1 v_{12} + c_2 v_{22}) = J_0 \end{cases}$$

Từ đây có thể dễ dàng giải được các số c_1, c_2

Trường hợp 3. Nếu $\Delta < 0$, phương trình có 2 nghiệm phức $\lambda_1 = x + yi, \lambda_2 = x - yi$. Với trị riêng λ_1 thì ta cần giải phương trình

$$(\lambda I - A)x = 0$$

để có vector riêng phức v , giả sử v được viết dưới dạng $v = \begin{bmatrix} v_{11} + iv_{12} \\ v_{21} + iv_{22} \end{bmatrix}$.

Đặt $v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$ thì ta có công thức nghiệm:

$$\begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix} = [c_1 (v_1 \cos(yt) - v_2 \sin(yt)) + c_2 (v_2 \cos(yt) + v_1 \sin(yt))] e^{xt}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} R = [c_1(v_{11}\cos(yt) - v_{12}\sin(yt) + c_2(v_{12}\cos(yt) + v_{11}\sin(yt)))]e^{xt} \\ J = [c_1(v_{21}\cos(yt) - v_{22}\sin(yt) + c_2(v_{21}\cos(yt) + v_{22}\sin(yt)))]e^{xt} \end{cases}$$

Với $R(0) = R_0, J(0) = J_0$ thì ta có thể dễ dàng giải được các số c_1, c_2 .

Phase Portraits:

Khái niệm:

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính $x' = Ax$. **Phase Portraits** của nó là tập hợp các nghiệm, được vẽ dưới dạng đường cong tham số (với tham số là t) trên hệ tọa độ Descartes, với $(x, y) = (x_1(t), x_2(t))$, $-\infty < t < \infty$. Tương tự như **direction field**, **phase portraits** là công cụ hình học để mô tả một hệ phương trình vi phân sẽ như thế nào trong thời gian t lớn.

Trong nội dung bài báo cáo, mặt phẳng Descartes biểu diễn **phase portrait** được gọi là **phase plane**. Các đường cong tham số được vẽ ra bởi các nghiệm còn được gọi là **trajectorie**.

Nhận xét:

Khá tốn công nhưng có thể vẽ phase portraits mà không cần giải hệ phương trình mà nó biểu diễn trước. Điều này sẽ dẫn đến **qualitative study** của DSS. Tại mỗi điểm lưới $x = (R, J)$, chúng ta có thể dự đoán hướng chuyển động tức thời của trajectory tại điểm đó bằng các sử dụng hệ phương trình đã cho để tính vecto tiếp tuyến / vận tốc $x' = (\dot{R}, \dot{J})$.

Phân loại critical points:

Trong các trường hợp biểu diễn, có các điểm được gọi là **steady poin** hay **critical point**, được định nghĩa bởi u khi $u' = 0$ tương tự $Au = 0$. Những điểm này chính xác là các vector riêng tương ứng với trị riêng bằng 0 của ma trận A và vector 0. Các point cũng được phân làm 2 loại là **attractor** và **repeller** (hay còn gọi là **stable** và **unstable**).

Chúng ta có thể phân loại các critical point bằng tính ổn định của chúng. Ngoài ra, do bản chất thực sự hai chiều của các đường cong tham số, ta cũng có thể phân loại dựa vào hình dạng của chúng.

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (*)$$

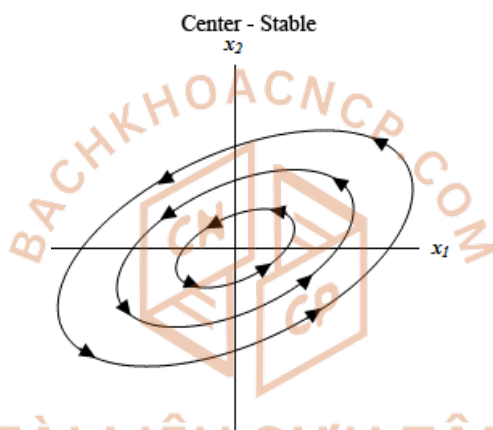
với ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 là các trị riêng của ma trận.

Nếu phương trình: $\lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0$, có nghiệm kép và ma trận A là bội số của ma trận đơn vị thì "critical point" là *Star*, ngược lại nếu ma trận A không là bội số của ma trận đơn vị thì "critical point" là *Improper node*. Nếu giá trị nghiệm kép là dương thì "critical point" là *Unstable*, là âm thì "critical point" là *Stable*.

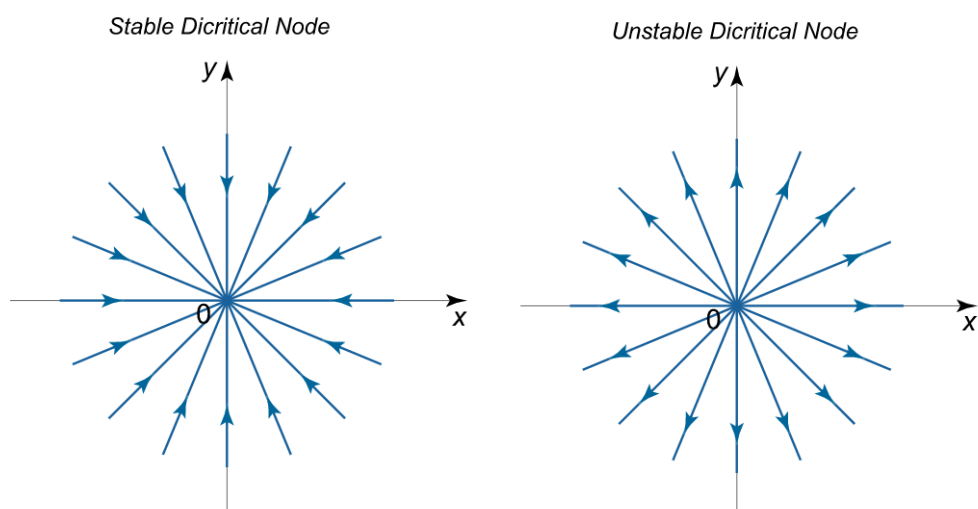
Bảng 1: Tab2 Phase-portrait classification

$\text{Re}\lambda_1$	$\text{Re}\lambda_2$	$ \text{Im}\lambda_1 $	$ \text{Im}\lambda_2 $	Type
+	+	0	0	Unstable node
-	-	0	0	Stable node
+	-	0	0	Saddle
-	+	0	0	Saddle
0	0	+	+	Center
+	+	+	+	Unstable Spiral
-	-	+	+	Stable Spiral

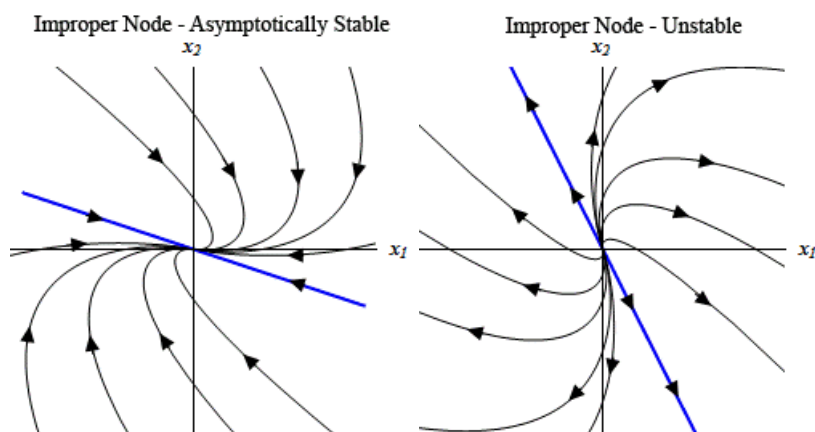
Các dạng critical point và Một số hình ảnh minh họa:



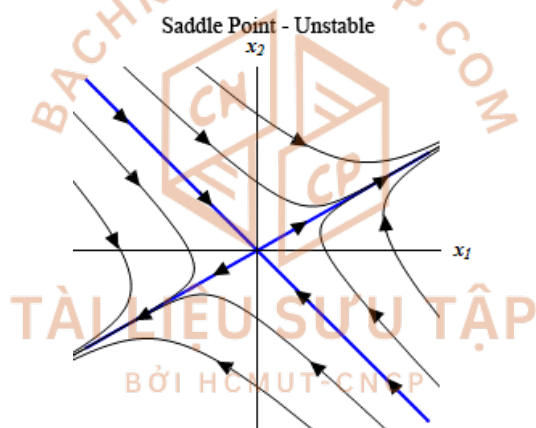
Center: Trajectories không hội tụ đến điểm tới hạn cũng như không đi chuyển ra xa vô tận. Thay vào đó, chúng ở dạng không đổi, hình elip.



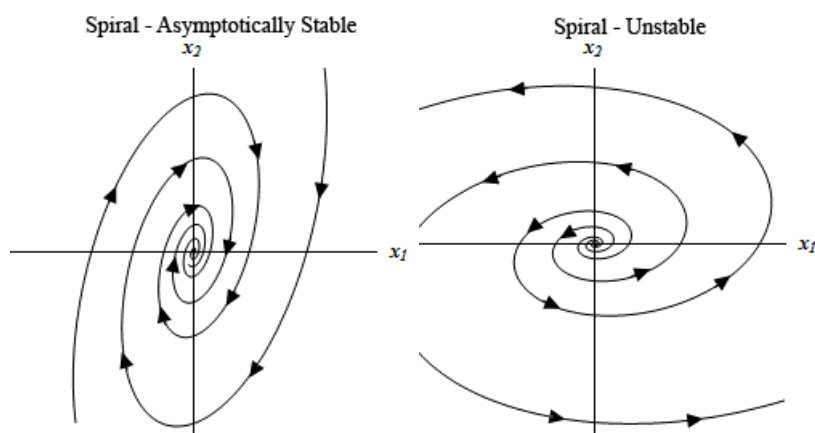
Proper Node (Dicritical node): Trajectories sẽ di chuyển trực tiếp từ critical point ra xa vô cùng (unstable) hoặc ngược lại (stable)..



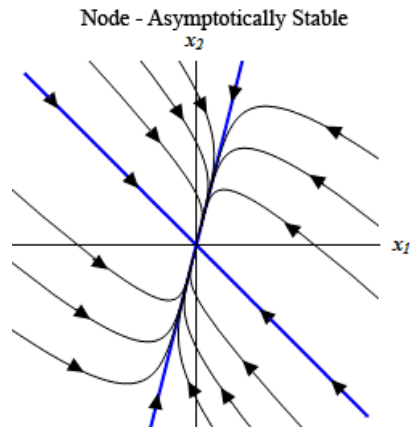
Improper Node: Tương tự như proper node, nhưng quỹ đạo sẽ không có dạng đường thẳng.



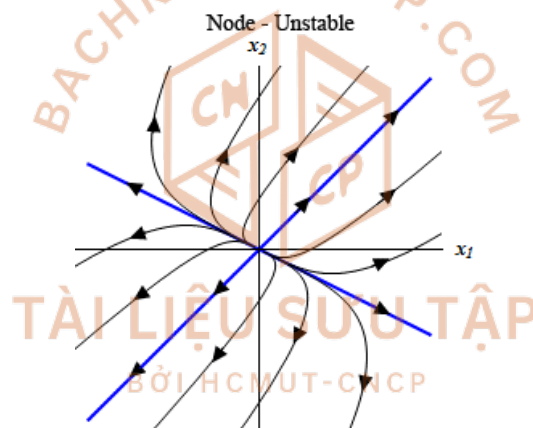
Saddle point: Trajectories bắt đầu từ xa vô cùng, di chuyển về phía critical point nhưng không bao giờ tụ lại tại đó, trước khi đổi hướng và quay trở lại vô cùng (luôn luôn unstable).



Spiral point: Quỹ đạo xoắn ốc đi từ critical point tới vô tận(unstable) hoặc ngược lại (stable).



Stable Node: Trajectories sẽ có xu hướng tụ vào critical point.



Unstable Node: Trajectories sẽ hướng ra xa khỏi critical point.

3 Exercise 2

Problem. For each combination of romantic styles in Tab. 1, give two concrete examples of IVPs Sys. (3). Apply the formulae in Ex. 1 to find the exact solutions. Plot all the solutions and the phase portraits.

Solution. Từ hệ phương trình (*), ta có thể xác định được phong cách tình yêu của Romeo và Juliet dựa vào dấu của các hệ số a , b , c , d . Cụ thể, ta có 4 phong cách tình yêu là “Eager Beaver”, “Narssistic Nerd”, “Cautious Lover”, “Hermit”.

Bảng 2: Tab.1: Romantic style of Romeo

a	b	Style
+	+	Eager Beaver
+	-	Narcissistic Nerd
-	+	Cautious Lover
-	-	Hermit

1. Phong cách tình yêu: Eager Beaver.

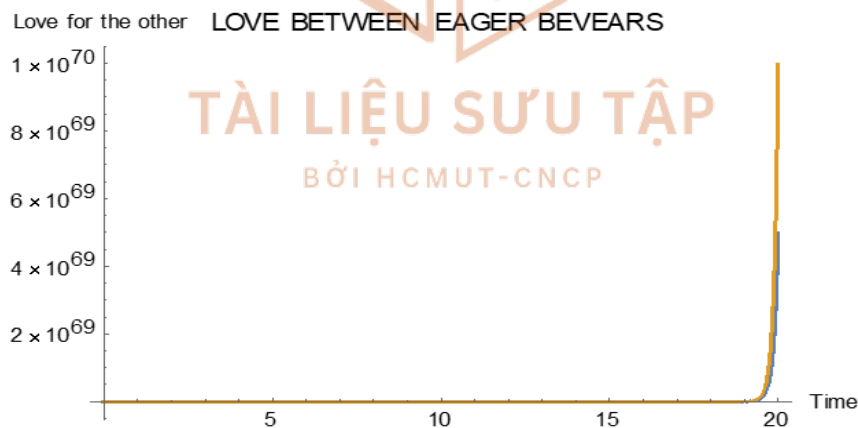
VD1: Eager Beaver và Eager Beaver.

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 3J \\ \dot{J} = 4R + J \\ R(0) = 2, J(0) = 3 \end{cases}$$

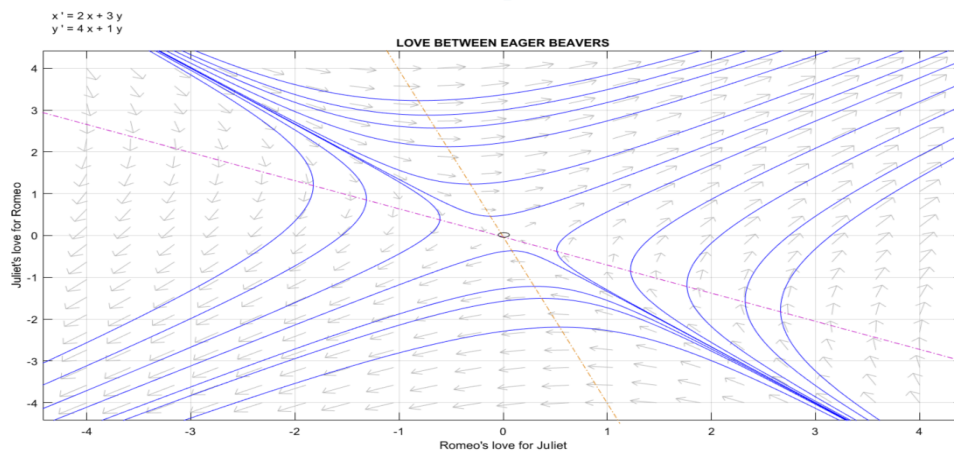
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(1; 1)^T$ và $(-\frac{3}{4}; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{7}e^{-2t}(-3 + 17e^{7t}) \\ J = \frac{1}{7}e^{-2t}(4 + 17e^{7t}) \end{cases}$$



Nhận xét: Vì cả 2 người đều là Eager Beavers, vì vậy tình cảm của họ được khuyến khích bởi chính cảm xúc của bản thân cũng như của đối phương. Ban đầu, cả 2 người đều thích nhau và vì vậy từ hình vẽ ta thấy, theo thời gian đủ lớn, tình cảm của 2 người sẽ ngày càng tăng lên dành cho nhau.



Critical point: Saddle.

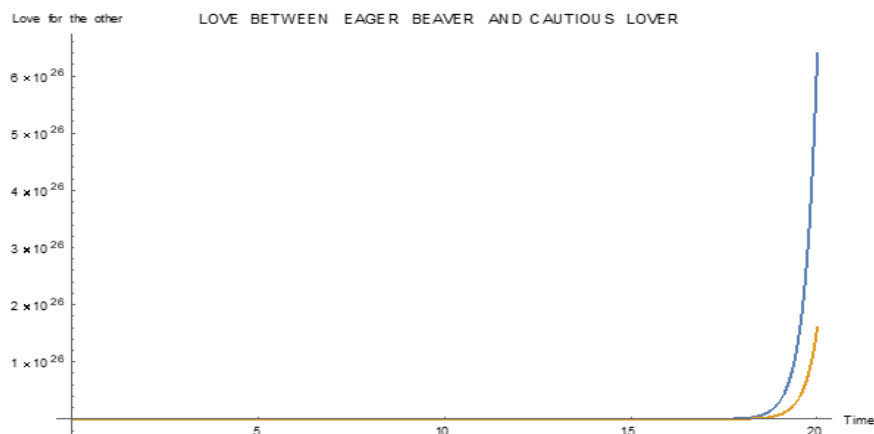
VD2: Eager Beaver và Cautious Lover.

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + 4J \\ \dot{J} = R - J \\ R(0) = 5, J(0) = 2 \end{cases}$$

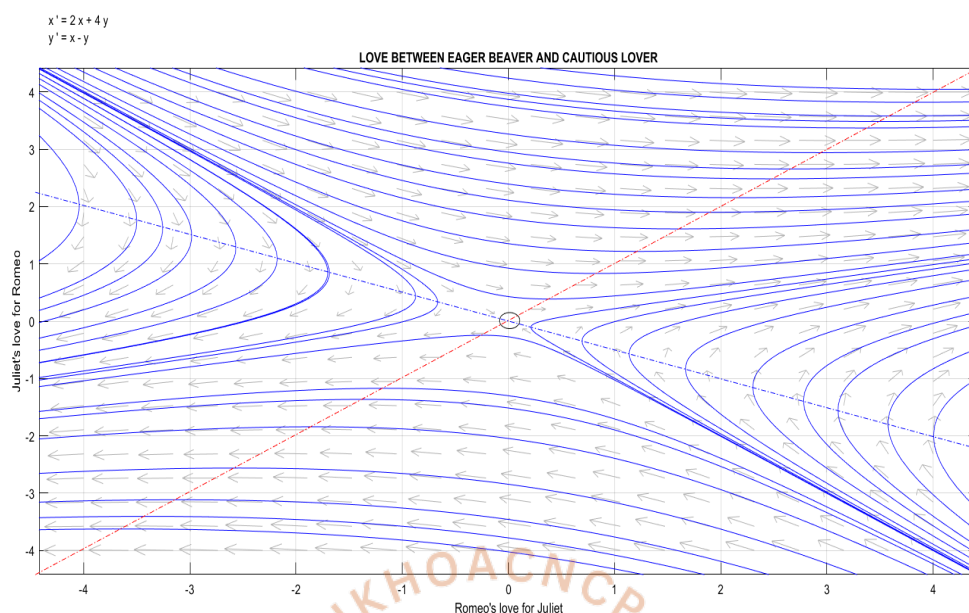
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(4; 1)^T$ và $(-1; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{5}e^{-2t}(-3 + 28e^{5t}) \\ J = \frac{1}{5}e^{-2t}(3 + 7e^{5t}) \end{cases}$$



Nhận xét: Khi thời gian đủ lớn, ta thấy rằng tại 1 thời điểm t cố định thì tình cảm của Romeo dành cho Juliet luôn lớn hơn tình cảm của cô ấy dành cho anh ấy, vì Juliet là Cautious Lover



nên khi tình cảm của Romeo lớn hơn tình cảm của cô ấy thì tình cảm của cô ấy cũng tăng lên theo.

Critical point: Saddle.

2. Phong cách tình yêu: Narcissistic Nerd.

VD1: Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd.

$$\begin{cases} \dot{R} = 3R - 6J \\ \dot{J} = -R + 4J \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

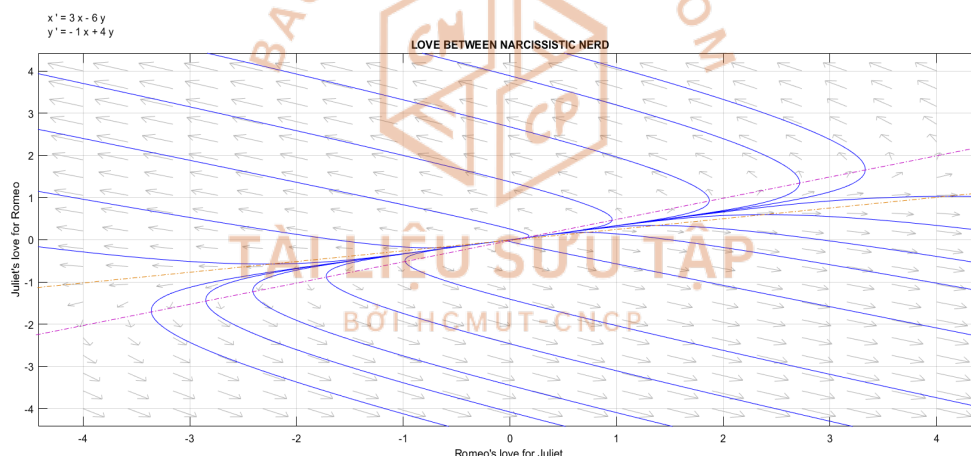
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(-2; 1)^T$ và $(3; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = -\frac{1}{8}e^{-t}(-15 + 7e^{8t}) \\ J = \frac{1}{8}e^{-t}(9 + 7e^{8t}) \end{cases}$$



Nhận xét: Vì cả 2 đều là Narssistic Nerd, do vậy họ sẽ có xu hướng phản ứng ngược lại tình cảm của đối phương dành cho mình và bị khuyến khích bởi tình cảm của mình. Từ đồ thị, ta thấy rằng khi thời gian t đủ lớn, tình cảm của Romeo có xu hướng tăng lên, vì vậy theo như phong cách của mình thì tình yêu của Juliet sẽ giảm xuống và cô ấy có xu hướng ghét Romeo nhiều hơn.



Steady point: Unstable node.

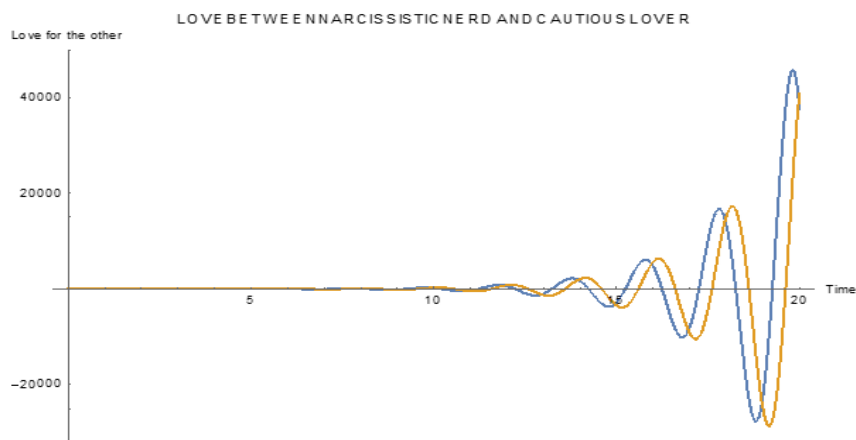
VD2: Narssistic Nerd và Cautious Lover.

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - 4J \\ \dot{J} = 3R - J \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

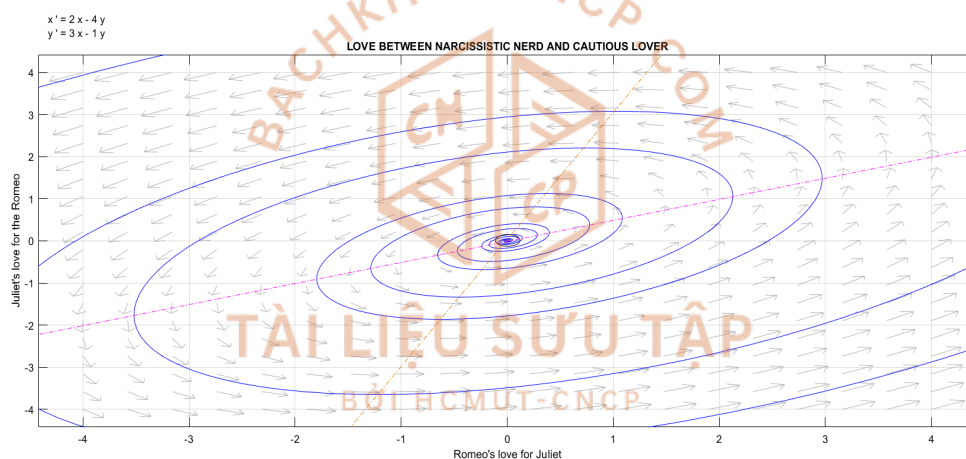
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{39})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{39})$. Vector riêng tương ứng với λ_1 là $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{39}}{6}; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = -\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}[-3\cos(\frac{\sqrt{39}t}{2}) + \sqrt{39}\sin(\frac{\sqrt{39}t}{2})] \\ J = 2e^{t/2}\cos(\frac{\sqrt{39}t}{2}) \end{cases}$$



Nhận xét: Vì tình cảm của cả 2 người có xu hướng trái ngược nhau, vì vậy từ đồ thị, ta thấy rằng, họ sẽ cùng yêu hoặc cùng ghét theo các khoảng thời gian luân phiên nhau.



Critical point: *Unstable spiral.*

3. Phong cách tình yêu: Cautious Lover.

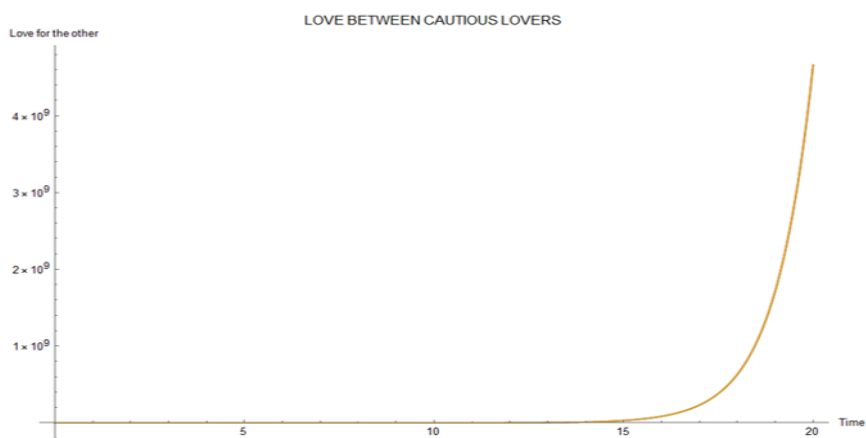
VD1: Cautious Lover và Cautious Lover

$$\begin{cases} \dot{R} = -R + 2J \\ \dot{J} = 3R - 2J \\ R(0) = 10, J(0) = 9 \end{cases}$$

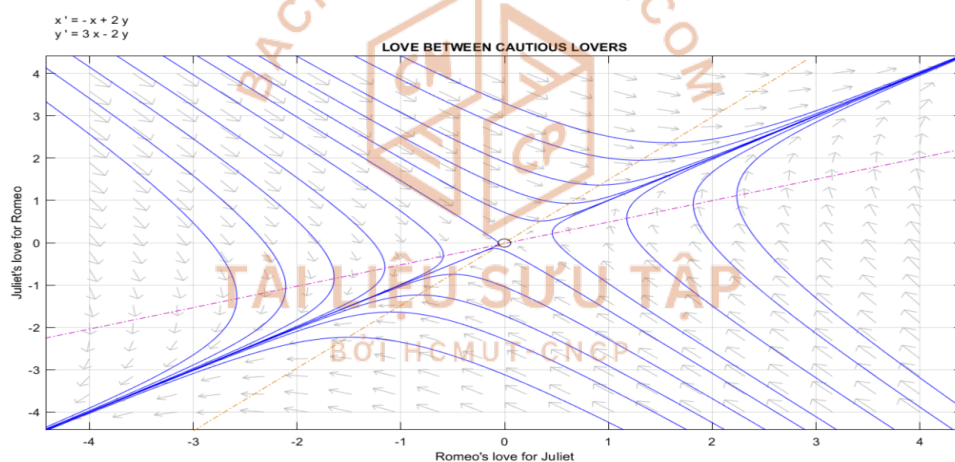
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(-2; 3)^T$ và $(1; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = \frac{2}{5}e^{-4t}(1 + 24e^{5t}) \\ J = \frac{3}{5}e^{-4t}(-1 + 16e^{5t}) \end{cases}$$



Nhận xét: Cả 2 đều có xu hướng không bị khuyến khích bởi tình cảm của mình và phản ứng với tình cảm của đối phương. Ta thấy rằng, ban đầu cả 2 người họ đều thích nhau, vì vậy theo thời gian thì tình cảm của 2 người sẽ ngày càng tăng lên.



Critical point: Saddle.

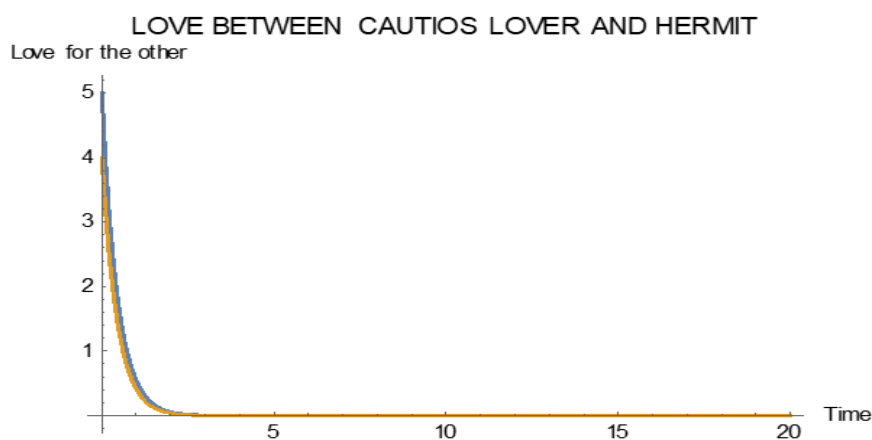
VD2: Cautious Lover và Hermit.

$$\begin{cases} \dot{R} = -3R + J \\ \dot{J} = -R - J \\ R(0) = 5, J(0) = 4 \end{cases}$$

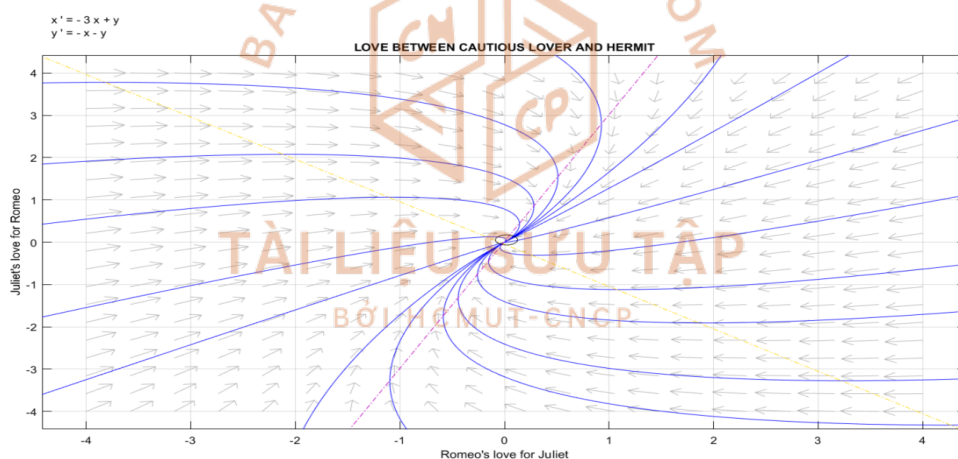
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(1; 1)^T$ và $(0; 0)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = -e^{-2t}(-5 + t) \\ J = -e^{-2t}(-4 + t) \end{cases}$$



Nhận xét: Ban đầu cả 2 đều thích nhau, tuy nhiên vì Juliet là Hermit, vì vậy cô ấy sẽ có xu hướng ngược với tình cảm của chính mình và của Romeo, do đó theo thời gian, tình cảm của cô ấy sẽ giảm. Tương tự, Romeo là Cautious Lover vì vậy anh ấy không bị khuyến khích bởi tình cảm của bản thân và khi tình cảm của Juliet giảm thì tình cảm của anh ấy cũng giảm theo.



Critical point: Stable Improper node.

4. Phong cách tình yêu: Hermit.

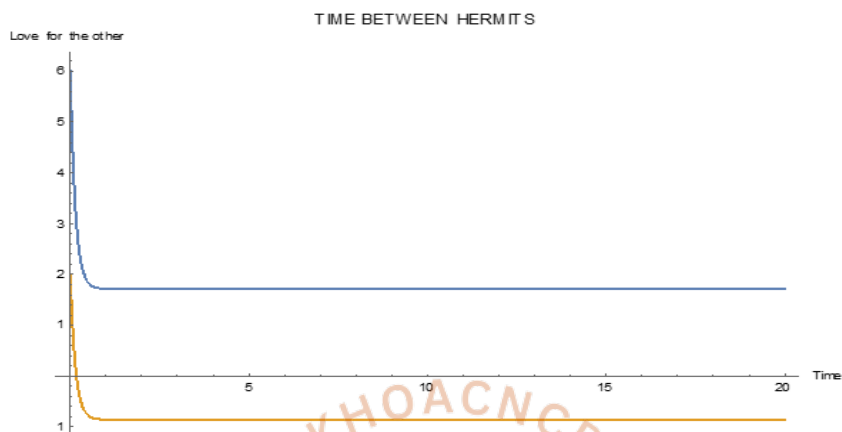
VD1: Hermit và Hermit.

$$\begin{cases} \dot{R} = -3R - 6J \\ \dot{J} = -2R - 4J \\ R(0) = 6, J(0) = 2 \end{cases}$$

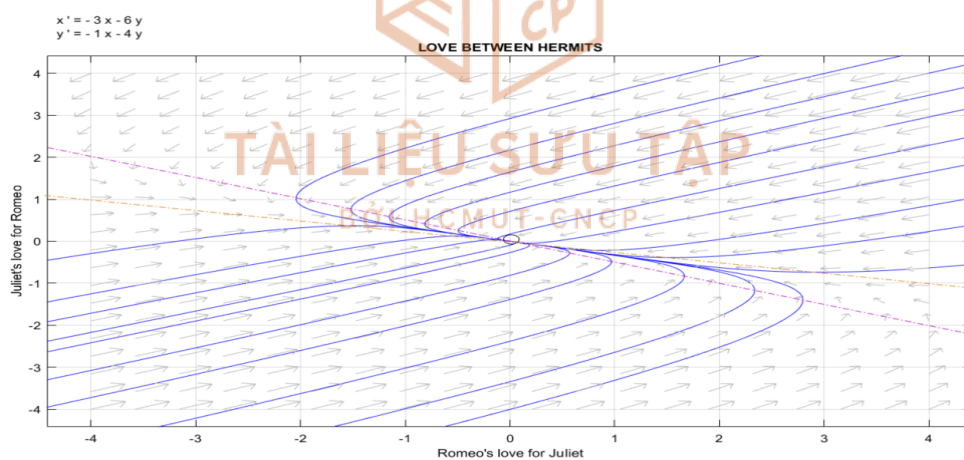
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0$. Các vector riêng tương ứng lần lượt là $(3; 2)^T$ và $(-2; 1)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = \frac{6}{7}e^{-7t}(5 + 2e^{7t}) \\ J = -\frac{2}{7}e^{-7t}(-10 + 3e^{7t}) \end{cases}$$



Nhận xét: Cả 2 đều là Hermit, vì vậy họ sẽ không bị khuyến khích bởi tình cảm của bản thân cũng như đối phương. Ban đầu ta thấy cả 2 người đều thích nhau, tuy nhiên vì họ là Hermit nên ban đầu tình cảm của họ giảm dần và giữ nguyên khi thời gian tăng lên.



Critical point: Stable node

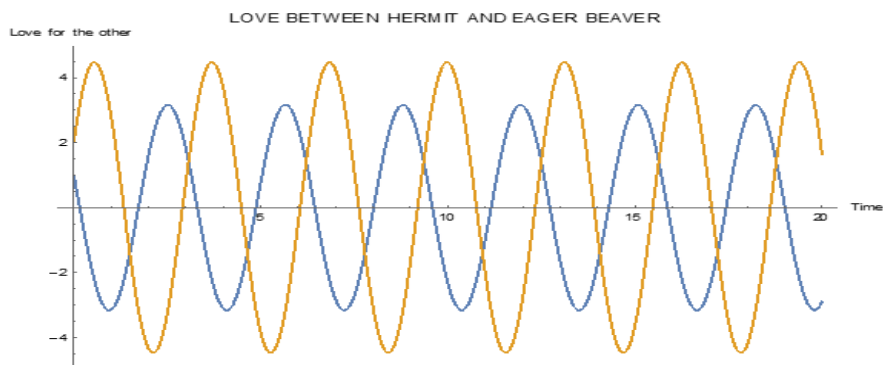
VD2: Hermit và Eager Beaver.

$$\begin{cases} \dot{R} = -2R - 2J \\ \dot{J} = 4R + 2J \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

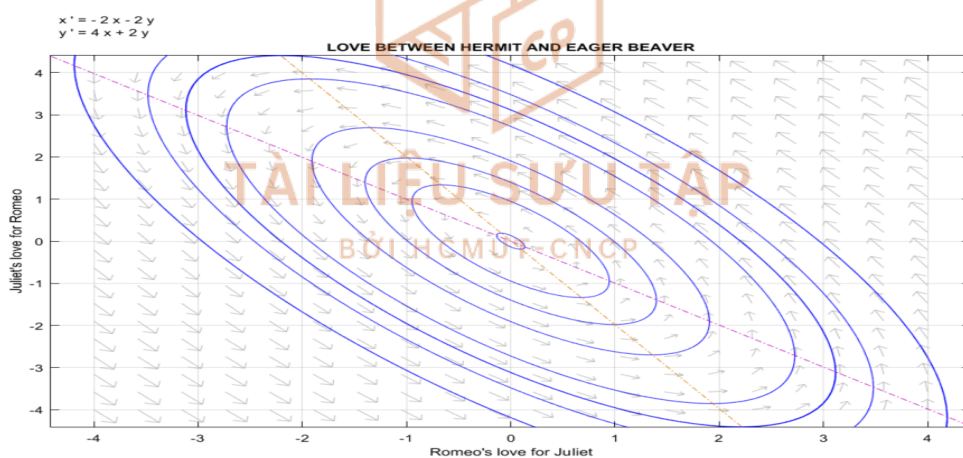
Giải:

Phương trình có các trị riêng $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$. Vector riêng tương ứng với λ_1 là $(-1 + 2i)^T$. Từ đó ta có công thức nghiệm:

$$\begin{cases} R = \cos(2t) - 3\sin(2t) \\ J = 2(\cos(2t) + 2\sin(2t)) \end{cases}$$



Nhận xét: Cả 2 người có xu hướng tình cảm đối với cảm xúc của bản thân và đối phương trái ngược nhau. Theo đồ thị, ta thấy rằng khi tình cảm của 1 người tăng lên thì ngược lại tình cảm của người kia giảm xuống, tuy nhiên ngay sau đó thì tình cảm của họ sẽ cùng tăng lên hoặc giảm xuống tạo ra các chu kỳ cảm xúc.



Critical point: Center.

4 Exercise 3

Problem. Let's assume that the love between Romeo and Juliet is perturbed by outer conditions, e.g. their families and social prejudices. In this case, the love is modeled by the

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t), \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t), \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Here f and g are two real functions dependent on t , e.g., $f(t) = t - 1$ and $g(t) = t^2$. Could we find the exact solution to the general (3.1)? If we could, give the formula of the solution and five specific examples with their exact solutions. Otherwise, find general conditions on f and g so that the (3.1) has a solution and also give five specific examples of such IVPs without finding the exact solutions.

Solution. Chúng ta chú ý rằng

$$\begin{cases} f(t) = \dot{R} - aR - bJ \\ g(t) = \dot{J} - cR - dJ \end{cases}$$

nên $f(t), g(t)$ phải là các hàm số khả vi vô hạn lần theo biến t do \dot{R}, \dot{J}, R, J là các hàm số khả vi theo biến t . Ta cũng sẽ chứng minh đây là điều kiện f, g để hệ có nghiệm. Tương tự như Exercise 1 thì ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Từ câu 1 có thể dễ dàng giải ra nghiệm của phương trình $X'(t) = AX(t) + F(t)$ là $\Phi(t)$ với $\Phi(t)$ một ma trận hai cột và hai hàng với mỗi phần tử là một hàm số theo t . Để thấy R, J là các hàm số phân biệt nên $\Phi(t)$ có 2 vector độc lập tuyến tính. Khi đó ta có thể đặt $C(t)$ là ma trận đảo của $\Phi(t)$ thì

$$X(t) = \Phi(t)C(t)$$

Khi đó thay vào phương trình ma trận

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A\Phi(t)C(t) + F(t)$$

Chú ý rằng $\Phi(t)$ là nghiệm của phương trình $X'(t) = AX(t)$ nên

$$\Phi(t)C'(t) = F(t)$$

Như ta đã biết $\Phi(t)$ có 2 vector độc lập tuyến tính nên khả nghịch. Ta ký hiệu $\Phi^{-1}(t)$ là ma trận nghịch đảo của $\Phi(t)$ thì

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) \Rightarrow C(t) = C_0 + \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

với C_0 là một vector hằng số. Từ đó ta suy ra được rằng

$$X_1(t) = \Phi(t)C(t) = \Phi(t)C_0 + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt.$$

Kết hợp với R_0 và J_0 thì ta có thể dễ dàng xác định C_0 .

Bây giờ ta sẽ xét các ví dụ sau đây

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + J \\ \dot{J} = 3J + te^t \\ R(0) = \frac{7}{4}, J(0) = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng phương pháp của câu 1 thì ta có thể dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + J \\ \dot{J} = 3J \end{cases}$$

chính là

$$\begin{cases} R(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ J(t) = 0 \cdot e^{2t} + C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Như phương pháp đã đề cập ở trên thì ta giả sử

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

Tới đây ta thực hiện tính toán các định thức sau

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{vmatrix} = e^{5t} \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & e^{3t} \\ te^t & e^{3t} \end{vmatrix} = -te^{4t} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & te^t \end{vmatrix} = te^{3t} \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \int -te^{-t} dt &= (t+1)e^{-t} + A_1 \\ \int te^{-2t} dt &= -\frac{2t+1}{4}e^{-2t} + A_2 \end{aligned}$$

Vậy nên ta có nghiệm của hệ là

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = A_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^t \begin{pmatrix} 2t+3 \\ -2t-1 \end{pmatrix}.$$

Do $R(0) = \frac{7}{4}$, $J(0) = \frac{-1}{4}$ thì thay vào đẳng thức trên thì ta tìm được $A_1 = 1$ và $A_2 = 0$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = R + e^t \\ \dot{J} = R + J - e^t \\ R(0) = 1, J(0) = -1 \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng phương pháp của câu 1 thì ta có thể dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{R} = R \\ \dot{J} = R + J \end{cases}$$

chính là

$$\begin{cases} R(t) = 0 \cdot e^t + C_2 e^t \\ J(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t \end{cases}$$

Như phương pháp đã đề cập ở trên thì ta giả sử

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^t \\ e^t & t e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} 0 & e^t \\ e^t & t e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Tới đây ta thực hiện tính toán các định thức sau

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^t & t e^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ -e^t & t e^t \end{vmatrix} = (t+1)e^{2t} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{2t} \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \int -(t+1)dt &= -\frac{1}{2}t^2 - t + A_1 \\ \int 1dt &= t + A_2 \end{aligned}$$

Vậy nên ta có nghiệm của hệ là

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = A_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}.$$

Do $R(0) = 1, J(0) = -1$ thì thay vào đẳng thức trên thì ta tìm được $A_1 = -1$ và $A_2 = 1$. \square

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = -J \\ \dot{J} = R + \cos t \\ R(0) = 1, J(0) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng phương pháp của câu 1 thì ta có thể dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{R} = -J \\ \dot{J} = R \end{cases}$$

chính là

$$\begin{cases} R(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \\ J(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \end{cases}$$

Như phương pháp đã đề cập ở trên thì ta giả sử

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Tới đây ta thực hiện tính toán các định thức sau

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = -1 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\cos(t)^2 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \sin(2t) \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)^2 \\ \frac{1}{2} \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int \cos(t)^2 = \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2}t + A_1 \\ C_2(t) &= \int \frac{1}{2} \sin(2t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + A_2 \end{aligned}$$

Vậy nên ta có nghiệm của hệ là

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \sin(t) + \sin(t) \\ \frac{1}{2}t \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Do $R(0) = 1, J(0) = 0$ thì thay vào đẳng thức trên thì ta tìm được $A_1 = 1$ và $A_2 = 1$. □

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = J + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{J} = -R \\ R(0) = 1, J(0) = 3 \end{cases}$$

Cách giải. Áp dụng phương pháp của câu 1 thì ta có thể dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{R} = J \\ \dot{J} = -R \end{cases}$$

chính là

$$\begin{cases} R(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \\ J(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \end{cases}$$

Như phương pháp đã đề cập ở trên thì ta giả sử

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tới đây ta thực hiện tính toán các định thức sau

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos t} & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t - 0 = 1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos(t) & \frac{1}{\cos(t)} \\ -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = 0 + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t) \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(t) \end{pmatrix}$$

Mặt khác $\int 1 dt = t + A_1$ và

$$\int \tan(t) dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = - \int \frac{d(\cos(t))}{\cos(t)} = -\ln |\cos t| + A_2$$

Vậy nên ta có nghiệm của hệ là

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \ln |\cos t| \\ -t \sin t - \cos t \ln |\cos t| \end{pmatrix}.$$

Do $R(0) = 1, J(0) = 3$ thì thay vào đẳng thức trên thì ta tìm được $A_1 = 1$ và $A_2 = 3$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J + e^{2t} \\ \dot{J} = 6R - 3J + e^t + 1 \\ R(0) = \frac{4}{3}, J(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Cách giải. Áp dụng phương pháp của câu 1 thì ta có thể dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J \\ \dot{J} = 6R - 3J \end{cases}$$

chính là

$$\begin{cases} R(t) = C_1 + C_2 e^{-t} \\ J(t) = 2C_1 + 3C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Như phương pháp đã đề cập ở trên thì ta giả sử

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t + 1 \end{pmatrix}$$

Tới đây ta thực hiện tính toán các định thức sau

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t} \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ e^t + 1 & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 3e^t - e^{-t} - 1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} \\ 2 & e^t + 1 \end{vmatrix} = e^t - 2e^{2t} + 1 \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^{-t} - 1 \\ e^{2t} - 2e^{3t} + e^t \end{pmatrix}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int (3e^{2t} + e^t - 1) dt = \frac{3}{2}e^{2t} - e^t - t + A_1 \\ C_2(t) &= \int (e^{2t} - 2e^{3t} + e^t) dt = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{3t} + e^t + A_2 \end{aligned}$$

Vậy nên ta có nghiệm của hệ là

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t - t + 1 \\ e^{2t} - \frac{1}{2}e^t - 2t + 3 \end{pmatrix}.$$

Do $R(0) = \frac{4}{3}$, $J(0) = \frac{5}{2}$ thì thay vào đẳng thức trên thì ta tìm được $A_1 = 1$ và $A_2 = -1$.

Problem. A more general and also complicated love between Romeo and Juliet is the IVP

$$\begin{cases} \dot{R} = f(t, R, J) \\ \dot{J} = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

where f and g are two real functions dependent on t , R , and J . Similarly, find conditions on f and g so that the IVP Sys. (14) has a solution. For example, a solution exists for IVP Sys. (14) where $f(R, J) = R(1 - J)$ and $g(R, J) = J(R - 1)$ (this is also known as the Lotka–Volterra equations in Biology to model the interaction of two species). Give five specific examples of such IVPs without finding the exact solutions.

Trước khi bàn về điều kiện có nghiệm thì ta cần tìm hiểu một số định nghĩa và định lý sau

Định nghĩa 1 (Lipschitz continuity). Một hàm số $f : X \rightarrow Y$ được gọi là **Lipschitz continuous** nếu tồn tại số thực $K \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x_1, x_2 \in X$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

Ở đây đây không phải là định nghĩa chính xác định lý **Lipschitz continuity** nhưng do chúng ta chỉ bàn về các hàm số liên tục và khả vi trên tập số thực với định nghĩa trên là đủ với bài nghiên cứu này.

Theorem 1 (Picard–Lindelöf). Xét $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Gọi hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm số liên tục theo biến t và $y(t)$ là hàm số thỏa mãn **Lipschitz continuous** và

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$$

Khi đó tồn tại số thực $\varepsilon > 0$ sao cho $y(t)$ có duy một nghiệm thỏa với trên đoạn $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Do chứng minh định lý trên khá khó và cần nhiều liệt thuyết của toán cao cấp như **Banach fixed-point theorem** và các kiến thức về không gian metric nên ở bài nghiên cứu này ta chỉ đề cập tới ứng dụng mà không xem xét cách chứng minh của định lý. Vậy thì từ định lý trên ta cũng dễ dàng suy ra được hệ quả sau nếu $f(t, R, J)$ là hàm không phụ thuộc vào J và $g(t, R, J)$ là hàm không phụ thuộc vào R , đồng thời cả hai hàm đều thỏa điều kiện **Lipschitz continuous** thì theo định lý **Picard–Lindelöf** có tồn tại số thực dương $\varepsilon > 0$ để $R(t), J(t)$ có nghiệm duy nhất trên $[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Mặc dù vậy ta cũng không đảm bảo được rằng R, J có nghiệm trên miền \mathbb{R} .

Đồng thời định lý **Lipschitz continuous** chỉ làm một trong những điều kiện đủ và xác định được nghiệm hàm trên đĩa phương chứ không phải là điều kiện cần và đủ để có nghiệm hàm duy nhất trên miền \mathbb{R} .

Thật sự chúng ta rất khó để có thể giải các hệ phương trình vi phân phi tuyến tính vì phương pháp đơn giản và hữu hiệu nhất để giải các hệ phương trình này là cô lập một hàm và một phương trình duy nhất rồi thực hiện các phương pháp giải. Vì đa số các hệ phương trình vi phân là phi tuyến nên có khá nhiều dạng ta không thể thực hiện được việc cô lập một hàm số ra một phương trình duy nhất. Vì thế nên đa số các nghiên cứu về tính có nghiệm hay có duy nhất một nghiệm hàm của phương trình cũng chỉ trên các phương trình một ẩn hàm duy nhất ví dụ như

Theorem 2. Nghiệm φ của phương trình $\dot{x} = f(x)$ và $x(t_0) = x_0$

- 1) tồn tại với mọi $t_0 \in \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$.
- 2) là duy nhất trong trường hợp với hai nghiệm hàm bất kỳ có các điểm lân cận t_0 bằng nhau.
- 3) được tính bởi công thức Barrow như sau

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t_0)} \frac{d(y)}{v(y)}, \text{ nếu } v(x_0) \neq 0$$
$$\varphi(t) \equiv x_0, \text{ nếu } v(x_0) = 0$$

Định lý được trích trong trang 36 cuốn sách Vladimir I Arnold. Ordinary Differential Equations. Springer Science & Business Media, 1992.

Theorem 3. Nghiệm của phương trình $\dot{x} = f(t, x)$ và $x(t_0) = x_0$ là duy nhất nếu f là hàm khả vi vô hạn lần.

Định lý được trích trong trang 38 cuốn sách Vladimir I Arnold. Ordinary Differential Equations. Springer Science & Business Media, 1992.

Bây giờ ta sẽ liệt kê một số hệ phương trình vi phân khá nổi bật như sau

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} R'(t) = a \cos(R(t)) + b \sin(J(t)) \\ J'(t) = c \cos(R(t)) + d \sin(J(t)) \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} R'(t) = J(t) + R(t) - R(t)(R(t)^2 + J(t)^2) \\ J'(t) = -R(t) + J(t) - J(t)(R(t)^2 + J(t)^2) \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} P'(t) = \frac{aP(t)}{Q(t)} - bP(t)^2 \\ Q'(t) = cQ(t)P(t) - dQ^2(t) \end{cases}$$

Ngoài những hệ đơn điều khó có liên hệ thực tế như trên thì cũng những hệ đặc trưng cho một mô hình cụ thể và được nghiên cứu như sau

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} R'(t) = aR(t) - bR(t)J(t) \\ J'(t) = cJ(t) - dR(t)J(t) \end{cases}$$

Nhận xét. Đây là một hệ phương trình vi phân khá đặc biệt và khá nổi tiếng có tên là **Lotka–Volterra equations**. Đây là bài toán được mô hình hoá bởi mô hình như sau: Một hồ cá đủ to để ta có thể nuôi các loài cá hoang dã. Chúng ta muốn thả vào hồ cá hai loại cá A và B. Gọi $x(t)$ biểu thị số lượng loài A và $y(t)$ biểu thị số lượng của loài B. Giả sử rằng mức độ gia tăng dân số của loài A sẽ phụ thuộc vào số cá thể loài A nên ban đầu

$$R'(t) = aR(t).$$

Đồng thời, do sự cạnh tranh về đồ ăn thức uống, chỗ ở và cạnh tranh của từng cá thể đối với các cá thể khác nên số cá thể loài A sẽ giảm theo tỷ lệ với $R(t)J(t)$ nên

$$R'(t) = aR(t) - bR(t)J(t).$$

Lập luận tương tự thì ta cũng có được phương trình thứ hai của hệ trên. Mặt khác, điều đặc biệt của hệ trên chính là ta có thể tìm được nghiệm chính xác của $R(t)$ và $J(t)$.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} R'(t) = aR(t) + bR(t)Q(t) - cR(t)^2 \\ Q'(t) = dQ(t) + eR(t)Q(t) - fQ(t)^2 \end{cases}$$

Nhận xét. Với một số nhà sinh học vs sinh thái học cũng tranh cãi rằng với mô hình để sinh ra **Lotka–Volterra equations** cũng chưa phải thực tế hoàn toàn vì các tiệm cận của $R(t)$ và $J(t)$ không mang tính ổn định qua các nghiên cứu. Trong khi hầu hết các hệ thống động vật ăn thịt và con mồi có xu hướng đạt đến mức cân bằng theo thời gian. Tuy nhiên, dân số thường xuyên phát triển mang tính theo các chu kỳ nên một nhà khoa học đã đề xuất hệ trên vì khi đó các dao động của tiệm cận ổn định hơn để thay thế **Lotka–Volterra equations**.

5 Exercise 4

Problem. This exercise shows us how to solve the IVPs Sys. (13) and Sys. (14) “numerically” when the existence of solutions is guaranteed. The simplest numerical scheme is the explicit Euler method.

```
1 def ExplicitEuler(f, g, t0, R0, J0, h):
    R1 = R0 + f(t0, R0, J0) * h
    J1 = J0 + g(t0, R0, J0) * h
    return R1, J1
```

This function receives the values R_0 and J_0 of $R(t)$ and $J(t)$ at time t_0 and returns the approximate values R_1 and J_1 at $t_1 = t_0 + h$, where h is the time step. The “local truncation error” at t_1 is thus defined by

$$\mathcal{E}(t_1) = \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2}$$

Prove that $\mathcal{E}(t_1)$ is proportional to h^2 .

Chứng minh. Trước hết để giải quyết bài toán trên ta cần định lý sau

Theorem 4. Cho f là hàm số có đạo hàm thứ $n+1$ lần liên tục trên khoảng mở từ a tới b . Khi đó

$$f(b) = T_{n,a}f(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

với c nằm giữa a và b , $f^{(n)}(x_0)$ là giá trị x_0 của đạo hàm thứ n của $f(x)$ và

$$T_{n,a}f(b) = R(b) + R'(b)(b-a) + \cdots + \frac{R^{(n)}(b)}{n!}(b-a)^n$$

Định lý được trích từ trang 201 của cuốn sách Rod Haggarty, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Prentice Hall, 1993.

Quay trở lại với việc chứng minh, do hàm số $R(t)$ và $J(t)$ là các hàm khả vi vô hạn lần nên áp dụng định lý trên cho hai hàm $R(t)$ và $J(t)$ tới cấp 2 tại điểm thì tồn tại hai số $u, v \in (t_0, t_1)$ sao cho

$$R(t_1) = R(t_0) + R'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{R''(u)}{2!}(t_1 - t_0)^2$$

$$J(t_1) = J(t_0) + J'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{J''(v)}{2!}(t_1 - t_0)^2$$

Do định nghĩa của hệ phương trình vi phân

$$R'(t_0) = f(t_0, R(t_0), J(t_0))$$

$$J'(t_0) = g(t_0, R(t_0), J(t_0))$$

Kết hợp với khai triển trên và $h = t_1 - t_0$ thì ta có

$$R(t_1) = R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h + \frac{R''(u)}{2!}h^2 = R_1 + \frac{R''(u)}{2!}h^2$$

$$J(t_1) = J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h + \frac{J''(v)}{2!}h^2 = J_1 + \frac{J''(v)}{2!}h^2$$

Vì thế nên

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t_1) &= \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{R''(u)}{2} \cdot h^2\right]^2 + \left[\frac{J''(v)}{2} \cdot h^2\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{R''(u)^2}{4} + \frac{J''(v)^2}{4}} h^2\end{aligned}$$

Điều này cũng có nghĩa là $\mathcal{E}(t_1)$ tỷ lệ với h^2 . □

Problem. One of the advantages of this numerical scheme is the fast running-time. However, this scheme is not “stable” for large time step h . For some problems, it requires $h < 1$. In this case, we need to consider the “implicit” Euler method. Study and implement the implicit Euler method for five specific examples of IVPs Sys. (14). Plot the solutions.

Solution. Ưu điểm của cách giải thuần số học là thời gian thực thi nhanh. Tuy nhiên, phương pháp này tỏ ra không ổn định với giá trị bước nhảy lớn. Vì thế mà chúng ta cần hiện thực một phương pháp hiệu quả hơn, cụ thể là phương pháp implicit Euler. Xét bài toán:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Hàm $y(t)$ khả vi trên đoạn $[a; b]$, y_0 là giá trị ban đầu cho trước của $y(t)$ tại $t = a$. Bài toán trên gọi là bài toán Cauchy.

Đối với bài toán Cauchy, ta chỉ có thể tìm được nghiệm gần đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp hàm $f(t, y(t))$ được cho ở dạng bất kỳ thì chúng ta không có phương pháp giải, hoặc những nghiệm giải được đều tương đối phức tạp. Vì thế mà việc tính toán gần đúng các giá trị có vai trò rất quan trọng.

Phương pháp Euler có thể được dùng để xấp xỉ giá trị của hàm $y(t)$ bằng dãy $y(t_n)$ thỏa:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) \end{cases}$$

Ở trong câu này, tham số h (hay bước nhảy) được tính bằng công thức $h = t_1 - t_0$.

Phương pháp đã trình bày ở trên gọi là phương pháp Euler tiêu chuẩn. Phương pháp implicit Euler gần như tương tự với nó, nhưng khác ở chỗ implicit Euler là một phương pháp ngầm định. Nó tính toán giá trị gần đúng $y(t_{k+1})$ như sau:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Phương pháp implicit Euler áp dụng cho hệ phương trình có thể được xây dựng dưới dạng như sau:

$$\begin{aligned}R_{1,t_1} &= R_{0,t_0} + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_{1,t_1} &= J_{0,t_0} + g(t_1, R_1, J_1)h\end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ tiến hành áp dụng phương pháp implicit Euler này để giải các ví dụ đã nêu ra ở câu 3. Chú ý rằng, trong tất cả các ví dụ được trình bày dưới đây, nhóm thống nhất chọn giá trị bước nhảy h là 0.2.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R + J \\ \dot{J} = 3J + te^t \\ R(0) = \frac{7}{4}, J(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Solution. Giải bằng Implicit Euler

Theo bài ra, ta có: $R_0 = \frac{7}{4}, J_0 = -\frac{1}{4}, h = 0.2$

Với $t_0 = 0, h = 0.2$ thì ta có $t_1 = t_0 + h = 0.2$

Phương pháp implicit Euler:

$$R_1 = R_0 + h(2R_1 + J_1)$$

$$J_1 = J_0 + h(3J_1 + t_1 e^{t_1})$$

Bởi vì đây là hệ phương trình tuyến tính nên ta dễ dàng chuyển hết R_1 và J_1 tương ứng ở mỗi phương trình về phía bên trái như sau:

$$R_1(1 - 2h) - hJ_1 = R_0$$

$$J_1(1 - 3h) - ht_1 e^{t_1} = J_0$$

Từ đây, ta rút ra được:

$$R_1 = \frac{R_0 + hJ_1}{1 - 2h}$$

$$J_1 = \frac{J_0 + ht_1 e^{t_1}}{1 - 3h}$$

Ta hiện thực chương trình giải quyết bài toán trên bằng Python. Nội dung chi tiết hiện thực của thuật toán nằm trong file [Ex4VD1.py](#) được đính kèm. Phần hiện thực công thức implicit Euler được cho như dưới đây:

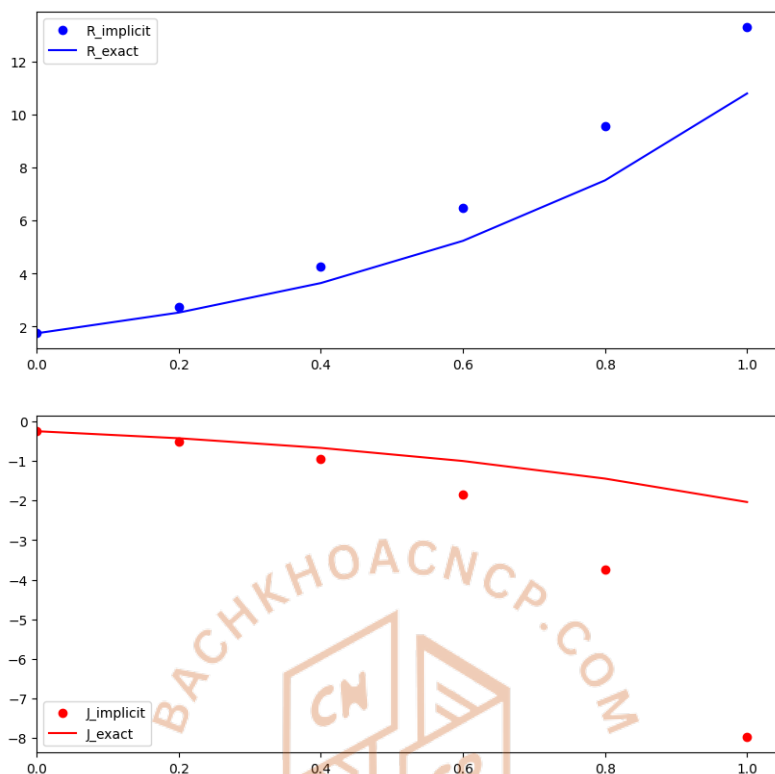
```
for step in range(5):
    J_implicit[step + 1] = (J_implicit[step] + h*(times[step+1] * e**(times[step+1])))/(1-3*h)
    R_implicit[step + 1] = (R_implicit[step] + h*J_implicit[step + 1])/(1-2*h)
```

Hình 2: Chương trình hiện thực implicit Euler cho Ví dụ 1

Kết quả ở một số trường hợp được thể hiện ở bảng dưới đây:

i	Time Step h	$t_i = t_{i-1} + h$ ($i > 0$)	R_i	J_i
0	0.2	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$
1	0.2	0.2	2.749	-0.503
2	0.2	0.4	4.262	-0.959
3	0.2	0.6	6.487	-1.851
4	0.2	0.8	9.566	-3.737
5	0.2	1	13.284	-7.983

Phác họa kết quả xấp xỉ bằng phương pháp implicit Euler thành đồ thị, đồng thời so sánh kết quả xấp xỉ với kết quả chính xác, ta được các đồ thị dưới đây:



Hình 3: Phác họa đồ thị so sánh các kết quả xấp xỉ của Implicit Euler với nghiệm thật (Ví dụ 1)

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = R + e^t \\ \dot{J} = R + J - e^t \\ R(0) = 1, J(0) = -1 \end{cases}$$

Solution. Giải bằng Implicit Euler:

Theo bài ra, ta có: $R_0 = 1, J_0 = -1, h = 0.2$

Với $t_0 = 0, h = 0.2$ thì ta có $t_1 = t_0 + h = 0.2$

Phương pháp implicit Euler:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + h(R_1 + e^{t_1}) \\ J_1 &= J_0 + h(R_1 + J_1 - e^{t_1}) \end{aligned}$$

Bởi vì đây là hệ phương trình tuyến tính nên ta dễ dàng chuyển hết R_1 và J_1 tương ứng ở mỗi phương trình về phía bên trái như sau:

$$\begin{aligned} R_1(1 - h) &= R_0 + he^{t_1} \\ J_1(1 - h) - hR_1 &= J_0 - he^{t_1} \end{aligned}$$

Từ đây, ta rút ra được:

$$R_1 = \frac{R_0 + he^{t_1}}{1 - h}$$

$$J_1 = \frac{J_0 - he^{t_1} + hR_1}{1 - h}$$

Ta hiện thực chương trình giải quyết bài toán trên bằng Python. Nội dung chi tiết hiện thực của thuật toán nằm trong file [Ex4VD2.py](#) được đính kèm. Phần hiện thực công thức implicit Euler được cho như dưới đây:

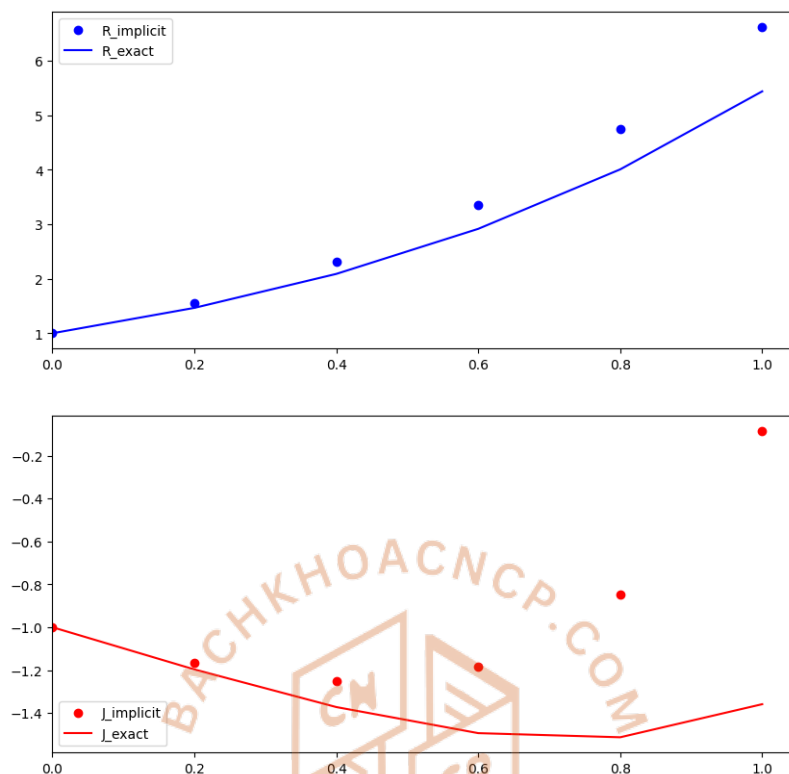
```
for step in range(5):
    R_implicit[step + 1] = (R_implicit[step] + h*(e**(times[step + 1])))/(1-h)
    J_implicit[step + 1] = ((J_implicit[step] - h*(e**(times[step+1])) + h*R_implicit[step + 1]))/(1-h)
```

Hình 4: Chương trình hiện thực implicit Euler cho Ví dụ 2

Kết quả ở một số trường hợp được thể hiện ở bảng dưới đây:

i	Time Step h	$t_i = t_{i-1} + h$ ($i > 0$)	R_i	J_i
0	0.2	0	1	-1
1	0.2	0.2	1.555	-1.167
2	0.2	0.4	2.317	-1.252
3	0.2	0.6	3.352	-1.182
4	0.2	0.8	4.746	-0.848
5	0.2	1	6.612	-0.086

Phác họa kết quả xấp xỉ bằng phương pháp implicit Euler thành đồ thị, đồng thời so sánh kết quả xấp xỉ với kết quả chính xác, ta được các đồ thị dưới đây:



Hình 5: Phác họa đồ thị so sánh các kết quả xấp xỉ của Implicit Euler với nghiệm thật (Ví dụ 2)

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = -J \\ \dot{J} = R + \cos t \\ R(0) = 1, J(0) = 0 \end{cases}$$

Solution. Giải bằng Implicit Euler:

Theo bài ra, ta có: $R_0 = 1, J_0 = 0, h = 0.2$

Với $t_0 = 0, h = 0.2$ thì ta có $t_1 = t_0 + h = 0.2$

Phương pháp implicit Euler:

$$R_1 = R_0 + h(-J_1)$$

$$J_1 = J_0 + h(R_1 + \cos t_1)$$

Bởi vì đây là hệ phương trình tuyến tính nên ta dễ dàng chuyển hết R_1 và J_1 tương ứng ở mỗi phương trình về phía bên trái như sau:

$$R_1 + hJ_1 = R_0$$

$$-hR_1 + J_1 = J_0 + h \cos t_1$$

Tiến hành giải hệ phương trình hai ẩn đơn giản, ta dễ dàng rút ra được:

$$R_1 = R_0 - hJ_1$$
$$J_1 = \frac{h(R_0 + \cos t_1) + J_0}{h^2 + 1}$$

Ta hiện thực chương trình giải quyết bài toán trên bằng Python. Nội dung chi tiết hiện thực của thuật toán nằm trong file [Ex4VD3.py](#) được đính kèm. Phần hiện thực công thức implicit Euler được cho như dưới đây:

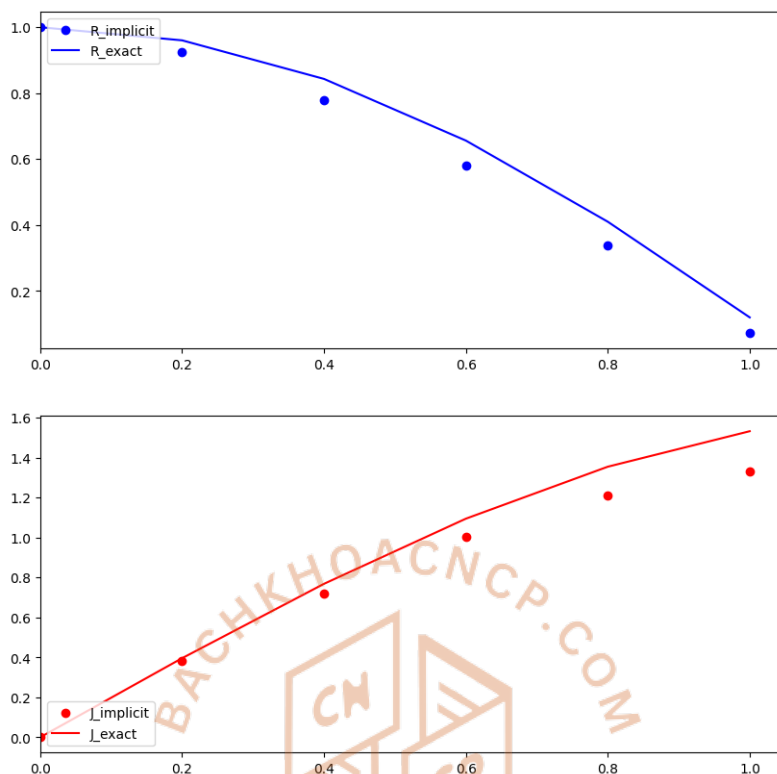
```
for step in range(5):  
    J_implicit[step + 1] = (h*(R_implicit[step] + math.cos(times[step + 1])) + J_implicit[step])/(h**2 + 1)  
    R_implicit[step + 1] = R_implicit[step] - h*J_implicit[step + 1]
```

Hình 6: Chương trình hiện thực implicit Euler cho Ví dụ 3

Kết quả ở một số trường hợp được thể hiện ở bảng dưới đây:

i	Time Step h	$t_i = t_{i-1} + h$ ($i > 0$)	R_i	J_i
0	0.2	0	1	0
1	0.2	0.2	0.924	0.381
2	0.2	0.4	0.78	0.721
3	0.2	0.6	0.579	1.002
4	0.2	0.8	0.338	1.209
5	0.2	1	0.071	1.331

Phác họa kết quả xấp xỉ bằng phương pháp implicit Euler thành đồ thị, đồng thời so sánh kết quả xấp xỉ với kết quả chính xác, ta được các đồ thị dưới đây:



Hình 7: Phác họa đồ thị so sánh các kết quả xấp xỉ của Implicit Euler với nghiệm thật (Ví dụ 3)

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = J + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{J} = -R \\ R(0) = 1, J(0) = 3 \end{cases}$$

Solution. Giải bằng Implicit Euler:

Theo bài ra, ta có: $R_0 = 1, J_0 = 3, h = 0.2$

Với $t_0 = 0, h = 0.2$ thì ta có $t_1 = t_0 + h = 0.2$

Phương pháp implicit Euler:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + h(J_1 + \frac{1}{\cos t_1}) \\ J_1 &= J_0 + h(-R_1) \end{aligned}$$

Bởi vì đây là hệ phương trình tuyến tính nên ta dễ dàng chuyển hết R_1 và J_1 tương ứng ở mỗi phương trình về phía bên trái như sau:

$$\begin{aligned} R_1 - hJ_1 &= R_0 + h \frac{1}{\cos t_1} \\ hR_1 + J_1 &= J_0 \end{aligned}$$

Từ đây, ta rút ra được:

$$R_1 = \frac{R_0 + h(J_0 + \frac{1}{\cos t_1})}{1 + h^2}$$
$$J_1 = J_0 - hR_1$$

Ta hiện thực chương trình giải quyết bài toán trên bằng Python. Nội dung chi tiết hiện thực của thuật toán nằm trong file [Ex4VD4.py](#) được đính kèm. Phần hiện thực công thức implicit Euler được cho như dưới đây:

```
for step in range(5):  
    R_implicit[step + 1] = (R_implicit[step] + h*(J_implicit[step] + 1/math.cos(times[step + 1])))/(1 + h*h)  
    J_implicit[step + 1] = J_implicit[step] - h*R_implicit[step + 1]
```

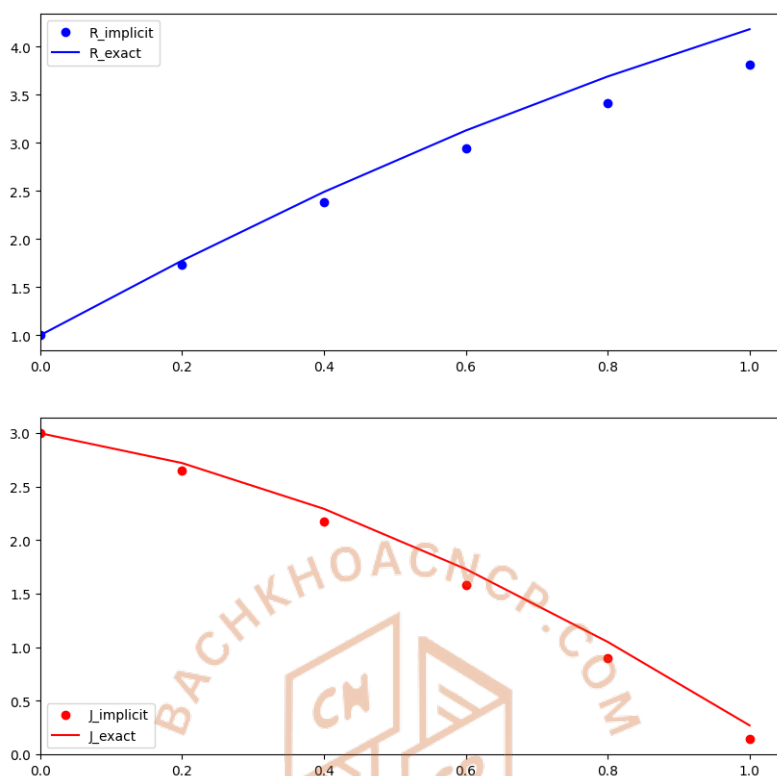
Hình 8: Chương trình hiện thực implicit Euler cho Ví dụ 4

Kết quả ở một số trường hợp được thể hiện ở bảng dưới đây:

i	Time Step h	$t_i = t_{i-1} + h$ ($i > 0$)	R_i	J_i
0	0.2	0	1	3
1	0.2	0.2	1.735	2.653
2	0.2	0.4	2.387	2.176
3	0.2	0.6	2.947	1.586
4	0.2	0.8	3.414	0.903
5	0.2	1	3.813	0.141

Phác họa kết quả xấp xỉ bằng phương pháp implicit Euler thành đồ thị, đồng thời so sánh kết quả xấp xỉ với kết quả chính xác, ta được các đồ thị dưới đây:

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP



Hình 9: Phác họa đồ thị so sánh các kết quả xấp xỉ của Implicit Euler với nghiệm thật (Ví dụ 4)

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J + e^{2t} \\ \dot{J} = 6R - 3J + e^t + 1 \\ R(0) = \frac{4}{3}, J(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Solution. Giải bằng Implicit Euler:

Theo bài ra, ta có: $R_0 = \frac{4}{3}, J_0 = \frac{5}{2}, h = 0.2$

Với $t_0 = 0, h = 0.2$ thì ta có $t_1 = t_0 + h = 0.2$

Phương pháp implicit Euler:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + h(2R_1 - J_1 + e^{2t_1}) \\ J_1 &= J_0 + h(6R_1 - 3J_1 + e^{t_1} + 1) \end{aligned}$$

Bởi vì đây là hệ phương trình tuyến tính nên ta dễ dàng chuyển hết R_1 và J_1 tương ứng ở mỗi phương trình về phía bên trái như sau:

$$\begin{aligned} R_1(1 - 2h) + hJ_1 &= R_0 + he^{2t_1} \\ -6hR_1 + (1 + 3h)J_1 &= J_0 + h(e^{t_1} + 1) \end{aligned}$$

Để hệ phương trình trở nên đơn giản hơn, ta thay trực tiếp $h = 0.2$ vào và nhân các hệ số, đồng thời đặt $A = R_0 + he^{2t_1}$ và $B = J_0 + h(e^{t_1} + 1)$ để rút ra được hệ mới:

$$\begin{aligned} 1.2R_1 + 0.4J_1 &= 2A \\ -1.2R_1 + 1.6J_1 &= B \end{aligned}$$

Đến đây, ta dễ dàng rút ra được:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2A + B}{2} \\ R_1 &= \frac{8A - B}{6} \end{aligned}$$

Ta hiện thực chương trình giải quyết bài toán trên bằng Python. Nội dung chi tiết hiện thực của thuật toán nằm trong file [Ex4VD5.py](#) được đính kèm. Phần hiện thực công thức implicit Euler được cho như dưới đây:

```
for step in range(5):
    A = R_implicit[step] + h*e**(2*times[step + 1])
    B = J_implicit[step] + h*(e**(times[step + 1]) + 1)

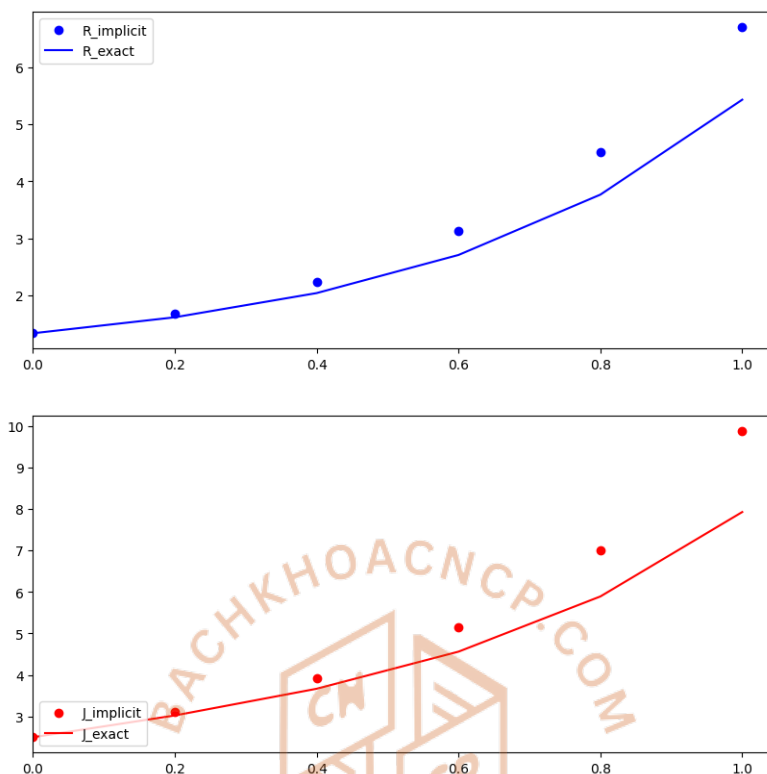
    J_implicit[step+1] = (2*A + B)/2
    R_implicit[step + 1] = (8*A - B)/6
```

Hình 10: Chương trình hiện thực implicit Euler cho Ví dụ 5

Kết quả ở một số trường hợp được thể hiện ở bảng dưới đây:

i	Time Step h	$t_i = t_{i-1} + h$ ($i > 0$)	R_i	J_i
0	0.2	0	1.333	2.5
1	0.2	0.2	1.685	3.104
2	0.2	0.4	2.24	3.931
3	0.2	0.6	3.122	5.151
4	0.2	0.8	4.518	7.011
5	0.2	1	6.702	9.873

Phác họa kết quả xấp xỉ bằng phương pháp implicit Euler thành đồ thị, đồng thời so sánh kết quả xấp xỉ với kết quả chính xác, ta được các đồ thị dưới đây:



Hình 11: Phác họa đồ thị so sánh các kết quả xấp xỉ của Implicit Euler với nghiệm thật (Ví dụ 5)

Problem. Prove that $\mathcal{E}(t_1)$ is proportional to h^2 when apply implicit method.

Chứng minh. Quay trở lại với việc chứng minh, do hàm số $R(t)$ và $J(t)$ là các hàm khả vi vô hạn lần nên áp dụng định lý trên cho hai hàm $R(t)$ và $J(t)$ tới cấp 2 tại điểm thì tồn tại hai số $u, v \in (t_0, t_1)$ sao cho

$$R(t_0) = R(t_1) + R'(t_1)(t_0 - t_1) + \frac{R''(u)}{2!}(t_0 - t_1)^2$$

$$J(t_0) = J(t_1) + J'(t_1)(t_0 - t_1) + \frac{J''(v)}{2!}(t_0 - t_1)^2$$

Do định nghĩa của hệ phương trình vi phân

$$R'(t_1) = f(t_1, R(t_1), J(t_1))$$

$$J'(t_1) = g(t_1, R(t_1), J(t_1))$$

Kết hợp với khai triển trên và $h = t_1 - t_0$ thì ta có

$$R(t_1) = R(t_0) + f(t_0, R_0, J_0)h - \frac{R''(u)}{2!}h^2 = R_1 - \frac{R''(u)}{2!}h^2$$

$$J(t_1) = J(t_0) + g(t_0, R_0, J_0)h - \frac{J''(v)}{2!}h^2 = J_1 - \frac{J''(v)}{2!}h^2$$

Vì thế nên

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t_1) &= \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{R''(u)}{2} \cdot h^2\right]^2 + \left[\frac{J''(v)}{2} \cdot h^2\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{R''(u)^2}{4} + \frac{J''(v)^2}{4}} h^2\end{aligned}$$

Điều này cũng chứng tỏ rằng $\mathcal{E}(t_1)$ tỷ lệ với h^2 . □

Problem. What are the cons of the implicit Euler method?

Solution. Đối với phương pháp explicit Euler, bước nhảy h có ảnh hưởng tới sự ổn định của kết quả xấp xỉ. Vì vậy yêu cầu ổn định của kết quả sẽ đòi hỏi bước nhảy vô cùng nhỏ trong toàn bộ giải pháp.

Đó là lý do phương pháp implicit Euler được sử dụng như một giải pháp thay thế. Đối với phương pháp này, bất kể là kích thước nào của bước, $|y_i| \rightarrow 0$ khi $i \rightarrow \infty$. Do đó, ta có thể nói: phương pháp implicit Euler là phương pháp ổn định vô điều kiện.

Tuy nhiên, cái giá phải trả cho sự ổn định mà implicit Euler mang lại là độ phức tạp của giải pháp. Để thấy, explicit Euler rất dễ hiện thực và tính toán, vì nó cơ bản là một phương pháp hiện. Trái lại, implicit Euler có sự xuất hiện của các biến chưa biết ở cả hai vế của phương trình, do đó phải trải qua những sự biến đổi thì mới tính toán được kết quả.

Ngoài ra, implicit Euler chỉ tương đối chính xác với hệ phương trình bậc nhất. Trong 5 ví dụ nhóm đã trình bày, các đồ thị so sánh kết quả được tính bằng nghiệm thật với kết quả xấp xỉ bằng implicit Euler là tương đối gần nhau. Còn đối với các hệ phương trình có bậc cao hơn, chúng ta có thể áp dụng công thức Adams-Moulton để xấp xỉ kết quả.

6 Exercise 5

References

- [1] Alex Svirin, PhD. Linear Nonhomogeneous Systems of Differential Equations with Constant Coefficients. math24.net. <https://math24.net/linear-nonhomogeneous-systems-differential-equations-constant-coefficients.html>
- [2] Steven C. Chapra, Raymond. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 2021.
- [3] thanuj singaravelan. Solving a system of ODEs using Implicit Euler method . skill-lync. <https://skill-lync.com/student-projects/Solving-a-system-of-ODEs-using-Implicit-Euler-method-86502>
- [4] Vladimir I Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [5] Rod Haggarty, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Prentice Hall
- [6] Dharna Satsangi & Arun K. Sinha, (05/05/2012), „J.Modern Education and Computer Science, 2012, 5, 31-37