Phần V

Quan hệ
RELATIONS

Relations

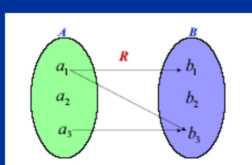
1. Định nghĩa và tính chất
2. Biểu diễn quan hệ
3. Quan hệ tương đương. Đồng dư. Phép toán số học trên $\mathbf{Z}_n$
4. Quan hệ thứ tự. Hasse Diagram

1. Definitions

Definition. A *quan hệ hai ngôi* từ tập *A* đến tập *B* là tập con của tích Descartess $R \subseteq A \times B$.

Chúng ta sẽ viết $a\ R\ b$ thay cho $(a, b) \in R$

Quan hệ từ *A* đến chính nó được gọi là quan hệ trên *A*

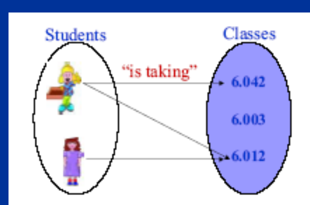


$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$

1. Definitions

Example. A = students; B = courses.

$R = \{(a, b) \mid \text{student } a \text{ is enrolled in class } b\}$



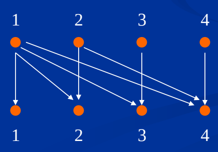
1. Definitions

Example. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và

$R = \{(a, b) \mid a$ là ước của $b\}$

Khi đó

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$



2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *phản xạ* nếu:

$$(a, a) \in R \text{ với mọi } a \in A$$

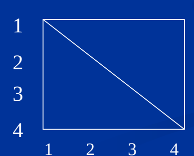
Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R_1$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$

- Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$
- Quan hệ $>$ trên $\mathbb{Z}$ không phản xạ vì $1 \not> 1$
- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên $\mathbb{Z}^+$ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó .

Chú ý. Quan hệ R trên tập A là phản xạ iff nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a); a \in A\}$$



2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là ***đối xứng*** nếu:

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\,R\,b) \to (b\,R\,a)$$

Quan hệ R được gọi là ***phản xứng*** nếu

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\,R\,b) \wedge (b\,R\,a) \to (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ không đối xứng.

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \to (a = b)$$

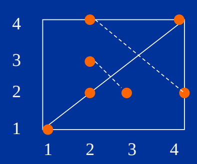
- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên $\mathbb{Z}^{+}$· không đối xứng

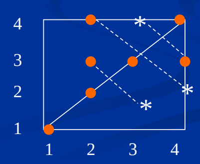
Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b)$$

Chú ý. Quan hệ R trên A là đối xứng iff nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của $A \times A$.

Quan hệ R là phản xứng iff chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của $A \times A$.





2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A có tính ***bắc cầu(truyền)*** nếu

$\forall a \in A\ \forall b \in A\ \forall c \in A\ (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c) \rightarrow (a\ R\ c)$

Ví dụ.

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Quan hệ $\leq$ và “|”trên $\mathbb{Z}$ có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c)$$

$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \rightarrow (a \mid c)$$

3. Representing Relations

Introduction

Matrices

Representing Relations

Định nghĩa

Cho R là quan hệ từ $A = \{1,2,3,4\}$ đến $B = \{u,v,w\}$:

$R = \{(1,u),(1,v),(2,w),(3,w),(4,u)\}$.

Khi đó R có thể biểu diễn như sau

	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm.

Đây là matrận cấp 4×3 biểu diễn cho quan hệ R

Representing Relations

Định nghĩa. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Matrận biểu diễn của R là matrận cấp $m \times n$ $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$ xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

Ví dụ. Nếu R là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$ sao cho $a\,R\,b$ nếu $a > b$.
Khi đó ma trận biểu diễn của R là

	1	2
1	0	0
2	1	0
3	1	1

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi matrận

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \mathbf{M}_R = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

Khi đó R gồm các cặp:

$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

Representing Relations

- Cho R là quan hệ trên tập A, khi đó $\mathbf{M}_R$ là ***matrận vuông.***
- R là ***phản xạ*** iff tất cả các phần tử trên ***đường chéo*** của $\mathbf{M}_R$ đều bằng 1: $m_{ii} = 1$ với mọi i

	u	v	w
u	1	1	0
v	0	1	1
w	0	0	1

Representing Relations

R là đối xứng iff $\mathbf{M}_R$ is ***đối xứng***

$m_{ij} = m_{ji}$ với mọi i, j

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	1
w	1	1	0

Representing Relations

R is ***phản xứng*** iff $\mathbf{M}_R$ thỏa:

$$m_{ij} = 0 \text{ or } m_{ji} = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	0
w	0	1	1

4.Equivalence Relations

Introduction
Equivalence Relations
Representation of Integers
Equivalence Classes
Linear Congruences.

Định nghĩa

- Ví dụ:

Cho S = {sinh viên của lớp}, gọi
R = {(a,b): a có cùng họ với b}
Hỏi

R phản xạ? Yes
R đối xứng? Yes
R bắc cầu? Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là ***tương đương*** nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu :

Ví dụ. Quan hệ R trên các chuỗi ký tự xác định bởi aRb iff a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên $\mathbb{R}$ sao cho aRb iff $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương

Recall that if a and b are integers, then a is said to be *divisible* by b, or a is a *multiple* of b, or b is a *divisor* of a, or b *divides* a if there exists an integer k such that $a = kb$

Example. Let m be a positive integer and R the relation on $\mathbb{Z}$ such that aRb if and only if $a - b$ is divisible by m, then R is an equivalence relation

- The relation is clearly reflexive and symmetric.
- Let a, b, c be integers such that $a - b$ and $b - c$ are both divisible by m, then $a - c = a - b + b - c$ is also divisible by m. Therefore R is transitive
- This relation is called the ***congruence modulo m*** and we write

$$a \equiv b \pmod{m}$$

instead of aRb

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. ***Lớp tương đương chứa a*** được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A \mid b\ R\ a\}$$

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots \}$$

Tương tự

$$[1]_8 = \{a \mid a \text{ chia 8 dư 1}\}$$
$$= \{ \dots, -15, -7, 1, 9, 17, \dots \}$$

Chú ý. Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Tổng quát, chúng ta có

Theorem. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A và $a, b \in A$, Khi đó

(i) $a\ R\ b$ iff $[a]_R = [b]_R$

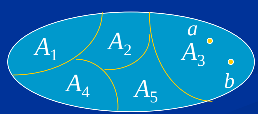
(ii) $[a]_R \neq [b]_R$ iff $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

Chú ý. Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân hoạch trên A, nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Note. Cho $\{A_1, A_2, \dots\}$ là phân hoạch A thành các tập con không rỗng, rời nhau . Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy với mỗi $a, b \in A$, ta đặt $a\, R\, b$ iff có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.

Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ iff $a \in A_i$



Example. Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của $\mathbb{Z}$ thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \dots$$
$$[1]_m = [m+1]_m = [2m+1]_m = \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \dots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là ***số nguyên modulo m***

.Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi $\mathbb{Z}_m$

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

5 Linear Congruences

Example. Cho m là số nguyên dương, ta định nghĩa hai phép tóan " + " và " × " trên $\mathbb{Z}_m$ như sau

$$[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$$
$$[a]_m [b]_m = [a\, b]_m$$

Theorem. Các phép tóan nói trên được định nghĩa tốt, i.e. Nếu $a \equiv c \pmod m$ và $b \equiv d \pmod m$, thì

$$a + b \equiv c + d \pmod m \quad \text{và} \quad a\, b \equiv c\, d \pmod m$$

Example. $7 \equiv 2 \pmod 5$ và $11 \equiv 1 \pmod 5$ .Ta có

$$7 + 11 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod 5$$
$$7 \times 11 \equiv 2 \times 1 = 2 \pmod 5$$

Note. Các phép tóan " + " và " × " trên $\mathbb{Z}_m$ có các tính chất như các phép tóan trên $\mathbb{Z}$

$$[a]_m + [b]_m = [b]_m + [a]_m$$
$$[a]_m + ([b]_m + [c]_m) = ([a]_m + [b]_m) + [c]_m$$
$$[a]_m + [0]_m = [a]_m$$
$$[a]_m + [m-a]_m = [0]_m\ ,$$

Ta viết $\quad -[a]_m = [m-a]_m$

$$[a]_m [b]_m = [b]_m [a]_m$$
$$[a]_m ([b]_m [c]_m) = ([a]_m [b]_m) [c]_m$$
$$[a]_m [1]_m = [a]_m$$
$$[a]_m ([b]_m + [c]_m) = [a]_m [b]_m + [a]_m [c]_m$$

Example. " Phương trình bậc nhất" trên $\mathbb{Z}_m$

$$[x]_m + [a]_m = [b]_m$$

với $[a]_m$ và $[b]_m$ cho trước, có nghiệm duy nhất:

$$[x]_m = [b]_m - [a]_m = [b-a]_m$$

Cho $m = 26$,phương trình $[x]_{26} + [3]_{26} = [b]_{26}$ có nghiệm duy nhất với mọi $[b]_{26}$ trong $\mathbb{Z}_{26}$.

Do đó $[x]_{26} \to [x]_{26} + [3]_{26}$ là song ánh từ $\mathbb{Z}_{26}$ vào chính nó.

Sử dụng song ánh này chúng ta thu được mã hóa Caesar:

Mỗi chữ cái tiếng Anh được thay bởi một phần tử của $\mathbb{Z}_{26}$: $A \to [0]_{26}$, $B \to [1]_{26}$, …, $Z \to [25]_{26}$

Ta sẽ viết đơn giản: $A \to 0$, $B \to 1$, …, $Z \to 25$

Mỗi chữ cái sẽ được mã hóa bằng cách cộng thêm 3 . Chẳng hạn A *được mã hóa* bởi chữ cái tương ứng với $[0]_{26} + [3]_{26} = [3]_{26}$, nghĩa là bởi D.

Tương tự B *được mã hóa* bởi chữ cái tương ứng với $[1]_{26} + [3]_{26} = [4]_{26}$, nghĩa là bởi E, … cuối cùng Z *được mã hóa* bởi chữ cái tương ứng với $[25]_{26} + [3]_{26} = [2]_{26}$ nghĩa là bởi C.

Bức thư "MEET YOU IN THE PARK" được mã như sau

M E E T	Y O U	I N	T H E	P A R K
12 4 4 19	24 14 20	8 13	19 7 4	15 0 17 10
15 7 7 22	1 17 23	11 16	22 10 7	18 3 20 13
P H H W	B R X	L Q	W K H	S D U N

Để giải mã, ta dùng ánh xạ ngược:

$$[x]_{26} \to [x]_{26} - [3]_{26} = [x-3]_{26}$$

P H H W tương ứng với 15 7 7 22

Lấy ảnh qua ánh xạ ngược: 12 4 4 19

Ta thu được chữ đã được mã là M E E T

Mã hóa như trên còn quá đơn giản,dễ dàng bị bẻ khóa. Chúng ta có thể tổng quát mã Caesar bằng cách sử dụng ánh xạ $f: [x]_{26} \to [ax+b]_{26}$ trong đó a và b là các hằng số được chọn sao cho f là song ánh

Trước hết chúng ta chọn a khả nghịch trong $\mathbb{Z}_{26}$ i.e. tồn tại a' trong $\mathbb{Z}_{26}$ sao cho

$$[a]_{26}[a']_{26} = [a\,a']_{26} = [1]_{26}$$

Chúng ta viết $[a']_{26} = [a]_{26}^{-1}$ nếu tồn tại .

Nghiệm của phương trình

$$[a]_{26}[x]_{26} = [c]_{26}$$

là $[x]_{26} = [a]_{26}^{-1}\,[c]_{26} = [a'c]_{26}$

Chúng ta cũng nói nghiệm của phương trình

$$a\,x \equiv c \pmod{26}$$

là $x \equiv a'c \pmod{26}$

Ánh xạ ngược của f xác định bởi

$$[x]_{26} \to [a'(x - b)]_{26}$$

Example. Cho $a = 7$ và $b = 3$, khi đó nghịch đảo của $[7]_{26}$ là $[15]_{26}$ vì $[7]_{26}[15]_{26} = [105]_{26} = [1]_{26}$

Bây giờ M được mã hóa như sau

$$[12]_{26} \to [7 \cdot 12 + 3]_{26} = [87]_{26} = [9]_{26}$$

nghĩa là được mã hóa bởi I. Ngược lại I được giải mã như sau

$$[9]_{26} \to [15 \cdot (9 - 3)]_{26} = [90]_{26} = [12]_{26}$$

nghĩa là tương ứng với M.

6. Partial Orderings

Định nghĩa

Example. Cho R là quan hệ trên tập số thực:

$$a \, R \, b \text{ iff } a \le b$$

Hỏi:

- Is R reflexive? Yes
- Is R transitive? Yes
- Is R symmetric? No
- Is R antisymmetric? Yes

Định nghĩa

Definition. Quan hệ R trên tập A là ***quan hệ thứ tự(thứ tự)*** nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi $\prec$

Cặp $(A, \prec)$ được gọi là ***tập sắp thứ tự*** hay ***poset***

Reflexive: $a \prec a$

Antisymmetric: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \to (a = b)$

Transitive: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \to (a \prec c)$

Định nghĩa

Definition. A relation R on a set A is a ***partial order*** if it is reflexive, antisymmetric and transitive.

Example. Quan hệ ước số " | "trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, i.e. $(\mathbb{Z}^+, |)$ là poset

Reflexive? Yes, $x \mid x$ since $x = 1 \cdot x$

Transitive? Yes?

$a \mid b$ means $b = ka$, $b \mid c$ means $c = jb$.
Then $c = j(ka) = jka$: $a \mid c$

Antisymmetric? Yes?

$a \mid b$ means $b = ka$, $b \mid a$ means $a = jb$.
Then $a = jka$
It follows that $j = k = 1$, i.e. $a = b$

Example. Is $(\mathbb{Z}, |)$ a poset? Not a poset.

Antisymmetric? No

$3|-3$, and $-3|3$,
but $3 \neq -3$.

Ex. Is $(2^S, \subseteq)$, where 2^S the set of all subsets of S, a poset?

Yes, A poset.

Reflexive? Yes, $A \subseteq A$, $\forall A \in 2^S$

Transitive? $A \subseteq B$, $B \subseteq C$. Does that mean $A \subseteq C$?

Yes

Antisymmetric? $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Does that mean $A = B$?

Yes

Definition. Các phần tử *a và b* của poset $(S, \prec)$ gọi là ***so sánh được nếu*** $a \prec b$ or $b \prec a$.

Trái lại thì ta nói *a* và *b* ***không so sánh được.***

Cho $(S, \prec)$, nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là ***tập sắp thứ tự toàn phần.***

Ta cũng nói rằng $\prec$ là ***thứ tự toàn phần hay thứ tự tuyến tính*** trên *S*

Example. Quan hệ "$\leq$" trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Example. Quan hệ ước số " | "trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

Thứ tự tự điển

Ex. Trên tập các chuỗi bit có độ dài n ta có thể định nghĩa thứ tự như sau:

$$a_1a_2\ldots a_n \le b_1b_2\ldots b_n$$

iff $a_i \le b_i$, $\forall\ i$.

Với thứ tự này thì các chuỗi 0110 và 1000 là không so sánh được với nhau .Chúng ta không thể nói chuỗi nào lớn hơn.

Trong tin học chúng ta thường sử dụng thứ tự toàn phần trên các chuỗi bit .
Đó là thứ tự tự điển.

41

Thứ tự tự điển

Cho $(A, \le)$ và $(B, \le')$ là hai tập sắp thứ tự toàn phần.
Ta định nghĩa thứ tự $\prec$ trên $A \times B$ như sau :

$$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \text{ iff}$$
$$a_1 < a_2 \text{ or } (a_1 = a_2 \text{ and } b_1 \le' b_2)$$

Dễ dàng thấy rằng đây là thứ tự toàn phần trên $A \times B$
Ta gọi nó là **thứ tự tự điển .**

Chú ý rằng nếu A và B được sắp tốt bởi $\le$ và $\le'$,tương ứng thì $A \times B$ cũng được sắp tốt bởi thứ tự $\prec$

Chúng ta cũng có thể mở rộng định nghĩa trên cho tích Descartess của hữu hạn tập sắp thứ tự toàn phần.

42

Thứ tự tự điển

Cho Σ là một tập hữu hạn (ta gọi là bảng chữ cái).
Tập hợp các chuỗi trên Σ, ký hiệu là Σ^* ,xác định bởi

- $\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là chuỗi rỗng.
- Nếu $x \in \Sigma$, và $w \in \Sigma^*$, thì $wx \in \Sigma^*$, trong đó wx là kết nối w với x.

Example. Chẳng hạn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Thế thì
$\Sigma^* = \{\lambda$, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab,…$\}$

43

Thứ tự tự điển

Giả sử $\le$ là thứ tự toàn phần trên Σ, khi đó ta có thể định nghĩa thứ tự toàn phần $\prec$ trên Σ^* như sau.

Cho $s = a_1 a_2 \ldots a_m$ và $t = b_1 b_2 \ldots b_n$ là hai chuỗi trên Σ^*

Khi đó $s \prec t$ iff

- Hoặc $a_i = b_i$ đối với $1 \le i \le m$,*tức là*
  $$t = a_1 a_2 \ldots a_m b_{m+1} b_{m+2} \ldots b_n$$
- Hoặc tồn tại $k < m$ sao cho
  - ✓ $a_i = b_i$ với $1 \le i \le k$ *và*
  - ✓ $a_{k+1} < b_{k+1}$, nghĩa là
  $$s = a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_m$$
  $$t = a_1 a_2 \ldots a_k b_{k+1} b_{k+2} \ldots b_n$$

44

■ Chúng ta có thể kiểm trạ $\prec$ là thứ tự tòan phần trên Σ^*
Ta gọi nó là ***thứ tự từ điển trên*** Σ^*

Example. Nếu Σ là bảng chữ cái tiếng Anh với thứ tự: a < b < … < z,thì thứ tự nói trên là thứ tự thông thường giữa các từ trong Từ điển.

For example

✓ *discreet* $\prec$ *discrete*

d i s c r e e t
d i s c r e t e

$e \precneqq t$

✓ *discreet* $\prec$ *discreetness*

d i s c r e e t
d i s c r e e t n e s s

Example. Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ với $0 < 1$, thì $\prec$ là thứ tự tòan phần trên tập tất cả các chuỗi bit Σ^* .

Ta có

✓ 0110 $\prec$ 10

✓ 0110 $\prec$ 01100

Hasse Diagrams

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ ***Hasse***

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Definition. Phần tử *b* trong poset $(S, \prec)$ đựoc gọi là *phần tử trội* của phần tử a trong S if $a \prec b$

Chúng ta cũng nói rằng *a* là ***được trội bởi*** b .Phần tử *b* được gọi là ***trội trực tiếp của*** *a* nếu *b* là trội của a, và không tồn tại trội *c* sao cho

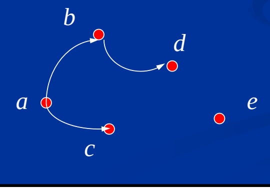
$$a \prec c \prec b, \quad a \neq c \neq b$$

Hasse Diagrams

- Ta định nghĩa ***Hasse diagram*** của poset $(S, \prec)$ là đồ thị:

✓Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng .

✓ Nếu *b* là trội trực tiếp của *a* thì vẽ một cung đi từ a đến b .



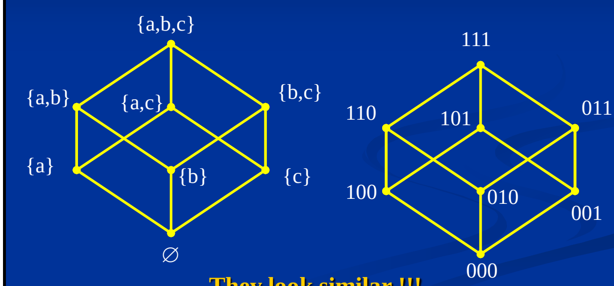
$a \prec b \prec d, \quad a \prec c$

Hasse Diagrams

Ex. Biểu đồ Hasse của poset ({1,2,3,4}, ≤) có thể vẽ như sau

Note. Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

Example. Biểu đồ Hasse của P({a,b,c}) và biểu đồ Hasse của các chuỗi bit độ dài 3 with thứ tự tự điển

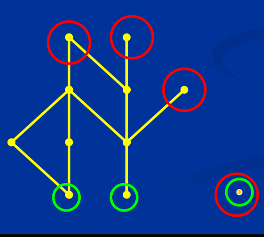


They look similar !!!

Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

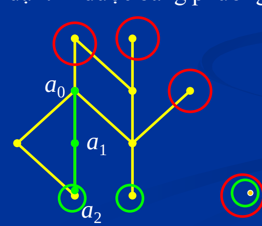
Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây:

- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là ***tối đại.***
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là ***tối tiểu.***
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



Note. Trong một poset *S hữu hạn*, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

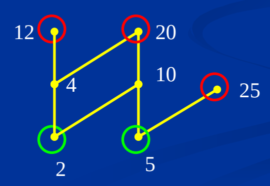
- ✓ Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$. Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại $a_1 \prec a_0$, tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu .
- ✓ Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.



Example. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |) ?

Solution. Từ biểu đồ Hasse , chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại , còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu

Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



53

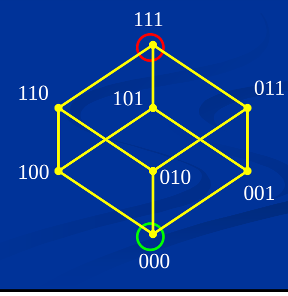
Example. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset các chuỗi bit độ dài 3?

Solution. Từ biểu đồ Hasse , chúng ta thấy rằng 111 là phần tử tối đại duy nhất và 000 là phần tử tối tiểu duy nhất .

111 là ***phần tử lớn nhất***
và
000 là ***phần tử nhỏ nhất***
theo nghĩa:

$000 \prec abc \prec 111$

với mọi chuỗi *abc*



54

Chúng ta có định lý

Theorem. Trong một poset hữu hạn, nếu chỉ có duy nhất một phần tử tối đại thì đó là phần tử lớn nhất . Tương tự cho phần tử nhỏ nhất.

Proof. Giả sử *g* là phần tử tối đại duy nhất.

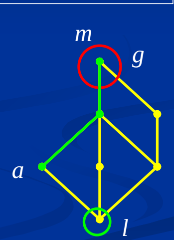
Lấy *a* là phần tử bất kỳ, khi đó tồn tại phần tử tối đại *m* sao cho

$a \prec m$

Vì *g* là duy nhất nên $m = g$, do đó ta có $a \prec g$

Như vậy *g* là phần tử lớn nhất.

Chúng minh tương tự cho phần tử nhỏ nhất l

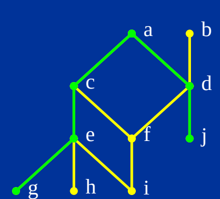


55

Chặn trên , chặn dưới

Definition. Cho $(S,\prec)$ là poset và $A \subseteq S$. Phần tử ***chặn trên*** của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall\, a \in A, a \prec x$.

Phần tử *chặn dưới* của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall\, a \in A, x \prec a$



Ex. Phần tử chặn trên của $\{g,j\}$ là *a*.

Tại sao không phải là b?

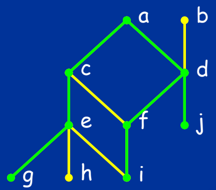
56

Definition. Cho $(S,\prec)$ là poset và $A \subseteq S$. ***Chặn trên nhỏ nhất*** của A là phần tử chặn trên x của A sao cho mọi chặn trên y *của* A, ta đều có $y \succ x$

Chặn dưới lớn nhất của A là phần tử chặn dưới x của A sao cho mọi chặn dưới y của A,ta có $y \prec x$

Ex. Chặn trên nhỏ nhất của $\{i,j\}$ là d

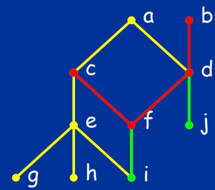
Ex. Chặn dưới chung LN của $\{g,j\}$ là gì?



57

Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ đưọc ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ đưọc ký hiệu bởi $a \wedge b$



Ex. $i \vee j = d$

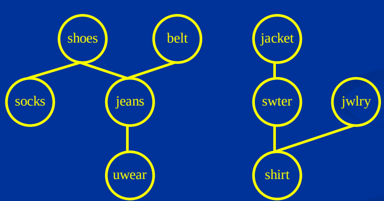
Ex. $b \wedge c = f$

58

Topological Sorting

Consider the problem of getting dressed.

Precedence constraints are modeled by a poset in which $a \prec b$ if and only if you must put on a before b.



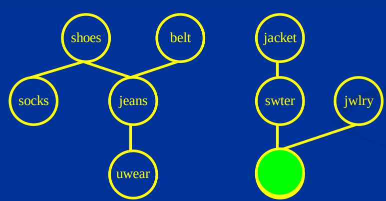
In what order will you get dressed while respecting constraints?

In other words, we will find a new total order so that a is a lower bound of b if $a \prec b$

59

Topological Sorting

Recall that every finite non-empty poset has at least one minimal element a_1.



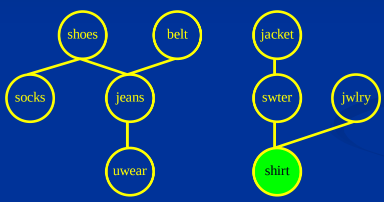
E.g. shirt is a minimal element

✓ Now the new set after we remove a_1 is still a poset.

60

Topological Sorting

- ✓ Let a_2 be a minimal of the new poset.



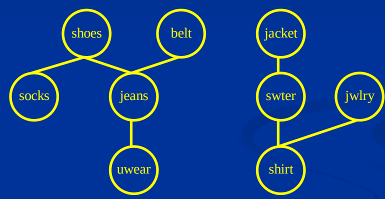
E.g. underwear is a new minimal element

- ✓ Now every element of this new poset cannot be a proper lower bound of a_1 and a_2 in the original poset

This process continues until all elements are removed

We obtain a new order of the elements satisfying the given constraints:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$



The arrangement of the given poset in the new total order $a_1, a_2, \ldots$ compatible with the old order is called the Topological sorting

Bài tập

1. Khảo sát các tính chất của các quan hệ ℜ sau. Xét xem quan hệ ℜ nào là quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương cho các quan hệ tương đương tương ứng.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow x^2 + 2x \le y^2 + 2y$;

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow$

$$x^3 - x^2y - 3x = y^3 - xy^2 - 3y;$$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $x\Re y \Leftrightarrow x^3 - x^2y - x = y^3 - xy^2 - y$.

Bài tập

2 . Khảo sát tính chất của các quan hệ sau

a) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x\Re y \Leftrightarrow x|y$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow x = y$ hay $x < y + 1$.

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow x = y$ hay $x < y - 1$.

d) $\forall (x, y); (z, t) \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \le (z, t) \Leftrightarrow x \le z$ hay ($x = z$ và $y \le t$);

e) $\forall (x, y); (z, t) \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \le (z, t) \Leftrightarrow x < z$ hay ($x = z$ và $y \le t$);

Bài tập

3 . Xét quan hệ $\Re$ trên $\mathbb{Z}$ định bởi:

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = y2^n$

a) Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương.

b)Trong số các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ có bao nhiêu lớp phân biệt ?

c) Câu hỏi tương tự như câu hỏi b) cho các lớp.

$$\overline{6}, \overline{7}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{48}$$

Bài tập

4 . Xét tập mẫu tự A = {a, b, c} với

a < b < c và :

s_1 = ccbac

s_2 = abccaa

theo thứ tự từ điển. Hỏi có bao nhiêu chuỗi ký tự s gồm 6 ký tự thỏa

$s_2 \le s \le s_1$?

Bài tập

5. **<u>ĐỀ THI NĂM 2006</u>**

- Xét thứ tự “⊂”trên tập P(S)các tập con của tập S ={1,2,3,4,5}trong đó A⊂B nếu A là tập con của B.
- Tìm một thứ tự toàn phần “ ≤ ”trên P(S) sao cho với A, B trong P(S), nếu A⊂B thì A≤ B. Tổng quát hoá cho trường hợp S có n phần tử.

Bài tập

6 . Đề 2007.Có bao nhiêu dãy bit có độ dài ≤15 sao cho 00001 ≤ s ≤ 011, trong đó “≤ ” là thứ tự từ điển.