Chương 2
Các phép toán trên ma trận

và Ma trận khả nghịch

Nội dung

1. Các phép toán ma trận

Sự bằng nhau của hai ma trận

Hai ma trận bằng nhau nếu: 1) cùng cở; 2) các phần tử ở những vị trí tương ứng bằng nhau (a_{ij} = b_{ij} với mọi i và j).

Phép cộng hai ma trận

Tổng A + B: $\begin{cases} \text{Cùng cỡ} \\ \text{Các phần tử tương ứng cộng lại} \end{cases}$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Các phép toán ma trận

Phép nhân ma trận với một số.

Nhân ma trận với một số, ta lấy số đó nhân với tất cả các phần tử của ma trận.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Tính chất:

a) A + B = B + A; b) (A + B) + C = A + (B + C);

c) A + 0 = A; d) k(A + B) = kA + kB;

e) k(mA) = (km)A; f) (k + m)A = kA + mA;

1. Các phép toán ma trận

Phép nhân hai ma trận với nhau

$$A = (a_{ij})_{m\times p}; B = (b_{ij})_{p\times n}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times n} \quad \text{với} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ & & * & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ * & b_{2j} & * \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

1. Các phép toán ma trận

Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Tính AB

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=2\times1+(-1)\times3+4\times2=7$$

1. Các phép toán ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X, thỏa AX = B.

Xác định cỡ của ma trận X là 2x1. Đặt $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b \\ 4a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=1 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3} \qquad X = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Các phép toán ma trận

Tính chất của phép nhân hai ma trận

a. A(BC) = (AB)C; b. A(B + C) = AB + AC;

c. (B+C)A = BA+CA; d. $I_m A = A = A I_m$

e. k (AB) = (kA)B = A(kB).

Chú ý:

1. Nói chung $AB \neq BA$
2. $AB = AC \not\longrightarrow B = C$
3. $AB = 0 \not\longrightarrow A = 0 \vee B = 0$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\20 & 13\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 20\\5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

2. Các phép toán ma trận vuông

Nâng ma trận lên lũy thừa.

$$A^0 = I \qquad A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A \qquad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A \cdot A}_{n}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I \, .$$

2. Các phép toán ma trận vuông

Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}; f(x)=2x^2-4x+3$$ Tính f(A).

$$f(A)=2A^2-4A+3I$$

$$f(A)=2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2\begin{pmatrix}1 & -6\\ 18 & 13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -4\\ 12 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 24 & 13\end{pmatrix}$$

2. Các phép toán ma trận vuông

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2; A^3, từ đó suy ra A^{200}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Các phép toán ma trận vuông

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tính A^{200}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 2^{200} & 300 \cdot 2^{200} \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix}$$

2. Các phép toán ma trận vuông

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{200}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

Suy ra: $A^n = 2^{n-1}A$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 2^{199} & 2^{199} \\ 2^{199} & 2^{199} \end{pmatrix}$$

Quy nạp Toán học

- Phương pháp:
  - Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số n, như P(n). Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh P(n) đúng với mọi số tự nhiên n.
  - Quá trình chứng minh quy nạp bao gồm 2 bước:
  - *Bước cơ sở:* Chỉ ra P(1) đúng.
  - *Bước quy nạp:* Chứng minh nếu P(n) đúng thì P(n+1) đúng. Trong đó P(n) được gọi là giả thiết quy nạp.
- Các ví dụ:
  - Ví dụ 1: Bằng quy nạp hãy chứng minh rằng tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2

Quy nạp Toán học

- Gọi P(n) là mệnh đề "tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2".
- Bước cơ sở: P(1): "tổng 1 số nguyên dương lẻ đầu tiên là 1^2".

  Hiển nhiên P(1) đúng vì 1= 1^2.
- Bước quy nạp: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

  \- Giả sử P(n) đúng, tức là $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

  \- Ta phải chỉ ra rằng P(n+1) đúng, tức là

  $$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$

  Từ giả thiết quy nạp ta có: $1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$

  \- Suy ra, P(n+1) đúng. Vậy theo nguyên lý quy nạp P(n) đúng với mọi số nguyên dương n

3. Ma trận khả nghịch

Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận I sao cho AB = I =BA. Khi đó B được gọi là nghịch đảo của A và ký hiệu là A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$ Giả sử $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}\right\} A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ma trận khả nghịch

Chú ý

Không phải bất kỳ ma trận vuông A nào cũng khả nghịch. Có rất nhiều ma trận vuông không khả nghịch.

Định nghĩa

Ma trận khả nghịch được gọi là ma trận không suy biến

Ma trận không khả nghịch được gọi là ma trận suy biến

3. Ma trận khả nghịch

Sự tồn tại của ma trận khả nghịch.

Cho ma trận vuông A, các mệnh đề sau đây tương đương

1. Tồn tại A^{-1} (A không suy biến)
2. $r(A) = n$
3. $AX = 0$ suy ra $X = 0$.
4. $A \xrightarrow{\text{Tương đương hàng}} I$

3. Ma trận khả nghịch

Cách tìm A^{-1}

$$[\,A|I\,] \xrightarrow{\text{Bđsc đối với hàng}} [\,I|A^{-1}\,]$$

Ví dụ

Tìm nghịch đảo (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Ma trận khả nghịch

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

$$\longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ma trận khả nghịch

Tính chất của ma trận nghịch đảo

Đối với hai ma trận khả nghịch A và B, các khẳng định sau đây đúng.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Tích AB là hai ma trận khả nghịch.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. Ma trận khả nghịch

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của m để cho A khả nghịch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

4. Ứng dụng

Ứng dụng 1.

Giải hệ phương trình

Định lý:
Hệ phương trình tuyến tính $AX = B$, trong đó A là một ma trận vuông cấp n, có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi A khả nghịch. Khi đó nghiệm tương ứng là $X = A^{-1}B$.

4. Ứng dụng

Ví dụ:
Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Phương trình dạng ma trận AX = B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

4. Ứng dụng

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -43/18 \\ 13/9 \\ -7/8 \end{pmatrix}$$

4. Ứng dụng

Ví dụ:
Giải phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Ứng dụng

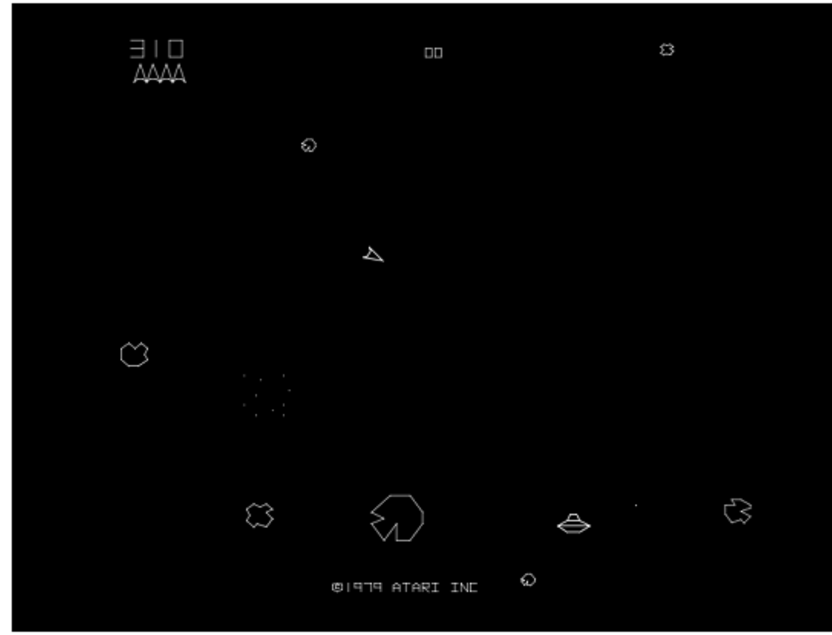
Ứng dụng 2.

Ma trận các phép biến hình trong đồ họa máy tính

Những chuyển động phức tạp của một vật thể có thể được mô tả như một dãy liên tiếp các phép biến hình cơ bản: tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm, quay, tỷ lệ. Và để thực hiện các phép biến hình này chúng ta sử dụng phép nhân ma trận để kiểm soát sự thay đổi tọa độ vật thể.

4. Ứng dụng

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Vật thể được kiểm soát bởi 1 điểm P có tọa độ P(x,y). Khi đó, ta xem tọa độ của P như một ma trận 3x1 có dạng như sau:



$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

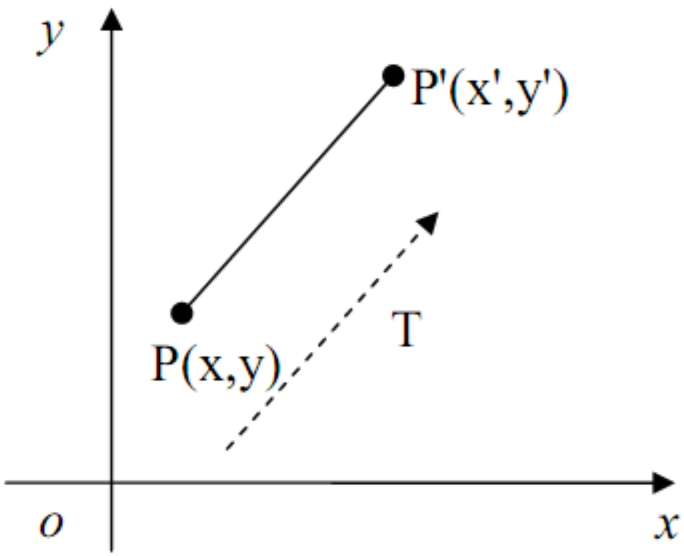
Số 1 dc thêm vào tọa độ

Khi qua phép biến hình T, P biến thành điểm P′ (x′,y′) được tính bằng công thức P′=T.P, với T là ma trận biểu diễn phép biến hình.

4. Ứng dụng

1. Phép tịnh tiến:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ví dụ: P(2,3) qua phép tịnh tiến véc tơ T (1,2) biến thành điểm P'(x',y')

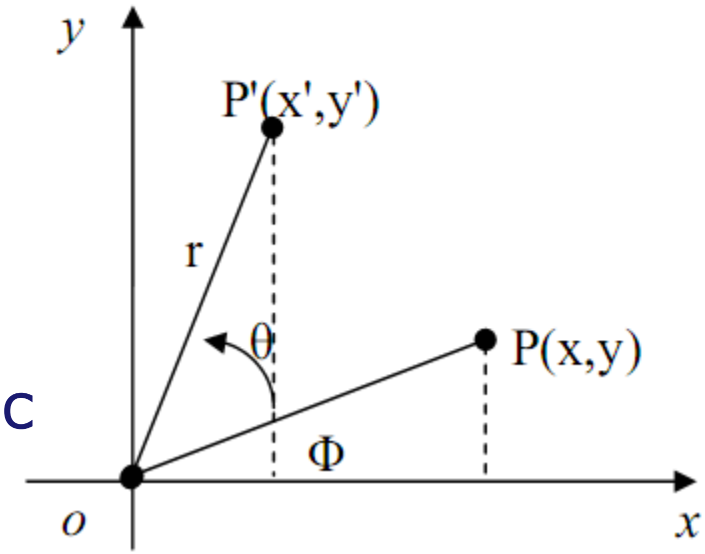
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x = 1 \\ 0 & 1 & t_y = 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vậy P'(3,5).

4. Ứng dụng

2. Phép quay

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ví dụ: P(2,4) qua quay tâm 0,góc quay 60° biến thành P'(x',y')

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^o & -\sin 60^o & 0 \\ \sin 60^o & \cos 60^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P' = (1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + 2)$$

4. Ứng dụng

3. Phép tỷ lệ

Phép biến hình tỷ lệ (s_x, s_y) biến P(x,y) thành P'(s_xx,s_yy) có ma trận biểu diễn

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

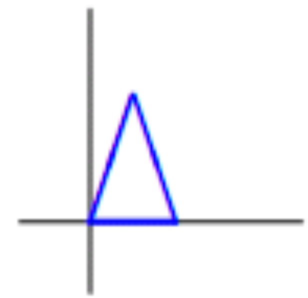
Ví dụ: Biến điểm P(2,3) với tỷ lệ (1/2;1/3) thành điểm P'

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P'(1,1)$$

4. Ứng dụng

Project: Biểu diễn các di chuyển cơ bản của 1 tàu chiến.

Ở đây, ta mô phỏng tàu chiến bằng 1 hình tam giác với các đỉnh có tọa độ (0,0), (2,0), (1,3). Và lưu dữ liệu này bằng 1 ma trận



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó muốn tàu chiến di chuyển theo véc tơ (r,s) ta có ma trận biểu diễn

4. Ứng dụng

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 2+r & 1+r \\ s & s & 3+s \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

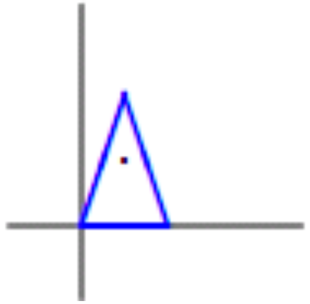
Chẳng hạn, tiến lên trước 2 bước, tức là tịnh tiến theo vectơ (0,2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy, vị trí mới của tàu sẽ là (0,2), (2,2), (1,5).

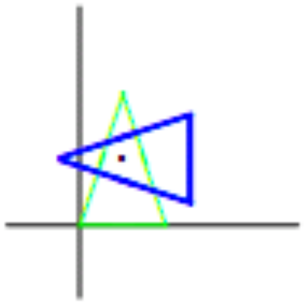
4. Ứng dụng

Để thực hiện phép quay bên trái chúng ta quan tâm tới tâm I(1, 1.5) của tàu chiến.



Sau đó thực hiện các bước sau:

- ✓ Tịnh tiến tâm về gốc tọa độ.
- ✓ Thực hiện phép quay 90^o.
- ✓ Tịnh tiến tâm trở lại vị trí ban đầu.



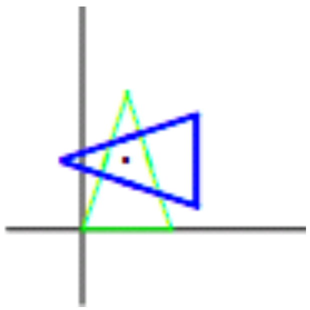
Phép biến đổi có ma trận biểu diễn

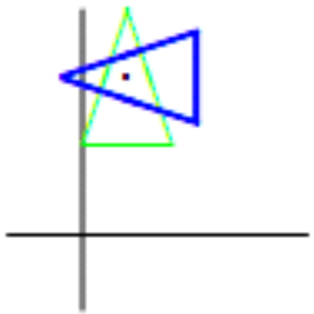
$$A^{-1}BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Ứng dụng

Vậy tọa độ mới của tàu

$$(A^{-1}BA)M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0.5 & 2.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$





4. Ứng dụng

Bài tập

Bài tập!

1. Thực hiện phép toán

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tìm f(A), biết

$f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ và $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bài tập

3. Tìm ma trận X, sao cho AX = B, với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Tính $3A + 2B^T$

Bài tập

5. Tìm ma trận A, nếu

$$5A-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=3A-\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

6. Tìm ma trận nghịch đảo, nếu có

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Bài tập

7. Tìm ma trận nghịch đảo của A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Tìm tất cả số thực m, sao cho ma trận A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$$