Châu Chí Trung - Phùng Minh Nhật
Đoàn Trần Nguyên Tùng - Trần Thiên Phúc
Diêu Tiến Đạt - Vũ Đức Nam

Hướng dẫn giải bài tập

ĐẠI SỐ A1

và

một số ứng dụng

LỜI NÓI ĐẦU

Lời khuyên trước khi đọc: Chúng tôi khuyên các bạn nên dùng cuốn sách vào mục đích tham khảo là chính, không nên ỷ lại nhiều vào nó để tránh gây ảnh hưởng việc phát triển năng lực toán học. Thân!

Đại số tuyến tính là một ngành toán học nghiên cứu về hệ phương trình tuyến tính, không gian vector và các phép biến đổi tuyến tính giữa chúng.
Việc nghiên cứu đại số tuyến tính lần đầu nổi lên từ việc nguyên cứu định thức, công cụ đã được sử dụng để giải các hệ phương trình tuyến tính. Định thức đã được sử dụng bởi nhà toán học Leibniz vào năm 1693, và sau đó, nhà toán học Gabriel Cramer đã nghĩ ra Định luật Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính vào năm 1750. Sau đó, nhà toán học Gauss đã phát triển nguyên lý giải hệ phương trình tuyến tính hơn nữa bằng việc dùng phép khử Gauss, ban đầu được ghi nhận như sự tiến bộ trong Trắc địa học.

Đối với Toán học, các ngành khoa học, kĩ thuật, Đại số tuyến tính chiếm vai trò không nhỏ, là một trong những công cụ cơ bản giúp giải những bài toán từ đơn giản đến phức tạp, từ quy mô nhỏ đến quy mô lớn. Ở hầu hết các trường đại học ở Việt Nam và trên thế giới, bộ môn Đại số tuyến tính là một trong những môn nền tảng bắt buộc học ở giai đoạn đại cương. Tuy nhiên, đa số sinh viên năm đầu ở Việt Nam cảm thấy khá bỡ ngỡ khi lần đầu tiếp xúc với môn này, vì nhiều lý do khác nhau nhưng chủ yếu là do Lý thuyết của môn lạ, tương đối dài, mang tính trừu tượng cao, “khô khan”. Đối với sinh viên năm nhất của khoa Toán Tin – trường Đại học Khoa học tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, môn Đại số tuyến tính được dạy nâng cao hơn, bài tập trong sách nhiều hơn, nhưng không có đáp án, hướng dẫn cũng như lời giải, khiến các bạn rất lúng túng, khó khăn trong việc tiếp cận, giải quyết các bài tập cũng như áp dụng. Lý do quan trọng nhất khiến môn Đại số tuyến tính chưa thể đến gần được với các bạn là tài liệu về ứng dụng của bộ môn này cho sinh viên năm nhất quá ít, hoặc ứng dụng quá “xa vời”.

Từng là sinh viên năm nhất khoa Toán Tin, hiểu được trở ngại các bạn đang gặp phải, thêm vào đó là niềm yêu thích đối với bộ môn Đại số tuyến tính, muốn giúp đỡ các bạn đến gần và yêu thích môn này hơn, đã thôi thúc đội ngũ tác giả chúng tôi soạn ra cuốn sách “Hướng dẫn giải bài tập Đại số A1 và một số ứng dụng”. Với tiêu chí “tự nhiên, dễ hiểu, dễ làm, dễ nhớ", trong quá trình soạn chúng tôi đã cố gắng đặt mình là sinh viên năm nhất, tìm ra nhiều hướng khác nhau tiếp cận các bài toán một cách "tự nhiên" nhất chỉ bằng những định nghĩa, định lý trong sách, đưa ra những hướng đi có thể và kết thúc bài bằng những nhận xét mang tính khách quan, tổng quát (tuy nhiên không phải mọi bài). Song, chúng tôi cũng dùng những kinh nghiệm có được đối với môn này để đưa ra những lời khuyên nhỏ đối với các bạn trong một số bài tương đối khó. Số lượng bài tập khá đầy đủ so với trong giáo trình (tất cả bài tập 3 chương đầu, 30 bài tập chương 4, chương 5 học ở môn Đai số A2 nên ở đây không giải), loại bài tập đa dạng, phù hợp với nhiều lực học khác nhau. Bên cạnh những hướng dẫn giải, chúng tôi đã tìm kiếm nguồn ứng dụng nước ngoài trên mạng, dịch (và có sữa chữa một vài chỗ) những ứng dụng gần gũi nhất cho các bạn, bao gồm nhiều lĩnh vực khác nhau để giúp các bạn thấy những gì mình học được áp dụng tốt và có ích. Chúng tôi rất vui và hi vọng các bạn sẽ tận dụng một cách tích cực cuốn sách trong môn học này, chúc các bạn học tốt và thành công.

Ngoài ra, trong phần dịch ứng dụng, chúng tôi cũng có sửa chữa một số chi tiết. Do quá trình biên soạn với cường độ làm việc cao, thời gian hạn hẹp nên chúng tôi có thể vấp phải một số sai sót trong sản phẩm của mình, kính mong độc giả vui lòng bỏ qua, chúng tôi rất biết ơn nếu bạn gửi những ý kiến đóng góp của mình về sản phẩm của chúng tôi qua email sau: chauchitrung1996@gmail.com.

Cảm ơn bạn Phùng Minh Nhật vì đã giải rất nhiều bài tập khó cho cuốn sách này. Cảm ơn đặc biệt Giáo sư Joseph Khoury của Đại học Ottawa, Canada vì đã đồng ý cho chúng tôi sử dụng tài liệu của mình. Các bạn có thể xem tài liệu gốc ở đây:

http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/app.htm

TP Hồ Chí Minh, tháng 11 năm 2015.
Thay lời đội ngũ tác giả.
Trần Thiên Phúc

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
Ma trận và hệ phương trình tuyến tính

Bài 1.1

Tính các tích:

a) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ i & 1 & 2\\ 2 & 2i & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

Giải:

Do bài tập này chỉ là tính toán đơn thuần nên chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}56\\ 69\\ 17\end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix}1+4i\\ 10+5i\\ -11+28i\\ 13+22i\end{pmatrix}$.

Bài 1.2

Tính $A^k, k \in \mathbb{N}$ biết rằng:

a) $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải:

Ở đây phần giải chỉ sửa chi tiết câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) Ta có: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Mặt khác $I_2^n = I_2\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên bằng quy nạp ta suy ra:

$A^{2k} = I_n, A^{2k+1} = A\ \forall k \in \mathbb{N}$.

b) $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha\beta \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$.

d) $A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$.

e) $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 1.3

Cho $A \in M_n(K)$ có tất cả các phần tử đều bằng $\alpha(\alpha \in K)$. Hãy tính $A^k, k \in \mathbb{N}$.

Giải:

Ta sẽ chứng minh rằng $A^k = \begin{pmatrix} n^{k-1}\alpha^k & \cdots & n^{k-1}\alpha^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{k-1}\alpha^k & \cdots & n^{k-1}\alpha^k \end{pmatrix}$ $(k \geq 1)$ (1)

Với $k = 1$: hiển nhiên.

Giả sử (1) đúng với $k = m \geq 1$, tức là $A^m = \begin{pmatrix} n^{m-1}\alpha^m & \cdots & n^{m-1}\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}\alpha^m & \cdots & n^{m-1}\alpha^m \end{pmatrix}$.

Ta chứng minh $k = m + 1$ thì (1) cũng đúng.

Ta có: $A^{m+1} = \begin{pmatrix} n^{m-1}\alpha^m & \cdots & n^{m-1}\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}\alpha^m & \cdots & n^{m-1}\alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^m\alpha^{m+1} & \cdots & n^m\alpha^{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^m\alpha^{m+1} & \cdots & n^m\alpha^{m+1} \end{pmatrix}$

Vậy theo quy nạp ta suy ra $A^k = \begin{pmatrix} n^{k-1}\alpha^k & \cdots & n^{k-1}\alpha^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{k-1}\alpha^k & \cdots & n^{k-1}\alpha^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Bài 1.4

Cho $f: \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ là một ánh xạ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng: $f(x)f(y) = f(x + y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Suy ra $[f(x)]^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$?

Giải:

Bằng tính toán đơn thuần, ta có:

$$f(x)f(y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix} = f(x + y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Tới đây bằng cách thử với $\boldsymbol{k = 1, 2}, \ldots$ ta có thể đoán ra công thức tổng quát và chứng minh bằng quy nạp.

Đáp án: $f(x)^k = f(kx)\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Bài 1.5

Giả sử $A \in M_n(K)$ và f là một đa thức bậc m trên K có dạng :

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Ta định nghĩa:

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Hãy tính $f(A), g(A), f(A)g(A)$ trong trường hợp $f(x) = x^3 - 7x + 5, g(x) = 2x^2 + 3x - 4$

và A là các ma trận trong Bài tập 1.2.

Giải:

a) $f(A) = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -18 & 17 \end{pmatrix}; g(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}; f(A)g(A) = \begin{pmatrix} 26 & -27 \\ 81 & -82 \end{pmatrix}.$

b) $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -4\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 7\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; f(A)g(A) = \begin{pmatrix} -1 & -11\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

c) $f(A) = \begin{pmatrix} \alpha^3 - 7\alpha + 5 & 3\alpha\beta - 7\beta \\ 0 & \alpha^3 - 7\alpha + 5 \end{pmatrix}; g(A) = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 + 3\alpha - 4 & 4\alpha\beta + 3\beta \\ 0 & 2\alpha^2 + 3\alpha - 4 \end{pmatrix};$

$f(A)g(A)$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha^5 + 3\alpha^4 - 18\alpha^3 - 11\alpha^2 + 43\alpha - 20 & 4\alpha^4\beta + 9\alpha^3\beta - 33\alpha^2\beta - 34\alpha\beta + 43\beta \\ 0 & 2\alpha^5 + 3\alpha^4 - 18\alpha^3 - 11\alpha^2 + 43\alpha - 20 \end{pmatrix}.$$

d) $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}; g(A) = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 9 \\ 9 & 5 & 9 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}; f(A)g(A) = \begin{pmatrix} 71 & 91 & 91 \\ 91 & 71 & 91 \\ 91 & 91 & 71 \end{pmatrix}.$

e) $f(A)=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}; g(A)=\begin{pmatrix}1 & 7 & 9\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; f(A)g(A)=\begin{pmatrix}-1 & -11 & -38\\ 0 & -1 & -11\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

f) $f(A)=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}; g(A)=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; f(A)g(A)=\begin{pmatrix}-1 & -11 & -27\\ 0 & -1 & -11\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Bài 1.6

Tìm tất cả các ma trận X vuông cấp **2** thỏa:

a) $X^2 = 0$;

b) $X^2 = I_2$;

c) $X^2 = X$.

Giải:

Đặt $X = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, ta có:

$X^2 = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$.

a) $X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0\\ b(a+d)=0\\ c(a+d)=0\\ bc+d^2=0\end{cases}$

Biện luận:

Ta thấy $X = 0$ là một nghiệm, giả sử $X \neq 0$.

- $a + d = 0$:

Suy ra $bc = -a^2$.

Nếu b hoặc c bằng 0 suy ra được $a = d = 0$, lại suy ra được $b = c = 0$. Tức là ra được $X = 0$ (mâu thuẫn với giả sử).

Vậy $b, c \neq 0$, suy ra $a^2 = -bc \neq 0$. Đặt $a = \alpha \neq 0, b = \beta \neq 0$, suy ra $d = -\alpha, c = -\frac{\alpha^2}{\beta}$. Tức

$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $a + d \neq 0$:

Từ phương trình thứ hai và ba suy ra $b = c = 0$, kết hợp phương trình thứ nhất và thứ tư suy ra $a = d = 0$, tức là $X = 0$ (mâu thuẫn với giả sử).

Vậy tất cả các X cần tìm là: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$

Lý luận tương tự như câu a ta suy ra các ma trận X cần tìm là:

$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ với $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) $X^2 = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a + d - 1) = 0 \\ c(a + d - 1) = 0 \\ bc + d^2 = d \end{cases}$

Lý luận tương tự như câu a ta suy ra các ma trận X cần tìm là:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha-\alpha^2}{\beta} & 1 - \alpha \end{pmatrix}$ với $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bài 1.7

Tìm tất cả các ma trận cấp 2 giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải:

Đặt $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$AB = BA$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c = c \\ 2c + d = d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d = k \\ b = q \end{cases}$ với $k, q \in \mathbb{R}$

Vậy ma trận cần tìm có dạng $\begin{pmatrix} k & q \\ 0 & k \end{pmatrix}$ với $k, q \in \mathbb{R}$.

Bài 1.8

Tìm tất cả các ma trận cấp 3 giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải:

Đặt $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{pmatrix}$ là ma trận giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải hoàn toàn tương tự 1.7 ta được ma trận cần tìm có dạng $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \theta-\alpha+2\beta \\ \delta & \omega & -2\theta-\delta+2\omega \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}$ với

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, \theta \in \mathbb{R}$.

Bài 1.9*

Cho $A \in M_n(K), n > 2$ thỏa tính chất: Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, còn các phần tử còn lại đều bằng 1.

a) Xác định cụ thể các hệ số $\alpha, \beta \in K$ sao cho $(\alpha A + \beta I)^2 = I$.

b) Viết cụ thể α, β trong trường hợp $n = 3, n = 4$.

(Hướng dẫn: Đặt $B = A + I$ rồi sử dụng kết quả bài 1.3)

Giải:

a) Ở đây sẽ trình bày một cách giải khác với hướng dẫn, sinh viên có thể làm theo hướng dẫn để rút thêm kinh nghiệm.

$$I = (\alpha A + \beta I)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 + (n-1)\alpha^2 & \cdots & 2\beta\alpha + (n-2)\alpha^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\beta\alpha + (n-2)\alpha^2 & \cdots & \beta^2 + (n-1)\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 + (n-1)\alpha^2 = 1 \\ 2\beta\alpha + (n-2)\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 + (n-1)\alpha^2 = 1 \\ (\beta-\alpha)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 + (n-1)\alpha^2 = 1 \\ \left[\begin{array}{l} \beta - \alpha = 1 \\ \beta - \alpha = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta = \alpha + 1 \\ \alpha(n\alpha + 2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta = \alpha - 1 \\ \alpha(n\alpha - 2) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta = 1 - \dfrac{2}{n} \\ \alpha = -\dfrac{2}{n} \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta = \dfrac{2}{n} - 1 \\ \alpha = \dfrac{2}{n} \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

b) Câu này chỉ đơn giản là thay số vào kết quả câu a nên sẽ không được trình bày.

Bài 1.10

Cho $A, B \in M_n(K)$.

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

Giải:

a) Ta có: $I_n = A^{20} = A^2(A^9)^2 = A^2.I_n^2 = A^2$.

Mặt khác: $I_n = A^9 = A(A^2)^4 = A.I_n^4 = A$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$I_n = A^2B^3 = A^2I_nB^3 = A^2(A^2B^3)B^3 = A^4B^6 = A^4I_nB^6 = A^4(A^2B^3)B^6 = A^6B^9$

$= A^3(A^3B^7)B^2 = A^3B^2$

Mặt khác: $I_n = A^8B^4 = A^5(A^3B^2)B^2 = A^5B^2 = A^2(A^3B^2) = A^2$.

Thay $A^2 = I_n$ vào các biểu thức trong giả thuyết: $B^3 = AB^7 = B^4 = I_n$

$\Rightarrow I_n = B^4 = B^3B = I_nB = B$

$\Rightarrow I_n = AB^7 = AI_n = A$

Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: trong bài giải này thực ra ta đang sử dụng một kết quả rất đẹp:

Với $A, B \in M_n(K)$ và $A^aB^b = I_n$ với $a, b \in \mathbb{N}$ thì $I_n = (A^aB^b)^m = A^{am}B^{bm}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Phần chứng minh xem như bài tập.

Bài 1.11

Cho $A \in M_n(K)$ với $A^2 = 0$. Đặt $B = I_n + A$.

a) Tính B^k theo I_n và A ($k \in N$);

b) Tính $S_k = I_n + B + B^2 + \cdots + B^k$ theo I_n và A.

c) Tính S_k khi $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.

Giải:

a) Ta sẽ chứng minh $B^m = I_n + mA$ $\forall m \in \mathbb{N}$. (1)

Với $k = 1$: Hiển nhiên

Giả sử (1) đúng với $k = m \geq 1$.

Xét $k = m + 1$:

$B^{m+1} = B^mB = (I_n + mA)(I_n + A) = ((I_n)^2 + I_nA + mAI_n + mA^2) = I_n + (m+1)A$

Vậy bằng quy nạp ta suy ra được $B^m = I_n + mA$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

b) Ta có:

$S_k = I_n + B + B^2 + \cdots + B^k = I_n + (I_n + A) + (I_n + 2A) + \cdots + (I_n + kA)$

$= (k+1)I_n + \frac{k(k+1)}{2}A$

c) Ta có $B = I_n + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

$$S_k = (k+1)I_n + \frac{k(k+1)}{2}A = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\frac{k(k+1)}{2} & -4\frac{k(k+1)}{2} \\ 9\frac{k(k+1)}{2} & -6\frac{k(k+1)}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3k^2+4k+1 & -4\frac{k(k+1)}{2} \\ 9\frac{k(k+1)}{2} & -3k^2-2k+1 \end{pmatrix}$$

Bài 1.12

Đặt $A(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1/\alpha & 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$. Chứng minh rằng $\forall \alpha, \beta \in K, \alpha, \beta \neq 0$. Ta có:

a) $A(\alpha)A(\beta) = A(\beta)A(\alpha)$ khi và chỉ khi $\alpha = \beta$.

b) $\left(A(\alpha) + A(2\alpha)\right)^{2n}$ không phụ thuộc vào α với mọi $n \in N$.

Giải::

a) Ta có

$$A(\alpha)A(\beta) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1/\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ -1/\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\alpha}{\beta} & \alpha-\beta \\ \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta} & 1-\dfrac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (1)$$

$$A(\beta)A(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ -1/\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1/\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\beta}{\alpha} & \beta-\alpha \\ \dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha} & 1-\dfrac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} (2)$$

Khi đó $A(\alpha)A(\beta) = A(\beta)A(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{\alpha}{\beta} = 1-\frac{\beta}{\alpha} \\ \alpha-\beta = \beta-\alpha \\ 1-\frac{\beta}{\alpha} = 1-\frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có

$\left(A(\alpha) + A(2\alpha)\right)^{2n}$

$= \left(\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha \\ -\frac{1}{2\alpha} & 1 \end{pmatrix}\right)^{2n}$

$= \left(\begin{pmatrix} -2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & 2 \end{pmatrix}\right)^{n}$

$= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^{n}$

Do đó $\left(A(\alpha) + A(2\alpha)\right)^{2n}$ không phụ thuộc vào giá trị của α.

Bài 1.13

Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng:

a) $(A + A^T), AA^T, A^T A$ là các ma trận đối xứng và $(A - A^T)$ là ma trận phản đối xứng.

b) Tồn tại duy nhất hai ma trận $P, Q \in M_n(K)$ sao cho P đối xứng, Q phản đối xứng và $A = P + Q$.

Giải:

a) Ta có: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$[A + A^T]_{ij} = [A]_{ij} + [A^T]_{ij} = [A^T]_{ij} + [A]_{ij} = [A^T + A]_{ij}$

$$[AA^T]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}{A^T}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} {A^T}_{kj}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}{A^T}_{ki} = [AA^T]_{ji}$$

$$[A^T A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} {A^T}_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}{A^T}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} {A^T}_{jk}A_{ki} = [A^T A]_{ji}$$

Suy ra $(A + A^T), AA^T, A^T A$ là các ma trận đối xứng.

Lý luận hoàn toàn tương tự suy ra được $A - A^T$ là ma trận phản xứng.

b) Ta có:

Xét $\begin{cases} P = \frac{A+A^T}{2} \\ Q = \frac{A-A^T}{2} \end{cases}$

Theo câu a thì $(A + A^T)$ là ma trận đối xứng, $(A - A^T)$ là ma trận phản đối xứng.

Suy ra P là ma trận đối xứng và Q là ma trận phản đối xứng.P, Q thỏa mãn yêu cầu.

Ta sẽ chứng minh P, Q này là duy nhất:

Xét P' là ma trận đối xứng, Q' là ma trận phản đối xứng thỏa $A = P' + Q'$, suy ra

$A^T = (P' + Q')^T = {P'}^T + {Q'}^T = P' - Q'$.

Từ hai đẳng thức trên suy ra $\begin{cases} P' = \frac{A+A^T}{2} = P \\ Q' = \frac{A-A^T}{2} = Q \end{cases}$. Vậy P, Q là duy nhất.

Bài 1.14

Cho K là trường số thực hoặc phức và $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Ta định nghĩa:

$\|A\| = \sqrt{mn}.max\{|a_{ij}|\}$

Chứng minh rằng, $\forall A, B \in M_{m\times n}(K)$ ta có:

a) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|\ \forall \alpha \in K$

c) Nếu $m = n$ thì $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Giải:

a) Ta có:

$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\Leftrightarrow \sqrt{mn}\,.max\{|a_{ij}+b_{ij}|\} \leq \sqrt{mn}\,.max\{|a_{ij}|\} + \sqrt{mn}\,.max\{|b_{ij}|\}$

$\Leftrightarrow max\{|a_{ij}+b_{ij}|\} \leq max\{|a_{ij}|\} + max\{|b_{ij}|\}$ (đúng)

b) Ta có:

$\|\alpha A\| = \sqrt{mn}.max\{|\alpha.a_{ij}|\} = |\alpha|.\sqrt{mn}.max\{|a_{ij}|\} = |\alpha|\|A\|$ (điều phải chứng minh)

c) Nếu $m = n$ thì ta có:

$\|AB\| = n\,max\{|AB_{ij}|\} = n\,max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|\right\} \leq n^2\,max\{|a_{ik}b_{kj}|\}\ (k = \overline{1,n})$

$\|A\|\|B\| = n^2 max\{|a_{ij}|\}\,max\{|b_{ij}|\}$

Mà $max\{|a_{ik}b_{kj}|\} \leq max\{|a_{ij}|\}\,max\{|b_{ij}|\}$ nên từ hai điều trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.15

Một ma trận $A \in M_n(K)$ được gọi là lũy đẳng nếu $A^2 = A$. Chứng tỏ rằng nếu A và $B \in M_n(K)$ cùng lũy đẳng thì $A + B$ lũy đẳng khi và chỉ khi $AB = BA = 0$.

Giải:

Chiều nghịch:

Ta nhận thấy chiều nghịch khá hiển nhiên nếu khai triển hằng đẳng thức bậc 2 của $(A + B)$

Ta có $AB = BA = 0$ nên:

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B$

Vậy $A + B$ lũy đẳng.

Chiều thuận:

Ta có $A + B = (A + B)^2 = AB + BA + A + B \Rightarrow AB = -BA$ (1)

Làm đến đây, ta nhận thấy khó khăn vì AB và BA trái dấu, nhưng nếu chứng minh được $AB = BA$ thì việc $AB = 0$ là hiển nhiên. Vì thế ta không thể bắc cầu qua giá trị 0 mà nên chứng minh $AB = BA$ thông qua một giá trị khác. Ta tìm cách để đưa 2 vế của (1) về cùng dấu như sau:

Lấy vế trái nhân vế phải ở cả 2 vế ta có kết quả sau:

$-B^2AB = -AB^2A = -BAB = -ABA$ (2)

Mặt khác ta nhân A vào 2 vế ở (1) cho A ta được:

$A^2B = -ABA = AB$ (3)

Tương tự khi nhân B vào 2 vế ở (1) ta có:

$BA = -BAB$ (4)

Từ (2), (3), (4) ta có $AB = BA$ (5)

Từ (1), (5) ta có $AB = BA = 0$.

Bài 1.16

Một ma trận $P \in M_n(K)$ được gọi là lũy linh nếu tồn tại $k \in N$ sao cho $P^k = 0$.

Cho $A, B \in M_n(K)$. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu A lũy linh và A, B giao hoán thì AB lũy linh.

b) Nếu A, B lũy linh và A, B giao hoán thì $uA + vB$ lũy linh với mọi $u, v \in K$.

Giải:

a) A lũy linh nghĩa là tồn tại $m \in N$ sao cho $A^m = 0$.

Do A, B giao hoán nên $AB = BA$.

Ta có $(AB)^m = A^m B^m = 0$ nên AB lũy linh.

b) Gọi $k \in \mathbb{N}$ là số thỏa $B^k = 0$.

Ta có:

$$(uA + vB)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^{i}(uA)^{i}(vB)^{m+n-i} = \sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^{i}u^{i}v^{m+n-i}(A)^{i}(B)^{m+n-i}$$

Với $i \leq m$: ta có $m + n - i \geq n$ nên $B^{m+n-i} = 0$, suy ra $C_{m+n}^{i}(uA)^{i}(vB)^{m+n-i}0$.

Với $i > m$: ta có $A^i = 0$ nên $C_{m+n}^{i}(uA)^{i}(vB)^{m+n-i}0$.

Suy ra

$$(uA + vB)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^{i}u^{i}v^{m+n-i}(A)^{i}(B)^{m+n-i} = 0.$$

Vậy $uA + vB$ lũy linh.

Bài 1.17

Ma trận tam giác được gọi là ngặt nếu tất cả phần tử trên đường chéo chính của nó đều bằng 0. Chứng minh mọi tam giác ngặt đều luỹ linh.

Giải

Định nghĩa: Một ma trận A được gọi là luỹ linh khi và chỉ khi $\exists k \in Z: A^k = 0$.

Ta thử lấy một ma trận tam giác trên ngặt A bất kì bậc n, $n \geq 3$, các giá trị còn lại trong ma trận nên dương để đảm bảo không xảy ra trường hợp đặc biệt, tính A^2 ta nhận thấy đường chéo liền kề phía trên đường chéo chính nhận giá trị 0, tương tự ta nhân tiếp cho A thì những đường chéo liền kề sau đó cũng như vậy. Vì thế ta có thể hi vọng $A^n = 0$ và sẽ chứng minh nó bằng quy nạp.

Ta chứng minh: $[A^h]_{ij} = 0$ $(h \leq n,\ j \leq i + h - 1)$ với $A \in M_n(K), a_{ij} = 0$ khi $j \leq i$.

Với $h = 1$ ta có điều phải chứng minh là hiển nhiên.

Giả sử $[A^k]_{ij} = 0\ \forall j \le i + k - 1\ (k < n)$.

Chứng minh $[A^{k+1}]_{ij} = 0\ \forall j \le i + k\ (k < n)$.

Ta chỉ cần chứng minh $[A^{k+1}]_{i(i+k)} = 0$ là đủ.

Thật vậy,

$$[A^{k+1}]_{i(i+k)} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{is} * [A^k]_{s(i+k)} = \sum_{s=1}^{i+k} [A^k]_{is} * [A]_{s(i+k)} + \sum_{s=i+k+1}^{n} [A^k]_{is} * [A]_{s(i+k)}$$

Trong đó, $\begin{cases} \sum_{s=1}^{i+k-1} [A^k]_{is} * [A]_{s(i+k)} = 0 \text{ (Do } s \le i + k - 1 \text{ nên } [A^k]_{is} = 0) \\ \sum_{s=i+k}^{n} [A^k]_{is} * [A]_{s(i+k)} = 0 \text{ (Do } i + k \le s \text{ nên } [A]_{s(i+k)} = 0) \end{cases}$

Vậy $[A^{k+1}]_{i(i+k)} = 0$ và vì thế ta có $[A^h]_{ij} = 0\ (h \le n,\ j \le i + h - 1)$.

Khi $h = n$ thì $[A^n]_{ij} = 0\ (j \le n)$ tức $A^n = 0$.

Nhận xét: Đối với những dạng bài ma trận có quy luật đặc biệt thế này, cách tốt nhất để tiếp cận với bài toán là thử với một ma trận thỏa quy luật đó nhưng những yếu tố không được nêu trong quy luật thì nên cho chúng không đặc biệt. Có thể bạn sẽ nảy sinh ra cách làm như tôi đã trình bày ở trên.

Bài 1.18

Với mỗi $P \in M_n(K)$ và P lũy linh, đặt

$$e^P = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} P^i.$$

Cho $A, B \in M_n(K)$ sao cho A, B cùng lũy linh và giao hoán nhau. Chứng minh rằng $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ và $e^{mA} = (e^A)^m, \forall m \in \mathbb{N}$.

Giải

Chứng minh $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$:

Có A, B lũy linh nên có $u, v \in \mathbb{N}$ sao cho $A^u = B^v = 0$.

Theo định nghĩa:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{u-1} \frac{1}{k!} A^k$$

$$e^B = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} B^h = \sum_{h=0}^{v-1} \frac{1}{h!} B^h$$

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n$$

Do A, B giao hoán nhau nên có khai triển sau:

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j A^j B^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} A^j B^{n-j}$$

Ta cũng có nhận xét:

Với $n = u + v - 1$ xét $A^j B^{n-j}$:

- Nếu: $n \geq j \geq u \Rightarrow A^j = 0 \Rightarrow A^j B^{n-j} = 0$
- Nếu:$0 \leq j \leq u - 1 \Rightarrow n - j \geq v \Rightarrow B^{n-j} = 0 \Rightarrow A^j B^{i-j} = 0$

Suy ra $(A+B)^{u+v-1} = 0$.

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{u+v-2} \frac{1}{n!} (A+B)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{u+v-2} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} A^j B^{n-j} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{u+v-2} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!\,(n-j)!} A^j B^{n-j} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{j!} A^j \left(\sum_{n=j}^{j+v-1} \frac{1}{(n-j)!} B^{n-j} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{j!} A^j e^B$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{u-1} \frac{1}{j!} A^j \right) e^B = e^A e^B.$$

Vậy ta có:

$e^{B+A} = e^B e^A; e^{A+B} = e^{B+A} \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$

Chứng minh $\boldsymbol{e^{mA} = (e^A)^m}$:

$e^{mA} = (e^A)^m \qquad (1)$

Ta quy nạp theo $m \in \mathbb{N}$

$m = 1$: Hiển nhiên.

Giả sử (1) đúng với $m = t$.

Xét $m = t + 1$:

$e^{(t+1)A} = e^{tA+A} = e^{tA} e^A = (e^A)^t e^A = (e^A)^{t+1}.$

Theo nguyên lý quy nạp (1) đúng với mọi m thuộc $\mathbb{N}$.

(Lưu ý: Ta quy ước rằng $e^{0_n} = I_n$)

Bài 1.19

Với mỗi $P \in M_n(K)$ và P lũy linh, đặt

$$\sin(P) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} P^{2i+1}$$

$$\cos(P) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i)!} P^{2i}$$

Cho $A, B \in M_n(K)$ sao cho A, B cùng lũy linh và giao hoán nhau. Chứng minh rằng

a) $\sin(-A) = -\sin(A)$

b) $\cos(-A) = \cos(A)$

c) $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_n$

d) $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$

e) $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$

f) $\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \sin(B)\cos(A)$

g) $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$

Giải:

Chứng minh công thức phụ:

$$\sin(P) = \frac{e^{iP} - e^{-iP}}{2i}$$

$$\cos(P) = \frac{e^{iP} + e^{-iP}}{2}$$

Ta có:

$$\sin(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} P^{2n+1}$$

$$= -i \sum_{n=0}^{+\infty} i^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} P^{2n+1}$$

$$= i \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} P^{2n+1}$$

$$= -i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(iP)^{2n+1}$$

$$= i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-iP)^{2n+1}$$

$$\cos(P) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}P^{2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} i^{2n}\frac{1}{(2n)!}P^{2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}(-i)^{2n}\frac{1}{(2n)!}P^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(iP)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(-iP)^{2n}$$

Suy ra:

$$\cos(P) + i\sin(P) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(iP)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(iP)^{2n+1} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}(iP)^m = e^{iP}$$

$$\cos(P) - i\sin(P) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(-iP)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-iP)^{2n+1} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}(-iP)^m = e^{-iP}$$

Vậy ta chỉ cần giải hệ:

$$\begin{cases}\cos(P) + isin(P) = e^{iP} \\ \cos(P) - isin(P) = e^{-iP}\end{cases}$$

Công thức phụ được chứng minh.

Bài toán chính

Ta có A, B lũy linh nên tồn tại $u, v \in \mathbb{N}$ sao cho $A^u = B^v = 0$.

a) $\sin(-A) = -\sin(A)$

$$\sin(-A) = \frac{e^{i(-A)} - e^{-i(-A)}}{2i} = \frac{e^{-iA} - e^{iA}}{2i} = -\sin(A)$$

b) $\cos(-A) = \cos(A)$

$$\cos(-A) = \frac{e^{i(-A)} + e^{-i(-A)}}{2} = \frac{e^{-iA} + e^{iA}}{2} = \cos(A)$$

c) $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_n$

$\sin^2(A) + \cos^2(A)$

$$= \left(\frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{-\left(e^{iA}\right)^2 + e^{iA}e^{-iA} + e^{-iA}e^{iA} - \left(e^{-iA}\right)^2 + \left(e^{iA}\right)^2 + e^{iA}e^{-iA} + e^{-iA}e^{iA} + \left(e^{-iA}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{e^{iA}e^{-iA} + e^{-iA}e^{iA}}{2}$$

Theo **bài 1.18**:

$$e^{iA}e^{-iA} = e^{-iA}e^{iA} = e^{iA+(-iA)} = e^{0_n} = I_n$$

Từ đây ta có $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_n$.

d) $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$

$$\sin(2A) = \frac{e^{2iA} - e^{-2iA}}{2i}$$

Theo **bài 1.18**:

$$e^{iA}e^{-iA} = e^{-iA}e^{iA}$$

$$\Rightarrow e^{2iA} - e^{-2iA} = \left(e^{iA}\right)^2 - \left(e^{-iA}\right)^2 = \left(e^{iA} - e^{-iA}\right)\left(e^{iA} + e^{-iA}\right)$$

$$\sin(2A) = \frac{\left(e^{iA} - e^{-iA}\right)\left(e^{iA} + e^{-iA}\right)}{2i} = 2\,\frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}\frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2} = 2\sin(A)\cos(A)$$

e) $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$

$$\cos(2A) = \frac{e^{2iA} + e^{-2iA}}{2}$$

$$= \frac{\left(e^{iA}\right)^2 + 2e^{iA}e^{-iA} + \left(e^{-iA}\right)^2 + \left(e^{iA}\right)^2 - 2e^{iA}e^{-iA} + \left(e^{-iA}\right)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}\right)^2$$

$$= \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

f) $\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \sin(B)\cos(A)$

$$\sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)$$

$$= \frac{\left(e^{iA} - e^{-iA}\right)\left(e^{iB} + e^{-iB}\right) + \left(e^{iB} - e^{-iB}\right)\left(e^{iA} + e^{-iA}\right)}{4i}$$

$$= \frac{e^{i(A+B)} + e^{i(A-B)} - e^{-i(A-B)} - e^{-i(A+B)} + e^{i(B+A)} + e^{i(B-A)} - e^{-i(B-A)} - e^{-i(B+A)}}{4i}$$

$$= \frac{e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}}{2i}$$

$$= \sin(A + B)$$

Ta làm tương tự cho trường hợp $\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \sin(B)\cos(A)$

g) $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$

$\cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$

$$= \frac{(e^{iA} + e^{-iA})(e^{iB} + e^{-iB}) + (e^{iB} - e^{-iB})(e^{iA} - e^{-iA})}{4i}$$

$$= \frac{e^{i(A+B)} + e^{i(A-B)} + e^{-i(A-B)} + e^{-i(A+B)} + e^{i(B+A)} - e^{i(B-A)} - e^{-i(B-A)} + e^{-i(B+A)}}{4}$$

$$= \frac{e^{i(A+B)} + e^{-i(A+B)}}{2}$$

$= \cos(A + B)$

Ta làm tương tự cho trường hợp $\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$

Bài 1.20

Cho $A \in M_n(K)$. Ta gọi vết (trace) của A (ký hiệu $tr(A)$) là một số được xác định bởi

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *(bằng tổng các phần tử trên đường chéo chính).*

Chứng minh rằng $\forall A, B \in M_n(K)$ ta có

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \quad (1)$$

và

$$tr(AB) = tr(BA) \quad (2)$$

Suy ra rằng $AB - BA \neq I_n$.

Giải

Ta sử dụng định nghĩa để giải bài toán.

Ta dùng định nghĩa phép cộng:

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} [A+B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ([A]_{ii} + [B]_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

Ta dùng định nghĩa phép nhân:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} * [B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [B]_{ki} * [A]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [BA]_{kk} = tr(BA)$$

Giả sử tồn tại A, B để $AB - BA = I_n$

$\Rightarrow tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$

Mặt khác ta áp dụng (1) và (2) có

$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$ (Vô lý)

Suy ra rằng $AB - BA \neq I_n$.

Bài 1.21

Cho $A, B \in M_n(K)$ là 2 ma trận đối xứng trên K. Chứng minh rằng tích AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi chúng giao hoán nhau.

Giải

Ta sử dụng định nghĩa ma trận đối xứng và công thức sau: $(AB)^T = B^T A^T$

Chiều thuận:

Ta có $(AB)^T = B^T A^T = BA$ (1)

Mặt khác $(AB)^T = AB$ (2)

(1), (2) suy ra $AB = BA$.

Chiều nghịch:

Ta có $(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$.

Bài 1.22:

Xác định hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Giải

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 := d_1 - 3d_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 + d_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}_1 \leftrightarrow \mathrm{d}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có A tương đương dòng với một ma trận dạng bậc thang có 2 dòng khác 0 nên A có hạng là $\mathrm{r}(A) = 2$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(D) = 1$

e) $E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(E) = 3$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(F) = 3$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(G) = 2$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(H) = 4$

Bài 1.23:

Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo các tham số $m, n \in K$

a) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) $\quad B = \begin{pmatrix} m & 5m & -m \\ 2m & m & 10m \\ -m & -2m & -3m \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & n \\ n & m & 0 & 0 \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix}$

Giải

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

Trường hợp 1: m=0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó A tương đương dòng với một ma trận dạng bậc thang (rút gọn) có 2 dòng khác 0 nên A có hạng là $\mathrm{r}(A) = 2$

Trường hợp 2: $m \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 + md_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & m^2+5m \end{pmatrix} = R$$

Ta thấy:

Khi $m \neq 0$ và $m = -5$ thì $A \sim R$ và R có dạng bậc thang với 2 dòng khác 0 nên A có hạng là $\mathrm{r}(A) = 2$.

Khi $m \neq 0$ và $m \neq -5$ thì $A \sim R$ và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là $\mathrm{r}(A) = 3$.

b) $B = \begin{pmatrix} m & 5m & -m \\ 2m & m & 10m \\ -m & -2m & -3m \end{pmatrix}$

Trường hợp 1: $m = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó $\mathrm{r}(B) = 0$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

$$B \sim \begin{pmatrix} m & 5m & -m \\ 0 & -9m & 12m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Ta thấy khi $m \neq 0$ thì $B \sim R$ và R có dạng bậc thang với 2 dòng khác 0 nên B có hạng là

$\mathrm{r}(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Trường hợp 1: $m = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{r}(C) = 3$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -7m & -17m & -3m \\ 0 & 0 & \frac{23}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{r}(C) = 4$.

d) $D=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & n \\ n & m & 0 & 0 \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix}$

Trường hợp 1: $m=0; n=0$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta thấy $\mathrm{r}(D)=0$.

Trường hợp 2: $m=0; n\neq 0$

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{n} \\ \mathrm{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{n} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{n} \end{pmatrix} = R_2$$

Khi đó $D \sim R_2$ và R_2 có dạng bậc thang với 4 dòng khác 0 nên D có hạng là $\mathrm{r}(D)=4$.

Trường hợp 3: $m\neq 0; n=0$

$$D=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$\mathrm{r}(D)=4$.

Trường hợp 4: $m\neq 0; n\neq 0$

Đặt $n=\alpha m$, ta có

$$D=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \alpha m \\ \alpha m & m & 0 & 0 \\ 0 & \alpha m & m & 0 \\ 0 & 0 & \alpha m & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-\alpha d_1} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 & -\alpha m \\ 0 & \alpha m & m & 0 \\ 0 & 0 & \alpha m & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-\alpha d_2}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 & -\alpha m \\ 0 & 0 & m & \alpha^2 m \\ 0 & 0 & \alpha m & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\alpha d_3}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 & -\alpha m \\ 0 & 0 & m & \alpha^2 m \\ 0 & 0 & 0 & m-\alpha^3 m \end{pmatrix} = R_3$$

Khi đó $D \sim R_3$ và R_3 có dạng bậc thang với 4 dòng khác 0 nên D có hạng là $\mathrm{r}(D) = 4$

Bài 1.24:

Ma trận nghịch đảo A^{-1} thay đổi thế nào, nếu

a) Hoán vị hai dòng của A.

b) Nhân một dòng với một hằng số khác 0.

c) Thêm vào dòng thứ i một bội của dòng $k \neq i$.

d) Tương tự như trên nhưng thực hiện cho cột.

Giải:

a) Gọi φ_0 là phép hoán vị 2 dòng i và $j \Rightarrow \varphi_0^{-1} = \varphi_0$.

Gọi B là ma trận A sau khi hoán vị hai dòng i và i.

Theo bổ đề 1.4.7 ta có $B = \varphi_0(A) = \varphi_0(I_n)A \Longrightarrow B^{-1} = A^{-1}\big(\varphi_0(I_n)\big)^{-1} = A^{-1}\varphi_0(I_n)$.

Tức là B^{-1} là ma trận A^{-1} sau khi hoán đổi hai cột i và j.

b) Gọi φ_0 là phép nhân dòng i với một hằng số α khác 0 $\Rightarrow \varphi_0^{-1}$ là phép nhân dòng i với hằng số $\frac{1}{\alpha}$

Ta có $B = \varphi_0(A) = \varphi_0(I_n)A \Longrightarrow B^{-1} = A^{-1}\varphi_0^{-1}(I_n)$.

Tức là B^{-1} là ma trận A^{-1} sau khi nhân cột i với hằng số $\frac{1}{\alpha}$.

c) Gọi φ_0 là phép cộng dòng i của ma trận với một bội $\alpha \neq 0$ của dòng $k \Rightarrow \varphi_0^{-1}$ là phép cộng dòng i với bội$-\alpha \neq 0$ của dòng k.

Lý luận tương tự như trên ta suy ra B^{-1} là ma trận A^{-1} sau khi thực hiện phép cộng cột i với bội $-\alpha \neq 0$ của cột k.

d) Chứng minh tương tự.

Bài 1.25:

Kiểm tra tính khả nghịch và tìm A^{-1} (nếu có)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Giải

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-3d_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5 & -3 & -2 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3+5d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 5 & -3 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 25 & -15 & -11 & 16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1:=d_1+\frac{1}{25}d_3]{d_2:=d_2-\frac{1}{5}d_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{14}{25} & -\frac{9}{25}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 25 & -15 & -11 & 16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=\frac{1}{2}d_1,\ d_2:=-d_2,\ d_3:=\frac{1}{25}d_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{14}{50} & -\frac{9}{50}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{11}{25} & \frac{16}{25}\end{array}\right)$$

Vậy

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{14}{50} & -\frac{9}{50}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{11}{25} & \frac{16}{25}\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}10 & 14 & -9\\ 0 & -10 & 10\\ -30 & -22 & 32\end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}12 & 6 & 6\\ -18 & 11 & 1\\ -18 & 1 & 11\end{pmatrix}$$

Bài 1.26*

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông sau:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^n\\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$;

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(a cách 1 khoảng bằng đúng r với $r \le n-1$)

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$;

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$.

Giải

a) $A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \dots & a^n\\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

$$(A|I_n)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1 & a & a^2 & \dots & a^n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-ad_2}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 := d_2 - a d_3}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\dots} \dots$$

$$\xrightarrow{d_k := d_k - a d_{k-1}}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\dots} \dots$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (Giá trị $-a$ nằm bên phải 1)

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(B|I_n) = \left(\begin{array}{ccccccc|cccccc} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_{r+1} := d_{r+1} - a d_n}\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_r := d_r - a d_{n-1}} \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & -a & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\dots} \dots$$

$$\xrightarrow{d_k := d_k - a d_{k+n-r-1}} \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & -a & \dots & (-a)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\dots} \dots$$

Vậy $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -a & \dots & \dots & (-a)^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Trên cùng 1 hàng kể từ số 1 từ trái qua phải cứ cách r thì gấp giá trị lên –a lần)

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(C|I_n) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 - d_2} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 := d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{...} ...$

$$\xrightarrow{d_k:=d_k-d_{k-1}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{...} ...$

$$\xrightarrow{d_{n-1}:=d_{n-1}-d_n} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-d_3} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{...} ...$

$$\xrightarrow{d_k:=d_k-d_{k-1}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{...} ...$

Vậy $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Bộ $(1 \quad -2 \quad 1)$ xuống 1 hàng lùi qua phải 1 cột).

d) $\qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$

Ta đặt $s = \frac{n(n+1)}{2}$ (lí do đặt như vậy là để viết cho gọn trong quá trình biến đổi).

$$(D|I_n)=\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1:=d_1-d_2\\ d_2:=d_2-d_3\\ \cdots\\ d_{n-1}:=d_{n-1}-d_n}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1+\cdots+d_{n-1}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2:=d_2+d_1\\ \cdots\\ d_{n-1}:=d_{n-1}+d_1}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1:=-d_1\\ d_2:=-\frac{1}{n}d_2\\ \cdots\\ d_{n-1}:=-\frac{1}{n}d_{n-1}}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2-\cdots-d_{n-1}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{2}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \frac{1}{n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_n:=d_n-2d_1-\cdots-nd_{n-1}}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{2}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \frac{1}{n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s & \frac{1+s}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1-s}{n} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_n:=\frac{1}{s}d_n}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{-2}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \frac{1}{n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_{n-1}:=d_{n-1}+d_n]{\substack{d_1:=d_1+d_n \\ \cdots}} \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} \end{array}\right) = (I_n|D')$$

Vì $(D|I_n) \sim (I_n|D')$ nên D khả nghịch và $D^{-1} = D' = \frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1-s \end{pmatrix}$.

Bài 1.27

Chứng tỏ rằng, nếu A là ma trận đối xứng khả nghịch thì A^{-1}cũng là một ma trận đối xứng.

Giải

Ta sử dụng định nghĩa ma trận đối xứng và công thức sau: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Ta có $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$. Vậy theo định nghĩa thì A^{-1} là ma trận đối xứng.

Bài 1.28

Cho A, B là 2 ma trận vuông cấp n. Giả sử ma trận $C = I_n + AB$ khả nghịch. Chứng minh rằng $D = I_n + BA$ cũng khả nghịch và ta có $D^{-1} = I_n - BC^{-1}A$.

Giải

Trong bài toán này ta được tác giả cho luôn dạng của ma trận nghịch đảo của ma trận D. Vì thế ta thử chứng minh bằng định nghĩa như sau:

Ta có:

$$\begin{aligned} DD^{-1} &= (I_n + BA)(I_n - BC^{-1}A) \\ &= I_n - BC^{-1}A + BA - BABC^{-1}A \\ &= I_n - BC^{-1}A + BA - B(C - I_n)C^{-1}A \end{aligned}$$

$$= I_n - BC^{-1}A + BA - BA + BC^{-1}A = I_n$$

$$
\begin{aligned}
D^{-1}D &= (I_n - BC^{-1}A)(I_n + BA) \\
&= I_n + BA - BC^{-1}A - BABC^{-1}A \\
&= I_n + BA - BC^{-1}A - B(C - I_n)C^{-1}A \\
&= I_n + BA - BC^{-1}A - BA + BC^{-1}A = I_n
\end{aligned}
$$

Suy ra $DD^{-1} = D^{-1}D = I_n$.

Vậy D khả nghịch và $D^{-1} = I_n - BC^{-1}A$.

Bài 1.29

Chứng minh rằng, nếu f là một đa thức trên K và $B \in M_n(K)$ là một ma trận khả nghịch thì

$$f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$$

Giải

Ta cần biết rõ dạng của đa thức f trên K trước khi chứng minh bài toán.

Vì f là một đa thức trên K, suy ra f có dạng:

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$

Vì thế,

$f(B^{-1}AB) = a_0 + a_1B^{-1}AB + \cdots + a_n(B^{-1}AB)^n + \cdots$

$B^{-1}f(x)B = a_0 + a_1B^{-1}AB + \cdots + a_nB^1A^nB + \cdots$

Ta thử chứng minh $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

Thật vậy, ta có thể chứng minh bằng quy nạp đơn giản. (Phần chứng minh xem như bài tập)

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.30:

Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

a) Chứng minh $A^2 - 2A + I_2 = 0$. Suy ra A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$. Tính A^n và B theo A, I_2 và n.

Giải:

a) Bằng tính toán đơn giản ta suy ra được $A^2 - 2A + I_2 = 0$.

Ta có:

$\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} + \mathrm{I}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}(2\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = \mathrm{I}_2$

Theo định nghĩa về ma trận nghịch đảo, ta có $\mathrm{A}^{-1} = 2\mathrm{I}_2 - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

b)

Ta thử tìm A^2, A^3,... và xem thử xem ma trận A^n có quy luật như thế nào.

Ở đây, ta thấy hình như $A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & 4n \\ -4n & 1-4n \end{pmatrix}$, ta tiến hành chứng minh quy nạp để kiểm chứng điều đó.

Với $n = 1$, ta có $A = \begin{pmatrix} 4+1 & 4 \\ -4 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là $A^k = \begin{pmatrix} 4k+1 & 4k \\ -4k & 1-4k \end{pmatrix}$, ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$, tức là $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4(k+1)+1 & 4(k+1) \\ -4(k+1) & 1-4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+5 & 4k+4 \\ -4k-4 & -3-4k \end{pmatrix}$.

Ta có $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 4k+1 & 4k \\ -4k & 1-4k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+5 & 4k+4 \\ -4k-4 & -3-4k \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra mệnh đề trên đúng

Vậy ta có điều cần chứng minh:

$$A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & 4n \\ -4n & 1-4n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5n & 4n \\ -4n & -3n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & 1-n \end{pmatrix} = nA - (n-1)I_2, n \in \mathbb{N}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} A^j = \sum_{j=0}^{n} (jA - (j-1)I_2) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}A - \frac{(n-1)n-2}{2}I_2 \end{aligned}$$

Vậy:

$$B = \frac{n(n+1)}{2}A - \frac{(n-1)n-2}{2}I_2.$$

Bài 1.31

Cho $A \in M_n(K)$ là 1 ma trận lũy linh.

a) Chứng minh $B = (I_n - A)$ khả nghịch và

$$B^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

(Lưu ý: $k \in \mathbb{N}$ thỏa $A^k = 0_n$)

Suy ra $C = (I_n + A)$ cũng khả nghịch và tính C^{-1} theo A.

b) Chứng minh $e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i$ khả nghịch và $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Suy ra $e^{mA} = (e^A)^m, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Giải:

a)

Chứng minh $B = (I_n - A)$ khả nghịch và $B^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$:

Ta có:

$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n - A^k = I_n$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh $C = (I_n + A)$ khả nghịch:

$(-A)^k = (-1)^k A^k = (-1\ )^k 0_n = 0_n$.

Vậy $-A$ cũng là ma trận lũy linh.

Mặt khác $C = \big(I_n - (-A)\big)$

Theo chứng minh trên thì C khả nghịch.

b)

Ta áp dụng **Bài 1.18**

$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{0_n} = I_n$. Ta có điều phải chứng minh

Cũng theo **Bài 1.18**

$e^{mA} = (e^A)^m, \forall m \in \mathbb{N}$.

Trường hợp $m = 0$:

$e^{0A} = e^{0_n} = I_n = (e^A)^0$.

Trường hợp $m \in \mathbb{Z}^-$:

$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I_n$

$e^{mA} e^{-mA} = I_n$

$(e^A)^m e^{-mA} = (e^A)^m (e^{-A})^m = (e^A)^{m+1} e^{-A} e^A (e^{-A})^{m+1} = (e^A)^{m+1} (e^{-A})^{m+1} = \cdots = I_n$

$\Rightarrow e^{mA} = (e^A)^m$.

Vậy $e^{mA} = (e^A)^m, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Bài 1.32

Cho $A, B \in M_n(K)$.

a) Giả sử A là ma trận tam giác và $A.A^T = I_n$. Chứng minh rằng A là ma trận đường chéo và các phần tử trên đường chéo là 1 hoặc -1.

b) Giả sử A đối xứng, B phản đối xứng, $(A - B)$ khả nghịch và $AB = BA$. Đặt

$C = (A + B)(A - B)^{-1}$. Chứng minh rằng $C.C^T = I_n$.

Giải

a)

Không mất tính tổng quát giả sử A là ma trận tam giác trên. Tức $[A]_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$.

Ta có:

$$[I_n]_{uv} = [A.A^T]_{uv} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{uk}[A^T]_{kv} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{uk}[A]_{vk}.$$

Do $[A]_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$ nên:

$$[I_n]_{uv} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{uk}[A]_{vk} = \sum_{k=\max\{u,v\}}^{n} [A]_{uk}[A]_{vk}$$

$\Rightarrow 1 = [I_n]_{nn} = [A]_{nn}[A]_{nn} \Rightarrow [A]_{nn} = \pm 1$

Cũng có $0 = [I_n]_{nv} = [A]_{nn}[A]_{vn} \Rightarrow [A]_{vn} = 0\ \forall 1 \leq v < n$

Ta quy nạp theo t chứng minh $[A]_{(n-t)(n-t)} = \pm 1$ và $[A]_{v(n-t)} = 0, \forall 1 \leq v \leq n, v \neq n - t$.

Mệnh đề đã đúng với $t = 0$.

Ta giả sử mệnh đề đúng đến $t = h. (0 \leq h < n)$

Ta có:

$$1 = [I_n]_{(n-h-1)(n-h-1)} = \sum_{k=n-h-1}^{n} [A]_{(n-h-1)k}[A]_{(n-h-1)k}$$

Theo giả thuyết quy nạp $[A]_{(n-h-1)k} = 0, \forall k \geq n-h$.

$\Rightarrow 1 = [A]^2_{(n-h-1)(n-h-1)} \Rightarrow [A]_{(n-h-1)(n-h-1)} = \pm 1$.

$$0 = [I_n]_{(n-h-1)v} = \sum_{k=\max\{n-h-1,v\}}^{n} [A]_{(n-h-1)k}[A]_{vk}.$$

Ta xét $v < n-h-1$ và Theo giả thuyết quy nạp $[A]_{(n-h-1)k} = 0, \forall k \geq n-h$.

$\Rightarrow 0 = [A]_{(n-h-1)(n-h-1)}[A]_{v(n-h-1)} \Rightarrow [A]_{v(n-h-1)} = 0$.

Xét $v > n-h-1$: do $[A]_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$ nên $[A]_{v(n-h-1)} = 0$.

Vậy $[A]_{v(n-h-1)} = 0, \forall 1 \leq v \leq n, v \neq n-h-1$ và $[A]_{(n-h-1)(n-h-1)} = \pm 1$.

Mệnh đề đúng với $t = h+1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

b)

$$\begin{aligned} C^T &= \left((A+B)(A-B)^{-1}\right)^T \\ &= ((A-B)^{-1})^T(A+B)^T \\ &= ((A-B)^T)^{-1}(A+B)^T \\ &= (A^T-B^T)^{-1}(A^T+B^T) \end{aligned}$$

Vì A đối xứng, B phản đối xứng nên

$C^T = (A+B)^{-1}(A-B)$

Vì A, B giao hoán nên:

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$$\begin{aligned} C^T.C &= (A+B)^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1} \\ &= (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow C.C^T = I_n$.

Bài 1.33

Chứng minh rằng, nếu $m > n$ thì với mọi ma trận $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$ ta có AB không khả nghịch.

Giải:

<u>**Bổ đề 1:**</u> Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $CX = 0$ gồm m phương trình, n ẩn số. Khi đó ta có các khẳng định sau đây:

i) Hệ có nghiệm duy nhất $X = 0$ khi và chỉ khi $r(A) = n$.

ii) Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) < n$. Nói riêng, nếu $m < n$ thì hệ có vô số nghiệm.

<u>Chứng minh:</u> Xem như bài tập cho sinh viên. (Đây là hệ quả trực tiếp của định lý Kronecker – Capelli)

<u>**Bổ đề 2:**</u>

i) $C \in M_n(K)$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ hệ phương trình $CX = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường

ii) $C \in M_n(K)$ không khả nghịch $\Leftrightarrow$ hệ phương trình $CX = 0$ có nghiệm không tầm thường

<u>Chứng minh:</u> Xem như bài tập cho sinh viên. (Đây là hệ quả trực tiếp của bổ đề 1)

Trở lại bài toán, áp dụng bổ đề 1 cho ma trận B, ta suy ra được hệ phương trình $BX = 0$ có vô số nghiệm, gọi Y là một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình trên. Vậy ta có:

$$BY = 0 \Rightarrow ABY = 0$$

Ta thấy AB là một ma trận vuông. Do phương trình $ABX = 0$ có nghiệm không tầm thường Y nên áp dụng bổ đề 2 ta suy ra AB không khả nghịch.

__Nhận xét:__ Bổ đề 1 và bổ đề 2 nêu lên được mối liên hệ giữa hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và ma trận. Tức khi gặp một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta có thể đưa về bài toán ma trận để giải.

Bài 1.34

Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì tồn tại $B \in M_n(K), B \neq 0$ sao cho $AB = 0$.

Giải:

Áp dụng bổ đề 2 được trình bày trong bài 1.33, vì $A \in M_n(K)$ không khả nghịch nên phương trình $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường $X_0 \in M_{n\times 1}(K)$. Khi đó tồn tại $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $[X_0]_{i1} = \alpha \neq 0$.

Xét $Y_0 \in M_{1\times n}(K)$ thỏa $[Y_0]_{1i} = 1$ và các phần tử còn lại bằng 0. Ta có:

$$X_0Y_0 = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Đặt $B = X_0Y_0$, ta được $AB = AX_0Y_0 = 0.Y_0 = 0$ nên B là ma trận cần tìm.

Bài 1.35*

Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì tồn tại $B \in M_n(K), B \neq 0$ sao cho $AB = BA = 0$.

Giải:

Đây là bài toán mạnh hơn 1.34, tuy nhiên ta vẫn làm tương tự.

Vì $A \in M_n(K)$ không khả nghịch nên phương trình $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường $X_0 \in M_{n\times 1}(K)$. Khi đó tồn tại $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $[X_0]_{i1} = \alpha \neq 0$.

Mặt khác, vì A khả nghịch nên A^T khả nghịch, suy ra phương trình $A^T Y = 0$ có nghiệm không tầm thường $Y_0 \in M_{n\times 1}(K)$. Khi đó tồn tại $j \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $[Y_0]_{j1} = \beta \neq 0$. Vậy ta có:

$A^T Y_0 = 0 \Rightarrow (A^T Y_0)^T = 0^T \Longrightarrow Y_0^T A = 0$

Lúc này ta đặt $B = X_0 Y_0^T \in M_n(K)$. Khi đó:

$AB = AX_0 Y_0^T = 0.Y_0^T = 0$ và $BA = X_0 Y_0^T A = X_0.0 = 0$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $B \neq 0$ là hoàn tất. Thật vậy:

$[B]_{ij} = [X_0]_{i1}[Y_0^T]_{1j} = [X_0]_{i1}[Y_0]_{j1} = \alpha\beta \neq 0$

Suy ra $B \neq 0$, chứng minh hoàn tất.

Bài 1.36

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa $A + B = AB$. Chứng minh $AB = BA$. Cho ví dụ về các ma trận A, B khác 0 thỏa tính chất đã nêu.

Giải:

$A + B = AB \Rightarrow (A - I)(B - I) = I \Longrightarrow A - I \text{ là } nghịch \text{ đảo } của\ B - I$

$\Longrightarrow I = (A - I)(B - I) = (B - I)(A - I)$

$\Longrightarrow AB = BA$

Bài 1.37

Cho A là ma trận vuông, hệ số thực, có vết $tr(A) = 0$.

a) Chứng minh rằng A đồng dạng với một ma trận B hệ số thực, trong đó mọi hệ số trên đường chéo chính của B đều bằng 0. (A đồng dạng với B nghĩa là tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP = B$).

b) Chứng minh rằng tồn tại các ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $A = CD - DC$.

Giải:

<u>Bổ đề 1:</u> Quan hệ đồng dạng là 1 quan hệ tương đương.

<u>Bổ đề 2:</u> X, Y là hai ma trận vuông

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$

Trong đó:

$A \in M_{m\times n}(K); B \in M_{m\times q}(K); C \in M_{p\times n}(K); D \in M_{p\times q}(K)$

$E \in M_{n\times u}(K); F \in M_{n\times v}(K); G \in M_{q\times u}(K); H \in M_{q\times v}(K)$

Thì $XY = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$

<u>Chứng minh:</u> Xem như bài tập cho sinh viên.

<u>Bổ đề 3:</u> $A \in M_n(K)$. Chứng minh có $x \in K$ thỏa $A - xI_n$ là ma trận khả nghịch.

Bổ đề này là bài 2.22 tuy nhiên ta sẽ không dùng định thức ở chương này.

<u>Chứng minh:</u>

Giả sử ngược lại tức $\forall x, A - xI_n$ là ma trận không khả nghịch

$(A - xI_n)U = 0$ có nghiệm không tầm thường $\forall x \in K$

Ta xét bất kỳ $n + 1$ giá trị đôi một khác nhau từ trường K là $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$

Với U_i là nghiệm không tầm thường của $(A - x_i I_n)U = 0$

Ma trận $P = (U_1 \quad \dots \quad U_{n+1})$ là ma trận n hàng và $n + 1$ cột

Có $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$ là nghiệm không tầm tường của P lúc đó ta có $\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_{n+1} U_{n+1} = 0$ (Bổ đề 2)

Do $\exists i: \alpha_i \neq 0 \Rightarrow U_i = -\frac{1}{\alpha_i} \sum_{j \neq i} \alpha_j U_j$

Có $AU_i = x_i U_i = -\frac{x_i}{\alpha_i} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j U_j \right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha_i} A \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j U_j \right) = -\frac{x_i}{\alpha_i} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j U_j \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha_i} \left(\sum_{j \neq i} x_j \alpha_j U_j \right) = -\frac{x_i}{\alpha_i} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j U_j \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j \neq i} (x_j - x_i) \alpha_j U_j = 0$$

Do $\sum_{j \neq i} \alpha_j U_j \neq 0 \Rightarrow \exists j \neq i$ để $\alpha_j \neq 0$

Vậy có $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$ sao cho có $j \neq i: \beta_j \neq 0$ để $\sum_{k \neq i} \beta_k U_k = 0$(Đã không còn cột U_i)

Ta tiếp tục làm như trên đến khi có được $t \in \{1,2, \dots, n+1\}$ sao cho có giá trị $\lambda_t \in K \backslash \{0\}$ để $\lambda_t U_t = 0$ (Vô lý vì U_t không tầm thường)

Vậy bổ đề đúng.

Bài toán phụ

Với n là cấp của A.

Xét $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Ta chứng minh: Nếu A_n không có dạng αI_n ($\alpha \in K\backslash\{0\}$) thì A_n đồng dạng với ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta quy nạp theo n.

Với $\mathrm{n} = 2$:

Xét $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

-Trường hợp: $a_{21} = a_{12} = 0$ tức $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

Nếu $a_{11} = a_{22} = a \in K$

$a = 0$ bài toán đúng

$a \neq 0$ thì A_2 có dạng αI_2 nên không thỏa điều kiện.

Nếu $a_{11} \neq a_{22}$

Có $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22}-a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_2$ đồng dạng với $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22}-a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

Nên ta xét tương tự trường hợp $a_{12} \neq 0$.

-Trường hợp $a_{21} \neq 0$.

Có $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_2$ đồng dạng với $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

Nên ta xét tương tự trường hợp $a_{12} \neq 0$.

-Trường hợp $a_{12} \neq 0$.

Có $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix}$

Vậy A_2 đồng dạng ma trận dạng $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$

Giả sử bài toán đúng tới $n = k - 1, k > 2$.

Xét $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$

-Trường hợp $a_{ii} = a \in K, \forall 1 \leq i \leq k$

+Nếu $a = 0$ bài toán đúng

+Nếu $a \neq 0$

Vì A_k không có dạng αI_k nên $\exists a_{uv} (u \neq v): a_{uv} \neq 0$

P là ma trận sơ cấp trên hàng có được qua phép biến đổi $d_v \coloneqq d_v + \frac{a_{uu}}{a_{uv}} d_u$

$\Rightarrow P^{-1}$ là ma trận sơ cấp trên cột có được qua phép biến đổi $c_u \coloneqq c_u - \frac{a_{uu}}{a_{uv}} c_v$

Có

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * & * & * \\ * & \ddots & * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & a_{uv} & * & * \\ * & * & * & \ddots & * & * & * \\ * & * & a_{vu} - \dfrac{a_{uu}a_{vv}}{a_{uv}} & * & a_{uu} + a_{vv} & * & * \\ * & * & * & * & * & \ddots & * \\ * & * & * & * & * & * & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * & * & * \\ * & \ddots & * & * & * & * & * \\ * & * & a_{uu} & * & a_{uv} & * & * \\ * & * & * & \ddots & * & * & * \\ * & * & a_{vu} & * & a_{vv} & * & * \\ * & * & * & * & * & \ddots & * \\ * & * & * & * & * & * & a_{nn} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Từ điều trên nên ta có thể xét tương tự trường hợp có i, j sao cho $a_{ii} \neq a_{jj}$

-Trường hợp có i, j sao cho $a_{ii} \neq a_{jj}$

Nếu $\forall i, \sum_{j \neq i} a_{jj} = a_{ii} \Rightarrow (k-1) \sum_{1 \leq j \leq k} a_{jj} = \sum_{1 \leq j \leq k} a_{jj} \Rightarrow k = 1$ (Loại)

Vậy $\exists i, \sum_{j \neq i} a_{jj} \neq a_{ii}$

Q là ma trận sơ cấp trên hàng có được qua phép biến đổi $d_i \leftrightarrow d_k$

$\Rightarrow Q^{-1}$ là ma trận sơ cấp trên cột có được qua phép biến đổi $c_i \leftrightarrow c_k$

Có

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{ki} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Từ điều trên ta chỉ cần xét trường hợp $\sum_{j \neq k} a_{jj} \neq a_{kk}$

Lúc này đặt $A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{i(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \cdots & a_{(k-1)i} & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix}$

Vậy $A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & * \\ * & a_{kk} \end{pmatrix}$

Nếu A_{k-1} không có dạng αI_{k-1} thì có $R \in M_{k-1}(K)$ là ma trận khả nghịch thỏa

$$A_{k-1} = R \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11} + \cdots + a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix} R^{-1}$$

Từ đó: $A_k = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11} + \cdots + a_{(k-1)(k-1)} & * \\ * & \cdots & * & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vì $\sum_{j\neq k} a_{jj} \neq a_{kk}$ nên $\begin{pmatrix} a_{11}+\cdots+a_{(k-1)(k-1)} & * \\ * & a_{kk} \end{pmatrix}$ đồng dạng với $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & a_{11}+\cdots+a_{kk} \end{pmatrix}$

Từ đó chứng minh được A_k đồng dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11}+\cdots+a_{kk} \end{pmatrix}$$

Nếu A_{k-1} có dạng αI_{k-1}. Tức có $a \in K, 1 \leq i \leq k-1, a_{ii} = a$

$\Rightarrow a_{kk} \neq a$

Xét $a_{(k-1)k}$

Nếu $a_{(k-1)k} = 0$

S là ma trận sơ cấp trên hàng có được qua phép biến đổi $d_{k-1} \coloneqq d_{k-1} + d_k$

S^{-1} là ma trận sơ cấp trên cột có được qua phép biến đổi $c_k \coloneqq c_k - c_{k-1}$

$$A_k = S\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}S^{-1}$$

A_k đồng dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & a_{(k-1)(k-1)} & a_{kk} - a_{(k-1)(k-1)} \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$

Nếu $a_{(k-1)k} \neq 0$

T là ma trận sơ cấp trên hàng có được qua phép biến đổi $d_{k-1} \leftrightarrow d_k$

T^{-1} là ma trận sơ cấp trên cột có được qua phép biến đổi $c_{k-1} \leftrightarrow c_k$

$$A_k = S \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{i(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & a_{kk} & a_{k(k-1)} \\ a_{(k-1)1} & \cdots & \cdots & a_{(k-1)k} & a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Theo nguyên lý quy nạp:

A_k đồng dạng ma trận $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11} + \cdots + a_{(k-2)(k-2)} + a_{kk} & * \\ * & \cdots & a_{(k-1)k} & a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix}$

Vì $\begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{(k-2)(k-2)} + a_{kk} & * \\ a_{(k-1)k} & a_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix}$ đồng dạng $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & a_{11} + \cdots + a_{kk} \end{pmatrix}$

(Tương tự khi $n = 2$ trường hợp $a_{21} \neq 0$)

Vậy ta có A_k đồng dạng $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{11} + \cdots + a_{kk} \end{pmatrix}$

Bài toán phụ được chứng minh.

Bài toán chính

a) Áp dụng trực tiếp bài toán phụ ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử rằng có C, D cùng cấp A thỏa $A = CD - DC$

$\Leftrightarrow P^{-1}AP = P^{-1}CDP - P^{-1}DCP \Leftrightarrow P^{-1}AP = (P^{-1}CP)(P^{-1}DP) - (P^{-1}DP)(P^{-1}CP)$

Từ trên nếu có C', D' cùng cấp B thỏa $B = C'D' - D'C'$ thì bài toán được chứng minh.

Vậy ta chứng minh nếu B_n là ma trận cấp n mà các hệ số trên đường chéo chính đều là 0 thì luôn có C_n, D_n thỏa $B_n = C_nD_n - D_nC_n$.

Ta quy nạp theo n

$n = 2$:

$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 & x_1y_2 + x_2y_4 - y_1x_2 - y_2x_4 \\ x_3y_1 + x_4y_3 - y_3x_1 - y_4x_3 & x_3y_2 - y_3x_2 \end{pmatrix}$

Ta chứng minh hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x_2y_3 - y_2x_3 = 0 \\ x_2(y_4 - y_1) - y_2(x_4 - x_1) = x \\ -x_3(y_4 - y_1) + y_3(x_4 - x_1) = y \end{cases}$$

Trường hợp $x = 0$

Lấy $x_1 = x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0, x_3 = -1, y_4 = y$

Trường hợp $x \neq 0$

Lấy $x_1 = x_4 = y_1 = 0, x_2 = y_2 = 1, x_3 = y_3 = -\frac{y}{x}, y_4 = x$

Vậy hệ có nghiệm nên bài toán đúng với $n = 2$

Giả sử bài toán đã đúng với $n = k - 1, k > 2$

Xét $B_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{k-1} & X \\ Y & 0_1 \end{pmatrix}$.

Trong đó B_{k-1} ma trận cấp $k - 1$ có hệ số trên đường chéo chính đều bằng 0

$X \in M_{(k-1)\times 1}(K), Y \in M_{1\times(k-1)}(K)$

Giả sử có $C_k = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, D_k = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$

Trong đó

$X_1, Y_1 \in M_{k-1}(K), X_2, Y_2 \in M_{(k-1)\times 1}(K), X_3, Y_3 \in M_{1\times(k-1)}(K), X_4, Y_4 \in K$

Ta có

$$\begin{pmatrix} B_{k-1} & X \\ Y & 0_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_1Y_1 + X_2Y_3 - Y_1X_1 - Y_2X_3 & X_1Y_2 + X_2Y_4 - Y_1X_2 - Y_2X_4 \\ X_3Y_1 + X_4Y_3 - Y_3X_1 - Y_4X_3 & X_3Y_2 + X_4Y_4 - Y_3X_2 - Y_4X_4 \end{pmatrix}$$

Vì $X_4, Y_4 \in K \Rightarrow X_4Y_4 = Y_4X_4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} B_{k-1} & X \\ Y & 0_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1Y_1 + X_2Y_3 - Y_1X_1 - Y_2X_3 & X_1Y_2 + X_2Y_4 - Y_1X_2 - Y_2X_4 \\ X_3Y_1 + X_4Y_3 - Y_3X_1 - Y_4X_3 & X_3Y_2 - Y_3X_2 \end{pmatrix}$$

Ta chứng minh hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} X_1Y_1 + X_2Y_3 - Y_1X_1 - Y_2X_3 = B_{k-1}(1) \\ X_1Y_2 + X_2Y_4 - Y_1X_2 - Y_2X_4 = X(2) \\ X_3Y_1 + X_4Y_3 - Y_3X_1 - Y_4X_3 = Y(3) \\ X_3Y_2 - Y_3X_2 = 0_1(4) \end{cases}$$

Ta xét $Y_2 = tX_2, Y_3 = tX_3, t \in K$.

Lúc đó (4) thỏa và (1) trở thành $X_1Y_1 - Y_1X_1 = B_{k-1}$

Theo nguyên lý quy nạp có C_{k-1}, D_{k-1}

$B_{k-1} = C_{k-1}D_{k-1} - D_{k-1}C_{k-1}$

Vậy chọn $X_1 = C_{k-1}, Y_1 = D_{k-1}$

Lúc đó (2) và (3) là

$$\begin{cases} tC_{k-1}X_2 + X_2Y_4 - D_{k-1}X_2 - tX_2X_4 = X \\ D_{k-1}^TX_3^T + tX_4X_3^T - tC_{k-1}^TX_3^T - Y_4X_3^T = Y^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (tC_{k-1} + Y_4I_{k-1} - D_{k-1} - tX_4I_{k-1})X_2 = X \\ (D_{k-1}^T + tX_4I_{k-1} - tC_{k-1}^T - Y_4I_{k-1})X_3^T = Y^T \end{cases}$$

Đặt $P = tC_{k-1} - D_{k-1} - (Y_4 - tX_4)I_{k-1} \Rightarrow -P^T = D_{k-1}^T - tC_{k-1}^T + (tX_4 - Y_4)I_{k-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} PX_2 = X \\ -P^TX_3^T = Y^T \end{cases}$$

Ta chứng minh tìm được $t, X_4, Y_4 \in K$ để P khả nghịch thì bài toán sẽ được chứng minh

Cho $t = 0$ ta chứng minh tìm được Y_4 để $D_{k-1} + Y_4I_{k-1}$ khả nghịch

Áp dụng **Bổ đề 3:** ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.38

Giải các phương trình ma trận

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$;

b) $X\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}7 & 3 & 0\\ 6 & 8 & 4\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

f) $X\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Giải:

Phần lời giải chỉ trình bày bài giải cho câu a và f, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$

Đặt $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$.

Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}:

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{d_2:=d_2-3d_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{2}d_2]{d_1:=d_1+d_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)=(I_2|C)$$

Vì $(A|I_2)\sim(I_2|C)$ nên A khả nghịch và $A^{-1}=C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$

Giải phương trình ban đầu:

Phương trình ban đầu tương đương:

$AX=B$

$\Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $X=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

b) $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

c) $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

d) $X=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

e) $X=\begin{pmatrix}10/3 & -2/3 & 2\\ 17/3 & -4/3 & -1\\ 23/6 & -19/6 & 0\end{pmatrix}$

f) $X\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Đặt $A=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}:

$$(A|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}13 & -8 & -12 & 1 & 0 & 0\\ 12 & -7 & -12 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 12 & -7 & -12 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-6d_1]{d_2:=d_2-2d_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -5 & -6 & 6 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-2d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 4 & 5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=-d_3]{d_2:=d_2-2d_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 12 & -7 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 & -5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1+d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 13 & -8 & -12\\ 0 & 1 & 0 & 12 & -7 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 & -5\end{array}\right)=(I_3|C)$$

Vì $(A|I_3)\sim(I_3|C)$ nên A khả nghịch và $A^{-1}=C=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}$.

Giải phương trình ban đầu:

Phương trình ban đầu tương đương:

$XA=B$

$$\Leftrightarrow X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55 & -34 & -51\\ 148 & -91 & -138\\ 241 & -148 & -225\end{pmatrix}$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $X=\begin{pmatrix}55 & -34 & -51\\ 148 & -91 & -138\\ 241 & -148 & -225\end{pmatrix}$.

g) $X=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/6\\ -1 & 1 & -1/2\\ 0 & 1/2 & -1/6\end{pmatrix}$.

Bài 1.39

Giải các phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

Giải:

Phần lời giải chỉ trình bày bài giải cho câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$

Viết ma trận bổ sung $(A|B)$ và biến đổi bằng các phép BĐSCTD ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-d_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -7 & 8\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8\\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-7d_2]{d_3:=d_3-4d_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -7 & 8\\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40\\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -7 & 8\\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40\\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7\end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8 \\ -18x_3 + 36x_4 = -40 \\ 18x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 2/3 \\ x_2 & = & -43/18 \\ x_3 & = & 13/9 \\ x_4 & = & -7/18 \end{cases}$$

Suy ra hệ này có duy nhất nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{43}{18}, \frac{13}{9}. -\frac{7}{18}\right)$.

b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, \alpha + 3{,}2\alpha + 6, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \emptyset$.

d) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{\gamma+2}{3}, \frac{3\alpha-3\beta+5\gamma+1}{6}, \alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Bài 1.40

Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số $m \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & m \\ x_1 + \ \ x_2 - x_3 + \ \ x_4 & = & 2m+1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 & = & -m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 17x_4 & = & 11m+7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2x_3 - 12x_4 & = & 8m+5 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 27x_4 & = & 18m+10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + (m-20)x_4 & = & 13m+8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 & = & 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 17x_3 + 23x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 + mx_4 & = & 13-m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = m \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 & = 3m \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = m+1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = m-1 \end{cases}$

Giải:

Phần lời giải chỉ trình bày bài giải cho câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & m \\ x_1 + \ \ x_2 - x_3 + \ \ x_4 & = & 2m+1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 & = & -m \end{cases}$

Viết ma trận bổ sung $(A|B)$ và biến đổi bằng các phép BĐSCTD ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & -m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & -2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5m-3 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = m \\ \quad 3x_2 - 2x_3 - x_4 = m + 1 \\ \qquad 0 = -5m - 3 \end{cases} \qquad (1)$$

Biện luận:

- $-5m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \neq -\frac{3}{5}$: Khi đó hệ (1) vô nghiệm nên hệ ban đầu vô nghiệm.
- $m = -\frac{3}{5}$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -\dfrac{3}{5} \\ \quad 3x_2 - 2x_3 - x_4 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha - 4\beta - 1}{3} \\ x_2 = \dfrac{10\alpha + 5\beta + 2}{15} \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy khi $m = -\frac{3}{5}$, hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{\alpha - 4\beta - 1}{3}, \frac{10\alpha + 5\beta + 2}{15}, \alpha, \beta\right)$$

với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý.

b) $m \neq 1$: Hệ vô nghiệm.

$m = 1$: Hệ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4\alpha + 3\beta + 2, 2\alpha + 2\beta + 3\ , \alpha, \beta)$.

c) $m \neq 14$: Hệ vô nghiệm.

$m = 14$: Hệ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2\alpha + 5, \alpha, -4, -4)$.

d) $m \neq 1$: Hệ vô nghiệm.

$m = 1$: Hệ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{-4\alpha+4\beta+13}{8}, \frac{-4\alpha+4\beta+7}{8}, \frac{4\alpha-4\beta+9}{8}, \alpha, \beta\right)$.

CHƯƠNG 2
Định thức

Bài 2.1

Định thức thay đổi như thế nào khi ta đưa cột thứ nhất về cuối cùng và giữ nguyên thứ tự các cột khác?

Giải:

Đưa cột thứ nhất về cuối cùng và giữ nguyên thứ tự các cột còn lại tương đương với tích các phép biến đổi sau: cột 1 với cột n, đổi cột 1 với cột $n-1$,..., đổi cột 1 với cột 2. (Điều này có thể chứng minh dễ dàng)

Gọi ma trận sau khi biến đổi là A'. Theo như lý luận ở trên ta đã thực hiện $n-1$ phép đổi cột. Như vậy $\det(A') = (-1)^{n-1}\det(A)$.

Bài 2.2

Định thức thay đổi thế nào nếu:

a) Các cặp cột đối xứng nhau qua trục dọc giữa hai ma trận đổi chỗ cho nhau?

b) Các cột được đánh số từ phải sang trái?

Giải:

a) Gọi n là cấp của ma trận, ta xét n chẵn và n lẻ.

***n* chẵn** ($n = 2k$): Khi đó các cặp cột đối xứng nhau qua trục dọc giữa hai ma trận đổi chỗ cho nhau tương đương với tích các phép biển đổi: đổi chỗ cột 1 với cột n, đổi chỗ cột 2 với cột $n-1$,..., đổi chỗ cột k với cột $k+1$. Vậy ta đã thực hiện k phép đổi cột. Gọi ma trận nhận được sau khi biến đổi là A'. Như vậy $\det(A') = (-1)^k \det(A) = (-1)^{\frac{n}{2}} \det(A)$.

***n* lẻ** ($n = 2k+1$): Lý luận tương tự ta cũng được $\det(A') = (-1)^k \det(A) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \det(A)$.

Vậy ta có công thức tổng quát: $\det(A') = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \det(A)$.

b) Bằng lý luận ta thấy rằng đánh số các cột phải sang trái tương đương với việc các cặp cột đối xứng nhau qua trục dọc giữa hai ma trận đổi chỗ cho nhau. Vậy kết quả cũng giống câu a).

Bài 2.3

Định thức thay đổi như thế nào nếu cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo phụ đổi chỗ cho nhau?

Giải:

Để ý phép biến đổi này tương đương với tích của các phép biến đổi sau: lấy đối xứng qua trục dọc, lấy đối xứng qua đường chéo chính rồi lại lấy đối xứng qua trục dọc. Phép lấy đối xứng qua đường chéo chính cho ta ma trận chuyển vị nên không làm thay đổi định thức. Hơn nữa theo bài 2.2 thì phép lấy đối xứng qua trục dọc chỉ có thể làm đổi dấu định thức, mặt khác do ta thực hiện 2 lần như vậy nên định thức không đổi. Vậy định thức ma trận mới sẽ bằng định thức cũ.

Bài 2.4

Định thức thay đổi như thế nào nếu ta thực hiện phép hoán vị π trên các cột (dòng)?

Giải:

Một hoán vị π có thể viết thành tích của một số phép chuyển vị. Mỗi phép chuyển vị lại khiến cho ma trận đổi dấu. Vậy định thức mới sẽ bằng $(-1)^{sgn(\pi)}$ định thức cũ.

Bài 2.5

Định thức thay đổi như thế nào nếu ta nhân mỗi phần tử a_{ij} với α^{i-j} trong đó α là hằng số khác 0?

Giải:

Gọi ma trận ban đầu là A. Khi đó

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Gọi ma trận mới là B. Ta có

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma) \alpha^{1-\sigma(1)} a_{1\sigma(1)} \alpha^{2-\sigma(2)} a_{2\sigma(2)} \dots \alpha^{n-\sigma(n)} a_{n\sigma(n)} \\
&= \alpha^{1+2+\cdots+n-\sigma(1)-\sigma(2)-\cdots-\sigma(n)} \det(A) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Vậy định thức không đổi.

Bài 2.6

Ta nói vị trí của hệ số a_{ij} là chẵn hay lẻ tùy theo $i + j$ chẵn hay lẻ. Định thức thay đổi như thế nào nếu ta đổi dấu tất cả các phần tử:

a) ở vị trí chẵn?

b) ở vị trí lẻ?

Giải:

a) Ta thấy phép biến đổi này tương đương với việc nhân cho mỗi phần tử a_{ij} với $(-1)^{i-j}$. Theo bài 2.5 định thức không đổi.

b) Ta thấy phép biến đổi này tương đương với việc nhân cho mỗi phần tử a_{ij} với $(-1)^{i-j}$ rồi đổi dấu tất cả các dòng. Vậy định thức mới bằng $(-1)^n$ định thức cũ với n là cấp của ma trận.

Bài 2.7

Định thức của ma trận thay đổi thế nào nếu các cặp phần tử đối xứng nhau qua tâm của ma trận đổi chỗ cho nhau?

Giải:

Để ý rằng phép biến đổi này tương đương với tích của hai phép biến đổi: các cặp phần tử đối xứng qua đường chéo chính đổi chỗ cho nhau và các cặp phần tử đối xứng qua đường chéo phụ đổi chỗ cho nhau. Do khi đổi chỗ các phần tử đối xứng qua đường chéo chính ta nhận được ma trận chuyển vị nên định thức không đổi. Kết hợp kết quả bài 2.3 ta suy ra định thức không đổi.

Bài 2.8

Tình các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

Giải:

Bài tập này chỉ là tính toán đơn thuần nên ở đây chỉ giải mẫu câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

$= -x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -x - y - z + 4t$

b) 48

c) 1

d) 160

e) -1

f) -3

g) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

h) 12

Bài 2.9

Chứng tỏ các giá trị định thức sau bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$.

Giải:

Vì bài tập này chỉ là tính toán đơn thuần nên ở đây chỉ giải mẫu câu a. Các câu còn lại sinh viên tự làm.

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ c-a & a-c & 0 \\ c-b & b-c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c \\ c-b & b-c \end{vmatrix} = 0.$

Bài 2.10

Hãy tính các định thức sau và cho biết khi nào ma trận tương ứng khả nghịch:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a-b+c & a-b & b+2c+2a \\ b-c+a & b-c & c+2a+2b \\ c-a+b & c-a & a+2b+2c \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$.

Giải:

Bài tập này chỉ là tính toán đơn thuần nên ở đây chỉ giải mẫu câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^6 + a^3 - a^3 - a^3 - a^3 = (1 - a^3)^2$

Vậy ma trận tương ứng $\begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

b) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = -3x^3 - 12x^2 - 15x - 6$.

Ma trận tương ứng khả nghich khi $x \notin \{-2; -1\}$.

c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

Ma trận tương ứng khả nghich khi $x \notin \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

d) $\begin{vmatrix} a-b+c & a-b & b+2c+2a \\ b-c+a & b-c & c+2a+2b \\ c-a+b & c-a & a+2b+2c \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

Ma trận tương ứng khả nghich khi $\begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ a, b, c \text{ không đồng thời bằng nhau} \end{cases}$.

e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - c - d$

Ma trận tương ứng khả nghich khi $2a - b - c - d \neq 0$.

f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$

Ma trận tương ứng khả nghich khi $\begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ a+b-c \neq 0 \\ b+c-a \neq 0 \\ c+a-b \neq 0 \end{cases}$.

g) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(b-c)(c-d)$

Ma trận tương ứng khả nghich khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq b \\ b \neq c \\ c \neq d \end{cases}$.

h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a-b)^2(-4x^2 + (a+b)^2)$

Ma trận tương ứng khả nghich khi $\begin{cases} 4x^2 \neq (a+b)^2 \\ a \neq b \end{cases}$.

Bài 2.11:

Cho $A \in M_n(K)$ và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

Gợi ý: Ta có 2 hướng: chứng minh A không khả nghịch hay A tồn tại ít nhất 1 hàng (cột) gồm toàn giá trị 0. Với dữ kiện đã cho, ta nên ưu tiên theo hướng thứ 2.

Giải:

Ta có: A có n^2 phần tử và có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0, suy ra A có tối đa $n - 1$ phần tử khác 0.

Giả sử không tồn tại dòng nào của A gồm toàn giá trị 0, suy ra có ít nhất n phần tử khác không (vô lý).

Vậy giả sử là sai, tức là có ít nhất một dòng của A gồm toàn giá trị 0. Khai triển Laplace theo dòng này ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.12:

Cho $A \in M_n(K)$ và $\alpha \in K$. Chứng tỏ rằng:

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Giải:

Ta sử dụng định nghĩa định thức:

$$\det(\alpha A) = \sum_{\sigma \in S(n)} sgn(\sigma) \alpha a_{1\sigma(1)} \dots \alpha a_{i\sigma(i)} \dots \alpha a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha^n \sum_{\sigma \in S(n)} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha^n \det(A)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.13

Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $\det A \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$A^{-1} \in M_n(Z) \Leftrightarrow |\det A| = 1$.

Giải:

Chứng minh $\det A \in \mathbb{Z}$:

Ta có:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S(n)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Do $A \in M_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow a_{ij} \in \mathbb{Z} \; \forall \, i, j \in \{1, \dots, n\}$

Suy ra $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh $\boldsymbol{A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |\det A| = 1}$:

Chiều thuận:

Mối liên hệ giữa $|A|$ và $|A^{-1}|$ là $\det(A).\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$ (1)

Do $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ (2)

Từ (1) ta có $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$ (3)

Từ (2) có $|\det(A^{-1})| = 1$ thay vào (3) ta có $|\det(A)| = 1$.

Chiều đảo:

Mối liên hệ giữa A và A^{-1} là $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \pm adj(A)$ (4)

Mặt khác ta có $[adj(A)]_{ij} = [C]_{ji} = (-1)^{i+j}|A(j,i)|\ \forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}$

Do $A \in M_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow |A(j,i)| \in \mathbb{Z} \Rightarrow [adj(A)]_{ji} \in \mathbb{Z}\ \forall\, i,j \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow adj(A) \in M_n(\mathbb{Z})$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Bài 2.14

Ma trận $A \in M_n(K)$ được gọi là trực giao nếu $AA^T = I_n$. Chứng minh rằng, nếu A trực giao thì $|A| = \pm 1$. Cho ví dụ về một ma trận trực giao có định thức bằng 1 và một ví dụ về ma trận trực giao có định thức bằng -1.

Giải:

Nhớ lại: $A = A^T$

Do đó $1 = |I_n| = |AA^T| = |A|.|A^T| = |A|^2$

Suy ra $|A| = \pm 1$.

Cho ví dụ:

Để ý rằng ma trận đơn vị là ma trận trực giao có định thức bằng 1.

Thay một phần tử bất kì trên đường chéo chính của ma trận đơn vị bằng -1 ta được ma trận trực giao có định thức bằng -1.

Bài 2.15

Cho A là một ma trận vuông cấp n với hệ số thực. Chứng minh

$$|I^2 + A^2| \geq 0$$

Gợi ý: Để chứng minh một giá trị là không âm. Ta nên chứng minh nó bằng bình phương của một giá trị nào đó trong $\mathbb{R}$. Tuy nhiên nếu xét A trên $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{Q}$ thì $I^2 + A^2$ lại có dạng một đa thức bất khả quy $(x^2 + 1)$. Vì thế ta thử với $\mathbb{C}$.

Giải:

Trong bài này dấu $|x|$ kí hiệu cho môđun của x và sẽ không được dùng để chỉ định thức của một ma trận (sinh viên nên chú ý kẻo nhầm lẫn).

Trở lại bài toán, ta có thể tách như sau $A^2 + I^2 = (A - iI)(A + iI)$.

Ta có tính chất quan trọng sau: Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó là một số thực không âm (tức là $x\bar{x} = |x|^2 \geq 0$).

Cho C là một ma trận hệ số phức, kí hiệu $\bar{C}$ là ma trận có các phần tử là liên hợp của các phần tử ở vị trí tương ứng trong ma trận C. Ta có tính chất sau:

$$\overline{\det C} = \sum_{\sigma \in S(n)} sgn(\sigma)\overline{c_{1\sigma(1)} \dots c_{\imath\sigma(\imath)} \dots c_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S(n)} sgn(\sigma)\overline{c_{1\sigma(1)}} \dots \overline{c_{\imath\sigma(\imath)}} \dots \overline{c_{n\sigma(n)}} = \det \bar{C}$$

Nhận xét rằng $A - iI$ và $A + iI$ là hai ma trận có các phần tử tương ứng là liên hợp của nhau (tức là $A + iI = \overline{A - \imath I}$), vậy ta có

$\det(A - iI)(A + iI) = \det(A - iI) \det(A + iI) = \det(A - iI) \det(\overline{A - \imath I})$

$$= \det(A - iI)\,\overline{\det(A - \imath I)}$$

$$= |\det(A - iI)|^2 \geq 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.16

Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng

a) $|adjA| = |A|^{n-1}$

b) $adj(adjA) = |A|^{n-2}A$

Giải:

a) Chung

Áp dụng công thức: $adj(A)A = |A|I$ (1)

Suy ra $|adjA|.|A| = |A|^n$ (bài 2.12)

Nếu A khả nghịch thì $|adjA| = |A|^{n-1}$.

Nếu $A = 0$ thì hiển nhiên đúng.

Nếu A không khả nghịch và khác 0 thì vế phải (1) bằng 0. Ta chứng minh $adj(A)$ không khả nghịch.

Thật vậy, giả sử $adj(A)$ khả nghịch thì ta nhân hai vế của (1) cho $adj(A)^{-1}$ suy ra $A = 0$ (Vô lý).

Vậy $|adjA| = |A|^{n-1}\ \forall A \in M_n(K)$.

b)

Áp dụng công thức: $adj(A)A = |A|I$ (2)

Giả sử A khả nghịch:

Suy ra $adj(A) = |A|A^{-1}$ khả nghịch

$adj(adjA) = |adjA|(adjA)^{-1} = |A|^{n-1}(adjA)^{-1}$ (câu a)

Do (2) nên $(adjA)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ thay vào dòng trên ta có điều phải chứng minh.

Nếu A không khả nghịch:

Ta có vế phải của (2) là 0.

Ta chứng minh $adj(adjA) = 0$:

A không khả nghịch ⇒ tồn tại dòng i sao cho: $a_{ik} = \sum_{1=j\neq i}^{n} \alpha_j a_{jk}$ với mọi $k \in \overline{1,n}$.

Ta chứng minh $adjA$ có ít nhất 3 cột tỉ lệ với nhau:

Với mỗi k:

$[adjA]_{ki} = (-1)^{i+k}|A(i,k)|$

$[adjA]_{kr} = (-1)^{r+k}|A(r,k)|$ $(r \neq i)$

Ta có nhận xét rằng $A(i,k)$ thực chất là ma trận A bị che mất dòng i và cột k, vì vậy tính phụ thuộc tuyến tính của dòng i vào các dòng khác không thay đổi. Vì thế ta có thể từ $A(i,k)$ bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa dòng i trong ma trận A về dòng r bằng cách sau:

$$a_{rk} = \frac{1}{\alpha_{jr}}(a_{ik} - \sum_{1=j\neq r\neq i} \alpha_j a_{jk})$$

Với phép biến đổi trên thì $|A(i,k)|$ chỉ sai khác về dấu so với $|A(r,k)|$ do sai khác về vị trí dòng.

Vậy với mọi $k \in \overline{1,n}$ ta có $[adjA]_{ki} = \pm[adjA]_{kr}$ hay nói khác là 2 cột của ma trận $adjA$ tỉ lệ với nhau. Tương tự cho những dòng j khác ta có với mọi k, $[adjA]_{ki} = \pm[adjA]_{kj}$ với mọi $j \neq i$. Vậy điều phải chứng minh là $adjA$ có ít nhất 3 cột tỉ lệ với nhau.

Mặt khác $[adj(adjA)]_{ij} = (-1)^{i+j}|adjA(i,j)|$. Khi i, j bất kì trong $\overline{1,n}$ thì còn lại ít nhất 2 cột tỉ lệ với nhau, vậy $|adjA(i,j)| = 0$. Vì vậy $adj(adjA) = 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.17

Cho $A, B \in M_n(K)$. Chứng minh rằng

a) $adj(AB) = adj(B)adj(A)$

b) $adj(A^T) = (adjA)^T$

Giải:

Đầu tiên ta nhận xét sự thay đổi của ma trận phụ hợp qua phép biến đổi trên dòng.

Tính chất phụ:

Xét φ là 1 phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Có $A \in M_n(K)$. Ta so sánh sự khác nhau giữa $adjA$ và $adj(\varphi(A))$

- Trường hợp 1: φ là phép đổi d_i và d_j giả sử $j > i$

$\left[adj(\varphi(A))\right]_{uv} = (-1)^{u+v}\det(\varphi(A)(v,u))$

Nếu $v \neq i, v \neq j$

Theo **định lý 2.2.12** $\det(\varphi(A)(v,u)) = -\det(A(v,u)) \Rightarrow \left[adj(\varphi(A))\right]_{uv} = -[adj(A)]_{uv}$

Nếu $v = i$ hoặc $v = j$

$$A(j,u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(u-1)} & a_{i(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)(u-1)} & a_{(j-1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_{i+1}} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(u-1)} & a_{(i+1)(u+1)} & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(u-1)} & a_{i(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)(u-1)} & a_{(j-1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{d_{i+1} \leftrightarrow d_{i+2}} \dots$$

$$\xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(u-1)} & a_{(i+1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(i+2)1} & \cdots & a_{(i+2)(u-1)} & a_{(i+2)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(u-1)} & a_{i(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \varphi(A)(i,u)$$

Vậy $\varphi(A)(i,u)$ có được từ $j-i$ phép đổi dòng từ ma trận $A(j,u)$

Tương tự $\varphi(A)(j,u)$ có được từ $j-i$ phép đổi dòng từ ma trận $A(i,u)$ nên:

$$\left.\begin{matrix} \det\big(\varphi(A)(i,u)\big) = (-1)^{j-i}\det\big(A(j,u)\big) \\ \det\big(\varphi(A)(j,u)\big) = (-1)^{j-i}\det\big(A(i,u)\big) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \big[adj\big(\varphi(A)\big)\big]_{ui} = [adj(A)]_{uj} \\ \big[adj\big(\varphi(A)\big)\big]_{uj} = [adj(A)]_{ui} \end{cases}$$

Vậy $adj\big(\varphi(A)\big)$ có được bằng phép nhân tất cả cột không phải cột i, j với -1 và đổi chỗ cột i, j với nhau từ $adjA$.

Do đó $\exists P_\varphi$ khả nghịch sao cho $\forall A \in M_n(K)$: $adj\big(\varphi(A)\big) = adjA.P_\varphi$

- Trường hợp 2:φ là phép nhân dòng d_i với $\alpha \in K\backslash\{0\}$

Nếu $v \neq i$

Theo **định lý 2.2.12** $\det\big(\varphi(A)(v,u)\big) = \alpha\det\big(A(v,u)\big) \Rightarrow \big[adj\big(\varphi(A)\big)\big]_{uv} = \alpha[adj(A)]_{uv}$

Nếu $v = i$

$\varphi(A)(i,u) = A(i,u) \Rightarrow \big[adj\big(\varphi(A)\big)\big]_{ui} = [adj(A)]_{ui}$

Vậy $adj\big(\varphi(A)\big)$ có được bằng phép nhân tất cả cột không phải cột i với α từ $adjA$.

Do đó $\exists P_\varphi$ khả nghịch sao cho $\forall A \in M_n(K): adj(\varphi(A)) = adjA.P_\varphi$

- Trường hợp 3:φ là phép cộng dòng $d_i = d_i + \alpha d_j$

Nếu $v \neq j, v \neq i$

Theo **định lý 2.2.12** $\det(\varphi(A)(v,u)) = \det(A(v,u)) \Rightarrow [adj(\varphi(A))]_{uv} = [adj(A)]_{uv}$

Nếu $v = i$

$\varphi(A)(i,u) = A(i,u) \Rightarrow \det(\varphi(A)(v,u)) = \det(A(v,u)) \Rightarrow [adj(\varphi(A))]_{uv} = [adj(A)]_{uv}$

Nếu $v = j$

$$\varphi(A)(j,u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & \cdots & a_{i(u-1)} + \alpha a_{j(u-1)} & a_{i(u+1)} + \alpha a_{j(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)(u-1)} & a_{(j-1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(u-1)} & a_{i(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)(u-1)} & a_{(j-1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(u-1)} & a_{1(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{j1} & \cdots & \alpha a_{j(u-1)} & \alpha a_{j(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)(u-1)} & a_{(j-1)(u+1)} & \vdots \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)(u-1)} & a_{(j+1)(u+1)} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\varphi(A)(j,u)) = \det(A(j,u)) + (-1)^{|j-i|}\alpha \det(A(i,u))$

$\Rightarrow [adj(\varphi(A))]_{uj} = [adj(A)]_{uj} + \alpha[adj(A)]_{ui}$

Vậy $adj(\varphi(A))$ có được từ phép cộng cột $c_j = c_j + \alpha c_i$ từ $adjA$

Do đó $\exists P_\varphi$ khả nghịch sao cho $\forall A \in M_n(K)$: $adj\big(\varphi(A)\big) = adjA.P_\varphi$

Vậy trong tất cả trường hợp:

$\exists P_\varphi$ khả nghịch sao cho $\forall A \in M_n(K)$: $adj\big(\varphi(A)\big) = adjA.P_\varphi$

Ta còn có $adj\big(\varphi(I_n)\big) = adjI_n.P_\varphi \Rightarrow P_\varphi = adj\big(\varphi(I_n)\big)$

$\Rightarrow\ adj\big(\varphi(A)\big) = adjA.adj\big(\varphi(I_n)\big), \forall A \in M_n(K)$.

Tương tự cho phép biến đổi trên cột τ ta có

$adj\big(\tau(A)\big) = adj\big(\tau(I_n)\big).adjA, \forall A \in M_n(K)$.

Bài toán chính:

a)

Nếu A khả nghịch xét $A = \varphi_1 \dots \varphi_k$ trong đó φ_i là ma trận có được qua 1 phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Từ tính chất phụ ta có

$adj(AB) = adj(\varphi_1 \dots \varphi_k B) = adj(\dots \varphi_k B)adj(\varphi_1) = \cdots = adj(B)adj(\varphi_k)\dots adj(\varphi_1)$

$= adj(B)adj(\varphi_{k-1}\varphi_k)\dots adj(\varphi_1) = \cdots = adj(B)adj(A)$

Tương tự nếu B khả nghịch xét $B = \tau_1 \dots \tau_h$ trong đó τ_i là ma trận có được qua 1 phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ta xét A, B đều không khả nghịch

Trường hợp: $rank(A) < n-1 \Rightarrow \det\big(A(i,j)\big) = 0, \forall i, j$(**Hệ quả 2.5.2**)

$\Rightarrow adjA = 0 \Rightarrow adjB.adjA = 0$

$rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\} < n-1$(**Định lý 1.4.16**)

$\Rightarrow adj(AB) = 0$

Tương tự nếu $rank(B) < n-1$

Xét $rank(A) = rank(B) = n-1$

Cũng từ **định lý 1.4.16** ta có P_1, Q_1, P_2, Q_2 khả nghịch sao cho

$$P_1AQ_1 = P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = I'$$

$$adj(A) = adj(Q_1^{-1})adj(I')adj(P_1^{-1}) = adj(Q_1^{-1})\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}adj(P_1^{-1})$$

$$adj(B) = adj(Q_2^{-1})adj(I')adj(P_2^{-1}) = adj(Q_2^{-1})\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}adj(P_2^{-1})$$

$$adj(AB) = adj(P_1^{-1}I'Q_1^{-1}P_2^{-1}I'Q_2^{-1}) = adj(Q_2^{-1})adj(I'Q_1^{-1}P_2^{-1}I')adj(P_1^{-1})$$

Ta chứng minh:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}adj(Q_1^{-1}P_2^{-1})\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = adj(I'Q_1^{-1}P_2^{-1}I')$$

Đặt $X = Q_1^{-1}P_2^{-1}$

Vậy ta chứng minh:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}adj(X)\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = adj(I'XI')$$

Có:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}adj(X)\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det\big(X(n,n)\big) \end{pmatrix}$$

$$I'XI' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \vdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} \\ x_{n1} & \cdots & x_{n(n-1)} & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \vdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \vdots & x_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(I'XI') = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det\big(X(n,n)\big) \end{pmatrix}$$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

b)

$$[adj(A^T)]_{uv} = (-1)^{u+v} \det\big(A^T(v,u)\big) = (-1)^{u+v} \det(A(u,v)) = [adj(A)]_{vu} = [(adjA)^T]_{uv}$$

$$\Rightarrow adj(A^T) = (adjA)^T$$

Bài 2.18

Cho A là ma trận vuông cấp n. Tìm hạng $r(adjA)$ thông qua hạng $r(A)$.

Giải:

Bài này ta có thể nhận xét như trong **Bài 2.17**

Nếu $r(A) < n - 1$ theo **Hệ quả 2.5.2** ta có $\det\big(A(i,j)\big) = 0, \forall i,j \Rightarrow adjA = 0$

Vậy $r(adjA) = 0$.

Nếu $r(A) = n$

Vì $adjA.A = detA.I_n$

A khả nghịch $\Rightarrow adjA$ khả nghịch $\Rightarrow r(adjA) = n$

Nếu $r(A) = n - 1$

Có P, Q khả nghịch sao cho $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow adjA = adj(Q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} adj(P^{-1})$

Do $adj(Q^{-1})$ và $adj(P^{-1})$ khả nghịch nên

$$r(adjA) = r\left(adj(Q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} adj(P^{-1}) \right) = r \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Kết luận:

$r(A) < n - 1 \Rightarrow r(adjA) = 0$

$r(A) = n - 1 \Rightarrow r(adjA) = 1$

$r(A) = n \Rightarrow r(adjA) = n$

Bài 2.19

Cho $A, B \in M_n(K)$. Dùng định lý Laplace, chứng minh lại công thức $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Giải

Xét ma trận khối $X = \begin{pmatrix} B & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$

Ta xét n dòng cho trước là $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots i_n = n$

Theo định lý Laplace ta có:

$$\det X = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_n\le 2n} M.M' \ (1)$$

Xét $(j_1, \dots, j_n)$ khác bộ $(1,2,\dots,n)$

Tức có k để $j_k > n$ thì suy ra có cột thứ $p \le n$ sao cho $\forall h, j_h \ne p$

Suy ra $X(1,2,\dots,n; j_1, j_2, \dots, j_n)$ luôn có 1 cột là 0.

Suy ra $\det X(1,2,\dots,n; j_1, j_2, \dots, j_n) = 0$

Vậy tổng ở (1) ta chỉ xét $j_1 = 1, \dots, j_n = n$

Tức $\det X = \det B\,.\,(-1)^{2(1+2+\cdots+n)} \det A = \det A \det B$

$$X = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_{n+1}=d_{n+1}+a_{1n}d_n]{d_{n+1}=d_{n+1}+a_{11}d_1 \ \cdots} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & -1 \\ a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \dots \xrightarrow[d_{n+1}=d_{n+1}+a_{1n}d_n]{d_{2n}=d_{2n}+a_{11}d_1 \ \cdots} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & -1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -I_n \\ AB & 0 \end{pmatrix} = Y$$

Ta làm tương tự như trên để được

$$\det Y = (-1)^{1+2+\cdots+2n} \det(AB) \det -I_n = (-1)^{n(2n+1)}(-1)^n \det(AB) = \det(AB)$$

Do từ X đến Y ta chỉ dùng phép biến đổi loại 3 nên $\det X = \det Y$

Vậy $\det(AB) = \det A \det B$

*Bài 2.20**

Tính các định thức cấp n sau:

a) $$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

c) $$\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix};$$

d) $$\begin{vmatrix} x_1+y_1+1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2+1 & \cdots & x_2+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n+1 \end{vmatrix};$$

e) $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix};$$

f) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix};$$

g) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix};$$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \cdots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \cdots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \cdots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$;

Giải:

Nhận xét: Các bài toán tính định thức tổng quát như thế này thông thường chỉ khó khăn ở phần tiếp cận, phần tính toán tuy nhiều nhưng đây không phải là phần khó. Trong một số bài giải dưới đây sẽ chỉ hướng dẫn cách tiếp cận.

a) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$

Một cách tiếp cận rất tự nhiên của tính định thức là làm các phần tử của một dòng (cột) trở nên bằng nhau và lần lượt lấy các dòng (cột) trừ đi dòng thứ nhất.

Trong bài toán này lại để ý tổng các phần tử của từng dòng là bằng nhau. Vậy ta sẽ lấy tất cả các dòng cộng vào dòng thứ nhất:

$$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i+1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i + 1$$

Ở đây ta đã dùng một công thức: định thức của một ma trận chéo bằng tích các phần tử trên đường chéo. Đây là một hệ quả của định lý Laplace.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

Bài toàn này không phải là một trường hợp cần kĩ thuật đặc biệt như câu a. Chỉ cần cố gắng đưa nó về ma trận tam giác là được. Thật vậy, lấy dòng một cộng cho các dòng còn lại:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 2.3 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1.2.3 \ldots n = n!$$

c) $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$

Để đơn giản hóa bài toán, ta sẽ lấy lần lượt các dòng trừ đi dòng thứ nhất và lấy nhân tử chung từ các dòng.

$$\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ y_1(x_2-x_1) & y_2(x_2-x_1) & \cdots & y_n(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x_n-x_1) & y_2(x_n-x_1) & \cdots & y_n(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\,.\,0 = 0$$

Ở đây ta đã dùng tính chất: Ma trận vuông có 2 dòng hoặc 2 cột giống nhau thì có định thức bằng 0. (Xem như bài tập cho sinh viên)

d) $\begin{vmatrix} x_1+y_1+1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2+1 & \cdots & x_2+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n+1 \end{vmatrix}$

Bài toán này rối chủ yếu ở phần tính toán dài và phức tạp. Tuy nhiên ở đây sẽ chỉ trình bày phần ý tưởng để sinh viên tự thực hiện phần tính toán “dài mà dễ”.

Ta có định nghĩa sau: **Định thức con chính** là định thức con nằm trên các dòng và các cột có cùng chỉ số.

Áp dụng kĩ thuật tương tự câu c, ta có $\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_m \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_2+y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m+y_1 & x_m+y_2 & \cdots & x_m+y_m \end{vmatrix} = 0 \ \ \forall m \geq 3.$

Trở lại định thức ban đầu, tách mỗi dòng đã cho thành tổng dạng

$(0, \dots, 1, \dots, 0) + (x_i + y_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_i + y_n)$

Sau đó ta khai triển định thức thành tổng của 2^n định thức với các dòng mới (dùng bổ đề 2.2.5). Theo khai triển Laplace với các dòng chỉ chứa 0 và 1, ta thấy chỉ có một định thức con là khác 0: nó là định thức con chính và nhận giá trị bằng 1. Nếu định thức bù của nó có cấp lớn hơn 2 thì theo trên nó sẽ bằng 0. Còn lại là các định thức con bù cấp 1 và 2, đồng thời là các định thức con chính thì ta có thể khai triển được.

Đáp án: $1 + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

e) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$

Khai triển Laplace theo dòng đầu, rồi lại khai triển theo cột đầu hoặc cuối ta được:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_{2n} \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} - b_1 b_{2n} \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_{2n} - b_1 b_{2n}) \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Ta đã đưa định thức cấp $2n$ về một định thức cấp $2n-2$. Từ đây ta nảy ra ý tưởng sử dụng quy nạp. (Sinh viên tự chứng minh)

Đáp án: $\prod_{i=1}^{n}(a_i a_{2n+1-i} - b_i b_{2n+1-i})$.

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

Như những câu trước ở đây sẽ chỉ trình bày ý tưởng và các bước thực hiện. Phần tính toán là của sinh viên.

Bắt đầu từ dòng cuối cùng lần lượt lấy các dòng trừ đi dòng đứng trước nó (để tạo ra nhiều phần tử giống nhau ở định thức), sau đó lần lượt lấy các cột trừ đi cột thứ nhất. Cộng vào dòng 1 các tích của dòng thứ i với $\frac{n-i+1}{2}$, $i \geq 2$. Khai triển theo dòng thứ nhất ta ra được đáp án.

Đáp án: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$.

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$

Đây thực ra là một bài dễ. Nhưng công thức này thì lại không có nhiều người nhớ:

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Áp dụng công thức trên, thực hiện các phép biến đổi sau: bắt đầu từ cột cuối cùng lần lượt lấy các cột trừ đi cột đứng trước nó, sau đó khai triển Laplace với dòng đầu, rồi lại tiếp tục như vậy.

Đáp án: 1.

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \cdots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \cdots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \cdots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$

Hoàn toàn tương tự câu g.

Đáp án: 1

Bài 2.21*

Giả sử $A = M_n(K)$ có dạng khối

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \text{với } A_j \in M_{r_j}(K);\ \sum_{j=1}^{k} r_j = n.$$

Chứng tỏ rằng $\det A = \det A_1 . \det A_2 \dots \det A_k$.

(*Hướng dẫn:* Chứng minh bằng quy nạp theo k và áp dụng định lý Laplace)

Giải:

Ta sẽ chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$: $A = A_1 \Rightarrow \det A = \det A_1$.

Giả sử điều cần chứng minh đúng tới $k \geq 1$.

Xét trường hợp $k + 1$, tức là ta có ma trận khối

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & * & \cdots & * \\ 0 & B_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{k+1} \end{pmatrix}, \text{với } B_j \in M_{r_j}(K);\ \sum_{j=1}^{k+1} r_j = n.$$

Khai triển Laplace với r_j cột đầu tiên, ta được

$$\det B = \det B_1 . \det \begin{pmatrix} B_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{n+1} \end{pmatrix}$$

Đặt $C = \begin{pmatrix} B_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{n+1} \end{pmatrix}$. Nhận xét C là một ma trận có dạng khối và có tổng cộng k khối trên đường chéo. Sử dụng giả thuyết quy nạp ta được $\det C = \det B_2 \dots \det B_{n+1}$.

Vậy $\det B = \det B_1 \det C = \det B_1 \det B_2 \dots \det B_{n+1}$. Theo quy nạp ta có đpcm.

Bài 2.22

Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng có không quá n phần tử α khác nhau trong K sao cho $\det(\alpha I_n - A) = 0$.

(Hướng dẫn: Phương trình $det(xI_n - A) = 0$ có không quá n nghiệm trên $\mathbb{C}$. Do đó nó có không quá n nghiệm trên K.)

Giải:

Do phần hướng dẫn đã quá rõ ràng nên bài này không được trình bày cách giải.

Bài 2.23

Cho $A, B \in M_n(K)$. Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì có không quá n phần tử α khác nhau trong K sao cho ma trận $(\alpha A + B)$ không khả nghịch.

Giải:

Ta có: Ma trận $(\alpha A + B)$ không khả nghịch $\Leftrightarrow \det(\alpha A + B) = 0$.

Vậy nếu xem lại phát biểu của bài toán, ta sẽ thấy có những điểm tương đồng với bài 2.22 nên một cách tự nhiên ta sẽ cố gắng đưa về 2.22.

Thật vậy:

$\det(\alpha A + B) = 0$

$\Leftrightarrow \det A^{-1} \det(\alpha A + B) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\alpha I_n + A^{-1}B) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\alpha I_n - C) = 0 \qquad$ (Đặt $C = -A^{-1}B$)

Theo bài 2.22, có không quá n phần tử α khác nhau trong K để $\det(\alpha I_n - C) = 0$, tức là có không quá n phần tử α khác nhau trong K để $\det(\alpha A + B) = 0$ (tức là $\alpha A + B$ không khả nghịch). Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.24

Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng rồn tại các ma trận B, C khả nghịch sao cho $A = B + C$.

Gợi ý: Áp dụng 2.22.

Giải:

Tiếp cận: bài này rõ ràng không dễ vì ta không biết nhiều về ma trận không khả nghịch. Tuy nhiên ta có thể giải được bài này dễ dàng với kết quả rất đẹp từ bài 2.22.

Như đã nói ở bài 2.23: với $X \in M_n(K)$, X khả nghịch $\Leftrightarrow \det X \neq 0$.

Theo bài 2.22, có không quá n phần tử α khác nhau trong K để $\det(\alpha I_n - A) = 0$, tức là tồn tại β sao cho $\det(\beta I_n - A) \neq 0$.

Đặt $C = A - \beta I_n$ suy ra $A = \beta I_n + C$. Đặt $B = \beta I_n$ ta được kết quả cần tìm.

Bài 2.25

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng cách áp dụng công thức định thức:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải:

Đây là một bài tập tính toán đơn giản nên ở đây chỉ giải mẫu câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) Đặt $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 27$, suy ra A khả nghịch.

Ta có công thức $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj}(A)$.

Ta tính các phần tử của $\mathrm{adj}(A)$:

$[\mathrm{adj}(A)]_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -57;\ [\mathrm{adj}(A)]_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 51;\ [\mathrm{adj}(A)]_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3;$

$[\mathrm{adj}(A)]_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 33;\ [\mathrm{adj}(A)]_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -30;\ [\mathrm{adj}(A)]_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6;$

$[\mathrm{adj}(A)]_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3;\ [\mathrm{adj}(A)]_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6;\ [\mathrm{adj}(A)]_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$

Vậy $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -57 & 33 & -3 \\ 51 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -19 & 11 & -1 \\ 17 & -10 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $C^{-1} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 18 & 11 & 10 \\ -2 & -14 & 4 \\ -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

d) $D^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & 2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

e) $E^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) $F^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.26:

Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} i+1 & 3-i & 5i-m \\ 2i+1 & 1-i & 2i+2 \\ 3m-i & m+3i & 4+3i \end{pmatrix}$

Giải:

Các phần tính định thức chỉ là các phép tính đơn giản nên sẽ được mặc định là sinh viên có thể làm được.

a) Gọi A là ma trận trong câu a. Ta có

$\det(A) = ab^2 + ca^2 + bc^2 - bc^2 - ac^2 - a^2b = (a-b)(b-c)(c-a)$

Vậy A khả nghịch $\Leftrightarrow a, b, c$ đôi một khác nhau. Khi đó

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-a(b+c)}{(a-b)(a-c)} & \frac{-b(c+a)}{(b-a)(b-c)} & \frac{-c(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{a}{(a-b)(a-c)} & \frac{b}{(b-a)(b-c)} & \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{1}{(a-b)(a-c)} & \frac{1}{(b-a)(b-c)} & \frac{1}{(c-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

b) Gọi B là ma trận trong câu b. Ta có

$\det(B) = b(a-1)^2(a+2)$.

Vậy B khả nghịch $\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a \notin \{-2,1\} \end{cases}$. Khi đó

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{-1}{b(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{b(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{b(a-1)(a+2)} \\ \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix}$$

c) Gọi C là ma trận trong câu c. Ta có

$\det(C) = m^2 + 3m + 2$.

Vậy C khả nghịch $\Leftrightarrow m \notin \{-2,-1\}$. Khi đó

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2m^2-10m-7}{m^2+3m+2} & \frac{4m+3}{m^2+3m+2} & \frac{-3m-1}{m^2+3m+2} \\ \frac{-m^2-5m-3}{m^2+3m+2} & \frac{2m+1}{m^2+3m+2} & \frac{-m+1}{m^2+3m+2} \\ \frac{-m}{m^2+3m+2} & \frac{m}{m^2+3m+2} & \frac{2}{m^2+3m+2} \end{pmatrix}$$

d) Gọi D là ma trận trong câu d. Ta có

$\det(D) = (2-5i)m^2 + (4-6i)m - (1+62i) \neq 0$

Vì đáp án tương đối phức tạp nhưng lại có thể tìm ra bằng tính toán đơn thuần nên ở đây sẽ không đưa ra đáp án (và thực tế bài này cũng không nên làm, theo ý kiến cá nhân người giải).

Bài 2.27

Cho $P_{ij}(x)\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ là các đa thức trên trường K. Giả sử rằng các đa thức trên cùng 1 cột của ma trận

$$A(x)=\begin{pmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) & \cdots & P_{1n}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) & \cdots & P_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1}(x) & P_{n2}(x) & \cdots & P_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Có cùng bậc, gọi $d_1, d_2, \dots, d_n$ là các bậc tương ứng. Đặt c_{ij} là các hệ số bậc cao nhất của các đa thức $P_{ij}(x)$. Chứng tỏ rằng

$$\det A(x) = \alpha x^d + R(x)$$

(Với $\alpha = \det\left(c_{ij}\right), d = \sum_{j=1}^{n} d_j$ và $\deg\left(R(x)\right) < d$). Suy ra, nếu $\det\left(c_{ij}\right) \neq 0$ thì $\det A(x) \not\equiv 0$.

Giải

Đa thức $P_{ij}(x)$ có bậc d_j nên $P_{ij}(x) = c_{ij}x^{d_j} + R_{ij}(x)$. (Với $\deg\left(R_{ij}(x)\right) < d_j$)

$$\det A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) P_{1\sigma(1)}(x) \dots P_{n\sigma(n)}(x)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\left(c_{1\sigma(1)}x^{d_{\sigma(1)}} + R_{1\sigma(1)}(x)\right) \dots \left(c_{n\sigma(n)}x^{d_{\sigma(n)}} + R_{1\sigma(n)}(x)\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\left(c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)}x^d + R_\sigma(x)\right)$$

Với $\deg\left(R_\sigma(x)\right) < d$

$$\det A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)}x^d + \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) R_\sigma(x) = \alpha x^d + R(x).$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.28

Chứng minh rằng nếu ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ thỏa một trong hai tính chất:

(i) $\forall 1 \le i \le n, |a_{ii}| > \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\neq i}} \left|a_{ij}\right|$

(ii) $\forall 1 \le i \neq k \le n, |a_{ii}| > (n-1)|a_{ik}|$

Thì A khả nghịch.

Giải

(i)

Ta sẽ quy nạp theo n

$n = 1$ hiển nhiên.

$n = 2$:

Ta có: $|a_{11}| > |a_{12}| \geq 0, |a_{22}| > |a_{21}| \geq 0$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 := c_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} c_1} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

Có $\left|a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| \geq |a_{22}| - \left|a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| > |a_{21}|\left(1 - \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}\right) \geq 0.$

Vậy A_2 khả nghịch tức $n = 2$ đúng.

Giả sử $n = k - 1$ đã đúng

Xét $n = k$:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdots]{\substack{c_2 := c_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} c_1 \\ c_3 := c_3 - \frac{a_{13}}{a_{11}} c_1}} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - a_{21}\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

Đặt $A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{n1}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{pmatrix}$

Ta chỉ cần chứng minh A_{k-1} thỏa điều kiện quy nạp thì bài toán sẽ được chứng minh.

Tức ta chứng minh

$$\left|a_{ii} - a_{i1}\frac{a_{1i}}{a_{11}}\right| > \sum_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left|a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|$$

Thật vậy ta có:

$$\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}-a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|+\left|a_{i1}\frac{a_{1i}}{a_{11}}\right|\le\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left(\left|a_{ij}\right|+|a_{i1}|\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|\right)+|a_{i1}|\left|\frac{a_{1i}}{a_{11}}\right|$$

$$=\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}\right|+|a_{i1}|\left|\frac{1}{a_{11}}\right|\sum_{j=2}^{n}\left|a_{1j}\right|$$

$$<\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}\right|+|a_{i1}|=\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}\right|<|a_{ii}|$$

$$\Rightarrow\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}-a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right|<|a_{ii}|-\left|a_{i1}\frac{a_{1i}}{a_{11}}\right|\le\left|a_{ii}-a_{i1}\frac{a_{1i}}{a_{11}}\right|$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

(ii)

Ta có:

$$\forall 1\le i\ne k\le n, |a_{ii}|>(n-1)|a_{ik}|\Rightarrow(n-1)|a_{ii}|>(n-1)\sum_{k\ne i}|a_{ik}|\Rightarrow|a_{ii}|>\sum_{k\ne i}|a_{ik}|$$

Đây là điều kiện ở (i) từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.29

Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số $m\in K$:

a) $\begin{cases}(2m+1)x_1-mx_2+(m+1)x_3=m-1\\(m-2)x_1+(m-1)x_2+(m-2)x_3=m\\(2m-1)x_1+(m-1)x_2+(2m-1)x_3=m\end{cases}$

b) $\begin{cases}(m+2)x_1+2x_2+x_3=m\\(m-5)x_1+(m-2)x_2-3x_3=2m\\(m+5)x_1+2x_2+(m+3)x_3=3m\end{cases}$

c) $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 = m \end{cases}$

d) $\begin{cases} (3m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = m \\ (4m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (2m+1)x_3 = m \\ (3m+5)x_1 + (2m+1)x_2 + 2x_3 = m \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m \end{cases}$

f) $\begin{cases} (2m+1)x_1 + (m-2)x_2 + (m+2)x_3 = m-1 \\ (2m-1)x_1 + (2m-5)x_2 + mx_3 = m-1 \\ (3m+4)x_1 + (m-2)x_2 + (2m+5)x_3 = m-1 \end{cases}$

Giải:

Ở đây chỉ trình bày cách giải cho câu a (mặc dù vậy phần tính toán sẽ được mặc định là sinh viên có thể làm được), các câu còn lại sinh viên tự làm.

a) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1 \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m+1)(m-1).$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m-1 & -m & m+1 \\ m & m-1 & m-2 \\ m & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(2m^2 - 2m + 1).$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m-1 & m+1 \\ m-2 & m & m-2 \\ 2m-1 & m & 2m-1 \end{vmatrix} = -m^2(m+1).$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m-1 \\ m-2 & m-1 & m \\ 2m-1 & m-1 & m \end{vmatrix} = -(m+1)(2m^2 - 2m + 1).$

$m \notin \{-1,0,1\}$: $\Delta \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2m^2-2m+1}{m(m-1)}, \frac{m}{m-1}, \frac{-2m^2+2m-1}{m(m-1)}\right)$.

$m = -1$: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ thay vào hệ giải ra nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = \left(\alpha + 2, \alpha, -\frac{5}{3}(\alpha + 1)\right)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = 0$: $\Delta = 0, \Delta_1 = 1 \neq 0$, suy ra hệ vô nghiệm.

$m = 1$: $\Delta = 0, \Delta_1 = 2 \neq 0$, suy ra hệ vô nghiệm.

b) $m \notin \{-1,0,1\}$: hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m^2-6m-20}{m^2-1}, \frac{m^2+19m+5}{m^2-1}, \frac{2m^2-7m+30}{m^2-1}\right)$.

$m = 0$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (-4\alpha, \alpha, 6\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = 1$ hoặc $m = -1$: hệ vô nghiệm.

c) $m \notin \{2, -4\}$: hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-2}{m+4}, \frac{m+2}{m+4}, \frac{m+2}{m+4}\right)$.

$m = 2$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \beta, 2 - \alpha - \beta)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$m = -4$: hệ vô nghiệm.

d) $m \notin \{-2,0,1\}$: hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m}{m+2}, -\frac{m}{m+2}, -\frac{m}{m+2}\right)$.

$m = 0$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{3}{5}\alpha, \alpha, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = 1$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \frac{1}{3} - 2\alpha, -\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = -2$: hệ vô nghiệm.

e) $m \notin \{0,2,4\}$: hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m^2-7m+7}{(m-2)(m-4)}, \frac{-2m^2+8m-5}{(m-2)(m-4)}, \frac{m^2-1}{(m-2)(m-4)}\right)$.

$m = 0$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (-7\alpha, 5\alpha, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = 2$ hoặc $m = 4$: hệ vô nghiệm.

f) $m \notin \{1, \pm 3\}$: hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,-1)$.

$m = 1$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, 0, -\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = -3$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\alpha+6}{5}, \frac{-2\alpha-2}{5}, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$m = 3$: hệ có nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha, 2\alpha + 2, \alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 2.30

Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số $a, b \in K$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.

Giải

a)

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2a - 21$.

Theo quy tắc Cramer, hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, tức là $2a - 21 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{21}{2}$.

b)

Hệ không thể có vô số nghiệm khi nó có nghiệm duy nhất nên theo câu a), điều kiện trước tiên để hệ có vô số nghiệm là $\det A = 0 \Leftrightarrow 2a - 21 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{21}{2}$

Ta viết ma trận bổ sung và tiến hành xử lý theo phương pháp Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 3 & -1 & -\frac{21}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_1]{d_2:=d_2-3d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 0 & -7 & -42 & -7 \\ 0 & -3 & -18 & b-6 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3:=d_3-\frac{3}{7}d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 0 & -7 & -42 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right)$$

Từ đó ta thấy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

Đây chỉ là điều kiện cần, ta cần phải xét cả điều kiện đủ: tức là thay $a = \frac{21}{2}, b = 3$ vào hệ rồi giải xem liệu hệ có vô số nghiệm không.

Sau khi thay vào ta dễ dàng giải được nghiệm

Vậy hệ có vô số nghiệm với một ẩn tự do $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}\alpha + 1, -6\alpha + 1, \alpha\right)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow a = \frac{21}{2}, b = 3$.

CHƯƠNG 3
Không gian vector

Bài 3.1

Các tập hợp dưới đây có phải là không gian con của không gian vector tương ứng (với các phép toán (+) và (.) như trong Ví dụ 3.4.8) hay không?

a) $W = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \in \mathbb{Z}\}$.

b) Tập tất cả các vector trong mặt phẳng tọa độ Oxy nằm trên trục Ox hoặc Oy.

c) Tập tất cả các vector trong mặt phẳng tọa độ Oxy có ngọn nằm trên một đường thẳng cho trước, còn gốc trùng với gốc tọa độ O.

d) Tập tất cả các vector trong không gian $Oxyz$ có ngọn không nằm trên một đường thẳng cho trước.

e) $W = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

f) $W = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

Giải:

Ở đây chỉ giải mẫu câu a và b, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) Ta lấy $x = (1,1, \dots, 1) \in W$ và $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ thì $\alpha x \notin W$. Vậy W không kín với phép nhân. Suy ra W không phải không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b) Xét $A(1,0)$, $B(0,1)$ và $C(1,1)$, ta có vector $\overrightarrow{OA} = (1,0)$ nằm trên trục Ox và vector $\overrightarrow{OB} = (0,1)$ nằm trên trục Oy. Tổng của chúng là $\overrightarrow{OC} = (1,1)$ không nằm trên 2 trục này. Vậy không gian này không kín với phép cộng. Suy ra đây không phải không gian con của không gian vector tương ứng.

c) Không gian này kín với cả hai phép toán nên đây là không gian con.

d) Không gian này không kín với phép cộng.

e) Không gian này là một không gian con.

f) Không gian này không kín với phép cộng.

Bài 3.2

Cho $V = \mathbb{R}^2$. Chứng tỏ rằng V không là không gian vector trên R nếu ta định nghĩa các phép toán (+) và (.) trên V bởi:

a) $\begin{cases}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)\\ \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3x_1 + 3x_2, y_1 + y_2)\\ \alpha(x_1, y_1) = (3\alpha x_1, \alpha y_1)\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)\\ \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0)\end{cases}$

Giải:

a) Giả sử V là không gian vector trên R. Khi đó $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$2(x_1, y_1) + 2(x_2, y_2) = 2(x_1 + x_2, y_1 y_2)$

$\Leftrightarrow (2x_1, 2y_1) + (2x_2, 2y_2) = (2(x_1 + x_2), 2y_1 y_2)$

$\Leftrightarrow (2x_1 + 2x_2, 4y_1 y_2) = (2x_1 + 2x_2, 2y_1 y_2)$

$\Leftrightarrow 4y_1 y_2 = 2y_1 y_2 \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (Vô lý)

Vậy giả sử là sai, suy ra V không phải không gian vector.

b) Làm tương tự như câu a, kiểm tra rằng không có phần tử "1" thỏa $1u = u \ \forall u \in \mathbb{R}^2$.

c) Tương tự câu b.

Bài 3.3

Cho $V = (0, +\infty)$ và $K = \mathbb{R}$. Với $\alpha \in \mathbb{R}$ và $u, v \in V$, ta đặt : $u \oplus v = uv$ và $\alpha \odot u = u^\alpha$.

Chứng minh $(V, \oplus, \odot)$ là không gian vector trên K. Tìm cơ sở và số chiều của V.

Giải:

Đây là một bài tập đơn giản, chỉ cần kiểm tra các tính chất trong định nghĩa 3.2.1 nên ở đây sẽ không sửa chi tiết.

Một cơ sở của V: $\{2\}$ (có thể chứng minh dễ dàng). Suy ra số chiều của V bằng 1.

Bài 3.4

Cho V là tập hợp tất cả các hàm thực, liên tục,dương trên đoạn $[-a, a]$. Trên V ta định nghĩa các phép toán (+) và (.) như sau:

$$(f + g)(x) = f(x)g(x);$$

$$(\alpha f)(x) = [f(x)]^{\alpha}$$

a) Chứng minh rằng V là một không gian vector trên R.

b) Tập hợp tất cả các hàm chẵn trong không gian V có phải là không gian con của V hay không?

c) Tập hợp tất cả các hàm lẻ trong không gian V có phải là không gian con của V hay không?

Giải:

a) Sinh viên tự kiểm tra các tính chất trong định nghĩa 3.2.1.

b) Gọi A tập hợp các hàm chẵn trong V

$\Longrightarrow A = \{f(x) \in V | f(x) = f(-x)\}$

Dễ dàng kiểm tra A có tính đóng với phép cộng và phép nhân được định nghĩa như trên. Suy ra A là không gian con của V.

c) Dễ dàng kiểm tra được tập hợp này không đóng đối với phép cộng nên suy ra đây không phải không gian con của V.

Bài 3.5

Trong cac tập con W sau đây của $\mathbb{R}^n$ thì tập hợp nào là không gian con của $\mathbb{R}^n$?

a) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_n \geq 0\}$

b) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$

c) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + 3x_2 = 1\}$

d) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1^2 = x_2\}$

e) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 x_2 = 0\}$

f) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$

g) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n\}$

h) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in \mathbb{Q}\}$

Giải:

Ở đây chỉ giải mẫu câu a và b, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

Cách làm: Muốn biết W là không gian con của R^n hay không thì ta phải kiểm tra tính đóng của W đối với phép nhân và phép cộng.

a) Xét $x = (1,1, \dots, 1) \in W$ vì $x_n = 1 \geq 0$.

Khi đó ta thấy $(-1)x = (-1, -1, \dots, -1) \notin W$ vì $-1 < 0$. Suy ra W không kín đối với phép nhân. Vậy W không phải không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b) Ta có $\forall x, y \in W$

$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

Vì $(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = (x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2) = 3x_3 + 3y_3 = 3(x_3 + y_3)$ nên $x + y \in W$. Vậy W kín với phép cộng.

Ta có $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in W$

$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

Vì $\alpha x_1 + 2(\alpha x_2) = \alpha(x_1 + 2x_2) = 3\alpha x_3$ nên $\alpha x \in W$. Vậy W kín với phép nhân.

Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

c) Kiểm tra được W không kín với phép cộng.

d) Kiểm tra được W không kín với phép nhân.

e) Kiểm tra được W không kín với phép cộng.

f) W là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

g) Kiểm tra được W không kín với phép cộng.

h) Kiểm tra được W không kín với phép nhân.

Bài 3.6

Cho $V = M_n(K)$ là không gian các ma trận vuông cấp n trên K. Tập con nào sau đây là không gian con của V?

a) Tập tất cả các ma trận A có $A_{11} = 0$;

b) Tập tất cả các ma trận tam giác trên;

c) Tập tất cả các ma trận đường chéo;

d) Tập tất cả các ma trận khả nghịch;

e) Tập tất cả các ma trận đối xứng;

f) Tập tất cả các ma trận có định thức bằng 1.

Giải:

Bài tập này yêu cầu phải kiểm tra tính đóng của không gian đối với phép cộng và nhân. Ở đây chỉ giải mẫu câu a và b.

a)

Gọi W_a là tập tất cả các ma trận A có $A_{11} = 0$

Xét $B, C \in W_a$ tức là $B_{11} = C_{11} = 0$.

Với mọi $\alpha \in K$ ta có: $[B + \alpha C]_{11} = B_{11} + [\alpha C]_{11} = B_{11} + \alpha C_{11} = 0$. Suy ra ma trận $B + \alpha C \in W_a \; \forall \alpha \in K$. Do đó $W_a \leq V$.

Vậy tập tất cả các tập con của A có $A_{11} = 0$ là không gian con của V.

b)

Gọi W_b là tập tất cả các ma trận tam giác trên tức là $A_{ij} = 0 \; \forall i > j$.

Xét $B, C \in W_b$, tức là $B_{ij} = C_{ij} = 0$.

Với mọi $\alpha \in K$ ta có $[B + \alpha C]_{ij} = B_{ij} + [\alpha C]_{ij} = B_{ij} + \alpha C_{ij} = 0 \; \forall i > j$. Suy ra ma trận $B + \alpha C \in W_b \; \forall \alpha \in K$. Do đó $W_b \leq V$.

Vậy tập tất cả các ma trận tam giác trên là không gian con của V.

c) Tập tất cả các ma trận đường chéo là không gian con của V.
d) Tập tất cả các ma trận khả nghịch không là không gian con của V.
e) Tập tất cả các ma trận đối xứng là không gian con của V.
f) Tập tất cả các ma trận có định thức bằng 1 không là không gian con của V.

Bài 3.7

Cho V là không gian các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ với các phép toán cộng và nhân thông thường.

Trong tất cả các tập hợp W sau, tập hợp nào là không gian con của V?

a) $W = \{f \in V | f(x^2) = [f(x)]^2\}$;
b) $W = \{f \in V | f(0) = f(1)\}$;
c) $W = \{f \in V | f(3) = 2f(5)\}$;

d) $W = \{f \in V | f(1) = 0\}$;

e) $W = \{f \in V | f\ liên\ tục\}$;

f) $W = \{f \in V | \int_0^1 f(t)dt = 1\}$;

g) $W = \{f \in V | f$ là hàm chẵn$\}$;

h) $W = \{f \in V | f$ là hàm lẻ$\}$.

Giải:

a) $W = \{f \in V | f(x^2) = [f(x)]^2\}$

Xét $f, g \in W$ tức là $\begin{cases} f(x^2) = [f(x)]^2 \\ g(x^2) = [g(x)]^2 \end{cases}$

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

$[q(x)]^2 = (f(x) + \alpha g(x))^2 = [f(x)]^2 + [\alpha g(x)]^2 + 2\alpha f(x)g(x) \neq f(x^2) + \alpha g(x^2) = q(x^2)$

với $q(x) = f(x) + \alpha g(x)/$

Chẳng hạn với $f(x) = x$ thỏa mãn $f(x^2) = [f(x)]^2$. Ta chọn $\alpha = 1$ thì khi $x =$

1 thì $[q(1)]^2 = [f(1) + g(1)]^2 = 4$ và $q(1^2) = q(1) = f(1) + g(1) = 2 \neq [q(1)]^2$

Vậy W không là không gian con của V.

b) $W = \{f \in V | f(0) = f(1)\}$

Xét $f, g \in W$ tức là $\begin{cases} f(0) = f(1) \\ g(0) = g(1) \end{cases}$

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ hiển nhiên ta có $f(0) + \alpha f(0) = f(1) + \alpha f(1)$

Suy ra $f + \alpha g \in W\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Do đó $W \leq V$. Vậy W là không gian con của V.

c) d) e) g) h) W là không gian con của V.

f) W không là không gian con của V.

Bài 3.8

Cho W, W_1 và W_2 là các không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng:

a) $W \cap W_1 + W \cap W_2 \subset W \cap (W_1 + W_2)$;

b) Nếu $W_1 \subset W$ hay $W_2 \subset W$ thì $W \cap W_1 + W \cap W_2 = W \cap (W_1 + W_2)$.

c) $W \cap W_1 + W \cap W_2 = W \cap (W_1 + W \cap W_2) = W \cap (W \cap W_1 + W_2)$.

Giải:

a)

Xét $x = x_1 + x_2 \in W \cap W_1 + W \cap W_2$ với $x_1 \in W \cap W_1$ và $x_2 \in W \cap W_2$.

$\begin{cases} x_1 \in W \\ x_2 \in W \end{cases} \Rightarrow x \in W \ (1)$

$\begin{cases} x_1 \in W_1 \\ x_2 \in W_2 \end{cases} \Rightarrow x \in W_1 + W_2 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x \in W \cap (W_1 + W_2)$.

Từ đó có điều phải chứng minh.

b)

Không mất tính tổng quát ta giả sử $W_1 \subset W$

Chiều thuận ta đã chứng minh ở câu a.

Ta chứng minh chiều ngược lại:

Cho $x = x_1 + x_2 \in W \cap (W_1 + W_2)$ với $x_1 \in W \cap W_1$ và $x_2 \in W \cap W_2$.

Ta có $x_1 \in W_1 \subset W \Rightarrow x_2 \in W$

Mà $x_2 \in W_2 \Rightarrow x_2 \in (W \cap W_2)$ và $x_1 \in W_1 = (W \cap W_1)$

Suy ra $x \in (W \cap W_1) + (W \cap W_2)$

Từ đó có điều phải chứng minh.

c)

Chiều thuận:

Cho $x = x_1 + x_2 \in W \cap W_1 + W \cap W_2$

Hiển nhiên $x \in W$

Mà $\begin{cases} x_1 \in W_1 \\ x_2 \in W \cap W_2 \end{cases} \Rightarrow x \in \big(W_1 + (W \cap W_2)\big)$

Suy ra $W \cap W_1 + W \cap W_2 \subset \big(W_1 + (W \cap W_2)\big)$.

Chiều nghịch:

Cho $x = x_1 + x_2 \in W \cap \big(W_1 + (W \cap W_2)\big)$ với $x_1 \in W \cap W_1$ và $x_2 \in W \cap W_2$.

Ta có $x_2 \in W$, mà $x \in W$, suy ra $x_1 \in W$

Mà $x_1 \in W_1 \Rightarrow x_1 \in W \cap W_1$

$x_2 \in W \cap W_2$

Suy ra $W \cap W_1 + W \cap W_2 \supset \big(W_1 + (W \cap W_2)\big)$.

Ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh dưới làm tương tự.

Bài 3.9

Cho $\{W_j\}_{j \in I}$ là một họ các không gian con của không gian vectơ V sao cho với mọi $i, j \in I$, tồn tại $k \in I$ sao cho $W_i \cup W_j \subset W_k$. Chứng minh $\bigcup_{j \in I} W_j \leq V$.

Giải:

Ta có $\{0\} \in \bigcup_{j \in I} W_j \Longrightarrow \bigcup_{j \in I} W_j$ khác rỗng.

Xét $u, v \in \bigcup_{j \in I} W_j$ bất kì.

Nếu tồn tại i thỏa $u, v \in W_i$ thì $xu + yv \in W_i \subset \bigcup_{j \in I} W_j$. Suy ra điều phải chứng minh.

Ngược lại, tồn tại $i \neq j$ thỏa $u \in W_i, v \in W_j$ suy ra tồn tại k thỏa $W_i \cup W_j \subset W_k$, vậy ta có $u, v \in W_k \Rightarrow xu + yv \in W_k \subset \bigcup_{j \in I} W_j$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3.10

Cho $W_1, W_2, \dots, W_n$ là các không gian con của không gian vectơ V trên R. Chứng minh rằng $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ là không gian con của V khi và chỉ khi có một không gian con W_i chứa tất cả các không gian con W_j còn lại.

Giải

Chiều đảo:

Ta có $i, 1 \leq i \leq n: W_i \supset \bigcup_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} W_j \Rightarrow \bigcup_{1\leq j\leq n} W_j = W_i \Rightarrow \bigcup_{1\leq j\leq n} W_j \leq V$.

Chiều thuận:

Ta chứng minh quy nạp theo n

- $n = 1$ hiển nhiên.
- Giả sử bài toán đã đúng đến $n = k - 1 (k > 1)$
- Xét $n = k$.

Trường hợp 1: Tồn tại $i, 1 \leq i \leq k: W_i \subset \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j \Rightarrow \bigcup_{1\leq j\leq k} W_j = \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j$

Vậy $\bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j \leq V$ nên theo giả thuyết quy nạp tồn tại $l, 1 \leq l \leq k, l \neq i: W_l \supset \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i \\ j\neq l}} W_j$

$\Rightarrow \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j = W_l \Rightarrow W_l = \bigcup_{1\leq j\leq k} W_j \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $\forall i, 1 \leq i \leq k: W_i \not\supset \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j$.

Đặt u_i là vectơ thỏa $\begin{cases} u_i \in W_i \\ u_i \notin \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} W_j \end{cases}$

Xét tập $U = \mathbb{R}u_1 + u_2 = \{\alpha u_1 + u_2 | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\bigcup_{1\leq j\leq n} W_j \leq V \Rightarrow U \leq \bigcup_{1\leq j\leq n} W_j$(Do $u_1, u_2 \in \bigcup_{1\leq j\leq n} W_j$).

Do U có vô hạn phần tử nên có $x \neq y$ và có p sao cho $xu_1 + u_2; yu_1 + u_2 \in W_p \Rightarrow$

$(x - y)u_1 \in W_p$

$\Rightarrow u_1 \in W_p \Rightarrow p = 1$. Ta có $xu_1 + u_2 \in W_1$

$\Rightarrow u_2 \in W_1$(Trái với cách đặt)

Trường hợp này không thể xảy ra do đó bài toán được chứng minh.

Bài 3.11

Chứng minh R là không gian vectơ vô hạn chiều trên Q.

Giải

Chứng minh R là không gian vectơ trên Q

Bằng việc sử dụng các phép cộng và nhân thông thường ta chứng minh được R là không gian vectơ trên Q.

Chứng minh R là không gian vô hạn chiều trên Q

Giả sử ngược lại tức $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} < \infty$. Đặt $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Gọi $\{v_1, \dots v_n\}$ là một cơ sở của R trong Q.

Từ đây ta có $R = \mathbb{Q}v_1 + \cdots + \mathbb{Q}v_n$

Xét ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^n$ xác định như sau:

$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Ta chứng minh được các điều sau:

f đơn ánh

Thật vậy $\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x) = f(y)$

$x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n; y = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

$\Rightarrow x_i = y_i, \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow x = y$.

f toàn ánh

Thật vậy $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n \Rightarrow \begin{cases} q = q_1 v_1 + \cdots + q_n v_n \\ f(q) = (q_1, \dots, q_n) \end{cases}$

Vậy f là song ánh giữa R và $\mathbb{Q}^n$.

Điều trên là không thể xảy ra vì R là tập vô hạn không đếm được và $\mathbb{Q}^n$ là tập vô hạn đếm được nên điều giả sử sai.(Kết quả đếm được của Q và không đếm được của R khá phổ biến, bạn đọc tự chứng minh)

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.12

Chứng tỏ rằng trên Q có thể định nghĩa vô hạn cấu trúc không gian vectơ trên Q nhưng không thể xác định một cấu trúc không gian vectơ trên R.

Giải

Định nghĩa các cấu trúc không gian trên Q

Ta đã biết $\mathbb{Q}^n$ là 1 không gian vectơ trên Q với phép cộng và phép nhân ngoài được định nghĩa như sau:

$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n); \alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$.

Vì $\mathbb{Q}^n$ và Q là các tập vô hạn đếm được nên tồn tại song ánh $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^n$.

Chứng minh có vô số song ánh giữa Q và $\mathbb{Q}^n$

Lấy I là tập con bất kỳ có hữu hạn phần tử và có hơn một phần tử của Q.

Lấy σ là 1 phép hoán vị các phần tử trong I mà σ không phải phép đồng nhất.

Xét $f'(x) = \begin{cases} f(\sigma(x)), \forall x \in I \\ f(x), \forall x \in \mathbb{Q} \backslash I \end{cases}$

Ta vẫn có f' là 1 song ánh giữa Q và $\mathbb{Q}^n$ nhưng $f' \not\equiv f$.

Do có vô hạn tập con như vậy nên ta cũng có vô số song ánh.

Với mỗi f ta xây dựng phép cộng và phép nhân ngoài của không gian vectơ Q như sau:

$$a \oplus b = f^{-1}\big(f(a) + f(b)\big); \alpha \odot a = f^{-1}\big(\alpha f(a)\big)$$

Kiểm tra các tính chất của phép cộng và phép nhân ở trên

i) $a \oplus b = f_n^{-1}\big(f_n(a) + f_n(b)\big) = f_n^{-1}\big(f_n(b) + f_n(a)\big) = b \oplus a.$

ii) $(a \oplus b) \oplus c = f_n^{-1}\big(f_n(a) + f_n(b)\big) \oplus c = f_n^{-1}\big(f_n(a) + f_n(b) + f_n(c)\big)$

$= a \oplus \ f_n^{-1}\big(f_n(b) + f_n(c)\big) = a \oplus (b \oplus c).$

iii) $f_n^{-1}(0, \dots ,0) \oplus a = f_n^{-1}\big((0, \dots ,0) + f_n(a)\big) = f_n^{-1}\big(f_n(a)\big) = a.$

$\Rightarrow f^{-1}(0, \dots ,0)$ là vectơ không.

iv) $a \in \mathbb{Q}$ thì $f_n^{-1}\big(-f_n(a)\big)$ là vectơ đối của a.

v) $(\alpha\beta) \odot a = f_n^{-1}\big((\alpha\beta)f_n(a)\big) = f_n^{-1}\left(\alpha\big(\beta f_n(a)\big)\right) = \alpha \odot (\beta \odot a)$

vi) $(\alpha + \beta) \odot a \ = f_n^{-1}\big((\alpha + \beta)f_n(a)\big) = f_n^{-1}\big(\alpha f_n(a) + \beta f_n(a)\big)$

$= f_n^{-1}\big(\alpha f_n(a)\big) \oplus f_n^{-1}\big(\beta f_n(a)\big) = \ \alpha \odot a \oplus \beta \odot a.$

vii) $\alpha \odot (a \oplus b) = f_n^{-1}\left(\alpha\big(f_n(a) + f_n(b)\big)\right) = f_n^{-1}\big(\alpha f_n(a) + \alpha f_n(b)\big) =$

$\alpha \odot a \oplus \alpha \odot b.$

viii) $1 \odot a = f_n^{-1}\big(1. f_n(a)\big) = a.$

Vậy ta có vô số cách xây dựng không gian vectơ Q trên Q.

Không xây dựng được cấu trúc nào trên $\boldsymbol{R}$

Ta giả sử ngược lại tức có cách xây dựng được một cấu trúc không gian vectơ trên R.

v là 1 vectơ khác vectơ không trong Q.

Có $Rv \leq \mathbb{Q}$

Ta chứng minh Rv là tập không đếm được.

Thật vậy xét $g: \mathbb{R}v \to \mathbb{R}: g(\alpha v) = \alpha$ thì g là song ánh.

Do R là tập không đếm được nên Rv không đếm được.

Mà Q đếm được nên điều giả sử là sai. Ta có được điều phải chứng minh.

Bài 3.13

Cho V là không gian vectơ có tập sinh T hữu hạn và S là tập con độc lập tuyến tính của V.

Chứng minh rằng tồn tại $T' \subseteq T$ sao cho $S \cup T'$ là một cơ sở của V.

Giải

Xét $dimV = n$ và $S = \{v_1, \dots, v_{n-j}\}(0 \leq j \leq n-1)$

Vì T là tập sinh của V nên ta có thể lấy $\mathcal{B}_0 \subseteq T$ sao cho $\mathcal{B}_0$ là cơ sở của T

Xét $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \dots, u_n\}$.

Nếu $j = n$ thì chọn $T' = \emptyset$.

Nếu $j < n$ ta chứng minh $\exists i_1, u_{i_1} \in \mathcal{B}_0 : u_{i_1} \notin \langle S \rangle$.

Thật vậy nếu $\forall i : u_i \in \langle S \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_0 \subseteq \langle S \rangle \Rightarrow V = \langle S \rangle$(Vô lý)

Vậy $\exists i_1, u_{i_1} \in \mathcal{B}_0 : u_{i_1} \notin \langle S \rangle$.

Xét $S_1 = S \cup \{u_{i_1}\}$. Theo **hệ quả 3.5.18** thì S_1 là độc lập tuyến tính.

Ta tiếp tục thực hiện như trên ta lấy được $i_k : u_{i_k} \in \mathcal{B}_0 : u_{i_k} \notin \langle S_{k-1} \rangle, \forall 1 \leq k \leq j$.

Với $S_k = S_{k-1} \cup \{u_{i_k}\}$.

Ta có được $S_j = S \cup \left\{u_{i_1}, \dots, u_{i_j}\right\}$ là độc lập tuyến tính và có n phần tử nên là cơ sở của V.

Vì $\left\{u_{i_1}, \dots, u_{i_j}\right\} \subseteq \mathcal{B}_0 \subseteq T$ nên ta có được điều phải chứng minh.

Bài 3.14

a) Chứng minh rằng nếu S là tập con của $R[x]$ gồm các đa thức có bậc khác nhau thì S độc lập tuyến tính.

b) Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, đặt: $V_a = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(a) = 0\}$. Chứng minh rằng $V_a \leq \mathbb{R}[x]$ và với mọi

$a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, ta có $R[x] = V_a + V_b$. Tìm một cơ sở của $V_a \cap V_b$.

Giải

a)

Ta chứng minh nếu $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}[x]$ là các đa thức bậc khác nhau thì

$$\deg(f_1 + f_2 + \dots + f_k) = \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_n)\}$$

Quy nạp theo k:

- $k = 1$ Hiển nhiên.
- $k = 2$

Không mất tính tổng quát giả sử $u = \deg f_1 > \deg f_2 = v$

$f_1 = a_u x^u + \dots + a_0 (a_u \neq 0); f_2 = b_v x^v + \dots + b_0 (b_v \neq 0)$

$\Rightarrow f_1 + f_2 = a_u x^u + \dots + (a_v + b_v) x^v + \dots + a_0 + b_0 \Rightarrow \deg(f_1 + f_2) = u$

- $k = i - 1$ đã đúng.
- Xét $k = i$

Đặt $g = f_1 + \dots + f_{i-1} \in \mathbb{R}[x]$ thì ta có $\deg g = \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_{i-1})\}$

Vì $\deg f_i \neq \deg f_j \ \forall 1 \leq j < i \Rightarrow \deg f_i \neq \deg g$.

$\Rightarrow \deg(g + f_i) = \max\{\deg g, \deg f_i\} \Rightarrow \deg(f_1 + \dots + f_i)$

$= \max\{\max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_{i-1})\}, \deg f_i\}$

$\Rightarrow \deg(f_1 + \dots + f_i) = \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_i)\}$

Vậy mệnh đề trên đúng.

Ta xét S là tập hữu hạn, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Từ mệnh đề đã chứng minh trên ta có $\deg(\alpha_1 s_1 + \cdots \alpha_n s_n) \geq \deg \alpha_i s_i, \forall 1 \leq i \leq n$(Do nếu $\alpha_i = 0$ thì ta chỉ cần không xét s_i trong tổng và do lúc đó $\deg \alpha_i s_i = 0$ nên bất đẳng thức trên vẫn đúng)

Từ bất đẳng thức trên nên:

Nếu $\alpha_1 s_1 + \cdots \alpha_n s_n = 0 \Rightarrow \deg \alpha_i s_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \alpha_i = 0 \\ s_i = c (c \text{ là hằng số}) \end{array}\right.$

Giả sử có hàm hằng trong S.

Do S chỉ có các hàm khác bậc nhau ⇒Tồn tại duy nhất m để $s_m = c \Rightarrow \alpha_m c = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \alpha_m = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$

Do đó nếu S không có hàm hằng bằng 0 thì S độc lập tuyến tính.

Xét S vô hạn. Ta xét $S' \subseteq S$ là tập con hữu hạn bất kỳ thì theo tính chất đã xét trên thì S' độc lập tuyến tính nếu S' không chứa hàm hằng 0.

Nên S độc lập tuyến tính nếu S không chứa hàm hằng 0.

b)

Chứng minh $\boldsymbol{V_a} \leq \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$

Hiển nhiên hàm hằng 0 thuộc V_a.

$\forall f, g \in V_a \Rightarrow f(a) = 0, g(a) = 0 \Rightarrow f(a) + \alpha g(a) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f + \alpha g \in V_a, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V_a \leq \mathbb{R}[x]$.

Chứng minh $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{V_a} + \boldsymbol{V_b}, \forall \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$

Hiển nhiên $V_a + V_b \leq \mathbb{R}[x]$.

Ta chứng minh $V_a + V_b \geq \mathbb{R}[x]$ tức $\forall f \in \mathbb{R}[x]$ thì luôn có $f_a \in V_a, f_b \in V_b : f = f_a + f_b$.

Với $a \neq b$ thì $x - a$ và $x - b$ là 2 đa thức nguyên tố cùng nhau nên có g_a, g_b thỏa

$(x - a)g_a + (x - b)g_b = 1 \Rightarrow (x - a)g_a f + (x - b)g_b f = f$

Vậy chọn $f_a = (x-a)g_a f$ và $f_b = (x-b)g_b f$ ta có điều phải chứng minh.

Tìm cơ sở của $V_a \cap V_b$

Ta có

$f \in V_a \cap V_b$

$\Leftrightarrow f(a) = f(b) = 0$

$\Leftrightarrow f \,\vdots\, (x-a)(x-b)$

$\Leftrightarrow V_a \cap V_b = \{(x-a)(x-b)g \mid g \in \mathbb{R}[x]\}$.

Từ điều trên ta chứng minh được nếu $B = \{u_1, u_2, \dots\}$ là cơ sở của $R[x]$ thì

$(x-a)(x-b)\mathcal{B} = \{(x-a)(x-b)u_1, \dots\}$ là một cơ sở của $V_a \cap V_b$.

Bài 3.15

Xét xem các vector sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $(1,1,1)$ và $(0,1,-2)$;

b) $(-1,1,0)$ và $(0,1,2)$;

c) $(1,1,0), (1,1,1)$ và $(0,1,-1)$;

d) $(0,1,1), (1,2,1)$ và $(1,5,3)$;

e) $(1,-2,3,-4), (3,3,-5,1)$ và $(3,0,3,-10)$.

Giải:

a) Lập ma trận A bằng cách xếp các ma trận $(1,1,1)$ và $(0,1,-2)$ thành các dòng

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Hiển nhiên $r(A) = 2$ nên $(1,1,1)$ và $(0,1,-2)$ độc lập tuyến tính.

b) Độc lập tuyến tính.

c) Độc lập tuyến tính.

d) Độc lập tuyến tính.

e) Độc lập tuyến tính.

Bài 3.16

Cho V là một không gian vector trên trường K, $S = \{u_{1,}u_{2,} \dots, u_n\}$ là một tập hợp hữu hạn các vector trong V và A là một tập con khác $\emptyset$ của S.Chứng minh rằng:

a) Nếu A phụ thuộc tuyến tính thì S cũng phụ thuộc tuyến tính;

b) Nếu S độc lập tuyến tính thì A cũng độc lập tuyến tính.

Giải:

a) Do ta có thể đổi thứ tự các vector trong S nên không mất tính tổng quát ta đặt:

$A = \{u_{1,}u_{2,} \dots, u_m\}$ $(m < n)$.

A phụ thuộc tuyến tính suy ra tồn tại vector $u_k \in A$ có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại. Tức là tồn tại $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m, i \neq k)$ thỏa

$$u_k = \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{m} \alpha_i u_i$$

Ta lại có

$$u_k = \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i u_i$$

với $\alpha_i = 0\ \forall i > m$. Suy ra S phụ thuộc tuyến tính.

b) S độc lập tuyến tính nên ta có

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$

Để chứng minh A độc lập tuyến tính ta cũng xét một bộ số tương tự như vậy, tức ta có

$b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0$

$\Leftrightarrow b_1x_1 + \cdots + b_mx_m + 0x_{m+1} + \cdots + 0x_n = 0$

$\Leftrightarrow b_1 = \cdots = b_m = 0 = \cdots = 0 = 0$ (vì S độc lập tuyến tính)

Vậy A độc lập tuyến tính.

Bài 3.17

Cho V là một không gian vector trên trường K và $u, v, w \in V$. Chứng minh rằng $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v, v + w, w + u\}$ độc lập tuyến tính.

Giải:

Chiều thuận:

Ta có

$a(u + v) + b(v + w) + c(u + w) = 0$

$\Leftrightarrow (a + c)u + (a + b)v + (b + c)w = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + a = 0 \end{cases}$ (vì u, v, w độc lập tuyến tính)

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$

Vậy $\{u + v, v + w, w + u\}$ độc lập tuyến tính.

Chiều đảo:

$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\right)(u + v) + \left(\frac{\beta + \gamma - a}{2}\right)(v + w) + \left(\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}\right)(u + w) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Vậy $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 3.18

Trong $\mathbb{R}^3$ chứng minh rằng không gian sinh bởi các vector $(1,2,3)$, $(-1,-1,2)$, và $(-1,1,12)$ trùng với không gian con sinh bởi các vector $(0,1,5)$ và $(1,3,8)$.

Giải:

Đặt A và B lần lượt là các ma trận có được bằng cách xếp các vector trong hai không gian theo dòng. Tức là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 12 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. Bằng cách đưa về dạng bậc thang rút gọn ta được

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Đặt $V = \langle (1,0,-7), (0,1,5) \rangle$. Khi đó ta thấy $W_A = V = W_B$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.19:

Trong $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1,1,2,4), u_2 = (2,-1,-5,2), u_3 = (1,-1,4,0), u_4 = (2,1,1,6)$. Chứng tỏ các vectơ trên phụ thuộc tuyến tính. Tìm 1 cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ này.

Gợi ý: Sử dụng 2 thuật toán trong bài 3.6 và 3.7 sách Đại số tuyến tính.

Giải:

Ta chứng minh ma trận A có được bằng cách dựng các vectơ thành cột không khả nghịch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra u_1, u_2, u_3, u_4 phụ thuộc tuyến tính.

Tìm cơ sở

Ta tìm ma trận bậc thang của ma trận B có được bằng cách dựng các vectơ thành dòng

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Suy ra cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ trên là: $B = \big((1,0,0,2),(0,1,0,2),(0,0,1,0)\big)$.

Bài 3.20

Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases}6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0\\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_5 = 0\\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0\end{cases}$

d) $\begin{cases}x_1 - x_3 + x_5 = 0\\ x_2 - x_4 + x_6 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 - x_6 = 0\\ x_1 - x_4 + x_5 = 0\end{cases}$

e) $\begin{cases}5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0\\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0\\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0\end{cases}$

Giải:

Bài tập này là giải hệ phương trình đơn giản nên ở đây chỉ giải mẫu câu a, các câu còn lại chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

a) Lập ma trận hệ số và thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng ta được:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-3d_2]{d_2:=-2d_2+d_1} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_2:=\frac{d_2}{3}} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có số chiều của không gian nghiệm bằng $5 - rank(A) = 5 - 2 = 3$; một cơ sở của không gian nghiệm có thể lấy là $\{(-2,0,3,0,0), (0,-1,0,1,0), (1,2,0,0,1)\}$.

b) Số chiều của không gian nghiệm là 2 và một cơ sở của không gian nghiệm là $\{(1,-2,1,0,0), (15,-12,0,1,1)\}$.

c) Số chiều của không gian nghiệm là 2 và một cơ sở của không gian nghiêm là $\{(2,1,0,0), (2,0,-5,7)\}$.

d) Số chiều của không gian nghiệm là 2 và một cơ sở của không gian nghiệm là $\{(0,1,1,1,1,0), (0,-1,0,0,0,1)\}$.

e) Số chiều của không gian nghiệm là 2 và một cơ sở của không gian nghiệm là $\{(0,1,3,0,0), (0,-2,0,0,3)\}$.

Bài 3.21:

Trong không gian vectơ K^4 xét các vectơ sau đây:

$u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (2,1,3,1), u_3 = (7,8,9,5), u_4 = (1,2,1,0), u_5 = (2,-1,0,1), u_6 = (-1,1,1,1), u_7 = (1,1,1,1)$.

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W = \langle u_4, u_5, u_6, u_7 \rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con $U, W, U + W, U \cap W$.

Gợi ý: Sử dụng 2 thuật toán trong bài 3.6 và 3.7 sách Đại số tuyến tính.

Giải:

Tìm cơ sở của U, W, ta làm tương tự 3.19, ta có:

Cơ sở của U là $B = \left(\left(1,0,0,\frac{1}{3}\right), \left(0,1,0,\frac{1}{3}\right), (0,0,1,0)\right)$.

Cơ sở của W là $C = \big((1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,2)\big)$.

Suy ra $U + W = \langle B \cup C \rangle = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 \rangle$.

Ta chứng minh được $U + W = \mathbb{R}^4$, tức là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ cũng là cơ sở của $U + W$. Chọn cơ sở chính tắc B_0.

Tìm cơ sở $U \cap W$

Ta có với mọi $x \in U \cap W$, tồn tại x_i $(i \in \{1, \dots, 7\})$ thỏa

$$\begin{cases} x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \\ x = x_4u_4 + x_5u_5 + x_6u_6 + x_7u_7 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4(-u_4) + x_5(-u_5) + x_6(-u_6) + x_7(-u_7) = 0$

Ta giải hệ phương trình tìm được nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = 33a - 27b + 3c \\ x_2 = 41a - 39b + c \\ x_3 = -13a + 15b + c \\ x_4 = 6a + 9b + 3c \\ x_5 = 9a \\ x_6 = 9b \\ x_7 = 9c \end{cases}$$

Tức là

$x = (-6a - 9b - 3c)u_4 - 9au_5 - 9bu_6 - 9cu_7$

$= a(-6u_4 - 9u_5) + b(-9u_4 - 9u_6) + c(-3u_4 - 9u_7)$

Suy ra

$U \cap W = \langle -6u_4 - 9u_5, -9u_4 - 9u_6, -3u_4 - 9u_7 \rangle$

$= \langle(-24,-3,-6,-9),(0,-27,-18,-9),(-12,-15,-12,-9)\rangle$

Áp dụng cách làm như trên ta có cơ sở của $U \cap W$ là $E = \left(\left(1,0,\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right),\left(0,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$.

Bài 3.22:

Trong không gian K^4 cho các vectơ $u = (1,1,0,-1), v = (1,0,0,-1), w = (1,0,-1,0)$.

Đặt $U = \langle u, v, w\rangle$ và $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

a) Chứng tỏ rằng W là một không gian con của V.

b) Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con $U, W, U + W, U \cap W$.

Gợi ý: Sử dụng 2 thuật toán trong bài 3.6 và 3.7 sách Đại số tuyến tính.

Giải:

a)

Hiển nhiên $0 \in W$.

Xét $w_1 = (a,b,c,d) \in W, w_2 = (e,f,g,h) \in W, \alpha, \beta \in K$.

Ta có: $\alpha w_1 + \beta w_2 = (\alpha a + \beta e, \alpha b + \beta f, \alpha c + \beta g, \alpha d + \beta h)$

Ta có

$(\alpha a + \beta e) + (\alpha b + \beta f) - (\alpha c + \beta g) + 2(\alpha d + \beta h)$

$= \alpha(a + b - c + 2d) + \beta(e + f - g + 2h) = 0$

Suy ra $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$

Vậy $W \leq V$.

b)

Ta có thể viết lại W như sau

$W \ = \{(-a + b - 2c, a, b, c)|a, b, c \in K\}$

$\quad = \{-a(1,-1,0,0) + b(1,0,1,0) - c(2,0,0,-1)|a, b, c \in K\}$

$= \langle (1,-1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,-1) \rangle$.

Tương tự câu trên ta có cơ sở của U, W lần lượt là:

$B = \big((1,0,0,-1), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\big), C = \big((2,0,0,-1), (0,2,0,-1), (0,0,2,1)\big)$.

Và cơ sở của $U + W$ là cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbb{R}^4$.

Tìm cơ sở $U \cap W$

Ta có với mọi $x \in U \cap W$, tồn tại $x_i \in \{1, \dots, 6\}$ thỏa

$$\begin{cases} x = x_1 u + x_2 v + x_3 w \\ x = x_4 u_1 + x_5 u_2 + x_6 u_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 u + x_2 v + x_3 w + x_4(-u_1) + x_5(-u_2) + x_6(-u_3) = 0$

Ta giải hệ phương trình tìm được nghiệm:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (2a + b, -2a, -a, -2a - b, a, b)$

Tức là $x = (2a + b)u - 2av - aw = a(2u - 2v - w) + bu$.

Suy ra $U \cap W = \langle 2u - 2v - w, u \rangle = \langle (-1,2,1,0), (1,1,0,-1) \rangle$.

Nhận thấy 2 vectơ này độc lập tuyến tính nên đây cũng chính là cơ sở của $U \cap W$.

Bài 3.23:

Trong K^4 cho các vectơ $u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (1,1,1,0), v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,3,0,1)$ và $U = \langle u_1, u_2 \rangle, W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Tính $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$.

Hướng dẫn:

Đối với dạng bài này có 2 cách giải quyết:

1) Tìm cơ sở rồi tìm số chiều (định nghĩa).

2) Sử dụng công thức đã được chứng minh:

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Ở đây sẽ sử dụng cách thứ hai để chứng minh.

Giải:

Nhận xét thấy rằng cặp u_1, u_2 và cặp v_1, v_2 độc lập tuyến tính từng cặp, vì thế chúng lần lượt là cơ sở của U, W.

Suy ra $\dim(U) = \dim(W) = 2$.

Tương tự bài 3.19 ta có cơ sở của $U + W$ là: $B = \big((1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\big)$.

Suy ra $\dim(U + W) = 3$.

Ta có $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Chú ý: Ta có thể áp dụng cách tính số chiều của giao hai không gian như thế này để kiểm tra lại những dạng bài yêu cầu tìm cơ sở của chúng, vì số vectơ cơ sở cũng chính là số chiều.

Bài 3.24

Trong K^4 cho các vector $u_1 = (1,1,1,1); u_2 = (1,-1,1,-1); u_3 = (1,3,1,3); v_1 = (1,2,0,2); v_2 = (1,2,1,2); v_3 = (3,1,3,1)$ và $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle; W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Tính $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$.

Giải:

Làm tương tự bài 3.23.

$$\dim(U + W) = 3; \dim(U \cap W) = 2$$

Bài 3.25

Trong không gian vector $\mathbb{C}^3$ cho các vector sau: $u_1 = (1,0,i); u_2 = (-2,1+i,0); u_3 = (-1,1,1); u_4 = (\sqrt{2}, i, 3)$.

a) Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2\rangle; W_2 = \langle u_3, u_4\rangle$.Hãy tìm cơ sở và số chiều cho các không gian con $(W_1 + W_2)$ và $(W_1 \cap W_2)$.

b) Vector u_1 có thuộc không gian con $W = \langle u_2, u_3 \rangle$ không?

c) Hãy tìm một cơ sở cho không gian con sinh bởi các vector u_1, u_2, u_3, u_4.

Giải:

a) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -2 & 1+i & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & i & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3$ và $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ là một cơ sở của $(W_1 + W_2)$.

Ta có $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Xét $x = W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta: x = \alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma u_3 + \delta u_4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -\gamma + \delta\sqrt{2} \\ \beta(1+i) = \gamma + \delta i \\ \alpha i = \gamma + 3\delta \end{cases}$

Giải hệ này ta chọn được $\alpha = 3 + \sqrt{2} + \left(-1 + \sqrt{2}\right)i, \beta = 4 + \left(1 - \sqrt{2}\right)i$. Suy ra $\{\alpha u_1 + \beta u_2\}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$.

b) Giả sử $u_1 \in W \Longrightarrow \exists \alpha, \beta: u_1 = \alpha u_2 + \beta u_3 \Longrightarrow \begin{cases} 1 = -2\alpha - \beta \\ 0 = \alpha(1+i) + \beta \\ i = \beta \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm, vậy giả sử ban đầu là sai. Vậy $u_1 \notin W$.

c) Theo câu a thì không gian này trùng với $\mathbb{R}^3$ và $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ là một cơ sở cần tìm.

Bài 3.26

Xét không gian vector V gồm tất cả các ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức C.

a) Chứng minh rằng V cũng là một không gian vector trên trường số thực R.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của V trên C.

c) Tìm một cơ sở và số chiều của V trên R.

d) Xét mối liên hệ giữa những số chiều nói trên với số chiều của không gian vector $\mathbb{C}$ trên R.

Giải:

a) Dễ dàng kiểm tra các tính chất trong định nghĩa, suy ra đây là không gian vector trên trường R.

b) Một cơ sở của V là $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$, suy ra $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 4$.

c) Một cơ sở của V là $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\i & 0\end{pmatrix}\right\}$, suy ra $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 8$.

d) Một cơ sở $\mathbb{C}$ trên R là $\{1, i\}$, suy ra $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Mối liên hệ: Gọi W là không gian tất cả các ma trận vuông phức cấp n. Khi đó $\dim_{\mathbb{C}}(W) = n^2$, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times n^2$.

Bài 3.27

Chứng minh rằng các vector $u_1 = (1,0,-1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (0,-3,2)$ lập thành một cơ sở của K^3. Tìm tọa độ của các vector của cơ sở chính tắc $e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)$ trong cơ sở (u_1, u_2, u_3).

Giải:

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\0 & -3 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \Longrightarrow u_1, u_2, u_3$độc lập tuyến tính. Mặt khác $\dim K^3 = 3$ nên $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của K^3.

Tìm tọa độ của $\boldsymbol{e_1}$ trong cơ sở $\boldsymbol{B = \{u_1, u_2, u_3\}}$

Ta tìm a, b, c thỏa $e_1 = au_1 + bu_2 + cu_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = 2b - 3c \\ 0 = -a + b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{10} \\ b = \dfrac{3}{10} \\ c = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow [e_1]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{10} \\ \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Tương tự ta có

$$[e_2]_B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}, [e_3]_B = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Bài 3.28

Chứng minh rằng các vector $u_1 = (1,1,0,0); u_2 = (0,0,1,1); u_3 = (1,0,0,4); u_4 = (0,0,0,2)$ lập thành một cơ sở trong K^4.Tìm tọa độ các vector của cơ sở chính tắc $e_1 = (1,0,0,0); e_2 = (0,1,0,0); e_3 = (0,0,1,0); e_4 = (0,0,0,1)$ trong cơ sở (u_1, u_2, u_3, u_4).

Giải:

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1, u_2, u_3, u_4$ độc lập tuyến tính.

Mặt khác $\dim K^4 = 4$ nên $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của K^4.

Tương tự bài 3.27 ta có

$$[e_1]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, [e_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, [e_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, [e_4]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bài 3.29

Cho $u = (\alpha_1, \alpha_2)$ và $v = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ thỏa

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Chứng minh rằng $\{u, v\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Tìm tọa độ của $w = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ trong cơ sở (u, v).

Giải

Chứng minh $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ độc lập tuyến tính

Xét ma trận A được sinh bởi tọa độ của u, v trong cơ sở chính tắc, tức $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \det A = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

Giả sử $\det A = 0 \Rightarrow \alpha_1\beta_2 = \beta_1\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2\beta_2 = \alpha_1\beta_1\alpha_2 \\ \alpha_1\beta_2\alpha_2 = \beta_1\alpha_2^2 \end{cases}$ (1)

Ta có $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_2 = 0 \\ \alpha_1^2\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_2 = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\beta_2 = 0 \\ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$. (Trái giả thiết)

Vậy $\det A \neq 0$ nên u, v độc lập tuyến tính.

Do đó $B = (u, v)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Tìm tọa độ của $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Vậy tọa độ của w là:

$$[w]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}\begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta_2 - \beta_1\beta}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \\ \dfrac{-\alpha\alpha_2 + \alpha_1\beta}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \end{pmatrix}$$

Bài 3.30

Cho α là một số thực bất kỳ, hãy chứng minh họ

$$\mathcal{C} = (1, t - \alpha, (1 - \alpha)^2, \dots, (t - \alpha)^n)$$

Tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}_n[t]$. Từ đó hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}_n[t]$ sang cơ sở C.

Giải

Xét ma trận P được sinh bởi tọa độ các vectơ của C trong cơ sở chính tắc $\mathcal{C}_0 = (1, t, t^2, \dots, t^n)$

Tức $P = \left([1]_{\mathcal{C}_0}\ [t-\alpha]_{\mathcal{C}_0}\ \dots\ [(t-\alpha)^n]_{\mathcal{C}_0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & \cdots & (-\alpha)^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & \cdots & C_n^{n-1}(-\alpha)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & C_n^{n-2}(-\alpha)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Vì P là ma trận khả nghịch nên C là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[t]$.

Đồng thời cũng có $P = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})$.

Bài 3.31

Cho $V = \mathbb{R}_2[t]$ là không gian các đa thức bậc ≤ 2 trên R và a là một số thực cố định. Giả sử $g_1(t) = 2; g_2(t) = t + a; g_3(t) = t^2 + 2at + 3a^2$.

a) Chứng minh $B = (g_1, g_2, g_3)$ là một cơ sở của V.

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$ nếu $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Giải

Xét ma trận P được sinh bởi tọa độ các vectơ của B trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = (1, t, t^2)$

Ta có $P = \begin{pmatrix} 2 & a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P khả nghịch nên B là một cơ sở của V.

Ta có $[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[f]_{\mathcal{B}_0} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Ta tính được $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{a^2}{2} & -2a & 1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0}{2} \\ a_1 - \dfrac{aa_0}{2} \\ -\dfrac{a_0a^2}{2} - 2a_1a + a_2 \end{pmatrix}$$

Bài 3.32

Cho W là không gian con của K^4 sinh bởi các vector $u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1)$ và $u_3 = (-2,0,-4,3)$.

a) Chứng tỏ rằng $B = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của *W.*

b) Tìm điều kiện để $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$. Với điều kiện này hãy tìm $[x]_B$.

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0), v_2 = (0,2,0,1), v_2 = (0,0,0,3)$. Chứng tỏ rằng $B' = (v_1, v_2, v_3)$ là một cơ sở của *W.*

d) Xây dựng ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Giải:

a) Đặt A là ma trận có được bằng cách xếp các vector u_1, u_2, u_3 thành dòng. Khi đó ta có

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy B vừa độc lập tuyến tính vừa là tập sinh, suy ra B là một cơ sở của W.

b) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \Leftrightarrow \exists a, b, c: x = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow A^T Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ có nghiệm. Xét ma trận bổ sung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & -4 & x_3 \\ 1 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3x_1 - x_2 + 2x_4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-6x_1 + 5x_2 - 4x_4}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-x_2 + 2x_4}{6} \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Vậy hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi $x_3 = 2x_1$. Khi đó nghiệm của hệ cũng là tọa độ của x trong B

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{3x_1 - x_2 + 2x_4}{3} \\ \dfrac{-6x_1 + 5x_2 - 4x_4}{6} \\ \dfrac{-x_2 + 2x_4}{6} \end{pmatrix}$$

c) Ta thấy các vector v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $x_3 = 2x_1$nên theo câu b) các vector này thuộc W, tức là $\langle B' \rangle \subset W$.

Mặt khác ta kiểm tra được rằng B' độc lập tuyến tính nên $\dim\langle B' \rangle = 3 = \dim W$. Vậy $\langle B' \rangle = W$.

d) Dùng kết quả của câu b) ta có :

$$[v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; [v_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; [v_3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra $(B \longrightarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 3.33

Trong K^4, cho các vector $u_1 = (1,1,-2,1), u_2 = (3,0,4,-1), u_3 = (-1,2,5,2), v_1 = (4,-5,9,-7), v_2 = (3,1,-4,4), v_3 = (-1,1,0,1)$.

a) Chứng tỏ rằng $B = (u_1, u_2, u_3)$ độc lập tuyến tính.

b) Kiểm chứng xem tập hợp $B' = (v_1, v_2, v_3)$ có phải là cơ sở của không gian con W của K^4 sinh bởi các vector u_1, u_2, u_3 hay không?

Giải:

a) Đặt A là ma trận có được bằng cách xếp các vector u_1, u_2, u_3 thành dòng. Khi đó ta có

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & -1 \end{pmatrix}$. Như vậy $\operatorname{rank}(A) = 3 =$ số vector của hệ.

Do đó hệ (u_1, u_2, u_3) độc lập tuyến tính.

b) Tương tự câu 3.32b, ta tìm điều kiện để $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W = \langle B \rangle$. Ta có ma trận bổ sung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 2 & x_2 \\ -2 & 4 & 5 & x_3 \\ 1 & -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4}{12} \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{3x_1 - 14x_2 + x_3 + 13x_4}{12} \end{array}\right)$$

Vậy $x \in W \Leftrightarrow 3x_1 - 14x_2 + x_3 + 13x_4 = 0$. Suy ra $v_2 \notin W$ nên $\langle B \rangle \neq \langle B' \rangle$.

Bài 3.34

Trong K^3, cho các vector $u_1 = (2,1,-1), u_2 = (2,-1,2), u_3 = (3,0,1), v_1 = (-3,1,2), v_2 = (1,-2,5), v_3 = (2,4,1)$.

a) Kiểm tra $B = (u_1, u_2, u_3)$ và $B' = (v_1, v_2, v_3)$ là các cơ sở của K^3.

b) Tìm $[u]_{B'}, v, [w]_B$ nếu biết $u = (1,2,3) \in K^3, [v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ và $[w]_{B'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Giải:

a) Đặt ma trận A là ma trận có được bằng cách xếp u_1, u_2, u_3 thành dòng. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suy ra $r(A) = 3$ nên B độc lập tuyến tính. Vậy B là cơ sở của K^3.

Làm tương tự ta cũng suy ra được B' là cơ sở của K^3.

b) **Tính $[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{B'}}$**

Với $u = (1,2,3)$, ta phải tìm x, y, z thỏa $u = xv_1 + yv_2 + zv_3$ tức là phải tìm nghiệm của phương trình $UX = B$.

Trong đó $U = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x = \frac{20}{91} \\ y = \frac{5}{13} \\ z = \frac{58}{91} \end{cases}$. Vậy $[u]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{20}{91} \\ \frac{5}{13} \\ \frac{58}{91} \end{bmatrix}$

Tính $\boldsymbol{v}$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 4u_1 + 5u_2 + 6u_3 = (36, -1, 12)$$

Tính $[\boldsymbol{w}]_{\boldsymbol{B}}$

Làm tương tự câu b tìm được w, rồi làm tương tự câu a ta được

$$[w]_B = \begin{pmatrix} -292 \\ -319 \\ 409 \end{pmatrix}$$

Bài 3.35

Trong K^4, cho các vector $u_1 = (1,1,-1,0), u_2 = (-2,3,4,1), u_3 = (-1,4,3,2), v_1 =$ $(1,1,-1,-1), v_2 = (2,7,0,3), v_3 = (2,7,0,2)$ và đặt $W = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$.

a) Kiểm tra $B = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in K^4$.Tìm điều kiện để $u \in W$và với điều kiện đó hãy tìm $[x]_B$.

c) Kiểm $B' = (v_1, v_2, v_3)$ là một cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(B \longrightarrow B')$.

d) Tìm $[u]_B, v, [w]_A$nếu biết $u = (a, b, c, d) \in W, [v]_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, [w]_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Giải:

Câu a,b,c giải tương tự 3.32, câu d làm tương tự 3.34b nên ở đây chỉ có đáp án cho sinh viên tham khảo.

b)

$u \in W \Leftrightarrow -7a + 2b - 5c = 0.$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{5a + 3c - 2d}{2} \\ a + c - d \\ \dfrac{-a - c + 2d}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$[v_1]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; [v_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; [v_3]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Suy ra $(B \longrightarrow B') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 3.36

Cho A, B là hai ma trận cùng loại. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Giải:

Gọi V_A, V_B, V lần lượt là không gian dòng của $A, B, A+B$. Suy ra $\dim V_A = \operatorname{rank} A$, $\dim V_B = \operatorname{rank} B$ và $\dim V = \operatorname{rank}(A+B)$

Ta chứng minh được: $V \subset V_A + V_B$ (xem như bài tập).

Khi đó $\dim V \leq \dim V_A + \dim V_B$ hay $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Nhận xét: Ta cũng có bất đẳng thức $\operatorname{rank}(A-B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. Chứng minh xem như bài tập.

Bài 3.37*

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh bất đẳng thức Sylvester

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

Giải:

Chứng minh $\mathbf{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathbf{min}\{\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}), \mathbf{rank}(\boldsymbol{B})\}$:

Ta chứng minh $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$:

Ta đã biết rằng $\operatorname{rank}(AB)$ chính là số cột độc lập tuyến tính của AB. Nếu để ý kĩ ta sẽ thấy (và có thể chứng minh) mỗi cột của AB là một tổ hợp tuyến tính của các cột của A. Do đó số cột độc lập tuyến tính trong AB không thể nhiều hơn số cột độc lập tuyến tính của A. Tức là $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$.

Chứng minh $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$: lý luận tương tự nhưng dùng dòng thay vì cột.

Vậy $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Chứng minh $\mathbf{rank}\,\boldsymbol{A} + \mathbf{rank}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{n} \leq \mathbf{rank}(\boldsymbol{AB})$:

Bài giải này sẽ sử dụng kiến thức của chương 4, các bạn nên tìm hiểu trước về ánh xạ tuyến tính trước khi xem.

Đặt φ, ψ là các toán tử tuyến tính trong K^n nhận A, B làm cơ sở chính tắc. Khi đó theo các công thức của ánh xạ tuyến tính, ta có

$$\begin{aligned}\det(AB) = \dim\big(\varphi\psi(K^n)\big) &= \dim\big(\psi(K^n)\big) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi|_V)) \\ &\geq \dim\big(\psi(K^n)\big) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) \\ &= \dim\big(\psi(K^n)\big) - n + \dim\big(\varphi(K^n)\big) \\ &= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n.\end{aligned}$$

Bài 3.38*

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa $AB = 0$. Chứng minh $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$, hơn nữa, với mọi k thỏa $\operatorname{rank} A \leq k \leq n$, luôn tìm được ma trận C sao cho $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C = k$ và $AC = 0$.

Giải:

Bài này sẽ áp dụng 3.37 và sử dụng bổ đề dưới đây.

<u>Bổ đề:</u> Với $X, Y \in M_n(K)$. X khả nghịch thì $\operatorname{rank} XY = \operatorname{rank} YX = \operatorname{rank} Y$.

Chứng minh:

Gọi φ, ψ là các toán tử tuyến tính trên K^n nhận X, Y là các ma trận chính tắc. Do X khả nghịch nên φ là đẳng cấu. Ta có:

$\operatorname{rank} XY = \dim \varphi\psi(K^n) = \dim \varphi(\psi(K^n)) = \dim \psi(K^n) = \operatorname{rank} Y$

$\operatorname{rank} YX = \dim \psi\varphi(K^n) = \dim \varphi\psi(K^n) = \dim \varphi(\psi(K^n)) = \dim \psi(K^n) = \operatorname{rank} Y$

Ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán: áp dụng bất đẳng thức Sylvester ở bài 3.37 ta suy ra được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ta sẽ xây dựng ma trận C thảo đề bài. Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên cột, ta biến A thành $A' = (E \quad 0)$ với $\in M_{n\times r}(K)$ $(r = \operatorname{rank} A)$. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $AP = A'$. Chọn $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}$ với $D \in M_{r\times n}(K)$. Khi đó $A'C' = 0$. Ta chọn D sao cho $\operatorname{rank} D = k - r$ và $C = PC'$. Khi đó $AC = A'P^{-1}PC' = A'C' = 0$. Mặt khác theo bổ đề: $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} D = k - r$. Suy ra $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C = k$.

Bài 3.39*

Cho A là hai ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = I_n$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{rank}(A + I_n) + \operatorname{rank}(A - I_n) = n.$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức của bài 3.36

$\operatorname{rank}(A + I_n) + \operatorname{rank}(A - I_n) \leq \operatorname{rank}\big(A + I_n - (A + I_n)\big) = \operatorname{rank}(2I_n) = n.$

Áp dụng bất đẳng thức Sylvester bài 3.38:

$\operatorname{rank}(A + I_n) + \operatorname{rank}(A - I_n) \leq n + \operatorname{rank}(A^2 - I_n^2) = n.$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.40*

Cho A là ma trận có hạng là r. Chứng minh rằng định thức con nằm trên giao điểm của r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính bao giờ cũng khác không.

Giải:

Ta có thể đổi dòng và cột của ma trận A vì điều này sẽ không thay đổi định thức (sai khác -1 lần) và hạng của A. Vậy không mất tính tổng quát giả sử r dòng đầu độc lập tuyến tính và r cột đầu độc lập tuyến tính. Nếu định thức con chính cấp r đầu tiên bằng 0 thì r dòng của ma trận đó phụ thuộc tuyến tính, suy ra tồn tại $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ thỏa

$\alpha_1(a_{11}, \dots, a_{1r}) + \cdots + \alpha_r(a_{r1}, \dots, a_{rr}) = (0, \dots, 0)$.

Vì r cột đầu độc lập tuyến tính nên với mỗi $i > r$ có $\beta_1, \dots, \beta_r$ sao cho

$(a_{1i}, \dots, a_{ri}) = \beta_1(a_{11}, \dots, a_{r1}) + \cdots + \beta_r(a_{1r}, \dots, a_{rr})$.

Suy ra

$\alpha_1 a_{1i} + \cdots + \alpha_r a_{ri} = \beta_1(\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_r a_{r1}) + \cdots + \beta_r(\alpha_1 a_{1r} + \cdots + \alpha_r a_{rr}) = 0.$

Cho i chạy mọi giá trị $i > r$ và từ hệ thức ban đầu ta suy ra được r dòng đầu của A phụ thuộc tuyến tính (Vô lý).

Bài 3.41*

Cho A là một ma trận phản xứng hệ số phức. Chứng minh rank A là một số chẵn.

Giải:

Đặt rank $A = r$ và các dòng thứ $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ độc lập tuyến tính. Do A phản xứng nên các cột có cùng chỉ số $n_1, \dots, n_r$ cũng độc lập tuyến tính. Theo bài 3.40 ma trận con D có các phần tử nằm trên giao của các cột và dòng này có định thức khác 0. Theo định nghĩa D như trên ta suy ra D phản xứng, tức là $D^T = -D$, suy ra $|D| = |D^T| = |-D| = (-1)^r|D|$. Ta nhận thấy nếu r lẻ thì $|D| = 0$ (vô lý).

Bài 3.42*

Chứng minh rằng hạng của một ma trận đối xứng được xác định bằng cấp cao nhất của định thức con chính khác 0 (định thức con chính là các định thức con xác định bởi các dòng và cột có cùng chỉ số).

Giải:

Cho các dòng với chỉ số $n_1 < \cdots < n_r$ là độc lập tuyến tính cực đại. Theo bài 3.40 thì định thức con chính nằm trên các dòng và cột có chỉ số như trên khác không.

Bài 3.43*

Chứng minh rằng hạng của một ma trận phản xứng được xác định bằng cấp cao nhất của định thức con chính khác 0.

Giải:

Hoàn toàn tương tự 3.42.

CHƯƠNG 4
Ánh xạ tuyến tính

Bài 4.1

Giả sử $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ là một đa thức với hệ số thực. Định nghĩa đa thức đạo hàm Df của f bởi

$$Df = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + a_1.$$

a) Chứng minh rằng D là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ $R[t]$. Ta gọi D là toán tử đạo hàm trong $R[t]$.

b) Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng tập hợp $R_n[t]$ gồm tất cả các đa thức $R[t]$ có bậc $\le n$ là một không gian con của $R[t]$.

c) Hãy xác định ảnh và nhân của toán tử đạo hàm D trong không gian vectơ $\mathbb{R}_3[t]$.

Giải

a)

Giả sử $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ và

$g(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0 \in \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow D(\alpha f + \beta g)$

$= D(\alpha a_n t^n + \alpha a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 t + \alpha a_0 + \beta b_m t^m + \beta b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + \beta b_1 t + \beta b_0)$

$= \alpha n a_n t^{n-1} + \alpha(n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + \alpha a_1 + \beta m b_m t^{m-1} + \beta(m-1) b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + \beta b_1$

$= \alpha Df + \beta Dg. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Vậy D là toán tử tuyến tính.

b)

Lấy bất kỳ hàm $f, g \in R_n[t]$. Không mất tính tổng quát giả sử $n \ge \deg f \ge \deg g$

$f(t) = a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \cdots + a_1 t + a_0, g(t) = b_q t^q + b_{q-1} t^{q-1} + \cdots + b_1 t + b_0.$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g = \alpha a_p t^p + \alpha a_{p-1} t^{p-1} + \cdots + \alpha a_1 t + \alpha a_0 + \beta b_q t^q + \beta b_{q-1} t^{q-1} + \cdots + \beta b_1 t + \beta b_0$

$= \alpha a_p t^p + \cdots + (\alpha a_q + \beta b_q) t^q + \cdots + (\alpha a_0 + \beta b_0)$

$\Rightarrow \deg(\alpha f + \beta g) \leq p \leq n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R_n[t], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vậy $R_n[t] \leq \mathbb{R}[t]$.

c)

Với $f = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}_3[t] \Rightarrow Df = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \in \mathbb{R}_2[t]$

$\Rightarrow ImD \subset \mathbb{R}_2[t]$

Với $g = b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \in \mathbb{R}_2[t]$

Chọn $h = \frac{b_2}{3} t^3 + \frac{b_1}{2} t^2 + b_0 t \in \mathbb{R}_3[t]$ thì $Dh = g$

$\Rightarrow \mathbb{R}_2[t] \subset ImD$

Vậy $ImD = \mathbb{R}_2[t]$.

Ta tìm $f = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}_3[t]: Df \equiv 0$.

Tức $3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \equiv 0 \Rightarrow a_3 = a_2 = a_1 = 0$.

Vậy $f = a_0$ tức $KerD = \{f \in \mathbb{R}_3[t] | f \equiv c, c$ là hằng số$\}$.

Bài 4.2

Hãy xây dựng một ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ thỏa điều kiện

$$f(1,-1,1) = (1,0) \text{ và } f(1,1,1) = (0,1)$$

Giải

Do $(1,-1,1)$ và $(1,1,1)$ là độc lập tuyến tính nên ta có thể bổ túc thêm $(0,0,1)$ để trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (chứng minh dễ dàng).

Do f có thể được xác định dựa trên các giá trị của hàm đối với các vector trong một cơ sở. Nên ta đặt f thỏa:

$$\begin{cases} f(1,-1,1) = (1,0) \\ f(1,1,1) = (0,1) \\ f(0,0,1) = (0,0) \end{cases}$$

Khi đó đặt $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ta tính được a, b, c thỏa $x = a(1,-1,1) + b(1,1,1) + c(0,0,1)$. Từ đó suy ra

$f(x) = af(1,-1,1) + bf(1,1,1) + cf(0,0,1) = (a, b)$

Vậy ta đã xác định xong f. Chú ý rằng có thể xây dựng một hàm f khác

Lưu ý: Các công đoạn tính toán trong chứng minh vì quá đơn giản nên sẽ không đi vào chi tiết. Đáp án: $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Bài 4.3

Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$ xét các họ vector

$u_1 = (1,-1), u_2 = (-1,2), u_3 = (0,-1)$ và

$v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (1,1)$.

Tồn tại hay không một toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(u_i) = v_i \forall i \in \overline{1,3}$.

Giải

Nhận xét thấy rằng: $u_3 = -(u_1 + u_2)$

Giả sử rằng f thỏa mãn đề bài trên là ánh xạ tuyến tính thì

$f(u_3) = -f(u_1) - f(u_2) = -v_1 - v_2 = (-1,-1)$

Mặt khác theo đề thì $f(u_3) = v_3 = (1,1)$ (mâu thuẫn).

Suy ra không tồn tại toán tử tuyến tính f thỏa mãn đề bài.

Bài 4.4

Cho K là một trường con của trường số phức C. Định nghĩa ánh xạ $f: K^3 \to K^3$ bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3).$$

a) Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong K^3.

b) Tìm điều kiện của $a, b, c \in K$ sao cho vector $u = (a, b, c)$ nằm trong Imf. Từ đó tìm hạng của f.

c) Tìm điều kiện của $a, b, c \in K$ sao cho vector $u = (a, b, c)$ nằm trong $Kerf$. Từ đó tìm một cơ sở cho không gian con $Kerf$.

Giải

a)

Cho $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in K^3, a, b \in \mathbb{C}$

$f(ax + by)$

$= f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$

$= (ax_1 + by_1 - ax_2 - by_2 + 2ax_3 + 2by_3, ax_1 + by_1 - ax_2 - by_2 + 3ax_3 + 3by_3, 3ax_1 +$
$3by_1 - 3ax_2 - 3by_2 + 8ax_3 + 8by_3)$

$= a(x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3) + b(y_1 - y_2 + 2y_3, y_1 - y_2 + 3y_3, 3y_1 -$
$3y_2 + 8y_3)$

$= af(x) + bf(y)$

Suy ra f là toán tử tuyến tính trên K^3.

b)

Ta có $u = (a, b, c) \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in K^3: f(x) = u$.

Tức là $(x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3) = (a, b, c)$ có nghiệm.

Tức là hệ $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ có nghiệm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & a\\ 1 & -1 & 3 & b\\ 3 & -3 & 8 & c\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & a\\ 0 & 0 & 1 & b-a\\ 0 & 0 & 2 & c-3a\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & a\\ 0 & 0 & 1 & b-a\\ 0 & 0 & 0 & c-2b-a\end{array}\right)$$

Hệ trên có nghiệm tương đương $a + 2b - c = 0$.

Imf chính là không gian cột của ma trận chính tắc của ánh xạ f, hay nói cách khác là ma trận A.

Tức là $Imf = \langle(1,1,3), (-1,-1,-3), (2,3,8)\rangle$. Suy ra hạng của f là 2.

c)

Ta có $u = (a, b, c) \in Kerf \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow Au = 0$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -3 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} a = b \\ b \in K \\ c = 0 \end{cases}$

Để tìm cơ sở của $Kerf$, ta tìm không gian nghiệm của $AX = 0$.

Từ ý trên và điều kiện của u ta có $B = \{(1,1,0)\}$ là cơ sở của $Kerf$.

Bài 4.5

Tìm môt toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $Imf = \langle(1,0,-1), (2,1,1)\rangle$.

Giải

Chọn cơ sở B_0. Đặt f thỏa:

$f(e_1) = (1,0,-1)$

$f(e_2) = (2,1,1)$

$f(e_3) = (0,0,0)$

Lý luận tương tự bài 4.2 suy ra $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2, -x_1 + x_2)$.

Bài 4.6

Cho $V = M_n(K)$ là không gian vector các ma trận vuông cấp n trên trường K và A là một ma trận cố định trong V. Chứng minh rằng $f: V \to V$, với $f(X) = XA - AX$ $\forall X \in V$ là một toán tử tuyến tính trên V.

Giải

Cho $X, Y \in V, a, b \in K$

Ta có

$$f(aX + bY) = (aX + bY)A - A(aX + bY) = a(XA - AX) + b(YA - AY) = af(X) + bf(Y)$$

Suy ra f là toán tử tuyến tính trên V.

Bài 4.7

Hãy tìm một ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sao cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vector C trên trường số thực R, nhưng f không là toán tử tuyến tính trong không gian vector C trên C.

Giải

Nhận xét không gian vector C trên trường số thực R có cơ sở là $\{1, i\}$ và không gian vector C trên C có cơ sởlà $\{1\}$.

Ta chọn f tuyến tính thỏa:

$f(1) = i$

$f(i) = 1$

Suy ra $f(x_1 + x_2 i) = x_2 + x_1 i$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Xét $x = x_1 + x_2 i, y = y_1 + y_2 i \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$

$f(ax + by)$

$= f(ax_1 + ax_2i + by_1 + by_2i)$

$= ax_2 + by_2 + (ax_1 + by_1)i$
$= a(x_1i + x_2) + b(y_1i + y_2)$
$= af(x_1 + x_2i) + bf(y_1 + y_2i)$
$= af(x) + bf(y)$
Suy ra f là toán tử tuyến tính trên R.

Mặt khác, giả sử f là toán tử tuyến tính trên C.

Cho $x = i \in \mathbb{C}, a = i \in \mathbb{C}$. Ta tính $f(-1)$ theo 2 cách:

Cách 1: Tính trực tiếp $f(-1) = -1$.

Cách 2: Dùng tính chất ánh xạ tuyến tính: $f(-1) = f(i * i) = i * f(i) = i$.

Điều này dẫn đến mâu thuẫn

Suy ra f không là toán tử tuyến tính trên C.

Bài 4.8

Cho $V = M_{m\times 1}(K), W = M_{n\times 1}(K), A \in M_{n\times m}(K)$ và f là ánh xạ tuyến tính từ V vào W được định nghĩa bởi

$$f(X) = AX$$

Chứng minh rằng $f = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Giải

Chiều nghịch: Hiển nhiên.

Chiều thuận:

$$f(X) = AX \ \forall X \in M_{m\times 1}(K)$$

Gọi họ $X_j \in M_{m\times 1}(K)$ $(1 \leq j \leq m)$ là ma trận có phần tử dòng j khác không, còn lại bằng không. Xét X là ma trận có được bằng cách ghép từng cột X_j lại với nhau, ta có $X = I_m$ nên X là ma trận vuông khả nghịch.

Ta có $f(X_j) = 0\ \forall 1 \leq j \leq m$. Mặt khác ta có $A = AI_m = AX = [AX_1 \quad AX_2 \quad \cdots \quad AX_m] = 0$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.9

Cho V là một không gian vectơ n chiều trên trường K. Giả sử f là một toán tử tuyến tính trong V thỏa $Imf = Kerf$. Chứng minh rằng n là một số chẵn. Hãy cho một ví dụ minh họa.

Giải.

Ta sử dụng công thức: $dimV = dimKerf + dimImf$

Do $Imf = Kerf \Rightarrow dimImf = dimKerf \Rightarrow dimV = 2dimKerf \Rightarrow n$ là số chẵn.

Ví dụ:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to f(x)$$

Với $[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $Kerf = \langle(0,1)\rangle = Imf$ và $dim\mathbb{R}^2 = 2$.

Bài 4.10

Cho V là không gian vectơ trên trường K và f là một toán tử tuyến tính trong V. Chứng minh rằng các điều kiện dưới đây tương đương:

i) $Kerf \cap Imf = 0$.

ii) Nếu $f^2(u) = 0$ thì $f(u) = 0$ với $u \in V$.

Giải:

Chiều thuận:

$f^2(u) = 0 \Rightarrow f(u) \in Kerf\ \forall u$. Mặt khác $f(u) \in Imf\ \forall u$ và $Kerf \cap Imf\ = 0$ do đó $f(u) = 0\ \forall u$.

Chiều nghịch:

Chứng minh $\mathbf{0} \in \boldsymbol{Kerf} \cap \boldsymbol{Imf}$

Đương nhiên $0 \in Kerf$, mặt khác $f(0) = 0$ vì thế ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh $\{\mathbf{0}\} \supset \boldsymbol{Kerf} \cap \boldsymbol{Imf}$

Cho $x \in Kerf \cap Imf$. Suy ra $f(x) = 0$ và có y sao cho $f(y) = x$, thay vào ta có $f^2(y) = 0$. Theo giả thuyết ii) suy ra $x = f(y) = 0$. Vậy ra có điều phải chứng minh.

Từ 2 chứng minh trên ta có chiều nghịch đúng.

Bài 4.11

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vecto $\mathbb{C}^3$ trên C được xác định bởi:

$$f(e_1) = (0, i, 1); f(e_2) = (1,1,0); f(e_3) = (1,0, i)$$

Trong đó (e_1, e_2, e_3) là cơ sở chính tắc trong cơ sở $\mathbb{C}^3$. Xét xem toán tử tuyến tính f có khả nghịch hay không?

Giải:

Để xét xem f có khả nghịch hay không ta xét ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

Ta có $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det([f]_B) = 0$.Vậy f không khả nghịch.

Bài 4.12

Cho f là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ với

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

a) Xét xem f có khả nghịch không? Nếu f khả nghịch hãy tìm f^{-1}.

b) Chứng minh rằng $(f^2 - Id)(f - 2Id) = 0$.

Giải:

a)

Ta có $A = [f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det([f]_B) = -2$. Suy ra f khả nghịch.

Để tìm f^{-1} ta sẽ tìm $[f^{-1}]_{B_0}$. Ta có công thức

$$[f^{-1}]_{B_0} = [f]_{B_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Từ công thức $[f^{-1}(x)]_{B_0} = [f^{-1}]_{B_0}[x]_{B_0}\ \forall x$ ta tính được

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3\right)$$

b)

Ta có thể chứng minh bằng 2 cách.

Cách 1: Chứng minh $[(f^2 - Id)(f - 2Id)]_{B_0} = (A^2 - I_3)(A - 2I_3) = 0$. Đây là phép nhân ma trận thông thường.

Cách 2: Chứng minh $(f^2 - Id)(f - 2Id)(x) = 0\ \forall x$. Suy ra toán tử $(f^2 - Id)(f - 2Id) = 0$.

Vì bài toán này chỉ yêu cầu thực hiện tính toán đơn thuần nên ở đây sẽ không giải chi tiết.

Bài 4.13

Xét không gian vectơ $V = M_2(\mathbb{C})$ trên trường số phức C và ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Định nghĩa toán tử tuyến tính f trong V bởi

$$f(X) = AX \forall X \in V$$

Hãy tìm hạng của f và mô tả f^2.

Giải:

Tìm hạng của f

Đầu tiên ta tìm ma trận chính tắc của f.

Gọi $B_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ là cơ sở chính tắc của V

Suy ra $A = [f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Imf là không gian cột của ma trận A tức là $Imf = \langle (1,0,-3,0), (0,1,0,-3) \rangle$. Vậy hạng của f là 2.

Mô tả f^2

Ta có:

$f^2(X) = f\big(f(X)\big) = A^2X = 4AX = 4f(X) \forall X \in V$.

Bài 4.14

Cho những ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng $g \circ f$ không khả nghịch.

Giải:

Gọi B, C lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

Ta có:

$[g \circ f]_B = [g]_{C,B}[f]_{B,C}$

Mà: $[g]_{C,B}$ là ma trận 3 dòng, 2 cột, $[f]_{B,C}$ là ma trận 2 dòng, 3 cột. Theo bài 1.33 chương I ta có $[g_o f]_B$ không khả nghịch.

Bài 4.15

Tìm 2 toán tử tuyến tính g, f trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $g \circ f = 0$ nhưng $f \circ g \neq 0$.

Giải:

Đặt $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thỏa $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$

Đặt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thỏa $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$

Ta có $g_o f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$ và $f_o g\big((1,0)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,1) \neq 0$.

Nhận xét: Ý tưởng ở đây là tìm hai ma trận $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB = 0$ và $BA \neq 0$. Tìm hai ma trận này bằng cách giải hệ thông thường. Sau đó chọn f, g lần lượt nhận A, B làm ma trận chính tắc.

Bài 4.16.

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ bất kỳ và giả sử $f^2 = 0$. Tìm mối liên hệ giữa $Kerf$ và Imf.

Giải.

Ta thấy với mọi x thì $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = 0$. Suy ra $f(x) \in Kerf \Rightarrow Kerf \supset Imf$.

Vậy liệu $Imf \supset Kerf$?

Giả sử điều này đúng thì $Kerf = Imf$. Do vậy $dimV = 2\dim(Imf)$ vì thế V là không gian có số chiều chẵn, điều này bất hợp lý vì f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ bất kỳ, có thể có số chiều lẻ. Vì vậy ta chỉ kết luận được $Kerf \supset Imf$.

Bài 4.17

Cho f là một toán tử tuyến tính trong không gian vector hữu hạn chiều V. Chứng minh rằng nếu f khả nghịch trái (phải) thì f khả nghịch.

Giải

Gọi B_0 là cơ sở chính tắc của V.

Theo mệnh đề 4.3.17 thì f khả nghịch

$\Leftrightarrow [f]_{B_0}$ khả nghịch.

Ta có f khả nghịch trái

$\Leftrightarrow$ tồn tại toán tử tuyến tính g thỏa $g(f) = Id$

$\Leftrightarrow [gf]_{B_0} = I$

$\Leftrightarrow [g]_{B_0}[f]_{B_0} = I$

$\Leftrightarrow [f]_{B_0}$ khả nghịch trái.

Theo mệnh đề 1.4.11. $[f]_{B_0}$ khả nghịch trái suy ra $[f]_{B_0}$ khả nghịch. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.18

Cho f là một toán tử tuyến tính trong hông gian vector hữu hạn chiều V và giả sử $r(f^2) = r(f)$. Chứng minh rằng $Imf \cap Kerf = 0$.

Giải

Sử dụng kết quả bài 4.10.

Bài 4.19

Cho $A \in M_{m\times n}(K)$ và $f: M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$ là một ánh xạ tuyến tính được cho bởi

$$f(X) = AX \ \forall X \in M_{n\times 1}(K)$$

Chứng minh rằng nếu $m < n$ thì f có thể toàn ánh nhưng không khả nghịch. Tương tự, nếu $n < m$ thì f có thể là đơn ánh nhưng không khả nghịch.

Giải

Chứng minh f có thể toàn ánh nhưng không khả nghịch tức là chứng minh f có thể toàn ánh nhưng không thể đơn ánh.

Để tiếp cận bài toán, nhận thấy $m < n$ tức là đối tập (coset) của f là $M_{m\times 1}(K)$ là một không gian lớn hơn tập xác định của f là $M_{n\times 1}(K)$.

Gọi B_0, B_0' lần lượt là cơ sở chính tắc của $M_{n\times 1}(K), M_{m\times 1}(K)$. Khi đó $|B_0| = n$ và $|B_0'| = m$. Đặt $B_0 = \{e_1, \dots, e_n\}, B_0' = \{e_1', \dots, e_m'\}$.

Chứng minh f có thể là toàn ánh

Ta có thể dễ dàng chỉ ra ví dụ. Xét f thỏa

$$f(e_i) = e_i' \ \forall 1 \le i \le m; f\left(e_j\right) = 0 \ \forall m < j \le n$$

Khi đó f hiển nhiên toàn ánh.

Chứng minh f không thể là đơn ánh

Giả sử có f là đơn ánh. Khi đó $Kerf = 0$. Suy ra $\dim Kerf = 0$.

Mặt khác ta có công thức $\dim M_{n\times 1}(K) = \dim Kerf + \dim Imf$. Suy ra $\dim Imf = n$. Chú ý rằng $Imf \subset M_{m\times 1}(K)$ nên $n = \dim Imf \le \dim M_{m\times 1}(K) = m$ (Vô lý).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.20

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vecto $\mathbb{C}^2$ được định nghĩa bởi:

$$f(x_1, x_2) = (0, x_2) \ \forall (x_1, x_2) \in C^2$$

Gọi B_0 là cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}^2$ và $B = \langle u_1 = (i, 1); u_2 = (-i, 3)\rangle$là một cơ sở được sắp của $\mathbb{C}^2$. Tìm ma trận biểu diễn của f đối với

a) Cặp cơ sở B_0và B.
b) Cặp cơ sở Bvà B_0.
c) Cặp cơ sở B và $B' = (u_2, u_1)$
d) Cơ sở B'.

Giải:

a) Ta tính được $[f(u_1)]_{B_0} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $[f(u_2)]_{B_0} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. Suy ra $[f]_{B_0,B} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 3\end{pmatrix}$.

b) Ta tính được $[f(e_1)]_B = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $[f(e_2)]_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. Suy ra $[f]_{B,B_0} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4}\\0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

c) Làm tương tự ta được $[f]_{B,B'} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

d) Làm tương tự ta được $[f]_{B'} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Bài 4.21

Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + 2x_3)$

a) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$
b) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở $B = \langle u_1 = (1,0,-1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\rangle$ và $B' = \langle v_1 = (1,1), v_2 = (1,0)\rangle$

Giải:

Gọi B_0 và B_0' lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Ta có:

a) Ta tính được $[f(e_1)]_{B_0'} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $[f(e_2)]_{B_0'} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $[f(e_3)]_{B_0'} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow [f]_{B_0,B_0'} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

b) Ta áp dụng công thức

$$[f]_{B,B'} = (B_0' \to B')^{-1}[f]_{B_0,B_0'}(B_0 \to B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 4.22

Cho V là một không gian vecto 2 chiều trên trường K và B là một cơ sở được sắp của V. Chứng minh rằng nếu f là một toán tử tuyến tính trong V và $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn f trong B thì $f^2 - (a+d)f + (ad - bc)Id = 0$.

Giải:

Làm tương tự 4.12b. Ta có

$[f^2 - (a+d)f + (ad-bc)Id]_B$

$= A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$= 0$

Suy ra $f^2 - (a+d)f + (ad-bc)Id = 0$.

Bài 4.23

Giả sử toán tử tuyến tính f trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở cho Imf và một cơ sở cho $Kerf$.

Giải:

- $\boldsymbol{Kerf}$

$Kerf$ là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $AX = 0$. Ta giải hệ này bằng phương pháp Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_1 = -t \end{cases}$

Suy ra $Kerf = \{(-t, t, -t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,-1)\rangle$.

Vậy một cơ sở của $Kerf$ là {(-1,1,-1)}.

- $\boldsymbol{Imf}$

Imf là tập hợp những vector có dạng Ax với $x \in \mathbb{R}^3$. Ta sẽ viết dưới dạng định nghĩa:

$$Imf = \{Ax |\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} |\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Vậy Imf là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các vector cột của A. Nói cách khác Imf là không gian dòng của A^T. Ta lại có

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó Imf có một cơ sở là $\{(1,0,-1), (0,1,5)\}$.

Nhận xét: Cho toán tử tuyến tính f và ma trận chính tắc của nó là A. Khi đó Imf là không gian dòng của A^T. Đây là một tính chất nên nhớ và có thể được sử dụng trong nhiều bài tập.

Bài 4.24

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vecto $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

Và B_0 là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong B_0.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp $B = \big(u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)\big)$.

c) Tìm tất cả các số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho toán tử tuyến tính $(f - \alpha Id)$ khả nghịch.

Giải:

a) $B_0 = \big\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\big)$. Ta có:$f(e_1) = (0,2); f(e_2) = (-1,0)$

Suy ra ma trận biểu diễn f trong cơ sở B_0 là: $[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Ta cần tính $f(u_1), f(u_2)$ sau đó biểu diễn chúng theo u_1, u_2.

Dễ dàng tính được $f(u_1) = (-1,2)$. Bây giờ ta sẽ biểu diễn $f(u_1)$ theo u_1, u_2.

Giả sử $f(u_1) = au_1 + bu_2 = a(1,1) + b(-1,2)$. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Suy ra $f(u_1) = 0u_1 + 1u_2$. Tương tự ta có $f(u_2) = -2u_1 + 0u_2$. Vậy ma trận f đối với cơ sở B là $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $(f - \alpha Id)$ khả nghịch $\Leftrightarrow [f - \alpha Id]_{B_0}$ khả nghịch

$\Leftrightarrow ([f]_{B_0} - \alpha I_2)$ khả nghịch

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix}$ khả nghịch.

Lại có $\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 2 > 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Vậy nên $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ thì toán tử tuyến tính $(f - \alpha Id)$ khả nghịch.

Bài 4.25

Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1)$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$B = \big(u_1 = (-1,2,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,-3,-2)\big).$$

c) Chứng minh rằng f khả nghịch và tìm f^{-1}.

Giải:

a) Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là : $B_0 = \big(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\big)$

Ta có $f(e_1) = (1,0,4), f(e_2) = (3,-2,-1), f(e_3) = (0,1,2)$.

Vậy ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Làm tương tự câu b) bài 4.24 ta có:

$f(u_1) = (5,-3,-4) = -5u_1 - 11u_2 - 6u_3$

$f(u_2) = (3,-1,1) = -3u_1 + 2u_2 - 1u_3$

$f(u_3) = (-9,4,-1) = 9u_1 - 2u_2 + 4u_3$

Vậy ma trận biểu diễn f trong cơ sở B là $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 9 \\ -11 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Ta có $\det[f]_{B_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

Suy ra f khả nghịch.

Ta có $[f^{-1}]_{B_0} = [f]_{B_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \end{pmatrix}$

Suy ra ta có thể tính f^{-1} với công thức

$\forall x \in \mathbb{R}^3$: $[f^{-1}(x)]_{B_0} = [f^{-1}]_{B_0}[x]_{B_0}$

Phần tính toán sinh viên tự thực hiện

Đáp án: $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-x_1-2x_2+x_3}{3}, \frac{4x_1+2x_2-x_3}{9}, \frac{8x_1+13x_2-2x_3}{9}\right)$.

Bài 4.26

Cho $\theta \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hai ma trận sau đồng dạng trên C:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Giải:

Ta có $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

Để chứng minh hai ma trận này đồng dạng ta phải tìm ma trận A khả nghịch thỏa

$A\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}A$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rồi giải hệ tìm được A. Suy ra

Vậy $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ đồng dạng (điều phải chứng minh).

Đáp án: Có rất nhiều ma trận A thỏa đẳng thức trên. Ví dụ $A = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 4.27

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường K và φ, f là hai toán tử tuyến tính trong V. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tồn tại cơ sở được sắp B và $\mathcal{B}'$ trong V thỏa $[\varphi]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}'}$ là có một toán tử khả nghịch g trong V sao cho $f = g \circ \varphi \circ g^{-1}$. (Hướng dẫn: Lấy g là toán tử tuyến tính chuyển B thành $\mathcal{B}'$)

Giải

Điều kiện cần

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở được sắp của V thỏa $[\varphi]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}'}$.

Từ **Hệ quả 4.3.12** ta có

$[f]_{\mathcal{B}'} = [\varphi]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}' \to \mathcal{B})^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[\varphi]_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}$

Từ điều trên lấy g là ánh xạ tuyến tính với $[g]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$

Thì $[f]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}'}[g]_{\mathcal{B}'}^{-1} = [g \circ \varphi \circ g^{-1}]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow f = g \circ \varphi \circ g^{-1}$.

Ta có được điều kiện cần.

Điều kiện đủ

Giả sử có g là toán tử khả nghịch thỏa $f = g \circ \varphi \circ g^{-1}$

Lấy $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V ta có $[f]_{\mathcal{B}} = [g \circ \varphi \circ g^{-1}]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Do g là toán tử khả nghịch nên $[g]_{\mathcal{B}}$ khả nghịch.

Vậy với việc lấy $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ là các vectơ trong V mà $[v_j]_{\mathcal{B}}$ là cột thứ j trong $[g]_{\mathcal{B}}^{-1}$

Thì $\mathcal{B}'$ là cơ sở của V. Đồng thời cũng có $[g]_{\mathcal{B}}^{-1} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}') \Rightarrow [g]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}$

Vậy $[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = [\varphi]_{\mathcal{B}'}$.

Ta có được điều kiện đủ.

Bài 4.28

Cho V là không gian vectơ n chiều trên trường K và $W = M_{n\times 1}(K)$. Với mỗi $A \in M_n(K)$, đặt L_A là toán tử tuyến tính trong W xác định bởi $L_A(X) = AX, \forall X \in W$.

a) Chứng minh rằng mọi toán tử tuyến tính trong W đều có dạng L_A với một A nào đó trong $M_n(K)$.
b) Cho B là một cơ sở được sắp của V. Gọi $g: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$g(u) = [u]_{\mathcal{B}}, \forall u \in V.$$

Chứng minh rằng g là một đẳng cấu.

c) Nếu f là một toán tử tuyến tinh trong V thì $g \circ f \circ g^{-1}$ là một toán tử tuyến tính trong W, do đó theo theo câu a), $g \circ f \circ g^{-1} = L_A$, với một ma trận A nào đó trong $M_n(K)$. Hãy tìm A.

Giải

a)

Gọi L là toán tử tuyến tính trong W.

Xét $\mathcal{C}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (x_1, \dots, x_n)$ là cơ sở của W

Lấy ma trận $A = (L(x_1) \quad L(x_2) \quad \cdots \quad L(x_n))$.

Từ trên kiểm tra được $L(x_i) = Ax_i \Rightarrow L(X) = AX, \forall X \in W$.

Vậy L có dạng L_A.

b)

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$

- g là đồng cấu

$\forall u, v \in V, \alpha \in K: g(u + \alpha v) = [u + \alpha v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + \alpha[v]_{\mathcal{B}} = g(u) + \alpha g(v)$.

- g là đơn cấu

$\forall u, v \in V: g(u) = g(v) \Rightarrow [u]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} \Rightarrow u = v$.

- g là toàn cấu

$\forall X \in W: X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ta lấy $u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ thì $g(u) = X$.

Vậy g là đẳng cấu.

c)

Theo câu a) thì ta lấy $A = (g \circ f \circ g^{-1}(x_1) \quad g \circ f \circ g^{-1}(x_2) \quad \cdots \quad g \circ f \circ g^{-1}(x_n))$

Còn theo b) ta có $g^{-1}(x_j) = u_j$

Nên $g \circ f \circ g^{-1}(x_j) = g\left(f(u_j)\right) = [f(u_j)]_{\mathcal{B}}$

Từ đó $A = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{B}}) = [f]_{\mathcal{B}}$.

A là ma trận biểu diễn của toán tử f trong cơ sở B.

Bài 4.29

Cho V là không gian vectơ n chiều trên trường K và $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là một cơ sở được sắp của V.

a) Cho f là một toán tử tuyến tính trong V được định nghĩa bởi $f(u_i) = u_{i+1}, \forall 1 \leq i \leq n-1$ và $f(u_n) = 0$. Tìm ma trận A biểu diễn f trong cơ sở B.
b) Chứng minh rằng $f^n = 0$, nhưng $f^{n-1} \neq 0$.
c) Cho φ là một toán tử tuyến tính bất kỳ trong V thỏa $\varphi^n = 0$, nhưng $\varphi^{n-1} \neq 0$. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một cơ sở $\mathcal{B}'$ của V sao cho ma trận biểu diễn của φ trong $\mathcal{B}'$ chính là ma trận A trong câu a).
d) Chứng minh rằng nếu M và N là những ma trận vuông cấp n trên trường K sao cho $M^n = N^n$ và $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$ thì M và N đồng dạng với nhau trên K.

Giải

a)

$A = [f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{B}})$

Do $f(u_i) = u_{i+1}, \forall 1 \leq i \leq n-1$ và $f(u_n) = 0$

Nên $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 nằm kề bên trái đường chéo chính).

b)

Ta có $f^{n-1}(u_1) = f^{n-2}\big(f(u_1)\big) = f^{n-2}(u_2) = \cdots = f^{n-i}(u_i) = \cdots = f(u_{n-1}) = u_n \neq 0$.

Vậy $f^{n-1} \neq 0$.

Ta quy nạp lùi để chứng minh $f^{n+1-i}(u_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$.

- $i = n$ theo đề bài ta có $f(u_n) = 0$.
- Giả sử $i = k + 1$ đã đúng $(k < n)$

Tức $f^{n-k}(u_{k+1}) = 0$.

- Xét $i = k$

Có $f^{n+1-k}(u_k) = f^{n-k}(u_{k+1}) = 0$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có

$f^{n+1-i}(u_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow f^n(u_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow f^n = 0$.

c)

Vì $\varphi^{n-1} \neq 0$ ta giả sử $e_1 \in V: \varphi^{n-1}(e_1) \neq 0$.

Ta chứng minh $\mathcal{B}' = \big(e_1, \varphi(e_1), \dots, \varphi^{n-1}(e_1)\big)$ là một cơ sở của V.

Tức ta chứng minh $\mathcal{B}'$ là một bộ độc lập tuyến tính.

Thật vậy xét $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mà $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi^{n-1}(e_1) = 0$.

Quy nạp theo j chứng minh $\alpha_j = 0, \forall 1 \leq j \leq n - 1$.

- $j = 1$

Có $\varphi^{n-1}\big(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi^{n-1}(e_1)\big) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1\varphi^{n-1}(e_1) + \alpha_2\varphi^{n}(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi^{2n-2}(e_1) = 0$

Do $\varphi^n = 0$ và $\varphi^{n-1}(e_1) \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

- Giả sử $j = m - 1$ đã đúng $(n > m > 1)$

Tức $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$.

- Xét $j = m$

Vì $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ nên $\alpha_m\varphi^{m-1}(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi^{n-1}(e_1) = 0$.

Từ đó cũng có $\varphi^{n-m}\big(\alpha_m\varphi^{m-1}(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi^{n-1}(e_1)\big) = 0$

$\Rightarrow \alpha_m\varphi^{n-1}(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi^{2n-m-1}(e_1) = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$.

Theo nguyên lý quy nạp $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Vậy $\mathcal{B}'$ là một bộ độc lập tuyến tính. Nên $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của V.

Ta kiểm tra được $\mathcal{B}'$ là cơ sở để ma trận biểu diễn của φ trong $\mathcal{B}'$ là ma trận A trong câu a).

d)

Xét hai toán tử tuyến tính $f_M, f_N\colon M_{n\times 1}(K) \to M_{n\times 1}(K)$

$$f_M(X) = MX, f_N(X) = NX.$$

Theo đề bài ta có được $f_M^n = f_N^n$ và $f_M^{n-1} \neq 0 \neq f_N^{n-1}$.

$\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ là cơ sở chính tắc của $M_{n\times 1}(K)$

Trường hợp $f_M^n = f_n^n = 0$

Theo câu c) có C và $\mathcal{C}'$ là cơ sở của $M_{n\times 1}(K)$ để $[f_M]_{\mathcal{C}} = [f_N]_{\mathcal{C}'} = A$.

Theo **Bài 4.27** ta còn có g là toán tử khả nghịch sao cho $f_M = g \circ f_N \circ g^{-1}$

$\Rightarrow M = [g]_{\mathcal{X}} N [g]_{\mathcal{X}}^{-1}$.

Vậy M và N đồng dạng.

Trường hợp $f_M^n = f_N^n \neq 0$

Ta lấy ví dụ sau $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nếu M và N đồng dạng nhau thì có P khả nghịch để $P^{-1}MP = N \Rightarrow MP = PN$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 & p_{22} \\ p_{31} & 0 & p_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow p_{12} = p_{13} = p_{21} = p_{22} = p_{31} = p_{32} = 0$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow P$ không khả nghịch(Vô lý).

Vậy trường hợp này không thỏa nên ta phải bổ sung điều kiện cho bài toán này $M^n = N^n = 0$.

Bài 4.30

Giải bài toán tương tự như trong **Ví dụ 4.3.2** cho không gian $M_n(K)(n \geq 2)$ và $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(K)$ tùy ý.

Giải

$\mathcal{B}_0 = \left(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{(n-1)n}, E_{nn}\right)$ trong đó

$E_{ij} \in M_n(K)$: $\left[E_{ij}\right]_{uv} = 0, \forall (u, v) \neq (i, j)$ và $\left[E_{ij}\right]_{ij} = 1$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$f: X \to AX$

Vì $\left[AE_{ij}\right]_{uv} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{uk} \left[E_{ij}\right]_{kv} = \begin{cases} 0, \forall v \neq j \\ [A]_{ui}, v = j \end{cases}$

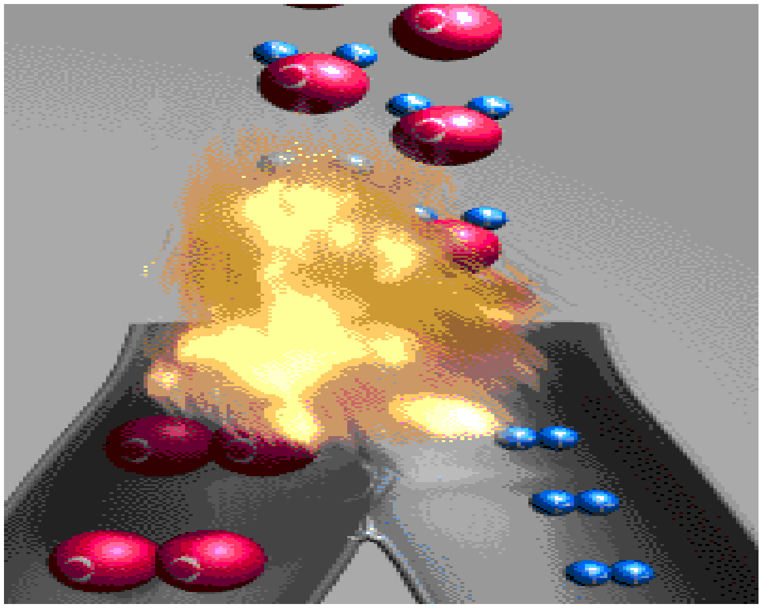
Nên $f\left(E_{ij}\right) = AE_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{(n-1)j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \underbrace{a_{nj}}_{cột\ thứ\ i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = a_{1j}E_{1i} + a_{2j}E_{2i} + \cdots + a_{nj}E_{ni}$

Vậy $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} = diag(A, A, \dots, A)$$

CHƯƠNG 5
Một số ứng dụng

Ứng dụng trong Hoá học (Chemistry)



<u>Ứng dụng 1:</u> Dùng ba chất khác nhau A,B, và C, để tạo ra một chất hóa học nào đó. A, B, và C phải được hòa tan trong nước riêng rẽ trước khi cho chúng tương tác với nhau để tạo thành chất mới. Giả sử rằng dung dịch chứa chất A (1.5 g/cm^3) trộn với dung dịch chứa chất B (3.6 g/cm^3) trộn với dung dịch chứa chất C (5.3 g/cm^3) tạo ra 25.07 g sản phẩm. Nếu tỉ lệ chất A, B, C trong những dung dịch này bị thay đổi lần lượt thành 2.5, 4.3, và 2.4 g/cm^3 (trong khi những thể tích còn lại như cũ), thì 22.36 g chất mới được tạo thành. Cuối cùng, nếu các tỉ lệ lần lượt là 2.7, 5.5, và 3.2 g/cm^3, thì 28,14 g chất mới được tạo thành. Vậy thể tích (tính bằng centimet khối) của dung dịch chứa A, B, C là bao nhiêu ?

<u>Giải:</u> Đặt x, y, z là những thể tích tương ứng (tính bằng centimet khối) của những dung dịch chứa A, B, C. Suy ra $1.5x$ là khối lượng của A trong trường hợp đầu tiên, $3.6y$ là khối lượng của B, và $5.3z$ là khối lượng của C. Tổng chúng với nhau ta được 25.07 g. Nên:

$$1.5x + 3.6y + 5.3z = 25.07$$

Áp dụng tương tự cho hai trường hợp còn lại. Điều này cho ta hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 1.5x + 3.6y + 5.3z = 25.07 \\ 2.5x + 4.3y + 2.4z = 22.36 \\ 2.7x + 5.5y + 3.2z = 28.14 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng của hệ này là:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 3.6 & 5.3 & 25.07 \\ 2.5 & 4.3 & 2.4 & 22.36 \\ 2.7 & 5.5 & 3.2 & 28.14 \end{bmatrix}$$

Rút gọn ma trận trên cho ra nghiệm:

$$x = 1.5, y = 3.1, z = 2.2$$

<u>**Ứng dụng 2:**</u> Một ứng dụng tiêu biểu khác của hệ phương trình tuyến tính đối với Hóa học là cân bằng một phương trình hóa học. Cơ sở sau ứng dụng này là **Định luật bảo toàn khối lượng (Law of conservation of mass)** được phát biểu như sau:

"Khối lượng không được tạo ra hay bị mất đi trong bất kì phản ứng hóa học nào. Vì thế sự cân bằng những phương trình đòi hỏi số lượng các nguyên tử ở cả hai phía của một phản ứng hóa học phải như nhau. Khối lượng của tất cả chất tham gia phản ứng (reactants) phải bằng khối lượng của tất cả chất sản phẩm sinh ra sau phản ứng (products)."

Như ví dụ về phương trình hóa học sau đây:

$$C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Việc cân bằng phản ứng hóa học này có nghĩa là tìm các giá trị x, y, z và t để số lượng các nguyên tử của mỗi nguyên tố là như nhau ở hai phía phương trình:

$$xC_2H_6 + yO_2 \to zCO_2 + tH_2O$$

Điều này đưa đến hệ phương trình tuyến tính sau đây:

$$\begin{cases} 2x = z \\ 6x = 2t \\ 2y = 2z + t \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát cho hệ trên là:

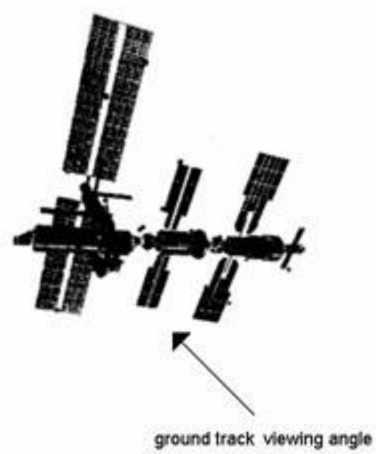
$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{2}x \\ z = 2x \\ t = 3x \end{cases}$$

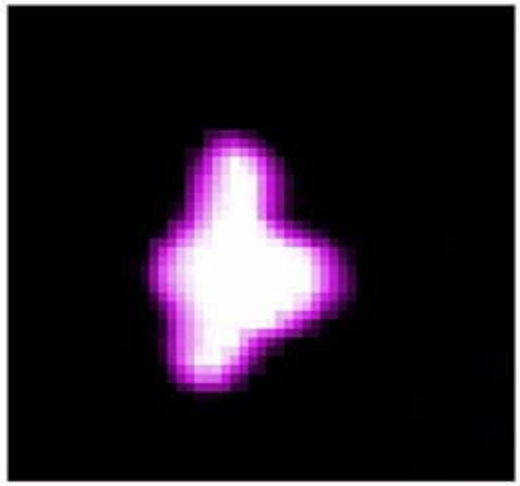
Vì chúng ta đang tìm các giá trị nguyên của x, y, z, t, chọn $x = 2$, có $y = 7, z = 4, t = 6$.

Phương trình đã được cân bằng sẽ là:

$$2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O$$

Ứng dụng trong lý thuyết mã hóa (Coding Theory)





<u>Giới thiệu:</u> Các thông điệp được truyền đi như dữ liệu từ một vệ tinh luôn bị nhiễu. Do đó, việc mã hóa một thông điệp sao cho dù thông điệp đó bị nhiễu thì ta vẫn có thể giải mã nó về dạng ban đầu rất quan trọng. Việc này thỉnh thoảng được thực hiện bằng cách lặp lại thông điệp cần truyền đi vài lần, tiêu biểu là việc lặp lại lời trong giao tiếp của con người. Tuy nhiên, việc sao chép dữ liệu được lưu trữ vài lần cần thêm dung lượng bộ nhớ. Trong bài này, ta sẽ xem xét về các biện pháp giải mã thông điệp sau khi nó bị biến đổi. Quá trình này gọi là việc mã hóa (coding). Một mã phát hiện lỗi trong một thông điệp bị nhiễu gọi là mã phát hiện lỗi (error detecting code). Ngoài ra, nếu nó có thể sửa lỗi thì nó được gọi là mã sửa lỗi (error correcting code). Việc tìm mã sửa lỗi khó hơn nhiều so với việc tìm mã phát hiện lỗi.

<u>Một vài kĩ thuật mã hóa cơ bản:</u> Hầu hết các thông điệp được truyền dưới dạng các dãy số gồm toàn 0 và 1, như là 10101 hay 1010011. Giả sử ta cần gửi thông điệp 1011. "Từ" nhị phân (binary) này có thể biểu diễn cho một từ hoặc một cụm từ "bình thường" nào đó. Một cách để mã hóa 1011 là gắn nó với một "đuôi" (tail) nhị phân để mà khi thông điệp đó bị biến đổi, chẳng hạn như 1011 bị biến đổi thành 0011, thì ta có thể phát hiện lỗi đó. Một đuôi như vậy có thể là 1 hay 0, dựa trên việc ta có một số chẵn hay lẻ các số 1 trong từ. Bằng cách này, tất cả các các từ được mã hóa sẽ có số các số 1 chẵn. Theo đó, 1011 sẽ được mã hóa thành 10111. Bây giờ, nếu nó bị biến đổi thành 00111 thì ta sẽ biết rằng có lỗi vì ta nhận một dãy có số các số 1 lẻ. Mã phát hiện lỗi này được gọi là mã kiểm tra chẵn lẻ (parity check) và rõ ràng là nó quá đơn giản để thật sự hữu dụng. Thí dụ, nếu 2 số trong dãy bị biến đổi thì mã này sẽ không phát hiện được lỗi Một cách tiếp cận khác để mã hóa thông điệp là lặp lại nó 2 lần, thí dụ như khi 1011 được mã hóa thành 10111011 mà ta lại nhận được 00111011 thì ta biết được có lỗi do 2 phần không giống nhau. Giả sử chỉ có một lỗi thì đó là lỗi tại vị trí đầu tiên. Mã này cũng cho kết quả tồi và thường không được sử dụng. Ta có thể có kết quả tôt hơn khi lặp lại thông điệp nhiều lần, nhưng việc đó rất tốn kém.

Một kĩ thuật mã hóa tiên tiến: Mã Hamming: Trong thập niên 50, R.H. Hamming đã đưa ra một mã sủa lỗi thú vị mà mã đó được biết đến là mã Hamming. Trước khi ta xem xét chi tiết kĩ thuật đó, ta cần một số nền tảng Đại số tuyến tính.

Không gian vector trên $\mathbb{Z}_2$

Trong một khóa Đại số tuyến tính năm nhất điển hình, khi các sinh viên được giới thiệu khái niệm không gian vector, "đại lương vô hướng" có nghĩa là một số thực hay một số phức. Nó có thể được tổng quát hóa thành một phần tử bất kì của một trường (field) nào đó.

Một trường là một tập hợp (ở đây kí hiệu là F) với 2 phép toán cộng và nhân thõa:

1. Tính đóng của phép cộng: nếu x, y thuộc F thì $x + y$ cũng thuộc F
2. Tính đóng của phép nhân: nếu x, y thuộc F thì xy cũng thuộc F
3. Tính kết hợp của phép cộng: nếu x, y, z thuộc F thì $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Tính kết hợp của phép nhân: nếu x, y, z thuộc F thì $(xy)z = x(yz)$
5. Tính phân phối: nếu x, y, z thuộc F thì $x(y + z) = xy + xz$
6. Sự tồn tại phẩn tử 0: một phần tử thuộc F thõa $x + 0 = x$ với mọi x thuộc F
7. Sự tồn tại phần tử 1: một phần tử thuộc F thõa $x.1 = x$ với mọi x thuộc F
8. Sự tồn tại phần tử nghịch đảo của phép cộng: nếu x thuộc F thì tồn tại y thuộc F sao cho $x + y = 0$
9. Sự tồn tại phần tử nghịch đảo của phép nhân: nếu $x \neq 0$ thuộc F thì tồn tại y thuộc F sao cho $xy = 1$
10. Tính giao hoán của phép cộng: nếu x, y thuộc F thì $x + y = y + x$
11. Tính giao hoán của phép nhân: nếu x, y thuộc F thì $xy = yx$

Một số thí dụ về trường là $\mathbb{Q}$ (số hữu tỉ), $\mathbb{R}$ (số thực), $\mathbb{C}$ (số phức) và $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (hay còn kí hiệu là $\mathbb{Z}_p$) với p là số nguyên tố: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0,1, \dots, (p-1)\}$

Thí dụ cuối được quan tâm đặc biệt ở đây. Trong trường hợp cụ thể $p = 2$, trường $\mathbb{Z}_2$ chứa 2 số 0 và 1: $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0,1\}$

Trong $\mathbb{Z}_2$ phép cộng và phép nhân được định nghĩa như sau:

$0 + 0 = 0, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 1 = 0$

$0.0 = 0, \qquad 1.0 = 0, \qquad 0.1 = 0, \qquad 1.1 = 1$

Nhắc lại cấu trúc không gian vector của $\mathbb{R}^n$ trên $\mathbb{R}$:

1. $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
2. $a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$ với a là một số thực

Cấu trúc đó có thể được định nghĩa trên $\mathbb{Z}_2^n$. Ta trang bị $\mathbb{Z}_2^n$ với một phép cộng và một phép nhân vô hướng (nhân với 0 và 1). Thí dụ, trong $\mathbb{Z}_2^5$, ta có:

$$\begin{array}{rcl} (1,0,1,1,0) \quad + \quad (0,1,1,1,1) & = & (1,1,0,0,1) \\ 0.(1,1,0,1,0) & = & (0,0,0,0,0) \end{array}$$

Khi được trang bị 2 phép toán trên, $\mathbb{Z}_2^n$ trở thành một không gian vector trên trường $\mathbb{Z}_2$ (với các đại lượng vô hướng là 0 hoặc 1). Tất cả khái niệm cơ bản của không gian vector như độc lập tuyến tính, tập sinh, không gian con, chiều, không gian dòng, nhân,… đều có ở đây. Một khác biệt lớn với không gian vector $\mathbb{R}^n$ là $\mathbb{Z}_2^n$ chỉ chứa hữu hạn vector, cụ thể là 2^n vector.

__Mã Hamming (7,4):__ Cho $k \le n$, một không gian con của $\mathbb{Z}_2^n$ với số chiều k được gọi là một mã tuyến tính (linear code) (n,k). Các phần tử của mã tuyến tính được gọi là các từ được mã hóa (encoded word).

Xét ma trận H với các hệ số trong $\mathbb{Z}_2$ mà các cột $c_1, \dots c_7$ là các vector khác 0 của $\mathbb{Z}_2^3$:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân của H, $Ker(H)$, được gọi là một mã Hamming (7,4). Nhắc lại rằng $Ker(H)$ chỉ là tập hợp tất cả các nghiệm của hệ tuyến tính thuần nhất $HX = 0$. Ta nói H là một ma trận kiểm tra chẵn lẻ cho mã $Ker(H)$. Ta giải hệ $HX = 0$ để xem $Ker(H)$ như thế nào

Sử dụng phép khử Gauss-Jordan, ta có dạng bậc thang rút gọn của H:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do hạng của H là 3 nên số chiều của $Ker(H)$ là $7 - 3 = 4$. Ta cũng có thể dễ dàng kiểm chứng được

$$B = \{(1,0,0,0,0,1,1), (0,1,0,0,1,0,1), (0,0,1,0,1,1,0), (0,0,0,1,1,1,1)\}$$

là một cơ sở của $Ker(H)$ với các hệ số của H thuộc $\mathbb{Z}_2$.

<u>Nhận xét:</u> Cho $\{e_1, \dots, e_7\}$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbb{Z}_2^7$ thì $He_i = c_i$ với $i = 1,2, \dots, 7$ và do đó không có vector chính tắc e_i nào nằm trong $Ker(H)$. Do đó, ta có 2 quan sát sau:

1. Nếu v là một vector trong $Ker(H)$ thì $v + e_i$ không nằm trong $Ker(H)$ với $i = 1,2, \dots, 7$
2. Nếu v là một vector trong $\mathbb{Z}_2^7$ mà $Hv = c_i$ với i nào đó thì $v + e_i$ là một vector trong $Ker(H)$. Hơn nữa, $v + e_j$ không nằm trong $Ker(H)$ với mọi $j \neq i$.

Ma trận G mà các dòng là các phần tử trong cơ sở B được gọi là ma trận sinh (generator matrix) của mã Hamming (7,4):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng giải thích thủ tục giải mã Hamming và sửa lỗi:

<u>Thuật toán sửa lỗi với mã Hamming (7,4)</u>

Giả sử ta muốn gửi một từ u bao gồm 4 số nhị phân u_1, u_2, u_3, u_4 và giả sử từ được mã hóa có thể bị sự nhiễu làm biến đổi đúng một thành phần của nó. Gọi w là từ nhận được.

1. Để mã hóa u, ta lập tổ hợp tuyến tính v của các phần tử của cơ sở B đã đề cập ở trên với 4 số của u là các hệ số. Chú ý rằng v có thể có được từ từ gốc bằng cách thực hiện phép nhân ma trận $v = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]G$ với G là ma trận đã đề cập ở trên. Theo đó, vector v nằm trong $Ker(H)$. Cũng chú ý rằng $[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]G$ cho một vector gồm 7 số mà 4 số đầu biểu diễn kí tự ban đầu.
2. Tính Hw, trong đó H cũng là ma trận đã đề cập ở trên.
3. Nếu $Hw = 0$ thì w nằm trong $Ker(H)$, mà một lỗi đơn dẫn đến w không nằm trong $Ker(H)$ theo nhận xét bên trên. Ta kết luận rằng thông điệp truyền đi không bị biến đổi và u là 4 số đầu của w.
4. $Hw = c_i$ với i nào đó thì $v + e_i$ là một vector của $Ker(H)$ và $v + e_j$ không nằm trong $Ker(H)$ với mọi j. Nếu ta đổi số thứ i của w (từ 0 thành 1 hoặc từ 1 thành 0) và nhận vector mới w' thì 4 số đầu của w' biểu diễn u.

Ta hãy xem 2 thí dụ sau đây:

<u>Thí dụ 1:</u> Giả sử ta nhận thông điệp $w = 1100011$ được mã hóa bởi mã Hamming (7,4). Giả sử chỉ có tối đa một lỗi xảy ra trong quá trình truyền, ta cần tìm thông điệp gốc.

Giải:

$$H\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Do $Hw = c_2$ (c_2 là cột thứ 2 của H) nên khi đổi số thứ 2 của w cho ta từ được mã hóa: 1000011. Ta kết luận thông điệp gốc là 1000.

Thí dụ 2: Giả sử ta nhận thông điệp $w = 0101010$ được mã hóa bởi mã Hamming (7,4). Giả sử chỉ có tối đa một lỗi xảy ra trong quá trình truyền, ta cần tìm thông điệp gốc.

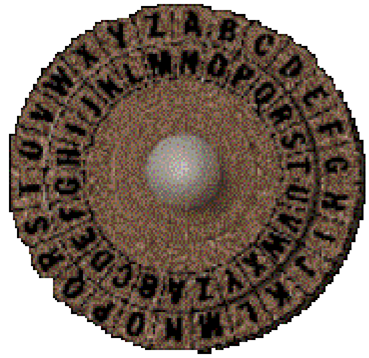
Giải:

$$H\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Do $Hw = 0$ nên không có lỗi trong quá trình truyền, do đó thông điệp gốc là 0101.

Trong kĩ thuật trên, các từ chúng ta gửi đi phải rất ngắn (chỉ chứa 4 số) và chỉ có 2^n từ như vậy. Trong thực tế, các thông điệp điện tử bao gồm rất nhiều kí tự. Một vấn đề khác với mã Hamming (7,4) là nó không thể phát hiện nhiều hơn 1 lỗi trong một thông điệp được mã hóa. Rõ ràng, ta có thể nghĩ rằng là có tồn tại các loại mã hiệu quả hơn.

Ứng dụng trong lý thuyết mật mã (Cryptography)



Lý thuyết mật mã (Cryptography) đối với đa số mọi người liên quan đến việc đảm bảo tính riêng tư cho việc giao tiếp. Tất nhiên, việc bảo vệ các giao tiếp nhạy cảm là trung tâm của lý thuyết mật mã trong suốt lịch sử của nó. Việc **mật mã hóa (Encryption)** là việc biến đổi dữ liệu thành dạng nào đó không thể đọc được. Mục đích của nó là để đảm bảo tính riêng tư bằng cách giấu thông tin với tất cả mọi người mà thông tin đó không hướng đến, thậm chí với những người có thể thấy dữ liệu sau khi được mã hóa. Việc **giải mã (Decryption)** là việc ngược lại với mật mã hóa, nó là sự biến đổi từ các dữ liệu sau khi được mã hóa về dạng hiểu được.

Mật mã hóa và giải mã yêu cầu việc sử dụng một số thông tin mật, thường được gọi đến là khõa mã (key). Dựa vào cơ chế mã hóa được sử dụng, một khóa mã có thể vừa được sử dụng để mật mã hóa vừa để giải mã, trong khi với một số cơ chế khác, các khóa mã dùng cho mật mã hóa và giải mã có thể khác nhau.

Các chính phủ hiện nay sử dụng các phương pháp mã hóa và giải mã các thông điệp. Một loại mã cực kì khó phá là sử dụng một ma trận lớn để mã hóa một thông điệp. Bên nhận thông điệp giải mã nó bằng cách sử dụng ma trận nghịch đảo. Ma trận đầu tiên được gọi là **ma trận mã hóa (encoding matrix)** và ma trận nghịch đảo của nó gọi là **ma trận giải mã (decoding matrix)**

Thí dụ: Cho một thông điệp:

PREPARE TO NEGOTIATE

và ma trận mã hóa là

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta gán một số cho mỗi kí tự. Để đơn giản, ở đây ta lấy vị trí của mỗi kí tự trong bảng chữ cái: A – 1, B – 2,… Ngoài ra, ta ta gán số 27 cho dấu khoảng trắng (bảng chữ cái có 26 kí tự). Theo đó, thông điệp trên trở thành:

$$\begin{matrix} P & R & E & P & A & R & E & * & T & O & * & N & E & G & O & T & I & A & T & E \\ 16 & 18 & 5 & 16 & 1 & 18 & 5 & 27 & 20 & 15 & 27 & 14 & 5 & 7 & 15 & 20 & 9 & 1 & 20 & 5 \end{matrix}$$

Do ta đang sử dụng một ma trận 3×3, ta tạo một dãy vector 3×1 từ thông điệp sau khi số hóa ở trên:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Để ý rằng ta cần phải chèn một khoảng trắng vào cuối thông điệp để tạo vector sau cùng. Bây giờ ta có thể mã hóa thông điệp bằng cách viết các vector trên thành một ma trận với mỗi vector là một cột và thực hiện phép nhân ma trận đó với ma trận mã hóa như sau:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 5 & 20 & 20 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 7 & 9 & 5 \\ 5 & 18 & 20 & 17 & 15 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

phép nhân này cho ma trận

$$\begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -182 & -96 & -91 & -183 \\ 23 & 19 & 47 & 41 & 22 & 10 & 32 \\ 138 & 139 & 181 & 197 & 101 & 111 & 203 \end{bmatrix}$$

Các cột của ma trận này chi ta thông điệp sau khi mã hóa và nó được truyền đi dưới dạng viết ngang

$$\begin{matrix} -122, & 23, & 138, & -123, & 19, & 139, & -176, & 47, & 181, \\ -182, & 41, & 197, & -96, & 22, & 101, & -91, & 10, & 111, \\ -182, & 32, & 203. \end{matrix}$$

Để giải mã thông điệp, bên nhận viết lại chuỗi này dưới dạng một dãy ma trận cột 3×1 và lặp lại kĩ thuật sử dụng ma trận nghịch đảo của ma trận mã hóa. Ở đây, nghịch đảo của ma trận mã hóa là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Theo đó, để giải mã thông điệp, ta thực hiện phép nhân ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -182 & -96 & -91 & -183 \\ 23 & 19 & 47 & 41 & 22 & 10 & 32 \\ 138 & 139 & 181 & 197 & 101 & 111 & 203 \end{bmatrix}$$

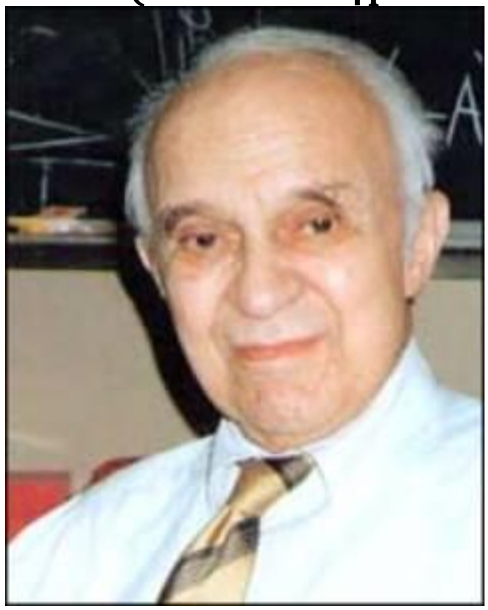
và có được ma trận

$$\begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 5 & 20 & 20 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 7 & 9 & 5 \\ 5 & 18 & 20 & 17 & 15 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

Viết các cột của ma trận này ra một dòng cho ta thông điệp gốc:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 16 & 18 & 5 & 16 & 1 & 18 & 5 & 27 & 20 & 15 & 27 & 14 & 5 & 7 & 15 & 20 & 9 & 1 & 20 & 5 \\ P & R & E & P & A & R & E & * & T & O & * & N & E & G & O & T & I & A & T & E \end{array}$$

Ứng dụng vào kinh tế (mô hình nhập – xuất của Leontief)



Giới thiệu

Để có thể hiểu và kiểm soát được nền kinh tế của một quốc gia hoặc vùng lãnh thổ, người ta cần phải có một mô hình nhất định dựa trên nhiều lĩnh vực của nền kinh tế này. Mô hình Leontief là một kết quả của hướng đi này. Dựa trên giả định rằng mỗi ngành công nghiệp trong nền kinh tế có hai nhu cầu: nhu cầu bên ngoài (nhu cầu nằm ngoài hệ thống) và nhu cầu bên trong (nhu cầu được một ngành công nghiệp đặt cho một ngành công nghiệp khác trong cùng hệ thống), mô hình Leontief thể hiện nền kinh tế dưới dạng một hệ phương trình tuyến tính. Mô hình Leontief được Giáo sư Wassily Leontief (ảnh) tạo ra vào những năm 30 của thế kỉ XX, ông đã phát triển một mô hình kinh tế cho nền kinh tế nước Mỹ bằng cách chia nó thành 500 lĩnh vực. Vào ngày 18 tháng 10 năm 1973, Giáo sư Leontief được trao giải Nobel kinh tế vì những đóng góp của ông.

1) **Mô hình Leontief đóng** Xét một nền kinh tế chứa n ngành công nghiệp (hay lĩnh vực) phụ thuộc lẫn nhau $S_1, \dots, S_n$. Nghĩa là mỗi ngành công nghiệp tiêu thụ một số sản phẩm của những ngành công nghiệp khác, kể cả chính nó (ví dụ, một nhà máy năng lượng sử dụng một ít năng lượng của chính nó để sản xuất). Ta nói một nền kinh tế như vậy là **đóng** nếu nó đáp ứng được nhu cầu của chính nó; nghĩa là không có sản phẩm nào xâm nhập vào hay thoát ra được khỏi hệ thống. Gọi m_{ij} là số lượng sản phẩm (unit) sản xuất bởi ngành công nghiệp S_i cộng với số lượng sản phẩm cần thiết để sản xuất ra một sản phẩm của ngành công nghiệp S_j. Nếu p_k là mức độ sản xuất (production level) của ngành công nghiệp S_k thì $m_{ij}p_j$ chính là số lượng sản phẩm sản xuất bởi ngành công nghiệp S_i và được tiêu thụ vởi ngành công nghiệp S_j. Khi đó số lượng sản phẩm được sản xuất bởi ngành công nghiệp S_i là
$$p_1 m_{i1} + p_2 m_{i2} + \cdots + p_n m_{in}.$$

Để có một nền kinh tế cân bằng thì tổng sản lượng của mỗi ngành công nghiệp phải bằng với tổng tiêu thụ của nó. Tức ta có hệ tuyến tính:

$$m_{11}p_1 + m_{12}p_2 + \cdots + m_{1n}p_n = p_1$$

$$m_{21}p_1 + m_{22}p_2 + \cdots + m_{2n}p_n = p_2$$

$$\dots$$

$$m_{n1}p_1 + m_{n2}p_2 + \cdots + m_{nn}p_n = p_n$$

Nếu ta đặt

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Thì hệ trên có thể viết lại thành $AP = P$, trong đó

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Ma trận A được gọi là **ma trận nhập – xuất** (input-output matrix).

Vậy ta phải tìm một vector P thỏa $AP = P$ và các phần tử phải không âm, trong đó có ít nhất một phần tử dương.

Ví dụ Giả sử nền kinh tế của một vùng nào đó phụ thuộc vào 3 ngành công nghiệp: dịch vụ, điện lực và sản xuất dầu. Giám sát các hoạt động của 3 ngành công nghiệp này trong một năm, ta có thể thấy những điều sau:

1. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm ngành dịch vụ (1 unit worth of service), ngành công nghiệp dịch vụ phải tiêu thụ 0.3 đơn vị sản phẩm của chính nó, 0.3 đơn vị điện và 0.3 đơn vị dầu.
2. Để sản xuất một đơn vị điện, nhà máy năng lượng phải mua 0.4 đơn vị sản phẩm ngành dịch vụ, 0.1 đơn vị điện và 0.5 đơn vị dầu.
3. Cuối cùng, công ty sản xuất dầu cần 0.3 đơn vị sản phẩm ngành dịch vụ, 0.6 đơn vị điện và 0.2 đơn vị dầu để sản xuất 1 đơn vị dầu.

Tìm mức độ sản xuất của từng ngành công nghiệp sao cho thỏa được nhu cầu bên trong và nhu cầu bên ngoài với giả định rằng mô hình trên **đóng**, nghĩa là không sản phẩm nào xâm nhập vào hay thoát ra được khỏi hệ thống.

Giải Xét những biến sau:

1. p_1 là mức độ sản xuất của ngành công nghiệp dịch vụ.
2. p_2 là mức độ sản xuất của nhà máy năng lượng (điện).
3. p_3 là mức độ sản xuất của công ty sản xuất dầu.

Vì mô hình này đóng nên tổng tiêu thụ của mỗi ngành công nghiệp phải bằng tổng sản lượng của nó. Tức ta có hệ tuyến tính sau:

$$0.3p_1 + 0.3p_2 + 0.3p_3 = p_1$$

$$0.4p_1 + 0.1p_2 + 0.5p_3 = p_2$$

$$0.3p_1 + 0.6p_2 + 0.2p_3 = p_3$$

Ma trận đầu vao – đầu ra là

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

và hệ trên có thể viết thành $(A - I)P = 0$. Chú ý rằng hệ thuần nhất này có vô số nghiệm (và do đó có một nghiệm không tầm thường) vì mỗi cột của ma trận hệ số có tổng bằng 1. Ma trận bổ sung của hệ tuyến tính này là

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & -0.9 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

đưa về ma trận bậc thang rút gọn (lấy xấp xỉ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.82 & 0 \\ 0 & 1 & -0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Để giải hệ này ta đặt $p_3 = t$ (tham số), khi đó ta có nghiệm tổng quát

$$\begin{cases} p_1 = 0.82t \\ p_2 = 0.92t \\ p_3 = t \end{cases}$$

và như đã nói ở trên, giá trị của các biến trong hệ phải không âm để mô hình có nghĩa; nói cách khác là $t \geq 0$. Lấy ví dụ $t = 100$ cho ta nghiệm

$$\begin{cases} p_1 = 82 \text{ đơn vị} \\ p_2 = 92 \text{ đơn vị} \\ p_3 = 100 \text{ đơn vị} \end{cases}$$

2) **Mô hình Leontief mở** Mô hình Leontief đầu tiên dùng để giải quyết trường hợp không có sản phẩm nào xâm nhập vào hay thoát ra được khỏi nền kinh tế, nhưng trong thực tế điều này lại xảy ra khá thường xuyên. Thông thường, một nền kinh tế phải đáp ứng được nhu cầu bên ngoài, ví dụ như từ những cơ quan nhà nước. Trong trường hợp này, gọi d_i là nhu cầu từ ngành công nghiệp bên ngoài thứ i, p_i và m_{ij} như trong mô hình đóng ở trên, khi đó

$$p_i = m_{i1}p_1 + m_{i2}p_2 + \cdots + m_{in}p_n + d_i$$

với mọi i. Vậy ta có hệ tuyến tính sau (viết dưới dạng ma trận):

$$P = AP + d$$

trong đó P và A định nghĩa như trên và

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_3 \end{bmatrix}$$

là **vector nhu cầu** (demand vector).

Một cách để giải hệ này là

$$P = AP + d \Longrightarrow (I - A)P = d \Longrightarrow P = (I - A)^{-1}d. \qquad (*)$$

Dĩ nhiên ta cần ma trận $I - A$ khả nghịch, tuy nhiên điều này không phải lúc nào cũng đúng. Ở chiều ngược lại, nếu ta biết thêm rằng $(I - A)^{-1}$ có toàn bộ phần tử không âm thì các phần tử của vector P cũng sẽ không âm và khi đó chúng được xem là nghiệm của mô hình này. Trong tường hợp này ta nói rằng ma trận A hữu ích (productive).

Ví dụ Xét một nền kinh tế mở với 3 ngành công nghiệp: khai thác than đá, nhà máy điện hạt nhân (electricity-generating plant) và một nhà máy sản xuất tự động. Để sản xuất $1 than đá, công việc khai thác phải tiêu thụ $0.1 than đá, $0.3 điện và $0.1 vận chuyển (worth of automobile for its transportation). Để sản xuất $1 điện, người ta phải tiêu thụ $0.25 than đá, $0.4 điện và $0.15 vận chuyển. Cuối cùng, để sản xuất $1 vận chuyển, nhà máy sản xuất tự động phải bát $0.2 than đá, $0.5 điện và tiêu thụ $0.1 vận chuyển. Giả sử thêm rằng trong một tuần, nền kinh tế có nhu cầu bên ngoài gồm $50,000 than đá, $75,000 điện và $125,000 vận chuyển. Tìm mức độ sản xuất của từng nành công nghiệp trong một tuần để đáp ứng chính xác cả nhu cầu bên trong và bên ngoài.

Giải Ma trận nhập – xuất của nền kinh tế này là

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}$$

và vector nhu cầu là

$$d = \begin{bmatrix} 50{,}000 \\ 75{,}000 \\ 125{,}000 \end{bmatrix}$$

Theo phương trình $(*)$ ở trên,

$$P = (I - A)^{-1}d$$

trong đó

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.25 & -0.2 \\ -0.3 & 0.6 & -0.5 \\ -0.1 & -0.15 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Sử dụng kĩ thuật phép khử Gauss (hoặc công thức $B^{-1} = \frac{1}{\det B} adj(B)$) ta tìm được

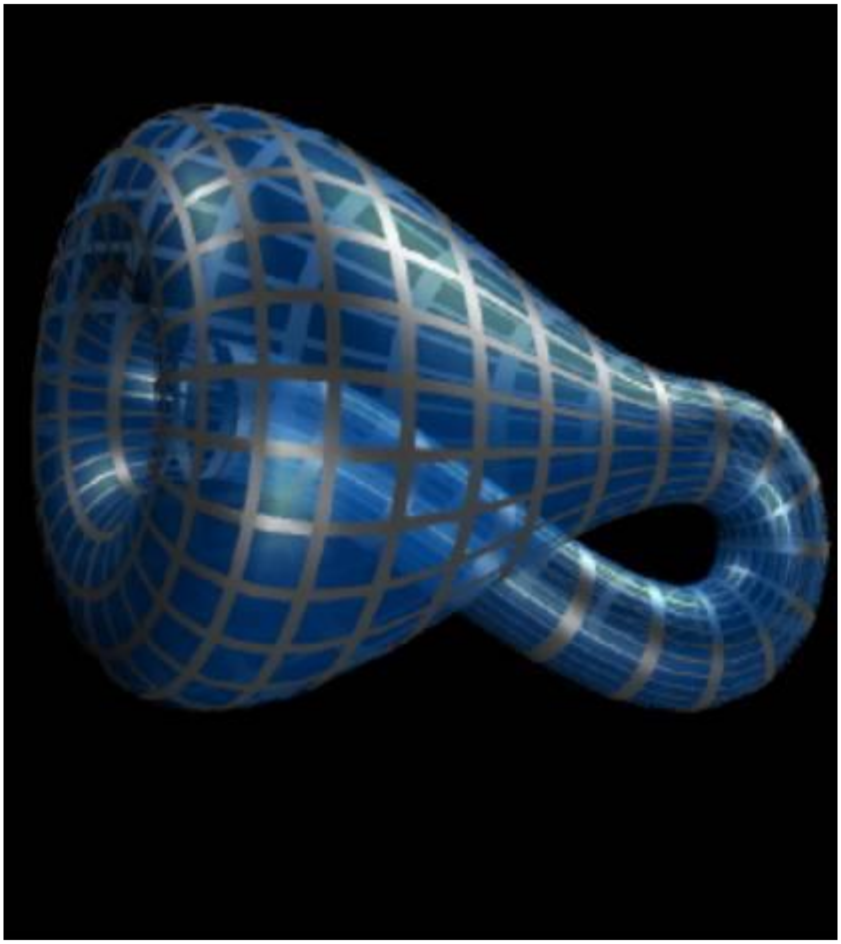
$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.464 & 0.803 & 0.771 \\ 1.007 & 2.448 & 1.606 \\ 0.330 & 0.503 & 1.464 \end{bmatrix}$$

suy ra

$$P = \begin{bmatrix} 1.464 & 0.803 & 0.771 \\ 1.007 & 2.448 & 1.606 \\ 0.330 & 0.503 & 1.464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50,000 \\ 75,000 \\ 125,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 229921.59 \\ 437795.27 \\ 237401.57 \end{bmatrix}$$

Vậy lần lượt tổng thu nhập của công nghiệp khai thác than đá, nhà máy điện hạt nhân và nhà máy sản xuất tự động phải là \$229921.59, \$437794.27 và \$237401.57.

Ứng dụng vào lý thuyết khử (Elimination Theory)



Giới thiệu Nhiều bài toán trong đại số tuyến tính (và cả một số ngành khoa học khác) đều đưa về việc giải hệ phương trình tuyến tính nhiều biến. Nghĩa là ta phải tìm nghiệm tổng quát cho những phương trình "đa thức" ở cấp 1 (Siêu phẳng). Trong nhiều trường hợp chúng ta có thể gặp phải những hệ phương trình đa thức "phi tuyến tính" có nhiều hơn một biến. Theo nghĩa hình học tức là chúng ta phải tìm các giao điểm của một số "mặt". Giống như phép khử Gauss đối với hệ phương trình tuyến tính, **lý thuyết khử** nhìn chung là để khử một số ẩn của hệ phương trình đa thức để có một hệ tương đương dễ xử lí hơn.

Một cách để tìm nghiệm cho hệ phương trình đa thức là giải từng phương trình và sau đó so sánh các nghiệm. Và có thể bạn đã biết, đây không phải là cách hay đặc biệt là nếu ta chỉ muốn chứng minh nghiệm của hệ tồn tại.

Để hiểu tầm quan trọng của lý thuyết khử , ta sẽ bắt đầu với việc xét một số ví dụ "đơn giản".

<u>Ví dụ</u> Xét 2 hàm bậc hai đối với biến x như sau:

$$\begin{cases} f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases}$$

Chúng ta muốn tìm điều kiện cần và đủ để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung thì chúng phải có thừa số tuyến tính chung, ta gọi là L. Đặt:

$$q_1(x) = \frac{f(x)}{L}; q_2(x) = \frac{g(x)}{L}$$

Khi đó $q_1(x); q_2(x)$ phải tuyến tính, như vậy ta có thể viết:

$$q_1(x) = A_1x + B_1; q_2(x) = -A_2x - B_2$$

Với A_1, A_2, B_1, B_2 là các hằng số (việc chọn dấu cho $q_2(x)$ như vậy sẽ có ích sau này). Ta có

$$\frac{f(x)}{q_1(x)} = \frac{g(x)}{q_2(x)} = L$$

suy ra

$$f(x)q_2(x) = g(x)q_1(x)$$

$$\Leftrightarrow (a_1x^2 + b_1x + c_1)(-A_2x - B_2) = (a_2x^2 + b_2x + c_2)(A_1x + B_1)$$

Khai triển phương trình trên ta được:

$$(a_1A_2 + a_2A_1)x^3 + (b_2A_1 + b_1A_2 + a_1B_2 + a_2B_1)x^2 + (c_1A_2 + c_2A_1 + b_2B_1 + b_1B_2) + (c_1B_2 + c_2B_1) = 0$$

Đẳng thức xảy ra mới mọi x, vậy đăng thức này tương đương với việc các hệ số của x^3, x^2, x và hệ số tự do cùng bằng 0. Nghĩa là ta có hệ thuần nhất sau với các biến là A_2, B_2, A_1, B_2:

$$\begin{cases} a_1A_2 + a_2A_1 = 0 \\ b_2A_1 + b_1A_2 + a_1B_2 + a_2B_1 = 0 \\ c_1A_2 + c_2A_1 + b_2B_1 + b_1B_2 = 0 \\ c_1B_2 + c_2B_1 = 0 \end{cases}$$

Để hệ trên có nghiệm không tâm thường thì ma trận hệ số của nó phải không khả nghịch. Nói cách khác định thức của nó bằng 0:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

tương đương với

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

vì định thức của một ma trận bằng với định thức của chuyển vị ma trận đó. Định thức này được gọi là **kết thức** (Sylvester) của $f(x), g(x)$. Chú ý rằng kết thức trong trường hợp này là định thức của một ma trận 4x4 chứa các hệ số của hai đa thức trên cùng với các số 0 được sắp xếp một cách đặc biệt.

Sau đây là định nghĩa hình thức của kết thức:

Định nghĩa Cho

$$f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

$$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

lần lượt là hai đa thức bậc m và n sao cho $a_m \neq 0, b_n \neq 0$. Nếu $m \leq n$ ta định nghĩa **kết thức** của $f(x)$ và $g(x)$ là định thức sau:

$$Res\big(f(x),g(x)\big)=\begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng $Res\big(f(x),g(x)\big)$là định thức của một ma trận vuông cấp $m+n$.

<u>Ví dụ</u> Nếu

$$f(x)=-2x^4+4x^3-x^2+5x-1 \text{ và } g(x)=x^2-6x+9$$

Thì

$$Res\big(f(x),g(x)\big)=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Để tổng quát hóa ví dụ đầu tiên, ta có định lý sau:

<u>Định lý</u> cho

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$$

lần lượt là hai đa thức bậc m và n sao cho $a_m\neq 0, b_n\neq 0$. Khi đó hệ

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$$

có nghiệm nếu và chỉ nếu $Res\big(f(x),g(x)\big)=0$.

<u>Ví dụ 1</u> Không giải phương trình hãy chứng minh hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3-3x^2+5x-3=0 \\ 2x^2-7x+5=0 \end{cases}$$

Giải Ta tính kết thức của hai đa thức

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = 2x^2 - 7x + 5$$

$$Res\big(f(x), g(x)\big) = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

do đó theo định lý trên $f(x), g(x)$ có nghiệm chung.

Người ta có thể sử dụng định lý trên để kiểm tra xem một hệ đa thức có nhiều hơn một biến có nghiệm hay không. Cách làm là xem những đa thức trong hệ là đa thức theo một ẩn với các hệ số là các đa thức theo các ẩn còn lại. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa ý tưởng này.

Ví dụ 2 Giải hệ sau:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Giải Chúng ta xem như đây là hệ đa thức ẩn y với các hệ số là đa thức chứa x:

$$\begin{cases} 4y^2 + 16y + (9x^2 - 18x - 11) = 0 \\ y^2 + (x^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Để các phương trình có nghiệm chung thì ta phải có:

$$\begin{vmatrix} 4 & 16 & 9x^2 - 18x - 11 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 9x^2 - 18x - 11 \\ 1 & 0 & x^2 - 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^4 - 180x^3 + 574x^2 - 900x + 625 = 0$$

Bài toán được đưa về giải phương trình đa thức với một biến x. Dù cách giải phương trình trên không đơn giản nhưng ta vẫn có thể sử dụng các phương pháp số học để xấp xỉ nghiệm. Nghiệm của phương trình chính là hoành độ của các giao điểm . Chú ý rằng hệ ban đầu có thể viết thành

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1 \\ (x-0)^2 + (y-0)^2 = 9 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là giao điểm của một elip và một đường tròn và ta có thể tìm được bằng hình học.

Ma phương (Magic Squares)

Bạn đang nghĩ rằng Đại số tuyến tính chỉ toàn định nghĩa và định lý ? Có thể trò chơi sau sẽ giúp bạn có cái nhìn khác.

Một ma phương cấp n là một ma trận vuông cấp n chứa tất cả số nguyên từ 1 đến n^2, với tính chất là tổng của các phần tử trong mỗi cột, mỗi dòng và trên đường chéo đều bằng nhau. Ta có thể tính được tổng các phần tử trong một dòng bất kì, một cột bất kì hay trên đường chéo của một ma phương cấp n sẽ bằng $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Ta sẽ bắt đầu với trường hợp đơn giản: ma phương cấp 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Để tìm các hệ số này ta phải giải một hệ tuyến tính 6 phương trình và 4 ẩn:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ c+d=5 \\ a+c=5 \\ b+d=5 \\ a+d=5 \\ b+c=5 \end{cases}$$

Ta có thể giải bằng phép khử Gauss. Một cách đơn giản hơn để giải hệ này là chú ý rằng phương trình thứ nhất và thứ ba sẽ cho ta $b=c$, thay vào phương tình cuối cùng sẽ được $2b=5$, phương trình này không có nghiệm nguyên. Nói cách khác không tồn tại ma phương cấp 2.

Ta sẽ thử tiếp với ma phương cấp 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp này tổng các phần tử trong từng dòng, từng cột và đường chéo phải bằng 15. Vậy ta có hệ tuyến tính sau:

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ d+e+f=15 \\ g+h+i=15 \\ a+d+g=15 \\ b+e+h=15 \\ c+f+i=15 \\ a+e+i=15 \\ c+e+g=15 \end{cases}$$

Sử dụng kĩ thuật phép khử Gauss ta có dạng rút gọn của hệ như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có 2 ẩn tự do là h và i. Chọn $h = 9$ và $i = 2$ cho ta nghiệm sau:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

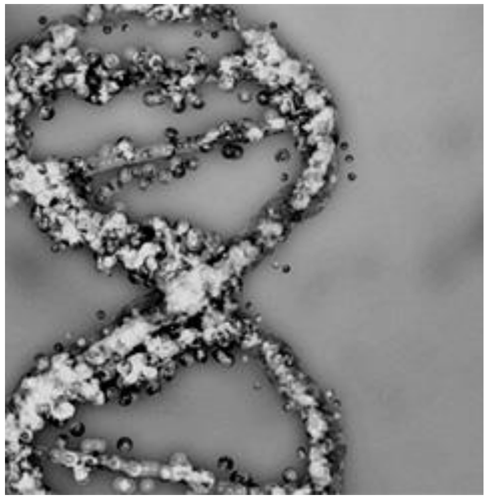
Nếu bạn nghĩ ma phương cấp 3 như trên là khó đoán thì bạn nên xem ma phương được H. Derksen tìm ra:

1	443	235	547	339	283	100	387	179	616	565	352	44	456	148	217	509	321	113	405	499	161	578	270	57
157	599	261	53	495	439	226	543	335	22	91	383	200	612	279	373	40	452	144	556	505	317	109	421	213
313	105	417	209	521	595	257	74	486	153	247	539	326	18	435	379	191	608	300	87	31	473	140	552	369
469	131	573	365	27	121	413	205	517	309	253	70	482	174	586	535	347	14	426	243	187	604	291	83	400
625	287	79	391	183	127	569	356	48	465	409	221	513	305	117	61	478	170	582	274	343	10	447	239	526
587	254	66	483	175	244	531	348	15	427	396	188	605	292	84	28	470	132	574	361	310	122	414	201	518
118	410	222	514	301	275	62	479	166	583	527	344	6	448	240	184	621	288	80	392	461	128	570	357	49
149	561	353	45	457	401	218	510	322	114	58	500	162	579	266	340	2	444	231	548	617	284	96	388	180
280	92	384	196	613	557	374	36	453	145	214	501	318	110	422	491	158	600	262	54	23	440	227	544	331
431	248	540	327	19	88	380	192	609	296	370	32	474	136	553	522	314	101	418	210	154	591	258	75	487
423	215	502	319	106	55	492	159	596	263	332	24	436	228	545	614	276	93	385	197	141	558	375	37	454
554	366	33	475	137	206	523	315	102	419	488	155	592	259	71	20	432	249	536	328	297	89	376	193	610
85	397	189	601	293	362	29	466	133	575	519	306	123	415	202	171	588	255	67	484	428	245	532	349	11
236	528	345	7	449	393	185	622	289	76	50	462	129	566	358	302	119	406	223	515	584	271	63	480	167
267	59	496	163	580	549	336	3	445	232	176	618	285	97	389	458	150	562	354	41	115	402	219	506	323
359	46	463	130	567	511	303	120	407	224	168	585	272	64	476	450	237	529	341	8	77	394	181	623	290
390	177	619	281	98	42	459	146	563	355	324	111	403	220	507	576	268	60	497	164	233	550	337	4	441
541	333	25	437	229	198	615	277	94	381	455	142	559	371	38	107	424	211	503	320	264	51	493	160	597
72	489	151	593	260	329	16	433	250	537	606	298	90	377	194	138	555	367	34	471	420	207	524	311	103
203	520	307	124	411	485	172	589	251	68	12	429	241	533	350	294	81	398	190	602	571	363	30	467	134
195	607	299	86	378	472	139	551	368	35	104	416	208	525	312	256	73	490	152	594	538	330	17	434	246
346	13	430	242	534	603	295	82	399	186	135	572	364	26	468	412	204	516	308	125	69	481	173	590	252
477	169	581	273	65	9	446	238	530	342	286	78	395	182	624	568	360	47	464	126	225	512	304	116	408
508	325	112	404	216	165	577	269	56	498	442	234	546	338	5	99	386	178	620	282	351	43	460	147	564
39	451	143	560	372	316	108	425	212	504	598	265	52	494	156	230	542	334	21	438	382	199	611	278	9

Ma phương này có các tính chất sau:

- Các phần tử của ma phương là các số $1,2,\ldots,625 = 25 \times 25$.
- Tổng các phần tử trong mỗi cột, mỗi dòng và trên đường chéo đều bằng $7825 = \frac{25(1+625)}{2}$.
- Nếu ma phương này được chia thành 25 ma trận vuông 5×5 thì tất cả các ma trận nhỏ đó cũng là ma phương và chúng đều có tổng các phần tử trong từng dòng, từng cột và trên đường chéo đều bằng $1565 = \frac{5(1+625)}{2}$.
- Nếu ta bình phương toàn bộ phần tử trong ma trận thì ma trận thu được vẫn là ma phương với tổng các phần tử trong từng dòng, từng cột và trên đường chéo đều bằng 3263025.

Ứng dụng trong Di truyền học (Genetics)



Các sinh vật sống thừa hưởng nhiều đặc tính vật lý từ bố mẹ của chúng. Các gen của bố mẹ xác định những đặc tính đó. Các nghiên cứu về gen được gọi là **Di truyền học** (Genetics); nói cách khác, di truyền học là một nhánh của sinh học giải quyết các vấn đề về di truyền. Cụ thể, **di truyền học quần thể** là một nhánh của di truyền học nghiên cứu về cấu trúc di truyền của một quần thể nhất định và tìm cách giải thích cách di truyền của gen thay đổi như thế nào qua các thế hệ. Gen chi phối sự di truyền các tính trạng như giới tính, màu mắt, tóc/lông (đối với con người và động vật), hình dạng lá và màu sắc cánh hoa (đối với thực vật).

Có một số loại di truyền; một trong số những loại được quan tâm đặc biệt là **tính trạng trội** (autosomal), trong đó mỗi tính trạng di truyền được cho là bị chi phối bởi một gen duy nhất. Thông thường, có hai dạng khác nhau của gen được kí hiệu là A và a. Mỗi cá thể trong quần thể mang một cặp gen; các cặp được gọi là **kiểu gen** (genotype) của cá thể. Từ đó ta có ba kiểu gen cho mỗi tính trạng di truyền: AA, Aa, và aa (aA giống Aa về mặt di truyền).

<u>Ví dụ</u> trong một quần thể động vật nhất định, một mô hình di truyền tính trạng trội kiểm soát màu mắt. Kiểu gen AA và Aa có đôi mắt màu nâu, trong khi đó kiểu gen aa có đôi mắt màu xanh. Gen A trội hơn so với gen a. Một sinh vật được gọi là đồng hợp trội nếu nó có gen AA, dị hợp nếu nó có gen Aa, và đồng hợp lặn nếu có gen aa. Điều này có nghĩa là kiểu gen AA và Aa là không khác nhau khi biểu hiện qua tính trạng.

Mỗi đứa con đều được thừa hưởng một gen từ cả bố và mẹ một cách ngẫu nhiên. Cho trước kiểu gen của bố mẹ, chúng ta có thể xác định xác suất xuất hiện kiểu gen của con. Giả sử rằng trong quần thể động vật này, phân bố ban đầu của các kiểu gen được biểu diễn qua các vector

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} AA \\ Aa \\ aa \end{array}$$

trong đó các phần tử của vector thể hiện tỉ lệ động vật mang các kiểu gen AA, Aa, và aa ban đầu. Chúng ta hãy xem xét một loạt các thí nghiệm trong đó chúng ta chỉ lai với các sinh vật đồng hợp trội. Theo đó chúng ta lai AA, Aa, aa với AA. Ta quan tâm đến xác suất của các con lai là AA, Aa hoặc aa trong mỗi trường hợp đó.

- Xét phép lai AA với AA. Ta có các con lai nhận một gen từ bố mẹ, nó sẽ được loại AA. Như vậy, xác suất ra AA, Aa, và aa lần lượt là 1, 0 và 0. Tất cả những đứa con đều có mắt nâu.
- Xét phép lai Aa với AA. Bằng cách nhận một gen từ bố mẹ, ta có các khả năng của con lai là AA, AA (gen A của Aa và mỗi gen A của AA), aA, và aA (Gen a của Aa với mỗi gen A của AA). Như vậy, xác suất của AA, Aa, và aa tương ứng là $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ và 0. Tất cả các con đều thể hiện tính trạng mắt nâu.
- Cuối cùng xét phép lai aa với AA, chỉ có một khả năng xảy ra cho thế hệ con là aA. Như vậy, xác suất của AA, Aa, và aa tương ứng là 0, 1 và 0. Không có đứa con nào có mắt màu xanh.

Vậy ta có kết luận: Khi lai với các cá thể có kiểu gen AA sẽ chỉ cho đời con tính trạng mắt nâu. Bước tiếp theo của chúng ta là kiểm tra xem tỉ lệ các kiểu gen ban đầu như trên sẽ thay đổi như thế nào qua mỗi thế hệ. Để làm điều này, ta đặt X_n là vector phân phối các kiểu gen ở thế hệ thứ n. Bằng những số liệu ở trên, tỉ lệ các kiểu gen AA, Aa và aa ở thế hệ đầu tiên có thể được biểu diễn tương ứng thành $1.\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 0.\left(\frac{1}{3}\right)$, $0.\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 1.\left(\frac{1}{3}\right)$, $0.\left(\frac{1}{3}\right) + 0.\left(\frac{1}{3}\right) + 0.\left(\frac{1}{3}\right)$. Nói cách khác, $X_1 = AX_0$, trong đó

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} AA & Aa & aa & \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. & & \left.\right] & \begin{array}{c} AA \\ Aa \\ aa \end{array} \end{array}$$

được gọi là ma trận chuyển đổi. Tổng quát, $X_n = AX_{n-1}$, viết lại dưới dạng tường minh:

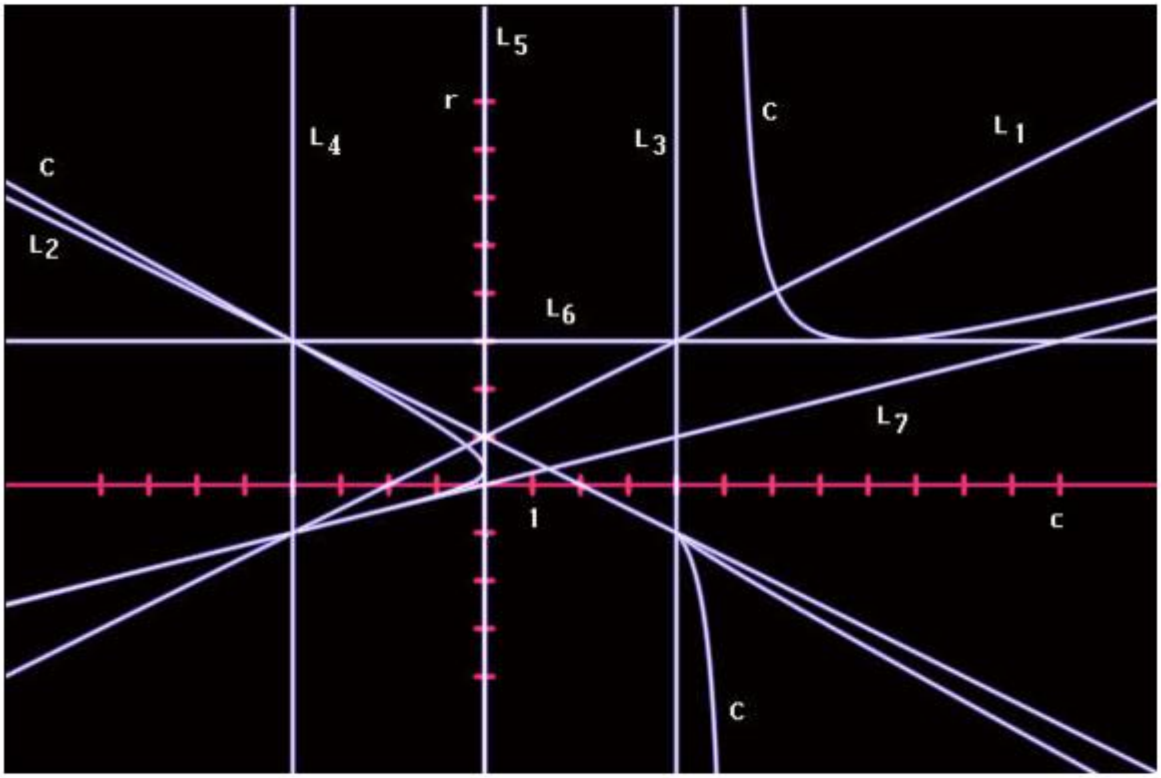
$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

Quan sát thấy kiểu gen aa biến mất ngay sau thế hệ ban đầu và tỉ lệ kiểu gen Aa dần dần nhỏ đi qua từng thế hệ. Rõ ràng là chuỗi các vector này hội tụ đến vector

$$X = \begin{array}{c}\end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} AA \\ Aa \\ aa \end{array}$$

Bây giờ ta sẽ cố gắng tạo ra một mô hình tương tự trong trường hợp cho lai với các cá thể dị hợp. Bạn sẽ thấy rằng một số đứa con sẽ có mắt nâu và một số thì có mắt xanh.

Ứng dụng trong hình học (Geometry)



Khi cho các điểm cố định trên mặt phẳng hoặc trong không gian 3 chiều, nhiều vấn đề yêu cầu tìm các hình mà chúng đi qua các điểm đã cho. Các ví dụ chúng ta xem sau đây yêu cầu kiến thức trong việc giải các hệ phương trình tuyến tính và tính toán định thức.

Ứng dụng 1: Cho $A_1 = (x_1, y_1)$ và $A_2 = (x_2, y_2)$ là hai điểm cố định trên mặt phẳng. Tìm phương trình của đường thẳng L đi qua A_1 và A_2.

Giải: Với $M = (x, y)$ là một điểm thuộc đường thẳng L, ta có thể tìm được ba hằng số a, b và c thỏa mãn:

$$ax + by + c = 0$$

Vì A_1 và A_2 thuộc L, nên cũng có

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Gộp với phương trình trên ta có hệ thuần nhất (homogeneous system) gồm ba phương trình với ba ẩn là a, b và c:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Vì với hai điểm A_1 và A_2 thì luôn có một đường thẳng đi qua nên hệ trên có ít nhất một nghiệm (a, b, c). Tuy nhiên, nếu (a, b, c) là một nghiệm thì $k(a, b, c)$ cũng là nghiệm của hệ vì thế hệ có vô số nghiệm. Do đó định thức của ma trận hệ số của hệ phải có giá trị 0:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

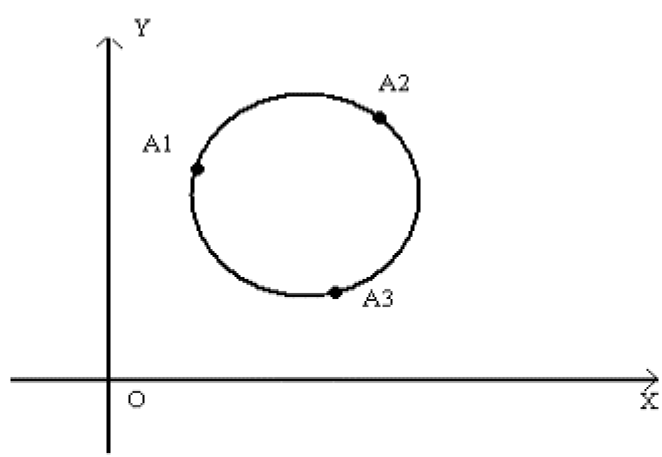
Xét trường hợp cụ thể $A_1 = (-1,2)$ và $A_2 = (0,1)$, phương trình của đường thẳng L là:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hay

$$x + y - 1 = 0$$

<u>**Ứng dụng 2:**</u> Cho ba điểm $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ và $A_3 = (x_3, y_3)$ không thẳng hàng trên mặt phẳng, tìm phương trình đường tròn đi qua các điểm trên.



<u>**Giải**</u>: Nếu $M = (x, y)$ là một điểm thuộc đường tròn, ta có thể viết:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

Trong đó a, b, c và d là các hằng số. Lần lượt thế tọa ba điểm đã cho vào phương trình trên ta có được hệ thuần nhất gồm bốn phương trình với bốn ẩn a, b, c và d:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \\ a(x_1^2+y_1^2)+bx_1+cy_1+d=0 \\ a(x_2^2+y_2^2)+bx_2+cy_2+d=0 \\ a(x_3^2+y_3^2)+bx_3+cy_3+d=0 \end{cases}$$

Tương tự như ở ví dụ 1, hệ có vô số nghiệm. Nên, định thức là:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Xét trường hợp cụ thể tìm phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A_1=(1,0)$, $A_2=(-1,2)$ và $A_3=(3,1)$, ta có:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Đơn giản đẳng thức trên cho ta:

$$6x^2+6y^2-14x-26y+8=0$$

Hiển nhiên ta cũng có thể viết là

$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2=\frac{37}{18}$$

Đường tròn có tâm là điểm $\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right)$ và bán kính là $\sqrt{\frac{37}{18}}$.

<u>Ứng dụng 3:</u> Tìm phương trình quỹ đạo của một hành tinh. Đối với ứng dụng này, bạn cần biết các điều sau:

1. Phương trình tổng quát của một đường conic trong mặt phẳng (đường Parabol, Hyperbol hay E-líp) được cho bởi $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ trong đó A, B, C, D, E và F là các hằng số.
2. **Định luật Kepler thứ nhất:** Quỹ đạo của một hành tinh quay xung quanh mặt trời là một E-líp.

Một nhà thiên văn muốn tính quỹ đạo của một hành tinh quay xung quanh mặt trời đã đặt một hệ tọa độ Đề-các trong mặt phẳng quỹ đạo với mặt trời là gốc tọa độ. Sau đó, nhà thiên văn ghi lại năm vị trí của hành tinh được quan sát tại năm thời điểm khác nhau. Điều này cho ta năm điểm khác nhau trên quỹ đạo.

Giả sử năm điểm đó là:

$(8.025, 8.31), (10.17, 6.355), (11.202, 3.212), (10.736, 0.375), (9.092, -2.267)$.

Thế tọa độ các điểm này vào phương trình tổng quát của đường conic, ta có được điều sau:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64.401 & 66.688 & 69.056 & 8.025 & 8.310 & 1 \\ 103.429 & 64.630 & 40.386 & 10.170 & 6.355 & 1 \\ 125.485 & 35.981 & 10.317 & 11.202 & 3.212 & 1 \\ 115.262 & 4.026 & 0.141 & 10.736 & 0.375 & 1 \\ 82.664 & -20.612 & 5.139 & 9.092 & -2.267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sau khi khai triển và rút gọn định thức trên ta có phương trình quỹ đạo của hành tinh:

$$386.799x^2 - 102.896xy + 446.026y^2 - 2476.409x - 1427.971y - 17109.378 = 0$$

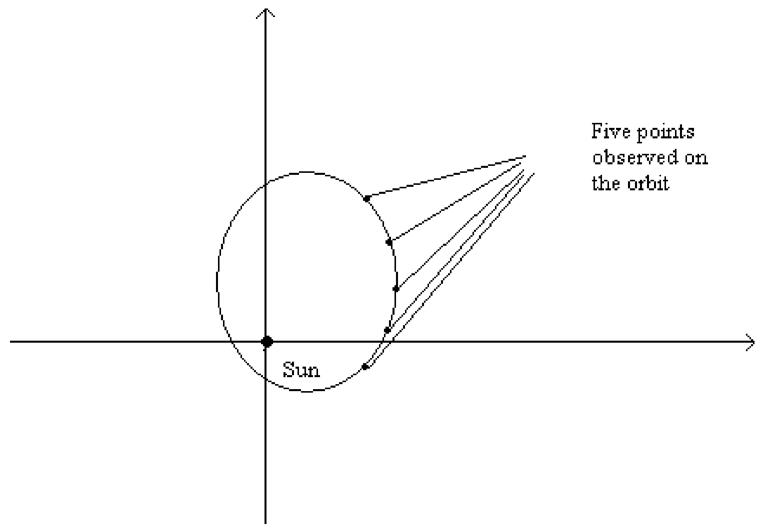
<u>**Ứng dụng 4:**</u> Giả sử có ba điểm $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ và $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$ trong không gian và không thẳng hàng. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đã cho.

<u>**Giải:**</u> Phương trình tổng quát của mặt phẳng là

$$ax + by + cz + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Lưu ý rằng bằng việc nhân phương trình trên với bất kỳ một hằng số khác không ta thu được một phương trình của cùng một mặt phẳng.

Nếu $M = (x, y, z)$ là một điểm thuộc mặt phẳng, sau đó thế tọa độ của A_1, A_2, A_3 và M vào phương trình trên để được hệ thuần nhất với bốn ẩn a, b, c, d:



$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

Tương tự như trên, hệ không thể chỉ có nghiệm tầm thường, nên

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Trường hợp cụ thể: mặt phẳng qua ba điểm $(1,-1,3), (0,1,7), (4,0,-1)$:

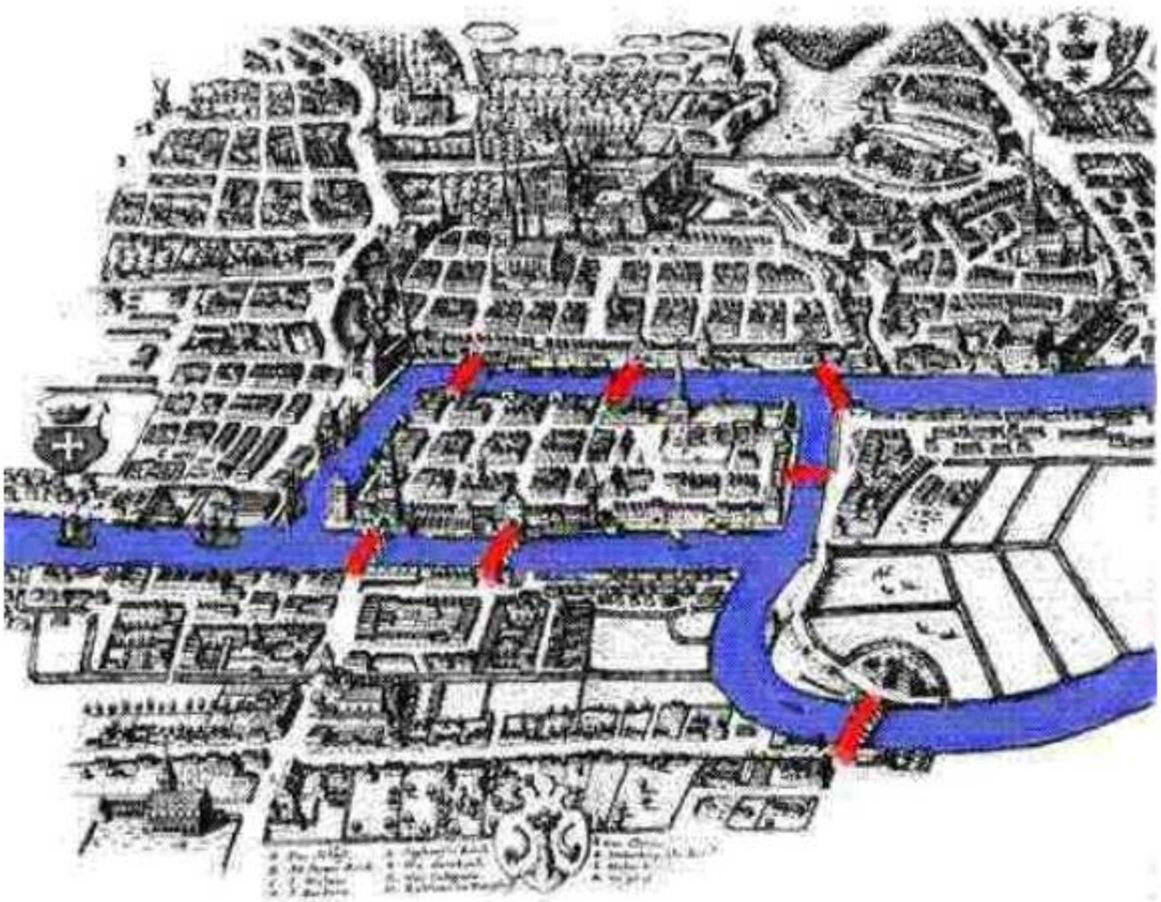
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rút gọn được:

$$-12x + 8y - 7z + 41 = 0$$

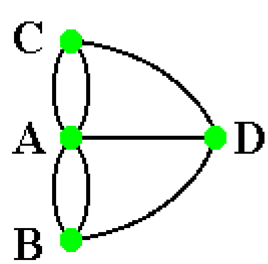
Ứng dụng trong lý thuyết đồ thị (Graph Theory)

<u>Giới thiệu một chút về lịch sử:</u> Königsberg là một thành phố nước Nga nằm trên con sông Pregel, đây cũng là nơi ở của các công tước nước Phổ trong thế kỷ 16. Ngày nay, thành phố có tên là Kaliningrad và là một trung tâm công nghiệp cũng như tài chính của miền tây nước Nga. Con sông Pregel chảy qua đã chia thành phố làm bốn khu vực, bạn có thể nhìn vào hình

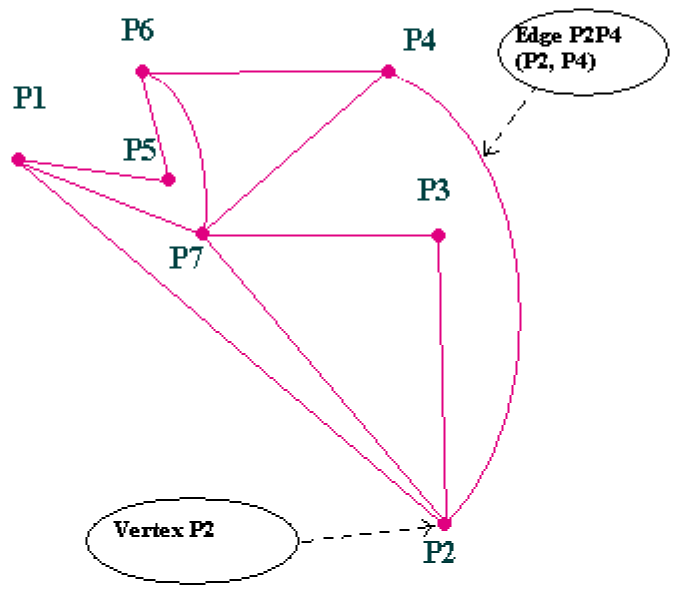


vẽ sau:

Vào thế kỷ 18, bảy cây cầu nối bốn khu vực này lại. Người dân Königsberg thường đi bộ trong thành phố vào chủ nhật. Họ tự hỏi rằng liệu có thể bắt đầu đi từ một điểm trong thành phố, băng qua tất cả cây cầu nhưng không băng qua cây cầu nào hai lần rồi trở về điểm xuất phát hay không ? Vấn đề đã được giải quyết bởi nhà toán học nổi tiếng người Thụy Sĩ



Leonhard Euler. Lời giải của ông đã tạo ra một nhánh mới của toán học được biết như lý thuyết đồ thị (graph theory). Trong lời giải của mình, Euler đã biểu diễn bài toán bằng "đồ thị" với việc coi bốn khu vực như là bốn đỉnh và bảy cây cầu được coi như là bảy cạnh:
Lý thuyết đồ thị giờ đã trở thành một trong những công cụ quan trọng trong nghiên cứu toán học, kỹ thuật điện, lập trình và mạng máy tính, quản lý kinh doanh, xã hội học, kinh tế, tiếp thị, truyền thông và nhiều lĩnh vực khác. Thông thường, nhiều bài toán có thể được mô phỏng với các đường đi được xây dựng bằng việc đi qua các cạnh của một đồ thị. Lấy ví dụ: thiết lập các tuyến đường cho việc vận chuyển thư tín, thu rác thải, dọn tuyết, chuẩn đoán



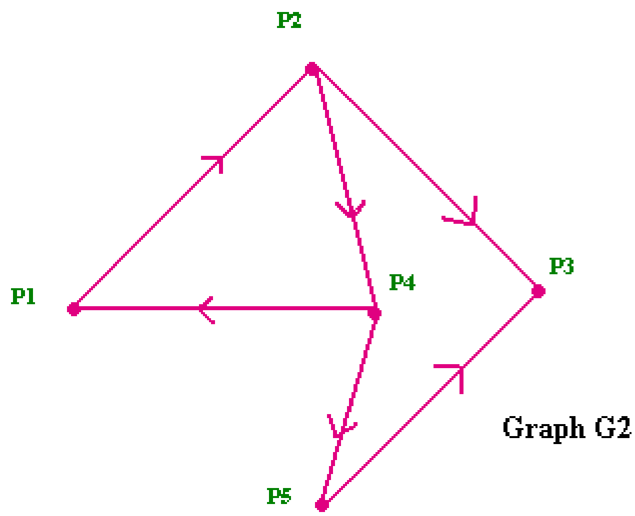
Graph G1

trong các mạng máy tính,… rất nhiều vấn đề có thể giải quyết bằng các mô hình thành với các đường đi trong đồ thị.

<u>**Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị:**</u> Trước khi ta xây dựng mối liên hệ giữa lý thuyết đồ thị và đại số tuyến tính, ta bắt đầu với các định nghĩa căn bản dành cho những bạn đọc chưa quen với chủ đề này.

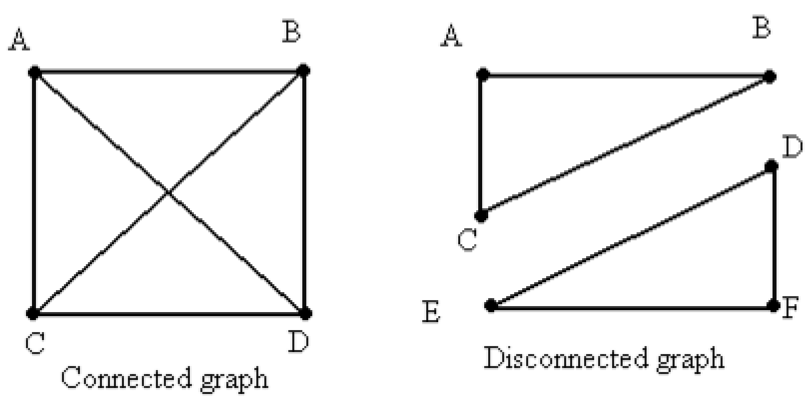
- Đồ thị là tập hợp các điểm gọi là **"đỉnh"(vertex)**, được nối lại bởi các đoạn thẳng gọi là **"cạnh"(edge)**:
- Một đồ thị gọi là **"Có hướng" (directed/digraph)** nếu các cạnh của nó có hướng. Một **đường đi(path)** nối hai đỉnh X và Y của một đồ thị có hướng là một dãy các đỉnh khác

nhau và cạnh có hướng. Một cạnh bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh P được gọi là một **khuyên tại P (loop at P)**. Ví dụ trong đồ thị sau:



có nhiều hơn một đường từ P_1 đến P_3. Một trong số gồm ba điểm là P_1 P_2 P_3. Một đường khác từ P_1 đến P_3 gồm các điểm P_1 P_2 P_4 P_5 P_3.

- Một đồ thị gọi là **"Liên thông" (connected)** nếu luôn có một đường đi nối hai đỉnh phân biệt bất kỳ. Ngược lại đồ thị sẽ được gọi là **"không liên thông" (disconnected)** ví dụ:



- Trong đồ thị G, nếu tồn tại một đường đi gồm n cạnh nối hai đỉnh P_i và P_j, thì ta nói rằng có một **n-đường đi** (n-walks) từ P_i đến P_j. Ví dụ, có ba đường đi khác nhau độ dài 2 từ P_2 đến P_7 trong đồ thị G_1 ở trên.

Vậy đại số tuyến tính là lý thuyết đồ thị liên hệ với nhau thế nào?

Do một số đồ thị vẫn còn rất phức tạp, chúng ta cần một cách tiện lợi hơn để biểu diễn chúng. Ma trận là một trong các công cụ hữu ích để nghiên cứu về đồ thị, cũng bởi có thể chuyển từ hình vẽ sang số, chúng ta có thể sử dụng các kỹ thuật trong đại số tuyến tính.
Cho G là đồ thị với n đỉnh $v_1, v_2, \dots v_n$. Ta định nghĩa **"Ma trận kề" (adjacency matrix)** của G theo cách sắp xếp các đỉnh là $v_1, v_2, \dots v_n$ là ma trận $A = \left(a_{ij}\right)$ cấp n thỏa:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } v_i \text{ và } v_j \text{ kề nhau (tức có cạnh nối } v_i \text{ và } v_j) \\ 0 \text{ trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Ví dụ, trong đồ thị G_1, ma trận kề của G_1(theo cách sắp đỉnh là $P_1, P_2, \dots P_7$):

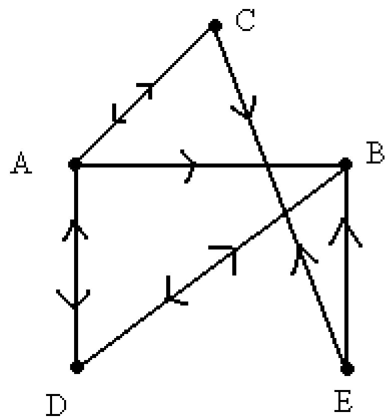
$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lưu ý rằng đối với đồ thị vô hướng như G_1 ma trận kề là ma trận đối xứng, nhưng điều này không nhất thiết đúng với đồ thị có hướng như G_2.
Cũng lưu ý với mỗi ma trận nhị phân với giá trị 0 nằm trên đường chéo chính xác định được một đồ thị có hướng duy nhất.
Định lý sau cho một kết quả quan trọng liên quan đến lũy thừa của ma trận kề:
Nếu A là ma trận kề của một đồ thị G theo thứ tự đỉnh $v_1, v_2, \dots v_n$ thì giá trị tại vị trí (i, j) của ma trận A^r là số đường đi khác nhau có độ dài r từ đỉnh v_i đến v_j.
Lấy ví dụ là bình phương của M_1:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ma trận trên cho ta số đường đi khác nhau có độ dài là 2 giữa các đỉnh của đồ thị G_1. Ví dụ có 3 đường đi có độ dài 2 từ P_2 đến P_7 nhưng không có đường nào có độ dài 2 từ P_1 đến P_5.

Ví dụ: Đồ thị có hướng sau biểu diễn lộ trình đi của một công ty vận chuyển:



trong đó A,B,C,D,E là các thành phố mà công ty phục vụ. Ma trận kề M của đồ thị trên là:

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Vì vậy M^2 là:

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ E & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Và M^3 là:

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ C & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ D & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ E & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Nếu công ty đang chú ý tới việc liên kết giữa thành phố A và B thì có thể thấy số lượng đường đi có độ dài 1 giữa A và B là 1; độ dài là 2 cũng chỉ có 1; nhưng độ dài 3 có 4 đường. Ta có thể chỉ ra 4 đường đó:

1. $A \to C \to E \to B$

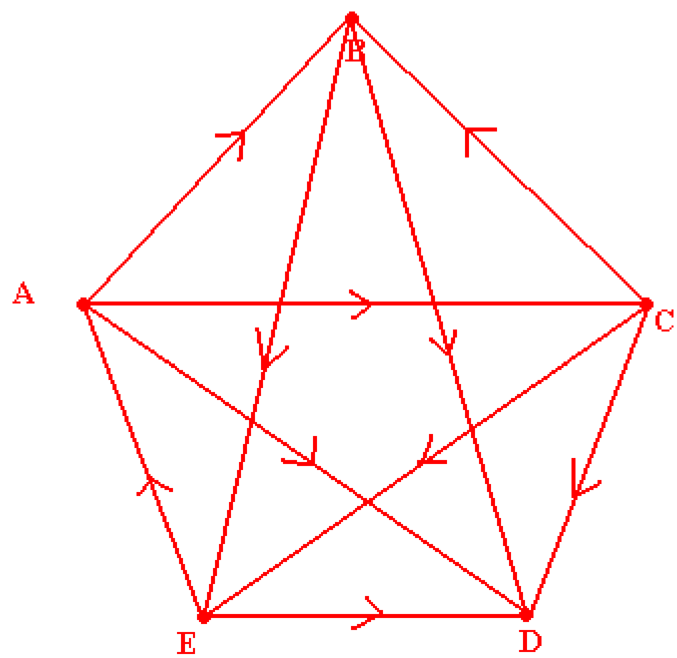
2. $A \to B \to D \to B$

3. $A \to D \to A \to B$

4. $A \to C \to A \to B$

<u>Đồ thị có hướng trội (dominance-directed graph/tournament graph):</u> một đồ thị G gọi là đồ thị có hướng trội khi với hai đỉnh u và v khác nhau bất kỳ của đồ thị G thì luôn có $u \to v$ hoặc $v \to u$ nhưng không có cả hai. ($u \to v$ tức là cạnh từ u đến v)

Sau đây là một ví dụ cho đồ thị có hướng trội:



Graph H

Xét đồ thị trên, đỉnh A, C và E có chung tính chất sau: từ một trong số chúng có thể đến đỉnh khác trong đồ thị bằng đường đi có độ dài 1 hoặc 2. Nếu đây là một giải đấu thể thao thì các đỉnh trên sẽ tương ứng với những đội mạnh nhất tức những đội đã đánh bại bất kỳ đội nào được chỉ ra hoặc đã đánh bại đội khác mà đội này đã đánh bại đội được chỉ ra. Đồ thị trên không phải đồ thị duy nhất có tính chất này. Định lý sau khẳng định điều đó:

Trong một đồ thị có hướng trội luôn có ít nhất một đỉnh mà có thể đến các đỉnh khác bằng đường đi có độ dài 1 hoặc 2.

Trong đồ thị có hướng trội, ta định nghĩa **"bậc của một đỉnh" (power of a vertex)** là tổng tất cả các đường đi độ dài 1 hoặc 2 bắt đầu từ đỉnh đang xét đến một đỉnh khác. Bằng cách sử dụng ma trận kề M của đồ thị, ta có thể tìm được bậc của đỉnh P_i như sau: tổng các giá trị trên hàng thứ i của ma trận M là tổng số đường đi có độ dài 1 bắt đầu từ P_i, tổng giá trị trên hàng thứ i của ma trận M^2 cũng là tổng số đường đi có độ dài 2 bắt đầu từ P_i. Do đó, tổng giá trị trên hàng thứ i của ma trận $A = M + M^2$ là tổng số đường đi độ dài 1 hoặc 2 bắt đầu từ P_i.

Trong ma trận có hướng trội, ta cần xác định vị trí của đỉnh có bậc lớn nhất. Để làm được như vậy, ta tính ma trận $A = M + M^2$, sau đó hàng nào của A với tổng lớn nhất tương ứng với đỉnh có bậc lớn nhất.

<u>Ví dụ:</u> giả sử rằng kết quả của một giải thi đấu bóng chày gồm 5 đội A,B,C,D,E được cho bởi đồ thị H ở trên. Ma trận kề M của H là:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & A & B & C & D & E \\
A & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
B & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Ma trận M^2:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & A & B & C & D & E \\
A & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
B & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
C & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

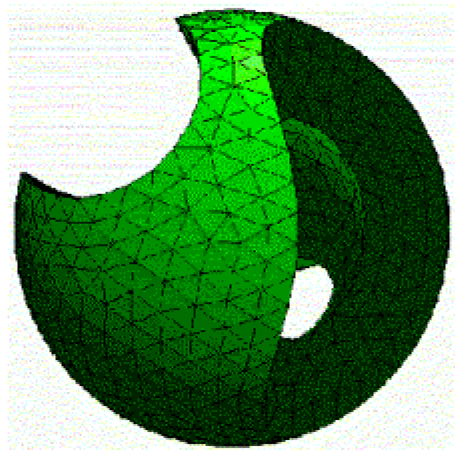
Vậy ma trận $M + M^2$ là

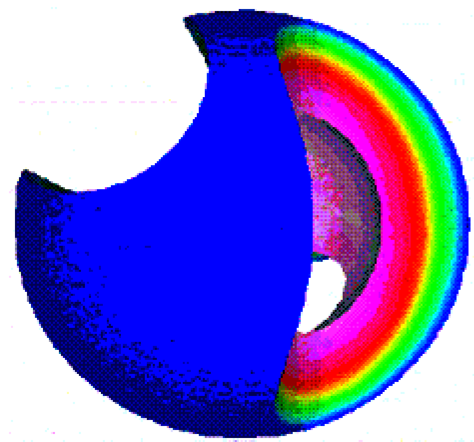
$$
\begin{array}{ccccccl}
 & A & B & C & D & E & \\
A & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & \rightarrow \text{tổng} = 8 \\
B & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & \rightarrow \text{tổng} = 4 \\
C & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & \rightarrow \text{tổng} = 7 \\
D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \text{tổng} = 0 \\
E & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & \rightarrow \text{tổng} = 5
\end{array}
$$

Thứ hạng của các đội sắp theo bậc của các đỉnh tương ứng là:

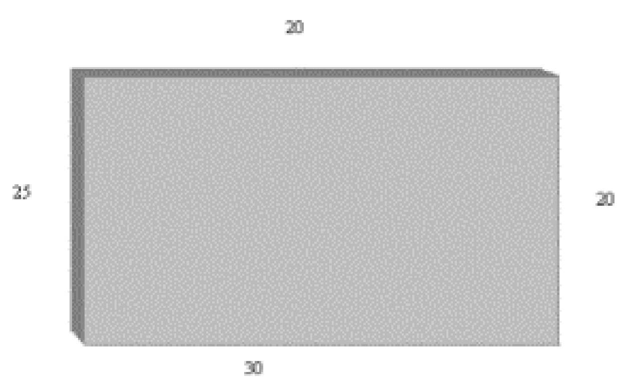
Đội A (nhất), đội C (nhì), đội E (ba), đội B (tư), đội D (chót)

Ứng dụng trong phân phối nhiệt (Heat Distribution)





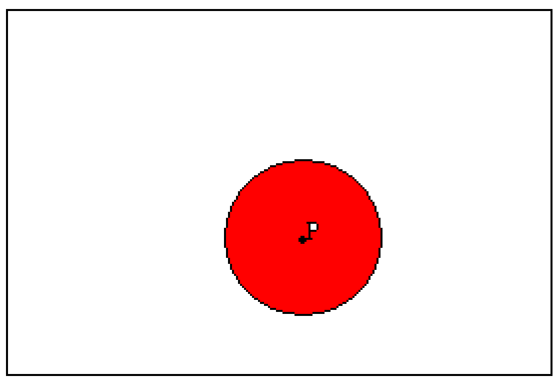
Giới thiệu Xét mặt cắt của một con đập hình chữ nhật trên một con sông. Phần biên (boundary) của con đập phụ thuộc vào 3 yếu tố: nhiệt độ không khí, nhiệt độ nước và nhiệt độ mặt đất ở dưới đáy. Biểu dồ sau đây thể hiện tình huống sau:



trong đó những con số thể hiện nhiệt độ (tính theo độ C) của phần biên. Những kĩ sư rất quan tâm đến phân phối nhiệt bên trong con đập trong một khoảng thời gian nhất định để họ có thể xác định được ứng suất nhiệt con đập phụ thuộc. Giả định rằng nhiệt độ ở phần biên là hằng số trong một khoảng thời gian nhất định thì nhiệt độ bên trong con đập sẽ đạt trạng thái cân bằng nhiệt sau một khoảng thời gian. Tìm phân phối cân bằng nhiệt này ở những điểm khác trên một cái đĩa (con đập) là một điều đáng lưu tâm, nhưng chuyện này lại rất khó. Tuy nhiên, ta có thể xét một số điểm trên cái đĩa và **xấp xỉ** nhiệt độ ở những điểm này. Xấp xỉ này được dựa theo một tính chất vật lí rất quan trọng gọi là **Tính chất giá trị trung bình** (Mean-Value Property):

Nếu một cái đĩa đạt được trạng thái cân bằng nhiệt, P là một điểm trên đĩa, C là một vòng tròn có tâm là P và nằm bên trong cái đĩa thì nhiệt độ tại P bằng giá trị trung bình của hàm nhiệt độ trên C.

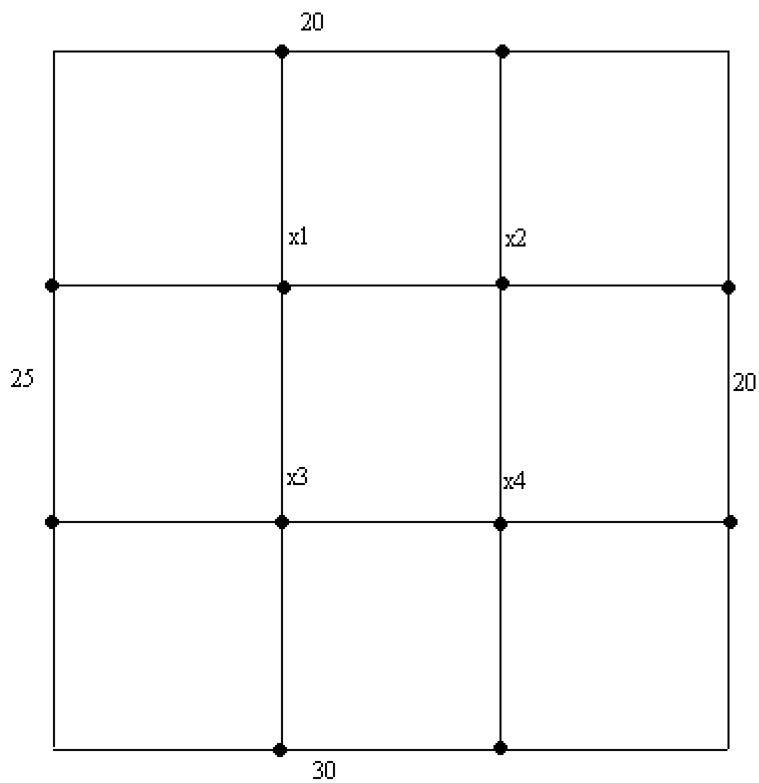
Biểu đồ sau minh họa tính chất này:



Để xem tính chất này có đúng không, ta đặt một đường kẻ ô trên cái đĩa (mặt cắt của bridge trong trường hợp của chúng ta) và xét những giao điểm của các đường kẻ ô. Ta sẽ chỉ quan tâm đến nhiệt độ ở những điểm này trên đĩa. Sử dụng đường kẻ ô thỏa một số điểm được xét sẽ nằm trên phần biên của đĩa. Để nghiên cứu nhiệt độ ở các điểm này ta cần có dạng ứng dụng của Tính chất giá trị trung bình:

Nếu một cái đĩa đạt được trạng thái cân bằng nhiệt và P là một giao điểm của đường kẻ ô không nằm trên biên của đĩa thì nhiệt độ tại P bằng trung bình nhiệt độ của 4 giao điểm của đường kẻ ô gần P nhất.

Ta sẽ bắt đầu với một đường kẻ ô với 4 điểm ở trong, gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là nhiệt độ ở 4 điểm đó. Ta minh họa bằng biểu đồ sau:



Ta sử dụng dạng thứ hai của Tính chất giá trị trung bình, ta có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$x_1 = \frac{20 + 25 + x_2 + x_3}{4}$$

$$x_2 = \frac{20 + 20 + x_1 + x_4}{4}$$

$$x_3 = \frac{25 + 30 + x_1 + x_4}{4}$$

$$x_4 = \frac{20 + 30 + x_2 + x_3}{4}$$

chuyển vế và đơn giản hóa hệ này ta được:

$$-4x_1 - x_2 - x_3 = 45$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_4 = 40$$

$$-x_1 + 4x_3 - x_4 = 55$$

$$-x_2 - x_3 + 4x_4 = 50$$

Ta chuyển hệ này về dạng ma trận $AX = b$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 45 \\ 40 \\ 55 \\ 50 \end{bmatrix}$$

X đưuọc gọi là **vector cân bằng nhiệt**. Nghiệm của hệ trên là

$$X = A^{-1}b$$

tất nhiên là nếu A khả nghịch mà thôi.

Ta có thể dùng nhiều phương pháp để tìm ma trận nghịch đảo. Trong trường hợp này ta có:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{12} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} \end{bmatrix}$$

và vector cân bằng nhiệt là

$$X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 23.125 \\ 21.875 \\ 25.625 \\ 24.375 \end{bmatrix}$$

Đáp án này tính theo độ C.

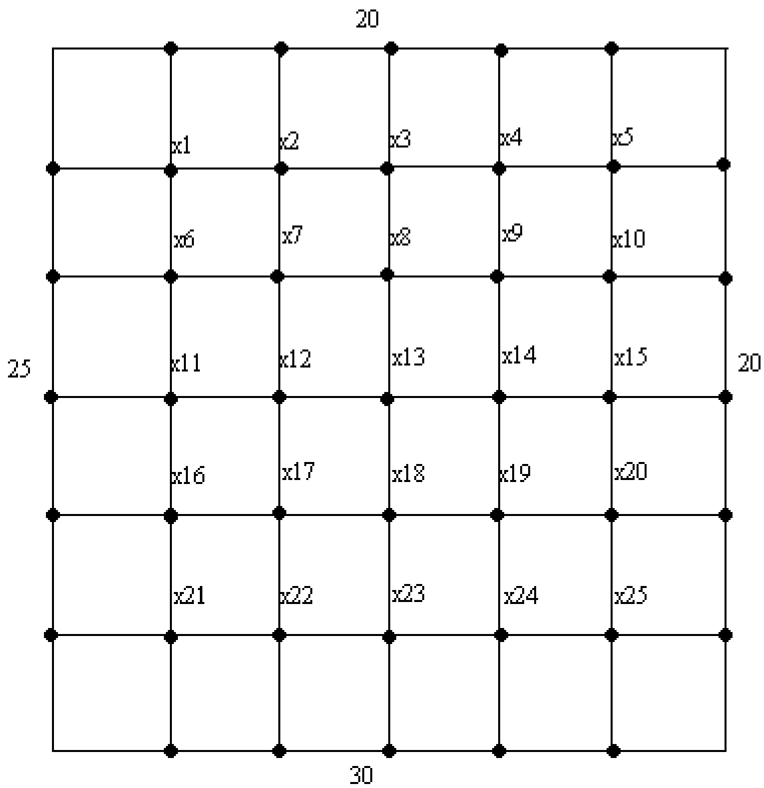
Bây giờ giả sử rằng nhiệt độ ở biên lần lượt thay đổi từ 25, 20 và 30 dến 15, 10 và 20, khi đó ta có một hệ tuyến tính mới với ma trận hệ số vẫn như cũ, chỉ khác ở vế phải

$$b = \begin{bmatrix} 35 \\ 20 \\ 35 \\ 30 \end{bmatrix}$$

và vector cân bằng nhiệt trong trường hợp này là:

$$X = A^{-1}\begin{bmatrix} 35 \\ 20 \\ 35 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.04 \\ 12.70 \\ 16.45 \\ 14.79 \end{bmatrix}$$

Xáp xỉ nhiệt độ cân bằng nhiệt được tìm thấy ở trên có thể chính xác hơn nếu ta xét một đường kẻ ô tốt hơn (tức là nhiều điểm nằm trong hơn). Xét đường kẻ ô có được bằng cách chia đôi phần không gian trong đường kẻ ô được xét lúc đầu, tức là như sau:



Đường kẻ ô với có 25 điểm nằm trong. Lặp lại quá trình như trên trong trường hợp 4 giao điểm cho ta một hệ 25 ẩn và 25 phương trình. Ma trận hệ số lúc này là (bạn có thể thử tìm):

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
$$

và vế phải là

$$b = \begin{bmatrix} 45 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 40 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 55 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Giải hệ trên bằng tay sẽ rất mất thời gian, nhưng nếu dùng một phần mềm toán học như Maple hay Matlab ta có thể giải được nó khá nhanh. Đáp án là vector cân bằng nhiệt sau:

$$X = \begin{bmatrix} 22.65 \\ 21.76 \\ 21.28 \\ 20.89 \\ 20.46 \\ 23.86 \\ 23.10 \\ 22.49 \\ 21.81 \\ 20.98 \\ 24.69 \\ 24.30 \\ 23.76 \\ 22.90 \\ 21.65 \\ 25.60 \\ 25.68 \\ 25.29 \\ 24.39 \\ 22.72 \\ 27.03 \\ 27.51 \\ 27.36 \\ 26.65 \\ 24.84 \end{bmatrix}$$

Những phần tử của vector trên đều được tính theo độ C. Vì đường kẻ ô này tốt hơn nhiều so với lúc trước nên vector trên cho ta một phân phối nhiệt tốt hơn bên trong bridge.

Đương nhiên ta có thể có một kết quả chính xác hơn nữa bằng cách xét đường kẻ ô lớn hơn (nhiều điểm nằm trong hơn), nhưng vấn đề giải hệ tuyến tính tương ứng cũng sẽ khó hơn nhiều. Trong trường hợp này người ta thường tiếp cận hệ bằng phương pháp số học.

Chú ý rằng 4 điểm nằm trong của đường kẻ ô đầu tiên thực ra cũng là những điểm nằm trong của đường kẻ ô thứ hai (với 25 điểm nằm trong). Bảng sau so sánh nhiệt độ của những điểm chung này trong cả hai trường hợp.

	Nhiệt độ trong đường kẻ ô đầu tiên	Nhiệt độ trong đường kẻ ô thứ hai
Điểm 1	16.04	23.10
Điểm 2	12.70	21.81
Điểm 3	16.45	25.68

Điểm 4	14.79	24.39

Vì đường kẻ ô thứ hai tốt hơn đường kẻ ô đầu tiên nên nhiệt độ ở cột cuối cùng trong bảng trên sẽ gần với nhiệt độ cân bằng nhiệt hơn so với nhiệt độ ở cột đầu tiên.

Quy hoạch tuyến tính (Linear Programming)

<u>**Giới thiệu:**</u> Rất nhiều bài toán thực tiễn bao gồm việc tối đa hóa (maximizing) hoặc tối thiểu hóa (minimizing) một đại lượng nhất định dưới một số ràng buộc (constraints). Quy hoạch tuyến tính (Linear programming) là một cách tiếp cận với loại bài toán này. Ta sẽ thấy các thí dụ mà trong đó ta tối đa hóa hoặc tối thiểu hóa một biểu thức tuyến tính với một số lượng biến bất kì dưới một số ràng buộc tuyến tính. Kĩ thuật này được áp dụng với nhiều loại bài toán trong công nghiệp và khoa học.

<u>**1) Trường hợp chỉ có 2 biến: một cách tiếp cận hình học**</u>

<u>Bài toán tổng quát:</u>

Cho một biểu thức tuyến tính $z = ax + by$ với 2 biến x và y, tìm các giá trị của x và y để tối đa hóa hay tối thiểu hóa z dưới các ràng buộc tuyến tính:

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & (\leq)(\geq)(=) & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & (\leq)(\geq)(=) & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_mx & + & b_my & (\leq)(\geq)(=) & c_m \end{array}$$

và

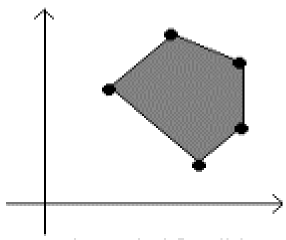
$$x \geq 0, y \geq 0$$

(Trong các điều kiện trên, bất kì kí hiệu nào ($\leq$ hay $\geq$ hay $=$) đều có thể được sự dụng).

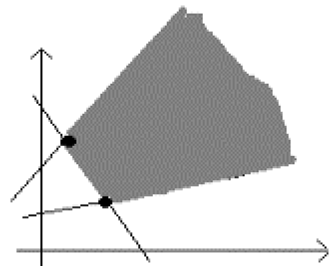
Hàm z trong bài toán trên được gọi là **hàm mục tiêu** (**objective function**). Nếu (x, y) thỏa tất cả các ràng buộc thì nó được gọi là **nghiệm khả thi** (**feasible solution**). Tập hợp tất cả các nghiệm khả thi là một tập con của mặt phẳng xy gọi là **vùng khả thi** (**feasible region**).

Chú ý rằng mỗi ràng buộc dạng $ax + by = c$ biểu diễn một đường thẳng trong mặt phẳng xy, trong khi mỗi ràng buộc dạng $ax + bt \leq c$ hoặc $ax + bt \geq c$ xác định một nửa mặt phẳng bao gồm đướng biên $ax + by = c$ của nó.

Khi đó, vùng khả thi là một phần giao của hữu hạn rất nhiều các đường thẳng và nửa mặt phẳng. Nếu vùng khả thi có thể được bao bởi một vòng tròn đủ lớn thì nó được gọi là **bị chặn** (**bounded**), nếu không, nó được gọi là không bị chặn (unbounded).



bounded feasible region



unbouded feasible region

Nếu một vùng khả thi rỗng (empty) (không chứa điểm nào) thì các ràng buộc mâu thuẫn nhau và bài toán vô nghiệm. Các **điểm cực** (**extreme point**) của một vùng khả thi là các điểm biên mà các phần giao của đoạn biên thẳng của miền. Trong một bài toán quy hoạch tuyến tính, định lý sau cho ta biết khi nào sẽ thành công và những điểm nào để tìm:

Nếu vùng khả thi của một bài toán quy hoạch tuyến tính khác rỗng và bị chặn thì hàm mục tiêu đạt được cả một lớn nhất và một giá trị nhỏ nhất tại các điểm cực. Nếu vùng khả thi không bị chặn thì hàm mục tiêu có thể hoặc có thể không đạt một giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất, nếu nó đạt một giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất thì nó đạt được ở một điểm cực.

Thí dụ 1:

Một nhà sản xuất kẹo có 130 pound loại cherry được bọc chocolate và 170 pound loại bạc hà được bọc chocolate còn hàng. Nhà sản xuất đó quyết định bán chúng với dạng hai hỗn hợp khác nhau. Một hỗn hợp sẽ chứa một nửa cherry và một nữa bạc hà theo khối lượng và sẽ bán với giá \$2.00 mỗi pound. Hỗn hợp kia sẽ chứa một phần ba cherry và hai phần ba bạc hà theo khối lượng và sẽ bán với giá \$1.25 mỗi pound. Hỏi nhà sản xuất kẹo nên chuẩn bị bao nhiêu pound của mỗi hỗn hợp để đạt lợi nhuận tối đa ?

Giải:

Để đơn giản, ta gọi A là hỗn hợp nửa cherry nửa bạc hà và B là hỗn hợp một phần ba cherry, hai phần ba bạc hà. Gọi x là số pound của A cần được chuẩn bị và y là số pound của B cần được chuẩn bị. Hàm lợi nhuận khi đó có thể được viết là:

$$z = 2x + 1.25y$$

Do mỗi pound của A chứa một nửa pound cherry và mỗi pound của B chứa một phần ba pound cherry nên tổng số pound cherry được dùng trong cả hai hỗn hợp là:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$$

Tương tự, tổng số pound bạc hà được dùng trong cả hai hỗn hợp là:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$$

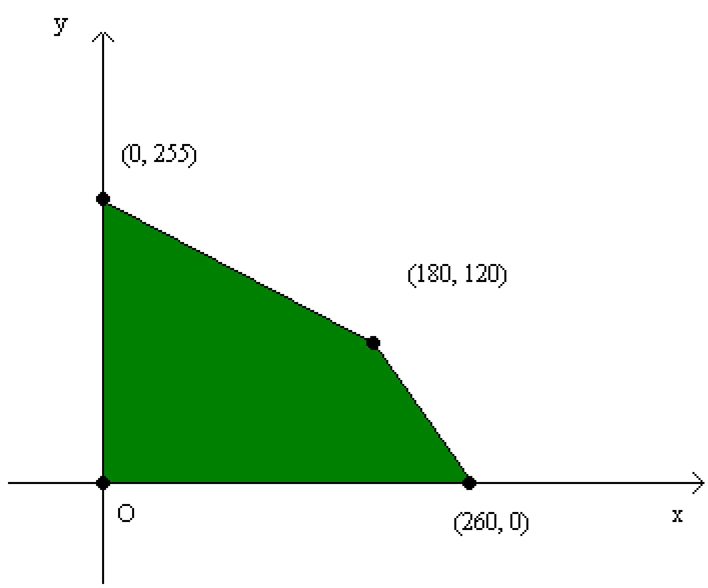
Bây giờ, do nhà sản xuất có thể dùng tối da 130 pound loại cherry và 170 pound loại bạc hà, ta có cá ràng buộc:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 130$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170$$

Ngoài ra, ta phải có $x \geq 0, y \geq 0$. Do đó, bài toán trên có thể được phát biểu như sau: tìm x và y để tối đa hóa $z = 2x + 1.25y$ dưới các ràng buộc:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}y & \leq & 130 \\ \frac{1}{2}x & + & \frac{2}{3}y & \leq & 170 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Để giải bài toán, ta sẽ sử dụng kĩ thuật quy hoạch tuyến tính đã được mô tả ở trên. Ta bắt đầu bằng việc vẽ vùng khả thi của bài toán và định vị các điểm cực:



Do vùng khả thi bị chặn trong trường hợp này, ta chắc chắn rằng nghiệm tối ưu được đạt tại một trong các điểm cực được vẽ trong biểu đồ trên. Do đó, ta định trị (evaluate) hàm mục tiêu ở mỗi điểm đó:

Điểm cực	Giá trị của $z = 2x + 1.25y$
$(0, 0)$	0
$(0, 255)$	318.75
$(180, 120)$	510.00
$(260, 0)$	520.00

Bảng trên cho thấy rằng giá trị lớn nhất cho z là 520.00 và nghiệm tối ưu tương ứng là $(260, 0)$. Theo đó, nhà sản xuất kẹo đạt doanh thu \$520 khi họ sản xuất 260 pound hỗn hợp A và không sản xuất hỗn hợp B.

Thí dụ 2:

Sở chất thải (refuse department) Quận Osgood (Osgood County) vận hành hai trung tâm tái chế. Trung tâm 1 tốn \$40 để vận hành tám giờ mỗi ngày. Trong một ngày điển hình, 140 pound thủy tinh và 60 pound nhôm được gửi vào trung tâm 1. Trung tâm 2 tốn \$50 để vận hành tám giờ mỗi ngày, với 100 pound thủy tinh và 180 pound nhôm được gửi vào mỗi ngày. Quận Osgood có cam kết cung cấp ít nhất 1540 pound thủy tinh và 1440 pound nhôm mỗi tuần để khuyến khích mở thêm một nhà máy tái chế. Hỏi Quận Osgood nên mở mỗi trung tâm bao nhiêu ngày (tám giờ) mỗi tuần để tối thiểu hóa chi phí mà vẫn thỏa nhu cầu ?

Giải:

Gọi x là số ngày mỗi tuần trung tâm 1 mở và y là số ngày mỗi tuần trung tâm 2 mở. Bài toán quy hoạch tuyến tính cho câu hỏi này là:

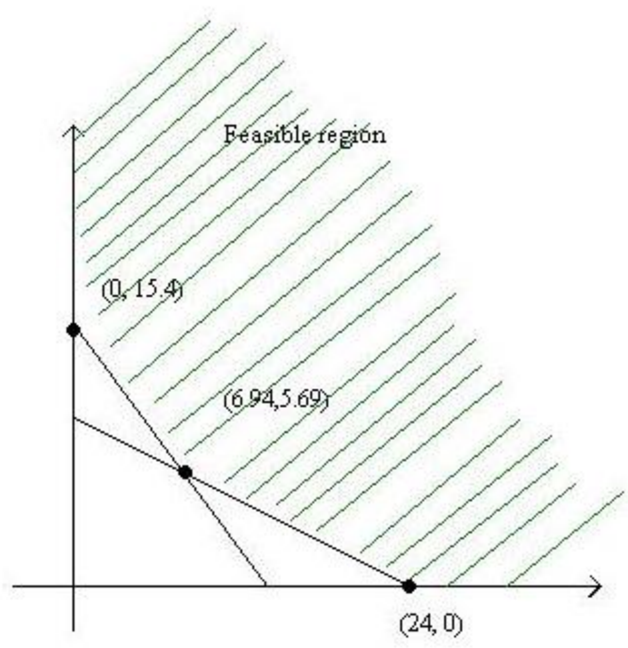
Tối thiểu hóa hàm:

$$z = 40x + 50y \text{ (Chi phí vận hành hai trung tâm)}$$

dưới các ràng buộc:

$$\begin{array}{rcrcr} 140x & + & 100y & \geq & 1540 \text{ (thủy tinh)} \\ 60x & + & 180y & \geq & 1440 \text{ (nhôm)} \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Vùng khả thi của bài toán, cùng với các điểm cực được vẽ trong biểu đồ sau



Vùng khả thi ở đây không bị chặn, với 3 điểm cực hữu hạn. Hai trong đó có thể dễ dàng tìm thấy từ đồ thị (một số giá trị đã được lấy xấp xỉ): (0,15.4) và (24,0). Điểm còn lại có thể tìm được theo phương pháp Đại số là (6.94, 5.69). Ngoài ra, ta cũng có thể giả định rằng có các "điểm cực vô hạn" (infinite extreme point) khác do vùng khả thi không bị chặn. Ta có thể thấy rằng các điểm cực vô hạn đó sẽ không "tối ưu" do ta đang tối thiểu hóa chứ không phải tối đa hóa. Do đó, ta định trị hàm mục tiêu tại mỗi điểm cực hữu hạn:

Điểm cực	Giá trị của $z = 40x + 50y$
$(0, 15.4)$	770
$(24, 0)$	960
$(6.94, 5.69)$	562.10

Như vậy, chi phí tối thiểu là $562.10 và đạt được khi trung tâm 1 mở khoảng 7 ngày mỗi tuần và trung tâm 2 mở khoảng 6 ngày mỗi tuần.

2) Quy hoạch tuyến tính với nhiều hơn 2 biến

Ta có thể giải một bài toán quy hoạch tuyến tính 3 biến bằng đồ thị, nhưng các điểm góc trở nên khó định vị một cách trực quan. Tuy nhiên, ta không thể giải một bài toán với nhiều hơn 3 nghiệm mà sử dụng đồ thị. Các điểm góc của miền khả thi phải được tìm bằng phương pháp Đại số và kiểm tra để tìm giá trị tối ưu. Thuật toán simplex (simplex algorithm – thuật toán đơn hình hay simplex method – phương pháp đơn hình) (được phát triển bởi Dantzig) giải bài toán bằng cách sử dụng ý tưởng này.

Được tìm ra bởi George Dantzig vào những năm 40, thuật toán simplex là một phương pháp hiệu quả để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính. Ý tưởng là xác định các điểm khả thi cơ sở (basic feasible points) nhất định và chứng minh rằng giá trị lớn nhất (nếu tồn tại) của hàm mục tiêu f đạt được tại một trong các điểm đó. Chúng ta sẽ chỉ giải thích thuật toán này cho một bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn mà có thể được phát biểu như sau:

Tối đa hóa hàm mục tiêu:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *dưới các ràng buộc:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1m}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2m}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & & & x_i & \geq & 0 & (\text{mọi } i) \\
 & & & & & b_j & \geq & 0 & (\text{mọi } j)
\end{array}$$

Trong dạng trên, việc hàm mục tiêu tuyến tính là quan trọng nhưng điều kiện các biến không âm và việc ta đang tối đa hóa f chứ không phải tối thiểu hóa không phải là các hạn chế quan trọng. Điều kiện các hằng số b_j không âm quan trọng mặc dù nó được thỏa trong rất nhiều ứng dụng thực tiễn.

Chúng ta hãy mô ta thuật toán này với một thí dụ:

Tối đa hóa:

$$f = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

dưới các ràng buộc:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\
3x_3 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 20 \\
 & & & & x_i & \geq & 0 \quad i = 1,2,3
\end{array}$$

Giải:

Bước đầu tiên là biến đổi các bất đẳng thức trong các ràng buộc trên thành các đẳng thức. Điều này có thể được thực hiện bởi việc thêm mỗi biến: x_4, x_5, x_6 gọi là các **biến bù** (**slack variable**) vào mỗi ràng buộc. Bằng cách này, ta được một bài toán mới:

Tối đa hóa:

$$f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

dưới các ràng buộc:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 6 & & \\
3x_3 & - & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 9 & & \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & & & + & x_6 & = & 20 & & \\
 & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 & & i = 1, \dots, 6
\end{array}$$

Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ là một nghiệm của bài toán mới này thì (x_1, x_2, x_3) là một nghiệm của bài toán ban đầu. Tất nhiên, các ràng buộc rõ ràng được thỏa. Hơn nữa, nếu (y_1, y_2, y_3) là một điểm khả thi khác cho bài toán ban đầu cho một giá trị lớn hơn của f thì

$$\begin{array}{ccccccccc}
y_4 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 & - & 2y_3 \\
y_5 & = & 9 & - & -3y_1 & + & y_2 & - & y_3 \\
y_6 & = & 20 & - & 2y_1 & - & 3y_2 & - & 5y_3
\end{array}$$

sẽ cho một điểm khả thi $(y_1, y_2, \dots, y_6)$ của bài toán mới và cho một giá trị lớn hơn của f, dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, ta chỉ cần giải bài toán mới. Đối với việc này, viết quan hệ $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ thành một phương trình thứ tư để có một hệ tuyến tính mà trong đó, f được xem như là một ẩn khác:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 6 \\
3x_3 & - & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & & & = & 9 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & & & + & x_6 & & & = & 20 \\
-2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & & & & & + & f & = & 0
\end{array}$$

Ma trận bổ sung của hệ trên là:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \langle x_4 \rangle & \langle x_5 \rangle & \langle x_6 \rangle & f & \\
1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\
-2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Đây được gọi là là **bảng simplex ban đầu** (**initial simplex tableau**) cho bài toán. Ta sẽ dùng một dãy các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để tạo một dãy bảng như vậy giữ f ở dòng dưới cùng. Việc này tương tự với việc biến đổi ma trận bổ sung trong phép khử Gauss, trừ việc chúng ta chỉ cho phép các nghiệm khả thi ở đây.

Chú ý rằng cách đưa vào các biến bù đảm bảo rằng các cột tương ứng với các biến đó chứa các số 0 và một số 1 với các số 1 đó ở trên các dòng các nhau. Các cột đó được gọi là các **cột cơ sở** (**basic column**) và các biến bù được gọi là các **biến cơ sở** (**basic variable**) trong bảng ban đầu (chúng được đánh dấu bằng kí hiệu ⟨ ⟩ trong bảng trên). Do điều này, rõ ràng có một nghiệm cho phương trình: đặt tất cả các biến không cơ sở bằng 0 và giải theo các biến cơ sở:

$$x_4 = 6, x_5 = 9, x_6 = 20, f = 0$$

Nói cách khác, (0, 0, 0, 6, 9, 20) là một nghiệm khả thi cho $f = 0$. Một nghiệm như vậy (với tất cả các biến không cơ sở bằng 0) được gọi là **nghiệm khả thi cơ sở** (**basic feasible solution**). Chú ý rằng hệ số dưới cùng trong cột cuối là giá trị của f tại nghiệm khả thi cơ sở (bằng 0 trong trường hợp này). Chìa khóa đến toàn bộ thuật toán là định lý sau (về việc chứng minh, đọc giả có thể tham khảo các giáo trình về quy hoạch tuyến tính như là S.I. Gass, Linear Programming, 4th edition):

*Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn có một nghiệm thì có một nghiệm khả thi cơ sở cho giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu. Các nghiệm khả thi cơ sở như vậy gọi là **tối ưu (optimal)**.*

Do đó, mục tiêu của chúng ta là tìm một điểm khả thi cơ sở tối ưu. Sự xây dựng sử dụng các biến bù đảm bảo một nghiệm khả thi cơ sở, tiếp theo chúng ta kiểm tra xem nó có tối ưu không.

Dòng dưới cùng của bảng ban đầu cho f dưới dạng một biến không cơ sở:

$$f = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

Việc một số hệ số ở đây dương gợi ý rằng giá trị này của f không tối ưu do việc tăng x_1 hay x_2 sẽ tăng f. Có vẻ trong trường hợp này thì việc tăng x_2 có ích hơn do nó có hệ số dương lớn hơn hệ số của x_1 (tương đương với hệ số âm nhất trong dòng cuối của bảng). Điều này lại gợi ý rằng chúng ta nên thử biến đổi bảng để x_2 trở thành một biến cơ sở mới. Với lý do này, x_2 được gọi là **biến vào** (**entering variable**). Cột chứa nó được gọi là **cột trụ** (**pivot column**).

Sự biến đổi này đạt được bằng việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi cột trụ thành một cột cơ sở. Câu hỏi là chúng ta định vị 1 ở đâu. Ta không đặt 1 ở dòng cuối vì ta không muốn làm rối f, nhưng nó có thể được đặt ở bất kì nơi nào khác trong cột trụ mà hệ số tại đó khác 0 (trong thí dụ trên, tất cả đều thỏa mãn). Hệ số được chọn được gọi là **trụ** (**pivot**) và ta chọn nó như sau:

1. Hệ số trụ phải dương.
2. Trong các hế số dương có sẵn, hệ số trụ là hệ số cho tỉ lệ nhỏ nhất khi được chia bởi hệ số bên phải ngoài cùng của dòng chứa nó.

Trở lại thí dụ của chúng ta, ta viết lại bảng ban đầu và đặt kí hiệu [ ] xung quanh hê số trụ. Tỉ lệ tương ứng với 2 hệ số dương trong cột trụ (ở đây là cột 2) được trình bày bên phải.
Không có tỉ lệ nào được tính cho dòng 2 và 3 do hệ số tương ứng trong cột trụ âm. Ta có thể thấy khi đó trụ là 2.

x_1	x_2	x_3	$\langle x_4\rangle$	$\langle x_5\rangle$	$\langle x_6\rangle$	f		
1	[2]	2	1	0	0	0	6	tỉ lệ: $\frac{6}{2}=3$
3	-1	1	0	1	0	0	9	
2	3	5	0	0	1	0	20	tỉ lệ: $\frac{20}{3}=6.7$ (xấp xỉ)
-2	-3	1	0	0	0	1	0	

Bây giờ thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để chuyển đổi trụ về 1 và tất cả các hệ số khác trong cột của nó về 0. Điều đó dẫn tới:

x_1	$\langle x_2\rangle$	x_3	x_4	$\langle x_5\rangle$	$\langle x_6\rangle$	f	
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	3
$\frac{7}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	12
$\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	11
$-\frac{1}{2}$	0	4	$\frac{3}{2}$	0	0	1	9

Chú ý rằng biến cơ sở cũ x_4 không còn là một biến cơ sở nữa do nó có 1 trong cùng dòng với trụ. Nó được gọi là **biến ra** (**departing variable**). Các biến cở sở mới là x_2, x_5 và x_6, và nghiệm khả thi mới (lấy các biến không cơ sở mới bằng 0) là $x_2=0$, $x_5=12$, $x_6=11$ và $f=9$. Nói cách khác, (0,3,0,0,12,11) là nghiệm khả thi cho $f=9$.
Giá trị này tốt hơn trước, f tăng từ 0 lên 9.
Bây giờ lặp lại quá trình. Dòng cuối cùng cho

$$f=9+\frac{1}{2}x_1-4x_3-\frac{3}{2}x_4$$

Ta thấy còn hi vọng để tăng f bằng cách biến x_1 thành biến cơ sở (nó có một hệ số dương). Theo đó, cột 1 là cột trụ và tất cả 3 hệ số trên dòng dưới cùng đều dương. Trình bày bảng lần nữa với các tỉ lệ được cho và trụ tiếp theo (với tỉ lệ nhỏ nhất) được đánh dấu bằng [ ]:

x_1	$\langle x_2 \rangle$	x_3	x_4	$\langle x_5 \rangle$	$\langle x_6 \rangle$	f		
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	3	tỉ lệ: $\frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 6$
$\left[\frac{7}{2}\right]$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	12	tỉ lệ: $\frac{12}{\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{24}{7}$
$\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	11	tỉ lệ: $\frac{11}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 22$
$-\frac{1}{2}$	0	4	$\frac{3}{2}$	0	0	1	9	

Qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có bảng thứ 3 với x_1, x_2, x_6 là các biến cơ sở.

$\langle x_1 \rangle$	$\langle x_2 \rangle$	x_3	x_4	x_5	$\langle x_6 \rangle$	f	
0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$
1	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{24}{7}$
0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{65}{7}$
0	0	$\frac{30}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{75}{7}$

Nghiệm khả thi cơ sở tương ứng (đặt $x_3 = x_4 = x_5 = 0$) là:

$$x_1 = \frac{24}{7}, x_2 = \frac{9}{7}, x_6 = \frac{65}{7}, f = \frac{75}{7}$$

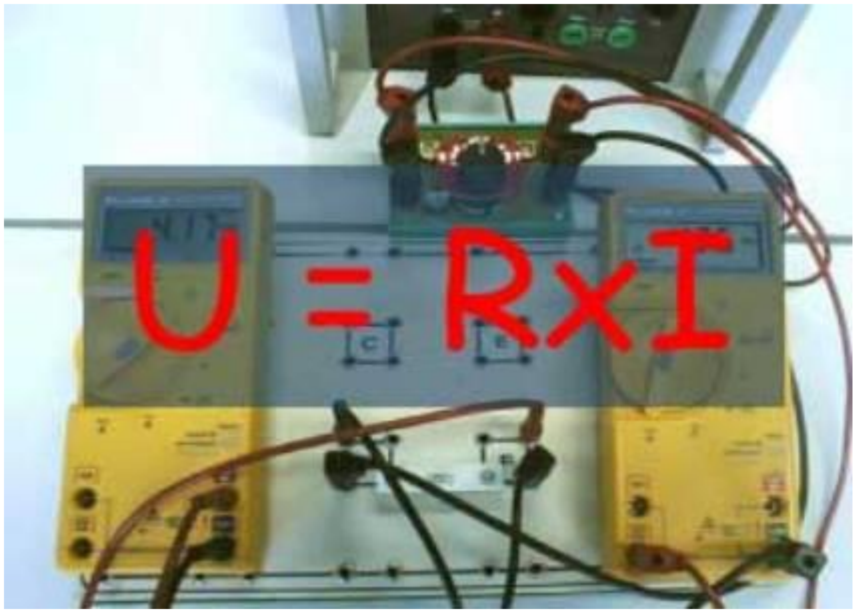
Nói cách khác, $\left(\frac{24}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0, 0, \frac{65}{7}\right)$ là một nghiệm khả thi cho $f = \frac{75}{7}$.

Chúng ta yêu cầu nghiệm này tối ưu. Dòng cuối cùng của bảng thứ 3 cho:

$$f = \frac{75}{7} - \frac{30}{7}x_3 - \frac{11}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5$$

Theo đó, do x_3, x_4 và x_5 không âm, f không thể lớn hơn $\frac{75}{7}$. Nghiệm trên cho $f = \frac{75}{7}$ nên nó phải tối ưu. Vậy bài toán thí dụ đã được giải quyết.

Ứng dụng trong Mạng lưới (Networks).



Giới thiệu: Một mạng lưới bao gồm nhiều nhánh và nhiều nút. Một ví dụ tiêu biểu là mạng lưới đường phố nơi các nhánh là những con đường và các nút là những chỗ giao nhau. Ví dụ khác là mạng lưới diện. Nhiều vấn đề về mạng lưới có thể được làm mẫu bởi hệ phương trình tuyến tính. Những định luật cơ bản được giải thích dưới đây.

1) Các mạng lưới điện

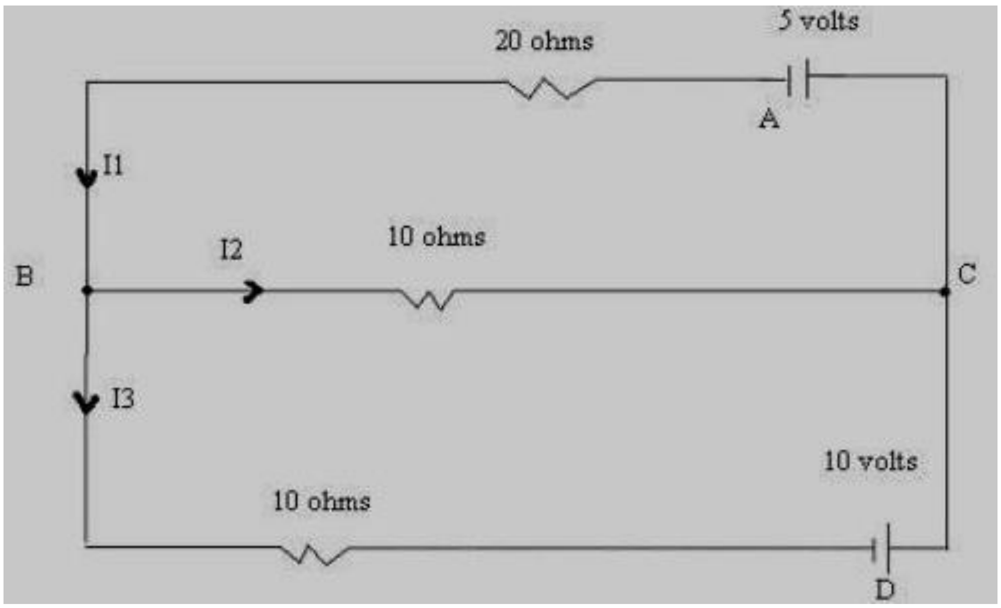
Ở những mạng lưới thế này, định luật Ohm và định luật Kirchhoff chi phối dòng điện, như sau:

Định luật Ohm: Điện áp trên một điện trở là tích của cường độ dòng điện (I) và điện trở (R) $V = IR$.

Định luật 1 Kirchhoff: Tổng đại số của các cường độ dòng điện chạy vào một nút bằng tổng đại số của các cường độ dòng điện chạy ra khỏi nút đó.

Định luật 2 Kirchhoff: Tổng đại số của điện thế quanh mạch kín bằng tổng cộng điện thế trong mạch.

Ví dụ: Xác định các cường độ dòng điện I_1, I_2, I_3 cho bởi mạng lưới điện như sau:



Áp dụng Định luật 1 Kirchhoff cho một trong hai điểm B hay C, ta tìm được $I_1 = I_2 + I_3$. Nói cách khác:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Áp dụng Định luật 2 Kirchhoff cho các mạch BDCB và BCAB, ta được các phương trình:

$$-10I_2 + 10I_3 = 10$$

$$20I_1 + 10I_2 = -5$$

Điều này cho ra hệ ba phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ -10I_2 + 10I_3 = 10 \\ 20I_1 + 10I_2 = -5 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng của hệ trên là:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Rút gọn thành:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

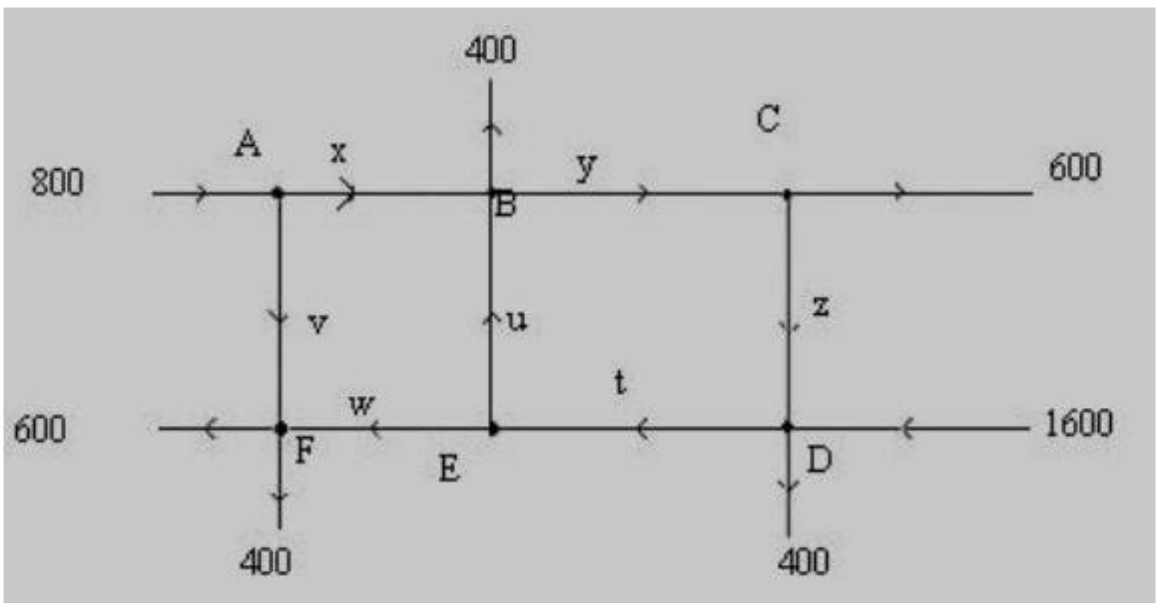
Vì thế các cường độ dòng điện là:

$$I_1 = 0, I_2 = -0.5, I_3 = 0.5$$

Vì I_2 âm, chiều quy ước ngược chiều thực tế.

2) Các mạng lưới giao thông.

Biểu đồ dưới đây miêu tả lưu lượng giao thông qua một khối các đoạn đường nào đó. (Những con số là lưu lượng trung bình chạy vào và chạy ra mạng lưới vào những giờ giao thông cao điểm)



Bằng Định luật 1 Kirchhoff, lưu lượng chạy vào chỗ giao nhau bằng lưu lượng chạy ra. Điều này dẫn đến hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 800 & = & x & + & v & (A) \\ u & + & x & = & y & + & 400 & (B) \\ & & y & = & z & + & 600 & (C) \\ 1600 & + & z & = & t & + & 400 & (D) \\ & & t & = & u & + & w & (E) \\ v & + & w & = & 1000 & & & (F) \end{array}$$

Ma trận mở rộng của hệ trên là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì thế đáp án có thể được viết là:

$$\begin{array}{rcccc} x & = & w & - & 200 \\ y & = & t & - & 600 \\ xz & = & t & - & 1200 \\ u & = & t & - & w \\ v & = & 1000 & - & w \end{array}$$

Ví dụ, nếu $w = 300$ và $t = 1300$ (ở các xe mỗi giờ), thì

$x = 100, y = 700, z = 100, u = 1000, v = 700$.

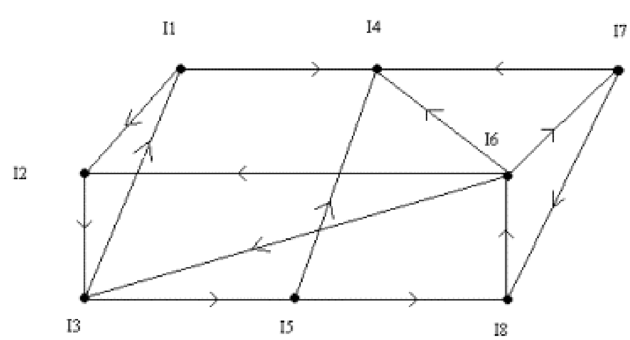
Bây giờ giả sử các con đường từ A đến B và từ B đến C phải bị đóng (ví dụ vì công trình), có nghĩa là $x = 0$ và $y = 0$. Giao thông sẽ được định tuyến như thế nào?

Để trả lời câu hỏi này, cho $x = y = 0$ ở đáp án trên, ta có $w = 200, t = 600, z = -600, u = 400, v = 800$. Dĩ nhiên, giá trị âm của z là không chuẩn. Để tránh lưu lượng âm, chúng ta phải đảo ngược các chiều trên những con đường nối C và D; sự thay đổi này tạo ra $z = 600$ thay vì $z = -600$.

Ứng dụng vào xã hội học (Sociology)

<u>Giới thiệu</u> Những nhà xã hội học quan tâm đến nhiều kiểu giao tiếp trong một nhóm người thường sử dụng đồ thị để thể hiện và phân tích những mối quan hệ trong một nhóm. Để hiểu thêm về các thuật ngữ và kết quả của lý thuyết đồ thị được sử dụng dưới đây hãy xem lại phần ứng dụng trong Lý thuyết đồ thị. Ý tưởng là gán cho một người trong nhóm là một đỉnh, nếu người A có tầm ảnh hưởng lớn đến người B thì ta vẽ một đoạn thẳng có hướng từ A đến B. Chú ý rằng đồ thị của ta chỉ có thể có nhiều nhất một đoạn thẳng có hướng giữa hai đỉnh phân biệt bất kì.

<u>Ví dụ</u> Xét một nhóm 8 người $I_1, \dots, I_8$. Đồ thị có hướng sau thể hiện quan hệ ảnh hưởng giữa những người trong nhóm:



Ma trận kề của đồ thị này là:

$$M = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 & I_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dòng nhiều số 1 nhất trong ma trận trên tương ứng với người có nhiều ảnh hướng nhất trong nhóm; trong trường hợp này là I_6. Trong đồ thị trên, đường đi có độ dài 1 (một đoạn thẳng) tương ứng với ảnh hưởng trực tiếp trong nhóm, trong khi đó đường đi có độ dài lớn hơn tương ứng với ảnh hưởng gián tiếp. Ví dụ I_3 ảnh hưởng trực tiếp tới I_5 và I_5 ảnh hưởng trực tiếp tới I_4, suy ra I_3 có ảnh hưởng gián tiếp tới I_4.

Bây giờ bình phương ma trận M ta được

$$M^2 = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 & I_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ta có thể thấy được I_8 có ảnh hưởng gián tiếp bậc 2 tới nửa số người trong nhóm mặc dù "anh ta" chỉ có một ảnh hưởng trực tiếp tới I_6.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đại số tuyến tính và ứng dụng, tập 1, Bùi Xuân Hải, Trần Ngọc Hội, Trịnh Thanh Đèo, Lê Văn Luyện, *Đại số tuyến tính và ứng dụng – tập 1*, NXB Đại Học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2009.

2. Trang web ứng dụng Đại số tuyến tính của Giáo sư Joseph Khoury, Đại học Ottawa, Canada: http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/app.htm

Ngoài ra, đọc giả cũng có thể tham khảo các tài liệu sau:

1. Lê Tuấn Hoa, *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ Và Bài Tập*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2005.

2. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại Số Tuyến Tính*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.

3. Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd Edition, Springer, 2015.

4. Gilbert Strang, *Introduction To Linear Algebra*, 4th Edition, Gilbert Strang, Wellesley Cambridge Press, 2009.

Kèm với tài liệu 4. là trang web http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/ của Giáo sư Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology, Hoa Kỳ.