

# Chương 2. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

**Bài 2.1** Những khẳng định nào sau đây là đúng

- a)  $0 \in \emptyset$
- b)  $\emptyset \in \{0\}$
- c)  $\{0\} \subseteq \emptyset$
- d)  $\emptyset \subseteq \{0\}$
- e)  $\{0\} \in \{0\}$
- f)  $\{0\} \subseteq \{0\}$

**Bài 2.2** Những khẳng định nào sau đây là đúng

- a)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- b)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- c)  $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- d)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- e)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- f)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

**Bài 2.3** Liệt kê các tập hợp sau:

- a)  $A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- b)  $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
- c)  $C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$
- d)  $D = \{2 \sin \frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- e)  $E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \leq \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$
- f)  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \leq 0\}$
- g)  $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \geq 256 \text{ và } x = \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \sin 3x\}$

**Bài 2.4** Cho  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Viết  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong  $\mathbb{R}$ .

- a)  $A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty)$  và  $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$
- b)  $A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$  và  $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}$ .

**Bài 2.5** Cho  $A, B, C, D \subseteq E$ . Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

- a)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
- b)  $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$
- c)  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup (A \cap B \cap \bar{C})$
- d)  $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) \cup (\bar{A} \cap B)$
- e)  $\bar{A} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \bar{D})$

**Bài 2.6** Cho  $A, B, D \subseteq E$ . Hãy chứng minh

- a)  $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$

- b)  $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$
- c)  $(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$
- d)  $(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$
- e)  $(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$

**Bài 2.7** Cho  $A, B, H, K \subseteq E$ . Chứng minh

- a)  $[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subseteq [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$
- b)  $(A \setminus H) \subseteq [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$
- c)  $[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subseteq [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subseteq [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$
- d)  $[(A \cup B) \setminus H] \subseteq [A \cup (B \setminus H)]$
- e)  $[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subseteq (B \setminus H)$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

**Bài 2.8** Cho  $A = \{0, 1, a\}$ ,  $B = \{a, 2\}$  và  $C = \{2, b\}$ .

- a) Liệt kê các tập hợp  $A^2$ ,  $A \times B$ ,  $C \times A$ ,  $B \times C$  và  $C \times B$ .
- b) Liệt kê các tập hợp  $B^3$ ,  $A \times B^2$ ,  $C \times A \times C$ ,  $A \times B \times C$  và  $C^2 \times B$ .

**Bài 2.9** Cho  $A, B \subseteq E$  và  $H, K \subseteq F$ . Chứng minh

- a)  $A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$
- b)  $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$
- c)  $(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$
- d)  $[(A \times H) \cup (B \times K)] \subseteq [(A \cup B) \times (H \cup K)]$
- e)  $[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subseteq [(A \times H) \setminus (B \times K)]$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

**Bài 2.10** Các qui tắc  $f : X \rightarrow Y$  sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?

- a)  $X = (-2, 1]$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$ ,  $\forall x \in X$
- b)  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = (6, +\infty)$ ,  $f(x) = e^x + 9e^{-x}$ ,  $\forall x \in X$
- c)  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln |\sin x|$ ,  $\forall x \in X$
- d)  $X = [-1, +\infty)$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = y$  sao cho  $y^2 - 2y = x$ ,  $\forall x \in X$
- e)  $X = [1, 3]$ ,  $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 9x + 5$ ,  $\forall x \in X$
- f)  $X = \mathbb{Q}$ ,  $Y = \mathbb{Z}$ ,  $f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + 3^n - mn$ ,  $\forall \frac{m}{n} \in X$

**Bài 2.11** Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  sau:

- a)  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $\forall x \in X$



- $L = [-2, 4)$
- $M = (5, 10]$
- $N = (7, 11)$ .

**Bài 2.16** Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
- d)  $q : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}, q(x) = \frac{5-3x}{x-1}$
- b)  $h : [1, 2) \rightarrow [5, 7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$
- e)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$
- c)  $p : \mathbb{R} \rightarrow (-2, 3), p(x) = \frac{9-2e^x}{e^x+3}$
- f)  $r : (0, 3] \rightarrow (2, \frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$

**Bài 2.17** Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ  $u, v, w$  thỏa  $p \circ^{-1} u = g, v \circ f = g$  và  $f \circ^{-1} w \circ p = g$ .

**Bài 2.18** Những tập nào sau đây là hữu hạn, vô hạn đếm được và không đếm được. Nếu vô hạn đếm được, hãy xây dựng một song ánh với  $\mathbb{N}$ .

- a) Tập hợp số nguyên lớn hơn 10
- b) Tập hợp các số nguyên âm lẻ
- c) Tập các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1000000
- d) Tập hợp các số thực giữa 0 và 2.
- e)  $A \times \mathbb{Z}^+$  where  $A = \{2, 3\}$
- f) Tập các số nguyên chia hết cho 10

**Bài 2.19** Đưa ra ví dụ hai tập hợp không đếm được  $A$  và  $B$  sao cho  $A \setminus B$  ( $A \cap B$ ) sao cho

- a) hữu hạn                                      b) vô hạn đếm được                                      c) không đếm được

**Bài 2.20** Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hợp. Chứng minh rằng nếu  $|A| = |B|$  thì  $|P(A)| = |P(B)|$

**Bài 2.21** Cho  $A$  là tập không đếm được và  $A \subseteq B$ . Chứng minh rằng  $B$  không đếm được.

**Bài 2.22** Cho  $A$  là tập không đếm được và  $B$  đếm được. Hỏi  $A \setminus B$  là tập không đếm được phải không?

**Bài 2.23** Chỉ ra rằng  $(0, 1)$  và  $\mathbb{R}$  có cùng lực lượng.

**Bài 2.24** Chứng minh rằng  $P(\mathbb{Z})$  là tập không đếm được.