VI TÍCH PHÂN 1C

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 4
Phép tính tích phân hàm một biến

I. Tích phân bất định
II. Tích phân xác định
III. Tích phân suy rộng

1. Tích phân bất định

Định nghĩa

Cho hàm f(x) liên tục trên (a,b). Hàm F(x) được gọi là 1 nguyên hàm của f(x) nếu $F'(x) = f(x)$. Khi đó F(x)+c được gọi là họ nguyên hàm của f(x) và ký hiệu

$$F(x) + c = \int f(x).dx$$

1. Tích phân bất định

Các tính chất của TPBĐ

$$\int k.f(x).dx = k\int f(x)$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}.dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int F'(x).dx = F(x)$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

1. Tích phân bất định

Bảng tích phân cơ bản

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c, \int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

1. Tích phân bất định

Bảng tích phân cơ bản

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

1. Tích phân bất định

Phương pháp tính tích phân

PP Đổi biến

VD1: Tính $I = \int \sin^3 x.\cos x.dx$

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx$$

$$I = \int t^3.dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

1. Tích phân bất định

Phương pháp tính tích phân

PP Đổi biến

VD2: Tính $I = \int \sin^5 x dx$

1. Tích phân bất định

Phương pháp tính tích phân

PP Tích phân từng phần

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

VD3: Tính $\int x^2 \ln x\,dx$

1. Tích phân bất định

Phương pháp tính tích phân

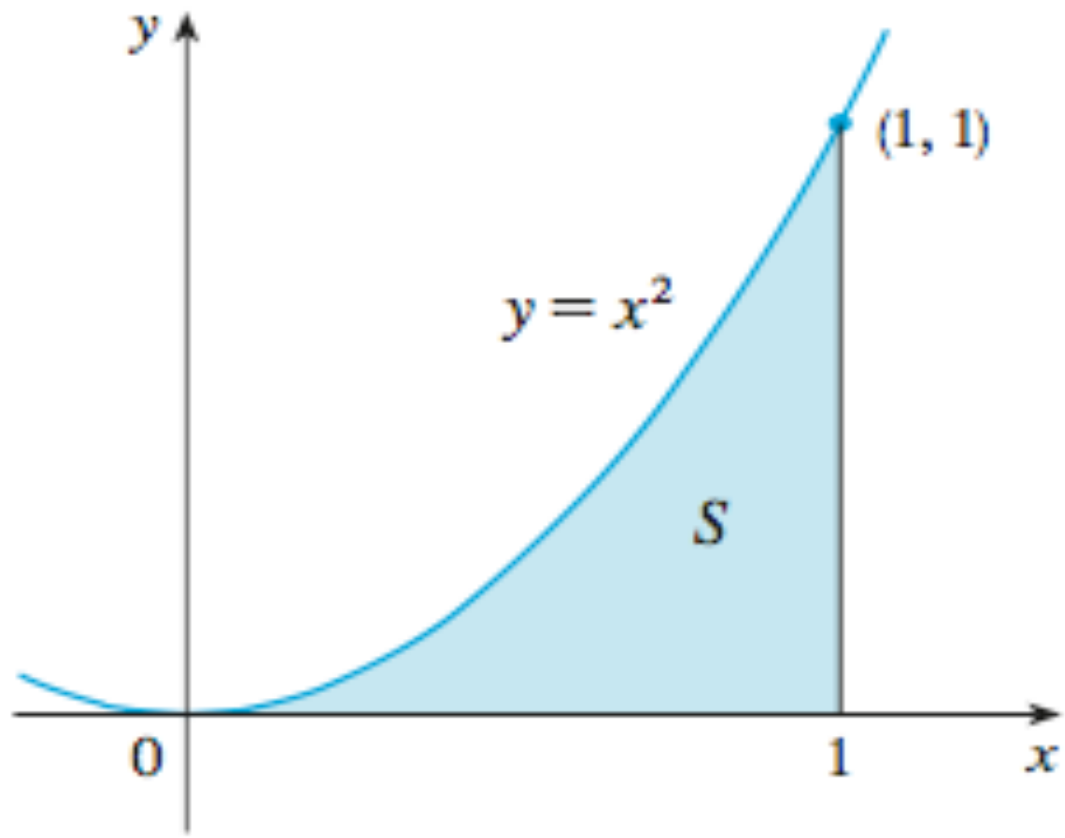
PP Tích phân từng phần

VD4: Tính $\int x^2 e^x dx$

VD5: Tính $\int x \sin x dx$

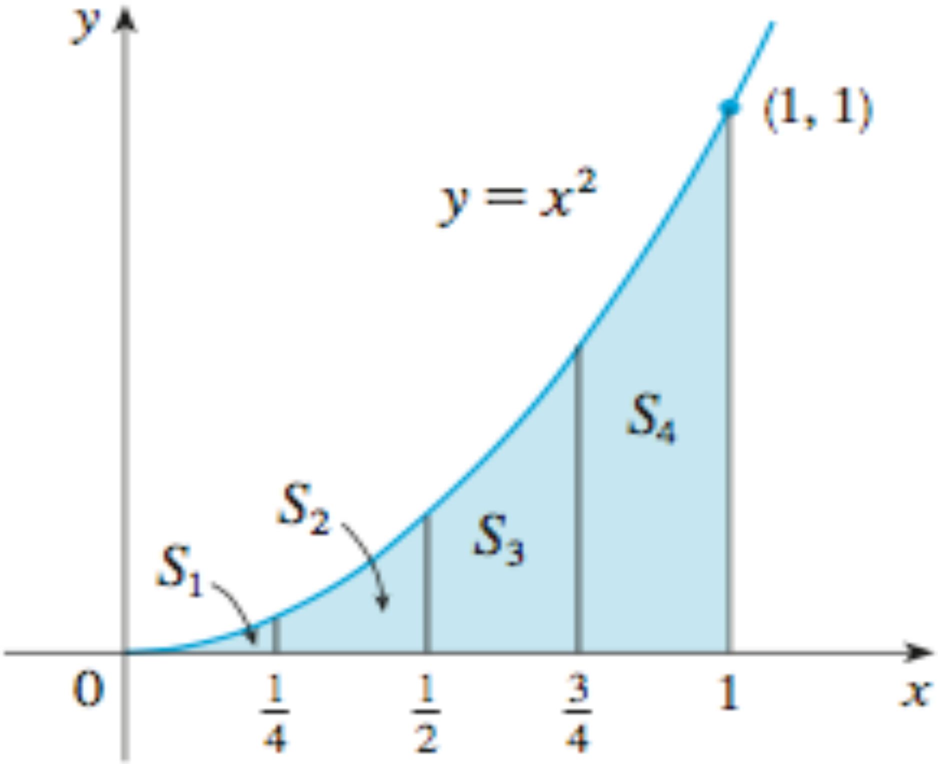
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



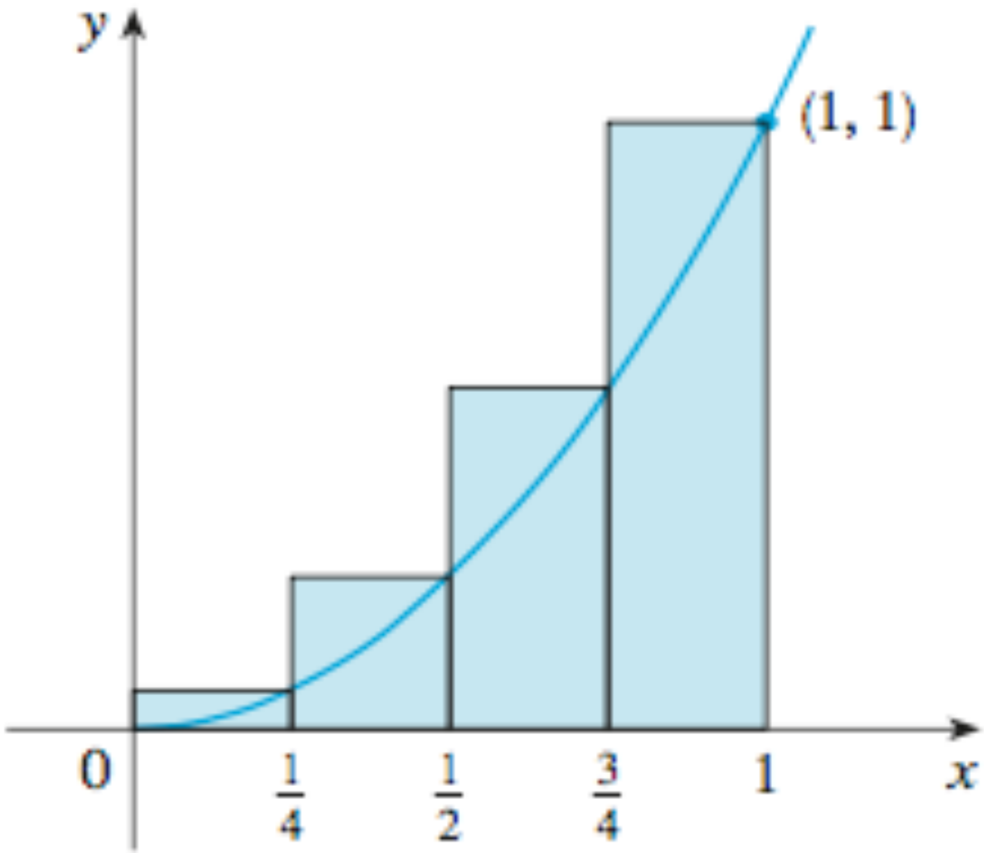
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



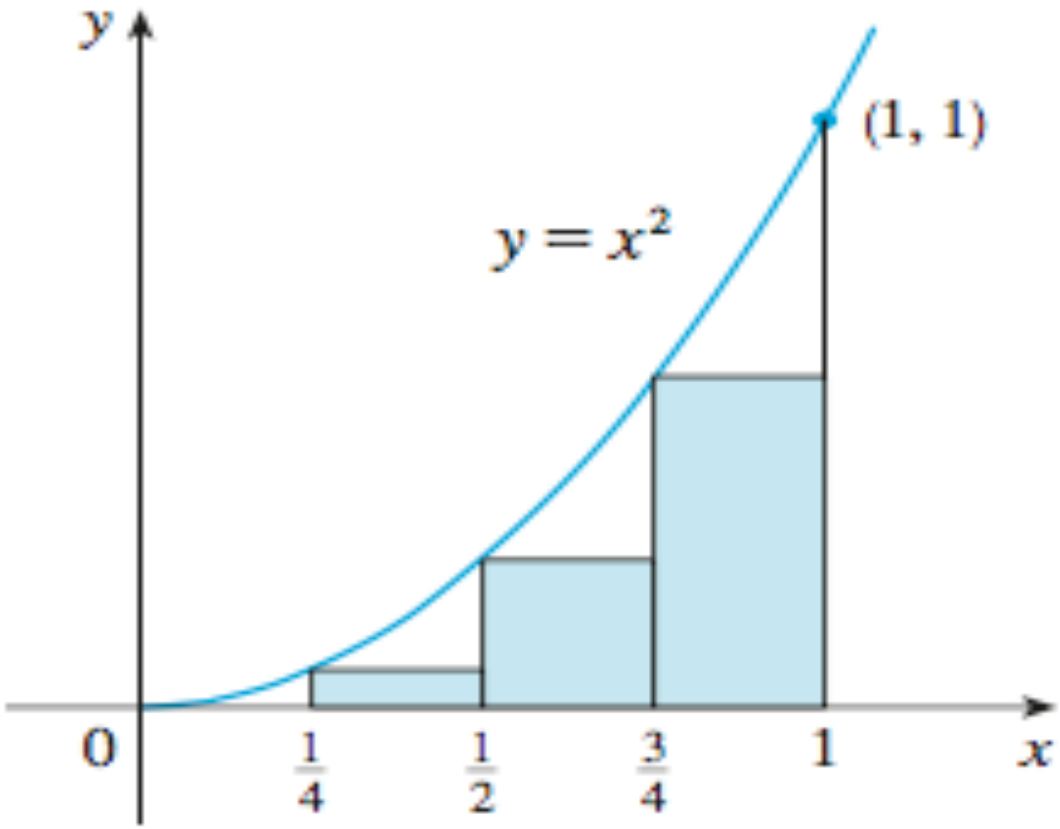
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



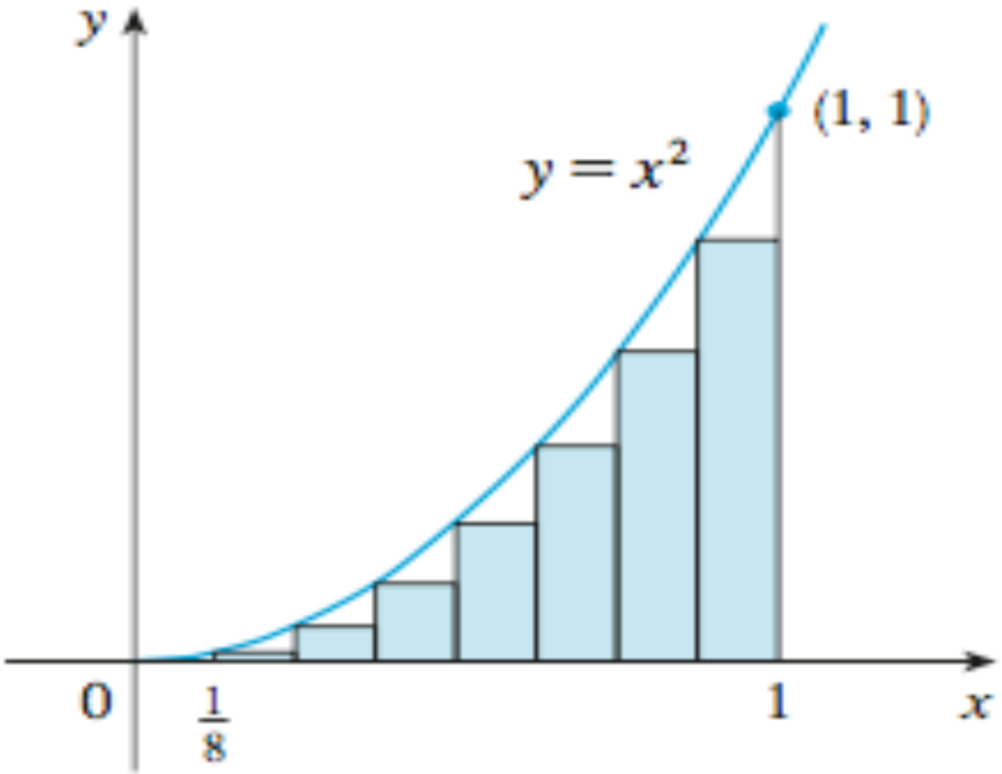
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



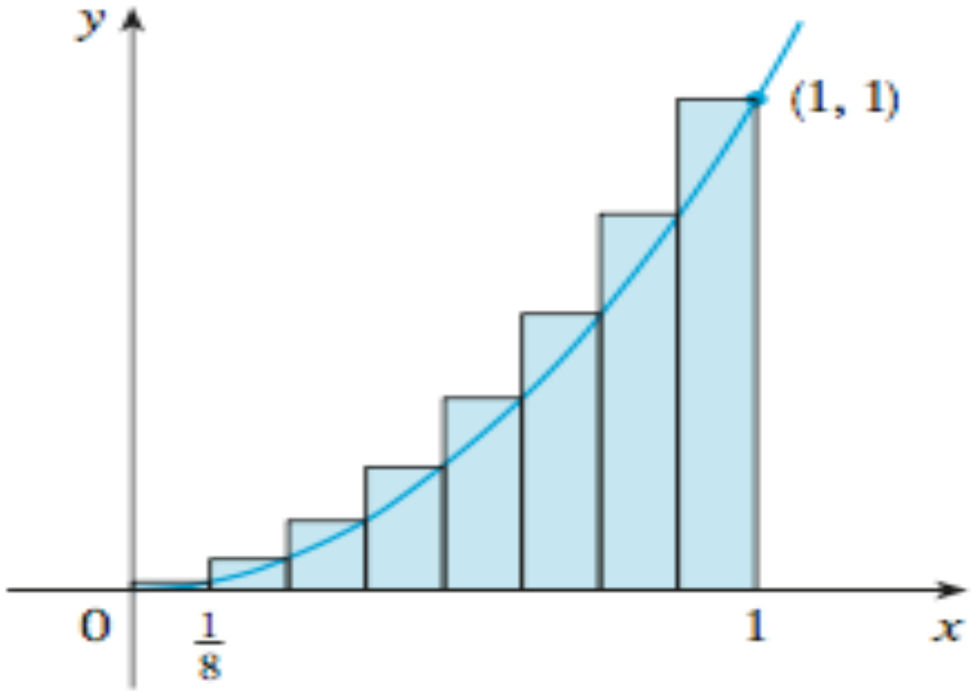
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



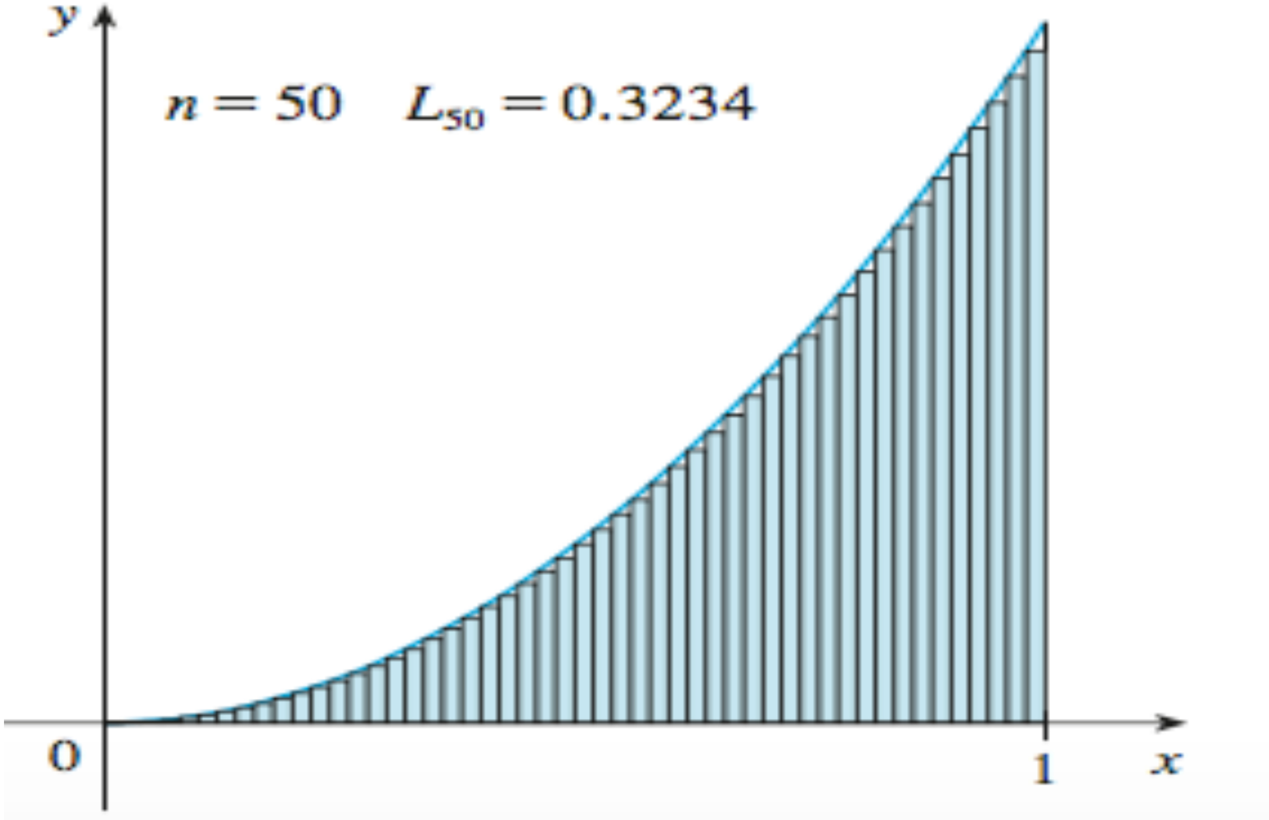
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



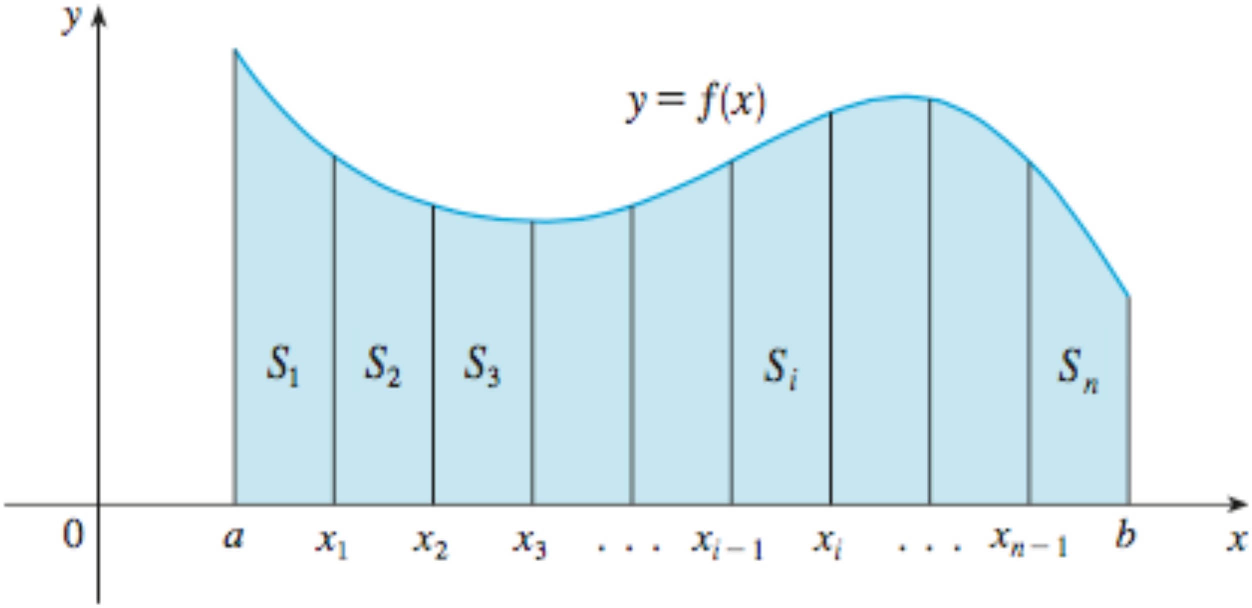
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



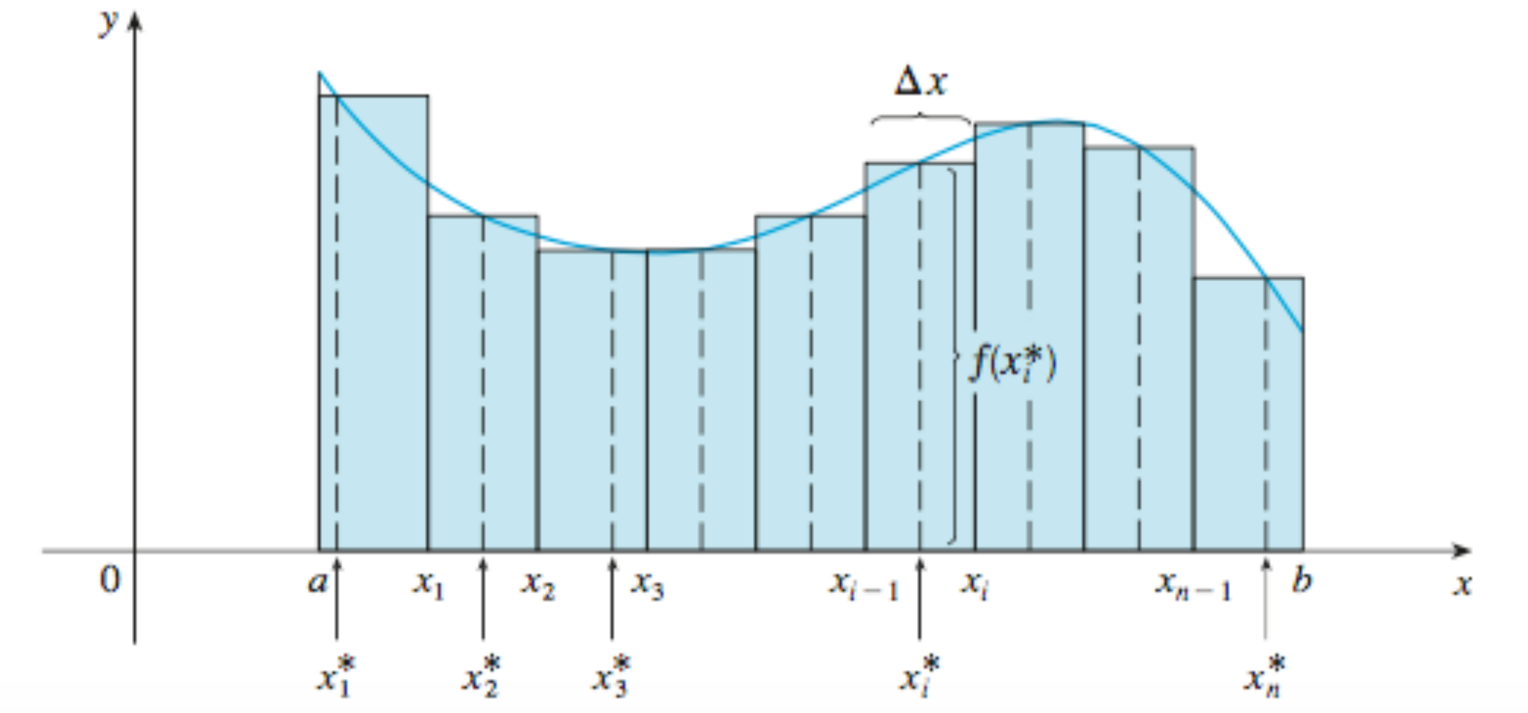
2. Tích phân xác định

Định nghĩa



2. Tích phân xác định

Định nghĩa



2. Tích phân xác định

Định nghĩa

Cho hàm f(x) xác định trên [a;b]. Chia đoạn [a;b] thành n đoạn bằng nhau $\Delta x = \frac{b-a}{n}$;

$$x_0 = a; x_1; x_2; \ldots; x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

2. Tích phân xác định

Công thức Newton - Leibnitz

Cho hàm số f(x) liên tục trên [a,b]. F(x) +c là họ nguyên hàm của f(x). Khi đó TPXĐ của f(x) từ a đến b là

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Tích phân xác định

Ý nghĩa hình học

Cho f(x) liên tục [a,b] và $f(x) \geq 0$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx = S$

Chính là diện tích hình thang cong giới hạn bởi x=a,x=b,y=0,y=f(x)

2. Tích phân xác định

Các tính chất của TPXĐ

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2. Tích phân xác định

Các tính chất của TPXĐ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in [a,b]$$

$$M \le f(x) \le N, \forall x \in [a,b] \Rightarrow M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$$

2. Tích phân xác định

Phương pháp tính TPXĐ

Phương pháp đổi biến

VD6: Tính $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

$$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1 - \sin^2 t)}.2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

2. Tích phân xác định

VD7: Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2. Tích phân xác định

Phương pháp tính TPXĐ

Phương pháp TP từng phần

Cho u(x),v(x) là các hàm số có đạo hàm liên tục [a,b]. Khi đó

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

2. Tích phân xác định

Phương pháp tính TPXĐ

Phương pháp TP từng phần

VD8: Tính $\int_{1}^{e} \ln x dx$

VD9: Tính $\int_{0}^{1} (x+1)e^{x} dx$

3. Tích phân suy rộng

TPSR loại 1 (có cận là vô cực)

Cho f(x) khả tích [a,b]. Tích phân suy rộng loại 1 của f(x) trên $[a,+\infty)$

ký hiệu là
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Và được xác định như sau $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

Tương tự

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

3. Tích phân suy rộng

<u>TPSR loại 1 (có cận là vô cực)</u>

Nếu các giới hạn trên tồn tại và hữu hạn thì ta nói các TPSR tương ứng là hội tụ. Ngược lại ta nói chúng phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

VD10: Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan x \Big|_0^b$

$$= \lim_{b\to+\infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

3. Tích phân suy rộng

VD11: Tính $I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \ (a > 0)$

VD12: Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Định lý 1: Cho f(x), g(x) xác định trên $[a;+\infty]$ thỏa

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Khi đó :

- Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

VD 13: Xét sự hội tụ của

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt[3]{1+x^5}}dx$$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

VD 13: Xét sự hội tụ của

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt[3]{1+x^5}} dx$$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

VD 14: Xét sự hội tụ của

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x+4}{\sqrt{1+x^3}\,.\sqrt[3]{x}}\,dx$$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Định lý 2: Cho f(x), g(x) xác định dương trên $[a; +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Khi đó :

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Định lý 2:

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
- Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Định lý 2:

- Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ
- Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Định lý 3: Cho f(x), g(x) xác định trên $[a;+\infty]$

Nếu $\int_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và được gọi là hội tụ tuyệt đối

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

VD 15: Xét sự hội tụ của

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^5} dx$$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 1

Lưu ý: Sự hội tụ của TP $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ cùng bản chất với TP $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \, , a \leq b < +\infty$

3. Tích phân suy rộng

TPSR loại 2 (của hàm số bị gián đoạn)

Cho f(x) xác định và liên tục tại mọi $x\in[a,c)$. Hàm này gián đoạn tại x=c. Khi đó

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-}\int_a^b f(x)dx$$

Tương tự, nếu hàm số liên tục tại mọi $x\in(a,c]$ và gián đoạn tại x=a. Khi đó

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a^+}\int_b^c f(x)dx$$

3. Tích phân suy rộng

TPSR loại 2 (của hàm số bị gián đoạn)

Cho f(x) bị gián đoạn tại $x_0 \in [a,c]$. Khi đó

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^c f(x)dx = \lim_{b \to x_0^-} \int_a^b f(x)dx + \lim_{b \to x_0^+} \int_b^c f(x)dx$$

Nếu các giới hạn trên tồn tại và hữu hạn ta nói TPSR tương ứng là hội tụ. Ngược lại thì phân kỳ

3. Tích phân suy rộng

VD16: Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-} -2\sqrt{1-x}\Big|_0^b$

$$= \lim_{b\to 1^-}\{-2\sqrt{1-b}+2\} = 2$$

3. Tích phân suy rộng

VD17: Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx$

3. Tích phân suy rộng

VD18: Tính $I = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

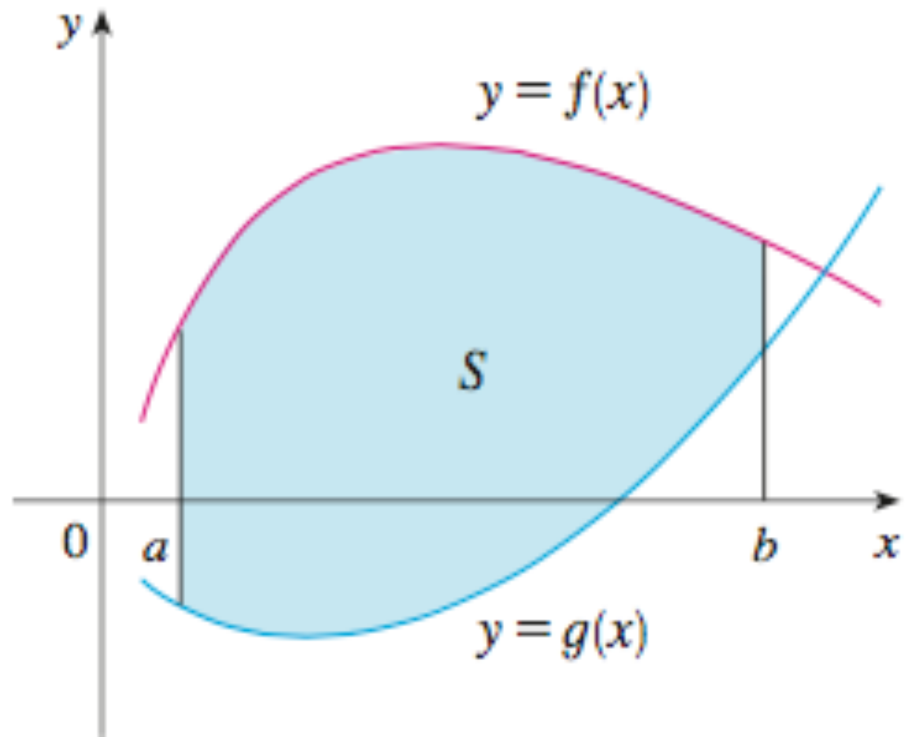
VD19: Tính $I = \int_0^1 \ln x dx$

VD20: Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

3. Tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn hội tụ của TPSR loại 2

4. Ứng dụng tích phân xác định



4. Ứng dụng tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); f(x) \geq g(x); x = a; x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

4. Ứng dụng tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi các

đường $y = f(x); y = g(x); x = a; x = b$
được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

4. Ứng dụng tích phân xác định

VD21:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = -x^2, y = -x - 2$$

4. Ứng dụng tích phân xác định

Tính thể tích

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

4. Ứng dụng tích phân xác định

Tính thể tích

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y), x = 0, y = a, y = b$ quay quanh trục Oy được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$

4. Ứng dụng tích phân xác định

VD22:

Tính thể tích khối tròn xoay do miền giới hạn bởi

$$y = \sin^2 x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$$

quay quanh Ox

4. Ứng dụng tích phân xác định

VD23:

Tính thể tích khối tròn xoay do miền giới hạn bởi

$$y = \sqrt{\tan x}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$$

quay quanh Ox

4. Ứng dụng tích phân xác định

VD24:

Tính thể tích khối tròn xoay do miền giới hạn bởi

$$y = 2\sqrt{1+\sin 2x}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$$

quay quanh Ox

Bài Tập

Bài 1:

Tính các tích phân sau

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{xarctanx}}{1+x^2} \mathrm{dx}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx}$

c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^5} \mathrm{dx}$

d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}} \mathrm{dx}$

Bài Tập

Bài 2:

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau và tính giá trị nếu nó hội tụ.

$a)\ \int_{2014}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$ (Đề thi học kỳ I 2014-2015)

$b)\ \int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

$c)\ \int_{1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$ (Đề thi học kỳ I 2014-2015)

$d)\ \int^{+\infty} \frac{1}{\ }\,dx$

Bài Tập

Bài 2:

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau và tính giá trị nếu nó hội tụ.

a) $\int_{2014}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$ (Đề thi học kỳ I 2014-2015)

b) $\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx$

c) $\int_{1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ (Đề thi học kỳ I 2014-2015)

d) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x.(\ln x)^3} dx$

Bài Tập

Bài 3:

Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^7} dx$

c) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$

d) $\int_0^3 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$