

## CHƯƠNG I

## MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

$\mathbf{N}$  là tập hợp các số nguyên không âm và  $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ .

$\mathbf{Z}$  là tập hợp các số nguyên và  $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ .

$\mathbf{Q}$  là tập hợp các số hữu tỉ và  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ .

$\mathbf{R}$  là tập hợp các số thực và  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

**I. MA TRẬN:**

**1.1/ ĐỊNH NGHĨA:** Cho  $m, n \in \mathbf{N}^*$ . Một ma trận thực  $A$  có kích thước  $(m \times n)$  là một bảng số thực hình chữ nhật có  $m$  dòng và  $n$  cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hay } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ với } a_{ij} \in \mathbf{R} \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Khi  $m = n$  thì  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  là ma trận vuông thực cấp  $n$ .

Ký hiệu :  $M_{m \times n}(\mathbf{R})$  là tập hợp các ma trận thực  $(m \times n)$ .

$M_n(\mathbf{R})$  là tập hợp các ma trận vuông thực cấp  $n$ .

**Ví dụ:**

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & 4 & -5 \\ \sqrt[3]{7} & 0 & -1 & \cos 8 \\ -2 & \ln 9 & 6 & -\pi \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ trong đó } a_{14} = -5, a_{33} = 6 \text{ và } a_{21} = \sqrt[3]{7}.$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} 7 & -1/2 & 0 \\ -5/3 & 4 & -9 \\ 6 & -8 & 2/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q}) \text{ trong đó } b_{13} = 0, b_{22} = 4 \text{ và } b_{32} = -8.$$

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in M_{1 \times 5}(\mathbf{Z}). \quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbf{N}).$$

**1.2/ ĐỊNH NGHĨA:** Ma trận không là ma trận có tất cả các hệ số bằng 0.

Ký hiệu ma trận không là  $\mathbf{O}$  (hiểu ngầm kích thước) hoặc  $\mathbf{O}_{m \times n}$  hoặc  $\mathbf{O}_n$ .

**Ví dụ:**

$$\mathbf{O}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \quad \text{và} \quad \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

**1.3/ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN:**

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ . Xét  $1 \leq i \neq j \leq m$ .

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên dòng* cho ma trận:

a) Hoán vị dòng (i) với dòng (j). Ta ghi  $(i) \leftrightarrow (j)$ .

b) Nhân dòng (i) với số  $c \in \mathbf{R}^*$ . Ta ghi  $(i) \rightarrow c(i)$ .

c) Thế dòng (i) bằng [ dòng (i) + c.dòng (j) ] với số  $c \in \mathbf{R}$ . Ta ghi  $(i) \rightarrow [ (i) + c(j) ]$ .

*Các phép biến đổi đảo ngược* của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng trên lần lượt

là  $(i) \leftrightarrow (j)$ ,  $(i) \rightarrow c^{-1}(i)$  và  $(i) \rightarrow [ (i) - c(j) ]$ .

**Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -6 & -4 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{qua phép biến đổi } (1) \leftrightarrow (3).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ -21/4 & 0 & 3/4 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{qua phép biến đổi } (2) \rightarrow \frac{-3}{4}(2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ 12 & 9 & -8 & 12 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (3) \rightarrow [(3) + 2(2)].$$

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nói trên lần lượt là

$$(1) \leftrightarrow (3), (2) \rightarrow -\frac{4}{3}(2) \text{ và } (3) \rightarrow [(3) - 2(2)].$$

#### 1.4/ SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG DÒNG:

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ . Ta nói  $A$  và  $B$  là *tương đương dòng* với nhau nếu  $A$  có thể biến đổi thành  $B$  (và ngược lại) bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Ký hiệu  $A \sim B$  để chỉ  $A$  và  $B$  là *tương đương dòng* với nhau.

Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương trên  $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

#### Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix} = B. \text{ Để ý } A \text{ biến thành } B \text{ qua các phép biến đổi sơ cấp trên}$$

dòng liên tiếp  $(2) \rightarrow [(2) + 2(1)], (1) \leftrightarrow (3), (1) \rightarrow \frac{-1}{4}(1) \text{ và } (3) \rightarrow [(3) - 8(1)].$

Như vậy  $B$  lại có thể biến thành  $A$  qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng liên tiếp

$(3) \rightarrow [(3) + 8(1)], (1) \rightarrow -4(1), (1) \leftrightarrow (3) \text{ và } (2) \rightarrow [(2) - 2(1)].$  Vậy  $A \sim B$ .

## II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

**2.1/ ĐỊNH NGHĨA:** Cho  $m, n \in \mathbf{N}^*$ . Một hệ phương trình tuyến tính thực với  $m$

phương trình và  $n$  ẩn số là một hệ phương trình có dạng như sau:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{ với } a_{ij}, b_i \text{ là các số thực cho trước } (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (đều xuất hiện dưới dạng bậc nhất) là  $n$  ẩn số thực cần tìm.

Đặt  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ,  $B = (b_i)_{1 \leq i \leq m} \in M_{m \times 1}(\mathbf{R})$  và  $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$  thì

hệ (\*) được viết gọn thành các dạng  $AX = B$  hoặc  $(A | B)$  (hiểu ngầm ma trận  $X$ ).

### **Ví dụ:**

Xét hệ  $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 8x_3 - 7x_4 - 3x_1 = 0 \\ 9x_2 - 6x_3 + x_4 + 2x_1 = -4 \end{cases}$ . Hệ trên được viết gọn thành  $AX = B$  hoặc  $(A | B)$  với

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 8 & -7 \\ 2 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

## **2.2/ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC:**

Xét hệ phương trình tuyến tính thực  $AX = B$  (\*) đã nêu trong (2.1).

Ta nói bộ  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$  là *một nghiệm* của (\*) nếu tất cả các phương trình của (\*) đều thỏa khi thế  $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots$  và  $x_n = c_n$ .

**Ví dụ:** Ta có  $(x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 1)$  thỏa các phương trình của hệ dưới đây:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -22 \\ -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases} \text{ . Do đó ta nói } (-2, 0, 3, 1) \text{ là một nghiệm của hệ đã cho.}$$

## **2.3/ MỆNH ĐỀ:** (số lượng nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thực).

Xét hệ phương trình tuyến tính thực  $AX = B$ .

Có đúng một trong 3 trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ vô nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất.

c) Hệ có vô số nghiệm.

**Ví dụ:**

a) Phương trình  $0x = 5$  vô nghiệm. Phương trình  $2x = -6$  có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

Phương trình  $0x = 0$  có vô số nghiệm ( $x$  thực tùy ý).

b) Hệ  $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 9x - 21y = 4)$  vô nghiệm.

Hệ  $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 4x - 5y = -7)$  có nghiệm duy nhất  $(x = 2, y = 3)$ .

Hệ  $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 6x - 14y = -30)$  có vô số nghiệm với một ẩn tự do là  $x$  hoặc  $y$ .

Viết nghiệm :  $[x \text{ thực tùy ý, } y = (3x + 15) / 7]$  hoặc  $[y \text{ thực tùy ý, } x = (7y - 15) / 3]$ .

**2.4/ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT:**

**( hay HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH ĐẲNG CẤP )**

Xét hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất*  $AX = \mathbf{O}$  (có vế phải triệt tiêu).

Hệ này có ít nhất *một nghiệm tầm thường* là  $(x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0)$ .

Do đó chỉ có đúng một trong hai trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ có *nghiệm duy nhất* (chính là nghiệm tầm thường).

b) Hệ có *vô số nghiệm*.

**Ví dụ:**

a) Hệ  $(9x + 7y = 0 \text{ \& } 4x - 5y = 0 \text{ \& } 3x + 8y = 0)$  có nghiệm duy nhất là  $(x = 0, y = 0)$ .

b) Hệ  $(5x + 8y - 4z = 0)$  có vô số nghiệm với hai ẩn tự do là  $(x,y)$  hoặc  $(x,z)$  hoặc  $(y,z)$ .

Ta ghi kết quả theo một trong ba dạng sau :  $[x, y \in \mathbf{R}, z = (5x + 8y) / 4]$  hoặc

$[x, z \in \mathbf{R}, y = (4z - 5x) / 8]$  hoặc  $[y, z \in \mathbf{R}, x = (4z - 8y) / 5]$ .

### III. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

#### 3.1/ MỆNH ĐỀ:

a) Nếu hai hệ phương trình tuyến tính  $AX = B$  và  $CX = D$  có các ma trận

$(A | B)$  và  $(C | D)$  tương đương dòng với nhau thì hai hệ trên là tương đương

(nghĩa là hai hệ trên có cùng một tập hợp nghiệm).

b) Suy ra trong quá trình giải một hệ phương trình tuyến tính, ta có thể sử dụng tùy

ý các phép biến đổi sơ cấp trên dòng mà không làm thay đổi tập hợp nghiệm

của nó.

#### 3.2/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 4 ẩn số  $x, y, z$  và  $t$ :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ \hline 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ \hline 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ \hline 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array} \end{array}$$

Hệ có nghiệm duy nhất ( $x = 1, y = 2, z = -1, t = -2$ ).

Bảng 1:  $(2) \rightarrow [(2) + 2(1)]$ ,  $(3) \rightarrow (3) - 3(1)$ ,  $(4) \rightarrow [(4) - 2(1)]$ .

Bảng 2:  $(2) \rightarrow [(2) + (3)]$ ,  $(1) \rightarrow [(1) - 2(2)]$ ,  $(3) \rightarrow [(3) + 4(2)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) + 7(2)]$ .

Bảng 3:  $(4) \rightarrow [(4) - (3)]$ ,  $(3) \rightarrow -18^{-1}(3)$ ,  $(1) \rightarrow [(1) - 7(3)]$ ,  $(2) \rightarrow [(2) + 2(3)]$ .

Bảng 4:  $(4) \rightarrow 18^{-1}(4)$ ,  $[(1) \rightarrow (1) + 2(4)]$ ,  $[(2) \rightarrow (2) - 3(4)]$ ,  $[(3) \rightarrow (3) + 2(4)]$ .

### 3.3/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÔ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số  $x, y, z, t$  và  $u$ :

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ \hline \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array} \right) & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right) & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right) \\ & & & & & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array} \right) & \rightarrow & (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 2): \text{ hệ vô nghiệm.} \end{array}$$

Bảng 1:  $(4) \rightarrow [(4) - (1)], (1) \rightarrow [(1) - (2)], (2) \rightarrow [(2) - 2(3)], (3) \rightarrow [(3) - (1)].$

Bảng 2:  $(2) \leftrightarrow (3).$

Bảng 3:  $(1) \rightarrow [(1) - 2(2)], (3) \rightarrow [(3) + 7(2)], (4) \rightarrow [(4) + 3(2)].$

Bảng 4:  $(4) \rightarrow [(4) - 2^{-1}(3)].$

### 3.4/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ VÔ SỐ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số  $x_1, x_2, x_3, x_4$  và  $x_5$ :

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array} \right) & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array} \right) \\ & & & & & \rightarrow & \left( \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{ các cột (3) và (5) không biến đổi được.} \end{array}$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do là  $x_3$  và  $x_5$  như sau:

$$x_3 = a, x_5 = b \ (a, b \in \mathbf{R}), x_1 = (7b - 6a + 5)/6, x_2 = (6a - 5b - 5)/6, x_4 = (b + 2)/3.$$

Bảng 1:  $(2) \rightarrow [(2) - (1)]$ ,  $(3) \rightarrow [(3) - 4(1)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) - 2(1)]$ .

Bảng 2:  $(3) \rightarrow [(3) - 3(2)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) + (2)]$ ,  $(2) \rightarrow -2^{-1}(2)$ ,  $(1) \rightarrow [(1) - (2)]$ .

Bảng 3:  $(3) \rightarrow 9^{-1}(3)$ ,  $(4) \rightarrow [(4) - 12(3)]$ ,  $(1) \rightarrow [(1) + 2(3)]$ ,  $(2) \rightarrow [(2) + (3)]$ .

### 3.5/ CÁC CỘT CHUẨN (có m DÒNG):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{m-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \end{pmatrix}.$$

### 3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN

#### ( GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH ):

Xét hệ phương trình tuyến tính thực  $(A | B)$  có  $m$  phương trình và  $n$  ẩn số.

Ta thực hiện các bước sau đây:

- \* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột chuẩn*  $E_1, E_2, E_3, \dots$  trong  $A$  (từ trái qua phải). Việc *chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :
  - Khi xây dựng  $E_k$ , *không làm thay đổi* các cột  $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}$  đã có trước đó.
  - Nếu cột đang xét không thể chuẩn hóa thành  $E_k$  thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
  - Sau khi xây dựng xong  $E_k$ , phải tiến hành ngay việc xây dựng  $E_{k+1}$  (nếu được).
- \* Quá trình chuẩn hóa các cột sẽ *kết thúc* khi gặp sự *mâu thuẫn* hoặc khi đã *chuẩn hóa xong cột cuối* của  $A$  mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào.
- \* Khi kết thúc quá trình chuẩn hóa các cột của  $A$ , có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:



- a) Trường hợp 1: Ta gặp *sự mâu thuẫn* khi đang chuẩn hóa [ nghĩa là gặp một dòng có dạng  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ a)$  với  $a \neq 0$ . Dòng này là hệ quả của hai dòng nào đó có *sự tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải* ]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.
- b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được  $n$  *cột chuẩn liên tiếp*  $E_1, E_2, \dots, E_n$  trong  $A$  mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ có *nghiệm duy nhất* bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ trên xuống dưới của hệ cuối cùng trong quá trình chuẩn hóa để tính lần lượt các ẩn từ trái qua phải.
- c) Trường hợp 3: Ta xây dựng được  $k$  *cột chuẩn*  $E_1, E_2, \dots, E_k$  ( $k < n$ ) trong  $A$  xen kẽ với  $(n - k)$  *cột khác không chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ có *vô số nghiệm* với  $(n - k)$  *ẩn tự do* như sau :
- \* Các ẩn ứng với *các cột không chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do* lấy giá trị thực tùy ý.
  - \* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột chuẩn hóa được*) được tính theo các ẩn tự do dựa theo *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ trên xuống dưới của hệ cuối cùng trong quá trình chuẩn hóa.

### 3.7/ ĐIỀU KIỆN CHUẨN HÓA CỦA MỘT CỘT:

$$\text{Ta muốn chuẩn hóa cột } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \text{ thành } E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ( số } 1^* \text{ ở vị trí dòng } k \text{ ).}$$

- a) Nếu  $u_k = u_{k+1} = \dots = u_m = 0$  thì  $U$  không thể chuẩn hóa thành  $E_k$ .

(không sử dụng  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  để tạo  $1^*$  cho  $E_k$  vì cần bảo toàn  $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}$  đã có trước đó. Còn  $u_k, u_{k+1}, \dots, u_m$  không thể tạo  $1^*$  cho  $E_k$  được).

- b) Nếu có ít nhất một hệ số  $\neq 0$  trong các số  $u_k, u_{k+1}, \dots, u_m$  thì  $U$  có thể chuẩn hóa thành  $E_k$  [ hệ số  $\neq 0$  tự chia cho chính nó để tạo  $1^*$  cho  $E_k$ . Dùng  $1^*$  đó để tạo các hệ số 0 cho  $E_k$ . Nếu  $1^*$  đó nằm ở dòng thứ  $j$  với  $j \neq k$  thì ta hoán vị các dòng  $(j)$  và  $(k)$  với nhau ].

### Ví dụ:

a) Ta muốn chuẩn hóa các cột  $U = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  và  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$  thành  $E_4$ .

$U$  không thể chuẩn hóa thành  $E_4$  được (vì  $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ ).

$V$  có thể chuẩn hóa thành  $E_4$  được (vì có  $v_5 = 7 \neq 0$ ) bằng các phép biến đổi

$$(5) \rightarrow [(5) + 2(6)], (1) \rightarrow [(1) - 2(5)], (3) \rightarrow [(3) + 8(5)], (6) \rightarrow [(6) + 3(5)], (4) \leftrightarrow (5).$$

- b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm:

$$(A | B) \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 9 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1) : \text{sự mâu thuẫn và hệ vô nghiệm.}$$

Dòng (3) và (4) có sự tỉ lệ không tương thích ở vế trái và vế phải :  $(4) \rightarrow [(4) + \frac{3}{2}(3)]$ .

- c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (3 ẩn  $x, y, z$ ) có nghiệm duy nhất:

$$(A | B) \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1^* & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1^* & 0 & -\ln 3 \\ 0 & 0 & 1^* & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ E_1 \quad E_2 \quad E_3 \end{array} : \text{hệ có nghiệm duy nhất } (x = \sqrt{2}, y = -\ln 3, z = 4/9).$$

d) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (9 ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_9$ ) có vô số nghiệm:

$$(A | B) \rightarrow \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline 1^* & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & \sin 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & -4 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 6 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \end{array}.$$

Các cột (3), (4), (6), (9) không chuẩn hóa được và hệ có vô số nghiệm với 4 ẩn tự

do  $x_3 = a, x_4 = b, x_6 = c, x_9 = d, (a, b, c, d \in \mathbf{R}), x_1 = 5a - 8b - 7d,$

$x_2 = -2a + 3b - 9c + \sin 8, x_5 = 4c + d - \sqrt{3}, x_7 = \pi$  và  $x_8 = -6d - \frac{4}{7}.$

### 3.8/ VÍ DỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC CÓ THAM SỐ:

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính với 3 ẩn số  $x, y, z$  theo tham số thực  $m$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{E_1} \begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array} (*).$$

Bảng 1:  $(2) \rightarrow [(2) - (3)], (3) \rightarrow [(3) - (1)], (4) \rightarrow [(4) - m(1)].$

a) Nếu  $m = 1$  thì hệ tương đương với đúng một phương trình là  $x + y + z = 1.$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do ( $y, z \in \mathbf{R}, x = 1 - y - z$ ).

b) Nếu  $m \neq 1$ , ta tiếp tục biến đổi hệ (\*):

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & m \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2(1-m) & 1-m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) \end{array} \right) \\ E_1 \qquad \qquad \qquad E_1 \ E_2 \qquad \qquad \qquad E_1 \ E_2 \ E_3 \end{array}$$

Khi  $m = -3$  thì hệ có nghiệm duy nhất ( $x = y = z = -1$ ).

Khi  $1 \neq m \neq -3$  thì hệ vô nghiệm.

Bảng 1: (3)  $\rightarrow$  [(3) + (2)], (4)  $\rightarrow$  [(4) - (2)], (2)  $\rightarrow$   $(1-m)^{-1}(2)$ , (1)  $\rightarrow$  [(1) - (2)].

Bảng 2: (4)  $\rightarrow$  [(4) + 2(3)], (3)  $\rightarrow$   $(m-1)^{-1}(3)$ , (1)  $\rightarrow$  [(1) - 2(3)], (2)  $\rightarrow$  [(2) + (3)].

### 3.9/ CÁC CỘT BÁN CHUẨN (có m DÒNG):

Dạng tổng quát của các cột bán chuẩn có m dòng là

$$F_1 = \begin{pmatrix} a^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} b \\ c^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, F_{m-1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1}^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_m = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m^* \end{pmatrix} \text{ trong đó}$$

$a^*, c^*, f^*, \dots, u_{m-1}^*, v_m^*$  là các số thực tùy ý  $\neq 0$  và

$b, d, e, \dots, u_1, u_2, \dots, u_{m-2}, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$  là các số thực tùy ý.

Các cột chuẩn (có m dòng) chính là các cột bán chuẩn (có m dòng) đặc biệt.

**Ví dụ:** Một số cột bán chuẩn có 5 dòng :

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{5}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} -\ln 6 \\ 0 \\ \sqrt[3]{4} \\ -4/7^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 8/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sin 9^* \end{pmatrix}.$$

### 3.10/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS (GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH):

Xét hệ phương trình tuyến tính thực  $(A | B)$  có  $m$  phương trình và  $n$  ẩn số.

Phương pháp Gauss có *những sự tương tự nhất định* với phương pháp Gauss – Jordan nhưng ta xây dựng *các cột bán chuẩn* (thay vì *cột chuẩn*). Điều kiện để một cột *bán chuẩn hóa được* y hệt như điều kiện *chuẩn hóa được* (xem 3.7).

Phương pháp Gauss được thực hiện cụ thể như sau :

- \* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột bán chuẩn*  $F_1, F_2, F_3, \dots$  trong  $A$  (từ trái qua phải). Việc *bán chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :
  - Khi xây dựng  $F_k$ , *không làm thay đổi* các cột  $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}$  đã có trước đó.
  - Nếu cột đang xét không thể bán chuẩn hóa thành  $F_k$  thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
  - Sau khi xây dựng xong  $F_k$ , phải tiến hành ngay việc xây dựng  $F_{k+1}$  (nếu được)
- \* Quá trình bán chuẩn hóa các cột sẽ *kết thúc* khi gặp *sự mâu thuẫn* hoặc khi đã *bán chuẩn hóa xong cột cuối* của  $A$  mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào.
- \* Khi kết thúc quá trình bán chuẩn hóa các cột của  $A$ , có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:
  - a) Trường hợp 1: Ta gặp *sự mâu thuẫn* [ nghĩa là gặp một dòng có dạng  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ a)$  với  $a \neq 0$ . Dòng này là hệ quả của hai dòng nào đó *có sự tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải* ]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.
  - b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được  $n$  *cột bán chuẩn liên tiếp*  $F_1, F_2, \dots, F_n$  trong  $A$  mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất*

được xác định như sau: dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ dưới lên trên của *hệ cuối cùng* trong quá trình bán chuẩn hóa để tính lần lượt các *ẩn từ phải qua trái* (dùng các *ẩn đã biết* để tính các *ẩn chưa biết*).

c) Trường hợp 3: Ta xây dựng được  $k$  cột bán chuẩn  $F_1, F_2, \dots, F_k$  ( $k < n$ ) trong  $A$  xen kẽ với  $(n - k)$  cột khác không bán chuẩn hóa được mà không gặp sự mâu thuẫn nào.

Khi đó hệ có vô số nghiệm với  $(n - k)$  ẩn tự do được xác định như sau:

\* Các ẩn ứng với *các cột không bán chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do* lấy giá trị thực tùy ý.

\* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột bán chuẩn hóa được*) được tính theo các ẩn tự do bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ dưới lên trên của hệ cuối cùng trong quá trình bán chuẩn hóa để tính lần lượt các ẩn từ phải qua trái (dùng các ẩn đã biết để tính các ẩn chưa biết).

**Ví dụ:**

a) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất (các ẩn là  $x, y, z, t$ ):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \\ F_1 & & F_1 & F_2 \\ \\ \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array} : \text{ hệ có nghiệm duy nhất như sau:} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array}$$

$$t = [6/(-6)] = -1, z = -9t - 5 = 4, y = [(4z - 2t - 24)/3] = -2, x = [(y - 5t + 3)/2] = 3.$$

$$\text{Bảng 1: } (2) \rightarrow [(2) + 2(1)], (3) \rightarrow [(3) + (1)], (4) \rightarrow [(4) - 3(1)].$$

$$\text{Bảng 2: } (3) \rightarrow [(3) + 2(4)], (4) \rightarrow [(4) + (2)].$$

$$\text{Bảng 3: } (4) \rightarrow [(4) - (3)].$$

b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm (các ẩn là  $x, y, z, t$ ):

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array} \xrightarrow{F_1} \begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array} \xrightarrow{F_1 \quad F_2}$$

$$\rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 3) : \text{hệ vô nghiệm.}$$

$$\text{Bảng 1: } (3) \rightarrow [(3) + 2(2)], (1) \rightarrow [(1) + 2(2)], (2) \rightarrow [(2) + 2(1)], (4) \rightarrow [(4) + 7(1)].$$

$$\text{Bảng 2: } (3) \rightarrow [(3) - 4(2)], (4) \rightarrow [(4) + 3(2)].$$

$$\text{Bảng 3: } (4) \rightarrow [(4) + 2(3)].$$

c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm (các ẩn là  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ):

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array} \xrightarrow{F_1} \begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{F_1 \quad F_2}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} : \text{các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.}$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do :  $x_4 = a$ ,  $x_5 = b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ),  $x_3 = (2a - b + 2) / 3$ ,

$x_2 = (x_3 - 2b - 7) / 2 = (2a - 7b - 19) / 6$ ,  $x_1 = x_2 - 3x_3 + 2a + 4 = (2a - b - 7) / 6$ .

Bảng 1:  $(2) \rightarrow [(2) - 3(1)]$ ,  $(3) \rightarrow [(3) + (4)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) + 2(1)]$ .

Bảng 2:  $(3) \rightarrow [(3) - 5(2)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) - 2(2)]$ .

Bảng 3 :  $(3) \rightarrow 2^{-1}(3)$ ,  $(4) \rightarrow [(4) - (3)]$ .

#### **IV. HẠNG CỦA MA TRẬN:**

##### **4.1/ DẠNG BẬC THANG VÀ DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN CỦA MA TRẬN:**

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

a) Bán chuẩn hóa tối đa các cột của  $A$ , ta được ma trận  $S_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  (biến đổi Gauss). Trong  $S_A$ , các dòng không tầm thường (dòng  $\neq \mathbf{O}$ ) nằm phía trên các dòng  $\mathbf{O}$  và số hạng  $\neq 0$  đầu tiên của các dòng chính là số hạng có đánh dấu \* của các cột bán chuẩn. Ta nói  $S_A$  là dạng bậc thang của  $A$  hay ma trận rút gọn theo dòng của  $A$ . Dạng bậc thang  $S_A$  của  $A$  không duy nhất.

b) Chuẩn hóa tối đa các cột của  $A$ , ta được ma trận  $R_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  (biến đổi Gauss - Jordan). Trong  $R_A$ , các dòng không tầm thường (dòng  $\neq \mathbf{O}$ ) nằm phía trên các dòng  $\mathbf{O}$  và số hạng  $\neq 0$  đầu tiên của các dòng chính là số 1\* của các cột chuẩn. Ta nói  $R_A$  là dạng bậc thang rút gọn của  $A$  hay ma trận rút gọn theo dòng từng bậc của  $A$ . Dạng bậc thang  $R_A$  của  $A$  là duy nhất.

$R_A$  là một trường hợp đặc biệt của  $S_A$ .

##### **4.2/ HẠNG CỦA MA TRẬN:**

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  và các dạng  $S_A$  và  $R_A$  của  $A$ .

Đặt  $r(A) = (\text{hạng của } A) = \text{số dòng không tầm thường (dòng } \neq \mathbf{O} \text{) của } S_A \text{ (hay } R_A)$



hay  $r(A) = (\text{hạng của } A) = \text{số cột (bán) chuẩn hiện diện trong } R_A \text{ (hay } S_A)$ .

Ta có  $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$ .

Khi  $A = \mathbf{O}_{m \times n}$  thì  $r(A) = 0$ . Khi  $A \neq \mathbf{O}_{m \times n}$  thì  $r(A) \geq 1$ .

**Ví dụ:** Xét  $A \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$  như sau:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \quad F_2} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A \xrightarrow{F_1 \quad F_2 \quad F_3} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \quad E_2} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.
 \end{aligned}$$

Ta có  $r(A) = 3$  vì  $S_A$  (hay  $R_A$ ) có 3 dòng không tầm thường (3 dòng  $\neq \mathbf{O}$ ).

Ta có  $r(A) = 3$  vì  $R_A$  (hay  $S_A$ ) có 3 cột (bán) chuẩn.

$$0 \leq r(A) = 3 \leq \min\{m = 4, n = 5\} = 4.$$

Bảng 1:  $(2) \rightarrow [(2) + 2(1)]$ ,  $(3) \rightarrow [(3) + (4)]$ ,  $(4) \rightarrow [(4) + 3(1)]$ .

Bảng 2:  $(4) \rightarrow [(4) - 2(2)]$ ,  $(2) \rightarrow -5^{-1}(2)$ ,  $(3) \rightarrow [(3) - (2)]$ .

Bảng 3 :  $(4) \rightarrow [(4) + 3(3)]$ .

Bảng 4 :  $(1) \rightarrow [(1) + 3(2)]$ ,  $(1) \rightarrow -(1)$ .

Bảng 5 :  $(1) \rightarrow [(1) + (3)]$ ,  $(3) \rightarrow -2^{-1}(3)$ ,  $(2) \rightarrow [(2) + (3)]$ .

#### 4.3/ ĐỊNH LÝ KRONECKER – CAPELLI:

Cho hệ phương trình tuyến tính  $AX = B$  có  $m$  phương trình và  $n$  ẩn số.

Đặt  $\bar{A} = (A | B) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbf{R})$ . Ta gọi  $\bar{A}$  là *ma trận bổ sung* của hệ  $(A | B)$ .

Ta có  $r(A) = k \leq n$  và  $[r(\bar{A}) = r(A) \text{ hay } r(\bar{A}) = r(A) + 1]$ .

a) Nếu  $r(\bar{A}) = r(A) + 1$  thì hệ  $(A | B)$  vô nghiệm.

b) Nếu  $r(\bar{A}) = r(A) = n$  thì hệ có nghiệm duy nhất.

c) Nếu  $r(\bar{A}) = r(A) = k < n$  thì hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là  $(n - k)$ .

### Ví dụ:

a) Xem lại hệ  $AX = B$  trong (3.2):

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = R_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array} \right).$$

$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = n = 4$  nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) Xem lại hệ  $AX = B$  trong (3.3):

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array} \right) \rightarrow (S_A | B') = S_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \quad \quad F_4$

Ta có  $r(\bar{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$  nên hệ vô nghiệm.

c) Xem lại hệ  $AX = B$  trong (3.4):

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = R_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$E_1 \quad E_2 \quad \quad E_3$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$  nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là

$$(n - k) = (5 - 3) = 2.$$

d) Xem lại hệ  $AX = B$  trong (3.8) :

\* Khi  $m = 1$ :

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = R_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$E_1$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = k = 1 < n = 3$  nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là

$$(n - k) = (3 - 1) = 2.$$

\* Khi  $m = -3$ :

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = R_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$E_1 \ E_2 \ E_3$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = n = 3$  nên hệ có nghiệm duy nhất.

\* Khi  $-3 \neq m \neq 1$ :

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = S_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) \end{array} \right).$$

$F_1 \ F_2 \ F_3 \quad F_4$

Ta có  $r(\bar{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$  nên hệ vô nghiệm.

e) Xem lại các hệ  $AX = B$  trong Ví dụ của (3.10):

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array} \right) \rightarrow (S_A | B') = S_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array} \right).$$

$F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = n = 4$  nên hệ có nghiệm duy nhất.

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow (S_A | B') = S_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4$

Ta có  $r(\bar{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$  nên hệ vô nghiệm.

$$\bar{A} = (A | B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array} \right) \rightarrow (S_A | B') = S_{\bar{A}} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

Ta có  $r(\bar{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$  nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là

$$(n - k) = (5 - 3) = 2.$$


---