GIẢI TÍCH B1

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 1
Phép tính vi phân hàm một biến

I. Giới hạn của hàm số
II. Sự liên tục của hàm số
III. Vô cùng bé, vô cùng lớn
IV. Đạo hàm và vi phân
V. Đạo hàm và vi phân cấp cao
VI. Quy tắc L’Hospital
VII. Công thức Taylor

Giới hạn của hàm số

- <u>Giới hạn của hàm số</u>
- Định nghĩa 1

Cho hàm số y=f(x) xác định trên miền D. Ta nói L là giới hạn của hàm f khi x tiến tới x_0 nếu với bất kỳ dãy x_n trong D\{x_0} mà $x_n \longrightarrow x_0$ thì $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm sô
- Định nghĩa 2

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D. Ta nói L là giới hạn của hàm f khi x tiến tới x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể tìm được $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi x thuộc D thoả $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

Giới hạn của hàm số

- Các tính chất của giới hạn
  - Định lý 1

Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Khi đó

i. $\lim\limits_{x \to x_0} c.f(x) = c.A$ với c là hằng số

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = A.B$

iv. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$

Giới hạn của hàm số

- <u>Nhận xét</u>
- Cho $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

  Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$
- Thí dụ 1 $\lim\limits_{x \to 1}(2x^3 + x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x \to 1}(2.1^3 + 1^2 - 1 + 1) = 3$
- Cho $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

  Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = \dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$

Giới hạn của hàm số

- Khi $A = +\infty, B = -\infty$ thì

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] \to \infty - \infty$$ dạng vô định thứ nhất

- VD1 Tính $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - x \right)$$

- VD2 Tính $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

Giới hạn của hàm số

- Khi $A = 0, B = \infty$ hoặc $A = \infty, B = 0$

thì $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] \to 0.\infty$ dạng vô định thứ hai

Giới hạn của hàm số

- Khi $A=0, B=0$ hoặc $A=\infty, B=\infty$

thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ dạng vô định thứ ba(tư)

- VD3 Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

- VD4 Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$

- VD5 Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2-7x+2}{x^2-8}$

Giới hạn của hàm số

- **Định lý 2** Cho 3 hàm số f(x), g(x), h(x) thỏa

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in (a,b)$$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$

- Áp dụng ĐL2, ta CM được

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Giới hạn của hàm số

- VD6 Tính $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$
- VD7 Tính $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$
- VD8 Tính $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

Giới hạn của hàm số

▪ Định lý 3:

Cho f(x) là hàm số xác định trên R. Khi đó nếu f(x) tăng(giảm) và bị chặn trên (dưới) thì tồn tại

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x)$$

Áp dụng ĐL này, ta CM được

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Giới hạn của hàm số

- VD9 Tính

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{3x}}$$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn một phía
- Định nghĩa
- Giới hạn bên trái của f(x) tại x_0 là giới hạn khi $x \to x_0$ mà $x < x_0$

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Giới hạn bên phải của f(x) tại x_0 là giới hạn khi $x \to x_0$ mà $x > x_0$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Giới hạn của hàm số

- $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

- VD10 Cho $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ Tìm $f(0^+), f(0^-)$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Vô cùng bé, vô cùng lớn
- Định nghĩa vô cùng bé(VCB)

Hàm f(x) được gọi là VCB khi x$\to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

VD11 sinx là VCB (x$\to$0)

Vì $$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Các tính chất

- Nếu f(x), g(x) là các VCB ($x \to x_0$) thì

  f(x)±g(x), f(x).g(x) là các VCB ($x \to x_0$)
- Nếu f(x) là VCB ($x \to x_0$) và g(x) bị chặn trong lân cận x_0 thì f(x).g(x) là VCB ($x \to x_0$)

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các vô cùng bé

Cho f(x), g(x) là các VCB ($x \to x_0$) và

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Khi đó, nếu

- k=0: f(x) là VCB bậc cao hơn g(x),KH f(x)=o(g(x))
- $k \neq 0$, $k \neq \infty$: f(x), g(x) là các VCB cùng bậc

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- <u>VD12</u> 1-cosx là VCB bậc cao hơn sinx ($x \to 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Định nghĩa vô cùng lớn(VCL)

Hàm f(x) được gọi là VCL khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

VD13: e^x là VCL khi $x \to +\infty$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Chú ý

Ta có quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp và thay thế VCL tương đương

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & \mathrm{n}=\mathrm{m}\\ \infty & \mathrm{n}>m\\ 0 & \mathrm{n}<m\end{cases}$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

VD14 Tính $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 5x^3}{4x - 6x^4}$$

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số
- Định nghĩa: Cho f(x) là hàm số xác định trong (a,b), ta nói rằng f(x) liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- VD15: $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ nên sin x liên tục tại $x_0 = 0$

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số
- Hàm f(x) được gọi là liên tục trái tại x_0 nếu $f(x_0^-) = f(x_0)$
- Hàm f(x) được gọi là liên tục phải tại x_0 nếu $f(x_0^+) = f(x_0$
- Hàm f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

Sự liên tục của hàm số

- VD16
- Cho hàm số $$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ A & , x = 0 \end{cases}$$

Với giá trị nào của A thì hàm số liên tục tại x=0

Đạo hàm

- Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b), giới hạn (nếu có) của $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a,b)$

và ký hiệu $y'(x_0)$ hay $f'(x_0)$

Đạo hàm

- Bảng đạo hàm cơ bản