Chương 2. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

Bài 2.1 Những khẳng định nào sau đây là đúng

a)
$$0 \in \emptyset$$

c)
$$\{0\} \subseteq \emptyset$$

e)
$$\{0\} \in \{0\}$$

b)
$$\emptyset \in \{0\}$$

$$\mathbf{d}) \ \emptyset \subseteq \{0\}$$

f)
$$\{0\} \subseteq \{0\}$$

Bài 2.2 Những khẳng định nào sau đây là đúng

a)
$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

c)
$$\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$$

e)
$$\{\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

b)
$$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\mathbf{d}) \ \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\$$

f)
$$\{\{\emptyset\}\}\subseteq\{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}\}$$

 $\mathbf{B}\grave{\mathbf{a}}\mathbf{i}$ 2.3 Liệt kê các tập hợp sau:

a)
$$A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

b)
$$B = \{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

c)
$$C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$$

d)
$$D = \{2\sin\frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e)
$$E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \le \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$$

f)
$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \le 0\}$$

g)
$$G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \ge 256 \text{ và } x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\sin 3x\}$$

Bài 2.4 Cho $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Viết $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong \mathbb{R} .

1

a)
$$A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty)$$
 và $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$

b)
$$A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$$
 và $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}.$

Bài 2.5 Cho $A, B, C, D \subseteq E$. Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

a)
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

b)
$$(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$$

c)
$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

d)
$$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$$

e)
$$\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$$

Bài 2.6 Cho $A, B, D \subseteq E$. Hãy chứng minh

a)
$$D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$$

b)
$$D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$$

c)
$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$

d)
$$(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$$

e)
$$(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$$

Bài 2.7 Cho $A, B, H, K \subseteq E$. Chứng minh

a)
$$[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subseteq [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$$

b)
$$(A \setminus H) \subseteq [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$$

c)
$$[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subseteq [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subseteq [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$$

d)
$$[(A \cup B) \setminus H] \subseteq [A \cup (B \setminus H)]$$

e)
$$[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subseteq (B \setminus H)$$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

Bài 2.8 Cho
$$A = \{0, 1, a\}, B = \{a, 2\}$$
 và $C = \{2, b\}.$

a) Liệt kê các tập hợp
$$A^2$$
, $A \times B$, $C \times A$, $B \times C$ và $C \times B$.

b) Liệt kê các tập hợp
$$B^3$$
, $A \times B^2$, $C \times A \times C$, $A \times B \times C$ và $C^2 \times B$.

Bài 2.9 Cho $A, B \subseteq E$ và $H, K \subseteq F$. Chúng minh

a)
$$A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$$

b)
$$[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$$

c)
$$(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$$

d)
$$[(A \times H) \cup (B \times K)] \subseteq [(A \cup B) \times (H \cup K)]$$

e)
$$[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subseteq [(A \times H) \setminus (B \times K)]$$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

Bài 2.10 Các qui tắc $f: X \to Y$ sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?

a)
$$X = (-2, 1], Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}, \forall x \in X$$

b)
$$X = \mathbb{R}, Y = (6, +\infty), f(x) = e^x + 9e^{-x}, \forall x \in X$$

c)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \ln|\sin x|, \forall x \in X$$

d)
$$X = [-1, +\infty), Y = \mathbb{R}, f(x) = y$$
 sao cho $y^2 - 2y = x, \forall x \in X$

e)
$$X = [1, 3], Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = 3x^2 - 9x + 5, \forall x \in X$$

f)
$$X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{Z}, f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + 3^n - mn, \forall \frac{m}{n} \in X$$

Bài 2.11 Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ $f: X \to Y$ sau:

a)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in X$$

b)
$$X = [-2, +\infty), Y = (-20, +\infty), f(x) = x^2 + 6x - 3, \forall x \in X$$

c)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x+3)(x-4), \forall x \in X$$

d)
$$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-3}{x}, \forall x \in X$$

e)
$$X = \mathbb{R}, Y = [-2, 2], f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x, \forall x \in X$$

f)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = 3\cos 2x - 7x + 8, \forall x \in X$$

Bài 2.12 Xét hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi: f(x) = ax + b và $g(x) = 1 - x + x^2$. Giả sử $g_{\circ}f = f_{\circ}g$, hãy xác định a và b?

Bài 2.13 Xác định $u = g_o f$, $v = f_o g$ và $w = h_o g_o f$ (nếu có) khi $f: X \to Y$, $g: Z \to T$ và $h: U \to V$ trong đó

a)
$$X = Y = Z = T = U = V = \mathbb{R}$$
, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x - 3$ và $h(x) = x^3 + 4\cos x$

b)
$$X = T = U = (0, +\infty), Y = Z = \mathbb{R}, V = [1, +\infty), f(x) = 3 \ln x - 2, g(x) = e^{\sin x}$$
 và $h(x) = 5x^4 - x^2 + 1$

c)
$$X = V = \mathbb{R}, Y = Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}, T = U = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = x^2 - 4x + 6, g(x) = \frac{3x + 2}{1 - x}$$
 và $h(x) = \ln|x + 3|$

Bài 2.14 Cho hai ánh xạ $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x)=x^2-3$ và $g(x)=2x^2+4x+1$. Hãy tìm f(A), g(A), $f^{-1}(A)$ và $g^{-1}(A)$ với

a)
$$A = \{2, 3\}$$

c)
$$A = (-3, 3)$$

e)
$$A = [-7, 2]$$

b)
$$A = \{-3, -2, 2, 3\}$$
 d) $A = (-3, 2]$

d)
$$A = (-3, 2]$$

f)
$$A = (-4, -3] \cup [5, 6]$$

Bài 2.15 Tìm f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(G)$, $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$, $f^{-1}(L)$, $f^{-1}(M)$ và $f^{-1}(N)$ cho các ánh xạ sau

a)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 với $f(x) = \begin{cases} x - 5 \text{ nếu } x \leq 1 \\ 2x + 1 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$ trong đó

$$\bullet \ \ A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

•
$$H = [-7, -5]$$

•
$$B = [1, 3]$$

•
$$K = (-5, 5)$$

•
$$C = (-1, 2)$$

•
$$L = [7, +\infty)$$

•
$$D = (-\infty, 0]$$

• $E = (3, +\infty)$

•
$$M = [1, 9)$$

•
$$G = \{-7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9\}$$

•
$$N = (-3, 2].$$

b)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 với $f(x) = \begin{cases} x+7 \text{ nếu } x \leq 0 \\ 5-2x \text{ nếu } 0 < x < 3 \end{cases}$ trong đó $x-1 \text{ nếu } x \geq 3$

•
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$$

•
$$E = [0, +\infty)$$

•
$$B = [-2, 1]$$

•
$$G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\}$$

•
$$C = (2,4)$$

•
$$H = [-5, -1]$$

•
$$D = (-1, 5]$$

•
$$K = (-\infty, 0]$$

•
$$L = [-2, 4)$$

•
$$M = (5, 10]$$

• N = (7, 11).

Bài 2.16 Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

a)
$$f: \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

d)
$$q: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \ q(x) = \frac{5 - 3x}{x - 1}$$

b)
$$h:[1,2) \to [5,7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$$

e)
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$$

c)
$$p: \mathbb{R} \to (-2,3), p(x) = \frac{9-2e^x}{e^x+3}$$

f)
$$r:(0,3] \to (2,\frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$$

Bài 2.17 Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ u, v, w thỏa $p_{\circ}^{-1}u = g, v_{\circ}f = g$ và $f_{\circ}^{-1}w_{\circ}p = g$.

Bài 2.18 Những tập nào sau đây là hữu hạn, vô hạn đếm được và không đếm được. Nếu vô hạn đếm được, hãy xây dựng một song ánh với \mathbb{N} .

- a) Tập họp số nguyên lớn hơn 10
- b) Tập hợp các số nguyên âm lẻ
- c) Tập các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1000000
- d) Tập hợp các số thực giữa 0 và 2.
- e) $A \times Z^{+}$ where $A = \{2, 3\}$
- f) Tập các số nguyên chia hết cho 10

Bài 2.19 Đưa ra ví dụ hai tập hợp không đếm được A và B sao cho $A \setminus B$ ($A \cap B$) sao cho

a) hữu hạn

- b) vô hạn đếm được
- c) không đếm được

Bài 2.20 Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh rằng nếu |A| = |B| thì |P(A)| = |P(B)|

Bài 2.21 Cho A là tập không đếm được và $A \subseteq B$. Chứng minh rằng B không đếm được.

Bài 2.22 Cho A là tập không đếm được và B đếm được. Hỏi $A \backslash B$ là tập không đếm được phải không?

4

Bài 2.23 Chỉ ra rằng (0,1) và \mathbb{R} có cùng lực lương.

Bài 2.24 Chứng minh rằng $P(\mathbb{Z})$ là tập không đếm được.