Cho hàm số f định bởi $f(x,y)=\dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1) Tìm các điểm dừng (điểm tới hạn) của f trong $\mathbb{R}^2$. Tính giá trị của f tại các điểm này.

2) Phân loại các điểm dừng nói trên.

3) Khảo sát sự tồn tại giá trị lớn nhất của f trên miền $y\ge 0$.

4) Khảo sát sự tồn tại giá trị lớn nhất của f trên $\mathbb{R}^2$.

Giải.

1) Điểm dừng của f là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f_x=0\\ f_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{x^2-2xy-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}=0\\ -\dfrac{x^2+2xy-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt2}\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt2}\end{cases}\text{ hay }\begin{cases}x=-\dfrac{1}{\sqrt2}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt2}\end{cases}$$

Ta có hai điểm dừng là $A(-\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2})$ và $B(\frac{1}{\sqrt2};-\frac{1}{\sqrt2})$.

$f(A)=\dfrac{-1}{\sqrt2}$ và $f(B)=\dfrac{1}{\sqrt2}$

2) Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của f ta được

$$f_{xx}=\frac{2(x^3-3x^2y-3xy^2+y^3-3x+y}{(1+x^2+y^2)^3},\ f_{yy}=\frac{-2(x^3-3x^2y-3xy^2+y^3+x-3y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}=\frac{2(x^3+3x^2y-3xy^2-y^3+x-y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\Delta(x,y)=f_{xx}.f_{yy}-(f_{xy})^2=-\frac{8(x^4+2x^2y^2+y^4-x^2+4xy-y^2)}{(1+x^2+y^2)^5}$$

* Ta có $\Delta(A)=\dfrac12>0,\ f_{xx}(A)=\dfrac{1}{\sqrt2}>0$. Vậy điểm A là điểm cực tiểu của f.

* Ta có $\Delta(B)=\dfrac12>0,\ f_{xx}(B)=-\dfrac{1}{\sqrt2}<0$. Vậy điểm B là điểm cực đại.

3) Đối với hàm số liên tục, có đạo hàm riêng cấp 1 trên miền mở chứa D và D là tập đóng bị chặn, ta có "extreme value Theorem" để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D (absolute maximum và absolute minimum).

Đối với miền rộng vô hạn như miền $y\ge 0$, không có phương pháp tổng quát để khảo sát GTLN và GTNN. Tuy nhiên sau đây là một số gợi ý:

* Ta xem biến y là tham số, khảo sát hàm số một biến x để tìm cực trị của f theo biến x. Các cực trị tìm được phụ thuộc vào y, và xem như là hàm số theo biến y. Ta tiếp tục khảo sát hàm số mới theo biến y để tìm cực trị của f trên miền đã cho.

* Có thể đổi vai trò của x và y trong cách trên.

* Nếu hàm số f được xác định bởi biểu thức đặc biệt nào đó, ta có thể đổi biến (x, y) theo tọa độ cực để đưa về hai biến mới (r, θ) và khảo sát. Trong bài toán ta đang làm, ta sử dụng cách này.

Đặt $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$. Miền $y\ge0$ của biến cũ tương ứng với miền $r\ge0,\ \theta\in[0,\pi]$ của biến mới. Khi đó

$f=\dfrac{r(\cos\theta-\sin\theta)}{1+r^2}=\dfrac{r\sqrt2}{1+r^2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})$. Ta thấy $\forall\theta\in[0,\pi],\ -1\le\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})\le\dfrac{1}{\sqrt2}$. Suy ra

$$-\frac{r\sqrt2}{1+r^2}\le f\le\frac{r}{1+r^2}\quad\forall\theta\in[0,\pi].$$

Dấu “=” xảy ra khi $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ và $\theta = 0$ tương ứng. Ta khảo sát hàm số g định bởi $g(r) = \dfrac{r}{1+r^2}$ $\forall r \geq 0$. Ta có $g'(r) = \dfrac{1-r^2}{(1+r^2)^2} = \dfrac{(1-r)(1+r)}{(1+r^2}$ và ta có bảng biến thiên giá trị của hàm g là

r	0		1		∞
$g'(r)$	|	$+$	0	$-$	
$g(r)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Suy ra $g(r) \leq \dfrac{1}{2}$ và $-g(r) \geq -\dfrac{1}{2}$ $\forall r \geq 0$. Vậy

$$\forall r \geq 0, \forall \theta \in [0, \pi], -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

Suy ra GTLN của f trên miền vô hạn $y \geq 0$ là $\dfrac{1}{2}$, đạt được khi $r = 1, \theta = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 0.$

GTNN của f trên miền $y \geq 0$ là $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, đạt được tại điểm dừng A ở câu 1, tương ứng với $r = 1, \theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

4) Nếu khảo sát GTLN và GTNN của f trên $\mathbb{R}^2$ thì ta làm như câu 3, nhưng với miền $r \geq 0$ và $\theta \in [0, 2\pi]$.

Khi đó $-1 \leq \cos(\theta + \dfrac{\pi}{4}) \leq 1$ và f đạt GTNN tại điểm A và đạt GTLN tại điểm B.