b) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x} sin\frac{1}{y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$:

Ta có: $0 \leq |f(x,y)| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x} sin\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Vậy f liên tục tại (0,0).

2.18. Kiểm tra tính compắc của các tập sau trong $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x,y)|2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$

b) $\{(x,y)|2x^2 + 3y^2 < 1\}$

c) $\{(x,y)|2x^2 + 3y \leq 1\}$

<u>Bài giải:</u>

a) Để chứng minh tập $A = \{(x,y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ là tập compắc. Ta sẽ chứng minh A đóng và bị chặn.

- Chứng minh A đóng :

Lấy một dãy $\{(x_n, y_n)\}$ bất kỳ trong A sao cho $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ta sẽ chứng minh (x,y) chứa trong A.

Ta có $x_n \to x$, $y_n \to y$ nên $2x_n^2 + 3y_n^2 \to 2x^2 + 3y^2$.

Mặt khác, $\{(x_n, y_n)\} \subset A$ nên ta có $2x_n^2 + 3y_n^2 \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra, $2x^2 + 3y^2 \leq 1$. Điều này chứng tỏ (x,y) chứa trong A.

- Chứng minh A bị chặn :

Lấy (x, y) bất kì trong A. Ta nhận thấy: $x^2 + y^2 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 1$.
Suy ra $(x, y) \in B'(0,1)$.
Nên $A \subset B'(0,1)$ và A bị chặn.

Vậy A là tập compắc.

b) Để chứng minh $B = \{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ không là tập compắc, ta sẽ chứng minh B không đóng.

Xét dãy $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3n})$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có $2x_n^2 + 3y_n^2 = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3n}\right)^2 < 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. Do đó $\{(x_n, y_n)\} \subset B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cho $n \to \infty$, nhận thấy $(x_n, y_n) \to (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \notin B$ (do $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3.0^2 = 1$)

(x_n, y_n) là một dãy chứa trong B hội tụ về một phần tử không thuộc B. Điều này chứng tỏ B không phải là tập đóng nên không compắc.

c) Để chứng minh $C = \{(x_n, y_n) \mid 2x^2 + 3y \leq 1\}$ không là tập compắc, ta sẽ chứng minh C không bị chặn.

Xét dãy $(x_n, y_n) = (0, -n)$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có $2x_n^2 + 3y_n = -3n < 1$. Do đó $(x_n, y_n) \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Cho $n \to \infty$, nhận thấy $y_n \to -\infty$, C chứa một dãy không bị chặn, do đó phải là tập không bị chặn và không compắc.