

# Chương 1. CƠ SỞ LOGIC

**Bài 1.1** Gọi  $P, Q, R$  là các mệnh đề:

$P$  : “Bình đang học Toán”

$Q$  : “Bình đang học Tin học”

$R$  : “Bình đang học Anh văn”

Hãy viết các mệnh đề sau thành biểu thức logic.

- a) Bình đang học Toán và Anh văn nhưng không học Tin học.
- b) Bình đang học Toán và Tin học nhưng không học cùng một lúc Tin học và Anh văn.
- c) Không đúng là Bình đang học Anh văn mà không học Toán.
- d) Không đúng là Bình đang học Anh văn hay Tin học mà không học Toán.
- e) Bình không học Tin học lẫn Anh văn nhưng đang học Toán.

**Bài 1.2** Cho  $P$  và  $Q$  là 2 mệnh đề:

$P$ : “Bạn lái xe với tốc độ trên 65 km/h”       $Q$ : “Bạn bị phạt vì quá tốc độ cho phép”

Hãy viết các mệnh đề sau thành biểu thức logic.

- a) Bạn không lái xe trên 65 km/h.
- b) Bạn lái xe trên 65 km/h nhưng bạn không bị phạt vì quá tốc độ cho phép.
- c) Bạn sẽ bị phạt vì quá tốc độ cho phép Nếu bạn lái xe trên 65 km/h.
- d) Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 65 km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì quá tốc độ cho phép.
- e) Lái xe với tốc độ trên 65 km/h là đủ để bị phạt vì quá tốc độ cho phép.
- f) Bạn bị phạt vì quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe trên 65 km/h.
- g) Mỗi lần bị phạt vì quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe trên 65 km/h.

**Bài 1.3** Cho  $P, Q, R$  là những mệnh đề :

$P$ : “Bạn bị cúm”

$Q$ : “Bạn thi trượt kỳ thi cuối khóa”

$R$ : “Bạn được lên lớp”

Hãy diễn đạt những mệnh đề theo ngôn ngữ thông thường.

- |                                |                            |   |
|--------------------------------|----------------------------|---|
| a) $P \rightarrow Q$           | c) $Q \rightarrow \bar{R}$ | e) $(P \rightarrow \bar{R}) \vee (Q \rightarrow \bar{R})$ |
| b) $\bar{Q} \leftrightarrow R$ | d) $P \vee Q \vee R$       | f) $(P \wedge Q) \vee (\bar{Q} \wedge R)$                 |

**Bài 1.4** Tìm dạng mệnh đề 3 biến  $q, p, r$  sao cho dạng mệnh đề đúng khi và chỉ khi

- a)  $p$  và  $q$  đúng và  $r$  sai
- b) hai trong ba mệnh đề là đúng
- c) một mệnh đề sai

**Bài 1.5** Viết mệnh đề phủ định  $\bar{A}$  nếu  $A$  có nội dung như sau

- a) Không quá  $2/5$  dân số tốt nghiệp đại học
- b) Hơn một nửa số Bộ trưởng thực sự có năng lực
- c) Không ít hơn  $1/6$  số trẻ em bị thất học
- d) Nhiều nhất là 30 ứng viên thi đạt ngoại ngữ
- e) Có ít nhất 5 sinh viên đạt giải thưởng
- f) Đúng 12 thí sinh dự vòng chung kết của cuộc thi
- g) Hơn 7 vận động viên phá kỷ lục quốc gia
- h) Ít hơn 16 quốc gia thi đấu môn bóng rổ
- i) Nếu Sơn thắng trận thì anh ấy được đi Paris
- j) Không ai muốn làm việc vào ngày chủ nhật
- k) Cả lớp nói chuyện ồn ào
- l) Có ai đó gọi điện thoại cho Tuấn
- m) Các cầu thủ không thích bơi lội
- n) Hần thông minh nhưng thiếu thận trọng
- o) Ngọc học Toán mà không học Lịch sử
- p) Dũng cùng An đi thi ngoại ngữ
- q) Vũ vừa giỏi Vật Lý vừa giỏi Hóa học
- r) Hải đạt kết quả thấp ở cả môn Tin học lẫn môn Toán
- s) Họ đến trường hay họ đi xem phim
- t) Chúng tôi đi Vinh nhưng các anh ấy không đi Huế
- u) Nhóm bác sĩ hay nhóm kỹ sư đi làm từ thiện

**Bài 1.6** Hãy lấy phủ định của các mệnh đề sau:

- a) 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4
- b) Hình tứ giác này không phải là hình chữ nhật mà cũng không phải là hình thoi
- c) Nếu An không đi làm ngày mai thì sẽ bị đuổi việc
- d) Ngày mai nếu trời mưa hay trời lạnh thì tôi sẽ không ra ngoài
- e) Nếu trời mưa và bạn không đến đón thì tôi không đi học

**Bài 1.7** Cho  $p, q, r$  là các biến mệnh đề. Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau:

- a)  $(p \rightarrow \bar{q}) \vee (q \rightarrow \bar{p})$
- b)  $(p \vee q) \rightarrow (r \vee \bar{p})$
- c)  $(p \vee q) \wedge \bar{r}$
- d)  $(p \wedge q) \vee \bar{r}$
- e)  $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge r$
- f)  $(p \vee \bar{q}) \leftrightarrow r$
- g)  $(\bar{p} \rightarrow q) \wedge r$
- h)  $(p \rightarrow q) \vee (\bar{q} \rightarrow r)$
- i)  $(p \wedge q) \rightarrow (\bar{q} \vee r)$

**Bài 1.8** Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

- a)  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- b)  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
- c)  $p \rightarrow (\bar{q} \rightarrow p)$
- d)  $p \rightarrow (p \rightarrow q)$

**Bài 1.9** Chứng minh các dạng mệnh đề sau là hằng đúng hoặc hằng sai:

- a)  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \bar{q} \vee r)$
- b)  $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
- c)  $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow q)$
- d)  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
- e)  $[(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \bar{p})] \rightarrow (q \rightarrow \bar{r}) \vee \bar{p}$
- f)  $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee r]$

- g)  $(r \wedge q) \rightarrow (\bar{p} \vee q)$  i)  $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow \bar{r}) \wedge \overline{p \rightarrow \bar{q}}$   
h)  $[(p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow q] \wedge \overline{p \rightarrow \bar{q}}$  j)  $(p \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \wedge (q \vee r)$

**Bài 1.10** Trong các khẳng định sau, hãy chỉ ra các khẳng định đúng:

- a)  $q \Rightarrow p \rightarrow q$  f)  $p \rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow p \rightarrow q$   
b)  $\overline{p \rightarrow \bar{q}} \Rightarrow p$  g)  $(p \wedge q) \rightarrow r \Rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$   
c)  $(p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$  h)  $p \rightarrow (q \vee r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$   
d)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$  i)  $(\bar{p} \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \bar{q}) \Rightarrow p \wedge q$   
e)  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

**Bài 1.11** Rút gọn các dạng mệnh đề sau

- a)  $[(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})] \vee q$  d)  $p \wedge (q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$   
b)  $\overline{p \vee q} \vee [(\bar{p} \wedge q) \vee \bar{q}]$  e)  $(p \rightarrow q) \wedge [\bar{q} \vee (\bar{q} \wedge r)]$   
c)  $p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$  f)  $\bar{p} \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \bar{s})$

**Bài 1.12** Cho  $p, q, r$  là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng

- a)  $(p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow \bar{q}] \Leftrightarrow q \rightarrow p$  d)  $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow \bar{r} \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$   
b)  $(p \rightarrow q) \vee [p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow p \rightarrow q$  e)  $(\overline{p \wedge q} \vee r) \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \vee r)$   
c)  $(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow r \rightarrow (p \rightarrow q)$  f)  $(\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \wedge p \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow \bar{q}}$

**Bài 1.13** Cho  $P(x)$  là câu “ $x$  học Toán rời rạc”, không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các biểu thức logic sau thành câu thông thường:

- a)  $\forall x, P(x)$  b)  $\exists x, P(x)$  c)  $\forall x, \overline{P(x)}$  d)  $\exists x, \overline{P(x)}$

**Bài 1.14** Cho  $P(x, y)$  là câu “ $x$  học môn  $y$ ”, với không gian của  $x$  là tập hợp sinh viên trong lớp, không gian của  $y$  là tập hợp các môn học. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau thành câu thông thường

- b)  $\exists x \forall y P(x, y)$  e)  $\forall y \exists x P(x, y)$   
c)  $\forall x \exists y P(x, y)$   
a)  $\exists x \exists y P(x, y)$  d)  $\exists y \forall x P(x, y)$  f)  $\forall x \forall y P(x, y)$

**Bài 1.15** Xét chân trị của mệnh đề được tạo từ lượng từ  $\forall, \exists$  và các vị từ  $\overline{p(x)}, p(x) \wedge q(x), p(x) \vee q(x), p(x) \rightarrow q(x)$  và  $p(x) \leftrightarrow q(x)$  (theo biến thực  $x$ )

- a)  $p(x) = “x^2 - 2x - 8 \leq 0”$  và  $q(x) = “(x + 1)(x - 2) - 1 > 0”$   
b)  $p(x) = “(3 - 2x)(x + 4) - 1 \geq 0”$  và  $q(x) = “(x^2 + x - 2)(x^2 - 3x + 10) > 0”$

**Bài 1.16** Hãy lấy phủ định của các mệnh đề sau:

- a) Mọi tam giác đều có các góc bằng  $60^\circ$

- b) Tất cả học sinh lớp Toán đi xem kịch và có ít nhất một học sinh của lớp Văn không đi xem xiếc
- c) Nếu An đoạt chức vô địch thì tất cả các bạn trong lớp sẽ đến chúc mừng.

**Bài 1.17** Cho  $a \in \mathbb{R}$ . Viết mệnh đề phủ định  $\overline{A}$  nếu  $A$  có nội dung như sau:

- a)  $2a^3 + 5a = 10$  c)  $\sqrt{8 - 5a} \leq 2$
- b)  $(2a - 5)(3a + 1)^{-1} \geq 7$  d)  $\ln(a^2 - a - 2) < 3$

**Bài 1.18** Cho các lượng từ  $\forall$  và  $\exists$  (với  $\forall, \exists$  là lượng từ  $\forall$  hoặc  $\exists$ ). Xét chân trị của  $A$  và viết  $\overline{A}$  tùy theo dạng cụ thể của  $\forall$  và  $\exists$ :

- a)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x^3”$
- b)  $A = “\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - 2x > -2”$
- c)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, 2n \leq x < 2n + 1”$
- d)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)”$
- e)  $A = “\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 + 2x - 15)y = 0”$
- f)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q}, x^2 + 4x \geq y^2 + 7”$
- g)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, (x - k)^2 \leq \frac{1}{4}”$

**Bài 1.19** Viết dạng phủ định của  $A$  và xét chân trị của  $A$  ( xét trực tiếp  $A$  hay xét gián tiếp  $\overline{A}$  rồi suy ra  $A$ ):

- a)  $A = “\forall n \in \mathbb{N}, 4|n^2 \rightarrow 4|n”$
- b)  $A = “\exists x \in \mathbb{R}, \sin x + 2x = 1”$
- c)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3 \sin y > 0”$
- d)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, (x^2 \geq y^2) \rightarrow (x \geq y)”$
- e)  $A = “\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Q}, 2^y + 2^{-y} \geq \sin x + 3”$
- f)  $A = “\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{Z}, x \leq y^2 + 2t”$
- g)  $A = “\exists x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{N}, x^3 - 3y \neq 5t”$

**Bài 1.20** Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và quy tắc suy luận nào đã được sử dụng?

- a) Điều kiện đủ để Bình Dương thắng trận là đối thủ dừng gỡ lại vào phút cuối  
Mà CSG đã thắng trận Vậy đối thủ Bình Dương không gỡ lại vào phút cuối
- b) Nếu Minh giải được bài toán thứ tư thì em đã nộp trước giờ quy định  
Mà Minh đã không nộp bài trước giờ quy định  
Vậy Minh không giải được bài toán thứ tư

- c) Nếu lãi suất giảm thì số người gửi tiết kiệm sẽ giảm  
Mà lãi suất đã không giảm  
Vậy số người gửi tiết kiệm không giảm
- d) Nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ đi Đà Lạt  
Nếu đi Đà Lạt Hà sẽ thăm Suối vàng  
Do đó nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ thăm suối vàng

**Bài 1.21** Hãy kiểm tra xem các suy luận sau có đúng không

- a) Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương  
Nếu được tăng lương An sẽ mua xe mới  
Mà An không mua xe mới  
Vậy An không được lên chức hay An không làm việc nhiều.
- b) Nếu muốn dự họp sáng thứ ba thì Minh phải dậy sớm  
Nếu Minh đi nghe nhạc tối thứ hai thì Minh sẽ về trễ  
Nếu về trễ và thức dậy sớm thì Minh phải đi họp mà chỉ ngủ dưới 7 giờ  
Nhưng Minh không thể đi họp nếu chỉ ngủ dưới 7 giờ  
Do đó hoặc là Minh không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc là Minh phải bỏ họp sáng thứ ba.
- c) Nếu Bình đi làm về muộn thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ  
Nếu An thường xuyên vắng nhà thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ  
Nếu vợ Bình hay vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ sẽ nhận được lời than phiền  
Mà Hà không nhận được lời than phiền  
Vậy Bình đi làm về sớm và An ít khi vắng nhà.

**Bài 1.22** Hãy kiểm tra các suy luận sau

$\frac{p \rightarrow q \quad \bar{q} \quad \bar{r}}{\therefore \overline{p \vee r}}$	$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \bar{q} \rightarrow \bar{p} \quad p}{\therefore r}$	$\frac{p \wedge q \quad p \rightarrow (r \wedge q) \quad r \rightarrow (s \vee t) \quad \bar{s}}{\therefore t}$	$\frac{p \vee q \quad \bar{q} \vee r \quad \bar{r}}{\therefore q}$	$\frac{p \quad \bar{p} \rightarrow q \quad (q \wedge r) \rightarrow s \quad t \rightarrow r}{\therefore \bar{s} \rightarrow \bar{t}}$
$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow (p \vee s) \quad (t \rightarrow p) \rightarrow r \quad \bar{q} \vee \bar{s}}{\therefore t}$	$\frac{q \quad t \rightarrow p \quad (p \wedge q) \rightarrow s}{\therefore t \rightarrow s}$	$\frac{p \rightarrow \bar{q} \quad (p \wedge \bar{s}) \vee t \quad t \rightarrow q}{\therefore \bar{s} \rightarrow t}$	$\frac{p \vee q \quad \bar{p} \quad \bar{q} \vee r \quad s \rightarrow \bar{r}}{\therefore \bar{s}}$	

**Bài 1.23** Cho các biến mệnh đề  $p, q, r, s, t$  và  $u$ . Giải thích sự đúng đắn của các sự suy luận dưới đây:

- a)  $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \bar{q}) \Rightarrow s \vee t$
- b)  $(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \rightarrow r) \wedge (\bar{r} \vee s) \Rightarrow \bar{q} \rightarrow s$
- c)  $\bar{s} \wedge [(\bar{p} \vee q) \rightarrow r] \wedge \bar{u} \wedge [r \rightarrow (s \vee t)] \wedge (u \vee \bar{t}) \Rightarrow p$

- d)  $(p \rightarrow q) \wedge \bar{r} \wedge \bar{q} \Rightarrow \overline{p \vee r}$
- e)  $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (t \rightarrow q) \wedge \bar{s} \wedge (p \vee s) \Rightarrow \bar{r} \rightarrow \bar{t}$
- f)  $p \wedge r \wedge \bar{q} \Rightarrow (p \wedge r) \vee q$
- g)  $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \wedge p \Rightarrow r$
- h)  $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (r \rightarrow s) \wedge \bar{s} \Rightarrow p \rightarrow \bar{q}$
- i)  $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(s \wedge q) \rightarrow (p \wedge t)] \wedge (t \rightarrow \bar{p}) \Rightarrow \bar{p} \vee \bar{r}$
- j)  $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (r \vee \bar{q}) \Rightarrow r$
- k)  $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(s \vee q) \rightarrow t] \wedge \bar{t} \Rightarrow \bar{p} \wedge \bar{r}$
- l)  $(p \rightarrow q) \wedge (\bar{r} \vee \bar{q}) \wedge r \Rightarrow \bar{p}$
- m)  $[p \rightarrow (r \wedge q)] \wedge p \wedge q \wedge [r \rightarrow (s \vee t)] \wedge \bar{s} \Rightarrow t$
- n)  $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge \bar{r} \Rightarrow q$

**Bài 1.24** Cho các vị từ  $p(x)$  và  $q(x)$  theo biến  $x \in A$ . Giải thích sự đúng đắn của các sự suy luận dưới đây:

- a)  $[\forall x \in A, p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))] \wedge [\forall x \in A, p(x) \wedge s(x)] \Rightarrow [\forall x \in A, r(x) \wedge s(x)]$
- b)  $[\forall x \in A, p(x) \vee q(x)] \wedge [\exists x \in A, \overline{p(x)}] \wedge [\forall x \in A, \overline{q(x)} \vee r(x)] \wedge [\forall x \in A, s(x) \rightarrow \overline{r(x)}] \Rightarrow [\exists x \in A, \overline{s(x)}]$

**Bài 1.25** Chứng minh qui nạp theo số nguyên  $n$  :

- a)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \forall n \geq 1$
- b)  $1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1$
- c)  $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3), \forall n \geq 1$
- d)  $2^n < n!, \forall n \geq 4$
- e)  $n^2 < 2^n, \forall n \geq 5$  ( để ý  $(n+1)^2 < 2n^2, \forall n \geq 3$  )
- f)  $n^3 < 2^n, \forall n \geq 10$  ( để ý  $(n+1)^3 < 2n^3, \forall n \geq 4$  )
- g)  $\frac{n}{2} + 1 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq n+1, \forall n \geq 0$
- h)  $8 \mid (3^n + 7^n - 2), \forall n \geq 0$
- i)  $4 \mid (6.7^n - 2.3^n), \forall n \geq 0$
- j)  $3^{n+1} \mid (2^{3^n} + 1), \forall n \geq 0$
- k) Cho  $a$  là số thực khác không sao cho  $a + \frac{1}{a}$  là một số nguyên. Chứng minh  $\forall n \geq 1, a^n + \frac{1}{a^n}$  cũng là số nguyên.
- l) Cho dãy số Fibonacci  $a_0 = 0, a_1 = 1$  và  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$ . Chứng minh rằng  $\forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$  với  $\alpha$  và  $\beta$  là 2 nghiệm thực của phương trình  $x^2 - x - 1 = 0$  thỏa  $\alpha > \beta$ .