GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG I

CƠ SỞ LOGIC

I. <u>MỆNH ĐỀ LOGIC:</u>

1.1/ <u>KHÁI NIỆM:</u> *Mệnh đề logic* (gọi tắt là *mệnh đề*) là một câu phát biểu (về một lĩnh vực nào đó) *đúng* hoặc *sai* một cách khách quan. Tính đúng hoặc sai của mệnh đề được xác định từ *chính nội dung của mệnh đề* mà không phụ thuộc vào người phát biểu.

Ta dùng các ký hiệu A, B, C, … để chỉ các mệnh đề.

Tính đúng hoặc sai của một mệnh đề được gọi *chân trị* (hay *giá trị chân lý*) của mệnh đề đó. Ta sử dụng các số nhị phân 1 (hoặc 0) để thể hiện chân trị *đúng* (hoặc *sai*) của một mệnh đề.

<u>Ví dụ</u>

a) Các phát biểu dưới đây là mệnh đề (logic):

A = “ Nước Việt Nam thuộc về châu Á ” (chân trị *đúng*)
B = “ Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông ” (chân trị *sai*)
C = “ Vàng không nặng hơn sắt ” (chân trị *sai*)
D = “ Truyện Kiều của cụ Nguyễn Du ” (chân trị *đúng*)

b) Các phát biểu dưới đây không phải là mệnh đề (logic):

E = “ Hãy đọc sách ! ” (câu mệnh lệnh)
F = “ Anh đi đâu ? ” và G = “ Tú muốn uống nước không ? ” (các câu nghi vấn)
G = “ Trời lạnh quá ! ” (câu cảm thán)

c) Cần phân biệt *Định nghĩa* với *Mệnh đề*. Định nghĩa không phải là Mệnh đề.

H = “ Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song ” (Định nghĩa)
K = “ Hình bình hành có các cặp cạnh đối tương ứng bằng nhau ” (Mệnh đề)
L = “ Tam giác là hình phẳng có 3 đỉnh và 3 cạnh ” (Định nghĩa)
M = “ Tổng của ba góc trong một tam giác bằng 180^o ” (Mệnh đề)

1.2/ <u>PHÂN LOẠI MỆNH ĐỀ:</u>

Một mệnh đề được xếp vào một trong hai loại sau đây:

a) *Mệnh đề sơ cấp* : không sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” trong phát biểu **và** không thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn.

b) *Mệnh đề phức hợp:* có sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” (hàm ý phủ định) trong phát biểu **hay** có thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn (bằng cách sử dụng các từ nối : *và, hay, suy ra, kéo theo, nếu … thì, tương đương, nếu và chỉ nếu, khi và chỉ khi*, …).

<u>Ví dụ:</u>

A = “ Tháng giêng có 30 ngày ” là mệnh đề sơ cấp.
B = “ 22 *không* chia hết cho 5 ” và C = “ $4 \leq 1$ ” là các mệnh đề phức hợp.
D = “ *Nếu* $6 > 7$ *thì* $8 > 9$ ” là mệnh đề phức hợp.

II. CÁC PHÉP NỐI LOGIC (CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ):

Cho các mệnh đề P và Q.

2.1/ MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH: Ký hiệu $\overline{P}$ hay $\rceil$P là *mệnh đề phủ định* của P. (đọc là *phủ định* P). $\overline{P}$ phát biểu các khả năng, các trường hợp còn lại mà P chưa phát biểu. Chân trị của $\overline{P}$ trái ngược với chân trị của P.

P	1	0
$\overline{P}$	0	1

Ví dụ:

A = " 3 > 8 " có $\overline{A}$ = " 3 ≤ 8 ". B = " 4 ≠ 7 " có $\overline{B}$ = " 4 = 7 ".

C = " Tuổi của An khoảng từ 18 đến 20 " có $\overline{C}$ = " Tuổi của An < 18 hoặc > 20 "

D = " Áo này màu xanh '' có $\overline{D}$ = " Áo này không phải màu xanh ".

E = " Một nửa lớp thi đạt môn Toán " có

$\overline{E}$ = " Tỉ lệ số sinh viên của lớp thi đạt môn Toán không phải là 1/2 ".

F = " Không quá 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế " có

$\overline{F}$ = " Hơn 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ".

2.2/ MỆNH ĐỀ HỘI (PHÉP NỐI LIỀN):

Ký hiệu $P \wedge Q$ là *mệnh đề hội* của P và Q (đọc là P *hội* Q, P *và* Q).

$P \wedge Q$ *chỉ đúng* khi P và Q *cùng đúng*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \wedge Q$	1	0	0	0

2.3/ MỆNH ĐỀ TUYỂN (PHÉP NỐI RỜI):

Ký hiệu $P \vee Q$ là *mệnh đề tuyển* của P và Q (đọc là P *tuyển* Q, P *hay* Q).

$P \vee Q$ *chỉ sai* khi P và Q *cùng sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \vee Q$	1	1	1	0

2.4/ MỆNH ĐỀ KÉO THEO:

Ký hiệu $P \to Q$ là *mệnh đề kéo theo* của P và Q (đọc là P *kéo theo* Q, P *suy ra* Q, *nếu* P *thì* Q).

$P \to Q$ *chỉ sai* khi P *đúng* và Q *sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \to Q$	1	0	1	1

Nhận xét từ bảng chân trị của $P \to Q$ rằng:
* Nếu P *sai* thì $P \to Q$ *đúng* (bất chấp Q).
* Nếu Q *đúng* thì $P \to Q$ *đúng* (bất chấp P).
Chẳng hạn cho $D = [\, A \to (B \to C)\,]$ với B là mệnh đề *sai* và A, C là các mệnh đề *tùy ý*. Mệnh đề *phức hợp* D có chân trị *đúng* bất chấp A và C.

2.5/ MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG:

Ký hiệu $P \leftrightarrow Q$ là *mệnh đề tương đương* của P và Q
(đọc là P *tương đương* Q, P *nếu và chỉ nếu* Q).
Để ý $(P \leftrightarrow Q) \equiv [\,(P \to Q) \wedge (Q \to P)\,]$
$P \leftrightarrow Q$ *chỉ đúng* khi P và Q *có cùng chân trị*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \leftrightarrow Q$	1	0	0	1

Ví dụ: Xét các mệnh đề sau:
A = " Nước tinh khiết không dẫn điện " (*đúng*)
B = " Công thức hóa học của nước là H_2O " (*đúng*)
C = " Vua Quang Trung đã đại thắng quân Minh " (*sai*)
D = " $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3$ " (*sai*), E = " Có sự sống ở ngoài trái đất " (?)
F = " Đội tuyển bóng đá Hà Lan sẽ vô địch worldcup trước năm 2100 " (?)
Các mệnh sau là *đúng* : $\overline{C}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \vee D$, $B \vee E$, $A \to B$, $C \to A$,
$D \to C$, $D \to F$, $E \to B$, $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$.
Các mệnh sau là *sai* : $\overline{A}$, $C \wedge B$, $D \wedge C$, $D \wedge E$, $C \vee D$, $A \to C$, $B \leftrightarrow D$.

2.6/ THỨ TỰ ƯU TIÊN CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC:

Khi không có dấu ngoặc, ta qui ước phép phủ định có độ ưu tiên *cao nhất*, tiếp theo là các phép $\wedge$ và $\vee$ có độ ưu tiên *ngang nhau*, cuối cùng là các phép $\to$ và phép $\leftrightarrow$ có độ ưu tiên *ngang nhau*.
Khi có mặt đồng thời hai phép toán có độ ưu tiên *ngang nhau* thì sử dụng dấu ngoặc phân cách để người đọc biết phép toán nào được thực hiện trước.
Ta cũng sử dụng dấu ngoặc để thể hiện thứ tự ưu tiên theo ý muốn.
Cho các mệnh đề A, B và C.
Viết $\overline{A} \wedge B \to C$ được hiểu là thực hiện $\overline{A}$ rồi thực hiện $(\overline{A} \wedge B)$ và sau cùng thực hiện $(\overline{A} \wedge B) \to C$.
Viết $A \vee B \leftrightarrow \overline{C}$ được hiểu là thực hiện $\overline{C}$ rồi thực hiện $(A \vee B)$ và sau cùng thực hiện $(A \vee B) \leftrightarrow \overline{C}$.
Viết $(A \vee B) \wedge C$, $A \vee (B \wedge C)$, $(A \to B) \leftrightarrow C$, $A \to (B \leftrightarrow C)$, $(A \to B) \vee C$, $(A \leftrightarrow B) \wedge C$ với ý nghĩa là các phép toán trong ngoặc được thực hiện trước.

2.7/ BẢNG CHÂN TRỊ CỦA MỆNH ĐỀ PHỨC HỢP:

A là *mệnh đề phức hợp* được tạo từ *các mệnh đề sơ cấp* $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.
Muốn xét chân trị của A, ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian.
Có 2^n khả năng xảy ra khi xét chân trị đồng thời của $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.

Bảng chân trị của A có 2^n cột tương ứng với mỗi khả năng chân trị của $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.

<u>Ví dụ:</u> Cho các mệnh đề sơ cấp P, Q, R và mệnh đề phức hợp A như sau :

$$A = \{ [(P \vee Q) \wedge (\overline{P} \rightarrow R)] \leftrightarrow \overline{R} \}$$

Để xét chân trị của A, ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian $B = (P \vee Q)$, $\overline{P}$, $C = (\overline{P} \rightarrow R)$, $D = (B \wedge C)$ và $\overline{R}$.

Bảng chân trị của A có $2^3 = 8$ cột tương ứng với $2^3 = 8$ khả năng chân trị đồng thời của P, Q và R.

P	1	1	1	0	1	0	0	0
Q	1	1	0	1	0	1	0	0
R	1	0	1	1	0	0	1	0
$B = (P \vee Q)$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{P}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$C = (\overline{P} \rightarrow R)$	1	1	1	1	1	0	1	0
$D = (B \wedge C)$	1	1	1	1	1	0	0	0
$\overline{R}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$A = (D \leftrightarrow \overline{R})$	0	1	0	0	1	0	1	0

III. CÁC DẠNG MỆNH ĐỀ:

3.1/ KHÁI NIỆM:

a) *Biến số thực* là nơi để thay vào các hằng số thực khác nhau.

Biểu thức đại số là một cấu trúc bao gồm các hằng số thực, các biến số thực và các phép toán đại số +, –, ×, : , lũy thừa liên kết các hằng số và biến số.

Chẳng hạn $F(x,y,z,t) = \dfrac{2x^2y - 4yz^3t^4 + t - 3}{\sqrt{y^2 + 3z^4 + 1}}$ là một biểu thức đại số theo các biến số thực x, y, z và t.

b) *Biến mệnh đề* là nơi để thay vào các mệnh đề khác nhau.

Dạng mệnh đề là một cấu trúc bao gồm các mệnh đề, các biến mệnh đề và các phép toán mệnh đề $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ liên kết các mệnh đề và biến mệnh đề

Chẳng hạn $F(p,q,r,s) = \{ (p \leftrightarrow \overline{q}) \vee [r \rightarrow (A \wedge \overline{s})] \} \wedge (q \vee B)$ là một dạng mệnh đề theo các biến mệnh đề p, q, r, s và các mệnh đề A = “ $\pi > \sqrt{11}$ ” và B = “ Nước sôi ở 100^o C dưới áp suất thường ”.

3.2/ DẠNG MỆNH ĐỀ HẰNG ĐÚNG VÀ HẰNG SAI:

Cho dạng mệnh đề $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n.

a) Nếu F *luôn luôn đúng* (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 1) bất chấp chân trị của $p_1, p_2, \ldots$ và p_n thì ta nói F là *một dạng mệnh đề hằng đúng* và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

b) Nếu F *luôn luôn sai* (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 0) bất chấp chân trị của $p_1, p_2, \ldots$ và p_n thì ta nói F là *một dạng mệnh đề hằng sai* và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow \mathbf{O}$.

<u>Ví dụ:</u> Cho các biến mệnh đề p, q và r.

a) $F(p, q, r) = [\,(p \wedge \overline{q}) \rightarrow (\overline{q} \vee r)\,]$ có $F \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (hãy lập bảng chân trị cho F).

b) $G(p, q, r) = \{\, p \leftrightarrow [q \vee (\overline{r} \rightarrow B)\,]\,\} \wedge A$ với các mệnh đề A = " $2^3 > 3^2$ " và B = " Lào tiếp giáp với Việt Nam " . Ta có $G \Leftrightarrow \mathbf{O}$ (vì A có chân trị sai).

3.3/ <u>HỆ QUẢ LOGIC VÀ TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC:</u>

Cho các dạng mệnh đề $E = E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ và $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n .

a) $E \rightarrow F$ chỉ là sự kéo theo *hình thức.* $E \rightarrow F$ không nhất thiết hằng đúng.

b) Nếu $(E \rightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Rightarrow F$ và nói F là *hệ quả logic* của E. Đây là sự kéo theo *thực sự.*

c) $E \leftrightarrow F$ chỉ là sự tương đương *hình thức.* $E \leftrightarrow F$ không nhất thiết hằng đúng.

d) Nếu $(E \leftrightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Leftrightarrow F$ và nói E và F *tương đương logic với nhau*. Đây là sự tương đương *thực sự.*

<u>Ví dụ:</u> Cho các biến mệnh đề p, q, r và s. Lập bảng chân trị để thấy

a) $[\,p \rightarrow (p \wedge \overline{q})\,]$ và $[\,(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)\,]$ đều không phải là các dạng mệnh đề hằng đúng.

b) $[\,(p \wedge \overline{r}) \Rightarrow (p \vee \overline{q} \vee s)\,]$ và $\{\,[\,p \wedge (p \vee q)\,] \Leftrightarrow [\,p \vee (p \wedge q)\,] \Leftrightarrow p\,\}$.

IV. <u>CÁC LUẬT LOGIC (TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC):</u>

Cho các dạng mệnh đề $E = E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ và $G = G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n .

4.1/ <u>LUẬT PHỦ ĐỊNH KÉP:</u> $\overline{\overline{E}} \Leftrightarrow E$.

4.2/ <u>LUẬT LŨY ĐẲNG</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $E \wedge E \Leftrightarrow E$; $E \vee E \Leftrightarrow E$

4.3/ <u>LUẬT GIAO HOÁN</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $F \wedge E \Leftrightarrow E \wedge F$; $F \vee E \Leftrightarrow E \vee F$

4.4/ <u>LUẬT PHỦ ĐỊNH DE MORGAN</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:**

$\overline{E \wedge F} \Leftrightarrow \overline{E} \vee \overline{F}$; $\overline{E \vee F} \Leftrightarrow \overline{E} \wedge \overline{F}$

<u>Ví dụ:</u>

A = " Tôi học tiếng Anh và tiếng Pháp "

$\overline{A}$ = " Tôi *không* học tiếng Anh *hay không* học tiếng Pháp "

B = " An đến trường hay đến thư viện "

$\overline{B}$ = " An *không* đến trường *và không* đến thư viện "

C = " $\sqrt{3a-8} < 1$ " (a là hằng số thực) $\Leftrightarrow$ C = " $(3a - 8) \geq 0$ và $\sqrt{3a-8} < 1$"

$\overline{C}$ = " $(3a - 8) < 0$ *hay* $\sqrt{3a-8} \geq 1$"

4.5/ <u>LUẬT HẤP THU</u> (giữa $\wedge$ và $\vee$)**:**

$[\,E \wedge (E \vee F)\,] \Leftrightarrow E$

$[\,E \vee (E \wedge F)\,] \Leftrightarrow E$

Ví dụ: Cho $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

$x^3(x^2 + 5y^6) = 0 \Leftrightarrow [\ x = 0$ hay $(x^2 + 5y^6) = 0\ ]$

$\Leftrightarrow [\ x = 0$ *hay* $(x = 0$ *và* $y = 0)\ ] \Leftrightarrow x = 0$ (y thực tùy ý)

$u^8(3u^4 + 6v^2) \neq 0 \Leftrightarrow [\ u \neq 0$ và $(3u^4 + 6v^2) \neq 0\ ]$

$\Leftrightarrow [\ u \neq 0$ *và* $(u \neq 0$ *hay* $v \neq 0)\ ] \Leftrightarrow u \neq 0$ (v thực tùy ý)

4.6/ <u>LUẬT KẾT HỢP</u> (của $\wedge$ và $\vee$):

$[\ (E \wedge F) \wedge G\ ] \Leftrightarrow [\ E \wedge (F \wedge G)\ ] \Leftrightarrow (E \wedge F \wedge G)$

$[\ (E \vee F) \vee G\ ] \Leftrightarrow [\ E \vee (F \vee G)\ ] \Leftrightarrow (E \vee F \vee G)$

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

$[\ (a \geq 2)$ và $(a \geq 4$ và $2a \neq b)\ ] \Leftrightarrow [\ (a \geq 2$ và $a \geq 4)$ và $(2a \neq b)\ ]$

$\Leftrightarrow [\ (a \geq 4)$ và $(2a \neq b)\ ]$

$[\ (a < -1)$ hay $(a < -2$ hay $a^3 = 2\cos b)\ ] \Leftrightarrow [\ (a < -1$ hay $a < -2)$ hay $a^3 = 2\cos b\ ]$

$\Leftrightarrow [\ (a < -1)$ hay $(a^3 = 2\cos b)\ ]$

4.7/ <u>LUẬT PHÂN PHỐI</u> (giữa $\wedge$ và $\vee$):

$[\ E \wedge (F \vee G)\ ] \Leftrightarrow [\ (E \wedge F) \vee (E \wedge G)\ ]$ ($\wedge$ phân phối với $\vee$)

$[\ E \vee (F \wedge G)\ ] \Leftrightarrow [\ (E \vee F) \wedge (E \vee G)\ ]$ ($\vee$ phân phối với $\wedge$)

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

$[\ (x < -1)$ và $(x < 4$ hay $y \geq 3)\ ] \Leftrightarrow [\ (x < -1$ và $x < 4)$ hay $(x < -1$ và $y \geq 3)\ ]$

$\Leftrightarrow [\ (x < -1)$ hay $(x < -1$ và $y \geq 3)\ ] \Leftrightarrow (x < -1) \Leftrightarrow (x < -1$ và y thực tùy ý)

$[\ (xy \geq 5)$ hay $(xy \geq 2$ và $x^3 \neq y^2)\ ] \Leftrightarrow [\ (xy \geq 5$ hay $xy \geq 2)$ và $(xy \geq 5$ hay $x^3 \neq y^2)\ ]$

$\Leftrightarrow [\ (xy \geq 2)$ và $(xy \geq 5$ hay $x^3 \neq y^2)\ ]$

4.8/ <u>LUẬT TRUNG HÒA</u> (của $\wedge$ và $\vee$): $(E \wedge \mathbf{1}) \Leftrightarrow E$; $(E \vee \mathbf{O}) \Leftrightarrow E$

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

$(\ 2x + y > 3$ và $4x^2 + e^y \geq -1) \Leftrightarrow (\ 2x + y > 3\ )$

$[\ 8\sin x - 5\cos(y^3) = 14$ hay $x^6 \neq 9^y + 1\ ] \Leftrightarrow (\ x^6 \neq 9^y + 1\ )$

4.9/ <u>LUẬT THỐNG TRỊ</u> (của $\wedge$ và $\vee$): $(E \wedge \mathbf{O}) \Leftrightarrow \mathbf{O}$; $(E \vee \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

$(\ |\ a\ | - \ln b = 2$ và $b^2 < \sin^2 b) \Leftrightarrow \mathbf{O}$ (không có a, b nào thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (hệ vô nghiệm)

$[\ a\cos(ab) > 2$ hay $e^{ab} + e^{-ab} \geq 1\ ] \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (a, b nào cũng thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (a, b thực tùy ý)

4.10/ <u>LUẬT BÙ</u> (của $\wedge$ và $\vee$): $(E \wedge \overline{E}) \Leftrightarrow \mathbf{O}$; $(E \vee \overline{E}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$

Ví dụ: Cho $u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

$(\ uv \geq 1$ và $uv < 1\ ) \Leftrightarrow \mathbf{O}$ (không có u, v nào thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (hệ vô nghiệm)

$(7u^4 \neq 2^v + 3$ hay $7u^4 = 2^v + 3) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (u, v nào cũng thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (u, v thực tùy ý)

4.11/ CÁC DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHỦ ĐỊNH CỦA MỆNH ĐỀ KÉO THEO:

a) $(E \to F) \Leftrightarrow (\overline{E} \vee F)$ (dùng để xóa dấu $\to$)

b) $(E \to F) \Leftrightarrow (\overline{F} \to \overline{E})$ (dùng để suy luận theo dạng *phản đảo*)

c) $(E \to F)$ *không tương đương* với dạng *phản* $(\overline{E} \to \overline{F})$.

d) $(E \to F)$ *không tương đương* với dạng *đảo* $(F \to E)$.

e) $\overline{E \to F} \Leftrightarrow (E \wedge \overline{F})$

[Từ a), dùng (**4.4**) và (**4.1**) ta có $\overline{E \to F} \Leftrightarrow \overline{\overline{E} \vee F} \Leftrightarrow (\overline{\overline{E}} \wedge \overline{F}) \Leftrightarrow (E \wedge \overline{F})$]

Ví dụ:

A = " Nếu (An học tốt) thì (An thi đạt) " $(E \to F)$.

A $\Leftrightarrow$ B với B = " (An học không tốt) hay (An thi đạt) " $(\overline{E} \vee F)$.

A $\Leftrightarrow$ C với C = " Nếu (An thi không đạt) thì (An đã học không tốt) " $(\overline{F} \to \overline{E})$.

A $\overline{\Leftrightarrow}$ D với D = " Nếu (An học không tốt) thì (An thi không đạt) " $(\overline{E} \to \overline{F})$.

A $\overline{\Leftrightarrow}$ E với E = " Nếu (An thi đạt) thì (An đã học tốt) " $(F \to E)$.

Để ý A đúng và D, E đều sai nên A không tương đương với D và E.

4.12/ ÁP DỤNG:

Các luật logic được sử dụng để

– *Rút gọn* một dạng mệnh đề.

– Chứng minh một dạng mệnh đề *hằng đúng* hoặc *hằng sai.*

– Chứng minh hai dạng mệnh đề *tương đương với nhau.*

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q và r.

a) Rút gọn $A = [\,(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})\,]$.

$A \Leftrightarrow [\,(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q)\,] \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow [\,(p \vee \overline{p}) \wedge q\,] \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathbf{1} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \overline{q}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow (q \vee p)$

b) Chứng minh $B = \{\,[\,p \to (q \vee r)\,] \to [\,(p \to q) \vee (p \to r)\,]\,\}$ hằng đúng.

$B \Leftrightarrow \overline{p \to (q \vee r)} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{p} \vee r \Leftrightarrow \overline{p \to (q \vee r)} \vee (\overline{p} \vee \overline{p}) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{p \to (q \vee r)} \vee [\,\overline{p} \vee (q \vee r)\,] \Leftrightarrow \overline{G} \vee G \Leftrightarrow \mathbf{1}$ với $G = [\,p \to (q \vee r)\,]$

c) Chứng minh $C = \{\,[\,p \wedge (q \vee r)\,] \wedge \overline{(p \wedge q) \vee r}\,\}$ hằng sai.

$C \Leftrightarrow [\,(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,] \wedge \overline{p \wedge q} \wedge \overline{r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (H \vee K) \wedge (\overline{H} \wedge \overline{r})$ với $H = (p \wedge q)$ và $K = (p \wedge r)$. Suy ra

$C \Leftrightarrow (H \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow (\mathbf{O} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow \mathbf{O} \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r})$

$\Leftrightarrow K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r} \Leftrightarrow \overline{H} \wedge K \wedge \overline{r} \Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge (r \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{O}$.

d) Cho $E = \{\,[\,q \to (p \wedge r)\,] \wedge \overline{(p \vee r) \to q}\,\}$ và $F = \overline{(p \vee r) \to q}$

Chứng minh $E \Leftrightarrow F$.

$E \Leftrightarrow [\,\overline{q} \vee (p \wedge r)\,] \wedge (p \vee r) \wedge \overline{q} \Leftrightarrow (\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q} \wedge (p \vee r)$ với $u = (p \wedge r)$

$\Leftrightarrow [\,(\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q}\,] \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow \overline{q} \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge \overline{q} \Leftrightarrow \overline{(p \vee r) \to q} = F$

V. MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ:

5.1/ LƯỢNG TỪ: Cho tập hợp A và biến x lấy các giá trị trong A.

a) *Lượng từ phổ biến* $\forall$(với mỗi, với mọi, với tất cả)

$\forall x \in A$: với mỗi (với mọi, với tất cả) phần tử x thuộc về tập hợp A.

b) *Lượng từ tồn tại* $\exists$ (tồn tại, có ít nhất một, có ai đó, có gì đó)

$\exists x \in A$: tồn tại (có ít nhất một) phần tử x thuộc về tập hợp A.

5.2/ VỊ TỪ: Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$.

$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một câu phát biểu có nội dung liên quan đến các biến x_j và chân trị của $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ phụ thuộc theo các biến x_j $(1 \le j \le n)$.

Ta nói $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *một vị từ theo* n *biến* $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$.

Ví dụ:

a) $p(x) =$ " $3x^2 - 4x > 1$ " với $x \in \mathbf{R}$. Ta có $p(0)$ sai và $p(2)$ đúng.
Ta gọi $p(x)$ là vị từ 1 biến.

b) $q(y,z) =$ " $(4y - 7z) \vdots 5$ " với $y \in \mathbf{Z}$ và $z \in \mathbf{Q}$.
Ta có $q(-2, \frac{3}{7})$ sai và $q(6, \frac{-1}{7})$ đúng. Ta gọi $q(y,z)$ là vị từ 2 biến.

5.3/ MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ :

Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$, vị từ theo n biến $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và các lượng từ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{ \forall, \exists \}$.

a) Ta xây dựng *một mệnh đề lượng từ theo* n *biến* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là
$A =$ " $\delta_1 x_1 \in A_1, \delta_2 x_2 \in A_2, \ldots, \delta_n x_n \in A_n, p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ "

b) Qui ước $\overline{\forall} \equiv \exists$, $\overline{\exists} \equiv \forall$, ta có *dạng phủ định* của mệnh đề lượng từ A là
$\overline{A} =$ " $\overline{\delta_1}\, x_1 \in A_1, \overline{\delta_2}\, x_2 \in A_2, \ldots, \overline{\delta_n}\, x_n \in A_n, \overline{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ ".

c) Ta có thể xét trực tiếp chân trị của A (nếu đơn giản) hoặc xét gián tiếp chân trị của $\overline{A}$ rồi suy ra chân trị của A (nếu chân trị của $\overline{A}$ dễ xét hơn A).

Ví dụ:

a) $A =$ " $\exists x \in \mathbf{Q}, x^3 = x$ " có $\overline{A} =$ " $\forall x \in \mathbf{Q}, x^3 \ne x$ " . A đúng vì $\exists 1 \in \mathbf{Q}, 1^3 = 1$.

b) $B =$ " $\forall x \in \mathbf{R}, x > \sin x$ " có $\overline{B} =$ " $\exists x \in \mathbf{R}, x \le \sin x$ " .
$\overline{B}$ đúng vì $\exists 0 \in \mathbf{R}, 0 \le \sin 0 = 0$. Suy ra B sai.

c) $C =$ " $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \le 2^y - 3$ " có $\overline{C} =$ " $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x > 2^y - 3$ "
C đúng vì $\exists(-3) \in \mathbf{Z}, \forall y \in \mathbf{Q}, -3 \le 2^y - 3$ (để ý $2^y > 0$ $\forall y \in \mathbf{Q}$).

d) $D =$ " $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 2y^3 > 5x^4 + 8$ " có $\overline{D} =$ " $\exists x \in \mathbf{Z}, \forall y \in \mathbf{Q}, 2y^3 \le 5x^4 + 8$ "
Ta có thể giải thích trực tiếp D đúng hoặc giải thích gián tiếp là $\overline{D}$ sai.
D đúng vì $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}$ thỏa $y > \sqrt[3]{5x^4 + 8} > 0$, nghĩa là $2y^3 > y^3 > 5x^4 + 8$.
$\overline{D}$ sai. Thật vậy, nếu $\overline{D}$ đúng thì có x nguyên thỏa $2y^3 \le 5x^4 + 8$ $\forall y \in \mathbf{Q}$. Cho $y \to +\infty$ (lúc đó $2y^3 \to +\infty$) thì có mâu thuẫn vì $5x^4 + 8$ cố định.

e) $E =$ " $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2) \to (x > y)$ " . Ta có
$E \Leftrightarrow E' =$ " $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 \le y^2)$ hay $(x > y)$ " (xóa dấu $\to$) và
$\overline{E} =$ " $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2)$ và $(x \le y)$ ". Ta khẳng định D đúng bằng cách giải thích gián tiếp là E' đúng hay giải thích gián tiếp là $\overline{E}$ sai.

E' đúng vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y = x \in \mathbf{R}, (x^2 \le y^2 = x^2)$.

$\overline{E}$ sai. Thật vậy, nếu $\overline{E}$ đúng thì có x thực cố định thỏa $y^2 < x^2 \ \forall y \in \mathbf{R}$. Cho $y \to +\infty$ (lúc đó $y^2 \to +\infty$) thì có mâu thuẫn vì x^2 cố định.

f) F = " Họ (chúng tôi, các bạn) đi du lịch Rome " (lượng từ phổ biến tiềm ẩn)

$\overline{F}$ = " Có ai đó trong số họ (chúng tôi, các bạn) không đi du lịch Rome "

g) G = " (Tất cả) các nghệ sĩ không muốn tạo scandal "

$\overline{G}$ = " Có nghệ sĩ nào đó muốn tạo scandal "

h) H = " Có bạn nào đó trong lớp đạt điểm 10 môn Toán "

$\overline{H}$ = " Cả lớp không đạt điểm 10 môn Toán "

= " Không có bạn nào đó trong lớp đạt điểm 10 môn Toán "

k) K = " Không có ai đến trễ " = " Mọi người không đến trễ "

$\overline{K}$ = " Có ai đó đến trễ "

5.4/ <u>HOÁN ĐỔI LƯỢNG TỪ:</u>

Cho các tập hợp A, B và vị từ 2 biến $p(x,y)$ với $x \in A$ và $y \in B$. Ta có

a) Có thể hoán đổi 2 *lượng từ cùng loại* đứng cạnh nhau.

" $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)$ "

" $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)$ "

b) Không được hoán đổi 2 *lượng từ khác loại* đứng cạnh nhau.

" $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$ " $\Rightarrow$ " $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)$ " (chiều $\Leftarrow$ sai)

Vế trái : có x cố định trong A, y tùy ý trong B.

Vế phải : với mỗi y tùy ý trong B, có x trong A và x phụ thuộc theo y.

<u>Ví dụ:</u>

a) " $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \le 4$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \le 4$ "

Cả hai vế đều có chân trị sai.

b) " $\exists x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 3x + y = -1$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in \mathbf{Q}, \exists x \in \mathbf{Z}, 3x + y = -1$ "

Cả hai vế đều có chân trị đúng.

c) " $\forall x \in \mathbf{Q}, \exists y \in \mathbf{R}, y = \sin x$ " (chân trị đúng vì hàm sin xác định trên $\mathbf{Q}$)

" $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{Q}, y = \sin x$ " (chân trị sai vì $y = \sin 0 = 0$ và $y = \sin 1 > 0$)

VI. <u>CÁC QUI TẮC SUY DIỄN (CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH)</u>

Cho các mệnh đề $P, Q, R, S, P_1, P_2, \ldots$ và P_n.

6.1/ <u>QUI TẮC PHẢN ĐẢO (Phản chứng dạng 1)</u>:

$(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (Ta có thể chứng minh vế phải thay cho chứng minh vế trái nếu việc chứng minh vế phải đơn giản hơn)

<u>Ví dụ:</u> Cho các số nguyên a và b. Chứng minh " (ab lẻ) $\Rightarrow$ (a và b đều lẻ) ".

a) Chứng minh trực tiếp : Viết $a = 2c + r$ và $b = 2d + s$ trong đó c, d là các số nguyên và $r, s \in \{0, 1\}$. Do $ab = 2(2cd + cs + dr) + rs$ lẻ nên $rs = 1$. Suy ra $r = s = 1$, nghĩa là a và b đều lẻ.

b) Chứng minh phản chứng : " (a hay b chẵn) $\Rightarrow$ (ab chẵn) "

Giả sử a hay b chẵn, nghĩa là $a = 2c$ và $b = 2d$ với c, d là các số nguyên.

Ta có $ab = 2(cb)$ hay $ab = 2(ad)$ nên ab chẵn.

6.2/ <u>QUI TẮC NÊU MÂU THUẪN (Phản chứng dạng 2)</u>:

$(P \Rightarrow Q) \equiv [(P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \mathbf{O}]$ trong đó **O** thể hiện *sự mâu thuẫn* hay *vô lý*.

(Ta có thể chứng minh vế phải thay cho chứng minh vế trái nếu việc chứng minh vế phải đơn giản hơn)

<u>Ví dụ:</u> Cho các số thực a và b.

Chứng minh “ (a hữu tỉ và b vô tỉ) $\Rightarrow$ (a + b vô tỉ) ”.

a) Chứng minh trực tiếp : không thuận lợi.

b) Chứng minh phản chứng : “ (a hữu tỉ, b vô tỉ và a + b hữu tỉ) $\Rightarrow$ **O** ”

Giả sử a hữu tỉ, b vô tỉ và a + b hữu tỉ, nghĩa là $a = \frac{p}{q}$ và $a + b = \frac{r}{s}$

trong đó p, q, r, s là các số nguyên với $q \neq 0 \neq s$. Suy ra

$b = (a + b) - a = \frac{qr - ps}{qs}$ là số hữu tỉ : mâu thuẫn với giả thiết b vô tỉ.

6.3/ <u>QUI TẮC HỘI TUYỂN ĐƠN GIẢN:</u>

a) $[(P \wedge Q) \Rightarrow P]$ (hội đơn giản để xóa bớt thông tin Q không cần thiết)

b) $[P \Rightarrow (P \vee Q)]$ (tuyển đơn giản để thêm vào thông tin Q gây nhiễu)

<u>Ví dụ:</u>

(An học Anh văn và Pháp văn) $\Rightarrow$ (An học Anh văn)

Cho số thực a. ta có (a > 5) $\Rightarrow$ [(a > 5) hay (sina < 0)]

6.4/ <u>QUI TẮC KHẲNG ĐỊNH (Modus – Ponens):</u>

a) Dạng 1: $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ P \end{Bmatrix} \Rightarrow Q$ b) Dạng 2: $\begin{Bmatrix} P \vee Q \\ \overline{P} \end{Bmatrix} \Rightarrow Q$

<u>Ví dụ:</u>

a) [(Nếu An rảnh thì An xem phim) và (An rảnh)] $\Rightarrow$ (An xem phim)

b) [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú ăn chay trường)] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú không ăn gà quay)] $\Rightarrow$ (Vy đã ăn gà quay)

6.5/ <u>QUI TẮC PHỦ ĐỊNH (Modus – Tollens):</u>

$\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ \overline{Q} \end{Bmatrix} \Rightarrow \overline{P}$

<u>Ví dụ:</u>

[(Nếu An giàu thì An mua xe hơi) và (An không mua xe hơi)] $\Rightarrow$ (An chưa giàu)

6.6/ <u>QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN (Syllogism):</u>

$\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{Bmatrix} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (bỏ bớt suy luận trung gian Q)

<u>Ví dụ:</u>

[(Nếu trời mưa lớn thì đường bị ngập) và (nếu đường bị ngập thì An về nhà trễ)] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [(Nếu trời mưa lớn thì An về nhà trễ)]

6.7/ <u>QUI TẮC CHỨNG MINH THEO CÁC TRƯỜNG HỢP:</u>

$$[(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \Rightarrow Q] \equiv \begin{Bmatrix} P_1 \Rightarrow Q \\ P_2 \Rightarrow Q \\ \vdots \\ P_n \Rightarrow Q \end{Bmatrix}$$

(Ta có thể chứng minh các trường hợp riêng lẻ ở vế phải thay cho chứng minh vế trái vì việc chứng minh vế phải đơn giản hơn chứng minh một trường hợp tổng quát ở vế trái).

<u>Ví dụ:</u> Cho số nguyên k.

a) Chứng minh k^2 chia 4 dư 0 hoặc 1.

Ta chứng minh theo 2 trường hợp k chẵn hoặc k lẻ.

Nếu $k = 2r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = 4^2 r$ chia 4 dư 0.

Nếu $k = 2r + 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = [\,4(r^2 + r) + 1\,]$ chia 4 dư 1.

b) Chứng minh $[\,k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3\,]$ chia hết cho 9.

Ta chứng minh theo 3 trường hợp tương ứng với số dư khi chia k cho 3.

Ta có $[\,k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3\,] = 3k(\,k^2 + 5) + 9(\,k^2 + 1)$.

Nếu $k = 3r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì

$k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 = 9[\,r(\,k^2 + 5) + (\,k^2 + 1)\,]$ chia hết cho 9.

Nếu $k = 3r \pm 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì

$k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 = 9[\,k(3r^2 \pm 2r + 2) + (\,k^2 + 1)\,]$ chia hết cho 9.

6.8/ <u>HỆ QUẢ:</u>

a) $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{Bmatrix} \Rightarrow [\,(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)\,]$

b) $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{Bmatrix} \Rightarrow [\,(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)\,]$

6.9/ <u>ÁP DỤNG:</u>

Cho các dạng mệnh đề $E_1, E_2, \ldots, E_n$ và F.

a) Giải thích một quá trình suy luận là *đúng*:

Ta muốn chứng minh $[\,(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow F\,]$ là *đúng*. Lúc đó ta ký hiệu

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \\ \text{----------} \\ \therefore\ F \end{array}$$

Nếu dùng bảng chân trị hoặc dùng các luật logic biến đổi thì khá phức tạp, đặc biệt là khi n lớn. Ta dùng một trong hai cách chứng minh sau để được *đơn giản* và *có hiệu quả hơn*:

<u>Cách 1</u>: chia bài toán thành *nhiều bước suy luận trung gian* và ở mỗi bước ta dùng *các luật logic* (mục **IV**) hoặc *các qui tắc suy diễn* đã nêu trên.

Cách 2 : dùng *qui tắc phản chứng dạng 2* trong (**6.2**), nghĩa là xuất phát từ ($E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n \wedge \overline{F}$), ta sẽ chỉ ra một sự mâu thuẫn.

b) Giải thích một quá trình suy luận là *sai*:

Ta muốn khẳng định [$(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow F$] là *sai*. Ta chỉ cần gán cho mỗi biến mệnh đề chân trị 0 hoặc 1 sao cho $E_1, E_2, \ldots, E_n$ đều đúng và F sai.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q, r, s, t và u .

Xem xét các suy luận dưới đây đúng hay sai và giải thích tại sao ?

a)	b)	c)	d)
$p \to t$ (1)	$p \to r$ (1)	$(\overline{p} \vee q) \to (r \wedge s)$ (1)	p (1)
$\overline{r} \to q$ (2)	$\overline{u}$ (2)	$\overline{t}$ (2)	$\overline{p} \to q$ (2)
p (3)	$s \to t$ (3)	$r \to t$ (3)	$(q \wedge r) \to s$ (3)
$t \to \overline{q}$ (4)	$\overline{s} \to \overline{r}$ (4)	---------------------	$t \to r$ (4)
-------------	$\overline{t} \vee u$ (5)	$\therefore\ s \to p$ (4)	--------------------
$\therefore\ r \vee s$ (5)	-----------------		$\therefore \overline{s} \to \overline{t}$ (5)
	$\therefore\ p \to q$ (6)		

Ta chứng minh a) đúng bằng cách 1: Từ (1) và (3), ta có t (6). Từ (6) và (4), ta có $\overline{q}$ (7). Từ (7) và (2), ta có $\overline{\overline{r}}$ (8). Từ (8), ta có r (9). Từ (9), ta có $r \vee s$ (5). Như Như vậy suy luận a) là đúng.

Ta chứng minh b) đúng bằng cách 2: Giả sử (1), (2), (3), (4), (5) đúng và (6) sai. Từ (2) và (6), ta có p đúng và u, q đều sai. Từ (1) ta có r đúng. Từ (5), ta có t sai. Từ (3) ta có s sai. Do s sai và r đúng, ta có (4) sai : mâu thuẫn với điều đã giả sử. Như vậy suy luận b) là đúng.

Ta chứng minh c) đúng bằng cách 1: Từ (2) và (3), ta có $\overline{r}$ (5). Từ (5), ta có $\overline{r} \vee \overline{s}$ (6). Từ (6), ta có $\overline{r \wedge s}$ (7). Từ (7) và (1), ta có $\overline{\overline{p} \vee q}$ (8). Từ (8), ta có $\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$ (9). Từ (9), ta có $p \wedge \overline{q}$ (10). Từ (10), ta có p (11). Từ (11), ta có $\overline{s} \vee p$ (12). Từ (12), ta có $s \to p$ (4). Như vậy suy luận c) là đúng.

Ta chứng minh d) sai bằng cách gán chân trị đặc biệt cho các biến mệnh đề. Gán chân trị 1 cho p, r, t và gán chân trị 0 cho q, s thì (1), (2), (3), (4) đều đúng và (5) sai. Như vậy suy luận d) là sai.

VII. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUI NẠP:

Cho $m \in \mathbf{N}$. Giả sử ta có một dãy vô hạn các mệnh đề P_n $(n \geq m)$ và ta muốn chứng minh chúng đều đúng. Ta dùng phương pháp chứng minh qui nạp.

7.1/ QUI NẠP GIẢ THIẾT YẾU (ÍT GIẢ THIẾT):

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.

* Chứng minh $\forall k \geq m$, (P_k đúng $\Rightarrow$ P_{k+1} đúng)

* Kết luận: P_n đúng $\forall n \geq m$.

Ví dụ: Chứng minh $\forall n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta chứng minh P_n = " $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ " đúng $\forall n \geq 1$.

* P_1 = " $1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$ " hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 1$ và giả sử P_k đúng, nghĩa là $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (*).

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Viết P_{k+1} = " $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(2(k+1)+1]}{6}$ ".

Ta kiểm tra vế trái của P_{k+1} bằng vế phải của P_{k+1}.

Vế trái = $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$ [sử dụng (*)]

$= \frac{(k+1)}{6}[\,k(2k+1) + 6(k+1)\,] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ = Vế phải.

* Vậy P_n đúng $\forall n \geq 1$.

7.2/ <u>QUI NẠP GIẢ THIẾT MẠNH (NHIỀU GIẢ THIẾT):</u>

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.
* Chứng minh $\forall k \geq m$, [($P_m, P_{m+1}, \ldots$ và P_k đều đúng) $\Rightarrow$ P_{k+1} đúng]
* Kết luận: P_n đúng $\forall n \geq m$.

<u>Ví dụ:</u> Chứng minh $\forall n \geq 2$, n là tích của các số nguyên tố dương (số nguyên tố dương là số nguyên dương chỉ có 2 ước số dương là 1 và chính nó).

Ta chứng minh P_n = " n là tích của các số nguyên tố dương " đúng $\forall n \geq 2$.

* P_2 = " 2 là tích của đúng một số nguyên tố dương " hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 2$ và giả sử $P_2, P_3, \ldots, P_k$ đều đúng, nghĩa là
$\forall t \in \{ 2, 3, \ldots, k \}$, t là tích của các số nguyên tố dương (*).

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng bằng cách xét 2 trường hợp [xem (**6.7**)].

Viết P_{k+1} = " (k + 1) là tích của các số nguyên tố dương ".

Khi (k + 1) là số nguyên tố thì đương nhiên (k + 1) là tích của đúng một số nguyên tố dương.

Khi (k + 1) là số không nguyên tố thì $(k+1) = uv$ với $u, v \in \{ 2, 3, \ldots, k \}$.
Theo (*), $u = p_1p_2\ldots p_r$ và $v = q_1q_2\ldots q_s$ với $p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_s$ là các số nguyên tố dương. Suy ra $(k+1) = uv = p_1p_2\ldots p_r\, q_1q_2\ldots q_s$ cũng là tích của các số nguyên tố dương.

* Vậy P_n đúng $\forall n \geq 2$.

GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG II

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

I. TẬP HỢP:

1.1/ KHÁI NIỆM:

Tập hợp là một bộ sưu tập các phần tử *có chung một số tính chất nào đó.*
Ta thường ký hiệu các tập hợp là A, B, C, … và ký hiệu các phần tử là a, b, c, ... Nếu phần tử a thuộc về tập hợp A, ta viết $a \in A$. Nếu phần tử b không thuộc về tập hợp A, ta viết $b \notin A$.
Khái niệm " *tập hợp tất cả các tập hợp*" là vô nghĩa (không thể có $A \in A$).

Ví dụ:
a) Tập hợp các sinh viên năm thứ nhất khoa Công nghệ thông tin trường Đại học Khoa học tự nhiên TP Hồ Chí Minh (4 tính chất chung).
b) Tập hợp các môn học của ngành Sử học trường Đại học Khoa học xã hội & nhân văn Hà Nội (3 tính chất chung).

1.2/ CÁC TẬP HỢP SỐ:

Tập hợp *các số nguyên tự nhiên* $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$
(với các phép toán $+$ và $\times$)
Tập hợp *các số nguyên* $\mathbf{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$
(với các phép toán $+, -$ và $\times$)
Tập hợp *các số hữu tỉ* $\mathbf{Q} = \{ \ldots, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{4}, -6, 0, \frac{2}{3}, 9, \frac{8}{7}, \ldots \}$
(với các phép toán $+, -, \times$ và $:$)
Tập hợp *các số thực*
$\mathbf{R} = \{$ các số hữu tỉ, các số vô tỉ $(\pm\sqrt{2}, \pm \pi, \pm \ln 3, \pm \sin 1, \pm e, \pm \sqrt[3]{5}, \ldots) \}$
(với các phép toán $+, -, \times, :$ và rút căn chưa hoàn chỉnh)
Tập hợp *các số phức* $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$ (với các phép toán $+, -, \times, :$ và rút căn hoàn chỉnh).

1.3/ LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP: Cho tập hợp X .

Ký hiệu $|X|$ là *số phần tử* (hay *lực lượng*) của tập hợp X.
Nếu X là tập hợp *hữu hạn* có n phần tử ($n \in \mathbf{N}$) thì ta ghi $|X| = n$.
Nếu X là tập hợp *vô hạn* (có vô số phần tử) thì ta ghi $|X| = +\infty$.

Ví dụ:
a) Các tập hợp số **N**, **Z**, **Q**, **R** và **C** đều là các tập hợp vô hạn.
b) Đặt X là tập hợp các ngày trong tháng 1 năm 2000 và Y là tập hợp những người nhập cảnh vào Việt Nam trong ngày 01 tháng 01 năm 2000.
Ta có X và Y đều là các tập hợp hữu hạn với $|X| = 31$ nhưng không biết được $|Y|$ nếu chưa tra cứu hồ sơ.

1.4/ <u>BIỂU DIỄN TẬP HỢP:</u> Có 3 cách biểu diễn tập hợp

a) *Giản đồ Venn*: vẽ một đường cong khép kín trên mặt phẳng. Các phần tử của tập hợp được vẽ phía trong đường cong. Các phần tử khác (nếu có) được vẽ phía ngoài đường cong.

b) *Liệt kê*: giữa hai dấu { và }, mỗi phần tử được viết ra đúng một lần (theo thứ tự tùy ý) và có dấu phẩy ngăn cách giữa hai phần tử liên tiếp.

Chẳng hạn $A = \{ a, b, c, d, e \} = \{ c, a, d, b, e \} = \{ e, a, d, c, b \} = \ldots$

c) *Nêu các tính chất chung*:

$A = \{ x \mid p(x) \}$ hay $B = \{ x \in C \mid q(x) \}$

($p(x)$ và $q(x)$ là các vị từ theo biến x dùng để mô tả các tính chất của x).

Chẳng hạn $A = \{$ cầu thủ $x \mid x$ đã đoạt giải thưởng quả bóng vàng FIFA $\}$

$B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid -75 < x \leq 100$ và $x \,\vdots\, 9 \} = \{ -72, -63, -54, \ldots, 81, 90, 99 \}$

1.5/ <u>TẬP HỢP TRỐNG:</u>

Ta ký hiệu $\varnothing$ là tập hợp *trống*, nghĩa là tập hợp không có phần tử nào cả.

Chẳng hạn $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid 3x^2 - 8x + 11 = 0 \} = \varnothing$ và

$B = \{$ những người Việt nam đã đoạt giải Nobel kinh tế $\} = \varnothing$.

1.6/ <u>TẬP HỢP CON:</u> Cho các tập hợp A và B.

a) Ta nói A là *một tập hợp con* của B (A *chứa trong* B, B *chứa* A) nếu "$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$". Lúc đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

b) Suy ra $A \not\subset B$ (A *không phải là một tập hợp con* của B, A *không chứa trong* B, B *không chứa* A) nếu "$\exists x_o , (x_o \in A$ và $x_o \notin B)$".

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 2 \}$, $B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 3 \}$ và $C = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 4 \}$.

Ta có $C \subset A$ ($\forall x, x \in C \Rightarrow x = 4r$ với $r \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 2s$ với $s = 2r \in \mathbf{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \,\vdots\, 2 \Rightarrow x \in A$) và $C \not\subset B$ ($\exists 4 \in C$ và $4 \notin B$).

1.7/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các tập hợp A, B và C. Khi đó

a) $\varnothing \subset A \subset A$

b) $(A \subset B) \Rightarrow (| A | \leq | B |)$

c) $(A \subset B$ và $B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ (tính truyền của quan hệ $\subset$).

1.8/ <u>TẬP HỢP BẰNG NHAU:</u> Cho các tập hợp A và B.

a) Ta nói $A = B$ nếu ($A \subset B$ và $B \subset A$).

b) Suy ra $A = B \Leftrightarrow$ "$\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$".

c) Suy ra $A \neq B \Leftrightarrow$ ($A \not\subset B$ hay $B \not\subset A$).

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 4$ và $x \,\vdots\, 6 \}$ và $B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 12 \}$. Chứng minh $A = B$.

$\forall x, x \in A \Rightarrow x = 4r = 6s$ với $r, s \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2r = 3s \Rightarrow s = 2t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 6(2t) = 12t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in B$. Vậy $A \subset B$.

$\forall x, x \in B \Rightarrow x = 12t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 4r = 6s$ với $r = 3t \in \mathbf{Z}$ và $s = 2t \in \mathbf{Z}$
$\Rightarrow x \in A$. Vậy $B \subset A$.

Do $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

b) C = { các hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau }
D = { các hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau }
E = { các hình thoi có góc vuông }
F = { các hình thoi có hai đường chéo bằng nhau } và G = { các hình vuông }
Ta có C = D = E = F vì C, D, E, F đều bằng G.

1.9/ <u>TẬP HỢP CÁC TẬP CON:</u> Cho tập hợp E.

Đặt $\wp(E)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của E, nghĩa là
$\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \} = \{ \varnothing, \{a\}, \ldots, \{a, b\}, \ldots, \{a, b, c\}, \ldots, E \}$
(liệt kê các tập hợp con có số phần tử tăng dần lên)

1.10/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

a) Nếu $|E| = n \geq 0$ thì $|\wp(E)| = 2^n$.
b) Nếu $|E| = +\infty$ thì $|\wp(E)| = +\infty$.

<u>Chứng minh:</u>

a) Ta chứng minh kết quả này bằng *phương pháp qui nạp* theo $n \geq 0$.
Khi $|E| = n = 0$ thì $E = \varnothing$ nên $\wp(E) = \{ \varnothing \}$ và $|\wp(E)| = 1 = 2^0$.
Vậy mệnh đề đúng khi $n = 0$.
Xét $k \geq 0$ tùy ý và giả sử các tập hợp có k phần tử đều có 2^k tập hợp con. Xét $|E| = k + 1$. Viết $E = F \cup \{ e \}$ với $e \in E$ và $F = E \setminus \{ e \}$.
Ta có $|F| = k$ nên $|\wp(F)| = 2^k$. Đặt $\prod = \{ A \cup \{ e \} \mid A \in \wp(F) \}$ thì $\wp(E) = \wp(F) \cup \prod$, $\wp(F) \cap \prod = \varnothing$ và $|\prod| = |\wp(F)| = 2^k$. Suy ra $|\wp(E)| = |\wp(F)| + |\prod| = |\wp(F)| + |\wp(F)| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$, nghĩa là mệnh đề cũng đúng khi $n = k + 1$.
Vậy mệnh đề đúng $\forall n \geq 0$.

b) Đặt $\Delta = \{ \{a\} \mid a \in E \}$ thì $\Delta \subset \wp(E)$ và $|\Delta| = +\infty$ nên $|\wp(E)| = +\infty$.

<u>Ví dụ:</u>
Nếu $|E| = 1$ thì $E = \{ a \}$ và $\wp(E) = \{ \varnothing, E \}$ có $|\wp(E)| = 2 = 2^1$.
Nếu $|E| = 2$ thì $E = \{ a, b \}$ và $\wp(E) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, E \}$ có $|\wp(E)| = 4 = 2^2$.
Nếu $|E| = 3$ thì $E = \{ a, b, c \}$ và
$\wp(E) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{c\}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, E \}$ có $|\wp(E)| = 8 = 2^3$.

II. <u>CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP:</u>

Cho các tập hợp $A, B, C \subset E$ (ta nói E là *tập hợp vũ trụ*).

2.1/ <u>PHẦN BÙ:</u>

a) Đặt $\overline{A} = \{ x \in E \mid x \notin A \}$ thì $\overline{A}$ được gọi là *phần bù* của A (trong E).
b) $\overline{\varnothing} = E$, $\overline{E} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$ (luật *bù kép*).
c) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$; $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-\infty, 1\,]$ và $B = (-5, +\infty)$.
Ta có $\overline{A} = (1, +\infty)$ và $\overline{B} = (-\infty, -5\,]$.

2.2/ PHẦN GIAO:

a) Đặt $A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A$ và $x \in B \}$ là *phần giao* của A và B.

Ta có $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \in B)$

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A$ hay $x \notin B)$

b) $(A \cap B) \subset A$ và $(A \cap B) \subset B$. Hơn nữa $(A \cap B) = A \Leftrightarrow A \subset B$.

c) Phép $\cap$ *giao hoán và kết hợp*, nghĩa là

$B \cap A = A \cap B$ và $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

d) $A \cap A = A$ (luật *lũy đẳng*), $A \cap E = A$ (luật *trung hòa*),

$A \cap \varnothing = \varnothing$ (luật *thống trị*), $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (luật *bù*).

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = [-2, 7)$ và $B = (1, 8]$. Ta có $A \cap B = (1, 7)$.

2.3/ PHẦN HỘI:

a) Đặt $A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A$ hay $x \in B \}$ là *phần hội* của A và B.

Ta có $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ hay $x \in B)$

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A$ và $x \notin B)$

b) $(A \cup B) \supset A$ và $(A \cup B) \supset B$. Hơn nữa $(A \cup B) = A \Leftrightarrow A \supset B$.

c) Phép $\cup$ *giao hoán và kết hợp*, nghĩa là

$B \cup A = A \cup B$ và $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

d) $A \cup A = A$ (luật *lũy đẳng*), $A \cup \varnothing = A$ (luật *trung hòa*),

$A \cup E = E$ (luật *thống trị*), $A \cup \overline{A} = E$ (luật *bù*).

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-4, 5)$ và $B = [0, 7]$. Ta có $A \cup B = (-4, 7]$.

2.4/ PHẦN HIỆU:

a) Đặt $A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A$ và $x \notin B \}$ là *phần hiệu* của A và B.

Ta có $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$

$x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \notin A$ hay $x \in B)$

b) $(A \setminus B) \subset A$. Hơn nữa $(A \setminus B) = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

c) Phép $\setminus$ *không giao hoán* và *không kết hợp*, nghĩa là có thể xảy ra

$(B \setminus A) \neq (A \setminus B)$ và $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

d) $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$,

$A \setminus E = \varnothing$, $E \setminus A = \overline{A}$, $A \setminus \overline{A} = A$, $\overline{A} \setminus A = \overline{A}$.

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-\infty, -3)$ và $B = [-10, +\infty)$.

Ta có $A \setminus B = (-\infty, -10)$ và $B \setminus A = [-3, +\infty)$.

2.5/ CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN GIỮA CÁC PHÉP TOÁN:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ và $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (luật *bù DE MORGAN*).

b) $A \cap (A \cup B) = A$ và $A \cup (A \cap B) = A$ (luật *hấp thu*)

c) Phép $\cap$ và $\cup$ *phân phối lẫn nhau*, nghĩa là

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (xóa phép $\setminus$).

2.6/ ÁP DỤNG:

Các tính chất của các phép toán tập hợp dùng để

– *Rút gọn* một biểu thức tập hợp.

– Chứng minh *một đẳng thức* tập hợp.

– Chứng minh *một bao hàm thức* tập hợp.

Ví dụ: Cho các tập hợp $A, B, C \subset E$.

a) Rút gọn $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$.

Ta có $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} =$

$= (A \cup B) \cap \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$

$= [(A \cap \overline{A}) \cup B] \cap (\overline{B} \cup A) = (\varnothing \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) =$

$= (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) = \varnothing \cup (B \cap A) = (B \cap A)$

b) Chứng minh $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Ta có $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) =$

$= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) =$

$= (\varnothing \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap (B \setminus C)$

c) Chứng minh $[(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)] \subset (A \setminus C)$ và không có dấu đẳng thức.

Ta có $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = (B \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{A}} = (B \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$

$= (B \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup A) = (B \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) =$

$= (B \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) = (\varnothing \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) =$

$= \varnothing \cup (B \cap \overline{C} \cap A) = (B \cap \overline{C} \cap A) \subset (\overline{C} \cap A) = (A \cap \overline{C}) = (A \setminus C)$

Chọn $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$ và $C = \varnothing$ thì $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = B \neq (A \setminus C) = A$

III. TÍCH DESCARTES CỦA CÁC TẬP HỢP:

Cho số nguyên $n \geq 2$ và các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều $\neq \varnothing$.

3.1/ ĐỊNH NGHĨA:

$\forall a_j \in A_j \ (1 \leq j \leq n)$, ta có bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ được ghép *một cách hình thức.*

Đặt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_j \in A_j \ (1 \leq j \leq n) \}$.

Ta nói $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j$ là *tích Descartes* của $A_1, A_2, \ldots$ và A_n.

Khi $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ thì ta viết gọn

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \}$.

Ví dụ:

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Q} = \{ (k, q) \mid k \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Q} \} = \{ (5, \frac{-2}{7}), (0, 9), (-4, \frac{8}{3}), \ldots \}$

$\mathbf{R} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{N} \times \mathbf{Z} = \{ (x, q, m, k) \mid x \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{Q}, m \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z} \}$

$= \{ (\sqrt{2}, \frac{1}{4}, 6, -1), (-\ln 3, \frac{-9}{5}, 0, 7), (\pi, -8, 11, 0), \ldots \}$

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ = Tập hợp các điểm trên mặt phẳng (Oxy)

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$

= Tập hợp các điểm trong không gian (Oxyz)

3.2/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* $A, A_1, A_2, \ldots$ và A_n. Khi đó

a) $| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n | = | A_1 | . | A_2 | \ldots | A_n |$

b) Suy ra $| A^n | = | A |^n$.

Ví dụ: Cho $A = \{ a, b \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$ và $C = \{ \alpha, \beta \}$. Khi đó

$A \times B = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$ và $| A \times B | = 6 = | A |.| B | = 2 \times 3$

$A \times B \times C = \{ (a,1,\alpha), (a,2,\alpha), (a,3,\alpha), (b,1,\alpha), (b,2,\alpha), (b,3,\alpha), (a,1,\beta), (a,2,\beta), (a,3,\beta), (b,1,\beta), (b,2,\beta), (b,3,\beta) \}$ và $| A \times B \times C | = 12 = | A |.| B |.| C | = 2 \times 3 \times 2$

$A^2 = A \times A = \{ (a,a), (a,b), (b,a), (b,b) \}$ và $| A^2 | = 4 = | A |^2 = 2^2$

$A^3 = A^2 \times A = \{ (a,a,a), (a,b,a), (b,a,a), (b,b,a), (a,a,b), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,b) \}$ và $| A^3 | = 8 = | A |^3 = 2^3$

IV. ÁNH XẠ:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho các tập hợp X và Y với $X \neq \varnothing \neq Y$.

a) Một *ánh xạ* f từ X vào Y là một qui tắc như sau:

Với mỗi $x \in X$, *có tương ứng duy nhất* $y_x \in Y$ ($\forall x \in X, \exists!\, y_x \in Y$).

Ký hiệu ánh xạ f là $f : X \dashrightarrow Y$ trong đó

$$x \mapsto y_x = f(x)$$

$y_x = f(x)$ gọi là *ảnh của x qua ánh xạ f* hay là *giá trị của ánh xạ f tại x*.

X là *miền xác định* của ánh xạ f. Y là *miền* (*chứa các*) *ảnh* của ánh xạ f.

b) Khi $X, Y \subset \mathbf{R}$, ta thường gọi ánh xạ f là *hàm số* $y = f(x)$.

Ví dụ:

a) $f : X = \{ a, b, c, d \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ có $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ và $f(d) = 2$. Ta có f là một ánh xạ.

b) $g : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = (0, +\infty)$ có $g(x) = \dfrac{2^x}{|x-1|}$ $\forall x \in X$.

Ta có g là một hàm số.

c) $h : X = \mathbf{R} \to Y = [\, 1, +\infty)$ thỏa $h(x) = \ln| x^2 - 3x + 2 |$ $\forall x \in X$.

Ta có h không phải là một hàm số vì $\exists 1 \in X$, $h(1)$ không xác định (hoặc nói $\exists 0 \in X, h(0) = \ln 2 \notin Y$).

d) $u : X = \mathbf{Q} \to Y = \mathbf{Z}$ có $u(\frac{p}{q}) = p + q$ $\forall x = \frac{p}{q} \in X$. Ta có h không phải là một hàm số vì $\exists x = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \in X$ mà $h(x) = 1 + 2 = 3$ và $h(x) = 2 + 4 = 6$: mâu thuẫn.

4.2/ ÁNH XẠ ĐỒNG NHẤT: Cho tập hợp $X \neq \varnothing$.

Ánh xạ $Id_X : X \to X$ gọi là *ánh xạ đồng nhất* trên X (Id = Identity).

$$x \mapsto x$$

4.3/ SO SÁNH ÁNH XẠ: Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : X \to Y$.

a) Ta nói $f = g$ nếu $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

b) Suy ra $f \neq g \Leftrightarrow \exists x_o \in X, f(x_o) \neq g(x_o)$.

Ví dụ: Cho f, g, h : X = **R** $\rightarrow$ Y = **R** thỏa f (x) = sinx, g(x) = | sin | x | | và

h(x) = cos (x + $\frac{7\pi}{2}$) $\forall$x $\in$ X. Ta có g $\neq$ f và h = f vì

$\exists(-\frac{\pi}{2}) \in X,\ g(-\frac{\pi}{2}) = |\sin| -\frac{\pi}{2}|| = 1 \neq f(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1.$

$\forall x \in X,\ h(x) = \cos(x + \frac{7\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = f(x).$

4.4/ <u>TÍCH CÁC ÁNH XẠ:</u> Cho f : X $\rightarrow$ Y và g : Z $\rightarrow$ T với Y $\subset$ Z .

a) Lập ánh xạ h : X $\rightarrow$ T có h(x) = g[f (x)] $\forall$x $\in$ X. Ta nói h là *ánh xạ tích* của f và g và ký hiệu h = g $_o$ f .
Như vậy, $\forall$x $\in$ X, h(x) = (g $_o$ f)(x) = g [f (x)].

b) Tích ánh *xạ có tính kết hợp* nên ta có thể lập *tích của nhiều ánh xạ liên tiếp* nếu miền ảnh của ánh xạ trước *chứa trong* miền xác định của ánh xạ đi sau.

Ví dụ: Cho f : X = **R** $\rightarrow$ Y = (8, + ∞) thỏa f (x) = 3e^x + 8 $\forall$x $\in$ X,

g : Z = [0, + ∞) $\rightarrow$ T = [–2, + ∞) thỏa g(x) = $\sqrt{x}$ – 2 $\forall$x $\in$ Z

và h : U = (– 5, + ∞) $\rightarrow$ V = **R** thỏa h(x) = x^4 + 1 $\forall$x $\in$ X.

Ta có Y $\subset$ Z và T $\subset$ U nên có các ánh xạ tích u = g $_o$ f và v = h $_o$ g $_o$ f .

$\forall x \in X,\ u(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3e^x + 8) = \sqrt{3e^x + 8} - 2$ và

$v(x) = (h \circ u)(x) = h[u(x)] = h(\sqrt{3e^x + 8} - 2) = (\sqrt{3e^x + 8} - 2)^4 + 1$

4.5/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho f : X $\rightarrow$ Y . Khi đó

a) $(Id_Y) \circ f = f = f \circ Id_X$. Hơn nữa nếu X = Y thì $(Id_X) \circ f = f = f \circ Id_X$.

b) Nếu X $\neq$ Y và g : Y $\rightarrow$ X thì tồn tại g $_o$ f và f $_o$ g nhưng g $_o$ f $\neq$ f $_o$ g .

c) Nếu f : X $\rightarrow$ X và g : X $\rightarrow$ X thì tồn tại g $_o$ f và f $_o$ g nhưng có thể xảy ra g $_o$ f $\neq$ f $_o$ g . Như vậy tích ánh xạ *không giao hoán*.

<u>Ví dụ:</u>

a) f : X = **R** $\rightarrow$ Y = [0, + ∞) thỏa f (x) = (x + 1)^2 $\forall$x $\in$ X và
g : Y = [0, + ∞) $\rightarrow$ X = **R** với g(x) = sin$\sqrt{x}$ $\forall$x $\in$ Y.

$\forall x \in X,\ (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x+1)^2] = \sin\sqrt{(x+1)^2} = \sin|x+1|$

$\forall x \in Y.\ (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin\sqrt{x}) = (\sin\sqrt{x} + 1)^2$

Do X $\neq$ Y nên g $_o$ f $\neq$ f $_o$ g .

b) u : X = **R** $\rightarrow$ X thỏa u(x) = 2x^2 – 5x + 1 và v(x) = $\frac{3x+2}{x^2+1}$ $\forall$x $\in$ X.

$\forall x \in X,\ (v \circ u)(x) = v[u(x)] = \frac{3(2x^2-5x+1)+2}{(2x^2-5x+1)^2+1} = \frac{6x^2-15x+5}{4x^4-20x^3+29x^2-10x+2}$

và $(u \circ v)(x) = u[v(x)] = 2(\frac{3x+2}{x^2+1})^2 - 5(\frac{3x+2}{x^2+1}) + 1 = \frac{x^4-15x^3+10x^2+9x-1}{x^4+2x^2+1}$

Do $\exists 0 \in X,\ (v \circ u)(0) = \frac{5}{2} \neq (u \circ v)(0) = -1$ nên v $_o$ u $\neq$ u $_o$ v .

V. <u>ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CỦA TẬP HỢP QUA ÁNH XẠ:</u>

5.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $f : X \to Y$ và $A \subset X$.

a) Đặt $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset Y$. Ta nói $f(A)$ là *ảnh của* A *qua ánh xạ* f
$\forall y \in Y$, $[\, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)\,]$ và $[\, y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)\,]$

b) Khi $A = \varnothing$ thì $f(\varnothing) = \varnothing$. Khi $A = X$ thì $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$.
Ta nói $f(X)$ là *tập hợp tất cả các ảnh của* f và ký hiệu $f(X) = \mathrm{Im}(f)$ (Images of f) .

c) Cho $f : X \to Y$ và $g : Z \to T$. Để lập được ánh xạ tích $h = g \circ f : X \to T$, ta *chỉ cần có điều kiện* $f(X) \subset Z$ (không cần điều kiện đặc biệt $Y \subset Z$).

<u>Ví dụ:</u>

a) $f : X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \} \to Y = \{ a, b, c, d, e, u, v, w, z \}$ có $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = c$, $f(5) = b$, $f(6) = d$ và $f(7) = e$.
Với $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \subset X$ thì $f(A) = \{ a, b, c \} \subset Y$ và $\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ a, b, c, d, e \} \subset Y$.

b) $g : X = \mathbf{R} \to Y = (0, +\infty)$ thỏa $g(x) = x^2 - 2x + 3$ $\forall x \in X$. Tìm $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ và $\mathrm{Im}(g) = g(X)$ nếu $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$, $B = [\, 3, 5)$ và $C = [\, -2, 3\,]$. Ta có $g(A) = \{ 2, 3, 6, 11 \}$ vì $g(-2) = 11$, $g(-1) = g(3) = 6$, $g(0) = g(2) = 3$ và $g(1) = 2$. Do $g'(x) = 2(x - 1)$ $\forall x \in X$ nên g tăng trên $(-\infty, 1]$ và giảm trên $[\, 1, +\infty)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, ta có $g(B) = [\, 6, 18\,]$, $g(C) = [\, 2, 11\,]$ và $g(X) = [\, 2, +\infty)$.

5.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $f : X \to Y$ và $B \subset Y$.

a) Đặt $f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X$.
Ta nói $f^{-1}(B)$ là *ảnh ngược của* B *bởi ánh xạ* f .
$\forall x \in X$, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$
$x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B$

b) Khi $B = \varnothing$ thì $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Khi $B = Y$ thì $f^{-1}(Y) = X$.
Khi $B = \{ b \}$ thì $f^{-1}(B) = f^{-1}(b) = \{ x \in X \mid f(x) = b \}$ là *tập hợp các nghiệm trên* X *của phương trình* $f(x) = b$ (ẩn là $x \in X$).
Ta cũng nói $f^{-1}(b)$ là *tập hợp tất cả các ảnh ngược của* b *bởi ánh xạ* f .

<u>Ví dụ:</u>

a) $f : X = \{ a, b, c, d, e, u, v, w, z \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ với $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$, $f(e) = 2$, $f(u) = 4$, $f(v) = 1$, $f(w) = 5$ và $f(z) = 7$.
Ta có $f^{-1}(1) = \{ a, c, v \}$, $f^{-1}(2) = \{ b, e \}$, $f^{-1}(3) = \{d\}$ và $f^{-1}(6) = f^{-1}(8) = \varnothing$
Với $B = \{ 1, 2, 3, 6, 8 \} \subset Y$ thì $f^{-1}(B) = \{ a, b, c, d, e, v \} \subset X$ và $f^{-1}(Y) = X$

b) $g : X = \mathbf{R} \to Y = [-3, +\infty)$ thỏa $g(x) = 2x^2 - 1$ $\forall x \in X$. Tìm $g^{-1}(A)$, $g^{-1}(B)$, $g^{-1}(C)$, $g^{-1}(D)$ nếu $A = \{ -5, -1, 0, 8 \}$, $B = (-\infty, -2\,]$, $C = (-4, 5)$, $D = [\, 1, 6)$.
Ta có $g^{-1}(-5) = \varnothing$, $g^{-1}(-1) = \{ 0 \}$, $g^{-1}(0) = \{ \pm 1/\sqrt{2} \}$ và $g^{-1}(8) = \{ \pm 3/\sqrt{2} \}$ nên $g^{-1}(A) = \{ 0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2} \}$.
Để ý $g^{-1}(1) = \{ \pm 1 \}$, $g^{-1}(5) = \{ \pm\sqrt{3} \}$, $g^{-1}(6) = \{ \pm\sqrt{7/2} \}$ và $g'(x) = 4x$ $\forall x \in X$
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, ta tìm được
$g^{-1}(B) = \varnothing$, $g^{-1}(C) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ và $g^{-1}(D) = (-\sqrt{7/2}, -1] \cup [\, 1, \sqrt{7/2})$.

5.3/ TÍNH CHẤT: Cho $f : X \to Y$ với $A, A' \subset X$ và $B, B' \subset Y$. Khi đó

a) Nếu $A \subset A'$ thì $f(A) \subset f(A')$. Nếu $B \subset B'$ thì $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

b) $f^{-1}[f(A)] \supset A$ và $f[f^{-1}(B)] \subset B$.

c) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$, $f(A \cap A') \subset [f(A) \cap f(A')]$ và $f(A \setminus A') \supset f(A) \setminus f(A')$.

d) $f^{-1}(A \cup A') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A')$, $f^{-1}(A \cap A') = [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A')]$ và $f^{-1}(A \setminus A') = [f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A')]$.

Ví dụ: Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = (-2, +\infty)$ thỏa $f(x) = x^2 \quad \forall x \in X$.

a) $A = \{1\} \subset X$ có $f(A) = \{1\}$ và $f^{-1}[f(A)] = \{\pm 1\} \supset A$ với $f^{-1}[f(A)] \neq A$.

b) $B = \{\pm 1\} \subset Y$ có $f^{-1}(B) = \{1\}$ và $f[f^{-1}(B)] = \{1\} \subset B$ với $f[f^{-1}(B)] \neq B$.

c) $A = \{1\}, A' = \{-1\} \subset X$ có $A \cap A' = \varnothing$ và $f(A) = f(A') = \{1\}$ nên $f(A \cap A') = \varnothing \subset [f(A) \cap f(A')] = \{1\}$ và $f(A \cap A') \neq [f(A) \cap f(A')]$.
Mặt khác $A \setminus A' = \{1\}$ nên $f(A \setminus A') = \{1\} \supset [f(A) \setminus f(A')] = \varnothing$ và $f(A \setminus A') \neq [f(A) \setminus f(A')]$.

VI. PHÂN LOẠI ÁNH XẠ:

6.1/ ĐƠN ÁNH: Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *đơn ánh* nếu “ $\forall x, x' \in X, \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ”.

b) Suy ra : f là *đơn ánh* $\Leftrightarrow$ “ $\forall x, x' \in X, \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ”.
$\Leftrightarrow$ “ $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ có *không quá một nghiệm* trên X ”

Ví dụ:

a) $u : X = \{1, 2, 3\} \to Y = \{a, b, c, d, e\}$ với $u(1) = a, u(2) = b$ và $u(3) = c$.
Ta có u là một đơn ánh vì
Cách 1: $1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$ có $u(1) \neq u(2) \neq u(3) \neq u(1)$.
Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a, u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm duy nhất lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ trên X. Các phương trình $u(x) = d$ và $u(x) = e$ đều vô nghiệm trên X. Như vậy mỗi phương trình trên có không quá một nghiệm trên X.

b) $f : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = \dfrac{5-2x}{x-1} = -2 + \dfrac{3}{x-1} \quad \forall x \in X$.

Ta có f là một đơn ánh vì

Cách 1: $\forall x, x' \in X, \ x \neq x' \Rightarrow 0 \neq x - 1 \neq x' - 1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} \neq \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 + \dfrac{3}{x-1} \neq -2 + \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Cách 2: $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow -2 + \dfrac{3}{x-1} = -2 + \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = x' - 1 \Rightarrow x = x'$.

Cách 3: $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} = y + 2 \ (*)$.

Nếu $y = -2$ thì phương trình (*) vô nghiệm trên X.

Nếu $y \neq -2$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1 + \dfrac{3}{y+2} \in X$.

Như vậy, $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ có không quá một nghiệm trên X.

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = 2e^{x} - 3e^{-x}$ $\forall x \in X$.

Ta có $g'(x) = 2e^{x} + 3e^{-x} > 0$ $\forall x \in X$ nên g tăng ngặt trên X [$\forall x, x' \in X$, $x < x' \Rightarrow g(x) < g(x')$] , nghĩa là g đơn ánh.

d) Cho $h : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $h(x) = 4\cos^2 x - 5x$ $\forall x \in X$.

Ta có $h'(x) = -4\sin 2x - 5 \leq -1 < 0$ $\forall x \in X$ nên h giảm ngặt trên X [$\forall x, x' \in X, x < x' \Rightarrow h(x) > h(x')$] , nghĩa là h là một đơn ánh.

6.2/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f *không là đơn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists x, x' \in X$, $x \neq x'$ và $f(x) = f(x')$ ".

b) f *không là đơn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có hơn một nghiệm* trên X ".

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{a, b, c, d\} \to Y = \{1, 2, 3\}$ với $u(a) = 1, u(b) = u(d) = 2$ và $u(c) = 3$. Ta có u không phải là một đơn ánh vì

Cách 1 : $\exists b, d \in X, b \neq d$ và $u(b) = u(d) = 2$.

Cách 2 : $\exists 2 \in Y$, phương trình $u(x) = 2$ có các nghiệm $x = b, x = d$ trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ $\forall x \in X$.

Ta có f không phải là một đơn ánh vì

Cách 1: $\exists 0, 3 \in X, 0 \neq 3$ và $f(0) = f(3) = 1$.

Cách 2: $\exists 1 \in Y$, phương trình $f(x) = 1$ có các nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$ trên X

6.3/ <u>TOÀN ÁNH:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$.

b) Suy ra :

f là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm* trên X "

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ 1, 2, 3, 4 \} \to Y = \{ a, b, c \}$ với $u(1) = a, u(3) = u(4) = c$ và $u(2) = b$. Ta có u là một toàn ánh vì

Cách 1 : $u(X) = \{ a, b, c \} = Y$.

Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a$, $u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ trên X.

b) $f : X = \mathbf{R} \to Y = [5, +\infty)$ thỏa $f(x) = x^2 - 4x + 9$ $\forall x \in X$.

Ta có f là một toàn ánh vì

Cách 1: dùng bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thấy $f(X) = Y$.

Cách 2: $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y - 5$ có nghiệm trên X là $x = 2 + \sqrt{y-5}$.

6.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f không là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ $f(X) \neq Y$

b) f không là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *vô nghiệm* trên X

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ a, b, c \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ với $u(a) = 1, u(b) = 2$ và $u(c) = 3$. Ta có u không phải là một toàn ánh vì

Cách 1 : $u(X) = \{ 1, 2, 3 \} \neq Y$.

Cách 2 : $\exists 4 \in Y$, phương trình $u(x) = 4$ vô nghiệm trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = (-1, +\infty)$ thỏa $f(x) = 3.2^x + 1 \ \forall x \in X$.

Ta có f không là một toàn ánh vì

Cách 1: $\forall x \in X, f(x) = 3.2^x + 1 > 1$ nên $f(X) \subset (1, +\infty)$ và do đó $f(X) \neq Y$.

Cách 2: $\exists 0 \in Y$, phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3.2^x = -1$ vô nghiệm trên X.

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \setminus \{2\} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = \dfrac{3x+4}{x-2} = 3 + \dfrac{10}{x-2} \ \forall x \in X$.

Ta có g không là một toàn ánh vì

Cách 1: dùng bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, ta thấy $g(X) = \mathbf{R} \setminus \{3\} \neq Y$.

Cách 2: $\exists 3 \in Y$, phương trình $g(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{10}{x-2} = 0$ vô nghiệm trên X.

6.5/ <u>SONG ÁNH:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *song ánh* nếu f là *đơn ánh* và *toàn ánh*.

b) Suy ra : f là *song ánh* $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* trên X " (chỉ dùng khi giải được phương trình $f(x) = y$ trên X).

c) Suy ra : f *không là song ánh* $\Leftrightarrow$ f *không đơn ánh* hay f *không toàn ánh*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ 1, 2, 3 \} \to Y = \{ a, b, c \}$ với $u(1) = a, u(2) = b$ và $u(3) = c$.

Ta có u là một song ánh vì

Cách 1 : u đơn ánh [$1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$ cho $u(1) \neq u(2) \neq u(3) \neq u(1)$] và
u toàn ánh [$u(X) = \{a, b, c\} = Y$].

Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a, u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm duy nhất (lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$) trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = 2\sin x - 3x \ \forall x \in X$.

f là đơn ánh vì $f'(x) = 2\cos x - 3 \leq -1 < 0 \ \forall x \in X$ và f giảm ngặt trên X.

f là toàn ánh do từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Vậy f là một song ánh (không giải được phương trình $f(x) = 2\sin x - 3x = y$).

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = 3e^x - e^{-x} + 2 \ \forall x \in X$.

$\forall y \in Y$, phương trình $g(x) = y$ (ẩn $x \in X$) $\Leftrightarrow 3e^{2x} + (2-y)e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3t^2 + (2-y)t - 1 = 0$ với $t = e^x > 0$ và $\Delta = (y-2)^2 + 12 \geq 12 > 0$.

$\Leftrightarrow t = \dfrac{y-2+\sqrt{(y-2)^2+1}}{6} > 0 \Leftrightarrow x = \ln t = \ln\dfrac{y-2+\sqrt{(y-2)^2+1}}{6} \in X$.

Phương trình $g(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* trên X nên g là một song ánh.

d) Cho $h : X = \{ a, b, c, d \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ thỏa $h(a) = h(c) = 1, h(b) = 2$ và $h(d) = 3$. Ta có h không phải là một song ánh vì

Cách 1: h không phải là một đơn ánh (do $\exists a, c \in X, a \neq c$ và $h(a) = h(c) = 1$)

Cách 2 : h không phải là một toàn ánh (do $h(X) = \{ 1, 2, 3 \} \neq Y$)

6.6/ <u>ÁNH XẠ NGƯỢC CỦA SONG ÁNH:</u> Cho *song ánh* $f : X \to Y$.

Ta đã biết $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* là x_y trên X.

Lập *ánh xạ* $\varphi : Y \to X$ có $\varphi(y) = x_y \ \forall y \in Y$. Ta nói φ là *ánh xạ ngược* của f và ký hiệu $\varphi = f^{-1}$. Khi đó $\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Ví dụ:

a) $u : X = \{ a, b, c, d \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ với $u(a) = 1, u(b) = 2, u(c) = 3, u(d) = 4$.

Ta có u là một song ánh vì các phương trình $u(x) = 1, u(x) = 2, u(x) = 3$ và $u(x) = 4$ đều có nghiệm duy nhất (lần lượt là $x = a, x = b, x = c, x = d$) trên X.

Ta có ánh xạ ngược $v = u^{-1} : Y \to X$ với $v(1) = a, v(2) = b, v(3) = c, v(4) = d$.

b) Cho $f : X = (3, 6] \to Y = [-27, -6)$ thỏa $f(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in X$.

$\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (ẩn $x \in X$) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + y + 3 = 0$ với $\Delta' = 1 - (y + 3) = -(y + 2) \in (4, 25]$, $\sqrt{\Delta'} \in (2, 5]$ và $-\sqrt{\Delta'} \in [-5, -2)$.

Ta có $x_1 = 1 + \sqrt{\Delta'} \in (3, 6] = X$ (nhận x_1) và $x_2 = 1 - \sqrt{\Delta'} \in [-4, -1)$, nghĩa là $x_2 \notin X$ (loại x_2). Vậy phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x_y = x_1 = 1 + \sqrt{-y-2}$. Do đó f là một song ánh và có ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ thỏa $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{-y-2} \quad \forall y \in Y$. Bằng cách đổi biến y thành biến x, ta có thể viết lại $f^{-1} : Y \to X$ với $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-x-2} \quad \forall x \in Y$.

6.7/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó

a) Nếu f là *một song ánh* thì f^{-1} cũng là *một song ánh* và $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Nếu f là *một song ánh* thì $f^{-1} \circ f = Id_X$ và $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

c) Nếu f là *một song ánh* và $X = Y$ thì $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_X$.

d) Nếu f và g là *các song ánh* thì $h = g \circ f$ cũng là *một song ánh* và $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ví dụ:

a) Xét lại $f : X = (3, 6] \to Y = [-27, -6)$ với $f(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in X$.

Từ **Ví dụ** của (**6.6**), ta thấy f là một song ánh có $f^{-1} : Y \to X$ thỏa $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-x-2} \quad \forall x \in Y$. Đặt $g = f^{-1}$ thì ta có thể kiểm chứng được g cũng là một song ánh thỏa $g^{-1} = f$, $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$.

b) Cho $h : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $h(x) = 3x + 4 \quad \forall x \in X$. Ta kiểm chứng được h là một song ánh và $h^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3} \quad \forall x \in X$. Do đó $h^{-1} \circ h = h \circ h^{-1} = Id_X$.

c) Cho $\varphi : X = \mathbf{R} \to Y = (1, +\infty)$ thỏa $\varphi(x) = e^x + 1 \quad \forall x \in X$ và $\psi : Y \to Z = (0, +\infty)$ thỏa $\psi(x) = x^2 + 4x - 5 \quad \forall x \in Y$. Ta có $\theta = \psi \circ \varphi : X \to Z$ thỏa $\theta(x) = (e^x + 1)^2 + 4(e^x + 1) - 5 = e^{2x} + 6e^x \quad \forall x \in X$.

Ta kiểm chứng được φ và ψ đều là các song ánh với $\varphi^{-1}(x) = \ln(x - 1) \quad \forall x \in X$ và $\psi^{-1}(x) = \sqrt{x+9} - 2 \quad \forall x \in Y$.

Do đó $\theta = \psi \circ \varphi$ cũng là một song ánh và $\theta^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} : Z \to X$ thỏa $\theta^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x+9} - 3) \quad \forall x \in Z$.

6.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (nhận diện hai ánh xạ là song ánh và là ánh xạ ngược của nhau)

Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to X$. Các phát biểu sau đây là *tương đương* :

a) f là *một song ánh* và $f^{-1} = g$ b) g là *một song ánh* và $g^{-1} = f$

c) $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$

Ví dụ: Cho $f : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ và $g : Y \to X$ thỏa

$f(x) = \dfrac{3-2x}{x-1}$ $\forall x \in X$ và $g(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ $\forall x \in Y$.

Ta kiểm chứng được $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$.

Như vậy f và g đều là các song ánh thỏa $f^{-1} = g$ và $g^{-1} = f$.

6.9/ PHÉP LŨY THỪA ÁNH XẠ: Cho ánh xạ $f : X \to X$.

a) Đặt $f^0 = Id_X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, … và $f^k = f \circ f^{k-1}$ $\forall k \geq 1$.

Ta có các ánh xạ $f^k : X \to X$ $\forall k \geq 0$.

b) Nếu f là *một song ánh* thì ta đặt thêm : f^{-1} là *ánh xạ ngược* của f,

$f^{-2} = (f^{-1})^2$, … và $f^{-k} = (f^{-1})^k$ $\forall k \geq 2$. Ta có $f^{-k} : X \to X$ $\forall k \geq 1$.

Như vậy nếu f là *một song ánh* thì ta có các ánh xạ $f^m : X \to X$ $\forall m \in \mathbf{Z}$

Ví dụ:

a) Cho $f : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in X$.

$\forall k \in \mathbf{N}$, ta tính được $f^k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{kx^2+1}}$ $\forall x \in X$ (phương pháp qui nạp).

b) Cho $g : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $g(x) = 2x + 3$ $\forall x \in X$.

$\forall k \in \mathbf{N}$, ta tính được $g^k(x) = 2^k x + 3(2^k - 1)$ $\forall x \in X$ (phương pháp qui nạp).

Ta kiểm chứng được g là một song ánh và $g^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$ $\forall x \in X$.

Từ đó tính được $g^{-k}(x) = 2^{-k} x + 3(2^{-k} - 1)$ $\forall x \in X, \forall k \in \mathbf{N}$ và $k \geq 2$

(phương pháp qui nạp). Như vậy $\forall m \in \mathbf{Z}$, $g^m(x) = 2^m x + 3(2^m - 1)$ $\forall x \in X$.

6.10/ ÁP DỤNG ÁNH XẠ NGƯỢC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ÁNH XẠ:

a) Cho ánh xạ h và *song ánh* f. Giả sử có ánh xạ φ thỏa $f \circ \varphi = h$.

Ta có $f \circ \varphi = h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ \varphi) = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ \varphi = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (Id_X) \circ \varphi = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow \varphi = f^{-1} \circ h$ (*nghiệm duy nhất*)

b) Cho ánh xạ h và *song ánh* g. Giả sử có ánh xạ ψ thỏa $\psi \circ g = h$.

Ta có $\psi \circ g = h \Leftrightarrow (\psi \circ g) \circ g^{-1} = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow \psi \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ g^{-1}$

$\Leftrightarrow \psi \circ Id_Y = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow \psi = h \circ g^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*)

c) Cho ánh xạ h và *các song ánh* f và g. Giả sử có ánh xạ θ thỏa

$f \circ \theta \circ g = h$. Ta có $f \circ \theta \circ g = h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ \theta \circ g) \circ g^{-1} = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow$

$(f^{-1} \circ f) \circ \theta \circ (g \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ h \circ g^{-1} \Leftrightarrow (Id_X) \circ \theta \circ Id_Y = f^{-1} \circ h \circ g^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*)

Ví dụ:

a) Cho $f : Y = (-8, +\infty) \to Z = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{x+8}{5} - 1\right)$ $\forall x \in Y$.

Ta có f là một song ánh và $f^{-1} : Z \to Y$ thỏa $f^{-1}(x) = 5e^{4x+1} - 8$ $\forall x \in Z$.

Xét $h : X = \mathbf{R} \to Z$ thỏa $h(x) = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{4x^2 - 4x + 3}{5} - 1\right)$ $\forall x \in X$.

Tìm $\varphi : X \to Y$ thỏa $f \circ \varphi = h$. Ta có $\varphi = f^{-1} \circ h$ và

$\forall x \in X$, $\varphi(x) = (f^{-1} \circ h)(x) = f^{-1}[h(x)] = 4x^2 - 4x - 5$

b) Cho $g : X = [-1, 4] \to Y = [-4, 31]$ thỏa $g(x) = x^2 + 4x - 1 \ \forall x \in X$.

Ta có g là một song ánh và $g^{-1}: Y \to X$ thỏa $g^{-1}(x) = \sqrt{x+5} - 2 \ \forall x \in Y$.

Xét $p : X \to Z = \mathbf{R}$ thỏa $p(x) = \sqrt[4]{\ln(x^2 + 4x + 7)} - 3 \ \forall x \in X$.

Tìm $\psi : Y \to Z$ thỏa $\psi \circ g = p$. Ta có $\psi = p \circ g^{-1}$ và

$\forall x \in Y, \psi(x) = (p \circ g^{-1})(x) = p[g^{-1}(x)] = \sqrt[4]{\ln(x+8)} - 3$

c) Cho $u : X = \mathbf{R} \to Y = (-1, 1)$ thỏa $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ \forall x \in X$.

Ta có u là một song ánh và $u^{-1}: Y \to X$ thỏa $u^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in Y$.

Cho $v : Z = \mathbf{R} \setminus \{-4\} \to T = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ thỏa $v(x) = \dfrac{2x-5}{x+4} \ \forall x \in Z$.

Ta có v là một song ánh và $v^{-1} : T \to Z$ thỏa $v^{-1}(x) = \dfrac{4x+5}{2-x} \ \forall x \in T$.

Xét $q : X \to T$ thỏa $q(x) = \dfrac{-28x^2 - 5}{12x^2 + 4} \ \forall x \in X$.

Tìm $\theta : Y \to Z$ thỏa $v \circ \theta \circ u = q$. Ta có $\theta = v^{-1} \circ q \circ u^{-1}$ và

$\forall x \in Y, \theta(x) = (v^{-1} \circ q \circ u^{-1})(x) = v^{-1}\{ q[u^{-1}(x)] \} = \dfrac{-4x^2}{x^2+3}$

6.11/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho X, Y là các tập hợp *hữu hạn* và $f : X \to Y$.

a) Nếu f là *một đơn ánh* thì $|X| \le |Y|$.
b) Suy ra nếu $|X| > |Y|$ thì f *không phải là đơn ánh*.
c) Nếu f là *một toàn ánh* thì $|X| \ge |Y|$.
d) Suy ra nếu $|X| < |Y|$ thì f *không phải là toàn ánh*.
e) Nếu f là *một song ánh* thì $|X| = |Y|$.
f) Suy ra nếu $|X| \ne |Y|$ thì f *không phải là song ánh*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét đơn ánh u trong **Ví dụ** của **6.1**. Ta có $|X| = 3 \le |Y| = 5$.
b) Xét u trong **Ví dụ** của **6.2**. Ta có $|X| = 4 > |Y| = 3$ nên u không đơn ánh.
c) Xét toàn ánh u trong **Ví dụ** của **6.3**. Ta có $|X| = 4 \ge |Y| = 3$.
d) Xét u trong **Ví dụ** của **6.4**. Ta có $|X| = 3 < |Y| = 4$ nên u không toàn ánh.
e) Xét song ánh u trong **Ví dụ** của **6.6**. Ta có $|X| = 4 = |Y|$.
f) Xét u trong **Ví dụ** của **6.1**. Ta có $|X| = 3 \ne |Y| = 5$ nên u không song ánh.

GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

I. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B, $A_1, A_2, \ldots$ và A_n .

a) Nếu A và B *rời nhau* ($A \cap B = \varnothing$) thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

b) Nếu $A_1, A_2, \ldots$ và A_n *rời nhau từng đôi một* ($A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) thì $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

Ví dụ:

a) Lớp học L có 80 sinh viên nam và 65 sinh viên nữ. Ta có thể viết $L = A \cup B$ với $A = \{ x \in L \mid x$ là nam $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ là nữ $\}$ và $A \cap B = \varnothing$. Suy ra $|L| = |A \cup B| = |A| + |B| = 80 + 65 = 145$.
Vậy lớp học L có 145 sinh viên.

b) Trường T có 300 học sinh lớp VI, 280 học sinh lớp VII, 250 học sinh lớp VIII và 220 học sinh lớp IX. Ta có thể viết $T = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$ với $A_j = \{ x \in T \mid x$ học lớp $j \}$ $(6 \leq j \leq 9)$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $6 \leq i \neq j \leq 9$.
Suy ra $|T| = |A_6| + |A_7| + |A_8| + |A_9| = 300 + 280 + 250 + 220 = 1.050$.
Vậy trường T có 1.050 học sinh.

1.2/ MỆNH ĐỀ: Cho tập hợp *hữu hạn* E và $B \subset E$.

a) Đặt $\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$ ($\wp(E)$ là *tập hợp tất cả các tập hợp con* của E)
Nếu $|E| = n$ (n nguyên ≥ 0) thì $|\wp(E)| = 2^n$.

b) $|B| = |E| - |\overline{B}|$ (nếu việc đếm $|E|$ và $|\overline{B}|$ dễ dàng hơn việc đếm $|B|$).

Ví dụ: Cho $E = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ và $\Pi = \wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$.

a) Do $|E| = 9$ nên $|\Pi| = 2^9 = 512$.

b) Cho $\Phi = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \in A$ hay $2 \in A) \}$ thì $\Phi \subset \Pi$ và
$\overline{\Phi} = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \notin A$ và $2 \notin A) \} = \wp(F)$ với $F = E \setminus \{1,2\}$ và $|F| = 7$.
Suy ra $|\Phi| = |\Pi| - |\overline{\Phi}| = 2^9 - 2^7 = 512 - 128 = 384$.

1.3/ NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A và B. Ta có

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (nguyên lý bù trừ).

b) $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = |B| + |A \setminus B| =$
$= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

Ví dụ: Lớp học L có 95 sinh viên học tiếng Anh, 60 sinh viên học tiếng Pháp và 43 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Giả sử mỗi sinh viên trong lớp L đều học tiếng Anh hay tiếng Pháp. Hỏi lớp L có bao nhiêu sinh viên ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Anh ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Pháp ?
Đặt $A = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Pháp $\}$ thì

$L = A \cup B$ và $A \cap B = = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh và tiếng Pháp $\}$. Ta có
$| L | = | A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | = 95 + 60 - 43 = 112$
Số sinh viên chỉ học tiếng Anh $= | A \setminus B | = | A | - | A \cap B | = 95 - 43 = 52$
Số sinh viên chỉ học tiếng Pháp $= | B \setminus A | = | B | - | A \cap B | = 60 - 43 = 17$

1.4/ <u>NGUYÊN LÝ CỘNG:</u> Một công việc có thể thực hiện bằng một trong k cách khác nhau (chọn cách này thì không chọn các cách khác). Cách thứ j có thể thu được m_j kết quả khác nhau ($1 \le j \le k$). Ta có số kết quả khác nhau có thể xảy ra khi thực hiện xong công việc là $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$.

<u>Ví dụ:</u> Người ta đưa vào danh sách bầu chọn " quả bóng vàng " gồm 5 cầu thủ Đức, 4 cầu thủ Argentina, 3 cầu thủ Hà Lan và 2 cầu thủ Brazil. Số cầu thủ là ứng viên của " quả bóng vàng " là $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ (cầu thủ).

1.5/ <u>NGUYÊN LÝ NHÂN:</u> Một quá trình bao gồm k công việc diễn ra liên tiếp hoặc đồng thời. Việc thứ j có thể có m_j cách thực hiện ($1 \le j \le k$). Số cách khác nhau để thực hiện xong quá trình là $(m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Đi từ Sài gòn đến Cần Thơ là một quá trình bao gồm 4 công việc liên tiếp trong đó việc 1: đi từ Sài Gòn đến Long An (giả sử có 3 lộ trình), việc 2: đi từ Long An đến Tiền Giang (giả sử có 4 lộ trình), việc 3: đi từ Tiền Giang đến Vĩnh Long (giả sử có 2 lộ trình) và việc 4: đi từ Vĩnh Long đến Cần Thơ (giả sử có 3 lộ trình). Khi đó số lộ trình khác nhau để đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72 \text{ (lộ trình)}.$$

b) Xét số nguyên dương $N = \overline{abcd}$ có 4 chữ số thập phân trong đó a tùy ý, b chẵn, $c \,\vdots\, 3$ và $d > 3$. Việc xây dựng số N xem như một quá trình bao gồm 4 công việc đồng thời (a có 9 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn, d có 6 cách chọn). Số lượng số N có thể tạo ra là $9 \times 5 \times 4 \times 6 = 1080$ (số).

1.6/ <u>NGUYÊN LÝ DIRICHLET:</u> (Khẳng định *sự tồn tại*)

Có n con cá và m cái ao (chưa có cá) thỏa $n > m$.
Thả tùy ý n cá xuống m ao. Khi đó

a) Có ít nhất một ao chứa ít nhất 2 cá.

b) Có ít nhất một ao chứa ít nhất $[\frac{n}{m}]$ cá ($\forall a \in \mathbf{R}$, $[a]$ là *phần nguyên già* của a, nghĩa là $[a]$ là *số nguyên nhỏ nhất* thỏa $[a] \ge a$).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trong giảng đường hiện có 367 sinh viên. . Có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau (tính từ ngày 1/1 đến ngày 31/12 của mỗi năm).
Số sinh viên (số cá) là $367 > 366$ = số ao (số ngày sinh nhật có thể có). Dùng nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất 2 sinh viên có cùng ngày sinh nhật.

b) Cho $A \subset S = \{1, 2, 3, \ldots , 9, 10\}$ và $| A | \ge 6$.
Chứng minh có $a, b \in A$ thỏa $a + b = 11$.
Mỗi số của A được xem như là một con cá có mã số chính là số đó. Ta có ≥ 6 cá.

Tạo ra 5 ao B, C, D, E và F để thả cá từ tập hợp A với qui định đặc biệt (một cách thả đặc biệt) : B chỉ nhận cá có mã số 1 và 10, C chỉ nhận cá có mã số 2 và 9, D chỉ nhận cá có mã số 3 và 8, E chỉ nhận cá có mã số 4 và 7, F chỉ nhận cá có mã số 5 và 6. Số cá $\geq 6 > 5$ = số ao nên theo nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất một ao nào đó chứa đúng 2 cá (gọi là a và b). Theo qui định đặc biệt, ta có $a + b = 11$.

c) Lớp học có 100 học sinh. Có ít nhất $[\frac{100}{12}] = 9$ học sinh có tháng sinh giống nhau và có ít nhất $[\frac{100}{7}] = 15$ học sinh có ngày sinh (tính theo thứ) là như nhau.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (KHÔNG LẶP):

2.1/ PHÉP HOÁN VỊ: Cho số nguyên $n \geq 1$.

a) Một *phép hoán vị* (*không lặp*) trên n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử.

b) Số phép hoán vị trên n phần tử là $P_n = n! = 1.2.3. \ldots (n - 1).n$

Ví dụ:

a) Có $P_3 = 3! = 6$ cách sắp xếp 3 phần tử a, b, c vào 3 vị trí cho trước như sau : abc, acb, cba, bac, bca và cab.

b) Có $P_7 = 7! = 5040$ cách sắp xếp 7 người vào một bàn dài có 7 ghế (mỗi ghế chỉ có 1 người ngồi).

2.2/ PHÉP TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP: Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$.

a) Một *tổ hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *không quan tâm đến thứ tự chọn*.

b) Một *chỉnh hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *có quan tâm đến thứ tự chọn* (hoặc sau khi chọn xong lại tiếp tục xếp m phần tử đã chọn vào m vị trí cho sẵn).

c) Số tổ hợp n chọn m là $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

d) Số chỉnh hợp n chọn m là $A_n^m = C_n^m P_m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Ví dụ:

a) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để lập đội văn nghệ. Số cách chọn là $C_{10}^4 = 210$.

b) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để bổ nhiệm làm đội trưởng, đội phó, thư ký và thủ quĩ của một đội công tác xã hội. Số cách chọn là $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4 = 210 \times 24 = 504$

c) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 2. Số dãy số có được là $C_8^3 \times 9^5 = 3.306.744$.

d) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có các chữ số 1, 4, 9 (mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần) và các chữ số còn lại thì khác nhau từng đôi một. Số dãy số có được là $A_8^3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 846.720$.

e) Có bao nhiêu dãy số gồm 9 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau hay có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau ?

Ta giải bài toán này bằng nguyên lý bù trừ.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau là 7.9^6
Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là 6.9^5
Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau và có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là $A_4^2 \times 8^2 = 12 \times 64 = 768$.

Số dãy số cần tìm là $(7.9^6 + 6.9^5) - 768 = 69.9^5 - 768 = 4.073.613$

2.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$. Khi đó

a) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (sự đối xứng ở hai cực)

b) $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

c) Khi $m \geq 1$ thì $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ (hạ chỉ số dưới)

<u>Ví dụ:</u>

a) $C_7^0 = C_7^7 = 1,\ C_7^1 = C_7^6 = 7,\ C_7^2 = C_7^5 = 21$ và $C_7^3 = C_7^4 = 35$.

b) $C_9^5 = C_8^5 + C_8^4 = (C_7^5 + C_7^4) + (C_7^4 + C_7^3)$

2.4/ <u>NHỊ THỨC NEWTON:</u> Cho số nguyên $n \geq 1$ và các số thực x, y. Ta có

$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$ (số mũ của x tăng dần và số mũ của y giảm dần)

$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i$ (số mũ của x giảm dần và số mũ của y tăng dần)

<u>Ví dụ:</u>

$$(x + y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^i y^{6-i} = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$$

$$= \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^{6-i} y^i = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

2.5/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho số nguyên $n \geq 1$. Ta có

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = [(-1) + 1]^n = 0$.

c) Suy ra $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$.

III. <u>GIẢI TÍCH TỔ HỢP (CÓ LẶP):</u>

3.1/ <u>PHÉP HOÁN VỊ LẶP:</u> Cho các số nguyên dương $k, n_1, n_2, ...$ và n_k.

Có k *loại vật khác nhau*, loại thứ j có n_j vật *giống hệt nhau* ($1 \leq j \leq k$).

Tổng số vật là $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

a) Một *phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên* là một cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí cho sẵn sao cho *mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử* và *không phân biệt các vật cùng loại*.

b) Số phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên là

$$P_n^*(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Ví dụ: Từ các chữ số 8, 1, 1, 9, 9, 4, 4, 4, ta có thể tạo ra bao nhiêu số điện thoại khác nhau gồm 8 chữ số (chẳng hạn như số điện thoại 41948149, ...) ?
Đây là phép đếm số hoán vị lặp trên $n = 8$ phần tử với $k = 4$ loại vật, mỗi loại vật là một loại chữ số và số vật của mỗi loại là $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 3$.
Kết quả cần tìm là $P_8^*(1,2,2,3) = \dfrac{8!}{1!2!2!3!} = 1680$.

3.2/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $n \geq 1$, $k \geq 2$ và các số thực $x_1, x_2, \dots, x_k$.
Ta có khai triển *đa thức Newton nhiều biến* (mở rộng nhị thức Newton) :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n \\ n_1,n_2,\dots,n_k\geq 0}} P_n^*(n_1,n_2,\dots,n_k)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$$

trong đó $P_n^*(n_1,n_2,\dots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$.

Ví dụ: Tìm hệ số của đơn thức $x^4y^5z^3u$ trong khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$.
a) Cách 1: dùng nhị thức Newton nhiều lần liên tiếp.

$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = C_{13}^4(9x)^4(-2y + 5z - 8t + u)^9 + \dots =$

$= 9^4C_{13}^4x^4[C_9^5(-2y)^5(5z - 8t + u)^4] + \dots = -2^59^4C_{13}^4C_9^5x^4y^5[C_4^3(5z)^3(-8t + u)] + \dots$

$= -2^55^39^4C_{13}^4C_9^5C_4^3(x^4y^5z^3u) + \dots = -32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4(x^4y^5z^3u) + \dots$

Hệ số cần tìm là $-32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4 = -9.457.287.840.000$

b) Cách 2: dùng trực tiếp đa thức Newton. Đặt $a = 9x$, $b = -2y$, $c = 5z$ và $d = -8t$.

$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = (a + b + c + d + u)^{13} = P_{13}^*(4,5,3,0,1)a^4b^5c^3d^0u^1 + \dots =$

$= \dfrac{13!}{4!5!3!0!1!}(9x)^4(-2y)^5(5z)^3(-8t)^0u^1 + \dots = -2^8 3^{10} 5^4 7^1 11^1 13^1(x^4y^5z^3u) + \dots$

Hệ số cần tìm là $-2^8 3^{10} 5^4 7^1 11^1 13^1 = -9.457.287.840.000$

3.3/ <u>PHÉP TỔ HỢP LẶP:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.
Có k *loại vật khác nhau*, mỗi loại vật có nhiều vật *giống hệt nhau*.
a) Một *tổ hợp lặp* k *loại vật chọn* m là một cách chọn ra m vật từ k loại vật nói trên sao cho *mỗi loại vật được chọn một số lần tùy ý không quá* m và *không phân biệt các vật cùng loại*.
b) Số tổ hợp lặp k loại vật chọn m là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)} = C_{m+(k-1)}^m$

Ví dụ: An đến siêu thị mua 15 cái mũ. Siêu thị bán 4 loại mũ (cùng kiểu dáng, chất lượng và giá cả) có các màu trắng, xanh, đen và nâu. Hỏi An có bao nhiêu cách mua mũ (theo màu sắc) ?
Mỗi cách mua mũ là một tổ hợp lặp 4 loại vật chọn ra 15 vật.
Số cách mua mũ là $K_4^{15} = C_{15+(4-1)}^{(4-1)} = C_{18}^3 = 816$.

3.4/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.
Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$ (các ẩn số $x_1, x_2, \dots$ và x_k là các số nguyên ≥ 0).
Mỗi nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên chính là một cách chọn ra m vật từ k loại vật, mỗi giá trị x_j là số vật loại thứ j được chọn ($1 \leq j \leq k$).
Do đó số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình cũng là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)}$.

Ví dụ:

a) Xếp tùy ý 20 viên bi (y hệt nhau) vào 4 cái hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?
Gọi x_j là số bi xếp vào hộp thứ j $((1 \leq j \leq 4)$ thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ và x_1, x_2, x_3 và x_4 nguyên ≥ 0. Số cách xếp = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên) = $K_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

b) Khi khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?
$$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = \sum_{\substack{p+q+r+s+n=13 \\ p,q,r,s,n\geq 0}} c(p,q,r,s,n)x^p y^q z^r t^s u^n \text{ với } c(p,q,r,s,n) \in \mathbf{R}.$$
Mỗi đơn thức $c(p, q, r, s,n)x^p y^q z^r t^s u^n$ tương ứng với một bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n). Mỗi bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) chính là một nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$. Do đó số đơn thức xuất hiện = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$) =
$= K_5^{13} = C_{17}^4 = 2380$.

c) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t + u = 17$ trong đó $x \geq 2, y \geq 0, z \geq -3, t \geq 0$ và $u \geq 4$ (*).
Đổi biến $x' = (x - 2) \geq 0$, $z' = (z + 3) \geq 0$ và $u' = (u - 4) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y + z' + t + u' = 14$ với x', y, z', t, u' đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{14} = C_{18}^4 = 3060$.

d) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z = 21$ trong đó $x > -4, y > 5$ và $2 \leq z < 7$ (*). Do x, y nguyên nên ($x > -4 \Leftrightarrow x \geq -3$) và ($y > 5 \Leftrightarrow y \geq 6$).
Đổi biến $x' = (x + 3) \geq 0$, $y' = (y - 6) \geq 0$ và $z' = (z - 2) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' < 5$ (**).
Xét phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 (I) và phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' \geq 5$ (II).
Đổi biến $z'' = (z - 5) \geq 0$, (II) tương đương với phương trình $x' + y' + z'' = 11$ với x', y', z'' đều nguyên ≥ 0 (III).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên của (**) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (II) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (III) = $K_3^{16} - K_3^{11} = C_{18}^2 - C_{13}^2 = 153 - 78 = 75$

e) Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của bất phương trình $x + y + z \leq 19$ (*).
Đặt $t = 19 - (x + y + z)$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t = 19$ với x, y, z, t đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_4^{19} = C_{22}^3 = 1540$

f) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z + t > -20$ trong đó $x < 1$, $y \leq 4, z \leq -3$ và $t < 6$ (*).
Đổi biến $x' = -x \geq 0$, $y' = -y \geq -4$, $z' = -z \geq 3$ và $t' = -t \geq -5$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y' + z' + t' \leq 19$. Đổi biến $y'' = (y' + 4) \geq 0$, $z'' = (z' - 3) \geq 0$ và $t'' = (t' + 5) \geq 0$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y'' + z'' + t'' \leq 25$. Đặt $u = 25 - (x' + y'' + z'' + t'')$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t + u = 25$ với x, y, z, t, u đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{25} = C_{29}^4 = 23.751$

CHƯƠNG IV

HỆ THỨC ĐỆ QUI (PHƯƠNG PHÁP ĐẾM CAO CẤP)

I. HỆ THỨC ĐỆ QUI:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho số nguyên $r \geq 0$.

Một quá trình diễn ra gắn liền với tham số nguyên $n \geq r$. Ta muốn *tính trực tiếp* một đại lượng a_n có liên quan đến quá trình trên theo $n \geq r$. Giả sử ta biết được k giá trị ban đầu là $a_r = \alpha_1, a_{r+1} = \alpha_2, \ldots, a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*) và thiết lập được một hệ thức $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n)$ $\forall n \geq r + k$ (**) sao cho trong (**) bắt buộc phải hiện diện a_{n-k}.

[ta có (*) và (**) bằng cách tính trực tiếp từ quá trình hoặc được cho sẵn].

Từ (*) và (**), nếu vế phải của (**) luôn luôn xác định thì ta có duy nhất dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).

Ta nói (**) là *một hệ thức đệ qui cấp k* với *điều kiện ban đầu* (*).

Ví dụ:

a) Tính $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ $\forall n \geq r = 1$.

Ta có $a_1 = \int_1^e \ln x dx = x\ln x \,]_1^e - \int_1^e dx = e - x\,]_1^e = e - (e - 1) = 1$ và $\forall n \geq 2$,

$a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n \,]_1^e - \int_1^e n(\ln x)^{n-1} dx = e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - na_{n-1}$. Như vậy

$a_1 = 1$ (*) và $a_n = e - na_{n-1} = f(a_{n-1}, n)$ $\forall n \geq 2$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 1.

b) Dãy số Fibonacci $\{ a_n \mid n \geq r = 0 \}$ có

$a_0 = 0, a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = f(a_{n-1}, a_{n-2}, n)$ $\forall n \geq 2$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 2.

c) Tính $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx$ $\forall n \geq r = 2$. Đặt $t = tgx$ thì $dt = (1 + t^2)dx$ và ta có

$a_2 = \int_0^{\pi/4} tg^2 x dx = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+t^2})dt = t - \text{arctg}t \,]_q^1 = 1 - \text{arctg}1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

$a_3 = \int_0^{\pi/4} tg^3 x dx = \int_0^{\pi/4} tgx(1 + tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tgx dx = \int_0^1 t dt - \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} =$

$= \frac{t^2}{2}\,]_0^1 + \ln(\cos x)\,]_0^{\pi/4} = \frac{1 - \ln 2}{2}$.

và $\forall n \geq 4$, $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx = \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} x(1 + tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} x dx = \int_0^1 t^{n-2} dt - a_{n-2} =$

$= \frac{t^{n-1}}{n-1}\,]_0^1 - a_{n-2} = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$. Như vậy $a_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$, $a_3 = \frac{1-\ln 2}{2}$ (*) và

$a_n = \frac{1}{n-1} - a_{n-2} = f((a_{n-1}, a_{n-2}, n)$ $\forall n \geq 4$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 2.

1.2/ **GIẢI HỆ THỨC ĐỆ QUI:**

Cho hệ thức đệ qui cấp k : $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n)$ $\forall n \geq r + k$ (**) với điều kiện đầu $a_r = \alpha_1, a_{r+1} = \alpha_2, \ldots, a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*).

a) Nếu chỉ giải riêng (**), ta thường có vô số dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (**).

b) Nếu giải đồng thời (*) và (**), ta chỉ có nhiều nhất là một dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).

c) Việc thực hiện a) hoặc b) gọi là *giải một hệ thức đệ qui*.
Nếu thực hiện a), ta nói ta tìm *các nghiệm tổng quát* của (**).
Nếu thực hiện b), ta nói ta tìm *nghiệm riêng* của (**).

Ví dụ:

a) Cho hệ thức đệ qui cấp 3 có
$a_0 = 2, a_1 = -5, a_2 = 5$ (*) và $\forall n \geq 3, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ (**)
Giải (**), ta có nghiệm tổng quát $a_n = p + q(-1)^n + s.2^n$ $\forall n \geq 0$ ($p, q, s \in \mathbf{R}$).
Kết hợp thêm (*), ta có $2 = p + q + s$, $-5 = p - q + 2s$, $5 = p + q + 4s$. Từ đó
$p = -3, q = 4, s = 1$ và $a_n = -3 + 4(-1)^n + 2^n$ $\forall n \geq 0$ là nghiệm riêng của (**).

b) Cho hệ thức đệ qui cấp 2 có $a_1 = 3, a_2 = -4$ (*) và $\forall n \geq 1, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ (**).
Giải (**), ta có vô số dãy $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ thỏa (chỉ cần chọn a_1 , a_2 tùy ý ≥ 0).
Kết hợp thêm (*), ta không có dãy $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ nào thỏa (*) và (**) vì
$a_3 = \sqrt{a_1 a_2} = \sqrt{-12}$ vô nghĩa.

II. **HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG THUẦN NHẤT:**

2.1/ **HỆ THỨC CẤP 1:** Cho $a_n = \lambda a_{n-1}$ $\forall n \geq r + 1$ (**)($\lambda \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$)

Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} = 0$ $\forall n \geq r + 1$ và ta lập đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$. Ta thấy (**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda^n$ $\forall n \geq r$ ($p \in \mathbf{R}$).

Ví dụ: Cho $a_0 = 5$ (*) và $a_n = -4a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ (**) có đa thức tương ứng $f(x) = x + 4$
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p(-4)^n$ $\forall n \geq 0$ ($p \in \mathbf{R}$). Từ (*), $5 = p(-4)^0 = p$
Vậy $a_n = 5(-4)^n$ $\forall n \geq 0$.

2.2/ **HỆ THỨC CẤP 2:**

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$ $\forall n \geq r + 2$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ và $\mu \neq 0$) (**)
Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0$ $\forall n \geq r + 2$ và ta lập tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$ với biệt thức $\Delta = \lambda^2 + 4\mu$.

a) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ với hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$ $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_o)^2$ với nghiệm thực kép λ_o .
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)\lambda_o^n$ $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

c) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phức dạng lượng giác $d(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = d^n(p\cos n\varphi + q\sin n\varphi)$ $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Ví dụ:

a) Cho $a_1 = -16, a_2 = 2$ (*) và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \ \forall n \geq 1$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ ($\lambda_1 = 3 \neq \lambda_2 = -2$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p3^n + q(-2)^n \ \forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $-16 = 3p - 4q$ và $2 = 9p + 16q$ nên $p = -2$ và $q = 5$.

Vậy $a_n = (-2)3^n + 5(-2)^n \ \forall n \geq 1$.

b) Cho $a_2 = 0, a_3 = -64$ (*) và $a_{n+1} = 8a_n - 16a_{n-1} \ \forall n \geq 3$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ (nghiệm kép $\lambda_o = 4$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)4^n \ \forall n \geq 2$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $0 = 16(p + 2q)$ và $-64 = 64(p + 3q)$ nên $p = 2$ và $q = -1$.

Vậy $a_n = (2 - n)4^n \ \forall n \geq 2$.

c) Cho $a_o = 3, a_1 = 6$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} \ \forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + (\sqrt{3})^2$ và $f(x)$ có hai nghiệm phức có dạng lượng giác $1 \pm i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3})$.

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = 2^n(p\cos\frac{n\pi}{3} + q\sin\frac{n\pi}{3}) \ \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $3 = p$ và $6 = p + q\sqrt{3}$ nên $p = 3$ và $q = \sqrt{3}$.

Vậy $a_n = 2^n(3\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}) \ \forall n \geq 0$.

d) Cho $n \geq 1$. An đi từ mặt đất (bậc thang thứ 0) lên cầu thang đến bậc thang thứ n. Mỗi bước chân của An sẽ lên được 1 hoặc 2 bậc thang. Hỏi An có bao nhiêu cách bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n ?

Đặt a_n là số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n ($\forall n \geq 1$).

Dễ thấy $a_1 = 1, a_2 = 2$ (*) . Ta có $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall n \geq 3$ (**) bằng cách để ý rằng a_{n-1} = Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà có đặt chân lên bậc thang thứ $(n - 1)$ và a_{n-2} = Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà không đặt chân lên bậc thang thứ $(n - 1)$, nghĩa là An đặt chân lên bậc thứ $(n - 2)$ rồi đặt chân lên bậc thứ n ngay.

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n \ \forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $1 = \alpha p + \beta q$ và $2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ nên $p = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ và $q = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$.

Vậy $a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \ \forall n \geq 1$.

e) Dãy Fibonacci $a_o = 0, a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n \ \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$). Từ (*), $0 = p + q$ và $1 = \alpha p + \beta q$ nên $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $q = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Vậy $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \ \forall n \geq 0$.

III. HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG KHÔNG THUẦN NHẤT:

3.1/ HỆ THỨC CẤP 1:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \varphi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r+1$ (**) trong đó $\lambda, \alpha \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq r+1$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (□) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**)

a) Nếu $\alpha \neq \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

b) Nếu $\alpha = \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

Ví dụ:

a) Bài toán THÁP HÀ NỘI: Cho $n \geq 1$. Có 3 cọc I, II và III. Tại cọc I đang có n cái đĩa tròn có bán kính khác nhau (khi đặt đĩa vào bất cứ cọc nào, ta luôn luôn phải tuân thủ việc đặt đĩa nhỏ ở phía trên đĩa lớn). Hãy di chuyển hết n đĩa này qua cọc II (mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa và có thể đặt tạm đĩa vào cọc trung gian trong quá trình chuyển đĩa). Hỏi ta phải cần bao nhiêu lần chuyển đĩa ?

Đặt a_n = số lần chuyển đĩa cần có để chuyển n đĩa từ cọc I qua cọc II ($n \geq 1$).

Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 2 \neq \alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 1$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 2$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - 2)$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p2^n \quad \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n\psi_o(n) = q \quad \forall n \geq 1$ ($q \in \mathbf{R}$).

Thay $a_n'' = q \quad \forall n \geq 1$ vào (**), ta có $q = 2q + 1$ nên $a_n'' = q = -1 \quad \forall n \geq 1$.

Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = p2^n - 1 \quad \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $1 = 2p - 1$ nên $p = 1$. Vậy $a_n = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 1$.

b) Tính $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \quad \forall n \geq 1$.

Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + n^2 \quad \forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 1 = \alpha$ và $\varphi_2(n) = n^2$ có $\deg(\varphi_2) = 2$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 2$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = x - 1$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n = p \quad \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_2(n) = n(qn^2 + sn + t) \quad \forall n \geq 1$ ($q, s, t \in \mathbf{R}$). Thay $a_n'' = (qn^3 + sn^2 + tn) \quad \forall n \geq 1$ vào (**), ta có

$qn^3 + sn^2 + tn = q(n-1)^3 + s(n-1)^2 + t(n-1) + n^2 \quad \forall n \geq 1$ (cũng đúng $\forall n \in \mathbf{Z}$).

Thế $n = 0$, $n = 1$ và $n = 2$ vào đồng nhất thức trên, ta có hệ phương trình

$s - t - q = 0$, $q + s + t = 1$ và $7q + 3s + t = 4$. Giải ra ta được $q = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{6}$

và $a_n'' = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \quad \forall n \geq 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = p + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = p + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \geq 1 \ (p \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $1 = p + 1$ nên $p = 0$. Vậy $a_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$.

3.2/ <u>HỆ THỨC CẤP 2:</u>

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2} + \varphi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r + 2$ (**) trong đó $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbf{R}$, $\mu \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq r + 2$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (□) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**)

a) Nếu α không là nghiệm của $f(x)$ [$f(\alpha) \neq 0$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

b) Nếu α là nghiệm đơn của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 \neq f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

c) Nếu α là nghiệm kép của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n^2\psi_m(n)\alpha^n \quad \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $a_2 = 37, a_3 = -97$ (*) và $a_{n+1} = 9a_{n-1} + 5.2^n \quad \forall n \geq 3$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 0, \mu = -9, \alpha = 2$ và $\varphi_o(n) = 5$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+1} - 9a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 3$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ có $f(2) = -5 \neq 0$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.3^n + q(-3)^n \quad \forall n \geq 2 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 2^n\psi_o(n) = t.2^n \quad \forall n \geq 2 \ (t \in \mathbf{R})$.

Thay $a_n'' = t.2^n \quad \forall n \geq 2$ vào (**), ta có $t.2^{n+1} = 9\,t.2^{n-1} + 5.\,2^n \quad \forall n \geq 2$,

nghĩa là $t = -2$ và $a_n'' = -2^{n+1} \quad \forall n \geq 2$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = \ = p.3^n + q(-3)^n - 2^{n+1} \quad \forall n \geq 2 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $37 = 9p + 9q - 8$ và $-97 = 27p - 27q - 16$ nên $p = 1$ và $q = 4$.

Vậy $a_n = 3^n + 4(-3)^n - 2^{n+1} \quad \forall n \geq 2$.

b) Cho $a_0 = 73, a_1 = 92$ (*) và $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n + 24 \quad \forall n \geq 0$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 4, \mu = -5$, $\alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 24$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ có $f(1) = 0 \neq f'(1)$

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n + q(-5)^n = p + q(-5)^n \quad \forall n \geq 0 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_o(n) = t\,n \quad \forall n \geq 0 \ (t \in \mathbf{R})$.

Thay $a_n = t\,n \quad \forall n \geq 0$ vào (**), ta có $t(n+2) = -4t(n+1) + 5t\,n + 4 \quad \forall n \geq 0$,

nghĩa là $t = 4$ và $a_n = 4t \quad \forall n \geq 0$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = \ = p + q(-5)^n + 4t \quad \forall n \geq 0 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $73 = p + q$ và $92 = p - 5q + 4$ nên $p = \frac{151}{2}$ và $q = \frac{-5}{2}$.

Vậy $a_n = \frac{8n + (-5)^{n+1} + 151}{2}$ $\forall n \geq 0$.

c) Cho $a_1 = 84$, $a_2 = 49$ (*) và $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2} + 6(2n-1)(-7)^n$ $\forall n \geq 3$ (**)

Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 14$, $\mu = 49$, $\alpha = -7$ và $\varphi_1(n) = 6(2n-1)$ có $\deg(\varphi_1) = 1$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n + 14a_{n-1} + 49a_{n-2} = 0$ $\forall n \geq 3$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$ có $f(-7) = 0 = f'(-7)$

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = (p + nq)(-7)^n$ $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng

$a_n'' = (-7)^n n^2 \psi_1(n) = (-7)^n n^2(sn + t)$ $\forall n \geq 1$ ($t \in \mathbf{R}$).

Thay $a_n = (-7)^n n^2(sn + t)$ $\forall n \geq 1$ vào (**), ta có

$$(-7)^n n^2(sn+t) = 6(2n-1)(-7)^n - 14(-7)^{n-1}(n-1)^2[s(n-1)+t] - $$
$$- 49(-7)^{n-2}(n-2)^2[s(n-2)+t] \quad \forall n \geq 1, \text{ nghĩa là}$$

$sn^3 + tn^2 = 2(n-1)^2(sn - s + t) - (n-2)^2(sn - 2s + t) + 12n - 6$ $\forall n \geq 1$

Thế $n = 1$ và $n = 2$, ta có $2t = 6$ và $3s + t = 93$ nên $s = 2$ và $t = 3$, nghĩa là $a_n'' = n^2(2n+3)(-7)^n$ $\forall n \geq 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = (p + qn + 3n^2 + 2n^3)(-7)^n$ $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $84 = -7(p + q + 5)$ và $49 = 49(p + 2q + 28)$ nên

$p = -7$ và $q = -10$. Vậy $a_n = (2n^3 + 3n^2 - 10n - 7)(-7)^n$ $\forall n \geq 1$.

GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG V

TẬP HỢP SỐ NGUYÊN Z

I. <u>SỰ CHIA HẾT:</u>

1.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z}$.

a) Ta nói $a \mid b$ (a là *một ước số* của b hay a *chia hết* b) nếu $\exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, b = \boldsymbol{k}a$.
Lúc đó ta cũng nói là $b \,\vdots\, a$ (b là *một bội số* của a hay b *chia hết cho* a).

b) Suy ra: a *không chia hết* b (hay b *không chia hết cho* a) nếu
$\forall k \in \mathbf{Z}, b \neq ka$.

<u>Ví dụ:</u>

a) $12 \mid (-48)$ [hay $(-48) \,\vdots\, 12$] vì $\exists(-4) \in \mathbf{Z}, (-48) = (-4)12$.

b) 17 không chia hết 65 (vì $\forall k \in \mathbf{Z}$, $65 > 17|k|$ nếu $|k| \leq 3$ và $65 < 17|k|$ nếu $|k| \geq 4$, nghĩa là $\forall k \in \mathbf{Z}, 65 \neq 17k$).

1.2/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Đặt $\mathbf{Z^*} = \mathbf{Z} \setminus \{ 0 \}$. Khi đó

a) $a = \pm 1 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z},\ a \mid k$. b) $a \neq 0 \Leftrightarrow$ a chỉ có *hữu hạn ước số*.

c) $a = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z},\ k \mid a \Leftrightarrow$ a có *vô hạn ước số*.
$a \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ \overline{k \mid a} \Leftrightarrow$ a có *chỉ có hữu hạn ước số*.

d) $a \mid b \Leftrightarrow (-a) \mid b \Leftrightarrow a \mid (-b) \Leftrightarrow (-a) \mid (-b)$

e) Nếu $a \mid b$ thì ($b = 0$ hay $0 < |a| \leq |b|$).

f) ($a \mid b$ và $b \mid a$) $\Leftrightarrow a = \pm b \Leftrightarrow |a| = |b|$

g) ($a \mid b$, $b \mid a$ và $ab \geq 0$) $\Leftrightarrow a = b$

h) Nếu ($a \mid \mathbf{b}$ và $\mathbf{b} \mid c$) thì $a \mid c$.

i) Nếu ($\mathbf{a} \mid b$ và $\mathbf{a} \mid c$) thì [$\mathbf{a} \mid (b \pm c)$ và $\mathbf{a} \mid bc$] .

j) Nếu ($a \mid b$ và $c \mid d$) thì $ac \mid bd$

k) $a \mid b \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z},\ a \mid kb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z},\ ka \mid kb \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z^*},\ a \mid kb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z^*},\ ka \mid kb \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z^*},\ ka \mid kb$

Việc chứng minh các tính chất trên là các bài tập đơn giản về số nguyên.

1.3/ <u>THUẬT CHIA EUCLIDE:</u> $a, b \in \mathbf{Z}$ và $b \neq 0$.

Khi đó *có duy nhất* $q, r \in \mathbf{Z}$ thỏa $a = qb + r$ và $0 \leq r < |b|$.
Ta nói a là *số bị chia*, b là *số chia*, q là *số thương* và r là *số dư*.
Ta ký hiệu $q = a$ *div* b, $r = a$ *mod* b và $a \equiv r \pmod{b}$.

<u>Ví dụ:</u> $140 = 9(15) + 5$ với $0 \leq 5 < |15| = 15$
$-140 = -10(15) + 10$ với $0 \leq 10 < |15| = 15$
$140 = -9(-15) + 5$ với $0 \leq 5 < |-15| = 15$
$-140 = 10(-15) + 10$ với $0 \leq 10 < |-15| = 15$

II. <u>ƯỚC SỐ CHUNG DƯƠNG LỚN NHẤT:</u>

2.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$.

Xét $S = \{ c \in \mathbf{Z} / c \mid a$ và $c \mid b \}$ = Tập hợp *các ước số chung* của a và b.

Ta có $S \neq \varnothing$ (vì $\pm 1 \in S$) và $\forall c \in S, |c| \leq \min \{ |a|, |b| \}$.

Đặt $d = \max(S)$ và gọi d là *ước số chung dương lớn nhất* của a và b.

Ký hiệu $d = (a, b) = (b, a)$. Ta có $1 \leq d \leq \min \{ |a|, |b| \}$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $a = -36$ và $b = 48$.
Xét $S = \{c \in \mathbf{Z} / c \mid (-36)$ và $c \mid 48\} = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \}$.
Đặt $d = \max(S) = 12$ thì $d = (-36, 12) = (12, -36)$.

2.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ và $d \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Khi đó

$d = (a, b) \Leftrightarrow [(d \mid a), (d \mid b)$ và $\forall k \in \mathbf{Z}, (k \mid a$ và $k \mid b) \Rightarrow k \mid d]$

(d là *một ước số chung* của a và b) và (d là *bội của mọi ước chung* của a và b)

<u>Ví dụ:</u> Cho $a = 75, b = 100$ và $S = \{c \in \mathbf{Z} / c \mid 75$ và $c \mid 100\} = \{ \pm 1, \pm 5, \pm 25 \}$.
Ta có $d = (75, 100) = 25$ vì $25 \in S \cap \mathbf{N}^*$ và $k \mid 25 \ \forall k \in S$.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ và $d \in \mathbf{N}^*$. Khi đó

$d = (a, b) \Leftrightarrow [(d \mid a), (d \mid b)$ và $\exists r, s \in \mathbf{Z}, d = ra + sb$ (r, s không duy nhất)]

(d là *một ước số chung* của a và b) và (d là *một tổ hợp nguyên* của a và b).

<u>Ví dụ:</u>
a) $(12, -32) = \mathbf{4}$ vì $\mathbf{4} \mid 12, \mathbf{4} \mid (-32)$ và $\exists(-5), (-2) \in \mathbf{Z}, \mathbf{4} = (-5)12 + (-2)(-32)$.
Ta cũng thấy $\exists\ 3, 1 \in \mathbf{Z}, \mathbf{4} = 3(12) + 1(-32)$.
b) $(9, 20) = \mathbf{1}$ vì $\mathbf{1} \mid 9, \mathbf{1} \mid 20$ và $\exists 9, (-4) \in \mathbf{Z}, \mathbf{1} = (9)9 + (-4)20$.

2.4/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $a, b, \lambda \in \mathbf{Z}^*$. Khi đó

a) $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$ và $(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| (a, b)$.

b) Nếu $a \mid b$ thì $(a, b) = |a|$. Đặc biệt $(\pm a, \pm a) = |a|$.

<u>Ví dụ:</u>
a) $(36, 48) = (-36, 48) = (36, -48) = (-36, -48) = 12$.
b) $(\mathbf{-7} \times 36, \mathbf{-7} \times 48) = |\mathbf{-7}| (36, 48) = \mathbf{7} \times 12 = 84$.
c) $(-15, 90) = |-15| = 15$ vì $(-15) \mid 90$. Đặc biệt $(\pm 57, \pm 57) = |\pm 57| = 57$.

2.5/ <u>BỔ ĐỀ:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ thỏa $|a| > |b|$ và b không chia hết a.

Chia Eucide $a = qb + r$ với $0 < r < |b|$. Khi đó $(a, b) = (b,r)$.

Ý nghĩa : Tìm (b, r) thay cho (a, b) với thuận lợi là $r < |b| < |a|$.

<u>Ví dụ:</u> Chia Euclide liên tiếp : $432 = 5(76) + 52$, $76 = 1(52) + 24$, $52 = 2(24) + 4$
và $24 = 6(4)$. Từ các phép chia Euclide trên, ta suy ra
$(432, 76) = (76, 52) = (52, 24) = (24, 4) = 4$.

2.6/ <u>THUẬT TOÁN TÌM ƯỚC SỐ CHUNG DƯƠNG LỚN NHẤT VÀ BIỂU DIỄN TỔ HỢP NGUYÊN:</u>

a)Vấn đề : Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ thỏa $|a| > |b|$.

Tìm $d = (a,b)$ và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = ra + sb$.

b) Chia Euclide liên tiếp (số bị chia và số chia ở bước sau lần lượt là số chia và số dư ở bước trước) :

$a = q_o b + r_o \ (0 < r_o < |b|)$ [1]

$b = q_1 r_o + r_1 \ (0 < r_1 < |r_o| = r_o)$ [2]

$r_o = q_2 r_1 + r_2 \ (0 < r_2 < |r_1| = r_1)$ [3]

$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \ (0 < r_3 < |r_2| = r_2)$ [4]

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$r_{n-4} = q_{n-2} r_{n-3} + r_{n-2} \ (0 < r_{n-2} < |r_{n-3}| = r_{n-3})$ $[n-1]$

$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \ (0 < r_{n-1} < |r_{n-2}| = r_{n-2})$ $[n]$

$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + 0$ (phép chia dừng khi số dư bằng 0) $[n+1]$.

Từ các đẳng thức [1], [2], [3], … , [n], [n + 1] và theo (**2.5**), ta có

$d = (a, b) = (b, r_o) = (r_o, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-3}, r_{n-2}) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = r_{n-1}$.

Từ các đẳng thức [n], [n – 1], … , [3], [2] và [1], ta biểu diễn các số dư

$d = r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} = r_{n-3} - q_{n-1}(r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3}) =$

$= -q_{n-1} r_{n-4} + (1 + q_{n-1} q_{n-2}) r_{n-3} = \ldots,$

d lần lượt được biểu diễn là tổ hợp nguyên của $\{r_{n-2}, r_{n-3}\}$, của $\{r_{n-3}, r_{n-4}\}$, … , của $\{r_1, r_o\}$, của $\{r_0, b\}$ và sau hết là của $\{b, a\}$.

<u>Ví dụ:</u> Tìm $d = (-952, 525)$ và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = r(-952) + s(525)$.

Chia Euclide liên tiếp : $-952 = -2(525) + 98$ [1], $525 = 5(98) + 35$ [2], $98 = 2(35) + 28$ [3], $35 = 1(28) + 7$ [4] và $28 = 4(7) + 0$ [5].

Từ [1], [2], [3], [4] và [5], ta có

$d = (-952, 525) = (525, 98) = (98, 35) = (35, 28) = (28, 7) = 7.$

Từ [4], [3], [2] và [1], ta biểu diễn các số dư

$d = 7 = 35 - 28 = 35 - [98 - 2(35)] = -98 + 3(35) = -98 + 3[525 - 5(98)]$

$= 3(525) - 16(98) = 3(525) - 16[-952 + 2(525)] = (-16)(-952) - 29(525)$

Vậy $d = 7 = r(-952) + s(525)$ với $r = -16$ và $s = -29$.

III. <u>BỘI SỐ CHUNG DƯƠNG NHỎ NHẤT:</u>

3.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ và

$T = \{c \in \mathbf{N^*} \mid c \vdots a$ và $c \vdots b\}$ = Tập hợp *các bội số chung dương* của a và b.

Ta có $T \neq \varnothing$ (vì $|ab| \in T$) và $\forall c \in T,\ c \geq \max\{|a|, |b|\}$.

Đặt $e = \min(T)$ và gọi e là *bội số chung dương nhỏ nhất* của a và b.

Ký hiệu $e = [a, b] = [b, a]$. Ta có $\max\{|a|, |b|\} \leq e \leq |ab|$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $a = -36 = -2^2 3^2$ và $b = 48 = 2^4 3^1$.

Xét $T = \{c \in \mathbf{N^*} \mid c \vdots (-36)$ và $c \vdots 48\} = \{2^4 3^2 t \mid t \in \mathbf{N^*}\}$.

Đặt $e = \min(S) = 2^4 3^2 = 144$ (ứng với $t = 1$) thì $e = [-36, 12] = [12, -36]$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: Cho a, b $\in$ **Z*** và e $\in$ **N***. Khi đó

$e = [a, b] \Leftrightarrow [\ (e \vdots a), (e \vdots b)$ và $\forall k \in \mathbf{Z}, (k \vdots a$ và $k \vdots b) \Rightarrow k \vdots e\ ]$

(e là *một bội số chung* của a và b) và (e là *ước của mọi bội chung* của a và b)

Ví dụ: Cho $a = 75 = 3.5^2$, $b = 100 = 2^2 5^2$ và

$L = \{ c \in \mathbf{Z} / c \vdots 75$ và $c \vdots 100 \} = \{ 2^2.3.\ 5^2 t \mid t \in \mathbf{Z}^* \} = \{ 300t \mid t \in \mathbf{Z}^* \}$.

Ta có $e = [75, 100] = 300$ vì $300 \in L \cap \mathbf{N}^*$ và $300 \mid k\ \ \forall k \in L$.

3.3/ MỆNH ĐỀ: Cho a, b $\in$ **Z*** và e $\in$ **N***. Khi đó]

$e = [a, b] \Leftrightarrow [\ (e \vdots a), (e \vdots b)$ và $\exists u, v \in \mathbf{Z}, \frac{1}{e} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$ (u, v không duy nhất)]

(e là *một bội số chung* của a và b) và ($\frac{1}{e}$ là *một tổ hợp nguyên* của $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$).

Ví dụ:

$[12, -32] = 96$ vì $\mathbf{96} \vdots 12$, $\mathbf{96} \vdots (-32)$ và $\exists (-1), (-3) \in \mathbf{Z}, \frac{1}{96} = \frac{-1}{12} + \frac{-3}{-32}$.

Ta cũng thấy $\exists\ 2, 5 \in \mathbf{Z}, \frac{1}{96} = \frac{2}{12} + \frac{5}{-32}$.

3.4/ TÍNH CHẤT: Cho a, b, $\lambda \in$ **Z***. Khi đó

a) $[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$ và $[\lambda a, \lambda b] = |\lambda|\,[a, b]$.

b) Nếu $a \mid b$ thì $[a, b] = |b|$. Đặc biệt $[\pm a, \pm a] = |a|$.

Ví dụ:

a) $[36, 48] = [-36, 48] = [36, -48] = [-36, -48] = 144$.

b) $[\mathbf{-7} \times 36, \mathbf{-7} \times 48] = |\mathbf{-7}|\,[36, 48] = \mathbf{7} \times 144 = 1008$.

c) $[15, -90] = |-90| = 90$ vì $15 \mid (-90)$. Đặc biệt $[\pm 57, \pm 57] = |\pm 57| = 57$.

3.5/ ĐỊNH LÝ: Cho a, b $\in$ **Z*** với $d = (a, b)$ và $e = [a, b]$. Khi đó

a) $de = |ab|$. Suy ra $e = \frac{|ab|}{d}$.

b) Chọn r, s $\in$ **Z** thỏa $d = ra + sb$ thì $\frac{1}{e} = \frac{d}{|ab|} = \frac{ra + sb}{|ab|} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$ trong đó

$u = s$ và $v = r$ (nếu $ab > 0$) hoặc $u = -s$ và $v = -r$ (nếu $ab < 0$).

Ví dụ: $a = -952$ và $b = 525$ có $d = (a, b) = 7$ nên $e = [a, b] = \frac{|ab|}{d} = 71.400$.

Hơn nữa do $ab < 0$ và $d = ra + sb$ với $r = -16$ và $s = -29$ nên

$\frac{1}{e} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$ với $u = -s = 29$ và $v = -r = 16$. Vậy $\frac{1}{e} = \frac{29}{a} + \frac{16}{b}$.

IV. SỰ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho a, b $\in$ **Z***.

a) Ta nói a và b là hai số *nguyên tố cùng nhau* nếu a và b chỉ có hai ước số chung là ± 1, nghĩa là $(a, b) = 1$.

b) Suy ra a và b là hai số *không nguyên tố cùng nhau* nếu $(a, b) \geq 2$.

Ví dụ: Do $(-25, 42) = 1$ nên -25 và 42 là hai số nguyên tố cùng nhau.
Do $(84, 56) = 28 \geq 2$ nên 84 và 56 là hai số không nguyên tố cùng nhau.

4.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$. Khi đó

$$(a, b) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbf{Z} \text{ thỏa } \mathbf{1} = ra + sb$$

Ví dụ: Ta có $5(17) + (-12)7 = \mathbf{1}$ nên ta thấy có 16 cặp số nguyên tố cùng nhau là

$$(\pm 5, \pm 12) = (\pm 5, \pm 7) = (\pm 17, \pm 12) = (\pm 17, \pm 7) = \mathbf{1}$$

4.3/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$.

a) Nếu $(\mathbf{a}, b) = 1 = (\mathbf{a}, c)$ thì $(\mathbf{a}, bc) = 1$.
b) Nếu $[\ \mathbf{a} \mid bc$ và $(\mathbf{a}, b) = \mathbf{1}\ ]$ thì $\mathbf{a} \mid c$.
c) Nếu $[\ a \mid \mathbf{c}, b \mid \mathbf{c}$ và $(a, b) = \mathbf{1}\ ]$ thì $ab \mid \mathbf{c}$.

Ví dụ:
a) $(\mathbf{12}, 25) = 1 = (\mathbf{12}, -47)$ nên $(\mathbf{12}, 25 \times [-47]) = 1$.
b) $\mathbf{19} \mid (76 \times 31)$ và $(\mathbf{19}, 31) = 1$ nên $\mathbf{19} \mid 76$.
c) $9 \mid \mathbf{1188}$, $-22 \mid \mathbf{1188}$ và $(9, -22) = 1$ nên $9(-22) \mid \mathbf{1188}$.

4.4/ DẠNG TỐI GIẢN CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ :

Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ và $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Đặt $d = (a, b)$ và viết $a = da'$, $b = db'$.

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{-a'}{-b'}$ với $(a', b') = (-a', -b') = \mathbf{1}$.

Ta nói $\frac{a}{b}$ có hai dạng tối giản (không giản ước được) là $\frac{a'}{b'}$ và $\frac{-a'}{-b'}$.

Ví dụ: $a = -160$ và $b = 150$. Ta có $d = (a, b) = 10$, $a = -16d$ và $b = 15d$.
Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{16}{-15} = \frac{-16}{15}$, nghĩa là $\frac{a}{b}$ có hai dạng tối giản là $\frac{16}{-15}$ và $\frac{-16}{15}$ vì $(16, -15) = (-16, 15) = 1$.

V. SỰ PHÂN TÍCH NGUYÊN TỐ:

5.1/ SỐ NGUYÊN TỐ : Cho $p \in \mathbf{Z}$ và $|p| \geq 2$ (nghĩa là $0 \neq p \neq \pm 1$).

a) Ta nói p là *một số nguyên tố* nếu p chỉ có hai ước số dương là 1 và $|p|$ (nghĩa là p chỉ có 4 ước số là ± 1 và $\pm p$).
b) Suy ra q là một số *không nguyên tố* (còn gọi là *hợp số*) nếu q có hơn hai ước số dương.

Ví dụ:
Các số nguyên tố đầu tiên là $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29, \ldots$
± 28 là một hợp số vì ± 28 có hơn hai ước số dương là $1, 2, 4, \ldots$

5.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $p \in \mathbf{Z}$ và $|p| \geq 2$. Các phát biểu sau là *tương đương* :

a) p nguyên tố.

b) $\forall k \in \mathbf{Z}^*$, $\overline{p \mid k} \Rightarrow (p, k) = \mathbf{1}$.

c) $\forall k \in \mathbf{Z}^*$, $(p, k) \neq \mathbf{1} \Rightarrow p \mid k$

d) $\forall a, b \in \mathbf{Z}^*$, $p \mid ab \Rightarrow (p \mid a$ hay $p \mid b)$

e) $\forall a, b \in \mathbf{Z}^*$, $(\overline{p \mid a}$ và $\overline{p \mid b}) \Rightarrow \overline{p \mid ab}$

<u>Ví dụ:</u> 83 là số nguyên tố, $\overline{83 \mid 724}$ và $\overline{83 \mid 615}$ nên $(83, 724) = \mathbf{1}$ và $\overline{83 \mid (724).(615)}$.

5.3/ <u>ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH NGUYÊN TỐ:</u> Cho $k \in \mathbf{Z}$ và $|k| \geq 2$.

Khi đó k được phân tích một cách duy nhất dưới dạng $k = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ (*)

trong đó $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ là các số nguyên tố > 0 và $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbf{N}^*$.

(*) gọi là *sự phân tích nguyên tố* của k.

<u>Ví dụ:</u> $178.200 = 2^3 3^4 5^2 11^1$ và $-102.375 = -3^2 5^3 7^1 13^1$.

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

Phân tích nguyên tố $a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ và $b = \pm q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots q_n^{s_n}$. Khi đó

$$(a, b) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \{ p_1, p_2, \ldots, p_m \} \cap \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} = \varnothing$$

<u>Ví dụ:</u> Ta có $(\pm 2^3 5^4 11^2 19^8 29^5, \pm 3^6 7^{10} 13^2 17^7 23^1 31^4) = \mathbf{1}$ vì

$$\{ 2, 5, 11, 19, 29 \} \cap \{ 3, 7, 13, 17, 23, 31 \} = \varnothing$$

5.5/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Ta có thể tìm $d = (a, b)$, $e = [a, b]$ và dạng tối giản của phân số $\dfrac{a}{b}$ dựa theo sự phân tích nguyên tố của a và b.

Phân tích nguyên tố một cách " thỏa hiệp " giữa a và b như sau:

$a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ và $b = \pm p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_m^{s_m}$ trong đó $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ là các số nguyên tố > 0 và $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_m, s_m \in \mathbf{N}$ sao cho $r_i + s_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq m)$.

Đặt $u_i = \min\{r_i, s_i\}$ và $v_i = \max\{r_i, s_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$. Khi đó

$d = (a, b) = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_m^{u_m}$, $e = [a, b] = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \ldots p_m^{v_m}$ và dạng tối giản của $\dfrac{a}{b}$ là

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sgn}(a) p_1^{r_1 - u_1} p_2^{r_2 - u_2} \ldots p_m^{r_m - u_m}}{\operatorname{sgn}(b) p_1^{s_1 - u_1} p_2^{s_2 - u_2} \ldots p_m^{s_m - u_m}} \quad \text{hay} \quad \frac{a}{b} = \frac{-\operatorname{sgn}(a) p_1^{r_1 - u_1} p_2^{r_2 - u_2} \ldots p_m^{r_m - u_m}}{-\operatorname{sgn}(b) p_1^{s_1 - u_1} p_2^{s_2 - u_2} \ldots p_m^{s_m - u_m}}$$

trong đó sgn(a) và sgn(b) là dấu của a và b.

<u>Ví dụ:</u> $a = 2^3 3^5 7^4 13^2 17^3$ và $b = -2^8 5^2 7^2 11^3 17^9 19^1$ có dạng phân tích nguyên tố một cách " thỏa hiệp " là

$a = 2^3 3^5 5^0 7^4 11^0 13^2 17^3 19^0$ và $b = -2^8 3^0 5^2 7^2 11^3 13^0 17^9 19^1$. Ta suy ra

$d = (a, b) = 2^3 3^0 5^0 7^2 11^0 13^0 17^3 19^0 = 2^3 7^2 17^3$,

$e = [a, b] = 2^8 3^5 5^2 7^4 11^3 13^2 17^9 19^1$.

Dạng tối giản của $\dfrac{a}{b}$ là $\dfrac{3^5 7^2 13^2}{-2^5 5^2 11^3 17^6 19^1}$ hay $\dfrac{-3^5 7^2 13^2}{2^5 5^2 11^3 17^6 19^1}$.

GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG VI

QUAN HỆ TRÊN CÁC TẬP HỢP

I. QUAN HỆ HAI NGÔI:

1.1/ VÍ DỤ MỞ ĐẦU: Cho $S = \{ 0, 1, 2, \dots , 9, 10 \}$.

$\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y$ (ta nói x *có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow 2x + y = 18$,

nghĩa là $x\overline{\Re}y$ (ta nói x *không có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow 2x + y \neq 18$

Ta có $9\Re0$, $8\Re2$, $7\Re4$, $6\Re6$, $5\Re8$ và $4\Re10$. Ngoài ra, $2\overline{\Re}3$, $5\overline{\Re}6$, ...

Đặt $\boldsymbol{\Re} = \{ (x,y) \in S^2 \mid x\Re y \} = \{(9,0), (8,2), (7,4), (6,6), (5,8), (4,10)\} \subset S^2$.

Như vậy từ quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S, ta có tương ứng tập hợp con $\boldsymbol{\Re}$ của S^2.

$\forall x,y \in S$, ta viết $x\Re y \Leftrightarrow (x,y) \in \boldsymbol{\Re}$ và $x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x,y) \notin \boldsymbol{\Re}$.

Chẳng hạn như $7\Re4 \Leftrightarrow (7,4) \in \boldsymbol{\Re}$ và $1\overline{\Re}9 \Leftrightarrow (1,9) \notin \boldsymbol{\Re}$.

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Một *quan hệ hai ngôi* $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$ thực chất là *một tập hợp con* $\boldsymbol{\Re}$ của tập hợp $S^2 = S \times S$. Tập hợp con này chứa tất cả các cặp (x,y) của S^2 có quan hệ $\Re$. Nói khác đi, mỗi tập hợp con của S^2 xác định một quan hệ hai ngôi trên S. Ta có $\boldsymbol{\Re} = \{ (x,y) \in S^2 \mid x\Re y \} \subset S^2$.

$\forall x,y \in S$, ta viết $x\Re y \Leftrightarrow (x,y) \in \boldsymbol{\Re}$ và $x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x,y) \notin \boldsymbol{\Re}$.

Nếu $| S | = n$ thì $| S^2 | = n^2$ nên ta có 2^{n^2} quan hệ hai ngôi khác nhau trên S.

1.3/ XÁC ĐỊNH QUAN HỆ HAI NGÔI:

Cho tập hợp $S \neq \varnothing$.

Ta xác định một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S theo 1 trong 3 cách như sau:

a) Cách 1: giới thiệu $\Re$ như *một tập hợp con* của S^2 (nếu $\Re$ có ít phần tử).

Ví dụ: $S = \mathbf{Z}$ với các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\boldsymbol{\Re} = \{ (4,-1), (0,0), (-9, 2), (3,3), (-5,-6), (7,4), (-8,-8), (1,0) \} \subset S^2$.

$\theta = \{ (2k, 5k + 1) \mid k \in \mathbf{Z} \} = \{ (0,1), (2,6), (-2, -4) , \dots \} \subset S^2$.

b) Cách 2: giới thiệu *nội dung của quan hệ hai ngôi* $\Re$ (nếu $\Re$ có nhiều phần tử)

Ví dụ: $S = \mathbf{R}$ và $\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y \Leftrightarrow 4x^3 > 5y^2 + 1$ (nội dung quan hệ $\Re$)

Ta kiểm tra được $3\Re(-4)$, $4\overline{\Re}9$, …

c) Cách 3: dùng *ma trận số nhị phân biểu diễn quan hệ hai ngôi* $\Re$ (nếu S hữu hạn)

Xét $S = \{a_1, a_2, \dots , a_n\}$. Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có thể biểu diễn bằng một bảng ma trận vuông (n x n) gồm các số nhị phân như sau:

$\mathbf{M}_{\Re} = \mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ trong đó $m_{ij} = 1$ (nếu $a_i\Re a_j$) và $m_{ij} = 0$ (nếu $a_i\overline{\Re}a_j$)

M	a_1	…	a_j	…	a_n
a_1	m_{11}	…	m_{1j}	…	m_{1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_i	m_{i1}	…	m_{ij}	…	m_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	m_{n1}	…	m_{nj}	…	m_{nn}

Ví dụ: $S = \{ a, b, c, d \}$ và quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có ma trận biểu diễn là

$$\mathbf{M}_{\Re} = \mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i, j \le 4}$$

M	a	b	c	d
a	**1**	0	**1**	0
b	0	0	**1**	**1**
c	**1**	0	**1**	**1**
d	**1**	**1**	0	0

Suy ra $\Re = \{ (a,a), (a,c), (b,c), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b) \} \subset S^2$.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ HAI NGÔI:

Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

2.1/ TÍNH PHẢN XẠ:

a) $\Re$ *phản xạ* nếu " $\forall x \in S, x\Re x$ " (mọi phần tử của S quan hệ $\Re$ với chính nó).

b) $\Re$ *không phản xạ* nếu " $\exists x_o \in S, x_o \overline{\Re} x_o$ ".
(có ít nhất một phần tử của S không quan hệ $\Re$ với chính nó).

Ví dụ:

a) $S = \{ 1, 2, 3 \} \subset T = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.
Xét quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S (và cũng là quan hệ hai ngôi trên T):
$\Re = \{ (3,3), (2,1), (1,1), (1,3), (2,2) \} \subset S^2 \subset T^2$.
$\Re$ (trên S) phản xạ ($\forall x \in S, x\Re x$) nhưng $\Re$ (trên T) không phản xạ ($\exists 4 \in T, 4 \overline{\Re} 4$).

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $[\, x \,\gamma\, y \Leftrightarrow x \le y + 2 \,]$ và $[\, x \,\delta\, y \Leftrightarrow 2x^3 \neq 3y^2 \,]$.
γ phản xạ ($\forall x \in S, x \le x + 2$ nên $x \,\gamma\, x$).
δ không phản xạ ($\exists 0 \in S, 2.0^3 = 3.0^2$ nên $0 \overline{\delta} 0$).

2.2/ TÍNH ĐỐI XỨNG:

a) $\Re$ *đối xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x\Re y \Rightarrow y\Re x$ ". (mọi cặp phần tử của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều hoặc không có quan hệ $\Re$ theo bất cứ chiều nào cả).

b) $\Re$ *không đối xứng* nếu " $\exists x_o, y_o \in S, x_o\Re y_o$ và $y_o \overline{\Re} x_o$ ".
(có ít nhất một cặp phần tử của S chỉ quan hệ $\Re$ theo một chiều).

Ví dụ:

a) S = { 0, 1, 2 }. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\boldsymbol{\Re} = \{ (0,0), (2,1), (1,1), (1,2) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Re} \cup \{ (0,1) \} \subset S^2$

$\Re$ đối xứng [các cặp (0,0), (1,1), (1,2) có quan hệ hai chiều. Các cặp khác vắng mặt]

θ không đối xứng ($\exists 0, 1 \in S, 0\theta 1$ và $1\overline{\theta}0$).

b) S = **Q**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y$] và

[$x \delta y \Leftrightarrow 3x^2 + 2y = 3x - 2y^2$]

γ đối xứng ($\forall x, y \in S, x \gamma y \Rightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y \Rightarrow y^2 + \sin y = x^2 + \sin x \Rightarrow y \gamma x$)

δ không đối xứng ($\exists 1, 0 \in S, 1\delta 0$ và $0\overline{\delta}1$).

2.3/ <u>TÍNH PHẢN (ĐỐI) XỨNG:</u>

a) $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, (x\Re y$ và $y\Re x) \Rightarrow x = y$ "

(cặp phần tử nào của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều thì phải trùng nhau).

a') $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x\overline{\Re}y$ hay $y\overline{\Re}x)$ "

(mọi cặp phần tử khác nhau của S không có quan hệ $\Re$ đủ hai chiều).

b) $\Re$ *không phản xứng* nếu " $\exists x_o, y_o \in S, (x_o\Re y_o$ và $y_o\Re x_o)$ và $x_o \neq y_o$ "

(có ít nhất hai phần tử khác nhau của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều).

Ví dụ:

a) S = **N**. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\boldsymbol{\Re} = \{ (0,0), (2,3), (4,1), (8,8), (5,5) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Re} \cup \{ (3,2) \} \subset S^2$

$\Re$ phản xứng [$\forall x,y \in S, (x\Re y$ và $y\Re x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=8, y=8)\\(x=5, y=5)\end{array}\right. \Rightarrow (x = y)$].

θ không phản xứng [$\exists 2, 3 \in S, (2\theta 3$ và $3\theta 2)$ và $2 \neq 3$].

b) S = **R**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x = y^2$], [$x \delta y \Leftrightarrow x < y$] và

[$x \rho y \Leftrightarrow 2x^2 \geq 4y^3 - 5$].

γ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x \gamma y$ và $y \gamma x) \Rightarrow (x = y^2$ và $y = x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = x^4$ và $y = x^2) \Rightarrow \begin{cases}(x=0, x=1)\\ y = x^2\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=1, y=1)\end{array}\right. \Rightarrow x = y$].

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x \delta y$ và $y \delta x) \Rightarrow (x < y$ và $y < x) \Rightarrow (x < x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = y)$] [dấu $\Rightarrow$ cuối cùng đúng vì $(x < x)$ có chân trị sai]

[dùng phát biểu a)]

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x > y$ hay $y > x) \Rightarrow (x\ \overline{\delta}\ y$ hay $y\ \overline{\delta}\ x)$]

[dùng phát biểu a')]

ρ không phản xứng [$\exists 1, 0 \in S, (1\rho 0$ và $0\rho 1)$ và $0 \neq 1$].

2.4/ <u>TÍNH TRUYỀN (BẮC CẦU):</u>

a) $\Re$ *truyền* nếu " $\forall x, y, z \in S, (x\Re \mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\Re z) \Rightarrow x\Re z$ ".

b) $\Re$ *không truyền* nếu " $\exists x_o, y_o, z_o \in S, (x_o\Re \mathbf{y_o}$ và $\mathbf{y_o}\Re x_o)$ và $x_o\overline{\Re}z_o$ ".

Ví dụ:

a) S = **Z**. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\boldsymbol{\Re} = \{ (0,0), (-5,4), (-8,-9), (1,4), (0,-6), (1,-5) \} \subset \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Re} \cup \{ (-9,7) \} \subset S^2$

$\Re$ truyền [$\forall x,y,z \in S, (x\Re \mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\Re z) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0, z=0)\\(x=0, y=0, z-6)\\(x=1, y=-5, z=4)\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}0\Re 0\\0\Re(-6)\\1\Re 4\end{cases} \Rightarrow x \Re z$].

θ không truyền [$\exists(-8), (-9), 7 \in S, \{(-8)\theta(-9)$ và $(-9)\theta 7\}$ và $(-8)\,\overline{\theta}\,7$].

b) S = **Q**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x + 1 < y$] và [$x \delta y \Leftrightarrow x < y + 1$]

γ truyền [$\forall x, y, z \in S, (x \gamma \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \gamma x) \Rightarrow (x + 1 < \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} + 1 < z) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1) < \mathbf{y} < \mathbf{y} + 1 < z \Rightarrow (x + 1) < z \Rightarrow x\Re z$]

δ không truyền [$\exists 1, \frac{1}{2}, 0 \in S, (1\delta\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}\delta 0)$ và $1\,\overline{\delta}\,0$].

III. QUAN HỆ THỨ TỰ:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

a) $\Re$ là *một quan hệ thứ tự* trên S nếu $\Re$ phản xạ, phản xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu $\prec$ để thể hiện *một quan hệ thứ tự tổng quát*.

Ký hiệu $(S, \prec)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ thứ tự* $\prec$.

$\forall x,y \in S$, nếu $x \prec y$ thì ta nói *một cách hình thức* rằng

" x *nhỏ hơn* y " hay " x *kém hơn* y " hay " x *đứng trước* y " hay

" y *lớn hơn* x " hay " y *trội hơn* x " hay " y *đứng sau* x "

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ thứ tự* trên S và $\varnothing \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ thứ tự* trên T.

Ví dụ:

a) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy,

$\leq$ phản xạ ($\forall x \in \mathbf{R}, x \leq x$), $\leq$ phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leq y$ và $y \leq x) \Rightarrow (x = y)$],

và $\leq$ truyền [$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x \leq \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$]. Tương tự cho quan hệ $\geq$.

Do đó $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \leq)$ và $(\mathbf{Z}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự.

b) $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, $|$ phản xạ ($\forall x \in \mathbf{N}, x = 1.\,x$ nên $x \mid x$), $|$ phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{N}, (x \mid y$ và $y \mid x) \Rightarrow (\exists\, a, b \in \mathbf{N}, y = ax$ và $x = by)$

$\Rightarrow (x = abx$ và $y = ax) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}x = 0 \,\&\, y = 0\\ hoac\\ x \geq 1, ab = 1, y = ax\end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}x = 0 \,\&\, y = 0\\ hoac\\ x \geq 1, a = b = 1, y = x\end{array}\right) \Rightarrow (x = y)$]

và $|$ truyền [$\forall x, y, z \in \mathbf{N}, (x \mid \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \mid z) \Rightarrow (\exists\, a, b \in \mathbf{N}, y = ax$ và $z = by) \Rightarrow$

$\Rightarrow (z = abx$ với $ab \in \mathbf{N}) \Rightarrow (x \mid z)$]. Tương tự cho quan hệ $\vdots$.

c) $(\Pi = \wp(E), \subset)$ và $(\Pi = \wp(E), \supset)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, $\subset$ phản xạ ($\forall A \in \Pi, A \subset A$), $\subset$ phản xứng [$\forall A, B \in \Pi, (A \subset B$ và $B \subset A) \Rightarrow A = B$],

$\subset$ truyền [$\forall A, B, C \in \Pi, (A \subset \mathbf{B}$ và $\mathbf{B} \subset C) \Rightarrow A \subset C$]. Tương tự cho quan hệ $\supset$.

d) $(\mathbf{R}, <)$ và $(\mathbf{R}, >)$ không phải là các quan hệ thứ tự vì các quan hệ $<$ và $>$ không phản xạ trên $\mathbf{R}$ ($\exists 1 \in \mathbf{R}, 1 \,\overline{<}\, 1$ và $1 \,\overline{>}\, 1$).

Để ý $<$ và $>$ vẫn phản xứng và truyền trên **R**.

e) $(\mathbf{Z}, |)$ và $(\mathbf{Z}, \vdots)$ không phải là các quan hệ thứ tự vì các quan hệ $|$ và $\vdots$ không phản xứng trên $\mathbf{Z}$ ($\exists 1, (-1) \in \mathbf{Z}, 1 | (-1), (-1) | 1, 1 \vdots (-1), (-1) \vdots 1$ và $1 \neq -1$). Để ý $|$ và $\vdots$ vẫn phản xạ và truyền trên $\mathbf{R}$.

3.2/ <u>THỨ TỰ TOÀN PHẦN – THỨ TỰ BÁN PHẦN:</u> Cho $(S, \prec)$.

Có đúng một trong hai trường hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: $\forall x, y \in S, x \prec y$ hay $y \prec x$ (x và y *so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự toàn phần* trên S.

b) Trường hợp 2: $\exists x_o, y_o \in S, x_o \overline{\prec} y_o$ và $y_o \overline{\prec} x_o$ (x_o và y_o *không so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự bán phần* trên S.

<u>Ví dụ:</u>

a) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ là các quan hệ thứ tự toàn phần.
[$\forall x, y \in S, (x \leq y$ hay $y \leq x)$ và $(x \geq y$ hay $y \geq x)$]

b) $S = \{ a = 2^n \mid n \in \mathbf{N} \} \subset \mathbf{N}$. Do $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự nên $(S, |)$ và $(S, \vdots)$ cũng là các quan hệ thứ tự. Hơn nữa đây là các thứ tự toàn phần.
[$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S, (x \mid y \Leftrightarrow p \leq q)$ và $(x \vdots y \Leftrightarrow p \geq q)$]

c) $(\mathbf{N}, |)$ và $(\mathbf{N}, \vdots)$ là các quan hệ thứ tự bán phần.
($\exists 2, 3 \in \mathbf{N}$, 2 và 3 không phải là ước số và không phải là bội số của nhau)

d) $(\Pi = \wp(E), \subset)$ và $(\Pi = \wp(E), \supset)$ là các quan hệ thứ tự bán phần nếu $| E | \geq 2$. Thật vậy, viết $E = \{ a, b, ... \}$ và $\Pi = \wp(E) = \{\varnothing, A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{a,b\}, ... \}$ thì ta thấy $\exists A, B \in \Pi, A \not\subset B$ và $B \not\subset A$. Nếu $| E | \leq 1$ thì $\Pi = \{\varnothing\}$ hoặc $\Pi = \{\varnothing, \{a\}\}$ nên ta thấy ngay $(\Pi = \wp(E), \subset)$ và $(\Pi = \wp(E), \supset)$ là các quan hệ thứ tự toàn phần.

3.3/ <u>KHÁI NIỆM KỀ NHAU TRONG QUAN HỆ THỨ TỰ:</u>

Cho $(S, \prec)$ và $x, y \in S$ với $x \neq y$.

a) Nếu $x \prec y$ và không có $z \in S \setminus \{x, y\}$ thỏa $x \prec z \prec y$ thì ta nói "x *kề với* y (với vị thế x *kém* y *trội*)" hay "y là *một trội trực tiếp* của x". Ta nối x với y bằng *một đoạn thẳng có mũi tên định hướng* từ x đến y :
$x \rightarrow y$.

b) Suy ra x và y *không kề nhau* nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:
* $x \overline{\prec} y$ và $y \overline{\prec} x$ (x và y không so sánh được với nhau bởi quan hệ thứ tự $\prec$).
* $\exists z \in S \setminus \{x, y\}$ thỏa $(x \prec z \prec y$ hay $y \prec z \prec x)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) $\forall k \in (\mathbf{Z}, \leq)$ ta có k và $(k + 1)$ là kề nhau [$k \leq k + 1$ và $\forall a \in \mathbf{Z}$, không xảy ra $k < a < k + 1$] nhưng k và $k + 2$ không kề nhau [$\exists (k + 1) \in \mathbf{Z}, k < k + 1 < k + 2$].

b) Trong $(\mathbf{R}, \leq)$, không có cặp phần tử nào kề nhau
[$\forall x, y \in \mathbf{R}$ mà $x < y, \exists z = 2^{-1}(x + y) \in \mathbf{R}, x < z < y$].

c) Trong $(\mathbf{N}, |)$:
12 và 36 kề nhau ($12 \mid 36$ và không có $a \in \mathbf{N}$ thỏa $12 \mid a, a \mid 36$ và $12 \neq a \neq 36$).
3 và 5 không kề nhau (3 và 5 không phải là ước số của nhau)
4 và 40 không kề nhau ($\exists 8 \in \mathbf{N}$ thỏa $4 \mid 8, 8 \mid 40$ và $4 \neq 8 \neq 40$).

d) Trong $(\wp(E), \subset)$ với $E = \{a,b,c\}$: $A = \{a\}$ và $B = \{a, b\}$ kề nhau (A trước B)
B và $C = \{b,c\}$ không kề nhau (vì $B \not\subset C$ và $C \not\subset B$).
A và E không kề nhau (vì $A \subset B \subset E$ và $A \neq B \neq E$).

3.4/ <u>BIỂU ĐỒ HASSE CỦA QUAN HỆ THỨ TỰ:</u> Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn*.

a) Vẽ *cạnh nối* (*có mũi tên định hướng*) cho tất cả các cặp phần tử kề nhau trong $(S, \prec)$. Hình vẽ có được gọi là *biểu đồ Hasse* của $(S, \prec)$.

b) Nếu $\prec$ là một thứ tự toàn phần trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ có thể vẽ một cách đơn giản trên một đoạn thẳng. Nếu $\prec$ là một thứ tự bán phần trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ có thể rẽ nhánh phức tạp.

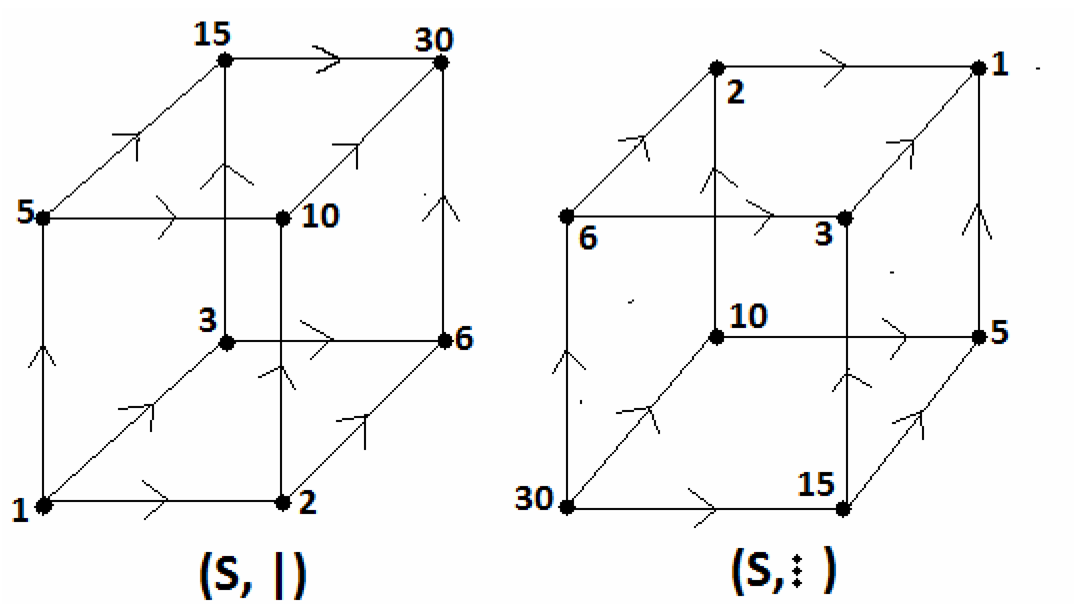
<u>Ví dụ:</u>

a) $S = \{ a = 2^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots , 7 \}$. Ta có $(S, \mid)$ và $(S, \vdots)$ đều là các quan hệ thứ tự toàn phần [$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S$, ($x \mid y \Leftrightarrow p \leq q$) và ($x \vdots y \Leftrightarrow p \geq q$)] nên biểu đồ Hasse của chúng có thể vẽ trên một đoạn thẳng như sau:

$2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to 2^3 \to 2^4 \to 2^5 \to 2^6 \to 2^7$ [sơ đồ Hasse của $(S, \mid)$]

$2^7 \to 2^6 \to 2^5 \to 2^4 \to 2^3 \to 2^2 \to 2^1 \to 2^0$ [sơ đồ Hasse của $(S, \vdots)$]

b) T = { các ước số dương của 30 } = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }. Ta có $(T, \mid)$ và $(T, \vdots)$ đều là các quan hệ thứ tự bán phần (2 và 3 không là ước số và bội số của lẫn nhau) nên biểu đồ Hasse của chúng sẽ rẽ nhánh như sau:



3.5/ <u>PHẦN TỬ CỰC TIỂU (NHỎ NHẤT) VÀ CỰC ĐẠI (LỚN NHẤT):</u>

Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói $a = min(S, \prec)$ nếu $a \in S$ và $a \prec x$ $\forall x \in S$.

b) Ta nói $b = max(S, \prec)$ nếu $b \in S$ và $x \prec b$ $\forall x \in S$.

c) Phần tử *min* (*cực tiểu, nhỏ nhất*) và *max*(*cực đại, lớn nhất*) hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại duy nhất*.

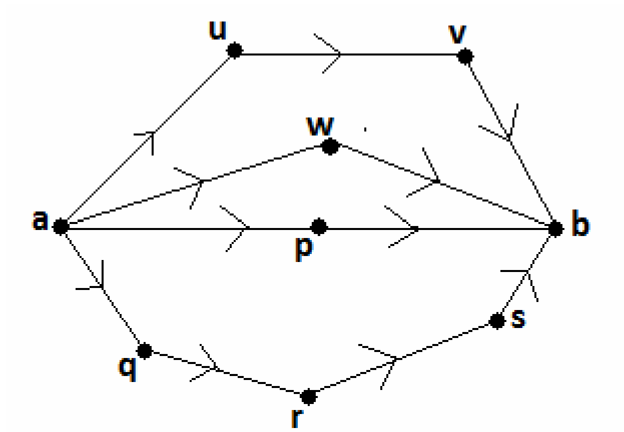
3.6/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử min(nếu có) là *điểm xuất phát chung* của mọi nhánh và phần tử max (nếu có) là *điểm kết thúc chung* của mọi nhánh.

b) Nếu S *hữu hạn* và $\prec$ là *thứ tự toàn phần* thì $(S, \prec)$ luôn có min và max.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:



$(S, \prec)$

Ta có $a = \min(S, \prec)$ và $b = \max(S, \prec)$.

b) Xét các tập S và T trong **Ví dụ** (**3.4**).

Ta có $\min(S, |) = 2^0$, $\max(S, |) = 2^7$, $\min(S, \vdots) = 2^7$ và $\max(S, \vdots) = 2^0$.

$\min(T, |) = 1$, $\max(T, |) = 30$, $\min(T, \vdots) = 30$ và $\max(T, \vdots) = 1$.

c) Cho $S = [-3, 8] \subset \mathbf{R}$. Khi đó

$\min(S, \leq) = -3$ và $\max(S, \leq) = 8$ (vì $-3, 8 \in S$ và $\forall x \in S, -3 \leq x \leq 8$)

$\min(S, \geq) = 8$ và $\max(S, \geq) = -3$ (vì $8, -3 \in S$ và $\forall x \in S, 8 \geq x \geq -3$)

d) $\min(\mathbf{N}, |) = 1$ và $\max(\mathbf{N}, |) = 0$ (vì $1, 0 \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, 1 \mid x$ và $x \mid 0$)

$\min(\mathbf{N}, \vdots) = 0$ và $\max(\mathbf{N}, |) = 1$ (vì $0, 1 \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, 0 \vdots x$ và $x \vdots 1$)

e) $\min(\Pi = \wp(E), \subset) = \varnothing$ và $\max(\Pi = \wp(E), \subset) = E$

(vì $\varnothing, E \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi$, $\varnothing \subset A \subset E$)

$\min(\Pi = \wp(E), \supset) = E$ và $\max(\Pi = \wp(E), \supset) = \varnothing$

(vì $E, \varnothing \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi$, $E \supset A \supset \varnothing$)

f) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ không có min và max vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}$,

$x - 1 < x < x + 1$ và $x + 1 > x > x - 1$.

g) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \leq)$ và $(T, \geq)$ không có min và max vì $\forall x \in T$,

$\exists \frac{x-4}{2}, \frac{x+9}{2} \in T$, $\frac{x-4}{2} < x < \frac{x+9}{2}$ và $\frac{x+9}{2} > x > \frac{x-4}{2}$.

3.7/ <u>PHẦN TỬ TỐI TIỂU VÀ TỐI ĐẠI:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói a là *một phần tử tối tiểu* của $(S, \prec)$ nếu $a \in S$ và *không có* $a' \in S \setminus \{a\}$ thỏa $a' \prec a$.

Phần tử min (nếu có) là phần tử tối tiểu đặc biệt và duy nhất.

b) Ta nói b là *một phần tử tối đại* của $(S, \prec)$ nếu $b \in S$ và *không có* $b' \in S \setminus \{b\}$ thỏa $b \prec b'$.
Phần tử max (nếu có) là phần tử tối đại đặc biệt và duy nhất.

c) Phần tử tối tiểu và tối đại hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại mà không nhất thiết duy nhất.*

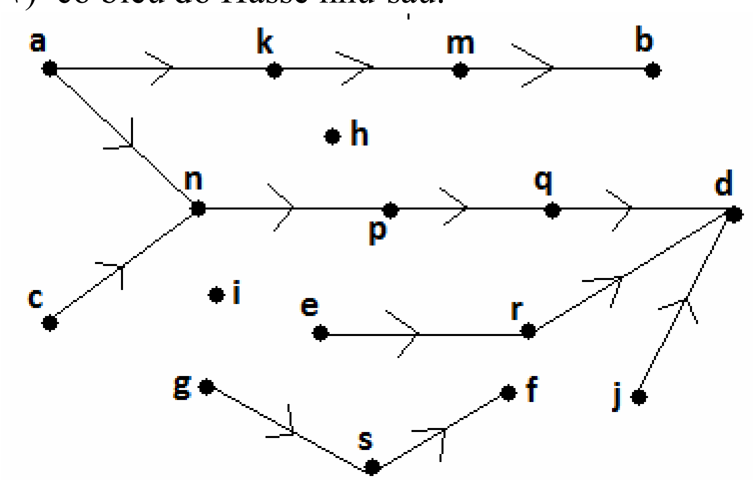
3.8/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử tối tiểu (nếu có) là *điểm xuất phát của ít nhất một nhánh* và phần tử tối đại (nếu có) là *điểm kết thúc của ít nhất một nhánh*. *Các phần tử cô lập* của $(S, \prec)$ (không so sánh được với mọi phần tử khác) xem như là các nhánh cụt nên chúng vừa là tối tiểu vừa là tối đại.

b) Nếu S *hữu hạn* và $\prec$ là *thứ tự tùy ý* thì $(S, \prec)$ luôn có tối tiểu và tối đại.

<u>Ví dụ:</u>

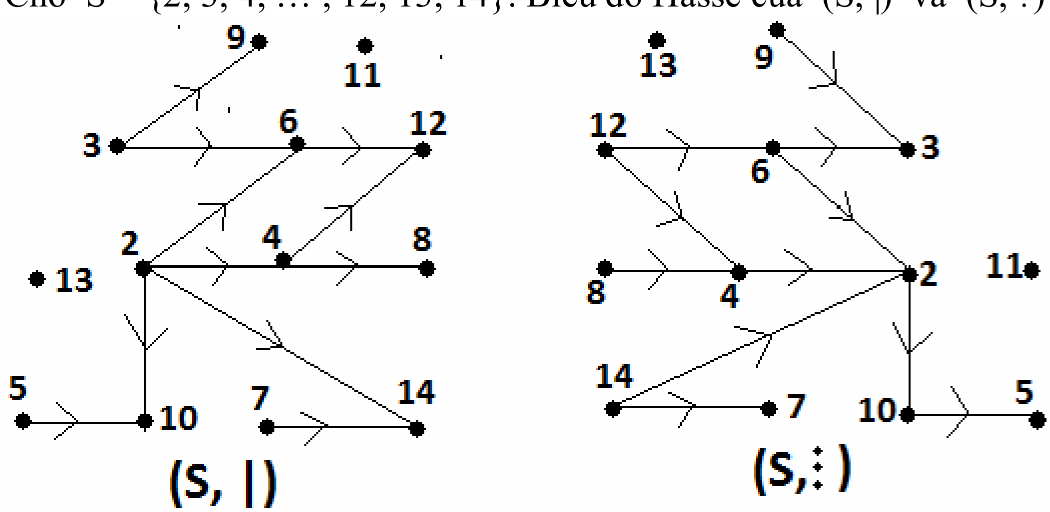
a) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:



$(S, \prec)$

$(S, \prec)$ có 7 phần tử tối tiểu là a, c, e, g, h, i, j và 5 phần tử tối đại là b, d, f, h, i.

b) Cho S = {2, 3, 4, … , 12, 13, 14}. Biểu đồ Hasse của (S, |) và $(S, \vdots)$ lần lượt là



(S, |) có các phần tử tối tiểu là 2, 3, 5, 7, 11, 13 và các phần tử tối đại là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

$(S, \vdots)$ có các phần tử tối tiểu là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 và các phần tử tối đại là 2, 3, 5, 7, 11, 13.

c) $(\mathbf{R}, \le)$ và $(\mathbf{R}, \ge)$ không có các phần tử tối tiểu và tối đại vì
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}, x-1 < x < x+1$ và $x+1 > x > x-1$.

d) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \le)$ và $(T, \ge)$ không có tối tiểu và tối đại vì
$\forall x \in T, \exists \frac{x-4}{2}, \frac{x+9}{2} \in T, \frac{x-4}{2} < x < \frac{x+9}{2}$ và $\frac{x+9}{2} > x > \frac{x-4}{2}$.

3.9/ TOÀN PHẦN HÓA MỘT THỨ TỰ BÁN PHẦN (SẮP XẾP TOPO):

Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn* ($|S| = n$) và $\prec$ là *thứ tự bán phần* trên S.
Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên S *nới rộng* thứ tự bán phần $\prec$.
(nghĩa là $\forall x, y \in S, x \prec y \Rightarrow x \prec^* y$).
Quá trình xây dựng thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S gọi là *một sự sắp xếp topo* $(S, \prec)$.

a) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối tiểu*:
Chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_1 của S và đặt $S_1 = S \setminus \{ a_1 \}$.
$\forall j \in \{ 2, 3, \ldots . n-1 \}$, chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_j của S_{j-1} và đặt
$S_j = S_{j-1} \setminus \{ a_j \}$. Ta có $|S_{n-1}| = 1$ và viết $S_{n-1} = \{ a \}$. Chọn $a_n = a$.
Sắp thứ tự $a_1 \prec^* a_2 \prec^* a_3 \prec^* \ldots \prec^* a_{n-2} \prec^* a_{n-1} \prec^* a_n$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_{n-2} \to a_{n-1} \to a_n$.
Ta có $\prec^*$ là một thứ tự toàn phần trên S nới rộng thứ tự bán phần $\prec$.

b) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối đại*: hoàn toàn tương tự như thuật toán dựa trên các phần tử tối tiểu nhưng ta chọn các phần tử tối đại (thay vì tối tiểu) và sắp theo thứ tự ngược lại $a_n \prec^* a_{n-1} \prec^* a_{n-2} \prec^* \ldots \prec^* a_3 \prec^* a_2 \prec^* a_1$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $a_n \to a_{n-1} \to a_{n-2} \to \ldots \to a_3 \to a_2 \to a_1$.
Thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S *không duy nhất* do việc chọn tùy ý các phần tử tối tiểu (hoặc tối đại) trong thuật toán.

<u>Ví dụ:</u> S = {Văn (V), Sử (Su), Địa (Đ), Toán (T), Lý (L), Hóa (H), Sinh (Si), Anh (A)}
Ký hiệu $x \prec y$ được hiểu là môn x thi trước môn y. Ta muốn sắp một lịch thi cho 8 môn học trong S sao cho $H \prec V, V \prec T, T \prec A, V \prec Si$, $Đ \prec Si$ và $Si \prec Su$ (môn Lý thì sắp tùy ý). Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho $(S, \prec)$ rồi sắp xếp topo nó để có thứ tự toàn phần $(S, \prec^*)$ phục vụ cho việc sắp lịch thi 8 môn học. Biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ là

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[dd] & V \arrow[r] & T \arrow[r] & A & \\ & & & & .\,L \\ \text{Đ} \arrow[r] & Si \arrow[r] & Su & & \end{tikzcd}$$

<u>Cách 1:</u> Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối tiểu Đ, H, V, Si, L, Su, T, A của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{Đ\}$, $S_2 = S_1 \setminus \{H\}$, $S_3 = S_2 \setminus \{V\}$, $S_4 = S_3 \setminus \{Si\}$, $S_5 = S_4 \setminus \{L\}$, $S_6 = S_5 \setminus \{Su\}$, $S_7 = S_6 \setminus \{T\}$. ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là
$$Đ \prec^* H \prec^* V \prec^* Si \prec^* L \prec^* Su \prec^* T \prec^* A.$$
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $Đ \to H \to V \to Si \to L \to Su \to T \to A$.

<u>Cách 2:</u> Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối đại L, A, Su, Si, T, V, Đ, H của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{L\}$, $S_2 = S_1 \setminus \{A\}$, $S_3 = S_2 \setminus \{Su\}$, $S_4 = S_3 \setminus \{Si\}$, $S_5 = S_4 \setminus \{T\}$, $S_6 = S_5 \setminus \{V\}$, $S_7 = S_6 \setminus \{Đ\}$. ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là $H \prec^* Đ \prec^* V \prec^* T \prec^* Si \prec^* Su \prec^* A \prec^* L$.
Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là $H \to Đ \to V \to T \to Si \to Su \to A \to L$.

3.10/ <u>THỨ TỰ TỪ ĐIỂN:</u>

Cho $(S, \prec)$ với S hữu hạn và $\prec$ là thứ tự toàn phần trên S. Mỗi phần tử của S được gọi là một " ký tự ".

Đặt $\prod$ = Tập hợp tất cả các chuỗi " ký tự " được thành lập từ S, nghĩa là

$\prod = \{ \alpha = a_1a_2 \ldots a_m \mid m$ nguyên ≥ 1 và $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S \}$ và ta có $S \subset \prod$.

Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên $\prod$ *nới rộng thứ tự* $\prec$ trên S.

$\forall \alpha = a_1a_2 \ldots a_m, \beta = b_1b_2 \ldots b_n \in \prod$, ta sắp $\alpha \prec^* \beta$ nếu α và β thỏa một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \leq n$ và $a_i = b_i$ $(1 \leq i \leq m)$, nghĩa là α là *một đoạn đầu* của β.

Trường hợp 2 : $a_1 \prec b_1$ và $a_1 \neq b_1$ (α và β *có sự khác biệt ở ngay* " *ký tự* " *đầu*).

Trường hợp 3 : $p = \min\{m, n\} \geq 2$ và $\exists k \in \{1, \ldots, p-1\}$ sao cho $a_i = b_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $a_{k+1} \prec b_{k+1}$ và $a_{k+1} \neq b_{k+1}$ (α và β *giống nhau ở* k " *ký tự* " *đầu tiên* và *có sự* khác biệt ở " *ký tự* " *thứ* $k + 1$).

Trường hợp 2 có thể xem như tương tự với trường hợp 3 ứng với $k = 0$.

Thứ tự toàn phần $\prec^*$ gọi là *thứ tự từ điển* trên $\prod$ nới rộng thứ tự $\prec$ trên S.

<u>Ví dụ:</u>

a) $S = \{ 0, 1, 2, \ldots, 7, 8, 9 \}$ với thứ tự toàn phần tự nhiên $0 < 1 < 2 < \ldots < 8 < 9$.
$\prod$ = Tập hợp tất cả các dãy số được thành lập từ S. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.
Chẳng hạn như $37952 \prec^* 37952041$ (trường hợp 1),
$6589617 \prec^* 9109$ (trường hợp 2), $543018 \prec^* 543092$ (trường hợp 3 ứng với $k = 4$)

b) $T = \{ a, b, c, \ldots, x, y, z \}$ với thứ tự toàn phần tự nhiên $a < b < c < \ldots < y < z$.
$\prod$ = Tập hợp tất cả các từ (có nghĩa trong tiếng Anh) được thành lập từ S. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.
Chẳng hạn như home $\prec^*$ homework (trường hợp 1),
comedy $\prec^*$ nature (trường hợp 2), architect $\prec^*$ artist (trường hợp 3 ứng với $k = 2$)

IV. <u>QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:</u>

4.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

a) $\Re$ là *một quan hệ tương đương* trên S nếu $\Re$ phản xạ, đối xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu $\sim$ để thể hiện *một quan hệ tương đương tổng quát*.
Ký hiệu $(S,\sim)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ tương đương* $\sim$.
$\forall x,y \in S$, nếu $x \sim y$ thì ta nói một cách hình thức rằng " x *tương đương với* y "

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ tương đương* trên S và $\varnothing \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ tương đương* trên T.

<u>Ví dụ:</u>

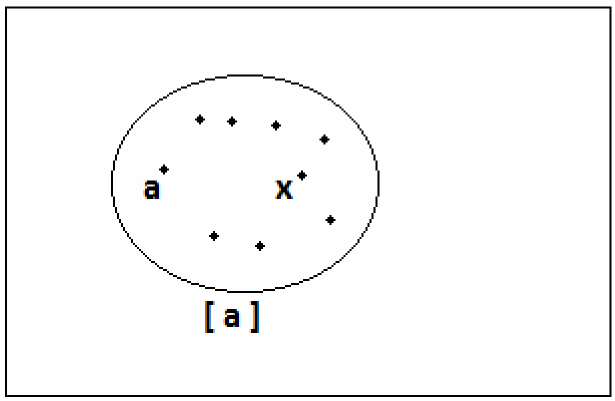
a) S = Tập hợp mọi người trên trái đất.

$$\forall x, y \in S, \text{ đặt } x \sim y \Leftrightarrow x \text{ cùng tuổi với (ctv) } y$$

Ta có $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S. Thật vậy,
$\sim$ phản xạ ($\forall x \in S$, x ctv x), $\sim$ đối xứng ($\forall x, y \in S$, x ctv y $\Rightarrow$ y ctv x),
$\sim$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, (x ctv **y** và **y** ctv z) $\Rightarrow$ x ctv z].

b) S = **R** và hàm số tùy ý $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S vì $\Re$ phản xạ [$\forall x \in S, f(x) = f(x)$],
$\Re$ đối xứng ($\forall x, y \in S, f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$] và
$\Re$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, { $f(x) = f(\mathbf{y})$ và $f(\mathbf{y}) = f(z)$ } $\Rightarrow f(x) = f(z)$].

4.2/ <u>LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA MỘT PHẦN TỬ:</u> Cho (S,~) và $a \in S$.
Đặt $\overline{a} = \{ x \in S \mid x \sim a \} = \{ a, \ldots \}$ (vì $a \sim a$ do tính phản xạ của quan hệ ~).
Ta có $\varnothing \neq \overline{a} \subset S$ và ta nói $\overline{a}$ là *lớp tương đương của* a (*xác định bởi quan hệ tương đương* ~ trên S). Ta cũng có thể dùng ký hiệu [a] thay cho $\overline{a}$.



(S,~)

<u>Ví dụ:</u>

a) S = {An[18], Lý[21], Tú[18], Hà[19], Vũ[20], Hy[19], Sĩ[18], Sử[19], Tá[20], Vy[18]}(số nhỏ ở trên là tuổi)
$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow$ x cùng tuổi với y.
Ta có ~ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**]. Lúc đó
[**An**] = { x ∈ S | x ~ **An** } = { **An**, Tú, Sĩ, Vy }, [**Lý**] = { x ∈ S | x ~ **Lý** } = { **Lý** }
[**Hy**] = { x ∈ S | x ~ **Hy** } = { **Hy**, Hà, Sử }, [**Tá**] = { x ∈ S | x ~ **Tá** } = { **Tá**, Vũ }

b) S = **R**. $\forall x, y \in S$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ với $f(t) = t^3 - 3t \;\; \forall t \in \mathbf{R}$.
Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**].
Ta tìm $\overline{0}, \overline{2}, \overline{-5}$ và $\overline{a}$ với $a \in \mathbf{R}$.

$\overline{0} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{0} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = 0 \} = \{ \mathbf{0}, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \}$

$\overline{2} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{2} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x - 2 = 0 \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x+1)^2(x-2) = 0 \} = \{ \mathbf{2}, -1 \}$

$\overline{-5} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, (\mathbf{-5}) \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x + 110 = 0 \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x+5)(x^2 - 5x + 22) = 0 \} = \{ \mathbf{-5} \}$

$\overline{a} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \,\Re\, \mathbf{a} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = a^3 - 3a \} =$
$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0 \}$. Như vậy $\overline{a}$ có từ 1 đến 3 phần tử.

Đặt $g(x) = x^2 + ax + a^2 - 3$ có $\Delta = 3(4 - a^2)$ và $g(a) = 3(a-1)(a+1)$. Ta có
$|\,\overline{a}\,| = 3 \Leftrightarrow [\, \Delta > 0$ và $g(a) \neq 0 \,] \Leftrightarrow (1 \neq |a| < 2) \Leftrightarrow a \in (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2)$

Lúc đó $\overline{a} = \{ \mathbf{a}, \dfrac{-a + \sqrt{3(4-a^2)}}{2}, \dfrac{-a - \sqrt{3(4-a^2)}}{2} \}$.

$|\,\overline{a}\,| = 1 \;\Leftrightarrow \{\, \Delta < 0$ hay $[\, \Delta = 0$ và $g(a) = 0\,]\,\} \Leftrightarrow [\, a^2 > 4$ hay $(\, a^2 = 4$ và $a^2 = 1)\,]$

$\Leftrightarrow\; a^2 > 4 \;\Leftrightarrow\; a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Lúc đó $\overline{a} = \{\, \mathbf{a} \,\}$.

$|\,\overline{a}\,| = 2 \;\Leftrightarrow \{\, [\, \Delta > 0$ và $g(a) = 0\,]$ hay $[\, \Delta = 0$ và $g(a) \neq 0\,]\,\} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; [\,(\, a^2 < 4$ và $a^2 = 1)$ hay $(\, a^2 = 4$ và $a^2 \neq 1)\,] \;\Leftrightarrow\; a \in \{\, -2, -1, 1, 2 \,\}$

Lúc đó $\overline{-2} = \overline{1} = \{\, -2, 1 \,\}$ và $\overline{2} = \overline{-1} = \{\, -1, 2 \,\}$.

$(S, \Re)$ được phân hoạch thành vô hạn lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp tương đương có từ 1 đến 3 phần tử.

4.3/ <u>SỰ PHÂN HOẠCH THÀNH CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG:</u> Cho $(S, \sim)$.

Quan hệ tương đương $\sim$ sẽ phân hoạch S thành *các lớp tương đương rời nhau từng đôi một* và mỗi lớp tương đương đều có dạng $\overline{a}$ (với a nào đó thuộc S).

$\forall x \in \overline{a}$, ta có $\overline{x} = \overline{a}$ và ta nói x là *một phần tử đại diện của lớp tương đương* $\overline{a}$.

Hai phần tử (của S) có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc cùng một lớp tương đương.

Hai phần tử (của S) không có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc hai lớp tương đương rời nhau.

$\forall x, y \in S$, ta có

$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \overline{y} \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{y} \;\Leftrightarrow\; y \in \overline{x} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ (không rời = trùng nhau).

$x \nsim y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \neq \overline{y} \;\Leftrightarrow\; x \notin \overline{y} \;\Leftrightarrow\; y \notin \overline{x} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$ (rời nhau = không trùng).

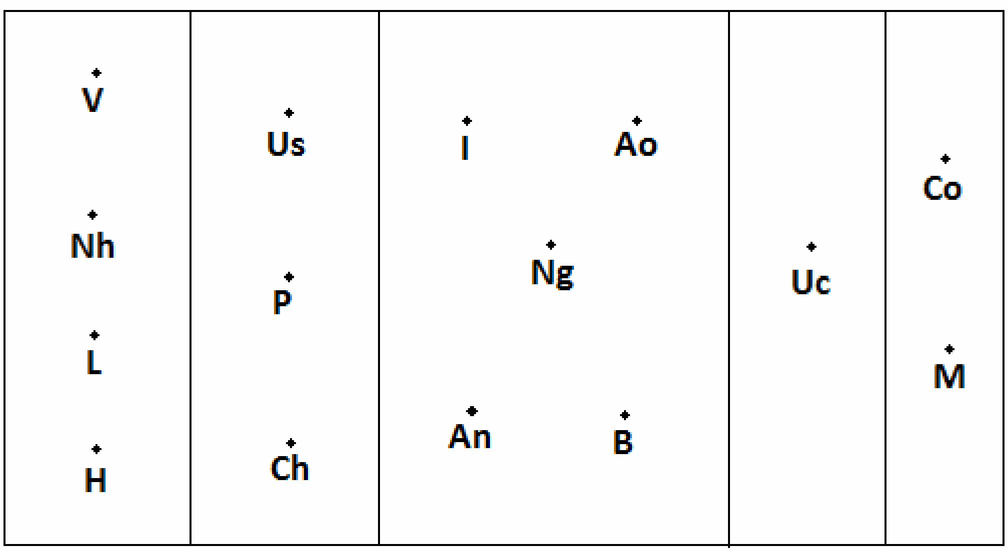
<u>Ví dụ:</u>

a) S = { Việt Nam (V), Hoa Kỳ (Us), Ý (I), Nhật (Nh), Áo (Ao), Úc (Uc), Peru (P), Nga (Ng), Congo (Co), Lào (L), Anh (An), Maroc (M), Hàn (H), Chile (Ch), Bỉ (B) }

$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow$ nước x cùng châu lục với nước y

$\sim$ là một quan hệ tương đương trên S (kiểm tra tương tự như quan hệ cùng tuổi với)

Ta có các lớp tương đương như sau:



$(S, \sim)$

$\overline{V} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{V} \,\} = \{\, \mathbf{V}, Nh, L, H \,\} = \overline{Nh} = \overline{L} = \overline{H}$

$\overline{Us} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Us} \,\} = \{\, \mathbf{Us}, P, Ch \,\} = \overline{P} = \overline{Ch}$

$\overline{I} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{I} \,\} = \{\, \mathbf{I}, Ao, Ng, An, B \,\} = \overline{Ao} = \overline{Ng} = \overline{An} = \overline{B}$

$\overline{Uc} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Uc} \,\} = \{\, \mathbf{Uc} \,\}$ và $\overline{Co} = \{\, x \in S \mid x \sim \mathbf{Co} \,\} = \{\, \mathbf{Co}, M \,\} = \overline{M}$

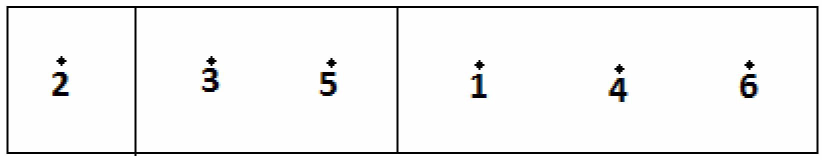
$S = \overline{V} \cup \overline{Us} \cup \overline{I} \cup \overline{Uc} \cup \overline{Co} = \overline{Nh} \cup \overline{P} \cup \overline{Ao} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M} = \overline{L} \cup \overline{Ch} \cup \overline{Ng} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M}$

S được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một. Ta có

$V \sim Nh \Leftrightarrow \overline{V} = \overline{Nh} \Leftrightarrow V \in \overline{Nh} \Leftrightarrow Nh \in \overline{V} \Leftrightarrow \overline{V} \cap \overline{Nh} \neq \varnothing$

$Ng \not\approx P \Leftrightarrow \overline{Ng} \neq \overline{P} \Leftrightarrow Ng \notin \overline{P} \Leftrightarrow P \notin \overline{Ng} \Leftrightarrow \overline{Ng} \cap \overline{P} = \varnothing$

b) $\mathfrak{R}$ là một quan hệ tương đương trên $T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ sao cho T được phân hoạch thành 3 lớp tương đương rời nhau từng đôi một là $T = \{2\} \cup \{3, 5\} \cup \{1, 4, 6\}$.



(T, $\mathfrak{R}$)

Suy ra $\overline{2} = \{ 2 \}$, $\overline{3} = \overline{5} = \{ 3, 5 \}$, $\overline{1} = \overline{4} = \overline{6} = \{ 1, 4, 6 \}$, $T = \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3}$ và

$\mathfrak{R} = \{(2,2), (3,3), (5,5), (3,5), (5,3), (1,1), (4,4), (6,6), (1,4), (4,1), (1,6), (6,1), (4,6), (6,4)\}$

Ta có $1 \sim 4 \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{4} \Leftrightarrow 1 \in \overline{4} \Leftrightarrow 4 \in \overline{1} \Leftrightarrow \overline{1} \cap \overline{4} \neq \varnothing$

$2 \not\approx 3 \Leftrightarrow \overline{2} \neq \overline{3} \Leftrightarrow 2 \notin \overline{3} \Leftrightarrow 3 \notin \overline{2} \Leftrightarrow \overline{2} \cap \overline{3} = \varnothing$

4.4/ TẬP HỢP THƯƠNG XÁC ĐỊNH BỞI QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:

Cho (S, ~).

Đặt S/~ là tập hợp tất cả các lớp tương đương (xác định bởi quan hệ ~ trên S), nghĩa là $S/\sim \; = \{\overline{x} \mid x \in S\}$. Như vậy $\forall x \in S$, ta có $\overline{x} \subset S$ và $\overline{x} \in S/\sim$. Ta nói S/~ là *tập hợp thương* của S *xác định bởi quan hệ tương đương* ~ .

Ví dụ: Xét lại các quan hệ tương đương (S, ~) và (T, $\mathfrak{R}$) trong **Ví dụ (4.3)**. Ta có

$(S/\sim) = \{ \overline{x} \mid x \in S \} = \{ \overline{V}, \overline{Us}, \overline{I}, \overline{Uc}, \overline{Co} \} = \{ \overline{Nh}, \overline{P}, \overline{Ao}, \overline{Uc}, \overline{M} \} = \{ \overline{L}, \overline{Ch}, \overline{Ng}, \overline{Uc}, \overline{M} \}$

$(T/\mathfrak{R}) = \{ \overline{x} \mid x \in T \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \} = \{ \overline{4}, \overline{2}, \overline{5} \} = \{ \overline{6}, \overline{2}, \overline{5} \}$

V. QUAN HỆ ĐỒNG DƯ TRÊN Z:

Cho số nguyên $n \geq 1$.

5.1/ TẬP HỢP $\mathbf{Z}_n$:

Một số nguyên khi chia (Euclide) cho n sẽ có số dư là 0, 1, 2, ..., (n – 1).

$\forall a, b \in \mathbf{Z}$, đặt $a \sim b \Leftrightarrow$ a và b có cùng số dư khi chia cho n

$\Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow n \,\vdots\, (a - b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, a = b + nk$

Quan hệ ~ là một quan hệ tương đương trên **Z** (kiểm chứng dễ dàng) và ~ được gọi là *quan hệ đồng dư modulo n* trên **Z**. Ta cũng viết $a \sim b$ là $a \equiv b \pmod{n}$.

Đặt $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/\sim \; = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$ [liệt kê *dạng tổng quát có trùng lặp*]

$= \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1} \}$ (*) [liệt kê *dạng chuẩn không trùng lặp*]

trong đó $\overline{0} = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $0 \} = \{ nt \mid t \in \mathbf{Z} \} = n\mathbf{Z}$ và

$\overline{r} = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $r \} = \{ nt + r \mid t \in \mathbf{Z} \} = n\mathbf{Z} + r$ $(1 \leq r \leq n - 1)$

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \ldots \cup \overline{n-1}$: **Z** được phân hoạch thành n lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử .

$\forall k \in \mathbf{Z}$, ta có thể viết $\overline{k}$ về dạng chuẩn (*) như sau :

Chia Euclide $k = qn + r$ với $0 \leq r < |n| = n$ thì $\overline{k} = \overline{r}$ với $0 \leq r \leq n - 1$.

Ví dụ: $\mathbf{Z}_5 = \{\ \overline{k}\ |\ k \in \mathbf{Z}\ \}$ (có trùng lặp) $= \{\ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\ \}$ (không trùng lặp) trong đó

$\overline{0} = \{\ 5t\ |\ t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\ \}$ (các số chia hết cho 5) $= 5\mathbf{Z}$

$\overline{1} = \{\ 5t + 1\ |\ t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 1) $= 5\mathbf{Z} + 1$

$\overline{2} = \{\ 5t + 2\ |\ t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 2) $= 5\mathbf{Z} + 2$

$\overline{3} = \{\ 5t + 3\ |\ t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 3) $= 5\mathbf{Z} + 3$

$\overline{4} = \{\ 5t + 4\ |\ t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 4) $= 5\mathbf{Z} + 4$

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4}$ ($\mathbf{Z}$ được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử).

Ta qui đổi các phần tử $\overline{245}, \overline{-716}$ và $\overline{593}$ trong $\mathbf{Z}_5$ về dạng chuẩn:

Chia Euclide cho 5 : $245 = 81(5) + 0$, $-716 = -144(5) + 4$ và $593 = 118(5) + 3$

Ta có $\overline{245} = \overline{0}$, $\overline{-716} = \overline{4}$ và $\overline{593} = \overline{3}$.

5.2/ <u>CÁC PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbf{Z}_n$:</u> Cho $\mathbf{Z}_n = \{\ \overline{k}\ |\ k \in \mathbf{Z}\ \}$(dạng tổng quát).

Trên $\mathbf{Z}_n$, ta có thể định nghĩa các phép toán $+, -$ và $.$ *một cách tự nhiên* như sau :

$\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbf{Z}_n$ (u, v $\in \mathbf{Z}$), đặt $\overline{u} \pm \overline{v} = \overline{u \pm v} \in \mathbf{Z}_n$ và $\overline{u}\,.\,\overline{v} = \overline{u.v} \in \mathbf{Z}_n$.

Ví dụ: Ta thực hiện các phép tính sau trong $\mathbf{Z}_{12}$:

$\overline{725} + \overline{548} = \overline{725 + 548} = \overline{1273} = \overline{1}$ $\qquad$ $\overline{548} - \overline{725} = \overline{548 - 725} = \overline{-177} = \overline{3}$

$\overline{692}\,.\,\overline{-473} = \overline{692(-473)} = \overline{-327316} = \overline{8}$ $\qquad$ $\overline{356}\,.\,\overline{885} = \overline{356(855)} = \overline{304380} = \overline{0}$

5.3/ <u>TẬP HỢP U($\mathbf{Z}_n$):</u> Cho $\mathbf{Z}_n = \{\ \overline{k}\ |\ k \in \mathbf{Z}\ \}$(dạng tổng quát).

Đặt $U(\mathbf{Z}_n) = \{\ \overline{k} \in \mathbf{Z}_n\ |\ \exists\, \overline{k'} \in \mathbf{Z}_n,\ \overline{k}\,.\,\overline{k'} = \overline{1}\ \} = \{\overline{1}, \overline{n-1}, \ldots\ \}$. Ta có $\overline{0} \notin U(\mathbf{Z}_n)$.

$\forall \overline{k} \in U(\mathbf{Z}_n)$, ta nói $\overline{k}$ là *một phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z}_n$ và phần tử duy nhất $\overline{k'} \in \mathbf{Z}_n$ thỏa $\overline{k}\,.\,\overline{k'} = \overline{1}$ gọi là *phần tử nghịch đảo của* $\overline{k}$ và ta ký hiệu $\overline{k'} = \overline{k}^{-1}$.

Dĩ nhiên $\overline{k'}$ cũng khả nghịch trong $\mathbf{Z}_n$ ($\overline{k'} \in U(\mathbf{Z}_n)$) và $\overline{k'}^{-1} = \overline{k}$.

Như vậy $U(\mathbf{Z}_n)$ là *tập hợp các phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z}_n$.

Ví dụ:

a) $U(\mathbf{Z}_8) = \{\ \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\ \}$

($\overline{1}\,.\,\overline{1} = \overline{3}\,.\,\overline{3} = \overline{5}\,.\,\overline{5} = \overline{7}\,.\,\overline{7} = \overline{1}$: mỗi phần tử của $U(\mathbf{Z}_8)$ là nghịch đảo của chính nó).

b) $U(\mathbf{Z}_9) = \{\ \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\ \}$ (do $\overline{1}\,.\,\overline{1} = \overline{2}\,.\,\overline{5} = \overline{4}\,.\,\overline{7} = \overline{8}\,.\,\overline{8} = \overline{1}$ nên

$\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{5}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{2}$, $\overline{4}^{-1} = \overline{7}$, $\overline{7}^{-1} = \overline{4}$ và $\overline{8}^{-1} = \overline{8}$)

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

a) $U(\mathbf{Z}_n) = \{\overline{k} \in \mathbf{Z}_n\ |\ (k, n) = 1\} = \{\overline{k} \in \mathbf{Z}_n\ |\ 1 \leq k \leq n - 1$ và $(k, n) = 1\}$.

b) Nếu p là *một số nguyên tố* ≥ 2 thì $U(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$.

c) $\forall \overline{k} \in U(\mathbf{Z}_n)$, chọn r, s $\in \mathbf{Z}$ thỏa $rk + sn = 1$ thì $\overline{k}^{-1} = \overline{r}$.

Ví dụ:

a) $U(\mathbf{Z}_{15}) = \{\overline{k} \in \mathbf{Z}_{15}\ |\ 1 \leq k \leq 14$ và $(k, 15) = 1\} = \{\ \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\ \}$.

b) $U(\mathbf{Z}_{11}) = \mathbf{Z}_{11} \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{9}, \overline{10}\}$

(ta có $\overline{1}\,.\,\overline{1} = \overline{2}\,.\,\overline{6} = \overline{3}\,.\,\overline{4} = \overline{5}\,.\,\overline{9} = \overline{7}\,.\,\overline{8} = \overline{10}\,.\,\overline{10} = \overline{1}$)

c) Ta có $(31)21 + (-13)50 = 1$ nên $(21, 50) = 1$. Suy ra $\overline{21} \in U(\mathbf{Z}_{50})$ và $\overline{21}^{-1} = \overline{31}$.

5.5/ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÊN $\mathbf{Z_n}$:

Cho $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{Z_n}$. Ta tìm $\overline{x} \in \mathbf{Z_n}$ thỏa $\overline{a}.\overline{x} = \overline{b}$ (1).

a) Nếu $\overline{a} = \overline{0} \neq \overline{b}$ thì phương trình *vô nghiệm*.

b) Nếu $\overline{a} = \overline{0} = \overline{b}$ thì phương trình *có n nghiệm* là $\overline{x}$ tùy ý thuộc $\mathbf{Z_n}$.

c) Nếu $\overline{a} \in U(\mathbf{Z_n})$ thì phương trình *có nghiệm duy nhất* là $\overline{x} = \overline{a}^{-1}\overline{b}$.

d) Khi $\overline{a} \neq \overline{0}$ và $\overline{a} \notin U(\mathbf{Z_n})$: Đặt $d = (a, n) \geq 2$, $a = a'd$ và $n = n'd$.

* Nếu d không chia hết b thì $n = n'd$ không chia hết $n'b$ và $\overline{n'}.\overline{b} \neq \overline{0}$.
Lúc đó
$\overline{a}.\overline{x} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a'}.\overline{d}.\overline{x} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a'}.\overline{n'}.\overline{d}.\overline{x} = \overline{n'}.\overline{b} \Rightarrow \overline{a'}.\overline{n}.\overline{x} = \overline{0}.\overline{x} = \overline{n'}.\overline{b} \neq \overline{0}$: phương trình *vô nghiệm*.

* Nếu $d \mid b$: viết $b = b'd$. Phương trình (1) trong $\mathbf{Z_n}$ là $\overline{d}.\overline{a'}.\overline{x} = \overline{d}.\overline{b'}$
Phương trình này tương ứng với phương trình $\overline{a'}\,\overline{X} = \overline{b'}$ (2) trong $\mathbf{Z_{n'}}$.
Để ý $(a', n') = 1$ nên $\overline{a'} \in U(\mathbf{Z_{n'}})$ và phương trình (2) có nghiệm duy nhất $\overline{X} = \overline{a'}^{-1}.\overline{b'}$ trong $\mathbf{Z_{n'}}$. Đặt $\overline{a'}^{-1}.\overline{b'} = \overline{c} \in \mathbf{Z_{n'}}$ thì phương trình (1) *có đúng d nghiệm* trong $\mathbf{Z_n}$ là $\overline{x} = \overline{c + jn'}$ $(0 \leq j \leq d - 1)$.

Ví dụ:

a) Trong $\mathbf{Z_6}$: Phương trình $\overline{18}.\overline{x} = \overline{47} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$ vô nghiệm.

b) Trong $\mathbf{Z_7}$: Phương trình $\overline{35}.\overline{x} = \overline{-56} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{0}$ có 7 nghiệm ($\overline{x}$ tùy ý $\in \mathbf{Z_7}$).

c) Trong $\mathbf{Z_9}$: Phương trình $\overline{22}.\overline{x} = \overline{-13} \Leftrightarrow \overline{4}.\overline{x} = \overline{5} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{4}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{8}$.

d) Trong $\mathbf{Z_{18}}$: Phương trình $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14}$ có $\overline{12} \notin U(\mathbf{Z_{18}})$, $d = (12, 18) = 6$ không chia hết 14 và $18 = 3(6)$. Ta có $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14} \Rightarrow \overline{3}.\overline{12}.\overline{x} = \overline{3}.\overline{14} \Rightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{42} = \overline{6} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

e) Phương trình $\overline{33}.\overline{x} = \overline{45}$ (trong $\mathbf{Z_{57}}$) (1) có $\overline{33} \notin U(\mathbf{Z_{57}})$ do $(33, 57) = 3$. Do $3 \mid 45$, $33 = 11(3)$ và $45 = 15(3)$ nên (1) tương ứng với phương trình $\overline{11}.\overline{X} = \overline{15}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$) (2). Do $7(11) - 4(19) = 1$ nên $\overline{11} \in U(\mathbf{Z_{19}})$ và $\overline{11}^{-1} = \overline{7}$. Phương trình (2) cho $\overline{X} = \overline{11}^{-1}.\overline{15} = \overline{7}.\overline{15} = \overline{105} = \overline{10}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$). Suy ra (1) có đúng 3 nghiệm trong $\mathbf{Z_{57}}$ là $x = \overline{10}$, $x = \overline{10+19} = \overline{29}$ và $x = \overline{10+2(19)} = \overline{48}$.

GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG VII

HÀM BOOLE

Ký hiệu n là số nguyên ≥ 1.

I. HÀM BOOLE:

1.1/ ĐẠI SỐ BOOLE NHỊ PHÂN: Cho $B = \{1, 0\}$. Ta xác định *các phép toán* trên B như sau: $\forall x, y \in B$ (x, y gọi là *các biến Boole*),
$\overline{x} = 1 - x$ (bù Boole), $x \wedge y = x.y$ (tích Boole),
$x \vee y = x + y - x.y$ (tổng Boole)

x	1	0
$\overline{x}$	0	1

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x \wedge y$	1	0	0	0

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x \vee y$	1	1	1	0

Kết quả tính toán của các phép toán " bù Boole, tích Boole và tổng Boole " thì giống như tìm chân trị của các phép toán " phủ định, hội và tuyển mệnh đề ".
Cấu trúc đại số $(B, -, \wedge, \vee)$ gọi là *Đại số Boole nhị phân*.
Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật như trong Đại số mệnh đề: $\forall x, y, z \in B$, ta có
* Luật bù kép : $\overline{\overline{x}} = x$
* Luật lũy đẳng : $x.x = x$ và $x \vee x = x$
* Luật giao hoán : $x.y = y.x$
* Luật hấp thu : $x.(x \vee y) = x = x \vee x.y$
* Luật bù De Morgan : $\overline{x.y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ và $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,.\,\overline{y}$
* Luật kết hợp : $(x.y).z = x.(y.z)$ và $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
* Luật phân phối : $x.(y \vee z) = x.y \vee x.z$ và $x \vee (y.z) = (x \vee y).(x \vee z)$
* Luật trung hòa : $x.1 = x = x \vee 0$
* Luật bù : $x.\overline{x} = 0$ và $x \vee \overline{x} = 1$
* Luật thống trị : $x.0 = 0$ và $x \vee 1 = 1$

1.2/ HÀM BOOLE:

a) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$, ta nói $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *một vector Boole*.
Mỗi ánh xạ $f : B^n \to B = \{0, 1\}$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
gọi là *một hàm Boole n biến*.

b) Mỗi hàm Boole n biến được mô tả bằng *một bảng giá trị* có 2^n cột ghi các giá trị của hàm Boole theo 2^n vector Boole.

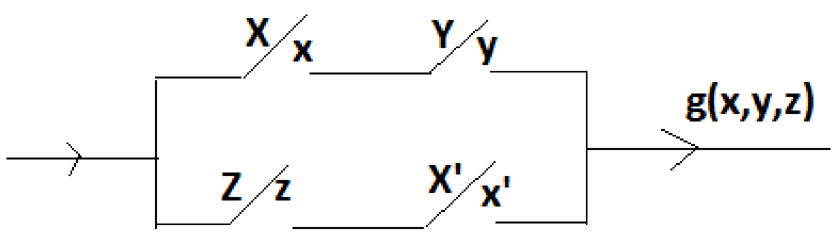
Ví dụ:

a) Các cử tri A, B, C bỏ phiếu tín nhiệm ứng viên D. Ta có các biến Boole tương ứng a, b, c (a = 1 nếu A tín nhiệm D hoặc a = 0 nếu trái lại. Tương tự cho các biến Boole b và c). Ta có hàm Boole f thể hiện kết quả bỏ phiếu tín nhiệm $f : B^3 \to B$, $\forall (a, b, c) \in B^3$,
f (a,b,c) = 1 (nếu D được tín nhiệm ≥ 2 phiếu) hoặc f (a,b,c) = 0 (nếu trái lại)

a	1	1	1	0	1	0	0	0
b	1	1	0	1	0	1	0	0
c	1	0	1	1	0	0	1	0
f(a,b,c)	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Bảng giá trị của hàm Boole f (x,y,z)

b) Cho các công tắc điện X, Y, Z trong một mạch điện như sau (công tắc điện X' = $\overline{X}$ có trạng thái đóng, mở luôn luôn trái ngược với công tắc X) :



Ta có các biến Boole tương ứng x, y, z (x = 1 nếu A đóng, x = 0 nếu A mở, x' = $\overline{x}$. Tương tự cho các biến Boole y và z). Ta có hàm Boole g thể hiện trạng thái của mạch điện : $g : B^3 \to B$, $\forall(x, y, z) \in B^3$, g (x,y,z) = 1 (nếu có điện qua mạch: X, Y đều đóng hoặc X mở, Z đóng) hoặc g (x,y,z) = 0 (nếu trái lại).

x	1	1	1	0	1	0	0	0
y	1	1	0	1	0	1	0	0
z	1	0	1	1	0	0	1	0
g(x,y,z)	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

Bảng giá trị của hàm Boole g(x,y,z)

1.3/ <u>ĐẠI SỐ BOOLE CỦA CÁC HÀM BOOLE:</u>

Đặt F_n = (Tập hợp các hàm Boole n biến) = $\{ f \mid f : B^n \to B \}$.

Ta có $|F_n| = 2^{2^n}$ (bảng giá trị có 2^n cột, mỗi cột có 2 khả năng chọn giá trị).

Trong F_n, có *các hàm Boole đặc biệt* là *hàm boole hằng* **O** (chỉ nhận giá trị 0) và *hàm boole hằng* **1** (chỉ nhận giá trị 1).

Ta xác định *các phép toán* trên F_n như sau:

$\forall f, g \in F_n$, $\forall X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in B^n$,

$\overline{f}(X) = \mathbf{1}(X) - f(X)$ (bù Boole) $(f \wedge g)(X) = f(X).g(X)$ (tích Boole)

$f(X) \vee g(X) = f(X) + g(X) - f(X).g(X)$ (tổng Boole)

Cấu trúc đại số $(F_n, -, \wedge, \vee)$ gọi là *Đại số Boole của các hàm Boole n biến*.

Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật như trong Đại số mệnh đề: $\forall f, g, h \in F_n$, ta có

* Luật bù kép : $\overline{\overline{f}} = f$ * Luật lũy đẳng : $f.f = f$ và $f \vee f = f$
* Luật giao hoán : $f.g = g.f$ * Luật hấp thu : $f.(f \vee g) = f = f \vee f.g$
* Luật bù De Morgan : $\overline{f.g} = \overline{f} \vee \overline{g}$ và $\overline{f \vee g} = \overline{f}.\overline{g}$
* Luật kết hợp : $(f.g).h = f.(g.h)$ và $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$
* Luật phân phối : $f.(g \vee h) = f.g \vee f.h$ và $f \vee (g.h) = (f \vee g).(f \vee h)$
* Luật trung hòa : $f.\mathbf{1} = f = f \vee \mathbf{O}$ * Luật bù : $f.\overline{f} = \mathbf{O}$ và $f \vee \overline{f} = \mathbf{1}$
* Luật thống trị : $f.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ và $f \vee \mathbf{1} = 1$

Ví dụ: Cho $f, g \in F_2$ và các hàm **O**, **1**, $\overline{f}$, $\overline{g}$, f. g, $f \vee g$ được thể hiện trong bảng giá trị dưới đây:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
1(x,y)	**1**	**1**	**1**	**1**
O(x,y)	**0**	**0**	**0**	**0**
f (x,y)	1	0	0	1
g(x,y)	1	0	1	0
$\overline{f}$ (x,y)	**0**	**1**	**1**	**0**
$\overline{g}$ (x,y)	**0**	**1**	**0**	**1**
(f .g)(x,y)	**1**	**0**	**0**	**0**
($f \vee g$)(x,y)	**1**	**0**	**1**	**1**

II. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA HÀM BOOLE:

2.1/ TỪ ĐƠN (CÁC HÀM BOOLE CƠ BẢN):

Trong F_n, xét $2n$ *hàm Boole cơ bản* (ta cũng gọi chúng là $2n$ *từ đơn*):
$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ và $\psi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x_i}$ ($1 \le i \le n$).
Từ nay về sau, ta ký hiệu đơn giản $\varphi_i = x_i$ và $\psi_i = \overline{x_i}$ ($1 \le i \le n$).

Ví dụ: $F_5 = \{ f \mid f : B^5 \to B \}$ có 10 từ đơn là x_i, $\overline{x_i}$ ($1 \le i \le 5$).

$\varphi_2(1,\mathbf{0},1,1,0) = x_2(1,\mathbf{0},1,1,0) = \mathbf{0}$ và $\psi_5(0,1,1,0,\mathbf{0}) = \overline{x_5}(0,1,1,0,\mathbf{0}) = \overline{0} = \mathbf{1}$

$\overline{x_2}x_3\overline{x_5}x_1\overline{x_3} = \overline{x_2}\,\overline{x_5}x_1(x_3\overline{x_3}) = \overline{x_2}\,\overline{x_5}x_1.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (giao hoán, kết hợp, bù, thống trị)

$x_4\overline{x_2}x_1\overline{x_5} \vee x_4\overline{x_2}x_1x_5 = (x_4\overline{x_2}x_1)(\overline{x_5} \vee x_5) = x_4\overline{x_2}x_1.\mathbf{1} = x_4\overline{x_2}x_1$ (phân phối, kết hợp, bù, trung hòa)

2.2/ ĐƠN THỨC:

Một đơn thức trong F_n là tích Boole của một số từ đơn sao cho tích này $\neq$ **O**.
Trong một đơn thức, không thể có mặt đồng thời x_i và $\overline{x_i}$ [vì $x_i\overline{x_i}$ = **O**] và ta không ghi lặp lại các từ đơn [vì $x_ix_i = x_i$ và $\overline{x_i}\,\overline{x_i} = \overline{x_i}$] ($1 \le i \le n$).
Bậc của một đơn thức là số từ đơn khác nhau có mặt trong đơn thức.
Một đơn thức trong F_n có bậc (deg = degree) từ 1 đến n.
Một đơn thức có bậc n trong F_n (cao nhất) được gọi là *một đơn thức tối tiểu*.
Mỗi đơn thức tối tiểu trong F_n có dạng tổng quát

$m = y_1 y_2 \dots y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $\overline{x_i}$ ($1 \le i \le n$)

Ví dụ: Xét các đơn thức trong F_5 (theo 5 biến Boole x, y, z, t và u):

$m_1 = \overline{z}$, $m_2 = y\overline{u}$, $m_3 = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$, $m_4 = y\,z\,t\,u$ và $m_5 = x\overline{y}\,\overline{z}\,t\,u$.

Ta có $\deg(m_i) = i$ ($1 \le i \le 5$) và $m_5 = x\overline{y}\,\overline{z}\,t\,u$ là một đơn thức tối tiểu.

2.3/ ĐA THỨC: *Một đa thức* f trong F_n là tổng Boole của một số đơn thức (trong F_n).

Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee ... \vee m_k$ ($m_1, m_2, ..., m_k$ là các đơn thức trong F_n).

Ví dụ: Xét đa thức f trong F_5 (theo 5 biến Boole x, y, z, t và u) :

$$f(x,y,z,t,u) = \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{z} \vee y\,\bar{t}\,u \vee y\,\bar{u}$$

Ta có $f(1,1,0,0,1) = \bar{1}.\bar{1}.0.0 \vee \bar{0} \vee 1.\bar{0}.1 \vee 1.\bar{1} = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 = 1$.

2.4/ DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE:

Dạng nối rời chính tắc của một hàm Boole f là một dạng đa thức đặc biệt của f sao cho các thành phần đơn thức trong đó đều là *các đơn thức tối tiểu*. Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là các đơn thức tối tiểu trong F_n).

Dạng nối rời chính tắc của f là *duy nhất sai khác một sự hoán vị của các thành phần đơn thức* $m_1, m_2, \ldots$ và m_k.

Ví dụ: $f \in F_4$ có biểu thức $f(x,y,z,t) = \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee xy\bar{z}\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t$.

Vế phải là tổng Boole của các đơn thức tối tiểu trong F_4 nên vế phải là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole f.

2.5/ TÌM DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE: Cho $f \in F_n$.

a) Tìm từ *bảng giá trị* của f : Ta để ý các vector Boole $(u_1,u_2, \ldots ,u_n)$ trong bảng giá trị mà $f(u_1,u_2, \ldots ,u_n) = 1$. Ta tạo ra các đơn thức tối tiểu tương ứng với các vector Boole đó : $(u_1,u_2, \ldots ,u_n) \mapsto m = y_1\, y_2 \ldots y_n$ với $y_i = x_i$ (nếu $u_i = 1$) hoặc $y_i = \bar{x}_i$ (nếu $u_i = 0$) [$1 \le i \le n$].

Tổng Boole các đơn thức tối tiểu như vậy chính là dạng nối chính tắc của hàm Boole f.

Ví dụ: Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole x_1, x_2, x_3) có bảng giá trị như sau:

x_1	1	1	1	0	1	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	1	0	0	1	0
$f(x_1,x_2,x_3)$	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**	0	**1**

Ta thấy $f(1,1,1) = f(1,0,1) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = f(0,0,0) = 1$.

$(1,1,1) \mapsto m_1 = x_1x_2x_3$, $(1,0,1) \mapsto m_2 = x_1\bar{x}_2x_3$, $(0,1,1) \mapsto m_3 = \bar{x}_1x_2x_3$,

$(0,1,0) \mapsto m_4 = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ và $(0,0,0) \mapsto m_4 = \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$.

Do đó dạng nối rời chính tắc của f là $f = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$ hay viết cụ thể $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$.

b) Tìm từ *một dạng đa thức* của f : dùng $u \vee \bar{u} = \mathbf{1}$ (luật bù) và luật trung hòa để nâng bậc các đơn thức trong đa thức. Phối hợp thêm các luật phân phối, kết hợp, giao hoán và lũy đẳng để khai triển và rút gọn về dạng nối rời chính tắc cho f.

Ví dụ: Cho $f \in F_3$ có dạng đa thức như sau: $f(x,y,z) = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee x$. Ta có

$$f(x,y,z) = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \mathbf{1}.\bar{y}\,z \vee x.\mathbf{1}.\mathbf{1} = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\,\bar{y}\,z \vee x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x(y\,z \vee y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}) =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \text{ (dạng nối rời chính tắc)}$$

2.6/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Khi đó f có thể viết thành *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó có dạng nối rời chính tắc của f cũng là *một dạng đa thức đặc biệt* của f). Như vậy ta có thể biểu diễn các hàm Boole dưới dạng đa thức (đơn giản) mà không cần dùng đến bảng giá trị (việc này khá cồng kềnh phức tạp khi $n \geq 4$).

2.7/ <u>SO SÁNH CÁC DẠNG ĐA THỨC:</u> Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Giả sử f có 2 dạng đa thức (với các đơn thức $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$) :

$$f = u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_p \ (1) \quad \text{và} \quad f = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_q \ (2)$$

a) Trường hợp 1: Ta nói (1) và (2) *đơn giản như nhau* nếu
 * $p = q$
 * $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ $(1 \leq i \leq p)$
 [có thể hoán vị $v_1, v_2, \ldots, v_q$ trước khi so sánh các bậc]

b) Trường hợp 2 : Ta nói (1) *đơn giản hơn* (2) [hay (2) *phức tạp hơn* (1)] nếu
 * $p \leq q$
 * $\deg(u_i) \leq \deg(v_i)$ $(1 \leq i \leq p)$
 [có thể hoán vị $v_1, v_2, \ldots, v_q$ trước khi so sánh các bậc]
 * Có ít nhất một dấu $<$ xảy ra trong các dấu $\leq$ nói trên

c) Trường hợp 3 : Ta nói (1) và (2) *không so sánh được với nhau* nếu trường hợp 1 và trường hợp 2 không xảy ra.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $f \in F_4$ và f có 3 dạng đa thức như sau:

$$f(x,y,z,t) = x\,y \vee \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4 \ (1)\ (p = 4)$$
$$= x\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,y \vee \bar{x}\,z\,t = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4 \ (2)\ (q = 4)$$
$$= x\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee x\,y = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \vee w_5 \ (3)\ (r = 5)$$

Ta có (1) và (2) đơn giản như nhau [$p = q = 4$ và $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$]

Ta có (1) đơn giản hơn (3) [$p = 4 < r = 5$ và $\deg(u_i) \leq \deg(w_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$]

b) Cho $g \in F_4$ và g có 2 dạng đa thức như sau:

$$g(x,y,z,t) = z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4 \ (4)\ (p = 4)$$
$$= \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee z\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,t = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4 \ (5)\ (q = 4)$$

Ta cần hoán vị v_3 với v_1 rồi ký hiệu lại các chỉ số trước khi so sánh các bậc :

$$g(x,y,z,t) = z\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z\,t = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \ (6)\ (r = 4)$$

Ta có (4) đơn giản hơn (6) [$p = r = 4$, $\deg(u_i) \leq \deg(w_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$ và $\deg(u_2) = 3 < \deg(w_2) = 4$].

c) Cho $h \in F_4$ và h có 2 dạng đa thức như sau:

$$h(x,y,z,t) = x \vee \bar{x}\,y\,z\bar{t} = u_1 \vee u_2 \ (7)\ (p = 2)$$
$$= x\,z \vee y\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{z} = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \ (8)\ (q = 3)$$

Ta có (7) và (8) không so sánh được với nhau.

2.8 / <u>DẠNG CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CỦA HÀM BOOLE:</u>

Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$. Ta đã biết f có *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó *dạng nối rời chính tắc* của f là *dạng đa thức phức tạp nhất* của f). Bằng cách *so sánh các dạng đa thức*, ta chọn ra các dạng đa thức *đơn giản nhất*

có thể được cho f (nghĩa là không có dạng nào khác đơn giản hơn chúng).
Chúng chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của f.
Phạm vi chương trình là tìm các công thức đa thức tối tiểu của các hàm Boole *không quá 4 biến* bằng *phương pháp biểu đồ KARNAUGH*.

III. PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH:

3.1/ BẢNG MÃ: Cho Đại số Boole nhị phân B = { 1, 0 }.
a) Bảng mã cho B^1 (biến Boole x)

x	$\bar{x}$
1	0

b) Bảng mã cho B^2 (các biến Boole x và y)

	x	$\bar{x}$
y	11	01
$\bar{y}$	10	00

c) Bảng mã cho B^3 (các biến Boole x, y và z)

	x	**x**	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	**y**	**y**	$\bar{y}$

d) Bảng mã cho B^4 (các biến Boole x, y, z và t)

	x	**x**	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	**t**
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	**t**
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	**y**	**y**	$\bar{y}$	

3.2/ GHI CHÚ:
a) Khái niệm " *kề nhau* " trong bảng mã được hiểu như sau:
* Dòng (cột) 1 kề với dòng (cột) 2. Dòng (cột) 2 kề với dòng (cột) 3.
* Dòng (cột) 3 kề với dòng (cột) 4. Dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.
Bảng mã cũng có thể được xem như *một mặt trụ* nên có thể *uốn cong theo chiều dọc hoặc chiều ngang* để dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.
b) Hai ô " *kề nhau* " trong bảng mã có mã số chỉ sai khác nhau một vị trí.

3.3/ BIỂU ĐỒ KARNAUGH CỦA HÀM BOOLE:
Cho $f \in F_n$ $(n \le 4)$ và bảng giá trị của f .
Ta để ý các vector Boole $(u_1,u_2, \dots ,u_n)$ trong bảng giá trị có $f(u_1,u_2, \dots ,u_n) = 1$.

Mỗi vector Boole $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ như vậy tương ứng với ô có cùng mã số $u_1u_2 \ldots u_n$ trong bảng mã của B^n. Đánh dấu các ô tương ứng đó trong bảng mã. Tập hợp S gồm các ô được đánh dấu gọi là biểu đồ Karnaugh của hàm Boole f và ta ký hiệu biểu đồ đó là S = Kar(f) hay gọn hơn nữa là S = K(f).

<u>Ví dụ:</u> Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole x_1, x_2, x_3) có bảng giá trị như sau:

x_1	1	1	1	0	1	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	1	0	0	1	0
$f(x_1,x_2,x_3)$	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**	0	**1**

Ta thấy $f(1,1,1) = f(1,0,1) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = f(0,0,0) = 1$.
Đánh dấu các ô có mã số tương ứng 111, 101, 011, 010 và 000 trong bảng mã của B^3, ta được biểu đồ S = Kar(f) gồm 5 ô như sau :

	x	**x**	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z	101	111	011	
$\overline{z}$			010	000
	$\overline{y}$	**y**	**y**	$\overline{y}$

Ta có thể vẽ biểu đồ S = Kar(f) một cách đơn giản hơn nữa là

*	*	*	
		*	*

3.4/ <u>NHẬN XÉT:</u> Một hàm Boole $f \in F_n$ được xác định nếu biết một trong các yếu tố sau:

a) Bảng giá trị của f.
b) Một dạng đa thức của f.
c) Dạng nối rời chính tắc của f (dạng đa thức đặc biệt và phức tạp nhất của f).
d) Biểu đồ Karnaugh của f (nếu $n \le 4$).

3.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $f, g \in F_n$ $(n \le 4)$. Khi đó

a) $K(\overline{f})$ là *phần bù* của K(f) trong bảng mã của B^n.
b) $K(f.g) = K(f) \cap K(g)$ và $K(f \vee g) = K(f) \cup K(g)$.
c) $f \le g \Leftrightarrow K(f) \subset K(g)$. Suy ra $f = g \Leftrightarrow K(f) = K(g)$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $f, g \in F_3$ có các biểu đồ Karnaugh như sau:

*		*	*
	*	*	

Kar(f) (5 ô)

*	*		*
	*	*	*

Kar(g) (6 ô)

Ta suy ra biểu đồ Karnaugh của các hàm Boole $\overline{f}$, $\overline{g}$, f .g và $f \vee g$ lần lượt như sau:

	*		
*			*

$Kar(\overline{f})$ (3 ô)

		*	
*			

$Kar(\overline{g})$ (2 ô)

*			*
	*	*	

Kar(f .g) (4 ô)

*	*	*	*
	*	*	*

$Kar(f \vee g)$ (7 ô)

3.6/ BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐƠN THỨC:

Cho *đơn thức* $m \in F_n$. Ta đã biết $1 \le \deg(m) \le n$.

a) Nếu $\deg(m) = p$ thì $K(m)$ là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có 2^{n-p} ô.

b) Nếu $\deg(m) = n$ (m là *đơn thức tối tiểu*) thì $K(m)$ có đúng 1 ô.

Ví dụ: Cho $n = 4$.

a) $m = z$ và $u = \bar{y}$ [$\deg(m) = \deg(u) = 1$].

	x	x			
z	*	*	*	*	
z	*	*	*	*	t
					t
		y	y		

Kar(z)

	x	x			
z	*			*	
z	*			*	t
	*			*	t
	*			*	
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Kar ($\bar{y}$)

Kar(z) là hình chữ nhật và Kar($\bar{y}$) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-1} = 8$ ô.

b) $m = x\bar{t}$ và $u = \bar{x}y$ [$\deg(m) = \deg(u) = 2$].

	x	x			
z	*	*			$\bar{t}$
z					t
					t
	*	*			$\bar{t}$
		y	y		

Kar($x\bar{t}$)

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z			*		$\bar{t}$
z			*		t
			*		t
			*		$\bar{t}$
		y	y		

Kar($\bar{x}y$)

Kar($x\bar{t}$) là hình chữ nhật mở rộng và Kar($\bar{x}y$) là hình chữ nhật có $2^{4-2} = 4$ ô.

c) $m = \bar{x}zt$ và $u = \bar{y}z\bar{t}$ [$\deg(m) = \deg(u) = 3$].

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					
z			*	*	t
					t
		y	y		

Kar($\bar{x}zt$)

	x	x			
z	*			*	$\bar{t}$
z					t
					t
					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Kar($\bar{y}z\bar{t}$)

Kar($\bar{x}zt$) là hình chữ nhật và Kar($\bar{y}z\bar{t}$) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-3} = 2$ ô.

d) $m = \bar{x}yz\bar{t}$ [$\deg(m) = 4$ và m là đơn thức tối tiểu].

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z			*		$\bar{t}$
z					t
					t
					$\bar{t}$
		y	y		

Kar($\bar{x}yz\bar{t}$)

Kar($\bar{x}zt$) là hình chữ nhật có $2^{4-4} = 1$ ô.

3.7/ BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐA THỨC:

Cho *đa thức* $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là *các đơn thức* của F_n).
Nếu $n \le 4$ thì $Kar(f) = Kar(m_1) \cup Kar(m_2) \cup \ldots \cup Kar(m_k)$.

Ví dụ: Cho $f \in F_4$ và $f(x,y,z,t) = \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x$. Ta có
$S = Kar(f) = K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}) \cup K(\bar{x}z) \cup K(\bar{x}y\bar{z}t) \cup K(x)$ trong đó $K(x)$ gồm 8 ô (.),
$K(\bar{x}z)$ gồm 4 ô (–), $K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t})$ gồm 4 ô (~) và $K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t})$ gồm 1 ô (+).
Do đó $S = Kar(f)$ gồm 14 ô trong B^4 như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	.	.	–	–	$\bar{t}$
z	.	.	–	–	t
	.	.	+		t
	.~	.		~	$\bar{t}$
		y	y		

3.8/ TẾ BÀO VÀ TẾ BÀO LỚN TRONG BIỂU ĐỒ:

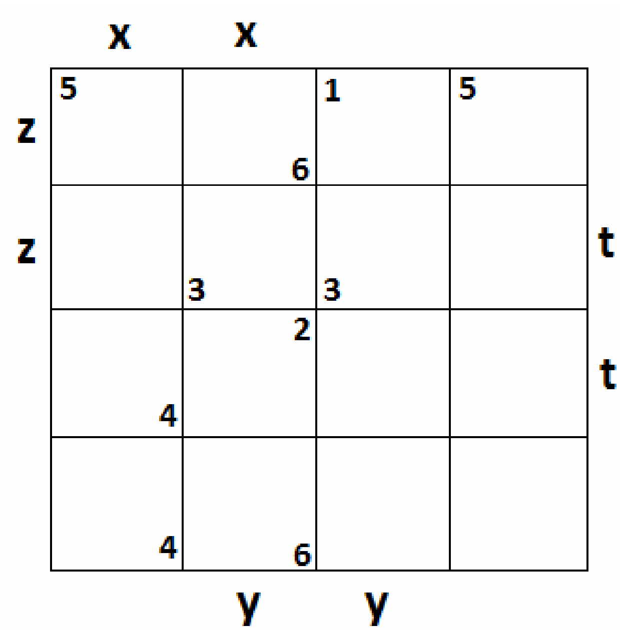
Cho $f \in F_n$ ($n \le 4$) và $S = Kar(f)$.

a) *Một tế bào* trong S là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có số ô là 2^r ($0 \le r \le 4$).
Như vậy số ô của một tế bào có thể là 1, 2, 4, 8 và 16.
Một tế bào trong S chính là *biểu đồ của một đơn thức nào đó* trong F_n .

b) *Một tế bào lớn* T trong S là *một tế bào tối đại* (theo quan hệ thứ tự $\subset$ trên tập hợp các tế bào trong S), nghĩa là không có tế bào T' nào trong S thỏa $T \subset T'$ và $T \ne T'$.

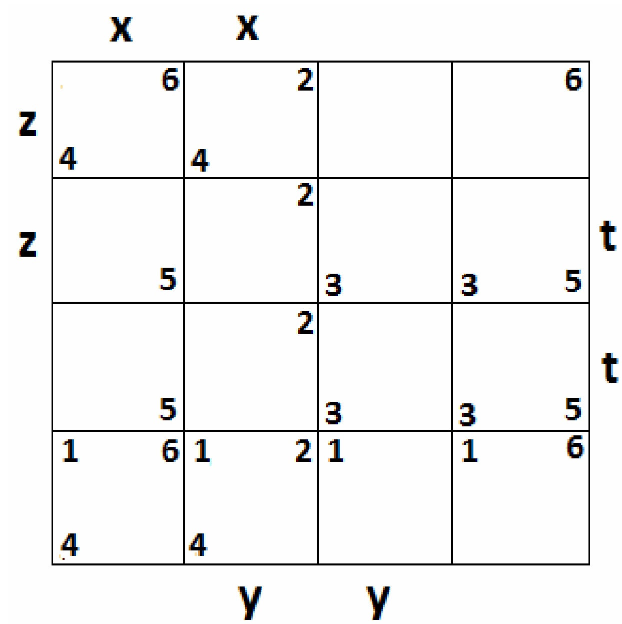
Ví dụ

a) Một số tế bào 1 ô và 2 ô.



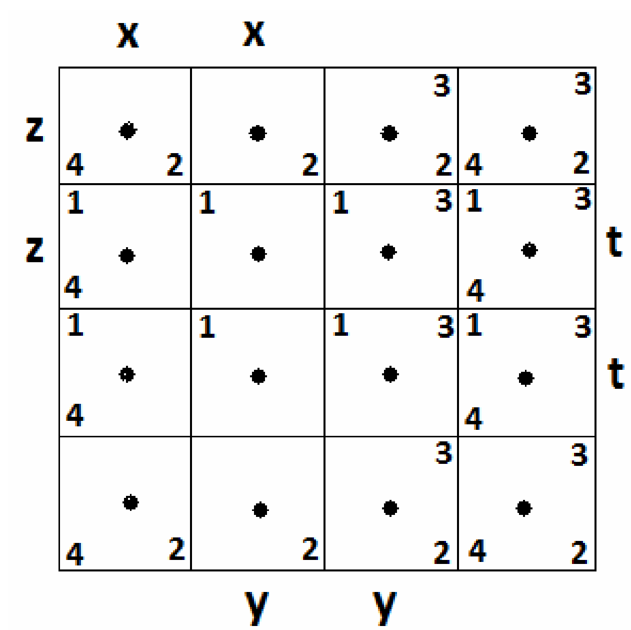
$T_1 = \bar{x}yz\bar{t}$ (1 ô), $T_2 = x\,y\bar{z}\,t$ (1 ô), $T_3 = (x \vee \bar{x})y\,z\,t = y\,z\,t$ (2 ô),
$T_4 = x\,\bar{y}\,\bar{z}\,(t \vee \bar{t}) = x\,\bar{y}\,\bar{z}$ (2 ô), $T_5 = \bar{y}z\bar{t}$ (2 ô), $T_6 = x\,y\bar{t}$ (2 ô)

b) Một số tế bào 4 ô.



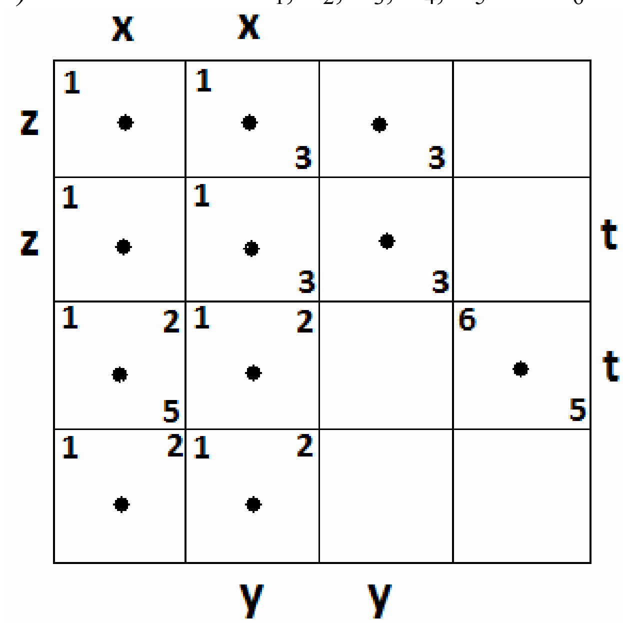
$T_1 = \bar{z}\,\bar{t}$ (4 ô), $T_2 = x\,y$ (4 ô), $T_3 = \bar{x}\,t$ (4 ô),
$T_4 = x\,\bar{t}$ (4 ô), $T_5 = \bar{y}\,t$ (4 ô), $T_6 = \bar{y}\,\bar{t}$ (2 ô)

c) Một số tế bào 8 ô và 16 ô.



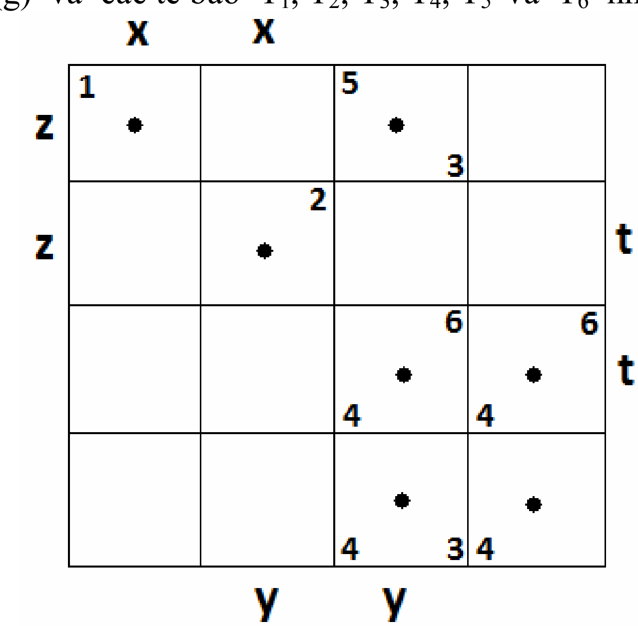
$T_1 = t$ (8 ô), $T_2 = \bar{t}$ (8 ô), $T_3 = \bar{x}$ (8 ô), $T_4 = \bar{y}$ (8 ô),
T_5 (cả 16 ô của bảng) $= (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z})(t \vee \bar{t}) = \mathbf{1}$

d) Cho $S = Kar(f)$ và các tế bào T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 và T_6 như hình dưới đây :



Ta có T_1, T_3, T_5 là các tế bào lớn và T_2, T_4, T_6 là các tế bào không lớn
(vì $T_2 \subset T_1$ và $T_2 \neq T_1, T_4 \subset T_3$ và $T_4 \neq T_3, T_6 \subset T_5$ và $T_6 \neq T_5$)

e) Cho $S = Kar(g)$ và các tế bào T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 và T_6 như hình dưới đây :



Ta có T_1, T_2, T_3, T_4 là các tế bào lớn và T_5, T_6 là các tế bào không lớn.
(vì $T_5 \subset T_3$ và $T_5 \neq T_3, T_6 \subset T_4$ và $T_6 \neq T_4$)

IV. CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:

4.1/ PHÉP PHỦ TỐI TIỂU CHO TẬP HỢP: Cho các tập hợp $S, T_1, T_2, \ldots$ và T_k.

a) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ thì $\{ T_1, T_2, \ldots, T_k \}$ gọi là *một phép phủ* của S.

b) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ và $\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} T_i \neq S$ (bỏ bớt bất kỳ T_j nào ra đều dẫn đến phần hội của các tập hợp còn lại không phủ được S) thì ta nói $\{ T_1, T_2, \ldots, T_k \}$ gọi là *một phép phủ tối tiểu* của S.

c) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ và $\exists j \in \{1, 2, ..., k\}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} T_i = S$ thì ta nói $\{T_1, T_2, ..., T_k\}$ gọi là *một phép phủ chưa tối tiểu* của S (khi bỏ bớt T_j, phần hội của các tập hợp còn lại vẫn phủ được S).

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Xét $T_1 = \{2, 3, 6\}$, $T_2 = \{1, 4, 6\}$ và $T_3 = \{1, 3, 5\}$.
Ta có $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = S$, $T_1 \cup T_2 \neq S$, $T_1 \cup T_3 \neq S$ và $T_2 \cup T_3 \neq S$ nên $\{T_1, T_2, T_3\}$ là một phép phủ tối tiểu của S.

b) Xét $Z_1 = \{1, 2, 5\}$, $Z_2 = \{4, 5\}$, $Z_3 = \{2, 3, 5\}$ và $Z_4 = \{3, 6\}$.
Ta có $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 = S$ và $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_4 = S$ nên $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ là một phép phủ chưa tối tiểu của S (vì dư Z_3).

4.2/ <u>THUẬT TOÁN TÌM CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:</u>

Cho $f \in F_n$ $(n \leq 4)$ và $S = Kar(f)$.

a) Ý tưởng chính:

* Tìm *tất cả các tế bào lớn* của S.
* Chỉ ra *một số phép phủ* của S (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).
* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của S từ các phép phủ nói trên (sơ loại).
* Viết các công thức đa thức cho f tương ứng với các phép phủ tối tiểu trên.
* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức tối ưu* cho f (loại chính thức).

b) Thuật toán cụ thể:

* Xác định *tất cả các tế bào lớn* của S (chỉ rõ vị trí của chúng trên biểu đồ và gọi tên chúng).
* Chọn ô P_1 (tùy ý) $\in S$ và tế bào lớn T_1 (tùy ý) thỏa $P_1 \in T_1$.
Chọn ô P_2 (tùy ý) $\in S \setminus T_1$ và tế bào lớn T_2 (tùy ý) thỏa $P_2 \in T_2$.
Chọn ô P_3 (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và tế bào lớn T_3 (tùy ý) thỏa $P_3 \in T_3$.
Chọn ô P_4 (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ và tế bào lớn T_4 (tùy ý) thỏa $P_4 \in T_4$.
Tiếp tục quá trình trên cho đến khi $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k) = \varnothing$, nghĩa là ta có được *một phép phủ* $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$.
* Kết thúc quá trình chọn các ô và các tế bào lớn, ta thu được *một hay nhiều phép phủ* của S (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).
* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của S từ các phép phủ nói trên (sơ loại).
* Viết *các công thức đa thức* cho f tương ứng với mỗi phép phủ tối tiểu trên
* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức đơn giản nhất có thể được*. Đây chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của f. (loại chính thức).

4.3/ <u>GHI CHÚ:</u> Việc chọn các ô $P_1, P_2, P_3, ...$ là tùy ý trong các phạm vi cho phép. Tuy nhiên ta có thể chọn theo *các thứ tự ưu tiên sau* để thuật toán tiến hành được *nhanh gọn hơn*:

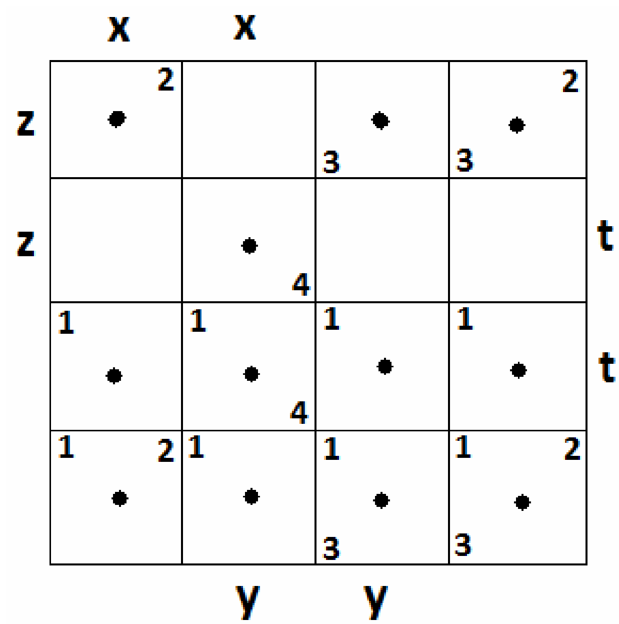
* *Ưu tiên 1*: chọn trước các ô chỉ thuộc 1 tế bào lớn và lấy tất cả các tế bào lớn tương ứng với các ô đó.

* *Ưu tiên 2* : xét tiếp các ô chỉ thuộc 2 tế bào lớn. Nếu có nhiều ô cùng ưu tiên 2 thì chọn trước các ô có đặc điểm ‘‘ không ở chung tế bào lớn với các ô đã bị xóa ’’.
* Ưu tiên thông thường : chọn trước ô ở hàng trên (so với các ô ở hàng dưới), nếu nhiều ô cùng ở hàng trên thì chọn trước ô ở phía trái. Ưu tiên thông thường chỉ tạo ra sự thống nhất trong việc chọn ô.

Ví dụ:

a) $f \in F_4$ có $S = K(f)$ với

$K(f) = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \}$



Các tế bào lớn trong S là∈ $T_1 = \bar{z}$, $T_2 = \bar{y}\,\bar{t}$, $T_3 = \bar{x}\,\bar{t}$ và $T_4 = xyt$.

Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_2$, $(1,3) \in T_3$, $(2,2) \in T_4$ và $(3,1) \in T_1$. Ta có $S \setminus (T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1) = \varnothing$ nên $S = T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1$ là phép phủ duy nhất của S

$T_2 \to T_3 \to T_4 \to T_1$ (sơ đồ phủ của S)

Do đó $f(x,y,z) = \bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{t} \vee xyt \vee \bar{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của f

b) $g \in F_4$ có $S = K(g) = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4) \}$.

Các tế bào lớn trong S là

$T_1 = xz\bar{t}$, $T_2 = yz\bar{t}$, $T_3 = \bar{x}yz$, $T_4 = \bar{x}yt$, $T_5 = y\bar{z}t$ và $T_6 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$.

Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_1$, $(3,2) \in T_5$ và $(4,4) \in T_6$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6) \neq \varnothing$.

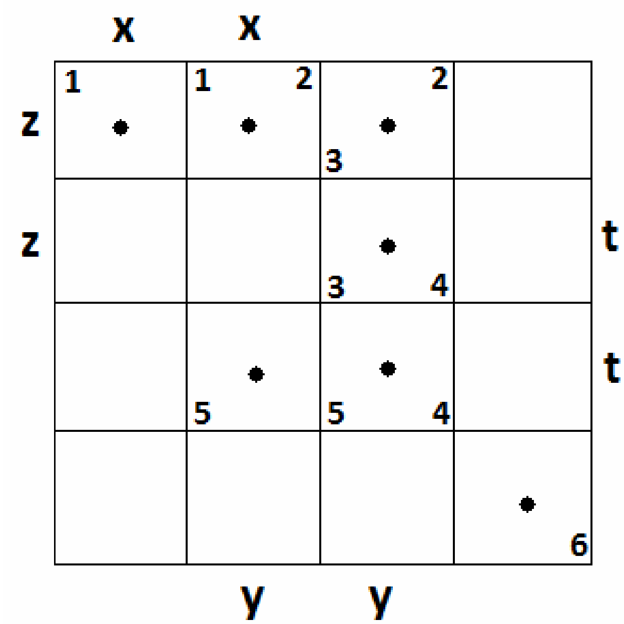
Ưu tiên 2: chọn $(1,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6)$ và để ý $(1,3) \in (T_2 \cap T_3)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2) \neq \varnothing$ nên chọn $(2,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2)$ và để ý $(2,3) \in (T_3 \cap T_4)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4$ (2).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3$ (3).

Sơ đồ các phép phủ của S là
$$\begin{array}{ccccccccc} T_1 & \to & T_5 & \to & T_6 & \to & T_2 & \to & T_3 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & T_3 & & T_4 & & \end{array}$$



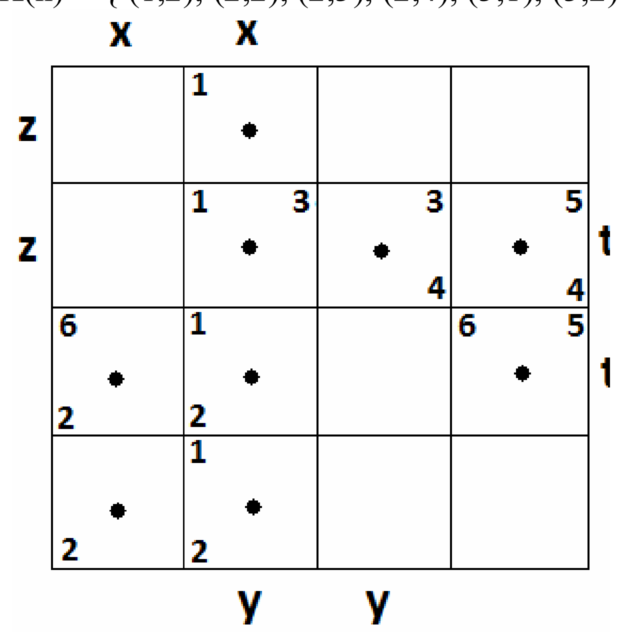
Phép phủ (1) chưa tối tiểu [dư T_2 khi so với phép phủ (3)] nên bị loại.
Các phép phủ (2) và (3) đều tối tiểu.
Từ (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho g :

$g(x,y,z) = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee yz\bar{t} \vee \bar{x}yt$ (*)

$g(x,y,z) = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}yz$ (**)

Ta có (**) là công thức đa thức tối tiểu cho g [loại (*) vì nó phức tạp hơn (**)].

c) $h \in F_4$ có $S = K(h) = \{ (1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2) \}$.



Các tế bào lớn trong S là
$T_1 = xy$, $T_2 = x\bar{z}$, $T_3 = yzt$, $T_4 = \bar{x}zt$, $T_5 = \bar{x}\,\bar{y}t$ và $T_6 = \bar{y}\,\bar{z}t$.

Ưu tiên 1: $(1, 2) \in T_1$ và $(4,1) \in T_2$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2) \neq \varnothing$.

Ưu tiên 2: chọn $(2,4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và để ý $(2,4) \in (T_4 \cap T_5)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4) \neq \varnothing$ nên chọn $(3,4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4)$ và để ý $(3,4) \in (T_5 \cap T_6)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (2).

Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5) \neq \varnothing$ nên chọn $(2,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5)$ và để ý $(2,3) \in (T_3 \cap T_4)$.
Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (3).
Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (4).

Sơ đồ các phép phủ của S là

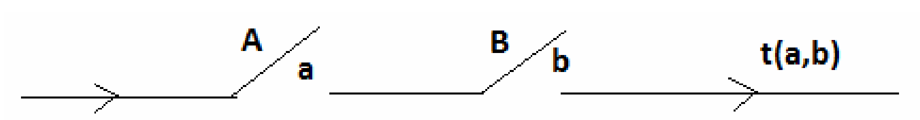
$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & T_4 & \rightarrow & T_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T_3 & \leftarrow & T_5 & & T_6 & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & T_4 & & & & \end{array}$$

Phép phủ (4) trùng với phép phủ (1) . Các phép phủ (1), (2) và (3) đều tối tiểu.
Từ (1), (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho h :
$h(x,y,z) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x} z t \vee \bar{x}\, \bar{y} t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x} z t \vee \bar{y}\, \bar{z} t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y} t \vee yzt$
Các công thức trên (đơn giản như nhau) là các công thức đa thức tối tiểu của h.

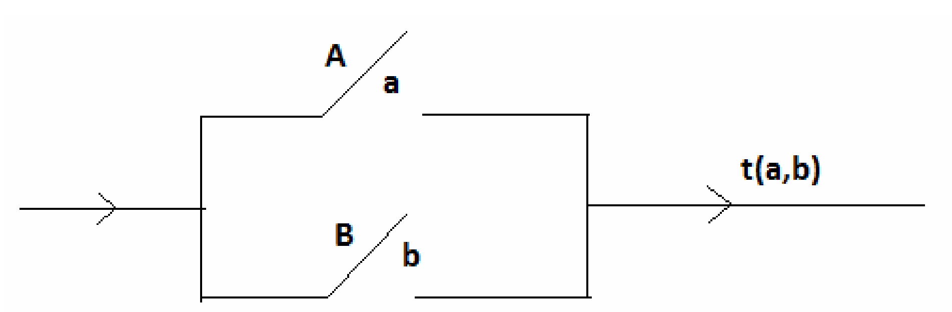
V. ĐẠI SỐ CÁC MẠCH ĐIỆN:

5.1/ HÀM BOOLE CỦA MẠCH ĐIỆN:

a) Mạch điện là một hệ thống bao gồm các công tắc điện và các dây dẫn.
Mỗi công tắc điện tương ứng với *một biến Boole* (biến Boole này = 1 hoặc 0 tùy thuộc vào trạng thái đóng hoặc mở của công tắc). Hai công tắc A và B (tương ứng với các biến Boole a và b) trên một dây dẫn sẽ được *mắc nối tiếp* hoặc *mắc song song*. Ta có hàm Boole theo hai biến
$t(a, b) = 1$ (nếu có điện qua dây) hoặc $= 0$ (nếu trái lại)



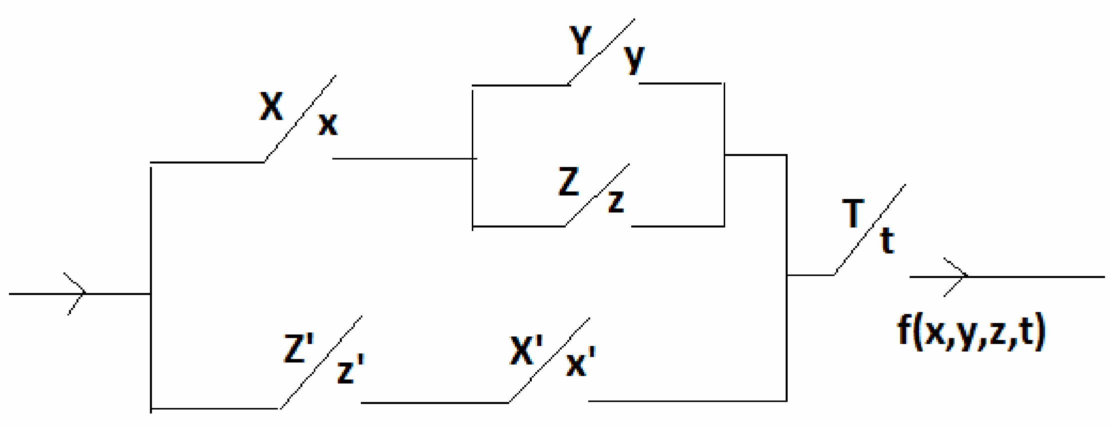
Cấu trúc mắc nối tiếp $t(a, b) = ab$



Cấu trúc mắc song song $t(a, b) = a \vee b$

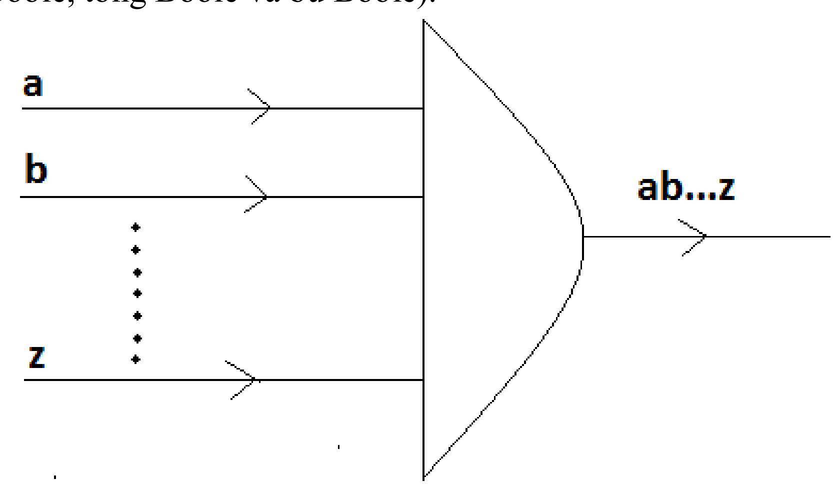
b) Xét mạch điện có n công tắc điện $A_1, A_2, \dots, A_n$ (ứng với các biến Boole $a_1, a_2, \dots, a_n$). Ta có hàm Boole theo n biến
$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ (nếu có điện qua mạch) hoặc $= 0$ (nếu trái lại)
Từ các cấu trúc mắc nối tiếp hoặc mắc song song trong mạch điện, ta có thể viết $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dưới dạng một đa thức theo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ trong F_n .

Ví dụ: Cho một mạch điện với các công tắc điện X, Y, Z và T như sau:
(ở đây $X' = \overline{X}$, $Z' = \overline{Z}$, $x' = \overline{x}$ và $z' = \overline{z}$) :

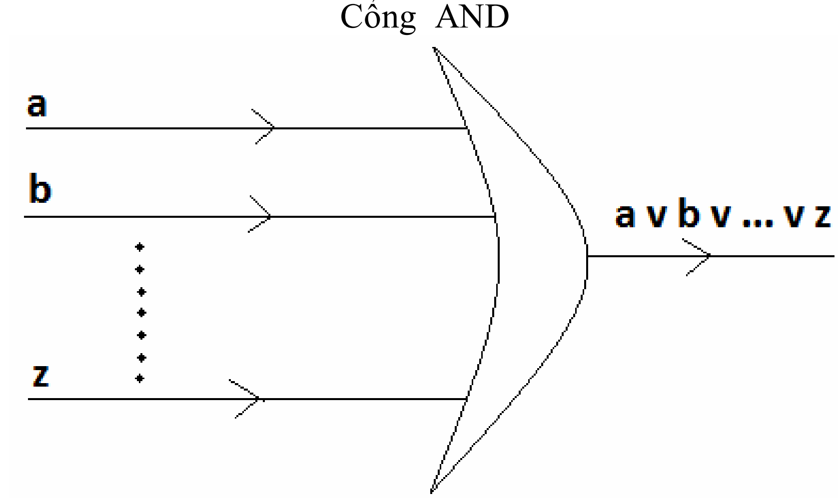


Ta viết hàm Boole f của mạch điện trên dưới dạng đa thức.
Ta có $f(x,y,z,t) = [\, x(y \vee z) \vee \overline{z}\,\overline{x}\,]t = (xy \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{z}\,)t$
$= xyt \vee xzt \vee \overline{x}\,\overline{z}\,t$ (dạng đa thức của f).

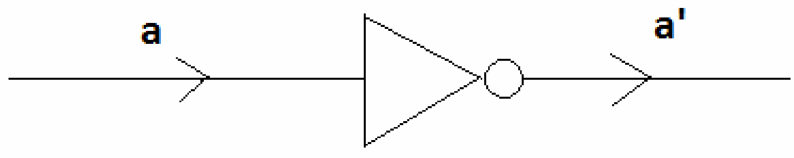
5.2/ CỔNG: Cổng là một thiết bị điện có một hay nhiều dòng điện đi vào và chỉ có một dòng điện đi ra.
Có 3 loại cổng: cổng AND, cổng OR và cổng NOT (ứng với các phép toán tích Boole, tổng Boole và bù Boole).



Cổng AND



Cổng OR



Cổng NOT

5.3/ THIẾT KẾ MẠNG CÁC CỔNG TỔNG HỢP HÀM BOOLE:

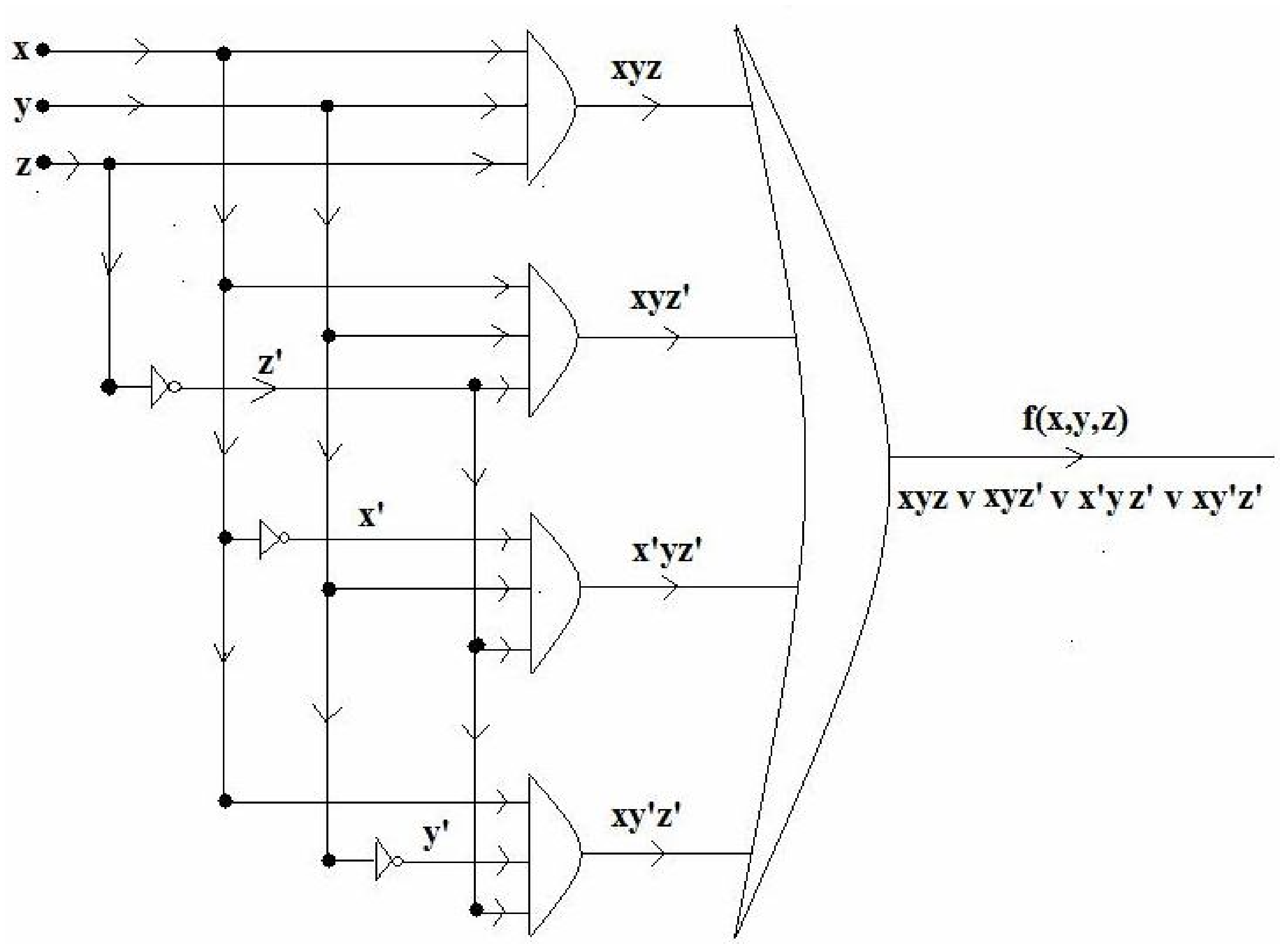
Cho $f \in F_n$. Ta biết f có một hay nhiều dạng đa thức khác nhau.

a) Ta có thể dựa vào một dạng đa thức tùy ý của f để thiết kế một mạng (gồm các cổng AND, OR, NOT) tổng hợp f.

b) Để tối ưu hóa, ta nên dùng một công thức đa thức tối tiểu của f thiết kế mạng các cổng tổng hợp nó. Ta sẽ tiết giảm được chi phí mua sắm các cổng và dây dẫn.

Ví dụ: $f \in F_3$ và $f(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$ (đây là một dạng đa thức của f và cũng là dạng nối rời chính tắc của f).

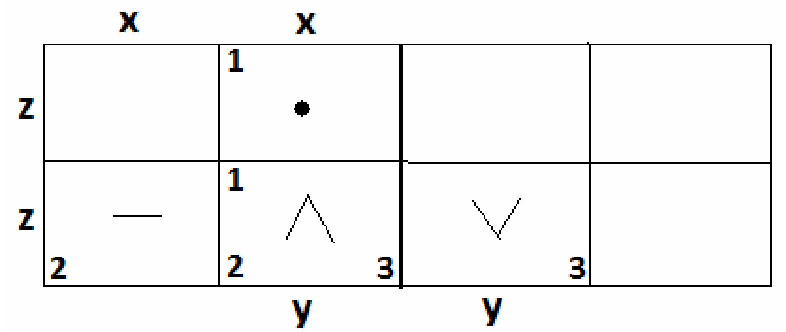
a) Dựa vào dạng đa thức trên, ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f như sau:



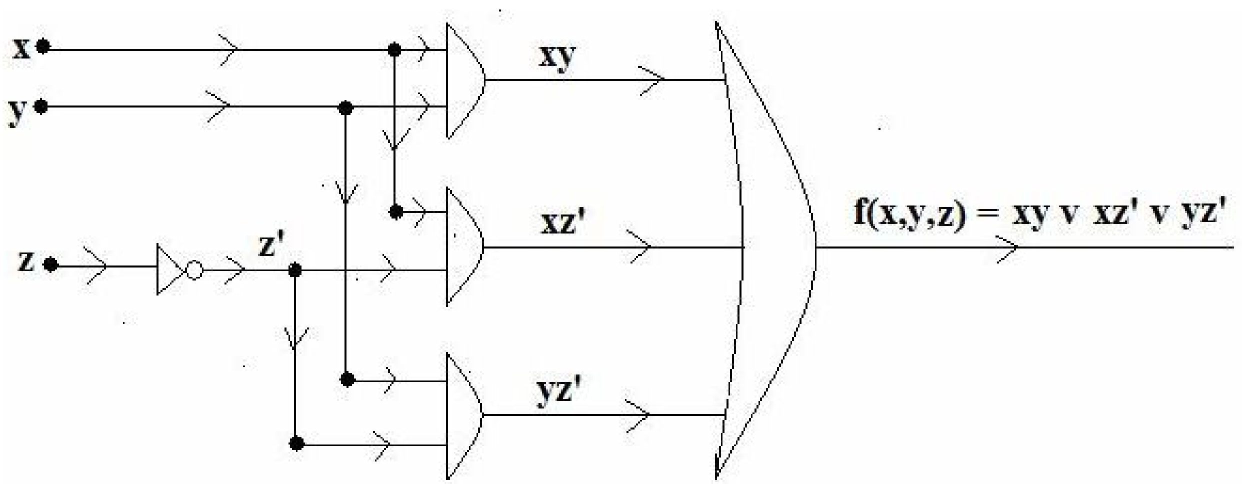
Mạng các cổng (chưa tối ưu hóa) tổng hợp hàm boole f

b) Ta tìm một công thức đa thức tối tiểu cho f trước khi thiết kế mạng các cổng cho nó.

Vẽ $S = Kar(f) = K(xyz) \cup K(xy\bar{z}) \cup K(\bar{x}y\bar{z}) \cup K(x\bar{y}\bar{z})$ trong bảng mã B^3.



Các tế bào lớn trong S là $T_1 = xy$, $T_2 = x\overline{z}$ và $T_3 = y\overline{z}$.
Ưu tiên 1: $(1, 2) \in T_1$, $(2,1) \in T_2$ và $(2,3) \in T_3$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ là phép phủ duy nhất của S ($T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3$).
Do đó $f(x,y,z) = xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của f
Ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f dựa theo công thức đa thức tối tiểu trên.



Mạng các cổng (đã tối ưu hóa) tổng hợp hàm boole f
