

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Dạng tách biến	2
Dạng biến thể của dạng tách biến	3
Dạng tổng quát	4
Dạng Bernouli.....	5

Dạng tách biến

Tổng quát:

$$y' = g(x)f(y)$$

Cách giải:

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx \text{ (do } y'dx = dy)$$

Ví dụ:

BT3/69

$$(x^2 + 1)y' = xy \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$$

(có thể dừng tại đây, nhưng mình đi tiếp)

$$\Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C} > 0 \Leftrightarrow y = e^C (e^{\ln(x^2 + 1)})^{\frac{1}{2}} = C' \sqrt{x^2 + 1}$$

(lưu ý C và C' là khác nhau, do C = const nên C' = e^C = const)

$$\text{Vậy } y = C' \sqrt{x^2 + 1}$$

BT54-55/72

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)] \Leftrightarrow \int \frac{dP}{M - P(t)} = \int k dt \Leftrightarrow -\ln|M - P(t)| = kt + C'$$

$$M - P(t) = e^{-kt - C'} = Ce^{-kt} \Leftrightarrow P(t) = M - Ce^{-kt}$$

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = M - C \Leftrightarrow M = C \Rightarrow P(t) = M(1 - e^{-kt})$$

Đối với Jim:

Có:

$$\begin{cases} P(1) = 25 \\ P(2) = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(1 - e^{-k}) = 25 \\ M(1 - e^{-2k}) = 45 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - e^{-k}}{1 - e^{-2k}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + e^{-k}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow M = \frac{25}{1 - \frac{4}{5}} = 125$$

Tương tự với Mark:

$$M = \frac{35}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{245}{4}$$

Dạng biến thể của dạng tách biến

Tổng quát:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x} (x \neq 0) \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x$$

$$\text{Phương trình trở thành } u + u'x = f(u)$$

Nếu $f(u) \equiv u$ thì PT là dạng tách biến (xem ở trên)

Nếu $\exists a_i, f(a) = a$ thì PT có nghiệm $y = a_i x, \forall i$

Ngoài 2 trường hợp trên:

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Ví dụ:

VD/371 (Slide lý thuyết)

$$x^2 y' = y^2 - xy + x^2$$

$$\text{Xét } x = 0: y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\text{Xét } x \neq 0: y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1$$

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x. \text{ PT trở thành } u + u'x = u^2 - u + 1 \Leftrightarrow u'x = (u - 1)^2$$

Xét $(u - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1$. Vậy $y = x$ là một nghiệm của phương trình.

Có:

$$\frac{u'}{(u - 1)^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{(u - 1)^2} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u - 1} = \ln|x| + C \Leftrightarrow u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C}$$

Vậy $y = x - \frac{x}{\ln|x| + C}$ là một nghiệm khác của phương trình.

Kết luận: $y = x$ hoặc $y = x - \frac{x}{\ln|x| + C}$

BT23/70

$$xy' = x \sin \frac{y}{x} + y \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$. PT trở thành $u + u'x = \sin u + u \Leftrightarrow u'x = \sin u$

Xét $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$.

Vậy $y = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}$) là nghiệm của phương trình.

$$\frac{u'}{\sin u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{-d(\cos u)}{1 - \cos^2 u} = \ln|x| + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = \ln|x| + C'$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = Cx^2 \Leftrightarrow \cos u = \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Vậy phương trình có nghiệm khác là

$$y = x \arccos \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Kết luận: $y = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}$) hoặc $y = x \arccos \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$

Dạng phương trình tuyến tính

Tổng quát

$$y' + q(x)y = p(x)$$

Cách giải:

1/ Tìm $Q(x) = \int q(x)dx$

2/ Nhân hai vế phương trình với $e^{Q(x)}$:

$$e^{Q(x)}y' + e^{Q(x)}q(x)y = e^{Q(x)}p(x) \Leftrightarrow [e^{Q(x)}y]' = e^{Q(x)}p(x) \Leftrightarrow e^{Q(x)}y = \int e^{Q(x)}p(x)dx$$

Ví dụ:

BT38/70

$$y' + y = \sin(e^x)$$

Xét $x = \int dx$, nhân e^x vào hai vế của phương trình:

$$e^x y' + e^x y = e^x \sin e^x \Leftrightarrow (e^x y)' = e^x \sin e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x y = \int e^x \sin e^x dx = \int \sin e^x d(e^x) = -\cos e^x + C$$

Vậy nghiệm phương trình là

$$y = \frac{-\cos e^x + C}{e^x}$$

BT53/71

$$2 \frac{dQ}{dt} + 100Q(t) = 10 \sin 60t \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} + 50Q(t) = 5 \sin 60t$$

Xét $50t = \int 50dt$, nhân hai vế cho e^{50t} có:

$$e^{50t} \frac{dQ}{dt} + 50e^{50t} Q(t) = 5e^{50t} \sin 60t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{50t} Q) = 5e^{50t} \sin 60t$$

$$\Leftrightarrow e^{50t} Q = 5 \int e^{50t} \sin 60t dt$$

Xét

$$I = \int e^{50t} \sin 60t dt = \frac{1}{50} \int \sin 60t d(e^{50t}) = \frac{1}{50} \left(e^{50t} \sin 60t - 60 \int e^{50t} \cos 60t dt \right)$$

$$= \frac{1}{50} \left(e^{50t} \sin 60t - \frac{6}{5} \int \cos 60t d(e^{50t}) \right) \\ = \frac{1}{50} \left[e^{50t} \sin 60t - \frac{6}{5} \left(e^{50t} \cos 60t + 60 \int e^{50t} \sin 60t dt \right) \right]$$

$$= \frac{1}{50} \left[e^{50t} \sin 60t - \frac{6}{5} (e^{50t} \cos 60t + 60I) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{61}{25} I = \frac{e^{50t}}{50} \left(\sin 60t - \frac{6}{5} \cos 60t \right) \Leftrightarrow I = \frac{e^{50t}}{122} \left(\sin 60t - \frac{6}{5} \cos 60t \right)$$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{5}{122} \left(\sin 60t - \frac{6}{5} \cos 60t \right)$$

Dạng Bernouli

Tổng quát:

$$y' + q(x)y = p(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } u = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'.$$

$$\text{Có: } (1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}q(x)y = (1-n)y^{-n}p(x)y^n$$

$$\Leftrightarrow u' + (1-n)q(x)u = (1-n)p(x)$$

Ví dụ:

BT49/71

$$xy' - y = -xy^2$$

$$\text{Đặt } u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$$

$$\Rightarrow x(-y^{-2}y') - (-y^{-2}y) = -x(-y^{-2}y^2) \Leftrightarrow xu' + u = x$$

$$\Leftrightarrow (xu)' = x \Leftrightarrow xu = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow u = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Vậy

$$y = u^{-1} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{C}{x}} = \frac{2x}{x^2 + C}$$