TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

Outline

Outline

TẬP HỢP

Khái niệm về tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm không có định nghĩa, tương tự như khái niệm điểm, đường thẳng trong hình học.
- Tập hợp có thể hiểu tổng quát là một sự tựu tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó.
  Các đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$ để kí hiệu tập hợp. Nếu a là phần tử thuộc tập A ta kí hiệu $a \in A$. Ngược lại, a không thuộc A ta kí hiệu $a \notin A$
- Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng. Kí hiệu $\varnothing$

Biểu diễn tập hợp

Có hai cách biểu diễn một tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của nó.

Ví dụ 1

Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 5 là

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Tập hợp các số tự nhiên chẵn từ 0 đến 100 là

$$B = \{0, 2, 4, \ldots, 98, 100\}$$

Biểu diễn tập hợp

- Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của nó.

Không phải mọi tập hợp đều có thể liệt kê rõ ràng từng phần tử. Tuy nhiên ta có thể dùng tính chất đặc trưng nào đó để mô tả nó, từ đó có thể xác định được một phần tử có thuộc tập hợp này hay không.

Ví dụ 2

Tập hợp các số thực lớn hơn 0 và bé hơn 1 là

$$C = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ và } 0 < x < 1\}$$

Quan hệ giữa các tập hợp

- Tập hợp con

Cho 2 tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B, thì ta nói tập hợp A là con tập hợp B và kí hiệu $A \subset B$ hoặc $B \supset A$.
Ta viết

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- Tập hợp bằng nhau

Cho 2 tập hợp A và B. Nếu mỗi phần tử của A đều thuộc B và ngược lại, mỗi phần tử của B đều thuộc A thì ta nói hai tập hợp A và B bằng nhau và kí hiệu $A = B$.
Ta viết

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$$

Các phép toán trên các tập hợp

- Giao của hai tập hợp

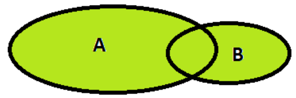
Giao của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc cả hai tập hợp này, kí hiệu là $A \cap B$
Ta viết

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

- Hợp của hai tập hợp

Hợp của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp này, kí hiệu là $A \cup B$
Ta viết

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$$

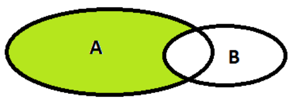


Các phép toán trên các tập hợp

- Hiệu của hai tập hợp

Hiệu hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc A mà không thuộc B, kí hiệu $A \setminus B$
Ta viết

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$$



Các phép toán trên các tập hợp

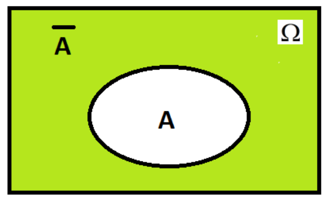
- Bù của một tập hợp

Xét trong tập hợp Ω, A là một tập con của Ω. Khi đó, bù của tập hợp A, kí hiệu $\overline{A}$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc Ω mà không thuộc A
Ta viết

$$\overline{A} = \{x | x \in \Omega \text{ và } x \notin A\}$$

nói cách khác,

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$



Các phép toán trên các tập hợp
Tính chất

(i) Tính giao hoán

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

(ii) Tính kết hợp

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (2)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (3)$$

(iii) Tính phân phối

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (4)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5)$$

(iv) Công thức De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (6)$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (7)$$

Các phép toán trên các tập hợp
Chứng minh

Ta sẽ chỉ chứng minh (1), (2), (4) và (6). Các đẳng thức còn lại sinh viên làm tương tự.

(i) $A \cup B = \{x|x \in A$ hoặc $x \in B\} = \{x|x \in B$ hoặc $x \in A\} = B \cup A$. Trường hợp "giao" sinh viên làm tương tự.

(ii) $(A \cup B) \cup C = \{x|x \in A \cup B$ hoặc $x \in C\} = \{x|x \in A$ hoặc $x \in B$ hoặc $x \in C\} = \{x|x \in A$ hoặc $x \in B \cup C\} = A \cup (B \cup C)$.

(iii) Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng vế trái (4) là tập con của vế phải (4). Thật vậy, lấy $x \in$ vế trái (4) $= A \cap (B \cup C)$, tức là $x \in A$ và $x \in B \cup C$.
- Nếu $x \in B$ thì do $x \in A$ nên $x \in A \cap B$, tức là $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Nếu $x \in C$ thì do $x \in A$ nên $x \in A \cap C$, tức là $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Do đó $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) =$ vế phải (4).

Các phép toán trên các tập hợp
Chứng minh (tt)

(iii) Tiếp theo, ta chứng minh vế phải (4) là tập con của vế trái (4). Thật vậy, lấy $x \in$ vế phải (4) $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$, tức là $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$.
- Nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$. Suy ra $x \in A$ và $x \in B \cup C$, tức là $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Nếu $x \in A \cap C$ thì $x \in A$ và $x \in C$. Suy ra $x \in A$ và $x \in B \cup C$, tức là $x \in A \cap (B \cup C)$.

Do đó, $x \in A \cap (B \cup C) =$ vế trái (4).

(iv) $\overline{A \cup B} = \{x|x \notin A \cup B\} = \{x|x \notin A$ và $x \notin B\} = \{x|x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}\} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Các phép toán trên các tập hợp

Lưu ý

- Vì lí do tính kết hợp nên để đơn giản người ta thường viết $A \cup B \cup C$ và $A \cap B \cap C$ mà không có các dấu ngặc đơn.
- Để chứng minh các đẳng thức tập hợp phức tạp dạng $A = B$, ta nên chứng minh theo hai bước: $A \subset B$ và $B \subset A$.

Ví dụ 3

Kiểm chứng hệ thức sau:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

Các phép toán trên các tập hợp ...
Gợi ý

Lấy bất kì $x \in (A \setminus B) \setminus C$, khi đó theo định nghĩa ta có

$$x \in A \setminus B \text{ và } x \notin C$$

tức là

$$x \in A, x \notin B \text{ và } x \notin C$$

suy ra

$$x \in A \setminus C \text{ và } x \notin B \setminus C$$

tức là

$$x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

Do đó,

$$(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \tag{8}$$

Các phép toán trên các tập hợp ...

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Bây giờ ngược lại, ta lấy bất kì $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, khi đó theo định nghĩa ta có

$$x \in A \setminus C \text{ và } x \notin B \setminus C$$

tức là

$$x \in A, x \notin C \text{ và } x \notin B$$

hay

$$x \in (A \setminus B) \setminus C$$

Do đó,

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \setminus C \tag{9}$$

Từ (8) và (9) ta có hệ thức cần chứng minh.

Outline

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Quy tắc cộng

Giả sử để chọn một đối tượng ta có thể chọn một trong n đối tượng khác nhau, $x_1, \ldots, x_n$, trong đó mỗi x_i có m_i cách chọn với $i = 1, \ldots, n$. Khi đó ta có $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ cách chọn đối tượng.

Ví dụ 4

Trong 1 lớp học có 26 sinh viên nam và 24 sinh viên nữ. Để chọn 1 sinh viên làm lớp trưởng ta có thể chọn một trong 2 đối tượng khác nhau là nam hoặc nữ, trong đó để chọn sinh viên nam ta có 26 cách, sinh viên nữ ta có 24 cách. Như vậy, theo quy tắc cộng, ta sẽ có $26 + 24 = 50$ cách chọn 1 sinh viên làm lớp trưởng.

Quy tắc nhân

Giả sử để hoàn thành một công việc thì phải thực hiện k giai đoạn. Giai đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện, giai đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện, ..., giai đoạn thứ k có n_k cách thực hiện. Khi đó ta có

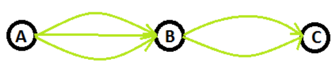
$$n = n_1 n_2 \ldots n_k$$

cách hoàn thành công việc.

Quy tắc nhân

Ví dụ 5

Giả sử đi từ A đến C ta bắt buộc phải đi qua B. Có 3 đường khác nhau từ A đến B và có 2 đường khác nhau từ B đến C. Vậy có $n = 3.2 = 6$ cách khác nhau để đi từ A đến C.



Ví dụ 6

Trên một kệ sách có 5 quyển sách tiếng Anh khác nhau, 8 quyển sách tiếng Pháp khác nhau và 10 quyển sách tiếng Đức khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

(a) 3 quyển sách, mỗi quyển 1 thứ tiếng.
(b) 1 quyển sách bất kì.
(c) 2 quyển sách theo 2 thứ tiếng.

Tính chất của một nhóm

- **Nhóm có thứ tự**
  Khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của nhóm này ta nhận được nhóm khác.
- **Nhóm không có thứ tự**
  Khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của nhóm này ta không nhận được nhóm khác.
- **Nhóm có lặp**
  Các phần tử của nhóm có thể có mặt nhiều lần trong nhóm.
- **Nhóm không lặp**
  Các phần tử của nhóm chỉ có mặt một lần trong nhóm.

Ví dụ 7

Từ các số $0, 1, 2, 3, 4$ lập được bao nhiêu số có 3 chữ số (a) có lặp (b) không lặp

Chỉnh hợp (Arrangement)

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 8

Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một nhóm có thứ tự, không lặp gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Gọi A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử. Khi đó,

$$A_n^k = n.(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp (Arrangement)

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Ví dụ 9

Một lớp học tiếng Anh có 12 người tham dự. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng và một lớp phó?

Gợi ý 10

Một cách chọn một lớp trưởng và một lớp phó là một nhóm có hai phần tử có thứ tự và không lặp. Nên có

$$A_{12}^2 = 12.11 = 132$$

cách chọn thỏa yêu cầu.

Hoán vị (Permutation)

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 11

Hoán vị của n phần tử là một nhóm có thứ tự không lặp có đủ n phần tử đã cho.

Số hoán vị của n phần tử là

$$P_n = n!$$

Quy ước $0! = 1$

Nhận xét 12

Hoán vị là một trường hợp đặc biệt của chỉnh hợp.

Hoán vị

Ví dụ 13

Mỗi cách xếp 4 học sinh ngồi vào một bàn có 4 chỗ ngồi là một hoán vị của 4 phần tử. Do đó số cách xếp sẽ là $P_4 = 4! = 24$ cách.

Ví dụ 14

Một người có 10 quyển sách được đặt trên kệ. Trong đó, có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách hóa, 2 quyển sách lịch sử, và 1 quyển sách ngoại ngữ. Người này muốn sắp xếp các quyển sách sao cho những quyển sách cùng chủ đề phải được sắp xếp kế cận nhau. Hỏi người này có bao nhiêu cách sắp xếp?

Chỉnh hợp lặp

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Trong định nghĩa chỉnh hợp ta đòi hỏi mỗi phần tử chỉ được có mặt trong nhóm không quá một lần. Nếu bỏ đi điều kiện này, ta có chỉnh hợp lặp.

Định nghĩa 16

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử được chọn từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt hơn một lần trong nhóm.

Gọi $\widetilde{A_n^k}$ là số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử. Khi đó,

$$\widetilde{A_n^k} = n^k$$

Chỉnh hợp lặp

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Ví dụ 17

Từ các số của tập hợp $A = \{1, 2, 3\}$, ta có thể lập được $\widetilde{A_3^5} = 3^5$ số có 5 chữ số.

Nhận xét 18

Vì mỗi phần tử có thể xuất hiện nhiều lần trong một chỉnh hợp lặp nên ở đây k có thể lớn hơn n.

Tổ hợp (Combination)

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Định nghĩa 19

Tổ hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một nhóm không phân biệt thứ tự, không lặp gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Gọi C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử. Khi đó,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ 20

Mỗi đề thi gồm 3 câu hỏi lấy từ 25 câu hỏi cho trước, ta lập được

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = 2300$$

đề thi vì mỗi đề thi là một nhóm có 3 câu hỏi không phân biệt thứ tự và không lặp.

Tính chất của tổ hợp

- Quy ước $0! = 1$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Nhị thức Newton

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Các hệ số trong nhị thức Newton có thể được xác định từ tam giác Pascal

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
. & & . & & . & & . & & . \\
C_n^0 & C_n^1 & & \cdots & & \cdots & & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

Nhị thức Newton

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Ví dụ 21

Dùng khai triển nhị thức Newton chứng minh rằng:

$$\sum_{0 \le r = 2k \le n} C_n^r = \sum_{0 < r = 2k+1 \le n} C_n^r = 2^{n-1}$$

Gợi ý 22

Trong công thức nhị thức Newton, ta lấy $a = 1, b = -1$, khi đó,

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r = 0$$

tức là

$$\sum_{0 \le r = 2k \le n} C_n^r = \sum_{0 < r = 2k+1 \le n} C_n^r \qquad (10)$$

Nhị thức Newton

TẬP HỢP - GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Tập hợp
Giải tích tổ hợp

Hơn nữa, ta tiếp tục lấy $a = b = 1$, khi đó,

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$$

tức là

$$\sum_{0 \le r = 2k \le n} C_n^r + \sum_{0 \le r = 2k+1 \le n} C_n^r = 2^n \qquad (11)$$

Từ (10) và (11) ta có đpcm.