ÔN TẬP GIẢI TÍCH B2 K14CTT1-CNTT

Câu 1: Cho hàm số hai biến $f(x, y)$

a) Tìm các điểm dừng (critical) ≈ điểm tới hạn (stationary).
b) Tính giá trị và phân loại các điểm dừng.
c) Tìm MAX và MIN trên một miền vô hạn.

Tóm tắt:

a. Điểm dừng là điểm mà $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$ hoặc một trong các **đạo hàm riêng** không tồn tại.
b. Phân loại điểm dừng (3 loại):
Cực tiểu địa phương.
Cực đại địa phương.
Điểm yên ngựa.

Chi tiết:

1.a/1.b: Tìm các điểm dừng, tính giá trị và phân loại các điểm dừng.

Cần kiến thức về **đạo hàm riêng cấp 1** ở chương 14.3

Cho $f(x, y)$. Nếu ta cố định giá trị y thì f chỉ lệ thuộc vào x. Và ta lấy đạo hàm theo x, ta được đạo hàm riêng với các ký hiệu sau

Đạo hàm riêng của hàm số 2 biến:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Ký hiệu cho đạo hàm riêng: Nếu $z = f(x, y)$, ta viết:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

■**Quy tắc tính đạo hàm riêng** $z = f(x, y)$:

- Để tìm f_x, ta cố định y như một hằng số và đạo hàm $f(x, y)$ theo x.
- Để tìm f_y, ta cố định x như một hằng số và đạo hàm $f(x, y)$ theo y.

Ví dụ 1 : Nếu $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, tìm $f_x(2,1)$ và $f_y(2,1)$

Cố định y, ta có $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad \Rightarrow \quad f_x(2,1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16$

Cố định x, ta có $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y \quad \Rightarrow \quad f_y(2,1) = 3.2^2.1^2 - 4.1 = 8$

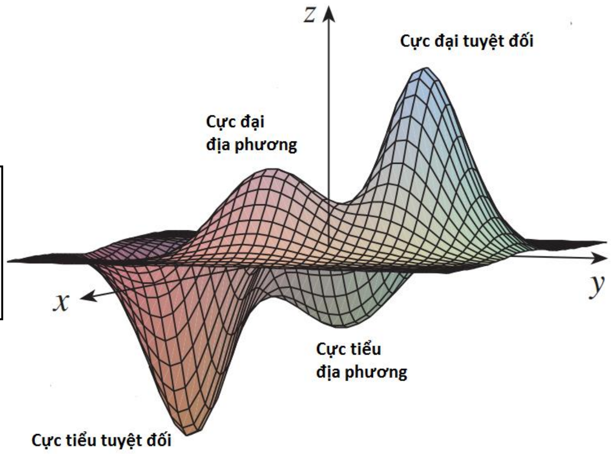
[1] Định nghĩa: Hàm hai biến có:

Cực đại địa phương tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b). [Nghĩa là $f(x,y) \leq f(a,b)$ với mọi (x,y) trong hình tròn tâm (a,b).]

Cực tiểu địa phương tại (a,b) nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b).

Số $f(a,b)$ được gọi là **giá trị** cực đại/cực tiểu địa phương.

■*Nếu các bất đẳng thức trong Định nghĩa [1] đúng cho mọi điểm (x,y) trong miền xác định của f thì f có cực đại tuyệt đối (hoặc cực tiểu tuyệt đối) tại (a,b).*



[2] Định lý: Nếu f có cực đại hoặc cực tiểu địa phương tại (a,b) và các đạo hàm riêng cấp một tồn tại thì $f_x(a,b) = 0$ và $f_x(a,b) = 0$.

■Điểm (a,b) được gọi là điểm tới hạn (*critical*) hay điểm dừng (*stationary*) của f nếu $f_x(a,b) = 0$ và $f_x(a,b) = 0$, hoặc một trong hai đạo hàm riêng đó không tồn tại.

[3] Định lý: Giả sử các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục trên một hình tròn tâm (a, b), và giả sử rằng $f_x(a,b) = 0$ và $f_x(a,b) = 0$, tức là (a,b) là điểm tới hạn của f. Giả sử

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b) * f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

(a) Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) > 0$ thì $f(a,b)$ là **cực tiểu địa phương**

(b) Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a,b) < 0$ thì $f(a,b)$ là **cực đại địa phương**

(c) Nếu $D < 0$ thì $f(a,b)$ là **điểm yên ngựa**

(d) Nếu $D = 0$ thì $f(a,b)$ có thể là một trong 3 loại trên.

Δ Chú ý: Định lý [3] cần sử dụng Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6: Tìm đạo hàm cấp hai của $f(x,y) = x^3 + 2x^2y^3 - 2y^2$

Trong ví dụ 1 ta tìm được $f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$ và $f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

Nên ta có :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2 \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

Định lý Clairaut (Cờ-le-rô):

Nếu hàm số 2 biến f xác định trên một đĩa tròn D chứa (a,b) sao cho cả 2 đạo hàm riêng f_{xy} và f_{yx} xác định và liên tục trên D thì :

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) \qquad \forall x,y \in D$$

Ví dụ 1.a/1.b: Tìm các giá trị cực đại địa phương và cực tiểu địa phương và các điểm yên ngựa của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ (Hình 4)

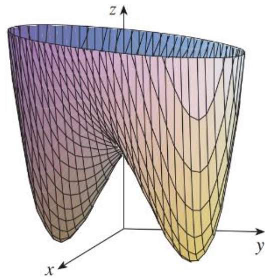
Bước 1: Xác định các điểm tới hạn

Ta có: $f_x(x,y) = 4x^3 - 4y$ và $f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$

Giải hệ PT: $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$ được 3 nghiệm $(x,y) = \{(\mathbf{0},\mathbf{0}), (\mathbf{1},\mathbf{1}), (-\mathbf{1},-\mathbf{1})\}$

Vậy ta tìm được 3 điểm tới hạn là $(\mathbf{0},\mathbf{0}), (\mathbf{1},\mathbf{1}), (-\mathbf{1},-\mathbf{1})$.

Bước 2: Phân loại và tính giá trị các điểm tới hạn



Hình 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Ta có: $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2, f_{xy} = -4$, $D(x,y) = 144x^2y^2 - 16$

→Xét điểm $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ có $D(0,0) = -16 < 0$ suy ra điểm $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ là **điểm yên ngựa** và ***f* không có cực trị địa phương tại (0, 0)**.

→Xét điểm $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ có $D(1,1) = 128 > 0$ *và* $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ suy ra điểm $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ là **điểm cực tiểu địa phương** và có **giá trị** $\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$.

→Xét điểm $(-\mathbf{1},-\mathbf{1})$ **có** $D(-1,-1) = 128 > 0$ *và* $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ suy ra điểm $(-\mathbf{1},-\mathbf{1})$ cũng là điểm **cực tiểu địa phương** và **có giá trị** $\boldsymbol{f}(-\mathbf{1},-\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$.

1.c: Tìm MAX và MIN trên một miền vô hạn.

[8] Định lý: Cực trị đối với hàm hai biến Nếu f liên tục trên miền đóng giới nội D trong R_2 thì f đạt giá trị cực đại tuyệt đối $f(x_1,y_1)$ và giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x_2,y_2)$tại các điểm (x_1,y_1) và (x_2,y_2)trong D.

[9] Để tìm cực trị tuyệt đối của hàm liên tục f trên miền đóng giới nội D:
1. Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của nó trên miền D.
2. Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của D.
3. Giá trị lớn nhất trong các giá trị trên chính là giá trị cực đại tuyệt đối, giá trị nhỏ nhất trong các giá trị trên chính là giá trị cực tiểu tuyệt đối.

Ví dụ 1.c: Tìm cực trị tuyệt đối của hàm (Tìm MAX và MIN)
$f(x,y) = x2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

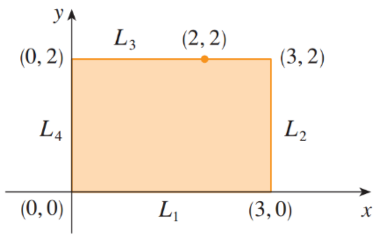
Vì f là đa thức, liên tục trên miền đóng giới nội nên theo Định lý [8], có cả cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối.

Bước 1: Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của nó trên miền D.

Ta có: $f_x = 2x - 2y$, $f_x = -2x + 2$

Giải hệ: $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$*(nhận)* Vậy f chỉ có điểm dừng $(1,1)$ duy nhất và có giá trị là $f(1,1) = \mathbf{1}$.

Bước 2: Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của D.



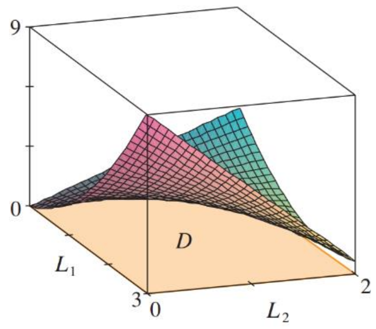
Hình 12

Biên của D gồm 4 đoạn thẳng L_1, L_2, L_3, L_4 trên hình 12.

- Trên L_1 ta có $y = 0$ và $f(x,0) = x^2$ đồng biến trên đoạn $[0,3]$ nên $\min_{[0,3]} f(x,0) = f(0,0) = \mathbf{0}$ và $\max_{[0,3]} f(x,0) = f(3,0) = \mathbf{9}$.

- Trên L_2 ta có $x = 3$ và $f(3, y) = 9 - 4y$ nghịch biến trên $[0,2]$ nên $\min_{[0,2]} f(3, y) = f(3,2) = \mathbf{1}$ và $\max_{[0,2]} f(3, y) = f(3,0) = \mathbf{9}$.
- Trên L_3 ta có $y = 2$ và $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ nên $\min_{[0,3]} f(x, 2) = f(2,2) = \mathbf{0}$ và $\max_{[0,3]} f(x, 2) = f(0,2) = \mathbf{4}$.
- Trên L_4 ta có $x = 0$ và $f(0, y) = 2y$ đồng biến trên đoạn $[0,2]$ nên $\min_{[0,2]} f(0, y) = f(0,0) = \mathbf{0}$ và $\max_{[0,2]} f(0, y) = f(0,2) = \mathbf{4}$.

Vậy ta tìm được giá trị min của $f = \mathbf{0}$ và max của $f = \mathbf{9}$ trên biên D.



Hình 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Bước 3: Tổng hợp và kết luận

Từ các kết quả trên ta kết luận **GTNN là $\boldsymbol{f(0,0) = f(2,2) = 0}$** và **GTLN là $\boldsymbol{f(3,0) = 9}$**.

(Hình 13 mô tả đồ thị của f).

Bài tập chương 14.7: 5-18, 19-20, 29-36, 39-56

Bài 14.7.35: Tìm GTLN và GTNN của $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ trên miền $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$.

Ta có: $f_x(x, y) = 6x^2$, $\quad f_y(x, y) = 4y^3$

Giải hệ : $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$*(nhận)* Vậy điểm tới hạn duy nhất của f là $(0,0)$ có $f(0,0) = 0$.

Xét đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ hay $y^2 = 1 - x^2$.

$g(x) = f(x, y) = 2x^3 + (1 - x^2)^2 = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1, \boldsymbol{-1 \le x \le 1}$

$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; x = \{0, -2, 1/2\}$.

$f(0, \pm 1) = g(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{6}, \qquad$ và $\boldsymbol{(x, y) = (-2, -3) \notin D}$

Kiểm tra điểm nằm trên đường tròn :

$f(1,0) = g(1) = 2, \qquad f(-1,0) = g(-1) = -2.$

Kết luận: GTLT của f là $f(1,0) = 2$, GTNN của f là $f(-1,0) = -2$.

Cách khác: với $x^2 + y^2 = 1$, ta có thể đặt $x = \cos \propto$, $y = \sin \propto$

$\rightarrow f(\cos \propto, \sin \propto) = 2cos^3 \propto + sin^4 \propto, \quad 0 \le \propto \le 2\pi$

Bài 14.7.16: Tìm, tính giá trị và phân loại các điểm tới hạn của $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

Ta có: $f_x = -2xe^y$, $f_y = (2y + y^2 - x^2)e^y$, $f_{xx} = -2e^y$, $f_{yy} = (2 + 4y + y^2 - x^2)e^y$, $f_{xy} = -2xe^y$

Giải hệ : $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^y = 0 \\ (2y + y^2 - x^2)e^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy f có 2 điểm tới hạn là $(0,0)$ và $(0, -2)$.

$D(0,0) = (-2)(2) - 0^2 = -4 < 0$ nên **điểm $\boldsymbol{(0,0)}$ là điểm yên ngựa.**

$D(0, -2) = (-2e^{-2})(-2e^{-2}) - 0^2 = 4e^{-4} > 0$ và $f_{xx}(0, -2) = -2e^{-2} < 0$ nên **$\boldsymbol{f(0, -2) = 4e^{-2}}$ là cực đại địa phương.**