Một số dạng bài tập thường có trong đề thi các năm:

I. **Khảo sát sự liên tục (1) và sự khả vi (4) của hàm** tại điểm (a,b):

1. **Sự liên tục:** sẽ có hai mức độ bài tập
   - Dạng dễ: ta sẽ chứng minh hàm không liên tục tại điểm (a,b) bằng cách chứng minh không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ (*) hoặc chứng minh rằng lim này nếu có sẽ khác f(a,b) (**). Để chứng minh (*), ta đặt một số các đường cong $(C_i):\ y = f_i(x)$ qua (a,b) và chứng minh $\lim_{x\to a} f(x, f_i(x))$ không cùng bằng nhau. Thường ta sẽ chọn $f_i(x) = a_i x^{b_i} + c_i$. Để chứng minh (**), ta cũng làm tương tự, nhưng chỉ cần chỉ ra một trong các lim khác f(a,b) là được.
   - Dạng khó: ta sẽ chứng minh hàm liên tục tại điểm (a,b) bằng định nghĩa kết hợp với những bất đẳng thức, đánh giá quen thuộc, hoặc bằng các tính chất của hàm liên tục.
2. **Sự khả vi:** cũng sẽ có hai mức độ bài tập:
   - Dạng dễ: ta sẽ chứng minh hàm khả vi tại điểm (a,b) bằng định nghĩa kết hợp với những bất đẳng thức, đánh giá quen thuộc. Dạng này dễ là do hàm lúc này khá đơn giản.
   - Dạng khó: ta sẽ chứng minh hàm khả vi hay không khả vi tại điểm (a,b) bằng cách xét đạo hàm riêng tại (a,b): nếu hàm không liên tục hay có ít nhất 1 đạo hàm riêng không tồn tại thì sẽ suy ra không khả vi, ngược lại ta sẽ sử dụng định lý về sự khả vi kết hợp với bài tập khảo sát sự liên tục để chứng minh khả vi.
3. **Bài tập:**

Bài 1. Cho hàm số f định bởi $f(x;y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \\ (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$.

a) Tính các đạo hàm riêng $D_1 f$ và $D_2 f$ tại mọi điểm thuộc miền xác định.

b) Khảo sát sự khả vi tại (0; 0) của f.

Bài 2. Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ định bởi

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } X = X^*(0;0) \\ \dfrac{xy\sqrt{|y|}}{x^2+y^2} & \text{nếu } X(x;y) \neq X^*(0;0) \end{cases}$$

Khảo sát sự liên tục của f tại X^*.

Bài 3. Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ định bởi

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } X = X^*(0;0) \\ \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } X(x;y) \neq X^*(0;0) \end{cases}$$

Khảo sát sự liên tục của f tại X^*.

Bài 4:

Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2$ định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hãy khảo sát sự liên tục của f tại $(x^*, y^*) = (0,0)$.

Bài 5 – 18, 29 – 34 (14.2): Khảo sát sự liên tục của f tại điểm dưới lim (nếu f không xác định tại đó thì mở rộng f: f tại đó bằng 0):

5. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$

6. $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

8. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

$\boxed{\textbf{9.}}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}$

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

$\boxed{\textbf{13.}}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

18. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

29. $F(x, y) = \frac{\sin(xy)}{e^x - y^2}$

30. $F(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

31. $F(x, y) = \arctan\left(x + \sqrt{y}\right)$

32. $F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \tan^{-1}\left((x + y)^{-2}\right)$

Bài 37, 38 (14.2): Khảo sát sự liên tục của f tại điểm (0,0):

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Bài 11 – 16 (14.4): Khảo sát sự khả vi:

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad (1, 4)$

12. $f(x, y) = x^3y^4, \quad (1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}, \quad (2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y, \quad (\pi, 0)$

16. $f(x, y) = \sin(2x + 3y), \quad (-3, 2)$

II. Tìm xấp xỉ của hàm số (4):

- **Ví dụ:** Cho hàm số $f(x,y) = xe^{xy}$. Chứng minh hàm số đã cho khả vi tại (1, 0) và tìm xấp xỉ của nó tại (1,0). Sử dụng kết quả vừa tìm được để so sánh với biểu thức ban đầu khi (x, y) = (1.1, -0.1)

Ta có: $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$ và $f_y(x,y) = x^2e^{xy}$.

$f_x(1,0)$ =1, $f_y(1,0)$ =1.

Vì f_x và f_y đều là hàm liên tục nên f khả vi. Xấp xỉ tuyến tính của hàm f(x, y) tại lân cận (1, 0):

$f(x,y) \approx f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) = \ldots$

- **Bài tập:**

Bài 1: Chứng minh các khẳng định sau đây: Cho (x, y) → (0, 0)

(2x+3y)/(4y+1) = 3 + 2x -12y

$\sqrt{y+\cos^2 x} = 1 + (1/2)y$

Bài 2. Hãy xấp xỉ đến bậc hai giá trị của $f(x;y) = \dfrac{1}{1-x-y+xy}$ tại lân cận của điểm (0; 0).

Câu 1. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ tại điểm $(1,1,1)$.

III. **Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số hai biến (5):** có thể là tìm điểm cực đại địa phương, cực tiểu địa phương hay là điểm yên ngựa

- **Ví dụ:** Cho x + 2y + z = 4. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$

Từ giả thiết ta suy ra z rồi thế vào biểu thức dưới, ta được f(x, y) = (x – 1)^2 + y^2 + (6 – x – 2y)^2
$f_x = 4x + 4y + 14$
$f_y = 4x + 10y - 24$.
Từ đó ta tìm được điểm critical point là A(11/6, 5/3).
$f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 10$, $f_{xy} = 4$. Ta tính được D(x, y) = 24 > 0. Từ đó suy ra điểm A là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và hàm số không có điểm cực đại.
Tới đây dễ thấy rằng hàm số không có giá trị lớn nhất, và hàm số f >= 0 với tập xác định D = R nên minf = f(11/6, 5/3).

- **Bài tập:**

Bài 1: Xác định các cực trị và điểm yên ngựa của hàm trên miền xác định của nó

f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy

f(x, y) = 3x – y^3 -2y^2 + y^4

f(x, y) = xy + 1/x + 1/y

f(x, y) = e^x cosy

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất địa phương và điểm yên ngựa (nếu có) của hàm số

0 0 (1;-1)

$$f(x,y) = -2x^3 + 6x^2 + 3y^2 + 6xy.$$

Bài 3. Khảo sát cực trị của hàm số f định bởi $\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y - x^2$.

IV. Tính tích phân kép bằng tích phân lặp (6): vẽ miền lấy tích phân rồi đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân lặp. Với dạng bài này, ta sử dụng kiểu I và II đã giới thiệu ở phần lý thuyết

- **Ví dụ 1:** Tính giá trị của tích phân kép $\iint_R y \sin xy \, dA$ với $R = [1,2] \times [0, \pi]$

Bài này có thể giải đơn giản bằng cách tính tích phân theo x rồi theo y lần lượt. Lưu ý, trong bài này, thứ tự lấy tích phân rất quan trọng vì nó quyết định khối lượng tính toán là nhiều hay ít.

- **Ví dụ 2:** Phác họa miền lấy tích phân, đổi thứ tự lấy tích phân và tính tích phân:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$$

- Phác họa miền lấy tích phân: với để ý rằng, tích phân lặp trên ta tính theo y trước, trong đó có một cận là $\sqrt[3]{x}$ nên ta sẽ vẽ phác họa đồ thị hàm số y = $\sqrt[3]{x}$.
- Với giá trị x từ 0 → 8 kết hợp với cận tích phân dy thì ta có thể phác họa miền lấy tích phân là miền giới hạn bởi 3 đường: trục Oy, đường y = $\sqrt[3]{x}$ và đường thẳng y = 2, từ đó theo Type II, ta đổi cận lấy tích phân như sau: $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1} = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1}$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y^4+1} \int_0^{y^3} dx = \int_0^2 \frac{y^3 dy}{y^4+1} = \frac{1}{4}\ln(y^4+1)\,|\,(0->2)$$

- **Bài tập:**

Bài 1: Phác họa miền lấy tích phân, đổi thứ tự lấy tích phân và tính tích phân:

$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx\, dy$

$\int_0^1 \int_{2x}^2 (x-y) dy\, dx$

$\int_0^1 \int_{x^2}^x (1+2y) dy\, dx$

$\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$

$\int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2}\, dx\, dy$

Bài 4. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và cho tích phân lặp $\int_{-2}^{0} dy \int_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$. Hãy vẽ miền lấy tích phân, đổi thành tích phân lặp với thứ tự lấy tích phân ngược lại.

V. Tính tích phân đường dọc theo (C) của hàm (7)

- Phương pháp: tính tích phân đường bằng công thức sau khi đã tham số hóa các biến và áp dụng các tính chất khác. Định lý cơ bản của tính phân đường có thể rút gọn một bước nào đó trong quá trình.
- Việc tính tích phân từ công thức hoàn toàn thuộc về giải tích một biến nên sẽ không quá khó. Ngược lại, bước khó nhất sẽ lại là bước tham số hóa các biến, kèm với nó là việc giới hạn tập xác định của biến t. Ngoại trừ đoạn thẳng đã có công thức, các đường cong khác được tham số hóa dựa trên kinh nghiệm là chủ yếu. Sau đó, cần rất chú ý đến tập xác định và vấn đề đi qua (C) quá 1 lần.
- Ghi chú: Dạng này là tích phân đường của hàm giá trị thực chứ không phải hàm vector, nên đôi khi sẽ không tốt bằng định lý Green nếu giải những bài dạng $\int_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$. Mặt khác, ở bài tập, (C) sẽ luôn **mượt** nên ta chỉ cần khẳng định, không cần chứng minh.
- **Bài tập:** Tính tích phân đường dọc theo (C): (từ 16.2)

1. $\int_C y^3\, ds, \quad C: x = t^3,\ y = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C xy\, ds, \quad C: x = t^2,\ y = 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4 \mathrm{d}s$, (C) là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

4. $\int_C x \sin y \, \mathrm{d}s$, (C) là đoạn thẳng từ (0,3) đến (4,6).

5. $\int_C \left(x^2y^3 - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}y$, (C) là đoạn cong từ (1,1) đến (4,2) của đường cong $y = \sqrt{x}$.

6. $\int_C xe^y \mathrm{d}x$, (C) là đoạn cong từ (1,0) đến (e,1) của đường cong $x = e^y$.

7. $\int_C (xy\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y)$, (C) là hợp giữa đoạn thẳng từ (0,0) đến (2,0) và đoạn thẳng từ (2,0) đến (3,2).

8. $\int_C (\sin x\mathrm{d}x + \cos y\mathrm{d}y)$, (C) là hợp giữa nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ từ (1,0) đến (-1,0) và đoạn thẳng từ (-1,0) đến (-2,3).

VI. Dạng bài tập về định lý Green (6)

- Tuy trong định lý Green có sự qua lại hai chiều Tích phân đường và Tích phân kép nhưng dạng bài tập này nói tới việc tính tích phân đường thông qua tính tích phân kép tương ứng.
- Phương pháp: áp dụng định lý, kèm theo kiểm tra cẩn thận điều kiện định lý, chia nhỏ (C) nếu cần, áp dụng những tính chất của tích phân đường cũng như sự đảo dấu tích phân khi chiều định hướng là âm.
- Ghi chú: Biểu thức $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ trong một số trường hợp có thể bằng 0, dẫn tới cả hai tích phân đều bằng 0. Mặt khác, ở bài tập, ta chỉ cần khẳng định (C) **"bình thường"** để áp dụng định lý mà không cần chứng minh. Tuy nhiên cũng nên nhớ "bình thường" là gì để tránh nhầm lẫn.
- **Bài tập:**
  Hai bài 5:

Câu 5. Tính tích phân $\int_C (x-y)dx + (x+y)dy$ với C là đường biên của tam giác có ba đỉnh (0,0), (1,0), (0,1) theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài 5. Cho $P = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ và $Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Chứng minh rằng $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Tính $\displaystyle\int_{(C)} Pdx + Qdy$ với

$(C): \dfrac{(x-3)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$, $y \geq 1$ định hướng từ điểm A(1; 1) đến B(5; 1).

b) Tính $\displaystyle\int_{(C_1)} Pdx + Qdy$ với (C_1) là đường tròn tâm O(0; 0) bán kính bằng 1, định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Các bài tiếp: Tính tích phân đường dọc theo (C) định hướng dương: (từ 16.4)

1. $\displaystyle\oint_C ((x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y)$, (C) là đường tròn tâm O bán kính 2.

2. $\displaystyle\oint_C (xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$, (C) là hình chữ nhật có 4 đỉnh (0,0), (3,0), (3,1), (0,1).

3. $\displaystyle\oint_C (xy\mathrm{d}x + x^2y^3\mathrm{d}y)$, (C) là hình tam giác có 3 đỉnh (0,0), (1,0), (1,2).

4. $\displaystyle\oint_C (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$, (C) là hợp giữa đoạn thẳng từ (0,1) đến (0,0), đoạn thẳng từ (0,0) đến (1,0) và parabol $y = 1 - x^2$ từ (1,0) đến (0,1).

5. $\displaystyle\oint_C (xy^2\mathrm{d}x + 2x^2y\mathrm{d}y)$, (C) là hình tam giác có 3 đỉnh (0,0), (2,2), (2,4).

6. $\displaystyle\oint_C (\cos y\mathrm{d}x + x^2\sin y\mathrm{d}y)$, (C) là hình chữ nhật có 4 đỉnh (0,0), (5,0), (5,2), (0,2).

7. $\displaystyle\oint_C \left[(y + e^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x + \cos(y^2))\mathrm{d}y\right]$, (C) là biên của vùng được giới hạn bởi hai parabol $x = y^2$ và $y = x^2$.

8. $\displaystyle\oint_C (xe^{-2x}\mathrm{d}x + (x^4 + 2x^2y^2)\mathrm{d}y)$, (C) là biên của vùng được giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

9. $\displaystyle\oint_C (y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y)$, (C) là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

10. $\displaystyle\oint_C (\sin y\mathrm{d}x - x\cos y\mathrm{d}y)$, (C) là elip $x^2 + xy + y^2 = 1$.

VII. Ghi chú: Việc tính đạo hàm riêng, đạo hàm hàm hợp cũng như áp dụng định lý Clairaut không có dạng bài tập riêng do chúng sẽ luôn được thực hiện song song hay kết hợp trong các dạng bài tập trên.