Câu 1

a) Cho các biến mệnh đề x, y và z. Dùng các luật logic để chứng minh A $\Leftrightarrow$ B trong đó

$A = [(x \vee y) \to y] \wedge \overline{z \to (y \wedge z)}$ và $B = \overline{z \to (x \vee y)}$.

b) Cho 3 biến mệnh đề x, y, và z. Đặt $A = [(x \to y) \to (x \to z)]$, $B = [(x \wedge y) \to z]$.

Dùng các luật logic để chứng minh A $\Leftrightarrow$ B.

c) Cho C = "$\exists x \in (0, +\infty), \forall y \in \mathbf{R}, 4e^{y^2} \geq x + \dfrac{4}{x}$". Xét chân trị của C và viết mệnh đề $\overline{C}$.

d) Cho mệnh đề D = "$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Q} : 4\sin(xy) - 3\cos(5y) \leq 2x$".

Hãy xét chân trị của D (có giải thích) và viết mệnh đề phủ định $\overline{D}$.

Câu 2 Cho các biến mệnh đề x, y, z, t, u và các suy luận sau :

Hãy chứng minh suy luận a) là *đúng*.

Hãy giải thích tại sao suy luận b) là *sai*.

a)	b)
$x \to \overline{y}$	$\overline{t} \to u$
$u \to \overline{z}$	$y \to \overline{z}$
$y \vee z$	$(x \wedge \overline{t}) \vee z$
$x \wedge \overline{t}$	$u \to \overline{x}$
----------------	--------------------
$\therefore u \to t$	$\therefore x \wedge \overline{y}$

Câu 3 Kiểm tra ánh xạ f là một song ánh và viết ánh xạ ngược f^{-1} nếu

$f : X = [1, 4) \to Y = [2, 11)$ thỏa $f(x) = x + 6\sqrt{x} - 5 \;\; \forall x \in X$.

Câu 4 Xếp 7 người (gồm 4 nam và 3 nữ) ngồi vào một bàn dài có 10 ghế (các ghế được ghi số thứ tự từ 1 đến 10 và mỗi người ngồi vào 1 ghế). Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu

a) 7 người ngồi tùy ý ?

b) 7 người ngồi vào 7 ghế liền nhau và nam nữ xếp xen kẽ nhau ?

c) 4 nam ngồi gần nhau, 3 nữ ngồi gần nhau và có 1 ghế trống ngăn cách giữa nhóm nam và nhóm nữ ?

Câu 5

a) 3 người Áo, 4 người Đức và 5 người Bỉ xếp thành một hàng dọc sao cho 3 người Áo đứng gần nhau và 5 người Bỉ đứng gần nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

b) Phương trình $x + y + z + t = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ≥ 0 ?.

Phương trình trên có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa $2 < x < 7$, $y > -1$, $z \geq 8$ và $t \geq -4$?

c) Khi khai triển biểu thức $(3x - 2y - z + 4t)^{19}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?

Trong đó có bao nhiêu đơn thức có dạng $cx^m y^n z^p t^q$ với hệ số $c \neq 0$, $m > 2$, $n = 4$ và $q < 8$?

Hệ số đứng trước $(x^3 y^2 z^{13} t)$ trong khai triển nói trên là bao nhiêu ?

d) Có bao nhiêu số điện thoại gồm 8 chữ số thập phân khác nhau mà trong đó phải có các chữ số 2, 5 và 8 ? (chẳng hạn như số điện thoại 45908632, …)

e) Cho phương trình $x + y + z + t = 20$ với x, y, z và t là *các ẩn số nguyên* (*).

– Tìm số nghiệm của phương trình (*) nếu $x > -4, y \geq 0, z > -1$ và $t \geq 7$.

– Tìm số nghiệm của phương trình (*) nếu $x \geq 0, y = 4, z \geq 0$ và $t \geq 2$.

Câu 6 Cho $m = 417375$ và $n = 120750$. Ký hiệu $d = (m, n)$ và $e = [m, n]$ lần lượt là *ước số chung dương lớn nhất* và *bội số chung dương nhỏ nhất* của m và n. Dùng thuật chia Euclide để tìm d và tìm r, s $\in \mathbf{Z}$ thỏa $d = rm + sn$. Từ đó suy ra e và dạng tối giản của phân số (m/n).

Câu 7

a) Cho $m = 903672$ và $n = 260568$. Đặt $d = (m, n)$ và $e = [m, n]$. Dùng thuật chia Euclide để tìm d và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = rm + sn$. Từ đó suy ra e và dạng tối giản của phân số $\frac{m}{n}$.

b) Phân tich 25! thành tích của các số nguyên tố và rút gọn thành các lũy thừa nguyên tố.

c) Phân tích m = 15.876.000 thành tích của các lũy thừa các số nguyên tố dương. Từ đó cho biết m có bao nhiêu ước số nguyên khác nhau ?

Câu 8

a) $\forall n \geq 0$, đặt $s_n = \sum_{k=0}^{n} (3k+1)2^k$. Tính tổng s_n theo n bằng cách thiết lập một hệ thức đệ qui có điều kiện đầu và giải hệ thức đệ qui đó.

b) Giải các phương trình sau trong $\mathbf{Z}_{100}$: $\overline{300}.\overline{x} = \overline{-128}$, $\overline{125}.\overline{y} = \overline{270}$ và $\overline{135}.\overline{z} = \overline{-45}$.

Câu 9 Cho $m = 109956$ và $n = 38220$. Đặt $d = (m, n)$ và $e = [m, n]$ lần lượt là *ước số chung dương lớn nhất* và *bội số chung dương nhỏ nhất* của m và n.

a) Dùng thuật chia Euclide để tính d và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = rm + sn$ rồi suy ra dạng tối giản của phân số (m / n).

b) Tính e và tìm $u, v \in \mathbf{Z}$ sao cho $\frac{1}{e} = \frac{u}{m} + \frac{v}{n}$.

Câu 10 Cho $S = \{ -2, -1, 0, 1 \}$. $\forall x,y \in S$, đặt $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow x \leq y - y^2$.

a) Liệt kê các cặp $(x,y) \in S2$ thoả $x \,\mathfrak{R}\, y$.

b) Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền của quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$ trên S.

Câu 11 Cho $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$.

$\forall x,y \in S$, đặt $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{N}, y^2 - x^2 = 6k$ (k phụ thuộc vào x và y)

a) Chứng minh $\mathfrak{R}$ là *một quan hệ thứ tự* trên S.

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \mathfrak{R})$ và tìm các phần tử min, max, tối tiểu và tối đại (nếu có).

b) $\mathfrak{R}$ có phải là một quan hệ tương đương trên S không? Tại sao?

Câu 12

Cho $S = \{-2, 0, 1\}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow xy + 4 = -2(x + y)$

a) Liệt kê các tập hợp S^2 và $\mathfrak{R}$.

b) Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền của $\mathfrak{R}$.

Câu 13 Cho hàm Bool theo 4 biến

$$f(x,y,z,t) = xzt \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{t} \vee x\overline{z}t \vee \overline{x}yzt \vee x\overline{y}z\overline{t}$$

a) Vẽ biểu đồ Karnaugh cho f và xác định các tế bào lớn của nó (chỉ rõ vị trí các tế bào lớn trên biểu đồ và gọi tên của chúng).

b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu cho f .

Câu 14 Tìm các công thức đa thức tối tiểu của các hàm Bool sau :

a) $f(x,y,z,t) = x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y \vee xy\overline{z}t \vee y\overline{z}\,\overline{t} \vee x\overline{y}t \vee \overline{x}zt$

b) $f(x,y,z,t) = x\overline{y} \vee \overline{x}yt \vee \overline{x}z\overline{t} \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}t \vee xy\overline{z}\,\overline{t}$

c) $f(x,y,z,t) = \overline{x}y\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}t \vee xz\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z}t \vee x\overline{y}t$