Giải tích B2 – tích phân đường loại 2

1. Tích phân

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

được gọi là tích phân đường loại hai của $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ trên cung (C).

2. Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều lấy tích phân

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy$$

3. Nếu $C = C_1 \cup C_2$ thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

4. Phương pháp tính tích phân

a) Nếu C là đường cong trơn từng khúc được cho bởi phương trình

$$x = \varphi(t)\,, y = \psi(t)$$

Và $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ là những hàm liên tục từng khúc dọc theo C thì:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta [P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)]dt$$

(chú thích: $t = \alpha$ ứng với điểm đầu cung, $t = \beta$ ứng với điểm cuối cung)

b) Nếu C cho bởi phương trình $y = y(x)$ và $y(x)$ có đạo hàm liên tục từng khúc, các hàm P, Q liên tục từng khúc dọc theo C thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)]dx$$

Trong đó, $x = a$ là hoành độ điểm đầu, $x = b$ là hoành độ điểm cuối

c) Nếu C cho bởi phương trình $x = x(x)$ và $x(y)$ có đạo hàm liên tục từng khúc, các hàm P, Q liên tục từng khúc dọc theo C thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy$$

Trong đó, $y = a$ là tung độ điểm đầu, $y = b$ là tung độ điểm cuối

Ví dụ 1: Tính

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$$

Trong đó, C là parabola bậc ba: $y = x^3$ từ điểm $A(1,1)$ đến $B(2,8)$

Giải

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy = \int_1^2 [x^2 + (x^3)^2 + 2x(x^3)3x^2]dx = \int_1^2 (x^2 + 7x^6)dx = \frac{388}{3}$$

Ví dụ 2: Tính

$$\int_C y^2dx - x^2dy$$

Với C là đường tròn bán kính $R = 1$, tâm $(1,1)$ và có hướng ngược chiều kim đồng hồ

Giải

Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

Khi đó,

$$\int_C y^2dx - x^2dy = \int_0^{2\pi} [(1+\sin t)^2(-\sin t) - (1+\cos t)^2 \cos t]\, dt = -4\pi$$

Ví dụ 3: Tính

$$I = \int_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$$

Với C là biên tam giác OAB với $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$

Giải

$$I = \int_C = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}}$$

- Phương trình cạnh OA: $y = x$

$$I_1 = \int_{\overline{OA}} (x^2 + 3y)dx + 2ydy = \int_0^1 (x^2 + 3x + 2x)dx = \frac{17}{6}$$

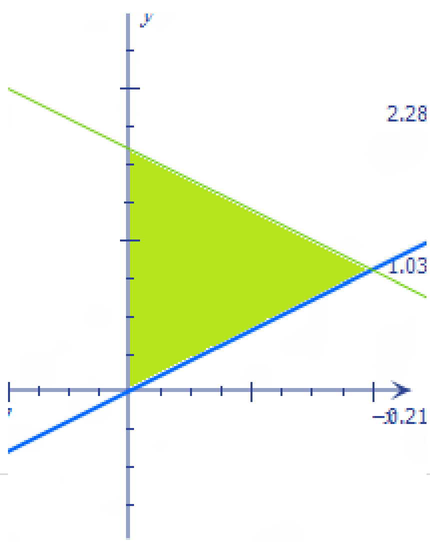
- Phương trình cạnh AB: $y = 2 - x$

$$I_2 = \int_{\overline{AB}} (x^2 + 3y)dx + 2ydy = \int_1^0 \left(x^2 + 3(2-x) + 2(2-x)(-1)\right)dx = -\frac{11}{6}$$

- Phương trình cạnh BO: $x = 0$

$$I_3 = \int_{\overline{BO}} (x^2 + 3y)dx + 2ydy = \int_2^0 [(0^2 + 3y).0 + 2y]dy = -4$$

vậy, $I = I_1 + I_2 + I_3 = -3$



5. Công thức Green
   - Giả sử D là miền nào đó trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Miền phẳng D được gọi là miền đơn liên nếu các biên kín của D có thể co về một điểm P thuộc D mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại, D được gọi là miền đa liên.
   - C là biên của miền D
   - Ta quy ước chiều dương trên C là chiều mà đi theo chiều này ta thấy miền D ở phía bên tay trái.
     (trong đa số trường hợp, chiều dương ngược chiều kim đồng hồ)

Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đơn liên, C là cung kín. P, Q và các đạo hàm riêng cấp 1 xác định và liên tục trên miền mở chứ D.

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Lưu ý: Điều kiện để sử dụng công thức Green

- C là cung kín
- P, Q và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C
- Nếu chiều đang xét cùng chiều với chiều dương

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

- Nếu chiều đang xét ngược chiều với chiều dương

$$\oint_C Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

trở lại với ví dụ 3:

- Cung C kín.
- $P = x^2 + 3y$ và $Q = 2y$
- P, Q và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C

$$I = \oint_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-3)\, dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (-3)dy = -3$$

***********Một phút giải trí:**

Ta có $\iint_D \, dxdy = S_{\Delta OAB} = 1$ suy ra $I = -3$

Ví dụ 4: Tính

$$I = \int_C (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$$

Trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, từ $O(0,0)$ đến $A(2,0)$

Cách 1:

Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$t = \pi$ ứng với điểm đầu. $t = 0$ ứng vời điểm cuối

$$I = \int_{\pi}^{0} [(1+\cos t - \sin t)^2(-\sin t) + (1+\cos t + \sin t)^2 \cos t]dt = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Tuy nhiên, giải theo cách này sẽ làm bạn tốn rất nhiều thời gian để tính tích phân

Cách 2:

$$I = \int_C = \oint_{\widehat{OA}\cup\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}$$

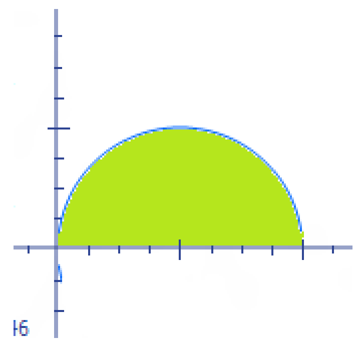
$$I_1 = -\oint_{\widehat{OA}\cup\overline{AO}} Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -\iint_D \big(2(x+y) + 2(x-y)\big)dxdy$$

$$= -4\iint_D xdxdy = -4\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = -2\pi$$

Đường thẳng $AO: y = 0$

$$I_2 = \int_2^0 x^2 dx = -\frac{8}{3}$$

Vậy, $I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$



Ví dụ 5: Tính

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Trong đó, C là đường cong tùy ý không chứa gốc $O(0,0)$, ngược chiều kim đồng hồ

Giải

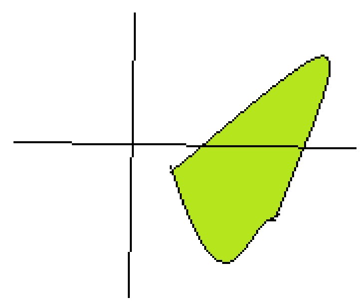
Trường hợp 1: C không bao quanh gốc O

$P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

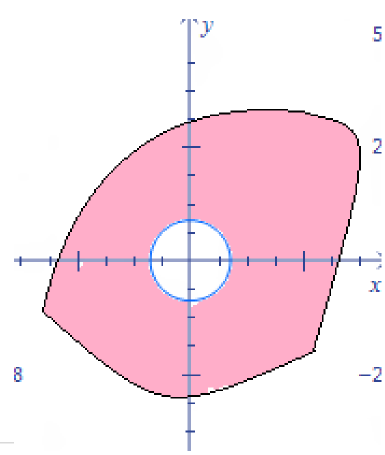
Do đó, $I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$



Trường hợp 2: C bao quanh gốc O

Không sử dụng công thức Green được, vì P, Q và các đạo hàm riêng cấp 1 không liên tục trên miền D có biên C

Kẻ thêm đường tròn C_1 bán kính a đủ nhỏ để C_1 nằm lọt trong C, chọn chiều kim đồng hồ



$$I = \oint_C = \oint_{C\cup C_1} - \oint_{C_1}$$

$$I_1 = \oint\limits_{C \cup C_1} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Tính tích phân I_2 trên cung tròn $x^2 + y^2 = a^2$

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $t_1 = 2\pi, t_2 = 0$

$$I_2 = \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}{a^2} dt = -2\pi$$

Vậy, $I = I_1 - I_2 = 2\pi$

6. Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

   Cho hàm P, Q và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D chứa cung $\widehat{AB}$

   Các mệnh đề sau đây tương đương

   - $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
   - Tích phân $I = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong trơn từng khúc nối cung $\widehat{AB}$ nằm trong D
   - Tồn tại $U(x, y)$ là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$
   - Tích phân trên mọi chu tuyến kín C, trơn từng khúc trong D bằng 0

$$I = \oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$$

Ví dụ 1: tính

$$I = \int\limits_C (2ye^{xy} + e^x\cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x\sin y)dy$$

Trong đó, C là đường cong tùy ý đo từ $A(0, \pi)$ đến $B(1,0)$

Giải

Ta có:

$$P = 2ye^{xy} + e^x\cos y \ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{xy} + 2xye^{xy} - e^x\sin y$$

$$Q = 2xe^{xy} - e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{xy} + 2xye^{xy} - e^x\sin y$$

Suy ra tích phân không phụ thuộc vào đường đi

Ở đây, mình đưa ra 3 cách giải để các bạn tham khảo

Cách 1: Chọn 1 đường đi C từ A đến B sao cho dễ tính tích phân nhất

Ta chọn $C = \overline{AO} \cup \overline{OB}$, $O(0,0)$

Khi đó

$$\int\limits_C = \int\limits_{AO} + \int\limits_{OB}$$

Phương trình $AO: x = 0$

$$I_1 = \int\limits_{AO} (2ye^{xy} + e^x\cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x\sin y)dy = \int\limits_{\pi}^{0} -\sin y\, dy = 2$$

Phương trình $OB: y = 0$

$$I_2 = \int_{\overline{OB}} (2ye^{xy} + e^x \cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x \sin y)dy = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

Vậy, $I = I_1 + I_2 = 1 + e$

Cách 2:

Tồn tại $U(x, y)$ là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$

$$\begin{cases} U'_x = P = 2ye^{xy} + e^x \cos y & (1) \\ U'_y = Q = 2xe^{xy} - e^x \sin y & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow U = \int Pdx = \int (2ye^{xy} + e^x \cos y)dx = 2e^{xy} + e^x \cos y + g(y)$

$\Rightarrow U'_y = 2xe^{xy} - e^x \sin y + g'(y) \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \qquad (c = const)$

Vậy, $U(x, y) = 2e^{xy} + e^x \cos y + c$

Do đó,

$I = U(x, y)\Big|_{(0,\pi)}^{(1,0)} = U(1,0) - U(0, \pi) = 1 + e$

Cách 3:

$$I = \oint_{C \cup \overline{BA}} - \int_{\overline{BA}}$$

Trong đó,

$$I_1 = \oint_{C \cup \overline{BA}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Đường thẳng $BA: y = \pi x$

$$I_2 = \int_{\overline{BA}} (2ye^{xy} + e^x \cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x \sin y)dy$$

(tự tính)