

BỘ MÔN GIẢI TÍCH

BÀI TẬP GIẢI TÍCH B1

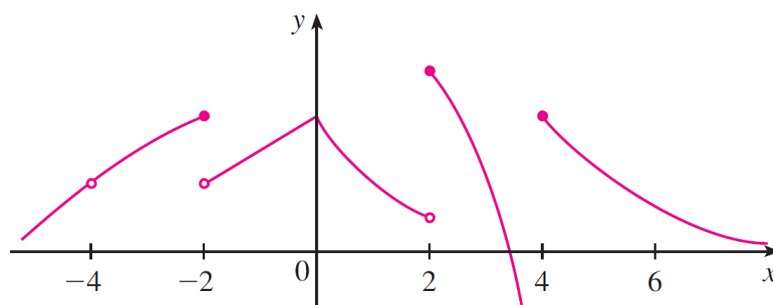
KHOA TOÁN TIN HỌC, ĐHKHTN THHCM.

Chương 1

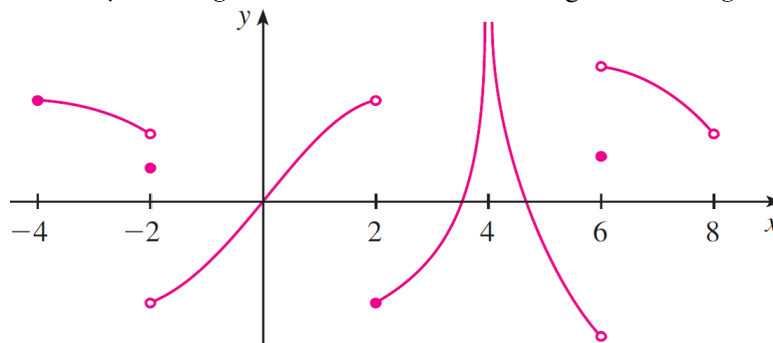
Hàm số liên tục

1. Cho đồ thị hàm số f như hình dưới.

- a) Tìm các điểm gián đoạn của f và giải thích.
- b) Từ các điểm tìm được trên câu (a), xác định tại điểm nào mà hàm số liên tục bên trái hoặc bên phải hoặc không liên tục cả hai bên.



2. Từ đồ thị hàm số g cho bên dưới, tìm các khoảng mà hàm số g liên tục.



3. Vẽ đồ thị minh hoạ hàm số f liên tục thoả mãn từng khẳng định gián đoạn sau
- a) Gián đoạn nhưng liên tục bên phải tại 2.
 - b) Gián đoạn tại -1 và 4 nhưng liên tục bên trái tại -1 và liên tục bên phải tại 4.
4. Giải thích vì sao mỗi hàm số sau liên tục hay không liên tục
- a) Nhiệt độ của một vùng cụ thể là một hàm số theo thời gian.
 - b) Nhiệt độ tại một thời điểm cụ thể như là một hàm số theo khoảng cách lấy gốc là Hà Nội dọc theo tia hướng vào Tp. Hồ Chí Minh.
 - c) Độ cao so với mực nước biển như là một hàm số theo khoảng cách dọc Bắc Nam tính từ Hà Nội.
 - d) Giá cước của taxi như là một hàm số theo khoảng cách đi được.
 - e) Dòng điện trong mạch qua đèn điện như là một hàm số theo thời gian.
5. Giả sử f và g là các hàm số liên tục sao cho $g(2) = 6$ và $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Tính $f(2)$.
6. Sử dụng định nghĩa liên tục và các tính chất của giới hạn để chỉ ra hàm số sau liên tục tại điểm a cho trước.
- a) $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}$, $a = 2$.
 - b) $f(x) = (x + 2x^3)^4$, $a = -1$.
 - c) $h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}$, $a = 1$.
7. Sử dụng định nghĩa liên tục và các tính chất của giới hạn để chỉ ra hàm số sau liên tục trên khoảng cho trước.
- a) $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$, $(2, \infty)$.
 - b) $g(x) = 2\sqrt{3 - x}$, $(-\infty, 3]$.
8. Giải thích vì sao các hàm số sau gián đoạn tại điểm a cho trước. Vẽ đồ thị mỗi hàm số.
- a) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, $a = -2$.
 - b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2} & \text{nếu } x \neq -2 \\ 1 & \text{nếu } x = -2. \end{cases} \quad a = -2$.

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 1/x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases} \quad a = 1.$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases} \quad a = 1.$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{nếu } x > 0. \end{cases} \quad a = 0.$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 6 & \text{nếu } x = 3. \end{cases} \quad a = 3.$$

9. Hãy định nghĩa $f(2)$ sao cho mỗi hàm số có gián đoạn khử được trở thành liên tục tại 2.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

10. Sử dụng định lý 4, 5, 7 và 9 giải thích vì sao các hàm số sau liên tục trên miền xác định. Tìm miền xác định.

$$\text{a) } F(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{c) } Q(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3 - 2}$$

$$\text{f) } B(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{b) } G(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\text{d) } h(x) = \frac{\sin x}{x + 1}$$

$$\text{g) } M(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{e) } h(x) = \cos(1 - x^2)$$

$$\text{h) } F(x) = \sin(\cos(\sin x))$$

11. Xác định các điểm gián đoạn của các hàm số sau và vẽ đồ thị.

$$\text{a) } y = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$\text{b) } y = \tan \sqrt{x}$$

12. Dùng sự liên tục để tính các giới hạn sau.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} x \cos^2 x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 1)^{-3}$$

13. Chứng minh rằng f liên tục trên $(-\infty, \infty)$, với f định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

Chương 2

Đạo hàm

Chú ý: Phần bài tập A yêu cầu tính độ dốc, đạo hàm bằng định nghĩa.

A. Bài tập đạo hàm bằng định nghĩa

1. Tìm phương trình của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm có tọa độ cho trước.

a) $y = 4x - 3x^2, (2, -4)$

c) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$

b) $y = x^3 - 3x + 1, (2, 3)$

d) $y = \frac{2x + 1}{x + 2}, (1, 1).$

2. a) Tìm độ dốc (hệ số góc) của tiếp tuyến với đường cong $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ tại điểm $x = a$.

b) Tìm phương trình tiếp tuyến tại các điểm $(1, 5)$ và $(2, 3)$.

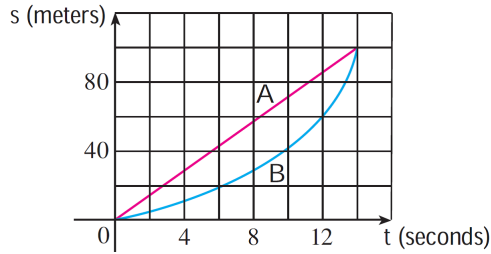
c) Vẽ đồ thị của đường cong và cả hai tiếp tuyến trên một màn hình chung.

3. a) Tìm độ dốc hệ số góc của tiếp tuyến tới đường cong $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tại điểm $x = a$.

b) Tìm phương trình của tiếp tuyến tại các điểm $(1, 1)$ và $(4, \frac{1}{2})$.

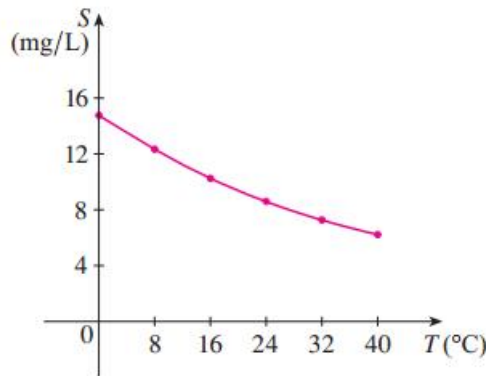
c) Vẽ đồ thị của đường cong và cả hai tiếp tuyến trên một màn hình chung.

4. Đồ thị bên dưới biểu diễn hàm vị trí của hai vận động viên A và B trên đường đua cự ly 100m.



- a) Mô tả và so sánh tốc độ chạy của hai vận động viên.
 - b) Dựa vào đồ thị, ước đoán tại thời điểm nào khoảng cách giữa các vận động viên là lớn nhất?
 - c) Ước đoán xem tại thời điểm nào họ có cùng vận tốc?
5. Nếu một quả bóng được ném thẳng đứng lên không trung với vận tốc $40 ft/s$, độ cao của nó (đơn vị feet) sau thời gian t giây là được cho bởi $y = 40t - 16t^2$. Tìm vận tốc khi $t = 2$.
 6. Nếu một hòn đá được ném thẳng đứng lên cao ở hành tinh sao Hỏa với vận tốc $10 m/s$, chiều cao của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi $H = 10t - 1.86t^2$.
 - a) Tìm vận tốc của hòn đá sau một giây.
 - b) Tìm vận tốc của hòn đá khi $t = a$.
 - c) Trong bao lâu hòn đá sẽ quay lại chạm mặt đất?
 - d) Vận tốc của hòn đá là bao nhiêu khi hòn đá chạm mặt đất?
 7. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = g(x)$ tại $x = 5$ nếu $g(5) = -3$ và $g'(5) = 4$.
 8. Nếu một phương trình tiếp tuyến tới đường cong $y = f(x)$ tại điểm $a = 2$ là $y = 4x - 5$, tìm $f(2)$ và $f'(2)$.
 9. Nếu đường tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $(4, 3)$ đi qua điểm $(0, 2)$, tìm $f(4)$ và $f'(4)$.
 10. Vẽ đồ thị của một hàm f mà $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = -1$.
 11. Vẽ đồ thị của một hàm g mà $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$.
 12. Nếu $f(x) = 3x^2 - x^3$, tìm $f'(1)$ và dùng nó để tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = 3x^2 - x^3$ tại điểm $(1, 2)$.

- 13.** Nếu $g(x) = x^4 - 2$, tìm $g'(1)$ và dùng nó để tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^4 - 2$ tại điểm $(1, -1)$.
- 14.** **a)** Nếu $F(x) = \frac{5x}{1+x^2}$, tìm $F'(2)$ và dùng nó để tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{5x}{1+x^2}$ tại điểm $(2, 2)$.
b) Minh hoạ phần (a) bằng cách vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến trên cùng một màn hình.
- 15.** **a)** Nếu $G(x) = 4x^2 - x^3$, tìm $G'(a)$ và dùng nó để tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = 4x^2 - x^3$ tại điểm $(2, 8)$ và $(3, 9)$.
b) Minh hoạ phần (a) bằng cách vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến trên cùng một màn hình.
- 16.** Tìm $f'(a)$ với f định bởi
- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ | c) $f(t) = \frac{2t+1}{t+3}$ |
| b) $f(t) = 2t^3 + t$ | d) $f(x) = x^{-2}$ |
- 17.** Lượng dưỡng khí có thể hoà tan trong nước phụ thuộc vào nhiệt độ của nước (vì vậy ô nhiễm nhiệt ảnh hưởng hàm lượng oxy trong nước). Đồ thị sau cho thấy độ hoà tan S của dưỡng khí thay đổi như một hàm theo nhiệt độ T của nước.
- a)** Ý nghĩa của đạo hàm $S'(T)$ là gì? Đơn vị của nó là gì?
b) Ước tính giá trị $S'(16)$ và giải thích nó.

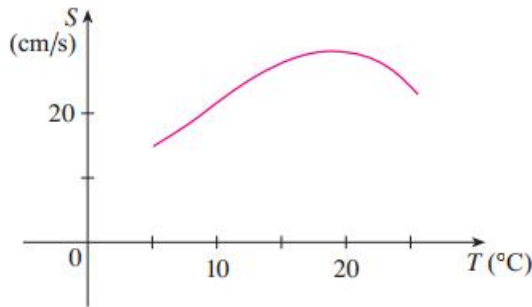


Adapted from Environmental Science: Living Within the System of Nature, 2d ed.; by Charles E. Kupchella,

© 1989. Reprinted by permission of Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

18. Đồ thị sau cho thấy sự ảnh hưởng của nhiệt độ T đối với tốc độ bơi tối đa ổn định S của cá hồi Soho.

- a) Ý nghĩa của đạo hàm $S'(T)$ là gì? Đơn vị của nó là gì?
 b) Ước tính giá trị $S'(15)$ và $S'(25)$, và giải thích chúng.



B. Bài tập định lý Rolle, Lagrange

1 - 4 Hãy kiểm tra rằng hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý Rolle trên khoảng cho trước. Sau đó tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của Định lý Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$
4. $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$
5. Cho $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Chứng tỏ rằng $f(-1) = f(1)$ nhưng không tồn tại số c trong khoảng $(-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?
6. Cho $f(x) = \tan x$. Chứng tỏ rằng $f(0) = f(\pi)$ nhưng không tồn tại số c trong khoảng $(0, \pi)$ sao cho $f'(c) = 0$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

7 - 8. Hãy kiểm tra rằng hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý giá trị trung bình trên khoảng cho trước. Sau đó tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của Định lý giá trị trung bình.

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[0, 1]$
8. $f(x) = 1/x$, $[1, 3]$

9 - 10. Tìm số c thỏa mãn Định lý giá trị trung bình trên khoảng cho trước. Vẽ đồ thị của hàm số, đường cát tuyến đi qua hai điểm đầu mút và đường tiếp tuyến tại $(c, f(c))$. Đường cát tuyến và đường tiếp tuyến có song song nhau không?

9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

10. $f(x) = x^3 - 2x, \quad [-2, 2]$

11. Cho $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c trong khoảng $(1, 4)$ sao cho $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý giá trị trung bình?

12. Cho $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c sao cho $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý giá trị trung bình?

13 - 14. Chứng tỏ rằng phương trình sau có duy nhất một nghiệm thực.

13. $2x + \cos x = 0$

14. $2x - 1 - \sin x = 0$

15. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$.

16. Chứng tỏ rằng phương trình $x^4 + 4x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

17. a) Chứng tỏ rằng một đa thức bậc 3 có nhiều nhất 3 nghiệm thực.

b) Chứng tỏ rằng một đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm thực.

C. Bài tập vi phân, hàm hợp và hàm ẩn

1. Tính vi phân.

a) $f(x) = 3x^2 - 2 \cos x$

b) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

c) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cot x$

d) $y = 2 \sec x - \csc x$

e) $y = \sec \theta \tan \theta$

f) $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

g) $y = c \cos t + t^2 \sin t$

h) $y = u(a \cos u + b \cot u)$

i) $y = \frac{x}{2 - \tan x}$

j) $y = \sin \theta \cos \theta$

k) $f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$

l) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

m) $y = \frac{t \sin t}{1 + t}$

n) $y = \frac{1 - \sec x}{\tan x}$

o) $h(\theta) = \theta \csc \theta - \cot \theta$

p) $y = x^2 \sin x \tan x$

2. Viết những hàm sau theo dạng $f(g(x))$ (Xác định hàm bên trong $u = g(x)$ và hàm bên ngoài $y = f(u)$). Sau đó tìm đạo hàm dy/dx .

a) $y = \sqrt[3]{1+4x}$

c) $y = \tan \pi x$

e) $y = \sqrt{\sin x}$

b) $y = (2x^3 + 5)^4$

d) $y = \sin(\cot x)$

f) $y = \sin \sqrt{x}$

Tìm đạo hàm của những hàm sau:

3. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

4. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

5. $F(x) = \sqrt{1-2x}$

6. $f(x) = \frac{1}{(1 + \sec x)^2}$

7. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

8. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

9. $y = \cos(a^3 + x^3)$

10. $y = a^3 + \cos^3 x$

11. $y = x \sec kx$

12. $y = 3 \cot n\theta$

13. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

14. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

15. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

16. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

17. $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

18. $f(s) = \sqrt{\frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

19. $y = \sin(x \cos x)$

20. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$

21. $F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

22. $G(y) = \frac{(y-1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

23. $y = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

24. $y = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x + \cos \pi x}$

25. $y = \sin \sqrt{1+x^2}$

26. $F(v) = \left(\frac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

27. $y = \sin(\tan 2x)$

28. $y = \sec^2(m\theta)$

29. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

30. $y = x \sin \frac{1}{x}$

31. $y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\right)^4$

32. $f(t) = \sqrt{\frac{t}{t^2 + 4}}$

33. $y = \cot^2(\sin \theta)$

34. $y = (ax + \sqrt{x^2 + b^2})^{-2}$

35. $y = [x^2 + (1 - 3x)^5]^3$

36. $y = \sin(\sin(\sin x))$

$$37. y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$38. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$39. g(x) = (2r \sin rx + n)^p$$

$$40. y = \cos^4(\sin^3 x)$$

$$41. y = \cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}$$

$$42. y = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$$

Tìm công thức chính xác của dy/dx (dùng công thức hàm ẩn) biết :

$$43. x^3 + y^3 = 1$$

$$44. 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

$$45. x^2 + xy - y^2 = 4$$

$$46. 2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$$

$$47. x^4(x + y) = y^2(3x - y)$$

$$48. y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$$

$$49. y \cos x = x^2 + y^2$$

$$50. \cos(xy) = 1 + \sin y$$

$$51. 4 \cos x \sin y = 1$$

$$52. y \sin(x^2) = x \sin(y^2)$$

$$53. \tan(x/y) = x + y$$

$$54. \sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$$

$$55. \sqrt{xy} = 1 + x^2y$$

$$56. x \sin x + y \sin y = 1$$

$$57. y \cos x = 1 + \sin(xy)$$

$$58. \tan(x - y) = \frac{y}{1 + x^2}$$

59. Dùng vi phân ẩn để tìm công thức của đường tiếp tuyến của đường cong tại điểm cho trước.

a) $y \sin 2x = \cos 2y, (\pi/2, \pi/4)$

b) $\sin(x + y) = 2x - 2y, (\pi, \pi)$

c) $x^2 + xy + y^2 = 3, (1, 1)$
(ellip)

d) $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2, (1, 2)$
(hyperbola)

e) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2, (0, \frac{1}{2})$
(cardioid)

60. a) Đường cong với phương trình $y^2 = 5x^4 - x^2$ được gọi là **kampyle of Eudoxus**. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong này tại điểm $(1, 2)$.

b) Vẽ đồ thị của đường cong và tiếp tuyến của nó.

61. a) Đường cong với phương trình $y^2 = x^3 + 3x^2$ được gọi là **Tschirnhausen cubic**. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong này tại điểm $(1, -2)$.

b) Tìm điểm trên đường cong có tiếp tuyến nằm ngang.

c) Vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến của nó.

62. Tìm công thức chính xác của y''

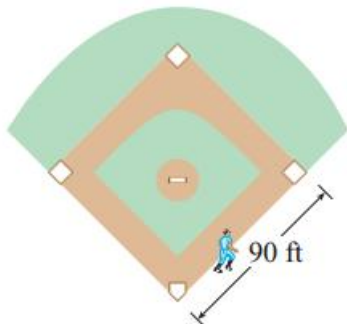
a) $9x^2 + y^2 = 9$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

D. Bài tập ứng dụng đạo hàm

1. Mỗi cạnh của một hình vuông tăng với một tỷ lệ 6 cm/s . Tỷ lệ diện tích của hình vuông tăng lên bao nhiêu khi diện tích hình vuông là 16 cm^2 ?
 2. Chiều dài của một hình chữ nhật tăng với một tỷ lệ 8 cm/s và chiều rộng của nó tăng với một tỷ lệ 3 cm/s . Khi chiều dài là 20 cm và chiều rộng là 10 cm , diện tích của hình chữ nhật tăng lên nhanh như thế nào?
 3. Một thùng hình trụ với bán kính 5 m đang được đổ đầy nước với tốc độ $3 \text{ m}^3/\text{phút}$. Chiều cao của nước tăng nhanh như thế nào?
 4. Bán kính của một hình cầu tăng với một tỷ lệ 4 mm/s . Thể tích tăng nhanh như thế nào khi đường kính là 80 mm ?
 5. Giả sử $y = \sqrt{2x + 1}$, ở đó x và y là những hàm số của t .
 - a) Nếu $dx/dt = 3$, tìm dy/dt khi $x = 4$.
 - b) Nếu $dy/dt = 5$, tìm dx/dt khi $x = 12$.
 6. Giả sử $4x^2 + 9y^2 = 36$, ở đó x và y là những hàm số của t .
 - a) Nếu $dy/dt = \frac{1}{3}$, tìm dx/dt khi $x = 2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$
 - b) Nếu $dx/dt = 3$, tìm dy/dt khi $x = -2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
 7. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ và $dy/dt = 4$, tìm dz/dt khi $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.
 8. Một hạt đang chuyển động dọc theo một hyperbol $xy = 8$. Khi nó đến điểm $(4, 2)$, toạ độ y giảm với tốc độ 3 cm/s . Toạ độ x của điểm thay đổi nhanh như thế nào tại thời điểm đó?
- 9-12 a) Chỉ ra những đại lượng được nêu trong bài toán.
 b) Ẩn số là gì?
 c) Vẽ một hình minh họa cho tình huống tại mỗi thời điểm t .

- d) Viết phương trình liên quan tới các đại lượng.
 - e) Kết thúc giải quyết vấn đề.
9. Một chiếc máy bay bay theo chiều ngang ở độ cao 1 dặm, tốc độ 500 dặm/giờ, bay thẳng qua phía trên một trạm radar. Tìm tốc độ tăng cự ly giữa máy bay và trạm khi máy bay cách trạm 2 dặm.
10. Nếu một quả cầu tuyết tan chảy sao cho diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ $1 \text{ cm}^2/\text{phút}$, tìm tốc độ giảm của đường kính khi đường kính là 10 cm .
11. Một đèn đường được đặt ở trên cùng của cây cột điện cao 15-ft. Một người đàn ông cao 6 ft đi từ cột với tốc độ 5 ft/s theo một hướng thẳng. Bóng của người đàn ông đang di chuyển nhanh như thế nào khi ông ta cách cột 40 ft?
12. Vào buổi trưa, tàu A cách 150 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía đông với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi nhanh như thế nào vào lúc 4:00 PM?
13. Hai chiếc xe bắt đầu di chuyển từ cùng một điểm. Một chiếc đi về phía nam với tốc độ 60 mi/h và chiếc còn lại di chuyển về phía tây với tốc độ 25 mi/h. Khoảng cách giữa hai chiếc xe tăng lên ở mức nào hai giờ sau đó?
14. Một đèn chiếu trên mặt đất chiếu lên một bức tường cách 12 m. Nếu một người đàn ông cao 2 m đi từ đèn chiếu đến toà nhà với tốc độ 1.6 m/s, chiều dài của cái bóng trên bức tường giảm nhanh như thế nào khi ông ta cách 4 m từ toà nhà?
15. Một người đàn ông bắt đầu đi bộ về phía bắc với vận tốc 4 ft/s từ một điểm P . Năm phút sau, một người phụ nữ bắt đầu đi bộ về phía nam với vận tốc 5 ft/s từ một điểm 500 ft về phía đông của P . Ở tốc độ nào hai người di chuyển xa nhau 15 phút sau khi người phụ nữ bắt đầu di chuyển?
16. Một sân bóng chày hình vuông với chiều dài cạnh 90 ft. Một vận động viên bóng chày đánh vào bóng và chạy về mức đầu tiên với tốc độ 24 ft/s.
- a) Khoảng cách của anh ta so với mức hai giảm với tốc độ như thế nào khi anh ta là ở chính giữa của mức thứ nhất?
 - b) Khoảng cách của anh ta so với mức thứ ba tăng với tốc độ như thế nào tại cùng một thời điểm?

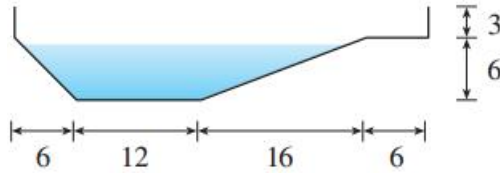


17. Độ cao của một tam giác đang gia tăng với tốc độ 1 cm/phút trong khi diện tích của tam giác đang gia tăng với tốc độ $2 \text{ cm}^2/\text{phút}$. Cạnh ứng với chiều cao của tam giác thay đổi với tốc độ nào khi độ cao của tam giác là 10 cm và diện tích là 100 cm^2 ?
18. Một chiếc thuyền được kéo vào một bến tàu bằng một sợi dây gắn vào mũi thuyền và đi qua một ròng rọc trên bến tàu, mà nó cao hơn 1 m so với mũi thuyền. Nếu sợi dây được kéo vào với tốc độ 1 m/s , thuyền tiến gần đến bến tàu nhanh như thế nào khi nó cách bến tàu 8 m ?



19. Vào buổi trưa, tàu A cách 100 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía nam với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h . Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi nhanh như thế nào vào lúc 4:00 PM?
20. Một hạt di chuyển dọc theo đường cong $y = 2 \sin(\pi x/2)$. Khi hạt đi qua điểm $(\frac{1}{3}, 1)$, tọa độ x tăng với tốc độ $\sqrt{10} \text{ cm/s}$. Khoảng cách từ hạt tới nguồn thay đổi nhanh như thế nào ngay lúc này?
21. Nước bị rò rỉ ra khỏi bể hình nón ngược với tốc độ $10.000 \text{ cm}^3/\text{phút}$ cùng một lúc nước đang được bơm vào bể với một tốc độ không đổi. Bể có chiều cao 6 m và đường kính ở phía trên cùng là 4 m . Nếu mực nước đang tăng với tốc độ 20 cm/phút khi chiều cao của mực nước là 2 m , tìm tốc độ nước được bơm vào bể.
22. Một máng dài 10 ft và phần đầu và phần cuối của nó có hình dạng của tam giác cân cạnh bên 3 ft và có chiều cao 1 ft . Nếu máng được bơm đầy nước với tốc độ $12 \text{ ft}^3/\text{phút}$, mức nước dâng cao nhanh như thế nào khi nước sâu 6 inch ?

- 23.** Một máng nước dài 10 m, mặt cắt ngang có hình dạng của một hình thang cân đáy dưới rộng 30 cm, và đáy trên rộng 80 cm, và có chiều cao 50 cm. Nếu máng được bơm đầy nước với tốc độ $0.2 \text{ m}^3/\text{phút}$. Mức nước tăng lên nhanh như thế nào khi nước sâu 30 cm?
- 24.** Một hồ bơi rộng 20ft, dài 40 ft, sâu 3 ft ở cuối vùng cạn và 9 ft sâu tại điểm sâu nhất của nó. Một mặt cắt ngang được thể hiện trong hình. Nếu hồ bơi đang được bơm đầy với tốc độ $0.8 \text{ ft}^3/\text{phút}$. Mức nước dâng cao nhanh như thế nào (tốc độ dâng) khi mực nước cách đáy ở chỗ sâu nhất là 5 ft?



E. Bài tập xấp xỉ bằng đa thức Taylor

- 1.**
 - a)** Tìm các đa thức Taylor đến bậc 6 của $f(x) = \cos x$ tại $a = 0$. Vẽ đồ thị f và các đa thức này trên cùng đồ thị.
 - b)** Đánh giá f và những đa thức này tại $x = \pi/4, \pi/2, \pi$.
 - c)** Bình luận sự hội tụ của các đa thức này về f .
 - 2.**
 - a)** Tìm các đa thức Taylor đến bậc 3 của $f(x) = 1/x$ tại $a = 1$. Vẽ f và các đa thức này trên cùng đồ thị.
 - b)** Tính f và những đa thức này tại 0.9, 1.3.
 - c)** Bình luận sự hội tụ của các đa thức này về f .
- 3-10** Tìm đa thức Taylor $T_3(x)$ cho hàm f tại a . Vẽ f và $T_3(x)$ trên cùng đồ thị.
- | | |
|---|---|
| 3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$ | 7. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$ |
| 4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$ | 8. $f(x) = x \cos x, \quad a = 0$ |
| 5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$ | 9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$ |
| 6. $f(x) = e^{-x} \sin x, \quad a = 0$ | 10. $f(x) = \tan^{-1}(x), \quad a = 1$ |

11-12 Sử dụng CAS để tìm đa thức Taylor T_n tại a , bậc $n = 2, 3, 4, 5$. Vẽ những đa thức này và f trên cùng đồ thị.

11. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}, \quad a = 0$

13-22 a) Xấp xỉ f bằng đa thức Taylor bậc n tại a .

b) Sử dụng Bất đẳng thức Taylor để ước lượng độ chính xác của xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi x nằm trong đoạn cho trước.

c) Kiểm tra kết quả phần (b) bằng đồ thị của $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leq x \leq 4.2$

14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leq x \leq 1.1$

15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \leq x \leq 1.2$

16. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leq x \leq 0.2$

18. $f(x) = \ln(1+2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leq x \leq 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$

21. $f(x) = x \sin x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leq x \leq 1$

22. $f(x) = \sinh(2x), \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leq x \leq 1$

23. Sử dụng thông tin từ Bài tập 5 để ước lượng $\cos 80^\circ$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

24. Sử dụng thông tin từ Bài tập 16 để ước lượng $\cos 38^\circ$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

25. Sử dụng Bất đẳng thức Taylor để xác định số số hạng của chuỗi Maclaurin của e^x dùng để xấp xỉ $e^{0.1}$ với độ chính xác khoảng 0.00001.

26. Bao nhiêu số hạng của chuỗi Maclaurin của $\ln(1+x)$ cần dùng xấp xỉ $\ln 1.4$ với độ chính xác khoảng 0.001 ?

27-29 Dùng Định lý Đánh giá Chuỗi đan dấu hoặc Bất đẳng thức Taylor để ước lượng miền giá trị của x để các xấp xỉ có độ chính xác tương ứng với giá trị cho trước. Kiểm tra lại bằng đồ thị.

27. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad |\text{sai số}| < 0.01$

28. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad |\text{sai số}| < 0.005$

29. $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \quad |\text{sai số}| < 0.05$

30. Giả sử ta biết

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)}$$

và chuỗi Taylor của f tại 4 hội tụ về $f(x)$ với mọi x trong khoảng hội tụ. Chứng minh rằng đa thức Taylor cấp 5 xấp xỉ $f(5)$ với sai số bé hơn 0.0002.

31. Một xe hơi di chuyển với tốc độ 20 m/s và gia tốc 2 m/s^2 tại một thời điểm cho trước. Dùng đa thức Taylor cấp 2 để ước lượng quãng đường xe hơi di chuyển trong giây tiếp theo. Có hợp lý khi dùng xấp xỉ này để ước lượng khoảng cách di chuyển trong suốt phút tiếp theo?

32. Điện trở ρ của một dây dẫn tỉ lệ nghịch với tính dẫn và được đo bằng đơn vị ôm-mét ($\Omega \cdot \text{m}$). Điện trở của kim loại cho trước phụ thuộc vào nhiệt độ theo phương trình

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

trong đó t là nhiệt độ tính theo đơn vị $^{\circ}\text{C}$. Có những bảng liệt kê những giá trị của α (hệ số nhiệt) và ρ_{20} (điện trở tại 20°) cho nhiều kim loại. Trừ trường hợp nhiệt độ rất thấp, điện trở hầu như biến thiên tuyến tính theo nhiệt độ và vì vậy thông thường xấp xỉ cho $\rho(t)$ bằng đa thức Taylor của nó cấp 1 hoặc cấp 2 tại $t = 20$.

a) Tìm biểu thức cho xấp xỉ tuyến tính và xấp xỉ bậc 2 này.

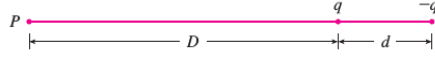
b) Với đồng, $\alpha = 0.0039/^{\circ}\text{C}$ và $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Vẽ đồ thị điện trở của đồng, xấp xỉ tuyến tính và xấp xỉ bậc 2 trong khoảng $-250^{\circ}\text{C} \leq t \leq 1000^{\circ}\text{C}$.

c) Với giá trị nào của t thì xấp xỉ tuyến tính sai khác với biểu thức hàm mũ trong khoảng 1%?

33. Một lưỡng cực điện gồm hai điện tích cùng độ lớn và trái dấu. Nếu điện tích là q và $-q$ và được đặt cách nhau một khoảng d thì điện trường E tại điểm P trong hình là

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

Bằng cách khai triển biểu thức E như chuỗi lũy thừa của d/D , chứng minh rằng E tỷ lệ với $1/D^3$ khi P xa lưỡng cực.

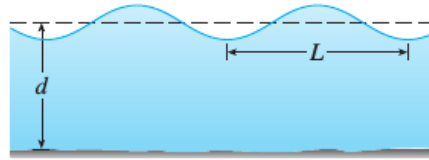


Hình 2.0.1

34. Nếu sóng nước có bước sóng L di chuyển với vận tốc v ngang qua vùng nước có độ sâu d như Hình 2.0.2 thì

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

- a) Nếu nước sâu, chứng minh $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.
- b) Nếu nước cạn, dùng chuỗi Maclaurin cho \tanh để chứng minh rằng $v \approx \sqrt{gd}$. (Do đó trong nước cạn vận tốc của sóng tiến đến không phụ thuộc vào bước sóng.)
- c) Sử dụng Định lý ước lượng chuỗi đan dấu để chứng minh rằng nếu $L > 10d$ thì ước lượng $v^2 = gd$ chính xác đến 0.014 gL .



Hình 2.0.2

35. Một đĩa tích điện đều có bán kính R và mật độ điện tích mặt σ như trong hình. Điện thế V tại điểm P cách một khoảng d dọc theo trục qua tâm và vuông góc với đĩa là

$$V = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{d^2 + R^2} - d)$$

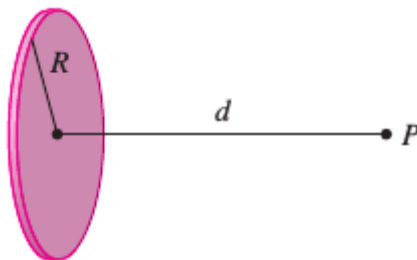
trong đó k_e là hằng số Coulomb. Chứng minh rằng với d lớn

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2 \sigma}{d}$$

36. Nếu người quan sát đo sự sai biệt về độ cao khi lên kế hoạch xây dựng đường cao tốc xuyên sa mạc thì sự hiệu chỉnh phải dựa trên độ cong của trái đất.

- a) Nếu R là bán kính của trái đất và L là chiều dài của đường cao tốc, chứng minh sự hiệu chỉnh là

$$C = R \sec(L/R) - R$$

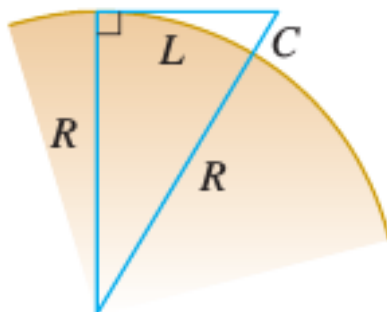


Hình 2.0.3

b) Dùng đa thức Taylor để chỉ ra rằng

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

c) So sánh sự hiệu chỉnh được cho bởi phần (a) và (b) cho đường cao tốc dài 100 km. (Lấy bán kính của trái đất là 6370 km.)



Hình 2.0.4

37. Chu kỳ của con lắc với chiều dài L , tạo ra một góc lớn nhất θ_0 so với phương thẳng đứng là

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

trong đó $k = \sin\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ và g là gia tốc trọng trường. (Trong Bài tập 42 Mục 7.7 chúng ta xấp xỉ tích phân bằng công thức Simpson.)

- a) Khai triển hàm lấy tích phân thành một chuỗi nhị thức và dùng kết quả của Bài tập 50 trong Mục 7.1 để chỉ ra rằng

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \dots \right]$$

Nếu θ_0 không quá lớn, xấp xỉ $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, thu được bằng cách dùng chỉ số hạng đầu tiên của chuỗi. Một xấp xỉ tốt hơn thu được bằng cách dùng hai số hạng:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right)$$

- b) Nhận xét rằng tất cả các số hạng trong chuỗi sau số hạng đầu tiên đều không quá $\frac{1}{4}$. Sử dụng điều này để so sánh chuỗi trên với chuỗi hình học và chứng minh

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right) \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

- c) Dùng bất đẳng thức ở phần (b) để ước lượng chu kỳ của con lắc với $L = 1$ mét và $\theta_0 = 10^\circ$. Xấp xỉ này so sánh nó với ước lượng $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$ như thế nào? Nếu $\theta_0 = 42^\circ$ thì sao?

38. Trong mục trước, chúng ta xét phương pháp Newton để xấp xỉ nghiệm r của phương trình $f(x) = 0$ và một giá trị khởi tạo x_1 , chúng ta xấp xỉ tiếp theo x_2, x_3, \dots trong đó

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Sử dụng Bất đẳng thức Taylor với $n = 1, a = x_n, x = r$ để chỉ ra rằng nếu $f''(x)$ tồn tại trên đoạn I chứa r, x_n, x_{n+1} và $|f''(x)| \leq M, |f'(x)| \geq K$ với mọi $x \in I$ thì

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2K} |x_n - r|^2$$

[Điều này có nghĩa nếu x_n chính xác d chữ số thì x_{n+1} chính xác khoảng $2d$ chữ số. Chính xác hơn, nếu sai số ở bước n là 10^{-m} thì sai số ở bước $n + 1$ không quá $(M/2K)10^{-2m}$.]

Chương 3

Tích phân

Xác định xem mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. Tính giá trị của tích phân nếu nó hội tụ.

1. $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx$

2. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx$

3. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx$

4. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

5. $\int_2^{\infty} e^{-5p} dp$

6. $\int_{-\infty}^0 2^r dr$

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} (y^3 - 3y^2) dy$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

10. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

11. $\int_0^{\infty} \sin^2 \alpha d\alpha$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t dt$

13. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$

14. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{v^2+2v-3}$

15. $\int_{-\infty}^0 z e^{2z} dz$

16. $\int_2^{\infty} y e^{-3y} dy$

17. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

18. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-3x^4} dx$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$

20. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$

21. $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$

22. $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$

23. $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

24. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

25. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

26. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3} dx$

27. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$

28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

29. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

30. $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dx$

31. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

32. $\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x dx$

33. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

34. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

35. $\int_0^2 z^2 \ln z dz$

36. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Chương 4

Dãy số, chuỗi số

A. Tìm công thức tổng quát của a_n , biết rằng quy luật ở những phần tử đầu tiên sẽ không thay đổi cho những số hạng tiếp theo

1. $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\}$

3. $\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \dots\}$

5. $\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots\}$

2. $\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\}$

4. $\{5, 8, 11, 14, 17, \dots\}$

6. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$

B. Tìm 10 phần tử đầu tiên của dãy, chính xác đến số 4 số thập phân và vẽ hình minh họa cho dãy. Hỏi dãy có giới hạn không? Tính giới hạn nếu có hoặc giải thích vì sao không có

1. $a_n = \frac{3n}{1 + 6n}$

3. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$

2. $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

4. $a_n = 1 + \frac{10^n}{9^n}$

C. Xác định dãy hội tụ hay phân kỳ. Nếu dãy hội tụ thì xác định giới hạn của nó

1. $a_n = 1 - (0.2)^n$

4. $a_n = \frac{n^3}{n + 1}$

2. $a_n = \frac{n^3}{n^3 + 1}$

5. $a_n = e^{1/n}$

6. $a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$

3. $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

7. $a_n = \tan \frac{2n\pi}{1 + 8n}$

$$8. a_n = \sqrt{\frac{n+1}{9n+1}}$$

$$9. a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$$

$$10. a_n = e^{2n/(n+2)}$$

$$11. a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$$

$$12. a_n = \frac{(-1)^{(n+1)}n}{n + \sqrt{n}}$$

$$13. a_n = \cos(n/2)$$

$$14. a_n = \cos(2/n)$$

$$15. a_n = \left\{ \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right\}$$

$$16. a_n = \left\{ \frac{\ln n}{\ln 2n} \right\}$$

$$17. a_n = \left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1} \right\}$$

$$18. a_n = \frac{\tan^{-1} n}{n}$$

$$19. \{n^2 e^{-n}\}$$

$$20. a_n = \ln(n+1) - \ln n$$

$$21. a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$$

$$22. a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$$

$$23. a_n = n \sin(1/n)$$

$$24. a_n = 2^{-n} \cos n\pi$$

$$25. a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$26. a_n = \frac{\sin 2n}{1 + \sqrt{n}}$$

$$27. a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$$

$$28. a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$$

$$29. a_n = \arctan(\ln n)$$

$$30. a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$$

$$31. \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\}$$

$$32. \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

$$33. \frac{n!}{2^n}$$

$$34. \frac{(-3)^n}{n!}$$

D. Bài tập chuỗi số tổng quát

I Tìm ít nhất 10 tổng riêng phần của chuỗi. Vẽ đồ thị của dãy các số hạng và dãy các tổng riêng trên cùng hệ trục tọa độ. Chuỗi có vẻ hội tụ hay phân kỳ? Nếu hội tụ thì tìm tổng của chuỗi. Nếu nó phân kỳ thì giải thích tại sao.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \cos n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{10^n} \qquad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \qquad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

7. Đặt $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.

a) Dãy $\{a_n\}$ hội tụ hay không.

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ hay không.

8. a) Giải thích sự khác biệt giữa $\sum_{i=1}^n a_i$ và $\sum_{j=1}^n a_j$.

b) Giải thích sự khác biệt giữa $\sum_{i=1}^n a_i$ và $\sum_{i=1}^n a_j$

II Xác định chuỗi hình học hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ thì tính tổng.

9. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \dots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

10. $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{6} + \dots$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

11. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

12. $2 + 0.5 + 0.125 + 0.03125 + \dots$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

III Xác định chuỗi hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ, tính tổng chuỗi.

19. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \dots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

20. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \frac{2}{729} + \dots$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$29. \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$$

$$30. \sum_{k=0}^{\infty} (\cos 1)^k$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right)$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$$

IV Xác định chuỗi hội tụ hay phân kỳ bằng cách biểu diễn s_n bởi tổng của hai số hạng, các số hạng khác bị triệt tiêu theo cặp. Nếu hội tụ thì tính tổng của chuỗi.

$$35. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)} \right)$$

$$40. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$$

41. Cho $x = 0.999999\dots$

- a) $x < 1$ hay $x = 1$?
- b) Dùng tổng của chuỗi hình học để tìm x .
- c) Có bao nhiêu biểu diễn thập phân đại diện cho số 1?
- d) Những số nào có hơn một biểu diễn thập phân?

42. Cho dãy được định nghĩa bởi

$$a_1 = 1, a_n = (5 - n)a_{n-1}$$

Tính $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

E. Bài tập tiêu chuẩn tích phân, ước lượng tổng chuỗi

I Dùng Tiêu chuẩn Tích phân để xác định chuỗi hội tụ hay phân kỳ.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

II Xác định chuỗi hội tụ hay phân kỳ.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

8. $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-0.9999}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

9. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots$

16. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-4}{n^2-2n}$

10. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

11. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+13}$

12. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \dots$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^3}.$$

$$22. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}.$$

III Giải thích tại sao Tiêu chuẩn Tích phân không thể áp dụng để xác định chuỗi hội tụ hay không.

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}.$$

IV Tìm giá trị p để chuỗi hội tụ.

$$27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p.$$

$$28. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

E. Bài tập tiêu chuẩn Leibnitz (chuỗi đan dấu)

I Kiểm tra sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

$$1. \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \dots$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

$$2. -\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \dots$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi}{1 + \sqrt{n}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{\pi}{n})$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

II Chứng minh rằng chuỗi hội tụ. Ta cần cộng bao nhiêu số hạng của chuỗi để tìm tổng với sai số tương ứng.

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}, (|\text{sai số}| < 0.00005)$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}, (|\text{sai số}| < 0.000005)$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 5^n}, (|\text{sai số}| < 0.0001)$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}, (|\text{sai số}| < 0.01)$$

III Xấp xỉ tổng của chuỗi đúng đến 4 chữ số thập phân.

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$$

F. Bài tập tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối, Cauchy, D' Alembert

1-27. Cho biết chuỗi hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện, hay phân kỳ?

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 4}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n + 1}$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n + 1)!}$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1.1)^n}{n^4}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n + 1)4^{2n+1}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi/3}{n!}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1}\right)^n$$

$$21. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n + 1}\right)^{5n}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$26. 1 - \frac{1.3}{3!} + \frac{1.3.5}{5!} - \frac{1.3.5.7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5.7 \cdots (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$27. \frac{2}{5} + \frac{2.6}{5.8} + \frac{2.6.10}{5.8.11} + \frac{2.6.10.14}{5.8.11.14} + \cdots$$

28-57. Kiểm tra sự hội tụ và phân kỳ của các chuỗi sau

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 3^n}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n + 2}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)^n}{n^{2n}}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1}$$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
 42. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$
 50. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$
35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$
 43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$
 51. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(1/n)$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$
 44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$
 52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
 45. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} - 1}$
 53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right)$
 46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
 54. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$
39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2 + 1}}$
 47. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k} - 1}{k(\sqrt{k} + 1)}$
 55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$
 48. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$
 56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1 + 2^n}$
 49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sin k}$
 57. $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j + 5}$

G. Bài tập chuỗi lũy thừa

1-26. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$
 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$
 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$
 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5 \sqrt[n]{n}}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x-a)^n, \quad b > 0$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n (\ln n)^2}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$