

LEC 8. CHUỖI SỐ

VI TÍCH PHẦN 1C
HK1, 2017-2018
GV NGUYỄN VĂN THÙY
nvthuy@hcmus.edu.vn

CHUỖI SỐ

- Xét dãy gồm vô hạn các số thực

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

- Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots =: \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad (1)$$

được gọi là chuỗi số

- Số hạng tổng quát của chuỗi: u_n

Vi tích phần 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

2

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- Tổng riêng thứ n

$$S_n := u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ hữu hạn, thì chuỗi (1) được gọi là hội tụ, và S được gọi là tổng của chuỗi, ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S$$

Vi tích phần 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

3

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- Ngược lại, chuỗi được gọi là phân kỳ

- Ví dụ. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- Ví dụ. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$$

Vi tích phần 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

4

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- [C1, 2015-2016] Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Vi tích phần 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

5

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- [C1, 2015-2016] Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

Vi tích phần 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

6

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

7

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- [C1, 2014-2015] Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-2014}{2015} \right)^{n+1}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

8

SỰ HỘI TỤ, PHÂN KỲ

- [C1, 2013-2014]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-2}{3} \right)^n$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

9

TỔNG CỦA CHUỖI

- Ví dụ. Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^4(n+1)^4}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

10

TỔNG CỦA CHUỖI

- Ví dụ. Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

11

CHUỖI HÌNH HỌC

- Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

- Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $|q| < 1$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

12

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- Định lý. Nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

hội tụ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

- Suy ra

$$u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \text{chuỗi } \sum u_n \text{ phân kỳ}$$

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5}$$

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- [C1, 2015-2016] Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n + \cdots$$

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- [C1, 2015-2016] Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1}$$

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- [C1, 2014-2015]

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^4 + n^2 + 7}{2 - n^2 + 5n^4}$$

ĐIỀU KIỆN CẦN HỘI TỤ

- [C1, 2013-2014]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 3}$$

CHUỖI SỐ DƯƠNG

- Dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$$

- Tiêu chuẩn d'Alembert
- Tiêu chuẩn Cauchy
- Tiêu chuẩn tích phân
- Tiêu chuẩn so sánh

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

19

TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ
 $L > 1$: chuỗi phân kỳ
 $L = 1$: chưa có kết luận

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

20

TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
1717 - 1783

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

21

TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

- [C1, 2012-2013]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 5}{2^n}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

22

TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

23

TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n!}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

24

TIÊU CHUẨN CAUCHY

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

$0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ
 $L > 1$: chuỗi phân kỳ
 $L = 1$: chưa có kết luận

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

25

TIÊU CHUẨN CAUCHY

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+1} \right)^{3n+2}$$



Augustin-Louis Cauchy
1789 - 1857

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

26

TIÊU CHUẨN CAUCHY

- Ví dụ

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n(n-1)}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

27

TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN

- Chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

cùng tính chất với tích phân

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

28

TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN

- Ví dụ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

- Ví dụ. Chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$
 Phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

29

TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

- Ví dụ

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \dots$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

30

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- $0 \leq u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$
 - $\sum u_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum v_n$ phân kỳ
 - $\sum v_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum u_n$ hội tụ

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

31

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

32

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- $0 \leq u_n, v_n, \forall n \geq n_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = L$$

- Nếu $L > 0$ và hữu hạn thì 2 chuỗi $\sum u_n, \sum v_n$ có cùng tính chất
- Thường so sánh với chuỗi điều hòa

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

33

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+n}$$

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

34

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- [C1, 2011-2012]

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^5 - \sqrt[3]{n}}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

35

CHUỖI ĐƠN DẤU

- TIÊU CHUẨN LEIBNIZ

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, u_n \geq 0 \forall n \geq 1$$

- Nếu

– Dãy số $\{u_n\}$ giảm

– $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

thì chuỗi (1) hội tụ

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

36

CHUỖI ĐƠN DẤU

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$



Gottfried Wilhelm Leibniz
1646 - 1716

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

37

CHUỖI ĐƠN DẤU

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{1/n}}{n}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

38

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Định lý. Nếu $\sum |u_n|$ hội tụ thì $\sum u_n$ hội tụ
- Lúc đó, chuỗi $\sum u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối
- Nếu $\sum u_n$ hội tụ và $\sum |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum u_n$ được gọi là bán hội tụ

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

39

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Ví dụ: chuỗi hội tụ tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

- Ví dụ: chuỗi bán hội tụ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

40

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Tiêu chuẩn d'Alembert

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

- Tiêu chuẩn Cauchy

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$$

- Kết luận như chuỗi dương

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

41

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$$

- Ví dụ

$$1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \dots$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

42

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

- Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1} \right)^{5n}$$

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

- Ví dụ. Tùy theo số thực x , khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$$