Chương3:

Định Thức

Nội dung

1. Tính định thức .

2. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

3. Định thức và ma trận khả nghịch.

4. Phương pháp Cramer .

1. Tính định thức .

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n.
Định thức của A là một số ký hiệu bởi det $(A) = \left|a_{ij}\right|_{n\times n} = \left|A\right|$

Ký hiệu M_{ij} là định thức thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \left|\begin{pmatrix} 4 & & 6 \\ 7 & & 9 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\right|$$

Định nghĩa bù đại số của phần tử a_{ij}

Bù đại số của phần tử a_{ij} là đại lượng $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

1. Tính định thức .

Định nghĩa định thức bằng qui nạp

a) k =1: $A = \left[a_{11} \right] \to |A| = a_{11}$

b) k =2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$

c) k =3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

....

d) k =n: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & * & & \\ & & & \end{bmatrix} \to |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

Ví dụ

Tính det (A), với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Giải

$$|A| = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 12 - 16 + 15 = 11$$

1. Tính định thức .

Chú ý. Có thể tính định thức bằng cách khai triển theo bất kỳ hàng hoặc cột tùy ý nào đó

$$|A| = \begin{vmatrix} & a_{1j} & \\ * & a_{2j} & * \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

1. Tính định thức .

Ví dụ

Tính định thức det (A), với $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải.

Khai triển theo hàng thứ 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} & -1 & 3 \\ & 2 & 2 \\ & & \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -32$$

1. Tính định thức .

Ví dụ

Tính định thức det (A), với $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Tính định thức .

Giải

Khai triển theo cột thứ hai

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{42} = -3A_{12}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \mathrm{L} \quad = 171$$

1. Tính định thức .

Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo.

Ví dụ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = -120$$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

Sử dụng biến đổi sơ cấp đối với hàng để tính định thức

1.Nếu $A \xrightarrow{h_i \to \alpha h_i} B$ thì $|B| = \alpha |A|$

2.Nếu $A \xrightarrow{h_i \to h_i + \beta h_j} B$ thì $|B| = |A|$

3. Nếu $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$ thì $|B| = -|A|$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp, tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

Giải

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 + 2h_1]{\substack{h_2 \to h_2 - 2h_1 \\ h_3 \to h_3 - 3h_1}} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & -1 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột đầu tiên}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & \boxed{0} & 1 \\ -4 & \boxed{0} & -15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -15 \end{vmatrix} = -19$$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

Nguyên tắc tính định thức sử dụng biến đổi sơ cấp

Bước 1. Chọn 1 hàng (hoặc một cột) tùy ý;

Bước 2. Chọn một phần tử khác không tùy ý của hàng (hay cột) ở bước 1. Dùng biến đổi sơ cấp, khử tất cả các phần tử khác.

Bước 3. Khai triển theo hàng (hay cột) đã chọn.

Ví dụ

Sử dụng biến đổi sơ cấp, tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

Giải

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_1]{h_3 \to h_3 + 2h_1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột số 4}} 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30$$

2. Định thức - phép biến đổi sơ cấp

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Ma trận có một hàng (cột) bằng không, thì det (A) = 0

Ma trận có hai hàng (cột) tỉ lệ nhau, thì det (A) = 0

Chú ý: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông *A* khả nghịch khi và chỉ khi det(*A*) $\neq$ 0.

Chứng minh

$\Rightarrow$ Giả sử *A* là ma trận khả nghịch nxn. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch A^{-1}, sao cho $AA^{-1} = I$. Suy ra

$\det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$ Giả sử det(*A*) $\neq$ 0. Khi đó

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} P_A$, với $P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} & & * & \\ a_{j1} & a_{j1} & \cdots & a_{j1} \\ & & * & \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{i1} \\ & & * & \end{pmatrix}$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} & & * & \\ a_{j1} & a_{j1} & \cdots & a_{j1} \\ & & * & \\ a_{j1} & a_{j1} & \cdots & a_{j1} \\ & & * & \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Công thức tính ma trận nghịch đảo A^{-1}

Cho *A* là ma trận khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A \text{ , với } \quad P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Giải.

$\det(A) = -2 \neq 0 \longrightarrow$ *A* khả nghịch

Tính phần bù đại số của các phần tử

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = 4; A_{22} = -3; A_{23} = -1; A_{31} = -2; A_{32} = 1; A_{33} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Tính chất của ma trận nghịch đảo

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

2. Nếu A khả nghịch, thì $\det(P_A) = (\det(A))^{n-1}$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 1

Tính det(A), nếu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 2

Tính det(A), với

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 3

Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 4

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 5

Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 6

Tìm tất cả các giá trị thực của m để ma trận sau khả nghịch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 7

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1) Tính det (A^{-1}).

2) Tính det $(5A)^{-1}$.

3) Tính det (P_A).

3. Định thức - ma trận khả nghịch

Ví dụ 8

Cho $A \in M_3[R]; B \in M_3[R]; \det(A) = 2; \det(B) = -3.$

1) Tính det $(4AB)^{-1}$.

2) Tính det (P_{AB}).

4. Quy tắc Cramer

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \dots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+ & \dots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2+ & \cdots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{cases}$$

Đặt: D là định thức của ma trận hệ số, |A|

D_j là định thức của ma trận A_j được xác định bằng cách thay cột j bằng cột B.

4. Quy tắc Cramer

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

4. Quy tắc Cramer

Hệ phương trình Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+ & \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2+ & \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

a) Nếu D ≠ 0 hệ

có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *được xác định như sau:*

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

b) Nếu D = 0 và tồn tại j để $D_j \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

4. Quy tắc Cramer

Ví dụ:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x & & + & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 3. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

4. Quy tắc Cramer

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Áp dụng công thức nghiệm cho hệ Cramer ta có:

$$\begin{cases} x &= D_1/D &= 1, \\ y &= D_2/D &= 1, \\ z &= D_3/D &= 1. \end{cases}$$

4. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$$

4. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 7x_3 - 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

4. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

4. Quy tắc Cramer

Tìm điều kiện để hệ sau có nghiệm

$$a.\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

$$b.\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$$