Chương 5 Phương Trình Vi Phân

Phần 1: Phương trình vi phân cấp 1.

Nội dung

I – Định nghĩa.

II – Các dạng phương trình vi phân:

1 – Phương trình vi phân tách biến

2 – Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Phương trình chứa đạo hàm hay vi phân của một hoặc một vài hàm cần tìm được gọi là phương trình vi phân.

Phương trình chứa đạo hàm của một biến độc lập gọi là phương trình vi phân thường (Differential Equation)

Phương trình chứa đạo hàm riêng gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng (Partial Differential equation PDE).

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân gọi là cấp của phương trình vi phân.

$$y''(x) + 3\frac{y'}{x} = x\sin x$$ phương trình vi phân cấp 2

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx} = e^{2x}$$ phương trình vi phân cấp 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$ phương trình đạo hàm riêng cấp 2

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

VD1: $(3y^2x + e^y)y' + (y^3 + 2x) = 0$

Nếu giải ra được $y^{(n)}$: $y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

VD2: $\left(x^2 + xy\right)dy = \left(2x^2 + y^2\right)dx$

Giải ra được: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + xy}$

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Nghiệm của phương trình (1) trên khoảng I là một hàm $y = \varphi(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (1) ta được đồng nhất thức.

Đồ thị của nghiệm $y = \varphi(x)$ gọi là đường cong tích phân

VD3: Phương trình vi phân $y' - \frac{1}{x}y = 0$ có nghiệm là

$$y = Cx,\ C \in R$$

vì thỏa phương trình vi phân đã cho.

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Nếu giải ra được y' : $y' = \varphi(x, y) \quad (3)$

VD4: Các phương trình vi phân cấp 1:

$$y' - y = xe^x$$

$$(y^2 + x^2)dy + (xy + y^2)dx = 0$$

$$y = xy' + \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}$$

I. Các khái niệm cơ bản

Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình (2) hoặc (3) thỏa điều kiện ban đầu (điều kiện biên)

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

Nghiệm của phương trình (2) hoặc (3) là họ đường cong tích phân phụ thuộc hằng số C.

Nghiệm của bài toán Cauchy là đường cong tích phân đi qua điểm cho trước (x_0, y_0)

I. Các khái niệm cơ bản

VD5: Phương trình vi phân $y' - \frac{3}{x}y = 0$

nghiệm của phương trình là họ đương cong tích phân:

$$y = Cx^3,\ C \in R$$

Xét bài toán Cauchy $y' - \frac{3}{x}y = 0,\ \ y(1) = 3$

Ta có $3 = C \cdot 1^3 \Rightarrow C = 3$

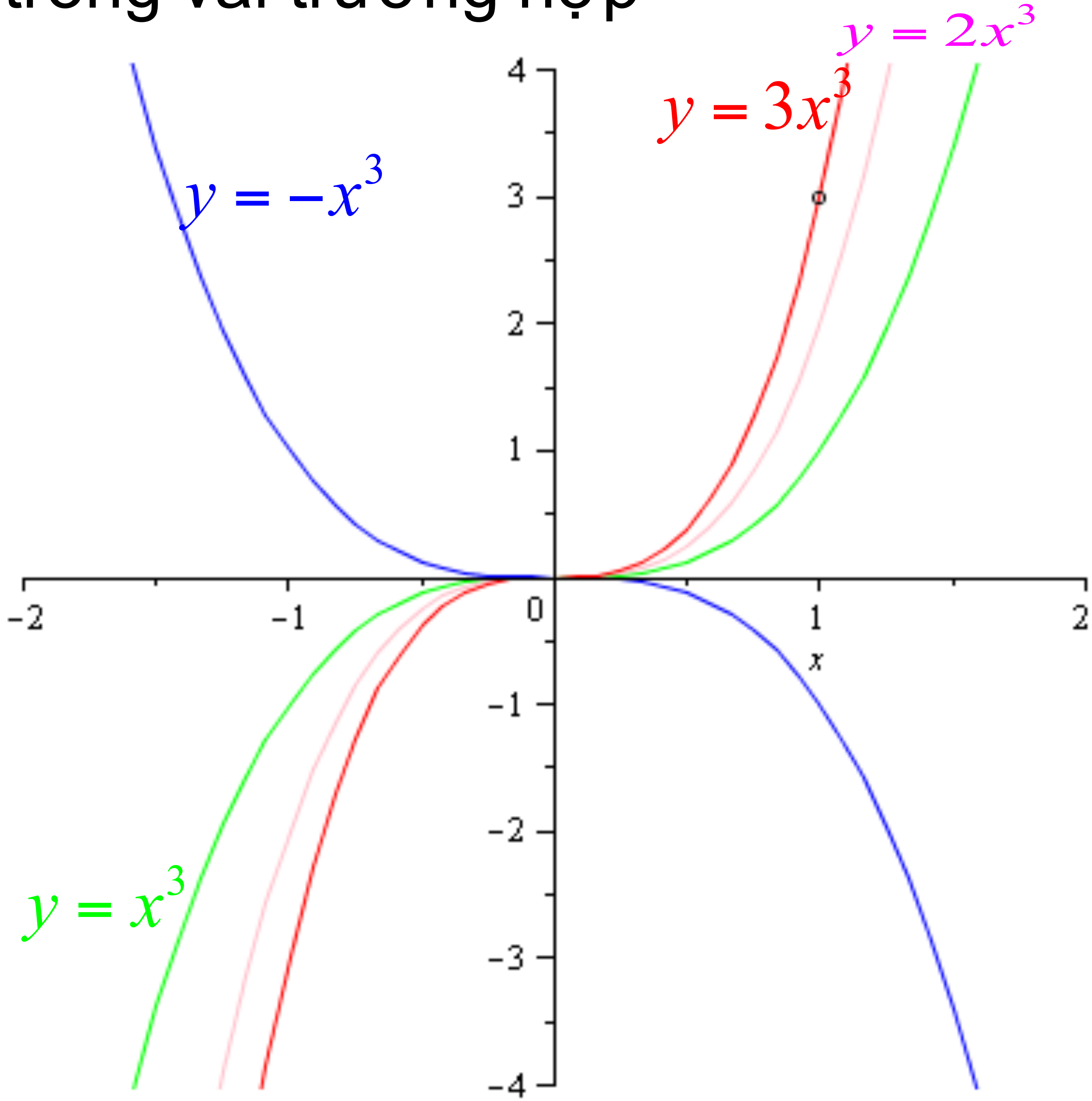
Nghiệm của bài toán Cauchy $y = 3x^3$

I. Các khái niệm cơ bản

Đường cong tích phân trong vài trường hợp

Nghiệm của bài toán Cauchy là đường cong màu đỏ.

Đường cong qua điểm (1,3).



I. Các khái niệm cơ bản

Định lý (tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy)

▪

▪

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Nghiệm của phương trình cấp 1 phụ thuộc hằng C.

Nghiệm tổng quát của phương trình cấp 1: $y = \varphi(x, C)$

Nghiệm riêng là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C hằng số cụ thể (ví dụ nghiệm bài toán Cauchy).

Nghiệm kỳ dị là nghiệm không thể thu được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào.

I. Các khái niệm cơ bản

Giải phương trình vi phân là tìm ra các nghiệm của nó.

II.1 Phương trình vi phân tách biến

Dạng $$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Cách giải: tích phân hai vế ta được

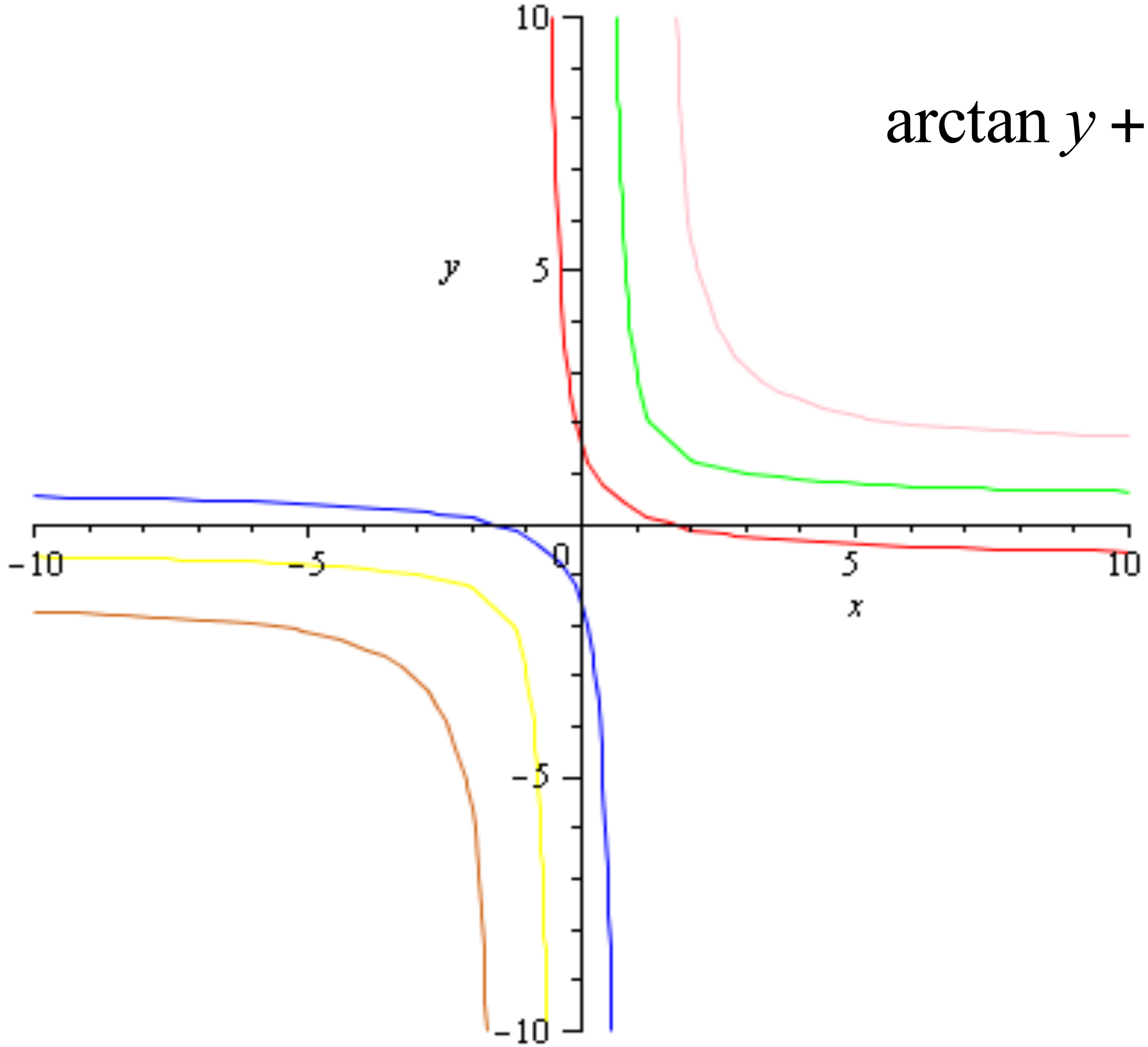
$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

VD6: Giải pt $$\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C$$

Nghiệm của phương trình: $\arctan y + \arctan x = C$

```
f := (c, u) → implicitplot(arctan(x) + arctan(y) = c, x = −10 ..10, y = −10 ..10, color
    = u) : display(f(−1, blue), f(1, red), f(2, green), f(−2, yellow), f(2.5,
    pink), f(−2.5, "Chocolate"));
```



$$\arctan y + \arctan x = C$$

Các dạng có thể đưa về phương trình vi phân tách biến

Dạng 1 $$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Cách giải: Có thể đưa về phương trình tách biến

Nếu $g_1(y) = 0$ tại y = b, thì y = b là một nghiệm.

Nếu $f_2(x) = 0$ tại x = a, thì x = a là một nghiệm.

Nếu $f_2(x)g_1(y) \neq 0$, chia hai vế cho $f_2(x)g_1(y) \neq 0$

Phương trình tách biến $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

II.1 Phương trình vi phân tách biến

VD7: Giải pt $\tan x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \cot y dy = 0$

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x} dx + \frac{\cot y}{\sin^2 y} dy = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\cot y}{\sin^2 y} dy = C$$

Nghiệm của phương trình: $\tan^2 x - \cot^2 y = C$

VD8: Giải pt $x \cdot (1 + x^2) dy - (1 + y^2) dx = 0$

$$\frac{dy}{1+y^2} - \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = C$$

Nghiệm của phương trình: $\arctan y - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C$

VD9: Giải phương trình $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$

Phương trình trên được viết lại:

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0$$

Tích phân hai vế $\int\frac{dy}{(y-2)^2}-\int\frac{dx}{(x+1)^3}=C$

$$\int(y-2)^{-2}d(y-2)-\int(x+1)^{-3}d(x+1)=C$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:

$$-\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}=C$$

VD10: Giải phương trình $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y' - y = 0$

Phương trình trên được viết lại:

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1\right)\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{y}+1}{y}dy - \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$$

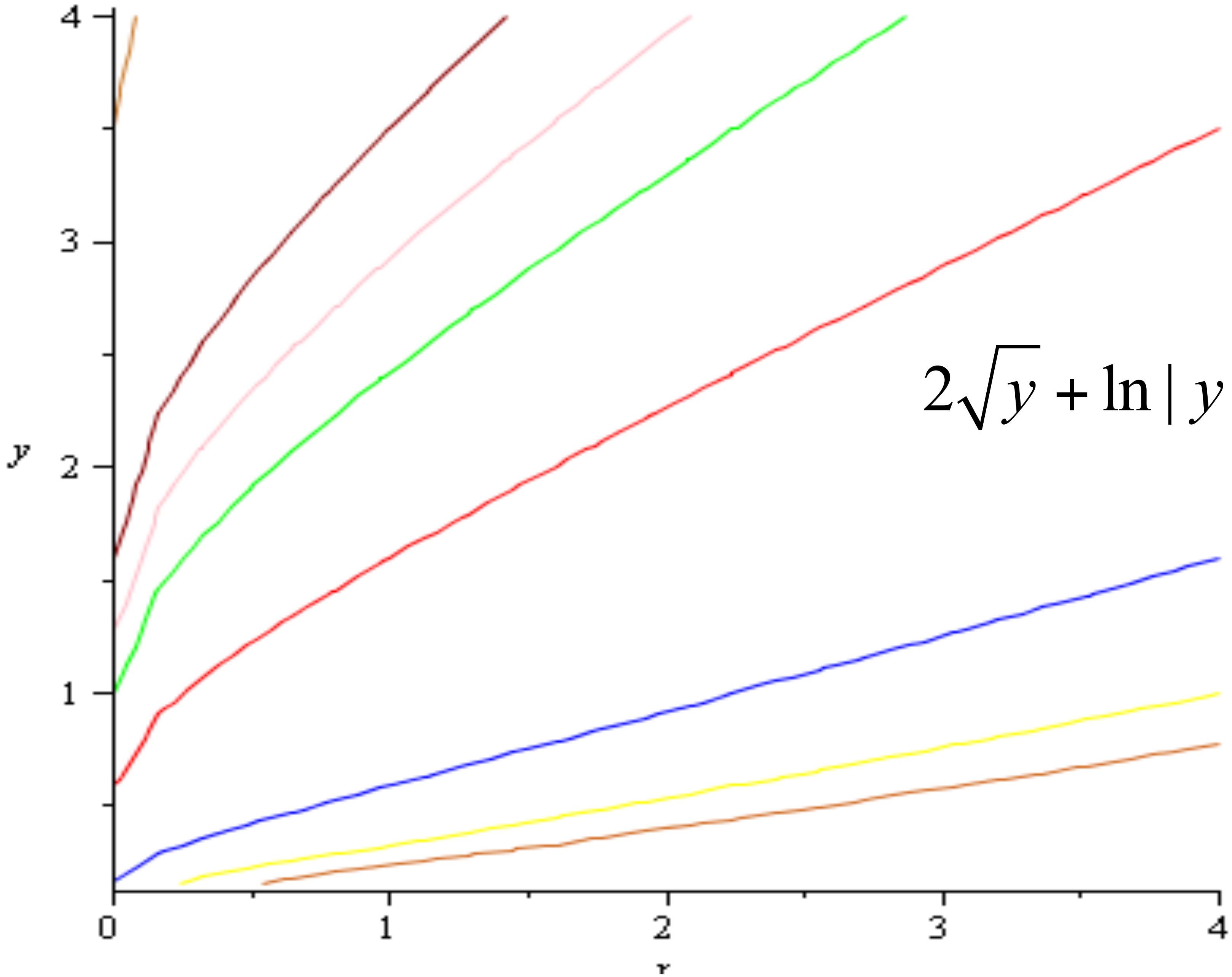
Tích phân hai vế $\int \frac{\sqrt{y}+1}{y}dy - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C$

$$\int\left(y^{-1/2}+\frac{1}{y}\right)dy - \int x^{-1/2}dx = C$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:

$$2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$$

```
f := (c, u) → implicitplot(2·sqrt(y) + ln(abs(y)) − 2·sqrt(x) = c, x = 0 ..4, y = 0
  ..4, color = u) : display(f(−1, blue), f(1, red), f(2, green), f(−2, yellow),
  f(2.5, pink), f(−2.5, "Chocolate"), f(3, "DarkRed"), f(5, gold));
```



$$2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$$

VD11: Giải phương trình $2^{x+y} + 3^{x-2y} y' = 0$

Phương trình trên được viết lại:

$$\frac{2^x}{3^x} + \frac{3^{-2y}}{2^y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 18^{-y} dy = 0$$

Tích phân hai vế

$$\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \int 18^{-y} dy = C$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là:

$$\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} - \frac{18^{-y}}{\ln(18)} = C$$

Các dạng có thể đưa về phương trình vi phân tách biến

Dạng 2 $y' = f(ax+by+c), \quad b \neq 0, a \neq 0$

Cách giải: Đặt $u = ax+by+c \quad \Rightarrow u' = a + by'$

$$u' - a = b \cdot f(u) \qquad u' = a + b \cdot f(u)$$

Nếu $a + b \cdot f(u) = 0$, giải tìm u. Kiểm tra có phải là nghiệm.

Nếu $a + b \cdot f(u) \neq 0$, chia hai vế cho $a + bf(u)$

$$\Rightarrow \frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$$

Đây là phương trình tách biến (biến *u* riêng, biến *x* riêng)

VD12: Giải phương trình $y' = \dfrac{1-2x-3y}{4x+6y-5}$

$$y' = \frac{-2x-3y+1}{-2(-2x-3y+1)-3} \qquad u = -2x-3y+1 \;\Rightarrow u' = -2-3y'$$

Thay vào pt đã cho $\dfrac{u'+2}{-3} = \dfrac{u}{-2u-3}$ $\qquad u' = \dfrac{3u}{2u+3} - 2$

$$\Rightarrow du = \frac{-u-6}{2u+3}dx \;\Rightarrow \frac{2u+3}{u+6}du = -dx \;\Rightarrow \int \frac{2u+3}{u+6}du = -\int dx$$

$$\Rightarrow 2u - 9\ln|u+6| = -x + C$$

Nghiệm của phương trình vi phân là

$$2(-2x-3y+1) - 9\ln|-2x-3y+7| = -x + C$$

Chú ý:

VD13: Giải phương trình $y' = \dfrac{-2x-3y}{4x+6y-5}$

Bỏ số 1 ở tử ta vẫn được phương trình vi phân dạng đang xét.

VD14: Giải phương trình $y' = \dfrac{1-2x-3y}{2x+6y-5}$

Thay số 4 bởi một số khác (số 2) thì phương trình này không có dạng phương trình vi phân đang xét.

II.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$\boxed{\text{Dạng} \quad y' + p(x)y = q(x)}$$

Cách giải: Nhân hai vế cho $e^{\int p(x)dx}$

$$y' \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x)y \cdot e^{\int p(x)dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C\right]}$$

VD15: Giải phương trình $y' - y\cot x = \sin x$

$$p(x) = -\cot x, q(x) = \sin x$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{+\int \cot x dx}\left[\int \sin x \cdot e^{-\int \cot x dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}\left[\int \sin x \cdot e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}dx + C\right]$$

$$y = \sin x\left(\int \frac{\sin x}{\sin x}dx + C\right) = \sin x\left(x + C\right)$$

Chú ý: Chỉ lấy một nguyên hàm của $\int p(x)dx$

VD16: Giải phương trình $(x^2+1)y' + 4xy = 3$

Chia hai vế cho $x^2+1 \neq 0$ $\quad y' + \dfrac{4x}{x^2+1}y = \dfrac{3}{x^2+1}$

$$p(x) = \frac{4x}{x^2+1}, q(x) = \frac{3}{x^2+1} \qquad \int p(x)dx = \int \frac{4xdx}{x^2+1} = 2\ln(x^2+1)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{-2\ln(x^2+1)}\left[\int \frac{3}{x^2+1}\cdot e^{2\ln(x^2+1)}dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\int \frac{3}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)^2 dx + C\right] = \frac{\left(x^3+3x+C\right)}{(x^2+1)^2}$$

VD17: Giải phương trình $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$, y(2) = 1.

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x} \qquad p(x) = 1, q(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$\int p(x)dx = \int dx = x \qquad \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[\int \frac{e^{-x}}{1-x}\cdot e^{x}dx + C\right] \qquad y = e^{-x}\left[-\ln|1-x| + C\right]$$

Với điều kiện y(2) = 1: $1 = e^{-2}\left[-\ln|1-2| + C\right] \Rightarrow C = e^{2}$

Nghiệm của phương trình:

$$y = e^{-x}\left[-\ln|1-x| + e^{2}\right] = -e^{-x}\ln|1-x| + e^{2-x}$$

Bài tập. Nhận dạng và giải các phương trình vi phân

1) $y' = \cosh(x + y)$

2) $xy' + y - xy^3 = 0$

3) $x^2y' - xy + y^2 = 0$

4) $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}, y(0) = 1$

5) $x^3y' = y(x^2 + y^2)$

6) $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$

7) $y' \sin x - y \ln y = 0, y(\pi / 2) = e$

8) $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \pi / 4$

9) $x^2 y' - xy + y^2 = 0$

10) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$

11) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

12) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

13) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$

14) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

15) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xy = 0, y(0) = 1$

16) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1$

17) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

18) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

19) $(y' - y)x = (x^2 + 1)e^x$

20) $xy' - \frac{y}{1+x} = x, y(1) = 0$

21) $x\left(1 + x^2\right)dy = (y + yx^2 - x^2)dx, y(1) = -\pi/4$

22) $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1$

23) $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$

24) $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

25) $ydx = (y^3 - x)dy$

26) $y' = (x + y)^2$

27) $\left(x - 2xy - y^2\right)dy + y^2 dx = 0$

28) $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$

29) $\dfrac{xy' - y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

30) $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2, y(1) = 1$

31) $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x, y(0) = 1$

32) $(1+e^x)yy' = e^y, y(0) = 0$

33) $y' = 3x^2y + x^5 + x^2, y(0) = 1$

34) $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$

35) $\mathrm{y}' = \dfrac{3x - y + 1}{x - 2y + 1}$

36) $\mathrm{y}' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$

37) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

38) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

39) $xy' + y = y^2 \ln x$

40) $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y - (3 + 2e^x) = 0$

41) $y' - \dfrac{y}{x} + x^2 y^4 = 0$

42) $2xy' + y - 2x^2 y^{-3} = 0$

43) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

44) $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \dfrac{ydx}{x^2 + y^2} - dx$

45) $e^y dx + (xe^x - 2y)dy = 0$

46) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$

47) $y' = \dfrac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$

48) $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$