# Phần II Vị từ và lượng từ

### Vị từ và lượng từ

· Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp khác rỗng. Giả sử, ứng với mỗi  $x = a \in A$  ta có một mệnh đề p(a). Khi đó, ta nói p = p(x) là một vị từ theo một biến (xác định trên A)

# Vị từ và lượng từ

· Định nghĩa:

Tổng quát, cho  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ...là n tập hợp khác trống. Giả sử rằng ứng với mỗi  $(x_1,x_2,..,x_n) = (a_1,a_2,..,a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ , ta có một mệnh đề  $p(a_1,a_2,..,a_n)$ . Khi đó tạ nói p=  $p(x_1,x_2,...,x_n)$  là một vị từ theo n biến(xác định trên  $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ 

### **Predicates and Quantifiers**

Propositional functions or predicates are propositions which contain variables

Example Let P denote the Predicate "is greater than 0" and P(x) denote "x > 0" x is called a variable

The predicate become a proposition once the variable x has been assigned a value.

What is the truth value of p(5), p(0) and p(-2)?

"5>0" is true, "0>0" is false and "-2>0" is false

• Ví dụ 1:

Xét p(n) = "n > 2" là một vị từ một biến xác định trên tập các số tự nhiên  $\mathbb{N}$ .

Ta thấy với n = 3; 4 ta được các mệnh đề đúng p(3), p(4), còn với n = 0,1 ta được mệnh đề sai p(0), p(1).

5

### Vị từ và lượng từ

Ví dụ 2

Xét  $p(x,y) = "x^2 + y = 1"$  là một vị từ theo hai biến xác định trên  $\mathbb{R}^2$ , ta thấy p(0,1) là một mệnh đề đúng, trong khi p(1,1) là một mệnh đề sai.

6

### **Examples**

#### Example:

Let Q(x,y) denote the statement "y =x + 2". What is the truth value of Q(2,4,) and Q(4,1)"4 = 2+2" is true and "1 = 4+2" is false

Q(2,y)  $\vee \neg$ Q(0,3) is a proposition??? Q(1,3)  $\vee \neg$ Q(0,1) is a proposition ???

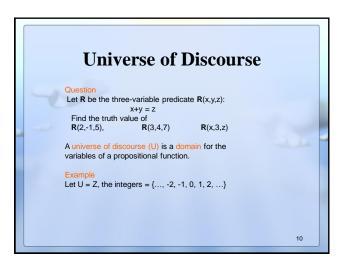
 $Q(2,y) \vee \neg Q(0,3)$  is not a proposition: y is not bounded  $Q(1,3) \vee \neg Q(0,1)$  is a proposition which is true

7

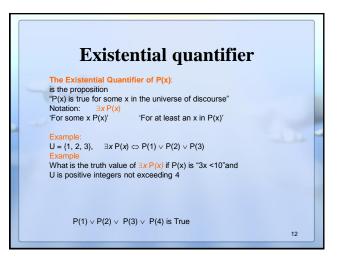
# Vị từ và lượng từ

- Định nghĩa: Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến x ∈ A. Khi ấy,
  - Phủ định của vị từ p(x) kí hiệu là ¬p(x) là vị từ mà khi thay x bởi một phần tử cố định của A thì ta được mệnh đề ¬(p(a))
  - Phép nối liền(tương ứng nối rời, kéo theo...) của p(x) và q(x) được ký hiệu bởi p(x) ∧ q(x)( tương ứng là p(x)√q(x), p(x)→q(x)) là vị từ theo biến x mà khi thay x bởi phần tử cố định a của A ta được mệnh đề p(a)∧ q(a) ( tương ứng là p(a) ∨ q(a), p(a)→q(a))

- Địnn nghia:
  Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:
  Mệnh đề "Với mọi x thuộc A,p(x)", kí hiệu bởi "∀x ∈ A, p(x)", là mệnh đề được định bởi "∀x ∈ A, p(x)" đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị a ∈ A.
  Mệnh đề "Tổn tại(it nhất )(hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))" kí hiệu bởi :"∃x ∈ A, p(x)", là mệnh đề được định bởi "∃x ∈ A, p(x)" đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x = a₀ nào đỏ sao cho mệnh đề p(a₀) đúng.
  Chú ½: Các mệnh đề lượng từ hóa ở trên đều là các mệnh
- Chú ý: Các mệnh đề lượng từ hóa ở trên đều là các mệnh đề, có chân trị xác định chứ không còn là các vị từ theo biến x nữa.



### Universal quantifier The Universal Quantifier of P(x): is the proposition "P(x) is true for every x in the universe of discourse" Notation: For all x, P(x) 'For every x, P(x)' $U = \{1, 2, 3\} \qquad \forall x P(x) \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$ What is the truth value of $\forall x P(x)$ if P(x) is "3x <10" and U is positive integers not exceeding 4 $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ is false



1) Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 3x + 1 \le 0$ " là một mệnh đề sai hay đúng?

Mệnh đề sai vì tồn tại  $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$  mà  $x_0^2 + 3x_0 + 1 > 0$ 

2) Mệnh đề " $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \le 0$ " là một mệnh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại  $x_0 = -1 \in \mathbb{R}$  mà  $x_0^2 + 3x_0 + 1 \le 0$ .

### Vị từ và lượng từ

Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \ge 2x$ " là một mệnh đề đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với  $\forall x \in \mathbb{R}$ , , ta luôn luôn có

 $x^2 - 2x + 1 \ge 0$ 

Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ " là một mệnh đề đúng hay sai?

# Vị từ và lượng từ

· Định nghĩa:

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x,

" $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " = " $\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$ "  $"\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,y)" = "\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x,y))"$ 

" $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " = " $\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$ "

" $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ " = " $\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$ "

### Vị từ và lượng từ

Xét vị từ p(x, y) = "x + 2y < 1" theo hai biến x, y xác định trên

Mệnh đề " $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1 \in \mathbf{R}$  mà  $x_0 + 2y_0 \ge 1$ .

Mệnh đề " $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi  $x = a \in \mathbf{R}$ , tồn tại  $y_a \in \mathbf{R}$  như  $y_a = -a/2$ , sao cho  $a + 2y_a < 1$ .

Mệnh đề " $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có  $x = a \in \mathbf{R}$  đề bất đẳng thức a + 2y < 1 được thỏa với mọi  $y \in \mathbf{R}$  (chẳng hạn, y = -a/2 + 2 không thể thỏa mãn bất đẳng thức này)

Mệnh đề " $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại  $\mathbf{x}_0=0,\,\mathbf{y}_0=0\in\mathbf{R}$  chẳng hạn, thỏa mãn

 $x_0 + 2y_0 < 1$ .

17

# Translate into English Example Translate the statement $\forall x(C(x) \lor \exists y(C(y) \land F(x,y))$ into English Where C(x) is "x has a computer" F(x,y) is "x and y are friends" and U is x and y are students in your school For every student x in your school x has a computer or there is a student y such that y has a computer and x and y are friends.

#### 

# Vị từ và lượng từ Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Khi đó: 1) " $\forall$ x $\in$ A, $\forall$ y $\in$ B, p(x, y)" $\Leftrightarrow$ " $\forall$ y $\in$ B, $\forall$ x $\in$ A, p(x, y)" 2) " $\exists$ x $\in$ A, $\exists$ y $\in$ B, p(x, y)" $\Leftrightarrow$ " $\exists$ y $\in$ B, $\exists$ x $\in$ A, p(x, y)" $\Rightarrow$ " $\exists$ y $\in$ B, $\exists$ x $\in$ A, p(x, y)" $\Rightarrow$ " $\forall$ y $\in$ B, $\exists$ x $\in$ A, p(x, y)" Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

• Chứng minh 3)

Giả sử " $\exists x \in A$ ,  $\forall y \in B$ , p(x, y)" là đúng. Khi đó, tồn tại  $a \in A$  sao cho " $\forall y \in B$ , p(x, y)" là đúng, nghĩa là nếu thay  $y = b \in B$  bất kỳ thì p(a,b) đúng. Như vậy,  $y = b \in B$  tuỳ chọn thì ta có thể chọn x = a để " $\exists x \in A$ , p(x, y)" là đúng. Do đó, " $\forall y \in B$ ,  $\exists x \in A$ , p(x, y)" là mệnh đề đúng.

21

Ví dụ thể hiện chiều đảo của 3 là chưa chắc đúng:

• Gọi p(x,y) là vị từ theo 2 biến thực

$$p(x,y) = "x + y = 1",$$

- Nếu thay y tuỳ ý thì x = 1 y để cho x + y = 1 nên mệnh đề ∃x ∈ A, p(x, y) là đúng.
   Nên mệnh đề "∀y∈ B, ∃x ∈ A, p(x, y)" là đúng.
- Ngược lại, nếu chọn x = a tuỳ ý, ta có thể chọn y = -a để "∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
   Điều này chứng tỏ, "∃x ∈ A, ∀y ∈ B, p(x, y)" là sai.
- Do đó, phép kéo theo sau là sai: " $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$ " -> " $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ "

22

### Vị từ và lượng từ

- Trong một mệnh đề lượng từ hoá từ một vị từ theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:
  - Mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ này cùng loại.
  - Mệnh đề mới này sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng ∃ ∀

23

### Vị từ và lượng từ

Định lý:

 a) Với p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A, ta có:

$$\frac{\forall x \in A, p(x)}{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \in A, p(x) \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

b) Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ  $p(x_1, x_2, ..., x_n)$  có được bằng cách thay lượng từ  $\forall$  bằng lượng từ  $\exists$  và ngược lại, và thay vị từ  $p(x_1, x_2, ..., x_n)$  bằng vị từ .

$$\overline{p(x_1,x_2,...,x_n)}$$

### **Negation**

Equivalence involving the negation operator

 $\neg \forall x \ \mathsf{P}(x) \Leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x) \\ \neg \exists x \ \mathsf{P}(x) \Leftrightarrow \forall x \neg \mathsf{P}(x)$ 

Multiple Quantifiers: read from left to right

25

## Vị từ và lượng từ

Phủ định của mệnh đề "Hôm nay, mọi sinh viên lớp THI đều có mặt" là gì ?

"Hôm nay, có (ít nhất) một sinh viên lớp TH1 vắng mặt".

Phủ định của mệnh đề "Trong lớp TH2có (ít nhất một) sinh viên được thưởng" là gì?

"Trong lớp TH2không có sinh viên nào được thưởng".

26

# Vị từ và lượng từ

Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in A, 2x + 1 \le 0$ " là gì ?

Phủ định của mệnh đề trên là " $\exists x \in A, 2x + 1 > 0$ ".

Phủ định của mệnh đề

$$\label{eq:equation:equation:equation:equation} \begin{split} ``\forall \epsilon > 0, \, \exists \delta > 0, \, \forall x \in R, \, | \, x - a | < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon". \\ (\text{điều kiện để hàm số } f(x) liên tục tại } x = a) \end{split}$$

Phủ định của mệnh đề trên là:

" $\exists \epsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists x \in R, \ |x - a| < \delta \land (|f(x) - f(a)| \ge \epsilon)$ ".

27

## Vị từ và lượng từ

Qui tắc đặc biệt hoá phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hoá trong đó một biến  $x \in A$  bị buộc bởi lượng từ phổ dụng  $\forall$ , khi ấy nếu thay thế x bởi  $a \in A$  ta sẽ được một mệnh đề đúng.

Ví du:

"Mọi người đều chết"

"Socrate là người"

Vậy "Socrate cũng chết"

29

# Vị từ và lượng từ

• Qui tắc tổng quát hoá phổ dụng:

Nếu trong một mệnh đề lượng từ hoá, khi thay một biến buộc bởi lượng từ ∀ bằng một phần tử cố định nhưng tuỳ ý của tập hợp tương ứng mà mệnh đề nhận được có chân trị 1 thì bản thân mệnh đề lượng từ hoá ban đầu cũng có chân tri 1.

30

### **Inference Rules for Quantifiers**

- $\forall x P(x)$  Universal instantiation (substitute *any* object o)
- P(g) (for g a general element of u.d.)  $\therefore \forall x P(x)$  Universal generalization
- $\exists x \ P(x)$  Existential instantiation (substitute a *new constant c*)
- $\frac{P(o)}{\therefore \exists x P(x)}$  (substitute any extant object o) Existential generalization

**Example** 

Every man has two legs, John Smith is a man.

Therefore, John Smith has two legs.

Predicates: M(x): x is a man

L(x): x has two legs

J: John Smith is a member of the universe

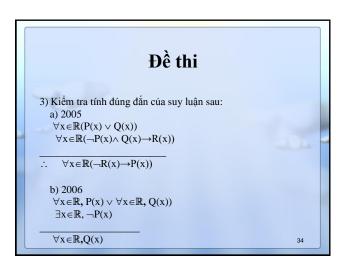
1.  $\forall x[M(x) \rightarrow L(x)]$ 2. M(J)  $\therefore L(J)$ 

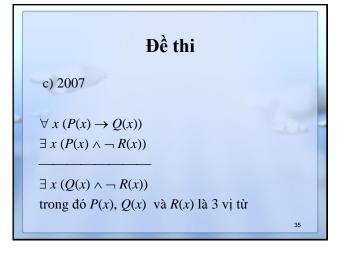
Proof 1.  $\forall x[M(x) \rightarrow L(x)]$  Hypothesis 1

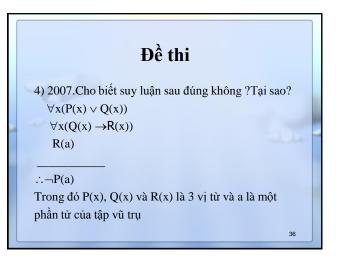
2.  $M(J) \rightarrow L(J)$  Step 1 and UI 3. M(J) Hypothesis 2

4. L(J) Step 2 and 3 and modus

# Dề thi 1) Hãy xác đinh chân trị của mệnh đề sau: a) 2002 $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2-4x-5=0) \rightarrow (x>0)$ b) 2004 $\forall x \in \mathbb{R}, (x^3-4x^2+5x-2=0) \leftrightarrow (x^2-3x+2=0)$ 2) 2003Lấy phủ định của mệnh đề sau: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, (|x-x'| < \delta \rightarrow |f(x)-f(x')| < \epsilon)$







### Đề thi

- 5) 2009.
- a) Một dãy số thực  $\{x_n\}$ được nói là thuộc O(n) nếu tồn tại số thực dương C và số tự nhiên m sao cho  $|x_n| < Cn$  mỗi khi  $n \ge m$ . Hãy sử dụng mệnh đề lượng từ hóa để viết lại định nghĩa trập
- b) Viết ra mệnh đề lượng từ hóa cho  $\,$  một dãy số thực  $\{x_n\}\,$  không thuộc O(n).

37

### Đề thi

6) 2010. Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau  $\forall x (P(x) \lor Q(x))$ 

 $\forall x(\neg Q(x) \lor R(x))$ 

 $\exists x \neg P(x)$ 

∴ $\exists x R(x)$ 

Trong đó P(x), Q(x) và R(x) là 3 vị từ

38

### Bài tập

7)

Xét chân trị và tìm phủ định của các mệnh đề sau:

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \le 0;$ 

b)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \le 0;$ 

c)  $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$ 

d)  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$ 

e)  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}, x + y \ge 0;$ 

f)  $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$ 

g)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \, \forall y \in \mathbb{R}, \, x + y \ge 0;$ 

h)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \ge 0;$ 

39

### Tài liệu tham khảo

- [1]GS.TS Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, NXB Giáo dục
- [2]TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc
- [3] Dr.Kossi Edoh,Department of Computer Science, Montclair State University
- [4] Michael P.Frank 's slides