Chương 2

ĐỊNH THỨC

lvluyen@hcmus.edu.vn

Web: bit.do/daisotuyentinh

FB: **fb.com/daisotuyentinh**

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

– – –– Năm 2019 – – ––

Nội dung

Chương 2. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và tính chất

2. Định thức và ma trận khả nghịch

3. Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

2.1. Định nghĩa và tính chất

1. **Định nghĩa**
2. **Quy tắc Sarrus**
3. **Khai triển định thức theo dòng, theo cột**
4. **Định thức và các phép biến đổi sơ cấp**

2.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta gọi ma trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng i và cột j*** của A. Rõ ràng ma trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ có cấp là $n-1$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận $A(1|2)$ và $A(2|3)$?

Đáp án.

$$A(1|2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A(2|3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. ***Định thức*** của ma trận A, được ký hiệu là $|\boldsymbol{A}|$ (hay $\det \boldsymbol{A}$) là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, nghĩa là $A = (a)$, thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì $|A| = ad - bc$.
- Nếu $n > 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì

$$|A| \xlongequal{\textbf{dòng 1}} \sum_{j=1}^{n} a_{\mathbf{1}j}(-1)^{\mathbf{1}+j}|A(\mathbf{1}|j)|$$
$$\xlongequal{\quad} a_{\mathbf{1}1}\big|A(\mathbf{1}|1)\big| - a_{\mathbf{1}2}\big|A(\mathbf{1}|2)\big| + \dots + a_{\mathbf{1}n}(-1)^{\mathbf{1}+n}\big|A(\mathbf{1}|n)\big|.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 4 \times 5 - (-2) \times 3 = 26.$

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$|A| \xlongequal{\text{dòng 1}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} 12 - 16 + 15 = 11.$$

2.1.2. Quy tắc Sarrus ($n = 3$)

Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Theo định nghĩa của định thức, ta có

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{cột}1 & \text{cột}2 & \text{cột}3 & \text{cột}1 & \text{cột}2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right). \\ - \quad\ - \quad\ - \quad\ + \quad\ + \quad\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right). \\
- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +
\end{array}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

(Tổng ba đường chéo **đỏ** - tổng ba đường chéo **xanh**)

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1) - (3.2.3 + 1.1.1 + 2.4.5) = -31.$$

2.1.3. Khai triển định thức theo dòng và cột

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi $i, j \in \overline{1, n}$, ta gọi

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{(-1)^{i+j}|A(i|j)|}$$

là ***phần bù đại số*** của hệ số a_{ij}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm phần bù đại số của a_{12} và a_{31}?

Giải.

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Định lý. *Cho* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$*. Với mỗi* $i, j \in \overline{1, n}$*, gọi* c_{ij} *là* ***phần bù đại số*** *của* a_{ij}*. Ta có công thức khai triển* $|A|$

- *theo dòng* $\boldsymbol{i}$: $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k} c_{\boldsymbol{i}k}$.
- *theo cột* $\boldsymbol{j}$: $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}} c_{k\boldsymbol{j}}$.

Nhận xét.

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k} (-1)^{\boldsymbol{i}+k} |A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}} (-1)^{k+\boldsymbol{j}} |A(k|\boldsymbol{j})|$$

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ theo dòng 2 và cột 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải.

- $|A| \xlongequal{\text{dòng } 2} 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

  $\xlongequal{\quad\quad} 15 - 24 - 14 = -23.$

- $|A| \xlongequal{\text{cột } 3} 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

  $\xlongequal{\quad\quad} -9 - 14 + 0 = -23.$

Lưu ý. Khi tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải.

$$|A| \xlongequal{\text{cột } 2} -3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 32 = 96.$$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|B| = -48$

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó:*

(i) $|A^\top| = |A|$.

(ii) *Nếu A có một dòng hay một cột bằng không thì $|A| = 0$.*

(iii) *Nếu A là ma trận tam giác thì $|A|$ được tính bằng tích các phần tử trên đường chéo, nghĩa là*

$$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

Ví dụ. Tính định thức các ma trận sau:

$$a)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Đáp án.

$|A| = 0; \quad |B| = 2 \times (-3) \times 4 = -24; \quad |C| = (-2) \times 3 \times (-5) = 30.$

Định lý. *Nếu* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *thì* $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

Hệ quả. *Cho* $A, A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $k \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó*

(i) $|A_1 A_2 \ldots A_m| = |A_1||A_2| \ldots |A_m|$;

(ii) $|A^k| = |A|^k$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. $|A| = (1 \times 2 \times 3) \times (4 \times 1 \times 2) = 6 \times 8 = 48$.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức của $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Đáp án. $|B| = 0$.

2.1.4. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý. *Cho* $A, \boldsymbol{A'} \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = -|A|$;

(ii) *Nếu* $A \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha d_i}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = \alpha|A|$ *hay* $|A| = \dfrac{1}{\alpha}|\boldsymbol{A'}|$;

(iii) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{\boldsymbol{d_i + \beta d_j}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = |A|$.

Hệ quả. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó, với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ta có*

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{2}d_2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{3}c_2} 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2 - d_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng 2}} 6(-2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -84.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_3-4d_2 \\ d_4-3d_2}]{\substack{d_2-d_1 \\ d_1-2d_1}} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 15 \\ 0 & 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 7 & -2 & 15 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2-2d_3} - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -5 & 0 & -7 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} -(-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \xlongequal[60d_3]{\substack{6d_1\\12d_2}} \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{1}{60} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{\substack{c_2-c_3\\c_1-6c_2}} \frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng 1}} -\frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

Lưu ý. Trong quá trình tính định thức, phép biến đổi sơ cấp loại 3 được khuyến khích dùng bởi vì nó không làm thay đổi giá trị định thức.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp án. $|C| = 24; \quad |D| = -174.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $C^2 D^\top$

Đáp án. $|A| = -27$; $|B| = 16$; $|C| = -18$; $|D| = -19$;

$$|C^2 D^\top| = |C^2||D^\top| = |C|^2|D| = -6156.$$

2.2. Định thức và ma trận khả nghịch

1. **Ma trận phụ hợp**

2. **Nhận diện ma trận khả nghịch**

2.2.1. Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$\boldsymbol{c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|}$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** (hay ***ma trận phó***) của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận phụ hợp của A?

Giải. $c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4;$$

Tương tự ta có $c_{22} = -3$; $c_{23} = -1$; $c_{31} = -2$; $c_{32} = 1$; $c_{33} = 1$.

Suy ra $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Do đó $\operatorname{adj}(A) = C^\top = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm ma trận phụ hợp của $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Đáp án. $\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} -17 & 11 & 18 \\ 19 & -22 & -24 \\ 14 & -11 & -9 \end{pmatrix}$

2.2.2. Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Giải. Ta có $|A| = 23 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch. Ta tính được

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hệ quả. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$. *Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Giải. Ta có $|A| = -2 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch. Ta tính được

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Những ma trận sau có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của chúng.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp án. $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; B không khả nghịch;

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -9 \\ -7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn. a) Ta có $|A| = 8m - 72$. Do đó A khả nghịch khi

$$8m - 72 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9.$$

b) Ta có $|B| = (4m - 4)(0) = 0$. Do đó B không khả nghịch với mọi m.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Tính $|A|$; $|A^{-1}|$; $|3A|$; $|\text{adj}(A)|$.

Đáp án. $|A| = 2$; $\quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{2}$; $\quad |3A| = 54$; $\quad |\text{adj}(A)| = 4$.

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A khả nghịch. Khi đó*

(i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

(ii) $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

Ví dụ. Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $|A| = 3, |B| = -2$. Tính

$$|(2AB)^{-1}| \text{ và } |\mathrm{adj}(AB)|?$$

Giải.

- $|(2AB)^{-1}| = \dfrac{1}{|2AB|} = \dfrac{1}{2^3|AB|} = \dfrac{1}{8|A||B|} = \dfrac{1}{8.(3).(-2)} = -\dfrac{1}{48}$;
- $|\mathrm{adj}(AB)| = |AB|^{3-1} = (|A||B|)^2 = (3.(-2))^2 = 36.$

2.3. Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

1. **Quy tắc Cramer**
2. **Biện luận và giải hệ PTTT bằng Cramer**

2.3.1. Quy tắc Cramer

Định lý. *Cho hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ $(\star)$ *gồm* n *ẩn và* n *phương trình. Đặt*

$$\Delta = \det A; \qquad \Delta_i = \det(A_i),\ \forall i \in \overline{1, n},$$

trong đó A_i *là ma trận có từ* A *bằng cách thay cột* i *bằng cột* B. *Khi đó:*

(i) *Nếu* $\Delta \neq 0$ *thì* $(\star)$ *có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i \in \overline{1, n}.$$

(ii) *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i \neq 0$ *với một* i *nào đó thì* $(\star)$ *vô nghiệm.*

(iii) *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i = 0$ $\forall i \in \overline{1, n}$ *thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Trong trường hợp này ta phải dùng phương pháp Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải* $(\star)$.

Ví dụ. Giải phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3; \\ 2x & - & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \ \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & -1 & -2 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \\ \mathbf{4} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-3} & -2 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{4} & 1 \end{vmatrix} = -14; \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathbf{-3} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \mathbf{4} \end{vmatrix} = -7.$$

Vì $\Delta \neq 0$ nên hệ (1) có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (2)$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \mathbf{5} & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$$

Vì $\Delta = 0$ và có $\Delta_1 \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \tag{3}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \mathbf{10} & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{4} & -2 \\ 2 & \mathbf{3} & 3 \\ 5 & \mathbf{10} & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{4} \\ 2 & 3 & \mathbf{3} \\ 5 & 7 & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0.$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ (3) là

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9+9t; \\ y & = & -5-7t; \\ z & = & t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

2.3.2. Giải và biện luận hệ PTTT bằng Cramer

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & m-2 & m-5 \\ \mathbf{-2} & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 \\ -2 & \mathbf{2} & m-5 \\ m & \mathbf{-2} & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ -2 & m-2 & \mathbf{2} \\ m & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = 2m-6 = 2(m-3).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1; \\ m \neq 3. \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1} \right).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array} \right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1-2d_2]{\substack{d_3+d_2 \\ -\frac{1}{5}d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có x_3 là ẩn tự do. Suy ra nghiệm của hệ là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{6}{5}t - \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}t + \frac{2}{5}, t\right) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases}$$

Giải. $$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17);$$

$$\Delta_2 = 2m(m-1)(m-14); \quad \Delta_3 = -36m(m-1).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m-1)(m-17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2m(m-1)(m-14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

$\triangleright$ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1; \\ m = 1. \end{array}\right.$

- Với $m = -1$, ta có $\Delta_1 = -36 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ trở thành

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 12y & - & 6z & = & 1; \\ -10x & + & 20y & - & 10z & = & 2; \\ -12x & + & 24y & - & 12z & = & 0. \end{array}\right.$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ -12 & 24 & -12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Suy ra hệ vô nghiệm.

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có một nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.

Hướng dẫn.

$$\Delta = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2);$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\Big).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1; \\ m = -2. \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 1. \end{cases}$$

Giải hệ bằng Gauss hoặc Gauss-Jordan, ta có hệ vô số nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - t - s,\ t,\ s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}$$

- $m = -2$, ta có $\Delta_1 = 9 \neq 0$. Suy ra hệ vô nghiệm.