Chương 4

HỆ THỨC ĐỆ QUY

lvluyen@hcmus.edu.vn

bit.do/toanroirac

FB: **fb.com/trr1718**

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

– – –– Tháng 9 năm 2017 – – ––

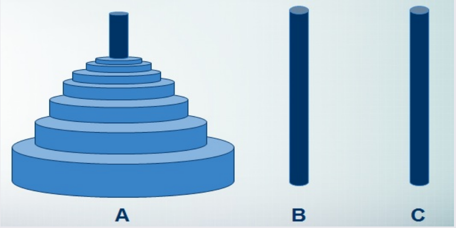
Nội dung

Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

1. Giới thiệu
2. Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng
3. Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất
4. Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

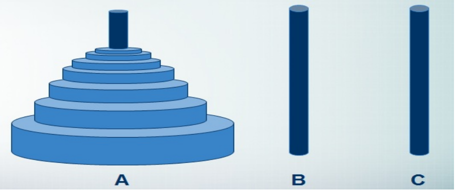
4.1. Giới thiệu

Ví dụ. Tháp Hà Nội



Có 3 cọc A, B, C và n đĩa với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó.

Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển được một đĩa. Ta gọi x_n là số lần chuyển đĩa, tìm x_n?



Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.

Với $n > 1$, trước hết ta chuyển $n-1$ đĩa bên trên sang cọc B qua trung gian cọc C (giữ nguyên đĩa thứ n dưới cùng ở cọc A). Số lần chuyển $n-1$ đĩa đó là x_{n-1}. Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng ta chuyển $n-1$ đĩa từ cọc B sang cọc C (cọc A làm trung gian). Số lần chuyển $n-1$ đĩa đó lại là x_{n-1}.

Như vậy số lần chuyển toàn bộ n đĩa từ A sang C là:

$$\boldsymbol{x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1}.$$

Nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \quad \text{với } n > 1 \end{cases}$$

Ví dụ. Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n?

Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$. Với $n = 2$, ta có $x_2 = 2$.

Với $n > 2$, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

- **Trường hợp 1.** Bước đầu tiên gồm 1 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-1$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-1}.
- **Trường hợp 2.** Bước đầu tiên gồm 2 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-2$ bậc nên số cách đi hết cầu thang trong là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Như vậy

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{với } n > 2. \end{cases}$$

4.2. Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng

Định nghĩa. Một ***hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng*** là một hệ thức có dạng:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

trong đó

- $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_k$ là các hệ số thực;
- $\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước;
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì (1) trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Ta nói (2) là một ***hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng***.

Ví dụ.

- $2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3 \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-3} = 20 + n2^{n-2} + 3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 3.
- $2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \longrightarrow$ tuyến tính thuần nhất cấp 2.

Định nghĩa. Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (1) được gọi là một ***nghiệm*** của (1).

Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của (1) được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của (1) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (1).

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0,\ x_1 = y_1,\ \ \ldots\ \ , x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi là ***nghiệm riêng*** ứng với điều kiện ban đầu $(*)$.

Giải một hệ thức đệ quy là đi **tìm nghiệm tổng quát** của nó; nhưng nếu hệ thức đệ quy có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải **tìm nghiệm** thỏa điều kiện ban đầu đó.

Ví dụ.

- $2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiêm tổng quát là $x_n = C\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
- $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ có nghiệm là $x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$.

Lưu ý. Trong phạm vi của chương trình ta chỉ xét các hệ thức đệ quy tuyến tính (cấp 1 và 2) với hệ số hằng.

4.3. Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Phương trình đặc trưng của **(1)** là phương trình bậc k định bởi

$$\boldsymbol{a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0} \qquad (*)$$

▷ **Trường hợp $\boldsymbol{k = 1}$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda + a_1 = 0}$$

nên có nghiệm là
$$\lambda_0 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Khi đó, **(1)** có nghiệm tổng quát là: $\boldsymbol{x_n = C \cdot \lambda_0^n}$.

▷ **Trường hợp $\boldsymbol{k = 2}$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0} \qquad (*)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n}$$

- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thực λ_0 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = (C_1 + nC_2) \cdot \lambda_0^n}$$

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)}$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Phương trình đặc trưng là $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm là $\lambda = 2$. Suy ra **(1)** có nghiệm tổng quát là $\boldsymbol{x_n = C \cdot 2^n}$.

Từ điều kiện $x_0 = 5$ ta có $C = 5$. Suy ra nghiệm của $(*)$ là $\boldsymbol{x_n = 5 \cdot 2^n}$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(2)**

Giải.

$$\begin{aligned} & x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ \Leftrightarrow\ & x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}$$

có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Suy ra **(2)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n}.$$

Vì $x_0 = 4$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4; \\ 2C_1 + 3C_2 = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 3, C_2 = 1$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$\boldsymbol{x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n}.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(3)**

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\mathbf{4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0}$$

có 1 nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Suy ra **(3)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Vì $x_0 = 2$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 = 2; \\ \dfrac{3}{2}(C_1 + C_2) = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 2, C_2 = 4$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = (2 + 4n)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$ **(4)**

Giải. Phương trình đặc trưng $\boldsymbol{\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0}$ có 2 nghiệm phức liên hợp là

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Suy ra **(4)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = 2^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Vì $x_0 = 1$; $x_1 = 4$ nên $\begin{cases} A = 1; \\ 2\left(\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B\right) = 4. \end{cases}$ Suy ra $A = 1, B = \sqrt{3}$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

4.4. Nghiệm của HTĐQTT không thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

$$\boldsymbol{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_n} \qquad (1)$$

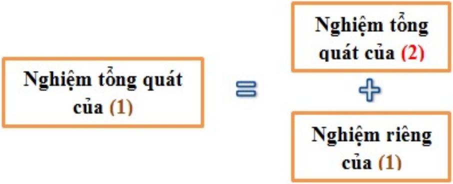
Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$\boldsymbol{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \qquad (*)$$

Khi đó



Để tìm một nghiệm riêng của (1), ta xem xét hai dạng đặc biệt của vế phải $\boldsymbol{f_n}$ như sau:

- Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số.
- Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$, trong đó các $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_s}$ thuộc Dạng 1.

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$. Có ba trường hợp xảy ra:

- **TH 1.** Nếu β không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = \beta^n Q_r(n)$$

- **TH 2.** Nếu β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n\beta^n Q_r(n)$$

- **TH 3.** Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2\beta^n Q_r(n)$$

Chú ý $Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$ là đa thức có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_0$ là $r+1$ hệ số cần xác định.

Để xác định các hệ số trên ta cần thế $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ vào (1) và cho n nhận $r+1$ giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này.

Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$. Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng $x_{n_i} (1 \leq i \leq s)$ của hệ thức đệ quy

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_{n_i}$$

Khi đó

$$x_n = x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_s}$$

là một nghiệm riêng của (1).

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$.

- Nếu $f_n = 2n + 1$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = An + B$.
- Nếu $f_n = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = 5^n(An^2 + Bn + C)$.
- Nếu $f_n = 5^n$, thì $x_n^{(p)} = 5^n A$.
- Nếu $f_n = 3^n$ thì $x_n^{(p)} = n3^n A$.
- Nếu $f_n = 2^n(3n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = n2^n(An + B)$.

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0} \qquad \mathbf{(*)}$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$.

- Nếu $f_n = 3^n$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = n^2 3^n A$.
- Nếu $f_n = 3^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = n^2 3^n (An + B)$.
- Nếu $f_n = 2^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = 2^n (An + B)$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n+1; \\ x_0 = 1;\ x_1 = 3. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 2n+1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = an + b} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(an+b)-5[a(n-1)+b]+6[a(n-2)+b]=2n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} -7a+2b=1; \\ -5a+2b=3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a=1; b=4$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n+4} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n + n + 4 \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 1$ và $x_1 = 3$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -3; \\ 2C_1 + 3C_2 = -2. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1 = -7$ và $C_2 = 4$. Thế vào (6) ta được

$$\boldsymbol{x_n = -7\cdot 2^n + 4\cdot 3^n + n + 4}.$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1. \qquad (1)$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$\boldsymbol{2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 4n + 1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng **(∗)** nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = n(an + b)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2)+b] = 4n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n = 0; n = 1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = -1$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n(2n - 1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + n(2n-1)$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \qquad (2)}$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (*)}$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của **(2)** là:

$$\boldsymbol{x_n = (C_1 + nC_2)3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**.Vế phải của **(1)** là $f_n = (18n+12)3^n$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 3$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = n^2 3^n(an+b)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(n+1)^2 3^{n+1}[a(n+1)+b] - 6n^2 3^n(an+b) + \\ 9(n-1)^2 3^{n-1}[a(n-1)+b] = (18n+12)3^n.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a=1; b=2$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n^2(n+2)3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)3^n \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2$ và $x_1 = 0$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1 = 2$ và $C_2 = -5$. Thế vào (6) ta được

$$\boldsymbol{x_n} = (2-5n)3^n + n^2(n+2)3^n = \boldsymbol{3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2)}$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của **(2)** là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n$ thuộc **Dạng 2**. Ta xét các hệ thức đệ quy sau:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \quad (1a)$$
$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \quad (1b)$$
$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3 \cdot 4^n \quad (1c)$$

Bằng cách giải tương tự như **Dạng 1**, ta có các nghiệm riêng của

- $(1a)$ là $x_{n_1} = -10n$
- $(1b)$ là $x_{n_2} = n2^n$
- $(1c)$ là $x_{n_3} = 4^{n+2}$

Như vậy, **(1)** có nghiệm riêng là:

$$\boldsymbol{x_n = -10n + n2^n + 4^{n+2}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

Ví dụ. Với $n \geq 1$, đặt
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)2^k.$$
Tính tổng s_n theo n bằng cách thiết lập một hệ thức đệ quy có điều kiện đầu và tìm nghiệm của hệ thức đệ quy đó.

Đáp án. Hệ thức đệ quy là $\begin{cases} s_n - s_{n-1} = 2^n(n^2+n) \\ s_1 = 4. \end{cases}$

Giải ta được $s_n = -4 + 2^n(2n^2 - 2n + 4)$

Ví dụ. Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1} = n$, với $n \geq 1$.

Đáp án. $x_n = 3 \cdot 2^n - \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n - 2$

Ví dụ.(tự làm) Gọi x_n là số chuỗi bit có chiều dài n mà không có 2 bit 0 đứng liền nhau. Hãy lập hệ thức đệ quy của x_n và tìm x_n.

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

b) Tìm một nghiệm riêng của hệ thức đệ quy

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (18n-6)3^{n-1}.$$

c) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu: $a_0 = 2, a_1 = 9$ của hệ thức đệ quy

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^{n+1}.$$

Đáp án. a) $x_n = 3^n(C_1 + C_2 \cdot n)$ b) $x_n = n^2 3^n(n+2)$

c) $x_n = 3^n\left(\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - n + 2\right)$

Ví dụ.(tự làm) Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 6$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_n - 4x_{n-1} + 8x_{n-2} = 0$, với $n \geq 2$.

Đáp án. $x_n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + 2\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = (6n-5)2^{n-1}$ thỏa điều kiện đầu $x_0 = 7, x_1 = 4$.

Đáp án. a) $x_n = C_1\,(-1)^n + C_2\,2^n$ b) $x_n = 4\cdot(-1)^n + 2^n(n^2+3)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu $a_0 = 8, a_1 = 5$ của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$

Đáp án. a) $a_n = C_1\cdot(-2)n + C_2\cdot 3^n$

b) $a_n = 7\cdot 3^n + (-2)^n(2n^2+5n+1)$

Bài tập. Giải các hệ thức đệ quy sau

a) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

Xem đáp án ở slide kế tiếp

Đáp án.

a) $x_n = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{3}(-5)^n + n^2 + 4n$

b) $x_n = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + (-2)^n + 3^n n$

c) $x_n = n^2 - 2n + 1$

d) $x_n = -3 \cdot 2^n + n^2 + 4n + 4$

e) $x_n = 8^n(n^2 + n + 2)$

f) $x_n = 3^n + 5^n(n - 2)$