

Thực hành Vi tích phân 1B

Ngày 12 tháng 9 năm 2017

Mục lục

1	Dãy số và ánh xạ	3
1.1	Dãy số	3
1.2	Ánh xạ	3
2	Hàm số	5
2.1	Giới hạn hàm số	5
3	Đạo hàm và ứng dụng	8
3.1	Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn	8
3.2	Tiếp tuyến	9
3.3	Xấp xỉ tuyến tính	10
3.4	ĐL Giá trị trung bình	11
3.5	Ứng dụng tính giới hạn	11
3.6	Taylor-Maclaurin	12
4	Tích phân và ứng dụng	13
4.1	Tích phân	13
4.2	Ứng dụng tích phân tính diện tích	14
4.3	Tích phân suy rộng	14
5	Chuỗi	16
5.1	Chuỗi số thực	16
5.2	Chuỗi lũy thừa	20
	Tài liệu tham khảo	21

Chương 1

Dãy số và ánh xạ

1.1 Dãy số

Bài tập 1. Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} \right).$$

Bài tập 2. Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}.$$

Bài tập 3. Tìm giới hạn của dãy số sau.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}.$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

1.2 Ánh xạ

Bài tập 4. f có là đơn ánh, toàn ánh không. Giải thích?

i. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(x) = 2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$

ii. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ được định nghĩa bởi $f(n) = n^2 + n, \forall x \in \mathbb{Z}.$

iii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(x) = 2x^2 + 3, \forall x \in \mathbb{R}.$

iv. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ được định nghĩa bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & , \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ \frac{n}{2} & , \text{ nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

v. Cho $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}, B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f : A \rightarrow B$ được định nghĩa bởi $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Chương 2

Hàm số

2.1 Giới hạn hàm số

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau.

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(10+h)^2 - 100}{h},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{8x - x^3},$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{100+h} - 10}{h},$$

$$(f) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2017} \frac{\frac{1}{2017} + \frac{1}{x}}{2017 + x},$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t},$$

$$(g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

Bài tập 6. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0.$$

Bài tập 7. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

Bài tập 8. Nếu $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ với $x \geq 0$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Bài tập 9. Nếu $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ với mọi x . Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}[1 + \sin^2(2\pi/x)] = 0.$$

Bài tập 11. Tìm giới hạn sau nếu tồn tại:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x^3-x^2|} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{7-|x|}{3x+2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Bài tập 12. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 5x + 4 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

$$\begin{array}{lll} i. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) & ii. \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) & iii. \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ iv. \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) & v. \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) & vi. \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \end{array}$$

Bài tập 13. Chứng minh các khẳng định sau bằng định nghĩa δ, ε .

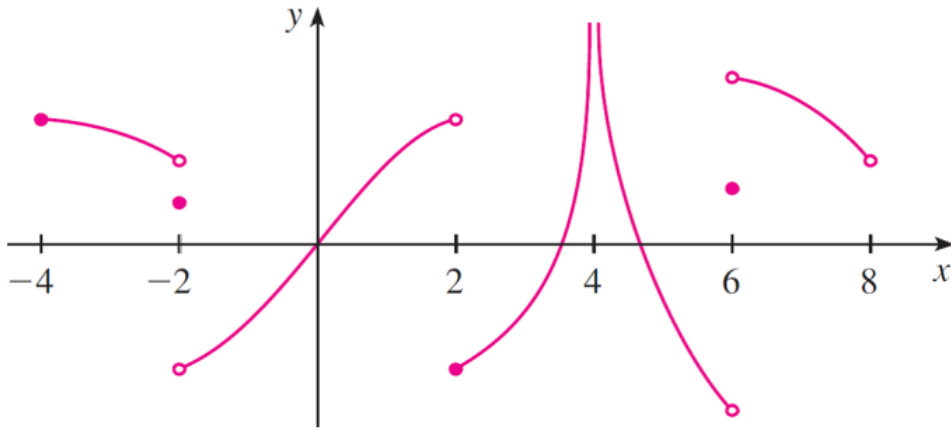
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 7} (20 - 3x) = -1 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3) = -4$$

Bài tập 14. Từ đồ thị của hàm số g cho bên dưới, tìm các khoảng mà hàm số g liên tục.

Bài tập 15. Hãy xác định $f(2)$ sao cho mỗi hàm số có gián đoạn khử được

$$\text{trở thành liên tục tại 2. a) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$



Hình 2.1: hình ảnh của bài 14

Bài tập 16. Chứng minh rằng f liên tục trên $(-\infty, \infty)$ với f định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

Bài tập 17. Chứng minh các hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x/2 + \cos x) & \text{nếu } x < \pi/2 \\ \cos(x/2 + \sin x - 1) & \text{nếu } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

Bài tập 18. Tìm giá trị của c sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2cx & \text{nếu } x < 1 \\ 4x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

Bài tập 19. Tìm giá trị của a, b sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ ax^2 - bx + 4 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 3x + a - b & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

Chương 3

Đạo hàm và ứng dụng

3.1 Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn

Bài tập 20. Giả sử g có đạo hàm cấp hai trên \mathbb{R} và xét $f(x) = \sin(xg(e^x))$. Tính $f^{(2)}$ theo g, g' và g'' .

Bài tập 21. Tính y'' khi biết $9x^2 + y^2 = 9$.

Bài tập 22. Tính y'' khi biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Bài tập 23. Tìm công thức chính xác của $\frac{dy}{dx}$ (dùng công thức hàm ẩn) biết:

(a) $x^3 + y^3 = 1$,

(e) $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$,

(b) $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.

(f) $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$,

(c) $x^2 + xy - y^2 = 4$,

(g) $y \cos x = x^2 + y^2$,

(d) $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$,

(h) $\cos(xy) = 1 + \sin y$.

Bài tập 24. Giả sử $y = \sqrt{2x+1}$, trong đó x và y là những hàm theo t .

1. Giả sử $\frac{dx}{dt} = 3$, tìm $\frac{dy}{dt}$ khi $x = 4$.

2. Giả sử $\frac{dy}{dt} = 5$, tìm $\frac{dx}{dt}$ khi $x = 12$.

Bài tập 25. Giả sử $4x^2 + y^2 = 9$, trong đó x và y là những hàm theo t .

1. Giả sử $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$, tìm $\frac{dx}{dt}$ khi $x = 2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

2. Giả sử $\frac{dx}{dt} = 3$, tìm $\frac{dy}{dt}$ khi $x = -2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.



Hình 3.1: Hình bài tập 28

Bài tập 26. Biết $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = 4$, tìm $\frac{dz}{dt}$ khi $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

Bài tập 27. Hai chiếc xe bắt đầu di chuyển từ cùng một điểm. Một chiếc đi về phía nam với tốc độ 60 mi/h và chiếc còn lại di chuyển về phía tây với tốc độ 25 mi/h. Khoảng cách giữa hai chiếc xe tăng lên ở mức nào hai giờ sau đó?

Bài tập 28. Một chiếc thuyền được kéo vào một bến tàu bằng một sợi dây gắn vào mũi thuyền và đi qua một ròng rọc trên bến tàu, mà nó cao hơn 1 m so với mũi thuyền. Nếu sợi dây được kéo vào với tốc độ 1 m/s, thuyền tiến gần đến bến tàu nhanh như thế nào khi nó cách bến tàu 8 m?

Bài tập 29. Vào buổi trưa, tàu A cách 100 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía nam với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi nhanh như thế nào vào lúc 4:00 PM?

3.2 Phương trình tiếp tuyến

Bài tập 30. Hãy tìm phương trình tiếp tuyến với đồ thị mỗi hàm số tại giá trị x_0 cho trước.

(a) $f(x) = x^2, x_0 = 3$.

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}, x_0 = 1$.

Bài tập 31. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số y được cho bởi biểu thức

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

tại điểm $(3, 3)$.

Bài tập 32. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số y được cho bởi biểu thức

$$x^2 + y^2 = 25$$

tại điểm $(3, -4)$.

3.3. XẤP XỈ TUYẾN TÍNH CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

Bài tập 33. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số y được cho bởi biểu thức

$$y \sin(2x) = x \cos(2y)$$

tại điểm $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Bài tập 34. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số y được cho bởi biểu thức

$$\sin(x+y) = 2x - 2y$$

tại điểm (π, π) .

Bài tập 35. Tìm phương trình của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm có tọa độ cho trước.

1. $y = 4x - 3x^2, (2, -4)$.

3. $y = \sqrt{x}, (1, 1)$.

2. $y = x^3 - 3x + 1, (2, 3)$.

4. $y = \frac{2x+1}{x+2}, (1, 1)$.

Bài tập 36. (a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tới đường cong $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tại điểm $x = a$.

(b) Tìm phương trình của tiếp tuyến tại các điểm $(1, 1)$ và $(4, 1/2)$.

(c) Vẽ đồ thị của đường cong và cả hai tiếp tuyến trên một màn hình chung.

3.3 Xấp xỉ tuyến tính

Bài tập 37. Hãy tính gần đúng các giá trị sau bằng xấp xỉ tuyến tính.

(a) $(1.999)^4$.

(d) $\frac{1}{4.002}$.

(b) $\sin 1^\circ$.

(e) $\tan(44^\circ)$.

(c) $\sqrt[3]{1001}$.

(f) $\sqrt{99,8}$.

Bài tập 38. (i) Xấp xỉ f bằng đa thức Taylor bậc n tại a .

(ii) Sử dụng Bất đẳng thức Taylor để ước lượng độ chính xác của xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi x nằm trong đoạn cho trước.

CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG 3.4. ĐL GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

(iii) Kiểm tra kết quả phần (b) bằng đồ thị của $|R_n(x)|$.

Thực hiện các công việc trên cho mỗi hàm số sau ứng với a, n và đoạn cho trước.

(a) $f(x) = \sqrt{x}, a = 4, n = 2, 4 \leq x \leq 4.2$.

(b) $f(x) = x^{-2}, a = 1, n = 2, 0.9 \leq x \leq 1.1$.

(c) $f(x) = x^{2/3}, a = 1, n = 3, 0.8 \leq x \leq 1.2$.

(d) $f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{6}, n = 4, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

3.4 Các định lý giá trị trung bình

Bài tập 39. Hãy kiểm tra hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý Rolle trên đoạn cho trước. Sau đó, tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của định lý Rolle.

(a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, [1, 3]$. (c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, [0, 9]$.

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, [0, 3]$. (d) $f(x) = \cos(2x), [\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$.

Bài tập 40. Cho $f(x) = (x-3)^{-2}$. Chứng tỏ rằng không tồn tại $c \in (1, 4)$ sao cho $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

Bài tập 41. Hãy kiểm tra rằng hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý giá trị trung bình trên khoảng cho trước. Sau đó tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của Định lý giá trị trung bình.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [0, 1]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3]$.

Bài tập 42. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + c = 0 = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$ với mọi số thực c .

3.5 Ứng dụng đạo hàm tính giới hạn (quy tắc l'Hospital)

Bài tập 43. Tính

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{x-1}\right),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - e^x - 1}{1 - e^{x^2}}.$$

3.6 Khai triển Taylor- Maclaurin

Bài tập 44. Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau.

$$(a) f(x) = (1-x)^{-2},$$

$$(d) f(x) = e^{-2x},$$

$$(b) f(x) = \ln(1+x),$$

$$(c) f(x) = \sin(\pi x),$$

$$(e) f(x) = x \cos x.$$

Bài tập 45. Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau quanh điểm a tương ứng.

$$(a) f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, a = 1.$$

$$(e) f(x) = e^{2x}, a = 3.$$

$$(b) f(x) = x - x^3, a = -2.$$

$$(f) f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{2}.$$

$$(c) f(x) = \ln x, a = 2.$$

$$(g) f(x) = \cos x, a = \pi.$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{x}, a = -3.$$

$$(h) f(x) = \sqrt{x}, a = 16.$$

Bài tập 46. (a) Tìm các đa thức Taylor đến bậc 6 của $f(x) = \cos x$ quanh $a = 0$. Vẽ đồ thị f và các đa thức này trên cùng đồ thị.

$$(b) \text{Đánh giá } f \text{ và những đa thức này tại } x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi.$$

(c) Bình luận sự hội tụ của các đa thức này về f .

Bài tập 47. Tìm đa thức Taylor $T_3(x)$ cho hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ quanh $a = 2$. Vẽ f và $T_3(x)$ trên cùng đồ thị.

Chương 4

Tích phân và ứng dụng

4.1 Tích phân

Bài tập 48. Cho $f(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt$. Tìm $f'(0)$.

Bài tập 49. Tính

(a) $\int 1/(2^x + 2^{-x}) dx$.

(b) $\int_1^2 3x^2 \ln x dx$.

Bài tập 50. Tính tích phân

(a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

(b) $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0$.

(c) $\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2-16}}$.

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

(e) $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}} dt$.

(f) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$.

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

(h) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$.

4.2 Ứng dụng tích phân tính diện tích

Bài tập 51. Tính diện tích miền được bao bởi các đường cong đồ thị của các hàm số:

- (a) $f(x) = 2x^3 + 3$ và $g(x) = 4x + 3$. (f) $y = x^2$ và $x = y^2$.
 (b) $f(x) = 4x - 3x^3$ và $g(x) = 2x + 1$. (g) $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3/(2 + x^2)$.
 (c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$ và trục x .
 (d) $y = x(2 - x)$ và $x = 2y$. (h) $y = (1/2)x^2 + 1$ và $y = x + 1$.
 (e) $x^2 = 4y$ và $x = 4y - 2$. (i) $x^2 + y^2 = 1$ và $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
 (j) $y = f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 50$ và đường thẳng l cắt C tại điểm $x = 1$ và $x = 3$.

4.3 Tích phân suy rộng

Bài tập 52. Xác định tích phân hội tụ hay phân kì:

- (a) $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$. (f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
 (b) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$. (g) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$.
 (c) $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$. (h) $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dx$.
 (d) $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3} dx$. (i) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.
 (e) $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$.

Bài tập 53. Xác định tích phân hội tụ hay phân kì:

- (a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$. (b) $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x} dx$.

CHƯƠNG 4. TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG 4.3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

(c) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx.$

(d) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx.$

Bài tập 54. Xác định xem mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kì. Tính giá trị tích phân nếu nó hội tụ:

1. $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t dt$

24. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

2. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx$

13. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$

25. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$

3. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx$

14. $\int_2^{\infty} \frac{1}{v^2+2v-3} dv$

26. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3} dx$

4. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

15. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z} dz$

27. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$

5. $\int_2^{\infty} e^{-5p} dp$

16. $\int_2^{\infty} ye^{-3y} dy$

28. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

6. $\int_{-\infty}^0 2^r dr$

17. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

29. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

18. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-3x^4} dx$

30. $\int_0^5 \frac{w}{w-2} dw$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} (y^3 - 3y^2) dy$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$

31. $\int_0^3 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

20. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$

32. $\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x dx$

10. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

22. $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$

33. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

11. $\int_0^{\infty} \sin^2 \alpha d\alpha$

23. $\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

34. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

Chương 5

Chuỗi

5.1 Chuỗi số thực

Bài tập 55. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (n!)^2}{(2n)!}$$

có hội tụ không? Có hội tụ tuyệt đối không?

Bài tập 56. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

(c)

$$\frac{1}{2\ln 3} + \frac{1}{3\ln 4} + \frac{1}{4\ln 5} + \dots$$

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n+1}$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)$$

Bài tập 57. Dùng Tiêu chuẩn Tích phân để xác định các chuỗi sau hội tụ hay phân kì:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

Bài tập 58. Dùng tiêu chuẩn Leibniz (chuỗi đan dấu) kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của các chuỗi sau:

$$1. \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$2. -\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \dots$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \dots$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$$

14.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{1 + \sqrt{n}}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Bài tập 59. Dùng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối, Cauchy, D'Alembert cho biết chuỗi hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hay phân kì:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1.1)^n}{n^4}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$$

4.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$$

5.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1} \right)^{5n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi/3}{n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

Bài tập 60. Dùng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối, Cauchy, D'Alembert kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{k^2+1}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1+2^n}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sin k}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(1/n)$

25.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$$

29.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$$

26.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$$

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

30.
$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$$

5.2 Chuỗi lũy thừa

Bài tập 61. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3 + 1}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{3n + 4} x^n$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}$$

Bài tập 62. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

5.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n \sqrt{n}}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$
11. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5 \sqrt[n]{n}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, b > 0$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x-a)^n, b > 0$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n (\ln n)^2}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$