GTB2- Khảo sát cực trị hàm hai ẩn

A- CỰC TRỊ TỰ DO

1. Định nghĩa: Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. $f: D \to \mathbb{R}$ và $M(x_0, y_0) \in D$. Ta nói:
   - f đạt cực đại địa phương tại M nếu $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ với mọi (x,y) gần (x_0,y_0).
   - f đạt cực tiểu địa phương tại M nếu $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ với mọi (x,y) gần (x_0,y_0).
   - f đạt cực trị địa phương tại M nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu địa phương tại M

2. Điều kiện cần

   Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. $f: D \to \mathbb{R}$ và $M(x_0, y_0) \in D$. Giả sử tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

   Nếu f đạt cực trị địa phương tại $M(x_0,y_0)$ thì
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$
   Điểm M được gọi là điểm dừng.

3. Điều kiện đủ

   Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. $f: D \to \mathbb{R}$ và $f \in C^2(D)$. Giả sử $M(x_0,y_0) \in D$ có
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$
   Với $h = (s,t) \in \mathbb{R}^2$. Đặt A là dạng toàn phương được xác định bởi:
$$A(s,t) = \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial x} + t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) = s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2st \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$
   Dạng toàn phương $A(s,t)$ thỏa mãn một trong các tính chất sau
   - Dạng toàn phương $A(s,t)$ là xác định dương khi $A(s,t) > 0, \forall (s,t) \neq (0,0)$
   - Dạng toàn phương $A(s,t)$ là xác định âm khi $A(s,t) < 0, \forall (s,t) \neq (0,0)$
   - Dạng toàn phương $A(s,t)$ là nửa xác định dương khi $A(s,t) \ge 0, \forall (s,t) \neq (0,0)$. Và có một $(s_0,t_0) \neq (0,0)$ sao cho $A(s_0,t_0)$
   - Dạng toàn phương $A(s,t)$ là nửa xác định âm khi $A(s,t) \le 0, \forall (s,t) \neq (0,0)$. Và có một $(s_0,t_0) \neq (0,0)$ sao cho $A(s_0,t_0)$
   - Dạng toàn phương $A(s,t)$ là không xác định khi tồn tại $h = (s,t), h' = (s',t')$ sao cho $A(s,t) > 0$ và $A(s',t') < 0$

   Định lý: Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. $f: D \to \mathbb{R}$ và $f \in C^2(D)$. Giả sử $M(x_0,y_0) \in D$ có
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$
   Đặt $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định như trên. Khi đó
   - Nếu $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu địa phương tại M
   - Nếu $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại địa phương tại M
   - Nếu $A(s,t)$ là dạng toàn phương nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm thì chưa thể kết luận về cực trị địa phương tại M. (lúc này dùng định nghĩa để xét)
   - Nếu $A(s,t)$ là dạng toàn phương không xác định thì f không đạt cực trị địa phương. (Điểm M được gọi là điểm yên ngựa).

4. Định lý Sylvester về dạng toàn phương

Cho $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định như trên, Ma trận biểu diễn của $A(s,t)$ là ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Xem các định thức con trên đường chéo chính

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Khi đó,

- Nếu $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ thì $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định dương.
- Nếu $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ thì $A(s,t)$ là dạng toàn phương xác định âm.
- Nếu $\Delta_i \geq 0, \forall i = \overline{1,2}$ và có một $\Delta_i = 0$, thì $A(s,t)$ là dạng toàn phương nửa xác định dương.
- Nếu $(-1)^i \Delta_i \geq 0, \forall i = \overline{1,2}$ và có một $\Delta_i = 0$, thì $A(s,t)$ là dạng toàn phương nửa xác định âm.
- Các trường hợp khác ($\Delta_2 < 0$) thì $A(s,t)$ là dạng toàn phương không xác định.

Ví dụ 1: Xét cực trị địa phương của hàm số: (đề thi năm 2010)

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$$

Giải

Bước 1: Xác định điểm dừng

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2(x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ $(*)$ ta được 3 cặp nghiệm là $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

Vậy f có 3 điểm dừng là $M_1(0,0), M_2(1,1)$ và $M_3(-1,-1)$

Bước 2: Tính các đạo hàm riêng bậc hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$$

- Tại $M_1(0,0)$. Ta có ma trận

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

  $\Delta_1 = -2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

  Vậy, A là dạng toàn phương nửa xác định âm. (không thể xác định được cực đại hay cực tiểu, với trường hợp này ta dùng định nghĩa để xét)

  Ta xét dấu của $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$ trong lân cận của $(0,0)$

  + Xét dãy $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$.khi đó, $\Delta f = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} < 0$

  + Xét dãy $\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$. Khi đó: $\Delta f = \frac{2}{n^4} > 0$

  Vậy, hàm không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$. Do đó, $M_1(0,0)$ là điểm yên ngựa

- Tại $M_2(1,1)$. Ta có ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 10, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96$

Vậy, A là dạng toàn phương xác định dương. Suy ra, f đạt cực tiểu tại $M_2(1,1)$

- Tương tự $M_3(-1,-1)$ cũng là điểm cực tiểu.

Ví dụ 2: Xét cực trị địa phương của hàm số:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 2$$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ $(*)$ ta được 2 cặp nghiệm là $(0,0), (1,1)$

Vậy f có 2 điểm dừng là $M_1(0,0), M_2(1,1)$

Ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \,, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \,, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

- Tại $M_1(0,0)$ ta có ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$

Vậy, A là dạng toàn phương không xác định, suy ra $M_1(0,0)$ là điểm yên ngựa

- Tại $M_2(1,1)$, ta có ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 6, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 25$

Vậy, A là dạng toàn phương xác định dương. Suy ra $M_1(1,1)$ là điểm cực tiểu