5.14. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau trên tập hợp được cho

a) $x^2 + y$ trong hình vuông với các đỉnh $(\pm 1, \pm 1)$.

b) $x^3y^2(1-x-y)$ trong miền $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$.

c) $(x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ trên mặt phẳng.

d) $(x^2+y^2)^{-1}$ trong miền $(x-2)^2+y^2 \leq 1$.

e) $x - x^2 - y^2$ trong miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

f) $\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ trong miền $y \geq 0$.

Bài giải:

a) Đặt $f(x,y) = x^2 + y$. Miền $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$.

Do đó f sẽ có GTLN và GTNN trong miền này.

Với điều kiện của biến x, y ở trên thì $f(x,y) = x^2 + y \leq 1^2 + 1 = 2$

Hơn nữa đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 1, y = 1$.

Do đó, GTLN của f trên miền $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ là 2, đạt được khi $(x,y) = (\pm 1, 1)$

Ta cũng có $f(x,y) = x^2 + y \geq 0^2 - 1 = -1$ và đẳng thức xảy ra khi $x = 0, y = -1$

Do đó GTNN của f trên miền $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ là -1, đạt được khi $(x,y) = (0,-1)$

b) Đặt $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$. Miền $x \leq 0, y \leq 0, x+y \leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$.

Do đó f sẽ có GTLN và GTNN trong miền này.

Trước hết ta sẽ tìm điểm dừng của hàm f trên miền trong của miền $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}\nabla f &= (3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3, 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2) \\ &= (x^2y^2(3-4x-3y), x^3y(2-2x-3y))\end{aligned}$$

Suy ra $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x - 3y = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

Nên sẽ là điểm dừng duy nhất của f trên miền này. Ta có

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{432}$$

Nếu (x, y) nằm trên biên thì hoặc $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $x + y = 1$. Do vậy, $f(x, y)$ sẽ luôn bằng 0 nếu x, y nằm trên biên.

Từ đây, ta có thể kết luận rằng

GTLN của f là $\frac{1}{432}$ đạt được tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

GTNN của f là 0 đạt được trên biên.

c) Đặt $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Ta có

$$\nabla f = \left(2x(1 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}, 2y(3 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}\right)$$

Do đó

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(3 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$f(0,0) = 0, f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}, f(\pm 1, 0) = \frac{1}{e}$$

Vậy GTLN của f là $\frac{3}{e}$ tại $(0, \pm 1)$ và GTNN của f là 0 tại $(0,0)$.

d) Đặt $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ trong miền $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$

Miền $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$ nên trong miền này f sẽ có GTLN, GTNN.

Ta tìm điểm dừng của f trong miền $(x-2)^2+y^2<1$

Ta có

$$\nabla f=\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\nabla f=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Ta có $(0,0)\notin\{(x,y)|(x-2)^2+y^2<1\}$

Vậy trong miền $(x-2)^2+y^2<1$ hàm f không có điểm dừng.

Ta khảo sát f trên D nghĩa là khi $(x-2)^2+y^2=1$

Ta có $x^2+y^2=4x-3$ nên $f(x,y)=\frac{1}{4x-3}$. Ta có $(x-2)^2\leq 1$ nên $1\leq x\leq 3$, hay $1\leq 4x-3\leq 9$. Suy ra :

$$\frac{1}{9}\leq f(x,y)\leq 1$$

Vậy GTLN của f là 1 tại (1,0) và GTNN của f là $\frac{1}{9}$ tại (3,0)

e) Đặt $f(x,y)=x-x^2+y^2$ trên miền $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1$

Miền $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$ nên f có GTLN và GTNN.

Ta tìm điểm dừng của f trên miền $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1$. Ta có

$$\nabla f=(1-2x,2y)$$

$$\nabla f=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=0\end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2},0\right)\in\{(x,y)|0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\}$$

Ta có $f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{4}$.

Ta khảo sát f trên biên $x=0$ hoặc $x=2$, $y=0$ hoặc $y=1$

$$f(0,0) = 0, f(0,1) = 1, f(2,0) = -2, f(2,1) = -1$$

Vậy GTLN của f là 1 tại $(0,1)$ và GTNN của f là -2 tại $(2,0)$.

f) Đặt $f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

Trước hết ta sẽ tìm điểm dừng của hàm f trên miền trong của miền $y \geq 0$

Ta có

$$\nabla f = \left(\frac{y^2 - x^2 + 2xy + 1}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2 - 2xy - 1}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 + 2xy + 1 = 0 \\ y^2 + x^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $y \geq 0$ ta tìm được điểm dừng duy nhất của f là $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tiếp theo ta sẽ khảo sát f trên biên, tức là khi $y = 0$. Khi đó $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức $-(1+x^2) \leq 2x \leq 1 + x^2$ ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

Ta có $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ nên f đạt GTLN trên biên là $\frac{1}{2}$ tại $(1,0)$

$\frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$ nên f đạt GTNN trên biên là $-\frac{1}{2}$ tại $(-1,0)$

Do miền xác định của f không bị chặn, để có thể khẳng định rằng $\frac{1}{2}$ là GTLN và $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ là GTNN của f, ta cần chỉ ra thêm $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$ nếu $y \geq 0$

Thật vậy, khi $y \geq 0$

$$\frac{x-y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y + y^2 + (x-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Mặt khác

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy, GTLN của f là $\frac{1}{2}$ đạt được tại $(0,1)$ và GTNN của f là $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ tại $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$