TÓM TẮT PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
CHƯƠNG 9 VÀ 17

A. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến:

$$y' = P(x).Q(y) \qquad (1a)$$

Cách giải: đưa (1a) về dạng $\frac{y'}{Q(y)} = P(x)$, suy ra $\int \frac{y'}{Q(y)}dx = \int P(x)dx$, từ đây sẽ xuất hiện một phương trình xác định ẩn hàm (implicit) hoặc biểu thức tường minh (explicit formula) của y theo biến x.

Dạng biến thể của (1a):

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2a)$$

trong đó $f\left(\frac{y}{x}\right)$ là một biểu thức theo $\frac{y}{x}$.

Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, thay vào (2) ta được

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \qquad (3a)$$

* *Trường hợp* 1, nếu $f(u) \equiv u$, nghĩa là (2a) có dạng $y' = \frac{y}{x}$, chính là dạng phương trình (1a).

* *Trường hợp* 2, nếu a_0 là nghiệm (số thực) của phương trình $f(a) - a = 0$ thì hàm số $y = a_0 x$ sẽ thỏa phương trình (2a), ta được một nghiệm riêng (particular solution) của (2a).

* *Trường hợp* 3, xét $f(u) - u$ không đồng nhất 0 thì (3a) trở thành

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{u'}{f(u) - u}dx = \int \frac{1}{x}dx.$$

Bài tập

Giải bài tập mục 9.3 Stewart: 1-9; 11-18; 19-22; 29-32. Ngoài ra giải thêm các bài tập sau:

1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$

2) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$

3) $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$

4) $xy' = x + 2y$

5) $(x^2 - xy)y' = -y^2$

6) $xyy' - y^2 = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}$

7) $xy' + y\ln x = y\ln y$ thỏa $y(1) = 1$.

B. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \qquad (1b)$$

Cách giải: nhân hai vế của (4) với $e^{F(x)}$, trong đó $F(x) = \int P(x)dx$ là một nguyên hàm của $P(x)$. Khi đó (4) có dạng

$$\left(ye^{F(x)}\right)' = Q(x).e^{F(x)} \Rightarrow ye^{F(x)} = \int Q(x).e^{F(x)}dx\,,$$

từ đó giải ra y.

Bài tập

Giải các bài tập mục 9.5 Stewart: 1-4; 5-14; 15-20.

C. <u>Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2, hệ số hằng</u>:

$$ay'' + by' + cy = G(x) \qquad (1c)$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$, $G(x)$ là hàm số cho trước. Phương trình (5) được gọi là phương trình không thuần nhất (nonhomogeneous equation). Phương trình thuần nhất tương ứng của (5) (complementary equation of (5)) là

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2c)$$

Phương trình đặc trưng (characteristic equation) là

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (3c)$$

1. *Cách giải phương trình* (2c):

a) Nếu phương trình đặc trưng (3c) có nghiệm kép r_0 thì nghiệm tổng quát (general solution) của (2c) là

$$y_c = c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}\,,$$

trong đó c_1, c_2 là hai hằng số tùy ý. Ký hiệu y_c ám chỉ chữ *complementary equation* (2c).

b) Nếu phương trình (3c) có hai nghiệm thực phân biệt r_1, r_2 thì nghiệm tổng quát của (2c) là

$$y_c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

c) Nếu phương trình (3c) có hai nghiệm phức $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ thì nghiệm tổng quát của (2c)

$$y_c = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)\,.$$

2. *Cách giải phương trình* (1c):

Nếu y_c là nghiệm tổng quát của (2c) và y_p là một nghiệm riêng (particular solution) thì nghiệm tổng quát của (1c) là

$$\boxed{y(x) = y_c(x) + y_p(x)}$$

Cách tìm một nghiệm riêng của (1c) như sau:

a) Nếu hàm số $G(x) = P_n(x)e^{rx}$, trong đó P_n là đa thức bậc n theo biến x. Ta có ba trường hợp sau

* Trường hợp r không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3c) thì y_p có dạng $y_p(x) = Q_n(x)e^{rx}$, trong đó Q_n là đa thức bậc n được tìm bằng phương pháp hệ số bất định (the method of undetermined coefficients) khi thay dạng đó vào (1c).

* Trường hợp r là nghiệm (thực) đơn của của (3c) thì y_p có dạng $y_p = xQ_n(x)e^{rx}$.

* Trường hợp r là nghiệm kép của (3c) thì y_p có dạng $y_p = x^2 Q_n(x)e^{rx}$.

b) Nếu hàm số $G(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$ thì ta đặt $s = \max\{m, n\}$ và ta có hai trường hợp sau

* Trường hợp $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm phức của phương trình (3c) thì $y_p = e^{\alpha x}\left[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right]$.

* Trường hợp $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm phức của (3c) thì $y_p = xe^{\alpha x}\left[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right]$.

c) Nếu hàm số *G(x)* không thuộc hai dạng a) b) ở trên thì ta dùng phương pháp biến thiên hằng số (the method of variation of parameters): giả sử nghiệm tổng quát của (2c) có dạng $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ thì ta tìm một nghiệm riêng của (1c) là $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, nghĩa là ta thay hằng số c_1 và c_2 bởi hai hàm số $u_1(x)$ và $u_2(x)$ thỏa hệ phương trình sau

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = G \end{cases}.$$

Bài tập

Làm bài mục 17.2 Stewart: 1-10; 13-18; 19-22; 23-28.