GIẢI TÍCH B1

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 3
Chuỗi số và chuỗi hàm

I. Chuỗi số
II. Chuỗi hàm

1. Chuỗi số

Khái niệm

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (1)$$

được gọi là chuỗi số

Trong đó $u_1, u_2, \ldots$ gọi là các số hạng của chuỗi

u_n số hạng tổng quát của chuỗi

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ tổng riêng thứ n của chuỗi

1. Chuỗi số

Khái niệm

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn thì S là tổng của chuỗi và chuỗi hội tụ . Ngược lại chuỗi phân kỳ.

$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ gọi là phần dư của chuỗi

1. Chuỗi số

VD1

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots (a \neq 0, q \neq 1)$

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

$$|q| < 1, \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

1. Chuỗi số

VD2

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots (a \neq 0, q \neq 1)$

Khi đó chuỗi hội tụ và $S = \dfrac{a}{1-q}$

$|q| \geq 1$ chuỗi phân kỳ

1. Chuỗi số

VD3

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

1. Chuỗi số

<u>Điều kiện cần của chuỗi hội tụ</u>

Nếu chuỗi (1) hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Hệ quả Nếu số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi phân kỳ

VD4 Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{n}{n+1} + \ldots$

Phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

1. Chuỗi số

Điều kiện cần và đủ chuỗi hội tụ

Điều kiện cần và đủ để chuỗi hội tụ là với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi

$p > q \geq n_0$ ta có $\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| < \varepsilon$

1. Chuỗi số

Tính chất chuỗi hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và tổng là S thì $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ hội tụ và tổng cS

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

1. Chuỗi số

Tính chất chuỗi hội tụ

Tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạng số hạng đầu tiên

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $u_n \le v_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ

1. Chuỗi số

VD 5

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ hội tụ vì $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}, \forall n > 1$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ

1. Chuỗi số

<u>Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương</u>

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ trong đó k hữu hạn và khác 0 thì cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc phân kỳ

1. Chuỗi số

VD6

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn d'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

Nếu k<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu k>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

Nếu k=1 không có kết luận

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD 7

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD 8

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$

Nếu k<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu k>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD 9

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD 10

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Chuỗi hội tụ

1. Chuỗi số

Tiêu chuẩn tích phân đối với chuỗi số dương

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với các số hạng giảm và hàm f liên tục giảm sao cho $f(1) = u_1, \ldots, f(n) = u_n$

Khi đó $\int_1^{+\infty} f(x)dx, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc phân kỳ

1. Chuỗi số

VD11

Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

So sánh với $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ hội tụ khi p>1 nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ cũng hội tụ p>1

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ phân kỳ p<=1 nên chuỗi cũng phân kỳ

1. Chuỗi số

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ là những số dương

1. Chuỗi số

<u>Định lý Leibnitz</u>

Cho chuỗi đan dấu có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ là những số dương

Nếu các số hạng giảm $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots.$

Và $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ thì chuỗi hội tụ. Khi đó tổng của chuỗi là số dương và không vượt quá số hạng đầu tiên

1. Chuỗi số

VD12

Cho chuỗi đan dấu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Vì các số hạng giảm $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$

Và $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

1. Chuỗi số

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Chuỗi có dấu bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$ được gọi là hội tụ

tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (3)$ hội tụ

1. Chuỗi số

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$ hội tụ

nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (3)$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$

được gọi là chuỗi nửa hội tụ

2. Chuỗi hàm

Định nghĩa

Chuỗi hàm là chuỗi mà số hạng tổng quát là hàm của biến số x

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots (4)$$

Tập hợp những x mà chuỗi hàm hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm đó

2. Chuỗi hàm

Định lý Weierstrass

Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ thỏa $|u_n(x)| \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều.

2. Chuỗi hàm

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi hàm có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...(5)$

được gọi là chuỗi lũy thừa

2. Chuỗi hàm

<u>Định lý Abel</u>

- Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ với trị số xác định $x_0 \neq 0$ thì nó hôi tụ tuyệt đối với mọi trị số x thỏa $|x| < x_0$
- Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ với trị số x_0 thì nó phân kỳ với mọi trị số x thỏa $|x| > x_0$

Khi đó $R = |x_0|$ gọi là bán kính hội tụ

2. Chuỗi hàm

Miền hội tụ

Nếu chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ là R thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $x \in \left(-{}^\circ, {}^\circ\right)$ và có thể lấy thêm hai điểm đầu mút tùy theo các chuỗi số

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-{}^\circ\right)^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left({}^\circ\right)^n$ hội tụ hay phân kỳ

2. Chuỗi hàm

Giải bài toán tìm bán kính và miền hội tụ

Tiêu chuẩn d'Alembert

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

Khi đó, bán kính hội tụ là

$$R = \begin{cases} 0, L = \infty \\ \infty, L = 0 \\ \frac{1}{L}, L > 0 \end{cases}$$

2. Chuỗi hàm

Giải bài toán tìm bán kính và miền hội tụ

Tiêu chuẩn d'Alembert

VD13 Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = 1$$

Vậy bán kính hội tụ R=1

2. Chuỗi hàm

Giải bài toán tìm bán kính và miền hội tụ

Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

Khi đó, bán kính hội tụ là

$$R = \begin{cases} 0, L = \infty \\ \infty, L = 0 \\ \dfrac{1}{L}, L > 0 \end{cases}$$

2. Chuỗi hàm

Giải bài toán tìm bán kính và miền hội tụ

Tiêu chuẩn Cauchy

VD14 Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^n$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}$$

Vậy bán kính hội tụ là R=2

2. Chuỗi hàm

VD15

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.nx^n$

Theo tiêu chuẩn d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n.(n+1)}{(-1)^{n-1}n}\right| = 1 \qquad \Rightarrow R = 1$$

Chuỗi hội tụ trong khoảng (-1,1)

Xét tại x=1. ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n = -\sum_{n=1}^{\infty} n$ phân kỳ

Xét tại x=-1. ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}n = -\sum_{n=1}^{\infty} n$ phân kỳ

VD16

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

Bài tập chương 3

Bài 1: Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Bài tập chương 1

Bài 2: Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số và tính tổng(nếu có)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

2. $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}.3^{1-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Bài tập chương 1

Bài 3: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + \cdots$

2. $\frac{2}{1} + \frac{2}{1}.\frac{5}{5} + \frac{2.5.8}{1.5.9} + \cdots + \frac{2.5.8.\cdots(3n-1)}{1.5.9.\cdots(4n-3)} + \cdots$

3. $\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \cdots$

4. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} + \cdots$

Bài tập chương 1

Bài 4: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$$