Chương 1:

Ma trận

và Hệ phương trình tuyến tính

Nội dung

1. Ma trận

❖ **Định nghĩa ma trận:**

Ma trận cỡ m$\times$n là bảng số (thực hoặc phức) hình chữ nhật có m dòng và n cột .

$$\begin{array}{ccc} & \text{Cột } j & \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{Dòng } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

1. Ma trận

Ví dụ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

A là ma trận thực cỡ 2x3 gồm 2 dòng và 3 cột

Phần tử của A: $a_{11} = 1; a_{12} = 4; a_{13} = -2; a_{21} = 0; a_{22} = 2; a_{23} = 5$

Ví dụ 2

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & i \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

1. Ma trận

Ma trận A có m dòng và n cột thường được ký hiệu bởi $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ m×n trên trường K (K là R hoặc C) được ký hiệu là $M_{m \times n}(K)$

Định nghĩa ma trận không

Ma trận có tất cả các phần tử là không được gọi là ma trận không, ký hiệu 0, ($a_{ij} = 0$ với mọi i và j).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận

Phần tử khác không đầu tiên của một hàng kể từ bên trái được gọi là phần tử cơ sở của hàng đó.

Phần tử cơ sở

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Không là phần tử cơ sở

Dòng không có phần tử cơ sở

Định nghĩa ma trận dạng bậc thang

1. Hàng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng
2. Phần tử cơ sở của hàng dưới nằm bên phải (không cùng cột) so với phần tử cơ sở của hàng trên.

1. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Không là ma trận bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Không là ma trận bậc thang

1. Ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Là ma trận dạng bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Là ma trận dạng bậc thang

1. Ma trận

Định nghĩa ma trận chuyển vị

Chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $A^T = (a_{ij})_{n\times m}$ cỡ

n x m thu được từ A bằng cách chuyển dòng thành cột.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 3} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

1. Ma trận

Định nghĩa ma trận vuông

Nếu số dòng và cột của ma trận A bằng nhau và bằng n, thì A được gọi là ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường số K được ký hiệu bởi $M_n(\mathrm{K})$

Các phần tử a_{11}, a_{22},…,a_{nn} tạo nên đường chéo chính của ma trận vuông A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Ma trận đường chéo là ma trận có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0. Lúc đó ma trận đường chéo được ký hiệu: diag(a_{11}, a_{22},…,a_{nn}) với a_{ii} là các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Định nghĩa ma trận tam giác trên

Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0, \ \forall i > j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận tam giác dưới

Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0, \ \forall i < j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận đơn vị

Ma trận chéo với các phần tử đường chéo đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị, tức là ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$; và $a_{ii} = 1$ với mọi i).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận đối xứng thực

Ma trận vuông thực A thỏa $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i = 1,….n và j =1,…,n được gọi là ma trận đối xứng (tức là, nếu $A = A^T$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{3} \\ -1 & 4 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Phép biến đổi sơ cấp

Các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng

1. Nhân một hàng tùy ý với một số khác không

$$h_i \to \alpha h_i; \alpha \neq 0$$

2. Cộng vào một hàng một hàng khác đã được nhân với một số tùy ý

$$h_i \to h_i + \beta h_j; \forall \beta$$

3. Đổi chổ hai hàng tùy ý

$$h_i \leftrightarrow h_j$$

2. Phép biến đổi sơ cấp

Ma trận A được gọi là tương đương dòng với ma trận B nếu có một dãy liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp trên dòng biến A thành B. Ký hiệu, A~B.

Định lý 1

Mọi ma trận đều có thể đưa về ma trận dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng.

Chú ý

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng ta thu được nhiều ma trận bậc thang khác nhau

2. Phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa ma trận sau đây về ma trận dạng bậc thang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Phép biến đổi sơ cấp

Bước 1. Bắt đầu từ cột khác không đầu tiên từ bên trái. Chọn phần tử khác không tùy ý làm phần tử cơ sở.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 2. Dùng bđsc đối với hàng, khử tất cả các phần tử còn lại của cột.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ \cancel{2} & 3 & -1 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & 2 & -3 & 7 & 4 \\ \cancel{-1} & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - 3h_1 \\ h_4 \to h_4 + h_1}]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Phép biến đổi sơ cấp

Bước 3 . Che tất cả các hàng từ hàng chứa phần tử cơ sở và những hàng trên nó. Áp dụng bước 1 và 2 cho ma trận còn lại

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - 2h_2]{h_3 \to h_3 + h_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4 \to h_4 + h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Hạng của ma trận

Định nghĩa hạng của ma trận

Giả sử A_{mxn} tương đương dòng với ma trận bậc thang E (hay E là một dạng bậc thang của A). Khi đó ta gọi hạng của ma trận A là số các hàng khác không của ma trận bậc thang E.

r(A) = số hàng khác không của ma trận bậc thang E

Chú ý:

Ma trận A có thể có nhiều dạng bậc thang nhưng số dòng khác không của các dạng bậc thang đó là như nhau. Do vậy, hạng của ma trận là duy nhất.

3. Hạng của ma trận

Ví dụ: Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Bài tập!

1. Sử dụng biến đổi sơ cấp, tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Tìm hạng của ma trận sau

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Hạng của ma trận

Ví dụ:

Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho r(A) =3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & m-3 & m-5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & m-1 & m-8 \end{pmatrix}$$

r(A) = 3 với mọi giá trị m.

3. Hạng của ma trận

Bài tập!

1.Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho r(A) =2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để cho r(A) = 3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

4. Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính.

Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_m & = & b_m \end{cases}$$

a_{11}, a_{12}, …, a_{mn} được gọi là hệ số của hệ phương trình.

b_1, b_2, …, b_m được gọi là hệ số tự do của hệ phương trình.

4. Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa hệ thuần nhất.

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do $b_1, b_2, \ldots, b_m$ đều bằng 0.

Định nghĩa hệ không thuần nhất.

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là không thuần nhất nếu ít nhất một trong các hệ số tự do $b_1, b_2, \ldots, b_m$ khác 0.

Nghiệm của hệ là một bộ n số $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sao cho khi thay vào từng phương trình của hệ ta được những đẳng thức đúng.

4. Hệ phương trình tuyến tính

Một hệ phương trình tuyến tính có thể:

1. vô nghiệm, ← Hệ không tương thích
2. có duy nhất một nghiệm
3. Có vô số nghiệm

Hệ tương thích

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng cùng chung một tập nghiệm.

Để giải hệ phương trình ta dùng các phép biến đổi hệ về hệ tương đương, mà hệ này giải đơn giản hơn.

4. Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa phép biến đổi tương đương

Một phép biến đổi được gọi là tương đương nếu biến một hệ phương trình về một hệ tương đương.

Có 3 phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình :

1. Nhân hai vế của phương trình với một số khác không.
2. Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã được nhân với một số tùy ý.
3. Đổi chổ hai phương trình.

Chú ý: Chúng ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng các phép biến đổi trên là các phép biến đổi tương đương.

4. Hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$

$$\xrightarrow[-h_1+h_3]{-2h_1+h_2} \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + 3z = 3 \\ -3y - z = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-h_2+h_3} \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + 3z = 3 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất: x = 1; y = -1; z = 0

4. Hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_m & = & b_m \end{cases}$$

Khi đó,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *được gọi là ma trận hệ số*

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ *được gọi là ma trận hệ số mở rộng*

4. Hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$

Ma trận hệ số: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Ma trận mở rộng: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-h_1+h_3]{-2h_1+h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-h_2+h_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x=1} \\ \boxed{y=-1} \end{array}$$

$\boxed{Z=0}$

4. Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa ẩn cơ sở và ẩn tự do.

Ẩn cơ sở là ẩn tương ứng với cột chứa phần tử cơ sở.
Ẩn tự do là tương ứng với cột không có phần tử cơ sở.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{BĐSC Dòng}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right]$$

x_1, x_3, x_4: là các ẩn cơ sở

x_2: ẩn tự do

Định lý Kronecker Capelli

Nếu $r(A|b) \neq r(A)$, thì hệ AX = b vô nghiệm.

Nếu $r(A|b) = r(A)$, thì hệ AX = b có nghiệm.

Nếu $r(A|b) = r(A) =$ số ẩn, thì hệ AX = b có nghiệm duy nhất.

Nếu $r(A|b) = r(A)$ < số ẩn, thì hệ AX = b có vô số nghiệm.

4. Hệ phương trình tuyến tính

Sử dụng biến đổi sơ cấp đối với hàng để giải hệ

1. Lập ra ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A \mid b)$
2. Dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa ma trận mở rộng về ma trận dạng bậc thang. Kiểm tra hệ có nghiệm hay không.
3. Viết hệ phương trình tương ứng với ma trận bậc thang
4. Giải hệ phương trình ngược từ dưới lên, tìm ẩn x_n, sau đó $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Ví dụ

Giải các hệ phương trình sau đây với các ma trận mở rộng cho trước.

$$a.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right], \quad b.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right],$$

$$c.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad c.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 1 \\ -x - 4y + z = 6 \\ x + 3y - 3z = -9 \end{cases}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} & & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & + & 9z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

ẩn cơ sở: x_1, x_2, x_5 ẩn tự do: x_3, x_4

Nghiệm tổng quát: $$\begin{cases} x_1 = -24 + 2\alpha - 3\beta \\ x_2 = -7 + 2\alpha - 2\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình biết ma trận mở rộng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Bài tập!

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & m & m+1 \end{array}\right]$$

Bài tập!

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & m & m-1 \end{array}\right],$$

Định nghĩa hệ thuần nhất.

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do $b_1, b_2, \ldots, b_m$ đều bằng 0.

Hệ tuyến tính thuần nhất luôn luôn có một nghiệm bằng không $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Hệ thuần nhất chỉ có nghiệm duy nhất bằng không khi và chỉ khi $r(A) = n =$ số ẩn.

Hệ thuần nhất $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n$.

Hệ thuần nhất $AX = 0$, với A là ma trận vuông có nghiệm không tầm thường (nghiệm khác 0) khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài tập!

Giữa những nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

tìm nghiệm thỏa biểu thức y – xy = 2z