VI TÍCH PHÂN 1C

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 3
Phép tính vi phân hàm một biến

I. Đạo hàm
II. Vi phân
III. Đạo hàm và vi phân cấp cao
IV. Tối ưu hoá hàm 1 biến
V. Bài tập

Đạo hàm

- Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong (a;b) và $x_0 \in (a;b)$

Nếu $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tồn tại thì được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0)$

Nghĩa là $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Đạo hàm

- Định nghĩa

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0; \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Đạo hàm

- **Đạo hàm một bên**

Cho hàm số f xác định trên $[x_0; a)$.

Nếu $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì được gọi là

đạo hàm bên phải của hàm số tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0^+)$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Đạo hàm

▪Đạo hàm một bên

Cho hàm số f xác định trên $[x_0; a)$.

Nếu $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tồn tại thì được gọi là

đạo hàm bên trái của hàm số tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0^-)$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Đạo hàm

$f'(x_0)$ tồn tại $\Leftrightarrow f'(x_0^-), f'(x_0^+)$ tồn tại và $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

VD1: Cho hàm số $y = |x|$. Tính $f'(0)$

Đạo hàm

▪Ý nghĩa của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C).
$M(x_0; f(x_0)) \in (C)$.

$f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M

Đạo hàm

- Các quy tắc tính đạo hàm

$$1.(c)' = 0$$

$$2.(c.u)' = c.u'$$

$$3.(u+v)' = u' + v'$$

$$4.(u.v)' = u'v + uv'$$

$$5.\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Đạo hàm

- Bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp

1. $(\mathrm{c})' = 0$
2. $(\mathrm{x}^{\alpha})' = \alpha.\mathrm{x}^{\alpha-1}; (\mathrm{x})' = 1; (\sqrt{\mathrm{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}; \left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
3. $(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})' = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}\ln\mathrm{a}; (\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$
4. $(\log_{\mathrm{a}}\mathrm{x})' = \frac{1}{\mathrm{x}.\ln\mathrm{a}}; (\ln\mathrm{x})' = \frac{1}{\mathrm{x}}$

Đạo hàm

- Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp

5. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Đạo hàm

- Đạo hàm hàm hợp

<u>VD2:</u> Tính đạo hàm của hàm số

$$y = arc\cot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Đạo hàm

▪ Đạo hàm hàm ngược

Cho hàm số $y = f^{-1}(x)$. Đạo hàm của hàm ngược được xác định bởi

$$y_x' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{x_y'}$$

Đạo hàm

- Đạo hàm hàm ngược

VD3: Cho hàm số $y = \arccos x \quad -1 < x < 1$

$$\left(\arccos x\right)' = \frac{1}{\left(\cos y\right)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Đạo hàm

- Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số

Cho hàm số phụ thuộc tham số

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

Đạo hàm được xác định bởi

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Đạo hàm

- Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số

VD4: Cho hàm số

$$x = \cos^2 t, y = \sin t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tính y'_x

Đạo hàm

- **Đạo hàm hàm ẩn**

Hàm y = f(x) được cho dưới dạng

$$F(x, y) = 0$$

Đạo hàm của hàm y = f(x) được xác định bởi

$$y'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

Đạo hàm

- Đạo hàm hàm ẩn

VD5: Cho $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$. Tính y'

Vi Phân

- Định nghĩa

Hàm f(x) khả vi tại x_0 nếu

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

Khi đó, tích $f'(x_0)\Delta x$ gọi là vi phân của f(x) tại x_0

Ký kiệu:

$$df=f'(x)\Delta x=f'(x).dx$$

Vi Phân

VD6: Tính vi phân của hàm $y = f(x) = 2^{\sqrt{\tan x}}$

$$dy = 2^{\sqrt{\tan x}}.\ln 2.(\sqrt{\tan x})'.dx = \frac{2^{\sqrt{\tan x}}.\ln 2}{2\sqrt{\tan x}.\cos^2 x}.dx$$

Vi Phân

<u>Các quy tắc tính vi phân</u>

Vi phân của tổng, tích, thương

d(u+v)=d(u)+d(v)

d(uv)=vdu+udv

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0)$$

Vi Phân

Áp dụng vi phân tính gần đúng

Cho f(x) khả vi tại x_0 khi đó:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

Bỏ qua VCB bậc cao ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

Hay $$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Vi Phân

VD7: Tính gần đúng $\cos 61^0$

$$y = f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}, \Delta x = \frac{\pi}{180}$$

$$f'(x) = -\sin x, f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 61^0 = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}) \approx \cos\frac{\pi}{3} + f'(\frac{\pi}{3}).\frac{\pi}{180}$$

$$\approx \frac{1}{2} + -\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180} \approx 0.484$$

VD8: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt{4,001}$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

Đạo hàm cấp cao

Nếu f(x) có đạo hàm f'(x) thì f'(x) gọi là đạo hàm cấp 1

Nếu f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu f''(x)

…

Đạo hàm của đạo hàm cấp n-1 gọi là đạo hàm cấp n, ký hiệu $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

VD 9 : Cho y= sinx. Tính $y^{(n)}(x)$

VD 10: Cho y= cosx. Tính $y^{(n)}(x)$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

Vi phân cấp cao

Nếu f(x) khả vi thì dy=f'(x).dx gọi là vi phân cấp 1

Vi phân của dy gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu $d^2y = y''(x).dx^2$

…

Tổng quát vi phân cấp n, ký hiệu $d^n y = y^{(n)}(x).dx^n$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Định lý 1 Cho f(x),g(x) xđ, khả vi tại lân cận x = x_0 (có thể trừ tại điểm x_0)

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0, g'(x_0) \neq 0$

Ở lân cận x = x_0

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Quy tắc L'Hospital

VD11: Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$

Quy tắc L'Hospital

VD12: Tính

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4.x + 3}$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$

Định lý 2 Cho f(x),g(x) xđ, khả vi tại lân cận x = x_0 (có thể trừ tại điểm x_0)

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty, g'(x_0)\neq 0$

Ở lân cận x = x_0

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

VD13: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0)$

VD14: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

VD15: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Khai triển Taylor

Cho f(x) khả vi đến cấp n+1 trong khoảng (a,b). Khi đó với $x_0, c \in (a,b)$

Ta có công thức Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

- <u>Khai triển Taylor</u>

Đặt $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (1) = o((x-x_0)^n)$

gọi là sai số tuyệt đối

c nằm giữa x và x_0

Công thức (1) được gọi là khai triển Taylor của hàm f tại $x = x_0$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

▪Khai triển Taylor

Khi $x_0 = 0$: (1) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (2)$$

$$0 < \theta < 1$$

(2) được gọi là công thức MacLaurin

Đạo hàm và vi phân cấp cao

- **Khai triển Taylor**

Khi $x_0 = 0$: (1) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

(2) được gọi là công thức MacLaurin

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Công thức MacLaurin của 1 số hàm sơ cấp

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa cực tri

Cho hàm f(x) xác định trên (a;b)

- Nếu $\exists\varepsilon > 0$: $f(x) \le f(x_0), \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ thì f đạt cực đại địa phương tại x_0
- Nếu $\exists\varepsilon > 0$: $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại x_0

Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa cực trị

Cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Fermat

Nếu hàm f(x) liên tục $[a;b]$,đạt cực trị địa phương tại điểm $c \in (a;b)$ và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Rolle

Nếu hàm f(x) liên tục $[a; b]$ và khả vi $(a; b)$ và $f(b) = f(a)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Các định lý giá trị trung bình

<u>Định lý Lagrange</u>

Nếu hàm f(x) liên tục $[a;b]$ và khả vi $(a;b)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a;b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Định lý Cauchy

Nếu các hàm f(x),g(x) liên tục $[a; b]$, khả vi $(a; b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Tối ưu hoá hàm một biến

- Tối ưu hóa các hàm KT phụ thuộc 1 biến

VD16: Để sản suất ra một sản phẩm phải tốn một khoản chi phí trung bình: $\bar{C} = 19Q - 180 + \frac{5}{Q}$

Sản phẩm được bán ra thị trường với mức giá là P đồng, biết rằng giá bán phụ thuộc vào lượng hàng bán ra như sau: P=20-Q

Tối ưu hoá hàm một biến

a. Tính giá trị cận biên của hàm doanh thu MR(Q) khi P = 12 và giải thích ý nghĩa.

b. Tìm giá bán của sản phẩm để lợi nhuận đạt tối đa.

Tối ưu hoá hàm một biến

- Tối ưu hóa các hàm phụ thuộc 1 biến

VD17: Một hồ bị nhiễm khuẩn và được xử lý bằng một hoá chất kháng khuẩn. Sau t ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hoá bởi hàm $N(t) = 32\left(\frac{t}{4} - 2\ln\frac{t}{5}\right), 1 \leq t \leq 15$

Trong khoảng thời gian này, cho biết số lượng vi khuẩn cao nhất và thấp nhất là bao nhiêu và xảy ra khi nào?

Bài tập

Bài 1 Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ b. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+\sin 3x+\sin^2 x}{\sin 4x+\sin x-\tan^3 x}$

Bài 2 Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a. $y = \dfrac{1}{1-x}$ b. $y = e^{-3x}$

Bài tập

Bài 3 Viết khai triển Maclaurin đến số hạng x^3 của

a. $y = e^{\sin x}$ b. $y = 3^x$ c. $y = \tan(\sin x)$

Bài Tập

Bài 4 Tính vi phân của các hàm số sau

$$a)\ y = x^{x}$$

$$b)\ y = (3x)^{x}$$

$$c)\ y = \frac{1}{(x^{2}+1)^{\frac{1}{3}}}$$

Bài Tập

Bài 5 Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

a) Viết khai triển Maclaurin của hàm số f(x) đến số hạng chứa x^3

b) Áp dụng kết quả câu a) tính gần đúng $\sqrt{0,98}$

Bài Tập

Bài 6

a) Viết khai triển Maclaurin của hàm số $y = \arcsin x$ đến số hạng x^3

b) Áp dụng kết quả câu a) tính $\lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$

Bài Tập

Bài 7 Tính gần đúng $\cos 29^0$ biết $\sqrt{3} = 1{,}7321, \pi = 3{,}1416$

Bài Tập

Bài 8 Tính gần đúng arctan1,01

Bài 9 Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \to 1^+} (x - 1)^{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$

Bài Tập

Bài 10 Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4}$

a) Viết khai triển Taylor của hàm số f(x) quanh điểm $x = 2$ đến cấp 3

b) Áp dụng tính gần đúng $\sqrt[3]{2{,}002^2 + 4}$

Bài Tập

Bài 11 Một quán cà phê phục vụ buổi sáng có lượng khách sau khi thống kê đạt xấp xỉ bởi hàm số

$$F(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{25}{2}t^2 + 144t - \frac{815}{2}, 6 \le t \le 12$$

Trong đó t là thời gian tính theo giờ và f(t) là lượng khách tại t tính theo người.

Tìm thời điểm quán đông khách nhất và số lượng khách đó là bao nhiêu?(Đề thi học kỳ hè 2018)