BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ

GIÁO TRÌNH

VI TÍCH PHÂN C

Biên soạn:

LÊ PHƯƠNG QUÂN
(Khoa Khoa Học)

2007

Lời nói đầu

Giáo trình **VI TÍCH PHÂN C** được biên soạn với mục đích đáp ứng nhu cầu tìm hiểu *sâu hơn* về các phép tính giới hạn, đạo hàm, tích phân của hàm số một hoặc nhiều biến thực và bước đầu tìm hiểu một số ứng dụng của chúng, *so với* những yêu cầu về kiến thức Toán Giải tích cần được trang bị cho sinh viên khối ngành Sinh học. Mục đích này cũng nhằm phục vụ trước tiên là cho yêu cầu đổi mới phương pháp giảng dạy và yêu cầu tăng cường thời lượng và nội dung tự học cho sinh viên.

Với mục đích trên, Giáo trình được bố cục theo một cấu trúc nhất quán khi giới thiệu một khái niệm: trình bày định nghĩa chính xác, các tính chất cơ bản, một số ví dụ ứng dụng có liên quan và những gợi ý củng cố hoặc mở rộng. Thông thường, những gợi ý như vậy sẽ được đặt trong những "Chú ý" và người đọc nên dành thời gian trả lời (hay chứng minh) những câu hỏi (hay những kết quả) được đặt ra trong đó.

Giáo trình được chia thành 5 chương với những nội dung cụ thể sau:

Chương 1: Củng cố kiến thức về số thực qua việc xây dựng tập $\mathbb{R}$ từ tập $\mathbb{Q}$ dựa trên định lý về thuật toán chia Euclide. Các hàm số sơ cấp được trình bày trên nền tảng "ánh xạ" và các phép toán lượng giác, phép lấy giá trị hàm mũ thực đã được xây dựng chi tiết ở bậc học Trung học phổ thông. Sự kế thừa những nội dung khó, lại được xây dựng dưới hình thức không chặt chẽ như vậy, vẫn có lợi ích nhất định vì đã rất quen thuộc. Khái niệm "giới hạn" và một số "quá trình" được trình một cách tỉ mỉ nhằm giúp người đọc nắm vững khái niệm nền tảng này trên tinh thần "hiểu được tính hợp lý của những quan điểm về khoảng cách và quan hệ thứ tự". Mối quan hệ giữa giới hạn hàm số và giới hạn dãy số được đề cập vì sự thuận tiện trong tính toán và cả trong chứng minh. Việc thiết lập quan hệ giữa các "vô cùng bé tương đương" bước đầu hình thành ý tưởng xấp xỉ: biểu diễn, ước lượng sai số. Các ứng dụng về giới hạn dãy trong Sinh học được đặt trong phần cuối chương như một sự nhắc nhở về tính thực tế của các quá trình "rời rạc", cho dù quá trình "liên tục" mới chính là quá trình được vận dụng chủ yếu để xây dựng các công cụ trong Giải tích. Dãy Fibonacci được nhắc đến như một mối liên hệ bí ẩn giữa Toán học và Sinh học, mà "tỉ số vàng" được sinh ra từ đó như một sự kết tinh kỳ diệu!

Chương 2: Một loạt các công cụ tính toán quan trọng được hình thành trong chương này đều dựa trên "đạo hàm", một khái niệm được trình bày như một đại lượng đặc trưng cho "sự biến thiên về mặt giá trị của hàm số tại một điểm" hay "khuynh hướng thay đổi giá trị của hàm số". Cách diễn đạt sau, dù nôm na, nhưng lại hướng đến tính chất dự báo của đạo hàm và làm cho ứng dụng của khái niệm này trở nên phong phú hơn. Một hệ thống các công cụ chủ yếu được giới thiệu như quy tắc L'Hospital, công thức Taylor, phương pháp Newton nhằm giải quyết những vấn đề cơ bản trong Giải tích: tính xấp xỉ giá trị của hàm số, giải gần đúng phương trình và tìm lời giải tối ưu. Những công cụ này được hình thành từ "Ba chàng Ngự lâm pháo thủ", chính là các định lý mang tên các nhà toán học Pháp: Rolle, Lagrange và Cauchy. Các phép chứng minh của các định lý cơ bản này giúp ta hiểu được rằng những công cụ vô cùng sắc bén và mạnh mẽ có thể được xây dựng từ những ý tưởng đơn giản. Xác định mối quan hệ giữa các "tốc độ biến thiên" là vấn đề khá phổ biến trong ứng dụng và được trình bày dưới hình thức "quy trình". Nắm vững các bước giải của các bài toán khai thác mối quan hệ này cũng là một trong những yêu cầu quan trọng của Giáo trình. Số phức và hàm số phức của một biến thực được chọn giới thiệu ở cuối chương, ngay sau nội dung về "tọa độ cực" vì sự thuận tiện và khả năng mở rộng mức độ khai thác hệ thống số mới và đặc biệt này, khi đã có đủ nhiều những công cụ được xây dựng đối với số thực. Điểm đặc biệt của Giáo trình ở phần này là công thức Euler được xây dựng trực tiếp từ công thức Taylor và giới hạn dãy, mà không phải thông qua nội dung của Lý thuyết Chuỗi.

Chương 3: Tích phân bất định được nhắc lại một cách hệ thống cùng với các kỹ thuật tính các dạng nguyên hàm cơ bản. Nội dung này có thể xem như một "Bảng tra cứu" ngắn gọn, nhưng đáp ứng đầy đủ các yêu cầu tính các dạng nguyên hàm cần thiết của các bài toán ứng dụng trong Sinh học. Tuy nhiên, việc dùng một phần mềm tính toán khoa học (chẳng hạn là MAPLE) để làm thay công việc "không dễ dàng" trên là điều nên được khuyến khích, nhất là khi ta chỉ cần đến kết quả tính toán mà không cần phải lý giải các bước thực hiện. Tích phân xác định được trình bày bởi hai hình thức tương đương: tổng Darboux và tổng Riemann, với mục đích sử dụng các hình thức này trong việc chứng minh chặt chẽ tính khả tích và trong việc trình bày một cách thuận tiện mô hình ứng dụng tích phân xác định. Các ứng dụng khác nhau của phép tính tích phân được trình bày nhằm mục đích "rèn luyện" để "thấm nhuần" việc vận dụng mô hình ứng dụng tích phân trong những điều kiện, ý nghĩa khác nhau của bài toán đặt ra. Tích phân suy rộng thực chất là một nội dung có tính chất chuẩn bị cho việc lĩnh hội các công cụ mạnh mẽ và hết sức hiệu quả để giải "phương trình vi phân", là mô hình của hầu hết các bài toán trong ứng dụng. Những công cụ đó chính là các phép biến đổi tích phân, chẳng hạn: phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier, ...

Chương 4: Giới thiệu các khái niệm tôpô trong tập $\mathbb{R}^n$ và hàm số n biến thực xác định trên $D \subset \mathbb{R}^n$. Cùng với khái niệm "khoảng cách" giữa các điểm n-chiều, khái niệm giới hạn, dù được giới thiệu cho trường hợp 2 biến, có thể được mở rộng dễ dàng cho trường hợp n biến. Tương tự, đạo hàm riêng của hàm "nhiều biến" theo "một biến" được nhấn mạnh là đạo hàm bình thường theo biến đó, khi xem mọi biến còn lại là hằng số. Chính vì tính "phiến diện" của đạo hàm riêng mà sự mở rộng đến khái niệm "đạo hàm theo một hướng" bất kỳ là cần thiết, đặc biệt là đạo hàm theo hướng "pháp tuyến" của các "đường mức" (hay "mặt mức") là những đại lượng quan trọng trong ứng dụng. Công thức Taylor đối với hàm nhiều biến được trình bày như một hệ quả của trường hợp một biến đã xét trong Chương 2. Ý tưởng ở đây là: biểu diễn giá trị của hàm số tại một điểm n-chiều M trong lân cận của điểm M_0 qua các giá trị đạo hàm riêng tại M_0 và sự khác biệt về vị trí của chúng (độ lệch của các thành phần tọa độ), với "số hạng dư" có liên quan đến thông tin của một điểm nào đó, nằm trên "đường thẳng" nối M_0 và M. Khái niệm "hàm số ẩn" và công thức tính đạo hàm của hàm số ẩn là những nội dung quan trọng cả trong lý thuyết lẫn ứng dụng. Phần quan trọng và có nhiều ứng dụng trong chương này chính là phần "cực trị" của hàm số. Mặc dù, theo định nghĩa, cực trị của hàm số chỉ có tính chất "địa phương", nhưng trên thực tế ta thường cần đến các cực trị theo nghĩa "toàn cục", nghĩa là các giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số trên miền xác định. Ở đây, các phép biến đổi đại số hay các công cụ của "Đại số tuyến tính" nói chung là hết sức quan trọng vì nhờ đó mà ta xác định được các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Thể hiện rõ nét nhất của khẳng định trên chính là bài toán xác định các "công thức thực nghiệm" bậc nhất, bậc hai bằng "phương pháp bình phương nhỏ nhất". Trong đó, việc xác định điểm cực tiểu toàn cục nhờ vào các bước kiểm tra một "dạng toàn phương" có là "xác định dương" hay không.

Chương 5: Qua các ví dụ mở đầu, "phương trình vi phân" được trình bày như là một "ngôn ngữ diễn đạt" hay "công cụ mô tả" các định luật, hiện tượng trong Vật lý, Sinh học hay tổng quát hơn là "mô hình" toán học của các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Tính tồn tại và duy nhất nghiệm của các phương trình luôn được nhấn mạnh vì là cơ sở cho các thuật giải khác nhau. Các kỹ thuật giải phương trình cấp một cơ bản được trình bày đầy đủ. Các phương trình cấp hai, thường gặp trong cơ học, được xét chủ yếu ở đây là "phương trình tuyến tính" mà cấu trúc nghiệm của nó dễ dàng được mở rộng cho trường hợp cấp n. Chú ý rằng, đối với trường hợp phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n, tập nghiệm là một "không gian vector" n-chiều. Đặc biệt, để xác định được đầy đủ n nghiệm riêng "độc lập tuyến tính" của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n với hệ số hằng, về nguyên tắc, ta vận dụng Định lý 2.17 và công thức Euler. Các "phương pháp giải số" được giới thiệu là cần thiết vì nói chung, phương trình dạng $y' = f(x, y)$ rất khó xác định công thức nghiệm hay thậm chí hoàn toàn không thể. Tuy nhiên, việc xác định các nghiệm số của phương trình lại rất đơn giản. Các phương pháp Euler và Runge-Kutta được chọn vì rất phổ biến và dễ viết các chương trình tính toán. Các bài toán thực tế sẽ được khảo sát thêm, từ các bước "thiết lập mô hình" với các điều kiện có liên quan đến "giải mô hình" bằng các kỹ thuật đã xét: tìm nghiệm dưới dạng công thức hay lời giải số.

Nội dung tham khảo trong các tài liệu được liệt kê phần lớn là về cấu trúc của một số "nhóm kiến thức cơ bản" nhưng được sắp xếp theo chủ ý của các tác giả. Những nội dung như vậy, tất nhiên, trong Giáo trình này cũng sẽ được sắp xếp theo một trật tự khác hẳn với một số thay đổi. Tuy nhiên, việc sử dụng những nội dung này không phải là một công việc dịch thuật mà hoàn toàn có thể được xem là một cuộc đối thoại, trao đổi, góp ý lẫn nhau giữa người biên soạn và các tác giả của các quyển sách tham khảo. Một vài chi tiết cụ thể được cung cấp trong Giáo trình có thể được chỉ ra như sau:

1. Phần chứng minh sự hội tụ về tỉ số vàng của dãy số được thành lập từ các số hạng liên tiếp của dãy Fibonacci.

2. Các phần chứng minh cho các định lý trong Chương 2 là các Định lý 2.14, 2.15. Riêng các Định lý 2.9, Định lý 2.16 được phát biểu lại và được chứng minh theo quan điểm của người biên soạn.

3. Công thức Euler được chứng minh bằng các lý luận về dãy số.

4. Phân tích sự biểu diễn Taylor đối với hàm số n biến số để nêu bật vai trò của gradient và Hessian của một hàm số f tại một điểm khi khảo sát cực trị tại điểm đó. Từ đó dẫn đến phần chứng minh của các điều kiện đủ về cực trị tự do và có điều kiện. Kỹ thuật dùng định lý Sylvester được nhấn mạnh để kiểm tra các tiêu chuẩn cực trị trong các điều kiện đủ khi hàm số có n biến số, với $n \geq 3$.

5. Áp dụng kỹ thuật tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số bậc hai (n biến) vào việc chứng minh công thức thực nghiệm bậc nhất được xác định theo phương pháp bình phương nhỏ nhất.

6. Cách dùng số phức hay kết quả tương đương khi không dùng số phức trong việc xác định dạng nghiệm riêng của các phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số hằng. Chương trình vẽ đường gấp khúc Euler dù được viết bằng một số lệnh theo cú pháp của MAPLE nhưng qua đó cũng cung cấp giải thuật đơn giản mà bạn đọc có thể viết bằng các ngôn ngữ khác nhau.

Cuối mỗi chương đều có phần Bài tập và bạn đọc nên dành nhiều thời gian để giải các bài toán trong đó. Bản thân chúng cũng đã được phân loại từ dễ đến khó nhưng không theo một trật tự nhất định và bạn đọc dễ dàng phát hiện được sự phân loại này khi "thực sự" giải chúng. Khoảng từ 50% của số bài tập trở lên trong Giáo trình được giải "đúng" sẽ là điều kiện bảo đảm người học vượt qua "cửa ải" thú vị này một cách nhẹ nhàng. Hãy vững tin rằng nếu bạn đọc nắm được hệ thống kiến thức đã được trình bày trong Giáo trình một cách đầy đủ và vững chắc, thì sẽ không gặp bất kỳ trở ngại nào khi muốn tự trang bị thêm kiến thức chuyên sâu về Vi-Tích phân theo yêu cầu của công việc hay theo nhu cầu học lên cao trong tương lai.

Về hình thức, Giáo trình được xử lý bằng LaTeX–một hình thức được đơn giản hóa của TeX và bản thân TeX chính là một phần mềm chuyên dụng cho các loại văn bản chứa nhiều công thức toán học. Đây là phần mềm hoàn toàn miễn phí và được phổ biến hết sức rộng rãi trong cộng đồng các nhà toán học và những người làm toán trên khắp thế giới. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm thông tin về phần mềm này tại các trang web http://www.miktex.org và http://www.ctan.org. Font chữ chính được dùng trong Giáo trình là font VNR trong gói VnTeX, tác giả: HÀN THẾ THÀNH (cũng đồng thời là tác giả của pdfTeX và pdfLaTeX, là các phần mềm thông dụng trong cộng đồng những người dùng TeX trên thế giới).

Những kiến thức được trình bày trong Giáo trình, dù được thể hiện bằng các con chữ hoặc ký hiệu tầm thường, đã góp phần *làm thay đổi cả thế giới* và những ứng dụng của chúng vẫn đang tồn tại trong những chi tiết nhỏ nhặt nhất trong cuộc sống hôm nay và cả mai sau. Vì vậy, suy cho cùng, Giáo trình này đóng vai trò là một quyển sách dạy phép thuật kỳ ảo và người biên soạn mong nó được bạn đọc nồng nhiệt đón nhận và đọc nó một cách "ngấu nghiến" như đã từng làm đối với tập truyện HARRY POTTER lừng danh của J. K. ROWLING.

Rất mong đón nhận và hết sức trân trọng mọi góp ý của bạn đọc về những sai sót của Giáo trình và những điều có thể làm tốt hơn về hình thức, cũng như về nội dung của nó. Xin được gởi lòng biết ơn sâu sắc đến Giáo sư HENK PIJLS (University of Amsterdam), người luôn có mặt trong suốt quá trình hình thành Giáo trình. Sau cùng, xin chân thành cám ơn mọi sự giúp đỡ cho việc ra đời Giáo trình này.

Cần thơ, tháng Tám năm 2007
Người biên soạn: LÊ PHƯƠNG QUÂN

Danh sách hình vẽ

Mục lục

Chương 1

HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

1.1. Tập số thực

Ta nhắc lại các tập số đã biết

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} && \text{(tập mọi số tự nhiên)},\\ &\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots, \pm n, \dots\} && \text{(tập mọi số nguyên)},\\ &\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\} && \text{(tập mọi số hữu tỉ)}, \end{aligned}$$

với quan hệ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ và ở đây, ta sẽ trình bày việc xây dựng tập mọi số thực $\mathbb{R}$ từ tập $\mathbb{Q}$.

Trước hết, để xét một ví dụ về việc cần phải mở rộng $\mathbb{Q}$, ta chứng minh phương trình $x^2 = 3$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$. Thật vậy, giả sử $p/q \in \mathbb{Q}$ (tối giản) là một nghiệm của phương trình. Khi đó

$$\frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3q^2. \tag{1.1}$$

(i) Nếu q chẵn thì từ (1.1), suy ra p^2 chẵn hay p chẵn: vô lý.

(ii) Nếu q lẻ, nghĩa là $q = 2m + 1$, thì p^2 lẻ hay p lẻ: $p = 2n + 1$. Từ (1.1), ta có $(2n + 1)^2 = 3(2m + 1)^2$ hay $2n^2 + 2n = 6m^2 + 6m + 1$: vô lý.

Khi biểu diễn một số hữu tỉ p/q dưới dạng số thập phân, ta nhận được một trong hai trường hợp: *số thập phân hữu hạn* (nghĩa là có hữu hạn chữ số có nghĩa) và *số thập phân vô hạn tuần hoàn* (nghĩa là có vô hạn chữ số có nghĩa, nhưng có một số chữ số được lặp lại). Kết quả này là do xảy ra một trong hai trường hợp sau đây đối với số dư r trong phép chia p cho q:

(a) $r = 0$ sau một số hữu hạn bước chia và phép chia kết thúc.

(b) r luôn khác 0, nghĩa là phép chia sẽ tiếp tục mãi, nhưng do $1 \le r \le |q| - 1$ nên nhiều nhất là đến bước chia thứ $|q|$, giá trị r sẽ được lặp lại.

Chẳng hạn:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 0,25\\ \frac{1}{3} &= 0,333\cdots =: 0,(3)\\ \frac{3}{13} &= 0,230769230769\cdots =: 0,(230769) \end{aligned}$$

Chú ý rằng ta không dùng số 9 làm chữ số lặp lại, ví dụ ta chỉ viết $1/2 = 0,5$ mà không viết $1/2 = 0,4(9)$. Ngoài ra, để ý rằng:

$$\frac{32}{99} = 0,3232\cdots = 0,(32)$$
$$\frac{32}{99} \times 100 = \frac{3200}{99} = 32,3232\cdots = 32,(32)$$

Một cách tổng quát, nếu $x = 0,(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)$ thì ta có

$$x \times 10^m = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m, \beta_1\beta_2\cdots\beta_m\cdots = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m, (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)$$

và vế phải cũng được quy ước viết là $\overline{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} + x$. Từ đó, ta có

$$0,(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m) = \frac{\overline{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}}{\underbrace{999\cdots9}_{m \text{ chữ số}}}.$$

Ví dụ, khi áp dụng công thức trên, ta có

$$0,(123) = \frac{123}{999}, \quad 0,(3672) = \frac{3672}{9999}.$$

Một cách tổng quát, mỗi $p/q \in \mathbb{Q}$ được viết thành số thập phân thuộc một trong hai dạng:

$$\begin{aligned} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n &\quad \text{(số thập phân hữu hạn)} \\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m) &\quad \text{(số thập phân vô hạn tuần hoàn)} \end{aligned}$$

Ngược lại, với mỗi số thập phân thuộc một trong hai dạng trên, ta có thể biểu diễn lại thành dạng $p/q \in \mathbb{Q}$ như sau:

$$\begin{aligned} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n &= \frac{\overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}{10^n} \\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m) &= \frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n, (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)}{10^n} \\ &= \frac{\overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} + \dfrac{\overline{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}}{999\cdots9}}{10^n}. \end{aligned}$$

Tóm lại, ta có thể đồng nhất $\mathbb{Q}$ với tập mọi số thập phân hữu hạn và vô hạn tuần hoàn. Nhưng hiển nhiên cũng tồn tại số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Thật vậy, chỉ bằng hai chữ số 0 và 1, ta có thể tạo ra một số như vậy. Ví dụ, xét số thập phân vô hạn

$$0,10110111011110111110\cdots$$

mà trong đó, số các chữ số 1 tăng lên vô hạn nên số thập phân trên không phải là số hữu tỉ!

Định nghĩa 1.1. Số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là số *vô tỉ*. Số hữu tỉ hay vô tỉ được gọi chung là *số thực* và tập mọi số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$. Để chỉ các phần tử của một tập các số thực X nào đó, ta thường dùng một trong các ký hiệu x, y, $t, \ldots$ và gọi nó là một *biến*. Khi biến x chỉ một phần tử cụ thể, chẳng hạn là $a \in X$, ta viết $x = a$ và gọi a là *một giá trị của x*.

Ta có các tính chất quan trọng sau đây của tập mọi số thực $\mathbb{R}$:

(a) Với $x, y \in \mathbb{R}$ và $x < y$, tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < r < y$ (tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$).

(b) Với $x, y \in \mathbb{R}$ và $y > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x < ny$ (tiên đề ARCHIMÈDE).

(c) Nếu $X, Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = \mathbb{R}$ và với mọi $x \in X$, với mọi $y \in Y$, ta có $x < y$ thì: X có số lớn nhất hoặc Y có số nhỏ nhất (tính liên tục của $\mathbb{R}$).

Một tập các số thực nào đó được gọi là *khoảng* nếu nó chứa ít nhất hai số và chứa mọi số ở giữa hai số bất kỳ của nó. Chẳng hạn, các tập $A = \{x\colon x > 3\}$, $B = \{x\colon -1 \le x \le 2\}$ là các khoảng, nhưng $C = \{x\colon x \neq 0\}$ không phải là khoảng vì nó không chứa mọi số ở giữa -1 và 1.

Theo cách biểu diễn hình học số thực trên trục số, ta có thể nói khoảng tương ứng với các tia, bản thân trục số (được gọi là các khoảng *vô hạn*) hoặc các đoạn thẳng (được gọi là các khoảng *hữu hạn*). Khoảng hữu hạn được gọi là *đóng* nếu nó chứa cả hai điểm mút của nó, được gọi là *nửa mở* nếu chỉ chứa một trong hai điểm mút và được gọi là *mở* nếu không chứa điểm mút nào. Các điểm mút cũng được gọi là các *điểm biên* và chúng tạo thành *biên* của khoảng. Các điểm còn lại của khoảng được gọi là các *điểm trong* và chúng tạo thành *phần trong* của khoảng.

Cho các số a, b và $a < b$. Dưới đây, các ký hiệu và biểu diễn hình học tương ứng cho các khoảng được nhắc lại:

Ký hiệu	**Tập hợp**	**Biểu diễn trên trục số**
(a, b)	$\{x\colon a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x\colon a \le x \le b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x\colon a \le x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x\colon a < x \le b\}$	a b
$(a, +\infty)$	$\{x\colon a < x\}$	a
$[a, +\infty)$	$\{x\colon a \le x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x\colon x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x\colon x \le b\}$	b
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

Nếu trong $A \subset \mathbb{R}$ có số lớn nhất (nhỏ nhất) thì ta ký hiệu số đó là $\max A$ ($\min A$). Hiển nhiên với $A = [0, 1]$ thì $\min A = 0$, $\max A = 1$; còn khoảng $(0, 1)$ thì không có số nhỏ nhất lẫn số lớn nhất. Tuy nhiên, các số 0 và 1 cũng giữ một vai trò đặc biệt đối với $(0, 1)$ qua các khái niệm được xét dưới đây.

(a) $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số M sao cho $a \le M$, với mọi $a \in A$. Khi đó, M được gọi là một *cận trên* của A.

(b) $B \subset \mathbb{R}$ được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số m sao cho $m \le b$, với mọi $b \in B$. Khi đó, m được gọi là một *cận dưới* của B.

Do một tập bị chặn trên (dưới) có vô số cận trên (dưới) nên ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2. Số nhỏ nhất (nếu có) trong tập mọi cận trên của một tập A được gọi là *cận trên đúng* của A và được ký hiệu là $\sup A$. Số lớn nhất (nếu có) trong tập mọi cận dưới của một tập B được gọi là *cận dưới đúng* của B và được ký hiệu là $\inf B$.

Theo định nghĩa trên, với $B = (0, 1)$ thì $\inf B = 0$ và $\sup B = 1$. Thật vậy, giả sử m là một cận dưới tùy ý của B thì $m \leq 0$; vì ngược lại, nếu $0 < m$, thì tồn tại r $(\in (0, 1))$ sao cho $0 < r < m$, trái với giả thiết. Do 0 cũng là cận dưới của B nên theo lập luận trên, 0 chính là cận dưới lớn nhất của B, nghĩa là $0 = \inf B$. Lập luận tương tự để kiểm chứng $\sup B = 1$.

Theo các tính chất đã nêu của tập mọi số thực, ta chứng minh được sự tồn tại của cận trên đúng và cận dưới đúng.

Định lý 1.1. *Mọi tập khác rỗng, bị chặn trên (dưới) đều có cận trên (dưới) đúng.*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $A \neq \emptyset$ là tập bị chặn trên. Gọi X là tập mọi cận trên của A và $Y = \mathbb{R} \setminus X$. Hiển nhiên $X \neq \emptyset$. Vì tồn tại $a \in A$ nên khi chọn $a' < a$, ta suy ra $a' \notin X$, nghĩa là $a' \in Y$. Vậy $Y \neq \emptyset$. Hiển nhiên $X \cap Y = \emptyset$ và $X \cup Y = \mathbb{R}$. Với $x \in X$ và $y \in Y$, tồn tại $a'' \in A$ sao cho $y < a''$; theo tính trù mật của $\mathbb{Q}$, phải tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ sao cho $y < r < a''$ và vì $a'' \leq x$ nên ta suy ra $y < x$.

Vậy, theo tính liên tục của $\mathbb{R}$, ta phải có một trong hai kết luận sau: Y có số lớn nhất hoặc X có số nhỏ nhất. Nhưng kết luận thứ nhất không thể xảy ra, vì theo chứng minh trên, $r \in Y$. Vậy X có số nhỏ nhất là $\sup A$.

Trường hợp $A \neq \emptyset$ là tập bị chặn dưới được chứng minh tương tự. ∎

Các điều kiện tương đương sau cũng thường được áp dụng khi xác định cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập $A \neq \emptyset$.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq M, \ \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a' \in A \colon M - \varepsilon < a'. \end{cases}$$

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a, \ \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a' \in A \colon m + \varepsilon > a'. \end{cases}$$

Ví dụ 1.1. Cho $A = \{m/n \colon m, n \in \mathbb{N} \text{ và } m < n\}$. Hãy tìm $\sup A$, $\inf A$.

Giải. Hiển nhiên rằng 0 và 1 lần lượt là cận dưới và cận trên của A. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, theo tiên đề Archimède, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ sao cho $n > (1/\varepsilon)$ hay $\varepsilon > (1/n) \in A$. Vậy $\inf A = 0$. Lại theo tiên đề Archimède, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $m > (1 - \varepsilon)/\varepsilon$ hay $1 - \varepsilon < m/(m + 1) \in A$. Vậy $\sup A = 1$. ◁

1.2. Hàm số

1.2.1. Định nghĩa hàm số và các phép toán trên các hàm số

Khái niệm "hàm số" được xây dựng dựa trên khái niệm "ánh xạ" được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3. Cho X, Y là các tập bất kỳ. Nếu mỗi $x \in X$, được cho tương ứng với duy nhất một $y =: f(x) \in Y$ theo một quy tắc tùy ý f thì f được gọi là ánh xạ từ X vào Y và được ký hiệu bởi một trong các dạng:

$$f\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}, \quad f\colon X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto y = f(x), \quad x \mapsto f(x).$$

(a) Nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ thì f được gọi là *đơn ánh*.

(b) Nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$ thì f được gọi là *toàn ánh*.

(c) f được gọi là *song ánh từ X lên Y* nếu f là đơn ánh và toàn ánh.

Chú ý. Giả sử f là một song ánh từ X lên Y. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, có tương ứng duy nhất một $x =: f^{-1}(y) \in X$, sao cho $y = f(x)$. Theo định nghĩa trên thì f^{-1} là ánh xạ từ Y vào X và có thể kiểm chứng rằng f^{-1} cũng là một song ánh từ Y lên X và được gọi là *ánh xạ ngược* của f. Hiển nhiên nếu một ánh xạ f có ánh xạ ngược f^{-1} thì f^{-1} cũng nhận f là ánh xạ ngược của nó, và ta gọi f và f^{-1} là các ánh xạ ngược nhau.

Vậy, nếu $f\colon X \longrightarrow Y$ và $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ là các ánh xạ ngược nhau thì

(a) $x \in X,\, y \in Y : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

(b) $f[f^{-1}(y)] = y$ với mọi $y \in Y$.

(c) $f^{-1}[f(x)] = x$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.4. Với $X \subset \mathbb{R}$, mỗi ánh xạ $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số và thường được ký hiệu theo ký hiệu của ánh xạ đã nêu hay theo một trong các dạng: $y = f(x)$, $f(x)$ hay chỉ đơn giản là f. Biến x được gọi là *biến độc lập*, còn $y = f(x)$ được gọi là *biến phụ thuộc*. Tập X được gọi là miền xác định của f, còn tập $f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ được gọi là miền giá trị của f.

Số lớn nhất M hay nhỏ nhất m (nếu có) của $f(X)$ sẽ được viết

$$M = \max_{x\in X} f(x) = \max\{f(x)\colon x \in X\}, \quad m = \min_{x\in X} f(x) = \min\{f(x)\colon x \in X\},$$

và được gọi lần lượt là *giá trị lớn nhất* và *giá trị nhỏ nhất* của f (trên X). Đồ thị của hàm số f với miền xác định X là tập

$$G = \{(x, f(x))\colon x \in X\}$$

và ta đồng nhất nó với quỹ tích các điểm có tọa độ $(x, f(x))$ $(x \in X)$ trên mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy.

Thông thường, $f(x)$ được cho dưới dạng một biểu thức, chỉ rõ các phép tính được thực hiện khi x nhận những giá trị cụ thể từ miền xác định. Chẳng hạn, xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 1$. Nếu miền xác định X của hàm số này không được chỉ rõ thì mặc nhiên xem nó là tập các giá trị của biến số x sao cho với mỗi giá trị $x = x_0$ của tập này thì y nhận giá trị tương ứng $f(x_0) = 2x_0^2 + 1$ là số thực. Trong trường hợp này thì miền xác định của hàm số đã cho là $X = \mathbb{R}$.

Miền xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ là

$$X = \{x\colon x^2 - 2x > 0\} = (2, +\infty) \cup (-\infty, 0).$$

Hiển nhiên hàm số này khác với hàm số

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

với miền xác định cho trước là $X = (2, 7)$.

Chú ý. Với miền xác định X đã cho, hàm số $x \mapsto y = f(x) = a$ với mọi $x \in X$ (a là một số cố định) được gọi là một *hàm hằng* trên X và cũng được viết là $f(x) = a$ hay $y = a$.

Định nghĩa 1.5. Cho các hàm số f, g có cùng miền xác định X.

(a) f và g được gọi là bằng nhau, ta viết $f = g$, nếu

$$f(x) = g(x), \forall x \in X.$$

(b) Các hàm số có miền xác định X là $f + g$, $f - g$, fg được định nghĩa bởi các công thức

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \forall x \in X,\\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x), \forall x \in X,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \forall x \in X,\end{aligned}$$

và lần lượt được gọi là *tổng*, *hiệu*, *tích* của các hàm số f và g.

(c) Hàm số f/g có miền xác định $X_1 = X \setminus \{x\colon g(x) = 0\}$ được định nghĩa bởi công thức

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in X_1$$

và được gọi là *thương* của các hàm số f và g.

(d) Với a là một số cố định thì hàm số af có miền xác định X được định nghĩa bởi

$$(af)(x) = af(x), \forall x \in X$$

và được gọi là *tích của a với f*.

Trong định nghĩa trên, chú ý đến thứ tự trong cách viết của f và g khi xét hiệu và thương của các hàm số "f và g". Các phép toán trên dễ dàng được mở rộng cho một số hữu hạn các hàm số.

Cho các hàm số $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = \sqrt{x}$ và $h(x) = x + 2$. Khi đó, hàm số $(f - 3h)/g$ xác định trên tập $X = (0, +\infty)$ và ta có

$$\left(\frac{f-3h}{g}\right)(x) = \frac{f(x) - 3h(x)}{g(x)} = (x-3)\sqrt{x}, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.6. Cho các hàm số $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$, với $f(X) \subset Y$. Khi đó, hàm số $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, với $h(x) \overset{\text{đn}}{=} g[f(x)]$, được gọi là hàm số hợp của f và g (theo thứ tự đó) và được ký hiệu là $g \circ f$.

Theo ví dụ trên thì

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 6}.$$

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ và $g(x) = \sin x$. Khi đó

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = \sin[f(x)] = \sin(\sqrt{1-x^2}) \quad \text{(có miền xác định } X = [-1, 1])\\ (f \circ g)(x) &= f[g(x)] = \sqrt{1 - [g(x)]^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x| \quad \text{(có miền xác định } X = \mathbb{R})\\ (f \circ f)(x) &= f[f(x)] = \sqrt{1 - [f(x)]^2}\\ &= \sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = |x| \quad \text{(có miền xác định } X = [-1, 1])\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.7. Cho hàm số f có miền xác định X. Nếu $f\colon X \longrightarrow Y = f(X)$ là song ánh thì $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ được gọi là *hàm số ngược* của f.

Chú ý. Nếu hàm số $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một đơn ánh thì hiển nhiên f có hàm số ngược $f^{-1}\colon Y = f(X) \longrightarrow X$ và $X = f^{-1}(Y)$.

1.2.2. Một số tính chất đặc biệt của hàm số

Định nghĩa 1.8. Cho tập $X \subset \mathbb{R}$ (X thường là một khoảng).

(a) Hàm số f được gọi là *tăng* trên X nếu: $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(b) Hàm số f được gọi là *giảm* trên X nếu: $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

(c) Hàm số f được gọi là *bị chặn* trên X nếu: $\exists M : |f(x)| \leq M$, $\forall x \in X$.

Hàm số tăng hoặc giảm được gọi chung là hàm số *đơn điệu*.

CHÚ Ý.

1. Một hàm số đã cho có thể không đơn điệu trên miền xác định X của nó, nhưng lại đơn điệu trên các tập $D \subset X$.

2. Nếu hàm số f có miền xác định là một khoảng I và f đơn điệu trên I thì hiển nhiên f có hàm số ngược là $f^{-1}: J = f(I) \longrightarrow I$ và ta có

$$f \text{ tăng (giảm) trên } I \Leftrightarrow f^{-1} \text{ tăng (giảm) trên } J$$

Hàm số $f(x) = x^3$ tăng trên $(-\infty, +\infty)$. Hàm số $f(x) = \cos x$ giảm trên $[0, \pi]$. Hàm số $y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$ tăng trên $[1, +\infty)$ và giảm trên $(-\infty, 1]$.

Định nghĩa 1.9. Cho hàm số f có miền xác định X. Hàm số được gọi là *tuần hoàn* nếu

$$\exists T \neq 0 \colon f(x+T) = f(x),\ \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Số $T_0 > 0$ nhỏ nhất (nếu có) trong các số T thỏa điều kiện (1.2) được gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm số f. (Theo định nghĩa trên thì miền xác định X thỏa: $x \in X \Rightarrow x + T \in X$.)

Các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T_0 = 2\pi$; các hàm $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{cotg} x$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T_0 = \pi$.

CHÚ Ý. Để vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$ trên miền xác định của nó ta chỉ cần vẽ trên một khoảng có độ dài bằng chu kỳ cơ sở (nếu có). Sau đó, theo (1.2), bằng phép tịnh tiến vector $T_0\vec{i}$ phần đồ thị đã vẽ, ta sẽ nhận được đồ thị trên toàn miền xác định. Ở đây, $\vec{i}$ là vector đơn vị của trục Ox.

Định nghĩa 1.10. Cho hàm số f có miền xác định X, với: $x \in X \Rightarrow -x \in X$.

(a) f được gọi là hàm *chẵn* nếu: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

(b) f được gọi là hàm *lẻ* nếu: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$.

Hàm số $y = f(x) = \cos x + |x| - x^2$ là hàm số chẵn và hàm số $y = g(x) = \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ vì

$$f(-x) = \cos(-x) + |-x| - (-x)^2 = \cos x + |x| - x^2 = f(x),\ \forall x.$$
$$g(-x) = \lg\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) = \lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -\lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -g(x),\ \forall x.$$

Gọi (C) là đồ thị của hàm số f.

(a) Nếu f là hàm chẵn thì (C) đối xứng qua Oy vì

$$(x, f(x)) \in (C) \Leftrightarrow (-x, f(-x)) = (-x, f(x)) \in (C).$$

(b) Nếu f là hàm số lẻ thì (C) đối xứng qua gốc tọa độ O vì

$$(x, f(x)) \in (C) \Leftrightarrow (-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) \in (C).$$

(c) Giả sử $f\colon X \longrightarrow Y$ và $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ là các hàm số ngược nhau. Gọi (C^{-1}) là đồ thị của f^{-1}. Rõ ràng, nếu $x \in X$, $y \in Y$ thì $M(x, y)$ và $N(y, x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Do

$$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow N \in (C^{-1})$$

nên (C) và (C^{-1}) đối xứng qua đường thẳng $y = x$ khi được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ.

1.2.3. Các hàm số sơ cấp

Các hàm số sơ cấp cơ bản như hàm *lũy thừa*, hàm số *mũ*, hàm *logarithm*, hàm *lượng giác* đã được khảo sát chi tiết ở bậc Trung học phổ thông. Vì vậy, ở đây, ta chỉ nhắc lại một số điểm quan trọng về những hàm số này.

Trước tiên, ta nhắc lại *đa thức*, là hàm số có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

trong đó, n là số nguyên không âm, a_0, a_1, ..., a_n là các số thực với $a_n \neq 0$. Hệ số a_n cũng được gọi là *hệ số chính* và n được gọi là *bậc* của đa thức $P(x)$, ta viết: $n = \deg(P)$. Như vậy, hàm hằng $y = a \neq 0$ là đa thức bậc 0.

Các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) được xây dựng dựa theo cách xây dựng giá trị a^b đã biết, với $a > 0$ và $b \in \mathbb{R}$. Ngoài ra, các tính chất về lũy thừa cũng thường được áp dụng khi tính toán các giá trị có liên quan đến những hàm số này. Mặt khác, với $0 < a \neq 1$, ta có

$$y > 0\colon y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Từ đó, suy ra các hàm số sau là ngược nhau:

$$f(x) = a^x\colon \begin{cases} \text{miền xác định: } \mathbb{R} \\ \text{miền giá trị: } (0, +\infty) \end{cases}, \quad g(x) = \log_a x\colon \begin{cases} \text{miền xác định: } (0, +\infty) \\ \text{miền giá trị: } \mathbb{R} \end{cases}$$

Do $f(x) = \sin x$ tăng trên $I = [-\pi/2, \pi/2]$ nên xét trên khoảng này, nó có hàm ngược f^{-1}, với $f^{-1}(x)$ được ký hiệu là $\arcsin x$, xác định trên $J = [-1, 1]$. Vậy, ta có mối quan hệ sau

$$a \in I,\ b \in J\colon b = \sin a \Leftrightarrow a = \arcsin b.$$

Hoàn toàn tương tự, đối với các hàm $y = \cos x$ trên $[0, \pi]$, $y = \operatorname{tg} x$ trên $(-\pi/2, \pi/2)$, $y = \operatorname{cotg} x$ trên $(0, \pi)$ ta cũng nhận được các hàm ngược, có các ký hiệu tương ứng và các mối quan hệ sau:

$$a \in [0, \pi],\ b \in [-1, 1]\colon b = \cos a \Leftrightarrow a = \arccos b$$
$$a \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\colon b = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow a = \operatorname{arctg} b$$
$$a \in (0, \pi)\colon b = \operatorname{cotg} a \Leftrightarrow a = \operatorname{arccotg} b$$

Các hàm số $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$ được gọi chung là các hàm số *lượng giác ngược*.

Một hàm số $R(x)$ được gọi là *hàm hữu tỉ* nếu nó có dạng

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

trong đó, P và Q là các đa thức.

Định nghĩa 1.11. Các hàm số hằng, hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarithm, hàm số lượng giác và hàm số lượng giác ngược được gọi chung là các *hàm số sơ cấp cơ bản*.

Các hàm số nhận được bằng cách thực hiện một số hữu hạn các phép toán tổng, hiệu, tích, thương, phép lấy hàm hợp trên các hàm số sơ cấp cơ bản được gọi chung là các *hàm số sơ cấp*.

Hàm số

$$f(x) = \log_3\left(\frac{2\sin(x^2)+3}{\sqrt{x^2+2}}\right)$$

được xây dựng từ các hàm số sơ cấp cơ bản sau đây

$$f_1(x) = 2,\ f_2(x) = 3,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = \sin x,\ f_5(x) = \sqrt{x},\ f_6(x) = \log_3 x$$

với sự phân tích

$$f = f_6 \circ \left(\frac{f_1(f_4 \circ f_3) + f_2}{f_5 \circ (f_3 + f_1)}\right).$$

Tất nhiên, ngoài các hàm số sơ cấp, ta cũng có thể gặp các loại hàm số khác trên thực tế. Chẳng hạn, hàm số sau đây thường gặp trong ứng dụng, nhưng không phải là hàm sơ cấp.

Hàm phần nguyên: Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $[x]$ là số nguyên thỏa $[x] \le x < [x] + 1$ và hàm số $x \mapsto y = [x]$ được gọi là *hàm phần nguyên*.

Theo định nghĩa trên, ta có: $[0] = 0,\ [4,3] = 4,\ [-7,1] = -8$.

Dưới đây, ta sẽ xét các ví dụ về sự hình thành và ứng dụng các hàm số trong các lĩnh vực khác nhau.

Trong Hóa học, theo Định luật tác dụng khối lượng (Action Law of Mass), tốc độ phản ứng tỉ lệ với tích các nồng độ riêng của các chất tham gia. Cụ thể hơn, ta xét mô hình phản ứng sau: giả sử một phân tử của chất A kết hợp với một phân tử của chất B để tạo thành một phân tử của chất C theo phản ứng hóa học dạng $A + B \longrightarrow C$. Ký hiệu $[A]$, $[B]$ và $[C]$ lần lượt là nồng độ của các chất A, B và C. Khi phản ứng bắt đầu thì $[A]$ và $[B]$ có giá trị lần lượt là a và b. Gọi x là giá trị của $[C]$ trong khi phản ứng xảy ra và R là tốc độ phản ứng đang xét, theo định luật trên, ta có

$$R(x) = k(a-x)(b-x), \quad 0 \le x \le \min\{a, b\}.$$

Hiển nhiên R là một tam thức bậc hai theo x.

Trong Sinh học, các đại lượng được khảo sát thường được gọi là các *biến sinh vật*. Giả sử ta đang xét các biến x và y như vậy, với y là sinh khối của tế bào một loại tảo và x là thể tích của tế bào đó. Quan hệ sau đây đã được Niklas nghiên cứu vào năm 1994:

$$y = kx^{0,794}.$$

Thông thường quan hệ trên được hiểu theo nghĩa thống kê. Nghĩa là chúng nhận được bằng cách xác định đường cong phù hợp nhất với các điểm dữ liệu.

Các ví dụ trên liên quan đến hàm số lũy thừa. Ta hãy xét một số ví dụ khác có liên quan đến loại hàm số quan trọng thường gặp: hàm số mũ. Giả sử có một loại vi khuẩn có số lượng tăng lên gấp đôi sau mỗi khoảng thời gian nhất định. Ta hãy xác định một đơn vị thời gian nào đó sao cho sau mỗi đơn vị này, số lượng vi khuẩn tăng lên gấp đôi. Gọi $N(t)$ là số lượng vi khuẩn tại t, ta có

$$N(t+1) = 2N(t).$$

Theo quan hệ trên

$$\begin{aligned}
N(1) &= 2N(0) \\
N(2) &= N(1+1) = 2N(1) = 2 \times 2N(0) = 2^2 N(0) \\
&\dots \\
N(n) &= 2^n N(0).
\end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được công thức, thường được gọi là công thức thực nghiệm:

$$N(t) = N_0 2^t \quad (N_0 = N(0)),$$

cho phép tính giá trị của N tại các giá trị không nguyên của t.

Các chất đồng vị phóng xạ, chẳng hạn Carbon 14 (C^{14}), được dùng để xác định tuổi chính xác của các vật hóa thạch hay các khoáng vật. Kỹ thuật này được dùng từ những năm đầu của thế kỷ 20 và dựa theo tính chất của các nguyên tử nào đó để biến đổi một cách tự ý bằng cách tách ra các photons, neutrons hay electrons. Hiện tượng này được gọi là *sự phân rã phóng xạ*.

C^{14} là một chất phóng xạ và phân rã thành Nitrogen (N^{14}). Có một sự cân bằng giữa Carbon 12 (C^{12}) và Carbon 14 (C^{14}) trong khí quyển. Hơn nữa, tỉ số giữa C^{14} và C^{12} gần như là hằng số trong một khoảng thời gian dài. Khi thực vật hấp thu CO_2 từ khí quyển và chuyển hóa chúng thành một sản phẩm (chẳng hạn Cellulose) thì tỉ số ban đầu của C^{14} và C^{12} vẫn giữ nguyên trong khí quyển. Khi thực vật chết, sự hấp thu CO_2 của chúng dừng lại và sự phân rã của C^{14} làm cho tỉ số giữa C^{14} và C^{12} giảm dần. Do ta biết được quy luật phân rã phóng xạ, nên sự thay đổi theo tỉ số cung cấp một phép đo thời gian chính xác từ khi cái chết xảy ra.

Nếu ký hiệu khối lượng của C^{14} tại thời điểm t là $W(t)$, với $W(0) = W_0$, thì Định luật phân rã phóng xạ được phát biểu dưới dạng hàm số mũ:

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

trong đó $\lambda > 0$ ký hiệu *tốc độ phân rã* (the decay rate of C^{14}). Nếu T_h là *chu kỳ bán rã* (the half-life of C^{14}) thì bạn đọc hãy thử viết lại công thức xác định $W(t)$ và trả lời câu hỏi được cho trong ví dụ dưới đây.

Cho biết chu kỳ bán rã của C^{14} là 5730 năm. Giả sử gỗ được tìm thấy trong một cuộc khai quật khảo cổ chỉ còn chứa khoảng 35% lượng C^{14} (do liên hệ đến C^{12}) như đối với chất liệu thực vật sống. Hãy xác định khi nào gỗ bị đốn?

Bạn đọc hãy đọc kỹ ví dụ dưới đây và hoàn thành phần trả lời chi tết từ những gợi ý trong phần "Trả lời".

Để phác họa lịch sử hình thành của một cái hồ, người ta xác định niên đại của một mẫu bùn được lấy từ đáy hồ. Một trong các phương pháp xác định niên đại là dùng các chất đồng vị phóng xạ. Trong đó, phương pháp dùng C^{14} đặc biệt hiệu quả đối với các chất trầm tích có tuổi thọ trẻ hơn 60.000 năm. Ta biết rằng tỉ số C^{14}/C^{12} gần như là hằng số trong một khoảng thời gian dài và các tổ chức sống đều hấp thu Carbon theo tỉ số này. Khi chết, sự hấp thu Carbon ngừng lại và C^{14} phân rã, làm thay đổi tỉ số C^{14}/C^{12} theo quan hệ:

$$\left(\frac{C^{14}}{C^{12}}\right)_t = \left(\frac{C^{14}}{C^{12}}\right)_0 e^{-\lambda t},$$

trong đó, t là thời điểm được tính từ lúc chết.

(a) Nếu C^{14}/C^{12} trong khí quyển là 10^{-12} và chu kỳ bán rã của C^{14} là 5730 năm thì hãy tìm một biểu thức đối với t, là tuổi của vật được xác định niên đại, như là hàm theo tỉ số C^{14}/C^{12} trong vật được xác định niên đại. Trả lời:

$$\left(\frac{C^{14}}{C^{12}}\right)_t = 10^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}.$$

(b) Hãy dùng câu trả lời (a) để xác định tuổi của mẫu bùn có tỉ số C^{14}/C^{12} đo được là $1,61 \times 10^{-13}$. Trả lời: Xác định t từ phương trình: $1,61 \times 10^{-13} = 10^{-2} \times (1/2)^{t/5730}$.

Ví dụ 1.2. Tuổi của đá núi lửa có thể được xấp xỉ bằng cách dùng các đồng vị phóng xạ của Argon 40 (Ar^{40}) và Kali 40 (K^{40}). K^{40} thì lại phân rã thành Ar^{40} theo thời gian. Ta biết rằng nếu một mỏ chứa Kali bị chôn vùi theo những điều kiện thích hợp, thì Argon hình thành và bị giữ lại. Vì Argon được giải phóng khi mỏ bị đun nóng đến nhiệt độ cao, nên đá núi lửa không chứa Argon khi chúng được hình thành. Vì vậy, khối lượng Argon được tìm thấy trong loại đá đó có thể được dùng để xác định tuổi của đá. Giả sử rằng một mẫu đá núi lửa chứa $0,00047\%$ K^{40}. Mẫu này cũng chứa $0,000079\%$ Ar^{40}. Vậy đá bao nhiêu tuổi? (Cho biết tốc độ phân rã của K^{40} thành Ar^{40} là $5,335 \times 10^{-10}$/năm.)

Giải. Khối lượng K của K^{40} được cho bởi Định luật phân rã phóng xạ

$$K = K_0 e^{-\lambda t},$$

với $\lambda = 5,335 \times 10^{-10}$, theo giả thiết. Trong quá trình phân rã, thì số phần trăm của khối lượng Kali (tại t) là

$$\alpha = \frac{K}{K_0} \times 100$$

và số phần trăm của khối lượng Argon (tại t) là

$$\beta = \frac{K_0 - K}{K_0} \times 100.$$

Khi đó, ta có thể xác định tuổi T của đá từ việc giải ra T từ quan hệ dưới đây:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{K_0 - K}{K} = \frac{0,000079}{0,00047}$$
$$e^{\lambda T} - 1 = \frac{0,079}{0,47}$$

◁

1.3. Giới hạn hàm số

1.3.1. Giới hạn hữu hạn của hàm số

Ta thường khảo sát sự thay đổi giá trị của một hàm số $f(x)$ khi xét x trong một *quá trình* nào đó. Quá trình ở đây được hiểu là:

(i) x nhận các giá trị "đủ gần" x_0 (hữu hạn).

(ii) x nhận các giá trị "đủ lớn".

(iii) x nhận các giá trị "đủ nhỏ".

Các quá trình trên được mô tả bởi khái niệm *lân cận* và được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.12. Cho số thực x_0. Mỗi khoảng có dạng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, với δ là một số dương nào đó, được gọi là một *lân cận của điểm* x_0. Các khoảng dạng $(A, +\infty)$, $(-\infty, B)$ (A, B là các số thực bất kỳ) lần lượt được gọi là *lân cận của* $+\infty$ và *lân cận của* $-\infty$.

Vậy, theo định nghĩa trên, ta có thể viết

$$x \text{ thuộc một lân cận của } x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0\colon |x - x_0| < \delta$$

$$x \text{ thuộc một lân cận của } +\infty \Leftrightarrow \exists A\colon x > A \tag{1.3}$$

$$x \text{ thuộc một lân cận của } -\infty \Leftrightarrow \exists B\colon x < B \tag{1.4}$$

hay mở rộng thêm:

$$x \text{ thuộc một lân cận của } x_0 \text{ và } x \neq x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \tag{1.5}$$

$$x \text{ thuộc một lân cận của } x_0 \text{ và } x > x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0\colon x_0 < x < x_0 + \delta \tag{1.6}$$

$$x \text{ thuộc một lân cận của } x_0 \text{ và } x < x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0\colon x_0 - \delta < x < x_0 \tag{1.7}$$

Mặt khác, sự thay đổi giá trị của hàm số $f(x)$ khi xét x trong một quá trình thường dẫn đến các trường hợp sau khi x thuộc quá trình đang xét:

(i) $f(x)$ "tùy ý gần" một số hữu hạn L.

(ii) $f(x)$ nhận các giá trị "lớn tùy ý".

(iii) $f(x)$ nhận các giá trị "nhỏ tùy ý".

Các trường hợp trên sẽ được mô tả tương ứng theo hình thức chính xác, rõ ràng hơn như sau:

(i) $|f(x) - L|$ nhỏ hơn số dương bất kỳ cho trước.

(ii) $f(x)$ lớn hơn số dương bất kỳ cho trước.

(iii) $f(x)$ nhỏ hơn số âm bất kỳ cho trước.

Trước khi khảo sát sự thay đổi các giá trị $f(x)$ khi x thuộc một quá trình cụ thể, ta xét ví dụ sau. Các hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = x + 1$$

lấy các giá trị tùy ý gần 2 khi x được chọn "đủ gần" 1 ($x \neq 1$) và trong trường hợp này, ta nói "Số 2 là giới hạn của $f(x)$ ($g(x)$) khi x dần đến 1".

Một cách tổng quát, cho $f(x)$ là hàm số xác định trong một khoảng (a, b) chứa x_0 (riêng tại điểm x_0, f có thể không xác định). Khi cho x lấy những giá trị "gần" với x_0 từ hai phía trên trục số, mà $f(x)$ lấy những giá trị "gần" với một số L và ta có thể làm cho những giá trị này "gần" L một cách tùy ý, miễn là x lấy các giá trị được chọn thích hợp, thì ta nói L là *giới hạn* của $f(x)$ khi *x dần đến x_0* (ghi là $x \to x_0$) và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Tất nhiên, định nghĩa trên hoàn toàn mang tính trực quan và ta sẽ thay nó bởi một định nghĩa chính xác theo ngôn ngữ toán học, tiện dụng khi dùng để chứng minh các kết quả về sau. Bằng cách kết hợp những mô tả về sự thay đổi các giá trị $f(x)$ khi x thuộc một quá trình cụ thể, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng mở chứa x_0 (riêng tại x_0, $f(x)$ có thể không xác định). Số L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi $x \to x_0$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ví dụ 1.3. Áp dụng định nghĩa trên để chứng minh rằng

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \quad \lim_{x \to 3}(2x + 1) = 7.$$

GIẢI. Ta có:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon \text{ khi } 0 < |x - 1| < \varepsilon.$$

Vậy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon\colon 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

nghĩa là $\lim_{x \to 1}[(x^2 - 1)/(x - 1)] = 2$.

Đối với giới hạn thứ hai, ta có: $|(2x + 1) - 7| = 2|x - 3| < \varepsilon$ khi $|x - 3| < \varepsilon/2$. Vậy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}\colon 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x + 1) - 7| < \varepsilon,$$

nghĩa là $\lim_{x \to 3}(2x + 1) = 7$. ◁

Ta có thể chứng minh được rằng số L trong Định nghĩa 1.13 (nếu tồn tại) là duy nhất. Theo định nghĩa trên, để có giới hạn L khi $x \to x_0$, hàm $f(x)$ phải được xác định ở cả hai bên điểm x_0; vì vậy, khái niệm giới hạn trên cũng được gọi là giới hạn *hai bên*. Mặt khác, một hàm số có thể lấy giá trị gần số L một cách tùy ý khi x chỉ dần đến x_0 từ bên phải hoặc bên trái. Khi đó, ta có khái niệm giới hạn *một bên* sau đây:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (x_0, b). Nếu $f(x)$ tùy ý gần L khi x dần đến x_0 từ bên trong (x_0, b) thì ta sẽ viết là

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L)$$

và gọi L là *giới hạn bên phải* của $f(x)$ tại x_0. Hoàn toàn tương tự đối với hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, x_0), với cách viết tương ứng là

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L)$$

và L được gọi là *giới hạn bên trái* của $f(x)$ tại x_0. Việc chính xác hóa các khái niệm này được cho lần lượt bởi các mệnh đề:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Từ các định nghĩa trên, ta dễ dàng chứng minh được:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Ví dụ 1.4. Tính $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x-1}$.

Giải. Ta có

$$|\sqrt{2x-1}-0|=\sqrt{2x-1}<\varepsilon \text{ khi } 0<2x-1<\varepsilon^2 \text{ hay } \frac{1}{2}<x<\frac{1+\varepsilon^2}{2}.$$

Từ đó

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}\colon \frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}+\delta\Rightarrow|\sqrt{2x-1}-0|<\varepsilon.$$

Vậy: $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x-1}=0$. ◁

Đối với $f(x)$ là hàm sơ cấp, việc tính giới hạn của hàm số thường cho kết quả

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Ví dụ 1.5. Tìm $\lim_{x\to x_0}\sin x$.
Giải. Ta nhắc lại ở đây một kết quả đã được chứng minh: $|\sin x|\le|x|,\ \forall x$. Khi đó

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|.$$

Từ đó

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon\colon 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

Vậy: $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. ◁

Một cách tổng quát, ta chứng minh được rằng:

Định lý 1.2. *Nếu f là hàm sơ cấp xác định trong lân cận của điểm x_0 thì*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Để kết thúc đoạn này, bạn đọc hãy nêu ví dụ về trường hợp mà $f(x)$ tùy ý gần L khi x nhận các giá trị đủ lớn và hãy phát biểu định nghĩa cho các ký hiệu tương ứng sau:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

1.3.2. Giới hạn vô hạn của hàm số

Bằng cách thay số L (hữu hạn) trong đoạn trên bởi các trường hợp $+\infty$ hay $-\infty$, ta cũng có các trường hợp về giới hạn tương ứng với các quá trình

$$x\to x_0,\quad x\to x_0^+,\quad x\to x_0^-,\quad x\to+\infty,\quad x\to-\infty.$$

Chẳng hạn, ta sẽ dùng ký hiệu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

nếu mệnh đề sau được thỏa

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

Theo định nghĩa trên, dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to 0} x^{-\frac{4}{3}} = +\infty.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có các định nghĩa tương ứng cho các ký hiệu:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \ldots.$$

Theo những trường hợp đã xét, ta dễ dàng kiểm chứng được các kết quả sau:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } 1 < a \\ +\infty & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{C}{x^\alpha} = 0,$$

trong đó, $\alpha > 0$ và C tùy ý.

Đối với P, Q là các đa thức, ta chứng minh được các kết quả sau:

Giới hạn	Kết quả theo các trường hợp so sánh bậc		
	$\deg(P) = \deg(Q)$	$\deg(P) < \deg(Q)$	$\deg(P) > \deg(Q)$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\dfrac{a}{b}$	0	$\pm\infty$
a, b: là các hệ số chính tương ứng của P, Q			

Theo các kết quả trên ta có

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3+2}{3x^3-x^2+1} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x+3}{-x^2+5} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{3x-2} = +\infty.$$

Chú ý rằng nếu kết hợp các trường hợp $f(x)$ có giới hạn L (hữu hạn), $+\infty$, $-\infty$ với các quá trình ứng với các trường hợp (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), và (1.7), thì ta sẽ có đầy đủ các trường hợp về giới hạn thông thường. Chẳng hạn, nếu kết hợp trường hợp $-\infty$ với (1.7), thì ta có một trường hợp về giới hạn, với ký hiệu

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

và mệnh đề tương ứng sau:

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < B.$$

1.3.3. Các tính chất của giới hạn hàm số

Khi một tính chất về giới hạn được nghiệm đúng cho mọi quá trình thì thay vì viết $\lim_{x\to x_o} f(x)$, hay $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, ta sẽ chỉ viết đơn giản là $\lim f(x)$. Đặc biệt, nếu $g(x) = C$ là hàm hằng thì $\lim g(x)$ được viết là $\lim C$.

Ta chứng minh được các tính chất về giới hạn sau đây:

Định lý 1.3. *Trong cùng một quá trình, nếu* $\lim f(x) = M$ *và* $\lim g(x) = N$*, với* $M, N \in \mathbb{R}$*, thì*

(a) $\lim[f(x) + g(x)] = M + N.$

(b) $\lim[f(x)g(x)] = MN.$

(c) $\lim C = C.$

(d) $\lim[Cf(x)] = CM.$

(e) $\lim\,[f(x)]^{m/n} = M^{m/n} \quad (m,\, n \in \mathbb{Z}\colon M^{m/n} \in \mathbb{R}).$

(f) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{M}{N} \quad (N \neq 0).$

Định lý 1.4 (Nguyên lý kẹp) *Giả sử $g(x) \le f(x) \le h(x)$ đối với mọi x thuộc một lân cận của điểm x_0, có thể trừ ra tại điểm x_0. Nếu $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.*

Với $f(x) = x^n \sin^m(1/x)$, m, n là các số tự nhiên, ta có

$$0 \le |f(x)| \le |x|^n,\ \forall x \neq 0.$$

Do $\lim_{x\to 0} |x|^n = 0$ nên theo nguyên lý trên, ta suy ra $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Định lý 1.5. *Trong một quá trình, nếu $\lim u(x) = L$ và f là hàm sơ cấp, xác định trong một lân cận của L, thì*

$$\lim f[u(x)] = f(L) = f[\lim u(x)].$$

Do $f(x) = \sin x$ là hàm sơ cấp, xác định trong một lân cận của $x = \pi/2$ nên theo định lý trên, ta có

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 + 1}{2x^2 - x}\right) = \sin\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi x^2 + 1}{2x^2 - x}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Giả sử rằng trong cùng một quá trình, $\lim f(x) = +\infty$, $\lim g(x) = -\infty$. Khi đó, ta chứng minh được rằng

(i) $\lim[-f(x)] = -\infty$, $\lim[-g(x)] = +\infty$.

(ii) $\lim[f(x) - g(x)] = +\infty$.

(iii) $\lim[f(x)g(x)] = -\infty$.

Theo trên, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\log_2 x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

vì $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x = -\infty$ và $\lim_{x\to 0^+} (1/\sqrt{x}) = +\infty$. Ngoài ra, nếu ta có $\lim f(x) = +\infty$ và $\lim g(x) = a > 0$ thì dễ dàng chứng minh được rằng $\lim[f(x)g(x)] = +\infty$. Ta cũng dễ dàng suy ra các kết quả tương ứng khi $\lim f(x) = -\infty$ hay $\lim g(x) = a < 0$.

Định lý 1.6. *Cho $f(x)$ là hàm số xác định trong một lân cận của điểm x_0, có thể trừ ra tại x_0. Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > A$ thì tồn tại một lân cận Δ của x_0 sao cho $f(x) > A$, với mọi $x \in \Delta$, $x \neq x_0$.*

Ta cũng có kết quả tương tự trong trường hợp $L < A$. Ngoài ra, như hệ quả của định lý trên, nếu $f(x) \le A$ với mọi x thuộc một lân cận của x_0 ($x \neq x_0$) và nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, thì ta phải có: $L \le A$.

1.3.4. Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.14. Mỗi hàm số f có miền xác định $\mathbb{N}$ (tập mọi số tự nhiên) được gọi là một *dãy số* (hay gọi tắt là *dãy*). Nếu ký hiệu $f(n)$ là a_n ($n \in \mathbb{N}$) thì dãy thường được ký hiệu bởi các dạng

$$\{a_n\}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{hay } a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Chẳng hạn, ta có thể nói: cho dãy số

$$\left\{\frac{2n+1}{n}\right\} \quad \text{hay } 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \ldots, \frac{2n+1}{n}, \ldots.$$

Để đi đến khái niệm "giới hạn của dãy số", ta hãy khảo sát dãy $\{a_n\}$ ở trên. Khi cho n nhận các giá trị tự nhiên lớn một cách tùy ý và tăng dần (ta gọi là n đủ lớn), các giá trị tương ứng của a_n gần 2 một cách tùy ý theo nghĩa sau: khoảng cách $|a_n - 2|$ nhỏ hơn một số $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước (miễn là n được chọn lớn hơn một số n_0 nào đó). Để thấy rõ điều này, ta hãy xét bảng các giá trị tương ứng dưới đây:

n	200	500	1000	10000	20000	100000
a_n	2,005	2,002	2,001	2,0001	2,00005	2,00001

Theo kết quả trên, để $|a_n - 2| < 0,0001$, ta chỉ cần chọn $n > n_0 = 10000$; hoặc để $|a_n - 2| < 0,00005$, ta chọn $n > n_0 = 20000$, ... Khi đó, ta nói rằng: 2 là giới hạn của dãy đã cho và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Thật ra, nếu để ý rằng $a_n - 2 = 1/n$ thì, chẳng hạn, để

$$|a_n - 2| < 0,0001 \text{ hay } \frac{1}{n} < 0,0001,$$

ta chỉ cần chọn $n > n_0 = 1/(0,0001) = 10000$.

Một cách chính xác, ta đi đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.15. Cho dãy số $\{a_n\}$. Nếu tồn tại một số L (hữu hạn) sao cho

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \colon n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

thì L được gọi là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ và ta viết là $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; khi đó, $\{a_n\}$ còn được gọi là *hội tụ về* L (hay gọi tắt là *hội tụ*). Trong trường hợp không tồn tại số L như trên, dãy số $\{a_n\}$ được gọi là *phân kỳ*.

Chú ý.

1. Ta chứng minh được rằng: giới hạn của một dãy số (nếu tồn tại) là duy nhất.

2. Theo định nghĩa, tính chất hội tụ hay phân kỳ của dãy không thay đổi nếu ta thay đổi một số hữu hạn các số hạng của dãy. Ngoài ra, bằng cách đánh số lại các số hạng của dãy, ta có thể xét một dãy $\{a_n\}$, với $n \geq n_0$ và n_0 là một số nguyên cho trước.

3. Cho dãy $\{a_n\}$. Với k là số tự nhiên bất kỳ cho trước, xét dãy $\{b_n\}$, với

$$b_n = \begin{cases} a_{n+k}, & n \geq 1 \\ a_{n-k}, & n \geq k+1 \end{cases}$$

Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ thì ta cũng có $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_{n\pm k} = L$.

Ví dụ 1.6. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n-3} = \dfrac{3}{2}$.

Giải. Ta có

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{2(2n-3)} < \varepsilon \text{ khi } \frac{11}{2\varepsilon} < 2n-3 \text{ hay } n > \frac{11+6\varepsilon}{4\varepsilon} = n_0$$

Từ đó,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = \frac{11+6\varepsilon}{4\varepsilon} : n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Vậy, $\lim_{n\to\infty} \big[(3n+1)/(2n-3)\big] = 3/2$. ◁

Ví dụ 1.7. Chứng minh rằng dãy $\{(-1)^n\}$ phân kỳ.

Giải. Gọi $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ và giả sử dãy đã cho hội tụ về L. Theo định nghĩa, với $\varepsilon = 1/2$, mệnh đề sau phải được thỏa

$$\exists n_0 \colon n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{1}{2}.$$

Bây giờ, với cách chọn $m, k > n_0$, với m chẵn và k lẻ, theo mệnh đề trên, ta có: $|a_m - L| < 1/2$, $|a_k - L| < 1/2$. Từ đó

$$2 = |a_m - a_k| = |a_n - L + L - a_k| \le |a_m - L| + |a_k - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Điều vô lý trên chứng tỏ rằng dãy $\{(-1)^n\}$ là phân kỳ. ◁

Ví dụ 1.8. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Giải. Với $n > 1$, theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$\big(1 + \sqrt[n]{n} - 1\big)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\big(\sqrt[n]{n} - 1\big)^2 \text{ hay}$$
$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\big(\sqrt[n]{n} - 1\big)^2.$$

Từ đó, ta có

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\ \forall n > 1.$$

Do $\lim_{n\to\infty}\big(\sqrt{2}/\sqrt{n}\big) = 0$ nên theo nguyên lý kẹp, ta suy ra kết quả cần chứng minh. ◁

Định lý 1.7. *Cho các dãy hội tụ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ với $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} = b$. Khi đó, các dãy $\{a_n + b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\{Ca_n\}$ (C là hằng số), $\{a_n/b_n\}$ cũng hội tụ và ta có*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab$.

(c) $\lim_{n\to\infty}(Ca_n) = Ca$.

(d) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$ $(b \ne 0)$.

Với q là một số cho trước, ta chứng minh được rằng: dãy $\{q^n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $-1 < q \leq 1$, và trong trường hợp $|q| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Chẳng hạn, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1.$$

Tương tự như đối với giới hạn của hàm số, ta cũng có một số dạng giới hạn khác của dãy số. Đối với dãy $\{a_n\}$, ta viết

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu mệnh đề sau được thỏa: $\forall A > 0$, $\exists n_0 \colon n > n_0 \Rightarrow a_n > A$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ nếu mệnh đề sau được thỏa: $\forall B < 0$, $\exists n_0 \colon n > n_0 \Rightarrow a_n < B$.

Tất nhiên trong cả hai trường hợp trên thì $\{a_n\}$ là dãy phân kỳ và lần lượt được gọi là *dần đến* $+\infty$ và *dần đến* $-\infty$.

Với $\alpha > 0$ là một số cho trước, ta có thể chứng minh được rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (Bn^\alpha) = +\infty,$$

trong đó, A là số tùy ý và B là số dương tùy ý.

Ta cũng xét một số tính chất đặc biệt của dãy như sau:

(a) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là *tăng* (*giảm*) nếu $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$ ($a_n > a_{n+1}$, $\forall n$). Dãy tăng hoặc giảm được gọi là dãy *đơn điệu*.

(b) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là *bị chặn dưới* (*bị chặn trên*) nếu tồn tại A sao cho: $A \leq a_n$, $\forall n$ ($a_n \leq A$, $\forall n$).

(c) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là *bị chặn* nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới.

Dễ dàng kiểm chứng được các kết quả sau:

(a) Dãy $\{a_n\}$ bị chặn $\Leftrightarrow \exists C \colon |a_n| \leq C$, $\forall n$.

(b) Nếu dãy $\{a_n\}$ hội tụ thì nó là dãy bị chặn.

Ngoài ra, ta còn chứng minh được các tiêu chuẩn hội tụ quan trọng của dãy như sau:

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn: Nếu $\{a_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên thì nó là dãy hội tụ và ta có

$$a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n, \forall n.$$

Ta cũng có kết quả tương tự đối với dãy giảm và bị chặn dưới.

Tiêu chuẩn Cauchy: $\{a_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \colon m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.

Chú ý. Trong các tiêu chuẩn trên, điều kiện tăng (hoặc giảm) của dãy $\{a_n\}$ có thể được thay bởi: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$ (hoặc $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$).

Ví dụ 1.9. Hãy dùng tiêu chuẩn Cauchy để chứng minh $\{a_n\}$ là dãy phân kỳ, với

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Giải. Xét $\varepsilon_0 = 1/4$ và với mọi số tự nhiên n, ta luôn chọn được số tự nhiên $m > n$. Khi đó, ta có:

$$|a_{2m} - a_m| = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+m} > \frac{1}{m+m} + \cdots + \frac{1}{m+m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

Từ đó suy ra mệnh đề ở vế phải của tiêu chuẩn Cauchy không thỏa nên dãy đã cho là phân kỳ. $\triangleleft$

1.3.5. Một số công thức giới hạn quan trọng

Xét dãy $\{(1+1/n)^n\}$. Dùng công thức khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

với $a = 1$, $b = 1/n$, ta chứng minh được dãy trên là

$$\text{tăng: } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \forall n$$

$$\text{bị chặn trên: } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n.$$

Vậy nó là dãy hội tụ và ta ký hiệu giới hạn của nó là e, nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ta cũng chứng minh được e là số vô tỉ, có biểu diễn thập phân là $e = 2,7128128\ldots$ và dựa theo các tiêu chuẩn hội tụ, ta có bất đẳng thức:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \forall n.$$

Ngoài ra, logarithm cơ số e của x được viết là $\ln x$ (thay vì là $\log_e x$). Sử dụng kết quả về giới hạn e nêu trên, ta chứng minh được các giới hạn hàm số sau:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Trên thực tế, các công thức trên và các công thức về giới hạn thường được áp dụng dưới dạng tổng quát sau đây (trong cùng một quá trình):

$$\lim\,(1+f(x))^{1/f(x)} = e, \quad \lim\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} = \ln a, \quad \lim\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1,$$

trong đó $\lim f(x) = 0$ trong quá trình đang xét. Chẳng hạn, ta có

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1.$$

Cuối cùng, một giới hạn quan trọng khác được nhắc lại ở đây là

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.3.6. Quan hệ giữa giới hạn dãy số và giới hạn hàm số

Trong một số trường hợp, để có thể áp dụng các kết quả về giới hạn hàm số cho việc tính giới hạn dãy số, ta thường dùng mối quan hệ sau đây:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\{a_n\}\colon a_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Trong quan hệ trên, điều kiện $a_n \neq x_0$ được hiểu là: tồn tại n_0 sao cho $a_n \neq x_0$ với mọi $n \geq n_0$; ngoài ra, điều kiện này sẽ không cần thiết khi $L = f(x_0)$, nghĩa là khi f liên tục tại x_0, hoặc khi thay x_0 bởi $\pm\infty$. Ta cũng có mối quan hệ tương tự khi xét giới hạn một bên ($x \to x_0^{\pm}$) hay khi thay x_0 và L bởi $+\infty$ hay $-\infty$.

Ví dụ 1.10. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$.
GIẢI. Hàm số $f(x)=\sin(1/x)$ không thể dần đến $+\infty$ (hoặc $-\infty$) khi $x\to 0$ vì

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1,\ \forall x\neq 0.$$

Mặt khác, $f(x)$ cũng không thể có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$. Thật vậy, xét các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ với

$$a_n=\frac{1}{n\pi},\quad b_n=\frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$$

Rõ ràng $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$, nhưng $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=0\neq\lim_{n\to\infty}f(b_n)=1$. Vậy, không tồn tại giới hạn đã chỉ. $\lhd$

Ví dụ 1.11. Tính $L=\lim_{n\to\infty}[n\,\mathrm{tg}\,(\pi/2n)]$.
GIẢI. Do

$$n\mathrm{tg}(\pi/2n)=\frac{\mathrm{tg}\,(\pi/2n)}{(\pi/2n)}\frac{\pi}{2},$$

và do $\lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}\,x/x)=1$, nên $L=\pi/2$ (vì $\lim_{n\to\infty}\pi/2n=0$). $\lhd$

Từ mối quan hệ giữa hai loại giới hạn đã nêu và từ tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của dãy số, ta có thể chứng minh một tiêu chuẩn về sự tồn tại giới hạn của hàm số sau đây: $f(x)$ có giới hạn (hữu hạn) khi $x\to x_0$ khi và chỉ khi

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\colon 0<|x-x_0|<\delta,\ 0<|x'-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Việc kiểm chứng tính đúng đắn của tiêu chuẩn trên được xem như bài tập. Tương tự, ta cũng có thể thiết lập các tiêu chuẩn khác về sự tồn tại giới hạn trong các quá trình $x\to {x_0}^{\pm}$, $x\to\pm\infty$.

1.3.7. Các hàm số hyperbolic

Ngoài những kết quả đã nêu về số e, ta xét các hàm số sơ cấp đặc biệt sau đây có liên quan đến e và có vai trò quan trọng trong kỹ thuật, được gọi chung là các hàm *hyperbolic* và được cho bởi

$$\cosh x:=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\qquad \sinh x:=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$
$$\tanh x:=\frac{\sinh x}{\cosh x};\qquad \coth x:=\frac{1}{\tanh x}.$$

Tương tự như đối với các hàm số lượng giác, ta thường viết $\cosh^n x$, $\sinh^n x$, … thay cho $(\cosh x)^n$, $(\sinh x)^n$, …, với $n\in\mathbb{N}$. Các công thức sau đây dễ dàng được kiểm chứng với mọi giá trị thực của a và b:

$$\cosh^2 a-\sinh^2 a=1,$$
$$\sinh(a\pm b)=\sinh a\cosh b\pm\cosh a\sinh b,$$
$$\cosh(a\pm b)=\cosh a\cosh b\pm\sinh a\sinh b.$$

Nếu $f(x)=\cosh x$ với $x\geq 0$, thì hàm số ngược của f, cũng được viết là $\cosh^{-1}$ và được xác định bởi $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$; tương tự, nếu $g(x)=\cosh x$ với $x\leq 0$, thì $g^{-1}(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$. Ngoài ra, ta cũng có:

$$\sinh^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big).$$

Bạn đọc hãy tự kiểm chứng các kết quả vừa nêu, trong đó cần xác định chính xác các miền xác định và miền giá trị của các hàm số có liên quan.

Một lý do để được gọi là các hàm số "hyperbolic" là cosh và sinh có thể được dùng để tham số hóa các đường cong hyperbol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.8}$$

giống như các hàm lượng giác cos, sin được dùng để tham số hóa đường tròn, hay nói chung là các đường cong ellip. Thật vậy, theo đặc điểm của các hàm hyperbolic, nhánh của đường cong (1.8) ứng với $x \geq a$, có thể được tham số hóa bởi

$$\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = b\sinh t. \end{cases}$$

1.3.8. So sánh các vô cùng bé

Định nghĩa 1.16. Hàm số $f(x)$ được gọi là *vô cùng bé* (VCB) trong một quá trình, nếu trong quá trình đó $\lim f(x) = 0$.

Theo định nghĩa trên thì

(a) $\cos x$ là VCB khi $x \to \pi/2$ và không là VCB khi $x \to 0$.

(b) $f(x) = x^2 + x$ là VCB khi $x \to 0$ hoặc $x \to -1$.

Định nghĩa 1.17. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình. Nếu trong quá trình đó, $\lim \big(f(x)/g(x)\big) = 0$, thì $f(x)$ được gọi là VCB *bậc cao hơn* $g(x)$, ký hiệu: $f(x) = \mathbf{o}(g(x))$ (trong quá trình đang xét).

Rõ ràng, ta có: $x^3 = \mathbf{o}(x^2)$ và $1 - \cos x = \mathbf{o}(x)$ khi $x \to 0$.

Định nghĩa 1.18. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình. Nếu trong quá trình đó, $\lim \big(f(x)/g(x)\big) = 1$, thì $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là VCB *tương đương*, ký hiệu

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{(trong quá trình đang xét)}$$

Rõ ràng, trong quá trình $x \to 0$, ta có các VCB tương đương sau:

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Nếu f, g là các VCB tương đương trong một quá trình thì trong quá trình đó, ta có

$$\lim \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0.$$

Từ đó, ta có $f(x) - g(x) = \mathbf{o}(g(x))$ hay

$$f(x) = g(x) + \mathbf{o}(g(x)). \tag{1.9}$$

Biểu diễn (1.9) cho ta công thức gần đúng

$$f(x) \approx g(x),$$

với sai số là $\mathbf{o}(g(x))$ và công thức càng chính xác khi $|g(x)|$ càng nhỏ.

Từ các VCB tương đương đã xét, ta có các công thức gần đúng tương ứng sau đây:

$$\underset{(x\to 0)}{\ln(1+x)\sim x} \longrightarrow \underset{(|x| \text{ nhỏ})}{\ln(1+x)\approx x}$$

$$\underset{(x\to 0)}{\sin x\sim x} \longrightarrow \underset{(|x| \text{ nhỏ})}{\sin x\approx x}$$

$$\underset{(x\to 0)}{1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}} \longrightarrow \underset{(|x| \text{ nhỏ})}{\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}}$$

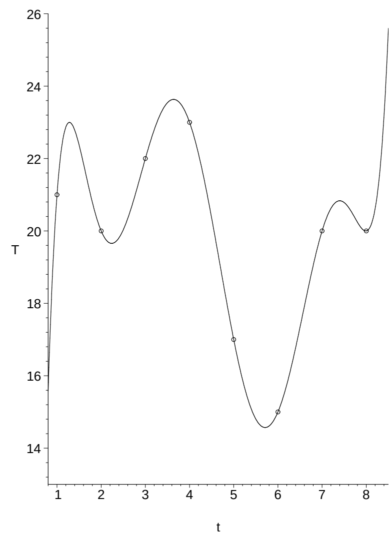
Để minh họa cho các công thức trên, ta nêu ra ở đây các kết quả được cho bởi máy tính:

$$\ln(1,003)\approx 0,0029955, \quad \sin(0,002)\approx 0,0019999, \quad \cos(0,02)\approx 0,9998000067.$$

Riêng kết quả sau cùng, ta hãy xét phép tính sau để hiểu được độ chính xác cao hơn của công thức tương ứng so với hai công thức còn lại:

$$1-\frac{(0,02)^2}{2}=0,9998.$$

1.3.9. Tính liên tục của hàm số



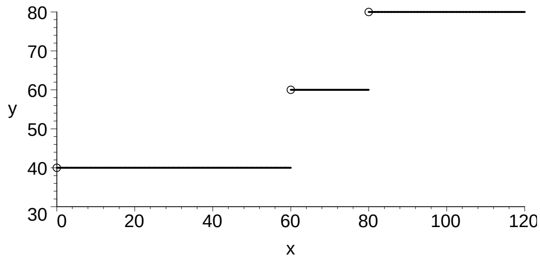
Hình 1.1: Đồ thị hàm nhiệt độ $T=f(t)$.

Giả sử khi khảo sát sự thay đổi nhiệt độ $T=f(t)$ trong ngày tại mỗi thời điểm t, ta nhận được các cặp giá trị sau:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
T	21	20	22	23	17	15	20	20

Ta biểu diễn sự thay đổi này bởi đường cong nối các điểm $(1,21)$, $(2,20)$,..., $(8,20)$. Chú ý rằng đường cong được vẽ một cách liền nét và ta gọi nó là một đường cong *liên tục*. Đồ thị của hàm số $T=f(t)$ có tính chất như vậy bởi vì, chẳng hạn: nếu nhiệt độ là 15°C tại 6 giờ và 20°C tại 7 giờ

$$G(x) = \begin{cases} 40 & 0 < x \leq 60 \\ 60 & 60 < x \leq 80 \\ 80 & 80 < x \leq 120 \\ \quad \dots & \end{cases}$$



Hình 1.2: Đồ thị hàm số $y = G(x)$.

thì có nghĩa là nhiệt độ thay đổi *dần dần* và *liên tục* từ 15°C đến 20°C trong suốt 1 giờ. Ta cũng có cùng nhận xét trên khi khảo sát sự thay đổi vận tốc $v = g(t)$ tại mỗi thời điểm t của một chất điểm chuyển động thẳng. Điều này lại không như vậy đối với đồ thị của hàm số $y = G(x)$ dưới đây:

Để ý rằng ta không thể vẽ đồ thị mà không nhấc viết ra khỏi mặt giấy tại các điểm $x = 60$, $x = 80, \dots$ và như vậy, đồ thị là đường cong *không liền nét*.

Hàm số được xét trong trường hợp thứ nhất có *tính liên tục* tại mọi điểm thuộc miền xác định, còn trong trường hợp thứ hai thì được gọi là có *tính gián đoạn* tại các điểm $x = 60$, $x = 80, \dots$.

Ta hãy giải thích rõ hơn tính "liền nét" của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi đường cong được vẽ qua điểm $(x_0, f(x_0))$ của nó. Khi x lấy các giá trị gần x_0, rõ ràng $|f(x) - f(x_0)|$ dần đến 0; nghĩa là ta có thể làm cho khoảng cách này nhỏ một cách tùy ý miễn là x được chọn đủ gần x_0. Từ đó, theo định nghĩa giới hạn của hàm số, ta đi đến định nghĩa chính xác sau đây về tính liên tục của hàm số tại một điểm.

Định nghĩa 1.19. Hàm số f được gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu chỉ có $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (hoặc $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$) thì f được gọi là liên tục bên phải (hoặc bên trái) tại x_0.

Chú ý. Theo Định lý 1.2, nếu f là hàm sơ cấp, xác định trong một lân cận của điểm x_0 thì f liên tục tại x_0.

Nếu f không liên tục tại x_0 thì nó được gọi là *gián đoạn* tại x_0 và theo định nghĩa, một trong các trường hợp sau phải xảy ra:

(i) f không xác định tại x_0.

(ii) Không tồn tại $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Hàm số $f(x) = [x]$ (hàm phần nguyên) liên tục tại các điểm $x \notin \mathbb{Z}$ và không liên tục tại các điểm $x \in \mathbb{Z}$. Chẳng hạn, $\lim_{x \to -3^-} [x] = -4$, nhưng $[-3] = -3$.

Ngoài ra, ta cũng xét thêm các khái niệm sau :

(a) Hàm số f được gọi là liên tục trên một khoảng mở nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó. Hàm số f được gọi là liên tục trên một nửa khoảng $[a, b)$ (hoặc $(a, b]$) nếu f liên tục trên (a, b) và liên tục bên phải tại a (hoặc bên trái tại b). Các điểm mút không thuộc các khoảng nói trên có thể là $-\infty$ hay $+\infty$.

(b) Hàm số f được gọi là liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ nếu: f liên tục trên khoảng (a, b) và f liên tục bên phải tại a, liên tục bên trái tại b.

CHÚ Ý. Theo định nghĩa về tính liên tục và sự mô tả bản chất của khái niệm này, ta có thể nói: đồ thị của hàm f liên tục trên $[a, b]$ là một đường liền nét nối hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$.

Từ các tính chất của giới hạn hàm số, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây.

(a) Nếu f, g là các hàm số liên tục tại x_0 thì các hàm số sau cũng liên tục tại x_0: λf (λ là hằng số), $f + g$, fg, f/g ($g(x_0) \neq 0$), $[f(x)]^{m/n}$ (m, n nguyên và $[f(x)]^{m/n}$ xác định trên một lân cận của x_0).

(b) Nếu $\lim u(x) = u_0$ và f liên tục tại u_0 thì $\lim f[u(x)] = f[\lim u(x)] = f(u_0)$.

Theo định lý trên, ta có

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2-3x}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] = -1.$$

Ngoài ra, cần chú ý đến những định lý quan trọng sau đây, thường được sử dụng cả trong lý thuyết lẫn ứng dụng.

Định lý 1.8. *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì $\exists\, x_0 \in (a, b)\colon f(x_0) = 0$.*

Ta có thể áp dụng định lý trên để chứng minh mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm thực. Thật vậy, xét đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

với $a_n > 0$ và n lẻ (trường hợp $a_n < 0$, lập luận tương tự). Do

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^n\Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\Big)\right] = -\infty$$

nên tồn tại số $\alpha < 0$ sao cho $P(\alpha) < 0$. Lập luận tương tự khi xét $x \to +\infty$, ta suy ra tồn tại số $\beta > 0$ sao cho $P(\beta) > 0$. Do P là hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $P(\alpha)f(\beta) < 0$ nên theo định lý trên, tồn tại $x_0 \in (\alpha, \beta)$ sao cho $P(x_0) = 0$.

Định lý 1.9. *Mọi hàm f liên tục trên $[a, b]$ đều đạt các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[a, b]$.*

Định lý 1.10. *Nếu f liên tục và không triệt tiêu trong một khoảng (a, b) thì nó không đổi dấu trong khoảng này.*

Áp dụng định lý trên ta có thể xét dấu các giá trị của hàm liên tục, không nhất thiết phải là tích các thừa số bậc nhất hay bậc hai. Chẳng hạn, với $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 8}$, ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt{x^2 + 8} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 = 0,\ x \geq -1/2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do $f(x)$ liên tục trong $\mathbb{R}$ và theo kết quả trên, f giữ một dấu trong các khoảng $(-\infty, 1)$ và $(1, +\infty)$. Từ đó,

$$0 \in (-\infty, 1),\ f(0) = 1 - \sqrt{8} < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 1).$$
$$2 \in (1, +\infty),\ f(2) = 5 - \sqrt{12} > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in (1, +\infty).$$

Để xét đến một đặc điểm quan trọng của tính liên tục, ta nhắc lại rằng: nếu f là hàm số xác định trên X và liên tục tại một điểm $u \in X$ thì mệnh đề sau được thỏa

"Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $x \in X$ và $|x-u| < \delta$ thì ta có $|f(x)-f(u)| < \varepsilon$."

Nếu f còn liên tục tại các điểm khác của X thì nói chung, số δ trong mệnh đề trên không những phụ thuộc vào ε mà còn phụ thuộc vào bản thân điểm u. Trong trường hợp sự tồn tại của δ là "đều" cho mọi điểm của X (nghĩa là chỉ phụ thuộc vào ε) thì f được gọi là "liên tục đều trên X". Một cách chính xác, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.20. Hàm số f được gọi là liên tục đều trên X nếu: với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $u, v \in X$ thỏa $|u-v| < \delta$ thì $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Tính liên tục đều là một tính chất rất quan trọng khi dùng để chứng minh các kết quả trong lý thuyết, chẳng hạn lý thuyết *tích phân* mà ta sẽ xét sau. Quan hệ giữa tính liên tục đã xét và tính liên tục đều trong định nghĩa trên được cho bởi định lý sau.

Định lý 1.11. *Nếu hàm số f liên tục trên $[a,b]$ thì nó cũng liên tục đều trên $[a,b]$.*

Tuy nhiên, khi f liên tục trong một khoảng (a,b) thì chưa chắc là f liên tục đều trong khoảng đó. Thật vậy, ta hãy xét ví dụ sau. Xét $f(x) = 1/x$ trong $(0,1)$ và số $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Với số $\delta > 0$ tùy ý, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho với $u = \frac{1}{n}$ và $v = \frac{1}{n+1}$, ta có: $|u-v| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$ nhưng $|f(u)-f(v)| = 1 > \varepsilon_0$. Từ đó suy ra f không liên tục đều trong $(0,1)$, dù f hiển nhiên là liên tục trong $(0,1)$.

1.4. Ứng dụng của giới hạn dãy

Trên thực tế, các hàm số thường gặp là các dãy số vì phù hợp với các biến độc lập nhận giá trị "rời rạc". Phần lớn các dãy số như vậy thường được cho dưới dạng *đệ quy*, nghĩa là các số hạng sau được tính theo các số hạng trước đó. Nếu dãy $\{a_n\}$ được cho bởi quan hệ giữa các số hạng liên tiếp

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.10}$$

trong đó f là hàm số đã cho, thì (1.10) được gọi là *dạng đệ quy bậc nhất* của $\{a_n\}$. Trong trường hợp $\{a_n\}$ được cho bởi một *dạng đệ quy bậc hai* thì số hạng sau được tính theo hai số hạng liên tiếp trước đó; chẳng hạn: $a_{n+1} = 2a_n - 3_{n-1} + 4$, $n = 1, 2, \ldots$. Đối với dạng đệ quy (1.10), để có thể xác định mọi số hạng của dãy, ta cần xác định hay được cho giá trị ban đầu a_0. Nếu từ quan hệ đệ quy mà ta tìm được công thức xác định mọi số hạng của dãy $\{a_n\}$ dưới dạng

$$a_n = g(n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.11}$$

thì (1.11) được gọi là *nghiệm* của dạng đệ quy đã cho. Trong trường hợp này, ta thường suy ra được giới hạn của $\{a_n\}$.

Ví dụ 1.12. Giả sử $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, được cho bởi dạng đệ quy

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}, \quad a_0 = 2. \tag{1.12}$$

Hãy xác định nghiệm của dạng đệ quy trên và từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Từ dạng đệ quy đã cho, ta có

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4+1}{4} \\ a_2 &= \frac{1}{4}\Big(\frac{4+1}{4}\Big) + \frac{3}{4} = \frac{4+1+4\times 3}{16} = \frac{4^2+1}{4^2}. \end{aligned}$$

Theo kết quả trên, ta dự đoán rằng

$$a_n = \frac{4^n + 1}{4^n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.13}$$

chính là nghiệm của dạng đệ quy đã cho. Thật vậy, với $n = 0$, ta nhận được

$$a_0 = \frac{4^0 + 1}{4^0} = 2.$$

Ngoài ra, bằng cách biến đổi trực tiếp (1.13), ta có:

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1} + 1}{4^{n+1}} = \frac{4^n + 1 + 4^n \times 3}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{4^n + 1}{4^n}\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}.$$

Từ đó, dễ thấy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. ◁

Trong trường hợp không giải ra được a_n, ta cũng có thể xác định các "ứng viên" cho giới hạn dãy $\{a_n\}$. Trước tiên, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.21. Đối với dãy $\{a_n\}$, điểm bất động là điểm sao cho nếu a_0 là điểm này thì mọi a_n cũng đều bằng điểm đó.

Giả sử $\{a_n\}$ là dãy được cho bởi dạng đệ quy $a_{n+1} = f(a_n)$. Theo quan hệ giữa giới hạn dãy và giới hạn hàm số, nếu $\{a_n\}$ hội tụ về a và f là hàm liên tục tại a thì $a = f(a)$. Khi đó, dễ dàng kiểm chứng được rằng: a chính là điểm bất động của dãy $\{a_n\}$.

Trong ví dụ vừa xét ở trên, đối với $\{a_n\}$ được cho bởi (1.12), ta dễ dàng kết luận:

$$a_n > 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4}(1 - a_n) < 0, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Vậy $\{a_n\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ về a (≥ 1), chính là nghiệm của phương trình

$$a = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 1.$$

Ví dụ 1.13. Cho dãy $\{a_n\}$ dưới dạng $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, với $a_0 = 2$. Hãy tìm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

GIẢI. Dễ thấy $2 < a_n < 3$, $n = 1, 2, \dots$. Từ đó, suy ra $a_n^2 < 3a_n$ hay $a_n < \sqrt{3a_n} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Vậy $\{a_n\}$ là dãy hội tụ về a (với $2 \leq a \leq 3$) vì nó là dãy tăng và bị chặn trên. Do $f(x) = \sqrt{3x}$ liên tục tại $x = a$ nên $a = f(a) = \sqrt{3a}$ hay $a = 3$. ◁

1.4.1. Đường cong Beverton-Holt

Theo ví dụ về hàm số mũ đã xét, ta có thể tổng quát hóa về một mô hình tăng trưởng đơn giản dùng dãy số như sau. Giả sử a_0 là cỡ của một quần thể tại thời điểm ban đầu. Sau một đơn vị thời gian thì cỡ quần thể trên tăng lên $R \neq 1$ lần. Nếu ký hiệu a_n, $n = 1, 2, \dots$, là cỡ quần thể tại thời điểm n, thì ta có thể viết

$$a_n = a_0 R^n \quad n = 1, 2, \dots \text{ hay } a_{n+1} = R a_n \quad n = 0, 1, \dots.$$

Các mô hình quần thể sinh sản theo mùa với các thế hệ không giao thoa nhau, trong đó, cỡ quần thể ở một thế hệ chỉ phụ thuộc vào cỡ quần thể ở thế hệ trước, là một ứng dụng sinh học quan trọng của dãy. Mô hình tăng trưởng hàm mũ vừa nhắc lại ở trên hoàn toàn phù hợp với kiểu này. Cỡ quần thể tại t được ký hiệu là $N(t)$ hay N_t, $t = 0, 1, \ldots$. Khi đó, ta viết

$$N_{t+1} = f(N_t),$$

trong đó, f mô tả sự phụ thuộc mật độ vào biến động quần thể. Hệ thức đệ quy trên cũng được gọi là *phương trình sai phân* hay *ánh xạ lặp*. (Thuật ngữ phương trình sai phân bắt nguồn từ cách viết sự biến động dưới dạng $N_{t+1} - N_t = g(N_t) \equiv f(N_t) - N_t$.)

Ta thường khảo sát quần thể trong khoảng thời gian dài để biết được rằng, chẳng hạn, cỡ quần thể có đạt đến một hằng số hay có độ biến động lớn mà không thể có bất kỳ một mẫu nào có thể được nhận biết?

Xét mô hình $N_{t+1} = RN_t$, với N_0 là cỡ quần thể tại thời điểm ban đầu. Khi $R > 1$, hiển nhiên là cỡ quần thể sẽ tăng vô hạn vì tỉ số cha-con là một hằng số (< 1). Điều này có nghĩa là bất kể mật độ quần thể hiện hành, số con trên mỗi cha là hằng. Đặc điểm này cũng được gọi là sự tăng trưởng *không phụ thuộc mật độ*. Sự tăng trưởng như vậy là không thực tế. Khi cỡ quần thể tăng lên, các cá thể bắt đầu cạnh tranh lẫn nhau về các nguồn tài nguyên, chẳng hạn thức ăn hay nơi làm tổ. Điều này sẽ làm giảm sự tăng trưởng. Sự tăng trưởng như vậy được gọi là sự tăng trưởng *phụ thuộc mật độ*.

Để tìm mô hình cho sự tăng trưởng phụ thuộc, ta hãy bắt đầu với tỉ số của các cỡ liên tiếp trong mô hình tăng trưởng hàm mũ đã xét và giả sử rằng N_0 là dương sao cho mọi cỡ quần thể liên tiếp đều dương:

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}.$$

Khi ta có thể xem tỉ số như một hàm theo cỡ quần thể hiện hành N_t, thì N_t/N_{t+1} là một hàm hằng theo cỡ quần thể hiện hành N_t. Nếu chọn hệ tọa độ mà N_t và N_t/N_{t+1} lần lượt lấy các giá trị trên trục hoành và trục tung thì quan hệ N_t/N_{t+1} là hằng số tương ứng với một đường nằm ngang trong hệ tọa độ đang xét. Khi tỉ số cha-con N_t/N_{t+1} vẫn còn nhỏ hơn 1 thì cỡ quần thể đang tăng vì có ít cha mẹ hơn con cái. Mỗi khi tỉ số bằng 1 thì cỡ quần thể giữ không đổi từ một bước thời gian sang bước kế tiếp. Khi tỉ số lớn hơn 1, cỡ quần thể giảm.

Để xác định mô hình tăng trưởng suy giảm khi cỡ quần thể lớn dần, ta thay giả thiết tỉ số N_t/N_{t+1} là hằng bởi giả thiết rằng nó là một hàm số tăng theo cỡ quần thể hiện hành N_t. Nghĩa là thay $1/R$ bởi một hàm tăng theo N_t. Một hàm đơn giản có tính chất như vậy là hàm tuyến tính $aN_t + b$, với $a > 0$. Để so sánh mô hình của sự phụ thuộc mật độ với mô hình hàm mũ, ta giả sử rằng cả hai mô hình đều giống nhau khi các cỡ quần thể rất nhỏ. Từ đó, ta có thể giả sử rằng đường thẳng $N_t/N_{t+1} = aN_t + b$ qua điểm $(0, 1/R)$, với $R > 1$. Mật độ quần thể mà ở đó, tỉ số N_t/N_{t+1} bằng 1 là một trường hợp đặc biệt quan trọng vì nó tương ứng với cỡ quần thể không thay đổi từ một thế hệ sang thế hệ kế tiếp. Cỡ quần thể này được gọi là *ngưỡng gánh chịu* (carrying capacity) và được ký hiệu bởi K, với K là hằng số dương. Vì vậy, ta có thể yêu cầu đường thẳng trên (tương ứng với sự tăng trưởng phụ thuộc mật độ) nối hai điểm $(0, 1/R)$ và $(K, 1)$. Từ đó, ta có phương trình

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} + \frac{1 - (1/R)}{K} N_t.$$

Suy ra quan hệ đệ quy

$$N_{t+1} = \frac{R\,N_t}{1 + \dfrac{R-1}{K} N_t}, \tag{1.14}$$

được biết là đường cong *dung nạp* Beverton-Holt. Để tìm điểm bất động của phương trình đệ quy trên, ta giải phương trình

$$N = \frac{R\,N}{1 + \dfrac{R-1}{K}N}$$

theo N và nhận được hai điểm bất động $N = 0$ và $N = K$ khi $R > 1$. Đối với điểm $N = 0$, ta gọi là điểm tầm thường vì nó tương ứng với sự không tồn tại quần thể. Đối với điểm $N = K$, ta gọi nó là điểm không tầm thường vì nó tương ứng với một cỡ quần thể dương.

Như vậy, nếu $N_0 > 0$ thì

$$\lim_{t\to\infty} N_t = K.$$

Đây chính là lý do mà ta gọi K là ngưỡng gánh chịu! Thật vậy:

- Nếu $N_0 = K$ thì $N_t = K$, với $t = 1, 2, \ldots$, vì K là điểm bất động.
- Nếu $N_0 \neq K$, giả sử $N_0 > K$, thì dễ thấy $N_t > K$, $t = 1, 2, \ldots$. Khi đó,

$$N_{t+1} - N_t = \frac{R\,N_t}{1 + \dfrac{R-1}{K}N_t} - N_t = \frac{(R-1)N_t(K-N_t)}{K + (R-1)N_t} < 0$$

  suy ra $N_{t+1} < N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Vậy, $\{N_t\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới (bởi K) nên phải là dãy hội tụ về điểm bất động K (tại sao?). (Trường hợp $0 < N_0 < K$, lý luận tương tự.)

1.4.2. Phương trình logistic rời rạc

Mô hình cho từng loài, thời gian rời rạc và phổ biến nhất chính là phương trình logistic rời rạc, với dạng đệ quy được cho bởi:

$$N_{t+1} = N_t\left[1 + R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right], \tag{1.15}$$

trong đó, R và K là các hằng số dương. R được gọi là *tham số tăng trưởng* và K được gọi là *ngưỡng gánh chịu*. Sự phân tích sau đây sẽ giải thích các cách gọi như vậy. Mô hình tăng trưởng quần thể này trình bày các biến động rất phức tạp, được mô tả trong một bài viết của Robert May (1976).

Trước tiên, ta đưa mô hình về dạng chuẩn tắc, có dạng đệ quy là một biểu thức đơn giản hơn, bằng cách viết nó dưới dạng

$$\frac{R}{K(1+R)}N_{t+1} = \frac{R}{K}N_t\left(1 - \frac{R}{K(1+R)}N_t\right).$$

Nếu ta xác định biến mới

$$x_t = \frac{R}{K(1+R)}N_t$$

thì (1.15) trở thành

$$x_{t+1} = rx_t(1-x_t), \tag{1.16}$$

với $r = 1 + R > 1$ (do $R > 0$).

Chú ý. Biến x_t là không có thứ nguyên và có giá trị số giống nhau bất kể đơn vị đo theo biến gốc là gì. Để tìm các điểm bất động của (1.16), ta giải phương trình

$$x = rx(1-x)$$

và nhận được hai điểm bất động $x = 0$ và $x = 1 - (1/r)$. Theo biến cũ, ta có tương ứng hai điểm bất động là $N = 0$ và $N = K$.

Như đã chỉ ra trước, tính chất của phương trình logistic rời rạc là rất phức tạp. Ta sẽ thấy rõ điều này khi khảo sát một số trường hợp ứng với các giá trị của r và x_0. Theo các kết quả nhận được thì các mẫu cỡ quần thể trở nên rất lộn xộn (chaotic), còn các biến động thì không có chu kỳ! Hơn nữa, bắt đầu từ những điều kiện ban đầu rất ít khác biệt, có thể nhanh chóng sinh ra các quỹ đạo rất khác biệt. Sự “nhạy cảm” với các điều kiện ban đầu chính là đặc trưng của tính chất hỗn độn, lộn xộn. Để có được các kết quả có ý nghĩa sinh học, ta cần giới hạn cả r lẫn x_0. Lý do là nếu $x_t > 1$ thì $x_{t+1} < 0$. Điều này có thể được xử lý bằng cách thay đổi chỉ một ít cơ chế biến động. Ta sẽ khảo sát một mô hình như vậy trong tiểu đoạn kế tiếp.

1.4.3. Đường cong Ricker

Nhắc lại rằng, phương trình logistic rời rạc không có đặc điểm thực tế sinh học và các cỡ quần thể có thể lấy giá trị âm nếu người ta không hạn chế cỡ ban đầu và tham số tăng trưởng. Nguyên nhân của điều này là hàm $f(x) = rx(1-x)$ lấy giá trị âm khi $x > 1$ nên nếu $x_t > 1$ thì $x_{t+1} < 0$. Ta có thể xây dựng một phương trình sai phân có cùng tính chất như phương trình logistic, nhưng không nhận các cỡ âm (miễn là cỡ tại thời điểm 0 là dương). Đó chính là *đường cong* Ricker mà phương trình đệ quy của nó được gọi là *phương trình logistic* Ricker và được cho bởi:

$$N_{t+1} = N_t \exp\left[R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right], \tag{1.17}$$

trong đó, R và K là các tham số dương và cũng được gọi lần lượt là tham số tăng trưởng và ngưỡng gánh chịu. Theo đó, nếu $N_0 > 0$ thì $N_t > 0$ với mọi $t = 1, 2, \ldots$. Dễ thấy (1.17) có các điểm bất động $N = 0$ và $N = K$ và khi $N_0 > 0$, ta có

$$\lim_{t\to\infty} N_t = K.$$

Chú ý. Việc xây dựng mô hình Ricker có thể có cơ sở từ hai vô cùng bé tương đương $e^x - 1$ và x (từ đó, $e^x \approx 1 + x$) khi $x \to 0$.

1.4.4. Dãy Fibonacci

Ta sẽ khảo sát một ví dụ nổi tiếng về một phương trình sai phân bậc hai, nghĩa là N_{t+1} phụ thuộc cả hai N_t và N_{t-1}. Ví dụ xuất phát từ một bài toán được đặt ra vào năm 1202 bởi nhà toán học người Ý là Leonardo Da Pisa (1175-1250), được biết dưới cái tên Fibonacci: “Có bao nhiêu cặp thỏ được sinh ra nếu mỗi cặp lại sinh ra *một cặp thỏ lúc 1 tháng tuổi* và *một cặp thỏ khác lúc 2 tháng tuổi*, biết lúc đầu, chỉ có một cặp thỏ chào đời?”.

Gọi N_t là số cặp thỏ chào đời tại thời điểm t (tính theo tháng). Khi đó, tại thời điểm 0 chỉ có một cặp thỏ ($N_0 = 1$). Tại thời điểm 1, cặp thỏ ban đầu được 1 tháng tuổi nên sinh ra 1 cặp thỏ, như vậy $N_1 = 1$. Ở thời điểm 2, có một cặp được 2 tháng tuổi (cặp ban đầu) và một cặp được 1 tháng tuổi, nên mỗi cặp sinh ra một cặp thỏ mới, vậy $N_2 = 2 = N_0 + N_1$. Ở thời điểm 3, cặp ban đầu không sinh được nữa, các cặp N_1 (2 tháng tuổi) và N_2 (1 tháng tuổi) đều sinh được các cặp mới tương ứng nên $N_3 = N_2 + N_1 = 2 + 1 = 3$. Một cách tổng quát, để tìm số cặp thỏ mới được sinh ra tại một thời điểm, ta phải cộng lại số cặp thỏ 1 tháng tuổi và số cặp thỏ 2 tháng tuổi. Mặt khác, tại thời điểm $t+1$ số cặp thỏ 1 tháng tuổi được sinh ra tại thời điểm t, còn số cặp thỏ 2 tháng tuổi được sinh ra tại thời điểm $t-1$. Vậy, số cặp thỏ được sinh ra tại thời điểm $t+1$ là

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \tag{1.18}$$

với $t = 1, 2, \ldots$, và $N_0 = 1$, $N_1 = 1$. Dùng hệ thức đệ quy trên, ta xác định được dãy

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Tất nhiên, N_t sẽ dần đến $+\infty$ khi $t \to \infty$ (tại sao). Tuy nhiên, ta có thể chứng minh được tỉ số N_{t+1}/N_t hội tụ. Thật vậy, đặt

$$M_t = \frac{N_t}{N_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \ldots;$$

từ (1.18), ta có

$$M_{t+1} = 1 + \frac{1}{M_t}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

với $M_1 = 1$. Khi đó, ta dễ dàng kiểm chứng được

$$1 < M_t \le 2, \quad t = 2, 3, \ldots. \tag{1.19}$$

Bây giờ ta xét dãy $\{M_{2t}\}$, $t = 1, 2, \ldots$. Ta có $M_4 < M_2$ (do $M_4 = 5/3$, $M_2 = 2$). Giả sử $M_{2(t+1)} < M_{2t}$, với $t \ge 1$ nào đó; suy ra

$$1 + \frac{1}{M_{2t+2}} > 1 + \frac{1}{M_{2t}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{M_{2t+2}}} < 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{M_{2t}}}$$

$$1 + \frac{1}{M_{2t+3}} < 1 + \frac{1}{M_{2t+1}} \Leftrightarrow M_{2(t+2)} < M_{2(t+1)}.$$

Vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra $\{M_{2t}\}$ là dãy giảm nên là dãy hội tụ về α, với $1 \le \alpha \le 2$, do (1.19). Mặt khác, do

$$M_{2(t+1)} = 1 + \frac{1}{M_{2t+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{M_{2t}}}$$

nên

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \text{ hay } \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Từ điều kiện của α, suy ra

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{1.20}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $\{M_{2t+1}\}$, $t = 1, 2, \ldots$, là dãy tăng nên là dãy hội tụ về β thỏa $1 \le \beta \le 2$ và cũng suy ra được

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{1.21}$$

Từ các kết quả về các dãy hội tụ $\{M_{2t}\}$, $\{M_{2t+1}\}$, $t = 1, 2, \ldots$, và từ (1.20), (1.21), ta kết luận: dãy $\{M_t\}$ hay N_{t+1}/N_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, là dãy hội tụ về tỉ số $(1 + \sqrt{5})/2$ và nó được gọi là tỉ số *cân bằng* hay *tỉ số vàng*.

Một hình chữ nhật có các cạnh lập nên tỉ số này được gọi là một hình chữ nhật *chuẩn mực*. Nó được cho là một tỉ lệ cân đối, ưa nhìn nhất mà một hình chữ nhật có thể có được. Người cổ Hylạp đã dùng nó làm tỉ lệ cho các chiều của các kiến trúc của họ (chẳng hạn đền Parthenon). Các tỉ số của các số Fibonacci liên tiếp cũng có thể được tìm thấy trong tự nhiên. Những cánh hoa trên đóa hoa, chẳng hạn hoa Hướng dương, chạy theo những đường xoắn ốc và tỉ số giữa số các đường xoắn ốc chạy theo các hướng ngược lại thường là các số Fibonacci liên tiếp.

Hình 1.3: Các đường xoắn ốc trên đóa hoa Hướng dương.

1.5. Bài tập

1. Cho các tập $A = [2, 5]$, $B = [-1, 3) \cup (4, 6]$. Tìm $A \setminus B$, $A \cup B$ và $A \cap B$.

2. Chứng minh rằng các phương trình $x^2 = 12$ không có nghiệm trong tập hợp mọi số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

3. Hãy viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng một phân số tối giản:

   (a) $1,2(32)$. (b) $2,00(1)$.
   (c) $1,(212)$. (d) $3,21(23)$.

4. Tìm miền giá trị của các hàm số

   (a) $y = \dfrac{1}{x}$. (b) $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$.

5. Tìm hàm ngược của các hàm số sau đây:

   (a) $y = x^2 - 2x$. (b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.
   (c) $y = 1 + \lg(x + 2)$. (d) $y = 2\sin 3x$.
   (e) $y = \cosh x$. (f) $y = \sinh x$.

6. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x - [x]$ (với $[x]$ là phần nguyên của x) là tuần hoàn và xác định chu kỳ cơ sở của nó. Hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

7. Chứng minh rằng hàm phần nguyên $y = [x]$ không phải là hàm tuần hoàn.

8. Xác định chu kỳ cơ sở của các hàm số tuần hoàn sau:
   (a) $y = 2\sin 3x + 3\sin 2x$. (b) $y = |\sin x| + |\cos x|$.

9. Tìm các giá trị của x thỏa hệ thức:
   (a) $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$. (b) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x} - \pi$.

10. Cho $f(x)$ là một hàm số có miền xác định D đối xứng qua gốc tọa độ (nghĩa là: $x \in D \Rightarrow -x \in D$). Chứng minh rằng f luôn có thể được viết dưới dạng tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ.

11. Cho các hàm số $f\colon x \mapsto x^2 + 1$ và $g\colon x \mapsto \sin x$. Xác định các hàm $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ và $g \circ g$.

12. Cho f là hàm số chẵn, g là hàm số lẻ và cả hai đều xác định trên toàn trục số. Hãy xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số $f + g$, fg, $f \circ g$, $g \circ f$.

13. Giả sử $|f(x)| \leq g(x)$ với mọi x. Có thể kết luận gì về giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nếu
   (a) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$? (b) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 3$?

14. Tính các giới hạn sau:
   (a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$
   (c) $\lim\limits_{y\to -\sqrt{2}}\dfrac{|y^2-2|}{y^2+2\sqrt{2}y+2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$

15. Tìm các giới hạn một bên đã chỉ hoặc giải thích tại sao giới hạn không tồn tại:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0-}\sqrt{x^3-x}$. (b) $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x^3-x}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$.

16. Cho $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, tìm $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

17. Cho $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, tìm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

18. Cho $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = A$ và $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = B$. Tìm
   (a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x^3 - x)$. (b) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x^3 - x)$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x^2 - x^4)$. (d) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x^2 - x^4)$.

19. Tính
$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1-x}{2}\right], \quad \lim_{x\to -3-}[x].$$

20. Một bãi đậu xe có giá 1000 đồng mỗi giờ hoặc một phần của giờ cho mỗi chiếc xe. Vẽ đồ thị của hàm $y = C(t)$ biểu thị giá đậu xe đối với t giờ. Tại những giá trị nào của t thì $C(t)$ có giới hạn? Tính
$$\lim_{t\to t_0-} C(t), \quad \lim_{t\to t_0+} C(t) \quad (t_0 > 0)$$

21. Áp dụng các công thức về giới hạn đã biết, chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

22. Tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x-a}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty}\left[\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right]$.

23. Tìm mọi điểm bất động của các dãy đệ quy đã cho và xác định điểm nào chính là giới hạn của dãy:

(a) $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+\frac{1}{9})$, $a_0=1$.

(b) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $a_0=1$.

(c) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(a_n+\dfrac{9}{a_n}\Big)$, $a_0=-1$.

(d) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(a_n+\dfrac{4}{a_n}\Big)$, $a_0=1$.

(e) $a_{n+1}=2a_n(1-a_n)$, $a_0=0$.

(f) $a_{n+1}=2a_n(1-a_n)$, $a_0=0,1$.

Chương **2**

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Định nghĩa – Ký hiệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định X. Khi biến độc lập nhận các giá trị thay đổi từ x_0 đến x trong X thì $\Delta x = x - x_0$ được gọi là *số gia* của biến độc lập tại x_0 và $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của biến phụ thuộc, ứng với số gia Δx (cũng còn được viết là $\Delta f(x_0)$). Theo ký hiệu trên, ta có

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 3$ và $x_0 = 1$. Nếu $\Delta x = 2$ thì $\Delta y = f(1 + 2) - f(1) = 21 - 5 = 16$ là trị số thay đổi của y khi x thay đổi từ $x_0 = 1$ đến $x_0 + \Delta x = 3$. Khi đó $\Delta y/\Delta x = 16/2 = 8$ là trị số thay đổi trung bình của y theo mỗi đơn vị thay đổi của x (giữa x_0 và $x_0 + \Delta x$). Chú ý, trị số thay đổi trung bình này cũng khác đi khi khoảng được chọn thay đổi. Chẳng hạn, nếu ta chọn $x_0 = 2$, $\Delta x = 3$ thì $\Delta y/\Delta x = 42/3$.

Như vậy, đối với mỗi khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$, có tương ứng một đại lượng chính là trị số thay đổi trung bình $\Delta y/\Delta x$, đặc trưng cho sự thay đổi giá trị của f trên khoảng đó. Ta hãy thử xác định một đại lượng đặc trưng cho sự thay đổi giá trị của f "tại điểm x_0". Điều này, một cách tự nhiên, có thể thực hiện bằng cách xét $\Delta y/\Delta x$ khi cho $\Delta x \to 0$. Với hàm số $y = f(x)$ đã cho ở trên, ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2[(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2]}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x) \quad (\Delta x \neq 0)$$

Vậy, $\Delta y/\Delta x$ dần đến $4x_0$ khi $\Delta x \to 0$. Ta nói: $4x_0$ là *tốc độ biến thiên* (hay *đạo hàm*) của hàm số f tại x_0 và viết $f'(x_0) = 4x_0$. Tổng quát, ta có

Định nghĩa 2.1. Đạo hàm của hàm số f tại x_0, ký hiệu $f'(x_0)$, là giới hạn hữu hạn (nếu có), được xác định như sau:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Khi f có đạo hàm tại x_0 thì ta nói f *khả vi* tại x_0. Nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc một khoảng mở I nào đó (hữu hạn hoặc vô hạn) thì ta nói f khả vi trên khoảng ấy hoặc gọn hơn là f khả vi. Ta còn gọi $f'(x_0)$ là *tốc độ biến thiên* của hàm số f tại x_0.

Ví dụ 2.1. Cho $y = f(x) = x^3$. Tìm $f'(2)$.

Giải. Ta có

$$\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 \times 2 + 3\Delta x \times 2^2.$$

Từ đó $\Delta y/\Delta x = (\Delta x)^2 + 6\Delta x + 12$ $(\Delta x \neq 0)$ và ta có $f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = 12$. $\lhd$

Chú ý.

1. Tương tự như đối với trường hợp giới hạn một bên, ta cũng gọi các giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta y/\Delta x)$ và $\lim_{\Delta x \to 0^-}(\Delta y/\Delta x)$ lần lượt là *đạo hàm bên phải* và *đạo hàm bên trái* của f tại x_0 và ký hiệu tương ứng là $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Hiển nhiên:

$$f \text{ khả vi tại } x_0 \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

2. Nếu f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại x_0. Thật vậy, do:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\right) = f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

nên f liên tục tại x_0.

Ngược lại, nếu f liên tục tại x_0 thì chưa chắc là f khả vi tại x_0. Thật vậy, xét

$$f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ nên f liên tục tại $x_0 = 0$. Mặt khác, ta có

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Vậy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ nên f không khả vi tại $x_0 = 0$.

Định nghĩa 2.2. Cho hàm số $y = f(x)$. Gọi $X = \{x\colon f \text{ khả vi tại } x\}$. Hàm số h, có miền xác định X, với

$$x \mapsto h(x) \stackrel{\text{dn}}{=} f'(x)$$

được gọi là (hàm) đạo hàm của f và được ký hiệu bởi các dạng

$$y', \quad f', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}.$$

Vậy, tốc độ biến thiên của f tại x_0 chính là giá trị của hàm f' tại x_0. Theo định nghĩa, $f'(x)$, cũng được ký hiệu là $[f(x)]'$ hay $df(x)/dx$, được cho bởi:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nếu f' liên tục trên một khoảng mở I nào đó thì ta thường gọi f là hàm *khả vi liên tục* (trên I).

2.1.2. Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản

Dưới đây, theo định nghĩa, ta sẽ tính đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản. Ta có

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0 \quad (C \text{ là hằng số}).$$
$$(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1.$$
$$(x^3)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)x + 3x^2] = 3x^2.$$

Tổng quát, ta chứng minh được rằng, với n nguyên dương

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Đối với các hàm số lượng giác, ta có

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos[x + (\Delta x/2)] \sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

Tương tự

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Mặt khác

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Đặc biệt

$$(e^x)' = e^x.$$

Bằng cách áp dụng công thức $\lim_{x \to 0}[\ln(1 + x)/x] = 1$, ta cũng chứng minh được

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

2.1.3. Một số ý nghĩa quan trọng của đạo hàm

1. Xét chất điểm P chuyển động trên một đường thẳng Δ (được chọn làm trục). Rõ ràng tọa độ s của điểm P đối với Δ phụ thuộc vào mỗi thời điểm t, nghĩa là $s = f(t)$ và chuyển động của P được mô tả bởi tính chất của hàm f.

Vận tốc trung bình của P trên một khoảng thời gian là tỉ số giữa quãng đường đi được và khoảng chênh lệch giữa hai thời điểm. Nếu tại thời điểm t_0 và $t_0 + \Delta t$, P tương ứng có các tọa độ là $f(t_0)$ và $f(t_0 + \Delta t)$ thì vận tốc trung bình của P trên khoảng thời gian Δt là

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{2.1}$$

Về mặt toán học, nếu f khả vi tại t_0 thì tỉ số (2.1) dần đến $f'(t_0)$ khi $\Delta t \to 0$. Về phương diện vật lý khi Δt đủ gần 0, tỉ số (2.1) cho ta biết được độ nhanh chậm và hướng chuyển động của P trên một khoảng thời gian nhỏ tùy ý. Vì vậy, một cách tự nhiên, để mô tả đặc điểm của chuyển động "tại thời điểm t_0" ta đi đến định nghĩa sau

Định nghĩa 2.3. *Vận tốc* v_0 của P tại thời điểm t_0 là giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta t\to 0}\big(\Delta s/\Delta t\big)$; nghĩa là, $v_0 = f'(t_0)$. Khi đó $|v_0|$ được gọi là *tốc độ* của P tại t_0.

2. Giả sử một chất M được dùng trong một phản ứng hóa học có nồng độ $[M]$ thay đổi theo thời gian t và được viết dưới dạng $[M] = f(t)$. Khi đó, khái niệm *tốc độ phản ứng tại* $t = t_0$ được hiểu là tốc độ biến thiên của $[M]$ theo t tại $t = t_0$ và được cho bởi $f'(t_0)$. Nếu $|f'(t_1)| < |f'(t_2)|$ thì ta thường nói phản ứng xảy ra tại t_2 nhanh hơn phản ứng xảy ra tại t_1.

3. Lấy điểm $P_0(x_0, y_0)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ (f liên tục tại x_0) và giả sử $P(x, y)$ là một điểm khác trên (C). Với $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ thì hệ số góc của cát tuyến P_0P là $\Delta y/\Delta x$. Vị trí giới hạn (nếu có) của cát tuyến P_0P khi P tiến dần đến P_0 dọc theo (C) được gọi là *tiếp tuyến với* (C) *tại* P_0. Nếu để ý rằng khi $P \to P_0$ ($\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$), tỉ số $\Delta y/\Delta x$ dần đến $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x)$, ta có thể định nghĩa khái niệm tiếp tuyến cụ thể như sau:

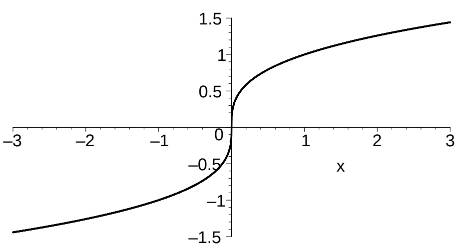
Định nghĩa 2.4. Tiếp tuyến với (C) tại P_0 là đường thẳng qua P_0 và có hệ số góc

$$k = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Giới hạn trên còn được gọi là *độ nghiêng* của (C) tại P_0.

Vậy, nếu f khả vi tại x_0 thì $k = f'(x_0)$ và phương trình của tiếp tuyến là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Hình 2.1: (C): $y = x^{1/3}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại $(0, 0)$.

Trong trường hợp $k = \pm\infty$ thì ta nói (C) có tiếp tuyến thẳng đứng tại P_0 và phương trình của tiếp tuyến trong trường hợp này là $x = x_0$. Chẳng hạn, đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^{1/3}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại $O(0, 0)$ vì

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

2.1.4. Các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm

Áp dụng các tính chất của giới hạn, ta chứng minh được các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm sau đây:

Định lý 2.1. *Cho f và g là các hàm khả vi tại x. Khi đó, các hàm λf (λ là hằng số), $f + g$, fg, f/g cũng khả vi tại x và ta có*

(a) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

(b) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(c) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$.

Chú ý. Theo định lý trên thì trong trường hợp f, g khả vi trong cùng một khoảng I thì các hàm λf (λ là hằng số), $f+g$, fg, f/g cũng khả trong I và ta có

1. $(\lambda f)' = \lambda f'$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(fg)' = f'g + fg'$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (trong $J = I \setminus \{x\colon g(x) = 0\}$).

Theo các quy tắc trên, ta có

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tương tự

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ngoài ra, cũng từ các quy tắc trên, bằng quy nạp, ta cũng chứng minh được

Định lý 2.2. *Nếu $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là các hàm khả vi trong cùng một khoảng I thì các hàm $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $u_1u_2\cdots u_n$ cũng khả vi trong I và ta có*

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)' = u_1' + u_2' + \cdots + u_n'.$$
$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n'.$$

Đặc biệt, khi $u = u_1u_2\cdots u_n$ thì

$$u' = u\Big(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}\Big) \quad (\textit{trong } \{x \in I\colon u(x) \neq 0\}). \tag{2.2}$$

Đối với hàm số hợp và hàm số ngược, ta có các quy tắc tương ứng, được cho bởi các định lý dưới đây.

Định lý 2.3. *Giả sử u là hàm khả vi tại điểm x và f là hàm khả vi tại điểm tương ứng $u = u(x)$. Khi đó, hàm số hợp $f \circ u$ sẽ khả vi tại x và ta có*

$$(f \circ u)'(x) = f'[u(x)]u'(x).$$

Với $y = e^{2x^2-3x}$, $u = 2x^2 - 3x$, ta có

$$\frac{d(e^{2x^2-3x})}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\frac{d(2x^2-3x)}{dx} = e^u(4x-3) = e^{2x^2-3x}(4x-3).$$

Từ những công thức đạo hàm đã nhận được, theo quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp đã nêu, ta có các công thức được cho trong bảng sau:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u' \qquad \frac{d}{dx}(\cos u) = -u'\sin u$$
$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{u'}{u} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin u) = u'\cos u \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \qquad \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{u}\Big) = -\frac{u'}{u^2}.$$

Chú ý. Trong các công thức trên thì ta đã viết, chẳng hạn $\sin u$ thay cho $f \circ u$ là hợp của các hàm số $x \mapsto f(x) = \sin x$ và $x \mapsto u(x)$. Tương tự cho các ký hiệu khác trong các vế trái.

Với α là hằng số, hàm số $y = x^\alpha$, với $x > 0$, có thể được viết là $y = e^{\alpha \ln x}$. Khi đó, với $u = \alpha \ln x$, ta có
$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha\ln x}) = \frac{d(e^u)}{du}\frac{d(\alpha\ln x)}{dx} = e^u\frac{\alpha}{x} = \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$
Vậy,
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$
Khi $x < 0$ sao cho x^α có nghĩa, ta có
$$|y| = |x|^\alpha \Rightarrow \ln|y| = \alpha\ln|x| \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln|y|) = \frac{d}{dx}(\alpha\ln|x|)$$
Vậy,
$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$
nghĩa là ta cũng có $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Định lý 2.4. *Cho hàm số f khả vi trong (a, b), $f\colon (a, b) \longrightarrow (c, d)$ là song ánh và $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Khi đó, hàm số ngược $f^{-1}\colon (c, d) \longrightarrow (a, b)$ khả vi trong (c, d) và với mỗi $y = f(x) \in (c, d)$, ta có*
$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big[f^{-1}(y)\big]}.$$

Với $f^{-1}(x) = \arcsin x$ là hàm ngược của $f(x) = \sin x$, ta có
$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{\cos[f^{-1}(x)]}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).\end{aligned}$$

Tóm lại,
$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Với $g^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ là hàm ngược của $g(x) = \operatorname{tg} x$, ta có
$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'[g^{-1}(x)]} = \frac{1}{g'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Vậy,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được các công thức sau:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2.1.5. Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong một khoảng mở I. Khi đó, f' được gọi là *đạo hàm cấp* 1 của f và nếu f' khả vi tại một điểm x_0 thì đạo hàm của f' tại x_0 được ký hiệu bởi một trong các dạng

$$f''(x_0), \quad y''(x_0), \quad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0}, \quad \left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=x_0}$$

và được gọi là *đạo hàm cấp* 2 của f tại x_0.

Giả sử f' khả vi trong khoảng I và (hàm) đạo hàm của nó được ký hiệu bởi một trong các dạng

$$f'', \quad y'', \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

và được gọi là *đạo hàm cấp* 2 của f. Nếu f'' khả vi tại x_0 thì đạo hàm của f'' tại x_0 được gọi là *đạo hàm cấp* 3 của f tại x_0, ký hiệu bởi một trong các dạng $f'''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ... Cứ tiếp tục quá trình trên, ta định nghĩa được *đạo hàm cấp n* của f tại một điểm và (hàm) đạo hàm cấp n của f, ký hiệu tương ứng

$$f^{(n)}(x_0), \quad y^{(n)}(x_0), \quad \left[\frac{d^ny}{dx^n}\right]_{x=x_0}, \quad \left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

$$f^{(n)}, \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \frac{d^nf}{dx^n}.$$

Vậy

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

và ta quy ước gọi *đạo hàm cấp* 0 của f là chính f, ký hiệu $f^{(0)}$.

Ví dụ 2.2. Cho hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, tính $y''(x)$.
Giải. Ta có

$$y'(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+(\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Mặt khác, $(\sqrt{1+x^2})' = x/\sqrt{1+x^2}$. Từ đó,

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}, \quad y''(x) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)(1+x^2)^{-3/2}2x = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

◁

Ví dụ 2.3. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số

(a) $y = e^{ax}$.

(b) $y = 1/(x-b)$.

GIẢI.

(a) Ta có $y'(x) = ae^{ax}$, $y''(x) = a^2e^{ax}$, $\ldots$; từ đó $y^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

(b) Hàm số được viết lại dưới dạng $y = (x-b)^{-1}$ và ta có

$$\begin{aligned} y'(x) &= (-1)(x-b)^{-2} \\ y''(x) &= (-1)(-2)(x-b)^{-3} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Một cách tổng quát:

$$y^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)(x-b)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-b)^{n+1}}$$

◁

CHÚ Ý. Ta hãy khảo sát ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp 2. Xét một chuyển động thẳng có phương trình $s = f(t)$ với vận tốc $v = f'(t)$. Gia tốc trung bình của chất điểm P trên một khoảng thời gian là tỉ số giữa độ chênh lệch vận tốc và khoảng thời gian giữa hai thời điểm

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f'(t_0 + \Delta t) - f'(t_0)}{\Delta t}$$

Nếu f' có đạo hàm tại t_0 thì $\Delta v/\Delta t$ dần đến một giới hạn xác định a, khi $\Delta t \to 0$, và ta gọi giới hạn này là *gia tốc tại thời điểm* t_0 của chuyển động. Vậy,

$$a = f''(t_0).$$

Ví dụ 2.4. Một vật rơi theo quy luật $y = y_0 - 16t^2$ ($t \geq 0$, đơn vị tính của t là giây (s) và của y là mét (m)). Nếu lúc đầu vật ở cách mặt đất $100\,m$ thì trong bao lâu nó sẽ chạm đất và vận tốc, gia tốc khi đó của nó là bao nhiêu?

GIẢI. Theo giả thiết $y(0) = 100$ hay $y_0 = 100$. Vậy, $y = 100 - 16t^2$. Gọi t_0 là thời điểm vật chạm đất (cũng là khoảng thời gian kể từ thời điểm ban đầu $t = 0$), ta có

$$y(t_0) = 0 \Leftrightarrow 100 - 16t_0^2 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{5}{2}\,s$$

Khi đó, vận tốc v và gia tốc a của vật là

$$v = y'(t_0) = -32t_0 = -80\,m/s, \quad a = y''(t_0) = -32\,m/s^2.$$

◁

Bằng quy nạp, ta chứng minh được định lý sau.

Định lý 2.5. *Nếu f và g có đạo hàm cấp n trên một khoảng I thì với $x \in I$, ta có*

(a) $(\alpha f \pm \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) \pm \beta g^{(n)}(x)$ *(α, β là những hằng số).*

(b) $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ *(công thức Leibniz).*

Để đưa đến công thức Leibniz, ta hãy xét các kết quả liên tiếp sau:

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg'\\ (fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg''\\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\\ &\cdots\end{aligned}$$

Từ đó, công thức nhận được bằng phép chứng minh quy nạp.

2.1.6. Áp dụng đạo hàm để tính gần đúng

Cho hàm số f khả vi tại x_0. Khi đó

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0$$

hay ta có

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right] = 0.$$

Do

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x\right] = 0$$

nên theo sự so sánh các VCB, ta có thể viết

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \mathbf{o}(\Delta x) \Leftrightarrow f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \mathbf{o}(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Từ đó, ta có công thức gần đúng

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{2.3}$$

với sai số là $\mathbf{o}(\Delta x)$.

Chú ý. Công thức (2.3) càng chính xác khi $|\Delta x|$ càng nhỏ, nhưng ta vẫn có thể áp dụng nó khi $|f'(x_0)\Delta x|$ nhỏ, với $f'(x_0) \neq 0$ (tại sao?).

Ví dụ 2.5. Tính gần đúng giá trị $\sqrt[3]{27,54}$.

Giải. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x}$, ta có $f'(x) = (1/3)x^{-2/3}$. Với $x = 27$ và $\Delta x = 0,54$, ta có

$$\begin{cases} f'(27) = 1/3\sqrt[3]{27^2} = 1/27\\ f(27) = 3.\end{cases}$$

Từ đó: $\sqrt[3]{27,54} \approx f(27) + f'(27)\times 0,54 = 3 + (0,54/27) = 3,02.$ ◁

Ví dụ 2.6. Tính gần đúng giá trị $\sqrt{408}$.

Giải. Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, ta có $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Chọn $x_0 = 400$, $\Delta x = 8$, ta có

$$\begin{cases} f'(x_0)\Delta x = f'(400)\times 8 = 0,2 \quad \text{(khá nhỏ)}\\ f(x_0) = f(400) = 20.\end{cases}$$

Từ đó: $\sqrt{408} \approx 20 + 0,2 = 20,2.$ ◁

2.1.7. Bài toán về mối liên hệ giữa các tốc độ biến thiên

Trên thực tế, ta thường gặp một số bài toán có mô hình toán học chung là "Xác định tốc độ biến thiên (đạo hàm) của một hàm (thường là theo biến thời gian) nhờ vào tốc độ biến thiên của một hàm khác đã biết". Chú ý rằng trong những bài toán như vậy, tốc độ biến thiên cần tìm thường được hỏi dưới dạng "đại lượng đó biến đổi (hoặc thay đổi) như thế nào?", "đại lượng đó biến đổi (hoặc thay đổi) theo tốc độ nào?",.... Đây là một dạng toán đơn giản, nhưng người giải thường mắc phải một số lỗi về việc sử dụng giả thiết hoặc lúng túng, mất nhiều thời gian do không theo đúng một trình tự thích hợp. Dưới đây, ta hãy xét một số bước giải cơ bản đối với dạng toán này.

Bước 1. Đọc kỹ đề bài và đặt tên các đại lượng biến đổi có mặt trong bài toán dưới dạng các hàm số theo biến thời gian: $h(t)$, $V(t)$,....

Bước 2. Xác định mối liên hệ giữa những đại lượng trên. (Thường là một công thức liên hệ theo bản chất các đại lượng đang xét và trong một số trường hợp, để thuận tiện, cần xét thêm một đại lượng trung gian)

Bước 3. Lấy đạo hàm (theo t) công thức trên để nhận được một liên hệ về các tốc độ biến thiên giữa các đại lượng đã nêu. Trong mối liên hệ này, tại thời điểm đang xét, xác định các giá trị đã cho, giá trị nào cần tìm. Chú ý quy đổi về cùng một đơn vị tính và dấu của các giá trị được cho dựa theo ý nghĩa của chúng.

Ta sẽ áp dụng các bước trên cho các bài toán được cho trong các ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.7. Mực nhiên liệu trong một hồ chứa hình trụ đang thay đổi như thế nào khi ta đang bơm nhiên liệu ra khỏi hồ với tốc độ 1.500 lít/giờ. Cho biết bán kính của đáy hồ là $5\,m$.

Giải. Các đại lượng biến đổi có mặt trong bài toán là mực nhiên liệu và thể tích nhiên liệu trong hồ. Vậy, ta gọi

$$\begin{cases} h(t)\text{: mực nhiên liệu có trong hồ tại thời điểm } t \\ V(t)\text{: thể tích nhiên liệu có trong hồ tại } t \end{cases}$$

Liên hệ giữa $h(t)$ và $V(t)$ được cho bởi công thức:

$$V(t) = \pi(50)^2 h(t) \quad \text{(chú ý đơn vị tính độ dài phù hợp là } dm\text{)}$$

Lấy đạo hàm theo t công thức trên, ta được

$$V'(t) = 2.500\pi h'(t)$$

Tại thời điểm t_0 đang xét, ta có

$$h'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{2.500\pi} = \frac{-1.500}{2.500\pi} = \frac{-3}{5\pi}\, dm/\text{giờ}.$$

Vậy, mực nhiên liệu trong hồ đang giảm với tốc độ $3/5\pi\, dm$/giờ. ◁

Ví dụ 2.8. Nước được bơm vào một hồ chứa hình nón với tốc độ $2\,m^3$/phút. Hãy tính tốc độ biến thiên của mực nước trong hồ tại thời điểm mà thể tích nước trong hồ là $10\,m^3$, bán kính đáy của khối nước này là $3\,m$ và đang tăng với tốc độ $0,2\,m$/phút?

Giải. Gọi

$$\begin{cases} h(t)\text{: mực nước trong hồ tại thời điểm } t \\ V(t)\text{: thể tích nước trong hồ tại } t \\ R(t)\text{: bán kính đáy của khối nước tại } t \end{cases}$$

Ta có công thức

$$V(t) = \frac{\pi}{3}[R(t)]^2 h(t) \text{ hay } h(t) = \frac{3}{\pi} \times \frac{V(t)}{[R(t)]^2}$$

Đạo hàm công thức trên theo t, ta được

$$h'(t) = \frac{3}{\pi} \times \frac{V'(t)[R(t)]^2 - 2V(t)R(t)R'(t)}{[R(t)]^4} = \frac{3}{\pi} \times \frac{V'(t)R(t) - 2V(t)R'(t)}{[R(t)]^3}$$

Tại thời điểm t_0 đang xét, ta có

$$h'(t_0) = \frac{3[V'(t_0)R(t_0) - 2V(t_0)R'(t_0)]}{\pi[R(t_0)]^3} = \frac{3[2 \times 3 - 2 \times 10 \times (0,2)]}{\pi 3^3} = \frac{2}{9\pi}\, m/\text{phút}$$

◁

Ví dụ 2.9. Người ta nhúng một thõi sắt hình trụ vào một dung dịch *acid* để làm thí nghiệm. Giả sử trong quá trình thõi sắt tan trong dung dịch thì nó vẫn giữ dạng hình trụ ban đầu. Hãy tính tốc độ biến thiên của thể tích thõi sắt tại thời điểm mà chiều cao của nó là $50\,cm$ và đang giảm với tốc độ $2\,mm$/phút; còn bán kính đáy là $15\,cm$ và đang giảm với tốc độ $1\,mm$/phút. Nếu tốc độ biến thiên thể tích này không đổi và thời gian cần làm thí nghiệm thêm là 1 giờ thì thõi sắt có đủ dùng cho thí nghiệm không?

Giải. Ta gọi

$$\begin{cases} h(t)\text{: chiều cao thõi sắt tại thời điểm } t \\ R(t)\text{: bán kính đáy của thõi sắt tại } t \\ V(t)\text{: thể tích thõi sắt tại } t \end{cases}$$

Ta có công thức

$$V(t) = \pi[R(t)]^2 h(t).$$

Từ đó

$$V'(t) = \pi\big(2R(t)R'(t)h(t) + [R(t)]^2 h'(t)\big).$$

Tại thời điểm t_0 đang xét, ta có

$$V'(t_0) = \pi(2 \times 15 \times (-0,1) \times 50 + (15)^2 \times (-0,2)) = -195\pi\, cm^3/\text{phút}.$$

Theo giả thiết bổ sung, thời gian mà thõi sắt được dùng hết (kể từ thời điểm t_0) là

$$T = \frac{V(t_0)}{|V'(t_0)|} = \frac{\pi(15)^2 \times 50}{195\pi} = 57,69\,\text{phút}.$$

Vậy, theo kết quả trên thì thõi sắt *không* đủ dùng cho thí nghiệm. ◁

2.1.8. Vi phân - Vi phân cấp cao

Ta đã dùng ký hiệu dy/dx hay df/dx để chỉ đạo hàm của hàm số $y = f(x)$. Bây giờ, để thuận tiện cho việc trình bày các khái niệm và các tính toán về sau, ta sẽ gán cho các ký hiệu dx, dy những ý nghĩa mới.

Định nghĩa 2.5. Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong một khoảng I.

(a) Vi phân của biến độc lập x là một số tùy ý và được ký hiệu là dx.

(b) Vi phân của biến phụ thuộc y (còn được gọi là vi phân của hàm số f) ký hiệu là dy hay df và được xác định bởi $dy = y'dx$ (hay $df = f'dx$).

Chú ý. Theo định nghĩa, thì df là một hàm xác định trên I (khi giữ dx không đổi); khi đó, vi phân của hàm số f tại một điểm x là $df(x) = f'(x)dx$ và ta cũng có thể viết là $d[f(x)] = [f(x)]'dx$.

Xét một số trường hợp tính vi phân sau:

(a) Ta có: $d(\operatorname{arctg} x + 3) = (\operatorname{arctg} x + 3)'dx = (1 + x^2)^{-1}dx$.

(b) Tìm $f(x)$, nếu $df(x) = (3x^2 + 2x)dx$. Do $3x^2 + 2x = (x^3 + x^2)'$ nên ta có thể chọn $f(x) = x^3 + x^2$ và để ý rằng ta cũng có thể chọn $f(x) = x^3 + x^2 + C$, với C là một hằng số.

Vi phân df được gọi là vi phân cấp 1 của f. Giả sử f có đạo hàm f' trong một khoảng I và nếu f' khả vi tại $x \in I$ thì vi phân của df tại x được ký hiệu bởi $d^2f(x)$, được gọi là vi phân cấp 2 của f tại x và rõ ràng được cho bởi

$$d^2f(x) = d(df)(x) = (df)'(x)dx = (f'dx)'(x)dx = f''(x)(dx)^2 =: f''(x)dx^2.$$

Trong trường hợp f' khả vi trong I thì vi phân của df được ký hiệu là d^2f (hay d^2y), được xác định bởi $d^2f = f''dx^2$ ($d^2y = y''dx^2$) và được gọi là vi phân cấp 2 của f.

Chú ý. Khi tính các vi phân cấp hai, dx được xem như cố định. Từ các ký hiệu được dùng, ta có

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, \quad f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

chính là những ký hiệu đã dùng ở phần trước.

Ta cũng dễ dàng đi đến định nghĩa vi phân cấp n của hàm f tại một điểm x và vi phân cấp n của hàm f, ký hiệu lần lượt là $d^nf(x)$, d^nf, với

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad d^nf = f^{(n)}dx^n,$$

trong đó, dx được giữ cố định.

Ví dụ 2.10. Người ta chứng minh rằng: trọng lượng W (tính bằng *pound*) của một người trung bình được cho một cách gần đúng bởi công thức

$$W(h) = (0,0005)h^3 \quad (30 \le h \le 74),$$

trong đó, h được tính bằng *inch*, là chiều cao của người đó ($1\,inch = 25,4\,mm$ và $1\,pound = 0,454\,kg$). Hãy ước lượng sự thay đổi của W khi h tăng từ 40 đến 42.

Giải. Ở đây ta dùng $dW(h)$ (với $h = 40$, $dh = \Delta h = 42 - 40 = 2$) để ước lượng ΔW:

$$dW(h) = W'(h)dh = (0,0015)h^2dh = (0,0015) \times 40^2 \times 2 = 4,8\,pounds \approx 2,18\,kg$$

Rõ ràng, việc tính $dW(h)$ là tiện lợi hơn việc tính $\Delta W = W(42) - W(40)$. $\triangleleft$

Với $t = \sin x$, ta có

$$d(\sin^3 x) = d(t^3) = 3t^2dt = 3\sin^2 x d(\sin x) = 3\sin^2 x \cos x dx,$$

hay ta có thể viết trực tiếp: $d(\sin^3 x) = 3\sin^2 x d(\sin x) = 3\sin^2 x \cos x dx$.

2.1.9. Cực trị

Định nghĩa 2.6. Hàm số f được gọi là có *cực đại* tại điểm x_0 nếu tồn tại một lân cận Δ của x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi điểm $x \in \Delta$ và giá trị $f(x_0)$ được gọi là cực đại của f. Khái niệm *cực tiểu* được định nghĩa tương tự khi thay dấu bất đẳng thức trên bởi "$\geq$". Cực đại hay cực tiểu của f được gọi chung là *cực trị* của f.

Để có thể xác định các điểm mà tại đó hàm số f đạt cực trị, ta dựa vào bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 (Fermat) *Nếu f đạt cực trị tại điểm x_0 và f khả vi tại điểm này thì $f'(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x_0)$ là cực đại của f. Khi đó, tồn tại lân cận Δ của x_0 sao cho

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in \Delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ khi } x < x_0.$$

Từ đó

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $f'_+(x_0) \leq 0$. Vì f khả vi tại x_0 nên ta phải có $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$, nghĩa là $f'(x_0) = 0$. Trường hợp $f(x_0)$ là cực tiểu, lập luận tương tự. Những điểm x_0 thỏa điều kiện $f'(x_0) = 0$ thường được gọi là những *điểm dừng* của f. ■

Cho

$$g(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Vì $x^2 \geq 0$ nên $e^{x^2} \geq e^0 = 1$. Từ đó suy ra $g(x) \geq 0 = g(0)$, với mọi x. Vậy, g đạt cực tiểu tại $x = 0$. Mặt khác,

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \times x = 1 \times 0 = 0.$$

Vì $g'_+(0) \neq g'_-(0)$ nên g không khả vi tại $x = 0$.

Ví dụ trên chứng tỏ rằng một hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm mà nó không khả vi. Vậy, lưu ý đến Bổ đề Fermat, ta đi đến

Điều kiện cần của cực trị: Một hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm x thỏa một trong các điều kiện

(a) $\nexists f'(x)$,

(b) $f'(x) = 0$.

Những điểm x thỏa các điều kiện trên được gọi chung là những *điểm tới hạn* của f. Ngược lại, điểm nào trong số các điểm tới hạn là điểm cực trị của f sẽ được xác định bởi điều kiện đủ mà ta sẽ xét sau.

2.2. Các định lý cơ bản của phép tính vi phân và ứng dụng

2.2.1. Các định lý Rolle, Lagrange và Cauchy

$$\begin{tikzcd}
\textsc{Rolle} \arrow[r] \arrow[dr] & \textsc{Lagrange} \arrow[r] & \text{Điều kiện đủ của cực trị} \\
& \textsc{Cauchy} \arrow[r] \arrow[dr] & \textsc{Taylor} \\
& & \text{L'}\textsc{Hospital}
\end{tikzcd}$$

Trong mục này, ta xét những định lý quan trọng mà kết quả của chúng là cơ sở cho việc khảo sát hàm số một cách toàn diện. Mối quan hệ giữa chúng và những kết quả khác được cho bởi sơ đồ trên.

Định lý 2.6 (Rolle) *Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b) và $f(a)=f(b)$ thì*

$$\exists c \in (a,b)\colon f'(c)=0.$$

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại $M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $\quad m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$.

(a) Nếu $m=M$ thì $f(x)=m$ trên $[a,b]$ và ta có $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$.

(b) Nếu $m<M$ thì do $f(a)=f(b)$ nên f phải đạt m hay M tại ít nhất một điểm trong (a,b), nghĩa là tồn tại $c\in(a,b)\colon f(c)=M$ (hay $f(c)=m$). Do $f(c)$ là cực đại (cực tiểu) nên theo Bổ đề Fermat, ta phải có $f'(c)=0$.

■

Định lý trên được dùng để chứng minh các Định lý Lagrange và Cauchy dưới đây.

Định lý 2.7 (Lagrange) *Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trong (a,b) thì*

$$\exists c\in(a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Chú ý. Ta có $k=(f(b)-f(a))/(b-a)$ là hệ số góc của đường thẳng AB, với $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ và $f'(c)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(c,f(c))$. Từ đó, ta có ý nghĩa hình học của Định lý Lagrange như sau: "Nếu giả thiết của định lý được thỏa thì trên cung AB của đường cong $(C)\colon y=f(x)$, tồn tại điểm $M(c,f(c))$ (với $c\in(a,b)$) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cùng phương với đường thẳng AB".

Định lý 2.8 (Cauchy) *Nếu các hàm f, g cùng liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b) và $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, thì*

$$\exists c\in(a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Để chứng minh các Định lý Lagrange và Cauchy, ta lần lượt áp dụng Định lý Rolle cho các hàm số sau trên $[a,b]$:

(a) $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

(b) $F(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$.

2.2.2. Một số kết quả liên hệ giữa tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm

Ta sẽ chứng minh kết quả (c) trong các kết quả được phát biểu dưới đây.

(a) Nếu $f'(x) \underset{(<0)}{>} 0$, $\forall x \in (a,b)$ thì f $\underset{\text{(giảm)}}{\text{tăng}}$ trong (a,b).

(b) Nếu $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } [a,b] \\ f'(x) \underset{(<0)}{>} 0, \ \forall x \in (a,b) \end{cases}$ thì f $\underset{\text{(giảm)}}{\text{tăng}}$ trên $[a,b]$.

(c) Nếu f khả vi trong (a,b) và f' chỉ nhận giá trị 0 tại một số hữu hạn điểm trong (a,b) thì

$$f \underset{\text{(giảm)}}{\text{ tăng }} \text{trong } (a,b) \Leftrightarrow f'(x) \underset{(\le 0)}{\geq} 0, \ \forall x \in (a,b).$$

(d) **Điều kiện đủ của cực trị:** Cho f là hàm khả vi trong (a,b) (riêng tại x_0, f có thể không khả vi nhưng phải liên tục tại điểm này). Khi đó

(i) Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{khi } a < x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{khi } x_0 < x < b \end{cases}$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

(ii) Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{khi } a < x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{khi } x_0 < x < b \end{cases}$ thì f đạt cực đại tại x_0.

Chứng minh. Nếu f tăng thì với mỗi $x \in (a,b)$, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \ \Delta x \neq 0, \text{ đủ nhỏ.}$$

Suy ra $f'(x) \geq 0$.

Ngược lại, giả sử f' nhận giá trị 0 tại $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, với $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. Khi đó $f'(x) > 0$ với $x \in (a,b)$ và $x \neq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Với $x_1, x_2 \in (a,b)$: $x_1 < x_2$, ta xét hai trường hợp sau:

(i) Khoảng (x_1, x_2) không chứa các α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Theo (b), ta suy ra f tăng trên $[x_1, x_2]$ nên $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Khoảng (x_1, x_2) chứa $\alpha_j, \ldots, \alpha_m$, $1 \le j < \cdots < m \le n$, với

$$x_1 < \alpha_j < \cdots < \alpha_m < x_2.$$

Bằng cách áp dụng (b) trên $[x_1, \alpha_j]$,..., $[\alpha_m, x_2]$, ta có

$$f(x_1) < f(\alpha_j) < \cdots < f(\alpha_m) < f(x_2).$$

Từ đó, suy ra f tăng trong (a,b). ■

Ví dụ 2.11. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \ln x / x$.

Giải. Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, +\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$. Mặt khác, hàm số $h(x) = 1 - \ln x$ giảm trong $(0, +\infty)$ nên

$$\begin{cases} 0 < x < e \Rightarrow h(x) > h(e) = 0 \text{ hay } f'(x) > 0 \\ e < x \Rightarrow h(x) < h(e) = 0 \text{ hay } f'(x) < 0 \end{cases}$$

Vậy $f(e) = 1/e$ là cực đại của hàm số. ◁

Việc khảo sát cực trị của hàm số cũng được áp dụng cho bài toán "Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số trên miền xác định hay trên một khoảng cho trước". Trong nhiều trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được xét trong (a, b), dù liên tục hay khả vi trong khoảng này, vẫn có thể không nhận giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Chẳng hạn, $y = f(x) = x$ không nhận giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong khoảng $(0, 1)$ hoặc $y = g(x) = 1/\sqrt{x-1}$ không nhận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền xác định của nó. Ở đây, để bài toán được xác định, ta chỉ giới hạn việc tìm những giá trị trên cho trường hợp f là hàm liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ theo các bước sau:

Bước 1. Tìm các điểm tới hạn của f trong (a, b).

Bước 2. Tính giá trị của f tại các điểm tới hạn và tại các điểm $x = a$, $x = b$.

Bước 3. Số lớn nhất và nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở bước trên chính là các giá trị tương ứng cần tìm.

Ví dụ 2.12. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên $[0, 3\pi/2]$.

Giải. Ta có $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$. Trong $(0, 3\pi/2)$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ hoặc } \cos x = 1/2. \\ &\Leftrightarrow x = \pi \text{ hoặc } x = \pi/3. \end{aligned}$$

Do

$$f(0) = 0, \quad f(\pi/3) = 3\sqrt{3}/2, \quad f(\pi) = 0, \quad f(3\pi/2) = -2$$

nên dễ thấy $\min\limits_{x\in[0,3\pi/2]} f(x) = -2$ và $\max\limits_{x\in[0,3\pi/2]} f(x) = 3\sqrt{3}/2$. ◁

Trong trường hợp việc xét dấu đạo hàm cấp một f' trong lân cận của điểm dừng x_0 là phức tạp, ta có thể dùng đến đạo hàm cấp hai để khẳng định tính cực trị của f tại điểm này. Điều này được cho bởi định lý sau.

Định lý 2.9. *Cho f là hàm khả vi trong (a, b) chứa điểm x_0 và tại điểm này, ta có*

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ f''(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, tùy theo $f''(x_0) > 0$ hay $f''(x_0) < 0$ mà f tương ứng có cực tiểu hay cực đại tại x_0.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh cho trường hợp $f''(x_0) > 0$. Do

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

nên tồn tại một lân cận Δ $(\subset (a, b))$ của x_0 sao cho

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \ \forall x \in \Delta \ (x \neq x_0).$$

Vậy, ta có: $f'(x) < 0$ khi $x \in \Delta$ và $x < x_0$, $f'(x) > 0$ khi $x \in \Delta$ và $x_0 < x$. Theo điều kiện đủ của cực trị, f có cực tiểu tại x_0. ■

Ví dụ 2.13. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x - \arcsin x$.

Giải. Hàm số $f(x)$ xác định trên $[-1, 1]$ và

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Thay vì tìm cách xét dấu f', ta tính

$$f''(x) = \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}},$$

từ đó dễ thấy $f''(-\sqrt{3}/2) > 0$, $f''(\sqrt{3}/2) < 0$. Vậy, theo định lý trên, $f(-\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3} + (\pi/3)$ là cực tiểu và $f(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} - (\pi/3)$ là cực đại của f. ◁

2.2.3. Các quy tắc L'Hospital

Định lý 2.10 (Quy tắc L'Hospital I) *Cho f, g là các hàm khả vi trong (a, b). Giả sử $g'(x) \neq 0$, với mọi $x \in (a, b)$ và*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$$

Khi đó, nếu

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{2.4}$$

thì

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Theo định nghĩa giới hạn một bên và theo (2.4), với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $c > a$ sao cho với mọi t thỏa $a < t < c$, ta có:

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lấy x, y tùy ý sao cho $a < y < x < c$. Theo Định lý Cauchy, tồn tại $t \in (y, x)$ sao cho

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Do $a < t < c$ nên theo bất đẳng thức trên, ta có

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bằng cách cho $y \to a^+$, ta nhận được kết quả

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Do tính tùy ý của ε, ta đã chứng minh được (2.5). ∎

Chú ý.

1. Ta cũng có quy tắc tương tự khi thay quá trình $x \to a^+$ bởi $x \to b^-$ và từ đó suy ra quy tắc cho trường hợp $x \to x_0$ $(a < x_0 < b)$. Ngoài ra, trường hợp L là $\pm\infty$ cũng được chứng minh tương tự.

2. Trong trường hợp $a = -\infty$ hay $b = +\infty$, ta có thể đưa về trường hợp trên bằng cách đổi biến $x = 1/t$, chẳng hạn ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Định lý 2.11 (Quy tắc L'Hospital II) *Cho f, g là các hàm khả vi trong (a, b). Giả sử $g'(x) \neq 0$, với mọi $x \in (a, b)$ và*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty. \tag{2.6}$$

Khi đó, nếu

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

thì

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{2.7}$$

Chứng minh. Lập luận tương tự như khi chứng minh Quy tắc I, ta suy ra rằng: với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại c thỏa $a < c$ sao cho với mọi cách chọn tùy ý x, y thỏa $a < y < x < c$, ta có

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{f(y)\left(\frac{f(x)}{f(y)}-1\right)}{g(y)\left(\frac{g(x)}{g(y)}-1\right)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

trong đó, lưu ý rằng: với mọi y đủ gần a thì $\frac{f(x)}{f(y)} - 1$, $\frac{g(x)}{g(y)} - 1$ đều khác 0. Bất đẳng thức trên lại có thể được viết dưới dạng

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\frac{\left(\frac{g(x)}{g(y)}-1\right)}{\frac{f(x)}{f(y)}-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{\frac{g(x)}{g(y)}-1}{\frac{f(x)}{f(y)}-1}\right|.$$

Khi đó, với mọi y đủ gần a, ta suy ra

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \left|L - L\frac{\left(\frac{g(x)}{g(y)}-1\right)}{\frac{f(x)}{f(y)}-1}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{\frac{g(x)}{g(y)}-1}{\frac{f(x)}{f(y)}-1}\right| < \varepsilon,$$

vì theo (2.6) ta có:

$$\lim_{y\to a^+}\frac{\frac{g(x)}{g(y)}-1}{\frac{f(x)}{f(y)}-1} = 1.$$

Vậy, với mọi y đủ gần a $(a < y)$

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \varepsilon.$$

Do tính tùy ý của ε nên ta có (2.7). ∎

Đối với Quy tắc L'Hospital II, ta cũng có chú ý tương tự như đối với Quy tắc L'Hospital I. Các quy tắc L'Hospital thường được áp dụng để khử các dạng giới hạn "vô định"

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty$$

bằng cách đưa về dạng $0/0$ (ứng với Quy tắc I) hay ∞/∞ (ứng với Quy tắc II).

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn $\lim_{x\to 0^+}(x^\alpha \ln x)$ $(\alpha > 0)$.
GIẢI. Ta có $\lim_{x\to 0^+}(1/x^\alpha) = +\infty$ và do $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ nên:

$$\lim_{x\to 0^+}(x^\alpha \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x^\alpha)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x^\alpha)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^\alpha}{\alpha} = 0$$

◁

Ta có

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Ta đã dùng kết quả của ví dụ trên: $\lim_{x\to 0^+}(x \ln x) = 0$.

Để khử các dạng vô định $0 \times \infty$ hay $\infty - \infty$, ta có thể dùng các biến đổi sau

$$0 \times \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$$
$$0 \times \infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$\infty - \infty = \infty \times \infty \frac{\infty - \infty}{\infty \times \infty} = \infty\Big(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}\Big) = \infty \times 0.$$

CHÚ Ý. Các quy tắc trên có thể được tiếp tục áp dụng cho việc tính giới hạn của các tỉ số $f'(x)/g'(x)$, $f''(x)/g''(x)$, ... nếu chúng lại thỏa các điều kiện đã nêu.

2.2.4. Công thức Taylor

Định lý 2.12 (Taylor) *Nếu hàm số f có đạo hàm đến cấp $(n+1)$ trong một lân cận Δ của điểm x_0 thì, với $x \in \Delta$ và $x \neq x_0$, tồn tại c ở giữa x_0 và x sao cho*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{2.8}$$

Định lý trên có thể được chứng minh bằng cách áp dụng Định lý Cauchy cho các hàm

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k, \quad G(x) = (x - x_0)^{n+1}.$$

Trong công thức (2.8) thì $f(x)$ có thể được viết là $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, với

$$P_n(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{(Đa thức Taylor)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{(Số hạng dư)}$$

Công thức (2.8) được gọi là *công thức khai triển Taylor*. Trong trường hợp $|R_n(x)|$ nhỏ và có thể ước lượng được thì ta có thể xấp xỉ $f(x)$, là hàm có đạo hàm cấp cao bất kỳ, bởi một đa thức có giá trị dễ tính toán hơn. Đó chính là ý nghĩa quan trọng của công thức khai triển Taylor.

CHÚ Ý. Số c trong công thức (2.8) có thể được viết dưới dạng $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, với $0 < \theta < 1$. Trong trường hợp $x_0 = 0$ thì $c = \theta x$ và (2.8) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

và nó được gọi là *công thức khai triển Maclaurin*.

Dưới đây là một số công thức khai triển Maclaurin thường dùng.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) && (x \neq 0,\ n = 0, 1, \dots)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) && (x \neq 0,\ n = 0, 1, \dots)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) && (x \neq 0,\ n = 0, 1, \dots)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) && (-1 < x \neq 0,\ n = 1, 2, \dots)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) && (-1 < x \neq 0,\ n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.15. Xác định 3 số hạng đầu tiên trong khai triển $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ theo các lũy thừa của $(x-2)$. Áp dụng để tính gần đúng $f(2,1)$.

GIẢI. Với $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 1$, $f''(x) = 20x^3 - 30x$, ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + R_2(x)\\
&= -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2 + R_2(x).
\end{aligned}$$

Nếu ta dùng công thức gần đúng $f(x) \approx -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2$ để tính $f(2,1)$ thì ta có

$$f(2,1) \approx -6 + 21 \times (0,1) + 50 \times (0,1)^2 = -3,4.$$

So với giá trị thực của $f(2,1) = -3,363990$ (chính xác đến 6 chữ số thập phân sau dấu phẩy) thì sai số tuyệt đối khi dùng công thức gần đúng trên là: $\delta = |-3,363990 - (-3,4)| = 0,03601$. $\triangleleft$

Ví dụ 2.16. Hãy tính gần đúng số e với sai số nhỏ hơn 10^{-6}.

GIẢI. Với $f(x) = e^x$, theo công thức khai triển Mac Laurin, ta có

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Thay $x = 1$ vào công thức trên, ta có

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Vậy, nếu tính e bởi công thức gần đúng

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

thì sai số tuyệt đối $\delta = e^{\theta}/(n+1)! < 3/(n+1)!$. Để thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta cần chọn n sao cho $3/(n+1)! < 10^{-6}$ hay $n \geq 9$. Vậy,

$$e \approx 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2,718281,$$

với sai số $\delta < 10^{-6}$. ◁

2.2.5. Mở rộng điều kiện đủ bằng cách dùng khai triển Taylor

Ta có thể mở rộng thêm điều kiện đủ của cực trị trong trường hợp không áp dụng được các điều kiện đủ đã nêu.

Định lý 2.13. *Cho f là hàm số có đạo hàm đến cấp n liên tục trong một lân cận của điểm x_0. Giả sử $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó, nếu*

(a) *n lẻ thì f không có cực trị tại x_0.*

(b) *n chẵn thì tùy theo $f^{(n)}(x_0) > 0$ hay $f^{(n)}(x_0) < 0$ mà f có tương ứng cực tiểu hay cực đại tại x_0.*

Chứng minh. Do $f^{(n)}$ liên tục trong một lân cận của x_0 và $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ nên tồn tại $h > 0$ sao cho với mọi $x \in \Delta = (x_0 - h, x_0 + h)$, $f^{(n)}(x)$ cùng dấu với $f^{(n)}(x_0)$. Theo công thức Taylor, tại mỗi $x \in \Delta$, $x \neq x_0$, tồn tại $0 < \theta < 1$ sao cho

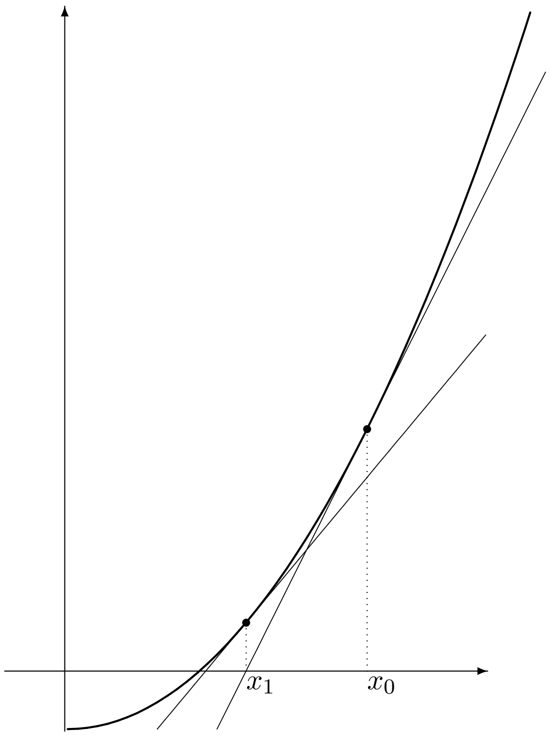
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Mặt khác, do $x_0 + \theta(x - x_0) \in \Delta$ nên $f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ cùng dấu $f^{(n)}(x_0)$. Từ đó suy ra rằng: khi n lẻ, $f(x_1) - f(x_0)$ và $f(x_2) - f(x_0)$ trái dấu nhau khi $x_1, x_2 \in \Delta$ sao cho $x_1 < x_0 < x_2$. Vậy, với n lẻ, f không đạt cực trị tại x_0. Trong trường hợp n chẵn, dễ dàng suy ra rằng: tùy theo $f^{(n)}(x_0) > 0$ hay $f^{(n)}(x_0) < 0$ mà $f(x) - f(x_0) > 0$, với mọi $x \in \Delta$ hay $f(x) - f(x_0) < 0$, với mọi $x \in \Delta$ $(x \neq x_0)$. Vậy, với n chẵn, f có cực tiểu tại x_0 khi $f^{(n)}(x_0) > 0$ và f có cực đại tại x_0 khi $f^{(n)}(x_0) < 0$. ■

2.2.6. Xấp xỉ nghiệm của phương trình bằng phương pháp Newton

Ngoài phương pháp tính gần đúng dùng đạo hàm cấp một đã nêu, phương pháp Newton sau đây thường được dùng để tính gần đúng nghiệm của phương trình.

Mỗi số r thỏa $f(r) = 0$ được gọi là *nghiệm* của phương trình $f(x) = 0$ hay *không điểm* của hàm f. Nếu f khả vi gần nghiệm thì các tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ có thể được dùng để xây dựng dãy xấp xỉ nghiệm và dần nhanh đến nghiệm. Ý tưởng được mô tả như sau:



Hình 2.2: Minh họa cho phương pháp Newton.

- Gọi x_0 là giá trị dự đoán ban đầu cho nghiệm. Kẻ tiếp tuyến với $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$ và xác định giao điểm x_1 của tiếp tuyến với Ox. Với những điều kiện nào đó, thì x_1 sẽ gần nghiệm hơn x_0. Quá trình có thể được lặp lại để ta nhận các giá trị x_2, x_3, ... càng gần với nghiệm r. Số hạng x_{n+1} là giao điểm của Ox và tiếp tuyến với $y = f(x)$ tại $(x_n, f(x_n))$.

- Cụ thể: tiếp tuyến tại $(x_0, f(x_0))$ là

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  và do tiếp tuyến qua $(x_1, 0)$ nên

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

  Tiếp tục xác định x_2, x_3, $\ldots x_n$ và ta nhận được quan hệ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

  được gọi là công thức của phương pháp Newton. Các x_n được gọi là các xấp xỉ Newton của nghiệm.

- Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ và nếu f/f' liên tục quanh r thì r phải là nghiệm của f vì

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\\ r &= r - \frac{f(r)}{f'(r)}\\ f(r) &= 0.\end{aligned}$$

Chú ý.

1. Ta có thể chọn giá trị đầu x_0 dựa vào sự phác họa đồ thị hay dựa vào khoảng chứa nghiệm của phương trình.

2. Khi áp dụng phương pháp Newton để giải phương trình dạng $g(x) = h(x)$, ta nên viết lại thành $f(x) = 0$ và áp dụng phương pháp cho f (nên dùng $f = g - h$, dù $f = (g/h) - 1$ cũng là một cách).

3. Trong trường hợp f' rất nhỏ gần nghiệm hay f'' rất lớn gần nghiệm thì chỉ cần một lần áp dụng công thức Newton ta có thể đưa một giá trị gần nghiệm thành một giá trị hoàn toàn xa nghiệm.

Định lý sau cho một điều kiện đủ để các xấp xỉ Newton hội tụ về nghiệm r của phương trình nếu giá trị dự đoán ban đầu x_0 đủ gần nghiệm đó.

Định lý 2.14. *Cho hàm số f có đạo hàm liên tục đến cấp hai trong một khoảng I chứa x_n, x_{n+1} và một nghiệm $x = r$ của phương trình $f(x) = 0$. Giả sử tồn tại các giá trị K và $L > 0$ sao cho với mọi $x \in I$:*

(i) $|f''(x)| \leq K$,

(ii) $|f'(x)| \geq L$.

Khi đó:

(a) $|x_{n+1} - r| \leq \dfrac{K}{2L}|x_{n+1} - x_n|^2$,

(b) $|x_{n+1} - r| \leq \dfrac{K}{2L}|x_n - r|^2$.

Chứng minh. Từ công thức Newton, ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Theo công thức Taylor "quanh" điểm x_n, ta có

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(c_1)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &= \frac{f''(c_1)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$|f(x_{n+1})| = \frac{|f''(c_1)|}{2}|x_{n+1} - x_n|^2 \leq \frac{K}{2}|x_{n+1} - x_n|^2. \tag{2.9}$$

Mặt khác, theo định lý Lagrange, ta có

$$|f(x_{n+1})| = |f(x_{n+1}) - f(r)| = |f'(c_2)(x_{n+1} - r)| \geq L|x_{n+1} - r|. \tag{2.10}$$

Từ (2.9), (2.10) suy ra kết luận (a).

Lại theo công thức Taylor quanh x_n, ta có

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(c_3)}{2}(r - x_n)^2$$

$$f'(x_n)(x_n - r) - f(x_n) = \frac{f''(c_3)}{2}(r - x_n)^2. \tag{2.11}$$

Từ công thức Newton, ta có

$$x_{n+1} - r = x_n - r - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)(x_n - r) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f''(c_3)(r - x_n)^2}{2f'(x_n)},$$

theo (2.11). Lấy trị tuyệt đối hai vế của kết quả trên và từ (i), (ii), ta suy ra (b). ∎

CHÚ Ý. Các điều kiện (i), (ii) khẳng định rằng gần r, độ dốc của $y = f(x)$ không quá nhỏ về độ lớn và không thay đổi quá nhanh. Nếu $K/(2L) \le 1$ thì định lý khẳng định rằng $\{x_n\}$ hội tụ nhanh về r khi n đủ lớn sao cho $|x_n - r| < 1$. Trong trường hợp $K/(2L) > 1$, nhưng tồn tại n sao cho $|x_{n+1} - x_n|^2$ đủ nhỏ thì $\{x_n\}$ vẫn hội tụ nhanh về r.

Ví dụ 2.17. Áp dụng phương pháp Newton để xấp xỉ nghiệm của phương trình $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ trong khoảng $(0, 1)$.

GIẢI. Xét $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$, ta có $f'(x) = 3x^2 + 4x > 0$ trong khoảng $(0, 1)$ và $f(0)f(1) = -2 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = r$ trên $[0, 1]$. Tuy nhiên, để có thể vận dụng Định lý 2.14 ta có thể giới hạn trên $I = [\frac{1}{2}, 1]$ (chú ý rằng ta vẫn có $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$). Dễ thấy, trên I: $|f''(x)| \le 10$, $|f'(x)| \ge 11/4$, từ đó, theo ký hiệu dùng trong Định lý 2.14: $K/2L = 20/11$. Bây giờ, ta chọn $x_0 = 3/4 \in I$ để xây dựng dãy xấp xỉ $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, được tính bởi công thức Newton. Theo đó, dễ thấy

$$|x_1 - x_0| = \frac{29}{300}.$$

Do bất đẳng thức (a) trong Định lý 2.14, ta có

$$|x_1 - r| \le \frac{K}{2L}\left(\frac{29}{300}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{(chú ý rằng } \tfrac{1}{4}(K/2L) < 1\text{)}.$$

Từ đó, theo bất đẳng thức (b):

$$|x_2 - r| \le \frac{K}{2L}\left(\frac{1}{4}\right)^4 < \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$|x_n - r| < \left(\frac{1}{4}\right)^{1+2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Như vậy, dãy $\{x_n\}$ sẽ hội tụ rất nhanh về nghiệm. Trên thực tế, dựa theo công thức Newton, ta tính liên tiếp các số hạng của dãy từ giá trị ban đầu $x_0 = 0,75$ và nhận được kết quả

n	x_n
0	0,75
1	0,8466666667
2	0,8393313375
3	0,8392867568
4	0,8392867553
5	0,8392867553

Vậy, giá trị xấp xỉ nghiệm duy nhất trong $(0, 1)$ với sai số nhỏ hơn 10^{-10} là $r \approx 0,8392867553$. $\triangleleft$

2.2.7. Xấp xỉ nghiệm của phương trình bằng phương pháp đệ quy

Một số thực r được gọi là *điểm bất động* của hàm số f nếu $f(r) = r$. Để tìm điểm bất động của một hàm số f, ta có thể chọn một giá trị dự đoán ban đầu là x_0 và thành lập dãy đệ quy các giá trị xấp xỉ $\{x_n\}$ cho r, với

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vấn đề là nếu f liên tục tại r thì r cũng chính là điểm bất động của dãy đệ quy trên.

Để minh họa cho ý tưởng của phương pháp, ta hãy xét bài toán sau: tìm nghiệm của phương trình

$$\cos x = 5x.$$

Trước tiên, phương trình được đưa về dạng $f(x) = x$, với $f(x) = \frac{1}{5}\cos x$. Với nhận xét là $\cos x$ gần 1 khi x gần 0 nên ta có thể chọn xấp xỉ dự đoán ban đầu cho điểm bất động của f (tức là nghiệm của phương trình $f(x) = x$) là $x_0 = \frac{1}{5} = 0,2$. Khi đó, các giá trị xấp xỉ liên tiếp lần lượt được tính bởi dãy đệ quy

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\cos(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.12}$$

Dựa vào bảng kết quả tính toán dưới đây

n	x_n
0	0,2
1	0,19601332
2	0,19617016
3	0,19616405
4	0,19616429
5	0,19616428
6	0,19616428

ta có kết luận: $x_n = 0,19616428$, khi $n \geq 5$, với sai số nhỏ hơn 10^{-8}. Từ đó suy ra số $0,19616428$ là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ cũng với sai số thỏa điều kiện trên. Như vậy, trong cách tính xấp xỉ này, thì điểm bất động của dãy đệ quy (2.12) được hiểu là thỏa một điều kiện sai số cho trước nào đó. Tuy nhiên, vấn đề là nghiệm có phụ thuộc vào giá trị được chọn ban đầu x_0 hay không? Ngoài ra, nghiệm của phương trình có duy nhất hay không? Thêm nữa, trong điều kiện nào thì dãy xấp xỉ đệ quy hội tụ về nghiệm? Định lý sau đây sẽ trả lời cho các câu hỏi được nêu ra.

Định lý 2.15. *Giả sử rằng f xác định trên khoảng đóng $I = [a, b]$ và thỏa các điều kiện*

(i) $f(I) \subset I$,

(ii) *tồn tại hằng số $K \in (0, 1)$:*

$$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|, \forall u, v \in I.$$

Khi đó, f có điểm bất động $r \in I$ và với bất kỳ điểm xấp xỉ dự đoán $x_0 \in I$, dãy các số hạng $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$ sẽ hội tụ về r.

Chứng minh. Hiển nhiên, điều kiện (ii) suy ra f là hàm liên tục trên $I = [a, b]$. Gọi $g(x) = f(x) - x$, ta có $g(a)g(b) = \big(f(a) - a\big)\big(f(b) - b\big) \leq 0$ (do $f(a)$, $f(b) \in [a, b]$) nên suy ra tồn tại $r \in [a, b]$ sao cho $g(r) = 0$ hay $f(r) = r$, nghĩa là r là điểm bất động của f. Khi đó,

$$|x_n - r| = |f(x_{n-1}) - f(r)| \leq K|x_{n-1} - f(r)| \leq K^2|x_{n-2} - f(r)| \leq \cdots \leq K^n|x_0 - r|.$$

Do $K \in (0, 1)$ suy ra $K^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. ■

Ví dụ 2.18. Hãy dùng phương pháp lặp tìm điểm bất động để giải phương trình $x^3 + 2x - 1 = 0$.
Giải. Xét $g(x) = x^3 + 2x - 1$, ta có $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ với mọi x và dễ thấy $g(0)g(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất trong $[0, 1]$. Bây giờ, ta lại viết phương trình dưới dạng $f(x) = x$, với $f(x) = 1/(x^2 + 2)$. Do $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$ nên để thuận tiện và có thể áp dụng Định lý 2.15, ta chỉ cần xét trong $I = [0, \frac{1}{2}]$ (cũng là khoảng chứa nghiệm của phương trình đã cho). Dễ thấy:

(i) $f(I) \subset I$,

(ii) $|f(u) - f(v)| \leq \frac{1}{4}|u - v|$, $\forall u, v \in I$.

Theo Định lý 2.15, ta có thể chọn x_0 là số tùy ý trong I. Ở đây, ta chọn $x_0 = \frac{1}{2}$ và tính liên tiếp các giá trị x_n từ công thức $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Từ kết quả được cho trong bảng sau

n	x_n
0	0,5
1	0,4444444444
2	0,4550561798
$\vdots$	$\vdots$
12	0,4533976516
13	0,4533976516

ta nhận được nghiệm xấp xỉ $r \approx 0,4533976516$, với sai số nhỏ hơn 10^{-10}. $\triangleleft$

2.2.8. Điểm cân bằng ổn định trong mô hình tăng trưởng đệ quy

Giả sử dãy $\{a_n\}$ được cho dưới dạng đệ quy $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ta tìm điểm bất động a của dãy từ hệ thức $a = f(a)$. Khi đó, nếu $a_0 = a$ thì $a_n = a$, $\forall n \geq 1$, và hiển nhiên $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Còn trong trường hợp $a_0 \neq a$ thì với điều kiện nào, ta vẫn có $\lim_{n\to\infty} a_n = a$? Để xây dựng một điều kiện như vậy, ta thử xét lần lượt các mô hình tăng trưởng đệ quy: từ trường hợp cụ thể như sự tăng trưởng hàm mũ đến sự tăng trưởng tổng quát.

Trước tiên, ta khảo sát trường hợp tăng trưởng hàm mũ, được cho bởi hệ thức đệ quy

$$N_{t+1} = RN_t, \quad t = 0, 1, 2\ldots,$$

với $R > 0$ và $N_0 \geq 0$.

(a) Khi $R = 1$: $N_t = N_0$, $t = 1, 2, 3, \ldots$ và ta gọi là trường hợp không ý nghĩa.

(b) Khi $R \neq 1$: $N = RN$ khi và chỉ khi $N = 0$. Ta biết rằng dãy trên có nghiệm $N_t = N_0 R^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, và ta xét hai trường hợp sau:

(α) $0 < R < 1$: Ta gọi trường hợp này là *ổn định* vì bất kể $N_0 \geq 0$, $N_t \to 0$ khi $t \to \infty$.

(β) $R > 1$: Nếu $N_0 = 0$ thì $N_t = 0$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, và $N_t \to 0$ khi $t \to \infty$. Nhưng khi $N_0 > 0$ ta lại có $N_t \to +\infty$ khi $t \to \infty$. Ta gọi trường hợp này là *không ổn định*.

Để khảo sát dáng điệu của các N_t khi $R \neq 1$, trên hệ trục tọa độ đã xét (trục hoành biểu diễn N_t, trục tung biểu diễn N_{t+1}), ta xác định giao điểm giữa các đường thẳng $N_{t+1} = RN_t$ và $N_{t+1} = N_t$. Bằng cách xác định các vị trí của N_t theo kiểu "nhện giăng", ta có cùng nhận xét như trên, nhưng theo ngôn ngữ hình học như sau:

(a) Nếu hệ số góc R của đường thẳng $N_{t+1} = RN_t$ thỏa $0 < R < 1$ thì các điểm N_t dần đến điểm bất động $N = 0$, bất kể $N_0 \geq 0$.

(b) Nếu $R > 1$ thì khi chọn $N_0 = 0$ và xác định các N_t liên tiếp theo kiểu nhện giăng, ta sẽ chỉ nhận được kết quả $N_t = 0$, $t = 1, 2, 3, \ldots$. Tuy nhiên, khi chọn điểm xuất phát $N_0 > 0$ thì cách xây dựng trên sẽ làm cho các N_t càng xa $N = 0$ và dần đến $+\infty$.

Khi khảo sát trong trường hợp tổng quát $N_{t+1} = f(N_t)$, ta sẽ thấy rằng độ nghiêng của đường cong trên tại điểm bất động N (chính là $f'(N)$) sẽ xác định: nghiệm dịch chuyển xa khỏi điểm bất động hay hội tụ về điểm đó. Trong trường hợp tăng trưởng hàm mũ, $N = 0$, $f'(0) = R$ và theo kết quả đã xét, $N = 0$ là ổn định khi $0 < R < 1$ và không ổn định khi $R > 1$.

Bây giờ, ta xét mô hình tăng trưởng tổng quát, có dạng đệ quy bậc nhất

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.13}$$

với f được giả thiết là khả vi trong miền xác định của nó. Để tìm các điểm bất động, ta giải phương trình $x = f(x)$. Về mặt đồ thị, ta tìm các giao điểm của các đồ thị $x_{t+1} = f(x_t)$ và $x_{t+1} = x_t$ trong mặt phẳng tọa độ với trục hoành x_t và trục tung x_{t+1}. Nếu có nhiều giao điểm, ta có nhiều điểm bất động (còn gọi là *cân bằng*). Ta có thể dùng sơ đồ nhện giăng để khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_t\}$. Ta cũng biết rằng nếu dãy hội tụ thì giới hạn của dãy là điểm cân bằng của (2.13) và nó có thể hội tụ về các giá trị khác nhau phụ thuộc vào giá trị ban đầu x_0 được chọn.

Để xem một điểm cân bằng là ổn định hay không ổn định ta bắt đầu bằng một giá trị khác với điểm cân bằng và kiểm tra xem nghiệm x_t có dẫn đến điểm cân bằng hay không?

Chú ý. Ta chỉ xét các giá trị đầu "gần" với điểm cân bằng. Khi bắt đầu xét một giá trị khác với điểm cân bằng và gần với nó, ta đã làm xáo trộn điểm đó và sự xáo trộn này được gọi là sự xáo trộn nhỏ. Phạm vi nhỏ này là cần thiết khi có nhiều điểm cân bằng và nếu chúng ta bắt đầu tại một điểm quá xa vị trí cân bằng đang khảo sát, ta có thể kết thúc ở một điểm cân bằng khác không phải vì điểm đang xem xét là không ổn định, mà đơn giản vì ta bị hút đến một vị trí cân bằng khác.

Nếu ta chỉ xét các xáo trộn nhỏ thì ta có thể thay $f(x)$ bởi xấp xỉ tuyến tính của nó tại điểm cân bằng: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$, với a là điểm cân bằng; nghĩa là đường cong $x_{t+1} = f(x_t)$ sẽ được xấp xỉ bởi đường thẳng có hệ số góc là $f'(a)$. Như vậy, có hai đường thẳng qua điểm a là

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(a) + f'(a)(x_t - a) \\ &= a + f'(a)(x_t - a) \end{aligned}$$

hay $x_{t+1} - a = f'(a)(x_t - a)$ và $x_{t+1} = x_t$. Theo sơ đồ nhện giăng, có thể thấy rằng với các x_t đủ gần a và $|f'(a)| < 1$ thì nghiệm x_t hội tụ về a và điểm này được gọi điểm *ổn định địa phương* để nhấn mạnh rằng đây là một đặc điểm có tính chất cục bộ vì ta chỉ xét các xáo trộn nhỏ gần điểm cân bằng. Ta đi đến một tiêu chuẩn để xác định tính ổn định địa phương của một điểm cân bằng.

Định lý 2.16. *Một điểm cân bằng a của $x_{n+1} = f(x_n)$ là ổn định địa phương nếu f' tồn tại trong một lân cận đủ nhỏ của a, f' liên tục tại a và $|f'(a)| < 1$.*

Chứng minh. Nếu tồn tại n_0 sao cho $x_{n_0} = a$ thì hiển nhiên $x_n = a$ với $n \geq n_0$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Trong trường hợp $x_n \neq a$ với mọi $n = 0, 1, \dots$ thì ta chọn K sao cho $|f'(a)| < K < 1$. Do

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = |f'(a)| < K, \quad -1 < f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - a}{x - a} < 1$$

nên tồn tại lân cận Δ của a sao cho

$$|f'(x)| < K \tag{2.14}$$

$$|f(x) - a| \leq |x - a| \tag{2.15}$$

với mọi $x \in \Delta$. Khi đó, với $u, v \in \Delta$ và $u \neq v$, theo định lý Lagrange và theo (2.14), ta có

$$|f(u) - f(v)| = |f'(c)(u - v)| < K|u - v|,$$

với lưu ý rằng $c \in \Delta$ vì ở giữa u và v. Từ đó suy ra

$$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|,$$

với mọi $u, v \in \Delta$, và a là điểm cân bằng duy nhất trong Δ.

Bây giờ ta chọn giá trị ban đầu $x_0 \in \Delta$, $x_0 \neq a$ và tính các giá trị liên tiếp $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\ldots$. Chú ý rằng, theo (2.15), ta có: $x_n \in \Delta$, với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$. Khi đó,

$$|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)| \leq K|x_{n-1} - a| \cdots \leq K^n|x_0 - a|.$$

Do $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$ nên $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Vậy, a là ổn định địa phương. ■

2.2.9. Bài toán tối ưu trong thực tế

Trong thực tế, ta thường gặp những bài toán có nội dung liên quan đến sự lựa chọn giải pháp tốt nhất (hay cũng được gọi là phương án tối ưu), trong những điều kiện nhất định nào đó. Một trong những mô hình toán học đơn giản của những bài toán như vậy chính là việc "Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của một hàm số" đã được bàn đến ở mục trên.

Tuy nhiên, ở đây, ta sẽ xét một "quy trình" tổng quát hơn, có thể áp dụng cho một lớp các bài toán dạng tối ưu được quy về việc khảo sát cực trị hàm một biến. Quy trình này được tóm tắt qua các bước sau:

Bước 1. Xác định các đại lượng được đề cập trong bài toán có vai trò là các biến và đặt tên chúng bằng các ký hiệu thường dùng x, y, $\ldots$, nếu chúng chưa được đặt tên và xác định mối quan hệ giữa chúng theo các giả thiết của bài toán.

Bước 2. Xác định đại lượng cần khảo sát tính cực trị và viết nó dưới dạng biến phụ thuộc (hàm số) theo một trong các biến đã xét ở **Bước 1**, bằng cách sử dụng mối quan hệ giữa chúng.

Bước 3. Khảo sát cực trị của hàm số ở **Bước 2** và xác định giá trị cực trị hoặc xác định điểm cực trị theo yêu cầu của bài toán (trong một số trường hợp cần xác định tất cả các giá trị tương ứng của các biến). Chú ý quy các đại lượng về cùng một đơn vị trong quá trình tính toán.

Ví dụ 2.19. Một nhà máy dự định sản xuất những cái lon chứa được 1 lít nhớt hình trụ đứng. Hãy xác định kích thước của lon (tính bằng *cm*) sao cho chi phí vật liệu thấp nhất.

GIẢI. Gọi h là chiều cao và r là bán kính đáy của lon. Theo giả thiết, ta có

$$r^2\pi h = 1\,\text{lít} = 1000\,cm^3. \tag{2.16}$$

Vật liệu được dùng để làm diện tích bề mặt S của lon. Vậy, bài toán quy về việc xác định các kích thước h, r sao cho S nhỏ nhất. Ta có

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi hr = 2\pi\left(r^2 + \frac{1000}{r\pi}\right) \quad (r > 0)$$
$$S' = \frac{4}{r^2}(\pi r^3 - 500).$$

Ta có $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{500/\pi}$ và dễ thấy đây là điểm cực tiểu của $S(r)$ và đồng thời tại đó, S đạt giá trị nhỏ nhất. Vậy các kích thước của lon để chi phí vật liệu thấp nhất là

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{500/\pi}\,cm \\ h = 2\sqrt[3]{500/\pi}\,cm. \end{cases}$$

◁

Ví dụ 2.20. Chi phí nhiên liệu cho hoạt động một đầu tàu hỏa tỉ lệ với bình phương vận tốc và bằng 25.000 đồng mỗi giờ đối với vận tốc 40 km/giờ. Tổng các chi phí khác là 100.000 đồng mỗi giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để chi phí chung cho mỗi km là thấp nhất.

GIẢI. Gọi L là chi phí nhiên liệu mỗi giờ đối với vận tốc v và k là hệ số tỉ lệ, ta có $L = kv^2$. Theo giả thiết $L = 25.000$ khi $v = 40$; từ đó, ta tính được $k = 125/8$. Như vậy, chi phí chung mỗi giờ là

$$L + 100.000 = \frac{1000}{64}v^2 + 100.000 \quad (\text{ứng với } v\, km)$$

Vậy, chi phí chung cho mỗi km là

$$f(v) = \frac{L + 100.000}{v} = \frac{1000}{v}\Big(\frac{v^2}{64} + 100\Big) = 1000\Big(\frac{v}{64} + \frac{100}{v}\Big).$$

Ta có

$$f'(v) = 1000\Big(\frac{1}{64} - \frac{100}{v^2}\Big) = 1000\Big(\frac{v^2 - 6400}{64v^2}\Big).$$

Vậy, $f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 80$.

v		-80		0		80	
$f'(v)$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$f(v)$				|	$\searrow$		$\nearrow$
				|		$f(80)$	

Từ bảng xét dấu của $f'(v)$, chi phí chung cho mỗi km là thấp nhất khi $v = 80\, km$/giờ. ◁

Ví dụ 2.21. Một sân vận động có sức chứa 18.000 chổ ngồi. Với giá vé 12.000 đồng thì số lượng người xem trung bình của một trận đấu là 11.000 người. Một nghiên cứu chỉ ra rằng cứ mỗi lần giá vé được giảm bớt 1000 đồng thì số lượng người xem trung bình tăng lên 2000 người. Vậy, để thu được lợi nhuận nhiều nhất từ tiền bán vé, thì giá vé nên được chọn là bao nhiêu?

GIẢI. Ở đây, dường như là ta cần xác định lợi nhuận dưới dạng hàm theo giá vé. Tuy nhiên, việc xác định quan hệ này sẽ không thuận tiện. Theo các giả thiết đã cho thì nên gọi g là số tiền giảm giá vé và như vậy, số người xem tăng lên là $2g$. Từ đó, tiền bán vé thu được là

$$T = (12.000 - g)(11.000 + 2g).$$

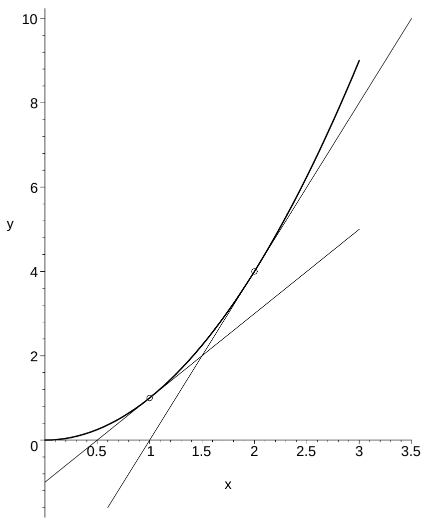
Ta có

$$T'(g) = -(11.000 + 2g) + 2(12.000 - g) = 13.000 - 4g.$$

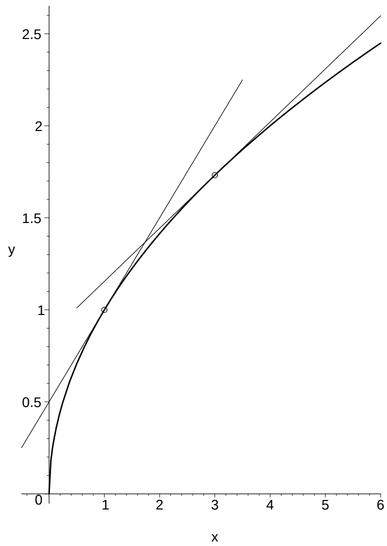
Từ đó, dễ thấy T đạt giá trị lớn nhất khi $g = 3250$ và giá vé tương ứng là $12.000 - 3250 = 8750$ đồng. (Chú ý rằng khi đó trung bình mỗi trận đấu có $X = 11.000 + 2 \times 3250 = 17.500$ người đến xem, thỏa điều kiện $X < 18.000$) ◁

2.2.10. Khảo sát tổng quát một hàm số

Vấn đề khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã được đề cập chi tiết trong chương trình môn Toán ở bậc Phổ thông trung học. Tuy nhiên, một số điểm về vấn đề này được nhắc lại ở đây nhằm củng cố và chính xác hóa những khái niệm "đã biết".



Hình 2.3: Đồ thị (C_1).



Hình 2.4: Đồ thị (C_2).

Để đi đến các khái niệm đặc trưng khác của đồ thị hàm số, ta hãy xét các cung của các Parabol sau đây:

$$(C_1)\colon y = f(x) = x^2 \quad (x > 0)$$
$$(C_2)\colon y = g(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$$

Các đường cong (C_1), (C_2) được cho bởi hình vẽ dưới đây. Ta có $f'(x) = 2x$ và $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Dựa vào sự biến thiên của đạo hàm hay hệ số góc của tiếp tuyến theo các giá trị của x (là hoành độ các tiếp điểm), ta nhận thấy rằng:

(i) $f'(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$ và (C_1) nằm phía trên mỗi tiếp tuyến của nó. Khi đó, (C_1) được gọi là *đường cong lõm*.

(ii) $g'(x)$ giảm trên $(0, +\infty)$ và (C_2) nằm bên dưới mỗi tiếp tuyến của nó. Khi đó, (C_2) được gọi là *đường cong lồi*.

Một cách tổng quát, ta đi đến định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.7. Cho f là hàm khả vi trên (a, b). Đường cong $(C)\colon y = f(x)$ được gọi là *lõm* (*lồi*) trên khoảng (a, b) nếu f' là hàm số tăng (giảm) trên khoảng đó. Điểm phân chia hai cung lồi, lõm kề nhau của đường cong được gọi là điểm uốn.

Theo định nghĩa trên, nếu f có đạo hàm cấp 2 trên (a, b) và $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ ($f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$) thì đường cong $(C)\colon y = f(x)$ lõm (lồi) trên khoảng đó (do f' tăng (giảm) trên (a, b)).

Một khái niệm khác được nhắc lại ở đây là *tiệm cận*. Để vẽ đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ có đầy đủ những đặc trưng hình học chính xác của f, ta dựa vào các tiệm cận là các đường thẳng Δ có tính chất sau: khoảng cách d từ $M(x, f(x)) \in (C)$ đến Δ dần đến 0 khi

$$x \to \pm\infty \text{ hoặc } \lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = \pm\infty,$$

hay ta cũng thường nói là: khi M *đi ra vô tận*. Có hai loại tiệm cận, được xác định theo các điều kiện đã được chứng minh sau đây.

Tiệm cận thẳng đứng:

$$x = x_0 \text{ là tiệm cận của } (C) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = \pm\infty.$$

Tiệm cận xiên:

$$y = ax + b \text{ là tiệm cận của } (C) \Leftrightarrow a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]. \tag{2.17}$$

Chú ý.

1. Nếu một trong các giới hạn trong (2.17) không tồn tại hoặc vô hạn thì (C) không có tiệm cận xiên.

2. Trong một số trường hợp, tùy theo $x \to +\infty$ hay $x \to -\infty$ mà ta nhận được các tiệm cận xiên khác nhau.

3. Với $a = 0$ thì

$$y = b \text{ là tiệm cận của } (C) \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ đã vẽ, ta suy ra cách dựng đồ thị của các hàm số khác được cho trong những trường hợp sau:

(a) (C_1): $y = f(x) + k\,(k \neq 0)$: (C_1) nhận được bằng cách dời (C) theo phương Oy một đoạn bằng $|k|$ và lên phía trên nếu $k > 0$ hoặc xuống phía dưới nếu $k < 0$.

(b) (C_2): $y = f(x + k)\,(k \neq 0)$: (C_2) nhận được bằng cách dời (C) theo phương Ox một đoạn bằng $|k|$ và sang bên phải nếu $k < 0$ hoặc sang bên trái nếu $k > 0$.

(c) (C_3): $y = |f(x)|$: (C_3) nhận được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox và lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị còn lại của (C).

(d) (C_4): $y = -f(x)$: (C_4) nhận được bằng cách lấy đối xứng đồ thị (C) qua Ox.

(e) (C_5): $y = f(|x|)$: (C_5) là đồ thị của hàm chẵn và nó nhận được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của (C) chứa các điểm thuộc Oy hoặc nằm bên phải Oy; sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua Oy.

Cuối cùng, ta nhắc lại ở đây các bước để khảo sát các đặc điểm của hàm số $y = f(x)$ (trên miền xác định) và vẽ đồ thị (C) của nó.

1. Tính $f'(x)$ và xét dấu của nó trên miền xác định hoặc trên các khoảng đặc biệt để xác định cực trị của hàm số.

2. Xác định và vẽ các tiệm cận của (C) (nếu có).

3. Tìm các giao điểm của (C) với các trục tọa độ và chọn thêm một vài điểm đặc biệt trên đồ thị (nếu cần).

4. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào kết quả trong bảng biến thiên và các kết quả khác ở các bước trên.

Ví dụ 2.22. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x + (\ln x/x)$.

Giải. Hàm số có miền xác định $X = (0, +\infty)$ và ta có

$$y'(x) = 1 + \frac{(\ln x)'x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2}.$$

Đặt $f(x) = x^2 - \ln x + 1$, ta có $f'(x) = 2x - (1/x) = (2x^2 - 1)/x$ và kết quả xét dấu của nó được cho bởi bảng sau:

x		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
f				$\vert$	$\searrow$		$\nearrow$
				$\vert$		$f(\sqrt{2}/2) > 0$	

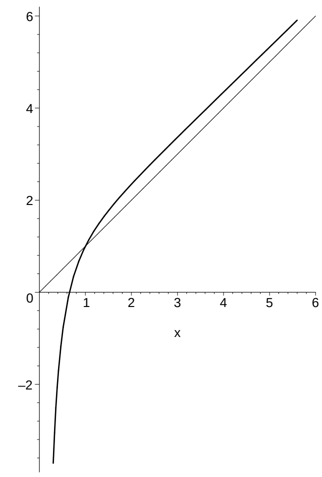
Theo kết quả trên, ta có $f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Vậy, $y'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Từ đó, ta suy ra bảng xét dấu của y' như sau:

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	

Mặt khác, ta có

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(x + \frac{\ln x}{x} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Từ kết quả trên, ta suy ra $x = 0$ và $y = x$ là các tiệm cận của đồ thị hàm số. $\triangleleft$



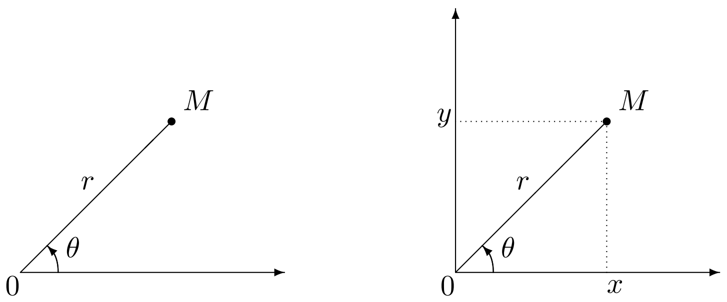
Hình 2.5: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

2.2.11. Giới thiệu về tọa độ cực và biểu diễn đường cong trong tọa độ cực

Trên mặt phẳng, xét một trục có điểm gốc O. Ta có thể xác định vị trí của điểm M trên mặt phẳng bởi các giá trị $r = OM$ và số đo góc lượng giác θ lập bởi tia OM với trục. Theo ý nghĩa của θ thì nó được xác định sai khác $2k\pi$ và khi $M \equiv O$ thì θ nhận giá trị tùy ý. Ta gọi cặp (r, θ) là *tọa độ cực* của điểm M. Trục khi đó được gọi là *trục cực* và O được gọi là *gốc cực*.

Bây giờ ta xét lại xét hệ tọa độ Descartes thông thường với trục hoành trùng với trục cực và gốc tọa độ trùng với gốc cực. Khi đó, với mỗi điểm $M(x, y)$, ta có vô số cặp (r, θ) tương ứng; ngược lại, với mỗi cặp (r, θ), ta chỉ xác định được duy nhất điểm $M(x, y)$, với

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{2.18}$$



Hình 2.6: Vị trí của một điểm trong tọa độ cực.

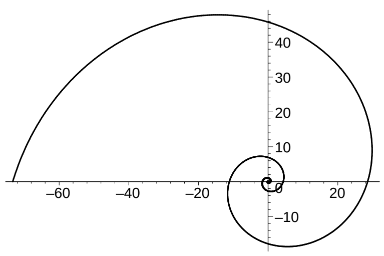
Nếu chỉ giới hạn trong điều kiện: $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < r$, thì quan hệ giữa $(x, y) \neq (0, 0)$ và (r, θ) được cho bởi hệ (2.18) là 1–1. Nghĩa là, ánh xạ $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ là song ánh từ $\{(x, y) \colon (x, y) \neq (0, 0)\}$ lên $\{(r, \theta) \colon 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 < r\}$. Chú ý rằng ta có thể chọn điều kiện đối với θ là $2k\pi + \alpha \leq \theta < \beta + 2k\pi$, với $\beta - \alpha = 2\pi$ và k là một số nguyên nào đó.

Trên thực tế, việc dùng tọa độ cực để xác định vị trí của một điểm trên mặt phẳng là phổ biến hơn tọa độ Descartes thông thường. Chẳng hạn, trên màn hình radar đặt tại một Trạm kiểm soát không lưu, vị trí của máy bay thường được xác định bởi *hướng bay* và *khoảng cách* từ máy bay đến Trạm hay một điểm gốc quy ước, chính là các giá trị của θ và r đối với tọa độ cực của máy bay.

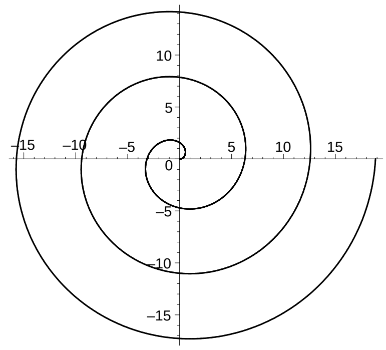
Một đường cong trong mặt phẳng tọa độ Descartes có thể có *phương trình cực* dạng đơn giản hơn là $r = f(\theta)$ trong tọa độ cực. Chẳng hạn, đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ sẽ có phương trình cực là $r = 3$, với $0 \leq \theta \leq 2\pi$; còn đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ sẽ có phương trình cực là $r = 4\cos\theta$, với $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Ngược lại, ta cũng có thể cho trực tiếp một đường cong (C) bởi phương trình cực $r = f(\theta)$ theo nghĩa: (C) là quỹ tích các điểm có tọa độ cực (r, θ) thỏa phương trình cực và thường được gọi là *đồ thị* của phương trình cực $r = f(\theta)$. Trong trường hợp này, r có thể nhận giá trị âm theo quy ước sau: với θ đã cho, ta xét một tia xuất phát từ gốc O và lập với trục cực một góc θ; khi đó, điểm M tương ứng của quỹ tích được chọn nằm trên tia vừa vẽ sao cho $r = OM$ nếu $r > 0$, hoặc nằm trên tia ngược lại sao cho $OM = |r|$ nếu $r < 0$. Để vẽ (C), ta cũng dùng công cụ đạo hàm để khảo sát $f(\theta)$. Tuy nhiên khi lập bảng biến thiên thì luôn lưu ý đến ý nghĩa của r và θ. Có thể kiểm chứng được rằng:

(a) Nếu f là hàm chẵn thì (C) đối xứng qua trục cực.

(b) Nếu f là hàm lẻ thì (C) đối xứng qua tia $\theta = \pi/2$.

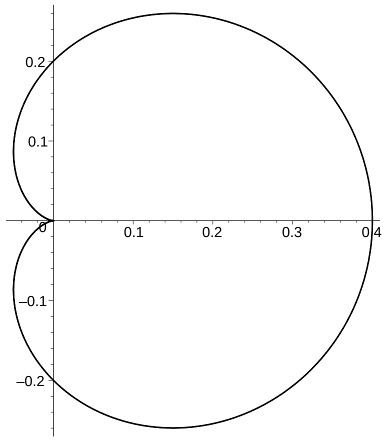


Hình 2.7: Đồ thị của phương trình $r = (0,1)e^{(0,3)\theta}$.

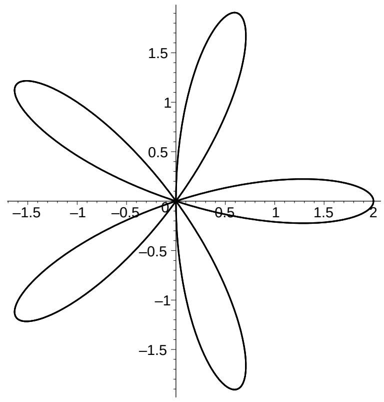


Hình 2.8: Đồ thị của phương trình $r = \theta$.

Với a, b và c là các số dương thì các phương trình cực $r = a\theta$, $r = be^{c\theta}$ đều có $f(\theta)$ là hàm số tăng theo θ. Điều này có nghĩa là khi điểm M trên các đồ thị tương ứng dịch chuyển sao cho $\overrightarrow{OM}$ lập với trục cực một góc θ càng lớn (về số đo) thì nó càng xa gốc cực O. Đó chính là đặc trưng của các đường xoắn ốc.



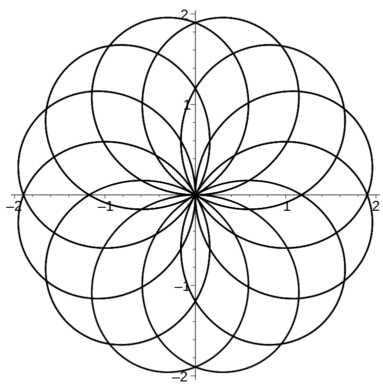
Hình 2.9: Đồ thị của phương trình $r = (0,2)(1 + \cos\theta)$.



Hình 2.10: Đồ thị của phương trình $r = 2\cos(5\theta)$.

Với $A \neq 0$, ta xét một số phương trình cực mà đồ thị của chúng có các tính chất đặc biệt sau đây:

(a) Đồ thị của phương trình cực $r = a(1 + \cos\theta)$ có dạng "hình trái tim" (cardioid).



Hình 2.11: Đồ thị của phương trình $r = 2\sin((1,2)t)$.

(b) Đồ thị của các phương trình cực $r = a\cos(n\theta)$ hay $r = a\sin(n\theta)$, với $n \in \mathbb{Z}$, có dạng "hoa hồng" n-cánh khi n lẻ và "hoa hồng" $2n$-cánh khi n chẵn. Trong trường hợp $n \notin \mathbb{Z}$ thì đồ thị có nhiều hình dạng bất thường khác nhau theo sự thay đổi của n.

(c) Đồ thị của phương trình cực
$$r = \frac{A}{1 + e\cos\theta},$$
trong đó $e \geq 0$ là một đường conic. Khi đó, ta có sự phân loại theo các giá trị của e như sau:

(i) Nếu $e = 0$ đồ thị là một đường tròn.

(ii) Nếu $e = 1$ đồ thị là một parabol.

(iii) Nếu $0 < e < 1$ đồ thị là một ellip.

(iv) Nếu $e > 1$ đồ thị là một hyperbol.

Chú ý đến tính chẵn của hàm số $\cos\theta$ và xét các trường hợp $A < 0$, $A > 0$ để nhận được đầy đủ các đường parabol hay các nhánh của hyperbol trong các trường hợp $e \geq 1$ ở trên.

2.3. Giới thiệu về số phức và hàm số phức một biến thực

2.3.1. Định nghĩa số phức và các phép toán trên các số phức

Định nghĩa 2.8. Một số phức z là một biểu thức hình thức có dạng $z = a + ib$ (hay $z = a + bi$), với a và b là các số thực, ký hiệu i được gọi là *đơn vị ảo* và được quy ước thỏa mãn điều kiện:

$$i^2 = i \cdot i = -1. \tag{2.19}$$

Các số a, b lần lượt được gọi là *phần thực* và *phần ảo* của số phức z và được viết là $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$. Khi $b = 0$ thì z được xem là số thực a thông thường. Tập mọi số phức thường được ký hiệu là $\mathbb{C}$ và như vậy: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Hai số phức $z = a + ib$ và $w = c + id$ được gọi là "bằng nhau", ta viết là $z = w$, khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. Vậy, ta có:

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ và } b = 0.$$

Với $z = a + ib$ thì số thực

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

được gọi là *độ lớn* của z. Các phép toán đại số *cộng*, *trừ*, *nhân* và *chia* trên các số phức $z = a + ib$, $w = c + id$ được lần lượt định nghĩa và ký hiệu tương ứng sau:

$$\begin{aligned} z + w &:= (a + c) + i(b + d) \\ z - w &:= (a - c) + i(b - d) \\ z \cdot w &:= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ \frac{z}{w} &:= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (w \neq 0). \end{aligned}$$

Các số phức kết quả cũng được gọi lần lượt là *tổng*, *hiệu*, *tích* và *thương* của z và w (chú ý đến thứ tự của z và w đối với hiệu và thương), và chúng có thể được xác định bằng cách thực hiện các quy tắc tính thông thường như đối với số thực, miễn là áp dụng quy tắc (2.19). Chẳng hạn, ta có thể viết

$$z \cdot w = zw = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

hay

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Các phép toán trên cũng có mọi tính chất giống như khi thực hiện trên các số thực. Chẳng hạn, với z, z_1 và z_2 là các số phức tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1, \\ z(z_1 \pm z_2) &= z z_1 \pm z z_2. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.9. Hai số phức được gọi là *liên hợp* với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng phần thực, còn phần ảo thì đối nhau.

Vậy, nếu $z = a+ib$ thì số phức liên hợp với z được ký hiệu là $\overline{z}$ và ta có $\overline{z} = a-ib$, suy ra $z\cdot\overline{z} = |z|^2$. Nếu z_1 và z_2 là các số phức bất kỳ thì ta dễ dàng chứng minh được các công thức sau:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2} & \qquad |z_1 \pm z_2| &\le |z_1|+|z_2|\\
\overline{z_1-z_2} &= \overline{z_1}-\overline{z_2} & \big||z_1|-|z_2|\big| &\le |z_1+z_2|\\
\overline{z_1z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2} & |z_1z_2| &= |z_1||z_2|\\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}.
\end{aligned}$$

Một số các tính chất trên dễ dàng được mở rộng khi áp dụng cho đồng thời một số hữu hạn các số phức. Chẳng hạn, với z_1, z_2, …, z_n là các số phức bất kỳ, ta có

$$\overline{z_1z_2z_3\cdots z_n} = \overline{z_1z_2\cdots z_{n-1}}\cdot\overline{z_n} = \cdots = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdots\overline{z_n}.$$

Đặc biệt, khi $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, ta có $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$.

Chú ý. Với các số phức z_1 và z_2, ta có tính chất quan trọng sau, được dùng làm cơ sở để giải một phương trình bậc hai với hệ số thực trong $\mathbb{C}$:

$$z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \text{ hoặc } z_2 = 0. \tag{2.20}$$

Xét phương trình

$$az^2+bz+c = 0, \tag{2.21}$$

trong đó, $a \neq 0$, b, c đều là số thực và $z \in \mathbb{C}$. Khi đó, với $\Delta = b^2-4ac$, ta chia ra các trường hợp sau:

(a) $\Delta \ge 0$: Khi đó

$$\begin{aligned}
(2.21) &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ hoặc } z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

(b) $\Delta < 0$: Khi đó

$$\begin{aligned}
(2.21) &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\frac{-\Delta}{4a^2} = 0\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow z = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ hoặc } z = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.23. Giải phương trình $x^2+x+1 = 0$ trong $\mathbb{C}$.

Giải. Do $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot1 = -3 < 0$ nên $x \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình khi và chỉ khi

$$x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

◁

Ta cũng có thể giải phương trình đa thức với hệ số thực có bậc cao hơn trong $\mathbb{C}$. Vấn đề này sẽ được xét trong trường hợp tổng quát hơn dưới đây.

2.3.2. Dạng cực và căn bậc n của số phức

Số phức $z = x + iy$ có thể được biểu diễn bởi vector $\overrightarrow{OM}$, với M chính là điểm (x, y) trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Bây giờ, nếu (r, φ) là tọa độ cực của M, thì hiển nhiên ta có thể viết

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.22}$$

trong đó, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Vế phải của (2.22) được gọi là *dạng cực* của z. Góc φ được xác định sai khác $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và được gọi là *argument* của z và thường được ký hiệu là $\operatorname{Arg} z$. Ta luôn có thể viết φ dưới dạng

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

trong đó, $\arg z$ là góc thỏa $-\pi \le \arg z < \pi$. Chú ý rằng, khi $z = 0$ thì $r = 0$ và φ được chọn tùy ý. Ngoài ra, nếu $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ và z lại được viết dưới dạng: $z = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, với $r' \ge 0$, thì ta phải có $r' = r$ và $\varphi' = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Với các số phức được cho bởi dạng cực $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, ta có

(a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}))$.

(b) $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\big[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big]. \end{aligned}$$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big]$.

Từ các kết quả trên, với $n \in \mathbb{N}$ và $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, bằng quy nạp, ta chứng minh được công thức sau, thường được gọi là công thức Moivre:

$$z^n = r^n\big[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big]. \tag{2.23}$$

Ngoài ra, nếu $z \ne 0$ thì (2.23) đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$, với z^n được xác định trong các trường hợp của n như sau:

(i) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ lần}}$ khi $n > 0$,

(ii) $z^n = 1/z^{-n}$ khi $n < 0$,

(iii) $z^n = 1$ khi $n = 0$.

Bây giờ, ta xét đến khái niệm *căn bậc n* của một số phức và chứng minh công thức xác định những giá trị này.

Định nghĩa 2.10. Cho số phức z_0 và số nguyên dương n. Khi đó, căn bậc n của z_0 là những số phức z thỏa

$$z^n = z_0$$

và được viết là $\sqrt[n]{z_0}$.

Giả sử $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ và $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} z^n = z_0 &\Leftrightarrow r^n\big[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big] = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r_0}, \quad n\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Vậy, ta có đúng n căn bậc n của z_0 và chúng được cho bởi công thức:

$$z = \sqrt[n]{r_0}\Big[\cos\Big(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\Big)\Big], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.24}$$

Ví dụ 2.24. Giải phương trình $x^4 + 1 = 0$ trong $\mathbb{C}$.

Giải. Ta có

$$x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Từ đó, theo công thức (2.24), nghiệm được cho bởi

$$x = \cos\Big(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Lần lượt cho k nhận các giá trị đã liệt kê, ta có các nghiệm cụ thể sau:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
x_1 &= \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
x_2 &= \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{x_1}\\
x_3 &= \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{x_0}.
\end{aligned}$$

Do trong $\mathbb{C}$ ta có mọi tính chất của các phép toán số học như trong $\mathbb{R}$ và cũng dễ dàng chứng minh được định lý phân tích một đa thức thành tích các thừa số từ các nghiệm, nên theo kết quả trên ta có

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})(x - x_1)(x - \overline{x_1})\\
&= \big[x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0}\big]\big[x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1\overline{x_1}\big] = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).
\end{aligned}$$

◁

Trong ví dụ trên, ta có nhận xét rằng nếu $x = z \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $x = \overline{z}$ cũng là nghiệm. Thật vậy, từ $z^4 + 1 = 0$ ta có $\overline{z^4 + 1} = 0$ hay $\overline{z}^4 + 1 = 0$. Sự tổng quát hóa các nhận xét trong ví dụ trên được cho bởi định lý sau đây.

Định lý 2.17. *Mọi đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ có đúng n nghiệm $x = x_i$ trong $\mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, có tính đến số bội của nghiệm, và ta có sự phân tích*

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Nếu đa thức trong định lý trên có một nghiệm phức $x = a + ib$ $(b \neq 0)$ thì số phức liên hợp $\overline{x} = a - ib$ cũng là nghiệm. Khi đó, sự phân tích trên của $P_n(x)$ chứa thừa số $(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 + b^2$, chính là một tam thức bậc hai theo x có biệt thức $\Delta < 0$ (do $b \neq 0$). Từ nhận xét này, ta sẽ có cơ sở cho việc tìm nguyên hàm của các hàm hữu tỉ trong Chương 3.

2.3.3. Hàm số phức của một biến thực

Định nghĩa 2.11. Mỗi ánh xạ $f\colon X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, trong đó $\mathbb{C}$ là tập mọi số phức, được gọi là một hàm số phức một biến thực, với miền xác định X (thường là một khoảng nào đó).

Theo định nghĩa trên thì f có thể được viết dưới dạng $f = u + iv$, trong đó, $u\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $v\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số thực thông thường, i là đơn vị ảo. Ta nói $L = L_1 + iL_2 \in \mathbb{C}$ là giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến x_0 khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{2.25}$$

Khi đó, ta viết $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Chú ý rằng, trong định nghĩa trên, ký hiệu $|f(x) - L|$ chỉ độ lớn của số phức $f(x) - L$. Rõ ràng:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} u(x) = L_1, \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = L_2.$$

Mặt khác, nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = u(x_0) + iv(x_0) = f(x_0)$ thì f được gọi là liên tục tại x_0. Ta cũng nói f liên tục trong (a, b) hay trên $[a, b]$ hoàn toàn tương tự như đối với hàm số thực đã xét. Tính khả vi cũng được định nghĩa tương tự; chẳng hạn, $f = u + iv$ được gọi là khả vi tại x_0 nếu giới hạn sau tồn tại và là một số phức $a + ib$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Khi đó, giới hạn được viết là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của f tại điểm x_0. Do

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

nên f khả vi tại điểm x_0 khi và chỉ khi u và v cũng khả vi tại cùng điểm x_0 và ta có

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0).$$

Khái niệm hàm đạo hàm f' cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số thực và ta có: $f' = u' + iv'$. Ngoài ra, ta cũng có các tính chất tương tự như đối với đạo hàm của hàm số thực, và cũng có thể mở rộng để xét các đạo hàm cấp cao của hàm số phức. Chẳng hạn, ta có những tính chất sau:

$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)},$$
$$(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)},$$

trong đó, f, g là các hàm phức một biến thực khả vi cấp n và C là số phức bất kỳ. Thật vậy, với $f = u + iv$ thì

$$(if)' = \big[i(u + iv)\big]' = (-v + iu)' = -v' + iu' = i(u' + iv') = if'.$$

Từ đó, dễ dàng suy ra được $\big((a + ib)f\big)' = (a + ib)f'$, $\big((a + ib)f\big)'' = (a + ib)f''$, ..., $\big((a + ib)f\big)^{(n)} = (a + ib)f^{(n)}$.

Bây giờ ta sẽ xét một hàm số phức một biến thực cụ thể, có nhiều ứng dụng quan trọng, được cho bởi $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, với

$$f(y) =\colon e^{iy} \quad (y \in \mathbb{R},\ i \text{ là đơn vị ảo})$$

sẽ được xác định dựa vào những nhận xét sau đây. Theo công thức MacLaurin của các hàm số thực e^y, $\sin y$ và $\cos y$, ta có thể viết

$$
\begin{aligned}
e^y &\sim 1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{y^k}{k!}; \qquad (2.26)\\
\sin y &\sim y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!};\\
\cos y &\sim 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

với ý nghĩa là: khi cố định mỗi $y \in \mathbb{R}$, giới hạn của các dãy ở các vế phải chính là các giá trị ở vế trái tương ứng, khi $n \to \infty$. Bây giờ, ta thay y bởi iy vào (2.26) và chú ý rằng

$$
i^k=\begin{cases}(-1)^m & \text{khi } k=2m,\\ (-1)^m i & \text{khi } k=2m+1.\end{cases}
$$

Khi đó, ta có sự phân tích vế phải của (2.26) như sau:

$$
\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{i^k y^k}{k!}=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+i\Big(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big). \qquad (2.27)
$$

Cố định $y \in \mathbb{R}$ thì "dãy số phức" ở vế phải của (2.27) sẽ hội tụ về số phức $\cos y + i\sin y$, theo ý nghĩa đã nêu. Từ đó, ta chọn giới hạn này làm định nghĩa cho số phức e^{iy} ở vế trái của (2.27). Vậy, hàm số "mũ phức" f ở trên đã được hoàn toàn xác định và ta nhận được công thức Euler:

$$
e^{iy}=\cos y+i\sin y \quad (y\in\mathbb{R}). \qquad (2.28)
$$

Từ công thức (2.28), ta thử kiểm tra một số tính chất của hàm số mũ thông thường. Với y_1, y_2 là các số thực bất kỳ, ta có:

$$
\begin{aligned}
e^{iy_1}e^{iy_2} &= (\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)=\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\\
&= e^{i(y_1+y_2)}=e^{iy_1+iy_2}\\
\frac{e^{iy_1}}{e^{iy_2}} &= \frac{\cos y_1+i\sin y_1}{\cos y_2+i\sin y_2}=\cos(y_1-y_2)+i\sin(y_1-y_2)=e^{i(y_1-y_2)}=e^{iy_1-iy_2}
\end{aligned}
$$

Xét số phức z và giả sử $r=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$. Vậy

$$
z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi} \qquad (2.29)
$$

và vế phải của (2.29) được gọi là *dạng mũ* của z. Khi đó, với $n\in\mathbb{N}$ ta có:

$$
z^n=\big(re^{i\varphi}\big)^n=\big[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big]^n=r^n\big[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\big]=r^ne^{in\varphi}.
$$

Trong trường hợp $z\neq 0$ thì công thức trên cũng đúng khi $n\in\mathbb{Z}$.

Bây giờ ta mở rộng ánh xạ f đã xét ở trên bằng cách xét ánh xạ $g\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, với

$$
g(z)=: e^z \quad (z\in\mathbb{C})
$$

và e^z sẽ được xác định sao cho các tính chất của hàm số mũ thông thường vẫn còn nghiệm đúng. Với $z = x + iy$ và dựa theo công thức Euler, ta định nghĩa:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Theo định nghĩa trên thì với $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, ta có

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{x_1+x_2}\big[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big] \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng kiểm chứng được rằng

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Mặt khác, với mọi $z \in \mathbb{C}$ và mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta cũng chứng minh được rằng:

(i) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

(ii) $\big(e^z\big)^n = e^{nz}$.

Ví dụ 2.25. Xét hàm số phức một biến thực $f(x) = e^{(a+ib)x}$, trong đó a và b là các số thực cho trước. Hãy tính $f''(x)$.

Giải. Ta có thể viết $f(x) = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\big[\cos(bx) + i\sin(bx)\big] \equiv u(x) + iv(x)$, trong đó

$$u(x) = e^{ax}\cos(bx), \quad v(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

Vậy, với mỗi $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) + iv'(x) = ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) + i\big[ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx)\big] \\ &= ae^{ax}\big[\cos(bx) + i\sin(bx)\big] + ibe^{ax}\big[\cos(bx) + i\sin(bx)\big] \\ &= af(x) + ibf(x) = (a+ib)f(x). \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra rằng $f''(x) = (a+ib)f'(x) = (a+ib)^2 f(x) = (a+ib)^2 e^{(a+ib)x}$. ◁

2.4. Bài tập

1. Cho $y = (ax+b)^\alpha$. Chứng minh rằng

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha a}{ax+b}.$$

   Áp dụng kết quả trên để tính $f'(0)$, với

$$f(x) = \frac{(x-2)^4(3x+1)^3}{\sqrt{4x+1}(5x-1)^5(2x-3)^2}.$$

2. Tính gần đúng các giá trị $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$ với sai số nhỏ hơn $0,0001$.

3. Diện tích của một hình chữ nhật đang tăng ở tốc độ $5\,m^2$/giây, trong khi chiều dài đang tăng ở tốc độ $10\,m$/giây. Nếu chiều dài đang là $20\,m$ và chiều rộng là $16\,m$ thì chiều rộng đang thay đổi như thế nào?

4. Tính tốc độ biến thiên của diện tích bề mặt của một hình lập phương tại thời điểm t_0, nếu tại thời điểm này thể tích của hình lập phương là $64\,m^3$ và tăng ở tốc độ $2\,cm^3$/giây.

5. Người ta bơm nước vào một hồ chứa hình trụ có bán kính đáy $5\,m$, độ sâu $2\,m$ với tốc độ $5\,m^3$/giờ. Vì hồ chứa bị rò rỉ nên nước trong hồ chảy ra ngoài. Hãy tính tốc độ nước rò rỉ ra ngoài tại thời điểm độ sâu của nước trong hồ là $0,8\,m$ và đang tăng ở tốc độ $4\,cm$/giờ. Nếu tốc độ rò rỉ này không đổi thì sau thời điểm đó bao lâu hồ sẽ đầy nước?

6. Khi một bản phẳng kim loại hình tròn bị đun nóng, bán kính của nó tăng với tốc độ $0,01\,cm$/phút. Tính tốc độ biến thiên của diện tích bản kim loại khi bán kính của nó đang là $50\,cm$. Nếu tốc độ này không đổi thì cần thêm thời gian bao lâu, bán kính của bản sẽ là $52\,cm$.

7. Một dụng cụ lược cà phê hình nón có chiều cao và đường kính đáy cùng bằng $6\,cm$. Cà phê đang chảy từ dụng cụ này vào bình chứa hình trụ (có đường kính đáy $6\,cm$) với tốc độ $10\,cm^3$/phút. Giả sử mực cà phê trong dụng cụ lược đang ở mức $5\,cm$. Khi đó, mực cà phê trong bình chứa và trong dụng cụ lược đang thay đổi theo các tốc độ tương ứng nào?

8. Hai chiếc xe X_1, X_2 cùng xuất phát từ một điểm G. Chiếc X_1 chạy về hướng Bắc, còn chiếc X_2 thì theo hướng Đông. Khoảng cách giữa hai xe tăng theo tốc độ nào tại thời điểm mà X_1 cách G một khoảng là $10\,km$ và đang chạy với tốc độ $60\,km$/giờ, còn X_2 cách G một khoảng $5\,km$ và đang chạy với tốc độ $25\,km$/giờ.

9. Giả sử nước đang được bơm ra khỏi một bình thủy tinh hình cầu có bán kính $1\,m$. Nếu tại thời điểm đang xét, độ sâu của nước trong bình là $0,5\,m$ và đang giảm với tốc độ $0,2\,m$/phút thì bán kính của mặt nước đang giảm với tốc độ nào?

10. Những trái dưa được trồng có dạng hình cầu đang tăng trưởng. Tìm tốc độ tăng thể tích của lứa dưa tại thời điểm chu vi đường tròn lớn của chúng đang là $20\,cm$ và đang tăng ở tốc độ $2\,cm$/giờ. Nếu tốc độ tăng thể tích này không đổi và tiêu chuẩn để thu hoạch dưa là thể tích phải đạt cở $100\,dm^3$ thì sau đó bao lâu sẽ thu hoạch được dưa?

11. Một khối nước đá hình lập phương có thể tích giảm theo một tốc độ tỉ lệ với tổng diện tích các mặt của nó. Nếu gọi $V = V(t)$ là thể tích của khối nước tại thời điểm t (tính bằng giờ) thì ta có
$$\begin{cases} V(0) = V_0 \\ V(1) = 3V_0/4. \end{cases}$$
Giả sử trong quá trình tan thì khối nước đá vẫn giữ dạng hình lập phương. Vậy, sau bao lâu thì khối nước đá tan hết?

12. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất (nếu có) của các hàm số sau đây trên các khoảng đã chỉ
    (a) $y = x^4 - 4x$.
    (b) $y = x^3 - 3x + 1$ $(x \in [0, 2])$.
    (c) $y = |x^3 + x|$.
    (d) $y = |x^2 - x - 2|$ $(x \in [-3, 3])$.

13. Một đội bóng chơi trong một sân vận động có sức chứa 15000 chổ ngồi. Với giá vé 12$ thì số lượng người xem trung bình của một trận đấu là 11000 người. Một nghiên cứu chỉ ra rằng cứ mỗi lần giá vé được giảm bớt 1$ thì số lượng người xem trung bình tăng lên 1000 người. Vậy, để thu được lợi nhuận nhiều nhất từ tiền bán vé, thì giá vé nên được chọn là bao nhiêu?

14. Người ta cần làm một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $10\,m^3$ và chiều dài của đáy gấp đôi chiều rộng. Giả sử chi phí vật liệu cho mỗi m^2 đáy là $10\,\$$, trong khi mỗi m^2 các mặt bên là $6\,\$$. Hãy xác định kích thước của thùng để chi phí vật liệu là rẻ nhất.

15. Một xe *bus* có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở được x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\big(3 - (x/40)\big)^2$ \$. Hãy tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được cho mỗi chuyến xe là lớn nhất. Số tiền đó là bao nhiêu?

16. Một đoạn dây AB dài $10\,m$ được cắt làm hai tại một điểm C. Người ta dùng đoạn AC để làm biên một hình vuông và CB để làm biên một tam giác đều. Điểm C phải được chọn ở đâu để tổng diện tích của các hình trên là nhỏ nhất?

17. Một trạm Bưu điện chỉ chấp nhận những gói hàng gởi đi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông, tổng của chiều cao và chu vi đáy không vượt quá $120\,cm$. Hãy cho biết gói hàng như vậy được gởi với thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

18. Một công ty bao bì dự định sản xuất một loại thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh x và cạnh bên là y. Biết rằng chi phí sản xuất cho mỗi thùng như vậy đã được xác định theo công thức
$$C = 5x^2 + 30xy.$$
Hãy xác định x và y sao cho thùng có thể tích mong muốn là $1125\,cm^3$ với chi phí thấp nhất.

19. Một nhà máy muốn sản xuất một loại thùng chứa hình trụ có thể tích $1000\,cm^3$. Hai đáy của hình trụ được làm bằng một loại vật liệu giá $500\,\$/cm^2$, còn vật liệu để làm mặt bên giá $300\,\$/cm^2$. Hãy xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ để chi phí sản xuất thùng chứa nhỏ nhất.

20. Một hình trụ đứng được đặt nội tiếp trong một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy r. Tìm thể tích lớn nhất có thể có của hình trụ.

21. Một người thợ cần gò một cái thùng hình trụ đứng có cả hai đáy với $2,4\,m^2$ vật liệu. Xác định kích thước của hình trụ sao cho thể tích của thùng tạo thành là lớn nhất.

22. Anh A nhận thực hiện hợp đồng hướng dẫn du lịch với chi phí cố định phải trả cho một Công ty B là 6 triệu đồng. Mặt khác, một thỏa thuận riêng được đặt ra giữa A với đoàn du lịch như sau:

    (a) Nếu số khách là 50 (số tối thiểu để tổ chức được chuyến đi) thì mỗi khách phải trả cho A là 200000 đồng.

    (b) Cứ có mỗi khách tăng thêm thì số tiền phải trả nói trên được giảm 2000 đồng (tổng số khách tối đa là 80 người).

    Vậy, tổng số khách của đoàn phải là bao nhiêu để sau khi thực hiện hợp đồng với B thì A nhận được lợi nhuận nhiều nhất? Số lợi nhuận đó là bao nhiêu?

23. Người ta muốn kéo một đường dây điện từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên một hòn đảo theo phương án sau: dùng cáp loại I để kéo từ A đến điểm C trên bờ; sau đó dùng cáp loại II kéo từ C đến B. Cho biết khoảng cách giữa B và bờ là $5\,km$, khoảng cách từ A đến điểm chiếu vuông góc của B trên bờ là $10\,km$. Giá tiền cáp loại I là $3000\,\$/km$ và loại II là $5000\,\$/km$. Hỏi phải chọn C ở đâu để chi phí thấp nhất?

24. Áp dụng các quy tắc L'Hospital để tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2e^x-2-2x-x^2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{3}{x}\right)^x$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{x-1}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

(e) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{1/(x-e)}$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

(g) $\lim\limits_{t\to 0}\big(\cos 2t\big)^{1/t^2}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

25. Cho hàm số $f(x)=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\dfrac{x+a}{1-ax}$ $(a>0)$.

(a) Chứng minh rằng $f'(x)=0$ với $x\neq 1/a$.

(b) Theo kết quả câu trên, tồn tại các hằng số C_1 và C_2 sao cho $f(x)=C_1$ trên $(-\infty,1/a)$ và $f(x)=C_2$ trên $(1/a,+\infty)$. Hãy xác định C_1, C_2 và chứng minh rằng:

(i) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg}\dfrac{x+a}{1-ax}$ khi $x<1/a$.

(ii) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} a=\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+a}{1-ax}$ khi $x>1/a$.

26. Áp dụng kết quả của bài tập 25 để tính $\lim_{n\to\infty} a_n$, với

$$a_n=\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{2}\Big)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{8}\Big)+\cdots+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{2n^2}\Big).$$

27. Chứng minh các công thức gần đúng sau đây và khảo sát sai số

(a) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $|x|<1$.

(b) $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{9}$, $|x|<1$.

28. Tìm xấp xỉ bậc 2 của công thức Taylor đối với hàm $f(x)=\sqrt{x}$ quanh $x=25$ để tính gần đúng giá trị $\sqrt{26}$. Hãy xác định một khoảng nhỏ chứa $\sqrt{26}$.

29. Dùng các khai triển Taylor bậc n của hàm $f(x)$ quanh $x=x_0$ trong các trường hợp:

(a) $n=3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$.

(b) $n=4$, $f(x)=\ln x$, $x_0=e$.

(c) n nguyên dương tổng quát, $f(x)=1/(x+2)$, $x_0=1$.

30. Dùng các khai triển Taylor bậc 2 của hàm $f(x)$ quanh $x=x_0$ để tính gần đúng giá trị A trong các trường hợp:

(a) $f(x)=x^{1/3}$, $x_0=8$, $A=9^{1/3}$.

(b) $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/4$, $A=\sin 47^\circ$.

(c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x_0=1$, $A=\operatorname{arctg}(0,97)$.

31. Kết hợp thích hợp các đa thức Taylor đối với các hàm $\ln(1+x)$ và $\ln(1-x)$ quanh $x=0$ để tìm đa thức Taylor bậc $2n+1$ quanh $x=0$ đối với

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big).$$

32. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

    (a) $y = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$. (b) $y = x^2 e^{-x}$.

    (c) $y = x + \dfrac{1}{x}$. (d) $y = e^{-x}\sin x$ $(x \geq 0)$.

33. Dùng phương pháp Newton cho các bài toán sau:

    (a) Xấp xỉ nghiệm của phương trình $x^4 - 8x^2 - x + 16 = 0$ trong khoảng $(1, 3)$.

    (b) Xấp xỉ nghiệm của phương trình $\cos x = x^2$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm?

34. Hãy dùng phương pháp đệ quy tìm điểm bất động để xấp xỉ nghiệm của các phương trình:

    (a) $1 + (\frac{1}{4})\sin x = x$. (b) $\cos(x/3) = x$.

35. Vẽ đồ thị của phương trình cực $r = 2\sin(3\theta)$.

36. Hãy xác định tọa độ cực (r, θ) của điểm M có tọa độ Descartes là $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ trong điều kiện $0 \leq \theta < 2\pi$ và $r > 0$.

37. Với tọa độ Descartes cho trước $(x, y) \neq (0, 0)$, hãy chỉ ra các công thức xác định duy nhất tọa độ cực (r, θ) tương ứng theo các trường hợp của x, y, thỏa các điều kiện:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

    và $0 \leq \theta < 2\pi$, $r > 0$.

38. Chứng minh rằng phương trình cực

$$r = \frac{A}{1 + e\cos\theta},$$

    với $A \neq 0$ và $0 < e < 1$, có đồ thị là một ellip.

39. Từ công thức Euler hãy suy ra các công thức sau:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

    Áp dụng các công thức trên để chứng minh các đồng nhất thức

    (a) $\cos(3y) = 4\cos^3 y - 3\cos y$. (b) $\sin(3y) = 3\sin y - 4\sin^3 y$.

40. Dùng công thức Moivre để chứng minh các đồng nhất thức của bài tập 39.

Chương **3**

TÍCH PHÂN

3.1. Tích phân bất định

3.1.1. Định nghĩa – Tính chất

Ở chương trước, ta thường liên hệ đến bài toán: cho hàm số f, tìm đạo hàm f'. Trong chương này, ta sẽ xét bài toán ngược lại: cho đạo hàm f', tìm hàm f. Nói chung, đây là bài toán khó giải hơn bài toán trên vì nó không có tính cấu trúc trong các bước giải như việc tính đạo hàm của một hàm. Chẳng hạn, với $f(x) = x^3/3$, ta *tính được* đạo hàm $f'(x) = x^2$ (phép toán *lấy đạo hàm*). Ngược lại, ta nói: hàm số x^2 có một *nguyên hàm* là $x^3/3$ (phép toán *lấy nguyên hàm*). Tổng quát, ta có

Định nghĩa 3.1. Hàm số F được gọi là *nguyên hàm* của hàm số f trên X nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$.

Qua định nghĩa trên, để thấy việc lấy nguyên hàm là khó khăn hơn việc lấy đạo hàm, bạn hãy thử suy nghĩ xem hàm số nào sẽ đặt ở vị trí dấu "?":

$$? \xleftarrow{\text{lấy nguyên hàm}} \operatorname{tg} x \xrightarrow{\text{lấy đạo hàm}} \frac{1}{\cos^2 x}$$

Chú ý.

1. Thông thường, X là một khoảng nào đó. Cụ thể hơn, ta nói F là nguyên hàm của f trên (a, b), nếu:

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b).$$

Trong trường hợp f xác định trên $[a, b]$, ta cũng nói F là nguyên hàm của f trên khoảng này khi:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b) \\ F'_+(a) = f(a),\ F'_-(b) = f(b) \end{cases}$$

Nguyên hàm của f trên $(a, b]$ hay $[a, b)$ cũng được định nghĩa tương tự.

2. Theo định nghĩa trên, $x^3/3 + 2$, $x^3/3 + \pi$ cũng là các nguyên hàm của $f(x) = x^2$ và tổng quát hơn:

$$\frac{x^3}{3} + C \quad (C \text{ là một hằng số})$$

là nguyên hàm của $f(x)$. Vậy, phép toán lấy nguyên hàm của một hàm số đã cho không đưa đến duy nhất một hàm số (như phép toán lấy đạo hàm) và phải chăng tập hợp mọi hàm số có dạng $x^3/3 + C$ bao gồm mọi nguyên hàm của hàm số x^2? Thật vậy, ta có định lý sau:

Định lý 3.1. *Nếu F là một nguyên hàm của f trên (a,b) và G là một nguyên hàm bất kỳ của f trên khoảng này thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in (a,b)$.*

CHỨNG MINH. Thật vậy, do $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ trên (a,b) nên theo kết quả đã xét, $\exists C\colon G(x) - F(x) = C$ hay $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in (a,b)$. ■

Ta cũng có định lý tương tự khi thay (a,b) bởi $[a,b]$.

Định nghĩa 3.2. Gọi T là tập hợp mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên X. Ký hiệu $\int f(x)dx$ được dùng để chỉ các phần tử của T và được gọi là *tích phân bất định* của $f(x)$.

CHÚ Ý. Theo định lý trên, nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ trên I (I là (a,b) hay $[a,b]$) thì $T = \{F(x) + C\colon C \in \mathbb{R}\}$ (trên I). Vậy, ta có thể viết

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ta gọi ký hiệu "$\int$" là "dấu tích phân", hàm $f(x)$ là "hàm dưới dấu tích phân", C là "hằng số tích phân" và x là "biến lấy tích phân". Theo định nghĩa và ví dụ đã xét, ta có

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Theo các công thức tính đạo hàm đã biết, ta cũng có tương ứng các công thức tính tích phân bất định sau đây:

$$\int 0dx = C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int 1dx = x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Ngoài ra, theo các tính chất của đạo hàm, ta dễ dàng chứng minh được

Định lý 3.2. *Cho f, g là các hàm số có nguyên hàm trên một khoảng I. Khi đó, trên I, ta có*

(a) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ *(λ là hằng số).*

(b) $\int \big[f(x) + g(x)\big]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

(c) $\big(\int f(x)dx\big)' = f(x).$

CHÚ Ý. Các đẳng thức về tích phân được hiểu là sai khác một hằng số.

Ví dụ 3.1. Tính $I = \int \cos^2(x/2)dx$.

GIẢI. Do $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$ nên:

$$I = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}\Big(\int 1dx + \int \cos x dx\Big) = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

◁

3.1.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

Trước tiên, ta xét phương pháp *đổi biến số*, là phương pháp dựa trên các quy tắc đơn giản sau.

Quy tắc I: Giả sử F là nguyên hàm của f. Nếu tồn tại hàm số hợp $f[u(x)]$, với $u = u(x)$ là hàm khả vi thì

$$I = \int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C. \tag{3.1}$$

Thật vậy, do $\frac{d}{dx}F[u(x)] = f[u(x)]u'(x)$ nên ta có (3.1). Trong thực hành, quy tắc trên thường được áp dụng như sau. Nếu x là biến độc lập và ta có công thức

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

thì, khi $u = u(x)$ là biến phụ thuộc và du là vi phân của u, ta có

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f[u(x)]du(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[u(x)] + C.$$

Ý nghĩa của quy tắc trên là tích phân $I = \int f[u(x)]u'(x)dx$ được đưa về dạng đơn giản hơn ($\int f(u)du$) và được tính dựa vào một công thức đã biết.

Quy tắc II: Cho $I = \int f(x)dx$. Giả sử $x = x(t)$ là một hàm khả vi và có hàm ngược trên một khoảng Δ và $x'(t) \neq 0$ trên Δ. Nếu $f[x(t)]x'(t)$ có nguyên hàm $G(t)$ thì

$$I = \int f[x(t)]d[x(t)] = \int f[x(t)]x'(t)dt = G(t) + C = G[t(x)] + C, \tag{3.2}$$

trong đó, $t = t(x)$ là hàm ngược của $x = x(t)$. Thật vậy, do

$$\frac{d}{dx}G[t(x)] = \frac{d}{dt}G(t)\frac{d}{dx}t(x) = f[x(t)]\underbrace{x'(t)t'(x)}_{1} = f(x),$$

nên ta có (3.2).

Ý nghĩa của quy tắc là tích phân I được biến đổi thành tích phân theo biến mới t mà ta có thể tính được và kết quả sẽ được thay trở lại biến x dựa vào hàm ngược $t = t(x)$.

Ví dụ 3.2. Tính $I = \displaystyle\int (2x+3)^{1000}dx$.

GIẢI. Theo quy tắc I, ta có

$$I = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{1000}2dx = \frac{1}{2}\int u^{1000}du \quad (u = 2x+3).$$

Từ đó

$$I = \frac{u^{1001}}{2\times 1001} + C = \frac{(2x+3)^{1001}}{2002} + C.$$

◁

Ví dụ 3.3. Với $a > 0$, hãy tính các tích phân sau:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad J = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}, \quad K = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

Giải. Ta có

$$I = \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Vậy, ta có công thức

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Biến đổi tương tự ta có

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

hay ta có công thức sau

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Do

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \Big(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \Big),$$

nên

$$K = \frac{1}{2a} \Big(\int \frac{d(x - a)}{x - a} - \int \frac{d(x + a)}{x + a} \Big) = \frac{1}{2a} \big(\ln |x - a| - \ln |x + a| \big) + C.$$

Vậy,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \Big| \frac{x - a}{x + a} \Big| + C.$$

◁

Ví dụ 3.4. Tính $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ $(a > 0)$.

Giải. Do $a^2 - x^2 \geq 0$ hay $|x| \leq a$, nên ta đặt $x = a \sin t$, với $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Khi đó, ta có $dx = a \cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Với phép biến đổi trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} I &= \int a \cos t \times a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \Big(t + \frac{\sin 2t}{2} \Big) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \cos t \sin t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

◁

Ngoài phương pháp đổi biến số đã xét ở trên, ta cũng có phương pháp *tích phân từng phần*, dựa trên quy tắc được cho bởi định lý sau.

Định lý 3.3. *Cho u, v là các hàm khả vi theo biến x. Khi đó, ta có*

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Chứng minh. Từ công thức
$$(uv)' = u'v + uv',$$
ta có
$$uv' = (uv)' - u'v.$$
Từ đó, bằng cách lấy tích phân hai vế theo biến x, ta có công thức cần phải chứng minh
$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{3.3}$$
trong đó, các vi phân $du = u'dx$, $dv = v'dx$ được xem là các "thừa số" dưới dấu tích phân (điều này là do các quy tắc của phương pháp đổi biến số). ■

Công thức (3.3) chuyển việc tính tích phân $I = \int udv$ sang $J = \int vdu$ và nếu J dễ tính hơn I thì (3.3) được xem là một công thức để tính I.

Ví dụ 3.5. Tính $I = \displaystyle\int x\cos x dx$.

Giải. Để áp dụng (3.3), ta tìm các hàm u, v sao cho $I = \int udv$. Ở đây, ta chọn
$$\begin{cases} u = x \\ v'(x)dx = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x + C \quad (\text{ta chọn } C = 0)$$
Vậy,
$$I = uv - \int vdu = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$
Mặt khác, ta có thể trình bày việc tính I như sau:
$$I = \int x\cos x dx = \int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{(\sin x)}_{v} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} d\underbrace{x}_{u} = x\sin x + \cos x + C.$$
◁

Ví dụ 3.6. Tính $I = \displaystyle\int x\operatorname{arctg} x dx$.

Giải. Ta có thể viết
$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{arctg} x d\Big(\frac{x^2+1}{2}\Big) = \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)\operatorname{arctg} x - \int \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)) d(\operatorname{arctg} x) \\ &= \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1}{2}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\big[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x\big] + C. \end{aligned}$$
◁

Chú ý.

1. Nếu không trình bày trực tiếp như trong ví dụ trên, các tích phân dạng
$$\int P(x)\arcsin(ax)dx, \int P(x)\arccos(ax)dx, \int P(x)\ln(ax)dx, \ldots,$$

trong đó $P(x)$ là đa thức, có thể được tính bằng cách chọn

$$\begin{cases} u = \arcsin(ax) \quad (\arccos(ax), \ln(ax), \ldots) \\ dv(x) = P(x)dx. \end{cases}$$

2. Riêng các tích phân dạng

$$\int P(x)\cos(ax)dx, \int P(x)\sin(ax)dx, \int P(x)e^{ax}dx, \ldots,$$

thì có thể được tính bằng cách chọn

$$\begin{cases} u = P(x) \quad (\text{là đa thức}) \\ dv(x) = \cos(ax)dx \quad (\sin(ax)dx,\ e^{ax}dx,\ \ldots). \end{cases}$$

Ví dụ 3.7. Tính $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Giải. Ta tính I_n bằng công thức tích phân từng phần qua cách viết sau:

$$I_n = \int \underbrace{(x^2+1)^{-n}}_{u} d\underbrace{x}_{u} = \underbrace{(x^2+1)^{-n}}_{u}\underbrace{x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} d[\underbrace{(x^2+1)^{-n}}_{u}].$$

Mặt khác

$$d[(x^2+1)^{-n}] = -2nx(x^2+1)^{-n-1}dx = -\frac{2nxdx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Thay vào trên, ta nhận được

$$I_n = (x^2+1)^{-n}x + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\Big[\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\Big]$$

Vậy

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

hay

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

Rõ ràng $I_1 = \int[1/(x^2+1)]dx = \operatorname{arctg} x + C$ và thay vào công thức trên, ta tính được I_2, rồi lại sử dụng công thức này, ta tính được $I_3, \ldots$. Tóm lại, ta tính được I_n, với mọi $n = 1, 2, \ldots$. ◁

Việc áp dụng có hiệu quả các phương pháp chung đã nêu (kết hợp việc sử dụng các tính chất đơn giản và các công thức tích phân bất định đã biết) đòi hỏi bạn đọc phải có một số kỹ năng tính được các tích phân dạng cơ bản (sẽ được xét dưới đây). Ngoài ra, trong một số bài toán, việc kết hợp nhiều kỹ năng khác nhau cũng được áp dụng.

Ví dụ 3.8. Tính $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

Giải. Nếu xét thêm $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ thì ta có

$$I + J = \int 1dx = x + C_1$$

$$I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C_2.$$

Từ các phương trình trên, dễ dàng suy ra

$$I = \frac{x + \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C \quad \Big(C = \frac{C_1 + C_2}{2}\Big).$$

◁

Tuy nhiên, trên thực tế, ta có thể tính được ngay cả những tích phân dạng phức tạp một cách dễ dàng nhờ sự trợ giúp của các phần mềm máy tính và kết quả nhận được thường là chỉ sau vài giây!!!

3.1.3. Tích phân các hàm hữu tỉ

Với $f(x) = K(x)/Q(x)$ là hàm hữu tỉ, ta luôn có thể viết nó dưới dạng

$$f(x) = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

trong đó $R(x), P(x)$ cũng là các đa thức và $\deg(P) < \deg(Q)$. Do đó, để tính $\int f(x)dx$, ta chỉ cần xét tích phân của hàm hữu tỉ dạng

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (\deg(P) < \deg(Q)) \tag{3.4}$$

Để xây dựng các bước tính tích phân (3.4), ta hãy xét việc tính các tích phân có dạng phân thức đơn giản dưới đây.

Ví dụ 3.9. Tính các tích phân

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^n}, \quad J = \int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx, \quad K = \int \frac{Cx + D}{(x^2 + cx + d)^n},$$

trong đó $n = 1, 2, \dots$ và $\Delta = c^2 - 4d < 0$.

Giải. Đối với tích phân I ta có ngay kết quả sau

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} \dfrac{(x+a)^{1-n}}{1-n} + C_1 & \text{nếu } n \neq 1 \\ \ln|x+a| + C_2 & \text{nếu } n = 1 \end{cases}$$

Để tính J, ta viết hàm dưới dấu tích phân dưới dạng

$$g(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} = \frac{(A/2)(2x + a) + B - (Aa/2)}{x^2 + ax + b} = \frac{(A/2)(2x + a)}{x^2 + ax + b} + \frac{B - (Aa/2)}{[x + (a/2)]^2 + b - (a^2/4)}.$$

Từ đó

$$\int g(x)dx = \alpha \ln|x^2 + ax + b| + \beta \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2},$$

trong đó $\alpha = A/2$, $\beta = B - (Aa/2)$, $t = x + (a/2)$. Tích phân thứ hai ở vế phải được cho bởi các công thức đã xét.

Để tính K, ta viết hàm dưới dấu tích phân dưới dạng

$$h(x) = \frac{Cx + D}{(x^2 + cx + d)^n} = \frac{Cx + D}{\left[(x+\alpha)^2 + \beta^2\right]^n},$$

và với phép đặt $t = (x+\alpha)/\beta$, ta có (bạn đọc tự kiểm tra)

$$\int h(x)dx = \int \frac{Et + F}{(t^2+1)^n}dt = \frac{E}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^n} + F\,I_n,$$

với $I_n = \int (t^2+1)^{-n}dt$ đã được tính theo công thức truy hồi trong ví dụ ở phần trên, còn tích phân thứ nhất ở vế phải hiển nhiên tính được. $\triangleleft$

Mặt khác, từ nhận xét liền sau định lý về sự phân tích một đa thức với hệ số thực trong Chương 2, ta suy ra định lý sau:

Định lý 3.4. *Mọi đa thức $Q(x)$ với $\deg(Q) > 0$ có thể được phân tích thành tích các thừa số có dạng $(x+a)^m$ hay $(x^2+bx+c)^n$, trong đó m, n là các số nguyên không âm và $\Delta = b^2 - 4c < 0$ nếu $n > 0$.*

Ví dụ 3.10. Với $f(x) = x^3 + 1$, ta có thể viết

$$f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad (\Delta_1 = (-1)^2 - 4 = -3 < 0).$$

Với $g(x) = x^4 + 1$, ta có sự phân tích

$$g(x) = (x^2+1)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2),$$

và các tam thức bậc hai tương ứng có các biệt thức $\Delta_2' = (-1)^2 - 2 < 0$, $\Delta_3' = 1^2 - 2 < 0$. $\triangleleft$

Ngoài ra, đối với các hàm hữu tỉ $f(x) = P(x)/Q(x)$ $(\deg(P) < \deg(Q))$, từ sự phân tích đã xét của $Q(x)$ được cho bởi Định lý 3.4, ta cũng chứng minh được rằng $f(x)$ có thể được viết dưới dạng

$$f(x) = \cdots + \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x+a)^m} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2+bx+c)^n} + \cdots$$

Chú ý. Việc xác định các hằng số $\ldots, A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n, \ldots$ được thực hiện bằng cách quy đồng mẫu số ở vế phải (chọn mẫu số chung là $Q(x)$) và sau khi đồng nhất hai tử số ở hai vế ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính với các ẩn là các hằng số trên. Giải hệ này theo các phương pháp đã biết, ta sẽ xác định được các giá trị của các ẩn. Khi đó, việc tính $\int f(x)dx$ được đưa về việc tính các tích phân có dạng đã xét trong Ví dụ 3.9.

Ví dụ 3.11. Hãy phân tích hàm $f(x) = (3x^3 + 2x^2 - 7x - 3)/[(x-1)^2(x^2+2x+2)]$ thành tổng của các phân thức đơn giản. Từ đó, suy ra $\int f(x)dx$.

Giải. Do mẫu số của $f(x)$ đã được phân tích theo định lý 3.4, nên ta đặt

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

Từ đó, ta có đồng nhất thức

$$3x^3 + 2x^2 - 7x - 3 = (A + C)x^3 + (A + B - 2C + D)x^2 + (2B + C - 2D)x + 2B - 2A + D.$$

Bằng cách đồng nhất các hệ số ở hai vế, ta nhận được hệ phương trình tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ A + B - 2C + D = 2 \\ 2B + C - 2D = -7 \\ 2B - 2A + D = -3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta nhận được $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$ và $D = 3$. Từ kết quả phân tích trên, ta có

$$\int f(x)dx = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(x+3)dx}{x^2+2x+2}.$$

Mặt khác

$$\int \frac{(x+3)dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}.$$

Vậy,

$$\int f(x)dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + 2\mathrm{arctg}(x+1) + C.$$

◁

Đối với tích phân $I = \int f(x)dx$, mỗi phép biến đổi dạng $x = \varphi(t)$ hay $t = \psi(x)$ sẽ được gọi là một phép hữu tỉ hóa nếu với phép biến đổi này, $I = \int g(t)dt$ và $g(t)$ là hàm hữu tỉ theo t. Chú ý rằng trong một số trường hợp, ta có thể nhận được kết quả tích phân hàm hữu tỉ dễ dàng hơn mà không cần phải theo các bước đã nêu.

Ví dụ 3.12. Tính các tích phân

$$I = \int \frac{x^3dx}{x^4+3}, \quad J = \int \frac{2x^3dx}{x^8+2}.$$

Giải. Ta có ngay các kết quả nhờ cách viết sau

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+3)}{x^4+3} = \frac{1}{4}\ln(x^4+3) + C \\ J &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\Big) + C. \end{aligned}$$

◁

Trong các mục dưới đây, ta thường viết hàm dưới dấu tích phân dưới dạng $R(u, v)$, nếu nó là hàm hữu tỉ theo biến u (khi xem v là tham số) hoặc là hàm hữu tỉ theo biến v (nếu xem u là tham số). Chẳng hạn

$$R(u, v) = \frac{2uv^2 - 3u + 2v + 1}{uv + u^3 + v^2 + 4}.$$

3.1.4. Tích phân các hàm lượng giác

Ta nhắc lại ở đây một số công thức thường dùng trong phép tính tích phân các hàm lượng giác.

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)] \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad \mathrm{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Xét tích phân dạng

$$\int R(\sin x,\, \cos x)dx. \tag{3.5}$$

Rõ ràng, phép biến đổi $t = \mathrm{tg}(x/2)$ là một phép hữu tỉ hóa cho (3.5) do

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}\frac{dx}{\cos^2(x/2)} = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ví dụ 3.13. Tính các tích phân

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}, \quad J = \int \frac{dx}{3+5\cos x}.$$

GIẢI. Theo phép biến đổi đã chỉ, ta lần lượt nhận được các kết quả sau đây

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$$
$$J = \int \frac{dt}{2^2 - t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)+2}{\mathrm{tg}(x/2)-2}\right| + C.$$

◁

CHÚ Ý.

1. Nếu $R(\sin x,\, \cos x)$ chỉ chứa các lũy thừa chẵn của $\cos x$ thì phép đổi biến $t = \mathrm{tg}\, x$ là một phép hữu tỉ hóa của (3.5) do

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dt}{1+t^2}.$$

2. Trong trường hợp R là hàm lẻ theo $\cos x$ (nghĩa là: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$) hay theo $\sin x$ ($R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$) thì các phép biến đổi tương ứng $t = \sin x$ hay $t = \cos x$ cũng là các phép hữu tỉ hóa.

Ví dụ 3.14. Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

GIẢI. Với phép đặt như trên, ta có

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\, x-\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\, x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

◁

Ví dụ 3.15. Tính các tích phân

$$I = \int \cos^3 x dx, \quad J = \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}.$$

Giải. Với $t = \sin x$, ta có $dt = \cos x dx$ và

$$I = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Với $t = \cos x$, ta có $dt = -\sin x dx$ và

$$J = -\int \frac{(1 - \cos^2 x)(-\sin x)}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - t^2}{t} dt = -\int \Big(\frac{1}{t} - t\Big) dt$$
$$= -\Big(\ln|x| - \frac{t^2}{2}\Big) + C = -\ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

◁

Ngoài ra, trong một số trường hợp, việc áp dụng các công thức lượng giác đã nêu giúp ta nhận được kết quả dễ dàng hơn.

Ví dụ 3.16. Tính các tích phân

$$K = \int \sin 5x \sin 3x dx, \quad L = \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Giải. Từ công thức $\sin 5x \cos 3x = (\cos 2x - \cos 8x)/2$, ta có

$$K = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C.$$

Với phép biến đổi $1/\cos^4 x = (1/\cos^2 x)(1 + \mathrm{tg}^2 x)$, ta có

$$L = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2(x)) d(\mathrm{tg}\, x) = \mathrm{tg}\, x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C.$$

◁

3.1.5. Tích phân một số hàm vô tỉ

Dưới đây, ta chỉ xét các tích phân của một số hàm vô tỉ đơn giản cùng với các phép hữu tỉ hóa thường dùng.

1. Đối với tích phân $I = \int R\Big(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax + b}{cx + d}}\Big) dx$, ta dùng phép biến đổi

$$\sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}} = t.$$

Khi đó, suy ra $x = (dt^n - b)/(a - ct^2)$ và $dx = f(t)dt$, với $f(t)$ là hàm hữu tỉ theo t.

2. Đối với tích phân $I = \int R(x, \sqrt{x^2 + bx + c}) dx$, ta dùng phép biến đổi

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = t - x.$$

Khi đó, ta có $x^2 + bx + c = (t - x)^2$, suy ra $x = (t^2 - c)/(2t + b)$; từ đó, $\sqrt{x^2 + bx + c} = f(t)$ và $dx = g(t)dt$, với $f(t)$, $g(t)$ là các hàm hữu tỉ theo t.

Chú ý. Trong trường hợp này, ta cũng có thể đưa $\sqrt{x^2 + bx + c}$ về dạng $\sqrt{X^2 \pm a^2}$, sau đó có thể "lượng giác hóa" hay "hyperbolic hóa" hàm số (theo X) dưới dấu tích phân bằng cách dùng một trong các phép biến đổi sau đây:

(i) $X = a\,\mathrm{tg}\, t$, $X = a\,\mathrm{cotg}\, t$ hay $X = a \sinh t$ đối với trường hợp $\sqrt{X^2 + a^2}$,

(ii) $X = a \cosh t$ đối với trường hợp $\sqrt{X^2 - a^2}$.

3. Trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân là hàm hữu tỉ, trừ ra các căn thức dạng $(ax + b)^r$, $(ax + b)^s$, $\ldots$ ($r, s, \ldots$ là các số hữu tỉ), ta thường dùng phép biến đổi

$$ax + b = t^m,$$

trong đó, m là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số của $r, s, \ldots$.

Ví dụ 3.17. Tính tích phân $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}}$.

Giải. Với phép đặt $\sqrt[3]{x + 1} = t$, ta có $x = t^3 - 1$ và $dx = 3t^2dt$. Từ đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^2dt}{1 + t} = 3\int \Big(t - 1 + \frac{1}{1 + t}\Big)dt = 3\Big(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t + 1|\Big) + C \\ &= 3\Big(\frac{\sqrt[3]{(x + 1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x + 1} + \ln|\sqrt[3]{x + 1} + 1|\Big) + C. \end{aligned}$$

◁

Ví dụ 3.18. Tính tích phân $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$ $(\alpha \neq 0)$.

Giải. Phép đặt $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$ cho ta

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},\ dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{t^2 + \alpha}{t^2}\Big)dt,\ \sqrt{x^2 + \alpha} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}.$$

Từ đó

$$J = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Vậy, ta đã chứng minh được công thức

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C.$$

◁

Ví dụ 3.19. Tính tích phân $L = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Giải. Các căn thức dưới dấu tích phân được viết lại dưới dạng $x^{1/2}, x^{2/3}, x^{1/4}$ và ta chọn phép biến đổi $x = t^{12}$ $(t \geq 0)$. Khi đó, với $\sqrt{x} = t^6$, $\sqrt[3]{x} = t^8$, $\sqrt[4]{x} = t^3$ ta có

$$L = \int \frac{12t^6t^{11}}{t^8 - t^3}dt = \frac{12}{5}\int \frac{(t^5)^2 5t^4dt}{t^5 - 1} = \frac{12}{5}\int \frac{u^2du}{u - 1} \quad (u = t^5).$$

Từ đó, ta dễ dàng tính được

$$L = \frac{12}{5}\Big(u + \frac{u^2}{2} + \ln|u - 1|\Big) + C = \frac{12}{5}\Big(x^{5/12} + \frac{x^{5/6}}{2} + \ln|x^{1/12} - 1|\Big) + C.$$

◁

Chú ý. Trong một số trường hợp, ta có thể dùng các phép biến đổi thích hợp để nhận được kết quả dễ dàng hơn tùy theo dạng của hàm dưới dấu tích phân.

Ví dụ 3.20. Tính tích phân $I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$.

Giải. Đặt $f(x) = x^2 + 3x + 5$, ta có $f'(x) = 2x + 3$. Ta viết I dưới dạng sau:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{f'(x)-2}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\int \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}} \\
&= 2\sqrt{f(x)} - 2\int \frac{d(x+3/2)}{\sqrt{(x+3/2)^2+11/4}} = 2\sqrt{x^2+3x+5} - 2\ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+5}\right| + C.
\end{aligned}
$$

◁

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Tích phân theo các tổng Darboux

Tập các điểm $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ được gọi là một *phép phân hoạch* của $[a, b]$ nếu

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Các phép phân hoạch như vậy thường được ký hiệu là P, Q, ... Tập mọi phép phân hoạch của $[a, b]$ được ký hiệu là $\mathscr{P}$. Nếu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$ thì ta thường dùng ký hiệu $\|P\|$ để chỉ giá trị $\max\{x_i - x_{i-1} \colon i = 1, \dots, n\}$.

Cho f là một hàm bị chặn trên $[a, b]$ và $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$. Với mỗi $i = 1, \dots, n$, ta đặt:

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ m_i(f) = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Khi đó, ứng với $P \in \mathscr{P}$, các *tổng trên* và *tổng dưới* của f được định nghĩa lần lượt bởi

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}), \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Bổ đề 3.1. *Nếu $P, Q \in \mathscr{P}$ và $P \subset Q$ thì $U(f, Q) \le U(f, P)$ và $L(f, P) \le L(f, Q)$.*

Chứng minh. Giả sử Q có nhiều hơn P một điểm y, chẳng hạn:

$$P = \{x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\},\ Q = \{x_0, \dots, x_k, y, x_{k+1}, \dots, x_n\}.$$

Khi đó, số hạng tương ứng với khoảng $[x_k, x_{k+1}]$ trong $U(f, P)$ là

$$\sup\{f(x) \colon x \in [x_k, x_{k+1}]\}(x_{k+1} - x_k)$$

và số hạng tương ứng với $[x_k, x_{k+1}]$ trong $U(f, Q)$ là

$$
\begin{aligned}
&\sup\{f(x) \colon x \in [x_k, y]\}(y - x_k) + \sup\{f(x) \colon x \in [y, x_{k+1}]\}(x_{k+1} - y) \\
&\qquad \equiv M_1(y - x_k) + M_2(x_{k+1} - y).
\end{aligned}
$$

Mọi số hạng khác trong hai tổng trùng nhau. Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\sup\{f(x)\colon x \in [x_k, x_{k+1}]\} \geq \max\{M_1, M_2\}.$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} M_1(y - x_k) + M_2(x_{k+1} - y) &\leq \sup\{f(x)\colon x \in [x_k, x_{k+1}]\}(y - x_k) \\ &\quad + \sup\{f(x)\colon x \in [x_k, x_{k+1}]\}(x_{k+1} - y) \\ &= \sup\{f(x)\colon x \in [x_k, x_{k+1}]\}(x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Vậy: $U(f, Q) \leq U(f, P)$.

Nếu Q có m điểm nhiều hơn P thì theo kết quả trên, cứ mỗi khi ta thêm vào P một điểm thì tổng trên tương ứng hoặc giữ nguyên hoặc nhỏ hơn. Vì vậy sau m lần thêm vào, ta nhận được Q và tổng trên tương ứng là $U(f, Q)$ thỏa: $U(f, Q) \leq \cdots \leq U(f, P)$. Phần thứ hai của bổ đề được chứng minh tương tự. ∎

Hệ quả 3.1. *Ta luôn có $L(f, P) \leq U(f, Q)$ với mọi $P, Q \in \mathscr{P}$.*

Vậy, tập mọi tổng trên bị chặn dưới (bởi một tổng dưới bất kỳ) và tập mọi tổng dưới bị chặn trên (bởi một tổng trên bất kỳ). Khi đó, ta có thể gọi

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \inf\{U(f, Q)\colon Q \in \mathscr{P}\}, \\ \underline{I} &= \sup\{L(f, P)\colon P \in \mathscr{P}\}. \end{aligned}$$

Dễ thấy: $\underline{I} \leq \overline{I}$. Thật vậy, theo Bổ đề 3.1, với $Q \in \mathscr{P}$, ta có

$$L(f, P) \leq U(f, Q), \quad \forall P \in \mathscr{P}.$$

Khi đó, $U(f, Q)$ là một cận trên của $\{L(f, P)\colon P \in \mathscr{P}\}$ và theo định nghĩa của sup, ta có $\underline{I} \leq U(f, Q)$. Do tính tùy ý của Q và theo định nghĩa của inf, cuối cùng, ta có $\underline{I} \leq \overline{I}$. Vậy, với mọi $P, Q \in \mathscr{P}$, ta có

$$L(f, P) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq U(f, Q).$$

Định nghĩa 3.3. Hàm bị chặn f được gọi là *khả tích* trên $[a, b]$ nếu $\underline{I} = \overline{I} = I$. Khi đó, ta viết $f \in R([a, b])$ và số I được gọi là tích phân của f trên $[a, b]$ hay tích phân của f từ a đến b, ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

3.2.2. Điều kiện khả tích

Định lý 3.5 (Điều kiện khả tích) *Cho f là hàm bị chặn trên $[a, b]$. Khi đó: $f \in R([a, b])$ khi và chỉ khi với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $P \in \mathscr{P}$ sao cho $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.*

Chứng minh. Giả sử $f \in R([a, b])$. Theo định nghĩa sup, inf, tồn tại $P, Q \in \mathscr{P}$, sao cho

$$U(f, Q) < \overline{I} + \varepsilon/2, \quad L(f, P) > \underline{I} - \varepsilon/2.$$

Suy ra

$$U(f, P \cup Q) - L(f, P \cup Q) \leq U(f, Q) - L(f, P) < \overline{I} + \varepsilon/2 - \big(\underline{I} - \varepsilon/2\big) = \varepsilon \quad (\text{do } \underline{I} = \overline{I})$$

Ngược lại, giả sử với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $P \in \mathscr{P}$ thỏa $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. Khi đó,

$$\overline{I} - \underline{I} \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

và do tính tùy ý của ε nên $\overline{I} \leq \underline{I}$, suy ra $\overline{I} = \underline{I}$, vậy $f \in R([a, b])$. ∎

Chú ý. Không phải hàm bị chặn nào cũng khả tích. Chẳng hạn, cho

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó, nếu $[a, b] = [0, 1]$ thì mọi tổng trên bằng 1 và mọi tổng dưới bằng 0. Vì vậy, điều kiện khả tích không thỏa khi ta chọn $\varepsilon = 1/2$.

Dựa vào điều kiện khả tích và tính liên tục đều của một hàm số trên một đoạn, ta chứng minh được các kết quả sau:

(a) Nếu f là hàm đơn điệu trên $[a, b]$ thì $f \in R([a, b])$.

(b) Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$ thì $f \in R([a, b])$.

Chú ý. Ở trên ta đã xây dựng khái niệm tích phân trong điều kiện $a < b$; trong trường hợp $a \geq b$ thì ta quy ước

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Đặc biệt, theo quy ước này ta suy ra

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \text{ hay } \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Mặt khác, nếu $f \in R([a, b])$ thì ta có thể chứng minh được $f \in R([a, x])$, với $x \in [a, b]$.

Ngoài ra, ta cũng chứng minh được các tính chất sau:

Tính chất 3.1. (a) *Nếu $f(x) \equiv C$ trên $[a, b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b - a).$$

(b) *Nếu $f, g \in R([a, b])$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(c) *Nếu $f \in R([a, b])$ và $f \in R([b, c])$ thì $f \in R([a, c])$.*

(d) *Nếu mọi tích phân đã nêu đều có nghĩa thì*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

(e) *Nếu $f \in R([a, b])$ thì $|f| \in R([a, b])$ và*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(f) *Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ và $f \in R([a, b])$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

(g) *Nếu f liên tục trên $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ và tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$.*

(h) *Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Ngoài những tính chất đã được chứng minh ở trên, ta xét thêm một tính chất quan trọng sau đây, được áp dụng cả trong lý thuyết và ứng dụng của phép tính tích phân.

Định lý 3.6. *Nếu f, $g \in R([a,b])$ thì $\sqrt{f^2+g^2} \in R([a,b])$ và ta có*

$$\sqrt{\Big[\int_a^b f(x)dx\Big]^2 + \Big[\int_a^b g(x)dx\Big]^2} \le \int_a^b \sqrt{\big[f(x)\big]^2 + \big[g(x)\big]^2}dx.$$

Định lý 3.7. *Cho $f \in R([a,b])$ và đặt*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Nếu f liên tục tại $x \in (a,b)$ thì $F'(x) = f(x)$ hay

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Định lý 3.8 (Định lý cơ bản của phép tính tích phân) *Cho $f \in R([a,b])$. Giả sử G là nguyên hàm của f trong khoảng (a,b) và G liên tục trên $[a,b]$. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =: \big[G(x)\big]_a^b.$$

Chứng minh. Do $f \in R([a,b])$ nên với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}$ sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Mặt khác, ta có

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = \sum_{i=1}^n \big[G(x_i) - G(x_{i-1})\big] = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

trong đó, ta đã áp dụng định lý Lagrange cho G trên $[x_{i-1}, x_i]$, với $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Do

$$G(b) - G(a),\ \int_a^b f(x)dx \in [L(f,P), U(f,P)]$$

nên

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \big[G(b) - G(a)\big]\Big| \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Do tính tùy ý của ε nên ta suy ra kết quả cần chứng minh. ■

Định lý 3.9. *Giả sử $f \in R([a,b])$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}$ sao cho với mọi cách chọn $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ta có*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})\Big| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Do $f \in R([a,b])$ nên ta có thể chọn được P sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Vì $\int_a^b f(x)dx$ và $\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ đều thuộc khoảng $[L(f,P), U(f,P)]$ với mọi cách chọn $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. ■

Định lý trên cho ta một giải pháp có thể áp dụng để tính gần đúng giá trị tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với độ chính xác tùy ý, trong trường hợp ta không tìm được nguyên hàm của f, miễn f là hàm khả tích, chẳng hạn khi f là hàm số liên tục trên $[a,b]$. Tuy nhiên, trong trường hợp g là một hàm gián đoạn trên $[a,b]$ thì ta cũng có thể tính được $\int_a^b g(x)dx$ nhờ vào kết quả sau.

Định lý 3.10. *Cho $f \in R([a,b])$ và g là hàm số xác định trên $[a,b]$, chỉ sai khác f tại một số hữu hạn điểm trên $[a,b]$. Khi đó, $g \in R([a,b])$ và ta có*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3.2.3. Tích phân theo các tổng Riemann

Định nghĩa về tính khả tích đã xét cũng được gọi là khả tích theo nghĩa Darboux và tích phân được xác định là số duy nhất nằm giữa mọi tổng trên và dưới được gọi là *tích phân Darboux*. Định lý 3.9 cho ta cách xấp xỉ tích phân của một hàm khả tích f theo nghĩa Darboux bởi các tổng dạng $\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ và điều này cho ta một ý tưởng để đi đến một định nghĩa khác của tích phân theo các *tổng Riemann* được xác định như sau.

Định nghĩa 3.4. Cho f là hàm bị chặn, xác định trên $[a,b]$. Xét phép phân hoạch $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$. Với mỗi cách chọn $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, tổng

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

được gọi là một tổng Riemann (của f đối với P). Ta ký hiệu tập mọi tổng Riemann là $\mathscr{R}(f,P)$.

Mệnh đề 3.1. *Cho f là hàm bị chặn trên $[a,b]$ và $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$. Khi đó, $L(f,P) = \inf \mathscr{R}(f,P)$ và $U(f,P) = \sup \mathscr{R}(f,P)$.*

CHỨNG MINH. Với mọi cách chọn $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, ta có

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = L(f,P).$$

Mặt khác, với mỗi $\varepsilon > 0$ và với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ta có $f(c_i) < m_i + \varepsilon/(b-a)$. Từ đó,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < L(f,P) + \varepsilon.$$

Từ những kết quả trên, ta suy ra $L(f,P) = \inf \mathscr{R}(f,P)$. Chứng minh tương tự cho trường hợp $U(f,P) = \sup \mathscr{R}(f,P)$. ∎

Định nghĩa 3.5. Hàm bị chặn f, xác định trên $[a,b]$ được gọi là khả tích Riemann nếu tồn tại số I thỏa: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$ thỏa $\|P\| < \delta$ và với mọi $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, thì

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Khi đó, I được gọi là tích phân của f trên $[a, b]$, ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ và cũng được viết dưới dạng:

$$I = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Vậy, có hai định nghĩa về tích phân Riemann và sự tương đương của chúng được cho bởi định lý sau.

Định lý 3.11. *Hàm bị chận, xác định trên $[a, b]$ là khả tích Riemann theo nghĩa của Định nghĩa 3.5 nếu và chỉ nếu nó khả tích theo nghĩa Darboux. Hơn nữa, các tích phân được xác định theo hai cách là trùng nhau.*

Chứng minh. Giả sử f là hàm bị chận, xác định trên $[a, b]$, với $|f(x)| \le M$ trên $[a, b]$ và f khả tích theo nghĩa Darboux với tích phân của f trên $[a, b]$ là $I = I_* = I^*$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $Q = \{x_0^*, \dots, x_n^*\} \in \mathscr{P}$ sao cho $U(f, Q) - L(f, Q) < \varepsilon/2$. Với $P = \{x_0, \dots, x_\ell\} \in \mathscr{P}$, sao cho $\|P\| < \delta = \varepsilon/(4nM)$, ta chia tổng $U(f, P) - L(f, P)$ thành hai phần:

$$\sum_{i=1}^{\ell}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum^{1}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum^{2}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

lấy trên các khoảng chia như sau

(i) $\sum^{1}$ lấy trên các khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ chứa ít nhất một điểm chia của Q và dễ thấy, mỗi tích $(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ được ước lượng bởi chận trên $2M\|P\|$ (do trên $[x_{i-1}, x_i]$ ta có $-M \le m_i \le f(x) \le M_i \le M$) và ta có nhiều nhất là n ước lượng như vậy.

(ii) $\sum^{2}$ lấy trên các khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ không chứa điểm chia nào của Q nên mỗi khoảng này đều nằm trọn trong một khoảng $[x_{k-1}^*, x_k^*]$ và mỗi tích $(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ như vậy được ước lượng bởi chận trên $(M_k^* - m_k^*)(x_k^* - x_{k-1}^*)$ (M_k^*, m_k^* lần lượt là $\sup f(x)$, $\inf f(x)$ trên $[x_{k-1}^*, x_k^*]$).

Tóm lại, ta nhận được ước lượng

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum^{1} + \sum^{2} \le 2nM\|P\| + U(f, Q) - L(f, Q) < 2nM \times \frac{\varepsilon}{4nM} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Với mọi $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, \ell$, ta có $\sum f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ và I đều thuộc khoảng $[L(f, P), U(f, P)]$ nên suy ra:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{\ell} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \le U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Vậy, f khả tích theo nghĩa của Định nghĩa 3.5 và tích phân theo định nghĩa đó cũng chính là I.

Ngược lại, giả sử f khả tích theo nghĩa của Định nghĩa 3.5, nghĩa là tồn tại số I sao cho ta suy ra kết quả sau: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho ta có thể chọn được $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}$ với $\|P\| < \delta$ thỏa

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon/4, \text{ hay } I - \varepsilon/4 < \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon/4$$

với mọi $c_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$. Theo Mệnh đề 3.1, ta có

$$\begin{aligned} U(f, P) &\le I + \varepsilon/4, \quad L(f, P) \ge I - \varepsilon/4 \text{ hay} \\ -L(f, P) &\le \varepsilon/4 - I. \end{aligned}$$

Suy ra $U(f, P) - L(f, P) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Vậy, f khả tích theo nghĩa Darboux. ∎

Chú ý. Việc xây dựng tích phân Riemann theo các tổng Riemann thường được sử dụng khi thiết lập mô hình áp dụng tích phân xác định để giải quyết các bài toán thực tế. Dưới đây ta sẽ xét riêng một ví dụ áp dụng công cụ đặc sắc này để xây dựng công thức tính độ dài của một cung phẳng. Bài toán được chọn vì chứa nhiều lập luận rất dễ được mở rộng cho trường hợp nhiều chiều và vì chứa những tính chất cơ bản phép tính đạo hàm và tích phân.

Cho đường cong $(C)\colon x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Gọi $\mathscr{P}$ là tập mọi phép phân hoạch của $[a, b]$. Với mỗi $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathscr{P}$ thì $(x(t_i), y(t_i)) \in (C)$, $i = 0, \dots, n$, và ta cũng gọi điểm đầu và điểm cuối của (C) lần lượt là $(x(t_0), y(t_0))$ và $(x(t_n), y(t_n))$. Khi đó, tổng

$$\ell(P) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big[x(t_i) - x(t_{i-1})\big]^2 + \big[y(t_i) - y(t_{i-1})\big]^2}$$

chính là độ dài đường gấp khúc với các đỉnh được chọn trên (C). Từ đó, một cách tự nhiên, ta xác định *độ dài của đường cong* (C) là số

$$\ell = \sup_{P \in \mathscr{P}} \ell(P).$$

Khi đó, (C) được gọi là *khả trường* nếu $\ell < +\infty$ (hay tập $\{\ell(P)\}$ bị chặn trên). Đối với các đường cong khả vi liên tục, ta có thể tính được ℓ nhờ một tích phân xác định. Phần chứng minh của định lý dưới đây sẽ không được trình bày chi tiết, dù điều đó hoàn toàn có thể trong phạm vi kiến thức của giáo trình.

Định lý 3.12. *Cho đường cong $(C)\colon x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, với $x'(t)$ và $y'(t)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó, (C) là khả trường và có độ dài ℓ được cho bởi công thức:*

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}\,dt. \tag{3.6}$$

Chứng minh. Tất nhiên ta sẽ chứng minh vế phải của công thức trên chính là $\sup \ell(P)$. Trước tiên, với mỗi $P = \{t_o, t_1, \dots, t_n\} \in \mathscr{P}$, ta có

$$\begin{aligned}\ell(P) &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big[x(t_i) - x(t_{i-1})\big]^2 + \big[y(t_i) - y(t_{i-1})\big]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)dt\right]^2 + \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} y'(t)dt\right]^2} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}dt = \int_a^b \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}dt.\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra $\{\ell(P)\}$ bị chặn trên và (C) khả trường.

Mặt khác, ta cũng chứng minh được rằng: với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu chọn $P \in \mathscr{P}$ thỏa $\|P\| < \delta$, thì ta có

$$\int_a^b \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}dt < \varepsilon + \ell(P).$$

Từ đó, ta suy ra công thức cần chứng minh trên. ■

Từ các kết quả nhận được trong chứng minh trên, ta có thể viết:

$$\ell = \lim_{\|P\| \to 0} \ell(P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big[x(t_i) - x(t_{i-1})\big]^2 + \big[y(t_i) - y(t_{i-1})\big]^2}.$$

Trong trường hợp (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$, với f' liên tục trên $[a, b]$, công thức (3.6) trở thành

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Ta thường gọi $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ lần lượt là điểm đầu và điểm cuối của (C). Với mỗi $x \in [a, b]$, ta có điểm $M(x, f(x))$ tương ứng trên (C) và độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$ là s được cho bởi

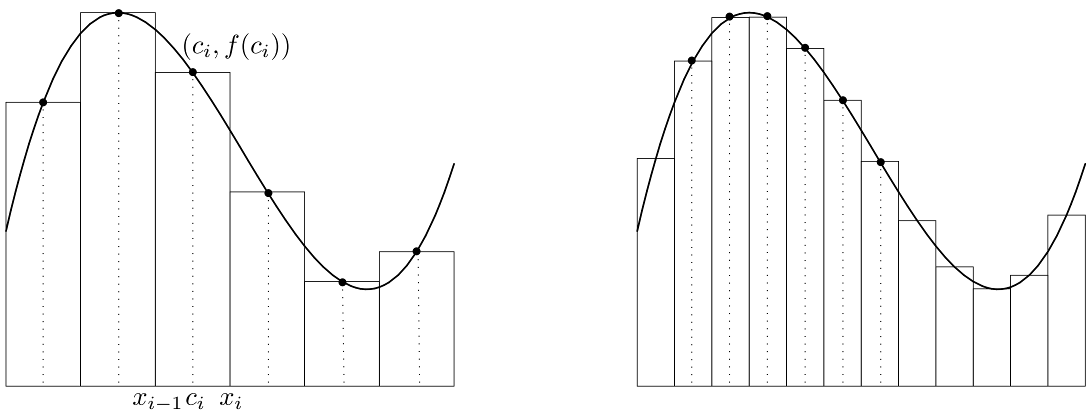
$$s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}dt.$$

Từ đó, theo Định lý 3.7, ta có

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}$$

và kết quả trên cho ta một ý nghĩa quan trọng là: khi x nhận "số gia" dx, thì s có "độ biến thiên" $ds = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx$, chính là vi phân của s tại x. Vậy, khi dx nhỏ tùy ý, ta luôn có thể xem ds chính là độ dài cung tương ứng của (C) trên $[x, x + dx]$. Điều này cũng thường được sử dụng trong những ứng dụng hình học của tích phân xác định, có liên quan đến đường cong phẳng.

3.2.4. Ý nghĩa hình học của tích phân xác định



Hình 3.1: Xấp xỉ $S(D)$ bởi các hình chữ nhật.

Ở đây ta sẽ xét ý nghĩa hình học của tích phân xác định theo cách trình bày dựa vào các tổng Riemann. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Bài toán đặt ra là: xác định "diện tích" $S(D)$ của hình phẳng $D = \{(x, y)\colon a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Để giải bài toán, ta hãy xét một phép phân hoạch $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ của $[a, b]$ và gọi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Khi đó, D được chia tương ứng thành n phần, mà "diện tích" của phần thứ i có thể được xấp xỉ bởi $f(c_i)\Delta x_i$, trong đó, c_i được chọn tùy ý trong $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Như vậy, tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{3.7}$$

có thể dùng để xấp xỉ $S(D)$ và ta có nhận xét rằng tổng (3.7) càng gần với $S(D)$ khi $\|P\|$ càng nhỏ. Như vậy, $S(D)$ nên là một giá trị không phụ thuộc phép phân hoạch P và cách chọn c_i, và càng gần với (3.7) khi $\|P\|$ càng nhỏ. Vậy, một cách tự nhiên, ta có thể xem $S(D)$ chính là số I, được cho trong Định nghĩa 3.5, nghĩa là được cho bởi

$$S(D) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Do f liên tục trên $[a, b]$, suy ra $f \in R([a, b])$ nên I hay $S(D)$ chính là $\int_a^b f(x)dx$.

3.2.5. Giá trị trung bình của một hàm liên tục trên khoảng đóng

Trước tiên, ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 3.21. Bằng cách đo nhiệt độ T trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 6$, ta nhận được kết quả sau:

t	0	1	2	3	4	5	6
T	20	20	22	21	23	24	26

Khi đó, nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian nói trên là

$$T_{tb} = \frac{20 + 20 + 22 + 21 + 23 + 24 + 26}{7} = 22,28.$$

Trong trường hợp ta tính được n giá trị của T trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 6$ là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ theo kết quả

t	$t_1(= 0)$	t_2	t_3	$\cdots$	$t_n(= 6)$
T	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n

Khi đó, nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian này là

$$T_{tb} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Khi $T = T(t)$ là hàm số liên tục trên $[0, 6]$, tất nhiên ta không thể tính được giá trị trung bình của T vì số các giá trị của T trên $[0, 6]$ là vô hạn. Bây giờ, ta hãy chia $[0, 6]$ thành n phần liên tiếp bằng nhau và tính $T(c_k)$, c_k thuộc phần thứ k ($k = 1, 2, \ldots, n$) và xem tổng $(1/n)\sum_{k=1}^{n} T(c_k)$ là *giá trị gần đúng* của "giá trị trung bình của $T = T(t)$ trên $[0, 6]$" khi n được chọn đủ lớn. Vì vậy, một cách tự nhiên, ta đi đến định nghĩa sau: "Giới hạn $A = \lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{k=1}^{n} T(c_k)$ là giá trị trung bình của $T = T(t)$ trên $[0, 6]$". Mặt khác, ta có thể viết

$$A = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T(c_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T(c_k)\Delta t_k,$$

trong đó $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ và $t_k = a + k(b-a)/n$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) là các điểm chia $[a, b]$. Do $T = T(t)$ liên tục nên khả tích trên $[a, b]$ và theo cách chọn phép phân hoạch $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ như trên, ta có $\|P\| = (b-a)/n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy, theo định nghĩa tích phân xác định theo các tổng Riemann, ta có

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b T(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^6 T(t)dt.$$

◁

Một các tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.6. Giá trị trung bình A của hàm số f liên tục trên $[a, b]$ là số được xác định bởi

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

3.2.6. Các phương pháp tính tích phân xác định

Ta thường sử dụng hai phương pháp sau để tính tích phân xác định.

Phương pháp tích phân từng phần: Cho u, v là các hàm có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Ta có

$$uv' = (uv)' - vu' \Rightarrow \int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b vu'dx,$$

hay

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

Ví dụ 3.22. Tính các tích phân

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}, \quad J = \int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}.$$

Giải. Ta có

$$I = -\int_{\pi/4}^{\pi/3} xd(\operatorname{cotg} x) = -[x\operatorname{cotg} x]_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cotg} x dx = -\frac{\pi}{3}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + [\ln(\sin x)]_{\pi/4}^{\pi/3}$$
$$= \ln\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{\pi}{4}.$$

Với $f(x) = (a^2+x^2)^{2/3}$ thì $f'(x) = (4/3)x(a^2+x^2)^{-1/3}$. Từ kết quả này, ta viết J dưới dạng

$$J = \frac{3}{4}\int_0^{a\sqrt{7}} x^2 f'(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^{a\sqrt{7}} x^2 d[f(x)] = \frac{3}{4}\left([x^2 f(x)]_0^{a\sqrt{7}} - \int_0^{a\sqrt{7}} f(x)d(x^2)\right)$$
$$= 21a^3\sqrt[3]{a} - \frac{3}{4}\int_0^{a\sqrt{7}} (a^2+x^2)^{2/3}d(a^2+x^2) = 21a^3\sqrt[3]{a} - \frac{3}{4}\left[\frac{3}{5}(a^2+x^2)\right]_0^{a\sqrt{7}}$$
$$= \frac{141}{20}a^3\sqrt[3]{a}.$$

◁

Phương pháp đổi biến số: Ta hãy xét ví dụ sau: tính $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2}dx$. Nếu đặt $t = x^2$ và xem $dt = 2xdx$ là thừa số dưới dấu tích phân, thì ta có:

$$\begin{cases} x^3e^{x^2}dx = (1/2)te^t dt \\ x = 0 \to t = 0,\ x = 1 \to t = 1. \end{cases}$$

Khi đó, liệu ta có thể tính I bởi tích phân đơn giản hơn là $J = (1/2)\int_0^1 te^t dt$ hay không? Ta hãy xét quy tắc sau đây:

Định lý 3.13. *Cho $I = \int_a^b f(x)dx$, với f là hàm liên tục trên $[a, b]$. Nếu*

(i) *$t = \varphi(x)$ là hàm đơn điệu trên $[a, b]$, có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và*

(ii) *$f(x)dx = g(t)dt$, với g là hàm liên tục trên khoảng đóng có các đầu mút là $\varphi(a)$ và $\varphi(b)$*

thì

$$I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Chứng minh. Thật vậy, nếu F là nguyên hàm của g thì

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = F(t) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

Từ đó,

$$\int_a^b f(x)dx = F[\varphi(x)]\Big|_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

■

Vậy, trong ví dụ trên, do $t = x^2$ hiển nhiên thỏa điều kiện định lý trên $[0, 1]$ nên

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt = \frac{1}{2}\int_0^1 td(e^t) = \frac{1}{2}\Big([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\Big) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3.23. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^9 dx}{(1 + x^5)^3}$.

Giải. Ta viết I dưới dạng

$$I = \frac{1}{5}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^5 5x^4}{(1 + x^5)^3} dx.$$

Dễ thấy hàm số $t = x^5$ thỏa điều kiện áp dụng định lý 3.13 trên $[0, \sqrt[3]{2}]$, với

$$\begin{cases} dt = 5x^4 dx \\ x = 0 \to t = 0,\ x = \sqrt[3]{2} \to t = 2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

nên theo định lý trên ta có

$$I = \frac{1}{5}\int_0^{2\sqrt[3]{4}} \frac{tdt}{(1 + t)^3}$$

Tích phân trên có thể tính được dễ dàng và ta có kết quả

$$I = \frac{1}{10}\Big[1 - \frac{1 + 4\sqrt[3]{4}}{(2\sqrt[3]{4} + 1)^2}\Big].$$

◁

Ngoài quy tắc đã xét, ta cũng có thể chứng minh dễ dàng quy tắc sau:

Định lý 3.14. *Cho $I = \int_a^b f(x)dx$, với f là hàm liên tục trên $[a, b]$. Nếu*

(i) *$x = \varphi(t)$ có đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$, với $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ và*

(ii) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$

thì

$$I = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ 3.24. Tính $I = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$.

Giải. Đặt $x = \varphi(t) = a\sin t$ và dễ thấy $\varphi(t)$ thỏa điều kiện áp dụng định lý trên trên $[0, \pi/2]$. Với $\varphi'(t) = a\cos t$ và $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, ta có

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos t dt}{a(\sin t + \cos t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \left[\frac{t + \ln|\sin t + \cos t|}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

◁

3.3. Ứng dụng của tích phân xác định

Mô hình áp dụng tích phân xác định được thiết lập qua việc giải quyết bài toán với dấu hiệu nhận dạng như sau:

> "Tìm công thức tính giá trị của một đại lượng Q, có liên quan đến đoạn $[a, b]$ sao cho với mỗi phép phân hoạch của $[a, b]$, Q cũng được chia tương ứng thành các phần nhỏ."

Bài toán trên được giải theo các bước sau:

- Xét phép phân hoạch P bất kỳ đoạn $[a, b]$

  $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

  trong đó, theo đặc điểm của bài toán, ta gọi Q_i là phần nhỏ thứ i của Q tương ứng với đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ và đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

- Giả sử, khi $\|P\|$ nhỏ, ta có thể xấp xỉ các Q_i bởi

  $$Q_i \approx f(c_i)\Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

  trong đó f là một hàm liên tục cho trước trên $[a, b]$ và $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Khi đó, Q cũng được xấp xỉ bởi

  $$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \tag{3.8}$$

  Nếu (3.8) càng chính xác khi $\|P\|$ càng nhỏ thì, một cách tự nhiên, ta có thể tính Q bởi

  $$\begin{aligned} Q &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)dx \quad (\text{do } f \text{ khả tích trên } [a, b]). \end{aligned}$$

Trên thực tế, để thuận tiện khi áp dụng, các bước trên có thể được trình bày dưới dạng đơn giản hơn, nhờ nhận xét về hình thức sau:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \xrightarrow{\|P\|\to 0} \int_a^b f(x)dx.$$

Khi $\|P\| \to 0$, số điểm chia phải tăng lên vô hạn và như vậy ta có thể xem Q là "tổng vô hạn" (chính là dấu $\int_a^b$) của các thành phần $dQ = f(x)dx$ (còn được gọi là các *phần tử* của Q). Vậy, hình thức áp dụng mới có thể được trình bày như sau:

- Xét đoạn $[x, x+dx]$ (có độ dài "vô cùng nhỏ" là dx). Nếu thành phần tương ứng của Q trên đoạn này là dQ được tính bởi $f(x)dx$ thì Q chính là tổng vô hạn của các dQ, nghĩa là

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x)dx.$$

Chú ý. Mọi công thức ứng dụng tích phân dưới đây, dù được suy ra từ hình thức "tiết kệm" ở trên, có thể được kiểm chứng tính chính xác một cách dễ dàng, theo cách trình bày chặt chẽ với cách dùng tổng Riemann và ngôn ngữ "ε, δ".

3.3.1. Các bài toán tính công

Bài toán 1. Tính công thực hiện khi dịch chuyển một chất điểm dọc theo đoạn đường từ $x = a$ đến $x = b$, dưới tác dụng của lực $F(x)$ tại mỗi vị trí có hoành độ x của chất điểm (F liên tục trên $[a, b]$).
Giải. Do phần tử công thực hiện trên $[x, x + dx]$ là $dQ = F(x)dx$ (với dx vô cùng nhỏ thì có thể xem F không đổi và bằng $F(x)$). Vậy công Q thực hiện trên $[a, b]$ là "tổng vô hạn" các tích $F(x)dx$ và chính là

$$Q = \int_a^b F(x)dx.$$

Bài toán 2. Tính công Q thực hiện được khi bơm chất lỏng có tỉ trọng ρ vào một hồ chứa có độ cao từ $y = a$ đến $y = b$.
Giải. Trọng lượng một "lớp" mỏng chất lỏng $[y, y + dy]$ là

$$\rho\Delta V = \rho A(y)dy \quad (A(y) \text{ là diện tích mặt chất lỏng tại độ cao } y).$$

Khi đó, công thực hiện khi dịch chuyển "lớp" chất lỏng này từ mặt đất đến độ cao y là $dQ = y\rho\Delta V$. Theo mô hình bài toán trên, Q được cho bởi

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b \rho y A(y)dy.$$

Bài toán 3. Tính công Q thực hiện được khi bơm chất lỏng có tỉ trọng ρ lên một độ cao h từ một hồ chứa đầy chất lỏng có điểm thấp nhất $y = a$, điểm cao nhất $y = b$.
Giải. Tương tự như trên, nhưng công thực hiện khi dịch chuyển "lớp" chất lỏng từ độ cao y lên h là $dQ = \rho(h - y)A(y)dy$ và như vậy, công cần tìm là

$$Q = \int_a^b \rho(h - y)A(y)dy.$$

Chú ý. Trong các công thức trên, ρ là tỉ trọng được tính theo đơn vị N/m^3, với $1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$ là 1 Newton; còn Q được tính theo đơn vị J, với $1\,J = 1\,N \cdot m$ là 1 Joule.

3.3.2. Khối lượng – Moment – Khối tâm

Ta sẽ xét các khái niệm trên lần lượt trên đường thẳng và trong mặt phẳng. Trước tiên, trên trục Ox, xét thanh $[a, b]$ có mật độ khối lượng (đặc trưng cho sự phân bố khối lượng theo đơn vị độ dài) là hàm $\delta(x)$, liên tục trên $[a, b]$. Với $x \in [a, b]$, thanh $[x, x + dx]$ có thể được xem là đồng chất khi dx vô cùng nhỏ (vì δ liên tục), nên có khối lượng dm được tính bởi

$$dm = \delta(x)dx.$$

Vậy, khối lượng m của thanh là "tổng vô hạn" của các phần tử dm:

$$m = \int_a^b dm = \int_a^b \delta(x)dx.$$

Trên trục Ox, *moment tĩnh* quanh điểm x_0 của một chất điểm đặt tại x, có khối lượng m, được xác định là $m(x - x_0)$. Như vậy, khi ta có một hệ gồm n chất điểm đặt tại x_i, có khối lượng tương ứng m_i, $i = 1, \ldots, n$, thì moment (tĩnh) của hệ quanh x_0 được xem là tổng moment của các chất điểm quanh x_0:

$$M_{x=x_0} =: \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_0).$$

Ta gọi *khối tâm* của hệ là điểm $\overline{x}$ trên Ox sao cho $M_{x=\overline{x}} = 0$, nghĩa là

$$0 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Suy ra:

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_{x=0}}{m},$$

trong đó $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ được xem là khối lượng của cả hệ. Theo kết quả này, $M_{x=0} = m\overline{x}$ và như vậy, hệ có thể được xem là "một chất điểm", đặt tại $\overline{x}$, có khối lượng m!

Ta mở rộng kết quả trên để xây dựng công thức xác định khối tâm $\overline{x}$ của thanh $[a, b]$ ở trên. Do mỗi điểm x của thanh được xem là có khối lượng $dm = \delta(x)dx$ nên có moment quanh 0 là

$$dM_{x=0} = xdm = x\delta(x)dx.$$

Vậy, moment $M_{x=0}$ của thanh quanh 0 được xác định là giá trị

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)dx = m\overline{x}.$$

Từ đó, suy ra

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)dx}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)dx}{\int_a^b \delta(x)dx}.$$

Bây giờ, trên mặt phẳng tọa độ, xét một chất điểm đặt tại vị trí (x, y), có khối lượng m. Khi đó, moment của chất điểm quanh các trục $x = x_0$ và $y = y_0$ được xác định lần lượt bởi $m(x - x_0)$

và $m(y-y_0)$. Ta mở rộng tương tự cho việc xác định moment của hệ chất điểm đặt tại (x_i, y_i), có khối lượng m_i, $i = 1, \ldots, n$, quanh các trục $x = x_0$, $y = y_0$ và nhận được các giá trị tương ứng:

$$M_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_0)$$
$$M_{y=y_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i - y_0).$$

Khối tâm của hệ được định nghĩa là điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ thỏa:

$$\begin{cases} M_{x=\overline{x}} = 0 \\ M_{y=\overline{y}} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i y_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n} m_i = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$$
$$\overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m}.$$

Bây giờ, áp dụng kết quả trên, ta hãy xây dựng công thức xác định khối tâm của một bản phẳng chiếm vị trí của hình phẳng D, được xác định bởi:

$$D = \{(x, y) \colon a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\} \quad (f \text{ liên tục trên } [a, b]),$$

và mật độ khối lượng tại điểm $(x, y) \in D$ là $\delta = \delta(x)$, chỉ phụ thuộc vào hoành độ x. Xét một thanh dọc vô cùng nhỏ "tại" x có chiều rộng dx và chiều dài $f(x)$. Thanh này có diện tích $f(x)dx$, khối lượng $dm = \delta(x)f(x)dx$, nên có phần tử moment quanh $x = 0$ là

$$dM_{x=0} = xdm = x\delta(x)f(x)dx.$$

Vậy moment của D quanh $x = 0$ là

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)f(x)dx.$$

Mặt khác, do mật độ khối lượng của thanh chỉ phụ thuộc x nên thanh được xem là "đồng chất" (dọc theo tung độ), nên theo kết quả trên, thanh có khối tâm đặt tại trung điểm, với tung độ $\overline{y}_{dm} = \frac{1}{2}f(x)$. Bởi vậy, moment của thanh quanh $y = 0$ là

$$dM_{y=0} = \overline{y}_{dm}dm = \frac{1}{2}\delta(x)[f(x)]^2dx.$$

Từ các kết quả trên, ta có

$$m = \int_a^b \delta(x)f(x)dx, \quad M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)f(x)dx, \quad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)[f(x)]^2dx.$$

Như vậy, nếu $(\overline{x}, \overline{y})$ là khối tâm của bản phẳng, thì ta có

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)f(x)dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)dx},$$
$$\overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)[f(x)]^2dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)dx}.$$

Khi bản phẳng là đồng chất, nghĩa là $\delta(x)$ là hằng số thì nó bị giản ước trong công thức xác định khối tâm. Trong trường hợp này, khối tâm chỉ còn phụ thuộc vào tính chất hình học của bản phẳng D và được gọi là *trọng tâm* của D. Vậy, trọng tâm (x_c, y_c) còn có thể được xem là khối tâm khi $\delta(x) = 1$:

$$x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{S(D)},$$
$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2dx}{S(D)},$$

trong đó, $S(D) = \int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của D.

Ví dụ 3.25. Xác định trọng tâm của một hình thang có các đỉnh tại các điểm $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$ và $C(0,1)$.

GIẢI. Dễ thấy (BC) có phương trình $y = f(x) = x + 1$ và hình thang có thể được mô tả bởi hình phẳng $D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x+1\}$. Ta có $S(D) = \int_0^1 (x+1)dx = \frac{3}{2}$. Theo công thức trên, trọng tâm (x_c, y_c) của D được cho bởi:

$$x_c = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{S(D)} = \frac{\int_0^1 x(x+1)dx}{3/2} = \frac{\left.\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right|_0^1}{3/2} = \frac{5}{9},$$
$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \big[f(x)\big]^2dx}{S(D)} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)^2dx}{3/2} = \frac{7}{9}.$$

Nếu gọi M là điểm $(1,1)$, ta có thể xem D như là "hệ" gồm hai "chất điểm" là tam giác CMB và hình vuông $OAMC$ có "khối lượng" lần lượt là $m_1 = \frac{1}{2}$ và $m_2 = 1$. Ngoài ra, như đã biết, khối (trọng) tâm của tam giác và hình vuông lần lượt là $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vậy, ta cũng có thể xác định khối (trọng) tâm của hệ bởi:

$$x_c = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{2}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{9},$$
$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{3} + 1\cdot\frac{1}{2}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}.$$

◁

CHÚ Ý. Theo các kết quả trên, ta có thể xác định được trọng tâm của một vật có dạng một đường cong $(C)\colon y = f(x)$, $x \in [a,b]$ và f khả vi liên tục trên $[a,b]$. Nếu biết mật độ khối lượng trên (C) được cho bởi $\delta(x)$, với $x \in [a,b]$, thì bạn đọc hãy thử xây dựng công thức xác định khối tâm của (C), từ đó xác định trọng tâm của (C) trong trường hợp vật đồng chất.

3.3.3. Các ứng dụng trong hình học

Ở đây ta không nhắc lại các trường hợp tính diện tích hình phẳng bằng tích phân xác định mà xét các ứng dụng khác, được chia thành các trường hợp sau:

Thể tích: Giả sử điểm có hoành độ gần nhất và xa nhất của vật lần lượt là $x = a$ và $x = b$. Một "lát" mỏng $[x, x + dx]$ của vật có thể tích $dV = S(x)dx$, với S là hàm liên tục và $S(x)$ là diện tích thiết diện khi cắt vật bằng một mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại x. Khi đó, thể tích của vật được cho bởi:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Bây giờ ta hãy tìm thể tích V của một vật thể nhận được khi quay hình phẳng D quanh Ox, trong đó, D bị giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x)$ (f liên tục trên $[a, b]$). Khi quay một "mảnh" của D trên $[x, x + dx]$ quanh Ox, ta nhận được phần tử thể tích $dV = \pi\big[f(x)\big]^2dx$. Vậy, ta có

$$V = \pi\int_a^b \big[f(x)\big]^2dx.$$

Chú ý rằng, khi quay D quanh Oy, để xác định được vật thể tròn xoay nhận được, ta xét các giả thiết bổ sung sau: $ab \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Khi đó, mảnh của D trên $[x, x + dx]$ quay quanh Oy tạo thành một phần tử thể tích $dV = 2\pi|x|f(x)dx$ và như vậy

$$V = 2\pi\int_a^b |x|f(x)dx.$$

Diện tích mặt tròn xoay: Cho (C): $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$, với f khả vi liên tục trên $[a, b]$. Theo trên, độ dài cung ds của (C) trên $[x, x + dx]$ được cho bởi $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ và khi quay quanh Ox, tạo thành phần tử diện tích $dS = 2\pi|f(x)|ds$. Vậy, diện tích mặt tròn xoay nhận được khi quay (C) quanh Ox là

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|ds = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Chú ý. Ta đã xây dựng các công thức cho trường hợp tổng quát. Hãy áp dụng chúng cho những trường hợp cụ thể để nhận lại được các công thức tính: thể tích và diện tích xung quanh của hình nón, nón cụt và hình chõm cầu.

3.3.4. Định lý Pappus

Định lý Pappus dưới đây liên quan đến thể tích vật thể tròn xoay và diện tích mặt tròn xoay theo các điều kiện tương ứng như sau:

(a) Nếu miền phẳng D nằm ở một bên đường thẳng L (trong mặt phẳng chứa D) và nếu D được quay quanh L để sinh ra một vật thể tròn xoay thì thể tích V của vật thể đó bằng tích của diện tích A của D với độ dài đoạn đường đi của trọng tâm của D trong khi quay, nghĩa là

$$V = 2\pi\overline{r}A,$$

trong đó, $\overline{r}$ là khoảng cách từ trọng tâm của D đến L.

(b) Nếu đường cong phẳng (C) nằm ở một bên đường thẳng L (trong mặt phẳng chứa (C)), được quay quanh L để sinh ra một mặt tròn xoay thì diện tích S của mặt đó bằng độ dài s của (C) nhân với độ dài đoạn đường đi của trọng tâm của (C) trong khi quay, nghĩa là

$$S = 2\pi\overline{r}s,$$

trong đó, $\overline{r}$ là khoảng cách từ trọng tâm của (C) đến L.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh cho trường hợp (a), còn trường hợp (b) thì được chứng minh tương tự. Trước hết, xem L là trục y và giả sử D nằm giữa các đường $x = a$ và $x = b$, với $0 \leq a < b$. Khi đó, nếu $(\overline{x}, \overline{y})$ là trọng tâm của D thì $\overline{r} = \overline{x}$. Giả sử dA là diện tích của một dải dọc theo phương L tại x và có "độ rộng" dx. Diện tích này khi quay quanh L sẽ sinh ra một vỏ hình trụ có thể tích $dV = 2\pi x dA$ và như vậy thể tích V được tính bởi

$$V = 2\pi \int_a^b x dA = 2\pi M_{x=0} = 2\pi\overline{x}A = 2\pi\overline{r}A.$$

■

3.3.5. Định luật Torricelli

Giả sử một hồ nước có một lỗ thủng với diện tích a ở đáy hồ và nước đang chảy ra ngoài từ lỗ thủng tại thời điểm t (tính bằng giây). Gọi $y = y(t)$ là độ sâu (tính bằng m) của nước trong hồ và gọi $V(t)$ là thể tích nước tại thời điểm đó. Khi đó, vận tốc của luồng nước thoát ra từ lỗ thủng, trong những điều kiện lý tưởng, thì đúng bằng:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (\text{lấy } g \approx 9,8\, m/s^2),$$

chính là vận tốc mà một giọt nước có thể đạt tới khi rơi tự do từ mặt nước đến lỗ thủng. Kết quả trên chính là Định luật Torricelli.

Trong khoảng thời gian "rất nhỏ" là dt, thể tích nước chảy ra theo lỗ thủng có thể được xem là thể tích của một hình trụ có đáy a, chiều cao vdt. Từ đó, độ biến thiên dV của thể tích nước trong hồ được cho bởi

$$dV = -av\,dt = -a\sqrt{2gy}\,dt. \tag{3.9}$$

Mặt khác, nếu gọi $A(y)$ là diện tích thiết diện ngang của hồ tại độ cao y ở phía trên lỗ thủng thì hiển nhiên:

$$dV = A(y)dy. \tag{3.10}$$

So sánh (3.9) và (3.10), ta đi đến phương trình

$$A(y)dy = -a\sqrt{2gy}\,dt. \tag{3.11}$$

Trong một số ứng dụng thì (3.11) là một dạng rất thuận tiện của Định luật Torricelli. Trong trường hợp chưa biết a, thì (3.9) thường được dùng dưới dạng:

$$A(y)dy = -c\sqrt{y}\,dt,$$

trong đó, $c = a\sqrt{2g}$.

Trong mọi trường hợp, để xác định các đại lượng cần tính, ta cần đưa các phương trình (3.9) hoặc (3.11) về dạng $B(y)dy = Cdt$ (C là hằng số), rồi tính tích phân hai vế. Tùy điều kiện của bài toán mà ta có thể dùng tích phân xác định hay bất định.

Ví dụ 3.26. Một chậu nước dạng bán cầu có bán kính đáy phía trên là $4\,m$ và chứa đầy nước tại $t = 0$. Tại thời điểm đó, một lỗ tròn đường kính $0,1\,m$ được mở ra ở đáy hồ. Sau bao lâu thì nước trong chậu sẽ chảy ra hết? Lấy $g = 9,8\,m/s^2$.

GIẢI. Ở độ cao $y = y(t)$ thì dễ thấy $A(y) = \pi(8y - y^2)$ nên theo công thức (3.11), ta suy ra

$$\begin{aligned}\pi(8y - y^2)dy &= -\pi(0,05)^2\sqrt{2 \times 9,8}\,\sqrt{y}\,dt\\(8\sqrt{y} - y\sqrt{y})dy &= -(0,05)^2\sqrt{19,6}\,dt.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Bằng cách lấy tích phân bất định hai vế của (3.12), ta nhận được

$$8 \times \frac{2}{3}y\sqrt{y} - \frac{2}{5}y^2\sqrt{y} = -(0,5)^2\sqrt{19,6}\,t + C.$$

Theo giả thiết, $y(0) = 4$ nên $C = 448/15$. Gọi T là thời điểm mà nước vừa chảy ra hết. Khi đó, ta có $y(T) = 0$ hay

$$T = \frac{C}{(0,05)^2\sqrt{19,6}} = \frac{448}{15 \times 0,0025 \times \sqrt{19,6}} \approx 2698,477 \text{ giây}.$$

Ta cũng có thể nhận được kết quả trên bằng cách lấy tích phân xác định trên $[0, T]$, với $y = y(t)$ và $y(0) = 4$, $y(T) = 0$. $\lhd$

3.4. Tích phân suy rộng

Ta đã xây dựng khái niệm tích phân đối với hàm bị chặn, trên một đoạn hữu hạn (có các cận hữu hạn). Sự mở rộng sẽ theo hai hướng:

(i) Tích phân với cận vô tận,

(ii) Tích phân với hàm không bị chặn.

Các tích phân đối với các trường hợp mở rộng trên được gọi chung là *tích phân suy rộng*. Các hàm số đặc biệt (Gamma, Beta, ...) và các phép biến đổi tích phân (Laplace, Fourier, ...) đều được cho thông qua các tích phân suy rộng và chúng đóng vai trò là những công cụ mạnh mẽ trong việc giải các *phương trình vi phân*, chính là những mô hình phổ biến nhất trong Toán ứng dụng.

3.4.1. Tích phân suy rộng với cận vô tận

Định nghĩa 3.7. Cho $f \in R([a, b])$ với mọi $b > a$. Ta định nghĩa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

và gọi là tích phân suy rộng loại I. Nếu giới hạn là hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là *hội tụ*; ngược lại, ta nói tích phân là *phân kỳ*.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng định nghĩa được cho trường hợp tích phân suy rộng được ký hiệu là $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Ví dụ 3.27. Tính tích phân

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\, dx.$$

GIẢI. Từ đồng nhất thức

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{2}{5}\frac{1}{x-1} + \left(\frac{-1}{5}\right)\frac{2x}{x^2+4} + \frac{3}{5}\frac{1}{x^2+4},$$

ta dễ dàng suy ra

$$\begin{aligned} F(b) = \int_2^b \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\, dx &= \frac{2}{5}\ln|b-1| - \frac{1}{5}\ln(b^2+4) + \frac{3}{10}\text{arctg}\frac{b}{2} + \frac{1}{5}\ln 8 - \frac{3}{10}\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{(b-1)^2}{b^2+4}\right) + \frac{1}{5}\ln 8 + \frac{3}{10}\text{arctg}\frac{b}{2} - \frac{3\pi}{40}. \end{aligned}$$

Vậy,

$$I = \lim_{b\to+\infty} F(b) = \frac{1}{5}\ln 8 + \frac{3\pi}{40}.$$

$\triangleleft$

Ví dụ 3.28. Giả sử rằng một đột biến có lợi phát sinh trong một quần thể. Lúc đầu, *gene* mang đột biến này xuất hiện với tần số thấp. Khi *gene* mang đột biến lan ra cả quần thể thì *giá trị thích nghi trung bình* của quần thể tăng lên. Ta gọi $f_{tb}(t)$ là giá trị thích nghi trung bình của quần thể tại thời điểm t, $f_{tb}(0)$ là giá trị thích nghi trung bình của quần thể tại thời điểm ban đầu, khi sự đột biến xuất hiện, và K là giá trị thích nghi trung bình sau cùng sau khi sự đột biến lan ra cả quần thể. Năm 1957, HALDANE đề nghị đo *chi phí tiến hóa* (nay được gọi là *chi phí thay thế gene*) bằng sự sai lệch lũy tích giữa các giá trị thích nghi trung bình hiện hành và sau cùng, nghĩa là số

$$\int_0^{+\infty} \big(K - f_{tb}(t)\big)dt.$$

$\triangleleft$

Ta cũng dễ dàng kiểm chứng được kết quả sau: với $a > 0$, tích phân

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Định nghĩa 3.8. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ đều hội tụ thì ta định nghĩa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

và ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ. Trong những trường hợp còn lại, tích phân được gọi là phân kỳ.

Chú ý. Bây giờ ta lại xét b là một số tùy ý. Khi đó, do

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

nên $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, nếu hội tụ, sẽ không phụ thuộc việc chọn số a.

Bây giờ, để thiết lập điều kiện hội tụ cho các tích phân suy rộng, ta nhắc lại ở đây tiêu chuẩn tồn tại giới hạn khi $x \to +\infty$ đối với $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$:

$$f(x) \text{ có giới hạn (hữu hạn) khi } x \to +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\colon x, x' > A \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Ta có thể chứng minh tiêu chuẩn trên dựa vào tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của dãy số và mối quan hệ giữa giới hạn dãy số và giới hạn hàm số. Theo tiêu chuẩn này, ta suy ra tiêu chuẩn hội tụ tương ứng của tích phân suy rộng loại I sau đây.

Định lý 3.15 (Tiêu chuẩn hội tụ) *Giả sử $f \in R([a, b])$ với mọi $b > a$. Khi đó, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ (A > a)\colon A_1,\ A_2 > A \Rightarrow \left| \int_a^{A_1} f(x)dx - \int_a^{A_2} f(x)dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Từ định lý trên, dễ dàng suy ra rằng: nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Khi $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*. Ngoài ra, một số điều kiện hội tụ đối với các hàm số không âm cũng được suy ra, đặc biệt, khi so sánh với hàm số $1/x^\alpha$.

Định lý 3.16. *Giả sử $f(x) \ge 0$ khi $a \le x < +\infty$ và $f \in R([a, b])$ với mọi $b > a$. Khi đó,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \exists M\colon \int_a^{A} f(x)dx \le M,\ \forall A > a.$$

Định lý 3.17. *Giả sử $0 \le f(x) \le g(x)$ khi $a \le x < +\infty$ và $f, g \in R([a, b])$ với mọi $b > a$. Khi đó, nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.*

Định lý 3.18. *Giả sử $0 \le f(x)$ khi $a \le x < +\infty$, $f \in R([a, b])$ với mọi $b > a$ và ta có*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \ell.$$

Khi đó, ta có các kết quả sau:

(a) *Nếu $0 < \ell < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} \big(1/x^\alpha\big)dx$ có cùng tính chất hội tụ hay phân kỳ.*

(b) *Nếu $\ell = 0$ và $\alpha > 1$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

(c) *Nếu $\ell = +\infty$ và $\alpha \le 1$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.*

Đối với hàm số có dấu bất kỳ, ta chứng minh được một số tiêu chuẩn hội tụ cho hàm số có dạng tích.

Định lý 3.19. *Giả sử $|f| \in R([a,b])$ với mọi $b > a$. Khi đó, nếu*

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối,*

(ii) $g \in R([a,b])$ *với mọi $b > a$ và bị chặn trên $[a, +\infty)$*

thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Định lý 3.20 (Abel) *Giả sử $f \in R([a,b])$ với mọi $b > a$. Khi đó, nếu*

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ,*

(ii) $g(x)$ *đơn điệu và bị chặn trên $[a, +\infty)$*

thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Định lý 3.21 (Dirichlet) *Giả sử $f \in R([a,b])$ với mọi $b > a$. Khi đó, nếu*

(i)
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le K, \forall b > a,$$

(ii) $g(x)$ *giảm trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$*

thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Theo định lý trên, dễ thấy tích phân
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$$
hội tụ khi $a > 0$ và $\lambda > 0$.

Ví dụ 3.29. Chứng minh rằng tích phân $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ.

Giải. Hiển nhiên tồn tại $b \ge 1$ ($b > a$) sao cho
$$e^{-x^2} \le e^{-x}, \forall x \ge b.$$
Vì $\int_b^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ nên $\int_b^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ hay $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ. ◁

Ví dụ 3.30. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của các tích phân sau:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x^3+4}}\, dx$.

Giải.

(a) Đặt $f(x) = 1/\sqrt{1+x^4}$. Do
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} = 1,$$
nên theo định lý đã nêu (trường hợp $0 < \ell = 2 < +\infty$) và sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty}(1/x^2)dx$, ta kết luận tích phân đã cho là hội tụ.

(b) Đặt $f(x) = (1+\sqrt{x})/\sqrt{2x^3+4}$. Do
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{2x^3+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
và theo sự phân kỳ của tích phân $\int_1^{+\infty}(1/x)dx$, ta suy ra $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hay tích phân đã cho là phân kỳ.

◁

3.4.2. Tích phân suy rộng với hàm không bị chặn

Định nghĩa 3.9. Cho f là hàm xác định trong $(a, \beta]$ và $f \in R([\alpha, \beta])$ với mọi $\alpha \in (a, \beta)$. Nếu $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ thì điểm a được gọi là điểm *kỳ dị cô lập* của f trên $[a, \beta]$. Ta định nghĩa:

$$\int_a^\beta f(x)dx \overset{\text{dn}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^\beta f(x)dx.$$

và gọi là tích phân suy rộng loại II.

Nếu giới hạn là hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^\beta f(x)dx$ là hội tụ; ngược lại, ta nói tích phân là phân kỳ. Hoàn toàn tương tự, ta cũng định nghĩa cho trường hợp tích phân suy rộng được ký hiệu là $\int_\alpha^b f(x)dx$, trong đó b là điểm kỳ dị cô lập của f trên $[\alpha, b]$.

Định nghĩa 3.10. Giả sử a, b lần lượt là các điểm kỳ dị cô lập của f trên $[a, \alpha]$ và $[\alpha, b]$, với $\alpha \in (a, b)$. Nếu $\int_a^\alpha f(x)dx$, $\int_\alpha^b f(x)dx$ đều hội tụ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Chú ý. Bây giờ ta lại xét β là một số tùy ý của (a, b). Khi đó, do

$$\begin{aligned}\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx &= \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx \\ &= \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

nên $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc việc chọn số $\alpha \in (a, b)$.

Với $a < b$, ta dễ dàng kiểm chứng được kết quả sau: tích phân

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$$

hội tụ khi $0 < \alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

Định lý 3.22. *Giả sử $f(x) \geq 0$ khi $\alpha \leq x < b$ và $f \in R([\alpha, \beta])$ với mọi $\beta \in (\alpha, b)$. Khi đó,*

$$\int_\alpha^b f(x)dx \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M, \forall \beta \in (\alpha, b)$$

Định lý 3.23 (Tiêu chuẩn hội tụ) *Giả sử b là điểm kỳ dị cô lập của f trên $[\alpha, b]$. Khi đó, $\int_\alpha^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \colon 0 < \eta_1 < \eta_2 < \delta \Rightarrow \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Chú ý.

1. Theo tiêu chuẩn trên, nếu $\int_\alpha^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_\alpha^b f(x)dx$ hội tụ. Khi $\int_\alpha^b |f(x)|dx$ hội tụ, ta nói $\int_\alpha^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

2. Ta cũng có tiêu chuẩn tương tự và nhận xét trên khi a là điểm kỳ dị cô lập của f trên $[a, \beta]$.

3. Ta cũng có các điều kiện hội tụ tương ứng của tích phân suy rộng loại II, như đối với tích phân suy rộng loại I.

4. Ta cũng có thể chuyển một tích phân suy rộng loại II sang tích phân suy rộng loại I. Chẳng hạn, khi b là điểm kỳ dị cô lập của f trên $[\alpha, b]$, ta đổi biến $x = b - (1/y)$. Khi đó, dễ thấy:

$$\int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_{1/(b-\alpha)}^{1/\varepsilon} g(y)dy,$$

trong đó, $g(y) = f\big[b - (1/y)\big](1/y^2)$. Vậy:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1/(b-\alpha)}^{1/\varepsilon} g(y)dy = \int_{1/(b-\alpha)}^{+\infty} g(y)dy.$$

Trong trường hợp a là điểm kỳ dị cô lập của f trên $[a, \beta]$ và các tích phân $\int_a^\beta f(x)dx$, $\int_\beta^{+\infty} f(x)dx$ đều hội tụ, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\beta} f(x)dx + \int_\beta^{+\infty} f(x)dx$$

và ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ. Trong các trường hợp còn lại, tích phân được gọi là phân kỳ.

Ví dụ 3.31. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx.$$

GIẢI. Ta có

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^{2}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{3}\big(1-\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\big) + 2\big(1-\sqrt{\varepsilon}\big)\right] = \frac{8}{3}.$$

◁

Ví dụ 3.32. Xét sự hội tụ của tích phân $J = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

GIẢI. Ta viết J dưới dạng

$$J = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx. \tag{3.13}$$

Do

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{1/x^{1-p}} = e^{-x} = 1$$

nên tích phân thứ nhất ở vế phải của (3.13) hội tụ khi và chỉ khi $1 - p < 1$ hay $p > 0$. Mặt khác, nếu gọi $f(x) = e^{-x}x^{p-1}$ thì

$$f(x) = \frac{x^{2p}}{e^x}\frac{1}{x^{1+p}}.$$

Bây giờ, với điều kiện $p > 0$, do

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1/x^{1+p}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2p}}{e^x} = 0$$

và $1 + p > 1$ nên tích phân thứ hai ở vế phải của (3.13) hội tụ. Vậy, tích phân đã cho hội tụ khi và chỉ khi $p > 0$. ◁

3.5. Bài tập

1. Tính các tích phân bất định sau:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$. (b) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}dx$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$. (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{z^5\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$. (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{4/5}}}$.

   (g) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$. (h) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$.

2. Tính các tích phân bất định sau:

   (a) $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x^4+2x^3}$. (b) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x}\right)dx$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{dy}{y(2y^3+1)^2}$. (d) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x - \sin x}$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cotg}^3 x}$. (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$.

   (g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$. (h) $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx$.

3. Tính các tích phân bất định sau:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$. (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)}$ $(m\in\mathbb{N})$.

4. Tính các tích phân xác định sau:

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x\cos x}$. (b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{1-\sin u}\,du$.

   (c) $\displaystyle\int_{5/4}^{5/3} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$.

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$. (f) $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\,dx$.

   (g) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta}$. (h) $\displaystyle\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+1}\,dx$.

5. Tính các tích phân xác định sau:

   (a) $\displaystyle\int_0^{3/5} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (b) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{15\,du}{(e^u-e^{-u})^2}$.

   (c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^3-x}dx$. (d) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^5 2x\,dx$. (f) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^3dx$.

   (g) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{dx}{x^2\sqrt{7+x^2}}$. (h) $\displaystyle\int_4^{10} \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}dx$.

6. Tính các giới hạn dãy sau đây:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\Big(1+\frac{2i}{n}\Big)$.

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mathrm{arctg}\Big(\frac{2i-1}{2n}\Big)$.

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$.

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

7. Cho dãy $\{a_n\}$, với
$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
Bằng cách so sánh các số hạng của tổng ở vế phải với diện tích tương ứng của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=1/x$ ở phía trên và bởi trục Ox ở phía dưới, hãy chứng minh bất đẳng thức
$$\ln n+\frac{1}{n}<a_n<\ln n+1,\quad n\geq 1.$$
Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty}a_n$.

8. Theo gợi ý tương tự như trong bài tập trên hãy chứng minh bất đẳng thức sau đối với mọi số tự nhiên n:
$$e\Big(\frac{n}{e}\Big)^n<n!<en\Big(\frac{n}{e}\Big)^n.$$

9. Một vật cao $2\,m$. Thiết diện của vật tại độ cao x ở phía trên đáy có diện tích $2x\,m^2$. Tìm thể tích của vật.

10. Một vật đặt dọc theo trục x từ $x=1$ đến $x=4$. Thiết diện tại x là một tam giác đều có cạnh $\sqrt{x}$. Tìm thể tích của vật.

11. Một vật có đáy là hình tròn, bán kính R. Mọi mặt cắt vuông góc với đường kính của đáy đều có thiết diện là hình vuông. Tìm thể tích của vật.

12. Đáy trên của một hình trụ (bán kính là r) là một mặt phẳng nghiêng. Nếu điểm thấp nhất và cao nhất của đáy lần lượt có độ cao là a và b thì hãy tìm thể tích của vật.

13. Một vật có đáy là ellip với trục lớn là 10 và trục nhỏ là 8. Hãy tìm thể tích của vật nếu mặt phẳng vuông góc với trục lớn cắt vật theo thiết diện là tam giác cân có chiều cao là 6.

14. Một vật có đáy là hình tròn $x^2+y^2\leq 16x$ và các mặt phẳng vuông góc với trục Ox cắt nó theo một thiết diện là hình chữ nhật mà chiều dài gấp đôi khoảng cách từ gốc đến mặt phẳng thiết diện. Tìm thể tích vật thể.

15. Giả sử một cái hồ hình trụ đứng có bán kính đáy là $5\,m$, chiều cao $10\,m$ được đặt trên mặt đất. Hãy tìm công thực hiện được khi bơm nước trong hồ lên một chỗ chứa có độ cao $5\,m$ so với phía trên hồ.

16. Một cái hồ mà điểm thấp nhất là $10\,m$ ở phía trên mặt đất, có dạng một cái tách, nhận được bằng cách quay parabol $x^2=5y$, $-5\leq x\leq 5$, quanh Oy. Hãy tìm công bơm vào đầy hồ từ mặt đất một thứ dầu có tỉ khối là $50\,g/m^3$.

17. Một bồn chứa hình trụ có bán kính đáy là $3\,m$, chiều dài $10\,m$, được đặt trên mặt đất sao cho trục song song với đường nằm ngang. Nếu lúc đầu bồn chứa đầy một loại chất lỏng có tỉ khối là $40\,kg/m^3$ thì hãy tính công thực hiện được khi bơm toàn bộ chất lỏng trong bồn đến một nơi cách phía trên bồn $5\,m$.

18. Tìm $y(x)$ là hàm khả vi thỏa điều kiện được cho dưới đây:

    (a) $y(x) = 2 + \int_0^x \dfrac{tdt}{y(t)}$. (b) $y(x) = 3 + \int_1^x ty(t)dt$.

    (c) $y(x) = 2 + \int_0^x e^{-y(t)}dt$.

19. Tính $F'(x)$ nếu

    (a) $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}dt$. (b) $F(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}dt$.

    (c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}dt$.

20. Chứng minh các công thức sau:

    (a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)]g'(x)$.

    (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x)$.

21. Giả sử rằng số cá $P(t)$ trong một cái hồ bị một căn bệnh tấn công tại thời điểm $t = 0$, gây nên một kết quả là
$$\frac{dP}{dt} = -k\sqrt{P} \quad (k > 0).$$
    Nếu lúc đầu có 900 con cá trong hồ và còn lại 441 sau 6 tuần thì sau bao lâu số cá trong hồ chết hết?

22. Hãy kiểm chứng rằng nghiệm của bài toán
$$\frac{dP}{dt} = -k\sqrt{P}, \quad P(0) = P_0,$$
    được cho bởi công thức $P(t) = (kt/2 + \sqrt{P_0})^2$.

23. Giả sử rằng số dân của thành phố Cần thơ thỏa mãn bài toán trên. Nếu $P = 100000$ người trong năm 1970 và $P = 121000$ người trong năm 1980 thì P là bao nhiêu trong năm 2000? Khi nào thì P là 200000?

24. Ta hãy xét một mô hình sinh sản một loại thỏ mà số lượng $P(t)$ của chúng được cho bởi:
$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0,$$
    trong đó, k là hằng số dương. Hãy chứng tỏ nghiệm $P(t)$ của phương trình được cho bởi công thức
$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0 t}.$$

25. Một chậu nước có dạng bán cầu có bán kính đáy phía trên là $4\,m$ và chứa đầy nước tại $t = 0$. Tại thời điểm đó, một lỗ tròn đường kính $1\,cm$ được mở ra ở đáy hồ. Sau bao lâu thì nước trong hồ sẽ chảy ra hết? Lấy $g = 9,8\,m/s^2$.

26. Một cái hồ dạng hình trụ đứng lúc đầu chứa nước ở độ sâu $9\,m$. Một cái nút ở đáy hồ được tháo ra tại thời điểm $t = 0$ (t được tính bằng giờ). Sau một giờ, độ sâu hạ xuống còn $4\,m$. Sau bao lâu thì hồ cạn nước?

27. Một hồ nước có dạng hình nón đứng, có chiều cao $16\,m$ và bán kính đáy là $5\,m$. Tại thời điểm $t = 0$, một cái nút ở đáy được lấy ra và nước trong hồ bắt đầu chảy ra ngoài khi hồ đang đầy. Sau 1 giờ thì nước trong hồ có độ sâu $9\,m$. Khi nào thì hồ cạn nước?

28. Tính các tích phân suy rộng:
    (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x}$.
    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$.
    (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.
    (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.
    (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)^2}$.

29. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của các tích phân suy rộng:
    (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$.
    (b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.
    (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$.
    (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{x^3 + 1}$.

30. Tính các tích phân suy rộng:
    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$.
    (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.
    (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$.
    (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx$.
    (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}} dx$.

31. Xét sự hội tụ hay phân kỳ của các tích phân suy rộng:
    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$.
    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{xe^x}$.
    (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m} dx$
    (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^n} dx \quad (a \neq 0)$.
    (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.
    (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$.

32. Hàm số Gamma, có giá trị tại x thường được viết là $\Gamma(x)$ và được xác định bởi

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

    (a) Chứng minh rằng tích phân hội tụ khi $x > 0$.

(b) Dùng phương pháp tích phân từng phần, hãy chứng minh $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, với $x > 0$.

(c) Chứng minh rằng $\Gamma(n+1) = n!$, với $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(d) Nếu cho biết $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ thì hãy chứng minh rằng $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ và $\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2$.

Hàm Γ thường được xem như là sự mở rộng của hàm giai thừa từ các số nguyên dương sang các số thực dương.

Chương 4

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

4.1. Các khái niệm cơ bản

4.1.1. $\mathbb{R}^n$ và các tập điểm đặc biệt trong $\mathbb{R}^n$

Tập mọi số thực $\mathbb{R}$ đã xét trong các chương trước là tập "nền" để xây dựng khái niệm hàm số *một* biến độc lập. Đối với khái niệm hàm số *nhiều* biến độc lập, ta cần tập "nền" mới được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 4.1. Mỗi bộ gồm n số thực được sắp thứ tự, ký hiệu là $(x_1, \dots, x_n)$, với $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, và được gọi là một điểm n-chiều (hay một vector n-chiều). Tập mọi điểm n-chiều được ký hiệu là $\mathbb{R}^n$. Vậy,

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\},$$

trong đó, x_i được gọi là *tọa độ thứ i* của điểm $(x_1, \dots, x_n)$ (hay *thành phần thứ i* của vector $(x_1, \dots, x_n)$).

Chú ý. Tính được sắp thứ tự đã nêu trong định nghĩa là do quy ước sau. Với $x = (x_i, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, ta nói "x bằng y", viết là $x = y$ (hay $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$) khi và chỉ khi $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Trong trường hợp ngược lại, ta viết $x \neq y$ ($(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$); chẳng hạn $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$.

Ta cũng trang bị một "khoảng cách" giữa các điểm của $\mathbb{R}^n$ như sau. Với $x = (x_i, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, ta đặt

$$d(x, y) = \Big[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big]^{1/2}$$

và gọi $d(x, y)$ là *khoảng cách giữa x, y*. Ta có thể kiểm tra được các tính chất sau đây của khoảng cách d.

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall\, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i,\ i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x), \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Chú ý. Ta thường đồng nhất $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) với tập mọi điểm trong mặt phẳng (không gian) tọa độ Descartes Oxy ($Oxyz$) thông thường và thay cho ký hiệu (x_1, x_2) ((x_1, x_2, x_3)), ta sẽ lại viết là (x, y) ((x, y, z)).

Cũng như các khoảng mở, đóng trong $\mathbb{R}$ được xây dựng từ khái niệm lân cận, ở đây, trong $\mathbb{R}^n$, ta cũng có các khái niệm tương tự, được cho bởi các định nghĩa và mô tả sau.

Lân cận: Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và số $r > 0$. Tập $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$ được gọi là một lân cận của điểm x_0.

Điểm trong: Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm trong của tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu D chứa một lân cận của x_0.

Tập mở: Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong của nó. Ta quy ước xem $\emptyset$ là một tập mở.

Điểm biên-Biên-Tập đóng: Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu mọi lân cận của x_0 đều chứa ít nhất các điểm x, y: $x \in D$, $y \notin D$. Tập hợp mọi điểm biên của D được gọi là biên của D, ký hiệu là ∂D. Nếu $D \supset \partial D$ thì D được gọi là tập đóng. Quan hệ giữa tính đóng, mở được cho bởi kết quả đã được chứng minh sau:

$$D \subset \mathbb{R}^n \text{ là tập đóng} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus D \text{ là tập mở.}$$

Tập bị chặn: Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập bị chặn nếu có một lân cận (của điểm nào đó) chứa D.

Điểm giới hạn: Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm giới hạn của tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu mọi lân cận của x_0 đều chứa ít nhất một điểm x: $x \in D$, $x \neq x_0$. Đặc biệt, nếu điểm $x_0 \in D$ không phải là điểm giới hạn của D thì nó được gọi là điểm cô lập của D.

Miền: Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở và $B \subset \partial\Omega$. Tập $D = \Omega \cup B$ được gọi là một miền. Tùy theo $B = \emptyset$ hay $B = \partial\Omega$ mà ta sẽ gọi D tương ứng là miền mở hay miền đóng.

4.1.2. Hàm số nhiều biến số – Giới thiệu đồ thị hàm hai biến

Định nghĩa 4.2. Cho $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$. Mỗi ánh xạ

$$\begin{array}{llll} f\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & y = f(x) \stackrel{\text{kh}}{=} f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

được gọi là hàm số của n biến độc lập $x_1, \ldots, x_n$ và D được gọi là miền xác định của hàm số.

Ngoài các ký hiệu chung của ánh xạ, ta còn thường dùng một trong các ký hiệu sau để chỉ hàm số: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ hay chỉ đơn giản là f. Ta cũng có quy ước tương tự về cách cho miền xác định như đối với hàm số một biến. Ngoài ra, $f(x_1, x_2)$ $(f(x_1, x_2, x_3))$ thường được viết là $f(x, y)$ $(f(x, y, z))$.

Nếu D là miền xác định của hàm số $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ln(5 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$ thì $(1, 1, 1, 1) \in D$ và $(1, 2, 1, 2) \notin D$. Miền xác định của hàm số

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$$

là tập $D = \{(x, y)\colon 1 < x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \neq 2\}$.

Nếu $f(x_1, \ldots, x_n)$ có miền xác định D thì giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên tập $X \subset D$ sẽ lần lượt là các giá trị $\max\{f(x_1, \ldots, x_n)\colon (x_1, \ldots, x_n) \in X\}$, $\min\{f(x_1, \ldots, x_n)\colon (x_1, \ldots, x_n) \in X\}$ và chúng cũng được viết tương ứng dưới hình thức

$$\max_{(x_1, \ldots, x_n) \in X} f(x_1, \ldots, x_n), \qquad \min_{(x_1, \ldots, x_n) \in X} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Định nghĩa 4.3. Cho hàm số $f(x,y)$ có miền xác định D. Trong mặt phẳng tọa độ Descartes, quỹ tích các điểm $(x,y) \in D$ sao cho $f(x,y) = C$ (hằng số) được gọi là một *đường mức* của hàm số f. Trong trường hợp f là hàm số của ba biến độc lập thì ta có khái niệm tương ứng là *mặt mức* của f.

Xét sự phân bố nhiệt trên mặt phẳng được cho bởi $T(x,y) = x^2 + y^2$ (nhiệt độ tại (x,y), tính bằng °C). Điểm $(3,5)$ nhận nhiệt độ $T(3,5) = 34$. Gọi (C) là quỹ tích các điểm mà tại đó nhận nhiệt độ sôi của nước. Ta có

$$(C) = \{(x,y)\colon T(x,y) = 100\} = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 100\}.$$

Vậy (C) chính là đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính $R = 10$, cũng được gọi là một *đường đẳng nhiệt* và nó chính là một đường mức của hàm T.

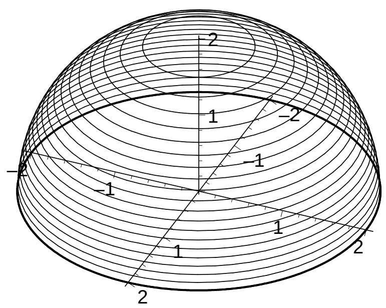
Khái niệm *đồ thị* của hàm hai biến cũng được dùng trong một số ứng dụng nên sẽ được giới thiệu sơ lược ở đây, cho dù ta không thể xây dựng được các bước để "vẽ" được đồ thị của hàm hai biến.

Định nghĩa 4.4. Cho hàm số $f(x,y)$ có miền xác định D. Tập

$$G = \{(x,y,z)\colon z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

được gọi là đồ thị của hàm f.

CHÚ Ý. Theo sự đồng nhất G với quỹ tích các điểm (x,y,z) trong không gian tọa độ Descartes, với z được tính bằng giá trị của f tại $(x,y) \in D$ thì G thường là một mặt cong nào đó.



Hình 4.1: Đồ thị $G\colon z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Đồ thị G của hàm số $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ là tập

$$G = \{(x,y,z)\colon z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\} = \{(x,y,z)\colon z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

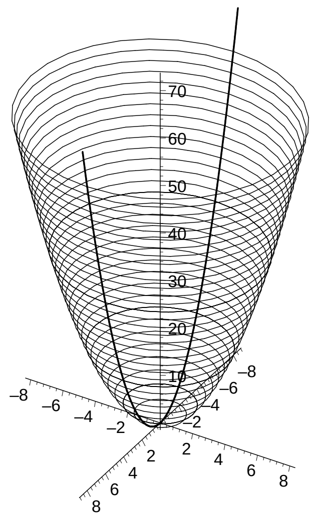
và nó chính là nửa mặt cầu tâm $O(0,0,0)$, bán kính $R = 2$ và nằm phía trên mặt phẳng $z = 0$ (mặt phẳng xOy).

Để khảo sát đồ thị G của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ ta tìm giao tuyến của G với các mặt phẳng đặc biệt. Ta có hai thông tin sau:

(a) Mặt phẳng $z = C$ (≥ 0) cắt G theo giao tuyến là các đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = C$ (trong mặt phẳng $z = C$).

(b) Mặt phẳng $y = 0$ cắt G theo giao tuyến là *parabol* $z = x^2$ (trong mặt phẳng $y = 0$).

Vậy, từ (a) và (b), ta có thể kết luận rằng G là một mặt tròn xoay với trục quay Oz và nhận được bằng cách quay *parabol* $z = x^2$ (trong mặt phẳng $y = 0$) quanh trục này. Chú ý rằng các giao tuyến trong (a) chính là các đường mức của f.



Hình 4.2: Đồ thị $G\colon z = x^2 + y^2$.

4.2. Giới hạn hàm số và tính liên tục

Định nghĩa 4.5. Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $M_0(x_0, y_0)$ là điểm giới hạn của D. Số thực L được gọi là giới hạn của f khi $M(x, y)$ dần đến $M_0(x_0, y_0)$ (ta viết là $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$) nếu mệnh đề sau được thỏa:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\colon 0 < d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Khi đó, ta có thể dùng một trong các ký hiệu sau

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = L, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L.$$

Chú ý.

1. Điểm M trong mệnh đề (4.1) phải thuộc D, nghĩa là $M \in \big(S(M_0, \delta) \setminus \{M_0\}\big) \cap D$ và mệnh đề có thể được viết dưới dạng sau

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\colon 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

2. Nhắc lại rằng, đối với hàm một biến $f(x)$, giới hạn ℓ của nó khi $x \to x_0$ nếu tồn tại, sẽ không phụ thuộc vào "hướng" mà x dần đến x_0. Điều này được cho bởi kết quả sau:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Hoàn toàn tương tự, theo định nghĩa trên, giới hạn L (nếu tồn tại) sẽ không phụ thuộc vào "đường" hay "hướng" trong phần giao $\big(S(M_0, \delta) \setminus \{M_0\}\big) \cap D$ mà trên đó: $M \to M_0$. Từ đó, suy ra rằng nếu xét trên 2 đường hay hướng khác nhau trong phần giao đã nêu mà f dần đến 2 giới hạn khác nhau thì ta kết luận: không tồn tại $\lim_{M\to M_0} f(M)$.

3. Ta cũng thường dựa vào các kết quả của giới hạn hàm một biến để tìm giới hạn hàm hai biến hay dựa vào kết quả sau (thường được gọi là "nguyên lý kẹp"): nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0), ta có $g(x, y) \le f(x, y) \le h(x, y)$ $((x, y) \ne (x_0, y_0))$ và $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L$ thì $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x-y}.$$

Giải. Gọi $f(x,y) = (x+2y)/(x-y)$ và xét hai đường thẳng qua điểm $(0,0)$ là $(\Delta_1)\colon y = -x$ và $(\Delta_2)\colon y = -x/2$. Khi đó,

(i) $(x,y) \in (\Delta_1)$, $(x,y) \neq (0,0)\colon f(x,y) = -1/2$.

(ii) $(x,y) \in (\Delta_2)$, $(x,y) \neq (0,0)\colon f(x,y) = 0$.

Từ hai trường hợp trên suy ra $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ◁

Ví dụ 4.2. Tính các giới hạn

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad J = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad K = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

Giải.

(a) Ta có

$$I = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (t = x^2+y^2 > 0).$$

(b) Do

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ với } (x,y) \neq (0,0),$$

nên suy ra

$$0 \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |x|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{2} \quad ((x,y) \neq (0,0)).$$

Từ đó, ta có thể kết luận $J = 0$, theo nguyên lý kẹp.

(c) Nhắc lại rằng: $|\sin X| \leq |X|$, $\forall X$. Từ đó,

$$0 \leq \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq |x|+|y|.$$

Vậy, rõ ràng là $K = 0$, theo nguyên lý kẹp.

◁

Thật ra, một cách chính xác, ta cần chứng minh, chẳng hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$$

trong trường hợp (c). Kết quả trên được kiểm tra trực tiếp như sau:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon/\sqrt{2}\colon 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x|+|y| \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} < \sqrt{2}\varepsilon/\sqrt{2} = \varepsilon.$$

Ngoài ra, ta cũng có thể dùng tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ để khảo sát giới hạn hàm hai biến qua mối quan hệ sau:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Trong trường hợp giới hạn J đã xét ở trên, bằng cách dùng tọa độ cực, ta có thể viết:

$$J = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} (r\cos^2\theta\sin\theta) = 0.$$

Ví dụ 4.3. Hãy dùng tọa độ cực để khảo sát giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+y^2-1}.$$

Giải. Bằng cách đặt $y-1=r\cos\varphi$, $x=r\sin\theta$, dễ thấy giới hạn cần tìm trở thành

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r}{r+2\cos\theta}.$$

Từ đó, suy ra giới hạn đã cho không tồn tại vì với $\theta=\pi/2$, nó bằng 1, và với $\theta=0$, nó bằng 0. $\lhd$

Tương tự như hàm một biến, đối với hàm hai biến, ta cũng có khái niệm liên tục được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.6. Nếu $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ thì f được gọi là liên tục tại điểm (x_0,y_0). Nếu f liên tục tại mỗi điểm của $D\subset\mathbb{R}^2$ thì f được gọi là liên tục trên (hay trong) D.

Ta chứng minh được một số các kết quả thường được áp dụng khi xét tính liên tục của hàm hai biến.

1. Nếu $f(x,y)$ là đa thức theo các biến x, y (nghĩa là f là đa thức theo biến này khi xem biến kia là hằng) thì f liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Chẳng hạn, $f(x,y)=2x^2y^3-xy^2+2y-3$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

2. Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm liên tục là liên tục (tất nhiên là trên tập con của miền xác định của chúng). Chẳng hạn

$$f(x,y)=\frac{x^3y^2-3x-y}{x^2+3y^2+1}$$

là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

3. Cho $f(t)$ là hàm liên tục theo t trong (a,b), $t=u(x,y)$ liên tục theo x,y trong một miền mở D, và $u(x,y)\in T\subset(a,b)$ với mọi $(x,y)\in D$. Khi đó, $f[u(x,y)]$ liên tục trên D. Chẳng hạn, nếu xét $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ thì với $g(t)=\sin t$ và $t=h(x,y)=x^2+y^2$, ta có $f(x,y)=g[h(x,y)]$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Rõ ràng, với $D=\{(x,y)\colon 1\le x^2+y^2\le 2\}$ và $F(x,y)=\sqrt{5-(x^2+y^2)}$ thì F liên tục trên D.

Đối với hàm liên tục trên một tập đóng và bị chặn, ta cũng có tính chất tương tự như đối với hàm liên tục một biến.

Định lý 4.1. *Nếu $f(x,y)$ liên tục trên một tập đóng và bị chặn $D\subset\mathbb{R}^2$ thì f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại các điểm (x_1,y_1), (x_2,y_2) trong D sao cho*

$$f(x_1,y_1)=\max_{(x,y)\in D} f(x,y), \quad f(x_2,y_2)=\min_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

Ví dụ 4.4. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f(x,y)=xy$ trên

$$D=\{(x,y)\colon -2\le x\le 3; -1\le y\le 2\}.$$

Giải. Hiển nhiên, với $(x,y)\in D$ thì $|x|\le 3$ và $|y|\le 2$. Khi đó: $f(x,y)=xy\le|xy|\le 6$ và do $f(3,2)=6$ nên $M=6$. Để xác định m, chú ý rằng với mỗi $(x,y)\in D$, ta có $-2\le x\le 3$ và để có kết luận về giá trị của xy, ta xét hai trường hợp sau:

(i) $-1\le y\le 0$: suy ra $3y\le xy\le -2y$, từ đó $xy\ge -3$ (do $3y\ge -3$).

(ii) $0<y$: suy ra $-2y\le xy\le 3y$, từ đó $xy\ge -4$ (do $-2y\ge -4$).

Trong cả hai trường hợp trên, ta có $f(x,y)=xy\ge -4$ và $f(-2,2)=-4$ nên $m=-4$. $\lhd$

4.3. Đạo hàm riêng

4.3.1. Định nghĩa – Cách tính

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một tập mở D và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm số $g(x) = f(x, y_0)$. Nếu g khả vi tại x_0 thì $g'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x tại* (x_0, y_0) và được ký hiệu bởi một trong các hình thức sau:

$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ví dụ 4.5. Cho $f(x, y) = 2x^3y^2$. Tính $f_x(2, 2)$.

Giải. Gọi $g(x) = f(x, 2) = 8x^3$ thì ta có $g'(x) = 24x^2$. Khi đó, $f_x(2, 2) = g'(2) = 96$. ◁

Theo định nghĩa, ta có

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Nếu tồn tại đạo hàm riêng của f theo x tại mọi điểm của D thì hàm số

$$\begin{array}{rccc} F\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & F(x, y) \overset{\text{dn}}{=} f_x(x, y) \end{array}$$

được gọi là (*hàm*) *đạo hàm riêng của f theo x*, ký hiệu bởi một trong các hình thức sau:

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Vậy,

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Thay cho cách tính trực tiếp bằng giới hạn như trên, theo định nghĩa, ta có thể tính "đạo hàm bình thường" của f theo biến x, khi xem y là hằng. Chẳng hạn, theo ví dụ trên, với $f(x, y) = 2x^3y^2$, ta có $f_x(x, y) = 6x^2y^2$, suy ra $f_x(2, 2) = 6 \times 2^2 \times 2^2 = 96$. Với $f(x, y) = y^x$ và $g(x, y) = x^y$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^x \ln y, \quad g_x(x, y) = yx^{y-1}.$$

Bây giờ trở lại xét hàm số $h(y) = f(x_0, y)$. Nếu h khả vi tại y_0 thì $h'(y_0)$ được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến y tại* (x_0, y_0) và được ký hiệu bởi một trong các hình thức sau:

$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad z_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tương tự, ta cũng định nghĩa được (*hàm*) *đạo hàm riêng của f theo y*, với ký hiệu và cách tính hoàn toàn tương tự như đối với x.

Cho $f(x, y) = \cos(xy)$ và $g(x, y) = x^2y^3$. Ta có

$$f_y(x, y) = -x \sin(xy), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2.$$

Ví dụ dưới đây cho ta ý nghĩa thực tế của đạo hàm riêng khi xét trong một lĩnh vực cụ thể.

Ví dụ 4.6. Hàm số $f(x,y) = Kx^\alpha y^\beta$ ($K, \alpha, \beta > 0$ và $\alpha + \beta = 1$) được gọi là hàm COBB-DOUGLAS và được dùng để đặc trưng cho năng lực sản xuất của một xí nghiệp. Trong một số trường hợp thì $f(x,y)$ có giá trị là số sản phẩm sản xuất được tại mức đầu tư (x,y), trong đó, x là số đơn vị nhân công (thuộc yếu tố *nhân lực*) và y là số đơn vị vốn (thuộc yếu tố *tài lực*). Chẳng hạn khi $f(x,y) = 4x^{1/4}y^{3/4}$ thì hãy tính $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$ và cho nhận xét về kết quả. Ta có

$$f_x(x,y) = x^{-3/4}y^{3/4} \Rightarrow f_x(2,1) = 2^{-3/4} = \frac{2^{1/4}}{2}$$
$$f_y(x,y) = 3x^{1/4}y^{-1/4} \Rightarrow f_y(2,1) = 3.2^{1/4}.$$

Vậy $f_y(2,1) > f_x(2,1)$, nghĩa là f có giá trị tăng nhanh hơn theo "hướng" gia tăng y so với theo "hướng" gia tăng x tại cùng mức đầu tư $(2,1)$; nghĩa là tại mức đầu tư đang xét, thì việc tăng thêm giá trị của y là có lợi hơn. ◁

CHÚ Ý. Ý nghĩa của kết quả trên sẽ trở nên rõ ràng hơn qua sự mở rộng khái niệm đạo hàm riêng sẽ được khảo sát dưới đây.

4.3.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng - Tính khả vi của hàm hai biến

Nhắc lại rằng, đồ thị của hàm số một biến $y = f(x)$ có tiếp tuyến với hệ số góc hữu hạn k tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi $f(x)$ khả vi tại x_0 và $k = f'(x_0)$. Khi đó, để ý rằng tiếp tuyến có phương trình $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ và điều kiện để f khả vi tại x_0 là tồn tại số hữu hạn k sao cho

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k\right] = 0.$$

Rõ ràng, điều kiện trên có thể được diễn đạt theo ý nghĩa hình học của đạo hàm đã biết và ta có thể nói:

đồ thị của hàm $f(x)$ có tiếp tuyến không thẳng đứng tại $(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow f$ khả vi tại x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

trong đó, để ý rằng $|x - x_0|$ là khoảng cách giữa hai điểm "một chiều" x và x_0. Điều kiện cuối cùng trên có thể viết lại thành

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathbf{o}(|x - x_0|) \quad (x \to x_0). \tag{4.3}$$

Và (4.3) cho ta ý nghĩa định lượng của tính khả vi: trong một lân cận đủ nhỏ của x_0, giá trị của $f(x)$ có thể được xấp xỉ đủ tốt bởi giá trị của hàm "tiếp tuyến" $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, với sai số tuyệt đối là vô cùng bé bậc cao hơn khoảng cách $|x - x_0|$.

Tương tự, trong lân cận đủ nhỏ của điểm (x_0, y_0), ta có thể xấp xỉ giá trị $f(x,y)$ bởi giá trị của hàm "tiếp diện" $T(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ với sai số là vô cùng bé bậc cao hơn khoảng cách giữa các điểm (x,y) và (x_0,y_0). Về mặt hình học, điểm $(x, y, f(x,y))$ trên đồ thị (S): $z = f(x,y)$ có thể được xấp xỉ đủ tốt bởi điểm $(x, y, T(x,y))$ trên một mặt phẳng cố định qua $M_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ là $z = f(x_0,y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$, với A, B là các hằng số. Sự tồn tại một mặt phẳng xấp xỉ với (S) như vậy "tại" điểm M_0 đồng nghĩa với (S) có tiếp diện "không thẳng đứng" tại M_0, và điều này cũng đồng nghĩa với "tính khả vi" của hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0), được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.7. Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một lân cận của điểm (x_0,y_0). Khi đó, f được gọi là khả vi tại (x_0,y_0) khi và chỉ khi tồn tại các hằng số A, B sao cho

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \tag{4.4}$$

Bằng cách đặt $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, (4.4) được viết lại dưới dạng

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.5}$$

Do từ (4.5) ta có thể suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = A$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k} = B$$

nên định nghĩa trên trở thành: f khả vi tại (x_0,y_0) khi và chỉ khi f có các đạo hàm riêng $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ thỏa

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.6}$$

hay

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\mathbf{o}\big(\sqrt{h^2+k^2}\,\big), \tag{4.7}$$

khi $(h,k)\to(0,0)$.

Định lý 4.2. *Nếu f có các đạo hàm riêng f_x, f_y trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và f_x, f_y liên tục tại M_0 thì tồn tại α, β sao cho*

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\alpha h+\beta k,$$

trong đó $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ khi $(h,k)\to(0,0)$.

Từ kết quả định lý trên, ta suy ra f khả vi tại (x_0,y_0) vì

$$\frac{|\alpha h+\beta k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le |\alpha|+|\beta| \longrightarrow 0, \text{ khi } (h,k)\to(0,0).$$

Chú ý. Điều kiện khả vi có nghĩa là đồ thị (S) của hàm số $f(x,y)$ *có tiếp diện không cùng phương với Oz* tại điểm $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in(S)$ và nó chính là mặt phẳng có phương trình

$$z = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Ta cũng gọi mặt phẳng trên là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Ngoài ra, nếu f thỏa điều kiện của Định lý 4.2, thì từ (4.7), ta có công thức gần đúng sau:

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k$$
$$(|h|,\ |k| \text{ khá nhỏ})$$

Ví dụ 4.7. Tính gần đúng số $A = (2,05)e^{-3,92+(2,05)^2}$.

Giải. Xét $f(x,y) = xe^{y+x^2}$, $(x_0; y_0) = (2; -4)$, $(h; k) = (0,05; 0,08)$. Ta có $f(x_0, y_0) = 2$ và

$$f_x(x,y) = e^{y+x^2} + 2x^2 e^{y+x^2} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = 9$$
$$f_y(x,y) = xe^{y+x^2} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = 2.$$

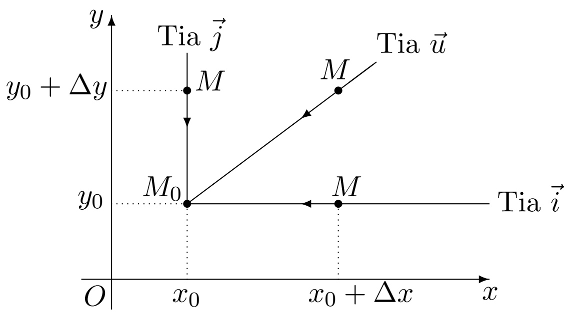
Vậy, $A = f(x_0 + h, y_0 + k) \approx 2 + 9(0,05) + 2(0,08) = 2,61$. $\triangleleft$

4.3.3. Sự mở rộng khái niệm đạo hàm riêng: đạo hàm theo hướng

Giả sử tồn tại $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ và mỗi tia qua (x_0, y_0) sẽ được đặc trưng bởi một vector đơn vị $\vec{u}$, gọi tắt là tia $\vec{u}$. Với $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ Ox, Oy, thì các tia $\vec{i}$, tia $\vec{j}$ thường được gọi lần lượt là "chiều dương của trục hoành" và "chiều dương của trục tung". Ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{M \to M_0 \\ (M \in \text{tia } \vec{i})}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0) \\
\lim_{\substack{M \to M_0 \\ (M \in \text{tia } \vec{j})}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} &= \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_y(x_0, y_0)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Để ý đến sự giống nhau và sự khác biệt của cả hai giới hạn bên trái và theo các kết quả ở cả hai vế phải trong (4.8), ta dễ nhận thấy sự mở rộng tự nhiên của khái niệm đạo hàm riêng, được cho bởi định nghĩa sau.



Hình 4.3: Minh họa cho các quá trình $M \to M_0$ trên các tia $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{u}$.

Định nghĩa 4.8. Xét một tia bất kỳ qua $M_0(x_0, y_0)$ được đặc trưng bởi vector đơn vị $\vec{u} = \{a_1, a_2\}$ $(a_1^2 + a_2^2 = 1)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ (M \in \text{tia } \vec{u})}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$$

thì giới hạn trên được gọi là *đạo hàm theo hướng $\vec{u}$ của f tại* (x_0, y_0), ký hiệu $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$.

Để thiết lập công thức tính $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$, ta giả sử f có f_x, f_y trong một lân cận của (x_0, y_0) và f_x, f_y liên tục tại (x_0, y_0). Khi đó, theo (4.7), ta có

$$f(M) = f(M_0) + f_x(M_0)(x - x_0) + f_y(M_0)(y - y_0) + \mathbf{o}(MM_0). \tag{4.9}$$

Đặt $d = MM_0$, ta có $\overrightarrow{M_0M} = d\vec{u}$ hay $x - x_0 = da_1$, $y - y_0 = da_2$. Thay các kết quả này vào (4.9), ta được

$$\begin{aligned} f(M) - f(M_0) &= f_x(M_0)da_1 + f_y(M_0)da_2 + \mathbf{o}(d) \\ \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} &= f_x(M_0)a_1 + f_y(M_0)a_2 + \frac{\mathbf{o}(d)}{d}. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra công thức

$$D_{\vec{u}}f(M_0) = \lim_{d\to 0^+} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} = f_x(M_0)a_1 + f_y(M_0)a_2. \tag{4.10}$$

Vế phải của công thức trên liên quan đến một vector đặc biệt, được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.9. Vector $\{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\}$ được gọi là *gradient* của hàm f tại điểm (x_0, y_0) và được ký hiệu bởi một trong các dạng: $\nabla f(x_0, y_0)$, $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$.

Theo định nghĩa trên và từ công thức (4.10), ta có

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)\vec{u} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos(\nabla f(x_0, y_0), \vec{u}).$$

Vậy, nếu $|\nabla f(x_0, y_0)| \neq 0$, ta có kết luận

$$\begin{aligned} &D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) \text{ đạt max} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ cùng chiều với } \nabla f(x_0, y_0) \\ &D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) \text{ đạt min} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ ngược chiều với } \nabla f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \max D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) &= |\nabla f(x_0, y_0)| = \sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2} \\ \min D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) &= -|\nabla f(x_0, y_0)| = -\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2}. \end{aligned}$$

Chú ý. Tất nhiên, một tia cũng có thể được đặc trưng bởi một vector $\vec{v} = \{b_1, b_2\} \neq 0$ và không phải là vector đơn vị. Khi đó, ta vẫn nói "đạo hàm theo hướng $\vec{v}$ của f tại $M_0(x_0, y_0)$" và vẫn có thể viết $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$, nhưng giá trị này vẫn phải được tính theo vector đơn vị $\vec{u}$ cùng chiều với $\vec{v}$, nghĩa là

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = D_{\vec{v}/|\vec{v}|}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} + f_y(x_0, y_0)\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Ví dụ 4.8. Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{u}$ của f tại điểm M đã cho trong các trường hợp sau:

(a) $f(x, y) = x^3 - 4x^2y + y^2$, $M(0, -1)$ và $\vec{u} = \{3/5; 4/5\}$.

(b) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, $M(5, 1)$ và $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$.

Giải.

(a) Ta có $f_x(x, y) = 3x^2 - 8xy$, $f_y(x, y) = -4x^2 + 2y$ và để ý rằng $|\vec{u}| = 1$. Vậy:

$$D_{\vec{u}}f(M) = f_x(0, -1)\frac{3}{5} + f_y(0, -1)\frac{4}{5} = 0 \times \frac{3}{5} + (-2) \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{5}.$$

(b) Ta có $f_x(x,y) = 1/2\sqrt{x-y}$, $f_y(x,y) = -1/2\sqrt{x-y}$ và $\vec{u} = \{1,-1\}$. Vậy:

$$D_{\vec{u}}f(M) = f_x(5,1)\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} + f_y(5,1)\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

◁

Ví dụ 4.9. Hãy xây dựng công thức tính đạo hàm theo hướng $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$, với f thỏa điều kiện của Định lý 4.2 tại điểm (x_0,y_0) và φ là góc lượng giác lập bởi tia $\vec{u}$ với chiều dương của trục hoành.
GIẢI. Giả sử điểm gốc của $\vec{u}$ được dời về gốc tọa độ. Khi đó, điểm ngọn M của $\vec{u}$ nằm trên đường tròn lượng giác (vì $|\vec{u}| = 1$). Theo giả thiết, ta có $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$. Vậy:

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cos\varphi + f_y(x_0,y_0)\sin\varphi.$$

◁

4.3.4. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong một tập mở D. Khi đó, f_x, f_y được gọi là đạo hàm riêng cấp 1 của f (trong D). Nếu f_x, f_y có các đạo hàm riêng theo các biến tại $(x_0,y_0) \in D$ thì các đạo hàm riêng đó được gọi là các đạo hàm riêng cấp 2 của f tại (x_0,y_0). Ta có thể có 4 đạo hàm riêng như vậy là

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \xrightarrow{\text{kh}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad f_{xx}(x_0,y_0)\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \xrightarrow{\text{kh}} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0), \quad f_{xy}(x_0,y_0)\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \xrightarrow{\text{kh}} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0), \quad f_{yx}(x_0,y_0)\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \xrightarrow{\text{kh}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0), \quad f_{yy}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

Giả sử f_x, f_y có các đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D. Khi đó, ta xây dựng được các (hàm) đạo hàm riêng cấp 2 của f, và chúng được ký hiệu tương ứng là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xx}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \quad f_{xy}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \quad f_{yx}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{yy}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có thể xây dựng được các đạo hàm riêng cấp 3, 4, … của f tại một điểm hay các (hàm) đạo hàm riêng cấp 3, 4, … của f. Các đạo hàm riêng cấp cao được lấy ít nhất theo hai biến khác nhau được gọi là các đạo hàm riêng hỗn hợp của f. Chẳng hạn, f_{xy}, f_{yx} là các đạo hàm riêng hỗn hợp của f.

Cho $f(x,y) = \sin(xy)$. Ta có

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y\cos(xy), \quad f_y(x,y) = x\cos(xy),\\
f_{xx}(x,y) &= -y^2\sin(xy), \quad f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(xy).
\end{aligned}$$

Đặc biệt lưu ý rằng

$$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) = f_{yx}(x,y).$$

Điều kiện để các đạo hàm riêng hỗn hợp tại một điểm bằng nhau được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.3. *Giả sử tồn tại f_x, f_y, f_{xy} và f_{yx} trong một tập mở D. Khi đó, nếu f_{xy} và f_{yx} liên tục tại một điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Ta dễ dàng định nghĩa được đạo hàm riêng và đạo hàm riêng cấp cao của các hàm số có số biến nhiều hơn. Chẳng hạn, đối với hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì đạo hàm riêng cấp ba $f_{x_1x_2x_n}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, nếu tồn tại, được cho bởi giới hạn

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{f_{x_1x_2}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n} + h_n) - f_{x_1x_2}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})}{h_n},$$

trong đó, các hàm đạo hàm riêng f_{x_1}, $f_{x_1x_2}$ cũng được xét tương tự. Ngoài ra, ta cũng có định lý Schwarz tổng quát về tính không phụ thuộc thứ tự lấy đạo hàm của các đạo hàm riêng hỗn hợp cùng cấp.

Định lý 4.4 (Schwarz) *Giả sử hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có trong một tập mở D mọi đạo hàm riêng đến cấp $(n-1)$ và các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp n. Khi đó, giá trị của các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp n tại một điểm $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in D$ sẽ không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm theo các biến nếu chúng đều liên tục tại điểm đó.*

Chẳng hạn, nếu $G(x, y, u, v)$ thỏa các điều kiện của định lý trên với $n = 4$ tại điểm (x_0, y_0, u_0, v_0) thì

$$G_{xuuv}(x_0, y_0, u_0, v_0) = G_{xuvu}(x_0, y_0, u_0, v_0) = G_{uxvu}(x_0, y_0, u_0, v_0) = \cdots .$$

Chú ý. Ta cũng có thể mở rộng khái niệm đạo hàm theo hướng của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại một điểm $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Khi đó, vector n chiều $(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \ldots, f_{x_n}(x_0))$ được gọi là *gradient* của f tại x_0, ký hiệu: $\nabla f(x_0)$ hay $\mathrm{grad} f(x_0)$.

4.3.5. Công thức Taylor

Giả sử $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp $n+1$ trong một lân cận Δ của điểm (x_0, y_0). Với $(h, k) \neq (0, 0)$ sao cho $(x_0 + h, y_0 + k) \in \Delta$, ta xét hàm số $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$, với $t \in [0, 1]$. Theo giả thiết, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}. \tag{4.11}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + f_y(x_0 + th, y_0 + tk)k. \\ F''(t) &= \big[f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk)h + f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)k\big]h \\ &\quad + \big[f_{yx}(x_0 + th, y_0 + tk)h + f_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk)k\big]k. \\ &\quad \cdots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} F'(0) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k =: \Big(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\Big) f(x_0, y_0). \\ F''(0) &= \big[f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k\big]h + \big[f_{yx}(x_0, y_0)h + f_{yy}(x_0, y_0)k\big]k. \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 =: \Big(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\Big)^2 f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng

$$F^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0, y_0) \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$
$$F^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Chú ý. Ký hiệu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^m, \quad m = 1, \dots, n+1,$$

được xem là một lũy thừa m của một tổng; trong đó, ta quy ước xem ∂, ∂x, ∂y là các số và kết quả khi thực hiện công thức Nhị thức Newton sẽ được sắp xếp lại, sau khi "nhân" $f(x_0, y_0)$ hay $f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ vào vị trí tương ứng để trở lại là các giá trị đạo hàm riêng cấp cao bình thường và $(\partial x)^i$, $(\partial y)^j$ sẽ được viết lại tương ứng là ∂x^i, ∂y^j.

Chẳng hạn:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0, y_0) &= \left(h^2\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{(\partial y)^2}\right) f(x_0, y_0)\\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\\ &= f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2.\end{aligned}$$

Từ các kết quả trên, (4.11) trở thành

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) = &\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0, y_0)\\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3.6. Đạo hàm của hàm số hợp và hàm số ẩn

Ta chỉ xét việc tính đạo hàm của hàm số hợp nhiều biến qua một số trường hợp. Từ đó, rút ra những quy tắc chung.

Trường hợp 1: Cho các hàm số $z = f(x, y)$, $x = u(s, t)$, $y = v(s, t)$. Nếu các hàm u, v có các đạo hàm riêng tại mọi điểm (s, t) trong một tập mở D, và f là hàm thỏa các điều kiện của Định lý 4.2 tại điểm tương ứng $(u(s, t), v(s, t))$ thì hàm số hợp $z = F(s, t) \overset{\text{dn}}{=} f\big[u(s, t), v(s, t)\big]$ cũng có đạo hàm riêng tại (s, t) và trong D, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial s}$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Trường hợp 2: Cho các hàm số $z = f(x,y)$, $y = u(x)$. Nếu hàm u khả vi tại mọi điểm x trong khoảng (a,b) và f là hàm thỏa các điều kiện của Định lý 4.2 tại điểm tương ứng $(x, u(x))$ thì hàm số hợp $z = F(x) \overset{\text{dn}}{=} f\big[x, u(x)\big]$ cũng khả vi tại x và trong (a,b), ta có

$$\begin{aligned} F' = \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}.1 + \frac{\partial f}{\partial y}u' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}u'. \end{aligned}$$

Trường hợp 3: Cho các hàm số $z = f(x,y)$, $x = u(s,t)$, $y = v(t)$. Nếu hàm u có các đạo hàm riêng tại mọi điểm (s,t) trong một tập mở D và f là hàm thỏa các điều kiện của Định lý 4.2 tại điểm tương ứng $(u(s,t), v(t))$ thì hàm số hợp $z = F(s,t) \overset{\text{dn}}{=} f\big[u(s,t), v(t)\big]$ cũng có đạo hàm riêng tại (s,t) và trong D, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}v'. \end{aligned}$$

Chú ý. Qua các trường hợp trên, ta có thể rút ra quy tắc chung để tính đạo hàm của hàm số hợp như sau: khi lấy đạo hàm riêng của một hàm số hợp theo một biến mới, ta chỉ tính đạo hàm của hàm này theo biến cũ nào có chứa biến mới, rồi nhân với đạo hàm của biến cũ này theo biến mới đang xét. Việc chuyển từ biến cũ này sang biến cũ khác được thực hiện bằng phép cộng.

Để minh họa cho chú ý trên, ta xét thêm trường hợp

$$z = f(x,y), \quad x = u(s,t), \quad y = v(x,s), \quad z = F(s,t) \overset{\text{dn}}{=} f\big(u(s,t), v[u(s,t), s]\big)$$

và giả sử các điều kiện để áp dụng quy tắc trên được thỏa mãn. Khi đó,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s}\right).$$

Để khảo sát ý nghĩa của tiếp diện của mặt $(S)\colon z = f(x,y)$ tại $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ dựa vào các quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp đã xét, ta nhắc lại ở đây khái niệm đường cong tham số trong không gian và xây dựng khái niệm tiếp tuyến của nó tại một điểm.

Một đường cong (C) trong không gian có thể được cho bởi phương trình *tham số* sau

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{hay } x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

trong đó, $t \in [a,b]$. Các điểm $A(x(a), y(a), z(a))$, $B(x(b), y(b), z(b))$ được gọi lần lượt là điểm đầu và điểm cuối của (C). Với $t_0 \in (a,b)$ thì $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in (C)$. Xét $M(x(t), y(t), z(t)) \in (C)$ và $M \neq M_0$. Khi đó, phương trình đường thẳng M_0M là

$$(\Delta)\colon \frac{x - x_0}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t) - z(t_0)} \text{ hay}$$
$$\frac{x - x(t_0)}{\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}} = \frac{y - y(t_0)}{\dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}} = \frac{z - z(t_0)}{\dfrac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}}.$$

Ta nói (C) có tiếp tuyến tại M_0 nếu và chỉ nếu $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ đều khả vi tại t_0 và $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0,0,0)$. Khi $t \to t_0$, đường thẳng (Δ) có "giới hạn" là đường thẳng

$$(T)\colon \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

và (T) được gọi là tiếp tuyến với (C) tại M_0.

Bây giờ ta xét một đường cong $(C) \subset (S)$ bất kỳ qua điểm $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in (S)$, với (S) là đồ thị của hàm khả vi $f(x,y)$ tại (x_0, y_0). Giả sử (C) có phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, và các hàm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ khả vi tại t_0, với $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0,0,0)$ và $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Bằng cách lấy đạo hàm đồng nhất thức $z(t) = f(x(t), y(t))$ theo t tại t_0, ta nhận được kết quả

$$\begin{aligned} z'(t_0) &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) \text{ hay} \\ 0 &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) + (-1)z'(t_0). \end{aligned}$$

Nếu để ý rằng $\vec{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$ là vector pháp tuyến của tiếp diện với (S) tại M_0 thì theo kết quả trên: $\vec{n} \perp \vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$, với $\vec{a}$ là vector chỉ phương của tiếp tuyến (T) với (C) tại M_0. Từ đó suy ra: (T) nằm trên tiếp diện, nghĩa là: tiếp diện là "quỹ tích" mọi tiếp tuyến tại M_0 của các đường cong trên (S) qua M_0.

Để xét việc tính đạo hàm của "hàm số ẩn", ta xét phương trình

$$x^5 + e^x + y^3 - 2 = 0 \quad (\text{dạng } F(x,y) = 0). \tag{4.13}$$

Rõ ràng

$$(4.13) \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{2 - x^5 - e^x}.$$

Như vậy, (4.13) xác định hàm số $y = \sqrt[3]{2 - x^5 - e^x}$, được cho dưới dạng "ẩn".

Cho phương trình

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{4.14}$$

Hiển nhiên

$$(4.14) \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2} \text{ hay } y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Khi đó, (4.14) xác định vô số các hàm số trên $[-1, 1]$ (tại sao?), trong đó, có hai hàm số liên tục là $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Từ các ví dụ trên, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.10. Cho phương trình

$$F(x,y) = 0. \tag{4.15}$$

Nếu tồn tại hàm số $y = f(x)$ trong (a,b) sao cho

$$F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in (a,b)$$

thì f được gọi là hàm số ẩn xác định từ phương trình (4.15).

Điều kiện tồn tại hàm số ẩn xác định từ (4.15) được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.5. *Cho phương trình (4.15). Giả sử các hàm F, F_x, F_y liên tục trong một lân cận của điểm (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$ và $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, ta có các kết luận sau:*

(a) *Tồn tại duy nhất hàm số ẩn $f(x)$ trong một lân cận Δ của x_0, xác định từ (4.15) và thỏa $y_0 = f(x_0)$,*

(b) $F_y(x, f(x)) \neq 0$, $\forall x \in \Delta$.

Theo kết luận của Định lý 4.5, ta có đồng nhất thức

$$F(x, f(x)) = 0,\ \forall x \in \Delta.$$

Lấy đạo hàm theo x mỗi vế, ta có

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0.$$

Từ đó suy ra công thức tính đạo hàm của hàm số ẩn

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Tất nhiên, công thức trên chỉ có ý nghĩa hình thức và trường hợp đặc biệt dưới đây mới là kết quả được áp dụng thường xuyên:

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, f(x_0))}{F_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Chú ý. Ta có thể kết luận: nếu giả thiết của Định lý 4.5 được thỏa thì tồn tại một lân cận Δ của x_0, sao cho trong Δ, ta có

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Ngoài ra ta cũng có định lý tương tự khi thay điều kiện $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ bởi điều kiện $F_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Ví dụ 4.10. Cho *ellip*

$$(E)\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với (E) tại (x_0, y_0).

Giải. Đặt $F(x, y) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) - 1$ thì (E) có phương trình $F(x, y) = 0$, với

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= \frac{2x}{a^2} \Rightarrow F_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2} \\ F_y(x, y) &= \frac{2y}{b^2} \Rightarrow F_y(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2}. \end{aligned}$$

Do $F_x(x_0, y_0)$ và $F_y(x_0, y_0)$ không đồng thời bằng 0 nên ta giả sử, chẳng hạn, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Theo Định lý 4.5, tồn tại một lân cận của x_0, sao cho trong lân cận này, ta có

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Khi đó, tiếp tuyến (Δ) có phương trình

$$\begin{aligned} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) &\Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \equiv 1. \end{aligned}$$

Trường hợp $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, ta cũng nhận được cùng kết quả trên. $\triangleleft$

Định nghĩa 4.11. Cho phương trình

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4.16}$$

Nếu tồn tại hàm số $z = f(x, y)$ trong một lân cận Δ của điểm nào đó, sao cho

$$F(x, y, f(x, y)) = 0,\ \forall (x, y) \in \Delta$$

thì f được gọi là hàm số ẩn xác định từ phương trình (4.16).

Điều kiện tồn tại hàm số ẩn xác định từ (4.16) được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.6. *Cho phương trình (4.16). Giả sử các hàm F, F_x, F_y, F_z liên tục trong một lân cận của điểm (x_0, y_0, z_0), $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ và $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó, ta có các kết luận sau:*

(a) *Tồn tại duy nhất hàm số ẩn $f(x, y)$ trong một lân cận Δ của (x_0, y_0), xác định từ (4.16) và thỏa $z_0 = f(x_0, y_0)$,*

(b) $F_z(x, y, f(x, y)) \neq 0,\ \forall (x, y) \in \Delta$.

Từ kết quả của định lý trên, ta dễ dàng suy ra được các công thức sau:

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x[x, y, f(x, y)]}{F_z[x, y, f(x, y)]}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y[x, y, f(x, y)]}{F_z[x, y, f(x, y)]}.$$

Đặc biệt, ta có

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= -\frac{F_x[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]}{F_z[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]} = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \\ f_y(x_0, y_0) &= -\frac{F_y[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]}{F_z[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]} = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \end{aligned}$$

Ta sẽ áp dụng định lý trên để xác định tiếp diện của một mặt cong (S) có phương trình $F(x, y, z) = 0$ tại một điểm. Giả sử F và mọi đạo hàm riêng của nó đều liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$. Nếu $(F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)) \neq (0, 0, 0)$ (hay ta có thể viết $\nabla F(M_0) \neq 0$) thì ta sẽ chứng minh là mặt (S) có tiếp diện tại M_0. Giả sử $F_z(M_0) \neq 0$ (trường hợp $F_x(M_0) \neq 0$ hay $F_y(M_0) \neq 0$ sẽ được chứng minh tương tự). Theo Định lý 4.6, tồn tại một lân cận Δ của (x_0, y_0), sao cho trong Δ, ta có

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y),$$

và

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(M_0)}{F_z(M_0)}, \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(M_0)}{F_z(M_0)}.$$

Từ đó, tiếp diện với (S): $F(x, y, z) = 0$ tại M_0 có phương trình

$$z - z_0 = -\frac{F_x(M_0)}{F_z(M_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(M_0)}{F_z(M_0)}(y - y_0)$$

hay

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

4.3.7. Hàm số ẩn xác định từ phương trình và từ hệ phương trình

Trước tiên, ta xét khái niệm Jacobian của n hàm số theo n biến số như sau.

Định nghĩa 4.12. Giả sử các hàm $F_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, có đạo hàm riêng theo mọi biến tại các điểm trong một miền D. Khi đó, định thức

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

được gọi là Jacobian của các hàm F_i (theo các biến x_i), $i = 1, \ldots, n$. Nếu các đạo hàm riêng được tính tại một điểm $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$ thì định thức sẽ được gọi là Jacobian của các hàm F_i, $i = 1, \ldots, n$, tại x_0 và được ký hiệu là

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{x_0}.$$

Cho phương trình

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0. \tag{4.17}$$

Nếu tồn tại một hàm số $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ xác định trong lân cận Δ của một điểm $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ sao cho

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$$

thì f được gọi là *hàm số ẩn* xác định từ (4.17). Điều kiện tồn tại hàm số ẩn được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.7. *Cho phương trình (4.17). Nếu*

(i) *$F, F_{x_i}, i = 1, \ldots, n$, và F_y liên tục trong một lân cận của điểm $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0)$ và*

(ii) *$F(P_0) = 0$, $F_y(P_0) \neq 0$*

thì

(a) *Tồn tại một lân cận Δ của điểm $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ sao cho (4.17) xác định duy nhất một hàm ẩn $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ trong Δ thỏa $y_0 = f(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ và*

(b) *f liên tục và có các đạo riêng cấp một liên tục trong Δ và*

(c) *$F_y(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$ với mọi $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$.*

Theo kết quả định lý, với mọi $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, ta có

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Lấy đạo hàm theo biến x_i, $i = 1, \ldots, n$, đối với đồng nhất thức trên, ta có

$$F_{x_i} + F_y \cdot f_{x_i} = 0 \Leftrightarrow f_{x_i} = \frac{-F_{x_i}}{F_y} \quad \text{(trong } \Delta).$$

Đặc biệt, ta có

$$f_{x_i}(x_{01},\dots,x_{0n}) = \frac{-F_{x_i}(x_{01},\dots,x_{0n},f(x_{01},\dots,x_{0n}))}{F_y(x_{01},\dots,x_{0n},f(x_{01},\dots,x_{0n}))} = \frac{-F_{x_i}(x_{01},\dots,x_{0n},y_0)}{F_y(x_{01},\dots,x_{0n},y_0)}.$$

Cho hệ phương trình

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0,\\ F_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0,\\ &\vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nếu tồn tại m hàm số $y_j = f_j(x_1,\dots,x_n)$, $j = 1,\dots,m$, trong một lân cận Δ của một điểm $(x_{01},\dots,x_{0n})$ sao cho với mọi $(x_1,\dots,x_n)\in\Delta$

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_n,f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) &= 0,\\ F_2(x_1,\dots,x_n,f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) &= 0,\\ &\vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_n,f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) &= 0. \end{aligned}$$

thì f_j, $j = 1,\dots,m$ được gọi là các hàm số ẩn xác định từ hệ (4.18). Điều kiện tồn tại các hàm số ẩn được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.8. *Cho hệ phương trình* (4.18)*. Nếu*

(i) F_j, *các đạo hàm riêng của* F_j *theo mọi biến,* $j = 1,\dots,m$, *đều liên tục trong một lân cận của điểm* $P_0 = (x_{01},\dots,x_{0n},y_{01},\dots,y_{0m})$ *và*

(ii) $F_j(P_0) = 0$, $j = 1,\dots,m$ *và*

$$\left.\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right|_{P_0} \neq 0,$$

thì

(a) *Tồn tại một lân cận* Δ *của điểm* $(x_{01},\dots,x_{0n})$ *sao cho* (4.18) *xác định duy nhất các hàm ẩn* $y_j = f_j(x_1,\dots,x_n)$ *trong* Δ *thỏa* $y_{0j} = f_j(x_{01},\dots,x_{0n})$, $j = 1,\dots,n$ *và*

(b) f_j, $j = 1,\dots,m$, *liên tục và có các đạo riêng cấp một liên tục trong* Δ *và*

(c) *Với mọi* $P = (x_1,\dots,x_n)\in\Delta$, *ta có*

$$\left.\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right|_{P} \neq 0.$$

Theo kết quả định lý và bằng cách lấy đạo hàm các đồng nhất thức theo các biến x_i, $i = 1,\dots,n$, ta nhận được

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_i},\ k = 1,\dots m,\ i = 1,\dots,n.$$

Từ đó, ta có công thức

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{-\partial(F_1,\dots,F_{j-1},F_j,F_{j+1},\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_{j-1},x_i,y_{j+1},\dots,y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}},\ j = 1,\dots,m,\ i = 1,\dots,n,$$

trong đó, đạo hàm ở vế trái được tính tại $(x_1, \ldots, x_n)$, vế phải thì tại $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, với $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$. Đặc biệt,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n}) = \left.\frac{\dfrac{-\partial(F_1, \ldots, F_{j-1}, F_j, F_{j+1}, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \ldots, y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}}\right|_{P_0}, \ j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n.$$

Theo các trường hợp đã nêu về hàm số ẩn và đạo hàm của hàm số ẩn, ta hãy xét một kết quả cho ta mối liên hệ giữa gradient của một hàm số tại một điểm với đường mức hay mặt mức của hàm số qua điểm đó. Cho hàm số $F(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó, mặt mức của F qua M_0 có phương trình $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$. và nếu $\nabla F(M_0) \neq 0$ thì theo Định lý 4.7, phương trình mặt mức xác định duy nhất hàm số ẩn $z = f(x, y)$ trong lân cận của (x_0, y_0) (giả sử $F_z(M_0) \neq 0$) và tiếp diện với mặt mức tại M_0 có phương trình

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(M_0)(y - y_0) \\ &= \frac{-F_x(M_0)}{F_z(M_0)}(x - x_0) + \frac{-F_x(M_0)}{F_z(M_0)}(y - y_0). \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

và nhận được ý nghĩa sau: $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ là pháp vector của tiếp diện với mặt mức tại (x_0, y_0, z_0) của $F(x, y, z)$ hay gọi tắt là pháp tuyến của mặt mức của $F(x, y, z)$ tại (x_0, y_0, z_0). Đối với trường hợp hai biến có giả thiết tương tự, $\nabla g(x_0, y_0)$ là pháp tuyến của đường mức của $g(x, y)$ tại (x_0, y_0).

Bây giờ, ta xét một đường cong (C) là giao tuyến của hai mặt, có phương trình được cho bởi

$$(C)\colon \begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

trong đó G, F liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (C)$ và

$$\nabla G(M_0) \times \nabla F(M_0) = \left\{ \left.\frac{\partial(G, F)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial(G, F)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial(G, F)}{\partial(x, y)}\right|_{M_0} \right\} \neq 0.$$

Theo Định lý 4.8, tồn tại lân cận của điểm x_0 sao cho trong lân cận này, hệ $G(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ xác định duy nhất cặp hàm số ẩn $y = f(x)$, $z = g(x)$ (giả sử tọa độ thứ nhất của $\nabla G(M_0) \times \nabla F(M_0)$ khác 0) và $y_0 = f(x_0)$, $z_0 = g(x_0)$. Từ đó, trong lân cận của điểm M_0, phương trình (C) có thể được cho dưới dạng

$$(C)\colon \begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x). \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = g(t). \end{cases}$$

và $M_0(t_0, f(t_0), g(t_0))$. Dễ thấy, (C) có tiếp tuyến tại M_0 là đường thẳng

$$(\Delta)\colon \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{f'(x_0)} = \frac{z - z_0}{g'(x_0)}.$$

Mặt khác, từ các đồng nhất thức $G(x, f(x), g(x)) = 0$, $F(x, f(x), g(x)) = 0$ trong lân cận x_0, ta dễ dàng suy ra

$$\begin{aligned} G_x(M_0) + G_y(M_0)f'(x_0) + G_y(M_0)g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla G(M_0) \perp (\Delta) \\ F_x(M_0) + F_y(M_0)f'(x_0) + F_y(M_0)g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla F(M_0) \perp (\Delta) \end{aligned}$$

Theo các kết quả trên, ta gọi $\nabla G(M_0)$, $\nabla F(M_0)$ là các pháp tuyến với (C) tại M_0 và $\nabla G(M_0) \times \nabla F(M_0)$ chính là một vector chỉ phương của tiếp tuyến với (C) tại M_0!

4.3.8. Vi phân

Đối với hàm hai biến, ta cũng xét đến khái niệm *vi phân*, được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.13. Cho hàm số $z = f(x, y)$.

(a) Vi phân của các biến độc lập x, y là các số tùy ý, lần lượt được ký hiệu là ký hiệu là dx, dy.

(b) Vi phân của biến phụ thuộc z (hay của hàm f) tại (x_0, y_0) được ký hiệu là $dz(x_0, y_0)$ hay $df(x_0, y_0)$ và được định nghĩa bởi

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Giả sử z (hay f) có vi phân tại mọi điểm của một tập mở D. Với quy ước giữ dx, dy không đổi khi tính vi phân tại các điểm của D, thì hàm số sau

$$\begin{array}{rccl} F\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \end{array}$$

được gọi là (hàm) vi phân của z hay f, ký hiệu là dz (hay df) và cũng được gọi là vi phân cấp 1 của z (hay f). Rõ ràng ta có,

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

Ta cũng có thể định nghĩa vi phân cấp cao hơn như sau.

Định nghĩa 4.14. Giả sử $z = f(x, y)$ có vi phân cấp 1 là df trong một tập mở D. Nếu df có vi phân tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì vi phân này được ký hiệu là $d^2z(x_0, y_0)$ (hay $d^2f(x_0, y_0)$).

Chú ý. Khi tính vi phân của df, giá trị của dx, dy luôn được xem là không đổi và f thỏa Định lý Schwarz tại (x_0, y_0). Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= d(df)(x_0, y_0) = d\big(f_x dx + f_y dy\big)(x_0, y_0) \\ &= \big(f_x dx + f_y dy\big)_x(x_0, y_0)dx + \big(f_x dx + f_y dy\big)_y(x_0, y_0)dy \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + f_{yx}(x_0, y_0)dydx + f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2 \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2. \end{aligned}$$

Tương tự, với giả thiết df có vi phân tại mọi điểm của D, dx, dy luôn được xem là không đổi và các đạo hàm riêng hỗn hợp thỏa Định lý Schwarz trong D (nghĩa là chúng liên tục trong D) thì ta cũng định nghĩa được (hàm) vi phân cấp 2 của z (hay f). Vi phân này được ký hiệu là d^2z hay d^2f và ta có thể dễ dàng kiểm chứng rằng

$$d^2f = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2.$$

Theo các định nghĩa đã nêu, một cách hoàn toàn tương tự, ta có thể định nghĩa, chẳng hạn, vi phân cấp 2 của hàm ba biến $u = f(x, y, z)$, ký hiệu là d^2u hay d^2f, với

$$d^2f = f_{xx}(dx)^2 + f_{yy}(dy)^2 + f_{zz}(dz)^2 + 2\big(f_{xy}dxdy + f_{xz}dxdz + f_{yz}dydz\big).$$

Chú ý. Ta luôn giả thiết dx, dy, dz không đổi và các đạo hàm riêng hỗn hợp thì thỏa Định lý Schwarz khi xác định các biểu thức vi phân cấp cao.

4.4. Cực trị

Trong mục này ta sẽ xét hai loại cực trị khác nhau về bản chất và khái niệm cực trị đã xét đối với hàm một biến thì được mở rộng trong đoạn cực trị "tự do" dưới đây.

4.4.1. Cực trị tự do cho trường hợp hai biến

Tương tự như đối với hàm số một biến, ta cũng có khái niệm cực trị của hàm số hai biến tại một điểm, là các giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của hàm số khi xét trong một lân cận của điểm đó.

Định nghĩa 4.15. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là có *cực đại* tại điểm (x_0, y_0) nếu tồn tại một lân cận Δ của (x_0, y_0) sao cho $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ với mọi điểm $(x, y) \in \Delta$ và giá trị $f(x_0, y_0)$ được gọi là cực đại của f. Khái niệm *cực tiểu* được xét tương tự khi thay dấu bất đẳng thức trên bởi "$\ge$". Cực đại hay cực tiểu của f được gọi chung là *cực trị* của f.

Chú ý. Theo định nghĩa trên, nếu f là hàm hằng trong một tập mở thì nó đạt cực trị tại mọi điểm của tập này.

Hiển nhiên, hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ có cực tiểu tại $(0, 0)$ nhưng hàm số $g(x, y) = y^2 - x^2$ không có cực trị tại điểm này vì mọi lân cận của $(0, 0)$ đều chứa các điểm $(0, b)$, $(a, 0)$ $(a \ne 0,\ b \ne 0)$ và $g(a, 0) < 0 < g(b, 0)$. Điểm $(0, 0)$ được gọi là điểm *yên ngựa* của $g(x, y)$ và ta có thể hiểu được vì sao điểm này được gọi như vậy khi để ý đến đặc điểm của đồ thị của g. Ngoài ra, lưu ý rằng $f(x, y)$ dù có cực tiểu tại $(0, 0)$ nhưng không có các đạo hàm riêng tại điểm đó.

Tương tự như đối với hàm số một biến, ta cũng chứng minh được bổ đề sau.

Bổ đề 4.1 (Fermat) *Nếu $f(x, y)$ có cực trị tại điểm (x_0, y_0) và nếu tồn tại các đạo hàm riêng tại điểm này thì*

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0.$$

Từ ví dụ và bổ đề trên, ta đi đến điều kiện cần của cực trị như sau: hàm số $f(x, y)$ chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm (x, y) thỏa một trong hai điều kiện

(i) $\nabla f(x, y) = 0$.

(ii) $\nexists \nabla f(x, y)$.

Riêng điểm (x, y) thỏa (i) được gọi là *điểm dừng* của f.

Chú ý. Nếu điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ là điểm trong của miền xác định của $f(x, y)$ và f không có cực đại và cực tiểu tại M_0 thì ta vẫn gọi M_0 là điểm yên ngựa của f. Chẳng hạn, hàm $f(x, y) = -x^3$ có cả một đường thẳng bao gồm các điểm yên ngựa dọc theo trục Oy, mặc dù đồ thị của nó không có dạng một cái yên ngựa khi xét gần một điểm yên ngựa.

Ví dụ 4.11. Khảo sát cực trị của hàm số $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ tại điểm $(0, 0)$, trong đó A, B, C là các hằng số.

Giải. Rõ ràng $(0, 0)$ là điểm dừng của $Q(x, y)$ và là điểm trong của miền xác định của Q. Đặt $\delta = AC - B^2$. Khi đó, ta xét các trường hợp sau:

1. $\delta > 0$: suy ra A, $C \ne 0$ và $Q(x, y)$ được viết thành

$$Q(x, y) = A\left[\left(x + \frac{By}{A}\right)^2 + \delta\frac{y^2}{A^2}\right] = \frac{1}{A}\left[(Ax + By)^2 + \delta y^2\right].$$

Khi đó, nếu $A > 0$ thì $Q(x, y) > 0 = Q(0, 0)$ với mọi $(x, y) \ne (0, 0)$ nên Q có cực tiểu tại $(0, 0)$; nếu $A < 0$ ta có kết luận tương tự và Q có cực đại tại $(0, 0)$.

2. $\delta < 0$: dễ thấy mỗi lân cận của $(0,0)$ đều chứa các điểm (x_1,y_1), (x_2,y_2) sao cho

$$Q(x_1,y_1) < 0 = Q(0,0) < Q(x_2,y_2).$$

   Vậy $(0,0)$ chính là điểm yên ngựa.

3. $\delta = 0$ hay $AC = B^2$: ta chưa có kết luận cụ thể vì có thể có các trường hợp sau
   (a) $Q(x,y) = Cy^2$.
   (b) $Q(x,y) = Ax^2$.
   (c) $Q(x,y) = (Ax+By)^2/A = (Bx+Cy)^2/C$ $(A \neq 0,\ C \neq 0)$.

$\triangleleft$

Để thiết lập điều kiện đủ cho cực trị, ta xét một khái niệm quan trọng, có liên quan đến ví dụ trên, và được cho bởi:

Định nghĩa 4.16. Biểu thức $Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ được gọi là một *dạng toàn phương* theo các biến x, y. Dạng toàn phương $Q(x,y)$ được gọi là *xác định dương* nếu $Q(x,y) > 0$ với mọi $(x,y) \neq (0,0)$ và *nửa xác định dương* nếu $Q(x,y) \geq 0$ với mọi (x,y). Các dạng toàn phương *xác định âm* và *nửa xác định âm* được định nghĩa tương tự.

Trong Ví dụ 4.11, $Q(x,y)$ là
(a) xác định dương (âm) khi và chỉ khi $\delta > 0$ và $A > 0$ $(A < 0)$,
(b) nửa xác định dương hoặc âm khi và chỉ khi $\delta = 0$,
và không thuộc các trường hợp trên trong trường hợp $\delta < 0$.

Tương tự như định nghĩa trên, ta cũng gọi ma trận đối xứng cấp 2

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

là xác định dương (âm) và nửa xác định dương (âm) khi và chỉ khi dạng toàn phương $Q(x,y)$ trên tương ứng là xác định dương (âm) và nửa xác định dương (âm). Vậy, chẳng hạn, ta có:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ là xác định dương} \Leftrightarrow A > 0 \text{ và } AC - B^2 > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ và } \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0. \tag{4.19}$$

Bây giờ, ta sẽ trình bày khái niệm dạng toàn phương dưới dạng ma trận, một hình thức hết sức thuận tiện, có sự kết hợp những nội dung đã xét ở trên. Trước tiên, nếu xem các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ như là các vector cột hay ma trận cấp 2×1:

$$(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

thì ma trận chuyển vị của nó, được ký hiệu là $(x,y)^T$, cũng được gọi là vector hàng và là một ma trận cấp 1×2:

$$(x,y)^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}.$$

Khi đó, với K là ma trận đối xứng cấp 2 đã xét ở trên và $Q(x, y)$ là dạng toàn phương tương ứng, hiển nhiên ta có $Q(x, y) = (x, y)^T \cdot K \cdot (x, y)$. Vậy, ta có thể định nghĩa: K là ma trận xác định dương (hay Q là dạng toàn phương xác định dương) khi và chỉ khi

$$(x, y)^T \cdot K \cdot (x, y) > 0, \text{ với mọi } (x, y) \neq (0, 0). \tag{4.20}$$

Ta cũng có các dạng ma trận tương ứng cho các khái niệm: xác định âm, nửa xác định dương (âm). Dạng (4.20) có thể được mở rộng dễ dàng cho trường hợp ma trận cấp n tổng quát.

Việc phân loại các điểm dừng được cho bởi điều kiện đủ sau đây.

Định lý 4.9. *Cho hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp hai trong một lân cận Δ của điểm dừng (x_0, y_0). Gọi $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$ và $\delta = AC - B^2$. Khi đó, ta có các kết luận được cho trong bảng sau:*

<table>
<tr><td rowspan="2">$\delta > 0$</td><td>$A > 0$</td><td>$f(x_0, y_0)$ là cực tiểu</td></tr>
<tr><td>$A < 0$</td><td>$f(x_0, y_0)$ là cực đại</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td colspan="2">f không đạt cực trị tại (x_0, y_0)</td></tr>
</table>

Chứng minh. Áp dụng công thức Taylor (4.12) với $n = 1$ và chú ý $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\overline{Q}(h, k),$$

trong đó $\overline{Q}(h, k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$ sao cho $(x_0 + h, y_0 + k) \in \Delta$ và

$$\begin{aligned} \alpha &= f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ \beta &= f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ \gamma &= f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \end{aligned}$$

Do f_{xx}, f_{xy} và f_{yy} đều liên tục tại (x_0, y_0) nên tồn tại một lân cận đủ nhỏ của (x_0, y_0) sao cho trong lân cận đó, $\overline{\delta} = \alpha\gamma - \beta^2$ cùng dấu với δ nếu $\delta \neq 0$ và α cùng dấu với A nếu $A \neq 0$. Vậy, tương ứng với các trường hợp đã nêu trong bảng và theo ví dụ đã xét, $\overline{Q}(h, k)$ lần lượt có cực tiểu, cực đại và điểm yên ngựa tại $(0, 0)$ (đối với các trường hợp $\delta > 0$ và $\delta < 0$); từ đó suy ra các kết luận đã nêu. Trong trường hợp $\delta = 0$, ta không thể kết luận được vì tại (x_0, y_0), có thể xảy ra *các trường hợp khác nhau* và ta có thể kiểm chứng điều này đối với các hàm $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = -x^4 - y^4$ và $f_3(x, y) = x^4 - y^4$. ■

Ví dụ 4.12. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 16x^2y^2.$$

Giải. Ta có

$$\begin{cases} f_x(x, y) \equiv (-1/x^2) + 32xy^2 = 0 \\ f_y(x, y) \equiv (-1/y^2) + 32yx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y^2 = 1/32 \\ y^3x^2 = 1/32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2(x - y) = 0 \\ y^3x^2 = 1/32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

Mặt khác, do $f_{xx}(x, y) = (2/x^3) + 32y^2$, $f_{xy}(x, y) = 64xy$ và $f_{yy}(x, y) = (2/y^3) + 32x^2$ nên:

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}(1/2, 1/2) = 24, \\ B &= f_{xy}(1/2, 1/2) = 16, \\ C &= f_{yy}(1/2, 1/2) = 24. \end{aligned}$$

Khi đó $\delta = AC - B^2 = 320 > 0$ và do $A > 0$ nên $f(1/2, 1/2) = 5$ là cực tiểu. ◁

Ví dụ 4.13. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = x^2 y e^{-x^2-y^2}.$$

GIẢI. Ta tìm điểm dừng của f bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv y\big[2xe^{-x^2-y^2} + x^2 e^{-x^2-y^2}(-2x)\big] = 0, \\ f_y(x,y) \equiv x^2\big[e^{-x^2-y^2} + ye^{-x^2-y^2}(-2y)\big] = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(1-x^2) = 0, \\ x^2(1-2y^2) = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy tập nghiệm của hệ trên là $\big\{(0,y_0),\ \big(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\big),\ \big(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\big),\ \big(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\big),\ \big(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\big\}$, trong đó y_0 là số tùy ý.

Ở đây ta chỉ xét tính cực trị tại các điểm dừng dạng $(0,y_0)$ $(y_0 \in \mathbb{R})$. Dễ thấy tại những điểm này $\delta \equiv AC - B^2 = 0$ nên ta không thể áp dụng điều kiện đủ. Để xét trực tiếp, ta chia thành các trường hợp sau:

(a) $y_0 = 0$: Do mỗi lân cận Δ của $(0,0)$ đều chứa ít nhất hai điểm M, N sao cho

$$f(N) < 0 = f(0,0) < f(M),$$

nên f không đạt cực trị tại $(0,0)$.

(b) $y_0 > 0$: Rõ ràng, trong trường hợp này, tồn tại một lân cận Δ của $(0,y_0)$ sao cho Δ nằm phía trên trục Ox. Vậy,

$$f(0,y_0) = 0 \le f(M),\ \forall M \in \Delta.$$

Từ đó suy ra f đạt cực tiểu tại $(0,y_0)$.

(c) $y_0 < 0$: Lý luận tương tự như trường hợp trên, ta suy ra f đạt cực đại tại $(0,y_0)$.

◁

Ví dụ 4.14. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},$$

với điều kiện $x > 0$ và $y > 0$. Chứng minh rằng hàm số f cũng đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm cực trị của nó.

GIẢI. Điểm dừng của f là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ f_y(x,y) \equiv x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2 - 50 = 0 \\ xy^2 - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5y \\ y^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 =: x_0 \\ y = 2 =: y_0. \end{cases}$$

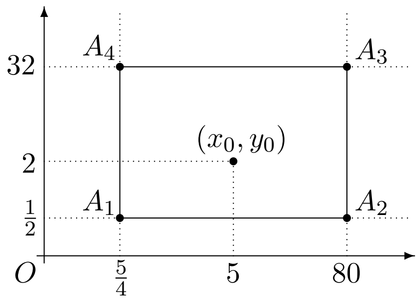
Nếu tính các đạo hàm cấp hai của f và dùng điều kiện đủ, ta có thể kết luận $f(x_0,y_0) = 30$ là cực tiểu của f. Bây giờ, ta xét một số lớn hơn 30, chẳng hạn là 40 và xác định x sao cho $50/x \ge 40$ hay

$$0 < x \le \frac{5}{4}. \tag{4.21}$$

Tương tự, ta cũng xác định được điều kiện

$$0 < y \le \frac{1}{2} \tag{4.22}$$

để $20/y \ge 40$. Bây giờ, ta lại xét các trường hợp với điều kiện tương ứng sau:



Hình 4.4: Tập D và phần bên ngoài.

(i) Nếu $y \geq \frac{1}{2}$ thì $xy \geq x/2$ và như vậy $xy \geq 40$ khi $x \geq 80$.

(ii) Nếu $x \geq \frac{5}{4}$ thì $xy \geq 5y/4$ và như vậy $xy \geq 40$ khi $y \geq 32$.

Vậy, nếu gọi D là hình chữ nhật có các đỉnh $A_1(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$, $A_2(80, \frac{1}{2})$, $A_3(80, 32)$ và $A_4(\frac{5}{4}, 32)$ thì theo các điều kiện (4.21), (4.22) đã xây dựng trên, $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, với $(x, y) \notin D$ hay $(x, y) \in \partial D$. Mặt khác, do f liên tục trên D là tập đóng và bị chặn, (x_0, y_0) là điểm trong của D nên dễ dàng suy ra f đạt được giá trị nhỏ nhất trên D tại (x_0, y_0). Từ đó, theo nhận xét đã nêu, $f(x_0, y_0) = 30$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của f trên miền $x > 0$, $y > 0$. $\triangleleft$

4.4.2. Cực trị tự do cho trường hợp n biến

Định nghĩa về cực trị cho hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được mở rộng dễ dàng từ định nghĩa đã nêu cho trường hợp hai biến. Ở đây, sự mở rộng của các điều kiện cần và điều kiện đủ sẽ được khảo sát thông qua sự mở rộng các khái niệm điểm dừng, vi phân, dạng toàn phương và sự mở rộng công thức Taylor. Mặt khác, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ được xem là vector n-chiều, có biểu diễn là một ma trận cấp $n \times 1$, cũng được gọi là vector cột và ma trận chuyển vị của nó, được viết là x^T, được gọi là vector hàng và là một ma trận cấp $1 \times n$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Nếu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt cực trị tại $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ và nếu tại đó tồn tại gradient $\nabla f(x_0)$ thì $\nabla f(x_0) = 0$ hay

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_0) &= 0 \\ f_{x_2}(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ngoài ra, f cũng có thể đạt cực trị tại các điểm $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \in \mathbb{R}^n$, nhưng $\nexists \nabla f(x_1)$. Các điểm thỏa hệ (4.23) được gọi là các điểm dừng của f.

Định nghĩa 4.17. Cho $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng f_{x_i} trong một tập mở D, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi phân của biến độc lập x_i là một số tùy ý và được ký hiệu là dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vi phân của u hay f là biểu thức, được ký hiệu du hay df, và được định nghĩa bởi

$$du = df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} dx_i.$$

Giá trị $\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)dx_i$ được gọi là vi phân của u hay f tại $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ và được ký hiệu là $du(x_0)$ $(df(x_0))$. Ta cũng gọi du (df) hay $du(x_0)$ $(df(x_0))$ tương ứng là vi phân cấp 1 của f hay vi phân cấp 1 của f tại x_0.

Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp hai trong một tập mở D thì, tương tự như đối với hàm hai biến, ta có $f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}$ trong D, với $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, nếu xem các dx_i là hằng, $i = 1, 2, \ldots, n$, thì vi phân cấp 2 của f (tại x_0), được ký hiệu là d^2f $(d^2f(x_0))$, và được định nghĩa là vi phân của df (tại x_0). Vậy

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}dx_i\Big) &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\Big)_{x_j} dx_i\Big] dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_ix_i} dx_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} f_{x_ix_j} dx_i dx_j \quad (dx_i^2 = (dx_i)^2). \\ d^2f(x_0) &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_ix_i}(x_0) dx_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} f_{x_ix_j}(x_0) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Nếu $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ thì công thức Taylor (4.12) trở thành:

$$\begin{aligned} f(x_0 + dx) &= \sum_{m=0}^{\ell} \frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\Big)^m f(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{(\ell+1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\Big)^{\ell+1} f(x_0 + \theta dx) \quad (0 < \theta < 1) \\ &= \sum_{m=0}^{\ell} \frac{1}{m!}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\Big)^m f(x_0) + \frac{1}{(\ell+1)!}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\Big)^{\ell+1} f(x_0 + \theta dx). \end{aligned}$$

Đặc biệt, khi $\ell = 1$ ta có

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T \cdot dx + \frac{1}{2} dx^T \cdot K(x_0 + \theta dx) \cdot dx, \tag{4.24}$$

trong đó

$$K = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

là một (hàm) ma trận cấp $n \times n$, $K(x)$ được gọi là (ma trận) Hessian của f tại $x \in \Delta$ và được ký hiệu là $\operatorname{Hess} f(x)$. Vì theo giả thiết, f có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp 2 trong lân cận Δ của điểm $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ nên $\operatorname{Hess} f(x)$ là một ma trận đối xứng tại mọi điểm $x \in \Delta$.

Chú ý. Trong trường hợp n-chiều, để chỉ các đại lượng có thể nhận các giá trị tùy ý (thường là theo nghĩa "nhỏ" tùy ý), ta đã dùng các vi phân dx_i của các biến x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, và vector cột

dx để chỉ "độ lệch" từ điểm x_0. Trong biểu diễn (4.24), ta có thể nói rằng, giá trị của f trong Δ phụ thuộc vào gradient và Hessian của f tại x_0, với $\nabla f(x_0)$ cung cấp thông tin về điểm cực trị của f, còn Hess $f(x_0)$ giúp phân loại điểm cực trị. Đặc biệt lưu ý rằng $dx^T \cdot \operatorname{Hess} f(x_0) \cdot dx = d^2 f(x_0)$.

Để đi đến điều kiện đủ của cực trị hàm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ta xét định nghĩa tổng quát về dạng toàn phương sau.

Định nghĩa 4.18. Biểu thức

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

trong đó, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, được gọi là một dạng toàn phương của n biến x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Dạng toàn phương $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là xác định dương khi và chỉ khi

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

hay

$$x^T \cdot A \cdot x > 0, \ \forall x \neq 0,$$

trong đó, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $A = [a_{ij}]$ là một ma trận đối xứng, thường được gọi là ma trận hệ số của dạng toàn phương Q. (Điều kiện trên cũng thường được dùng làm định nghĩa cho tính xác định dương của ma trận đối xứng A.)

Các khái niệm nửa xác định dương, xác định âm, nửa xác định âm cũng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đối với trường hợp dạng toàn phương của hai biến. Ma trận đối xứng A được gọi là *không xác định* nếu nó không là nửa xác định dương và cũng không là nửa xác định âm; nghĩa là, tồn tại các điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sao cho $Q(x) > 0$ và $Q(y) < 0$. Để chỉ rõ các điều kiện để một ma trận đối xứng có các tính chất đã nêu, ta xét khái niệm *định thức con chính* của một ma trận.

Cho ma trận cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, các định thức sau đây được gọi là các định thức con chính của A.

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Định lý 4.10 (Sylvester) *Cho A là ma trận đối xứng cấp n. Khi đó,*

(a) *A là xác định dương khi và chỉ khi mọi định thức con chính đều dương.*

(b) *A là nửa xác định dương nếu mọi định thức con chính đều không âm.*

(c) *A là xác định âm nếu mọi định thức con chính cấp lẻ đều âm và mọi định thức con chính cấp chẵn đều dương.*

(d) *A là nửa xác định âm nếu mọi định thức con chính cấp lẻ đều không dương và mọi định thức con chính cấp chẵn đều không âm.*

A là không xác định nếu nó không thỏa mọi trường hợp đã xét ở trên.

Trong trường hợp $dx^T \cdot \text{Hess}f(x_0) \cdot dx = d^2f(x_0) \neq 0$ thì tồn tại một lân cận đủ nhỏ của x_0 sao cho trong lân cận này (với $dx \neq 0$) thì $dx^T \cdot K(x_0 + \theta dx) \cdot dx$ cùng dấu với $d^2f(x_0)$. Theo biểu diễn Taylor (4.24), ta sẽ xét một điều kiện đủ của cực trị chỉ dựa vào điều kiện $d^2f(x_0) \neq 0$, theo các trường hợp $d^2f(x_0) > 0$ hay $d^2f(x_0) < 0$, mà về nguyên tắc có thể dựa theo Định lý Sylvester để khảo sát ma trận đối xứng $\text{Hess}f(x_0)$. Tuy nhiên, trên thực tế ta có thể kiểm tra trực tiếp các điều kiện đã nêu trong định lý dưới đây.

Định lý 4.11. *Cho hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp hai trong lân cận của điểm dừng $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Xét*

$$d^2f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_ix_i}(x_0)dx_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} f_{x_ix_j}(x_0)dx_idx_j.$$

Khi đó, ta có các kết luận tương ứng với các trường hợp sau.

(a) *Nếu $d^2f(x_0) > 0$ đối với mọi dx_i đủ nhỏ, $i = 1, 2, \ldots, n$, không đồng thời bằng 0, thì f đạt cực tiểu tại x_0.*

(b) *Nếu $d^2f(x_0) < 0$ đối với mọi dx_i đủ nhỏ, $i = 1, 2, \ldots, n$, không đồng thời bằng 0, thì f đạt cực đại tại x_0.*

(c) *Nếu $d^2f(x_0)$ luôn nhận các giá trị trái dấu khi chọn thích hợp các giá trị đủ nhỏ của dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, thì f không đạt cực trị tại x_0.*

Ví dụ 4.15. Tìm và phân loại các điểm dừng của hàm số $f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$.

GIẢI. Trước tiên, ta tìm các điểm dừng của f bằng cách giải hệ

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &\equiv yz - 2x = 0, \\ f_y(x, y, z) &\equiv xz - 2y = 0, \\ f_z(x, y, z) &\equiv xy - 2z = 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy, (x, y, z) là nghiệm của hệ khi và chỉ khi:

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (2, 2, 2), (-2, -2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2)\}.$$

Mặt khác, tại mọi điểm (x, y, z), ta có:

$$\begin{aligned} &f_{xx}(x, y, z) = f_{yy}(x, y, z) = f_{zz}(x, y, z) = -2, \\ &f_{xy}(x, y, z) = z,\ f_{xz}(x, y, z) = y,\ f_{yz}(x, y, z) = x. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ chỉ xét tính cực trị của f tại các điểm $(0, 0, 0)$ và $(-2, -2, 2)$. Các điểm còn lại sẽ được xét tương tự. Đối với điểm $(0, 0, 0)$, ta có:

$$d^2f(0, 0, 0) = -2\big[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\big].$$

Rõ ràng $d^2f(0, 0, 0) < 0$ với mọi $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$. Vậy, f có cực đại tại $(0, 0, 0)$. Đối với điểm $(-2, -2, 2)$, ta có

$$d^2f(-2, -2, 2) = 2\big[-(dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 + 2dxdy - 2dxdz - 2dydz\big].$$

Để khảo sát dấu của $d^2f(-2, -2, 2)$, ta xét hai cách chọn sau:

(i) $dx \neq 0$ và $dy = dz = 0$: $d^2f(-2,-2,2) = -4(dx)^2 < 0$.

(ii) $dx = dy = -dz \neq 0$: $d^2f(-2,-2,2) = 6(dz)^2 > 0$.

Từ kết quả trên, ta có thể kết luận f không có cực trị tại $(-2,-2,2)$. ◁

CHÚ Ý. Ta có thể dùng Định lý Sylvester để kiểm chứng tính xác định âm, dương của ma trận Hess$f$ tại các điểm đã xét. Chẳng hạn:

$$\text{Hess}\, f(-2,-2,2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

có các định thức con chính $A_1 = -2$, $A_2 = 0$ và $A_3 = 32$. Vậy, theo Định lý Sylvester, Hess $f(-2,-2,2)$ là ma trận không xác định nên f không đạt cực trị tại $(-2,-2,2)$.

4.4.3. Cực trị của hàm bậc hai

Trước tiên, ta nhắc lại ở đây việc tìm cực trị của hàm bậc hai một biến thực

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c \quad (a \neq 0). \tag{4.25}$$

Với $a > 0$ thì điểm cực tiểu của f có thể được tìm từ nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hay

$$2ax + 2b = 0.$$

Hiển nhiên, phương trình có nghiệm duy nhất là $x^* = -b/a$ và $f(x^*) = c - (b^2/a)$. Để khẳng định giá trị $f(x^*)$ là cực tiểu, ta có thể dùng điều kiện đạo hàm cấp hai và quả thật nó chính là cực tiểu vì $f''(x^*) = 2a > 0$. Tuy nhiên, những lập luận trên vẫn chưa đủ để kết luận f *đạt giá trị nhỏ nhất tại* x^*!

Bài toán trên có thể được giải quyết dễ dàng bằng phép biến đổi đại số sơ cấp:

$$f(x) = a\Big(x + \frac{b}{a}\Big)^2 + c - (b^2/a).$$

Do $a > 0$ nên $f(x) \geq c - (b^2/a)$, với mọi x và $f(x)$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất của nó tại $x^* = -b/a$, là nghiệm của $x + (b/a) = 0$. Phương pháp hiệu quả này (so với cách dùng đạo hàm) có thể được mở rộng cho việc tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số *bậc hai* của n biến

$$q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c, \tag{4.26}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $a_{ij} = a_{ji}$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ta viết lại (4.26) dưới dạng ma trận:

$$q(x) = x^T \cdot A \cdot x - 2x^T \cdot b + c, \tag{4.27}$$

trong đó $A = [a_{ij}]$ là ma trận đối xứng cấp n và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Lưu ý rằng, để nhận được duy nhất cực tiểu cho trường hợp (4.25), ta phải có điều kiện: hệ số bậc hai a là một số dương. Điều kiện tương ứng cho trường hợp (4.27) là ma trận hệ số A là xác định dương. Giả thiết này đưa đến một kết quả tổng quát sau đây.

Định lý 4.12. *Nếu A là xác định dương thì hàm bậc hai $q(x)$ có duy nhất một điểm cực tiểu x^*, là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A \cdot x = b$, nghĩa là $x^* = A^{-1}b$. Giá trị cực tiểu tương ứng $q(x^*)$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của q trong $\mathbb{R}^n$.*

CHỨNG MINH. Do A không suy biến nên hệ $A \cdot x = b$ có nghiệm duy nhất $x^* = A^{-1} \cdot b$. Khi đó, với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có thể viết

$$\begin{aligned} q(x) &= x^T \cdot A \cdot x - 2x^T \cdot b + c = x^T \cdot A \cdot x - 2x^T \cdot A \cdot x^* + c \\ &= (x - x^*)^T \cdot A \cdot (x - x^*) + [c - (x^*)^T \cdot A \cdot x^*] = (x - x^*)^T \cdot A \cdot (x - x^*) + q(x^*), \end{aligned}$$

trong đó, ta đã dùng tính chất $A = A^T$ và $x^T \cdot A \cdot x^* = (x^*)^T \cdot A \cdot x$. Do số hạng thứ nhất trong biểu thức cuối cùng ở trên có dạng $y^T \cdot A \cdot y$, với $y = x - x^*$, và do K là xác định dương nên $y^T \cdot A \cdot y > 0$ với mọi $y \neq 0$. Vậy, số hạng đó đạt giá trị nhỏ nhất của nó là 0 chỉ tại $y = 0$ hay $x = x^*$. Từ đó suy ra $q(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất (trong $\mathbb{R}^n$) chỉ tại giá trị $x = x^*$ và giá trị nhỏ nhất đó là $q(x^*) = c - (x^*)^T \cdot A \cdot x^*$. ■

CHÚ Ý. Trong chứng minh trên, bạn đọc hãy tự kiểm chứng rằng: nếu A không suy biến thì $q(x)$ có duy nhất một điểm dừng, chính là $x^* = A^{-1} \cdot b$.

Ví dụ 4.16. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5$.
GIẢI. Theo (4.26), với $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, ma trận $A = [a_{ij}]$, i, $j = 1, 2$, có các phần tử:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 3.$$

Khi đó, f có thể được viết dưới dạng:

$$f(x, y) = (x, y)^T \cdot A \cdot (x, y) - 2(x, y)^T \cdot (-1, 2) + 5.$$

Do các định thức con chính của A đều dương nên A là ma trận xác định dương. Theo định lý trên $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại điểm (x_0, y_0), với

$$(x_0, y_0) = A^{-1} \cdot (-1, 2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Hơn nữa, $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$ chính là giá trị nhỏ nhất của f trong $\mathbb{R}^2$. ◁

CHÚ Ý. Trong ví dụ trên, sau khi kết luận A là ma trận xác định dương, ta có thể tìm trực tiếp (x_0, y_0) từ việc giải hệ sau mà không cần phải tìm ma trận A^{-1}:

$$\begin{cases} f_x(x, y) \equiv 2x - 2y + 2 = 0 \\ f_y(x, y) \equiv 6y - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4.4.4. Phương pháp bình phương nhỏ nhất

Trước hết, ta xét một bài toán thực tế sau: " Một em bé được theo dõi sự tăng trọng từ lúc mới được sinh ra trong một vài tháng đầu. Trọng lượng của bé được ghi lại trong bảng số liệu sau:

t (tháng)	1	2	3	4
P (kg)	4,1	5,2	6	6,7

Hãy dự đoán đến thôi nôi ($t = 12$) thì trọng lượng của bé là bao nhiêu?"

Giải. Do P tăng "khá đều" nên có thể xem tốc độ biến thiên của P là hằng số, nghĩa là ta có thể chọn $P = at + b$ và gọi đây là một *công thức thực nghiệm* để xác định P. Nếu gọi P_{tn}, P_{tt} lần lượt là các giá trị nhận được từ công thức thực nghiệm và giá trị nhận được qua các phép đo thực tế, ta có bảng so sánh sau:

t	P_{tn}	P_{tt}	Sai số
1	$a+b$	$4,1$	$\Delta_1 = a+b-4,1$
2	$2a+b$	$5,2$	$\Delta_2 = 2a+b-5,2$
3	$3a+b$	6	$\Delta_3 = 3a+b-6$
4	$4a+b$	$6,7$	$\Delta_4 = 4a+b-6,7$

Vấn đề đặt ra ở đây là xác định các tham số a, b sao cho công thức thực nghiệm phản ánh được quy luật biến thiên của các cặp số liệu trên. Cụ thể hơn, ta cần tìm điểm (a, b) sao cho các P_{tn} đều "gần" với các P_{tt} tương ứng. Một trong các giải pháp được chọn là tìm (a, b) sao cho "tổng bình phương các sai số" đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là hàm

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 \\ &= (a+b-4,1)^2 + (2a+b-5,2)^2 + (3a+b-6)^2 + (4a+b-6,7)^2 \end{aligned}$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Hiển nhiên rằng nếu có điểm $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ như vậy thì nó cũng sẽ là điểm cực trị (tự do) của F và theo Bổ đề Fermat, ta phải có

$$\begin{aligned} \begin{cases} F_a(a,b) = 0 \\ F_b(a,b) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-4,1+2(2a+b-5,2)+3(3a+b-6)+4(4a+b-6,7) = 0 \\ a+b-4,1+2a+b-5,2+3a+b-6+4a+b-6,7 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 30a+10b = 59,3 \\ 10a+4b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,86 =: a_0 \\ b = 3,35 =: b_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, $P = (0,86)t + 3,35$ và $P(12) = 13,67\,kg$. Với công thức thực nghiệm tìm được, ta thấy các giá trị của P_{tn} và P_{tt} rất "gần nhau" (theo ý nghĩa thực tế của bài toán đang xét):

t	P_{tn}	P_{tt}
1	$4,21$	$4,1$
2	$5,07$	$5,2$
3	$5,93$	6
4	$6,79$	$6,7$

Từ đó, có thể dự đoán rằng giá trị thực tế của P khi $t = 12$ chắc cũng rất gần với $13,67\,\text{kg}$.

Chú ý. Nếu điểm (a, b) cần tìm là điểm mà tại đó F đạt giá trị lớn nhất thì theo lý luận của chúng ta, nó cũng vẫn là điểm $M(a_0, b_0)$! Trong trường hợp tổng quát, ta sẽ chứng minh rằng phương pháp trên sẽ cho kết quả là điểm mà tại đó hàm tổng bình phương các sai số đạt giá trị nhỏ nhất.

Giả sử các biến x và y có quan hệ hàm số và các giá trị tương ứng của chúng được cho bởi bảng dưới đây:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Ta tìm công thức thực nghiệm dạng

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_m),$$

trong đó, C_1, C_2,..., C_m là các tham số. Vấn đề là cần xác định các tham số sao cho tổng bình phương các sai số (giữa các giá trị của y tính bằng công thức thực nghiệm với các giá trị của y tương ứng đã cho trong bảng) đạt giá trị nhỏ nhất. Vậy, ta tìm điểm $(C_1, C_2, \ldots, C_m) \in \mathbb{R}^m$ sao cho tại đó, hàm số

$$F(C_1, C_2, \ldots, C_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, C_1, C_2, \ldots, C_m) - y_i \right]^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Nếu F có các đạo hàm riêng tại $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$ thì điểm này phải là nghiệm của hệ

$$\frac{\partial F}{\partial C_j}(C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, C_1, C_2, \ldots, C_m) - y_i \right] \frac{\partial f}{\partial C_j}(x_i, C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.28}$$

Trên thực tế, tùy theo bài toán được khảo sát mà ta thường dùng một trong các công thức thực nghiệm có dạng sau đây:

$$y = f(x, a, b) = ax + b \tag{4.29}$$

$$y = f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c \tag{4.30}$$

$$y = f(x, a, b) = ae^{bx} \tag{4.31}$$

$$y = f(x, a, b) = a\ln(bx). \tag{4.32}$$

Nếu (4.25) là công thức thực nghiệm được chọn thì F là hàm số

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{4.33}$$

Hiển nhiên F chính là hàm bậc hai theo a, b và có thể được viết dưới dạng

$$F(a, b) = (a, b)^T \cdot A \cdot (a, b) - 2(a, b)^T \cdot B + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

trong đó,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Do $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ và $n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 > 0$ (theo bất đẳng thức Bunhiacovsky) nên ma trận đối xứng A là xác định dương. Theo định lý đã nêu thì $F(a, b)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm duy nhất của hệ

$$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \tag{4.34}$$

Hệ (4.34) cũng chính là hệ nhận được khi xác định hệ (4.28) trong trường hợp (4.29) là công thức thực nghiệm được chọn. Tất nhiên, nếu hàm tổng bình phương sai số F không phải là bậc hai theo các tham số thì ta vẫn phải tìm điểm $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$ từ hệ (4.28).

Chú ý. Các trường hợp công thức thực nghiệm dạng (4.31), (4.32) có thể được xác định bằng cách đưa về trường hợp của (4.29). Bạn đọc hãy thử xác định các tham số a, b, c trong công thức thực nghiệm cần tìm dạng (4.30).

4.4.5. Cực trị có điều kiện

Trên mặt phẳng Oxy, xét đường cong $(C)\colon g(x,y)=0$. Ta sẽ xét khái niệm cực trị của hàm $f(x,y)$ "trên (C)" tại điểm $(x_0,y_0)\in(C)$.

Định nghĩa 4.19. Hàm số $f(x,y)$ được gọi là có *cực đại có điều kiện* $g(x,y)=0$ tại điểm (x_0,y_0) nếu tồn tại một lân cận Δ của (x_0,y_0) sao cho $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ với mọi $(x,y)\in\Delta\cap(C)$ và giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là cực đại có điều kiện $g(x,y)=0$ của f. Khái niệm *cực tiểu có điều kiện* được định nghĩa tương tự khi thay bất đẳng thức trên bởi "$\ge$". Cực đại hay cực tiểu có điều kiện của f được gọi chung là cực trị có điều kiện của f.

Ta thử xét một ứng dụng hình học của khái niệm cực trị có điều kiện vừa nêu. Trước tiên, nhắc lại rằng, trong $\mathbb{R}^2$, *họ đường cong bậc hai* là họ đường cong có phương trình dạng

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,\quad a^2+b^2+c^2\neq 0.$$

Với việc chọn hệ tọa độ thích hợp, thì họ trên được đưa về phương trình của các tập điểm trên $\mathbb{R}^2$ thuộc một trong các loại sau:

(a) Tập rỗng.

(b) Tập chỉ có một điểm.

(c) Tập gồm một hay hai đường thẳng, do phương trình được đưa về dạng

$$(a_1X+b_1Y+c_1)\cdot(a_2X+b_2Y+c_2)=0.$$

(d) Tập gồm một trong các đường conic

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=1,\quad \frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}=\pm1,\quad Y^2=\pm2pX,\quad X^2=\pm2pY.$$

Bây giờ bài toán đặt ra là: Không dùng các phép quay trục, hãy xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của *ellip*:

$$(E)\colon 5x^2+8xy+5y^2-9=0.$$

Để giải bài toán trên, ta có nhận xét: gốc $O(0,0)$ là tâm đối xứng của (E) vì $(x,y)\in(E)\Leftrightarrow(-x,-y)\in(E)$. Xét $M(x,y)\in(E)$ và đặt $d=OM$. Theo yêu cầu của bài toán, ta cần tìm các điểm $M(x,y)\in(E)$ (nghĩa là thỏa điều kiện $5x^2+8xy+5y^2-9=0$) sao cho $d=OM=\sqrt{x^2+y^2}$ đạt giá trị lớn nhất (ứng với các đỉnh trên trục lớn) và đạt giá trị nhỏ nhất (ứng với các đỉnh trên trục nhỏ). Như vậy, bài toán trên đưa đến việc xác định các điểm mà tại đó hàm số $f(x,y)=x^2+y^2$ đạt cực đại, cực tiểu có điều kiện $5x^2+8xy+5y^2-9=0$.

Trở lại trường hợp tổng quát, để xác định các điểm mà tại đó, hàm số f có thể có cực trị có điều kiện, ta có thể dựa vào điều kiện cần, được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.13. *Cho hàm số $f(x,y)$ và đường cong $(C)\colon g(x,y)=0$, với f và g có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $(x_0,y_0)\in(C)$ và $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$. Khi đó, nếu f có cực trị có điều kiện $g(x,y)=0$ tại (x_0,y_0) thì tồn tại số λ_0 sao cho*

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y(x_0,y_0)=0.\end{cases}\tag{4.35}$$

Chứng minh. Theo định lý về hàm số ẩn, (C) có tiếp tuyến tại (x_0, y_0) và $\nabla g(x_0, y_0)$ chính là pháp tuyến với (C) tại đó. Rõ ràng, nếu $\nabla f(x_0, y_0)$ không cùng phương với $\nabla g(x_0, y_0)$ thì nó sẽ có hình chiếu $\vec{v} \neq 0$ trên tiếp tuyến (vì $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$). Khi đó, do $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \cdot D_{-\vec{v}} f(x_0, y_0) < 0$ nên f không thể có cực trị có điều kiện $g(x, y) = 0$ tại (x_0, y_0), trái giả thiết. Vậy, $\nabla f(x_0, y_0)$ phải cùng phương với $\nabla g(x_0, y_0)$ và do $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ nên tồn tại λ_0 sao cho $\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$ hay ta có (4.35). ■

Trên thực tế, các giá trị x_0, y_0 và λ_0 đều chưa biết nên để xác định các giá trị này, ta cần kết hợp với điều kiện $g(x_0, y_0) = 0$. Khi đó, theo kết luận của định lý trên, ta có thể nói: tồn tại λ_0 sao cho (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Nếu đặt $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ thì hệ (4.36) trở thành

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{4.37}$$

Hàm $L(x, y)$ còn được gọi là hàm Lagrange.

Đối với bài toán đã nêu ở trên, ta để ý rằng $f(x, y) = x^2 + y^2$ liên tục trên (E) là một tập đóng và bị chặn nên f đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên (E) tại các điểm (x, y) đồng thời là các điểm cực trị có điều kiện $g(x, y) = 0$ (với $g(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9$). Theo điều kiện đã nêu, các điểm này phải thỏa hệ

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5\lambda x + 4\lambda y = 0 \\ (x - y)(1 + \lambda) = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0. \end{cases} \quad (L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9))$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \Big\{ \underset{(\lambda=-1/9)}{A\big(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\big)}, \underset{(\lambda=-1/9)}{B\big(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big)}, \underset{(\lambda=-1)}{C\big(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}\big)}, \underset{(\lambda=-1)}{D\big(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}\big)} \Big\}$$

Do $f(A) = f(B) = 1$, $f(C) = f(D) = 9$ nên suy ra A, B là các đỉnh trên trục nhỏ và C, D là các đỉnh trên trục lớn; ngoài ra, độ dài nửa trục lớn $a = \sqrt{9} = 3$, nửa trục nhỏ $b = \sqrt{1} = 1$, nửa tiêu cự $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Do tiêu điểm nằm trên đường thẳng (CD) nên tọa độ các tiêu điểm là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Để phân loại các điểm (x_0, y_0, λ_0) thỏa hệ (4.36), ta xét hàm Lagrange

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda_0 g(x, y),$$

với các giả thiết $f(x, y)$, $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp hai trong lân cận của điểm $(x_0, y_0) \in (C)$: $g(x, y) = 0$ và $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Do (x_0, y_0) là điểm dừng của $L(x, y)$ nên theo công thức Taylor, ta có

$$L(x, y) - L(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)^T \cdot K\big(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)\big) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

trong đó:

$$K = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}.$$

Khi xét trên (C), ta có

$$L(x, y) - L(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0), \quad g(x, y) = 0.$$

Bằng cách đặt $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ thì dấu của $L(x, y) - L(x_0, y_0)$ hay $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ chỉ phụ thuộc vào dấu của $(dx, dy)^T \cdot K(x_0) \cdot (dx, dy) = d^2L(x_0, y_0)$ nếu $d^2L(x_0, y_0) \neq 0$. Ngoài ra, do $g(x, y) = 0$ nên dx, dy sẽ phụ thuộc nhau theo hệ thức $dy = y'(x_0)dx$ hay

$$g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0,$$

do công thức tính đạo hàm của hàm số ẩn. Từ các kết quả trên, ta đi đến điều kiện đủ của cực trị có điều kiện sau đây.

Định lý 4.14. *Giả sử $f(x, y)$, $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp hai trong lân cận của điểm $(x_0, y_0) \in (C)$: $g(x, y) = 0$, với $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ và (x_0, y_0, λ_0) thỏa hệ (4.36). Đặt $\delta = d^2L(x_0, y_0) = L_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2L_{xy}(x_0, y_0)dxdy + L_{yy}(x_0, y_0)dy^2$, với $L(x, y) = f(x, y) + \lambda_0 g(x, y)$ là hàm Lagrange. Khi đó, ta có các kết quả sau:*

(a) *Nếu $\delta > 0$ với mọi dx, dy đủ nhỏ sao cho $(dx, dy) \neq (0, 0)$ và $g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0$, thì f có cực tiểu có điều kiện $g(x, y) = 0$ tại (x_0, y_0).*

(b) *Nếu $\delta < 0$ với mọi dx, dy đủ nhỏ sao cho $(dx, dy) \neq (0, 0)$ và $g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0$, thì f có cực đại có điều kiện $g(x, y) = 0$ tại (x_0, y_0).*

(c) *Nếu δ luôn nhận ít nhất hai giá trị trái dấu đối với mọi giá trị của dx, dy thỏa $(dx, dy) \neq (0, 0)$ và $g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0$, thì f không có cực trị có điều kiện $g(x, y) = 0$ tại (x_0, y_0).*

Chú ý. Định lý trên được mở rộng dễ dàng để xác định cực trị có điều kiện của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, với điều kiện $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Ví dụ 4.17. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với điều kiện $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ $(a > 0)$.

Giải. Đặt $g(x, y) = 1/x^2 + 1/y^2 - 1/a^2$ và xét hàm Lagrange $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Khi đó, dễ thấy hệ

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

có nghiệm $x = y = -2\lambda$, với $\lambda = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ở đây ta chỉ xét trường hợp $\lambda = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ứng với điểm $x = y = -a\sqrt{2}$ và hàm Lagrange $L(x, y) = f(x, y) + \frac{a\sqrt{2}}{2}g(x, y)$. Khi đó, với $\delta = d^2L(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ và điều kiện $g_x(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})dx + g_y(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})dy = 0$, ta dễ dàng đi đến các kết quả:

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{4a^3}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right], \quad dx + dy = 0.$$

Từ đó suy ra f có cực tiểu có điều kiện $g = 0$ tại điểm $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$. Tương tự cho trường hợp $\lambda = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ta có kết luận: f có cực đại có điều kiện $g = 0$ tại điểm $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$. $\triangleleft$

Trong không gian, xét đường cong (C) là giao của các mặt $(S_1)\colon F(x,y,z)=0$, $(S_2)\colon G(x,y,z)=0$. Ta sẽ mở rộng khái niệm cực trị có điều kiện cho hàm $f(x,y,z)$ với các điều kiện $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ qua định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.20. Hàm số $f(x,y,z)$ được gọi là có *cực đại có điều kiện* $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ tại điểm (x_0,y_0,z_0) nếu tồn tại một lân cận Δ của (x_0,y_0,z_0) sao cho $f(x,y,z)\le f(x_0,y_0,z_0)$ với mọi $(x,y,z)\in\Delta\cap(C)$ và giá trị $f(x_0,y_0,z_0)$ được gọi là cực đại có điều kiện $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ của f. Khái niệm *cực tiểu có điều kiện* được định nghĩa tương tự khi thay bất đẳng thức trên bởi "$\ge$". Cực đại hay cực tiểu có điều kiện của f được gọi chung là cực trị có điều kiện của f.

Để xác định các điểm mà tại đó, hàm số f có thể có cực trị có điều kiện theo định nghĩa trên, ta có thể dựa vào định lý sau.

Định lý 4.15. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ và các mặt $(S_1)\colon G(x,y,z)=0$, $(S_2)\colon F(x,y,z)=0$, với f, G và F có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(S_1)\cap(S_2)$ và $\nabla G(M_0)\times\nabla F(M_0)\ne 0$. Khi đó, nếu f có cực trị có điều kiện $G(x,y,z)=0$ và $F(x,y,z)=0$ tại M_0 thì tồn tại các hằng số λ_0 và μ_0 sao cho*

$$\nabla f(M_0)+\lambda_0\nabla G(M_0)+\mu_0\nabla F(M_0)=0. \tag{4.38}$$

Chứng minh. Theo kết quả đã xét trong phần mở rộng về hàm số ẩn, tiếp tuyến với $(C)=(S_1)\cap(S_2)$ tại M_0 nhận $\vec{T}=\nabla G(M_0)\times\nabla F(M_0)\ne 0$ làm vector chỉ phương. Nếu $\nabla f(M_0)$ không vuông góc với $\vec{T}$ thì nó sẽ có hình chiếu $\vec{v}\ne 0$ trên tiếp tuyến. Khi đó, do $D_{\vec{v}}f(M_0)\cdot D_{-\vec{v}}f(M_0)<0$ nên f không thể có cực trị có điều kiện đã nêu tại M_0, trái giả thiết. Vậy, $\nabla f(M_0)$ phải vuông góc với $\vec{T}$, suy ra $\nabla f(M_0)$ nằm trên mặt phẳng sinh bởi $\nabla G(M_0)$ và $\nabla F(M_0)$; từ đó, tồn tại các hằng số λ_0, μ_0 thỏa kết luận đã nêu. ∎

Chú ý. Trên thực tế, ta phải xác định vị trí của điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và các giá trị λ_0, μ_0 nên để tìm chúng, ta kết hợp (4.38) với các điều kiện $G(x_0,y_0,z_0)=0$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ để được một hệ phương trình với 5 ẩn số.

Ví dụ 4.18. Tìm các giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ trên ellip (E), là giao của mặt nón $z^2=x^2+y^2$ và mặt phẳng $x-2z=3$.

Giải. Sự tồn tại các giá trị m và M là hiển nhiên. Do đặc điểm của (E), các giá trị m và M phải đạt được tại các điểm cực trị có điều kiện $F(x,y,z)\equiv z^2-x^2-y^2=0$ và $G(x,y,z)\equiv x-2z-3=0$ của f. Nếu gọi (x,y,z) là điểm như vậy và nếu đặt $L=f+\lambda F+\mu G$ thì điều kiện (4.38) có nghĩa là

$$\begin{cases} L_x(x,y,z)\equiv 2x+\lambda(-2x)+\mu=0,\\ L_y(x,y,z)\equiv 2y+\lambda(-2y)=0,\\ L_z(x,y,z)\equiv 2z+2\lambda z-2\mu=0.\end{cases}$$

Kết hợp thêm với các điều kiện $z^2-x^2-y^2=0$ và $x-2z-3=0$, ta dễ dàng giải ra được các điểm

$$A_1\colon\begin{cases} x=-3\\ y=0\\ z=-3\\ (\lambda=3,\ \mu=-12)\end{cases},\quad A_2\colon\begin{cases} x=1\\ y=0\\ z=-1\\ (\lambda=\frac13,\ \mu=-\frac43).\end{cases}$$

Do $f(A_1)=18$ và $f(A_2)=2$ nên ta kết luận $m=2$ và $M=18$. ◁

Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện $G(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ ở trên được phát biểu và chứng minh tương tự như được cho trong Định lý 4.14, với những thay đổi thích hợp tương ứng. Ngoài ra, ta có thể mở rộng cực trị có điều kiện cho hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với các điều kiện được cho dưới dạng

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

với $m < n$.

4.5. Bài tập

1. Xác định hướng mà hàm f đã cho đạt tốc độ biến thiên nhanh nhất tại điểm P đã cho:
   (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P(0; -1)$. (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y}$, $P(4; 10)$.

2. Cho $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và xét các điểm $A(1; 3)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 2)$ và $D(-2; 1)$. Cho biết $D_{\overrightarrow{AB}} f(A) = D_{\overrightarrow{AC}} f(A) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, hãy tìm $D_{\overrightarrow{AD}} f(A)$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C): $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ tại giao điểm của nó với trục Oy.

4. Xác định các điểm cực trị của $f(x, y)$ trong các trường hợp:
   (a) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. (b) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$.
   (c) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. (d) $f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$.

5. Tìm điểm dừng của các hàm số sau:
   (a) $g(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
   (b) $h(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

6. Phân loại các điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y)$, với $x > 0$, $y > 0$.

7. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + (a^3/x) + (a^3/y)$ nhận một giá trị cực tiểu tại điểm $x = y = a/\sqrt[3]{3}$ $(a > 0)$.

8. Tìm các điểm trên đường cong (C): $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ có khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất đến điểm gốc.

9. Tìm các điểm trên (P): $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ gần đường thẳng $3x - 6y + 4 = 0$ nhất.

10. Tìm tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của ellip (E): $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

11. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x, y)$ đã cho trên miền D đã chỉ:
    (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y)\colon |x| \le 1, |y| \le 1\}$.
    (b) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 1\}$.
    (c) $f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$, $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 4\}$.
    (d) $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - x^2y^3$, D là tam giác có các đỉnh $(0; 0)$, $(0; 6)$ và $(6; 0)$.

12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x,y) = xy^2$ trên tập
$$D = \left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{2} + y^2 \le 1\right\}.$$

13. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2$ trên tập
$$D = \left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{2} + y^2 \le 1\right\}.$$

14. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x,y) = xe^y - x^2 - e^y$ trên hình chữ nhật $D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$.

15. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x,y) = xy - x - 3y$ trên tam giác với các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;4)$ và $B(5;0)$.

16. Một vùng thường xuyên bị ngập úng và thường là hàng năm nếu tổng lượng nước mưa lên đến $10000\,m^3$ trong vòng 24 giờ thì xảy ra tình trạng lũ lụt. Để theo dõi một cơn mưa kéo dài, người ta ghi nhận tốc độ biến thiên $V(t)$ của lượng nước mưa tại một số thời điểm như sau:

t (giờ)	1	2	3	4
$V(t)$ (m^3/giờ)	$80,2$	$109,8$	$140,3$	$169,7$

Hãy xác định $V(t)$ dưới dạng $V(t) = at + b$ bằng phương pháp bình phương tối tiểu và hãy dự đoán xem cơn mưa này có khả năng gây ra lũ lụt hay không? Biết rằng việc ghi nhận số liệu được thực hiện ngay khi cơn mưa vừa mới bắt đầu.

17. Ở một nông trại, khi theo dõi lượng thức ăn để nuôi một loại cá người ta ghi nhận tốc độ biến thiên $V(t)$ của khối lượng thức ăn cung cấp cho mỗi con theo thời gian t như sau:

t (tháng)	1	2	3	4
$V(t)$ (kg/tháng)	$2,53$	$3,15$	$3,88$	$4,69$

(a) Hãy xác định $V(t)$ theo công thức $V(t) = at + b$ theo phương pháp bình phương tối tiểu.

(b) Cho biết lúc bắt đầu theo dõi thì đã cung cấp $2\,kg$ thức ăn cho mỗi con. Nếu mỗi kg thức ăn có giá ổn định là 5000 đ thì hãy ước tính số tiền chi về thức ăn cho mỗi con sau 12 tháng nuôi.

18. Khi theo dõi chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm ở một xí nghiệp, người ta ghi nhận các số liệu về tốc độ $V(x)$ của chi phí như sau:

x	100	200	300	400
$V(x)$ (\$/đơn vị sản phẩm)	$50,5$	$51,3$	$51,8$	$52,2$

(a) Hãy xác định $V(x)$ theo công thức $V(x) = ax + b$ bằng phương pháp bình phương tối tiểu.

(b) Từ kết quả trên, hãy ước tính chi phí sản xuất đơn vị sản phẩm thứ 501.

19. Tốc độ biến thiên diện tích trồng lúa bị sâu rầy phá hại ở một xã được mô phỏng bởi hàm $V(t) = at^2 + bt + c$ và được ghi nhận qua các số liệu sau:

t (tuần)	1	2	3	4
$V(t)$ (hecta/tuần)	$40,8$	$49,1$	$56,9$	$62,2$

Hãy xác định $V(t)$ bằng phương pháp bình phương tối tiểu và cho biết khi nào thì tốc độ này có thể lên đến mức cao nhất và khi đó diện tích trồng lúa bị phá hại có thể ước tính là bao nhiêu hecta? Biết rằng khi mới bắt đầu cuộc khảo sát thì đã có 5 hecta lúa bị phá hại.

20. Khi theo dõi tốc độ tăng diện tích trồng cà phê $V(t)$ ở một tỉnh miền núi, người ta ghi nhận các số liệu những năm gần đây như sau:

t (thời điểm năm)	1997	1998	1999	2000
$V(t)$ (hecta/năm)	498	502	504	508

(a) Hãy xác định $V(t)$ bởi công thức $V(t) = at + b$ bằng phương pháp bình phương tối tiểu.

(b) Nếu tính bình quân mỗi hecta cho 50 tấn hạt, thì với tốc độ tăng trưởng trên, hãy ước tính đến năm 2002, sản lượng cà phê đã tăng bao nhiêu tấn so với thời điểm năm 1997?

21. Khi khảo sát sự lây lan của căn bệnh thế kỷ AIDS trong một khu vực dân cư ở Châu Phi, người ta ghi nhận tốc độ biến thiên $V(t)$ của số người mắc bệnh qua bảng số liệu

t (tháng)	1	2	3	4
$V(t)$ (người/tháng)	$1,63$	$2,45$	$3,27$	$4,18$

(a) Hãy xác định $V(t)$ theo công thức $V(t) = at + b$ bằng pương pháp bình phương tối tiểu.

(b) Nếu chi phí điều trị bình quân cho mỗi bệnh nhân trong thời kỳ đầu của căn bệnh là 1000 dollars thì hãy ước tính tổng chi phí này cho số bệnh nhân sau 6 tháng khảo sát. Biết rằng, tại thời điểm ban đầu của cuộc khảo sát thì đã có 100 bệnh nhân và mọi bệnh nhân đều được hưởng chi phí trên.

Chương 5

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

5.1. Giới thiệu về phương trình vi phân

5.1.1. Các ví dụ mở đầu

Định luật Vật lý chi phối chuyển động của các vật là Định luật II Newton, được cho bởi phương trình

$$F = ma. \tag{5.1}$$

Trong phương trình trên thì m là khối lượng của vật, a là gia tốc của nó và F là hợp lực tác dụng lên vật. Để thống nhất, ta sẽ đo m bằng kilograms (kg), a bằng meters/second^2 (m/s^2) và F bằng Newton (N). Giả sử vật đang rơi với vận tốc $v = v(t)$, được đo bằng meters/second (m/s) và t là thời gian, được đo bằng seconds (s). Hơn nữa, ta sẽ giả sử rằng v dương theo hướng đi xuống, nghĩa là vật đang rơi. Do $a = dv/dt$ nên từ (5.1), ta có thể viết

$$F = m\frac{dv}{dt}. \tag{5.2}$$

Bây giờ ta hãy xét các lực tác động lên vật khi nó rơi. Trọng trường sinh ra một lực bằng với trọng lượng của vật là mg, trong đó g là gia tốc trọng trường. Bằng thực nghiệm, ta thường lấy xấp xỉ $g \approx 9,8\,\text{m/s}^2$ (gần bề mặt trái đất). Cũng còn một lực tác động do sức cản không khí (được gọi là lực cản), khá phức tạp để mô hình hóa. Ta thường giả sử một cách hợp lý rằng lực cản thì tỉ lệ với vận tốc nên có độ lớn là γv (γ là một hằng số, được gọi là *hệ số cản*).

Để viết biểu thức cho hợp lực F, ta cần nhớ rằng sức hút luôn tác dụng theo hướng đi xuống (hướng dương), còn sức cản thì tác dụng theo hướng đi lên (hướng âm). Vậy,

$$F = mg - \gamma v \tag{5.3}$$

và (5.2) trở thành

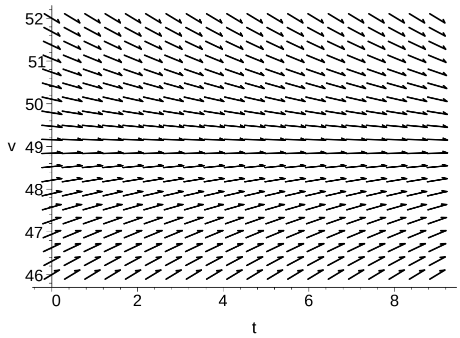
$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \tag{5.4}$$

Phương trình (5.4) là một mô hình toán học của vật rơi trong bầu khí quyển gần mặt nước biển. Mô hình chứa 3 hằng số là m, g và γ. Các số m và γ phụ thuộc rất nhiều vào vật đang rơi và thường là khác nhau đối với các vật khác nhau và ta có thể xem chúng là những *tham số*. Còn giá trị của g là giống nhau cho mọi vật.

Để giải phương trình (5.4), ta cần tìm một hàm số $v = v(t)$ thỏa mãn phương trình mà ta sẽ gọi là *nghiệm* của phương trình. Điều này không khó, và ta sẽ chỉ ra cách tìm hàm số này ở các đoạn sau. Tuy nhiên, bây giờ ta có thể có được thông tin về nghiệm mà không cần tìm thấy bất kỳ nghiệm nào. Để xác định, ta giả sử $m = 10\,\mathrm{kg}$ và $\gamma = 2\,\mathrm{kg/s}$. Lưu ý rằng γv phải có đơn vị của lực, đó là $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2$. Khi đó, (5.4) được viết lại thành

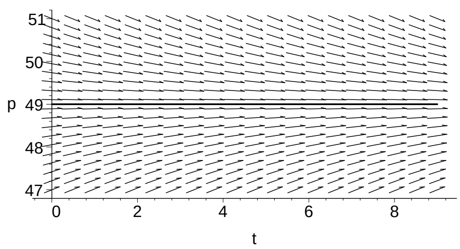
$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}. \tag{5.5}$$

Với $v = 40$, thì $dv/dt = 1,8$ và điều này có nghĩa là độ nghiêng của nghiệm $v = v(t)$ có giá trị $1,8$ tại các điểm mà ở đó $v = 40$. Ta có thể hiển thị thông tin này trên mặt phẳng-tv bằng cách vẽ các đoạn thẳng ngắn hay các mũi tên với độ nghiêng $1,8$ tại một số điểm trên đường thẳng $v = 40$. Tương tự, với $v = 50$ thì $dv/dt = -0,2$ và ta vẽ các đoạn thẳng với độ nghiêng $-0,2$ tại một số điểm trên đường thẳng $v = 50$. Ta có thể xét thêm một số giá trị khác của v và cũng nhận được các mũi tên tương ứng. Hình ảnh nhận được cho ta một ví dụ về *trường hướng* hay thỉnh thoảng cũng được gọi là *trường độ nghiêng*, với đặc điểm quan trọng là mỗi đoạn thẳng đều hướng theo phương tiếp tuyến với đồ thị của nghiệm của (5.5).



Hình 5.1: Trường hướng của (5.5).

Vậy, cho dù ta không tìm thấy bất kỳ nghiệm nào nhưng ta có thể rút ra vài kết luận về dáng điệu của nghiệm. Chẳng hạn, nếu v nhỏ hơn một giá trị tới hạn nào đó thì mọi đoạn thẳng tương ứng đều có độ nghiêng dương và tốc độ của vật rơi tăng lên khi nó rơi. Mặt khác nếu v lớn hơn giá trị tới hạn thì các đoạn thẳng có độ nghiêng âm và vật rơi chậm dần lại khi nó rơi. Từ phương trình (5.5), ta tìm giá trị của v sao cho $dv/dt = 0$ và dễ thấy giá trị đó là $v = 49$ (m/s).



Hình 5.2: Nghiệm cân bằng $v(t) = 49$ trên trường hướng của (5.5).

Trên thực tế, hàm hằng $v(t) = 49$ là nghiệm của (5.5) và do nó không phụ thuộc thời gian nên nó còn được gọi là một nghiệm *cân bằng*. Trong hình ta chỉ ra nghiệm cân bằng $v(t) = 49$ được đặt thêm vào trên trường hướng. Và từ hình này ta có thể rút ra một kết luận khác, đó là, mọi nghiệm khác dường như hội tụ về nghiệm cân bằng khi t tăng.

Xét một quần thể chuột đồng đang cư ngụ trong một vùng nông thôn nào đó. Khi không có loài dã thú tồn tại, ta giả sử rằng, một cách tự nhiên, dân số chuột tăng theo một tốc độ tỉ lệ với dân số hiện hành. Giả thiết này dù không xuất phát từ một định luật Vậi lý (như Định luật Newton về chuyển động trong ví dụ trên), nhưng nó là một giả định ban đầu thông thường khi nghiên cứu sự gia tăng dân số. Nếu $p = p(t)$ là dân số chuột tại thời điểm t, thì giả sử trên về sự gia tăng dân số có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{dp}{dt} = rp, \tag{5.6}$$

trong đó, thừa số tỉ lệ r được gọi là *hằng tốc độ* hay *tốc độ tăng trưởng*. Để xác định, giả sử rằng thời gian được đo theo tháng (month) và hằng tốc độ r có giá trị 0.5/month. Chú ý rằng mỗi số hạng trong (5.6) có đơn vị mice/month. Bây giờ ta hãy thêm vào bài toán bằng cách giả sử rằng có vài con cú sống trong vùng phụ cận và chúng ăn thịt khoảng 15 chú chuột mỗi ngày. Để kết hợp thông tin này vào mô hình, ta cần phải thêm một số hạng khác vào phương trình (5.6) và nhận được

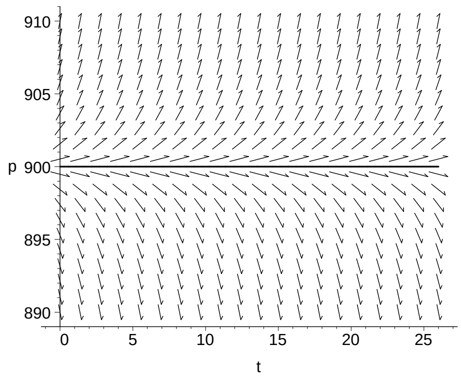
$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450. \tag{5.7}$$

Để ý rằng đối với các giá trị đủ lớn của p, ta có dp/dt dương, nên các nghiệm là tăng. Ta có kết luận ngược lại với các giá trị đủ nhỏ của p. Tương tự như bài toán trên, ta tìm được nghiệm cân bằng $p(t) = 900$ là nghiệm mà đối với nó các số hạng tăng trưởng và "bị ăn thịt" cân bằng với nhau. Mặt khác, trong ví dụ này thì các nghiệm khác phân kỳ hay bị đẩy ra khỏi nghiệm cân bằng.

Dạng tổng quát của phương trình (5.7) là

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, \tag{5.8}$$

trong đó tốc độ tăng trưởng r và tốc độ bị ăn thịt k chưa được xác định. Nghiệm của phương trình tổng quát này có tính chất rất giống nghiệm của phương trình (5.7). Nghiệm cân bằng của phương trình (5.8) là $p(t) = k/r$. Các nghiệm ở trên nghiệm cân bằng thì tăng, trong khi các nghiệm ở dưới thì giảm.



Hình 5.3: Nghiệm cân bằng $p(t) = 900$ trên trường hướng của (5.7).

Ta nên lưu ý rằng cả hai mô hình được thảo luận ở trên đều có những hạn chế. Mô hình (5.5) hết còn giá trị ngay khi vật chạm đất hoặc một tác nhân nào đó làm dừng hay làm chậm đi sự rơi của vật. Còn mô hình (5.7) thì cuối cùng lại cho dự báo số chuột là "âm" (nếu $p < 900$) hay số chuột lớn đến vô cùng (nếu $p > 900$). (Bạn có thể giải thích được điều này?)

5.1.2. Các khái niệm cơ bản

Qua các bài toán đã xét ở trên, ta thấy rằng các phương trình nhận được chính là các mô hình toán học cho các hiện tượng trong Vật lý, trong Sinh thái, và ta sẽ gọi chúng là các *phương trình vi phân*. Ta sẽ phân loại một số phương trình vi phân có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau và khảo sát các phương pháp giải chúng. Nhưng trước tiên, để chính xác hoá các khái niệm và để có thể mở rộng cho trường hợp có nhiều biến độc lập, ta xét định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.1. Một phương trình bao gồm một biến phụ thuộc, với ít nhất một đạo hàm (hay vi phân) của nó theo một hay nhiều biến độc lập, được gọi là một phương trình vi phân. Cấp cao nhất của đạo hàm (hay vi phân) có mặt trong phương trình được gọi là *cấp* của phương trình. Phương trình được gọi là *phương trình vi phân thường* nếu trong đó chỉ có duy nhất một biến độc lập và các đạo hàm theo nó đều là các đạo hàm thông thường. Nếu phương trình bao gồm nhiều hơn một biến độc lập và các đạo hàm theo các biến này trong phương trình đều là các đạo hàm riêng thì nó được gọi là *phương trình đạo hàm riêng*.

Ta có các ví dụ sau về phương trình vi phân được cho trong bảng sau:

Phương trình vi phân thường	Phương trình đạo hàm riêng
$\dfrac{dy}{dt} = -ky$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
$(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$	$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2-p^2)y = 0$	$a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

trong đó, các ký hiệu đạo hàm thông thường có thể viết là y', y'', và các ký hiệu đạo hàm riêng có thể viết là u_t, u_{tt}, u_{xx}, ... Dưới đây, ta chỉ xét chủ yếu các phương trình vi phân thường và ta sẽ gọi tắt chúng là "phương trình vi phân" hay đôi khi chỉ đơn giản là "phương trình".

Nếu biến phụ thuộc được ký hiệu là y, còn biến độc lập là x thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình nếu nó thỏa mãn phương trình trong một khoảng nào đó. Chú ý rằng đôi khi, nghiệm cũng được cho dưới dạng ẩn bởi $F(x,y) = 0$. Việc kiểm chứng một hàm số là nghiệm của một phương trình cho trước thường là đơn giản hơn việc *giải phương trình*, nghĩa là *tìm hết tất cả các nghiệm* của phương trình. Dễ dàng kiểm chứng được rằng $y = e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ là nghiệm của phương trình $y'' - y' + y = 0$ và hệ thức $xy = \ln y + C$ cho ta nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}.$$

Hơn nữa, có thể thấy rằng hàm số $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ là nghiệm của phương trình $y'' - 5y' + 6y = 0$, với mọi giá trị của các hằng số C_1, C_2. Trong một số trường hợp, ta có thể giải trực tiếp phương trình bằng các phép biến đổi tương đương. Chẳng hạn, phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x^2+1} \tag{5.9}$$

có thể được giải như sau:

$$(5.9) \Leftrightarrow y = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + C = \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} + \int\frac{dx}{x^2+1} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C.$$

Theo kết quả trên, phương trình có một họ nghiệm (phụ thuộc tham số C) và nghiệm sẽ được xác định hoàn toàn nếu được cho điều kiện $y(x_0) = y_0$. Chẳng hạn, với điều kiện $y(0) = 1$ thì $C = 1$ và phương trình có nghiệm duy nhất

$$y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + 1.$$

Tuy nhiên, một phương trình có thể vô nghiệm (tức không có nghiệm lấy giá trị thực) hay chỉ có duy nhất một nghiệm mà không phải dựa vào bất kỳ điều kiện nào. Chẳng hạn, phương trình

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

không có bất kỳ nghiệm lấy giá trị thực nào, còn phương trình

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

thì chỉ có nghiệm duy nhất là $y = 0$.

Tổng quát, một phương trình cấp n có dạng

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \text{ hoặc } F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{5.10}$$

hay được giải ra đối với đạo hàm cấp cao nhất

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0 \text{ hoặc } y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{5.11}$$

Tập mọi nghiệm của một phương trình được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình và một nghiệm bất kỳ nào đó của phương trình được gọi là *nghiệm riêng* của nó. Trong một số trường hợp, nghiệm tổng quát của phương trình có thể được cho bởi một công thức.

5.2. Một số phương trình vi phân cấp một

Theo định nghĩa đã nêu thì dạng tổng quát của một phương trình vi phân cấp một với ẩn hàm $y = y(x)$ có dạng $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ hay được quy ước viết là $F(x, y, y') = 0$. Tuy nhiên, phương trình trên thường được xét dưới dạng giải ra đối với y':

$$y' = f(x, y). \tag{5.12}$$

Đối với phương trình (5.12), ta có bài toán sau đây.

Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (5.12) trong một lân cận của điểm x_0, thỏa điều kiện

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.13}$$

Bài toán Cauchy thường được gọi là *bài toán giá trị ban đầu* và điều kiện để nó có nghiệm duy nhất là một kết quả quan trọng để khảo sát việc giải các phương trình cấp một cơ bản.

Định lý 5.1 (Tồn tại duy nhất nghiệm) *Cho phương trình (5.12). Nếu f, f_y đều là các hàm liên tục trong một lân cận của điểm cho trước (x_0, y_0) thì (5.12) có nghiệm duy nhất $y(x)$ trong một lân cận Δ của x_0 thỏa điều kiện (5.13).*

5.2.1. Phương trình tuyến tính

Với $P(x)$, $Q(x)$ là những hàm số cho trước liên tục trong một khoảng (a, b) thì phương trình

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{5.14}$$

được gọi là phương trình *tuyến tính*. Ta có thể viết (5.14) dưới dạng

$$y' = Q(x) - P(x)y =: f(x, y),$$

trong đó, theo giả thiết, f, $f_y = -P(x)$ liên tục trong

$$D = \{(x, y) \colon a < x < b,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Dựa theo Định lý 5.1 ta có thể chứng minh rằng: với mỗi $(x_0, y_0) \in D$, phương trình (5.14) có duy nhất nghiệm $y(x)$ trong (a, b) thỏa điều kiện $y(x_0) = y_0$.

Để giải (5.14), ta tìm một thừa số $\mu \neq 0$ sao cho khi nhân nó cho mỗi vế của (5.14), kết quả ở vế trái nhận được sẽ là $(y\mu)' = \mu y' + y\mu'$. Như vậy, ta có thể chọn μ sao cho $\mu' = P\mu$. Hiển nhiên, một hàm $\mu \neq 0$ thỏa điều kiện này có thể chọn được là

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Vậy, (5.14) trở thành

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

Từ đó, ta nhận được nghiệm của phương trình trên là

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right). \tag{5.15}$$

Đặc biệt, khi $Q(x) = 0$ thì nghiệm của phương trình $y' + P(x)y = 0$ là

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{5.16}$$

Trong cả hai công thức (5.15), (5.16) thì tham số C là một hằng số bất kỳ. Để hiểu thêm cách sử dụng tính tùy ý của các hằng số khi giải phương trình vi phân, ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 5.1. Giải phương trình

$$y' = \frac{3y - 1}{x}.$$

GIẢI. Phương trình được viết dưới dạng

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

trong đó, $P(x) = -3/x$, $Q(x) = -1/x$. Ta có

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{3\ln|x|} = |x|^3, \quad e^{\int P(x)dx} = \frac{1}{|x|^3}.$$

Từ kết quả trên, theo công thức (5.15), phương trình nhận nghiệm

$$\begin{aligned} y &= |x|^3\left(-\int \frac{dx}{|x|^3 x} + C\right) \\ &= x^3\left(-\int \frac{dx}{x^4} + C\right) \quad \text{(do } C \text{ là tùy ý (giải thích!))} \\ &= x^3\left(\frac{1}{3x^3} + C\right) = \frac{1}{3} + Cx^3 \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

◁

Ngoài ra, để ý rằng: với mỗi $x_0 \in (a,b)$, y_0 bất kỳ, phương trình (5.14) sẽ có nghiệm duy nhất trong (a,b) thỏa điều kiện $y(x_0) = y_0$. Thật vậy, do nghiệm tổng quát (5.15) có thể được viết dưới dạng

$$y = A(x)C + B(x) \quad (A(x) > 0, \forall x \in (a,b))$$

nên điều kiện $y(x_0) = y_0$ được thỏa khi và chỉ khi

$$C = \frac{y_0 - B(x_0)}{A(x_0)} =: C_0.$$

Vậy, $y = A(x)C_0 + B(x)$ chính là nghiệm của (5.14) (trong (a,b)) thỏa điều kiện đã nêu. Chú ý trên thực chất là để kiểm chứng kết quả đã nêu về sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình tuyến tính.

Ví dụ 5.2. Một bồn chứa đang có 100 lít (ℓ) nước có hòa tan 50 g muối. Người ta bơm vào bồn một dung dịch muối có nồng độ là $2\,\mathrm{g}/\ell$ với tốc độ $3\,\ell$/phút. Giả sử dung dịch muối trong bồn được trộn đều tức thì và chảy ra ngoài với tốc độ $2\,\ell$/phút. Nếu thể tích của bồn đủ lớn để nước trong bồn không tràn ra ngoài, thì hãy tính lượng muối trong bồn tại thời điểm t bất kỳ. Khi nào thì muối trong bồn đạt tới nồng độ $1,5\,\mathrm{g}/\ell$? Sau 30 phút thì lượng muối trong bồn là bao nhiêu?

GIẢI. Gọi $Q(t)$, $C(t)$ lần lượt là lượng muối và nồng độ muối trong bồn tại thời điểm t. Khi đó, ta có

$$C(t) = \frac{Q(t)}{100+t}$$

và $Q(t)$ được xác định từ phương trình vi phân

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \text{Tốc độ muối vào} - \text{Tốc độ muối ra} \\ &= 3 \times 2 - 2 \times C(t) = 6 - 2\frac{Q(t)}{100+t} \end{aligned}$$

chính là phương trình tuyến tính:

$$Q' + \frac{2Q}{100+t} = 6.$$

Dễ thấy, nghiệm của phương trình được cho bởi

$$Q = 2(100+t) + \frac{C}{(100+t)^2}.$$

Theo giả thiết, do $Q(0) = 50$ nên $C = -15 \times 10^5$, từ đó

$$Q(t) = 2(100+t) - \frac{15 \times 10^5}{(100+t)^2}, \quad C(t) = 2 - \frac{15 \times 10^5}{(100+t)^3}.$$

Gọi T là thời điểm sao cho $C(T) = 1,5$ thì ta có các kết quả của bài toán: $T = 100(\sqrt[3]{3} - 1)$ phút và $Q(30) = 171,25\,\mathrm{g}$. ◁

5.2.2. Phương trình tách biến

Với M, N là những hàm số cho trước liên tục trong một khoảng (a,b) thì phương trình

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{5.17}$$

được gọi là phương trình *tách biến*. Nghiệm của (5.17) được cho dưới dạng ẩn $F(x,y) = 0$, chính là một biến đổi tương đương của nó:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Ví dụ 5.3. Giải phương trình

$$(y^2 - y)dx - xdy = 0.$$

GIẢI. Xem $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình và từ đồng nhất thức $y^2 - y = 0$ trong một khoảng bất kỳ, ta nhận được các hàm hằng $y = 0$ và $y = 1$ rõ ràng là nghiệm của phương trình. Mặt khác, nếu $y^2 - y \neq 0$ (trong một khoảng nào đó) thì phương trình được đưa về dạng tách biến

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

và có nghiệm được cho bởi

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2 - y} &= \ln|x| + C_0 = \ln|x| + \ln|C| \quad (C \neq 0) \\ \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|Cx| \\ y &= \frac{1}{1 - Cx}. \end{aligned}$$

Khi $C = 0$, công thức sau cùng trở thành $y = 1$, trùng với nghiệm đã xét. Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{1 - Cx}.$$

$\triangleleft$

Một mô hình phổ biến có dạng phương trình tách biến là mô hình *logistic*, được hình thành qua sự khảo sát sự phụ thuộc một cỡ quần thể vào thời gian. Nếu $P(t)$ chỉ số lượng các cá thể trong một quần thể tại thời điểm t thì giá trị của $P' = dP/dt$ tại t chưa thể hiện được sự tăng trưởng nhanh, chậm của quần thể đang khảo sát. Tuy nhiên, chính tỉ số

$$\frac{dP/dt}{P}$$

mới cho ta biết rõ về tính nhanh, chậm của quá trình tăng trưởng. Tất nhiên, trong điều kiện lý tưởng, thì tỉ số đó là hằng số

$$\frac{dP/dt}{P} = k \quad \text{(hằng số)}.$$

Tuy nhiên trên thực tế, do điều kiện tồn tại bị hạn chế (chẳng hạn nguồn thức ăn) nên mô hình sau được xem là thích hợp hơn:

$$\frac{dP/dt}{P} = f(P),$$

với $f(0) = k$ và $f(M) = 0$. Ở đây, M được xem là giá trị tới hạn của P, chính là ngưỡng gánh chịu mà môi trường sống có thể cung cấp được.

Năm 1840, một nhà Sinh học và Toán học người Hà lan là VERHULST đề xuất mô hình tuyến tính cho f: $f(P) = aP + b$ và với các điều kiện đã nêu, ta có phương trình tách biến

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k}{M}P(M - P).$$

Phương trình trên đã được dùng một cách hiệu quả để khảo sát dân số thế giới vào thời kỳ đó và được gọi là *phương trình của mô hình logistic* (hay *phương trình logistic*).

Ví dụ 5.4. Trong một thành phố, giả sử rằng số người $N(t)$ xem được một chương trình quảng cáo đặc biệt trên TV hàng ngày thỏa mãn phương trình logistic. Hãy xác định $N(t)$, biết rằng số người tối đa trong thành phố có thể xem được quảng cáo này là 50.000 và trong ngày đầu tiên phát sóng, có 500 người xem được chương trình và ngày hôm sau thì số người xem chương trình đã là 1000.

GIẢI. Theo giả thiết thì $N(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân dạng

$$\frac{dN}{dt} = \ell(50.000 - N)N.$$

Đây là một phương trình tách biến, được viết lại thành

$$\Big(\frac{1}{50.000 - N} + \frac{1}{N}\Big)dN = 50.000\ell dt$$

và nhận nghiệm

$$N = \frac{50.000\, e^{C+500\ell t}}{1 + e^{C+500\ell t}}.$$

Từ các điều kiện $N(0) = 500$ và $N(1) = 1000$, ta suy ra

$$C = -\ln 99, \quad \ell = \frac{1}{50.000}\ln\Big(\frac{99}{49}\Big).$$

Khi đó, nghiệm cần tìm là

$$N = \frac{50.000}{1 + 99\Big(\dfrac{49}{99}\Big)^t}.$$

◁

5.2.3. Phương trình đẳng cấp

Ta sẽ khảo sát một phương trình vi phân dạng $y' = f(x, y)$, với hàm số f thỏa tính chất được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.2. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là hàm *thuần nhất cấp k* nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

với mọi $\lambda \neq 0$ sao cho λ^k lấy giá trị thực.

Theo định nghĩa trên thì ta có các kết luận sau: $f(x, y) = x^2 + xy$ là thuần nhất cấp 2, $g(x, y) = x - 2y$ là thuần nhất cấp 1 và $h(x, y) = x/y$ là thuần nhất cấp 0.

Phương trình *đẳng cấp* là phương trình có dạng $y' = f(x,y)$, với f là hàm thuần nhất cấp 0. Do đặc điểm của f mà phương trình có thể được giải theo cách trình bày sau

$$\begin{aligned} y' = f(x,y) = f\Big(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\Big) = f(1, y/x) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} u = y/x \quad (\Rightarrow y' = u'x + u) \\ u'x + u = f(1,u) =: g(u) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} u = y/x \\ du = \big[g(u) - u\big]\dfrac{dx}{x} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nếu $u = u_0$ thỏa đồng nhất thức $g(u) - u = 0$ trong một khoảng không chứa $x = 0$ thì hiển nhiên hàm hằng $u = u_0$ là nghiệm của (5.18) hay $y = u_0 x$ là nghiệm của phương trình đã cho. Nếu $g(u) - u \neq 0$ trong một khoảng nào đó thì (5.18) thành

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

là một phương trình tách biến và nghiệm được cho bởi

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|Cx|, \quad u = y/x \quad (C \neq 0).$$

Ví dụ 5.5. Giải các phương trình sau

(a) $x\dfrac{dy}{dx} = y + x\cos^2\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y - 4}{2x - y - 3}$.

Giải.

(a) Đặt $u = y/x$ thì phương trình thành $u'x + u = u + \cos^2 u$ hay

$$du = \cos^2 u \frac{dx}{x}. \tag{5.19}$$

Nếu $\cos u \neq 0$ thì

$$(5.19) \Leftrightarrow \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} u = \ln|Cx| \text{ hay } \operatorname{tg}(y/x) = \ln|Cx| \quad (C \neq 0).$$

Nếu $\cos u = 0$ hay $u = (\pi/2) + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $y = ((\pi/2) + k\pi)x$ là nghiệm của phương trình đã cho.

(b) Vế phải của phương trình không là hàm thuần nhất cấp 0 nên ta sẽ đưa nó về một hàm thuần nhất cấp 0 dựa trên cơ sở sau. Trong $\mathbb{R}^2$, cho các đường thẳng

$$\begin{cases} (\Delta_1)\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (\Delta_2)\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

và giả sử $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = M_0(x_0, y_0)$. Khi đó, với phép tịnh tiến

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

và chú ý rằng $dy/dx = dY/dX$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y},$$

chính là một phương trình đẳng cấp. Áp dụng cho bài toán đang xét với $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Từ đó suy ra cách giải.

◁

5.2.4. Phương trình vi phân toàn phần

Xét phương trình vi phân

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{5.20}$$

Nếu tồn tại $\Phi(x,y)$ sao cho

$$\nabla\Phi(x,y) = \{M(x,y), N(x,y)\}$$

với mọi (x,y) thuộc một tập mở D thì (5.20) được gọi là *phương trình vi phân toàn phần* (trong D). Khi đó, trong D, (5.20) hiển nhiên được viết dưới dạng $\Phi_x(x,y)dx+\Phi_y(x,y)dy = 0$ hay $d\Phi(x,y) = 0$. Từ đó suy ra rằng: nếu (5.20) là phương trình vi phân toàn phần thì nó nhận nghiệm

$$\Phi(x,y) = C.$$

Chú ý. Hàm Φ được xác định sai khác một hằng số.

Vấn đề ở đây là: với phương trình (5.20), ta sẽ dựa vào một tiêu chuẩn đã được chứng minh để khẳng định sự tồn tại của Φ, trước khi tìm cách xác định nó.

Định lý 5.2. *Cho M, N, $\partial M/\partial y$, $\partial N/\partial x$ là các hàm liên tục trong một tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ là vi phân toàn phần trong D khi và chỉ khi*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

với mọi $(x,y) \in D$.

Ta sẽ áp dụng định lý trên để giải phương trình được cho trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 5.6. Giải phương trình

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

Giải. Với $M(x,y) = y/x$, $N(x,y) = y^3 + \ln x$, ta có

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y),$$

với mọi $(x,y) \in D = \{(x,y)\colon x > 0\}$. Vậy, theo định lý trên thì phương trình đã cho là vi phân toàn phần, nên tồn tại $\Phi(x,y)$ sao cho trong D, ta có

$$\Phi_x = M = y/x \tag{5.21}$$

$$\Phi_y = N = y^3 + \ln x. \tag{5.22}$$

Từ (5.21), bằng cách lấy tích phân theo biến x, ta nhận được

$$\Phi = y \ln x + T(y), \tag{5.23}$$

trong đó, T là hàm khả vi tùy ý theo y. Bây giờ, lấy đạo hàm của (5.23) theo y và do (5.22), ta nhận được $y^3 = T'(y)$. Từ đó, ta có thể chọn $T(y) = y^4/4$ và suy ra: $\Phi(x, y) = y \ln x + y^4/4$. Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là: $y \ln x + y^4/4 = C$. $\triangleleft$

Trong trường hợp (5.20) không phải là phương trình vi phân toàn phần, nhưng tồn tại $\mu(x, y) \neq 0$ trong miền tồn tại của phương trình sao cho

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{5.24}$$

là phương trình vi phân toàn phần, thì μ được gọi là một *thừa số tích phân* của (5.20). Hiển nhiên, việc tìm được một thừa số tích phân cho (5.20) là hết sức hữu ích!

Bây giờ, ta hãy thử khảo sát một số khả năng có thể tìm được μ. Do (5.24) là vi phân toàn phần nên ta có

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.25}$$

Việc tìm trực tiếp μ từ phương trình (5.25) rất khó và ta chỉ xét trong các trường hợp sau đây.

(a) **Trường hợp $\mu = \mu(x)$:** Khi đó, nếu

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

thì (5.25) trở thành $\mu' - f(x)\mu = 0$, và hiển nhiên ta có thể chọn

$$\mu = e^{\int f(x)dx}.$$

(b) **Trường hợp $\mu = \mu(y)$:** Khi đó, nếu

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$$

thì tương tự như trường hợp trên, ta có thể chọn

$$\mu = e^{\int g(y)dy}.$$

Ví dụ 5.7. Hãy tìm một thừa số tích phân của phương trình

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$$

và giải nó.

Giải. Với $M = x^2 + y^2 + 2x$, $N = 2y$, ta có

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y}{2y} = 1.$$

Vậy, phương trình đã cho nhận

$$\mu = e^{\int 1dx} = e^x$$

là một thừa số tích phân và nó tương đương với

$$e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ye^x dy = 0.$$

Áp dụng cách tìm hàm Φ như trong ví dụ trên, ta nhận được $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2)e^x$ và như vậy, phương trình đã cho có nghiệm $(x^2 + y^2)e^x = C$. ◁

5.3. Phương trình vi phân cấp hai

Theo định nghĩa đã nêu thì dạng tổng quát của một phương trình vi phân cấp hai với ẩn hàm $y = y(x)$ có dạng $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$ hay được quy ước viết là $F(x, y, y', y'') = 0$. Tuy nhiên, phương trình trên thường được xét dưới dạng giải ra theo y'':

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{5.26}$$

Đối với phương trình (5.26), ta có bài toán sau đây.

Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (5.26) trong một lân cận của điểm x_0, thỏa các điều kiện

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{5.27}$$

Điều kiện để bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất là một kết quả quan trọng để khảo sát một số vấn đề về lý thuyết, đặc biệt là đối với các phương trình tuyến tính.

Định lý 5.3 (Tồn tại duy nhất nghiệm) *Cho phương trình* (5.26). *Nếu f, f_y và $f_{y'}$ đều là các hàm liên tục trong một lân cận của điểm cho trước (x_0, y_0, y'_0) thì* (5.26) *có nghiệm duy nhất $y(x)$ trong một lân cận Δ của x_0 thỏa điều kiện* (5.27).

5.3.1. Một số kỹ thuật giảm cấp

Một số các phương trình vi phân cấp hai có thể được giảm cấp để đưa về các phương trình cấp một đã khảo sát, nhờ vào một số kỹ thuật dưới đây.

(a) Sắp xếp các biểu thức theo dạng kết quả của một phép toán đạo hàm: Với phương trình

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$$

ta có thể viết lại dưới dạng:

$$y'' + \left(\frac{y}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = C_1$$

và phương trình kết quả chính là một phương trình tuyến tính (cấp một).

(b) Đặt $y' = p$ thì $y'' = p'$ (p là hàm theo biến x): Với phép đặt này, phương trình

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

trở thành

$$(1 + x^2)p' + p^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p^2 + 1} + \frac{dx}{x^2 + 1} = 0,$$

chính là một phương trình tách biến.

(c) Đặt $y' = p$ và xem $p = p(y)$ thì $y'' = p'p = (dp/dy)p$ (trong trường hợp phương trình không chứa x): Với phép đặt này thì phương trình

$$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$$

trở thành

$$p'p + \frac{2}{1-y}p^2 = 0$$

và được xét trong hai trường hợp $p = 0$ hoặc

$$p' + \frac{2}{1-y}p = 0,$$

chính là một phương trình tuyến tính với ẩn hàm $p = p(y)$.

(d) Có thể dùng một trong các phép biến đổi $yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $y'/y = p$, ... (trong các phép biến đổi trên thì p là hàm theo x): Với phương trình

$$x^2yy'' - (xy' - y)^2 = 0$$

ta sắp xếp lại dưới dạng

$$x^2(yy'' - (y')^2) + 2xyy' - y^2 = 0.$$

Hiển nhiên $y = 0$ là nghiệm của phương trình trong mọi khoảng. Với $y \neq 0$ trong một khoảng nào đó, phương trình có thể được viết dưới dạng

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} + \frac{2}{x}\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}.$$

Hiển nhiên, bằng phép đặt $y'/y = p$, phương trình được đưa về dạng

$$p' + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^2},$$

chính là một phương trình tuyến tính.

5.3.2. Phương trình tuyến tính

Với $a_1(x)$, $a_0(x)$ và $f(x)$ là những hàm số cho trước liên tục trong một khoảng (a, b) thì phương trình vi phân

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{5.28}$$

được gọi là phương trình *tuyến tính*. Khi đó, phương trình

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{5.29}$$

được gọi là phương trình *thuần nhất* ứng với (5.28). Để thuận tiện, ta sẽ gọi các phương trình (5.28), (5.29) lần lượt là (A) và (B).

Phương trình (A) có thể được viết dưới dạng

$$y'' = f(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' =: F(x, y, y'),$$

trong đó, theo giả thiết, F, $F_y = -a_0(x)$, $F_{y'} = -a_1(x)$ liên tục trong

$$D = \{(x, y, y') \colon a < x < b;\ y,\ y' \in \mathbb{R}\}.$$

Dựa theo Định lý 5.3, ta có thể chứng minh được rằng: với mỗi $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, phương trình (A) có nghiệm duy nhất $y(x)$ trong (a, b) thỏa các điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$.

Để xây dựng cấu trúc nghiệm của (A), đặc biệt lưu ý rằng: với các phép toán "cộng" giữa các nghiệm và phép toán "nhân" số thực với các nghiệm chính là phép cộng giữa các hàm số và phép nhân một số thực với các hàm số thông thường, thì tập mọi nghiệm $\mathscr{Y}$ của (B) là một không gian vector. Kết luận quan trọng trên dựa vào các nhận xét đơn giản sau.

(a) $y = 0 \in \mathscr{Y}$.

(b) Nếu $y_1 \in \mathscr{Y}$, $y_2 \in \mathscr{Y}$ và C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, thì ta có $C_1y_1 + C_2y_2 \in \mathscr{Y}$.

Ngoài ra, ta cũng có thêm một số nhận xét sau.

(c) Nếu $\overline{y}$ là nghiệm của (A) và y^* là nghiệm của (B) thì $\overline{y} + y^*$ là nghiệm của (A).

(d) Nếu $\overline{y_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, lần lượt là các nghiệm của các phương trình:

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_1(x) \\ y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_2(x) \\ &\cdots\cdots \\ y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_n(x) \end{aligned}$$

thì $\overline{y_1} + \overline{y_2} + \cdots + \overline{y_n}$ là nghiệm của phương trình:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Vì $\mathscr{Y}$ là không gian vector nên nếu tìm được một cơ sở của $\mathscr{Y}$ thì ta hoàn toàn xác định được $\mathscr{Y}$, nghĩa là giải được (B). Ta sẽ chứng minh $\dim \mathscr{Y} = 2$. Nhưng trước tiên, giống như đối với một không gian vector tổng quát, ta cũng có khái niệm "độc lập tuyến tính", được cho trong định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 5.3. Các hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trong một khoảng (a, b) (hữu hạn hay vô hạn) nếu từ đồng nhất thức

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0,\ \forall x \in (a, b)$$

ta suy ra được $C_1 = C_2 = 0$. Trong trường hợp ngược lại, nghĩa là tồn tại các số α, β không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0,\ \forall x \in (a, b)$$

thì các hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* trong (a, b).

Ví dụ 5.8. Hãy kiểm chứng rằng các cặp hàm số sau đây đều là độc lập tuyến tính trong mọi khoảng (a, b):

(a) $y_1(x) = x^3 - 2x$, $y_2(x) = x + 1$.

(b) $y_1(x) = \cos(\alpha x)$, $y_2(x) = \sin(\alpha x)$ $(\alpha \neq 0)$.

(c) $y_1(x) = e^{\alpha x}$, $y_2(x) = e^{\beta x}$ $(\alpha \neq \beta)$.

(d) $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ $(\beta \neq 0)$.

Giải. Ta chỉ kiểm chứng trường hợp (b). Với (a, b) là khoảng tùy ý, giả sử ta có

$$C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) = 0, \forall x \in (a, b).$$

Bằng cách lấy đạo hàm đồng nhất thức trên, ta có

$$-C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) = 0, \forall x \in (a, b).$$

Cố định $x_0 \in (a, b)$, theo trên, ta có hệ

$$\begin{cases} C_1 \cos(\alpha x_0) + C_2 \sin(\alpha x_0) = 0 \\ -C_1 \sin(\alpha x_0) + C_2 \cos(\alpha x_0) = 0 \end{cases}$$

và hệ này hiển nhiên có nghiệm duy nhất $C_1 = C_2 = 0$. ◁

Chú ý. Ta có thể mở rộng để xét các nghiệm của (B) dưới dạng hàm phức một biến thực $f(x) = u(x) + iv(x)$: f là nghiệm của (B) trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi với mọi $x \in (a, b)$, ta có $f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0$. Dễ thấy $f(x)$ là nghiệm của (B) trong (a, b) khi và chỉ khi $u(x)$ và $v(x)$ là nghiệm của (B) trong (a, b). Ngoài ra, nếu $f_1(x) = u_1(x)+iv_1(x)$, $f_2(x) = u_2(x)+iv_2(x)$ là các nghiệm của (B) trong (a, b) thì với mọi số thực a_1, b_1, a_2, b_2, hàm số $(a_1+ib_1)f_1(x)+(a_2+ib_2)f_2(x)$ là nghiệm của (B) trong (a, b).

Định lý về cấu trúc nghiệm của các phương trình (A) hay (B) dựa vào một kết quả có liên quan đến khái niệm *định thức Wronskian*, được cho bởi định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.4. Định thức Wronskian của các hàm khả vi y_1, y_2 là định thức cấp 2:

$$W[y_1, y_2] := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

Nếu các phần tử của định thức được tính tại một điểm x, thì định thức được viết là $W[y_1, y_2](x)$ và được gọi là định thức Wronskian của y_1, y_2 tại x.

Định lý 5.4. *Giả sử y_1, y_2 là các nghiệm của (B) trong khoảng (a, b). Khi đó, các kết luận sau là tương đương:*

(a) *y_1, y_2 là độc lập tuyến tính trong (a, b),*

(b) *$\exists x_0 \in (a, b)\colon W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$,*

(c) *$W[y_1, y_2](x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh theo quy trình: (a) ⇒ (b) ⇒ (c) ⇒ (a).

(a) ⇒ (b): Giả sử $W[y_1, y_2](x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Lấy $x_0 \in (a, b)$ tùy ý. Ta xác định các hằng số C_1, C_2 sao cho $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ thỏa các điều kiện $\overline{y}(x_0) = 0$ và $\overline{y}\,'(x_0) = 0$. Do $W[y_1, y_2](x_0) = 0$ nên hệ

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

có nghiệm $(C_{10}, C_{20}) \neq (0, 0)$. Vậy $C_{10}y_1 + C_{20}y_2$ là nghiệm thỏa điều kiện đã nêu. Nhưng do $y = 0$ (trong (a, b)) cũng là nghiệm thỏa các điều kiện đó nên ta phải có: $C_{10}y_1 + C_{20}y_2 = 0$ (trong (a, b)), mâu thuẫn với giả thiết y_1, y_2 là độc lập tuyến tính. Vậy, ta có kết luận (b).

(b) ⇒ (c): Theo giả thiết, ta có các đồng nhất thức sau trong (a, b):

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0, \tag{5.30}$$
$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0. \tag{5.31}$$

Bằng cách trừ (5.31) cho (5.30) sau khi đã nhân (5.31) cho y_1 và (5.30) cho y_2, ta nhận được đồng nhất thức sau trong (a, b):

$$\begin{aligned}\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)' + a_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \text{ hay}\\ W' + a_1(x)W = 0.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra công thức Abel:

$$W[y_1, y_2](x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}.$$

Do $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ nên suy ra $C \neq 0$, và như vậy suy ra kết luận (c).

(c) ⇒ (a): Giả sử trong (a, b), ta có

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0.$$

Từ đó, trong (a, b), ta cũng có

$$C_1y_1' + C_2y_2' = 0.$$

Lấy $x_0 \in (a, b)$ tùy ý, ta có hệ

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0,\\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0.\end{cases}$$

Do giả thiết (c) nên hệ trên (ẩn là C_1, C_2) có định thức ma trận hệ số là $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$. Vậy, ta phải có $C_1 = C_2 = 0$, nghĩa là y_1, y_2 là độc lập tuyến tính.

■

Từ định lý trên, dễ dàng chứng minh được định lý sau đây về cấu trúc nghiệm của phương trình (B).

Định lý 5.5. *Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của (B) trong khoảng (a, b). Khi đó, với mỗi nghiệm $y(x)$ của (B), luôn tồn tại các hằng số α, β sao cho trong (a, b), ta có $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$.*

Theo định lý trên, công thức $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ $((C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2)$ chứa mọi nghiệm của phương trình (B) trong (a, b) và như vậy, chính là nghiệm tổng quát của (B). Từ đó, ta cũng có thể viết

$$\mathscr{Y} = \{C_1y_1 + C_2y_2 \colon C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\},$$

và như vậy, $\dim \mathscr{Y} = 2$.

Ví dụ 5.9. Tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$ thỏa

$$\begin{cases} y(0) = 1,\\ y'(0) = 3,\end{cases}$$

biết rằng phương trình nhận các nghiệm $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$.

GIẢI. Do các nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là độc lập tuyến tính trong mọi khoảng (a, b) nên phương trình có nghiệm tổng quát $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$, suy ra $y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$. Từ đó, ta có

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = 1 \to 1 = C_1 + C_2 \\ y'(0) = 3 \to 3 = C_1 + 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 2. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm cần tìm là $y(x) = -e^x + 2e^{2x}$. ◁

Hoàn toàn tương tự như Định lý 5.5, ta cũng có định lý sau đây về cấu trúc nghiệm của phương trình (A).

Định lý 5.6. *Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của (B) trong khoảng (a, b) và $\overline{y}(x)$ là nghiệm của (A) trong khoảng đó. Khi đó, với mỗi nghiệm $y(x)$ của (A), luôn tồn tại các hằng số α, β sao cho trong (a, b), ta có $y(x) = \overline{y}(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$.*

Theo định lý trên, công thức $\bar{y}(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ $((C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2)$ chứa mọi nghiệm của phương trình (A) trong (a, b) và như vậy, chính là nghiệm tổng quát của (A).

5.3.3. Sơ đồ giải phương trình tuyến tính

Ta chia quá trình giải phương trình (A) theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử $y_1 = y_1(x) \neq 0$ trong (a, b) là một nghiệm cho trước của (B). Từ công thức Abel, ta suy ra

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = C\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} \text{ hay}$$
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = C\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}.$$

Từ đó, ta có thể tìm được nghiệm $y_2 = y_2(x)$ của (B) từ công thức

$$\frac{y_2}{y_1} = C\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx + D.$$

Chọn $C = 1$, $D = 0$, ta nhận được nghiệm

$$y_2 = y_1(x) \cdot \int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx, \tag{5.32}$$

hiển nhiên là độc lập tuyến tính với $y_1 = y_1(x)$ trong (a, b). Vậy, theo Định lý 5.5, (B) có nghiệm tổng quát: $y^* = C_1y_1 + C_2y_2$.

Bước 2: Theo phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange, ta tìm một nghiệm của (A) dưới dạng

$$\overline{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

trong đó, $C_1(x)$ và $C_2(x)$ là các hàm số chưa biết. Thay công thức này vào (A), ta đi đến đồng nhất thức sau trong (a, b):

$$[C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2]' + a_1(x)[C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2] + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \tag{5.33}$$

Khi chọn $C_1(x)$ và $C_2(x)$ thỏa

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \tag{5.34}$$

thì (5.33) thành

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \tag{5.35}$$

Hệ (5.34), (5.35) (ẩn là $C_1'(x)$, $C_2'(x)$) có nghiệm duy nhất là $C_1'(x) = \varphi(x)$, $C_2'(x) = \psi(x)$ do $W[y_1, y_2] \neq 0$ trong (a, b). Từ đó, ta có

$$\overline{y} = y_1(x)\int \varphi(x)dx + y_2(x)\int \psi(x)dx.$$

Vậy, $y = \overline{y} + y^*$ là nghiệm tổng quát của (A).

Ví dụ 5.10. Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình

$$x^2y'' - xy' + y = 4x^3$$

thỏa điều kiện $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

Giải. Xét phương trình

$$x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{5.36}$$

Ta thử tìm nghiệm của (5.36) dưới dạng đa thức (bậc càng nhỏ càng tốt) và dễ nhận ra $y_1 = x$ là nghiệm. Theo công thức (5.32), với $a_1(x) = -1/x$, ta tìm được nghiệm $y_2 = x\ln|x|$ của phương trình $(x \neq 0)$ và từ đó, nhận được nghiệm tổng quát của (5.36):

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2x\ln|x|.$$

Theo sơ đồ trên, ta tìm nghiệm $\overline{y}$ của phương trình đã cho dưới dạng $\overline{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, trong đó

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x\ln|x| = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(\ln|x| + 1) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -4x\ln|x| \\ C_2'(x) = 4x. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $C_1(x) = -2x^2\ln|x| + x^2$, $C_2(x) = 2x^2$ và nhận được

$$\overline{y} = (-2x^2\ln|x| + x^2)x + 2x^3\ln|x| = x^3.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + C_1y_1 + C_2y_2 = x^3 + C_1x + C_2x\ln|x|.$$
$$(\Rightarrow y' = 3x^2 + C_1 + C_2(\ln|x| + 1))$$

Từ các điều kiện $y(1) = 0$ và $y'(1) = 0$, dễ dàng suy ra $C_1 = -1$, $C_2 = -2$ và xác định được nghiệm thỏa bài toán là: $y = x^3 - x - 2x\ln|x|$. ◁

Chú ý. Trong một số trường hợp, ta cũng có thể xác định trực tiếp một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Trong ví dụ trên, để ý đến biểu thức cụ thể ở hai vế, ta có thể tìm nghiệm của phương trình dưới dạng một đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Thay vào phương trình và từ đồng nhất thức nhận được, ta dễ dàng suy ra $a = 1$, $b = d = 0$. Vậy, phương trình có nghiệm riêng dạng $y = x^3 + cx$ (c tùy ý) và khi chọn $c = 0$ ta nhận được nghiệm riêng đã tìm được là $y = x^3$! Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng phương pháp giảm cấp phương trình (5.36) bằng cách viết lại nó dưới dạng $y'' - (y/x)' = 0$. Khi đó, (5.36) được đưa về dạng phương trình tuyến tính cấp một $y' - (y/x) = C_1$ và từ đó, dễ dàng nhận được trực tiếp nghiệm tổng quát của phương trình này là là $y = C_1x + C_2x\ln|x|$.

5.3.4. Phương trình tuyến tính với hệ số hằng

Ta sẽ khảo sát phương trình (A) trong trường hợp $a_1(x)$ và $a_0(x)$ là những hàm hằng. Cụ thể là xét phương trình
$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{5.37}$$
trong đó, a và b là các hằng số, f là hàm liên tục trong một khoảng I nào đó. Khi đó, phương trình thuần nhất tương ứng với (5.37) là
$$y'' + ay' + by = 0. \tag{5.38}$$
Để thuận tiện, ta sẽ gọi các phương trình (5.37), (5.38) lần lượt là (I) và (II).

Để giải (II), ta có nhận xét rằng nghiệm có thể tỉ lệ với các đạo hàm cấp một và cấp hai của nó, nghĩa là ta thử tìm nghiệm y thỏa $y' - ky = 0$ (k là hằng số phức) hay $y = Ce^{kx}$ và ta chỉ cần chọn $y = e^{kx}$, với $k \in \mathbb{C}$. Vậy: $y = e^{kx}$ là nghiệm của (II) (trong I) khi và chỉ khi $k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0$ với mọi $x \in I$ hay:
$$k^2 + ak + b = 0. \tag{5.39}$$
Phương trình (5.39) thường được gọi là *phương trình đặc trưng* của (II). Để nhận được các nghiệm của (II) từ các nghiệm của (5.39), ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: Phương trình (5.39) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2. Khi đó, do $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của (II) nên theo Định lý 5.5, ta có nghiệm tổng quát của (II) là
$$y^* = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Trường hợp 2: Phương trình (5.39) có nghiệm kép $k = \alpha$. Khi đó, $y_1 = e^{\alpha x}$ là nghiệm của (II) và ta có thể tìm được nghiệm y_2 của (II) và độc lập tuyến tính với y_1 theo công thức (5.32):
$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a\,dx}}{[y_1(x)]^2}dx = e^{\alpha x} \int \frac{e^{-ax}}{e^{-ax}}dx = xe^{\alpha x} \quad (\alpha = -a/2)$$
Khi đó, nghiệm tổng quát của (II) là
$$y^* = C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x}.$$

Trường hợp 3: Phương trình (5.39) có hai nghiệm phức liên hợp $k = \alpha \pm i\beta$, với $\alpha = -a/2$ và $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2 = \sqrt{-\Delta}\,/2$ (lưu ý rằng $\Delta = a^2 - 4b < 0$). Khi đó, vì (II) nhận nghiệm
$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
nên suy ra nó cũng nhận các nghiệm độc lập tuyến tính $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Vậy, nghiệm tổng quát của (II) trong trường hợp này là
$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Ví dụ 5.11. Giải các phương trình sau:

(a) $y'' - 3y'' - 4y = 0$.

(b) $y'' + y' + y/4 = 0$.

(c) $y'' - y' + y = 0$.

Giải.

(a) Phương trình đặc trưng $k^2-3k-4=0$ có các nghiệm $k=-1$, $k=4$ nên $y^* = C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

(b) Phương trình đặc trưng $k^2+k+1/4=0$ có nghiệm kép $k=-1/2$ nên $y^* = C_1e^{-x/2} + C_2xe^{-x/2}$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

(c) Phương trình đặc trưng $k^2-k+1=0$ không có nghiệm thực ($\Delta = 1-4=-3<0$) và nhận các nghiệm phức $\alpha \pm i\beta$, với $\alpha = -a/2 = 1/2$, $\beta = \sqrt{-\Delta}/2 = \sqrt{3}/2$. Vậy, theo trường hợp 3 ở trên, nghiệm tổng quát của phương trình là $y^* = e^{x/2}\big[C_1\cos(\sqrt{3}x/2) + C_2\sin(\sqrt{3}x/2)\big]$.

◁

Ví dụ 5.12. Xét một chất điểm có khối lượng m, chuyển động trên trục Ox dưới tác dụng của một lực có độ lớn $F(x) = -kx$, trong đó, $x = x(t)$ là vị trí của chất điểm tại thời điểm t. Hãy xác định $x(t)$, từ đó suy ra đặc điểm của F.

Giải. Theo Định luật II Newton, tại mỗi thời điểm t ta có

$$F(x(t)) = ma(t)$$
$$-kx(t) = mx''(t).$$

Vậy, $x(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân

$$mx''+kx=0 \Leftrightarrow x''+\omega^2x=0 \quad (\omega>0,\ \omega^2=k/m).$$

Dễ thấy, từ phương trình đặc trưng tương ứng, phương trình vi phân trên nhận các hàm $x_1(t) = \cos\omega t$, $x_2(t) = \sin\omega t$ là các nghiệm độc lập tuyến tính. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$
$$(\Rightarrow x'(t) = -\omega C_1\sin\omega t + \omega C_2\cos\omega t)$$

Tất nhiên, $x(t)$ vẫn chưa được xác định hoàn toàn vì còn chứa các hằng số tùy ý C_1, C_2. Để xác định được các hằng số này, ta cần biết, như trong các bài toán về chuyển động, vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu của chất điểm, nghĩa là ta cần có thêm các điều kiện $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Từ đó, ta nhận được $C_1 = x_0$ và $C_2 = v_0/\omega$. Vậy, ta có

$$x(t) = x_0\cos\omega t + (v_0/\omega)\sin\omega t = A(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t) = A\sin(\omega t+\varphi),$$

trong đó, $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$, $\sin\varphi = x_0/A$, $\cos\varphi = v_0/(\omega A)$. Suy ra

$$-A \le x(t) \le A,\ \forall t.$$

Với kết quả này ta có thể nói chuyển dộng đang xét là một dao động (hay *dao động điều hòa*) quanh vị trí cân bằng và F cũng được gọi là lực *hướng tâm* (hay *đàn hồi*). ◁

Trong mọi trường hợp đã xét, ta luôn tìm được các nghiệm độc lập tuyến tính y_1, y_2 của (II) và theo sơ đồ đã nêu thì ta sẽ tìm được một nghiệm $\overline{y}$ của (I) và như vậy, suy ra được nghiệm tổng quát của (I). Tuy nhiên, trong một số trường hợp của $f(x)$ thì $\overline{y}$ có thể được tìm trực tiếp mà không cần phải tính tích phân. Ta hãy khảo sát những trường hợp như vậy và chủ yếu là chỉ ra cách tìm nghiệm $\overline{y}$.

• **Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, P là đa thức):** Từ mối liên hệ giữa α và các nghiệm của phương trình đặc trưng mà ta sẽ xác định được dạng nghiệm riêng $\overline{y}$ của (I). Trước tiên, ta tìm nghiệm riêng của (I) dưới dạng hàm $e^{\alpha x}Q(x)$, Q là đa thức cùng bậc n với P. Thay vào (I), ta có đồng nhất thức

$$Q'' + (2\alpha + a)Q' + (\alpha^2 + a\alpha + b)Q = P. \tag{5.40}$$

Từ đồng nhất thức trên, ta xét các trường hợp sau.

(a) α không là nghiệm của phương trình (5.39) hay phương trình (5.39) không có nghiệm thực. Khi đó, do cả hai vế của (5.40) là hai đa thức cùng bậc n nên nghiệm $\overline{y}$ của (I) được tìm dưới dạng

$$\overline{y} = e^{\alpha x}Q(x),$$

trong đó, Q là một đa thức cùng bậc với P và được viết dưới dạng chứa các hệ số chưa xác định. Thay vào (I) và cân bằng các hệ số ở hai vế, ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính, với các ẩn chính là các hệ số chưa xác định của Q. Giải hệ này sẽ xác định được Q.

(b) α là một trong hai nghiệm thực phân biệt của phương trình (5.39). Khi đó, do vế trái của (5.40) có bậc là $(n-1)$ nên nghiệm $\overline{y}$ của (I) được tìm dưới dạng

$$\overline{y} = xe^{\alpha x}Q(x),$$

trong đó Q được xác định như trên.

(c) α là nghiệm kép của phương trình (5.39). Khi đó, do vế trái của (5.40) có bậc là $(n-2)$ nên nghiệm $\overline{y}$ của (I) được tìm dưới dạng

$$\overline{y} = x^2e^{\alpha x}Q(x),$$

trong đó Q được xác định như trên.

Ví dụ 5.13. Giải phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(2x-1).$$

Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ nên phương trình vi phân thuần nhất này nhận nghiệm tổng quát

$$y^* = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Do $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$\overline{y} = e^{-x}(Ax + B).$$

Thay vào phương trình, ta đi đến đồng nhất thức

$$4Ax - A + 4B = 2x - 1, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 2 \\ A - 4B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/8 \end{cases}$$

Vậy, $\overline{y} = e^{-x}(x/2 - 1/8)$ và phương trình đã cho có nghiệm tổng quát $y = y^* + \overline{y}$. ◁

• **Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ (α và $\beta \in \mathbb{R}$, P và Q là các đa thức):** Ở đây, ta cũng có thể thiết lập được mối liên hệ giữa α, β với các hệ số a, b của phương trình (5.39), dựa vào điều kiện số phức $\alpha + i\beta$ có là nghiệm của (5.39) hay không. Cụ thể hơn, ta có

$$(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -a/2 \\ \beta^2 = (4b - a^2)/4 \end{cases}$$

Từ điều kiện này, ta đi đến cách xác định nghiệm riêng thích hợp của (I) trong các trường hợp sau.

(a) Nếu $\left[\begin{array}{l}\alpha \neq -a/2\\ \beta^2 \neq (4b-a^2)/4\end{array}\right.$ thì nghiệm $\overline{y}$ của (I) được tìm dưới dạng

$$\overline{y} = e^{\alpha x}\big[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x\big],$$

trong đó, U, V là hai đa thức cùng bậc bằng với bậc cao nhất trong hai đa thức P, Q và cũng được viết dưới dạng chứa các hệ số chưa xác định. Thay $\overline{y}$ vào phương trình (I) và từ đồng nhất thức nhận được, ta sẽ suy ra được các hệ số chưa xác định đó, tương tự như đã xét trong trường hợp trước của $f(x)$.

(b) Nếu $\begin{cases}\alpha = -a/2\\ \beta^2 = (4b-a^2)/4\end{cases}$ thì nghiệm $\overline{y}$ của (I) được tìm dưới dạng

$$\overline{y} = xe^{\alpha x}\big[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x\big],$$

với U, V được xác định giống như trên.

Chú ý. Bạn đọc có thể kiểm chứng trực tiếp kết quả trên bằng cách thay vào (I) nghiệm riêng của nó dưới dạng $e^{\alpha x}\big[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x\big]$, với U và V đã được mô tả ở trên. Từ các đồng nhất thức nhận được, ta sẽ đi đến kết luận rằng bậc của các đa thức ở các vế bằng nhau hay khác nhau tùy theo các điều kiện tương ứng đã nêu ở trên.

Ví dụ 5.14. Xác định dạng nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

(a) $y'' - 4y' - 5y = e^{-x}\cos^2 x$.

(b) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} - x^2e^x$.

(c) $y'' + y = x\sin x - 3\sin^2 x$.

Giải.

(a) Phương trình đặc trưng của $y'' - 4y' - 5y = 0$ có các nghiệm $k_1 = -1$, $k_2 = 5$ nên phương trình vi phân thuần nhất này nhận nghiệm tổng quát

$$y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}.$$

Mặt khác, ta có

$$e^{-x}\cos^2 x = \frac{\overbrace{e^{-x}}^{f_1(x)}}{2} + \frac{\overbrace{e^{-x}\cos 2x}^{f_2(x)}}{2}$$

Khi đó, nếu thay vế phải của phương trình đã cho chỉ bởi $f_1(x)$ thì rõ ràng nó nhận nghiệm riêng dạng $\overline{y_1} = xAe^{-x}$ và nếu thay vế phải chỉ bởi $f_2(x)$ thì hiển nhiên nó nhận nghiệm riêng $\overline{y_2} = e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. Vậy phương trình đã cho nhận nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$, suy ra

$$y = \overline{y} + y^* = Axe^{-x} + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x) + C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(b) Dễ thấy phương trình $y'' - 4y' + 4y = 0$ nhận nghiệm tổng quát

$$y^* = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Do $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ lần lượt là nghiệm kép và không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên dễ thấy phương trình đã cho nhận nghiệm riêng

$$\overline{y} = Ax^2e^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)e^x.$$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \overline{y} + y^*$.

(c) Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực vì có biệt thức $\Delta = -4 < 0$. Khi đó phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm tổng quát

$$y^* = C_1 \cos(\sqrt{-\Delta}\, x/2) + C_2 \sin(\sqrt{-\Delta}\, x/2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Do vế phải của phương trình đã cho được viết thành

$$x \sin x - 3\sin^2 x = x \sin x + \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{3}{2}$$

nên theo các trường hợp đã xét, ta có thể xác định nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$\overline{y} = x\big[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\big] + E\cos 2x + F \sin 2x + G.$$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình tất nhiên là $y = \overline{y} + y^*$.

◁

5.3.5. Mở rộng: phương trình Cauchy-Euler và phương trình cấp cao với hệ số hằng

Đối với các phương trình tuyến tính với hệ số là hàm số, ta chỉ có thể giải được trong một số trường hợp đặc biệt. Với a và b là các hằng số, ta xét phương trình

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$$

hay phương trình

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{5.41}$$

thường được gọi là phương trình Cauchy-Euler. Do lũy thừa của hệ số thì bằng với cấp của đạo hàm của y nên ta thử tìm nghiệm dưới dạng $y = x^m$ trong một khoảng I chứa các giá trị dương của x. Thay vào phương trình và từ đồng nhất thức nhận được trong I, ta đi đến phương trình đặc trưng:

$$m(m-1) + am + b = 0. \tag{5.42}$$

Có 3 trường hợp có thể xảy ra sau đây.

(a) (5.42) có hai nghiệm thực phân biệt là m_1 và m_2. Khi đó, (5.41) nhận nghiệm tổng quát

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}.$$

(b) (5.42) có nghiệm kép $m_1 = m_2 = m$. Khi đó, ngoài nghiệm $y_1 = x^m$, bằng cách dùng công thức (5.32), ta cũng xác định thêm được nghiệm $y_2 = x^m \ln x$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (5.41) là

$$y = C_1x^m + C_2x^m \ln x.$$

(c) (5.42) có hai nghiệm phức liên hợp $m = \alpha \pm i\beta$. Trong trường hợp này (5.41) nhận nghiệm phức

$$\begin{aligned} x^{\alpha+i\beta} &= x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{\ln x^{i\beta}} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} \\ &= x^\alpha\big[\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)\big] \quad \text{(theo công thức Euler)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra, (5.41) nhận nghiệm tổng quát

$$y = C_1x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

Ví dụ 5.15. Giải các phương trình sau:

(a) $x^2y'' + xy' + 9y = 0$.

(b) $y'' = (2/x)y'$.

(c) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, với $y(1) = 0$ và $y'(1) = 2$.

Giải.

(a) Do phương trình đặc trưng tương ứng

$$m(m-1) + m + 9 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 9 = 0$$

có các nghiệm phức $m = \pm 3i$ nên phương trình đã cho nhận nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos(3 \ln x) + C_2 \sin(3 \ln x).$$

(b) Dễ thấy phương trình đặc trưng có các nghiệm $m = 0$ và $m = 3$ nên phương trình đã cho nhận nghiệm tổng quát:

$$y = C_1x^0 + C_2x^3 = C_1 + C_2x^3.$$

(c) Vì $m = -1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1} \ln x = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}$$

chính là nghiệm tổng quát của phương trình.

◁

Những kết quả đã xét cho phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số hằng có thể được mở rộng cho trường hợp cấp n tổng quát, là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{5.43}$$

trong đó, a_i là các hằng số, với $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Tất nhiên, sự mở rộng cũng đi kèm theo sự mở rộng tương ứng các khái niệm "n hàm số độc lập tuyến tính" trong một khoảng I và "định thức Wronskian của n hàm số khả vi", lần lượt được cho bởi mệnh đề và định nghĩa sau:

$$\sum_{i=1}^{n} C_iy_i(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0,$$

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] := \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Ta cũng chứng minh được kết quả tương ứng với sự mở rộng trên:

Nếu phương trình (5.43) có n nghiệm độc lập tuyến tính $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ trong một khoảng nào đó thì nghiệm tổng quát của phương trình trong khoảng này là

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i(x),$$

trong đó, C_i là các số thực tùy ý, với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Để xác định các nghiệm cơ sở y_i, tương tự như đối với $n = 2$, ta tìm các hàm số dạng $e^{\lambda x}$, với λ là một số phức. Thay vào phương trình (5.43), và từ đồng nhất thức nhận được, ta đi đến

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{5.44}$$

cũng được gọi là phương trình đặc trưng của (5.43). Theo kết quả đã biết thì (5.44) có n nghiệm trong $\mathbb{C}$, có tính đến số bội của nghiệm. Các nghiệm này là các số thực hay là các số phức liên hợp. Sự phân chia theo các trường hợp sau đây sẽ giúp ta xác định được n nghiệm cơ sở y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ứng với n nghiệm của (5.44).

(a) Nếu các nghiệm của (5.44) đều thực và đôi một khác nhau thì ta nhận được n nghiệm cơ sở $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$, $e^{\lambda_n x}$. Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của (5.43) là

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}.$$

(b) Một cặp nghiệm phức liên hợp $\lambda = \alpha \pm i\beta$ của (5.44) sẽ cho ta hai nghiệm thực $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ của (5.43).

(c) Một nghiệm λ (có thể là số phức) có bội m của (5.44) sẽ cho m nghiệm của phương trình (5.43) là $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\lambda x}$. Trong trường hợp λ là phức thì theo công thức Euler, ta sẽ tách được các nghiệm thực tương ứng. Chẳng hạn, nghiệm phức $\lambda = \alpha + i\beta$ có bội 2 của (5.44) sẽ tương ứng với 4 nghiệm của (5.43) là $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$ và $xe^{\alpha x}\sin\beta x$.

Theo sự phân chia trên, chẳng hạn nếu phương trình đặc trưng cấp 7 có các nghiệm $\lambda = 2$ (bội 3), $\lambda = 1 + i$ (bội 2) và $\lambda = 1 - i$ (bội 2) thì phương trình thuần nhất tương ứng sẽ có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^x\cos x + C_5xe^x\cos x + C_6e^x\sin x + C_7xe^x\sin x,$$

trong đó C_i là các số thực tùy ý, với $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Ví dụ 5.16. Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 5$.

GIẢI. Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Từ các nghiệm $\lambda = 1$, $\lambda = \pm 2i$ của phương trình trên, ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

Theo các điều kiện ban đầu, ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 2C_3 = -1 \\ C_1 - 4C_2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{13}{5} \\ C_2 = \frac{-3}{5} \\ C_3 = \frac{-9}{5}. \end{cases}$$

Vậy, nghiệm cần tìm là $y = \frac{13}{5}e^x - \frac{3}{5}\cos 2x - \frac{9}{5}\sin 2x$. ◁

Tương tự như phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số hằng, phương trình

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x) \tag{5.45}$$

có nghiệm tổng quát là tổng của nghiệm tổng quát của (5.43) và một nghiệm riêng của (5.45). Điều này cũng đúng ngay cả khi a_i là các hàm số của x. Ta có thể tìm nghiệm riêng của (5.45) theo phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange đã áp dụng trong trường hợp $n = 2$. Ngoài ra, trong một số trường hợp đặc biệt của f (như đã xét trong trường hợp $n = 2$), ta cũng có thể tìm được trực tiếp nghiệm riêng của (5.45). Tuy nhiên, cách xác định dạng nghiệm riêng phù hợp sẽ còn tùy thuộc vào nhiều trường hợp phải xét. Chẳng hạn, nếu $f(x)$ có dạng $e^{\alpha x}P(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, P là đa thức) thì một nghiệm riêng thích hợp $\overline{y}$ của (5.45) được tìm dựa theo kết quả kiểm chứng: α có là nghiệm của (5.44) hay không và số bội của nghiệm là bao nhiêu?

Ví dụ 5.17. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y^{(4)} + y' = 1$.
GIẢI. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất $y^{(4)} + y' = 0$ là

$$\lambda^4 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)\big[(\lambda - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\big] = 0.$$

Dễ thấy phương trình trên nhận các nghiệm $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, phương trình thuần nhất nhận nghiệm tổng quát $y^* = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{x/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big) + C_4e^{x/2}\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big)$. Mặt khác, do vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = 1 = e^{0x}$ nên ta có thể tìm một nghiệm riêng của nó dưới dạng $\overline{y} = xe^{0x}A = Ax$, với A là một hằng số. Thay vào phương trình đã cho, ta suy ra $A = 1$. Vậy, $\overline{y} = x$ và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = y^* + \overline{y}$. ◁

Ví dụ 5.18. Xác định dạng nghiệm tổng quát của phương trình

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x+1).$$

GIẢI. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$ là

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2+1)(\lambda-2)^2 = 0. \tag{5.46}$$

Khi đó, $\lambda = \pm i$, $\lambda = 2$ là nghiệm (có số bội là 2) của (5.46). Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^{2x} + C_4xe^{2x}.$$

Do vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^{2x}(x+1)$ và $\lambda = 2$ là nghiệm bội 2 của phương trình đặc trưng nên phương trình đã cho nhận một nghiệm riêng có dạng

$$\overline{y} = x^2e^{2x}(Ax+B) = e^{2x}(Ax^3 + Bx^2)$$

nên có nghiệm tổng quát $y = y^* + \overline{y}$. ◁

5.4. Giới thiệu các phương pháp giải số phương trình vi phân cấp một

Giả sử bài toán giá trị ban đầu

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.47}$$

có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trong một lân cận của x_0. Trong nhiều trường hợp ta không thể xác định được nghiệm $y = y(x)$ dưới dạng hiện (thường gọi là nghiệm *chính xác*) mà chỉ xác định được các giá trị xấp xỉ của nghiệm là y_0, y_1, y_2, ..., y_k tương ứng trên một tập các điểm đã cho trong lân cận của x_0 là $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Các giá trị y_0, y_1, y_2, ..., y_k được gọi là một *nghiệm số* hay *lời giải số*.

5.4.1. Phương pháp Euler

Đối với phương pháp Euler để tìm nghiệm số của bài toán (5.47), các tập điểm được chọn thỏa hệ thức

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.48}$$

trong đó $h > 0$ là một số cho trước, được gọi là *cỡ bước*, chính là khoảng cách giữa các điểm liên tiếp. Tại điểm ban đầu (x_0, y_0), đường cong nghiệm có độ dốc $f(x_0, y_0)$ và tiếp tuyến với nó tại (x_0, y_0) là đường thẳng

$$y = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0). \tag{5.49}$$

Ý tưởng chính của phương pháp là xấp xỉ giá trị của nghiệm tại x_1 bằng

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) = y_0 + h f(x_0, y_0). \tag{5.50}$$

Ta lặp lại các bước trên, bắt đầu từ điểm (x_1, y_1) và xây dựng một đường thẳng qua nó, có độ nghiêng $f(x_1, y_1)$ nên có phương trình là $y = y_1 + (x - x_1) f(x_1, y_1)$. Khi đó, giá trị xấp xỉ của nghiệm tại x_2 lại được chọn là

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) = y_1 + h f(x_1, y_1). \tag{5.51}$$

Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các điểm được cho bởi các công thức

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h\, f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Như vậy, đường cong nghiệm được xấp xỉ bởi một đường gấp khúc nối các điểm (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$. Các điểm x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, cũng được gọi là các *điểm lưới*.

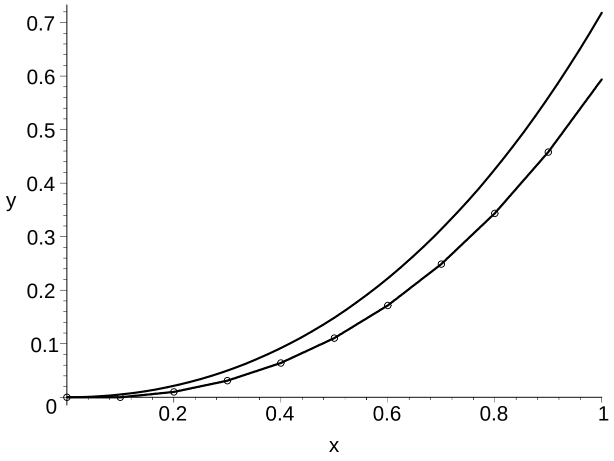
Để minh họa cho phương pháp Euler, ta xét bài toán

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 0. \tag{5.53}$$

Với $f(x, y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.1$ và $n = 10$. Theo các công thức tính x_{i+1}, y_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots, 9$, ta xây dựng được đường gấp khúc $y = \ell(x)$, $x \in [x_0, x_{10}]$, trong đó: $\ell(x) = y_i + (x - x_i) f(x_i, y_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Mặt khác, dễ thấy bài toán có nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R}$ là $y(x) = e^x - x - 1$. Ta sẽ so sánh giá trị của các hàm $\ell(x)$ và $y(x)$ trên $[0, 1]$ bằng đồ thị, được cho trong Hình 5.4. Bạn đọc có thể tham khảo dưới đây một chương trình đơn giản để vẽ đường gấp khúc của phương pháp Euler đối với phương trình vi phân dạng $y' = f(x, y)$ đã cho. Chương trình được viết bằng ngôn ngữ của MAPLE (Version 7), một phần mềm Toán học được ưa chuộng trong các tính toán khoa học và biểu diễn hình học.

CHƯƠNG TRÌNH VẼ ĐƯỜNG GẤP KHÚC EULER:

```
> Euler_line:=proc(f,x0,y0,h,N)
> local n,k,X,Y,g,segment,opts,points;
> opts:=[args[6..nargs]]:
> X[0]:=x0;Y[0]:=y0;g:=unapply(f,x,y);
> for n from 0 to N-1 do
> X[n+1]:=X[n]+h;
> Y[n+1]:=Y[n]+h*g(X[n],Y[n]);
```



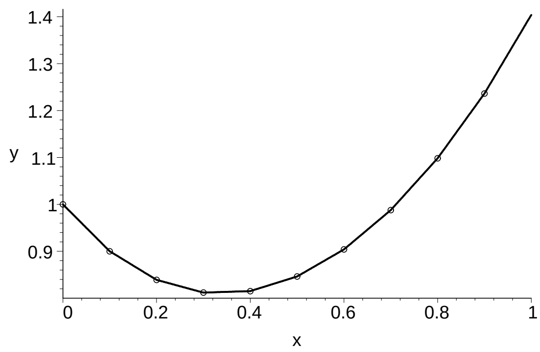
Hình 5.4: Đường gấp khúc $\ell(x)$ và đồ thị của nghiệm $y(x)$.

```
> od;
> for k from 0 to N-1 do
> segment[k]:=plot(Y[k]+(t-X[k])*g(X[k],Y[k]),t=X[k]..X[k+1],thickness=3,
  color=black,scaling=constrained);
> od;
> points:=plot([seq([X[j],Y[j]],j=0..N-1)],style=POINT,symbol=CIRCLE,
  thickness=3,scaling=constrained,color=black,symbolsize=12);
> plots[display]({seq(segment[j],j=0..N-1),points},op(opts));
> end:
```

Chẳng hạn, xét bài toán: $y' = f(x, y)$, $y(0) = 1$, với $f(x, y) = xy + 2x - y$. Dùng chương trình trên, với $h = 0.1$ và $n = 10$, qua lời gọi sau đây trong môi trường tương tác của Maple

```
> Euler_line(x*y+2*x-y,0,1,0.1,10,labels=[x,y]);
```

ta nhận được đường gấp khúc Euler của bài toán trên, được cho trong Hình 5.5.



Hình 5.5: Đường gấp khúc Euler của bài toán $y' = xy + 2x - y$, $y(0) = 1$.

Bỏ qua sai số làm tròn trong quá trình tính toán, ta chỉ xét đến sai số do quá trình *rời rạc hóa* (discretization error), nghĩa là sai số phát sinh khi dùng

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

để xấp xỉ cho giá trị tương ứng của nghiệm là

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_k)h^3 + \cdots .$$

Bây giờ ta cần phải chứng minh rằng sai số tại mỗi điểm lưới sẽ giảm về 0 khi h giảm về 0. Nhưng trước hết, ta cần đến kết quả sau đây, được kiểm chứng dễ dàng bằng quy nạp.

Bổ đề 5.1. *Cho A và B là các số không âm và $A \neq 1$. Khi đó, nếu các số $|E_i|$, $i = 0, 1, \ldots, n$, thỏa*

$$|E_{i+1}| \leq A|E_i| + B, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

thì ta có

$$|E_i| \leq A^i|E_0| + \frac{A^i - 1}{A - 1}B, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.54}$$

Để chính xác hóa các kết quả có liên quan, ta giả sử bài toán

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0 \tag{5.55}$$

có nghiệm duy nhất $y(x)$ trên $[0, L]$. Giả sử $y(x)$ có $y'(x)$ và $y''(x)$ liên tục trên $[0, L]$ và giả sử tồn tại các hằng số dương M, N sao cho

$$\begin{aligned} &|y''(x)| \leq N, \quad (0 \leq x \leq L) \\ &\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M, \quad (0 \leq x \leq L,\ -\infty < y < \infty). \end{aligned}$$

Ta chọn cỡ lưới $h = L/n$ và phân hoạch $[0, L]$ bởi các điểm lưới

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = L.$$

Gọi $\{y_k\}$ là nghiệm số theo phương pháp Euler của bài toán (5.55); nghĩa là

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Gọi $E_k = y(x_k) - y_k$ là sai số tại mỗi điểm lưới x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, áp dụng Bổ đề 5.1 ta chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$|E_k| \leq \frac{\left[(1 + Mh)^k - 1\right]Nh}{2M}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Từ đó, ta đi đến kết luận

$$\lim_{h \to 0} |E_k| = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Qua biểu diễn $y(x_{k+1})$ bằng công thức Taylor, ta nhận thấy rằng phương pháp Euler chỉ xấp xỉ cho hai số hạng đầu tiên trong biểu diễn đó theo sự tương ứng sau:

$$\begin{aligned} y(x_k) &\approx y_k \\ y'(x_k) = f(x_k, y(x_k)) &\approx f(x_k, y_k) \end{aligned}$$

Vì vậy, phương pháp Euler còn được gọi là phương pháp Taylor bậc nhất. Để có thể xây dựng các phương pháp Taylor bậc cao hơn, ta cần xây dựng các xấp xỉ cho các số hạng bậc cao hơn trong biểu diễn Taylor của $y(x_{n+1})$. Do

$$y''(x_k) = f_x(x_k, y(x_k)) + f_y(x_k, y(x_k))y'(x_k)$$

nên ta có thể xấp xỉ giá trị này bởi

$$y''(x_k) \approx f_x(x_k, y_k) + f_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k).$$

Từ đó, ta nhận được nghiệm số của bài toán (5.47) theo phương pháp Taylor bậc hai, được cho bởi công thức lặp

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\big[f_x(x_k, y_k) + f_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k)\big], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.56}$$

5.4.2. Phương pháp Runge-Kutta

Theo trên, việc xây dựng phương pháp xấp xỉ Taylor bậc cao đòi hỏi phải tính các hàm đạo hàm khác nhau của f. Như vậy, với mỗi bậc tương ứng, ta cần phải *tính các giá trị của một số hàm khác nhau tại một điểm*. Một phương pháp xấp xỉ thuận tiện hơn đã được áp dụng: *tính giá trị của chỉ một hàm tại một số điểm khác nhau*. Xét bài toán (5.47) với điều kiện tồn tại nghiệm đã nêu. Giả sử y_n là giá trị xấp xỉ nghiệm tại điểm lưới x_n. Để nhận được giá trị xấp xỉ y_{n+1} tại x_{n+1}, ta xét tiếp tuyến với đường cong nghiệm tại điểm xấp xỉ (x_n, y_n):

$$y = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n). \tag{5.57}$$

Trên tiếp tuyến này, xét điểm $(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)h)$ và đặt $K_1 = f(x_n, y_n)$, $K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1)$. Vậy K_1, K_2 chính là các độ dốc tại các điểm mút của đoạn thẳng tiếp tuyến. Khi đó, xuất phát từ điểm (x_n, y_n) có hai tia có độ dốc là K_1 và K_2 cùng hướng đến vị trí điểm có hoành độ $x_n + h$. Để xác định điểm xấp xỉ kế tiếp, ý tưởng ở đây là chọn giá trị trung bình $(K_1 + K_2)/2$ làm độ dốc cho tia qua (x_n, y_n) thì tia này có phương trình

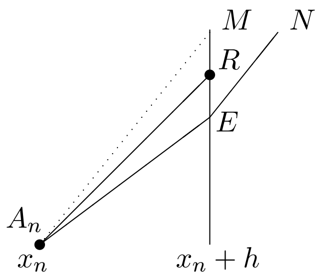
$$y = y_n + \frac{K_1 + K_2}{2}(x - x_n).$$

Khi đó, tại điểm lưới $x_n + h = x_{n+1}$, ta có thể xấp xỉ $y(x_{n+1})$ bởi giá trị nhận được tương ứng từ tia trên là

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{K_1 + K_2}{2}.$$

Chú ý. Trong Hình 5.6, với $A_n(x_n, y_n)$ là điểm xấp xỉ với điểm trên đường cong nghiệm, thì tia $\overrightarrow{A_nE}$ có độ dốc K_1, tia $\overrightarrow{A_nM}$ và tia $\overrightarrow{EN}$ có cùng độ dốc K_2, tia $\overrightarrow{A_nR}$ có độ dốc $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$. Điểm R sẽ được chọn là điểm xấp xỉ kế tiếp.

Sự tổng quát hóa ý tưởng trên có thể được mô tả như sau. Từ xấp xỉ y_n của $y(x_n)$, ta xây dựng xấp xỉ y_{n+1} của $y(x_{n+1})$ theo hướng lấy "trung bình" của nhiều điểm hơn. Theo trên, thực chất là đi tìm một tia xuất phát từ (x_n, y_n) có tính chất "trung bình", tổng hợp từ nhiều hướng xuất phát từ điểm đó hay các điểm trung gian, và đó sẽ là các hướng của *trường vector* tương ứng. Đường thẳng $d\colon x = x_n + h$ sẽ đóng vai trò "chặn" các hướng đi đến, khởi đi từ điểm xấp xỉ (x_n, y_n), và giao điểm



Hình 5.6: Minh họa cho ý tưởng của phương pháp Runge-Kutta.

của tia "tổng hợp" và đường thẳng này chính là điểm xấp xỉ được chọn. Trước tiên, ta gọi K_{n_1} là độ dốc của tiếp tuyến tại (x_n, y_n), nghĩa là $K_{n_1} = f(x_n, y_n)$, và tiếp tuyến có phương trình

$$y = y_n + K_{n_1}(x - x_n).$$

Điểm trung gian được chọn trên tiếp tuyến này là $\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_1}\right)$ và độ dốc tại điểm này là $K_{n_2} = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_1}\right)$. Tia qua (x_n, y_n) có độ dốc K_{n_2} có phương trình

$$y = y_n + K_{n_2}(x - x_n).$$

Ta lại chọn điểm trung gian trên tia này là $\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_2}\right)$ và độ dốc tại đó là $K_{n_3} = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_2}\right)$. Tia qua (x_n, y_n) có độ dốc K_{n_3} cắt d tại $(x_n + h, y_n + hK_{n_3})$ và độ dốc tại điểm này là $K_{n4} = f(x_n + h, y_n + hK_{n_3})$. Tia qua (x_n, y_n) lần này có độ dốc K_{n_4} cũng là một khả năng để xác định điểm xấp xỉ kế tiếp. Như vậy, ta có 4 tia qua (x_n, y_n) với các độ dốc K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3} và K_{n_4}. Ngoài ra, từ hai điểm trung gian, ta cũng có thêm hai tia có các độ dốc K_{n_2} và K_{n_3}. Khi đó, ta có thể xem d đón nhận tổng cộng 6 tia và để chọn tia tổng hợp xuất phát từ (x_n, y_n), một cách hợp lý, ta chọn độ dốc K_n cho tia này theo *giá trị trung bình có trọng* (weighted average) của các giá trị K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}, và K_{n_4}; nghĩa là

$$K_n = \frac{1}{6}\left(K_{n_1} + 2K_{n_2} + 2K_{n_3} + K_{n_4}\right).$$

Từ đó, tại điểm lưới x_{n+1}, giá trị $y(x_{n+1})$ được xấp xỉ bởi giá trị y_{n+1}, được tính bởi phương trình của tia tổng hợp

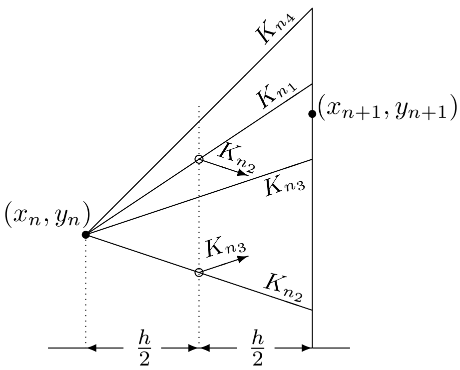
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K_{n_1} + 2K_{n_2} + 2K_{n_3} + K_{n_4}\right).$$

Tóm lại, phương pháp Runge-Kutta xấp xỉ nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (5.47) bởi nghiệm số tại các điểm lưới $x_n = x_0 + nh$, với $n = 1, 2, \ldots, N$, được cho bởi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K_{n_1} + 2K_{n_2} + 2K_{n_3} + K_{n_4}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
K_{n_1} &= f(x_n, y_n),\\
K_{n_2} &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_1}),\\
K_{n_3} &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_{n_2}),\\
K_{n_4} &= f(x_n + h, y_n + hK_{n_3}).
\end{aligned}$$



Hình 5.7: Ý nghĩa hình học của phương pháp Runge-Kutta.

Theo cách cho đệ quy của các độ dốc K_{ni}, $i = 1, 2, 3, 4$, ta dễ dàng tính được nghiệm số của các bài toán: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Cụ thể hơn, với

$$f(x, y) = 2x\Big(1 + \frac{y}{1 + x^2}\Big), \quad y(0) = 1,$$

ta thử lập bảng so sánh giá trị của nghiệm chính xác $y(x)$ của bài toán với giá trị xấp xỉ bằng số Y_n của nghiệm tại các điểm nút x_n, $n = 0, 1, \ldots, 10$, được tính theo phương pháp Runge-Kutta.

n	x_n	Y_n	$y(x_n)$	$\lvert y(x_n) - Y_n\rvert \approx$
0	0	1	1	0
1	0,1	1,020049833	1,020049834	$0,1 \times 10^{-8}$
2	0,2	1,080789538	1,080789542	$0,4 \times 10^{-8}$
3	0,3	1,183933686	1,183933689	$0,3 \times 10^{-8}$
4	0,4	1,332167201	1,332167206	$0,5 \times 10^{-8}$
5	0,5	1,528929405	1,528929439	$0,34 \times 10^{-7}$
6	0,6	1,778179062	1,778179192	$0,13 \times 10^{-6}$
7	0,7	2,084117608	2,084117641	$0,33 \times 10^{-7}$
8	0,8	2,451301157	2,451301837	$0,68 \times 10^{-6}$
9	0,9	2,883920403	2,883921590	$0,1187 \times 10^{-5}$
10	1,0	3,386292498	3,386294361	$0,1863 \times 10^{-5}$

5.5. Bài tập

1. Giải các phương trình sau:

   (a) $dy/dx = y^2(1 - y)$. (b) $y' = \cos(x - y)$.

   (c) $y' = 3x - 2y + 5$. (d) $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$.

2. Giải các phương trình sau:

   (a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. (b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

   (c) $y' = 1/(2x - y^2)$. (d) $xy' - y/(x + 1) = x$, $y|_{x=1} = 0$.

3. Giải các phương trình sau:

   (a) $x(dy/dx) = y + x\cos^2(y/x)$. (b) $dy/dx = (x^2 + xy + y^2)/x^2$.

   (c) $dy/dx = (x + 2y - 4)/(2x - y - 3)$.

4. Giải các phương trình sau:

   (a) $y' = \sin x \cos^2 y$.
   (b) $xy' = y \ln x$.
   (c) $y' = 2 + e^y$.
   (d) $y' + y = e^x$.
   (e) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.
   (f) $x^2y' + y = x^2e^{1/x}$, $y(1) = 3e$.

5. Để mô tả hiện tượng "nóng lên" và "nguội đi" của một vật do tác động của nhiệt độ của môi trường bên ngoài, Newton đã xác định được định luật sau, thường được gọi là Định luật Newton về sự tỏa nhiệt (Newton's law of cooling):

   > Tốc độ biến thiên nhiệt độ T của một vật theo thời gian, dT/dt, thì tỉ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ không đổi M của môi trường bên ngoài.

   Định luật trên, hiển nhiên được mô tả bởi phương trình vi phân sau:

   $$\frac{dT}{dt} = -k(T - M),$$

   với hằng số tỉ lệ $k > 0$, do dT/dt trái dấu với hiệu $T - M$. Chú ý rằng số $1/k$ có đơn vị đo theo thời gian (giờ, phút, giây, ...), được gọi là *hằng thời gian* của phương trình vi phân. Với M và k được cho, ta cần biết điều kiện ban đầu $T(t_0) = T_0$ để xác định được $T = T(t)$; trong khi nếu chỉ có M được cho thì ta cần đến hai điều kiện $T(t_0) = T_0$ và $T(t_1) = T_1$. Bây giờ, theo định luật đã nêu, ta xét bài toán đơn giản sau. Để xác định nhiệt độ bên trong một tủ lạnh, người ta lấy ra một lon Coca và sau nửa giờ, đo được nhiệt độ của lon là 10°C. Thêm nửa giờ nữa, nhiệt độ của lon là 15°C. Biết rằng nhiệt độ trong phòng vẫn đang giữ mức 35°C từ lúc lon Coca được lấy ra. Vậy, nhiệt độ trong tủ lạnh là bao nhiêu?

6. Giải các phương trình sau:

   (a) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
   (b) $y'' + y' + y = 0$, $y(2\pi/\sqrt{3}) = 0$, $y'(2\pi/\sqrt{3}) = 1$.
   (c) $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.
   (d) $2y'' + 5y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7. Cho hàm số $y(x)$ là nghiệm của bài toán

   $$y'' + xy' - 3y = x^2 + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

   (a) Hãy tính $y''(0)$.
   (b) Hãy lấy đạo hàm phương trình để suy ra $y'''(0)$.
   (c) Hãy tìm một đa thức bậc ba để xấp xỉ $y(x)$.
   (d) Hãy ước lượng $y(0,5)$.

8. Cho hàm số $y(x)$ là nghiệm của bài toán

   $$y'' + y^2 = x^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

   (a) Hãy ước lượng $y(0,25)$ bằng cách dùng một đa thức Taylor bậc ba.
   (b) Hãy ước lượng $y(0,25)$ bằng cách dùng một đa thức Taylor bậc bốn.

9. Một cái hồ chứa $1000\,m^3$ nước biển có nồng độ muối là $0,5\,kg/m^3$. Nước nguyên chất được cho chảy vào hồ với tốc độ $10\,m^3$/phút, giả sử được trộn đều tức thì với nước trong hồ và cho chảy ra ngoài với cùng tốc độ chảy vào. Sau thời gian bao lâu thì lượng muối trong hồ chỉ còn $50\,kg$?

10. Một mô hình toán học được dùng để khảo sát sự lây lan của một loại bệnh dịch là tốc độ truyền bệnh thì tỉ lệ với số người bị nhiễm bệnh và số người chưa bị nhiễm bệnh. Trong một thành phố biệt lập có 5000 cư dân và lúc đầu có 160 người bị bệnh và số người bị nhiễm bệnh lên đến 1200 người sau một tuần. Sau bao lâu thì sẽ có 80% số cư dân bị nhiễm bệnh?

11. Một thùng chứa 1000 lít (ℓ) nước nguyên chất. Rượu có nồng độ muối là $0,05\,kg/\ell$ được cho chảy vào thùng với tốc độ $5\,\ell$/phút. Một loại rượu khác có nồng độ muối là $0,04\,kg/\ell$ được cho chảy vào thùng với tốc độ $10\,\ell$/phút. Giả sử nước và các loại rượu trong thùng được trộn đều tức thì và cho chảy ra ngoài với tốc độ $15\,\ell$/phút. Hãy tính khối lượng muối trong thùng tại thời điểm t và cho biết sau 1 giờ thì khối lượng muối trong thùng là bao nhiêu?

12. Một bồn đang chứa 100 lít (ℓ) nước có hòa tan $50\,g$ muối. Người ta bơm vào bồn một dung dịch muối có nồng độ $2\,g/\ell$ với tốc độ $3\,\ell$/phút. Giả sử dung dịch muối trong bồn được trộn đều tức thì và chảy ra ngoài với tốc độ $2\,\ell$/phút. Nếu thể tích của bồn đủ lớn để nước trong bồn không tràn ra ngoài, thì hãy tính lượng muối trong bồn tại thời điểm t bất kỳ. Khi nào thì muối trong bồn đạt đến nồng độ $1,5\,g/\ell$? Sau 30 phút thì lượng muối trong bồn là bao nhiêu? (Biết rằng bồn đủ lớn để dung dịch được bơm vào không bị tràn ra ngoài.)

13. Một hồ chứa $1000\,m^3$ nước có nồng độ muối là $0,3\,kg/m^3$. Để giảm nồng độ muối của nước trong hồ, người ta bơm vào hồ một nguồn nước có nồng độ muối là $0,01\,kg/m^3$, với tốc độ $15\,m^3$/phút. Giả sử nước chảy vào được trộn đều tức thì với nước trong hồ và cho chảy ra ngoài với tốc độ $10\,m^3$/phút. Sau 100 phút bơm thì nồng độ muối của nước trong hồ là bao nhiêu? (Biết rằng hồ đủ lớn để nước được bơm vào không bị tràn ra ngoài.)

14. Dưới những điều kiện nhất định, kết quả chuyển dịch xuyên qua màng tế bào của một chất X bị phân hủy được mô tả bởi phương trình
$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y),$$
trong đó
$$\begin{cases} y: \text{ nồng độ của chất } X \text{ bên trong tế bào,} \\ k: \text{ hệ số thấm,} \\ A: \text{ diện tích bề mặt của màng,} \\ V: \text{ thể tích tế bào,} \\ c: \text{ nồng độ của chất } X \text{ bên ngoài tế bào.} \end{cases}$$
   (a) Tính nồng độ y tại thời điểm t, biết rằng $y(0) = y_0$.
   (b) Tính nồng độ y ở trạng thái bền của chất X, nghĩa là tính $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

15. *Glucose* được bơm vào tĩnh mạch với một tốc độ hằng. Khi đó, sự biến thiên nồng độ $C = C(t)$ của *glucose* trong máu theo thời gian được mô tả bởi
$$\frac{dC}{dt} = \frac{\mathrm{g}}{100\,V} - kC,$$
trong đó: g, V, k là các hằng số. Cụ thể hơn, g là tốc độ mà *glucose* được bơm vào máu (đơn vị tính là mg/phút), V là thể tích máu trong cơ thể ($\approx 5\,\ell$ đối với người lớn). Số hạng $-kC$

tồn tại vì *glucose* được giả thiết là đang biến đổi một cách liên tục thành các phân tử khác theo một tốc độ tỉ lệ với chính nồng độ của nó.

(a) Tính nồng độ *glucose* theo thời gian t, biết $C(0) = C_0$.

(b) Tính nồng độ *glucose* ở trạng thái bền, nghĩa là tính $\lim_{t\to+\infty} C(t)$.

16. Kiểm chứng các phương trình vi phân sau là toàn phần rồi giải chúng.

(a) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy$.

(b) $\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}dy = 0$.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy+y^2}{y-2xy-x^2}$.

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos(xy)+1}{3-2y-x\cos(xy)}$.

17. Cho biết b là một hằng số và phương trình vi phân $(x^2+by^2)dx + 6xydy = 0$ *không* là toàn phần, nhưng nhận $\rho(x) = 1/x^2$ là một thừa số tích phân. Hãy xác định b và giải phương trình.

18. Tìm thừa số tích phân cho các phương trình vi phân sau rồi giải chúng:

(a) $(x^2+y)dx - xdy = 0$.

(b) $ydx - xdy = 0$.

(c) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$.

(d) $y(1+xy)dx - xdy = 0$.

19. Tìm thừa số tích phân của phương trình Bernoulli sau đây:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha.$$

20. Phương trình vi phân cấp hai $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ được gọi là *toàn phần* nếu tồn tại hàm số g sao cho phương trình có thể được viết dưới dạng

$$y'' + \big[g(x)y\big]' = 0.$$

Giải các phương trình vi phân toàn phần cấp hai sau:

(a) $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0$.

(b) $y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$.

21. Dùng kỹ thuật hạ bậc để giải phương trình

$$(x^2-2x)y'' + 4(x-1)y' + 2y = e^{2x}.$$

22. Xác định phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai, biết rằng nó nhận các nghiệm $y_1(x) = x+1$ và $y_2(x) = x^3$.

23. Giải các bài toán Cauchy sau đây:

(a) $x^2y'' + 3xy' - 8y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

(b) $x^2y'' + xy' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

(c) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Chú ý rằng ta có thể giải các phương trình trong các bài toán trên bằng phép đặt $t = \ln x$ để đưa phương trình dạng $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ về dạng $\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = 0$, với $u = u(t)$ (a, b, c và α, β, γ đều là các hằng số).

24. Giả sử $a_0(x)$ và $a_1(x)$ lần lượt là các hàm khả vi và liên tục trong một khoảng mở nào đó. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

có các nghiệm $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ là độc lập tuyến tính và thỏa $y_1y_2 = 1$.

25. Giải các phương trình sau:

    (a) $y''' - y' - 8y = 0$.
    (b) $y''' + y'' = 2e^x + 3x^2$.

26. Giải phương trình $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x \cos x$.

27. Hãy xác định một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 4 với hệ số hằng và xác định nghiệm tổng quát của phương trình. Cho biết phương trình đặc trưng của phương trình vi phân nhận các nghiệm bội 2 là $\lambda = 3 + i$ và $\lambda = 3 - i$.

28. Xấp xỉ nghiệm các bài toán giá trị ban đầu sau bằng các phương pháp Euler, phương pháp Taylor bậc hai và phương pháp Runge-Kutta với cỡ bước $h = 0,1$ và so sánh nghiệm xấp xỉ của mỗi phương pháp tại các điểm lưới $x = 0,1$, $x = 0,2$ và $x = 0,3$.

    (a) $y' = 2x + e^{-xy}$, $y(0) = 1$.
    (b) $y' = \sqrt{x + y}$, $y(0) = 1$.
    (c) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$.

29. Dùng phương pháp Runge-Kutta với cỡ bước $h = 0,01$ để xấp xỉ nghiệm của bài toán giá trị ban đầu
$$y' = \frac{4}{1 + x^2}, \quad y(0) = 0,$$
tại $x = 1$. Có thể thử với các cỡ bước khác nhau để thấy rõ giá trị xấp xỉ gần với giá trị $y(1) = \pi$ như thế nào.

30. Dùng phương pháp Runge-Kutta với cỡ bước $h = 0,01$ để xấp xỉ nghiệm của bài toán giá trị ban đầu
$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 0,$$
tại $x = 2$. Có thể thử với các cỡ bước khác nhau để thấy rõ giá trị xấp xỉ gần với giá trị $y(2) = \ln 2$ như thế nào.

Tài liệu tham khảo

[1] Robert A. Adams (University of British Columbia), *Calculus: a complete course*, Fourth Edition, Addison Wesley, **1999**, ISBN 0-201-39607-6

[2] Claudia Neuhauser (University of Minnesota), *Calculus for Biology and Medicine*, Second Edition, Pearson–Prentice Hall, **2004**, ISBN 0-13-123441-2

[3] Logan J. David (University of Nebraska at Lincoln), *A First Course in Differential Equations*, Springer Science+Business Media, Inc., **2006**, ISBN 0-387-25963-5

[4] Peter J. Olver (University of Minnesota), *Minimization*, AIMS Lecture Notes (Section 12), **2006**

[5] Kenneth Kuttler (Brigham Young University), *Calculus, Applications and Theory*, **2006**