VI TÍCH PHÂN 1C

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Nội dung

Chương 1 Dãy số thực

Chương 2 Hàm số một biến: Giới hạn và sự liên tục của hàm số

Chương 3 Phép tính vi phân hàm một biến

Chương 4 Phép tính tích phân hàm một biến liên tục

Chương 5 Chuỗi số

Tài liệu tham khảo

[1] *Giáo trình Vi tích phân 1C,* Bộ môn Giải tích, Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp HCM, 2018

[2] Stewart, *Calculus 7th Edition,* Brooks – Cole Pub, 2012

[3] Ngô Thành Phong, *Giáo trình giản yếu Giải tích toán học,* Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp HCM, 2004

Chuỗi số

Khái niệm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots (1)$$

được gọi là chuỗi số

Trong đó $u_1, u_2, \cdots$ gọi là các số hạng của chuỗi

u_n số hạng tổng quát của chuỗi

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ tổng riêng thứ n của chuỗi

Chuỗi số

Khái niệm

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn thì S là tổng của chuỗi và chuỗi hội tụ . Ngược lại chuỗi phân kỳ.

$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ gọi là phần dư của chuỗi

Chuỗi số

VD4

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots (a \neq 0, q \neq 1)$

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

$$|q| < 1, \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

Chuỗi số

VD5

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

Chuỗi số

VD6

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Điều kiện cần của chuỗi hội tụ

Nếu chuỗi (1) hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Hệ quả Nếu số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi phân kỳ

VD7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$$

Phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tính chất chuỗi hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và tổng là S thì $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ hội tụ và tổng cS

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

VD8

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right)$

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $u_n \le v_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

VD9

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ hội tụ vì $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}, \forall n > 1$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ trong đó k hữu hạn và khác 0 thì cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc phân kỳ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

VD10

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn d'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

Nếu k<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu k>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

Nếu k=1 không có kết luận

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD11

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD12

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$

Nếu k<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu k>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD13

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD14

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Chuỗi hội tụ

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ là những số dương

Chuỗi đan dấu

Định lý Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ là những số dương

Nếu các số hạng giảm $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots.$

Và $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ thì chuỗi hội tụ. Khi đó tổng của chuỗi là số dương và không vượt quá số hạng đầu tiên

Chuỗi đan dấu

VD15

Cho chuỗi đan dấu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Vì các số hạng giảm $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$

Và $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Chuỗi có dấu bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (2) được gọi là hội tụ

tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (3) hội tụ

Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$ hội tụ

nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (3)$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$

được gọi là chuỗi nửa hội tụ

Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

VD16

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$

Bài tập chương 5

Bài 1: Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Bài tập chương 5

Bài 2: Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số và tính tổng(nếu có)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$
2. $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}.3^{1-n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Bài 3: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots$

2. $\frac{2}{1}+\frac{2}{1}.\frac{5}{5}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\cdots+\frac{2.5.8.\cdots(3n-1)}{1.5.9.\cdots(4n-3)}+\cdots$

3. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots$

4. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\cdots$

Bài tập chương 5

Bài 4: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1 + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

Bài tập chương 5

Bài 5: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$

Bài tập chương 5

Bài 6: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$