ÔN TẬP GIẢI TÍCH B2 – K14CTT1

Câu 2: Cho một trường Vector F:

a) Trường Vector F có bảo toàn hay không?

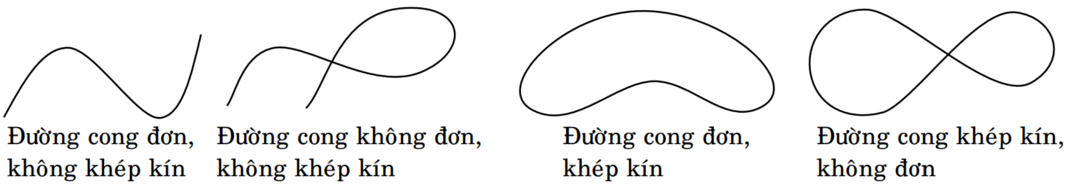
b) Tính công gây ra bởi các trường lực F theo 2 cách trên một đường cong kín C, tính trực tiếp bằng định nghĩa <u>(tích phân đường)</u> – bằng <u>định lí Green</u>

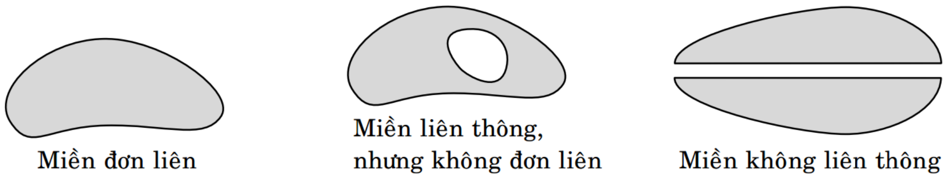
2.a: Trường Vector F có bảo toàn hay không? (16.3)

Cho trường vector $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ là bảo toàn nếu:

- F là trường vector trên miền đơn liên, và miền này làm cho P,Q luôn xác định.
- P và Q có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền xđ.
- Đạo hàm riêng vủa Q theo x bằng đạo hàm riêng của P theo y: $Q_x = P_y$

Chú thích: Tập $D \epsilon \mathbb{R}^2$ được gọi là **miền đơn liên** nghĩa là nó là liên thông và mọi đường cong đơn khép kín trong D chỉ bảo quanh những điểm thuộc D mà thôi.





Ví dụ 2: Trường vector $\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + (x-2)\boldsymbol{j}$ là trường bảo toàn hay không?

Giả sử $P(x,y) = x - y,\ Q(x,y) = x - 2$. Khi đó $-1 = \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$

Vậy **F** không phải là trường bảo toàn.

Ví dụ 3: Trường vector $\boldsymbol{F}(x,y) = (3+2xy)\boldsymbol{i} + (x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}$ là trường bảo toàn hay không?

Giả sử $P(x,y) = 3 + 2xy,\ Q(x,y) = x^2 - 3y^2$. Khi đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x$.

Miền xác định D của $\boldsymbol{F}$ là toàn bộ mặt phẳng ($D = \mathbb{R}^2$), nên D mở và đơn liên.

Vậy **F** là trường bảo toàn.

<u>**Đọc thêm :** Cách tìm hàm thế vị f sao cho $F = \Delta f$ => Hỗ trợ việc giải tích phân đường nhanh hơn</u>

Ví dụ 4 : a). Nếu $\boldsymbol{F}(x,y) = (3+2xy)\boldsymbol{i} + (x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}$ bảo toàn, tìm hàm f sao cho $F = \Delta f$.

b). Tính tích phân đường $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ với C là đường cong được cho bởi

$$\boldsymbol{r}(t) = e^t sint\boldsymbol{i} + e^t cost\boldsymbol{j} \qquad 0 \le t \le \pi$$

Giải :

a). Vì **F** bảo toàn nên tồn tại hàm f sao cho $F = \Delta f$. Tức là:

[1] $\quad f_x(x,y) = 3 + 2xy$

[2] $\quad f_y(x,y) = x^2 - 3y^2$

Tích phân [1] theo x:

[3] $\quad f(x,y) = 3x + x^2y + g(y)$

Đạo hàm hai vế [3] theo y: [4] $f_y(x,y) = x^2 + g'(y)$, So sánh [2] và [4] ta thấy: $g'(y) = -3y^2$

Tích phân theo y: $g(y) = -y^3 + \boldsymbol{K}$ với K là hằng số

Thế $g(y) = -y^3 + \boldsymbol{K}$ vào [3] ta được hàm thế vị $f(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + \boldsymbol{K}$**.**

b). Ta cần tìm điểm đầu và điểm cuối lần lượt: $\boldsymbol{r}(0) = (0,1)$, $\boldsymbol{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$.

Trong biểu thức f từ a, ta chọn $\boldsymbol{K} = 0$. Nên $f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$

$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \Delta f \cdot d\boldsymbol{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0,1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$

■Phương pháp trên ngắn hơn khi dùng định nghĩa 16.2.[13] *trang 1095* tính theo **tích phân đường**

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds$$

Đọc và xem ví dụ :	*16.2.[2]-[3] trang 1087;*	*Bài tập : 1-4 ;*
	16.2.[7]-[8] trang 1090 ;	*Bài tập : 5-8 ; 13-16*
	16.2.[9]-[10] trang 1092 ;	*Bài tập : 9-12*
	16.2.[13] trang 1095 ;	*Bài tập :19-22 ;* ***39-41***

Ví dụ 5 : Cho $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2\boldsymbol{i} + (2xy + e^{3z})\boldsymbol{j} + 3ye^{3z}\boldsymbol{k}$ bảo toàn, tìm hàm f sao cho $\boldsymbol{F} = \Delta f$

[1] $\quad f_x(x,y,z) = y^2$

[2] $\quad f_y(x,y,z) = 2xy + e^{3z}$

[3] $\quad f_z(x,y,z) = 3ye^{3z}$

Tích phân [1] theo x:

[4] $\quad f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z)$

Đạo hàm [4] theo y: [5] $f_y(x,y,z) = 2xy + g_y(y,z)$, So sánh [5] với [2] suy ra $g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$

Thế $g(y,z)$ vào [4] ta được $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$ [6]

Đạo hàm [6] theo z: [7] $f_z(x,y,z) = 3ye^{3z} + h'(z)$, So sánh [7] với [3] suy ra $h'(z) = 0 \rightarrow h(z) = \boldsymbol{K}$

Thế $h(z)$ vào [6], Vậy hàm mong muốn là $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + \boldsymbol{K}$

Bài tập câu 2.a: 16.3.(3-10); 16.3.29

2.b: Tính công gây ra bởi trường lực F theo 2 cách (Tích phân đường – Định lý Green) (16.2 phần đọc thêm câu 2.a + 16.4)

> **Định lý Green:** Cho (C) là đường cong đơn khép kín, trơn từng khúc, bao quanh miền D. Nếu P và Q là hai hàm số có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên tập mở nào đó chứa toàn bộ $D \cup (C)$, thì:
>
> $$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Ví dụ 1: Tính $\int_C x^4 dx + xydy$ với C là tam giác gồm các đoạn thẳng từ $(0,0)$ tới $(0,1)$, $(1,0)$ tới $(0,1)$, $(0,1)$ tới $(0,0)$. (Hình 4) *Ví dụ 1-4 hướng đi của C đều là hướng dương (ngược chiều kim đồng hồ)*

■*Lưu ý: Hướng dương:* $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C Pdx + Qdy$; *Hướng âm:* $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{-C} Pdx + Qdy$

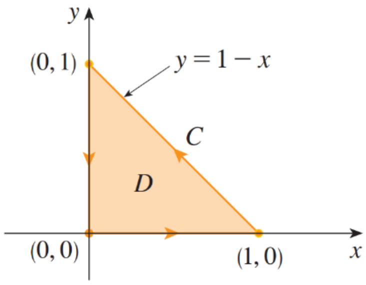
Cách 1: Sử dụng công thức ở mục 16.2.[7]-[8] bằng cách tính ba tích phân riêng biệt dọc theo 3 đoạn thẳng của C. Nhưng khác dài, ta sử dụng cách 2.

Cách 2: Dùng định lý Green

Đặt $P(x,y) = x^4,\ \ Q(x,y) = xy$. Ta có:

$$\int_C x^4 dx + xydy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$



Hình 4

Ví dụ 2 : Tính $\int_C (3y - e^{sinx})dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy$, ở đây C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$

Miền D được giới hạn bởi C là đĩa tròn $x^2 + y^2 \le 9$, vì vậy ta chuyển sang **tọa độ cực (15.4)** sau khi áp dụng định lý Green.

$$\int_C (3y - e^{sinx})dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy = \iint_D (7-3)dA = 4\iint_D dA$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^3 rdr\,d\theta = 18\int_0^{2\pi} d\theta = 18\theta\Big|_0^{2\pi} = 36\pi$$

Ví dụ 3: Tính diện tích miền được giới hạn bởi elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Elip có phương trình tham số là $x = acost,\ y = bsint,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Sử dụng công thức $\boldsymbol{A} = \oint_C \boldsymbol{xdy} = -\oint_C \boldsymbol{ydx} = \frac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{xdy} - \boldsymbol{ydx}$ *16.4.[5] trang 1111*

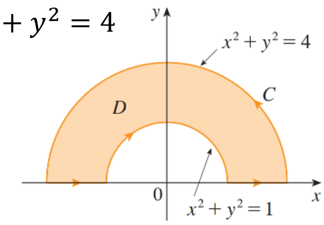
$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abcos^2tdt + absin^2tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$

Ví dụ 4: Tính $\int_C y^2 dx + 3xydy$, trong đó C là miền nằm giữa $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$

Chú ý rằng miền D là không đơn, trục y chia nó thành hai miền đơn.

Trong tọa độ cực ta có thể viết $D = \{(r,\theta)|1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$

Theo định lý Green: *(Có thể áp dụng cho miền D không đơn liên)*



Hình 8

$\int_C y^2 dx + 3xydy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)dA\right] = \iint_D ydA = \int_0^{\pi}\int_1^2 rsin\theta rdr\,d\theta = \frac{14}{3}$

***Bài tập chương 16.4**: 1–14;* ***17-18 (11-14** nhớ kiểm tra hướng của C trước khi áp dụng Green)*

Superhihiha