GIẢI TÍCH B1

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Đạo hàm

- Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong (a;b) và $x_0 \in (a;b)$

Nếu $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tồn tại thì được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0)$

Nghĩa là $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Đạo hàm

▪ Định nghĩa

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0; \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Đạo hàm

- Các quy tắc tính đạo hàm

1. $(c.u)' = c(u)'$
2. $(u + v)' = (u)' + (v)'$
3. $(u.v)' = u'v + u.v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$

Đạo hàm

- Bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp

1. $(\mathrm{c})' = 0$
2. $(\mathrm{x}^{\alpha})' = \alpha.\mathrm{x}^{\alpha-1}; (\mathrm{x})' = 1; (\sqrt{\mathrm{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}; \left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
3. $(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})' = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}\mathrm{lna}; (\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$
4. $(\log_{\mathrm{a}} \mathrm{x})' = \frac{1}{\mathrm{x.lna}}; (\mathrm{lnx})' = \frac{1}{\mathrm{x}}$

Đạo hàm

- Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp

5. $(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x; (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \ (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; \ (\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Vi Phân

▪ <u>Định nghĩa</u>

Hàm f(x) khả vi tại x_0 nếu

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

Khi đó, tích $f'(x_0)\Delta x$ gọi là vi phân của f(x) tại x_0

Ký kiệu:

$$df=f'(x)\Delta x=f'(x).dx$$

Vi Phân

- VD15 Tính vi phân của hàm $y = f(x) = 2^{\sqrt{\tan x}}$

$$dy = 2^{\sqrt{\tan x}}.\ln 2.(\sqrt{\tan x})'.dx = \frac{2^{\sqrt{\tan x}}.\ln 2}{2\sqrt{\tan x}.\cos^2 x}.dx$$

Vi Phân

<u>Các quy tắc tính vi phân</u>

Vi phân của tổng, tích, thương

d(u+v)=d(u)+d(v)

d(uv)=vdu+udv

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0)$$

Vi Phân

Áp dụng vi phân tính gần đúng

Cho f(x) khả vi tại x_0 khi đó:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

Bỏ qua VCB bậc cao ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

Hay $$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Vi Phân

- <u>VD16</u> Tính gần đúng cos61^0

$$y = f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}, \Delta x = \frac{\pi}{180}$$

$$f'(x) = -\sin x, f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 61^0 = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}) \approx \cos\frac{\pi}{3} + f'(\frac{\pi}{3}).\frac{\pi}{180}$$

$$\approx \frac{1}{2} + -\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180} \approx 0.484$$

Vi Phân

VD17 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^3}$. Dùng vi phân tính gần đúng f(2,001) .

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

<u>Đạo hàm cấp cao</u>

Nếu f(x) có đạo hàm f'(x) thì f'(x) gọi là đạo hàm cấp 1

Nếu f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu f''(x)

…

Đạo hàm của đạo hàm cấp n-1 gọi là đạo hàm cấp n, ký hiệu $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

VD 18 Cho hàm số y= sinx. Tính $y^{(n)}(x)$

VD 19 Cho hàm số y= cosx. Tính $y^{(n)}(x)$

VD 20 Cho hàm số y= $\frac{1}{x}$. Tính $y^{(n)}(x)$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

Vi phân cấp cao

Nếu f(x) khả vi thì dy=f'(x).dx gọi là vi phân cấp 1

Vi phân của dy gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu $d^2y = y''(x).dx^2$

…

Tổng quát vi phân cấp n, ký hiệu $d^n y = y^{(n)}(x).dx^n$

Quy tắc L'Hospital

- Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$

Định lý 1 Cho f(x),g(x) xđ, khả vi tại lân cận x = x_0 (có thể trừ tại điểm x_0)

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0, g'(x_0) \neq 0$

Ở lân cận x = x_0

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

Quy tắc L'Hospital

▪ VD21 Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$

Quy tắc L'Hospital

- VD22 Tính $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4.x+3}$$

Quy tắc L'Hospital

- Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Định lý 2 Cho f(x),g(x) xđ, khả vi tại lân cận x = x_0 (có thể trừ tại điểm x_0)

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty, g'(x_0) \neq 0$

Ở lân cận x = x_0

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Quy tắc L'Hospital

- VD23 Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} (\alpha > 0)$
- VD24 Tính $\lim_{x\to 0^+} x^x$
- VD25 Tính $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Khai triển Taylor

- <u>Khai triển Taylor</u>

Cho f(x) khả vi đến cấp n+1 trong khoảng (a,b). Khi đó với $x_0, c \in (a,b)$

Ta có công thức Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

- <u>Khai triển Taylor</u>

Đặt $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (1) = o((x-x_0)^n)$$

gọi là sai số tuyệt đối

c nằm giữa x và x_0

Công thức (1) được gọi là khai triển Taylor của hàm f tại $x = x_0$

- <u>Khai triển Taylor</u>

Khi x_0 = 0: (1) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (2)$$

$$0 < \theta < 1$$

(2) được gọi là công thức MacLaurin

Khai triển Taylor

Công thức MacLaurin của 1 số hàm sơ cấp

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

Khai triển Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Bài tập

Bài 1: Tính các giới hạn sau (nếu có)

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ b. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin 3x+\sin^2 x}{\sin 4x+\sin x-\tan^3 x}$

Bài 2: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a. $y=\dfrac{1}{1-x}$ b. $y=e^{-3x}$

Bài tập

Bài 3: Viết khai triển Maclaurin đến số hạng x^3 của

a. $y = e^{\sin x}$ b. $y = 3^x$ c. $y = \tan(\sin x)$