Trường ĐH Khoa học Tự nhiên TPHCM

Khoa Công nghệ thông tin

Lớp 12CTT2

Môn: Thực hành Vi tích phân 1B

Bài tiểu luận

CHUỖI LŨY THỪA

Tháng 12 năm 2016

Danh sách nhóm 5:

1612438	**Nguyễn Xuân Nguyên**
1612439	**Mã Cẩm Nguyên**
1612441	**Phạm Quang Phước Nguyên (nhóm trưởng)**
1612442	**Cà Lê Nhật Nguyên**
1612446	**Nguyễn Hữu Nguyên**
1612447	**Ngô Trần Nguyễn**
1612448	**Trần Phú Nguyện**

MỤC LỤC

I. Lý thuyết chuỗi lũy thừa

1. Định nghĩa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Chuỗi trên được gọi là chuỗi lũy thừa theo $(x-a)$, hoặc là chuỗi lũy thừa xung quanh điểm a. Trong đó c_n là hệ số của chuỗi lũy thừa.

2. Bán kính hội tụ

Với mọi chuỗi lũy thừa chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau :

   i. Chuỗi chỉ hội tụ tại $x = a$
   ii. Chuỗi hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$
   iii. Có số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < \mathbb{R}$ và phân kì khi $|x-a| > \mathbb{R}$

Số R trong trường hợp (iii) được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Quy ước:

- Trường hợp (i) có R = 0
- Trường hợp (ii) có R = ∞

3. Miền hội tụ

Miền hội tụ là tập hợp mọi giá trị của x làm cho chuỗi lũy thừa hội tụ.

- Trường hợp (i) có miền hội tụ là $\{a\}$
- Trường hợp (ii) có miền hội tụ là $(-\infty; +\infty)$
- Trường hợp (iii), miền hội tụ xảy ra một trong 4 khả năng:
  - $(x-a; x+a)$
  - $(x-a; x+a]$
  - $[x-a; x+a)$
  - $[x-a; x+a]$

Khi tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ngoài tìm bán kính hội tụ R, nếu thuộc trường hợp (iii), ta phải xét hai điểm biên $x = a \pm R$, để xem miền hội tụ thuộc dạng nào trong 4 khả năng trên.

4. Tìm bán kính hội tụ

Đặt $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

- Nếu $L = \infty$ thì $R = 0$
- Nếu $L = 0$ thì $R = \infty$
- Nếu $L > 0$ hữu hạn thì $R = \frac{1}{L}$

5. Đạo hàm chuỗi lũy thừa

   Đạo hàm từng số hạng chuỗi lũy thừa ta sẽ được một chuỗi lũy thừa mới có cùng bán kính hội tụ với chuỗi cũ, nhưng chưa chắc có cùng miền hội tụ.

II. Bài tập chuỗi lũy thừa

Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n.x^n$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa $c_n = (-1)^n.n$

   $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

   Khi $x = 0 + 1 = 1$ thì chuỗi phân kì vì không có $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n.n = 0$

   Khi $x = 0 - 1 = -1$ thì chuỗi phân kì vì không có $\lim\limits_{n\to\infty} n = 0$

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-1; 1)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

   $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right| = 1$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

   Khi $x = 0 + 1 = 1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

   Khi $x = 0 - 1 = -1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = \frac{1}{3}$, phân kì

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-1; 1]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{2n-1}$

   $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2(n+1)-1}\right| = 1$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

   Khi $x = 0 + 1 = 1$ thì chuỗi phân kì

   Khi $x = 0 - 1 = -1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[-1; 1)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right| = 1$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

Khi $x = 0 + 1 = 1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Khi $x = 0 - 1 = -1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = 2$, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[-1; 1]$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{n!}$

   $$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \infty$

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-\infty; +\infty)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa $c_n = n^n$

   $$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1).(n+1)^n}{n^n}\right| = \infty$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = 0$

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $\{0\}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-1)^n . n^2}{2^n}$

   $$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2} . \frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2. n^2}\right| = \frac{1}{2}$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 2$

   Khi $x = 0 + 2 = 2$ thì chuỗi phân kì vì không có $\lim_{n\to\infty} (-1)^n . n^2 = 0$

   Khi $x = 0 - 2 = -2$ thì chuỗi phân kì vì không có $\lim_{n\to\infty} n^2 = 0$

   Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-2; 2)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

   Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{10^n}{n^3}$

   $$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{10^{n+1}}{10^n} . \frac{n^3}{(n+1)^3}\right| = 10$$

   Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{10}$

   Khi $x = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = 3$, hội tụ

Khi $x = 0 - \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right]$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n}.\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right| = 3$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{3}$

Khi $x = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Khi $x = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = \frac{3}{2}$, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.3^n}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{n.3^n}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}.\frac{3^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 3$

Khi $x = 0 + 3 = 3$ thì chuỗi trở thành chuỗi điều hòa, phân kì

Khi $x = 0 - 3 = -3$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[-3; 3)$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln n}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-1)^n}{4^n \ln n}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n}{4^{n+1}}.\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{4}$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 4$

Khi $x = 0 + 4 = 4$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Khi $x = 0 - 4 = -4$ thì chuỗi phân kì

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-4; 4]$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Chuỗi trên có số hạng tổng quát là $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}.\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0$$

Theo tiêu chuẩn d'Alembert, chuỗi đề hội tụ tuyệt đối vì $\forall x, L < 1$

Vậy chuỗi đề bài có bán kính hội tụ là $R = \infty$ và miền hội tụ là $(-\infty; +\infty)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{n^2+1}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right| = 1$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

Khi $x = 2 + 1 = 3$ thì chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh dạng lim với chuỗi Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ vì $K = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{n^2+1}\right| = 1 > 0$

Khi $x = 2 - 1 = 1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[1; 3]$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2(n+1)+1}\right| = 1$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

Khi $x = 3 + 1 = 4$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Khi $x = 3 - 1 = 2$ thì chuỗi phân kì theo tiêu chuẩn so sánh dạng lim với chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì vì $K = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{n}\right| = 2 > 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[2; 4]$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}}{3^n}.\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right| = 3$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{3}$

Khi $x = -4 + \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = \frac{1}{2}$, phân kì

Khi $x = -4 - \frac{1}{3} = -\frac{13}{3}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[-\frac{13}{3}; -\frac{11}{3})$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{n}{4^n}$

$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}.\frac{4^n}{4^{n+1}}\right| = \frac{1}{4}$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 4$

Khi $x = -1 + 4 = 3$ thì chuỗi phân kì vì không có $\lim_{n\to\infty} n = 0$

Khi $x = -1 - 4 = -5$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $[-5; 3)$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{n^n}$

$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1).(n+1)^n}\right| = 0$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \infty$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-\infty; +\infty)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5.\sqrt[n]{n}}$

Chuỗi đề được viết lại dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{5.\sqrt[n]{n}}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{2^n}{5.\sqrt[n]{n}}$

$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}.\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right| = 2$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$

Khi $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ thì chuỗi phân kì vì $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5.\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$

Khi x $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ thì chuỗi trở thành chuỗi đan dấu nhưng không phải chuỗi Leibniz, phân kì

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(0; 1)$

19.

20.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$

Chuỗi đề được viết lại dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,.2\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = n!\,.2$

$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2.4.6\ldots(2n)}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{n^2}{2.4.6\ldots(2n)}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}.\frac{2n}{2n.(2n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n+2}\right| = 0$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \infty$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-\infty; +\infty)$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

Chuỗi đề được viết lại dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\left(x-\frac{4}{5}\right)^n}{n^3}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{5^n}{n^3}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5^{n+1}}{5^n}.\frac{n^3}{(n+1)^3}\right| = 5$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{5}$

Khi $x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ thì chuỗi trở thành chuỗi Dirichlet có $\alpha = 3$, hội tụ

Khi x $= \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ thì chuỗi trở thành chuỗi Leibniz, hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $\left[\frac{3}{5}; 1\right]$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}.\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^2\right| = 1$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 1$

Khi $x = 0 + 1 = 1$ thì chuỗi phân kì

Khi x $= 0 - 1 = -1$ thì chuỗi phân kì

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-1; 1)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n-1}{(2n-1).(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n+1}\right| = 0$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \infty$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-\infty; +\infty)$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

Chuỗi trên có hệ số lũy thừa là $c_n = \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}.\frac{2n-1}{(2n-1)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2}$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = 2$

Khi $x = 0 + 2 = 2$ thì chuỗi phân kì

Khi x $= 0 - 2 = -2$ thì chuỗi phân kì

Vậy miền hội tụ của chuỗi đề bài là $(-2; 2)$

Danh sách nhóm 5:

1612438	**Nguyễn Xuân Nguyên**
1612439	**Mã Cẩm Nguyên**
1612441	**Phạm Quang Phước Nguyên (nhóm trưởng)**
1612442	**Cà Lê Nhật Nguyên**
1612446	**Nguyễn Hữu Nguyên**
1612447	**Ngô Trần Nguyễn**
1612448	**Trần Phú Nguyện**