

LEC 7. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH TÍCH PHÂN SUY RỘNG

VI TÍCH PHÂN 1C
HK1, 2017-2018
GV NGUYỄN VĂN THÙY
nvthuy@hcmus.edu.vn

ĐỊNH NGHĨA TP XÁC ĐỊNH

- Chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn con bởi $n+1$ điểm

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

- Trên đoạn con thứ i , lấy tùy ý x_i^*
- Lập tổng tích phân Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i^*)$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

2

ĐỊNH NGHĨA TP XÁC ĐỊNH

- Cho $n \rightarrow +\infty$ sao cho $\max_i |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$
- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a; b]$ và không phụ thuộc vào cách chọn điểm x_i^* , thì hàm $f(x)$ được gọi là khả tích trên đoạn $[a; b]$ và S được gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, ký hiệu

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

3

ĐỊNH NGHĨA

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i^*)$$

- Ý nghĩa hình học

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

4

ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH

- **Điều kiện cần:** Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a; b]$ thì $f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$
- Suy ra: nếu $f(x)$ không bị chặn trên đoạn $[a; b]$ thì $f(x)$ không khả tích trên đoạn $[a; b]$
- **Điều kiện đủ:** Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ hoặc $f(x)$ chỉ có hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 trên đoạn $[a; b]$ thì $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a; b]$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

5

BÀI TẬP

- 1) Dùng định nghĩa, tính

$$I = \int_{-2}^1 (2x^2 - x) dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

6

BÀI TẬP

2) Tích phân sau tồn tại không?

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

3) Tích phân sau tồn tại không?

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x-1}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

7

CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ

- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

8

BÀI TẬP

4)

$$I = \int_0^1 \arctan x dx$$

5)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

9

TÍNH CHẤT

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right) \\ = f[v(x)] \cdot v'(x) - f[u(x)] \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

10

BÀI TẬP

45–50 Find the derivative of the function.

45. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^3} dt$

46. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \sin t} dt$

47. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2) dt$

48. $g(x) = \int_1^{\sin x} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt$

49. $y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t} dt$

50. $y = \int_{2x}^{3x+1} \sin(t^4) dt$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

11

BÀI TẬP

6. If $f(x) = \int_0^x x^2 \sin(t^2) dt$, find $f'(x)$.7. Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t} dt$.

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

12

BÀI TẬP

70. Find

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3} dt$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

13

BÀI TẬP

6)

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^0 (e^t - 1)^2 \ln(\cos t) dt}{x^{10}}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

14

TÍCH PHÂN SỤY RỘNG LOẠI 1

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

- Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng ở vế trái được gọi là hội tụ. Ngược lại, tích phân suy rộng được gọi là phân kỳ

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

15

BÀI TẬP

5) Tính

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

16

TÍCH PHÂN SỤY RỘNG LOẠI 1

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

17

BÀI TẬP

6)

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

7)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

18

BÀI TẬP

8)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x}(x+1)dx$$

9)

$$I = \int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

19

BÀI TẬP

10) [C1, 14-15]

$$I = \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

20

BÀI TẬP

12) [C1, 2014-2015]

$$I = \int_0^{+\infty} (x+x^3)e^{-x^2} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

21

BÀI TẬP

13) [C1, 13-14]

$$I = \int_{100}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

22

BÀI TẬP

14) [C1, 12-13]

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

23

BÀI TẬP

15) [C1, 11-12]

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

24

BÀI TẬP

16) [C1, 2015-2016]

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

25

KHẢO SÁT SỰ HỘI TỤ

• Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^a} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, a > 0)$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

26

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

• Nếu $f(x), g(x) \geq 0, \forall x \geq a$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0, L < +\infty$$

thì hai tích phân suy rộng sau có cùng tính chất

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

27

BÀI TẬP

17) Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+2} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

28

BÀI TẬP

18) [C1, 14-15] Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_{2014}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

29

BÀI TẬP

19) [C1, 2014-2015] Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_{100}^{+\infty} \frac{x^3 + x\sqrt{x+1} + 1}{x^4 + (x+1)(x+2)(x\sqrt{x}+3)} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

30

BÀI TẬP

20) [C1, 2015-2016] Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{3x + \sqrt[3]{x} + 1}{x^4 + \sqrt[3]{x^2} + 2} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

31

BÀI TẬP

21) Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

32

BÀI TẬP

22) Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

33

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

• Ví dụ

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

- Vì sao đây là tích phân suy rộng?
- Tính

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

34

BÀI TẬP

23) Tính

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

35

BÀI TẬP

24) Tính

$$I = \int_0^1 \ln x \, dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyễn Văn Thuý, University of Science

36

TÍCH PHÂN SUI RỘNG LOẠI 2

• Ví dụ

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

$$J = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

$(a < b, \alpha \in \mathbb{R})$

Hội tụ $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

37

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

- Nếu $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \forall x \in (a, b]$,
 $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0, \text{ hữu hạn}$$

Thì hai tích phân sau có cùng tính chất

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

38

BÀI TẬP

25) Khảo sát sự hội tụ

$$I = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

39

BÀI TẬP

26) Khảo sát sự hội tụ

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx$$

Vi tích phân 1C, 2017-2018

Nguyen Van Thuy, University of Science

40