Chương 5

Ánh xạ tuyến tính

Nội dung

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính.

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính.

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa ánh xạ

Cho hai tập hợp tùy ý *X* và *Y* khác rỗng.
Ánh xạ giữa hai tập X và *Y* là một qui tắc sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc y để $y = f(x)$

$$f : X \to Y \qquad \forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x)$$

Ánh xạ *f* được gọi là đơn ánh nếu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ánh xạ *f* được gọi là toàn ánh nếu $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

Ánh xạ *f* được gọi là song ánh nếu đơn ánh và toàn ánh.

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Hàm số mà ta học ở phổ thông là ví dụ về ánh xạ.

Cho ánh xạ tức là chỉ ra qui luật, dựa vào đó có thể biết ảnh của mọi phần tử thuộc X.

Có rất nhiều cách cho ánh xạ: bằng đồ thị, bằng biểu đồ, bằng biểu thức đại số, bằng cách liệt kê,…

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho *V* và *W* là hai không gian véctơ trên cùng trường số K.
Ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ giữa hai không gian véctơ V, W là một ánh xạ thỏa

1. $(\forall v_1, v_2 \in V)\, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

2. $(\forall \alpha \in K, \forall v \in V)\ \ f(\alpha v) = \alpha f(v)$

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Chứng tỏ ánh xạ $f : R_3 \to R_2$ cho bởi
$\forall x = (x_1, x_2, x_3); f(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$
là ánh xạ tuyến tính.

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3); y = (y_1, y_2, y_3) \in R_3$$

$$f(x+y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$f(x+y) = (x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 - 3x_3 - 3y_3, 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3)$$

$$f(x+y) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3) + (y_1 + 2y_2 - 3y_3, 2y_1 + y_3)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Tương tự chứng minh điều kiện thứ hai, suy ra f là ánh xạ tuyến tính.

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính.

Cho *E* ={e_1, e_2, …, e_n} là tập sinh của *V*.

Giả sử biết $f(e_1)$, $f(e_2)$, …, $f(e_n)$.

$$\forall x \in V \Leftrightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)$$

$$f(x) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \cdots + f(x_n e_n)$$

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

Ánh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn nếu biết được ảnh của một tập sinh của V.

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^2$, biết

$f(1,1,0) = (2,-1),\ f(1,1,1) = (1,2),\ f(1,0,1) = (-1,1);$

1. Tìm $f(3,1,5)$ 2. Tìm $f(x)$

1. Giả sử $(3,1,5) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 2$$

$$\Rightarrow f(3,1,5) = f(\alpha(1,1,0) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,0,1))$$

$$\Leftrightarrow f(3,1,5) = \alpha f(1,1,0) + \beta f(1,1,1) + \gamma f(1,0,1)$$

$$f(3,1,5) = -2(2,-1) + 3(1,2) + 2(-1,1) = (-3,10)$$

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính?

1. $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1)$

2. $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0)$

3. $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 1)$

4. $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (1, x_1 - x_2)$

5. $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1^2)$

6 $f: R_2 \to R_2; f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

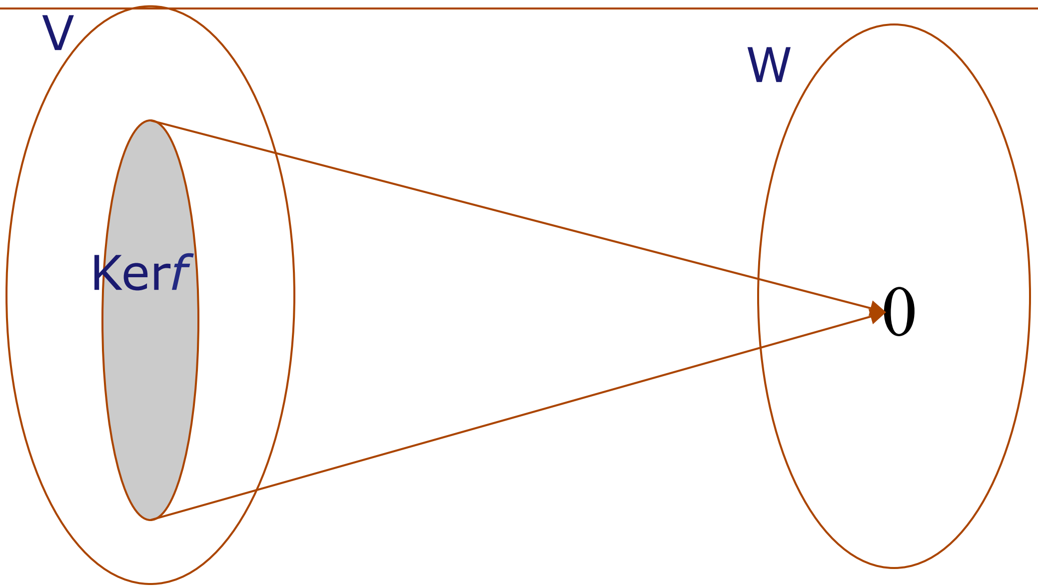
2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Định nghĩa nhân của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$

Nhân của ánh xạ tuyến tính *f* là tập hợp tất cả các vectơ *x* của không gian véctơ *V*, sao cho *f(x) = 0*.

$$Kerf = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$



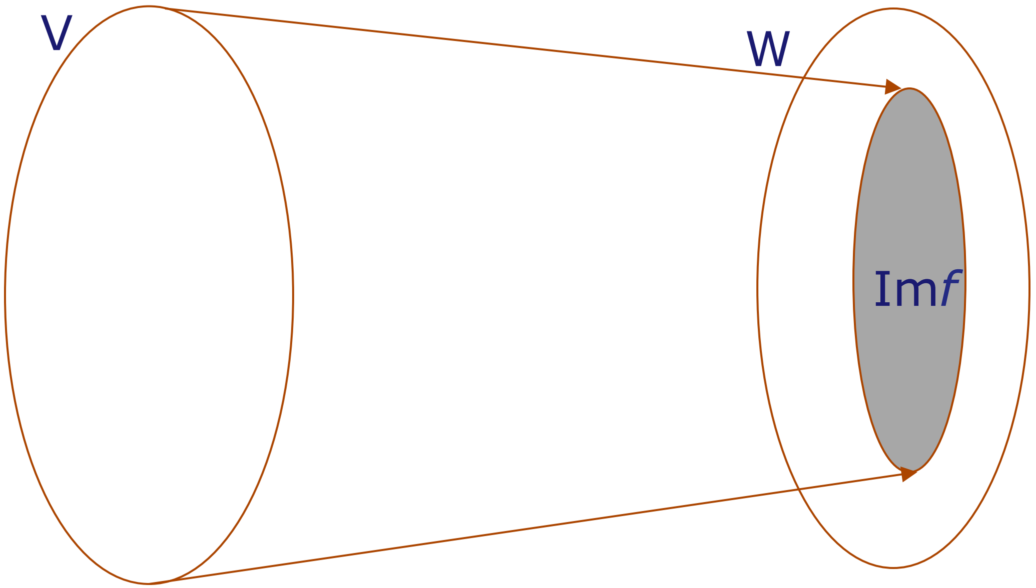
2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Định nghĩa ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$

Ảnh của ánh xạ tuyến tính *f* là tập hợp tất cả các phần tử *y* của không gian véctơ *W* sao cho tồn tại $x \in V$ để *y = f(x)*.

$$\operatorname{Im} f = \{ y \in W \mid \exists x \in V : y = f(x) \}$$



2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$

1. Nhân của ánh xạ tuyến tính f là không gian con của V.

2. Ảnh của ánh xạ tuyến tính f là không gian con của W.

3. $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(V)$

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Mệnh đề

Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một tập sinh của V.

Các bước tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính.

1. Chọn một cơ sở của V là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

2. Tìm $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$

3. $\operatorname{Im} f = < f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) >$

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^3$, biết
$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$$

1. Tìm cơ sở và chiều của Ker*f*.

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker} f \quad \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \begin{array}{l} \Leftrightarrow x_1 = 2\alpha; x_2 = -\alpha; x_3 = \alpha \\ \Rightarrow x = (2\alpha, -\alpha, \alpha) \\ \Leftrightarrow x = \alpha(2, -1, 1) \end{array}$$

Vậy E={(2,-1,1)} là tập sinh và cũng là cơ sở của Ker*f*

dim(Ker*f*) = 1.

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f: R_3 \to R_3$, biết
$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$$

2. Tìm cơ sở và chiều của ảnh Im*f*.

Chọn cơ sở chính tắc của R_3 $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một cơ sở (tập sinh) của R_3.

$$\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle$$

$$\operatorname{Im} f = \langle (1,2,3), (1,3,5), (-1,-1,-1) \rangle$$

Lập ma trận, dùng bđsc đối với hàng đưa về bậc thang, kết luận: $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ Cơ sở: E={(1,1,1), (0,1,2)}

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Ví dụ Cho ánh xạ tuyến tính $f: R_3 \to R_3$, biết

$f(1,1,1) = (1,2,1); f(1,1,2) = (2,1,-1); f(1,2,1) = (5,4,-1);$

1. Tìm cơ sở và chiều của Ker*f*.

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,2) + \gamma(1,2,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x_1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = x_2 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ \beta = x_3 - x_1 \\ \gamma = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = (-4x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 5x_1 - 2x_2 - 2x_3)$$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = 0$ Hệ thuần nhất

$$\Leftrightarrow x = (2\alpha, \alpha, 4\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha(2,1,4)$$

Cơ sở của Ker*f* E={(2,1,4)}, dim(Ker*f*) = 1.

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : R_3 \to R_3$, biết

$f(1,1,1) = (1,2,1); f(1,1,2) = (2,1,-1); f(1,2,1) = (5,4,-1);$

2. Tìm cơ sở và chiều của ảnh Im*f*.

Chọn cơ sở của R_3 là $E = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)\}$

Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một cơ sở (tập sinh) của R_3.

$$\operatorname{Im} f = < f(1,1,1), f(1,1,2), f(1,2,1) >$$

$$\operatorname{Im} f = < (1,2,1),(2,1,-1),(5,4,-1) >$$

Lập ma trận, dùng bđsc đối với hàng đưa về bậc thang, kết luận: $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ Cơ sở: E={(1,2,1), (0,1,1)}

3. Ma trận biểu diễn axtt

Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính.

Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của *V*.

$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ là một cơ sở của *W*.

Ma trận cở mxn với cột thứ *j* là tọa độ của véctơ $f(e_j)$ trong cơ sở *F* được gọi là ma trận của f trong cặp cơ sở *E* và *F* .

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F \end{pmatrix}$$

2. Kgian hạt nhân và kgian ảnh

Ví dụ

Ánh xạ $f: R_3 \to R_2$ cho bởi

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3); f(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở

$$E = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}; F = \{(1,1),(1,2)\}$$

$$f(1,1,1) = (0,3) \Rightarrow [f(1,1,1)]_F = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(1,0,1) = (-2,3) \Rightarrow [f(1,0,1)]_F = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f(1,1,0) = (3,2) \Rightarrow [f(1,1,0)]_F = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận cần tìm là

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Định lý

1. Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$. Khi đó tồn tại duy nhất một ma trận $A_{E,F}$ cở mxn sao cho

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E$$

với E và F là hai cơ sở trong V và W tương ứng.

2. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ trên trường số K. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính thỏa

$$f: K^n \to K^m \quad [f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E$$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f: R_3 \to R_2$, biết ma trận của *f* trong cặp cơ sở E = {(1,1,1); (1,0,1); (1,1,0)} và F = {(1,1); (2,1)} là $A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Tìm *f* (3,1,5)

Bước 1. Tọa độ của (3,1,5) trong cơ sở E: $[(3,1,5)]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bước 2. Sử dụng công thức $[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E$

$$[f(3,1,5)]_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bước 3. Đổi tọa độ của ảnh cần tìm sang cơ sở chính tắc. $f(3,1,5) = 14(1,1) - 2(2,1) = (10,12)$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : R_3 \to R_2$, biết ma trận của *f* trong cặp cơ sở E = {(1,1,1); (1,0,1); (1,1,0)} và F = {(1,1); (2,1)} là

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Tìm $f(x)$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -x_1 + x_2 + x_3; \beta = x_1 - x_2; \gamma = x_1 - x_3$$

$$\Leftrightarrow [x]_E = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Theo công thức ta có: $[f(x)]_F = A_{E,F}.[x]_E$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_F = \begin{pmatrix} -4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (-4x_1 + x_2 + 5x_3)(1,1) + (7x_1 - 3x_2 - 4x_3)(2,1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (10x_1 - 5x_2 - 3x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Ví dụ

Cho $f: R^3 \to R^3$ là ánh xạ tuyến tính.

Giả sử

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3)$$

1. Tìm *f*(*2,1,5*).

2. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở *E* = {(*1,1,1*); (*1,1,2*); (*1,2,1*)}.

3. Tính *f*(*2,1,5*) sử dụng 2), so sánh với 1).

Ví dụ

3. Ma trận biểu diễn axtt

Cho $f: R^3 \to R^3$ là ánh xạ tuyến tính, biết ma trận của *f* trong cơ sở E = {(1,1,1); (1,0,1); (1,1,0)} là

$$A_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Tìm *f* (2,3,-1) 2. Tìm cơ sở và chiều của nhân Ker*f*.

Cách 1. Để tìm ker*f*, có thể tìm *f*(x) rồi làm tiếp.

Cách 2. $x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_E = 0 \quad \Leftrightarrow A_{E,E}.[x]_E = 0$$

Giả sử $[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

3. Ma trận biểu diễn axtt

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow [x]_E = \begin{pmatrix} 6\alpha \\ -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$\Leftrightarrow x = 6\alpha(1,1,1) - 5\alpha(1,0,1) + \alpha(1,1,0)$$

$$\Leftrightarrow x = (2\alpha, 7\alpha, \alpha) \; = \alpha(2,7,1)$$

Vậy $E = \{(2,7,1)\}$ là tập sinh và cũng là cơ sở của Ker*f*.

$$\Rightarrow \dim(Kerf) = 1$$

3. Ma trận biểu diễn axtt

Ví dụ

Cho $f: R^3 \rightarrow R^3$ là ánh xạ tuyến tính, biết ma trận của f trong cơ sở E = {(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)} là

$$A_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Tính $f(4,3,5)$

2. Tìm cơ sở và chiều của Im*f*.

4. Ma trận chuyển cơ sở

- Cho $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathcal{S}' = \{u'_1, u'_2, ..., u'_n\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^n$.
- Đặt $P = ([u'_1]_{\mathcal{S}}\ [u'_2]_{\mathcal{S}} \dots [u'_n]_{\mathcal{S}})$.
- Ta gọi P là *ma trận đổi cơ sở* từ $\mathcal{S}$ sang $\mathcal{S}'$, ký hiệu $P = (\mathcal{S} \to \mathcal{S}')$.

Ví dụ. Xác định ma trận đổi từ cơ sở chính tắc $\mathcal{S}_0$ sang cơ sở $\mathcal{S}$ $= \{u_1 = (1, 2, 3),\ u_2 = (1, 1, 4),\ u_3 = (2, 0, 5)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Ta có
$$(\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}) = [[u_1]_{\mathcal{S}_0} [u_2]_{\mathcal{S}_0} [u_3]_{\mathcal{S}_0}] = [u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tổng quát: Nếu $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{S}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ thì $(\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ \dots\ u_n^\top)$.

Định lý 1. Cho $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $u \in \mathbb{R}^n$. Khi đó:

- $(\mathcal{S} \to \mathcal{S}')$ khả đảo và $(\mathcal{S} \to \mathcal{S}')^{-1} = (\mathcal{S}' \to \mathcal{S})$.
- $[u]_{\mathcal{S}} = (\mathcal{S} \to \mathcal{S}')[u]_{\mathcal{S}'}$.

Định lý 2. Cho P là ma trận đổi cơ sở từ cơ sở $\mathcal{S}$ sang cơ sở $\mathcal{S}'$ của $\mathbb{R}^n$ và $T \in Hom(\mathbb{R}^n)$. Khi đó: $[T]_{\mathcal{S}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{S}}P$.

Phương pháp xác định ma trận đổi cơ sở

Để xác định $(\mathcal{S} \to \mathcal{S}')$, ta thực hiện như sau:

- Đặt $A = [u_1^\top \; u_2^\top \; \ldots \; u_n^\top | u_1'^\top \; u_2'^\top \; \ldots \; u_n'^\top]$
- Đưa A về dạng rút gọn $[\, I_n | P \,]$.
- Khi đó P chính là ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{S}$ sang $\mathcal{S}'$.

Ví dụ. Tìm ma trận đổi từ cơ sở $\mathcal{S} = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}$ sang cơ sở $\mathcal{S}' = \{u'_1 = (1, 2, 3), u'_2 = (2, 3, 1), u'_3 = (3, 1, 2)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Giải.

- Ta có $[u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top | {u'_1}^\top\ {u'_2}^\top\ {u'_3}^\top] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{RowReduce} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

- Do đó $(\mathcal{S} \to \mathcal{S}') = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

❖ Mệnh đề:

Cho V và W là các không gian véc tơ hữu hạn chiều trên K; B,B′ và C,C′ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó với mọi ánh xạ tuyến tính f: V→ W ta có:

$$[f]_{B',C'} = (C \to C')^{-1}[f]_{B,C}(B \to B')$$

❖ Hệ quả:

Cho B và B′ là hai cơ sở trong không gian véc tơ hữu hạn chiều V trên trường K. Khi đó với mọi toán tử tuyến tính f: V→ V ta có:

$$[f]_{B'} = (\mathrm{B} \to B')^{-1}[f]_B(B \to B')$$

❖ Ví dụ:

Trong R^3 cho các véc tơ

$u_1=(1,1,0)$; $u_2=(0,2,1)$; $u_3=(2,3,1)$

Và ánh xạ tuyến tính f xác định bởi:

$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-x_3,x_1+2x_2-x_3,2x_1-x_2+3x_3)$

a) C/m $B=(u_1,u_2,u_3)$ là một cơ sở của R^3

b) Tìm $[f]_B$

❖ Mệnh đề

Cho V, W là hai không gian véc tơ n chiều và f: V→ W là một axtt. Các khẳng định sau tương đương:

i) f đơn ánh ii) f toàn ánh

ii) f là song ánh

iii) với mọi cơ sở A của V và B của W, ma trận $[f]_{A,B}$ khả nghịch

Hơn nữa, f-1 cũng là axtt và

$[f^{-1}]_{BA}=[f]_{AB}^{-1}$