Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

Bài 4.1 Một cầu thang gồm n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2, hoặc 3 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang, hãy tìm hệ thức đệ quy của x_n?

Bài 4.2 Cho n là số nguyên dương. Hãy tìm hệ thức đệ quy của a_n với a_n là số chuỗi bit có độ dài n mà

a) chứa 2 bit 0 liên tiếp

b) không chứa 2 bit 0 liên tiếp

c) chứa 3 bit 0 liên tiếp

d) không chứa 3 bit 0 liên tiếp

e) số lượng bit 0 là số chẵn

f)* chứa 01

Đối với mỗi trường hợp hãy tính a_6.

Bài 4.3 Một chuỗi số chỉ chứa 0, 1 hoặc 2 được gọi là chuỗi tam phân. Hãy tìm hệ thức đệ quy của x_n với x_n là chuỗi tam phân có độ dài n mà

a) không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp

b) chứa 2 chữ số 0 liên tiếp

c) không chứa 012

d)* không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp hoặc 2 chữ số 1 liên tiếp

e)* chứa 2 chữ số liên tiếp giống nhau

Đối với mỗi trường hợp hãy tính x_6.

Bài 4.4 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất sau

a) $a_0 = 2$ và $a_{n+1} = -3a_n, \forall n \geq 0$

b) $a_1 = -5$ và $a_n = 8a_{n-1}, \forall n \geq 2$

c) $a_2 = 28, a_3 = -8$ và $a_n = 4a_{n-2}, \forall n \geq 4$

d) $a_0 = 1, a_1 = 0$ và $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 1$

e) $a_1 = 6, a_2 = 8$ và $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \forall n \geq 1$

Bài 4.5 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau

a) $a_0 = -3$ và $a_n = a_{n-1} + 9, \forall n \geq 1$

b) $a_1 = 13$ và $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 5.3^{n+1}, \forall n \geq 0$

c) $a_2 = 61$ và $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6, \forall n \geq 2$

d) $a_0 = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n-2), \forall n \geq 0$

e) $a_3 = 128$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 12, \forall n \geq 2$

Bài 4.6 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau

a) $a_0 = 1, a_1 = 2$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4, \forall n \geq 0$

b) $a_1 = -4, a_2 = 19$ và $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$

c) $a_2 = -5, a_3 = -26$ và $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} - 10, \forall n \geq 4$

d) $a_0 = 3, a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}, \forall n \geq 2$

e) $a_1 = -13, a_2 = 50$ và $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1)3^n, \forall n \geq 1$

f) $a_2 = -28, a_3 = -149$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3$

Bài 4.7 Giải các hệ thức đệ quy sau

a) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

Bài 4.8 Tính các tổng số sau theo n nguyên :

a) $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \ \ (n \geq 1)$

b) $S_n = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 \ \ (n \geq 1)$

c) $S_n = -1^4 + 2^4 + \ldots + (-1)^n n^4 \ \ (n \geq 1)$

d) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)2^k \ \ (n \geq 0)$

e) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k-1)(-3)^k \ \ (n \geq 0)$

f) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (k^3 - 2k^2 + 4k)(-1)^k \ \ (n \geq 1)$

Bài 4.9 Cho $n \geq 1$. Vẽ n đường thẳng trong mặt phẳng cắt nhau từng đôi một nhưng trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng qui. Hỏi các đường thẳng này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài 4.10 Giả sử dân số thế giới năm 2000 là 7 tỉ người và tốc độ tăng dân số thế giới là 3% mỗi năm. Cho số nguyên $n \geq 2000$. Tính dân số thế giới vào năm n.

Bài 4.11 Cho số nguyên $n \geq 1$. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự a, b, c) sao cho trong chuỗi ký tự không có 2 ký tự a đứng gần nhau?

Bài 4.12 Cho số nguyên $n \geq 1$. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự 1, 2) sao cho trong chuỗi ký tự ít nhất 2 ký tự 1 đứng gần nhau?

Bài 4.13 Cho $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $a_n = \beta f_n + \alpha f_{n-1}, \forall n \geq 1$ trong đó f_m là số hạng thứ m ($m \geq 0$) của dãy số Fibonacci ($f_0 = 0, f_1 = 1$ và $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 0$).

Bài 4.14 Tính a_n và $b_n, \forall n \geq 0$ biết rằng $a_0 = 1, b_0 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ và $b_{n+1} = a_n + 2b_n, \forall n \geq 0$. (Hướng dẫn: Tìm λ, μ thỏa $a_{n+1} + \lambda b_{n+1} = \mu(a_n + \lambda b_n)$ và tính $u_n = a_n + \lambda b_n, \forall n \geq 0$).