Page: Lại Tiến Minh – Học toán cùng thầy Minh

CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

Có lời giải chi tiết

CHUYÊN ĐỀ :

CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy điểm M với $AM = x\ \left(0 < x < a\right)$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua M song song với AC, SB và cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để diện tích thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a}{4}$

B. $x = \frac{a}{3}$

C. $x = \frac{a}{2}$

D. $x = \frac{a}{5}$

Lời giải:

Ta có: MN//AC$\Rightarrow MN = \frac{BM}{BA}.AC = \left(a - x\right)\sqrt{2}$

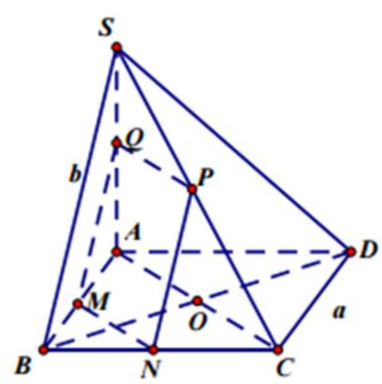
Tam giác SAB có MQ//SB$\Rightarrow MQ = \frac{AM}{BA}.SB = \frac{bx}{a}$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a}\left(a - x\right)x$

(đến đây ta có thể thử đáp án)

Ta có: $\left(a - x\right)x \le \frac{\left(a - x + x\right)^2}{4} = \frac{a}{4}$

Do đó S_{MNPQ} max khi $a - x = x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$



Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và tam giác SBD cân tại S. Trên cạnh AB, AD lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{\overline{AM}}{AB} = \frac{\overline{AN}}{AD} = k$ $(0 < k < 1)$. Mặt phẳng (α) qua MN song song với SA và cắt SD, SC, SB lần lượt tại P, Q, R. Xác định k để diện tích thiết diện MNPQR đạt giá trị lớn nhất.

A. $k = \frac{1}{2}$

C. $k = \frac{3}{5}$

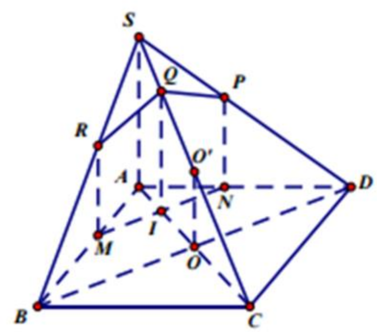
B. $k = \frac{1}{3}$

D. $k = \frac{2}{3}$

Lời giải:

MNPQR là hợp của hai hình thang vuông bằng nhau MIQR và NIQP, trong đó:

MR//IQ//NP (cùng song song với SA) và MN//BD.



Ta có: $IQ = \frac{(2-k)a}{2}$; $MR = (1-k)a$; $MI = \frac{ka\sqrt{2}}{2}$

$$S_{MNPQR} = 2S_{MIQR} = (IQ + MR).MI = \frac{a^2\sqrt{2}.k(4-3k)}{4}$$

(đến đây ta có thể thử đáp án)

Ta có: $k(4-3k) = \frac{1}{3}.3k.(4-3k) \le \frac{1}{3}.\frac{(3k+4-3k)^2}{4} = \frac{4}{3}$

Do đó S_{MNPQR} max khi $3k = 4 - 3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

Câu 3: Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ và một điểm M di động trên cạnh AA′. Mặt phẳng (BMD′) cắt CC′ tại N. Đặt $\frac{MA}{AA'} = k$ $(0 < k < 1)$, hãy xác định k để diện tích thiết diện BMD′N đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $k = \frac{1}{2}$

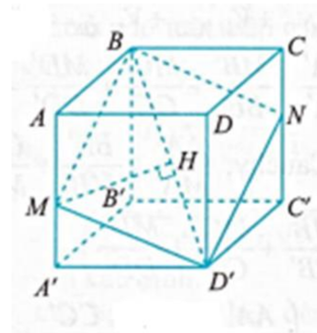
C. $k = \frac{3}{5}$

B. $k = \frac{1}{3}$

D. $k = \frac{2}{3}$

Lời giải:

Vì (ABB′A′)//(DCC′D′) nên BM//D′N. Tương tự MD′//BN.



Vậy tứ giác BMD′N là hình bình hành. Kẻ $MH \perp BD'$ thì:

$S_{BMD'N} = 2S_{BMD'} = BD'.MH$. Vậy $S_{BMD'N}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi MH là đoạn vuông góc chung của AA′ và BD′ hay M là trung điểm AA′ và H là trung điểm của BD′. Suy ra $k = \dfrac{1}{2}$

Chú ý: Ở đây, điểm M phải nằm trên đoạn thẳng AA′ và N phải nằm trên đoạn thẳng CC′. Lời giải trên thỏa mãn cả hai điều kiện ấy. Tuy nhiên, trong một số bài toán, các chân đường vuông góc chung của hai đoạn thẳng lại nằm trên các đoạn thẳng ấy kéo dài. Trong một số bài toán khác nhau , các điểm di động phải thỏa mãn thêm một số điều kiện bổ sung, nên đoạn thẳng ngắn nhất chưa hẳn là đường vuông góc chung.

Câu 4: Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh là a và hai điểm M, N lần lượt di động trên các đường chéo A′B và AC sao cho $A'M = AN = x$. Xác định x để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

C. $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

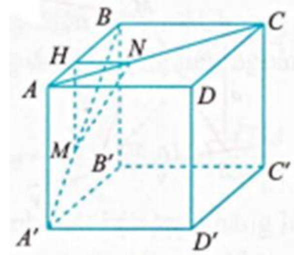
B. $x = \dfrac{a}{2}$

D. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

Ta có: $0 < x \le a\sqrt{2}$, $MB = NC = a\sqrt{2} - x$. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho MH//AA′ thì $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{A'M}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

nên theo đinh lý Thales đảo suy ra HN//BC



$\Rightarrow \Delta MHN$ vuông tại H. Vì các tam giác AHN và BHM vuông cân tại H nên

$HN = \dfrac{AN}{\sqrt{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $HM = \dfrac{BM}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$

Ta có: $MN^2 = MH^2 + NH^2 = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2 = \left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{a^2}{2} \geq \dfrac{a^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 5: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = a$ là đường vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $MN = b$ (với b là độ dài cho trước). Xác đinh độ dài đoạn thẳng AM theo a, b để thể tích tứ diện ABMN đạt giá trị lớn nhất.

A. $AM = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{3}}$

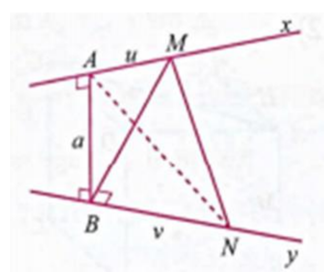
B. $AM = \sqrt{\dfrac{2\left(b^2 - a^2\right)}{3}}$

C. $AM = \sqrt{b^2 - a^2}$

D. $AM = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{2}}$

Lời giải:

Đặt $AM = u,\ BN = v$. Vì $\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp \left(ABM\right) \Rightarrow BN \perp BM$



$V_{ABMN} = V_{N.ABM} = \dfrac{1}{3} S_{ABM}.BN = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AM.AB.BN = \dfrac{1}{6}auv$

Ta có: $BM^2 = AB^2 + AM^2 = MN^2 - BN^2$

Suy ra: $u^2 + v^2 = MN^2 - AB^2 = b^2 - a^2$

Theo BĐT AM-GM: $b^2 - a^2 = u^2 + v^2 \geq 2uv \Rightarrow V_{ABMN} \leq \dfrac{a\left(b^2 - a^2\right)}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} u = v \\ u^2 + v^2 = b^2 - a^2 \end{cases} \Rightarrow u = v = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{2}}$. Vậy $AM = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{2}}$

Câu 6: Cho tứ diện ABCD và một điểm M di động trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt phẳng (BCD), (ADC), (ABD), (ABC) tại A′, B′, C′, D′ tương ứng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}+\frac{DM}{MD'}$.

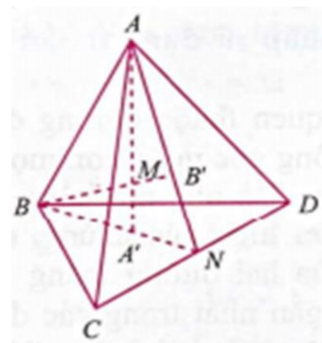
A. $P_{min}=12$

C. $P_{min}=6$

B. $P_{min}=4$

D. $P_{min}=16$

Lời giải:



Ta có: $\frac{V_{M.BCD}}{V_{A.BCD}}=\frac{MA'}{AA'}$; $\frac{V_{M.ACD}}{V_{B.ACD}}=\frac{MB'}{BB'}$; $\frac{V_{M.ABD}}{V_{C.ABD}}=\frac{MC'}{CC'}$; $\frac{V_{M.ABC}}{V_{D.ABC}}=\frac{MD'}{DD'}$

Và: $V_{M.BCD}+V_{M.ACD}+V_{M.ABD}+V_{M.ABC}=V_{ABCD}$

Suy ra: $\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}+\frac{MD'}{DD'}=1$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}=\left(\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}\right)\left(\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}+\frac{MD'}{DD'}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}\ge 4\sqrt[4]{\frac{AA'}{MA'}.\frac{BB'}{MB'}.\frac{CC'}{MC'}.\frac{DD'}{MD'}}.4\sqrt[4]{\frac{MA'}{AA'}.\frac{MB'}{BB'}.\frac{MC'}{CC'}.\frac{MD'}{DD'}}=16$$

Từ đó: $P=\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}+\frac{AM-AA'}{MA'}+\frac{BM-BB'}{MB'}+\frac{CM-CC'}{MC'}+\frac{DM-DD'}{MD'}$

$$=\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}-4\left(\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}+\frac{MD'}{DD'}\right)\ge 12$$

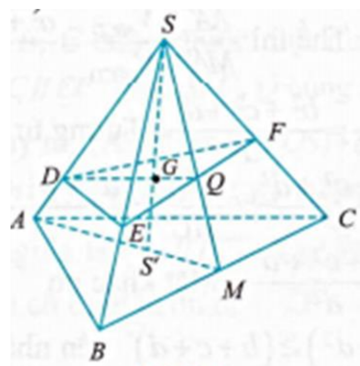
Vậy $minP=12$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là trọng tâm của tứ diện ABCD

Câu 7: Cho tứ diện SABC với $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện và cắt SA, SB, SC tương ứng tại D, E, F. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}$.

A. $P_{min}=\dfrac{25}{a^2+b^2+c^2}$	C. $P_{min}=\dfrac{16}{a^2+b^2+c^2}$
B. $P_{min}=\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$	D. $P_{min}=\dfrac{4}{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải:

Vì G là trọng tâm của tứ diện nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S′ của tam giác ABC nên có hệ thức: $\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{SS'}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$



Từ đó: $4\overrightarrow{SG}=\frac{SA}{SD}.\overrightarrow{SD}+\frac{SB}{SE}.\overrightarrow{SE}+\frac{SC}{SF}.\overrightarrow{SF}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SG}=\frac{a}{SD}.\overrightarrow{SD}+\frac{b}{SE}.\overrightarrow{SE}+\frac{c}{SF}.\overrightarrow{SF}$$

Lại vì 4 điểm D, E, F, G đồng phẳng nên $\frac{a}{SD}+\frac{b}{SE}+\frac{c}{SF}=4$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki: $4^2=\left(\frac{a}{SD}+\frac{b}{SE}+\frac{c}{SF}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}\right)$

$\Rightarrow P=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}\ge\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$. Vậy $P_{min}=\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$

Bài tập tương tự:

Cho tứ diện SABC với $SA=SB=SC=1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện và cắt SA, SB, SC tương ứng tại D, E, F. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}$.

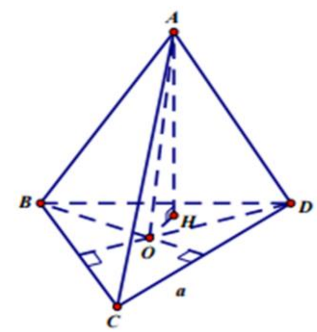
A. $P_{min}=\frac{4}{3}$ B. $P_{min}=\frac{16}{3}$ C. $P_{min}=\frac{3}{4}$ D. $P_{min}=\frac{12}{5}$

Câu 8: Cho tứ diện ABCD, biết BCD là tam giác đều cạnh a và có tâm là điểm O. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nhận đường tròn (BCD) làm một đường tròn lớn. Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện ABCD.

A. $maxV_{ABCD} = \frac{a^3}{4}$	C. $maxV_{ABCD} = \frac{a^3}{8}$
B. $maxV_{ABCD} = \frac{a^3}{6}$	D. $maxV_{ABCD} = \frac{a^3}{12}$

Lời giải:

Để ý đường tròn (BCD) là một đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và có O là tâm của tam giác BCD cạnh a, nên tâm O của tam giác BCD cũng chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, suy ra $OA = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Gọi AH là đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh A xuống mặt đáy (BCD). Suy ra $AH \le OA$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.AH \le \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.OA = \frac{a^3}{12}$$

Câu 9: Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng a. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M với $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB. Trên đoạn thẳng EF cắt d tại N. Xác định x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

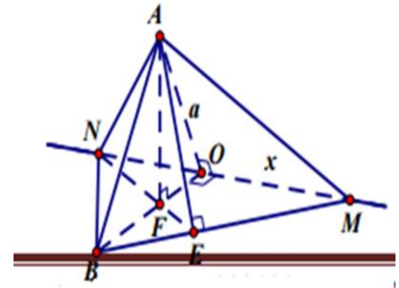
A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	C. $x = \frac{a}{2}$
B. $x = \frac{a}{4}$	D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

$AF \perp (MBO) \equiv (MNB) \Rightarrow$ AF là chiều cao của hình chóp A.BMN

$\Delta NOF \sim \Delta BOM$ suy ra $\frac{NO}{BO} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow OM.NO = \frac{a^2}{2}$.

$$V_{ABMN} = \frac{1}{6}BO.MN.AF = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}(OM + ON) \ge \frac{a^2\sqrt{3}}{12}2\sqrt{OM.ON} = \frac{a^2\sqrt{6}}{12}$$



Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 10: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$. Một điểm M di động trên cạnh CD. Đặt $CM = x$, hạ $SH \perp BM$ (H thuộc BM), xác định x để thể tích tứ diện SABH đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

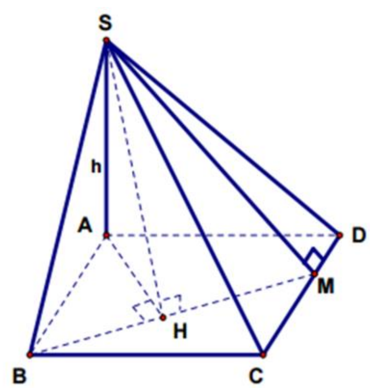
B. $x = \frac{a}{2}$

C. $x = a$

D. $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp AH$



Biết $HBA = CMB$ (so le trong) $\Rightarrow sinHBA = sinCMB \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{BC}{BM}$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.BC}{BM} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^4}{a^2 + x^2}} \; ; \; BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$V_{SABH} = \frac{1}{3} S_{ABH}.SA = \frac{1}{6}.\frac{a^3hx}{a^2 + x^2}$ (đến đây ta có thể thử đáp án)

Xét: $\frac{x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{x} + x} \le \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{x}.x}} = \frac{1}{2a}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a$ hay M trùng với D

Câu 11: Cho tứ diện ABCD có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$; $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA, N thuộc BC sao cho $AM = CN = t\ \left(0 < t < 2a\right)$. Tìm t để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

A. $t = \dfrac{2a}{3}$
C. $t = \dfrac{2a}{5}$

B. $t = \dfrac{a}{4}$
D. $t = \dfrac{3a}{4}$

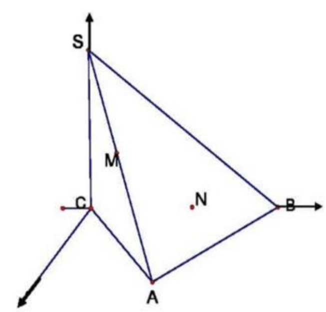
Lời giải:

Chọn hệ trục Oxyz với $A\left(a;a;0\right)$, $B\left(2a;0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$, $N\left(t;0;0\right)$

$SA: \begin{cases} x = a+u \\ z = a+u \\ y = -\sqrt{2}u \end{cases} \Rightarrow M\left(a+u;a+u;-\sqrt{2}u\right)$. Ta có: $AM = t \Leftrightarrow u = -\dfrac{t}{2} \Rightarrow M\left(a-\dfrac{t}{2};a-\dfrac{t}{2};\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$MN = \sqrt{2a^2 - 4at + 3t^2} = \sqrt{3\left(t - \dfrac{2a}{3}\right)^2 + \dfrac{2a^2}{3}} \geq a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \dfrac{2a}{3}$



Câu 11: Cho hình lập phương ABCD. A’B’C’D’ cạnh a. Trên cạnh AA’ kéo dài về phía A’ lấy điểm M, trên cạnh BC kéo dài về phía C lấy điểm N sao cho MN cắt cạnh C’D’. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. $minMN = \dfrac{2a}{3}$
C. $minMN = \dfrac{3a}{2}$

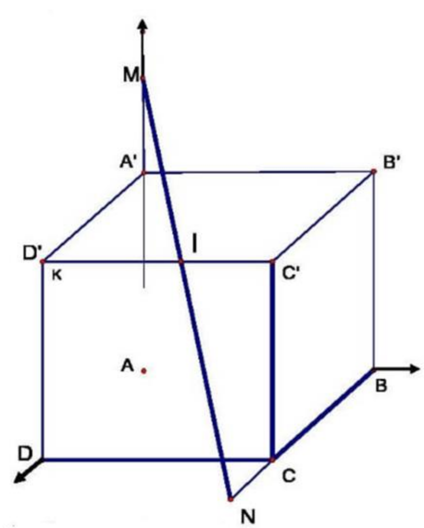
B. $minMN = 3a$
D. $minMN = 2a$

Lời giải:

Chọn hệ trục Oxyz $A \equiv O$. Gọi $M\left(0;0;m\right)$, $N\left(a;n;0\right)$

Vì MD’//NC’ nên $\dfrac{a}{a-n} = \dfrac{a-m}{a} \Rightarrow m = \dfrac{an}{n-a}$

$\Rightarrow MN = m + n - a = \dfrac{n^2 - an + a^2}{n-a}$



Xét hàm số: $f\left(n\right)=\dfrac{n^2-an+a^2}{n-a}$ $\left(n>a\right)$ suy ra $minMN=3a$

Đạt được khi $n=2a$

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' tâm I có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=a\sqrt{2}$. Trên AD lấy điểm M và gọi K là trung điểm của B'M. Đặt $AM=m$ $\left(0\le m<2a\right)$. Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện A'KID.

A. $maxV_{A'IKD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

B. $maxV_{A'IKD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

C. $maxV_{A'IKD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

D. $maxV_{A'IKD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$

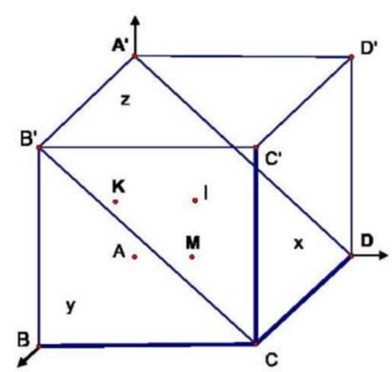
Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(0;a;0\right)$, $D\left(2a;0;0\right)$, $D'\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$

Khi đó $M\left(m;0;0\right)$, $K\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$V_{A'IKD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'K},\overrightarrow{A'I}\right].\overrightarrow{A'D}\right|=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{24}\left(2a-m\right)$

Suy ra $maxV_{A'IKD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ đạt được khi $m=0$ hay M trùng với A



Câu 13: Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông cân ở C và $SA\perp\left(ABC\right)$, $SC=a$. Xác định $cos\alpha$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(SCB\right)$ và $\left(ABC\right)$ để thể tích khối chóp đã cho đạt giá trị lớn nhất.

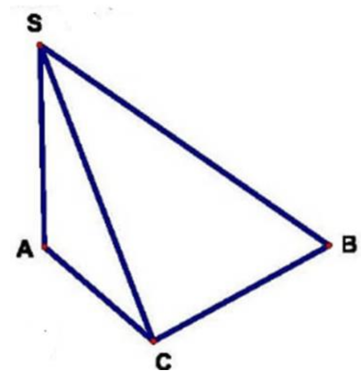
A. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ C. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$

B. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{5}}$ D. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{5}}$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} SA\perp(ABC) \\ BC\perp CA \end{cases} \Rightarrow BC\perp SC$ (theo định lý 3 đường vuông góc)

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) là $SCA=\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$



$SA=a\sin\alpha,\ AC=BC=a\cos\alpha$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3}{6}\sin\alpha.\cos^2\alpha$ (đến đây ta có thể thử đáp án)

Xét hàm số: $f(\alpha)=sin\alpha.cos^2\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=3\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\cos\alpha+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Vì $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha\left(\cos\alpha+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)>0$. Từ BBT ta suy ra $maxf(\alpha)=f\left(arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ đạt được khi $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 14: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có khoảng cánh từ đỉnh A đến mp(SBC) bằng 2a. Xác định $sin\alpha$ với α là góc giữa mặt bên và mặt đáy để thể tích khối chóp đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

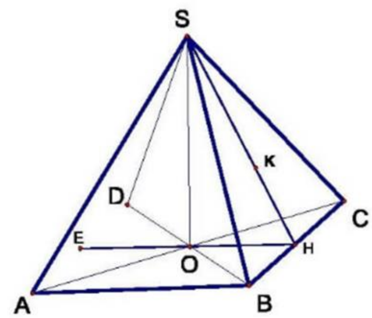
A. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ C. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$

B. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{5}}$ D. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{5}}$

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Gọi E, H lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra SE, SH là các trung đoạn của hình chóp. Vì AD//BC nên AD//(SBC)

Suy ra $d(A,(SBC)) = d(E,(SBC))$. Dựng $EK \perp SH$ thì $EK \perp (SBC)$ (vì $(SEK) \perp (SBC)$). Vậy $EK = d(A,(SBC)) = 2a$



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp OH \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $SHO = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $EH = \frac{2a}{\sin\alpha}$, $SO = \frac{a}{\cos\alpha}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{4a^3}{3\cos\alpha.\sin^2\alpha}$

$V_{S.ABCD}$ đạt min khi $f(\alpha) = \cos\alpha.\sin^2\alpha$ đạt max

$f'(\alpha) = 3\sin\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sin\alpha - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$. Từ BBT ta suy ra $maxf(\alpha) = f\left(arsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ đạt được khi $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AC' = a$, $AC'B = \varphi$, góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30^o. Tìm $\sin^2\varphi$ để thể tích hình hộp đã cho đạt giá trị lớn nhất.

A. $\sin^2\varphi = \frac{2}{3}$

B. $\sin^2\varphi = \frac{3}{5}$

C. $\sin^2\varphi = \frac{1}{8}$

D. $\sin^2\varphi = \frac{3}{8}$

Lời giải:

Ta có $CC' \perp (ABCD) \Rightarrow \left(AC';(ABCD)\right) = CAC' = 30^o \Rightarrow \begin{cases} CC' = \dfrac{a}{2} \\ AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Lại có: $AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BC' \Rightarrow \begin{cases} AB = a\sin\varphi \\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{3-4\sin^2\varphi}}{2} \end{cases}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{4}.\sqrt{\sin^2\varphi\left(3-4\sin^2\varphi\right)}$ (đến đây ta có thể thử đáp án)

Xét: $\dfrac{1}{2}.\sqrt{4\sin^2\varphi\left(3-4\sin^2\varphi\right)} \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{4\sin^2\varphi + 3 - 4\sin^2\varphi}{2} = \dfrac{3}{4}$

Vậy $\max V = \dfrac{3a^3}{16}$ đạt được khi $\sin^2\varphi = \dfrac{3}{8}$

Câu 16: Trên nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C tùy ý. Kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc AB). Gọi I là điểm giữa của CH. Trên một nữa đường thẳng It vuông góc với (ABC) tại I lấy điểm S sao cho góc $ASB = 90^o$. Đặt $AH = x$, với giá trị nào của x thì thể tích tứ diện SABC đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = R$

C. $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

B. $x = \dfrac{R}{2}$

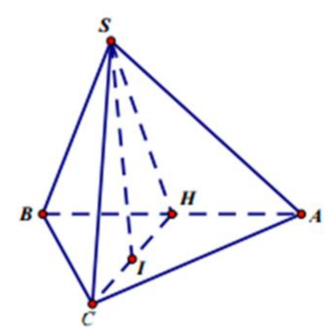
D. $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{6}$

Lời giải:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CH = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{AH.BH} = R\sqrt{x(2R-x)}; SI = \dfrac{\sqrt{3}.CH}{2} = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{x(2R-x)}}{2}$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI = \dfrac{R\sqrt{3}}{6}.x(2R-x) \le \dfrac{R\sqrt{3}}{6}.\left(\dfrac{x+2R-x}{2}\right)^2 = \dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi x=R



Câu 17: Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ $\left(0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = AD = BC = BD = 1$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tìm x để thể tích tứ diện ABCD đạt giá trị lớn nhất.

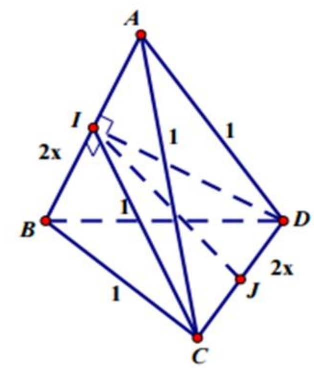
A. $x = \dfrac{1}{2}$

B. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases} DI \perp AB \\ CI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ$. Tương tự $CD \perp IJ$.

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

$IJ = \sqrt{ID^2 - DJ^2} = \sqrt{1 - 2x^2}$, $S_{\Delta ICD} = \dfrac{1}{2} IJ.CD = x\sqrt{1 - 2x^2}$

$V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{IBCD} = \dfrac{1}{3} S_{ICD}(AI + IB) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^4(1 - 2x^2)}$ (đến đây có thể thử đáp án)

Xét: $\sqrt{x^4(1 - 2x^2)} = \sqrt{x^2.x^2.(1 - 2x^2)} \le \sqrt{\left(\dfrac{x^2 + x^2 + 1 - 2x^2}{3}\right)^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Vậy $maaxV_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$ đạt được khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 18: Cho hình chop S.ABCD có $SC = x$ và các cạnh còn lại đều có độ dài bằng a. Tìm x để thể tích tứ diện S.ABCD đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \dfrac{a}{2}$

B. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Lời giải:

Gọi $AC \cap BD = O$. Ta có $\Delta ABD = \Delta CBD = \Delta SBD \Rightarrow SO = OA = AC \Rightarrow ASC = 90^o$

Vì $\begin{cases} OB = OD \\ SB = SD \end{cases} \Rightarrow SO \perp BD \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right)$

$BD^2 = 4OB^2 = 4\left(AB^2 - OA^2\right) = 3a^2 - x^2 \Rightarrow BD = \sqrt{3a^2 - x^2}$

$V_{S.ABCD} = V_{B.SAC} + V_{D.SAC} = \frac{1}{6}SA.SC.BD = \frac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{a}{6}.\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{a^3}{4}$

Vậy $maxV = \frac{a^3}{4}$ đạt được khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 19: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $AD = b$. Dựng tia hai Ax và Cy cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ sao cho tia Ax, Cy cùng phía so với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Điểm M chuyển động trên Ax, điểm N chuyên động trên Cy sao cho $\left(MBD\right) \perp \left(NBD\right)$. Tìm thể tích nhỏ nhất của tứ diện BDMN.

A. $minV_{BDMN} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

B. $minV_{BDMN} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

C. $minV_{BDMN} = \frac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$

D. $minV_{BDMN} = \frac{a^2b^2}{6\sqrt{a^2 + b^2}}$

Lời giải:

$\begin{cases} \left(\left(MBD\right),\left(ABCD\right)\right) = \alpha \\ \left(MBD\right) \perp \left(NBD\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\left(NBD\right),\left(ABCD\right)\right) = 90^0 - \alpha$

Trong mp$\left(ABCD\right)$ kẻ $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH \perp BD \\ NK \perp BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MHA = \alpha \\ NKC = 90^o - \alpha \end{cases}$

Vì $\begin{cases} \left(MBD\right) \perp \left(NBD\right) \\ MH \perp BD \end{cases} \Rightarrow MH \perp \left(NBD\right)$

$V_{BDMN} = \frac{1}{3}S_{NBD}.MH = \frac{1}{6}BD.NK.MH = \frac{a^2b^2}{3\sin 2\alpha\sqrt{a^2 + b^2}}$

Với $BD=\sqrt{a^2+b^2}$; $NK=\dfrac{ab}{\sin\alpha\sqrt{a^2+b^2}}$; $MH=\dfrac{ab}{\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2}}$

Vì $0<2\alpha<\pi \Rightarrow \sin 2\alpha \le 1 \Rightarrow V_{BDMN} \ge \dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$

Vậy $minV_{BDMN}=\dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$ đạt được khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

Câu 20: Cho tứ diện ABCD sao cho $AB=2x$, $CD=2y$ và 4 cạnh còn lại đề có độ dài bằng 1. Xác định x, y để diện tích toàn phần tứ diện đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

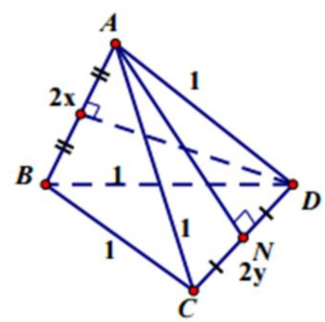
B. $x=y=\dfrac{1}{2}$

C. $x=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. $x=y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Lời giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có: $DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\sqrt{1-x^2}$. Tương tự $AN=\sqrt{1-y^2}$

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}=x\sqrt{1-x^2}$; $S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ACD}=y\sqrt{1-y^2}$

$$S_{tp}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}+S_{\Delta ACD}=2\left(x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}\right)\le 2\left(\frac{x^2+1-x^2}{2}+\frac{y^2+1-y^2}{2}\right)=2$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

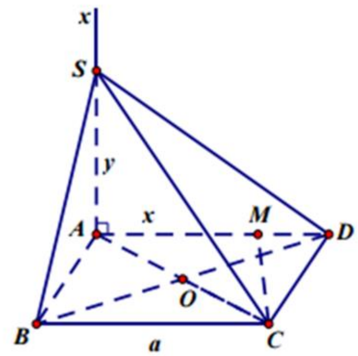
Câu 20: Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a, lấy điểm M với $AM=x$ $\left(0\le x\le a\right)$ và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông , lấy điểm S với $SA=y$. Với giải thiết $x^2+y^2=a^2$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM .

A. $maxV_{S.ABCM}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$

C. $maxV_{S.ABCM}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$

B. $maxV_{S.ABCM}=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$	D. $maxV_{S.ABCM}=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Lời giải:



Theo đề $x^2+y^2=a\Rightarrow y=\sqrt{a^2-x^2}$

$$V_{S.ABCM}=\frac{1}{3}.\frac{AM+BC}{2}.AB.SA=\frac{a}{6}\sqrt{(a+x)^2(a^2-x^2)}$$

Xét: $\sqrt{(a+x)^2(a^2-x^2)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a+x)(a+x)(3a-3x)(a+x)}$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{\left(\frac{a+x+a+x+a+x+3a-3x}{4}\right)^4}=\frac{9a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Vậy $maxV_{S.ABCM}=\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ đạt được khi $x=\frac{a}{2}$

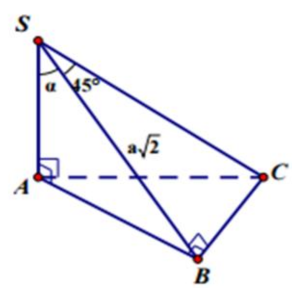
Câu 20: Cho tứ diện SABC có $SA\perp(ABC)$, nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Biết phần tứ diện đạt giá trị lớn nhất. Biết $SB=a\sqrt{2}$, $BSC=\frac{\pi}{4}$, $ASB=\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Với giá trị nào của α thì thể tích tứ diện SABC đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha=\frac{\pi}{4}$	C. $\alpha=\frac{\pi}{6}$
B. $\alpha=\frac{\pi}{2}$	D. $\alpha=\frac{\pi}{3}$

Lời giải:

$\begin{cases}AB=SB.\sin\alpha=a\sqrt{2}\sin\alpha\\SA=SB.\cos\alpha=a\sqrt{2}\cos\alpha\end{cases}$. $V_{SABC}=V_{B.SAC}=\frac{1}{3}BC.SA.AB=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin2\alpha\le\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Đạt được khi $\alpha=\frac{\pi}{4}$



Bài tập Nâng cao

1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM nhưng luôn luôn cắt SB, SD lần lượt lại B′ và D′. Gọi $V = V_{S.ABCD}$ và $V_1 = V_{S.AB'MD'}$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

2) Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, $AD = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BCD.

A. $\sqrt{ab+bc+ca+3}$

C. $abc\sqrt{a+b+c}$

B. $\frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{2}$

D. $\sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{2}}$

3) Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính $AB = a$ và một điểm C di động trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm S sao cho $SA = h$. Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB và cắt SB, SC lần lượt tại B′, C′. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.AB′C′.

A. $\frac{a^2h^4}{12\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$

C. $\frac{a^2h^4}{6\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$

B. $\frac{a^2h^4}{3\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$

D. $\frac{a^2h^4}{4\sqrt{(a^2+h^2)^3}}$