Giải tích B2 – xét tính khả vi hàm hai biến số

KHẢO SÁT TÍNH KHẢ VI

1. Đạo hàm riêng
   Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. Với $(x, y) \in D$.
   - Đạo hàm riêng của $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) theo biến x ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ định bởi:
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(x_0, y_0)}{t}$$
   - Đạo hàm riêng của $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) theo biến y ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ định bởi:
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

2. Sự khả vi
   Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ và $X = (x_0, y_0) \in D$, giả sử tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ta nói f khả vi tại $X = (x_0, y_0)$ nếu với $h = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $X + h \in D$ thì
   $$f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).s + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).t + \sqrt{s^2 + t^2}\,\varphi(s, t)$$
   Trong đó, $\varphi(s, t)$ xác định trong lân cận của $(0,0)$ thỏa :
   $$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \varphi(s, t) = 0$$
   Vi phân của f tại (x, y), ký hiệu là $df(x, y)$, định bởi
   $$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$
   Tính chất:
   - Nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0)
   - Điều kiện đủ, Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0)

Ghi chú: Các bước để khảo sát tính khả vi tại (x_0, y_0):
- Bước 1: tính $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- Bước 2: với $h = (s, t)$. Ta tính:
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + t^2}}\left[f(s, t) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).s - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).t\right]$$
- Bước 3: Tính
$$I = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \varphi(s, t)$$
  + Nếu $I = 0$ thì f khả vi tại (x_0, y_0)
  + Nếu $I \neq 0$ hoặc không tồn tại thì f không khả vi tại (x_0, y_0)

3. Đạo hàm riêng cấp cao
   a) Công thức Taylor
   Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$. $f: D \to \mathbb{R}$. Giả sử đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ tồn tại với mọi $x \in D$. Khi đó:
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{t}$$

4. Định lý Schwartz: Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Ví dụ 1: Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Xét tính liên tục của f (dành cho ai học giải tích B1)
b) Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
c) Xét tính khả vi của $f(x,y)$
d) Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Giải

a) Xét tính liên tục của f

- f liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$
- Tại $(x,y) = (0,0)$.

  với $(x,y) \neq (0,0)$. Ta có

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x| + \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq$$

$$\leq |x| + |y|.\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = |x| + |y|\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|\sqrt{y^2} = |x| + y^2$$

  Vì

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + y^2 = 0$$

  Nên theo định lý kẹp

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

  Vậy, f liên tục tại $(0,0)$

b) Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

- Tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2} - xy^2.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = 1 + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - xy^2.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{2x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Tại $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

c) Xét tính khả vi của $f(x,y)$

- Tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$ thì f khả vi vì $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$.
- Tại $(x,y) = (0,0)$

Với $h = (s,t)$ ta có:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).s - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[s + \frac{st^2}{\sqrt{s^2+t^2}} - 0 - 1.s - 0.t\right] = \frac{st^2}{s^2+t^2}$$

Ta có:

$$0 \leq |\varphi(x,y)| = \left|\frac{st^2}{s^2+t^2}\right| \leq \frac{|t|}{2}\cdot\frac{s^2+t^2}{s^2+t^2} = \frac{|t|}{2}$$

Mà

$$\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{2} = 0$$

Nên theo giới hạn kẹp: $\lim_{t\to 0}|\varphi(x,y)| = 0$. Do đó

$$\lim_{t\to 0}\varphi(s,t) = 0$$

Vậy, f khả vi tại $(0,0)$

d) Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

- Tại $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{4x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{4x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

- Tại $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1+t-1}{t} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

???✋ Các bạn hãy suy nghĩ tại sao $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

Ví dụ 2:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Xét tính liên tục của f (dành cho ai học giải tích B1)
b) Tính $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$, sau đó xét tính liên tục của $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ tại $(0,0)$
c) Xét tính khả vi của $f(x,y)$
d) Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

Giải

a) Xét tính liên tục của f

- f liên tục tại mọi điểm $(x,y)\neq(0,0)$
- Tại $(x,y)=(0,0)$

Với $(x,y)\neq(0,0)$. Ta có:

$$0\leq|f(x,y)|=\left|x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq x^2$$

Vì

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2=0$$

Nên theo định lý kẹp

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0 \;\Rightarrow\; \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

Do đó, f liên tục tại $(0,0)$

b) Tính $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$

- Tại $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

- Tại $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{t^2}=0$$

(Vì $0\leq\left|t\sin\frac{1}{t^2}\right|\leq|t|\to0$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

xét tính liên tục của $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ tại $(0,0)$

- Xét dãy $(x_n,y_n)=\left(0,\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{1}{n}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{1}{n}\right)=0$$

- Xét dãy $(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\to(0,0)$. Khi đó,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n',y_n')=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)=-16\sqrt{n\pi}\to-\infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) = -16\sqrt{n\pi} \to -\infty$$

Vậy, tồn tại 2 dãy $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$ đều tiến đến 0 nhưng $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n), \frac{\partial f}{\partial x}(x'_n, y'_n)$ lại tiến đến những giá trị khác nhau nên $\frac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ kết luận tương tự

c) Xét tính khả vi của $f(x, y)$

- Tại mọi điểm $(x, y) \neq (0,0)$ thì f khả vi vì $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \neq (0,0)$.
- Tại $(x, y) = (0,0)$. Với $h = (s, t)$ ta có

$$\varphi(s,t) = \varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).s - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[s^2 \sin\frac{1}{s^2+t^2} - 0 - 0.s - 0.t\right] = \frac{s^2}{\sqrt{s^2+t^2}}\sin\frac{1}{s^2+t^2}$$

Ta có

$$0 \le |\varphi(s,t)| = \left|\frac{s^2}{\sqrt{s^2+t^2}}\sin\frac{1}{s^2+t^2}\right| \le \left|\frac{s^2}{\sqrt{s^2+t^2}}\right| \le \left|\frac{s^2}{\sqrt{s^2}}\right| \le |s^3|$$

Vì

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} |s^3| = 0$$

Nên theo định lý kẹp

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} |\varphi(s,t)| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{(s,t)\to(0,0)} \varphi(s,t) = 0$$

Vậy f khả vi tại $(0,0)$.

d) Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

- Tại điểm $(x, y) \neq (0,0)$ tự tính
- Tại điểm $(x, y) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$