

TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Tích phân kép trên một hình chữ nhật

1/

a/ Ước lượng thể tích khối rắn nằm dưới mặt $z = xy$ và trên hình chữ nhật $R = (x, y) | 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4$. Dùng tổng Riemann với $m = 3$ và $n = 2$ với các điểm ở góc phải trên của mỗi ô vuông.

Thể tích của khối rắn nằm dưới mặt z và nằm trên hình chữ nhật R được tính bằng cách cộng thể tích của từng khối rắn con nằm dưới z và lần lượt nằm trên các hình chữ nhật con $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$. Diện tích của các hình chữ nhật con

$$S_{R1} = S_{R2} = S_{R3} = S_{R4} = S_{R5} = S_{R6} = \frac{6 \times 4}{m \times n} = 4.$$

Thể tích của khối rắn nằm trên hình chữ nhật R_1 với điểm đại diện phải trên là

$$V_1 = z(2, 0) \times S_{R1} = 0 \times 4 = 0.$$

Tương tự, ta có các thể tích khác:

$$V_2 = z(4, 0) \times S_{R2} = 0 \times 4 = 0$$

$$V_3 = z(6, 0) \times S_{R3} = 0 \times 4 = 0$$

$$V_4 = z(2, 2) \times S_{R4} = 4 \times 4 = 16$$

$$V_5 = z(4, 2) \times S_{R5} = 8 \times 4 = 32$$

$$V_6 = z(6, 2) \times S_{R6} = 12 \times 4 = 24$$

Vậy, thể tích khối rắn trên là $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 72$.

b/ Dùng quy tắc lấy điểm giữa để ước lượng thể tích khối rắn trong câu a.

Tương tự, ta có các thể tích sau:

$$V_1 = z(1, 1) \times S_{R1} = 4$$

$$V_2 = z(3, 1) \times S_{R2} = 12$$

$$V_3 = z(5, 1) \times S_{R3} = 15$$

$$V_4 = z(1, 3) \times S_{R4} = 12$$

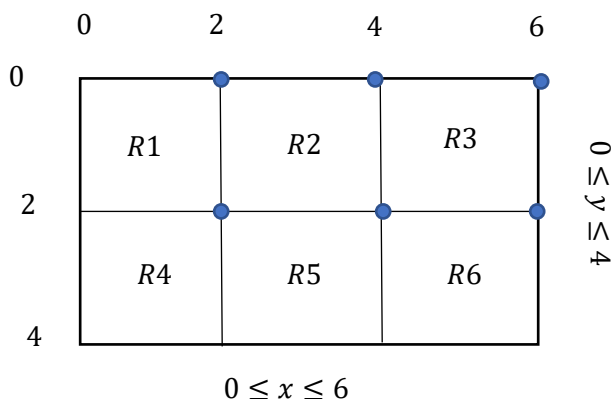
$$V_5 = z(3, 3) \times S_{R5} = 48$$

$$V_6 = z(5, 3) \times S_{R6} = 60$$

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_6 = 151.$$

3/

**Lưu ý: đề bài là ước lượng tích phân chứ không phải ước lượng thể tích nên kết quả có thể âm hoặc bằng 0.



a/ Dùng tổng Riemann với $m = n = 2$ để ước lượng $\iint \sin(x + y) dA$, với $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$ tại các điểm góc dưới bên trái.

Diện tích của các ô con:

$$S1 = S2 = S3 = S4 = \frac{\pi \times \pi}{m \times n} = \frac{\pi^2}{4}$$

Tọa độ các góc dưới trái của các ô con lần lượt là:

$$A\left(0, \frac{\pi}{2}\right), B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), C(0, \pi), D\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Tích phân tại các ô con:

$$P1 = f(A) \times S1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$P2 = f(B) \times S2 = 0$$

$$P3 = f(C) \times S3 = 0$$

$$P4 = f(D) \times S4 = -\frac{\pi^2}{4}$$

Vậy, tích phân cần tìm là $P = P1 + P2 + P3 + P4 = 0$.

b/ Dùng quy tắc điểm giữa để tính tích phân ở câu a.

Tọa độ các điểm giữa của các ô con lần lượt là:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), D\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Tích phân tại các ô con:

$$P1 = f(A) \times S1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$P2 = f(B) \times S2 = 0$$

$$P3 = f(C) \times S3 = 0$$

$$P4 = f(D) \times S4 = -\frac{\pi^2}{4}$$

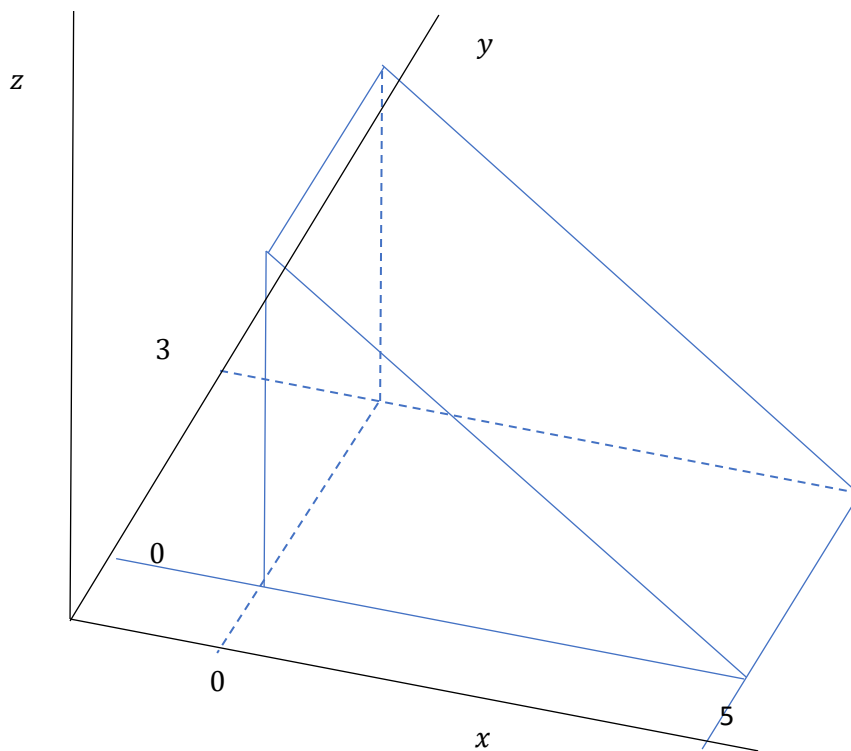
Vậy, tích phân cần tìm là $P = P1 + P2 + P3 + P4 = 0$.

10/ Ước lượng tích phân kép với miền được cho sau: $\iint 3dA, R = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 6\}$

Tích phân trên là thể tích của hình hộp chữ nhật với chiều dài 5, chiều rộng 4 và chiều cao 3, như vậy tích phần trên là $V = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

11/ Tính $\iint (5 - x)dA$, trong miền $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$

Tích phân trên là thể tích của khối rắn được miêu tả như hình vẽ bên dưới:



Vậy, ta có $V = \frac{5 \times 3 \times 5}{2} = 37.5$

Tích phân lặp

1/ Tính $\int_0^5 f(x, y) dx$ và $\int_0^1 f(x, y) dy$ với $f(x, y) = 12x^2y^3$

$$\int_0^5 12x^2y^3 dx = 4y^3x^3 \Big|_{x=0}^{x=5} = 500y^3$$

$$\int_0^1 12x^2y^3 dy = 3x^2y^4 \Big|_{y=0}^{y=1} = 3x^2$$

3-14 Tính các tích phân lặp sau:

$$\begin{aligned} & 3/ \int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy \\ &= \int_1^3 (x + 2yx^2) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_1^3 (1 + 2y) dy \\ &= (y + y^2) \Big|_{y=1}^{y=3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

5/

$$\begin{aligned}& \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y \, dy dx \\&= \int_0^2 -x \cos y \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\&= \int_0^2 1 \, dx \\&= 2\end{aligned}$$

12/

$$\begin{aligned}& \int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \\&= \int_0^1 \frac{1}{3} x (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^4 \right) dx \\&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{10} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\&= \frac{1}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}^5}{10} - \frac{2}{5} \right) \\&\approx 0.24379\end{aligned}$$

15-22 Tính các tích phân kép sau:

15/

$$\begin{aligned}& \iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\} \\&= \int_0^3 \int_0^1 (6x^2y^3 - 5y^4) dy dx \\&= \int_0^3 \left(\frac{6}{4} x^2 y^4 - y^5 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\&= \int_0^3 \left(\frac{6}{4} x^2 - 1 \right) dx \\&= \left(\frac{2}{4} x^3 - x \right) \Big|_{x=0}^{x=3} \\&= \frac{21}{2}\end{aligned}$$

17/

$$\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA, R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1} dy dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{3(x^2+1)} y^3 \Big|_{y=-3}^{y=3} dx \\
&= \int_0^1 \frac{18x}{x^2+1} dx (*) \\
&\text{Đặt } u = x^2 + 1, \text{ ta có } du = 2xdx \\
&(*) = \int_1^2 \frac{9}{u} du \\
&= 9\ln(u) \Big|_{u=1}^{u=2} = 9\ln(2)
\end{aligned}$$

25/ Tính thể tích khối rắn nằm dưới mặt phẳng $3x + 2y + z = 12$ và miền trên hình chữ nhật $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$

Thể tích của khối rắn đề cho là tích phân $\iint_R z(x, y) dA$ (*) với $z = 12 - 3x - 2y$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^1 \int_{-2}^3 (12 - 3x - 2y) dy dx \\
&= \int_0^1 (12y - 3xy - y^2) \Big|_{y=-2}^{y=3} dx \\
&= \int_0^1 (55 - 15x) dx \\
&= \left(55x - \frac{15}{2}x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{95}{2}
\end{aligned}$$

28/ Tính thể tích khối rắn được bao quanh bởi mặt $z = x \sec^2 y$ và mặt phẳng $z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$ và $y = \frac{\pi}{4}$.

Thể tích trên là tích phân $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 y dy dx$ (*)

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 y} dy dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \frac{x}{\cos^2 y} dx dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{2 \cos^2 y} \Big|_{x=0}^{x=2} dy \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y} dy \\
&= 2 \tan y \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

30/ Tính thể tích khối rắn được bao quanh bởi mặt paraboloid $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ và mặt phẳng $z = 1, x = 1, x = -1, y = 0, y = 4$

Thể tích trên là tích phân $\iint_R f(x, y) dA$ với $f(x, y)$ là chênh lệch độ cao giữa hai mặt $z_1(x, y) = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ và $z_2(x, y) = 1, R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^4 (z_1(x, y) - z_2(x, y)) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^4 (1 + x^2 + (y - 2)^2) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(y + x^2 y + \frac{1}{3} (y - 2)^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=4} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 + 4x^2 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \frac{28}{3} x + \frac{4}{3} x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Tích phân kép trên một miền tổng quát.

1-5 Tính các tích phân lặp:

1/

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} y^3 dy \\ &= \frac{1}{8} y^4 \Big|_{y=0}^{y=4} \\ &= 32 \end{aligned}$$

3/

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{x^2}^x (1 + 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 (y + y^2) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{10}$$

5/

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} du dv \\ &= \int_0^1 u \sqrt{1-v^2} \Big|_{u=0}^{u=v} dv \\ &= \int_0^1 v \sqrt{1-v^2} dv (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 1 - v^2 \Rightarrow dt = -2v dv$$

$$\begin{aligned} (*) &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} dt \\ &= -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=1}^{t=0} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6-17 Tính các tích phân kép sau:

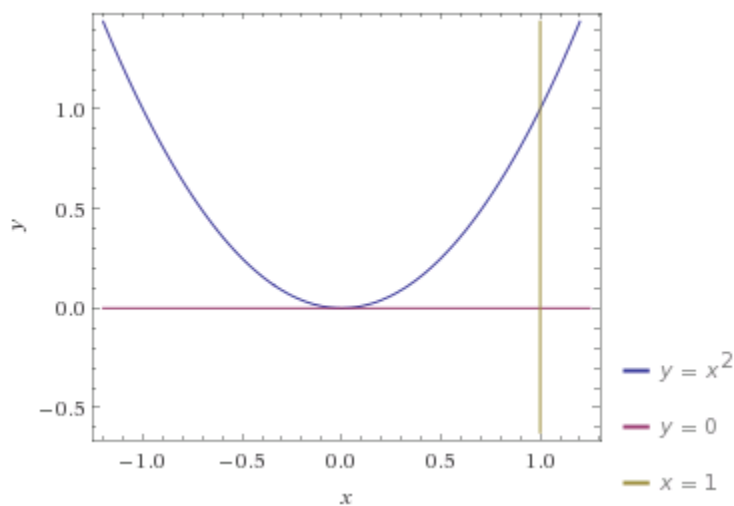
12/

$\iint_D x \cos y dA$, D là miền bao bọc bởi $y = 0, y = x^2, x = 1$

Ta có $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Vậy, tích phân đề cho:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y dy dx \\ &= \int_0^1 x \sin y \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 x \sin x^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



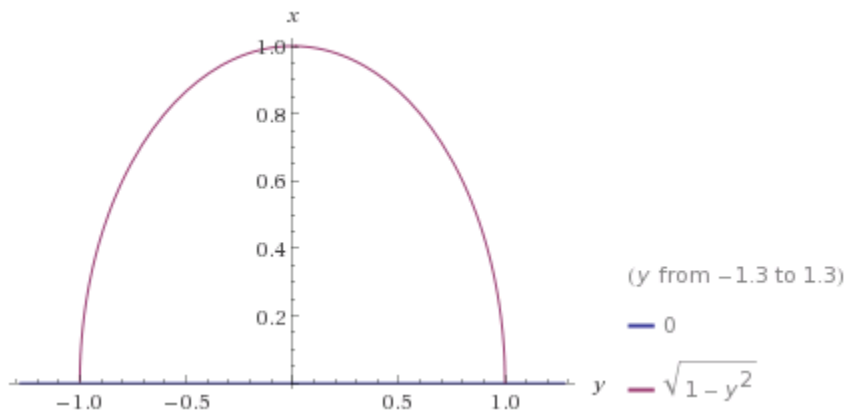
15/ $\iint_D xy^2 dA$, D bị chặn bởi $x = 0, x = \sqrt{1-y^2}$

Có thể thấy, các điểm $(x, y) \in D$ phải thỏa mãn $-1 \leq y \leq 1$

Như vậy, $D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$

Ta có tích phân cần tìm:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2)y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$



39-44 Tính tích phân bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân:

39/

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^3 ye^{x^2} \Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{3}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 xe^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{1}{6} (e^9 - 1) \end{aligned}$$

41/

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3 + 1} dx dy \\ &= \int_0^2 \frac{x}{y^3 + 1} \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy \\ &= \int_0^2 \frac{y^2}{y^3 + 1} dy (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = y^3 + 1 \Rightarrow dt = 3y^2 dy$$

$$(*) = \frac{1}{3} \int_1^9 \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln(t) \Big|_{t=1}^{t=9}$$

$$= \frac{1}{3} \ln(9)$$