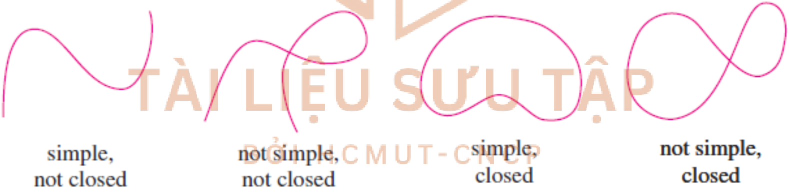
1. Định lý Green
   - Định hướng đường cong phẳng đơn kín
   - Ứng dụng của định lý Green

2. Tích phân đường không phụ thuộc đường đi
   - Định lý cơ bản của tích phân đường
   - Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường đi

Định nghĩa

Đường cong $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$, được gọi là **đơn (simple)** nếu nó không tự cắt nhau ở giữa hai đầu mút, tức là

$$a < t_1 < t_2 < b \Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{r}}(t_1) \neq \overrightarrow{\mathbf{r}}(t_2).$$

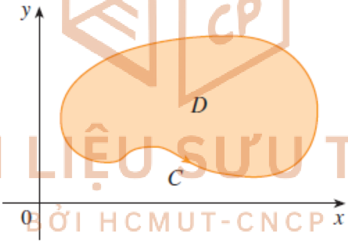


Định nghĩa

Đường cong $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)$, $a \leq t \leq b$, được gọi là **kín (closed)** nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng nhau, tức là

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b).$$

- Cho đường cong phẳng đơn kín C và gọi D là miền phẳng được giới hạn bởi C.
- Ta quy ước **chiều dương** của đường cong phẳng đơn kín C là chiều mà nếu ta đi theo chiều đó thì ta sẽ thấy miền D luôn nằm bên **tay trái**. Chiều ngược lại được gọi là chiều âm.



Định lý (Green's theorem)

Cho C là đường cong phẳng đơn kín trơn từng khúc và D là miền phẳng giới hạn bởi C. Nếu P và Q có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa D, thì

$$\oint_C P dx + Q dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

trong đó, lấy dấu $(+)$ nếu chiều của C là chiều dương, lấy dấu $(-)$ nếu chiều của C là chiều âm.

Ứng dụng tính diện tích hình phẳng

Hệ quả

Cho C là đường cong phẳng đơn kín trơn từng khúc, theo chiều dương, và D là miền phẳng giới hạn bởi C. Khi đó, diện tích của miền phẳng D là

$$S(D) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$$

So sánh với định lý cơ bản của Giải tích hàm một biến

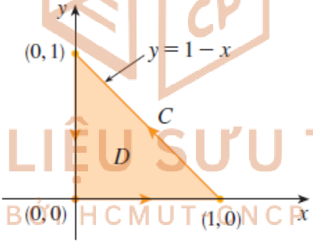
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

ta có sự tương tự cho định lý Green:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\text{biên } D} Pdx + Qdy$$

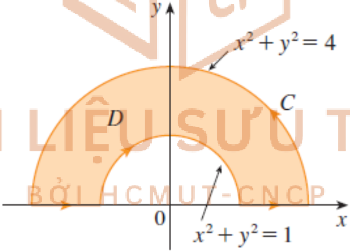
Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint_C x^4 dx + xydy$, *trong đó* C *là chu vi tam giác có đỉnh là* $(0,0)$, $(1,0)$, *và* $(0,1)$, *theo chiều dương.*



Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint\limits_C y^2dx + 3xydy$, *trong đó* C *là đường biên của miền* D *thuộc nửa trên mặt phẳng* Oxy *nằm giữa hai đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$ *và* $x^2 + y^2 = 4$*, theo chiều dương.*



Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint\limits_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy$, *trong đó* C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 9$, *theo chiều âm.*

Ví dụ

Hãy tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Định lý

Giả sử $C : \overrightarrow{\mathbf{r}}(t),\ a \le t \le b$ là một đường cong trơn và f là một hàm khả vi có vectơ gradient $\overrightarrow{\nabla f}$ liên tục. Khi đó

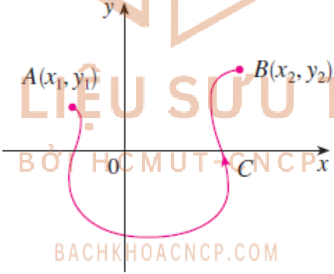
$$\int\limits_C \overrightarrow{\nabla f} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(b)) - f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(a)).$$

So sánh với định lý cơ bản của Giải tích hàm một biến

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

ta có sự tương tự cho tích phân đường loại 2:

$$\int_C \overrightarrow{\nabla f} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = f(\text{điểm cuối}) - f(\text{điểm đầu})$$



Ví dụ

Hãy tính công được thực hiện bởi trường trọng lực

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = -\frac{mMG}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$$

khi di chuyển một chất điểm có khối lượng m từ điểm $(3,4,12)$ *đến điểm* $(2,2,0)$.

HD: $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla f}$, với

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

- Giả sử C_1 và C_2 là hai đường đi có cùng điểm đầu và điểm cuối.
- Nói chung, ta có

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} \neq \int\limits_{C_2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}.$$

- Nhưng nếu $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla f}$, với f nào đó, thì ta có

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int\limits_{C_2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}.$$

Định nghĩa

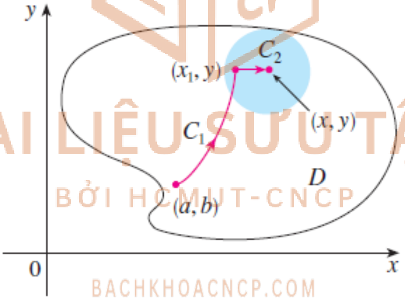
Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là một trường vectơ liên tục trên miền D. Ta nói tích phân đường $\int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\,\overrightarrow{\mathbf{r}}$ là **không phụ thuộc đường đi (independent of path)** nếu ta luôn có

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\,\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int\limits_{C_2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\,\overrightarrow{\mathbf{r}},$$

với mọi C_1 và C_2 là hai đường đi bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối.

Định nghĩa

- Ta nói miền D là **mở (open)** nếu với mọi điểm P trong D, luôn tồn tại một đĩa tâm P nằm trọn trong D.
- Ta nói miền D là **liên thông (connected)** nếu hai điểm bất kỳ trong D đều có thể nối với nhau bằng một đường đi trong D.



Định nghĩa

Một miền phẳng D được gọi là **miền đơn liên (simply-connected region)** nếu D liên thông và mọi đường cong đơn kín trong D đều chỉ bao bọc các điểm thuộc D.

Định lý

Giả sử $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = P(x, y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x, y)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ là một trường vectơ khả vi liên tục trên miền mở đơn liên D. Khi đó, 3 mệnh đề sau đây tương đương:

(a) Tích phân $\displaystyle\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ là không phụ thuộc đường đi trong D.

(b) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên D.

(c) Tồn tại hàm số $f(x, y)$ trên D sao cho

$$df = Pdx + Qdy \text{ trên } D.$$

Ví dụ

Tính tích phân đường $I = \int_C y dx + x dy$ *theo đường đi C với điểm đầu là* $O(0,0)$ *và điểm cuối là* $A(1,1)$ *trong từng trường hợp sau:*

1. *C là đoạn thẳng OA.*
2. *C là cung parabol* $y = x^2$.
3. *C là* $1/4$ *đường tròn tâm* $(0,1)$ *bán kính bằng* 1.