CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

TP. HCM — 2019.

Đặt vấn đề

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

- Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \ (a_n \neq 0)$ thì với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

- Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ thì với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

- Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ thì với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

- Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ thì với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Những hệ số của phương trình (1) ta chỉ biết một cách gần đúng.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải phương trình (1)

- Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ thì với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Những hệ số của phương trình (1) ta chỉ biết một cách gần đúng.

Khi đó việc xác định chính xác nghiệm của phương trình (1) không có ý nghĩa. Do đó việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình (1) cũng như đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

Khoảng cách ly nghiệm

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$.

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

Định nghĩa

Khoảng đóng $[a, b]$ (hoặc khoảng mở (a, b)) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

Định nghĩa

Khoảng đóng $[a, b]$ *(hoặc khoảng mở* (a, b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.*

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

Định nghĩa

Khoảng đóng $[a, b]$ (hoặc khoảng mở (a, b)) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

1. Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1).

Khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị ξ sao cho $f(\xi) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

Định nghĩa

Khoảng đóng $[a, b]$ (hoặc khoảng mở (a, b)) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

1. Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1).
2. Trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng một phương pháp nào đó với sai số cho trước.

Khoảng cách ly nghiệm

Khoảng cách ly nghiệm

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong (a, b) và $f(a).f(b) < 0$, $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b) thì trong (a, b) chỉ có 1 nghiệm thực ξ duy nhất của phương trình (1).

Khoảng cách ly nghiệm

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong (a, b) và $f(a).f(b) < 0$, $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a, b) thì trong (a, b) chỉ có 1 nghiệm thực ξ duy nhất của phương trình (1).

Phương pháp giải tích

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương pháp giải tích

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-3, -2]; [0, 1]; [2, 3]$.

Phương pháp giải tích

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình
$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-3,-2]; [0,1]; [2,3]$. Vì phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm nên mỗi đoạn trên chứa một nghiệm duy nhất. Vậy chúng là khoảng cách ly nghiệm cần tìm.

Phương pháp giải tích

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình
$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-3, -2]; [0, 1]; [2, 3]$. Vì phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm nên mỗi đoạn trên chứa một nghiệm duy nhất. Vậy chúng là khoảng cách ly nghiệm cần tìm.

Sai số tổng quát

Sai số tổng quát

Định lý

Giả sử hàm $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trong* (a, b). *Nếu* x^* *là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác* $\overline{x}$ *trong* $[a, b]$ *và*
$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m > 0$ *thì công thức đánh giá sai số tổng quát là*

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m}$$

Sai số tổng quát

Định lý

Giả sử hàm $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trong* (a, b). *Nếu* x^* *là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác* $\overline{x}$ *trong* $[a, b]$ *và* $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m > 0$ *thì công thức đánh giá sai số tổng quát là*

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m}$$

Ví dụ

Xét phương trình $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12 = 0$ *trong đoạn* $[-2, -1]$ *có nghiệm gần đúng* $x^* = -1.37$. *Khi đó*
$|f'(x)| = |3x^2 - 10x| \geqslant 13 = m > 0, \forall x \in [-2, -1]$. *Do đó*
$|x^* - \overline{x}| \leqslant \dfrac{|f(-1.37)|}{13} \approx 0.0034.$

Nội dung phương pháp

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

- Giả sử phương trình (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b, d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và x_0 là điểm giữa của đoạn $[a, b]$.

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

- Giả sử phương trình (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b, d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và x_0 là điểm giữa của đoạn $[a, b]$.
- Nếu $f(x_0) = 0$ thì x_0 chính là nghiệm và dừng lại. Ngược lại nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy, ta được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $d_1 = b_1 - a_1 = \dfrac{d_0}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

- Giả sử phương trình (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b, d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và x_0 là điểm giữa của đoạn $[a, b]$.
- Nếu $f(x_0) = 0$ thì x_0 chính là nghiệm và dừng lại. Ngược lại nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy, ta được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $d_1 = b_1 - a_1 = \dfrac{d_0}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.
- Tiếp tục quá trình chia đôi đối với $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_{n-1}, b_{n-1}]$ n lần, ta được

$$\begin{cases} a_n \leqslant \overline{x} \leqslant b_n, \; a_n \leqslant x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n \\ f(a_n).f(b_n) < 0, \; d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

Sự hội tụ của phương pháp

Vì dãy (a_n) là dãy không giảm và bị chặn trên bởi b, còn (b_n) là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi a nên khi $n \to +\infty$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \xi, \ [f(\xi)]^2 \leqslant 0.$$

Vậy $f(\xi) = 0$ hay ξ là nghiệm của phương trình (1).

Công thức đánh giá sai số

Công thức đánh giá sai số

$$|x_n - \overline{x}| = \left|\frac{a_n + b_n}{2} - \overline{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Ưu, nhược điểm của phương pháp

- **Ưu điểm.** Đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi chỉ phải tính 1 giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng.

Ưu, nhược điểm của phương pháp

- **Ưu điểm.** Đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi chỉ phải tính 1 giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng.
- **Nhược điểm.** Tốc độ hội tụ chậm, độ chính xác không cao.

Ví dụ

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0, 1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Ví dụ

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0, 1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Giải.

Ví dụ

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0, 1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	$+$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$+$
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}$	-
5	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}$	$+$

Ví dụ

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0, 1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	+
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	+
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}$	-
5	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}$	+

Vậy $x_5 = \dfrac{27}{64}$ và $\Delta_{x_5} = \dfrac{1-0}{2^6} = \dfrac{1}{64}$.

Bài 1. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 6 của phương trình $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0, 1]$. Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính theo công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.

Giải.

Bài 1. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 6 của phương trình $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0, 1]$. Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính theo công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	-
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	+
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	-
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	+
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$	+
5	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{41}{64}$	-

Bài 1. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 6 của phương trình $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0, 1]$. Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính theo công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	-
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	+
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	-
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	+
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$	+
5	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{41}{64}$	-

Vậy $x_5 = \dfrac{41}{64}, \Delta_{x_5} = \dfrac{1}{64} = 0.015625.$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x), f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} + \cos x > 0, \forall x \in [\frac{5}{8}, \frac{21}{32}].$

Xét $\overline{x} \in [\frac{5}{8}, \frac{21}{32}], m = \min|f'(x)| = f'(\frac{5}{8}) = 1.2175, |x^* - \overline{x}| \leqslant \Delta = \dfrac{|f(\frac{41}{64})|}{m} \approx 0.0011.$

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau: $x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau: $x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Giải.

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau: $x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \dfrac{4.5 - 4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25.$

Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5.$

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau: $x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \dfrac{4.5 - 4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25.$

Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5$.

Đặt $f(x) = x - \tan x$. Ta có $f(4) > 0, f(4.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	4	4.5	4.25	+
1	4.25	4.5	4.375	+
2	4.375	4.5	4.4375	+
3	4.4375	4.5	4.46875	+
4	4.46875	4.5	4.484375	+
5	4.484375	4.5	4.4921875	+

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau: $x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \dfrac{4.5 - 4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25$.

Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5$.

Đặt $f(x) = x - \tan x$. Ta có $f(4) > 0, f(4.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	4	4.5	4.25	+
1	4.25	4.5	4.375	+
2	4.375	4.5	4.4375	+
3	4.4375	4.5	4.46875	+
4	4.46875	4.5	4.484375	+
5	4.484375	4.5	4.4921875	+

Vậy $\overline{x} \approx 4.4921875$

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0.5, 1.5]$.

Giải.

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi

$\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5-0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi

$\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5-0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.

Đặt $f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x$. Ta có $f(0.5) > 0, f(1.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	1.5	1	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1	1.25	1.125	-
3	1	1.125	1.0625	-
4	1	1.0625	1.03125	-
5	1	1.03125	1.015625	-
6	1	1.015625	1.0078125	-

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi

$\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5 - 0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.

Đặt $f(x) = 2 + \cos(e^x - 2) - e^x$. Ta có $f(0.5) > 0, f(1.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	1.5	1	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1	1.25	1.125	-
3	1	1.125	1.0625	-
4	1	1.0625	1.03125	-
5	1	1.03125	1.015625	-
6	1	1.015625	1.0078125	-

Vậy $\overline{x} \approx 1.0078125$

Nội dung phương pháp

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$.

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$. Tiếp tục thay $x = x_1$ vào vế phải của (2) ta được $x_2 = g(x_1)$. Quá trình cứ thế tiếp diễn, ta xây dựng được dãy lặp (x_n) theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$.

Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy. Ví dụ, đối với phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$. Tiếp tục thay $x = x_1$ vào vế phải của (2) ta được $x_2 = g(x_1)$. Quá trình cứ thế tiếp diễn, ta xây dựng được dãy lặp (x_n) theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$. Nhiệm vụ của chúng ta là khảo sát sự hội tụ của dãy (x_n) này.

Hàm co

Hàm co

Định nghĩa

Hàm $g(x)$ được gọi là hàm co trong đoạn $[a, b]$ nếu tồn tại một số $q \in [0, 1)$, gọi là hệ số co, sao cho

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|.$$

Hàm co

Định nghĩa

Hàm $g(x)$ được gọi là hàm co trong đoạn $[a, b]$ nếu tồn tại một số $q \in [0, 1)$, gọi là hệ số co, sao cho

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|.$$

Định lý

Nếu $g(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) và $\exists q \in [0, 1)$ sao cho $\forall x \in (a, b), |g'(x)| \leqslant q$ thì $g(x)$ là hàm co trên $[a, b]$ với hệ số co là q.

Hàm co

Hệ số co được tính bằng công thức: $q = max|f'(x)|, x \in [a, b]$

Ví dụ

Xét hàm $g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$ *trên đoạn* $[0, 1]$ *ta có*
$|g'(x)| = \left| -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} \right| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt[3]{9^2}} \approx 0.078 = q < 1$. *Do đó* $g(x)$ *là hàm co với hệ số co* $q = 0.078$.

Nguyên lý ánh xạ co

Định lý

Giả sử $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là* q*. Ngoài ra* $g : [a, b] \to [a, b]$*. Khi đó với mọi giá trị* x_0 *ban đầu trong* $[a, b]$, *dãy lặp* (x_n) *được xác định theo công thức* $x_n = g(x_{n-1})$ *sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất* $\overline{x}$ *của phương trình (2) và ta có công thức đánh giá sai số*
Sai số tiên nghiệm

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Nguyên lý ánh xạ co

Định lý

Giả sử $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là* q. *Ngoài ra* $g : [a, b] \to [a, b]$. *Khi đó với mọi giá trị* x_0 *ban đầu trong* $[a, b]$, *dãy lặp* (x_n) *được xác định theo công thức* $x_n = g(x_{n-1})$ *sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất* $\overline{x}$ *của phương trình (2) và ta có công thức đánh giá sai số*
Sai số tiên nghiệm

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

hay sai số hậu nghiệm

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Chú ý. Từ công thức đánh giá sai số, ta thấy sự hội tụ của phương pháp lặp càng nhanh nếu q càng bé.

Ví dụ

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x = \dfrac{5x^3 + 3}{20} = g(x)$. *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0, 1)$., *Tính nghiệm gần đúng* x_3 *theo phương pháp lặp đơn và sai số của nghiệm* x_3 *theo hai công thức, chọn* x_0 *là điểm giữa.*

Bài tập

Bài 1. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$

Bài tập

Bài 1. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$
2. $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$

Bài tập

Bài 1. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$
2. $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$
3. $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}}$

Bài tập

Bài 1. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$
2. $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$
3. $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}}$
4. $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

Bài tập

Bài 1. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$
2. $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$
3. $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}}$
4. $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

Hãy thực hiện bốn lần lặp cho mỗi hàm $g_k(x), k = 1, 2, 3, 4$ xác định ở trên với cùng giá trị lặp ban đầu $x_0 = 1$ và so sánh kết quả với nhau. Hàm nào cho chúng ta dãy lặp hội tụ về nghiệm tốt hơn?

Giải. Với $x_0 = 1$ ta có

n	x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	$g_3(x_n)$	$g_4(x_n)$
1	x_1	1.1892	1.2247	1.1547	1.1429
2	x_2	1.0801	0.9937	1.1164	1.1245
3	x_3	1.1497	1.2286	1.1261	1.1241
4	x_4	1.1078	0.9875	1.1236	1.1241

Như vậy, hàm $g_4(x)$ cho ta dãy lặp hội tụ về nghiệm tốt hơn.

Bài tập

Bài 2. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng x_3 cho phương trình sau $x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$ trong đoạn $[3, 4]$, chọn $x_0 = 3.5$. Tính sai số x_3 theo hai công thức.

Bài tập

Bài 3. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} cho phương trình sau $x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$ trong đoạn $[1, 2]$, chọn $x_0 = 1.5$

Bài tập

Bài 3. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} cho phương trình sau $x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$ trong đoạn $[1, 2]$, chọn $x_0 = 1.5$

Bài 4. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-2} cho phương trình sau $x = \dfrac{x^2 - e^x + 2}{3}$ trong đoạn $[0, 1]$, chọn $x_0 = 0.5$

Bài 4. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-2} cho phương trình sau $x = \dfrac{x^2 - e^x + 2}{3}$ trong đoạn $[0, 1]$, chọn $x_0 = 0.5$

Bài 5. Với phương trình $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$, hãy xác định khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}, sử dụng công thức tiên nghiệm với x_0 là điểm giữa $[a, b]$

Bài 6. Với phương trình $x = 6^{-x}$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = 6^{-x} = g(x)$. Ta có $g'(x) = -6^{-x}\ln 6$,

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| < 1 \Leftrightarrow -x\ln 6 < \ln\frac{1}{\ln 6} \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln\ln 6}{\ln 6} \approx 0.3255$. Do đó ta chọn $a = 0.5, b = 1$. Lúc này

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| \leqslant \max\{|g'(0.5)|, |g'(1)|\} = 0.73$. Vậy hệ số co $q = 0.73$.

Bài 6. Với phương trình $x = 6^{-x}$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = 6^{-x} = g(x)$. Ta có $g'(x) = -6^{-x}\ln 6$,

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| < 1 \Leftrightarrow -x\ln 6 < \ln\frac{1}{\ln 6} \Leftrightarrow x > \frac{\ln\ln 6}{\ln 6} \approx 0.3255$. Do đó ta chọn $a = 0.5, b = 1$. Lúc này

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| \leqslant \max\{|g'(0.5)|, |g'(1)|\} = 0.73$. Vậy hệ số co $q = 0.73$. Chọn $x_0 = 0.5 \Rightarrow x_1 = 0.4082$ Theo công thức đánh giá sai số ta có

Bài 6. Với phương trình $x = 6^{-x}$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = 6^{-x} = g(x)$. Ta có $g'(x) = -6^{-x}\ln 6$,

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| < 1 \Leftrightarrow -x\ln 6 < \ln\frac{1}{\ln 6} \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln\ln 6}{\ln 6} \approx 0.3255$. Do đó ta chọn $a = 0.5, b = 1$. Lúc này

$|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| \leqslant \max\{|g'(0.5)|, |g'(1)|\} = 0.73$. Vậy hệ số co $q = 0.73$. Chọn $x_0 = 0.5 \Rightarrow x_1 = 0.4082$ Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4} \Rightarrow (0.73)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.73)}{0.0918}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{10^{-4}.(1-0.73)}{0.0918})}{\ln 0.73} \approx 25.84 \Rightarrow n = 26$$

Bài 7. Với phương trình $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Bài 7. Với phương trình $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) = g(x)$. Ta có $g'(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{2}$,

$|g'(x)| = |\dfrac{\cos x - \sin x}{2}| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta chọn $a = 0, b = 1$. Lúc này

$|g'(x)| = |\dfrac{\cos x - \sin x}{2}| = |\dfrac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}| \leqslant \max\{|g'(0)|, |g'(1)|\} = 0.5.$

Vậy hệ số co $q = 0.5$.

Bài 7. Với phương trình $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) = g(x)$. Ta có $g'(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{2}$,

$|g'(x)| = |\dfrac{\cos x - \sin x}{2}| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta chọn $a = 0, b = 1$. Lúc này

$$|g'(x)| = |\frac{\cos x - \sin x}{2}| = |\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}| \leqslant \max\{|g'(0)|, |g'(1)|\} = 0.5.$$

Vậy hệ số co $q = 0.5$. Chọn $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.5$. Theo công thức đánh giá sai số ta có

Bài 7. Với phương trình $x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) = g(x)$. Ta có $g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2}$,
$|g'(x)| = |\frac{\cos x - \sin x}{2}| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta chọn $a = 0, b = 1$. Lúc này
$|g'(x)| = |\frac{\cos x - \sin x}{2}| = |\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}| \leqslant \max\{|g'(0)|, |g'(1)|\} = 0.5.$
Vậy hệ số co $q = 0.5$. Chọn $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.5$. Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4} \Rightarrow (0.5)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.5)}{0.5}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{10^{-4}.(1-0.5)}{0.5})}{\ln 0.5} \approx 13.29 \Rightarrow n = 14.$$

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp Newton là trên $[a, b]$ thay cung cong AB của đường cong $y = f(x)$ bằng tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm A hoặc tại điểm B và xem hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng ξ. Ta xây dựng $x_2, ...x_n$ tương tự.

Xây dựng phương pháp:

- Chọn x_0
- Xây dựng dãy lặp $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f_{n-1}(x)}{f'_{n-1}(x)}$

Chú ý.

Định lý

Cho phương trình $f(x) = 0$ trên khoảng cách ly nghiệm (a, b). Phương pháp Newton hội tụ nếu $f''(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn (a, b).

Ta sẽ chọn x_0 là a hoặc b theo điều kiện Fourier
Nếu $f(a)f''(a) > 0$, chọn $x_0 = a$
Nếu $f(b)f''(b) > 0$, chọn $x_0 = b$
Lấy một điểm x bất kỳ thuộc $[a, b]$, nếu $f'(x)f''(x) < 0$, chọn $x_0 = a$
Lấy một điểm x bất kỳ thuộc $[a, b]$, nếu $f'(x)f''(x) > 0$, chọn $x_0 = b$

Công thức đánh giá sai số

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Trên $[a, b]$ luôn có $|f'(x)| \geqslant m$ thì công thức đánh giá sai số của phương pháp Newton là

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.
Nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến là biết x_{n-1}, để tính x_n ta phải tính giá trị của hàm f và giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_{n-1}.

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.
Nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến là biết x_{n-1}, để tính x_n ta phải tính giá trị của hàm f và giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_{n-1}.

Ví dụ

Giải phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 0.5]$ *bằng phương pháp Newton.*

Giải.

Ví dụ

Giải phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 0.5]$ *bằng phương pháp Newton.*

Giải.

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0, 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0, 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$. Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(0.5)|\} = \dfrac{9}{4} = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|x_n^3 - 3x_n + 1|}{9/4} = \Delta_{x_n}$$

Bấm máy. Tính x_n

$$x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

CALC $x = 0 \Rightarrow x_1$
CALC Ans $\Rightarrow x_2$,
CALC Ans $\Rightarrow x_3$
Sai số

$$\frac{|x^3 - 3x + 1|}{9/4}$$

CALC $x_3 = Ans \Rightarrow \Delta x_3$
CALC $x_2 \Rightarrow \Delta x_2$
CALC $x_1 \Rightarrow \Delta x_1$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	0	
1	$1/3 = 0.3333333333$	0.0165
2	$25/72 = 0.3472222222$	$8.6924.10^{-5}$
3	0.3472963532	$2.5.10^{-9}$

Bài tập

Bài 1. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1, 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Bài tập

Bài 1. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1,2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) = e^x - 2^{-x}\ln 2 - 2\sin x > 0, \forall x \in [1,2]$ và $f''(x) = e^x + 2^{-x}\ln^2(2) - \cos x > 0, \forall x \in [1,2]$ nên chọn $x_0 = 2$. Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2^{-x_{n-1}} + 2\cos x_{n-1} - 6}{e^{x_{n-1}} - 2^{-x_{n-1}}\ln 2 - 2\sin x_{n-1}}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = 0.688 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n} + 2^{-x_n} + 2\cos x_n - 6|}{0.688} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.850521336	0.1283
2	1.829751202	$2.19.10^{-3}$
3	1.829383715	$6.7.10^{-7}$

Bài tập

Bài 2. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3, 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Bài tập

Bài 2. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3, 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Ta có $f(1.3) < 0, f(2) > 0, f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sin(x-1) > 0, \forall x \in [1.3, 2]$ và $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \cos(x-1) < 0, \forall x \in [1.3, 2]$ nên chọn $x_0 = 1.3$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)}{\frac{1}{x_{n-1}-1} - \sin(x_{n-1}-1)}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1.3)|, |f'(2)|\} = 0.158 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)|}{0.158} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	1.3	
1	1.38184714	0.21998
2	1.397320733	$5.76.10^{-3}$
3	1.397748164	$4.199.10^{-6}$

THANK YOU FOR ATTENTION