CHƯƠNG 3:

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Đạo hàm

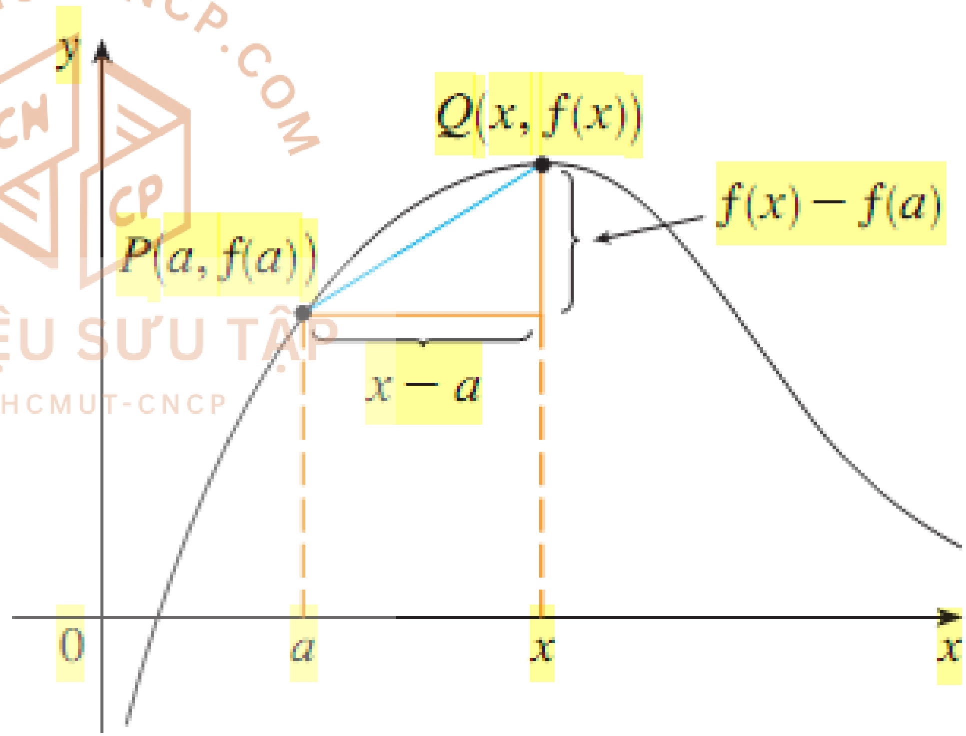
Bài toán mở đầu 1: Tìm tiếp tuyến của đường cong

Xét đường cong y=f(x).

Một điểm P(a,f(a)) cố định trên đường cong

Cho điểm Q(x,f(x)) chạy trên đường cong tới điểm P.

Nếu cát tuyến PQ dần đến vị trí giới hạn Pt thì đường thẳng Pt được gọi là tiếp tuyến của đường cong tại P



Tiếp tuyến có hệ số góc:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

và đi qua P. Tìm được m, ta tìm được tiếp tuyến

Đạo hàm

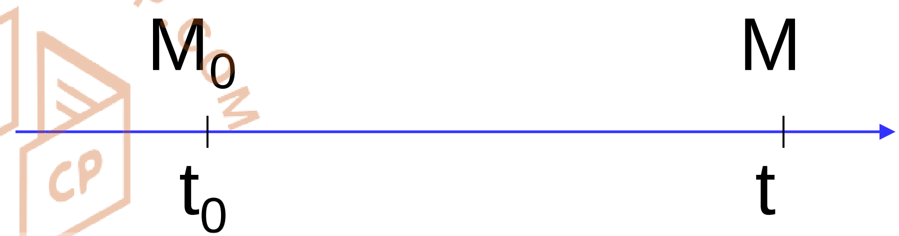
Bài toán mở đầu 2: Tìm vận tốc thực của chuyển động

Xét một vật chuyển động trên đường thẳng.

Tại thời điểm t_0 nó ở vị trí M_0 với hoành độ $s_0 = s(t_0)$

Tại thời điểm t nó ở vị trí M với hoành độ $s= s(t)$

Ta tính được quãng đường $\Delta s = s - s_0$ trong khoảng thời gian $\Delta t = t - t_0$.



Vận tốc trung bình là tỉ số Δs/ Δt. Vận tốc này sẽ càng gần với vận tốc thực nếu khoảng thời gian càng nhỏ

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Đạo hàm

Cả hai bài toán trên đều dẫn ta đến việc tính giới hạn của tỉ số Δf/ Δx khi Δx→0. Tức là dẫn đến việc lập hàm f(x) và tính đạo hàm của nó

Định nghĩa: Cho hàm f(x) xác định trong lân cận của x_0, đạo hàm tại x_0 của hàm f(x) là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nếu giới hạn trên là hữu hạn

Các quy tắc tính đạo hàm

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f.g)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Đạo hàm

Bảng đạo hàm các hàm cơ bản

$$1/\left(a^x\right)' = a^x \ln a \Rightarrow \left(e^x\right)' = e^x$$

$$2/\left(x^a\right)' = a.x^{a-1}$$

$$3/\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \Rightarrow \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$4/\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$5/\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$6/\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$7/\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

$$8/\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9/\left(\arccos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10/\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11/\left(\operatorname{arccot} x\right)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$12/\left(shx\right)' = chx$$

$$13/\left(chx\right)' = shx$$

$$14/\left(thx\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$15/\left(cthx\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Đạo hàm

Đạo hàm 1 phía:

Đạo hàm trái: $$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Đạo hàm phải: $$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Định lý: Hàm f(x) có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0 và 2 đạo hàm đó bằng nhau

Đạo hàm vô cùng: Nếu $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$$

Thì ta nói hàm f có đạo hàm ở vô cực

Đạo hàm

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Áp dụng các quy tắc và bảng đạo hàm ta có

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Suy ra, tại x=1 không thể thay x=1 vào f ' để tính mà phải dùng định nghĩa

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = +\infty$$

Vậy:

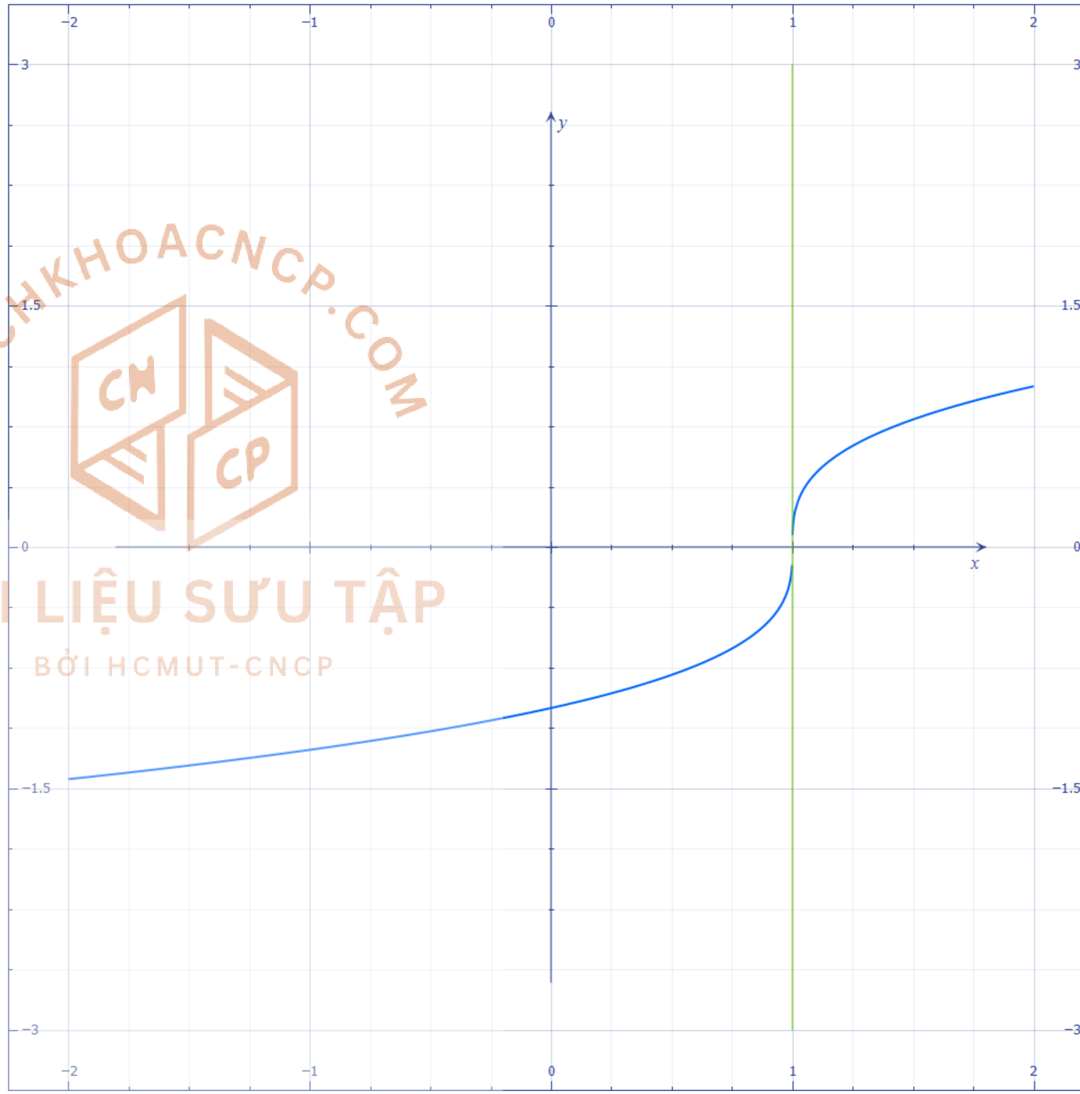
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}, x \neq 1 \\ \infty, x = 1 \end{cases}$$

Đạo hàm

Tại x=1:

$$f'(1) = +\infty$$

Nên tiếp tuyến là đường thẳng x=1



Đạo hàm

Ví dụ: Tính đạo hàm của $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

Khi x≠0, ta tính bình thường. Khi x=0, ta dùng đ/n

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-1\right)=0$$

Vậy: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

Đạo hàm

Đạo hàm hàm hợp

$$\boxed{h = f \circ g \Rightarrow h' = f'.g'}$$

Tức là $y = g(x), h(x) = f(y) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm : a. $f(x) = \tan(x^3+x)$

b. $g(x) = e^{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(x^3+x)'}{\cos^2(x^3+x)} = \frac{3x^2+1}{\cos^2(x^3+x)}$$

$$g'(x) = e^{\sin x}.(\sin x)' = \cos x.e^{\sin x}$$

Đạo hàm

Đạo hàm của các hàm hợp cơ bản

$$1/\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}.f'(x)$$

$$2/\left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}.f'(x)$$

$$3/\left(f(x)^{a}\right)' = a.f(x)^{a-1}.f'(x)$$

$$4/\left(\sin f(x)\right)' = \cos f(x).f'(x)$$

$$5/\left(\cos f(x)\right)' = -\sin f(x).f'(x)$$

$$6/\left(\tan f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{\cos^{2}(f(x))}$$

$$7/\left(\cot f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{\sin^{2} f(x)}$$

$$8/\left(\arcsin f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^{2}(x)}}$$

$$9/\left(\arccos f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^{2}(x)}}$$

$$10/\left(\arctan f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{1+f^{2}(x)}$$

$$11/\left(\operatorname{arccot} f(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{1+f^{2}(x)}$$

Đạo hàm

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm $y = \cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$

$$y' = -2\cos\left(\sin\frac{x}{3}\right).\sin\left(\sin\frac{x}{3}\right).\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} = \frac{-1}{3}.\cos\frac{x}{3}.\sin(2\sin\frac{x}{3})$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của $y = \sqrt[3]{\sqrt{shx}+1}$

Đặt: $u = \sqrt{shx}$ Thì: $y = \sqrt[3]{u+1}$

Suy ra: $y'(x) = y'(u).u'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(u+1)^2}}.\dfrac{(shx)'}{2\sqrt{shx}}$

$$= \frac{chx}{6\sqrt[3]{(\sqrt{shx}+1)^2}\sqrt{shx}}$$

Đạo hàm

Đạo hàm hàm ngược

Giả sử hàm 1-1: $y = f(x)$ có hàm ngược là $x = g(y)$.

Tại $x = x_0$ hàm f(x) có đạo hàm hữu hạn khác 0 thì hàm g(y) sẽ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ Hay ta còn viết $$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Đạo hàm

Ví dụ: Tìm đạo hàm hàm ngược của hàm $y = 2x^3 - 1$

Do $y = 2x^3 - 1 \Rightarrow y' = 6x^2 \neq 0 \forall x \neq 0$

Nên theo CT tính đạo hàm hàm ngược ta được

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{6x^2}, \forall x \neq 0 \qquad x'(y) = \frac{1}{6\sqrt[3]{\left(\frac{y+1}{2}\right)^2}}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm hàm ngược của hàm $y = chx$

$$y' = shx \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{shx} = \frac{1}{\sqrt{ch^2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Đạo hàm

Đạo hàm của hàm cho bởi phương trình tham số

Cho hàm y=f(x) được cho bởi pt tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Đạo hàm của hàm y được tính bởi $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Ví dụ: Tính *y'(x)* biết *y(t) = e^t cost, x(t) = e^t sint*

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(e^t\cos t)'}{(e^t\sin t)'} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)}$$

$$y'(x) = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

Đạo hàm

Đạo hàm dạng u(x)$^{v(x)}$:

Ta viết lại dạng u^{v} thành $\boxed{u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}}$

Suy ra : $\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)'$

$$= e^{v(x)\ln u(x)} \cdot \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

$$\boxed{\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \right)}$$

Đạo hàm

Ví dụ: Tính đạo hàm $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

$$y' = \left(2^{\frac{x}{\ln x}}\right)' = 2^{\frac{x}{\ln x}}.\ln 2.\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = 2^{\frac{x}{\ln x}}.\ln 2.\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

$$y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} = \frac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln x.\ln x}} = e^{x.\ln(\ln x) - \ln^2 x}$$

$$y' = e^{x.\ln(\ln x) - \ln^2 x}\left(x.\ln(\ln x) - \ln^2 x\right)'$$

$$= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left[\left(\ln(\ln x) + x.\frac{1}{x\ln x}\right) - 2\ln x\frac{1}{x}\right]$$

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm *y = f(x)* có đạo hàm *z = f '(x)*. Lấy đạo hàm của hàm z, ta được đạo hàm cấp 2 của hàm *f(x)* – kí hiệu là $\boxed{f''(x)}$

Tiếp tục quá trình đó, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp (n-1) là đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp 1, 2 của hàm $y = \tan(x^2+1)$

$$y' = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)} \Rightarrow y'' = \frac{2\cos(x^2+1) + 2.2x.2x.\sin(x^2+1)}{\cos^3(x^2+1)}$$

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao của hàm cho bởi pt tham số

Cho hàm $y = y(x)$ xác định bởi $x = x(t), y = y(t)$

Đạo hàm cấp 1: $\boxed{y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$

Tức là đạo hàm cấp 1 cũng là hàm cho bởi pt tham số

$$x = x(t), y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = g(t)$$

Đạo hàm cấp 2: $\boxed{y''(x) = \dfrac{g'(t)}{x'(t)} = \dfrac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}}$

Tương tự, đạo hàm cấp (n-1) vẫn là hàm cho bởi pt tham số nên đạo hàm cấp n được tính theo cách trên

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \frac{\left(y^{(n-1)}(x)\right)'_t}{x'(t)}}$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính y', y'' biết $x = e^{2t}sht$, $y = e^{2t}cht$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^{2t}(2cht + sht)}{e^{2t}(2sht + cht)} = \frac{2cht + sht}{2sht + cht}$$

$$y''(x) = \frac{\left(\dfrac{2cht + sht}{2sht + cht}\right)'}{x'(t)} = \frac{\dfrac{(2sht + cht)^2 - (2cht + sht)^2}{(2sht + cht)^2}}{e^{2t}(2sht + cht)}$$

$$= \frac{3(sh^2t + ch^2t)}{e^{2t}(2sht + cht)^3}$$

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao của hàm hợp – CT Leibnitz

Cho hàm hợp $h = f \circ g$ $\left(h(x) = f(u), u = g(x)\right)$

Đh cấp 1: $h'(x) = f'(u).g'(x)$

Suy ra đh cấp 2: $h''(x) = \left(f'(u)\right)'.g'(x) + f'(u).\left(g'(x)\right)'$

$$= (f''(u).g'(x)).g'(x) + f'(u).g''(x)$$

Đạo hàm của tích

Bằng QUY NẠP, ta chứng minh được

CT Leibnitz: $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.f^{(k)}.g^{(n-k)}$

Trong đó, ta quy ước $f^{(0)} = f$ (đh hàm cấp 0 bằng chính nó)

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp 3 của hàm *y = sinx.ln(x+1)*

$$y^{(3)} = \sum_{k-0}^{3} C_3^k (\sin x)^{(k)} (\ln(x+1))^{(3-k)}$$

$$y^{(3)} = C_3^0 (\sin x)^{(0)} (\ln(x+1))^{(3)} + \ldots + C_3^3 (\sin x)^{(3)} (\ln(x+1))^{(0)}$$

$$y^{(3)} = \sin x \frac{2}{(x+1)^3} + 3\cos x \frac{-1}{(x+1)^2} - 3\sin x \frac{1}{x+1} - \cos x.\ln(x+1)$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp n của hàm $y = (x+1)^a$. Từ đó suy ra đạo hàm cấp n của hàm $ln(1+x)$

Đạo hàm của $(x+1)^a$

$$y' = a.(x+1)^{a-1} \quad , y'' = a.(a-1).x^{a-2}$$

$$,..., y^{(n)} = a(a-1)...(a-n+1).(x+1)^{a-n}$$

Khi $a = -1$, ta được đạo hàm của hàm $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)(-1-2)...(-1-n+1).(x+1)^{-1-n}$$

$$= \frac{(-1)^n .n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp n của hàm $y = (x+1)^{a}$. Từ đó suy ra đạo hàm cấp n của hàm $ln(1+x)$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Đạo hàm cấp 1 của hàm ln(x+1) là $\dfrac{1}{x+1}$

Suy ra $(\ln(x+1))^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n-1)}$

Vậy : $(\ln(x+1))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$

Đạo hàm cấp cao

Đh cấp cao một số hàm thường gặp

$$1/\ (x^a)^{(n)} = a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$2/\ (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$3/\ (\ln(x+1))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$4/\ (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$$

$$5/\ (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính $y^{(n)}$ biết $y = (2x^2-x+3)\sin(2x+1)$

Đặt $f(x) = 2x^2-x+3$, $g(x) = \sin(2x+1)$ thì $y = f.g$

Áp dụng CT Leibnitz với lưu ý: với mọi $k>2$ thì $f^{(k)}=0$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 f^{(0)} g^{(n)} + C_n^1 f' g^{(n-1)} + C_n^2 f'' g^{(n-2)}$$

$$= (2x^2 - x + 3)2^n \sin(2x+1+n\frac{\pi}{2})$$

$$+ n(4x-1)2^{n-1}\sin(2x+1+(n-1)\frac{\pi}{2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} 4.2^{n-2}\sin(2x+1+(n-2)\frac{\pi}{2})$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đh cấp n của $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Vì: $$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Nên : $$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đh cấp n của $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Biến đổi lượng giác:

$$y = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Suy ra: $$y^{(n)} = \frac{1}{4}4^n \cos(4x + n\frac{\pi}{2}) = 4^{n-1}\cos(4x + n\frac{\pi}{2})$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tính đh cấp 10 của $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

Đặt $f(x) = x+1, g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{-1/2}$

Suy ra: $y^{(10)} = f.g^{(10)} + 10.g^{(9)}$

$$= (x+1).\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}\dots\frac{-17}{2}.\frac{-19}{2}(x-1)^{-21/2}$$

$$+10.\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}\dots\frac{-15}{2}.\frac{-17}{2}(x-1)^{-19/2}$$

$$= \frac{1.3..17}{2^9}\frac{1}{\sqrt{(x-1)^{21}}}\left[\frac{19(x+1)}{2} - 10(x-1)\right]$$

Đạo hàm cấp cao

Phương pháp tính đạo hàm cấp cao.

1. Phân tích thành tổng các hàm đã biết.

2. Phân tích thành tích của hai hàm: f.g, trong đó f là hàm đa thức (chỉ có đạo hàm khác không đến 1 cấp hữu hạn), hoặc f và g là các hàm đã có CT tính đh cấp n sau đó sử dụng công thức Leibnitz

3. Sử dụng khai triển Maclaurint, Taylor (sẽ học)

Vi phân

Định nghĩa: Hàm f(x) được gọi là khả vi tại điểm x_0 nếu tồn tại hằng số A sao cho

$$\Delta f = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = A.\Delta x + O(\Delta x)$$

Khi đó, $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm tại x_0 và kí hiệu là $df(x_0)$

Định lý (Liên hệ giữa đạo hàm và vi phân) : Hàm f(x) khả vi tại x_0 khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại x_0

Khi đó: hằng số $A = f'(x_0)$ tức là vi phân của hàm là

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0).\Delta x = f'(x_0)dx}$$

Vi phân

1. Hàm f(x) khả vi tại x_0: $f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = A.\Delta x + O(\Delta x)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A.\Delta x + O(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A \quad \Rightarrow \exists f'(x_0) = A$$

2. Hàm có đạo hàm tại x_0: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0) - f'(x_0).\Delta x}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow f(\Delta x + x_0) - f(x_0) - f'(x_0).\Delta x = O(\Delta x)$$

$$\xrightarrow{f'(x_0) = A} f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = A.\Delta x + O(\Delta x)$$

Vi phân

Từ công thức $df(x_0) = f'(x_0)dx$ ta suy ra cách tính vi phân cũng như bảng vi phân các hàm cơ bản giống như đạo hàm.

Ví dụ: Tính dy nếu $y = arctan(x^2+x)$

Ta tính đạo hàm, sau đó thay vào công thức vi phân

$$y' = \frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2}dx$$

Ví dụ: Tính dy nếu $y = ln(sinx+cosx)$

$$y' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$\Rightarrow dy = \cot(x + \pi/4)dx$$

Vi phân

Ứng dụng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

$$\Delta f = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + O(\Delta x)$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)}$$

Ví dụ: Tính gần đúng *arctan(0.97)* nhờ vi phân cấp 1

Đặt *f(x) = arctanx*, cần tính giá trị hàm tại $x = 0.97$

giá trị đặc biệt $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = -0.03$

$$f' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = 0.5$$

$$\arctan(0.97) \approx f(1) + f'(1).\Delta x = \frac{\pi}{4} + 0.5(-0.03)$$

$$\approx 0.7854 - 0.015 = 0.7704$$

Vi phân

Ví dụ: Cho hàm $f(x) = x^3$. Tìm df và Δf tại $x_0 = 2$ với hai giá trị $\Delta x = 0.1$ và $\Delta x = 0.01$

1. Với $\Delta x = 0.1$:

$$\Delta f = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = f(2.1) - f(2) = (2.1)^3 - 2^3 = 1.261$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow df(2) = f'(2).\Delta x = 1.2 \quad \Rightarrow |\Delta f - df| = 0.061$$

2. Với $\Delta x = 0.01$:

$$\Delta f = f(\Delta x + x_0) - f(x_0) = (2.01)^3 - 2^3 = 0.1206$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow df(2) = f'(2).\Delta x = 0.12 \quad \Rightarrow |\Delta f - df| = 0.006$$

Khoảng cách giữa df và Δf càng nhỏ nếu Δx càng nhỏ

Vi phân

Vi phân cấp 2 của hàm f(x) là vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1: $d^2f = d(df)$

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x).dx)$$
$$= d(f'(x))dx + f'(x).d(dx)$$
$$= f''(x)dx^2$$

Vi phân cấp n của hàm f(x) là vi phân (nếu có) của vi phân cấp (n-1). Tương tự như trên, ta được:

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n}$$

Vi phân

Ví dụ: Cho hàm $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{-x} + 1)$

Tính *df*, *d²f* tại x=0

Ta tính đạo hàm rồi thay vào công thức vi phân

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x} + 1} \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f''(x) = \frac{4e^{2x} - 9e^{x} - e^{-x}}{\left(e^{2x} - e^{-x} + 1\right)^2} \Rightarrow f''(0) = -6$$

Vậy: $df(x) = \frac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x} + 1} dx \Rightarrow df(0) = 3dx$

$$d^2 f(x) = \frac{4e^{2x} - 9e^{x} - e^{-x}}{\left(e^{2x} - e^{-x} + 1\right)^2} dx^2 \Rightarrow d^2 f(0) = -6dx^2$$

Vi phân

Vi phân hàm hợp:

Cho hàm hợp $y = y(u)$, $u = u(x)$,tức là $y = y(u(x))$.

Vi phân cấp 1:

$$\boxed{dy = y'(x)dx} = y'(u).u'(x).dx$$

Mặt khác, vì $u = u(x)$ nên $du = u'(x).dx$

Suy ra: $\boxed{dy = y'(u).du}$

Vậy vi phân của hàm f luôn bằng đạo hàm của f theo biến nào nhân với vi phân của biến đó cho dù biến đó là độc lập (biến x) hay phụ thuộc (biến u).

Ta gọi đó là TÍNH BẤT BIẾN CỦA VI PHÂN CẤP 1

Vi phân

Vi phân cấp cao của hàm hợp:

Cho *y=y(u), u=u(x).* Ta đi tính vi phân cấp 2 của hàm y

$$d^2y = d(dy) = d(y'(u).du) = d(y'(u))du + y'(u)d(du)$$

$$d^2y = y''(u)du^2 + y'(u)d^2u$$

Vì u là hàm nên $d^2u = u''(x)dx \neq 0$

Vậy với hàm hợp, ta có 2 cách tính vi phân cấp 2

Cách 1: Tính theo u, du $\boxed{d^2y = y''(u)du^2 + y'(u)d^2u}$

Cách 2: Tính theo x, dx $\boxed{d^2y = y''(x)dx^2}$

Từ cấp 2 trở đi, vi phân không còn tính bất biến

Vi phân

Ví dụ: Cho hàm $y = ln(1+x^2)$, trong đó $x = tant$. Tính d^2y theo x và dx, theo t và dt

Tính theo t và dt: Ta thay $x=tant$ vào hàm $y=ln(1+tan^2t)$

$$y' = \frac{2\tan t(1+\tan^2 t)}{1+\tan^2 t} = 2\tan t \Rightarrow y''(t) = \frac{2}{\cos^2 t}$$

$$d^2y = \frac{2dt^2}{\cos^2 t}$$

Tính theo x và dx: $y'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y''(x) = \frac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$d^2y = \frac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2 + \frac{2x}{1+x^2}d^2x$$

Vi phân

Như vậy, ta có 2 kết quả khi tính theo 2 cách

$$d^2y = \frac{2dt^2}{\cos^2 t} (1) \qquad d^2y = \frac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2 + \frac{2x}{1+x^2}d^2x (2)$$

Thử lại: Bằng cách thay $x = \tan t$, $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $d^2x = 2\tan t(1+\tan^2 t)dt^2$ vào (2)

$$d^2y = \frac{2(1-\tan^2 t)}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}\left(1+\tan^2 t\right)^2 dt^2 + \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} 2\tan t(1+\tan^2 t)dt^2$$

$$d^2y = 2(1+\tan^2 t)dt^2 = \frac{2}{\cos^2 t}dt^2$$

Chú ý: Trong các trường hợp, nếu không có yêu cầu đặc biệt, ta luôn tính vi phân của hàm theo vi phân của biến độc lập

Vi phân

Ví dụ: Tính dy, d^2y nếu $y = f(e^x)$

Ta đang có 1 hàm hợp, đặt thêm biến trung gian : $u = e^x$ thì $y = f(u)$

$$y'(x) = y'(u).u'(x)$$
$$= f'(u).e^x$$
$$\Rightarrow dy = f'(e^x).e^x.dx$$

$$y''(x) = y''(u).(u'(x))^2 + y'(u).u''(x)$$
$$= f''(u).(e^x)^2 + f'(u).e^x$$
$$= f''(e^x).e^{2x} + f'(e^x).e^x$$
$$\Rightarrow d^2y = y''(x).dx^2 = \left(f''(e^x).e^{2x} + f'(e^x).e^x\right)dx^2$$

Vi phân

Ví dụ: Tính dy, d^2y nếu $y = sh(e^{f(x)})$

Đặt thêm biến trung gian : $u = e^{f(x)}$ thì $y = sh(u)$

$$y'(x) = y'(u).u'(x)$$

$$= \mathrm{ch}(u).(e^{f(x)}.f'(x))$$

$$\Rightarrow dy = \mathrm{ch}(e^{f(x)}).(e^{f(x)}.f'(x)).dx$$

$$y''(x) = y''(u).(u'(x))^2 + y'(u).u''(x)$$

$$= sh(u).(e^f.f')^2 + ch(u).(e^f.f'.f' + e^f.f'')$$

$$\Rightarrow d^2y = \left(sh(e^{f(x)}).e^{2f(x)}.f'^2(x) + ch(e^{f(x)}).e^{2f(x)}.f'^2(x) + e^{f(x)}.f''(x))\right)dx^2$$

Quy tắc L'Hospital

4 định lý giá trị trung bình:

Định lý Fermat

Hàm y=f(x) xác định trong lân cận của điểm x_0 và đạt cực trị tại đó. Nếu tồn tại đạo hàm $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Rolle Nếu hàm y = f(x) thỏa

1. Liên tục trên đoạn [*a*,*b*]
2. Khả vi trong khoảng (*a*,*b*)
3. f (*a*) = f(*b*)

Thì: $\exists c \in (a,b):$ sao cho $f'(c) = 0$

Quy tắc L'Hospital

Định lý Lagrange: Nếu hàm y = f(x) thỏa

1. Liên tục trên đoạn $[a,b]$
2. Khả vi trong khoảng (a,b)

Thì $\exists c \in (a,b):$ sao cho $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Định lý Cauchy: Cho hai hàm y = f(x) và y = g(x).

1. Liên tục trên đoạn $[a,b]$
2. Khả vi trong khoảng (a,b)

$g(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$

$\exists c \in (a,b):$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Quy tắc L'Hospital

Định lý 1 (dạng $\dfrac{0}{0}$)

Cho 2 hàm f(x), g(x) khả vi trên khỏang (a,b) thỏa

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0 \\ 2.\ g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b) \\ 3.\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \end{array}\right\}$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

Chú ý:

1. Định lý vẫn đúng khi $x\to a+$
2. Định lý vẫn đúng khi $b=+\infty$, $a=-\infty$
3. Định lý vẫn đúng nếu ta phải tính đạo hàm k lần

Quy tắc L'Hospital

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \qquad 2. \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$2. \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{\cos 2x} = 0$$

Quy tắc L'Hospital

Định lý 1 (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

Cho 2 hàm f(x), g(x) khả vi trên khỏang (a,b) thỏa

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty \\ 2.\ g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b) \\ 3.\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \end{array}\right\}$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

Chú ý:

1. Định lý vẫn đúng khi $x\to a+$
2. Định lý vẫn đúng khi $b=+\infty$, $a=-\infty$ hoặc $A=+\infty$
3. Định lý vẫn đúng nếu ta phải tính đạo hàm k lần

Quy tắc L'Hospital

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0)\qquad\qquad 2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{chx}{x}$$

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}(\alpha>0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{chx}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{shx}{1}=\infty$$

Quy tắc L'Hospital

Cách khử các dạng vô định bằng quy tắc L'Hospital

$$0.\infty = \left[\begin{array}{l} \dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0} \\ \dfrac{\infty}{\dfrac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty} \end{array}\right.$$

$$\infty - \infty = \infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$1^{\infty} = e^{\infty.\ln 1} = e^{\infty.0}$$

$$0^{0} = e^{0.\ln 0} = e^{0.\infty}$$

$$(+\infty)^{0} = e^{0\ln(+\infty)} = e^{0.\infty}$$

Quy tắc L'Hospital

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right)$$ Dạng $\infty(\infty - \infty)$

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1+x/2}{x/2} = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x.\frac{2}{x} = 2$$

$$L_2 = \lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\frac{1}{x-\pi/4}} = \lim_{x\to\pi/4} e^{\frac{1}{x-\pi/4}\ln(\tan x)} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\ln\tan x}{x-\pi/4}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = e^2$$

Quy tắc L'Hospital

$$L_3 = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+2^x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2}} = 2$$

$$L_4 = \lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}} = 1$$

Quy tắc L'Hospital

Các trường hợp không dùng được quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

$$\not\exists \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Sau khi dùng L'H thì vẫn chỉ được giới hạn ban đầu

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\cot x}$$

Giới hạn dạng $\frac{0}{\infty} = 0$

Công thức Taylor - Maclaurint

Hàm f(x) khả vi đến cấp (n+1) trong 1 lân cận của x_0

Đặt: $$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad G(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

Thì:

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \dots = R^{(n)}(x_0) = 0$$

$$G(x_0) = G'(x_0) = G''(x_0) = \dots = G^{(n)}(x_0) = 0$$

Theo định lý Cauchy ta có

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{R'(x_1)}{G'(x_1)}$$

Với x_1 nằm giữa x_0 và x

Sử dụng định lý Cauchy tiếp tục như vậy với x_2 nằm giữa x_1 và x, ta được

$$\frac{R'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{R'(x_1) - R'(x_0)}{G'(x_1) - G'(x_0)} = \frac{R''(x_2)}{G''(x_2)}$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Tiếp tục quá trình đó theo (n+1) bước, ta được

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{R''(x_1)}{G''(x_1)} = \ldots = \frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

Với x_{n+1} nằm giữa x và x_0 ($x \le x_{n+1} \le x_0$).

Đặt $c = x_{n+1}$, ta có định lý:

Định lý Taylor: Cho hàm f(x) khả vi đến cấp (n+1) trong khỏang (a,b). Khi ấy, với x, x_0 thuộc (a,b) ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Định lý Taylor: Cho hàm f(x) khả vi đến cấp (n+1) trong khỏang (a,b). Khi ấy, với x, x_0 thuộc (a,b) ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0).(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Ta đặt: $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ và gọi là phần dư dạng Lagrange của công thức Taylor

Công thức Taylor - Maclaurint

Xét giới hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}\quad \text{dạng } \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

Suy ra:

$$R(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=O\left((x-x_0)^n\right)$$

Vậy ta được dạng thứ 2 của CT Taylor

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O\left((x-x_0)^n\right)}$$

Với phần dư Peano $R_n=O\left((x-x_0)^n\right)$

Công thức Taylor - Maclaurint

Sử dụng phần dư Lagrange khi sử dụng CT Taylor để tính gần đúng có đánh gía sai số

Sử dụng phần dư Peano khi sử dụng CT Taylor để tính giới hạn

Khi $x_0 = 0$ thì CT Taylor được gọi là CT Maclaurint

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

$$= f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Taylor hàm $y=x^4+3x^3-5x^2+x-1$ tại $x_0=1$

$y(1) = -1$

$$y' = 4x^3 + 9x^2 - 10x + 1 \Rightarrow y'(1) = 4$$

$$y'' = 12x^2 + 18x - 10 \Rightarrow y''(1) = 20$$

$$y''' = 24x + 18 \Rightarrow y'''(1) = 42$$

$$y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(4)}(1) = 24$$

Vậy: $y = -1 + 4(x-1) + 10(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + (x-1)^4$

Công thức Taylor - Maclaurint

Công thức Maclaurint một số hàm cơ bản với phần dư Peano

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \left[\begin{array}{l} O(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{array}\right.$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \left[\begin{array}{l} O(x^{2n}) \\ O(x^{2n+1}) \end{array}\right.$$

$$shx = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+1})$$

$$chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n})$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Công thức Maclaurint một số hàm cơ bản với phần dư Peano

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + O(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^n)$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 2 hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - x/2} + \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^2)$$

$$\frac{1}{1-x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + O(x^2)$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 5 hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\frac{1}{1 - x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5 + O\left(\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^5)$$

$$f(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - x/2} + \frac{1}{1 - x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{31}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5 + O(x^5)$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Nếu bỏ phần dư trong 2 khai triển trên, ta sẽ được 2 hàm xấp xỉ với hàm f(x) ban đầu.

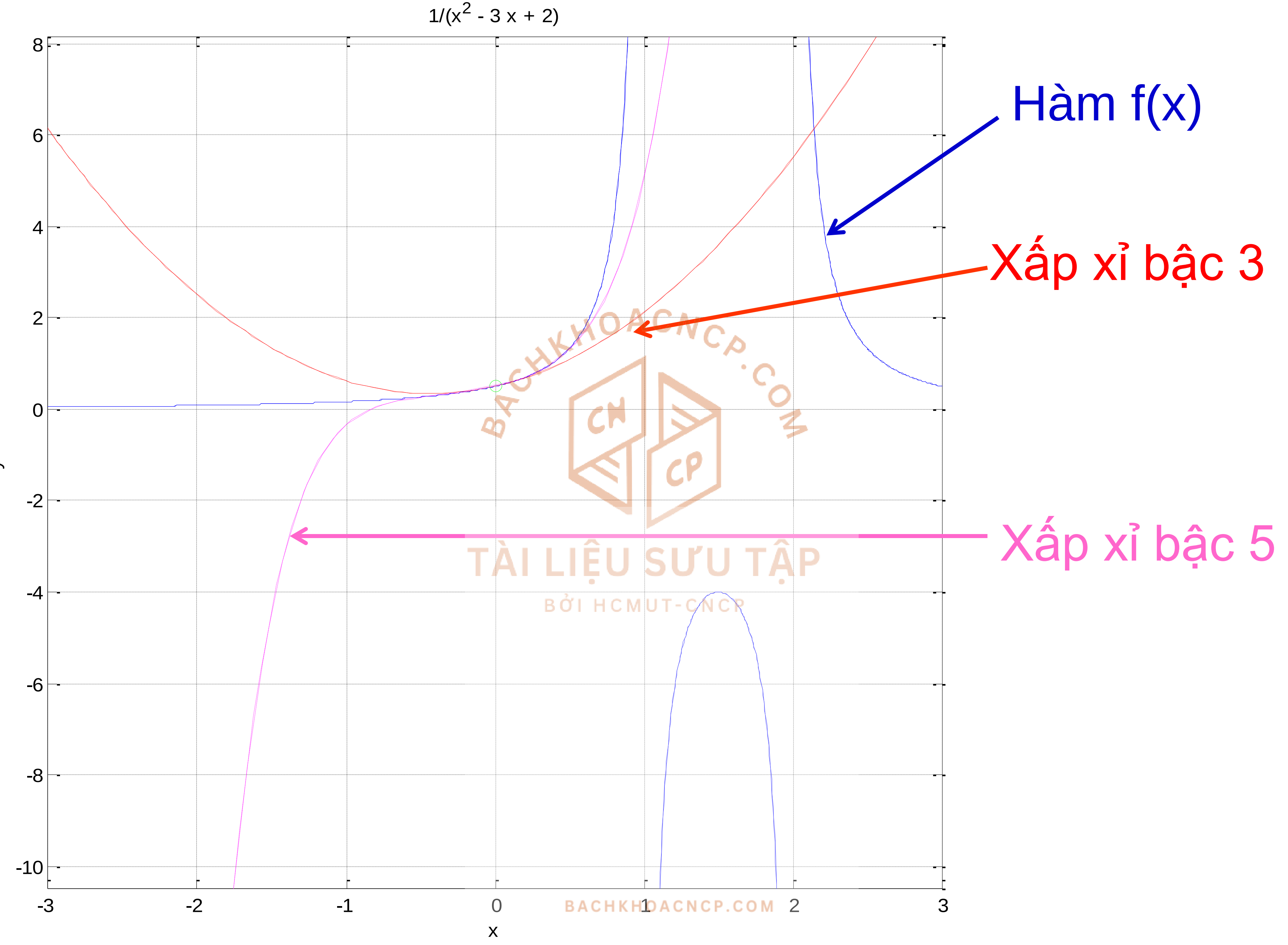
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + O(x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{31}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5 + O(x^5)$$

Rõ ràng, với hàm xấp xỉ là đa thức bậc cao hơn thì phần dư Peano sẽ là VCB bậc cao hơn tức là giá trị của VCB bé đó nhỏ hơn nên giá trị hàm xấp xỉ gần với hàm ban đầu hơn trong lân cận x_0

Ta sẽ vẽ đồ thị lần lượt 3 hàm : f(x), khai triển f(x) đến bậc 2 và khai triển f(x) đến bậc 5 để so sánh trong lân cận $x_0=0$



1/(x^2 - 3 x + 2)
Hàm f(x)
Xấp xỉ bậc 3
Xấp xỉ bậc 5
x
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3

Công thức Taylor - Maclaurint

Hàm y=tanx, khai triển Taylor đến bậc 3: $x+\frac{x^3}{3}$

Và khai triển Taylor đến bậc 7: $\frac{17x^7}{315}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^3}{3}+x$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x) = ln(x^2+5x+4)$ và tính $f^{(10)}(0)$

$$f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+4) = \ln(x+1) + \ln 4 + \ln(1+\frac{x}{4})$$

$$= \ln 4 + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^n) \right) + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}(\frac{x}{4})^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{x}{4})^n + O((\frac{x}{4})^n) \right)$$

$$= \ln 4 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4^2})x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\frac{1}{4^n})x^n + O(x^n)$$

Vậy: $f(x) = \ln 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\frac{1}{4^n})x^n + O(x^n)$

Theo CT Taylor: $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}$ Là hệ số của x^{10} trong khai triển trên. Suy ra: $f^{(10)}(0) = 10!\frac{(-1)^9}{10}(1+\frac{1}{4^{10}}) = -9!\frac{1+4^{10}}{4^{10}}$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 5 hàm $y = sin^2x$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + 0.(2x) - \frac{1}{2!}(2x)^2 + 0.(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + 0.(2x)^5 + O(x^5)\right)$$

Vậy: $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^5)$

Chú ý: Vì hệ số của x^5 trong khai triển trên là bằng 0 và yêu cầu khai triển đến bậc 5 nên ta phải viết phần dư là $0(x^5)$

Nếu trong ví dụ trên, chỉ yêu cầu khai triển đến bậc 4 thì phần dư là $0(x^4)$: $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^4)$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint đến cấp 3 hàm *y=arcsinx*

Ta có : $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^x \left(1 + \frac{-1}{2}(-t^2) + O(t^2) \right) dt$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)}$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

Ví dụ: Tìm bậc của các VCB sau (khi x→0) so với x và kiểm tra lại bằng MatLab $\alpha_1(x) = e^x - x\sqrt{1+x} - 1$

$\alpha_2(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$ $\quad\alpha_3(x) = e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}$

Trong VCB đã cho có bao nhiêu hàm, ta sẽ khai triển Maclaurint của bấy nhiêu hàm cùng bậc như nhau đồng thời , sau mỗi bước ta cộng lại, nếu tổng bằng 0 làm tiếp đến khi tổng khác 0 thì ngừng

$$\left.\begin{array}{l} e^x - 1 = -1 + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^3) \\ -x(1+x)^{1/2} = -x(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^2)) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1(x) \sim \frac{7}{24}x^3$$

Đến bậc 1, tổng là 0; đến bậc 2, tổng là 0; đến bậc 3, tổng khác 0 nên ta ngừng lại. Vậy bậc của $\alpha_1(x)$ là 3

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$\left.\begin{aligned} & -1+\frac{1}{2}x^2 \\ & \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+O(x^4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_2(x) = \frac{1}{4!}x^4 + O(x^4) \sim \frac{1}{4!}x^4$$

Đến bậc 2, tổng bằng 0. Đến bậc 4, tổng khác 0

Vậy bậc của $\alpha_2(x)$ là 4 (so với x)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$-\left(1+2x+2x^2\right)^{1/2} = -(1+\frac{1}{2}(2x+2x^2) - \frac{1}{8}(2x+2x^2)^2 + \frac{1}{16}(2x+2x^2)^3$$

$$= -1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Đến bậc 3, tổng khác 0 $\alpha_3(x) \sim \frac{2}{3}x^3$ Bậc 3

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

Sử dụng khai triển Maclaurint trên tử số vì tử số là tổng 2 VCB cùng tương đương với x khi x→0.

Còn dưới mẫu số, ta chỉ cần thay *$\sin^3 x \sim x^3$.*

Như vậy, bậc của mẫu số là 3 (so với x) nên tử số ta cũng khai triển đến x^3.

$$\tan x-\sin x=\left(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^3+O(x^3)\sim\frac{1}{2}x^3$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/2\,x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\tan x - \sin x}$

Vì: $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$

Nên trên tử số ta cũng khai triển các hàm đến x^3.

$$\ln(1+x^3) = x^3 + O(x^3)$$

$$-2\sin x = -2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^3)\right)$$

$$2x\cos x^2 = 2x\left(1 + 0.x^2 + O(x^2)\right)$$

k.tr hàm $\cos x^2$ đến bậc 2 vì đã có 2x nhân vào

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^3 + O(x^3)\right) - 2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^3)\right) + 2x\left(1 + 0.x^2 + O(x^2)\right)}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$

Ta sẽ dùng k.tr Maulaurint vì không thay VCB được

Dưới mẫu số, ta chỉ cần khai triển đến cấp 2 là khác 0 nên tử số ta cũng khai triển đến cấp 2

$$\ln(1+x)-x=\left(x-\frac{1}{2}x^2+0(x^2)\right)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$1+x\cos x-\sqrt{1+2x}=$$

$$=1+x\left(1-0.x+O(x)\right)-\left(1+\frac{1}{2}2x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2+O(x^2)\right)\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{-1/2x^2}{1/2x^2}=-1$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$

Khai triển đến x^3 vì tử số chỉ cần đến x^3 là khác 0

$$\arcsin x - \sin x = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^3) \right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3) \right) \sim \frac{1}{3}x^3$$

$$e^x + \ln(1-x) - 1 =$$

$$= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^3) \right) + \left((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + O(x^3) \right) - 1$$

$$\sim -\frac{1}{6}x^3$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1/3x^3}{-1/6x^3} = -2$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính gần đúng với sai số $\varepsilon = 10^{-3}$ giá trị
A = ln(1,05)

Sai số là sự chênh lệch giữa giá trị đúng của A mà ta không tính được và giá trị gần đúng của A mà ta sẽ tính được. Khi sai số càng nhỏ, giá trị ta tính được càng chính xác.

Trong phần này, ta sẽ sử dụng công thức Taylor với phần dư Lagrange để tính

Đặt $$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n$$

Cần tính A = ln(1,05) tức là ta chọn x_0=0,05, hằng số **c** *trong phần dư Lagrange R_n nằm giữa 0 và 0,05*

Công thức Taylor - Maclaurint

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(c+1)^{n+1}}\frac{0,05^{n+1}}{(n+1)!}\right|, 0 \le c \le 0,05$$

Ta phải tìm n để $|R_n| \le 10^{-3}$

$$0 \le c \le 0,05 \Rightarrow 1 \le 1+c \le 1,05 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{(1+c)^n}$$

$$\Rightarrow |R_n| \le \frac{0,05^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!20^{n+1}} \le 10^{-3} = \frac{1}{1000} \Rightarrow n = 2$$

Vậy:

$$A = \ln(1,05) \approx 0,05 - \frac{1}{2}(0,05)^2 = 0,05 - 0,00125 = 0,04875 \approx 0,49$$

Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính gần đúng với sai số ε = 10^{-5} giá trị $A=\sqrt[3]{29}$

Đặt $f(x)=(1+x)^{1/3}, x=\frac{2}{27}, A=3.f(\frac{2}{27})$

$$f(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ldots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n+R_n$$

$$|R_n|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ldots(\frac{1}{3}-n)}{(n+1)!}c^{n+1}\right|\left(\frac{2}{27}\right)^{n+1}, 0\le c\le 1$$

$$|R_n|\le\frac{2.5\ldots(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{2}{27}\right)^{n+1}=\frac{2^{n+1}.2.5\ldots(3n-1)}{3^{4n+4}(n+1)!}\le\frac{1}{3.100000}\Rightarrow n=4$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{29}\approx 3\left(1+\frac{1}{3}.\frac{2}{27}+\frac{-2}{2.3^2}.\frac{4}{729}+\frac{2.5}{6.3^3}.\frac{8}{19683}+\frac{-2.5.8}{24.3^4}.\frac{16}{531441}\right)$$

$$=3,0723$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

Khai triển Maclaurint đến cấp n sau đó kiểm tra lại bằng cách dùng MatLab các hàm sau

$$f_1(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}, n = 4$$

$$f_1(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-1)+2}{x^2+1} = x^2 - 1 + 2\frac{1}{x^2+1}$$

$$= x^2 - 1 + 2\left(1 - x^2 + x^4 + O(x^4)\right) = 1 - x^2 + 2x^4 + O(x^4)$$

$$n = 5, f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + O(x^5)$$

$$f_2' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^4)$$

$$\Rightarrow f_2(x) = \int_0^t f_2'(t)dt = \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + O(t^4)\right)dt$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$n=3,\ f_3(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+O(x^3)$$

$$=1-x-x^2+x^2+2x^3-x^3+O(x^3)$$

$$=1-x+x^3+O(x^3)$$

$$n=3,\ f_4(x)=\ln\frac{2x+1}{2-5x}=\ln(2x+1)-\ln(2-5x)$$

$$=\ln(2x+1)-\ln 2-\ln\left(1+\frac{-5x}{2}\right)$$

$$=\left(2x-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3}(2x)^3+O(x^3)\right)-\ln 2-\left(\frac{-5x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-5x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{-5x}{2}\right)^3+O(x^3)\right)$$

$$=-\ln 2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{8}x^2+\frac{189}{24}x^3+O(x^3)$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

Khai triển Taylor đến cấp n tại x=x_0 , sau đó kiểm tra lại bằng cách dùng MatLab các hàm sau

$$n=3, x_0=2, f_5(x)=\frac{x}{x-1} \quad \underline{\underline{X=x-2}} \frac{X+2}{X+1}=1+\frac{1}{X+1}$$

$$=1+1-X+X^2-X^3+O(X^3)$$

$$=2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+O((x-2)^3)$$

$$n=6, x_0=1, f_6(x)=e^{x^2-2x+2}=e^{(x-1)^2+1}$$

$$=e\left[1+(x-1)^2+\frac{1}{2!}(x-1)^4+\frac{1}{3!}(x-1)^6+O\left((x-1)^6\right)\right]$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$n = 4, x_0 = -1, f_6(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = (x+1)\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$\underline{\underline{X = x+1}} X\left(\frac{1}{X-4} - \frac{1}{X-3}\right) = X\left(\frac{-1}{4}\frac{1}{1-X/4} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-X/3}\right)$$

$$= \frac{-X}{4}\left(1 + \frac{X}{4} + (\frac{X}{4})^2 + (\frac{X}{4})^3 + O(X^3)\right) + \frac{X}{3}\left(1 + \frac{X}{3} + (\frac{X}{3})^2 + (\frac{X}{3})^3 + O(X^3)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)X + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)X^2 + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right)X^3 + \left(\frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4}\right)X^4 + O(X^4)$$

$$= \frac{1}{3.4}(x+1) + \frac{4^2 - 3^2}{12^2}(x+1)^2 + \frac{4^3 - 3^3}{12^3}(x+1)^3 + \frac{4^4 - 3^4}{12^4}(x+1)^4 + O(X^4)$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

Tính các giới hạn bằng cách sử dụng quy tắc L'Hospital hoặc công thức Maclaurint. Sau đó kiểm tra lại bằng MatLab

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^3)\right)^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{2}{6}x.x^3 + \frac{1}{36}x^4 + O(x^6)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{6}x.x^3 - \frac{1}{36}x^4 + O(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x.x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2.\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2.x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^2)\right)^2}{x^2.x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{36}x^6 + x^2.x^2 - x^2.\frac{1}{4}x^4 + O(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4} = \frac{2}{3}$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_4 = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{\ln(1+(x-1))} = -1$$

$$L_5 = \lim_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^{2x})} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^{2x})}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}}} = e^3$$

$$L_6 = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e$$

$$L_7 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+O(x^4)\right)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{24}x^4+O(x^4)}{x^4} = \frac{1}{24}$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_8 = \lim_{x\to \pi/2^+} (\tan x)^{\pi-2x} = \lim_{x\to \pi/2^+} e^{(\pi-2x)\ln(\tan x)} = \lim_{x\to \pi/2^+} e^{\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{(\pi-2x)}}}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^+} e^{\frac{\frac{1}{\cos^2 x.\tan x}}{\frac{2}{(\pi-2x)^2}}} = \lim_{x\to \pi/2^+} e^{\frac{(\pi-2x)^2}{2.\sin^2(\pi/2-x)\cot(\pi/2-x)}}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^+} e^{\frac{(\pi-2x)^2(\pi/2-x)}{2.(\pi/2-x)^2}} = e^0 = 1$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_9 = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(x+1) - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\left(1 + 0.x + O(x)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(\frac{1}{2} - 1)(2x)^2 + O(x^2)\right)}{(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^2)) - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_{10} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x chx - shx}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}x^2 + O(x^2)\right) - 1}{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + 0.x^3 + O(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^3 + O(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)} = -\frac{7}{20}$$

Công thức Taylor - Maclaurint – Phụ lục

$$L_{11} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^2)\right) + \left(-x - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + O(x^2)\right) - 1}{2\left((1 - \frac{x^3}{8})^{1/3} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^3)}{2.\frac{1}{3}\frac{-x^3}{8}} = -2$$

Khảo sát hàm y=f(x)

Các bước khảo sát và dựng đồ thị hàm y=f(x)

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

2. Tìm tiệm cận

3. Tìm cực trị, khoảng tăng giảm, tiệm cận đặc biệt

4. Tìm khỏang lồi, lõm và điểm uốn (nếu cần)

5. Lập bảng biến thiên

6. Dựng đồ thị

Khảo sát hàm y=f(x)

1. Tìm MXĐ, hàm chẵn lẻ, tính tuần hoàn

Hàm chẵn nếu f(x) = f(-x), khi đó đồ thị hàm nhận trục Oy là trục đối xứng

Hàm lẻ nếu f(x) = -f(-x), khi đó đồ thị nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng

Hàm tuần hoàn nếu tồn tại hằng số T sao cho f(x) = f(x+T). Hằng số T>0 được gọi là chu kỳ tuần hoàn của hàm f(x) nếu T là số dương nhỏ nhất thỏa f(x)=f(x+T) và khi đó ta chỉ phải khảo sát hàm trong 1 chu kỳ

Khảo sát hàm y=f(x)

2. Tìm tiệm cận

Với x_0 là điểm không thuộc MXĐ của hàm,

nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ thì hàm có *TCĐ x = x_0*

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$ Thì hàm có *TCN y = y_0*

Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x)-ax\right]=b \end{cases}$ Thì hàm có *TCX y = ax+b*

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

MXĐ : R\{2, 3}

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

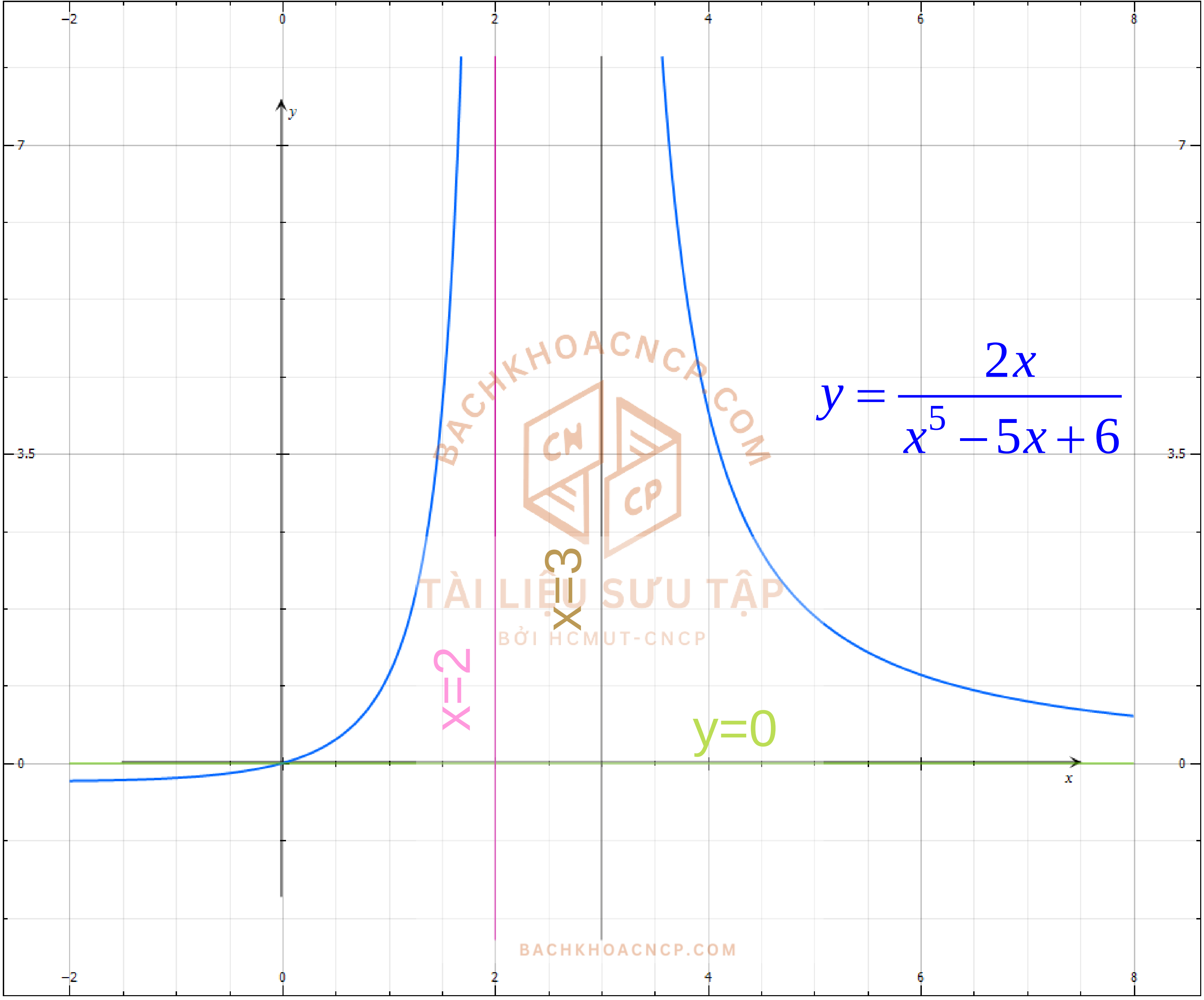
Hàm có TCĐ: $x = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

Hàm có TCĐ: $x = 3$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

Hàm có TCN: $y = 0$



$y = \dfrac{2x}{x^5 - 5x + 6}$
x=2
x=3
y=0
x
y
-2
0
2
4
6
8
7
3.5

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$

MXĐ: R\{0}

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0^+} 2e^{\frac{2}{x}} = \infty$$ Hàm có TCĐ $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = 1$$ Hàm không có TC

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = \infty$$

Khảo sát hàm y=f(x)

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{2}{x}}+1 = \infty$$

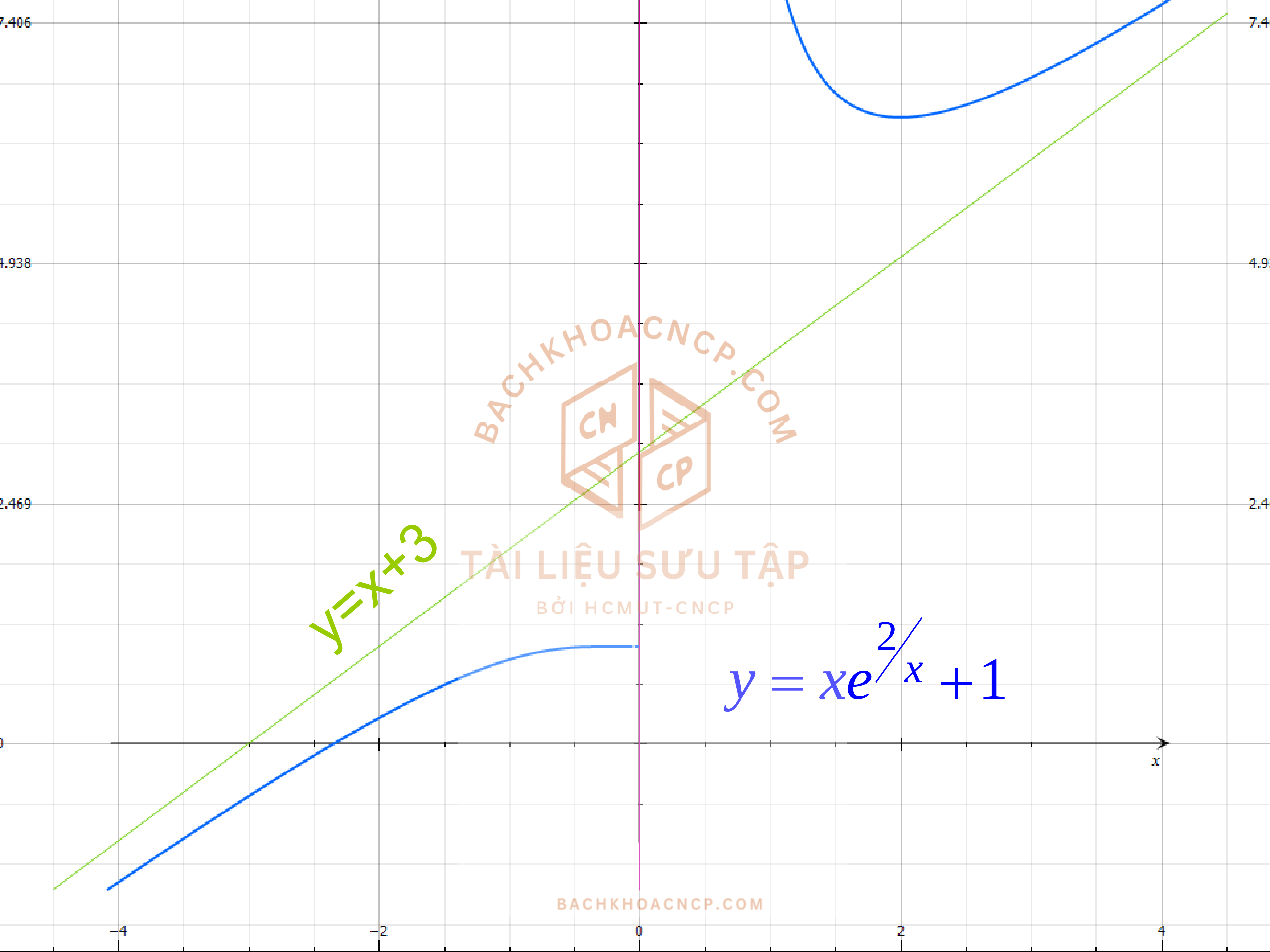
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}}+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{2}{x}}+1-x\right) = 1+\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$$

$$= 1+\lim_{x\to\infty} x.\frac{2}{x} = 3$$

Hàm có TCX y = x+3

Vậy hàm đã cho có 1 TCĐ $x = 0$ và 1 TCX $y = x+3$



7.406
4.938
2.469
0
7.4
4.9
2.4
y=x+3
$y = xe^{2/x} + 1$
x
-4
-2
0
2
4
BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Khảo sát hàm y=f(x)

3. Tìm khỏang tăng giảm, cực trị :

Tính đạo hàm cấp 1 và giải phương trình y’ = 0

Nếu *y’>0* trong (a,b) thì *hàm tăng* trong (a,b)

Nếu *y’<0* trong (a,b) thì *hàm giảm* trong (a,b)

Nếu *y’=0* hoặc *không tồn tại y’* tại $x=x_0$ và y’ đổi dấu khi đi qua $x=x_0$ thì *hàm đạt cực trị* tại $x=x_0$

Nếu $y''(x_0)>0$: hàm đạt cực tiểu tại x_0, $y_{ct}=y(x_0)$
Nếu $y''(x_0)<0$: hàm đạt cực đại tại x_0, $y_{cd}=y(x_0)$

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm y=|x|(x+2)

$$y = \begin{cases} x(x+2), x \geq 0 \\ -x(x+2), x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x+2, x > 0 \\ -2x-2, x < 0 \\ \nexists, x = 0 \end{cases} \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Như vậy, ta có 2 điểm *nghi ngờ hàm đạt cực trị* là x = 0 và x = -1

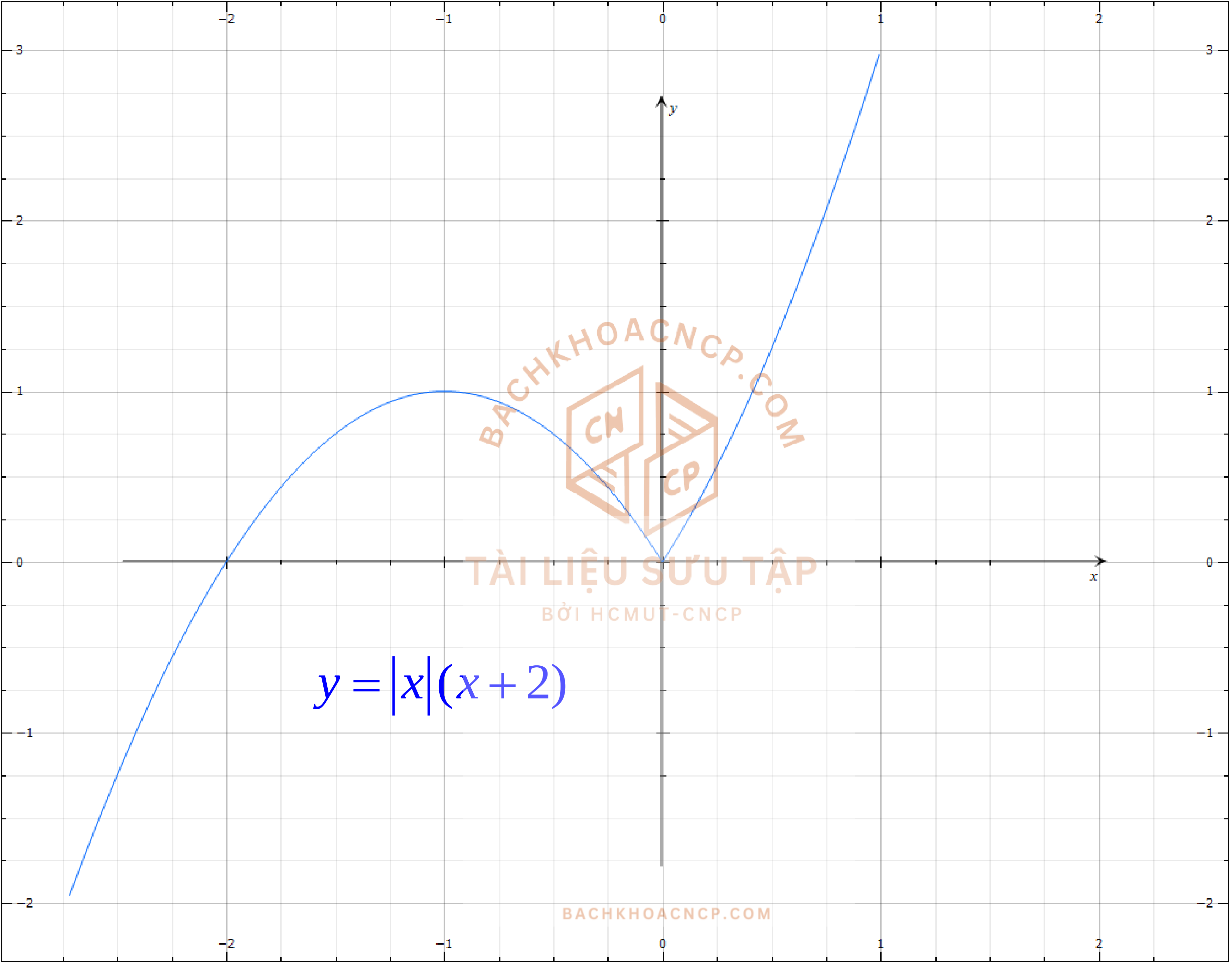
Để xác định cực trị, khỏang tăng giảm, ta lập 1 bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	+	
y		↗	1	↘	0	↗	

Vậy hàm có 2 cực trị :

$y_{cđ}=y(-1)=1$,

$y_{ct}=y(0)=0$



$y = |x|(x+2)$
y
x
−2
−1
0
1
2
3

Khảo sát hàm y=f(x)

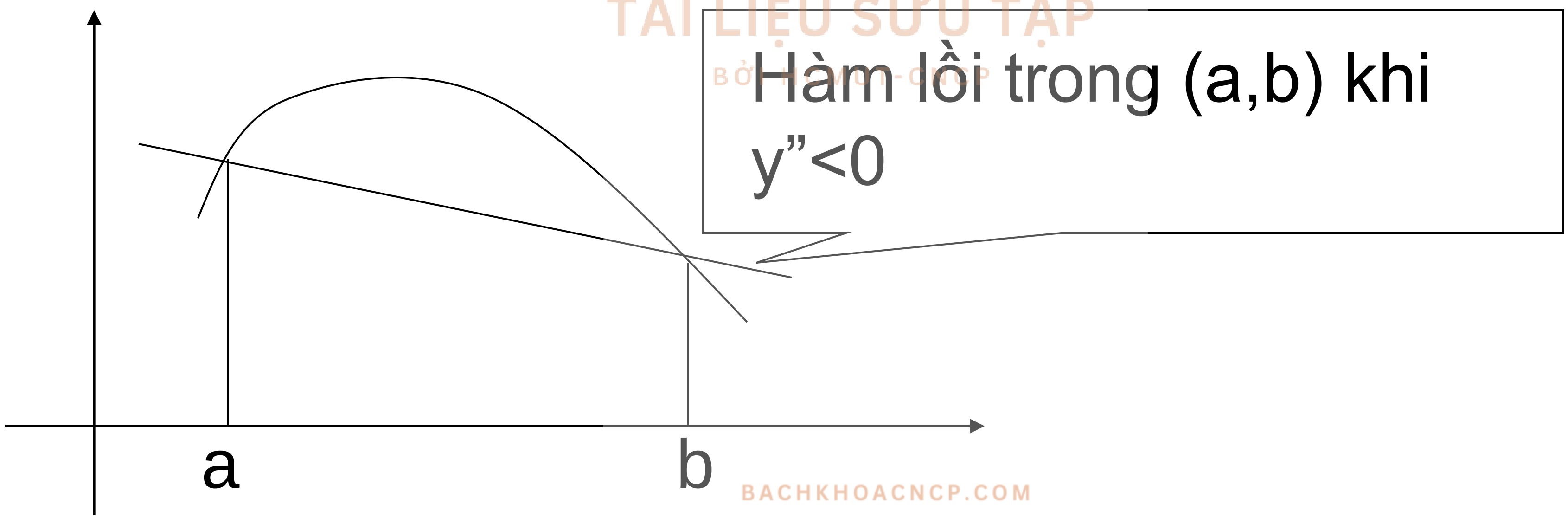
4. Tìm khỏang lồi lõm, điểm uốn

Tính đạo hàm cấp 2 và giải phương trình y” = 0

Nếu *y”>0* trong (a,b) thì *hàm lõm* trong (a,b)

Nếu *y”<0* trong (a,b) thì *hàm lồi* trong (a,b)

Nếu *y”=0* hoặc *không tồn tại y”* tại $x=x_0$ và y” đổi dấu khi đi qua $x=x_0$ thì *hàm có điểm uốn là* $(x_0,f(x_0))$



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm khỏang lồi lõm và điểm uốn của hàm $y=x^2\ln x$

$$y' = 2x\ln x + x, y'' = 2\ln x + 3$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Ta cũng lập bảng biến thiên để khảo sát

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$+\infty$
y”		-	0	+	
y					

Vậy hàm lồi trong khỏang $(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$, lõm trong khỏang $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty)$ Và có điểm uốn là $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \frac{-3}{2\sqrt{e^6}})$

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = e^{1/x} - x$

MXĐ : R\{0}

Tiệm cận:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} - x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} (y + x) = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$$

TCX: y=-x+1

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} (e^{1/x} - x) = +\infty$$

TCĐ: x=0

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} (e^{1/x} - x) = 0$$

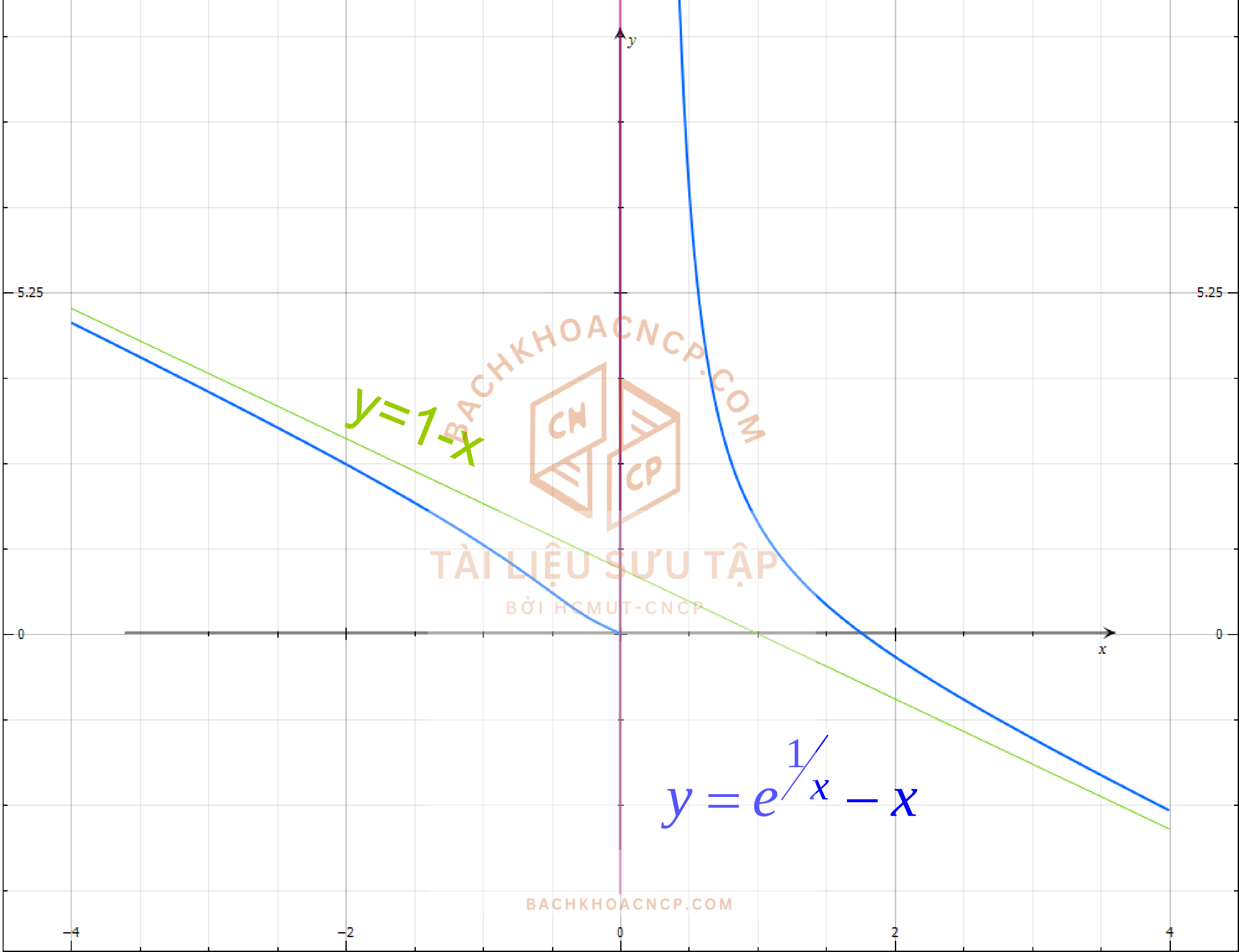
Khảo sát hàm y=f(x)

$$y = e^{1/x} - x$$

Cực trị: $y' = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} - 1 = -\frac{e^{1/x} + x^2}{x^2}$

$$y' < 0, \forall x \in R^*$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$


y
5.25
5.25
0
0
x
-4
-2
0
2
4
y=1-x
$y = e^{1/x} - x$

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt[3]{x}(x-1)^2$

MXĐ: R

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}(x-1)^2 = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}(x-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

Hàm không có tiệm cận

Cực trị: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1/7 \end{array}\right.$$

Và y'(0)=+∞

Khảo sát hàm y=f(x)

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1)$$

Vì đạo hàm cấp 2 phức tạp nên ta sẽ không tính

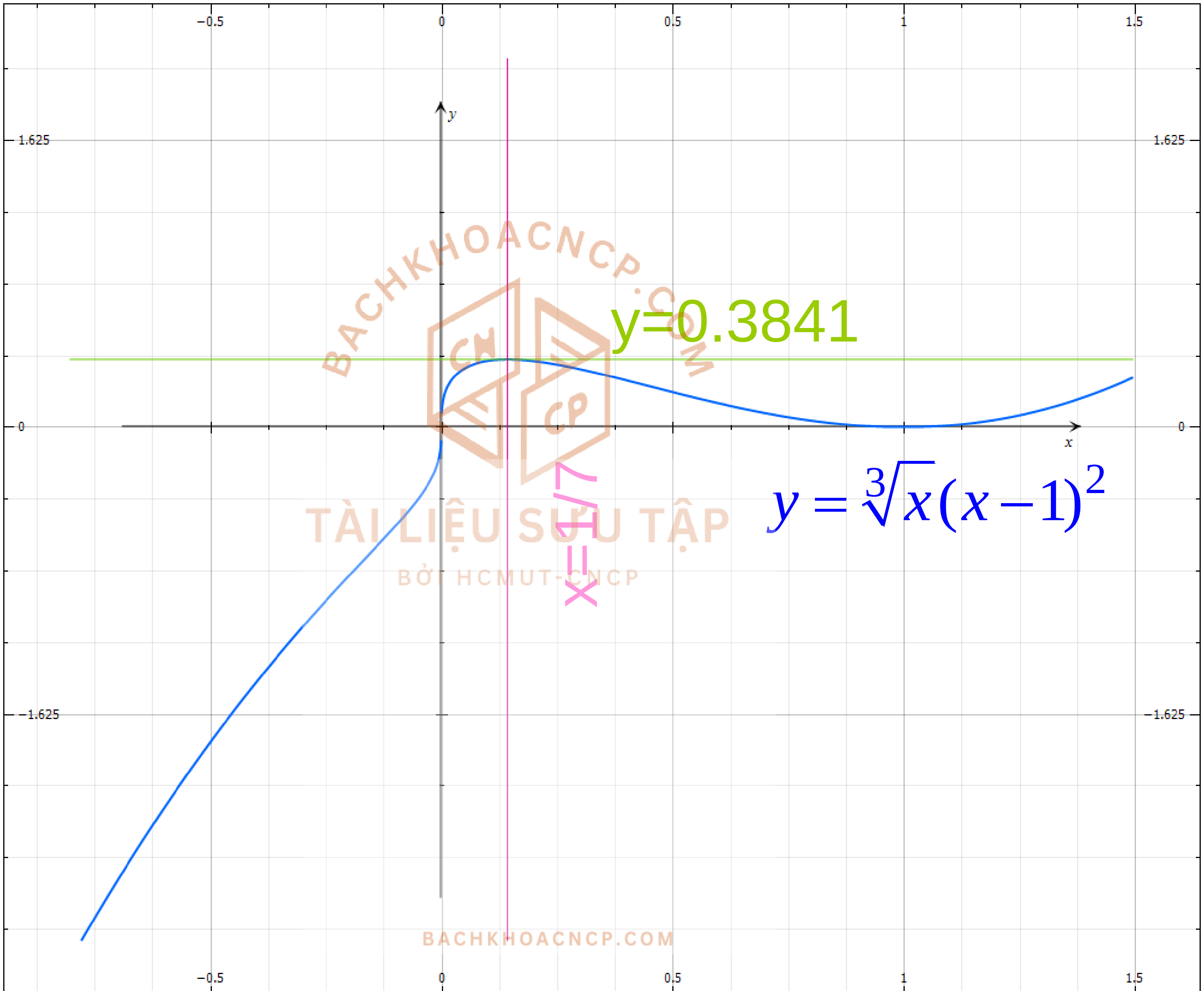
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1/7		1		$+\infty$
y'		+	$\Vert$	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0.3841	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tiếp tuyến nằm ngang

Khảo sát hàm y=f(x)

Đồ thị



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \ln x - x + 1$

MXĐ: R^+

Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}(\ln x - x + 1) = -\infty$$ Hàm có TCĐ x = 0

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}(\ln x - x + 1) = 1 + \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x - x + 1}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to +\infty}(y + x) = \lim_{x\to +\infty}(\ln x - x + 1 + x) = \lim_{x\to +\infty}(\ln x + 1) = +\infty$$

Hàm không có TCX

Khảo sát hàm y=f(x)

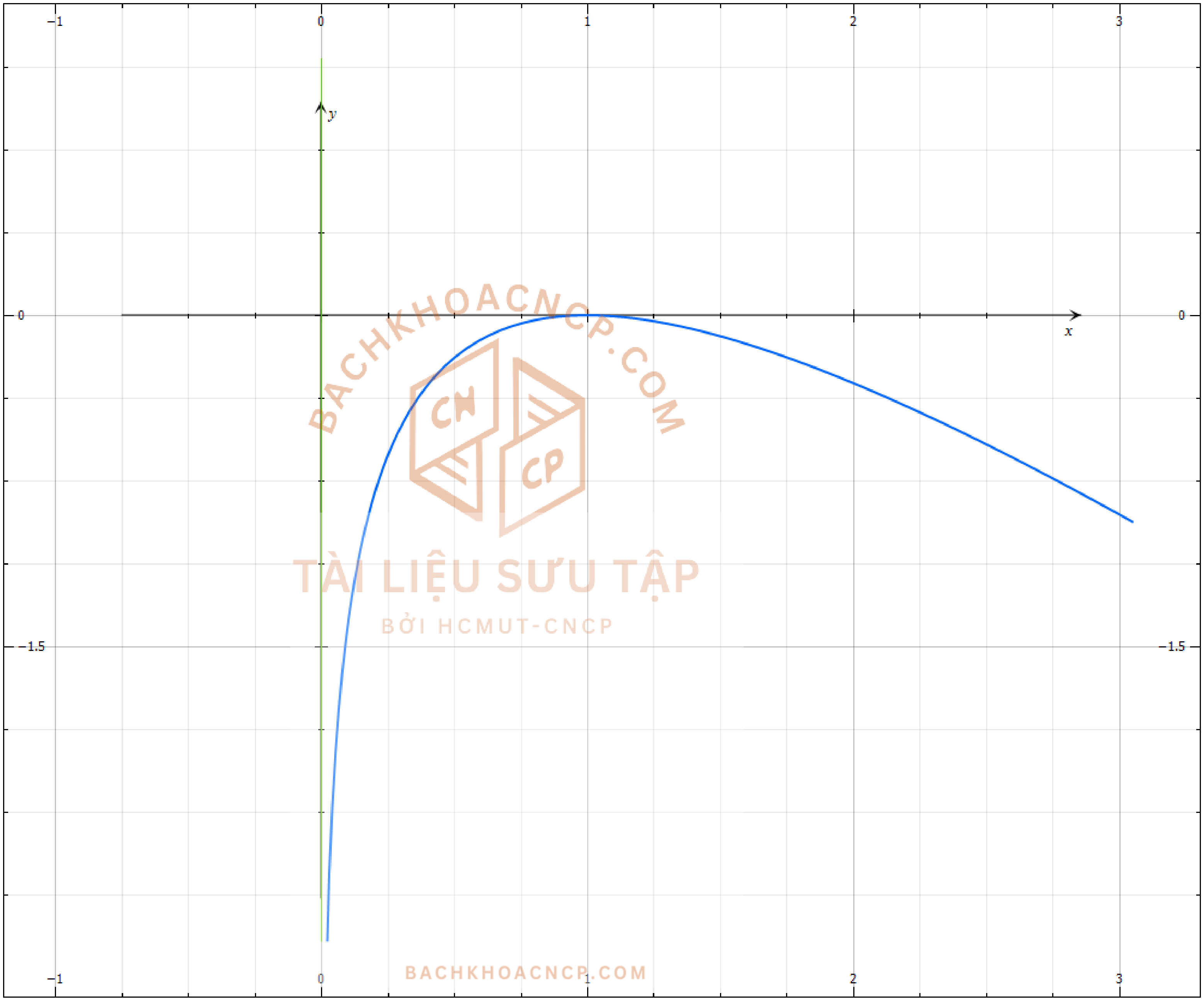
Cực trị: $y' = \frac{1}{x} - 1$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		+∞
y’		+	0	-	
y	-∞	↗	0	↘	-∞

Khảo sát hàm y=f(x)

Đồ thị



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}$

MXĐ R

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3} = +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-1)\sqrt{\frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{x^2}} = \infty$$

Hàm không có tiệm cận

Khảo sát hàm y=f(x)

Cực trị:

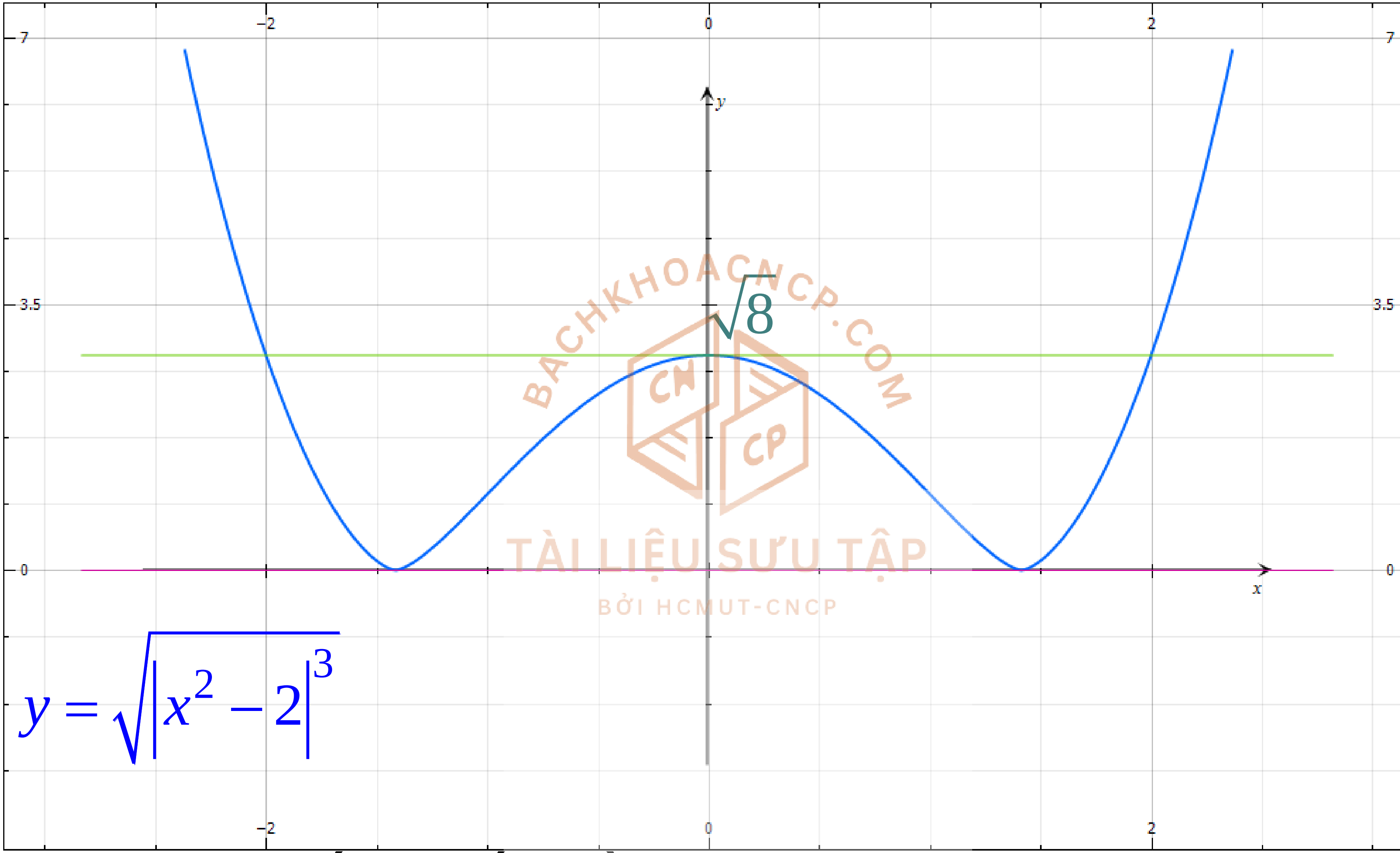
$$y=\begin{cases}(x^2-2)^{3/2}, |x|\geq\sqrt{2}\\(2-x^2)^{3/2}, |x|<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x(x^2-2)^{1/2}, |x|\geq\sqrt{2}\\-3x(2-x^2)^{1/2}, |x|<\sqrt{2}\end{cases}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y’		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khảo sát hàm y=f(x)



Hàm có 2 tiếp tuyến nằm ngang ứng với 3 nghiệm của pt *y'=0* là y=0 và $y = \sqrt{8}$

Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Tìm tiệm cận của các hàm

$$y = x\ln(e + \frac{1}{x})$$ $$x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$ $$y = x - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\sin x}{x}$$ y=0

$$y = \frac{1}{x}e^{-1/x}$$ x=0, y=0

Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Tìm cực trị của các hàm

$$y = x\sqrt{1-x^2}$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right), y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

$$y_{\min} = y(e)$$

$$y = \frac{|x-1|}{x^2}$$

$$y_{\min} = y(1), y_{\max} = y(2)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

$$y_{\min} = y(1)$$

Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Khảo sát và vẽ đồ thị

$$1.\ y = (1+x)^{1/x}$$

$$2.\ y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$3.\ y = \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$$

$$4.\ y = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$5.\ y = e^{4x-x^2}$$

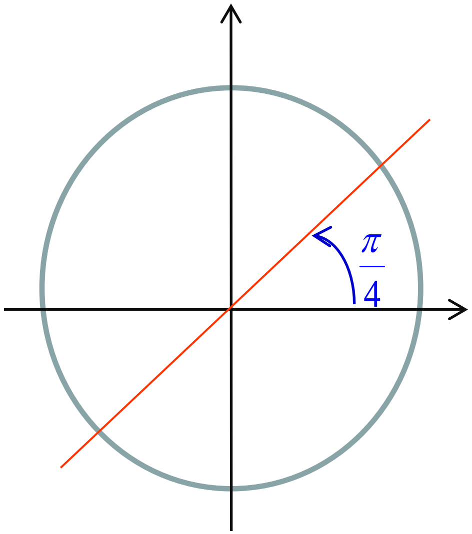
$$6.\ y = x^3 e^{-x}$$

$$7.\ y = \frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$$

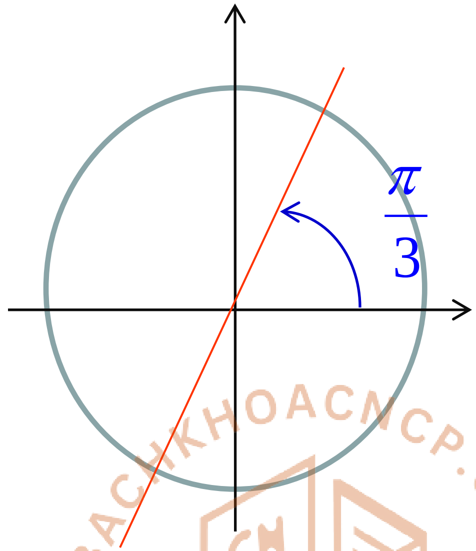
$$8.\ y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+5}$$

$$9.\ y = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$$

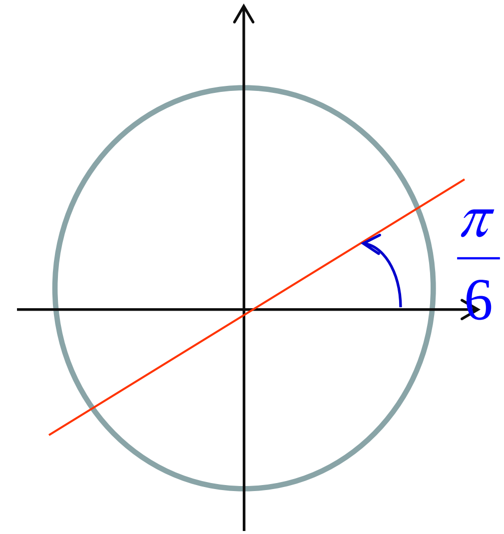
$$10.\ y = x^2 \ln x$$



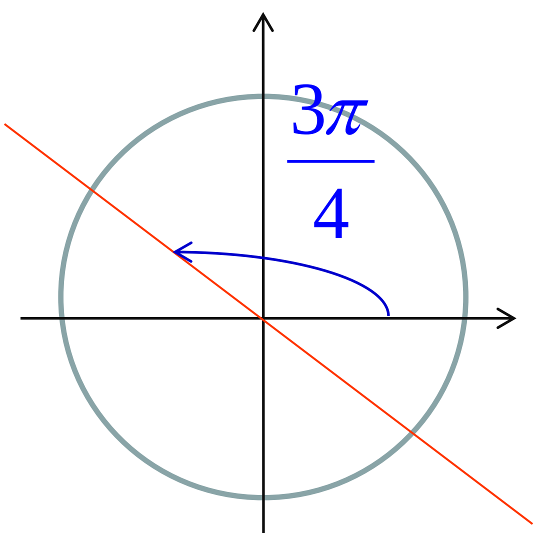
Đt $y = x$



Đt $y = \sqrt{3}x$



Đt: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$



Đt $y = -x$