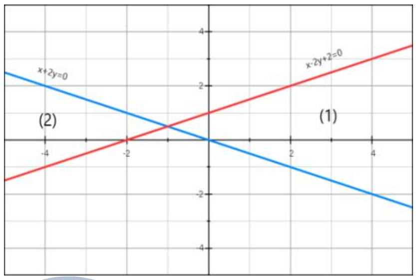
BÀI TẬP BUỔI 1

B. PHẦN ĐÁP ÁN

I. Tìm tập xác định và miền giá trị:



1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+2x-4y^2+4y}$

Điều kiện:

$$x^2+2x-4y^2+4y\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2-(2y-1)^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2y)(x-2y+2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2y\ge 0\\ x-2y+2\ge 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}x+2y\le 0\\ x-2y+2\le 0\end{cases}(2)\end{array}\right.$$

Miền giá trị: Dễ nhận thấy $f(x,y)\ge 0$, bên cạnh đó ta còn nhận thấy $x^2+2x-4y^2+4y\to+\infty$ khi $x\to+\infty, y\to a\in R$ nên miền giá trị của hàm sẽ là $[0;+\infty)$

2. $g(x,y)=\ln(2x-x^2-y^2)$

Điều kiện xác định:

$$2x-x^2-y^2>0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<1$$

là hình tròn tâm I(1;0), R=1 không kể biên (tức là tập mở)

Miền giá trị: Ta có $0<2x-x^2-y^2=1-(x-1)^2-y^2\le 1$ nên miền giá trị của $g(x,y)$ là $(-\infty;0]$

3. $h(x,y)=\dfrac{x+y+1}{1-x^2-y^2}$

Điều kiện xác định:

$$1-x^2-y^2\ne 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ne 1$$

là phần mp Oxy bỏ đi đường tròn (O;1)

Miền giá trị: giả sử $y=0$ thì $h(x;0)=\dfrac{1}{1-x}$ có miền giá trị là $(-\infty;+\infty)$ nên miền giá trị của hàm là $(-\infty;+\infty)$

4. $m(x,y)=\ln(\arctan\dfrac{x}{y})$

$$\begin{cases}\arctan\dfrac{x}{y}>0\\ y\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}>0\\ y\ne 0\end{cases}$$

Điều kiện xác định:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\end{cases}\end{array}\right.$$

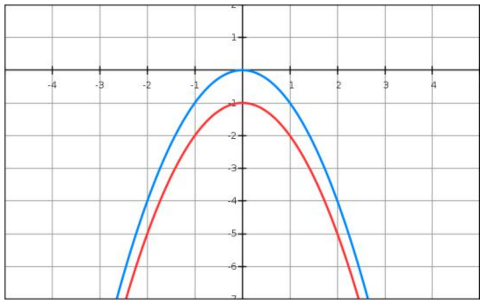
Miền giá trị: $0<\arctan\dfrac{x}{y}<\dfrac{\pi}{2}$ nên miền giá trị là $(-\infty;\ln\dfrac{\pi}{2})$

5. $u(x,y)=\dfrac{1}{\log_2(x^2+y+1)}$

Điều kiện:

$$\begin{cases}\log_2(x^2+y+1)\neq 0\\ x^2+y+1>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y\neq 0\\ x^2+y+1>0\end{cases}$$



(là miền nằm trên đường đỏ và bỏ đi đường xanh)

Miền giá trị: $\log_2(x^2+y+1)$ có miền giá trị là $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ nên miền giá trị của hàm là $(-\infty;+\infty)$

6. $v(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+2y-1}{3x-y+2}}$

Điều kiện: (tương tự câu 1 các bạn có thể vẽ đồ thị để dễ hình dung miền xác định của hàm)

$$\begin{cases}\dfrac{x+2y-1}{3x-y+2}\geq 0\\ 3x-y+2\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2y-1\geq 0\\ 3x-y+2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+2y-1\leq 0\\ 3x-y+2<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Miền giá trị: dễ thấy $v\geq 0$, mặt khác $\dfrac{x+2y-1}{3x-y+2}\to+\infty$ khi $x\to 0, y\to 2^-$ nên miền giá trị của hàm là $[0;+\infty)$

II. Đạo hàm riêng:

1. $f(x,y)=\sqrt{2x^2+4y^2+3xy}$

$$f'_x=\frac{(2x^2+4y^2+3xy)'_x}{\sqrt{2x^2+4y^2+3xy}}=\frac{4x+3y}{\sqrt{2x^2+4y^2+3xy}}$$

$$f'_y=\frac{(2x^2+4y^2+3xy)'_y}{\sqrt{2x^2+4y^2+3xy}}=\frac{8y+3x}{\sqrt{2x^2+4y^2+3xy}}$$

2. $g(x,y)=\arctan(x+y)+x^3+y^2$

$$g'_x=\frac{(x+y)'_x}{1+(x+y)^2}+3x^2=\frac{1}{1+(x+y)^2}+3x^2$$

$$g'_y=\frac{(x+y)'_y}{1+(x+y)^2}+2y=\frac{1}{1+(x+y)^2}+2y$$

3. $h(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

$$h'_x = \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$h'_y = \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. Cho hàm số $z = z(x,y)$ thỏa $x^2 + 2yz^2 - 4y^2 + 3xy = 8$. Tính $z'_x(2,1)$ biết $z(2,1) = 1$

Đạo hàm 2 vế đẳng thức theo x ta được

$$2x + 2y.2z.z'_x + 3y = 0$$
$$\Leftrightarrow 2.2 + 2.1.2.1.z'_x + 3.1 = 0$$
$$\Leftrightarrow z'_x = -\frac{7}{4}$$

5.Cho hàm số $z(x,y) = x^2 f(x+e^y)$, trong đó f là hàm khả vi tại mọi điểm. Biết $f(2) = 1, f'(2) = -3$. Tính $z'_x(1,0)$

Đạo hàm 2 vế theo x ta có:

$$z'_x = 2xf(x+e^y) + x^2 f'_x(x+e^y)$$
$$\Leftrightarrow z'_x = 2.1.f(2) + 1^2 f'(2) = -1$$

6.Cho hàm số $z = f(x,y), x = \ln\frac{u}{v}, y = e^{uv}$. Biết $f'_x\Big|_{(x,y)=(0,e)} = 2, f'_y\Big|_{(x,y)=(0,e)} = 3$. Tính $z'_u\Big|_{(u,v)=(1,1)}$

Coi v là hằng số khi đạo hàm theo u ta có:

$$z = f(x(u), y(u))$$
$$\Rightarrow z'_u = z'_x.x'_u + z'_y.y'_u$$

Mà $x'_u = \frac{1}{u}, y'_u = ve^{uv}$ thay vào đẳng thức trên: $z'_u = 2.\frac{1}{1} + 3.1.e = 2 + 3e$

III. Đạo hàm cấp cao:

1. $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y + 4xy + 2x + 1$. Tính $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$

Đáp án:

$$f''_{x^2} = 6xy^2 + 4y$$
$$f''_{xy} = 6x^2y + 4x$$
$$f''_{y^2} = 2x^3$$

2. $g(x,y) = e^{x^2+xy+5y}$. Tính $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$

Đáp án:

$$f''_{x^2} = 2e^{x^2+xy+5y} + (2x+y)^2 e^{x^2+xy+5y}$$
$$f''_{xy} = e^{x^2+xy+5y} + (2x+y)(x+5)e^{x^2+xy+5y}$$
$$f''_{y^2} = (x+5)^2 e^{x^2+xy+5y}$$

3. $m(x,y) = \sin(x+y^2) + 3\cos(xy)$. Tính $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$

$$f''_{x^2} = -\sin(x+y^2) - 3y^2\cos(xy)$$

Đáp án: $f''_{xy} = -2y\sin(x+y^2) - 3\sin(xy) + 3xy\cos(xy)$

$$f''_{y^2} = 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2) - 3x^2\cos(xy)$$

4. Cho $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$. Tính $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)$

$A = f''_{xy}(1,1) + 2f''_{y^2}(1,1)$ mà $f''_{xy} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, f''_{y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow A = 1$

5. Cho $f(x,y) = y\ln\left|2y - e^x\right|$. Tính $A = f_{x^2}'' - 2f_{xy}'' + 3f_{y^2}''$ tại M(0,1)

$$f''_{x^2} = \frac{-2y^2e^x}{(2y-e^x)^2}$$

Ta có: $f''_{xy} = \dfrac{e^{2x}}{(2y-e^x)^2}$ nên $A = 1$

$$f''_{y^2} = \frac{2}{2y-e^x} - \frac{2e^x}{(2y-e^x)^2}$$