CHỦ ĐỀ

ĐẠO HÀM RIÊNG

HÀM NHIỀU BIẾN

Nội dung

1. Đạo hàm riêng cấp 1 của $z = f(x,y)$, ý nghĩa hình học và ứng dụng thực tế.
2. Đạo hàm riêng cấp cao của $z = f(x,y)$

ĐẠO HÀM TẠI 1 ĐIỂM CỦA HÀM 1 BIẾN

Cho $y = f(x)$ xác định trong $(a, b) \ni x_0$, xét tỷ số

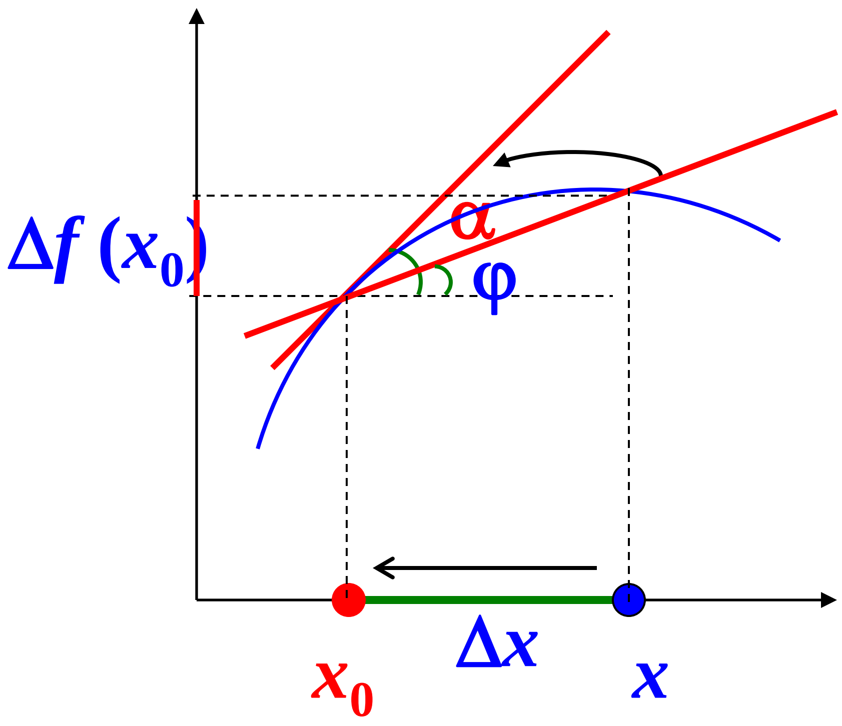
$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\Delta x : increment\ of\ argument, \quad \Delta f : increment\ of\ function$

Nếu tỷ số trên có giới hạn hữu hạn khi $x \to x_0$ hay $\Delta x \to 0$ thì f có đạo hàm (derivative) tại x_0.

Đặt

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\Delta x \to 0)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}$$



$$\tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x \to x_0$$

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

***f*’(x_0) là hệ số góc (slope) tiếp tuyến (tangent line) của đường cong (C): *y* = *f* (*x*) tại tiếp điểm M(x_0, *f* (x_0))**

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

Đạo hàm riêng cấp 1 của $f(x, y)$ theo biến x tại (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(Cố định y_0, biểu thức là hàm 1 biến theo x, tính đạo hàm của hàm này tại x_0)

Đạo hàm riêng cấp 1 của f theo biến y tại (x_0, y_0)

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ứng dụng cho bài toán dự báo thời tiết

Vào một ngày nóng, độ ẩm cực cao làm cho chúng ta có cảm giác nhiệt độ cao hơn nhiệt độ thực.

Ngược lại, trong không khí cực khô chúng ta cảm thấy nhiệt độ thấp hơn nhiệt kế chỉ.

I: chỉ số cảm nhiệt

T: nhiệt độ thật

H: độ ẩm tương đối

I=f(T,H)

Xem số liệu bảng sau:

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Cố định cột H=70% ta có g(T)=f(T,70). Khi đó g(T) mô ta chỉ số cảm nhiệt tăng như thế nào khi nhiệt độ thật T tăng, trong khi độ ẩm tương đối là 70%.

Đạo hàm của hàm g khi $T=96^0$ F là tốc độ biến thiên của I theo T khi $T=96^0$ F

$$g'(96)=\lim_{h\to 0}\frac{g(96+h)-g(96)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(96+h,70)-f(96,70)}{h}$$

$$g'(96)\approx\frac{g(98)-g(96)}{2}=4$$

$$g'(96)\approx\frac{g(94)-g(96)}{-2}=3.5$$

Nhiệt độ thật là 96^0 F và độ ẩm tương đối là 70%, thì chỉ số cảm nhiệt (nhiệt độ biểu kiến) tăng khoảng $3,75^0$ F khi nhiệt độ tăng lên 1độ.

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Cố định hàng $T=96^0$ F, xét hàm số G(H)=f(96,H), mô tả chỉ số cảm nhiệt tăng thế nào khi độ ẩm tương đối H tăng trong khi nhiệt độ thật là $T=96^0$ F.

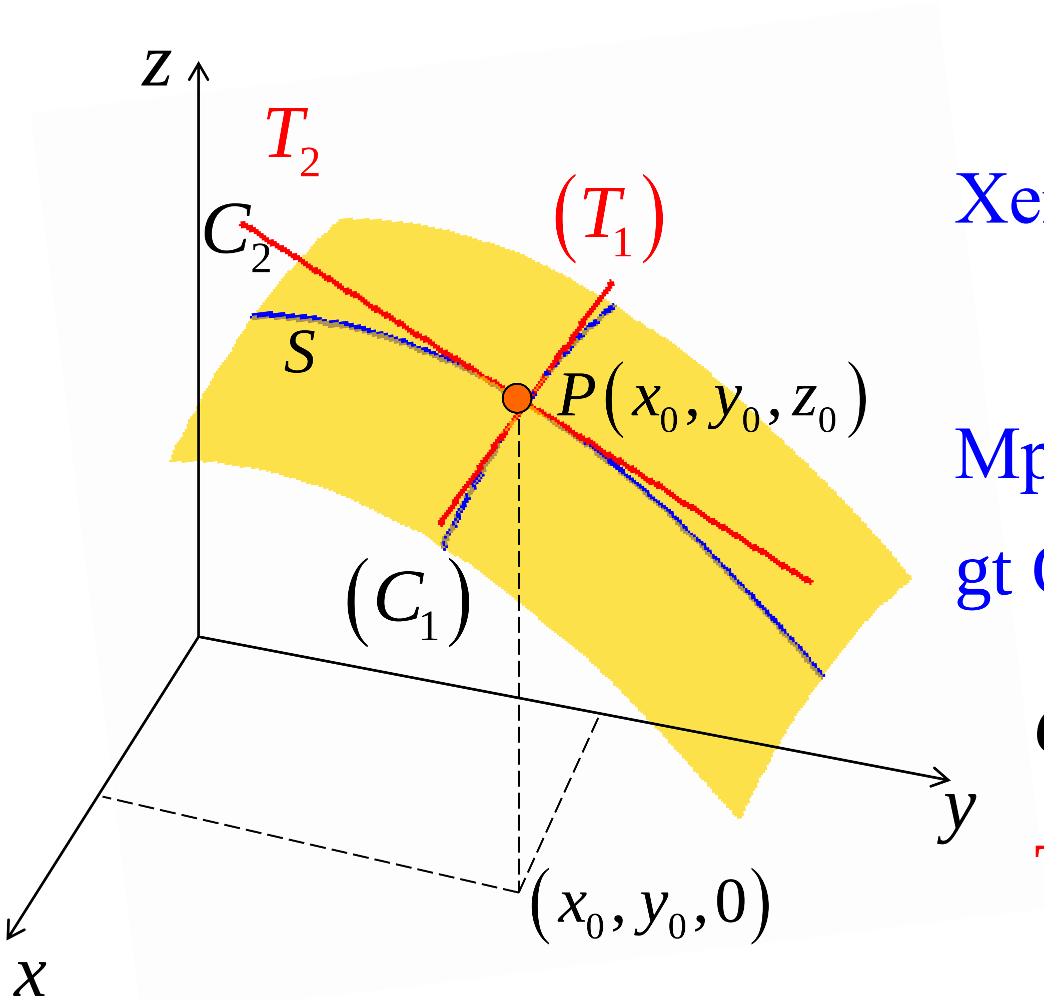
Đạo hàm của hàm G khi H=70% là tốc độ biến thiên của I theo H khi H=70%

Tương tự cách tính đạo hàm của hàm G
Ta có G'(70)~0.9

G'(70)~0.9, khi nhiệt độ là 96^0 F và độ ẩm tương đối là 70% thì chỉ số cảm nhiệt (nhiệt độ biểu kiến) tăng khoảng $0,9^0$ F với mỗi phần trăm tăng lên độ ẩm tương đối.

Ý nghĩa của đhr cấp 1

Cho mặt cong S: z = f(x, y), xét $f'_x(x_{0,}y_0)$



Xem phần mặt cong S gần

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

Mphẳng y = y_0 cắt S theo gt C_1 đi qua P.

$$C_1 : z = g(x) = f(x, y_0)$$

T$_1$ là tiếp tuyến của C$_1$ tại P.

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

$f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $x = x_0$

$f'_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_2 của C_2 tại $y = y_0$

(C_2 là phần giao của S với mp $x = x_0$)

Các ví dụ về cách tính.

1/ Cho f(x,y) = $3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(1,2),\ f'_y(1,2)$

$\boxed{f'_x(1,2):}$ cố định $y_0 = 2$, ta có hàm 1 biến

$$f(x,2) = 6x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'_x(1,2) = (6x^2 + 4x)'|_{x=1} = 12x + 4|_{x=1} = 16$$

$$\boxed{f(x,y) = 3x^2y + xy^2}$$

$\boxed{f'_y(1,2)}$ cố định $x_0 = 1$, ta có hàm 1 biến

$$f(1, y) = 3y + y^2$$

$$\Rightarrow f'_y(1,2) = (3y + y^2)'|_{y=2} = (3 + 2y)|_{y=2} = 7$$

2/ f(x,y) = $3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ với mọi (x, y) ∈ R_2

$\boxed{f'_x(x,y)}$ Xem y là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo x

$$f'_x(x,y) = 6xy + y^2, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính: $f'_x(1,2) = (6xy + y^2)|_{x=1,y=2} = 16$

(Đây là cách thường dùng để tính đạo hàm tại 1 điểm)

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

$\boxed{f'_y(x,y)}$ Xem x là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo y

$$f'_y(x,y) = 3x^2 + x2y, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính:

$$f'_x(1,2) = \quad (3x^2 + 2xy)\,|_{x=1,y=2} = 7$$

2/ Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ với $f(x, y) = x^y$

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = 1 \times 1^{1-1} = 1;$$

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_y(1,1) = 1^1 \ln 1 = 0$$

3/ Cho $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

$$f(x,1)=\frac{x}{x^2+1}=g(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'_x(0,1)=1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f\left(x,0\right)=0=g\left(x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=0$$

$$\Rightarrow f'_x\left(0,0\right)=0$$

4/ Cho $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tính $f'_x(x,y)$

Hàm f xác định tại, mọi (x,y)

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Công thức trên không đúng cho (x, y) = (0, 0)

$$f(x,y)=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$f(x,0)=e^{-|x|}=g(x)$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-|x|}{x} \quad \Rightarrow \nexists$$

f không có đạo hàm theo x tại (0, 0)

($f'_x(0,0)$ không tồn tại) .

Ví dụ cho hàm 3 biến

(Tương tự hàm 2 biến)

Cho $f(x,y,z) = x + ye^{xz}$

Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,-1,2)$

$$f'_x = 1 + yze^{xz} \quad \Rightarrow f'_x(0,-1,2) = 1 - 2 = -1$$

$$f'_y = e^{xz}$$

$$f'_z = xye^{xz}$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

Xét hàm 2 biến f(x,y)

f'_x, f'_y cũng là các hàm 2 biến

Đạo hàm riêng cấp 2 của f là các đhr cấp 1(nếu có) của f'_x, f'_y

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad f''_{yy} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

VÍ DỤ

$$f(x,y) = x^2 + xy + \cos(y-x)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của f

$$f'_x = 2x + y + \sin(y-x) \qquad f'_y = x - \sin(y-x)$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (2x + y + \sin(y-x))'_x$$

$$= 2 - \cos(y-x)$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 1 + \cos(y-x)$$

$$f'_y = x - \sin(y - x)$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y \right)'_x = 1 + \cos(y - x)$$

$$f''_{yy} = \left(f'_y \right)'_y = -\cos(y - x)$$

BT1: Xét hàm hai biến về thời tiết đã học ở phần trước W=f(T,v)

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

a) **Ước tính các f'_T (-15,30), f'_V (-15,30). Nếu ý nghĩa của các giá trị này.**
b) **Tổng quát, bạn có thể nói gì về dấu của f'_T và f'_V**

Bài 2: Chiều cao h của sóng trong đại dương phụ thuộc vào vận tốc v của gió và khoảng thời gian t gió thổi tại vận tốc đó. Các giá trị của hàm h =f(v,t) được ghi bằng feet trong bảng số liệu sau:

Duration (hours)

Wind speed (knots)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

a) Ý nghĩa của các đhr

b) Ước tính các các giá trị $f'_v(40,15)$ và $f'_t(40,15)$

Bài 3 a)

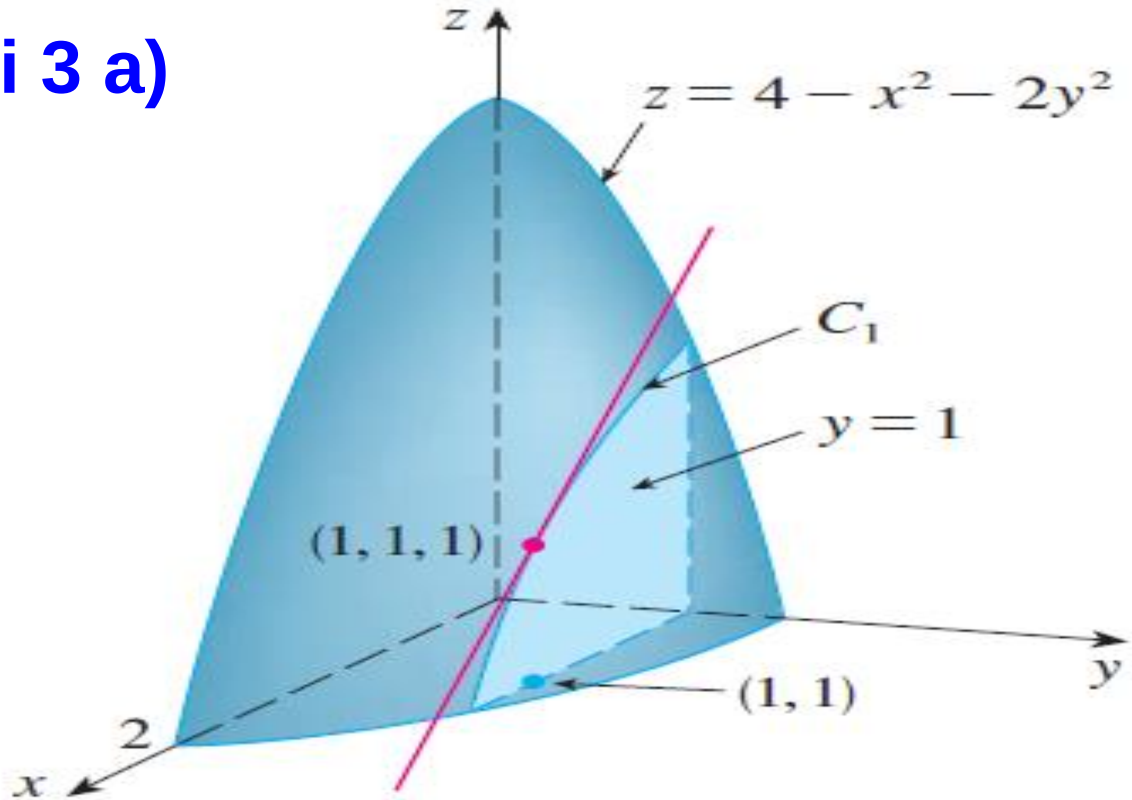


FIGURE 2

Tính hệ số góc của đường thẳng màu đỏ

Bài 3 b)

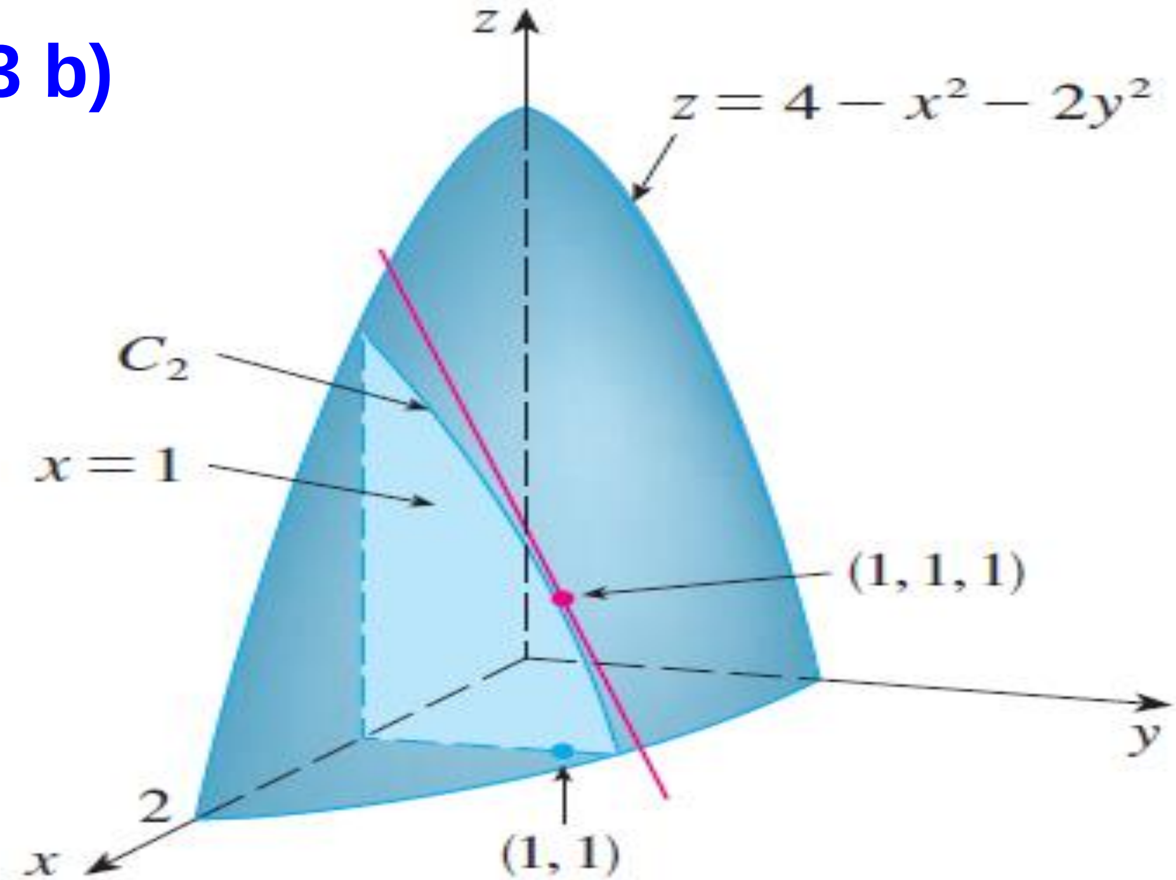


FIGURE 3

Tính hệ số góc của đường thẳng màu đỏ

Bài tập 4: Nhiệt độ tại điểm (x,y) trên một đĩa kim loại phẳng được cho là $T(x,y)=60/(1+x^2 + y^2)$, trong đó T đơn vị là ^{o} C, x,y đơn vị là m. Tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ theo khoảng cách tại điểm (2,1) theo

a) Theo hướng x

b) Theo hướng y

Bài 5: Giao của mặt ellipsoid $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ và mặt phẳng y=2 . Tính hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm (1,2,2)

Bài 6: chỉ số lạnh do gió được mô hình hóa bằng hàm số W=f(T,v). Trong đó T là nhiệt độ (^{o} C) và v là vận tốc gió (km/h)

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Khi T=-15^o C và v=30km/h, bạn dự tính nhiệt độ biểu kiến giảm bao nhiêu nếu nhiệt độ thật giảm 1^o C? Điều gì xảy ra nếu tốc độ gió tăng 1km/h