Chương 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1 Hàm số

1. Ý nghĩa của $f(x_0, y_0)$ trong bài toán thực tế.

2. Miền xác định của hàm số.

3. Đường mức, đồ thị mức(level curve, contour map): vẽ đường mức, ý nghĩa đường mức, đọc đồ thị mức. (Khi day có thể dùng từ đường đẳng trị thay cho đường mức nhưng đề thi sẽ dùng từ đường mức)

4. Nhận dạng mặt bậc 2.

2 Đạo hàm riêng và vi phân hàm nhiều biến

2.1 Đạo hàm riêng cấp 1

1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa (có thể cho hàm nhiều biểu thức nhưng đưa về hàm 1 biến thì tính bằng máy tính hoặc tính bằng công thức được). (chỉ cho hàm 2 biến)

2. Tính đạo hàm bằng công thức (2 biến, 3 biến).

3. Ý nghĩa hình học của đhr (hệ số góc tiếp tuyến).

4. Ý nghĩa thực tế của đhr: sự biến thiên của f khi $M(x, y)$di chuyển qua (x_0, y_0) theo chiều dương trục Ox, Oy.

5. Bài toán thực tế cho ý nghĩa của $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.

2.2 Đạo hàm cấp cao

1. Tính đạo hàm cấp 2 tại 1 điểm cho hàm 2 biến.

2. Tính đạo hàm cấp cấp 3 tại 1 điểm.

2.3 Vi phân hàm nhiều biến

1. Tính vi phân cấp 1, cấp 2 tại 1 điểm của hàm 2 biến.

2. Ước tính $\Delta f(x_0, y_0)$ theo $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ với $\Delta x, \Delta y$ tổng quát hoặc có giá trị cụ thể.

3. Ước tính $\Delta f(x_0, y_0)$ hoặc $f(x_0, y_0)$ trong bài toán thực tế nhờ $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

2.4 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. Tính đạo hàm, vi phân cấp 1 của hàm hợp tại 1 điểm cho biểu thức cụ thể.

2. Tính đạo hàm hàm hợp cho biểu thức tổng quát (hàm không cho biểu thức cụ thể) (VD: $g(x, y) = f(2x + 3y, xy)$, tính g'_x, g'_y tại 1 điểm khi biết f'_u, f'_v tại 1 điểm).

3. Bài toán thực tế.

4. Đạo hàm cấp 2 của hàm hợp (HK202 không cho thi, có thể đưa vào Bài Tập Lớn).

2.5 Đạo hàm vi phân hàm ẩn

1. Tính đạo hàm, vi phân cấp 1 của hàm ẩn 1 biến, 2 biến tại điểm cụ thể.

2. Tính đạo hàm cấp 1 hàm ẩn 1 biến, 2 biến trong trường hợp hàm không cho biểu thức cụ thể.

3. Bài toán thực tế.

2.6 Đạo hàm theo hướng

1. Tính đạo hàm theo hướng vector $\vec{a}$ tại $M(x_0, y_0)/M(x_0, y_0, z_0)$.

2. So sánh sự biến thiên của f theo các hướng khác nhau khi đi qua M cụ thể.

3. Tìm hướng tăng/giảm nhanh nhất của f khi đi qua $M(x_0, y_0)$, tìm giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng tại $M(x_0, y_0)/M(x_0, y_0, z_0)$.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng.

5. Bài toán thực tế.

6. Thống nhất ký hiệu đạo hàm theo hướng: $\frac{\partial f()}{\partial \vec{u}}$ hoặc $D_{\vec{u}}()$.

2.7 Tiếp diện, vector pháp tuyến (pháp vector) của mặt cong

1. Viết phương trình tiếp diện tại với mặt cong cho bởi 3 dạng:

   - $z = z(x, y)$.

   - $F(x, y, z) = 0$.

   - $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$.

2. Tìm pháp vector của mặt cong với 3 dạng trên.

2.8 Khai triển Taylor

Lý thuyết giới thiệu như mở rộng của vi phân cấp 1, làm ví dụ đơn giản. Bài tập cho một vài bài cấp thấp, sử dụng khai triển Maclaurin hàm 1 biến. Không tính ngược lại đạo hàm.

2.9 Cực trị, Giá trị lớn nhất-Giá trị nhỏ nhất

1. Tìm cực trị tự do cho hàm số $f(x, y)$ và ứng dụng thực tế.

2. Nhân tử Lagrange của $f(x, y)$. Không dạy cực trị điều kiện.

3. Tìm min, max hàm $f(x, y)$ trên miền đóng và bị chặn (miền đặt, đường cong hữu hạn).

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

1 Tích phân kép

1.1 Tọa độ Descartes

1. **Dạng miền lấy tích phân** D: giới hạn bởi $1, 2, 3$ đường cong bậc 1, bậc 2. Khi tính tích phân, tối đa chia D thành 2 miền con.

2. **Dạng câu hỏi**:

   a. Viết cận tích phân lặp với miền D cho trước.

   b. Tính tích phân lặp và vẽ hình miền tính tích phân.

   c. Tính tích phân kép với hàm $f(x, y)$ và miền D như ở mục 1, 2.

   d. Chọn thứ tự tính tích phân lặp thích hợp với hàm dưới dấu tích phân.

   e. Mô tả bằng hình vẽ vật thể dạng trụ cong có thể tích được tính bằng tích phân $I = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, nắp trên là mặt cong $z = f(x, y)$).

   f. Tính giá trị trung bình của $f(x, y)$ trên miền D.

1.2 Đổi biến tọa độ cực

1. **Tọa độ cực thường**: $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$

   D là 1 trong 5 hình tròn $(x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq 2ay)$, kết hợp với các đường thẳng qua gốc tọa độ .

2. **Tọa độ cực mở rộng**

   a. Hình tròn tổng quát $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ kết hợp với đường thẳng qua tâm hình tròn.

   b. Miền giới hạn bởi ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ kết hợp với đường thẳng qua gốc tọa độ.

1.3 Ứng dụng

1. Tính diện tích miền phẳng.

2. Tính thể tích vật thể.

3. Tính khối lượng mảnh phẳng.

2 Tích phân bội ba

2.1 Tọa độ Descartes

1. **Dạng hàm** $f(x, y, z)$: dạng đơn giản để có thể lấy nguyên hàm nhanh.

2. **Dạng miền lấy tích phân** Ω giới hạn bởi $1, 2, 3, 4$ mặt, bao gồm

   a. Mặt phẳng.

   b. Mặt cầu tâm O hoặc tâm trên Oz và tiếp xúc mp (Oxy).

   c. Mặt trụ elliptic, trụ parabolic.

   d. Mặt nón tròn xoay nhận Oz làm trục đối xứng.

   e. Mặt paraboloid elliptic.

(**Không chia miền khi tính tích phân lặp**)

2.2 Đổi biến

1. Tọa độ trụ thường (tương ứng tọa độ cực thường)

2. Tọa độ cầu thường: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho \cos\theta$. Ω là miền kết hợp giữa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, kết hợp với:

   a. Các mặt tọa độ.

   b. Các mặt phẳng chứa trục Oz.

   c. Nón tròn xoay $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

3. Lưu ý cách đặt tên biến:

   a. r, φ: biến phẳng.

   b. ρ, θ: biến không gian.

2.3 Ứng dụng

1. Tính thể tích vật thể V.

2. Tính khối lượng vật thể V.

3. Tính giá trị trung bình.

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1 MẢNG BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. Hình học
2. Vật lý

2 Tham số hóa đường cong

2.1 Đường cong phẳng

1. Tọa độ Descartes: $(x, y(x)), (x(y), y)$ (tham số là x hoặc y)
2. Tổng quát: $(x(t), y(t))$ (tham số là t)

   a. Đoạn thẳng AB.

   b. Đường tròn tâm A, bán kính R.

   c. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, chú ý lấy 1 phần ellipse khi kết hợp với đường thẳng $y = kx$.
3. Đường cong trong trong tọa độ cực $r = r(\varphi) : x = r(\varphi)\cos(\varphi), y = r(\varphi)\sin(\varphi)$.

2.2 Đường cong trong không gian

Xét trường hợp cho giao tuyến của 2 mặt cong. Lưu ý:

1. Tham số hóa phẳng cho 2 biến trước.

2. Dùng 1 trong 2 phương trình mặt để lấy tham số cho biến thứ 3.

3 Tích phân đường loại 1

1. Tính tích phân đường phẳng và đường không gian với hàm cụ thể.

2. Tính diện tích trụ song song Oz có biên dưới là đường cong C trong mặt phẳng (Oxy) và biên trên nằm trong mặt cong $z = f(x, y)$.

3. Tính khối lượng của 1 dây mỏng có khối lượng riêng là hàm $\rho(x, y)$ hoặc $\rho(x, y, z)$ với hình dạng cho trước.

4. Tính chiều dài đoạn đường cong phẳng hoặc đoạn đường cong trong không gian.

4 Tích phân đường loại 2

1. Tham số hóa đường cong với chiều đường đi cho trước. (Lưu ý: nếu là đường cong không gian thì lấy ngược chiều kim đồng hồ hay cùng chiều kim đồng hồ khi **nhìn theo hướng của các trục tọa độ**.)

2. Tính tích phân đường loại 2 phẳng.

3. Tính tích phân đường loại 2 không gian.

4. Công thức Green cho đường cong kín. (Đường cong là biên của miền phẳng đóng và bị chặn, hàm dưới dấu tp liên tục), lưu ý cho trường hợp hàm số không liên tục.

5. Công thức Green xử lý tích phân trên đường cong không kín.

6. Áp dụng công thức Green để tính diện tích miền phẳng.

7. Tích phân không phụ thuộc đường đi.

8. Tính công của lực $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ hay $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ thực hiện trên 1 đường đi cho trước.

Chương 4

TÍCH PHÂN MẶT

1 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

1. Tính tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x, y, z)$ trên phần mặt cong hữu hạn dạng $z = z(x, y)$:

   a. Giới hạn trong 1 mặt trụ (có đường sinh song song Oz).

   b. Giới hạn trong mặt trụ được ghép từ nhiều mặt thành phần (VD: $x = 4 - y^2$, $x = y - 2$)

   c. Giới hạn bởi trụ và các mặt cong dạng $f_1(x, y, z) = 0$.

2. Tính tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x, y, z)$ trên một mặt cong hữu hạn tùy ý.

3. Tính diện tích mặt cong (hữu hạn).

4. Tính khối lượng mảnh cong với hàm mật độ cho trước.

2 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

2.1 PHÁP VECTOR VÀ MẶT ĐỊNH HƯỚNG

1. Tìm pháp vector của mặt định hướng dạng $F(x, y, z) = 0$ tại 1 điểm trên mặt cong.

2. Tìm pháp vector của mặt định hướng dạng $z = z(x, y)/x = x(y, z)/y = y(z, x)$ tại 1 điểm trên mặt cong.

3. Tìm cosin chỉ phương của pháp vector đơn vị của mặt định hướng.

2.2 TÍNH TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

1. Tính tích phân mặt loại 2 của trường vector $\vec{F} = (P, Q, R)$ trên mặt định hướng S thông qua tích phân mặt loại 1 (lưu ý những hàm đẹp khi chuyển về tích phân mặt loại 1).

2. Tính tích phân mặt loại 2 trên mặt định hướng $S : z = z(x, y)/x = x(y, z)/y = y(z, x)$ bằng cách đưa trực tiếp về tích phân kép trên miền hình chiếu của mặt cong S lên mặt phẳng tọa độ thích hợp.

3. Tính $\iint\limits_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_S P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint\limits_S Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ bằng cách sử dụng $\iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\iint\limits_{D_{zx}} (x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint\limits_{D_{xy}} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$
Nhận xét về cách viết phương trình mặt cong S khi tính các tích phân này.

4. Lưu ý cách gọi phía của mặt cong: lấy phía trên/dưới theo hướng trục Oz, lấy phía trái/phải theo hướng trục Oy, lấy phía trước/sau theo hướng trục Ox.

2.3 CÔNG THỨC GAUSS - OSTROGRATSKI

1. Tính tích phân mặt trên mặt cong kín là biên của miền đóng và bị chặn trong $Oxyz$ (phía ngoài/phía trong).

2. Tính tích phân trên mặt cong hở bằng cách ghép mặt và dùng công thức G-O (chọn trường hợp tính không dùng G-O sẽ gặp khó khăn).

2.4 CÔNG THỨC STOKES

Bắt buộc sử dụng đúng công thức: đường loại 2 –> mặt loại 2 và phải nêu rõ phía của mặt cong.

Chương 5

LÝ THUYẾT CHUỖI

1 CHUỖI SỐ THỰC

1.1 KHẢO SÁT SỰ HỘI TỤ

1. Chuỗi không âm (các tiêu chuẩn tích phân, so sánh).
2. Chuỗi đan dấu (tiêu chuẩn Leibnitz).
3. Chuỗi có dấu tùy ý (Các tiêu chuẩn Cauchy, D'Alembert, hội tụ tuyệt đối)(không dùng dạng chưa qua giới hạn).
4. Kết hợp các tiêu chuẩn.
5. Lưu ý:
   a. Sinh viên được sử dụng máy tính để tính giới hạn.
   b. Chuỗi hình học(chuỗi cấp số nhân), chuỗi điều hòa được phép sử dụng như các chuỗi cơ bản.

1.2 TÍNH TỔNG CHUỖI

1. Tính tổng riêng trong các trường hợp đơn giản (*Chuỗi hình học, các chuỗi có thể phân tích đơn giản.*)

2. Tính tổng chuỗi dựa trên chuỗi hình học, tính tổng chuỗi bằng giới hạn của tổng riêng.

2 CHUỖI LŨY THỪA

2.1 MIỀN HỘI TỤ

1. Tìm bán kính hội tụ.

2. Tìm miền hội tụ cho các chuỗi dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

3. Tìm miền hội tụ cho các chuỗi dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{kn}$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm dựa trên phép đổi biến để dưa về chuỗi lũy thừa.

2.2 TÍNH TỔNG CHUỖI

1. Tính tổng chuỗi lũy thừa bằng cách đạo hàm, tích phân 1 lần chuỗi đã cho để đưa về chuỗi hình học.

2. Tính tổng chuỗi lũy thừa bằng cách đạo hàm, tích phân 2 lần chuỗi đã cho để đưa về chuỗi hình học.

3. Tính tổng chuỗi số bằng cách chọn 1 chuỗi lũy thừa thích hợp, có thể kết hợp với 1 bước đạo hàm hoặc tích phân (Nếu dùng đạo hàm tích phân, phải tránh 2 biên của miền hội tụ, chỉ hỏi trong khoảng).

2.3 CHUỖI TAYLOR

1. Tìm chuỗi Taylor/Maclaurin sử dụng chuỗi Maclaurin của các hàm số:

   e^x, $\ln(1 \pm x)$, $\dfrac{1}{1 \pm x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\sinh x$, $\cosh x$ (HK202 bỏ qua dạng bài tập này).

2. Tính tổng chuỗi lũy thừa hoặc chuỗi số sử dụng chuỗi Maclaurin.