CHUỖI LŨY THỪA

ĐỊNH NGHĨA

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \; a_n \in R \text{ là giá trị cho trước}$$

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là tập hợp:

$$D = \left\{ x \in R : \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ hội tụ} \right\}$$

Không mất tính tổng quát ta chỉ xét $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n,$

Định lý Abel

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối trong $\left(-|x_0|, |x_0|\right)$

Hệ quả:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_0 thì phân kỳ tại mọi $x \notin \left[-|x_0|, |x_0|\right]$

Chứng minh định lý

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : \left|a_n x_0^n\right| \leq M, \forall n$$

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\forall x \in \left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right) : \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| \text{ hội tụ}$$

Bán kính hội tụ

Số $R > 0$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong $(-R, R)$ và phân kỳ bên ngoài $[-R, R]$ gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

$(-R, R)$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi.

Vậy nếu đã biết BKHT thì miền hội tụ của chuỗi chỉ cần xét thêm tại $\pm R$

Trường hợp chuỗi tổng quát

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Số $R > 0$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hội tụ trong $(x_0 - R, x_0 + R)$ và phân kỳ bên ngoài $[x_0 - R, x_0 + R]$ gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

Khoảng hội tụ: $(x_0 - R, x_0 + R)$

Cách tìm bán kính hội tụ

Tính $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ hoặc $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\Rightarrow R = \begin{cases} 0, & \alpha = +\infty \\ \dfrac{1}{\alpha}, & 0 < \alpha < +\infty \\ +\infty, & \alpha = 0 \end{cases}$$ (BKHT)

$$\begin{cases} R = 0: \text{ MHT } = \{0\} \left(\text{hoặc D} = \{x_0\} \text{ cho chuỗi TQ}\right) \\ R = \infty: \text{ MHT } = (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Lưu ý

1. Có thể tính bán kính hội tụ như sau:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{hay} \quad R = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2. Trường hợp R = 0 hay $R = \infty$, không được gọi là bán kính hội tụ nhưng có thể gọi tạm cho dễ sử dụng.

Ví dụ

1/ Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

2/ Tìm bán kính hội tụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

3/ Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$

4/ Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n}$

Ví dụ

1/ Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$ $\Rightarrow$ Khoảng ht: $(-1,1)$

$x = 1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ht theo tc L.

$x = -1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, phân kỳ

Vậy miền hội tụ là: $D = (-1,1]$

2/ Tìm bán kính hội tụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}{\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

$$\boxed{3/\ \text{Tìm miền hội tụ } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2 2^n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2 2^n}=2$$

$\Rightarrow$ Khoảng ht: $(1-2,1+2)=(-1,3)$

$x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, ht theo tc L.

$x=3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ht .

$\Rightarrow D=[-1,3]$

4/ Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{5}\right)^n$$ Chuỗi cấp số nhân.

Điều kiện hội tụ: $\left|\frac{x+3}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow -8 < x < 2$

Vậy miền hội tụ là: $D = (-8, 2)$

Bài tập

1. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^2}} x^n$

$b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)}{(2n)!!} (x-2)^{n+1}$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n . n}$

$e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{8^{n+1} + 3\ln n} (x+1)^n$

$f)\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n^2-3n+1} x^n$

Hướng dẫn

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n n^2+(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^2}}x^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{2/3}-n^{1/2}}}{2\sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{2/3}}\left(1-n^{-1/6}\right)^{1/n}}{2\sqrt[n]{n^2}\left[1+\frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^{1/n}}=\frac{1}{2}$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)}{(2n)!!}(x-2)^{n+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{(2n)!!}.\frac{(2n+2)!!}{n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n}.(2n+2)\right|=+\infty$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)x^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-2}{n}.\frac{n+1}{n-1}\right|=1$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n.n}\quad=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$$

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}\quad=\sqrt{\lim_{n\to\infty}3\sqrt[n]{n}}\ =\sqrt{3}$$

$e)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{8^{n+1}+3\ln n}(x+1)^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8^{n+1}+3\ln n}}{\sqrt[n]{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\left(8+3\dfrac{\ln n}{8^n}\right)^{1/n}}{\sqrt[n]{n^2}}=\frac{8.8^0}{1}=8$$

$$f)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n^2-3n+1} x^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{\frac{2n^2-3n+1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{2n^2-3n+1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right]^{\frac{3}{n-1}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n}} = e^6$$

2. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right).3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n (x-1)^n$$

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+5)^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{n^2}\right) x^{n+1}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{(n!)^{2n}}$$

Hướng dẫn

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right).3^n} \qquad R = 3$$

Khoảng hội tụ: $(-3, 3)$

$\boxed{x = -3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right).3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2\sqrt{n}+5\right)}$$

Chuỗi phân kỳ vì cùng bản chất với $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right).3^n}$$

$\boxed{x=3}$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right).3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(2\sqrt{n}+5\right)}$$

Chuỗi đan dấu với $a_n=\dfrac{1}{\left(2\sqrt{n}+5\right)}\downarrow 0$

Chuỗi ht theo tc Leibnitz.

$$MHT:\quad D=(-3,3]$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n (x-1)^n \qquad R=2$$

Khoảng hội tụ: $(1-2,1+2)=(-1,3)$

$\boxed{x=-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n (-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^n (-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$\left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^n>1 \qquad \Rightarrow a_n \not\to 0$$

Chuỗi pk theo đk cần

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n}(x-1)^{n}$$

$\boxed{x=3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n}2^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$\Rightarrow a_n \not\to 0$ Chuỗi pk theo đk cần

$$MHT: \quad D=(-1,3)$$

$$c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x+5)^n \qquad\qquad R=0$$

Chuỗi chỉ hội tụ tại: $x=-5$

$$d)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n.n^2+9^n}{3^n.n^2}\right)x^{n+1}$$

$$R=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{x=-\frac{1}{3}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n^2+9^n}{3^n.n^2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{2}{9}\right)^n+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$$

HT HT $\longrightarrow$ HT

$$\boxed{x = \frac{1}{3}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n^2 + 9^n}{3^n.n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n + \frac{1}{n^2}\right]$$

HT HT $\longrightarrow$ HT

$$MHT: \ D = \left[-\frac{1}{3}, \ \frac{1}{3}\right]$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{(n!)^{2n}}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n}$$

* Tìm tất cả các số thực x để

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n + 1}{5^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n + 1}{5^n} = -7$$

Tính chất của chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính

hội tụ R, gọi $S(x)$ là tổng chuỗi.

1/ $S(x)$ liên tục trên miền hội tụ.

2/ $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R)$

3/ $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \ \forall \in (-R, R)$

Chú ý

1. Chuỗi lũy thừa liên tục trên miền xác định
2. Trong khoảng hội tụ, đạo hàm (tích phân) của tổng chuỗi bằng chuỗi đạo hàm (tích phân) tương ứng.
3. Bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm và chuỗi tích phân bằng BKHT của chuỗi ban đầu.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Ví dụ áp dụng: tính tổng chuỗi

Nhắc lại:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Điều kiện: $|x| < 1$

$$1/\ S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad \text{MHT: } D=[-1,1)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x},\forall x\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\forall x\in(-1,1)$$

$$\text{Do } S(0)=0 \quad \Rightarrow S(x)=-\ln(1-x),|x|<1$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1_+}S(x)=-\ln 2$$

$$2/\ S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \qquad \text{MHT: } D=(-1,1)$$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}, x\in(-1,1)$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$$

$$=\frac{x^2}{1-x}, x\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow S(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' =\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$$

3/ Tính $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ suy ra $\sum_{1}^{\infty}\frac{4-3n}{(-7)^n}$

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$ MHT: $D=(-1,1)$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)', x\in(-1,1)$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$$

CHUỖI TAYLOR

Cho hàm f khả vi vô hạn trong lân cận x_0

khi đó, chuỗi Taylor của f trong lân cận này là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Chuỗi Taylor trong lân cận $x_0 = 0$ gọi là chuỗi Maclaurin.

Định lý

Nếu f khả vi vô hạn trong lân cận x_0 và tồn tại

$C > 0$, $R > 0$ sao cho

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le C^n, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Định lý

Nếu f khả vi vô hạn trong lân cận x_0 và tồn tại $C > 0$, $R > 0$ sao cho

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le C, \forall x \in \left(x_0 - R, x_0 + R\right)$$

Khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall x \in \left(x_0 - R, x_0 + R\right)$$

Yêu cầu của 1 bài khai triển chuỗi

1. Vận dụng được chuỗi Maclaurin cơ bản .

2. Viết được dạng chuỗi lũy thừa theo $(x-x_0)^n$ với hàm f cho trước.

3. Chỉ ra miền hội tụ của chuỗi tìm được, đó chính là miền mà hàm f được khai triển thành chuỗi Taylor.

Chuỗi Maclaurin cơ bản

$$1/\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

MKT: $D = R$

$$2/\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

$D = (-1,1)$

$$3/\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$D = \begin{cases} R, & \alpha \in N \\ [-1,1], & \alpha > 0 \\ (-1,1], & -1 < \alpha < 0 \\ (-1,1), & \alpha \le -1 \end{cases}$$

$$4/\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad D=(-1,1]$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\qquad D=[-1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 5/\ \sin x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \cos x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}\right\}\quad D=R$$

$$6/\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad D=[-1,1]$$

Ví dụ

1/ Tìm chuỗi Taylor trong lân cận $x = 2$

$$f(x) = \ln(x+2)$$

Đặt: $X = x - 2$

$$f(x) = \ln(4 + X) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{X}{4}\right)$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{X}{4}\right)^n,$$

MKT : $\frac{X}{4} \in (-1, 1]$

$$f(x) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{X}{4} \right)^n,$$

MKT : $\frac{X}{4} \in (-1,1]$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.4^n} (x-2)^n,$$

với $\frac{x-2}{4} \in (-1,1]$ hay $x \in (-2,6]$

2 / Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 4x + 3}$

$$f(x) = 1 + \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x-3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{7}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= 1 \quad - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad - \frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$f(x) = 1 \quad -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Điều kiện: $|x| < 1$ $\quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$

$$f(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{6.3^n}\right)x^n = -\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{6.3^n}\right)x^n$$

Miền khai triển: $|x| < 1$

2/ Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

$$f(x)=\ln\left[-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\ln(1-x)(1+2x)$$

$$=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

Điều kiện: $-1<-x\le 1$ và $-1<2x\le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}<-x\le\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1-(-2)^n}{n}x^n$$

Với: $\frac{-1}{2}<-x\le\frac{1}{2}$

3/ Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x) = e^{-x}(1+x)$

$$f(x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} x\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

$$(1+x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-n) x^n \qquad D = R$$

Các ví dụ về tính tổng

$$1/\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.2^n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1-1)2^n}{(n+1)!}$$

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}=e^2-1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=e^2-1-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$=e^2-1-\frac{1}{2}\left(e^2-1-2^1\right)=\frac{e^2+1}{2}$$

$$2/\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n.n.(n+1)} \qquad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n.2^n}-\frac{1}{(n+1).2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n}$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-2\left[-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right] \qquad =-\ln 2+1$$

Các ví dụ về tính tổng

$$3/\ S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n(2n+1)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(1/\sqrt{3}\right)^{2n}}{2n+1}$$

$$=-\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(1/\sqrt{3}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=-\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$4/\ S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{3^n}$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n}$$

$$S=\frac{-1/3}{1-(-1/3)}+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$5/\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n(n+2).5^{n+1}}$$

$$S=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$=\frac{1}{10}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n}+\left(\frac{5}{3}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}{n}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[-\ln\left(1+\frac{3}{5}\right)+\frac{25}{9}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\ln\left(1+\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{9}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\ln\left(1+\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{9}\left[\ln\left(1+\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}.\frac{9}{25} \right]\right]$$

$$= \frac{16}{90}\ln\frac{8}{5} - \frac{7}{60}$$

3. Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau:

$a)\ f(x) = \sin^2 x$

$b)\ f(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^2}$

$c)\ f(x) = (2-x)\ln(1-2x)$

$d)\ f(x) = \dfrac{2x}{3+x}$

Hướng dẫn

$a)\quad f(x) = \sin^2 x$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$b)\quad f(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$=2x\left[1-2(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3+\cdots\right]$$

$$=2x\left(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\right)$$

ĐKKT: $-x\in(-1,1)$

$c)\ f(x)=(2-x)\ln(1-2x)$

$$=(2-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}$$

$$-1<-2x\le 1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-2^{n+1}x^n+2^n x^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^{n+1}}{n}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^n}{n-1}$$

4. Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 3$

b) $f(x) = \sin x, \; x = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \arctan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), \; x = \dfrac{\pi}{4}$

4. Tính tổng của các chuỗi lũy thừa sau:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^{n-1}}{(n+1)!}$$

4. Tính tổng của các chuỗi số sau:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n (n+1)!}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^n n!}$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n (2n+1)!}$$

CHUỖI TAYLOR

<u>Nhận xét</u>: vì chuỗi đạo hàm của chuỗi lũy thừa có cùng khoảng htụ với chuỗi ban đầu nên tổng chuỗi lũy thừa là hàm khả vi vô hạn trong khoảng htụ.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2(x - x_0) + 3.a_3(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = a_1,\ f''(x_0) = 2!a_2, \cdots, \\ f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0) \\ a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!} \\ \ldots \\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots \end{cases}$$