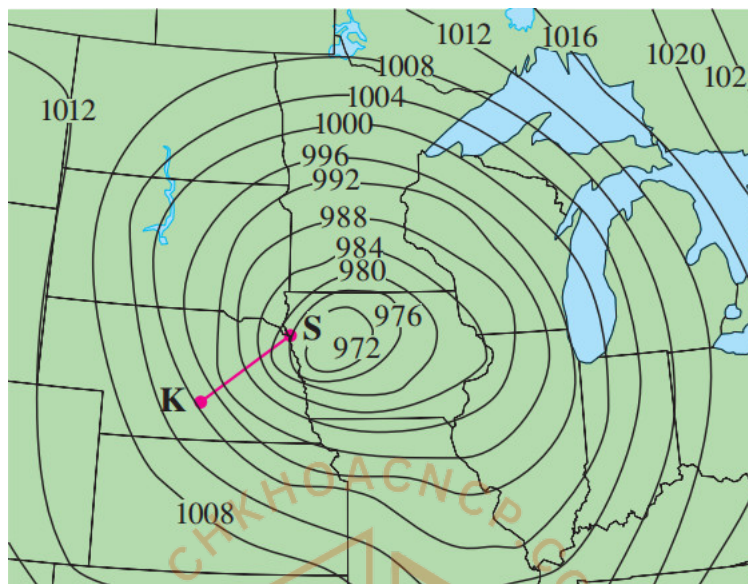
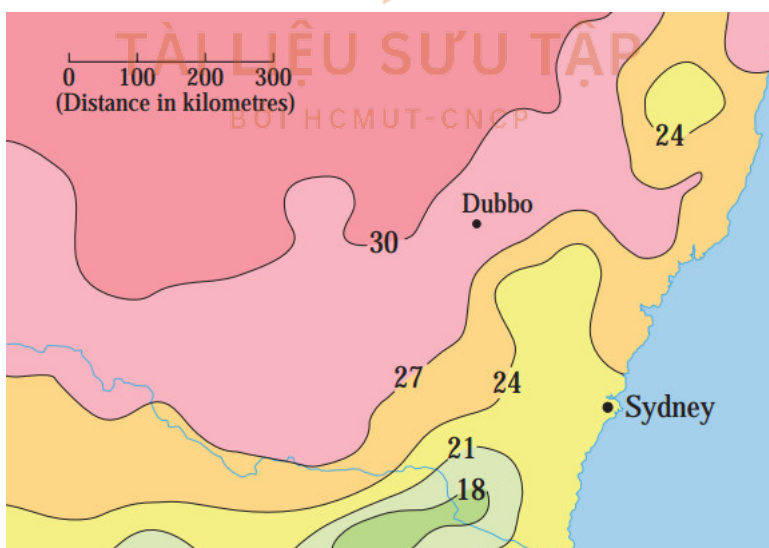


**Bài 1** Dưới đây là đường mức của khí áp (millibar) vào lúc 6:0 sáng ngày 10 tháng 11 năm 1998, khí áp thấp 972 mb di chuyển về hướng đông bắc Iowa, khoảng cách dọc theo đường màu đỏ từ K (Kearney, Nebraska) đến S (Sioux City, Iowa) là 300km. Hãy ước tính giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm khí áp tại Kearney theo hướng Sioux City. Đơn vị tính của đạo hàm theo hướng là gì?



**Bài 2** Bản đồ đường mức biểu diễn nhiệt độ trung bình cao nhất trong tháng 11 năm 2004 ( $^{\circ}C$ ). Ước tính giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm nhiệt độ này tại Dubbo, New South Wales, theo hướng của Sydney. Đơn vị tính là gì?



**Bài 3** Tính đạo hàm theo hướng của  $f$  tại điểm được cho theo hướng được chỉ bởi góc  $\theta$

1.  $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3, (1, 1), \theta = \frac{\pi}{6}$ .

2.  $f(x, y) = ye^{-x}, (0, 4), \theta = \frac{2\pi}{3}$ .

3.  $f(x, y) = e^x \cos y, (0, 0), \theta = \frac{\pi}{4}$ .

**Bài 4** a. Tìm gradient của  $f$ .

b. Tính gradient tại điểm  $P$ .

c. Tính tốc độ biến thiên của  $f$  tại  $P$  theo hướng của vector  $u$ .

1.  $f(x, y) = \sin(2x + 3y), P(-6, 4), u = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i - j)$ .

2.  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}, P(1, 2), u = \frac{1}{3}(2i + \sqrt{5}j)$ .

3.  $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3, P(2, -1, 1), u = \langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \rangle$ .

4.  $f(x, y, z) = y^2e^{xyz}, P(0, 1, -1), u = \langle \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13} \rangle$ .

**Bài 5** Tìm đạo hàm theo hướng của hàm số tại điểm được cho theo hướng của vector  $v$ .

1.  $f(x, y) = e^x \sin y, (0, \frac{\pi}{3}), v = \langle -6, 8 \rangle$ .

2.  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, (1, 2), v = \langle 3, 5 \rangle$ .

3.  $g(p, q) = p^4 - p^2q^3, (2, 1), v = i + 3j$ .

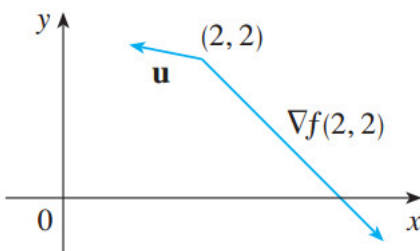
4.  $g(r, s) = \tan^{-1}(rs), (1, 2), v = 5i + 10j$ .

5.  $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x, (0, 0, 0), v = \langle 5, 1, -2 \rangle$ .

6.  $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, (3, 2, 6), v = \langle -1, -2, 2 \rangle$ .

7.  $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t), (1, 1, 1), v = 4i + 12j + 6k$ .

**Bài 6** Sử dụng hình để ước tính  $D_n f(2, 2)$ .



**Bài 7** Tìm đạo hàm theo hướng của  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  tại  $P(2, 8)$  theo hướng của  $Q(5, 4)$ .

**Bài 8** Tìm đạo hàm theo hướng của  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  tại  $P(1, -1, 3)$  theo hướng của  $Q(2, 4, 5)$ .

**Bài 9** Tìm tốc độ biến thiên cực đại của  $f$  tại điểm được cho và hướng của nó.

1.  $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ ,  $(4, 1)$ .
2.  $f(s, t) = te^{st}$ ,  $(0, 2)$ .
3.  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $(1, 0)$ .
4.  $f(x, y, z) = \frac{(x+y)}{z}$ ,  $(1, 1, -1)$ .
5.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $(3, 6, -2)$ .
6.  $f(p, q, r) = \arctan(pqr)$ ,  $(1, 2, 1)$ .

**Bài 10** a. Chứng minh hàm khả vi  $f$  giảm nhanh nhất tại  $x$  theo hướng ngược với vector gradient, tức là, theo hướng của  $-\nabla f(x)$ .

b. Sử dụng kết quả của câu (a) để tìm hướng sao cho hàm  $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$  giảm nhanh nhất tại điểm  $(2, -3)$ .

**Bài 11** Tìm các hướng sao cho đạo hàm theo hướng của  $f(x, y) = ye^{-xy}$  tại điểm  $(0, 2)$  có giá trị 1.

**Bài 12** Tìm tất cả các điểm mà tại đó hướng biến thiên nhanh nhất của hàm số  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$  là  $i + j$ .

**Bài 13** Gần một cái phao tiêu, độ sâu của hồ tại điểm có tọa độ  $(x, y)$  là  $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$ , trong đó  $x, y$  và  $z$  được tính bằng mét. Một người đánh cá trong một cái thuyền nhỏ bắt đầu tại điểm  $(80, 60)$  và di chuyển về điểm phao tiêu nằm tại điểm  $(0, 0)$ . Nước dưới thuyền trở nên sâu hơn hay cạn hơn khi anh ta khởi hành? Giải tích.

**Bài 14** Nhiệt độ  $T$  trong quả bóng kim loại tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ tâm của quả bóng, lấy tâm của quả bóng làm gốc tọa độ. Nhiệt độ tại điểm  $(1, 2, 2)$  là  $120^\circ$ .

- a. Tìm tọa độ biến thiên của  $T$  tại  $(1, 2, 2)$  theo hướng hướng tới điểm  $(2, 1, 3)$ .
- b. Chứng minh tại điểm bất kỳ trong quả bóng, hướng tăng nhiệt độ nhanh nhất chính là hướng của vector chỉ về gốc tọa độ.

**Bài 15** Nhiệt độ tại điểm  $(x, y, z)$  được cho bởi

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

trong đó  $T$  được tính bằng  $^\circ C$  và  $x, y, z$  được tính bằng mét.

- a. Tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ tại điểm  $P(2, -1, 2)$  theo hướng hướng tới điểm  $(3, -3, 3)$ .
- b. Nhiệt độ tăng nhanh nhất tại điểm  $P$  theo hướng nào?

c. Tìm tốc độ tăng tối đa tại  $P$ .

**Bài 16** Giả sử qua một vùng nào đó trong không gian, điện thế  $V$  được cho bởi

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

- a. Tìm tốc độ biến thiên của điện thế tại  $P(3, 4, 5)$  theo hướng của vector  $v = i + j - k$ .
- b.  $v$  biến thiên nhanh nhất tại điểm  $P$  theo hướng nào?
- c. Tốc độ biến thiên tối đa tại  $P$  là bao nhiêu.

**Bài 17** Giả sử bạn đang leo trên một quả đồi mà hình dạng của nó được cho bởi phương trình  $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$ , trong đó  $x, y, z$  được tính bằng mét và bạn đang đứng tại điểm có tọa độ  $(60, 40, 966)$ . Trục  $x$  dương chỉ hướng đông và trục  $y$  dương chỉ hướng bắc.

- a. Nếu bạn đi bộ về hướng nam, bạn sẽ bắt đầu đi lên hay đi xuống? Tốc độ biến thiên là bao nhiêu?
- b. Nếu bạn đi bộ về hướng tây bắc, bạn sẽ bắt đầu đi lên hay đi xuống? Tốc độ biến thiên là bao nhiêu?
- c. Hệ số góc lớn nhất theo hướng nào? Tốc độ đi lên theo hướng đó là bao nhiêu? Đường đi theo hướng đó bắt đầu tại góc bao nhiêu so với đường nằm ngang?

**Bài 18** Đạo hàm theo hướng cấp hai của  $f(x, y)$  là

$$D_n^2 f(x, y) = D_n[D_n f(x, y)]$$

Nếu  $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$  và  $u = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ , tính  $D_n^2 f(2, 1)$ .

**Bài 19** Tìm phương trình của (a) mặt phẳng tiếp xúc và (b) pháp tuyến với mặt được cho tại điểm tương ứng.

1.  $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$ ,  $(3, 3, 5)$ .

2.  $y = x^2 - z^2$ ,  $(4, 7, 3)$ .

3.  $xyz^2 = 6$ ,  $(3, 2, 1)$ .

4.  $xy + yz + zx = 5$ ,  $(1, 2, 1)$ .

5.  $x + y + z = e^{xyz}$ ,  $(0, 0, 1)$ .

6.  $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2$ ,  $(1, 1, 1)$ .

**Bài 20** Nếu  $f(x, y) = xy$ , tìm vector gradient  $\nabla f(3, 2)$  và sử dụng nó để tìm tiếp tuyến với đường mức  $f(x, y) = 6$  tại điểm  $(3, 2)$ . Vẽ đường mức, tiếp tuyến và vector gradient.

**Bài 21** Nếu  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ , tìm vector gradient  $\nabla g(1, 2)$  và sử dụng nó để tìm tiếp tuyến với đường mức  $g(x, y) = 1$  tại điểm  $(1, 2)$ . Vẽ đường mức, tiếp tuyến và vector gradient.

**Bài 22** Có điểm nào trên hyperboloid  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  mà tại đó mặt phẳng tiếp xúc song song với mặt phẳng  $z = x + y$  không?

**Bài 23** Chứng minh ellipsoid  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  và mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 8z = 0$  tiếp xúc với nhau tại điểm  $(1, 1, 2)$ . (Điều này có nghĩa rằng chúng có chung mặt phẳng tiếp xúc tại điểm đó.)

**Bài 24** Chứng minh rằng mọi mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón  $x^2 + y^2 = z^2$  đều đi qua gốc tọa độ.

**Bài 25** Chứng minh rằng mọi pháp tuyến với mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  đều đi qua tâm của mặt cầu.

**Bài 26** Pháp tuyến với paraboloid  $z = x^2 + y^2$  tại điểm  $(1, 1, 2)$  giao với paraboloid lần thứ hai tại điểm nào?

**Bài 27** Pháp tuyến đi qua  $(1, 2, 1)$  trên ellipsoid  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$  giao với hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 102$  tại các điểm nào?

TÀI LIỆU SƯU TẬP  
BỞI HCMUT-CNCP