

# CHƯƠNG 4. Đạo hàm và vi phân

GV. Nguyễn Hữu Hiệp



Bộ môn toán Ứng dụng, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh.

E-mail: [nguyenuuhip@hcmut.edu.vn](mailto:nguyenuuhip@hcmut.edu.vn)

**BACHKHOACNCP.COM**

Ngày 16 tháng 10 năm 2022



- 1 Đạo hàm và vi phân
- 2 Đạo hàm và vi phân cấp cao
- 3 Luyện tập



## Đạo hàm

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a, b) \ni x_0$ . Khi biến số thay đổi từ  $x_0$  đến  $x$ :

- Độ thay đổi biến số (số gia biến số):  $\Delta x = x - x_0$ .
- Độ thay đổi hàm số (số gia hàm số):  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ .
- Tốc độ thay đổi trung bình  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
- Nếu tỷ số  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  tồn tại hữu hạn thì ta nói  $f(x)$  có đạo tại điểm  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (x \rightarrow x_0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

BACHKHOACNCP.COM

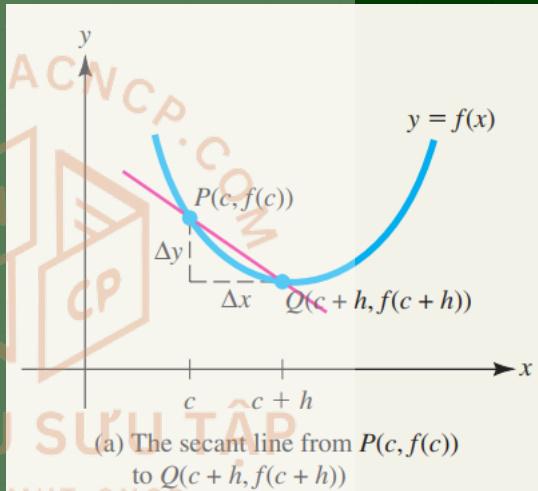
- Hệ số góc (slope) của tiếp tuyến tại  $x_0$

$$k = f'(x_0).$$

$f'(x_0)$  còn gọi là tốc độ thay đổi của  $f(x)$  tại điểm  $x_0$ .

- Phương trình tiếp tuyến của dths tại  $x_0$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



## Ví dụ 1

Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = x^2 + 2x$  tại  $x_0 = 1$

Số gia biến số:  $\Delta x(1) = x - 1$ .

Số gia hàm số:  $\Delta f(1) = f(x) - f(1) = x^2 + 2x - 3$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 2

Cho hàm số  $y = f(x) = x^2 - 4x + 25$ .

a/ Viết PTTT tại điểm  $x_0 = -1$ .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến qua  $O(0; 0)$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Đạo hàm một phía

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a, b) \ni x_0$ .

- Đạo hàm trái

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

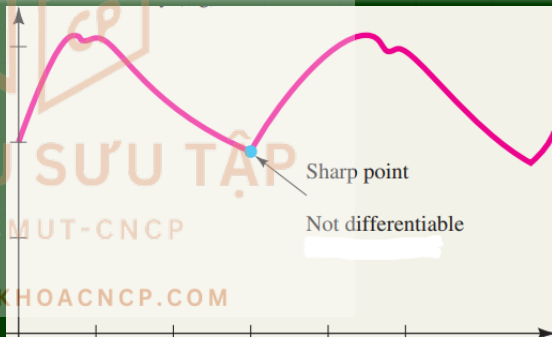
- Đạo hàm Phải

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f$  có đạo hàm tại  $x_0 \iff$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \text{ (và } = f'(x_0))$$

- Nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì liên tục tại  $x_0$ .



BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 3.

Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = |x|$  tại  $x_0 = 0$

$$\text{Đạo hàm trái } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1.$$

$$\text{Đạo hàm phải } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

Vì  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$  nên  $f$  không có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 4.

Tìm  $a, b$  để  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ .

$f$  liên tục tại  $x_0 = 0$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = 0 \iff b = 0$ .

$f$  có đạo hàm tại  $x_0 = 0$  khi và chỉ khi giới hạn sau tồn tại hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax - 0}{x - 0} = a.$$

Vậy  $\forall a \in R, b = 0$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP  
BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 5.

Tìm  $a, b$  để  $f(x) = \begin{cases} ae^x - b & x > 0 \\ x^2 - a, & x \leq 0 \end{cases}$  có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ .

$f$  liên tục tại  $x_0 = 0$  khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ae^x - b) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - a) \iff a - b = -a \iff b = 2a$$

$f$  có đạo hàm tại  $x_0 = 0$  khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax^2 - 2a) - (-a)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - a) - (-a)}{x - 0} \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} a \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \iff a = 0.$$

Vậy  $a = b = 0$ .

BACHKHOACNCP.COM

# Đọc thêm

## Định lý giới hạn đạo hàm

Cho  $f$  liên tục trên  $(a, b) \ni x_0$  và có đạo hàm trên  $(a, x_0)$ . Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  tồn tại hữu hạn thì  $f'_-(x_0)$  tồn tại và

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$$

Tương tự cho đạo hàm phải

Sinh viên có thể dùng định lý này để xét tính đạo hàm của một hàm số.

BACHKHOACNCP.COM

## Tính đơn điệu của hàm số

cho hàm số  $y = f(x)$  có xác định trên  $(a, b)$ .

$f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$   $\xrightarrow{\text{loại trừ tại một số hữu hạn điểm}}$   $f(x)$  đồng biến trong  $(a, b)$ .

$f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$   $\xrightarrow{\text{loại trừ tại một số hữu hạn điểm}}$   $f(x)$  nghịch biến trong  $(a, b)$ .

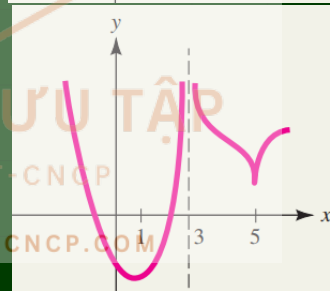
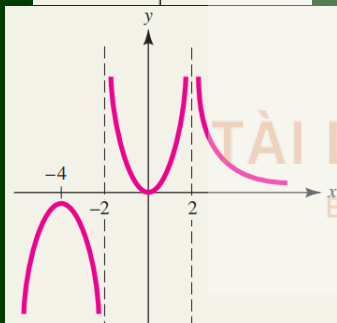
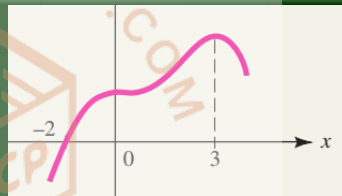
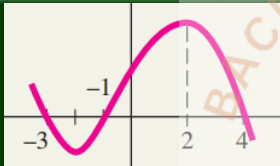
TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

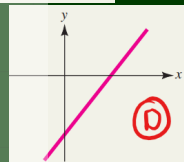
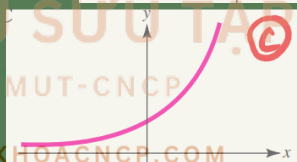
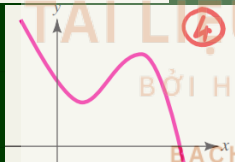
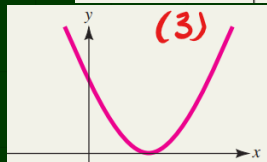
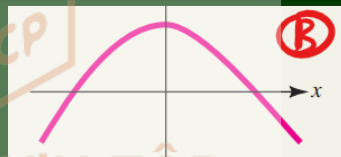
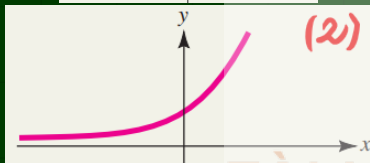
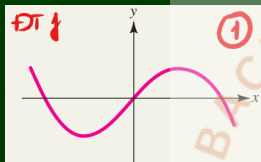
BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 6.

Cho đồ thị của  $y = f(x)$ . Xác định dấu của đạo hàm trên từng khoảng.



# Nối đồ thị $f'$ và $f$ tương ứng



## Quy tắc tính đạo hàm

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(\alpha u)' = \alpha u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

## Đạo hàm hàm hợp

Cho  $u = u(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$  và  $f = f(u)$  có đạo hàm tại  $u_0 = u(x_0)$ . Khi đó,  $f(u(x))$  có đạo hàm tại  $x_0$  và

$$[f(u(x))]'|_{x=x_0} = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Đạo hàm hàm ngược

Cho hàm số  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  song ánh và có  $f'(x_0) \neq 0$  thì hàm ngược  $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  cũng có đạo hàm tại  $y_0 = f(x_0)$  thỏa

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM





## Bảng công thức đạo hàm

$$\bullet (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\bullet (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\bullet (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\bullet (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$\bullet (\sinh x)' = \cosh x.$$

$$\bullet (\cosh x)' = \sinh x.$$

$$\bullet (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet (\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 7.

Tính đạo hàm

$$\text{a/ } f(x) = x \arcsin(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \arcsin(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}}.$$

$$\text{b/ } f(x) = \arctan^2 \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \arctan \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{c/ } f(x) &= x^x. \\ f(x) &= e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1). \end{aligned}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 8.

Tính đạo hàm hàm ngược tại  $y_0$

a/  $y = f(x) = x^3 + x$ . Tính  $(f^{-1})'(2)$ .

$$y_0 = 2 \implies x_0 = 1, f'(x) = 3x^2 + 1 \implies (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

b/  $y = f(x) = e^{3x} + 2x$ . Tính  $(f^{-1})'(1)$ .

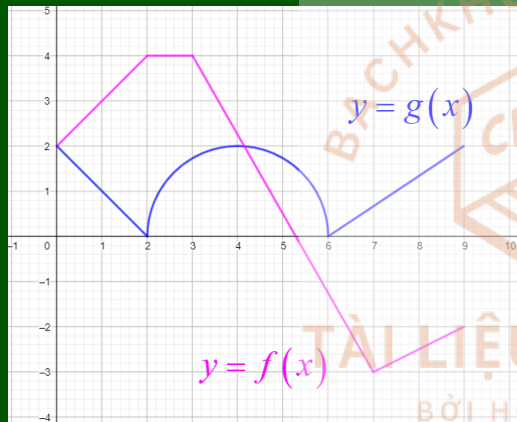
$$y_0 = 1 \implies x_0 = 2, f'(x) = 3e^{3x} + 2 \implies (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 9.



Cho các hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hãy tính

$$f'(5)$$

$$g'(8)$$

$$(f + g)'(4)$$

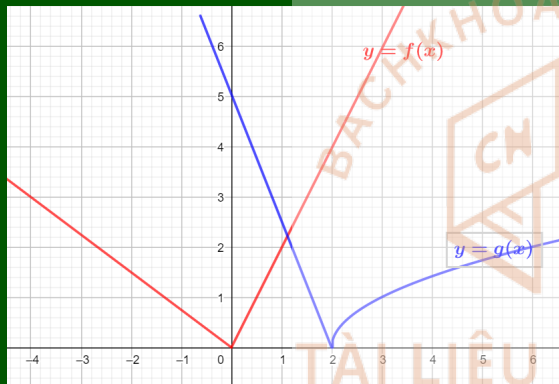
$$(xf(x))'|_{x=6}$$

$$(f \circ g)'(1)$$

$$(g \circ (f + 4))'(1)$$

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 10.



Tính  
 $F'(1)$

$G'(1)$

$H'(1)$

$K'(1)$

Cho hàm số  $f$  và  $g$  có đồ thị như hình bên. Đặt  $F = f \circ g$ ,  $G = g \circ f$ ,  $H(x) = f(x^2 - 1)$ ,  $K = f \circ f$ .

## Khả vi

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a, b) \ni x_0$ . Nếu tồn tại  $A \in \mathbb{R}$  thoả

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \text{ hay } f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

thì ta nói  $f$  khả vi tại điểm  $x_0$ . Khi đó,

$$dy(x_0) = A \cdot \Delta x \text{ hay viết đơn giản } dy(x_0) = A \cdot dx$$

gọi là **vi phân** của  $f$  tại điểm  $x_0$ .

## Định lý

$f$  khả vi tại  $x_0$  khi và chỉ khi  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  và

$$A = f'(x_0)$$

Một cách tổng quát, ta viết

$$dy = y' dx.$$

Từ đây, người ta còn ký hiệu đạo hàm thông qua vi phân

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Khi xét  $x$  gần  $x_0$ , đại lượng  $o(\Delta x)$  rất bé. Do đó

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \approx df(x_0)$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ứng dụng đạo hàm và vi phân

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$ .

- **Ứng dụng xấp xỉ.**  $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ , hay

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Giá trị vế phải  $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$  là PTTT của đths  $y = f(x)$ .

- **Ứng dụng trong vật lý.** Cho một chất điểm chuyển động thẳng với ly độ  $x = x(t)$ . Khi đó vận tốc và gia tốc tức thời của chất điểm là

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t).$$

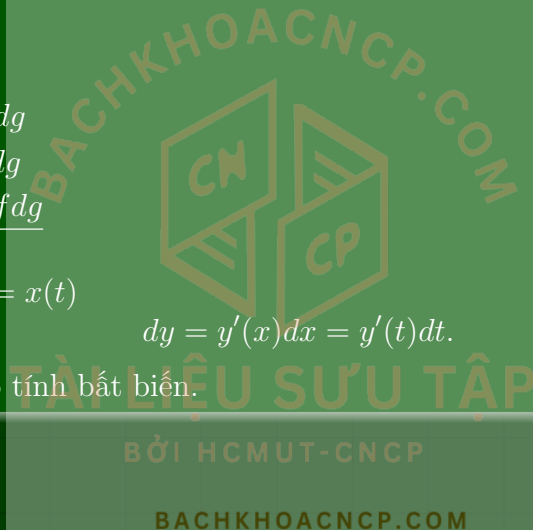


## Tính chất vi phân

- $d(cf) = cdf$
- $d(f \pm g) = df \pm dg$
- $d(fg) = gdf + fdg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$
- Cho  $y = y(x), x = x(t)$

$$dy = y'(x)dx = y'(t)dt.$$

Vi phân cấp 1 có tính bất biến.



## Ví dụ 11.

Cho hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

a/ Tính vi phân  $df(x)$ .

b/ Tìm tốc độ thay đổi của hàm  $f(x)$  tại  $x_0 = \sqrt{3}$ .

c/ Không dùng máy tính, hãy tính gần đúng giá trị  $f(0,02)$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 12.

Theo một nghiên cứu, dân số của một thị trấn sau  $x$  tháng kể từ bây giờ được cho bởi  $P(x) = x^2 + 20x + 8000$ (người).

a/ Tìm tốc độ thay đổi của dân số tại tháng thứ 15.

b/ Tìm dân số tháng thứ 16 bằng 2 cách. Hãy nhận xét kết quả từ 2 câu.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 13.

GDP hàng năm của một quốc gia vào năm thứ  $t$  kể từ năm 2000 được cho bởi  $G(t) = t^2 + 5t + 106$  (triệu USD).

a/ Tìm tốc độ tăng trưởng GDP trong năm 2010.

b/ Tìm tốc độ phần trăm tăng trưởng GDP trong năm 2010.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 14.

Vị trí tại thời điểm  $t$  của một chất điểm trên một đường thẳng là  $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ .

- a/ Tìm vận tốc của chất điểm trong khoảng  $t = 0$  đến  $t = 4$ . Mô tả chuyển động.
- b/ Tìm vận tốc trung bình của chất điểm từ  $t = 0$  đến  $t = 4$ .
- c/ Tìm vận tốc trung bình từ  $t = 3$  đến  $t = 4$  và vận tốc tức thời tại  $t = 3$  và  $t = 5$ .
- d/ Tìm gia tốc của chất điểm tại  $t = 3$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 15.

Doanh thu hàng năm của một công ty tại năm thứ  $t$  kể từ thông kê 1/2010 là  $f(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$  (ngàn USD).

- a/ Tìm tốc độ thay đổi của doanh thu của công ty vào thời điểm 1/2015.
- b/ Tìm tỷ lệ tăng trưởng phần trăm doanh thu trong năm 2015.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 16.

Nhà quản lý cho biết chi phí sản xuất  $q$  sản phẩm là  $C(q) = 0,2q^2 + 1 + 900(USD)$ . Biết rằng trong  $t$  giờ đầu tiên, nhà máy sản xuất được  $q(t) = t^2 + 100t$ .

a/ Số 900 có ý nghĩa gì?

b/ Tìm tốc độ thay đổi của chi phí sản xuất tại thời điểm 1h kể từ lúc bắt đầu.  
Nêu ý nghĩa?

c/ Dùng vi phân để xấp xỉ chi phí sản xuất cho giờ thứ 5.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Marginal Cost/ Revenue/ Profit (chi phí/doanh thu/ lợi nhuận cận biên)

Cho  $C(x)$ ,  $R(x)$ ,  $P(x)$  lần lượt là chi phí, doanh thu, lợi nhuận tính trên  $x$  SP.

- Chi phí cận biên

$$MC := C'(x) \approx C(x+1) - C(x) \text{ (chi phí sx của sp thứ } x+1)$$

- Doanh thu cận biên

$$RC := R'(x) \approx R(x+1) - R(x) \text{ (Doanh thu từ sp thứ } x+1)$$

- Lợi nhuận cận biên

$$PC := P'(x) \approx P(x+1) - P(x) \text{ (lợi nhuận sp thứ } x+1)$$

Ghi chú: hàm doanh thu  $R(x) = x \cdot p(x)$  trong đó  $p(x)$  là giá bán mỗi SP trong lô  $x$  SP. Thường giá càng thấp thì số lượng SP bán ra càng nhiều theo cơ chế thị trường.



## Ví dụ 17.

Một nhà quản lý cho biết chi phí để nhà máy sản xuất  $x$  SP là  $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2x + 98(USD)$  và bán được  $x$  SP nếu giá bán là  $p(x) = 40 - 0,1x(USD)$ .

a/ Tính MC và MR.

b/ Tìm chi phí sản xuất của SP thứ 37 và dùng MC để ước lượng và so sánh.

c/ Tìm doanh thu của SP thứ 37 và dùng MR để ước lượng và so sánh.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

**Ví dụ 18.**

Một nhà sản xuất Camera cho biết lợi nhuận từ việc bán  $x$  trăm Camera được cho bởi  $P(x) = -0,0035x^3 + 0,07x^2 + 25x - 200$ .

- Tìm lợi nhuận cận biên.
- Tính lợi nhuận cận biên tại  $x = 10$ . Cho biết ý nghĩa con số này?
- Tính lợi nhuận của sản phẩm thứ 5000. Nhà quản lý nên tăng hay giảm quy mô sản xuất?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 19.

Người ta đo đặc bán kính của quả bóng xấp xỉ  $6\text{cm}$  với sai số  $2\%$ . Hãy tính tỷ lệ phần trăm sai số của thể tích quả bóng.

BACH KHOA CNCP.COM



TÀI LIỆU SƯU TẬP  
BỞI HCMUT-CNCP  
BACH KHOA CNCP.COM

- 1 Đạo hàm và vi phân
- 2 Đạo hàm và vi phân cấp cao
- 3 Luyện tập



## Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đạo hàm và vi phân cấp 2 được định nghĩa

$$f''(x) = (f'(x))', \quad d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2.$$

Do đó, đạo hàm cấp 2 còn được ký hiệu  $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ .

Tương tự, đạo hàm và vi phân cấp cao

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))', \quad d^{n+1} f(x) = d(d^n f(x)).$$

Đối với hàm hợp  $y = y(x)$ ,  $x = x(t)$ :  $d^2 y(x) = d(dy(x)) = d(y'(x)dx) = y''(x)dx^2 + y'(x)d^2 x$ ,  $d^2 y(t) = y''(t)dt^2$ .

Vi phân cấp 2 không còn tính bất biến: cần xác định biến chính để áp dụng đúng công thức (trong trường hợp này,  $t$  là biến chính,  $x$  là biến trung gian).

## Ví dụ 20.

Cho hàm số  $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$ . Tìm vi phân cấp 1 và cấp 2 tại  $x_0 = 1$ .

$$f'(x) = 12x^5 - 20x^3 + 7, \quad f''(x) = 60x^4 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)(x + 1).$$

$$df(1) = f'(1)dx = -11x, \quad df(1)^2 = (df(1)dx)^2 = 121dx^2$$

$$d^2f(1) = f''(1)dx^2 = 0 \cdot dx^2 = 0.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

# Đạo hàm cấp cao các hàm cơ bản

- $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$
- $((x + a)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1)(x + a)^{\alpha - n}.$   
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{x + a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}$
- $(\ln(ax + b))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n - 1)! a^n}{(x + a)^n}$
- $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$

BACHKHOACNCP.COM



## Công thức đạo hàm cấp cao

Cho 2 hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm đến cấp  $n$ .

Đạo hàm tổng

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

Đạo hàm tích (Công thức Leinitz)

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 21.

Tính đạo hàm cấp  $n$ .

$$\text{a/ } (\ln(2x + 3))^{(100)} = \frac{(-1)^{99} 99! \cdot 2^{100}}{(2x + 3)^{100}} = \frac{99! 2^{100}}{(2x + 3)^{100}}.$$

$$\text{b/ } \left( \frac{1}{x^2 - 4} \right)^{(n)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{4} \left( \frac{1}{(x - 2)^{n+1}} - \frac{1}{(x + 2)^{n+1}} \right)$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 21(tt)

Tính đạo hàm cấp  $n$ .

$$c/ (\sin^2 x)^{(n)} = \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right)^{(n)} = 0 - \frac{1}{2} 2^n \cdot \cos(2x + n \frac{\pi}{2}) = -2^{n-1} \cdot \cos(2x + n \frac{\pi}{2}).$$

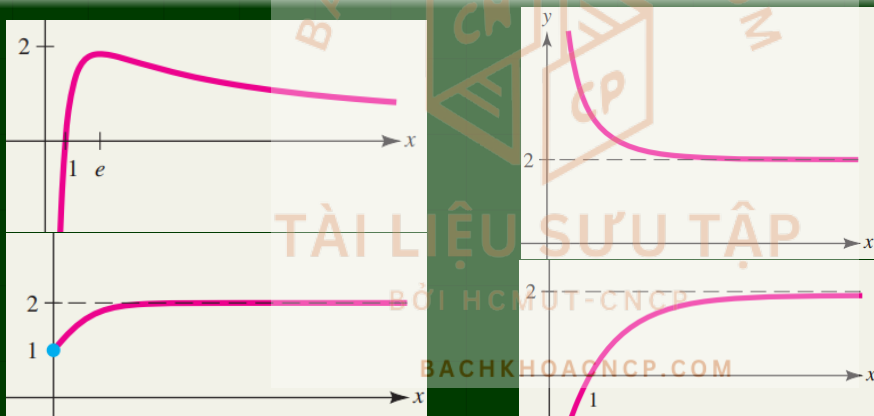
$$d/ f(x) = (3x^2 + 1) \ln x. \text{ Tính } f^{(100)}(1).$$

Áp dụng công thức leinitz với:  $u = 3x^2 + 1, v = \ln x \Rightarrow u' = 6x, u'' = 6, u^{(k)} = 0, \forall k \geq 3$ .

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= C_{100}^0 u^{(0)} v^{(100)} + C_{100}^1 u^{(1)} v^{(99)} + C_{100}^2 u^{(2)} v^{(98)} \\ &= 1 \cdot (3x^2 + 1) \cdot \frac{(-1)^{99} 99!}{x^{100}} + 100 \cdot 6x \cdot \frac{(-1)^{98} 98!}{x^{99}} + 4950 \cdot 6 \cdot \frac{(-1)^{97} 97!}{x^{98}} \\ \Rightarrow f^{(100)}(1) &= -4 \cdot 99! + 600 \cdot 98! - 29700 \cdot 97! = -9708 \cdot 97! \end{aligned}$$

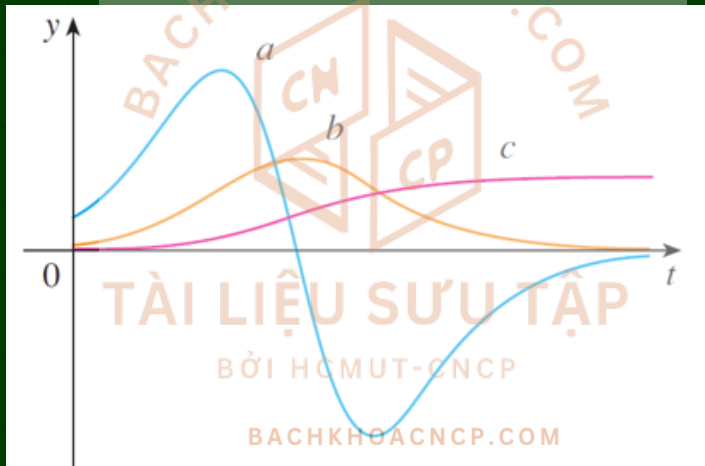
## Ví dụ 22.

Chọn hàm số trong các hàm số  $f(x) = 2 - e^{-2x}$ ,  $f(x) = x \ln x^5$ ,  $f(x) = \frac{2}{1 - e^{-x}}$ ,  $f(x) = \frac{2}{1 - e^{-x}}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x^5}{x}$ ,  $f(x) = (x - 1)e^{-2x}$  có đồ thị như bên dưới.



## Ví dụ 23.

Xác định chính xác đồ thị của mỗi hàm số  $f$ ,  $f'$  và  $f''$  như bên dưới.



- 1 Đạo hàm và vi phân
- 2 Đạo hàm và vi phân cấp cao
- 3 Luyện tập



Ví dụ 24.

Cho  $y = f(x) : \begin{cases} x = (t - 1)e^{t+2}, \\ y = t^2 + 3t + 1 \end{cases}$ . Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm ứng với  $t = 1$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

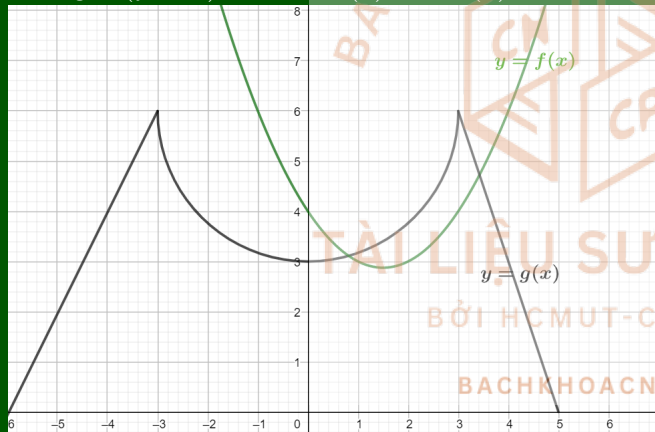
Ví dụ 25.

Cho  $f(x) = (x - 3)e^{2x+3} + 2, x > 5/2$ . Tìm  $(f^{-1})'(2)$ .



## Ví dụ 26.

Cho  $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 4$  và  $g(x)$  có đồ thị như bên dưới. Đặt  $F = g \circ f$  và  $G = g \circ (f - 3)$ . Tính  $F'(0)$  và  $G'(1)$ .





## Ví dụ 27.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa

a/  $(x) = 2^{x \ln x}$  tại  $x_0 = 1$

b/  $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$  tại  $x_0 = 0$

c/  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ,  $f'(x) = ?$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 28.

Cho  $f(x)$ ,  $g(x)$ , có đạo hàm tại mọi điểm (trên  $\mathbb{R}$ ). Biết giá trị của  $f$ ,  $f'$ ,  $g$ ,  $g'$  tại một số điểm được cho theo bảng sau

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	4	2	5
2	9	2	3	1
3	10	-4	4	2
4	-1	3	6	7

Tìm  $(f \circ g)'(2)$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 29.

Cho  $f(x)$  tăng ngặt và có đạo hàm tại mọi điểm (trên  $\mathbb{R}$ ). Biết giá trị của  $f$ ,  $f'$  tại

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
1	2	5
2	3	1
3	4	2
4	6	7

một số điểm được cho theo bảng sau . Tìm  $(f^{-1})'(4)$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 30.

Cho  $f(x) = x^2 - 4x$ . Tính  $\Delta f$  và  $df$  tại  $x_0 = 1$  và  $\Delta x = 0,01$ .



## Ví dụ 31.

Cho  $f(x) = \arctan(x - 1)$ . Dùng vi phân (không dùng máy tính) để tính xấp xỉ giá trị  $f(1,01)$  và  $f(1,98)$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 32.

Tính gần đúng  $\ln(1,02)$  nhờ xấp xỉ tuyến tính.



## Ví dụ 33.

Tính đạo hàm

a/ Tính  $h'(0)$ . Biết  $h(x) = \sqrt{5x^2 + g(x)}$ ,  $g(0) = 4$ ,  $g'(0) = 2$ .

b/ Tính  $h'(-1)$ . Biết  $h(x) = [3g(x)^2 + 4g(x) + 2]^5(g(x) + x)$ ,  $g(-1) = -1$ ,  $g'(-1) = 2$ .

c/ Tính  $h'(1)$ . Biết  $h(x) = \left(3x + \frac{1}{g(x)}\right)^{3/2}$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g'(1) = 2$ .

d/ Tính  $h'(0)$ . Biết  $h(x) = \left(\frac{g(x) - x}{3 + g(x)}\right)^2$ ,  $g(0) = 3$ ,  $g'(0) = 2$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 34.

Tính đạo hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 35.

Cho  $f(x) = e^{2x} - x, x \in \left(-\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$ . Tính  $(f^{-1})'(1)$ .

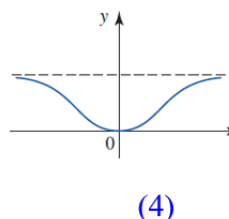
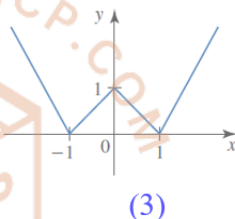
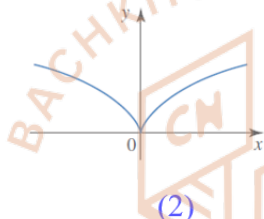
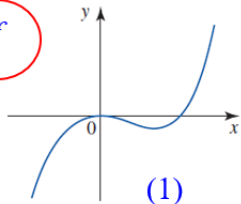
TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

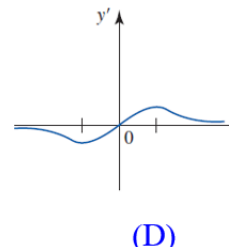
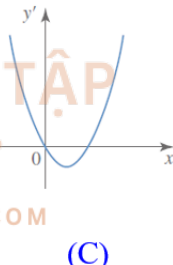
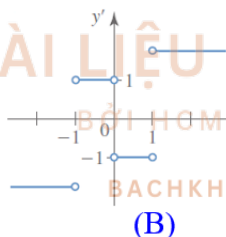
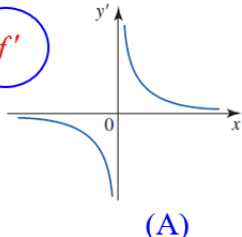
BACHKHOACNCP.COM

# Ví dụ 36. Nối các hình tương ứng

$f$



$f'$



## Ví dụ 37.

Cho hàm số  $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$ .

a/ Tìm vi phân cấp 1 và cấp 2 tại  $x_0 = -1$ .

b/ Tìm khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 38.

Cho hàm số  $f(t) = \frac{t^2 - 3t + 25}{t^2 + 7t + 25}$ .

a/ Tìm vi phân cấp 1 và cấp 2 tại  $t_0 = -1$ .

b/ Tìm khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 39

Tìm cực trị của hàm số sau

a/  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

b/  $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$

c/  $f(x) = e^{-3x} \frac{\sqrt{2x - 5}}{(6 - 5x)^4}$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 40.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 2, x \in [0; 1].$

b.  $f(t) = \frac{t^2}{t-1}, t \in [-2; 1/2]$

c.  $v(u) = \frac{u^2 + 3u - 1}{u^2 + u + 1}$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

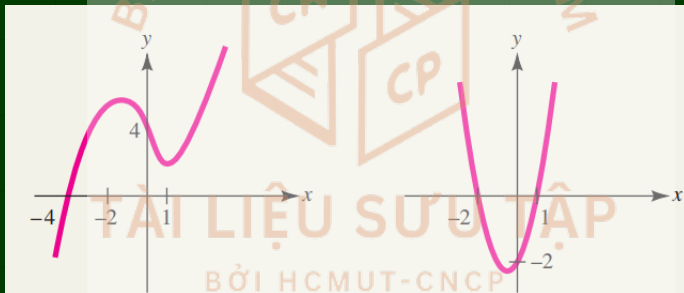
BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 41.

Cho 2 đồ thị hàm số sau.

a/ Hãy xác định đồ thị nào của  $y = f(x)$  và đồ thị nào của  $y = f'(x)$ .

b/ Xác định dấu của  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ .



Hình: Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = f'(x)$ .

## Ví dụ 42.

Tính đạo hàm

a/ cấp 7 của  $f(x) = (x^2 - x).e^{2x}$  tại  $x_0 = 1$ .

b/ cấp 10 của  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-2}$  tại  $x_0 = 1$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 43.

Cho một khối cầu bán kính  $R(\text{cm})$ . Biết rằng nếu tăng bán kính lên  $0,01(\text{cm})$  đơn vị thì thể tích khối cầu tăng lên  $\pi \approx 3,14(\text{cm}^3)$ . Ước lượng thể tích khối cầu ban đầu.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

**Ví dụ 44.**

Giả sử mặt trăng thực sự có dạng hình cầu. Người ta ước tính bán kính của mặt trăng là 1.737 km, sai số khoảng 0,02 km. Dùng vi phân ước tính sai số khi tính diện tích bề mặt mặt trăng.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 45.

Cho 2 chất điểm di chuyển trên 1 đường thẳng theo phương trình  $x_1(t) = 100 + t^3(cm)$  và  $x_2(t) = t^3 + t^2(cm), t(s) \geq 0$ . Tìm vận tốc và gia tốc tại lúc 2 chất điểm gặp nhau.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 46.

Một cái thang có chiều dài 3m được chống vào tường. Gọi  $\theta$  là góc hợp bởi thang và tường,  $x$  là khoảng cách từ tường đến chân thang. Hỏi nếu thang bị trượt, tốc độ thay đổi của  $x$  theo  $\theta$  là bao nhiêu khi  $\theta = \pi/3$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 47.

Trong một đợt bùng phát dịch bệnh ở tỉnh A, số ca nhiễm mới ở ngày thứ  $t$  (so với ngày đầu tiên phát hiện bệnh) cho bởi hàm số  $N(t) = 30 - 0,7t + 5,6t^2 - 0,15t^3$ . Tốc độ biến đổi số người nhiễm mới ở ngày thứ 15 là bao nhiêu? Tốc độ này ở ngày thứ 25 như thế nào?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 48.

Một quả bóng hình cầu khi được bơm khí thì thể tích tăng lên với tốc độ  $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Hỏi khi đường kính đạt  $50\text{cm}$  thì tốc độ tăng của bán kính là bao nhiêu.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

**Ví dụ 49.**

Chi phí của một bạn sinh viên Bách Khoa mỗi năm phụ thuộc vào giá tiền mỗi tín chỉ và được mô tả bởi hàm số  $f(p)$ , trong đó  $f$  và  $p$  tính theo đơn vị trăm ngàn. Hãy cho biết ý nghĩa của các mô tả sau:

$$a/f(4.8) = 312.8$$

$$b/f'(4.8) = 36.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 50.

Nhiệt độ trung bình  $T^{\circ}F$  phụ thuộc vào độ cao  $h(\text{ft})$  so với mực nước biển:  
 $T = T(h)$ . Cho  $h'(1000) = -0.05$  có ý nghĩa gì?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



**Ví dụ 51.**

Một nghiên cứu về một loại cây nông nghiệp ở một vùng cho biết rằng nếu bón  $x$ (kg) phân hữu cơ thì sản lượng  $y = f(x)$ (kg).

a/ Nêu ý nghĩa của  $f(5) = 15000$  và  $f'(5) = 150$ .

b/ Với giả thiết câu a), hãy ước lượng sản lượng nếu bón  $5,2$ kg.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 52.

Tổng chi phí mỗi tuần để sản xuất  $x$  tủ lạnh của một công ty cho bởi hàm số  $C(x) = 8000 + 200x - 0.2x^2$  ( $0 \leq x \leq 400$ )(USD)

a) Tính chi phí sản xuất của tủ lạnh thức 251.

b) Bằng cách dùng chi phí cận biên ( $f'(250)$ ) để xấp xỉ chi phí sản xuất của tủ lạnh thức 251.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 53.

Một loại loa được cho giá như sau: nếu số lượng loa bán ra là  $x$  (bộ) thì đơn giá cho mỗi bộ là  $P(x) = -0,02x + 400, 0 \leq x \leq 20.000(USD)$

- Xác định hàm thu nhập  $R$  theo số lượng bộ loa bán ra.
- Xác định hàm Marginal Revenue.
- Tính  $R'(2000)$  và giải thích kết quả vừa tìm được.
- Nếu tổng chi phí sản xuất  $x$  bộ loa là xác định hàm lợi nhuận  $P(x)$ .
- Tính và nêu ý nghĩa của đại lượng  $P'(2000)$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 54.

Cho biết một khẩu súng khi bắn với góc nghiêng  $\alpha^0$  thì đầu đạn sẽ bay xa một khoảng  $R = R(\alpha)(\text{m})$ . Hãy ước tính tầm bắn ứng với góc  $\alpha = 41^0$  khi biết  $f(40) = 10.000$  và  $f'(40) = 20$ .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 55.

Cho biết 1 mol khí lý tưởng ở nhiệt độ  $T(K)$ , thể tích  $V(l)$  thì áp suất  $P(kP)$  được liên hệ bởi đẳng thức  $PV = 8,31T$ . Tại nhiệt độ  $300^0K$  và thể tích  $100(l)$ , tốc độ thay đổi của nhiệt độ theo thời gian là  $0,1K/s$  và tốc độ thay đổi thể tích theo thời gian là  $0,2(l/s)$ . Tính tốc độ thay đổi của áp suất theo thời gian.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



## Ví dụ 56.

Số người sống ở vùng ven biển sẽ ảnh hưởng đến số cá voi của vùng biển gần đó. Nếu gọi  $p(n)$  là số lượng cá voi được tính theo  $n$ , số người sống ở ven biển,  $k(p)$  là số loài phù du ở vùng biển đó, phụ thuộc vào số lượng cá voi, ta có

$$p(n) = 100 - \frac{n}{2}, \quad k(p) = 400 - \frac{p}{5}$$

Tìm số loài phù du ở vùng biển này theo số lượng cư dân ven biển nếu số cư dân là 100.000 và tốc độ biến động số loài phù du theo số cư dân. Đơn vị tính các đại lượng là ngàn.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 57.

Trong một đợt dịch bệnh lan truyền mạnh, số ca mắc mới ở ngày thứ  $t$  (tính từ ngày thống kê đầu tiên) là hàm số  $S(t)$ .

a/  $S(15) = 400$  có ý nghĩa gì?

b/  $S'(45) = -7$  có ý nghĩa gì?

c/  $(S^{-1})'(400) = 1/9$  có ý nghĩa gì?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

## Ví dụ 58.

Một nghiên cứu cho biết công ty sẽ bán được  $x$  loa nếu giá bán là  $p(x) = -0,02x + 400, 0 \leq x \leq 20.000(USD)$ .

- Xác định hàm doanh thu  $R(x)$ .
- Xác định hàm MC(Marginal Revenue) và nêu ý nghĩa.
- Tính  $R'(2000)$  và giải thích ý nghĩa.
- Cho biết hàm chi phí  $C(x) = 100x + 20$ . Tìm hàm lợi nhuận.
- Tính  $P'(2000)$  và nêu ý nghĩa.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM





THANK YOU FOR  
ATTENTION

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

