Đại học Quốc gia TP.HCM
Trường Đại học Bách Khoa
Bộ môn Toán Ứng dụng

Bài Giảng Đại Số Tuyến Tính

TS. Đặng Văn Vinh

E-mail: dangvvinh@hcmut.edu.vn

Website: www.tanbachkhoa.edu.vn/dangvanvinh

Ngày 14 tháng 8 năm 2013

Mục tiêu môn học

Môn học cung cấp kiến thức cơ bản của đại số tuyến tính. Sinh viên cần nắm vững kiến thức nền tảng và biết giải các bài toán cơ bản: số phức, tính định thức, làm việc với ma trận, giải hệ phương trình tuyến tính, không gian véc tơ, không gian euclide, ánh xạ tuyến tính, tìm trị riêng - véc tơ riêng, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Tài liệu tham khảo

1) Đỗ Công Khanh, Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng. Đại số tuyến tính. NXB Đại học quốc gia.

2) Đỗ Công Khanh. Đại số tuyến tính. NXB Đại học quốc gia.

3) Trần Lưu Cường. Đại số tuyến tính.NXB Đại học quốc gia.

Ghi chú:

Tài liệu này chỉ tóm tắc lại bài giảng của Thầy Đặng Văn Vinh. Để hiểu bài tốt, các em cần đi học trên lớp lý thuyết và bài tập.
Sinh viên tạo tài khoảng trên website www.tanbachkhoa.edu.vn/dangvanvinh , làm thêm bài tập trắc nghiệm trên đó.
Vì nội dung mới được soạn lại nên không thể tránh sai sót. Mọi góp ý, sinh viên có thể liên hệ trên diễn đàn website hoặc qua mail: nguyenhuuhiep47@gmail.com.

Mục lục

Số phức

Nội dung

1) **Dạng đại số của số phức.**
2) **Dạng lượng giác số phức.**
3) **Dạng mũ số phức.**
4) **Nâng số phức lên lũy thừa.**
5) **Khai căn số phức.**
6) **Định lý cơ bản đại số.**

0.1 Dạng đại số của số phức

Định nghĩa 0.1 .

i) *Số i, được gọi là **đơn vị ảo**, là một số sao cho $i^2 = -1$.*

ii) *Cho a, b là 2 số thực, i là đơn vị ảo. Khi đó $z = a + bi$ được gọi là số phức.*
*Số thực $a := Re(z)$ gọi là **phần thực** của số phức z.*
*Số thực $b := Im(z)$ gọi là **phần ảo** của số phức z.*

iii) *Tập tất cả các số phức dạng $z = 0 + ib, b \in R \setminus \{0\}$ gọi là **số thuần ảo**.*

Ví dụ 0.1

$i, -2i, 3i$ là những số thuần ảo.
Tập hợp số thực là tập hợp con của tập hợp số phức, vì: $\forall a \in R : a = a + 0.i$ là một số phức.

Định nghĩa 0.2 *2 số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau*

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \iff \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2. \end{cases}$$

Ví dụ 0.2 *cho $z_1 = 2 + 3i, z_2 = m + 3i$. Tìm m để $z_1 = z_2$.*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} 2 = m, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Phép cộng trừ 2 số phức

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Ví dụ 0.3 *Tìm phần thực và ảo của $z = (3 + 5i) + (2 - 3i)$.*

$z = (3 + 5i) + (2 - 3i) = (3 + 2) + (5 - 3)i = 5 + 2i. \implies Re(z) = 5, Im(z) = 2.$

Phép nhân 2 số phức
$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Ví dụ 0.4 *Tìm dạng đại số của* $z = (2+5i)(3+2i)$.

$z = (2+5i)(3+2i) = 2.3 + 2.2i + 5i.3 + 5i.2i = 6 + 4i + 15i + 10i^2 = 6 + 10(-1) + 19i = -4 + 19i.$

Ghi chú
Khi cộng(trừ) 2 số phức, ta cộng(trừ) phần thực và phần ảo tương ứng. Khi nhân 2 số phức, ta thực hiện giống như nhân 2 biểu thức đại số với chú ý $i^2 = -1$.

Số phức liên hợp
Số phức $\bar{z} = a - bi$ gọi là liên hợp của số phức $z = a + bi$.

Ví dụ 0.5 *Tìm số phức liên hợp của* $z = (2+3i)(4-2i)$.

Ta có $z = (2+3i)(4-2i) = 2.4 - 2.2i + 3i.4 - 3i.2i = 8 - 4i + 12i + 6 = 14 + 8i \Longrightarrow \bar{z} = 14 - 8i$.

Tính chất cho 2 số phức z, w

1) $z + \bar{z} \in R$.
2) $z.\bar{z} \in R$.
3) $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in R$.
4) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
5) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$.
6) $\bar{\bar{z}} = z$.
7) $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \forall n \in N$.

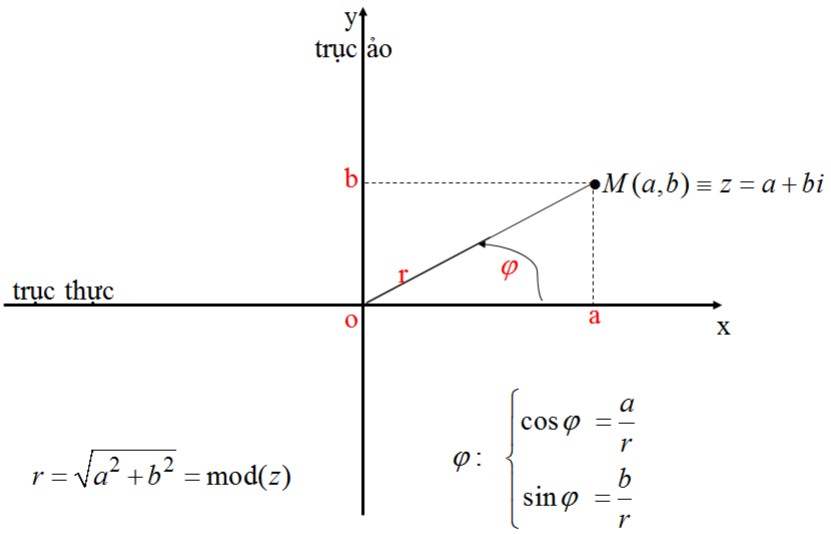
Chia 2 số phức
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}.$$
Ta nhân liên cả tử và mẫu cho liên hợp mẫu.

Ví dụ 0.6 *Thực hiện phép toán* $z = \dfrac{3+2i}{5-i}$

Nhân cả tử và mẫu cho $5+i$, ta được
$$z = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15+3i+10i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Chú ý: so sánh với số phức
Trong trường số phức C không có khái niệm so sánh. Biểu thức $z_1 < z_2$ hay $z_1 \geq z_2$ đều không có nghĩa trong trường số phức.

0.2 Dạng lượng giác của số phức



Mô đun số phức $z = a + bi$ là một số thực không âm được định nghĩa

$$mod(z) = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Argument của số phức z là góc φ và được ký hiệu là

$$\arg(z) = \varphi$$

Góc φ được giới hạn trong khoảng $(0, 2\pi)$ hoặc $(-\pi, \pi)$.

Ví dụ 0.7 *Tìm mô đun của số phức $z = 3 - 4i$.*

$a = 3, b = -4 \Longrightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$

Chú ý

- Nếu xem số phức $z = a + bi$ là một điểm (a, b) trong mặt phẳng phức thì

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$

  là khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0, 0)$ đến z.

- Cho $z = a + bi, w = c + di$ thì

$$|z-w| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

  là khoảng cách giữa 2 điểm z và w.

Ví dụ 0.8

Tập hợp các số phức z thỏa $|z - (2 - 3i)| = 5$ là đường tròn tâm $(2, -3)$ bán kính bằng 5.

Công thức tìm argument

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Ví dụ 0.9 *Tìm argument số phức $z = \sqrt{3} + i$.*

$a = \sqrt{3}, b = 1$. Ta tìm góc φ thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Dạng lượng giác số phức

$$z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} i\right)$$

$\Longrightarrow \boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ gọi là dạng lượng giác.

Ví dụ 0.10 *Tìm dạng lượng giác số phức $z = -1 + i\sqrt{3}$.*

$a = -1, b = \sqrt{3}$. Mô đun:$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$. Argument $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-1}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Dạng lượng giác $z = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})$.

Sự bằng nhau của 2 số phức ở dạng lượng giác

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi. \end{cases}$$

Phép nhân ở dạng lượng giác

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Mô đun nhân với nhau, argument cộng lại.

Ví dụ 0.11 *Tìm dạng lượng giác số phức $z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$.*

$z = (1+i)(1-i\sqrt{3}) = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}).2(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3}) = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{-\pi}{12} + i\sin\dfrac{-\pi}{12})$.

Phép chia dạng lượng giác

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), r_2 \neq 0.$$

Mô đun chia cho nhau, argument trừ ra.

Ví dụ 0.12 *Tìm dạng lượng giác số phức $z = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{-\sqrt{3} + i}$.*

$$z = \frac{2 - i\sqrt{12}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{4(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})}{2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})} = 2\left[\cos(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})\right] = 2\left(\cos\frac{-7\pi}{6} + i\sin\frac{-7\pi}{6}\right).$$

Định lý Euler(1707-1783)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Dạng mũ của số phức $z = r.e^{i\varphi}$.

Ví dụ 0.13 *Tìm dạng mũ của số phức $z = -\sqrt{3} + i$.*

Dạng lượng giác $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. Dạng Mũ $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Ví dụ 0.14 *Biểu diễn số phức sau trên mặt phẳng phức $z = e^{a+3i}, a \in R$.*

Ta có $z = e^a(\cos 3 + i\sin 3)$.
$\varphi = 3$ không đổi nên tập hợp là nửa đường thẳng nằm trong góc phần tư thứ 2.

Phép nâng lũy thừa.
$z = a + bi$, $\quad z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = (a^2 - b^2) + 2abi$,

$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$

$z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}bi + C_n^2 a^{n-2}(bi)^2 + \cdots + C_n^n (bi)^n := A + Bi.$

Ví dụ 0.15 *Cho số phức $z = 2 + i$. Tính z^5.*

$$\begin{aligned} z^5 = (2+i)^5 &= C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 i + C_5^2 2^3 i^2 + C_5^3 2^2 i^3 + C_5^4 2.i^4 + C_5^5 i^5 \\ &= 32 + 5.16.i + 10.8(-1) + 10.4.(-i) + 5.2.1 + i \quad = -38 + 41i. \end{aligned}$$

Lũy thừa bậc n của i.
Ta phân tích $n = 4p + r$: r là phần dư trong phép chia n cho 4.

$$\boxed{i^n = i^r}$$

Ví dụ 0.16 *Tính $z = i^{2013}$.*

Ta có $2013 = 503.4 + 1 \Longrightarrow z = i^{2013} = i^1 = i$.

Ví dụ 0.17 *Cho số phức $z = 1 + i$. Tìm z^3 và z^{100}.*

a) $z^3 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$.

b) Ta dùng nhị thức newton như trên sẽ rất dài.

Công thức De Moivre
Dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Longrightarrow \boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$

Dạng lượng mũ $z = re^{i\varphi} \Longrightarrow \boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$

Mô đun mũ n lên, argument tăng n lần.

Ví dụ 0.18 *Sử dụng công thức De Moivre, tính*

a) $(1+i)^{25}$. *b)* $(-1 + i\sqrt{3})^{200}$. *c)* $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^{17}}{(\sqrt{12} + 2i)^{20}}$.

a) $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow z^{25} = \sqrt{2}^{25}(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}) = 12\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

b) Tương tự.

c) Tương tự.

căn bậc n của số phức
Căn bậc n của số phức z là số phức w thỏa $w^n = z, n \in N$.

Công thức căn bậc n.
Cho dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Công thức

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right); k = 0, 1, \ldots, (n-1)}$$

Căn bậc n của $z (z \neq 0)$ có đúng n giá trị phân biệt.

Ví dụ 0.19 *Tìm căn bậc n của các số phức sau:*

a) $\sqrt[3]{8}$.

b) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$.

c) $\sqrt[8]{\dfrac{16i}{1+i}}$.

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}}$.

e) $\sqrt{5 + 12i}$.

f) $\sqrt{1 + 2i}$.

Bài làm

a) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0) \Longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\dfrac{0 + k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{0 + k2\pi}{3}\right); k = 0, 1, 2.$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4}\right); k = 0, 1, 2, 3.$

c) Tương tự

d) Tương tự

e) Argument của $5 + 12i$ không phải cung đặc biệt. Ta sẽ dùng dạng đại số để tính $\sqrt{5 + 12i}$ như sau

$$\sqrt{5 + 12i} = a + bi \Longleftrightarrow 5 + 12i = (a + bi)^2 \Longleftrightarrow 5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5, \\ 2ab = 12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3, \\ b = \pm 2. \end{cases}$$

Vậy: $\sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i)$

Định lý cơ bản đại số
Mọi đa thức bậc n có đúng n nghiệm kể cả bội.

Hệ quả: Cho $P(z)$ là đa thức hệ số thực.

$$p(a + bi) = 0 \Longrightarrow p(a - bi) = 0.$$

Ví dụ 0.20 *Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$, biết 1 nghiệm là $2 + i$.*

Theo hệ quả: $P(2 + i) = 0 \Longrightarrow P(2 - i) = 0$.
Do đó $P(z)$ chia hết cho $(z - (2 + i))(z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$ và được thương là $z^2 + 9$.
Ta viết $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 9)$ có 4 nghiệm là $2 + i, 2 - i, 3i, -3i$.

Ví dụ 0.21 *Giải phương trình $z^9 + i = 0$.*

$$z = \sqrt[9]{-i} = \sqrt[9]{\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9}, k = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

Ví dụ 0.22 *Giải phương trình*

a) $z^5 + 1 - i$. *b)* $z^2 + z + 1 = 0$. *c)* $z^4 + z^2 + 2 = 0$. *d)* $z^2 + 2z + 1 - i = 0$.

Bài làm

a) $z = \sqrt[5]{-1+i} = \ldots$ tương tự như trên

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{3}$.
Nghiệm $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\quad z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

c) Đặt $w = t^2$

d) Lập Δ và tính $\sqrt{\Delta}$ rồi tính nghiệm theo công thức.

Bài tập

Câu 1) Rút gọn biểu thức

(a) $(2-i)^5$ (b) $\dfrac{(2-3i)^5}{i^5(1+i)}$ (c) $\dfrac{(2+2i)^9}{(i\sqrt{3}-1)^7}$ (d) $\dfrac{(i\sqrt{12}-2)^{14}}{(1-i)^{19}}$

Câu 2) Tính

(a) $\sqrt[6]{64}$
(b) $\sqrt{5+12i}$
(c) $\sqrt[6]{\dfrac{-16i}{(i-\sqrt{3})^2}}$

Câu 3) Giải phương trình:

(a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ (b) $z^2 + z + 1 - i = 0$ (c) $z^4 + z^2 + 4 - 28i = 0$

Câu 4) Tính $\sqrt[10]{z}$ biết $(\sqrt{3} + 2i)z + \dfrac{2+6i}{1+i} = 3iz + (3+i)(2-i)$

Câu 5) Giải phương trình $z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 16z + 52 = 0$ biết phương trình có một nghiệm $z_1 = 2 + 3i$

Câu 6) Đưa về dạng lượng giác

(a) $z = \sin\varphi + 2i\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ (b) $w = \cos\varphi + i(1 + \sin\varphi)$

Chương 1

Ma trận

Nội dung

- **Định nghĩa và ví dụ.**
- **Các phép biến đổi sơ cấp.**
- **Các phép toán đối với ma trận.**
- **Hạng của ma trận.**
- **Ma trận nghịch đảo.**

1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1 (Ma trận) .
Ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số (thực hoặc phức) hình chữ nhật có m hàng và n cột.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}, B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & 4i \end{pmatrix}$$

A là ma trận cỡ 2×3 có 2 hàng và 3 cột. Các phần tử của ma trận A:

$$a_{11} = 3, a_{12} = 4, a_{13} = 1, a_{21} = 2, a_{22} = 0, a_{32} = 5.$$

B là ma trận cỡ 2×2 có các phần tử trong phức.

Ghi chú

- Ma trận A cỡ $m \times n$ thường được ký hiệu bởi $A = (a_{ij})_{m\times n}$.
- Tập tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ trên trường số K được ký hiệu $M_{m\times n}(K)$.

Ma trận không.
Ma trận không có tất cả các phần tử bằng 0, ký hiệu là 0

$$0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Có vô số ma trận 0 tùy theo cỡ.

Phần tử cơ sở của một hàng là phần tử khác 0 đầu tiên của hàng đó kể từ bên trái sang.
Hàng toàn số 0 thì không có phần tử cơ sở.

Ma trận bậc thang

1. Hàng toàn số 0 (nếu có) thì nằm dưới.
2. Phần từ cơ sở hàng dưới nằm bên phải phần tử cơ sở hàng trên.

Ví dụ 1.2

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ không phải bậc thang.

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$ không phải bậc thang.

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ là ma trận bậc thang.

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix}$$ là ma trận bậc thang.

Ma trận chuyển vị
Chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$ thu được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

Ví dụ 1.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Ma trận vuông có số hàng bằng số cột.

Tập tất cả các ma trận vuông trên trường số K được ký hiệu là $M_n[K]$.

Đường chéo chính của ma trận vuông A đi qua các phần tử

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Ví dụ 1.4

Ma trận vuông cấp 4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ có các phần tử trên đường chéo chính là $1, 1, -3, 0$.

Ma trận tam giác

i) Ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ gọi là tam giác trên nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$
Các phần tử phía dưới đường chéo chính bằng 0.

ii) Ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ gọi là tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0, \forall i < j$
Các phần tử phía trên đường chéo chính bằng 0.

Ma trận chéo có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.
Hay nó vừa tam giác trên, vừa tam giác dưới.
Ma trận vuông, không cũng là ma trận chéo.

Ma trận đơn vị là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo bằng 1.

Ma trận đối xứng thỏa $A^T = A$

Ma trận phản đối xứng thỏa $A^T = -A$

Ví dụ 1.5

Ma trận tam giác trên $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ma trận tam giác dưới $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ma trận chéo $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ma trận đơn vị cấp 3 là $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ma trận phản đối xứng $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Các phép biến đổi sơ cấp

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

1) Nhân một hàng với 1 số khác 0: $h_i \to \alpha h_i; \alpha \neq 0$.

2) Cộng vào một hàng một hàng khác đã được nhân với 1 số tùy ý: $h_i \to h_i + \beta h_j, \forall \beta$.

3) Đổi chỗ 2 hàng: $h_i \leftrightarrow h_j$.

Tương tự ta có 3 phép biến đổi theo cột.
Các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến đổi cơ bản nhất đối với ma trận.

Định lý Mọi ma trận đều có thể đưa về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp.

Khi dùng phép biến đổi sơ cấp với ma trận, ta thu được nhiều ma trận bậc thang khác nhau.

Ví dụ 1.6 *Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận sau về dạng bậc thang* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 + h_1]{\substack{h_2 \to h_2 - 2h_1 \\ h_3 \to h_2 - 3h_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 - 2h_2]{h_3 \to h_3 + h_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_4 \to h_4 + h_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 3.$$

1.3 Các phép toán ma trận

Hai ma trận bằng nhau nếu chúng cùng cỡ và các phần tử tương ứng bằng nhau: $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

Cho 2 ma trận A, B **cùng cỡ** và số α.
Tổng $A + B$: cộng các phần tử tương ứng.
Nhân $\alpha.A$: nhân α vào tất cả các phần tử của A.

Ví dụ 1.7 *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 1 & -2 & -9 \end{pmatrix}$.

Tính chất

i. $A + B = B + A$. iv. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

ii. $(A+B)+C = A+(B+C)$. v. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

iii. $A + 0 = A$. vi. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Phép nhân hai ma trận Cho $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times m}$.
Tích $A.B = C = (c_{ij})_{m\times n} : c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

$$AB = \begin{pmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \ldots & b_{pj} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & & c_{ij} & & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Điều kiện phép nhân AB: *số cột của A bằng số hàng của B.*
c_{ij} là tích vô hướng hàng i của A và cột j của B.

Ví dụ 1.8 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. *Tính* AB.

$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.1 + (-1).3 + 4.2 = 7$: tích vô hướng hàng 1 của A và cột 1 của B.

Tương tự, ta tính được $AB = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.

Tính chất

i. $A(BC) = (AB)C$. iv. $I_m A = A I_m = A$.

ii. $A(B + C) = AB + AC$.

iii. $(B + C)A = BA + CA$. v. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Chú ý: Nhìn chung $AB \neq BA$; $AB = AC \not\Rightarrow B = C$, $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$.

Nâng lũy thừa:
Quy ước: $A^0 = I \qquad A^n = A.A...A.A(n$ n ma trận $A)$.

Ví dụ 1.9 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *và* $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. *Tính* $f(A)$.

Ta có

$$f(A) = 2A^2 - 4A + 3I.$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.10 *Tính* A^{200}, *với*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *b)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài giải

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200.3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = 2\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{200} = 2^{200}\begin{pmatrix} 1 & 200.\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{200}\begin{pmatrix} 0 & 300 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A \Longrightarrow A^{200} = 2^{199}.A = \begin{pmatrix} 2^{199} & 2^{199} \\ 2^{199} & 2^{199} \end{pmatrix}$.

Tóm lại
$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4 Hạng của ma trận

Hạng ma trận A là số hàng khác 0 của ma trận bậc thang của A, ký hiệu là: $r(A)$.

Ví dụ 1.11 *Tìm hạng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - 3h_1]{h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 2.$$

Tính chất

i) $r(A) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

ii) $A = (a_{ij})_{m\times n} \Longrightarrow r(A) \leq \min\{m, n\}$.

iii) Nếu $A \xrightarrow{\text{biến đổi sơ cấp}} B \Longrightarrow r(A) = r(B)$.

1.5 Ma trận nghịch đảo

Ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho

$$AB = I = BA.$$

Khi đó, B gọi là nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Ví dụ 1.12

a) Nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ là $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vì $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta tìm ma trận nghịch đảo của A có dạng $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ta có $AB = I \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+c & 5b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b+d=0 \\ 5a+c=0 \\ 5b+d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=-5 \\ d=2 \end{cases} \implies A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Hãy thử tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Chú ý: Không phải mt vuông nào cũng có nghịch đảo. Có rất nhiều mt vuông không có nghịch đảo.

Sự tồn tại ma trận khả nghịch

Cho ma trận vuông A. Các mệnh đề sau tương đương

i) A khả nghịch (tồn tại A^{-1}).

ii) $r(A) = n$: ma trận không suy biến

iii) $AX = 0 \iff X = 0$.

iv) $A \xrightarrow{\text{Bđsc theo hàng}} I$.

Ma trận sơ cấp: Ma trận thu được từ I bằng đúng 1 phép biến đổi sơ cấp gọi là ma trận sơ cấp.

Ví dụ 1.13 .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to 3h_3} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to 3h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = E_1.A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = E_2.A.$$

Tương tự:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = A.E_3.$$

Mỗi phép biến đổi sơ cấp tương ứng với phép nhân ma trận sơ cấp tương ứng.
Bđsc theo hàng $\Longrightarrow$ nhân bên trái. Bđsc theo cột $\Longrightarrow$ nhân bên phải.

Cách tìm ma trận nghịch đảo

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Bđsc theo hàng}} [I|A^{-1}]$$

Ví dụ 1.14 *Tìm ma trận nghịch đảo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài giải

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3-h_1]{h_2-h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_1-h_2]{h_3-h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2-h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính chất ma trận nghịch đảo

Cho hai ma trận A, B khả nghịch. Ta có

i) $(A^{-1})^{-1} = A$ ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bài tập

Bài 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $3A - 2B^T$

Bài 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Tính $2AC - (CB)^T$

Bài 3. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 4x - 1$. Tính $f(A)$ và A^{2013}.

Bài 4. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Đáp số $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Bài 5. Tìm hạng của ma trận

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & -3 \\ 5 & 3 & 8 & 9 & -5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & m \end{pmatrix}$.

Bài 6. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, Đáp án $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Chương 2

Định thức

Nội dung

- **Định nghĩa định thức và ví dụ.**
- **Tính chất định thức.**
- **Dùng định thức để tìm ma trận nghịch đảo.**

2.1 Định nghĩa định thức và ví dụ

Định thức ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ là **một số**, được ký hiệu bởi

$$\det(A) = |a^{ij}|_n = |A|.$$

Bù đại số của phần tử a_{ij} là

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \begin{matrix} \text{định thức thu được từ } A \\ \text{bỏ đi hàng i, cột j} \end{matrix} \right|_{n-1}$$

Định nghĩa định thức bằng qui nạp.

i) $k = 1 : A = [a_{11}] \Longrightarrow |A| = a_{11}$.

ii) $k = 2 : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$\vdots$

iii) $k = n : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_n \Longrightarrow |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$.

Ví dụ 2.1 *Tính định thức của* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Bài giải
$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1A_{11} + 2A_{12} - 3A_{13}$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 0\\2 & 4\end{vmatrix} = 12$ (từ A, bỏ hàng 1 và cột 1).

Tương tự: $\det(A) = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 0\\3 & 4\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{vmatrix} - 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} = 12 - 16 + 15 = 11.$

2.2 Tính chất định thức

Có thể tính định thức bằng cách khai triển theo một hàng hoặc 1 cột bất kỳ

$$|A| = \begin{vmatrix}. & . & . & . & . & . & . & . & .\\ a_{k1} & & a_{k2} & & \dots & & & a_{kn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\end{vmatrix} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}.$$

Ví dụ 2.2 *Tính định thức*

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 3\\0 & 0 & -3\end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix}2 & -3 & 3 & 2\\3 & 0 & 1 & 4\\-2 & 0 & 3 & 2\\4 & 0 & -1 & 5\end{vmatrix}$

a) Khai triển theo hàng 3: $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 3\\0 & 0 & -3\end{vmatrix} = -3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} = -3(-3) = 9.$

b) Khai triển theo cột 2

$$I = \begin{vmatrix}2 & -3 & 3 & 2\\3 & 0 & 1 & 4\\-2 & 0 & 3 & 2\\4 & 0 & -1 & 5\end{vmatrix} = -3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\-2 & 3 & 2\\4 & -1 & 5\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{khai triển theo hàng 1}}$$

$$= 3\left(3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\-1 & 5\end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 2\\4 & 5\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 3\\4 & -1\end{vmatrix}\right) = 3(51 + 18 - 40) = 87.$$

Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Ví dụ 2.3 .

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & 3\\0 & 4 & -2 & 0\\0 & 0 & -3 & 2\\0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix} = 1.4.(-3).5 = -60.$$

Dùng biến đổi sơ cấp để tính định thức

1. Nếu $A \xrightarrow{h_i \to \alpha h_j} B$ thì $|B| = \alpha|A|$.
2. Nếu $A \xrightarrow{h_i + \beta h_j} B$ thì $|B| = |A|$.
3. Nếu $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$ thì $|B| = -|A|$.

Nguyên tắc tính định thức sử dụng biến đổi sơ cấp

1. Chọn 1 hàng (hoặc 1 cột tùy ý).
2. Chọn 1 phần tử khác 0 của hàng (cột) đó. Dùng biến đổi sơ cấp, khử tất cả các phần tử khác.
3. Khai triển theo hàng (hay cột) đã chọn.

Ví dụ 2.4 .

a) $I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[h_4+2h_1]{\substack{h_2-2h_1 \\ h_3-3h_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{theo cột 1}]{\text{khai triển}} 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{h_3-3h_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -15 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -15 \end{vmatrix} = -1(15+4) = -19.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[h_4-h_1]{h_3+2h_1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{theo cột 4}]{\text{khai triển}} -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30.$

Tính chất định thức: Cho $A \in M_n$.

i) $\det(A^T) = \det(A)$.

ii) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.

iii) $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

iv) $|A^m| = |A|^m$.

v) A có 1 hàng (hoặc cột) bằng 0 thì $|A| = 0$.

vi) A có 2 hàng (hoặc cột) tỷ lệ thì $|A| = 0$.

Chú ý: nhìn chung $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Ví dụ 2.5 *Cho $A, B \in M_3$ thỏa $|A| = 2, |B| = 3$.*

Ta có $|2A^3| = 2^3.|A|^3 = 8.2^3 = 64$. $\quad |3AB^T| = 3^3|A||B| = 27.2.3 = 162$.

Điều kiện khả nghịch
A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.

Ví dụ 2.6 *Tìm m để $A.B$ khả nghịch. Biết* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài làm
AB khả nghịch khi và chỉ khi $\det(AB) \neq 0$

$$\iff \det(A).\det(B) \neq 0 \iff -1.(-4m-1) \neq 0 \iff m \neq -\frac{1}{4}.$$

2.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức.

Định nghĩa 2.1 (Ma trận phụ hợp) .
Ma trận phụ hợp của ma trận vuông $A \in M_n$ được định nghĩa là

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

Công thức tính ma trận nghịch đảo $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}.P_A}$

Ví dụ 2.7 *Tìm ma trận nghịch đảo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài làm
$\det(A) = -2 \neq 0 \Longrightarrow A$ khả nghịch.
$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -1.$
Tương tự: $A_{21} = 4, A_{22} = -3, A_{23} = -1, A_{31} = -2, A_{32} = 1, A_{33} = 1.$
Ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} P_A = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (nhớ lấy chuyển vị).

Tính chất

i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

ii) $P_A = |A|^{n-1}$.

iii) $r(P_A) = \begin{cases} n, & \text{nếu } r(A) = n \\ 1, & \text{nếu } r(A) = n-1 \\ 0, & \text{nếu } r(A) < n-1 \end{cases}$.

Ví dụ 2.8 *Cho $A \in M_3$ biết $|A| = -2$. Tính* $\det(2P_A^2)$.

Bài làm
Ta có: $\det(2P_A^2) = 2^3.|P_A|^2 = 8.(|A|^{3-1})^2 = 8.(-2)^4 = 128.$

Ví dụ 2.9 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. *Tìm m để $r(P_A) = 1$.*

Bài làm
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}. \qquad r(P_A) = 1 \Longleftrightarrow r(A) = 3 - 1 = 2 \Longleftrightarrow m = -2$

Bài tập

1. Tính định thức

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. ĐS: 59.

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. ĐS: -161.

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{vmatrix}$. ĐS: $-2i$.

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. ĐS: 9.

(e) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

ĐS: $(c-x)(b-x)(a-x)(c-a)(c-b)(b-a)$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix}_{n+1}$.

ĐS:$-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)$.

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$. ĐS: $n!$.

(h) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$. ĐS: $2n+1$.

(i) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 & 3 \\ x & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. ĐS: $9(x^2+4)$.

(j) $D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 7 \end{vmatrix}$.

HD: kt theo h_1, suy ra $D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2}$.

(k) $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 \end{vmatrix}$.

HD: kt theo h_1, suy ra $D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2}$.

(l) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}$.

HD: kt theo h_1, suy ra $D_n = 2D_{n-1} - 2D_{n-2}$.

2. Tìm ma trận nghịch đảo

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ĐS: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ĐS: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 1 & 0 \\ 17 & -5 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Tìm m để ma trận khả nghịch

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. ĐS: $m \neq 9$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. ĐS: $\nexists m$.

4. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Tính $|A^{-1}|, |(5A)^{-1}|, |2P_A|$. ĐS: $\frac{1}{2}, \frac{1}{250}, 32$.

5. Cho $A, B \in M_3[R] : |A| = 2, |B| = -3$. Tính $|(4AB)^{-1}|, |P_{AB}|$. ĐS: $-\frac{1}{384}, 36$.

Chương 3

Hệ phương trình

Nội dung

- **Hệ phương trình tổng quát.**
- **Hệ Cramer.**
- **Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.**

Định nghĩa 3.1 (hệ phương trình tuyến tính) *Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ *được gọi là hệ số của hệ phương trình.*
$b_1, b_2, \dots, b_m$ *được gọi là hệ số tự do của hệ phương trình.*

Ta ký hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m\times n}.$$

Hệ phương trình được viết lại

$$\boxed{A.X = b \text{ hoặc viết gọn } (A|b).}$$

Chú thích

- Một hệ phương trình tuyến tính có thể:

  1)vô nghiệm 2)có nghiệm duy nhất 3) vô số nghiệm.
- Hai hệ phương trình gọi là tương đương nếu chúng cùng tập nghiệm.
- Để giải hệ phương trình, ta dùng phép biến đổi tương đương để đưa về hệ đơn giản.

Phép biến đổi tương đương

Một phép biến đổi được gọi là tương đương nếu nó biến một hệ phương trình bất kỳ thành một hệ phương trình tương đương.
Ta có 3 phép biến đổi tương đương thường gặp:

i) Nhân 2 vế của một phương trình với 1 số khác 0.

ii) Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã được nhân với một số tùy ý.

iii) Đổi chỗ hai phương trình.

Chú ý:

- Đây là 3 phép biến đổi quen thuộc ở phổ thông mà chúng ta đã biết.
- Nếu ta ký hiệu hệ phương trình ở dạng ma trận mở rộng $(A|b)$. Các phép biến đổi sơ cấp đối với ma trận tương ứng với các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình.

Ẩn cơ sở của hệ phương trình ở dạng bậc thang

- Ẩn cơ sở là ẩn tương ứng với cột chứa phần tử cơ sở.
- Ẩn tự do là ẩn tương ứng với cột không có phần tử cơ sở.

Ví dụ 3.1 $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{biến đổi sơ cấp}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right]$

x_1, x_3, x_4 là phần tử cơ sở. x_2 là phần tử tự do.

Các bước giải hệ phương trình

Bước 1: Đưa ma trận $\tilde{A} = [A|b]$ về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp theo hàng.

Kiểm tra hệ có nghiệm hay không.

Bước 2: Giải hệ phương trình từ dưới lên.

Ví dụ 3.2 *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$$

Bài làm

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 - 3h_1]{h_2 - 2h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 + h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Đặt $x_4 = \alpha$. pt (3): $x_3 = -1$. Từ pt (2): $x_2 = 1 + x_3 + x_4 = \alpha$. Từ pt(1):$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3\alpha$.
Vậy nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3\alpha, \alpha, -1, \alpha), \alpha \in R$.

Định lý Kronecker Capelli
Nếu $r(A|b) \neq r(A)$ thì hệ $AX = b$ vô nghiệm.
Nếu $r(A|b) = r(A)$ thì hệ $AX = b$ có nghiệm.

i) Nếu $r(A|b) = r(A) =$số ẩn thì hệ $AX = b$ có nghiệm duy nhất.

ii) Nếu $r(A|b) = r(A) <$số ẩn thì hệ $AX = b$ có vô số nghiệm.

Ví dụ 3.3 *Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau vô số nghiệm*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + mx_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Bài làm

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & m & -7 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & m-3 & -1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & m-3 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m-2 & 8 \end{array}\right]$$

Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A) < 3$. Vì $r(A|b) = 3$ nên không tồn tại m để hệ vô số nghiệm.

Ví dụ 3.4 *Tìm tất cả các giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + mx_2 - x_3 = -1 \\ mx_1 + x_2 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Vì hệ có 3 phương trình nên $r(A) \leq 3 < 4 =$ số ẩn nên hệ không có nghiệm duy nhất.
Chú ý: Nếu hệ có số phương trình ít hơn số ẩn thì không thể có nghiệm duy nhất.

3.1 Hệ Cramer

Hệ Cramer
Hệ $AX = b$ gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i \in \overline{1,n}$$

với A_i là ma trận thu từ A bằng cách thay cột i bởi cột tự do b.

Ví dụ 3.5 *Kiểm tra hệ sau là Cramer và giải hệ*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$$

Bài làm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$|A| = -12 \neq 0$ nên hệ là Cramer.

$|A_1| = 228, |A_2| = -204, |A_3| = -36$. Nghiệm của hệ là $\left(\frac{|A_1|}{||A}, \frac{|A_2|}{||A}, \frac{|A_3|}{||A}\right) = (-19, 17, 3)$.

3.2 Hệ thuần nhất

Hệ thuần nhất

- Hệ $AX = b$ gọi là thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$
- Hệ thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường.
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$
- Hệ thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi
$$r(A) = n = \text{số ẩn}.$$
- Cho A là ma trận vuông. Hệ thuần nhất $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường(*nghiệm khác 0*) khi và chỉ khi
$$|A| \neq 0.$$

Ví dụ 3.6 *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Bài làm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Đặt các ẩn tự do làm tham số $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$.
Pt(2): $x_2 = x_3 + x_4 = \alpha + \beta$. Pt(1):$x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 = -3\beta$.
Vậy nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3\beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta)$.

Ví dụ 3.7 *Tìm m để hệ có nghiệm không tầm thường*

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$$

Bài làm

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n \iff |A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+3)(m-1)^3.$$

Vậy $m = -3 \vee m = 1$.

Ví dụ 3.8 *Tìm m để hệ có vô số nghiệm*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + mx_3 + 2x_4 = 0 \\ mx_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài làm
Vì A là ma trận cở 3×4 nên $r(A) \le 3 < 4 =$số ẩn. Vậy hệ luôn có vô số nghiệm.

Chú ý: Hệ thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn thì vô số nghiệm.

Bài tập

Bài 1) Giải hệ phương trình

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$.
ĐS: $(-2\alpha - \beta, \alpha, -\beta, \beta)$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right]$.
ĐS: $(18, -5, 4)$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$. ĐS: $(\frac{-17}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

(d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right]$.
ĐS $(-5 - \alpha, 5 + 2\alpha, \alpha)$.

(e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$.
ĐS: $(-43, 11, 8)$

(f) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$
ĐS:$(-24 + 2\alpha - 3\beta, -7 + 2\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 4)$

(g) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$. ĐS:$(\frac{1}{3} - 2\alpha, \frac{1}{3} + \alpha, \alpha, -\frac{4}{3})$.

Bài 2) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & m & m+1 \end{array}\right]$. ĐS $m \ne 2$.

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right]$. ĐS $m \ne -2$.

Bài 3) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & m & 2 \\ -2 & m & 1 & 4 & m^2 \end{array}\right]$. ĐS: $\nexists m$.

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & m & m-1 \end{array}\right]$. $\forall m \in R$.

Chương 4

Không gian véc tơ

Nội dung

- **Định nghĩa và ví dụ**
- **Độc lập tuyến tính - phụ thuộc tuyến tính**
- **Hạng của họ véc tơ**
- **Cơ sở và số chiều**
- **Tọa độ véc tơ**
- **Không gian con**
- **Tổng giao 2 không gian con**

4.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 4.1 (Không gian véc tơ) *Cho V là tập hợp khác rỗng và 2 phép toán: cộng 2 véc tơ và nhân véc tơ với một số thỏa mãn 8 tiên đề sau*

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $\exists 0 \in V : x + 0 = x$

iv) $\forall x \in V, \exists(-x) \in V : x + (-x) = 0$

v) $\alpha, \beta \in K : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

vi) $\alpha \in K : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

viii) $1.x = x$

Khi đó, ta nói V là một không gian véc tơ.

Chú ý:
Đây là khái niệm được mở rộng từ khái niệm véc tơ ở phổ thông.
Tập các véc tơ trong mặt phẳng (hoặc không gian) có gốc O là một không gian véc tơ.

Tính chất

i) Véc tơ không là duy nhất.

ii) Véc tơ đối $(-x)$ của x là duy nhất.

iii) $0.\vec{x} = \vec{0}, \forall x \in V$

iv) $\alpha.\vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in K$

v) $-x = -1.x, \forall inV$

Ví dụ 4.1

1. Tập $V_1 = \{(x_1; x_2; x_3)|x_i \in R; i = 1, 2, 3\}$ với phép toán cộng 2 véc tơ và nhân véc tơ với số thực thông thường là một không gian véc tơ trên R. Ký hiệu là R^3.
   Tương tự, ta có không gian $R^2, R^3, R^4, \dots, R^n, \dots$

2. Tập $V_2 = \{ax^2 + bx + c|a, b, c \in R\}$ với phép toán thông thường đối với đa thức là một không gian véc tơ. Ký hiệu là $P_2[x]$.
   Tương tự, ta có không gian $P_3[x], P_4[x], \dots, P_n[x], \dots$

3. Tập $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |a, b, c, d \in R \right\}$ với phép toán thông thường đối với ma trận là một không gian véc tơ. Ký hiệu là $M_2[R]$.
   Tương tự, ta có các không gian $M_{m\times n}[R], M_{m\times n}[R]$ các ma trận cỡ $m \times n$ trong thực và phức.

4. Tập $V_4 = \{(x_1, x_2, x_3)|x_i \in R \wedge x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ với phép toán đối với véc tơ thông thường là một không gian véc tơ.
   Chú ý: Có nhiều cách định nghĩa phép toán để cho các tập hợp trên là một không gian véc tơ, miễn là thỏa 8 tiên đề của không gian trên.

4.2 Độc lập tuyến tính - phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 4.2 *Trong không gian véc tơ V, cho tập hợp con gồm m véc tơ $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$*

- *Véc tơ x gọi là tổ hợp tuyến tính của M nếu $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ thỏa*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

- *$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ không đồng thời bằng 0 thỏa*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \Longrightarrow M \text{ phụ thuộc tuyến tính.}$$

- *M gọi là độc lập tuyến tính nếu nó không PTTT. Tức là*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Nói cách khác:
M PTTT nếu có một THTT không tầm thường bằng không.
M ĐLTT nếu nó chỉ có duy nhất một THTT bằng không là tổ hợp tầm thường ($\alpha_k = 0, \forall k$).

Ví dụ 4.2 *Trong R^3, cho họ véc tơ $M = \{(1; 1; 1), (2; 1; 3), (1; 2; 0)\}$.*

a) Véc tơ $x = (2; -1; 3)$ có là tổ hợp tuyến tính của M hay không?

b) M ĐLTT hay PTTT?

Bài làm

a) Xét $x = \alpha(1; 1; 1) + \beta(2; 1; 3) + \gamma(1; 2; 0) \Longleftrightarrow (2; -1; 3) = (\alpha + 2\beta + \gamma; \alpha + \beta + 2\gamma; \alpha + 3\beta)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + 3\beta = 3 \end{cases}, (A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow r(A) = 2 < r(A|b) = 3.$$

Hệ vô nghiệm, tức là không tồn tại $\alpha\beta, \gamma$. Vậy x không là THTT của M.

b) Xét tổ hợp bằng 0

$\alpha(1;1;1) + \beta(2;1;3) + \gamma(1;2;0) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma; \alpha + \beta + 2\gamma; \alpha + 3\beta) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$$

Hệ vô số nghiệm nên tồn tại nghiệm không tầm thường, do đó M PTTT.

Cho tập $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ và véc tơ x

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 \Longleftrightarrow AX = 0$$

$\boxed{\text{Hệ có nghiệm duy nhất } X = 0} \Longrightarrow M$ ĐLTT.

$\boxed{\text{Hệ có nghiệm khác không}} \Longrightarrow M$ PTTT.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = x \Longleftrightarrow AX = b$$

$\boxed{\text{Hệ có nghiệm}} \Longrightarrow x$ là THTT của M .

$\boxed{\text{Hệ vô nghiệm}} \Longrightarrow x$ không là THTT của M.

Ví dụ 4.3 *Trong không gian véc tơ V, cho họ $M = \{x, y, 2x + 3y, z\}$.*

a) Véc tơ $2x + 3y$ có là THTT của x, y, z hay không?

b) M ĐLTT hay PTTT?

Bài làm

a) Chọn $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 0 : 2x + 3y = 2.x + 3.y + 0.z \Longrightarrow 2x + 3y$ là THTT của x, y, z.

b) Chọn $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3.\alpha_3 = -1, \alpha_4 = 0 : 2.x + 3.y - 1.(2x + 3y) + 0.z = 0 \Longrightarrow M$ PTTT.

Ví dụ 4.4 *Trong không gian véc tơ V, cho $\{x, y, z\}$ ĐLTT.*
Hãy chứng tỏ $M = \{x + y + 2z, 2x + 3y + z, 3x + 4y + z\}$ ĐLTT.

Bài làm

Xét một tổ hợp bằng không của M:

$\alpha(x+y+2z) + \beta(2x+3y+z) + \gamma(3x+4y+z) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha+2\beta+3\gamma)x + (\alpha+3\beta+4\gamma)y + (2\alpha+\beta+1\gamma)z = 0.$

Vì x, y, z ĐLTT nên $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 1\gamma = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$. Vậy M ĐLTT.

Ví dụ 4.5 *Trong không gian V, cho $\{x, y\}$ ĐLTT. Các tập hợp sau ĐLTT hay PTTT?*

a) $M_1 = \{2x, 3y\}$. *b)* $M_2 = \{x + y, 2x + 3y\}$. *c)* $M_3 = \{x + y, x - y, 2x + 3y\}$.

Đáp án: a) ĐLTT. b) ĐLTT. c) PTTT.

Ví dụ 4.6 *Trong không gian V, cho $\{x, y\}$ ĐLTT và z không là THTT của $\{x, y\}$. Chứng tỏ $\{x, y, z\}$ ĐLTT.*

Bài làm

Xét $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Nếu $\gamma \neq 0$ thì $z = -\dfrac{\alpha}{\beta}x - \dfrac{\beta}{\gamma}y$, mâu thuẫn với giả thiết, suy ra $\gamma = 0$.

Khi đó $\alpha x + \beta y = 0 \xrightarrow{x,y \text{ ĐLTT}} \alpha = \beta = 0$. Vậy $\{x, y, z\}$ ĐLTT.

Dấu hiệu ĐLTT-PTTT

- Nếu họ M chứa véc tơ không thì PTTT.
- Trong họ M, có một véc tơ là THTT của các véc tơ còn lại thì M PTTT.
- Thêm một số véc tơ vào họ PTTT, ta thu được 1 họ PTTT.
- Bớt đi một số véc tơ của họ ĐLTT, ta thu được 1 họ ĐLTT.

Bổ đề cơ bản
Cho họ véc tơ gồm m véc tơ $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.
Cho họ véc tơ gồm n véc tơ $N = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Nếu mỗi véc tơ y_k của N là THTT của M và $n > m$ thì N PTTT.

Ví dụ 4.7 *Trong không gian véc tơ V, tập $N = \{2x + y, x + y, 3x - 2y\}$ ĐLTT hay PTTT?*

Các véc tơ của N là THTT của $M = \{x, y\}$ và số véc tơ của N lớn hơn số véc tơ của M nên N PTTT.

Ví dụ 4.8 *Trong KGVT V, cho $M = \{x, y, z\}, N = \{x + y + z, 2x + 3y - z, 3x + 4y + z\}$. Chứng minh rằng*

a) Nếu M ĐLTT thì N ĐLTT.

b) Nếu N ĐLTT thì M ĐLTT.

Bài làm

a) Xét tổ hợp bằng 0 của N:
$\alpha(x+y+z)+\beta(2x+3y-z)+\gamma(3x+4y+z) = 0 \iff (\alpha+2\beta+3\gamma)x+(\alpha+3\beta+4\gamma)y+(\alpha-\beta+\gamma)z = 0$

$$\xrightarrow{M \text{ ĐLTT}} \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$ Vậy N ĐLTT.

b) Dùng phản chứng, giả sử M PTTT. Khi đó có 1 véc tơ là THTT của các véc tơ còn lại.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử z là THTT của x, y.
Ta có các véc tơ của N là THTT của M và cũng là THTT của $\{x, y\}$.
Số véc tơ của N lớn hơn số véc tơ của $\{x, y\}$. Theo bổ đề cơ bản, N PTTT, mâu thuẫn với giả thiết.

4.3 Hạng của họ véc tơ

Định nghĩa 4.3 *Cho họ véc tơ $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\} \subset V$.*

Ta nói hạng của M là k_0 nếu tồn tại k_0 véc tơ ĐLTT của M và mọi tập con hơn k_0 véc tơ của M luôn PTTT.

Hạng của họ M là số tối đại các véctơ độc lập tuyến tính của M.

Ví dụ 4.9 *Trong KGVT V, cho $M = \{x, y\}$ ĐLTT. Tìm hạng của các họ véc tơ sau:*

a) $M_1 = \{2x, 3y\}$ *b)* $M_2 = \{x, y, 2x + 3y\}$ *c)* $M_3 = \{x, y, 2x + 3y, 0\}$.

Bài làm

a) Kiểm tra $\{2x, 3y\}$ ĐLTT. Do đó $r(M_1) = 2$.

b) $2x + 3y = 2.x + 3.y \Longrightarrow M_2$ PTTT và $\{x, y\}$ ĐLTT $\Longrightarrow r(M_2) = 2$.

c) M_3 chứa véc tơ 0 nên PTTT. Dễ thấy 4 họ con gồm 3 véc tơ của M_3 đều PTTT. Có 1 họ 2 véc tơ ĐLTT là $\{x, y\}$. Vậy $r(M_3) = 2$.

Tính chất hạng của họ véc tơ

i) Hạng của họ véctơ M không đổi nếu ta nhân một véctơ của M với một số khác không.

ii) Cộng vào một véctơ của họ M, một véctơ khác đã được nhân với một số thì hạng không thay đổi.

iii) Thêm vào họ M véctơ x là tổ hợp tuyến tính của M thì hạng không thay đổi.

iv) Bớt đi 1 véc tơ của M là THTT của các véc tơ khác thì hạng không thay đổi.

Ví dụ 4.10 *Cho họ véc tơ* $M = \{(1;1;1;0), (1;2;1;1), (2;3;2;1), (1;3;1;2)\}$.

Bài làm

Ta có $(2;3;2;1) = (1;1;1;0)+(1;2;1;1), (1;3;1;2) = -(1;1;1;0)+2(1;2;1;1) \Longrightarrow r(M) = r\{(1;1;1;0), (1;2;1;1)\}$. Hơn nữa, vì $\{(1;1;1;0), (1;2;1;1)\}$ ĐLTT nên $r(M) = 2$.

Định lý về hạng Cho A là ma trận cỡ $m \times n$ trên K.

- $r(A)$ bằng với hạng của họ véc tơ hàng.
- $r(A)$ bằng với hạng của họ véc tơ cột.

Ví dụ 4.11 *Tìm hạng của hai họ véc tơ*

a) $M = \{(1;2;1), (2;-1;7), (1;3;0), (1;2;1)\}$ *và* $N = \{(1;2;1;1;), (2;-1;3;2), (1;7;01)\}$.

b) $P = \{(1;1;1;0), (1;1;-1;1), (2;3;1;1), (3;4;0;2)\}$.

Bài làm

a) Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ có họ véc tơ cột là M và họ véc tơ hàng là N. Do đó $r(M) = r(N) = r(A) = 2$.

b) Hạng của P bằng hạng của ma trận

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vì $r(B) = 2$ nên $r(P) = 2$.

Tính chất cho họ véc tơ M và véc tơ x

- Hạng M bằng số véc tơ thì M ĐLTT.
- Hạng M bé hơn số véc tơ thì M PTTT.
- $r(M, x) = r(M)$ thì x là THTT của M.

Ví dụ 4.12 *Xét sự ĐLTT của họ véc tơ sau* *a)* $M = \{(1;1;1),(2;1;3),(1;2;0)\}$.

b) $N = \{x^2+x+1, 2x^2+3x+2, 2x+1\}$.

c) $P = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

d) $Q = \{(1;1;0),(1;2;1),(m;0;1)\}$.

Bài làm

a) $r(M) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow M$ PTTT (vì hạng bé hơn số véc tơ).

b) $r(N) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow N$ ĐLTT (vì hạng bằng số véc tơ).

c) $r(P) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \Longrightarrow P$ ĐLTT.

d) $r(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -m & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

Nếu $m = -1 \Longleftrightarrow r(Q) = 2$ thì Q PTTT.
Nếu $m \neq -1 \Longleftrightarrow r(Q) = 3$ thì Q ĐLTT.

4.4 Cơ sở và số chiều

Tập sinh Cho $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\} \subset V$.
M gọi là tập sinh của V nếu mọi véc tơ x của V đều là THTT của M. Ta viết

$$V =< M >=< x_1, x_2, \ldots, x_m >$$

Ta còn nói M sinh ra V hay V được sinh bởi M.

Ví dụ 4.13 *Xét xem các tập sau có là tập sinh trong R^3 hay không?*

a) $M = \{(1;1;1),(1;2;1),(2;3;1)\}$.

b) $M = \{(1;1;1),(1;2;3),(3;2;1)\}$

Bài làm

a) $\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in R^3$. Giả sử $x = \alpha(1;1;1) + \beta(1;2;1) + \gamma(2;3;1)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma = x_1 \\ \alpha+2\beta+3\gamma = x_2 \\ \alpha+\beta+\gamma = x_3 \end{cases}, |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Hệ Cramer nên có nghiệm $\forall x \in R^3$. Do đó x là THTT của M.
Vậy M là tập sinh của R^3.

b) $\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$. Giả sử $x = \alpha(1;1;1) + \beta(1;2;3) + \gamma(3;2;1)$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = x_1 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = x_2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = x_3 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 1 & 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 3 & 1 & x_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + x_1 - 2x_1 \end{array}\right]$$

Với $x_3 + x_1 - 2x_2 \neq 0$ thì hệ vô nghiệm, nghĩa là tồn tại x (ví dụ như $(1;0;0)$) không là THTT của M. Vậy M không là tập sinh của R^3.

Ví dụ 4.14 *Tập $M = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 1, x^2 + 2x\}$ có là tập sinh của $P_2[x]$ hay không?*

Bài làm

$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2[x] : p(x) = \alpha(x^2 + x + 1) + \beta(2x^2 + 3x + 1) + \gamma(x^2 + 2x)$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = a \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma = b \\ \alpha + \beta \qquad = c \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & b + c - 2a \end{array}\right].$$

Với $b + c - 2a \neq 0$ thì hệ vô nghiệm. Vậy M không là tập sinh của $P_2[x]$.

Ví dụ 4.15 *Cho $M = \{x, y, z\}$ là tập sinh của KGVT V. Tập nào sau đây là tập sinh của V?*

a) $M_1 = \{2x, x + y, z\}$. *b)* $M_2 = \{x, x + y, x - y\}$.

Bài làm

a) Vì M là tập sinh của V nên $\forall v \in V : v = \alpha x + \beta y + \gamma z$

$\iff v = \dfrac{\alpha - \beta}{2}.2x + \beta.(x + y) + \gamma.z$. Vì v là THTT của M_1 nên M_1 là tập sinh của V.

b) Nếu z là THTT của x, y. Khi đó ta chứng minh M_2 là tập sinh của V. ??

Nếu z không là THTT của x, y. Khi đó z ta chứng minh được z không là THTT của M_2. ??

Do đó M_2 không là THTT của V.

Cơ sở và số chiều: Cho $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\} \subset V$

$\boxed{\text{M sinh ra } V} + \boxed{\text{M - ĐLTT}} \Longrightarrow \boxed{\text{M - là cơ sở}}$

$\boxed{\text{Cơ sở có } n \text{ véc tơ}} \Longrightarrow \boxed{\text{Số chiều của } V \text{ là } n\text{: } \dim(V) = n}$

V không có tập sinh hữu hạn thì V gọi là KGVT vô hạn chiều.

Ví dụ 4.16 *Cho $M = \{x, y, z\}$ là cơ sở của V. Xét xem tập nào sau đây là tập sinh, cơ sở?*

a) $M_1 = \{2x + y + z, x + 2y + z, x + y + z\}$. *b)* $M_2 = \{2x, 3y, z, x + y + z\}$.

Bài làm

a) 1) Chứng tỏ M_1 là tập sinh của V. 2)Chứng tỏ M_1 ĐLTT. ??

Suy ra M_1 là cơ sở của V.

b) Chứng tỏ M_2 là tập sinh của V. ??.

Dễ thấy M_2 PTTT. Do đó M_2 là tập sinh nhưng không là cơ sở của V.

Định lý cơ sở Cho V là KGVT hữu hạn chiều

- V có vô số cơ sở.
- Số véc tơ trong mỗi cơ sở đều bằng nhau.

Cơ sở chính tắc

i) $\dim(R^n) = n$ và cơ sở chính tắc (*cơ sở đơn giản nhất*) là

$$E = \{(1;0;\ldots;0),(0;1;\ldots;0),\ldots,(0;0;\ldots;1)\}.$$

ii) $\dim(P_n[x]) = n+1$ và cơ sở chính tắc là

$$E = \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}.$$

iii) $\dim(M_n[R]) = n^2$ và cơ sở chính tắc là

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}_n, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}_n, \ldots \right\}$$

Tính chất Cho $\dim(V) = n$

- Mọi tập con nhiều hơn n véc tơ thì PTTT.
- Mọi tập con ít hơn n véc tơ **không** sinh ra V.
- Mọi tập con ĐLTT có **đúng** n véc tơ là cơ sở.
- Mọi tập sinh có **đúng** n véc tơ là cơ sở.
- Mọi tập có hạng bằng n là tập sinh.

Ví dụ 4.17 *Kiểm tra tập sinh - cơ sở trong* R^3.

a) $M = \{(1;1;1),(2;3;1),(3;1;0)\}$. *b)* $N = \{(1;1;1),(2;0;1),(1;1;0),(1;-2;1)\}$.

Bài làm

a) M có 3 véc tơ bằng số chiều của R^3.

$$r(M) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow M \text{ là cơ sở của } R^3.$$

b) N có 4 véc tơ trong không gian 3 chiều nên PTTT.

$$r(N) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow N \text{ là tập sinh của } R^3.$$

Ví dụ 4.18 *Kiểm tra tập* $M = \{x^2+x+1, 2x^2+x+1, x^2+2x+2\}$ *có là cơ sở của* $P_2[x]$?

Bài làm

M có 3 véc tơ, bằng số chiều của $P_2[x]$. M là cơ sở khi và chỉ khi $r(M) = 3$.

$$r(M) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2. \Longrightarrow M \text{ không là cơ sở của } P_2[x].$$

4.5 Tọa độ véc tơ

Định nghĩa 4.4 *Cho $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở sắp thứ tự của K-KGVT V.*
Bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gọi là tọa độ véc tơ x trong cơ sở E. Ký hiệu

$$[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Ví dụ 4.19 *Cho $E = \{x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 1, x^2 + x + 2\}$ là cơ sở của $P_2[x]$.*

a) Tìm $p(x)$ biết $[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Cho $q(x) = x^2$. Tìm $[q(x)]_E$.

Bài giải

a) $[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow p(x) = 3(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) + 5(x^2 + x + 2) \Longleftrightarrow p(x) = -5x + 2.$

b) Giả sử $[q(x)]_E = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow q(x) = \alpha(x^2+x+1)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^2+x+2) \Longleftrightarrow x^2 = (\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+2\beta+\gamma)x+(\alpha+\beta+2\gamma)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$. Vậy $[q(x)]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tính chất tọa độ

Cho E là cơ sở của KGVT V: $[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $[y]_E = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

i) $x = y \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \ldots \\ x_n = y_n \end{cases}$ ii) $[x + y]_E = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ iii) $[\alpha x]_E = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$

Ví dụ 4.20 *Cho $E = \{(1; 1; 1), (1; 1; 0), (1; 0; 1)\}$ là cơ sở của R^3.*

a) Tìm x, biết $[x]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Cho $x = (3; 1; -2)$. Tìm $[x]_E$.

Bài làm

a) $[x]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = -1(1; 1; 1) + 2(1; 1; 0) + 1(1; 0; 1) = (2; 1; 0)$

Ghi chú:

$E.[x]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{viết lại}} x = (2; 1; 0).$

b) Giả sử $[x]_E = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = \alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \gamma(1;0;1)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta \qquad = 1 \\ \alpha \qquad + \gamma = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow [x]_E = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ghi chú:

$E.[x]_E = x^T \Longleftrightarrow [x]_E = E^{-1}x^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Dùng máy tính casio cho bài toán tọa độ

Cơ sở $E = \{e_1, e_2, \dots, e_3\} \xrightarrow{\text{MT cột}} E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{x^T = E.[x]_E} \Longleftrightarrow \boxed{[x]_E = E^{-1}x^T}$

Ý nghĩa của tọa độ Cho $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là cơ sở của KGVT V.

Mọi véc tơ của V đều biểu diễn qua E dưới dạng tọa độ.

Các phép toán tọa độ giống như các phép toán trong R_n.

$\Longrightarrow$ tất cả các không gian n chiều đều coi là R_n.

Ví dụ 4.21 *Tìm tọa độ của $p(x) = 3x^2 + 4x - 1$ trong cơ sở $E = \{x^2 + x + 1, x + 1, 2x + 1\}$ trong $P_2[x]$.*

Bài làm

Lập ma trận $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tọa độ $[p(x)]_E = E^{-1}[p(x)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.6 Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa 4.5 *Cho 2 cơ sở của KGVT V: $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$.*
$\forall x \in V : x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \dots + x'_ne'_n.$ *(1)*
$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$
$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$
$. \quad \dots\dots$
$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$
$x = x'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + x'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots + x'_n(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n).$

Từ (1), ta suy ra $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$

Ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *gọi là ma trận chuyển cơ sở từ E sang E'.*

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang E'

$$P = \begin{pmatrix} [e'_n]_E & [e'_n]_E & \cdots & [e'_n]_E \\ || & || & & || \end{pmatrix} = E^{-1}E' \text{ (viết dạng cột).}$$

Có tính chất

$$[x]_E = P.[x]_{E'}.$$

Tính chất

- Ma trận chuyển cơ sở P khả nghịch.
- P chuyển cơ sở từ E sang E' thì P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ E' sang E.
- Pchuyển cơ sở từ E sang E' và Q chuyển cơ sở từ E' sang E'' thì PQ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang E''.

Ví dụ 4.22 *Trong* R^3*, cho 2 cơ sở* $E = \{(1;1;1),(1;0;1),(1;1;0)\}$ *và* $E' = \{(1;1;2),(1;2;1),(1;1;1)\}$.

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E *sang* E' *và ma trận chuyển cơ sở từ* E' *sang* E.

b) Cho $x = (2;1;3)$*. Tìm* $[x]_{E'}$ *và* $[x]_E$.

Bài làm

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang E': $P = E^{-1}E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở từ E' sang E: $Q = E'^{-1}E = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Ta có $[x]_{E'} = E'^{-1}x^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$[x]_E = E^{-1}x^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cách khác: $[x]_E = P[x]_{E'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.7 Không gian con

Định nghĩa 4.6 *Trong KGVT* V*, nếu tập con* F *với các phép toán trong* V *lập thành một KGVT thì ta nói* F *là không gian con của* V.

Định lý không gian con

Tập con khác rỗng F của KGVT V là một không gian con của V khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa

i) $\forall x, y \in F : x + y \in F$. ii) $\forall x \in F, \alpha \in K : \alpha x \in F$.

Ví dụ 4.23 *Cho* $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in R^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

a) Chứng tỏ F là KG con của R^3. *b) Tìm cơ sở và số chiều của F.*

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 2 điều kiện trong định lý.

b) $\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F \iff x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \iff x_3 = x_1 + 2x_2$.
$x = (x_1; x_2; x_3) = x = (x_1; x_2; x_1 + 2x_2) = x_1(1; 0; 1) + x_2(0; 1; 2)$.
Suy ra $E = \{(1; 0; 1), (0; 1; 2)\}$ là tập sinh của F.
Kiểm tra E ĐLTT. Vậy E là cơ sở của F và $\dim(F) = 2$.

Ví dụ 4.24 *Cho* $F = \{p(x) \in P_2[x] | p(1) = 0 \wedge p(2) = 0\}$.

a) Chứng tỏ F là KG con của R^3. *b) Tìm cơ sở và số chiều của F.*

a) Sinh viên tự kiểm tra 2 điều kiện trong định lý.

b) $\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in F \iff p(1) = 0 \wedge p(2) = 0$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \alpha \\ b = -3\alpha \\ c = 2\alpha \end{cases}$$

$p(x) = \alpha x^2 - 3\alpha x + 2\alpha = \alpha(x^2 - 3x + 2)$.
Suy ra $E = \{x^2 - 3x + 2\}$ là tập sinh của F.
Hiển nhiên E ĐLTT. Vậy E là cơ sở của F và $\dim(F) = 1$.

Ví dụ 4.25 *Cho* $F = \left\{A \in M_2[R] | A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0\right\}$.

a) Chứng tỏ F là KG con của R^3. *b) Tìm cơ sở và số chiều của F.*

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 2 điều kiện trong định lý.

b) $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a + 2b & -a - 2b \\ c + 2d & -c - 2d \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ là tập sinh của F.

Dễ thấy E ĐLTT. Vậy E là cơ sở của F và $\dim(F) = 2$.

Định lý Cho $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$
Ký hiệu $H := Span(M) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p | \forall \alpha_i \in R\}$.

- H là một KGVT được sinh bởi S : $H =< M >$.
- $\dim(H) = r(M)$.
- $x \in H \iff x$ là THTT của $M \iff r(S, x) = r(M)$

Ví dụ 4.26 *Tìm cơ sở và số chiều của các không gian con sau*

a) $F = \langle (1;1;1), (2;1;1), (3;1;1) \rangle$.

b) $F = \langle x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x - 1, x^2 + 2x - 2 \rangle$.

c) $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

d) $F = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \in R^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right\}$

Bài làm

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(F) = r(A) = 2$ và cơ sở của F là $\{(1;1;1), (0;-1;-1)\}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(F) = r(A) = 2$ và cơ sở của F là $\{x^2 + x + 1, x - 3\}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(F) = 2$ và cơ sở của F là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Giải hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$

Đặt $x_3 = 2\alpha, x_4 = 2\beta$, $\quad pt(2): x_2 = \frac{1}{2}(-x_3 + x_4) = -\alpha + \beta$, $\quad pt(1): x_1 = -x_2 - x_3 = -\alpha - \beta$

$\forall x \in F \Longleftrightarrow x = (-\alpha - \beta; -\alpha + \beta; 2\alpha; 2\beta) = \alpha(-1;-1;2;0) + \beta(-1;1;0;2)$

Suy ra $E = \{(-1;-1;2;0); \beta(-1;1;0;2)\}$ là tập sinh của F.

Dễ thấy E ĐLTT. Vậy E là cơ sở của F và $\dim F = 2$.

Tìm cơ sở và số chiều không gian con

Trong R^n, cho không gian con F

TH 1) Cho **tập sinh** $F = < v_1, v_2, \ldots, v_m >$:

Lập ma trận hàng $A = \begin{pmatrix} v_1 - \\ v_2 - \\ \ldots \\ v_m - \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc}$ bậc thang

$\dim(F) = r(A)$ và cơ sở gồm các hàng khác 0 của ma trận bậc thang.

TH 2) Cho tập nghiệm của **hệ thuần nhất** $AX = 0$

Giải hệ: $\boxed{\dim V + r(A) = n}$ và cơ sở được suy ra từ nghiệm của hệ.

Ví dụ 4.27 *Trong* R^3, *cho tập* $M = \{(1;1;1),(2:3:1),(1;0;2)\}$.

a) $x = (1;-2;3)$ *thuộc không gian con span*(M) *hay không?*

b) Tìm m *để* $x = (1;0;m) \in span(M)$.

Bài làm

a) x thuộc Kg con $span(M)$ khi và chỉ khi x là THTT của M. Ta lập ma trận cột

$$[M|x] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{bdsc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$r(M) = 2 < r(M|x) \Longrightarrow x \notin span(M)$.

b) $$[M|x] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{array}\right] \xrightarrow{bdsc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{array}\right]$$

$x \in\notin span(M) \Longleftrightarrow r(M) = r(M|x) \Longleftrightarrow m = 2$.

4.8 Tổng giao hai không gian con

Định nghĩa 4.7 (Tổng giao 2 không gian con) *Cho hai không gian con* F *và* G *của KGVT* V. *Giao 2 không gian con*

$$F \cap G = \{x \in V | x \in F \text{ và } x \in G\}.$$

Tổng 2 không gian con

$$F + G = \{f + g | f \in F \text{ và } g \in G\}.$$

Tính chất

$$F \cap G \subset F, G \subset F + G \subset V.$$

Định lý $F \cap G$ và $F + G$ là 2 không gian con của V và

$$\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim F + \dim G.$$

Định nghĩa 4.8 (Tổng trực tiếp) *Không gian con* W *gọi là tổng trực tiếp của 2 không gian con* F *và* G, *ký hiệu* $F \oplus G$, *nếu*

i) $W = F + G$.

ii) $F \cap G = \{0\}$.

Định lý Cho $W = F \oplus G$. Khi đó mọi véc tơ $x \in W$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$x = f + g | f \in F, g \in G.$$

Tích chất tổng 2 không gian con

$$F =< f_1, f_2, \ldots, f_n > \qquad G =< g_1, g_2, \ldots, g_m >$$

$$\Longrightarrow F + G =< f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_m >$$

Ví dụ 4.28 *Trong R^3, cho 2 không gian con*
$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}, \quad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
Tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$ và $F + G$.

Bài làm

a) Tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$.
$\forall x \in F \cap G \longleftrightarrow x \in F \wedge x \in G$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 3\alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow x = (\alpha, 3\alpha, 2\alpha) = \alpha(1; 3; 2).$$

Suy ra $E = \{(1; 3; 2)\}$ là tập sinh của $F \cap G$.
Hiển nhiên E ĐLTT do đó E là cơ sở của $F \cap G$ và $\dim(F \cap G) = 1$.

b) Tìm tập sinh của F và G.
$F =< (-1; 1; 0), (2; 0; 1) >, G =< (1; 1; 0), (-1; 0; 1) > \Longrightarrow F + G =< (-1; 1; 0), (2; 0; 1), (1; 1; 0), (-1; 0; 1) >$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{bdsc} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow \dim(F + G) = r(A) = 3$ và cơ sở $E = \{(-1; 1; 0), (0; 2; 1), (0; 0; -1)\}$.

Cách khác: ta có
$\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim F + \dim G \Longrightarrow \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$
$\Longrightarrow F + G \equiv R^3$, do đó có cơ sở là $\{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$.

Ví dụ 4.29 *Trong R^3, cho 2 không gian con $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, G =< (1; 0; 1), (2; 3; 1) >$.*
Tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$ và $F + G$.

Bài làm
$F + G$ tương tự như ví dụ trên. Ta tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$.
$\forall x \in F \cap G \Longleftrightarrow x \in F \wedge x \in G$.
$x \in G \Longleftrightarrow x = \alpha(1; 0; 1) + \beta(2; 3; 1) = (\alpha + 2\beta; 3\beta; \alpha + \beta)$.
$x \in F \Longleftrightarrow x$ thỏa điều kiện của F: $\alpha + 2\beta + 3\beta + \alpha + \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -3\beta$.
$x = (\alpha + 2\beta; 3\beta; \alpha + \beta) = (-\beta; 3\beta; -2\beta) = \beta(-1; 3; -2)$.
Dễ dàng suy ra $E = \{(-1; 3; -2)\}$ là cơ sở của $F \cap G$ và $\dim(F \cap G) = 1$.

Ví dụ 4.30 *Trong R^3, cho 2 không gian con*
$F =< f_1 = (1; 0; 1), f_2 = (1; 1; 1) >, G =< g_1 = (1; 1; 0), g_2 = (2; 1; 1) >$.
Tìm cơ sở và số chiều của $F + G$ và $F \cap G$.

Bài làm $F + G$ làm tương tự ví dụ trên. Ta tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$.
$x \in F \cap G$ khi và chỉ khi x đồng thời là THTT của f_1, f_2 và g_1, g_2:
$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_3 g_1 + x_4 g_2 \Longleftrightarrow x_1 f_1 + x_2 f_2 - x_3 g_1 - x_4 g_2 = 0$.

Viết lại ở dạng ma trận $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{bdsc} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

Đặt $x_4 = \alpha \Longrightarrow x_3 = -x_4 = -\alpha$.
$x = x_3 g_1 + x_4 g_2 = -\alpha(1; 1; 0) + \alpha(2; 1; 1) = \alpha(1; 0; 1)$.
Dễ dang suy ra cơ sở của $F \cap G$ là $\{(1; 0; 1)\}$ và $\dim(F \cap G) = 1$.

Bài tập

Câu 1) Trong R^4, cho $U = \langle(1,2,1,1);(2,1,0,-2)\rangle$ và $V = \langle(1,5,3,5);(3,0,-1,m)\rangle$. Tìm m để $U \equiv V$.

Câu 2) Trong R^4, cho V là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Tìm m để $\dim(V)$ lớn nhất.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của V với m ở câu a.

Câu 3) Trong R^4, cho $U = \langle(1,2,1,0);(2,-1,1,1)\rangle$ $V = \langle(1,1,-2,1);(2,0,4,m)\rangle$

(a) Tìm m để $\dim(U \cup V)$ lớn nhất.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của $U + V$ và $U \cup V$.

Câu 4) Trong R^4, cho 2 không gian dưới dạng tập nghiệm của hệ phương trình

$$U : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right], \qquad V : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & m & 0 \end{array}\right]$$

(a) Tìm m để $\dim(U + V)$ bé nhất.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của $U + V$ và $U \cup V$.

Câu 5) Trong R^4, cho $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ Và $V = \langle(1,2,1-2);(2,1,0,m)\rangle$

(a) Tìm m để $\dim(U \cup V)$ lớn nhất.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của $U + V$ và $U \cup V$.

Chương 5

Không gian Euclide

Nội dung

1) **Tích vô hướng của 2 véc tơ.**
2) **Bù vuông góc của không gian con.**
3) **Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt.**
4) **Hình chiếu vuông góc xuống không gian con.**

5.1 Tích vô hướng của 2 véc tơ

Định nghĩa 5.1 (Tích vô hướng) *Tích vô hướng trong R-kgvt V là một hàm thực sao cho mỗi cặp véctơ u và v thuộc V, tương ứng với một số thực ký hiệu (u, v) thỏa 4 tiên đề sau:*

i) $(\forall u, v \in V) : (u, v) = (v, u)$.

ii) $(\forall u, v, w \in V) : (u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

iii) $(\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V) : (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$.

iv) $(\forall u \in V) : (u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \iff u = 0$.

Không gian hữu hạn hạn chiều cùng với tính vô hướng trên gọi là không gian euclide.

Tích vô hướng chính tắc trên R^n
$x = (x_1; x_2; \ldots; x_n), y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Tích vô hướng chính tắc tương tự như phổ thông.

Ví dụ 5.1 *Trong R^2, cho phép toán*

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) : (x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 10x_2y_2.$$

a) Chứng tỏ (x, y) là 1 tích vô hướng trên R^2.

b) Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $u = (1; 2), v = (2; -1)$.

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(u, v) = 1.2 + 2.1.(-1) + 2.2.2 + 10.2.(-1) = -12$.

Ví dụ 5.2 *Trong* $P_2[x]$, *cho tích vô hướng* $(p,q) = \int_0^1 p(x).q(x)dx; p(x), q(x) \in P_2[x]$.

a) Chứng tỏ (p,q) *là 1 tích vô hướng trên* $P_2[x]$.

b) Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $p(x) = 2x^2 - 3x + 1, q(x) = x + 1$.

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)(x+1)dx = \frac{1}{6}$.

Độ dài véc tơ u được định nghĩa bởi

$$\boxed{||u|| = \sqrt{(u,u)}}$$

Khoảng cách giữa 2 véc tơ u và v được định nghĩa bởi

$$\boxed{d(u,v) = ||u - v||}$$

Góc α **giữa 2 véc tơ** u và v được xác định bởi

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{(u,v)}{||u||.||v||}}$$

- Véc tơ có độ dài bằng 1 gọi là véc tơ đơn vị.
- Chia 1 véc tơ khác 0 cho độ dài của nó ta được véc tơ đơn vị.
- Quá trình tạo ra véc tơ đơn vị gọi là chuẩn hóa.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwatz

$$\boxed{|(u,v)| \leq ||u||.||v||}, \forall u, v \in V.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v cùng phương (hay PTTT).

Bất đẳng thức tam giác

$$\boxed{||u + v|| \leq ||u|| + ||v||}, \forall u, v \in V.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v cùng hướng.

Ví dụ 5.3 *Trong* $R^3 : x = (x_1; x_2; x_3), y = (y_1; y_2; y_3)$. *cho tích vô hướng*

$$(x,y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

a) Chứng tỏ (x,y) *là tích vô hướng.*

b) Tìm tích vô hướng của 2 véc tơ $u = (2;1;0), v = (3;-2;4)$.

c) Tìm độ dài véc tơ $u = (3;2;1)$.

d) Tìm khoảng cách giữa 2 véc tơ $u = (1;2;1)$ *và* $v = (3;0;2)$.

e) Tìm góc giữa 2 véc tơ $u = (1;0;1)$ *và* $v = (2;1;0)$.

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(u,v) = ((2;1;0),(3;-2;4)) = 5.2.3 + 2.2.(-2) + 2.1.3 + 3.1.(-2) + 0.4 = 2.$

c) $||u|| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{((3;2;1),(3;2;1))} = \sqrt{5.3.3 + 2.3.2 + 2.2.3 + 3.2.2 + 1.1} = \sqrt{82}$

d) $d(u,v) = ||u-v|| = \sqrt{(u-v,u-v)} = \sqrt{((-2;2;-1),(-2;2;-1))}$
$= \sqrt{5.(-2).(-2) + 2.(-2).2 + 2(2).(-2) + 3.2.2 + (-1).(-1)} = \sqrt{17}.$

e) $\cos\alpha = \dfrac{(u,v)}{||u||.||v||} = \dfrac{12}{\sqrt{6},\sqrt{31}} = \dfrac{12}{\sqrt{168}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\dfrac{12}{\sqrt{168}}.$

Nhận xét: Độ dài, khoảng cách, góc đối với tích vô hướng trên có giá trị khác với tích vô hướng ở phổ thông.

Ví dụ 5.4 *Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng* $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx; \forall p(x), q(x) \in P_2[x]$.

a) Chứng tỏ (p,q) là một tích vô hướng trên $P_2[x]$.

b) Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $p(x) = 2x^2 - 3x + 1, q(x) = x - 3$.

c) Tìm độ dài của véc tơ $p(x) = 2x + 3$.

d) Tính khoảng cách giữa 2 véc tơ $p(x) = x^2 + x + 2, q(x) = x^2 - 2x + 3$.

e) Tính góc giữa 2 véc tơ $p(x) = x^2 + x, q(x) = 2x + 3$.

Bài làm

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} (2x^2 - 3x + 1)(x-3)dx = -12.$

c) $||p|| = \sqrt{(p,p)} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} p(x).p(x)dx}\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)^2dx} = \sqrt{\dfrac{62}{3}}.$

d) $d(p,q) = ||p-q|| = \sqrt{(p-q,p-q)} = \sqrt{(3x-1,3x-1)} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(3x-1)^2dx} = 2\sqrt{2}.$

e) $\cos\alpha = \dfrac{(p,q)}{||p||.||q||} \dfrac{\int\limits_{-1}^{1}(x^2+x)(2x+3)dx}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(x^2+x)^2dx}.\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)^2dx}} = \dfrac{5\sqrt{310}}{124}.$

Hai véc tơ vuông góc

$$u \perp v \Longleftrightarrow (u,v) = 0.$$

Véc tơ vuông góc với tập hợp

$$u \perp M \Longleftrightarrow (u,y) = 0, \forall y \in M.$$

Họ trực giao: họ véc tơ M gọi là trực giao nếu

$$\forall x, y \in M : x \perp y.$$

Họ trực chuẩn: họ véc tơ M gọi là trực chuẩn nếu M trực giao và

$$\forall x \in M : ||x|| = 1.$$

Mệnh đề Cho không gian con $F =< f_1, f_2, \ldots, f_m >$

$$x \perp F \iff x \perp f_k, \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Ví dụ 5.5 *Trong R^3 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con*

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Tìm m để $x = (2; 3; m) \perp F$.

Bài làm
Tập sinh của F là $\{u = (4; -3; 1)\}$.
$x \perp F \iff x \perp u \iff (x, u) = 0 \iff 2.4 + 3.(-3) + m.1 = 0 \iff m = 1.$

5.2 Bù vuông góc của không gian con

Định nghĩa 5.2 *Trong không gian Euclide V, cho không gian con F. Tập hợp*

$$F^{\perp} = \{x \in V | x \perp F\}$$

gọi là bù vuông góc của không gian con F.

Định lý
Cho F là KG con của KG Euclide V. Khi đó:

- $F^{\perp}$ là không gian con của V và $V = F \oplus F^{\perp}$.
- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim V$.

Ví dụ 5.6 *Trong R^3, cho không gian con $F =< f_1 = (1; 1; 1), f_2 = (2; 1; 0), f_3 = (1; 0; -1) >$.*
Tìm cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bài làm
$x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \iff x \perp F \iff x \perp f_k, k = 1, 2, 3.$

$$\iff \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \\ (x, f_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \text{(nhận xét các hàng của ma trận)}$$

Giải hệ suy ra $x = \alpha(1; -2; 1)$. Cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(1; -2; 1)\}$ và $\dim F^{\perp} = 1$.

Ví dụ 5.7 *Trong R^3, cho không gian con*

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Tìm cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bài làm
Giải hệ suy ra tập sinh của F: $F =< u = (2; -1; 3) >$.
$x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \iff x \perp u \iff 2x_1 - x_2 + x_3 = 0.$
$\implies F^{\perp} =< (1; 2; 0), (2; 0; -1) >$.
Cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(1; 2; 0), (2; 0; -1)\}$ và $\dim F^{\perp} = 2$.
Ghi chú:

- Cho $F =< h_1, h_2, \ldots, h_m >$. $x \in F^\perp$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (h_1, x) = 0 \\ (h_2, x) = 0 \\ \ldots \\ (h_m, x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} h_1- \\ h_2- \\ \ldots \\ h_m- \end{bmatrix} .x = 0 (\text{ma trận hàng của } F)$$

Do đó $F^\perp$ là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{c|c} h_1- & 0 \\ h_2- & 0 \\ \ldots & \\ h_m- & 0 \end{array}\right]$$

- Cho $F = \{x \in R^n | Ax = 0\}$.

$$Ax = 0 \xrightarrow{\text{viết lại theo véc tơ hàng}} \begin{bmatrix} h_1- \\ h_2- \\ \ldots \\ h_m- \end{bmatrix} .x = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (h_1, x) = 0 \\ (h_2, x) = 0 \\ \ldots \\ (h_m, x) = 0 \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ $\forall x \in F : x \perp f_k, k = \overline{1, m}$.
Điều này chứng tỏ $F^\perp$ được sinh bởi các véc tơ hàng của ma trận A.

$$F^\perp =< h_1, h_2, \ldots, h_m >, \text{với } h_k \text{ là các hàng của ma trận } A$$

Ví dụ 5.8 *Hãy tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$ trong R^4, trong đó*

a) $F = \left\{(x_;x_2;x_3;x_4) \in R^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

b) $F =< (1;-1;2;1), (2;1;1;0) >$

Bài làm

a) Ta có $F^\perp =< (1;0;1;1), (2;-1;3;1) >$ *(lấy từ các hàng của hệ phương trình)*.
Suy ra cơ sở của $F^\perp$ là $\{(1;0;1;1), (2;-1;3;1)\}$ và $\dim F^\perp = 2$.

b) Vì $F =< (1;-1;2;1), (2;1;1;0) >$ nên $F^\perp$ là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Giải hệ suy ra tập nghiệm $F^\perp =< (-1;1;1;0), (-1;2;0;3) >$.
Suy ra cơ sở của $F^\perp$ là $\{(-1;1;1;0), (-1;2;0;3)\}$ và $\dim F^\perp = 2$.

Định lý

- Mọi tập trực giao, không chứa véc tơ không thì ĐLTT.
- Cho $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của KG Euclide V.
  $\forall x \in V$ luôn được biễu diễn duy nhất ở dạng

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \;\text{ với } x_k = (x, e_k).$$

Ví dụ 5.9 *Trong không gian Euclide V, cho cơ sở trực chuẩn*

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Tìm tọa độ của véc tơ $x = (3; -2; 1)$ trong cơ sở E.

Bài làm
Ta viết $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, trong đó $x_1 = (x, e_1) = \dfrac{3}{\sqrt{6}}, x_2 = (x, e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = (x, e_3) = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

Vậy tọa độ của x trong cơ sở E là $[x]_E = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

5.3 Quá trình Gram-Schmidt

Định lý 5.3 (Gram-Schmidt) *Cho $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ là họ ĐLTT của KGVT V. Khi đó tồn tại một họ trực giao*

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \text{ thỏa } < e_1, e_2, \ldots, e_m >=< f_1, f_2, \ldots, f_m > .$$

Thuật toán Gram-Schmidt

- $f_1 = e_1$.
- $f_2 = e_2 - \dfrac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$.
- $f_3 = e_3 - \dfrac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \dfrac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$.

  ......
- $f_k = e_k - \dfrac{(e_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \dfrac{(e_k, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 \cdots - \dfrac{(e_k, f_{k-1})}{(f_{k-1}, f_{k-1})} f_{k-1}$.

Ví dụ 5.10 *Trực chuẩn họ véc tơ $E = \{(1; 0; 1; 1), (0; 1; 1; 1), (1; 1; 1; 1)\}$*

Bài làm
Chọn $f_1 = e_1 = (1; 0; 1; 1)$.
$f_2 = e_2 - \dfrac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0; 1; 1; 1) - \dfrac{2}{3}(1; 0; 1; 1) = \left(\dfrac{-2}{3}; 1; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3} \right)$. Chọn $f_2 = (-2; 3; 1; 1)$.
$f_3 = e_3 - \dfrac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \dfrac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{2}{5}; \dfrac{-1}{5}; \dfrac{-1}{5} \right)$. Chọn $f_3 = (2; 2; -1; -1)$.
Họ trục giao cần tìm là $F = \{f_1, f_2, f_3\}$.
Chia mỗi véc tơ cho độ dài của nó, ta được cơ sở trực chuẩn là
$\left\{ \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; 0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\dfrac{-2}{\sqrt{15}}; \dfrac{3}{\sqrt{15}}; \dfrac{1}{\sqrt{15}}; \dfrac{1}{\sqrt{15}} \right) \left(\dfrac{2}{\sqrt{10}}; \dfrac{2}{\sqrt{10}}; \dfrac{-1}{\sqrt{10}}; \dfrac{-1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$.

Ví dụ 5.11 *Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con*

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \in R^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của F.

Bài làm Giải hệ, tìm một cơ sở tùy ý của F là $\{(2; -1; 1; 0), (0; -1; 0; 1)\}$.
Dùng Gram-Schmidt: $f_1 = e_1 = (2; -1; 1; 0)$.
$f_2 = e_2 - \dfrac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0; -1; 0; 1) - \dfrac{1}{6}(2; -1; 1; 0) = (\dfrac{-1}{3}; \dfrac{-5}{6}; \dfrac{-1}{6}; 1)$. Chọn $f_2 = (2; 5; 1; -6)$.
Cơ sở trực giao là $F = \{f_1, f_2\}$. Cơ sở trực chuẩnlà $\left\{ \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}; \dfrac{-1}{\sqrt{6}}; \dfrac{1}{\sqrt{6}}; 0 \right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{66}}; \dfrac{5}{\sqrt{66}}; \dfrac{1}{\sqrt{66}}; \dfrac{-6}{\sqrt{66}}; \right) \right\}$.

5.4 Hình chiếu vuông góc

Định nghĩa 5.4 (Hình chiếu vuông góc) *Trong KG Euclide V, cho không gian con F và véc tơ v. Véc tơ được biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$v = f + g; f \in F, g \in F^{\perp}.$$

Véc tơ f được gọi là hình chiếu vuông góc của v xuống f, ký hiệu: $f = \Pr_F v$.
Khoảng cách từ v xuống F được định nghĩa là $d(v, F) = ||g|| = ||v - \Pr_F v$.

Ví dụ 5.12 *Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con*

$$F = \{(x_; x_2; x_3; x_4) \in R^4 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \}$$

và véc tơ $x = (1; 1; 0; 1)$

a) Tìm hình chiếu của x xuống F.

b) Tìm khoảng cách từ x đến F.

Bài làm

a) Chọn 1 cơ sở $F =< f_1 = (2; -1; 1; 0), f_2 = (-2; 1; 0; 1) >$.
Viết $x = f + g = x_1 f_1 + x_2 f_2 + g, g \in F^{\perp}$.
Nhân lần lượt f_1, f_2 vào phương trình theo nghĩa tích vô hướng, ta được

$$\begin{cases} x_1(f_1, f_1) + x_2(f_1, f_2) = (x, f_1) \\ x_2(f_2, f_1) + x_2(f_2, f_2) = (x, f_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 1 \\ -5x_1 + 6x_2 = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} \\ x_2 = \dfrac{-1}{11} \end{cases}$$

$$\Pr_F x = f = x_1 f_1 + x_2 f_2 = \frac{1}{11}(2; -1; 1; 0) + \frac{-1}{11} f_2 = (-2; 1; 0; 1) = \left(\frac{4}{11}; \frac{-2}{11}; \frac{1}{11}; \frac{-1}{11} \right)$$

b) $d(x, F) = ||g|| = ||x - \Pr_F x|| = ||(\frac{7}{11}; \frac{13}{11}; \frac{-1}{11}; \frac{12}{11})|| = \sqrt{3}.$

Bài tập

Câu 1) Trong $R_2 : x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, cho tích vô hướng

$$(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

(a) Tính $(x, y), ||x||, ||y||$.
(b) Tính $||x + y||, d(x, y)$.
(c) Tính $\widehat{(x, y)}$.
(d) Tìm véc tơ u sao cho $u \perp x$.

Câu 2) Trong R_4, cho KG con $U = \langle (1, 1, 0, 0); (2, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle$ và véc tơ $z = (7, 3, 0, 0)$.

(a) Tìm cơ sở và số chiều của $U^{\perp}$.
(b) Tìm $Pr_U(z), Pr_{U^{\perp}}(z), d(z, U), d(z, U^{\perp})$.
(c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của U.
(d) Tìm lại $Pr_U(z)$ theo cơ sở trực chuẩn.

Câu 3) Trong R_4, cho không gian nghiệm của hệ thuần nhất

$$U: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \qquad V: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm cơ sở và số chiều của $W = (U \cap V)^{\perp}$.

(b) Tìm cơ sở trực chuẩn E của W.

(c) Tìm véc tơ e sao cho $\{E, e\}$ là một cơ sở trực chuẩn của R_4.

Chương 6

Ánh xạ tuyến tính

Nội dung

1) **Định nghĩa và ví dụ.**
2) **Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính.**
3) **Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong một cặp cơ sở.**
4) **Ma trận chuyển cơ sở và đồng dạng.**

6.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.1 (Ánh xạ) *Cho 2 tập hợp khác rỗng X, Y. Ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc sao cho mỗi x thuộc X, tồn tại duy nhất y thuộc Y. Ta viết*

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Ánh xạ f gọi là đơn ánh nếu: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Ánh xạ f gọi là toàn ánh nếu: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$
Ánh xạ f gọi là song ánh nếu đơn ánh và toàn ánh.

Hàm số ở phổ thông là ví dụ về ánh xạ.
Cho ánh xạ tức là chỉ ra quy luật, dựa vào đó viết ảnh của mọi phần tử thuộc X.
Có nhiều cách cho ánh xạ: bằng đồ thị, bằng biểu đồ, bằng biểu thức đại số, bằng cách liệt kê,...

Định nghĩa 6.2 (Ánh xạ tuyến tính) *Cho V, W là hai không gian trên cùng trường số K.*
Ánh xạ $f : V \longrightarrow W$ gọi là ánh xạ tuyến tính nếu thỏa:

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \forall v \in V, \alpha \in K$.

Ví dụ 6.1

a) $f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2)$ là một ánh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^2. ??.

b) Phép quay trong không gian $Oxyz$ quanh trục $0z$ một góc 30^o ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục 0z là một ánh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^3.

c) Tương tự phép đối xứng, phép chiếu,... qua các đường thẳng và mặt phẳng qua gốc tọa độ là những ánh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^3.

Cho $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là tập sinh của KGVT V và axtt $f : V \longrightarrow W$.
Giả sử ta biết $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

$\forall x \in V : x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \Longrightarrow f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n)$

$f(x) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + \cdots + f(x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n)$.
Ánh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn nếu biết được ảnh của một tập sinh của V.

Ví dụ 6.2 *Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \longrightarrow R^2$, biết*
$f(1;1;0) = (2;-1), \quad f(1;1;1) = (1;2), \quad f(1;0;1) = (-1;1)$

a) Tìm $f(3;1;5)$. *b) Tìm $f(x)$.*

Bài làm

a) Viết $(3;1;5) = \alpha(1;1;0) + \beta(1;1;1) + \gamma(1;0;1)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta \qquad = 1 \\ \alpha \qquad + \gamma = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$f(x) = f(\alpha(1;1;0) + \beta(1;1;1) + \gamma(1;0;1)) = \alpha f(1;1;0) + \beta f(1;1;1) + \gamma f(1;0;1)$.
$\Longrightarrow f(3;1;5) = -2(2;-1) + 3(1;2) + 2(-1;1) = (-3;10)$.

b) Làm tương tự như trên cho trường hợp tổng quát $f(x_1;x_2;x_3)$.
Ta có thể làm cách khác bằng cách dùng phép biến đổi đại số như sau:
$f(0;0;1) = f(1;1;1) - f(1;1;0) = (1;2) - (2;-1) = (-1;3)$.
$f(0;1;0) = f(1;1;1) - f(1;0;1) = (1;2) - (-1;1) = (2;1)$.
$f(1;0;0) = f(1;1;0) - f(0;1;0) = (2;-1) - (2;1) = (0;-2)$
$f(x_1;x_2;x_3) = x_1f(1;0;0) + x_2f(0;1;0) + x_3f(0;0;1) = x_1(0;-2) + x_2(2;1) + x_3(-1;3)$
$f(x) = (2x_2 - x_3; -2x_1 + x_2 + 3x_3)$

Ghi chú: Ta có thể dùng các phép biến đổi cho ánh xạ tuyến tính để tìm ảnh của 3 véc tơ đơn vị.
Tuy nhiên ta sẽ gặp khó khăn tìm ra phép biến đổi trong trường hợp tổng quát.
Ta có thể viết ánh xạ tuyến tính dưới dạng ma trận để tìm ảnh của 3 véc tơ đơn vị như sau:

$$\text{(theo hàng)} \left[\begin{array}{c|c} e_1 & f(e_1) \\ e_2 & f(e_2) \\ e_3 & f(e_3) \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{bđsc}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Kết hợp với ý nghĩa phép nhân ma trận, ta có thuật toán sau

Tìm axtt cho ảnh của cơ sở
Cho cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ và ánh xạ tuyến tính thỏa $f(e_k) = f_k$

$$\text{Theo hàng} \left[\begin{array}{c|c} E & F \end{array}\right] \xrightarrow[\text{nhân bên trái với } E^{-1}]{\text{bđsc theo hàng, tương ứng}} \left[\begin{array}{c|c} I & E^{-1}F \end{array}\right]$$

Ví dụ 6.3 *Cho f là phép đối xứng qua mặt phẳng $2x - y + 3z = 0$ là ánh xạ tuyến tính trong không gian $Oxyz$. Hãy tìm $f(x_1;x_2;x_3)$.*

Bài làm

f biến cặp véc tơ chỉ phương thành chính nó và véc tơ pháp tuyến thành véc tơ đối
$a_1 = (1;2;0) : f(1;2;0) = (1;2;0)$
$a_2 = (0;3;1) : f(0;3;1) = (0;3;1)$
$n = (2;-1;3) : f(2;-1;3) = (-2;1;-3)$.
Viết dạng ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{casio tính } E^{-1}F} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \end{array}\right]$$

$$f(x) = x_1(\tfrac{3}{7};\tfrac{2}{7};\tfrac{-6}{7}) + x_2(\tfrac{2}{7};\tfrac{6}{7};\tfrac{3}{7}) + x_3(\tfrac{-6}{7};\tfrac{3}{7};\tfrac{-2}{7}) = \frac{1}{7}(3x_1+2x_2-6x_3; 2x_1+6x_2+3x_3; -6x_1+3x_2-2x_3)$$

6.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$
Nhân của f được định nghĩa là

$$\ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$$

Ảnh được định nghĩa là

$$Imf = \{f(x) \in W | x \in V\}$$

Định lý Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$

- $\ker f$ là KG con của V.
- Imf là KG con của W.

$$\dim(\ker f) + \dim(Imf) = \dim V$$

Ví dụ 6.4 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$ thỏa $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3)$.*
Tìm cơ sở và số chiều của Imf và $\ker f$.

Bài làm

a) $x \in Kerf \Longrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 3x_2 \end{cases}$.
$\Longrightarrow x = (x_2; x_2; 3x_2) = x_2(1;1;3) \Longrightarrow \ker f =< (1;1;3) >$.
Cơ sở của $\ker f$ là $\{(1;1;3)\}$ và $\dim(\ker f) = 1$.

b) Imf gồm tất cả các $f(x)$:
$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3) = x_1(1;1) + x_2(-1;2) + x_3(0;-1) \Longrightarrow Imf =< (1;1),(-1;2),(0;-1) >$.
Cơ sở của Imf là $\{(1;1),(0;3)\}$ và $\dim(Imf) = 2$.
Cách khác
$\dim(Imf) = \dim(R^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2 \Longrightarrow Imf \equiv R^2$.
Cơ sở của Imf là $\{(1;0),(0;1)\}$.

Định lý Cho axtt $f : V \longrightarrow W$
Ảnh của tập sinh là tập sinh của ảnh:

$$V =< e_1, e_2, \ldots, e_n > \Longrightarrow Imf =< f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) >$$

Ví dụ 6.5 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ biết ảnh của một tập sinh*
$f(1;1;1) = (1;2;1), \quad f(1;1;2) = (2;1;-1), \quad f(1;2;1) = (5;4;-1)$.
Tìm cơ sở và số chiều của Imf và $\ker f$

a) Theo định lý: $Imf =< (1;2;1),(2;1;-1),(5;4;-1). >$.
Cơ sở của Imf là $\{(1;2;1),(0;1;1)\}$ và $\dim(Imf) = 2$.

b) $E = \{(1;1;1),(1;1;2),(1;2;1)\}$ là tập sinh của R^3.
Viết $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \Longrightarrow f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3)$
$f(x) = x_1(1;2;1) + x_2(2;1;-1) + x_3(5;4;-1) = (x_1 + 2x_2 + 5x_3; 2x_1 + x_2 + 4x_3; x_1 - x_2 - x_3)$

$$x \in \ker f \iff f(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}.$$

$\Longrightarrow x = -\alpha(1;1;) - 2\alpha(1;1;2) + \alpha(1;2;1) = \alpha(2;1;4)$.
Vậy cơ sở của $\ker f$ là $\{(2;1;4)\}$ và $\dim(\ker f) = 1$.

6.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ma trận của ánh xạ tuyến tính cho axtt $f : V \longrightarrow W$.
$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là cơ sở của V. $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ là cơ sở của W.
Ma trận

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \dots & [f(e_n)]_F \\ || & || & & || \end{pmatrix}_{m\times n}$$

gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, F.

Chú ý: $[f(e_i)]_F = F^{-1}f(e_i)$. Do đó

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} F^{-1}f(e_1) & F^{-1}f(e_2) & \dots & F^{-1}f(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{m\times n} = F^{-1}f(E).$$

Ví dụ 6.6 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$ biết $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_3)$.*
Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $E = \{(1;1;1),(1;0;1),(1;1;0)\}$, $F = \{(1;3),(2;5)\}$.

Bài làm

$f(1;1;1) = (0;3) \Longrightarrow [f(1;1;1)]_F = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$f(1;0;1) = (-2;3) \Longrightarrow [f(1;0;1)]_F = \begin{pmatrix} 16 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$f(1;1;0) = (3;2) \Longrightarrow [f(1;1;0)]_F = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ma trận cần tìm là $A_{E,F} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$.

Cách khác

$$A_{E,F} = F^{-1}f(E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{dùng casio}} \begin{pmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Định lý

i) Cho axtt $f : V \longrightarrow W$. Khi đó tồn tại duy nhất ma trận $A_{E,F}$ cỡ $m \times n$ sao cho

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E,$$

với E, F là 2 cơ sở của V và W tương ứng.

ii) 2. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ trên trường số K. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : K^n \longrightarrow K^m$ thỏa

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E.$$

Chú ý:

- Mỗi một ánh xạ tuyến tính từ khgian hữu hạn chiều vào KG hữu hạn chiều tương ứng duy nhất một ma trận và ngược lại.
- Ta coi ánh xạ tuyến tính là ma trận. Thông thường không phân biệt hai khái niệm này.

Ví dụ 6.7 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$ biết ma trận của f trong cặp cơ sở $E = \{(1;1;1),(1;0;1),(1;1;0)\}$, $F = \{(1;1),(2;1)\}$ là* $A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Tìm $f(3;1;5)$. *b) Tìm $f(x)$.*

Bài làm

a) $[(3;1;5)]_E = E^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dùng công thức $[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E$

$$[f(3;1;5)]_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow f(3;1;5) = 14(1;1) - 2(2;1) = (10;12)$.

b) $[(x_1;x_2;x_3)]_E = E^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$.

Dùng công thức $[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E$

$$[f(x_1;x_2;x_3)]_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow f(x_1;x_2;x_3) = (-4x_1 + x_2 + 5x_3)(1;1) - (7x_1 - 3x_2 - 4x_3)(2;1) = (10x_1 - 5x_2 - 3x_3; 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.

Ma trận trong 1 cơ sở cho axtt $f : V \longrightarrow V$.
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở của V.
Ma trận ánh xạ của f trong cặp cơ sở E, E là

$$\boxed{A_E = E^{-1}f(E).}$$

Ví dụ 6.8 *Cho axtt* $f : R^3 \longrightarrow R^3$ *có ma trận trong cơ sở* $E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}$ *là*

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm $f(2;3;-1)$.

b) Tìm cơ sở và số chiều của $\ker f$.

c) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Bài làm

a) Tương tự ví dụ trên: $f(2;3;-1) = (12;6;2)$.

b) Giả sử $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \Longleftrightarrow [x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$x \in \ker f \Longleftrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow [f(x)]_F = A_E[x]_E = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6\alpha \\ x_2 = -5\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}.$$

$x = 6\alpha(1;1;1) - 5\alpha(1;0;1) + \alpha(1;1;0) = \alpha(2;7;1)$

$\Longrightarrow \ker f =< (2;7;1) >$. Cơ sở của $\ker f$ là $\{(2;7;1)\}$ và $\dim(\ker f) = 1$.

c) $[f(1;1;1)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(1;1;1) = (1;1;1) + (1;0;1) - (1;1;0) = (4;2;3)$.

Tương tự $[f(1;0;1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(1;1;1) = (1;1;1) + 3(1;0;1) + 2(1;1;0) = (6;3;4)$.

$[f(1;1;0)]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(1;1;1) = -(1;1;1) + 3(1;0;1) + 4(1;1;0) = (6;3;2)$.

$Imf =< f(1;1;1), f(1;0;1), f(1;1;0) >$. Cơ sở của Imf là $\{(4;2;3), (0;0;1)\}$.

Tính Chất 6.3 (Mối liên hệ giữa 2 ma trận trong cơ sở khác nhau)

Cho axtt $f : V \longrightarrow W$.
Cho 2 cơ sở của V là: $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$.
Cho 2 cơ sở của W là: $F = \{F_1, f_2, \dots, f_n\}, F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}$.
P là ma trận chuyển cơ sở từ E vào E': $[x]_E = P[x]_{E'}$
Q là ma trận chuyển cơ sở từ F vào F':$[y]_F = Q[y]_{F'}$
Ta có

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E \Longleftrightarrow Q[f(x)]_{F'} = A_{E,F}P[x]_{E'} \Longrightarrow [f(x)]_{F'} = Q^{-1}A_{E,F}P.[x]_{E'}$$

Khi đó, $Q^{-1}A_{E,F}P$ là ma trận của f trong cặp cơ sở E', F'.
Ta tóm tắc bằng sơ đồ sau

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad A \quad} & F \\ P\downarrow & & \downarrow Q \\ E' & \xrightarrow{\quad Q^{-1}AP \quad} & F' \end{array}$$

Trong trường hợp đặc biệt: $V \equiv W, E \equiv F, E' \equiv F'$, ta có kết quả tương tự

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad A \quad} & E \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ E' & \xrightarrow{\quad P^{-1}AP \quad} & E' \end{array}$$

Ví dụ 6.9 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ cho bởi $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 - x_2 + 2x_3)$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1; 1; 1), (1; 1; 0), (1; 0; 1)\}$.*

Bài làm

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc E_0 là $A = E_0^{-1} f(E_0) = f(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở từ E_0 sang E là $P = E_0^{-1}.E = E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sơ đồ

$$\begin{array}{ccc} \text{ctắc} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \text{ctắc} \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ E' & \xrightarrow{P^{-1}AP} & E' \end{array}$$

Ma trận cần tìm $P^{-1}AP = E^{-1}AE = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 6.10 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1; 2; 1), (1; 1; 2), (1; 1; 1)\}$ là*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận của f trong cơ sở $E' = \{(1; 2; 3), (2; 3; 5), (5; 8; 4)\}$.

Bài làm

Sơ đồ

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad A \quad} & E \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ E' & \xrightarrow{P^{-1}AP} & E' \end{array}$$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang E' là $P = E^{-1}E'$.

Ma trận của f trong cơ sở E' là

$$P^{-1}AP = E'^{-1}EAE^{-1}E' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 59 & 40 & -221 \\ -53 & -37 & 206 \\ -5 & -4 & 23 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 6.11 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1; 2; 1), (1; 1; 2), (1; 1; 1)\}$ là*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc $F = \{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$. Từ đó suy ra $f(x)$.

Bài làm

Sơ đồ

$$\begin{array}{ccc} \text{ctắc} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \text{ctắc} \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ E' & \xrightarrow{P^{-1}AP} & E' \end{array}$$

Ma trận chuyển có sở từ E sang F là $P = E^{-1}.F = E^{-1}$.

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$B = P^{-1}AP = EAE^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{dùng casio}}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} 18 & -4 & -6 \\ 20 & -4 & -7 \\ 27 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow f(x) = (18x_1 - 4x_2 - 6x_3; 20x_1 - 4x_2 - 7x_3; 27x_1 - 6x_2 - 9x_3)$. ??

Định nghĩa 6.4 (Hai ma trận đồng dạng) .
Hai ma trận vuông A, B gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận khả nghịch P thỏa

$$P^{-1}AP = B.$$

Mệnh đề cho axtt $f : V \longrightarrow V$.
A là ma trận của f trong cơ sở E.
B là ma trận của f trong cơ sở F.
Khi đó A và B đồng dạng.

Chương 7

Trị riêng - véc tơ riêng

Nội dung

1) **Trị riêng - véc tơ riêng ma trận**
2) **Chéo hóa ma trận**
3) **Chéo hóa ma trận đối xứng thực**
4) **Trị riêng - véc tơ riêng ánh xạ tuyến tính**
5) **Chéo hóa ánh xạ tuyến tính**

7.1 Trị riêng - véc tơ riêng

Trị riêng - véc tơ riêng của ma trận vuông A.
Số λ gọi là trị riêng của ma trận A nếu tồn tại véc tơ x khác không thỏa

$$Ax = \lambda x$$

Khi đó, x gọi là véc tơ riêng ứng với trị riêng λ của ma trận A.

$x \neq 0$ là VTR của A nếu Ax cùng phương với x.

Ví dụ 7.1 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ *và* $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ta có: $Au = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4u$: u là VTR ứng với TR $\lambda = -4$.
$Av = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$: không cùng phương với x, dó đó x không là VTR của A.

Ví dụ 7.2 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. *Số nào là TR của* A*?*

Bài làm

a) Xét hệ phương trình $Ax = \lambda_1 x$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 6x_1 + 5x_2 = -x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \end{cases}.$$

Như vậy $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$ là các VTR ứng với TR $\lambda = -1$ của A.

b) Xét hệ phương trình $Ax = \lambda_2 x$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3x_1 \\ 6x_1 + 5x_2 = 3x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_2 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Vì hệ có nghiệm duy nhất $x = 0$ nên $\lambda_2 = 3$ không phải TR của ma trận A.

Định nghĩa 7.1 (Các khái niệm cơ bản)

Giả sử λ_0 là Tr của ma trận vuông $A \iff \exists x_0 \neq 0 : Ax_0 = \lambda x_0 \iff Ax_0 - \lambda_0 x = 0 \iff (A - \lambda I)x = 0$.
Vì hệ thuần nhất có nghiệm khác không nên

$$\det(A - \lambda I) = 0 : \text{ gọi là phương trình đặc trưng của } A.$$

Đa thức $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ gọi là đa thức đặc trưng của A.

Tìm TR-VTR của ma trận vuông
Bước 1) Lập phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$.
Bước 2) Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng.
Bước 3) Với mỗi TR λ_i, giải hệ $(A - \lambda_i I)x = 0$: Tìm VTR ứng với TR λ_i.

Định nghĩa 7.2 .

i) Bội đại số của trị riêng λ_i là bội nghiệm của λ_i trong phương trình đặc trưng.

ii) Không gian con riêng của trị riêng λ_i là không gian nghiệm của hệ $(A - \lambda_i)x = 0$, kí hiệu là E_{λ_i}.

iii) Bội hình học của λ_i là số chiều của E_{λ_i}: $BHH = \dim(E_{\lambda_i})$.

Định lý 7.3 *Cho A là ma trận vuông.*

i) Cơ sở của các KG con riêng lập thành một hệ độc lập tuyến tuyến tính.

ii) $1 \leq BHH \leq BŒS$ cho tất cả các trị riêng λ_i.

Chứng minh: Theo dõi bài giảng trên lớp.

Ví dụ 7.3 *Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả các TR, cơ sở và chiều của KG con riêng tương ứng.*

Bài làm

Phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(3-\lambda) - 2.4 = 0$

$\iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \text{ nghiệm đơn: BĐS=1} \\ \lambda_2 = 5 \text{ nghiệm đơn: BĐS=1} \end{array}\right.$.

$\lambda_1 = -1$, giải hệ $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 4 & 0 \\ 2 & 3-(-1) & 0 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$\iff x = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cơ sở của E_{-1} là $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ và $BHH = \dim(E_{-1}) = 1$.

$\lambda_2 = 5$, giải hệ $(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \iff x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cơ sở của E_5 là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ và $BHH = \dim(E_5) = 1$.

Ví dụ 7.4 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Tìm tất cả các TR, cơ sở và chiều của KG con riêng tương ứng.*

Bài làm.
Phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) + (-2\lambda + 4) + (\lambda - 2) = 0 \iff -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 = 0$

$\iff \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \text{ nghiệm kép: BĐS=2,} \\ \lambda_2 = 6 \text{ nghiệm đơn: BĐS=1.} \end{array} \right.$

$\lambda_1 = 2$, giải hệ

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\iff x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cơ sở E_2 là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ và $BHH = \dim(E_2) = 2$.

$\lambda_1 = 6$, giải hệ

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

Cơ sở của E_6 là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ và $BHH = \dim(E_6) = 1$.

Tính chất cho A là ma trận vuông trên C.

i) Mọi ma trận cấp n có đúng n trị riêng tính cả bội.

ii) Tổng các TR bằng $tr(A)$: tổng các phần tử trên đường chéo chính.

iii) Tích các Tr bằng $\det(A)$.

iv) Nếu λ_0 là TR của A thì λ^m là TR của $A^m, \forall m \in Z^+$.

v) Nếu $\lambda_0 \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\lambda_0}$ là TR của A^{-1}.

Ví dụ 7.5 *Tìm tất cả các trị riêng của ma trận cấp n*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài làm
Dễ thấy $\det(A) = 0$ nên A có TR $\lambda = 0$.
$r(A - 0I) = r(A) = 1 \Longrightarrow BHH = n - 1 \Longrightarrow BŒS \geq n - 1$.
gọi n TR của A là $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n$.
Vì $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = tr(A) = n \Longrightarrow \lambda_n = n$.
Như vậy A có $n - 1$ TR 0 và 1 TR bằng n.

Đa thức đặc trưng ma trận cấp 3

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A) - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A).$$

Tính đa thức đặc trưng của ma trận cấp 3 dễ sai. Công thức trên cho ta tính đa thức đặc trưng ma trận cấp 3 đơn gian hơn.

Ví dụ 7.6 *Tìm tất cả cá TR, cơ sở KG con riêng của* $A = \begin{pmatrix} 15 & -18 & -16 \\ 9 & -12 & -8 \\ 4 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Bài làm
$tr(A) = 15 - 12 - 6 = -3, \det(A) = 12$
$A_{11} + A_{22} + A_{33} = \begin{vmatrix} -12 & -8 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & -16 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & -18 \\ 9 & -12 \end{vmatrix} = 40 - 26 - 18 = -4.$
Đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 12$.
Suy ra TR: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$.

$\lambda_1 = -3$, giải hệ $\left[\begin{array}{ccc|c} 18 & -18 & -16 & 0 \\ 9 & -9 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right]$. Cơ sở E_{-3} là $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_1 = -2$, giải hệ $\left[\begin{array}{ccc|c} 17 & -18 & -16 & 0 \\ 9 & -10 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right]$. Cơ sở E_{-2} là $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda_1 = 2$, giải hệ $\left[\begin{array}{ccc|c} 13 & -18 & -16 & 0 \\ 9 & -14 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$. Cơ sở E_2 là $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

7.2 Chéo hóa ma trận

Định lý 7.4 .
Hai ma trận đồng dạng thì cùng đa thức đặc trưng.

Chú ý:

- 2 ma trận đồng dạng cùng tập trị riêng nhưng không cùng véc tơ riêng.
- 2 ma trận cùng đa thức đặc trưng thì chưa chắc đồng dạng:
  Xem 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cùng đa thức đặc trưng nhưng không đồng dạng.

Định nghĩa 7.5 (Ma trận chéo hóa được) .
Ma trận A gọi là chéo hóa được nếu A đồng dạng với ma trận chéo.
Tức là tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận chéo.

Chú ý:

- Không phải ma trận nào cũng chéo hóa được, ví dụ như $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Chéo hóa ma trận A là cần tìm ma trận P và ma trận chéo D thỏa $P^{-1}AP = D$.
- Ta tìm cấu trúc ma trận P và D như sau:
  Giả sử A được chéo hóa bởi ma trận P và D:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ || & || & & || \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  Ta có $P^{-1}AP = D \iff AP = PD$.

  Lấy cột thứ k: $A.P_k = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ || & || & & || \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda_k \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k.P_k, \forall k = \overline{1,n}$.

  Điều này chứng tỏ các cột P_k của ma trận P là các VTR ứng với TR λ_k của ma trận A.
  Các phần tử chéo của D là các TR của A.

Định lý 7.6 *Ma trận vuông A chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại n VTR độc lập tuyến tính.*

Hệ quả

- *A có n TR phân biệt thì chéo hóa được.*
- *A chéo hóa được khi và chỉ khi BHH=BĐS cho tất cả các TR.*

Để chéo hóa ma trận A, ta cần tìm tất cả các TR và cơ sở KG con riêng

Ví dụ 7.7 *Chéo hóa ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài làm

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Tri riêng $\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \text{(BĐS=1)} \\ \lambda_2 = -2 & \text{(BĐS=2)}. \end{array} \right.$

$\lambda_1 = 1$, giải hệ $(A - 1I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Cơ sở E_1 là $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. BHH=1=BĐS

$\lambda_2 = -2$, giải hệ $(A + 2I)x = 0$

$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right]$. Cơ sở E_{-2} là $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ BHH=2=BĐS.

Vậy A chéo hóa được:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7.8 *Chéo hóa ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài làm

Đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Trị riêng $\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \text{(BĐS=1)} \\ \lambda_2 = -2 & \text{(BĐS=2)}. \end{array}\right.$

$\lambda_2 = -2$, giải hệ $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$. $r = 2 \Longrightarrow BHH = \dim = 3 - 2 = 1 <$ BĐS.

Vậy A không chéo hóa được.

Ví dụ 7.9 *Chéo hóa* $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$ *và tính* A^{2013}.

Bài làm

Sinh viên tự tính TR và VTR. Suy ra

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có $P^{-1}AP = D \Longleftrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Suy ra $A^{2013} = PD^{2013}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 7.10 *Chéo hóa* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *và tính* A^m.

Sinh viên làm tương tự ví dụ trên.

Ví dụ 7.11 *Tìm ma trận vuông có TR là* $2, -3, 1$ *và có VTR tương ứng là* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bài làm

A được chéo hóa bởi ma trận P và D như sau

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra ma trận A cần tìm $A = PDP^{-1}$.

7.3 Chéo hóa ma trận đối xứng thực bởi ma trận trực giao

Định nghĩa

i) Ma trận vuông thực A gọi là đối xứng thực nếu $A^T = A$.

ii) Ma trận vuông P gọi là trực giao nếu $P^{-1} = P^T$.

iii) Ma trận A gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao P và ma trận chéo D thỏa

$$A = P^{-1}DP = P^TDP.$$

Cấu trúc ma trận trực giao

Hệ quả Ma trận vuông A là trực giao nếu các cột của A tạo thành 1 cơ sở trực chuẩn.

Định lý. cho A là ma trận đối xứng thực. Khi đó

i) Trị riêng A là những số thực.

ii) Các VTR ứng với các TR khác nhau thì vuông góc.

iii) A luôn chéo hóa trực giao được.

Mọi ma trận chéo hóa trực giao được là ma trận đối xứng.

Các bước chéo hóa trực giao ma trận đối xứng thực

Bước 1 Lập phương trình đặc trưng. Giải tìm trị riêng.

Bước 2 Tìm cơ sở TRỰC CHUẨN của các KG con riêng.

Bước 3 Thành lập ma trận P và D.

Chú ý:

- Ma trận đối xứng thực luôn chéo hóa được nên không cần xác định BHH và BĐS.
- Để tìm cơ sở trực chuẩn của một không gian con riêng nào đó ta chọn một cơ sở tùy ý rồi dùng quá trình Gram – Schmidt (nếu cần).

Ví dụ 7.12 *Chéo hóa trực giao ma trận* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài làm

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98$. Trị riêng: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7$.

$\lambda_1 = -2$. Cơ sở E_{-2} là $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Cơ sở trực chuẩn $f_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 7$. Cơ sở E_7 là $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tìm cơ sở trực chuẩn bằng Gram-Schmidt:

$$e_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$e_3 = v_3 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

Cơ sở trực chuẩn của E_7 là $\{f_2, f_3\}$.

Vậy ma trận trực giao P và ma trận chéo D là

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7.13 *Hãy chéo hóa ma trận đối xứng thực* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Sinh viên làm tương tự. Kết quả

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7.14 *Tìm ma trận đối xứng thực có 3 trị riêng lần lượt là* $2, -2, 1$

Hướng dẫn

Thành lập ma trận $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Thành lập ma trận P bằng cách chọn cơ sở (khác chéo) tùy ý, ví dụ như $E = \{(1;0;1), (1;1;1), (1;0;0)\}$.
Trực chuẩn E bằng Gram-Schmidt. Lập P từ các véc tơ cơ sở trực chuẩn.
Khi đó, ma trận A cần tìm là $A = PDP^T$.

7.4 Trị riêng - véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 7.7 *Cho KGVT V trên trường số K và axtt $f : V \longrightarrow V$.*
Số λ gọi là TR của f nếu tồn tại véc tơ $x \neq 0$ thỏa

$$f(x) = \lambda x.$$

Khi đó, x gọi là VTR ứng với TR λ của ma trận A.

Chú ý: $x \neq 0$ là VTR của f nếu x và $f(x)$ cùng phương.
Trong chương trước, xem ánh xạ tuyến tính như một ma trận: TR và VTR của axtt giống như TR và VTR ma trận.

Ví dụ 7.15 *Cho axtt f là phép chiếu vuông góc xuống mặt phẳng $x - y + 2z = 0$. Tìm TR và VTR của f.*

Bài làm

Véc tơ pháp tuyến $n = (1;-1;2) \Longrightarrow f(n) = 0.n$: n là VTR ứng với TR $\lambda_1 = 0$.

Cặp véc tơ chỉ phương $a_1 = (1;1;0), a_2 = (2;0;-1) \Longrightarrow \begin{cases} f(a_1) = 1.a_1 \\ f(a_2) = 1.a_2 \end{cases}$.

Vậy a_1, a_2 là 2 VTR ứng với TR $\lambda_2 = 1$.
Vì $f : R^3 \longrightarrow R^3$ nên không còn véc tơ riêng nào khác.

Cho E là cơ sở của KGVT V trên K. Axtt $f : V \longrightarrow V$.
Gọi A là ma trận của f trên trong cơ sở E.
giả sử λ_0 là TR của f: $\exists x_0 \neq 0$ và $f(x_0) = \lambda x_0$.

$$\Longleftrightarrow [f(x_0)]_E = \lambda_0 [x_0]_E \Longleftrightarrow A[x_0]_E = \lambda_0 [x_0]_E.$$

Suy ra $[x_0]_E$ là VTR ứng với TR λ_0 của ma trận A.

Trị riêng - véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính

Cho A là ma trận của axtt $f : V \longrightarrow V$ trong cơ sở E.

i) Trị riêng A cũng là TR của f và ngược lại.

ii) x_0 là VTR của A ứng với TR λ_0 thì véc tơ x sao cho $[x]_E = x_0$ là VTR của f ứng với TR λ_0:

$$x = E.x_0$$

Chú ý:

- TR của axtt và ma trận giống nhau.
- VTR của axtt và ma trận nhìn chung khác nhau.
- Nếu E là cơ sở chính tắc thì VTR của ma trận và axtt giống nhau.

Ví dụ 7.16 *Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, biết*

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 10x_2 - 5x_3, 2x_1 + 14x_2 + 2x_3, -4x_1 - 8x_2 + 6x_3).$$

Tìm trị riêng, véc-tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f.

Bài làm

Chọn E là cơ sở chính tắc. Ma trận của f trong E là $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

Tìm TR của A: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$.

$\lambda_1 = 5$. Véc tơ riêng $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \neq 0$.

$\lambda_2 = 10$. Véc tơ riêng $v_2 = \begin{pmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Vì E là cơ sở chính tắc nên TR-VTR của A cũng là TR-VTR của f.

Ví dụ 7.17 *Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, biết*
$f(1;1;1) = (2;1;3), f(1;0;1) = (6;3;5), f(1;1;0) = (-2;-1;-3)$.
Tìm TR-VTR của axtt f.

Bài làm

Chọn cơ sở $E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}$. Ma trận của f trong cơ sở E là

$$A = E^{-1}f(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm TR của A: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. Đây cũng là TR của axtt f.

$\lambda_1 = 0 \Longrightarrow$ VTR của A là $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$.

Véc tơ riêng của f ứng với TR λ_1 là

$$v_1 = Ex = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Tương tự cho trị riêng λ_2 và λ_3:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Ví dụ 7.18 *Cho axtt $f: R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;1;1), (1;1;2), (1;2;1)\}$ là*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 14 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

Tìm TR-VTR của f.

Bài làm
TR của A là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$. Đây cũng là TR của f.

$\lambda_1 = 3 \Longrightarrow$ VTR của A là $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$

VTR của f ứng với TR λ_1 là

$$v_1 = E.u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Tương tự cho trị riêng $\lambda_2 : v_2 = \begin{pmatrix} 5\alpha \\ 13\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$

Ví dụ 7.19 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ biết f có 3 TR là $2, 1, 0$ và 3 VTR tương ứng là $(1; 1; 1), (1; 2; 1), (1; 1; 2)$. Tìm $f(x)$.*

Bài giải
Theo giả thiết ta có:
$f(1; 1; 1) = 2(1; 1; 1) = (2; 2; 2), f(1; 2; 1) = 1.(1; 2; 1), f(1; 1; 2) = 0.(1; 1; 2) = 0.$
Từ đây suy ra $f(x)$.

7.5 Chéo hóa ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 7.8 *Axtt $f : V \longrightarrow V$ gọi là chéo hóa được nếu tồn tại cơ sở B sao cho ma trận của f trong cơ sở này là ma trận chéo.*

Chéo

Định lý 7.9 *Axtt $f : V \longrightarrow V$ chéo hóa được khi và chỉ khi f có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Khi đó cơ sở B gồm các véc tơ riêng.*

Các bước chéo hóa ánh xạ tuyến tính:

Bước 1) Chọn 1 cơ sở E của KGVT V. Tìm ma trận A của f trong cơ sở E.

Bước 2) Chéo hóa ma trận A (nếu được).

Bước 3) Kết luận:

i) Nếu A chéo hóa được thì f chéo hóa được và ngược lại

ii) Kết luận: Giả sử A chéo hóa được bởi ma trận P và ma trận chéo D: Cơ sở B gồm các VTR của f và ma trận chéo cần tìm là D

Ví dụ 7.20 *Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ biết $f(x) = (2x_1 - 2x_2 - x_3; -2x_1 - 1x_2 - 2x_3; 14x_1 + 25x_2 + 14x_3)$. Chéo hóa f (nếu được).*

Bài làm

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 14 & 25 & 14 \end{pmatrix}$.

TR của A là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6 (BŒS = 2)$.

$\lambda_2 = 6 \Longrightarrow$ VTR của A là $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \alpha : BHH = 1 < BŒS.$

A không chéo hóa được do đó f cũng không chéo hóa được.

Ví dụ 7.21 *Cho axtt* $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, *biết*

$$f(1;1;1) = (1;-7;9), f(1;0;1) = (-7;4;-15), f(1;1;0) = (-7;1;-12).$$

Chéo hóa f *(nếu được).*

Bài làm
Ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1;1;1),(1;0;1),(1;1;0)\}$ là

$$A = E^{-1}f(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -7 \\ -7 & 4 & 1 \\ 9 & -15 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda+3)^2 = 0$ Với $\lambda_1 = 1 \Longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \neq 0.$

Cơ sở E_1 của f ứng với TR λ_1 là

$$v_1 = Eu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$. Cơ sở E_{-3} của A là $\left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Cơ sở E_{-3} của f ứng với TR λ_2 là

$$\left\{ v_2 = Eu_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = Eu_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vậy cơ sở cần tìm là $B = \{(1,-1,3),(2,1,2),(2,2,1)\}$ và ma trận của axtt f trong cơ sở B là

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

Câu 1) Chéo hóa các ma trận sau (nếu được):

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $TR: 1,2,3.$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $TR: 0,1,4.$

e) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $TR: 3,1$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $TR: 2,8.$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $TR: 5,4.$

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $TR: 2,1.$

Câu 2) Chứng minh rằng nếu A chéo hóa và khả nghịch thì A-1 cũng chéo hóa và khả nghịch.

Câu 3) Chứng tỏ nếu ma trận vuông A cấp n có n VTR độc lập tuyến tính thì ma trận AT cũng có n VTR độc lập tuyến tính.

Câu 4) Chứng tỏ nếu B đồng dạng với A và A chéo hóa được thì B cũng chéo hóa được.

Câu 5) Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^2 \to R^2$. $f(x_1;x_2) = (x_1 + 2x_2; 2x_1 + 4x_2)$.

(a) Tìm cơ sở và số chiều của imf và $kerf$.

(b) Tìm tất cả các TR và VTR của f.

(c) Chéo hóa f (nếu được).

(d) Tính A_E^{20}.

Câu 6) Cho axtt $f : R^3 \to R^3$. $E = \{e_1 = (1;1;0); e_2 = (2;1;1); e_3 = (1;0;2)\}$ là cơ sở của R^3. $f(e_1) = (0;0;4), f(e_2) = (1;3;8), f(e_3) = (3;5;6)\}$.

(a) Tìm $f(x)$, cơ sở và số chiều của nhân và ảnh.

(b) Tìm tất cả các TR và véc tơ riêng của f.

(c) Tìm ma trận B sao cho $B^3 = A_{E_0}$.

(d) Chéo hóa f (nếu được).

Chương 8

Dạng toàn phương

Nội dung

- **Định nghĩa dạng toàn phương**
- **Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc**
- **Phân loại dạng toàn phương**

8.1 Định nghĩa

Định nghĩa 8.1 *Dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^n$ là một hàm thực $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : f(x) = x^T.A.x,$$

trong đó A là ma trận đối xứng thực và được gọi là ma trận của dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc).

Ví dụ 8.1

Cho $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ma trận của dạng toàn phương trong R^2 là

$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ thường được ghi ở dạng

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương lúc này là ma trận đối xứng

$$M = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

Ví dụ 8.2 *Cho dạng toàn phương trong R^3 : $f(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3$.*

Ma trận của dạng toàn phương là $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dễ dang kiểm tra $f(x) = x^T Ax$.

8.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax, x \in R_n$.
A là ma trận đối xứng thực nên chéo hóa được bởi ma trận trực giao P và ma trận chéo D: $A = PDP^T$.
Khi đó $f(x) = x^T Ax = x^T PDP^T x = (P^T x)^T.D.(P^T x)$.
Đặt $y = P^T x \Longleftrightarrow x = Py$, ta được

$$f = y^T Dy = \lambda_n y_n^2 + \lambda_n y_n^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Dạng toàn phương $y^T Dy$ gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương $x^T Ax$.

Dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax$ luôn đưa được về dạng chính tắc $f = y^T Dy$ bằng cách chéo hóa trực giao ma trận A.

Phép biến đổi $x = Py$ như trên gọi là phép biến đổi trực giao.

Thuật toán phép biến đổi trực giao:

Bước 1: Viết ma trận A của dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc).

Bước 2: Chéo hóa A bởi ma trận trực giao P và ma trận chéo D.

Bước 3: Kết luận: dạng chính tắc cần tìm là $f = y^T Dy$.
Phép biến đổi cần tìm $x = Py$.

Ví dụ 8.3 *Đưa dạng toàn phương*

$$f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép biến đổi.

Bài làm

Ma trận của dạng toàn phương $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 \Longrightarrow TR: \lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Với $\lambda_1 = -2$, ta có $P_{*1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Với $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, ta có $P_{*2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{*3} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.

Do đó ma trận trực giao $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.

Dạng chính tắc $f = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$ và phép biến đổi tương ứng $x = py$.

Định nghĩa 8.2 *Phép biến đổi $x = Py$ gọi là phép biến đổi không suy biến nếu P là ma trận không suy biến.*

Thuật toán Lagrange

Bước 1) Chọn 1 số hạng x_k^2 có hệ số khác không.

Lập thành 2 nhóm: 1 nhóm gồm tất cả các số hạng chứa x_k, nhóm còn lại không chứa x_k.

Bước 2) Trong nhóm đầu tiên: lập thành tổng bình phương.

Như vậy, ta sẽ được 1 tổng bình phương và 1 dạng toàn phương không chứa x_k.

Bước 3) Sử dụng bước 1, 2 cho dạng toàn phương không chứa x_k.

Chú ý: Nếu trong dạng toàn phương không có số hạng x_k^2, thì ta chọn số hạng $x_i.x_j$ có hệ số khác 0. Đổi biến

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k, \qquad k \neq i, j. \end{cases}$$

Ví dụ 8.4 *Đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.*

$f(x) = [x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)] + [2x_2^2 - 7x_3^2]$
$= [x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2] - 4(x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2x_2^2 + 16x_2x_3 - 23x_3^2$
Làm tương tự cho phần không chứa x_1:
$-2x_2^2 + 16x_2x_3 - 23x_3^2 = -2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 = -2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2$.
$\Longrightarrow f(x) = (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2$.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Dạng chính tắc cần tìm là $f(x) = g(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Ví dụ 8.5 *Đưa dạng toàn phương $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$ về dạng chính tắc bằng thuật toán Lagrange.*

Bài làm
$f(x) = [x_1^2 + 4x_1(x_2 + x_3)] + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$
$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$. Phần còn lại không có số hạng bình phương, ta đặt $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = y_1 + 4y_2 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$.
Dạng chính tắc cần tìm là $f = y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_3^2$

8.3 Phân loại dạng toàn phương

Phân loại dạng toàn phương . Dạng toàn phương $f(x) = x^T A x$ được gọi là

- xác định dương, nếu $\forall x \neq 0 : f(x) > 0$.
- xác định âm, nếu $\forall x \neq 0 : f(x) < 0$.
- nửa xác định dương, nếu $\forall x : f(x) \geqslant 0, \exists x_0 \neq 0 : f(x_0) = 0$.
- nửa xác định âm, nếu $\forall x : f(x) \leqslant 0, \exists x_0 \neq 0 : f(x_0) = 0$.
- không xác định dấu, nếu $\exists x_1, x_2 : f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$.

Ví dụ 8.6 *Phân loại dạng toàn phương* $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

Dùng thuật toán Lagrange: $f(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 \geq 0$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $f(x)$ là dạng toàn phương xác định dương.

Tính chất Cho dạng toàn phương ở dạng chính tắc

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

- Nếu $\lambda_k > 0, \forall k$ thì f xác định dương.
- Nếu $\lambda_k < 0, \forall k$ thì f xác định âm.
- Nếu $\lambda_k \geqslant 0, \forall k, \exists \lambda_i = 0$ thì f nửa xác định dương.
- Nếu $\lambda_k \leqslant 0, \forall k, \exists \lambda_i = 0$ thì f nửa xác định âm.
- Nếu $\exists \lambda_i > 0, \lambda_j < 0, i \neq j$ thì f không xác định dấu.

Định nghĩa 8.3 *Giả sử dạng toàn phương đưa về chính tắc được:*

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Số các hệ số dương được gọi là chỉ số dương quán tính.
Số các hệ số âm được gọi là chỉ số âm quán tính.

Luật quán tính Chỉ số dương quán tính, chỉ số âm quán tính của dạng toàn phương là những đại lượng bất biến không phụ thuộc vào cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Định nghĩa 8.4 (Định thức con chính) *.Cho ma trận vuông A.*
Tất cả các định thức con tạo nên dọc theo đường chéo chính được gọi là định thức con chính cấp $1, 2, \ldots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Các định thức con chính $\Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(A)$.

Tiêu chuẩn Sylvester Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax$

i) $f(x)$ xác định dương khi và chỉ khi $\Delta_i > 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

ii) $f(x)$ xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^i \Delta_i > 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ 8.7 *Phân loại dạng toàn phương* $f(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Bài làm

Ta có ma trận của dạng toàn phương f là $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Vì $\Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0.$

Vậy f xác định dương theo tiêu chuẩn Sylvester.

Ví dụ 8.8 *Cho dạng toàn phương* $f(x) = -5x_1^2 - x_2^2 - mx_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
Với giá trị nào của m thì dạng toàn phương f xác định âm.

Bài làm

Ma trận của dạng toàn phương f là $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = -5 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m + 2.$

f xác định âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \iff -m + 2 < 0 \iff m > 2.$$

Ví dụ 8.9 *Tìm m để dạng toàn phương sau không xác định dấu*

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + mx_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Bài làm

$f(x) = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3) + 5x_2^2 + mx_3^2 + 2x_2x_3$
$= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + x_2^2 + 14x_2x_3 + (m-9)x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + (x_2 + 7x_3)^2 + (m - 58)x_3^2$.
$f(x)$ không xác định dấu khi và chỉ khi có ít nhất một hệ số âm và một hệ số dương $\iff m < 58$.

Đề ôn tập - 1

Câu 1) Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX - X = B^T$

Câu 2) Trong $\mathbb{R}_4$ cho không gian con $U =< (1,1,2,2),(2,-1,1,0) >, z = (1,2,3,1)$.

(a) Tìm cơ sở và số chiều $U^\perp$.

(b) Tìm hình chiếu của z xuống $U^\perp$.

Câu 3) Trong $\mathbb{R}_4$ cho 2 không gian con

$$U =< (1,1,-2,1),(1,2,1,0) >$$

$$V : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Tìm cơ sở và số chiều của $U \cap V$.

(b) Tìm cơ sở và số chiều của $U + V$.

Câu 4) Trong $\mathbb{R}_2 : x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Xét tích vô hướng $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$. Tính khoảng cách giữa 2 véctơ u, v với $u = (2, -1), v = (1, 3)$.

Câu 5) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm $f(4,3,6)$

Câu 6) Cho ma trận cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tìm một ma trận $B \in M_3(\mathbb{R})$ sao cho $B^3 = A$.

Đề ôn số 2

Câu 1) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $3I + AX = B^T$.

Câu 2) Tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

vuông góc với véc tơ $u = (1;1;1;0)$.

Câu 3) Trong R^4, cho 2 không gian con $F =< (1;2;1;1);(2;3;-1;2) >, G =< (-3;1;2;1),(-5;10;7;7) >$. Tìm cơ sở và số chiều của $F \cap G$.

Câu 4) Trong R^3, cho tích vô hướng

$$(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$$

và không gian con $F =< (1;-1;2) >$. Tìm hình chiếu của véc tơ $x = (2;0;1)$ xuống F.

Câu 5) Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \longrightarrow R^3$ thỏa

$$f(1;2;1) = (2;-1;3), f(2;3;0) = (-3;2;5), f(1;3;2) = (5;-3;-2).$$

(a) Tìm cơ sở và số chiều của $\ker f$ và $\Im f$.

(b) Tìm ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(2;3;0),(1;3;2)\}$.

Câu 6) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & a & -3 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}$ và $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tìm a, b để x là véc riêng của A. Chéo hóa A với a, b vừa tìm được.

Đáp số

Đề 1

1. $X = \begin{pmatrix} 20 & -9 & -10 \\ -6 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. (a) Cơ sở của $U^\perp$ là $\{(-1;-1;1;0),(-2;-4;0;3)\}$.

   (b) $Pr_{U\perp}(z) = \frac{7}{17}(0;2;2;-3)$.

3. (a) Cơ sở $U+V$ là $\{(1;1;-2;1),(0;1;3;-1),(0;0;-9;5)\}$

   (b) Cơ sở $U \bigcap V$ là $\{(2;3;-1;1)\}$.

4. $d(u,v) = \sqrt{34}$.

5. $f(4;3;6) = (22;26;21)$

6. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Đề 2:

1. $X = \begin{pmatrix} -16 & -5 & 11 \\ -11 & -6 & 8 \\ 9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $x = (-1;0;1;2)\alpha, \forall \alpha \in R$.

3. Cơ sở $F \cap G$ là $\{(4;7;1;4)\}$.

4. Hình chiếu là $\frac{4}{8}(1;-1;2)$.

5. (a) Cơ sở của $\Im f$ là $\{(2;-1;3),(0,1,19)\}$. Cơ sở của $\ker f$ là $\{(48;76;9)\}$.

   (b) Ma trận của f trong cơ sở E là $\begin{pmatrix} 25 & -11 & 36 \\ -6 & 0 & -6 \\ -11 & 8 & -19 \end{pmatrix}$.

6. $a = 0, b = 4$. $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.