TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

Pháp vector của mặt cong

Cho mặt cong S: $F(x,y,z)=0$

$\vec{n} = k.gradF(M), k \neq 0$ là pháp vector của S tại M

Lưu ý: nếu S có pt : $z = z(x,y)$

$$\Rightarrow \vec{n} = k\left(z'_x, z'_y, -1\right) \; hay \; \vec{n} = k\left(-z'_x, -z'_y, 1\right), k \neq 0$$

Lưu ý:

Trường hợp mặt cong S cho dạng tham số: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} r_u = (x'_u, y'_u, z'_u) \\ r_v = (x'_v, y'_v, z'_v) \end{cases}$ thì $\vec{n} = r_u \times r_v$ (tích có hướng)

MẶT ĐỊNH HƯỚNG

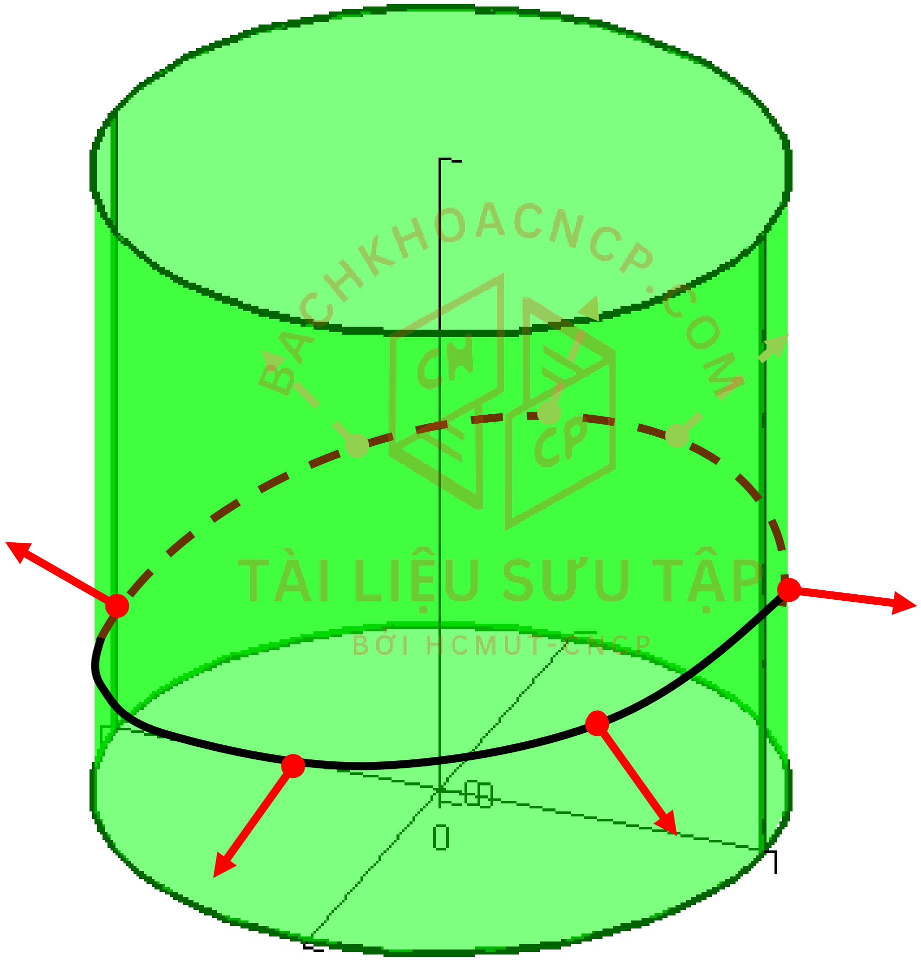
+ S được gọi là mặt định hướng (mặt 2 phía) nếu pháp vector tại M∈S di chuyển dọc theo 1 đường cong kín không cắt biên, khi quay về điểm xuất phát vẫn không đổi chiều.

Ngược lại, pháp vector đảo chiều, thì S được gọi là mặt không định hướng (mặt 1 phía).

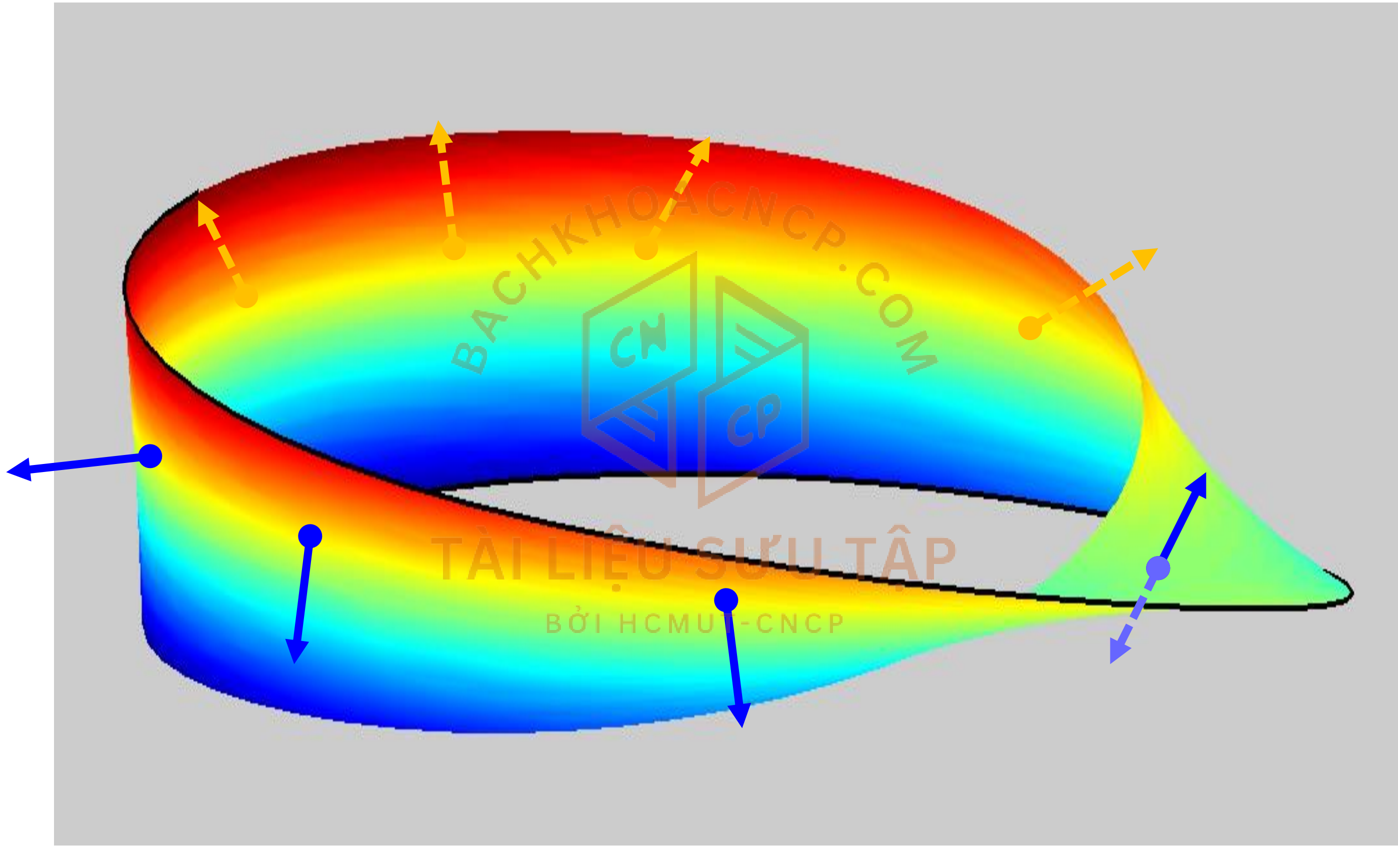
+ Phía của S là phía mà khi ta đứng trên đó, pháp vector hướng từ chân lên đầu.

(Chương trình chỉ xét mặt 2 phía)

Mặt hai phía



Mặt một phía



Quy ước về cách cho mặt

1. Nếu các mặt cong có thể viết dưới dạng $z = z(x, y)$

   ⇒Lấy phía trên/ phía dưới theo hướng trục Oz.

2. Nếu các mặt cong có thể viết dưới dạng $y = y(x, z)$

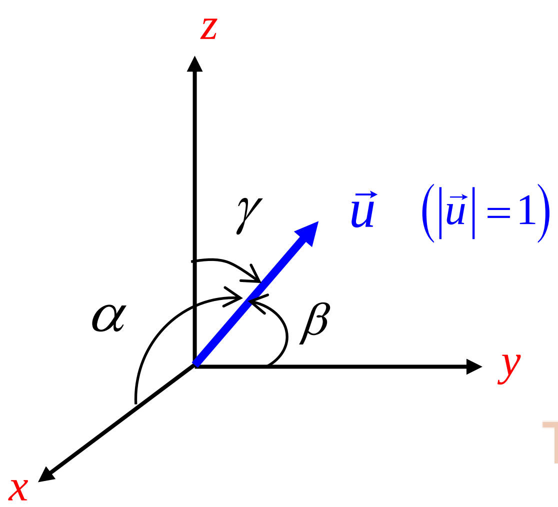
   ⇒Lấy phía phải/ phía trái theo hướng trục Oy.

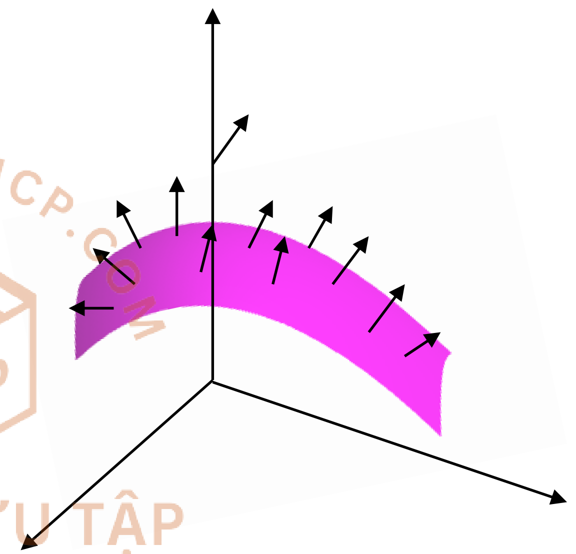
3. Nếu các mặt cong có thể viết dưới dạng $x = x(y, z)$

   ⇒Lấy phía trước/ phía sau theo hướng trục Ox.

4. Nếu các mặt cong tách không gian thành 2 phần trong/ngoài có thể lấy phía trong/ phía ngoài.

COSIN CHỈ PHƯƠNG

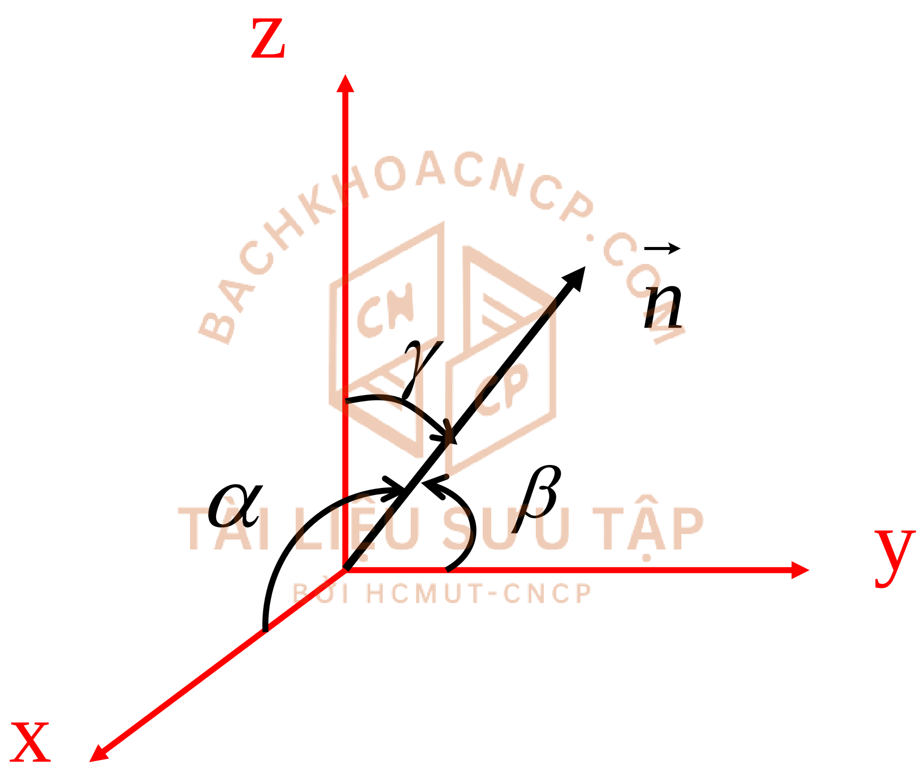




$$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Phía trên theo hướng $Oz \Rightarrow \cos\gamma > 0$

Biểu diễn vector đơn vị

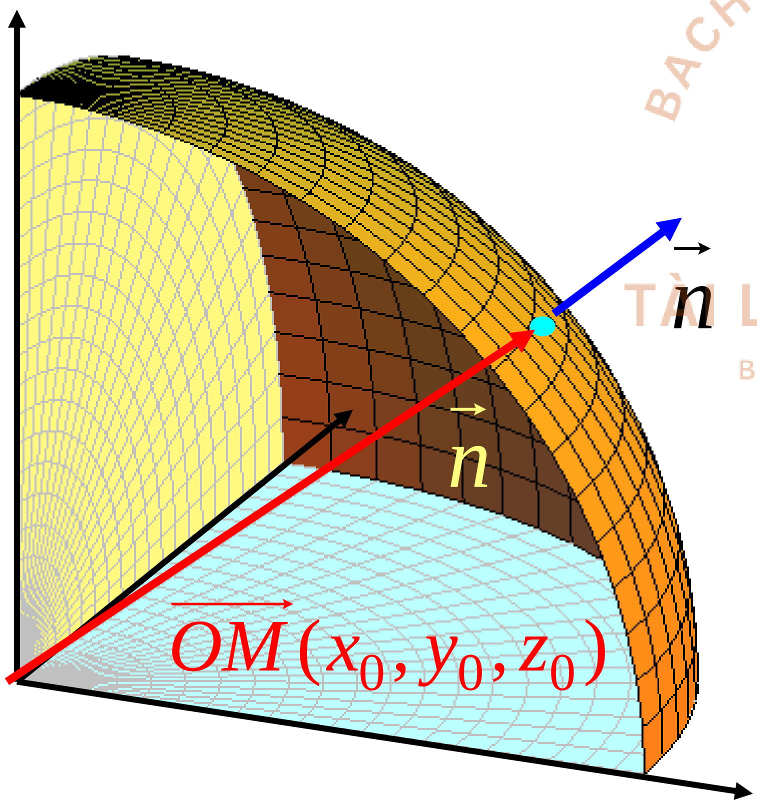


$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Một số ví dụ tìm pháp vector

VD1: Mặt cầu $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ M(x_0, y_0, z_0) \in S$

$$\nabla F(M) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = k.(x_0, y_0, z_0),\ k \neq 0$$



Pháp vector ngoài (phía ngoài)

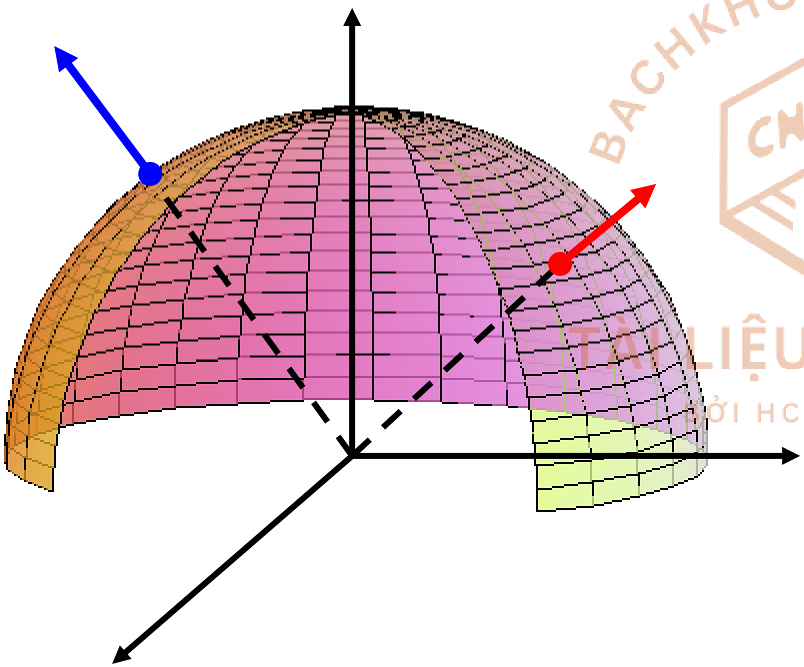
$$\Rightarrow \vec{n} = k(x_0, y_0, z_0),\ k > 0$$

Pháp vector trong (phía trong)

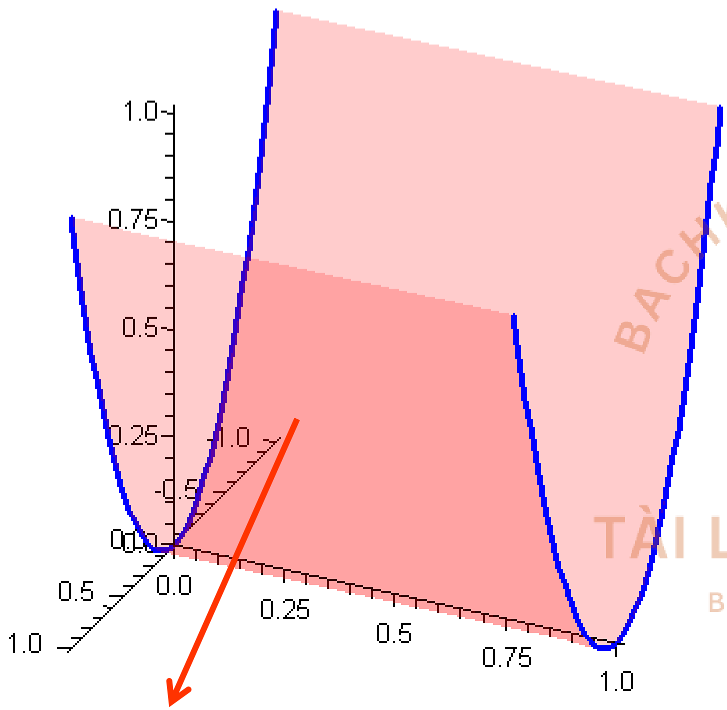
$$\Rightarrow \vec{n} = k(x_0, y_0, z_0),\ k < 0$$

Một số ví dụ tìm pháp vector

VD2: Cho S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$. Tính pháp vector của S.



VD3: Tìm pháp vecto của mặt S là phía dưới của mặt tru $z = x^2$

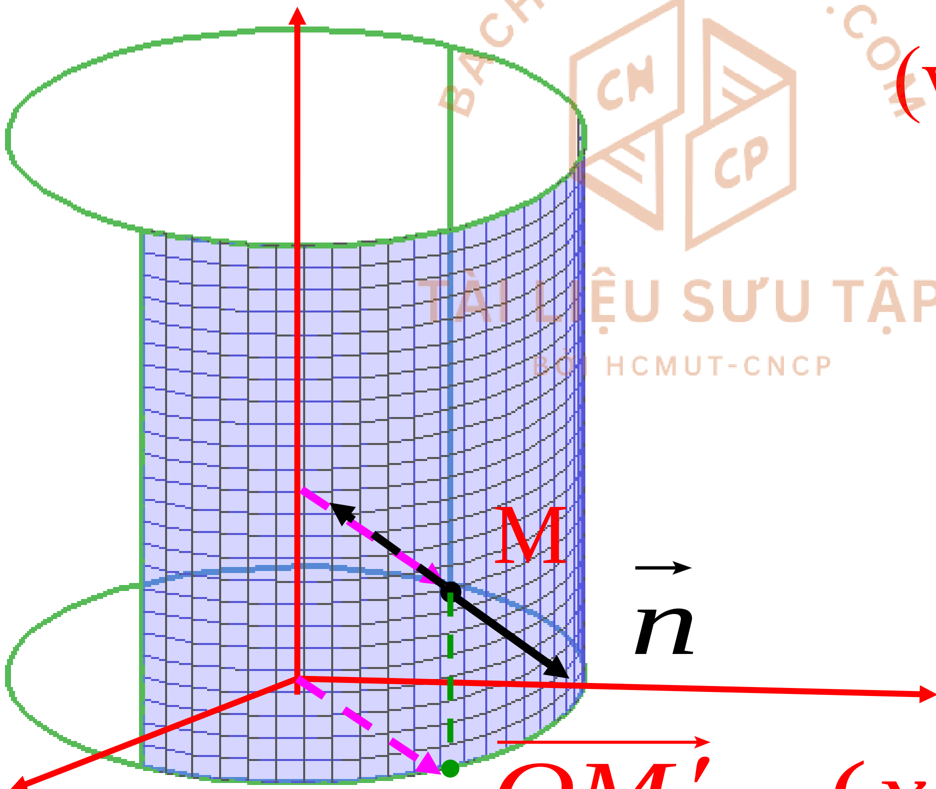


Một số ví dụ tìm pháp vector

a/ Mặt trụ $S: x^2 + y^2 = R^2$

$M(x_0, y_0, z_0) \in S,\quad \overrightarrow{n(M)} = \pm(2x_0, 2y_0, 0)$

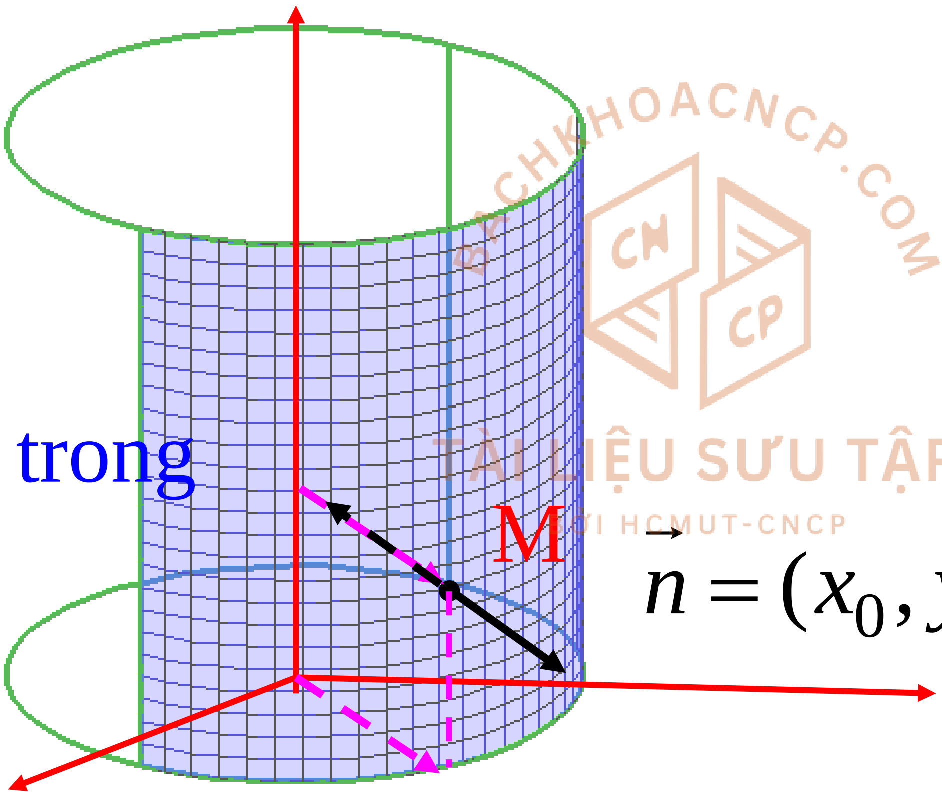
(và các vector tỷ lệ)



$\overrightarrow{OM'} = (x_0, y_0, 0)$

b/ Mặt trụ $S : x^2 + y^2 = R^2$

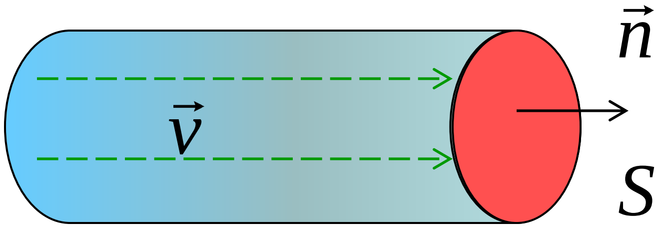
$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \overrightarrow{n(M)} = \pm(2x_0, 2y_0, 0)$$



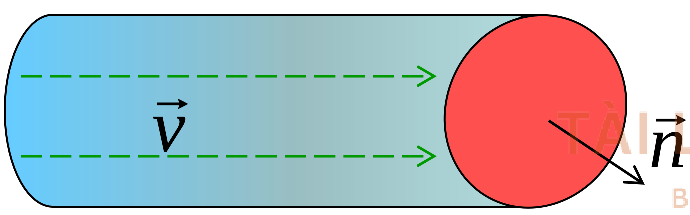
PVT trong

$\vec{n} = (x_0, y_0, 0)$ PVT ngoài

BÀI TOÁN DẪN

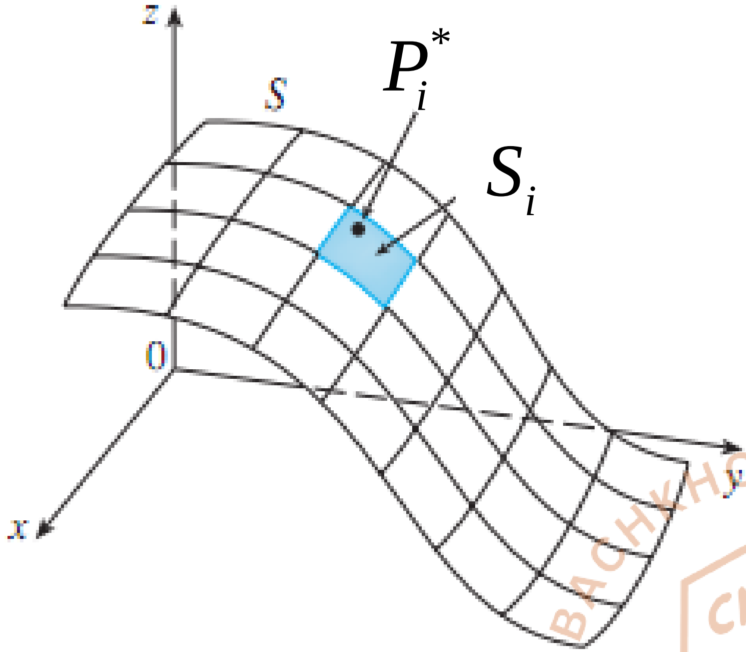


Lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian là : $T = v \times S$



$T = \vec{v}.\vec{n}\,S$

Nếu vận tốc không đều và S không phẳng ???



$$T_{ij} \approx \vec{v}(P_i^*).\vec{n}(P_i^*)\Delta S_i$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_j \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v}(P_i^*).\vec{n}(P_i^*)\Delta S_i$$

Qua giới hạn: $T = \iint\limits_S \vec{v}.\vec{n}\, ds$

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

\+ Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng S. Gọi pháp vector đơn vị của S là $\vec{n}$

\+ Tích phân mặt loại 2 của P, Q, R trên S định nghĩa bởi

$$I = \iint_S (P,Q,R).\vec{n}\, ds$$

Ký hiệu:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P,Q,R).\vec{n}\, dS$$

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

$BT1$: Cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, lấy phía ngoài và điểm $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Gọi γ là góc hợp bởi pháp vector đơn vị $\vec{n}$ và vector chỉ phương trục Oz. Tính giá trị $\cos\gamma$.

$BT2$: Cho mặt trụ $z = 1 - x^2$, lấy phía dưới theo hướng trục Oz và điểm $M(1,1,0)$. Gọi α là góc hợp bởi pháp vector đơn vị $\vec{n}$ và vector chỉ phương trục Ox. Tính giá trị $\cos\alpha$.

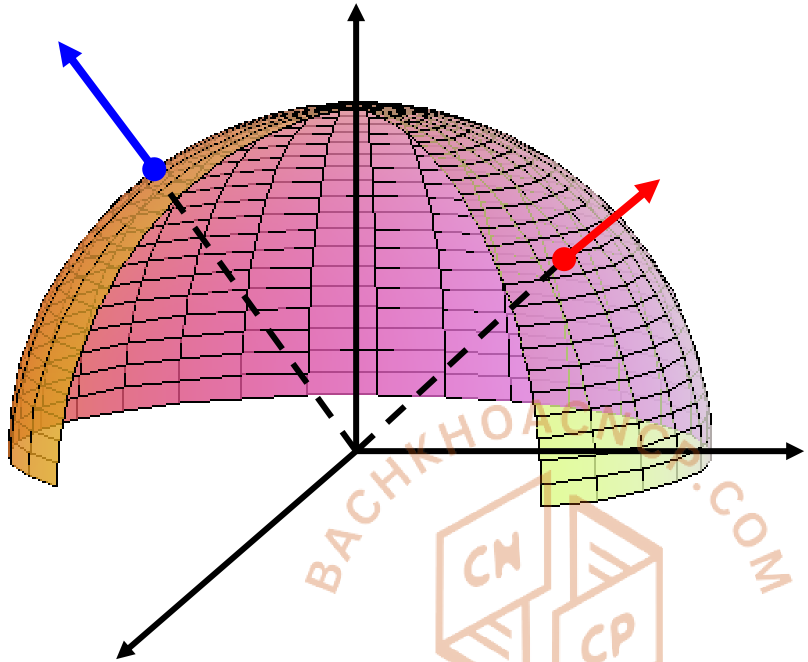
VÍ DỤ

1/ Cho S là phía trên theo hướng trục Oz của nửa mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, tính

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Tại M (x, y, z) trên S, pháp vector đơn vị là

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}$$



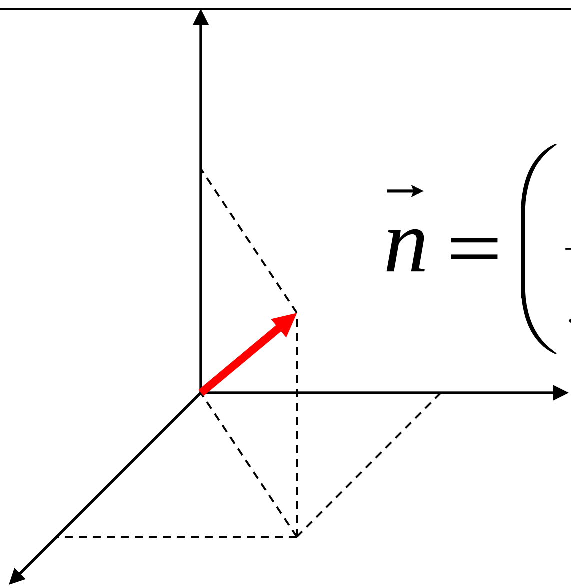
$$I = \iint_S (P,Q,R).\vec{n}ds = \iint_S (x,y,z).\frac{(x,y,z)}{R}ds$$

$$= \iint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{R}ds \quad = \iint_S \frac{R^2}{R}ds \quad = R\iint_S ds$$

$$= 2\pi R^3$$

2/ Cho S là của phần mp $x + y + z = 1$ bị chắn bởi các mặt tọa độ, lấy phía trên theo hướng trục Oz, tính

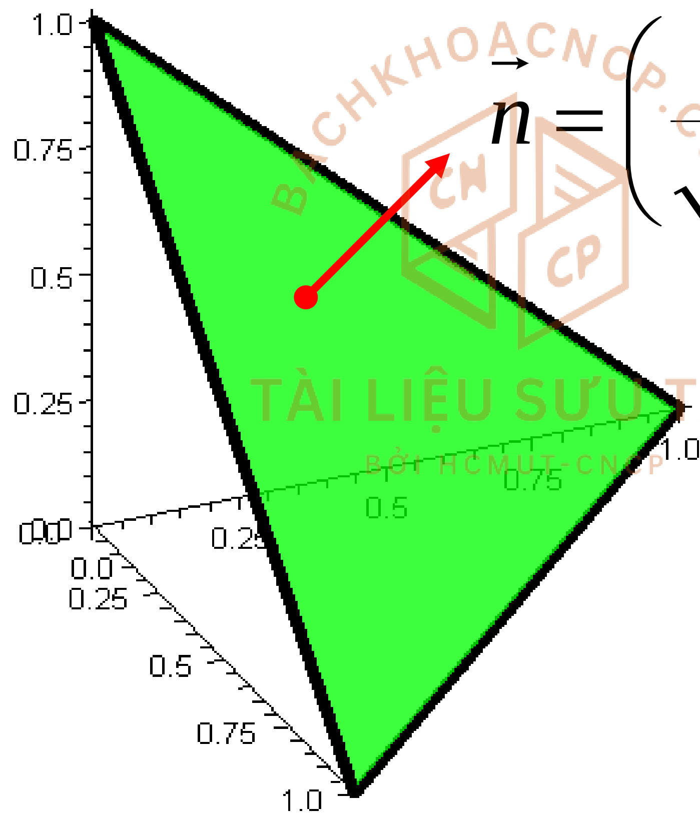
$$I = \iint\limits_{S} (x - y)dydz + zdxdy$$



$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$hay \quad \vec{n} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Phía trên nhìn theo hướng Oz $\Rightarrow$ thành phần thứ 3 của $\vec{n}$ phải không âm.



$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I = \iint_S (x-y)dydz + zdxdy$$

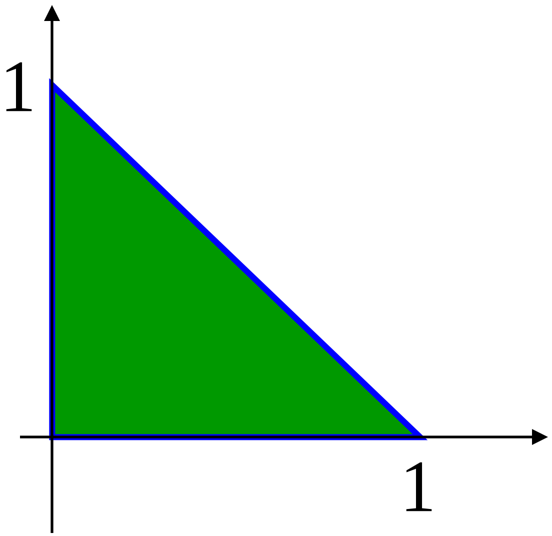
$$= \iint_S (x-y, 0, z).\vec{n}ds$$

$$= \iint_S (x-y, 0, z).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x-y+z)ds$$

S: z = 1 – x – y ,

$$\underset{Oxy}{hc}\, S = D : x = 0, y = 0, x + y = 1$$



$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x - y + z) ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (x - y + 1 - x - y)\sqrt{3} dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - 2y) dx = \frac{1}{6}$$

Một lưu ý khi tính tích phân mặt loại 2

Nếu mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$

Hình chiếu của S lên Oxy là miền D.

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \pm \iint_D \left(-P.f'_x - Q.f'_y + R \right) dxdy$$

Dấu + nếu S là phía trên của mặt cong theo hướng trục Oz.

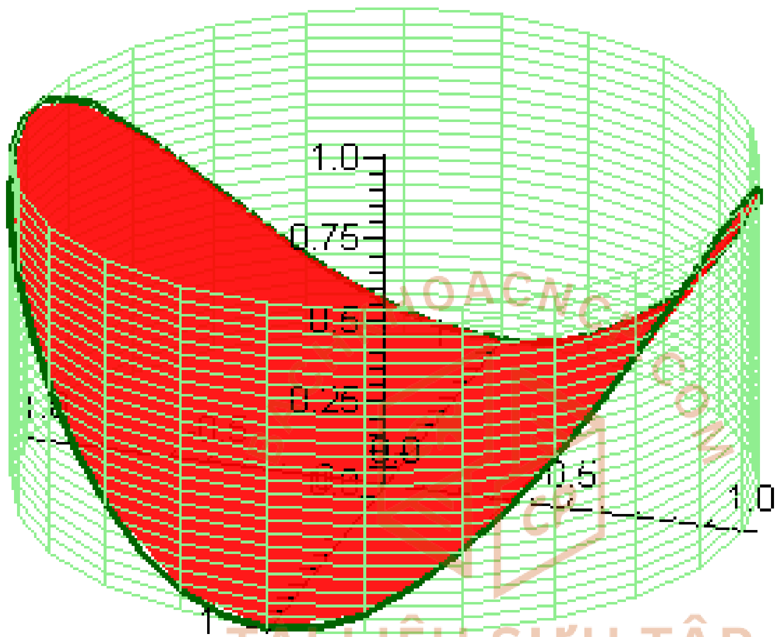
3/ Cho S là phía trên của phần mặt trụ $z = y^2$ bị chắn bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, tính

$$I = \iint_S (x + y^2)dydz + 2z\cos y dzdx + zdxdy$$

$$I = \iint_D \left(-P.f'_x - Q.f'_y + R\right)dxdy$$

$$= \iint_D \left[-\left(x + y^2\right).0 - 2z\cos y.2y + z\right]dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(-4y^3\cos y + y^2\right)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} y^2 dxdy$$


1.0
0.75
0.5
0.25
0.0
0.5
1.0

4/ Cho S là phía trước của phần mặt trụ $x = y^2$ theo hướng trục Ox , bị chắn các mặt $x = 1$, z = 1, z = 0. Tính :

$$I = \iint_S (x + y^2)dydz + 2z\cos y dzdx + zdxdy$$

5/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ tính $I = \iint_S xdydz$

ĐƯA TP MẶT LOẠI 2 VỀ TP KÉP

$$I = \iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

$$= (\pm)\iint_{D_{yz}} P\,dydz\ (\pm)\iint_{D_{zx}} Q\,dzdx\ (\pm)\iint_{D_{xy}} R\,dxdy = I_1 + I_2 + I_3$$

Tính $$I_3 = \iint_S R(x,y,z)\,dxdy$$

γ : góc hợp bởi Oz+ với $\vec{n}$

•Viết pt S dạng: z = z(x,y) (bắt buộc)

•Tìm hc D_{xy} của S lên mp z = 0 (Oxy) (bắt buộc)

$$\gamma \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = +\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

(phía trên)

$$\gamma \ge \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

(phía dưới)

Lưu ý

Nếu pt mặt cong S không chứa z (S//Oz hoặc S chứa Oz)

$\Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oz$

$\Rightarrow \quad \cos\gamma = 0$

$\Rightarrow \quad I_3 = 0$

Tương tự:

I_1: $\begin{cases} \text{Pt của S: } x = x(y, z) \\ D_{yz} = \text{hc của S lên Oyz} \\ \text{Góc của PVT so với Ox+} \end{cases}$

I_2 : $\begin{cases} \text{Pt của S: } y = y(x, z) \\ D_{zx} = \text{hc của S lên Ozx} \\ \text{Góc của PVT so với Oy+} \end{cases}$

Pt mặt cong không chứa $x \Rightarrow I_1 = 0$

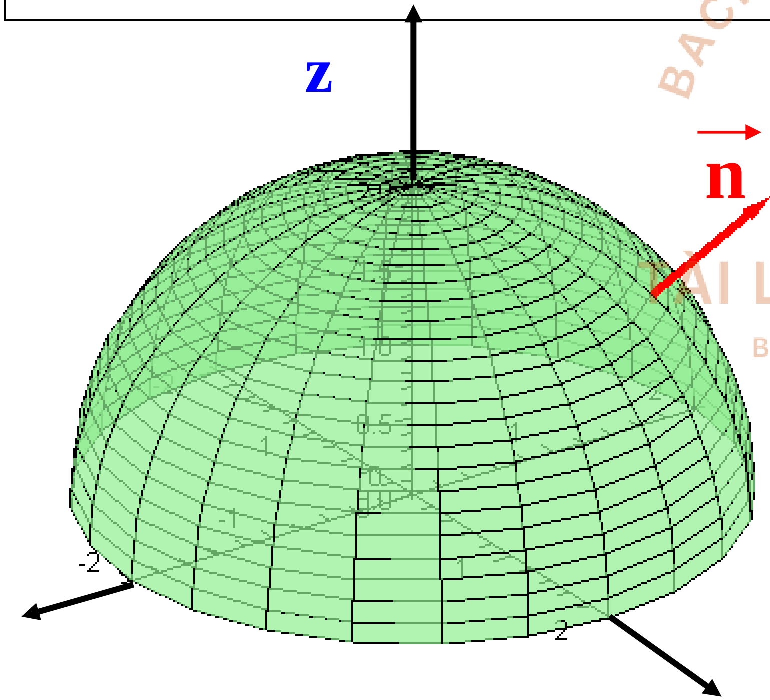
Pt mặt cong không chứa $y \Rightarrow I_2 = 0$

Pt mặt cong không chứa $z \Rightarrow I_3 = 0$

VÍ DỤ

1/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{tính} \quad I = \iint_S z\,dxdy$$



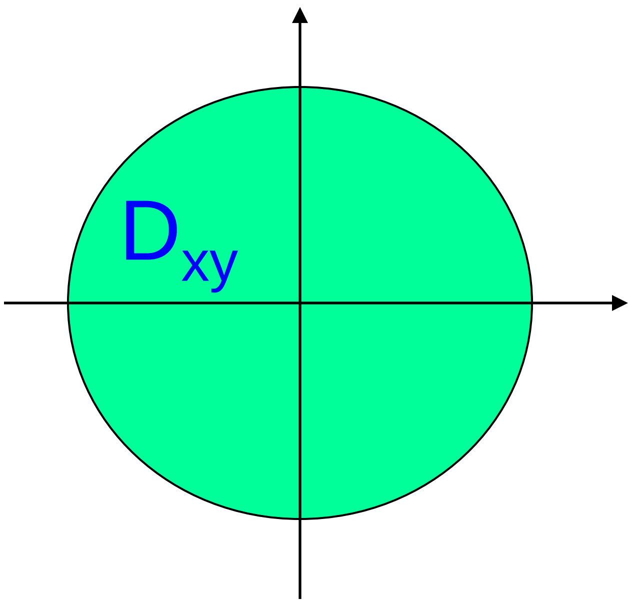
$$\vec{n}$$

$$I = I_3 = \iint_S z\,dxdy$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ \underset{Oxy}{hc}\, S = D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2 \end{cases}$$

$$I = \iint_S z\,dxdy = +\iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

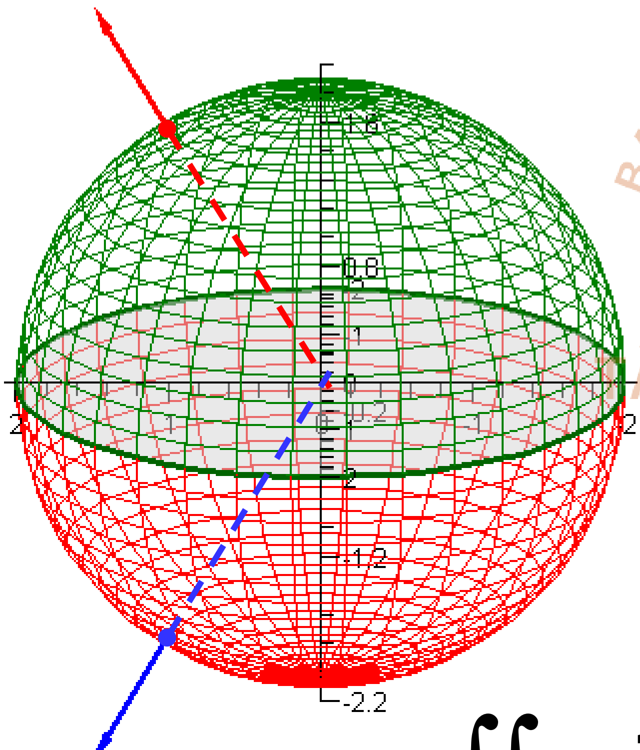
Phía trên



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr = \frac{2\pi}{3} R^3$$

2/ Cho S là phía ngoài của mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tính $I = \iint\limits_S xz^2 dxdy$



$S_1 \cup S_2 :\quad z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$hc_{Oxy} S_{1,2} = D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2$$

$$I = \iint\limits_S xz^2 dxdy = \iint\limits_{S_1} xz^2 dxdy + \iint\limits_{S_2} xz^2 dxdy$$

$$I = \iint\limits_{S} xz^2 dxdy = \iint\limits_{S_1} xz^2 dxdy + \iint\limits_{S_2} xz^2 dxdy$$

$$= + \iint\limits_{D_{xy}} x\left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)^2 dxdy$$

$$- \iint\limits_{D_{xy}} x\left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)^2 dxdy \quad = 0$$

<u>Nhận xét</u> : Nếu hàm chẵn / lẻ theo z và S đối xứng qua mp z = 0.

Lưu ý về tính đối xứng

S gồm S_1 và S_2 đối xứng qua mp z = 0

- R(x, y, z) chẵn theo z : $I_3 = 0$
- R(x, y, z) lẻ theo z:

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = 2\iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy$$

Tương tự cho I_1(xét P và mp x = 0), I_2(xét Q và mp y=0)

4/ Cho S là phía trên của phần mặt trụ $z = y^2$

bị chắn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, tính

$$I = \iint_S (x + y^2)dydz + 2z\cos y dzdx + zdxdy$$

$I = I_1 + I_2 + I_3$

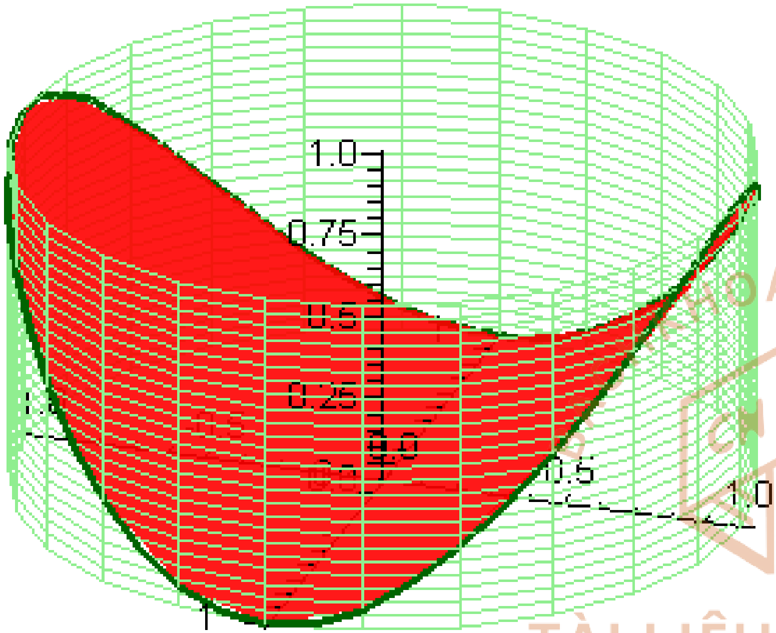
- Pt S không chứa x $\Rightarrow I_1 = 0$

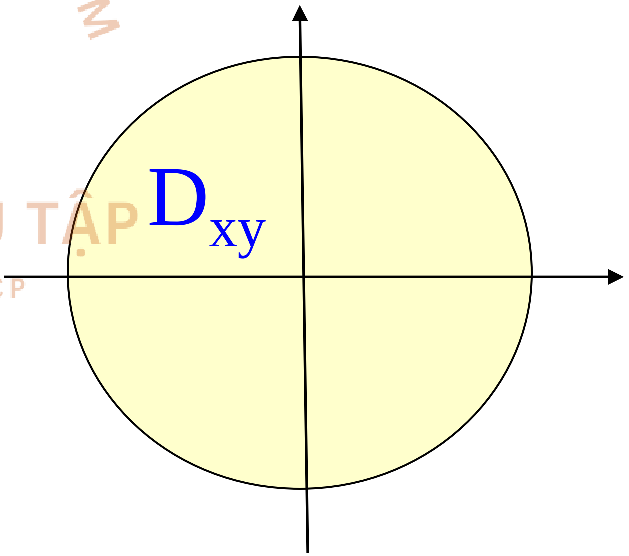
- S đối xứng qua mp y = 0, Q = 2z cosy chẵn theo y

$\Rightarrow I_2 = 0$

$$I = I_3 = \iint_S z\,dxdy$$

$$= +\iint_{D_{xy}} y^2\,dxdy$$





ĐỊNH LÝ GAUSS - OSTROGRATXKI

Cho Ω là miền đóng và bị chặn trong R_3, S là phía ngoài mặt biên của Ω (S là mặt cong kín). P, Q, R là các hàm liên tục trên Ω.

Tích phân mặt loại 2

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Tích phân bội ba

VÍ DỤ

1/ Cho S là phía ngoài mặt bao khối Ω :

$x^2 + y^2 \le z \le 1$. Tính

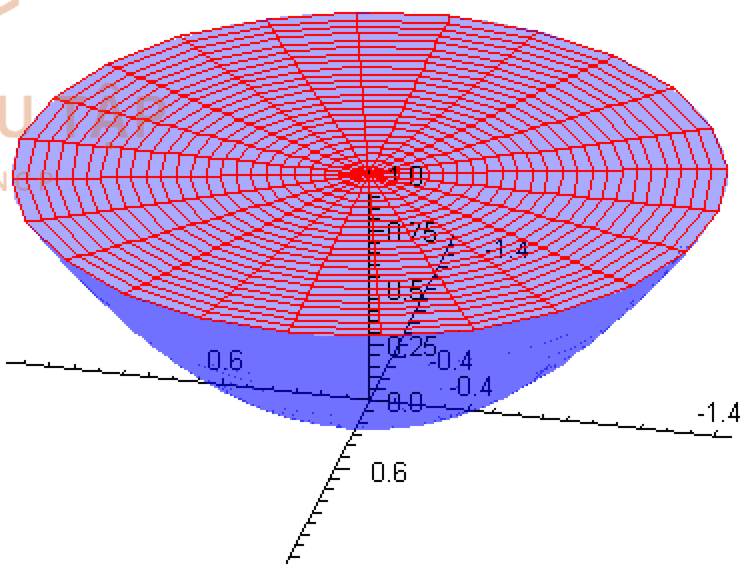
$$I = \iint_S zy^2 dydz + (y + y^2)dzdx + x^2 dxdy$$

$$I \overset{G-O}{=} \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$= \iiint_\Omega (0 + 1 + 2y + 0) dxdydz$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(1+2y)\,dxdydz \qquad \Omega:\ x^2+y^2\le z\le 1$$

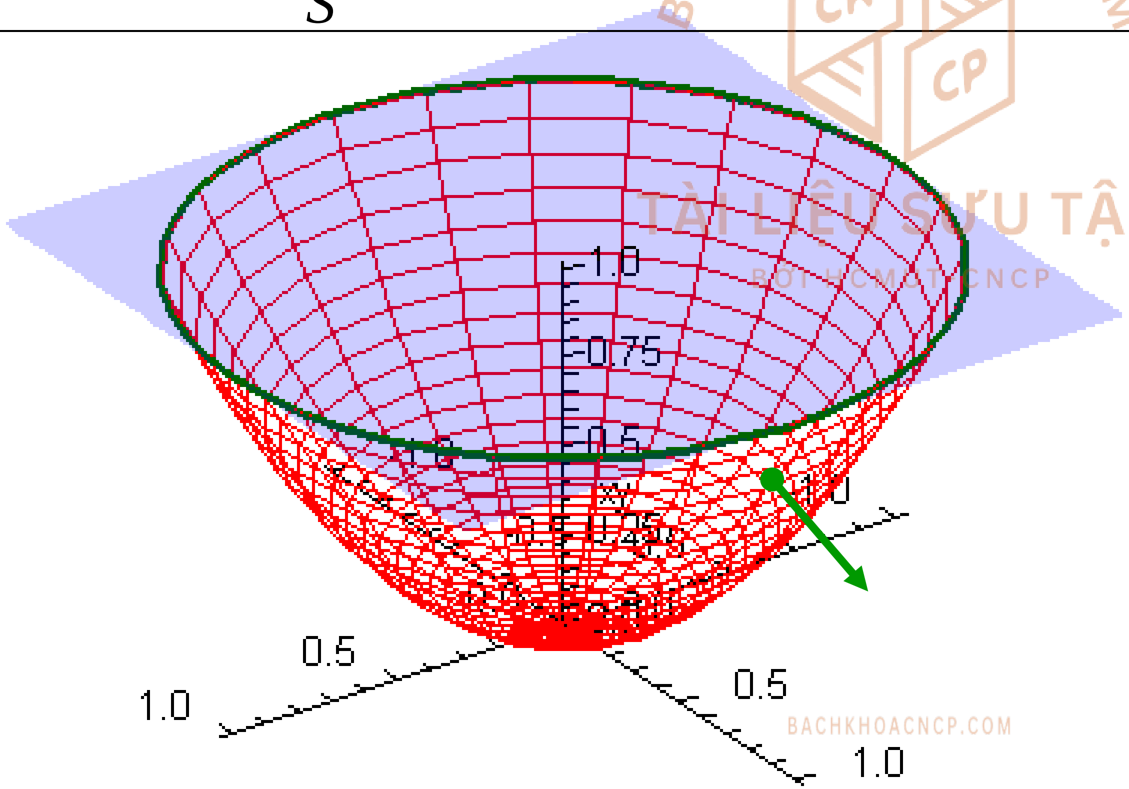
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_{r^2}^1(1+2r\sin\varphi)\,r\,dz=\frac{\pi}{2}$$



2/ Cho S là phía ngoài phần mặt paraboloid (phía dưới theo hướng trục Oz) $z = x^2 + y^2$ bị chắn bởi mp $z = 1$.

Tính :

$$I = \iint\limits_S zy^2 dydz + (y + y^2)dzdx + x^2 dxdy$$



S là mặt hở.

Cách 1: $I = \iint\limits_S zy^2 dydz + (y + y^2)dzdx + x^2 dxdy$

$S: z = x^2 + y^2$ (Phía dưới.)

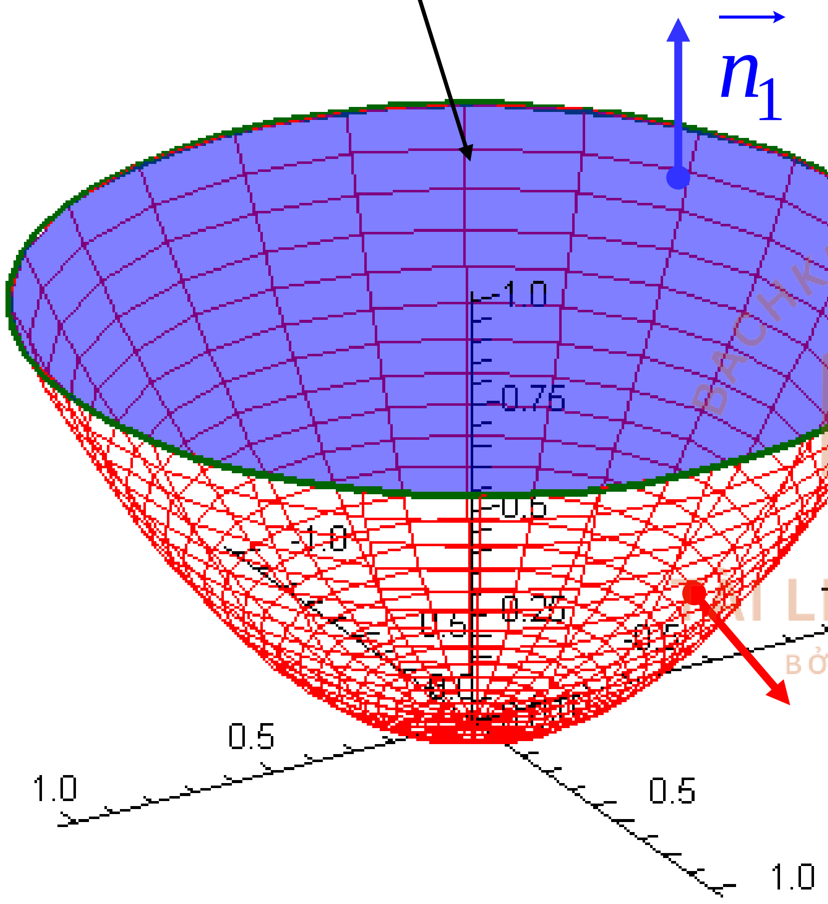
$$I = -\iint\limits_D \left(-P.f'_x - Q.f'_y + R\right)dxdy$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(-zy^2.2x - \left(y + y^2\right).2y + x^2\right)dxdy$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left[\left(x^2 + y^2\right).xy^2 + 2y^2 + 2y^3 - x^2\right]dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi\right)rdr \quad = \frac{\pi}{4}$$

Cách 2: Thêm S_1 vào S để tạo thành mặt kín



S_1 là phía trên phần mp $z = 1$ bị chắn trong paraboloid.

Gọi Ω là vật thể được bao bởi $S \cup S_1$.

Áp dụng công thức G-O:

$$\iint_{S\cup S_1} zy^2dydz+(y+y^2)dzdx+x^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{\pi}{2}$$

(xem ví dụ trước)

$$\Rightarrow \iint_{S} + \iint_{S_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_S + \iint_{S_1} = \frac{\pi}{2}$$

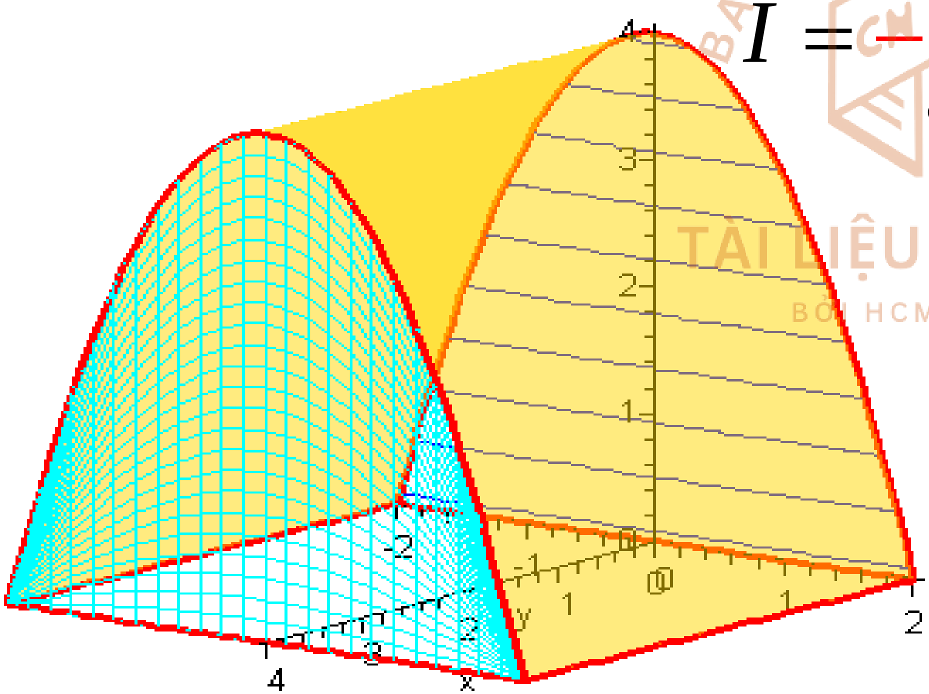
S_1: $z = 1$, trong par $x^2+y^2 = z$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \iint_{S_1} zy^2 dydz + (y + y^2)dzdx + x^2 dxdy$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2 dxdy = \frac{\pi}{4}$$

3/ Cho S là phía trong mặt bao khối Ω giới hạn bởi: $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 4$, $z = 0$. Tính:

$$I = \iint\limits_S zxdydz + xdzdx + zydxdy$$



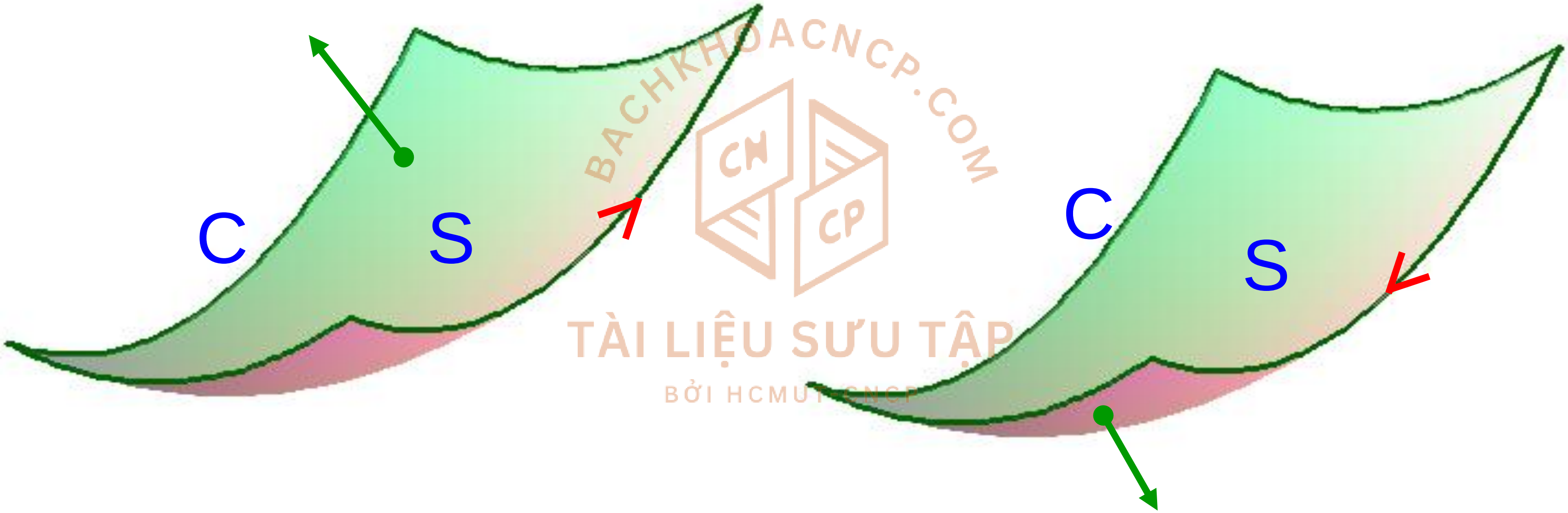
$$I = -\iiint\limits_\Omega \left(P'_x + Q'_y + R'_z \right) dxdydz$$

$$= -\iiint\limits_\Omega (z + 0 + y) dxdydz$$

$$= -\int_0^4 dx \int_{-2}^{2} dy \int_0^{4-y^2} (z + y) dz$$

CÔNG THỨC STOKES

Cho đường cong C là biên của mặt định hướng S. C được gọi là định hướng dương theo S nếu khi đứng trên S (pháp tuyến hướng từ chân lên đầu) sẽ nhìn thấy C đi ngược chiều kim đồng hồ.


C
S
C
S

CÔNG THỨC STOKES

Cho P, Q, R và các đạo hàm riêng liên tục trên S, C là biên định hướng dương của S. Khi đó:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

Tích phân đường 2

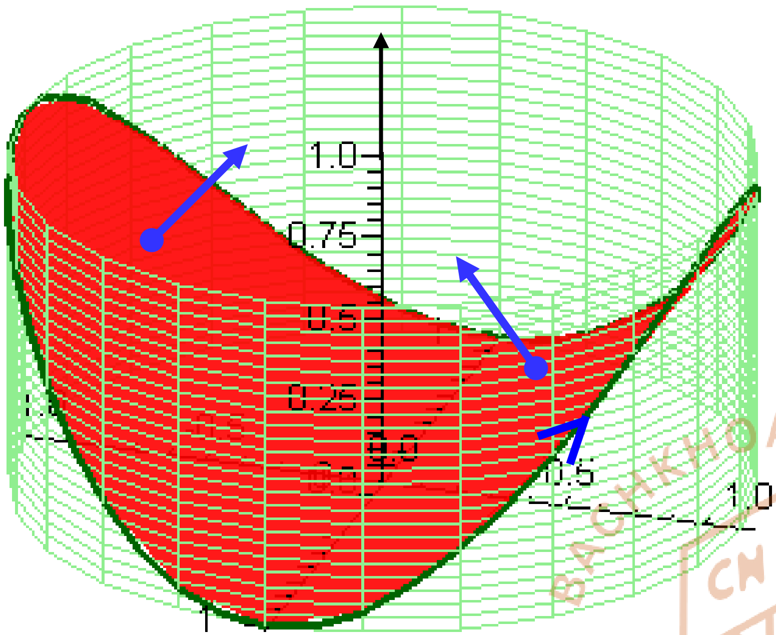
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Tích phân mặt 2

VÍ DỤ

1/ Cho C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 1$ và trụ $z = y^2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương Oz. Tính:

$$I = \int_C (x + y)dx + (2x^2 - z)dy + xy^2 dz$$



Chọn S là phía trên mặt trụ $z = y^2$

$P = x + y$

$Q = 2x^2 - z$

$R = xy^2$

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_S (2xy + 1) dydz + \left(0 - y^2\right) dzdx + (4x - 1) dxdy$$

S : phía trên $z = y^2$, phần bị chắn trong trụ $x^2+y^2 = 1$

$$I = \iint_S (2xy+1)dydz + y^2dzdx + (4x-1)dxdy$$

$$= +\iint_D \left[-(2xy+1).0 - y^2.2y + (4x-1)\right]dxdy$$

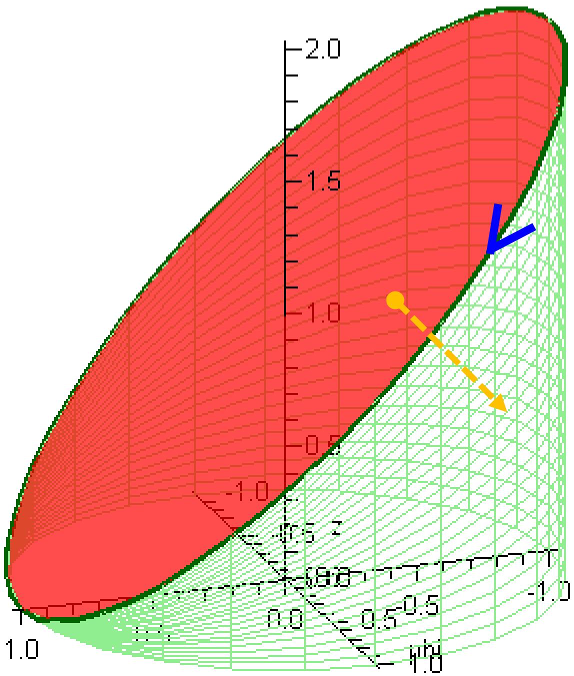
$$= + \iint_{x^2+y^2\le 1} (-2y^3+4x-1)dxdy = -\pi$$

2/ Cho C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $x + z = 1$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ gốc tọa độ. Tính:

$$I = \int_C (y - z^2)dx + (z - x^2)dy + (x - y^2)dz$$

$$I = \int_C (y - z^2)dx + (z - x^2)dy + (x - y^2)dz$$

Chọn S là phía dưới phần mặt phẳng $x + z = 1$, bị chắn bên trong trụ.



$$I = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$I = \iint_S (-2y - 1)dydz + (-2z - 1)dzdx + (-2x - 1)dxdy$$

$$I = \iint_S (-2y-1)\,dydz + (-2z-1)\,dzdx + (-2x-1)\,dxdy$$

$$z = 1 - x \qquad D: x^2 + y^2 \le 1$$

$$I = -\iint_D \left(-P.f'_x - Q.f'_y + R\right)dxdy$$

$$= -\iint_D \left[-(2y+1).+(2z+1).0-(2x+1)\right]dxdy$$

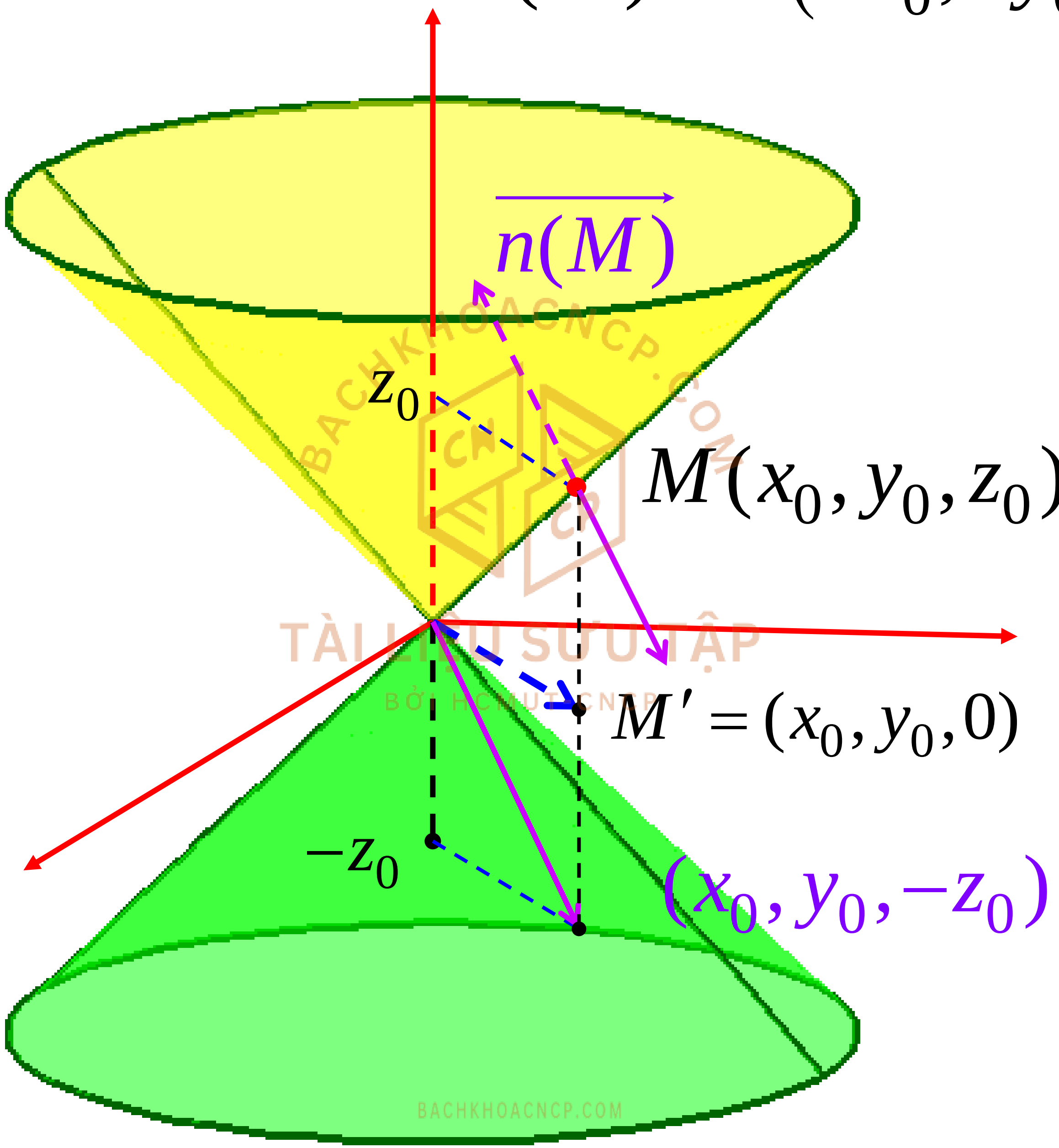
$$= 2\pi$$

Một số ví dụ tìm pháp vector

a/ Mặt nón $S: x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \overrightarrow{n(M)} = \pm(2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

$$\overrightarrow{n(M)} = \pm\left(2x_0, 2y_0, -2z_0\right)$$



Pháp vector và pt mặt tiếp diện của S: z= f(x, y)

Giả sử mặt tiếp diện của S có dạng:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hay $\quad z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

Khi cho $\quad y=y_0$ ta có pt tiếp tuyến của S là:

$$z-z_0=a(x-x_0)$$

Đây là tt của đường cong C: giao tuyến của S và mp $y=y_0$

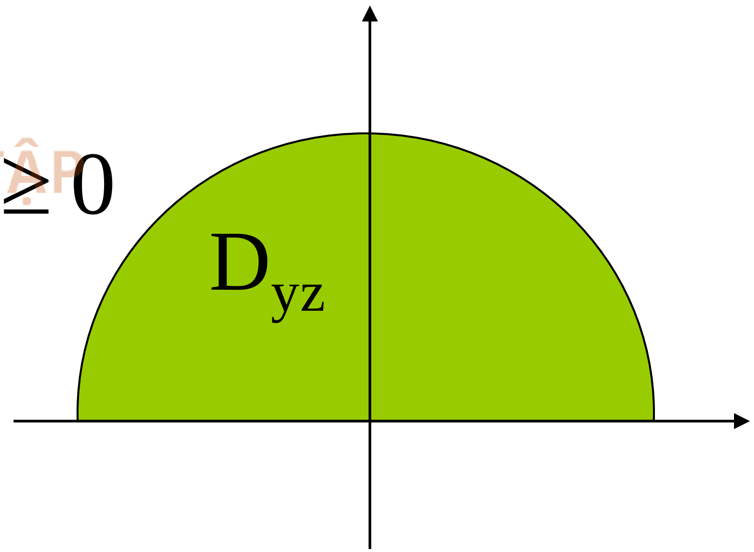
tại điểm $\quad x=x_0.\quad$ Vậy : $a=f'_x(x_0,y_0)$

3/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

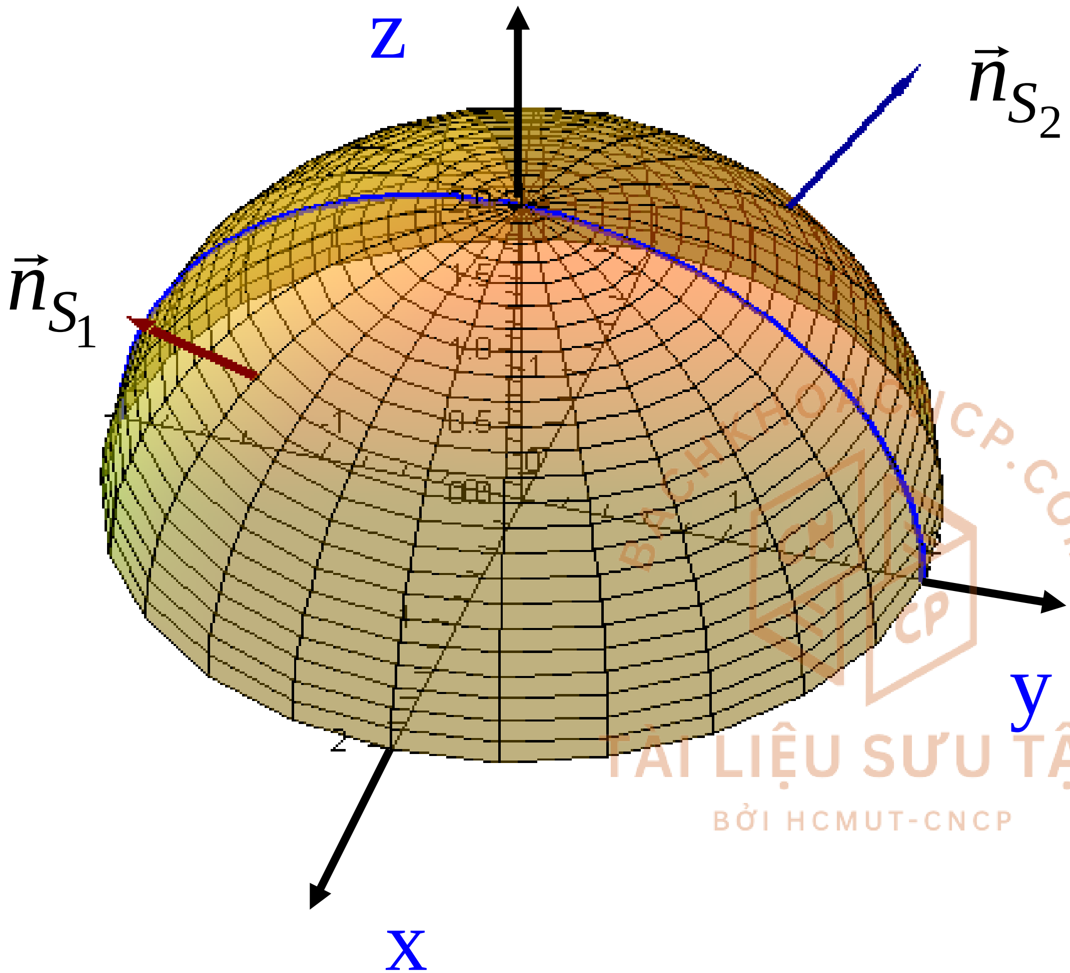
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{tính} \quad I = \iint_S x\,dydz$$

$I = I_1$ $\quad$ $S = S_1 \cup S_2 : \quad x = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$

$$hc_{Oyz} S_{1,2} = D_{yz} : y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0$$



Lưu ý: S_1 và S_2 đối xứng qua mp $x = 0$

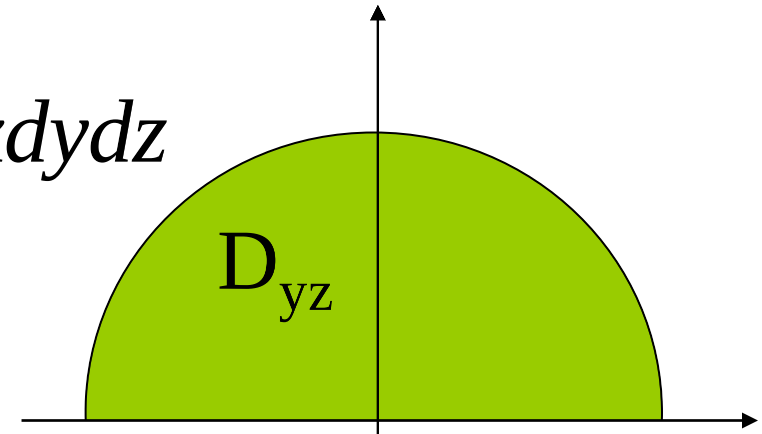


$$\alpha_1 \le \frac{\pi}{2} \quad ,\alpha_2 \ge \frac{\pi}{2}$$

α là góc của Ox+

với $\vec{n}$

$$I = \iint_S x\,dydz = \iint_{S_1} x\,dydz + \iint_{S_2} x\,dydz$$



$$= +\iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dydz - \iint_{D_{yz}} -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dydz$$

Phía trước

Phía sau

$$= 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dydz = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,r\,dr$$