NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: ntcvantud@gmail.com

NỘI DUNG

1. ĐA THỨC NỘI SUY

NỘI DUNG

1. ĐA THỨC NỘI SUY
2. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

NỘI DUNG

NỘI DUNG

Nội dung

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thực hành, thường gặp những hàm số $y = f(x)$ mà không biết biểu thức giải tích cụ thể f của chúng. Thông thường, ta chỉ biết các giá trị $y_0, y_1, \ldots, y_n$ của hàm số tại các điểm khác nhau $x_0, x_1, \ldots, x_n$ trên đoạn $[a, b]$. Các giá trị này có thể nhận được thông qua thí nghiệm, đo đạc,...Khi sử dụng những hàm trên, nhiều khi ta cần biết các giá trị của chúng tại những điểm không trùng với $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$.

Để làm được điều đó, ta phải xây dựng một đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

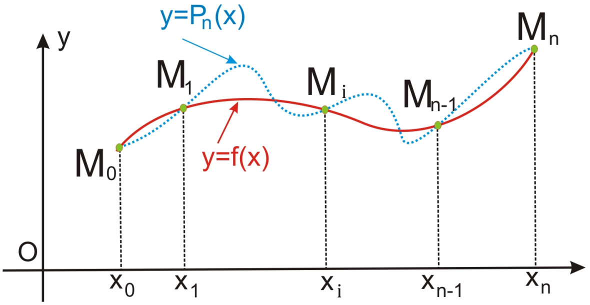
thỏa mãn

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Định nghĩa 1.1

$P_n(x)$ được gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$, còn các điểm $x_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ được gọi là các nút nội suy

Về mặt hình học, có nghĩa là tìm đường cong $y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$ đã biết trước của đường cong $y = f(x)$.



ĐỊNH LÝ 1.1

Đa thức nội suy $P_n(x)$ *của hàm số* $f(x)$, *nếu có, thì chỉ có duy nhất.*

ĐỊNH LÝ 1.1

Đa thức nội suy $P_n(x)$ *của hàm số* $f(x)$, *nếu có, thì chỉ có duy nhất.*

VÍ DỤ 1.1

Xây dựng đa thức nội suy của hàm số $y = f(x)$ *được xác định bởi*

x	0	1	3
y	1	-1	2

Giải.

Đa thức nội suy có dạng $y = P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Thay các điểm $(x_i, y_i)(i = 1,2,3)$ vào đa thức này ta được hệ

$$\begin{cases} 0.a_2 + 0.a_1 + a_0 & = & 1 \\ 1.a_2 + 1.a_1 + a_0 & = & -1 \\ 9.a_2 + 3.a_1 + a_0 & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & -\frac{19}{6} \\ a_2 & = & \frac{7}{6} \end{cases}$$

Vậy đa thức nội suy $P(x) = \dfrac{7}{6}x^2 - \dfrac{19}{6}x + 1$

Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Ta sẽ xây dựng đa thức nội suy của hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_n], n \geqslant 1$.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng sau

$$\mathscr{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^k(x).y_k, \text{ trong đó } p_n^k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

VÍ DỤ 2.1

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin(\pi x)$ *tại các nút nội suy*
$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2.1

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin(\pi x)$ *tại các nút nội suy* $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$

Giải.

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$y = \sin(\pi x)$	0	$\frac{1}{2}$	$1.$

Công thức nội suy Lagrange của hàm số y

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}.0 + \frac{x(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}.\frac{1}{2} + \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}.1 = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Đặt

$$\omega(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n$$

Khi đó

$$p_n^k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$$

Đa thức nội suy Lagrange trở thành

$$\mathscr{L}_n(x) = \omega(x).\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\omega'(x_k)(x-x_k)} = \omega(x).\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{D_k},$$

với $D_k = \omega'(x_k)(x-x_k)$

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	
x_0	$x-x_0$	x_0-x_1	$\ldots$	x_0-x_n	D_0
x_1	x_1-x_0	$x-x_1$	$\ldots$	x_1-x_n	D_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	x_n-x_0	x_n-x_1	$\ldots$	$x-x_n$	D_n
					$\omega(x)$

Ví dụ 2.2

Cho hàm số y được xác định bởi

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Sử dụng đa thức Lagrange tính gần đúng giá trị của hàm số y tại $x = 2$.

VÍ DỤ 2.2

Cho hàm số y được xác định bởi

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Sử dụng đa thức Lagrange tính gần đúng giá trị của hàm số y tại $x = 2$.

Giải.

$x=2$	0	1	3	4	
0	$2-0$	$0-1$	$0-3$	$0-4$	$D_0 = (2-0)(0-1)(0-3)(0-4) = -24$
1	$1-0$	$2-1$	$1-3$	$1-4$	$D_1 = (1-0)(2-1)(1-3)(1-4) = 6$
3	$3-0$	$3-1$	$2-3$	$3-4$	$D_2 = (3-0)(3-1)(2-3)(3-4) = 6$
4	$4-0$	$4-1$	$4-3$	$2-4$	$D_3 = (4-0)(4-1)(4-3)(2-4) = -24$
					$\omega(x) = (2-0)(2-1)(2-3)(2-4) = 4$

Do đó $y(2) \approx L_3(2) = \omega(x)\left(\frac{y_0}{D_0} + \frac{y_1}{D_1} + \frac{y_2}{D_2} + \frac{y_3}{D_3}\right) = 4\left(\frac{1}{-24} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{-1}{-24}\right) = 2.$

Cho hàm số $f(x)$ xác định như sau

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

trên đoạn $[a, b] = [x_0, x_n]$.

ĐỊNH NGHĨA 3.1

Trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ *ta định nghĩa đại lượng*

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

được gọi là tỉ sai phân cấp 1 của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$

Tương tự ta có tỉ sai phân cấp 2 của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+2}]$ là

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

Quy nạp ta có tỉ sai phân cấp p của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+p}]$ là $f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] =$

$$\frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

VÍ DỤ 3.1

Lập bảng tỉ sai phân của hàm cho bởi

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

Ví dụ 3.1

Lập bảng tỉ sai phân của hàm cho bởi

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
1.0	0.76		
		-0.47$=\frac{0.62-0.76}{1.3-1.0}$	
1.3	0.62		-0.17$=\frac{-0.57-(-0.47)}{1.6-1.0}$
		-0.57$=\frac{0.45-0.62}{1.6-1.3}$	
1.6	0.45		-0.00$=\frac{-0.57-(-0.57)}{1.9-1.3}$
		-0.57$=\frac{0.28-0.45}{1.9-1.6}$	
1.9	0.28		

Theo định nghĩa tỉ sai phân cấp 1 của $f(x)$ trên đoạn $[x, x_0]$ là $f[x, x_0] = \dfrac{f(x) - y_0}{x - x_0}$

$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0)$. Lại áp dụng định nghĩa tỉ sai phân cấp 2 của $f(x)$ ta có

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$.

Thay vào công thức trên ta được $f(x) =$

$y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$.

Quá trình trên tiếp diễn đến bước thứ n ta được

$$f(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$

$$+ f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) +$$

$$+ f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

Đặt

$\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ và

$R_n(x) = f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

ta được $f(x) = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) + R_n(x)$.

ĐỊNH NGHĨA 3.2

Công thức $\mathcal{N}_n^{(1)}(x)$ được gọi là công thức Newton tiến xuất phát từ điểm nút x_0 của hàm số $f(x)$ và $R_n(x)$ được gọi là sai số của đa thức nội suy Newton.

Tương tự, ta có thể xây dựng công thức Newton lùi xuất phát từ điểm nút x_n của hàm số $f(x)$ như sau

$\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) +$
$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1})(x - x_n) + \ldots +$
$f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$
Do tính duy nhất của đa thức nội suy, ta có với cùng 1 bảng số thì

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = \mathcal{N}_n^{(2)}(x)$$

Ví dụ 3.2

Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x	0	2	3	5	6
y	1	3	2	5	6

1. *Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút* x_0 *của hàm số* $y = f(x)$
2. *Dùng đa thức nội suy nhận được tính gần đúng* $f(1.25)$

Giải.

x_k	$f(x_k)$	Tỉ sai phân I	Tỉ sai phân II	Tỉ sai phân III	Tỉ sai phân IV
0	1				
		$1=\frac{3-1}{2-0}$			
2	3		-2/3		
		$-1=\frac{2-3}{3-2}$		3/10	
3	2		5/6		-11/120
		$3/2=\frac{5-2}{5-3}$		-1/4	
5	5		-1/6		
		$1=\frac{6-5}{6-5}$			
6	6				

Như vậy công thức nội suy Newton tiến là

$$\mathcal{N}_4^{(1)}(x) = 1+1.x+\left(-\frac{2}{3}\right)x(x-2)+\frac{3}{10}x(x-2)(x-3)$$

$$-\frac{11}{120}x(x-2)(x-3)(x-5) =$$

$$= -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1.$$

$$f(1.25) \approx \mathcal{N}_4^{(1)}(1.25) \approx 3.9312$$

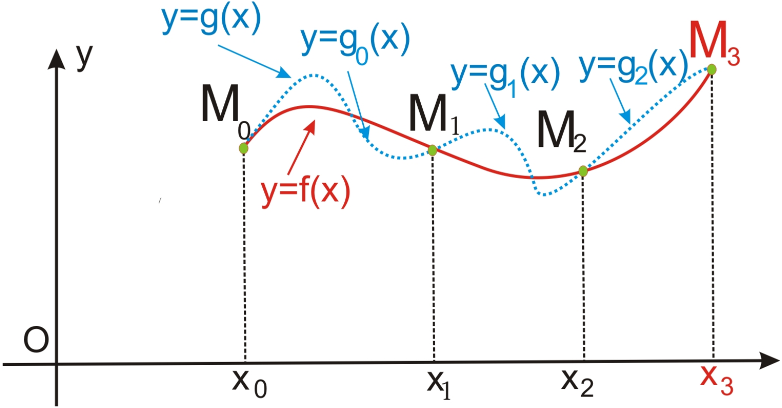
Việc xây dựng một đa thức đi qua các điểm nội suy cho trước trong trường hợp n lớn là rất khó khăn. Biện pháp khắc phục là trên từng đoạn liên tiếp của các cặp điểm nút nội suy ta nối chúng bởi các đường cong đơn giản như đoạn thẳng. Tuy nhiên, khi đó tại các điểm nút hàm sẽ mất tính khả vi. Do đó, phải xây dựng đường cong bằng cách nối các đoạn cong nhỏ lại với nhau sao cho vẫn bảo toàn tính khả vi của hàm.

Đường cong như vậy được gọi là đường **spline** (đường ghép trơn). Các hàm trên các đoạn nhỏ này thường là các đa thức và bậc cao nhất của các đa thức đó gọi là bậc của spline.

ĐỊNH NGHĨA 4.1

Cho $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$ và một phép phân hoạch của nó: $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$. Đặt $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. ***Một spline bậc ba*** *nội suy hàm $f(x)$ trên $[a,b]$ là hàm $g(x)$ thỏa các điều kiện sau:*

1. *$g(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[a,b]$*
2. $g(x) = \begin{cases} g_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ g_1(x) & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$ *ở đây $g_0(x), g_1(x)$ là các* ***đa thức bậc ba***
3. $g(x_0) = f(x_0) = y_0, g(x_1) = f(x_1) = y_1,$ $g(x_2) = f(x_2) = y_2.$


y=g(x)
y=g0(x)
y=g1(x)
y=g2(x)
y
M0
M1
M2
M3
y=f(x)
O
x0
x1
x2
x3

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là đa thức bậc ba nên

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Do $g(x_0) = g_0(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a_0$ và

$$g(x_1) = g_0(x_1) = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3 = y_1$$

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Do $g(x_0) = g_0(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a_0$ và

$$g(x_1) = g_0(x_1) = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3 = y_1$$

Từ đó, ta có

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0 h_0 - d_0 h_0^2$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Do $g(x_1) = g_1(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = a_1$ và

$$g(x_2) = g_1(x_2) = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Do $g(x_1) = g_1(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = a_1$ và

$$g(x_2) = g_1(x_2) = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2$$

Từ đó, ta có

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - d_1 h_1^2$$

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_1 nên $g_0'(x_1) = g_1'(x_1)$ và $g_0''(x_1) = g_1''(x_1)$.

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_1 nên $g_0'(x_1) = g_1'(x_1)$ và $g_0''(x_1) = g_1''(x_1)$.
Từ điều kiện $g_0''(x_1) = g_1''(x_1)$ ta được

$$2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1)$$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}$$

$$\Rightarrow b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0h_0 - d_0h_0^2 =$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0h_0 - \frac{c_1 - c_0}{3h_0}.h_0^2 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0)$$

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_2 nên $g_1''(x_2) = g_2''(x_2)$

$$\Rightarrow 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) = 2c_2 + 6d_2(x_2 - x_2)$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - d_1 h_1^2 =$$

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - \frac{c_2 - c_1}{3h_1}.h_1^2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$

Từ điều kiện $g_0'(x_1) = g_1'(x_1)$ ta được

$$b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2$$

$$\Rightarrow b_1 = b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^2$$

Thay $b_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$,

$b_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0)$, $d_0 = \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0}$, được

Từ điều kiện $g_0'(x_1) = g_1'(x_1)$ ta được

$$b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2$$

$$\Rightarrow b_1 = b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^2$$

Thay $b_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$,

$b_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0)$, $d_0 = \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0}$, được

$$h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0}$$

Hệ này có vô số nghiệm.

ĐỊNH NGHĨA 4.2

Cho $f(x)$ *xác định trên đoạn* $[a,b]$ *và một phép phân hoạch của nó:* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. *Đặt* $y_k = f(x_k), k = 0..n$. ***Một spline bậc ba*** *nội suy hàm* $f(x)$ *trên* $[a,b]$ *là hàm* $g(x)$ *thỏa các điều kiện sau:*

1. $g(x)$ *có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên* $[a,b]$
2. *Trên mỗi đoạn* $[x_k, x_{k+1}], k = 0..n-1$, $g(x) = g_k(x)$ *là 1 đa thức bậc ba*
3. $g(x_k) = f(x_k) = y_k, \forall k = 0..n$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}], k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là đa thức bậc ba nên

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}], k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}], k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là đa thức bậc ba nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Do $g(x_k) = g_k(x_k) = y_k \Rightarrow y_k = a_k$ và

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = g(x_{k+1}) = g_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}], k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Do $g(x_k) = g_k(x_k) = y_k \Rightarrow y_k = a_k$ và

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = g(x_{k+1}) = g_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

Từ đó, ta có hệ

$$\begin{cases} b_k &= \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2, \forall k = 0..n-1 \\ b_{k-1} &= \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - c_{k-1} h_{k-1} - d_{k-1} h_{k-1}^2, \forall k = 1..n \end{cases}$$

Xét tại điểm $x_k, k = 1..n-1$. Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_k nên $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ và $g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k)$.

Xét tại điểm $x_k, k = 1..n-1$. Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_k nên $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ và $g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k)$.

Từ điều kiện $g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k)$ ta được

$$\begin{cases} d_{k-1} = \dfrac{c_k - c_{k-1}}{3h_{k-1}}, \forall k = 1..n-1 \\ d_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 1..n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k), \forall k = 1..n-1 \\ b_{k-1} = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \dfrac{h_{k-1}}{3}(c_k + 2c_{k-1}), \forall k = 1..n \end{cases}$$

Từ điều kiện $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ ta được

$$b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2$$

Từ điều kiện $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ ta được

$$b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \\ \qquad = 3\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \\ \qquad \forall k = 1..n-1 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm nên để có tính duy nhất, ta phải bổ sung thêm các điều kiện biên.

SPLINE BẬC BA TỰ NHIÊN

Điều kiện để xác định 1 spline bậc ba tự nhiên là

$$g''(a) = g''(b) = 0.$$

$$g''(a) = g_0''(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$g''(b) = g_n''(x_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c_n + 6d_n(x_n - x_n) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

Giải hệ $AC = B$ tìm C với $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)^T$ và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải hệ $AC = B$ tìm C với $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)^T$ và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \ldots \\ 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sau khi tìm được $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ thì các hệ số của $g_k(x)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_k &= y_k \\ b_k &= \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k &= \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 0..n-1 \end{cases}$$

Ví dụ 4.1

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

Ví dụ 4.1

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

$n = 2, h_0 = 2, h_1 = 3$. Do là spline bậc ba tự nhiên nên $c_0 = c_2 = 0$. Hệ số c_1 được xác định bởi

$$h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{3}{10}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = -\dfrac{1}{5} \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = -\dfrac{1}{5} \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 1 \\ b_1 &= \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \dfrac{2}{5} \\ d_1 &= \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = -\dfrac{1}{30}, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba tự nhiên cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^3, & x \in [0,2] \\ 1 + \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{10}(x-2)^2 - \frac{1}{30}(x-2)^3, & x \in [2,5] \end{cases}$$

Ví dụ 4.2

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy bảng số

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

VÍ DỤ 4.2

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy bảng số

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

$n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1$. Do là spline bậc ba tự nhiên nên $c_0 = c_3 = 0$. Hệ số c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(h_0 + h_1).c_1 + h_1.c_2 = 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ h_1.c_1 + 2(h_1 + h_2).c_2 = 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4.c_1 + 1.c_2 = 3 \\ 1.c_1 + 4.c_2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{2}{5} \\ c_2 = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \dfrac{13}{15} \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{2}{15}, \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \dfrac{13}{15} \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{2}{15}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 2 \\ b_1 &= \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \dfrac{19}{15} \\ d_1 &= \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

Khi $k = 2$ ta có

$$\begin{cases} a_2 &= y_2 = 4 \\ b_2 &= \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = \dfrac{46}{15} \\ d_2 &= \dfrac{c_3 - c_2}{3h_2} = -\dfrac{7}{15}, \end{cases}$$

Khi $k = 2$ ta có

$$\begin{cases} a_2 &= y_2 = 4 \\ b_2 &= \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = \dfrac{46}{15} \\ d_2 &= \dfrac{c_3 - c_2}{3h_2} = -\dfrac{7}{15}, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba tự nhiên cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{13}{15}x + \frac{2}{15}x^3, & x \in [0,1] \\ 2 + \frac{19}{15}(x-1) + \frac{2}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 4 + \frac{46}{15}(x-2) + \frac{7}{5}(x-2)^2 - \frac{7}{15}(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

SPLINE BẬC BA RÀNG BUỘC

Điều kiện để xác định 1 spline bậc ba ràng buộc là

$$g'(a) = \alpha, g'(b) = \beta.$$

$$g'(a) = g_0'(x_0) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow b_0 + 2c_0(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 = \alpha \Rightarrow b_0 = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha$$

$$g'(b) = g'_{n-1}(x_n) = \beta$$

$$\Leftrightarrow b_{n-1} + 2c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(c_n + 2c_{n-1}) + 2c_{n-1}h_{n-1} +$$

$$+3.\frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}}.h_{n-1}^2 = \beta$$

$$\Rightarrow h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

Khi đó ta có thêm 2 phương trình

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases}$$

và thuật toán xác định spline bậc ba ràng buộc như sau: giải hệ $AC = B$ tìm C với $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Sau khi tìm được $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ thì các hệ số của $g_k(x)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} a_k & = & y_k \\ b_k & = & \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k & = & \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 0..n-1 \end{cases}$$

Ví dụ 4.3

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy bảng số $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 1 \end{array}$ *thỏa* $y'(0) = 1, y'(1) = 1.$

Ví dụ 4.3

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy bảng số

x	0	1
y	1	1

thỏa $y'(0) = 1, y'(1) = 1.$

$n = 1, h_0 = 1$. Khi đó

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_0c_0 + 2h_0c_1 = 3\beta - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + c_1 = -3 \\ c_0 + 2c_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = -3 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 1 \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = 2, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = 1 + x - 3x^2 + 2x^3, x \in [0, 1]$$

Ví dụ 4.4

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy bảng số

x	0	1	2
y	1	2	1

thỏa điều kiện $y'(0) = 0, y'(2) = 0.$

Ví dụ 4.4

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy bảng số

x	0	1	2
y	1	2	1

thỏa điều kiện $y'(0) = 0, y'(2) = 0.$

$n = 2, h_0 = h_1 = 1, \alpha = \beta = 0$. Hệ số c_0, c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.c_0 + c_1 + 0.c_2 &= 3 \\ c_0 + 4c_1 + c_2 &= -6 \\ 0.c_0 + c_1 + 2.c_2 &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 &= 3 \\ c_1 &= -3 \\ c_2 &= 3 \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 0 \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = -2, \end{cases}$$

Khi $k=0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 0 \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = -2, \end{cases}$$

Khi $k=1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 2 \\ b_1 &= \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = 0 \\ d_1 &= \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = 2, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 - 2x^3, & x \in [0, 1] \\ 2 - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

BÀI TOÁN XẤP XỈ HÀM THỰC NGHIỆM

Trong mặt phẳng xOy cho tập hợp điểm $M_k(x_k, y_k), k = 1, 2, \ldots, n$, trong đó có ít nhất 2 điểm nút x_i, x_j khác nhau với $i \neq j$ và n rất lớn. Khi đó việc xây dựng một đường cong đi qua tất cả những điểm này không có ý nghĩa thực tế.

Chúng ta sẽ đi tìm hàm $f(x)$ đơn giản hơn sao cho nó thể hiện tốt nhất dáng điệu của tập hợp điểm $M_k(x_k, y_k), k = 1, 2, \ldots, n$, và không nhất thiết đi qua tất cả các điểm đó.

Phương pháp bình phương bé nhất giúp ta giải quyết vấn đề này. Nội dung của phương pháp là tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$g(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2 \to \min.$$

Dạng đơn giản thường gặp trong thực tế của $f(x)$ là $f(x) = A + Bx$, $f(x) = A + Bx + Cx^2$, $f(x) = Ap(x) + Bq(x), \ldots$

Trường hợp $f(x) = A + Bx$ Khi đó

$$g(A,B) = \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 2 biến $g(A,B)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial A} \sum\limits_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2 = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial B} \sum\limits_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2 = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k) x_k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

VÍ DỤ 5.1

Tìm hàm $f(x) = A + Bx$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Ví dụ 5.1

Tìm hàm $f(x) = A + Bx$ xấp xỉ tốt nhất bảng số

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Giải. Ta có $n = 10$ và $\sum_{k=1}^{n} x_k = 29$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = 39$, $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 109$, $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 140$. Hệ phương trình để xác định A, B có dạng

$$\begin{cases} 10A + 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0.7671 \\ B = 1.0803 \end{cases}$$

Bấm máy. Bấm Mode 3 - STAT. Chọn 3- $A + Bx$. Nhập dữ liệu của 2 cột x, y. AC - Thoát ra. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 1- A =. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 2- B =.

Trường hợp $f(x) = A + Bx + Cx^2$ Khi đó

$$g(A,B,C) = \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 3 biến $g(A,B,C)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k) = \\ \frac{\partial}{\partial B} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k = \\ \frac{\partial}{\partial C} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k^2 = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) C = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3\right) C = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3\right) B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4\right) C = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \end{cases}$$

Ví dụ 5.2

Tìm hàm $f(x) = A + Bx + Cx^2$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

Ví dụ 5.2

Tìm hàm $f(x) = A + Bx + Cx^2$ xấp xỉ tốt nhất bảng số

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

Giải. Hệ phương trình để xác định A, B, C có dạng

$$\begin{cases} 7A + 19B + 65C = 61.70 \\ 19A + 65B + 253C = 211.04 \\ 65A + 253B + 1061C = 835.78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4.30 \\ B = -0.71 \\ C = 0.69 \end{cases}$$

Do đó parabol cần tìm là $f(x) = 4.30 - 0.71x + 0.69x^2$.

Bấm máy. Bấm Mode 3 - STAT. Chọn 3- $_+cx^2$. Nhập dữ liệu của 2 cột x, y. AC - Thoát ra. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 1- A =.
Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 2- B =.
Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 3- C =.

Trường hợp $f(x) = Ap(x) + Bq(x)$ Khi đó

$$g(A,B) = \sum_{k=1}^{n} (Ap(x_k) + Bq(x_k) - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 2 biến $g(A,B)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} g(A,B) = 2\sum_{k=1}^{n} (Ap(x_k) + Bq(x_k) - y_k)p(x_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} g(A,B) = 2\sum_{k=1}^{n} (Ap(x_k) + Bq(x_k) - y_k)q(x_k) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p^2(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k) \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} q^2(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} q(x_k) \end{cases}$$

Ví dụ 5.3

Tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x} + B\cos(x)$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	2.27	2.37	2.45	2.52	2.60	2.62

Ví dụ 5.3

Tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x} + B\cos(x)$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	2.27	2.37	2.45	2.52	2.60	2.62

Giải. Ta có $n = 6$, $p(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = \cos(x)$ và
$\sum_{k=1}^{n} p^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k = 9$, Shift-STO-A
$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}.\cos(x_k) =$
0.2080742774, Shift-STO-B.

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}.y_k = 18.14616548,$$

Shift-STO-C.

$$\sum_{k=1}^{n} q^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(x_k) = 0.6777701471,$$

Shift-STO-D.

$$\sum_{k=1}^{n} q(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(x_k).y_k = 0.7470806584,$$

Shift-STO-M. Giải hệ phương trình tìm A, B :

$$\begin{cases} A.A + B.B = C \\ B.A + D.B = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2.00498761 \\ B = 0.48673479 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = 2.0050\sqrt{x} + 0.4867\cos(x)$.

Bấm máy. Shift-Mode-STAT-Frequency-ON

1. Tìm ma trận hệ số
   - Mode 3-STAT - 2: A+BX. Nhập vào cột X là $\sqrt{X}$, nhập vào cột Y là $\cos(X)$. AC-thoát ra.
   - Shift - 1 - 4: Sum - 1:$\sum x^2$ = Shift-STO-A
   - Shift - 1 - 4: Sum - 5:$\sum xy$ = Shift-STO-B
   - Shift - 1 - 4: Sum - 3:$\sum y^2$ = Shift-STO-D
2. Tìm cột hệ số tự do
   - Shift - 1 - 2: Data
   - Nhập giá trị của cột FREQ là giá trị y. AC-thoát ra
   - Shift - 1 - 5: Var - 2:$\overline{x}$ × Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-C
   - Shift - 1 - 5: Var - 5:$\overline{y}$ × Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-M
3. Giải hệ phương trình: Mode-5:EQN-1:anX+bnY=cn

CÁM ƠN CÁC EM ĐÃ CHÚ Ý LẮNG NGHE