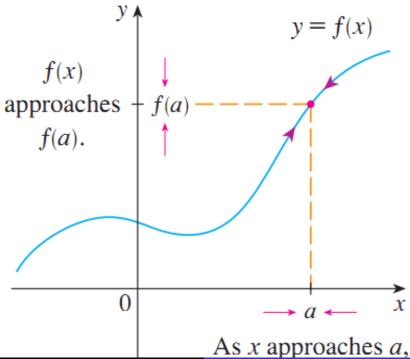
1. Hàm số liên tục
   - Định nghĩa
   - Điểm gián đoạn
2. Đạo hàm
   - Định nghĩa
   - Ý nghĩa của đạo hàm
   - Đạo hàm của hàm hợp
   - Đạo hàm của hàm ngược

Định nghĩa

Hàm số f được gọi là **liên tục (continuous)** *tại điểm a nếu*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$



- Nếu hàm số f không liên tục tại điểm a thì ta gọi a là **điểm gián đoạn** của f.
- Phân loại điểm gián đoạn:
  (i) Ta gọi a là điểm gián đoạn **bỏ được/khử được** nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ tồn tại hữu hạn và bằng nhau.
  (ii) Ta gọi a là điểm gián đoạn **không bỏ được/không khử được** trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ

Cho hàm số f định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 1, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x = 0$ là điểm gián đoạn không bỏ được của hàm số f.

Định nghĩa

Hàm số f được gọi là **liên tục phải (continuous from the right)** *tại điểm a nếu*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

và được gọi là **liên tục trái (continuous from the left)** *tại điểm a nếu*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Định nghĩa

Đạo hàm (derivative) *của một hàm số f tại một điểm a, ký hiệu $f'(a)$, là*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

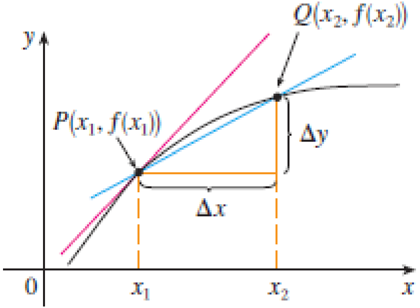
nếu giới hạn này tồn tại.

Định nghĩa tương tự cho các đạo hàm một phía $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ (lần lượt ứng với $h \to 0^+$, $h \to 0^-$).

Trong hình học

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_1$ là

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Trong vật lý

Giả sử một chất điểm chuyển động dọc theo một đường thẳng với phương trình chuyển động

$$x = x(t).$$

- Vận tốc tức thời (instantaneous velocity) là $v(t) = x'(t)$.
- Gia tốc tức thời (acceleration) là $a(t) = v'(t)$.

Trong sinh học

Giả sử $n = f(t)$ là số lượng cá thể của một quần thể nào đó tại thời điểm t. **Tốc độ tăng trưởng tức thời (instantaneous rate of growth)** tại thời điểm t là

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t}.$$

Trong kinh tế

Giả sử $C = C(x)$ là tổng chi phí để sản xuất ra x sản phẩm.

- Hàm C được gọi là **hàm chi phí (cost function)**.
- Trong kinh tế, ta thường xem

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \approx C(x+1) - C(x).$$

- Do đó, đạo hàm $C'(x)$ còn được gọi là **chi phí cận biên (marginal cost)** tại x sản phẩm.

Ví dụ

Một nhà máy sản xuất vải với một khổ cố định. Chi phí để sản xuất x (yard) vải là $C = f(x)$, đơn vị là dollar (USD).

(a) *Ý nghĩa của đạo hàm $f'(x)$ là gì ? Hãy cho biết đơn vị của nó.*

(b) $f'(1000) = 9$ *có ý nghĩa gì ?*

Ví dụ

Gọi $D(t)$ (đơn vị là tỉ dollar) là nợ của nước Mỹ tại thời điểm t. Hãy cho biết ý nghĩa của $D'(1990)$ và ước lượng giá trị này từ bảng giá trị bên dưới?

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

Quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp

- Nếu $y = y(u)$ và $u = u(x)$, thì

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

- Dùng ký hiệu Leinitz, ta viết

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm số sau:

$$y = \frac{x^{3/4} \cdot \sqrt{x^2+1}}{(3x+5)^5}$$

Công thức đạo hàm của hàm số hyperbolic

Hàm số sơ cấp cơ bản	Hàm số hợp
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\sinh u)' = (\cosh u) \cdot u'$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$(\cosh u)' = (\sinh u) \cdot u'$
$(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$(\tanh u)' = \dfrac{1}{\cosh^2 u} \cdot u'$
$(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$(\coth u)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 u} \cdot u'$

Quy tắc tính đạo hàm của hàm số ngược

- Giả sử hàm số $y = y(x)$ có hàm số ngược là $x = x(y)$. Khi đó

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

- Dùng ký hiệu Leibniz, ta viết

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Ví dụ

Cho hàm số

$$f(x) = e^{3x} + 2x.$$

Hãy tính $(f^{-1})'(1)$.

Ví dụ

Trong một đợt dịch bệnh, ký hiệu $S(t)$ là số ca mắc mới ở ngày thứ t (tính từ ngày thống kê đầu tiên). Hãy cho biết ý nghĩa của

$$(S^{-1})'(30) = 0.1.$$

Công thức đạo hàm của hàm số lượng giác ngược

Hàm số sơ cấp cơ bản	Hàm số hợp
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$