ÔN TẬP CUỐI KỲ
NĂM HỌC: 2015-2016

GV: PHÙNG TRỌNG THỰC

Bài 1

Cho phương trình $x^3 - 3x + \sin(x) + 1 = 0$ trên khoảng cách ly nghiệm $[1, 1.5]$. Dùng phương pháp Newton, với x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 và cho biết sai số $\triangle x_2$.

Bài 1

Cho phương trình $x^3 - 3x + \sin(x) + 1 = 0$ trên khoảng cách ly nghiệm $[1, 1.5]$. Dùng phương pháp Newton, với x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 và cho biết sai số $\triangle x_2$.

Giải

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 + \cos(x) > 0 \quad \text{trên} \quad [1, 1.5] \\ f"(x) &= 6x - \sin(x) > 0 \quad \text{trên} \quad [1, 1.5] \end{aligned}$$

Theo điều kiện Fourier $x_0 = 1.5$. Dùng công thức sai số

$$|x_2 - p| \le \frac{f(x_2)}{m}.$$

Ta có $m = \min\{|f'(1)|, |f'(1.5)|\} = \cos(1) \longmapsto$STO M

Bài 1

Cho phương trình $x^3 - 3x + \sin(x) + 1 = 0$ trên khoảng cách ly nghiệm $[1, 1.5]$. Dùng phương pháp Newton, với x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 và cho biết sai số $\triangle x_2$.

Giải

$$F = F + 1 : X = X - \frac{X^3 - 3X + \sin(X) + 1}{3X^2 - 3 + \cos(X)} : \frac{X^3 - 3X + \sin(X) + 1}{M}$$

$x_2 \approx 1.1798, \triangle x_2 \approx 0.0507$

Bài 2

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 4.51x_1 - 1.12x_2 + 0.75x_3 & = 8.79 \\ 1.23x_1 + 6.75x_2 - 2.31x_3 & = 9.32 \\ 1.43x_1 - 4.23x_2 + 7.89x_3 & = 10.32 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Jacobi, với $x^{(0)} = (0.3, 1.3, 1.1)^T$. Tìm vector lặp $x^{(3)}$.

Bài 2

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 4.51x_1 - 1.12x_2 + 0.75x_3 & = 8.79 \\ 1.23x_1 + 6.75x_2 - 2.31x_3 & = 9.32 \\ 1.43x_1 - 4.23x_2 + 7.89x_3 & = 10.32 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Jacobi, với $x^{(0)} = (0.3, 1.3, 1.1)^T$. Tìm vector lặp $x^{(3)}$.

Giải

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1.12}{4.51} & -\frac{0.75}{4.51} \\ -\frac{1.23}{6.75} & 0 & \frac{2.31}{6.75} \\ -\frac{1.43}{7.89} & \frac{4.23}{7.89} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{8.79}{4.51} \\ \frac{9.32}{6.75} \\ \frac{10.32}{7.89} \end{bmatrix}, X_0 = (0.3, 1.3, 1.1).$$

$$X_k = TX_{k-1} + C$$

Bài 2

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 4.51x_1 - 1.12x_2 + 0.75x_3 & = 8.79 \\ 1.23x_1 + 6.75x_2 - 2.31x_3 & = 9.32 \\ 1.43x_1 - 4.23x_2 + 7.89x_3 & = 10.32 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Jacobi, với $x^{(0)} = (0.3, 1.3, 1.1)^T$. Tìm vector lặp $x^{(3)}$.

Giải

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1.12}{4.51} & -\frac{0.75}{4.51} \\ -\frac{1.23}{6.75} & 0 & \frac{2.31}{6.75} \\ -\frac{1.43}{7.89} & \frac{4.23}{7.89} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{8.79}{4.51} \\ \frac{9.32}{6.75} \\ \frac{10.32}{7.89} \end{bmatrix}, X_0 = (0.3, 1.3, 1.1).$$

$$x^{(3)} \approx (2.0568, 1.6381, 1.8310)$$

Bài 3

Cho $A = \begin{bmatrix} 1.32 & 2.31 & 1.76 & 3.67 \\ 6.57 & 4.67 & 3.67 & 0.76 \\ 4.78 & 9.67 & 9.08 & 1.67 \\ 9.78 & 5.78 & 5.98 & 3.56 \end{bmatrix}$. Sử dụng phân tích $A = LU$ theo Doolittle xấp xỉ l_{42}, u_{33}.

Bài 3

Cho $A = \begin{bmatrix} 1.32 & 2.31 & 1.76 & 3.67 \\ 6.57 & 4.67 & 3.67 & 0.76 \\ 4.78 & 9.67 & 9.08 & 1.67 \\ 9.78 & 5.78 & 5.98 & 3.56 \end{bmatrix}$. Sử dụng phân tích $A = LU$ theo Doolittle xấp xỉ l_{42}, u_{33}.

Giải

$$4.67 \longrightarrow 2.31 \times \left(-\frac{6.57}{1.32}\right) + 4.67 \longrightarrow \text{STO } A$$

$$5.78 \longrightarrow 2.31 \times \left(-\frac{9.78}{1.32}\right) + 5.78 \longrightarrow \text{STO } B$$

$$l_{42} = \frac{B}{A} \approx 1.6602$$

Bài 3

Cho $A = \begin{bmatrix} 1.32 & 2.31 & 1.76 & 3.67 \\ 6.57 & 4.67 & 3.67 & 0.76 \\ 4.78 & 9.67 & 9.08 & 1.67 \\ 9.78 & 5.78 & 5.98 & 3.56 \end{bmatrix}$. Sử dụng phân tích $A = LU$ theo Doolittle xấp xỉ l_{42}, u_{33}.

Giải

$$u_{33} = \frac{\triangle_3}{\triangle_2} \approx 1.7338$$

Bài 4

Cho bảng số

x	1.2	1.7	2.3
y	2.1	4.2	5.3

. Sử dụng Spline bậc ba $g(x)$ thoả điều kiện $g'(1.2) = 0.5$ và $g'(2.3) = 0.9$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.5$ và $x = 2.0$.

Bài 4

Cho bảng số

x	1.2	1.7	2.3
y	2.1	4.2	5.3

. Sử dụng Spline bậc ba $g(x)$ thoả điều kiện $g'(1.2) = 0.5$ và $g'(2.3) = 0.9$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.5$ và $x = 2.0$.

Đáp số

$$g(1.5) \approx 3.1719, g(2.0) \approx 5.0084$$

Bài 5

Cho bảng số

x	1.3	1.5	1.9	2.2	2.4
y	2.3	4.2	0.4	9.2	2.4

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm

$$f(x) = A\sqrt{x^2 + 1.3} + B\sin(x)$$

xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Bài 5

Cho bảng số

x	1.3	1.5	1.9	2.2	2.4
y	2.3	4.2	0.4	9.2	2.4

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm

$$f(x) = A\sqrt{x^2 + 1.3} + B\sin(x)$$

xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Đáp số

$$A \approx 1.9744, B \approx -0.7116$$

Bài 6

Cho bảng số

x	1.2	2.1	2.3	3.1
y	2.32	2.3	α	3.4

. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange tìm α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ của đạo hàm $y'(2.2) \approx 3.2$.

Bài 6

Cho bảng số

x	1.2	2.1	2.3	3.1
y	2.32	2.3	α	3.4

. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange tìm α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ của đạo hàm $y'(2.2) \approx 3.2$.

Đáp số

$$\alpha \approx 2.9342$$

Bài 7

Cho bảng số

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x)$	1.3	3.2	2.1	5.6	4.2	5.4	2.1

.

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính xấp xỉ tích phân

$$I = \int_{1.0}^{2.2} \left[2.1x^2 f(x) + 0.5x^2\right] dx.$$

Bài 7

Cho bảng số

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x)$	1.3	3.2	2.1	5.6	4.2	5.4	2.1

.

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính xấp xỉ tích phân

$$I = \int_{1.0}^{2.2} \left[2.1x^2 f(x) + 0.5x^2\right] dx.$$

Đáp số

$$I \approx 30.8803$$

Bài 8

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' & = 1.2x + 1.3x^2 \sin\left(0.23x + 1.5y\right), x \geq 0.5 \\ y\left(0.5\right) & = 0.36 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ $y\left(0.7\right)$ với bước nhảy $h = 0.2$.

Bài 8

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' & = 1.2x + 1.3x^2 \sin(0.23x + 1.5y), x \geq 0.5 \\ y(0.5) & = 0.36 \end{cases}$$

Dùng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ $y(0.7)$ với bước nhảy $h = 0.2$.

Đáp số

$$y(0.7) \approx 0.5742$$

Bài 9

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) & = 1.3y" + 0.32xy' + xy + 1.23, 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) & = 0.23, y'(1) = 0.12, y"(1) = 1.23 \end{cases}$$

Đưa phương trình về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler với $h = 0.1$ tính gần đúng $y(1.3)$ và $y(1.8)$.

Bài 9

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) & = 1.3y" + 0.32xy' + xy + 1.23, 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) & = 0.23, y'(1) = 0.12, y"(1) = 1.23 \end{cases}$$

Đưa phương trình về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler với $h = 0.1$ tính gần đúng $y(1.3)$ và $y(1.8)$.

Đáp số

Đặt $z(x) := y'(x), w(x) := y''(x)$, phương trình trở thành

$$\begin{cases} w' & = 1.3w + 0.32xz + xy + 1.23 \\ z' & = w \\ y' & = z \\ w(1) & = 1.23, z(1) = 0.12, y(1) = 0.23 \end{cases}$$

$$\boxed{y(1.3) \approx 0.3060, y(1.8) \approx 0.8843}$$

Bài 10

Cho bài toán biên tuyến tính cấp hai

$$\begin{cases} (x+0.23)\,y''(x) + x^2 y' - 1.23y & = 0.29x\,(x+2)\,, 1 \le x \le 1.8 \\ y\,(1) & = 0.27, y\,(1.8) = 1.67 \end{cases}$$

Dùng phương pháp sai phân hữu hạn với bước nhảy $h = 0.2$ xấp xỉ giá trị của $y\,(1.2)\,, y\,(1.4)\,, y\,(1.6)\,.$

Cho bài toán biên tuyến tính cấp hai

$$\begin{cases} (x+0.23)\, y''(x) + x^2 y' - 1.23y & = 0.29x\,(x+2)\,, 1 \le x \le 1.8 \\ y(1) & = 0.27, y(1.8) = 1.67 \end{cases}$$

Dùng phương pháp sai phân hữu hạn với bước nhảy $h = 0.2$ xấp xỉ giá trị của $y(1.2)\,, y(1.4)\,, y(1.6)\,.$

Giải

$p(x) = x + 0.23, q(x) = x^2, r(x) = -1.23, f(x) = 0.29x\,(x+2)\,,$
$\alpha = 0.27, \beta = 1.67, h = 0.2,$
$x_0 = 1, \boxed{x_1 = 1.2, x_2 = 1.4, x_3 = 1.6}, x_4 = 1.8.$
$p_k := p(x_k)\,, q_k := q(x_k)\,, r_k := r(x_k)\,, f_k := f(x_k)\,.$

Giải hệ sau để tìm y_1, y_2, y_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 & f_1 - \alpha\left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right) \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} & f_2 \\ 0 & \frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} & r_3 - \frac{2p_3}{h^2} & f_3 - \beta\left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right) \end{array}\right]$$

Cho bài toán biên tuyến tính cấp hai

$$\begin{cases} (x+0.23)\,y''(x) + x^2 y' - 1.23y & = 0.29x\,(x+2)\,, 1 \le x \le 1.8 \\ y\,(1) & = 0.27, y\,(1.8) = 1.67 \end{cases}$$

Dùng phương pháp sai phân hữu hạn với bước nhảy $h = 0.2$ xấp xỉ giá trị của $y\,(1.2)\,, y\,(1.4)\,, y\,(1.6)\,.$

Giải

$p\,(x) = x + 0.23, q\,(x) = x^2, r\,(x) = -1.23, f\,(x) = 0.29x\,(x+2)\,,$
$\alpha = 0.27, \beta = 1.67, h = 0.2,$
$x_0 = 1, \boxed{x_1 = 1.2, x_2 = 1.4, x_3 = 1.6}, x_4 = 1.8.$
$p_k := p\,(x_k)\,, q_k := q\,(x_k)\,, r_k := r\,(x_k)\,, f_k := f\,(x_k)\,.$

$$\boxed{y\,(1.2) \approx 0.6504, y\,(1.4) \approx 1.0100, y\,(1.6) \approx 1.3498}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 & f_1 - \alpha\left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right) \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} & f_2 \\ 0 & \frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} & r_3 - \frac{2p_3}{h^2} & f_3 - \beta\left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right) \end{array}\right]$$

CHÚC THI TỐT