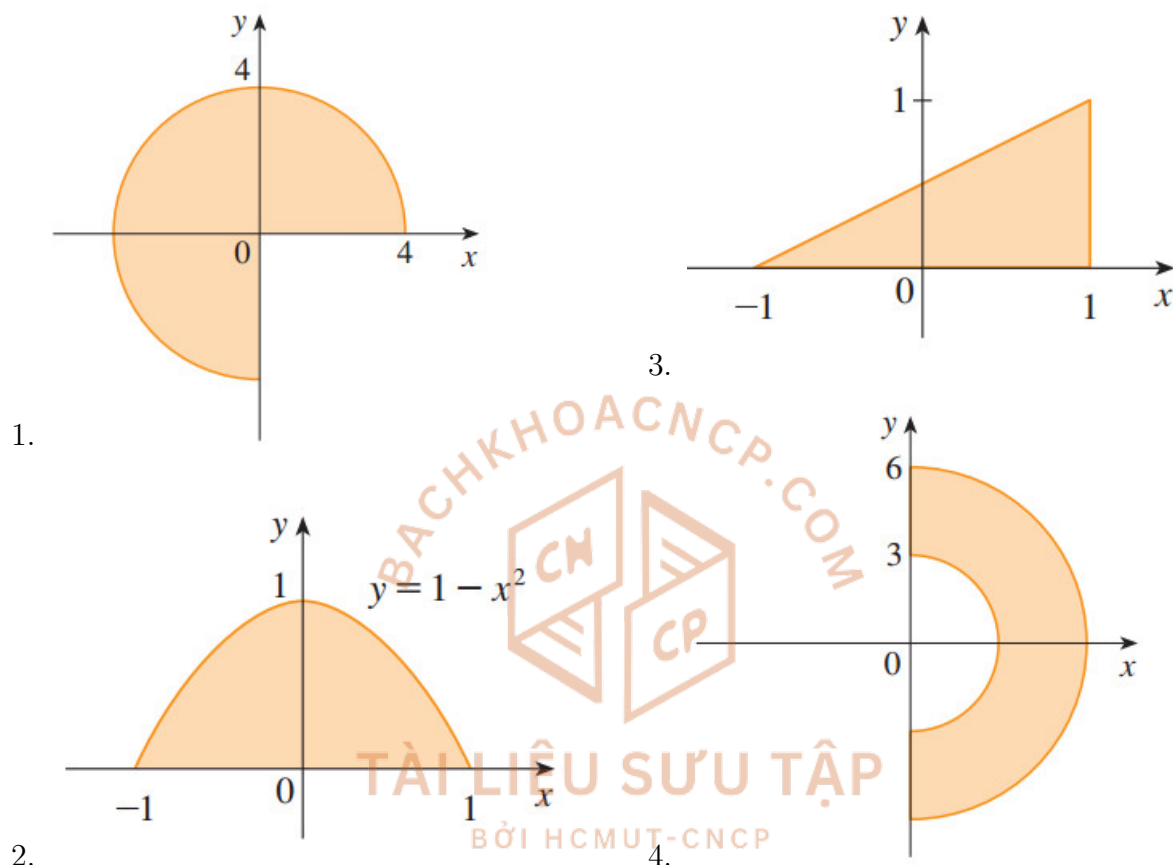


Bài tập - Tích Phân Kép Trong Hệ Tọa Độ Cực

Bài 1 Cho một miền R như hình vẽ. Xác định xem nên sử dụng các tọa độ cực hay các tọa độ Descartes vuông góc và viết $\iint_R f(x, y) dA$ dưới dạng một tích phân lặp, trong đó f là một hàm liên tục tùy ý trên R .



Bài 2 Phát họa miền có diện tích được cho bởi tích phân sau đây và tính tích phân đó.

1.
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r dr d\theta$$

2.
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r dr d\theta$$

Bài 3 Tính tích phân bằng cách chuyển đổi sang tọa độ cực.

1. $\iint_D x^2 y dA$, trong đó D là phần nửa trên của chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 5.

2. $\iint_R (2x - y) dA$, trong đó R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ và các đường thẳng $x = 0$ và $y = x$.

3. $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$, trong đó R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất giữa các đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1 và 3.
4. $\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2} dA$, trong đó R là miền nằm giữa các đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + y^2 = b^2$ với $0 < a < b$.
5. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dA$, trong đó D là miền giới hạn bởi hình bán nguyệt $x = \sqrt{4 - y^2}$ và trục y .
6. $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dA$, trong đó D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 2.
7. $\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$, trong đó $R = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.
8. $\iint_D x dA$, trong đó D là miền thuộc góc phần tư thứ nhất nằm giữa các đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ và $x^2 + y^2 = 2x$.

Bài 4 Sử dụng một tích phân hai lớp để tìm diện tích của miền.

1. Một vòng cánh hoa $r = \cos 3\theta$.
2. Miền được giới hạn bởi cả hai hình tim $r = 1 + \cos \theta$ và $r = 1 - \cos \theta$.
3. Miền nằm bên trong đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$ và nằm bên ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.
4. Miền nằm bên trong hình tim $r = 1 + \cos \theta$ và nằm bên ngoài đường tròn $r = 3 \cos \theta$.

Bài 5 Sử dụng các hệ tọa độ cực để tìm thể tích của hình khối cho trước.

1. Nằm dưới hình nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trên hình đĩa $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. Nằm dưới paraboloid $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ và nằm trên mặt phẳng xy .
3. Bị giới hạn bởi hyperboloid $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $z = 2$.
4. Nằm bên trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và bên ngoài hình trụ $x^2 + y^2 = 4$.
5. Một hình cầu có bán kính bằng a .
6. Bị giới hạn bởi paraboloid $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ và mặt phẳng $z = 7$ trong góc phần tám thứ nhất.
7. Nằm trên hình nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm dưới hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
8. Bị giới hạn bởi paraboloid $z = 3x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - x^2 - y^2$.

9. Nằm trong cả hình trụ $x^2 + y^2 = 4$ và hình ellipsoid (hình trái xoan) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Bài 6 a) Người ta sử dụng một mũi khoan hình trụ có bán kính r_1 để khoan một cái lỗ xuyên tâm một hình cầu có bán kính r_2 . Tìm thể tích của hình khối có dạng chiếc nhẫn còn lại.

b) Biểu diễn thể tích tìm được ở câu (a) theo chiều cao h của chiếc nhẫn. Chú ý rằng thể tích chỉ phụ thuộc vào h , không phụ thuộc r_1 hay r_2 .

Bài 7 Tính tích phân lặp bằng cách chuyển sang tọa độ cực

1. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy dx.$

3. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y) dx dy.$

2. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y dx dy.$

4. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{(x^2 + y^2)} dy dx.$

Bài 8 Biểu diễn tích phân hai lớp dưới dạng một tích phân đơn theo r . Sau đó sử dụng máy tính của bạn để tính tích phân chính xác đến 4 chữ số thập phân.

1. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2} dA$, trong đó D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1.

2. $\iint_D xy \sqrt{1+x^2+y^2} dA$, trong đó D là phần đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$ nằm trên góc phần tư thứ nhất.

Bài 9 Một hồ bơi hình tròn có đường kính 40 ft. Độ sâu của nó không đổi từ bờ đông sang tây, và tăng tuyến tính từ 2 ft ở bờ nam sang 7 ft ở bờ bắc. Tìm thể tích nước trong hồ bơi.

Bài 10 Một thiết bị tưới tiêu phun nước theo dạng hình tròn có bán kính là 100 ft. Lượng nước mà máy cung cấp có độ sâu e^{-r} ft/giờ, tại vị trí cách máy phun nước một khoảng cách là r ft.

a. Nếu $0 < R \leq 100$, tìm tổng lượng nước cung cấp mỗi giờ cho khu vực bên trong đường tròn có bán kính R và tâm tại nhà máy phun nước.

b. Xác định một biểu thức cho lượng nước trung bình được cung cấp vào mỗi giờ, tính trên mỗi foot vuông cho khu vực nằm bên trong đường tròn có bán kính R .

Bài 11 Tìm giá trị trung bình của hàm số $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ trên miền hình vành khuyên $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, trong đó $0 < a < b$.

Bài 12 Gọi D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính a . Tính khoảng cách trung bình từ các điểm thuộc D đến gốc tọa độ.

Bài 13 Sử dụng các tọa độ cực để kết hợp tổng

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xydydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xydydx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

