

# Chương 2

## TÍCH PHÂN BỘI

### 1 Tích phân kép

#### 1.1 Tọa độ Descartes

1. **Dạng hàm**  $f(x, y)$ : dạng đa thức bậc 1 hoặc bậc 2 tách biến, dạng  $e^{ax+by}$  (HK192)

2. **Dạng miền lấy tích phân**  $D$ : giới hạn bởi 1, 2, 3 đường cong bậc 1, bậc 2. Khi tính tích phân, tối đa chia  $D$  thành 2 miền con.

3. **Dạng câu hỏi:**

- Viết cận tích phân lặp với miền  $D$  cho trước.
- Tính tích phân lặp và vẽ hình miền tính tích phân.
- Tính tích phân kép với hàm  $f(x, y)$  và miền  $D$  như ở mục 1, 2.
- Chọn thứ tự tính tích phân lặp thích hợp với hàm dưới dấu tích phân (**Nâng cao: hàm  $f(x, y)$  không phải đa thức**) (**không làm ở HK192**).
- Mô tả bằng hình vẽ vật thể dạng trụ cong có thể tích được tính bằng tích phân 
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$
 (đáy dưới là miền  $D$  trong mặt phẳng Oxy, nắp trên là mặt cong  $z = f(x, y)$ ).
- **Không làm các bài tập đổi thứ tự tích phân lặp**

## 1.2 Đổi biến tọa độ cực

1. **Tọa độ cực thường:**  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$

$D$  là 1 trong 5 hình tròn  $(x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq 2bx)$ , kết hợp với các đường thẳng qua gốc tọa độ .

2. **Tọa độ cực mở rộng**

- Hình tròn tổng quát  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$  kết hợp với đường thẳng qua tâm hình tròn.
- Miền giới hạn bởi ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  kết hợp với đường thẳng qua gốc tọa độ.

## 1.3 Ứng dụng

1. Tính diện tích miền phẳng.
2. Tính thể tích vật thể. (**HK192 chỉ tính thể tích bằng tích phân bội 3**)
3. Tính khối lượng mảnh phẳng.

## 2 Tích phân bội ba

### 2.1 Tọa độ Descartes

1. **Dạng hàm**  $f(x, y, z)$ : dạng đa thức bậc 1 hoặc bậc 2 tách biến, dạng  $e^{ax+by+cz}$ .
2. **Dạng miền lấy tích phân**  $\Omega$  giới hạn bởi 1, 2, 3, 4 mặt, bao gồm
  - Mặt phẳng.
  - Mặt cầu tâm O hoặc tâm trên Oz và tiếp xúc mp (Oxy).
  - Mặt trụ elliptic, trụ parabolic.
  - Mặt nón tròn xoay nhận Oz làm trục đối xứng.
  - Mặt paraboloid elliptic.

(Không chia miền khi tính tích phân lặp)

## 2.2 Đổi biến

1. Tọa độ trụ thường (tương ứng tọa độ cực thường)
2. Tọa độ cầu thường:  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$ .  $\Omega$  là miền kết hợp giữa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  hoặc  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ , kết hợp với:
  - Các mặt tọa độ.
  - Các mặt phẳng chứa trục Oz.
  - Nón tròn xoay  $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ .

## 2.3 Ứng dụng

Tính thể tích vật thể  $V$ , tính khối lượng vật thể  $V$ .