# ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

## TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

**KHOA ĐIỆN – ĐIỆN TỬ**

**NĂM HỌC 2020-2021**

# BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN PHƯƠNG PHÁP TÍNH



## ĐỀ TÀI 2

**GVHD: ĐOÀN THỊ THANH XUÂN**

**LỚP: L13 – NHÓM: 11**

**Thành viên nhóm:**

| | |
|---|---|
| Lương Hồ Khánh Duy | 2113013 |
| Huỳnh Khánh Duy | 2110080 |
| Bùi Ngọc Khương Duy | 2112991 |
| Lê Trường Duy | 2110924 |

# MỤC LỤC

## ❖ Bảng phân công nhiệm vụ:

| MSSV | Họ và tên sinh viên | Công việc phân công | Mức độ hoàn thanh |
|---|---|---|---|
| 2113013 | Lương Hồ Khánh Duy | Giải bài toán ứng dụng: problem 1a<br>Cầu phương Gauss<br>Chỉnh sửa báo cáo và tìm tài liệu | 100% |
| 2110080 | Huỳnh Khánh Duy | Giải bài toán ứng dụng: problem 2 và problem 1c<br>Soạn và chỉnh sửa báo cáo | 100% |
| 2112991 | Bùi Ngọc Khương Duy | Giải bài toán ứng dụng: problem 1b và problem 3a<br>Chỉnh sửa báo cáo | 100% |
| 2110924 | Lê Trường Duy | Giải bài tập ứng dụng: problem 1d và problem 3b<br>Tạo và chỉnh sửa powerpoint | 100% |

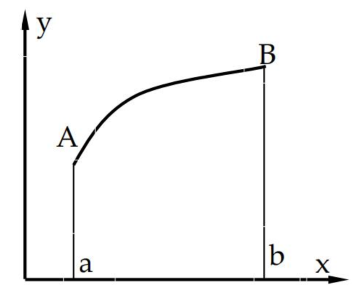
# CẦU PHƯƠNG GAUSS

## I. Ý tưởng

### 1. Cầu phương

Cầu phương là phương pháp để tính xấp xỉ biểu thức tích phân xác định:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$




trong đó f(x) là hàm liên tục trong khoảng [a,b] và có thể biểu diễn bởi đường cong y=f(x). Như vậy tích phân xác định I là diện tích miền giới hạn bởi đường cong f(x), trục hoành, các đường thẳng x = a và x = b.

### 2. Cầu phương Gauss

Các phương pháp tính tích phân xác định bằng phương pháp số được chia thành 2 nhóm: các phương pháp Newton - Cotes và các phương pháp Gauss. Khi dùng các phương pháp Newton - Cotes khoảng lấy tích phân được chia đều như trong *phương pháp hình thang* hay *phương pháp Simpson*. Khi dùng các phương pháp Gauss, các điểm chia được chọn để đạt độ chính xác cao nhất.

***Phương pháp cầu phương Gauss n điểm*** được xây dựng để tính giá trị chính xác cho các hàm đa thức có bậc 2n - 1 hoặc thấp hơn bằng cách chọn các điểm nút $x_i$ (nodes hay điểm Gauss) và các trọng số phù hợp (weights) $w_i$ với $i = 1,2,...n$.

### 3. Các công thức cầu phương Gauss:

Cầu phương Gauss - Legendre

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Cầu phương Gauss - Hermite:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$$

Cầu phương Gauss - Laguerre:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x)dx$$

Cầu phương Gauss - Chebyshev 1:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$$

Cầu phương Gauss - Chebyshev 2:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-x^2} f(x)dx$$

## II. Thuật toán

### 1) Cầu phương Gauss - Legendre:

Là công thức tính cầu phương đơn giản nhất, có dạng:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) = \omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2)+...+\omega_n f(x_n) \quad (1)$$



Trong đó:

- Các điểm $-1 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le 1$ gọi là n điểm Gauss
- Các số $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ là các trọng số

Vế phải của (1) có 2n tham số cần xác định $\left(x_i \text{ và } \omega_i\right)$, do đó ta lần lượt thay $f(x)$ bởi 2n đa thức có dạng $x^k \left(k=0,1,...,2n-1\right)$. Khi đó ta có hệ phương trình phi tuyến:

$$\begin{cases} f(x)=1 \to \omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n = 2 \\ f(x)=x \to \omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\ldots+\omega_n x_n = 0 \\ f(x)=x^2 \to \omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2+\ldots+\omega_n x_n^2 = \dfrac{2}{3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x)=x^k \to \omega_1 x_1^k+\omega_2 x_2^k+\ldots+\omega_n x_n^k = \dfrac{1+(-1)^k}{k+1} \\ f(x)=x^{2n-1} \to \omega_1 x_1^{2n-1}+\omega_2 x_2^{2n-1}+\ldots+\omega_n x_n^{2n-1} = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ hoàn toàn độc lập với $f(x)$, vì vậy người ta đã giải cho một số giá trị của n và được cho trong bảng sau:

| Number of points, $n$ | Points, $x_i$ | | Weights, $w_i$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | 2 | |
| 2 | $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ±0.57735... | 1 | |
| 3 | 0 | | $\frac{8}{9}$ | 0.888889... |
| | $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ | ±0.774597... | $\frac{5}{9}$ | 0.555556... |
| 4 | $\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ | ±0.339981... | $\frac{18+\sqrt{30}}{36}$ | 0.652145... |
| | $\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ | ±0.861136... | $\frac{18-\sqrt{30}}{36}$ | 0.347855... |
| 5 | 0 | | $\frac{128}{225}$ | 0.568889... |
| | $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$ | ±0.538469... | $\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$ | 0.478629... |
| | $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$ | ±0.90618... | $\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$ | 0.236927... |

## 2) Đổi khoảng lấy tích phân:

Khi tính tích phân trên đoạn [a,b] ta cần phải biến đổi nó về đoạn [-1,1] bằng cách đặt

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \rightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt, x \in [a,b] \rightarrow t \in [-1,1]$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

# III. Matlab

Để công việc tính toán đơn giản hơn, ta chỉ tính cầu phương Gauss - Legendre cho n từ 1 đến 5

## 1) Các lệnh cần gõ

- **Lệnh syms x t:** Khai báo biến x và t;
- **Lệnh input:** Nhập dữ liệu vào;
- **Lệnh if...elseif:** Thực hiện lệnh khi thỏa điều kiện;
- **Lệnh fprintf:** Xuất dữ liệu ra màn hình
- **Mã định dạng:**
  - ❖ **%.4:** Lấy 4 chữ số thập phân
  - ❖ **%f:** Định dạng như giá trị số thực
  - ❖ **\n:** Chèn 1 dòng mới trong chuỗi đầu ra



## 2) Khai báo hàm f(x) và g(t)

```
syms x t;
f(x)= input ('Nhap ham f(x)= ');
a= input('Can duoi: ');
b= input ('Can tren: ');
n= input ('So diem gauss: ');
g(t)= f(((b+a)+(b-a)*t)/2);
```

### 3) Cầu phương Gauss 1 điểm

```
if n==1
    w1= 2;
    t1= 0;
    G1= ((b-a)/2)*(w1*g(t1));
    fprintf ('Ket qua cua phuong phap cau phuong 1 diem la: %.4f\n', G1);
```

### 4) Cầu phương Gauss 2 điểm

```
elseif n==2
    w1= 1; w2 = 1;
    t1= 1/sqrt(3); t2= -1/sqrt(3);
    G2= ((b-a)/2)*(w1*g(t1)+w2*g(t2));
    fprintf ('Ket qua cua phuong phap cau phuong 2 diem la: %.4f\n', G2);
```

### 5) Cầu phương Gauss 3 điểm

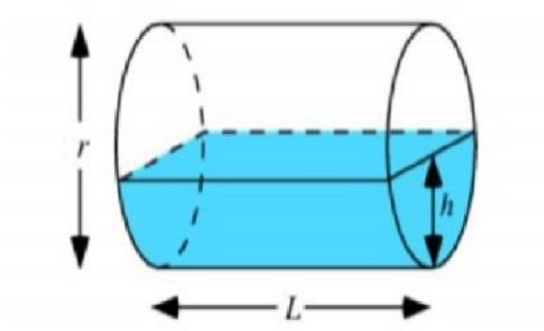
```
elseif n==3
    w1= 5/9; w2 = 8/9; w3= 5/9;
    t1= sqrt(3/5); t2= 0; t3= -sqrt(3/5);
    G3= ((b-a)/2)*(w1*g(t1)+w2*g(t2)+w3*g(t3));
    fprintf ('Ket qua cua phuong phap cau phuong 3 diem la: %.4f\n', G3);
```

### 6) Cầu phương Gauss 4 điểm

```
elseif n==4
    w1= 0.652145; w2 = 0.652145; w3= 0.347855; w4= 0.347855;
    t1= 0.339981; t2= -0.339981; t3= 0.861136; t4= -0.861136;
    G4= ((b-a)/2)*(w1*g(t1)+w2*g(t2)+w3*g(t3)+w4*g(t4));
    fprintf ('Ket qua cua phuong phap cau phuong 4 diem la: %.4f\n', G4);
end
```

# PROJECT 2

## I. PROBLEM 1




Ở đây, r, h và L tương ứng với bán kính của bể, độ sâu của chất lỏng và chiều dài của bể nước:

a) Giải thích chi tiết thể tích của chất lỏng trong bình được tính bởi công thức:

$$V = \left[ r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh-h^2} \right] L.$$

b) Cho V 8 ($m^3$), L = 5 (m), r = 2 (m), xác định h bằng phương pháp chia đôi và phương pháp dây cung với sai số nhỏ hơn $10^{-5}$ (Dự đoán khoảng cô lập nghiệm).

c) Đề xuất cách tìm h với dữ kiện đã cho ở câu trước bằng phương pháp lặp đơn (tức là bạn đưa phương trình về dạng tương đương là x=g(x), trong đó g(x) là một hàm làm phương pháp lặp đơn khả thi tức q chạy từ 0 đến 1). Nếu có thể, hãy xác định h với sai số tiên nghiệm nhỏ hơn $10^{-5}$ ($h_0$ được chọn tùy ý).

d) Với phương pháp Newton-Raphson, chọn $h_0$ phù hợp, xác định h với sai số nhỏ hơn $10^{-5}$

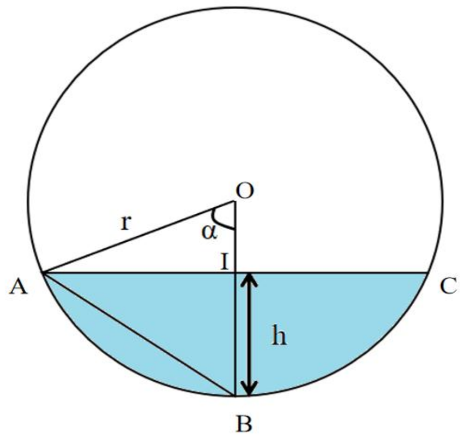
## Giải quyết

### 1) Thể tích chất lỏng trong bể

Ta có thể tích chất lỏng trong bể bằng diện tích chất lỏng ở mặt bể nhân với chiều dài của bể.

- **Tính diện tích nước trên mặt bể**

  Ta phát họa mặt bể như sau:




Xét tam giác vuông OAI ta có:

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) \ (1)$$

Diện tích hình quạt OAC là

$$S_{OAB} = \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)}{2}$$

$$\rightarrow S_{OAC} = 2.S_{OAB} = r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$



Xét ΔOAB ta có:

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + r^2 - AB^2}{2r^2} \ (2)$$

$$\text{Từ}\,(1)\,và\,(2) \leftrightarrow AB^2 = 2rh \rightarrow AI = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Diện tích tam giác OAC là

$$S_{\Delta OAI} = \frac{1}{2}OI.AI = \frac{1}{2}(r-h)\sqrt{2rh-h^2}$$

$$\rightarrow S_{OAC} = 2.S_{\Delta OAI} = r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

Vậy diện tích nước là:

$$S = S_{OAC} - S_{\Delta OAC} = r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh-h^2}$$

- **Thể tích mực nước là:**

$$V = \left[r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh-h^2}\right]L$$

Với L là chiều dài của bể

**2) Phương pháp dây cung và phương pháp chia đôi:**

❖Phương pháp dây cung:

**Ý tưởng:**

[a, b] là khoảng phân ly nghiệm.

f(x) có các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 không đổi dấu trên (a, b)

- Định nghĩa điểm Fourier: Điểm x ∈ (a, b) được gọi là điểm Fourier nếu

$f(x) \times f''(x) > 0$

Dãy $\{x_n\}$: $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$ được xác định theo công thức:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \times (x_n - d)}{f(x_n) - f(d)} \qquad n=0..n$$



Trong đó:

- $d = b$ nếu b là điểm Fourier và $x_0 = a$.
- $d = a$ nếu a là điểm Fourier và $x_0 = b$.

2. **Sai số:**

Giả sử $|f'(x)| \geq m > 0, \forall x \in (a, b)$, ta có:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

**Tìm h theo phương pháp dây cung**

Ta có ( 0.5;1) là khoảng li nghiệm:

$$f(h)=\left[20\arccos\left(\frac{2-h}{2}\right)-5(2-h)\sqrt{4h-h^2}\right]-8=0$$

$$f'(h)=\frac{10}{\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{2}\right)^2}}-\frac{20-10h}{\sqrt{4h-h^2}}+5\sqrt{4-h^2}+\frac{10h-5h^2}{\sqrt{4h-h^2}}$$

Ta có $\left|f'(h)\right|_{\min}$ =13.2875656 tại h=0.5, có f(1)= 4.283696986 cùng dấu với f''(h) trong khoảng (0.5;1) suy ra chọn d = 1, $h_0=0,5$.

***Bấm máy:*** C= $f(h)=\left[20\arccos\left(\frac{2-h}{2}\right)-5(2-h)\sqrt{4h-h^2}\right]-8$ :Y=X- $\frac{C\times(X-1)}{C-f(1)}$ :

A= $\frac{|C|}{13,22875656}$ :X=Y ;với $x_0 = 0.5$ ta có bảng giá trị của h và sai số như sau:

| n | $h_n$ | Sai số |
|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.3238170547 |
| 1 | 0.7236531142 | 0.2608769107 |
| 2 | 0.7390667409 | 0.01904104 |
| 3 | 0.7399608025 | $1.108265684\times 10^{-3}$ |
| 4 | 0.740012098 | $6.35977395\times 10^{-5}$ |
| 5 | 0.7400150392 | $3.6456987\times 10^{-6}$ |

Theo bảng trên tại n= 5 ta được h= 0.7400150392 với sai số $< 10^{-5}$

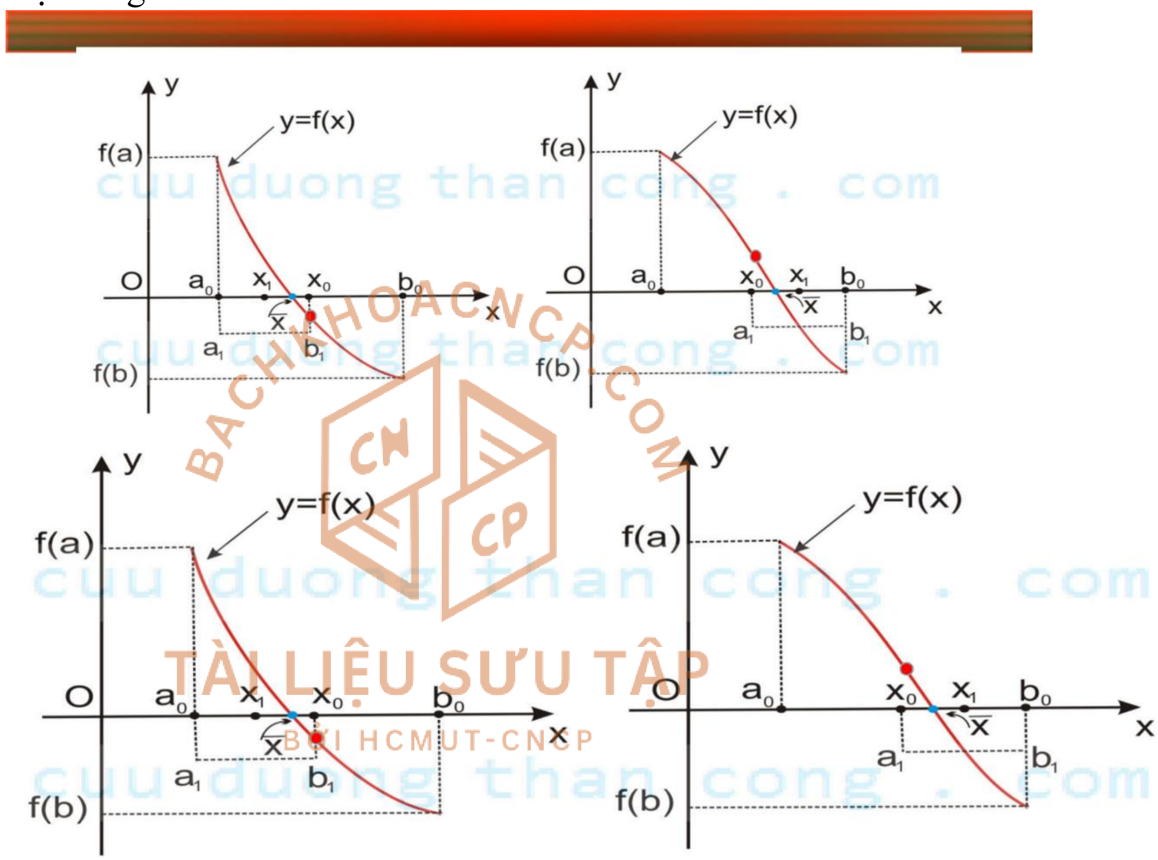
❖ Phương pháp chia đôi:

**Ý tưởng:**

Xét pt f(x) = 0 (1) có đoạn phân li nghiệm là [a.b]

Thu hẹp đoạn phân li nghiệm bằng cách chia đôi đoạn [a,b] và kiểm tra điều kiện khoản li nghiệm mới.

⇨ Nội dung:




Giả sử pt (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách li nghiệm [a,b] và f(a).f(b)<0. Đặt $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ là điểm giữa của đoạn [a,b]

- Nếu $f(x_0) = 0$ thì $x_0$ là nghiệm chính xác và dừng lại. Ngược lại, nếu:
  + Nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$
  + Nếu $f(x_0).f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$

  Như vậy, ta được: $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $d_1 = b_1 - a_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{b - a}{2}$

  Tiếp tục quá trình chia đôi đối với:

| Số lần lặp | Cận trái a (< 0) | Cận phải b (> 0) | $x_n=\frac{a+b}{2}$ | Dấu của f($x_n$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | + |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{8}$ | – |
| 2 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{11}{16}$ | – |
| 3 | $\frac{11}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{23}{32}$ | – |

$[a_1, b_1], [a_2, b_2]... [a_{n-1}, b_{n-1}]$ n lần, ta được:

$$\begin{cases} a_n \le \bar{x} \le b_n,\ a_n \le x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} \le b_n \\ f(a_n).f(b_n) < 0,\ d_n = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

**Tìm h theo phương pháp chia đôi**

Giải

$$V = \left[ r^2 \arccos\left( \frac{r-h}{r} \right) - (r-h)\sqrt{2rh - h^2} \right] L$$

(Thay V=8, L=5, r=2)

$$f(h) = \left[ 4\arccos\left( \frac{2-h}{2} \right) - 5(2-h)\sqrt{4h-h^2} \right] - 8$$

với hàm số f(h) liên tục trên khoảng (0.5;1)

Ta có f(0.5) < 0 và f(1)> 0 → f(0,.5).f(1)< 0 suy ra f(h) = 0 có nghiệm trong khoảng (0.5;1)

Suy ra ta có khoảng li nghiệm là (0.5;1)

Bấm máy : X=$\frac{A+B}{2}$: $f(h)$ với A= 0.5 ,B=1 ; sau các bước lặp ta có bảng :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $\frac{23}{32}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{47}{64}$ | - |
| 5 | $\frac{47}{64}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{95}{128}$ | + |
| 6 | $\frac{47}{64}$ | $\frac{95}{128}$ | $\frac{189}{256}$ | - |
| 7 | $\frac{189}{256}$ | $\frac{95}{128}$ | $\frac{378}{512}$ | + |
| 8 | $\frac{189}{256}$ | $\frac{378}{512}$ | $\frac{757}{1024}$ | − |
| 9 | $\frac{757}{1024}$ | $\frac{378}{512}$ | $\frac{1515}{2048}$ | − |
| 10 | $\frac{1515}{2048}$ | $\frac{378}{512}$ | $\frac{3031}{4096}$ | − |
| 11 | $\frac{3031}{4096}$ | $\frac{378}{512}$ | $\frac{6063}{8192}$ | + |
| 12 | $\frac{3031}{4096}$ | $\frac{6063}{8192}$ | 0,7400512695 | + |
| 13 | $\frac{3031}{4096}$ | 0,7400512695 | 0,760020752 | + |
| 14 | $\frac{3031}{4096}$ | 0,760020752 | 0,7400054932 | − |
| 15 | 0,7400054932 | 0,760020752 | 0,7400131226 | − |

Đánh giá sai số : $\Delta X_n = |x_n - x^*| \le \frac{B-A}{2^{n+1}}$

$$\Delta x_n = \frac{1-0,5}{2^{15+1}} = 7,6293945 \times 10^{-6} \le 10^{-5}$$

Vậy tại n=15, h=0.7400131226 thì sai số nhỏ hơn $10^{-5}$

**3) Tìm h theo phương pháp lặp đơn:**

***Bước 1:*** Đưa về dạng x=g(x), kiểm tra điều kiện $|g'(x)| \le q \le 1$

***Bước 2:*** Xây dựng $X_{n+1} = g(x_n), n = 0,1,2,...$

***Bước 3:*** Đánh giá sai số gần đúng: sai số tiên nghiệm.

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

Giải

$$V = \left[r^2 \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh - h^2}\right]L$$

(Thay V=8, L=5, r=2)

$$\rightarrow h = \frac{20\arccos\left(\frac{2-h}{2}\right) - 10\sqrt{4h-h^2} - 8}{-5\sqrt{4h-h^2}}$$

Kiểm tra điều kiện: tại khoảng li nghiệm (0,5;1)

Ta được: $L = \left|g'(h)\right|_{\max} = \left|g'(1)\right| = 0,8351204261$ thõa điều kiện.

***Bấm máy:*** $Y = g(h) : \left|Y - X\right| : X = Y$

Chọn $h_0 = 0,74$

$h_1 = 0,7400304362$
$h_2 = 0,75$
$h_3 = 0,7400304362$
$h_4 = 0,75$
…
$h_{17} = 0,7400304362$

❖ **Đánh giá sai số tiên nghiệm:**

$$\Delta h = \frac{L^{17}}{1-L} \times 3,043623284.10^{-5} = 8,628967757.10^{-6}$$

Tại h=0,7400304362 thì sai số tiên nghiệm nhỏ hơn $10^{-5}$

$$f(h) = \left[20\arccos\left(\frac{2-h}{2}\right) - 5(2-h)\sqrt{4h-h^2}\right] - 8 = 0$$

**4) Tìm h theo phương pháp Newton - Raphson:**

$$f'(h)=5\sqrt{4h-h^2}-(10-5h)\frac{4-2h}{2\sqrt{4h-h^2}}+\frac{20}{\sqrt{4h-h^2}}$$

$$f''(h)=\frac{-5(h-2h)}{\sqrt{4h-h^2}}-\frac{5(h-2)(h^2-4h-4)}{(4h-h^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{20(h-2)}{(4h-h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Chọn khoảng li nghiệm h ϵ [0,5;1]
Chọn $h_0$ theo điều kiện Fourier:
f(0,5).f''(0,5) < 0
f(1).f''(1) > 0
⇨ $h_0 = 1$

$f''(h)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=2 \\ h=2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (h=2 loại do ngoài khoảng li nghiệm; $h=2+2\sqrt{2}$ loại do điều kiện $4h-h^2>0$

Tính gía trị nhỏ nhất m của $|f'(h)|$, h ϵ [0,5;1] :

$|f'(0,5)|$= 13,22875656

$|f'(1)|$= 17,32050808

Vậy giá trị nhỏ nhất $|f'(h)|$ = m =13,22875656

<u>Theo phương pháp Newton-Raphson:</u>

$$h_n=h_{n-1}-\frac{f(h_{n-1})}{f'(h_{n-1})}$$

bắt đầu với $h_0$ = 1 ta tính được:

$h_1 = h_0-\frac{f(h_0)}{f'(h_0)}$ = 0,7526806392

$h_2$= 0,7400563768
$h_3$= 0,7400152185
$h_4$= 0,7400152181
...
$h_n$

Vì h có sai số nhỏ hơn $10^{-5}$ nên $\frac{|f(h_n)|}{m}-10^{-5}\le 0$ ( sai số tổng quát) nên

$h_3$= 0,7400152185 thỏa điều kiện và là h cần tìm.

# II. PROBLEM 2

Bài toán 2)

a) Viết hàm phân tích ma trận A thành A=LU bằng phương thức của Doolitle (không sử dụng lệnh đã có trong Matlab hoặc Python), sử dụng hàm của bạn để giải bài toán tiếp theo.

b) Một kỹ sư điện giám sát việc sản xuất ba loại linh kiện điện tử. Ba loại vật liệu - nhựa, kim loại và cao su - được yêu cầu để sản xuất. Số lượng cần thiết để sản xuất mỗi linh kiện là:

| Linh kiện | kim loại | nhựa | cao su |
|---|---|---|---|
| Component | Metal, g/component | Plastic, g/component | Rubber, g/component |
| 1 | 15 | 0.30 | 1.0 |
| 2 | 17 | 0.40 | 1.2 |
| 3 | 19 | 0.55 | 1.5 |

Nếu mỗi ngày có tổng 3.89, 0.095 và 0.282 kg kim loại, nhựa và cao su tương ứng thì mỗi ngày có thể sản xuất được bao nhiêu linh kiện? (Kết quả phải được trình bày như sau: Ma trận L, nghiệm của hệ Ly=B, Ma trận U, nghiệm của hệ Ux=y



## Giải quyết

### 1) Phân tích ma trận A thành A=LU bằng phương thức của Doolittle:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 19 \\ 0,3 & 0,4 & 0,55 \\ 1 & 1,2 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Ta có:

- L là ma trận tam giác dưới có các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0,02, l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{15}, l_{32} = \frac{1,2 - \frac{17}{15}}{0,06} = \frac{10}{9}$$

U là ma trận tam giác trên.

$$u_{11}=a_{11}=15, u_{12}=a_{12}=17, u_{13}=a_{13}=19, u_{22}=\frac{D_2}{D_1}=0{,}06, u_{33}=\frac{D_3}{D_2}=\frac{2}{45}, u_{23}=\frac{1{,}5-\frac{19}{15}-\frac{2}{45}}{\frac{10}{9}}=0{,}17$$

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}02 & 1 & 0\\ \frac{1}{15} & \frac{10}{9} & 1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}15 & 17 & 19\\ 0 & 0{,}06 & 0{,}17\\ 0 & 0 & \frac{2}{45}\end{pmatrix}$$

**2) Giải hệ Ly=B, Ux=y.**

Theo phân tích A=LU ở câu trên, ta có:

$$Ly=B\leftrightarrow y=L^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}02 & 1 & 0\\ \frac{1}{15} & \frac{10}{9} & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3890\\ 95\\ 282\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3890\\ 17{,}2\\ \frac{32}{9}\end{pmatrix}$$

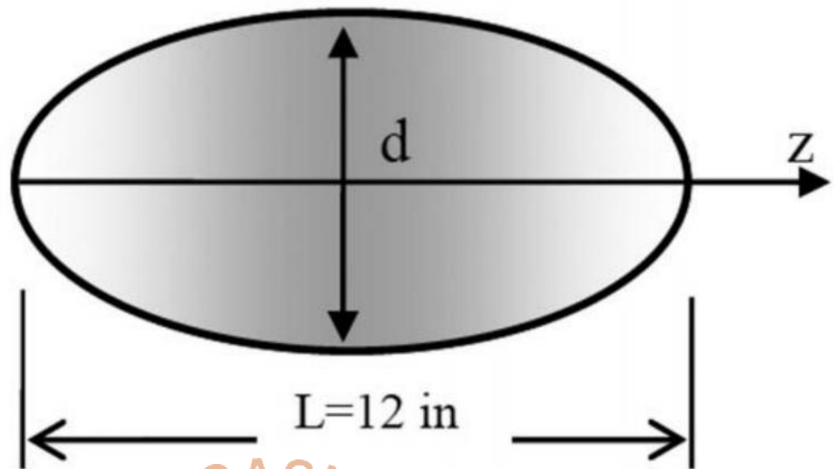


$$Ux=y\leftrightarrow x=U^{-1}y=\begin{pmatrix}15 & 17 & 19\\ 0 & 0{,}06 & 0{,}17\\ 0 & 0 & \frac{2}{45}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3890\\ 17{,}2\\ \frac{32}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\ 60\\ 80\end{pmatrix}$$

Nghiệm x cho biết mỗi ngày sản xuất được 90 linh kiện loại 1, 60 linh kiện loại 2 và 80 linh kiện loại 3. Tổng số linh kiện sản xuất được là 230.

# III. PROBLEM 3

Cho một quả bóng đá trong hình:






Đường kính được đo tại một số điểm và cho trong bảng:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ (in) | 0 | 1.5 | 3 | 4.5 | 6 | ~~7~~ |
| $d$ (in) | 0.0 | 2.9 | 4.8 | 5.8 | 6.2 | ~~6.7~~ |

A) Biểu thị hàm ở dạng tích phân đối với d,z và L để ước tính diện tích bề mặt và thể tích của quả bóng



B) Sử dụng phương pháp hình thang và phương pháp Simpson để tính diện tích bề mặt và thể tích của quả bóng



## Giải quyết

### 1) Hàm tích phân dùng để ước tính diện tích bề mặt và thể tích của quả bóng

Ta có $S_{xq}$ là tổng chu vi của nhiều hình tròn có bán kính khác nhau:

$$S_{xq} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r \triangle z = 2\pi \int_0^2 r dz = 2\pi \int_0^2 \frac{d}{2} dz$$

Thể tích của quả bóng là tổng thể tích của các hình trụ khác nhau:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \triangle z = \pi \int_0^L r^2 dz \quad \text{với } r = \frac{d}{2}$$

**2) Tính diện tích và thể tích quả bóng bằng phương pháp hình thang và Simpson.**

❖ Diện tích bề mặt quả bóng:

$$S_{xq} = 2\pi\int_0^2 \frac{d}{2}dz \to y = \frac{d}{2}$$

Phương pháp hình thang:

$$S_1 = 2\pi h\left[y_0 + y_4 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$= 2\pi.1,5\left[0 + \frac{6,2}{2} + 2\left(\frac{2,9}{2} + \frac{4,8}{2} + \frac{5,8}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{249}{5}\pi \approx 156,4513\left(in^2\right)$$

Phương pháp Simpson:

$$S_2 = 2\pi.2\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$= 4\pi\frac{1,5}{3}\left(0 + 4.\frac{2,9}{2} + 2.\frac{4,8}{2} + 4.\frac{5,8}{2} + \frac{6,2}{2}\right)$$

$$= \frac{253}{5}\pi \approx 158,9646\left(in^2\right)$$



❖ Thể tích quả bóng:

$$V = \pi\int_0^L r^2dz; r = \frac{d}{2} \to y = r^2 = \frac{d^2}{4}$$

Phương pháp hình thang: $V_1$

$$V_1 = 2\pi\frac{h}{2}\left[y_0 + y_4 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$= \pi.1,5\left[0 + \frac{6,2^2}{4} + 2\left(\frac{2,9^2}{4} + \frac{4,8^2}{4} + \frac{5,8^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{25293}{400}\pi \approx 198,6506\left(in^3\right)$$

Phương pháp Simpson: $V_2$

$$V_2 = 2\pi.2\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= 2\pi\frac{1,5}{3}\left(0 + 4.\frac{2,9^2}{4} + 2.\frac{4,8^2}{4} + 4.\frac{5,8^2}{4} + \frac{6,2^2}{4}\right)$$

$$= \frac{3159}{50}\pi \approx 198,4858\left(in^3\right)$$