CHƯƠNG II *(Tiếp sau phần KTGK)*

TỌA ĐỘ CỦA MỘT VÉCTƠ :

ĐỊNH NGHĨA:

Trong kgvt X, cho trước cơ sở E= { e_1 , e_2, …, e_n } được sắp thứ tự.
Khi đó với mỗi véctơ u tùy ý trong X, *u luôn biểu diễn được một cách duy nhất* qua các véctơ trong E. Nói một cách khác, với mỗi véctơ u, luôn có 1 bộ số duy nhất $(a_1, a_2, \ldots ,a_n)$ sao cho $\boldsymbol{u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n}$. Ta nói tọa độ của véctơ u đối với cơ sở E là $u|_E = (a_1, a_2, \ldots ,a_n)$ hay $[u]_E = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Về mặt thực hành: trong R^n , nếu viết [E] là ma trận mà các cột lần lượt là tọa độ các véctơ trong cơ sở E và [u] ma trận cột tọa độ của véctơ u thì $[E].[u]_E=[u]$ hay $\boxed{[u]_E = [E]^{-1}[u]}$.

MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ:

ĐỊNH NGHĨA:

Trong kgvt X, xét cơ sở E= { e_1 , e_2, …, e_n } và cơ sở B = { b_1 , b_2, …, b_n }. Ta gọi ma trận $\boxed{S_{E\to B} = \left([b_1]_E \quad [b_2]_E \quad \ldots \quad [b_n]_E\right)}$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B. Khi đó ma trận chuyển cơ sở từ B sang E sẽ là S^{-1}.

Chúng ta lưu ý có các cách xây dựng định nghĩa ma trận chuyển cơ sở khác nhau giữa các tài liệu.

Về mặt thực hành: trong kgvt R^n thì ma trận $\boxed{S_{E\to B} = [E]^{-1}[B]}$ (do $[b_i]_E = [E]^{-1}[b_i]$).

Từ các biểu thức: $[u]_E = [E]^{-1}[u]$ và $[u]_B = [B]^{-1}[u]$ suy ra mối liên hệ giữa các tọa độ của cùng một véctơ u đối với các cơ sở E và B là: $[u]_E = S_{E\to B}[u]_B$.

BÀI TẬP:

1. Trong kgvt R^3, xét các cơ sở sau:

E={ e_1=(1,0,0); e_2=(0,1,0); e_3=(0,0,1) }
B_1= { x_1=(-1,1,1); x_2=(1,-1,1); x_3=(1,1,-1) }
B_2={ y_1=(2,1,4); y_2=(3,2,1); y_3=(1,2,3) }

a) Tìm ma trận S chuyển cơ sở từ E sang B_1, (kí hiệu $S_{E\to B_1}$), nhận xét ma trận S.
(Lưu ý sử dụng định nghĩa về ma trận chuyển cơ sở trong bài giảng lý thuyết).
b) Tìm ma trận Q chuyển cơ sở từ B_1 sang E. Kiểm tra $Q=S^{-1}$.
c) Tìm ma trận P chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2.
d) Cho véctơ u=(3,4,5). Tìm các tọa độ của u đối với 3 cơ sở trên theo định nghĩa, sau đó kiểm tra lại các đẳng thức:
+ $[u]_E = S_{E\to B_1}.[u]_{B_1}$ + $[u]_{B_1} = P_{B_1\to B_2}.[u]_{B_2}$
e) Biết véctơ v có tọa độ đối với cơ sở B_1 là (6,7,8). Hãy tìm tọa độ của v đối với cơ sở B_2 (làm theo nhiều cách).

KHÔNG GIAN CON:

Cho (X,+, .) là một không gian véctơ và $U \subset X$, $U \neq \varnothing$.

(U,+, .) là một không gian con của X $\xleftrightarrow{DN}$ U là một không gian véctơ .

$\xleftrightarrow{TC}$ $\forall x,y \in U$; $\forall k_1,k_2 \in R$ thì $k_1.x+k_2.y \in U$

Hai dạng không gian con thường gặp trong R^n:

Dạng 1: Không gian con sinh bởi một hệ véctơ:

$U = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle \longleftrightarrow M=\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ là tập sinh của U

$$\longleftrightarrow U=\left\{ u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i , \alpha_i \in R \right\}$$

Gọi A là ma trận các tọa độ viết *theo dòng* của hệ véctơ M.

Dim U = Hạng của hệ véctơ M = r(A) = $r(A^T)$.

Cơ sở của U có thể chọn:

- một hệ véctơ con độc lập tuyến tính tối đại của M.
- một hệ véctơ đltt trong U có số véctơ = dim U.
- hệ các véctơ dòng khác 0 trong ma trận bậc thang được bđsc từ A.

Dạng 2: Không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

Kí hiệu ma trận $A_{m,n}$ và $X= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

$$U = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, A.X = 0 \}$$

Dim U = số ẩn tự do của hệ phương trình = n – r(A) .

Cơ sở của U chính là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình.

Quan hệ giữa các không gian con:

Kí hiệu U, V là các không gian con của không gian véctơ X. Khi đó:

+ {0} là không gian con nhỏ nhất của X. Mọi kg con của X đều chứa véctơ 0.

+ $0 \le \dim U \le \dim X$.

+ Nếu $U \subset V$ thì $\dim U \le \dim V$.

+ Nếu $U \subset V$ và dim U = dim V thì U = V.

+ $U \cap V = \{x, x \in U \text{ và } x \in V\}$ là không gian con của X.

+ $U \cup V$ nói chung không phải là không gian con của X.

+ $U+V =\{ x = x_1 + x_2 ;\ x_1 \in U \text{ và } x_2 \in V\}$ là kg của X. Lưu ý: $U \cup V \subset U+V$.

+ Dễ thấy $U \cap V \subset U \subset U+V$.

+ $\dim (U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

Bài toán: Cho 2 không gian con U,V trong R^n. Tìm cơ sở và chiều của kgvt $U \cap V$; U+V.

Giả thiết:	**U+V**	**$U \cap V$**
$U=\langle x_1,x_2,\ldots,x_m \rangle$ $V=\langle y_1,y_2,\ldots,y_k \rangle$	U+V= $\langle x_1,x_2,..,x_m, y_1,y_2,..,y_k \rangle$	?
U là kg nghiệm của hệ A.X=0 V là kg nghiệm của hệ B.X=0	?	$U \cap V=\left\{ X \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} A.X = 0 \\ B.X = 0 \end{cases} \right\}$
$U=\langle x_1,x_2,\ldots,x_m \rangle$ V là kg nghiệm của hệ B.X=0	?	?

BÀI TẬP

2. Trong kgvt R^3, cho A = { (x,y,z) : 2x – 3y+5z = 0}
B = { (x,y,z) : 2x – 3y+5z = 1}

Chứng minh A là một không gian con của R^3.

Vì sao B không phải là một không gian con của R^3?

3. Trong kgvt R^3, cho U =< x=(2,1,3); y=(1,2,1); z=(3,3,4) >.

a) Tìm dim U và một cơ sở của U.

b) Có thể coi hệ véctơ {(2,1,3); (1,1,1)} là một cơ sở của U hay không?

c) Tìm điều kiện của m để hệ véctơ {(0,3,-1),(1,m,1)} là một cơ sở của U.

d) Tìm m để hệ véctơ {(0,3,-1),(1,m,1),(1,1,0)} là một hệ sinh của U.

4. Trong kgvt R^4, cho U = < x_1=(1,2,1,1); x_2=(2,0,-1 3); x_3 = (1,-6,-5,3)>
và V = < y_1=(3,-2,-3,5) ; y_2=(-2,m,7,-5) >.

Tìm điều kiện của m để 2 không gian con U và V là bằng nhau.

5. Trong R^4 cho U=<(1,2,1,1); (2,1,1,2) ,(0,3,1,0)> và V=< (2,1,1,0), (1,m,0,1)>.
Tìm m để U+V có chiều là nhỏ nhất. Hãy chỉ ra 1 cơ sở của U+V khi đó.

6. Trong R^3, xét 2 không gian con: U = {(x,y,z) : 3x+2y+z=0 và 2x+5y+3z=0 }
V = { (x,y,z): x +my -2z =0 }

a) Tìm chiều và cơ sở của U.

b) Biện luận chiều và cơ sở của kg U∩V theo m.

c) Biện luận chiều và cơ sở của kg U+V theo m.

d) Với m nào thì ta nói R^3 = U⊕V ?

7. Trong R^3, cho U=< x_1=(1,0,0); x_2=(1,-1,0)> và V = < (0,1,0), y_2=(0,0,1) > .
Tìm chiều và cơ sở của U∩V.

8. Trong R^4, cho U=< x_1=(1,0,1,2); x_2=(1,-1,0,1)> và V = < (0,1,0,1), y_2=(1,0,0,2) > .
Tìm chiều và cơ sở của U∩V, U+V.

9. Trong R^3, cho U=< x_1=(1,0,2); x_2=(2,1,1)> và V = { (x,y,z): y -z =0 }.Tìm chiều và cơ sở của U∩V.

HD bài 9:

Cách 0: Trong bài này ta thấy $x_1 \notin$ V và $x_2 \in$V.

Vì $x_1 \notin$ V nên [dim V =2] < [dim U+V] ≤ [dim R^3= 3] nên suy ra dim U+V =3.

Theo công thức liên hệ số chiều thì dim U∩V = 2 + 2 – 3 =1.

Mặt khác $x_2 \in$V nên $x_2 \in$ U∩V , nên U∩V = < x_2 >. Cơ sở của U∩V là { (2,1,1) }

Cách 1: Viết lại: V = < x_3=(1,0,0); x_3=(0,1,1)>

Lấy u bất kỳ, u∈ U∩V $\Rightarrow \begin{cases} u \in U \to u = ax_1 + bx_2 & (1) \\ u \in V \to u = cx_3 + dx_4 & (2) \end{cases}$

(1)(2) $\Rightarrow ax_1 + bx_2 - cx_3 - dx_4 = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a;b... \\ c = 2\alpha \\ d = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{aligned} u &= \alpha(2x_3 + x_4) \\ &= \alpha(2,1,1) \end{aligned}$$

Suy ra U∩V = $\{\alpha(2,1,1);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ hay U∩V = $<\alpha(2,1,1)>$.

Dim U∩V = 1; Cơ sở của U∩V là $\{(2,1,1)\}$

Cách 2: Viết lại: V = < x_3=(1,0,0); x_3=(0,1,1)>

Lấy u bất kỳ, u∈ U∩V. Do $u \in U \to u = ax_1 + bx_2$ = (a+2b, b, 2a+b).

Đồng thời u∈V nên rank(x_3, x_4,u)=rank(x_3, x_4) = 2, tức là:

$$rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a+2b & b & 2a+b \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2a+b \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow a = 0$$

Suy ra u = (2b, b, b) = b(2,1,1) và U∩V = $<b(2,1,1)>$.

Dim U∩V = 1; Cơ sở của U∩V là $\{(2,1,1)\}$

(Có thể làm ngắn hơn khi nhận xét rằng b ≠ 0, nên có thể chọn luôn b=1)

Cách 3: Viết lại U ở dạng U={ (x,y,z): ax+by+cz =0 } như dạng của V.

Dùng tích có hướng hay lập hệ pt thì tìm được a=-2; b=3 ; c=1.

Vậy $U \cap V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x+3y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \right\}$=<(2,1,1)>.

Dim U∩V = 1; Cơ sở của U∩V là $\{(2,1,1)\}$

(Hạn chế của cách này là sẽ không dễ nhẩm U nếu gặp kgvt R^4)

Cách 4: Lấy u bất kỳ, u∈ U∩V. Do $u \in U \to u = ax_1 + bx_2$ = (a+2b, b, 2a+b).

Đồng thời u∈ V nên u là nghiệm của pt *y-z = 0*, tức là b- (2a+b)=0, suy ra a=0.

Vậy u = (2b, b, b) = b(2,1,1) và U∩V = $<b(2,1,1)>$.

Dim U∩V = 1; Cơ sở của U∩V là $\{(2,1,1)\}$

Cách 5:……

KHÔNG GIAN VÉCTƠ EUCLIDE

KHÁI NIỆM KGVT EUCLIDE:

* Giả sử X là một kgvt trên R và x, y, z $\in$ X. Ta định nghĩa tích vô hướng của 2 véctơ trong X là 1 số thỏa:

i) $(x,y) = (y,x)$

ii) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

iii) $a(x,y) = (ax,y) = (x,ay)$

iv) $(x,x) \geq 0$ và $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x= 0$.

Tính chất (iv) có thể phát biểu tương đương: Dạng toàn phương (x,x) xác định dương $\Leftrightarrow$ Mọi định thức con chính của dạng toàn phương đều xác định dương.

(Sẽ học ở chương sau).

Kgvt X hữu hạn chiều có tích vô hướng được gọi là không gian Euclide.

* Tích vô hướng chính tắc trong R^n chính là tích vô hướng đã học ở THPT.
* Độ dài của một véctơ : $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
* Khoảng cách giữa 2 véctơ x,y: $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y,x-y)}$
* Góc giữa 2 véctơ x,y: $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$

* Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, bất đẳng thức tam giác (TL)

CÁC KHÁI NIỆM TRỰC GIAO và TÍNH CHẤT

* $x\perp y \Leftrightarrow (x,y)= 0$. Mọi véctơ đều trực giao với véctơ không.
* Hệ véctơ M trực giao $\Leftrightarrow$ Các véctơ trong hệ trực giao đôi một.
* Hệ véctơ M trực giao + M không chứa véctơ không $\Rightarrow$ M độc lập tuyến tính.
* Hệ véctơ M trực chuẩn $\Leftrightarrow$ M trực giao + các véctơ đều có độ dài bằng 1.
* Véctơ x $\perp$ kgc U $\Leftrightarrow$ x $\perp$ tất cả các véctơ trong U
  $\Leftrightarrow$ x $\perp$ tất cả véctơ trong 1 cơ sở của U.
* Kgc U $\perp$ kgc V $\Leftrightarrow$ mỗi véctơ trong U $\perp$ tất cả các véctơ trong V.
  $\Leftrightarrow$ mỗi véctơ trong 1 cơ sở của U $\perp$ tất cả véctơ trong 1cơ sở của V.
  $\Rightarrow$ $U\cap V =\{0\}$.
  (Khác với khái niệm 2 mặt phẳng vuông góc ở toán PT)
* $U^\perp = \{ x\in X: x\perp U \}$. Dễ thấy $U^\perp \perp U$ và $U^\perp \oplus U = X$.

* Quá trình trực giao hóa một hệ véctơ đltt:

$\{ x_1, x_2,\ldots,x_m \}$ độc lập tt $\xrightarrow[C2:\ ?]{C1:\ \text{Gram-Schmidt}}$ $\{ y_1, y_2,\ldots,y_m \}$ trực giao và

$< x_1, x_2,\ldots,x_m > = < y_1, y_2,\ldots,y_m >$

Công thức Gram-Schmidt với hệ 3 véctơ :

$y_1 = x_1$

$y_2 = x_2 + \alpha.y_1$ $\qquad \alpha = -\dfrac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}$

$y_3 = x_3 + \beta_1.y_1 + \beta_2.y_2$ $\qquad \beta = -\dfrac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)}$ $\qquad \beta_2 = -\dfrac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)}$

HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA MỘT VÉCTƠ XUỐNG MỘT KG CON

Giả sử U là một kg con của kgvt X, và véctơ x tùy ý, $x \in X$.

Ta luôn biểu diễn được một cách duy nhất **x= u + h** ; $u \in U$ và $h \in U^{\perp}$.

Hình chiếu vuông góc (gọi tắt là hình chiếu) của x xuống U là $pr_U\, x = u$;

Khoảng cách từ x đến U là $d(x,U) = \|h\| = \|x-u\|$

Đương nhiên $pr_{U^{\perp}}\, x = h$; $d(x,U^{\perp}) = \|u\|$ và $x = pr_U\, x + pr_{U^{\perp}}\, x$

*Cách tìm **u**:*

Giả sử $\{y_1, y_2, y_3\}$ là 1 cơ sở của U. Vì **x= u** + h nên ta tìm $pr_U\, x =$ **u** $= a.y_1 + b.y_2 + c.y_3$

với a,b,c là nghiệm của hệ: $\begin{cases} a(y_1,y_1)+b(y_2,y_1)+c(y_3,y_1)=(x,y_1) \\ a(y_1,y_2)+b(y_2,y_2)+c(y_3,y_2)=(x,y_2) \\ a(y_1,y_3)+b(y_2,y_3)+c(y_3,y_3)=(x,y_3) \end{cases}$

* Trường hợp riêng: nếu $\{y_1, y_2, y_3\}$ là 1 cơ sở trực giao của U.

Ta được $pr_U\, x = u = a.y_1 + b.y_2 + c.y_3$ với $a = \dfrac{(x,y_1)}{(y_1,y_1)}$; $b = \dfrac{(x,y_2)}{(y_2,y_2)}$; $c = \dfrac{(x,y_3)}{(y_3,y_3)}$

* Trong một số trường hợp, việc tìm $pr_{U^{\perp}}\, x$ lại nhanh hơn, thì ta sử dụng công thức:

$pr_U\, x = x - pr_{U^{\perp}}\, x$.

BÀI TẬP

10. (ĐCK) Trong kgvt R^2, xét tích của 2 véctơ $x=(x_1, x_2)$ và $y=(y_1,y_2)$ được định nghĩa như sau: $(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + mx_2y_2$

a) Với giá trị nào của m thì tích đã cho là một tích vô hướng?

b) Cho x=(1,-2). Tính $\|x\|$ theo tích vô hướng ở câu a)

c) Tìm giá trị của p để véctơ y=(2, p) trực giao với x=(1, -2) theo tvh câu a).

11. Trong R^3, cho U = < (1,1,-1); (1,2,3); (2,3,2) >. Tìm tất cả các véctơ x vuông góc với U và có độ dài bằng 2.

12. (ĐCK) Trong kgvt R^4 cho 2 không gian con: U=< x_1=(1,-2,2,1); x_2=(2,0,3,-1) >

V= < x_3=(1,3,0,m); x_4=(0,5,1,n) >. Tìm giá trị m,n để $U \perp V$.

13. (ĐCK) Trong không gian véc tơ R^4, xét hệ véctơ { (-1,2,1,3); (2,1,-3,1) } . Hãy bổ sung thêm các véctơ vào hệ để hệ trở thành 1 cơ sở trực giao của R^4.

14. Trong kgvt R^3, cho không gian con A = {(x,y,z) : 2x -3y+5z=0}.

a) Tìm một cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn của A.

b) Tìm một cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn của $A^{\perp}$.

c) Tìm hình chiếu vg của véctơ x=(1,2,3) xuống A và khoảng cách từ x đến A.

15. Trong kgvt R^4 cho không gian con: U={(x,y,z,t): x + 2y -3z-t =0 và 2x-y-3z=0}.

a) Tìm một cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn của U.

b) Tìm một cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn của $U^{\perp}$.

c) Tìm hình chiếu vg của véctơ x=(1,2,3,4) xuống U và khoảng cách từ x đến U.

16. (ĐCK-Tham khảo)

a) Tính thể tích tứ diện ABCD với các đỉnh A(2,2,2); B(4,5,4); C(5,5,6); D(4,3,3).

b) Tính độ dài đường cao hạ từ A của tứ diện ABCD trên.

c) Tìm đỉnh thứ 4 của tứ diện ABCD nếu biết D nằm trên trục Oy; A(0,1,1); B(4,3,-3); C(2,-2,1) và thể tích tứ diện bằng 2.