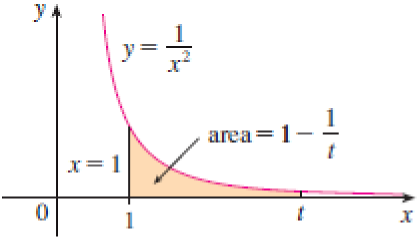
Xét miền không bị chặn S nằm dưới đường cong $y = \dfrac{1}{x^2}$, nằm trên trục hoành, và nằm bên phải đường thẳng $x = 1$. Vì S không bị chặn nên phải chăng diện tích của nó là ∞ ?

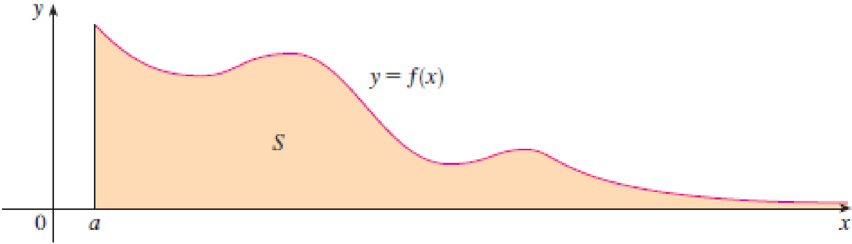


$$\text{Diện tích} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

Định nghĩa

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

nếu $\int_a^t f(x)dx$ *tồn tại với mọi* $t \geq a$, *và giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.*



Định nghĩa

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx,$$

nếu $\int_{t}^{b} f(x)dx$ *tồn tại với mọi* $t \leq b$, *và giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.*

Ví dụ

Tính tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx.$$

Định nghĩa

Các **tích phân suy rộng (improper intergral)** $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *và* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ *được gọi là* **hội tụ (convergent)** *nếu các giới hạn tương ứng tồn tại hữu hạn và được gọi là* **phân kỳ (divergent)** *trong trường hợp ngược lại.*

Định nghĩa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

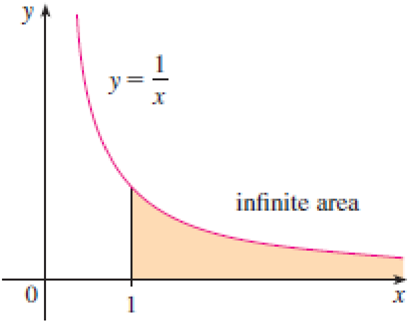
nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ *và* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *đều hội tụ.*

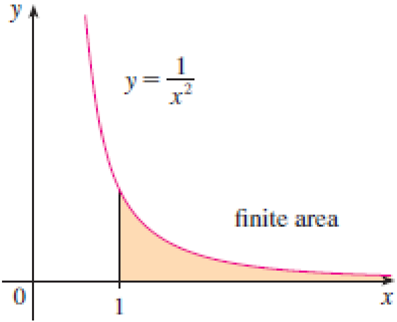
Ví dụ

Chứng minh rằng:

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ *phân kỳ;*

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *hội tụ.*





Định lý

Xét tích phân suy rộng

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

(a) *Nếu* $p > 1$, *thì tích phân hội tụ.*

(b) *Nếu* $p \leq 1$, *thì tích phân phân kỳ.*

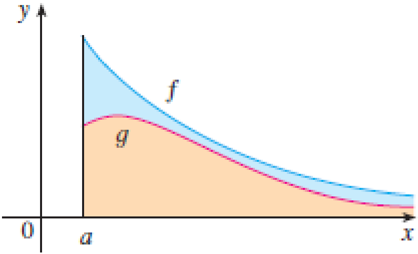
Tiêu chuẩn so sánh

Giả sử f và g là các hàm liên tục không âm trên $[a;\infty)$ và

$$f(x) \geq g(x) \text{ với mọi } x \geq a.$$

(a) Nếu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^{\infty} g(x)dx$ hội tụ.

(b) Nếu $\int_a^{\infty} g(x)dx$ phân kỳ, thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

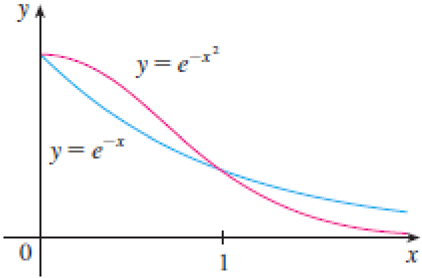


Ví dụ

Chứng minh rằng:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ *hội tụ;*

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}dx$ *phân kỳ.*



Giả sử f và g là các hàm liên tục không âm trên $[a, \infty)$ và

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(a) Nếu $0 < L < \infty$, thì $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_a^\infty g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

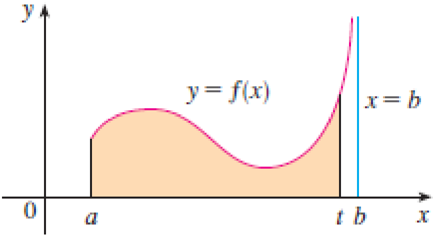
(b) Nếu $L = 0$ và $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.

(c) Nếu $L = \infty$ và $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ, thì $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ.

Định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

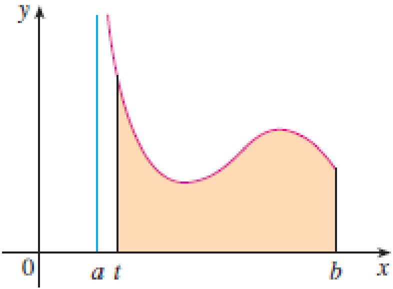
nếu f liên tục trên [a, b), gián đoạn tại b, và giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.



Định nghĩa

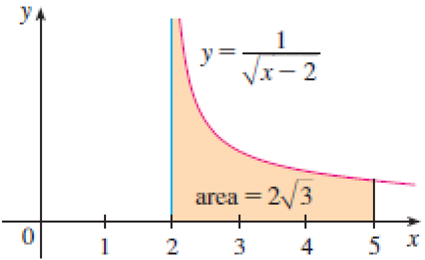
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

nếu f liên tục trên $(a, b]$, gián đoạn tại a, và giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.



Ví dụ

Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx.$



Định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

nếu f gián đoạn tại c, trong đó $a < c < b$, và cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ đều hội tụ.