Rất nhiều tài liệu xem tại https://www.facebook.com/groups/tailieubachkhoa

BÀI TẬP GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

1,Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i \\ 1+2i & 3+2i \end{pmatrix}$ Đặt z=det(A).Tính $\sqrt[5]{z}$

GIẢI

Det (A) = -5+5i= $5\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 i \sin 3\pi/4)$.

$\sqrt[5]{z} = z_k = \sqrt[10]{50}\left(\cos\frac{3\pi/4+k2\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi/4+k2\pi}{5}\right), k = 0,1,\ldots,4$.

2,Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa $2I+AX = B^T$

GIẢI

$X=A^{-1}(B^T-2I), A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Suy ra $X = \begin{pmatrix} -23 & -4 & 11 \\ -19 & -5 & 8 \\ 18 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

3,Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases}$

GIẢI

Đưa về bậc thang,giải ra được nghiệm tổng quát $(2\alpha + 3\beta, -\alpha - \beta, \alpha, \beta)$

4) Trong $\mathbb{R}^3$,cho tích vô hướng

$(x,y)=((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))= 3x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2+x_3y_3$.

Tìm độ dài của vecto u=(1,2,-1).

GIẢI

Độ dài vecto $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{3+4+4+20+1}\sqrt{32}$

5) Cho ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,biết

f(1,1,1)=(-6,-3,-3),f(1,1,0)=(6,5,2),f(1,0,1)=(6,2,5).

Tìm tất cả các veto riêng của f ứng với trị riêng λ_1 =3.

GIẢI

Có nhiều cách làm.Tìm f(1,0,0) =(18,10,10),f(0,1,0)=(-12,-5,-8),f(0,0,1)=(-12,-8,-5)

suy ra ma trận của f trong chính tắc là $A=\begin{pmatrix} 18 & -12 & -12 \\ 10 & -5 & -8 \\ 10 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

Ứng vơi vecto riêng của f ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$,giải hệ (A-3I)X=0,ta có nghiệm $X=(4\alpha,5\alpha-\beta,\beta)^T$ các veto riêng của f ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$ là $X=(4\alpha,5\alpha-\beta,\beta)$

6) Cho ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết

$f(x) = f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-3x_3,x_1+2x_2+x_3,x_1-2x_3)$.

Tìm ma trận của f trong cơ sở E={(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)}

GIẢI

f(1,1,1) =(0,4,1),suy ra $[f(1,1,1)]_E=(-1,5,-4)^T$;
f(1,1,0)=(3,3,1),suy ra $[f(1,1,0)]_E=(1,2,0)^T$;

f(1,0,0)=(2,2,1),suy ra $[f(1,0,0)]_E=(1,0,1)^T$.Ma trận cần tìm $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) Đưa dạng toàn phương $f(x_1,x_2)=5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi TRỰC GIAO .Nêu rõ phép đổi biến.

GIẢI

Ma trận của dạng toàn phương : A=$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ .Chéo hóa trực giao A=PDP^T,trong đó

D=$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, P=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Dạng chính tắc cần tìm : $f(y_1,y_2)=9y_1^2+4y_2^2$ .Phép đổi biến X=PY.

8) Cho ma trận vuông thực A cấp 3 ,$X_1,X_2,X_3 \in \mathbb{R}_3$ là 3 vecto cột ,độc lập tuyến tính .Biết $A.X_1=X_2,A.X_2=X_3,A.X_3=X_1$.Tìm tất cả trị riêng và vecto riêng của A^3

GIẢI

Ta có $A^3(X_1) = A(A(AX_1)) = A(AX_2) = AX_3 = X_1$. Suy ra X_1 là vecto riêng của A^3 ứng

Với trị riêng của $\lambda_1 = 1$.

Tương tự 2 vecto X_2, X_3 đều là vecto riêng của A^3 ứng với trị riêng $\lambda 1 = 1$.

Vì X_1, X_2, X_3 độc lập tuyến tính nên Bội hình học của $\lambda 1$ bằng 3. Suy ra A_3 chỉ có một trị riêng

và $A_3 = I$.

TÀI LIỆU CHUYÊN ĐỀ GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG

Bài 1: Tìm trị riêng và vector riêng của : $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Bài 2: Tìm giá trị riêng, vector riêng của ma trận A: $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

Bài 3: Tìm giá trị riêng, vector riêng của ma trận : $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, xem A là ma trận phức

Bài 4 a. Tìm đa thức dạng đặc trưng của ma trận : $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

b. Dựa vào đa thức đặc trưng, chứng minh A khả nghịch và chỉ ra biểu thức xác định A^{-1}

c. Tính $dct\left(A-2008I_3\right)$

d. Tìm giá trị riêng, vector riêng của A

Ví dụ. Xét ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$

Bài toán 5: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$.

a) Xác định đa thức đặc trưng của A.

b) Xác định các giá trị riêng λ_i của A.

c) Xác định chiều và một cơ sở không gian vectơ riêng $E_A(\lambda_i)$.

d) Xác định một cơ sở S của $\mathbb{R}^2$ gồm các vectơ riêng của A.

Bài toán 6: Chứng minh các tính chất đối với giá trị riêng và vector riêng:

1) Cho λ là giá trị riêng của $A\in \mathrm{M}_n(K)$, $\alpha\in K$ và $k\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng

a) $\alpha\lambda$ là giá trị riêng của ma trận αA.

b) λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k.

c) $\lambda+\alpha$ là giá trị riêng của ma trận $A+\alpha I$.

d) $f(\lambda)$ là giá trị riêng của ma trận đa thức $f(A)$.

Bài toán 7: Cho λ là giá trị riêng của $A\in\mathrm{M}_n(K)$. Chứng minh rằng

a) Nếu A khả nghịch thì λ^{-1} là giá trị riêng của ma trận A^{-1}.

b) Nếu A khả nghịch thì $\lambda+\lambda^{-1}$ là giá trị riêng của ma trận $A+A^{-1}$.

Bài toán 8: Cho A là ma trận vuông cấp n trên K và $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ là các giá trị riêng của nó. Chứng minh rằng $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

Bài toán 9: Cho A là ma trận vuông cấp n trên K và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của nó. Chứng minh rằng

a) $\det(\alpha A) = \alpha^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

b) $\det A^k = \lambda_1^k \lambda_2^k \cdots \lambda_n^k$.

c) $\det(A + \alpha I) = (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha) \cdots (\lambda_n + \alpha)$.

d) $\det f(A) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$.

Bài toán 10: Cho A là ma trận vuông cấp n trên K và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của nó. Chứng minh rằng

a) Nếu A khả nghịch thì $\det A^{-1} = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \cdots \lambda_n^{-1}$.

b) Nếu A khả nghịch thì $\det(A + A^{-1}) = (\lambda_1 + \lambda_1^{-1})(\lambda_2 + \lambda_2^{-1}) \cdots (\lambda_n + \lambda_n^{-1})$.

c) Nếu $\alpha \in K$ không là giá trị riêng của A thì ma trận $A - \alpha I$ khả nghịch và $\det(A - \alpha I)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \alpha}$.

Bài toán 11: Chéo hóa ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài toán 12: Cho ma trận A trên trường số thực $\mathbb{R}$ như sau

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Tính $\det A$

b) Tính $\det(A - \alpha I_4)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Tính $\det f(A)$ biết rằng $f(x) = x^n + x^2 - 1$.

Bài toán 13: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Chéo hóa A.

b) Đặt $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{bmatrix}$.

Tính $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$ và $S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(n)$.

Bài toán 14: Cho T là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2 + 3x_3, -4x_1 - 6x_2 - 3x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3)$

Hãy xác định các giá trị riêng và vector riêng của T.

Bài toán 15: Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $u_1=(1,1,1); u_2=(1,1,0); u_3=(1,0,0)$ và một phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ sao cho:

$f(u_1)=(4,3,2); f(u_2)=(4,3,1); f(u_3)=(1,0,0)$

a) Hãy tìm công thức của *f*, tức là tìm $f(x_1,x_2,x_3)$

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của *f* trong cơ sở này là ma trận chéo.

Bài toán 16: Hãy tìm dạng chính tắc của các $\lambda-$ ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1\\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+5\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$

Bài toán 17: Hãy tìm dạng Jordan của các ma trận sau (bằng cách đưa $A-\lambda I$ về dạng chính tắc và suy ra ma trận J đồng dạng với *A*).

a) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}9 & -6 & -2\\ 18 & -12 & -3\\ 18 & -9 & -6\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix}3 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$

BÀI GIẢI

Câu 1:

Vì mỗi hàng đều có số 0 nên với $x = (1,1,1)$ thì ta có $Ax = 0$.

Để tìm λ_1, λ_2 như sau :

$$\det(A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right] \\ = (1-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda) \end{matrix}$$

Từ đó suy ra được

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ax_1 = 0x_1 \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Ax_2 = x_2 \qquad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ax_3 = 3x_3$$

Câu 2:

Bước 1: Lập phương trình đặc trưng của ma trận A:
Giải phương trình đặc trưng, ta có: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$
Bước 2: Tìm các Vector riêng:
1. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$
Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có vector riêng $u_1 = (x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$(A - I)u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y$$

Vậy vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $u_1 = (3a; 2a) = (3; 2)a; a \neq 0$
2. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$
Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$ ta có vector riêng $u_2 = (x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - I)u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Vậy vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$ có dạng $u_1 = (b; b) = (1; 1)b; b \neq 0$

Câu 3:

Bước 1: Ta lập phương trình đặc trưng của ma trận A:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)+4=0 \Leftrightarrow -\lambda^2 = 3 \quad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm thực. Tuy nhiên do A là ma trận phức nên ta tìm GTR phức của ma trận. Giải phương trình đặc trưng, ta có: $\lambda_1 = 1+2i; \lambda_2 = 1-2i$

Bước 2: Tìm các vector riêng

1. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1+2i$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1+2i$ ta có vector riêng $u_1 = (x;y); x,y \in C$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A-(1+2i)I)u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2ix+2y=0 \\ -2x-2iy=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = ix$$

Vậy vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1+2i$ có dạng $u_1 = (a;ia) = (1;i)a; a \neq 0$

2. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1-2i$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1-2i$ ta có vector riêng $u_2 = (x;y); x,y \in C$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A-(1+2i)I)u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ix+2y=0 \\ -2x+2iy=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = iy$$

Vậy vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1-2i$ có dạng $u_2 = (ib;b) = (i;1)b; b \neq 0$

Câu 4:

a. Tương tự như các ví dụ trên, ta dễ dàng tìm được đa thức đặc trưng của ma trận A:

$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12$

b. Theo tính chất 4 ta có: $P(A) = A^3 - 3A^2 - 4A + 12I_3 = 0$

. $-A^3 + 3A^2 + 4A = 12I_3 \Rightarrow A(A^2 + 3A + 4) = 12I_3$

Đặt $B = \frac{1}{12}(-A^2 + 3A + 4)$.

Ta có: $A.B = B.A = I_3$.

Do đó: A khả nghịch và $A^{-1} = -A^2 + 3A + 4$

c. Ta có :

$\mathrm{P}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3)$ nên :

$\det(\mathrm{A} - 2008\mathrm{I}_3) = \mathrm{P}(2008) = 2006.2010.2005$

d. Từ đa thức đặc trưng ta tìm được các giá trị riêng : $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3$

Khi đó vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -2$ có dạng: $u_1 = (1;-1;4)a, a \neq 0$

Vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$ có dạng: $u_2 = (-1;0;1)\mathrm{b}, \mathrm{b} \neq 0$

Vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có dạng: $u_3 = (-1;1;1)\mathrm{c}, \mathrm{c} \neq 0$

Câu 5:

Trước hết ta tìm giá trị riêng của A. Chúng là nghiệm của đa thức đặc trưng, $\det(A-\lambda I_n)=0$

Suy ra $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Nếu ta khai triển định thức này theo cột thứ ba, ta được

$$\begin{vmatrix} 6 & -1-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sử dụng biến đổi đại số, ta có

$-\lambda(\lambda+4)(\lambda-3)=0$

dẫn đến các giá trị riêng của A là 0, -4, và 3.

Tiếp theo ta tìm các vecto riêng

1. Trường hợp $\lambda = 0$: Vecto riêng tương ứng được cho bởi hệ phương trình tuyến tính $AX=0$, điều này có thể được viết lại bởi

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 6x-y=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases}$$

Có nhiều cách để giải hệ phương trình này. Phương trình thứ ba là đồng nhất với phương trình đầu. Vì vậy, từ phương trình thứ hai, ta có $y = 6x$, phương trình đầu dẫn đến $13x + z = 0$. Nên hệ này tương đương với

$$\begin{cases} y=6x \\ z=-13x \end{cases}$$

Do đó vecto X được cho bởi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 6x \\ -13x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

Vì vậy, bất kì giá trị riêng X của A tương ứng với giá trị riêng 0 được cho bởi

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

trong đó c là một số tùy ý

2. Trường hợp $\lambda = -4$: Vecto riêng tương ứng được cho bởi hệ

$$AX=-4X \text{ or } (A+4I_3)X=0$$

điều này có thể được viết lại

$$\begin{cases} 5x+2y+z=0 \\ 6x+3y=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$$

Trong trường hợp này, ta sử dụng phương pháp khử để giải. Tước hết ta xét ma trận bổ sung $[A+4I_3 \mid 0]$ đó là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Ta sử dụng phép biến đổi trên dòng để nhận được ma trận chéo. Chuyển đổi các dòng cho nhau ta được

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tiếp, ta lấy dòng đầu nhân với 5 cộng vào dòng thứ hai, nhân với 6 rồi cộng vào dòng ba. Thu được

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

Nếu giản ước dòng thứ hai cho 8, dòng thứ ba cho 9, ta được

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Cuối cùng, trừ dòng thứ hai cho dòng thứ ba

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tiếp, ta đặt $z = c$. Từ dòng thứ hai, nhận được $y = 2z = 2c$. dòng đầu nhận được $x = -2y+3z = -c$. Do vậy

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vì thế, bất kì vectơ riêng X của A tương ứng với giá trị riêng -4 được cho bởi

$$X = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

trong đó c là một số bất kì.

3. Trường hợp $\lambda = 3$: Giải chi tiết dành cho bạn đọc. Sử dụng mô tả tương tự trên, một vectơ riêng X of A tương ứng với 3 được cho bởi

$$X = c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

trong đó c là một số bất kì.

Nhận xét. Tổng quát, giá trị riêng của ma trận là tất cả các nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng.

Câu 6:

a) Đa thức đặc trưng $P_A(t)$ của A là $P_A(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + \det A = t^2 - 8t + 15$.

b) Các giá trị riêng λ_i của A là các nghiệm của phương trình đặc trưng $f_A(t) = 0$. Phương trình đặc trưng $f_A(t) = 0$ có các nghiệm 3,5. Vậy $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 5$ là các giá trị riêng của ma trận A.

c) Với $\lambda_1 = 3$. Các véc tơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$ là các nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -2a \end{cases}$$

Vậy không gian véc tơ riêng $E_A(3)$ của A ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$ là

$$E_A(3) = \{(a,-2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,-2) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-2) \rangle$$

Vậy $\dim E_A(3) = 1$ và $\{(1,-2)\}$ là một cơ sở của $E_A(3)$.

* Với $\lambda_2 = 5$. Các véc tơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là các nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{cases}$$

Vậy không gian véc tơ riêng $E_A(5)$ của A ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ là

$$E_A(5) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,-1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle$$

Vậy $\dim E_A(5) = 1$ và $\{(1,-1)\}$ là một cơ sở của $E_A(5)$.

d) Đặt $S = \{(1,-2),(1,-1)\}$ gồm các véc tơ riêng của A độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$. Do đó S là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Câu 7:

a) Do λ là giá trị riêng của $A \in M_n(K)$ nên tồn tại $v \in K^n$ sao cho $Av = \lambda v$.

$(\alpha A)v = \alpha(Av) = \alpha\lambda v = (\alpha\lambda)v$.

Vậy $\alpha\lambda$ là giá trị riêng của ma trận αA.

b) Ta có $A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1}(v) = \ldots = \lambda^k v$.

Vậy λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k.

c) Ta có $(A + \alpha I)v = Av + \alpha I v = \lambda v + \alpha v = (\lambda + \alpha)v$

Vậy $\lambda + \alpha$ là giá trị riêng của ma trận $A + \alpha I$.

d) Giả sử $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i \in K[t]$. Khi đó, $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i$, $f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i$

Và $f(A)v = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^i \right) v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(A^i v \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\lambda^i v \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i \right) v = f(\lambda) v$

Vậy $f(\lambda)$ là giá trị riêng của $f(A)$.

Câu 8:

a) Vì A khả nghịch nên $\lambda \neq 0$. Ta có,

$A^{-1}v = \lambda^{-1}A^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}A^{-1}Av = \lambda^{-1}v$

Vậy Nếu A khả nghịch thì λ^{-1} là giá trị riêng của ma trận A^{-1}.

b) Vì A khả nghịch nên $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.

Khi đó, ta có $(A + A^{-1})v = Av + A^{-1}v = \lambda v + \lambda^{-1}v = (\lambda + \lambda^{-1})v$

Nếu A khả nghịch thì $\lambda + \lambda^{-1}$ là giá trị riêng của ma trận $A + A^{-1}$.

Sinh viên tìm các ví dụ minh họa cho những kết quả trên.

Câu 9:

Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A nên $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các nghiệm của đa thức đặc trưng $f_A(t)$. Do đó,

$f_A(t) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n)$.

Lấy $t = 0$, ta có:

$\det A = f_A(0) = (-1)^n (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2)\ldots(0 - \lambda_n) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$

Câu 10:

a) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận αA. Do đó $\det(\alpha A) = (\alpha\lambda_1)(\alpha\lambda_2)\cdots(\alpha\lambda_n) = \alpha^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

Sinh viên cho ví dụ minh họa.

b) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ là các giá trị riêng của ma trận A^k. Do đó $\det A^k = \lambda_1^k\lambda_2^k\cdots\lambda_n^k$.

c) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \ldots \lambda_n + \alpha$ là các giá trị riêng của ma trận $A + \alpha I$. Do đó $\det(A + \alpha I) = (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha)\cdots(\lambda_n + \alpha)$.

d) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$. Do đó $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

Câu 11:

a) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ là các giá trị riêng của ma trận A^{-1}. Do đó $\det A^{-1} = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_n^{-1}$.

b) Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $\lambda_1 + \lambda_1^{-1}, \lambda_2 + \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n + \lambda_n^{-1}$ là các giá trị riêng của ma trận $A + A^{-1}$. Do đó

$$\det(A + A^{-1}) = (\lambda_1 + \lambda_1^{-1})(\lambda_2 + \lambda_2^{-1})\cdots(\lambda_n + \lambda_n^{-1})$$

c) Do α không là giá trị riêng của A nên định thức của ma trận $A - \lambda I$ khác 0. Vậy $A - \alpha I$ khả nghịch. Theo giả thiết $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A nên $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots, \lambda_n - \alpha$ là các giá trị riêng của ma trận $A - \alpha I$ và do đó $(\lambda_1 - \alpha)^{-1}, (\lambda_2 - \alpha)^{-1}, \ldots, (\lambda_n - \alpha)^{-1}$ là các giá trị riêng của $(A - \alpha I)^{-1}$.

Vậy $\det(A - \alpha I)^{-1} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \alpha)^{-1} = \prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\lambda_i - \alpha}$.

Câu 12:

Đa thức đặc trưng của ma trận A là: $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2$

$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1, \lambda=2$

Vậy ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda=-1, \lambda=2$.

Ứng với $\lambda=-1$, giải hệ pt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số] $\begin{cases}x_1=-t_2-t_3\\ x_2=t_2\in\mathbb{R}\\ x_3=t_3\in\mathbb{R}\end{cases}$

Không gian con riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=-1$ là

$E(-1)=\{(-t_2-t_3,t_2,t_3)\mid t_2,t_3\in\mathbb{R}\}$

Cơ sở của $E(-1)$ gồm hai vector $\alpha_1=(-1,1,0); \alpha_2=(-1,0,1)$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda=2$, để tìm vector riêng ta giải hệ pt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\1&-2&1&0\\-2&1&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&-3&3&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số

$\begin{cases}x_1=t\\ x_2=t\\ x_3=t\in\mathbb{R}\end{cases}$

Do đó, không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda=2$ là

$E(2)=\{(t,t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

Cơ sở của $E(2)$ gồm 1 vector $\alpha_3=(1,1,1)$.

Nhận xét: Các vector $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ độc lập tuyến tính nên ma trận A chéo hóa được. Khi đó, tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP=D$ với D là ma trận chéo.

$$P=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \text{ và } D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Câu 13:

a) Đa thức đặc trưng của A là : $(t-5)^2(t-6)(t-7)$. Giá trị riêng là 5, 6, 7

det$A$ = 5.5.6.7 = 1050.

b) Đa thức $\det(A-\alpha I_4)=(5-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)(7-\alpha)=(5-\alpha)^2(6-\alpha)(7-\alpha)$

c) $\det f(A)=f(5)f(5)f(6)f(7)=(5^n+24)^2(6^n+35)(7^n+48)$

Câu 14:

Đặt $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&1&2\end{bmatrix}$. Tính A^n bằng cách chéo hoá ma trận A.

* Đa thức đặc trưng $f_A(t)$ của ma trận A là $f_A(t)=(t-2)(3-t)$. Giải phương trình đặc trưng $f_A(t)=0$, ta nhận được các nghiệm phân biệt 2,3. Do đó các giá trị riêng phân biệt của ma trận A là $t=2,3$

* Với $t=2$, ta có $E_A(2)=\langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$ và cơ sở $S_1=\{v_1=(1,0,0),v_2=(0,0,1)\}$.

Với $t=3$, ta có $E_A(1)=\langle(0,1,1)\rangle$ và cơ sở $S_2=\{v_3=(0,1,1)\}$.

* Do $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{v_1,v_2,v_3\}$ nên ma trận A chéo hoá được và $D=P^{-1}AP$, trong đó ma trận khả nghịch P với các cột là các véc tơ riêng v_1,v_2,v_3 và ma trận đường chéo D với các phần tử trên đường chéo chính 2,2,3 tương ứng với các véc tơ riêng v_1,v_2,v_3.

$$P=[v_1\ \ v_2\ \ v_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \text{ và } D=\operatorname{diag}(2,2,3)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&3^n-2^n&2^n\end{bmatrix}$$

a) Ta có $a_{22}(n)=3^n, a_{32}(n)=3^n-2^n$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-2^n}=1$.

b) Ta có $S=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ij}(n)=2^n+3^n+3^n-2^n+2^n=2^n+2\cdot 3^n$.

Câu 15:

Ma trận của toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là $f_A(t) = -t^3 - 3t^2 + 4 = -(t-1)(t+2)^2$.

Giải phương trình đặc trưng $f_A(t) = 0$ ta được các nghiệm là $t = 1$ và $t = 2$. Vậy ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1; \lambda = -2$. Khi tìm cơ sở của các không gian riêng $E_A(1)$ và $E_A(-1)$ ta được:

Cơ sở của $E_A(1)$ là $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ và cơ sở của $E_A(-2)$ là $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vậy f không chéo hóa được.

<u>Chú ý:</u>

Để nghiên cứu một phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$, ta quy về việc nghiên cứu ma trận của f. Từ đó dẫn đến việc cần tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo. Để tìm cơ sở này ta thực hiện như sau:

- Đầu tiên ta tìm các vector riêng độc lập tuyến tính của f.
- Nếu f có ít hơn n vector riêng độc lập tuyến tính (chú ý dim $V = n$) thì không có cơ sở nào của f để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo.
- Nếu f có đúng n vector riêng độc lập tuyến tính thì n vector riêng đó làm thành cơ sở B của V mà ma trận A của f trong cơ sở B đó là ma trận chéo. Cụ thể:

$A_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$ với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng ứng với các vector riêng α_i.

(Các λ_i có thể trùng nhau).

Câu 16:

a) Gọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, giả sử $x = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$

Xét hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 - x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \end{array}\right]$$

Suy ra, $\begin{cases} a_1 = x_3 \\ a_2 = x_2 - x_3 \\ a_3 = x_1 - x_2 \end{cases}$

Ta có:

$$f(x) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + a_3 f(u_3) = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (x_1 + 3x_2, 3x_2, x_2 + x_3)$$

b) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Xét $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$

Suy ra $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3$

Do đó, f có hai giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 3$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, xét hệ pt:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số: $\begin{cases} x_1 = a \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Khi đó, f có hai vector riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (1, 0, 0); \alpha_2 = (0, 0, 1)$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, xét hệ pt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ pt có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số: $\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là $\alpha_3 = (3, 2, 1)$

Do f có 3 vector riêng độc lập tuyến tính nên f chéo hóa được và cơ sở $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là cơ sở mà ma trận của f đối với cơ sở này có dạng chéo là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Câu 17:

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa về dạng chính tắc.

a) Ta có:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - \lambda d_1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_2 - \lambda c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \to -d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

Câu 18:

a) Xét ma trận $A-\lambda I$

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 0\\ 4-\lambda & -4 & 0\\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 0\\ 0 & -4+\lambda(4-\lambda) & 0\\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0\\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 0\\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\\ 0 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 0\\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-2)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

Dạng Jordan của ma trận A là:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$