Chương 1:

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

HÀM NHIỀU BIẾN

Nội dung

1. Đạo hàm riêng cấp 1 của z = f(x,y) và ứng dụng
2. Đạo hàm riêng cấp cao của z = f(x,y)
3. Sự khả vi và vi phân.

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

Đạo hàm riêng cấp 1 của $f(x, y)$ theo biến x tại (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

(Cố định y_0, biểu thức là hàm 1 biến theo x, tính đạo hàm của hàm này tại x_0)

Đạo hàm riêng cấp 1 của f theo biến y tại (x_0, y_0)

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- *Ví dụ:*

a) Cho hàm $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tìm $f'_x(2,1)$ và $f'_y(2,1)$

b) Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Tính $f'_x(0,1)$, $f'_x(0,0)$

c) Cho hàm $f(x,y) = 2x^2y^3 - 3xy^2 + 2x^2 + 3y^2 + 1$. Tính f'_x, f'_y

d) Cho hàm $f(x,y) = x\cos(xy^2)$

e) Cho hàm $f(x,y,z) = x + ye^{xz}$. Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,-1,2)$

3/ Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

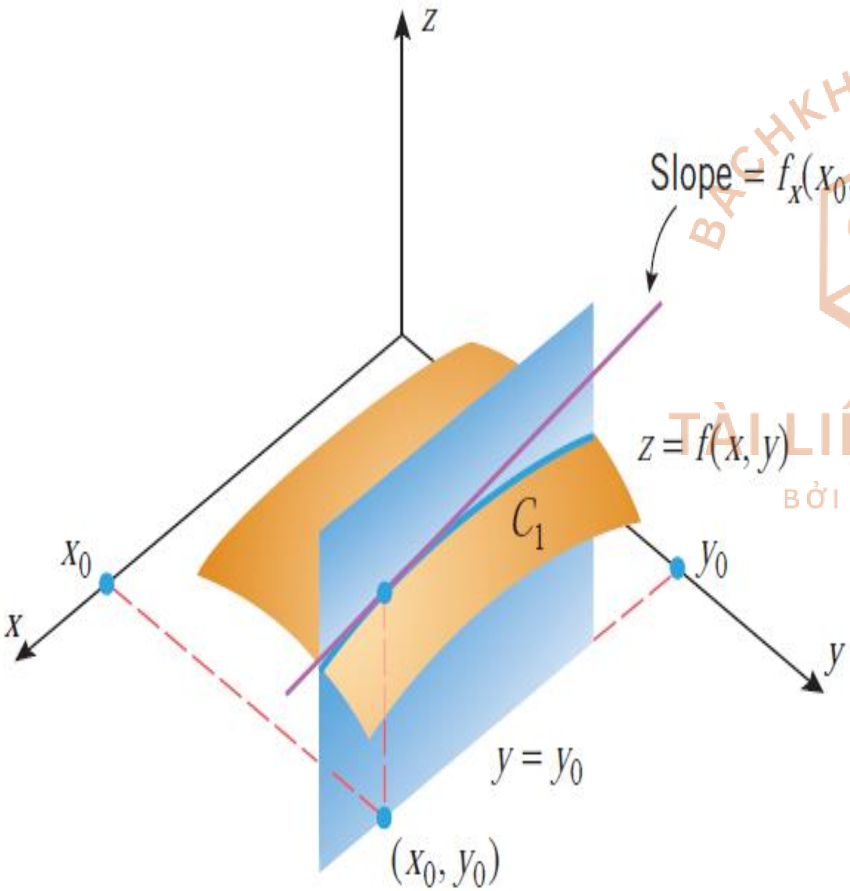
b/ Tính $f'_x(0,0)$

4/ Cho $f(x,y)=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tính $f'_x(0,0)$

5/ Cho $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$ tính $f'_x(0,0)$

Ý nghĩa của đhr cấp 1

Cho mặt cong S: z = f(x, y), xét $f'_x(x_0, y_0)$



Xem phần mặt cong S gần $P(x_0, y_0, z_0)$

Mphẳng y = y_0 cắt S theo gt C_1 đi qua P.

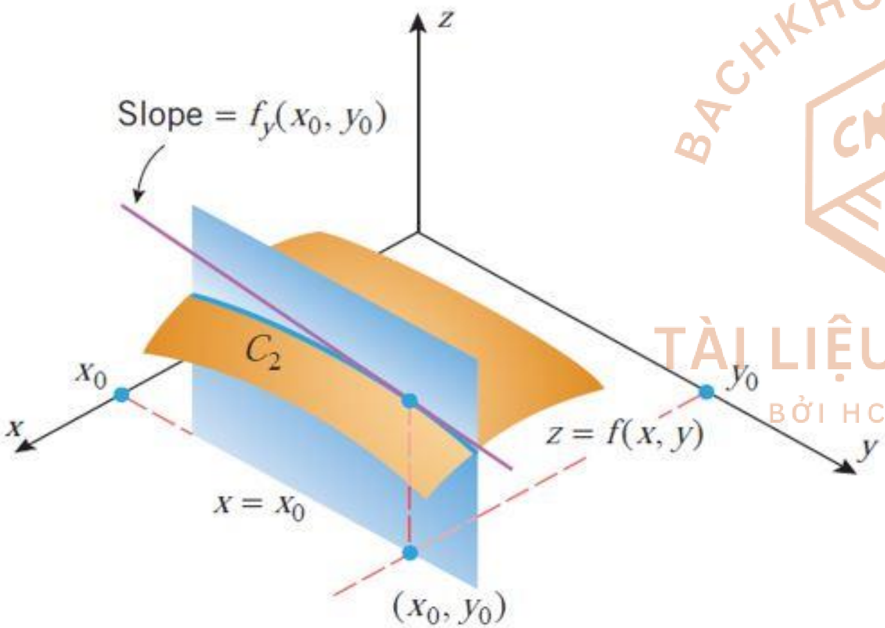
$$C_1 : z = g(x) = f(x, y_0)$$

T_1 là tiếp tuyến của C_1 tại P.

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

Ý nghĩa của đhr cấp 1

Cho mặt cong S: z = f(x, y), xét $f'_y(x_0, y_0)$



Xem phần mặt cong S gần $P(x_0, y_0, z_0)$

Mphẳng x = x_0 cắt S theo gt C_2 đi qua P.

$$C_2 : z = h(y) = f(x_0, y)$$

T_2 là tiếp tuyến của C_2 tại P.

$$h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$$

Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

$f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $z = f(x,y)$ và mặt phẳng $y = y_0$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$

$f'_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $z = f(x,y)$ và mặt phẳng $x = x_0$ tại điểm có tung độ $y = y_0$

Ví dụ về ý nghĩa hình học

Cho mặt cong: $S : f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 1$

Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong S và mặt phẳng $y = 3$ tại điểm P(–1,3,27). Hãy cho biết khi (x, y) đi qua M(–1,3) theo hướng trục Ox thì độ cao của mặt cong đang tăng hay giảm.

$k = f'_x(-1,3) = -8 < 0$ $\Rightarrow$ Độ cao đang giảm

BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Nhiệt độ *T* tại một vị trí trên bề mặt trái đất phụ thuộc vào kinh độ x, vĩ độ y và thời điểm *t*, $T = T(x,y,t)$. Tại tọa độ 158^0 Tây, 21^0 Bắc , vào lúc 9 giờ sáng, gió thổi hơi nóng đến vùng đông bắc nên vùng đông và bắc mát hơn, vùng tây và nam nóng hơn. Hãy cho biết T'_x, T'_y, T'_t tại tọa độ trên vào lúc 9 giờ sáng mang giá trị âm hay dương.

Từ 158^0 tây, theo chiều tăng của *x* là sẽ đi tiếp về phía tây, vậy nhiệt độ sẽ cao hơn (ấm hơn). Vậy $T'_x\left(158,21,9\right) > 0$

BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Chỉ số nhiệt I là nhiệt độ mà cơ thể cảm nhận được.

$I = f(T, h)$, trong đó T là nhiệt độ không khí (^{0}C), h là độ ẩm không khí (%), I lấy đơn vị là ^{0}C. Hãy cho biết các giá trị $f'_T(40,30) = 2$, $f'_h(40,30) = 0.75$ nói lên điều gì.

Từ mốc $(T,h) = (40,30)$, T tăng thêm 1^{0}C, chỉ số nhiệt tăng thêm 2^{0}C.

Các ví dụ về cách tính.

1/ Cho f(x,y) = $3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(1,2),\ f'_y(1,2)$

$\boxed{f'_x(1,2):}$ cố định $y_0 = 2$, ta có hàm 1 biến

$$f(x,2) = 6x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow f'_x(1,2) = (6x^2 + 4x)'\big|_{x=1} = 12x + 4\big|_{x=1} = 16$$

$\boxed{f(x,y) = 3x^2y + xy^2}$

$\boxed{f'_y(1,2)}$ cố định $x_0 = 1$, ta có hàm 1 biến

$$f(1, y) = 3y + y^2$$

$$\Rightarrow f'_y(1,2) = (3y + y^2)'|_{y=2} = (3 + 2y)|_{y=2} = 7$$

2/ $f(x,y) = 3x^2y + xy^2$

Tính $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ với mọi $(x, y) \in R_2$

$\boxed{f'_x(x,y)}$ Xem y là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo x

$$f'_x(x,y) = 6xy + y^2, \forall (x,y)$$

Áp dụng tính: $f'_x(1,2) = (6xy + y^2)|_{x=1,y=2} = 16$

(Đây là cách thường dùng để tính đạo hàm tại 1 điểm)

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2$$

$\boxed{f'_y(x,y)}$ Xem x là hằng, tính đạo hàm f(x, y) theo y

$$f'_y(x,y) = 3x^2 + x2y, \forall(x,y)$$

Áp dụng tính:

$$f'_x(1,2) = \quad (3x^2 + 2xy)|_{x=1,y=2} = 7$$

2/ Tính $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ với f(x, y) = x^y

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = 1 \times 1^{1-1} = 1;$$

$$f'_y(x,y) = x^y \ln x, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'_y(1,1) = 1^1 \ln 1 = 0$$

3/ Cho $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a/ Tính $f'_x(0,1)$

$$f(x,1)=\frac{x}{x^2+1}=g(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'_x(0,1)=1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b/ Tính $f'_x(0,0)$

$$f(x,0)=0=g(x)\Rightarrow g'(x)=0$$

$$\Rightarrow f'_x(0,0)=0$$

4/ Cho $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tính $f'_x(x,y)$

Hàm f xác định tại, mọi (x,y)

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad ,\forall (x,y) \neq (0,0)$$

Công thức trên không đúng cho (x, y) = (0, 0)

$$f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

• Tại (0, 0): tính bằng định nghĩa

$$f(x,0) = e^{-|x|} = g(x)$$

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-|x|}{x} \quad \Rightarrow \nexists$$

f không có đạo hàm theo x tại (0, 0)

($f'_x(0,0)$ không tồn tại) .

Ví dụ cho hàm 3 biến

(Tương tự hàm 2 biến)

Cho $f(x,y,z) = x + ye^{xz}$

Tính f'_x, f'_y, f'_z tại $(0,-1,2)$

$$f'_x = 1 + yze^{xz} \quad \Rightarrow f'_x(0,-1,2) = 1 - 2 = -1$$

$$f'_y = e^{xz}$$

$$f'_z = xye^{xz}$$

BT1: Xét hàm hai biến về thời tiết đã học ở phần trước $W = f(T, v)$

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

a) Ước tính các $f'_T(-15; 30)$, $f'_v(-15; 30)$. Nêu ý nghĩa của các giá trị này.

b) Tổng quát, bạn có thể nói gì về dấu của f'_T và f'_v

Bài 2: Chiều cao h của sóng trong đại dương phụ thuộc vào vận tốc v của gió và khoảng thời gian t gió thổi tại vận tốc đó. Các giá trị của hàm $h = f(v,t)$ được ghi bằng feet trong bảng số liệu sau:

Duration (hours)

Wind speed (knots) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

a) Ý nghĩa của các đhr

b) Ước tính các các giá trị $f'_v(40,15)$ và $f'_t(40,15)$

Bài tập 3: Nhiệt độ tại điểm (x, y) trên một đĩa kim loại phẳng được cho là

$$T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2),$$

trong đó T đơn vị là ^{o} C, x, y đơn vị là mét. Tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ theo khoảng cách tại điểm (2,1)

a) Theo hướng dương Ox

b) Theo hướng dương y

Bài 4: Giao của mặt ellipsoid $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ và mặt phẳng $y = 2$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm (1,2,2)

Bài 5: Chỉ số lạnh do gió được mô hình hóa bằng hàm số $W = f(T, v)$. Trong đó T là nhiệt độ (^{o} C) và v là vận tốc gió (km/h)

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

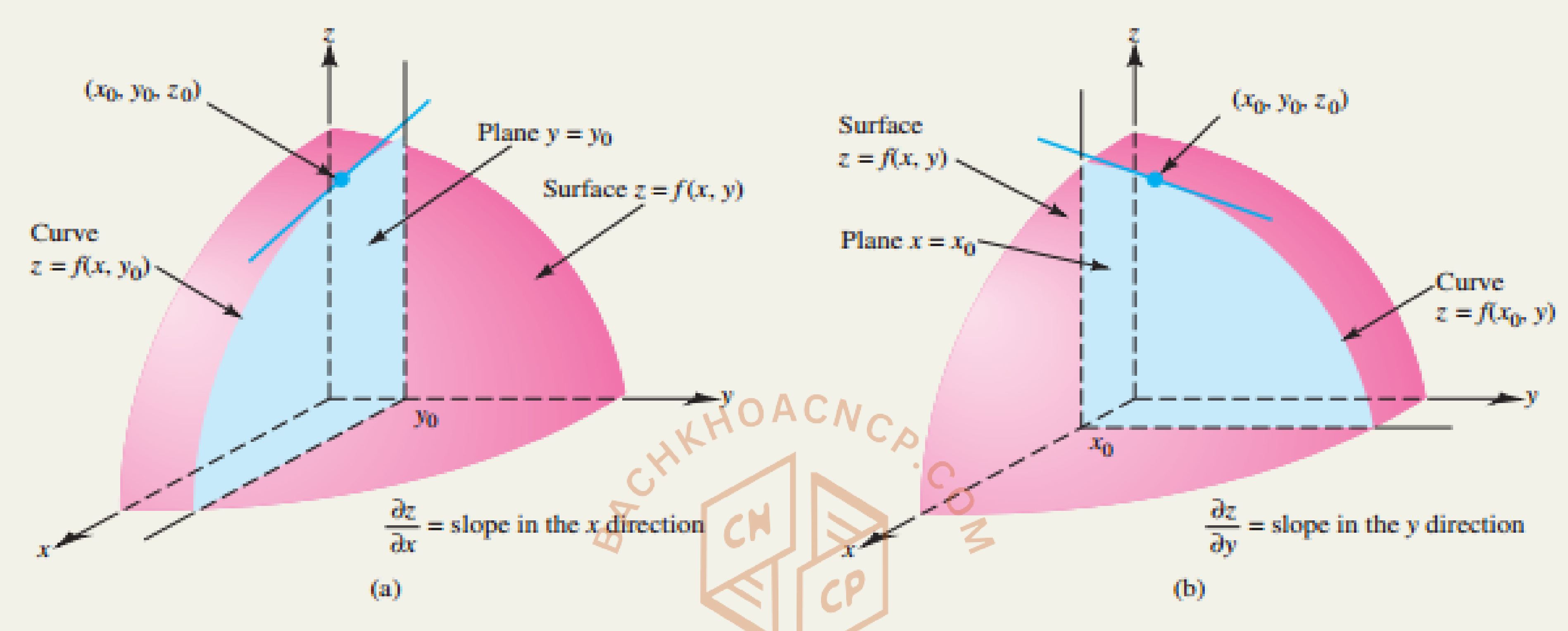
Khi $T = -15^o$ C và $v = 30km/h$, bạn dự tính nhiệt độ biểu kiến giảm bao nhiêu nếu nhiệt độ thật giảm 1^{o}C? Điều gì xảy ra nếu tốc độ gió tăng 1km/h

TIẾP DIỆN – PHÁP TUYẾN CỦA MẶT CONG

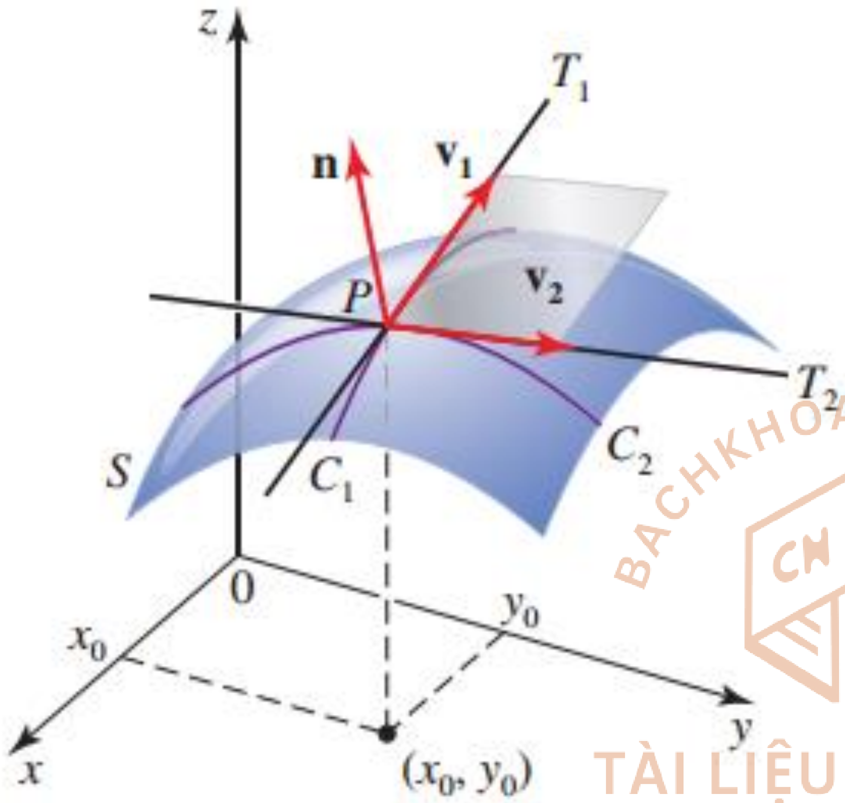
Cho $z = f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$.

a. Tính $f'_x(1; 2)$, biểu diễn hình học đạo hàm riêng này.

b. Tính $f'_y(1; 2)$, biểu diễn hình học đạo hàm riêng này.



z
(x_0, y_0, z_0)
Plane $y = y_0$
Surface $z = f(x, y)$
Curve
$z = f(x, y_0)$
y
y_0
x
$\frac{\partial z}{\partial x}$ = slope in the x direction
(a)
z
Surface
$z = f(x, y)$
(x_0, y_0, z_0)
Plane $x = x_0$
Curve
$z = f(x_0, y)$
y
x_0
x
$\frac{\partial z}{\partial y}$ = slope in the y direction
(b)


z
T_1
n
$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$
P
T_2
C_2
S
C_1
0
y_0
x_0
y
x
(x_0, y_0)

Nhắc lại

$$S: z = f(x, y), z_0 = f(x_0, y_0)$$

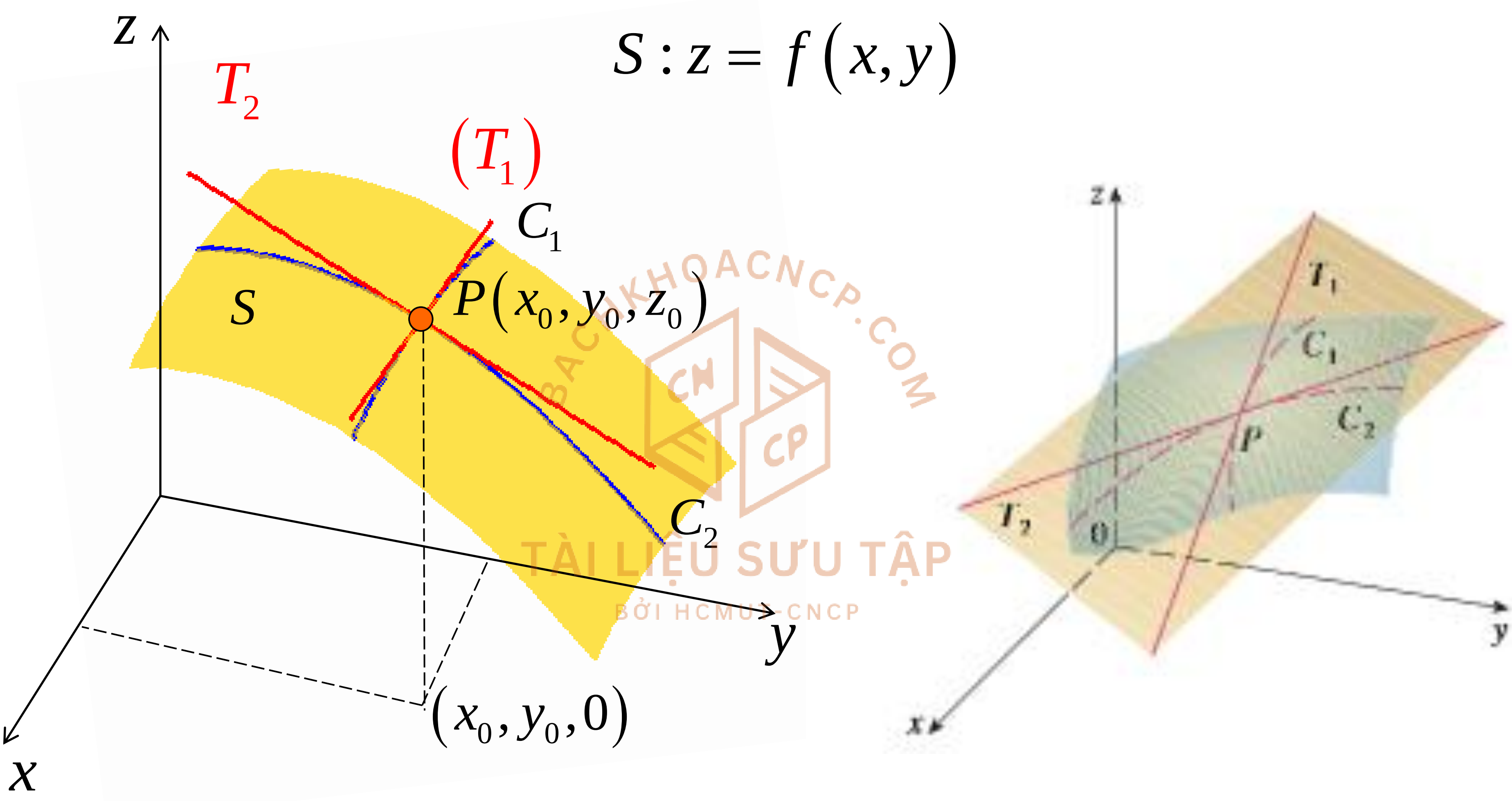
Nếu gọi C_1 là giao tuyến của S và mặt phẳng $y = y_0$, hệ số góc tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $P(x_0,y_0,z_0)$ là?

$$k_1 = f'_x(x_0, y_0)$$

Nếu gọi C_2 là giao tuyến của S và mặt phẳng $x = x_0$, hệ số góc tiếp tuyến T_2 của C_2 tại $P(x_0,y_0,z_0)$ là

$$k_2 = f'_y(x_0, y_0)$$

TIẾP DIỆN – PHÁP TUYẾN CỦA MẶT CONG



Tiếp diện của S tại P là mặt phẳng chứa các tiếp tuyến T_1 và T_2.

Tiếp diện – Pháp tuyến của mặt cong

Tiếp diện – Pháp tuyến của mặt cong

$$S : z = f\left(x, y\right), P\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) \in S$$

Giả sử tiếp diện (*p*) của *S* tại *P* có dạng

$$z = f\left(x_0, y_0\right) + a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right)$$

$T_1 \subset (p)$ nên $(p) \cap T_1 = T_1 \Rightarrow$ pt của T_1 là

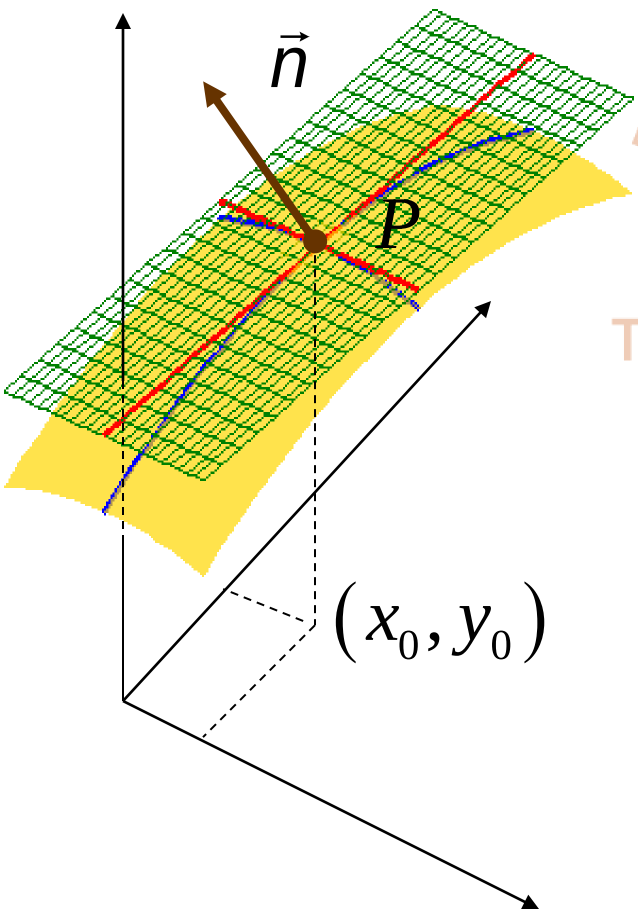
$$T_1 : z = f\left(x_0, y_0\right) + a\left(x - x_0\right)$$

Hệ số góc của T_1 là $f'_x(x_0, y_0)$ $\Rightarrow a = f'_x(x_0, y_0)$

TIẾP DIỆN – PHÁP TUYẾN CỦA MẶT CONG

Phương trình tiếp diện của $S : z = f(x, y)$ tại $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)}$$



Pháp vector của S tại P là pvt của tiếp diện tại P.

$$\vec{n}(P) = \left(f_x', f_y', -1 \right)$$

Pt pháp tuyến của S tại P :

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Ví dụ

1/ Tìm phương trình tiếp diện tại $P(1,0)$

$$S: z = f(x,y) = 2 - \frac{x^3}{2} - 2y^2$$

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f'_x(1,0) = -\frac{3}{2},\ f'_y(1,0) = -4$$

$$(p): z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(x-1) + 0(y-0)$$

Ví dụ

2/ Tìm phương trình tiếp diện tại $M\left(\sqrt{2},1,1\right)$ của mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2=4$$

Ví dụ

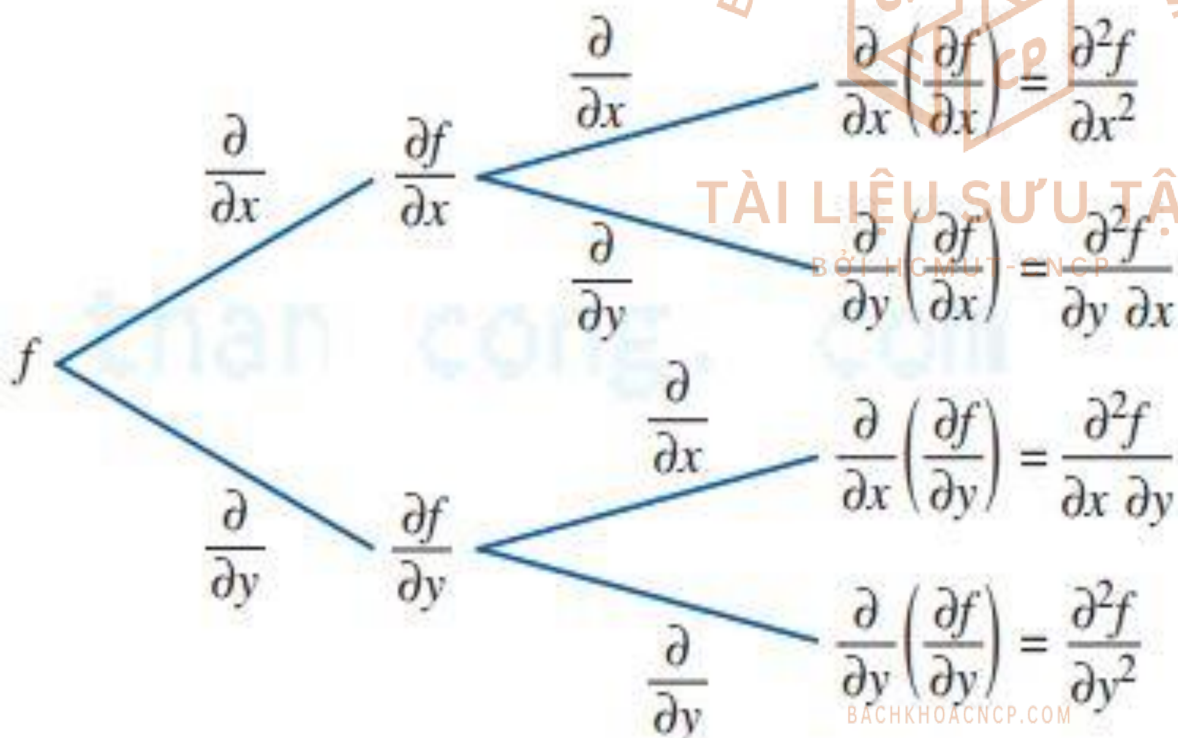
Tìm điểm $A(x, y, z)$ trên mặt Paraboloid $(P): y = x^2 + z^2$ mà tại đó mặt phẳng tiếp diện (P) song song với mặt phẳng $x + 2y + 3z = 0$.

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

Xét hàm 2 biến f(x,y)

f'_x, f'_y cũng là các hàm 2 biến

Đạo hàm riêng cấp 2 của f là các đhr cấp 1(nếu có) của f'_x, f'_y



$$f''_{xx} = f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{yy} = f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

VÍ DỤ

$$f(x,y) = x^2 + xy + \cos(y - x)$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của f

VÍ DỤ

a. Cho hàm số $f(x,y) = e^{-x}cosy - e^{-y}\cos x$. Tính $f''_{xx}(0,\pi) + f''_{yx}(0,\pi)$

b. Cho hàm số $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.e^{\sin(x^2y)}$. Tính $f''_{xx}(1,0)$

Tổng quát thì các đạo hàm hỗn hợp không bằng nhau

$$f''_{xy} \neq f''_{yx}$$

Định lý Schwartz: *nếu f(x, y) và các đạo hàm riêng* $f'_x, f'_y,$ f''_{xy}, f''_{yx} *liên tục trong miền mở chứa* (x_0, y_0)

thì $$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

•Đối với các hàm sơ cấp thường gặp, định lý Schwartz luôn luôn đúng tại các điểm mà đạo hàm tồn tại.

•Định lý Schwartz cũng đúng cho các đạo hàm từ cấp 3 trở lên.

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$$

Cách viết đạo hàm cấp cao và cách tính:

$$f^{(m+n)}_{x^m y^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)$$

Lưu ý: đối với các hàm sơ cấp tính theo thứ tự nào cũng được.

Ví dụ

1/ Cho $f(x,y) = e^{xy}$ tính f'''_{xyy}, 2/ Cho $f(x,y)=\ln(2x+3y)$ Tính $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(-1,1)$

Cho $f(x,y) = (x-y)\ln(1+x+y)$. Tính $f'''_{xxy}(0;0)$.

ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

VECTOR GRADIENT

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa:

Cho hàm f xác định trong lân cận M_0 và một hướng cho bởi vector đơn vị $\vec{e}$.

Đạo hàm của f theo hướng $\vec{e}$ tại M_0:

$$D_{\vec{e}} f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{e}) - f(M_0)}{t}$$

$\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}}$ chỉ tốc độ thay đổi của f theo hướng $\vec{e}$

Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Xét đường cong $L : z(t) = f\left(M_0 + t\vec{e}\right)$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(M_0 + t.\vec{e}\right) - f\left(M_0\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{z(t) - z(0)}{t} = z'(0)$$

là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong L tại M_0.

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm theo hướng (-1,2) tại điểm $M_0(-2,1)$ của hàm số $f(x,y) = xy^2$

Vector Gradient

Gọi $\vec{i}, \vec{j}\left(, \vec{k}\right)$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ, f có các đạo hàm riêng tại $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Gradient của *f* tại M_0 là:

$$\nabla f\left(M_0\right) = gradf\left(M_0\right) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0)\right)$$

$M_0 \in R_3, f\left(x, y, z\right)$

$$\nabla f\left(M_0\right) = gradf\left(M_0\right) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)$$

Định lý (cách tính đạo hàm theo hướng)

Nếu hàm *f* khả vi tại M_0, $\vec{e} = (e_1, e_2)$ là vector đơn vị, khi đó đạo hàm theo hướng $\vec{e}$ tại M_0 tồn tại và:

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \nabla f(M_0).\vec{e}}$$

$\vec{a}$ là vector tùy ý:

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(M_0).\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}}$$

Hàm 3 biến cũng được tính tương tự.

Chứng minh định lý

$$z(t) = f(M_0 + t\vec{e}) = f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$$

$$(x, y)$$
$$= (x_0 + te_1, y_0 + te_2)$$

$$z'(t) = f'_x(x,y)x'(t) + f'_y(x,y)y'(t)$$

$$= f'_x(x,y)e_1 + f'_y(x,y)e_2$$

$$z'(0) = f'_x(x_0,y_0)e_1 + f'_y(x_0,y_0)e_2$$

$$= \langle \nabla f(x_0,y_0), \vec{e} \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), \vec{e} \rangle$$

Lưu ý

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \left\|\vec{e}\right\| . \cos\varphi = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \cos\varphi$$

φ là góc giữa $\nabla f(M_0)$ & $\vec{e}$

$\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

Hướng của vector gradient là hướng mà hàm f tăng nhanh nhất, gtln của đh theo hướng là $\left\|\nabla f(M_0)\right\|$

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm theo hướng (-1,2) tại điểm (-2,1) của hàm số $f(x,y) = xy^2$

Vector đơn vị theo hướng dương của $\vec{a} = (-1,2)$

$$\vec{e} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial \vec{e}} = \nabla f(-2,1).\vec{e}$$

$$= (9,-12)\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}} = -\frac{34}{\sqrt{5}}$$

Ví dụ

2. Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{a} = (1,1,-1)$ tại $M = (2,1,2)$

của $f(x,y,z) = x^2 + 2xz - 3y^2z^3$

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(M).\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$= (8,-48,-32).\frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} = \frac{-8}{\sqrt{3}}$$

Ví dụ

3/ Cho $f(x,y) = x^2 + 2xy^3 - 7y$, $M(-2,3)$. Đi theo hướng nào dưới khi (x, y) qua M thì f tăng nhanh nhất.

$\vec{a} = (-2,3)$ $\quad\vec{b} = (10,-23)$

$\vec{c} = (-12,7)$ $\quad\vec{d} = (17,22)$

BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Một ngọn đồi có hình dạng bề mặt mô tả bởi pt

$$z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$$

Trong đó *z* là chiều cao và *x*, *y*, *z* tính bằng mét. Giả sử phía dương O*x* là hướng đông, phía dương O*y* là hướng bắc.

Một người đang đứng ở tọa độ (60,40,966), hỏi $M(60,40)$

1. Nếu đi theo hướng nam là đi lên hay đi xuống. $\vec{a} = (0,-1)$
2. Đi theo hướng tây bắc là đi lên hay đi xuống. $\vec{b} = (-1,1)$
3. Đi theo hướng nào chiều cao bề mặt ngọn đồi tăng nhanh nhất, độ dốc theo hướng này là bao nhiêu? $\nabla z(60,40)$

Ví dụ

1/ Tìm $\quad grad\, f(2,-3,0),\ \dfrac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}}$

Với: $\quad f(x,y,z) = x.e^{yz},\ \vec{a} = (2,-3,0)$

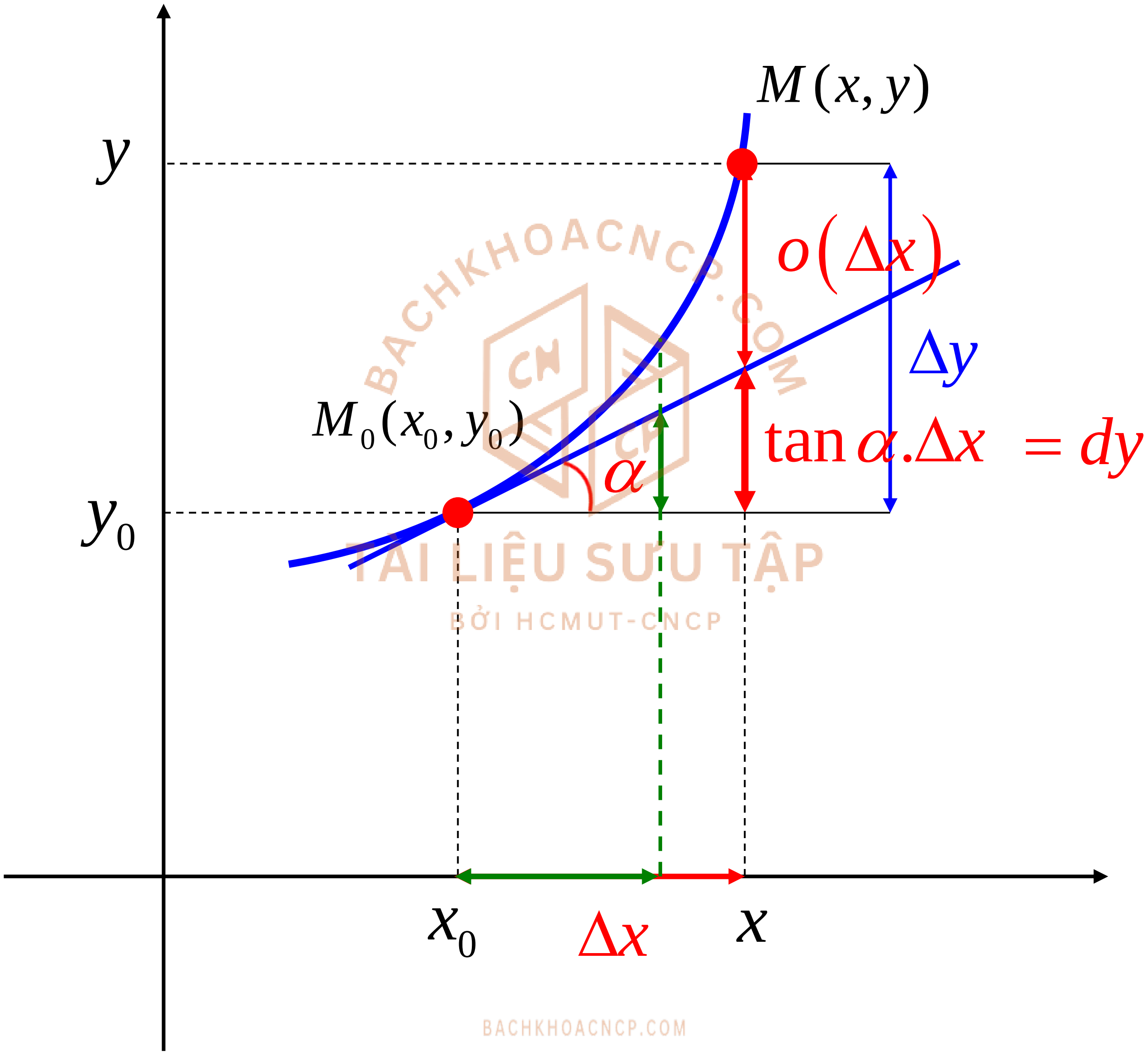
$$\nabla f(x,y,z) = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) = \left(e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}\right)$$

$$\nabla f(2,-3,0) = (1,0,-6)$$

$$\frac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(2,-3,0).\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (1,0,-6).\frac{(2,-3,0)}{\sqrt{13}}$$

VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Nhắc lại



$M(x,y)$
y
$o(\Delta x)$
Δy
$M_0(x_0, y_0)$
α
$\tan\alpha.\Delta x = dy$
y_0
x_0
Δx
x

SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN (CẤP 1)

f khả vi tại (x_0, y_0) nếu tồn tại 2 hằng số A, B sao cho:

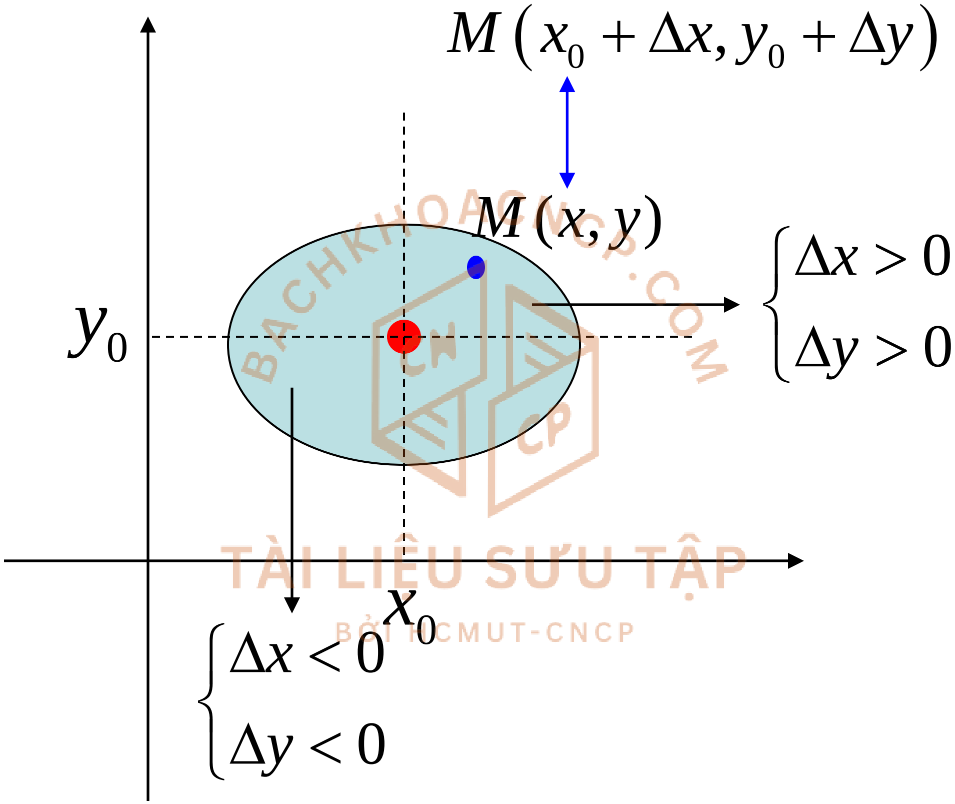
$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$$

$$\left(\Delta f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\right)$$

$$o(\rho) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$ là VCB bậc cao hơn ρ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$

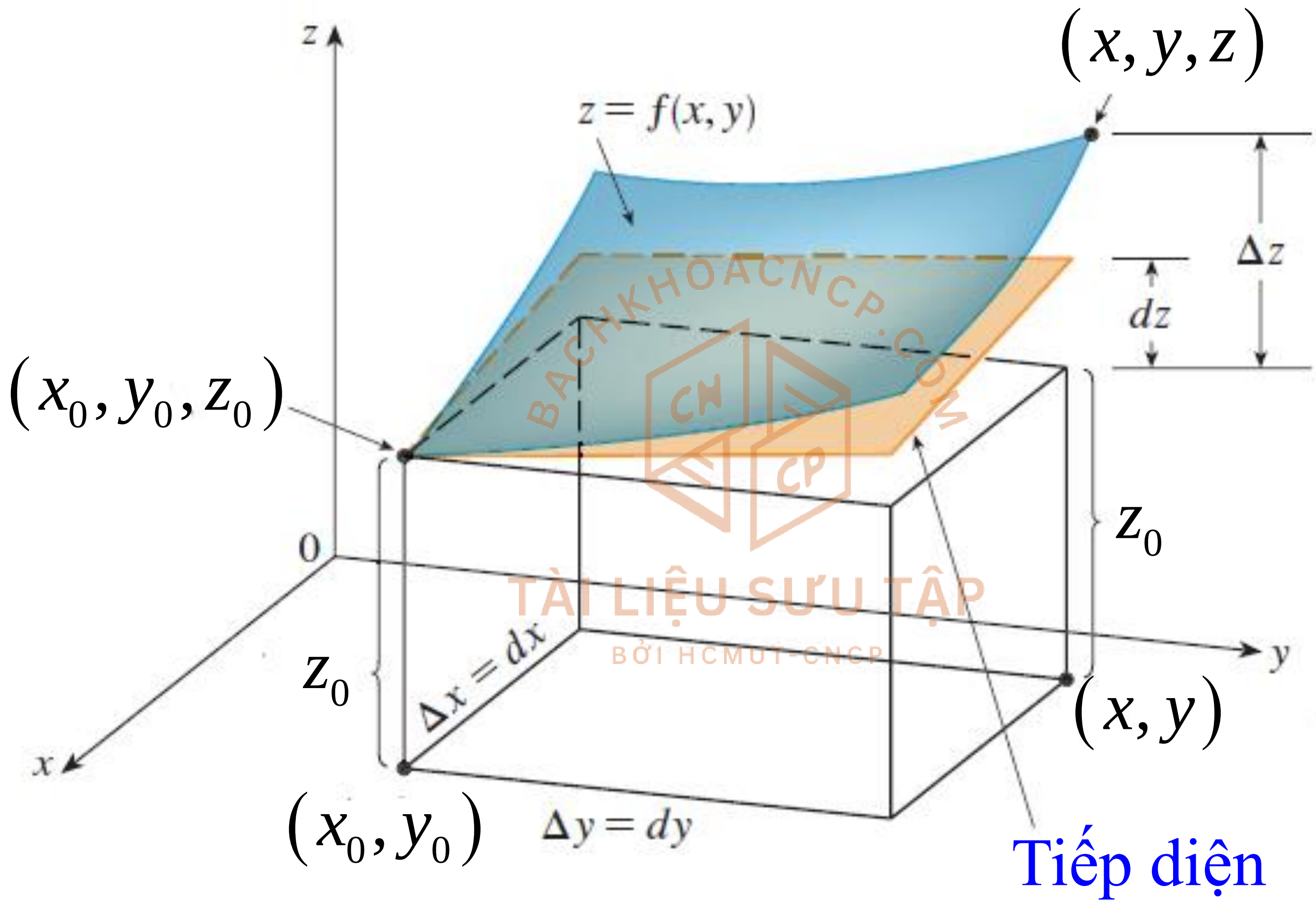
$$\boxed{df(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y}$$ vi phân của f tại (x_0, y_0)

Lưu ý



$M\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)$
$M(x, y)$
$\begin{cases}\Delta x > 0 \\ \Delta y > 0\end{cases}$
y_0
x_0
$\begin{cases}\Delta x < 0 \\ \Delta y < 0\end{cases}$

Ý nghĩa của vi phân cấp 1



$$z = z_0 + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sự khả vi và vi phân cấp 1

Điều kiện cần của sự khả vi:

1. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0).

2. f khả vi tại (x_0, y_0) thì f có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0) và

$$f'_x(x_0, y_0) = A,\ \ f'_y(x_0, y_0) = B$$

Vi phân của hàm 2 biến thường viết dạng:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Ý nghĩa của vi phân cấp 1

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$$
$$= f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Chiều cao của tiếp diện tại (x_0, y_0)

Sự khả vi và vi phân cấp 1

Điều kiện đủ của khả vi:

Cho f xác định trong miền mở chứa (x_0, y_0), *nếu các đhr* f'_x, f'_y *liên tục tại* (x_0, y_0) *thì f khả vi tại* (x_0, y_0).

Các hàm sơ cấp thường gặp đều thỏa mãn điều kiện này.

Ví dụ

1/ cho $f(x,y) = x^2y^3$ tính $df(x,y)$

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

$$= 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

Ví dụ

2/ Cho $f(x,y) = x^2 \ln(1+y)$

Dùng vi phân tính gần đúng $f(-1.2, 0.5)$ theo $f(-1,0)$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$$

$$f(-1.2, 0.5) \approx f(-1,0) + df(-1,0)$$

$$= 0 + 0 \times (-1.2 + 1) + \frac{1^2}{1+0}(0.5 - 0)$$

$$= 0.5$$

Ví dụ

Tại nhà máy A, mặt hàng B được sản xuất mỗi ngày với số lượng $Q(x,y)=0.08x^2+0.12xy+0.03y^2$ (đơn vị) trong đó x và y lần lượt là số giờ làm việc của công nhân lành nghề và chưa lành nghề. Hiện tại có 80h làm việc của cn lành nghề và 200h làm việc của cn chưa lành nghề mỗi ngày. Dùng vi phân ước tính sự thay đổi số sản phẩm tạo trong ngày ra nếu tăng thêm 1/2h làm việc của cn lành nghề và 2h làm việc của cn chưa lành nghề.

Ví dụ

$$\Delta Q(80,200) \approx dQ(80,200) \qquad \Delta x = 0.5, \Delta y = 2$$

$$Q(x,y) = 0.08x^2 + 0.12xy + 0.03y^2$$

$$dQ(80,200) = 34.8 \times 0.5 + 21.6 \times 2 = 60.6$$

Các công thức tính vi phân: như hàm 1 biến

$$d(\alpha f) = \alpha df, \quad \alpha \in R$$
$$d(f \pm g) = df \pm dg,$$
$$d(f.g) = gdf + fdg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Vi phân hàm n biến: $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$dz = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + ... + f'_{x_n} dx_n$$

VI PHÂN CẤP CAO

Vi phân cấp 2 của f là vi phân của df(x,y) khi xem dx, dy là các hằng số.

$$d^2 f(x,y) = d\big(df(x,y)\big)$$

$$d^2 f = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) = d(f'_x)dx + d(f'_y)dy$$

$$= (f''_{xx}dx + f''_{xy}dy)dx + (f''_{yx}dx + f''_{yy}dy)dy$$

$$\boxed{d^2 f(x,y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2}$$

VÍ DỤ

Tìm vi phân cấp 1, 2 tại (0, 1) của

$$f(x,y) = x^2y^2 - y^3e^x$$

* $f'_x = 2xy^2 - y^3e^x, f'_y = 2x^2y - 3y^2e^x$

$$df(0,1) = f'_x(0,1)dx + f'_y(0,1)dy = -dx - 3dy$$

---

* $f''_{xx} = 2y^2 - y^3e^x,$ $f''_{xy} = 4xy - 3y^2e^x$

$$f''_{yy} = 2x^2 - 6ye^x$$

* $f''_{xx} = 2y^2 - y^3e^x,\ f''_{xy} = 4xy - 3y^2e^x,\ f''_{yy} = 2x^2 - 6ye^x$

$$d^2 f(0,1) = f''_{xx}(0,1)dx^2 + 2f''_{xy}(0,1)dxdy + f''_{yy}(0,1)dy^2$$

$$= dx^2 + 2\times(-3)dxdy - 6dy^2$$

Công thức tổng quát cho vi phân cấp cao

$$d^n f(x,y) = d\left(d^{n-1} f(x,y)\right)$$

Công thức hình thức: (trường hợp biến độc lập)

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x,y)$$

Trong khai triển nhị thức Newton, thay các lũy thừa của ∂ bởi cấp đhr tương ứng của *f*, lũy thừa của d*x*, dy tính như thường.

cụ thể:

$$\boxed{\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 \end{aligned}}$$

Ví dụ

Tính vi phân cấp 3 của $z = f(x,y) = e^{2x+3y}$

Cách 1: $dz = d(e^{2x+3y}) = 2e^{2x+3y}dx + 3e^{2x+3y}dy$

$$= e^{2x+3y}(2dx + 3dy)$$

$$d^2z = d(dz) = d\left(e^{2x+3y}(2dx+3dy)\right)$$ (dx, dy là hằng)

$$= d(e^{2x+3y})(2dx+3dy) = e^{2x+3y}(2dx+3dy)^2$$

$$d^3z = d(d^2z) = e^{2x+3y}(2dx+3dy)^3$$

Cách 2: $f(x,y) = e^{x+y}$

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

$$d^3z = e^{x+y}\left(dx^3 + 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right)$$

$$\Rightarrow d^3z = e^{x+y}(dx+dy)^3$$

Ví dụ ứng dụng

a) Nếu $z=f(x,y)= x^2 +3xy-y^2$, tìm vi phân dz

b) Nếu x biến thiên từ 2 đến 2.05 và y từ 3 đến 2.96, so sánh các giá trị của Δz và dz

Giải

a) $dz=(2x+3y)dx+(3x-2y)dy$

b) Thay $x=2$, $dx=\Delta x=0.05$; $\Delta y=-0.04$ ta được:

* $dz=[2(2)+3(3)].0.05+[3(2)-2(3)].(-0.04)=0.65$

* Số gia $\Delta z=f(2.05,2.96)-f(2,3)=0.6449$

Lưu ý: $\Delta z \sim dz$ nhưng dz dễ tính hơn

Ví dụ 5: Bán kính đáy và chiều cao của hình nón tròn đứng được đo tương ứng là 10cm và 25cm, với sai số khả dĩ là 0.1cm. Sử dụng vi phân để tính sai số tối đa khi tính thể tích của hình nón.

Giải: Thể tích hình nón $V=\pi r^2 h/3$. Vì vậy vi phân của V là

$$dV = V_r' dr + V_h' dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Sai số thể tích tối đa khoảng 20π cm^3 ~63 cm^3

Ví dụ 6: Các chiều dài của hình hộp chữ nhật là 75 cm, 60 cm, 40 cm và mỗi số đo chính xác trong khoảng 0.2 cm. Sử dụng vi phân để ước tính sai số khả dĩ tối đa khi tính thể tích của hộp từ các số đo này.

Giải: x,y,z là các cạnh của hình hộp, V=x.y.z

$$dV = V_x' dx + V_y' dy + V_z' dz$$

$$dx = 0.2, dy = 0.2, dz = 0.2, x = 75, y = 60, z = 40$$

$$\Delta V \approx dV = 1980$$

Bài 1: Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật được đo tương ứng là 30 cm và 24 cm với sai số tối đa là 0.1. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa diện tích của hình chữ nhật.

Bài 2: Sử dụng vi phân để ước tính lượng kim loại trong một hộp hình trụ kín cao 10cm, đường kính 4cm nếu kim loại ở đỉnh và đáy dày 0.1 cm và kim loại ở thành hộp dày 0.05cm.

Bài 3: Sử dụng vi phân để tính lượng thiếc trong một hộp thiếc kép kín có đường kính 8cm và cao 12cm nếu hộp thiếc dày 0.04cm