1. Giới thiệu về phương trình vi phân
   - Bài toán dẫn đến phương trình vi phân
   - Định nghĩa

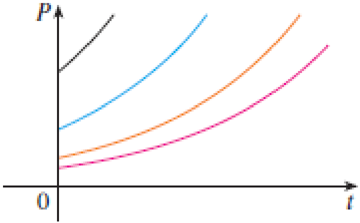
2. Phương trình vi phân cấp một
   - Phương trình vi phân tách biến
   - Phương trình vi phân tuyến tính

Mô hình tăng trưởng tự nhiên:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

trong đó

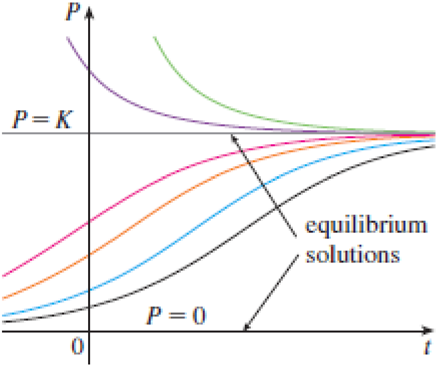
- t là thời gian (biến độc lập);
- $P = P(t)$ là số lượng cá thể tại thời điểm t (biến phụ thuộc);
- k là hằng số dương.



Mô hình tăng trưởng trong môi trường có giới hạn:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

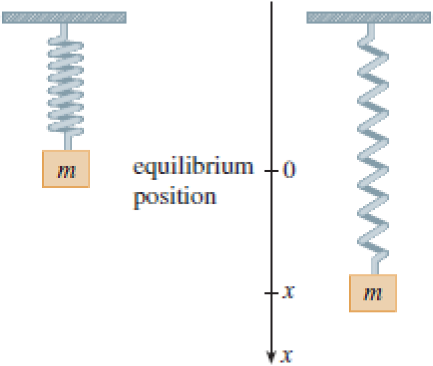
trong đó k và K là các hằng số dương.



Mô hình chuyển động của lò xo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

trong đó $k > 0$ là hằng số lò xo.



Định nghĩa

Một **phương trình vi phân (differential equation)** *là một phương trình chứa một hàm số chưa biết và một hoặc nhiều đạo hàm của nó.*

- **Cấp (order)** của một phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất có mặt trong phương trình.
- Một hàm f được gọi là một **nghiệm (solution)** của phương trình vi phân nếu phương trình được thỏa mãn khi ta thay $y = f(t)$ và các đạo hàm của nó vào phương trình.
- **Giải (solve)** một phương trình vi phân là đi tìm tất cả các nghiệm của phương trình.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y' = e^{2t}.$$

- Trong các bài toán vật lý, người ta thường quan tâm đến việc tìm nghiệm thỏa mãn **điều kiện ban đầu (initial condition)**, chẳng hạn

$$y(t_0) = y_0.$$

Ta gọi bài toán như vậy là **bài toán Cauchy**.

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = e^{2t}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 1$.

Định nghĩa

Phương trình tách biến (separable equation) *có dạng*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

- Cách giải: lấy tích phân hai vế

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx.$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân sau:

$$y' = x^2 y.$$

```
>> syms y(x);
>> dsolve(diff(y) == x^2*y)

ans =

C2*exp(x^3/3)
```

Ví dụ

Trong một hồ nước thiên nhiên ban đầu có 400 *con cá. Số cá tối đa có thể sinh sống tốt trong hồ là* 10000 *con. Biết rằng sau 1 năm số cá tăng gấp 3 lần. Tìm số cá sau t năm.*

Hướng dẫn: Sử dụng mô hình tăng trưởng có giới hạn (Logistic):

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{10000}\right),$$

với

$$P(0) = 400, \quad P(1) = 1200.$$

```
>> syms P(t) k;
>> dsolve(diff(P) == k*P*(1 - P/10000), P(0) == 400, P(1) == 1200)

ans =

piecewise([k == log(24) - log(22/3), {10000/(exp(log(24) - t*(log(24) - log(22/3))) + 1)}
```

Ví dụ

Lượng ánh sáng bị hấp thu khi đi qua một lớp nước mỏng tỷ lệ với số phần ánh sáng còn lại và độ dày của lớp nước. Biết rằng khi đi qua lớp nước dày 2 mét thì lượng ánh sáng bị hấp thu bằng $1/3$ *lượng ánh sáng ban đầu. Hỏi còn lại bao nhiêu phần ánh sáng đi tới độ sâu 12 mét.*

Hướng dẫn:

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

với

$$y(0) = 1, \quad y(2) = 2/3.$$

```
>> syms y(x) k;
>> dsolve(diff(y) == k*y, y(0) == 1, y(2) == 2/3)

ans =

piecewise([exp(2*k) == 2/3, {(2*exp(-2*k)*exp(k*x))/3}], [exp(2*k) ~= 2/3, {}])
```

Định nghĩa

Phương trình vi phân **tuyến tính (linear)** *cấp một có dạng*

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Chẳng hạn, phương trình

$$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Cách giải

- Xét phương trình $y' + P(x)y = Q(x)$.
- Nhân hai vế với **nhân tử tích phân (integrating factor)**

$$e^{\int P(x)dx},$$

phương trình trở thành

$$y'e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

- Dẫn đến

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân:

$$y' + \frac{1}{x}y = 2.$$

```
>> syms y(x);
>> dsolve(diff(y) + 1/x*y == 2)

ans =

x + C10/x
```

Ví dụ

Một thùng chứa 20 *kg muối được hòa tan trong* 5000 *lít nước. Dung dịch nước muối chứa* 0.03 *kg muối trên một lít nước được cho chảy vào bình chứa với vận tốc* 25 *l/phút. Hỗn hợp được trộn lẫn hoàn toàn và được cho chảy ra khỏi thùng với cùng vận tốc của nước muối chảy vào. Lượng muối còn lại trong thùng sau* 30 *phút là bao nhiêu?*

HD: Gọi $y(t)$ (kg) là lượng muối còn lại trong thùng sau t phút.

$$dy/dt = \text{tốc độ muối vào} - \text{tốc độ muối ra}$$