CÁC DẠNG BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. Đời sống.
2. Vật lý.
3. Kỹ thuật.
4. Y tế, sinh học.
5. Môi trường.
6. Kinh doanh, kinh tế.

Chương 1

DÃY SỐ THỰC

1.1 Tính chất dãy số

1. Khảo sát tính đơn điệu của các dãy số $\{a_n\}$ sau khi n đủ lớn.

   a. $a_n = 2n^2 + 1$

   b. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

   c. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

2. Chứng minh các dãy số sau bị chặn

   (a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

   (b) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

1.2 Giới hạn dãy số

Tính giới hạn các dãy số $\{a_n\}$ sau:

1. $a_n = \dfrac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - 4n + 2}$

2. $a_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

1.3 Dãy con

1.3.1 Xác định công thức dãy con

Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

1.3.2 Dãy con và giới hạn

1. Cho $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^2}$, xác định giới hạn của các dãy con $a_{k+1},\ a_{2k-1},\ a_{2k},\ a_{k^2}$.

2. Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2},\ a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Chương 2

HÀM SỐ

2.1 Thành lập hàm số, ý nghĩa hàm số và đồ thị

1. (Ý nghĩa hàm số)Theo một nghiên cứu ở Mỹ từ năm 1997, ước tính phần trăm dân số của Mỹ theo độ tuổi bị mắc bệnh Alzheimer cho bởi hàm số

$$P(x) = 0.0726x^2 + 0.7902x + 4.9623, \qquad 0 \le x \le 25.$$

trong đó x là số năm và $x = 0$ là mốc 65 tuổi. Hỏi

a. Tính giá trị của $P(8)$, giá trị này nói lên điều gì?

b. Có bao nhiêu phần trăm dân số ở độ tuổi 90 bị mắc bệnh này.

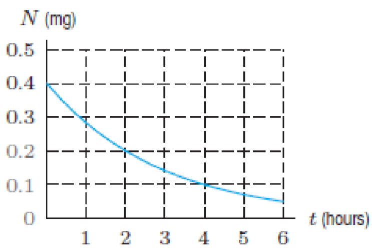
2. Bài toán về chi phí, doanh thu, lợi nhuận (Ý nghĩa hàm số).
Một nhà sản xuất thiết bị lọc nước có chi phí cố định hàng tháng là 10.000USD, và chi phí lưu động để sản xuất x thiết bị là

$$C(x) = -0.0001x^2 + 10x, \quad (0 \le x \le 40.000).$$

Nếu giá bán mỗi thiết bị là $p(x) = -0.0005x + 20, \quad (0 \le x \le 40.000)$, tìm hàm doanh thu $R(x)$ và hàm lợi nhuận $P(x)$ hàng tháng của công ty. Đến lúc nào thì lợi nhuận của công ty đạt 10.000 USD.

3. (Đồ thị):

Sau khi hít khói thuốc lá, nicotine nhanh chóng xâm nhập vào máu.Trong một trường hợp cụ thể, quá trình đào thải nicotine diễn ra như đồ thị ở hình bên cạnh.Hỏi sau mấy giờ lượng nicotine giảm còn một nửa? Nếu đồ thị cắt trục hoành thì điều này có ý nghĩa gì?



4. (Hàm tuyến tính) Lượng adrenaline trong cơ thể thay đổi rất nhanh. Giả sử ban đầu cơ thể có 15mg adrenaline, lập hàm số mô tả lượng adrenaline A= f(t) trong cơ thể theo thời gian t (phút) với các trường hợp sau:

a. A tăng 0.4mg mỗi phút.

b. A giảm 0.4mg mỗi phút.

5. (Hàm tuyến tính) Trong những kỳ Olympic đầu tiên, ở môn nhảy sào, mức sào cao nhất mà người vô địch đạt được cho bởi hàm số $h(t) = 130 + 2t$, trong đó h tính bằng inches và t tính theo năm, $t = 0$ tương ứng năm 1990.

a. Hãy cho biết ý nghĩa giao điểm của đồ thị hàm số trên với trục tung.

b. Hãy cho biết ý nghĩa hệ số góc $a = 2$ của đồ thị hàm số $h(t)$.

6. (Hàm mũ) Dân số của một thành phố A vào năm 2008 là 50.000. Mỗi năm tỷ lệ gia tăng là 4,5

   a. Lập một hàm số mô tả dân số từ năm 2008 của thành phố này.

   b. Dân số vào năm 2018 là bao nhiêu?

   c. Khi nào thì dân số đạt 100.000?

7. (Hàm nhiều biểu thức) Một cửa hàng photo copy niêm yết giá như sau: 200 đồng cho mỗi bản copy cho 100 bản đầu tiên (cỡ giấy A4), 170 đồng mỗi bản vượt mốc 100. Viết hàm số mô tả tổng số tiền photo copy x bản, biết rằng có một khoản phí cố định cho mỗi lần photo copy ở cửa hàng này là 5000 đồng.

2.2 Miền xác định, miền giá trị của hàm số.

1. Tìm miền xác định, miền giá trị của các hàm số sau: $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2)$.

2. Một gia đình dự định tổ chức tiệc ở một nhà hàng. Mức phục vụ chung cho bữa tiệc (mặt bằng, trang trí,...) là 5 triệu đồng. Nhà hàng nhận tối thiểu 2 bàn, mỗi bàn 10 người. Giá cho mỗi khách ăn là 250 ngàn đồng. Gia đình dự tính chi tối đa 25 triệu. Nếu gọi x là số khách mời, $C(x)$ là chi phí cho bữa tiệc. Tìm miền xác định D và miền giá trị R của C.

2.3 Hàm số hợp

1. Cho 2 hàm số
   $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x),$
   $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(x).$
   Tìm các biểu thức $g \circ f(x)$ và $f \circ g(x)$ (nếu tồn tại).

2. Cho 2 hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2},\ g(x) = x^3 + x$. Tìm $g \circ f(x), f \circ g(x)$ và điều kiện xác định của 2 biểu thức này.

3. Một nghiên cứu cho thấy mức độ khí CO trung bình hàng ngày trong không khí tại 1 khu vực X có p nghìn dân là

   $$C(p) = 0.5p + 1 \quad (‱).$$

   Người ta cũng ước tính rằng, sau t năm kể từ thời điểm hiện tại, dân số ở khu vực này sẽ là

   $$p(t) = 10 + 0.1t^2 \quad \text{(nghìn)}.$$

   Tìm mức CO trung bình hàng ngày theo số năm kể từ thời điểm hiện tại và cho biết đến khi nào thì mức CO trung bình hàng ngày sẽ đạt 6.8 ‱.

2.4 Hàm số ngược

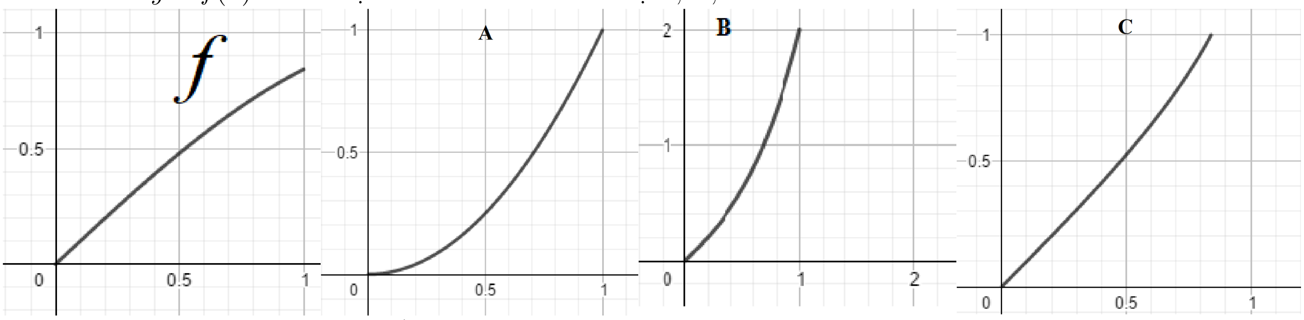
1. Cho $f : (2, +\infty) \to (0, +\infty)\,, f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.
   Chứng minh f là một song ánh. Tìm $f^{-1}(x)$.

2. $P = f(t)$, trong đó P là số lượng loài chim trên một hòn đảo (đơn vị nghìn), t là số năm tính từ năm 2007. Hãy cho biết

   a. $f(4)$ ý nghĩa là gì?

   b. $f^{-1}(4)$ ý nghĩa là gì?

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và 3 đồ thị A, B, C.



Hãy cho biết đồ thị nào là của f^{-1}.

Chương 3

GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

3.1 Giới hạn hàm số

1. Tìm giới hạn sau (nếu có): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{x}$

2. Một người kinh doanh bất động sản ước tính rằng sau t năm kể từ thời điểm hiện tại, số thửa đất mà ông ta bán đi được cho dưới dạng hàm số

$$S(t) = \frac{-2t^3 + 19t^2 - 8t - 9}{-t^2 + 8t - 7}.$$

Hỏi sau 1 năm, số thửa đất ông bán được là bao nhiêu?

3.2 Vô cùng lớn, vô cùng bé

1. Tìm một hàm số tương đương dạng ax^α khi $x \to 0$ của $f(x) = x\ln(1 + 2x)$

2. Tìm một hàm số tương đương dạng ax^α khi $x \to +\infty$ của $f(x) = x + 2\ln(x)$

3. So sánh bậc các vô cùng bé hoặc vô cùng lớn sau:

   a. $f(x) = x^2 - 2\sin(x),\ g(x) = x\cos(x),\ x \to 0$

   b. $f(x) = \ln(1 - 2x^2 + x^3),\ g(x) = x - 2^x,\ x \to +\infty$

4. Một cốc cà phê chứa 100mg caffeine được đào thải liên tục ra khỏi cơ thể với tốc độ 17% mỗi giờ.

   a. Chứng minh lượng caffein còn lại trong cơ thể sau t giờ được tính bởi công thức

   $$P(t) = 100\mathrm{e}^{-0.17t}.$$

   b. Kết luận gì khi t đủ lớn.

3.3 Tìm tiệm cận của đường cong $y = f(x)$

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{3x - 2}$

2. $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$

3.4 Hàm số liên tục

1. Xét tính liên tục trái, liên tục phải, liên tục của các hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|}, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0, \end{cases} \quad \text{tại } x = 0, \ x = 1.$$

2. Một công ty tính phí 7.5đ/lít cho một loại sơn cho tất cả các đơn đặt hàng 50 lít trở xuống và 6.75 đ/lít cho các đơn hàng trên 50 lít. Đặt $P(x)$ là chi phí để công ty mua x lít sơn.

   a. Tìm chi phí mua 40 lít, 50 lít, 60 lít.

   b. P không liên tục tại đâu?

Chương 4

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

4.1 Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$

4.1.1 Tính đạo hàm tại các điểm được chỉ ra

1. $f(x) = x.2^{x-x^2},\ x_0 = -1$
2. $f(x) = (x-2)\left|x\right|,\ x_0 = 1,\ x_0 = 0$

4.1.2 Ý nghĩa thực tế của đạo hàm

1. Một thùng hình trụ chứa 1000 lít nước. Thùng bị thủng ở đáy và nước thoát ra ngoài. Thể tích nước còn lại sau t giây được cho bởi phương trình :

   $$V(t) = 1000\left(1 - \frac{t}{60}\right), 0 \le t \le 60$$

   a. Tìm tốc độ nước thoát ra ngoài theo thời gian t.

   b. Tại các thời điểm $0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$, xác định vận tốc dòng nước thoát và lượng nước còn lại.

2. Một nhà sản xuất cho biết tổng chi phí (tính bằng ngàn USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm A là

   $$C(x) = 6x^2 + 2x + 10.$$

   Tìm chi phí cận biên khi sản xuất 10 đơn vị sản phẩm A.

4.1.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

1. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = -1$.
2. Tìm tất cả các điểm trên đường cong $y = f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$ mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 2$.

4.1.4 Các phép toán đạo hàm

A. Bốn phép toán

1. Với 1 mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái cho bởi $PV = 8.31T$, trong đó $P(KPascal), V(Lit), T(Kenvin)$. Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300K và thể tích khí đạt 100L , vận tốc tăng nhiệt là 0.1K/s và vận tốc tăng thể tích là 0.2L/s , tính tốc độ thay đổi của áp suất P.

B. Đạo hàm hàm hợp

1. Cho $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm và $f'(0) = 2$, $g'(-2) = 1$. Đặt $h(x) = x.f(x^2 - 1)$, $k(x) = f(x) + g(3x - 2)$, tính $h'(1)$ và $k'(0)$.

2. Một giếng dầu bị rò rỉ ngoài khơi, làm trải một màng dầu hình tròn trên mặt nước. Tại thời điểm t (tính bằng phút) sau khi bắt đầu rò rỉ, bán kính của vết dầu tròn (tính bằng mét) được cho bởi $R(t) = 4t$. Tìm tốc độ thay đổi diện tích của vết dầu loang theo thời gian.

C. Đạo hàm hàm ngược

1. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh(x)$. Tìm $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

2. Trong một đợt dịch bệnh lan truyền mạnh, số ca mắc mới ở ngày thứ t (tính từ ngày thống kê đầu tiên) là hàm số S(t). Hãy nêu ý nghĩa của $\left(S^{-1}\right)'(20) = \dfrac{1}{9}$.

4.2 Đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$

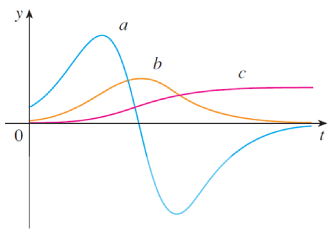
4.2.1 Tính giá trị đạo hàm cấp cao tại điểm cụ thể

1. Tính $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)$ với $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$.

2. Tính $f^{(5)}(1)$ với $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$.

4.2.2 Ý nghĩa của đạo hàm cấp 2

1. Các đồ thị dưới đây mô tả quãng đường, vận tốc và gia tốc của một chuyển động. Hãy phân biệt đồ thị của 3 đại lượng này.



2. Giả sử $f(t)$ là nhiệt độ trung bình của thành phố A vào tháng thứ t của năm. Vào thời điểm $t_0 \in (2, 3)$, $f'(t_0) = 2$, $f''(t_0) < 0$, điều này có ý nghĩa gì?

4.3 Sự khả vi và vi phân

4.3.1 Số gia của hàm số và vi phân cấp 1

1. Cho $f(x) = x^2 - 3x + 2$, tính $\Delta f(-1)$ và $\mathrm{d}f(-1)$ nếu $\Delta x = 0.01$.

2. Ước lượng sự thay đổi thể tích của một hình nón có bán kính $R = 20$cm khi chiều cao tăng/giảm 1cm.

4.3.2 Xấp xỉ tuyến tính

1. Dùng xấp xỉ tuyến tính để tính gần đúng $\ln(1.02)$.

2. Phân bón có thể làm thay đổi sản lượng cây trồng. Một nghiên cứu ở Kenya trên ngô cho biết sản lượng của ngô (tại 1 địa phương cụ thể) theo số kg phân bón (x) được biểu diễn dạng $y = f(x)$, trong đó f tính theo shilling. Giả sử f có đạo hàm tại mọi $x > 0$.

   a. Nêu ý nghĩa $f(5) = 11500$ và $f'(5) = 350$

   b. Ước tính sản lượng ngô theo các giá trị đã cho ở câu trên nếu sử dụng 5.2kg phân bón.

4.4 Khai triển Taylor

4.4.1 Tìm khai triển Taylor/Maclaurin

1. Tìm khai triển Maclaurin cấp 3 của $f(x) = \ln(2 + x)$.

2. Tìm khai triển Taylor cấp 3 của $f(x) = x\ln(x)$ trong lân cận $x = 1$.

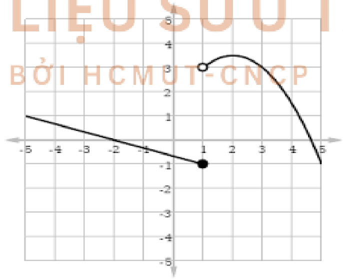
4.5 Khảo sát hàm số $y = f(x)$

4.5.1 Bài toán về chiều biến thiên và cực trị

1. Tìm các khoảng tăng/giảm của hàm số $f(x) = x\left(1 + \sqrt{x}\right)$

2. Tìm cực trị của các hàm số sau $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.

3. Giả sử $f(x)$ liên tục và có đồ thị của $f'(x)$ như hình bên dưới, hãy chỉ ra các điểm cực trị của $f(x)$.



4.5.2 Bài toán về tính lồi lõm và điểm uốn

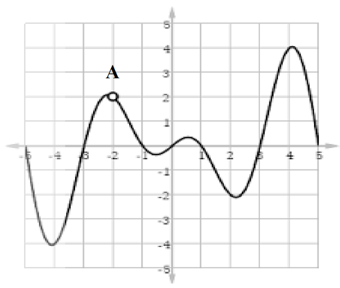
1. Tìm tất cả các điểm uốn của đường cong $y = x^2\ln(x)$.

2. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy cho biết

   a. $f''(x_A)$ dương hay âm?

   b. Tìm các khoảng tăng/giảm của $f'(x)$.

   c. $f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu, trong các khoảng nào?



4.5.3 Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}$

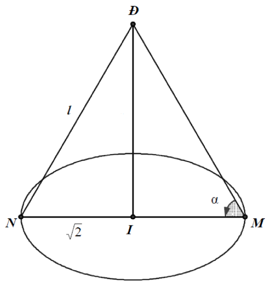
4.5.4 Bài toán tìm min-max

1. Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

   a. $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

   b. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right), \quad x \in [0,1]$

2. Người ta muốn treo phía trên và chính giữa một bồn cỏ hình tròn có bán kính $\sqrt{2}$m. Biết rằng cường độ ánh sáng đi đến mép bồn cho bởi $C = c\dfrac{\sin\alpha}{l^2}$ (c là hằng số phụ thuộc nguồn sáng, α và l như hình vẽ). Tìm l để C đạt giá trị lớn nhất.

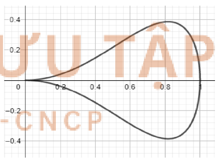


4.6 Hàm số cho bởi phương trình tham số

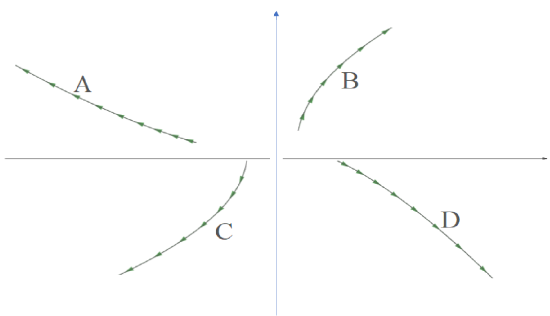
4.6.1 Ý nghĩa của đường cong tham số

1. Xác định chiều đường đi trên quỹ đạo nếu chuyển động của vật cho bởi phương trình tham số với t là thời gian.

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin^2(t)\cos(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$



2. Hình bên dưới là đồ thị của 4 hàm số cho bởi các phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, $a < b$.



Hãy xác định các đồ thị trên tương ứng với tính chất nào của $x(y), y(t), \ \forall t \in (a,b)$ dưới đây:

(I) $\begin{cases} x'(t) > 0 \\ y'(t) > 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x'(t) < 0 \\ y'(t) > 0 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} x'(t) > 0 \\ y'(t) < 0 \end{cases}$ (IV) $\begin{cases} x'(t) < 0 \\ y'(t) < 0 \end{cases}$

4.6.2 Đạo hàm của hàm số $y = y(x)$ xác định bởi phương trình tham số

1. Tính $y'(x)$ nếu $y(x)$ xác định bởi các phương trình tham số

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = 0.3t - \ln(t) \end{cases} \qquad \text{tại} x = 1.$$

2. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đường cong tham số sau tại $x = 0$

$$\begin{cases} x(t) = t\mathrm{e}^t \\ y(t) = t\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

3. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong tham số khi $t = \pi$

$$\begin{cases} x(t) = t - 3\sin(t) \\ y(t) = 4 - 3\cos(t) \end{cases}$$

4.6.3 Tìm cực trị của các hàm số $y = y(x)$ cho bởi phương trình tham số

1. $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 4t - t^4 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$

4.6.4 Tìm tiệm cận của các đường cong tham số

$$\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t} + 1 \end{cases}$$

4.6.5 Vẽ đường cong tham số

$$\begin{cases} x(t) = t - 3\sin(t) \\ y(t) = 4 - 3\cos(t) \end{cases} \qquad t \in [-pi, pi]$$

Chương 5

TÍCH PHÂN

5.1 Tích phân bất định

5.1.1 Tính tích phân

1. Dùng các phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần để tính các tích phân sau

   a. $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int x\arctan(x)\mathrm{d}x$

2. Tính tích phân các hàm hữu tỷ sau

   a. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

3. Tính tích phân các hàm vô tỷ sau

   a. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$ b. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ c. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2}}$

5.1.2 Ý nghĩa nguyên hàm

1. Nếu gọi $\mathrm{C}(t)$ là mức CO_2 bình quân trong không khí tính theo tỷ lệ phần triệu (‱) và t là thời gian tính theo năm thì mô hình khí thải này từ năm 1950 (tại một khu vực nào đó) cho bởi công thức:

   $$\mathrm{C}'(t) = 0.5 + 0.03t, \quad t = 0 \text{ tương ứng năm 1950.}$$

   Nếu C vào năm 1950 là 311‱, tìm $\mathrm{C}(t)$.

2. Tìm một hàm số f biết rằng hệ số góc tiếp tuyến tại điểm $(x, f(x))$ bất kỳ của đồ thị là $x^2 - x + 2$ và đồ thị đi qua điểm $(-1, 1)$.

5.2 Tích phân xác định

5.2.1 Bài toán dẫn về tích phân

1. Nghiên cứu về một chủng vi rút trong phòng thí nghiệm cho thấy tốc độ gia tăng số lượng của loài này sau t giờ kể từ thời điểm hiện tại là

   $$v(t) = 3 + 0.1t^2.$$

   Tính tổng số vi khuẩn trong 20 giờ đầu tiên kể từ thời điểm hiện tại.

5.2.2 Tính gần đúng nhờ tổng tích phân

1. Ước tính giá trị của các tích phân sau bằng tổng Riemnn với phân hoạch đều 10 đoạn chia và dùng 3 cách: tổng trái, tổng phải, tổng trung tâm.

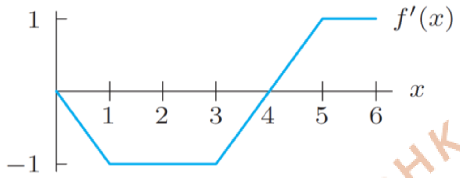
$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$$

2. Ước tính mức tiêu thụ dầu thô trên thế giới trong 25 năm từ 1985 đến 2010 dựa vào bảng thống kê sau, sử dụng tổng Riemann trái.

Năm	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Mức tiêu thụ (tỷ thùng/năm)	20.9	23.3	25.6	28.0	30.7	31.7

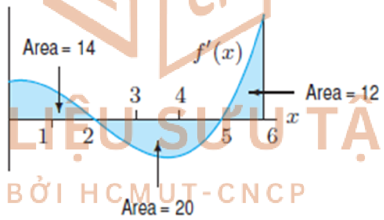
5.2.3 Tích phân xác định và diện tích miền phẳng

1. Hàm số f có đồ thị f' như hình vẽ, điền các giá trị vào bảng sau



x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

2. Hàm số f có đồ thị f' như hình vẽ, phác họa đồ thị của f đồng thời chỉ rõ các khoảng tăng giảm và các điểm cực trị của f.



5.2.4 Giá trị trung bình

1. Tính giá trị trung bình của $f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in [0, 2]$, tìm tất cả các giá trị $x_0 \in [0, 1]$ mà tại đó f đạt giá trị trung bình.

5.2.5 Định lý cơ bản của vi tích phân

1. Tính đạo hàm của $f(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-3t+1} \mathrm{d}t$ tại $x_0 = 1$.

5.2.6 Các ứng dụng hình học của tích phân xác định

1. Tính diện tích các miền phẳng D cho bởi các điều kiện giới hạn như bên dưới

   a. $y = 2^x, \ y = 3^x, \ 0 \le x \le 1 \ (f_1, f_2, [a, b])$

   b. $x + y = 2, \ x = \sqrt{y}, \ y = 0 \ (f_1, f_2, f_3)$

   c. $y = 4 - 2x^2, \ y = 2x \ (f_1, f_2)$

   d. $x^2 + y^2 \le 2, \ y \ge x^2, \ x \le 0 \ (\le, \ge)$

2. Tính thể tích tròn xoay khi miền phẳng sau quay quanh trục Ox, Oy: $x + y = 2, \ x = \sqrt{y}, \ y = 0$

3. Cho đường cong (C): $y = \dfrac{\sqrt{x}}{6}(12 - x),\ 0 \leq x \leq 1$. Tính độ dài cung và diện tích mặt tròn xoay được tạo ra khi (C) quay quanh các trục $Ox,\ Oy$.

5.3 Tích phân suy rộng

5.3.1 Tính tích phân suy rộng

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

3. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ và trục Ox trên miền $x \geq 1$.

5.3.2 Khảo sát sự hội tụ

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+3x^2+1}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

Chương 6

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1 Phương trình vi phân cấp 1

6.1.1 Tìm nghiệm tổng quát

1. Phương trình tách biến: $3y^2y' = 2x + 1$
2. Phương trình đưa về tách biến: $y' = (2x - 3y + 1)^2$
3. Phương trình thuần nhất (đẳng cấp): $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$
4. Phương trình tuyến tính: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
5. Phương trình Bernoulli: $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2y}$

6.1.2 Tìm nghiệm bài toán Cauchy

$$(1 + y^2) - xyy' = 0;\ y(1) = 0$$

6.1.3 Bài toán thực tế

1. Dạng tự thành lập bài toán

   a. Bài toán hình học

      i. Bài toán liên quan đến tiếp tuyến, pháp tuyến(đơn giản)

      Tìm một đường cong $y = f(x)$ đi qua điểm (3,2). Biết rằng đoạn chắn của tiếp tuyến (với đường cong tại 1 điểm bất kỳ) trên hai trục tọa độ luôn bị chia đôi bởi tiếp điểm.

      ii. Bài toán về quỹ đạo trực giao (mới)

      Tìm quỹ đạo trực giao của họ đường cong (P) có phương trình $y = \mathrm{k}x^2$.

   b. Bài toán dân số

      i. Mô hình tăng trưởng tự nhiên $P'(t) = kP(t)$ (Dạng này sinh viên có thể lập từ hàm mũ mà không cần qua ptvp.)

      Một thành phố có 226 ngàn dân vào năm 1996. Tốc độ gia tăng dân số tự nhiên của thành phố này là 0.08%/năm. Tìm phương trình vi phân mô tả dân số của thành phố này. Hãy cho biết sau bao lâu thì dân số đạt 228 ngàn dân.

      ii. Phương trình Logistic $P'(t) = k\left(1 - \dfrac{P(t)}{L}\right)$ Trong một hồ nước thiên nhiên ban đầu có 400 con cá. Số cá tối đa có thể sinh sống trong hồ là 10.000 con. Biết sau 1 năm số cá tăng gấp 3 lần. Tìm số cá sau t năm. Sau bao nhiêu năm, cố cá trong hồ sẽ đạt 5000 con.

c. Bài toán hòa tan (tách biến/tuyến tính)

i. Trong thùng chứa 100 lít nước. Người ta bơm vào thùng nước muối có nồng độ 0.4kg/l với tốc độ **5l/phút**, hỗn hợp được bơm ra cũng với tốc độ **5l/phút**. Sự đồng chất của hỗn hợp được đảm bảo bằng cách khuấy đều. Tìm lượng muối trong thùng sau 20 phút.

ii. Trong thùng chứa 100 lít nước muối nồng độ 0.5kg/l. Người ta **bơm nước vào thùng** với tốc độ 5l/phút, hỗn hợp chảy ra với tốc độ 3l/phút. Sự đồng chất của hỗn hợp được đảm bảo bằng cách khuấy đều. Tìm lượng muối trong thùng sau 20 phút.

iii. Trong thùng chứa 100 lít nước. Người ta bơm vào thùng hỗn hợp nước muối có nồng độ 0.4kg/l với tốc độ 5l/phút, hỗn hợp được bơm ra với tốc độ 3l/phút. Sự đồng chất của hỗn hợp được đảm bảo bằng cách khuấy đều. Tìm lượng muối trong thùng sau 20 phút.

Gọi y(t) là lượng muối còn lại trong thùng sau t phút. Tìm lượng muối còn lại trong thùng sau 20 phút.

d. Bài toán về quy luật giảm nhiệt (phát biểu lại quy luật)
Vận tốc nguội lạnh của một vật trong không khí tỷ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ không khí. Tìm quy luật giảm nhiệt của vật nếu nhiệt độ của không khí là 20°C, nhiệt độ ban đầu của vật là 100°C, sau 10 phút nhiệt độ của vật còn 60°C .

2. Dạng cho sẵn phương trình (tùy ý)

a. Cường độ dòng điện I trong mạch có cuộn cảm với từ dung L (Henry), điện trở R (Ohm), hiệu điện thế V (volt) thỏa mãn phương trình

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = U$$

Tìm cường độ dòng điện sau 10 giây, nếu $U = 4(v), R = 10(\Omega), L = 2(H),\ I(0) = 0$.

b. Một loại thuốc truyền qua đường tĩnh mạch cho bệnh nhân với tốc độ $v_1(t) = 1+\sin(t)$(mg/ml)/giờ. Thuốc được chuyển hóa với tốc độ $v_2(t) = y(t)$(mg/ml)/giờ, với $y(t)$ là nồng độ thuốc trong máu sau t giờ kể từ lúc thuốc được đưa vào tĩnh mạch, tính bằng mg/ml. Tốc độ thay đổi nồng độ thuốc trong máu sau t giờ là $y'(t) = v_1(t) - v_2(t)$. Xác định nồng độ thuốc trong máu sau 2 giờ.

6.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

6.2.1 Tìm nghiệm phương trình thuần nhất

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$
4. $y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

6.2.2 Tìm nghiệm riêng bằng phương pháp biến thiên hằng số

$$y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln(x)$$

6.2.3 Tìm nghiệm riêng bằng phương pháp hệ số bất định

1. $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ (ĐT)
2. $y'' - 2y' + 5y = 3\mathrm{e}^{2x}$ (M)
3. $y'' - y' = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ (SC)
4. $y'' + 3y' - 4y = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$ (ĐT*M)
5. $y'' + 3y' = x\cos(x) - 2\sin(x)$ (ĐT*SC)
6. $y'' - y = \mathrm{e}^{x}\left[2\cos(x) + \sin(x)\right]$ (M*SC)
7. $y'' - y' = 2x - 3$ ($*x^1$)
8. $y'' - 2y' + y = 3\mathrm{e}^{x}$ ($*x^2$)

6.2.4 Nguyên lý chồng chất nghiệm

1. $y'' + y' = 2x + 3\mathrm{e}^{x}$
2. $y'' - 2y' = x + 2\cos(x)$
3. $y'' + 5y' + 6y = \mathrm{e}^{x} + 3\sin(2x)$

6.2.5 Tìm nghiệm bài toán Cauchy

$$y'' + 7y' + 10y = x + 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

6.3 Hệ ptvp tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

1. Dùng phương pháp khử tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) - 2t \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) + t - 1 \end{cases}$$

2. Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) - 2t \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) + t - 1 \end{cases} \text{thỏa điều kiện } x(0) = 1,\ y(0) = -2.$$