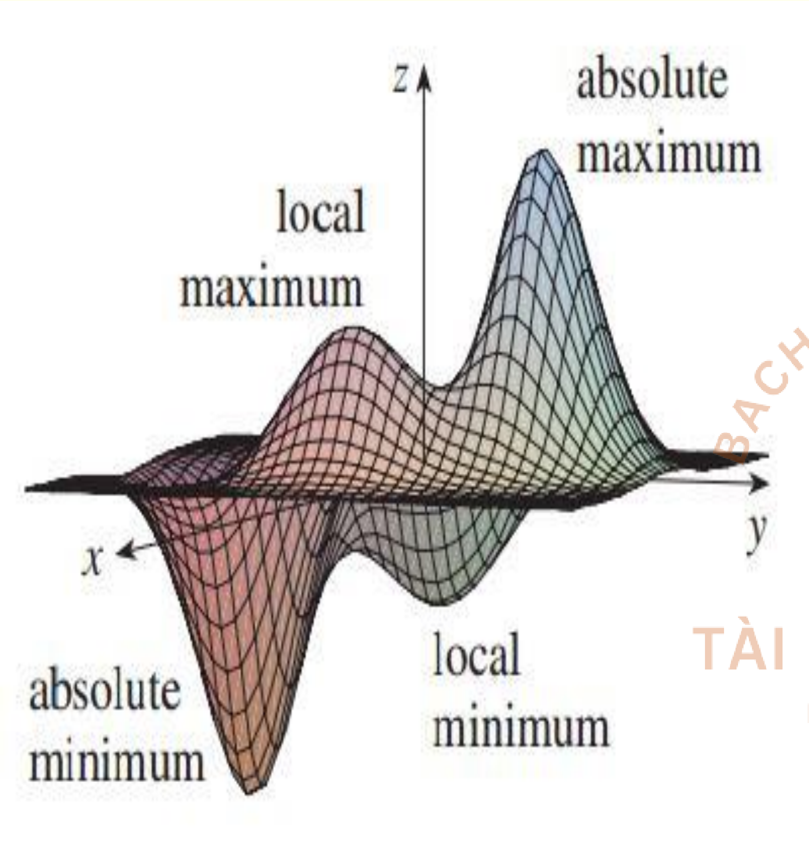
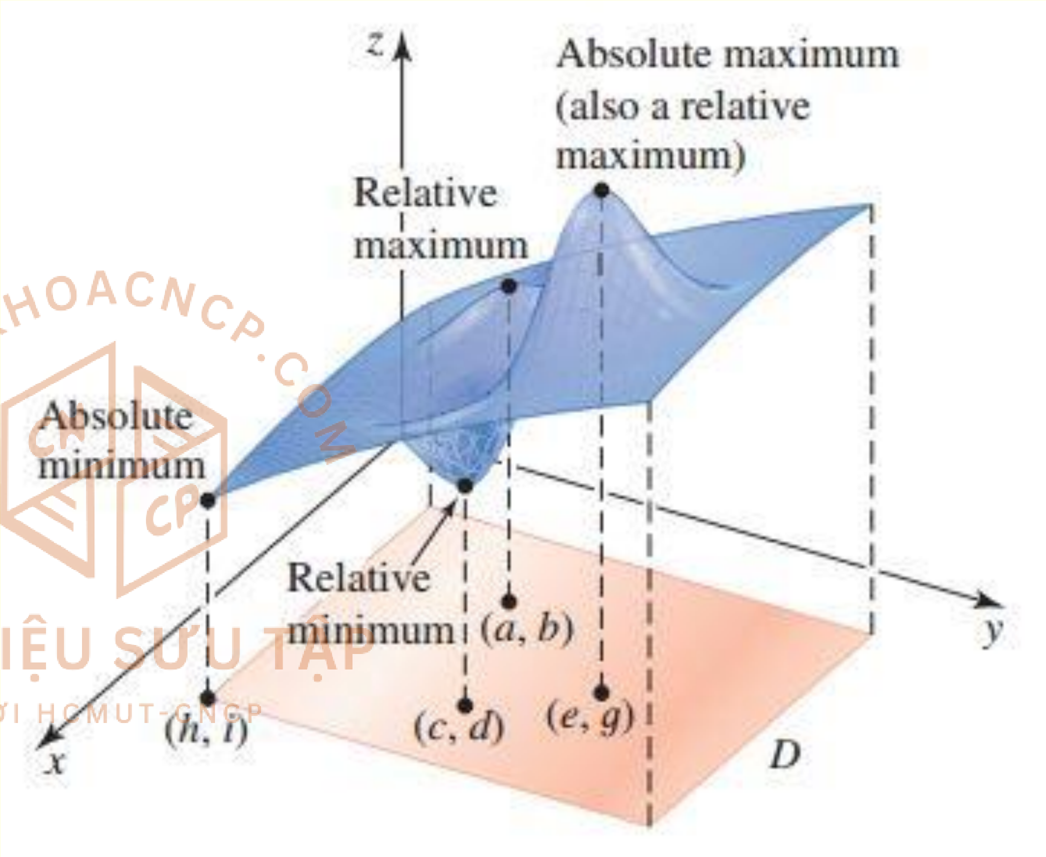
CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

NỘI DUNG

1. Cực trị tự do.
2. Cực trị có điều kiện.
3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập compact.


z
absolute
maximum
local
maximum
x
y
absolute
minimum
local
minimum


z
Absolute maximum
(also a relative
maximum)
Relative
maximum
Absolute
minimum
Relative
minimum
(a, b)
(h, i)
(c, d)
(e, g)
x
y
D

CỰC TRỊ TỰ DO

Hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền mở D chứa $P_0(x_0, y_0)$

1. P_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại một lân cận V của P_0 sao cho:

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in V$$

Bỏ dấu "= " ta gọi P_0 là điểm cực đại chặt của f.

2. Thay $\le$ bởi $\ge$ ta có định nghĩa điểm cực tiểu.

Lưu ý: dùng định nghĩa để xét cực trị là xét dấu biểu thức sau với (x,y) gần (x_0,y_0)

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

hay $\begin{cases} \Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\ \Delta x,\ \Delta y \text{ gần } 0 \text{ (nhưng không đồng thời } = 0) \end{cases}$

Nếu Δf giữ nguyên dấu trong 1 lân cận của (x_0, y_0) thì f đạt cực trị tại điểm này, ngược lại f không đạt cực trị tại đây.

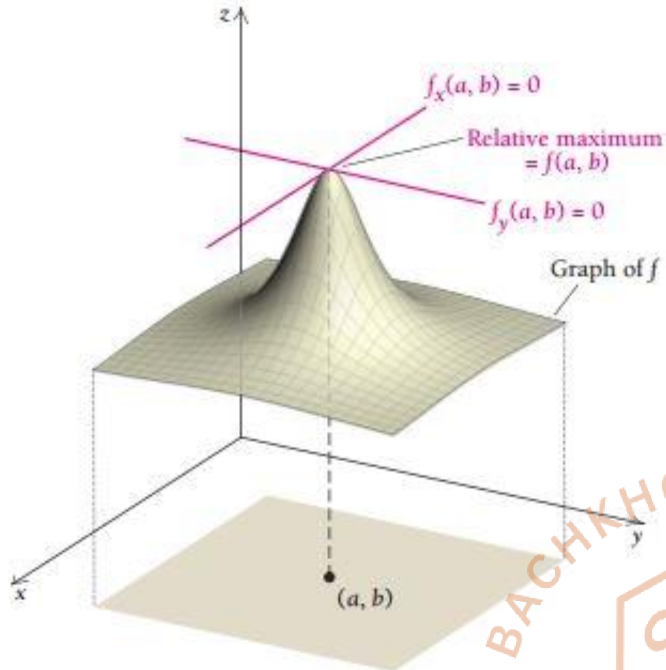


FIGURE 1

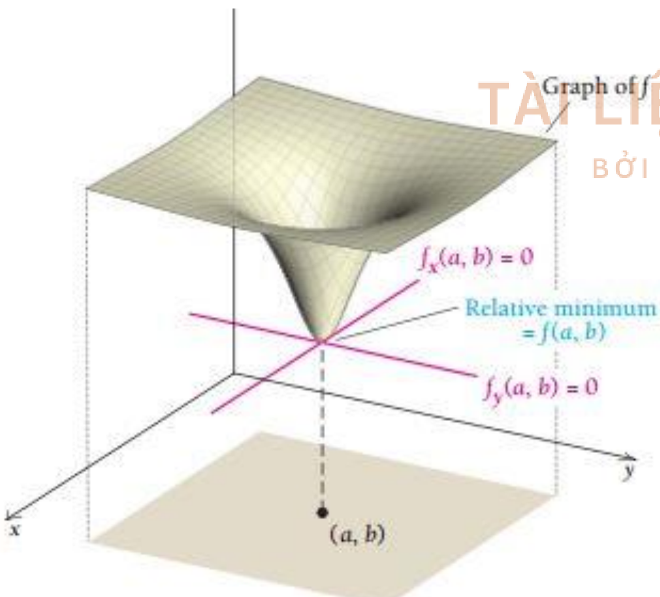


FIGURE 2

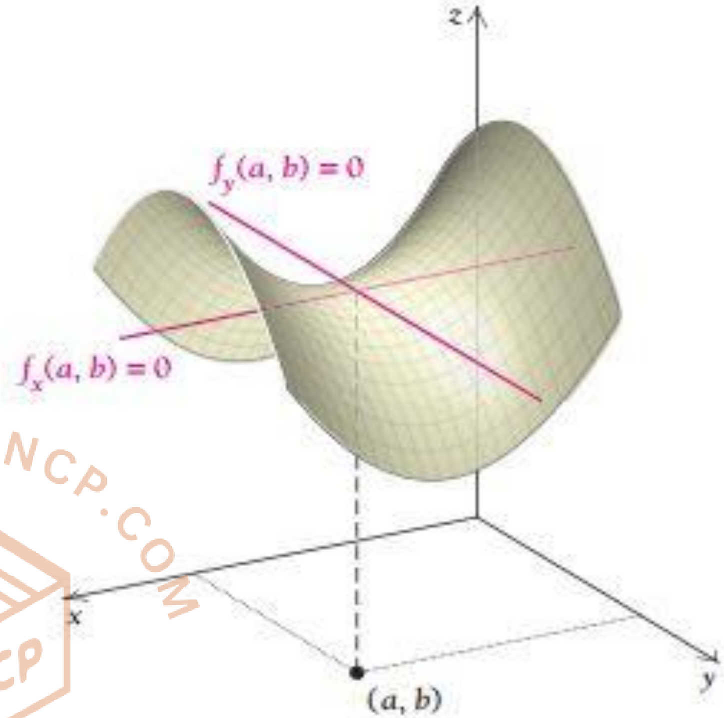
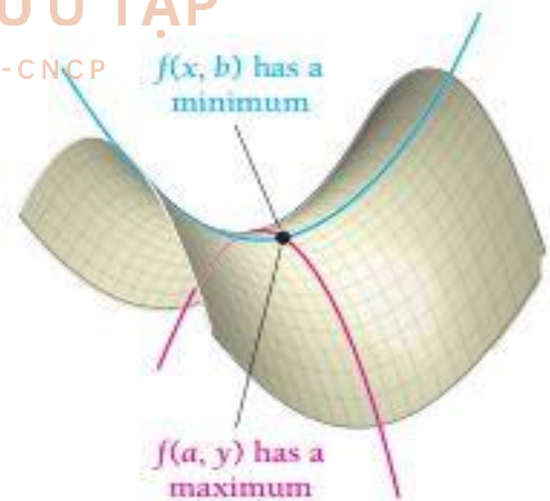
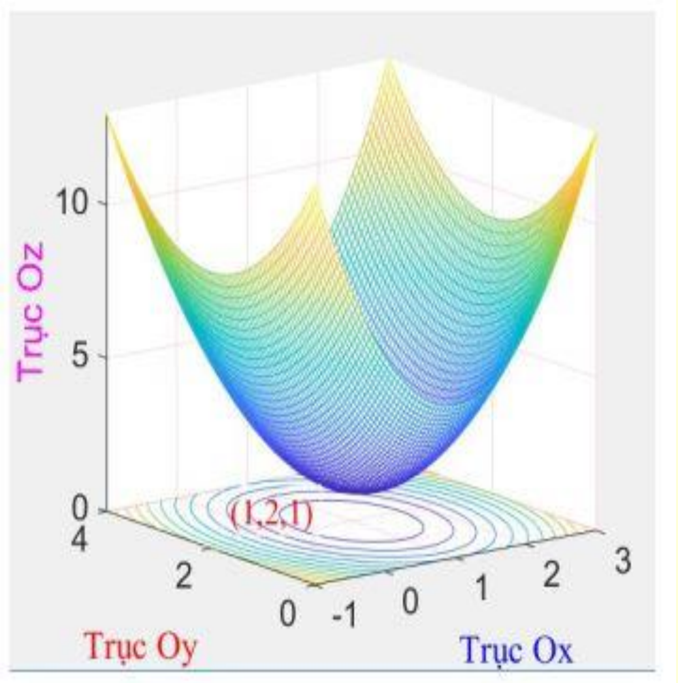


FIGURE 4





Ví dụ 1: Xét hàm $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7$

Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x - 4 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

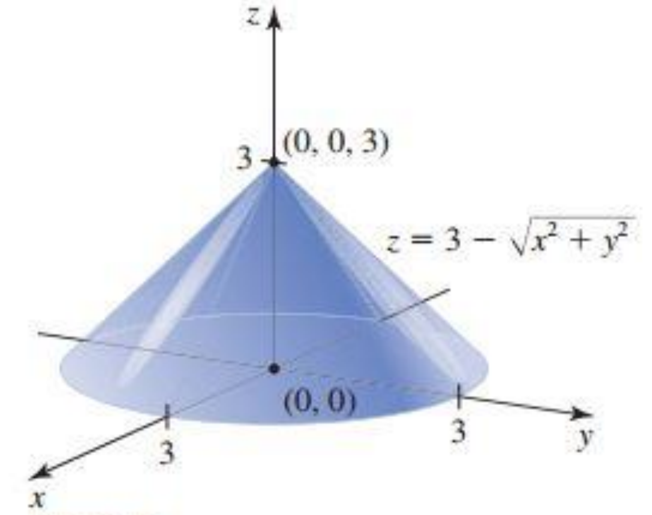
$$\Longrightarrow \quad P(1;2) \text{là điểm dừng}$$

Phân tích hàm đã cho thành các tổng bình phương, ta được:

$$f(x,y) = 2(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,y) \geq 1, \qquad \forall (x,y)$$

Vậy $f(1;2) = 1$ là giá trị cực tiểu địa phương và cũng là giá trị cực tiểu tuyệt đối của f.



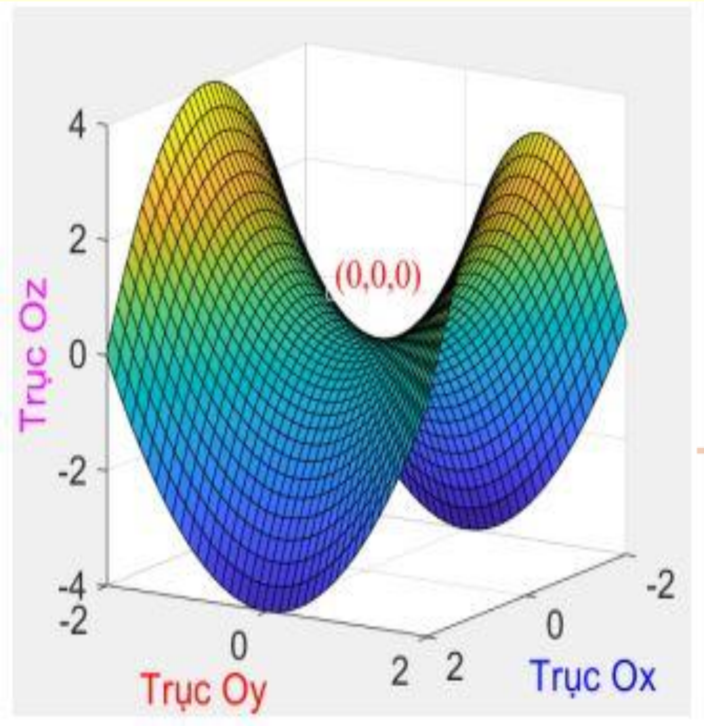
Ví dụ 2: Xét hàm $z = f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f'_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Đạo hàm riêng của f theo x, y không xác định tại (0,0)

Ta thấy, $f(x,y) \leq 3, \forall(x,y)$

Vậy $f(0,0) = 3$ là giá trị cực đại địa phương và là giá trị cực đại tuyệt đối của f.



Ví dụ 3: Xét hàm $f(x,y) = -x^2 + y^2$

Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y) = -2x = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \; P(0;0)$ *là điểm dừng*

Ta có: $f(0,0) = 0$

* Với các điểm trên trục Ox

➔ $f(x,0) = -x^2 < 0 \qquad (\forall x \neq 0)$

* Với các điểm trên trục Oy

➔ $f(0,y) = y^2 > 0 \qquad (\forall y \neq 0)$

Do đó, P(0,0) không là cực trị của f

➔ f không có cực trị.

Điều kiện cần của cực trị:

Nếu $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ thì

- Hoặc $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$
- Hoặc đạo hàm riêng tại P_0 không tồn tại.

Định nghĩa:

- $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$: P_0 là điểm dừng
- P_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow$ P_0 là điểm dừng hoặc đạo hàm của f tại P_0 không tồn tại

Điều kiện đủ của cực trị:

Hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $P_0(x_0, y_0)$ của f.

$$d^2f(P_0) = f''_{xx}(P_0)dx^2 + 2f''_{xy}(P_0)dxdy + f''_{yy}(P_0)dy^2$$

1. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu chặt tại P_0.*
2. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại chặt tại P_0.*
3. *Nếu $d^2f(x_0,y_0)$ không xác định dấu thì f không đạt cực trị tại P_0*

Các bước để tìm cực trị hàm 2 biến

1. Giải hệ pt: $f'_x(x,y)=0,\ f'_y(x,y)=0 \Rightarrow (x_0, y_0)$

2. Tính : $A = f''_{xx}(x_0,y_0), B = f''_{xy}(x_0,y_0), C = f''_{yy}(x_0,y_0)$

và $\Delta = AC - B^2$

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$	f đạt cực tiểu chặt tại P_0
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$	f đạt cực đại chặt tại P_0
$\Delta < 0$	f không đạt cực trị tại P_0
$\Delta = 0$	Xét P_0 theo định nghĩa.

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm số sau: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm số sau: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy+1$

➢ *Bài giải*: Ta có: $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$

Ta tìm được các điểm tới hạn: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1), P_3(-1,-1)$

$$\mathrm{A} = f''_{xx} = 12x^2, \quad B = f''_{xy} = -4 \ , \quad C = f''_{yy} = 12y^2,$$

$$D = AC - B^2$$

- Tại $P_1(0,0)$: $A = C = 0, B = -4 \implies D = -16 < 0$

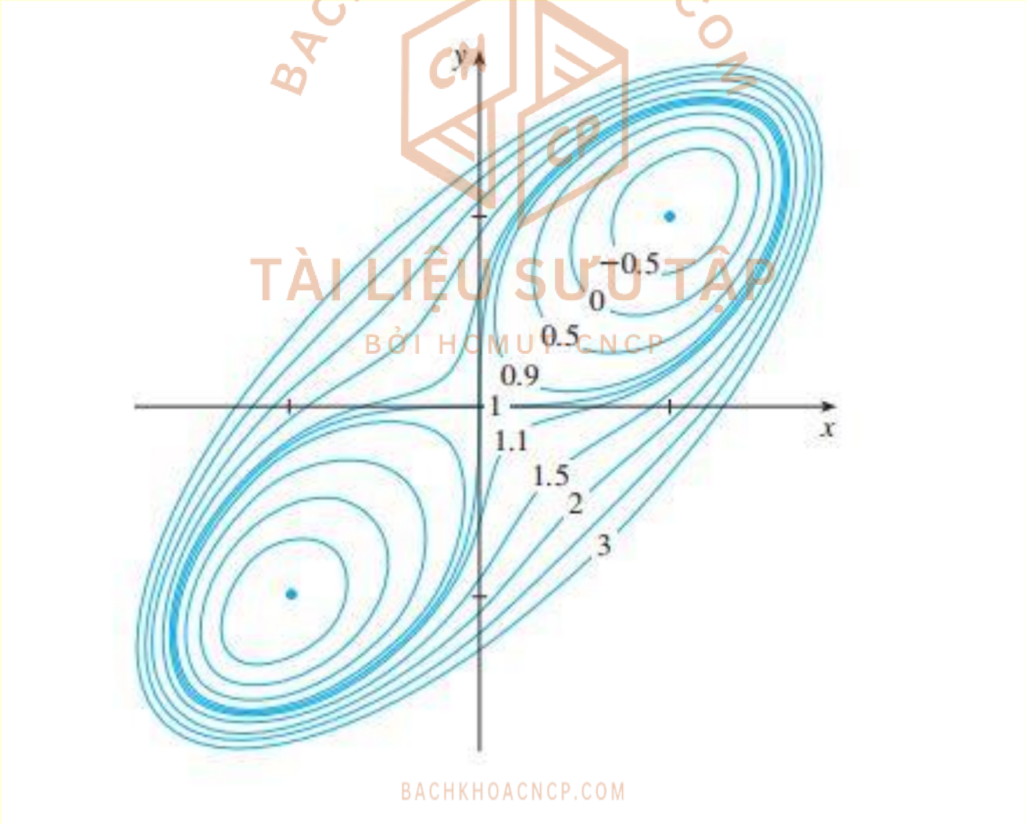
  ➔ f không có cực trị tại (0,0) hoặc P_1 là điểm yên ngựa

- Tại $P_1(1,1)$: $A = C = 12,\ B = -4 \implies D = 128 > 0$

  ➔ $f(1,1) = -1$ là giá trị cực tiểu địa phương của *f*.

- Tại $P_1(-1,-1)$: $A = C = 12,\ B = -4 \implies D = 128 > 0$

  ➔ $f(-1,-1) = -1$ là giá trị cực tiểu địa phương của *f*.



y
x
−0.5
0
0.5
0.9
1
1.1
1.5
2
3

Ví dụ 2: Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số:

$$f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Ví dụ 2: Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số:

$$f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

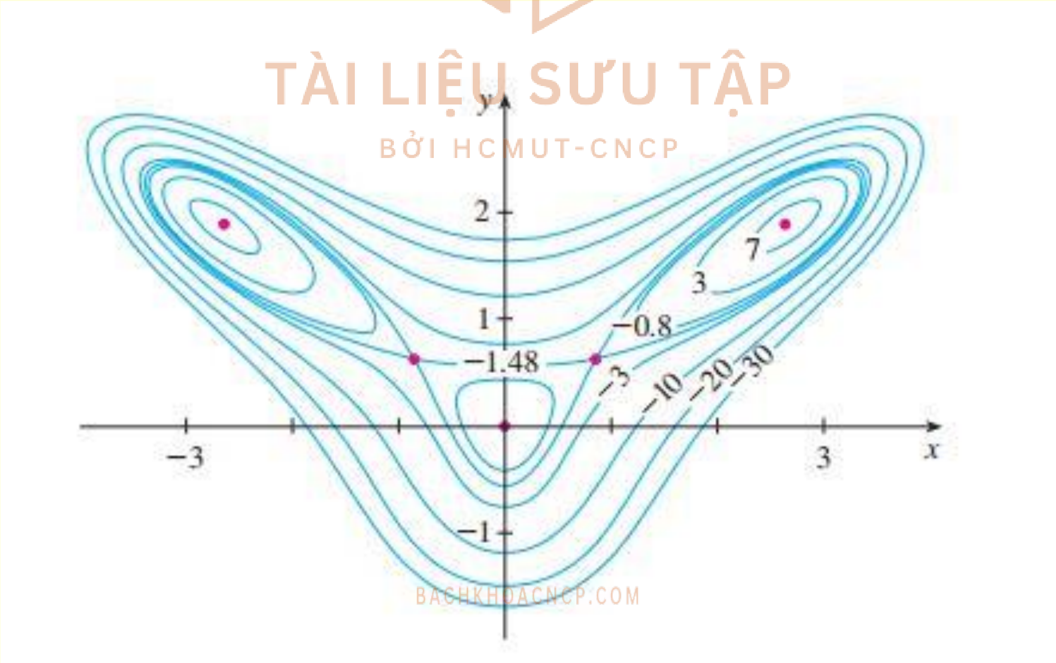
➢ *Bài giải*: Xét $\begin{cases} f'_x = 20xy - 10x - 4x^3 = 0 \\ f'_y = 10x^2 - 8y - 8y^3 = 0 \end{cases}$

Ta tìm được các điểm tới hạn:

$P_1(0,0)$, $P_2(2.64, 1.9)$, $P_3(-2.64, 1.9)$, $P_4(0.86, 0.65)$, $P_5(-0.86, 0.65)$

Xét tại từng điểm như bài trên, ta được:

- Điểm cực địa địa phương: $P_1(0,0)$, $P_2(2.64, 1.9)$, $P_3(-2.64, 1.9)$
- Điểm yên ngựa: $P_4(0.86, 0.65)$, $P_5(-0.86, 0.65)$



Ví dụ 3: Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y + 2$$

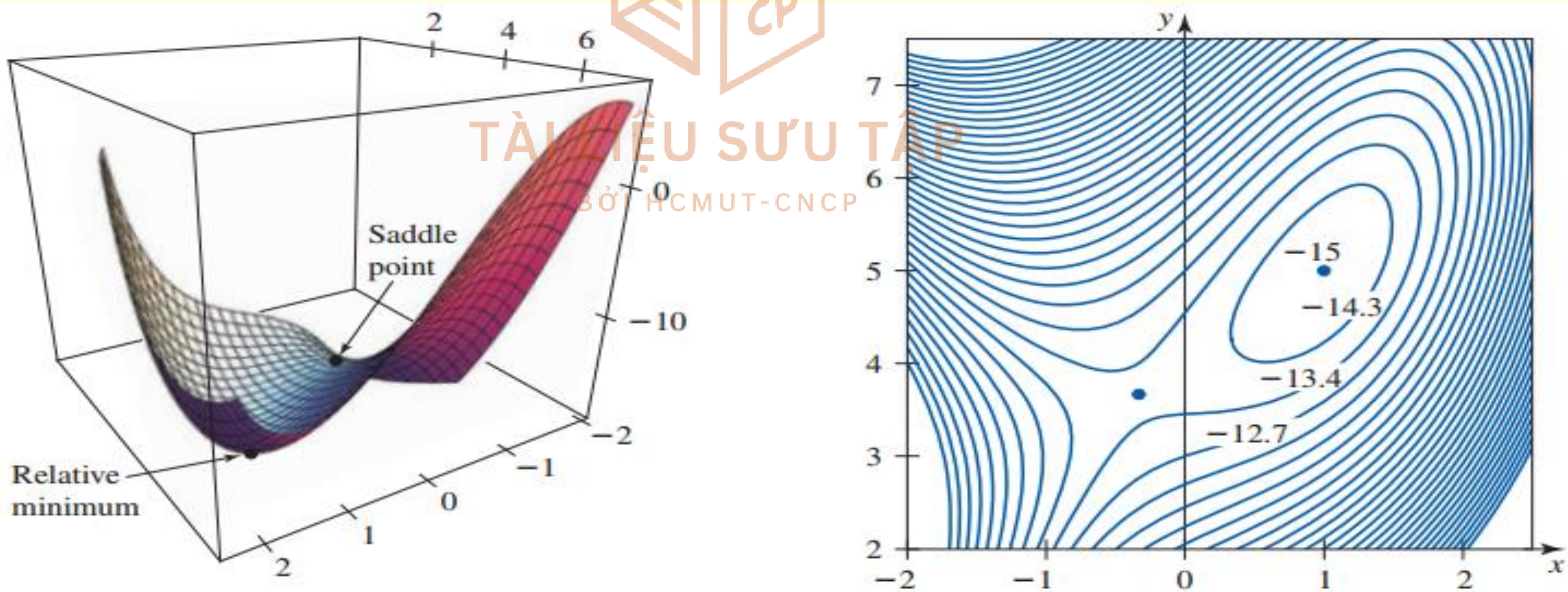


FIGURE 6 (a) The graph of $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y + 2$ (b) The contour plot of f

Bài 1: John quản lý một cửa hàng tạp hóa có hai nhãn hiệu thức ăn cho mèo, nhãn hiệu A có giá thu vô là 30 cents một lon và nhãn hiệu B có giá thu vô là 40 cents một lon. Anh ta ước tính rằng nếu thương hiệu A được bán với giá x cent/lon và thương hiệu B với giá y cent /lon, thì mỗi ngày sẽ có khoảng $70 - 5x + 4y$ lon thương hiệu A và $80 + 6x - 7y$ lon thương hiệu B được bán ra. John nên định giá từng thương hiệu như thế nào để tối đa hóa tổng lợi nhuận hàng ngày từ việc bán thức ăn cho mèo? (Giả sử rằng lợi nhuận hàng ngày lớn nhất xảy ra ở mức tối đa tương đối.)

Bài 2: Một công ty sản xuất hai loại có số lượng sản phẩm Q_1, Q_2 với mức giá lần lượt là $P_1 = 60, P_2 = 75$ và hàm tổng chi phí là:

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Tìm số lượng sản phẩm Q_1, Q_2 cần sản xuất để công ty đạt lợi nhuận tối đa.

VÍ DỤ

1/ Tìm cực trị z = f(x, y) = $x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x,y) = (0,0) \\ hay\ \ (x,y) = (1,1) \end{matrix}$$

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{xy} = -3,\ f''_{yy} = 6y$$

Tại (0,0): $A = f''_{xx}(0,0) = 0 \qquad B = f''_{xy}(0,0) = -3$

$$C = f''_{yy}(0,0) = 0$$

$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0 \Rightarrow$ f không đạt cực trị tại (0,0)

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{xy} = -3,\ f''_{yy} = 6y$$

Tại (1,1): $A = f''_{xx}(1,1) = 6 \quad B = f''_{xy}(1,1) = -3$

$$C = f''_{yy}(1,1) = 6$$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 36 - 9 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (1,1), f(1,1) = -1

2/ Tìm cực trị $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) = (1,1) \\ (x,y) = (-1,-1) \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2,\ f''_{xy} = -2,\ f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (1,1): $A = f''_{xx}(1,1) = 10 \quad B = f''_{xy}(1,1) = -2$

$$C = f''_{yy}(1,1) = 10$$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (1,1), f(1,1) = -2

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2,\ f''_{xy} = -2,\ f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (0,0): $A = f''_{xx}(0,0) = -2 \qquad B = f''_{xy}(0,0) = -2$

$$C = f''_{yy}(0,0) = -2$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0$$

Xét

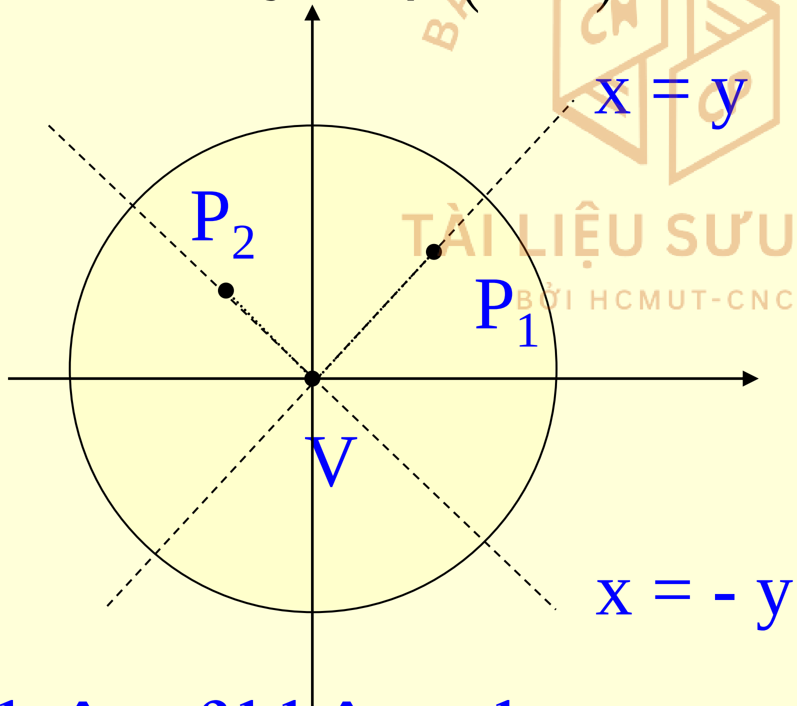
$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0)$$

$$= x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad = x^4 + y^4 - (x + y)^2$$

$$\Delta f(0,0) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$$

Nếu: $x = -y : \Delta f(0,0) = 2x^4 > 0$

Nếu: $x = y : \Delta f(0,0) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2) < 0$



Kết luận: f không đạt cực trị tại (0, 0).

Cách 2: Xét dấu Δf trong lân cận (0,0)

- Chọn dãy : $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$

Khi đó $\Delta f(x_n, y_n) = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} = \frac{1-n^2}{n^4} < 0$

- Chọn dãy : $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$

Khi đó $\Delta f(x_n, y_n) = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^4} > 0$

Hàm không đạt cực trị tại (0,0)

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2,\ f''_{xy} = -2,\ f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (-1,-1):

$$A = f''_{xx}(-1,-1) = 10\ B = f''_{xy}(-1,-1) = -2$$

$$C = f''_{yy}(-1,-1) = 10$$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại (-1,-1), f(-1,-1) = -2

Bài tập:

1. $z = f(x,y) = 3(x^2 - y^2) - x^3 - 4y$

2. $z = f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y^2} - 3$

3. $z = f(x,y) = e^{x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y}$

4. Tìm a, b sao cho (1;1) là điểm dừng của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4y + a\ln x + b\ln y$$

5. Tìm các giá trị a để

$$f(x,y) = 2a^3x^4 + y^4 - x^2 - 2ay^2$$

đạt cực đại tại $P(-\frac{1}{2}, 1)$

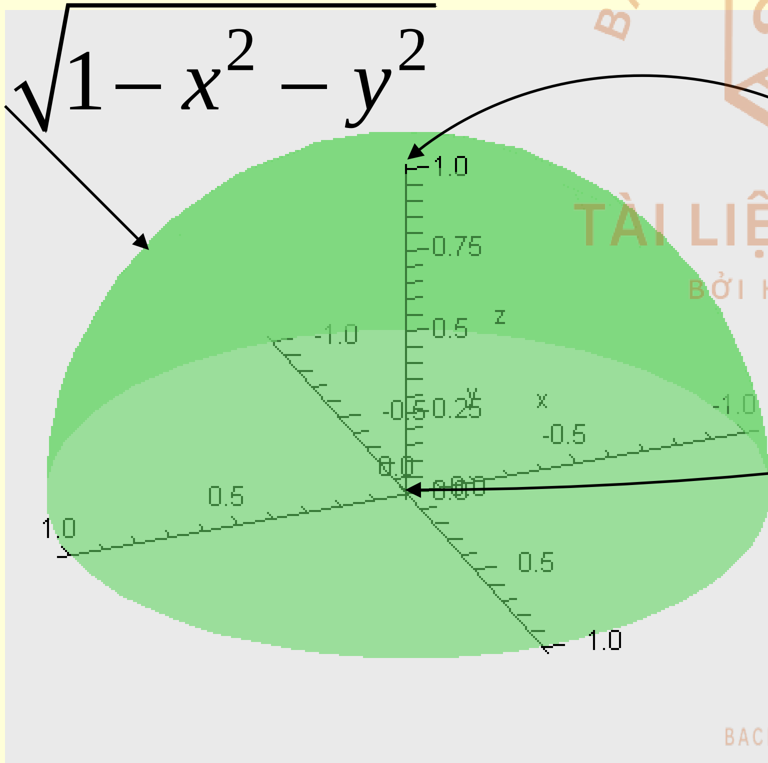
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRÊN MIỀN ĐÓNG VÀ BỊ CHẶN

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

Xét 2 bài toán:

Bài 1: Tìm cực trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

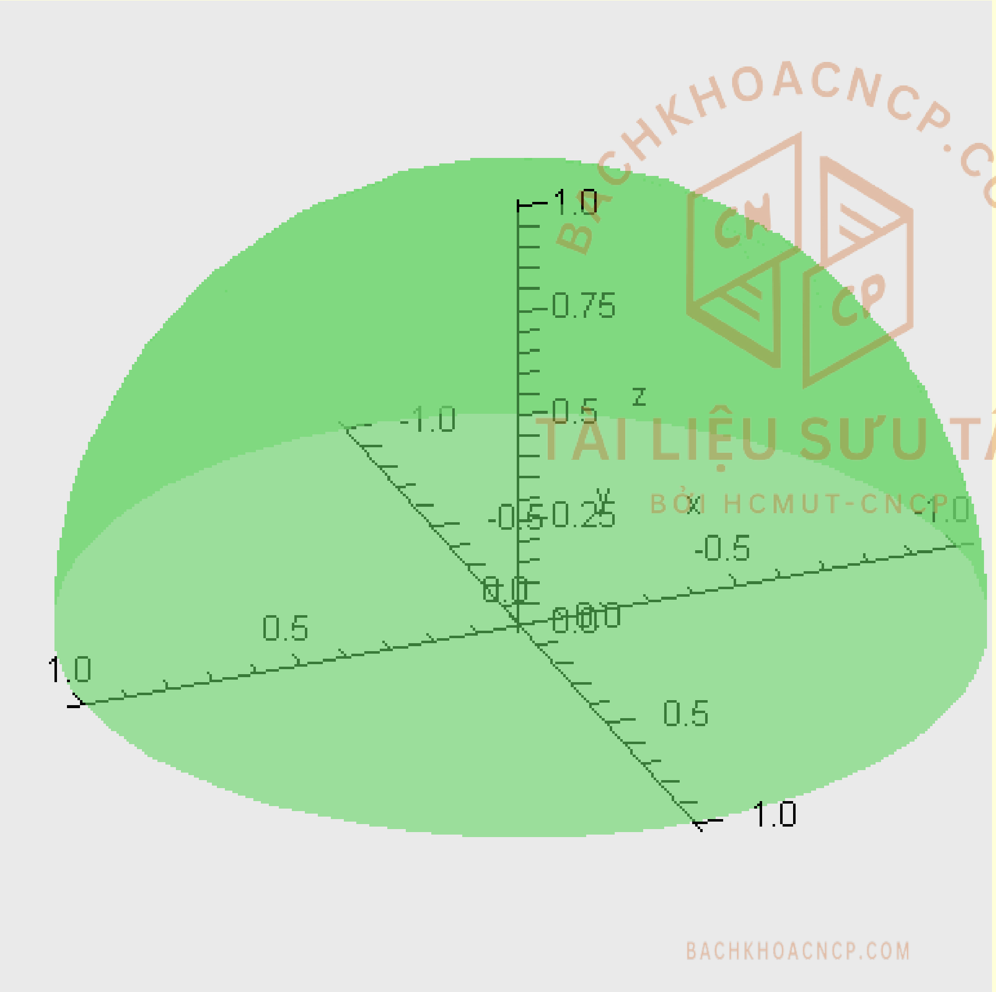


Cực đại đạt tại (0,0),

z = 1

Bài 2: Tìm cực trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

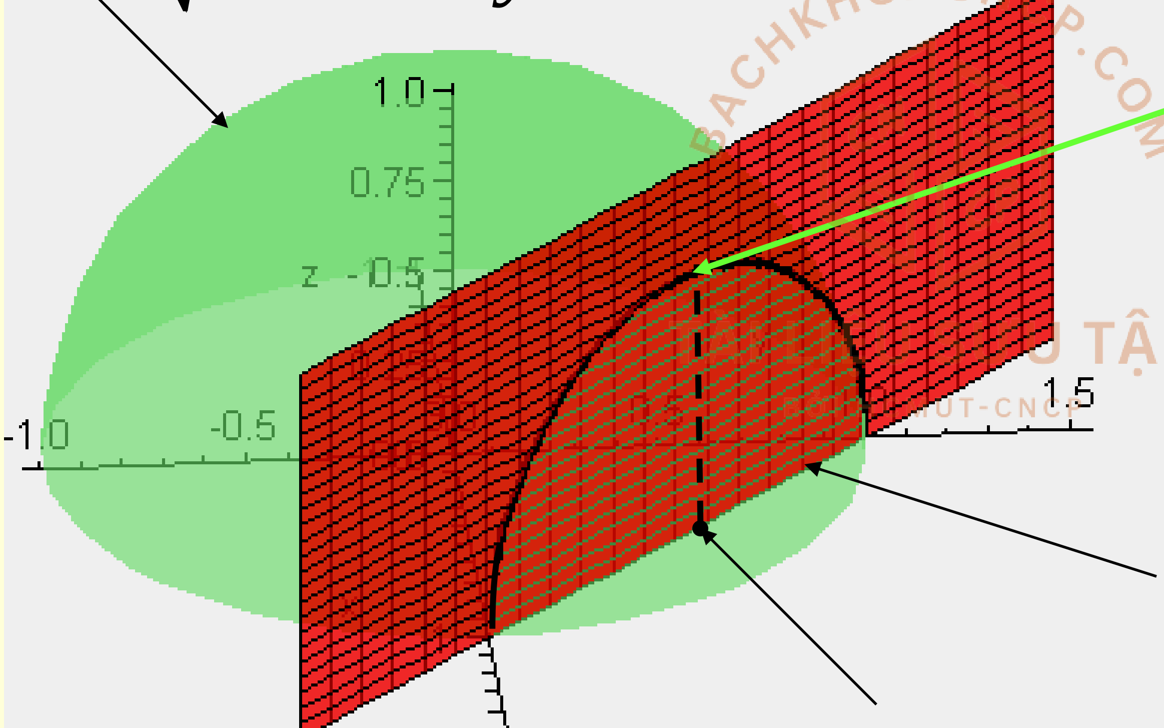
Thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$



Bài 2: Tìm cực trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$

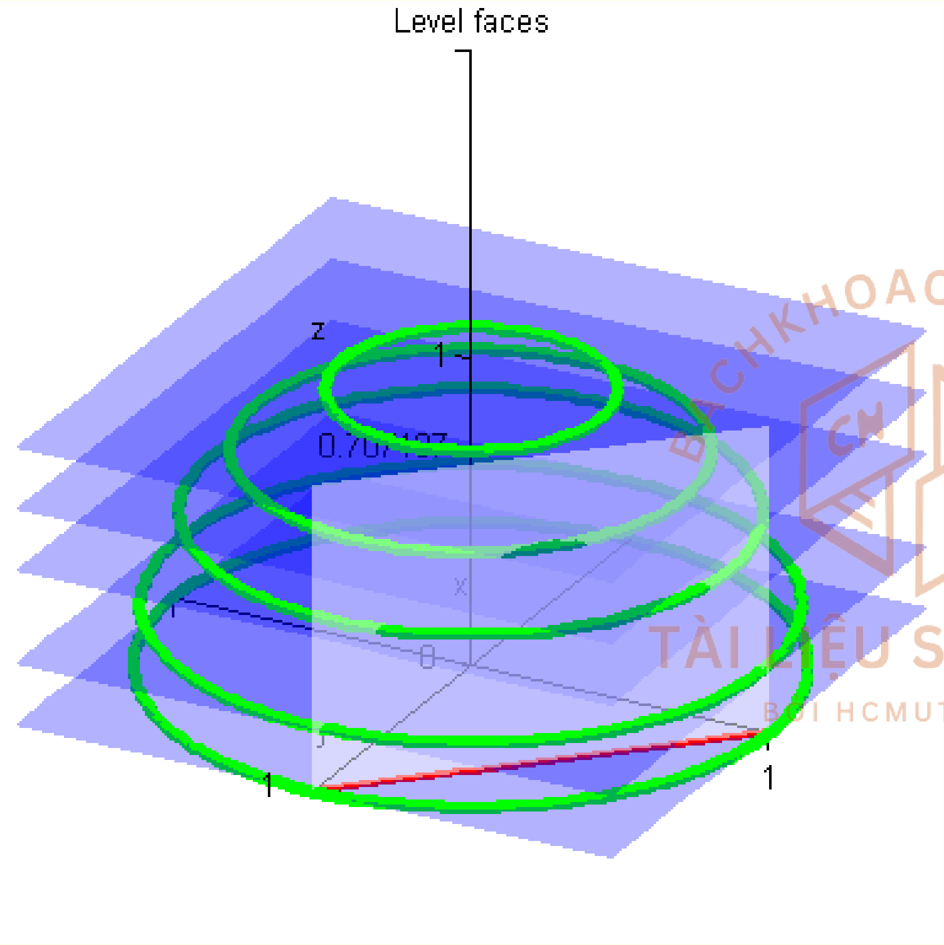
$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

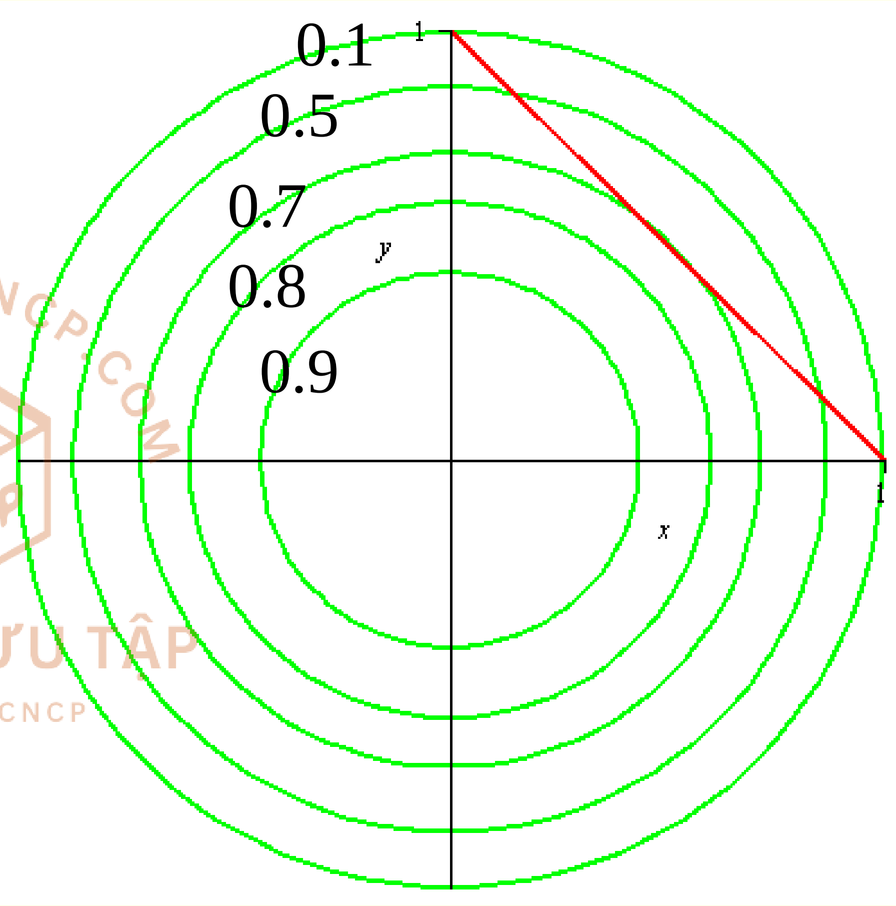


$z = 1/\sqrt{2}$

$x + y - 1 = 0$

Cực đại đạt tại (1/2, 1/2),


Level faces
z
1
0.707107
x
0
y
1
1


0.1
0.5
0.7
0.8
0.9
1
y
x
1

Định nghĩa:

Hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ đạt cực đại tại M_0 nếu tồn tại 1 lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M) \le f(M_0), \quad \forall M \in V \text{ và } \varphi(M) = 0$$

Tương tự cho định nghĩa cực tiểu có điều kiện.

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ khả vi trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$\varphi_x'^2(M_0) + \varphi_y'^2(M_0) \neq 0,$$

Nếu f đạt cực trị tại M_0 với điều kiện φ = 0 thì tồn tại $\lambda \in R$ sao cho

$$\begin{cases} f_x'(M_0) + \lambda\varphi_x'(M_0) = 0 \\ f_y'(M_0) + \lambda\varphi_y'(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

λ : nhân tử Lagrange

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

1. M_0 thỏa hệ (*) gọi là điểm dừng trong bài toán cực trị có điều kiện, cũng gọi là điểm dừng của hàm Lagrange

   $L(x,y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

2. $d\varphi(M_0) = 0$ (dx và dy liên kết với nhau theo hệ thức này)

Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ có các đhr đến cấp 2 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và M_0 là điểm dừng của L(x,y),

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$$

1. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại M_0.
2. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại có điều kiện tại M_0.

Các bước tìm cực trị có điều kiện hàm 2 biến

Loại 1: điều kiện bậc nhất theo x, y (tìm trên đường thẳng)

$$\varphi(x, y) = ax + by + c = 0$$

$\Rightarrow$ đưa về cực trị hàm 1 biến khi thay *y* theo x trong *f*.

Loại 2:(tổng quát) dùng pp nhân tử Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

B1: tìm điểm dừng của L(x, y) : $\begin{cases} L'_x(M_0) = 0 \\ L'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$

B2: Tính $L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}$

B3: Khảo sát từng điểm dừng $P_i(x_i, y_i), \lambda_i$

$$\begin{cases} d^2L(P_i) = L''_{xx}(P_i)dx^2 + 2L''_{xy}(P_i)\,\mathrm{dxdy} + L''_{yy}(P_i)\,\mathrm{dy}^2 \\ d\varphi(x,y) = 0;\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases}$$

Xét dấu d^2L:

- d^2L xác định dương => Cực tiểu
- d^2L xác định âm => Cực đại

VÍ DỤ

1/ Tìm cực trị của $z = 1 - 4x - 8y$

thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

$$= 1 - 4x - 8y + \lambda\left(x^2 - 8y^2 - 8\right)$$

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{array}\right.$$

Điểm dừng: $\begin{cases} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{cases}$

$$L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = -16\lambda, \quad d\varphi = 2xdx - 16ydy$$

Tại $M_1(-4, 1)$, $\lambda = -1/2$

$$\begin{cases} d^2L(-4,1) = -dx^2 + 8dy^2 \\ d\varphi(-4,1) = -8dx - 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(-4,1) = -4dy^2 + 8dy^2 = 4dy^2 > 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M_1 là điểm cực tiểu có đk của f, $f(M_1) = 9$

$L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = -16\lambda, \quad d\varphi = 2xdx - 16ydy$

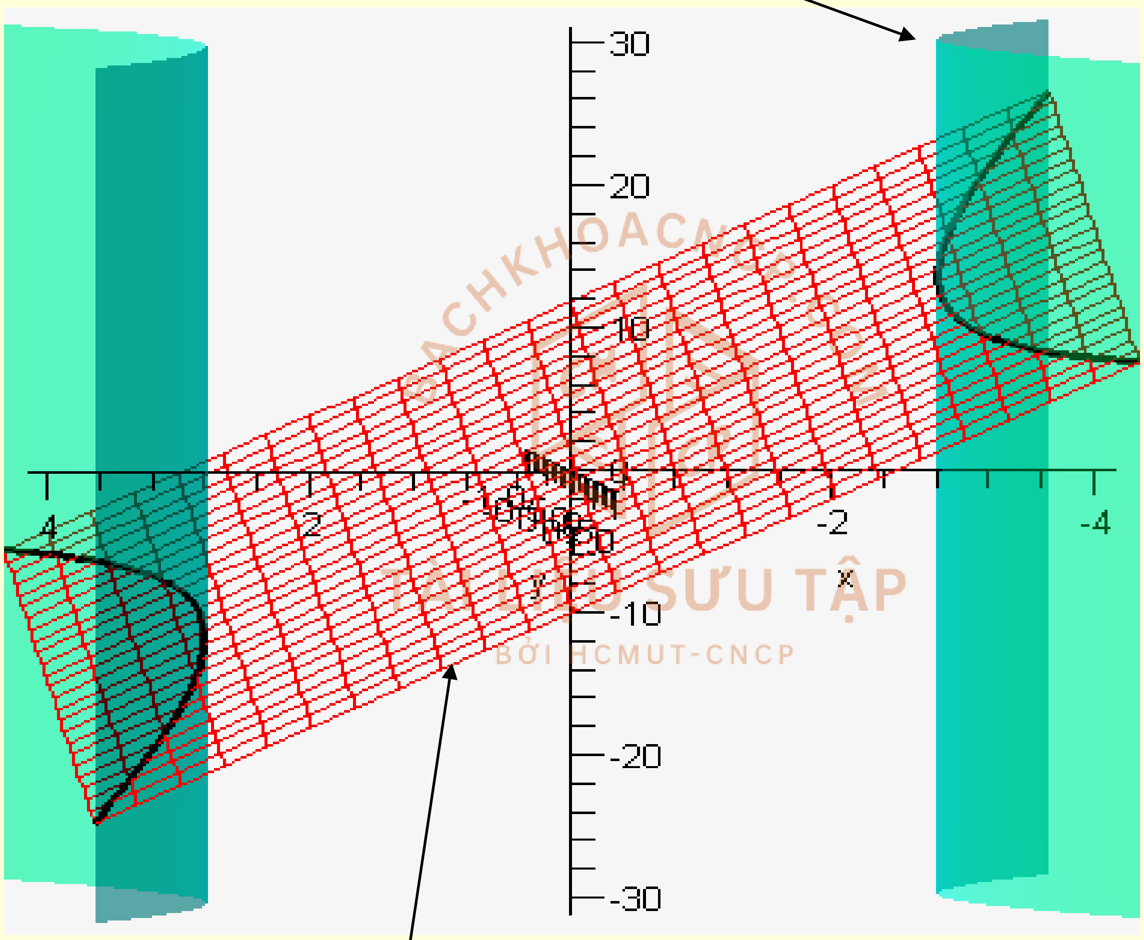
Tại $M_1(4, -1)$, $\lambda = 1/2$

$$\begin{cases} d^2L(4,-1) = dx^2 - 8dy^2 \\ d\varphi(4,-1) = 8dx + 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(-4,1) = 4dy^2 - 8dy^2 = -4dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M_2 là điểm cực đại có đk của f, $f(M_2) = 7$

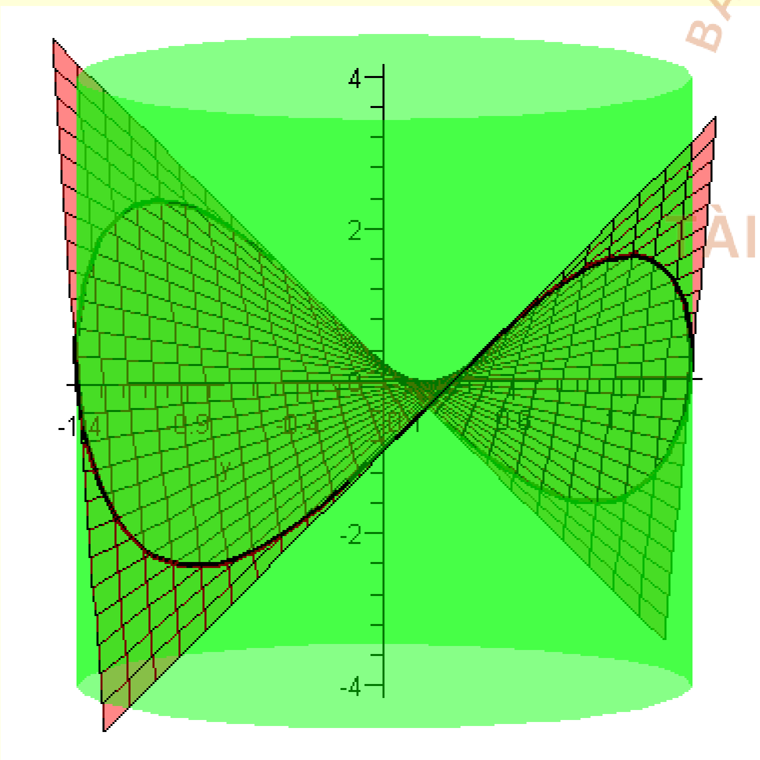
$$\varphi(x,y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$$

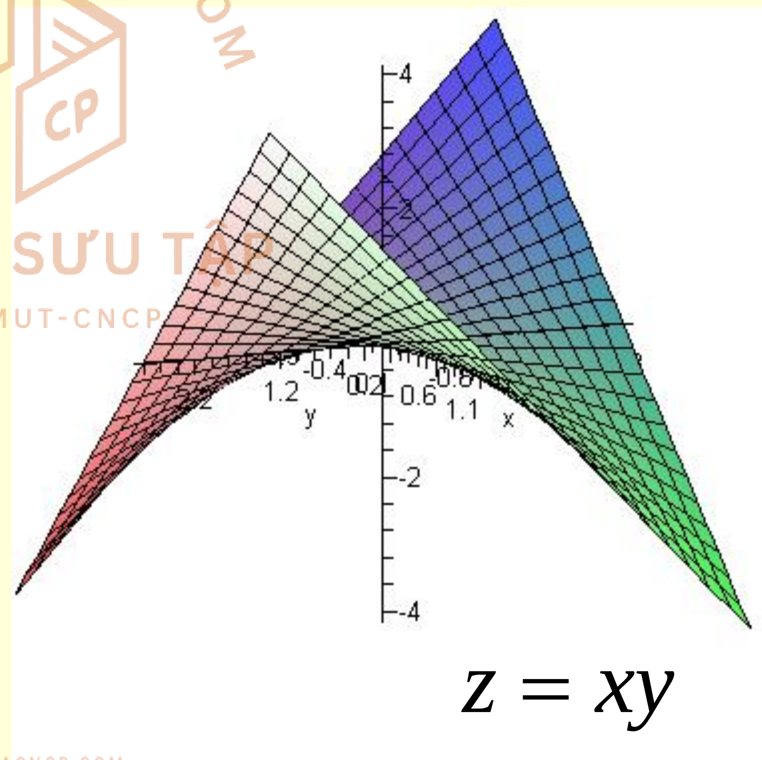


$$z = 1 - 4x - 8y$$

2/ Tìm cực trị của hàm $z = xy$

thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$





$$L(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$$

Điểm dừng của L là n$_0$ hệ:

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = y + \lambda\dfrac{x}{4} = 0 \\ L'_y(x,y) = x + \lambda y = 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2, (x,y) = (2,-1) \;\; hay \;\; (x,y) = (-2,1) \\ \lambda = -2, (x,y) = (2,1) \;\; hay \;\; (x,y) = (-2,-1) \end{array}\right.$$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}, \; L''_{xy} = 1, \; L''_{yy} = \lambda, \qquad d\varphi(x,y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_1(2, -1)$, $\lambda = 2$

$$\begin{cases} d^2L(P_1) = \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy \\ d\varphi(P_1) = \frac{1}{2}dx - dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(P_1) = 8dy^2 > 0 \\ dx = 2dy \end{cases}$$

Vậy f đạt cực tiểu có đk tại P_1, $f(P_1) = -2$.

Tương tự tại $P_2(-2, 1)$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}, \quad L''_{xy} = 1, \quad L''_{yy} = \lambda, \qquad d\varphi(x, y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_3(2, 1), \lambda = -2$

$$\begin{cases} d^2L(P_3) = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 + 2dxdy \\ d\varphi(P_3) = \frac{1}{2}dx + dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(P_3) = -8dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

Vậy f đạt cực đại có đk tại P_3, $f(P_3) = 2$.

Tương tự tại $P_4(-2, -1)$

3/ Tìm cực trị $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$

$$x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x \Rightarrow z = \sqrt{2x - 2x^2}$$

Bài toán trở thành tìm cực trị của z với $x \in (0, 1)$.

$$z'(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{2x - 2x^2}}$$

z' đổi dấu từ + sang – khi đi qua $x = 1/2$, nên z đạt cđại tại $x = 1/2$. $f_{cd} = 1/\sqrt{2}$

Vậy f đạt cđại có điều kiện tại $(x, y) = (1/2, 1/2)$.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT

Định lý: *f liên tục trên tập đóng và bị chặn D thì f đạt min, max trên D.*

Nhắc lại: tập compact là tập đóng (lấy tất cả các biên) và bị chặn (có thể được bao bởi 1 hình tròn)

Cách tìm gtln, gtnn

1. *Tìm điểm dừng của f trên miền mở của D (phần bỏ biên).*

2. *Tìm các điểm đặc biệt trên biên của D*

   a. *Điểm dừng của hàm Lagrange (tổng quát).*

   b. *Nếu trên biên có thể chuyển f về hàm 1 biến, tìm các điểm có khả năng đạt min, max của hàm 1 biến này.*

3. *So sánh giá trị của f tại các điểm trên* $\Rightarrow$ min, max

1/ Tìm gtln, gtnn trên hình tròn D: $(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$ của : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$

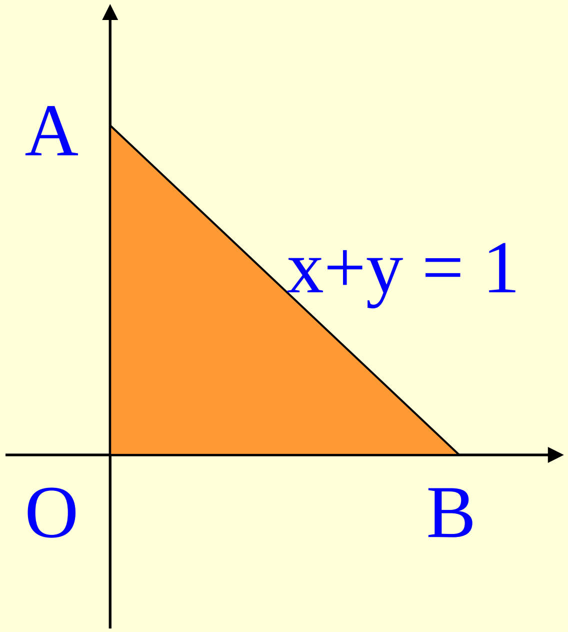
2/ Tìm gtln, gtnn trên hình tròn D: $x^2 + y^2 \leq 1$ của :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$$

Tìm điểm cao nhất của phần mặt phẳng $z = 2x - 3y - 1$ khi (x, y) thay đổi trong miền $D: y^2 \leq x \leq 1$

3/ Trên tam giác OAB, với O(0, 0), A(0, 1) và B(1, 0), tìm các điểm M(x, y) có tổng bình phương khoảng cách đến các đỉnh là lớn nhất, bé nhất.

3/ Trên tam giác OAB, với O(0, 0), A(0, 1) và B(1, 0), tìm các điểm M(x, y) có tổng bình phương khoảng cách đến các đỉnh là lớn nhất, bé nhất.



$$OM^2 = x^2 + y^2,$$

$$AM^2 = x^2 + (y-1)^2,$$

$$BM^2 = (x-1)^2 + y^2$$

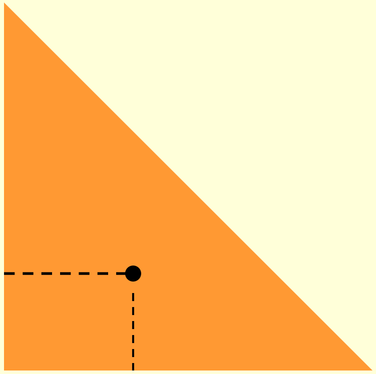
Đặt $z = OM^2 + AM^2 + BM^2$

$$\Rightarrow z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

Bài toán trở thành: tìm gtln, gtnn của z trên

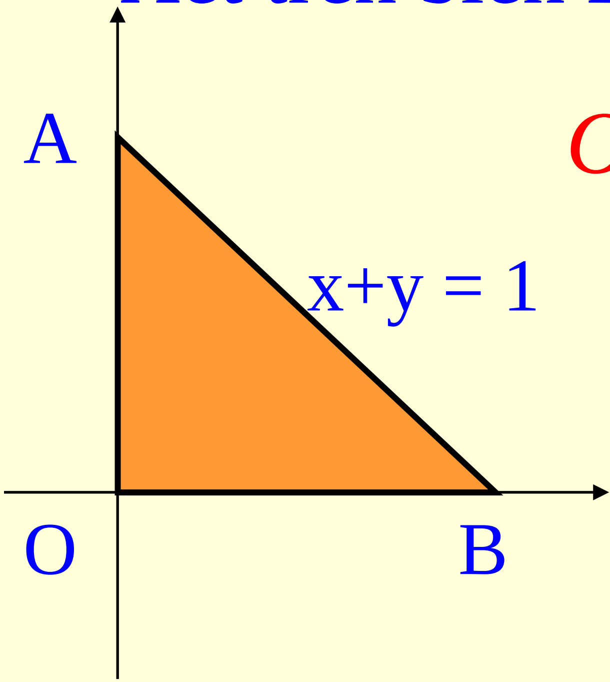
$$D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D là nghiệm hệ :



$$\begin{cases} f'_x = 6x - 2 = 0 \\ f'_y = 6y - 2 = 0 \\ x > 0, y > 0, x + y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Xét trên biên D $\quad z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$



$OA: x = 0, 0 \le y \le 1, z = 3y^2 - 2y + 2$

$$z'_y = 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt:

(0,0), (0,1), (0,1/3)

$OB: y = 0, 0 \le x \le 1, z = 3x^2 - 2x + 2$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (0,0), (1,0), (1/3,0)

$$z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

$AB : y = 1 - x, 0 \le x \le 1,$ $z = 6x^2 - 6x + 3$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: (1/2,1/2), (0,1), (1,0)

Giá trị f tại các điểm đặc biệt

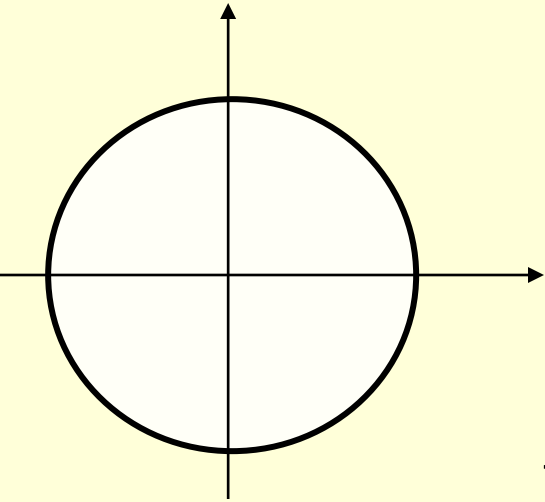
$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3},\ f(0,0) = 2,\ f(0,1) = f(1,0) = 3$$

$$f\left(0,\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3},0\right) = \frac{5}{3},\ f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3},\ f_{\max} = f(1,0) = f(0,1) = 3$$

3/ Tìm gtln, gtnn trên hình tròn D: $x^2 + y^2 \le 1$ của :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$$



Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D là nghiệm hệ

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (3/2, -2) \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

(loại)

Trên biên D: $x^2 + y^2 = 1$, xét hàm Lagrange

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Điểm đặc biệt trên biên là điểm dừng của

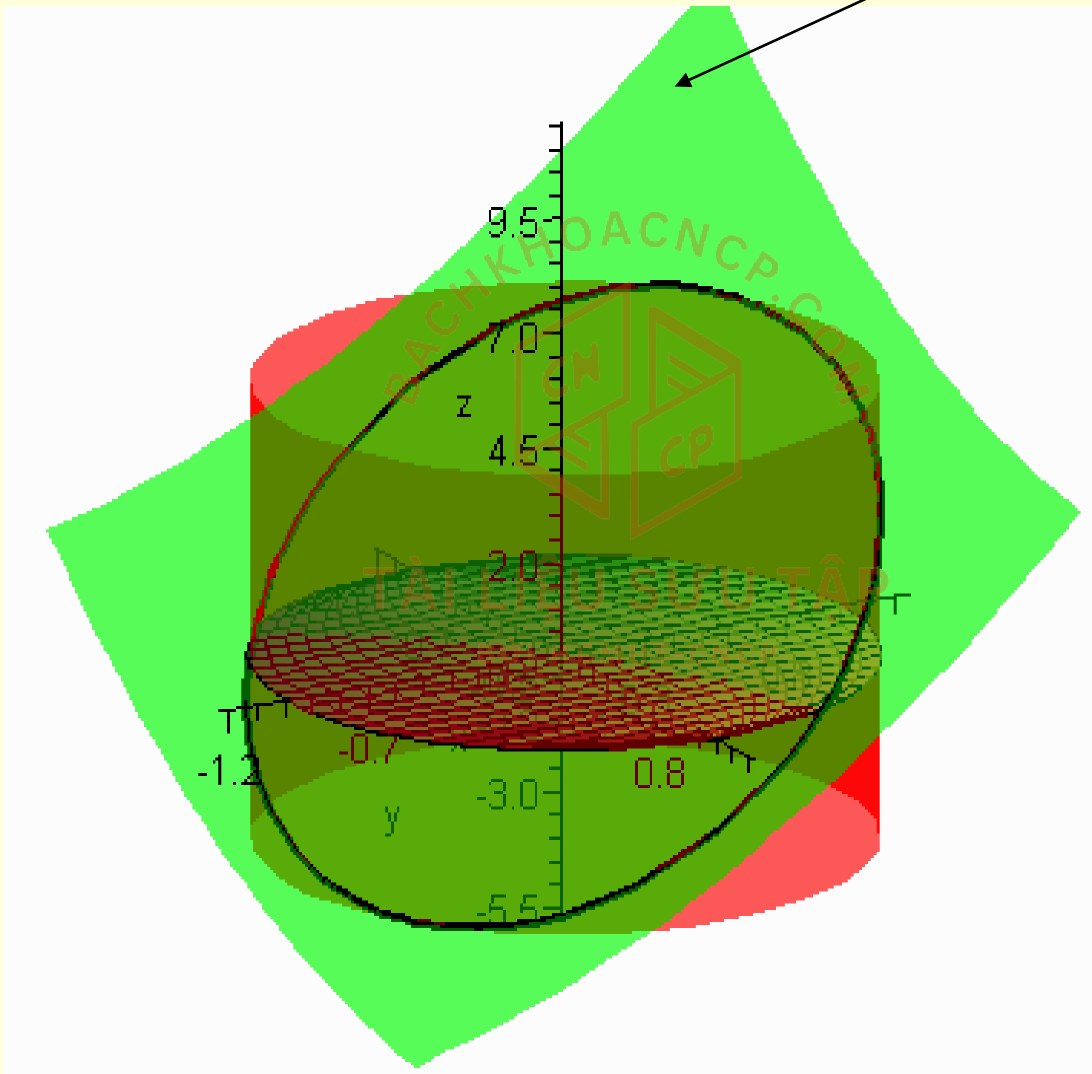
$$L(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

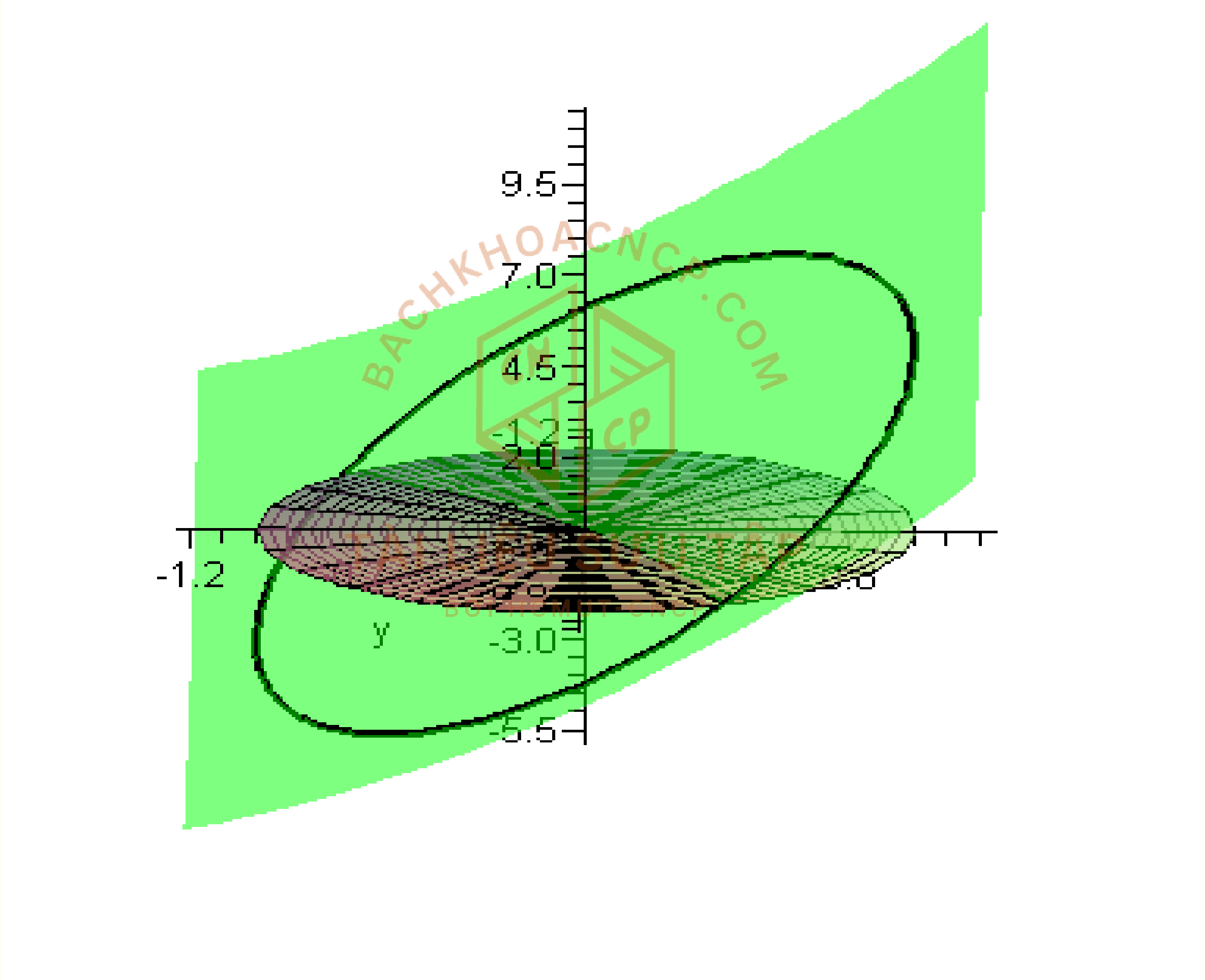
$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y) = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \; hay \; (x,y) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 6, \quad f\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -4$$

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$





9.5
7.0
4.5
2.0
-1.2
y
-3.0
-5.5

Ví dụ 2: Một hình hộp chữ nhật không có nắp được làm từ 12m² bìa các tông. Tìm thể tích lớn nhất của hộp như vậy.

<u>Giải:</u> Đặt cạnh của hình hộp chữ nhật là *x*, *y*, *z*

$$V = x.y.z$$

Chúng ta có thể biểu diễn V như hàm số theo 2 biến bằng cách sử dụng diện tích của bốn mặt và đáy của hình hộp là

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

$$\Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$\Rightarrow V = xy.\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2} \qquad V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

x, y là các cạnh của hình hộp nên >0

$$\Rightarrow \begin{cases} 12 - 2xy - x^2 = 0 \\ 12 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$$

$V_{\max}$ tại $x = 2, y = 2, z = 1,$

$$V_{\max} = 2.2.1 = 4m^3$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x,y) = xy^2$ và miền $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$. Tìm GTLN M của hàm f trên D.

(A) M = 0 (B) M = -2 (C) M = 2 (D) M = 3

Câu 11. Tìm GTLN M và GTNN m của $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ trên miền $D : x = 1, y = 1, x + y = 1$

(A) M=2, m=0 (B) M=4, m=1 (C) M=4, m=2 (D) M=2, m=1

Bài 1: Dùng cực trị tìm khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng là giao của 2 mp: $y + 2z = 12$ và $x + y = 6$.

Bài 2: Điểm nào trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 4$ gần gốc tọa độ nhất.

Bài 3: Xét 1 doanh nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí là: $CP = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10$ Với giá thị trường sản phẩm 1 có giá là \$160 và sản phẩm 2 có giá là \$120. Hãy tính sản lượng của 2 sản phẩm 1 và 2 tương ứng (x,y) để hàm lợi nhuận đạt giá trị tối đa.

Bài 4: Một tòa nhà hình chữ nhật được thiết kế để làm giảm thiểu sự mất nhiệt. Các bức tường phía đông và phía tây mất nhiệt với tỷ lệ 10 đơn vị/m^2 mỗi ngày, các bức tường phía bắc và phía nam mất nhiệt với tỷ lệ 8 đơn vị/m^2 mỗi ngày, sàn nhà mất nhiệt với tỷ lệ 1 đơn vị/ m^2 mỗi ngày, trần nhà mất nhiệt 5 đơn vị /m^2 mỗi ngày. Mỗi bức tường ít nhất phải dài 30m, chiều cao ít nhất phải là 4m và thể tích phải đúng $4000m^3$.

a) Tìm và phát họa miền MXĐ của sự mất nhiệt như một hàm theo chiều dài của các mặt.

b) Tìm các chiều mà giảm thiểu sự mất nhiệt. (Kiểm tra các điểm tới hạn và các điểm trên biên của mxđ)

c) Bạn có thể thiết kế một tòa nhà sự mất nhiệt thậm chỉ còn ít hơn nữa nếu xóa bỏ các giới hạn độ dài của bức tường không?