

ĐÁP ÁN - GT1 - K201

1 CHƯƠNG 1: DÃY SỐ THỰC

1.1 Tính chất dãy số

1. Khảo sát đơn điệu:

- a. tăng
- b. tăng
- c. giảm

2. Chứng minh bị chặn

- a. $0 \leq a_n < 1; \forall n \geq 1$
- b. dãy giảm mà : $0 < a_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$

1.2 Giới hạn dãy số:

- a. 3
- b. 1

1.3 Dãy con

1.3.1

$$a_{2k} = \frac{2k+1}{4k^2}; a_{2k-1} = \frac{2k}{(2k-1)^2}; a_{k^2} = \frac{k^2+1}{k^4}; a_{3k+2} = \frac{3k+3}{(3k+2)^2}$$

1.4

1. Do $\lim a_n = 1$ nên các dãy con cũng có giới hạn là 1.

$$2. \lim a_{2k} = \lim \frac{(-1)^k}{k-2} = 0; \lim a_{2k+1} = \lim \frac{k^2}{k^3+1} = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$$

2 CHƯƠNG 2: HÀM SỐ

2.1

- $P(8) = 15,9303 \Rightarrow$ Dân số của Mỹ ở độ tuổi 73 bị mắc bệnh là 16 %
 - Dân số của Mỹ ở độ tuổi 90 tương ứng $x=25 \Rightarrow P(25) = 70,0923 \Rightarrow$ dân số của Mỹ ở độ tuổi 90 bị mắc bệnh là 70%
- Tổng chi phí: $C_T(x) = C(x) + 10.000$
 $R(x) = x(-0,0005x + 20)$
 $P(x) = R(x) - C_T(x) = -0,0004x^2 + 10x - 10000$
Lợi nhuận đạt 10000 USD khi: $P(x) = 10000 \Leftrightarrow x = 2193$ hay $x = 22808$.
- Theo đồ thị thì sau 2h lượng nicotine giảm còn 1 nửa. Nếu đồ thị cắt trục hoành $\Rightarrow N=0$ có nghĩa là lượng nicotine trong cơ thể đã được đào thải hết.
- $f(t) = at + b$
 - $f(t) = 0.4t + 15$
 - $f(t) = -0.4t + 15$
- $t = 0 \Rightarrow h(t) = 130 \Rightarrow$ Vào năm 1990 mức sào cao nhất người vô địch đạt được là 130 inches.
 - $a = 2$ có nghĩa là mỗi năm, mức sào cao nhất mà vận động viên đạt được tăng thêm 2 inches.
- Từ giả thiết của đề bài ta xây dựng được mô hình tương thích như sau: $y = 50000 \cdot (1 + 4.5\%)^x$
 - Dân số năm 2018 là: $y(10) = 50000 \cdot (1 + 4.5\%)^{10} \approx 77648$
 - Dân số đạt 100.000 vào khoảng năm 2024 vì: $50000 \cdot (1 + 4.5\%)^x = 100.000 \Leftrightarrow x \approx 15.7$
- $f(x) = \begin{cases} 200x + 5000 & , x \leq 100 \\ 20000 + 170(x - 100) + 5000 & , x > 100 \end{cases}$

2.2

- $D = [-1, \frac{1}{2}]$, $R = \left(-\infty, \ln \frac{9}{8}\right]$.
- $D = [20; 80]$, $R = [10.000.000; 25.000.000]$

2.3

- Vì $R_f \not\subset D_g \Rightarrow$ Không tồn tại gof
 $f \circ g : (0; +\infty) \rightarrow R$
 $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\ln x) = \sin(\ln x)$

$$2. \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3 + \frac{x+1}{x-2}; x \neq 2$$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x^3 + x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x - 2}; x \neq 1$$

$$3. \quad C(t) = C(p(t)) = 0.5(10 + 0.1t^2) + 1.$$

Mức CO trung bình hằng ngày đạt 6.8‰ khi: $t = 4$

2.4

1. Vì $R_f = (0; +\infty)$ và $\forall x \in (2; +\infty), f'(x) < 0$ nên f là song ánh.

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{1 - x}$$

2. a. $f(4)$ là số loài chim trên hòn đảo đến năm 2011.

b. Số năm tính từ 2007 mà có 4000 loài chim trên hòn đảo.

3. Đồ thị trong hình C có dáng điệu đối xứng với đồ thị của f qua đường $y = x$ nên là đồ thị của f^{-1} .



3 CHƯƠNG 3: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

3.1 Giới hạn hàm số

- 1.
- 4 thừa đất.

3.2 Vô cùng lớn, vô cùng bé

- $2x^2$
- x
- $f(x), g(x)$ cùng bậc 1.
 - $g(x)$ bậc cao hơn $f(x)$.
- Nếu trong 1 giờ có n chu kỳ thì lượng caffeine trong cơ thể còn lại sau t giờ là

$$P(t) = 100 \left(1 - \frac{0.17}{n}\right)^{nt} \text{ (mg)}.$$

Viết lại dạng mũ cơ số e:

$$P(t) = 100e^{nt \ln(1 - \frac{0.17}{n})} \text{ (mg)}.$$

Nếu n rất lớn thì $\frac{0.17}{n}$ rất nhỏ, sử dụng thay tương đương cho ln

$$P(t) = 100e^{nt(-\frac{0.17}{n})} = 100e^{-0.17t} \text{ (mg)}.$$

- Khi t đủ lớn, lượng caffeine trong cơ thể không còn nữa vì $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0 \text{ (mg)}$.

3.3 Tiệm cận của đường cong

- TCĐ : $x = \frac{2}{3}$; TCN $y = \frac{1}{3}$ và $y = -\frac{1}{3}$. Không có TCX.
- TCĐ : $x = 0$ (Khi $x \rightarrow 0^+$). TCX: $y = x$.

3.4 Hàm số liên tục

- Tại $x = 0$: không liên tục trái, liên tục phải, không liên tục.
 - Tại $x = 1$: liên tục.
- Hàm chi phí là : $P(x) = \begin{cases} 7,5x & , x \leq 50 \\ 6,75x & , x > 50 \end{cases} \text{ (USD)}.$
 $P(40) = 300 \text{ (USD)}; P(50) = 375 \text{ (USD)}; P(60) = 405 \text{ (USD)}.$
P không liên tục tại $x = 50$ (lít).

4 CHƯƠNG 4: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

4.1 Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$

4.1.1 •

1. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$
2. $f'(1) = 0$, không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

4.1.2 Ý nghĩa thực tế của đạo hàm

1. a. Thể tích nước thoát ra ngoài theo thời gian t là:
$$V_1(t) = 1000 - 1000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2, 0 \leq t \leq 60$$

Tốc độ nước thoát ra ngoài theo thời gian t là :
$$V_1'(t) = \frac{100}{3}\left(1 - \frac{t}{60}\right), 0 \leq t \leq 60$$

b. Vận tốc dòng nước tại các thời điểm là : $V_1'(0), V_1'(10), \dots$
Lượng nước còn lại là: $V(0), V(10), \dots$
2. Chi phí cận biên khi sản xuất 10 đơn vị sản phẩm A là: $C'(10) = 122$.

4.1.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

1. $k = f'(-1) = -3$
2. Tiếp tuyến tại $(x_0, f(x_0))$ song song với đt $y = 3x + 2$ nên $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6}$

4.1.4 Các phép toán đạo hàm

A. 1. $P'(t_0) = -0.04$ (KP/s): áp suất giảm 0.04 (KP/s)

B. Đạo hàm hàm hợp

1. $h'(1) = f(0) + 4; k'(0) = 5$.
2. $32\pi t \text{ m}^2/\text{p}$.

C. Đạo hàm hàm ngược

1. $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\cosh(0)} = 1$.
2. $(S^{-1})'(20) = \frac{1}{9}$. Tại thời điểm số ca mắc mới là 20 ca thì tốc độ lây nhiễm đang tăng 9 ca/ngày.

4.2

4.2.1

1. Ta có $f''(\frac{1}{2}) = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$.
2. Ta có $f^{(5)}(x)(1) = \frac{-27}{128} \cdot 5!$.

4.2.2

1. Đồ thị c là quãng đường, b là vận tốc, a là gia tốc.
2. $f'(t_0) = 2; f''(t_0) < 0$, điều này có ý nghĩa nhiệt độ trung bình của thành phố A tại thời điểm t_0 là đang tăng tốc độ tăng nhiệt độ đang giảm.

4.3

4.3.1

1. $\Delta f(-1) = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = -5\Delta x + (\Delta x)^2 = -0.0499$.
2. Gọi chiều cao hình nón là $h \Rightarrow \Delta h = \pm 1$ (cm).
 $V(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 400 \cdot h$ (cm³).
 $\Delta V(h) \approx dV(h) = V'(h)\Delta h = \frac{400}{3}\pi \cdot \Delta h \approx \pm 419$ cm³.

4.3.2

1. $\ln(1.02) \approx 0.2$.
2. a. ...
b. $f(5.2) \approx 11570$ (Shilling)

4.4

4.4.1

1. $\ln(2+x) = \ln(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 + 0((x-1)^3)$.
2. $x \ln(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + 0((x-1)^3)$

4.5

4.5.1

1. Tăng trên toàn miền xác định.

$$2. \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -2 & 0 & 1 & \infty \\ \hline f'(x) & + & || & - & 0 & + & || & + \end{array}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $(-2, 0)$ và đạt cực tiểu tại $(0, -\sqrt[3]{4})$.

3. f đạt cực đại tại $x = -2$, $x = 4, 7$; đạt cực tiểu tại $x = 1$.

4.5.2 Bài toán về tính lồi, lõm, điểm uốn

1. $\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2} \cdot e^{-3}\right)$

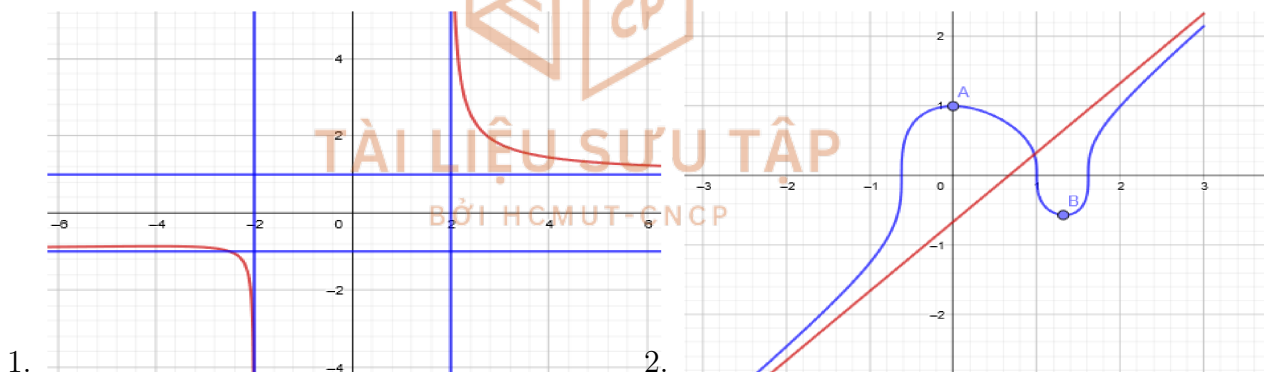
2. a. $f''(x_A) < 0$.

b. Các khoảng tăng của $f'(x)$ là: $(-5; -3); (-1; 0); (1; 3)$.

Các khoảng giảm của $f'(x)$ là: $(-3; -1); (0; 1); (3; 5)$.

c. $f'(x)$ có điểm 3 cực đại và 2 điểm cực tiểu.

4.5.3



4.5.4

$$1. \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & +\infty \\ \hline f'(x) & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}} & \nearrow & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}} & \searrow & 0 \end{array}$$

2. $f_{\max} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}}; f_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}}$

3. $\sqrt{3}$

4.6 Hàm số cho bởi phương trình tham số

4.6.1 Ý nghĩa của đường cong tham số

1. Theo chiều kim đồng hồ.
2. (I) là đồ thị B.
(II) là đồ thị A.
(III) là đồ thị D.
(IV) là đồ thị C.

4.6.2 Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ xác định bởi phương trình tham số

1. $x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad y'(1) = \frac{1.6 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$
2. $k = 1$
3. $y = 7.$

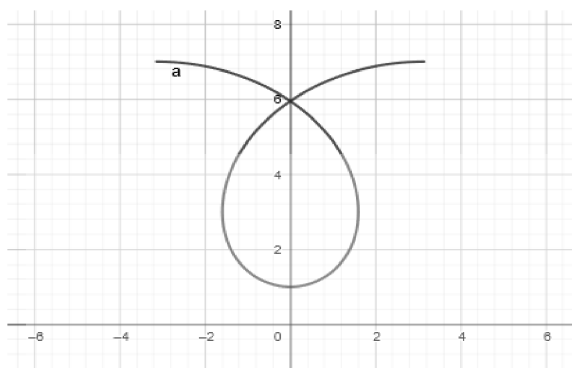
4.6.3 Cực trị của hàm số $y = f(x)$ cho bởi hàm tham số.

1. $t \in [0, 1]$ hàm số không có cực trị.

4.6.4 Tiệm cận của đường cong tham số

$$y = -\frac{x}{2} + 1.$$

4.6.5 Vẽ đường cong tham số



5 CHƯƠNG 5: TÍCH PHÂN

5.1 Tích phân bất định

5.1.1 Tính tích phân

1. a. $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$ b. $F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C$

2. a. $\frac{7 \ln(|x + 3|) + \ln(|x - 1|)}{4} + C$

b. $-\frac{1}{x + 1} + C$

3. a. $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$ b. $\sqrt{x^2 + 1} + C$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}$

5.1.2 Ý nghĩa nguyên hàm:

1. $C(t) = 0.5t + \frac{0.03t^2}{2} + 311 \text{ (}\frac{\%}{1000}\text{)}$

2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{23}{6}$

5.2 Tích phân xác định

5.2.1 Bài toán dẫn về tích phân

1. $\int_0^{20} v(t) dt = \frac{980}{3}$ (bỏ qua đơn vị tính)

5.2.2 Tính gần đúng nhờ tổng tích phân

1. a. $\Delta x = \frac{1}{10}$, $f(x) = x^2$, $n = 10$

Tổng Riemann trái: $\int_0^1 f(x) dx \approx \Delta x [f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + \dots + f(0.8) + f(0.9)] \approx 0.285$

Tổng Riemann phải: $\int_0^1 f(x) dx \approx \Delta x [f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + \dots + f(0.8) + f(0.9) + f(1)] \approx 0.385$

Tổng Riemann trung tâm: $\int_0^1 f(x) dx \approx \Delta x [f(0.05) + f(0.15) + f(0.25) + f(0.35) + \dots + f(0.85) + f(0.95)] \approx 0.3325$

b. Tương tự

c. Tương tự

2. Mức tiêu thụ dầu thô $\approx 5(20.9 + 23.3 + 25.6 + 28 + 30.7) \approx 642.5$ tỷ thùng

5.2.3 Tích phân xác định và diện tích miền phẳng

1.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2.

x	0	2	5	6
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	a	$a + 14$	$-6 + a$	$6 + a$

Khoảng tăng: (0; 2) và (5; 6). Khoảng giảm: (2; 5)

Điểm cực trị: f đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 5$

5.2.4 Giá trị trung bình

1. $I_2 = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (x^2 + x + 1) dx = \frac{10}{3}; x_0 = \frac{\sqrt{93} - 3}{6}$

5.2.5 Định lý cơ bản của vi tích phân

1. $f'(1) = e^{-2}$

5.2.6 Các ứng dụng hình học của tích phân xác định

1. a. $S = -\frac{\ln(3) - 2\ln(2)}{\ln(2)\ln(3)}$

c. $S = \frac{5}{6}$

b. $S = 9$

d. $S = \frac{3\pi + 2}{12}$

2. $V_x = \frac{8\pi}{15}, V_y = \frac{11\pi}{6}$

3. $= \frac{13}{6}, V_x = \frac{257}{144}\pi, V_y = \frac{158\pi}{105}$

5.3 Tích phân suy rộng

5.3.1 Tính tích phân suy rộng

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1 - e^{-1}}{2}$

5.3.2 Khảo sát sự hội tụ

1. Hội tụ

2. Phân kỳ

3. Hội tụ



6 CHƯƠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1 Phương trình vi phân cấp 1

6.1.1 Tìm nghiệm tổng quát

1. $y^3 = x^2 + x + C$

2. Đặt $u = \frac{y}{x}$, phương trình đưa về dạng $\frac{u+1}{u^2+u-1}du = -\frac{dx}{x}$

3. $y = \frac{x^2}{2e^{x^2}} + \frac{C}{e^{x^2}}$

4. $\frac{y^2}{x} = C - \ln(x)$

6.1.2 Tìm nghiệm bài toán Cauchy

$1 + y^2 = x^2$

6.1.3 Bài toán thực tế

1. Dạng tự thành lập bài toán

a. Bài toán hình học

i. $\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} \\ y(3) = 2 \end{cases}$, phương trình đường cong: $xy = 6$.

ii. $y' = -\frac{x}{2y}$, phương trình của họ đường cong: $2y^2 + x^2 = C$.

b. Bài toán dân số

i. $\begin{cases} P'(t) = 0.08\%P(t) \\ P(0) = 226 \end{cases} \Rightarrow P(t) = 226e^{0.0008t}.$

Đến năm 2007, dân số đạt 228 ngàn dân.

ii. $\begin{cases} P'(t) = k \left(1 - \frac{P(t)}{10.000}\right) \\ P(0) = 400, P(1) = 1200 \end{cases}$

Nghiệm tổng quát: $P(t) = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}$

Nghiệm riêng: $P(t) = \frac{10.000}{1 + 24 \left(\frac{11}{36}\right)^t}$

$P(t) = 5000 \Leftrightarrow t = 2,68$: Gần 3 năm sau, số cá trong hồ đạt 5000 con.

c. Bài toán hòa tan (tách biến/tuyến tính) $y(t)$ là lượng muối trong thùng sau t phút.

$$\begin{aligned} \text{i. } & \begin{cases} y'(t) = 2 - \frac{5y(t)}{100} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -40e^{-t/20} + 40 \\ \text{ii. } & \begin{cases} y'(t) = 0 - \frac{3y}{100 + 5t - 3t} \\ y(0) = 50 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \sqrt{50t + 2500} \\ \text{iii. } & \begin{cases} y'(t) = 2 - \frac{3y}{100 + 5t - 3t} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{4}{5}\sqrt{t + 50} - \frac{2000\sqrt{50}}{\sqrt{(t + 50)^3}}, y(20) \approx 31,85 \end{aligned}$$

d. Bài toán về quy luật giảm nhiệt

$$T'(t) = k(T - 20) \text{ với } T(0) = 100, T(10) = 60 \Rightarrow T(t) = 20 + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

2. Dạng cho sẵn phương trình (tùy ý)

$$\begin{aligned} \text{a. } & 2I'(t) + 10I = 4 \rightarrow I(t) = C.e^{-5t} + \frac{2}{5} \\ \text{b. } & y'(t) = 1 + \sin t - y(t), \rightarrow y(t) = Ce^{-t} + \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos t}{2} + 1 \end{aligned}$$

6.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

6.2.1 Tìm nghiệm phương trình thuần nhất

$$\begin{aligned} 1. & y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} & 3. & y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ 2. & y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x & 4. & y_0 = \frac{6}{5} e^{-x} - \frac{1}{5} e^{4x} \end{aligned}$$

6.2.2 Tìm nghiệm riêng bằng phương pháp biến thiên hằng số

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - \frac{3}{4} e^{-2x} x^2 + \frac{1}{2} e^{-2x} x^2 \ln x$$

6.2.3 Tìm nghiệm riêng bằng phương pháp hệ số bất định

$$\begin{aligned} 1. & y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{11}{36} \\ 2. & y = C_1 e^x \sin 2x + C_2 e^x \cos 2x + \frac{3}{5} e^{2x} \\ 3. & y = C_1 e^x + C_2 - \frac{\sin x}{2} - \frac{5}{2} \cos x \\ 4. & y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{1}{3} e^{-x} x - \frac{2}{9} e^{-x} \\ 5. & y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \frac{3}{10} x \sin x + \frac{11}{50} \sin x - \frac{1}{10} x \cos x + \frac{24}{25} \cos x \end{aligned}$$

$$6. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{3}{5} e^x \sin x - \frac{4}{5} e^x \cos x$$

$$7. \quad y = C_1 e^x + C_2 - x^2 + x$$

$$8. \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} e^x x^2$$

6.2.4 Nguyên lý chồng chất nghiệm

$$1. \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 + x^2 - 2x + \frac{3}{2} e^x$$

$$2. \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{4}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$$

$$3. \quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{12} e^x + \frac{3}{52} \sin 2x - \frac{15}{52} \cos 2x$$

6.2.5 Tìm nghiệm bài toán Cauchy

$$y = \frac{1}{10} x + \frac{39}{300} + \frac{25}{300} e^{-2x} - \frac{16}{75} e^{-5x}$$

6.3 Hệ PTVP tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

6.3.1 Dùng phương pháp khử tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} C_1 e^{2t} (e^{3t} + 2) + \frac{1}{3} C_2 e^{2t} (e^{3t} - 1) + \frac{3}{100} (30t + 11) \\ y(t) = \frac{2}{3} C_1 e^{2t} (e^{3t} - 1) + \frac{1}{3} C_2 e^{2t} (2e^{3t} + 1) + \frac{1}{100} (-70t - 9) \end{cases}$$

6.3.2 Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{300} (270t + 325e^{2t} - 124e^{5t} + 99) \\ y(t) = \frac{1}{300} (-3(70t + 9) - 325e^{2t} - 248e^{5t}) \end{cases}$$