CHƯƠNG 4: **TÍCH PHÂN**

1. Tích phân bất định
2. Tích phân xác định
3. Tích phân suy rộng
4. Ứng dụng hình học của tích phân

Tích phân bất định

Nguyên hàm: Hàm F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm f(x) trong khỏang (a,b) nếu tại mọi điểm x thuộc (a,b) ta đều có F'(x) = f(x)

Từ định nghĩa nguyên hàm ta suy ra:

1. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì F(x)+C cũng là nguyên hàm của hàm f(x)
2. Mọi nguyên hàm của f(x) đều có dạng F(x)+C

Định lý: Mọi hàm liên tục trên [a,b] (liên tục $\forall x \in (a,b)$ và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a) thì có nguyên hàm trên [a,b]

Tích phân bất định

Định nghĩa tích phân bất định : Nếu hàm F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) thì F(x)+C (C: hằng số) được gọi là tích phân bất định của hàm f(x), kí hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Tính chất:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\int a.f(x)dx = a.\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Tích phân bất định

Bảng tích phân các hàm cơ bản

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Tích phân bất định

Bảng tích phân các hàm cơ bản

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

Tích phân bất định

Phương pháp đổi biến:

Định lý: Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$

Thì: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Với $\varphi(t)$ là hàm khả vi

Ta kiểm tra lại bằng cách tính đạo hàm vế phải:

$$\left(F(\varphi(t)) + C\right)' = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) = f(\varphi(t)).\varphi'(t)$$

Ta được hàm dưới dấu tích phân vế trái tức là định lý được chứng minh

Định lý trên là cơ sở của 2 cách đổi biến thường gặp sau đây

Tích phân bất định

Phương pháp đổi biến 1: Đặt $x = \varphi(t)$, φ(t) là hàm khả vi và có hàm ngược t= $\varphi^{-1}(x)$ thì ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Nếu nguyên hàm của f(φ(t))φ'(t) là G(t) thì

$$\int f(x)dx = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Ví dụ: Tính tích phân $I_1 = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt $x = \sin t$ thì $\begin{cases} dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{cases}$ và $\begin{cases} t = \arcsin x \\ \sin 2t = 2x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$I_1 = \int \cos^2 t dt$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Tích phân bất định

Phương pháp đổi biến 2: Đặt $u = \varphi(x)$, $du=\varphi'(x)dx$ và giả sử $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ với

$$\int g(x)dx = G(x) + C$$

Thì $\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$

Ví dụ: Tính $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Ta viết lại : $x^2 + a^2 = a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$

Đặt $u = \frac{x}{a}$ $\Rightarrow du = \frac{1}{a}dx \Rightarrow dx = adu$

$$I_2 = \frac{1}{a^2}\int \frac{adu}{u^2+1} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_3 = \int e^x \sqrt{4+e^x}\,dx$

Đặt $u = \sqrt{4+e^x} \Rightarrow e^x = u^2 - 4 \Rightarrow e^x dx = 2udu \Rightarrow dx = \dfrac{2udu}{u^2-4}$

$$I_3 = \int (u^2-4)u\frac{2udu}{u^2-4} = \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x+4)^3} + C$$

Ví dụ: Tính $I_4 = \int \dfrac{dx}{2^x+1}$

Đặt $u = 2^x+1 \Rightarrow du = 2^x \ln 2\, dx \leftrightarrow dx = \dfrac{du}{(u-1)\ln 2}$

$$I_4 = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{du}{u(u-1)} = \frac{1}{\ln 2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln|u-1| - \ln|u|\right) + C \Rightarrow I_4 = \frac{1}{\ln 2}\left(x\ln 2 - \ln(2^x-1)\right) + C$$

Tích phân bất định

Phương pháp tích phân từng phần:

Định lý: Cho các hàm u(x), v(x) khả vi và u(x), v'(x) có nguyên hàm trên (a,b). Khi ấy hàm u'(x), v(x) cũng có nguyên hàm trên (a,b) và ta có

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Đẳng thức trên tương đương với:

$$\int \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)dx = u(x)v(x)$$

Đẳng thức này hiển nhiên đúng theo công thức đạo hàm của tích

Ta còn viết CT trên ở dạng $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_5 = \int \arcsin x dx$

Đặt *u=arcsinx, dv=dx*

$$I_5 = \int u dv = uv - \int v du = \arcsin x . x - \int x d(\arcsin x)$$

$$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ví dụ: Tính $I_6 = \int x^2 \ln x dx$

Đặt $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 = dv, u = \ln x$

$$I_6 = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tìm công thức truy hồi cho tích phân

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x d\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int x \frac{2nx dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

Vậy: $$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]}$$

Tích phân bất định

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right], n = 1, 2, ..$$

Với n=1: $$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Với n=2: $$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right) + C$$

Tích phân bất định

1. Tích phân phân thức đơn giản lọai 1:

$$\int \frac{M}{(ax+b)^k}dx = \frac{M}{a^k}\int \frac{d\left(x+{}^{b}\!/_{a}\right)}{\left(x+{}^{b}\!/_{a}\right)^k} = \frac{M}{a^k}\frac{1}{1-k}\left(x+{}^{b}\!/_{a}\right)^{1-k}+C$$

2. Tích phân phân thức đơn giản lọai 2: với ax^2+bx+c là tam thức bậc 2 *không có nghiệm thực*

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}dx$$

Thêm bớt để tử số thành đạo hàm của mẫu số cộng 1 hằng số

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k} + \int \frac{\left(N-\frac{Mb}{a}\right)dx}{a^k\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}$$

Tích phân bất định

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k} + \int \frac{(N-\frac{Mb}{a})dx}{a^k\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]^k}$$

Đặt $u = x + \frac{b}{2a}, a = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$ cho tích phân thứ 2

Ta được tổng của 2 tp cơ bản dạng

$$\int \frac{du}{u^k}, \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_7 = \int \frac{2x+3}{(x^2+x+1)^2} dx$

Tách tử số thành tổng đạo hàm của mẫu số và 1 hằng số rồi chia hàm thành tổng 2 hàm với hàm thứ 2 có mẫu số đã tách thành tổng bình phương của 1 nhị thức và hằng số

$$I_7 = \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2} + \int \frac{2d(x+\frac{1}{2})}{\left((x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2+x+1} + 2.\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Tích phân bất định

Tích phân hàm hữu tỉ: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Trường hợp 1: $n \geq m$

Ta chia đa thức : $P_n(x) = Q_m(x).T_k(x) + R_l(x), l < m$

Và được:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int T_k(x)dx + \int \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}dx$$

Khi đó, hàm hữu tỉ cần tính tích phân là phân thức thực sự tức là bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số. Ta chuyển sang trường hợp 2.

Tích phân bất định

Trường hợp 2: *n < m*

Bước 1: Giả sử

$$Q_m(x) = (a_1x+b_1)^{l_1}...(a_rx+b_r)^{l_r}(c_1x^2+d_1x+e_1)^{k_1}...(c_sx^2+d_sx+e_s)^{k_s}$$

Trong đó $l_1+l_2+\dots+l_r+k_1+k_2+\dots+k_s=m$ và các tam thức bậc 2 dạng - cx^2+dx+e - không có nghiệm thực

Bước 2: Ta giả sử hàm f(x) là tổng các phân thức đơn giản dạng

$$\frac{M_i}{(a_ix+b_i)^{l_i}}, \frac{M_jx+N_j}{(c_jx^2+d_jx+e_j)^{k_j}}$$

Bước 3: Đồng nhất hệ số 2 vế để xác định cụ thể các hệ số M, N, a, b, c, d, e

Bước 4: Tính các tp các hàm đơn giản, cộng lại ta được tp cần tính

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_8 = \int \frac{2x-3}{x^3-5x^2+6x} dx$

Giả sử : $\frac{2x-3}{x^3-5x^2+6x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = a(x-2)(x-3) + bx(x-3) + cx(x-2)$$

Ta chọn các giá trị đặc biệt

$x = 0: -3 = 6a \Leftrightarrow a = -1/2$ $\quad x = 2: 1 = -2b \Leftrightarrow b = -1/2$

$x = 3: 3 = 3c \Leftrightarrow c = 1$

$$I_8 = \int \frac{-dx}{2x} + \int \frac{-dx}{2(x-2)} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{-1}{2} \ln|x| + \frac{-1}{2} \ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_9 = \int \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 5x + 4} dx$

$$I_9 = \int \left(x - 5 + \frac{22x + 19}{x^2 + 5x + 4} \right) dx$$

Giả sử: $\dfrac{22x+19}{(x+1)(\quad)} = \quad + \dfrac{b}{\quad}$

Cho $x = -1$, bỏ (x+1) ở mẫu số của VT và giữ hệ số của 1/(x+1) ở VP, ta được $a = -1$

Cho $x = -4$, bỏ (x+4) ở mẫu số của VT và giữ hệ số c của 1/(x+4) ở VP, ta được $b=23$

$$I_9 = \int (x-5)dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{23}{x+4} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x - \ln|x+1| + 23\ln|x+4| + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{10} = \int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

Giả sử $\frac{3x-1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$

Cho x=1: bỏ $(x-1)^2$ ở VT, a, b, c ở VP, ta được *d=1*

Cho x=i hoặc x=-i: bỏ (x^2+1) ở VT, c, d ở VP, ta được:

$$3i - 1 = (ai+b)(i-1)^2 \Leftrightarrow a = -1/2, b = -3/2$$

Lấy thêm 1 giá trị tùy ý của x: x=0 và thay a, b, d đã có vào để được *c = 1/2*

Vậy: $I_{10} = \frac{-1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctan x\right) + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Tích phân bất định

Tích phân 1 số hàm vô tỉ

$1.\int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ Đặt: $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Để đưa về tp này thành tp hàm hữu tỉ

Ví dụ: Tính $I_{11}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$

Đặt: $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x-1=\frac{2}{t^3-1}, dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$ Ta được:

$$I_{11}=\int t\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\frac{(t^3-1)^3}{8}=-6\int t^3(t^3-1)dt=-6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C$$

$$=\frac{-6}{7}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+\frac{6}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{11} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}(\sqrt[4]{x+3}-1)}$

Đặt: $t = \sqrt[4]{x+3}$

$$\Rightarrow x = t^4 - 3, dx = 4t^3 dt$$

$$\Rightarrow I_{11} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2(t-1)}$$

$$I_{11} = 4\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= 4t + 4\ln|t-1| + C$$

$$= 4\sqrt[4]{x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{x+3} - 1\right| + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ : Tính $I_{12} = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

Đặt: $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$

$$\Rightarrow I_{12} = \int \frac{4t^2dt}{(1-t^2)(t^2+1)} = \int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \ln|t+1| - \ln|1-t| - 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

Tích phân bất định

$2.\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ Đặt $u = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$

Đưa tam thức bậc 2 về dạng u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2 và dùng các cách đổi biến cụ thể:

a. Dạng u^2+a^2: đặt $u=a.\tan t$ hoặc $u=a.\cot t$

b. Dạng u^2-a^2: đặt $u=a/\cos t$ hoặc $u=a/\sin t$

c. Dạng a^2-u^2: đặt $u=a.\cos t$ hoặc $u=a.\sin t$

Ví dụ: Tính $I_{13} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

$$I_{13} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 2^2}} = \ln\left|(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 2^2}\right| + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{14} = \int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$

Đặt $x = \frac{1}{\cos u} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \tan u, dx = \frac{\sin u du}{\cos^2 u}, \frac{dx}{x} = \frac{\sin u du}{\cos u}$

$$I_{14} = \int \frac{\tan u.\sin u.du}{\cos u} = \int \tan^2 u du = \int (\tan^2 u + 1) du - \int du$$

$$= \tan u - u + C$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C$$

Tích phân bất định

Trong một số trường hợp cụ thể, nên nhớ cách riêng như sau

$TH1: \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Tính như tp hàm hữu tỉ

Ví dụ: Tính $I_{15} = \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

$$I_{15} = \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-1)dx}{\sqrt{2-x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{d(2-x-x^2)}{\sqrt{2-x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3} + C$$

Tích phân bất định

$$TH2: \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Đặt *(x-α)=1/t* để đưa về dạng trên

Ví dụ: Tính $I_{16} = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$

Đặt $x+2=\frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2}, x^2+2x = \left(\frac{1}{t}-2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-2\right) = \frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}$

$$I_{16} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-2t}} = \int \frac{d(1-2t)}{2\sqrt{1-2t}} = \sqrt{1-2t}$$

$$= \sqrt{1-2\frac{1}{x+2}} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{17} = \int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

$$I_{17} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} - 2\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + J$$

Đặt $x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2}, x^2+1 = \left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2$

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} = \int \frac{d(t-1/2)}{\sqrt{2}\sqrt{(t-1/2)^2+1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right| + C$$

$$I_{17} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x}{2(x+1)} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}\right| + C$$

Tích phân bất định

3. Tích phân Trebushep dạng $\int x^m (a+bx^n)^p dx$

m, n, p là các số hữu tỉ

a. Nếu $p \in Z$, đặt $x = t^s$, s=BCNN(m,n)

b. Nếu $\frac{m+1}{n} \in Z$, đặt $a+bx^n=t^s$, s là mẫu số của p

c. Nếu $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, đặt $ax^{-n}+b=t^s$, s là mẫu số của p

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{19} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = x^2(1+x^2)^{-5/2}, m=2, n=2, p=-5/2$$

Đặt: $x^{-2}+1=t^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1}, dx = \frac{-tdt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$

$$I_{19} = \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{-tdt}{\sqrt{(t^2-1)^3}} \cdot \left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)^{5/2} = \int \frac{-dt}{t^4} = \frac{1}{3t^3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{3/2} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{19} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x(1+\sqrt{x})}}$

$$f(x) = x^{-4/3}\left(1 + x^{1/2}\right)^{-1/3}, m = -\frac{4}{3}, n = \frac{1}{2}, p = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow t^3 = x^{-1/2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = t^3 - 1$$

Tích phân bất định

4. Tích phân hàm lượng giác $\int f(\cos x, \sin x)dx$

a. Nếu f(-sinx,cosx) = - f(sinx,cosx): đặt t=cosx

b. Nếu f(sinx,-cosx) = - f(sinx,cosx): đặt t=sinx

c. Nếu f(-sinx,-cosx) = f(sinx,cosx): đặt t=tanx

d. Tổng quát: đặt t=tan(x/2)

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{20} = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

Đặt: $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$$I_{20} = \int \frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{4.2t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{4t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t + 1/2)}{(t + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x/2 + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{21} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x}$

Hàm dưới dấu tp là chẵn với sinx, cosx nên ta đặt

$t = \tan x \Rightarrow x = \arctan t$

$$I_{21} = \int \frac{dt}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t^2 - 2t + 3}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt(t - 1/2)}{(t - 1/2)^2 + (\sqrt{5}/2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tan x - 1}{\sqrt{5}} + C$$

Tích phân bất định

Ví dụ: Tính $I_{22} = \int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\cos x - 5\sin x} dx$

Ta viết tử số dưới dạng a.MS+b.(MS)'

Giả sử:

$$3\sin x + 4\cos x = a(2\cos x - 5\sin x) + b(2\cos x - 5\sin x)'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b = 4 \\ -5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7/-29 \\ b = 26/-29 \end{cases}$$

$$I_{22} = \frac{-7}{29}\int dx - \frac{26}{29}\int \frac{d(2\cos x - 5\sin x)}{2\cos x - 5\sin x}$$

$$= \frac{-7}{29}x - \frac{26}{29}\ln\left|2\cos x - 5\sin x\right| + C$$