- Định nghĩa đạo hàm cấp cao bởi công thức truy hồi:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

- Quy ước: $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- Công thức Leibnitz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

# Đạo hàm cấp cao của những hàm số thường gặp

1. $$\left((ax+b)^{\alpha}\right)^{(n)} = a^n \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha + n - 1) \cdot (ax+b)^{\alpha - n}.$$
2. $$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{a^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$
3. $$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n \cdot e^{ax+b}.$$
4. $$\left(\ln|ax+b|\right)^{(n)} = \frac{a^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(ax+b)^n}.$$
5. $$\left(\sin(ax+b)\right)^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right).$$
6. $$\left(\cos(ax+b)\right)^{(n)} = a^n \cdot \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right).$$

## Ví dụ

*Tính các đạo hàm cấp cao sau đây:*

(a) $\Big(\ln|3x+1|\Big)^{(100)}$;

(b) $\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{(n)}$;

(c) $\Big((3x^2+2)\cdot\cos x\Big)^{(100)}$.

Cho hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp hai.

- Nếu $y''(x_0) > 0$ thì **tốc độ thay đổi** của hàm số **tăng** trong lân cận của $x_0$.
- Nếu $y''(x_0) < 0$ thì **tốc độ thay đổi** của hàm số **giảm** trong lân cận của $x_0$.

Ví dụ, xét một vật chuyển động với phương trình $x = x(t)$.

- Nếu gia tốc $a(t_0) > 0$ thì vật chuyển động **nhanh dần** trong một khoảng thời gian nhỏ xung quanh $t_0$.
- Nếu gia tốc $a(t_0) < 0$ thì chuyển động **chậm dần** trong một khoảng thời gian nhỏ xung quanh $t_0$.

## Ví dụ

*Giả sử* $f(t)$ *là nhiệt độ trung bình của thành phố* $X$ *vào ngày thứ* $t$ *của một năm. Giả sử* $f'(t_0) = 1$ *và* $f''(t_0) < 0$. *Hãy cho biết ý nghĩa của điều này?*

Xét hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm.

- **Vi phân cấp một** được định nghĩa bởi công thức:

$$dy = f'(x)dx.$$

- Như vậy, $dy$ là một biến phụ thuộc, nó phụ thuộc vào các giá trị của $x$ và $dx$.
- **Vi phân cấp cao** được định nghĩa bởi công thức truy hồi:

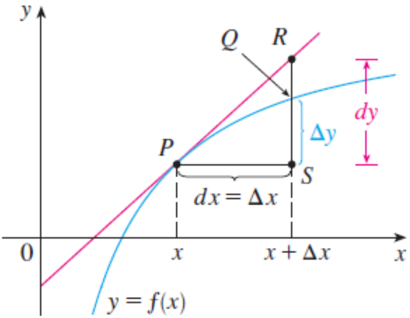
$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

## Ví dụ

*Cho hàm số* $y = x\sin x$. *Tính* $dy$ *và* $d^2y$.

- Xét hai điểm $P(x, f(x))$ và $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Lấy $dx = \Delta x$. Khi đó, với $\Delta x$ đủ nhỏ, ta có

$$dy \approx \Delta y.$$



## Ví dụ

*Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x+3}$.

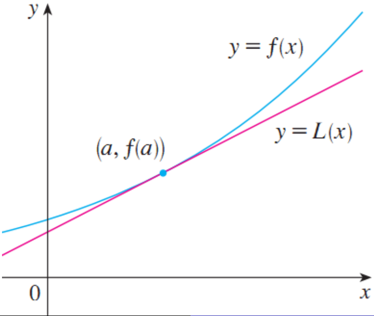
(a) *Tính số gia* $\Delta y$ *tại* $x = 1$ *ứng với* $\Delta x = 0.05$.

(b) *Tính vi phân* $dy$ *tại* $x = 1$ *ứng với* $dx = 0.05$.

## Ví dụ

*Hãy ước lượng sự thay đổi diện tích của hình tròn bán kính bằng 1m nếu bán kính tăng/giảm 1 cm.*

- Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại $(a, f(a))$ là
$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$
- Ta gọi xấp xỉ
$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$
là **xấp xỉ tuyến tính (linear approximation)** của $f$ trong lân cận của $x = a$.

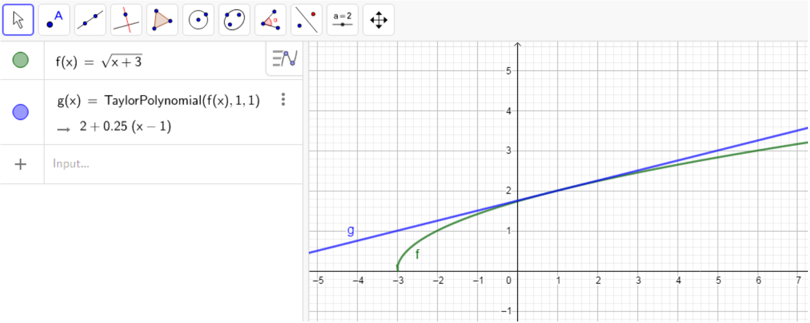


## Ví dụ

*Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x+3}$.

(a) *Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số* $f(x)$ *trong lân cận của* $x = 1$.

(b) *Tính xấp xỉ* $f(1.05)$.


f(x) = √(x + 3)
g(x) = TaylorPolynomial(f(x), 1, 1)
→ 2 + 0.25 (x − 1)
Input...
a=2
g
f