ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN KÉP (tt)

A. Ứng dụng hình học

I. Tính diện tích hình phẳng:

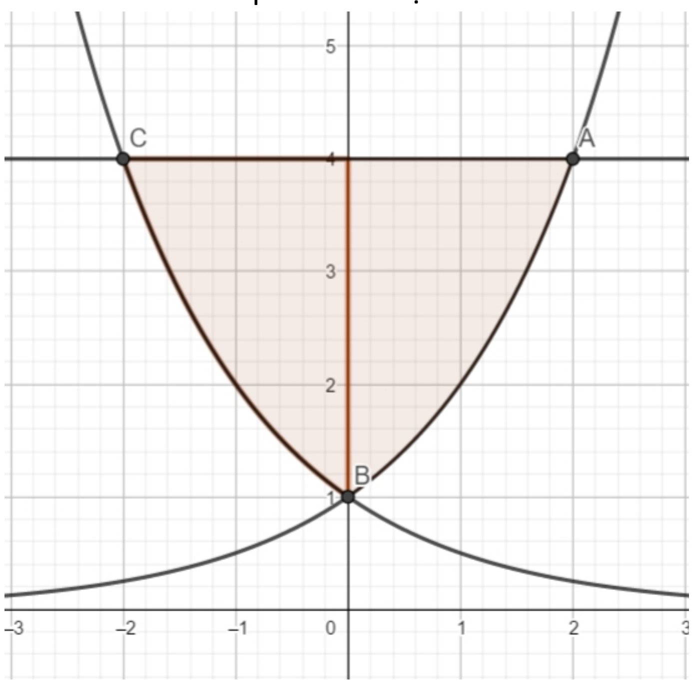
1. Tính diện tích miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$ ta được $S(D) = a + \dfrac{b}{\ln 2}\,(a, b \in \mathbb{Z})$.

   Tìm khẳng định đúng nhất:

   A. $a = 2b$ | C. $a + b = 10$
   B. $a + 2b = 3$ | D. $a + b = 5$

   Hướng dẫn giải:

   Vẽ miền tính tích phân ta được



Chia miền D thành 2 phần D_1 và D_2 với $D_1\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 2^{-x} \le y \le 4 \end{cases}, D_2\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2^{x} \le y \le 4 \end{cases}$

$$S=\iint_{D}1dxdy=\iint_{D_1}1dxdy+\iint_{D_2}1dxdy=\int_{-2}^{0}\int_{2^{-x}}^{4}1dydx+\int_{0}^{2}\int_{2^{x}}^{4}dydx$$

$$=2(8-\frac{3}{\ln 2})$$

Vì thế $a=16,b=-6$, chọn C

2. Diện tích miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 = 4y \\ y^2 = 4x \end{cases}$ là:

A. $\frac{8}{3}$

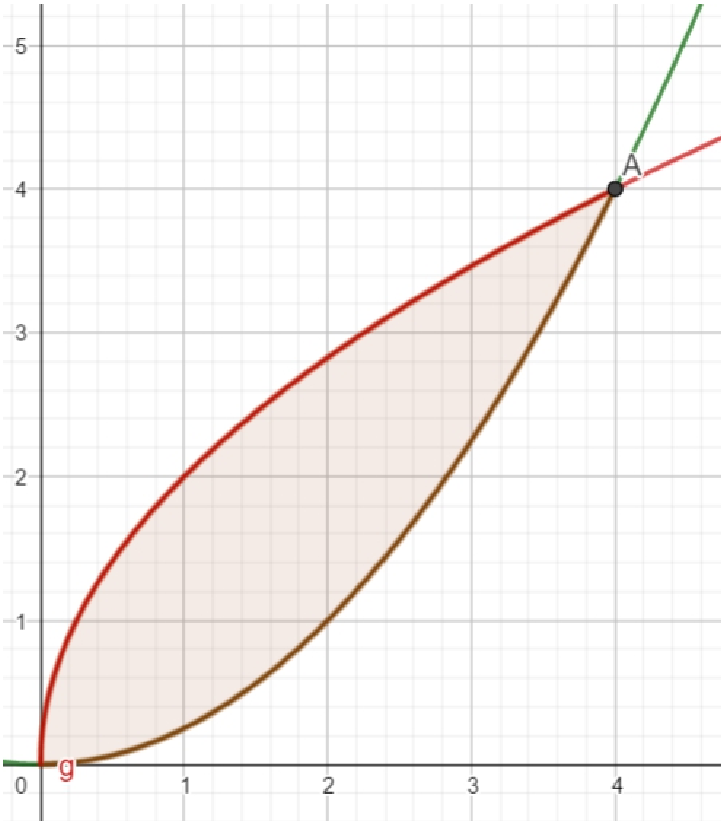
B. $\frac{16}{3}$

C. $\frac{32}{3}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Vẽ miền D cần tính tích phân, ta được



Khi đó $S = \iint_D 1dxdy = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4x}} 1dydx = \frac{16}{3}$, chọn B

3. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \le 0 \end{cases} (a > 0)$ là $S(D) = ka^2$. Khi đó, hệ số k là:

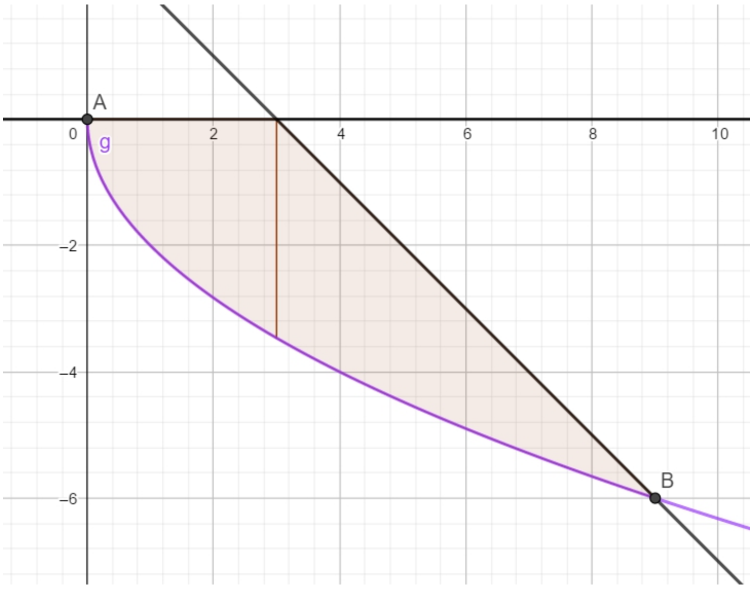
A. 12

B. 18

C. 16

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải: ví dụ cho trường hợp k=1, ta có miền tính tích phân như sau:



Cách 1: Chia miền D thành 2 phần $D_1\begin{cases}0\le x\le 3\\ -\sqrt{4x}\le y\le 0\end{cases}, D_2\begin{cases}3\le x\le 9\\ -\sqrt{4x}\le y\le 3-x\end{cases}$

Khi đó: $S=\int\limits_0^3\int\limits_{-\sqrt{4x}}^0 dydx+\int\limits_3^9\int\limits_{-\sqrt{4x}}^{3-x} dydx=18$

Cách 2: Miền D xác định bởi: $\begin{cases}-6\le y\le 0\\ \dfrac{y^2}{4}\le x\le 3-y\end{cases}$

Khí đó $S=\int\limits_{-6}^0\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} 1dxdy=18$

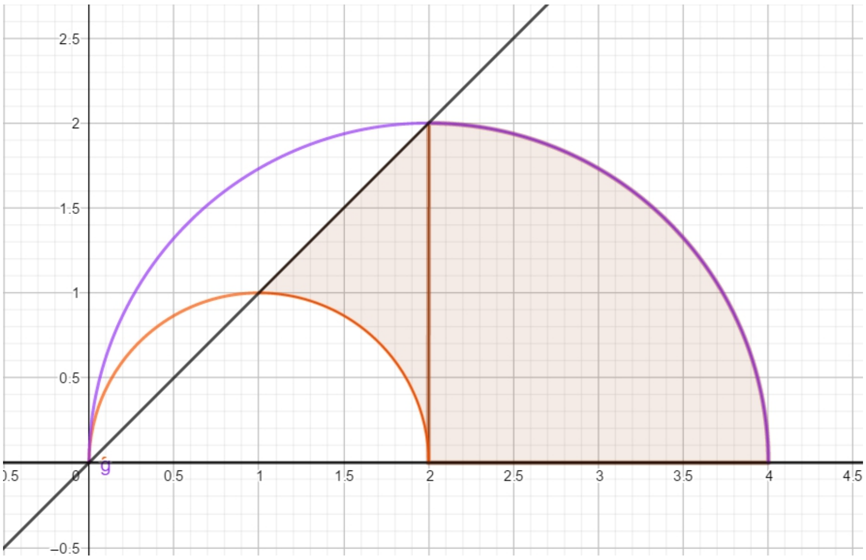
Đối chiếu với đáp án, ta được k=18, chọn B

4. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ x^2+y^2=4x\\ x=y, y=0\end{cases}$ là $S(D)=a(\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{1}{c})$ với (a, b, c là các số nguyên). Tìm kết luận đúng

A. $b=c$
B. $b=2c$
C. $b=3c$
D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Vẽ miền D, ta được:



Vì miền có dạng tròn, ta chuyển về tọa độ cực bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$ nên:

$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3}{2} = 3(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2})$, từ đó $b = 2c$, chọn B

Cách 2: Nhận thấy miền D có thể chia làm 2 miền $D_1 \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} \le y \le x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ và D_2 là phần tư hình tròn bán kính 2

$S(D) = S(D_1) + S(D_2) = \int\limits_1^2 \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} 1dy + \dfrac{1}{4}\pi \cdot 2^2$ ta vẫn được kết quả tương tự.

II. Tính thể tích vật thể:

1. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \ge 1 \\ 3x + 2y \le 2 \\ y \ge 0 \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$ ta được V=

A. $\frac{1}{18}$

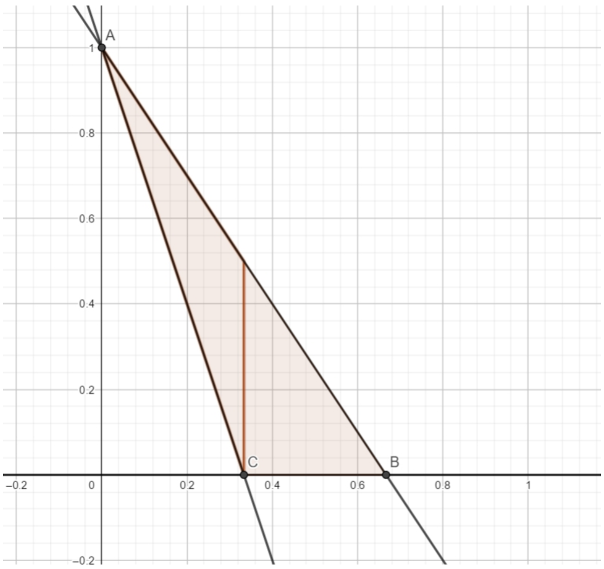
C. $\frac{1}{27}$

B. $\frac{1}{9}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Hình chiếu của vật thể trên mp Oxy là miền D $\begin{cases} 3x+y\ge 1 \\ 3x+2y\le 2 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x\le y\le 1-\frac{3}{2}x \\ 0\le x\le \frac{2}{3} \end{cases}$, vẽ miền này trên mặt Oxy, ta được



Và mặt trên của vật thể gới hạn bởi mặt phẳng $z=1-x-y$

Khi đó, ta tính được

$$V=\iint_D (1-x-y)dxdy=\int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_{1-3x}^{1-\frac{3}{2}x} (1-x-y)dy=\frac{1}{18}$$

Chọn A

2. Thể tích vật thể nằm bên dưới mặt $z=3+x^2-2y$ và được giới hạn bởi miền $0\le x\le 1, -x\le y\le x$ là V=

A. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Vật thể có dạng trụ đứng giới hạn bởi mặt $z=3+x^2-2y$ và có hình chiếu trên mặt Oxy là miền D: $0\le x\le 1, -x\le y\le x$

Áp dụng công thức, ta được:

$$V=\iint_D 3+x^2-2y=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}(3+x^2-2y)dy=\frac{7}{2}$$, Chọn C

3. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z=f(x,y)=3-x^2-y^2$ và $z=g(x,y)=2x^2+2y^2$ là $V=\frac{a}{b}\pi$ (a,b là số nguyên và phân số là tối giản). Tìm khẳng định đúng nhất:

A. $a+1=b$

B. $a-1=b$

C. $2a+b=8$

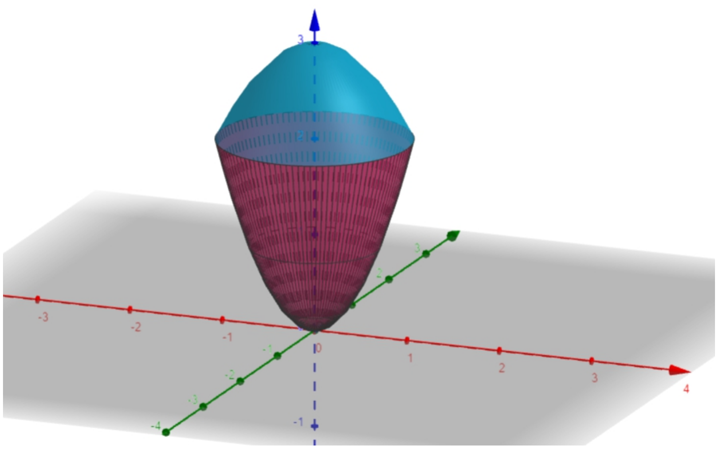
D. Cả B, C đều đúng

Hướng dẫn giải:

Phương trình giao tuyến của 2 đường đã cho:

$3-x^2-y^2=2(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Vẽ vật thể, ta có được (mặt màu xanh ứng với phương trình f)



Ta có $V=\iint_D (f-g)dxdy$, từ phương trình giao tuyến, ta đưa về tọa độ cực bằng cách đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$, khi đó $\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$, ta tính V theo tọa độ cực:

$V = \iint\limits_D 3 - 3(x^2 + y^2)dxdy$

$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3 - 3r^2)rdr = \dfrac{3\pi}{2}$, ta được a=3, b=2 nên chọn D

4. Thể tích vật thể giới hạn bởi $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ là :

A. $\dfrac{\pi}{2}$

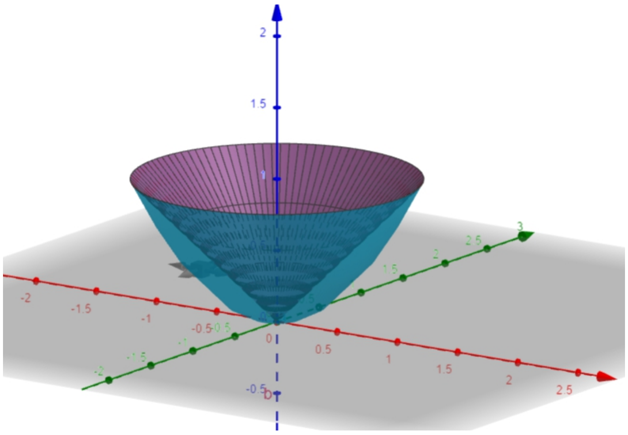
C. $\dfrac{\pi}{6}$

B. $\dfrac{\pi}{3}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Vẽ vật thể, ta được vật có dạng như hình:



Phương trình giao tuyến của 2 mặt trên là $\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Khi đó, thể tích vật được tính: $V = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)dxdy$

Đưa về tọa độ cực bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Khi đó $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r - r^2)rdr = \dfrac{\pi}{6}$, ta chọn đáp án C

III. Tính diện tích mặt cong:

1. Diện tích của mặt $z = 2 + 3x + 4y$ nằm trong miền D: $0 \le x \le 5, 1 \le y \le 4$ là:

A. $5\sqrt{17}$

C. $30\sqrt{17}$

B. $15\sqrt{17}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có $z'_x = 3$ và $z'_y = 4$ nên $\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = \sqrt{17}$

Khi đó, diện tích cần tính có giá trị là $V = \iint\limits_D \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy = \int\limits_1^4\int\limits_0^5 \sqrt{17}dx = 15\sqrt{17}$

Vì thế chọn đáp án B

2. Diện tích phần mặt $3x+2y+z=6$ nằm trong góc phần tám thứ nhất là:

A. $3\sqrt{14}$

C. $\sqrt{14}$

B. $6\sqrt{14}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Hình chiếu của phần mặt phẳng đã cho trên mặt Oxy là $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{6-2y}{3} \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

Và $z'_x = 3, z'_y = 2 \to \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = \sqrt{14}$

Khi đó, diện tích cần tính là $S = \iint\limits_D \sqrt{14}dxdy = \sqrt{14}\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\frac{6-2y}{3}} 1dx = 3\sqrt{14}$. Chọn đáp án A

3. Tính diện tích phần mặt $z = xy$ giới hạn bởi $x^2+y^2=1$ ta được S gần với giá trị nào nhất?

A. 3

C. 4

B. 3.5

D. 4.5

Hướng dẫn giải:

Ta có : $z'_x = y, z'_y = x \to \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = \sqrt{1+x^2+y^2}$

Khi đó: $S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$, chuyển về tọa độ cực bằng cách đặt

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, ta tính được $S = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot rdrd\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 3.8$

Vì thế chọn đáp án C

4. Tính diện tích phần paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4$ và nằm trong góc phần tám thứ nhất là: $S = \frac{\pi}{a}(b\sqrt{b}-1)\ \ (a,b \in Z)$. Tìm khẳng định đúng:

A. $a - b < 0$

C. $a + b$ chia hết cho 3

B. b là số nguyên tố

D. Cả 3 đáp án trên đều sai

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z'_x = 2x, z'_y = 2y \to \sqrt{1+z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$

Giao tuyến của 2 mặt là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

Khi đó: $S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$, chuyển về tọa độ cực bằng cách đặt

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, ta tính được $S = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4r^2}\cdot rdrd\varphi = \frac{\pi}{24}(17\sqrt{17}-1)$

Vì thế ta chọn B

B. Ứng dụng trong vật lí

I. Tính khối lượng mảnh phẳng:

Bài tập áp dụng: Cho đĩa tròn D có biên: $x^2 + y^2 = 2y$ có khối lượng tại một điểm là: $f(x,y) = 1 + y$. Tính khối lượng của D:

A. π

C. $\frac{3}{2}\pi$

B. 2π

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Khối lượng của bản D được xác định:

$$M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2y} (1+y)dxdy$$

Chuyển về tọa độ cực, ta đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi \end{cases}$

Khi đó: $M = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} (1 + r\sin\varphi) r dr d\varphi = 2\pi$, chọn B

II. Tìm khối tâm của bản phẳng:

Bài tập áp dụng: Tìm tọa độ khối tâm của đĩa D ở trên, ta được vị trí đó là điểm:

A. $(0, \frac{27}{12})$ C. $(0,1)$

B. $(0, \frac{27}{24})$ D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Hoàn toàn tương tự như bài giải trước, ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} r\cos\varphi(1 + r\sin\varphi)drd\varphi = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_D yf(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} r\sin\varphi(1 + r\sin\varphi)drd\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{27\pi}{12} = \frac{27}{24}$$

Chọn đáp án C

C. Định lý giá trị trung bình:

Bài tập áp dụng: Cho một ván gỗ tròn bán kình 40cm D có độ dày phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm theo công thức $d = 50 - r$. Độ dày trung bình của ván gỗ gần với giá trị nào nhất?

A. 23 C.23.2

B. 23.1 D.23.3

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lí giá trị trung bình, với $\overline{x}$ là độ dày trung bình, ta có

$\overline{x} = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy$ trong đó: $S = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$

Chuyển sang tọa độ cực ta được: $\overline{x} = \frac{1}{1600\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{40} r(50-r)drd\varphi = \frac{70}{3} \approx 23.33$

Chọn đáp án D