

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1 CHƯƠNG 1. DÃY SỐ THỰC

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG - BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

TÀI LIỆU SƯU TẬP

B Ngày 09/09/2020 C P

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Dình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 1 / 16

Nội dung

Dãy số thực và giới hạn

- 1.1 Một số khái niệm
- 1.2 Giới han của dãy số
- 1.3 Một số giới han cơ bản
- Giới han trên và giới han dưới
- Giới han vô cùng

Bài tập



BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 2 / 16

Nội dung

Dãy số thực và giới hạn

- 1.1 Một số khái niệm
- 1.2 Giới han của dãy số
- 1.3 Một số giới han cơ bản
- Giới han trên và giới han dưới
- Giới han vô cùng

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Giải tích 1



1. 1. Môt số khái niêm

Dinh nghĩa 1.1

1 Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập \mathbb{N}^* vào tập \mathbb{R}

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$

 $n\in\mathbb{N}^*\mapsto x_n\in\mathbb{R}.$ Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của **nó**.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 4 / 16 Ngày 09/09/2020



1. 1. Môt số khái niêm

Dinh nghĩa 1.1

1 Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập \mathbb{N}^* vào tập \mathbb{R}

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$
.

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của **nó**.

2 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là đơn điệu giảm nếu $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 4 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 1. Môt số khái niêm

Dinh nghĩa 1.1

1 Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập \mathbb{N}^* vào tập \mathbb{R}

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$
.

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của **nó**.

2 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là đơn điệu giảm nếu $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 4 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

1. 1. Môt số khái niêm

Dinh nghĩa 1.1

1 Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập \mathbb{N}^* vào tập \mathbb{R}

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$
.

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của **nó**.

- 2 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là đơn điệu giảm nếu $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.
- 3 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $x_n > m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 4 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

4 / 16

1. Dãy số thực và giới han

1. 1. Môt số khái niêm

Dinh nghĩa 1.1

1 Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập \mathbb{N}^* vào tập \mathbb{R}

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$
.

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của **nó**.

- 2 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là đơn điệu giảm nếu $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.
- 3 Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **bi chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $x_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- * Chú ý: $\{x_n\}$ bị chặn tương đương với mệnh đề

 $\exists M > 0$ sao cho $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.



1. 1. Môt số khái niêm



TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 5 / 16

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.1

a Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 5 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.1

- **a** Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.
 - Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không
 - tồn tại số M sao cho $n^2 < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- **5)** Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 5 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.1

- ① Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$. Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không tồn tại số M sao cho $n^2 < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- **5)** Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$ Xét đk $y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow (-1)^{n+1} > (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n < 0 \Leftrightarrow n$ là số lẻ. Như vậy bất đẳng thức $v_{n+1} > v_n$ không thoả mãn với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó v_n không là dãy đơn diệu tăng. Tương tư ta có y_n cũng không là dãy đơn điệu giảm.

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 5 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.1

- **a)** Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.
 - Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không tồn tại số M sao cho $n^2 < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- **5)** Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$

Xét đk $y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow (-1)^{n+1} > (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n < 0 \Leftrightarrow n$ là số lẻ.

Như vậy bất đẳng thức $y_{n+1} > y_n$ không thoả mãn với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó y_n không là dãy đơn diệu tăng. Tương tự ta có y_n cũng không là dãy đơn điều giảm.

Ngoài ra $(-1)^n = 1$ nếu n chắn và $(-1)^n = -1$ nếu n lẻ, suy ra $-1 \le y_n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì vây v_n là dãy bi chăn.

TS. Nguyễn Đình Dương 5 / 16 Ngày 09/09/2020 Giải tích 1

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.



TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM



1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.2

a) Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

a) Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 6 / 16

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.2

1 Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

a) Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$

Mặt khác
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$$
. Vậy dãy tăng và bị chặn. Sứu TAP Sửu TAP BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Giải tích 1

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.2

Ta có
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

5 Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

Mặt khác
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$$
. Vậy dãy tăng và bị chặn. Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0, \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow \text{dãy } (u_n)$ là dãy số giảm.

1. 1. Môt số khái niêm

Ví du 1.2

Ta có
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

5 Xét dãy
$$\{u_n\}$$
 với $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

Mặt khác
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$$
. Vậy dãy tăng và bị chặn. Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0, \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow \text{dãy } (u_n)$ là dãy số giảm.

1. Dãy số thực và giới hạn

Dinh nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại một số $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $|x_n-a|<\varepsilon,\quad\forall\geq n_0$

Kí hiệu $a = \lim x_n$ hay $x_n \to a$.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 7 / 16 Ngày 09/09/2020

1. Dãy số thực và giới han

Dinh nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại một số $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad\forall\geq n_0$$

Kí hiệu $a = \lim x_n$ hay $x_n \to a$.

Dãy có giới hạn gọi là dãy hội tu, dãy không có giới hạn gọi là dãy phân kỳ.

 \oplus Nhận xét: Số a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu và chỉ nếu mọi khoảng $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn số hạng.

TÀI LIÊU SƯU TAP

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 7 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

1. 2. Giới hạn của dãy số

Dinh nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại một số $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $|x_n-a|<\varepsilon,\quad\forall\geq n_0$

Kí hiệu
$$a = \lim x_n$$
 hay $x_n \to a$.

Dãy có giới hạn gọi là dãy hội tụ, dãy không có giới hạn gọi là dãy phân kỳ.

 \oplus **Nhận xét**: Số a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu và chỉ nếu mọi khoảng $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn số hạng.

Định lý 1.1

- 1 Nếu dãy x_n hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất;
- 2 Nếu $\lim x_n = a \ thi \ \lim |x_n| = |a|;$
- Nếu dãy x_n hội tụ thì nó bị chặn HKHOACNCP.COM



1. 2. Giới han của dãy số

Ví du 1.3

▶ Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1.



BACHKHOACNCP.COM



1. Dãy số thực và giới hạn

Ví du 1.3

lackbox Dãy $\{x_n\}$ với $x_n=rac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với arepsilon>0 tùy ý, ta có

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví du 1.3

lackbox Dãy $\{x_n\}$ với $x_n=rac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với arepsilon>0 tùy ý, ta có

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|-1=\frac{1}{n}$$

Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó $|x_n-1|<\varepsilon, \quad \forall n\geq n_0$

 $D\tilde{a}y 0, 1, 0, 1, \dots$ là dãy phân kì.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020



1. Dãy số thực và giới hạn

Ví du 1.3

lackbox Dãy $\{x_n\}$ với $x_n=rac{n+1}{2}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với arepsilon>0 tùy ý, ta có

$$|\frac{n+1}{n}-1|-1=\frac{1}{n}$$

Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó

$$|x_n-1|<\varepsilon, \quad \forall n\geq n_0$$

Dãy 0, 1, 0, 1, ... là dãy phân kì. Thật vậy, ta sẽ chứng tỏ mọi số thực a đều không phải là giới hạn của dãy.

+ Trường hợp a=0: lấy $\varepsilon=1/2$ thì $1\notin (-\varepsilon;\varepsilon)$ tức là không chứa vô số các số hạng mang chỉ số lẻ. BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 8 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví du 1.3

lackbox Dãy $\{x_n\}$ với $x_n=rac{n+1}{2}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với arepsilon>0 tùy ý, ta có

$$|\frac{n+1}{n}-1|-1=\frac{1}{n}$$

Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó

$$|x_n-1|<\varepsilon,\quad\forall n\geq n_0$$

Dãy 0, 1, 0, 1, ... là dãy phân kì. Thật vậy, ta sẽ chứng tỏ mọi số thực a đều không phải là giới hạn của dãy.

+ Trường hợp a=0: lấy $\varepsilon=1/2$ thì $1\notin (-\varepsilon;\varepsilon)$ tức là không chứa vô số các số hang mang chỉ số lẻ. Tương tư với trường hợp a=1.

+Trường hợp $a \neq 0$ và $a \neq 1$, ta có thể chon ε đủ nhỏ (chẳng han $\varepsilon < \min\{|a|, |a-1|\}\)$ để $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ không chứa cả 0 và 1.

TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Giải tích 1

1. 2. Giới han của dãy số



BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 9 / 16

1. 2. Giới han của dãy số

Dinh lý 1.2

Giả sử các dãy x_n và y_n hội tụ. Khi đó:

- 1 Dãy $x_n + y_n$ hội tụ và $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
- 2 Dãy $x_n \cdot y_n$ hội tụ và $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;
- 3 Nếu lim $y_n \neq 0$ thì dãy $\frac{x_n}{y_n}$ hội tụ và lim $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 9 / 16 Ngày 09/09/2020

1. Dãy số thực và giới han

Dinh lý 1.2

Giả sử các dãy x_n và y_n hội tu. Khi đó:

- 1 Dãy $x_n + y_n$ hội tụ và $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
- 2 Dãy $x_n \cdot y_n$ hội tụ và $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;
- 3 Nếu lim $y_n \neq 0$ thì dãy $\frac{x_n}{y_n}$ hội tụ và lim $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Dinh lý 1.3

- 1 Nếu x_n và y_n là các dãy hội tụ và $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\lim x_n \leq \lim y_n$.
- 2 Giả sử các dãy x_n, y_n, z_n thoả mãn $\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim x_n = \lim z_n = a \end{cases}$. Khi đó $\lim y_n = a$.
- 3 Nếu dãy số đơn điệu tăng và bị chặp trên thì nó hội tụ. Nếu dãy số đơn điệu giảm và bi chăn dưới thì nó hội tu.

TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Giải tích 1



1. 3. Một số giới hạn cơ bản

Một số giới hạn cơ bản

- \bigcirc lim C = C;
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \text{ v\'eti } \forall k > 0;$
- **3** $\lim q^n = 0 \text{ v\'eti } |q| < 1;$
- 4 $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ALLIEU SU'U TÂP

BỞI HOMUT-CNOP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Dình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 10 / 16

1. 3. Một số giới hạn cơ bản

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Khai triển nhi thức Newton ta có

$$x_{n} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^{2}} + \dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

TÀI LIÊU SƯU TÂP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 11 / 16

1. 3. Một số giới hạn cơ bản

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Khai triển nhi thức Newton ta có

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$
Lại có $x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$

Để ý rằng $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n$ đơn điệu tăng.

BỞI HOMUT-CNOP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 11 / 16

1. 3. Môt số giới han cơ bản

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Khai triển nhị thức Newton ta có

$$x_{n} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^{2}} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Lại có
$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
 LIEU SU'U TÂP

 $D\hat{e}$ ý rằng $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n$ đơn điệu tăng.

Hơn nữa, ta chứng minh được
$$n! \geq 2^{n-1}_0$$
 với $\forall n \geq 2$, suy ra N C P
$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3$$

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ và $2 < \lim x_n < 3$, kí hiệu $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1. 4. Giới hạn trên và giới hạn dưới



BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 12 / 16

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Dinh nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

1 Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số từ nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 12 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Dinh nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

- 1 Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số từ nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
- 2 Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k}\to a$ thì a được gọi là một **giới** han riêng của $\{x_n\}$.

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 12 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới hạn trên và giới hạn dưới

Dinh nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

- 1 Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
- 2 Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k}\to a$ thì a được gọi là một **giới** hạn riêng của $\{x_n\}$.
- Ta gọi giới hạn riêng lớn nhất của {x_n} là giới hạn trên, kí hiệu limx_n và gọi giới hạn riêng nhỏ nhất của {x_n} là giới hạn dưới, kí hiệu limx_n.
 Hiển nhiên

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Dình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 12 / 16

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Dinh nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

- 1 Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số từ nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
- 2 Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k}\to a$ thì a được gọi là một **giới** han riêng của $\{x_n\}$.
- 3 Ta gọi giới hạn riêng lớn nhất của $\{x_n\}$ là giới hạn trên, kí hiệu $\overline{\lim} x_n$ và gọi giới hạn riêng nhỏ nhất của $\{x_n\}$ là **giới hạn dưới**, kí hiệu $\lim x_n$. $\lim x_n \leq \overline{\lim} x_n$ Hiển nhiên

$$\underbrace{\lim}_{x_n} x_n \leq \lim x_n$$

Dinh lý 1.4

$$\lim x_n = {}^{\mathbf{B}_{\mathbf{A}}} \longleftrightarrow \lim x_n = \lim x_n = a.$$

Giải tích 1 12 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- a) Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **6)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- (a) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 13 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- a) Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **6)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- **(a)** Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .
- a) Ta có $a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$,

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 13 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- 1) Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **6)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- **(a)** Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .
- a) Ta có $a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \frac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k}{(2k-1)^2}$,

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 13 / 16 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- **1** Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **6)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- **(a)** Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .
- a) Ta có $a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \frac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \frac{k^2+1}{(k^2)^2} = \frac{k^2+1}{k^4}$

TAI LIEU SƯU TAP

BACHKHOACNCP.COM

Giải tích 1 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 13 / 16

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- 1) Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **6)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- **(a)** Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .

a) Ta có
$$a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$$
, $a_{2k-1} = \frac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \frac{k^2+1}{(k^2)^2} = \frac{k^2+1}{k^4}$

b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.

HKHOACNCP.COM

Giải tích 1 TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 13 / 16

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- a) Cho $a_n=\frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}.$ b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n=(-1)^n$, tìm giới hạn của $a_n.$
- (a) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .
- a) Ta có $a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \frac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \frac{k^2+1}{(k^2)^2} = \frac{k^2+1}{k^4}$
- b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.
- c) Ta có $\begin{cases} \lim a_{2k} = \lim \frac{(-1)^k}{k-2} = 0 \\ \text{BổI HCMUT-CNCP} \end{cases}$

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 13 / 16

1. 4. Giới han trên và giới han dưới

Ví du 1.4

- a) Cho $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k} , a_{2k-1} , a_{3k+2} , a_{k^2} .
- **(b)** Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n .
- **(a)** Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \frac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n .
- a) Ta có $a_{2k} = \frac{(2k)+1}{(2k)^2} = \frac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \frac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \frac{k^2+1}{(k^2)^2} = \frac{k^2+1}{k^4}$
- b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.
- b) $a_n \cot 2 \operatorname{day} \cot 2 \cdot \frac{1}{k} = 0$ c) Ta có $\begin{cases} \lim a_{2k} = \lim \frac{(-1)^k}{k-2} = 0 \\ \lim a_{2k+1} = \lim \frac{k^2}{k^3+1} = 0. \end{cases}$ BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 13 / 16



1. 5. Giới han vô cùng

Dinh nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$



TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Giải tích 1

1. 5. Giới han vô cùng

1. Dãy số thực và giới hạn

Dinh nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1 Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

TÀI LIÊU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Giải tích 1 14 / 16 Ngày 09/09/2020

1. 5. Giới hạn vô cùng

Dinh nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1 Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

2 Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n < -M, \quad \forall n > n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "âm vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to -\infty$).

* Chú ý: Một dãy có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ nhưng vẫn không phải dãy hội tụ. Do đó không áp dụng được các tính chất của dãy hội tụ.

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 14 / 16

1. 5. Giới hạn vô cùng

Dinh nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1 Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

2 Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n < -M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "âm vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to -\infty$).

* Chú ý: Một dãy có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ nhưng vẫn không phải dãy hội tụ. Do đó không áp dụng được các tính chất của dãy hội tụ.

Các dạng vô định

$$\frac{0}{0}$$
, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\mathsf{BACHKHOACNCP.COM}}{\infty - \infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞} , ∞ , 0^{0}

TS. Nguyễn Đình Dương

Ngày 09/09/2020

Nôi dung

- 1.1 Một số khái niệm 📈
- 1.3 Một số giới han cơ bản
- 1.4 Giới han trên và giới han dưới
- 1.5 Giới han vô cùng



Bài tập

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 15 / 16





BACHKHOACNCP.COM

TS. Nguyễn Đình Dương Ngày 09/09/2020 Giải tích 1 16 / 16