TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP. HCM
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

ĐỀ TÀI 1

Giảng viên: ĐOÀN THỊ THANH XUÂN
Phương pháp tính (MT1009)_L13_Nhóm 13

MT1009_L13_HK212

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP. HCM
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

ĐỀ TÀI 1

Nhóm 13 – Phương pháp tính (MT1009)_L13

STT	Thành viên	MSSV
1	Hồ Nguyên Hoàng	2113395
2	Nguyễn Tri Hưng	2111408
3	Trịnh Vũ Hưng	2113617
4	Bùi Quốc Huy	2111274
5	Lê Gia Huy	2111298

MỤC LỤC

PHẦN 1: PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

I. Cơ sở lý thuyết

1. Phương pháp dây cung

Giả sử $[a,b]$ là khoảng nghiệm của phương trình. Gọi A, B là hai điểm trên đồ thị $f(x)=0$ có hoành độ tương ứng là a, b. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ có dạng:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

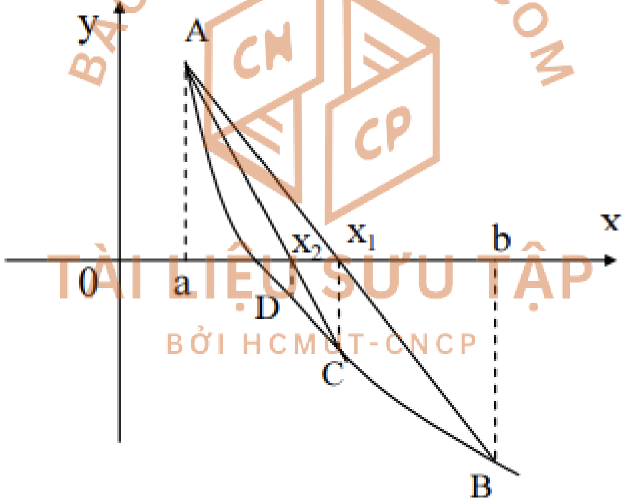
Dây cung AB cắt trục Ox tại điểm có toạ độ $(x_1,0)$.

Do đó $\dfrac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{x_1-a}{b-a}$ và $x_1=a-\dfrac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$

Nếu $f(a)\times f(x_1)<0$, thay $b=x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (a,x_1)

Nếu $f(b)\times f(x_1)<0$, thay $a=x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (x_1,b)

Tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng nghiệm mới ta được giá trị x_2. Lại tiếp tục như thế ta nhận được các giá trị $x_3,x_4,\ldots$ càng tiến gần với giá trị nghiệm chính xác của phương trình.



Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x^3+x-5=0$ bằng phương pháp dây cung

Giải:

- Tách nghiệm: Phương trình có 1 nghiệm $x\in(1,2)$
- Chính xác hóa nghiệm: $f(1)=-3<0$, $f(2)=5>0$

Bảng kết quả:

a	b	x	f(x)
1	2	1,333	-0,447
1,333		1,379	-0,020
1,379		1,385	-0,003
1,385		1,386	-0,000
1,386		1,386	

Vậy nghiệm phương trình: $x\approx 1,386$

3. Sai số của phương pháp dây cung

Giả sử $\left|f'(x)\right| \geq m > 0, \forall x \in (a,b)$, ta có:

$$\left|x_n - \bar{x}\right| \leq \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m}$$

Giả sử $f'(x)$ không đổi dấu trên (a,b) và $0 \leq m \leq \left|f'(x)\right| \leq M$, ta có:

$$\left|x_n - \bar{x}\right| \leq \frac{M-m}{m}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \forall x \in (a,b)$$

4. Sự hội tụ của phương pháp dây cung

Phương pháp dây cung là một trong những phương pháp phổ biến nhất trong việc tìm xấp xỉ gần đúng. Các lần lặp x_n của phương pháp dây cung hội tụ tại một xấp xỉ của *f* nếu các giá trị ban đầu x_0, x_1 đủ gần với xấp xỉ. Kí hiệu của sự hội tụ đó là φ, khi $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ là tỉ lệ vàng. Đặc biệt, sự hội tụ là siêu tuyến tính, nhưng không hoàn toàn là bậc hai.

Kết quả này chỉ có trong một số điều kiện kĩ thuật, cụ thể là *f* có thể phân biệt hai lần liên tục và xấp xỉ được đề cập đơn giản.

Nếu các giá trị ban đầu x_0, x_1 không đủ gần với xấp xỉ, không có gì đảm bảo là phương pháp dây cung sẽ hội tụ. Không có định nghĩa chung về việc ‘đủ gần’ nhưng tiêu chí phải liên quan đến mức độ hàm số “hoạt động” trong đoạn $\left[x_0, x_1\right]$. Ví dụ, nếu *f* khả vi trong đoạn đó và có một điểm cũng trên đoạn đó thì thuật toán này có thể không hội tụ được.

*** So sánh ưu nhược điểm của các phương pháp giải gần đúng phương trình phi tuyến:**

Sau khi đã nghiên cứu kết quả của 3 phương pháp: dây cung, Newton - Raphson và chia đôi, ta thấy được tốc độ hội tụ của các phương pháp được xếp như sau:

Phương pháp dây cung > Phương pháp Newton - Raphson > Phương pháp chia đôi

So sánh giữa phương pháp Newton - Raphson và phương pháp dây cung, theo lý thuyết, phương pháp Newton hội tụ nhanh hơn phương pháp dây cung. Tuy nhiên, phương pháp Newton cần phải xét cả hàm *f(x)* và đạo hàm của nó ở mỗi lần lặp lại trong khi phương pháp dây cung chỉ cần xét hàm *f(x)*. Do đó, phương pháp dây cung đôi khi có thể nhanh hơn trong thực tế. Nếu chúng ta giả định rằng xét hàm *f(x)* tốn thời gian tương đương với xét đạo hàm của nó và bỏ qua các điều kiện khác, chúng ta có thể thực hiện hai lần lặp lại với phương pháp dây cung hoặc một lần lặp lại với phương pháp Newton trong cùng thời gian. Với phương pháp chia đôi, mặc dù sự hội tụ của phương pháp chia đôi chính xác hơn nhưng tốc độ hội tụ lại quá chậm và do đó, rất khó mở rộng để sử dụng cho các hệ phương trình. Chúng ta có thể coi phương pháp dây cung là phương pháp hiệu quả nhất trong số các phương pháp đang xét.

II. Thuật toán Matlab

Có 2 dạng đề cơ bản thường gặp của bài toán tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x)=0$ với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng cách ly nghiệm. Dưới đây là thuật toán Matlab sử dụng phương pháp dây cung để giải 2 dạng đề này.

Dạng 1: Cho ε, tìm số lần lặp *n* với x_n thỏa mãn $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

```
clc;
close all;
clear all;

syms x;
f = input('Nhap ham f(x): ');
epsilon=input('Nhap epsilon: ');
x0=input('Nhap x0: ');
x1=input('Nhap x1: ');

for i=1:100
f0=subs(f,x0);
f1=subs(f,x1);
x2=x1-(f1*(x1-x0))/(f1-f0);
err=abs(x2-x1);
if err<epsilon
break
end
x0=x1;
x1=x2;
end
x2=x2-rem(x2,10^-6);

fprintf('Nghiem: %f\n',x2);
fprintf('So lan lap: %d\n',i);
```


Dạng 2: Cho số lần lặp *n*, tìm x_n và $|x_n - x_{n-1}|$

```
clc;
close all;
clear all;

syms x;
f=input('Nhap ham f(x): ');
it=input('Nhap so lan lap n: ');
x0=input('Nhap x0: ');
x1=input('Nhap x1: ');

for i=1:it
f0=subs(f,x0);
f1=subs(f,x1);
x2=x1-(f1*(x1-x0))/(f1-f0);
err=abs(x2-x1);
x0=x1;
x1=x2;
```

```
end
x2=x2-rem(x2,10^-6);

fprintf('Nghiem: %f\n',x2);
fprintf('Sai so: %f\n',err);
```

Ví dụ: Cho phương trình $f(x) = x^2 - 4 = 0$, với khoảng cách ly nghiệm $[0,4]$. Sử dụng phương pháp dây cung để:

a) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình với sai số nhỏ hơn 10^{-5}.

b) Tìm nghiệm gần đúng và sai số sau 7 lần lặp.

a)

Command Window

```
Nhap ham f(x): x^2-4
Nhap epsilon: 10^-5
Nhap x0: 0
Nhap x1: 4
Nghiem: 1.999999
So lan lap: 7
```

b)

Command Window

```
Nhap ham f(x): x^2-4
Nhap so lan lap n: 7
Nhap x0: 0
Nhap x1: 4
Nghiem: 1.999999
Sai so: 0.000003
```

PHẦN 2: PROJECT 1

I. Problem 1

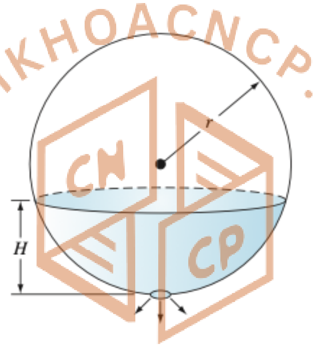
Một bể nước hình cầu có lỗ nhỏ hình tròn bên dưới để nước chảy ra ngoài. Bảng số liệu dưới đây ghi lại tốc độ dòng chảy qua lỗ tròn theo thời gian:

$t(s)$	0	500	1000	1500	2200	2900
$Q(m^3/h)$	10.55	9.576	9.072	8.640	8.100	7.560
$t(s)$	3600	4300	5200	6500	7000	7500
$Q(m^3/h)$	7.020	6.480	5.688	4.752	3.348	1.404

Viết một chương trình thực hiện các lệnh sau

a) Tính xấp xỉ thể tích nước (lít) chảy ra ngoài sau cả quá trình

b) Tính độ cao mực nước trong bể nước tại $t = 0(s)$, với $r = 1.5(m)$



a) Tính xấp xỉ thể tích nước (lít) chảy ra ngoài sau cả quá trình

Thể tích nước chảy ra được tính bằng công thức: $\int_a^b Q(m^3/h)dt$

Áp dụng công thức hình thang mở rộng:

$$\begin{aligned}
V_{nước} = &\left(\frac{500-0}{3600}\right)\left(\frac{9.576+10.55}{2}\right)+\left(\frac{1000-500}{3600}\right)\left(\frac{9.072+9.576}{2}\right)\\
&+\left(\frac{1500-1000}{3600}\right)\left(\frac{8.64+9.072}{2}\right)+\left(\frac{2200-1500}{3600}\right)\left(\frac{8.1+8.64}{2}\right)\\
&+\left(\frac{2900-2200}{3600}\right)\left(\frac{7.56+8.1}{2}\right)+\left(\frac{3600-2900}{3600}\right)\left(\frac{7.02+7.56}{2}\right)\\
&+\left(\frac{4300-3600}{3600}\right)\left(\frac{6.58+7.02}{2}\right)+\left(\frac{5200-4300}{3600}\right)\left(\frac{5.686+6.48}{2}\right)\\
&+\left(\frac{6500-5200}{3600}\right)\left(\frac{4.752+5.688}{2}\right)+\left(\frac{7000-6500}{3600}\right)\left(\frac{3.348+4.752}{2}\right)\\
&+\left(\frac{7500-7000}{3600}\right)\left(\frac{1.404+3.348}{2}\right)=14.1011(m^3)=14101.1(l)
\end{aligned}$$

Code Matlab:

```
clc; clear;
t = [0 500 1000 1500 2200 2900 3600 4300 5200 6500 7000 7500];
Q = [10.55 9.576 9.072 8.640 8.100 7.560 7.020 6.480 5.688 4.752 3.348
1.404];
n = length(t);
tm = size(n-1,1);
Qm = size(n-1,1);
Qt = size(n-1,1);
thetich = 0;
for i=1:n-1
    tm(i)= (t(i+1)-t(i))/3600;
    Qm(i)= ((Q(i+1)+Q(i))/2)*1000;
    Qt(i)= tm(i)*Qm(i);
    thetich = thetich + Qt(i);
end
disp('The tich nuoc chay ra sau ca qua trinh (1) la:');
disp(thetich);
```

Command Window

```
The tich nuoc chay ra sau ca qua trinh (1) la:
   1.4101e+04
```

b) Tính độ cao mực nước trong bể nước tại $t = 0(s)$, với $r = 1.5(m)$

Ta thấy $\frac{V_{nuoc}}{2} > \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow h > r$

Xây dựng phương trình tính thể tích nước chứa trong bể nước:

$$V_{nuoc} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(2r-h)^2\left(r - \frac{(2r-h)}{3}\right)$$

Tại $t = 0(s)$, $r = 1.5(m)$

$$V_{nuoc} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(2r-h)^2\left(r - \frac{(2r-h)}{3}\right) = 14.1011$$

$$\Leftrightarrow f(h) = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(2r-h)^2\left(r - \frac{(2r-h)}{3}\right) - 14.1011 = 0$$

Sử dụng phương pháp lặp với khoảng li nghiệm ban đầu

$$[a_0, b_0] = [r, 2r] = [1.5, 3]$$

Với số lần lặp là 5, ta được: $h = 2.9297(m)$

Sai số: $\varepsilon = \frac{3-1.5}{2^{5+1}} \approx 0.0235$

Số lần lặp	$a(-)$	$b(+)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(c)$
0	1.5	3	2.25	–
1	2.25	3	2.625	–
2	2.625	3	2.8125	–

3	2.8125	3	2.90625	–
4	2.90625	3	2.953125	+
5	2.90625	2.953125	2.9296875	+

Code Matlab:

```
clc; clear;
f = inline('pi*1.5^3*4/3 - pi*(2*1.5-h)^2*(1.5-(2*1.5-h)/3)-
14.1011','h');
a = 1.5; b = 2*1.5;
fa = feval(f,a); n = 0;
while n < 6
    c = a+(b-a)/2;
    fc = feval(f,c);
    if fa*fc >0
        a = c; fa = fc;
    else
        b = c;
    end;
    n = n+1;
end;
disp('Chieu cao muc nuoc ban dau');
disp(c);
```

II. Problem 2

Cho miền R là hình chữ nhật $[0;2]\times[1;4]$

a) Cho $f(x,y)=x\cos\left(x^2+y^2\right)$. Tính tích phân $\iint\limits_R f(x,y)dA$

b) Nghiên cứu phương pháp Simpson. Phát triển một hàm để ước lượng tích phân trên R sử dụng công thức Simpson

c) Gọi n và m lần lượt là số khoảng chia của thành phần x và y. Ước lượng tích phân với $[n,m]=[40;60]$ và $[n,m]=[80;120]$ và ước lượng sai số

a) $\iint\limits_R f(x,y)dA=\int\limits_0^2 dx\int\limits_1^4 x\cos(x^2+y)dy$

$=\int\limits_0^2\left[x\sin\left(x^2+y\right)\right]_1^4 dx$

$=\int\limits_0^2\left[x\sin\left(x^2+4\right)-x\sin\left(x^2+1\right)\right]dx$

≈ -0.382392

b) Tích phân kép $\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)dxdy$ được đánh giá bởi 2 tích phân liên tiếp theo biến x và y

Công thức Simpson: ta chia đoạn $[a,b]$ thành $n=2n'$ đoạn con bằng nhau với bước chia $h=\dfrac{b-a}{n}$ và đoạn $[c,d]$ thành $m=2m'$ đoạn con bằng nhau với bước chia là $k=\dfrac{d-c}{m}$.

Sau đó áp dụng công thức Simpson 1/3 theo cả 2 biến cho từng đoạn $\left[x_i;x_{i+2}\right]$, $\left[y_j;y_{j+2}\right]$, ta có:

$$\int\limits_{y_j}^{y_{j+2}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+2}} f(x,y)dxdy=\frac{h}{3}\int\limits_{y_j}^{y_{j+2}}[f(x_i,y)+4f(x_{i+1},y)+f(x_{i+2},y)]dy$$

$$=\frac{hk}{9}\left[(f_{x_i,y_j}+4f_{x_i,y_{j+1}}+f_{x_i,y_{j+2}})+4(f_{x_{i+1},y_j}+4f_{x_{i+1},y_{j+1}}+f_{x_{i+1},y_{j+2}})+(f_{x_{i+2},y_j}+4f_{x_{i+2},y_{j+1}}+f_{x_{i+2},y_j+2})\right]$$

$$=\frac{hk}{9}\left[\left(f_{i,j}+f_{i+2,j+2}+f_{i+2,j}+f_{i,j+2}\right)+4\left(f_{i+1,j}+f_{i,j+1}+f_{i+2,j+1}+f_{i+1,j+2}\right)+16f_{i+1,j+1}\right]$$

Tiếp tục cộng lần lượt các khoảng chia $\left[x_{i+2};x_{i+4}\right]$, $\left[y_{j+2};y_{j+4}\right]$ liên tiếp như vậy, ta thu được giá trị của tích phân.

c)

```
clc
format long
syms x y X Y
%Tinh xap xi I
f= @(x,y) x*cos(x^2+y);
a = 0;  b = 2; %can tich phan x
c = 1; d = 4 ; %can tich phan y
```

```
n =input('nhap so doan chia n: ' );
m = input('nhap so doan chia m: ' );
if n <= 0, error('khong the tinh tich phan');end
if rem(n,2) ~=0 , error('so khoang chia phai la so chan');end
if m <= 0, error('khong the tinh tich phan');end
if rem(m,2) ~=0 , error('so khoang chia phai la so chan');end
h = (b-a)/n ;
k = (d-c)/m ;
I = 0;
for i = 0: m
    if i == 0 || i == m;
        p=1;
    elseif mod(i,2) ~= 0
        p = 4;
    else p = 2;
    end;
    for j = 0 : n
        if j==0||j== n
            q=1;
        elseif mod(j,2) ~= 0
            q=4;
        else q=2;
        end;
        x = a+ j*h;
        y= c +i*k;
        I= I + p*q*f(x,y);
        end;
    end;
I = (h*k/9)*I
% Tinh gia tri chinh xac I
f= X*cos(X^2+Y);
tichphan1=int(f,X,0,2);
I0=int(tichphan1,Y,1,4);
% Tinh sai so
SaiSo= double(abs(I-I0))
```


Command Window

```
nhap so doan chia n: 40
nhap so doan chia m: 60

I =

  -0.382396367540042


SaiSo =

     4.513810086327093e-06
```

Command Window

```
nhap so doan chia n: 80
nhap so doan chia m: 120

I =

  -0.382392132415891


SaiSo =

     2.786859355072576e-07
```

III. Problem 3

Nhiệt được truyền qua thanh kim loại giữa hai vách ngăn được gắn chặt. Bên cạnh sự dẫn nhiệt, nhiệt còn dược truyền giữa thanh kim loại và môi trường xung quanh bởi sự đối lưu. Dựa vào sự cân bằng nhiệt, sự phân phối nhiệt độ giữa thanh được mô tả theo như phương trình vi phân cấp 2 dưới đây:

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h(T_\infty - T) \qquad (*)$$

Trong đó T là nhiệt độ (K), h hệ số truyền nhiệt phản ánh tương đối giá trị của sự đối lưu trên 1m^2, x là khoảng cách giữa hai vách nhiệt (m), và T_∞ là nhiệt độ của chất lỏng xung quanh (K).

a) Biến đổi phương trình vi phân này thành hệ các phương trình đại số tương đương bằng công thức sai phân hướng tâm đạo hàm cấp hai.

b) Viết chương trình để giải các phương trình từ x = 0 đến L và cho kết quả khoảng cách và nhiệt độ,mà các phương trình đại số phải được giải bằng ma trận 3 đường chéo.

c) Viết chương trình thể hiện hàm số này và vẽ đồ thị.

d) Kiểm tra lại chương trình với số liệu dưới đây $h = 0.0425(m^{-2})$, $L = 12(m)$, $T_\infty = 220(K)$, $T(0) = 320(K)$, $T(L) = 450(K)$, và $\Delta x = 0.5(m)$.

a) Áp dụng công thức sai phân hướng tâm đạo hàm cấp 2:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Thay biểu thức trên vào phương trình (*), ta được:

$$0 = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + h(T_\infty - T)$$

$$\Leftrightarrow -h'\Delta x^2 T_\infty = T_{i-1} + (-2 - \Delta x^2 h')T_i + T_{i+1} \qquad (1)$$

Gọi n là số đoạn x khác nhau, khi đó:

$$n = \frac{L}{\Delta x} - 1$$

Cho $i = 1$, khi đó phương trình (1) được viết lại là:

$$-h'\Delta x^2 T_\infty = T_0 + (-2 - \Delta x^2 h')T_1 + T_2$$

Tương tự cho $i = 2;3;4;...;n$, ta xây dựng được hệ:

$$\begin{cases} -h'\Delta x^2 T_\infty = T_0 + (-2 - \Delta x^2 h')T_1 + T_2 \\ -h'\Delta x^2 T_\infty = T_1 + (-2 - \Delta x^2 h')T_2 + T_3 \\ -h'\Delta x^2 T_\infty = T_2 + (-2 - \Delta x^2 h')T_3 + T_4 \\ \ldots \\ -h'\Delta x^2 T_\infty = T_{n-1} + (-2 - \Delta x^2 h')T_n + T_L \end{cases}$$

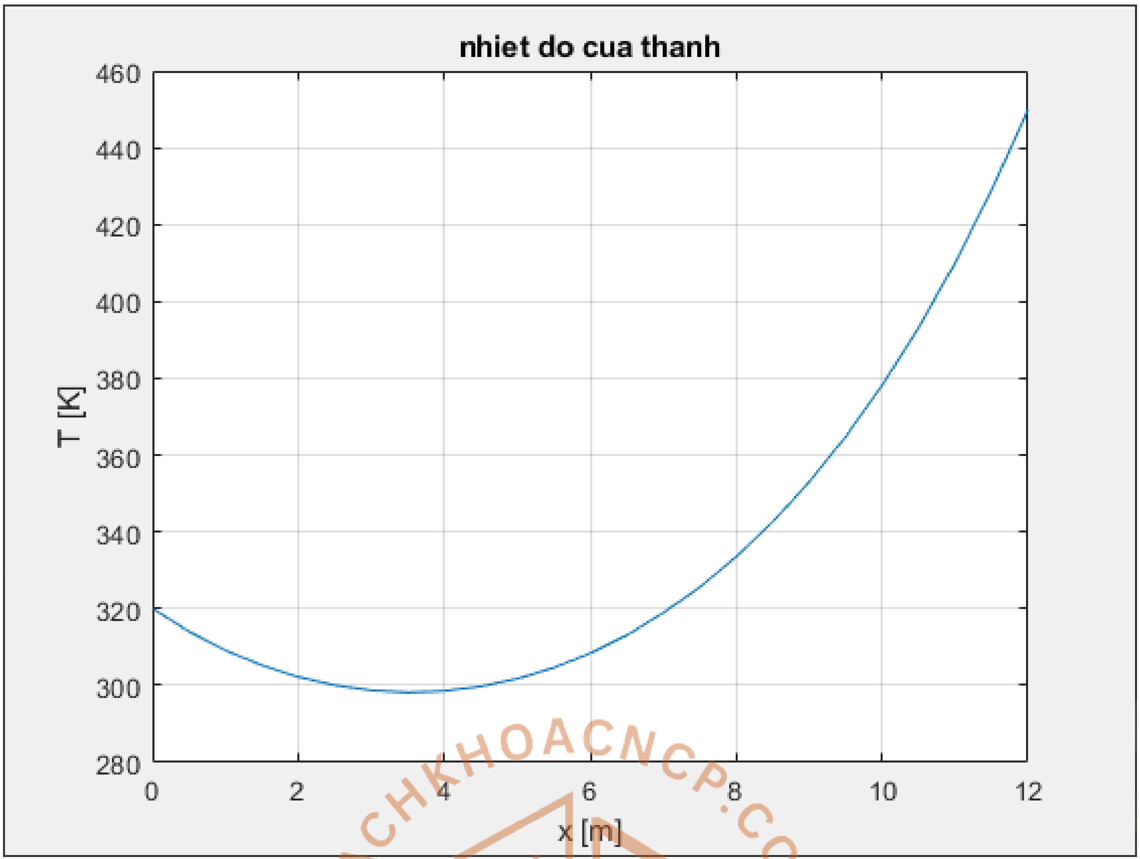
b)

```
%caub
function [x, T] = Metal_rod(hp, Tinf, T0, TL, L, dx)
n = L/dx-1;
x = 0+dx : dx : L-dx;
x = x';
%matrixA
A = zeros(n,n);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if i == j
            A(i,j) = (-2-dx^2*hp);
        elseif j == i-1
            A(i,j) = 1;
        elseif j == i+1
            A(i,j) = 1;
        else
            A(i,j) = 0;
        end
    end
end
%matrixb
b = -hp.*dx.^2.*Tinf*ones(n,1);
b(1) = b(1)-T0;
b(end) = b(end)-TL;
T = A\b;
```

c)

```
clear
close all
L = 12;
dx = 0.5;
hp = 0.0425;
Tinf = 220;
T0 = 320;
TL = 450;

%call function
[x, T] = Metal_rod(hp, Tinf, T0, TL, L, dx);
x0L = [0 ; x ; L];
T0L = [T0 ; T ; TL];
figure
plot(x0L,T0L)
grid on
title('nhiet do cua thanh')
xlabel('x [m]')
ylabel('T [K]')
```

d)


nhiet do cua thanh
T [K]
460
440
420
400
380
360
340
320
300
280
0
2
4
6
8
10
12
x [m]

<u>PHẦN 3</u>: TỔNG KẾT

I. Phân công công việc

STT	Thành viên	MSSV	Phân công
1	Hồ Nguyên Hoàng	2113395	Problem 2
2	Nguyễn Tri Hưng	2111408	Cơ sở lý thuyết phương pháp dây cung
3	Trịnh Vũ Hưng	2113617	Problem 1
4	Bùi Quốc Huy	2111274	Problem 3
5	Lê Gia Huy	2111298	Code phương pháp dây cung, soạn báo cáo file word, powerpoint

II. Danh mục tài liệu tham khảo

[1] Secant method - Wikipedia

[2] Help Center for MATLAB, Simulink and other MathWorks products

[3] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. *Numerical methods for engineers 7th edition*

[4] Lê Thái Thanh. *Giáo trình Phương pháp tính*