VD 1: Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [1, 4]. Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y = lnX + 1 .

Cách 1: Tìm hàm phân phối xác suất của Y qua hàm phân phối xác suất của X.

Hàm mật độ xác suất của X: $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & x \in [1;4] \\ 0 & x \notin [1;4] \end{cases}$

Hàm phân phối xác suất của X : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} & 1 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$

Kí hiệu $F_Y(y)$ là hàm phân phối xác suất của Y.

$F_Y(y) = P(Y<y) = P(\ln X+1<y) = P(X<e^{y-1}) = F_X(e^{y-1}) =$

$$= \begin{cases} 0 & e^{y-1} < 1 \\ \dfrac{1}{3}e^{y-1} - \dfrac{1}{3} & 1 \le e^{y-1} \le 4 \\ 1 & e^{y-1} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \dfrac{1}{3}e^{y-1} - \dfrac{1}{3} & 1 \le y \le \ln 4 + 1 \\ 1 & y > \ln 4 + 1 \end{cases}$$

{ Nếu muốn tìm hàm mật độ xác suất của Y, ta sử dụng thêm công thức $f_Y(y) = F'_Y(y)$ }

Cách 2 : SD kết quả của định lý sau (xem như là tham khảo):

Định lý: Giả sử X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f_X(x)$ với tập giá trị là miền I, còn g(x) là hàm đơn điệu, khả vi liên tục trên I sao cho tồn tại hàm ngược $x=g^{-1}(y)$ cũng khả vi liên tục. Khi đó biến ngẫu nhiên Y = g(X) có hàm mật độ là:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)).\left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right|$$

Trường hợp hàm g(x) đơn điệu từng khúc trên I, tức là có thể chia I thành n khoảng con I_i, i=1,…,n rời nhau sao cho g(x) đơn điệu trên từng khoảng con đó; và nếu kí hiệu $g_i^{-1}(y)$ là hàm ngược của g(x) trên từng khoảng con I_i thì:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(g_i^{-1}(y)).\left|\frac{d(g_i^{-1}(y))}{dy}\right|$$

Trước tiên ta tìm hàm mật độ của Y rồi suy ra hàm phân phối xác suất của Y.

Hàm mật độ xác suất của X: $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & x \in [1;4] \\ 0 & x \notin [1;4] \end{cases}$

Do y =lnx +1 đơn điệu trên miền giá trị của X (ở đây I=[1; 4]) nên tồn tại hàm ngược $x=\varphi(y)=e^{y-1}$.

Theo công thức trên, hàm mật độ của Y là:

$f_Y(y) = f_X(\varphi(y)).|\varphi'(y)| = f_X(e^{y-1}).|(e^{y-1})'| = e^{y-1}.f_X(e^{y-1})$

$$= e^{y-1}.\begin{cases} \dfrac{1}{3} & e^{y-1} \in [1;4] \\ 0 & e^{y-1} \notin [1;4] \end{cases} = e^{y-1}.\begin{cases} \dfrac{1}{3} & y \in [1;\ \ln 4+1] \\ 0 & y \notin [1;\ \ln 4+1] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^{y-1} & y \in [1;\ \ln 4+1] \\ 0 & y \notin [1;\ \ln 4+1] \end{cases}$$

Từ đó suy được hàm phân phối xác suất của Y là:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{1}{3}e^{y-1}-\frac{1}{3} & 1\le y\le \ln 4+1\\ 1 & y>\ln 4+1\end{cases}$$

VD 2: Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [1, 5] . Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = 2X^2 + 1$.

Sử dụng Cách 1: Hàm phân phối xác suất của X: $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} & 1\le x\le 4\\ 1 & x>4\end{cases}$

Ta có:

$$F_Y(y) = P(Y<y) = P\left(X^2<\frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases}0 & \frac{y-1}{2}\le 0\\ -\sqrt{\frac{y-1}{2}}<X<\sqrt{\frac{y-1}{2}} & \frac{y-1}{2}>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & \frac{y-1}{2}\le 0\\ F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) & \frac{y-1}{2}>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \frac{y-1}{2}\le 0\\ F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) & \frac{y-1}{2}>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y\le 3\\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}}-\frac{1}{4} & 3<y\le 51\\ 1 & y>51\end{cases}$$

vì $F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\begin{cases}0 & \sqrt{\frac{y-1}{2}}<1\\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}}-\frac{1}{4} & 1<\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le 5\\ 1 & \sqrt{\frac{y-1}{2}}\ge 5\end{cases}$

VD 3: Cho X là BNN có phân phối chuẩn tắc với hàm mật độ: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y=X^3$; $Z=X^2$.

ĐS: Hàm mật độ xác suất của Y và Z:

$$g(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \qquad h(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{-\frac{z}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

VD 4: X là BNN có phân phối chuẩn với hàm mật độ: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y=aX+b.

ĐS: Hàm mật độ xác suất của Y:

$$g(y)=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(b+am)]^2}{2a^2\sigma^2}}$$

Nhận xét: Y cũng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng là b+am và phương sai là $a^2\sigma^2$.

<u>VD 5:</u> Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn $[0, 2\pi]$. Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = \cos X$.

Giải:

Hàm mật độ xác suất của X: $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & x \in [0;2\pi] \\ 0 & x \notin [0;2\pi] \end{cases}$

Ký hiệu $F_Y(y)$ là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y.

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\cos X < y)$

$$=\begin{cases} 0 & y \le -1 \\ P(\cos X < y) & -1 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ P(\arccos y < X < 2\pi - \arccos y) & -1 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & y \le -1 \\ \dfrac{1}{2\pi}(2\pi - 2\arccos y) & -1 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ 1 - \dfrac{\arccos y}{\pi} & -1 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$