ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 1: Ma trận, Định thức và Hệ phương trình tuyến tính

TS. Đặng Văn Vinh

Bộ môn Toán Ứng Dụng
Khoa Khoa học Ứng dụng
Đại học Bách Khoa Tp.HCM

Tài liệu: Đặng Văn Vinh. Đại số tuyến tính. NXB ĐHQG tp HCM, 2019

Ngày 6 tháng 3 năm 2020

Vấn đề 1. Các phép biến đổi sơ cấp và vận dụng trong giải bài tập.

Vấn đề 2. Ứng dụng của chương 1: Mô hình Markov và mô hình Leslei.

Ví dụ

Giải hệ phương trình $\begin{cases} -x & - & y & + & 2z & = & -1 & (1) \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 5 & (2) \\ 3x & + & 5y & - & 4z & = & 9 & (3) \end{cases}$

Hệ phương trình $\xrightarrow{pt_2 \to pt_2 + 2pt_1,\, pt_3 \to pt_3 + 3pt_1} \begin{cases} -x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & 2y & + & 2z & = & 6 \end{cases}$

Phương trình (3) trừ 2 lần phương trình (2):

$\xrightarrow{pt_3 \to pt_3 - 2pt_2} \begin{cases} -x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases}$

Phương trình (2) có hai ẩn. Đặt $z = \alpha$, ta có $y = 3 - \alpha$.
Từ phương trình (1) có $x = 1 - y + 2z = -2 + 3\alpha$.
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào α. Nghiệm của hệ:
$(-2 + 3\alpha; 3 - \alpha; \alpha)$.

Sử dụng ma trận: $\begin{cases} -x - y + 2z = -1 & (1) \\ 2x + 3y - 3z = 5 & (2) \\ 3x + 5y - 4z = 9 & (3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b.$$

Xét ma trận mở rộng $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & -4 & 9 \end{array}\right)$.

$$(A|b) \xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1, h_3 \to h_3 + 3h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

là ma trận dạng bậc thang.

Ta giải ngược từ dưới lên: từ hàng 2 ta được: $y + z = 3$.

Đặt $z = \alpha$. Suy ra $y = 3 - \alpha$.

Từ hàng 1 của bậc thang: $x + y - 2z = 1$, suy ra $x = 3\alpha - 2$.

Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa

Ba phép biến đổi sơ cấp đối với hàng của ma trận là:
Biến đổi loại 1: *Nhân một hàng tùy ý với một số khác 0:* $h_i \to \alpha h_i, \alpha \neq 0$;
Biến đổi loại 2: *Cộng vào hàng i một hàng j khác đã được nhân với một số tùy ý* $h_i \to h_i + \beta h_j, i \neq j$;
Biến đổi loại 3: *Đổi chỗ hai hàng tùy ý* $h_i \leftrightarrow h_j, i \neq j$.
Hoàn toàn tương tự, ta có ba phép biến đổi sơ cấp đối với cột của ma trận.

Lưu ý: Các phép biến đổi sơ cấp đối với cột không tương ứng với các phép biến đổi tương đương của hệ nên ta không thể dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với cột để giải hệ.

Định nghĩa

Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$. Giả sử ta dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng (hoặc cột) đưa được A về dạng bậc thang. Khi đó hạng của ma trận A được ký hiệu là $r(A)$ là số các hàng khác không của ma trận dạng bậc thang.

Để tìm hạng của ma trận A ta dùng các biến đổi sơ cấp đối với hàng hoặc cột đưa A về dạng bậc thang $r(A)$ bằng số các hàng khác không của bậc thang.

Ví dụ

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng, đưa ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang. Tính $r(A)$.

Bước 1. Bắt đầu từ cột khác không đầu tiên tính từ trái là cột 1, chọn phần tử khác không đầu tiên tính từ trên xuống là số 1.
Bước 2. Sử dụng hai phép biến đổi sơ cấp để khử 3 và 5 trong cột 1:

$$A \xrightarrow{h_2 \to h_2 - 3h_1, h_3 \to h_3 - 5h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Che hàng 1 chứa phần tử đã chọn là 1. Ta có một ma trận con có 2 hàng $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ma trận này chưa phải là ma trận dạng bậc thang nên ta lặp lại 2 bước trên.

Bước 1. Bắt đầu từ cột khác không đầu tiên tính từ trái là cột 2, chọn phần tử khác không đầu tiên tính từ trên xuống là số -1.
Bước 2. Sử dụng một phép biến đổi sơ cấp để khử -2 của cột 2:
$A \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ta được ma trận bậc thang và không cần lặp lại 2 bước trên. Suy ra $r(A) = 2$.

Phương pháp khử Gauss để giải hệ $AX = b$:
Bước 1. Viết ma trận mở rộng $(A|b)$;
Bước 2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng để biến đổi về dạng bậc thang;
Bước 3. Giải ngược từ dưới lên. Từ hàng khác không cuối cùng của bậc thang, viết ra phương trình tương ứng. Nếu phương trình này có nhiều hơn một ẩn, ta chọn một ẩn và đặt các ẩn còn lại các tham số $\alpha, \beta, \cdots$ và biểu diễn ẩn đã chọn theo các tham số. Tiếp tục suy ngược lên cho các hàng phía trên nó.

Dùng bđsc để tính định thức

Nếu nhân một hàng với một số, thì định thức được nhân lên với số đó

Nếu cộng vào một hàng thứ i, một hàng khác đã được nhân với một số, thì định thức không thay đổi

Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận A thì định thức đổi dấu

Dùng các biến đổi sơ cấp đối với hàng hoặc cột để tính định thức

Ví dụ Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Dùng bđsc để tìm ma trận nghịch đảo

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch, nếu tồn tại ma trận vuông B thỏa $AB = BA = I$. Khi đó B được gọi là nghịch đảo của A và được ký hiệu là A^{-1}. Vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo $(A|I) \xrightarrow{\text{bđsc hàng}} (I|A^{-1})$.

Ví dụ. Dùng biến đổi sơ cấp, tìm A^{-1} (nếu có) của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Viết ma trận mở rộng $(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Ví dụ

Khảo sát sự chuyển động dân cư của một thành phố A sau thời gian người ta nhận thấy mỗi năm có khoảng 10% dân thành phố chuyển ra sống ở vùng ngoại ô và 5% dân ở vùng ngoại ô chuyển vào thành phố. Giả sử năm 2020 dân số ở thành phố và ngoại ô tương ứng là 800000 và 300000. Ước lượng số dân của thành phố và vùng ngoại ô vào năm 2025.

Năm 2020: $X_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800000 \\ 300000 \end{pmatrix}$

Năm 2021:

$$X_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9r_0 + 0.05s_0 \\ 0.1r_0 + 0.95s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = M \cdot X_0$$

Năm 2022: $X_2 = M \cdot X_1 = M \cdot M \cdot X_0 = M^2 \cdot X_0$

Năm 2025: $X_5 = M^5 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 800000 \\ 300000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 558940 \\ 541060 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Độ tuổi lớn nhất của một con cái của một loài động vật là 15 tuổi. Người ta chia con cái thành 3 lớp tuổi với thời lượng bằng nhau là 5 năm: lớp thứ nhất I từ 1 đến 5 tuổi, lớp thứ hai II từ 6 đến 10 tuổi, lớp thứ III từ 11 đến 15 tuổi. Ở lớp tuổi thứ nhất I, con cái chưa sinh sản, ở lớp tuổi II mỗi con cái sinh trung bình 4 con cái khác (không kể con đực), ở lớp tuổi thứ III mỗi con cái sinh trung bình 3 con cái khác. Khoảng 50 % con cái được sống sót từ lớp tuổi I sang lớp tuổi II và 25 % con cái được sống sót từ lớp tuổi II sang lớp tuổi III. Giả sử năm 2020 ở mỗi lớp tuổi có 1000 con cái. Tính số lượng con cái ở mỗi lớp tuổi sau 20 năm.

Năm 2020: $$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Năm 2025 (sau 5 năm):

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0a_0 + 4b_0 + 3c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + 0b_0 + 0c_0 \\ 0a_0 + \frac{1}{4}b_0 + 0c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = L \cdot X_0$$

Năm 2030 (sau 10 năm): $X_2 = L \cdot X_1 = L \cdot L \cdot X_0 = L^2 \cdot X_0$

Năm 2040 (sau 20 năm):

$$X_4 = L^4 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8125 \\ 7188 \\ 344 \end{pmatrix}.$$