TÍCH PHÂN BỘI BA

ĐỊNH NGHĨA

Cho Ω đóng và bị chận trong R_3. Hàm f(x,y,z) xác định trong Ω.

Phân hoạch Ω thành những miền con Ω_k với thể tích $V(\Omega_k)$, d là đường kính phân hoạch. Trên mỗi miền con, lấy điểm M_k tùy ý, gọi tổng tích phân là

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)V(\Omega_k)$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d\to 0} S_n}$$

gọi là tp bội ba của f trên Ω.

Tính chất hàm khả tích

Cho Ω là miền đóng và bị chặn

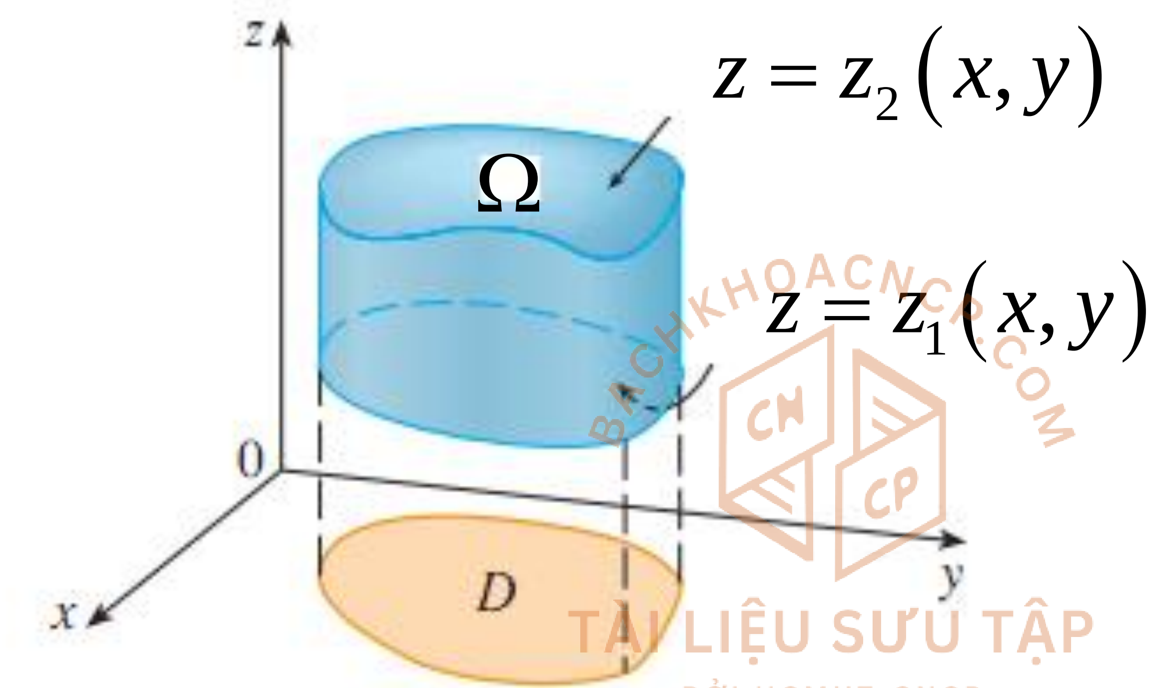
$$1/\, V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz \qquad \text{(thể tích } \Omega)$$

$$2/\, \iiint\limits_{\Omega} c.f = c.\iiint\limits_{\Omega} f, \quad \iiint\limits_{\Omega} (f+g) = \iiint\limits_{\Omega} f + \iiint\limits_{\Omega} g$$

$3/\, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \;\&\; \Omega_2$ Không dẫm vào nhau

$$\iiint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iiint\limits_{\Omega_1} f + \iiint\limits_{\Omega_2} f$$

Cách tính tích phân bội ba



- Hình chiếu của Ω lên Oxy là D.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

Lưu ý về cách xác định biến tính trước và miền D

1. Biến tính trước được chọn tương ứng với biến chỉ xuất hiện 2 lần trong định nghĩa Ω.

2. Hình chiếu D xác định như khi tính thể tích.

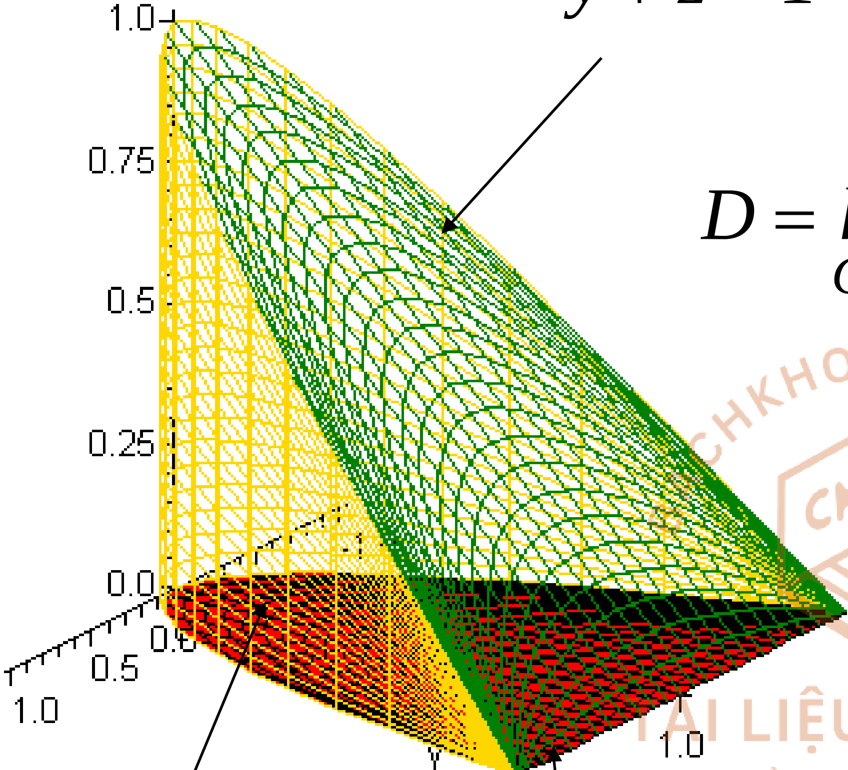
3. Tùy thuộc vào D, cận tích phân ở tầng ngoài sẽ được viết thành tích phân 2 lớp.

VÍ DỤ

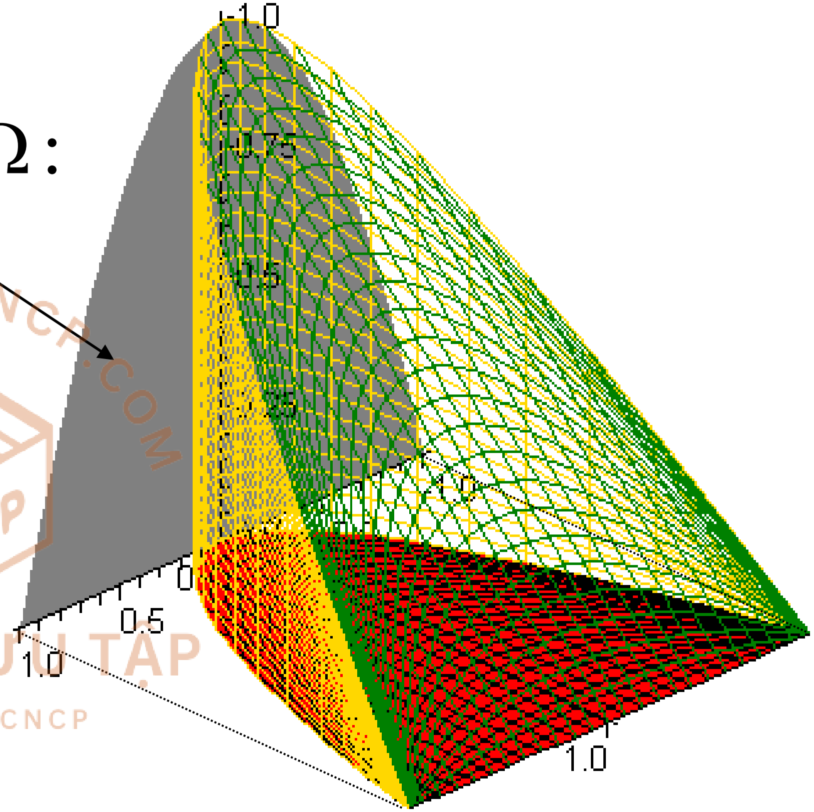
1/ Tính: $$I = \iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$$

Ω Là miền ghạn bởi : $y = x^2, z + y = 1, z = 0$

$$y + z = 1$$



$$D = \underset{Oxz}{hc}\,\Omega :$$



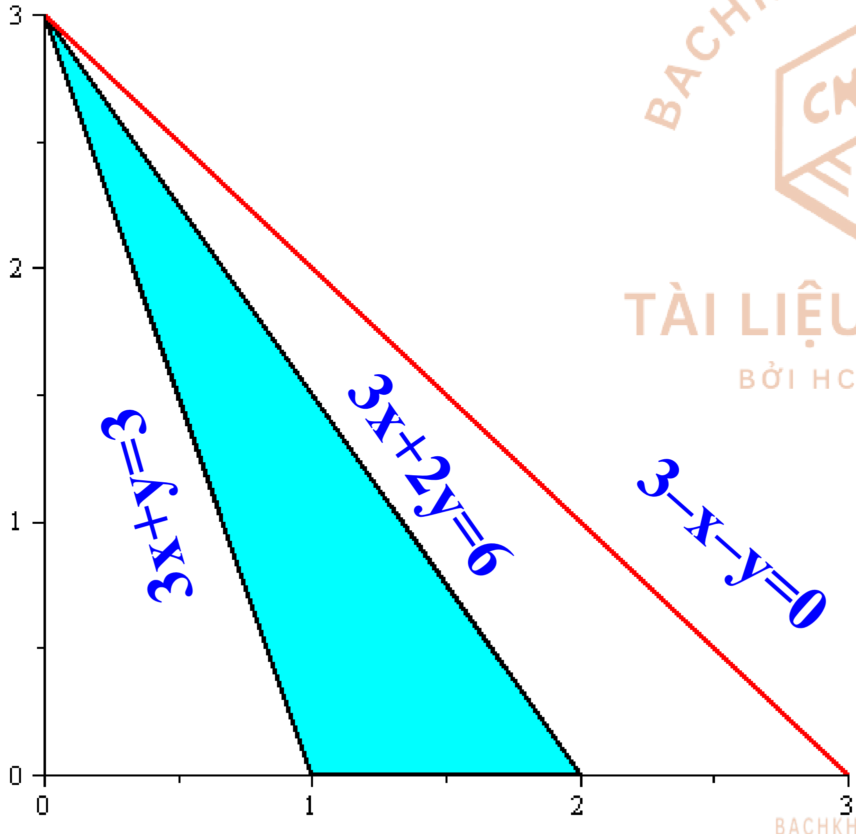
$$y = x^2$$

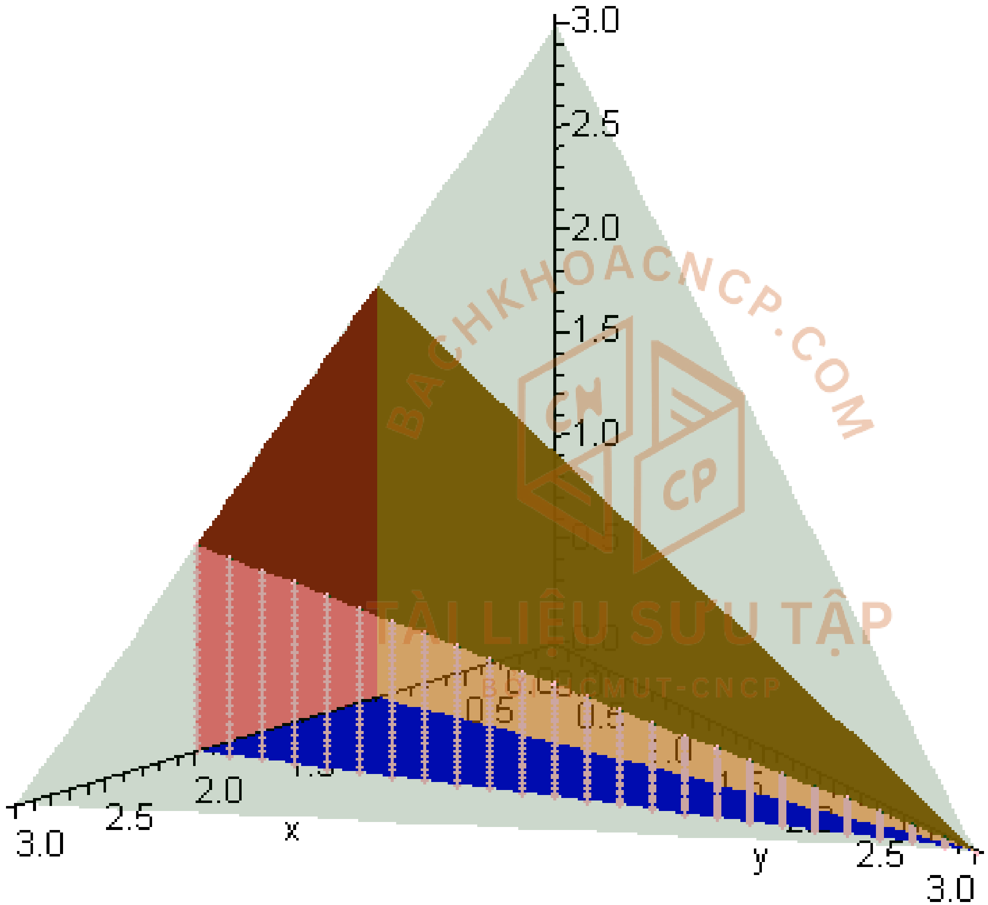
$$z = 0$$

$$D = \underset{Oxy}{hc}\,\Omega :$$

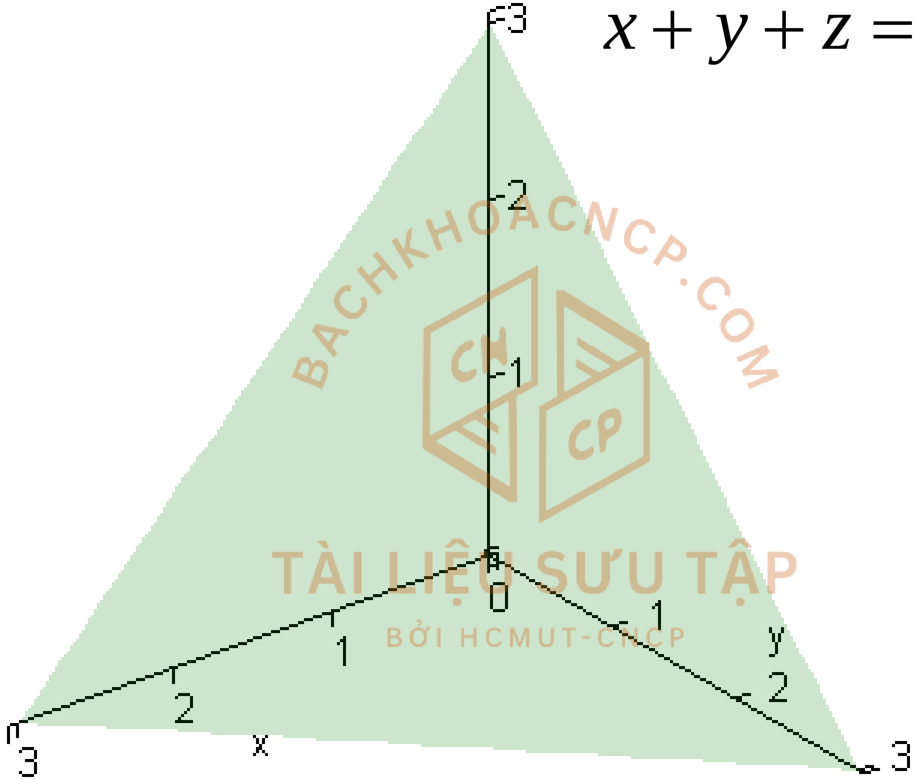
2/ Tính: $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y)dxdydz,$ Ω gh bởi:

$$x+y+z=3,\ 3x+y=3,\ 3x+2y=6,\ y=0,\ z=0$$



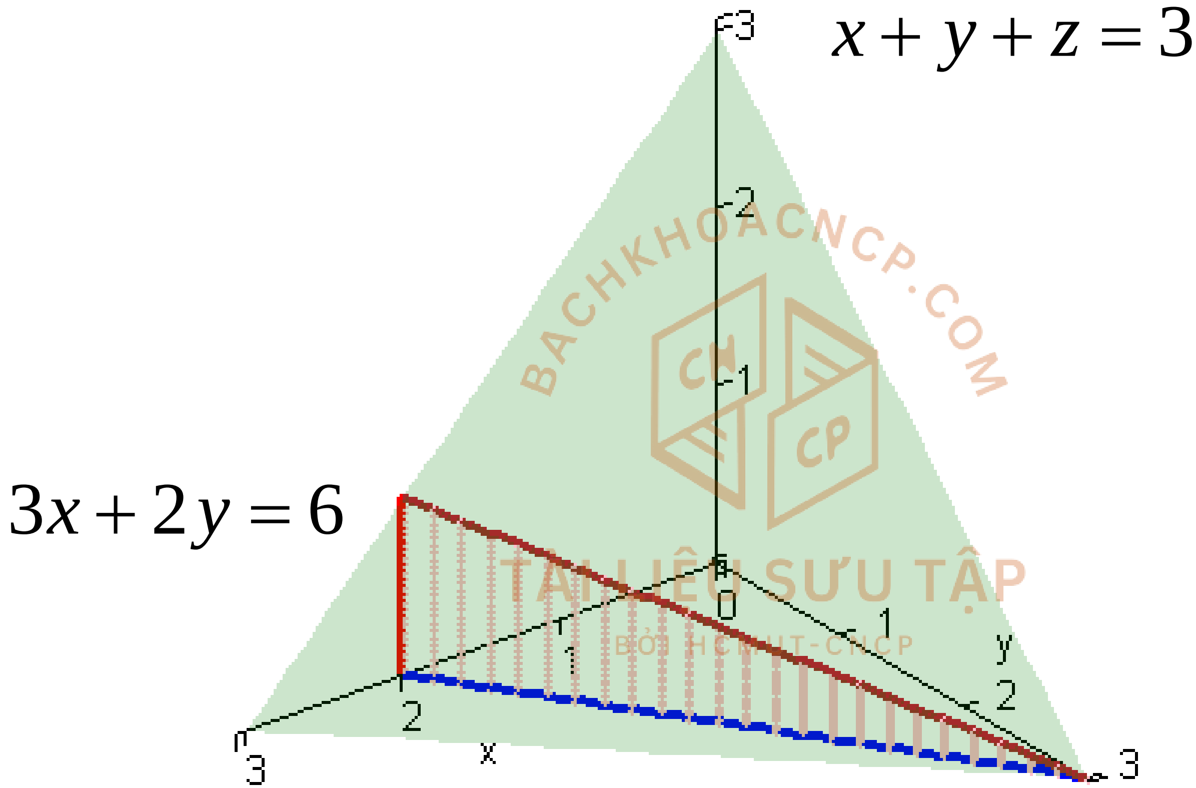

3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
3.0
2.5
2.0
x
0.5
y
2.5
3.0

$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$

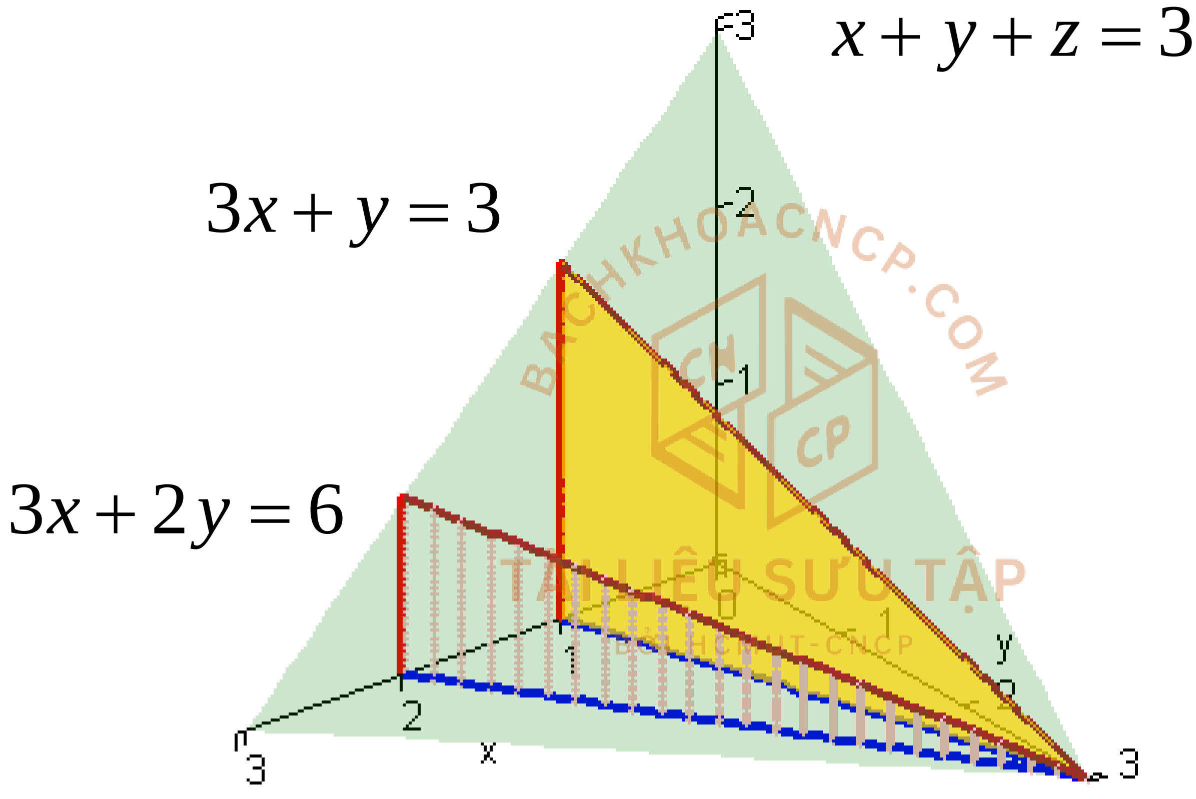


$$x + y + z = 3$$

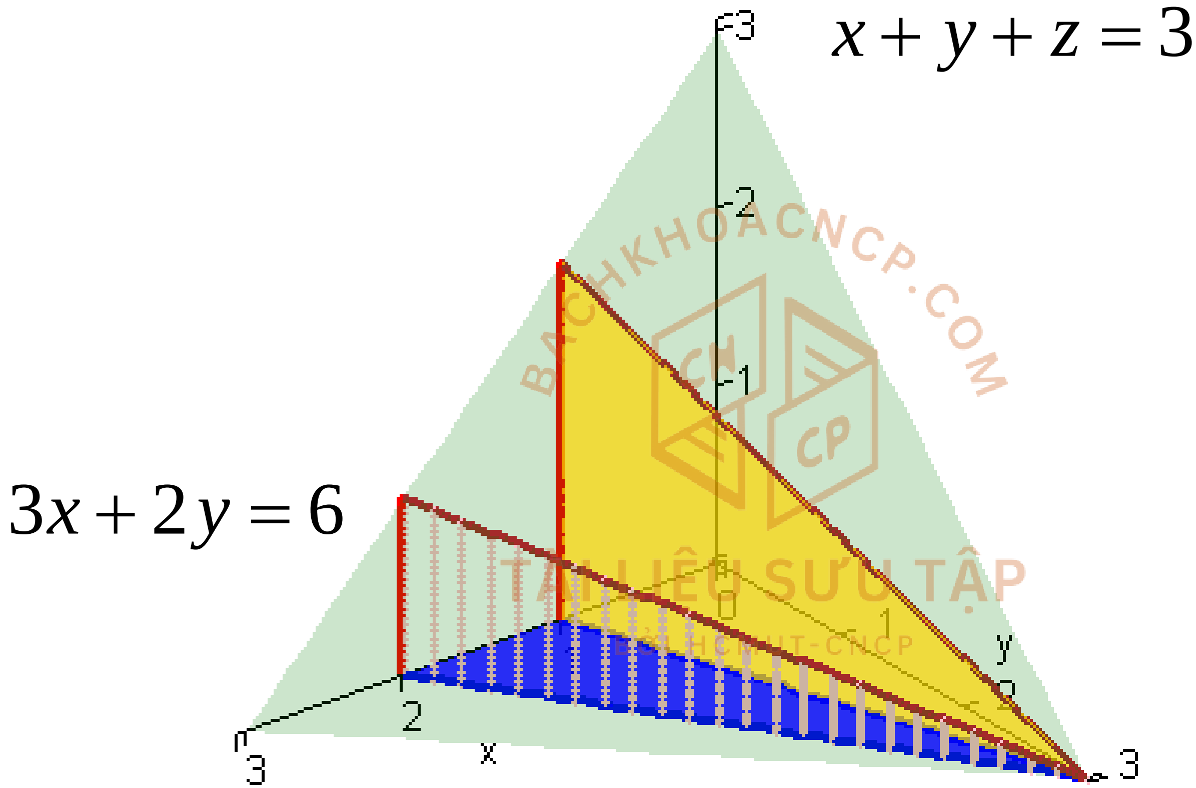
$$x+y+z=3,\ 3x+y=3,\ 3x+2y=6,\ y=0,\ z=0$$



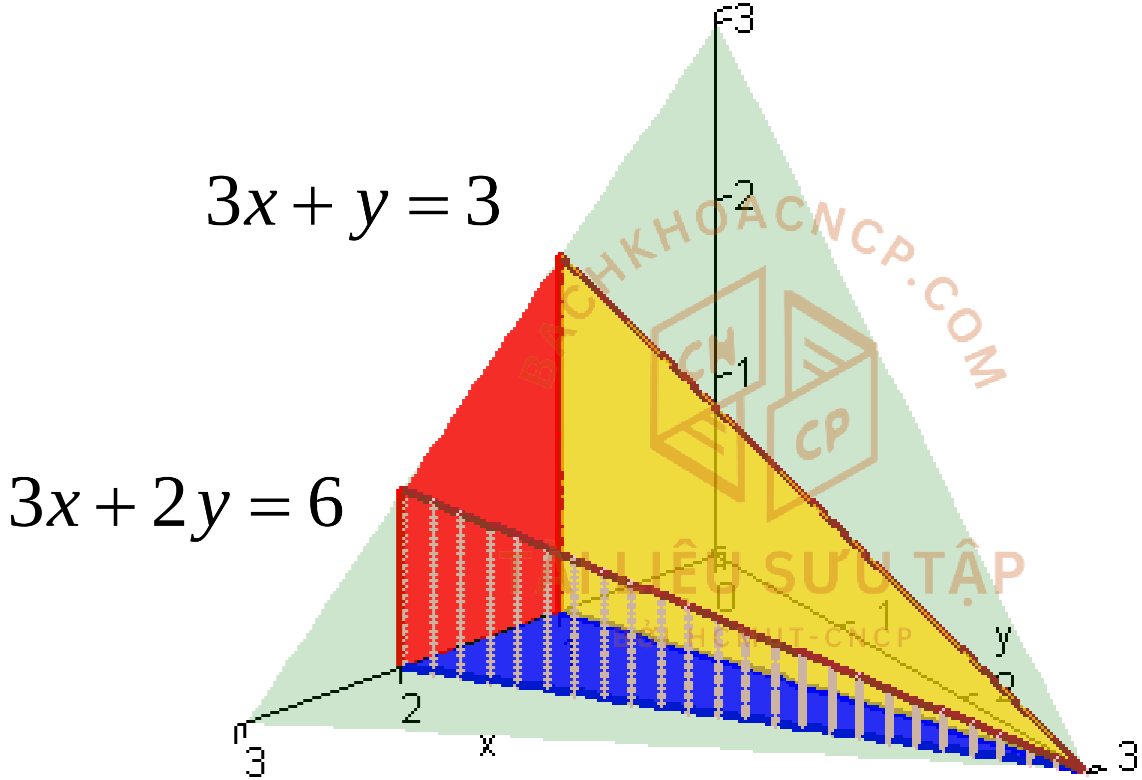
$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$



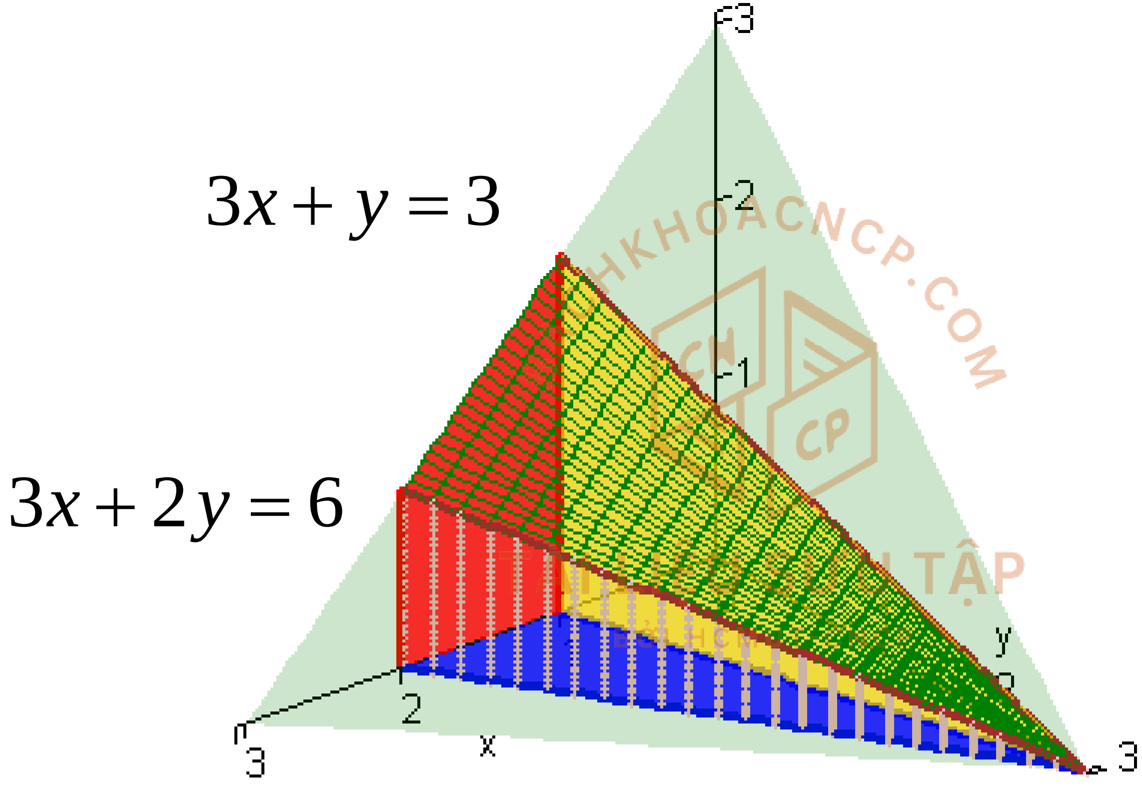
$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$



$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$



$$x + y + z = 3,\ 3x + y = 3,\ 3x + 2y = 6,\ y = 0,\ z = 0$$

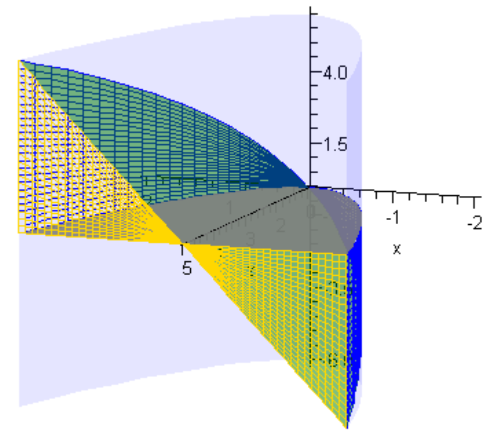


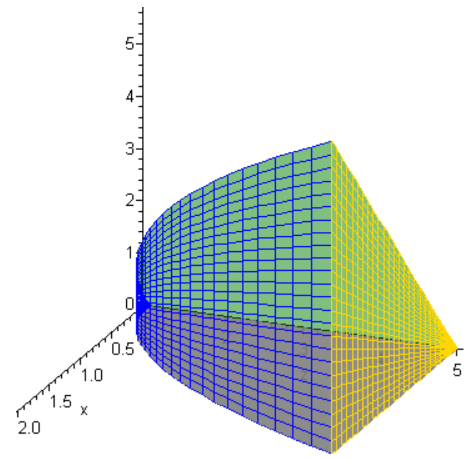
3/ Tính: $$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz,$$ Ω gh bởi:

$$x^2 + y^2 \le 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 3$$

VÍ DỤ 4

Tính $\iiint_\Omega x dxdydz$, $\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$





Ví dụ 5

Vẽ miền lấy tp và tính tích phân sau $I = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz$

VÍ DỤ 6

Tính thể tích của vật thể cho bởi: $z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z,\ y \geq 0$

Ví dụ 7

Vẽ miền lấy tp cho tp sau: $I = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} dy \int_0^4 zdz$

sau đó viết lại I theo thứ tự $I = \int dy \int dz \int zdx$

Áp dụng vào việc xét tính đối xứng của Ω

Nếu Ω gồm 2 phần Ω_1 và Ω_2 đối xứng nhau qua mp $z = 0$

1. f chẵn theo z :

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz$$

2. f lẻ theo z :

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

ĐỔI BIẾN
TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA

f(x,y,z) xác định trong Ω, đặt

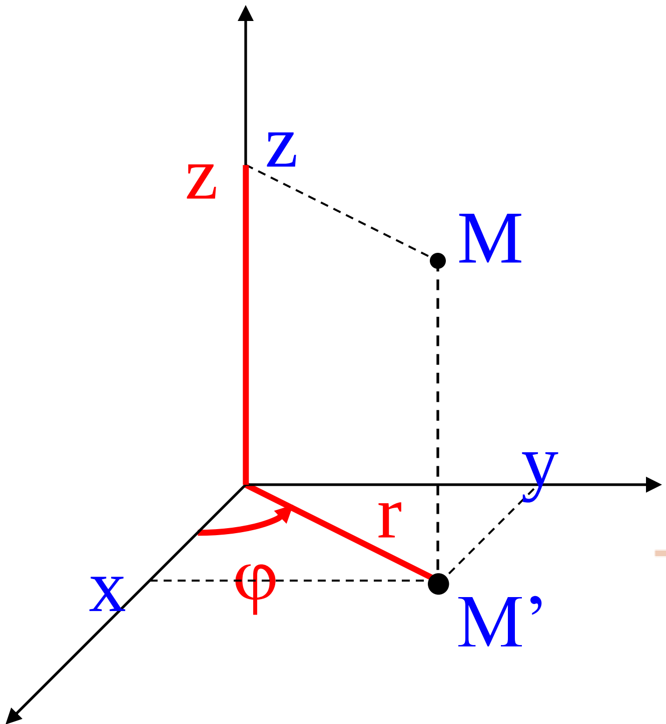
$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$(x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Omega'$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} \mathrm{f}(u,v,w)\,|\,J\,|\,dudvdw}$$

TỌA ĐỘ TRỤ



cố định z

x = rcosφ, y = rsinφ, z = z

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

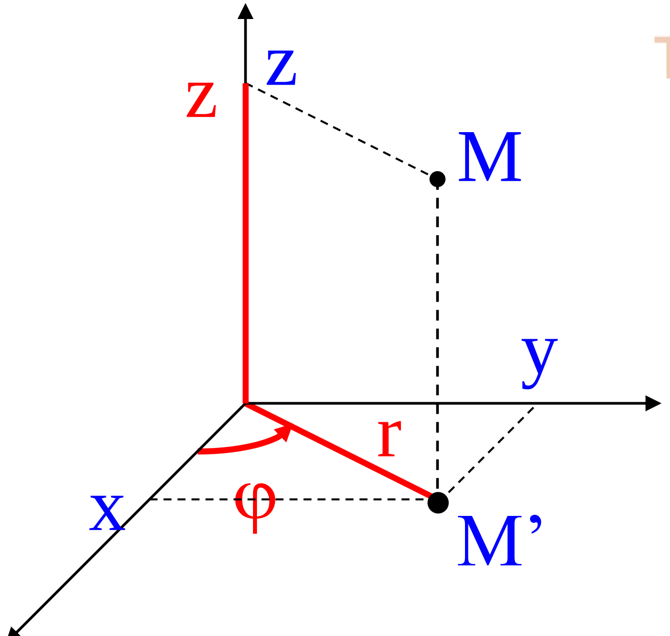
đổi sang tọa độ trụ ⇔ hình chiếu D đổi sang tọa độ cực.

TỌA ĐỘ TRỤ

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$

$$J = r$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$



<u>Điều kiện giới hạn</u>:

1. $r \geq 0$

2. $\varphi \in [0, 2\pi]$ hay $\varphi \in [-\pi, \pi]$

VÍ DỤ

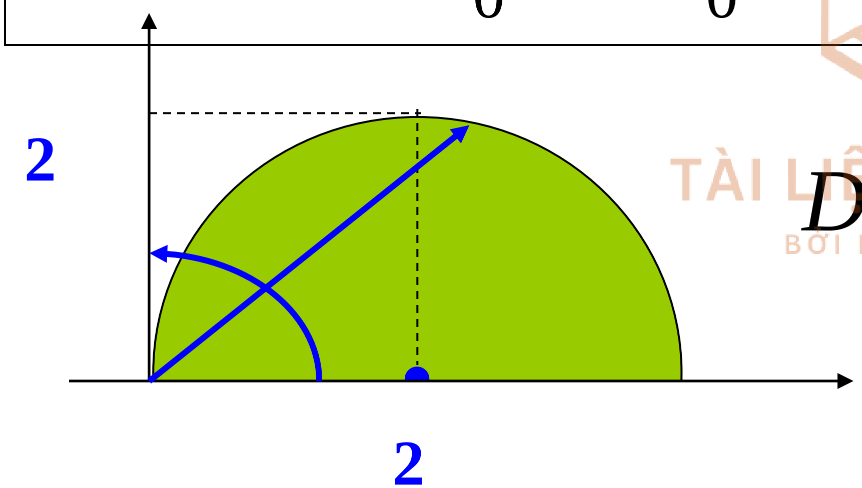
1/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ

$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz\,dz$$

VÍ DỤ

1/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ

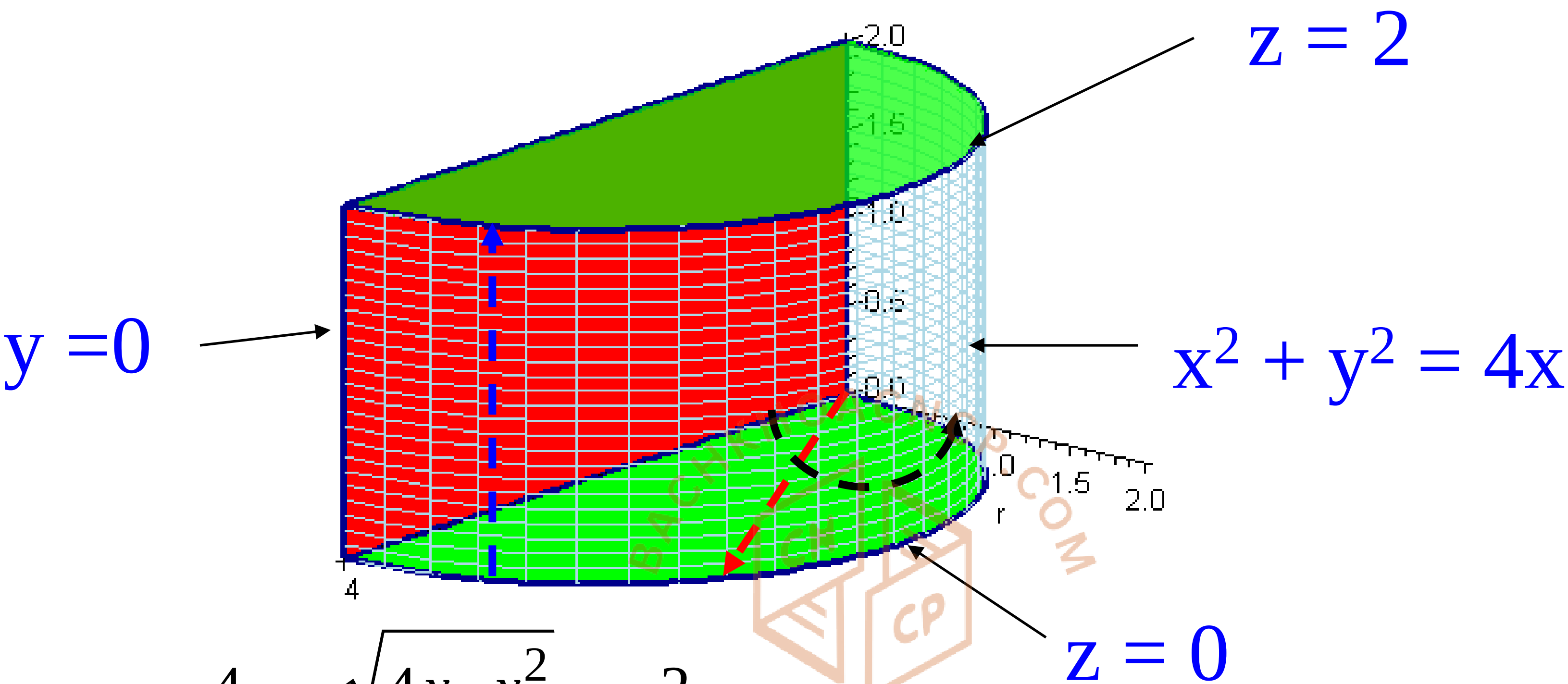
$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz\,dz$$



$$D = hc_{Oxy}\,\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{4x - x^2} \end{cases}$$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$

$$\Omega : 0 \le r \le 4\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le z \le 2$$



$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz\,dz$$

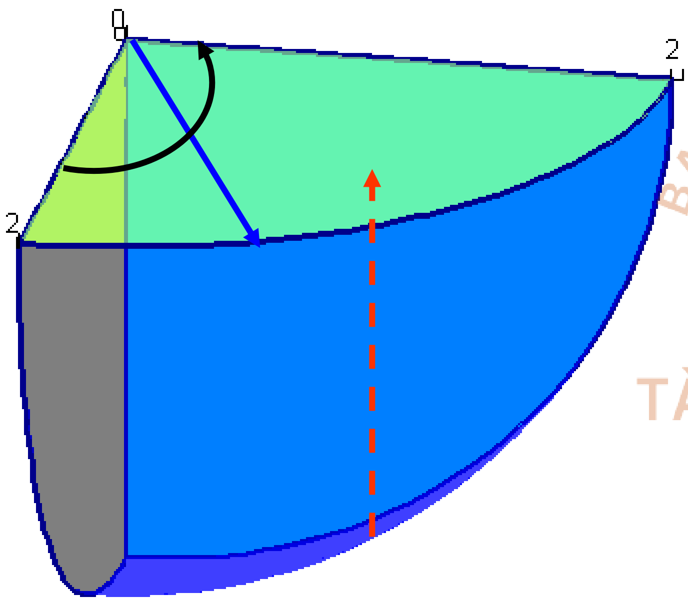
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} dr \int_0^2 r\cos\varphi . z . r\,dz = 8\pi$$

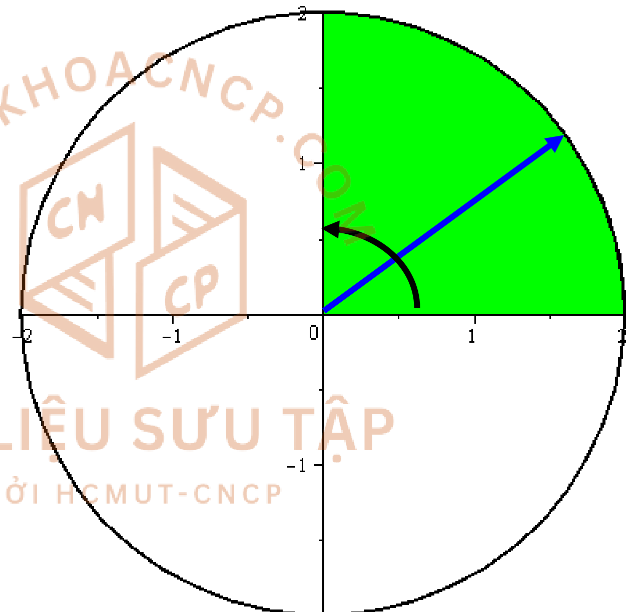
2/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ:

$$I=\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0}xz\,dz$$

$$I=\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0}xz\,dz$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$





$$I=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2}dr\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{0}r\cos\varphi.z.r\,dz$$

3/ Vẽ miền lấy tp

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz$$

$$I = \frac{7\pi}{48}$$

Sử dụng tọa độ trụ để tính tích phân sau:

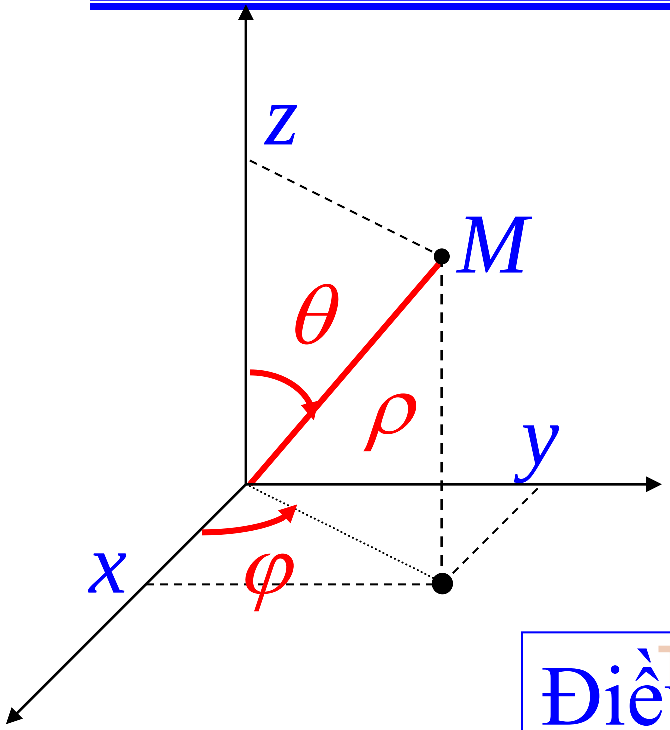
1. $I_1 = \iiint_\Omega (x + y + z)dxdydz$,

Ω *được giới hạn bởi các mặt*: $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$

2. $I_2 = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)dxdydz$,

Ω *được giới hạn bởi các mặt*: $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 4 \\ y = 1, y = -1 \end{cases}$

TỌA ĐỘ CẦU



$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = \rho \cos\theta$$

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

Điều kiện giới hạn:

1. $\rho \geq 0$

2. $\varphi \in [0, 2\pi]$ hay $\varphi \in [-\pi, \pi]$

3. $\theta \in [0, \pi]$

Lưu ý:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin\theta$$

Tọa độ cầu thường dùng cho miền giới hạn bởi mặt cầu hoặc mặt nón và mặt cầu.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

Một số mặt cong thường gặp trong tđ cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

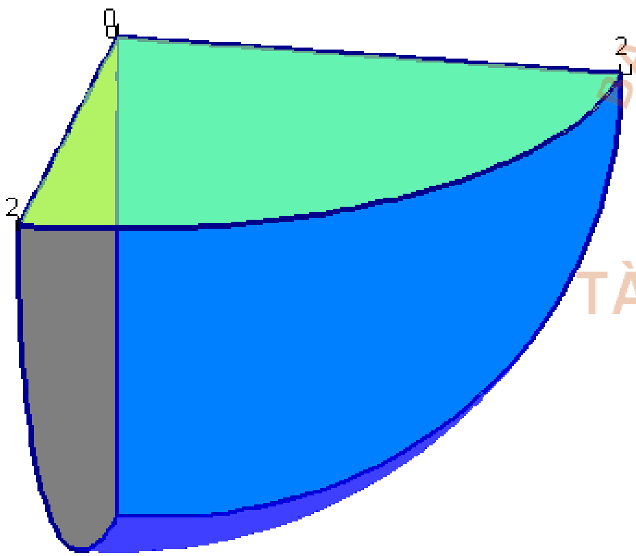
$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 2R\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{z}{a} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{a}$$ Nón.

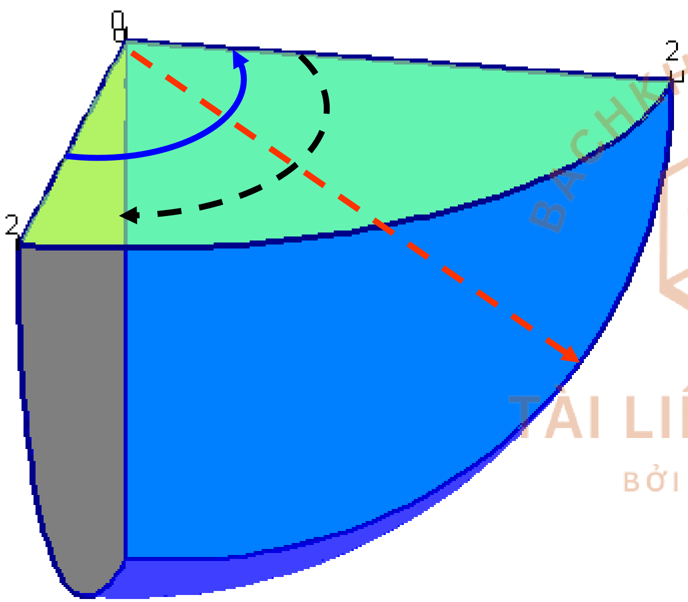
$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{R}{\sin\theta}$$ Trụ tròn.

1/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ cầu:

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} xzdz$$



$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} xz\,dz$$



x = ρsinθcosφ,

y = ρsinθsinφ,

z = ρcosθ.

J = ρ^2 sinθ

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sin\theta\cos\varphi.\rho\cos\theta.\rho^2\sin\theta d\rho$$

2/ Tính tp sau sử dụng tọa độ trụ và tọa độ cầu:

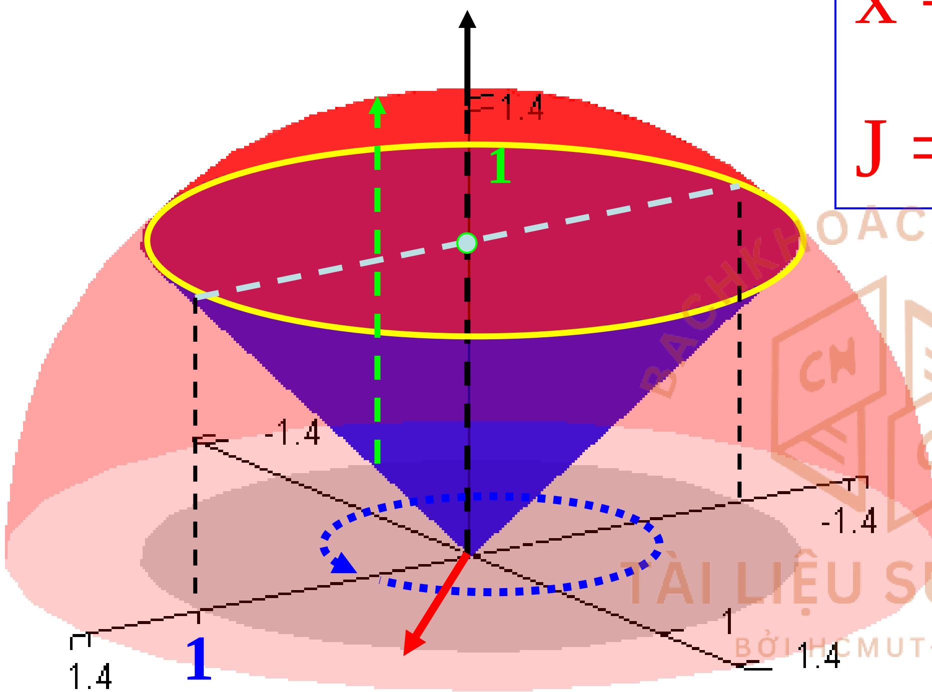
$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

$$\Omega : z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

$$x^2+y^2+z^2 \le 2,\quad z \ge \sqrt{x^2+y^2}$$

x = rcosφ, y = rsinφ, z = z

J = r



Giao tuyến: $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z.r\,dz = \frac{\pi}{2}$$

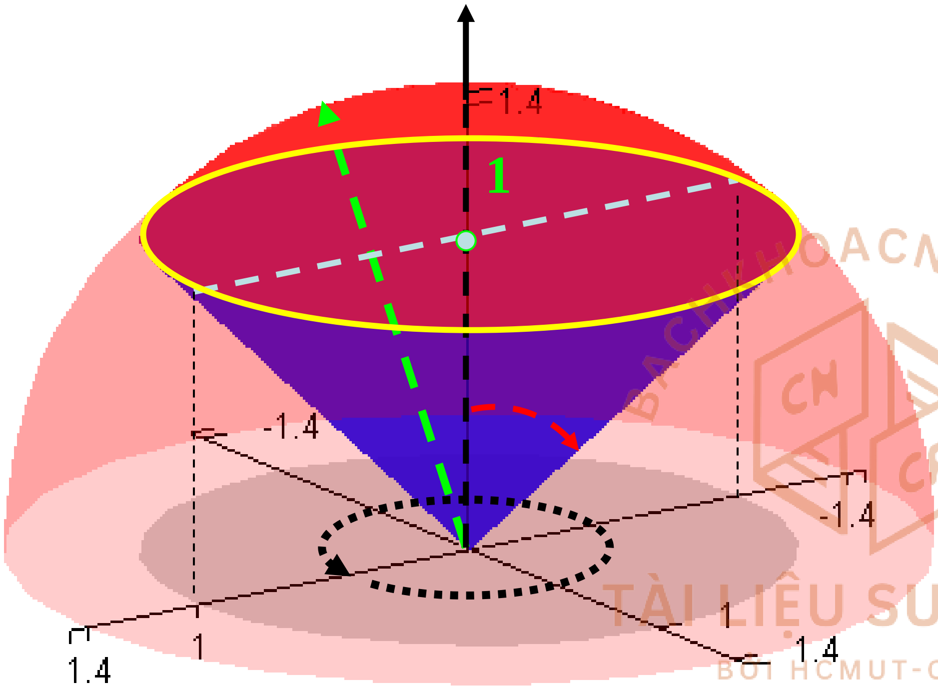
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

x = ρsinθcosφ,

y = ρsinθsinφ,

z = ρcosθ.

J = ρ^2 sinθ



Giao tuyến: $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

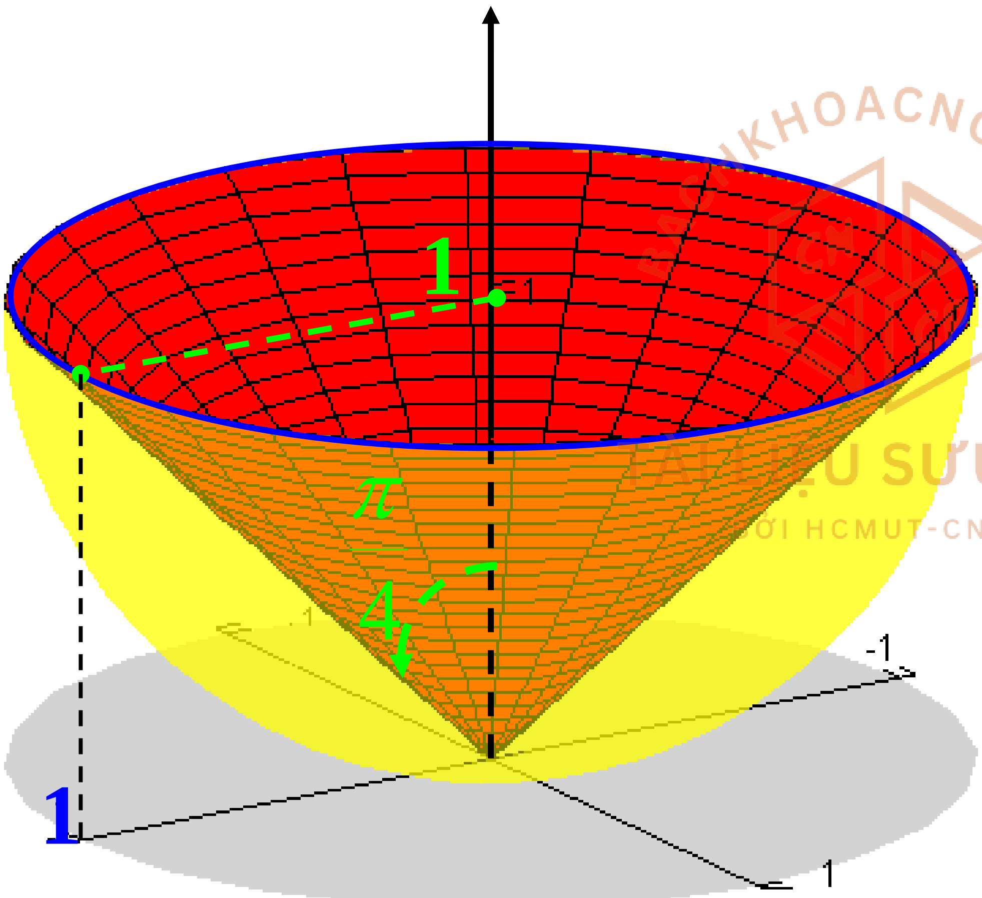
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\theta\rho^2\sin\theta d\rho$$

3/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu: $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$

Ω: $z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$

$$z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$$

Giao tuyến của mặt cầu và nón



$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

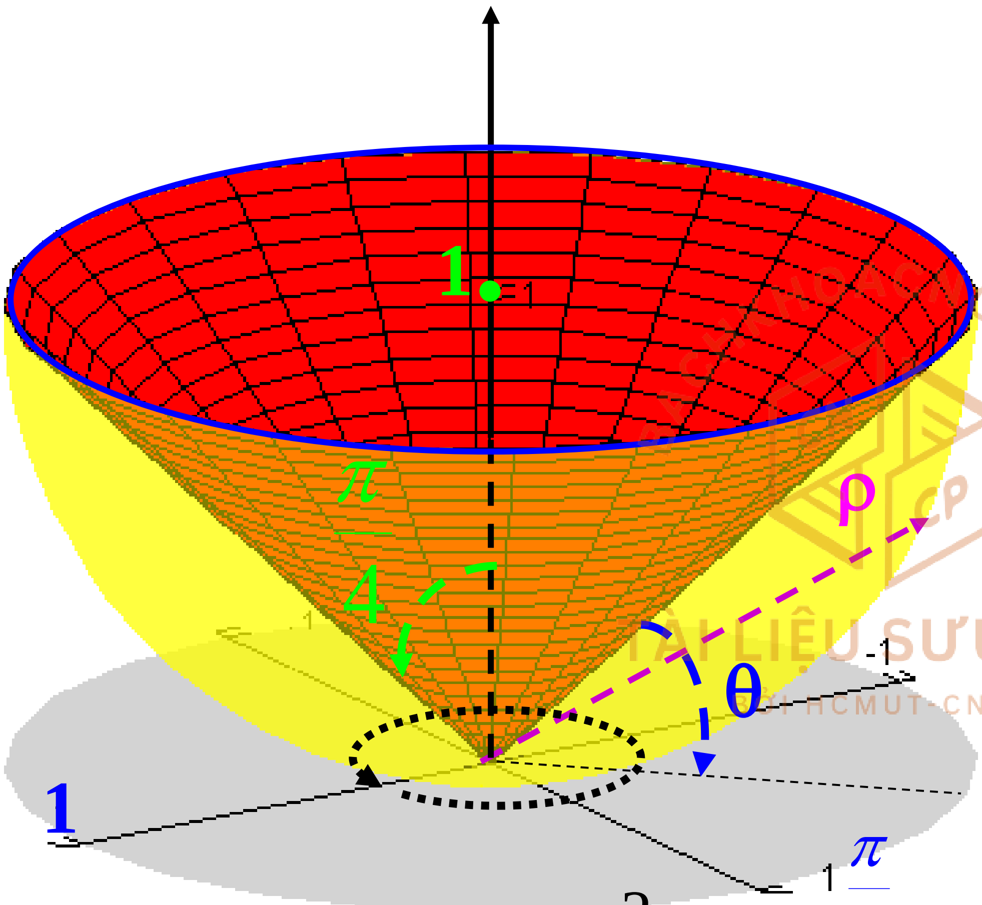
$$z \le \sqrt{x^2+y^2}, \ \ x^2+y^2+z^2 \le 2z$$

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = \rho\cos\theta.$

$J = \rho^2 \sin\theta$



Pt mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2 = 2z$$

$$\Leftrightarrow \rho = 2\cos\theta$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho^2 \sin\theta\, d\rho$$

Tính tích phân sau sử dụng tọa độ cầu:

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz\,, \qquad \text{với } \Omega: \begin{cases} \sqrt{3}z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \\ x \geq y \end{cases}$$

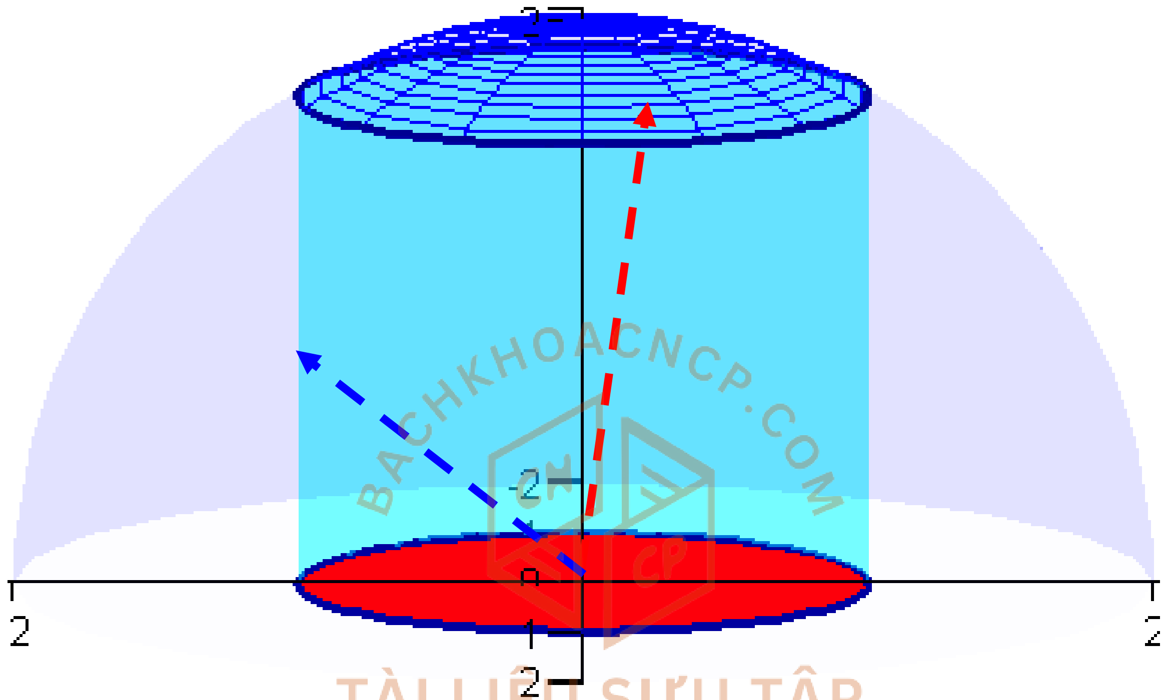
Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu: $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$

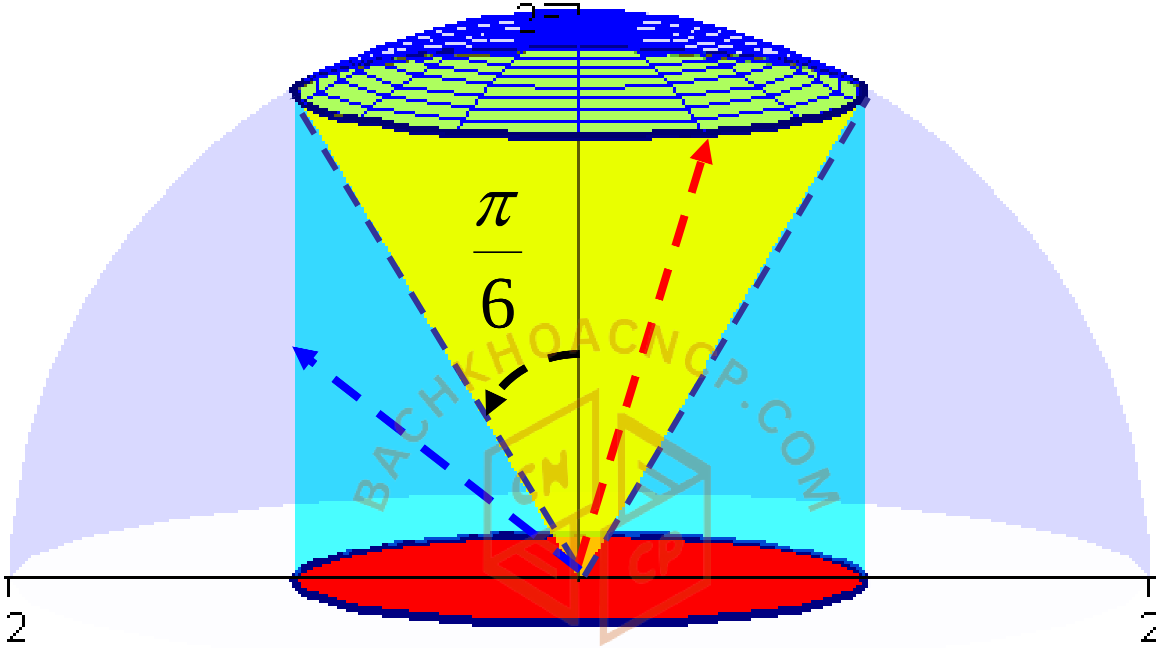
Ω: $z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, y \ge x, y \ge -\sqrt{3}x$

5/ Đổi tp sau sang tọa độ cầu:

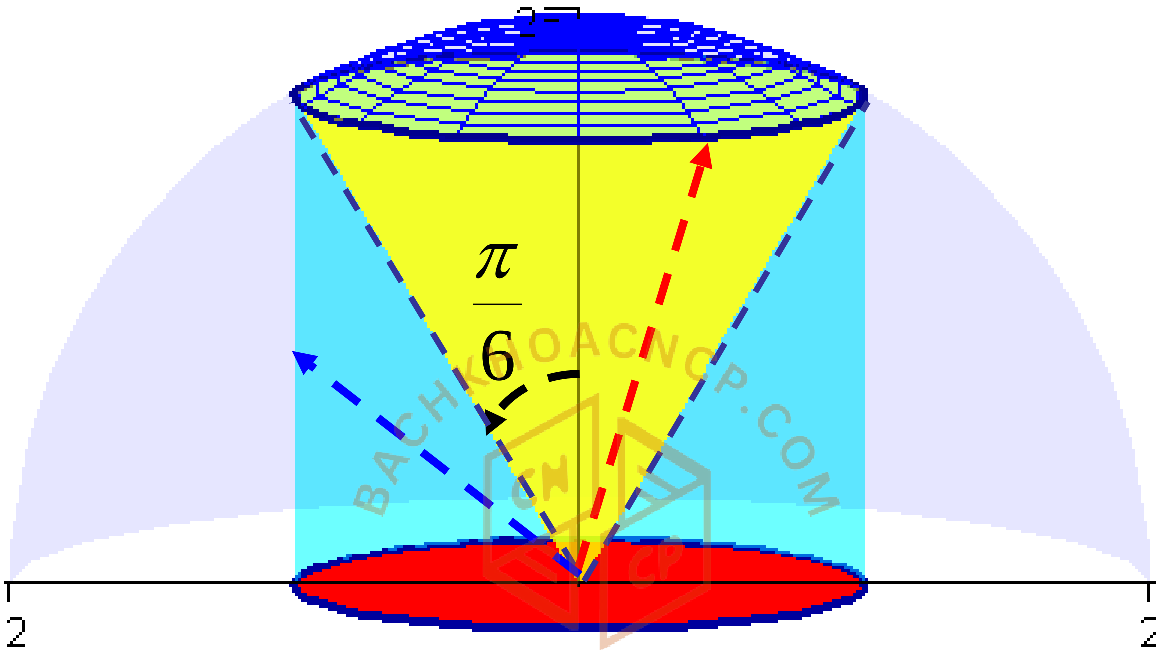
$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$





Giao tuyến: $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$



$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi/6 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \qquad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \pi/6 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\approx 7,12$$

BT: Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ cầu thường:

$x = \rho sin\theta cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$

1. $I_1 = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)dxdydz$

Ω *giới hạn bởi các mặt cong:* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ x \le 0, z \ge 0 \end{cases}$

2. $I_2 = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$

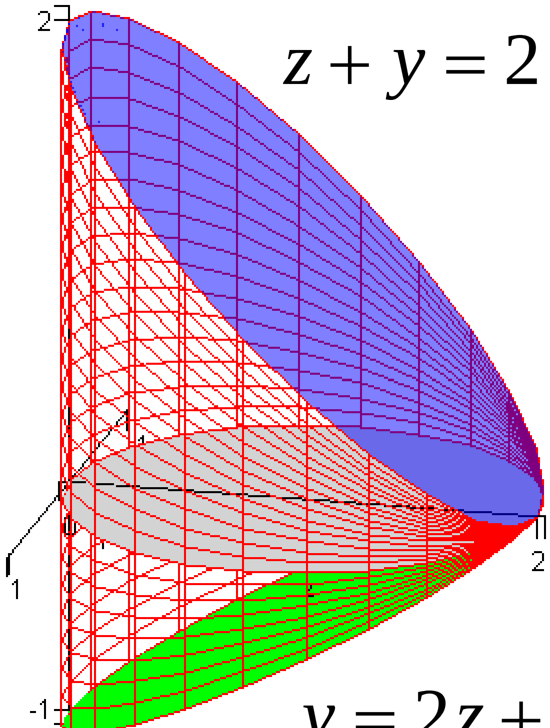
Ω *giới hạn bởi các mặt cong:* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \\ z \le 0, y \ge x, y \ge -x\sqrt{3} \end{cases}$

3. $I_3 = \iiint_\Omega \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2z\right) dxdydz$

Ω *giới hạn bởi các mặt cong:* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ y \le x \end{cases}$

6/ Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau:

$$x^2 + y^2 = 2y, z + y = 2, y = 2z + 2$$



$z + y = 2$

$y = 2z + 2$

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 2y} \left(\int_{\frac{y}{2}-1}^{2-y} dz \right) dxdy$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} dr \int_{\frac{1}{2}r\sin\varphi-1}^{2-r\sin\varphi} r dz = \frac{3}{2}\pi$$

Dùng tọa độ trụ

Đổi biến cho hình cầu tổng quát, ellipsoid

$$\Omega : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2$$

Đổi biến:

$$x = a + \rho\sin\theta\cos\varphi ,$$

$$y = b + \rho\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = c + \rho\cos\theta$$

$$J = \rho^2 \sin\theta$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Ω là ellipsoid: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

Đổi biến:

$x = a\,\rho\sin\theta\cos\varphi,$

$y = b\,\rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = c\,\rho\cos\theta$

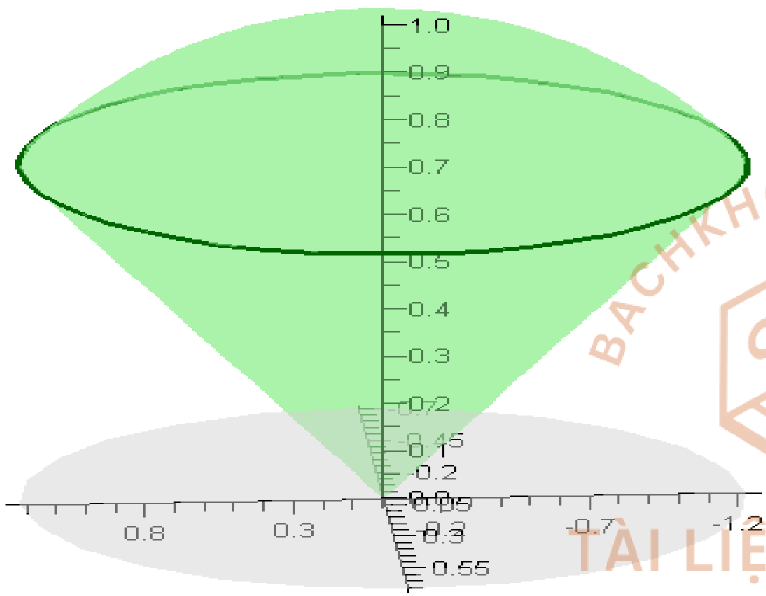
$J = abc\rho^2\sin\theta$

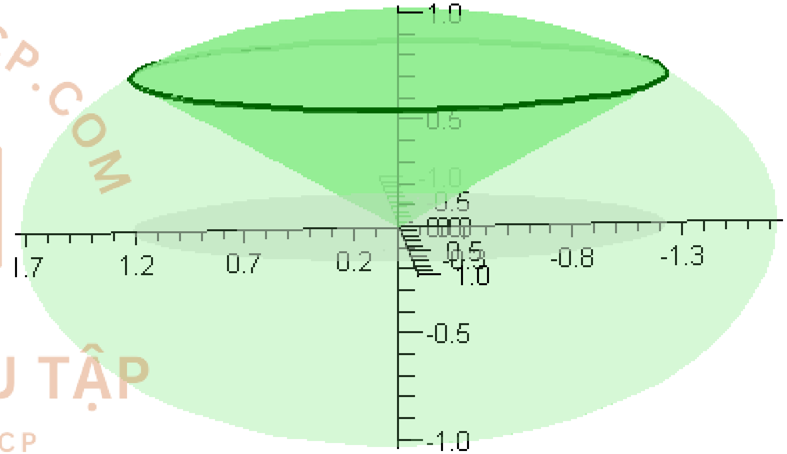
$$\Omega:\begin{cases}0\le\rho\le 1\\0\le\theta\le\pi\\0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

VÍ DỤ

Tính thể tích vật thể giới hạn bên trong mặt nón và mặt ellipsoid:

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2}{3} + y^2}, \frac{x^2}{3} + y^2 + z^2 \leq 1$$


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.8
0.3
-0.7
-1.2
0.55


1.0
0.5
1.7
1.2
0.7
0.2
-0.8
-1.3
-0.5
-1.0

5/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu:

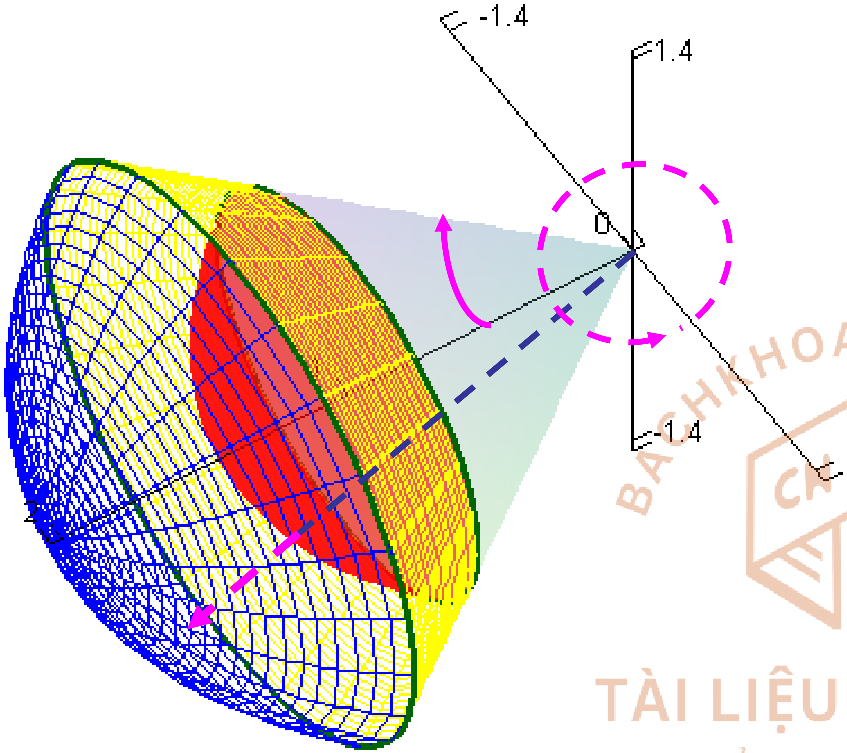
$$I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$$

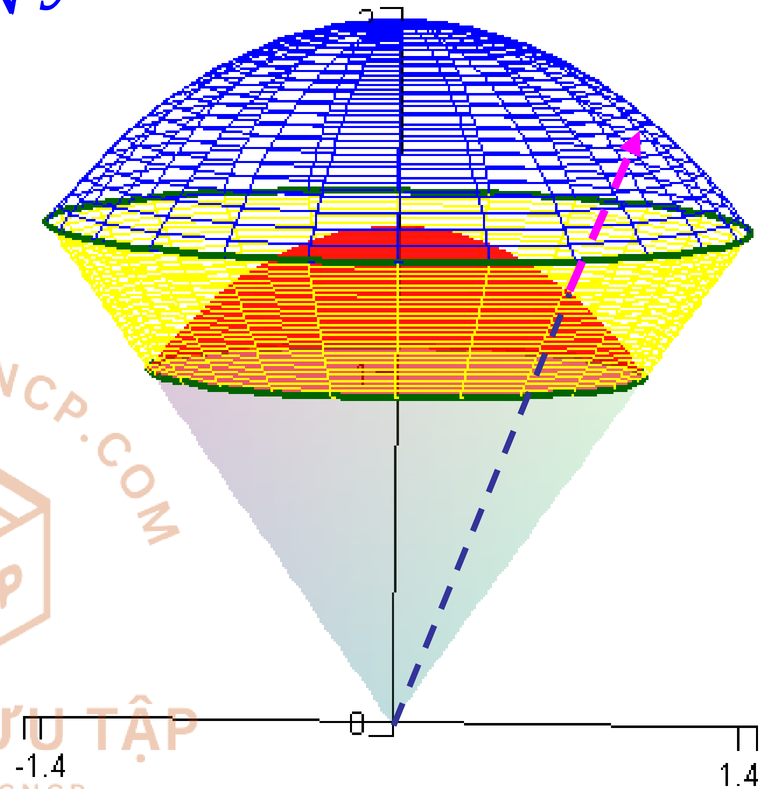
Ω: $2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$

x = ρcosθ, y = ρsinθcosφ, z = ρsinθsinφ

J = ρ^2 sinθ

$$2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$$





$$I = \iiint\limits_{\Omega} x dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2} \rho\cos\theta\rho^2 \sin\theta d\rho$$

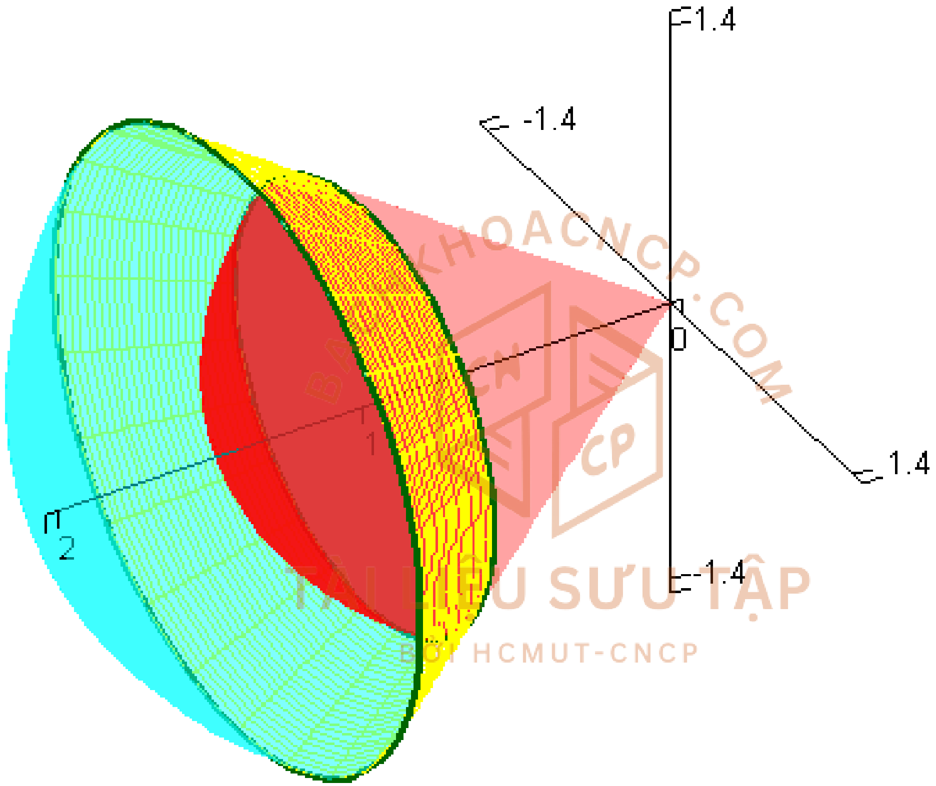
$$= \frac{3}{2}\pi$$

$$2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} \rho\cos\theta \ge \rho\sin\theta (0 \le \theta \le \pi) \\ 2 \le \rho^2 \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\theta \le 1 \\ \sqrt{2} \le \rho \le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/4 \\ \sqrt{2} \le \rho \le 2 \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$



1.4
-1.4
0
1.4
1
2
-1.4

3/ Vẽ miền lấy tp cho tp sau:

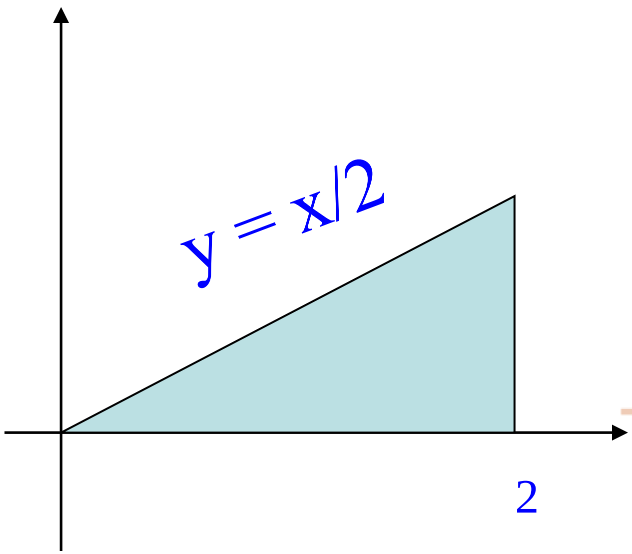
$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} dy \int_0^4 z dz$$

sau đó viết lại I theo thứ tự : $I = \int dy \int dz \int z dx$

Mặt trên: z = 4, mặt dưới: z = 0 (các hàm xác định trên R_2 và 2 mặt không có giao tuyến)

Hình chiếu lên Oxy của miền :$0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x/2$

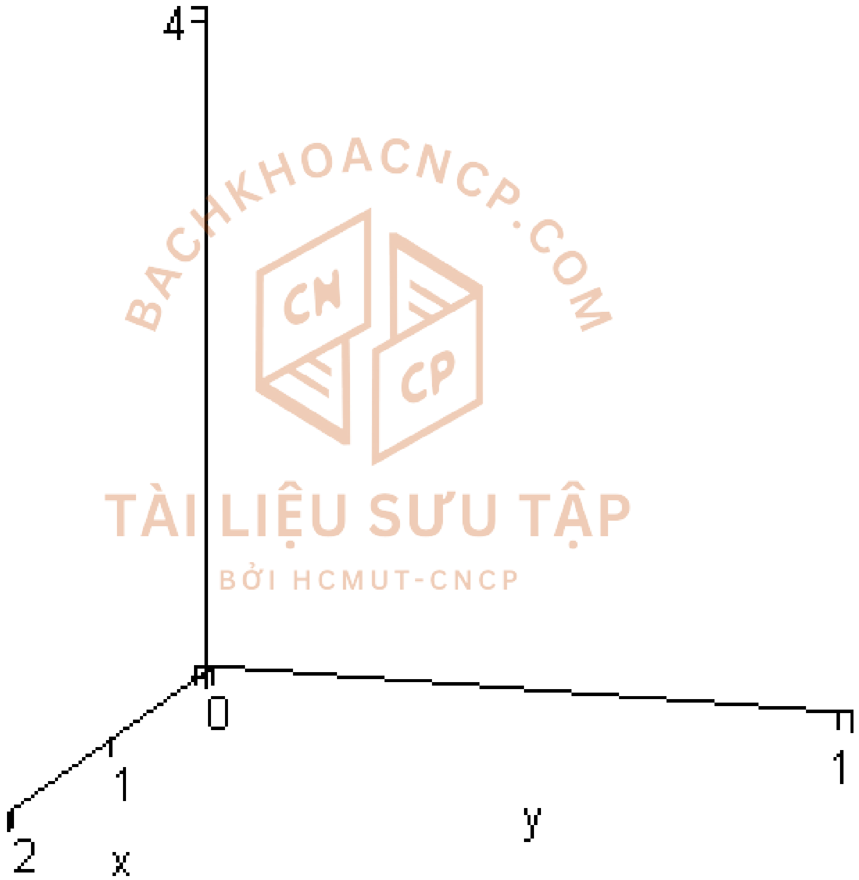
Hình chiếu lên Oxy của miền :$0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x/2$



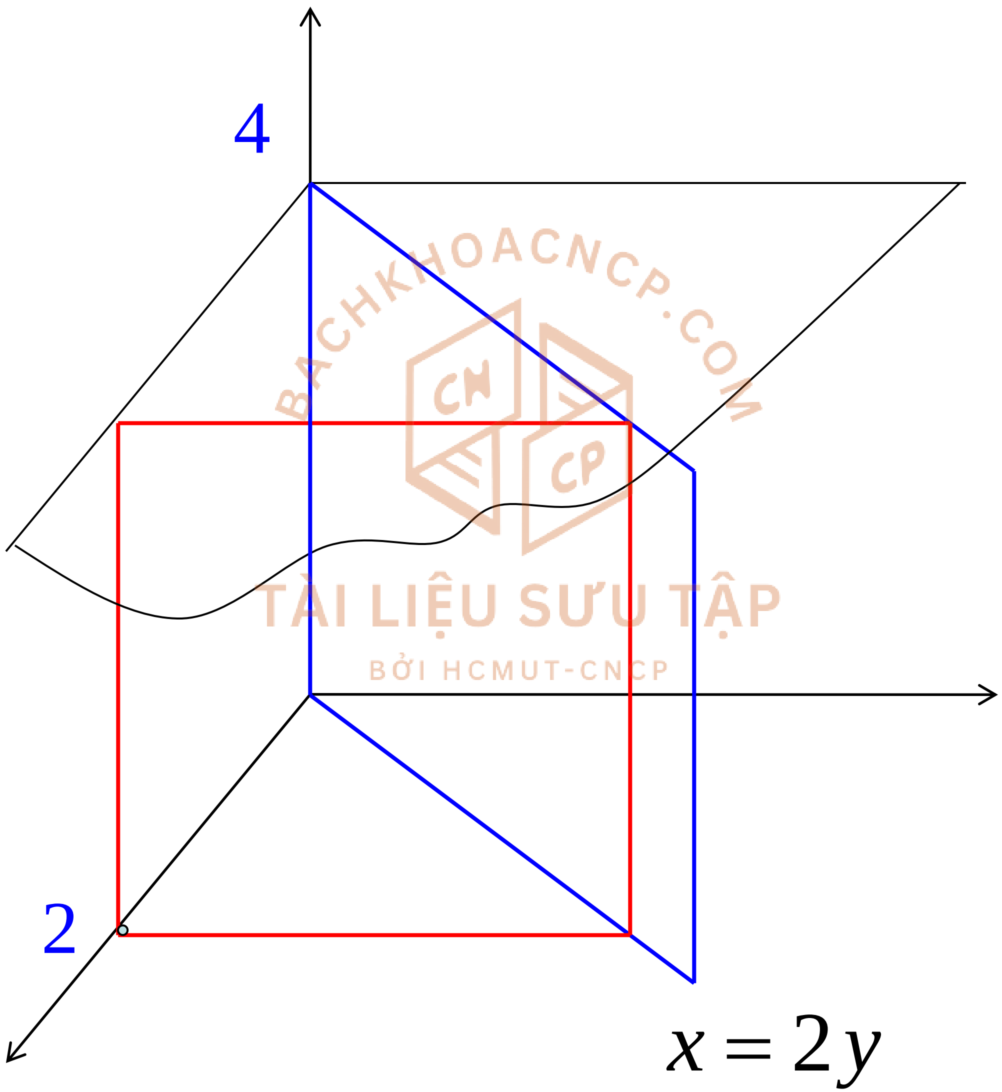
Vậy miền lấy tp gh bởi các mặt sau:

$z = 0,\ z = 4,\ x = 2y,\ x = 2,\ y = 0$

$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$



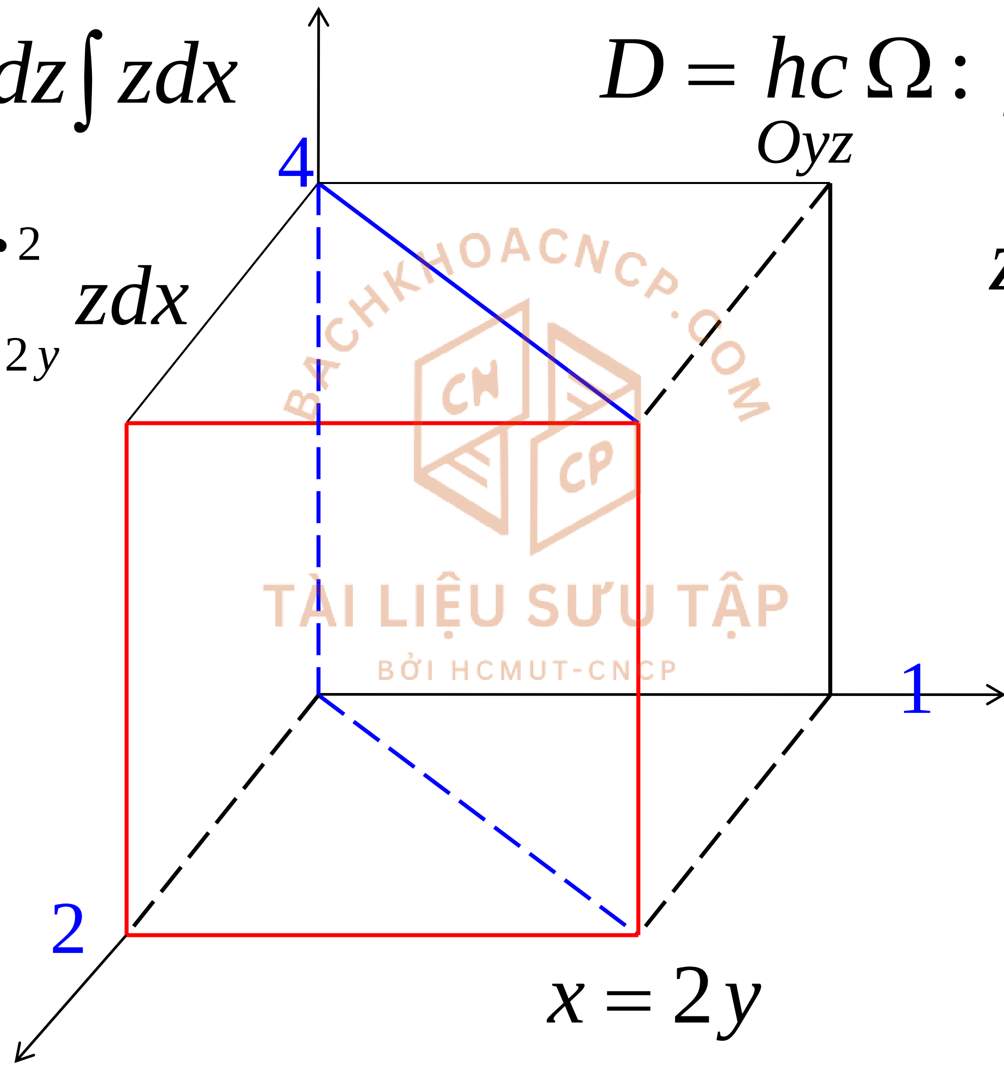
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$

$$I = \int dy \int dz \int z dx$$

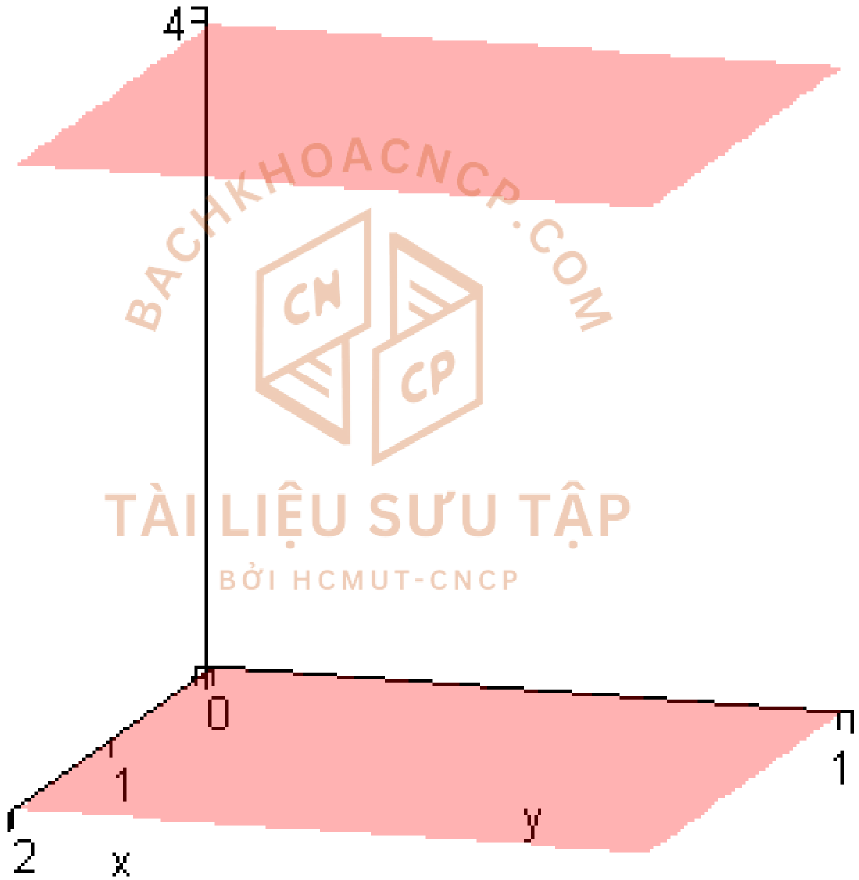
$$D = hc_{Oyz}\Omega:\ y = 0, y = 1,$$

$$z = 0, z = 4$$

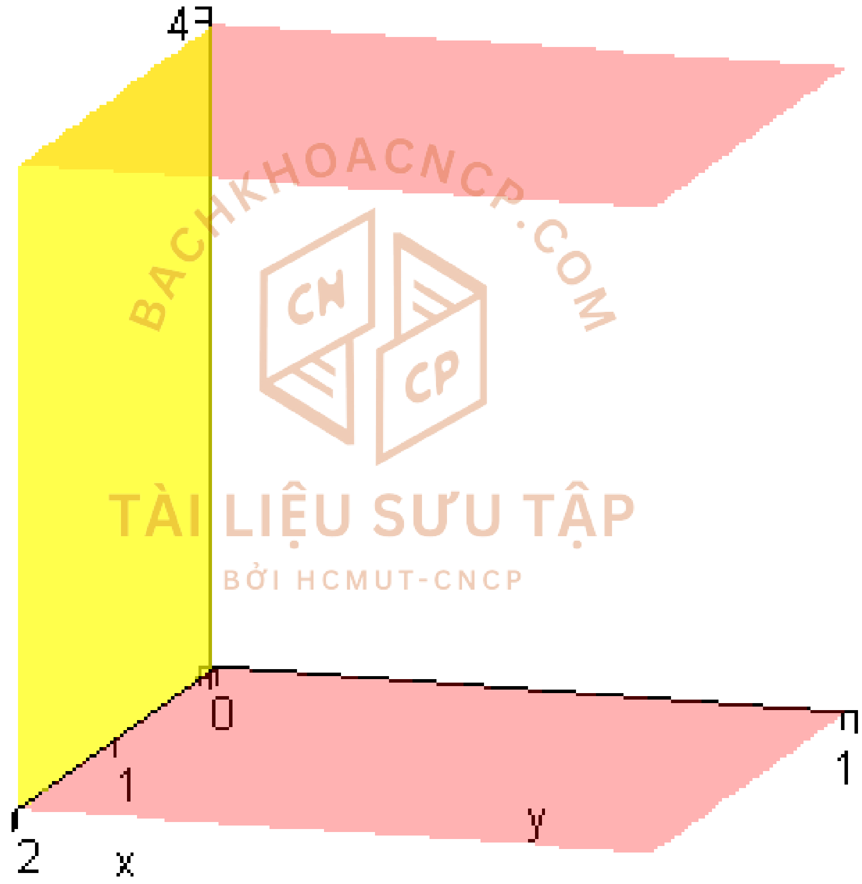
$$I = \int_0^1 dy \int_0^4 dz \int_{2y}^{2} z dx$$



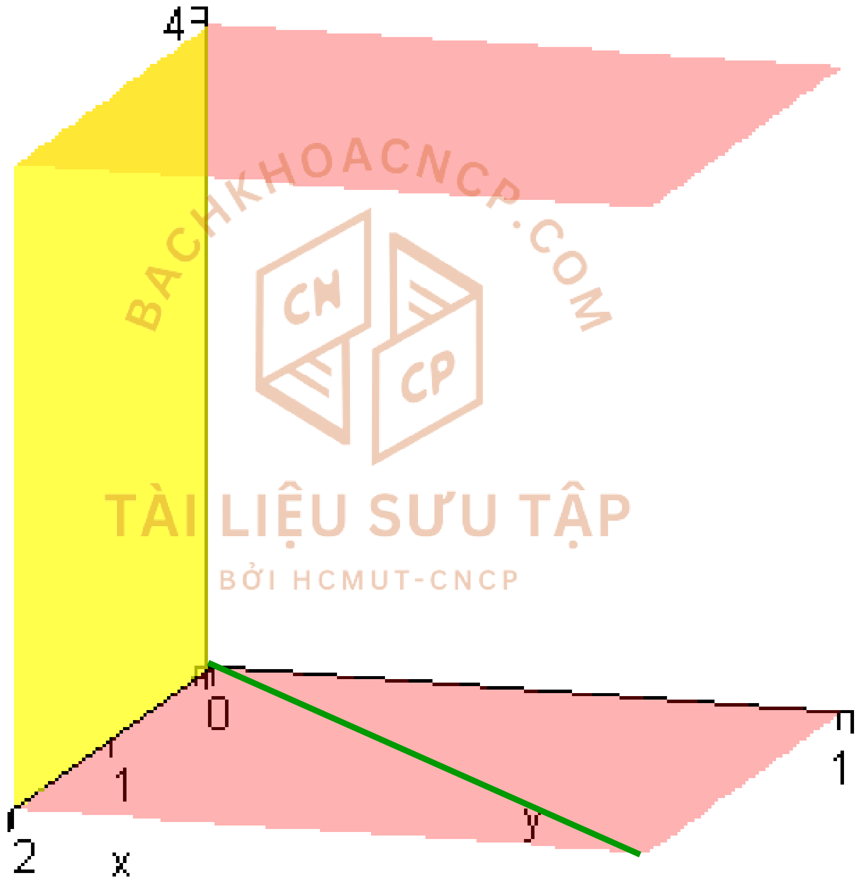
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



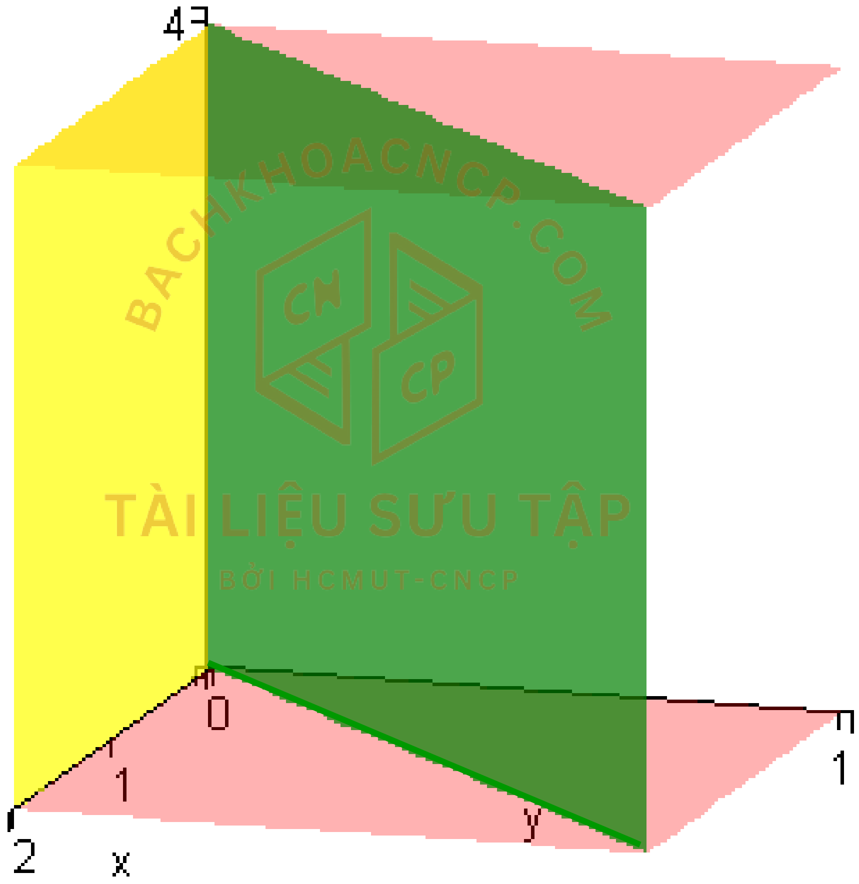
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



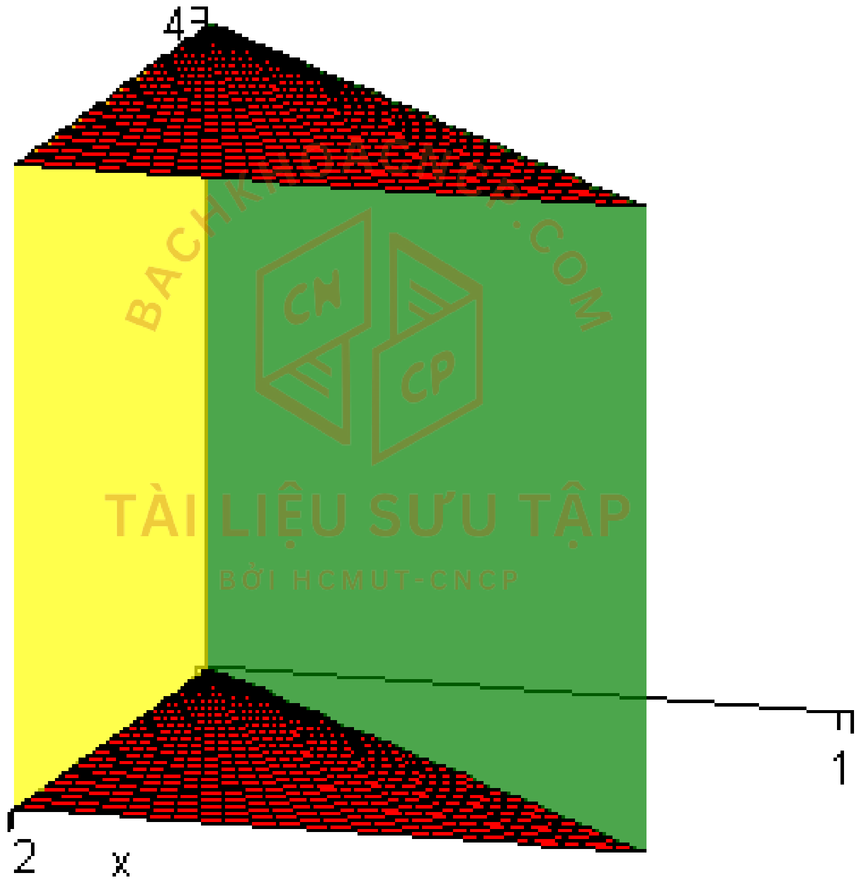
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



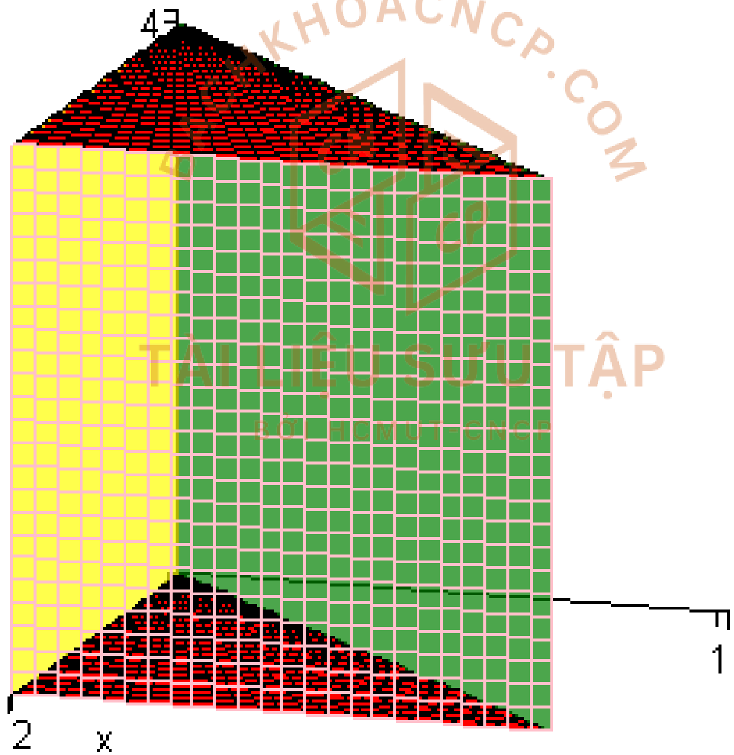
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



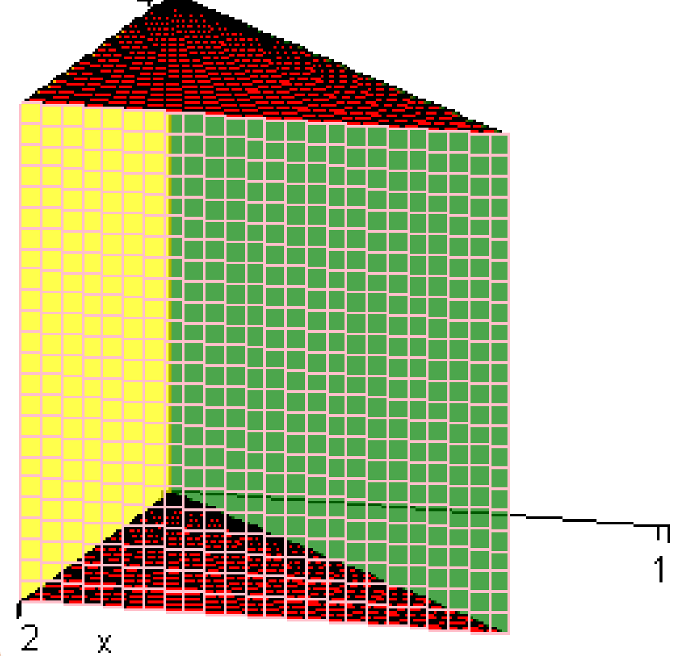
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



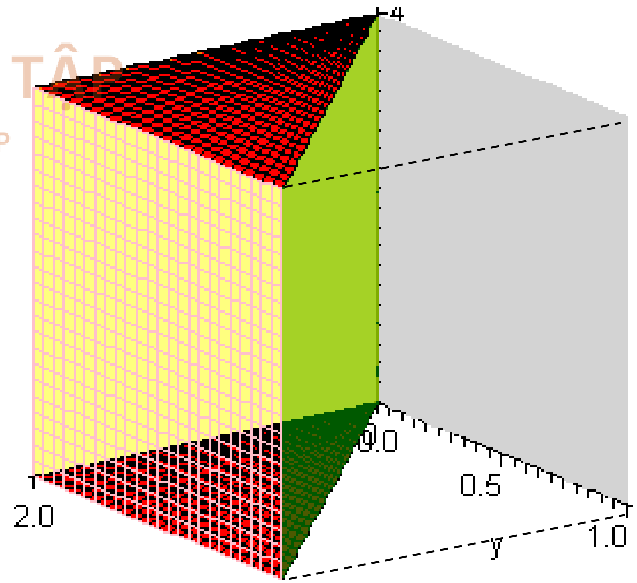
z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0



$$I = \int dy \int dz \int z dx$$

$$D = \underset{Oyz}{hc}\, \Omega :$$

$$y = 0, y = 1, z = 0, z = 4$$

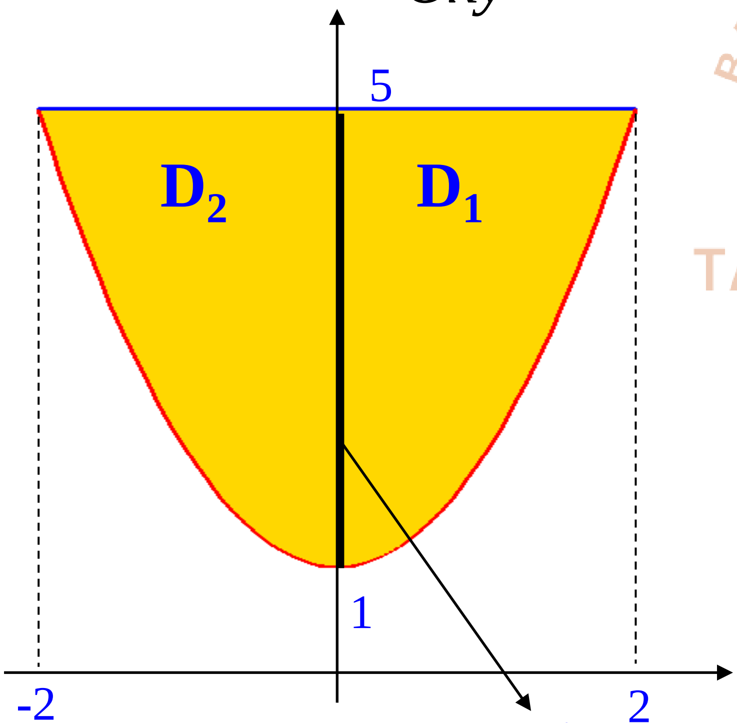


$$I = \int_0^1 dy \int_0^4 dz \int_{2y}^{2} z dx$$

4/ Tính: $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz,$

$\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$

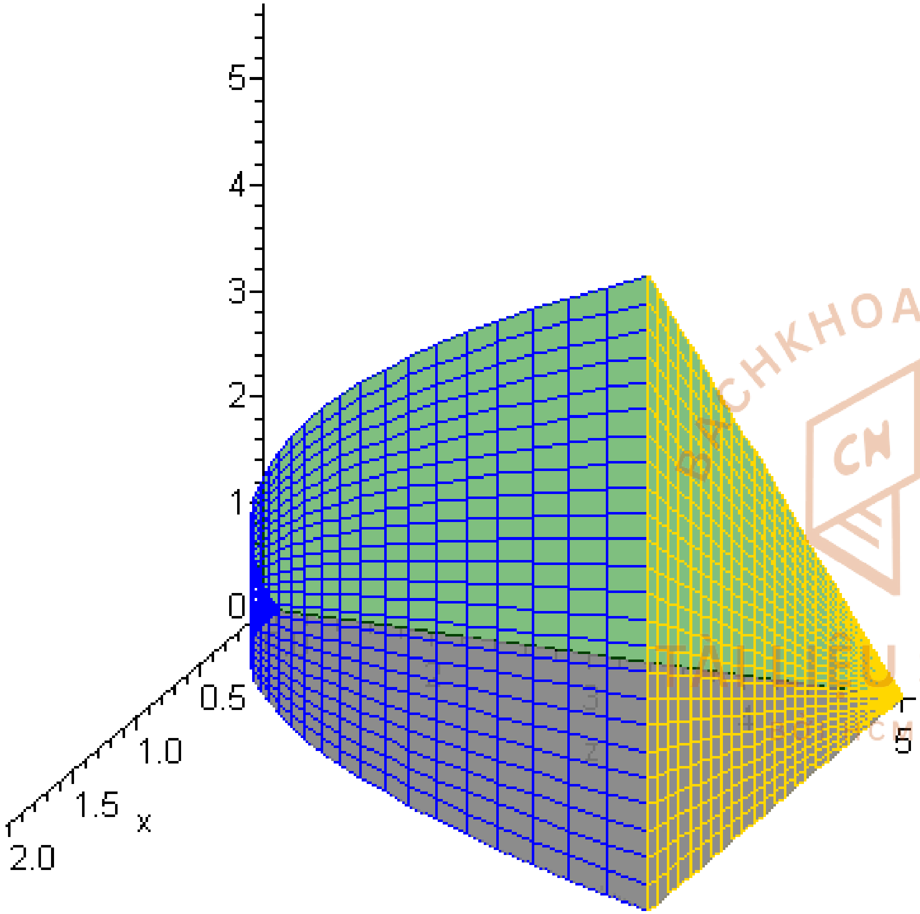
$$D = hc_{Oxy}\,\Omega: y = 1 + x^2, y = 5, (3x = 0)$$

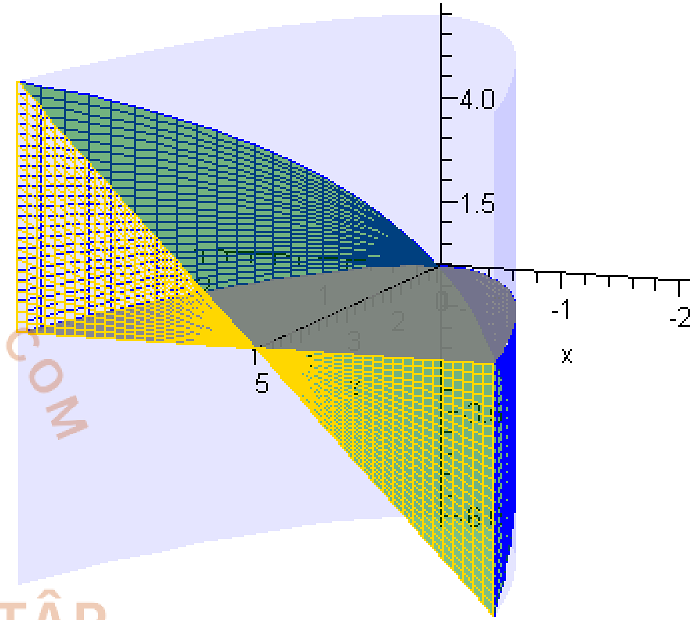


Hc giao tuyến

$$I = \iint\limits_{D_1}\left(\int\limits_0^{3x} x\,dz\right)dxdy$$

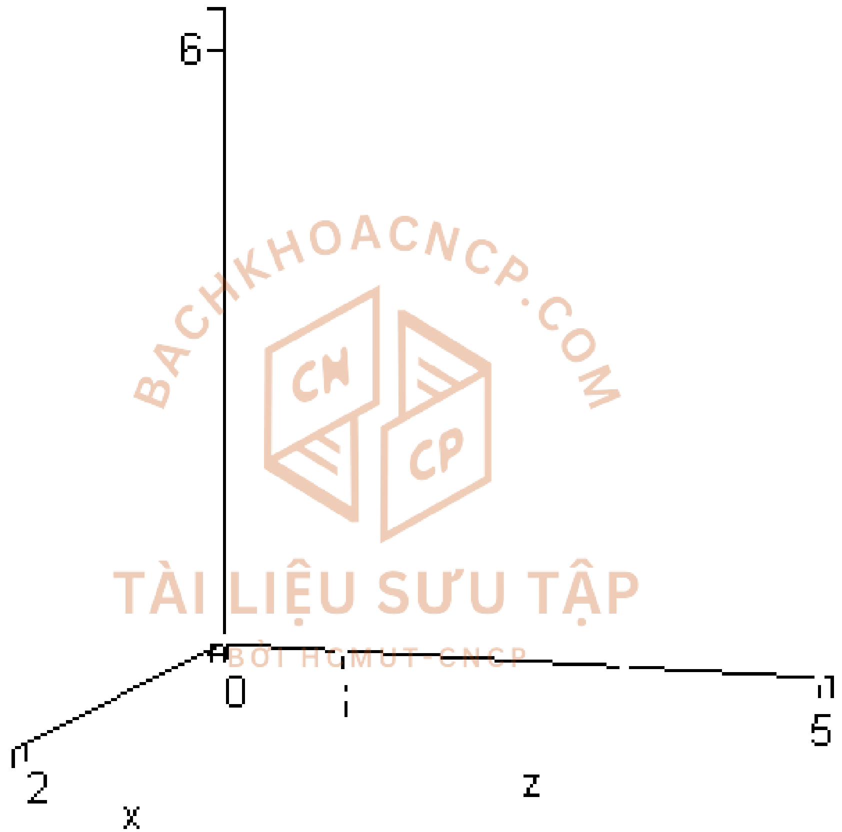
$$+\iint\limits_{D_2}\left(\int\limits_{3x}^{0} x\,dz\right)dxdy$$



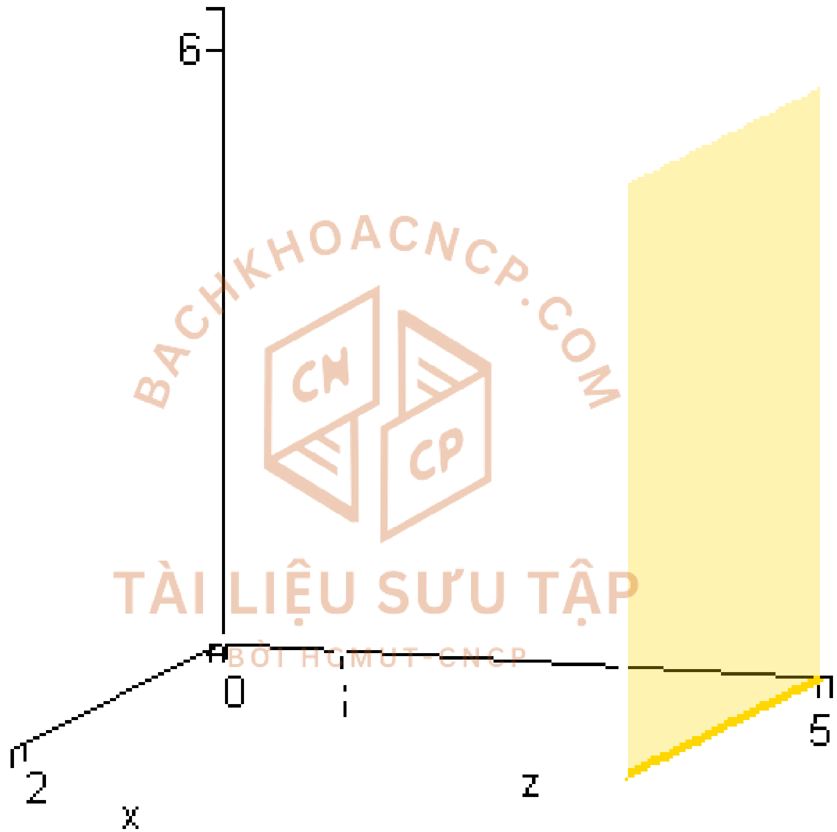


$$\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$$

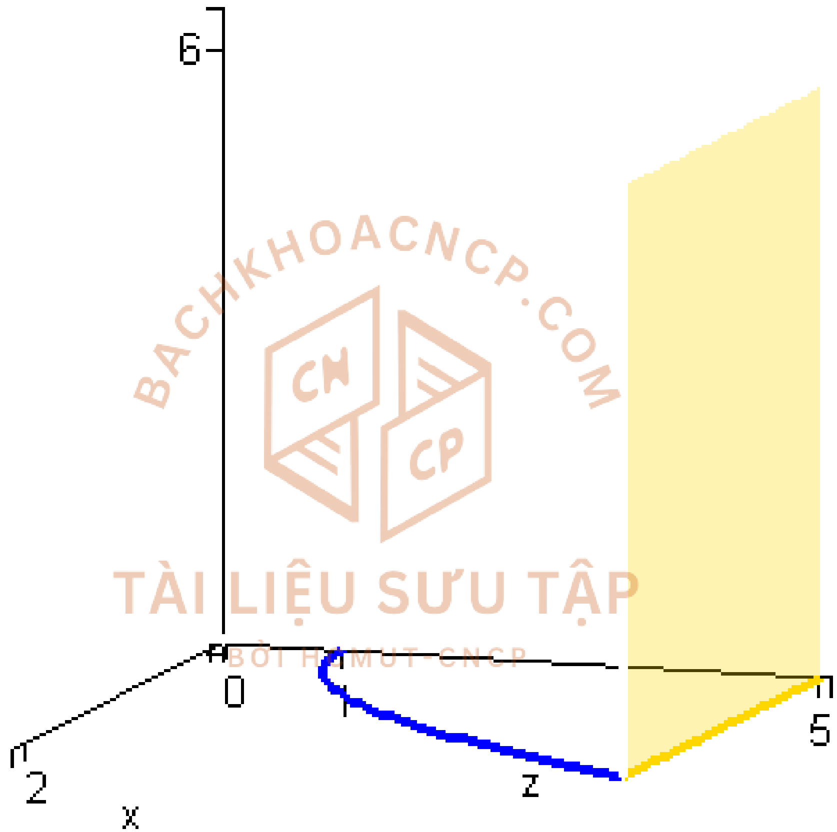
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



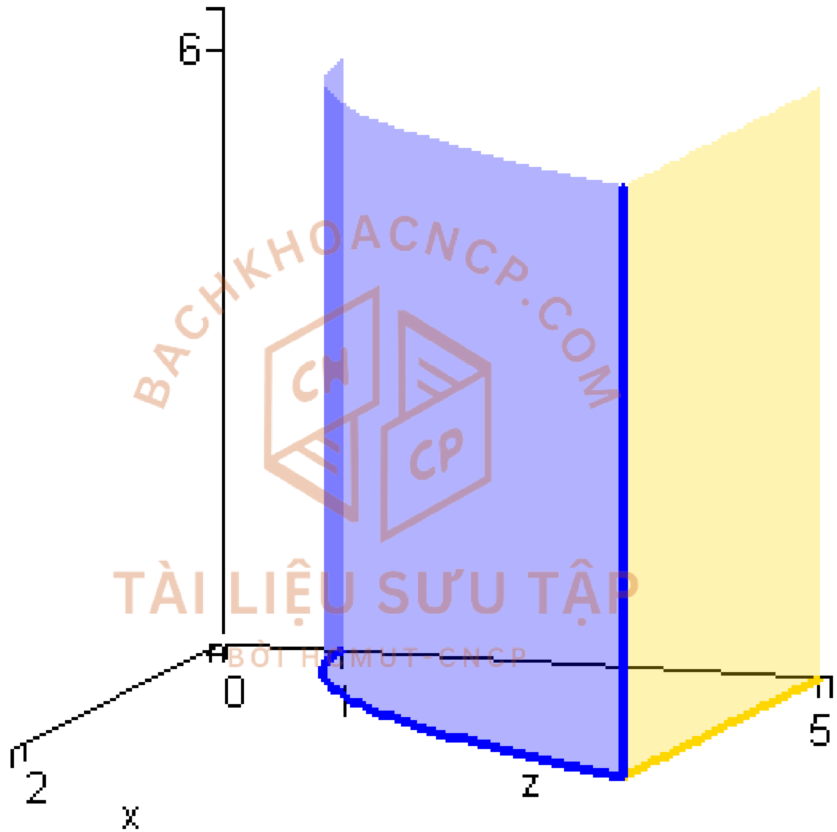
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



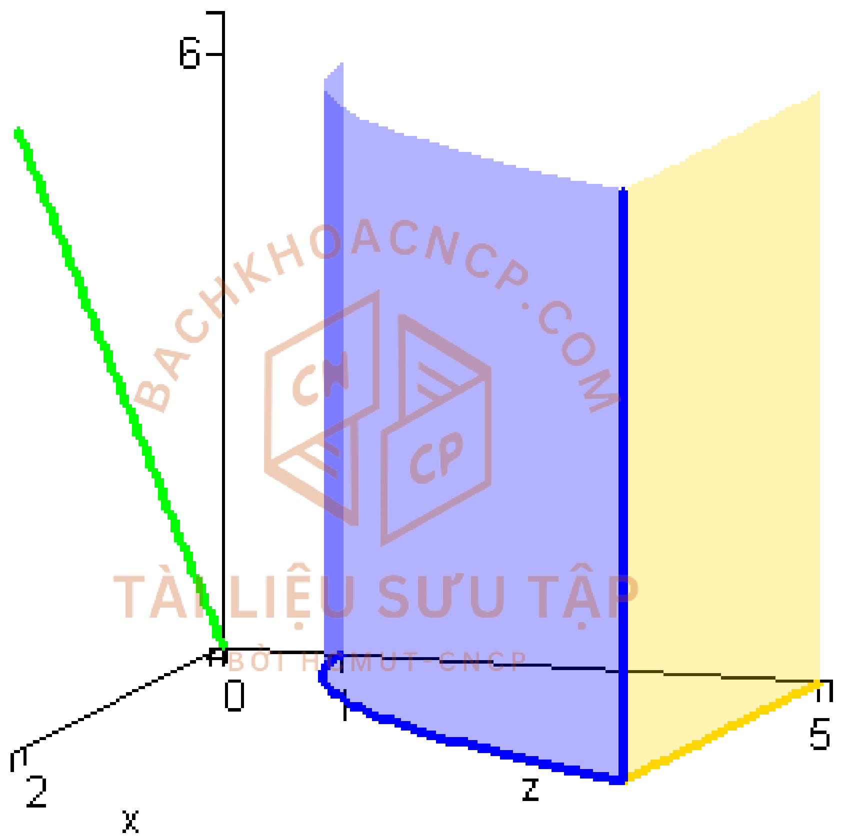
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



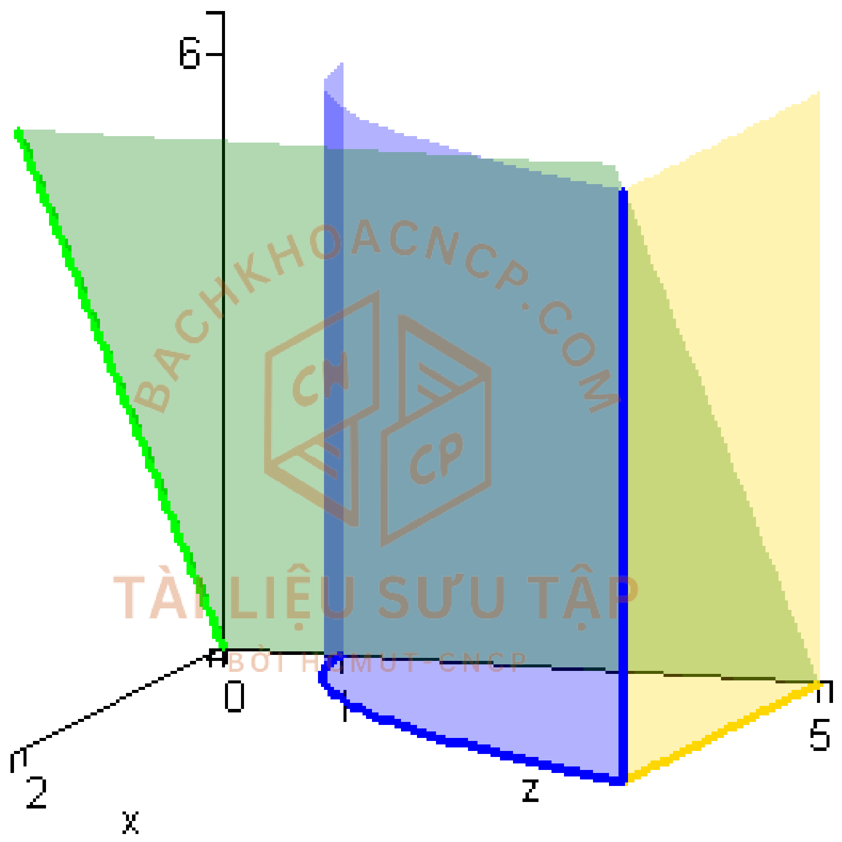
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



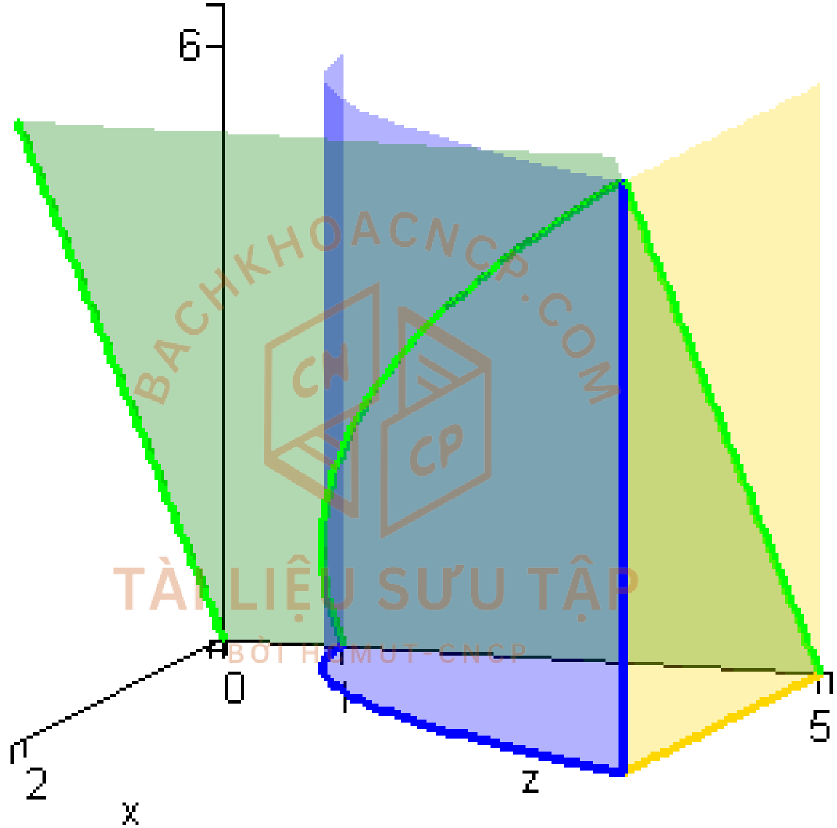
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



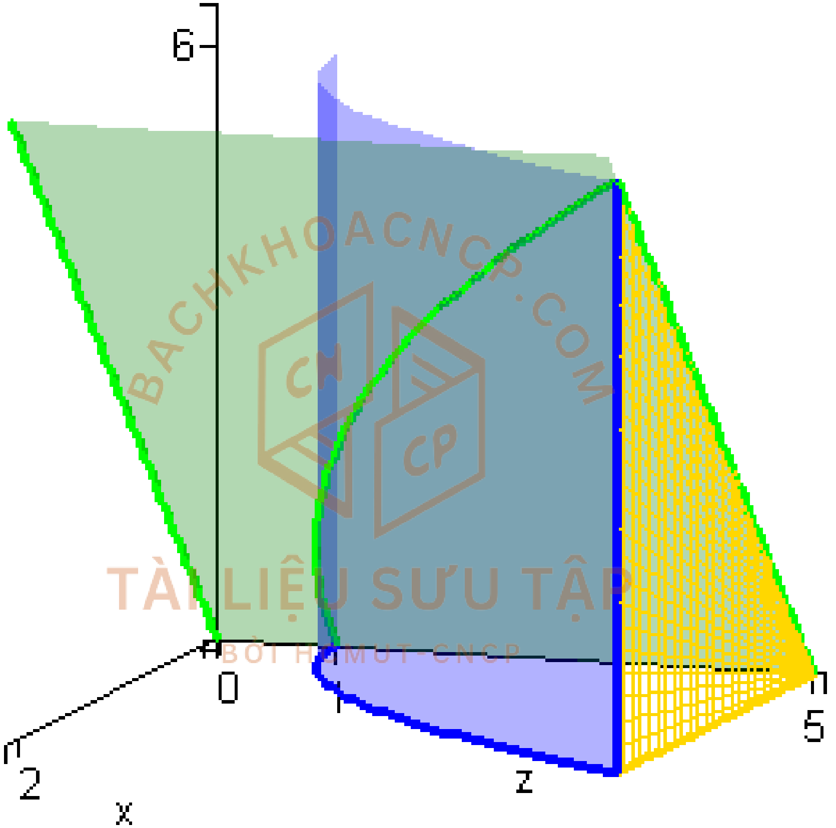
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



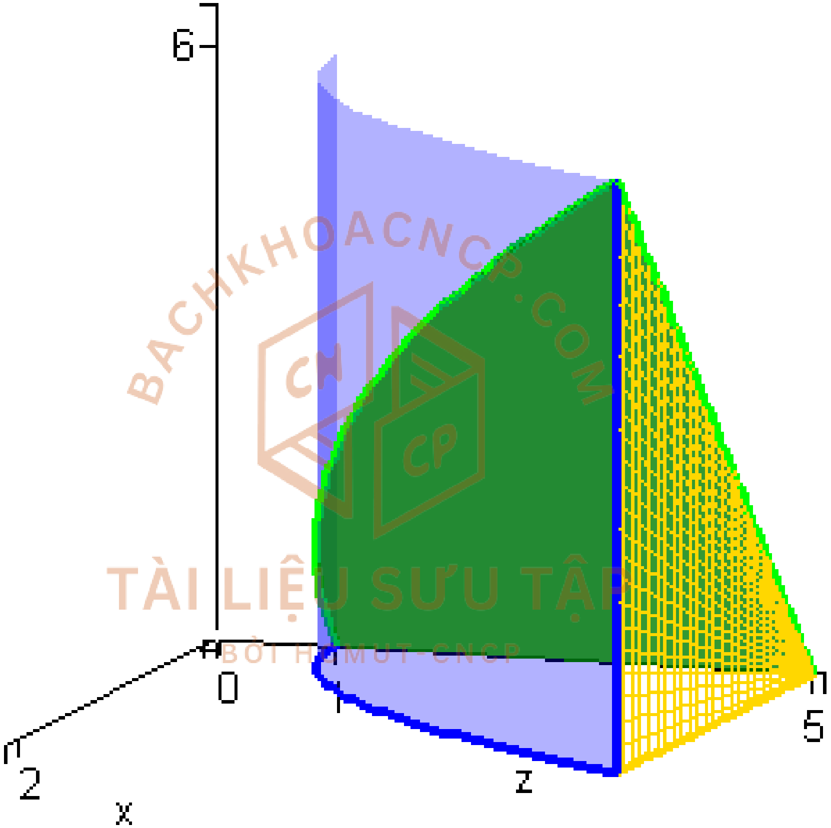
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



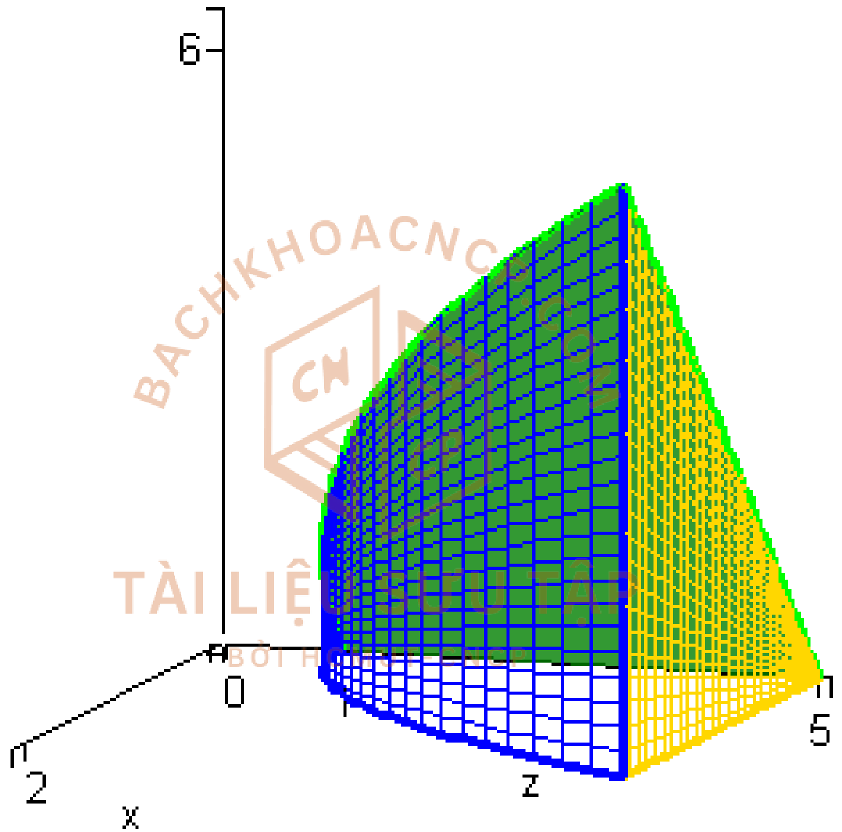
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



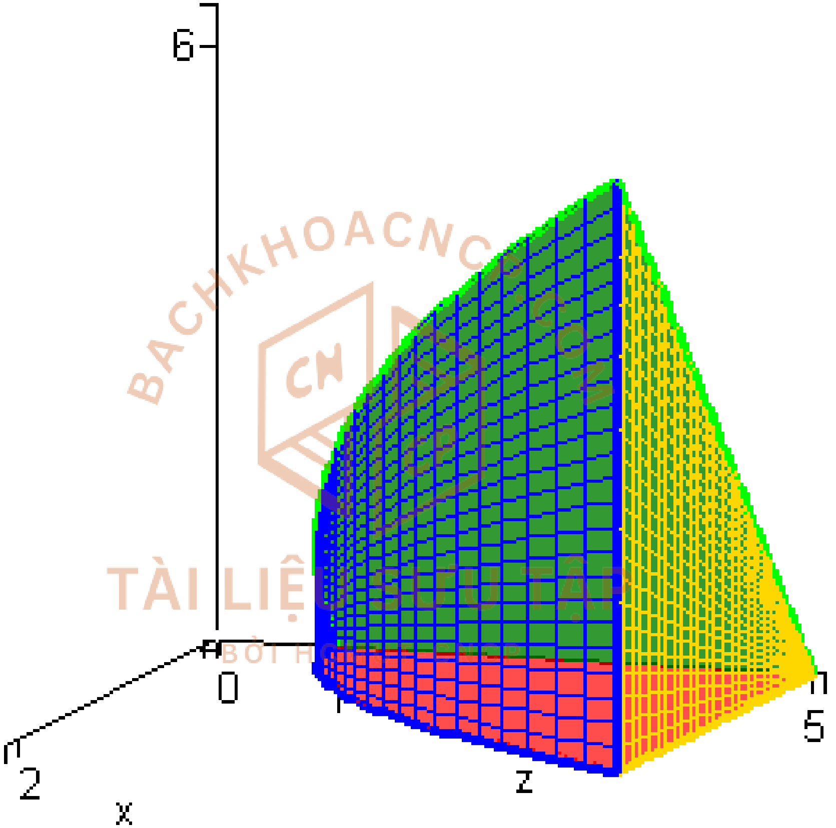
Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



Ω: $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$



Bài 1: Tính tính phân:

1. $I_1 = \iiint\limits_{\Omega} (2xz + y)\,dxdydz,\ \ \Omega: \{y = z^2 - 1, \mathrm{y} = 1, \mathrm{y} = 1 - \mathrm{x}, \mathrm{x} = 2\}$

2. $I_2 = \iiint\limits_{\Omega} (x+1)\,dxdydz,\ \ \Omega: \{x + y + z = 2, y = x^2, x \le 0, z = 0\}$

3. $I_3 = \iiint\limits_{\Omega} (x+1)\,dxdydz,\ \ \Omega: \{-2 \le z \le 2 - x^2 - y^2, \mathrm{x} \le \mathrm{y} \le \mathrm{x}\sqrt{3}\}$

4. $I_4 = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz,\ \ \Omega: \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \mathrm{z} = \mathrm{x}, \mathrm{z} = \mathrm{x}\sqrt{3}, x \ge 0\}$

5. $I_5 = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \le \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

6. $I_6 = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + 2z)\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \le -\sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

7. $I_7 = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}, x, y \ge 0\right\}$

8. $I_8 = \iiint\limits_{\Omega} (x + 2z)\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge -1 + \sqrt{x^2 + y^2}, y \ge 0\right\}$

9. $I_9 = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{ x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge -\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}, y \le x \le -y \right\}$

10. $I_{10} = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ \Omega: \left\{ \sqrt{3}z \ge \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 \le 4z, x \ge y \right\}$

Bài 2: Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt sau:

1. $z = x^2+y^2, z = x^2+y^2+1, x^2+y^2 = 1$
2. $x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge -\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}, y \le x \le -y$
3. $z = 0, x+y+z = 3, y = 0, \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3} = 1, \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3} = 1$
4. $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, z = 6-x$
5. $z = 0, \mathrm{z} = 4-\mathrm{x}^2, y = 0, 2y+z = 4$
6. $x^2+y^2 = 2x, x+z = 3, x-z = 3$
7. $x^2+y^2+z^2 \le 2z, x^2+y^2+z^2 \le 1$
8. $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \sqrt{x^2+y^2} \le z$