# *Giới thiệu môn học*

**Môn học:**

# XÁC SUẤT THỐNG KÊ

**Số tiết: 45**

**Cách tính điểm:**

- **Kiểm tra giữa kỳ ( trắc nghiệm): 20%**
- **Bài tập lớn theo nhóm ( ƯD phần mềm thống kê): 20%**
- **Thi cuối kỳ (Tự luận 90 phút): 60%**

*Tài liệu chính:*


1. Bài giảng trên BKeL.
2. Giáo trình Xác suất và thống kê; tác giả Nguyễn Đình Huy, Đậu Thế Cấp; NXBĐHQG TPHCM; 2011.
3. Bài tập Xác suất và thống kê; tác giả Nguyễn Đình Huy; NXBĐHQGTPHCM 2011.


*Một số tài liệu tham khảo:*


4. Lý thuyết xác suất và thống kê toán học; tác giả Lý Hoàng Tú, Trần Tuấn Điệp, NXBGTVT; 2003.
5. Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán; PGS.TS. Nguyễn Cao Văn, TS.Trần Thái Ninh; NXB ĐHKTQD; 2008.
6. Xác suất thống kê; PGS.TS Tô Văn Ban; NXBGDVN; 2010.
7. Thống kê ứng dụng trong kinh tế- xã hội, tác giả Hoàng Trọng, Chu Nguyễn Mộng Ngọc; NXBLĐXH;2011.
8. Nhập môn hiện đại Xác suất và thống kê, tác giả Đỗ Đức Thái, Nguyễn Tiến Dũng; NXBĐHSP; 2010.

# PHẦN I: LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

- *Lý thuyết xác suất* là bộ môn Toán học xác lập những quy luật tất nhiên ẩn giấu sau những hiện tượng mang tính ngẫu nhiên khi nghiên cứu một số lớn lần lặp lại cùng các hiện tượng ấy. Việc nắm bắt những quy luật này sẽ cho phép dự báo các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào.
- Các khái niệm đầu tiên của xác suất hình thành vào giữa thế kỷ 17, gắn liền với tên tuổi của các nhà bác học Fermat, Pascal, Bernoulli,… dựa trên việc nghiên cứu các quy luật ẩn náu trong các trò chơi cờ bạc may rủi.
- *Đến năm 1933, nhà toán học Nga A.N.Kolmogorov đã đưa ra định nghĩa xác suất dựa vào hệ tiên đề, từ đó xây dựng được cơ sở chặt chẽ của lý thuyết xác suất.*
- Hiện nay, các phương pháp của lý thuyết xác suất được ứng dụng rộng rãi trong trong việc giải quyết các bài toán thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học tự nhiên, kỹ thuật và kinh tế - xã hội.

# Chương 0: MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TÚC

0.1. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

0.2. Các quy tắc đếm :

- 0.2.1. Quy tắc cộng
- 0.2.2. Quy tắc nhân

0.3. Giải tích tổ hợp :

- Chỉnh hợp
- Chỉnh hợp lặp
- Hoán vị
- Tổ hợp
- Nhị thức Newton

0.4. Tích phân Euler - Poisson.

## 0.2.1 Quy tắc cộng:

*Giả sử một công việc có thể tiến hành theo một trong k phương án riêng biệt nhau,*

- *phương án 1 có $n_1$ cách hoàn thành công việc,*
- *phương án 2 có $n_2$ cách hoàn thành công việc,*

*............*

- *phương án k có $n_k$ cách hoàn thành công việc,*

*Khi đó có* $\mathbf{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$ *cách thực hiện công việc.*

## 0.2.2 Quy tắc nhân:

*Giả sử một công việc được thực hiện qua k giai đoạn liên tiếp,*

- *giai đoạn 1 có $n_1$ cách thực hiện,*
- *giai đoạn 2 có $n_2$ cách thực hiện ,*
- *................*
- *giai đoạn k có $n_k$ cách thực hiện .*

*Khi đó sẽ có* $\mathbf{n_1 . n_2 . . . n_k}$ *cách thực hiện công việc trên.*

## *Ví dụ 1*

*Để đi từ nhà đến trường, An phải đi qua 1 cây cầu.*
*Có 2 cách để An đi từ nhà đến cây cầu,*
*và có 3 cách để đi từ cây cầu đến trường học.*

*Hỏi An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường ?*



- Áp dụng Quy tắc cộng
- Áp dụng Quy tắc nhân
- Phân biệt cách sử dụng

## 0.3.1 Chỉnh hợp:

*Chỉnh hợp chập k từ n phần tử khác nhau* ( $k \le n$) là một bộ sắp thứ tự gồm *k* phần tử khác nhau đôi một từ *n* phần tử đã cho .

Số các chỉnh hợp chập k từ n phần tử :

$$\boxed{A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k\ so} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

## 0.3.2 Chỉnh hợp lặp :

*Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử khác nhau* là một bộ sắp thứ tự gồm *k* phần tử , không nhất thiết khác nhau, từ *n* phần tử đã cho .

Số các chỉnh hợp lặp chập *k* từ *n* phần tử : $\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}$

## 0.3.3 Hoán vị :

*Hoán vị của n phần tử khác nhau* là một nhóm có thứ tự gồm đúng *n* phần tử đã cho.

Số các hoán vị của *n* phần tử :

$$P_n = A_n^n = n!$$

## 0.3.4 Tổ hợp :

*Tổ hợp chập k từ n phần tử khác nhau* ( *k* ≤ *n*) là một bộ không kể thứ tự gồm *k* phần tử khác nhau đôi một từ *n* phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập *k* từ *n* phần tử :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Một số công thức thường gặp :

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^1 = n \qquad C_n^k = C_n^{n-k} \qquad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

*Ví dụ 2:* *Từ các số khác nhau 1,2,3,4,5;*

1. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau đôi một?
2. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số?
   (các chữ số có thể trùng nhau).
3. Có thể tạo được bao nhiêu tập con gồm 3 chữ số khác nhau đôi một từ 5 chữ số trên?
4. Có bao nhiêu cách xếp thứ tự
   5 chữ số trên?



KQ: $1.\ A_5^3 = 60$ $\quad$ $2.\ \overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$

$3.\ C_5^3 = 10$ $\quad$ $4.\ P_5 = 5! = 120$

## 0.4 Tích phân Euler-Poisson:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi};\ \sigma > 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

\+ Hàm tích phân Laplace (hàm lẻ) ( *xem từ trang 70 trong GT*):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

\+ Để tìm các giá trị gần đúng của hàm tích phân Laplace, ta tra bảng Phụ lục 2, hoặc sử dụng máy tính bỏ túi Casio 570 ES.

## *Bài tập chương 0*

1. Có 7 bức tranh khác nhau và 5 cái móc trên tường, mỗi móc chỉ để treo đúng một tranh. Có bao nhiêu cách treo tranh trên tường?

2. Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một ban cán sự lớp 3 người ( gồm lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ ) từ một lớp 50 sinh viên?

3. Một hộp có 7 bi đỏ, 3 bi vàng và 5 bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy ra 5 bi mà:

   a) trong đó có đúng 3 bi xanh.

   b) trong đó có ít nhất 3 bi xanh.

   c) trong đó không màu nào có quá 2 bi.

4. Có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

5. a) Có bao nhiêu cách chia đều 20 sinh viên thành 4 nhóm để đi thực tập ? ( 4 nơi thực tập khác nhau).

   b) Có bao nhiêu cách chia đều 20 sinh viên thành 4 nhóm để đi thực tập mà A và B đi cùng một nhóm, còn C, D đi cùng nhóm khác.

6. Có bao nhiêu cách xếp 8 hành khách lên 3 toa tàu ? ( giả thiết mỗi người có thể lên một toa tùy ý)?

7. Tính:

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x+3}dx$$

# Chương I: CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

## §1. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

1.1 Phép thử và các loại biến cố.

1.2 Định nghĩa xác suất :

- I.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất.
- I.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất.
- I.2.3 Định nghĩa hình học về xác suất.
- I.2.4 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tham khảo).

1.3 Nguyên lý xác suất lớn và xác suất nhỏ.

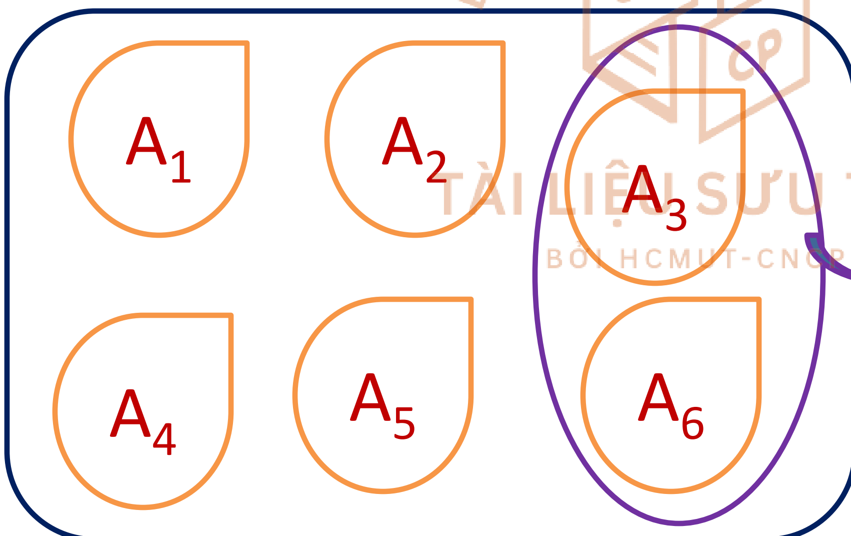
## 1.1 Phép thử và các loại biến cố :

- Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó gọi là thực hiện một ***phép thử*** ( *trial* ).
- ***Phép thử ngẫu nhiên*** là phép thử mà ở hai lần thử bất kỳ với đầu vào và quá trình chuyển hóa giống nhau nhưng kết quả đầu ra lại có thể hoàn toàn khác nhau, không dự báo được .
- Mỗi kết cục không thể phân chia được của phép thử gọi là ***biến cố sơ cấp***. Tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp tạo thành ***không gian các biến cố sơ cấp***, hay gọi là ***không gian mẫu***, kí hiệu là $\Omega$.
- Hợp thành của các kết cục nào đó gọi là một ***biến cố*** ( hay *sự kiện- event* ). Như vậy mỗi biến cố chính là một tập con của không gian mẫu.

Tung 1 con xúc xắc → *Phép thử*

Xuất hiện mặt có i chấm → *Các biến cố sơ cấp $A_i$.*

*$i = 1,2\ldots,6$.*




*D là biến cố số chấm xuất hiện chia hết cho 3*

*Không gian mẫu $\Omega$*

Trong thực tế có thể xảy ra các loại biến cố sau:

- Biến cố nhất định xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là *biến cố chắc chắn*, được kí hiệu là $\Omega$ .

- Biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là *biến cố không thể có*, được kí hiệu là $\varnothing$ .

- Biến cố có thể xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một phép thử cụ thể gọi là *biến cố ngẫu nhiên.*

Người ta thường dùng các kí hiệu là A, B, C hay $A_1$, $A_2$,… $B_1$, $B_2$, …,$B_n$ để biểu diễn biến cố.

## 1.2 Định nghĩa xác suất:

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng cho khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

### 1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất :

Xét một phép thử mà không gian mẫu có thể chia thành *n* kết cục duy nhất đồng khả năng; trong đó có $m_A$ kết cục thuận lợi cho biến cố A khi thực hiện phép thử . Ta định nghĩa xác suất của biến cố A theo cổ điển:

$$\boxed{P(A) = \frac{m_A}{n}}$$



*Để thuận lợi, người ta hay lấy n = số các biến cố sơ cấp trong không gian mẫu, với điều kiện các biến cố này duy nhất và đồng khả năng.*

***Các tính chất :***

- $0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad$ $P(\Omega) = 1$ $\quad$ $P(\varnothing) = 0$

*Ví dụ 2:* Tung 2 con xúc xắc cân đối, đồng chất.
Tìm xác suất của các biến cố:

a) Tổng số chấm trên 2 con xúc xắc bằng 7.
b) Có ít nhất một mặt sáu chấm xuất hiện.

*Ví dụ 3:* Một hộp có 7 bi đỏ, 3 bi vàng và 5 bi xanh. Lấy ra ngẫu nhiên 5 bi. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Trong 5 bi đó có đúng 3 bi xanh.
b) Trong 5 bi đó có ít nhất 3 bi xanh.
c) Có đủ 3 màu bi nếu biết rằng trong 5 bi đó có đúng 2 bi đỏ.

*Ví dụ 4:* Có 8 người lên 5 toa tàu một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất có 2 toa không ai lên, 2 toa có 3 người lên, và 1 toa có 2 người lên.

**Ví dụ 2:** a) $\frac{6}{36}$ b) $\frac{11}{36}$

**Ví dụ 3:**

$$a)\ \frac{C_5^3.C_{10}^2}{C_{15}^5} = \frac{\text{sô' cách lâ'y 5 bi mà có 3 bi xanh}}{\text{sô' cách lâ'y 5 bi tùy ý trong 15 bi}} = \frac{150}{1001}$$

$$b)\ \frac{C_5^3.C_{10}^2 + C_5^4.C_{10}^1 + C_5^5}{C_{15}^5} = \frac{167}{1001} \qquad \left(\neq \frac{C_5^3.C_{12}^2}{C_{15}^5}\right)$$

$$c)\ \frac{C_7^2.C_3^2.C_5^1 + C_7^2.C_3^1.C_5^2}{C_7^2.C_8^3} = \frac{45}{56}$$

**Ví dụ 4:**

$$\frac{C_5^2.C_3^2.C_8^3.C_5^3}{5^8} = \frac{672}{15625}$$

*n = số cách xếp ngẫu nhiên 8 hành khách lên 5 toa tàu.*

## 1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất :

*Tần suất* xuất hiện biến cố A trong *n* phép thử là tỉ số giữa *số phép thử trong đó biến cố A xuất hiện* và *tổng số phép thử được thực hiện.*

$$\boxed{f(A)=\frac{k}{n}}$$

Người ta nhận thấy nếu tiến hành số lượng lớn các phép thử trong những điều kiện như nhau thì tính ổn định của tần suất khá rõ ràng.

*Ví dụ 4* *Người ta tiến hành tung đồng xu nhiều lần.*

| Người gieo | Số lần gieo (n) | Số lần được mặt sấp (k) | Tần suất (f) |
|---|---|---|---|
| **Buffon** | **4.040** | **2.048** | **0,5069** |
| **Kerrich** | **10.000** | **5.067** | **0,5067** |
| **Pearson (lần 1)** | **12.000** | **6.019** | **0,5016** |
| **Pearson (lần 2)** | **24.000** | **12.012** | **0,5005** |

Qua ví dụ trên , ta thấy khi số phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp sẽ dao động ngày càng ít hơn xung quanh giá trị không đổi là 0,5.

Điều đó cho phép hy vọng khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ (*) về giá trị 0,5 .

*Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số p không đổi mà tần suất xuất hiện biến cố đó sẽ dao động rất ít xung quanh nó khi số phép thử tăng lên vô hạn.*

Như vậy: Khi n đủ lớn ta có thể coi $P(A) \approx f(A)$

(*): SV có thể tìm hiểu thêm trong tài liệu tham khảo (4) về sự khác nhau giữa khái niệm hội tụ theo xác suất và khái niệm hội tụ trong môn Giải tích đã được học.

## *Ví dụ 5*

Theo dõi ngẫu nhiên 10.000 bé mới sinh ở một vùng, người ta thấy có 5097 bé trai.

Tần suất sinh bé trai trong khảo sát: $f_n$ = 5097/10000.

Vì số lượng bé được theo dõi là n =10.000 khá lớn nên ta có thể coi xác suất sinh con trai $p$ ở vùng này xấp xỉ bằng:

$$p \approx f_n = \mathbf{5097/10.000 = 0{,}5097}.$$

---

Tỉ lệ trên cho tương ứng 100 bé gái với khoảng 104 bé trai. Tỷ số giới tính khi sinh tự nhiên trên thế giới dao động từ 104 – 106 trẻ em trai cho mỗi 100 trẻ em gái.

Định nghĩa xác suất theo thống kê được sử dụng rất phổ biến trong các lĩnh vực của cuộc sống.

## I.2.3 Định nghĩa hình học về xác suất :

- Giả sử **một phép thử có vô hạn kết cục đồng khả năng** có thể biểu diễn bởi một miền hình học ***G*** nào đó đo được, còn tập các kết cục đồng khả năng thuận lợi cho biến cố A được biểu diễn bởi một miền hình học **S** nào đó đo được.

  Khi đó xác suất của biến cố A được tính như sau: .

**P(A) = Độ đo miền S / Độ đo miền *G***

- Tùy theo miền ***G*** là một đường thẳng, một miền phẳng hay khối không gian mà độ đo được xác định tương ứng là độ dài, diện tích hay là thể tích.

*Ví dụ 6* *Biết rằng xe buýt số 202 thường qua trạm gần nhà An vào thời điểm ngẫu nhiên trong khoảng 7g đến 7g15. Nếu An đến trạm vào lúc 7g10 thì xác suất bắt được xe 202 là bao nhiêu?*

*Ví dụ 7*

Xét phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$,
hệ số a được lấy ngẫu nhiên trong đoạn [0; 1],
còn hệ số b được lấy ngẫu nhiên trong đoạn [-1; 1] .



a) Tìm xác suất phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.
b) Tìm xác suất phương trình có nghiệm kép.
c) Trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm phân biệt, tìm xác suất để phương trình có 2 nghiệm dương .

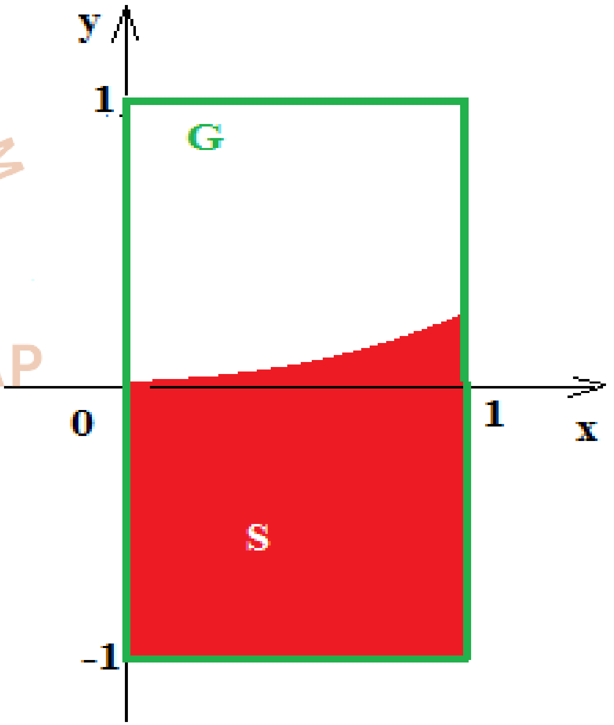
*VD7: a)* Do a, b là 2 tham số độc lập nên ta dùng trục Ox trong mặt phẳng Oxy để biểu diễn cho các giá trị của a, và trục Oy để biểu diễn cho các giá trị của b.
Độ đo được sử dụng ở đây là diện tích miền phẳng.

Phương trình có 2 nghiệm thực PB

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow b < \dfrac{a^2}{4}$ .

Miền $G_a = [0; 1] \times [-1; 1]$.

Miền $S_a$ chính là miền phẳng trong $G_a$ giới hạn bởi $y < \dfrac{x^2}{4}$.




Xác suất cần tìm:

$$\frac{Dien\,tich\,S}{Dien\,tich\,G} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} - (-1)\right)dx}{2} = \frac{13}{24}$$

b) Miền $G_b \equiv G_a = [0; 1] \times [-1; 1]$ .

Miền $S_b$ chính là đoạn đường cong có phương trình $y = x^2/4$.

Diện tích miền $S_b = 0$ nên XS phương trình có nghiệm kép = 0.

*Ví dụ này cho thấy một biến cố có xác suất bằng 0 vẫn có thể xảy ra; hay một biến cố có xác suất bằng 1 vẫn có thể không xảy ra trong 1 phép thử.*

*c) Hướng dẫn:* Miền $G_c \equiv S_a$

## 1.3 Nguyên lý xác suất lớn và xác suất nhỏ :



- Nếu một biến cố có xác suất xảy ra rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.
- Tương tự như vậy, nếu biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất gần 1 thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử.
- Mức xác suất khá nhỏ mà từ đó ta cho rằng không xảy ra biến cố phụ thuộc vào từng bài toán thực tế.

# §2. CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

2.1 Quan hệ giữa các biến cố

2.2 Một số phép toán giữa các biến cố

2.3 Các định lý xác suất :

- 2.3.1 Công thức cộng.
- 2.3.2 Công thức nhân và xác suất có điều kiện.
- 2.3.3 Công thức Becnoulli.
- 2.3.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

## 2.1 Quan hệ giữa các biến cố

*Các khái niệm:*

- Ta nói biến cố A *kéo theo* biến cố B và ký hiệu là A $\Rightarrow$ B ( hay A $\subset$ B), nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B xảy ra.

  (Như vậy một biến cố được gọi là *biến cố sơ cấp* nếu không có biến cố nào khác kéo theo nó).

- Hai biến cố A và B được gọi là *bằng nhau*, ký hiệu là A = B, nếu biến cố A kéo theo biến cố B và ngược lại, tức là

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}}$$

- Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nhau nếu chúng không thể cùng xảy ra trong một phép thử.

- Hai biến cố A và B gọi là *đối lập* với nhau , ký hiệu là B = $\bar{A}$, nếu A xảy ra thì B không xảy ra và khi A không xảy ra thì B xảy ra.

*Ví dụ 8*

*Tung ngẫu nhiên 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất.*

Gọi $A_i$ là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bằng i; i = 1,2,…,6.

Gọi B là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn.

Gọi C là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ.

Gọi D là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc chia hết cho 3.

- *Hãy sử dụng các biến cố trên để minh họa cho các khái niệm và các phép toán được định nghĩa trong bài này.*

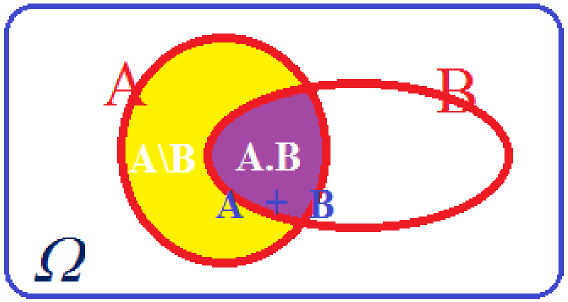
## 2.2 Một số phép toán giữa các biến cố

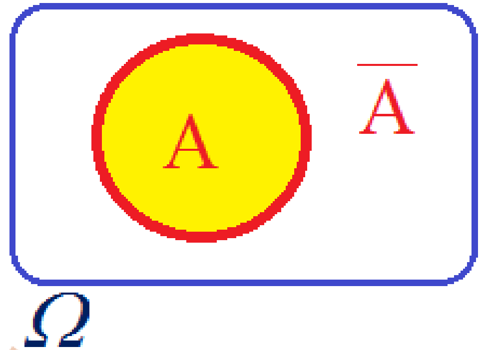
- ***Phép cộng*:** Tổng của hai biến cố A và B là biến cố C , ký hiệu là: $C = A + B$ (hay $C = A \cup B$ ), xảy ra khi có **ít nhất** 1 trong 2 biến cố A, B xảy ra.

- ***Phép nhân*:** Tích của hai biến cố A và B là biến cố C, ký hiệu là: $C = AB$ ( hay $C = A \cap B$), xảy ra khi cả 2 biến cố A và B **cùng xảy ra**.

- ***Phép trừ*:** Hiệu của biến cố A và B (theo thứ tự đó) là biến cố C, ký hiệu là: $C = A \setminus B$, xảy ra khi **biến cố A xảy ra và biến cố B không xảy ra**.

  Vì mỗi biến cố bất kỳ chính là một tập con của $\Omega$ , nên có sự đồng nhất trong quan hệ và phép toán giữa các biến cố với quan hệ và phép toán giữa các tập hợp.



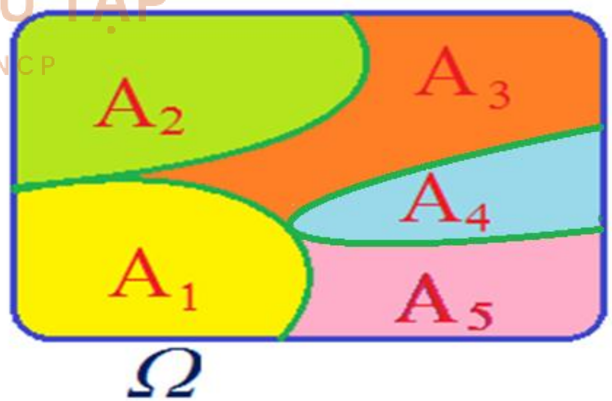




-Hệ *n* biến cố { $A_1, A_2, .. ,A_n$ } được gọi là *hệ biến cố đầy đủ* nếu *các biến cố trong hệ xung khắc với nhau đôi một* và *tổng của chúng là biến cố chắc chắn*;

tức là:

$$A_i\,.\,A_j = \varnothing \text{ với } \forall\, i \neq j$$

và $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega\,.$$



* $A_1 \subset C$ ; $C \not\subset A_1$

* $A_1$ và $A_2$ xung khắc

* $\{A_1; A_2; A_3\}$ xung khắc đôi một

* $A_1$ và $A_2$ không đối lập.

* B và C xung khắc

* B và C đối lập.

* Biến cố đối lập của biến cố D là biến cố "số chấm xuất hiện không chia hết cho 3".

* Biến cố đối lập của $A_5$ là biến cố "xuất hiện số chấm khác 5".

* $A_3 + A_6 = D$

* $A_2 + A_4 + A_6 = B$

* $A_3 \,.\, A_6 = \varnothing$

* $B \,.\, D = A_6$

* $B \backslash D = A_2 + A_4$

* $\{A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6\}$ là nhóm biến cố đầy đủ.

* { B,C } là nhóm biến cố đầy đủ

* $\{C; A_2; A_4; A_6\}$ là nhóm biến cố đầy đủ.

* $\{C; A_2; A_4; D\}$ không phải nhóm biến cố đầy đủ.

***Các tính chất :***

1. $A + B = B + A$ ; $AB = BA$
2. $(A+B) + C = A + (B + C)$ ; $(AB)C = A(BC)$
3. $A(B+C) = AB + AC$; $A + (BC) = (A+B)(A+C)$

4. $A \setminus (B+C) = (A \setminus B)(A \setminus C)$; $A \setminus (BC) = (A \setminus B) + (A \setminus C)$
5. Nếu $A \subset B$ thì $A+B = B$; $AB = A$
6. $\overline{\overline{A}} = A$
7. $A + \overline{A} = \Omega$ ; $A.\overline{A} = \varnothing$
8. $\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

## *Ví dụ 9 (Bài tập 1.18)*

Bắn 3 phát đạn vào bia. Gọi $A_i$ là biến cố phát đạn thứ i trúng; i=1,2,3. Hãy biểu diễn những biến cố sau qua các biến cố $A_i$ và các biến cố đối lập của chúng:

a) Cả 3 phát đạn đều trúng.
b) Cả 3 phát đạn đều trật.
c) Ít nhất một phát trúng.
d) Có đúng một phát trúng.
e) Ít nhất một phát trượt.
f) Không ít hơn 2 phát trúng.
g) Không quá 1 phát trúng.
h) Không trúng trước phát thứ hai.

a) $A = A_1 A_2 A_3$

b) $B = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} \qquad (\neq \overline{A})$

c) $C = A_1 + A_2 + A_3 = \overline{B}$

d) $D = A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3$

e) $E = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} = \overline{A}$

f) $F = A_1.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.A_3 + A_1.\overline{A_2}.A_3 + A_1.A_2.A_3$

g) $G = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3$

h) $H = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3 + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.A_3$

$$= \overline{A_1}.\overline{A_2}(\overline{A_3} + A_3) + \overline{A_1}.A_2(\overline{A_3} + A_3) = \overline{A_1}(\overline{A_2} + A_2) = \overline{A_1}$$

## 2.3 Các định lý xác suất

### 2.3.1 Công thức cộng :

- Trường hợp tổng quát:

  * $\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

  * $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

  * $$\boxed{\begin{aligned}&P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i.A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)\end{aligned}}$$



- Nếu A, B **xung khắc** nhau thì : $P(A+B) = P(A) + P(B)$

- Nếu $A_1, A_2, ..A_n$ **xung khắc đôi một** thì:

  $$P(A_1+A_2+..+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

- Nếu $\{A_1, A_2, ..A_n\}$ là nhóm biến cố đầy đủ thì $P(A_1)+P(A_2)\ldots+P(A_n) = 1$

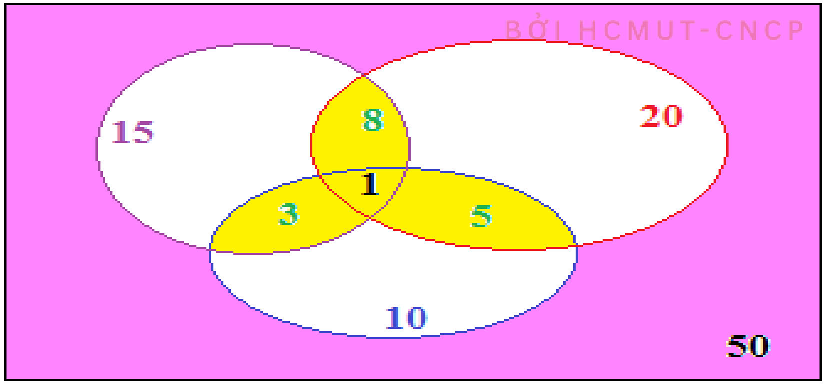
## *Ví dụ 10*

Trong một lớp gồm **50** học sinh (HS) , người ta thấy: có **20** HS chơi bóng đá; **15** HS chơi bóng chuyền ; 10 HS chơi bóng rổ; 8 HS chơi cả bóng đá và bóng chuyền; **5** HS chơi cả bóng đá và bóng rổ; **3** HS chơi đồng thời bóng chuyền và bóng rổ; còn **1** học sinh chơi cả 3 môn trên. Lấy ngẫu nhiên một HS.

a) Tìm xác suất HS đó chơi ít nhất một môn bóng;

b) Tìm xác suất để HS đó chơi đúng 2 môn bóng.






*Đây là ví dụ minh họa công thức cộng xác suất.*

a) Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh.

Gọi Đ là biến cố học sinh đó chơi bóng đá;

C là biến cố chọn được học sinh chơi bóng chuyền;

R là biến cố chọn được học sinh chơi bóng rổ.

Gọi A là biến cố học sinh đó chơi ít nhất một môn bóng;

Khi đó A = Đ + C + R

P(A) = P(Đ) + P(C) + P( R) – P(ĐC) – P(CR) – P(ĐR) + P(ĐCR)

$$P(A) = \frac{20}{50} + \frac{15}{50} + \frac{10}{50} - \frac{8}{50} - \frac{5}{50} - \frac{3}{50} + \frac{1}{50} = \frac{30}{50} = 0,6$$

Kết quả trên có thể nhẩm trực tiếp từ biểu đồ Ven.

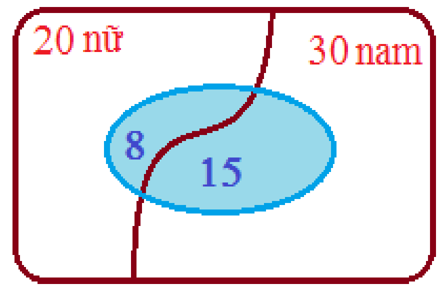
b) 13/50.

## 2.3.2 Công thức nhân :

- ĐN: *Xác suất của biến cố A với điều kiện B* chính là XS của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra, ký hiệu P(A/B) hay P(A|B) .

***Ví dụ 11:***

Trong lớp có 20 bạn nữ và 30 bạn nam, ta thấy có 8 bạn nữ và 15 bạn nam mặc áo màu xanh. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Hãy tính:




a) XS bạn được chọn là bạn nữ.
b) XS bạn đó mặc áo màu xanh.
c) XS chọn được một bạn nữ mặc áo màu xanh.
d) Biết rằng bạn đó là nữ thì xác suất bạn đó mặc áo màu xanh là bao nhiêu?
e) Nếu bạn đó mặc áo màu xanh thì khả năng bạn đã chọn được một học sinh nam là bao nhiêu?

Gọi Nu là biến cố chọn được học sinh nữ;

Nam là biến cố chọn được học sinh nam;

X là biến cố chọn được học sinh mặc áo màu xanh.

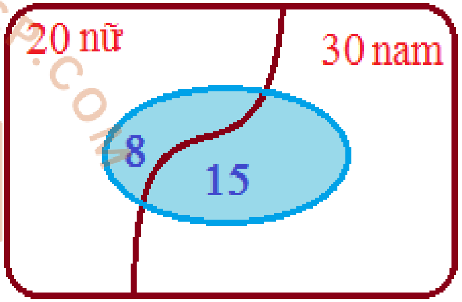
a) P(Nu) = 20/50

b) P(X) = 23/50

c) P(X.Nu) = 8/50

d) P(X/Nu) = 8/20

e) P(Nam/X) = 15/23






*Hãy kiểm tra lại công thức nhân:*

P(AB) =P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)

*và*

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

khi $P(B) \neq 0$

- Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại, tức là:

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$$

và $$P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$$

- Hệ các biến cố $\{A_1, A_2, .. ,A_n\}$ được gọi là ***độc lập toàn thể*** (hay *độc lập tương hỗ*) nếu mỗi biến cố trong hệ đều độc lập với một tích bất kỳ các biến cố còn lại. Dễ thấy $\{A_1, A_2, .. ,A_n\}$ độc lập toàn thể thì nó cũng độc lập đôi một. Điều ngược lại nói chung không đúng (sinh viên có thể tham khảo thêm ví dụ trong tài liệu (4)).

- *Công thức nhân* trong trường hợp tổng quát:

* $\boxed{P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)}$

* $P(A_1.A_2 \ldots A_n) =$

$= P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 A_2)\ldots.P(A_n/A_1 A_2\ldots A_{n-1}).$

- Nếu A, B là 2 biến cố độc lập thì:

$P(AB) = P(A).P(B)$

- Nếu các biến cố $A_1, A_2, .. ,A_n$ độc lập toàn thể thì:

$P(A_1.A_2 \ldots A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n).$

# *Ví dụ 12*

Xác suất máy tự động thứ nhất sản xuất ra 1 một sản phẩm tốt là 0,9; còn xác suất máy thứ hai sản xuất ra sản phẩm tốt là 0,7. Cho mỗi máy sản xuất một sản phẩm.

*Tính xác suất của các biến cố:*

a) Cả hai sản phẩm thu được đều tốt.

b) Chỉ được đúng một sản phẩm tốt.

c) Được ít nhất một sản phẩm tốt (làm bằng nhiều cách).



*Hướng dẫn:*

Gọi $A_1$ là biến cố sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất là tốt;

$A_2$ là biến cố sản phẩm do máy thứ hai sản xuất là tốt;

a) Gọi A là biến cố cả 2 sản phẩm thu được đều tốt.

$A = A_1.A_2 \Rightarrow P(A) = P(A_1.A_2) \overset{dl}{=\!=} P(A_1).\ P(A_2) = 0{,}9*0{,}7 = 0{,}63$

b) Gọi B là biến cố chỉ có đúng 1 sản phẩm tốt.

$$B = \overline{A_1}.A_2 + A_1.\overline{A_2}$$

$$P(B)=P(\overline{A_1}.A_2+A_1.\overline{A_2}) \overset{xk}{=} P(\overline{A_1}.A_2)+P(A_1.\overline{A_2})$$

$$\overset{dl}{=} P(\overline{A_1}).P(A_2)+P(A_1).P(\overline{A_2}) = 0{,}1*0{,}7+0{,}9*0{,}3 = 0{,}34$$

c) Gọi C là biến cố có ít nhất 1 sản phẩm tốt.

*Cách 1:* $C = A + B \Rightarrow P(C) = P(A) + PB) = 0{,}97$ do A,B xung khắc

*Cách 2:* $C = A_1 + A_2$

Do $A_1, A_2$ không xung khắc nên ta dùng công thức tổng quát:

$P(C) = P(A_1)+ P(A_2) - P(A_1A_2)$

$= 0{,}9 + 0{,}7 – 0{,}9*0{,}7 = 0{,}97$

*Cách 3:* $P(C) = 1- P(\overline{C}) = 1- P(\overline{A_1}.\ \overline{A_2}) \overset{dl}{=} 1- P(\overline{A_1})*P(\overline{A_2})$

$$= 1 - 0{,}1*0{,}3 \quad = 0{,}97$$

## *Ví dụ 13*
## *(Bài tập 1.30)*

Một hộp có 2 bi xanh, 3 bi trắng và 4 bi đỏ cùng cỡ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi ( không hoàn lại ), cho đến khi được bi đỏ thì dừng.

*Tìm các xác suất:*

a) Có 2 bi trắng và một bi xanh được lấy ra (làm theo 2 cách).

b) Không có bi trắng nào được lấy ra.

c) Tìm xác suất lấy được ít nhất 1 bi xanh biết rằng không có bi trắng nào được lấy ra.

*Hướng dẫn:*

Gọi $X_i$ là biến cố lấy được bi xanh ở lần lấy thứ i;

$Đ_i$ là biến cố lấy được bi đỏ ở lần lấy thứ i;

$V_i$ là biến cố lấy được bi vàng ở lần lấy thứ i; i= 1,2,….

a) Gọi A là b/c: "có 2 bi trắng và một bi xanh được lấy ra"

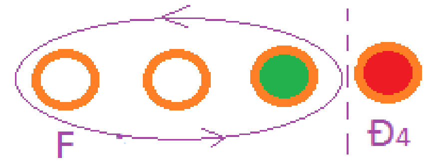
$A \equiv$ " trong 3 viên bi đầu có 2 bi trắng, 1 bi xanh; viên bi thứ 4 là bi đỏ".

*Cách 1:* $A = T_1 .T_2.X_3.Đ_4 + T_1 .X_2.T_3.Đ_4 + X_1 .T_2.X_3.Đ_4$

$$P(A) \overset{\text{xk}}{=\!=} P(T_1).P(T_2|T_1).P(X_3|T_1T_2).P(Đ_4|T_1T_2X_3) + \\ + P(T_1 .X_2.T_3.Đ_4) + P(X_1 .T_2.X_3.Đ_4)$$

$$P(A) = \frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{2}{7}.\frac{4}{6} + \frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{2}{7}.\frac{4}{6} + \frac{2}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{4}{6} = 3\times\frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{2}{7}.\frac{4}{6} = \frac{1}{21}$$

*Cách 2:* Nếu gọi F là biến cố trong 3 viên bi đầu có 2 bi trắng, 1 bi xanh thì A = F .Đ$_4$ .




P(A) = P(F). P(Đ$_4$ /F ) = $\dfrac{C_3^2.C_2^1}{C_9^3} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{21}$

b) Gọi B là biến cố không có bi trắng nào được lấy ra.

B = Đ$_1$ + X$_1$ Đ$_2$ + X$_1$ X$_2$ Đ$_3$ $\Rightarrow P(B) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9}.\dfrac{4}{8} + \dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{8}.\dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$

*(Mở rộng: tính nhanh kết quả nếu đổi giả thiết thành hộp có 8 bi xanh, 3 trắng, 4 đỏ).*

c) Gọi E là biến cố lấy được ít nhất 1 bi xanh. XS cần tìm:

$$P(E/B) = \frac{P(EB)}{P(B)} = \frac{P(E.[Đ_1 + X_1Đ_2 + X_1X_2Đ_3])}{P(B)}$$

$$= \frac{P(X_1Đ_2 + X_1X_2Đ_3)}{P(B)} = \frac{2}{9}$$

# *Ví dụ 14*

Một hộp có 10 lá phiếu trong đó chỉ có 3 lá phiếu may mắn. Mỗi người lần lượt rút ngẫu nhiên một lá phiếu. (Không hoàn lại sau mỗi lần rút ).

a) Tìm xác suất có đúng 1 người rút được lá phiếu may mắn trong 3 người đầu tiên.

b) Nếu trong 3 người đầu chỉ có 1 người rút được phiếu may mắn thì hãy tìm xác suất người đó là người rút thứ hai .

c) Giả sử việc rút phiếu sẽ dừng lại nếu có đủ 3 người rút được phiếu may mắn. Tìm xác suất có 8 người đã tham gia.

d) Hãy so sánh cơ hội rút được phiếu may mắn của những người tham gia.

*( Số người có mặt $\geq 10$ )*

*Hướng dẫn:*

Gọi $A_i$ là biến cố người thứ i rút được phiếu may mắn.

a) Gọi A là biến cố trong 3 người rút phiếu đầu tiên chỉ có 1 người rút được phiếu may mắn.

$$P(A)=\frac{C_3^1.C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$$

b) Xác suất cần tìm là:

$$P(A_2|A)=\frac{P(A_2.A)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3})}{P(A)}=\frac{1}{3}$$



c) Gọi F là biến cố trong 7 người đầu có 2 người rút được phiếu may mắn; C là biến cố có 8 người đã tham gia.

$\Rightarrow$ C= F. $A_8$ .

$$\Rightarrow \quad P(C)=P(F.A_8)=P(F).P(A_8|F)=\frac{C_3^2.C_7^5}{C_{10}^7}.\frac{1}{3}=\frac{7}{40}$$

d) So sánh các $P(A_i)$ , i = 1, 2,3...

* $P(A_1) = 3/10$.

*

$$A_2 = A_1A_2 + \overline{A_1}A_2 \qquad (\text{vì } A_1A_2 + \overline{A_1}A_2 = (A_1 + \overline{A_1})A_2 = \Omega.A_2 = A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_2) \overset{xk}{=} P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1}).P(A_2|\overline{A_1})$$

$$= \frac{3}{10}.\frac{2}{9} + \frac{7}{10}.\frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$

...........

......................

* Tính $P(A_9)$: Gọi $F_1$ là b/c trong 8 người đầu có 1 người rút trúng.
$F_2$ là biến cố trong 8 người đầu có 2 người rút trúng.
$F_3$ là biến cố trong 8 người đầu có 3 người rút trúng.

$$A_9 = F_1A_9 + F_2A_9 + F_3A_9$$

$$P(A_9) = P(F_1).P(A_9|F_1) + P(F_2).P(A_9|F_2) + P(F_3).P(A_9|F_3)$$

$$= \frac{C_3^1.C_7^7}{C_{10}^8} \times \frac{2}{2} + \frac{C_3^2.C_7^6}{C_{10}^8} \times \frac{1}{2} + \frac{C_3^3.C_7^5}{C_{10}^8} \times 0 = \frac{3}{10}$$

* Tương tự ta tính được $P(A_{10})=3/10$ ; $P(A_{11})=0$.

## *Ví dụ 15*

Gieo đồng thời ba con xúc sắc cân đối, đồng chất một cách độc lập.

*Tính xác suất của các biến cố:*

a) Tổng số chấm xuất hiện là 10 nếu biết rằng ít nhất có một con xuất hiện mặt 3 chấm.

b) Có ít nhất một con xuất hiện mặt 1 chấm nếu biết rằng số chấm xuất hiện trên 3 con là khác nhau.



---

a) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{\frac{15}{6^3}}{\frac{91}{6^3}} = \dfrac{15}{91}$

b) $P(C\,|\,D) = \dfrac{\frac{60}{6^3}}{\frac{120}{6^3}} = \dfrac{1}{2}$

# *Ví dụ 16*

Ta gọi xác suất 1 linh kiện hoạt động tốt trong một khoảng thời gian ấn định T là độ tin cậy của linh kiện ( trong khoảng thời gian ấy). Giả sử một hệ thống thiết bị gồm nhiều linh kiện ghép thành. Độ tin cậy của một hệ thống chính là xác suất để hệ thống đó hoạt động tốt trong khoảng thời gian ấn định.

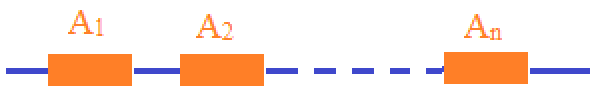
Giả sử n là số linh kiện của hệ thống.

Ký hiệu $p_i$ là độ tin cậy của linh kiện $A_i$; i =1,2, ...,n.

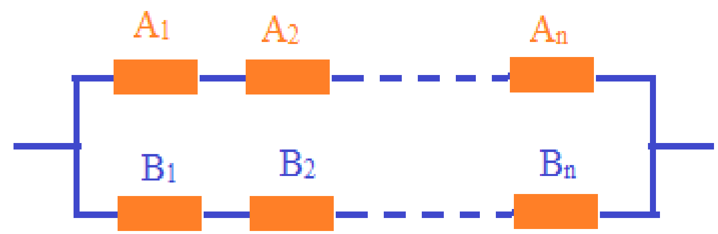
Hãy tìm độ tin cậy của từng hệ thống sau với yêu cầu đặt ra. Hãy nêu nhận xét sau khi so sánh các kết quả.

a) n= 4; $p_i$=0.8 với mọi i.

b) Trường hợp tổng quát.

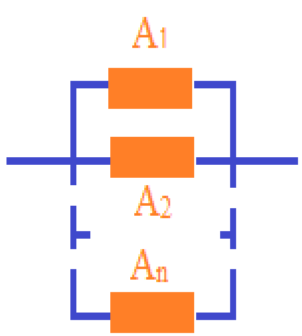



(1)

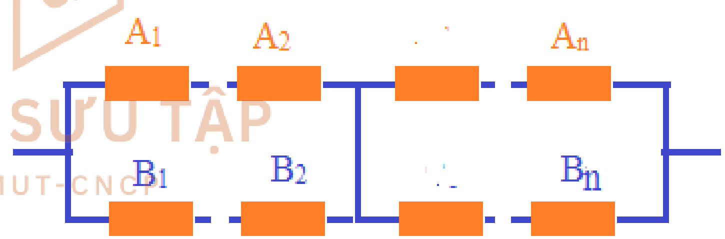



(3)






(2)




(4)

## 2.3.3 Định lý Bernoulli :

- Giả sử ta thực hiện *n* phép thử độc lập.
- Trong mỗi phép thử, biến cố B xuất hiện với xác suất *p* không đổi; và không xuất hiện với xác suất *q* = 1- *p*.

*Khi đó:* a) XS biến cố B xuất hiện đúng *k* lần là : $C_n^k p^k q^{n-k}$

b) XS b/c B xuất hiện từ $k_1$ đến $k_2$ lần là : $\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

c) Ta nói *số lần* b/c B xuất hiện *có khả năng nhất* (hay *số lần xuất hiện chắc nhất*) là số $k_o$ mà XS để b/c B xuất hiện đúng $k_0$ lần trong n phép thử là cao nhất.

$k_o$ được tìm từ biểu thức: $np-q \le k_0 \le np - q + 1$; $k_o \in \mathbb{N}$.

Trong dạng bài Bernoulli, số lần biến cố B xuất hiện trong n phép thử độc lập còn được gọi là *số lần thành công*, và p được gọi là XS thành công.

# *Ví dụ 17*

Tung 5 lần một con xúc xắc cân đối và đồng chất.

a) Tìm xác suất có đúng 3 lần được mặt 6 chấm.

b) Tìm xác suất có từ 2 đến 4 lần được mặt 6 chấm.

c) Hãy cho biết số lần được mặt 6 chấm có khả năng nhất?

---

*Hướng dẫn: Đây là ví dụ minh họa cho công thức Bernoulli.*

a) Gọi $S_i$ là biến cố lần tung thứ *i* được mặt 6 chấm; i=1,2,…5.
và A là biến cố có đúng 3 lần tung được mặt 6 chấm.



$$A = S_1S_2S_3\overline{S_4}\,\overline{S_5} + S_1S_2\overline{S_3}S_4\overline{S_5} + \ldots\ldots + \overline{S_1}\,\overline{S_2}S_3S_4S_5$$

$$P(A) \overset{xk}{=} P(S_1S_2S_3\overline{S_4}\,\overline{S_5}) + P(S_1S_2\overline{S_3}S_4\overline{S_5}) + \ldots\ldots + P(\overline{S_1}\,\overline{S_2}S_3S_4S_5)$$

$$\overset{dl}{=} P(S_1)P(S_2)P(S_3).P(\overline{S_4}).P(\overline{S_5}) + \ldots\ldots;\ \text{có } C_5^3 \text{ nhóm}$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} + \ldots = C_5^3.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

*Minh họa câu c)*

*Cách 1: Sử dụng định nghĩa:*

| Số lần được mặt 6 chấm trong 5 lần tung | Xác suất tương ứng | So sánh các xác suất |
|---|---|---|
| 0 | 0.40188 | Max |
| 1 | 0.40188 | Max |
| 2 | 0.16075 | |
| 3 | 0.03215 | |
| 4 | 0.00322 | |
| 5 | 0.00013 | |

*Suy ra số lần được mặt 6 chấm có khả năng nhất là 0 và 1.*

*Cách 2: Sử dụng công thức: Do n=5; p=1/6; q=5/6 nên np-q = 0*

$\Rightarrow 0 \leq k_0 \leq 1 \Rightarrow$ *Kết luận* $k_0=0$ *hay* $k_0=1$.

***Ví dụ 18***

Một đề trắc nghiệm gồm 20 câu, mỗi câu có 4 phương án lựa chọn. Một sinh viên không học bài đã  làm bài bằng cách lựa chọn ngẫu nhiên. Tìm xác suất sinh viên đó chọn được ít nhất 10 câu đúng. Số câu đúng có khả năng nhất trong bài của sinh viên là bao nhiêu?

***Ví dụ 19***

Một  hộp bi có 5 bi đỏ và  7 bi vàng.  Rút ngẫu nhiên  từng bi, có hoàn lại bi sau mỗi lần rút, cho đến khi đủ 3 lần được bi đỏ thì dừng lại.  Tìm xác suất  việc rút bi dừng lại  ngay sau lần rút thứ 6.

***Ví dụ 20***

Một  hộp bi có 5 bi đỏ và  7 bi vàng và 9 bi xanh.  Rút ngẫu nhiên  từng bi, có hoàn lại bi sau mỗi lần rút, cho đến khi gặp 3 bi đỏ thì dừng lại.  Tìm xác  suất  đã rút  được  2 bi vàng và 4 bi xanh.

*Hướng dẫn:*

***Ví dụ 18*** Đây là dạng bài toán Bernoulli với n=20; p= ¼; 10≤k ≤20. Xác suất cần tìm: $\sum_{k=10}^{20} C_{20}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}$

Số câu đúng có khả năng nhất là 5.

***Ví dụ 19*** Việc rút bi có hoàn lại nên kết quả rút ở mỗi lần xem như độc lập với nhau. Có thể áp dụng công thức Bernoulli đối với 5 lần rút đầu tiên.

Xác suất cần tìm: $C_5^2\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^3\times\frac{5}{12}$

***Ví dụ 20*** Đây là bài toán Bernoulli mở rộng.

Xác suất cần tìm: $\left[C_8^2.C_6^4.\left(\frac{7}{21}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{21}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{21}\right)^2\right]\times\frac{5}{21}$

## 2.3.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes:

*Định lý :* Giả sử $\{ H_1, H_2, .. ,H_n \}$ là hệ biến cố đầy đủ và F là một biến cố bất kỳ .

Khi đó ta có các công thức sau:

a) $$P(F) = P(H_1).P(F/H_1)+....+P(H_n).P(F/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(F/H_i)$$

*Công thức xác suất toàn phần hay CT xác suất đầy đủ.*

b) $$P(H_k/F)=\frac{P(H_kF)}{P(F)}=\frac{P(H_k).P(F/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(F/H_i)}; \quad k=1,2,\ldots n \quad (khi\ P(F)\neq 0)$$

*Công thức Bayes.*

**Chứng minh**

a) Ta có:

$$F = F.\Omega = F.(H_1 + H_2 + ... + H_n) = FH_1 + FH_2 + ... + FH_n$$

Vì $\{FH_1, FH_2, ..., FH_n\}$ đôi một xung khắc nên

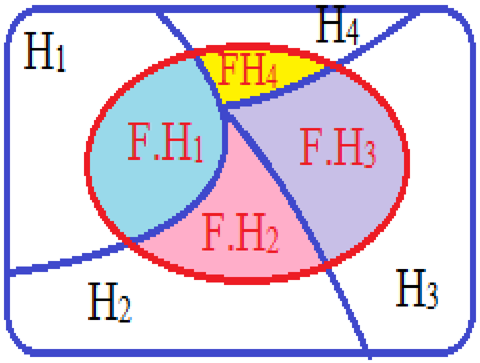
$$P(F) = P(FH_1) + P(FH_2) + ... + P(FH_n)$$

$$= P(H_1).P(F/H_1) + P(H_2).P(F/H_2) + ... + P(H_n).P(F/H_n)$$

b) Theo công thức nhân, ta có:

$$P(H_k/F) = \frac{P(H_kF)}{P(F)} = \frac{P(H_k).P(F/H_k)}{P(F)}$$

$k \in \{1, 2, ..., n\}$



## *Ví dụ 21*

Một nhà máy sản xuất bóng đèn có 3 phân xưởng sản xuất.
Phân xưởng 1 sản xuất 50%;
phân xưởng 2 sản xuất 20%;
còn phân xưởng 3 sản xuất 30%
số bóng đèn của cả nhà máy.

Tỉ lệ phế phẩm của các phân xưởng lần lượt là 1% ; 3% và 2,5%.

a) Tìm tỉ lệ phế phẩm chung của toàn nhà máy.

b) Nếu kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm từ trong kho thành phẩm chung của nhà máy mà thấy đó là phế phẩm thì khả năng sản phẩm đó do phân xưởng 2 sản xuất là bao nhiêu?

*Hướng dẫn:* Lấy ngẫu nhiên 1 bóng đèn từ kho chung của nhà máy. Gọi F là biến cố bóng đèn đó hỏng.

$H_i$ là b/c sản phẩm lấy ra do phân xưởng i sản xuất , i=1,2,3.

a) Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy chính là P(F).

$\{H_1; H_2; H_3\}$ tạo thành nhóm biến cố đầy đủ.

$$P(F) = P(H_1).P(F|H_1) + P(H_2)*P(F|H_2) + P(H_3)*P(F|H_3)$$

$$= 50\% \times 1\% + 20\% \times 3\% + 30\% \times 2{,}5\% = 1{,}85\%$$

b) Dùng công thức Bayes :

$$P(H_2 | F) = \frac{P(H_2.F)}{P(F)} = \frac{P(H_2).P(F|H_2)}{P(F)} = \frac{20\% * 3\%}{1{,}85\%} = 32{,}4324\%$$

Dựa vào biểu thức tính P(F) có thể thấy nếu ta ngẫu nhiên lấy phải bóng đèn hỏng thì bóng đèn đó có khả năng cao nhất do phân xưởng 3 sản xuất.

## *Ví dụ 22* *(BT 1.32)*

Hộp I gồm 2 bi trắng và 8 bi đen.

Hộp II chứa 3 bi trắng và 2 bi đen.

Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 bi bỏ đi, số bi còn lại của 2 hộp dồn chung vào hộp rỗng thứ ba.

Từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên một bi.

Tìm xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ 3 có màu trắng.

---

*Gợi ý:* Gọi F là b/c viên bi lấy ra từ hộp thứ 3 có màu trắng

$H_1$ là biến cố hộp 1 bỏ đi bi trắng và hộp 2 bỏ đi bi trắng

$H_2$ là ---------------------- bi trắng và ----------------- bi đen

$H_3$ là ---------------------- bi đen ---------------------- bi trắng

$H_4$ là ---------------------- bi đen ---------------------- bi đen

$$P(F)=\left[\frac{2}{10}.\frac{3}{5}\right]\times\frac{3}{13}+\left[\frac{2}{10}.\frac{2}{5}\right]\times\frac{4}{13}+\left[\frac{8}{10}.\frac{3}{5}\right]\times\frac{4}{13}+\left[\frac{8}{10}.\frac{2}{5}\right]\times\frac{5}{13}$$

# *Ví dụ 23*

Cho biết tỷ lệ người mắc bệnh B. ở một vùng là 1°/₀₀ và có một loại xét nghiệm để tìm ra người mắc bệnh B. Đối với một người mắc bệnh B thì kết quả xét nghiệm chắc chắn ra dương tính, nhưng trong số những người không mắc bệnh này thì cũng có đến 5% số người có phản ứng dương tính với xét nghiệm.

a) Nếu một người nào đó được chọn ngẫu nhiên có phản ứng dương tính đối với xét nghiệm loại này thì khả năng người đó mắc bệnh B là bao nhiêu? Nhận xét ý nghĩa của kết quả.

b) Nếu một người nào đó được chọn ngẫu nhiên có phản ứng dương tính đối với cả 4 lần liên tiếp thực hiện xét nghiệm này thì khả năng người đó mắc bệnh B là bao nhiêu? Nhận xét ý nghĩa của kết quả.

*Hướng dẫn giải:*

a) Gọi B là biến cố người được chọn mắc bệnh này và D là biến cố người được chọn có xét nghiệm dương tính. Áp dụng công thức Bayes thì:

$$P(B/D) = \frac{P(BD)}{P(D)} = \frac{P(B).P(D|B)}{P(B).P(D|B)+P(\overline{B}).P(D|\overline{B})} = \frac{0,001.\,1}{0,001.\,1+0,999.\,0,05}$$

$$\approx 0,019627 \qquad (\approx 2\%)$$

Ta có thể nói rằng kết quả xét nghiệm (+) không giúp ta kết luận được gì về việc người đó có mắc bệnh hay không.

b) Tương tự câu trên, xác suất cần tìm là:

$$\frac{0,001.\,1^4}{0,001.\,1^4+0,999.\,(0,05)^4} \approx 0,99379 \qquad (\approx 100\%)$$

Trong trường hợp này khi có cả 4 lần xét nghiệm (+) , ta thấy gần như chắc chắn người được xét nghiệm mắc bệnh.

# *Ví dụ 24*

Một chuyến tàu hỏa gồm *n* toa dừng bánh tại một sân ga. Có *k* hành khách mới bước lên tàu ngẫu nhiên và độc lập với nhau, ( $k \geq n$). Giả sử mỗi người có thể lên một toa bất kỳ. Hãy tính xác suất mỗi toa đều có hành khách mới ngồi.

---

*Hướng dẫn:*

Gọi $A_i$ là biến cố toa thứ i không có người lên. $i = 1,2,\ldots n.$

Gọi B là biến cố có ít nhất 1 toa không có người lên.

Xác suất cần tìm = 1- P(B), ở đây:

$B = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$; và:

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_1A_j) + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

$$= \frac{C_n^1.(n-1)^k - C_n^2.(n-2)^k + C_n^3.(n-3)^k - \ldots. + (-1)^{n-2}.C_n^{n-1} + 0}{n^k}$$

# *Ví dụ 25*

Một sinh viên thi vấn đáp phải bốc thăm tùy ý 3 câu hỏi từ 2 hộp đựng đề thi có hình thức giống nhau.

Hộp I đựng có 6 câu hỏi khó và 4 câu hỏi dễ .

Hộp II gồm 3 câu hỏi khó và 3 câu hỏi dễ .

Nếu 1 sinh viên đã chọn ngẫu nhiên 1 hộp và từ đó rút 2 phiếu đều gặp câu hỏi khó thì sinh viên này nên rút câu hỏi tiếp theo ở cùng hộp đó hay ở hộp còn lại thì sẽ có nhiều khả năng gặp được câu hỏi dễ hơn?

Gọi: $H_1$ là biến cố SV đã rút 2 câu đầu từ hộp I.

$H_2$ là biến cố SV đã rút 2 câu đầu từ hộp II.

A là b/c SV đã rút được 2 câu hỏi khó.

$B_1$ là b/c SV rút tiếp được câu hỏi dễ từ hộp đang chọn.

$B_2$ là b/c SV rút tiếp được câu hỏi dễ từ hộp còn lại.

Yêu cầu bài toán: *So sánh* $P(B_1/A)$ *và* $P(B_2/A)$ *.*

---

*Cách 1:* $\{H_1; H_2\}$ tạo thành nhóm biến cố đầy đủ.

$$P(B_1|A)=\frac{P(A.B_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1).P(AB_1|H_1)+P(H_2).P(AB_1|H_2)}{P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}.\frac{4}{8}+\frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}.\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}+\frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}} = 0,5938$$

Tương tự:

$$P(B_2|A)=\frac{P(A.B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}.\frac{3}{6}+\frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}.\frac{4}{10}}{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}+\frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}}=0,4625$$

Suy ra nếu SV tiếp tục rút tiếp câu thứ 3 từ hộp đã chọn thì có nhiều khả năng hơn để gặp câu thứ 3 dễ.

---

*Cách 2:* { $H_1$; $H_2$} tạo thành nhóm biến cố đầy đủ.



* $P(H_1) = P(H_2) = 0,5.$ $\longrightarrow$ *XS tiền nghiệm*

* $$P(H_1|A)=\frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}}{\frac{1}{2}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2}+\frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}}=0,625$$

và:

* $P(H_2|A) = 0{,}375$. ( Tính tương tự hoặc $P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A)$ ).

→ *$P(H_1|A)$ và $P(H_2|A)$ được coi là các XS hậu nghiệm*

Vì giả thiết biến cố A đã xảy ra nên $P(H_1|A)$ và $P(H_2|A)$ trở thành hệ biến cố đầy đủ.

$$P(B_1|A) = P(H_1|A) \,.\, P(B_1|H_1A) + P(H_2|A).\, P(B_1|H_2A)$$

$$= 0,625\times\frac{4}{8}+0,375\times\frac{3}{4}=0,5938$$

$$P(B_2|A) = P(H_1|A) \,.\, P(B_2|H_1A) + P(H_2|A).\, P(B_2|H_2A)$$

$$= 0,625\times\frac{3}{6}+0,375\times\frac{4}{10}=0,4625$$

Nên tiếp tục rút câu hỏi tiếp theo từ hộp đã chọn.