# ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

## Bài giảng điện tử


Hoàng Hải Hà

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**


TP. HCM — 2020.

1. Tính gần đúng đạo hàm

2. Tính gần đúng tích phân xác định
   - Công thức hình thang
   - Công thức hình thang mở rộng
   - Công thức Simpson
   - Công thức hình Simpson mở rộng

Xét bảng số 

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ |

với $y_0 = f(x_0)$ và $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$\mathcal{L}(x) = \frac{x - x_0}{h} y_1 - \frac{x - x_1}{h} y_0,$$

với $h = x_1 - x_0$. Do đó, với mọi $\forall x \in [x_0, x_1]$ ta có

$$f'(x) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Đặc biệt, tại $x_0$ ta có

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

và được gọi là công thức sai phân tiến. Còn tại $x_1$ ta cũng có

$$f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

và được gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

## Công thức cho ba nút cách đều

Xét bảng số

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ |

với

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) = f(x_0+h), y_2 = f(x_2) = f(x_0+2h)$

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$\mathcal{L}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}y_2 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}y_1 + \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}y_0.$$

# Công thức cho ba nút cách đều

Xét bảng số

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ |

với

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) = f(x_0+h), y_2 = f(x_2) = f(x_0+2h)$

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$\mathcal{L}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}y_2 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}y_0.$$

$$\mathcal{L}'(x) = \frac{x-x_0}{2h^2}(y_2-2y_1) + \frac{x-x_1}{2h^2}(2y_2+y_0) + \frac{x-x_2}{2h^2}(y_0-2y_1).$$

Tại $x_0$ ta có $f'(x_0) \approx \mathcal{L}'(x_0) = \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$, gọi là công thức sai phân tiến. và thường được viết dưới dạng:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}.$$

Tại $x_0$ ta có $f'(x_0) \approx \mathcal{L}'(x_0) = \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$, gọi là công thức sai phân tiến. và thường được viết dưới dạng:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}.$$

Tại $x_1$ ta có $f'(x_1) \approx \mathcal{L}'(x_1) = \dfrac{y_2 - y_0}{2h}$, gọi là công thức sai phân hướng tâm và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Còn tại $x_2$ ta cũng có $f'(x_2) \approx \mathcal{L}'(x_2) = \dfrac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}$ và được gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h}$$

.

Còn tại $x_2$ ta cũng có $f'(x_2) \approx \mathcal{L}'(x_2) = \dfrac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}$ và được gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h}$$

. Đạo hàm cấp 2:

$$L''(x) = \frac{2y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h^2}$$

## Ví dụ

*Sử dụng công thức ba nút cách đều, tính đạo hàm của hàm* $y = \dfrac{ln(x+2)}{x^2+3}$ *tại* $x = 1.2$ *với bước chia* $h = 0.5$ *theo công thức sai phân hướng tâm. Làm tròn kết quả đến hai chữ số sau dấu chấm thập phân.*

## Ví dụ

*Sử dụng công thức ba nút cách đều, tính đạo hàm của hàm* $y = \dfrac{ln(x+2)}{x^2+3}$ *tại* $x = 1.2$ *với bước chia* $h = 0.5$ *theo công thức sai phân hướng tâm. Làm tròn kết quả đến hai chữ số sau dấu chấm thập phân.*

## Giải

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f(1.7) - f(0.7)}{2 \times 0.5} \approx -0.06$$

# Trường hợp tổng quát

Cho hàm $y = f(x)$ bởi bảng dữ liệu:

| $x_k$ | $x_0$ | $x_1$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | $y_0$ | $y_1$ | $\ldots$ | $y_n$ |

Để tính xấp xỉ đạo hàm của $f(x)$ tại $x \in [x_0, x_n]$, ta sử dụng nội suy đa thức $P(x)$ và $f'(x) \approx P'(x)$.

## Ví dụ

*Một chiếc xe hơi chạy trên đường được đo lại dữ liệu như sau:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Time* | *0* | *3* | *5* | *8* |
| *Distance* | *0* | *225* | *383* | *623* |

.

*Thời gian được đo bởi giờ, và khoảng cách đo bởi km. Xác định vận tốc xe tại thời điểm sau khi xe chạy 5 giờ.*

## Ví dụ

*Một chiếc xe hơi chạy trên đường được đo lại dữ liệu như sau:*

| Time | 0 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Distance | 0 | 225 | 383 | 623 |

.

*Thời gian được đo bởi giờ, và khoảng cách đo bởi km. Xác định vận tốc xe tại thời điểm sau khi xe chạy 5 giờ.*

Kq: VT $\approx$ 79.85 km/h

# Tính gần đúng tích phân xác định

Theo công thức Newton-Leibnitz thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),\ \ F'(x) = f(x).$$

Nhưng thường thì ta phải tính tích phân của hàm số $y = f(x)$ được xác định bằng bảng số. Khi đó khái niệm nguyên hàm không còn ý nghĩa.

Để tích gần đúng tích phân xác định trên $[a, b]$, ta thay hàm số $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và xem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

# Công thức hình thang

Để tích gần đúng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ ta thay hàm dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc 1 đi qua 2 điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ xuất phát từ nút $(a, f(a))$

Vậy $P_1(x) = f(a) + f[a, b](x - a) =$

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b (f(a) + f[a,b](x-a))dx =$$

$$f(a)x + f[a,b]\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Big|_a^b$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn nhỏ với bước chia $h = \dfrac{b-a}{n}$. Khi đó $a = x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots,$
$x_k = x_0 + kh, \ldots, x_n = x_0 + nh$ và
$y_k = f(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$
Sử dụng công thức hình thang cho từng đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx h.\frac{y_0 + y_1}{2} + h.\frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h.\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

## Ví dụ 2.

Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ bằng công thức hình thang mở rộng khi chia đoạn $[0,1]$ thành $n = 10$ đoạn nhỏ.

## Ví dụ 2.

Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ bằng công thức hình thang mở rộng khi chia đoạn $[0, 1]$ thành $n = 10$ đoạn nhỏ.

Giải.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}, x_0 = 0, x_k = \frac{k}{10},$

$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+\frac{k}{10}} = \frac{10}{10+k}$

Vậy $I \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{9}(y_k + y_{k+1}) = \frac{1}{20}\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{10}{10+k} + \frac{10}{10+(k+1)}\right) \approx 0.6938$

$I \approx \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+2y_8+2y_9+y_{10})$

**Bấm máy.** Với $h = 0.1$, ta có

$$A = A + \frac{h}{2}.B.(1 \div (1+X)) : X = X + h$$

CALC A=0, X=0, B=1=.

A=, X=, B=2=.

. . . , . . . , . . .

A=, X=1, B=1=.

**Kết quả:** $I \approx 0.6938$

## Ví dụ 3.

Cho bảng

| $x$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 3.3 | 2.4 | 4.3 | 10.2 | 6.2 | 7.4 |

của hàm $f(x)$. Sử dụng công thức hình thang mở rộng hãy xấp xỉ tích phân $I = \int\limits_{1.0}^{2.2} (xf^2(x) + 4.4x^3)dx$

Để tích gần đúng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ ta chia $[a, b]$ thành 2 đoạn bằng nhau bởi điểm $a, x_1 = a + h, b$ với $h = \dfrac{b-a}{2}$ thay hàm dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc 2 đi qua 3 điểm $(a, f(a)), (x_1, f(x_1))$ và $(b, f(b))$ xuất phát từ nút $(a, f(a))$

Vậy

$$P_2(x) = f(a) + f[a, x_1](x-a) + f[a, x_1, b](x-a)(x-x_1)$$

$\int_a^b P_2(x)dx =$
$\int_a^b f(a) + f[a, x_1](x - a) + f[a, x_1, b](x - a)(x - x_1)dx$
Đổi biến $x = a + ht \Rightarrow dx = hdt, t \in [0, 2]$

$$\int_a^b P_2(x)dx = \int_0^2 (f(a) + f[a, x_1]ht + f[a, x_1, b]h^2 t(t-1))hdt$$

trong đó

$$f[a, x_1]h = y_1 - f(a), f[a, x_1, b]h^2 = \frac{f(b) - 2f(x_1) + f(a)}{2}.$$

Vậy

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + f(b))$$

Chia đoạn $[a, b]$ thành $2n$ đoạn nhỏ với bước chia $h = \dfrac{b-a}{2n}$. Khi đó $a = x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots,$ $x_{2k} = x_0 + 2kh, \ldots, x_{2n} = x_0 + 2nh, x_k = x_0 + kh$ và $y_k = f(x_k), y_{2k} = f(x_{2k}), k = 0, 1, \ldots, 2n$
Sử dụng công thức Simpson cho từng đoạn $[x_k, x_{k+2}]$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+..+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

**Ví dụ 4.**

Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ bằng công thức Simpson mở rộng khi chia đoạn $[0,1]$ thành 10 đoạn nhỏ.

## Ví dụ 4.

Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ bằng công thức Simpson mở rộng khi chia đoạn $[0,1]$ thành 10 đoạn nhỏ.

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{20} = \frac{1}{20}, x_0 = 0, x_k = \frac{k}{20},$$

$$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+\frac{k}{20}} = \frac{20}{20+k}.$$

Vậy $I \approx \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$

$$\frac{1}{60}\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{20}{20+2k} + 4\frac{20}{20+2k+1} + \frac{20}{20+2k+2}\right)$$
$$\approx 0.6931$$

$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + 2y_{10} + 4y_{11} + 2y_{12} + 4y_{13} + 2y_{14} + 4y_{15} + 2y_{16} + 4y_{17} + 2y_{18} + 4y_{19} + y_{20})$

**Bấm máy.**

$$A = A + B * \frac{1}{6 * 10} * \frac{1}{X + 1} : X = X + \frac{1}{2 * 10}$$

CALC A=0, B=1, X=0;

A=, B=4;X=;

A=, B=2;X=;

A=, B=4;X=;

A=, B=2;X=;

. . . . . .

A=, B=1;X=1;

**Kết quả.** $I \approx 0.6931$

**Ví dụ 5.**

Cho bảng số:

| $x$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 3.3 | 2.4 | 4.3 | 5.1 | 6.2 | 7.4 |

.

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân

$$I = \int_{1.0}^{2.2} \left[xf^2(x) + 2.2x^3\right] dx.$$

## Ví dụ 5.

Cho bảng số:

| $x$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 3.3 | 2.4 | 4.3 | 5.1 | 6.2 | 7.4 |

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân

$$I = \int_{1.0}^{2.2} \left[xf^2(x) + 2.2x^3\right] dx.$$

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{2.2-1.0}{2n} = 0.2 \Rightarrow 2n = 6,$$

$x_0 = 1.0, x_k = 1.0 + 0.2k.$

$$y_k = x_k f^2(x_k) + 2.2x_k^3.$$

$$I \approx \frac{0.2}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

**Bấm máy.**

$$A = A + B * \frac{0.2}{3} * (XY^2 + 2.2X^3) : X = X + 0.2$$

CALC A=0, B, X, Y được nhập theo bảng sau

| $X$ | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 2 | 3.3 | 2.4 | 4.3 | 5.1 | 6.2 | 7.4 |
| $B$ | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 1 |

Vậy $I = 59.82501333 \approx 59.8250$

## Ví dụ

*Tỷ lệ sinh và tử vong trong 10 năm từ 1990 đến 2000 của Việt Nam ( đơn vị: người/ năm) được cho bởi bảng sau*

| Year | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tỷ lệ sinh | 2200 | 2253 | 2308 | 2364 | 2422 | 2480 | 25 |
| Tỷ lệ tử vong | 1460 | 1487 | 1514 | 1551 | 1569 | 1597 | 16 |

*Tính tổng dân số của Việt Nam trong giai đoạn này. Suy ra dân số trung bình hằng năm trong giai đoạn này.*

**THANK YOU FOR ATTENTION**