CHƯƠNG V: CHUỖI

§1. CHUỖI SỐ

1. TỔNG QUÁT VỀ CHUỖI - ĐKCCSHT
2. TIÊU CHUẨN CAUCHY – D'ALEMBERT
3. CHUỖI KHÔNG ÂM
4. CHUỖI ĐAN DẤU – CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

§2. CHUỖI LŨY THỪA

1. CHUỖI LŨY THỪA
2. CHUỖI TAYLOR - MACLAURINT

§1. Chuỗi số - Tổng quan về chuỗi số

Các định nghĩa: Cho dãy số $\{u_n\}$. Ta định nghĩa:

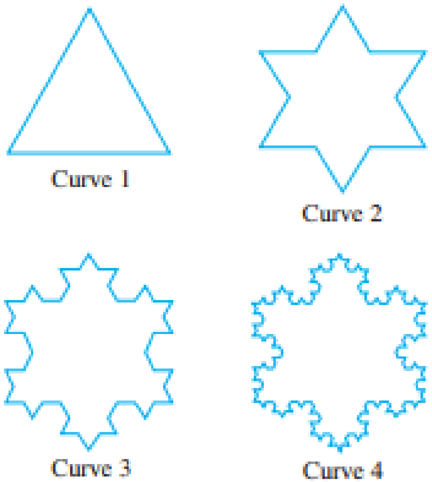
1. Chuỗi số là tổng tất cả các số hạng của dãy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
2. Số hạng tổng quát của chuỗi là u_n
3. Tổng riêng thứ n của chuỗi là tổng n – số hạng đầu tiên : $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$
4. Tổng của chuỗi là *giới hạn hữu hạn* (nếu có)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$$. Khi đó, ta nói *chuỗi hội tụ.*

5. *Chuỗi phân kỳ* là chuỗi không hội tụ

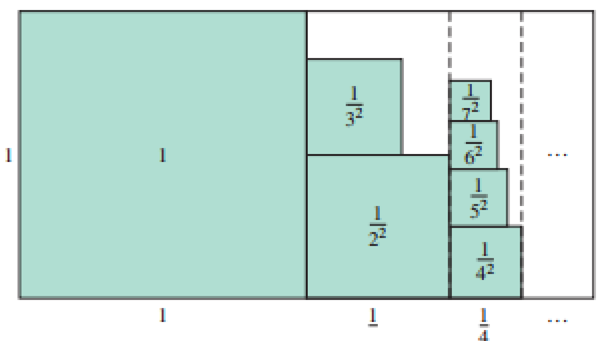
Vậy khi chuỗi hội tụ, chuỗi có tổng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$

§1. Chuỗi số - Tổng quan về chuỗi số

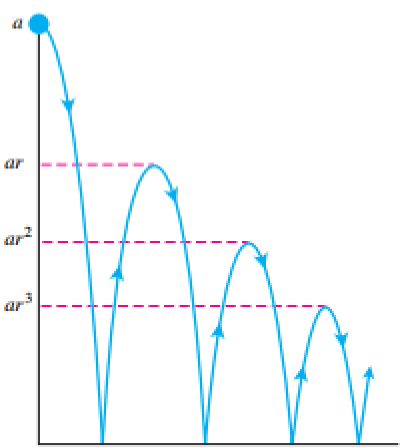


Bông tuyết Koch (Koch snowflake)

Diện tích hữu hạn được bao quanh bởi đường biên vô hạn



Diện tích các hình vuông $S = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



Thả quả bóng từ độ cao a mét, mỗi lần bóng chạm đất nó sẽ bật lên lại với độ cao a.r (0<r<1). Quãng đường bóng di chuyển là tổng vô hạn

§1. Chuỗi số - Tổng quan về chuỗi số

Ví dụ: Chuỗi CSN $\sum_{n=0}^{\infty} dq^n$

Tổng riêng thứ n $S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} dq^n \begin{cases} HT \text{ nếu } |q| < 1 \\ PK \text{ nếu } |q| > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} dq^n = \frac{d}{1-q}, |q| < 1$$

§1. Chuỗi số - Tính chất & điều kiện cần của sự hội tụ

Điều kiện cần của sự hội tụ : Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $u_n \to 0$

Chứng minh: Chuỗi HT tức là tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty \to \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S < \infty$$

Mà : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

Suy ra: $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} u_{n+1}$

$$\leftrightarrow S = S + \lim_{n\to\infty} u_{n+1} \leftrightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}$$

Ta thường dùng điều kiện này để chứng minh chuỗi số phân kỳ bằng cách chứng minh

$$\left[\begin{array}{l} 1. \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \\ 2. \nexists \lim_{n\to\infty} u_n \end{array}\right.$$

§1. Chuỗi số - Tính chất & điều kiện cần của sự hội tụ

Ví dụ: Các chuỗi sau phân kỳ theo đkccsht

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}, \text{ vì } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{n}, \text{ vì } \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+n}{n} = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n-n}, \text{ vì } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(-1)^n-n} = -1 \neq 0$$

§1. Chuỗi số - Tính chất & điều kiện cần của sự hội tụ

Tính chất 1: Tính hội tụ (phân kỳ) của chuỗi không thay đổi nếu ta bỏ đi một số hữu hạn các phần tử đầu tiên của chuỗi.

Tức là 2 chuỗi sau cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$

Tính chất 2: Cho 2 chuỗi hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = Q$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = P$

Các chuỗi sau hội tụ với tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = Q + P, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda Q$$

Chú ý: Tổng của 1 chuỗi HT và 1 chuỗi PK thì PK

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0$ với tất cả các số hạng không âm thì gọi là chuỗi không âm

Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi không âm, chúng ta sẽ sử dụng 1 trong 3 tiêu chuẩn :

1. Tiêu chuẩn tích phân Maulaurint – Cauchy
2. Tiêu chuẩn so sánh 1
3. Tiêu chuẩn so sánh 2

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Tiêu chuẩn tích phân Maclaurint – Cauchy:

Cho hàm f(x)≥0, liên tục và đơn điệu giảm trên [1,∞).

Khi ấy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ HT khi và chỉ khi tp $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ HT

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

* Khi α<0: $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Chuỗi PK theo đkccsht

* Khi α=0: $u_n = 1 \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$

Chuỗi PK theo đkccsht

* Khi α>0: Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ thỏa các điều kiện của tiêu chuẩn tích phân

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ hội tụ khi và chỉ khi α>1 nên

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Hội tụ khi α>1 và phân kỳ khi α≤1

Ví dụ: Khảo sát sự HT của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}, \beta > 0$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ trên [2,+∞), ta có

f(x) không âm, hàm liên tục và khi x tăng thì lnx tăng nên f(x) giảm tức là hàm f(x) thỏa điều kiện của tiêu chuẩn tích phân

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Mặt khác

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^\beta} = \begin{cases} +\infty \text{ khi } \beta \le 1 \\ \dfrac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}} \text{ khi } \beta > 1 \end{cases}$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ HT khi β>1 và PK khi β≤1

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho 2 chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa

$\exists p : u_n \geq v_n \forall n \geq p$

Khi ấy: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ HT $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ HT

2. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ PK $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ PK

Ghi nhớ: Chuỗi "lớn" HT kéo theo chuỗi "nhỏ" HT và ngược lại chuỗi "nhỏ" PK kéo theo chuỗi "lớn" PK

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+1}$

Ta so sánh

$$u_n = \frac{2^n}{3^n+1} \le \frac{2^n}{3^n} = v_n, \forall n$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

là chuỗi cấp số nhân, dạng $\sum_{n=1}^{\infty} q^n,\ q = \frac{2}{3}$

nên hội tụ

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho 2 chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$$

Khi ấy:

1. Nếu K=∞ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ HT $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ HT

2. Nếu 0<K<∞ thì 2 chuỗi cùng HT hoặc cùng PK

3. Nếu K=0 thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ HT $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ HT

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Để dùng tiêu chuẩn so sánh, ta sẽ so sánh khi $n \to \infty$ chuỗi không âm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0$ với 1 trong 2 chuỗi cơ bản sau

Chuỗi cấp số nhân:

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ Hội tụ khi |q|<1

Phân kỳ khi |q|≥1

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$$

Chuỗi điều hòa :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ Hội tụ khi α>1

Phân kỳ khi α≤1

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 2}{n^3 + n + 1}$

Ta dùng T/c so sánh 2 bằng cách so sánh khi n→∞

Khi n→∞ thì $u_n = \frac{n^2 - 2n + 2}{n^3 + n + 1} \sim \frac{1}{n} = v_n$

Tức là $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (hai chuỗi cùng HT hoặc cùng PK)

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ

Ghi nhớ: Nếu $u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n HT \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n HT$

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$

Khi n→∞ thì $u_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \sim \frac{1}{n^2}.e = v_n$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.e$ hội tụ

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta được kết quả:

Chuỗi đã cho HT

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \ln\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)$

Ta so sánh khi : $n \to \infty$

$$u_n = \frac{1}{n-1} \ln\left(\frac{2n+1}{n-1}\right) \sim \frac{1}{n} \ln 2 = v_n$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln 2 . \frac{1}{n-1}$ PK

Vậy chuỗi đã cho PK

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$

Khi $n\to\infty$ thì $\frac{1}{n}\to 0$ *VCB*

nên ta có thể khai triển Maclaurint hàm $\sin\frac{1}{n}$

$$u_n=\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\left(1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}+O(\frac{1}{n^3})\right)\right)^{\alpha}$$

$$\sim\left(\frac{1}{6n^2}\right)^{\alpha}=\frac{1}{6^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ HT khi và chỉ khi $2\alpha>1\leftrightarrow\alpha>\frac{1}{2}$

Vậy chuỗi đã cho HT khi và chỉ khi $\alpha>\frac{1}{2}$

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n} - 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Khi n $\to \infty$: $e^{-n^2} = \frac{1}{e^{n^2}} \to 0$ Suy ra

$$u_n = \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n} - 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n} - 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n} - 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{n}{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kỳ nên chuỗi đã cho phân kỳ

§1. Chuỗi số - Chuỗi không âm

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{3^n + 5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + n^1 - 1}{3\sqrt[3]{n^7 + 5n^3 + 2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n(n-1)}$$

§1. Chuỗi số - Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có 1 trong 2 dạng sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots; u_n \geq 0, \forall n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots; u_n \geq 0, \forall n$$

Tiêu chuẩn Leibnitz :

Nếu $\begin{cases} u_n \leq u_{n-1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ

Khi ấy, ta gọi chuỗi đó là chuỗi Leibnitz và tổng S của chuỗi thỏa $0 \leq S \leq u_1$

§1. Chuỗi số - Chuỗi đan dấu

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad 2/\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$$

1/Ta có : $1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \to u_n = \frac{1}{n} > 0, \forall n$

Vì $u_n = \frac{1}{n}$ đơn điệu giảm và dần về 0

Suy ra: Chuỗi đã cho là chuỗi HT theo t/c Leibnitz

2/ $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ đơn điệu giảm và dần về 0

Suy ra: Chuỗi đã cho là chuỗi HT theo t/c Leibnitz

§1. Chuỗi số - Chuỗi đan dấu

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Số hạng tổng quát của chuỗi $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

có dạng $(-1)^n v_n, v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+-1^{\,n}}>0$

Khi n tăng: $(-1)^n$ lúc tăng lúc giảm nên chuỗi trên không là chuỗi Leibnitz

Ta có

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-(-1)^{2n}}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

§1. Chuỗi số - Chuỗi đan dấu

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ là chuỗi đan dấu hội tụ

Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ là chuỗi số dương phân kỳ

Vậy chuỗi đã cho là chuỗi PK vì là tổng của 1 chuỗi HT và 1 chuỗi PK

§1. Chuỗi số - Chuỗi đan dấu

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

Chuỗi đan dấu với $u_n = \frac{1}{n - \ln n}$

Để khảo sát sự đơn điệu của dãy u_n ta đặt

$$f(x) = \frac{1}{x - \ln x} \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{x-1}{x(x - \ln x)^2} < 0, \forall x > 1$$

Tức là hàm f(x) giảm cũng là dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và dần về 0.

Vậy chuỗi đã cho HT theo Leibnitz

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

Tiêu chuẩn Cauchy:

Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ thỏa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = C$. Ta có kết luận

$C < 1$: Chuỗi HT

$C > 1$: Chuỗi PK

$C = 1$: Chưa kết luận được

Tiêu chuẩn d'Alembert:

Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ thỏa $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = D$. Ta có kết luận

$D < 1$: Chuỗi HT

$D > 1$: Chuỗi PK

$D = 1$: Chưa kết luận được

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

Một số giới hạn cơ bản

$$1/\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$$

$$2/\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1, \forall p$$

$$3/\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Ví dụ: Khảo sát sự HT của các chuỗi số sau

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n-1)}$$

$$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} -1^{\,n}\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n}\frac{\sqrt[3]{n^4+n}}{n^2+1}$$

$$1/\ \mathrm{u}_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n-1)}$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{\frac{n}{-1}.\frac{-1}{n}.\,n-1}=e^{-1}<1$$

Vậy chuỗi HT

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

$$2/\ u_n = (-1)^n \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n} \frac{\sqrt[3]{n^4+n}}{n^2+1}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n} \frac{\sqrt[3]{n^4+n}}{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^2 \frac{\sqrt[3n]{n^4+n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$$

$$= 4 > 1$$

Vậy chuỗi PK

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

Ví dụ: Khảo sát sự HT của các chuỗi số sau

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{4^2 n^2}$$

$$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{3^n (2n)!!(2n+1)}$$

$$1/\ u_n = \frac{(2n+1)!}{4^2 n^2} \to u_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)!}{4^2 (n+1)^2}$$

$$\to \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(2(n+1)+1)!}{4^2 (n+1)^2} \cdot \frac{4^2 n^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+3)n^2}{(n+1)^2}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = +\infty > 1$$ Vậy chuỗi PK

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

$$2/\; u_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{3^n(2n)!!(2n+1)}$$

$$\rightarrow u_{n+1} = \frac{(-1)^n\,(2(n+1)-1)!!}{3^{n+1}\,(2(n+1))!!\,(2(n+1)+1)}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^{n+1}(2n+2)!!(2n+3)}\cdot\frac{3^n(2n)!!(2n+1)}{(2n-1)!!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi HT

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

Vậy chuỗi đã cho PK

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d'Alembert

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\ln n}, \quad a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a^{-\ln n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\ln n / n}} = a^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{-\ln(n+1)}}{a^{-\ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty} a^{\ln n - \ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} a^{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = a^0 = 1$$

Không dùng được t/c Cauchy, t/c d'Alembert

Biến đổi $\quad a^{-\ln n} = e^{-\ln n \times \ln a} = n^{-\ln a}$

Suy ra chuỗi đã cho là chuỗi điều hòa $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$

Chuỗi HT khi và chỉ khi lna>1 ↔ a>e

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn Cauchy, d’Alembert

Nhận dạng chuỗi để sử dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn d’Alembert

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \neq 0$:Thì chuỗi PK theo đkccsht

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$: thì ta làm tiếp 1 trong 2 cách sau

1. u_n chỉ có dạng “lũy thừa” tức là số mũ phụ thuộc n thì dùng t/c Cauchy

2. u_n có chứa dạng “tích” tức là số các thừa số trong tích phụ thuộc n thì dùng t/c d’Alembert (có thể có cả dạng “lũy thừa”)

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ

Thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Khi đó: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

Và ta gọi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Chú ý 1: Điều ngược lại không đúng, tức là chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ HT không suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ

Khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ HT và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ PK thì ta

gọi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi bán hội tụ

Chú ý 2: Theo tiêu chuẩn Cauchy (d'Alembert)

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ PK theo 1 trong 2 t/c trên thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ PK

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad 2/\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n^2}{3^n}$$

1/ Xét $|u_n| = \tan\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, khi n $\to \infty$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ HT suy ra chuỗi đã cho HTTĐ

2/ Xét $|u_n| = \left|\frac{\sin n^2}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to$ chuỗi đã cho HTTĐ

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2-1}$

1. Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $u_n = \frac{n+1}{2n^2-1}$

Rõ ràng dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và dần về 0 nên chuỗi HT theo t/c Leibnitz

2. Mặt khác, coi đó là chuỗi có dấu bất kỳ thì

$$|u_n| = \frac{n+1}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2n}, \text{ khi } n \to \infty$$

Tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2-1}$ PK

Vậy chuỗi đã cho chuỗi bán HT

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)(n-1)}}$

Vì

$$\arcsin(-1)^n = \begin{cases} \pi/2, n = 2k \\ -\pi/2, n = 2k+1 \end{cases} = -1^{n}\frac{\pi}{2}$$

Nên $|u_n| = \frac{\pi}{2\sqrt{n(n+1)(n-1)}} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$ khi $n \to \infty$

Vậy chuỗi đã cho HTTĐ

§1. Chuỗi số - Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_{2n-1} = \frac{1}{3n+2}, u_{2n} = \frac{-1}{3n-1}$$

Ta đi tính tổng riêng thứ 2n của chuỗi

$$S_{2n} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n-1} + u_{2n}$$

$$S_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \ldots + (u_{2n-3} + u_{2n-2}) + (u_{2n-1} + u_{2n})$$

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{5} + \frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{-1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-1} + \frac{-1}{3n-4}\right) + \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{-1}{3n-1}\right)$$

$$\boxed{S_{2n} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-1}{2}}$$ Và

$$\boxed{S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-1}{2}}$$

Vậy tổng của chuỗi $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}$ Chuỗi HT

§1. Chuỗi số - Tóm tắt

Các bước khảo sát sự HT của chuỗi số

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \neq 0 \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ PK

2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **có thể HT**, ta làm tiếp như sau:

   2.1. Nếu $u_n \geq 0, \forall n > N$ thì dùng 1 trong 4 tiêu chuẩn: tích phân, so sánh, Cauchy, d'Alembert

   2.2. Nếu $(-1)^{n} u_n \geq 0,\ (-1)^{n-1} u_n \geq 0\ \forall n > N$ (chuỗi đan dấu) thì dùng t/c Leibnitz hoặc t/c Cauchy, d'Alembert tính $|u_n|$ để được chuỗi số dương rồi dùng t/c so sánh

   2.3 Nếu không có 2 dạng trên thì tính $|u_n|$ để được chuỗi số dương, và quay về phần 2.1

Chú ý

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là ***chuỗi số dương*** PK

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi HT vì nó là ***chuỗi đan dấu***

§1. Chuỗi số - Bài tập

Khảo sát sự HT của các chuỗi sau

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}(n!)^2}{5^{n-1}(2n)!}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)2^{2n+1}}{7^n(n+1)!}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{3^{2n-1}.n^2}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}-1$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n} n}{n^2+n+1}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{\alpha}}, \alpha \neq -1$

§1. Chuỗi số - Bài tập

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} {-1}^{n-1}\frac{5^n}{n^5}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{-1}^{n}}{\sqrt{n}+{-1}^{n}}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n\ n-1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.7...\ 3n-1\ 2^n}{n!.5^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n^2}\left(\frac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^{n+2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} {-1}^{n+1}\frac{2^{n-1}+1}{2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} {-1}^{n}\ln\frac{n+1}{n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} {-1}^{n}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2}{2^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ n^2+\ln 3}{\ln 3\ ^{n}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{2n-1}$

§1. Chuỗi số - Bài tập

$$25/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8...(3n-1)}{(-1)^n (n+1)!} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$26/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!+(-1)^n \ln n}{3^n.(2n)!!}$$

$$27/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n^2}{n!+2^n}$$

$$28/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+4^n}{n^2+2^{\alpha n}}$$

$$29/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n+n^8}{(n+1)!} \arctan\left(n^8-1\right)$$

$$30/\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n-1} \frac{(-1)^n (2n)!}{3^n (n!)^2}$$