Chương 5 :Giải gần đúng phương trình vi phân

Cho phương trình vi phân cấp1

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

Tính gần đúng giá trị $y(b)$ với b bất kỳ cho trước

1) Phương pháp Euler :

a)Nội dung : Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần đều nhau , bởi các điểm chia

$$x_0 = a < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_0 + 2h <$$

$$< \ldots < x_n = b = a + nh$$

$$y_{i+1} = y_i + k \qquad k = h\, f(x_i, y_i)$$

b) Sai số : $$\left| y_{gd}(b) - y_d(b) \right| \le \frac{h M^{(2)}}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]$$

$$L = Max \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$$

Ví dụ : Phương trình $y'(x) = 1 + (x - y)^2$

với điều kiện ban đầu $y(2) = 1$.

Tính gần đúng nghiệm $y(2.6)$ với bước $h = 0.2$

x_i	Giá trị y_i
2.0	1
2.2	$1 + 0.2[1 + (2 - 1)^2] = 1.4$
2.4	$1.4 + 0.2[1 + (2.2 - 1.4)^2] = 1.728$
2.6	$1.728 + 0.2[1 + (2.4 - 1.728)^2] = 2.0183168$

2) Phương pháp Euler cải tiến

a) Nội dung :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1)$$

Ví dụ : Giải phương trình $y'(x) = 1 + (x-y)^2$ với điều kiện ban đầu $y(2) = 1$ trong ví dụ trước theo phương pháp **Euler cải tiến** , kết quả như sau :

x_i	Giá trị $y(x_i)$
2	1.0
2.2	1.364
2.4	1.6823194
2.6	1.971640265

3) Công thức Runge – Kutta bậc 4 :

a) Công thức

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h\,f(x_{i+1}, y_i + k_3)$$

Ví dụ : Giải phương trình $y'(x) = 1 + (x - y)^2$ với điều kiện ban đầu $y(2) = 1$ trong ví dụ trước theo phương pháp **Runge-Kutta** , kết quả như sau :

x_i	$y(x_i)$	Gía trị của k	
2	1.0		
2.2	1.366661	k1= 0.4 k3= 0.368912	k2=0.362 k4=0.338141
2.4	1.685708	k1= 0.338891 k3 =0.320120	k2 = 0.316706 k4 = 0.301736
2.6	1.974994	k1= 0.302043 k3 = 0.289860	k2 = 0.287986 k4 = 0.277983

4) Giải hệ phương trình vi phân cấp 1 :

Giả sử ta cần giải hệ : $\begin{cases} y' = F(x,y,z) \\ z' = G(x,y,z) \end{cases}$ trong đó

$y = y(x), z = z(x)$ là những hàm phải tìm và thỏa

điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$

Phương pháp Euler

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + hG(x_i, y_i, z_i)$$

Ví dụ : Cho hệ $\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = 2z(x) - y(x) + x \end{cases}$

với điều kiện $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Tìm $y(1)$ và $z(1)$ nếu số bước chia là $n = 4$

Bước	x_i	y_i	z_i
0	0	1.0	0.0
1	0.25	1.0	- 0.25
2	0.50	0.9375	
3	0.75		
4	1.00		

5) Giải phương trình vi phân cấp cao :

Giải phương trình vi phân cấp 2

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = f(x)$$

với **điều kiện đầu** $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0^{/}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1 bằng phép đổi biến $y'(x) = z(x)$, $y''(x) = z'(x)$

Hệ $\begin{cases} y' = z \\ z' = -p(x)\,z - q(x)\,y + f(x) \end{cases}$ với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ và $z(x_0) = y_0^{/} = z_0$.

Hệ này đã biết cách giải