1. Định lý cơ bản của vi tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Công thức Newton - Leibnitz

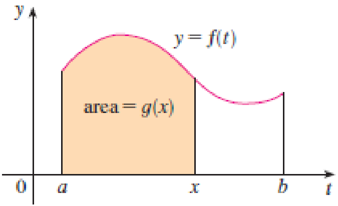
2. Ứng dụng hình học của tích phân
   - Diện tích hình phẳng
   - Thể tích vật thể
   - Chiều dài đường cong
   - Diện tích mặt tròn xoay

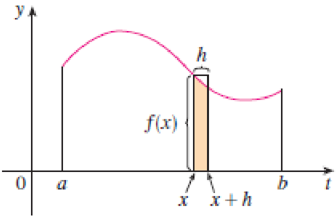
Định lý

Nếu f liên tục trên $[a, b]$, thì hàm số g định bởi

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

liên tục trên $[a, b]$, và $g'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$





Ví dụ

Tính đạo hàm của các hàm số:

(a) $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt;$

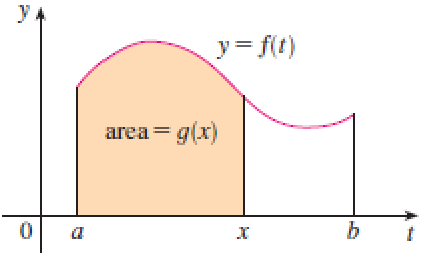
(b) $g(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \cos t dt.$

Định lý

Nếu f liên tục trên $[a, b]$, thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

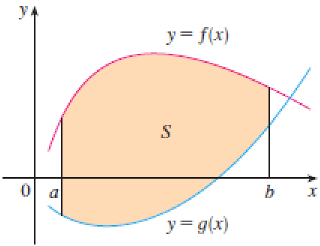
trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f.



Định lý

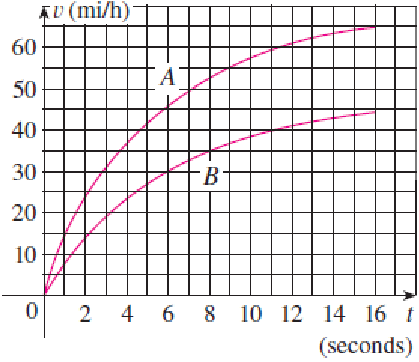
Cho f và g là hai hàm số liên tục và $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Miền phẳng nằm giữa hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và giữa hai đường thẳng đứng $x = a$ và $x = b$ có diện tích là

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



Ví dụ

Hình vẽ dưới đây biểu thị đường cong vận tốc của 2 chiếc xe A và B. Biết rằng chúng xuất phát cùng lúc và chạy trên cùng một con đường. Hãy cho biết ý nghĩa của diện tích miền nằm giữa 2 đường cong?

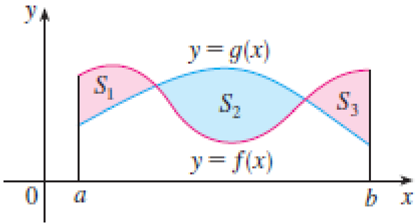


Một cách tổng quát, ta có công thức sau:

Định lý

Diện tích miền phẳng nằm giữa hai đường cong liên tục $y = f(x)$ *và* $y = g(x)$ *và giữa hai đường thẳng đứng* $x = a$ *và* $x = b$ *là*

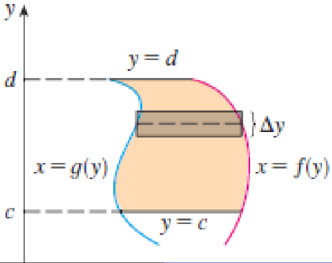
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Định lý

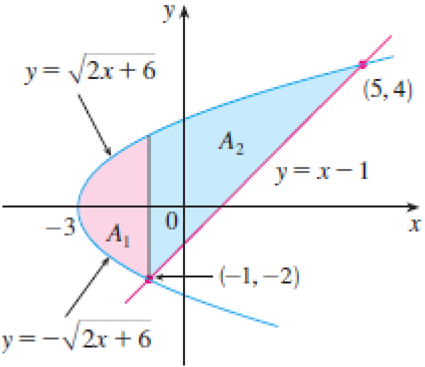
Nếu miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, và $y = d$, trong đó f và g là các hàm số liên tục trên $[c, d]$, thì diện tích của nó là

$$S = \int_c^d |f(y) - g(y)|dy.$$

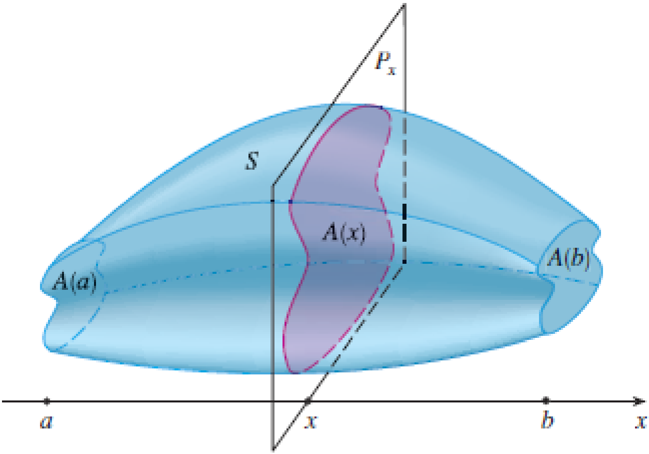


Ví dụ

Tính diện tích miền được bao bọc bởi đường thẳng $y = x - 1$ và parabol $y^2 = 2x + 6$.



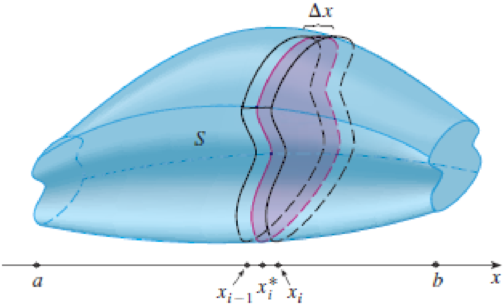
Xét một vật thể S nằm giữa $x = a$ và $x = b$. Gọi $A(x)$ là **diện tích của thiết diện** tạo bởi S mà mặt phẳng P_x vuông góc với trục hoành tại điểm x, trong đó $a \leq x \leq b$. Giả sử $A(x)$ là hàm liên tục.



Định lý

Thể tích của vật thể S là

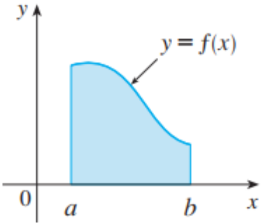
$$V = \int_a^b A(x)dx.$$



Hệ quả

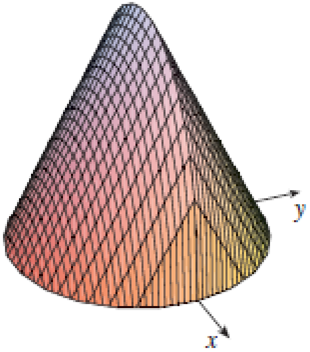
Khi quay xung quanh trục Ox miền phẳng được giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, và $x = b$, trong đó f liên tục trên $[a, b]$, ta thu được vật thể tròn xoay có thể tích là

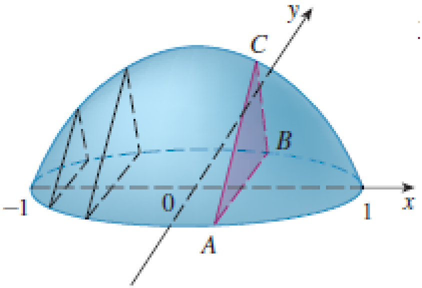
$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$



Ví dụ

Tính thể tích của vật thể có đáy là một đĩa tròn bán kính bằng 1*. Biết rằng thiết diện của vật thể với mặt phẳng vuông góc với đáy là tam giác đều.*

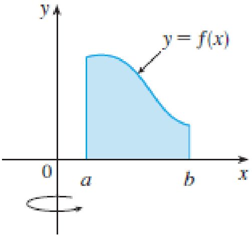


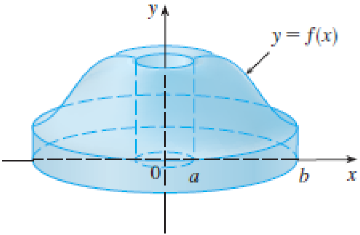


Định lý

Khi quay quanh trục Oy miền phẳng được giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, *và* $x = b$, *trong đó* $0 \leq a < b$, f *liên tục trên* $[a, b]$, *và* $f(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in [a, b]$, *ta thu được vật thể tròn xoay có thể tích là*

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

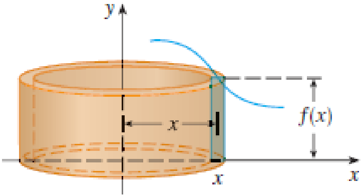


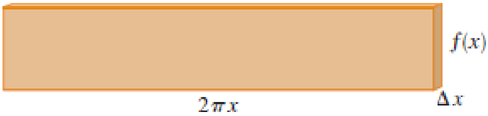


Cách nhớ công thức thể tích tròn xoay quanh Oy

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

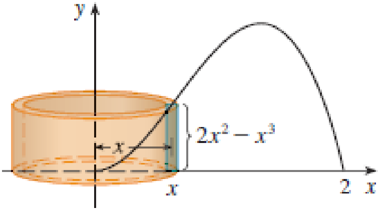
$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circumference}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{height}} \underbrace{dx}_{\text{thickness}}$$

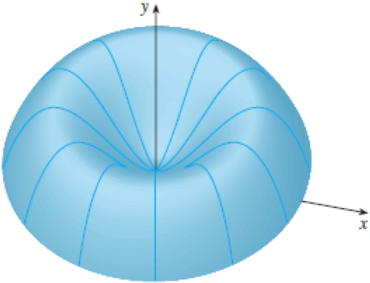




Ví dụ

Tính thể tích của vật thể được sinh ra khi quay quanh trục Oy miền được bao bọc bởi $y = 2x^2 - x^3$ *và* $y = 0$.

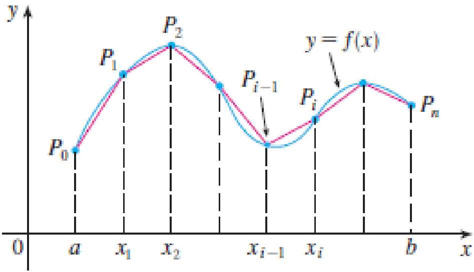




Định lý

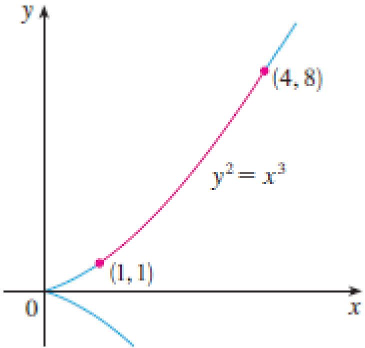
Đường cong trơn $y = f(x)$ nằm giữa $x = a$ và $x = b$ có chiều dài là

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



Ví dụ

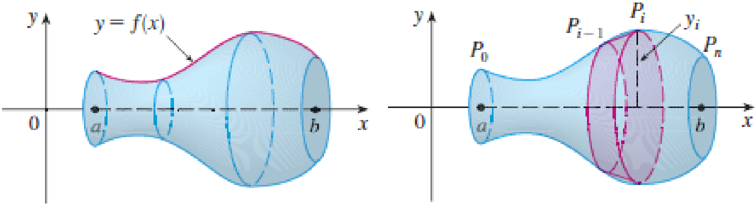
Tính chiều dài của đường cong có phương trình $y^2 = x^3$ *nằm giữa hai điểm* $(1, 1)$ *và* $(4, 8)$.



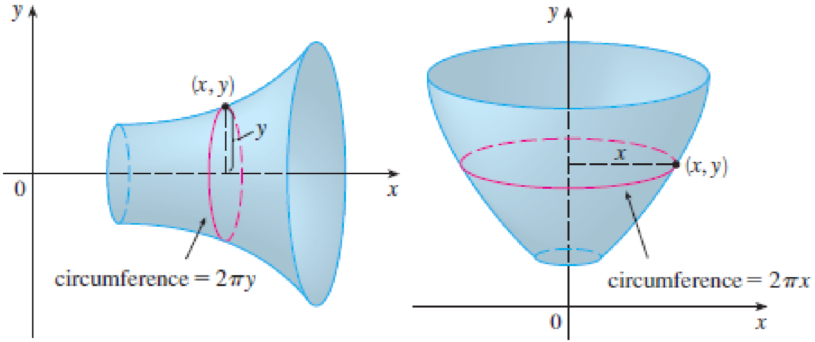
Định lý

Khi quay quanh trục Ox đường cong trơn $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$, trong đó $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$, ta thu được mặt tròn xoay có diện tích là

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$



Cách nhớ công thức diện tích mặt tròn xoay



(a) Rotation about x-axis: $S = \int 2\pi y\, ds$ (b) Rotation about y-axis: $S = \int 2\pi x\, ds$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Ví dụ

Tính diện tích của mặt tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox đường cong $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.