PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: ntcvantud@gmail.com

NỘI DUNG BÀI HỌC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

NỘI DUNG BÀI HỌC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ
2. KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

NỘI DUNG BÀI HỌC

NỘI DUNG BÀI HỌC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ
2. KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM
3. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI
4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

NỘI DUNG BÀI HỌC

ĐẶT VẤN ĐỀ

ĐẶT VẤN ĐỀ

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$\boxed{f(x) = 0} \tag{1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Những hệ số của phương trình (1) ta chỉ biết một cách gần đúng.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Những hệ số của phương trình (1) ta chỉ biết một cách gần đúng.

Khi đó việc xác định chính xác nghiệm của phương trình (1) không có ý nghĩa. Do đó việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình (1) cũng như đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) = 0$.

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) = 0$. Giả sử thêm rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm thực cô lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa những nghiệm thực khác của phương trình (1).

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Khoảng đóng $[a,b]$ *(hoặc khoảng mở* (a,b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là* ***khoảng cách ly nghiệm***.

Định nghĩa 2.1

Khoảng đóng $[a, b]$ *(hoặc khoảng mở* (a, b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.*

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Khoảng đóng $[a, b]$ *(hoặc khoảng mở* (a, b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.*

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

1. Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1).

ĐỊNH NGHĨA 2.1

Khoảng đóng $[a, b]$ *(hoặc khoảng mở* (a, b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là* ***khoảng cách ly nghiệm***.

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

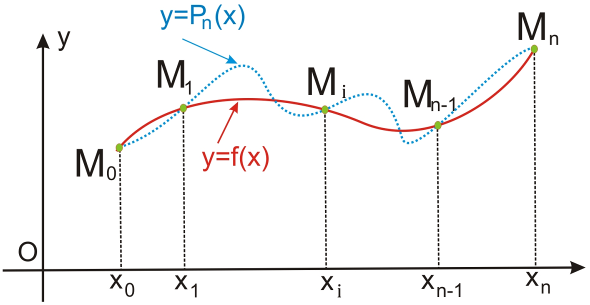
1. Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1).
2. Trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng một phương pháp nào đó với sai số cho trước.

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM

ĐỊNH LÝ 2.1

Nếu hàm số $f(x)$ *liên tục trong* (a,b) *và* $f(a).f(b) < 0$, $f'(x)$ *tồn tại và giữ dấu không đổi trong* (a,b) *thì trong* (a,b) *chỉ có 1 nghiệm thực* $\overline{x}$ *duy nhất của phương trình (1).*


y=P_n(x)
y
M_1
M_i
M_{n-1}
M_n
M_0
y=f(x)
O
x_0
x_1
x_i
x_{n-1}
x_n

Ví dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Ví dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Ví dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-3,-2]; [0,1]; [2,3]$.

Ví dụ 2.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

Giải.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-7	6	7	2	-3	-2	11	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-3,-2]; [0,1]; [2,3]$. Vì phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm nên mỗi đoạn trên chứa một nghiệm duy nhất. Vậy chúng là khoảng cách ly nghiệm.

Bấm máy.

$$X^3 - 6 * X + 2$$

- Calc $X = -3, -2, \dots, 3$

Ví dụ 2.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^5 + x - 12 = 0$

Giải.

VÍ DỤ 2.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^5 + x - 12 = 0$

Giải. Ta có

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

nên $f(x)$ đơn điệu tăng. Mặt khác,

$$f(0) < 0, f(2) > 0$$

nên $f(x) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm trong $[0, 2]$.

Sai số tổng quát

SAI SỐ TỔNG QUÁT

ĐỊNH LÝ 2.2

Giả sử hàm $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$, *khả vi trong* (a,b). *Nếu* x^* *là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác* $\overline{x}$ *trong* $[a,b]$ *và*

$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \forall x \in [a,b],$$

thì công thức đánh giá sai số tổng quát là

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m}$$

VÍ DỤ 2.3

Xét phương trình $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12 = 0$ *trong đoạn* $[-2, -1]$ *có nghiệm gần đúng* $x^* = -1.37$. *Khi đó*

$$|f'(x)| = |3x^2 - 10x| \geqslant 13 = m > 0, \forall x \in [-2, -1].$$

Do đó

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(-1.37)|}{13} \approx 0.0034.$$

Bài tập 5.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau

BÀI TẬP 5.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau $f(x) = x^4 - 4x + 1 = 0$

BÀI TẬP 5.1

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau $f(x) = x^4 - 4x + 1 = 0$

Giải. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4$. Do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	94	25	6	1	-2	9	70	$+\infty$

Vậy khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho là $[0,1]$ và $[1,2]$.

Bài tập 5.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau

Bài tập 5.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau $f(x) = 1 + x - e^{-2x} = 0$

BÀI TẬP 5.2

Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của phương trình sau $f(x) = 1 + x - e^{-2x} = 0$

Giải. Ta có

$$f'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất. Mặt khác

$$f(0) = 0, f(-1) = -e^2 < 0$$

nên khoảng cách ly nghiệm là $[-1, 0]$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP 5.3

Phương trình $f(x) = 5x^3 + 12x - 5 = 0$ *trên khoảng cách ly nghiệm* $[0,1]$ *có nghiệm gần đúng là* $x^* = 0.40$. *Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của* x^* *là*

1. 0.0100
2. 0.0102
3. 0.0104
4. 0.0106
5. *Các câu kia sai.*

Công thức đánh giá sai số tổng quát

$|x^* - \overline{x}| \leqslant \dfrac{|f(x^*)|}{m}$, trong đó,

$|f'(x)| = |15x^2 + 12| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(1)|\} = 12$

$\Rightarrow m = 12.$

Công thức đánh giá sai số tổng quát

$|x^* - \overline{x}| \leqslant \dfrac{|f(x^*)|}{m}$, trong đó,

$|f'(x)| = |15x^2 + 12| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(1)|\} = 12$

$\Rightarrow m = 12.$

Tìm $\min\{|f'(0)|, |f'(1)|\}$. **Bấm máy.** Shift-$\dfrac{d}{dx}$ – chọn $X = 0$ và $X = 1$. So sánh $|f'(0)|, |f'(1)|$. Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(1)|\} = |f'(0)| = m$.

Sai số nhỏ nhất là $\dfrac{|f(x^*)|}{m} = \dfrac{|f(0.40)|}{12} = 0.01 \Rightarrow$ Câu 1.

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Nội dung phương pháp chia đôi

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

- Giả sử phương trình (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và x_0 là điểm giữa của đoạn $[a, b]$.

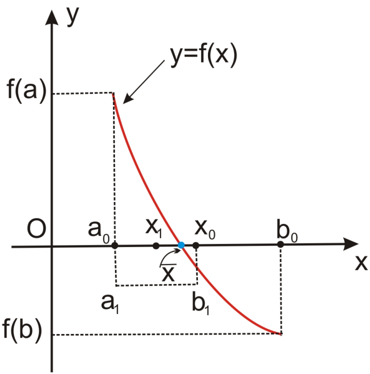
- Nếu $f(x_0) = 0$ thì x_0 chính là nghiệm và dừng lại. Ngược lại nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy, ta được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $d_1 = b_1 - a_1 = \dfrac{d_0}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.

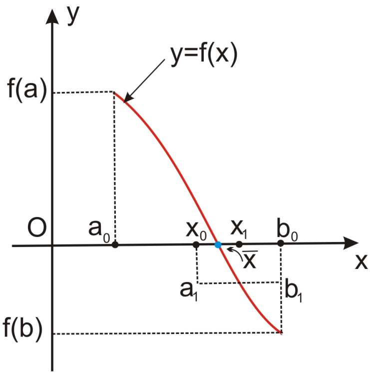
- Nếu $f(x_0) = 0$ thì x_0 chính là nghiệm và dừng lại. Ngược lại nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy, ta được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $d_1 = b_1 - a_1 = \dfrac{d_0}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.
- Tiếp tục quá trình chia đôi đối với $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_{n-1}, b_{n-1}]$ n lần, ta được

$$\begin{cases} a_n \leqslant \overline{x} \leqslant b_n,\ a_n \leqslant x_n = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n \\ f(a_n).f(b_n) < 0,\ d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

Sự hội tụ của phương pháp

Sự hội tụ của phương pháp





Vì dãy (a_n) là dãy không giảm và bị chặn trên bởi b, còn (b_n) là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi a nên khi $n \to +\infty$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \overline{x}, \; [f(\overline{x})]^2 \leqslant 0.$$

Vậy $f(\overline{x}) = 0$ hay $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình (1).

CÔNG THỨC ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

CÔNG THỨC ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

$$\boxed{|x_n - \overline{x}| = \left|\frac{a_n + b_n}{2} - \overline{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^{n+1}}.}$$

ƯU, NHƯỢC ĐIỂM CỦA PHƯƠNG PHÁP

Ưu, nhược điểm của phương pháp

- **Ưu điểm.** Đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi chỉ phải tính 1 giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng.

Ưu, nhược điểm của phương pháp

- **Ưu điểm.** Đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi chỉ phải tính 1 giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng.
- **Nhược điểm.** Tốc độ hội tụ chậm, độ chính xác không cao.

Ví dụ 3.1

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0,1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Giải.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	+
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	+
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}$	-
5	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}$	+

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	+
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	+
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}$	-
5	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}$	+

Vậy $x_5 = \frac{27}{64} \approx 0.4219$ và $\Delta_{x_5} = \frac{1-0}{2^6} = \frac{1}{64} \approx 0.0157.$

BÀI TẬP 5.1

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 5 (x_5) *của phương trình* $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 1]$. *Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính theo công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.*

Giải.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	-
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	+
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	-
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	+
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$	+
5	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{41}{64}$	-

Vậy $x_5 = \dfrac{41}{64} \approx 0.6406, \Delta_{x_5} = \dfrac{1}{64} \approx 0.0157.$

Vậy $x_5 = \dfrac{41}{64} \approx 0.6406, \Delta_{x_5} = \dfrac{1}{64} \approx 0.0157.$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x),$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} + \cos x > 0, \forall x \in [\frac{5}{8}, \frac{21}{32}].$

Xét $\overline{x} \in \left[\frac{5}{8}, \frac{21}{32}\right], m = \min |f'(x)| = f'(\frac{5}{8}) \approx 1.2176,$

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \Delta = \frac{|f(\frac{41}{64})|}{m} \approx 0.0011.$$

BÀI TẬP 5.2

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau*

Bài tập 5.2

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $x = \tan x$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[4, 4.5]$

BÀI TẬP 5.2

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $x = \tan x$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[4, 4.5]$

Giải.

BÀI TẬP 5.2

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $x = \tan x$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \frac{4.5-4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5$.

Bài tập 5.2

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $x = \tan x$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \dfrac{4.5 - 4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5$.

Đặt $f(x) = x - \tan x$. Ta có $f(4) > 0, f(4.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	4	4.5	4.25	+
1	4.25	4.5	4.375	+
2	4.375	4.5	4.4375	+
3	4.4375	4.5	4.46875	+
4	4.46875	4.5	4.484375	+
5	4.484375	4.5	4.4921875	+

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	4	4.5	4.25	+
1	4.25	4.5	4.375	+
2	4.375	4.5	4.4375	+
3	4.4375	4.5	4.46875	+
4	4.46875	4.5	4.484375	+
5	4.484375	4.5	4.4921875	+

Vậy $\overline{x} \approx 4.4922$

Bài tập 5.3

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau*

Bài tập 5.3

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0.5, 1.5]$.

BÀI TẬP 5.3

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0.5, 1.5]$.

Giải.

BÀI TẬP 5.3

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5-0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.

BÀI TẬP 5.3

Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} *của phương trình sau* $2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi

$\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5-0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.

Đặt $f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x$.

Ta có $f(0.5) > 0, f(1.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	1.5	1	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1	1.25	1.125	-
3	1	1.125	1.0625	-
4	1	1.0625	1.03125	-
5	1	1.03125	1.015625	-
6	1	1.015625	1.0078125	-

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	1.5	1	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1	1.25	1.125	-
3	1	1.125	1.0625	-
4	1	1.0625	1.03125	-
5	1	1.03125	1.015625	-
6	1	1.015625	1.0078125	-

Vậy $\overline{x} \approx 1.0078$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 13 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[2,3]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:

1. 2.7556
2. 2.7656
3. 2.7756
4. 2.7856
5. Các câu kia sai.

Ta có $f(2) = -9 < 0$ và $f(3) = 5 > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	2	3	2.5	-
1	2.5	3	2.75	-
2	2.75	3	2.875	+
3	2.75	2.875	2.8125	+
4	2.75	2.8125	2.78125	+
5	2.75	2.78125	2.765625	+

$\Rightarrow x_5 \approx 2.7656 \Rightarrow$ Câu 2

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương

$$x = g(x) \tag{2}$$

Có nhiều cách làm như vậy.

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$.

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$. Tiếp tục thay $x = x_1$ vào vế phải của (2) ta được $x_2 = g(x_1)$. Quá trình cứ thế tiếp diễn, ta xây dựng được dãy lặp (x_n) theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$.

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1+x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu. Thay $x = x_0$ vào vế phải của (2) ta được $x_1 = g(x_0)$. Tiếp tục thay $x = x_1$ vào vế phải của (2) ta được $x_2 = g(x_1)$. Quá trình cứ thế tiếp diễn, ta xây dựng được dãy lặp (x_n) theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$. Nhiệm vụ của chúng ta là khảo sát sự hội tụ của dãy (x_n) này.

HÀM CO

HÀM CO

ĐỊNH NGHĨA 4.1

Hàm $g(x)$ được gọi là ***hàm co*** *trong đoạn $[a, b]$ nếu tồn tại một số $q \in [0, 1)$, gọi là* ***hệ số co****, sao cho*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|.$$

Ví dụ 4.1

Xét hàm $g(x) = \sqrt{x}$ *trong đoạn* $[1,2]$. *Ta có* $\forall x_1, x_2 \in [1,2]$, *thì*

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Do đó $g(x)$ *là hàm co trong đoạn* $[1,2]$ *với hệ số co là* $q = 0.5$.

HÀM CO

ĐỊNH LÝ 4.1

Nếu $g(x)$ *là hàm co trên* $[a, b]$ *thì nó liên tục trên đó.*

Hàm co

Định lý 4.1

Nếu $g(x)$ *là hàm co trên* $[a, b]$ *thì nó liên tục trên đó.*

Định lý 4.2

Nếu $g(x)$ *là hàm liên tục trên* $[a, b]$*, khả vi trong* (a, b) *và* $\exists q \in [0, 1)$ *sao cho*

$$|g'(x)| \leqslant q, \forall x \in (a, b),$$

thì $g(x)$ *là hàm co trên* $[a, b]$ *với hệ số co là* q*.*

VÍ DỤ 4.2

Xét hàm $g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$ *trên đoạn* $[0, 1]$ *ta có*

$$|g'(x)| = \left| -\frac{1}{3\sqrt[3]{(10 - x)^2}} \right| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{9^2}} \approx 0.078$$

$$\Rightarrow q = 0.078 < 1.$$

Do đó $g(x)$ *là hàm co với hệ số co* $q = 0.078$.

ĐỊNH LÝ 4.3

Giả sử $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là q. Ngoài ra* $g : [a, b] \to [a, b]$. *Khi đó với mọi giá trị* x_0 *ban đầu trong* $[a, b]$, *dãy lặp* (x_n) *được xác định theo công thức* $x_n = g(x_{n-1})$ *sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất* $\overline{x}$ *của phương trình (2) và ta có công thức đánh giá sai số*

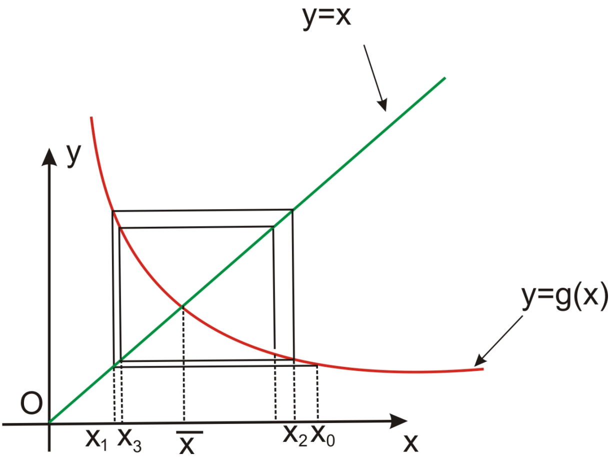
Công thức tiên nghiệm: $|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|;$

ĐỊNH LÝ 4.3

Giả sử $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là q. Ngoài ra* $g : [a, b] \to [a, b]$*. Khi đó với mọi giá trị* x_0 *ban đầu trong* $[a, b]$*, dãy lặp* (x_n) *được xác định theo công thức* $x_n = g(x_{n-1})$ *sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất* $\overline{x}$ *của phương trình (2) và ta có công thức đánh giá sai số*

Công thức tiên nghiệm: $|x_n - \overline{x}| \leqslant \dfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$;

Công thức hậu nghiệm: $|x_n - \overline{x}| \leqslant \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$



Chú ý. Từ công thức đánh giá sai số, ta thấy sự hội tụ của phương pháp lặp càng nhanh nếu q càng bé.

VÍ DỤ 4.3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ *bằng phương pháp lặp đơn với độ chính xác theo công thức hậu nghiệm là* 10^{-4}, *chọn* $x_0 = 0.75$, *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0, 1)$.

Ví dụ 4.3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ *bằng phương pháp lặp đơn với độ chính xác theo công thức hậu nghiệm là* 10^{-4}, *chọn* $x_0 = 0.75$, *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0, 1)$.

Giải. Có nhiều cách đưa về $x = g(x)$.

- $x = 5x^3 - 19x + 3 = g_1(x)$

VÍ DỤ 4.3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ *bằng phương pháp lặp đơn với độ chính xác theo công thức hậu nghiệm là* 10^{-4}, *chọn* $x_0 = 0.75$, *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0,1)$.

Giải. Có nhiều cách đưa về $x = g(x)$.

- $x = 5x^3 - 19x + 3 = g_1(x)$
- $x = \sqrt[3]{\dfrac{(20x-3)}{5}} = g_2(x)$

Ví dụ 4.3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ *bằng phương pháp lặp đơn với độ chính xác theo công thức hậu nghiệm là* 10^{-4}, *chọn* $x_0 = 0.75$, *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0, 1)$.

Giải. Có nhiều cách đưa về $x = g(x)$.

- $x = 5x^3 - 19x + 3 = g_1(x)$
- $x = \sqrt[3]{\dfrac{(20x-3)}{5}} = g_2(x)$
- $x = \dfrac{5x^3+3}{20} = g_3(x)$.

Ví dụ 4.3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ *bằng phương pháp lặp đơn với độ chính xác theo công thức hậu nghiệm là* 10^{-4}, *chọn* $x_0 = 0.75$, *biết khoảng cách ly nghiệm* $(0,1)$.

Giải. Có nhiều cách đưa về $x = g(x)$.

- $x = 5x^3 - 19x + 3 = g_1(x)$
- $x = \sqrt[3]{\dfrac{(20x-3)}{5}} = g_2(x)$
- $x = \dfrac{5x^3+3}{20} = g_3(x)$.

Theo nguyên lý ánh xạ co quá trình lặp hội tụ khi $|g'(x)| \leqslant q < 1$ trên $[0,1]$. Ta có

- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |15x^2 - 19| > 1$

Theo nguyên lý ánh xạ co quá trình lặp hội tụ khi $|g'(x)| \leqslant q < 1$ trên $[0,1]$. Ta có

- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |15x^2 - 19| > 1$
- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_2'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{20x-3}{5}\right)^2}} \right| > 1$

Theo nguyên lý ánh xạ co quá trình lặp hội tụ khi $|g'(x)| \leqslant q < 1$ trên $[0,1]$. Ta có

- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |15x^2 - 19| > 1$
- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_2'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{20x-3}{5}\right)^2}} \right| > 1$
- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_3'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{3x^2}{4} \right| < 1$

Theo nguyên lý ánh xạ co quá trình lặp hội tụ khi $|g'(x)| \leqslant q < 1$ trên $[0,1]$. Ta có

- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |15x^2 - 19| > 1$
- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_2'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{20x-3}{5}\right)^2}} \right| > 1$
- $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_3'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{3x^2}{4} \right| < 1$

Như vậy, ta có thể dùng $g_3(x)$ với $|g_3'(x)| = \left|\dfrac{3x^2}{4}\right| \leqslant 0.75 = q < 1$ trên $[0, 1]$ và có công thức lặp

Như vậy, ta có thể dùng $g_3(x)$ với $|g_3'(x)| = \left|\dfrac{3x^2}{4}\right| \leqslant 0.75 = q < 1$ trên $[0,1]$ và có công thức lặp

$$x_n = \frac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$$

Theo công thức đánh giá sai số ta có

Như vậy, ta có thể dùng $g_3(x)$ với $|g_3'(x)| = \left|\frac{3x^2}{4}\right| \leqslant 0.75 = q < 1$ trên $[0, 1]$ và có công thức lặp

$$x_n = \frac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$$

Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-4}.(1-q)}{q} = \frac{10^{-4}.(1-0.75)}{0.75} \approx 0.00004$$

Chọn $x_0 = 0.75 \in [0,1]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = \dfrac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$

Chọn $x_0 = 0.75 \in [0, 1]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \dots$ theo công thức $x_n = \dfrac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$

Bấm máy. $\dfrac{5X^3 + 3}{20}$

$CALC\ X = 0.75 \Rightarrow x_1$

$CALC\ X = Ans \Rightarrow x_2$

$CALC\ X = Ans \Rightarrow x_3$

$CALC\ X = Ans \Rightarrow x_4$

$CALC\ X = Ans \Rightarrow x_5$

n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	0.75	
1	0.25547	0.49453
2	0.15417	0.1013
3	0.15092	0.00325
4	0.15086	0.00006
5	0.15086	0

Nghiệm gần đúng là 0.1509 ở lần lặp thứ 5.

Bài tập 3.1

Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số theo công thức hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} *cho phương trình sau* $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ *trong đoạn* $[3, 4]$, *chọn* $x_0 = 3.5$, $g(x) = 3 + \dfrac{5}{x^2}$

Bài tập 3.1

Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số theo công thức hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} *cho phương trình sau* $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ *trong đoạn* $[3,4]$, *chọn* $x_0 = 3.5$, $g(x) = 3 + \dfrac{5}{x^2}$

Giải.

$x^3 - 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$. Ta có

$|g'(x)| = \left|-\dfrac{10}{x^3}\right| \leqslant \dfrac{10}{27}$. Vậy hệ số co $q = \dfrac{10}{27}$.

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.\left(1 - \frac{10}{27}\right)}{\frac{10}{27}} = 0.0017$$

Chọn $x_0 = 3.5 \in [3, 4]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = 3 + \dfrac{5}{x_{n-1}^2}$

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.\left(1-\frac{10}{27}\right)}{\frac{10}{27}} = 0.0017$$

Chọn $x_0 = 3.5 \in [3,4]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = 3 + \dfrac{5}{x_{n-1}^2}$

n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	3.5	
1	3.4082	0.0918
2	3.4305	0.0223
3	3.4249	0.0056
4	3.4263	0.0014

Nghiệm gần đúng là 3.4263 ở lần lặp thứ 4.

BÀI TẬP 3.2

Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số theo công thức hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} *cho phương trình sau* $x = \frac{x^2 - e^x + 2}{3}$ *trong đoạn* $[0, 1]$, *chọn* $x_0 = 0.5$

BÀI TẬP 3.2

Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số theo công thức hậu nghiệm nhỏ hơn 10^{-3} *cho phương trình sau* $x = \frac{x^2 - e^x + 2}{3}$ *trong đoạn* $[0, 1]$, *chọn* $x_0 = 0.5$

Giải. $x = \dfrac{x^2 - e^x + 2}{3} = g(x)$. Ta có $g'(x) = \dfrac{2x - e^x}{3}$,

$g''(x) = \dfrac{2 - e^x}{3}$, $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$,

$|g'(x)| = \left|\dfrac{2x - e^x}{3}\right| \leqslant \max\{|g'(\ln 2)|, |g'(0)|, |g'(1)|\}$

$= \max\{0.2046, \frac{1}{3}, 0.2394\} = \frac{1}{3}$. Hệ số co $q = \frac{1}{3}$.

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 0.002.$$

Theo công thức đánh giá sai số hậu nghiệm ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 0.002.$$

Chọn $x_0 = 0.5 \in [0,1]$. Tính $x_n, n = 1,2,\ldots$ theo công thức $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 - e^{x_{n-1}} + 2}{3}$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.5	
1	0.2004	0.2996
2	0.2727	0.0724
3	0.2536	0.0191
4	0.2586	0.005
5	0.2573	0.0013

Nghiệm gần đúng là 0.2573 ở lần lặp thứ 5.

BÀI TẬP 3.3

Cho phương trình $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$, *với khoảng cách ly nghiệm* $[2.5, 3]$ *và* $x_0 = 2.5$. *Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác* 10^{-4} *theo công thức tiên nghiệm.*

Giải.

BÀI TẬP 3.3

Cho phương trình $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$, *với khoảng cách ly nghiệm* $[2.5, 3]$ *và* $x_0 = 2.5$. *Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác* 10^{-4} *theo công thức tiên nghiệm.*

Giải. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2 = g(x)$. Ta có $g'(x) = -\dfrac{10}{x^3}$,

$$|g'(x)| = \left|-\frac{10}{x^3}\right| \leqslant \max\{|g'(2.5)|, |g'(3)|\} = 0.64.$$

Vậy hệ số co $q = 0.64$.

Với $x_0 = 2.5 \Rightarrow x_1 = 2.8$ Theo công thức đánh giá sai số tiên nghiệm ta có

Với $x_0 = 2.5 \Rightarrow x_1 = 2.8$ Theo công thức đánh giá sai số tiên nghiệm ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow (0.64)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.64)}{0.3}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln\left[\frac{10^{-4}.(1-0.64)}{0.3}\right]}{\ln 0.64} \approx 20.23 \Rightarrow n = 21$$

BÀI TẬP 3.4

Cho phương trình $x = \sqrt[3]{6x+14}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên* $[3,4]$. *Nếu chọn* $x_0 = 3.2$ *thì nghiệm gần đúng* x_2 *theo phương pháp lặp đơn là:*

1. 3.2167
2. 3.219
3. 3.2171
4. 3.2173
5. *Các câu kia sai.*

$$x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} + 14}.$$

Bấm máy

$$\sqrt[3]{6x + 14}$$

$$CALC\ X = 3.2 \Rightarrow x_1,$$

$$CALC\ X = Ans \Rightarrow x_2 \approx 3.2167.$$

$\Rightarrow$ Câu 1

BÀI TẬP 3.5

Cho phương trình $x = \sqrt[3]{6x+14}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên* $[3,4]$. *Nếu chọn* $x_0 = 3.2$ *thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng* x_2 *theo công thức tiên nghiệm là:*

1. 0.0007
2. 0.0009
3. 0.0011
4. 0.0013
5. *Các câu kia sai.*

$x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1}+14} = g(x_{n-1})$.

Bấm máy $\sqrt[3]{6x+14}$ – $CALC\ X = 3.2 \Rightarrow x_1$,

Shift-STO-A.

Tìm $\max\{|g'(3)|, |g'(4)|\}$. **Bấm máy.** Shift-$\dfrac{d}{dx}$ –

chọn $X = 3$ và $X = 4$. So sánh $|g'(3)|, |g'(4)|$.

Ta có

$$|g'(x)| = |2(6x+14)^{-2/3}| \leqslant \max\{|g'(3)|, |g'(4)|\}$$

$$\Rightarrow q = |g'(3)|$$

Shift-STO-M

$$|x_2 - \overline{x}| \leqslant \frac{q^2}{1-q}|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow \frac{M^2}{1-M} * |A - 3.2| \approx 0.00068.$$

Làm tròn lên ⇒ Câu 1

Nội dung phương pháp Newton

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp Newton là trên $[a, b]$ thay cung cong AB của đường cong $y = f(x)$ bằng tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm A hoặc tại điểm B và xem hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng $\overline{x}$.

Nội dung phương pháp Newton

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp Newton là trên $[a, b]$ thay cung cong AB của đường cong $y = f(x)$ bằng tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm A hoặc tại điểm B và xem hoành độ x_1 của giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng $\overline{x}$. Để xây dựng công thức tính x_1 ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f'(x).f''(x) > 0$. Ta xét 2 trường hợp con

Trường hợp 1. $f'(x).f''(x) > 0$. Ta xét 2 trường hợp con

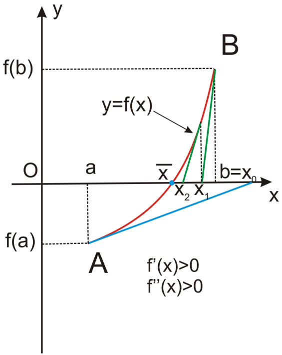
1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$

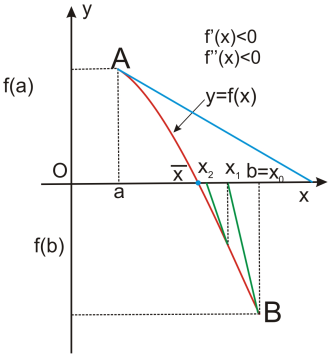
Trường hợp 1. $f'(x).f''(x) > 0$. Ta xét 2 trường hợp con

1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$
2. $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$

Trường hợp 1. $f'(x).f''(x) > 0$. Ta xét 2 trường hợp con

1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$
2. $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$





Nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến xuất phát từ $x_0 = a$ thì ta sẽ nhận được x_1 nằm ngoài (a, b).

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(b, f(b))$ có dạng: $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. Vì x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành nên

$$0 - f(b) = f'(b)(x_1 - b) \Leftrightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(b, f(b))$ có dạng: $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. Vì x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành nên

$$0 - f(b) = f'(b)(x_1 - b) \Leftrightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Nghiệm $\overline{x}$ nằm giữa (a, x_1). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a, b) bằng (a, x_1) và lại áp dụng phương pháp tiếp tuyến đối với (a, x_1) ta được $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Quá trình dừng lại, khi ta nhận được nghiệm gần đúng x_n đạt độ chính xác yêu cầu.

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Quá trình dừng lại, khi ta nhận được nghiệm gần đúng x_n đạt độ chính xác yêu cầu.

Trường hợp 2. $f'(x).f''(x) < 0$. Ta xét 2 trường hợp con

Trường hợp 2. $f'(x).f''(x) < 0$. Ta xét 2 trường hợp con

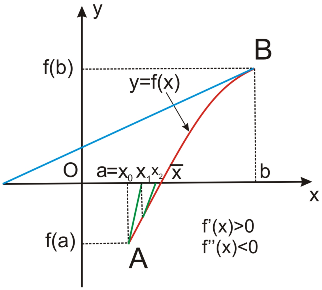
1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$

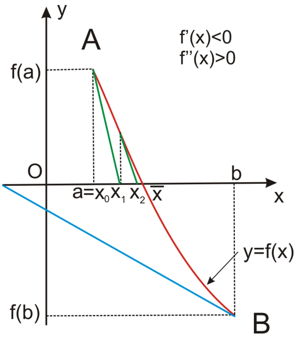
Trường hợp 2. $f'(x).f''(x) < 0$. Ta xét 2 trường hợp con

1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$
2. $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$

Trường hợp 2. $f'(x).f''(x) < 0$. Ta xét 2 trường hợp con

1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$
2. $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$





Nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến xuất phát từ $x_0 = b$ thì ta sẽ nhận được x_1 nằm ngoài (a, b).

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$ có dạng: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Vì x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành nên

$$0 - f(a) = f'(a)(x_1 - a) \Leftrightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$ có dạng: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Vì x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành nên

$$0 - f(a) = f'(a)(x_1 - a) \Leftrightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Nghiệm $\overline{x}$ nằm giữa (x_1, b). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a, b) bằng (x_1, b) và lại áp dụng phương pháp tiếp tuyến đối với (x_1, b) ta được $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta thu được

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Quá trình dừng lại, khi ta nhận được nghiệm gần đúng x_n đạt độ chính xác yêu cầu.

- Nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến và chọn x_0 mà $f(x_0)$ và $f''(x_0)$ không cùng dấu. Phương pháp tiếp tuyến có thể không dùng được.

- Nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến và chọn x_0 mà $f(x_0)$ và $f''(x_0)$ không cùng dấu. Phương pháp tiếp tuyến có thể không dùng được.
- Để sử dụng phương pháp tiếp tuyến ta chọn x_0 như sau: $x_0 = b$ nếu $f(b)$ cùng dấu với $f''(x)$;

- Nếu ta áp dụng phương pháp tiếp tuyến và chọn x_0 mà $f(x_0)$ và $f''(x_0)$ không cùng dấu. Phương pháp tiếp tuyến có thể không dùng được.
- Để sử dụng phương pháp tiếp tuyến ta chọn x_0 như sau: $x_0 = b$ nếu $f(b)$ cùng dấu với $f''(x)$; $x_0 = a$ nếu $f(a)$ cùng dấu với $f''(x)$. Cách chọn x_0 như vậy được gọi là chọn x_0 theo điều kiện Fourier.

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b), nghĩa là $f(a).f(b)<0$ và $f'(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b).

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b), nghĩa là $f(a).f(b) < 0$ và $f'(x)$ giữ dấu không đổi trong (a, b).
Sử dụng phương pháp tiếp tuyến, ta thu được dãy (x_n) theo công thức $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Ta thấy

1. Trường hợp 1.
   $a < \overline{x} < \ldots < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 = b.$

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b), nghĩa là $f(a).f(b)<0$ và $f'(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b).
Sử dụng phương pháp tiếp tuyến, ta thu được dãy (x_n) theo công thức $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Ta thấy

1. Trường hợp 1.
   $a < \overline{x} < \ldots < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 = b.$
2. Trường hợp 2.
   $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < \ldots < \overline{x} < b.$

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và $f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b), nghĩa là $f(a).f(b)<0$ và $f'(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b).
Sử dụng phương pháp tiếp tuyến, ta thu được dãy (x_n) theo công thức $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Ta thấy

1. Trường hợp 1.
   $a < \overline{x} < \ldots < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 = b.$
2. Trường hợp 2.
   $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < \ldots < \overline{x} < b.$

Vậy dãy (x_n) đơn điệu và bị chặn nên hội tụ.

Công thức đánh giá sai số

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Trên $[a, b]$ luôn có $|f'(x)| \geqslant m$ thì công thức đánh giá sai số của phương pháp Newton là

$$\boxed{|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}.}$$

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

1. Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

1. Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.
2. Nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến là biết x_{n-1}, để tính x_n ta phải tính giá trị của hàm f và giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_{n-1}.

VÍ DỤ 5.1

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 0.5]$. *Tìm nghiệm gần đúng* x_3 *bằng phương pháp Newton và sai số theo công thức tổng quát.*

Giải.

Ví dụ 5.1

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 0.5]$. *Tìm nghiệm gần đúng* x_3 *bằng phương pháp Newton và sai số theo công thức tổng quát.*

Giải.

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0$,

$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0, 0.5]$ và

$f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0, 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(0.5)|\} = \frac{9}{4} = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|x_n^3 - 3x_n + 1|}{9/4} = \Delta_{x_n}$$

Bấm máy. Tính x_n

$$x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

CALC $x = 0 \Rightarrow x_1$, Shift-STO-A

CALC Ans $\Rightarrow x_2$, Shift-STO-B

CALC Ans $\Rightarrow x_3$

Sai số

$$\frac{|x^3 - 3x + 1|}{9/4}$$

CALC $x_3 = Ans \Rightarrow \Delta x_3$

CALC $B = x_2 \Rightarrow \Delta x_2$,

CALC $A = x_1 \Rightarrow \Delta x_1$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	0	
1	$1/3 = 0.3333333333$	0.0165
2	$25/72 = 0.3472222222$	8.6924×10^{-5}
3	0.3472963532	2.5×10^{-9}

BÀI TẬP 5.1

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[1,2]$ *với độ chính xác* 10^{-5}.

Giải.

BÀI TẬP 5.1

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[1,2]$ *với độ chính xác* 10^{-5}.

Giải.

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0$,
$f'(x) = e^x - 2^{-x}\ln 2 - 2\sin x > 0, \forall x \in [1,2]$ và
$f''(x) = e^x + 2^{-x}\ln^2(2) - \cos x > 0, \forall x \in [1,2]$ nên chọn $x_0 = 2$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2^{-x_{n-1}} + 2\cos x_{n-1} - 6}{e^{x_{n-1}} - 2^{-x_{n-1}}\ln 2 - 2\sin x_{n-1}}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = 0.688 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n} + 2^{-x_n} + 2\cos x_n - 6|}{0.688} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.850521336	0.1283
2	1.829751202	2.19×10^{-3}
3	1.829383715	6.7×10^{-7}

Bài tập 5.2

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[1.3, 2]$ *với độ chính xác* 10^{-5}.

Giải.

BÀI TẬP 5.2

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[1.3, 2]$ *với độ chính xác* 10^{-5}.

Giải. Ta có $f(1.3) < 0, f(2) > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \sin(x-1) > 0, \forall x \in [1.3, 2] \text{ và}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \cos(x-1) < 0, \forall x \in [1.3, 2]$$

nên chọn $x_0 = 1.3$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)}{\frac{1}{x_{n-1}-1} - \sin(x_{n-1}-1)}.$$

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)}{\frac{1}{x_{n-1}-1} - \sin(x_{n-1}-1)}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1.3)|, |f'(2)|\} = 0.158 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)|}{0.158} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	1.3	
1	1.38184714	0.21998
2	1.397320733	5.76×10^{-3}
3	1.397748164	4.199×10^{-6}

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP 5.3

Cho phương trình $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 14x - 4 = 0$. *Với* $x_0 = 0.3$ *thì nghiệm gần đúng* x_1 *theo phương pháp Newton là*

1. 0.3198
2. 0.3200
3. 0.3202
4. 0.3204

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Bấm máy.

$$X - \frac{4X^3 - 6X^2 + 14X - 4}{12X^2 - 12X + 14}$$

CALC $X = 0.3 = \Rightarrow x_1 \approx 0.3202 \Rightarrow$ Câu 3

Bài tập 5.4

Cho phương trình $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 5 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[-1.9, -1.8]$. *Trong phương pháp Newton, chọn* x_0 *theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng* x_1 *tính theo công thức sai số tổng quát là*

1. 0.0041
2. 0.0043
3. 0.0045
4. 0.0047
5. *Các câu kia sai.*

$f(-1.9) < 0, f(-1.8) > 0,$
$f''(x) = 12x + 12 < 0, \forall x \in [-1.9, -1.8]$ nên chọn
$x_0 = -1.9.$

$f(-1.9) < 0, f(-1.8) > 0,$
$f''(x) = 12x + 12 < 0, \forall x \in [-1.9, -1.8]$ nên chọn $x_0 = -1.9.$
Tìm $\min\{|f'(-1.9)|, |f'(-1.8)|\}.$

Bấm máy. Shift-$\dfrac{d}{dx}$– chọn $X = -1.9$ và $X = -1.8$. So sánh $|f'(-1.9)|, |f'(-1.8)|$. Ta có $|f'(x)| = |6x^2 + 12x + 7| \geqslant \min\{|f'(-1.9)|, |f'(-1.8)|\} = 4.84 = m.$
Shift-STO-M.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Bấm máy. $X - \dfrac{2X^3 + 6X^2 + 7X + 5}{6X^2 + 12X + 7}$ CALC

X=-1.9=$\Rightarrow$ x_1 Shift-STO-A.

Tính $f(x_1)$.

Bấm máy. $2X^3 + 6X^2 + 7X + 5$ CALC

X=A=$\Rightarrow$ $f(x_1)$ Shift-STO-B.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Bấm máy. $X - \dfrac{2X^3 + 6X^2 + 7X + 5}{6X^2 + 12X + 7}$ CALC

X=-1.9=$\Rightarrow x_1$ Shift-STO-A.

Tính $f(x_1)$.

Bấm máy. $2X^3 + 6X^2 + 7X + 5$ CALC

X=A=$\Rightarrow f(x_1)$ Shift-STO-B.

Sai số của x_1 theo công thức sai số tổng quát là $|x_1 - x_0| \leqslant \dfrac{|f(x_1)|}{m} = \dfrac{|B|}{M} \approx 0.00406$. Làm tròn lên $\Rightarrow$ Câu 1

CÁM ƠN CÁC EM ĐÃ CHÚ Ý LẮNG NGHE