BÀI TẬP XÁC SUẤT B.

32. a) Ký hiệu B_1: "cặp sinh đôi là thật",B_2: "cặp sinh đôi là giả"

A : "cặp sinh đôi cùng giới".

Theo giả thiết $P(A) = 0,34 + 0,3 = 0,64$ và $P(A/B_1) = 1$; $P(A/B_2) = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $P(B_1) = x$; $P(B_2) = 1 - x$. Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) \Leftrightarrow\ 0,64 = x + \frac{1-x}{2}\ \Rightarrow\ x = 0,28$$

b) $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \dfrac{0,28}{0,64} = 0,4375$

36. Gọi E_1: "bóng đèn tốt" , E_2: "bóng đèn hỏng"

A : "bóng đèn được đóng dấu đã kiểm tra".

Ta có: $P(E_1) = 0,8$, $P(E_2) = 0,2$, $P(A/E_1) = 0,9$ và $P(A/E_2) = 0,05$.

Thành thử:

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)} = \frac{(0,8)(0,9)}{(0,8)(0,9) + (0,2)(0,05)} = 0,986$$

39. Gọi A là biến cố: "chai rượu thuộc loại A", B là biến cố: "chai rượu thuộc loại B" và H là biến cố: "có 4 người kết luận rượu loại A, 1 người kết luận rượu loại B".

Ta cần tính $P(A/H)$. Áp dụng công thức Bayet:

$$P(A/H) = \frac{P(A)P(H/A)}{P(A)P(H/A)+P(B)P(H/B)},\quad P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(H/A) = C_5^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4};\quad P(H/B) = C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4}$$

Thay vào ta thu được: $P(A/H) = \dfrac{27}{28} \approx 0,9642$

40. a) Ký hiệu O, A, B và AB tương ứng là các biến cố: "người cần tiếp máu có nhóm máu là O, A, B và AB".

Gọi H là biến cố: "sự truyền máu không thực hiện được". Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(H) = P(O)\,P(H/O) + P(A)\,P(H/A) + P(B)\,P(H/B) + P(AB)\,P(H/AB)$$

Theo dữ kiện của bài: $P(O) = 0,337$; $P(A) = 0,375$; $P(B) = 0,209$; $P(AB) = 0,079$

$P(H/O) = 1-P(O) = 0,663$, $P(H/A) = 1-[P(O) + P(A)] = 0,288$

$P(H/B) = 1-[P(O) + P(B)] = 0,454$, $P(H/AB) = 0$

Thay vào ta được: $P(H) = 0,4263$.Vậy xác suất để truyền máu được là: $1 - P(H) = 0,5737$

b) Gọi E là biến cố: "sự truyền máu không thực hiện được". Ta có:

$P(E/O) = [1 - P(O)]^2 = 0,663^2$, $P(E/A) = [1 - P(O) - P(A)]^2 = 0,288^2$

$P(E/B) = [1 - P(O) - P(B)]^2 = 0,454^2$, $P(E/AB) = 0$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được:

$P(E) = P(O)P(E/O) + P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(AB)P(E/AB) = 0{,}2223$

Vậy xác suất để truyền máu được là: $1 - P(E) = 0{,}777$

41. Ký hiệu A,B,C là biến cố mắc bệnh A,B,C, và H là biến cố đã xảy ra. Ta có:

$P(H/A) = (0{,}6)(0{,}2)(0{,}2)(0{,}6) = 0{,}0144$

$P(H/B) = (0{,}2)(0{,}6)(0{,}2)(0{,}2) = 0{,}0048$

$P(H/C) = (0{,}2)(0{,}2)(0{,}6)(0{,}2) = 0{,}0048$

Vậy: $P(A/H) = \dfrac{P(A)(P(H/A)}{P(H)} =$

$$= \frac{(0{,}3)(0{,}0144)}{(0{,}3)(0{,}0144)+(0{,}4)(0{,}0048)+(0{,}3)(0{,}0048)} = \frac{432}{768} = 0{,}5625$$

$P(B/H) = 0{,}25$

$P(C/H) = 0{,}1875$

55. Ký hiệu T: "rút được quả cầu trắng"; D: "rút được quả cầu đen".

Các kết quả có thể là:

$\omega_1 = D$; $\omega_2 = TD$; $\omega_3 = TTD$; $\omega_4 = TTTD$; $\omega_5 = TTTTD$

Ta có: $P(\omega_1) = \dfrac{3}{7}$; $P(\omega_2) = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{7}$; $P(\omega_3) = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{35}$

$P(\omega_4) = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{35}$; $P(\omega_5) = \dfrac{1}{35}$

Nếu xảy ra ω_1 thì $X = -5$.

Nếu xảy ra ω_2 thì $X = 10$.

Nếu xảy ra ω_3, ω_4 hoặc ω_5 thì $X = -15$, 20 hoặc -25.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	-25	-15	-5	10	20
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{3}{35}$

$EX = -\dfrac{6}{7}$, tức là trung bình một ván A thua $\dfrac{6}{7}$ đô la:

Nếu chơi 150 ván thì A sẽ mất khoảng $150 \times \dfrac{6}{7} = 128{,}57$ USD.

71. Ta có bảng phân bố của X là:

X	0	1	2	3	≥ 4
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,3081

a) Từ bảng phân bố của X ta thu được bảng phân bố của Y:

$P\{Y = -24\} = P\{X = 0\}$

$P\{Y = -4\} = P\{X = 1\}$

$P\{Y = 16\} = P\{X = 2\}$

$P\{Y = 36\} = P\{X \geq 3\}$

Y	-24	-4	16	36
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

Từ đó $EY = 20,8$.

b) Nếu trạm có 4 chiếc xe thì phân bố của số tiền Z mà trạm thu được trong 1 ngày sẽ là:

Z	-32	-12	8	28	48
P	0,0608	0,1703	0,2834	0,2225	0,3081

Từ đó $EZ = 18,9$.

c) Vậy thì trạm nên có 3 chiếc xe.

73. a) Ta có $X \sim$ Poátxông (2).

Gọi Y là số ôtô cho thuê. Ta có:

$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} \approx 0,1353$

$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} \approx 0,2707$

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} \approx 0,2707$

$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} \approx 0,1804$

$P\{Y = 4\} = P\{X \geq 4\} \approx 0,1429$

Từ đó: $EY \approx 1,925$

b) Gọi n là số ôtô mà cửa hàng cần có. Ta phải có:

$P\{X \leq n\} > 0,98$

Tra bảng ta thấy: $P\{X \leq 4\} > 0,9473$; $P\{X \leq 5\} > 0,9834$

Vậy $n = 5$.

102. Gọi T là thời gian đi từ nhà tới trường (đơn vị là phút).

$$T \sim U[6,10] \Leftrightarrow f_T(t) = \begin{cases} 0, \ \textbf{\textit{khi}} \ t \notin [6,10], \\ \frac{1}{4}, \ \textbf{\textit{khi}} \ t \in [6,10]. \end{cases}$$ Khi đó: $V = \dfrac{600}{60T} = \dfrac{10}{T}$ (m/s)

a) Vậy thì $EV = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_6^{10} \dfrac{10dt}{t} = \dfrac{5}{2}\ln\dfrac{10}{6} \approx 1,277$ (m/s)

$$EV^2 = \frac{1}{4}\int_6^{10} \frac{100}{t^2}\,dt = \frac{5}{3}$$

Từ đó $DV = 0,0358$ và $\sigma_V = 0,189$ (m/s)

b) $med\ V = m \Leftrightarrow P(V < m) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow P(\dfrac{10}{T} < m) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow P(\dfrac{10}{m} < T) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\int_{\frac{10}{m}}^{10} \frac{dt}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10 - \frac{10}{m} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$$

106. a) Ta có $P\{T > 20\} = 0{,}65$

$$\Rightarrow \ P\{T < 20\} = \phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}35 = \phi(-0{,}3853)$$

Vậy: $\dfrac{20-\mu}{\sigma} = -0{,}3853$ (1)

Tương tự: $P\{T > 30\} = 0{,}08$

$$\Rightarrow \ \phi\left(\frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 = \phi(1{,}405) \ \Rightarrow \ \frac{30-\mu}{\sigma} = 1{,}405 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\mu = 22{,}12$ (*phút*); $\sigma = 5{,}59$ (*phút*).

b) $\Rightarrow \ P\{T > 25\} = 1 - \phi\left(\dfrac{25-22{,}12}{5{,}59}\right) = 1 - \phi(0{,}51) = 0{,}3050$

c) Giả sử An cần đi khỏi nhà trước t phút trước giờ vào học. Ta phải xác định t bé nhất để: $P\{T > t\} \le 0{,}02 \ \Rightarrow \ t \ge 33{,}6$

Vậy $t = 33{,}6$ (*phút*).

107. Gọi X là trọng lượng sản phẩm. Xác suất để sản phẩm bị loại là:

$$p = P\{X < 8\} = \phi(8-\mu)$$

Gọi Y là lợi nhuận thu được cho một sản phẩm. Ta có $\begin{array}{c|cc} Y & -c & 1-c \\ \hline P & p & 1-p \end{array}$.

Vậy lợi nhuận trung bình trên một sản phẩm là:

$$EY = -pc + (1-c)(1\text{-p}) = 1 - p - c = 1 - \phi(8-\mu) - 0{,}05\mu - 0{,}3$$

Xét hàm $f(x) = 0{,}7 - 0{,}05x - \phi(8-x)$

$f'(x) = -0{,}05 + \varphi(8-x)$, ở đó $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x) = 0$ khi $\varphi(8-x) = 0{,}05 = \varphi(2{,}04) \Leftrightarrow 8-x = \pm 2{,}04 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10{,}04 \\ x = 5{,}96 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên suy ra $f(x)$ đạt max tại $x = 10{,}04$.

Vậy cần chọn $\mu = 10{,}04$ (*kg*) để lợi nhuận nhà máy đạt cực đại.