BÀI 4. 7 BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Các phương pháp ta đã học trong chương này là nhằm tìm những giá trị cực trị có úng dụng thực tiễn trong nhiều lãnh vực của cuộc sống. Một doanh nhân muốn làm giảm giá thành và tăng lợi nhuận. Một khách du lịch muốn giảm thiểu thời gian di chuyển. Nguyên lý Fermat trong quang học phát biểu rằng ánh sáng đi theo lộ trình mất ít thời gian nhất. Trong bài này và bài sau ta giải quyết những bài toán như tìm diện tích , thể tích, và lợi nhuận lớn nhất và tìm khoảng cách, thời gian, và giá thành nhỏ nhất.

Trong quá trình giải quyết những bài toán thực tế này, thử thách lớn nhất thường là biến đổi bài toán thực tế về thành bài toán cực trị giải tích bằng cách lập ra hàm số mà ta phải tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của nó. Hãy nhớ lại các bước trong phương pháp giải toán của Polya mà ta đã có dịp trình bày trong bài đọc thêm và vận dụng chúng vào tình huống này:

CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ

1. Tìm hiểu bài toán Bước đầu tiên là đọc đề bài cẩn thận cho đến khi hiểu tường tận. Tự hỏi: Cái chưa biết là gì? Đại lượng nào đã được cho trước? Điều kiện nào đã được cho trước?

2. Vẽ hình Trong hầu hết bài toán vẽ hình là việc làm hữu ích. Nhớ nhận diện những đại lượng cho trước hay phải tính trên hình vẽ.

3. Giới thiệu ký hiệu Gán một ký hiệu cho đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất (giả sử ta gọi là Q). Cũng chọn những ký hiệu (a, b, c, . . . , x, y) cho những đại lượng chưa biết khác và ghi tên vào giãn đồ. Ta nên dùng những ký hiêu gợi ý bằng những chữ cái đầu tiên - ví dụ, đặt k là khoảng cách, đặt c là cạnh, d là diện tích, t là thời gian . . .

4. Biểu diễn Q theo các ký hiệu khác đã đặt trong Bước 3.

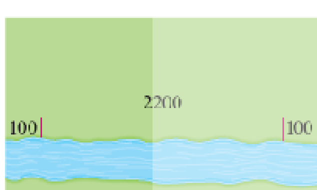
5. Nếu Q đã được biểu diễn như một hàm số với nhiều hơn một biến trong Bước 4, dùng những thông tin cho trước để tìm ra đẳng thức liên hệ giữa các biến này (theo dạng phương trình) . Nhờ đó ta tính được biến này theo biến kia, và cuối cùng Q được biểu diễn thành một hàm số theo một biến duy nhất được chọn ra, dưới dạng Q = f(x). Tìm tập xác định của hàm số này.

6. Dùng phương pháp của bài 4.1 và 4.3 để tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của f. Đặc biệt, nếu tập xác định của f là một đoạn, thì có thể sử dụng Phương Pháp Đọan trong bài 4.1.

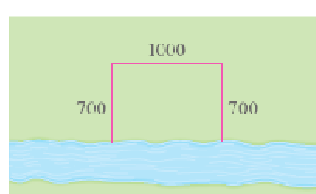
VÍ DỤ 1 Một nhà nông có 2400 ft hàng rào và muốn rào quanh một miếng đất hình chữ nhật có một cạnh giáp bờ sông. Ông không cần rào cạnh này. Tìm kích thước của miếng đất có diện tích lớn nhất.

- **Tìm hiểu bài toán**
- **Tính tương tự: Xét vài trường hợp cá biệt**
- **Vẽ hình**

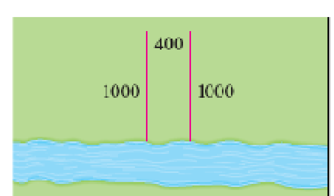
GIẢI Để "cảm thụ " được ý nghĩa của bài toán, ta hãy thực nghiệm một số tình huống. Hình 1 (không đúng tỷ lệ) cho thấy ba cách có thể xảy ra khi dùng 2400 ft rào.



Diện tích = 100 . 2200 = 220,000 ft^2



Diện tích = 700 . 1000 = 700,000 ft^2

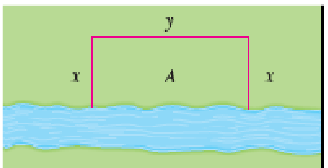


Diện tích = 1000 . 400 = 400,000 ft^2

Hình 1

Ta thấy rằng khi miếng đất hẹp thì diện tích tương đối nhỏ. Hình như có vẽ với một hình dạng nào đó ta sẽ được một diện tích lớn nhất.

■ **Giới thiệu ký hiệu**



Hình 2

Hình 2 minh họa trường hợp tổng quát. Ta muốn tìm giá trị lớn nhất của diện tích A. Gọi x, y là kích thước của miếng đất hình chữ nhật (tính bằng ft). Ta biểu diễn A theo x và y:

$$A = xy$$

Ta muốn biểu diễn A thành một hàm số theo đúng một biến số, vì thế ta sẽ tìm cách tính y theo x. Để làm được điều này ta sử dụng thông tin cho trước là chiều dài của hàng rào là 2400 ft, tức là ta có

$$2x + y = 2400$$

Từ đây suy ra $y = 2400 - 2x$, và do đó

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Chú ý là $x \geq 0$ và $x \leq 1200$ (nếu không thì $A < 0$). Vậy hàm số ta cần tìm giá trị lớn nhất là

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1200$$

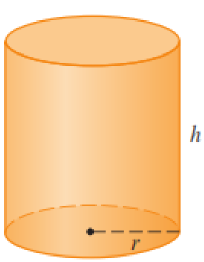
Ta có đạo hàm $A'(x) = 2400 - 4x$, vì thế số tới hạn cho bởi phương trình

$$2400 - 4x = 0$$

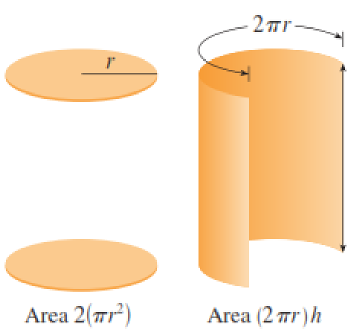
cho ta $x = 600$. Giá trị lớn nhất của A phải xảy ra hoặc tại số tới hạn này hoặc tại hai đầu mút. Vì $A(0) = 0$, $A(600) = 720{,}000$, và $A(1200) = 0$, Phương Pháp Đoạn cho ta giá trị lớn nhất là $A(600) = 720{,}000$.

[Cách khác, ta có thể dùng $A''(x) = -4 < 0$ với mọi x, nên đồ thị có bề lõm quay xuống và hàm số đạt cực đại cũng là giá trị lớn nhất tại $x = 600$.]

Vậy miếng đất hình chữ nhật cần tìm có kích thước 600 x 1200, cạnh 1200 song song với bờ sông.



HÌNH 3



HÌNH 4

VÍ DỤ 2 Người ta muốn làm một lon nhôm hình trụ có thể chứa 1 lít dầu. Tìm kích thước của lon sao cho chi phí nhôm sử dụng là nhỏ nhất.

GIẢI Vẽ hình (Hình 3), trong đó r là bán kính và h là chiều cao (tính bằng cm). Làm chi phí nhôm nhỏ nhất là làm diện tích toàn phần (diện tích xung quanh và hai đáy) của lon nhôm nhỏ nhất. Từ Hình 4, ta thấy rằng, diện tích xung quanh của lon là diện tích hình chữ nhật có kích thước $2\pi r$ và h. Do đó diện tích toàn phần của lon là:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Để khử h ta sử dụng giả thiết là thể tích lon bằng 1 lít, tức $1000\ cm^3$. Do đó

$$\pi r^2 h = 1000$$

cho ta $h = 1000/(\pi r^2)$. Thế giá trị này vào biểu thức A, ta được

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Vậy hàm số ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất là

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (r > 0)$$

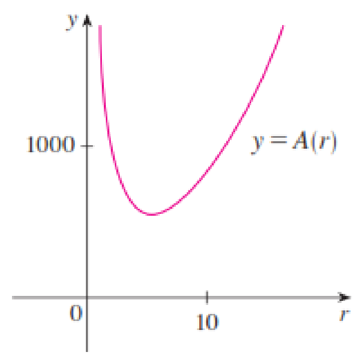
Để tìm số tới hạn, ta lấy đạo hàm

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Ta có A'(r) = 0 khi $\pi r^3 = 500$ hay $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

Vì tập xác định của A là $(0, \infty)$ nên ta không có điểm mút như trong Ví dụ 1. Nên thay vào đó ta tính giới hạn của A khi khi r tiến đến 0^+ và ∞. Hai giới hạn này đều là ∞, do đó giá trị nhỏ nhất của A xảy ra ở điểm tới hạn.

[Cách khác: ta có thể thấy $A'(r) < 0$ khi $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ và $A'(r) > 0$ khi $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ nên A(t) nghịch biến với mọi x ở bên trái điểm tới hạn và đồng biến với mọi x ở bên phải điểm tới hạn, do đó A(r) đạt cực tiểu cũng là giá trị nhỏ nhất tại $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Xem Hình 5.]



HÌNH 5

Giá trị của h tương ứng khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ là

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Do đó, để chi phí làm lon nhỏ nhất, thì bán kính phải bằng $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm và chiều cao lon phải gấp hai bán kính, tức bằng đường kính lon.

GHI CHÚ 1 Nhớ cách lý luận trong Ví dụ 2 có thể vận dụng trong các bài tập sau này để tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

> **TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT DÙNG DẤU HIỆU ĐẠO HÀM** Giả sử c là điểm tới hạn của hàm số liên tục f xác định trên một khoảng.
> (a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x < c$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x > c$, thì f(c) là giá trị lớn nhất của f.
> (b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x < c$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x > c$, thì f(c) là giá trị nhỏ nhất của f.

GHI CHÚ 2 Một phương pháp khác để giải bài toán cực trị là dùng đạo hàm ẩn tàng. Nhìn lại Ví dụ 2 để minh họa phương pháp này. Ta đi từ hai phương trình đã tìm được

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

nhưng thay vì khử h, ta lấy đạo hàm ẩn tàng hai phương trình theo r:

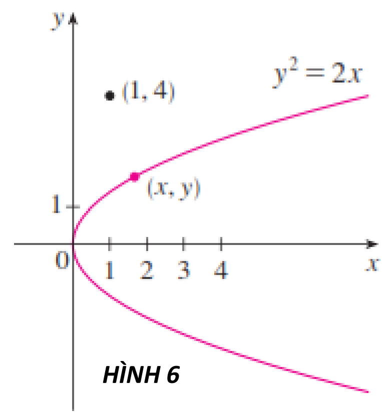
$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2h' = 0$$

Cực tiểu xảy ra tại số tới hạn, do đó ta cho A' = 0, đơn giản, và ta được

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

và trừ hai phương trình, ta được $2r - h = 0$, hay $h = 2r$.

VÍ DỤ 3 Tìm trên parabol $y^2 = 2x$ điểm gần với điểm (1, 4) nhất.



HÌNH 6

GIẢI Khoảng cách giữa điểm (1, 4) và điểm (x, y) là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

(Hình 6). Nhưng vì (x, y) nằm trên parabol, nên $x = y^2/2$, do đó ta được

$$d = \sqrt{(y^2/2 - 1)^2 + (y-4)^2}$$

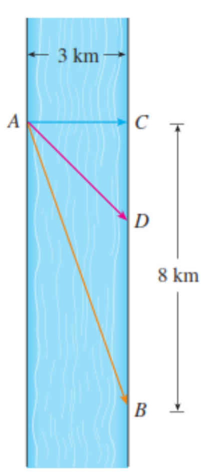
(Cách khác, ta có thể thế $y = \sqrt{2}$ để tính d theo x). Thay vì tìm giá trị nhỏ nhất của d, ta tìm giá trị nhỏ nhất của d^2: (vì d nhỏ nhất cùng lúc với d^2 nhỏ nhất, và tìm d^2 nhỏ nhất thì dễ hơn)

$$d^2 = f(y) = (y^2/2 - 1)^2 + (y - 4)^2$$

Lấy đạo hàm, ta được

$$f'(y) = 2(y^2/2 - 1)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

Do đó $f'(y) = 0$ khi $y = 2$. Nhận xét là $f'(y) < 0$ khi $y < 2$ và $f'(y) > 0$ khi $y > 2$, do đó giá trị nhỏ nhất xảy ra khi $y = 2$. Giá trị tương ứng của x là $x = y^2/2 = 2$. Vậy điểm trên $y^2 = 2x$ gần điểm (1, 4) nhất là (2, 3).



HÌNH 7

VÍ DỤ 4 Một người cho thuyền đi từ điểm A trên bờ sông thẳng, rộng 3 km, và muốn đến điểm B, 8 km xuôi dòng trên bờ đối diện càng nhanh càng tốt (xem Hình 7). Y có thể chèo thuyền trực tiếp băng ngang con sông đến điểm C rồi từ đó chạy đến B, hoặc y chèo trực tiếp đến điểm B, hoặc y có thể chèo đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy đến B. Nếu y có thể chèo với vận tốc 6km/h và chạy với vận tốc 8km/h, hỏi y chèo đến điểm D ở đâu sẽ đến được B nhanh như có thể. (Giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền.)

GIẢI Ta đặt x là khoảng cách từ C đến D, thì khoảng đường chạy bộ là $|DB| = 8 - x$ và Định lý Pythagore cho ta khoảng cách chèo thuyền là

$$|AD| = x^2 + 9$$

Ta dùng công thức

$$\text{thời gian đi} = \frac{\textit{quảng đường đi}}{\textit{vận tốc}}$$

Suy ra thời gian chèo thuyền là $\sqrt{x^2+9}/6$ và thời gian chạy bộ là $(8 - x)/8$, do đó thời gian tổng cộng là T, hàm số theo x:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \qquad +$$

Tập xác định của hàm số T là [0, 8]. Chú ý là nếu x = 0, y chèo thuyền đến C và nếu x = 8, y chèo trực tiếp đến B. Đạo hàm của T là

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

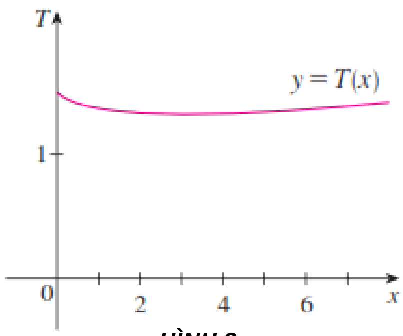
Do đó, dùng giả thiết là $x \geq 0$, ta có

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = 9/\sqrt{7}$$

Số tới hạn duy nhất là $x = 9/\sqrt{7}$. Để xem giá trị nhỏ nhất xảy ra ở đây hay tại đầu mút của [0, 8], ta tính giá trị của T tại ba điểm:



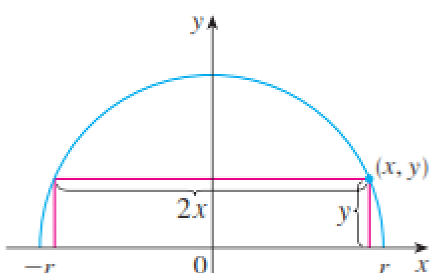
HÌNH 8

$T(0) = 1.5 \qquad T(9/\sqrt{7}) = 1 + \sqrt{7}/8 \approx 1.33 \qquad T(8) = \sqrt{73}/6 \approx 1.42$

Vì giá trị nhỏ nhất trong số các tri này của T xảy ra khi $x = 9/\sqrt{7}$, nên giá trị nhỏ nhất của T cũng xảy ra tại đó. Hình 8 minh họa đồ thị cho thấy kết quả vừa tính toán là chính xác.

Do đó người này phải tiếp đất tại điểm $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3.4 km) từ điểm khởi hành.

VÍ DỤ 5 Tìm diện tích hình chữ nhật lớn nhất nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính r.



HÌNH 9

GIẢI Xét nửa đường tròn là phần trên của đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$, tâm là điểm gốc toạ độ. Thuật ngữ nội tiếp có nghĩa hình chữ nhật có hai đỉnh thuộc nửa đường tròn và hai đỉnh kia trên trục x như trong Hình 9.

Gọi (x, y) là đỉnh thuộc phân tư thứ nhất. Thế thì hình chữ nhật có kích thước là 2x và y, và diện tích của nó là

$$A = 2xy$$

Để khử y ta dùng giả thiết là (x, y) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$ và do đó $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Do đó

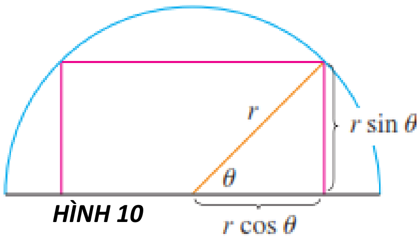
$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Tập xác định của hàm số này là $0 \leq x \leq r$. Đạo hàm là

$$A' = 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

A' = 0 khi $2x^2 = r^2$, hay $x = r/\sqrt{2}$ (vì $x \geq 0$). Giá trị này của x cho ta giá trị lớn nhất vì A(0) = A(r) = 0. Do đó diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp là

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$



HÌNH 10

GIẢI 2 Một cách giải đơn giản hơn là nếu ta nghĩ đến cách dùng biến là góc như trong Hình 10.

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2(2\sin\theta\cos\theta) = r^2\sin 2\theta$$

Ta biết rằng $\sin 2\theta$ có giá trị lớn nhất là 1 và xảy ra khi $2\theta = \pi/2$ hay θ = □/4. Do đó $A(\theta)$ đạt giá trị lớn nhất là r^2 khi $\theta = \pi/4$.

Chú ý là cách giải lượng giác này không cần đến công cụ giải tích là đạo hàm.

ỨNG DỤNG VÀO DOANH THƯƠNG VÀ KINH TẾ

Trong bài 3.7 ta đã giới thiệu ý tưởng về chi phí cận biên. Nhớ là nếu C(x), hàm số chi phí, là chi phí sản xuất x đơn vị của một sản phẩm nào đó, thì **chi phí cận biên (hay chi phí lề)** là tốc độ biến thiên của C đối với x. Nói cách khác, hàm số chi phí cận biên là đạo hàm , C '(x), của hàm số chi phí.

Bây giờ ta hãy xét vấn đề tiếp thị. Gọi p(x) là giá mỗi đơn vị mà công ty có thể định giá nếu nó bán x đơn vị. Thế thì p được gọi là **hàm số cầu** (demand fuction) (hay **hàm số giá cả**) và ta hi vọng đó là hàm số nghịch biến theo x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là p(x), thì tổng doanh thu là

$$R(x) = xp(x)$$

và R được gọi là **hàm số doanh thu**. Đạo hàm R' của hàm số doanh thu R được gọi là **hàm số doanh thu cận biên** và là tốc độ biến thiên của doanh thu đối với số đơn vị bán ra.

Nếu bán ra được x đơn vị, thì lợi tức tổng cộng là

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

và P được gọi là **hàm số lợi tức**. **Hàm số lợi tức cận biên** là P'. đạo hàm của hàm số lợi tức. Trong Bài tập[53-58 bạn được yêu cầu dùng hàm số chi phí cận biên, doanh thu cận biên và lợi tức cận biên để giảm tối thiểu chi phí và tăng tối đa doanh thu cùng lợi tức.

VÍ DỤ 6 Một cửa hàng đã bán ra 200 máy ghi đĩa DVD mỗi tuần với giá 350$ một máy. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra rằng với mỗi 10$ tiền thưởng khuyến mãi cho người mua, số đơn vị bán ra tăng 20 mỗi tuần. Tìm hàm số cầu và doanh thu. Cửa hàng phải khuyến mãi bao nhiêu tiền thì doanh thu mới cao nhất?

GIẢI Nếu x là số máy ghi đĩa DVD bán mỗi tuần, thì x - 200 là doanh số tăng mỗi tuần. Với mỗi 20 đơn vị bán ra tăng thêm, giá giảm đi 10$. Vì thế với mỗi đơn vị bán tăng thêm, giá giảm đi $\frac{1}{20}$. 10 và hàm số cầu là

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Hàm số doanh thu là $R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$

Vì R'(x) = 450 - x, ta thấy rằng R'(x) = 0 khi x = 450. Giá trị x này cho ta giá trị lớn nhất của doanh thu Quy Tắc Đạo Hàm Bậc Nhất. Giá tương ứng là

$$p(450) = 450 - 450/2 = 225$$

và số tiền khuyến mãi là 350 - 225 = 125. Do đó, để doanh thu đạt cao nhất, cửa hàng nên đưa ra số tiền khuyến mãi là 125$.

BÀI TẬP

1. Xét bài toán sau: Tìm hai số có tổng 23 sao cho tích của chúng lớn nhất.
(a) Lập bảng giá trị như bảng bên dưới, sao cho tổng hai số ở hai cột đầu tiên luôn bằng 23. Dựa vào chứng cứ trong bảng, hãy ước tính đáp số của bài toán.

Số thứ nhất	Số thứ hai	Tích
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

(b) Dùng giải tích để giải bài toán và so sánh với đáp số của bạn trong phần (a).

2. Tìm hai số có hiệu là 100 và tích của chúng nhỏ nhất.

3. Tìm hai số dương có tích là 100 và tổng của chúng nhỏ nhất.

4. Tìm một số dương sao cho tổng của nó và nghịch đảo của nó là nhỏ nhất.

5. Tìm kích thước của hình chữ nhật có chu vi 100m và diện tích lớn nhất.

6. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích 1000m^2 và chu vi nhỏ nhất.

7. Thu hoạch Y của một nông sản phụ thuộc vào mức đạm N trong đất (tính theo đơn vị thích hợp) trong đó

$$Y = \frac{kN}{1+N^2}$$

trong đó k là hằng số dương. Mức đạm bao nhiêu sẽ cho sản lượng tốt nhất?

8. Tốc độ (tính bằng mg cacbon/m^3/h của quá trình quang hợp xảy ra đối với một loài thực vật phù du nào đó được mô hình hóa bằng hàm số

$$P = \frac{100I}{I^2+I+4}$$

trong đó I là cường độ ánh sáng (đo bằng ngàn nến). Với cường độ sáng bao nhiêu thì P lớn nhất?

9. Cho bài toán sau: Một trại chủ có 750 mét rào dùng để rào một miếng đất hình chữ nhật rồi chia nó thành 4 lô bằng các hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật . Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của tổng diện tích bốn lô này.

a. Vẽ các giản đồ mô tả tình thế, với các hình chữ nhật có hình dáng rộng hẹp khác nhau và ước tính diện tích lớn nhất cần tìm.

b. Vẽ giản đồ trong trường hợp tổng quát, đưa vào các kí hiệu và điền vào hình vẽ.

c. Viết biểu thức diện tích theo các kí hiệu.

d. Tìm hệ thức liên hệ giữa các kí hiệu dựa vào giả thiết của bài toán.

e. Thế vào biểu thức ở câu c để tính diện tích theo một biến duy nhất.

f. Hoàn tất bài giải và so sánh kết quả với dự đoán ở câu a.

10. Cho bài toán sau: Một hộp giấy không nắp được làm từ một miếng bìa hình vuông, cạnh 3 dm bằng cách cắt 4 hình vuông nhỏ bằng nhau ở bốn góc, rồi gấp các cạnh lại. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.

a. Vẽ giản đồ trong trường hợp tổng quát, đưa vào các kí hiệu và điền vào hình vẽ.

b. Viết biểu thức thể tích theo một biến duy nhất.

c. Hoàn tất bài giải và so sánh kết quả với dự đoán qua thực nghiệm của câu a.

11. Một trại chủ muốn rào một miếng đất hình chữ nhật có diện tích 1,5 triệu ft^2 rồi chia miếng đất thành hai phần bằng hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật . Y phải rào như thế nào sao cho phí tổn hàng rào là nhỏ nhất.

12. Một hộp đáy vuông không nắp có thể tích 32.000 cm^3. Tìm kích thước hộp sao cho phí tổn vật liệu làm hộp là nhỏ nhất.

13. Nếu 1.200 cm^2 là diện tích của vật liệu dùng để làm một cái hộp đáy vuông không nắp, tìm thể tích lớn nhất có được của hộp.

14. Một kho chứa hình hộp chữ nhật không nắp có dung tích 10 m^3. Chiều dài của đáy gấp đôi chiều rộng. Vật liệu làm nền kho chứa giá 10 đôla mỗi mét vuông, vật liệu làm vách kho giá 6 đôla mỗi mét vuông. Tìm chi phí thấp nhất để xây dựng kho chứa.

15. Làm lại bài tập 14 với kho chứa có nắp đậy làm bằng vật liệu cùng giá như vật liệu làm vách kho.

16. a. Chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình có chu vi nhỏ nhất là hình vuông .

b. Chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình có diện tích lớn nhất là hình vuông .

17. Tìm trên đường thẳng y = 4x + 7 điểm ở gần điểm gốc tọa độ nhất.

18. Tìm trên đường thẳng 6x + y = 9 điểm ở gần điểm (- 3; 1) nhất.

19. Tìm trên êlip $4x^2 + y^2 = 4$ điểm cách xa điểm (1; 0) nhất.

20. Tìm, đúng đến hai chữ số thập phân, toạ độ của điểm trên đồ thị y = tan x và ở gần điểm (1, 1) nhất.

21. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong đường tròn bán kính r.

22. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong êlip $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong tam giác đều cạnh L biết một cạnh hình chữ nhật nằm trên cạnh của tam giác đều.

24. Tìm kích thước hình chữ nhật có diện tích lớn nhất biết một cạnh của nó ở trên trục hoành và hai đỉnh kia ở phía trên trục hoành và thuộc paraqbol $y = 8 - x^2$.

25. Tìm kích thước của tam giác cân có diện tích lớn nhất nội tiếp trong đường tròn bán kính r.

26. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác vuông có cạnh góc vuông là 3 và 4 biết hai cạnh của hình chữ nhật nằm trên hai cạnh góc vuông.

27. Một hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r . Tìm thể tích lớn nhất có được của khối trụ.

28. Một hình trụ nội tiếp trong hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h. Tìm thể tích lớn nhất có được của khối trụ.

29. Một hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r. Tìm diện tích toàn phần lớn nhất có thể có của hình trụ.

30. Một khung cửa vùng Norman có dạng một hình chữ nhật ghép với một nửa đường tròn ở phía trên (đường kính của đường tròn bằng với cạnh ngang của hình chữ nhật). Biết chu vi của cửa sổ là 30 bộ, tìm kích thước của khung cửa sao cho ánh sáng lọt qua khung cửa là lớn nhất.

31. Một tranh quảng cáo có lề trên và dưới là 6 cm và lề trái và phải là 4 cm. Biết diện tích phần nội dung in phải đúng 384 cm^2, tìm kích thước của tranh sao cho diện tích của tranh là nhỏ nhất.

32. Một tranh quảng cáo có diện tích 180 dm^2, chừa lề dưới và hai bên là 1 dm, lề trên là 2 dm. Tìm kích thước của tranh sao cho phần nội dung in có diện tích lớn nhất.

33. Một sợi dây dài 10m được cắt ra làm hai phần, phần này khép thành hình vuông, phần kia khép thành một tam giác đều. Hỏi phải cắt sợi dây thế nào để tổng diện tích hai hình là:

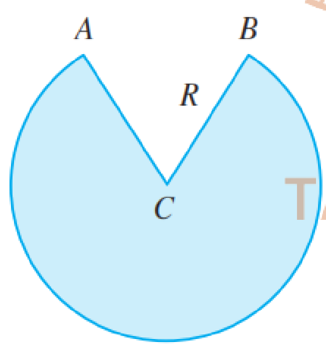
a. lớn nhất b. nhỏ nhất

34. Tương tự bài 33 nếu một sợi khép thành hình vuông, sợi kia thành đường tròn.

35. Một lon hình trụ không nắp được chế tạo để chứa V cm^3 chất lỏng. Tìm kích thước của lon sao cho lượng kim loại chế tạo lon là nhỏ nhất .

36. Một hàng rào cao 8 bộ, chạy song song với bức tường một ngôi nhà và cách tường 4 bộ. Tìm chiều dài ngắn nhất của thang một đầu dựa lên mặt đất, bắc qua hàng rào, đầu kia dựa vào tường.

37. Một cốc nước hình nón làm từ một tấm bìa hình tròn bán kính R, cắt bỏ một hình quạt, rồi dán hai mép CA , CB lại với nhau. Tìm dung tích lớn nhất của cốc.



38. Một cốc nước bằng giấy hình nón được làm để chứa 27 cm^3 nước. Tìm chiều cao và bán kính đáy cốc sao cho lượng giấy cần dùng là nhỏ nhất.

39. Một hình nón chiều cao h nội tiếp trong một hình nón lớn hơn, có chiều cao H sao cho đỉnh của nó là tâm đáy hình nón lớn. Chứng tỏ khối nón nhỏ có thể tích lớn nhất khi h = H/3.

40. Một vật có cân nặng W được kéo lê trên một mặt phẳng nằm ngang bằng một lực kéo theo một dây thừng buộc vào nó. Nếu dây tạo với mặt phẳng một góc θ, thế thì độ lớn của lực là

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

trong đó μ là hằng số được gọi là hệ số ma sát. Với giá trị nào của μ thì F nhỏ nhất.

41. Nếu một điện trở R ohm nối qua một nguồn điện E volt với một điện trở trong r ohm, thế thì công suất (tính bằng watt) của điện trở ngoài là

$$P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$$

Nếu E và r cố định nhưng R thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của công suất?

42. Một con cá bơi với vận tốc v so với dòng nước, năng lượng tiêu hao mỗi đơn vị thời gian tỷ lệ với v^3. Người ta tin rằng đàn cá di cư luôn tìm cách để giảm thiểu năng lượng nhiều nhất khi bơi qua một khoảng cách cố định. Nếu cá bơi ngược dòng có vận tốc u (u < v), thế thì thời gian đòi hỏi để bơi qua một đoạn đường L là L/(v – u) và năng lượng tiêu hao toàn phần là

$$E(v) = av^3.\frac{L}{v-u}$$

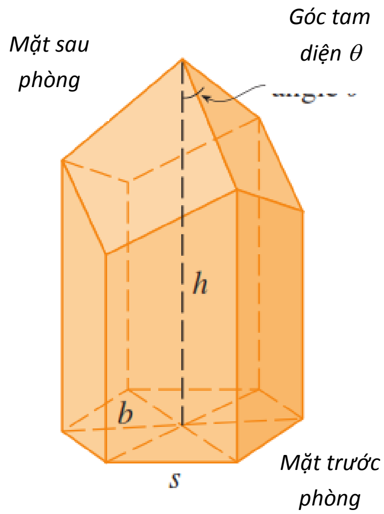
trong đó a là hằng số tỷ lệ.

(a) Xác định giá trị v sao cho E nhỏ nhất.
(b) Vẽ đồ thị của E.
Ghi chú: Kết quả này đã được kiểm chứng thực nghiệm; đàn cá di cư bơi ngược dòng với vận tốc 50% lớn hơn vận tốc dòng nước.

43. Trong một tổ ong, mỗi phòng là một lăng trụ lục giác đều, một đầu mở còn đầu kia chụp lại bằng một góc tam diện như hình dưới. Người ta tin rằng lũ ong xây các phòng này sao cho giảm thiểu diện tích vách đối với một thể tích ấn định trước, tức là tiết kiệm lượng sáp xây dựng nhất. Nghiên cứu các phòng này cho thấy thật kinh ngạc là số đo của góc θ luôn ổ định ở một giá trị nhất định. Dựa vào cấu trúc của phòng, có thể chứng tỏ được rằng diện tích S của nó cho bởi

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot\theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\csc\theta$$

trong đó s, độ dài của cạnh lục giác, và h, chiều cao, là hằng số.



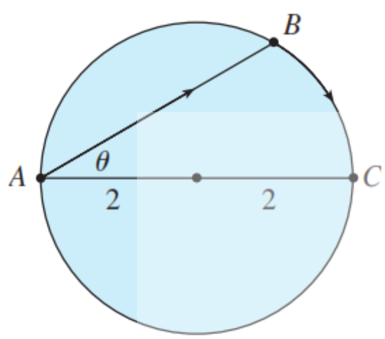
(a) Tính dS/dθ.
(b) Góc nào lũ ong thích nhất?
(c) Xác định diện tích nhỏ nhất của phòng (tính theo s và h).

Ghi chú: Phép đo thực tế góc θ trong các tổ ong đã được thực hiện, cho thấy kết quả sai kém không quá 2^o so với kết quả tính toán của chúng ta.

44. Một thuyền rời bến lúc 2 P.M và chạy theo hướng nam với vận tốc 20 km/h. Một chiếc thuyền khác đi theu hướng đông với vận tốc 15 km/h và cập bến nói trên lúc 3 P.M . Hỏi khi nào hai thuyền ở gần nhau nhất.

45. Giải lại bài toán ở Ví dụ 4 , cho biết dòng sông rộng 5 km (thay vì 3 km) và khoảng cách giữa A và B là 5 km (thay vì 8km).

46. Một du khách từ điểm A trên bờ hồ hình tròn, bán kính 2 dặm, muốn đi đến điểm C trên bờ hồ, đối tâm với A một cách nhanh nhất. Y có thể chèo thuyền đến điểm B rồi đi bộ đến C. Biết vận tốc chèo là 2 dặm/h và đi là 4 dặm /h, hỏi y phải chọn điểm C như thế nào để đạt mục đích trên.



47. Một nhà máy lọc dầu tọa lạc trên bờ bắc một con sông thẳng băng rộng 2 km. Môt đường ống được xây dựng dẫn dầu từ nhà máy đến các hầm chứa nằm ở bờ nam con sống và cách nhà máy 6 km về phía đông. Chi phí lắp đặt đường ống là 400,000$/km trên đất liền đến điểm P trên bờ bắc và 800,000$/km dưới lòng sông đến các hầm chứa. Để chi phí lắp đặt nhỏ nhất, ta phải chọn điểm P ở đâu?

48. Giả sử nhà máy lọc dầu trong Bài tập 47 cách bờ bắc con sông 1 km. Phải chọn P ở đâu?

49. Độ sáng của một vật thể thì tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn sáng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ nguồn sáng đến vật thể. Cho hai nguồn sáng đặt cách nhau 10 m, nguồn này sáng gấp 3 nguồn kia, hỏi phải đặt vật thể ở vị trí nào trên đoạn thẳng nối hai nguồn sáng sao cho vật thể nhận được ít ánh sáng nhất.

50. Viết phương trình đường thẳng qua điểm (3 ; 5) , cắt tia Ox tại A, tia Oy tạ B sao cho diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất.

51. Một đường thẳng qua điểm (a ; b) với a, b dương, cắt tia Ox tại A, tia Oy tại B sao cho độ dài AB là ngắn nhấ

52. Tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

53. (a) Nếu C(x) là chi phí sản xuất ra x đơn vị sản phẩm thế thì **chi phí trung bình** mỗi đơn vị là c(x) = C(x)/x. Chứng tỏ rằng nếu chi phí trung bình nhỏ nhất, thì chi phí cận biên bằng chi phí trung bình.

(b) Nếu $C(x) = 16{,}000 + 200x + 4x^{3/2}$, tính bằng đôla, tìm (i) chi phí , chi phí trung bình, và chi phí cận biên ở mức sản xuất 1000 đơn vị; (ii) mức sản xuất làm chi phí trung bình nhỏ nhất; và (iii) chi phí trung bình nhỏ nhất.

54. (a) Chứng tỏ rằng nếu lợi tức P(x) lớn nhất, thế thì doanh thu cận biên bằng với chi phí cận biên.

(b) Nếu $C(x) = 16{,}000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ là hàm số chi phí và p(x) = 1700 – 7x là hàm số cầu, tìm mức sản xuất sao cho lợi tức lớn nhất.

55. Một đội bóng chày chơi trong một sân vận động chứa 55,000 khán giả. Với giá vé là 10$, số người tham dự trung bình là 27,000. Khi giá vé hạ xuống 8$, số người tham dự trung bình lên đến 33,000.

(a) Tìm hàm số cầu, giả sử nó là hàm số bậc nhất.
(b) Giá vé phải là bao nhiêu để doanh thu cao nhất.

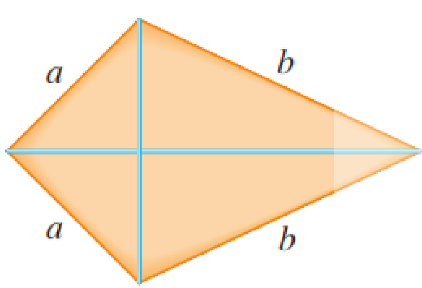
56. Trong những tháng hè Terry làm và bán vòng đeo cổ cho du khách ở bãi biển. Hè qua anh bán vòng với giá 10$ mỗi chiếc và trung bình bán được 20 vòng mỗi ngày. Khi anh tăng giá lên 1$, anh nhận thấy là chỉ bán được trung bình 2 vòng mỗi ngày.
(a) Tìm hàm số cầu, giả sử nó là hàm số bậc nhất.
(b) Nếu Terry phải tốn 6$ cho vật liệu làm vòng, hỏi giá bán phải bao nhiêu thì lợi tức mới cao nhất.

57. Một công ty bán ra 1000 máy truyền hình mỗi tuần với giá 450$ mỗi chiếc. Nghiên cứu thị trường chỉ ra là khi bớt 10$ mỗi chiếc, số TV bán ra sẽ tăng lên 100 mỗi tuần.
(a) Tìm hàm số cầu.
(b) Công ty phải bớt bao nhiêu để được doanh thu cao nhất?
(c) Nếu hàm số chi phí hàng tuần là C(x) = 68,000 + 150x, công ty phải bớt bao nhiêu thì lợi tức sẽ cao nhất?

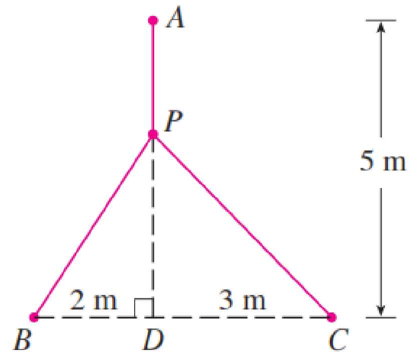
58. Một nhà quản lý một cao ốc gồm 100 căn hộ cho thuê từ kinh nghiệm biết rằng mọi căn hộ sẽ được thuê hết nếu giá thuê là 800$ mỗi tháng. Một nghiên cứu thị trường cho biết là, về trung bình, với mỗi 10$ tiền thuê tăng thêm thì có thêm 1 căn hộ không có ai thuê. Hỏi nhà quản lý phải cho thuê giá bao nhiêu để doanh thu cao nhất?

59. Chứng tỏ rằng trong các tam giác cân có cùng chu vi, tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác đều .

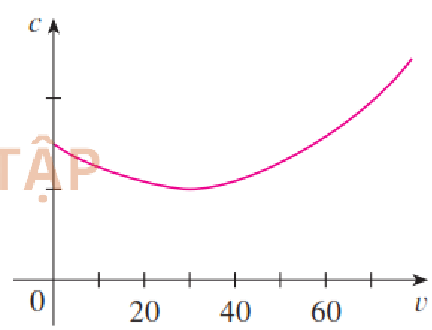
60. Một con diều có khung làm bằng 6 thanh tre như hình dưới. Bốn thanh ngoài có kích thước cố định là a và b, hỏi thanh đường chéo của khung phải có độ dài là bao nhiêu để mặt diều có diện tích lớn nhất.



61. Ta phải xác định điểm P trên đường AD sao cho tổng độ dài L của các đoạn cáp nối từ P đến các điểm A, B, C là nhỏ nhất. Ta có thể đặt AP = x và tính L theo x.



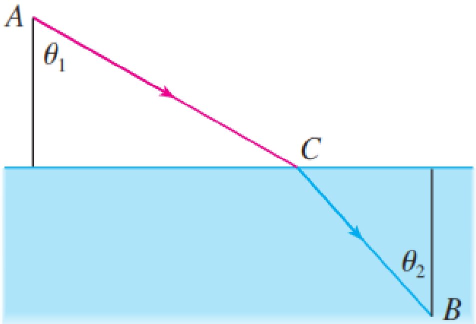
62. Đồ thị dưới cho thấy lượng tiêu thụ xăng c của một ô tô (tính bằng ga lông mỗi giờ) như một hàm số theo vận tốc v của xe. Ở vận tốc rất chậm động cơ hoạt động không hiệu quả, do đó c giảm khi vận tốc tăng lên. Nhưng ở vận tốc cao lượng tiêu thụ lại tăng lên. Bạn có thể thấy rằng c(v) nhỏ nhất khi v ≈ 30 dặm/h đối với ô tô này. Tuy nhiên, vì hiệu quả của nhiên liệu, cái ta muốn làm nhỏ nhất không phải là lượng xăng tiêu thụ mỗi giờ mà là số lượng tiêu thụ xăng mỗi dặm. Hãy gọi lượng tiêu thụ này là G. Dùng đồ thị, ước tính vận tốc tại đó G đạt giá trị nhỏ nhất.



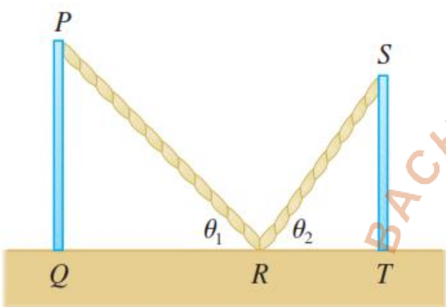
63. Gọi v_1 là vận tốc ánh sáng truyền trong không khí và v_2 là vận tốc ánh sáng truyền trong nước. Theo nguyên lí Fermat, một tia sáng đi từ điểm A trong không khí đến điểm B trong nước theo lộ trình ACB sao cho thời gian đi là nhỏ nhất. Chứng tỏ rằng

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

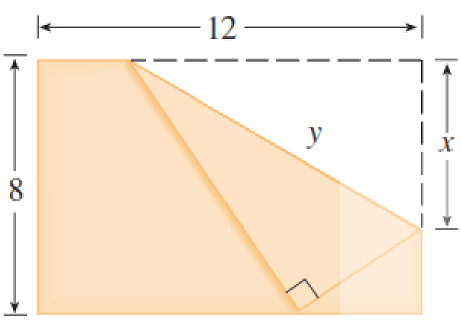
trong đó θ_1 là góc tới và θ_2 là góc khúc xạ. Phương trình này gọi là định luật Snell.



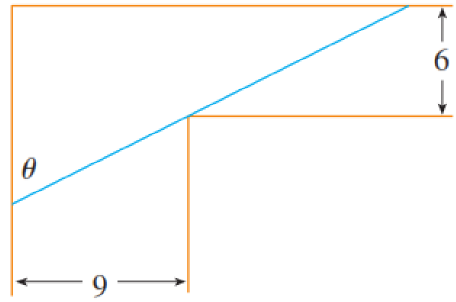
64. Hai cột đứng PQ và ST được giữ yên bởi dây thừng PRS, một đầu dây buộc vào đỉnh P, nối với một điểm cố định R trêm mặt đất, đầu kia buộc vào đỉnh S như trong hình. Chứng tỏ rằng chiều dài đoạn dây thừng là ngắn nhất khi $\theta_1 = \theta_2$.



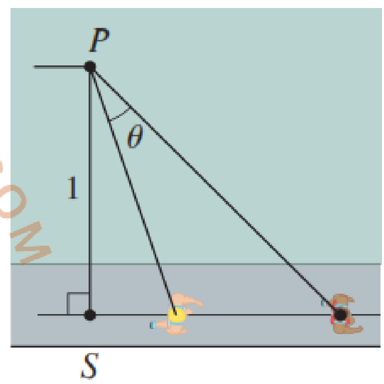
65. Ta gấp tờ giấy hình chữ nhật kích thước 8 x12 sao cho góc trên phải của tờ giấy nằm trên cạnh dưới của nó. Phải gấp thế nào để độ dài MN của mép gấp là ngắn nhất. Nói khác đi hãy tìm x để y nhỏ nhất.



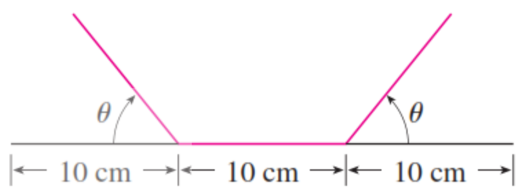
66. Một ống thép được mang qua một hành lang rộng 9 bộ . Đến cuối hành làng gặp một khúc quanh vuông góc mở đến một hành lang rộng 6 bộ. Tìm chiều dài tối đa của ống thép có thể mang nằm ngang đi qua khúc quanh mà không bị vướng.



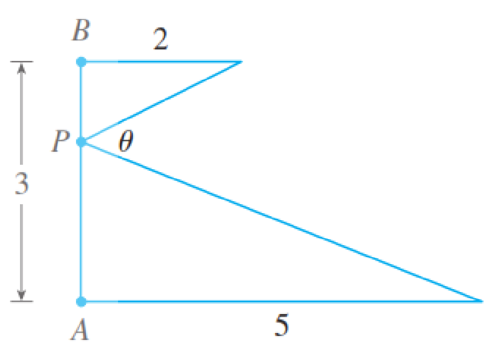
67. Một quan sát viên đứng ở điểm P cách đường chạy một đơn vị độ dài. Hai vận động viên khởi hành từ điểm S, người này chạy nhanh gấp 3 lần người kia . Tìm giá trị lớn nhất của góc nhìn θ của người quan sát.
[Hd:TìmGTLN của tan θ]



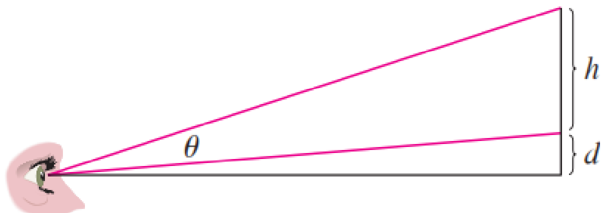
68. Một máng xối được làm từ một miếng tôn có chiều rộng 30 cm, bằng cách gấp 1/3 bề rộng ở hai bên theo chiều dài miếng tôn tạo một góc θ. Tìm θ sao cho máng chứa một lượng nước lớn nhất .



69. Tìm vị trí của điểm P trên đoạn AB sao cho góc θ là lớn nhất.



70. Một bức tranh có chiều cao h treo trên tường, cạnh dưới cách tầm mắt của người ngắm tranh một khoảng d (xem hình) . Hỏi người ngắm phải đứng cách tường bao xa để có tầm nhìn tốt nhất , tức góc nhìn θ lớn nhất.



71. Tìm diện tích lớn nhất của một hình chữ nhật ngoại tiếp một hình chữ nhật khác cho trước, có chiều rộng W, chiều dài L.[Gợi ý: Biểu diễn diện tích là hàm số theo một góc θ.]

72. Hệ thống tuần hoàn gồm mạch máu (động mạch, tĩnh mạch, mao quản . . .) chuyên chở máu từ tim đến các cơ quan rồi trở về tim. Hệ thống này hoạt động sao cho giảm thiểu năng lượng tiêu tốn nhất khi bơm máu. Đặc biệt, năng lượng này giảm khi sức cản trở của máu được hạ thấp. Một trong những định luật của Poiseuille cho biết sức cản trở R của máu cho bởi

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

trong đó L là độ dài của mạch máu, r là bán kính, và C là hằng số dương xác định bởi độ nhớt của máu. (Poiseuille khám phá định luật này bằng thực nghiệm, nhưng nó cũng là kết quả của Phương trình 8.4.2) Hình dưới cho thấy một mạch máu có bán kính r_1 đâm một nhánh nhỏ hơn có bán kính r_2 và tạo với mạch máu chính một góc θ.

(a) Dùng Định luật Poiseuille để chứng tỏ rằng tổng các sức cản trở dòng máu chạy dọc theo đường ABC là

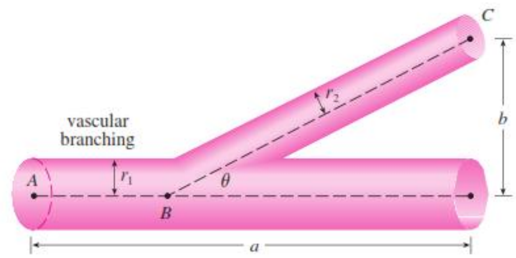
$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

trong đó a và b là những khoảng cách cho trong hình.

(b) Chứng tỏ rằng sức cản trở này nhỏ nhất khi

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Tìm góc rẻ tối ưu (làm tròn đến độ) khi bán kính của mạch máu nhỏ bằng hai phần ba bán kính của mạch máu lớn.



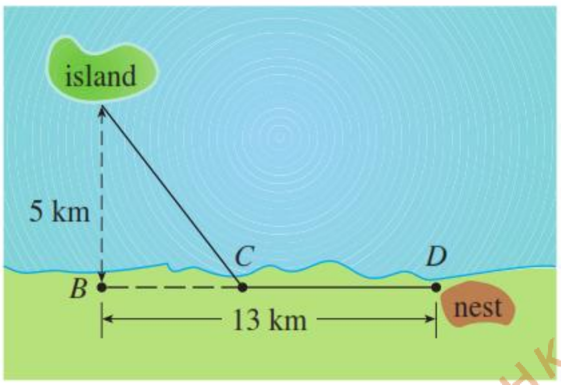
73. Các nhà điểu học (nghiên cứu về chim) đã khẳng định rằng một số loài chim có khynh hướng tránh bay qua những vùng nước mênh mông khi quay vào ban ngày. Họ tin rằng bay qua vùng nước cần nhiều năng lượng hơn khi bay qua vùng đất vì ban ngày không khí thường bay lên từ mặt đất trong khi lại hạ thấp xuống mặt nước. Một con chim thuộc loài này được thả cho bay từ một hòn đảo cách điểm B gần nhất trên bờ biển thẳng băng 5 km, bay đến điểm C trên bờ biển, và rồi bay dọc theo bờ biển đến điểm làm tổ D. Giả sử theo bản năng chim sẽ chọn lộ trình bay ít tốn năng lượng nhất. Điểm B và D cách nhau 13 km.

(a) Về tổng quát, nếu phải cần 1.4 lần năng lượng để bay qua mặt nước so với bay qua mặt đất, hỏi chim phải bay đến điểm C ở đâu để ít tiêu tốn năng lượng nhất khi trở về tổ D.

(b) Cho W và L là năng lượng (tính bằng joule) cần để bay qua 1 km mặt nước và mặt đất theo thứ tự. Một giá trị lớn của W/L có nghĩa gì đối với chuyến bay của chim? Một giá trị nhỏ nghĩa là gì? Xác định tỷ số W/L tương ứng với sự tiêu tốn năng lượng nhỏ nhất.

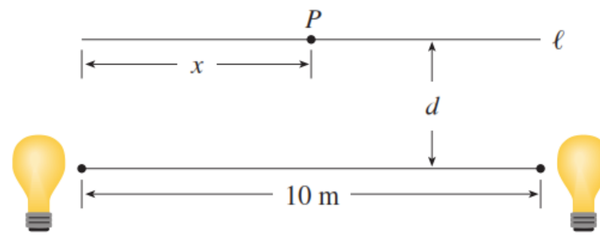
(c) Giá trị W/L phải thế nào để chim bay trực tiếp đến điểm tổ D? Giá trị W/L phải thế nào để chim bay đến B rồi bay dọc theo bờ biển đến D?

(d) Nếu các nhà điểu học quan sát thấy rằng một loài chim nào đó bay đến bờ biển tại một điểm cách B 4 km,hỏi như vậy loài chim đó khi bay qua mặt nước cần số năng lương gấp bao nhiêu lần khi bay qua mặt đất?



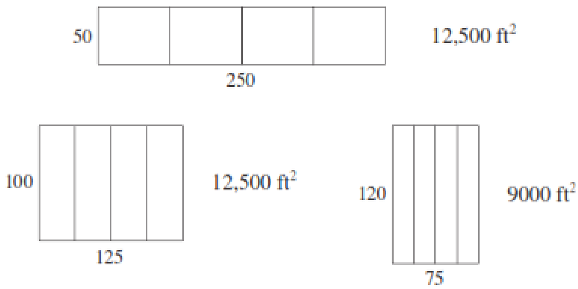
74. Hai nguồn sáng có cùng cường độ đặt cách nhau 10m. Một vật thể được đặt ở vị trí P trên đoạn thẳng ℓ song song với đoạn thẳng nối hai nguồn sáng và cách đoạn này một khoảng là d. Chúng ta phải tìm vị trí P sao cho vật thể tại đây nhận ít lượng sáng nhất. Nhớ rằng lượng ánh sáng nhận được từ một nguồn tỉ lệ thuận với cường độ chiếu sáng và tỉ lệ nghịch với khoảng cách đến nguồn.

a. Tìm biểu thị I(x), lượng ánh sáng nhận được tại điểm P.
b. Cho d = 5m, dùng đồ thị của I(x) và I'(x) để chứng tỏ rằng I(x) nhỏ nhất khi x = 5 m, nghĩa là khi P là trung điểm của đoạn ℓ.
c. Cho d = 10m, chứng tỏ I(x) nhỏ nhất không phải tại trung điểm (một kết quả đáng ngạc nhiên).
d. Đâu đó giữa d = 5 m và d = 10 m có một giá trị chuyển tiếp của d tại đó điểm có độ sáng nhỏ nhất đột ngột thay đổi. Ước tính giá trị này của d bằng phương pháp đồ thị. Sau đó tìm giá trị chính xác này của d.



ĐÁP SỐ

1. (a) 11, 12 (b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10
5. 25 m by 25 m **7.** $N = 1$
9. (a)



(b)

(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 750$ (e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$
(f) $14{,}062.5 \text{ ft}^2$
11. 1000 ft by 1500 ft **13.** 4000 cm^3 **15.** \$191.28
17. $\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$ **19.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **21.** Square, side $\sqrt{2}\,r$
23. $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$ **25.** Base $\sqrt{3}\,r$, height $3r/2$
27. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **29.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **31.** 24 cm, 36 cm
33. (a) Use all of the wire for the square
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m for the square
35. Height = radius = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm **37.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$
41. $E^2/(4r)$
43. (a) $\frac{3}{2}S^2 \csc\theta\,(\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$
45. Row directly to B **47.** $\approx$4.85 km east of the refinery
49. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ ft from the stronger source
51. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$
53. (b) (i) \$342,491; \$342/unit; \$390/unit (ii) 400
(iii) \$320/unit
55. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ (b) \$9.50
57. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) \$175 (c) \$100
61. 9.35 m **65.** $x = 6$ in. **67.** $\pi/6$
69. At a distance $5 - 2\sqrt{5}$ from A **71.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$
73. (a) About 5.1 km from B (b) C is close to B; C is close to D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, where $x = |BC|$ (c) $\approx$1.07; no such value (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$