

CHƯƠNG 2. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

GV. Nguyễn Hữu Hiệp



Bộ môn toán Ứng dụng, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh.

E-mail: nguyenhuuhiep@hcmut.edu.vn

BACHKHOACNCP.COM



Giới thiệu môn học

- Thời gian học: Lý thuyết 12 tuần = 36 tiết; Bài tập = 6 tuần = 12 tiết.
- Bài tập: dự kiến - 5% điểm môn học.
- Bài tập lớn: Làm theo nhóm, báo cáo tuần cuối cùng - 20% điểm môn học.
- Giữa kỳ: thi trắc nghiệm cuối - 25% điểm môn học.
- Cuối kỳ: thi trắc nghiệm + điền đáp án - 50% điểm môn học.
- Điểm cuối kỳ ≤ 2 điểm thì
điểm tổng kết = $\min(\text{Điểm cuối kỳ, điểm tổng kết theo tỷ lệ})$.

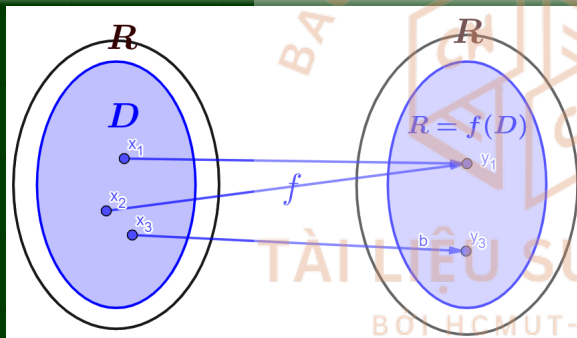
TÀI LIỆU SƯ U TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

- 1 Đại cương về hàm số
- 2 Hàm hợp(Composite)
- 3 Các hàm số thường gặp
- 4 Hàm số ngược
- 5 Hàm HYPERBOLIC
- 6 Bài tập

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Định nghĩa hàm số

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một quy tắc tương ứng mỗi giá trị của $x \in D$ với duy nhất một giá trị $y = f(x) \in \mathbb{R}$



Miền xác định

$$D_f = \{x | f(x) \text{ có nghĩa}\}$$

Miền giá trị

$$R = \{y = f(x) | x \in D_f\}$$

Hình: Minh họa ánh xạ

Ví dụ 1

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

$$1/ y = f(x) = x^2$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 1

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

$$1/ \ y = f(x) = x^2$$

$$2/ \ y = \log(x)$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 1

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

1/ $y = f(x) = x^2$

2/ $y = \log(x)$

3/ $y = e^{-2x^2+1}$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 1(tiếp theo)

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

$$1/ y = f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 1(tiếp theo)

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

$$1/ y = f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$2/ y = (x - 1)^{\sqrt{3x+1}}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 1(tiếp theo)

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số

$$1/ y = f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$2/ y = (x - 1)^{\sqrt{3x+1}}$$

$$3/ y = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

4 cách cho một hàm số

- Mô tả bằng lời
- Dạng biểu thức
- Dạng đồ thị
- Dạng bảng

BACHKHOACNCP.COM



TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 2. Hàm số mô tả bằng lời

- Dân số thế giới theo thời gian t (năm): $S = S(t)$
- Số người mắc Virus19 trên thế giới theo thời gian t (năm)
- Số sinh viên tốt nghiệp từ trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia Tphcm theo thời gian t (năm).
- GDP của Việt Nam theo dân số.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

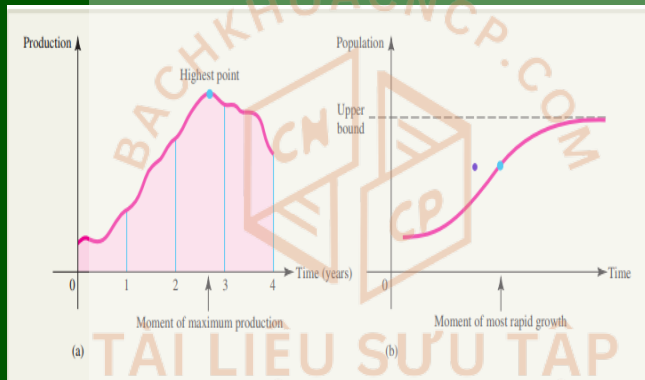
BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 2(tt) Hàm số dưới dạng đồ thị

Tổng giá trị
của ngành
công nghiệp
trong 4 năm

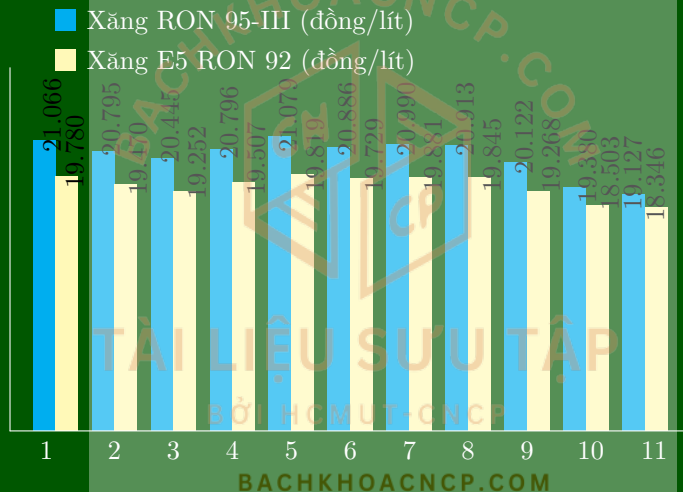


Dân số của
một quốc gia
theo thời gian

Hình: Minh họa hàm số dưới dạng đồ thị

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 2(tt) hàm số dạng đồ thị cột



Hình: Giá xăng 95 và Ron 92 kể từ khi xảy ra đại dịch Covid

Ví dụ 2(tt). Hàm số dưới dạng bảng số.

Nhiệt độ trung bình của một vùng theo các tháng trong một năm được cho bởi bảng số liệu sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	17	17	20	24	27	28	29	28	27	25	21	18

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Cho hàm số ở dạng biểu thức

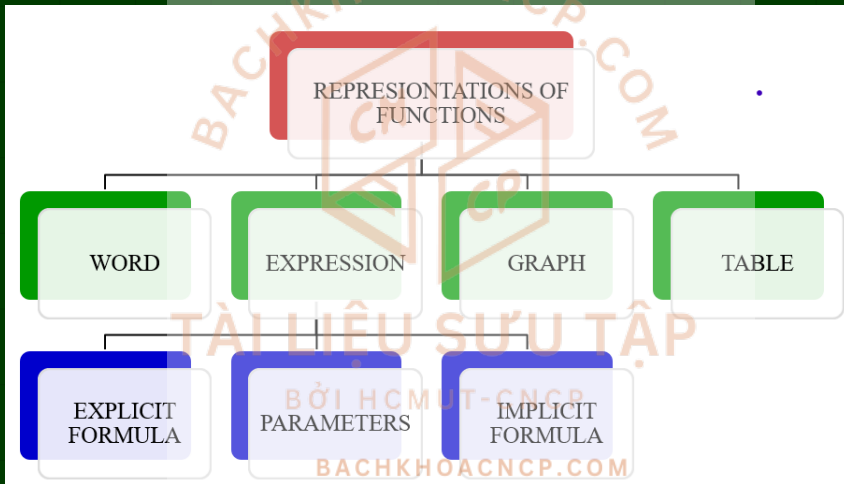
- Dạng tường minh: $y = f(x)$
- Dạng tham số: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$
- Dạng hàm ẩn: $F(x, y) = 0$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Tổng kết



Ví dụ 3

Tìm hàm chi phí sử dụng nước $C(x)$ (ngàn đồng) theo x (khối) nước sử dụng. Biết rằng đơn giá được cho bởi bảng sau

Mức sử dụng/tháng	0-10	11-20	21-30	>30
Giá mỗi khối	6	8	10	18

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 4

Chi phí tiêm chủng cho $x\%$ dân số của 1 quốc gia được cho bởi $C(x) = \frac{150x}{200 - x}$.

Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 5

Một gia đình dự định tổ chức tiệc ở một nhà hàng. Mức phục vụ chung cho bữa tiệc (mặt bằng, trang trí, ...) là 5 triệu đồng. Nhà hàng nhận tối thiểu 2 bàn, mỗi bàn 10 người. Giá cho mỗi khách ăn là 250 ngàn đồng. Gia đình dự tính chi tối đa 25 triệu. Nếu gọi x là số khách mời, $C(x)$ là chi phí cho bữa tiệc. Tìm miền xác định và miền giá trị của C .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 6.

Có 2 công ty cho thuê xe dịch vụ với giá thuê được tính như sau. Công ty X: giá lăn bánh là 20\$ và thêm 16\$ cho mỗi km đi được. Công ty Y: giá lăn bánh là 40\$ và thêm 12\$ cho mỗi km đi được. Bạn hãy tư vấn cho người thuê xe dịch vụ phù hợp.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Các hàm trong kinh tế

Xem xét thị trường của một ngành kinh tế phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x .

- Hàm cầu (Demand function) $D(x)$ là giá của mỗi sản phẩm khi x sản phẩm được bán ra thị trường

$$p(x) = D(x).$$

Đặc điểm: $D(x)$ thông thường là một hàm giảm.

- Hàm cung (Supply.F) $S(x)$ là giá của mỗi sản phẩm khi có x sản phẩm được cung cấp đến thị trường

$$p(x) = S(x).$$

Đặc điểm: $S(x)$ thông thường là một hàm tăng.

- Doanh thu (Revenue.F) $R(x)$ là số tiền thu được từ việc bán x sản phẩm

$$R(x) = x.p(x).$$

Các hàm trong kinh tế

Xem xét thị trường của một ngành kinh tế phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x .

- Hàm chi phí (Cost.F) $C(x)$ là tổng chi phí để sản xuất ra x sản phẩm.
- Lợi nhuận (Profit.F) $P(x)$ là lợi nhuận thu được từ x sản phẩm

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x).$$

- Hàm chi phí trung bình (Average.C.F); doanh thu trung bình(Average.R.F) và lợi nhuận trung bình(Average.P.F)

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}; \quad AR(x) = \frac{R(x)}{x} = p(x); \quad AP(x) = \frac{P(x)}{x}$$

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 7.

Chi phí để sản xuất x sản phẩm (theo ngày) của một công ty được cho bởi $C(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 200(\text{\$})$.

a/ Tính chi phí để sản xuất 18 sản phẩm /ngày. Số 200 trong công thức có ý nghĩa gì?

b/ Tính chi phí để sản xuất sản phẩm thứ 10.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 7.

Chi phí để sản xuất x sản phẩm (theo ngày) của một công ty được cho bởi $C(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 200(\text{\$})$.

- a/ Tính chi phí để sản xuất 18 sản phẩm /ngày. Số 200 trong công thức có ý nghĩa gì?
- b/ Tính chi phí để sản xuất sản phẩm thứ 10.
- c/ Tính giá trung bình mỗi sản phẩm khi sản xuất 10 sản phẩm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 7.

Chi phí để sản xuất x sản phẩm (theo ngày) của một công ty được cho bởi $C(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 200$ (\$).

a/ Tính chi phí để sản xuất 18 sản phẩm /ngày. Số 200 trong công thức có ý nghĩa gì?

b/ Tính chi phí để sản xuất sản phẩm thứ 10.

c/ Tính giá trung bình mỗi sản phẩm khi sản xuất 10 sản phẩm.

$C(18)=5312$, 200: chi phí cố định.

$C(10)-C(9)=201$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 8.

Giá mỗi sản phẩm được cho bởi $p = 80 - x$ (\$) ứng với x (nghìn) sản phẩm trên thị trường.

a/ Tìm hàm doanh thu và vẽ đồ thị.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 8.

Giá mỗi sản phẩm được cho bởi $p = 80 - x$ (\$) ứng với x (nghìn) sản phẩm trên thị trường.

a/ Tìm hàm doanh thu và vẽ đồ thị.

b/ Tìm doanh thu lớn nhất.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 9.

Nồng độ khí CO trong không khí trong một thị trấn p (nghìn dân) được cho bởi $c(p) = 2 + 0.3p$ (phần triệu). Biết rằng, dân số tăng lên sau t (năm) kể từ lúc khảo sát là $p(t) = 50 + 0.7t$ (nghìn người).

a/ Tìm hàm nồng độ CO trong không khí theo thời gian

b/ Sau bao nhiêu năm thì nồng độ CO đạt mức 5 phần triệu.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

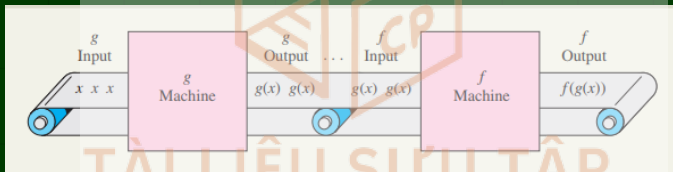
- 1 Đại cương về hàm số
- 2 Hàm hợp(Composite)
- 3 Các hàm số thường gặp
- 4 Hàm số ngược
- 5 Hàm HYPERBOLIC
- 6 Bài tập



Hàm hợp

Cho 2 hàm số $g : X \rightarrow Y$ và $f : Y \rightarrow Z$. Hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa bởi

$$f \circ g : X \rightarrow Z, z = f \circ g(x) = f(g(x)).$$



Hình: Minh họa hàm hợp $z = f \circ g(x)$

Ví dụ 10.

Tìm hàm hợp

a/ Cho 2 hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ và $f(x) = 2x - 1$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 10.

Tìm hàm hợp

a/ Cho 2 hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ và $f(x) = 2x - 1$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.

b/ Cho 2 hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2}$ và $f(x) = \sqrt{x-1}$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$ và miền xác định tương ứng.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 11(tiếp theo)

Tìm hàm hợp

c/ Cho 2 hàm số $g(x) = e^{-x}$ và $f(x) = \frac{x - 2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 11(tiếp theo)

Tìm hàm hợp

c/ Cho 2 hàm số $g(x) = e^{-x}$ và $f(x) = \frac{x - 2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.

d/ Cho 2 hàm số $g(x) = \ln x$ và $f(x) = \sin x$. Tìm hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$ và miền xác định tương ứng.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 12.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ dưới dạng bảng sau

x	1	3	4	6	9	10	12
f(x)	-2	1	4	6	15	20	3
g(x)	0	-5	1	9	11	16	10

Tính $f \circ g(6)$, $f \circ g(12)$, $g \circ f(4)$, $g \circ f(12)$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 13.

Cho 2 hàm số $f(x) = x^2 - 3x$ và $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 + 3, & x < 1 \end{cases}$. Tính $f \circ g(2), f \circ g(5)$
và $g \circ f(-1), g \circ f(3)$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 14.

Chi phí để sản xuất r ghế mỗi giờ được cho bởi $C(r) = r^3 - 50r + \frac{1}{r}(USD)$, trong đó nếu chủ sở hữu trả lương cho công nhân $w(USD/h)$ thì mỗi giờ sản xuất được $r(w) = 4 + 0,3w$ ghế.

a/ Tìm hàm chi phí sản xuất theo tiền lương mỗi giờ.

b/ Nếu trả lương $20USD/h$ thì chi phí sản xuất mỗi giờ là bao nhiêu?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 15.

Dân số ở một thị trấn sau t (năm) được cho bởi $p(t) = 10 + 0,1t^2$ (ngàn người).
Nghiên cứu cho biết tỷ lệ CO_2 trong không khí là $c(p) = 0,5p + 1$ (phần triệu).

a/ Tìm hàm tỷ lệ CO_2 trong không khí theo thời gian.

b/ Tại thời điểm nào thì tỷ lệ CO_2 đạt 6,8 (phần triệu).

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

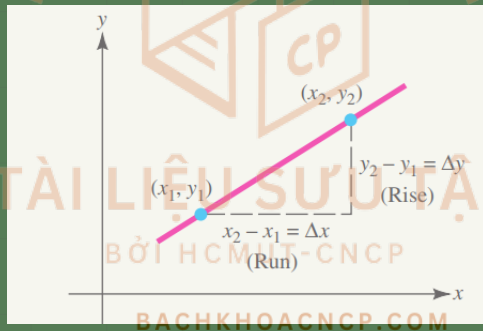
- 1 Đại cương về hàm số
- 2 Hàm hợp(Composite)
- 3 Các hàm số thường gặp
- 4 Hàm số ngược
- 5 Hàm HYPERBOLIC
- 6 Bài tập



Hàm tuyến tính $y = f(x) = ax + b$

a gọi là tốc độ thay đổi của hàm số, hay độ dốc(slope) của đường thẳng, hay hệ số góc của đường thẳng. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b gọi là y intercept: là tung độ giao điểm của đường thẳng và Oy .



Hình 1. Đồ thị hàm tuyến tính

Ví dụ 16.

Cho đường thẳng $\Delta : 3x + 2y = 6$. Tìm tốc độ thay đổi và y intercept của hàm số.



Ví dụ 16.

Cho đường thẳng $\Delta : 3x + 2y = 6$. Tìm tốc độ thay đổi và y intercept của hàm số.

Ví dụ 17.

Tìm phương trình của đường thẳng có độ dốc bằng 2 và đi qua điểm $(1; -1)$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 18.

Một nhà quản lý cho biết chi phí cố định của nhà máy là 200\$ và chi phí để sản xuất mỗi sản phẩm là 5\$. Tìm biểu thức của hàm chi phí.

BACH KHOA CNCP

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 19

Giá của mỗi hộp sữa hàng năm tăng lên 2 cents mỗi tháng. Tháng giêng, giá mỗi hộp sữa là 1,56\$. Tìm hàm giá của mỗi hộp sữa theo thời gian t (tháng) trong năm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 20

Cho một bánh xe có bán kính 50cm lăn trên 1 đường thẳng với vận tốc không đổi 100cm/s . Tại thời điểm ban đầu, bánh xe tiếp xúc với mặt đất tại điểm M . Hãy xác định vị trí của điểm M theo thời gian t .

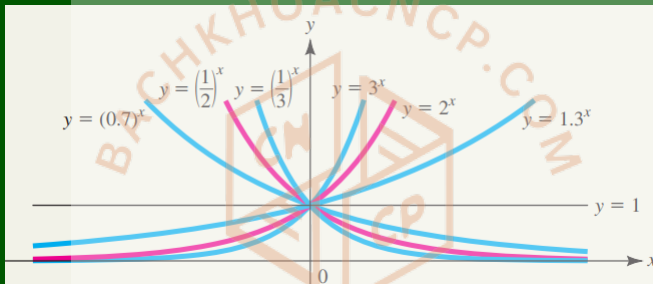
TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Hàm số mũ $f(x) = b.a^x, a > 0$



Hình: Đồ thị hàm số mũ

Hàm mũ thương gặp là $f(x) = e^x$, trong đó $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459$.

Hàm mũ $f(x) = ba^x$ dùng để biểu diễn đại lượng hàm số tăng hoặc giảm a lần theo biến số.

Ví dụ 21

Lượng adrenaline trong cơ thể thay đổi rất nhanh. Giả sử ban đầu cơ thể có 15mg adre., lập hàm số mô tả lượng adre. $A = f(t)$ trong cơ thể theo thời gian t (phút) với các trường hợp sau:

a. A tăng 0.4mg mỗi phút.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 21

Lượng adrenaline trong cơ thể thay đổi rất nhanh. Giả sử ban đầu cơ thể có 15mg adre., lập hàm số mô tả lượng adre. $A = f(t)$ trong cơ thể theo thời gian t (phút) với các trường hợp sau:

- A tăng 0.4mg mỗi phút.
- A giảm 0.4mg mỗi phút.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 21

Lượng adrenaline trong cơ thể thay đổi rất nhanh. Giả sử ban đầu cơ thể có 15mg adre., lập hàm số mô tả lượng adre. $A = f(t)$ trong cơ thể theo thời gian t (phút) với các trường hợp sau:

- a. A tăng 0.4mg mỗi phút.
- b. A giảm 0.4mg mỗi phút.
- c. A tăng 3% mỗi phút.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 21

Lượng adrenaline trong cơ thể thay đổi rất nhanh. Giả sử ban đầu cơ thể có 15mg adre., lập hàm số mô tả lượng adre. $A = f(t)$ trong cơ thể theo thời gian t (phút) với các trường hợp sau:

- a. A tăng 0.4mg mỗi phút.
- b. A giảm 0.4mg mỗi phút.
- c. A tăng 3% mỗi phút.
- d. A giảm 3% mỗi phút.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 22

Một chủ công ty sản xuất một loại sản phẩm bán x sản phẩm với giá $p(x) = 200e^{-0,01x}$ (USD).

a. Tìm doanh thu của công ty của đơn hàng 100 sản phẩm.

b. Giá sản xuất x sản phẩm được cho bởi $C(x) = 50 + 100x$. Tìm hàm lợi nhuận của công ty theo số sản phẩm x .

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 23

Theo thống kê ngày 1/7/2000, dân số nước ta khoảng 7.7685.500 người. Giả sử tỷ lệ tăng dân số trung bình ở nước ta không đổi là $1,2\%/năm$.

a/ Tìm hàm dân số theo thời gian t (năm) kể từ lúc khảo sát.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 23

Theo thống kê ngày 1/7/2000, dân số nước ta khoảng 7.7685.500 người. Giả sử tỷ lệ tăng dân số trung bình ở nước ta không đổi là $1,2\%/năm$.

a/ Tìm hàm dân số theo thời gian t (năm) kể từ lúc khảo sát.

b/ Dự đoán dân số nước ta vào tháng 1/1/2023.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 23

Theo thống kê ngày 1/7/2000, dân số nước ta khoảng 7.7685.500 người. Giả sử tỷ lệ tăng dân số trung bình ở nước ta không đổi là $1,2\%/năm$.

a/ Tìm hàm dân số theo thời gian t (năm) kể từ lúc khảo sát.

b/ Dự đoán dân số nước ta vào tháng 1/1/2023.

c/ Dự đoán đến thời điểm nào thì nước ta đạt 100 triệu người.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

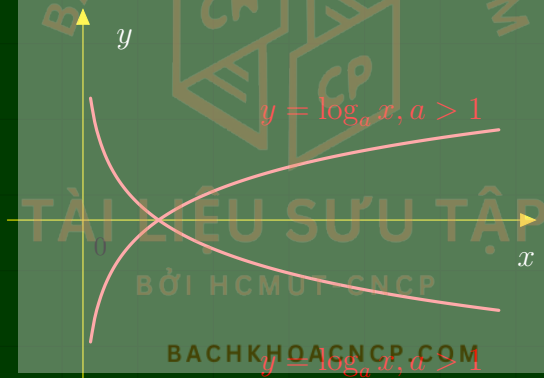
BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Hàm Logarit $y = f(x) = \log_a x, 1 \neq a > 0$

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

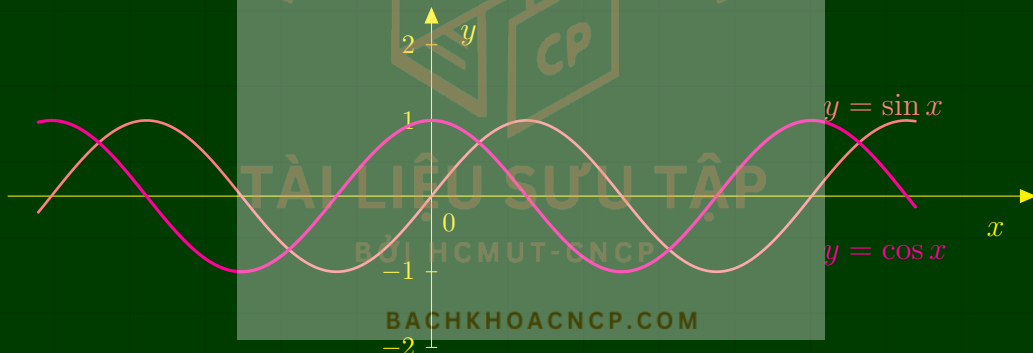
$$D = (0, +\infty), R = \mathbb{R}$$



Hàm lượng giác $y = \sin x$ và $y = \cos x$

Tuần hoàn với chu kỳ 2π : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

$D = \mathbb{R}, R = [-1; 1]$.



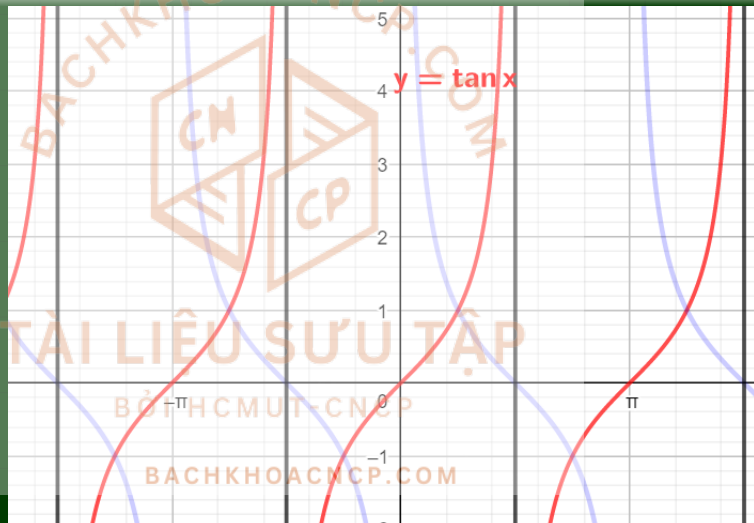
Hàm lượng giác $y = \tan x$ và $y = \cot x$

$$y = \tan x :$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$y = \cot(x) :$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$



Song ánh

Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ gọi là song ánh nếu mỗi giá trị $y \in Y$, tồn tại duy nhất $x \in X : f(x) = y$.

Hay một cách khác, cho mỗi tham số $y \in Y$, phương trình

$$f(x) = y$$

luôn có nghiệm duy nhất.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Với $y = 0$, phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Vậy f không song ánh.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Với $y = 0$, phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Vậy f không song ánh.

b/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Với $y = 0$, phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Vậy f không song ánh.

b/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

Với $y = -1$, phương trình $f(x) = y$ vô nghiệm. Vậy f không song ánh.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Với $y = 0$, phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Vậy f không song ánh.

b/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

Với $y = -1$, phương trình $f(x) = y$ vô nghiệm. Vậy f không song ánh.

c/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 24

Xét tính song ánh của các hàm số sau

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$.

Với $y = 0$, phương trình $f(x) = y$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Vậy f không song ánh.

b/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

Với $y = -1$, phương trình $f(x) = y$ vô nghiệm. Vậy f không song ánh.

c/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

Với mọi $y \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x) = y \iff 2x + 3 = y \iff x = \frac{1}{2}(y - 3)$. Vì phương trình $f(x) = y$ luôn có nghiệm duy nhất nên f là một song ánh.

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 24(tiếp theo)

Xét tính song ánh của các hàm số sau

d/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 24(tiếp theo)

Xét tính song ánh của các hàm số sau

d/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Với $y = -1$ thì PT $f(x) = y$ vô nghiệm. Với $y = 1$, PT $f(x) = y \iff x = \pm 1$.

Vậy f không song ánh.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 24(tiếp theo)

Xét tính song ánh của các hàm số sau

d/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Với $y = -1$ thì PT $f(x) = y$ vô nghiệm. Với $y = 1$, PT $f(x) = y \iff x = \pm 1$.

Vậy f không song ánh.

Tuy nhiên, nếu xét $x \in [0, +\infty)$ và $y \in [0, +\infty)$ thì phương trình $f(x) = y \iff x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$ có duy nhất nghiệm.

Vậy $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ là một song ánh.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Hàm ngược

Cho hàm số $f : X \rightarrow Y, y = f(x)$ là một song ánh. Khi đó, hàm số $g : Y \rightarrow X, x = g(y)$ thỏa $y = f(x)$ gọi là hàm ngược của f . Ký hiệu

$$g = f^{-1}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Hàm ngược

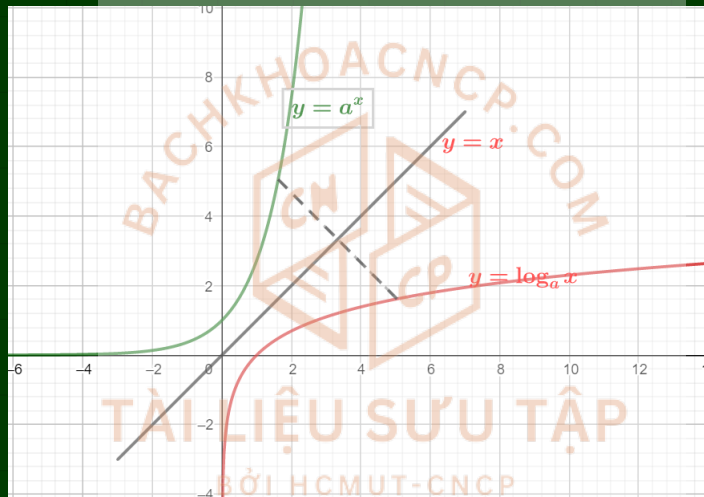
Cho hàm số $f : X \rightarrow Y, y = f(x)$ là một song ánh. Khi đó, hàm số $g : Y \rightarrow X, x = g(y)$ thoả $y = f(x)$ gọi là hàm ngược của f . Ký hiệu

$$g = f^{-1}$$

- f là quy tắc cho x để tìm y . f^{-1} là quy tắc ngược lại, cho y để tìm x .
- $f^{-1}(f(x)) = x$ và $f(f^{-1}(y)) = y$. Hay cách khác

$$f \circ f^{-1} = Id_Y, \quad f^{-1} \circ f = Id_X.$$

- Cách tìm f^{-1} : với mỗi $y \in Y$, ta giải phương trình $f(x) = y$ suy ra $x = f^{-1}(y)$.
- Đồ thị của 2 hàm ngược nhau đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.



Hình: Đồ thị 2 hàm ngược nhau đối xứng qua đường phân giác thứ 1

Ví dụ 25

Tìm hàm ngược $f^{-1}(x)$

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3.$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 25

Tìm hàm ngược $f^{-1}(x)$

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3.$

$$\forall y \in \mathbb{R} : f(x) = y \iff x = \frac{1}{2}(y - 3)$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 25

Tìm hàm ngược $f^{-1}(x)$

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3.$

$$\forall y \in \mathbb{R} : f(x) = y \iff x = \frac{1}{2}(y - 3) = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3).$$

b/ $f : (-\infty, 1] \rightarrow [-1, +\infty), f(x) = x^2 - 2x.$

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 25

Tìm hàm ngược $f^{-1}(x)$

a/ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3.$

$$\forall y \in \mathbb{R} : f(x) = y \iff x = \frac{1}{2}(y - 3) = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3).$$

b/ $f : (-\infty, 1] \rightarrow [-1, +\infty), f(x) = x^2 - 2x.$

$$\forall y \in [-1, +\infty) : f(x) = y \iff x^2 - 2x = y \iff x = 1 - \sqrt{y + 1} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{y + 1} : [-1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 1].$$

c/ $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}.$

d/ $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}.$

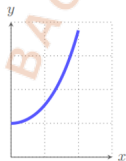
f/ $f(e^x) = 3(x + 1)^3.$

g/ Cho $f(e^x) = \ln x^3.$

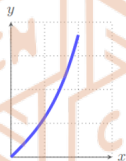
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 26

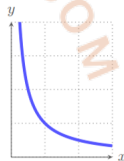
Cho 6 hàm số có đồ thị như bên dưới. Tìm cặp các hàm ngược tương ứng.



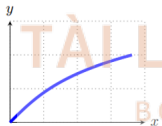
(a)



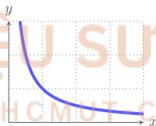
(b)



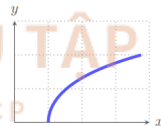
(c)



(d)



(e)



(f)

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 25.

Tại một thị trấn, mật độ dân số tại vị trí cách trung tâm thành phố x (dặm) được xác định bởi $Q(x) = Ae^{-kx}$.

a/ Tìm hàm ngược của $Q(x)$.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ 25.

Tại một thị trấn, mật độ dân số tại vị trí cách trung tâm thành phố x (dặm) được xác định bởi $Q(x) = Ae^{-kx}$.

a/ Tìm hàm ngược của $Q(x)$.

b/ Cho biết mật độ tại trung tâm thành phố là 15.000 người/ dặm vuông và tại vị trí cách trung tâm 10 dặm là 9000 người/ dặm vuông. Tìm mật độ dân số tại M cách trung tâm 6 dặm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Hàm lượng giác ngược

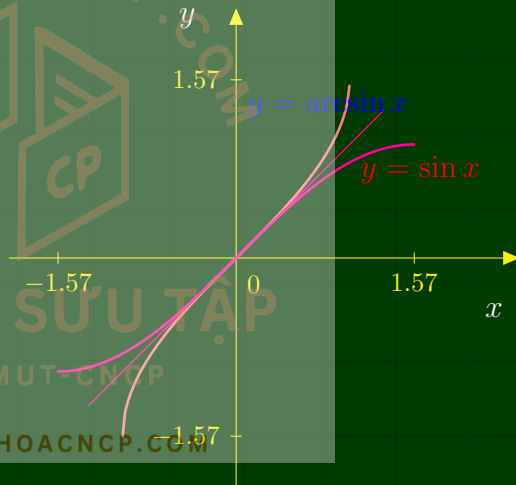
- $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$ song ánh.

hàm ngược

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

- $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], y \in [-1, 1] :$

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y$$



Hàm lượng giác ngược(tt)

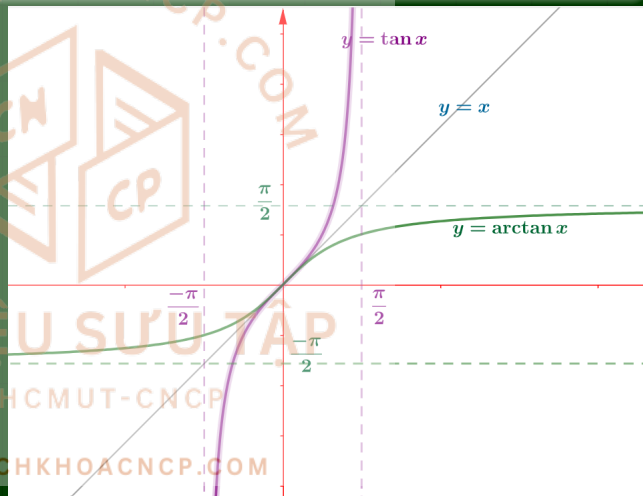
- $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh.

hàm ngược

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in \mathbb{R} :$

$$y = \tan x \iff x = \arctan y$$



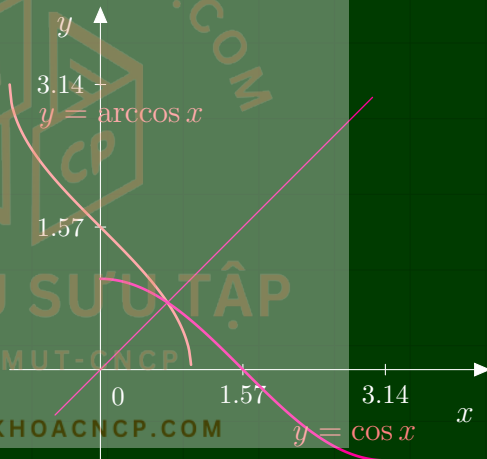
Hàm lượng giác ngược(tt)

- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ song ánh.
hàm ngược

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

- $x \in [0, \pi], y \in [-1, 1] :$

$$y = \cos x \iff x = \arccos y$$



Ví dụ 27.

Tính các giá trị sau

a/ $\arcsin 0$

b/ $\arcsin(-1)$

c/ $\arcsin(\pi/2)$

d/ $\arcsin(\sqrt{3}/2)$

e/ $\arccos 0$

f/ $\arccos(1)$

g/ $\arccos(\pi)$

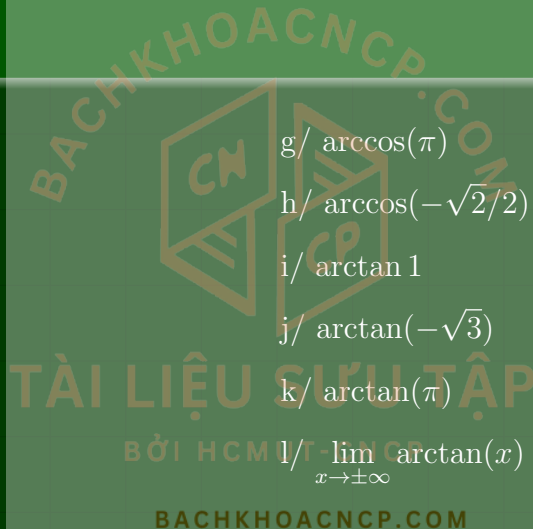
h/ $\arccos(-\sqrt{2}/2)$

i/ $\arctan 1$

j/ $\arctan(-\sqrt{3})$

k/ $\arctan(\pi)$

l/ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x)$



Hàm HYPERBOLIC

$$\sinh x = \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}, \quad \text{cth}(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}.$$

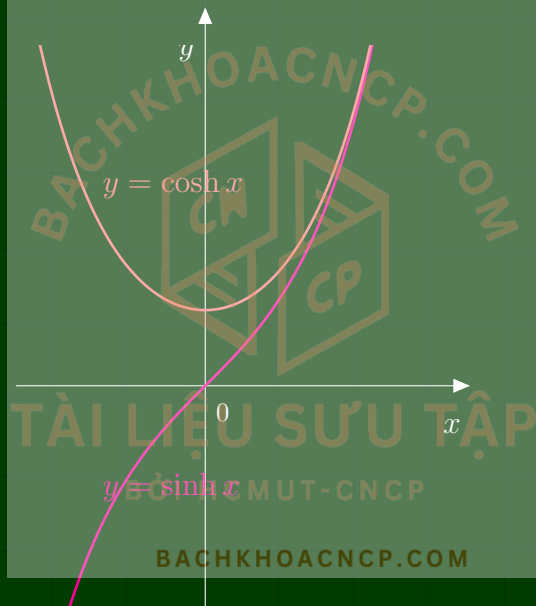
Các công thức lượng giác bình thường (công thức cộng, nhân, tích thành tổng, tổng thành tích), khi ta thay

$$\sin \rightarrow i \sinh, \cos \rightarrow \cosh, \tan \rightarrow i \tanh, \cot \rightarrow -i \text{cth},$$

ta được các công thức Hyperbolic tương ứng.

BACHKHOACNCP.COM





- 1 Đại cương về hàm số
- 2 Hàm hợp(Composite)
- 3 Các hàm số thường gặp
- 4 Hàm số ngược
- 5 Hàm HYPERBOLIC
- 6 Bài tập



Ví dụ 28.

Một bác sỹ mua một quyển sách với giá 1500 USD. Giả sử giá trị của sách giảm đều đặn a USD sau mỗi năm và đến cuối năm thứ 10, giá trị của sách còn 230 USD.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 29

Tổng chi phí cho hoạt động nghiên cứu và phát triển (NCPT) ở một quốc gia A trong giai đoạn từ năm 2003 đến năm 2020, tính theo tỷ USD, được cho bởi hàm số $S(t) = 73,77 \ln(5 + t) + 67,75$ trong đó t tính theo năm và $t = 0$ tương ứng là năm 2003. Tìm $S^{-1}(289)$ và cho biết ý nghĩa.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 30.

Dân số của một thành phố vào năm 2008 là 50.000. Mỗi năm tỷ lệ gia tăng là 4,5%.

- a/ Lập một hàm số mô tả dân số từ năm 2008 của thành phố này.
- b/ Dân số vào năm 2018 là bao nhiêu?
- c/ Khi nào thì dân số đạt 100.000.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 31.

Một công ty sản xuất ghế với chi phí vận hành nhà máy là 66.500 (USD) mỗi tuần và 20 (USD) mỗi ghế được làm ra. Thị trường sẽ tiêu thụ x ghế mỗi tuần nếu bán với giá $p(x) = 1.500 - 2x(USD)$. Công suất tối đa của nhà máy là 300 ghế/tuần.

- a/ Công ty phải bán giá bao nhiêu để hoà vốn? Lúc đó, giá bán được là bao nhiêu?
- b/ Nếu bán được 35 ghế thì công ty lời hay lỗ bao nhiêu?
- c/ Để thu được lợi nhuận 80.000USD, Công Ty phải niêm yết giá bao nhiêu?

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 32.

Tính từ đầu năm 2019, một loại gạo tăng đều đặn 150 đồng/kg mỗi tháng. Biết rằng vào đầu tháng 11/2019, giá của loại gạo này là 14600 đồng/kg. Tìm hàm số mô tả giá của loại gạo này trong năm 2019 và tìm giá gạo ở thời điểm đầu năm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 33.

Tính từ đầu năm 2019, giá một loại gạo tăng $1\%/kg$ mỗi tháng. Biết rằng vào đầu tháng 11/2019, giá của loại gạo này là 14600 đồng/kg. Tìm hàm số mô tả giá của loại gạo này trong năm 2019 và tìm giá gạo ở thời điểm đầu năm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 34.

Doanh thu bình quân hàng năm của chuỗi nhà hàng McDonald được cho bởi hàm số $R(t) = 19.1 + 1.8t$, trong đó R tính theo tỷ đô la và t tính theo năm, kể từ tháng 1/2005.

- Giải thích ý nghĩa của hệ 1.8 theo doanh thu của McDonald (cho biết đơn vị).
- Giải thích ý nghĩa của giao điểm của đồ thị với trục tung.
- Dự đoán doanh thu của hệ thống trong năm 2015.
- Dự đoán khi nào thu nhập đạt 35 tỷ đô.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



Ví dụ 35.

Chi phí cố định hàng năm (thuế, bảo trì..) của một chiếc xe hơi là 1000\$. Chi phí cho mỗi km xe chạy là 0,8\$. Tìm hàm chi phí theo số km chạy được trong một năm.

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM



THANK YOU FOR
ATTENTION

TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

