

CHƯƠNG 8

TƯƠNG QUAN VÀ HỒI QUY MẪU

Với một mẫu đồng thời của vectơ ngẫu nhiên $Z = (X, Y)$ ta có các ước lượng của các đặc trưng của Z , có đường xấp xỉ của đường hồi quy của Y theo X (hoặc X theo Y). Sau đây ta xét một vài vấn đề cụ thể.

8.1. HỆ SỐ TƯƠNG QUAN MẪU

1. Bảng tương quan mẫu

Một mẫu kích thước n đồng thời về X và Y có dạng bảng số liệu sau đây, gọi là bảng tương quan mẫu:

Bảng 8.1

<div><div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div></div><div><div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div></div></div></div>					
<div><div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div></div><div><div><div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div></div></div></div></div>	y_1	y_2	\dots	y_h	n_i
x_1	n_{11}	n_{12}	\dots	n_{1h}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	\dots	n_{2h}	n_2
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
x_k	n_{k1}	n_{k2}	\dots	n_{kh}	n_k
m_j	m_1	m_2	\dots	m_h	$\Sigma = n$

Trong bảng 8.1 ở trên:

$x_i (i = \overline{1, k})$ - là các giá trị mà X nhận

$y_j (j = \overline{1, h})$ - là các giá trị mà Y nhận

$n_i (i = \overline{1, k})$ - là số lần X nhận x_i

$m_j (j = \overline{1, h})$ - là số lần Y nhận y_j

$n_{i, j} (i = \overline{1, k}, j = \overline{1, h})$ - là số lần đồng thời X nhận x_i và Y nhận y_j

ta có:

$$\sum_{i=1}^k n_i = \sum_{j=1}^h m_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h n_{ij} = n$$

$$\sum_{j=1}^h n_{ij} = n_i; \sum_{i=1}^k n_{ij} = m_j$$

từ đó ta có các đặc trưng sau đây:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i, \quad \hat{s}_X^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^h y_j m_j; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^h y_j^2 m_j; \quad \hat{s}_Y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h n_{ij} x_i y_j$$

2. Hệ số tương quan mẫu

Ta gọi:

$$r_{XY} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\hat{s}_X \hat{s}_Y}$$

là hệ số tương quan mẫu giữa X và Y.

Hệ số tương quan mẫu là một ước lượng của hệ số tương quan (xem mục 5 phần 3.4 chương 3).

Ví dụ 8.1. Số vốn đầu tư X và lợi nhuận Y trong một đơn vị thời gian của 100 quan sát, được số liệu:

$x \backslash y$	0,3	0,7	1,0	n_i
1	20	10		30
2		30	10	40
3		10	20	30
m_j	20	50	30	$n = 100$

Tìm hệ số tương quan giữa X và Y.

Giải. Ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{100} (1.30 + 2.40 + 3.30) = 2,00$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{100} (1^2.30 + 2^2.40 + 3^2.30) = 4,60$$

$$s_x^2 = 4,6 - 2,00^2 = 0,6$$

$$\bar{y} = \frac{1}{100} (0,3.20 + 0,7.50 + 1,0.30) = 0,71$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{100} (0,3^2.20 + 0,7^2.50 + 1,0^2.30) = 0,563$$

$$s_y^2 = 0,563 - 0,71^2 = 0,0589$$

$$xy = \frac{1}{100} (0.3.20 + 0,7.10 + 1,4.30 + 2.10 + 2,1.10 + 3.20) = 1,56$$

từ đó hệ số tương quan mẫu là:

$$r_{xy} = \frac{1,56 - 2,00.0,71}{\sqrt{0,60.0,0589}} = 0,7447$$

8.2. ĐƯỜNG HỒI QUY

1. Đường hồi quy mẫu

Tiếp tục xét bảng 8.1. Với mỗi $i = \overline{1, k}$, đặt:

$$\bar{Y}_{x_i} = \left(\bar{Y} \mid X = x_i \right) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^h n_{ij} y_j$$

là trung bình mẫu của Y khi $X = x_i$.

Biểu diễn các điểm (x_i, \bar{Y}_{x_i}) lên mặt phẳng tọa độ và nối các điểm (x_i, \bar{Y}_{x_i}) và $(x_{i+1}, \bar{Y}_{x_{i+1}})$ bằng một đoạn thẳng ($i = \overline{1, k-1}$), ta được một đường gấp khúc,

gọi là đường hồi quy mẫu Y theo X .

Đường hồi quy mẫu là một xấp xỉ của đường hồi quy, tức là đồ thị của hàm $f(x) = E(Y \mid X=x)$ (xem phần 3.4 chương 3).

Tương tự ta cũng có đường hồi quy mẫu X theo Y .

Ví dụ 8.2. Điểm kiểm tra chất lượng môn toán (X) và môn văn (Y) của 100 học sinh, có số liệu:

$\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{X} \end{array}$		4	5	6	7	8	9	n_i
3	1	2						3
4		3	5	4				12
5			11	13	4			28
6				7	23	7		37
7					4	8	3	15
8						3	2	5
n_j	1	5	16	24	31	18	5	$n = 100$

Lập đường hồi quy mẫu Y theo X.

Giải. Ta có:

$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{3}(3.1 + 4.2) = 3,67$$

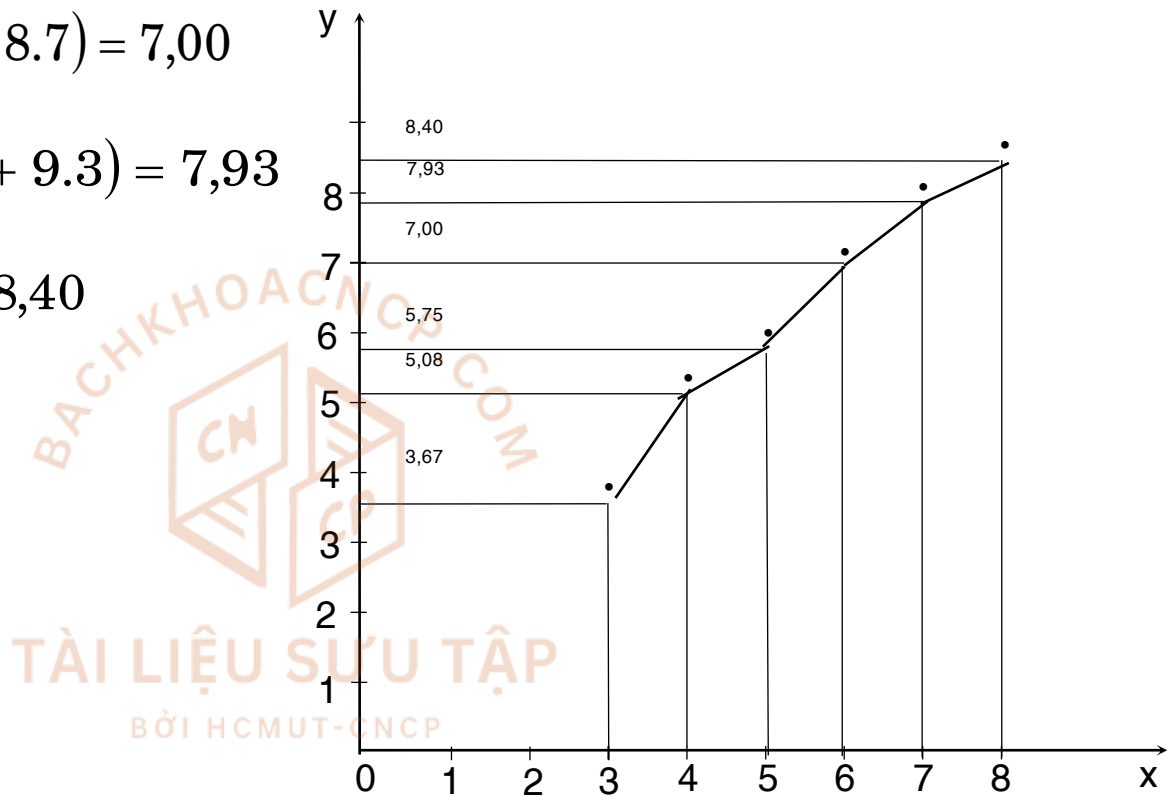
$$\bar{Y}_4 = \frac{1}{12}(4.3 + 5.5 + 6.4) = 5,08$$

$$\bar{Y}_5 = \frac{1}{28}(5.11 + 6.13 + 7.4) = 5,75$$

$$\bar{Y}_6 = \frac{1}{37}(6.7 + 7.23 + 8.7) = 7,00$$

$$\bar{Y}_7 = \frac{1}{15}(7.4 + 8.8 + 9.3) = 7,93$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{5}(8.3 + 9.2) = 8,40$$



Ta có đường hồi quy mẫu Y theo X như trong hình vẽ.

2. Đường hồi quy tuyến tính mẫu

1- Phương trình đường hồi quy tuyến tính mẫu

Đường hồi quy tuyến tính mẫu Y theo X là đường thẳng có phương trình:

$$y = ax + b$$

“gần” với đường hồi quy mẫu Y theo X nhất, theo nghĩa (a,b) là điểm cực tiểu của hàm:

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^k n_i \left[\bar{Y}_{x_i} - (ax_i + b) \right]^2$$

Định lý 8.1. Phương trình hồi quy mẫu Y theo X là:

$$y = ax + b$$

trong đó:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\hat{s}_X^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Chứng minh. $Q(a,b)$ là hàm hai biến có các đạo hàm riêng liên tục, bị chặn dưới bởi 0 nên Q có giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ chỉ ra Q có một điểm dừng duy nhất, khi đó tọa độ của điểm dừng chính là (a,b) muốn tìm.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_{x_i} - ax_i - b) \cdot x_i \\&= 2 \left(a \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i + b \sum_{i=1}^k n_i x_i - \sum_{i=1}^k n_i x_i \bar{Y}_{x_i} \right) \\&= 2 \left(na\bar{x}^2 + nb\bar{x} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k n_{ij} x_i x_j \right) \\&= 2n \left(a\bar{x}^2 + b\bar{x} - \overline{xy} \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_{x_i} - ax_i - b) \cdot 1 \\&= 2 \left(a \sum_{i=1}^k n_i x_i + b \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_{x_i} \right) \\&= 2 \left(na\bar{x} + nb - \sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right) \\&= 2n \left(a\bar{x} + b - \bar{y} \right)\end{aligned}$$

từ đó ta có điểm dừng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\bar{x}^2 + b\bar{x} = \overline{xy} \\ a\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases}$$

hay:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\hat{s}_X^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Hoàn toàn tương tự ta có đường hồi quy tuyến tính mẫu X theo Y.

Ví dụ 8.3. Với số liệu như trong ví dụ 8.2, hãy tìm đường hồi quy tuyến tính Y theo X.

Giải. Ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{100} (3.3 + 4.12 + 5.28 + 6.37 + 7.15 + 8.5) = 5,64$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{100} (3^2.3 + 4^2.12 + 5^2.28 + 6^2.37 + 7^2.15 + 8^2.5) = 33,06$$

$$\hat{s}_X^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 33,6 - 5,64^2 = 1,25$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{100} (3.1 + 4.5 + 5.16 + 6.24 + 7.31 + 8.18 + 9.5) = 6,53$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{1}{100} (3.3.1 + 3.4.2 + 4.4.3 + 4.5.5 + 4.6.4 + 5.5.11 + 5.6.13 + 5.7.4 + \\ &\quad + 6.6.7 + 6.7.23 + 6.8.7 + 7.7.4 + 7.8.8 + 7.9.3 + 8.8.3 + 8.9.2) \\ &= 38,05 \end{aligned}$$

từ đó:

$$a = \frac{38,05 - 5,64.6,53}{1,25} = 0,9; \quad b = 6,53 - 0,98.5,64 = 1,00$$

Đường hồi quy tuyến tính mẫu Y theo X là:

$$y = 0,98x + 1,00$$

2- Ý nghĩa của đường hồi quy tuyến tính mẫu

Nếu X và Y có tương quan xấp xỉ tuyến tính thì đường hồi quy cho ta khả năng dự báo một cách đơn giản:

$$X = x_o \Rightarrow Y \approx y_o = ax_o + b$$

Ví dụ 8.4. Với số liệu như trong ví dụ 8.2, ta có:

$$X = 9 \Rightarrow Y \approx 0,98.9 + 1,00 = 9,82$$

Điều này có ý nghĩa là, một học sinh có điểm toán 9 thì có khả năng điểm môn văn là 10.

BÀI TẬP

8.1. Điều tra độ mòn lưỡi dao của một xưởng kim khí, ta đo độ dày lưỡi dao và thu được bảng số liệu sau:

Y (chiều dày lưỡi dao: mm)	X (thời gian sử dụng: ngày)		
	2	3	5
2,6		1	2
2,8	1	2	
3,0	3	2	

- Tại sao nói X và Y là phụ thuộc tương quan?
- Viết phương trình tương quan tuyến tính của Y đối với X.

8.2. Tính hệ số tương quan và tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X dựa vào số liệu cho trong bảng tương quan sau đây:

x_i	1	2	2	3	3	4
y_i	3	4	5	5	6	7
n_i	3	2	1	2	1	1

8.3. Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X dựa vào các bảng số liệu sau:

a)

Y	X			
	0,1	0,15	0,2	0,25
10	1			
12	2	3	2	1
14	1	4	2	4

Y	X			
	1	2	3	4
5				2
4			1	2
3		2	2	
2		1	2	
1	2	1		

8.4. Theo dõi trọng lượng Y và tháng tuổi X của một loại con giống thu được bảng số liệu sau:

X	Y			
	5	6	7	9
1	8	2		
2	1	6	4	4
3			8	7
4			5	5

a) Hãy vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X.

8.5. Hãy tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính biểu diễn sự phụ thuộc giữa mức suy giảm hàm lượng đường Y (%) và thời gian chế biến X trên cơ sở bảng số liệu sau:

X	Y				
	30	35	40	45	50
2	1				
4	1	3	1	2	
6		1	2	3	
8			2	1	1
10					2

8.6. Tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X dựa vào các bảng số liệu sau đây:

a)

X	Y			
	10	20	30	40
0,4	3		6	7
0,6		2	6	4
0,8	3	19		

b)

X	Y		
	15	20	25
1			1
2		1	1
3	1	2	
4	4		

8.7. Bảng dưới đây chỉ kết quả thu hoạch Y theo lượng phân bón X của một loại hoa màu trên 100 thửa ruộng:

Y	X				
	1	2	3	4	5
14	10	8			
15		12	7		
16			28	6	
17				8	9
18					12

- a) Hãy vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X
b) Tìm hệ số tương mẫu
c) Tìm phương trình hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.8. Nghiên cứu mối liên hệ giữa X là số tiền đầu tư cho việc phòng bệnh tính theo đầu người và Y là tỉ lệ người mắc bệnh ở 50 địa phương ta thu được bảng tương quan thực nghiệm sau đây:

X (đồng)	Y (%)				
	2	2,5	3	3,5	4
100				2	3
200			3	6	2
300		4	6	3	
400	1	6	4	1	
500	6	3			

- Tìm phương trình hồi quy tuyến tính của Y đối với X qua mẫu trên
- Tìm hệ số tương quan tuyến tính
- Nếu năm sau đầu tư cho phòng bệnh là 600 đ/người thì tỷ lệ mắc bệnh là bao nhiêu phần trăm?

8.9. Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X và của X đối với Y dựa vào các bảng tương quan sau đây:

a)

X	Y		
	10	20	30
1			1
2		1	1
3	1	2	
4	4		

b)

X	Y			
	1	2	3	4
10	8	3		
12	1	7	1	
14	1		9	10

8.10. Cho bảng tương quan:

Y	X				
	1	2	3	4	5
1	3				3
2	2	2		2	2
3		1	2	1	
4			2		

- a) Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X
- b) Tính hệ số tương quan mẫu r
- c) Từ các kết quả trên hãy nhận xét về dạng hàm hồi quy của Y đối với X.

8.11. Cho bảng tương quan các số liệu về mức độ tăng năng suất lao động $X(\%)$ và tổng sản lượng của các xí nghiệp công nghiệp Y (% so với năm trước).

X	Y					
	85	95	105	115	125	135
85	1	1				
95	1	2	2			
105	1	3	6	5		
115		1	4	4	2	2
125			3	2	2	1
135				1	2	1
145					1	2

a) Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X .

8.12. Các số liệu của việc phân tích 100 mẫu quặng sắt được cho ở bảng dưới. Hàm lượng oxyt sắt X (%), hàm lượng tạp chất Y (%).

X	Y					
	3	9	15	21	27	33
35				1		1
45			1	5	4	5
55			2	18	10	2
65		6	14	2	2	
75		6	3			
85	4	8				
95	6					

- Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X
- Ước lượng hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.13. Kết quả của việc theo dõi mối quan hệ giữa chiều cao và trọng lượng Y của học sinh, ta có bảng số liệu sau đây:

X (cm)	Y (cm)				
	24	27	30	33	36
120	1	3			
125		2	6	1	
130		1	5	5	
135		1	6	7	2
140			1	4	2
145				1	1
150					1

- Tìm hệ số tương quan mẫu
- Tìm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X .

8.14. Nghiên cứu về sự ảnh hưởng của thu nhập X đối với mức độ tiêu dùng Y về một loại thực phẩm, người ta điều tra ở 200 gia đình và thu được bảng số liệu sau đây:

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
15	5	7				
25		20	23			
35			30	47	2	
45			10	11	20	6
55				9	7	3

Giả thiết Y phụ thuộc tuyến tính vào X .

- Hãy ước lượng hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X và đánh giá mức độ chặt chẽ của sự phụ thuộc đó
- Hãy dự đoán mức tiêu dùng nếu thu nhập là 80 nghìn/đầu người.

8.15. Cho bảng tương quan:

X	Y				
	1,25	1,5	1,75	2	2,25
8			1	2	3
13			1	4	3
18		4	7	1	
23	2	7	5		
28	6	4			

a) Tìm hệ số tương quan mẫu

b) Tìm phương trình hồi quy tuyến tính mẫu.

PHỤ LỤC

PHỤ LỤC 1

GIÁ TRỊ HÀM MẬT ĐỘ GAUSS

$$f(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-U^{1/2}}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	25029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29658	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	0499	00485	00470	00457

PHỤ LỤC 2

GIÁ TRỊ TÍCH PHÂN LAPLACE

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-t^2/2} dt$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

[illegible]

PHỤ LỤC 3

QUY LUẬT POISSON

Trong bảng cho giá trị: $P(X = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

k	a				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0756
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016
5				0,0001	0,0002

k	a				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0899	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6		0,0001	0,0002	0,0003	0,0005

k	a				
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
0	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302
1	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057
2	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850
3	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158
4	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888
5	0,1141	0,1361	0,0668	0,1008	0,1322
6	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771
7	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385
8	0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169
9		0,0002	0,0009	0,0027	0,0066
10			0,0002	0,0008	0,0023
11				0,0002	0,0007
12				0,0001	0,0002

PHỤ LỤC 4

BẢNG PHÂN PHỐI STUDENT

Trong bảng cho giá trị T_{α}^k sao cho:

$$P[|T_k| \leq T_{\alpha}^k] = 1 - \alpha \quad (k \text{ là bậc tự do})$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

n/ α	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,0777	6,3137	12,7062	25,4519	63,6559	127,3211
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,2054	9,9250	14,0892
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	5,8480	7,4532
4	1,5332	2,1318	2,7765	3,4954	4,6041	5,5975
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733
6	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0294
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	3,2498	3,6786
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,5600	3,0545	3,4284
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257
15	1,3406	1,7531	2,1315	2,4899	2,9467	3,2860
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2224
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1737
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,4138	2,8315	3,1352
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,4055	2,8188	3,1188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,3979	2,8073	3,1040
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,3910	2,7970	3,0905
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,3846	2,7874	3,0782
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,3788	2,7787	3,0669
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,3834	2,7707	3,0565
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,3685	2,7633	3,0470
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,3638	2,7564	3,0280
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,3596	2,7500	3,0298