ĐỀ ÔN TẬP MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Bài giảng điện tử

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: ytkadai@hcmut.edu.vn

TP. HCM — 2013.

Câu 1.

Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX - X = B^T$

$$AX - X = B^T \Leftrightarrow (A - I)X = B^T$$

$$\Leftrightarrow X = (A - I)^{-1}.B^T$$

Vậy $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}^T =$

$$\begin{pmatrix} 20 & -9 & -10 \\ -6 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Câu 2.

Trong $\mathbb{R}_4$ cho không gian con

$U = <(1,1,2,2),(2,-1,1,0)>, z = (1,2,3,1)$.

a) Tìm m để $v = (1,2,-1,m)$ thuộc U.

b) Tìm cơ sở và số chiều $U^{\perp}$.

c) Tìm hình chiếu của z xuống $U^{\perp}$.

a) Để $v \in U$ thì $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$v = (1, 2, -1, m) = \alpha(1, 1, 2, 2) + \beta(2, -1, 1, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ \alpha - \beta &= 2 \\ 2\alpha + \beta &= -1 \\ 2\alpha &= m \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên $\nexists m$ sao cho $v \in U$.

b) Tìm cơ sở và số chiều $U^{\perp}$. Véctơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^{\perp}$ nên $x \perp (1, 1, 2, 2)$ và $x \perp (2, -1, 1, 0)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Cơ sở của $U^{\perp}$: $e_1 = (-1, -1, 1, 0)$ và $e_2 = (-2, -4, 0, 3)$. Số chiều $dim(U^{\perp}) = 2$.

c) Tìm hình chiếu của z xuống $U^{\perp}$.

$z = \alpha e_1 + \beta e_2 + g$, với $g \in (U^{\perp})^{\perp}$.

$$\begin{cases} < z, e_1 > = \alpha < e_1, e_1 > + \beta < e_1, e_2 > \\ < z, e_2 > = \alpha < e_1, e_2 > + \beta < e_2, e_2 > \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 6\beta = 0 \\ 6\alpha + 29\beta = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{14}{17}, \beta = -\frac{7}{17}$$ Vậy hình chiếu của z xuống $U^{\perp}$ là

$$f = \frac{14}{17}(-1, -1, 1, 0) - \frac{7}{17}(-2, -4, 0, 3) = (0, \frac{14}{17}, \frac{14}{17}, -\frac{21}{17})$$

Câu 3.

Trong $\mathbb{R}_4$ cho 2 không gian con

$$U = < (1, 1, -2, 1), (1, 2, 1, 0) >$$

$$V : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Tìm cơ sở và số chiều của $U \cap V$.

b) Tìm cơ sở và số chiều của $U + V$

a) Tìm cơ sở và số chiều của $U \cap V$.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap V \Leftrightarrow x \in U \wedge x \in V$.

$x \in U \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 1, -2, 1) + \beta(1, 2, 1, 0) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, -2\alpha + \beta, \alpha)$

$$x \in V \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha + 8\beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Vậy $x = \alpha(2, 3, -1, 1)$. Từ đó suy ra $(2, 3, -1, 1)$ là tập sinh của $U \cap V$. Véctơ $(2, 3, -1, 1)$ độc lập tuyến tính nên cơ sở của $U \cap V$ là $(2, 3, -1, 1)$.

$Dim(U \cap V) = 1$.

Tìm cơ sở của V

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Cơ sở của V là $(-7,-4,5,0)$ và $(3,11,0,5)$

$U+V=$

$< (1,1,-2,1),(1,2,1,0),(-7,-4,5,0),(3,11,0,5) >$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & 5 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cơ sở của $U+V$ là

$(1,1,-2,1),(1,2,1,0),(-7,-4,5,0)$. $Dim(U+V)=3$.

Câu 4.

Trong $\mathbb{R}_2$: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Xét tích vô hướng $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$. Tính khoảng cách giữa 2 véctơ u, v với $u = (2, -1), v = (1, 3)$.

Câu 4.

Trong $\mathbb{R}_2 : x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Xét tích vô hướng $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.
Tính khoảng cách giữa 2 véctơ u, v với
$u = (2, -1), v = (1, 3)$.

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{< u - v, u - v >} = \sqrt{34}.$$

Câu 5.

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, biết ma trận của f trong cơ sở $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm $f(4,3,6)$

$[f(4,3,6)]_B = A[(4,3,6)]_B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Vậy $f(4,3,6) =$

$1(1,1,0) - 4(1,0,1) + 25(1,1,1) = (22,26,21)$

Câu 6.

Cho ma trận cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tìm một ma trận $B \in M_3(\mathbb{R})$ sao cho $B^3 = A$.

Xét

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2.$$

Ứng với $\lambda_1 = -1$ ta xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Ứng với $\lambda_2 = 0$ ta xét hệ

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \neq 0.$$

Ứng với $\lambda_3 = 2$ ta xét hệ

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma \neq 0.$$

Vậy ta có ma trận làm chéo hóa

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Do đó $A = SDS^{-1} = B^3$.

Vậy 1 ma trận B cần tìm là

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{1/3} & 2^{1/3} \\ -1 & -2^{1/3}-1 & -2^{1/3} \\ 1 & 2^{4/3}+1 & 2^{4/3} \end{pmatrix}$$

Câu 7.

Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao, nêu rõ phép biến đổi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -7, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I) =$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = -7, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

Xác định ma trận trực giao. Với $\lambda_1 = -2$, ta có

$$P_{*1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Với $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, ta có $P_{*2} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$P_{*3} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Do đó ma trận trực giao

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Phép biến đổi $(x_1, x_2, x_3)^T = P(y_1, y_2, y_3)^T$ sẽ đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc

$f = -7y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2.$

CHÚC CÁC EM ĐẠT KẾT QUẢ TỐT TRONG KỲ THI SẮP TỚI