2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa:

Cho hàm f(x,y,z) xác định trên miền đóng và bị chặn V trong không gian Oxyz. Chia V thành n phần không dẫm lên nhau $V_1, V_2, \ldots, V_n$ có thể tích tương ứng là $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$

Trong mỗi miền V_k lấy 1 điểm bất kỳ $M_k(x_k,y_k,z_k)$

Lập tổng tích phân $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

Cho $\max d(V_k) \to 0$,nếu tổng trên tiến tới giá trị hữu hạn S không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách lấy điểm M_k thì giới hạn hữu hạn S được gọi là tích phân bội ba của hàm f(x,y,z) trên miền V; kí hiệu là:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV$$

Đồng thời, ta gọi hàm f(x,y,z) này là hàm khả tích trên miền V

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Vậy:
$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\max d(V_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k}$$

Chú ý : Vì tích phân không phụ thuộc vào cách chia miền V nên ta có thể chia V bởi các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ . Khi ấy mỗi miền nhỏ là hình hộp chữ nhật nên ta có ΔV = Δx Δy Δz = dxdydz

Vì vậy ta thường dùng kí hiệu:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz}$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Tính chất: Các hàm f, g khả tích trên V

1. $\iiint\limits_V dxdydz = V$

2. $\iiint\limits_V C.f(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

3. $\iiint\limits_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$

4. Nếu V được chia thành 2 miền không dẫm lên nhau V_1, V_2 thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

5. Nếu $f \le g$ trên V thì: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$

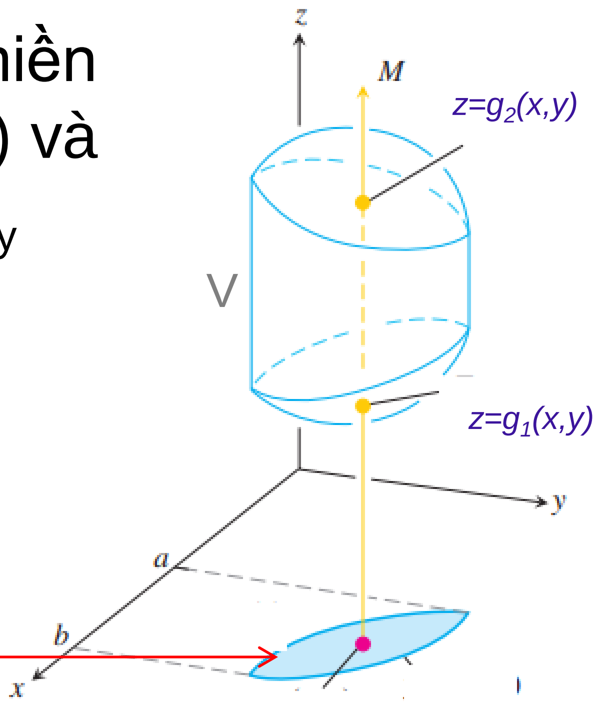
2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Cách tính

Miền V có hình chiếu xuống mp Oxy là miền D_{xy}, giới hạn bởi 2 mặt $z=g_1(x,y)$, $z=g_2(x,y)$ và $g_1(x,y)\le g_2(x,y)$ với mọi (x,y) thuộc miền D_{xy}

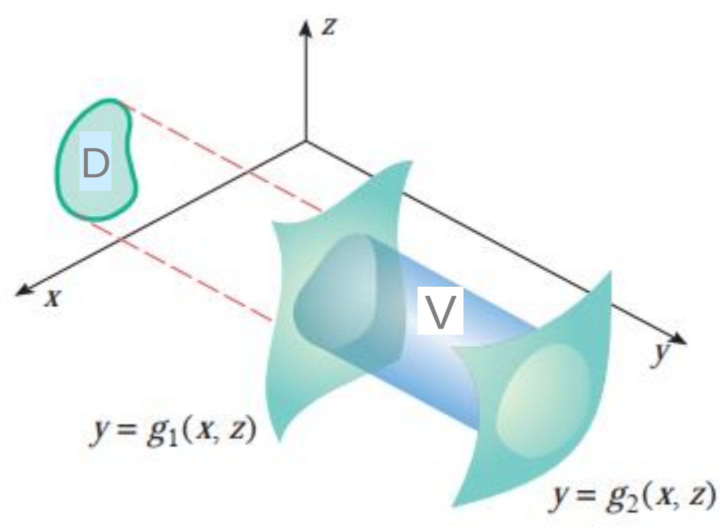
$$I=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$



Miền V có hình chiếu xuống mp Oxz là miền D_{xz}, giới hạn bởi 2 mặt $y=g_1(x,z)$, $y=g_2(x,z)$ và $g_1(x,z)\le g_2(x,z)$ với mọi (x,z) thuộc miền D_{xz}

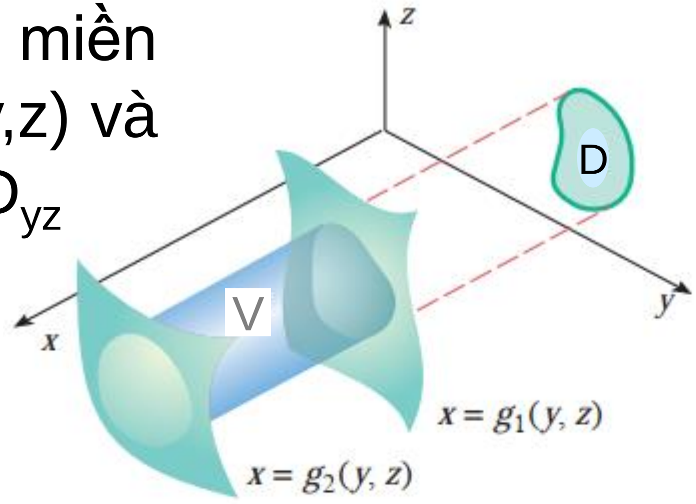
$$I=\iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int\limits_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy$$



2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Cách tính

Miền V có hình chiếu xuống mp Oyz là miền D_{yz}, giới hạn bởi 2 mặt $x=g_1(y,z)$, $x=g_2(y,z)$ và $g_1(y,z) \le g_2(y,z)$ với mọi (y,z) thuộc miền D_{yz}



$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

Như vậy, để tính tích phân bội ba ta cần xác định:

1. Hình chiếu của V xuống 1 trong 3 mp tọa độ để có miền lấy tp kép theo 2 trong 3 biến (Dxy, Dxz, Dyz)

2. Xác định cận tp theo biến còn lại bằng cách so sánh 2 hàm viết biến đó theo 2 biến trên (z=g(x,y), y=g(x,z), x=g(y,z))

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

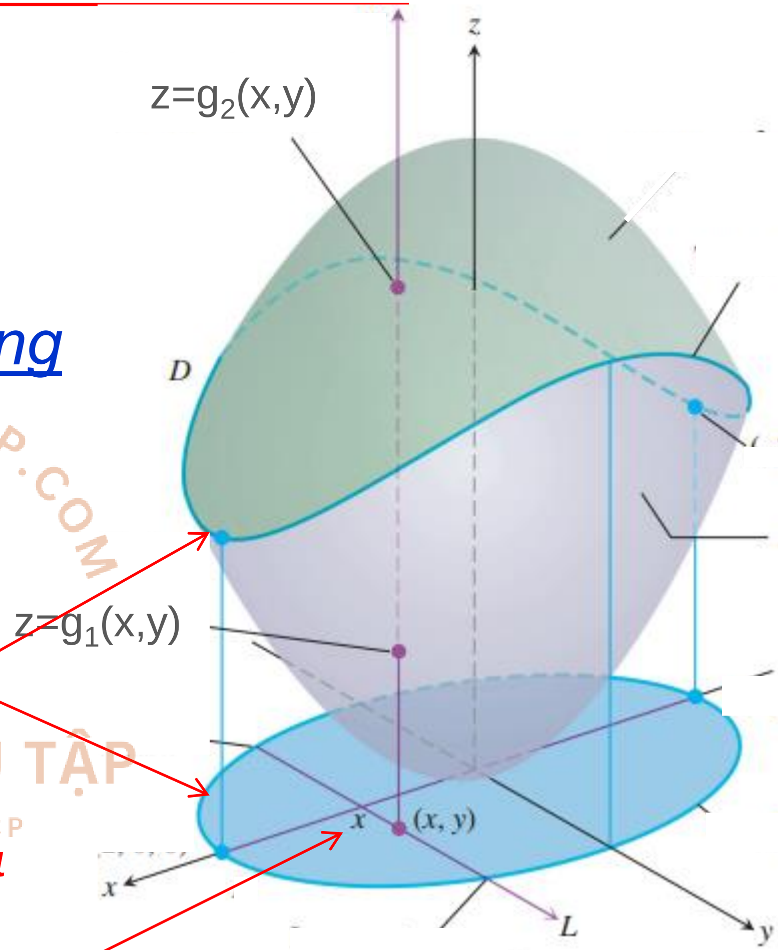
Ta chia thành 2 trường hợp

TH1: V giới hạn chỉ bởi 2 mặt cong $z=g_1(x,y)$ và $z=g_2(x,y)$

Bước 1: Tìm hình chiếu của V xuống mp tọa độ Oxy

Ta tìm giao tuyến của 2 mặt:

$$\begin{cases} z = g_1(x,y) \\ z = g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x,y) = g_2(x,y) \\ z = g_2(x,y) \end{cases}$$



Sau khi *khử z từ 2 pt 2 mặt cong, ta được pt chỉ còn theo x, y.*

Pt này giúp ta xác định hình chiếu D của V xuống mp Oxy

Bước 2: Xác định cận tp theo dz

So sánh giá trị 2 hàm $g_1(x,y)$ và $g_2(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$. Hàm nào nhỏ là cận dưới, hàm lớn hơn là cận trên

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân hàm f(x,y,z)=1 trên miền V giới hạn bởi

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, z=\sqrt{2-x^2-y^2}$$

Vật thể giới hạn chỉ bởi 2 mặt nên ta tìm hình chiếu của nó xuống mặt phẳng ***z=0*** bằng cách **khử z** từ 2 pt 2 mặt

$$x^2+y^2=2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Hình chiếu của giao tuyến là đường tròn thì hình chiếu của vật thể là hình tròn:

$$D: x^2+y^2\le 1 (1)$$

Suy ra: $x^2+y^2\le 1\le 2-x^2-y^2$

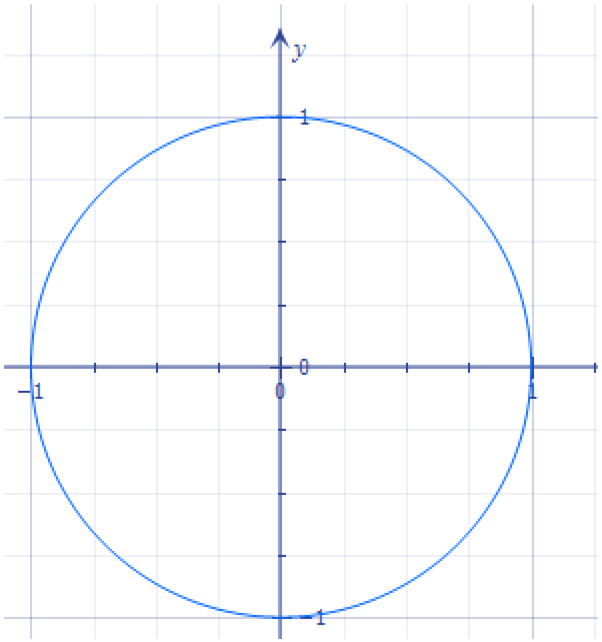
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2-x^2-y^2} (2)$$

2 b.đ.t (1) và (2) giúp ta có cận tp:

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

$$D: x^2 + y^2 \le 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \forall (x,y) \in D \quad (2)$$



2 b.đ.t (1) và (2) giúp ta có cận tp:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1dz$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(\sqrt{2 - r^2} - r)dr \quad = \frac{2\pi}{3}(\sqrt[3]{4} - 1)$$

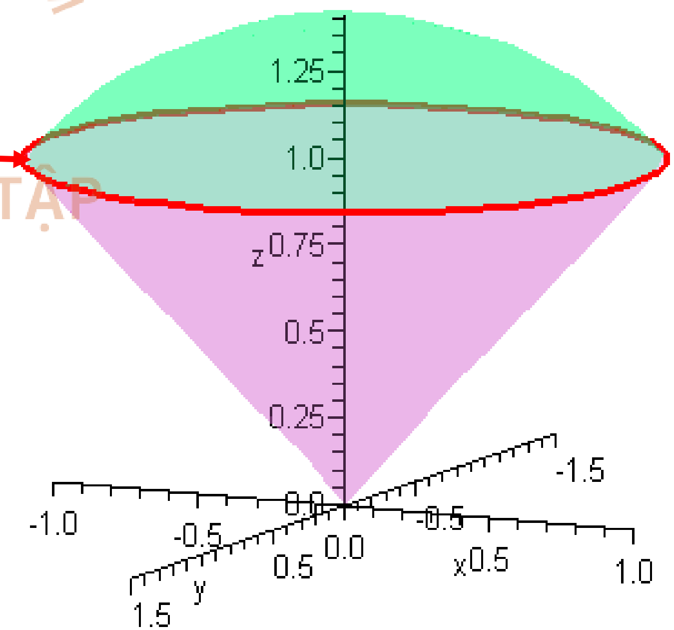
2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Vẽ hình minh họa cho cách lấy cận tp:

Tìm giao tuyến để vẽ giao tuyến trước

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



Giao tuyến là đường tròn đơn vị $x^2+y^2=1$ trên mp $z=1$

Vẽ phần mặt nón ở dưới và phần nửa mặt cầu ở trên

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân hàm f(x,y,z)=x trên miền V giới hạn bởi

$$y = x^2 + z^2, y = 2x$$

Ta tìm hình chiếu của V xuống mặt phẳng ***y=0*** bằng cách **khử y** từ 2 phương trình 2 mặt

$$x^2 + z^2 = 2x$$

Ta được hình chiếu của vật thể xuống mp y=0 là hình tròn

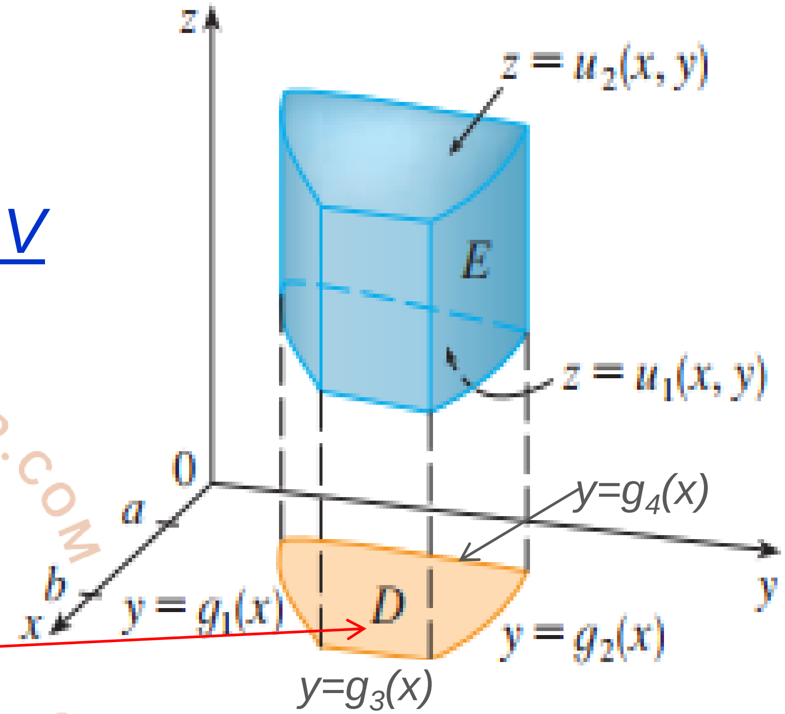
$$D : x^2 + z^2 \le 2x \quad (1)$$

B.đ.t trên cũng cho ta cận lấy tp theo dy

$$I = \iint\limits_{x^2+z^2\le 2x} dxdz \int\limits_{x^2+z^2}^{2x} xdy$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

TH2: V giới hạn bởi nhiều hơn 2 mặt cong (có 2 pt chứa z)



Bước 1: Tìm hình chiếu D_{xy} của V xuống mp tọa độ Oxy

Lấy tất cả *các pt KHÔNG CHỨA z* có dạng $y=g_i(x)$, i=1, 2, 3,…

vẽ các đường cong đó trong mp Oxy sẽ giúp ta có miền D_{xy}

Trong không gian Oxyz *các pt không chứa z biểu diễn các mặt trụ song song với trục Oz*, cắt các mặt trụ đó bởi 2 mặt cong còn lại tương ứng với 2 pt chứa z ta được miền V

Bước 2: Xác định cận tp theo dz

Từ 2 hàm chứa z, ta viết z theo x, y là $z=u_1(x,y)$, $z=u_2(x,y)$. So sánh giá trị 2 hàm này $\forall(x,y)\in D_{xy}$, hàm nào nhỏ là cận dưới, hàm lớn hơn là cận trên.

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

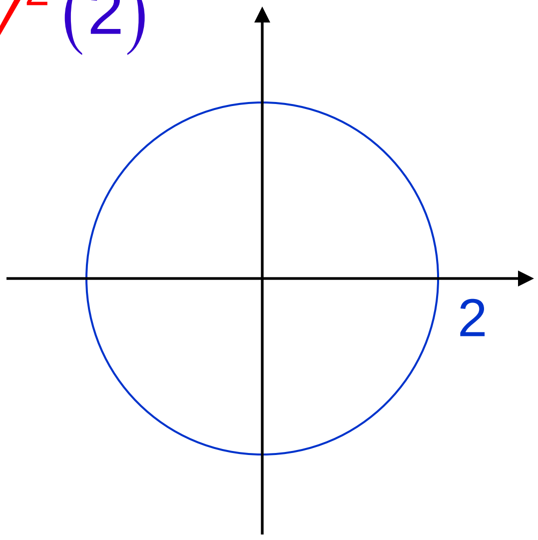
Ví dụ: Tính tích phân hàm f(x,y,z) = 2z trên miền V giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4,\ y^2 = 2z,\ z=0$

Ta xét phương trình KHÔNG CHỨA z: $x^2+y^2=4$

Vẽ đường tròn $x^2+y^2=4$ trong mp Oxy, ta được hình chiếu D:

$$x^2+y^2 \le 4$$

2 pt CHỨA z còn lại cho cận tp theo z: $0 \le \frac{1}{2}y^2 \ (2)$



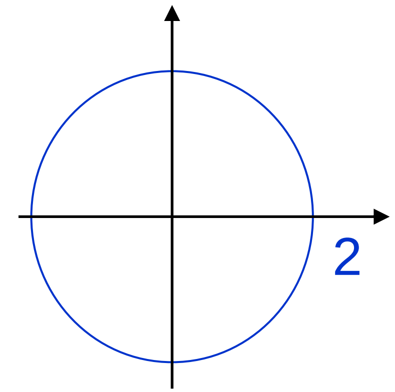
Vậy tp cần tính là :

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy \int_0^{y^2/2} 2zdz$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 dxdy = \frac{1}{4} \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} y^4 dxdy$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

$$I=\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} y^4dxdy$$



$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r.r^4\sin^4\varphi dr$$

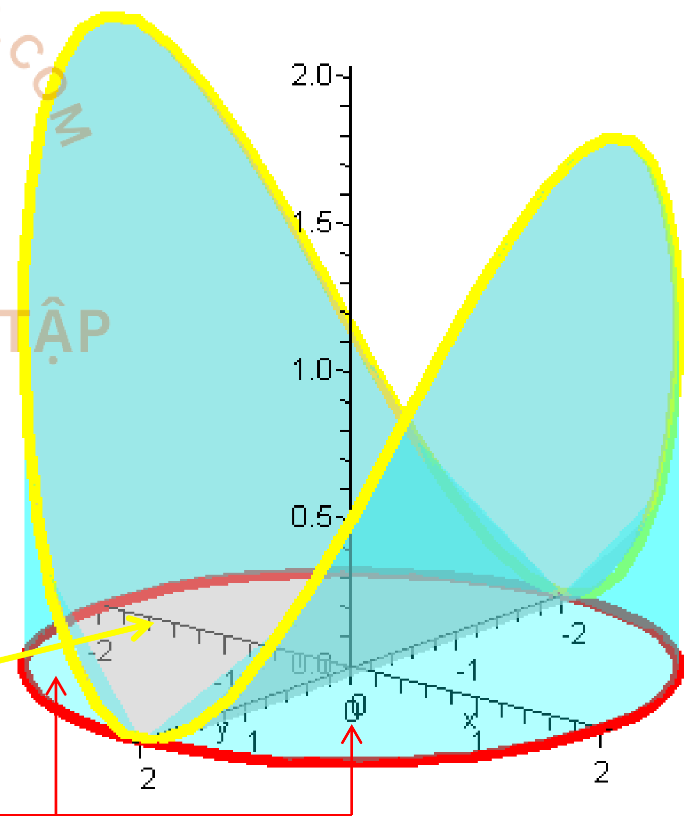
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi d\varphi\int_0^2 r^5dr$$

Ta cũng sẽ vẽ hình để thấy cách tìm hình chiếu và xác định 2 mặt chặn trên dưới là đúng

Ta có mặt trụ tròn xoay $x^2+y^2=4$

bị cắt bởi mặt trụ parabol $2z=y^2$

phía trên và mp z=0 phía dưới



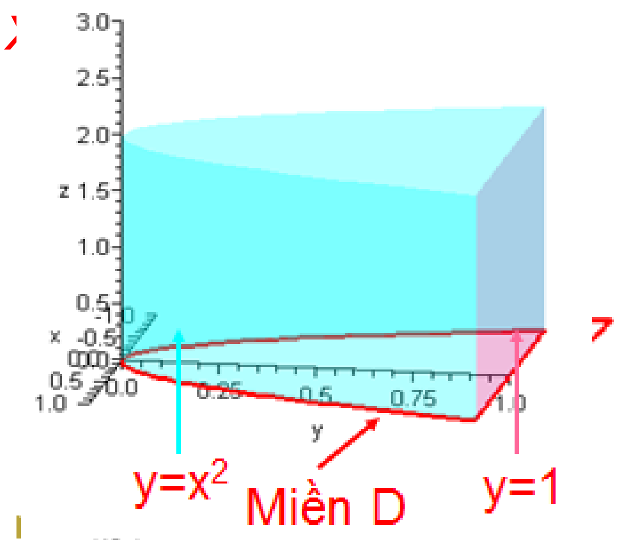
2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân hàm f(x,y,z)=x+z trên miền V giới hạn bởi $z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0$

Ta sẽ vẽ miền V bắt đầu bằng việc vẽ các hình trụ có đường sinh song song với trục Oz có pt không chứa z

2 phương trình không chứa z : y=1, y = x

Vẽ 2 đường cong trong mp Oxy ta được miền D đóng trong mặt Oxy, tương ứng trong không gian ta được 2 mặt trụ ghép lại thành hình trụ kín



Hình trụ không hữu hạn nên ta sẽ cần thêm 2 pt chứa z còn lại

Mp z=0 cắt ngang bên dưới và mặt paraboloid $z=x^2+y^2$ cắt bên trên (vì $0 \le x^2+y^2$) ta được hình trụ cong hữu hạn

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Vậy :

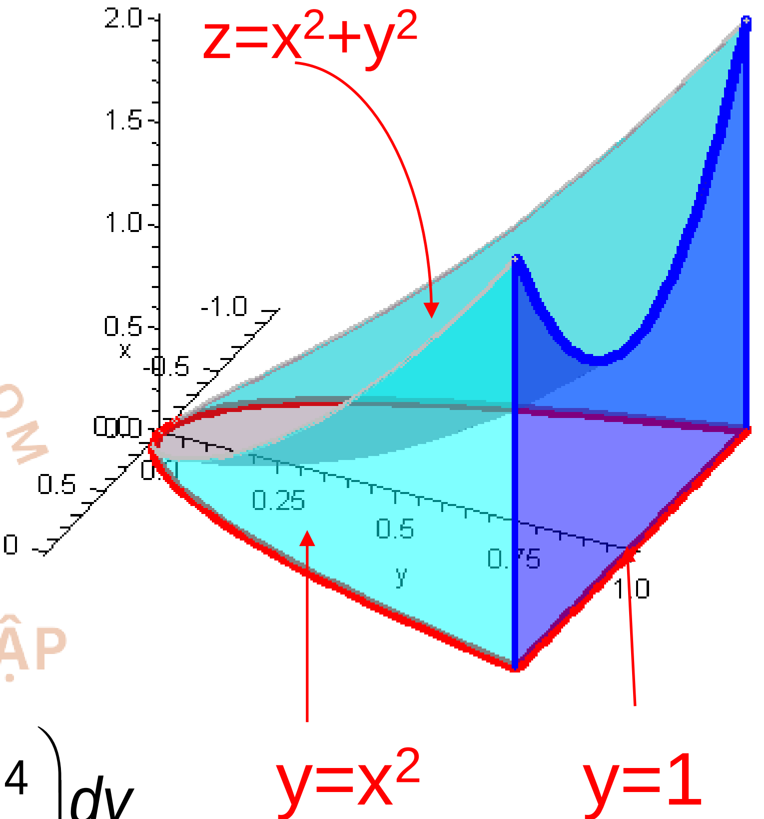
$$I = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} (x+z)\,dz$$

$$= \iint_D dxdy \left(xz + \frac{1}{2}z^2 \right)\Bigg|_0^{x^2+y^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \left(x\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \left(\left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) + y^2\left(x + x^2\right) + \frac{1}{2}y^4 \right) dy$$

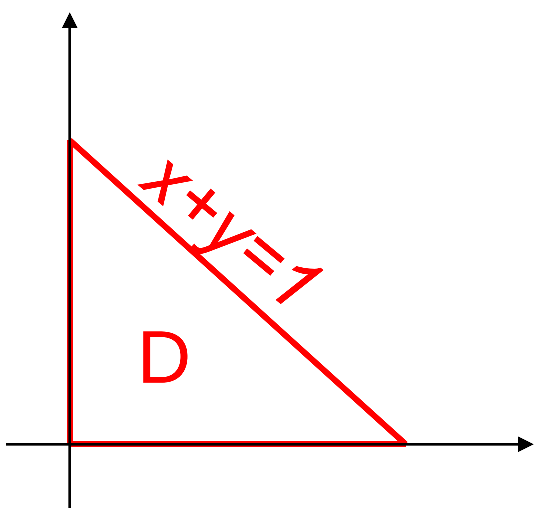
$$= \int_{-1}^{1} \left(\left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) x^2 + \frac{1}{3}x^6\left(x+x^2\right) + \frac{1}{10}x^{10} \right) dx$$



2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân bội ba hàm *f(x,y,z)=x* trên miền V giới hạn bởi *x=0, y=0, z=0, x+y=1, x+y=z*

Các pt không chứa z : *x=0, y=0, x+y=1 xác định hình chiếu Dxy*



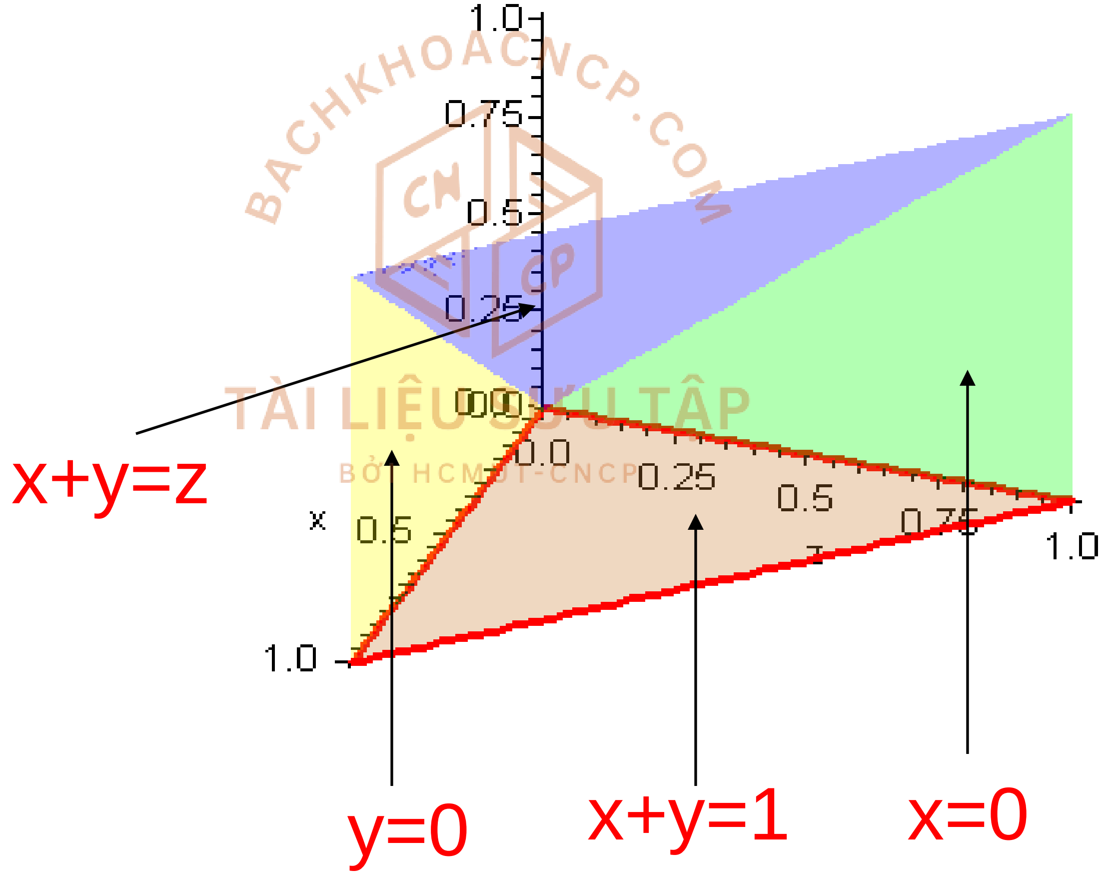
2 pt chứa z giúp ta có cận tp theo z:
z=0, z=x+y

$$\forall\ x,y\ \in D: x \geq 0, y \geq 0 \to x+y \geq 0$$

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$I = \iint\limits_D dxdy \int_0^{x+y} xdz \quad = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} x+y\ dy$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính



2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ví dụ: Tính tích phân hàm f(x,y,z)=2z trên miền V giới hạn bởi

$$y=0, z=0, 3x+y=4, 3x+2y=8, 4z=2x^2+y^2$$

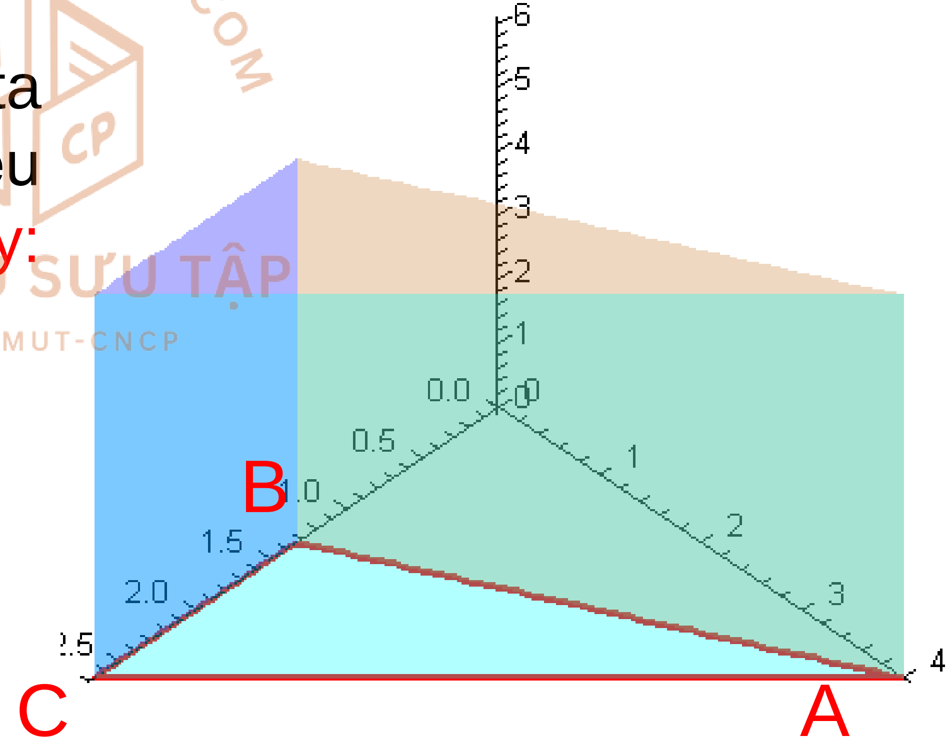
Các pt không chứa z :

y = 0, 3x+y = 4, 3x+2y = 8.

Vẽ 3 đt này trong mp Oxy ta được ΔABC nên hình chiếu của V xuống mp Oxy là Dxy: ΔABC

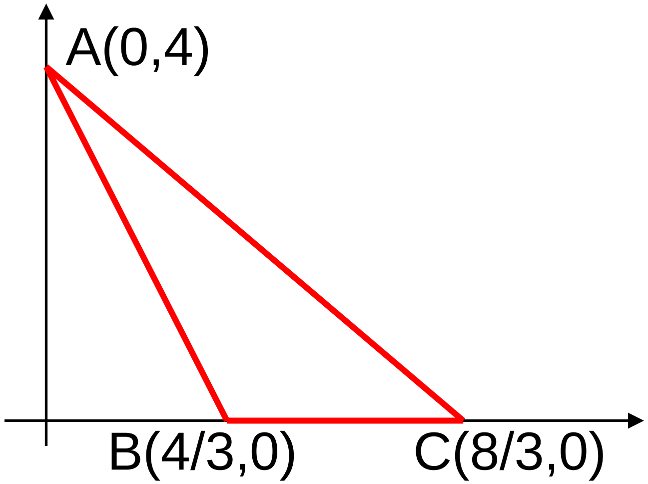
2 pt chứa z giúp ta có cận tp theo z:

$$z=0, z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}$$



2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

So sánh : $0 \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$



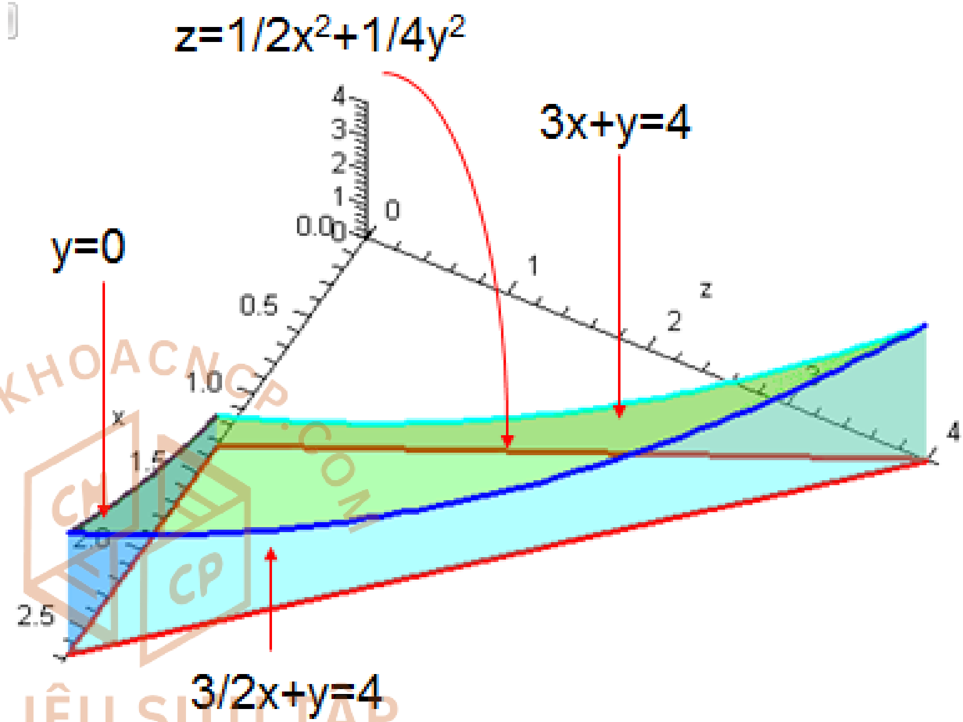
Vậy:

$$I = \iint\limits_{\Delta ABC} dxdy \int_0^{x^2/2 + y^2/4} 2zdz$$

$$= \int_0^4 dy \int_{\frac{4-y}{3}}^{2\frac{4-y}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^4 dy \int_{\frac{4-y}{3}}^{2\frac{4-y}{3}} \left(\frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4\right) dx$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)



$$I=\int_0^4\left(\frac{1}{16}y^4x+\frac{1}{4}y^2\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4.5}x^5\right)\Bigg|_{\frac{4-y}{3}}^{2\frac{4-y}{3}}dy$$

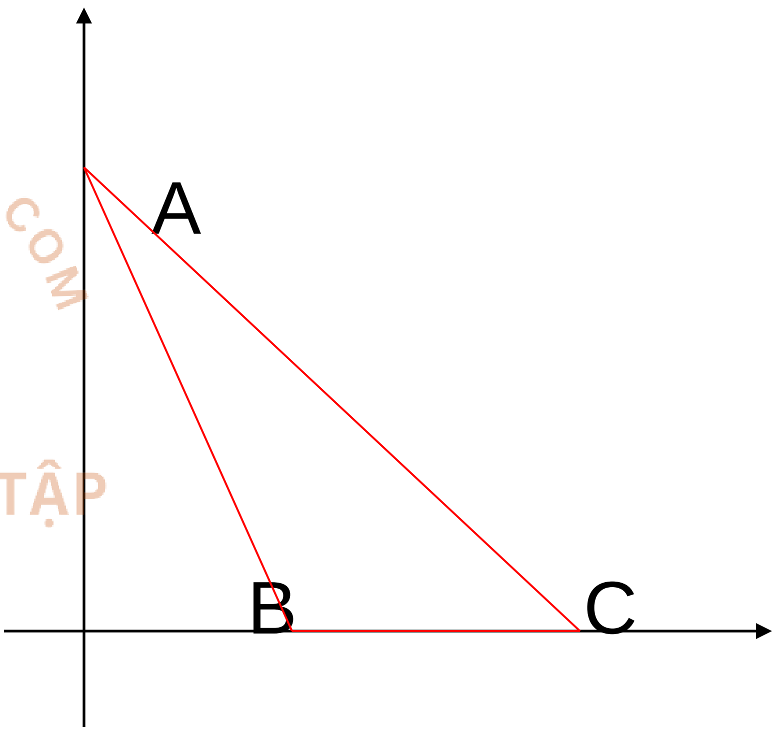
2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân hàm f(x,y,z)=2 trên miền V giới hạn bởi :
y = 0, z = 0, z = a – x - y, 3x + y = a, 3/2x + y = a

3 pt không chứa z:

y=0, 3x+y=a, 3/2x+y=a

3 đt này giúp ta có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là:
ΔABC = Miền D

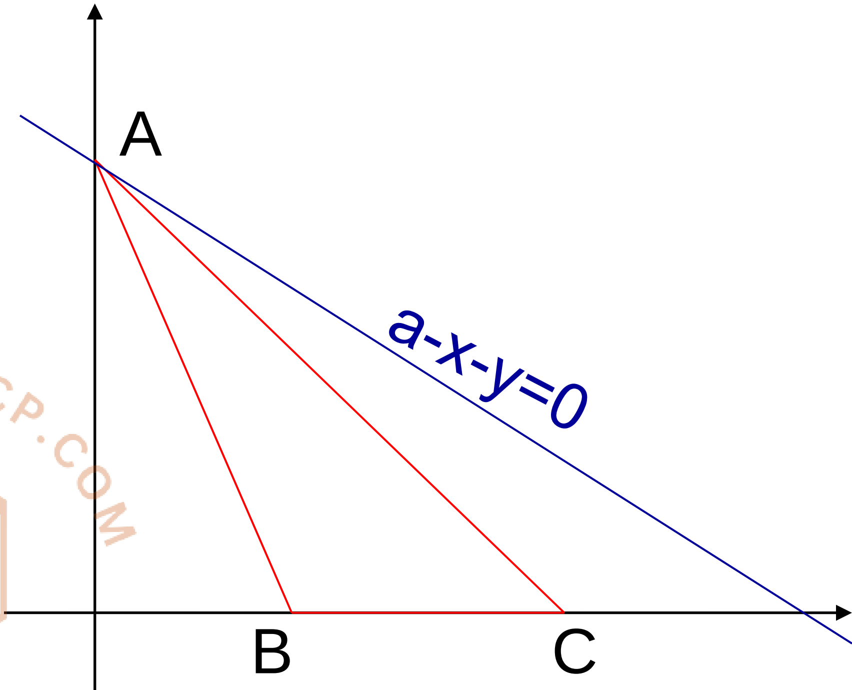


2 pt chứa z giúp ta có cận tp theo z: ta sẽ tìm cách xác định mặt phía trên, phía dưới để có cận tp theo dz

Ta đi so sánh z = a-x-y với z = 0 bằng cách vẽ thêm đường a-x-y=0 trong mặt phẳng Oxy

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ta đi so sánh z = a-x-y với z = 0 bằng cách vẽ thêm đường a-x-y=0 trong mặt phẳng Oxy



Rõ ràng, trên hình vẽ ta thấy ΔABC nằm phía dưới đường thẳng *a-x-y=0*

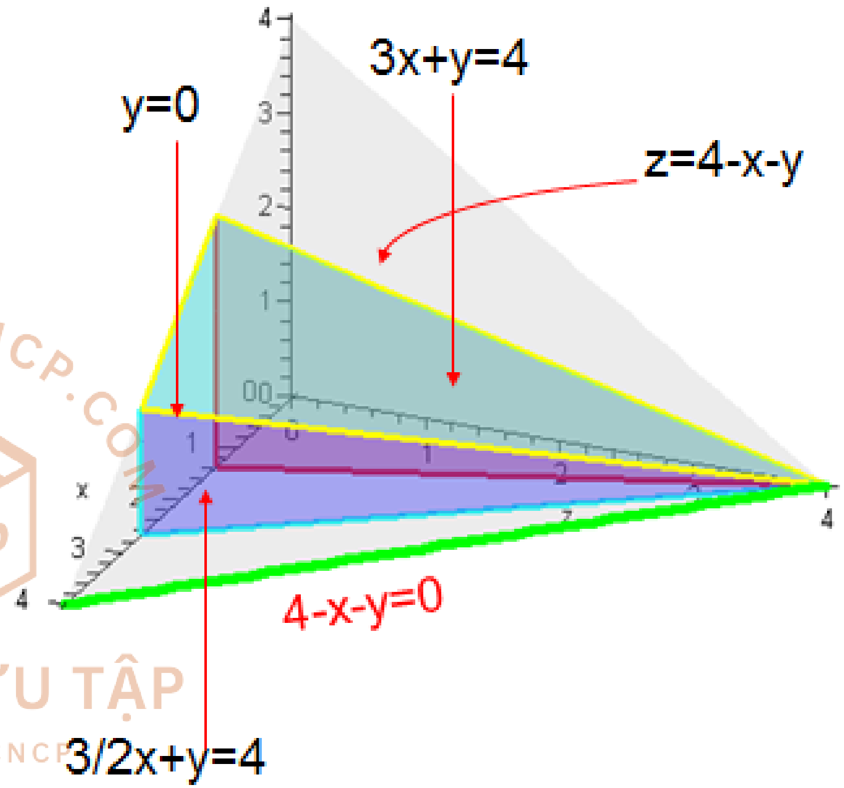
tức là trong miền D ta có bất đẳng thức $0 \le a-x-y$.

Vậy
$$I = \iiint\limits_V 2dxdydz = \iint\limits_{\Delta ABC} dxdy \int\limits_0^{a-x-y} 2dz$$

$$= 2\int\limits_0^a dy \int\limits_{(a-y)/3}^{2(a-y)/3} (a-x-y)dx$$

Nhận xét: Hàm dưới dấu tp là hằng số 2 nên ta có thể đưa 2 ra ngoài dấu tp. Do đó, kết quả của tp chính là 2 lần thể tích miền lấy tp.

Ta xoay trục Oy thẳng đứng, ta sẽ thấy vật thể chính là hình chóp tứ giác, thể tích bằng 1/3 chiều cao nhân diện tích đáy.



Hình vẽ khi a=4

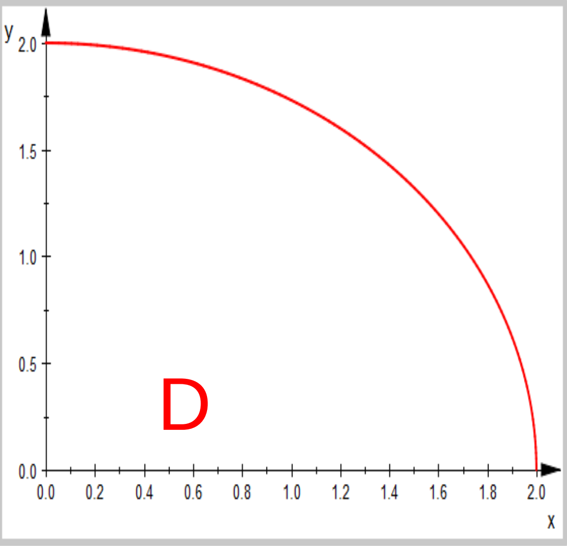
Vậy:

$$I = 2.V = 2.\frac{1}{3}.a\frac{a.{}^{a}\!/_{3}}{2} = \frac{1}{9}a^3$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iiint\limits_V 2z\,dxdydz$ trong đó V giới hạn Bởi $x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = z, z = 4$ (phần ứng với x≥0, y≥0)

2 pt không chứa z: x=0, y=0 ***không tạo thành miền đóng***



Ta tìm thêm giao tuyến của 2 mặt còn lại:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

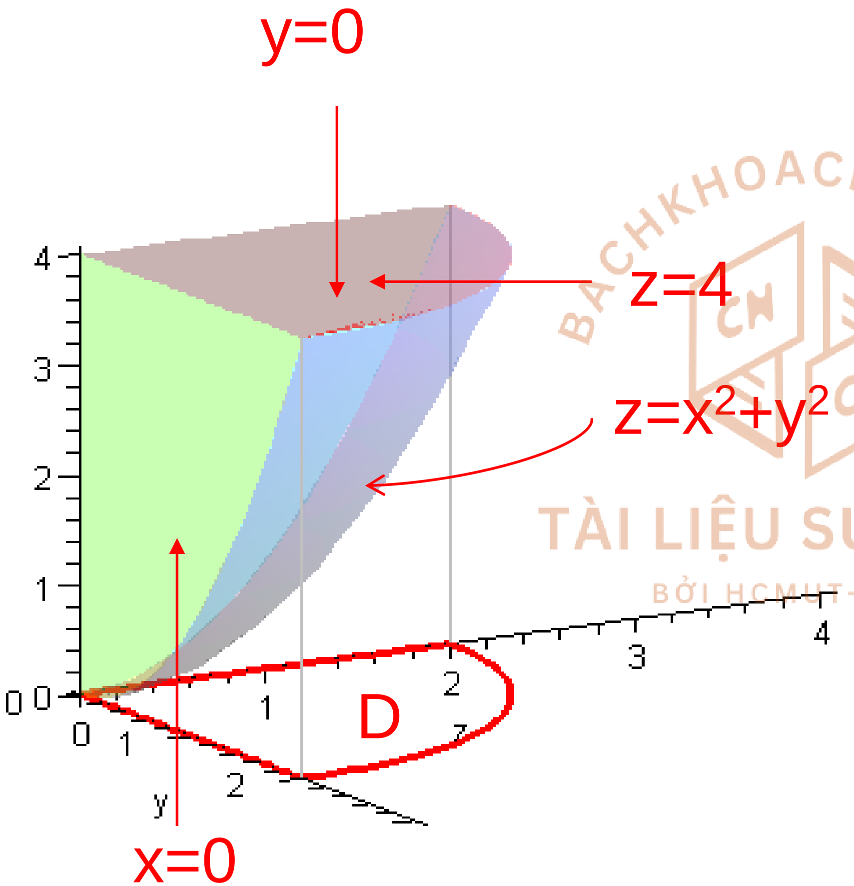
Hình chiếu của giao tuyến là : $x^2+y^2=4$

Vậy hình chiếu Dxy: $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$)

2 pt chứa z giúp ta có cận tp theo z:

$$\forall (x,y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 4$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)



Vậy:

$$I = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{4} 2zdz$$

$$= \iint_{D} z^2\Big|_{x^2+y^2}^{4} dxdy$$

$$= \iint_{D} (16-(x^2+y^2)^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r(16-r^4)dr$$

2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

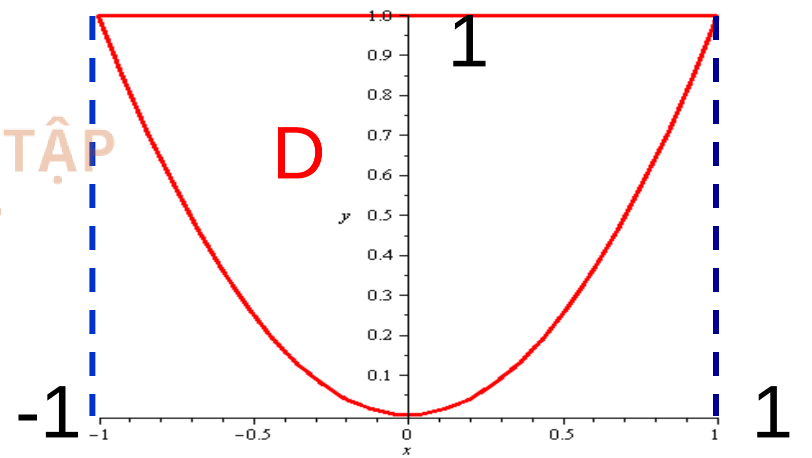
Ví dụ : Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz$

trong đó V giới hạn bởi $y=x^2$, $y+z=1$, $z=0$

Pt không chứa z: $y=x^2$, *không xác định miền đóng*,

Ta tìm thêm giao tuyến của các mặt còn lại:

$$\begin{cases} y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$$



Ta được hình chiếu của V

D_{xy}: $y=x^2$, $y=1$

2 pt chứa z giúp ta xác định cận tp theo z:

$$\forall (x,y) \in D: y \le 1 \quad \Leftrightarrow 0 \le 1-y$$

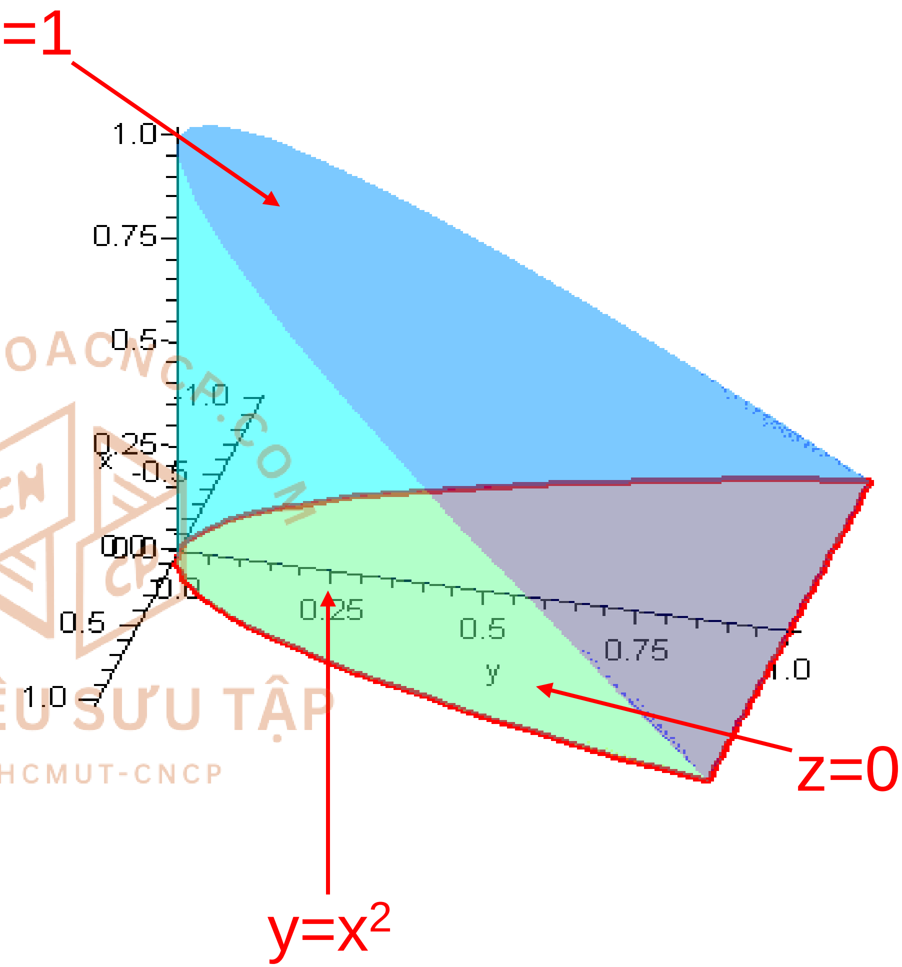
2.2.1 Tích phân bội ba – Định nghĩa và cách tính (Tự đọc)

Vậy:

$$I_2 = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-y} (x+y)dz$$

$$= \iint\limits_D (x+y)\left(z\Big|_0^{1-y} \right) dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x+y)(1-y)dy$$

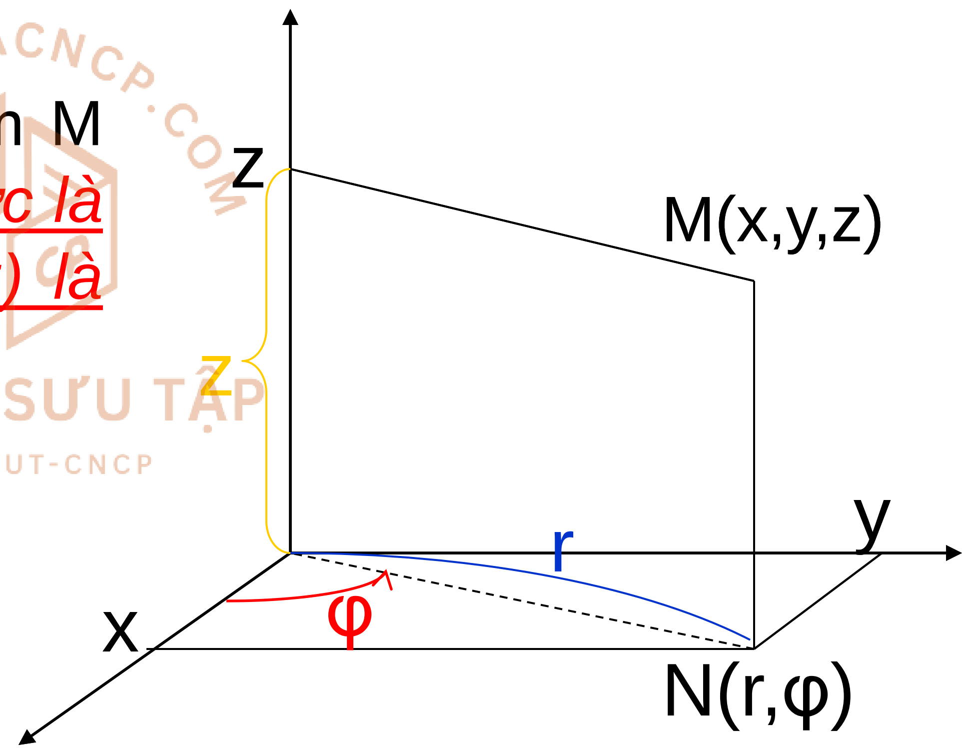


2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Xét điểm M(x,y,z) trong không gian, N(x,y,0) là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Gọi (r,φ) là tọa độ của N(x,y) trong tọa độ cực thì :
x = rcos φ, y = rsin φ

N xác định bởi (r, φ) thì điểm M được xác định bởi *(r, φ, z) tức là z giữ nguyên, ta gọi (r, φ, z) là tọa độ trụ của điểm M.* Ta có:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Chú ý : Vì ta thường đổi tích phân kép sang tọa độ cực khi miền lấy tp D là 1 phần ellipse nên ta sẽ *thường đổi tp bội ba sang tọa độ trụ nếu hình chiếu của miền lấy tích phân xuống 1 trong 3 mặt tọa độ là 1 phần hình tròn hoặc 1 phần ellipse.*

Ta đưa tp bội ba thành tp kép rồi đổi tp kép sang tọa độ cực:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

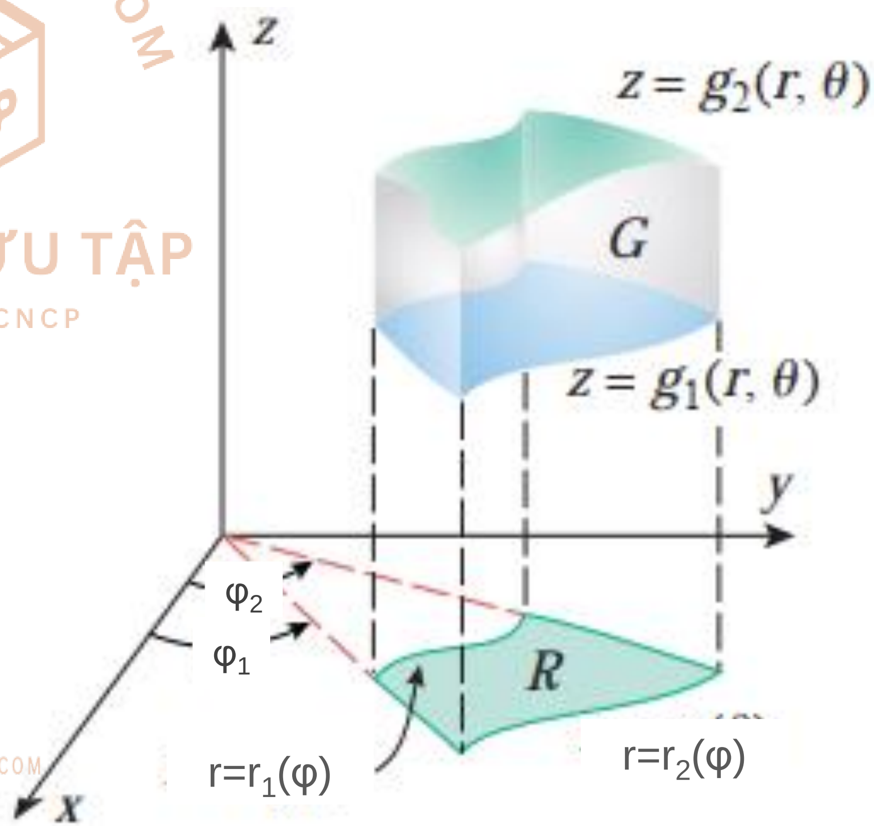
$$= \iint_D g(x,y)\,dxdy \quad = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} |J|\, g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\,dr$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Ta viết lại tp bội ba sau khi đổi sang tọa độ trụ:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} |J|\,dr \int_{g_1(r,\varphi)}^{g_2(r,\varphi)} f(x(r,\varphi),y(r,\varphi),z)\,dz$$



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$

Trong đó V là miền giới hạn bởi $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Miền V giới hạn bởi 2 mặt nên ta sẽ khử z từ 2 pt 2 mặt để tìm hình chiếu của V xuống mặt phẳng z = 0

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{(loại)} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{array}\right.$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Suy ra, hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn

$$x^2+y^2\le 1 \qquad \Rightarrow x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}$$

Vậy: $$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$$

Hình chiếu của miền lấy tích phân là hình tròn nên ta sẽ đổi tích phân trên sang tọa độ trụ bằng cách đặt :

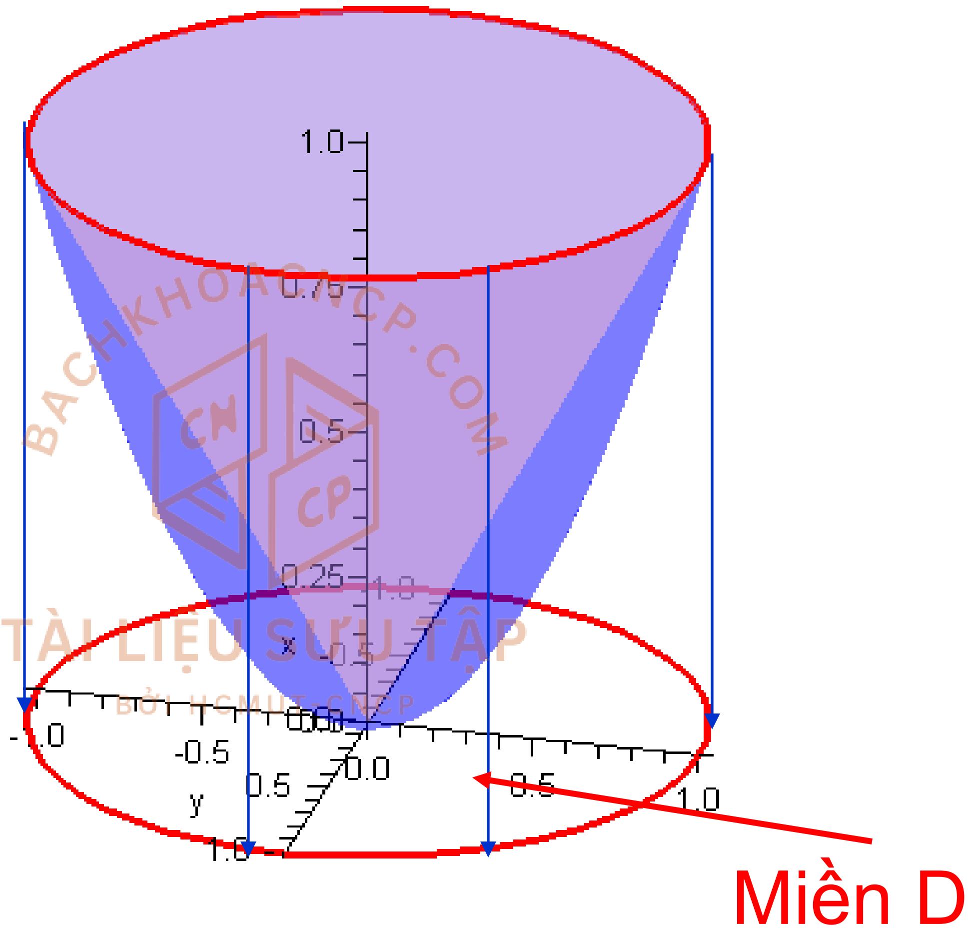
$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

Ta được: $$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{r} zdz$$

Hoặc ta tính tích phân trên theo dz, sau đó đổi tp kép sang tọa độ cực:

$$I=2\pi.\int_0^1 rdr.\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{r^2}^{r}=\pi.\int_0^1 r(r^2-r^4)dr=\frac{\pi}{12}$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Ví dụ : Tính tích phân bội ba của hàm $f = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

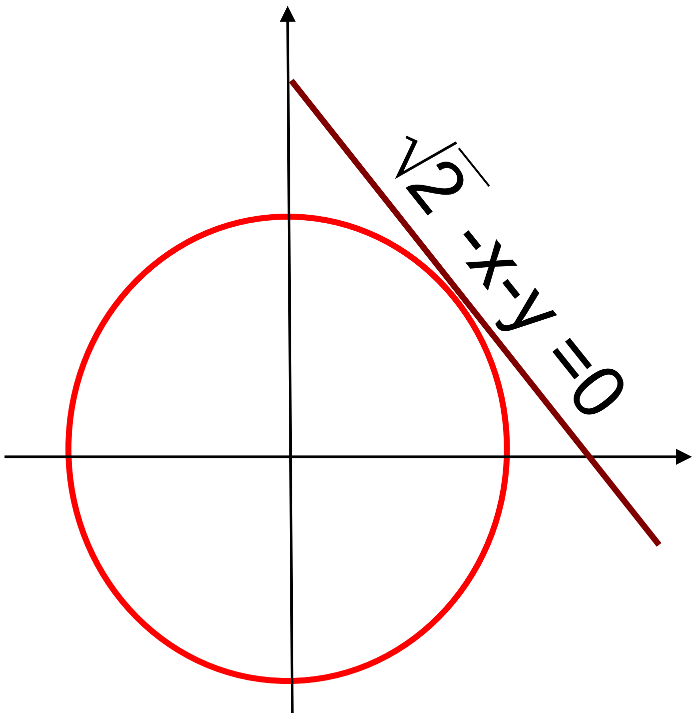
trên miền V giới hạn bởi $x^2+y^2=1, z=0, x+y+z=\sqrt{2}$

1 pt không chứa z : $x^2+y^2=1$ là đường tròn

nên hình chiếu của V là hình tròn D_{xy}: $x^2+y^2\le 1$

2 pt còn lại là : $z=0, z=\sqrt{2}-x-y$

Để so sánh, ta vẽ trong mp Oxy
đường thẳng: $\sqrt{2}-x-y=0$



Miền D_{xy} nằm dưới đt nên:

$$0\le\sqrt{2}-x-y, \forall (x,y)\in D$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Suy ra : $$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int_0^{\sqrt{2}-x-y} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dz$$

Hình chiếu của V là hình tròn nên ta sẽ đổi tích phân trên tọa độ trụ bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

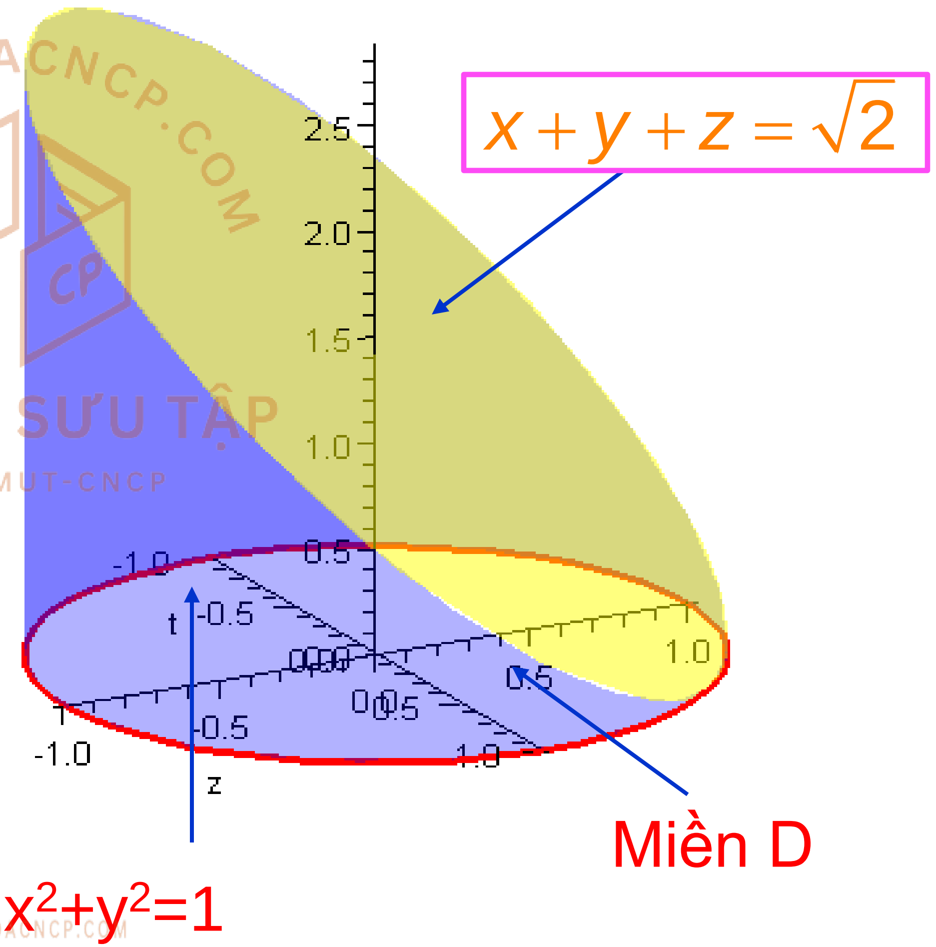
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{2}-r\cos\varphi-r\sin\varphi} \frac{z}{r} dz$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}-r\cos\varphi-r\sin\varphi} dr$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\sqrt{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{3}(1+\sin 2\varphi)\right)d\varphi = \frac{7\pi}{3}$$

Ta sẽ tính bằng cách thứ 2: tính tp theo dz trước, sau đó tính tp kép trên hình tròn Dxy



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Tính bằng cách thứ 2: tính tp theo dz trước

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}-x-y} dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{2+x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

Đổi tích phân kép trên sang tọa độ cực thông thường:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \frac{2+r^2-2\sqrt{2}r(\cos\varphi+\sin\varphi)+2r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r} dr$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ trụ

Ví dụ : Tích tích phân bội ba hàm f(x,y,z) = y^2+z^2 trên miền V giới hạn bởi $y^2+z^2=1$, $y^2+z^2=4$, $x=2\pi$, $x=4\pi$

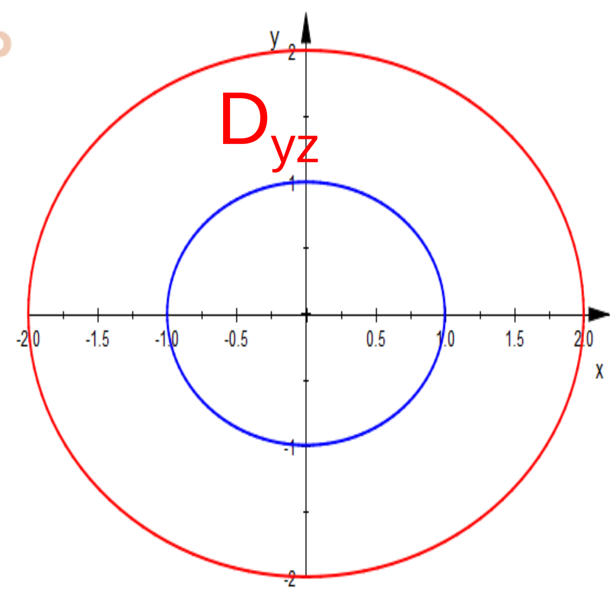
Ta sẽ tìm hình chiếu V xuống mặt phẳng Oyz từ 2 pt chứa y, z: $D_{yz}: 1 \le y^2+z^2 \le 4$

2 mặt còn lại cho ta cận tích phân theo dx: $2\pi \le x \le 4\pi$

$$I = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int_{2\pi}^{4\pi} (y^2+z^2)dx$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} (y^2+z^2).2\pi dydz$$

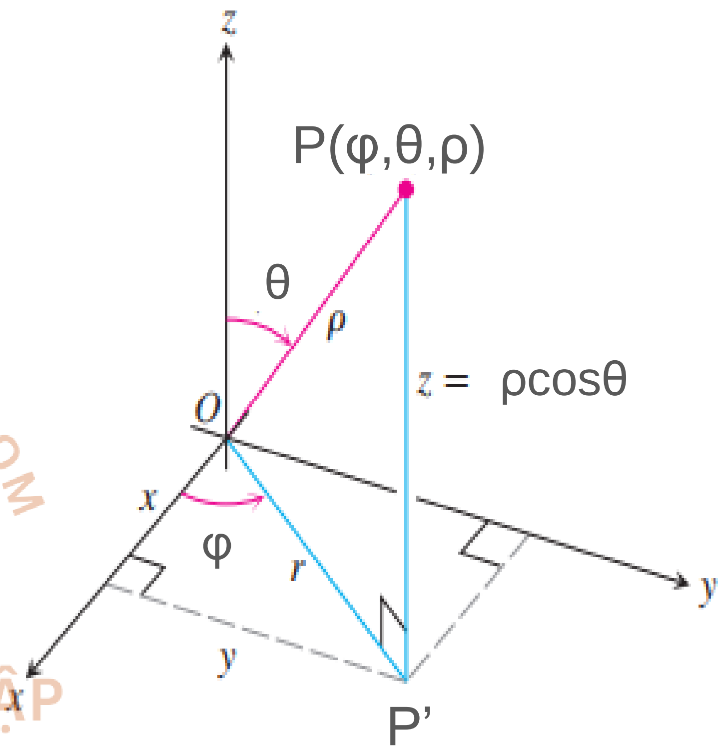
$$\overset{y=r\cos\varphi}{\underset{z=r\sin\varphi}{=}} 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r.r^2 dr = 15\pi^2$$



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Trong không gian cho điểm P(x,y,z), P’ là hình chiếu của P xuống mặt phẳng Oxy. Ta đặt:

$$\begin{cases} \varphi = g\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP'}\right) \\ \theta = g\left(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP}\right) \\ \rho = |OP| \end{cases}$$



Ta có:

$0 \le \rho \le +\infty, \ -2\pi \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi$

Nếu P nằm trên Oz thì góc φ không xác định, còn khi P trùng với gốc tọa độ thì cả θ cũng không xác định. Còn tất cả các điểm khác đều có thể xác định φ, θ, ρ và ta gọi bộ ba giá trị đó là tọa độ cầu của điểm P(φ,θ,ρ)

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Khi đó, ta dễ dàng tính được công thức chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

Và công thức chuyển từ tọa độ cầu sang tọa độ Descartes:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases}$$

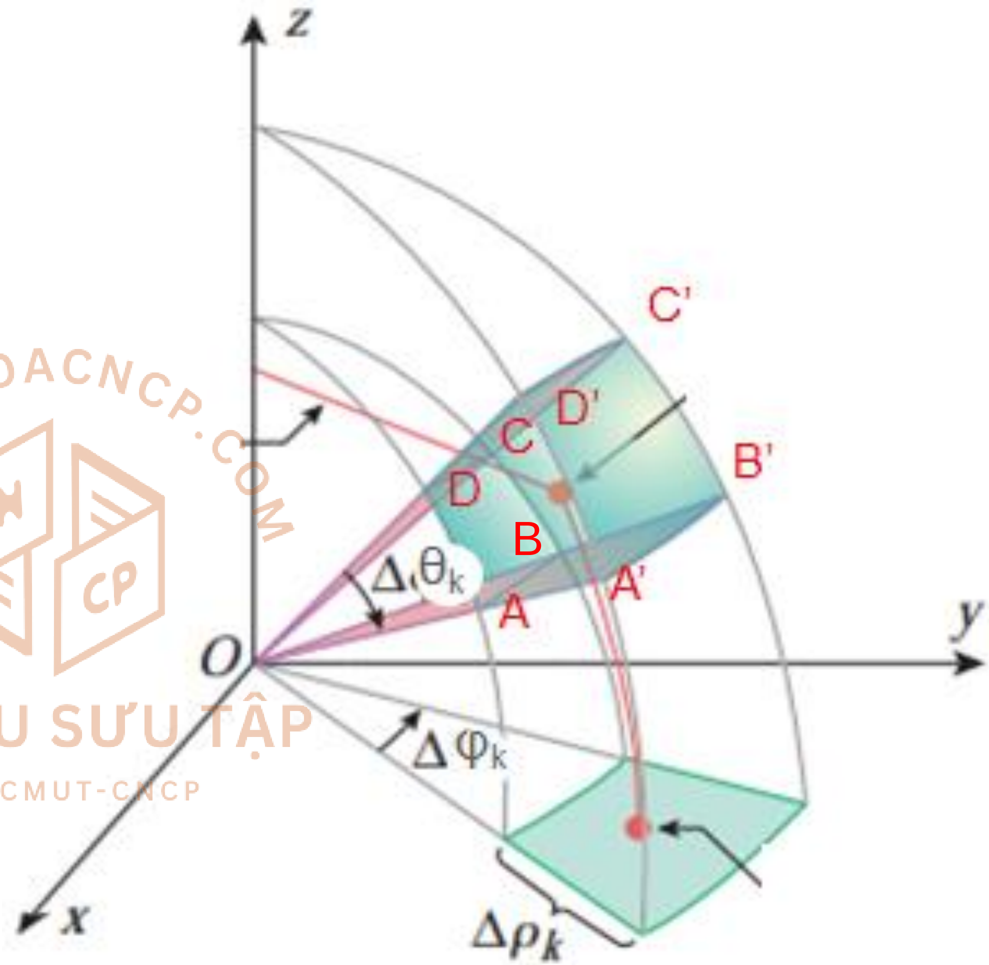
Thông thường, nếu *miền lấy tích phân là 1 phần hình cầu hoặc 1 phần ellipsoid thì ta sẽ đổi tích phân bội ba sang tọa độ cầu*.

Nếu tìm h/c của V xuống mp z=0 thì ta đặt $z = \rho\cos\theta$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Miền V được cho bởi các hàm trong tọa độ cầu, hàm f(x,y,z) cũng viết sang tọa độ cầu thành hàm g(ρ,φ,θ)

Ta tính thể tích hình hộp cong ABCD.A'B'C'D' xấp xỉ với hình hộp chữ nhật trên 4 đỉnh A(ρ,φ,θ), B(ρ,φ+Δφ,θ), A'(ρ+Δρ,φ,θ), D(ρ,φ,θ+Δθ)



$$\Delta v_k \approx AA' \times AB \times AD$$

$$\Delta v_k \approx \Delta\rho \times \rho\sin\theta\Delta\varphi \times \rho\Delta\theta_k$$

Thay vào tổng tích phân

$$S = \sum_{k=1}^{n} g(\varphi_k,\theta_k,\rho_k)\Delta v_k = \sum_{k=1}^{n} g(\varphi_k,\theta_k,\rho_k)\rho_k{}^2\sin\theta_k\Delta\rho_k\Delta\varphi_k\Delta\theta_k$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Qua giới hạn, ta có công thức đổi tp bội ba sang tọa độ cầu:

$$\iiint\limits_{V_{(x,y,z)}} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V_{(\varphi,\theta,\rho)}} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\rho$$

Thông thường, nếu *miền lấy tích phân là 1 phần hình cầu hoặc 1 phần ellipsoid thì ta sẽ đổi tích phân bội ba sang tọa độ cầu.*

Ta công nhận công thức đổi tp bội ba sang tọa độ cầu mở rộng sau:

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Nếu V là 1 phần của hình ellipsoid : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

Thì ta đặt: $\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\,\rho\cos\theta \end{cases}$ *để ellipsoid thành hình cầu*: $\rho = 1$

và đặt: $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix}$ gọi là định thức Jacobi

Ta có công thức:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{V_{(x,y,z)}} f(x,y,z)\,dxdydz = \\ &\iiint\limits_{V_{(\rho,\varphi,\theta)}} f\big(x(\rho,\varphi,\theta),y(\rho,\varphi,\theta),z(\rho,\varphi,\theta)\big)\,|J|\,d\varphi d\theta d\rho\end{aligned}}$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

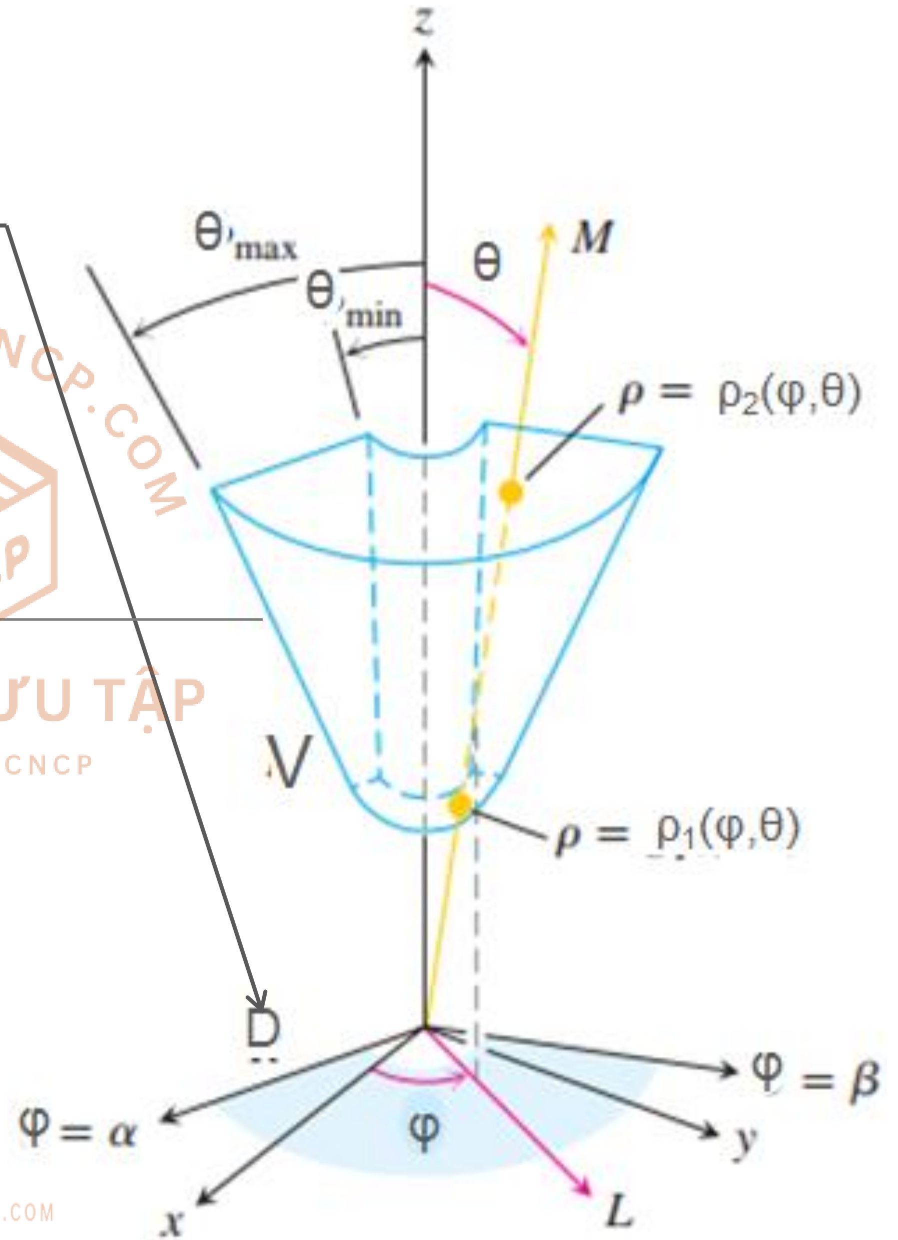
Cận của φ được xác định dựa vào hình chiếu D của V (giống tọa độ trụ).

Cận của θ, ρ thì dựa vào thiết diện cắt dọc V bởi 1 mặt phẳng chứa 1 trong 3 trục (VD: trục Oz nếu chiếu V xuống mp z=0).

Nếu cắt bởi mp chứa trục Oz, ta thường lấy là mặt phẳng x=0 bằng cách ta cho x=0 vào các pt xác định V

$$\alpha \le \varphi \le \beta, \theta_{\min} \le \theta \le \theta_{\max}$$

$$\rho_1(\varphi,\theta) \le \rho \le \rho_2(\varphi,\theta)$$



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iiint\limits_V 2yz\,dxdydz$

Trong đó V giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

Ta đổi sang tọa độ cầu bằng cách đặt:

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$

và tìm cận của φ, θ, ρ trong bài này bằng 2 cách

Cách 1: *Căn cứ vào các bất đẳng thức cho sẵn*

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \Leftrightarrow \rho \le 1$$

$$z \ge 0 \Leftrightarrow \cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

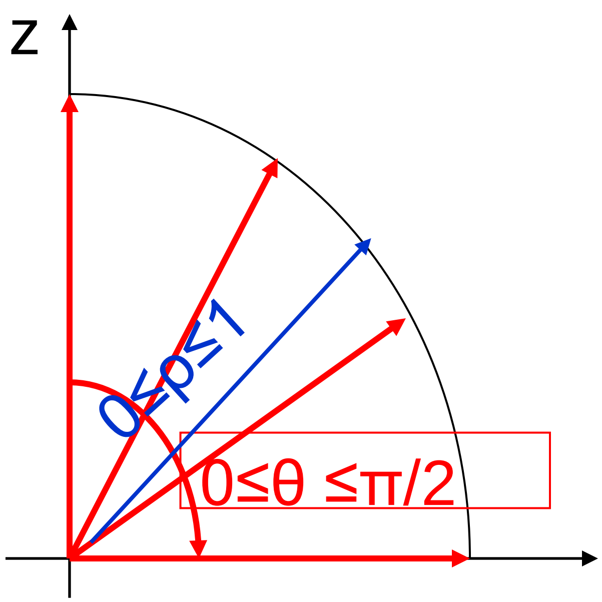
2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Cách 2: *Dựa trên 2 hình sau*

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là ¼ hình tròn D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1$,$0 \le x$, $0 \le y$ nên ta được $0 \le \varphi \le \pi/2$

Cắt dọc V bởi 1 mp chứa trục Oz là mp $x = 0$ bằng cách thay $x=0$ vào các bpt hoặc pt chứa z còn lại, ta được:

$y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0, y \ge 0$ - mặt cắt D_1 là 1/4 hình tròn



Quay tia gốc O màu đỏ từ nửa dương trục Oz sang phải để xác định góc θ:

$$0 \le \theta \le \pi/2$$

Đi theo chiều mũi tên từ gốc tọa độ ra: trong miền D1 - ta chỉ gặp 1 đường cong tức là đi trong V - ta chỉ gặp 1 mặt cầu

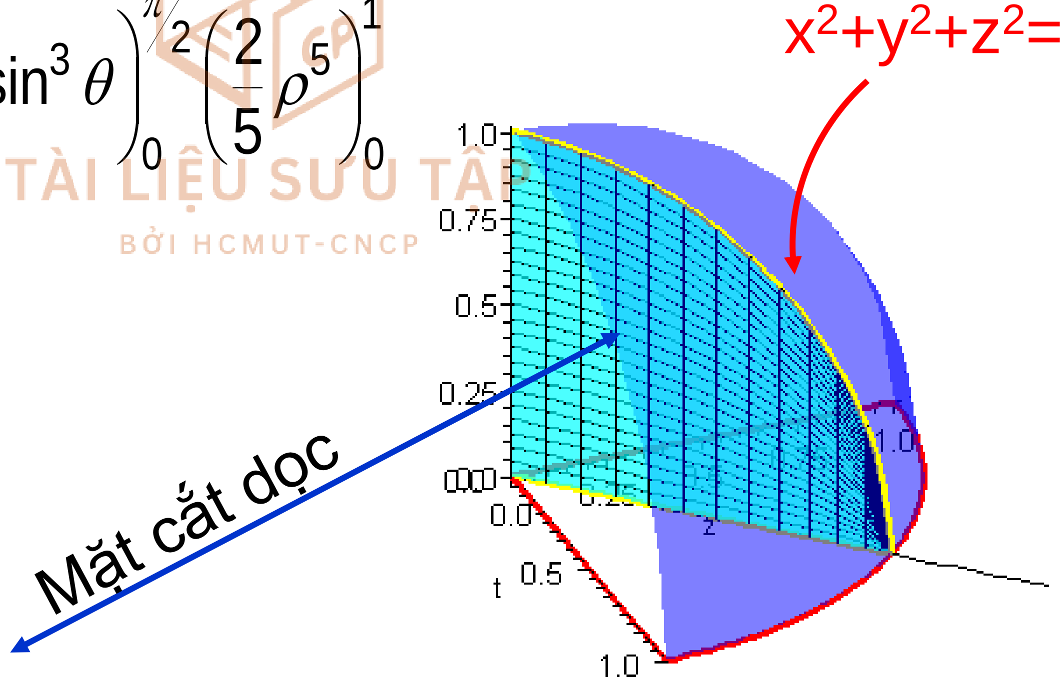
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le \rho \le 1$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Vậy : $$I=\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta . 2\rho\sin\theta\sin\varphi . \rho\cos\theta d\rho$$

$$I=\int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 2\rho^4 d\rho$$

$$I=\left(-\cos\varphi\right)_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{5}\rho^5\right)_0^1$$



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Cách vẽ vật thể trên trong Matlab:

```
%Doi bien sang toa do cau x^2+y^2+z^2=1, x,y,z>0
clf
hold on
xlabel('Truc Ox')
ylabel('Truc Oy')
zlabel('Truc Oz')
grid on
rotate3d on
title('x^2+y^2+z^2=1, x,y,z>0')

[phi,theta]=meshgrid(linspace(0,pi/2,30));
x=sin(theta).*cos(phi);y=sin(theta).*sin(phi);z=cos(theta);
mesh(x,y,z,'FaceColor','y','EdgeColor','w','FaceAlpha',.5)
```

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân bội ba hàm f(x,y,z)=x+y trên miền V giới hạn bởi: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \le 1, x \le 0, y \ge 0, z \le 0$

Miền lấy tích phân là 1 phần ellipsoid nên ta sẽ đổi tích phân sang tọa độ cầu mở rộng bằng cách đặt :

$$\begin{cases} x/2 = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y/3 = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

thì định thức Jacobi $J = 2.3.\rho^2\sin\theta = 6\rho^2\sin\theta$

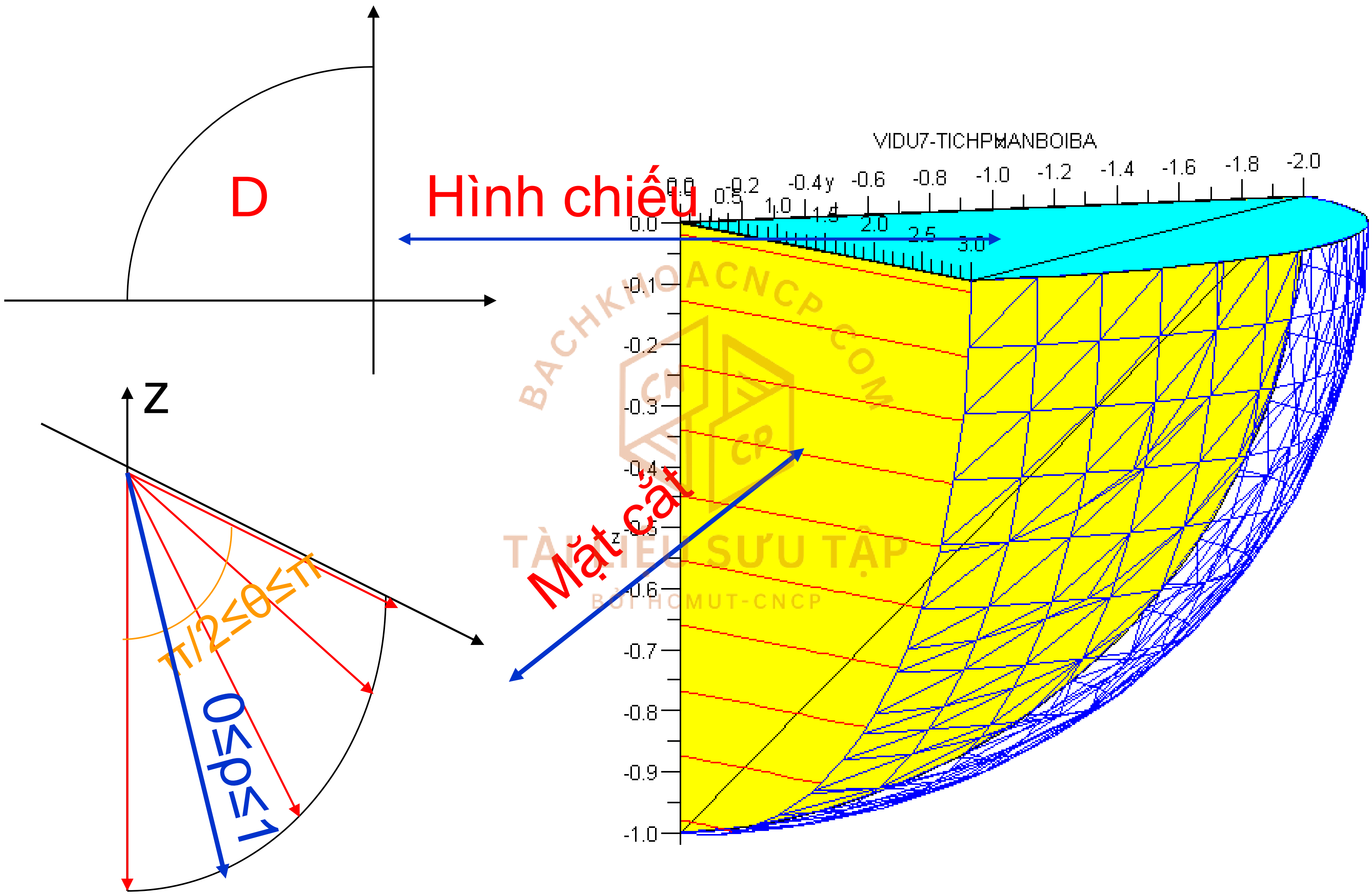
2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

$$V:\begin{cases}\rho^2\le 1\\ \rho\sin\theta\cos\varphi\le 0\\ \rho\sin\theta\sin\varphi\ge 0\\ \rho\cos\theta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ \cos\varphi\le 0\\ \sin\varphi\ge 0\\ \cos\theta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ \pi/2\le\varphi\le\pi\\ \pi/2\le\theta\le\pi\end{cases}$$

Vậy : $I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\theta\int\limits_0^1 6\rho^2\sin\theta(2\rho\sin\theta\cos\varphi+3\rho\sin\theta\sin\varphi)d\rho$

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(3\sin\varphi+2\cos\varphi)d\varphi\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^1 6\rho^3 d\rho$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân bội ba hàm f(x,y,z)=x+y trong miền V giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2=2$, $z^2=x^2+y^2$ $(z\geq 0)$

Miền V giới hạn chỉ bởi 2 mặt nên ta tìm hình chiếu xuống mặt z=0 bằng cách khử z từ 2 phương trình 2 mặt

$$\begin{cases} z^2 = 2 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Tức là hình chiếu của V là hình tròn $x^2+y^2\leq 1$ nên: $0\leq \varphi \leq 2\pi$

Ta cắt dọc miền V bởi mặt phẳng x=0 bằng cách cho x=0 vào 2 pt để được: $y^2+z^2 = 2$, $z^2=y^2$, $0\leq z$

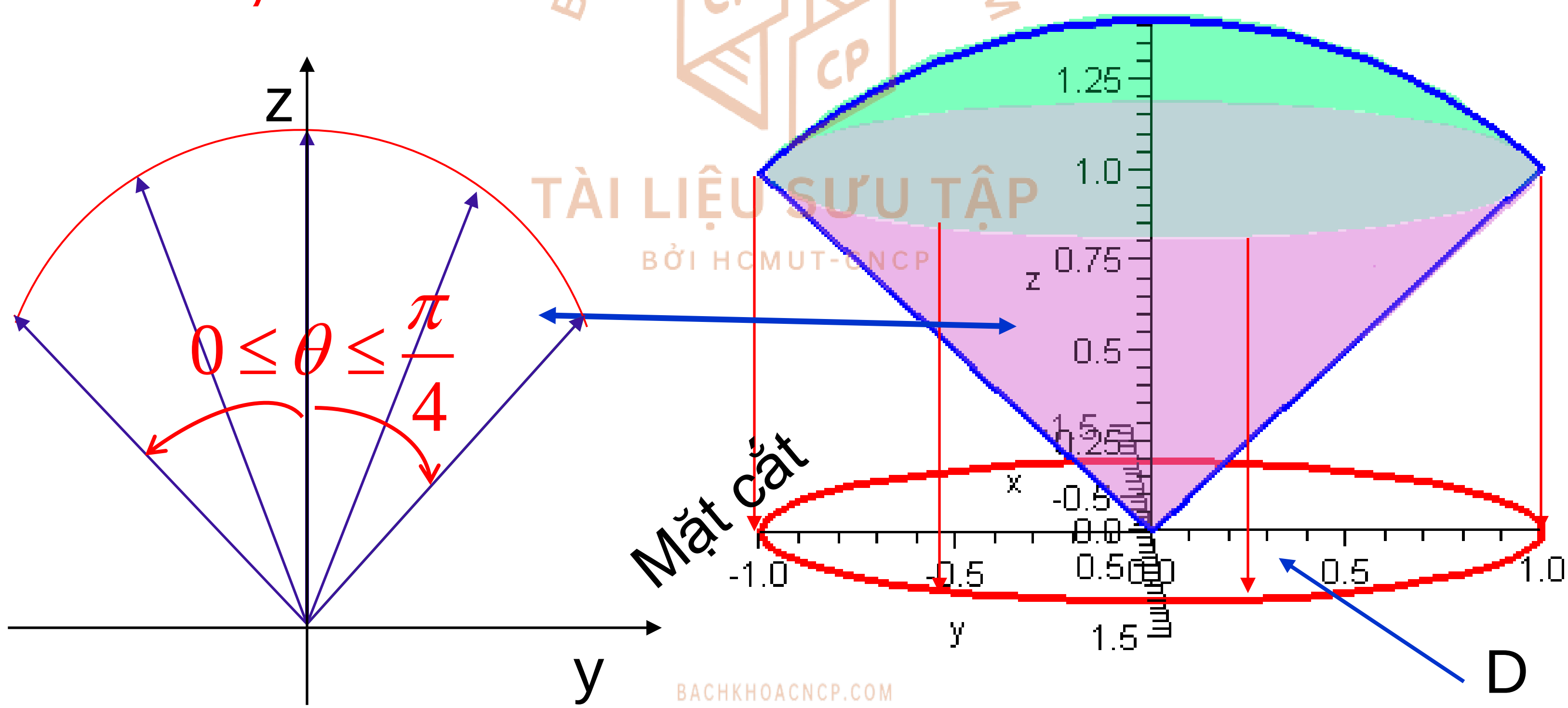
Vẽ mặt cắt

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Vẽ mặt cắt: $y^2+z^2 = 2,\ z^2=y^2,\ 0\le z$

Theo tia màu xanh quét mặt cắt sang trái hoặc sang phải ta cũng được: $0 \le \theta \le \pi/4$

Đi theo hướng từ gốc O ra ngoài trên mặt cắt, ta chỉ gặp 1 đường tròn, tương ứng trong không gian ta chỉ gặp 1 mặt cầu nên $0 \le \rho \le \sqrt{2}$



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Vậy

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sin\theta(\rho\sin\theta\cos\varphi+\rho\sin\theta\sin\varphi)d\rho$$

$$I=\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho$$

Thực ra đây là tích của 3 tích phân xác định nhân với nhau, mà tích phân thứ nhất bằng 0. Suy ra I=0

Tuy nhiên, vì miền V có hình chiếu là hình tròn nên ta cũng có thể đổi tích phân trên sang tọa độ trụ thông thường

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (x+y)dz$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x+y)(\sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(r\cos\varphi + r\sin\varphi)(\sqrt{1-r^2} - r)dr$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^1 r^2(\sqrt{1-r^2} - r)dr$$

I=0

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Đổi tích phân sau về tọa độ Descartes

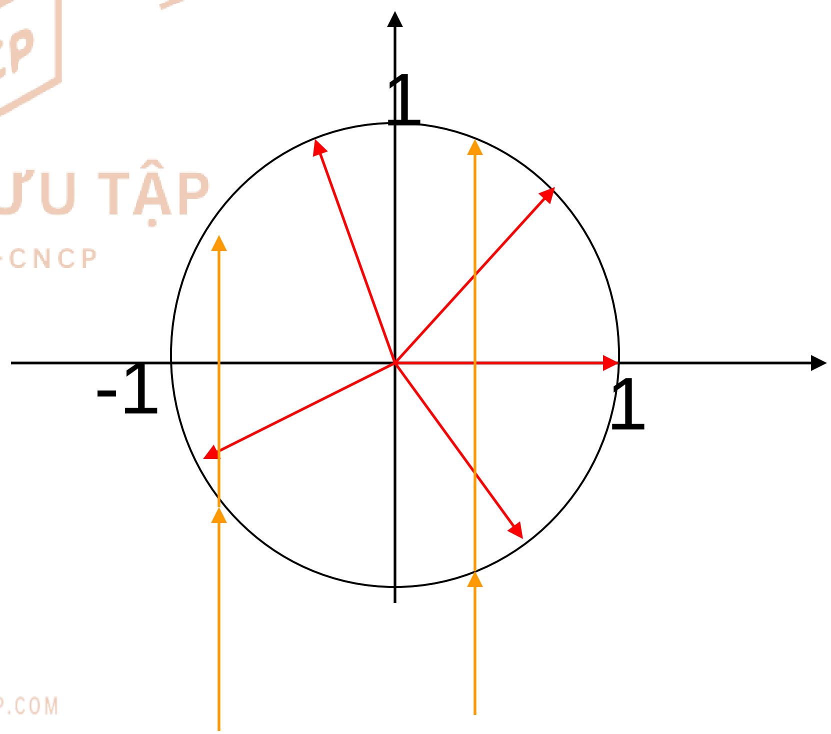
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 dz$$

Tp được cho trong tọa độ trụ

Từ cận của tích phân theo dr, dφ ta có hình chiếu D của miền lấy tích phân xuống mặt Oxy,

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$



Ta còn xác định cận theo z

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Từ cận của tích phân theo dz ta sẽ xác định mặt giới hạn trên, giới hạn dưới :

$$0 \le z \le \sqrt{4-r^2} \qquad \leftrightarrow 0 \le z \le \sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}$$

Hàm dưới dấu tích phân :

$$f(x,y,z) = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

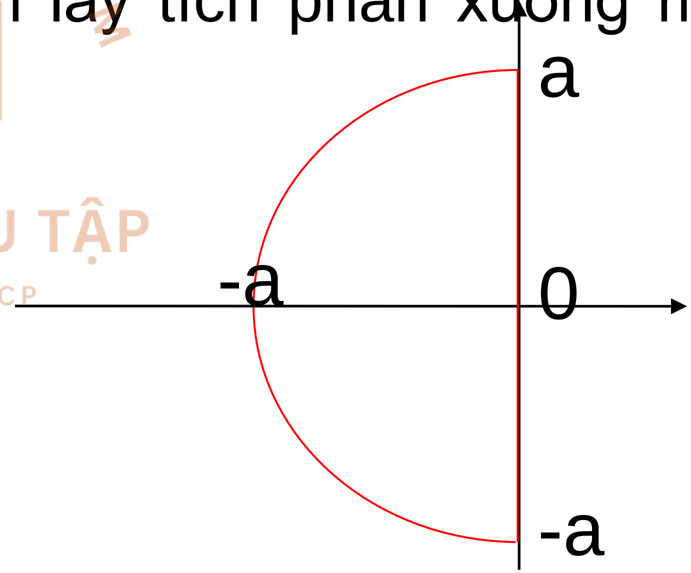
Vậy: $$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Đổi tích phân sau sang tọa độ cầu và tính

$$I_{11} = \int_{-a}^{0} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{0} xdz$$

Tp cho trong tọa độ trụ nên ta bắt đầu từ cận tích phân theo dx, dy để có hình chiếu của miền lấy tích phân xuống mặt phẳng Oxy



$$D: \begin{cases} -a \le x \le 0 \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$$

Cận tp theo dz:

$$-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le a^2 \\ z \le 0 \end{cases}$$

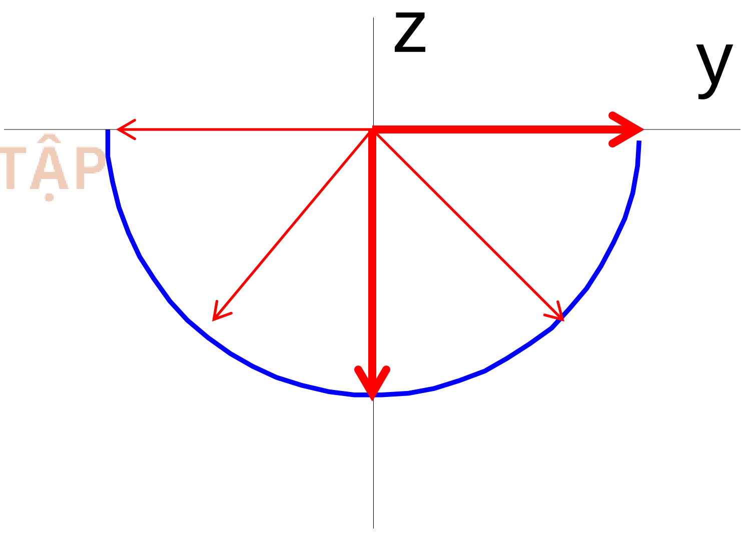
2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

$$-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le a^2 \\ z\le 0 \end{cases}$$

Đây là nửa hình cầu phía dưới ứng với $z \le 0$

Cắt dọc miền lấy tích phân bởi mặt phẳng chứa trục Oz là $x = 0$ ta được ½ hình tròn:

$y^2+z^2\le a^2,\ z\le 0$



Suy ra $\pi/2 \le \theta \le \pi$ và $0\le \rho\le a$

Cuối cùng thay $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$ vào

$$I_{11}=\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 \sin\theta.\rho\sin\theta\cos\varphi d\rho$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Tính tích phân trên miền V: $x^2+y^2\le 1$, $z\ge 0$, $z^2\le x^2+y^2$ của hàm $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

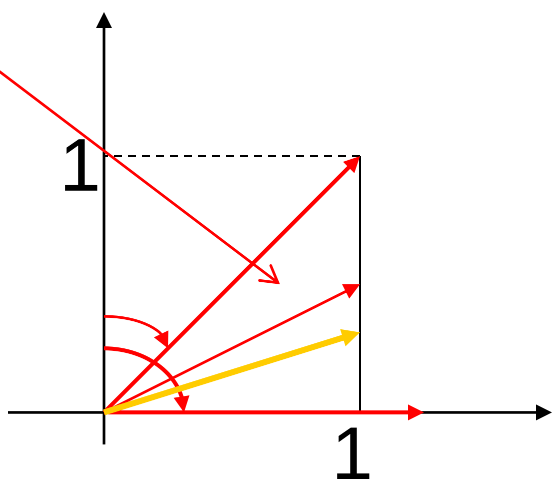
3 mặt giới hạn V không có mặt cầu nhưng vì hàm f(x,y,z) mà ta sẽ đổi tích phân sang tọa độ cầu

Hình chiếu của V xuống mp z=0 là hình tròn D_{xy}: $x^2+y^2\le 1$

$\rightarrow 0\le\varphi\le 2\pi$

Cắt dọc V bởi mp x=0 ta được D_1: $z\ge 0$, $y^2\le 1$, $z^2\le y^2$

$\rightarrow \pi/4\le\theta\le\pi/2$



Đi từ gốc tọa độ ra, ta chỉ gặp duy nhất đường thẳng y=1

tương ứng là mặt trụ trong không gian với pt: $x^2+y^2=1$

$\rightarrow 0\le\rho\le 1/\sin\theta$

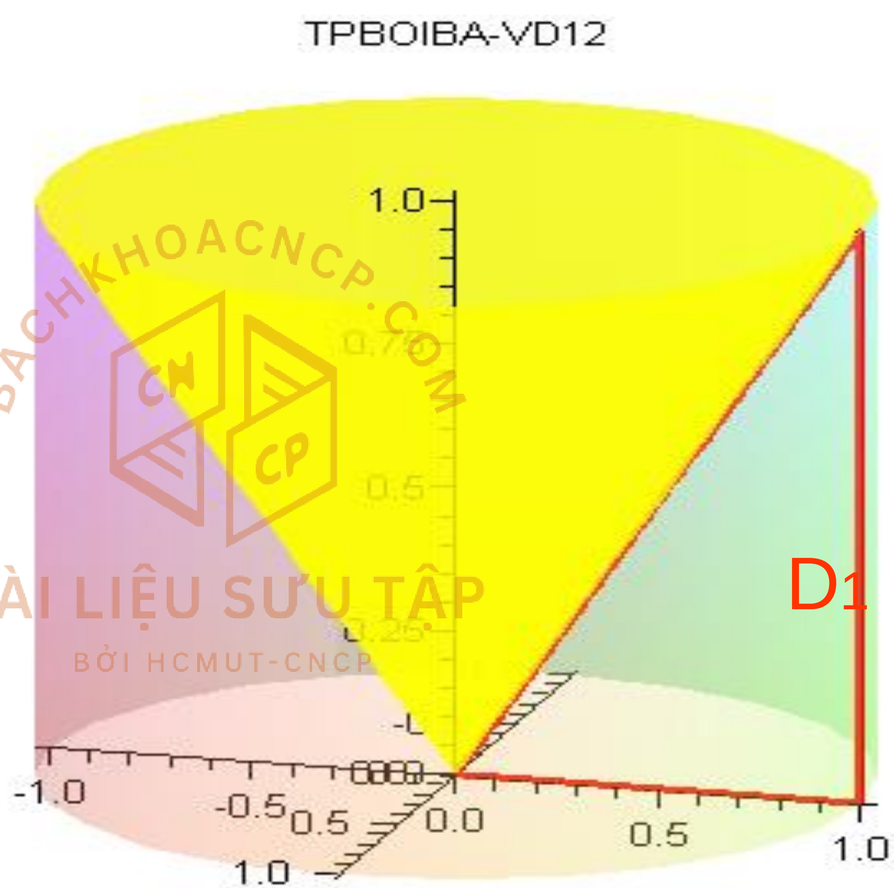
2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^{1/\sin\theta}\rho^2\sin\theta.\rho d\rho \;=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta d\theta\left(\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{1/\sin\theta}\right)$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^3\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{-d\cos\theta}{(1-cos^2\theta)^2}$$

$$I=\frac{\pi}{2}(-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)



2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Ví dụ : Cho tích phân $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Với V giới hạn bởi $x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2+z^2 \le 2$

a. Viết cận tích phân trong toạ độ trụ
b. Viết cận tích phân trong toạ độ cầu
c. Tính tích phân

a. Hình chiếu D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$

$$-\sqrt{2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

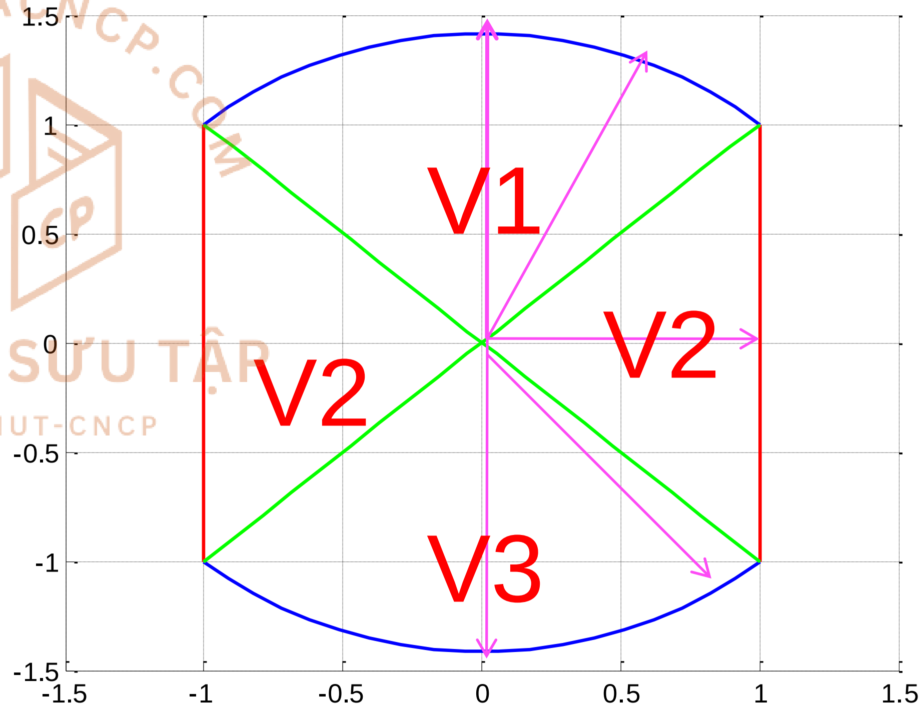
b. Hình chiếu D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1$ $\Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi$

Cắt V theo mặt phẳng x=0 chứa trục Oz :

$$y^2 \le 1, y^2 + z^2 \le 2 \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi$$

Đi theo các tia màu hồng từ gốc toạ độ lần lượt từ trên xuống, ta sẽ gặp đường tròn, đt rồi đường tròn.

Do đó, miền V sẽ được chia thành 3 phần bởi 2 đt màu xanh lá trên mặt cắt



tương ứng trong không gian là mặt nón chia vật thể

$$z^2 = x^2 + y^2$$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

Cả 3 miền V1, V2, V3 đều có hình chiếu xuống mp z=0 là hình tròn D_{xy} như câu a/

V_1 là phía trên nón với z dương $\Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2} \end{cases}$

V_2 là phần dưới nửa nón dương và phía trên nửa nón âm $\Rightarrow \begin{cases} \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4 \\ 0 \le \rho \le 1/\sin\theta \end{cases}$

Vì pt mặt trụ trong toạ độ cầu là

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta \le 1$$

V_3 là phía dưới nón với z âm $\Rightarrow \begin{cases} 3\pi/4 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2} \end{cases}$

2.2.2 Tích phân bội ba – Đổi biến sang tọa độ cầu (Tự đọc)

$$I = \iiint\limits_{V_1} + \iiint\limits_{V_2} + \iiint\limits_{V_3}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho}{\rho} + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{1/\sin\theta} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho}{\rho} + \int_{3\pi/4}^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho}{\rho} \right]$$

c. Tính tích phân

Ta có thể chọn 1 trong 3 cách tính: tọa độ Dec, toạ độ trụ hoặc toạ độ cầu

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

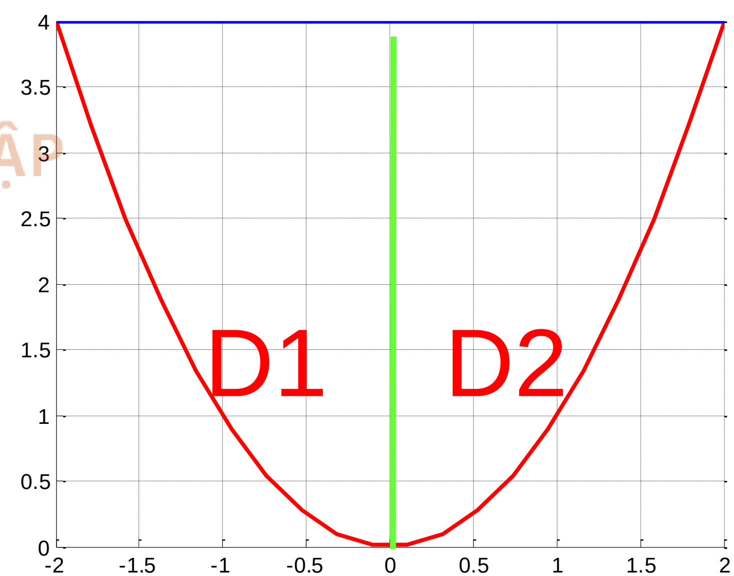
1. Thể tích miền Ω được tính bởi $V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1.dxdydz$

Ví dụ : Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$y = x^2, y = 4, x - z = 0, z = 0$$

D_{xy}: $y=x^2$, $y=4$

Vì phải so sánh giữa 2 mặt z=0 và z=x nên miền D chia thành 2 phần bởi đt x=0



$$V = \iint\limits_{D_1} dxdy \int_x^0 dz + \iint\limits_{D_2} dxdy \int_0^x dz$$

$$V = \int_{-2}^{0} dx \int_{x^2}^{4} dy \int_x^0 dz + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{4} dy \int_0^x dz$$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

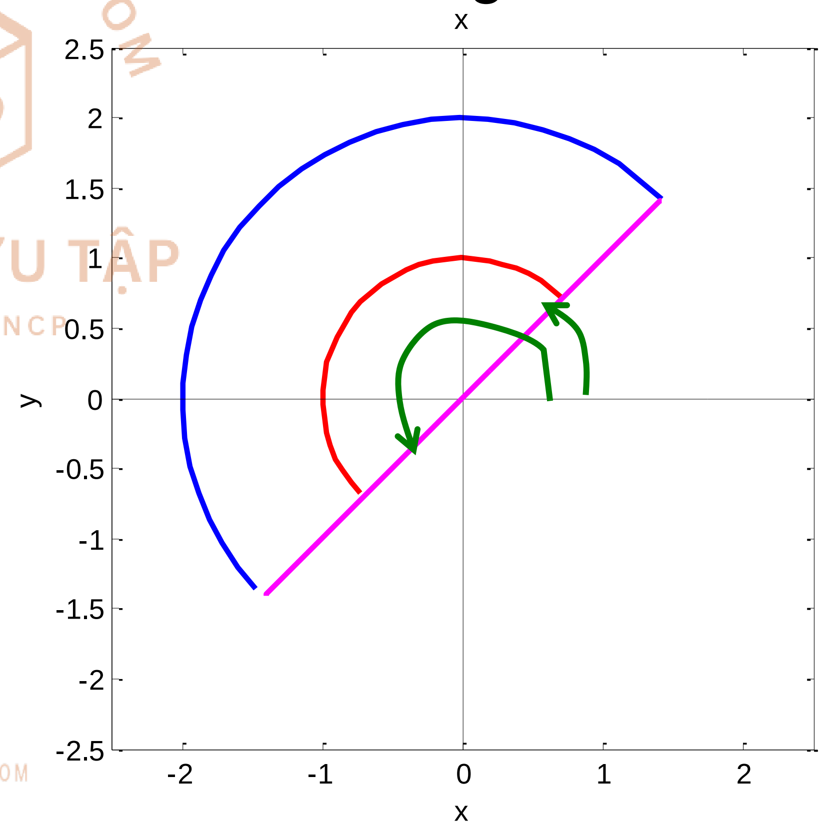
Ví dụ: Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \le y$$

Ta sẽ tính thể tích bằng cách đổi tích phân bội ba

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$ sang tọa độ cầu bình thường

Hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oxy là D:



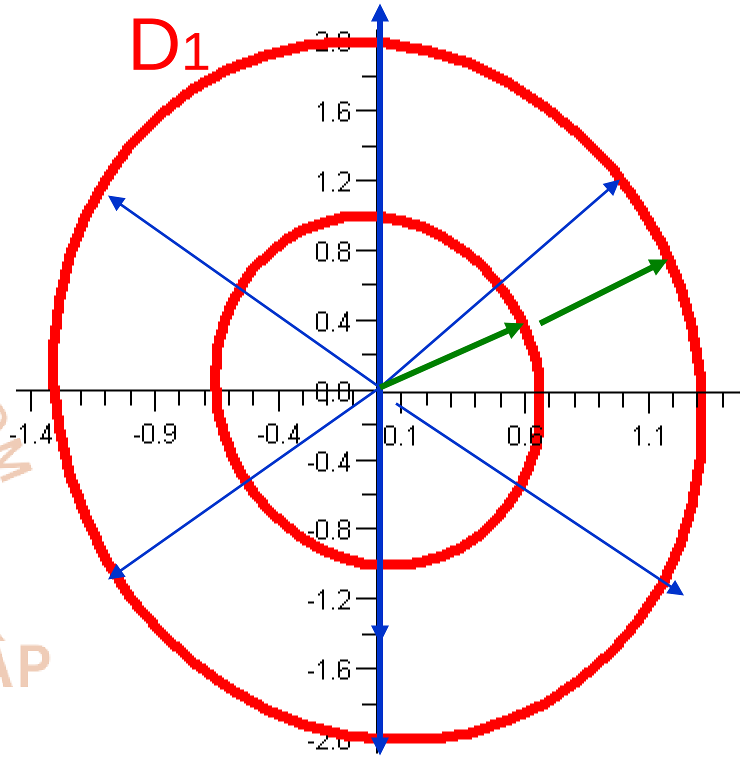
$$x^2 + y^2 \le 4, x \le y$$

$\pi/4 \le \varphi \quad \le 5\pi/4$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

Cắt dọc Ω bằng mặt phẳng chứa trục Oz là y = x ta được miền D1 là hình vành khăn

nên $0 \le \theta \le \pi$



Trong miền D1 ta đi theo chiều mũi tên từ gốc tọa độ ra

ta gặp đường tròn nhỏ trước,

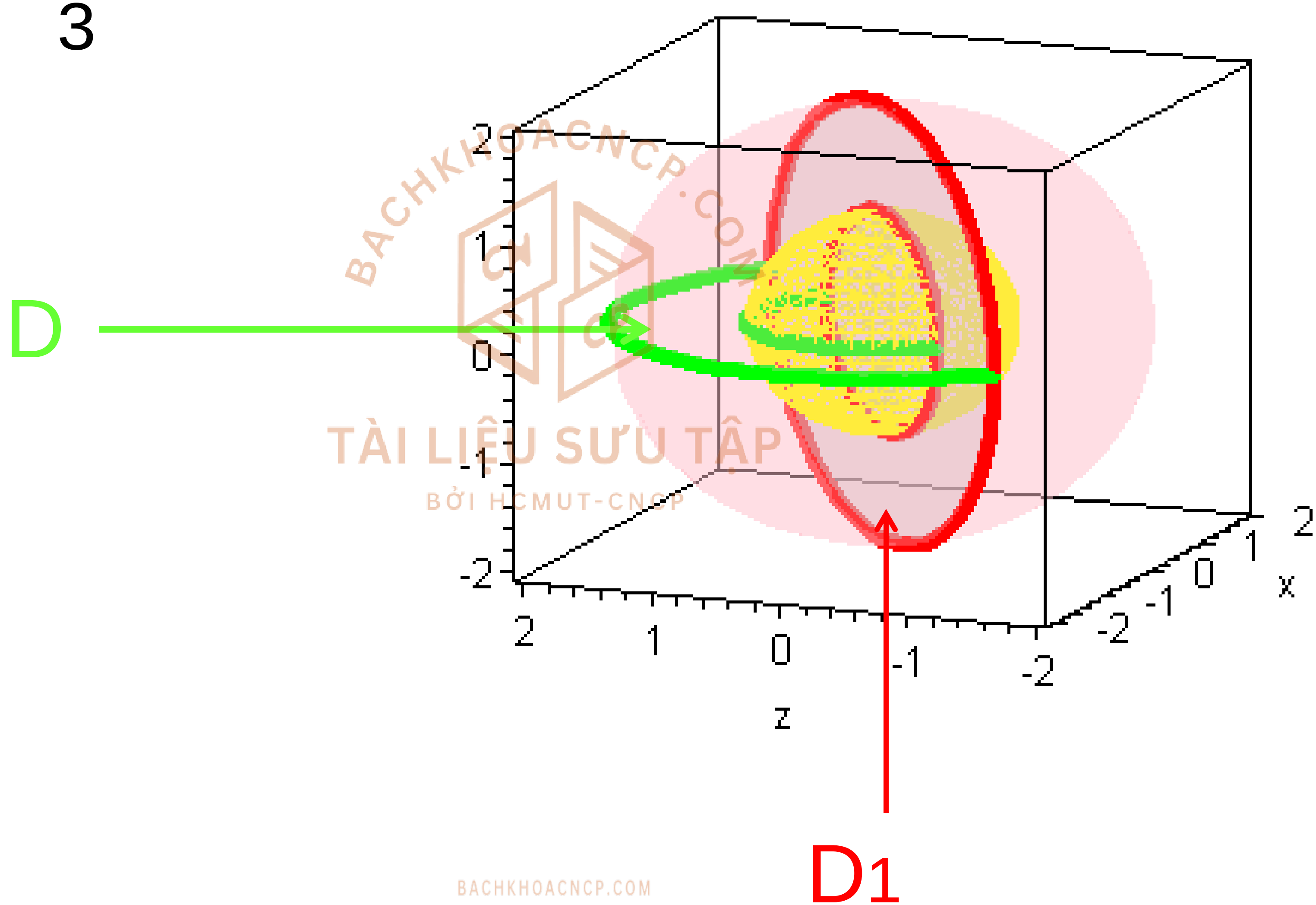
đường tròn lớn sau

nên: $1 \le \rho \le 2$

Vậy: $$V(\Omega) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \sin\theta \, d\rho$$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

$$V(\Omega) = \frac{14\pi}{3}$$



2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

Ví dụ : Tính thể tích Ω giới hạn bởi

$$z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0$$

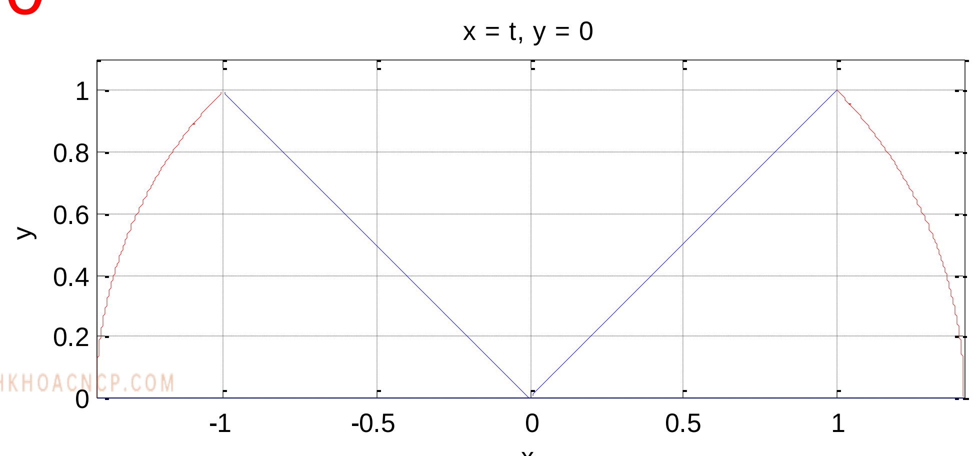
Tìm hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy bằng cách khử z, ta được 2 pt : $x^2+y^2=2, x^2+y^2=1$

ta được hình chiếu D: $x^2+y^2\le 2 \to 0\le\varphi\le 2\pi$

Cắt dọc Ω bằng mặt phẳng x=0, ta được miền D1:

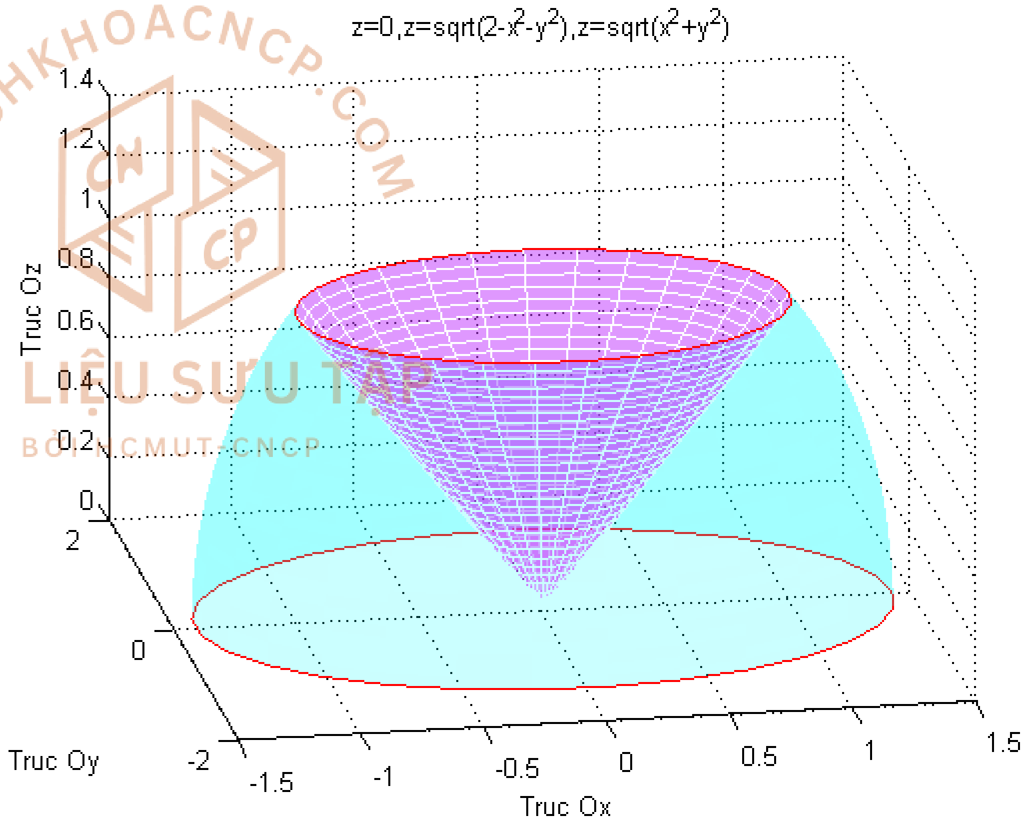
$$z=\sqrt{2-y^2}, z=\sqrt{y^2}, z=0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le\sqrt{2}$$



2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

$$I_{14} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho \sin\theta d\rho$$



2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

Cho vật thể V có khối lượng riêng tại điểm M(x,y,z) là f(x,y,z) . Ta có

Khối lượng vật thể là
$$m(V) = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Moment quán tính với trục Ox
$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2).fdxdydz$$

Moment quán tính với mp yz
$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2.fdxdydz$$

Moment quán tính với gốc O
$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2).fdxdydz$$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

Moment tĩnh với mp Oxz

$$\boxed{M_{xz} = \iiint_V y.\,f dxdydz}$$

Toạ độ trọng tâm

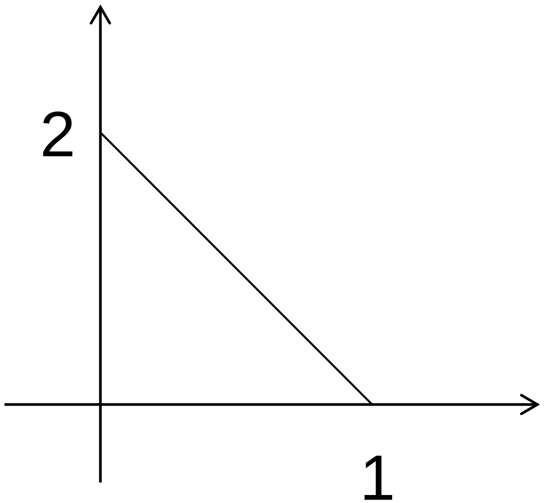
$$x_0 = \frac{\iiint_V x.\,f dxdydz}{\iiint_V f dxdydz}, \quad y_0 = \frac{\iiint_V y.\,f dxdydz}{\iiint_V f dxdydz}, \quad z_0 = \frac{\iiint_V z.\,f dxdydz}{\iiint_V f dxdydz}$$

2.2.3 Tích phân bội ba – Ứng dụng

Ví dụ: Cho vật thể Ω giới hạn bởi: y=0, z=0, z=3x, 2x+y=2. Tìm tọa độ trọng tâm của vật biết:

1. Vật thể đồng chất
2. Khối lượng riêng tại điểm M(x,y,z) là f(x,y,z)=x+y+2z

Ta tính 4 tích phân bội ba với cùng miền lấy tp là Ω cho mỗi câu



$$D_{xy} : y = 0, 2x + y = 2, x = 0$$

2 mặt còn lại : $z = 0$, $z = 3x$

Miền D nằm bên phải đt x=0 nên: $0 \le 3x$

§2. Tích phân bội ba – Bài tập

I. Tính tp bội ba của hàm f(x,y,z) trên miền Vy

$$1. f_1 = x + y + z; V_1 : x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$$

$$2. f_2 = z; V_2 : y = x^2, y + z = 4, z = 0$$

$$3. f_3 = \sqrt{x^2 + y^2}; V_3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$4. f_4 = x + z; V_4 : z = 4 - x^2 - y^2, z = 2 + x^2 + y^2$$

$$5. f_5 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}}; V_5 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2, x^2 + y^2 \ge 1$$

$$6. f_6 = xy; V_6 : z = 0, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4$$

$$7. f_7 = y; V_7 : z = 0, x = 0, x + 2z = 3, y = 1, y = 3$$

§2. Tích phân bội ba – Bài tập

II. Tính thể tích vật thể:

$$V_1: y = x, y = x^2, z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2$$

$$V_2: z = x + y, z = x^2 + y^2$$

$$V_3: x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 3, 2z = x^2 + y^2$$

$$V_4: z^2 = x^2 + y^2, z = 6 - x^2 - y^2$$

$$V_5: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = 0$$