

Bài tập- Tích Phân kép

Bài 1 Tính các tích phân lập

$$1. \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy.$$

$$3. \int_0^1 \int_{x^2}^x (1+2y) dy dx.$$

$$5. \int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3) dt ds.$$

$$2. \int_0^1 \int_{2x}^2 (x-y) dy dx.$$

$$4. \int_0^2 \int_y^{2y} xy dx dy.$$

$$6. \int_0^1 \int_0^{e^v} \sqrt{1+e^v} dw dv.$$

Bài 2 Tính các tích phân hai lớp

$$1. \iint_D y^2 dA; \quad D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, -y-2 \leq x \leq y\}.$$

$$2. \iint_D \frac{y}{x^5+1} dA; \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

$$3. \iint_D x dA; \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

$$4. \iint_D x^3 dA; \quad D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}.$$

Bài 3 Vẽ hình minh họa một miền

a. Loại I nhưng không phải loại II.

b. Loại II nhưng không phải loại I.

Bài 4 Vẽ hình minh họa một miền

a. Vừa loại I và loại II.

b. Không phải loại I và cũng không phải loại II.

Bài 5 Biểu diễn D như là một miền loại I và loại II. Sau đó tính tích phân hai lớp theo hai cách.

$$1. \iint_D x dA; \quad D \text{ bị giới hạn bởi các đường thẳng } y = x, y = 0, x = 1.$$

$$2. \iint_D xy dA; \quad D \text{ bị giới hạn bởi các đường cong } y = x^2, y = 3x.$$

Bài 6 Xây dựng các tích phân lập theo cả hai trình tự lấy tích phân. Sau đó tính tích phân hai lớp bằng cách sử dụng trình tự lấy tích phân dễ hơn, và giải thích tại sao trình tự đó dễ hơn.

1. $\iint_D y dA$; D bị giới hạn bởi $y = x - 2, x = y^2$.
2. $\iint_D y^2 e^{xy} dA$; D bị giới hạn bởi $y = x, y = x^3, x \geq 0$.

Bài 7 Tính các tích phân hai lớp.

1. $\iint_D x \cos y dA$; D bị giới hạn bởi $y = 0, y = x^2, x = 1$.
2. $\iint_D (x^2 + 2y) dA$; D bị giới hạn bởi $y = x, y = x^3, x \geq 0$.
3. $\iint_D y^2 dA$; D là miền tam giác có các đỉnh $(0, 1), (1, 2), (4, 1)$.
4. $\iint_D xy^2 dA$; D bị giới hạn bởi $x = 0, x = \sqrt{1 - y^2}$.
5. $\iint_D (2x - y) dA$; D bị giới hạn bởi đường cong có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 2.
6. $\iint_D 2xy dA$; D là miền tam giác có các đỉnh $(0, 0), (1, 2), (0, 3)$.

Bài 8 Tính thể tích của hình khối được cho.

1. Nằm dưới mặt phẳng $x - 2y + z = 1$ và nằm trên miền bị giới hạn bởi $x + y = 1$ và $x^2 + y = 1$.
2. Nằm dưới mặt $z = 1 + x^2 y^2$ và nằm trên miền được bao bởi $x = y^2$ và $x = 4$.
3. Nằm dưới mặt $z = xy$ và nằm trên tam giác có các đỉnh lần lượt là $(1, 1), (4, 1)$ và $(1, 2)$.
4. Bị giới hạn bởi paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ và các mặt phẳng $x = 0, y = 1, y = x$ và $z = 0$.
5. Bị giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$.
6. Bị giới hạn bởi các mặt phẳng $z = x, y = x, x + y = 2$ và $z = 0$.
7. Bị giới hạn bởi mặt trụ $z = x^2, y = x^2$ và các mặt phẳng $z = 0, y = 4$.
8. Bị giới hạn bởi trụ $y^2 + z^2 = 4$ và các mặt phẳng $x = 2y, x = 0, z = 0$ ở góc phần tám (cung 45°) thứ nhất.

9. Bị giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = r^2$ và $y^2 + z^2 = r^2$.

Bài 9 Sử dụng máy tính/máy tính vẽ đồ thị để tính toán hoành độ của các giao điểm giữa đường cong $y = x^4$ và $y = 3x - x^2$. Nếu D là miền được giới hạn bởi các đường cong này, hãy ước lượng tích phân $\iint_D x dA$.

Bài 10 Tìm thể tích xấp xỉ của hình khối nằm trong góc phần tám thứ nhất, được giới hạn bởi các mặt phẳng $y = x, z = 0, z = x$ và hình trụ $y = \cos x$. (Sử dụng thiết bị vẽ đồ thị để ước tính các giao điểm.)

Bài 11 Tìm thể tích của hình khối bằng cách trừ hai thể tích với nhau

a. Hình khối bị giới hạn bởi các mặt trụ parabolic $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$ và các mặt phẳng $x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0$.

b. Hình khối bị giới hạn bởi mặt trụ parabolic $y = x^2$ và các mặt phẳng $z = 3y, z = 2 + y$.

Bài 12 Phác họa hình khối có thể tích được cho bởi tích phân lập như sau

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx.$ 2. $\int_0^1 \int_1^{1-x^2} (1 - x) dy dx.$

Bài 13 Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tìm thể tích chính xác của hình khối.

1. Nằm dưới mặt $z = x^3 y^4 + xy^2$ và nằm trên miền bị giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x^2 + x$ với $x \geq 0$.

2. Nằm giữa các paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - 2y^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

3. Bị giới hạn bởi $z = 1 - x^2 - y^2$ và $z = 0$.

4. Bị giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$ và $z = 2y$.

Bài 14 Phác họa miền lấy tích phân và thay đổi trật tự lấy tích phân.

1. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy.$

4. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy.$

2. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y) dy dx.$

5. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx.$

3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx.$

6. $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx.$

Bài 15 Tính các tích phân sau bằng cách đổi trật tự lấy tích phân.

1. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy.$

4. $\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dx dy.$

2. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dy dx.$

5. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy.$

3. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx.$

6. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy.$

