1. Khai triển Taylor
   - Công thức và ý nghĩa
   - Khai triển Maclaurint một số hàm thường gặp

2. Hàm số cho bởi phương trình tham số
   - Giới thiệu đường cong tham số
   - Đạo hàm của hàm số cho bởi phương trình tham số

- Cho hàm số f có đạo hàm đến cấp n trong một lân cận của điểm cho trước x_0.
- **Khai triển Taylor** đến cấp n của hàm số $f(x)$ trong lân cận điểm $x = x_0$ là

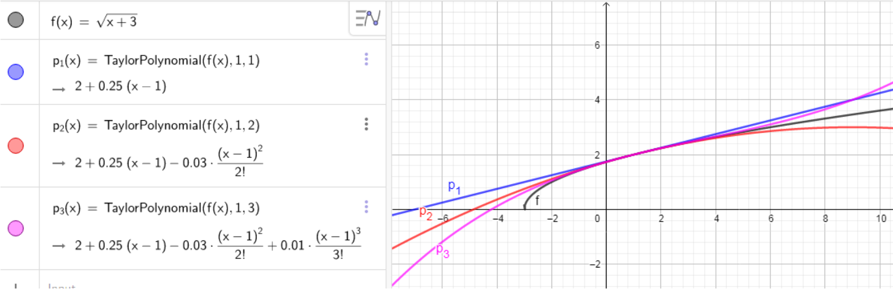
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

trong đó R_n là **phần dư (remainder)** được xác định như sau:

  - $R_n = o\left[(x - x_0)^n\right]$ (dạng Peano).
  - $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (dạng Lagrange), nếu f khả vi đến cấp $n+1$, và c là một điểm trung gian nào đó nằm trong lân cận của x_0.

Ý nghĩa của khai triển Taylor

Hàm số $f(x)$ được xấp xỉ bởi những đa thức để thuận tiện cho việc tính toán.



Công thức Maclaurint

Khai triển Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận điểm $x = 0$ được gọi là **khai triển Maclaurint**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

trong đó $o(x^n)$ là VCB cấp cao hơn x^n khi $x \to 0$.

(1) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

(2) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

(3) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\ .$$

(4) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

(5) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

```
>> syms x;
>> taylor(log(1+x), x, 0, 'Order', 7)

ans =

- x^6/6 + x^5/5 - x^4/4 + x^3/3 - x^2/2 + x
```

(6) $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$

(7) $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

(8) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

(9) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}).$

```
>> syms x;
>> taylor(atan(x), x, 0, 'Order', 9)

ans =

- x^7/7 + x^5/5 - x^3/3 + x
```

Ví dụ

Khi $x \to 0$, tìm cấp của các VCB sau:

(a) $f(x) = e^x - x - \cos x$;

(b) $f(x) = \sqrt{1-2x} - x - \cos x$.

Ví dụ

Khai triển Maclaurin của các hàm số sau đến cấp 5:

(a) $f(x) = \cos(x - \pi/3)$;

(b) $g(x) = \tan x$.

- Giả sử rằng cả hai thành phần x và y đều là các hàm số theo biến thứ ba t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

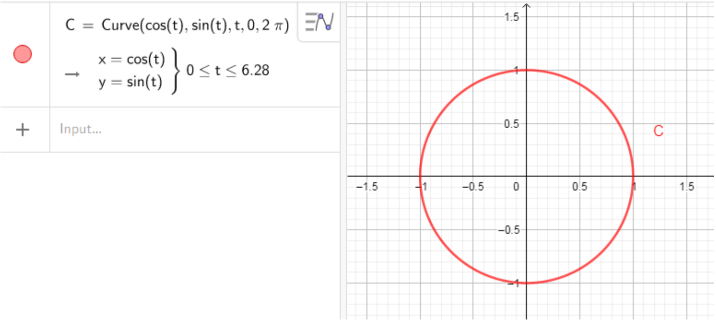
- Khi t thay đổi, điểm $(x, y) = (x(t), y(t))$ vạch ra một đường cong C, và ta gọi đường cong này là **đường cong tham số (parametric curve)**.

Ví dụ

Đường cong tham số C

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

chính là đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1.$



- Xét đường cong tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

- Trong một số trường hợp đặc biệt, bằng cách **khử** tham số t, phương trình tham số trên có thể được biểu diễn lại dưới dạng hàm số của y theo x:

$$y = y(x)$$

Cho hàm số $y = y(x)$ xác định bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

- Công thức tính đạo hàm cấp một:

$$y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

- Công thức tính đạo hàm cấp hai:

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))/dt}{dx/dt}.$$

Ví dụ

Cho hàm số $y = y(x)$ xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - 3t, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

(a) *Tính giá trị các đạo hàm $y'(x)$, $y''(x)$ tại $x = 4$.*

(b) *Tìm cực trị của hàm số.*