

Phần B

LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

Chương 1

1. a) Các trường hợp thuận lợi là (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1).

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{6}.$$

b) Các trường hợp thuận lợi là (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2).

$$\text{Vậy } P = \frac{5}{36}.$$

$$\text{c) } P = \frac{2}{9}.$$

2. a) Các trường hợp có tổng bằng 8 là (2, 3, 3); (2, 2, 4); (1, 1, 6); (1, 2, 5); (1, 3, 4) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là: $3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 21$

$$\text{Do đó } P = \frac{21}{216}.$$

b) Các trường hợp có tổng bằng 11 là (1, 4, 6); (1, 5, 5); (2, 3, 6); (2, 4, 5); (3, 4, 4); (3, 3, 5) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là: $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$

$$\text{Do đó } P = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

$$3. \text{ a) } P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}.$$

$$\text{b) } P = \frac{C_6^4 \cdot C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

$$\text{c) } P = \frac{C_4^2 \cdot C_6^4 + C_4^3 \cdot C_6^3 + C_4^4 \cdot C_6^2}{C_{10}^6} = \frac{185}{210} = \frac{37}{42}$$

4. Số trường hợp có thể C_{12}^6 .

Số trường hợp thuận lợi $C_6^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$.

$$\text{Vậy } P = \frac{20}{77}.$$

$$5. a) P = \frac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}} \approx \frac{1}{10005} \approx 0,0001.$$

b) Trong 30 số từ 1 đến 30 có đúng 10 số chia hết cho 3.

$$\text{Vậy } P = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{20}^5}{C_{30}^{10}} \approx 0,130.$$

c) Trong 30 số từ 1 đến 30 có 15 số lẻ, 15 số chẵn trong đó chỉ có 3 số chia hết cho 10. Vậy:

$$P = \frac{C_{15}^5 \cdot C_{12}^4 \cdot C_3^1}{C_{30}^{10}} \approx 0,1484.$$

6. a) Gọi A: “cả hai nữ được chọn”

B: “ít nhất có một nữ được chọn”

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{6/15}{14/15} = \frac{3}{7}.$$

b) Xác suất để Hoa được chọn là $\frac{5}{15}$. Do đó xác suất để Hoa được chọn nếu biết rằng có 1 nữ được chọn là $\frac{5/15}{14/15} = \frac{5}{14}$.

$$7. p = 1 - \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{13}{18}$$

$$8. a) p = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 0,7525$$

$$b) p = \frac{2^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 4126 \cdot 10^{-14}$$

9. Số trường hợp có thể: 12^{12}

Số trường hợp thuận lợi: $12!$

$$\text{Vậy } p = \frac{12!}{12^{12}}$$

$$10. p = \frac{7!}{7^7}$$

11. Số cách chọn một toa có 3 người, một toa có 1 người và hai toa trống là $A_4^2 = 12$.

$$\text{Từ đó: } p = \frac{A_4^2 \cdot C_4^3}{4^4} = \frac{3}{16}$$

12. a) Gọi A là biến cố: “có ít nhất một viên trứng A”

B là biến cố: “cả hai viên trứng B”.

$$\text{Khi đó } P(A) = 1 - 0,85^2; \quad P(B) = (0,3)^2$$

Xác suất để máy bay rơi là:

$$P = P(A) + P(B) = 0,3675$$

b) Máy bay không rơi khi có 1 viên trúng vào B và 2 viên trúng vào

C. Xác suất này là $3(0,55)^2(0,3)$.

$$\text{Vậy } P \{\text{máy bay rơi}\} = 1 - 3(0,55)^2(0,3) = 0,72775.$$

13. a) Đánh số bộ phận A, B, C, D là 1, 2, 3, 4.

Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b), trong đó:

a: điểm rơi của viên đạn 1

b: điểm rơi của viên đạn 2; $1 \leq a \leq 4, \quad 1 \leq b \leq 4$.

$$\text{Khi đó } p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

b) Chia bộ phận A làm hai bộ phận có diện tích bằng nhau A_1 và A_2 .

Đánh số các bộ phận A_1, A_2, B, C, D là 1, 2, 3, 4, 5. Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b), $1 \leq a \leq 5, \quad 1 \leq b \leq 5$. Máy bay rơi khi các kết quả là: (1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (1, 3); (3, 1); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4); ...

Có cả thảy 15 trường hợp thuận lợi.

$$\text{Vậy } p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

14. Gọi A là biến cố: “vé có chữ số 1” và B là biến cố: “vé có chữ số 5”.

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\bar{B}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\bar{A}\bar{B}) = \left(\frac{8}{10}\right)^5$$

Xác suất cần tìm là:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) = 2\left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5$$

15. Gọi A là biến cố: “vé có chữ số 5” và B là biến cố “vé có chữ số chẵn”. Ta cần tính $P(AB)$. Chuyển sang tính xác suất của biến cố đối. Biến cố đối của AB là $(\bar{A} \cup \bar{B})$.

$$\text{Ta có } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\bar{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5; \quad P(\bar{A}\bar{B}) = \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

$$\text{Vậy } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = (0,9)^5 + (0,5)^5 - (0,4)^5.$$

Suy ra:

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 + (0,4)^5 - (0,9)^5 - (0,5)^5.$$

16. Giả sử ba toa tàu được ký hiệu là A, B và C. Gọi A, B và C tương ứng là các biến cố: “toa A không có hành khách mới lên”, “toa B không có hành khách mới lên”, và “toa C không có hành khách mới lên”.

Dễ thấy biến cố đối của biến cố đang xét là biến cố $A \cup B \cup C$ “có ít nhất một toa không có hành khách mới lên”.

Ta có:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

Dễ thấy:

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = \left(\frac{1}{3}\right)^5; \quad P(ABC) = 0$$

Thay vào ta được:

$$P(A \cup B \cup C) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{31}{81}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{50}{81}$.

17. Ký hiệu ba lá thư đó là A, B, C. Gọi A là biến cố: “lá thư A bỏ đúng địa chỉ”, B là biến cố: “lá thư B bỏ đúng địa chỉ” và C là biến cố: “lá thư C bỏ đúng địa chỉ”.

Ta phải tìm:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Dễ thấy:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = P(ABC) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy: } P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

18. Gọi A là biến cố: “xạ thủ A không bắn trúng” và B là biến cố “xạ thủ B không bắn trúng”.

Ta có: $P(A) = (1 - p_1)^n$; $P(B) = (1 - p_2)^m$

$$\begin{aligned} P(AB) &= P\{\text{mục tiêu không bị trúng đạn}\} = P(A)P(B) \\ &= (1 - p_1)^n(1 - p_2)^m \end{aligned}$$

Từ đó xác suất cần tìm là $1 - (1 - p_1)^n(1 - p_2)^m$

19. Áp dụng công thức Becnuli:

$$p = C_{12}^5 (0,65)^5 (0,35)^7 = 0,0591$$

$$20. \quad p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651$$

$$21. \quad p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$$

$$22. a) \quad p = (0,97)^{20} \approx 0,5438$$

$$b) \quad p = 20(0,03)(0,97)^{19} + 190(0,03)^2(0,97)^{18} \\ = 0,3364 + 0,0988 = 0,4352$$

$$c) \quad 1 - 0,5438 - 0,4352 = 0,021$$

23. Xác suất để một bóng sáng là $\frac{3}{4}$. Do đó $P\{\text{có ít nhất 4 bóng sáng}\}$.

$$= C_6^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + C_6^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right) + C_6^6 \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0,8305$$

Vậy $P\{\text{lớp không đủ ánh sáng}\} = 0,1695$.

24. a) Anh ta được 13 điểm trong trường hợp trả lời đúng 5 câu và trả lời sai 7 câu. Vậy xác suất là:

$$C_{12}^5 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0,0532$$

b) Anh ta bị điểm âm khi trả lời đúng ít hơn 3 câu. Thật vậy, gọi x là số câu đúng, số câu sai là $12 - x$. Bất phương trình $4x < 12 - x$ xảy ra khi $x = 0, 1, 2$.

Vậy:

$$P\{\text{nhận điểm âm}\} = \\ = C_{12}^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{12} + C_{12}^1 \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^{11} + C_{12}^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \\ = 0,0687 + 0,2062 + 0,2835 = 0,5583$$

25. Xác suất thắng trong 1 ván là:

$$C_{12}^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

Vậy xác suất để thắng ít nhất 3 ván là:

$$C_5^3 \left(\frac{2}{27}\right)^3 \left(\frac{25}{27}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{2}{27}\right)^4 \left(\frac{25}{27}\right) + \left(\frac{2}{27}\right)^5$$

26. Từ điều kiện bài toán suy ra xác suất bắn trúng vòng 10 là 0,2; trúng vòng 9 là 0,25. Xạ thủ đạt ít nhất 28 điểm trong các trường hợp sau:

a) 1 viên 10 và 2 viên 9. Xác suất là:

$$3(0,2)(0,25)^2 = 0,0375$$

b) 2 viên 10 và 1 viên 9. Xác suất là:

$$3(0,2)^2(0,25) = 0,03$$

c) 2 viên 10 và 1 viên 8. Xác suất là:

$$3(0,2)^2(0,15) = 0,018$$

d) Cả 3 viên 10. Xác suất là 0,008.

Vậy $P\{\text{ít nhất 28 điểm}\} = 0,0935$.

27. a) Máy bay sẽ rơi khi tất cả các động cơ đều hỏng hoặc chỉ có 1 động cơ làm việc.

$$P\{\text{tất cả các động cơ hỏng}\} = (0,1)^3 (0,05)^2$$

$$P\{4 \text{ động cơ hỏng}\} = 2(0,1)^3 (0,05) (0,95) + 3(0,1)^2 (0,9) (0,05)^2$$

$$\text{Vậy } P\{\text{máy bay rơi}\} = (0,1)^3 (0,05)^2 + 2(0,1)^3 (0,05) (0,95) + 3(0,1)^2 (0,9) (0,05)^2 = 0,00016$$

Vậy $P\{\text{máy bay bay an toàn}\} = 0,99984$.

b) $P\{\text{cánh phải có ít nhất 1 động cơ làm việc}\} = 1 - (0,1)^2 = 0,99$.

$P\{\text{cánh trái có ít nhất 1 động cơ làm việc}\} = 1 - (0,05)^2 = 0,9975$.

Vậy $P\{\text{máy bay bay an toàn}\} = (0,99) (0,9975) \approx 0,9875$.

28. a) Anh ta trở lại điểm xuất phát khi tiến 4 bước và lùi 4 bước.

$$\text{Vậy: } p = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$$

b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4m nếu số bước tiến là 8, 7, 0, 1.

Vậy:

$$p = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right) = C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{18}{256}$$

29. a) Gọi A là biến cố: “tổng số nốt là 8” và B là biến cố: “có ít nhất một con ra nốt 1”.

$$(\text{Trong bài tập 2 ta có } P(A) = \frac{21}{216}); \quad P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Để tính $P(AB)$, ta thấy các tổ hợp có tổng bằng 8 mà trong đó có “1” là (1, 1, 6); (1, 2, 5); (1, 3, 4).

$$P(A/B) = \frac{3 + 6 + 6}{216} = \frac{15}{216}$$

$$\text{Để thấy: } P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

$$\text{Vậy: } P(A/B) = \frac{15}{91}$$

b) Gọi A: “có ít nhất 1 con ra lục”

B: “số nốt trên 3 con khác nhau”

$$\text{Ta có: } P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{3 \times 5 \times 4}{216} = \frac{60}{216}$$

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{216} = \frac{120}{216}$$

Vậy: $P(A/B) = \frac{1}{2}$.

30. A: “cả hai đứa là trai”

B: “ít nhất có 1 đứa là trai”

Ta có: $P(A/B) = \frac{1}{4}$; $P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Vậy: $P(A/B) = \frac{1}{3}$.

31. a) $p = (0,9)(0,8)(0,9) = 0,648$

b) $P\{\text{trượt ở vòng 2}\} = (0,9)(0,2) = 0,18$.

Vậy xác suất để thí sinh trượt ở vòng 2 nếu biết rằng thí sinh đó trượt là:

$$\frac{P\{\text{trượt ở vòng 2}\}}{P\{\text{trượt}\}} = \frac{0,18}{0,352} = 0,511$$

32. a) Ký hiệu B_1 : “cặp sinh đôi là thật”

B_2 : “cặp sinh đôi là giả”

A: “cặp sinh đôi cùng giới”.

Theo giả thiết $P(A) = 0,34 + 0,3 = 0,64$ và $P(A/B_1) = 1$; $P(A/B_2) = \frac{1}{2}$.

Đặt $P(B_1) = x$; $P(B_2) = 1 - x$.

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2)$$

$$\Leftrightarrow 0,64 = x + \frac{1-x}{2} \Rightarrow x = 0,28$$

b) $P(B_1/A) = \frac{P(B_1) P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0,28}{0,64} = 0,4375$

33. Ký hiệu E_1 : “từ chuông 2 bắt đượcỏ trắng”

E_2 : “từ chuông 2 bắt đượcỏ đen”

A: “bắt đượcỏ trắng ở lần bắt sau”

B: “bắt đượcỏ trắng của chuông 1 ở lần bắt sau”

Ta có:

$$P(A) = P(E_1) P(A/E_1) + P(E_2) P(A/E_2) = \frac{3}{10} \times \frac{11}{16} + \frac{7}{10} \times \frac{10}{16} = \frac{103}{160}$$

$$P(B) = P(E_1) P(B/E_1) + P(E_2) P(B/E_2) = \frac{3}{10} \times \frac{10}{16} + \frac{7}{10} \times \frac{10}{16} = \frac{100}{160}$$

Vậy: $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{100}{103}$

34. E_1 : “bắt được hai gà trống”

E_2 : “bắt được hai gà mái”

E_3 : “bắt được một gà trống và một gà mái”

E_1, E_2, E_3 là hệ đầy đủ với:

$$P(E_1) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{60}$$

$$P(E_2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

$$P(E_3) = 1 - \frac{5}{60} - \frac{9}{60} = \frac{46}{60}$$

A: “bắt được gà trống từ chuồng thứ ba”. Khi đó:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1) P(A/E_1) + P(E_2) P(A/E_2) + P(E_3) P(A/E_3) \\ &= \frac{5}{60} \times \frac{4}{14} + \frac{9}{60} \times \frac{6}{14} + \frac{46}{60} \times \frac{5}{14} = \frac{304}{840} = 0,3619 \end{aligned}$$

35. Xét phương án 1. Nếu máy bay xuất hiện ở A thì xác suất bắn hạ là $1 - (0,3)^3 = 0,973$. Nếu máy bay xuất hiện ở B thì xác suất bắn hạ là 0,7. Vậy theo công thức xác suất đầy đủ xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 1 là:

$$\frac{2}{3} (0,973) + \frac{0,7}{3} = 0,882$$

Tương tự xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 2 là:

$$\frac{2}{3} [1 - (0,3)^2] + \frac{1}{3} [1 - (0,3)^2] = 0,91$$

Xác suất hạ máy bay theo phương án 3 là:

$$\frac{2}{3} (0,7) + \frac{1}{3} (0,973) = 0,971$$

Vậy theo phương án 2 là tốt nhất.

36. Gọi E_1 : “bóng đèn tốt”

E_2 : “bóng đèn hỏng”

A: “bóng đèn được đóng dấu đã kiểm tra”.

Ta có: $P(E_1) = 0,8$

$P(E_2) = 0,2$

$P(A/E_1) = 0,9$ và $P(A/E_2) = 0,05$.

Thành thử:

$$\begin{aligned} (E_1/A) &= \frac{P(E_1) P(A/E_1)}{P(E_1) P(A/E_1) + P(E_2) P(A/E_2)} \\ &= \frac{(0,8)(0,9)}{(0,8)(0,9) + (0,2)(0,05)} = 0,986 \end{aligned}$$

37. Gọi E_1 : “xạ thủ thuộc nhóm 1”

E_2 : “xạ thủ thuộc nhóm 2”

E_3 : “xạ thủ thuộc nhóm 3”

E_4 : “xạ thủ thuộc nhóm 4”

A : “xạ thủ bắn trượt”.

Theo đầu bài ta có:

$$P(E_1) = \frac{5}{18}; \quad P(E_2) = \frac{7}{18}; \quad P(E_3) = \frac{4}{18}; \quad P(E_4) = \frac{2}{18}$$

$$P(A/E_1) = 0,2; \quad P(A/E_2) = 0,3; \quad P(A/E_3) = 0,4 \quad \text{và} \quad P(A/E_4) = 0,5.$$

Áp dụng công thức Bayet, ta thu được:

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{5}{18}(0,2)}{\frac{5}{18}(0,2) + \frac{7}{18}(0,3) + \frac{4}{18}(0,4) + \frac{2}{18}(0,5)} = \frac{10}{57}$$

$$\text{Tương tự } P(E_2/A) = \frac{21}{57}; \quad P(E_3/A) = \frac{16}{57}; \quad P(E_4/A) = \frac{10}{57}$$

Vậy xạ thủ có khả năng ở nhóm 2 nhất.

38. Gọi A : “bệnh nhân điều trị bệnh A ”

B : “bệnh nhân điều trị bệnh B ”

C : “bệnh nhân điều trị bệnh C ”

H : “bệnh nhân được chữa khỏi bệnh”.

Từ đó theo công thức Bayet:

$$P(A/H) = \frac{(0,5)(0,7)}{(0,5)(0,7) + (0,3)(0,8) + (0,2)(0,9)} = \frac{5}{11} \approx 0,4545$$

39. Gọi A là biến cố: “chai rượu thuộc loại A ”, B là biến cố: “chai rượu thuộc loại B ” và H là biến cố: “có 4 người kết luận rượu loại A , 1 người kết luận rượu loại B ”.

Ta cần tính $P(A/H)$.

Áp dụng công thức Bayet:

$$P(A/H) = \frac{P(A)P(H/A)}{P(A)P(H/A) + P(B)P(H/B)}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(H/A) = C_5^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{4}; \quad P(H/B) = C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4}$$

Thay vào ta thu được:

$$P(A/H) = \frac{27}{28} \approx 0,9642$$

40. a) Ký hiệu O , A , B và AB tương ứng là các biến cố: “người cần tiếp máu có nhóm máu là O , A , B và AB ”.

Gọi H là biến cố: “sự truyền máu thực hiện được”. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(H) = P(O)P(H/O) + P(A)P(H/A) + P(B)P(H/B) + P(AB)P(H/AB)$$

Theo dữ kiện của bài:

$$P(O) = 0,337; P(A) = 0,375; P(B) = 0,209$$

$$P(AB) = 0,079$$

$$P(H/O) = P(O) = 0,337$$

$$P(H/A) = P(O) + P(A) = 0,712$$

$$P(H/B) = P(O) + P(B) = 0,546$$

$$P(H/AB) = 1$$

Thay vào ta được: $P(H) = 0,5737$

b) Gọi E là biến cố: “sự truyền máu không thực hiện được”.

Ta có:

$$P(E/O) = [1 - P(O)]^2 = 0,663^2$$

$$P(E/A) = [1 - P(O) - P(A)]^2 = 0,288^2$$

$$P(E/B) = [1 - P(O) - P(B)]^2 = 0,454^2$$

$$P(E/AB) = 0$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được:

$$P(E) = 0,2223$$

Vậy xác suất để truyền máu được là:

$$1 - P(E) = 0,7777$$

41. Ký hiệu H là biến cố đã xảy ra. Ta có:

$$P(H/A) = (0,6)(0,2)(0,6) = 0,0144$$

$$P(H/B) = (0,2)(0,6)(0,2)(0,2) = 0,0048$$

$$P(H/C) = (0,2)(0,2)(0,6)(0,2) = 0,0048$$

$$\text{Vậy: } P(A/H) = \frac{P(A)P(H/A)}{P(H)} =$$

$$= \frac{(0,3)(0,0144)}{(0,3)(0,0144) + (0,4)(0,0048) + (0,3)(0,0048)} = \frac{432}{768} = 0,5625$$

$$P(B/H) = 0,25$$

$$P(C/H) = 0,1875$$

Chương 2

$$42. \quad P\{X = 0\} = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{30}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{15}{30}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{9}{30}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

Vây bảng phân bố của X là:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

Từ đó $EX = 1,2$; $DX = 0,56$; $\text{mod}X = 1$.

43. Rõ ràng Y nhận các giá trị 1, 3, 4

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} = 0,1$$

$$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} = 0,2$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X = 5\} + P\{X = 7\} + P\{X = 9\} = 0,7$$

44. a) $P\{X = 0\} = \frac{C_6^3}{C_{16}^3} = \frac{2}{56}$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_{10}^1 C_6^2}{C_{16}^3} = \frac{15}{56}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_{10}^2 C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{27}{56}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{12}{56}$$

b) Ta có $Y = 5X + (3 - X)8 = 24 - 3X$

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 24\} = \frac{2}{56}$$

$$P\{X = 1\} = P\{Y = 21\} = \frac{15}{56}$$

$$P\{X = 2\} = P\{Y = 18\} = \frac{27}{56}$$

$$P\{X = 3\} = P\{Y = 15\} = \frac{12}{56}$$

Vây bảng phân bố xác suất của X là:

Y	15	18	21	24
P	$\frac{12}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{2}{56}$

45. Bảng quy luật phân bố của X như sau:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
---	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

$$EX = 7; DX = 5,833.$$

$$46. P\{X = 2\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{20}$$

$$P\{X = 4\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{20}$$

$$P\{X = 5\} = 1 - \left(\frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20} \right) = \frac{8}{20}$$

Trung bình cần EX = 4 lần thử.

47. a) Ký hiệu A_i là biến cố: “A bắn trúng i viên”, B_i là biến cố: “B bắn trúng i viên” ($i = 0, 1, 2$). Dễ thấy:

$$P(A_0) = 0,36; P(A_1) = 0,48; P(A_2) = 0,16$$

$$P(B_0) = 0,25; P(B_1) = 0,5; P(B_2) = 0,25$$

Từ đó:

$$P\{X = -2\} = P(A_0)P(B_2) = 0,09$$

$$P\{X = -1\} = P(A_0)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) = 0,18 + 0,12 =$$

0,3

$$P\{X = 0\} = P(A_0)P(B_0) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) =$$

0,37

$$P\{X = 1\} = P(A_1)P(B_0) + P(A_2)P(B_1) = 0,2$$

$$P\{X = 2\} = P(A_2)P(B_0) = 0,04$$

Vậy bảng quy luật xác suất của X là:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,09	0,3	0,37	0,2	0,04

$$b) P\{Y = 0\} = 0,37$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} + P\{X = -1\} = 0,5$$

$$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = -2\} = 0,13$$

$$48. P\{X = 3\} = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X = 4\} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X = 5\} = \frac{2}{6}$$

$$P\{X = 6\} = \frac{1}{6} \text{ và } P\{X = 7\} = \frac{1}{6}$$

$$49. \text{Ta có: } P\{X = k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$$

Bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	

Với 243 người có khoảng $\frac{243}{3} = 81$ người thi đạt ngay lần đầu, $\frac{243}{9} \times 2 = 54$ người phải thi 2 lần. Xác suất để một người phải thi ít nhất 4 lần là $P\{X \geq 4\} = 1 - P\{X \leq 3\} = \frac{8}{27}$. Thành thử có khoảng $243 \times \frac{8}{27} = 72$ người phải thi ít nhất 4 lần.

50. $EX = 1,82$; $EY = 1,7$

$$P\{X + Y \leq 3\} = P\{X + Y = 0\} + P\{X + Y = 1\} + P\{X + Y = 2\} + P\{X + Y = 3\}$$

$$P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0\} P\{Y = 1\} + P\{X = 1\} P\{Y = 0\} = 0,12$$

$$P\{X + Y = 0\} = 0,045$$

Tương tự tính $P\{X + Y = 2\}$, $P\{X + Y = 3\}$. Cuối cùng ta thu được $P\{X + Y \leq 3\} = 0,5225$.

51. a) A thắng trong các tình huống sau:

A_1 : “A thắng trong 3 ván đầu”. Khi đó:

$$P(A_1) = (0,4)^3 = 0,064$$

A_2 : “3 ván đầu A thắng 2, ván thứ 4 A thắng”

$$P(A_2) = C_3^2 (0,4)^2 (0,6) (0,4) = 0,1152$$

A_3 : “4 ván đầu A thắng 2, ván thứ 5 A thắng”

$$P(A_3) = C_4^2 (0,4)^2 (0,6)^2 (0,4) = 0,13824$$

A_4 : “5 ván đầu A thắng 2, ván thứ 6 A thắng”

$$P(A_4) = C_5^2 (0,4)^2 (0,6)^3 (0,4) = 0,13824$$

A_5 : “6 ván đầu A thắng 2, ván thứ 7 A thắng”

$$P(A_5) = C_6^2 (0,4)^2 (0,6)^4 (0,4) = 0,124416$$

Vậy xác suất thắng của A là:

$$P = \sum_{i=1}^5 P(A_i) = 0,58$$

b) Ta có: $P\{X = 3\} = P(A_1) = 0,064$

$$P\{X = 4\} = P(A_2) = 0,1152$$

$$P\{X = 5\} = P(A_3) + P(B \text{ thắng}) = 0,13824 + (0,6)^5 = 0,216$$

$$P\{X = 6\} = P(A_4) + P(B \text{ thắng})$$

$$= 0,13824 + C_5^4 (0,6)^4 (0,4)(0,6) = 0,29376$$

$$P\{X = 7\} = P(A_5) + C_6^4 (0,6)^4 (0,4)^2 (0,6) = 0,31104$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	3	4	5	6	7
P	0,064	0,1152	0,216	0,29376	0,31104

52.

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$EX = \frac{16}{7}.$$

$$53. P\{X = 2\} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$

$$P\{X = 3\} = P\{\text{chọn tám thẻ số 1 và số 2}\} = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

$$P\{X = 4\} = P\{\text{chọn tám thẻ số 1, số 3}\} + P\{\text{chọn hai thẻ số 2}\} \\ = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$$

$$P\{X = 5\} = P\{\text{chọn thẻ số 1 và 4}\} + P\{\text{chọn thẻ số 2 và 3}\} \\ = \frac{C_4^1 C_1^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$$

Tương tự:

$$P\{X = 6\} = \frac{4}{45}$$

$$P\{X = 7\} = \frac{2}{45}$$

Phân bố của X là:

X	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

$$54. P\{X = 1\} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{42}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{42}$$

$$P\{X = 4\} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{42}$$

$$P\{X = 5\} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{42}$$

$$P\{X = 6\} = \frac{2}{42}$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{12}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{2}{42}$

55. Ký hiệu T: “rút được quả cầu trắng”; D: “rút được quả cầu đen”.

Các kết quả có thể là:

$$\omega_1 = D; \omega_2 = TD; \omega_3 = TTD; \omega_4 = TTTD; \omega_5 = TTTTD$$

$$\text{Ta có: } P(\omega_1) = \frac{3}{7}; P(\omega_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}; P(\omega_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

$$P(\omega_4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}; P(\omega_5) = \frac{1}{35}$$

Nếu xảy ra ω_1 thì $X = -5$.

Nếu xảy ra ω_2 thì $X = 10$.

Nếu xảy ra ω_3, ω_4 hoặc ω_5 thì $X = -15, 20$ hoặc -25 .

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	-25	-15	-5	10	20
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{3}{35}$

$$EX = -\frac{6}{7}, \text{ tức là trung bình một ván A thua } \frac{6}{7} \text{ đô la:}$$

$$\text{Nếu chơi 150 ván thì A sẽ mất khoảng } 150 \times \frac{6}{7} = 128,57 \text{ USD.}$$

56. a) Các bảng phân bố của X và Y như sau:

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Từ đó dễ thấy hệ thức $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} P\{Y = y\}$ thỏa mãn với mọi $x \in \{1, 2\}$ và $y \in \{1, 2, 3\}$.

$$\text{b) } P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0,12$$

$$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0,15 + 0,28 = 0,43...$$

Kết quả như sau:

Z	1	2	3	4	6
P	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

c) Cách thứ nhất: Từ bảng phân bố của Z ta có:

$$EZ = (0,12).1 + (0,43).2 + \dots + (0,07).6 = 2,89$$

Cách 2: Tính $EZ = \sum_{xy} P\{X = x, Y = y\}$.

$$\text{Ta có: } EX = 1,7; \quad EY = 1,7 \text{ và } EX.EY = 2,89 = EZ$$

57. a) Để thấy phân bố đồng thời của X, Y là:

$\begin{matrix} Z \\ X \end{matrix}$	0	1	2	3	4
0	0,04	0,12	0,16	0,06	0,02
1	0,03	0,09	0,12	0,045	0,015
2	0,02	0,06	0,08	0,03	0,01
3	0,01	0,03	0,04	0,015	0,005

$$\text{b) } P\{X > Y\} = 0,19$$

$$58. EX = -\frac{1}{8}; \quad EY = 0.$$

$$\text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{8} \text{ và } \rho(X, Y) = -0,15$$

$$59. \text{a) } EX = -\frac{1}{5}; \quad EY = 0; \quad \rho(X, Y) = 0$$

b) X và Y không độc lập vì:

$$P\{X = 1\} = \frac{2}{15}; \quad P\{Y = 1\} = \frac{5}{15} \text{ và } P\{X = 1, Y = 1\} = 0$$

$$60. P\{Y = 1\} = P\{X = 3\} = 0,25$$

$$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} = 0,3$$

$$P\{Y = 10\} = P\{X = 0\} + P\{X = 4\} = 0,25$$

$$P\{Y = 7\} = P\{X = 1\} = 0,2$$

Vậy kết quả là:

Y	1	2	7	10
P	0,25	0,3	0,2	0,25

$$EY = 4,75$$

$$EY^2 = 36,25$$

$$DY = 13,6875$$

$$61. \text{Ta có } T = X + Y + Z \sim B(30; 0,1)$$

$$\text{Vậy } P\{T = 4\} = C_{30}^4 (0,1)^4 (0,9)^{26} \approx 0,1771$$

62. Ta có bảng phân bố của X và Y như sau:

X	0	1	2
Y	0,36	0,48	0,16
X	0	1	2
Y	0,09	0,42	0,49

ðặt $Z = X + Y$. Ta có:

$$P\{Z = 0\} = P\{X = 0\} P\{Y = 0\} = 0,0324$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 0\} P\{Y = 1\} + P\{X = 1\} P\{Y = 0\} = 0,1944$$

Tương tự:

$$P\{Z = 2\} = 0,3924$$

$$P\{Z = 3\} = 0,3024$$

$$P\{Z = 4\} = P\{X = 2\} P\{Y = 2\} = 0,0784$$

Vậy bảng quy luật xác suất của $X + Y$ là:

$X + Y$	0	1	2	3	4
P	0,0324	0,1944	0,3924	0,3024	0,0784

b) Giả sử trái lại $T = X + Y$ có phân bố nhị thức $T \sim B(4, p)$.

Khi đó: $P\{T = 4\} = p^4 = 0,0784$.

Mặt khác: $P\{T = 0\} = (1 - p)^4 = 0,0324$

Vậy ta phải có

$$\begin{cases} p^4 = 0,0784 \\ (1 - p)^4 = 0,0324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \sqrt[4]{0,0784} \\ p = 1 - \sqrt[4]{0,0324} \end{cases} \Leftrightarrow 1 = \sqrt[4]{0,0784} + \sqrt[4]{0,0324} \text{ Vô lý !}$$

63. a) $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}; \quad \begin{array}{c|ccc} Y & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \frac{16}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \end{array}$

$X + Y \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right)$. Do đó ta có bảng:

$X + Y$	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

b) $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$

Tương tự như bài tập 62 ta có:

$X + Y$	0	1	2	3
P	0,32	0,48	0,18	0,02

Nếu $X + Y$ có phân bố nhị thức thì $X + Y \sim B(3, p)$.

Suy ra: $p^3 = P\{X + Y = 3\} = 0,02$

$(1 - p)^3 = P\{X + Y = 0\} = 0,32$

Điều này không xảy ra.

64. Ta có: $f(n) = C_{2n}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$

65. Xác suất để A thắng r ván là:

$$C_{2m+1}^r p^r (1-p)^{2m+1-r}$$

Vậy xác suất để A thắng ít nhất $m+1$ ván là:

$$\sum_{r=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^r p^r (1-p)^{2m+1-r} = 1 - \sum_{r=0}^m C_{2m+1}^r p^r (1-p)^{2m+1-r}$$

Với $m=2$; $p=0,25$; xác suất này là $\frac{53}{512}$.

66. Tại thời điểm đó nhà toán học đã rút ra $2n-k$ que diêm.

Gọi A là biến cố cần tìm.

A_1 : “rút n que túi phải, $n-k$ que túi trái và lần thứ $2n-k+1$ chọn túi phải”.

A_2 : “rút n que túi trái, $n-k$ que túi phải và lần thứ $2n-k+1$ chọn túi trái”.

Ta có: $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

$$\text{Rõ ràng: } P(A_1) = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = C_{2n-k}^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } P(A) = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

67. Gọi n là số vé cần mua. Ta phải có:

$$1 - (0,9)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,9)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,9} = 28,8$$

Vậy $n=29$.

68. a) Gọi X là số người chết trong vòng 1 ngày: $X \sim \text{Poátxông} \left(\frac{2}{7}\right)$.

Vậy tra bảng phân bố Poátxông ta được $P\{X=0\} \approx 0,7515$.

b) Gọi Y là số người chết trong vòng 2 ngày:

$$Y \sim \text{Poátxông} \left(\frac{4}{7}\right)$$

Vậy tra bảng ta được $P\{Y \geq 3\} \approx 0,0204$.

69. a) Gọi X là số xe đi qua trong thời gian 3 phút.

Ta có $X \sim \text{Poátxông} (6)$

Tra bảng ta được $P\{X=6\} = 0,1606$.

b) Gõì X là xe ði qua trong khoảng thời gian t phút. Ta có $Y \sim \text{Poátxông}(2t)$. Từ đó $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - e^{-2t} = 0,99$.

Suy ra $t = 2,303$.

70. a) Gõì X là số tai nạn xảy ra trong 3 tháng.

Ta có $X \sim \text{Poátxông}(6)$.

Vậy tra bảng ta được $P\{X \leq 3\} = 0,151$.

b) Gõì Y là số tai nạn xảy ra trong 1 tháng.

Ta có $Y \sim \text{Poátxông}(2)$. Vậy $P\{Y \leq 1\} = 0,406$. Xác suất để 3 tháng liên tiếp mỗi tháng không có quá 1 tai nạn là $(0,406)^3 = 0,067$.

71. Ta có bảng phân bố của X là:

X	0	1	2	3	≥ 4
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,3081

a) Từ bảng phân bố của X ta thu được bảng phân bố của Y:

$$P\{Y = -24\} = P\{X = 0\}$$

$$P\{Y = -4\} = P\{X = 1\}$$

$$P\{Y = 16\} = P\{X = 2\}$$

$$P\{Y = 36\} = P\{X \geq 3\}$$

Y	-24	-4	16	36
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

Từ đó $EY = 20,8$.

b) Nếu trạm có 4 chiếc xe thì phân bố của số tiền Z mà trạm thu được trong 1 ngày sẽ là:

Z	-32	-12	8	28	48
P	0,0608	0,1703	0,2834	0,2225	0,3081

Từ đó $EZ = 18,9$.

c) Vậy thì trạm nên có 3 chiếc xe.

72. a) $P\{X = 0\} = e^{-1,5} \approx 0,2231$

$$P\{X = 2\} = e^{-1,5} \times \frac{1,5^2}{2!} \approx 0,2510$$

$$P\{X \leq 2\} \approx 0,8088$$

$$P\{X \geq 4\} = 1 - P\{X \leq 3\} \approx 0,0656$$

73. a) Ta có $X \sim \text{Poátxông}(2)$.

Gõì Y là số ô tô cho thuê. Ta có:

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} \approx 0,1353$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} \approx 0,2707$$

$$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} \approx 0,2707$$

$$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} \approx 0,1804$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X \geq 4\} \approx 0,1429$$

Từ đó: $EY \approx 1,925$

b) Gọi n là số ô tô mà cửa hàng cần có. Ta phải có:

$$P\{X \leq n\} > 0,98$$

Tra bảng ta thấy: $P\{X \leq 4\} > 0,9473$; $P\{X \leq 5\} > 0,9834$

Vậy $n = 5$.

74. a) Gọi X là số hoa trên một chậu cây: $X \sim \text{Poisson}(3)$

Ta có: $P\{X = 2\} \approx 0,2240$

$$P\{X = 3\} \approx 0,2240$$

$$P\{X = 4\} \approx 0,1680$$

$$P\{X = 5\} \approx 0,1008$$

và: $P\{2 \leq X \leq 5\} \approx 0,7169$

Gọi Y là số hoa của chậu cây đem bán. Ta có:

$$P\{Y = 2\} = \frac{P\{X = 2\}}{P\{2 \leq X \leq 5\}} = 0,3125$$

Tương tự: $P\{Y = 3\} = 0,3125$

$$P\{Y = 4\} = 0,2344$$

$$P\{Y = 5\} = 0,1406$$

b) $EY = 3,203$; $EY^2 = 11,328$; $\sigma_Y = 1,033$

75. a) Dễ thấy $X(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$, và $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}p$, ($k \geq 1$).

b) Gọi B là biến cố: “trong n lần gieo đều tiên chỉ có đúng một lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

Ta phải tìm $P\{X = k/B\}$

Rõ ràng với $k > n$ thì $P\{X = k/B\} = 0$.

Xét $k \leq n$. Ta có:

$$P\{X = k/B\} = \frac{P\{X = k, B\}}{P(B)}$$

$$P(B) = C_n^1 pq^{n-1} = npq^{n-1} \quad (\text{ở đây } q = 1 - p)$$

$$P\{X = k, B\} = pq^{n-1}$$

$$\text{Do đó } P\{X = k/B\} = \frac{1}{n}$$

76. Ta có:

$$P\{X = k/X + Y = n\} = \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}}$$

$$\text{Ta có: } P\{X = k, X + Y = n\} = P\{X = k, Y = n - k\} =$$

$$= P\{X = k\} P\{Y = n - k\} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k! (n - k)!}$$

Vì $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ nên:

$$P\{X + Y = n\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$$

$$\text{T  r     : } P\{X = k/X + Y = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}$$

Nh   v  y ph  n b  c c  a X v  i   i  u ki  n $X + Y = n$ là ph  n b  c nh  i th  c v  i $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Chương 3

77. a) $k = 12$

$$\text{b) } \text{mod} X = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } P\{0,4 < X < 0,6\} = 12 \int_{0,4}^{0,6} x^2 (1-x) dx = 0,296$$

$$78. k = 2; \quad EX = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{3}; \quad DX = \frac{1}{18}$$

T  m median: h  m ph  n b  c c  a X l  :

$$F(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{v  i } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{v  i } x \leq 0 \\ 1 & \text{v  i } x \geq 1 \end{cases}$$

N  u x_0 l   median th  i x_0 l   nghi  m c  a ph    ng tr  nh:

$$\begin{cases} F(x_0) = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x_0 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{V  y: } x_0 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$79. \text{ H  m m  t   p } f(x) = F'(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{v  i } x > 0 \\ 0 & \text{v  i } x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad DX = \frac{4 - \pi}{2}; \quad \text{median} = \sqrt{2 \log 2}; \quad \text{mod} X = 1$$

$$80. P\{2 < X^2 < 5\} = P\{\sqrt{2} < X < \sqrt{5}\} = P\{\sqrt{2} < X < 2\} = 2 - \sqrt{2}$$

$$81. P\{X^2 < 2\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} = P\{-1 < X < \sqrt{2}\} = \frac{\sqrt{2} + 1}{4}$$

$$82. \text{ a) } \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}, \text{ do      } k = 2.$$

$$b) EX = 2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3} = 1$$

$$83. \text{ Vì } F(1) = 1 \text{ nên } k = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

$$\text{Hàm mật độ } f(x) = F'(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} (x^{\beta-1} - x^{\alpha-1})$$

$$\text{Từ đó } EX = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \int_0^1 (x^{\beta} - x^{\alpha}) dx = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}$$

$$84. a) \text{ Ta có } \int_0^3 f(x) dx = 9k. \text{ Suy ra } k = \frac{1}{9}.$$

$$b) P\{X > 2\} = \frac{1}{9} \int_2^3 x^2 dx = \frac{19}{27}$$

$$c) \text{ Hàm phân bố } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{vôùi } x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & \text{vôùi } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{vôùi } x \geq 3 \end{cases}$$

Median m là nghiệm của phương trình:

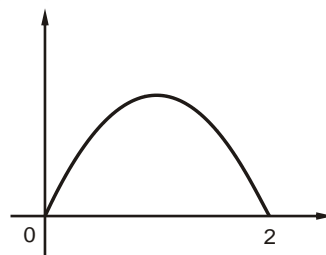
$$\frac{x^3}{27} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

$$d) F(a) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a^3}{27} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \approx 2,726$$

85. a) đồ thị của $f(x)$ như sau:

$$P\{X > 1,5\} \approx 0,15625$$

$$P\{0,9 < X < 1,1\} \approx 0,1495$$



Hình 1

$$86. a) k = 2$$

$$b) \text{ Median là } 1 + \sqrt{2}$$

$$c) f'(x) = 0 \text{ khi } x = \frac{1}{2} \text{ và } f''(x) = -\frac{6(1-x)}{(1+x)^5} < 0 \text{ với } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \text{mod} X = \frac{1}{2}.$$

87. a) Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha \tan x} \frac{1}{\cos^2 x} & \text{neáu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

$$b) f'(x) = f(x) \left[2 \tan x - \frac{\alpha}{\cos^2 x} \right] = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \tan x = \frac{\alpha}{\cos^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \alpha \quad (*)$$

Ta có:

$$f''(x) = f(x) \left[2 \tan x - \frac{\alpha}{\cos^2 x} \right]^2 + 2f(x) \frac{1}{\cos^2 x} [1 - \alpha \tan x]$$

Do đó $f''(x) < 0$ nếu $\tan x > \frac{1}{\alpha}$. Từ phương trình (*) suy ra:

$$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$$

Vậy $\text{mod} X = m_0$ là giá trị mà:

$$\tan m_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \quad 0 < m_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$88. a) \text{ Vì } \int_0^4 x^2 (4 - x) dx = \frac{64}{3}$$

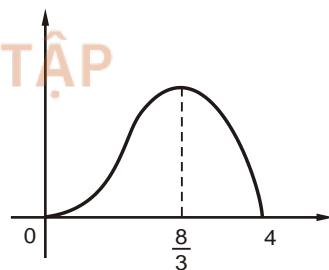
$$\text{Suy ra } k = \frac{3}{64}$$

Đồ thị của $f(x)$ như sau:

$$b) f'(x) = 0 \text{ suy ra } \text{mod} X = \frac{8}{3}$$

$$c) P\{X < 1\} =$$

$$\int_0^1 \frac{3}{64} x^2 (4 - x) dx = \frac{13}{256}$$



Hình 2

$$89. EX = \int_{-2}^0 x \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) dx + \int_0^2 x \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) dx = 0; \quad DX = \frac{2}{3}$$

$$90. a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = k \int_0^1 x dx + 3k = \frac{k}{2} + 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{7}$$

$$b) EX = \frac{2}{7} \int_0^1 x^2 dx + \frac{2}{7} \int_1^4 x dx = \frac{47}{21} \approx 2,238$$

$$EX^2 = \frac{2}{7} \int_0^1 x^3 dx + \frac{2}{7} \int_1^4 x^2 dx = \frac{85}{14}$$

$$\text{Từ đó } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{937}{882} \approx 1,062$$

$$\text{Median } X = \frac{9}{4}.$$

91. a) Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2} & \text{nếu } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

$$\text{b) } EX = \int_0^{\alpha} \frac{2\alpha x(\alpha^2 - x^2) dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$$

Dùng phép đổi biến $x = \alpha \tan u$, ta tìm được:

$$EX = \alpha(1 - \ln 2) \approx \frac{3\alpha}{10}$$

$$\text{Tương tự } EX^2 = \alpha^2(\pi - 3)$$

$$\text{Từ đó: } DX = \alpha^2[(\pi - 3) - (1 - \ln 2)^2] \approx \frac{\alpha^2}{20}$$

Ở đây $\pi \approx 3,1416$; $\ln 2 = 0,693$.

$$92. \text{ Ta có: } \int_2^3 (x^2 - 1) dx = \frac{16}{3}. \text{ Từ đó } k = \frac{3}{16}.$$

$$EX = \frac{3}{16} \int_2^3 x(x^2 - 1) dx \approx 2,578 \text{ (kg)}$$

$$EX^2 = 6,725$$

$$\text{Từ đó: } DX = 6,725 - (2,578)^2 \approx 0,0789 \text{ (kg}^2\text{)}$$

$$\text{Độ lệch tiêu chuẩn } \sigma_X = \sqrt{DX} \approx 0,2809 \text{ (kg)}$$

93. Hàm mật độ $f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ với $0 \leq x \leq 1$ và bằng 0 nếu trái lại.

$$\text{a) Suy ra: } EX^k = \frac{\alpha}{\alpha + k}$$

b) Từ đó tính được các mômen trung tâm:

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2 (\alpha + 2)}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^3 (\alpha + 2)(\alpha + 3)}$$

$$\alpha_4 = \frac{3\alpha(3\alpha^2 - \alpha + 2)}{(\alpha + 1)^4 (\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}$$

c) Hệ số bất đối xứng là:

$$S = \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}} = -\frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 3} \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hệ số nhọn là:

$$E = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2} - 3 = \frac{6(\alpha^3 - \alpha^2 - 6\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 3)(\alpha + 4)}$$

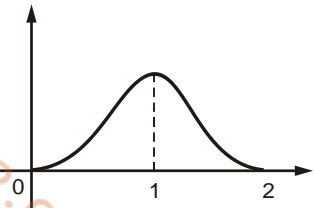
94. a) $\int_0^2 x^2 (x - 2)^2 dx = \frac{16}{15}$, suy ra $k = \frac{15}{16}$. Đồ thị của $f(x)$ có dạng như

sau:

$$b) EX = \frac{15}{16} \int_0^2 x^3 (x - 2)^2 dx = 1$$

$$EX^2 = \frac{15}{16} \int_0^2 x^4 (x - 2)^2 dx = \frac{8}{7}$$

$$\text{Từ đó } DX = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$$



Hình 3

95. a) $k = \frac{1}{2}$

Hàm phân bố $F(x) = 0$ với $x < 1$; với $x \geq 1$ thì:

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_1^x t^{-3/2} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) Trước hết ta tìm hàm phân bố của Y . Với $y > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left\{Y < y\right\} = P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} = P\left\{X > \frac{1}{y}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{neáu } y > 1 \\ \sqrt{y} & \text{neáu } 0 < y < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $y < 0$ thì $F_Y(y) = 0$.

Vậy hàm mật độ của Y là:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{neáu } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

$$c) P\{0,1 < Y < 0,2\} = F_Y(0,2) - F_Y(0,1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{10}}$$

96. $k = \frac{3}{4}$

$$EY = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 2x^2 (1 - x^2) dx = \frac{2}{5}$$

$$EY^2 = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 4x^4(1-x^2)dx = \frac{12}{35}$$

$$\text{Từ đó } DY = \frac{32}{175}$$

$$97. S = \pi R^2$$

$$\text{Vậy: } ES = \frac{\pi}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{\pi a^2}{3}$$

$$ES^2 = \frac{\pi^2}{a} \int_0^a r^4 dr = \frac{\pi^2 a^4}{5}$$

$$\text{Vậy: } DS = \frac{4}{45} \pi^2 a^4 \text{ và độ lệch tiêu chuẩn } \sigma_S = \frac{2}{3\sqrt{5}} \pi a^2$$

$$98. \text{ Ta có } \int_{-1}^{\infty} e^{-x}(1+x)^2 dx = 2e \text{ (dùng phép đổi biến } y = 1+x).$$

$$\text{Từ đó } k = \frac{1}{2e}$$

Median m thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{2e} \int_{-1}^m e^{-x}(1+x)^2 dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{1+m} e^{-y} y^2 dy = 1$$

Nguyên hàm của $e^{-y} y^2$ là $-e^{-y}[(y+1)^2 + 1]$

$$\text{Suy ra } e^{-(1+m)}[(m+2)^2 + 1] = 1$$

Điều phải chứng minh.

$$99. a) k = 3$$

$$P\left\{\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2}\right\} = P\left\{\frac{1}{16} < X < \frac{9}{16}\right\} = 3 \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{9}{16}} x^2 dx = \frac{91}{512}$$

$$b) \quad P\{Y > 1\} = P\left\{X > \frac{1}{4}\right\} = 3 \int_{\frac{1}{4}}^1 x^2 dx = \frac{63}{64}$$

100. Ký hiệu $AP = X$, $BP = 10 - X$. Theo giả thiết X có phân bố đều trên đoạn $[0, 10]$. Ta có $S = X(10 - X)$. Vậy diện tích trung bình là:

$$ES = \frac{1}{10} \int_0^{10} x(10-x) dx = \frac{50}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$ES^2 = \frac{1}{10} \int_0^{10} x^2(10-x)^2 dx = \frac{1000}{3}$$

Từ đó $DS = \frac{500}{9}$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_S = \frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

101. Ta có $EY = \alpha + \beta EZ + \gamma EZ^2 = \alpha + \gamma$

$$EY^2 = E(\alpha + \beta Z + \gamma Z^2) =$$

$$E(\alpha^2 + \beta^2 Z^2 + \gamma^2 Z^4 + 2\alpha\beta Z + 2\alpha\gamma Z^2 + 2\gamma\beta Z^3)$$

Chú ý rằng $EZ = EZ^3 = 0$; $EZ^2 = 1$; $EZ^4 = 3$

(sử dụng tích phân từng phần), ta thu được:

$$EY^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 3\gamma^2$$

$$\text{Từ đó } DY = EY^2 - (\alpha + \gamma)^2 = \beta^2 + 2\gamma^2$$

102. Gọi T là thời gian đi từ nhà tới trường (đơn vị là phút).

$$\text{Khi đó: } V = \frac{600}{60T} = \frac{10}{T} \text{ (m/s)}$$

$$\text{a) Vậy thì } EV = \frac{1}{4} \int_6^{10} \frac{10 dt}{t} = \frac{5}{2} \ln \frac{10}{6} \approx 1,277 \text{ (m/s)}$$

$$EV^2 = \frac{1}{4} \int_6^{10} \frac{100}{t^2} dt = \frac{5}{3}$$

$$\text{Từ đó } DV = 0,0358 \text{ và } \sigma_V = 0,189 \text{ (m/s)}$$

103. a) $P\{X > 300\} = 1 - \Phi(1,25) = 0,1056$

$$\text{b) } P\{X < 175\} = \Phi(-1,875) = 0,0303$$

$$\text{c) } P\{260 < X < 270\} = \Phi(0,5) - \Phi(0,25) = 0,0928$$

$$104. \text{ a) Ta có } k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Với } x > 0: F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$$

$$\text{Với } x < 0: F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \lambda e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$$

$$\text{c) } EX = 0; DX = \frac{2}{\lambda^2} \text{ còn mod } X = 0 \text{ và median } X = 0.$$

$$105. \text{ a) Ta có: } \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \left. \frac{x^2 e^{-2x}}{2} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

Từ đó $k = 4$.

b) Hàm phân bố là:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{2x}(2x^2 + 2x + 1) & \text{neáu } x > 0 \\ 0 & \text{neáu } x < 0 \end{cases}$$

$$c) f'(x) = 8e^{-2x}x(1-x)$$

Vậy $f'(x) = 0$ tại $x = 1$, tại điểm đó $f''(1) < 0$, do đó $\text{mod}X =$

1.

$$d) EX = \frac{3}{2}; EX^2 = 3.$$

$$\text{Vậy } DX = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

106. a) Ta có $P\{T > 20\} = 0,65$

$$\Rightarrow P\{T < 20\} = \Phi\left(\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0,35 = \Phi(-0,3853)$$

$$\text{Vậy: } \frac{20 - \mu}{\sigma} = -0,3853 \quad (1)$$

Tương tự: $P\{T > 30\} = 0,08$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0,92 = \Phi(1,405) \Rightarrow \frac{30 - \mu}{\sigma} = 1,405 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\mu = 22,12$ (phút); $\sigma = 5,59$ (phút).

b) Ta có $P\{T > 20\} = 0,65$

$$\Rightarrow P\{T > 25\} = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 22,12}{5,59}\right) = 1 - \Phi(0,51) = 0,3050$$

c) Giả sử An cần đi khỏi nhà trước t phút trước giờ vào học. Ta phải xác định t bé nhất để: $P\{T > t\} \leq 0,02 \Rightarrow t \geq 33,6$

Vậy $t = 33,6$ (phút).

107. Gọi X là trọng lượng sản phẩm. Xác suất để sản phẩm bị loại là:

$$p = P\{X < 8\} = \Phi(8 - \mu)$$

Gọi Y là lợi nhuận thu được cho một sản phẩm. Ta có $Y = -c$ với xác suất p và $Y = 1 - c$ với xác suất $q = 1 - p$.

Vậy lợi nhuận trung bình trên một sản phẩm là:

$$\begin{aligned} EY &= -pc + (1 - c)q = q - c = 1 - p - c \\ &= 1 - \Phi(8 - \mu) - 0,05\mu - 0,3 \end{aligned}$$

Xét hàm $f(x) = 0,7 - 0,05x - \Phi(8 - x)$

$$f'(x) = -0,05 + \varphi(8 - x), \text{ ở đó } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ khi } \begin{cases} x = 10,04 \\ x = 5,96 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(8-x)^2}{2}} (8 - x) < 0 \text{ khi } x = 10,04.$$

Vậy $f(x)$ đạt max tại $x = 10,04$.

Vậy cần chọn $\mu = 10,04$ (kg) để lợi nhuận nhà máy đạt cực đại.

108. a) Gõì X là chiềù cao của cây. Ta có:

$$P\{X < 18\} = \frac{25}{640} = 0,039 = \Phi(-1,762)$$

$$P\{X > 24\} = \frac{110}{640} = 0,1718$$

$$\Rightarrow P\{X < 24\} = 0,8281 = \Phi(0,9463)$$

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{18 - \mu}{\sigma} = -1,762 \\ \frac{24 - \mu}{\sigma} = 0,9463 \end{cases}$$

ở đó $\mu = EX$ và $\sigma^2 = DX$.

Từ hệ trên ta tìm được: $\mu = 21,9$ (m); $\sigma = 2,22$ (m)

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } P\{16 < X < 20\} &= \Phi\left(\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{16 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi(-0,859) - \Phi(-2,665) = 0,1913 \end{aligned}$$

Vậy trong 640 cây có khoảng $640 \times 0,1913 \approx 122$ cây có chiều cao trong khoảng từ 16m đến 20m.

109. Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Vậy nếu $Y = e^{-X}$ thì:

$$EY = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2x} dx = \frac{2}{3}$$

$$EY^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } DY = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}; \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,2357$$

$$110. \text{ a) Ta có: } \int_0^{\infty} x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2h^2} e^{-h^2 x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2h^2}. \text{ Suy ra } a = 2h^2.$$

$$\text{b) } EX = 2h^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx$$

Đổi biến số đặt $u = \sqrt{2} hx$. Khi đó:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2h}} \int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$$

$$EX^2 = 2h^2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-h^2 x^2} dx$$

Tích phân từng phần với $u = x^2$, $dv = 2h^2 x e^{-h^2 x^2} dx$, cho ta $EX^2 = \frac{1}{h^2}$. Từ đó:

$$DX = \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{4h^2} = \frac{4 - \pi}{4h^2}$$

$$P\left\{X < \frac{1}{h\sqrt{2}}\right\} = 2h^2 \int_0^{\frac{1}{h\sqrt{2}}} x e^{-h^2 x^2} dx = 0,0393$$

111. a) Ta có: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \arctg e^x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$

Vậy $k = \frac{2}{\pi}$

b) $F(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi} \arctg e^x$

c) Ta có: $P\left\{X \in \left(\ln \frac{1}{\sqrt{3}}, \ln \sqrt{3}\right)\right\} =$
 $= \frac{2}{\pi} \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi} \left[\arctg \sqrt{3} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{3}$

Gọi n là số quan sát cần thiết.

Ta cần có $P\{\text{không quan sát được } X \in (\ln \frac{1}{\sqrt{3}}, \ln \sqrt{3})\} =$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\lg 1,5} = 5,67$$

Vậy $n = 6$.

112. a) $P\{2 < Y < 18\} = P\{1 < X < 3\} = 0,3181$

b) $P\{Y < 4\} = P\{X < \sqrt{2}\} = 1 - e^{-\sqrt{2}}$

113. a) $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\left\{\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| < \frac{3}{\lambda}\right\} =$

$$= P\left\{-\frac{2}{\lambda} < X < \frac{4}{\lambda}\right\} = \int_0^{\frac{4}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-4} \approx 0,98168$$

c) Nếu X có phân bố đều trên $[-1, 1]$ thì $DX = \frac{1}{3}$.

Do đó: $\mu = 0, \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\{|X| < \sqrt{3}\} = 1$

c) Nếu X có phân bố Poátxông (0,09) thì:

$$\mu = 0,09; \sigma = \sqrt{0,09} = 0,3$$

Vậy: $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\{|X - 0,09| < 0,9\} =$
 $= P\{X = 0\} = e^{-0,09} = 0,91393$

Chương 4

114. a) Ta có $\int_0^1 \int_0^x k u d u d v = \int_0^1 k u^2 d u = \frac{k}{3}$. Suy ra $k = 3$.

b) Ta có $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) d y = \int_0^x 3 x d y = 3 x^2$, nếu $0 < x < 1$.

Vậy $f_X(x) = \begin{cases} 3 x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu } \text{trái lại} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) d x = \int_y^1 3 x d x = \frac{3(1 - y^2)}{2}$$

Vậy $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y^2) & \text{nếu } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{nếu } \text{trái lại} \end{cases}$

c) X và Y không độc lập vì

$$P\left\{X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right\} = 0 \text{ nhưng } P\left\{X < \frac{1}{2}\right\} \neq 0, P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} \neq 0$$

115. Ta có

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) d y = \frac{1}{6\pi} \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} d y = \frac{2}{6\pi} \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} d y = \frac{2}{9\pi} \sqrt{9 - x^2}$$

Vậy $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{9 - x^2}}{9\pi} & \text{nếu } |x| < 3 \\ 0 & \text{nếu } |x| \geq 3 \end{cases}$

Tương tự ta tìm được

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - y^2} & \text{nếu } |y| \leq 2 \\ 0 & \text{nếu } |y| > 2 \end{cases}$$

116. Theo công thức tính xác suất. Để (X, Y) rơi vào hình chữ nhật ta có:

$$\begin{aligned}
 & P\left\{\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right\} \\
 &= F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,08
 \end{aligned}$$

117. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Leftrightarrow k \int_0^1 \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dx dy = 1$

Dễ dàng tính được $\int_0^1 \int_0^2 x^2 dx dy = \frac{2}{3}$ và $\int_0^1 \int_0^2 \frac{xy}{2} dx dy = \frac{1}{2}$

Từ đó $k = \frac{6}{7}$

b) Rõ ràng với $x < 0, y < 0$ thì $F(x, y) = 0$ và với $x > 1, y > 2$ thì $F(x, y) = 1$. Ta xét các trường hợp còn lại.

i) Nếu $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ thì

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{6}{7} \int_y^x \int_0^y \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) du dv = \frac{6}{7} \int_0^y \int_0^x u^2 du dv + \frac{6}{7} \int_0^y \int_0^x \frac{uv}{2} du dv \\
 &= \frac{6}{7} \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{8} \right)
 \end{aligned}$$

ii) Nếu $0 \leq x \leq 1, y > 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7} \int_0^x \int_0^2 \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) du dv = \frac{6}{7} \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2}{2} \right)$$

iii) Nếu $x > 1, 0 \leq y \leq 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7} \int_0^1 \int_y^x \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) du dv = \frac{6}{7} \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{8} \right)$$

118. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\Leftrightarrow k \int_0^{\infty} e^{-x} dx \int_x^{\infty} e^{-y} dy = k \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{k}{2} = 1$$

Vậy $k = 2$

b) Hàm mật độ của X: với $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^{\infty} 2e^{-x} e^{-y} dy = 2e^{-2x}$$

Vậy
$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{ne  ux} > 0 \\ 0 & \text{ne  ux} \leq 0 \end{cases}$$

H  m m  t           Y: v  i $y > 0$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^y 2e^{-x} e^{-y} dx = 2e^{-y}[1 - e^{-y}]$$

V  y
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y}[1 - e^{-y}] & \text{ne  uy} > 0 \\ 0 & \text{ne  uy} < 0 \end{cases}$$

c) Ta c  
$$P\{X > 2, Y < 1\} = \int_2^{\infty} dx \int_{-\infty}^1 f(x, y) dy$$

Tuy nhi  n $P\{X > 2\} > 0$; $P\{Y < 1\} > 0$

119.

a)
$$k = \frac{1}{\pi^2}$$

b)
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^y \frac{dv}{1+v^2} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \arctg y + \frac{1}{2} \right)$$

c) H  m ph  n b        X l  

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$$

T    ng t  y
$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctg y + \frac{1}{2}$$

V  i $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ n  n ta k  t lu  n: X v   Y      l  p.

d) Ta c  
$$P = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_1^3 \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{48}$$

Ho  c     ng c    ch kh  c: theo c  u c) th  i X v   Y      l  p do     

$$P\{1 < X < \sqrt{3}, 0 < Y < 1\} = P\{1 < X < \sqrt{3}\} P\{0 < Y < 1\}$$

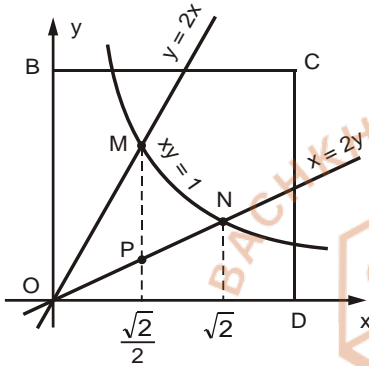
$$= \frac{1}{12} \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

120. Xác suất c  n t  m l   $\frac{1}{4}$          n tích h  nh A cho b  i     u kiện:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ xy \leq 1 \\ y \leq 2x \\ x \leq 2y \end{cases}$$

Hình A là tam giác cong OMN ở đó $O(0, 0)$; $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ và

$N\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (hình 4).



Hình 4

$$S_{OMN} = S_{OMP} + S_{MPN}$$

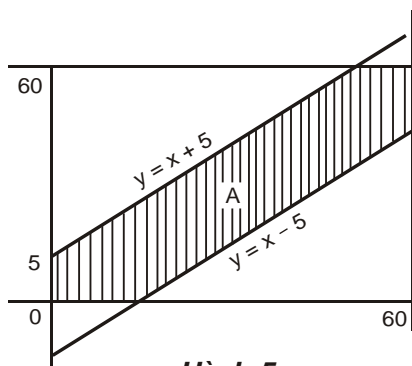
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \ln 2$$

$$\text{Vậy } p = \frac{\ln 2}{4}$$

121. Lấy gốc tọa độ là 5 giờ. Gọi X và Y là thời điểm đến của hai người (đo bằng phút). X và Y là hai ĐLNN có phân bố đều trong $[0, 60]$. Xác suất cần tìm là:

$$\frac{1}{60 \times 60} \text{ diện tích hình } A = \frac{575}{3600} \approx 0,1597$$

(hình 5: A là hình gạch sọc)

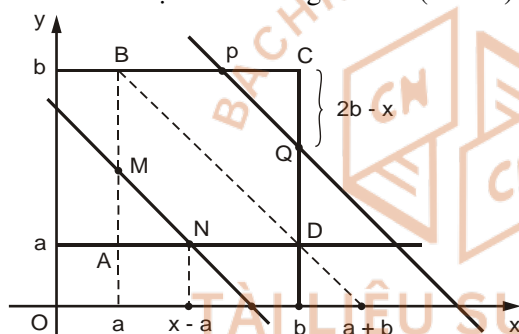


Hình 5

122. $P\{X + Y < x\} = 0$ khi $x \leq 2a$

$P\{X + Y < x\} = 1$ khi $x > 2b$

Khi $2a < x \leq a + b$, $P\{X + Y < x\}$ bằng tỷ số diện tích tam giác AMN với diện tích vuông ABCD (hình 6).



Hình 6

$$P\{X + Y < x\} = \frac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2}$$

Khi $a + b < x \leq 2b$, $P\{X + Y < x\}$ bằng tỷ số diện tích đa giác ABPQDA với diện tích hình vông ABCD. Vậy:

$$P\{X + Y < x\} = 1 - \frac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2}$$

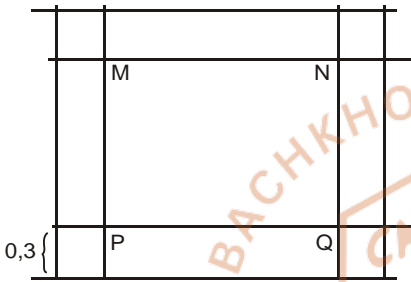
Thành thử

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } x \leq 2a \\ \frac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2} & \text{neáu } 2a < x \leq a + b \\ 1 - \frac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2} & \text{neáu } a + b < x \leq 2b \\ 1 & \text{neáu } x > 2b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-2a}{(b-a)^2} & \text{nếu } 2a < x \leq a+b \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2} & \text{nếu } a+b < x \leq 2b \\ 0 & \text{nếu ngoài khoảng} \end{cases}$$

123. Ta tìm xác suất của biến cố đối: “khoảng cách từ A đến các cạnh của hình vuông đều vượt quá 0,3”. Đó chính là diện tích hình vuông $MNPQ = (0,4)^2 = 0,16$.

Vậy xác suất cần tìm là: $1 - 0,16 = 0,84$.



Hình 7

124. Ta cần tính tích phân

$$I = \iint_A \frac{3}{\pi} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

ở đó A là hình tròn tâm O, bán kính $\frac{1}{2}$.

Ta chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân trên.

Đặt $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{3}{\pi} (1 - r) r dr d\varphi = \frac{1}{2}$$

125. Cố định $Z > 0$. Ta tìm

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{X}{Y} < z\right\} &= P\{X < zY\} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy \int_0^{zy} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} (1 - e^{-\lambda y z}) dy = 1 - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y(z+1)} dy = 1 - \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

Vậy hàm phân bố của $Z = \frac{X}{Y}$ là

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } z < 0 \\ 1 - \frac{1}{z+1} & \text{neáu } z \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2} & \text{neáu } z > 0 \\ 0 & \text{neáu } z < 0 \end{cases}$$

126. Hàm mật độ đồng thời của X, Y là

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{neáu } 0 \leq x \leq 2 \\ & 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{neáu traûi laïi} \end{cases}$$

cố định $z > 0$.

$$F(z) = P\{X + Y < z\} = \iint_{\{x+y \leq z\} \cap B} \frac{1}{20} dx dy$$

ở đó B là hình chữ nhật $OABC = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 10\}$.

i) Nếu $z < 0$ thì rõ ràng $F(z) = 0$

ii) Nếu $0 \leq z \leq 2$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OEF} = \frac{z^2}{40} \quad (\text{hình 8})$$

iii) Nếu $2 \leq z \leq 10$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OGKC} = \frac{z-1}{10}$$

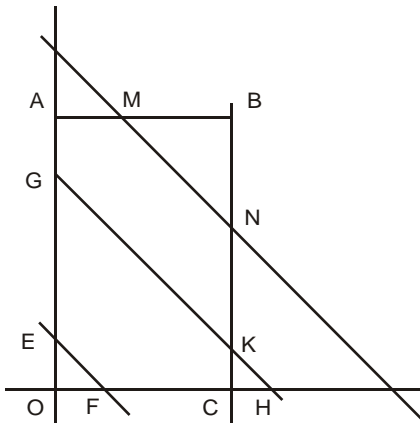
iv) Nếu $10 \leq z \leq 12$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OAMNC} = \frac{1}{20} \left[20 - \frac{(12-z)^2}{2} \right] = \frac{24z - z^2 - 104}{40}$$

v) Nếu $z > 12$ thì $f(z) = 1$

Vậy hàm phân bố của $Z = X + Y$ là

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } z < 0 \\ \frac{z^2}{40} & \text{neáu } 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{z-1}{10} & \text{neáu } 2 \leq z \leq 10 \\ \frac{24z - z^2 - 104}{40} & \text{neáu } 10 \leq z \leq 12 \\ 1 & \text{neáu } z \geq 12 \end{cases}$$

**Hình 8**

Hàm mật độ của $Z = X + Y$ là

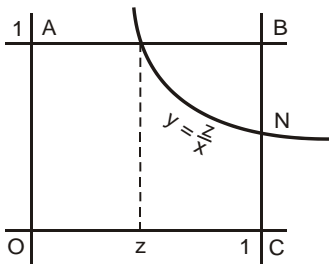
$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z < 0 \\ & \text{hoặc } z \geq 12 \\ \frac{z}{20} & \text{nếu } 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{1}{10} & \text{nếu } 2 \leq z \leq 10 \\ \frac{12-z}{20} & \text{nếu } 10 \leq z \leq 12 \end{cases}$$

127. Xem bài tập 134

128. Cố định $Z > 0$

Ta có $F(z) = P\{XY < z\} = \iint_{\{xy < z\} \cap B} dx dy$

ở đó B là hình vuông đơn vị $OABC$

**Hình 9**

Nếu $0 < z < 1$ thì $F(z)$ chính là diện tích hình $OAMNC$. Vậy:

$$F(z) = \int_0^z dz + \int_z^1 \frac{z dx}{x} = z - z \ln z$$

Hiển nhiên $F(z) = 0$ nếu $z < 0$ và $F(z) = 1$ nếu $z > 1$.

$$\text{Vậy } F(z) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } z < 0 \\ z(1 - \ln z) & \text{neáu } 0 < z \leq 1 \\ 1 & \text{neáu } z > 1 \end{cases}$$

Suy ra hàm mật độ

$$f(z) = \begin{cases} -\ln z & \text{neáu } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{neáu trài lai} \end{cases}$$

129. Ký hiệu $A = \{(x, y) : x - 1 \leq y \leq x + 2\}$

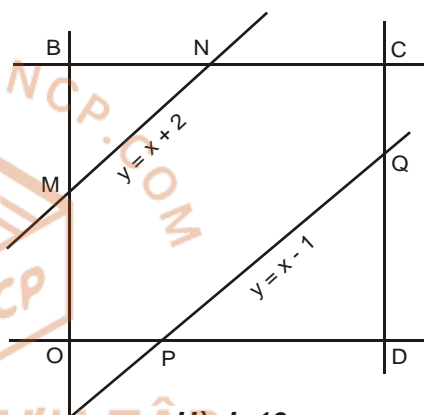
$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6\}$$

Xác suất cần tìm là $\frac{1}{36}$

diện tích $(A \cap B)$.

Trên hình vẽ ta thấy A là phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng $y = x + 2$ và $y = x - 1$, B là hình vuông OBCD có cạnh OD = 6. Thành thử $A \cap B =$ đa giác OMNCPQ.

$$\text{Dễ thấy } S_{OMNCPQ} = \frac{31}{2}.$$



Hình 10

Vậy xác suất cần tìm là

$$\frac{31}{72}.$$

130. Theo điều kiện hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{neáu } 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ 0 & \text{neáu trài lai} \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y là

$$g(y) = \begin{cases} 5e^{-5y} & \text{neáu } y \geq 0 \\ 0 & \text{neáu trài lai} \end{cases}$$

Thành thử hàm mật độ đồng thời của X và Y là:

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \begin{cases} 25e^{-5y} & \text{neáu } \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ y \geq 0 \end{cases} \\ 0 & \text{neáu trài lai} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P\{Y \leq X\} = \int_{\{y \leq x\} \cap B} 25e^{-5y} dx dy$$

$$\text{ở đó } B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{5}, y \geq 0\}$$

$$\text{Suy ra } P\{Y \leq X\} = \int_0^{\frac{1}{5}} dx \int_0^x 25e^{-5y} dy = \frac{1}{e}$$

131. Xét phép biến đổi

$$\begin{cases} X = Z \cos \theta \\ Y = Z \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{ở đó } Z \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Jacobian là: } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = Z$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, θ) là

$$f(Z, \theta) = 4Z^3 \cos \theta \sin \theta e^{-Z^2}$$

$$\text{trên miền } Z \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

và bằng 0 nếu trái lại. Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4z^3 \cos \theta \sin \theta e^{-z^2} d\theta = 2z^3 e^{-z^2} \text{ nếu } z > 0$$

$$132. \text{ Xét phép biến đổi } \begin{cases} Z = X + Y \\ V = X \end{cases}$$

$$\text{Phép biến đổi ngược là } \begin{cases} x = v \\ y = z - v \end{cases}$$

Miền $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ biến thành miền $\{v \geq 0, z \geq v\}$.

$$|J(z, v)| = 1$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, V) là

$$f(z, v) = \begin{cases} a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1) - a_2 z} & \text{nếu } v \geq 0, z \geq v \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ của Z là

$$F(z) = 0 \text{ nếu } z < 0 \text{ và với } z > 0$$

$$f(z) = \int_0^z a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1)v - a_2 z} dv = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} [e^{-a_1 z} - e^{-a_2 z}]$$

133. Xét phép biến đổi
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x + y} \end{cases}$$

Phép biến đổi ngược là
$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$$

Miền $\{x > 0, y > 0\}$ sẽ biến thành miền $\{u > 0, 0 < v < 1\}$

$$|J(u, v)| = |-u| = u$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$\begin{aligned} f(u, v) &= e^{-uv - u + uv} u \\ &= ue^{-u} \quad \text{nếu } u > 0 \\ &\quad 0 < v < 1 \end{aligned}$$

và $f(u, v) = 0$ nếu trái lại.

Hàm mật độ của U là

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv = \int_0^1 ue^{-u} dv = ue^{-u} \quad \text{nếu } u > 0$$

và $f(u, v) = 0$ nếu trái lại

Hàm mật độ của V là

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du = \int_0^{\infty} ue^{-u} du = 1 \quad \text{nếu } 0 < v < 1$$

và $g(v) = 0$ nếu trái lại.

b) Ta thấy rằng $f(u, v) = f(u)g(v)$

Vậy U và V độc lập. Tương tự X và Y cũng độc lập.

134. Hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Xét phép biến đổi
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x + y} \end{cases}$$

Phép biến đổi ngược là
$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$$

Miền $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ biến thành miền

$$\{0 < uv < 1, 0 < u(1-v) < 1\}$$

Hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$f(u, v) = \begin{cases} u & \text{neáu} \begin{cases} 0 < uv < 1 \\ 0 < u(1-v) < 1 \end{cases} \\ 0 & \text{neáutraùi laii} \end{cases}$$

Ta tìm hàm mật độ $f(u)$ của U. Nếu $u < 0$ thì $f(u) = 0$. Xét $u > 0$.

Khi đó $f(u, v) = v$ nếu $0 < v < \frac{1}{u}$ và $\frac{u-1}{u} < v < 1$.

i) Nếu $0 < u < 1$ ta có

$$f(u) = \int_0^1 u dv = u$$

ii) Nếu $u > 1$ và $\frac{1}{u} > \frac{u-1}{u} \Leftrightarrow u < 2$ thì

$$f(u) = \int_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{1}{u}} v dv = 2 - u$$

iii) Nếu $u > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u} < \frac{u-1}{u}$ thì $f(u) = 0$

$$\text{Tóm lại } f(u) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } u < 0 \\ u & \text{neáu } 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u & \text{neáu } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{neáu } u > 2 \end{cases}$$

Tiếp theo ta tìm hàm mật độ $g(v)$ của V.

Nếu $V < 0$ hay $v > 1$ thì $g(v) = 0$.

Xét $0 < v < 1$. Khi đó $f(u, v) = u$ nếu $0 < 0 < \frac{1}{v}$ và $0 < u < \frac{1}{1-v}$.

$$\text{Vậy: Nếu } \frac{1}{v} < \frac{1}{1-v} \Leftrightarrow v > \frac{1}{2} \text{ thì } g(v) = \int_0^{\frac{1}{v}} u du = \frac{1}{2v^2}$$

$$\text{Nếu } \frac{1}{v} > \frac{1}{1-v} \Leftrightarrow v < \frac{1}{2} \text{ thì } g(v) = \int_0^{1/(1-v)} u du = \frac{1}{2(1-v)^2}$$

$$\text{Vậy: } g(v) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } v < 0 \\ \frac{1}{2(1-v)^2} & \text{neáu } 0 < v < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2v^2} & \text{neáu } \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{neáu } v > 1 \end{cases}$$

135. Xét phép biến đổi $\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = v \\ y = v - u \end{cases}$

Miền $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ biến thành miền

$$A = \{0 \leq v \leq 1, u \leq v \leq 1 + u\}$$

Khi đó $f(u, v) = 1$ nếu $(u, v) \in A$.

Gọi $f(u)$ là hàm mật độ của $X - Y$

Rõ ràng nếu $u < -1$ hoặc $u > 1$ thì $f(u) = 0$

Nếu $-1 < u < 0$ thì $f(u) = \int_0^{1+u} dv = 1 + u$

Nếu $0 < u < 1$ thì $f(u) = \int_u^1 dv = 1 - u$

Tóm lại $f(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{neáu } |u| \leq 1 \\ 0 & \text{neáu } |u| \geq 1 \end{cases}$

136. Tương tự như bài 135 hàm mật độ đồng thời của U, V với

$$U = X - Y, V = X \text{ là}$$

$$f(u, v) = \begin{cases} e^{-2v+u} & \text{neáu } (u, v) \in A \\ 0 & \text{neáu } (u, v) \notin A \end{cases}$$

ở đó $A = \{0 \leq v, u \leq v\}$

Gọi $f(u)$ là hàm mật độ của $X - Y$.

Nếu $u < 0$ thì: $f(u) = \int_0^{\infty} e^{-2v+u} dv = \frac{e^u}{2}$

Nếu $u > 0$ thì: $f(u) = \int_u^{\infty} e^{-2v+u} dv = \frac{e^{-u}}{2}$

Tóm lại: $f(u) = \frac{e^{-|u|}}{2}$ với mọi u .

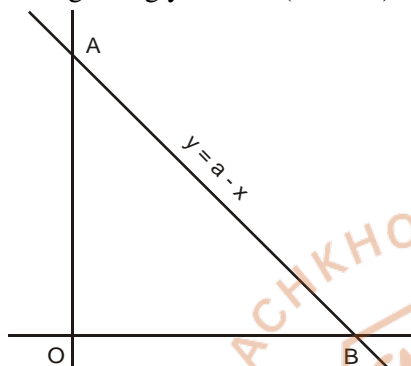
137. Ký hiệu $P(a) = P\{X + Y < a\}$.

Nếu $a < 0$ thì hiển nhiên $P(a) = 0$

Nếu $a > 0$ ta có

$$P\{X + Y < a\} = \iint_{OAB} \lambda^2 e^{-(x+y)} dx dy$$

ở đó OAB là tam giác vuông giới hạn bởi phần dương của trục Ox, Oy và đường thẳng $y = a - x$ (hình 11).



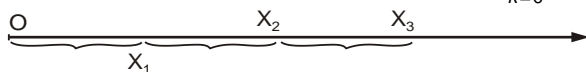
Hình 11

Vậy:

$$\begin{aligned} P(a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{a-x} \lambda e^{-y} dy = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} [1 - e^{-\lambda(a-x)}] dx \\ &= 1 - e^{-\lambda a} - \lambda a e^{-\lambda a} \end{aligned}$$

138. a) Nếu X_1, X_2, \dots, X_n lần lượt là khoảng thời gian liên tiếp giữa hai lần xuất hiện của một biến cố ngẫu nhiên E nào đó thì biến cố $X_1 + X_2 + \dots + X_n > t$ có nghĩa là trong khoảng thời gian $[0, t]$ có nhiều nhất $n - 1$ lần biến cố E xuất hiện. Mặt khác số lần xuất hiện của biến cố E trong khoảng thời gian $[0, t]$ là một ĐLNN có phân bố Poátông với tham số λt .

$$\text{Vậy } P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n > t\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$



Hình 12

b) Hàm phân bố $F(t)$ của $T = X_1 + \dots + X_n$ là

$$F(t) = 0 \text{ nếu } t < 0$$

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Hàm mật độ $f(t)$ là

$$f(t) = F'(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

139. a) Trước hết ta tìm hàm mật độ của $U = X + Y$. Theo bài tập 127 hàm mật độ của U là

$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } u < 0 \text{ hoặc } u > 2 \\ u & \text{neáu } 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u & \text{neáu } 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

Hàm mật độ của $X + Y + Z = U + Z$ là

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) f_U(t-z) dz = \int_0^1 f_V(t-z) dz$$

Đổi biến đặt $u = t - z$, ta được

$$g(t) = \int_{t-1}^t f_U(u) du$$

i) Nếu $t < 0 \Rightarrow g(t) = 0$

ii) Nếu $0 \leq t \leq 1$ ta có

$$g(t) = \int_0^t u du = \frac{t^2}{2}$$

iii) Nếu $1 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{t-1}^1 u du + \int_1^t (2-u) du = 1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(2-t)^2}{2} \\ &= -t^2 + 3t - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

iv) Nếu $2 \leq t \leq 3$

$$g(t) = \int_{t-1}^2 (2-u) du = \frac{(3-t)^2}{2}$$

v) Nếu $t \geq 3$ thì $g(t) = 0$

Vậy kết quả là

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{neáu } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 & \text{neáu } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{(3-t)^2}{2} & \text{neáu } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{vôùi } t < 0 \text{ hoặc } t > 3 \end{cases}$$

b) $\frac{23}{24} = 0,96033$.

140. P{kim không cắt đường thẳng nào}

$$P\left\{\frac{\sin \theta}{2} < Z < 1 - \frac{\sin \theta}{2}\right\} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{2}{\pi}$.

141. Giải bằng phương pháp tương tự như của bài tập 139.

a) Hàm mật độ $f_U(u)$ là

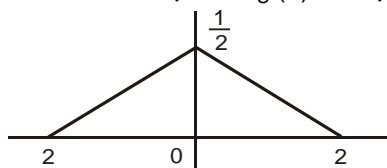
$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |u| \geq 2 \\ \frac{u+2}{4} & \text{nếu } -2 \leq u \leq 0 \\ \frac{2-u}{4} & \text{nếu } 0 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

ĐLNN có hàm mật độ như trên gọi là ĐLNN có phân bố Simson.

b) Hàm mật độ $f_V(v)$ là

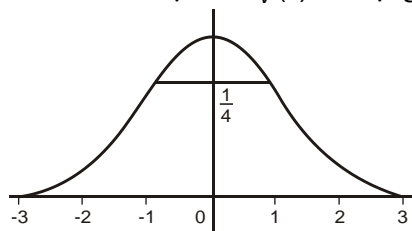
$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |v| \geq 3 \\ \frac{(v+3)^2}{16} & \text{nếu } -3 \leq v \leq -1 \\ \frac{3-v^2}{8} & \text{nếu } -1 \leq v \leq 1 \\ \frac{(v-3)^2}{16} & \text{nếu } 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$$

Đồ thị của $f_U(u)$ có dạng sau:



Hình 13

Đồ thị của $f_V(v)$ có dạng sau:



Hình 14

142. Ta đã thấy ở bài tập 128 hàm mật độ của $U = XY$ là:

$$f(u) = \begin{cases} -\ln u & \text{neáu } 0 < u < 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

Hàm mật độ của $V = Z^2$ dễ thấy là:

$$g(v) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{v}} & \text{neáu } 0 < v < 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ đồng thời (U, V) là:

$$f(u, v) = \begin{cases} -\frac{\ln u}{2\sqrt{v}} & \text{neáu } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\{XY < Z^2\} &= P\{U < V\} = \int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v}} \int_0^v \ln u \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{v}(1 - \ln v) \, dv = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

143. Hàm mật độ của XY là:

$$f(u) = \begin{cases} -\ln u & \text{neáu } 0 < u < 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

Hàm mật độ của $V = Z^2$ dễ thấy là:

$$g(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \{h(\sqrt{v}) + h(-\sqrt{v})\} = 1 \quad \text{neáu } 0 \leq v \leq 1$$

và $g(v) = 0$ nếu trái lại.

Từ đó hàm mật độ của $T = XY + Z^2$ là:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) f(t-v) \, dv = \int_0^1 f(t-v) \, dv = \int_{t-1}^t f(u) \, du$$

i) Nếu $0 < t < 1$ thì

$$\varphi(t) = \int_0^t -\ln u \, du = t(1 - \ln t)$$

ii) Nếu $1 < t < 2$ thì

$$\varphi(t) = \int_{t-1}^1 -\ln u \, du = (t-1) \ln(t-1) + 2 - t$$

với $t < 0$ hay $t > 2$, $\varphi(t) = 0$.

144. Ta có $P\{Z \leq z/X = x\} =$

$$= P\{X + Y \leq z/X = x\} = P\{Y \leq z - x/X = x\} =$$

$$= P\{Y \leq z - x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(z-x)} & \text{neáu } z > x \\ 0 & \text{neáu } z < x \end{cases}$$

Từ đó:

$$f(z/x) = \frac{dP\{Z \leq z / X = x\}}{dz} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & \text{neáuz} > x \\ 0 & \text{neáuz} < x \end{cases}$$

Hàm mật độ đồng thời của Z, X là:

$$f(z, x) = f(x)f(z/x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} & \text{neáuz} > x > 0 \\ 0 & \text{neáutraùi lại} \end{cases}$$

Vậy hàm mật độ của X với điều kiện Z = z là:

$$f(x/z) = \frac{f(z, x)}{f_z(z)} \quad \text{với } z > 0$$

$$\text{ở đó: } f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, x) dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z > 0)$$

$$\text{Suy ra: } f(x/z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{vôùi } z > 0 \\ 0 & \text{vôùi } z \leq 0 \end{cases}$$

Như vậy phân bố của X với điều kiện Z = z là phân bố đều trên đoạn [0, z].

145. a) Dễ thấy rằng hàm mật độ của X là $f_X(x) = 1$ nếu $0 < x \leq 1$.

Từ đó hàm mật độ của Y với điều kiện X = x là:

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{nếu } 0 \leq y \leq x \leq 1$$

tức là phân bố của Y với điều kiện X = x là phân bố đều trên [0, x].

$$\text{b) Ta có: } P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_A \frac{dx dy}{x}$$

ở đó $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Trên hình A là tam giác cong ODC.

Chuyển sang tọa độ cực ta được

$$P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r dr d\varphi}{r \cos \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} =$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right| = \ln(1 + \sqrt{2})$$

146. Hàm mật độ của X là:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2} & \text{neáux} \geq 1 \\ 0 & \text{neáux} < 1 \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y là:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & \text{neáu } 1 \leq y < \infty \\ \frac{1}{2} & \text{neáu } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

[Thật vậy nếu $0 \leq y \leq 1$ thì

$$f_Y(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 y} = \frac{1}{2}$$

Nếu $y \geq 1$ thì

$$f_Y(y) = \int_y^{\infty} \frac{dx}{2x^2 y} = \frac{1}{2y^2}]$$

Từ đó hàm mật độ của Y với điều kiện $X = x (x > 1)$ là:

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2y \ln x} \quad \text{nếu } \frac{1}{x} \leq y \leq x$$

Hàm mật độ của X với điều kiện $Y = y (y > 0)$ là:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y} & \text{neáu } 0 \leq y \leq 1; \quad x \geq \frac{1}{y} \\ \frac{y}{x^2} & \text{neáu } y \geq 1; \quad y \leq x \end{cases}$$

147. $E(2X - 3Y) = 2EX - 3EY = 10$

$$D(2X - 3Y) = 4DX + 9DY - 12\sqrt{DXDY}\rho(X, Y) = 57,6$$

148. Gọi X là thời gian học và Y là thời gian chơi. Ta có:

$$E(X + Y) = 4,7$$

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\sigma_X\sigma_Y\rho(X, Y) = 0,28$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{D(X + Y)} = 0,5292$$

$$\text{Vậy } P\{X + Y > 5\} = 1 - \Phi(0,567) = 0,2853$$

b) Ta có: $E(X - Y) = EX - EY = -0,3$

$$D(X - Y) = DX + DY - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 0,76 \Rightarrow \sigma_{X-Y} = 0,8718$$

$$X - Y \sim N(-0,3; 0,76)$$

$$\text{Vậy: } P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = 1 - \Phi(0,344) = 0,3654$$

149. Gọi X là trọng lượng hành khách, Y là trọng lượng hành lý mang theo của người đó.

a) Theo giả thiết:

$$P\{X > 85\} = 0,1 \Rightarrow P\left\{Z > \frac{85 - 74}{\sigma_X}\right\} = 0,1 \Rightarrow \frac{85 - 74}{\sigma_X} = 1,282$$

Tương tự:

$$P\{Y > 24\} = 0,2 \Leftrightarrow P\left\{Z > \frac{24 - 20}{\sigma_Y}\right\} = 0,2 \Rightarrow \frac{24 - 20}{\sigma_Y} = 0,8416$$

Từ đó tìm được: $\sigma_X = 8,58$ kg; $\sigma_Y = 4,753$ kg

b) Ta có $E(X + Y) = EX + EY = 94$

Từ điều kiện: $P\{X + Y > 108\} = 0,1 \Rightarrow$

$$P\left\{Z > \frac{108 - 94}{\sigma_{X+Y}}\right\} = 0,1 \Rightarrow \frac{108 - 94}{\sigma_{X+Y}} = 1,282$$

Từ đó $\sigma_{X+Y} = 10,92$.

Từ đẳng thức $D(X + Y) = DX + DY + 2\rho\sigma_X\sigma_Y$, ta tìm được $\rho(X, Y) = 0,283$.

150. a) Ta có $E(X + Y) = EX + EY = 104$

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\rho(X, Y)\sigma_X\sigma_Y =$$

$$= 15^2 + 12^2 + 2 \times 0,7 \times 15 \times 12 \Rightarrow \sigma = 24,92$$

$$\text{Vậy } P\{X + Y > 130\} = P\{Z > 1,043\} = 0,1485$$

$$P\{X + Y < 90\} = 0,2870$$

b) $E(X - Y) = -8$

$$D(X - Y) = 15^2 - 2(0,7)(15)(12) + 12^2 \Rightarrow \sigma_{X-Y} = 10,82$$

$$\text{Vậy } P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = P\{Z > 0,740\} = 0,2296.$$

$$151. k = 0,25; \text{ cov}(X, Y) = -\frac{1}{15} \text{ và } \rho(X, Y) = -\frac{1}{5}$$

$$152. E(X + Y) = EX + EY = 12$$

Vì X và Y độc lập nên:

$$D(X + Y) = DX + DY = 1,2^2 + 0,9^2 = 2,25$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

Do đó:

$$P\{X + Y < 9,5\} = P\left\{Z < \frac{9,5 - 12}{1,5}\right\} = P\{Z < -1,667\} = 0,0478$$

$$\text{Ta cần tìm } P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$$

$$\text{Ta có: } E(X - Y) = EX - EY = 2$$

$$D(X - Y) = DX + DY = 2,25$$

Do đó:

$$P\{X - Y < 0\} = P\left\{Z < \frac{0 - 2}{1,5}\right\} = P\{Z < -1,333\} = 0,0913$$

$$\text{c) } E(X - 2Y) = EX - 2EY = -3$$

$$D(X - 2Y) = DX + 4DY = 4,68$$

$$\sigma_{X-2Y} = \sqrt{4,68} = 2,163$$

Do đó:

$$P\{X > 2Y\} = P\{X - 2Y > 0\} = P\left\{Z > \frac{0+3}{2,163}\right\} = \{Z > 1,387\} = 0,0827$$

153. Gọi X và Y là trọng lượng của người chồng và của người vợ.

Ta có:

$$E(X - Y) = EX - EY = 20$$

$$D(X - Y) = DX + DY = 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 81 + 16 - \frac{2}{3}.9.4 = 73$$

$$\sqrt{73} = 8,54$$

$$\text{Vậy } P\{X < Y\} = P\left\{Z < \frac{0-20}{8,54}\right\} = \phi(-2,34) = 1 - \phi(2,34) \approx 0,01$$

Chương 5

154. Ta có $E|Z_n|^2 = \frac{1}{n} \cdot n^{2\alpha} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 0 = n^{2\alpha-1}$.

Do đó $\lim E|Z_n|^2 = 0$ khi và chỉ khi $2\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$.

155. Đặt $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$. Ta có:

$$ES = 12 \times 16 = 192 \text{ và } DS = 12 \times 1 = 12$$

Theo bất đẳng thức Trêbusep

$$P\{|S - 192| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DS}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{12}{\varepsilon^2}$$

Ta chọn ε sao cho:

$$1 - \frac{12}{\varepsilon^2} \geq 0,99 \Leftrightarrow \frac{12}{\varepsilon^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \geq 1200 \Rightarrow \varepsilon \geq 34,64$$

Từ đó $P\{192 - 34,64 \leq S \leq 192 + 34,64\} \geq 0,99$

Như vậy có thể lấy $a = 157,36$; $b = 226,64$

156. Đặt $S = \sum_{i=1}^{10^4} X_i$. Ta có:

$$ES = 0; DS = 10^4 \cdot \frac{1}{12}$$

Theo bất đẳng thức Trêbusep

$$P\{|S| \leq \varepsilon\} \geq \frac{DS}{500^2} = \frac{10^4}{25 \cdot 12 \cdot 10^4} = \frac{1}{300}$$

157. Ta biết rằng S là ĐLNN có phân bố nhị thức với $P = \frac{1}{6}$.

Vậy $ES = \frac{n}{6}$ và $DS = \frac{5n}{36}$. Theo BĐT Trêbusep:

$$P\{|S - ES| < \sqrt{n}\} \geq 1 - \frac{DS}{n} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

$$\Leftrightarrow P\{\frac{n}{6} - \sqrt{n} < S < \frac{n}{6} + \sqrt{n}\} \geq \frac{31}{36}$$

158. Đặt $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$. Ta cần tìm M nhỏ nhất để:

$$P\{\sum_{i=1}^{12} X_i \leq M\} \geq 0,99$$

Ta có $ES = 192$; $DS = 12$. Giả sử $\varepsilon > 0$. Khi đó:

$$P\{|S - 192| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DS}{\varepsilon^2} \geq 0,99 \Rightarrow \varepsilon \geq 34,64$$

Vậy $M = 192 + 34,64 = 226,64$

159. a) $P\{3 < X < 7\} = P\{|X - 5| < 2\} \geq 1 - \frac{DX}{4} = 1 - \frac{0,16}{4} = 0,96$

b) $P\{2 < X < 8\} = P\{|X - 5| < 3\} \geq 1 - \frac{DX}{9} = 1 - \frac{0,16}{9} = 0,982$

c) Đặt $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_9}{9}$. Khi đó: $E\bar{X} = 5$; $D\bar{X} = \frac{0,16}{9}$.

Vậy:

$$P\{3 < \bar{X} < 7\} = P\{|\bar{X} - 5| < 2\} \geq 1 - \frac{D\bar{X}}{4} = 1 - \frac{0,16}{36} = 0,995$$

160. $EX_n = 0$ và $DX_n = n^{2\alpha}$

$$\text{Vậy: } \frac{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n DX_k}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n k^{2\alpha}}{n^2} < \frac{n \cdot n^{2\alpha}}{n^2} = n^{2\alpha-1} \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$ nếu $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Theo định lý Markov, dãy tuân theo luật số lớn.

161. Ta có $EX_n = 0$; $DX_n = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n DX_k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Theo định lý Markov, dãy tuân theo luật số lớn.

162. Ta có với mỗi k :

$$EX_k = 0$$

$$DX_k = \frac{2a_k^2}{(2k+1)^3} \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{2a_k^2 k(k+1)}{6(2k+1)^2} < \frac{a_k^2}{3}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n DX_k < \frac{1}{3n^2} \sum_{k=1}^n a_k^2$$

Áp dụng định lý Marbov ta có (X_n) tuân theo luật số lớn.

163. Ta có: $EX_n = 0$; $DX_n = \ln n$. Vậy:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n DX_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln k \leq \frac{1}{n^2} \int_1^{n+1} \ln x dx \leq \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n^2} \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$ (dùng quy tắc Lôpitan).

Vậy dãy đó tuân theo luật số lớn.

164. Gọi X là số sản phẩm hỏng. Ta có $X \sim B(250; 2\%)$. X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 250(0,02) = 5$.

Từ đó tra bảng ta được:

a) $P\{X = 2\} = 0,0842$

b) $P\{X \leq 2\} = 0,1247$

165. Gọi X là số hạt không nảy mầm. Ta có $X \sim B(150; 3\%)$. X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 150(0,03) = 4,5$.

Từ đó tra bảng ta được:

$$P\{X \geq 6\} = 1 - P\{X \leq 5\} = 0,2971$$

166. Gọi X là số gia đình gặp sự cố về điện. Ta có $X \sim B(160; 2\%)$. X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 160(0,02) = 3,2$.

Từ đó tra bảng ta được:

a) $P\{X = 4\} = 0,178$

b) $P\{X \in [2,5]\} = \sum_{i=2}^5 P\{X = i\} = 0,724$

167. Gọi X là số lần xuất hiện lục.

a) $X \sim B(120; \frac{1}{6})$. X có xấp xỉ phân bố chuẩn với:

$$\mu = 20; \quad \sigma = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = 4,08$$

$$\text{Từ đó } P\{x < 15\} = P\left\{Z < \frac{-5}{4,08}\right\} = 1 - \phi(1,22) = 0,1131$$

b) $X \sim B(120; \frac{1}{10})$. X có xấp xỉ phân bố chuẩn với $\mu = 12$; $\sigma = 3,286$

$$\text{Từ đó } P\{X < 15\} = P\left\{Z < \frac{3}{3,286}\right\} = \phi(0,912) = 0,8159$$

168. Giả sử X là số người chọn ăn ở đợt 1. Khi đó $1000 - X$ là số người chọn ăn ở đợt 2. Gọi k là số chỗ ngồi trong nhà ăn. Ta phải chọn k nhỏ nhất để:

$$P\{X < k, 1000 - X < k\} \geq 0,99 \Leftrightarrow P\{1000 - k < X < k\} \geq 0,99$$

Ta xem X có phân bố chuẩn với $\mu = 500$; $\sigma = \sqrt{250}$.

Vậy ta phải có:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{500-k}{\sqrt{250}}\right) &\geq 0,99 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) \geq 1,99 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) &\geq \Phi(2,58) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } k \geq 500 + 2,58\sqrt{250} = 540,79$$

Vậy $k = 541$.

169. Gọi X là số cặp vợ chồng chọn ăn ở đợt 1. Khi đó $500 - X$ là số cặp chọn ăn ở đợt 2. Ta phải chọn k nhỏ nhất để:

$$P\{2X < k, 1000 - 2X < k\} \geq 0,99 \Leftrightarrow P\left\{500 - \frac{k}{2} < X < \frac{k}{2}\right\} \geq 0,99$$

X có phân bố nhị thức $X \sim B(500, \frac{1}{2})$. Dùng xấp xỉ chuẩn ta có $X \sim N(250, 125)$. Vậy ta phải có:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\frac{k}{2} - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{250 - \frac{k}{2}}{\sqrt{125}}\right) &\geq 0,99 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{2} &\geq 250 + 2,58\sqrt{125} \Leftrightarrow k \geq 557,69 \end{aligned}$$

Vậy $k = 558$.

170. Gọi X là số người thi đỗ. Ta có $X \sim B(50, \frac{1}{3})$.

Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$\begin{aligned} P\{X > k\} &= 1 - \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \frac{50}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) \geq 0,95 \\ \Leftrightarrow \frac{k + 0,5 - 16,667}{10/3} &\leq -1,645 \Leftrightarrow k \leq 10,68 \end{aligned}$$

Vậy $k = 10$.

171. Gọi X là số câu trả lời đúng của sinh viên.

Ta có $X \sim B(45, \frac{1}{4})$

Dùng xấp xỉ chuẩn ta đượ:

$$\begin{aligned} \text{a) } P\{X \geq 16\} &= P\{\tilde{X} > 15,5\} = P\left\{Z > \frac{15,5 - 11,25}{2,904}\right\} = \\ &= 1 - \phi(1,463) = 0,0717 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P\{X < 10\} = P\{\tilde{X} \leq 9,5\} = 0,2737$$

$$\text{c) } P\{8 \leq X \leq 12\} = P\{7,5 < \tilde{X} \leq 12,5\} = 0,5681$$

172. Gọi X là số sinh viên bị ốm trong một ngày. Ta có $X \sim B(730, \frac{1}{365})$.

Dùng xấp xỉ Poátông ta xem X có phân bố Poátông với tham số $\lambda = 2$.

Ta cần xác định k bé nhất để thỏa mãn bất đẳg thức:

$$P\{X \leq k\} > 0,99$$

Tra bảng phân bố Poátông với $\lambda = 2$ ta tìm đượ $k = 6$.

173. Gọi X là số người dưới 30 tuổi. Ta có $X \sim B(100, 0,46)$. Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$P\{X > 50\} = P\{\tilde{X} \geq 50,5\} = 1 - \phi\left(\frac{50,5 - 46}{\sqrt{24,84}}\right) = 0,1833$$

Nếu mẫu đượ chọn có kích thước $n = 225$ thì:

$$P\{X \geq 113\} = P\{\tilde{X} \geq 112,5\} = 1 - \phi\left(\frac{112,5 - 103,5}{\sqrt{55,89}}\right) = 0,1144$$

174. Gọi X là số nhân viên đi nghỉ mát. Ta có $X \sim B(80, \frac{1}{5})$. Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$P\{X \leq k\} = P\{\tilde{X} < k + 0,5\} = \phi\left(\frac{k + 0,5 - 16}{3,578}\right) \geq 0,99 = \phi(2,326)$$

$$\Rightarrow k \geq (3,578)(2,326) + 16 - 0,5 = 23,82$$

Vậ $k = 24$.

175. Ta có $P\left\{\left|\frac{X - 500}{22,13}\right|\right\} < \varepsilon = 2\phi(\varepsilon) - 1 = 0,95$. Suy ra $\varepsilon = 1,96$.

$$\text{Vậ } P\{500 - (1,96)(22,13) < X < 500 + (1,96)(22,13)\} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\{456,62 < X < 543,37\} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \text{Vậ } a = 457; b = 543$$

176. a) Ký hiệu $Y = \frac{X}{450}$ khi đó $EY = 0,54$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_Y = 0,02349$.

Từ đó $P\{Y < 0,5\} = \Phi\left(\frac{0,5 - 0,54}{0,02349}\right) = 0,0443$

b) Ta có $P\left\{\frac{X}{n} < 0,5\right\} = 0,01 = \Phi(-2,326)$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{(0,5 - 0,54)\sqrt{n}}{\sqrt{(0,54)(0,46)}}\right) = \Phi(-2,326) \Leftrightarrow \frac{n}{(0,54)(0,46)} = \frac{(2,326)^2}{(0,04)^2}$$

$n = 840$.

177. a) $0,686 < \theta < 0,794$

b) $c = 0,675$

178. a) Gọi X là số người trúng tuyển. Ta có $X \sim N(325, 90\%)$. X có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = 292,5$ và $\sigma = 5,4$.

Vậy:

$$P\{X \leq 300\} = P\{\tilde{X} < 300,5\} = \Phi\left(\frac{300,5 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) \geq 0,99 = \Phi(2,33)$$

$$\Leftrightarrow 300,5 - 0,9n \geq (0,3)(2,33)\sqrt{n}$$

Đặt $\sqrt{n} = u$, ta cần có:

$$0,9u^2 + 0,699u - 300,5 \leq 0 \Rightarrow u \leq 17,88 \Rightarrow n \leq 319,99$$

Vậy $n = 319$.

179. a) $0,154 < P < 0,266$

180. a) Gọi X là số học sinh tốt nghiệp. Nếu giả thuyết $P = 0,8$ là đúng thì X có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = 57,6$ và $\sigma = 3,39$.

Vậy $P\{X \leq 50\} = P\{\tilde{X} < 50,5\} = 1 - \Phi(2,09) = 0,02$

b) Đây là một xác suất nhỏ do đó theo nguyên lý xác suất nhỏ, báo cáo của tỉnh là không tin cậy.

181. $210,66 \text{ kg} < \mu < 220,14 \text{ kg}$

182. a) Theo công thức: $P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1$

ta có trong bài toán này $n = 400$; $\sigma = 0,22$; $\varepsilon = 0,02$.

Từ đó độ tin cậy là $2\Phi\left(\frac{(0,02)20}{0,22}\right) - 1 = 0,93$

b) Ta phải tìm $P\{\mu > \bar{X} - 0,01\}$

$$= P\{\bar{X} - \mu < 0,01\} = \Phi\left(\frac{(0,01)20}{0,22}\right) = \Phi(0,909) = 0,818$$

183. a) \bar{X} có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = 258$ và $\sigma = \frac{45}{\sqrt{36}} = \frac{45}{6}$

$$\text{Vậy: } P\{\bar{X} \geq 274\} = 1 - \Phi\left(\frac{(274 - 258)6}{45}\right) = 1 - \Phi(2,133) = 0,0165$$

Như vậy khoảng 1,6% trường hợp cho ta $\bar{X} \geq 274$.

b) Theo nguyên lý xác suất nhỏ, ta phải bác bỏ giả thiết “thuốc A không có tác dụng tới thời gian sống của chuột”.

$$184. \text{ Gọi } S = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

Theo định lý giới hạn trung tâm, S có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = 250 \times 30 = 7500$ giờ, và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 1369,3$ giờ.

$$\text{Vậy } P\{S > 8760\} = 1 - \Phi\left(\frac{8760 - 7500}{1369,3}\right) = 1 - \Phi(0,92) = 0,1788$$

$$\text{b) Giả sử } n \text{ là số linh kiện dự trữ } S = \sum_{i=1}^n X_i$$

S có phân bố xấp xỉ chuẩn với trung bình $\mu = 250n$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 250\sqrt{n}$.

Ta cần có: $P\{S > 8760\} \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{8760 - 250n}{250\sqrt{n}}\right) \geq 0,99 = \Phi(2,33)$$

$$\Leftrightarrow 250n - 8760 \geq 250(2,33)\sqrt{n} \Leftrightarrow n - 2,33\sqrt{n} - 35,04 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 7,195 \Rightarrow n \geq 51,76$$

Vậy $n = 52$.

$$185. \text{ Gọi } X_i \text{ là số phế phẩm của lô thứ } i. X_i \sim B\left(5, \frac{1}{10}\right).$$

Từ đó $EX_i = 0,5$ và $DX_i = 0,45$; $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Khi đó S có phân bố xấp xỉ chuẩn với $ES = \mu = 50$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = \sqrt{45} = 6,7$.

$$\text{Vậy } P\{40 \leq S \leq 55\} = \Phi\left(\frac{5}{6,7}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{6,7}\right) = 0,7083$$

186. Lượng xăng tiêu thụ X trên quãng đường 3300 km có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = EX = 3300 \times (0,9) = 2970$ lít và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 0,05\sqrt{3300} = 2,87$.

$$\text{Ta có: } P\{|X - \mu| < \varepsilon\sigma\} = 2\Phi(\varepsilon) - 1 = 0,95 \Rightarrow \varepsilon = 1,96$$

$$\text{Từ đó: } \mu - \varepsilon\sigma < X < \mu + \varepsilon\sigma \Leftrightarrow 2964,37 \text{ lít} < X < 2975,62 \text{ lít}$$

187. Gọi n là số bóng cần dùng.

Tổng số giờ thấp đèn của 150 bóng trong 6 tháng là:

$$900 \times 150 = 135000 \text{ giờ}$$

Ký hiệu X_i là thời gian làm việc của bóng thứ i . Ta cần xác định n để

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i < 135000\right\} < 0,05$$

Đặt $S = \sum_{i=1}^n X_i$, ta có $ES = 200n$ và $DS = (200)^2 n$

S có phân bố xấp xỉ chuẩn với $\mu = 200n$ và $\sigma = 200\sqrt{n}$

Vậy ta có:

$$P\{S < 135000\} = \Phi\left(\frac{135000 - 200n}{200\sqrt{n}}\right) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{675 - n}{\sqrt{n}}\right) \leq 0,05 = \Phi(-1,67) \Leftrightarrow \frac{675 - n}{\sqrt{n}} \leq -1,67$$

$$\Leftrightarrow n - 1,67\sqrt{n} - 675 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 26,825$$

$$\Rightarrow n \geq 719,58. \text{ Vậy } n = 720.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP