# ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

## Phần 3

# Nội Dung

1. Đạo hàm theo hướng, ý nghĩa và ứng dụng thực tế. Vectơ gradient
2. Khai triển Taylor, Maclaurint
3. Pháp tuyến và PT mặt phẳng tiếp diện

# Đạo hàm theo hướng

## Định nghĩa:

Cho hàm f xác định trong lân cận $M_0$ và một hướng cho bởi vector $\vec{a}$.

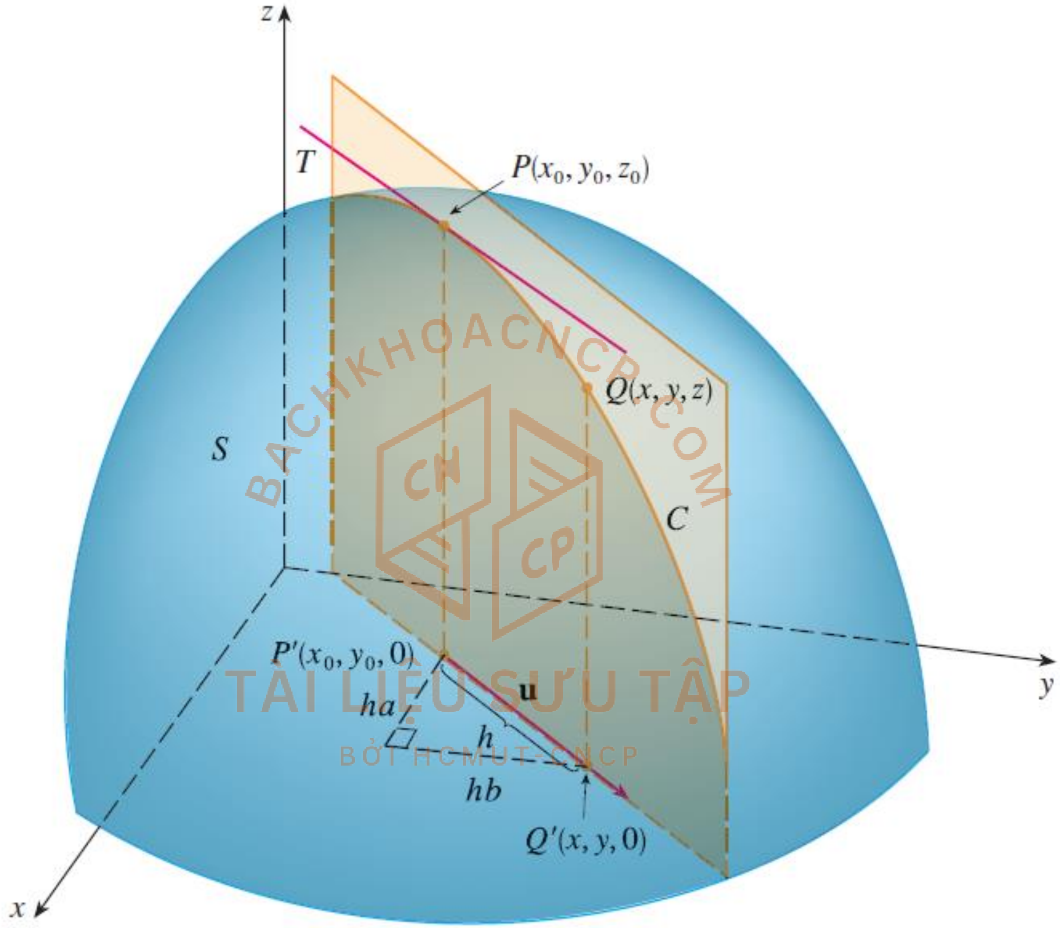
Đạo hàm của f theo hướng $\vec{a}$ tại $M_0$:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(M_0 + t.\vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t}$$



$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}}$ chỉ tốc độ thay đổi của f theo hướng $\vec{a}$

# Hình Vẽ mô tả ý nghĩa hình học của Đạo hàm



# Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Xét đường cong $C: z(t) = f\left(M_0 + t\vec{a}\right)$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(M_0 + t.\vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{z(t) - z(0)}{t} = z'(0)$$

là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong C tại P.

# Định lý (cách tính đạo hàm theo hướng)

Nếu hàm f khả vi tại $M_0$, $\vec{e} = (e_1, e_2)$ là vector đơn vị, đạo hàm theo hướng $\vec{e}$ tại $M_0$ tồn tại, khi đó:

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} e_2}$$

hay

$$\boxed{f'_{\vec{e}}(\mathrm{M}_0) = f'_x(M_0).e_1 + f'_y(M_0).e_2}$$

Hàm 3 biến cũng được tính tương tự.

# Công thức tổng quát

$\vec{a}$ là vector tùy ý: Vt đơn vị $\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left( \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right)$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 2 biến)

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{a_2}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 3 biến)

- Vecto đơn vị theo hướng dương 0x là : $\vec{e} = (1,0)$
- Vecto đơn vị theo hướng dương 0y là : $\vec{e} = (0,1)$

# Ví dụ

1. Tìm đạo hàm theo hướng dương của trục Ox tại điểm (-2,1) của hàm số

$$f(x,y) = xy^2 - 2x^2y$$

Vector đơn vị theo hướng dương của Ox là:

$$\vec{e} = (1,0)$$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial \vec{e}} = f'_x(-2,1).1 + f'_y(-2,1).0$$

$$= 9.1 - 12.0 = 9$$

2. Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{a}=(1,1,-1)$ tại

$M=(2,1,2)$ của $f(x,y,z)=x^2+2xz-3y^2z^3$

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=(e_1,e_2,e_3)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{a}}=f'_x(M).e_1+f'_y(M).e_2+f'_z(M).e_3$$

$$=8.\frac{1}{\sqrt{3}}+(-48).\frac{1}{\sqrt{3}}+(-32).\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{3}}$$

# Vector Gradient

Gọi $\vec{i}, \vec{j}$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ, f có các đạo hàm riêng tại $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Gradient của f tại $M_0$ là:

$$\boxed{\nabla f\left(M_0\right) = grad\ f\left(M_0\right) = \left(f'_x\left(M_0\right), f'_y\left(M_0\right)\right)}$$

$$= f'_x\left(M_0\right).\vec{i} + f'_y\left(M_0\right).\vec{j}$$

# Liên hệ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} e_2 = \left(\nabla f(M_0), \vec{e}\right)$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \left\|\vec{e}\right\| . \cos\varphi = \left\|\nabla f(M_0)\right\| . \cos\varphi$$

$\varphi$ là góc giữa $gradf(M_0)$ & $\vec{e}$

Vecto đơn vị $\vec{e} = (e_1, e_2) = (cos\alpha, cos\beta)$

$$\alpha = (\widehat{\vec{e}, chiều\ dương\ 0x})$$

$$\beta = (\widehat{\vec{e}, chiều\ dương\ 0y})$$

- $f'_{\vec{e}}(M_0)\,GTLN \Leftrightarrow \vec{e} \nearrow\nearrow \nabla f(M_0) \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow \cos\varphi = 1$

$$\Rightarrow \max f'_{\vec{e}}(M_0) = \|\nabla f(M_0)\|$$

- $f'_{\vec{e}}(M_0)\,GTNN \Leftrightarrow \vec{e} \nearrow\swarrow \nabla f(M_0) \rightarrow \varphi = \pi \rightarrow \cos\varphi = -1$

$$\Rightarrow \min f'_{\vec{e}}(M_0) = -\|\nabla f(M_0)\|$$

# Tổng quát

Hướng của vector gradient là hướng mà hàm *f* tăng nhanh nhất.

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \vec{a}} = \left(\nabla f\left(M_0\right), \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)$$

# Ví dụ

1/ Cho hàm $f\left(x,y,z\right)=x.e^{yz}$, $\vec{a}=(2,-3,0)$

Tìm $grad\, f(2,-3,0)$, $\dfrac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}}$

Giải $\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(f'_x, f'_y, f'_z\right)=\left(e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}\right)$

$$\nabla f(2,-3,0)=\left(1,0,-6\right)$$

$$\frac{\partial f(2,-3,0)}{\partial \vec{a}}=\nabla f(2,-3,0).\frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}=\left(1,0,-6\right).\frac{\left(2,-3,0\right)}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

# Các ví dụ bài toán thực tế

Ví dụ 1:

a) Nếu $f(x,y) = xe^y$ , tìm tốc độ biến thiên của $f$ tại điểm P(2,0) theo hướng từ P đến Q(1/2,2)

*b)* $f$ có tốc độ biến thiên cực đại theo hướng nào? Tốc độ biến thiên cực đại là bao nhiêu?



Giải: a) Tính vectơ Gradient

$$\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (\mathrm{e}^y, x.e^y)$$

$$\nabla f(2,0) = (1,2), \overrightarrow{PQ} = (\frac{-3}{2}, 2) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$$

Tốc độ biến thiên của $f$ theo hướng từ P đến Q là:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{PQ}}(P) = (1,2).(\frac{-3}{4}, \frac{4}{5}) = 1.(\frac{-3}{4}) + 2.(\frac{4}{5}) = 1$$

*b) f* tăng nhanh nhất theo hướng của vectơ gradient

$\nabla f(2,0) = (1,2)$ .

Tốc độ biến thiên cực đại là :

$$|\nabla f(2,0)| = |(1,2)| = \sqrt{5}$$

# Ví dụ 2

Giả sử nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trong không gian được cho bởi công thức $T(x,y,z)=\dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$ trong đó T được tính bằng $^0$ C và x,y,z được tính bằng mét. Nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng nào tại điểm (1,1,-2)? Tốc độ tăng tối đa bao nhiêu?



Giải: Vecto gradient tại điểm (1,1,-2) là:

$$\nabla T(1,1,-2)=\left(\frac{-5}{8},\frac{-5}{4},\frac{15}{4}\right)$$

Nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng vecto gradient

Tốc độ tăng tối đa là độ dài của vecto gradient

$$\left|\nabla T(1,1,-2)\right| = \frac{5}{8}\sqrt{41}$$

Vì vậy tốc độ tăng tối đa là $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4^0\,\mathrm{C/m}$

# KHAI TRIỂN TAYLOR

Cho f(x, y) khả vi đến cấp (n+1) trong lân cận ($x_0$,$y_0$), khi đó trong lân cận này ta có:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + R_n$$

Cụ thể:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0,y_0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$ Phần dư Lagrange

Có thể thay $R_n$ bởi $o(\rho^n)$ (Peano) (là VCB bậc cao hơn $\rho^n$ khi $\rho \to 0$),

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\ \ o(\rho^n)$$

Khai triển trong lân cận (0, 0) gọi là kt Maclaurin

1. Thông thường chỉ sử dụng phần dư Peano.
2. Sử dụng khai triển Maclaurin cơ bản của hàm 1 biến trong kt Taylor hàm nhiều biến.
3. Viết kt trong lân cận của $(x_0, y_0)$ là viết kt theo lũy thừa của $\Delta x = (x - x_0)$, $\Delta y = (y - y_0)$

# Cách tìm KT Taylor tại $(x_0, y_0)$ dùng KT Maclaurint

- Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0$
- Đưa hàm $f(x, y)$ thành hàm $f(X, Y)$ : sử dụng KT Maclaurint như đối với hàm 1 biến
- $f(X, Y) \rightarrow f(x, y)$ , sắp xếp bậc tăng dần của $(x - x_0)$ và $(y - y_0)$

# Ví dụ

1/ Khai triển Taylor đến cấp 2 trong lân cận (1, 1), cho

$z = f(x, y) = x^y$

$$f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x \ \Rightarrow df(1,1) = \Delta x + 0.\Delta y$$

$$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2},\ f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$f''_{yy} = x^y \ln^2 x$$

$$\Rightarrow d^2 f(1,1) = 0.\Delta x^2 + 2.\Delta x\Delta y + 0.\Delta y^2$$

$$df(1,1) = \Delta x + 0.\Delta y$$

$$d^2 f(1,1) = 0.\Delta x^2 + 2.\Delta x \Delta y + 0.\Delta y^2$$

$$z = f(x, y) = f(1,1) + \frac{df(1,1)}{1!} + \frac{d^2 f(1,1)}{2!} + o(\rho^2)$$

$$z = 1 + \frac{\Delta x}{1!} + \frac{2\Delta x \Delta y}{2!} + o(\rho^2)$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2)$$

# Ví dụ

2/ Viết kt Maclaurin đến cấp 2 cho

$$z = f(x,y) = \frac{1}{1+x+y-xy}$$

Đặt u = x + y – xy, kt z theo u đến u$^2$

$$z = \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2)$$

$$= 1-(x+y-xy)+(x+y-xy)^2+o(u^2)$$

$$= 1-x-y+x^2+3xy+y^2+o(\rho^2)$$

# Ví dụ

3/ Viết kt Taylor đến cấp 3 với $(x_0, y_0) = (0,1)$ cho

$$z = f(x,y) = e^{x^2+xy}$$

Đặt $X = x$, $Y = y - 1$,

$$z = e^{X+X^2+XY}$$

$$= 1 + X + X^2 + XY$$

$$+ \frac{(X+X^2+XY)^2}{2} + \frac{(X+X^2+XY)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$z = 1 + X + X^2 + XY + \frac{(X + X^2 + XY)^2}{2} + \frac{(X + X^2 + XY)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$= 1 + X + \frac{3}{2}X^2 + XY + \frac{7}{6}X^3 + X^2Y + o(\rho^3)$$



$$z = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x(y-1) + \frac{7}{6}x^3 + x^2(y-1) + o(\rho^3)$$

# Ví dụ

4/ Viết kt Taylor đến cấp 3 với $(x_0, y_0) = (1,2)$ cho

$$z = f(x,y) = x\sin(y-2).$$ Suy ra $f''_{xy}(1, 2)$

Đặt $X = x - 1$, $Y = y - 2$, z trở thành

$$z = (X+1)\sin Y = (X+1)\left(Y - \frac{Y^3}{6} + o(Y^3)\right)$$

$$= Y + XY - \frac{Y^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$= (y-2) + (x-1)(y-2) - \frac{(y-2)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$f(x,y) = (y-2) + (x-1)(y-2) - \frac{(y-2)^3}{6} + o(\rho^3)$$

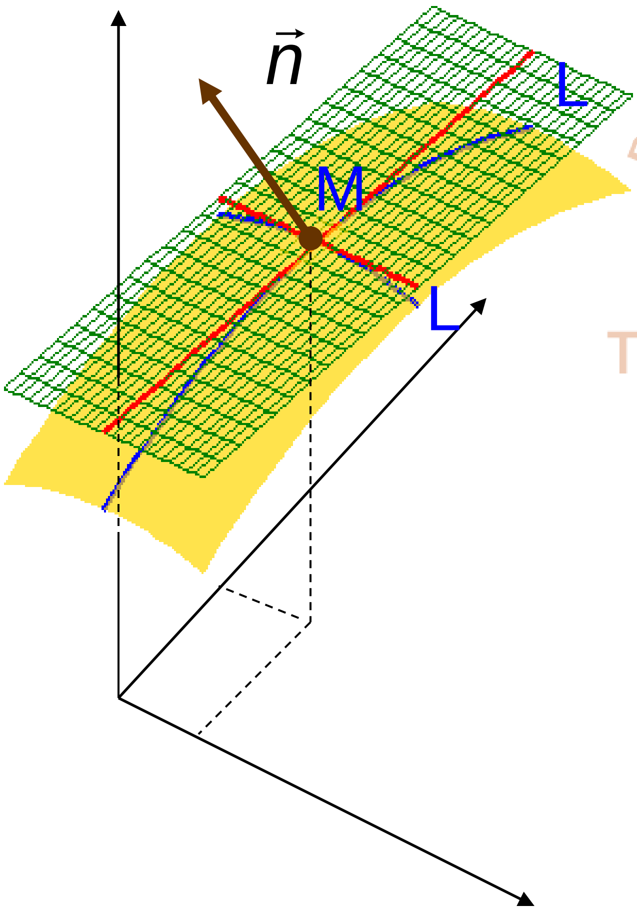
$$\frac{d^2 f(1,2)}{2!} = (x-1)(y-2) = \Delta x \Delta y$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''_{xx}(1,2)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(1,2)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(1,2)\Delta y^2}{2} = \Delta x \Delta y$$

$\Rightarrow f''_{xy}(1, 2) = 1$

# PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG.

Cho mặt cong S: $F(x, y, z) = 0$, $M(x_0,y_0,z_0) \in S$




•L là đường cong trong S đi qua M.

Tiếp tuyến của L tại M gọi là tiếp tuyến của S tại M.

•Các tiếp tuyến này cùng thuộc 1 mặt phẳng gọi là tiếp diện của S tại M.

# PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG

Giả sử $L \subset S$ có pt: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$M = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$

Vector chỉ phương của tiếp tuyến tại $M$ là :

$$\vec{u} = \left( x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \right)$$

$M \in S$: $F(x,y,z) = 0$, ta có:

$$F'_x(M)x'(t_0) + F'_y(M)y'(t_0) + F'_z(M)z'(t_0) = 0$$

$$F'_x(M)x'(t_0) + F'_y(M)y'(t_0) + F'_z(M)z'(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right) \perp \left(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{u} \perp gradF\left(M\right)$$ (với mọi đường cong trong S và qua M)

*grad F*(*M*) là pháp vector của tiếp diện của *S* tại *M*.

+ Pháp vector của tiếp diện còn gọi là pháp vector của mặt cong *S*.

# Phương trình pháp tuyến

$$S: F(x,y,z)=0,\ M=(x_M, y_M, z_M)\in S$$

$$\boxed{\frac{x-x_M}{F'_x(M)}=\frac{y-y_M}{F'_y(M)}=\frac{z-z_M}{F'_z(M)}}$$



$$S: z=f(x,y),\ M=(x_M, y_M, z_M)\in S$$

$$\boxed{\frac{x-x_M}{f'_x(M)}=\frac{y-y_M}{f'_y(M)}=\frac{z-z_M}{-1}}$$

# Phương trình tiếp diện

$$S : F(x,y,z) = 0,\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$F'_x(M)(x - x_M) + F'_y(M)(y - y_M) + F'_z(M)(z - z_M) = 0$$



$$S : z = f(x,y),\ M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$z - z_M = f'_x(M)(x - x_M) + f'_y(M)(y - y_M)$$

# Ví dụ

1/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$a.\ M = (0, 0, 2)$$

$$b.\ M = (1, \sqrt{3}, 0)$$



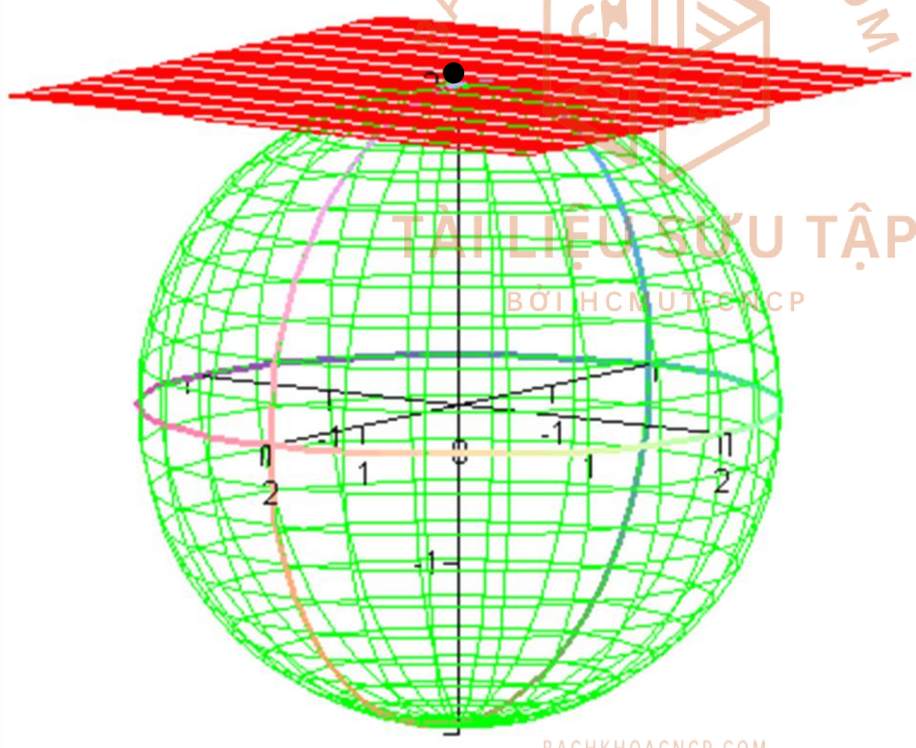
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$gradF(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$a.\ grad\ F(0,0,2) = (0,0,4)$$

$$(T): (x-0).0 + (y-0).0 + (z-2).4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2$$



$$a.\ gradF\left(1,\sqrt{3},0\right)=\left(2,2\sqrt{3},0\right)$$

$$\left(T\right):\left(x-1\right).2+\left(y-\sqrt{3}\right).2\sqrt{3}+\left(z-0\right).0=0$$

$$\Leftrightarrow x+y\sqrt{3}-4=0$$