Chương 5:

CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI LŨY THỪA

Phần 1: **CHUỖI SỐ**

CÁC GIỚI HẠN CƠ BẢN

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha > 0 \\ 0 \ \ , \alpha < 0 \end{cases}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, a > 1 \\ 0 \ \ , -1 < a < 1 \end{cases}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1, \forall\alpha$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \forall a$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln^p n}{n^\alpha} = 0, \forall\alpha, p > 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \forall a > 1$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 0$

*** Chú ý:**

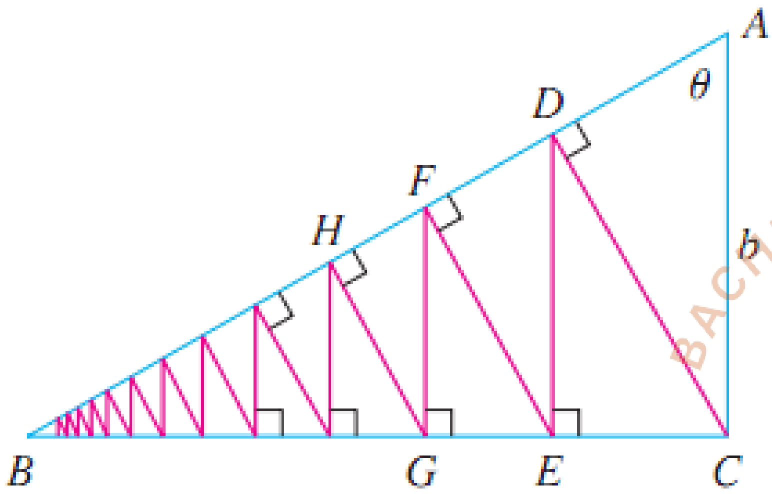
- $ln^p n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$, với $p, \alpha > 0, a > 1$
- $\frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{\infty} = 0$

Các VCB tương đương cơ bản khi $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $\sinh x \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $e^x - 1 \sim x$
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$
9. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
10. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
11. $\cosh x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

.

Bài toán



Cho tam giác ABC vuông tại C, góc A có giá trị là θ, cạnh AC có chiều dài là b, tính giá trị S theo b và θ.

$$S = |CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

Bài toán

Một quả bóng rơi tự do từ độ cao h xuống mặt đất. Giả sử nền đất cứng. Khi chạm mặt đất, quả bóng bật trở lên đến nửa độ cao này rồi lại tiếp tục rơi xuống. Nếu như độ cao ban đầu là H, hỏi đến khi dừng hẳn, quả bóng đã đi hết một đoạn đường dài bao nhiêu?

ĐỊNH NGHĨA

Cho dãy số $\{a_n\}$, định nghĩa dãy số mới

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in N$$

Tổng tất cả các số hạng của $\{a_n\}$ được gọi là chuỗi số.

Ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- S_n : tổng riêng thứ n
- a_n : số hạng tổng quát thứ n.

ĐỊNH NGHĨA

$\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{hội tụ}$$

Ngược lại ta nói chuỗi phân kỳ.

Đặt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n \quad : \text{tổng chuỗi}$$

VÍ DỤ

Khảo sát sự hội tụ và tính tổng nếu có:

$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

VÍ DỤ

Khảo sát sự hội tụ và tính tổng nếu có:

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

TÍNH CHẤT

$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất (ht/pk)

$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, $\alpha \neq 0$, và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất

$$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

- Tổng 2 chuỗi hội tụ là hội tụ
- Tổng 1 chuỗi hội tụ và 1 chuỗi phân kỳ là phân kỳ

Điều kiện cần của sự hội tụ

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Áp dụng:

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (hoặc không tồn tại) thì

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không hội tụ.

Ví dụ

$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-2)}$

$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$

3/ Ks sự hội tụ và tính tổng nếu có: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

CHUỖI KHÔNG ÂM.

Cho $a_n \geq 0$, khi đó dãy tổng riêng phần $\{S_n\}$ là dãy tăng.

Vậy $\{S_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ bị chặn trên.

Hay: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\{S_n\}$ *bị chặn trên.*

Tiêu chuẩn tích phân Maclaurin - Cauchy

Cho f(x) không âm, liên tục, giảm trên [1,+∞), khi đó

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ và $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ có cùng bản chất

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

$1/\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$1/\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

$$2/\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

Tiêu chuẩn so sánh

1. Tiêu chuẩn so sánh 1: $0 \le a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kỳ} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

2. Tiêu chuẩn so sánh 2:

Với $a_n, b_n \ge 0, \forall n \ge n_0$. Giả sử $K = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

$$\begin{cases} K = 0 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \\ K = +\infty : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ} \\ K > 0, \text{ hữu hạn: } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ cùng bản chất} \end{cases}$$

Chuỗi cơ bản

Chuỗi cấp số nhân:

$$\sum x^n \text{ hội tụ } \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Chuỗi điều hòa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Ví dụ

$$1/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{n + 3^n}$$

$$2/\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

$$3/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 3^n}{e^n}$$

$$4/\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+3}{n-2}\right)$$

$$5/\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}.\arctan n}{n^3 + \sqrt{n}}$$

Tiêu chuẩn Cauchy

Xét chuỗi số không âm: $$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

Đặt : $C_n = \sqrt[n]{a_n}$

- $\exists$ q < 1: $C_n \le q$: chuỗi hội tụ
- $C_n \ge 1$: chuỗi phân kỳ

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- C < 1 : hội tụ
- C > 1 hay $C = +\infty$: phân kỳ
- C = 1 : không có kết luận

Tiêu chuẩn D'Alembert

Xét chuỗi số dương: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Đặt : $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

- $\exists\, q < 1$: $D_n \le q$: chuỗi hội tụ
- $D_n \ge 1$: chuỗi phân kỳ

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- D < 1 : hội tụ
- D > 1 hay $D = +\infty$: phân kỳ
- D = 1 : không có kết luận

Tiêu chuẩn Rapb

(sử dụng khi D = 1 và $D_n < 1$)

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n$$

- R > 1 : hội tụ
- R < 1 : phân kỳ
- R = 1 : không có kết luận

Ví dụ-Khảo sát sự hội tụ

1/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}$

2/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.2^n}$

3/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$

4/ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$

5/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+5}\right)^{n^2-1}$

Chuỗi đan dấu – Tiêu chuẩn Leibnitz

Chuỗi đan dấu có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ với $a_n > 0$

Tiêu chuẩn Leibnitz:

Nếu $\begin{cases} \{a_n\} \text{ giảm} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ hội tụ

Chuỗi ht theo tiêu chuẩn trên gọi là chuỗi Leibnitz

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n - n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

Sự hội tụ tuyệt đối

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ***hội tụ thì*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***hội tụ*** $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

(Chiều ngược lại không đúng)

- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ ta nói* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối.*
- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *phân kỳ ta nói* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bán hội tụ.*

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+2} \right)^n$

2/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 . \sin \frac{n\pi}{2}}{3^n}$

Bài tập

Tính tổng riêng và tổng chuỗi (nếu có)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_{2n-1} = \frac{1}{3n+2}, a_{2n} = \frac{-1}{3n-1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}, a_{2n} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}-1}$

Bài tập

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}+(-3)^n}{(-8)^n+n}$

5/ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 . \ln n . \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n}$

6/ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n} - 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

7/ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n\alpha} + n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln a)^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{a^4+n^2}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a \neq -1$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$, $a_{2k} = \frac{2^k}{3^k}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n.(n!)^2}{n^{2n}}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{n^{\alpha}}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\cos n\pi)}{\sqrt{n(1+n^2)}}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n^2+1}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}+1}{2^n}$

$$20)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\arctan\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right),\ \alpha\geq 0$$

$$21)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1.4.7...(3n-2)}{3.5.7...(2n+1)}$$

$$22)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2}+n^{n}}{3^{n}.n!}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$23/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!+3^n}{(n+1)!}$$

$$25/\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+3v_n)$$

$$u_n=\frac{\arctan n\pi}{n^2+3\sqrt{n}+1} \qquad v_n=\left(\frac{n^2+3n+5}{n^2+1}\right)^{n+1}$$

$$26/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2-3n+2}{n}}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{\frac{n-7}{5}}$$

$$6/\quad \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\ln n}, \quad a > 0$$

$$C_n = \sqrt[n]{a^{-\ln n}} = a^{\frac{-\ln n}{n}} \to a^0 = 1$$

$$D_n = \frac{a^{-\ln(n+1)}}{a^{-\ln n}} = a^{\ln n - \ln(n+1)} = a^{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \to a^0 = 1$$

(không dùng được tiêu chuẩn C, D'A)

Biến đổi $\quad a^{-\ln n} = e^{-\ln n \times \ln a} = n^{-\ln a}$

Chuỗi đã cho là chuỗi điều hòa $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$