

BÀI TẬP ĐẠO HÀM HÀM NHIỀU BIẾN

1 Đạo hàm riêng

1. Một ngọn đồi có hình dạng bề mặt mô tả bởi hàm số $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, trong đó x, y và z tính bằng mét. Tính $z'_x(20, -10)$, $z'_y(20, -10)$ và cho biết sự thay đổi chiều cao của ngọn đồi từ điểm $(20, -10, 997)$ theo hướng trục Ox, Oy .

Đáp án : $z'_x(20, -10) = -\frac{1}{5}$, $z'_y(20, -10) = \frac{1}{5}$. Theo hướng Ox chiều cao giảm, theo hướng Oy chiều cao tăng.

2. Nhiệt độ của một đĩa kim loại mỏng đặt trên mặt phẳng Oxy tại mỗi điểm có tọa độ (x, y) cho bởi $T = \frac{100}{1 + 2x^2 + y^2}$. Tính $f'_x(0, 1)$, $f'_y(0, 1)$ và cho biết sự thay đổi của nhiệt độ của đĩa kim loại này từ điểm $(0, 1)$ theo hướng trục Ox, Oy . (Đơn vị của T là $^{\circ}C$, của x, y là m).

Đáp án: $f'_x(0, 1) = 0$, $f'_y(0, 1) = -50$. Đi theo hướng trục Ox , nhiệt độ không đổi, đi theo hướng trục Oy nhiệt độ giảm, mỗi mét tăng lên theo hướng trục Oy , nhiệt độ giảm $50^{\circ}C$

3. Chỉ số nhiệt I (nhiệt độ mà cơ thể cảm nhận được) là hàm số phụ thuộc vào nhiệt độ môi trường T và độ ẩm không khí h . Giả sử $I = f(T, h)$, tính theo $^{\circ}C$, T tính theo $^{\circ}C$, h tính theo $\%$. Hãy cho biết, nếu $f'_T(40, 30) = 2$, $f'_h(40, 30) = 0.75$ điều này nói gì về sự biến đổi của chỉ số nhiệt I từ mốc $(T, h) = (40, 30)$.

Đáp án: Từ mốc $(T, h) = (40, 30)$, T tăng $1^{\circ}C$ thì chỉ số nhiệt tăng $0.75^{\circ}C$ (nếu độ ẩm kk vẫn là 30%), độ ẩm kk tăng 1% thì chỉ số nhiệt tăng $2^{\circ}C$ (nếu $T = 40^{\circ}C$)

4. Chiều cao của sóng tại một vùng biển phụ thuộc vào tốc độ gió và khoảng thời gian mà gió thổi với tốc độ đó. Nếu gọi H là chiều cao của sóng, tính bằng mét (m), thời gian tính theo giờ (h), tốc độ gió v tính theo km/h thì $H = f(v, t)$. Nếu $f'_t(40, 10) = 0.5$, $f'_v(40, 10) = 0.3$, có thể nói gì về sự thay đổi chiều cao của sóng từ mốc $(v, t) = (40, 10)$.

Đáp án: Nếu gió thổi với tốc độ $40km/h$ kéo dài trong 10 giờ, thì chiều cao của sóng biển tăng lên, tốc độ gió tăng thêm $1km/h$ thì chiều cao sóng tăng thêm $0.5m$, nếu thời gian gió thổi với tốc độ $40km/h$, kéo dài thêm 1 giờ sóng biển sẽ cao thêm $0.3m$.

5. Nhiệt độ T tại một địa điểm trên bề mặt trái đất phụ thuộc vào kinh độ x , vĩ độ y và thời điểm t , $T = f(x, y, t)$. Tại tọa độ 158° Tây, 21° Bắc, vào một ngày tháng giêng, lúc 9 giờ sáng, gió thổi hơi nóng về hướng đông bắc nên vùng phía tây và nam ấm hơn, vùng phía đông và phía bắc mát hơn. Hãy cho biết T'_x, T'_y, T'_t tại $(158, 21, 9)$ mang giá trị âm hay dương, tại sao?

Đáp án: $T'_x > 0$ vì x tăng là đang đi về phía Tây, thời tiết ấm hơn (nhiệt độ tăng), $T'_y < 0$ vì y tăng là đang đi về phía bắc, thời tiết mát hơn (nhiệt độ giảm), $T'_t > 0$ vì từ 9g, t tăng là dần về trưa, thời tiết ấm hơn (nhiệt độ tăng).

2 Đạo hàm theo hướng

1. Một ngọn đồi có hình dạng mô tả bởi phương trình $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, trong đó x, y và z tính bằng mét. Một người đang đứng ở tọa độ $(60, 40, 966)$. Giả sử x ở hướng đông và y ở hướng bắc.

a/ Nếu người đó đi về hướng nam thì anh ta đang đi lên hay đi xuống? Độ dốc à bao nhiêu?

Đáp án: $\vec{u} = (0, -1)$ mô tả hướng nam. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(60, 40) = 0.8 > 0$, vậy đi theo hướng này chiều cao ngọn đồi đang tăng và người đó đang đi lên.

b/ Câu hỏi tương tự nếu đi theo hướng tây bắc.

Đáp án: tương tự câu a/, $\vec{u} = (-1, 1)$

c/ Đi theo hướng nào thì ngọn đồi có độ dốc cao nhất. Độ dốc lúc này là bao nhiêu?

2. Gần nơi đặt phao cứu sinh độ sâu của hồ cho bởi hàm số $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, x, y và z tính bằng mét. Một thuyền câu từ tọa độ $(60, 80)$ hướng đến phao cứu sinh, giả sử phao đặt tại gốc tọa độ $(0, 0)$. Hãy cho biết mực nước dưới thuyền sẽ sâu hơn hay cạn hơn nơi thuyền xuất phát.
3. Nhiệt độ T tại một điểm trên quả banh kim loại tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ điểm đó đến tâm quả banh. Giả sử tâm quả banh là gốc tọa độ. Nhiệt độ tại điểm có tọa độ $M(1, 2, 2)$ là $120^\circ C$.

a/ Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ T từ M hướng đến điểm $N(2, 1, 3)$.

b/ Chứng minh rằng, từ 1 điểm bất kỳ, khi di chuyển hướng đến tâm của quả cầu thì nhiệt độ tăng nhanh nhất.

3 Vi phân hàm nhiều biến

1. Một chiếc thùng hình trụ không nắp có kích thước bên trong là: bán kính $R = 2.5m$, chiều cao $H = 4m$, độ dày thành và đáy là $1dm$. Hãy tính gần đúng thể tích vật tư sử dụng cho việc chế tạo thùng.
2. Một hình hộp chữ nhật có kích thước các cạnh là : $a = 2m, b = 3m, c = 6m$. Hãy tính gần đúng độ dài đường chéo hình hộp nếu a tăng $2cm$, b tăng $1cm$ và c giảm $3cm$.
3. Trong nón cụt có bán kính đáy dưới $R = 20cm$, bán kính đáy trên $r = 10cm$, chiều cao $h = 30cm$. Tính xấp xỉ sự thay đổi thể tích nếu R tăng thêm $2mm$, r tăng thêm $3mm$ và h giảm đi $1mm$.

4 Đạo hàm hàm hợp

1. Một con rệp di chuyển với phương trình chuyển động là $x = \sqrt{1+t}, y = 2 + \frac{1}{3}t$, ở đây x, y tính theo cm và t là thời gian tính bằng giây (s). Nhiệt độ tạo ra trên con đường rệp di chuyển là hàm $T(x, y)$ tính bằng $^\circ C$. Biết rằng $T'_x(2, 3) = 4, T'_y(2, 3) = 3$, nhiệt độ tăng như thế nào sau 3 giây trên đường mà con rệp di chuyển.
2. Với 1 mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái cho bởi $PV = 8.31T$, trong đó $P(kPascal), V(Lit), T(Kenvin)$. Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300^0K và thể tích khí đạt $100lit$, vận tốc tăng nhiệt là $0.1K/s$ và vận tốc tăng thể tích là $0.2L/s$, tính tốc độ thay đổi của áp suất P .
3. Tốc độ âm thanh xuyên qua lớp nước biển có độ mặn 35‰ cho bởi phương trình $C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$, với C là tốc độ âm thanh (m/s), T là nhiệt độ ($^\circ C$), D là độ dày của lớp nước biển (m). Một thợ lặn sau 20 phút thì độ sâu lặn được đạt tốc độ $3/10m/phút$, nhiệt độ giảm $0.25^\circ C/phút$. Biết nhiệt độ lúc này khoảng $12.5^\circ C$ và độ dày của lớp nước biển khoảng $7m$ Ước tính tốc độ thay đổi của tốc độ âm thanh tại phút thứ 20.
4. Sản lượng lúa mì P của một năm phụ thuộc vào nhiệt độ T và lượng mưa trung bình R của năm đó. Các nhà khoa học ước tính rằng nhiệt độ trung bình mỗi năm tăng $0.15^\circ C/năm$, và lượng mưa tăng $0.1cm/năm$. Tại thời điểm hiện tại $P'_T = -2, P'_R = 8$.
 - a/ Các đạo hàm riêng này có ý nghĩa gì?
 - b/ Ước tính tốc độ thay đổi sản lượng lúa mì ở thời điểm hiện tại.