

CHƯƠNG III - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

MỘT SỐ KHÁI NIỆM và TÍNH CHẤT

Giả sử X, Y là các không gian véc tơ trên \mathbb{R} .

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của X . $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là một cơ sở của Y .

* Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là ánh xạ tuyến tính (hay đồng cấu)

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in X; \forall a, b \in \mathbb{R}: f(ax + by) = a.f(x) + b.f(y)$$

* $f: X \rightarrow Y$ là axtt $\Rightarrow f(0_X) = 0_Y$.

* Ma trận A của axtt f đối với cặp cơ sở E trong X và cơ sở B trong Y :

$$A = [f]_{E,B} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [f(e_1)]_B & [f(e_2)]_B & \dots & [f(e_n)]_B \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}. \quad \text{Ký hiệu } [f]_{E,E} = [f]_E$$

* Liên hệ giữa tọa độ của $x \in X$ và $f(x)$:

+ CT tổng quát: $[f(x)]_B = [f]_{E,B} \cdot [x]_E$

Ở đây $[x]_E$ là tọa độ cột của véc tơ x đối với cơ sở E ; $[f(x)]_B$ là tọa độ cột của véc tơ $f(x)$ đối với cơ sở B ; và $[f]_{E,B}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở E trong X và B trong Y .

+ Trường hợp $f: X \rightarrow X$ (f là phép tự đồng cấu):

$$[f(x)]_E = [f]_E [x]_E$$

+ Trường hợp $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, nếu ta ký hiệu $[f]$ là ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ thì $[f(x)] = [f] \cdot [x]$. Đây cũng chính là biểu thức xác định ánh xạ tuyến tính f .

* Ánh xạ tuyến tính f được xác định duy nhất khi và chỉ khi:

$\Leftrightarrow (1)$ Biết biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hay ma trận $A: f(X) = A \cdot X$
(ở đây tọa độ của $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ và $f(X) = [f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$)

$\Leftrightarrow (2)$ Biết ma trận của f đối với một cặp cơ sở E trong X và B trong Y .

$\Leftrightarrow (3)$ Biết ảnh của một cơ sở E trong X , (tức là biết các véc tơ $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$)

Về mặt thực hành: Chúng ta xét mối liên hệ giữa (1) và (3) để giải bài toán:

Cho axtt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, xác định bởi $f(e_i) = b_i; i=1, 2, \dots, n$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của \mathbb{R}^n . Gọi $A = [f]$. Tìm ma trận A .

Từ công thức thì $f(X) = A \cdot X$, suy ra $[b_1 | b_2 | \dots | b_n] = A[e_1 | e_2 | \dots | e_n]$

Gọi $[B]$ là ma trận mà các cột lần lượt là tọa độ của các véc tơ b_i ; $[E]$ là ma trận mà các cột lần lượt là tọa độ của các véc tơ e_i thì $[B] = A \cdot [E]$ hay $A = [B] \cdot [E]^{-1}$.

* Ánh xạ tuyến tính có tính chất bảo toàn cấu trúc đại số:

+ Nếu A là kg con của X thì $f(A)$ là kg con của Y ; $\dim f(A) \leq \dim A$.

+ Nếu B là kg con của Y thì $f^{-1}(B)$ là kg con của X .

+ Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một hệ sinh của không gian con A của X thì $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ là một hệ sinh của không gian con $f(A)$.

* Ảnh và hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính f :

+ $\text{Im}f \equiv f(X) = \{ f(x); x \in X \} = \{ y \in Y; \exists x \in X, f(x) = y \}$ được gọi là ảnh của f .

$\text{Im}f = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$, với $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ là một cơ sở bất kỳ của X
 $= \langle \text{Hệ các vectơ cột trong mt chính tắc của } f \rangle$ khi $X = \mathbb{R}^n$; $Y = \mathbb{R}^m$.

$\dim \text{Im}f = \text{Hạng của } 1 \text{ ma trận (bất kỳ) của } f. (\leq \dim X)$.

+ Định nghĩa: Hạng của axtt $f = \dim \text{Im}f$

+ $\text{Ker}f = f^{-1}(\{0\}) = \{ x \in X; f(x) = 0_Y \}$ gọi là hạt nhân của axtt f .

+ Liên hệ về số chiều: $\dim \text{Im}f + \dim \text{Ker}f = \dim X$.

* Đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu (tham khảo):

+ f là đơn cấu $\Leftrightarrow f$ là đồng cấu + f đơn ánh (?).

$\Leftrightarrow \text{Ker}f = \{0\}$ hay $\dim \text{Ker}f = 0$

+ f là toàn cấu $\Leftrightarrow f$ là đồng cấu + f toàn ánh (?).

$\Leftrightarrow \text{Im}f = Y$ hay $\dim \text{Im}f = \dim Y$.

+ f là đẳng cấu $\Leftrightarrow f$ là đồng cấu + f song ánh

$\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$ và $\dim \text{Ker}f = 0$ (hay $\dim \text{Im}f = \dim Y$).

* Liên hệ giữa các ma trận của cùng một axtt f đối với các cặp cơ sở khác nhau:

+ Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là axtt.

E_1, E_2 là 2 cơ sở tùy ý của X .

S là ma trận chuyển từ cơ sở E_1 sang E_2 .

B_1, B_2 là 2 cơ sở tùy ý của Y .

T là ma trận chuyển từ cơ sở B_1 sang B_2 .

$[f]_{E_1, B_1} = A; [f]_{E_2, B_2} = B$

thì $B = T^{-1}AS$

$f: X \longrightarrow Y$

$(E_1) \xrightarrow{A} (B_1)$

$\downarrow S \quad \downarrow T$
 $(E_2) \xrightarrow{B} (B_2)$

+ Trường hợp riêng (thường gặp hơn):

Giả sử $f: X \rightarrow X$ là phép biến đổi tuyến tính.

E_1, E_2 là 2 cơ sở tùy ý của X .

S là ma trận chuyển từ cơ sở E_1 sang E_2 .

$[f]_{E_1} = A; [f]_{E_2} = B$

thì $B = S^{-1}AS$

$f: X \longrightarrow X$

$(E_1) \xrightarrow{A} (E_1)$

$\downarrow S \quad \downarrow S$
 $(E_2) \xrightarrow{B} (E_2)$

(Nhắc lại cách tìm $S_{E_1 \rightarrow E_2}$: Do $[E_1].S_{E_1 \rightarrow E_2} = [E_2]$ nên $S_{E_1 \rightarrow E_2} = [E_1]^{-1}[E_2]$)

* Khái niệm 2 ma trận đồng dạng:

Ta nói 2 ma trận vuông A, B là đồng dạng nếu có một ma trận P khả nghịch sao cho $B = P^{-1}AP$. Dễ thấy 2 ma trận của cùng 1 phép biến đổi tuyến tính trên \mathbb{R}^n đối với các cơ sở khác nhau là đồng dạng.

BÀI TẬP

1. Cho $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là một axtt xác định bởi $f(2,3)=(0,7,8)$; $f(1,1)=(1,4,4)$. Tìm $f(x,y)$.
2. Axtt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(1,2,0)=(5,1,1)$; $f(1,1,0)=(3,2,1)$; $f(1,1,1)=(4,4,6)$.
 - a) Tìm $f(2,3,4)$
 - b) Tìm $f(x,y,z)$.
3. Trong không gian \mathbb{R}^3 , cho ánh xạ tuyến tính f là phép lấy đối xứng điểm trong không gian qua mặt phẳng $x+y-2z=0$. Tìm biểu thức $f(x,y,z)$.
4. Axtt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y,z)=(2x+5y-3z, x-4y+7z)$.
 - a) Tìm ma trận chính tắc của f .
 - b) Tìm ma trận của f đối với các cơ sở $E=\{x_1=(1,2,1); x_2=(1,1,0); x_3=(0,3,1)\}$ trong \mathbb{R}^3 và $B=\{y_1=(1,3); y_2=(2,5)\}$ trong \mathbb{R}^2 . (theo nhiều cách)
 - c) Giả sử vectơ $x \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ đối với cơ sở E là $(1,2,3)$. Tìm vectơ $f(x)$ và tọa độ của $f(x)$ đối với cơ sở B (làm theo nhiều cách).
 - d) Tìm cơ sở và chiều của $\text{Ker}f$; $\text{Im}f$.
5. (ĐCK) Cho axtt $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
 - a) Tìm $f(x,y,z,t)$.
 - b) Xác định nhân và ảnh của axtt f (xác định cơ sở và chiều).
6. Cho axtt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x,y,z)=(x-y+z, x+z, x+y+\alpha.z)$.
 - a) Tìm giá trị của α để f không là đẳng cấu.
 - b) Với điều kiện của câu a), tìm cơ sở và chiều của $\text{Im}f$, $\text{Ker}f$.
 - c) Biết $A=\{(x,y,z): x-2y+z=0\}$. Tìm cơ sở và chiều của $f(A)$.
7. Biết rằng axtt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở $E=\{(2,1);(1,3)\}$.
 - a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^2 .
 - b) Tìm $f(4,5)$ bằng nhiều cách; Tìm $f(x,y)$.
 - c) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B=\{(1,1);(1,2)\}$
8. Giả sử phép biến đổi tuyến tính f trên \mathbb{R}^3 có ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở $E=\{(0,1,2);(4,1,0);(1,0,2)\}$.
 - a) Tìm biểu thức $f(x,y,z)$.
 - b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B=\{(1,2,3);(3,4,2);(0,1,-1)\}$.
 - c) Tìm cơ sở và chiều của $\text{Im}f$; $\text{Ker}f$ (làm bằng nhiều cách).
9. Hãy xác định một ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sao cho $\text{Ker}f = \langle (1,2,3) \rangle$ và $\text{Im}f = \langle (1,2,1,0); (2,3,1,1) \rangle$. Ánh xạ tuyến tính f thỏa yêu cầu đề bài có xác định duy nhất hay không, vì sao?