Chương 1: Giới hạn dãy số

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in R : \forall n > N \to |x_n - a| < \varepsilon$$

Tức là: phần lớn các phần tử của dãy “tụ tập” xung quanh a thì ta nói dãy HỘI TỤ về a

2. Tính chất cơ bản cần nhớ:

Dãy hội tụ thì bị chặn:

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \exists A, B : A \le u_n \le B, \forall n$$

Dãy có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \,\&\, \lim_{n\to\infty} u_n = b \Rightarrow a = b$$

Tóm tắt lý thuyết

3. Dãy VCB : $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \{\alpha_n\}$: gọi là dãy VCB.

$$(u_n \to a) \Leftrightarrow (u_n = a + \alpha_n, \alpha_n : VCB)$$

$$\alpha_n : \text{VCB} \,\&\, \beta_n : VCB \Rightarrow \alpha_n + \beta_n : VCB$$

$$\alpha_n : VCB \,\&\, |u_n| \le M \, (\forall n) \Rightarrow \alpha_n . u_n : VCB$$

4. Dãy VCL : $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = +\infty \Rightarrow \{A_n\}$: gọi là dãy VCL.

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

5. Định lý kẹp:

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

a

6. Định lý HT bị chặn :

Dãy tăng $(u_n \leq u_{n+1}, \forall n)$ và bị chặn trên $(\exists M : u_n \leq M, \forall n)$

hoặc giảm $(u_n \geq u_{n+1}, \forall n)$ và bị chặn dưới $(\exists m : u_n \geq m, \forall n)$

thì hội tụ

Tóm tắt lý thuyết

7. Dãy con: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n_k\to\infty} u_{n_k} = a, \forall \{u_{n_k}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \{u_{n_k}\}: \lim\limits_{n_k\to\infty} u_{n_k} = a_1 \\ \exists \{u_{n_k}\}: \lim\limits_{n_l\to\infty} u_{n_l} = a_2 \neq a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} u_n$$

8. Số e:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718..$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

9. Một số giới hạn cơ bản:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0, \alpha>0$$

$$5.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p n}{n^\alpha}=0, \forall p, \forall\alpha>0$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}=0$$

$$6.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1, \forall p$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{e^n}=0, \forall p$$

$$7.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \forall a>0$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^\alpha n}=0, \alpha>0$$

$$8.\ \lim_{n\to\infty}q^n=0, |q|<1$$

$$9.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha, \forall a$$

II. Các Ví dụ

VD1: Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt[3]{n^4+n}}$

VD2: Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3.3^n+5^n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n 3^{n-1}}{2^n-(-1)^{n+1}3^{n+1}}$

II. Các Ví dụ

VD3: Tính các giới hạn sau

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1} \qquad 3.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)(n+1)}$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^2} \qquad 4.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{n}\left(\frac{2n+2}{n+4}\right)^{1/3}$$

VD4: Tính các giới hạn sau

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}.\sin n}{n+1} \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n}{n^3+n}\right)$$

II. Các Ví dụ

VD3: Tính các giới hạn sau

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1} \qquad 3.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)(n+1)}$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^2} \qquad 4.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{n}\left(\frac{2n+2}{n+4}\right)^{1/3}$$

VD4: Tính các giới hạn sau

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}.\sin n}{n+1} \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n}{n^3+n}\right)$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với:

$$1.\ u_n = \frac{3^{n+1} + 5^n}{3^n - 5^{n+1}}$$

$$2.\ u_n = \frac{2^{-2n} + 3^{n+2}}{2^{2n} - 3^{2-n}}$$

$$3.\ u_n = \sqrt[n]{n^3.3^n + 7^n\sqrt{n^3+1}}$$

$$4.\ u_n = \frac{n+1}{n^3 - n + 1} - \frac{1}{n^2+1}$$

$$5.\ u_n = \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} - (-1)^n}$$

$$6.\ u_n = \frac{\ln\left(n^2 + n.\sin n^2 + 1\right)}{\sin n^2 + \ln(n+1)}$$

$$7.\ u_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)}$$

$$8.\ u_n = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n^5+1} + 5^n}{n^2 + 2^n}}$$

$$9.\ u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^3$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với:

$$10.\ u_n = \frac{\ln\left(n^{20} + 3n^8 + 1\right)}{-5n^{20} + 13n + 4}$$

$$11.\ u_n = \frac{\sqrt{n^2 + \ln n} - \sqrt[3]{3n^3 + 1}}{n^{2+\alpha}}$$

$$12.\ u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$13.\ u_n = n\left(\sqrt[3]{n^\alpha + 1} - n\right)$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với:

$$14.\, u_n = \frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$15.\, u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$16.\, u_n = \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

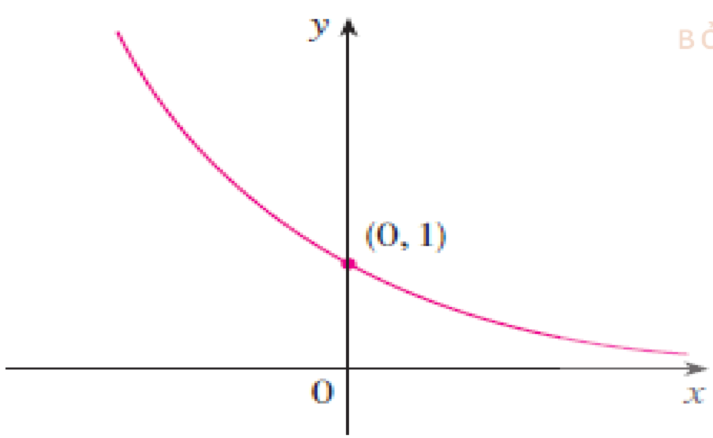
I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm số mũ: $y = a^x$ *Điều kiện :* $a>0,\ a\neq 1$

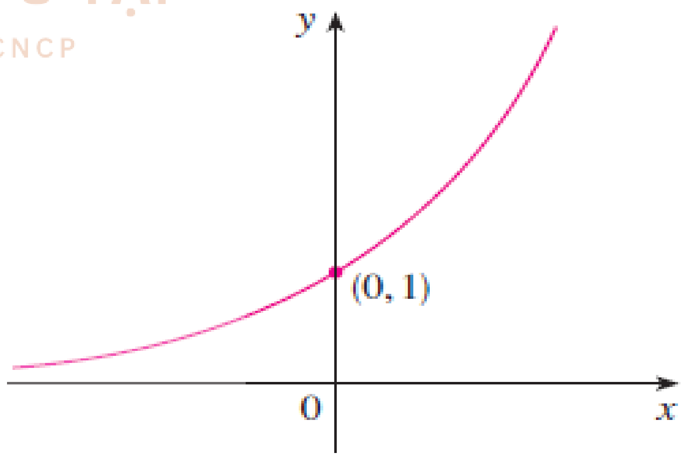
MXĐ: $(-\infty,+\infty)$,   MGT: $(0,+\infty)$

Khi $0<a<1$: Hàm nghịch biến   Khi $a>1$: Hàm đồng biến

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$



(a) $y = a^x,\ 0 < a < 1$



(c) $y = a^x,\ a > 1$

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm logarit: $y=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$

$a>1$: Hàm đồng biến

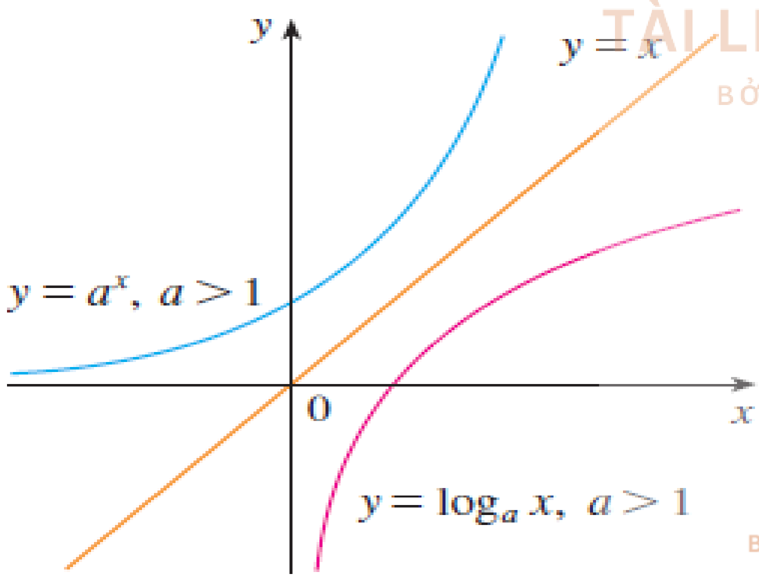
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$0<a<1$: Hàm nghịch biến

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$



$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_a(a^x) = x, \forall x; \quad a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

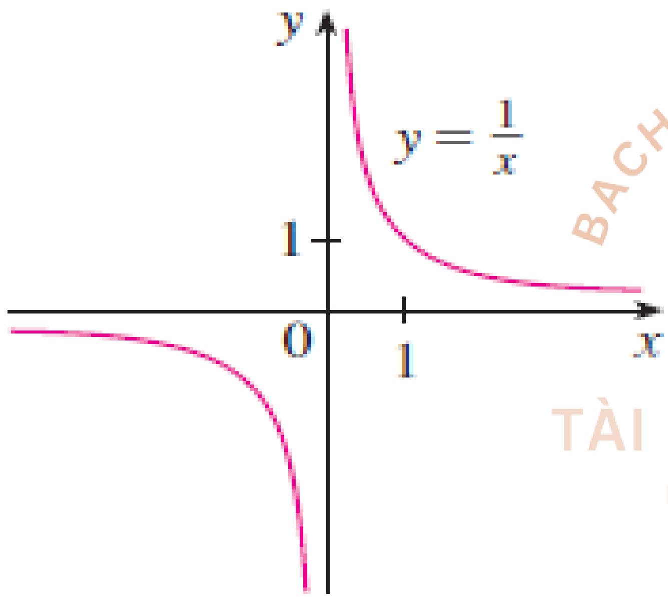
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

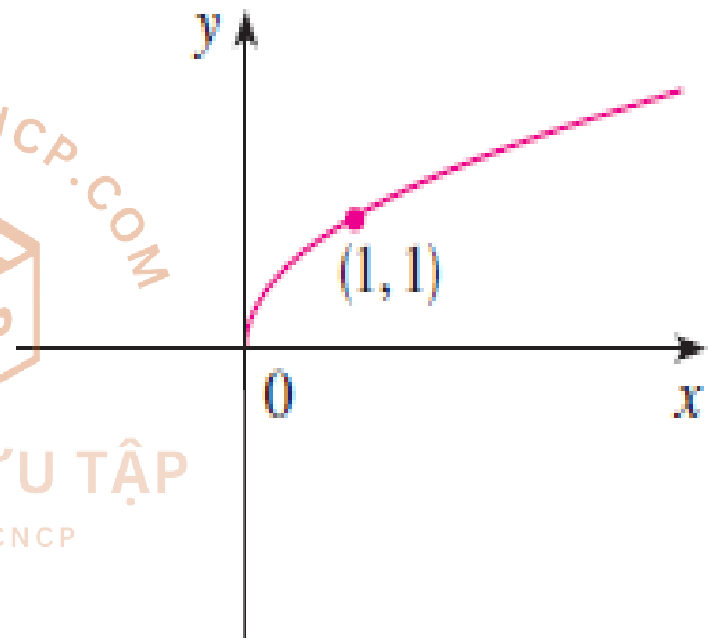
$$\log_a(x^r) = r\log_a x, \forall r \in R$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm lũy thừa : $y=x^a$ MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a





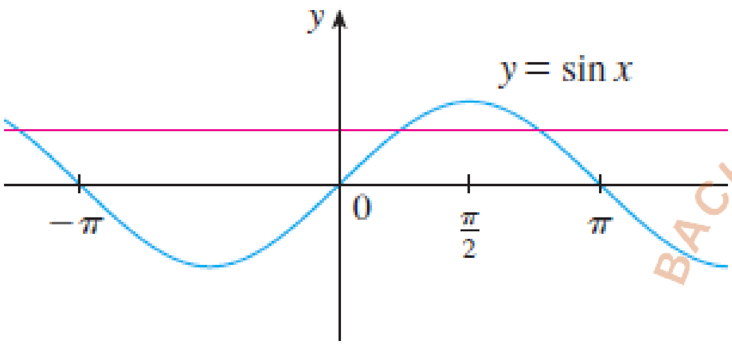
a = -1: MXĐ: R*=R\{0}, MGT: R*. Ta còn gọi đây là đường Hyperbol

a=1/2: MXĐ [0,+∞), MGT [0,+∞)

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

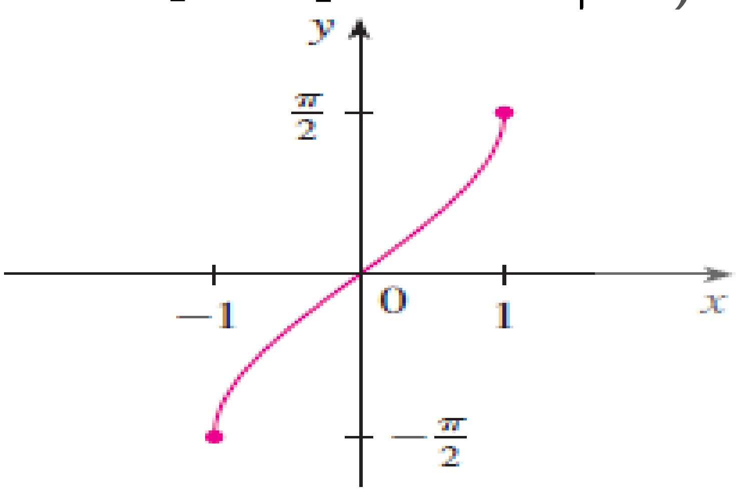
I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm lượng giác y = sinx



Hàm ngược y=arcsinx

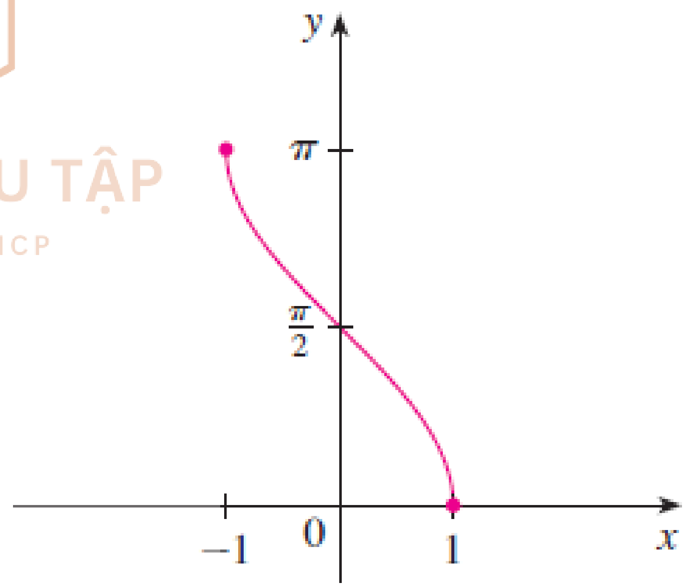
MXĐ: [-1.1], MGT: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



Hàm y = cosx

Hàm ngược: y=arccosx,

MXĐ: [-1,1], MGT: [0,π]

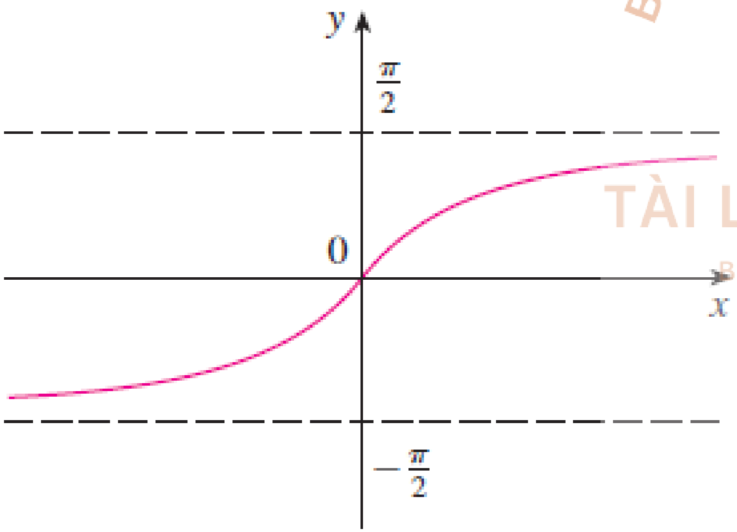


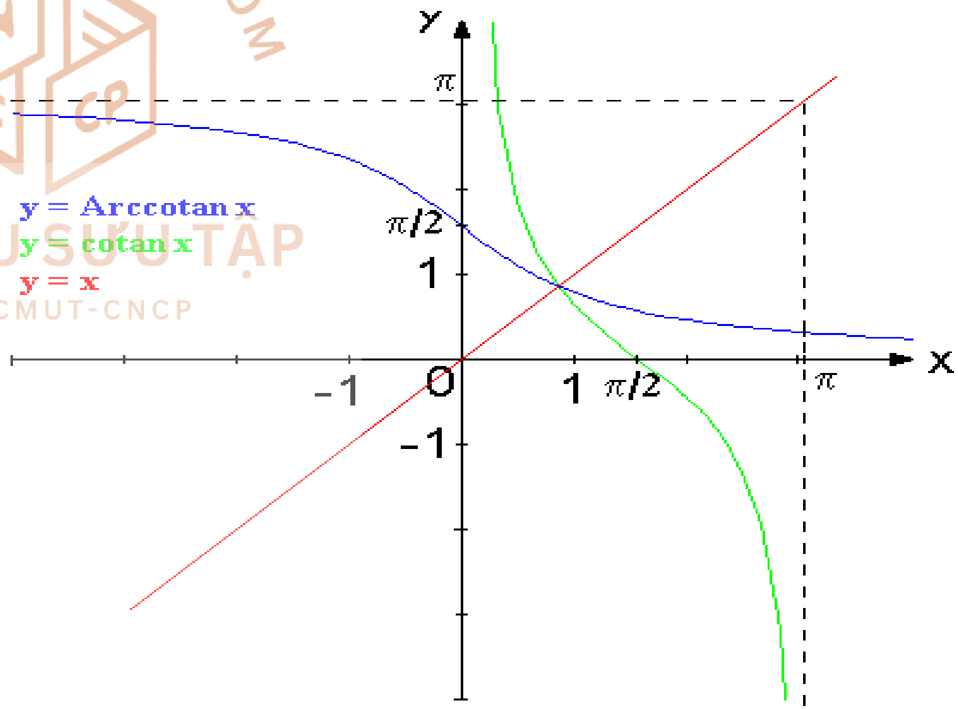
I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm y = tanx | *Hàm y = cotx*

Hàm ngược y=arctanx, | Hàm ngược y=arccotx

MXĐ: R, MGT: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | MXĐ: R, MGT: (0,π)



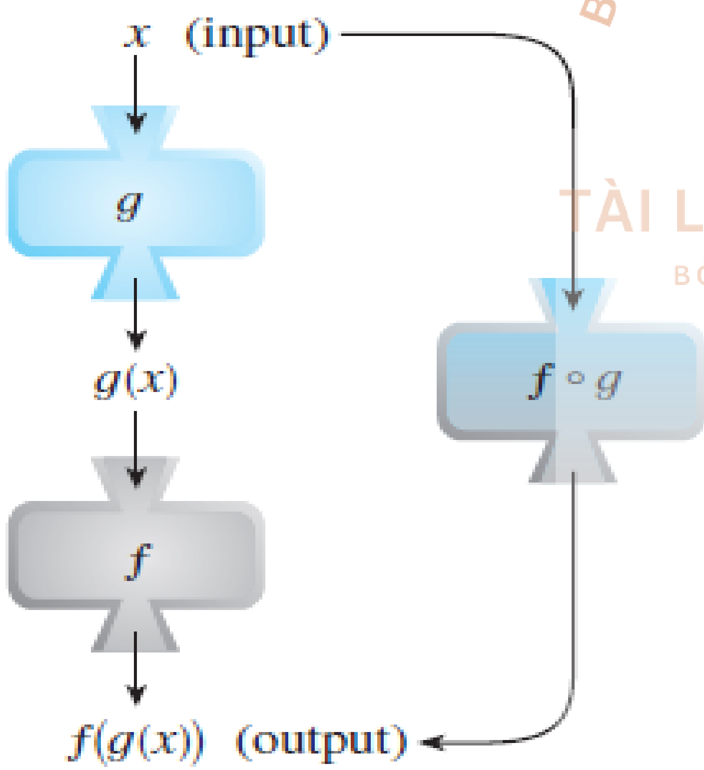


II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Hàm hợp : Cho 2 hàm $g: X \to Y, f: Y \to Z$

Ta gọi hàm hợp của 2 hàm trên là $h = f \circ g$

Được xác định như sau : $h: X \to Z, h(x) = f(g(x))$

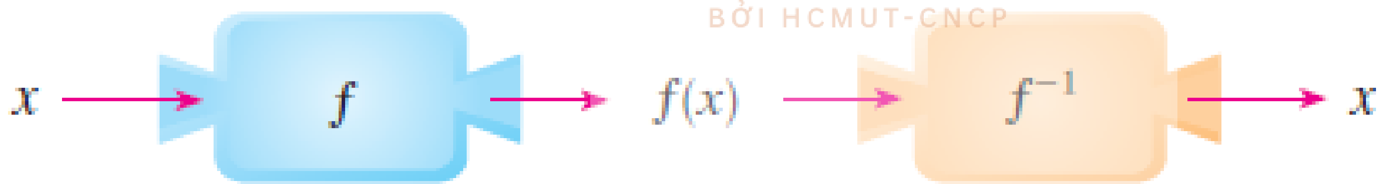


Lưu ý : Nói chung 2 hàm $f \circ g, g \circ f$ không bằng nhau

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Hàm ngược : Cho hàm 1-1 $f: X \to Y, f(x) = y$
hàm ngược của hàm, được kí hiệu là $y = f^{-1}(x)$,
$f^{-1}: Y \to X$ sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Như vậy : $f(f^{-1}(y))=y$ và $f^{-1}(f(x))=x$



Ta có: MXĐ của hàm f^{-1} là MGT của hàm f và MGT của hàm f^{-1} là MXĐ của hàm f

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Định nghĩa

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Công thức liên hệ

1/ $ch^2x - sh^2x = 1$

2/ sh(2x)=2shx.chx,
$ch(2x) = ch^2x + sh^2x$

3/ ch(x+y) = chx.chy + shx.shy

4/ ch(x-y) = chx.chy - shx.shy

5/ sh(x+y) = shx.chy + shy.chx

6/ sh(x-y) = shx.chy - shy.chx

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Ví dụ: Tìm MXĐ của các hàm sau

$$1.\ y = \arcsin\left(\sqrt{x^2+1} - 2\right) \qquad 2.\ y = \ln\left(1 + \frac{2-x}{x^2}\right)$$

Ví dụ: Cho 2 hàm sau $f(x) = x^2 + x + 1,\ g(x) = \arctan x$

Tìm $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

Ví dụ: Tìm hàm ngược của các hàm sau

$$1.\ y = x^3 + 1 \qquad 2.\ y = \sinh x$$

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ ε – δ) :

Cho hàm f(x) và x_0 là 1 điểm tụ của MXĐ D_f của hàm

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

Chú ý: Hàm f(x) có thể không xác định tại x_0

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ dãy):

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm f(x)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall (x_n)\in D_f, x_n\neq x_0, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_o$$

$$\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy

$(x_n),(x_n^{'})\to x_0$ với tương ứng $f(x_n), f(x_n^{'})$

có 2 giới hạn khác nhau

III. Giới hạn và liên tục:

Tính chất của giới hạn hàm

Cho : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f) = \alpha a, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f + g) = a + b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \cdot g) = a \cdot b$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0$

5) $\left(\forall x \in V_\varepsilon(x_0), f(x) \le g(x)\right) \Rightarrow a \le b$

6) $\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} h = a \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ *(Định lý kẹp)*

III. Giới hạn và liên tục:

Số e : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Giới hạn dạng $u(x)^{v(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}$

Giới hạn cơ bản thường gặp khi $x\to\infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha>0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha>0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty, \quad a>1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ không tồn tại

III. Giới hạn và liên tục:

Gh cơ bản thường gặp khi x→0

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}=e^\alpha$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

III. Giới hạn và liên tục:

Các dạng vô định: 1) $\frac{0}{0}$ 2) $\frac{\infty}{\infty}$ 3) $0\cdot\infty$ 4) 1^{∞}

5) $\infty-\infty$ 6) 0^{0} 7) ∞^{0}

Việc giải bài toán tính giới hạn hàm, chủ yếu là việc khử các dạng vô định

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các giới hạn cơ bản

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$$

$$L_2=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$$

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{\sin x}}{\tan 3x}$$

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là *giới hạn trái* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

Số a gọi là *giới hạn phải* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

III. Giới hạn và liên tục:

Định lý:

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý:

1. *Ta có thể dùng định lý trên để chứng minh không tồn tại giới hạn hàm (Ngoài cách dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy).*
2. *Giới hạn một phía thường được dùng trong các trường hợp hàm chứa căn bậc chẵn, chứa trị tuyệt đối, hoặc hàm ghép.*

III. Giới hạn và liên tục:

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-1}}$

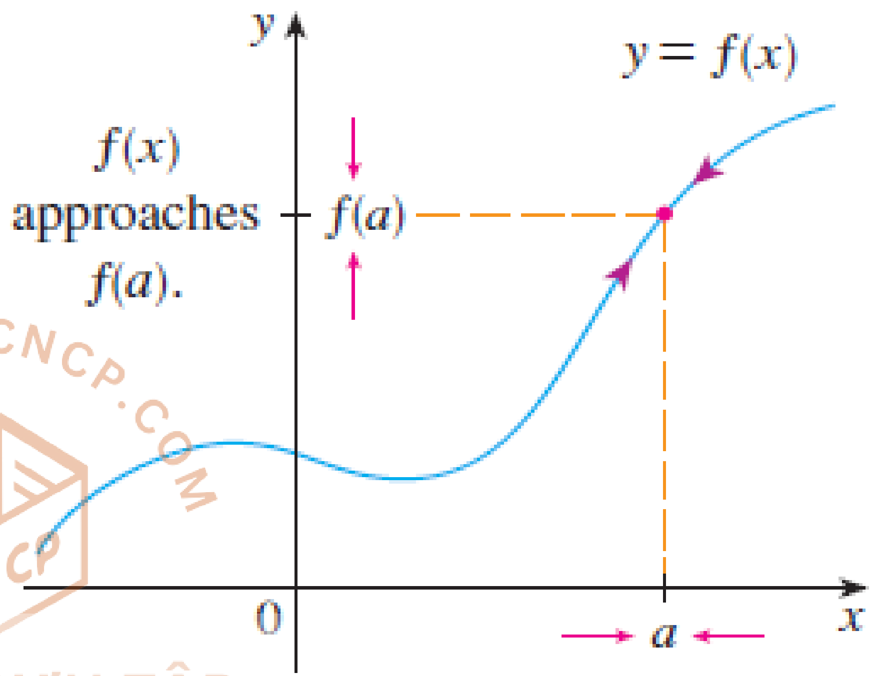
Ví dụ : Tìm a để hàm f(x) có giới hạn khi x→0

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, x > 0 \\ 5x + a, x \le 0 \end{cases}$$

III. Giới hạn và liên tục:

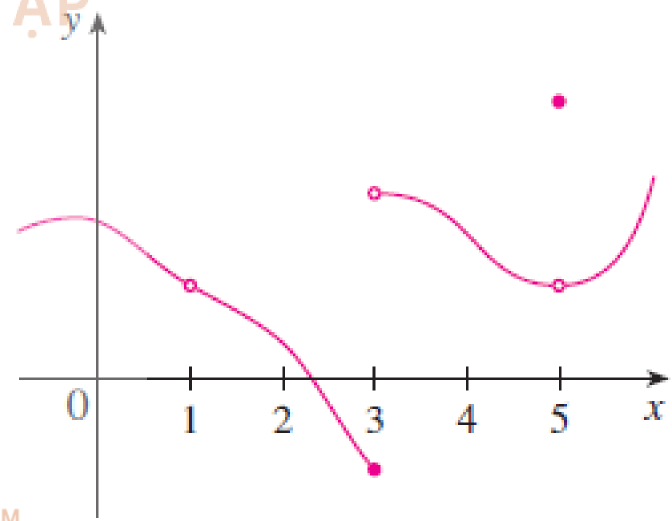
Hàm liên tục: Hàm y=f(x) được gọi là liên tục tại điểm x=a thuộc MXĐ của hàm nếu

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$



Hàm gián đoạn tại x=a nếu nó không liên tục tại đó

Đồ thị của hàm y=f(x) gián đoạn tại x=3



Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Các hàm sơ cấp cơ bản là 5 lớp hàm sau

1. Hàm số mũ : $y=a^x$
2. Hàm lũy thừa: $y=x^a$
3. Hàm loga: $y=\log_a x$
4. Các hàm lượng giác: 4 hàm
5. Các hàm lượng giác ngược: 4 hàm

Hàm sơ cấp là các hàm tạo từ các hàm sơ cấp cơ bản với 4 phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) & phép hợp hàm

Định lý (về sự liên tục của các hàm sơ cấp):

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

III. Giới hạn và liên tục:

Liên tục 1 phía: Thay giới hạn trong định nghĩa hàm liên tục bởi 2 giới hạn 1 phía, tương ứng ta có khái niệm liên tục trái, liên tục phải

Định lý: Hàm liên tục tại x=a khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại x=a

Tính chất hàm liên tục: Tổng, tích, thương và hợp các hàm liên tục lại là các hàm liên tục

Ví dụ: Tìm a để hàm $f(x) = \begin{cases} x+1, x \le 1 \\ 3-ax^2, x > 1 \end{cases}$ liên tục với mọi x

III. Giới hạn và VCB - VCL:

VCB: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) *khi $x \to x_0$* nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Tính chất của các VCB

1) Tổng hữu hạn của các VCB là một VCB.

2) Tích của hai VCB là một VCB.

3) Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.

4) Thương của hai VCB có thể không là một VCB.

III. Giới hạn và VCB - VCL : *So sánh các VCB:*

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to x_0$

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$

1) $k = 0$: $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$, kí hiệu là $\alpha(x) = 0(\beta(x))$

2) $0 < k < \infty$: $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp.

3) $k = 1$, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là : $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) Nếu $\alpha(x)$ cùng bậc với $(\beta(x))^m$ thì ta nói bậc của $\alpha(x)$ là m so với $\beta(x)$

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: So sánh các VCB sau

1. Khi x→0 : $\alpha(x) = \sin^2 x + x^2, \beta(x) = \tan 2x$

2. Khi x→1 : $\alpha(x) = \ln x, \beta(x) = e^{1-x} - 1$

Các VCB tương đương thường gặp khi x→0

1) $\sin x \sim x$

2) $e^x - 1 \sim x$

3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

4) $\ln(1+x) \sim x$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

6) $\arcsin x \sim x$

7) $\arctan x \sim x$

8) $\tan x \sim x$

9) $\sinh x \sim x$

10) $\cosh x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Qui tắc thay VCB tương đương với tích, thương

Cho các VCB tương đương $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$

Ta có: $f_1(x).g_1(x) \sim f_2(x).g_2(x)$ $\quad \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$

Qui tắc thay VCB tương đương với tổng nhiều VCB

Giả sử a≠0, b ≠0, α, β là các hằng số thực sao cho

khi *$x \to 0$ thì $f_1(x)$, $f_2(x)$ là VCB:* $f_1(x) \sim ax^{\alpha}, f_2(x) \sim bx^{\beta}$

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \left[\begin{array}{l} 1.ax^{\alpha}, \text{khi } \alpha < \beta (\alpha \neq \beta) \\ 2.(a+b)x^{\alpha}, \text{khi } \alpha = \beta \ \& \ a+b \neq 0 \\ 3.\text{khong thay duoc,khi } \alpha = \beta \ \&\text{a+b=0} \end{array}\right.$$

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: So sánh các VCB sau khi x→0:

$$1.\alpha(x) = x, \beta(x) = x\sin {}^{1}\!/_{x}$$ Dùng đ/n

$$2.\alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x, \beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2$$ Tính bậc

Ví dụ: Tìm a, b để α(x) tương đương với ax^b khi x→0

$$1.\alpha(x) = \sin(\sqrt{1-x} - 1) \qquad 2.\alpha(x) = \tan x^2 + 2x$$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{3x^2 + \ln(1+x)}$

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: Tính giới hạn $L_2 = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin 2(x-1)}{e^{x-1} - \cos\sqrt{x-1}}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_4 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_5 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: Tính giới hạn $L_6 = \lim\limits_{x \to \pi/4} \cot 2x \cdot \cot(\pi/4 - x)$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_7 = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \tan^2 x\right)^{1/\sin^2(2x)}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_8 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{3x}$

$$L_8 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{3x}$$

Vì: $\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \end{cases}$

Khi thay VCB tương đương, tử số thành 0 → KHÔNG ĐƯỢC THAY

III. Giới hạn và VCB - VCL :

VCL: Hàm số *A*(*x*) được gọi là vô cùng lớn (VCL) *khi x→x₀* nếu $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty.$

So sánh các VCL: A(*x*), B(*x*) là hai vô cùng lớn khi $x \to x_0$

Giả sử: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = k.$

1) $k = \infty$: *A*(*x*) gọi là VCL bậc cao hơn *B*(*x*),

2) $0 \neq k < \infty$: A(*x*) và B(*x*) là hai VCL cùng cấp.

3) $k = 1$: A(*x*) và *B*(*x*) là hai VCL tương đương

4) Nếu A(x) cùng bậc với $(B(x))^m$ thì bậc của A(x) là *m* so với B(x)

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Qui tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{10} - 2x^5 + 2} - 2x^3 + x^4}{\sqrt{x^5 + 2x^3 - x + x^2} + 3x^3 - 2x^4}$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a^x-a}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log_2 x-1}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{4x-\pi}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{1/x^2}-\cos\left(1/x\right)}{\arctan 1/x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\log_5(1+5x)}{\arcsin^2 x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x+\sin^2 x\right)^{1/\sin^2 x}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

III. Giới hạn – Bài tập:

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+5x)-1}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\dots+x^n-n}{x-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

20. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos x-\cos 3}{x-3}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} (a>0)$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

23. $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{a^x-a^m}{x-m}$

24. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$

III. Giới hạn – Bài tập:

25. $\lim\limits_{x \to m} \dfrac{\ln x - \ln m}{x - m} \; (m > 0)$

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2\right)^{1/\tan^2 x}$

28. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

29. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$

30. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$

31. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\sin x\right)^{\tan x}$

32. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)^{x^2}$

III. Giới hạn – Bài tập:

Tính bậc của các VCB sau so với x, khi x→0

$$\alpha_1(x) = \sin 2x - 2\sin x$$

$$\alpha_2(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

$$\alpha_3(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}$$

$$\alpha_4(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$$

$$\alpha_5(x) = \arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right)$$

$$\alpha_6(x) = \tan x - \sin x$$

$$\alpha_7(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{x^4+8} - 2\right)$$

$$\alpha_8(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$$

$$\alpha_9(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$$

$$\alpha_{10}(x) = 1 - \cos^3 x$$

Tính bậc của các VCB sau so với (x-1), khi x→1

$$\beta_1(x) = e^x - e$$

$$\beta_2(x) = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$$

$$\beta_3(x) = \ln^2 x + \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$\beta_4(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

III. Giới hạn – Bài tập:

Tính giới hạn 1 phía

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \arctan \dfrac{1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4. $\lim\limits_{x \to \pm 0} (x-1) e^{1/x}$

Tìm a để hàm sau liên tục với mọi x:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\ln x)}{x-1}, & x < 1 \\ ax - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tìm f(0) để hàm f(x) liên tục tại x=0:

$$a.\ f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$b.\ f(x) = \frac{\tan(\sqrt[3]{1+2x} - 1)}{x}$$