

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

.....o0o.....



BÀI TẬP LỚN
MÔN: PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Giáo viên hướng dẫn: PGS.TSKH. Bùi Tá Long

BỒI HCMUT-CNCP

Lớp L02-- Nhóm 26-- HK213

Danh sách thành viên

Sinh viên thực hiện	Mã số sinh viên	Điểm số

Thành phố Hồ Chí Minh-2022



TÀI LIỆU SƯU TẬP

BỞI HCMUT-CNCP

Lời nói đầu

Thân chào Thầy cô và các bạn sinh viên!

Đây là quyển báo cáo Bài tập lớn do Nhóm 15 thực hiện.

Nội dung là giải hệ $Ax = b$ bằng phương pháp Gauss-Seidel dưới sự hướng dẫn của cô ThS. Hoàng Hải Hà.

BÀI BÁO CÁO GỒM CÁC PHẦN

ĐỀ TÀI.....	2
PHẦN 1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT	2
PHẦN 2. HIỆN THỰC.....	4
PHẦN 3. TÍNH NĂNG VÀ VÍ DỤ.....	8
TÀI LIỆU THAM KHẢO	12

Nhóm chúng em đã cố gắng trình bày nổi bật các ý chính, cụ thể các hàm và cung cấp TestCase để bạn đọc có thể dễ dàng hiểu rõ và đánh giá.

Thay mặt cả lớp, Chúng em gửi lời cảm ơn chân thành nhất cô ThS. Hoàng Hải Hà đã tận tình hướng dẫn và dạy bảo chúng em trong học kì 1 năm học 2018 này.

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

ĐỀ TÀI

ĐỀ TÀI 6: Giải hệ $Ax = b$ bằng phương pháp Gauss-Seidel

- Kiểm tra sự hội tụ của nghiệm
- Chọn vector $x^{(0)}$ tùy ý.
- Tính vector nghiệm $x^{(n)}$.
- Đánh giá sai số tiên nghiệm và hậu nghiệm theo cả hai chuẩn.
- Đánh giá tính ổn định của hệ.
- Tìm chỉ số n nhỏ nhất để nghiệm $x^{(n)}$ có sai số nhỏ hơn ε cho trước.

PHẦN 1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

- Trong giải tích số, phương pháp Gauss-Seidel hay còn gọi là phương pháp lặp Gauss-Seidel, phương pháp Liebmann hay phương pháp tự sửa sai là một phương pháp lặp được sử dụng để giải một hệ phương trình tuyến tính tương tự như phương pháp Jacobi. Nó được đặt tên theo hai nhà toán học người Đức Carl Friedrich Gauss và Philipp Ludwig von Seidel. Mặc dù phương pháp này có thể áp dụng cho bất kỳ ma trận nào không chứa phần tử 0 (không) trên các đường chéo, nhưng tính hội tụ chỉ xảy ra nếu ma trận hoặc là ma trận đường chéo trội, hoặc là ma trận đối xứng đồng thời xác định dương.

- Để giải hệ $Ax = b$ ta phân tích

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$D - L - U$$

Với điều kiện giả sử A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt tức $\det A \neq 0$ và $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Do $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ nên $\det D \neq 0$ như vậy tồn tại D^{-1} và cũng tồn tại $(D - L)^{-1}$

Khi đó ta có:

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow (D - L - U)x = b$$

$$\Leftrightarrow (D - L)x = Ux + b$$

$$\Leftrightarrow x = (D - L)^{-1} * Ux + (D - L)^{-1}b$$

Đặt

$$T_g = (D - L)^{-1} * U$$

$$c_g = (D - L)^{-1}b$$

Khi đó thành lập công thức có dạng

$$x^{(m)} = T_g x^{(m-1)} + c_g$$

- Kiểm tra tính hội tụ:

Nếu $\|T_g\| < 1$ thì nghiệm của hệ hội tụ về \bar{x}

- Công thức đánh giá sai số:
 - Đánh giá sai số tiên nghiệm

$$\|x^{(m)} - \bar{x}\| \leq \frac{\|T\|^m}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

- Đánh giá sai số hậu nghiệm

$$\|x^{(m)} - \bar{x}\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|$$

PHẦN 2. HIỆN THỰC

- Công cụ sử dụng: Matlab 2016a
- Một số hàm được dùng:

Tên hàm	Chức năng	Ví dụ
norm	Tính chuẩn vector và chuẩn ma trận	norm(A,1), norm(A,'inf')
inv	Tính nghịch đảo của vector và ma trận	int(A)
zeros	Tạo ma trận 0	A = zeros(5,5)
Lệnh for	Vòng lặp	for i = 1:N ... end
Lệnh if	Lệnh điều kiện	If a == 0 end
clear;clc	Xóa dữ liệu, xóa màn hình	

- Source Code

```
% -----
% De tai : Giai he Ax = b bang phuong phap lap GaussSeidel
% -----*****-----
% INPUT:
% N la cap cua ma tran he so
% Cac ma tran A,b la ma tran he so cua he Ax = b
% X0 là vectơ lap ban dau (nhap 0 de chon vecto 0, nhap 1 de chon random)
% eps là sai so (gia tri mac dinh là 1.0E-6)
% maxlap là so lan lap toi da cho phép (gia tri mac dinh la 100)
% OUTPUT:
% Xn la vecto nghiệm
% TienNgChuan1 la sai so tien nghiem chuan 1
% TienNgChuanVoCung la sai so tien nghiem chuan vo cung
% HauNgChuan1 la sai so hau nghiem chuan 1
% HauNgChuanVoCung la sai so hau nghiem chuan vo cung
% n la so lan lap thoa man yeu cau
% TEST:
% Test 1
% GaussSeidel(4,[10,-1,2,0; -1,11,-1,3;2,-1,10,-1; 0,3,-1,8],[6;25;-
11;15],0)
% N = 4
% A = [10,-1,2,0; -1,11,-1,3;2,-1,10,-1; 0,3,-1,8]
% b = [6;25;-11;15]
% X0 = 0 (auto X0 = [0;0;0;0])
% so lan lap: 5
% Ket qua: Xn =
%          1.0001
%          2.0000
%         -1.0000
%          1.0000
% Test 2
% GaussSeidel(2,[9,-7;-3,7],[2;5],[0.7;0.4])
% N = 2
% A = [9,-7;-3,7]
% b = [2;5]
% X0 = [0.7;0.4]
```

```
% esp = 0.06 ( chuan 1)
% Ket qua: n = 5
% Test 3
% GaussSeidel(2, [11,5;-3,11], [2;4], [0.9;0.2])
% N = 2
% A = [11,5;-3,11]
% b = [2;4]
% X0 = [0.9;0.2]
% so lan n: 3
% Ket qua: Xn =
%           0.0159
%           0.3680
% Test 4
% GaussSeidel(2, [15,3;6,13], [6;2], [0.2;0.2])
% N = 2
% A = [15,3;6,13]
% b = [6;2]
% X0 = [0.2;0.2]
% esp = 0.007 ( chuan 1)
% Ket qua: n = 3
% -----
function GaussSeidel(N,A,b,X0)
    clc;
    disp('-----');
    disp('Giai he Ax = b bang phuong phap lap GaussSeidel');
    disp('-----*****-----');

    if nargin == 0
        N = input('Nhap N: '); if N == 0 return; end;
        A = input('Nhap ma tran A: '); if A == 0 return; end;
        b = input('Nhap ma tran b: '); if b == 0 return; end;
        X0 = input('Nhap X0: ');
    end;
    if nargin == 1
        A = input('Nhap ma tran A: '); if A == 0 return; end;
        b = input('Nhap ma tran b: '); if b == 0 return; end;
        X0 = input('Nhap X0: ');
    end;
    if nargin == 2
        b = input('Nhap ma tran b: '); if b == 0 return; end;
        X0 = input('Nhap X0: ');
    end;
    if nargin == 3
        X0 = input('Nhap X0: ');
    end;
    maxlap = 100;
    eps = 1.0E-6;
    % xu li X0
    if X0 == 0
        X0 = zeros(N,1);
    end;
    if X0 == 1
        X0 = rand(N,1);
    end;

    code = 3;
    while code ~= 0
        clc;
        disp('-----');
        disp('Giai he Ax = b bang phuong phap lap GaussSeidel');
        disp('-----*****-----');
```

```

N
A
b
X0
% Xet ma tran co phai ma tran duong cheo nghiem ngat hay khong?
if det(A) == 0, disp('Ma tran da nhap khong phai ma tran duong cheo nghiem
ngat. '); return; end;
for i=1:N
    if A(i,i) == 0, disp('Ma tran da nhap khong phai ma tran duong cheo
nghiem ngat. ');return; end;
end;

D = zeros(N,N);
for i=1:N D(i,i)= A(i,i); end;

L = zeros(N,N);
for i=2:N
    for j=1:i-1
        L(i,j) = -A(i,j);
    end;
end;

U = zeros(N,N);
for i=N-1:-1:1
    for j=N:-1:i+1
        U(i,j) = - A(i,j);
    end;
end;

Tg = inv(D-L)*U;
cg = inv(D-L)*b;

% Xet tinh hoi tu
if norm(Tg,'inf') < 1
    disp('Nghiem cua he hoi tu');
else
    disp('Nghiem cua he khong hoi tu');
end;
k1 = norm(A,1)*norm(inv(A),1);
fprintf('So dieu kien: %f\n',k1);
if k1<15 disp('He on dinh'); else disp('He khong on dinh'); end;
code = input('Ban muon chuong trinh thuc hien dieu gi? \n    1: Tim Xn,
danh gia sai so \n    2: Tim chi so n nho nhat de nghiem Xn co sai so nho
hon eps cho truoct\n    0: Thoat\nNhap: ');
if code == 1
    maxlap = input('Nhap so lan lap: ');
    while maxlap < 1
        maxlap = input('So lan lap phai lon hon 0, moi ban nhap lai: ');
    end;
end;

n = 0;
X1 = Tg*X0+cg;
codec = 0;
if code == 2
    eps = input('Moi ban nhap eps: ');
    codec = input('Ban muon su dung dieu kien gi??\n    1: Xn - Xn-1, chuan
1\n    2: Xn - Xn-1, chuan vo cuc\nNhap: ');
end;

```



```

Xn=X0;
for j = 1:maxlap
    Xn2 = Xn;
    Xn = Tg*Xn2 + cg;
    n = n + 1;

    %sai so tien nghieng chuan 1
    TienNgChuan1 = abs((norm(Tg,1)^n)*norm(X1-X0,1)/(1-norm(Tg,1)));
    %sai so tien nghieng chuan vo cung
    TienNgChuanVoCung = abs((norm(Tg,'inf')^n)*norm(X1-X0,'inf')/(1-
norm(Tg,'inf')));
    %sai so hau nghieng chuan 1
    HauNgChuan1 = abs(norm(Tg,1)*norm(Xn-Xn2,1)/(1-norm(Tg,1)));
    %sai so hau nghieng chuan vo cung
    HauNgChuanVoCung = abs(norm(Tg,'inf')*norm(Xn-Xn2,'inf')/(1-
norm(Tg,'inf')));

    if codec == 0
        saiso = HauNgChuan1;
    end;
    if codec == 1
        saiso = norm(Xn-Xn2,1);
    end;
    if codec == 2
        saiso = norm(Xn-Xn2,'inf');
    end;
    if saiso < eps
        break;
    end;
end;
% Output
if code == 1
    Xn
    codes = input('Ban co muon xuất sai so khong? \n      1: Co\n      2:
Khong\nNhập: ');
    if codes == 1
        TienNgChuan1
        TienNgChuanVoCung
        HauNgChuan1
        HauNgChuanVoCung
    end;

    code = input('Ban muon tiếp tục?\n      So bat ky: Tiếp tục\n      0:
Thoát\nNhập: ');
end;
if code == 2
    n
    code = input('Ban muon tiếp tục?\n      So bat ky: Tiếp tục\n      0:
Thoát\nNhập: ');
end;
end;
disp('*****CHUONG TRINH KET THUC*****');
return;

```

• **Test case**

STT	N	A	b	X0	Số lần lặp	Sai số	Yêu cầu	Kết quả
1	4	[10,-1,2,0; -1,11,-1,3;2,-1,10,-1; 0,3,-1,8]	[6;25;-11;15]	[0;0;0;0]	5		Tính $x^{(5)}$	1.0001 2.0000 -1.0000 1.0000
1	2	[9,-7;-3,7]	[2;5]	[0.7;0.4]		0.06	Tính chỉ số n nhỏ nhất để $\ x^{(n)} - x^{(n-1)}\ _1 < 0.06$	n = 5
3	2	[11,5;-3,11]	[2;4]	[0.9;0.2]	3		Tính $x^{(3)}$	0.0159 0.3680
4	2	[15,3;6,13]	[6;2]	[0.2;0.2]		0.007	Tính chỉ số n nhỏ nhất để $\ x^{(n)} - x^{(n-1)}\ _1 < 0.007$	n = 3

• **Một số đánh giá:**

- Tích cực:
- Code đã giải quyết hầu hết các vấn đề về phương pháp Gauss - Seidel
 - Giao diện trình bày dễ sử dụng
 - Độ chính xác cao
- Tiêu cực:
- Việc nhập liệu dễ sai sót
 - Code chưa thật sự tối ưu

PHẦN 3. TÍNH NĂNG VÀ VÍ DỤ

Các tính năng của chương trình:

- Kiểm tra sự hội tụ của nghiệm
- Chọn vector $x^{(0)}$ tùy ý.
- Tính vector nghiệm $x^{(n)}$.
- Đánh giá sai số tiên nghiệm và hậu nghiệm theo cả hai chuẩn.
- Đánh giá tính ổn định của hệ.
- Tìm chỉ số n nhỏ nhất để nghiệm $x^{(n)}$ có sai số nhỏ hơn ε cho trước.

Một số tính năng khác:

- Kiểm tra ma trận nhập vào có phải ma trận đường chéo nghiêm ngặt hay không
- Nếu nhập vào số lần lặp < 1 thì chương trình sẽ yêu cầu nhập lại
- Chương trình thiết kế có thể tự nhập hoặc nhập dưới dạng gọi hàm.
- Cho phép người dùng nhập nhanh vector X0 với: Nhập 0 để chọn vector 0 hoặc 1 để tạo vector ngẫu nhiên

Ví dụ

a. Ví dụ 1:

Trong Giáo trình Phương Pháp Tính – Lê Thái Thanh trang 59 có bài:
Giải hệ sau bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= 11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{cases}$$

Từ hệ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -11 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Để giải hệ này, ta nhập vào Matlab ở ô Command Window (Set Path tại thư mục chứa file GaussSeidel.m):

```
>>GaussSeidel(4,[10,-1,2,0;-1,11,-1,3;2,-1,10,-1;0,3,-1,8],[6;25;-11;15],0)
```

Hoặc chạy chương trình(f5) và nhập từng bước:

```
N = 4
A = [10,-1,2,0;-1,11,-1,3;2,-1,10,-1;0,3,-1,8]
b = [6;25;-11;15]
X0 = 0 (auto X0 = [0;0;0;0])
```

Số lần lặp: 5

Ta được kết quả:

```
Xn =
    1.0001
    2.0000
   -1.0000
    1.0000
```

Sau đây là màn hình khi chạy chương trình:

```
-----
Giai he Ax = b bang phuong phap lap GaussSeidel
-----
*****
-----
```

```
N =
```

```
4
```

```
A =
```

10	-1	2	0
-1	11	-1	3
2	-1	10	-1
0	3	-1	8

b =

6
25
-11
15

X0 =

0
0
0
0

Nghiệm của hệ hồi tự

Số điều kiện: 3.137255

Hệ ổn định

Bạn muốn chương trình thực hiện điều gì?

1: Tìm Xn, đánh giá sai số

2: Tìm chỉ số n nhỏ nhất để nghiệm Xn có sai số nhỏ hơn eps cho trước

0: Thoát

Nhập: 1

Nhập số lần lặp: 5

Xn =

1.0001
2.0000
-1.0000
1.0000

Bạn có muốn xuất sai số không?

1: Có

2: Không

Nhập: 1

TienNgChuan1 =

0.1756

TienNgChuanVoCung =

0.0202

HauNgChuan1 =

0.0012

HauNgChuanVoCung =

4.2279e-04

Ban muon tiep tục?

So bat kỳ: Tiep tục

0: Thoat

Nhap: 0

*****CHUONG TRINH KET THUC*****

>>

Kết quả:

Xn =

1.0001

2.0000

-1.0000

1.0000

b. Ví dụ 2

Trong đề thi giữa kì PPT của Trường Đại Học Bách Khoa năm 2017 có câu

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x_1 - 7x_2 = 2 \\ -3x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.7, 0.4]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_1 < 0.0600$.
- ☒ a) 5 ☐ b) 6 ☐ c) 7 ☐ d) 8 ☐ e) Các câu khác đều sai.

Với ví dụ này, ta xác định được:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Sai số: 0.06

Để giải hệ này, ta nhập vào Matlab ở ô Command Window (Set Path tại thư mục chứa file GaussSeidel.m):

```
>>GaussSeidel(2, [9,-7;-3,7], [2;5], [0.7;0.4])
```

Hoặc chạy chương trình (f5) và nhập từng bước:

```
N = 2
```

```
A = [9,-7;-3,7]
```

```
b = [2;5]
```

```
X0 = [0.7;0.4]
```

Khi hỏi sai số, ta nhập 0.06

Kết quả: n = 5

Đây là màn hình khi ta chạy chương trình

```
-----
Giai he Ax = b bang phuong phap lap GaussSeidel
-----*****-----
```

```
N =
```

```
2
```

A =

9 -7
-3 7

b =

2
5

X0 =

0.7000
0.4000

Nghiem cua he hoi tu

So dieu kien: 5.333333

He on dinh

Ban muon chuong trinh thuc hien dieu gi?

1: Tim Xn, danh gia sai so

2: Tim chi so n nho nhat de nghiem Xn co sai so nho hon eps cho truoc

0: Thoat

Nhap: 2

Moi ban nhap eps: 0.06

Ban muon su dung dieu kien gi??

1: Xn - Xn-1, chuan 1

2: Xn - Xn-1, chuan vo cuc

Nhap: 1

n =

5

Ban muon tiep tục?

So bat ky: Tiep tục

0: Thoat

Nhap: 0

*****CHUONG TRINH KET THUC*****

>>

Kết quả :

n=5

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Giáo trình Phương Pháp Tính – Lê Thái Thanh – Nhà xuất bản ĐHQG TP.HCM