NỘI DUNG MÔN GIẢI TÍCH 2

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

Ngày 18 tháng 1 năm 2020

References:

GIÁO TRÌNH CHÍNH
Giáo trình GIẢI TÍCH II. Nguyễn Đình Huy (chủ biên). NXB ĐHQG 2016

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Active calculus, 2018 edition updated, Matthew Boelkins, David Austin, Steven Schlicker.
[2] Active calculus multivariable, 2018 edition, Steven Schlicker, Matthew Boelkins, David Austin.
[3] Applied calculus, 2009, Frank C. Wilson, Scott Adamson.
[4] Calculus, 2012, 10th edition, Anton, Bivens, David.
[5] Applied calculus, 2007, 4th edition, Stefan Waner, Steven R. Costenoble.
[6] Calculus early transcendentals, sixth edition, James Stewart, Thomson, 2003.

CHƯƠNG 1: HÀM NHIỀU BIẾN

1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến .
1.2 Đạo hàm riêng, vi phân hàm nhiều biến.
1.3 Đạo hàm theo hướng, vector gradient, tiếp diện, pháp tuyến.
1.4 Đạo hàm riêng, vi phân hàm hợp.
1.5 Hàm ẩn.
1.6 Công thức Taylor.
* Giới thiệu mặt bậc hai.
1.7 Cực trị tự do.
1.8 Cực trị có điều kiện. Giá trị lớn nhất, bé nhất trên miền dóng và bị chặn.

Nội dung tuần thứ 1

1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến .
1.2 Đạo hàm riêng, vi phân hàm nhiều biến.
1.3 Đạo hàm theo hướng, vector gradient, tiếp diện, pháp tuyến.

Bài toán thực tế

Định nghĩa và cho ví dụ thực tế về hàm nhiều biến. Trình bày các phương pháp biểu diễn hàm 2, 3 biến (mô tả bằng lời, bảng giá trị, công thức tường minh, đồ thị hoặc đường mức, mặt mức).

Bài toán thực tế

Bài 1: Ở các vùng có thời tiết mùa đông khắc nghiệt, *chỉ số lạnh do gió (wind chill index)* thường được sử dụng để mô tả độ khắc nghiệt của cái lạnh. Chỉ số W này là nhiệt độ chủ quan phụ thuộc vào nhiệt độ thực tế T và tốc độ gió v. Vì vậy W là một hàm theo T và v và ta có thể viết $W = f(T, v)$. Bảng 1 ghi các giá trị của W được thu thập bởi trung tâm khí tượng quốc gia của Mỹ và cơ quan khí tượng Canada.

Bài toán thực tế

Table 1 Wind-chill index as a function of air temperature and wind speed

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Dạng ví dụ hàm số được cho bảng số liệu. Dựa vào bảng số liệu ta tính giá trị hàm số tại các điểm.

Bài toán thực tế

Bài 2: Vào năm 1928, Charles Cobb và Paul Douglas đã xuất bản một nghiên cứu mà trong đó họ mô hình hóa sự tăng trưởng của nền kinh tế Mỹ trong giai đoạn 1899-1922. Họ đã xem xét một quan điểm kinh tế được đơn giản hóa mà trong đó sản lượng được quyết định bởi lượng nhân công và lượng vốn đầu tư. Mặc dù có nhiều yếu tố khác ảnh hưởng đến hiệu quả kinh tế nhưng mô hình của họ đã chứng tỏ là rất chính xác. Hàm số mà họ sử dụng để mô hình hóa sản lượng có dạng:

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \tag{1}$$

trong đó P là sản lượng (giá trị quy ra tiền của tất cả hàng hóa được sản xuất trong một năm), L là lượng nhân công (tổng số giờ làm việc của công nhân trong một năm) và K là lượng vốn đầu tư (trị giá của tất cả máy móc, thiết bị và nhà xưởng). Trong phần sau, chúng ta sẽ tìm hiểu làm thế nào suy ra dạng thức của phương trình (1) từ một giả định kinh tế nào đó.

Bài toán thực tế

Table 2

Year	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Cobb và Douglas đã sử dụng các dữ liệu kinh tế được phát hành bởi chính phủ để có bảng 2. Họ lấy năm 1899 làm số liệu mốc và mỗi đại lượng P, L và K vào năm 1899 được ấn định giá trị 100. Các giá trị của các năm khác được tính theo tỷ lệ phần trăm của số liệu năm 1899. Cobb và Douglas đã sử dụng phương pháp bình phương cực tiểu để làm cho dữ liệu bảng 2 phù hợp với hàm số

$$P(L,K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25} \qquad (2)$$

- Dạng hàm tường minh
- Chú ý một số bài tập, tìm miền xác định của hàm 2 biến, 3 biến.

Bài toán thực tế

Bài 3: Vẽ đồ thị hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

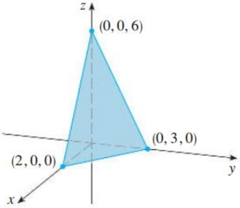


FIGURE 6

Bài 4: Vẽ đồ thị $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

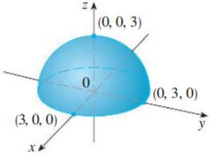
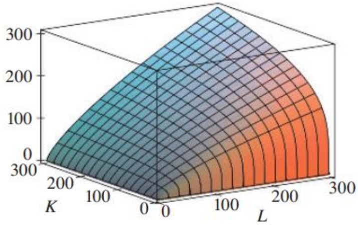


FIGURE 7

Bài toán thực tế

Bài 5: Sử dụng máy tính để vẽ đồ thị hàm sản lượng Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$



- Thiết lập cách vẽ từ các cách vẽ hình ở bậc phổ thông. Hướng dẫn vẽ hình bằng các công cụ vẽ hình có sẵn (Geogebra, Sketchpad, Matlab, vẽ hình online desmos.com,. . .)

Định nghĩa: Đường mức của hàm hai biến f là các đường cong có phương trình $f(x, y) = k$, trong đó k là hằng số (trong miền giá trị của f).

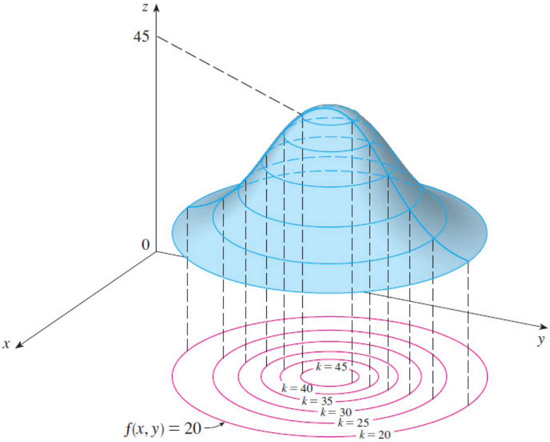


FIGURE 11

Bài toán thực tế

Bài 6: Sử dụng Figure 15 nó để ước tính các giá trị của f(1,3) và f(4,5).

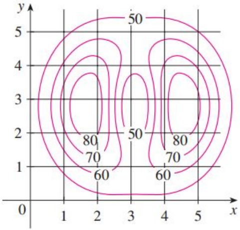


FIGURE 15

- Điểm (1,3) nằm ở một phần nào đó giữa các đường mức với các giá trị z là 70 và 80. Ta ước tính: $f(1,3) \approx 73$

Tương tự, ta ước tính: $f(4,5) \approx 56$

Bài toán thực tế

-Nêu định nghĩa, ý nghĩa và cách tính đạo hàm riêng và vi phân hàm tường minh, đạo hàm theo hướng. (lưu ý về hướng tăng nhanh nhất của hàm số)
- Trình bày cách tính đạo hàm hàm hợp.
- Cho ví dụ về bài toán thực tế có sử dụng các loại đạo hàm trên.

Các bài tập tham khảo như sau:

Bài toán thực tế - Đạo hàm riêng

Bài 1: Một ngọn đồi có hình dạng bề mặt mô tả bởi hàm số $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, trong đó x, y và x được tính bằng mét. Tính $z'_x(20, -10), z'_y(20, -10)$ và cho biết sự thay đổi chiều cao của ngọn đồi từ điểm (20,-10,997) theo hướng trục 0x, 0y.
Bài 2: Nhiệt độ của một đĩa kim loại mỏng đặt trên mặt phẳng Oxy tại mỗi điểm có tọa độ (x,y) cho bởi $T = \dfrac{100}{1 + 2x^2 + y^2}$. Tính $f'_x(0, 1), f'_y(0, 1)$ và cho biết sự thay đổi của nhiệt độ của đĩa kim loại này từ điểm (0,1) theo hướng trục Ox, Oy. (Đơn vị của T là ^oC, của x, y là m).
Bài 3: Chỉ số nhiệt H (nhiệt độ mà cơ thể cảm nhận được) là hàm số phụ thuộc vào nhiệt độ môi trường T và độ ẩm không khí h. Giả sử I=f(T,h) tính theo ^oC, h tính theo %. Hãy cho biết, nếu $f'_T(40, 30) = 2, f'_h(40, 30) = 0.75$ điều này nói gì về sự biến đổi của chỉ số nhiệt I từ mốc (T,h)=(40,30).

Bài toán thực tế - Đạo hàm riêng

Bài 4: Chiều cao cua sóng tại một vùng biển phụ thuộc vào tốc độ gió và khoảng thời gian mà gió thổi với tốc độ đó. Nếu gọi H là chiều cao của sóng, tính bằng mét (m), thời gian tính theo giờ (h), tốc độ gió v tính theo km/h thì H=f(v,t). Nếu $f'_t(40, 10) = 0.5, f'_v(40, 10) = 0.3$ có thể nói gì về sự thay đổi chiều cao của sóng từ mốc (v,t)=(40,10).
Bài 5: Nhiệt độ T tại một địa điểm trên bề mặt trái đất phụ thuộc vào kinh độ x, vĩ độ y và thời điểm t, T= f(x,y,t). Tại tọa độ 158^o Tây, 21^o Bắc, vào một ngày tháng giêng, lúc 9 giờ sáng, gió thổi hơi nóng đi theo hướng đông bắc nên vùng phía Tây và Nam ấm hơn, vùng phía Đông và phía Bắc mát hơn. Hãy cho biết f'_x, f'_y, f'_t tại (158,21,9) mang giá trị âm hay dương, tại sao?

Bài toán thực tế - Đạo hàm theo hướng

Bài 1: Một ngọn đồi có hình dạng mô tả bởi phương trình $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, trong đó x, y và z tình bằng mét. Một người đang đứng ở tọa độ (60,40,966). Giả sử x ở hướng Đông và y ở hướng Bắc.

a/ Nếu người đó đi về hướng Nam thì anh ta đang đi lên hay đi xuống? Độ dốc là bao nhiêu?

b/ Câu hỏi tương tự nếu đi theo hướng Tây-Bắc.

c/ Đi theo hướng nào thì ngọn đồi có độ dốc cao nhất. Độ dốc lúc này là bao nhiêu?

Bài 2: Gần nơi đặt phao cứu sinh độ sâu của hồ cho bởi hàm số $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, x, y và z tính bằng mét. Một thuyền câu từ tọa độ (60, 80) hướng đến phao cứu sinh, giả sử phao đặt tại gốc tọa độ (0,0). Hãy cho biết mực nước dưới thuyền sẽ sâu hơn hay cạn hơn nơi thuyền xuất phát.

Bài toán thực tế - Đạo hàm theo hướng

Bài 3: Nhiệt độ T tại một điểm trên quả banh kim loại tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ điểm đó đến tâm quả banh. Giả sử tâm quả banh là gốc tọa độ. Nhiệt độ tại điểm có tọa độ M(1,2,2) là 120^oC.

a/ Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ T từ M hướng đến điểm N(2,1,3)

b/ Chứng minh rằng từ 1 điểm bất kỳ, khi di chuyển hướng đến tâm của quả cầu thì nhiệt độ tăng nhanh nhất.

Bài 4: Nhiệt độ tại điểm (x,y,z) được cho bởi $T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$, trong đó T được tính bằng ^oC và x, y, z được tính bằng mét.

a/ Tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ tại điểm P(2,1,-2) theo hướng tới điểm (3,-3,3).

b/ Nhiệt độ tăng nhanh nhất tại P theo hướng nào?

c/ Tốc độ tăng tối đa tại P?

Bài toán thực tế - Đạo hàm theo hướng

Bài 5: Giả sử qua một vùng nào đó trong không gian, điện thế V được cho bởi $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$

a/ Tìm tốc độ biến thiên của điện thế tại P(3,4,5) theo hướng của vecto v=(1,1,-1).

b/ V biến thiên nhanh nhất tại P theo hướng nào?

c/ Tốc độ biến thiên tối đa tại P là bao nhiêu?

Nội Dung Dạy Tuần thứ 2

1.4 Đạo hàm, vi phân hàm hợp.
1.5 Đạo hàm , vi phân hàm ẩn. (tự đọc)
1.6 Công thức Taylor.

Bài toán thực tế - Vi phân hàm nhiều biến

Bài 1: Một chiếc thùng hình trụ có kích thước bên trong là bán kính R = 2.5m, chiều cao H = 4m, độ dày thành và đáy là 1dm. Hãy tính gần đúng thể tích vật tư sử dụng cho việc chế tạo thùng.
Bài 2: Một hình hộp chữ nhật có kích thước các cạnh là: a = 2m, b = 3m, c = 6m. Hãy tính gần đúng độ dài đường chéo hình hộp nếu a tăng 2cm, b tăng 1cm và c giảm 3cm.
Bài 3: Trong nón cụt có bán kính dưới R = 20cm, bán kính đáy trên r = 10cm, chiều cao h = 30cm. Tính xấp xỉ sự thay đổi thể tích nếu R tăng thêm 2mm, r tăng thêm 3mm và h giảm đi 1mm.
Bài 4: Chỉ số lạnh do gió được mô hình hóa bởi hàm số $W = 13.12 + 0.6215T - 13.37v^{0.16} - 0.3965Tv^{0.16}$, trong đó T là nhiệt độ (^oC) và v là vận tốc gió (km/h). Vận tốc gió được đo là 26 km/h với sai số khả dĩ là $\pm 2km/h$ và nhiệt độ đo được là -11^oC, với sai số khả dĩ là $\pm 1^o$. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa của giá trị W do sai số của T và v.

Bài toán thực tế - Vi phân hàm nhiều biến

Bài 5: Áp suất, thể tích và nhiệt độ của 1mol khí lý tưởng có mối quan hệ nhau qua phương trình $PV = 8.31T$, trong đó P được tính bằng kilopascal, V được tính bằng lít và T được tính bằng kelvin. Sử dụng vi phân để tìm mức biến thiên áp suất nếu thể tích tăng từ 12L lên 13L và nhiệt độ giảm từ 310K xuống 305K.

bài 6: Nếu R là tổng điện trở của ba điện trở mắc song song , với R_1, R_2, R_3 thì $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$, nếu điện trở được tính bằng Ohm, $R_1 = 25\Omega, R_2 = 40\Omega, R_3 = 50\Omega$ sai số khả dĩ 0.5% mỗi điện trở. Tính sai số tối đa của giá trị R tính được.

Bài toán thực tế - Đạo hàm hàm hợp

Bài 1: Một con rệp di chuyển với phương trình chuyển động là $x = \sqrt{1+t}, y = 2 + \frac{1}{3}t$, ở đây x, y tính theo cm và t là thời gian tính bằng giây (s). Nhiệt độ tạo ra trên con đường rệp di chuyển là hàm T(x,y) tính bằng ^oC. Biết rằng $T'_x(2,3) = 4, T'_y(2,3) = 3$, nhiệt độ tăng như thế nào sau 3 giây trên đường mà con rệp di chuyển.
Bài 2: Với 1 mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái cho bởi PV = 8.31T, trong đó P(kPascal), V(lít), T(Kelvin). Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300^oK và thể tích khí đạt 100lit, vận tốc tăng nhiệt là 0.1K/s và vận tốc tăng thể tích là 0.2L/s, tính tốc độ thay đổi của áp suất P.
Bài 3: Tốc độ âm thanh xuyên qua lớp nước biển có độ mặn $35\%_o$ cho bởi phương trình $C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$, với C là tốc độ âm thanh (m/s), T là nhiệt độ (^oC), D là độ dày của lớp nước biển (m). Một thợ lặn sau 20 phút thì độ sâu lặn được đạt tốc độ 3/10 m/phut, nhiệt độ giảm $0.25^oC/phut$. Ước tính tốc độ thay đổi của âm thanh tại phút thứ 20.

Bài toán thực tế - Đạo hàm hàm hợp

Bài 4: Sản lượng lúa mì P của một năm phụ thuộc vào nhiệt độ T và lượng mưa trung bình R của năm đó. Các nhà khoa học ước tính rằng nhiệt độ trung bình mỗi năm tăng $0.15^{o}C/n\acute{n}m$ và lượng mưa tăng 0.1cm/năm. Tại thời điểm hiện tại $P'_T = -2, P'_R = 8$.

a/ Các đạo hàm riêng này có ý nghĩa gì?

b/ Ước tính tốc độ thay đổi sản lượng lúa mì ở thời điểm hiện tại.

Bài 5: Bán kính của hình nón tròn đứng tăng với tốc độ 1.8in/s trong khi độ cao của nó giảm với tốc độ 2.5in/s. Tốc độ biến thiên của thể tích hình nón là bao nhiêu khi bán kình là 120 in và độ cao 140 in?

Bài toán thực tế - Đạo hàm hàm hợp

Bài 6: Chiều dài l, chiều rộng w, chiều cao h của cái hộp biến thiên theo thời gian. Tại một thời điểm xác định, các chiều cao l=1m, và w=h=2m, l và w tăng với tốc độ 2m/s trong khi h giảm với tốc độ 3m/s. Tại thời điểm đó, tìm tốc độ biến thiên của các đại lượng sau:

a/ Thể tích

b/ Diện tích bề mặt

c/ Chiều dài đường chéo

Bài 7: Điện áp V trong mạch điện đơn giản giảm chậm khi pin tiêu hao năng lượng. Điện trở R tăng chậm khi các điện trở nóng lên. Sử dụng định luật Ohm, V = I.R, để tìm tốc độ biến thiên của cường độ dòng điện khi $R = 400\Omega, I = 0.08A, \dfrac{dV}{dt} = -0.01V/s, \dfrac{dR}{dt} = 0.03\Omega/s$

Bài toán thực tế - Đạo hàm hàm hợp

Bài 8: Một nhà sản xuất đã mô hình hóa hàm sản xuất hàng năm P của nó như hàm Cobb-Douglas $P(L,K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$, trong đó L là số giờ lao động (theo nghìn) và K là vốn đầu tư (triệu đô la). giả sử khi L = 30, K = 8, lượng công nhân giảm với tốc độ 2000 giờ lao động/ năm và vốn tăng với tốc độ 500000 $/năm. Tìm tốc độ biến thiên của sản lượng.

Bài 9: Một cạnh của tam giác tăng với tốc độ 3cm/s và cạnh thứ hai giảm với tốc độ 2cm/s. Nếu diện tích của hình tam giác không đổi thì tốc độ biến thiên của góc giữa các cạnh là bao nhiêu khi cạnh đầu tiên dài 20cm, cạnh thứ hai dài 30 cm và góc là $\pi/6$.

Nội dung dạy tuần 3

* Giới thiệu mặt bậc hai.
1.7 Cực trị tự do.
1.8 Cực trị có điều kiện. Giá trị lớn nhất, bé nhất trên miền đóng và bị chặn. Trong phần cực trị, chọn cách tiếp cận phù hợp để SV dễ theo dõi nên thống nhất chọn đường mức.

1.6 Công thức Taylor, giới thiệu mặt bậc hai

+ Giới thiệu mặt bậc hai (nhận dạng), chú ý đến đồ thị vì đây là bước chuẩn bị để cho sinh viên có hình dung cận của các loại tích phân ở các chương sau.
+ Công thức Taylor
+ Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong
Xem các BT ở [2]
[2] Exercises: 11, 12 P.17, exercises 15, 16 P.18

Tìm dạng BT vừa thiết lập hàm nhiều biến, sau đó nhận dạng mặt bậc hai, có thể hỏi thêm câu về miền xác định của hàm vừa thiết lập. Ở dạng bài tập này phần kỹ thuật tính toán đã có rất nhiều. Chúng ta tìm tiếp các ứng dụng trong bài toán thực tế:

Exercise 11, P. 17 [2]: A manufacturer sells a ardvark masks at a price of \$210 per mask and b butterfly masks at a price of \$490 per mask. A quantity of a aardvark masks and b butterfly masks is sold at a total cost of \$550 to the manufacturer.

(a) Express the manufacturer's profit, P, as a function of a and b. P(a; b) = dollars.

(b) The curves of constant profit in the ab-plane are (i) hyperbolas

(ii) ellipses

(iii) lines

(iv) circles

(v) parabolas

Bài 2: Xét nồng độ C (mg/lit) của một loại thuốc trong máu như một hàm theo biến số lượng x (mg) và t là thời gian kể từ lúc tiêm.Với $0 \leq x \leq 4$ và $t \geq 0$, ta có hàm $C = f(x,t) = te^{-t(5-x)}$.
Vẽ đồ thị cho hai biến hàm độc lập trên trang khác nhau, chắc chắn rằng bạn có thể giải thích ý nghĩa về nồng độ thuốc.

(a) f(4,t)

(b) f(x,1)

Sử dụng đồ thị (a), chỉ ra được f(4,t)
- Đạt tối ra khi t = ...
- Đạt tối thiểu khi t =..........................

Sử dụng đồ thị (b), chỉ ra được f(x,1)
- Đạt tối ra khi x = ...
- Đạt tối thiểu khi x =..........................

Bài 3: Theo đinh luật Poyle về khí lí tưởng, $PV = RT$, trong đó áp lực P (Pascal), nhiệt độ T (Kelvin) và thể tích V (m^3) của 1 mol khí gas ($R = 8.314J/molK$ là hằng số khí phổ), và mô tả trạng thái của các khí không dễ hóa lỏng như khí O_2, H_2. Giải phương trình, xem thể tích là hàm, biến là áp lực và nhiệt độ:

$$V(P,T) = \frac{8.314T}{P}$$

a. Giải thích mối liên hệ giữa V và P khi P = 1000
b. Giải thích về đường mức khi V = 0.5
c. Mô tả sự ảnh hưởng của nhiệt độ và áp lực vào thể tích

Bài 4:

When people buy a large ticket item like a car or a house, they often take out a loan to make the purchase. The loan is paid back in monthly installments until the entire amount of the loan, plus interest, is paid. The monthly payment that the borrower has to make depends on the amount P of money borrowed (called the principal), the duration t of the loan in years, and the interest rate r. For example, if we borrow \$18,000 to buy a car, the monthly payment M that we need to make to pay off the loan is given by the formula

$$M(r,t) = \frac{1500r}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}}}$$

a. Find the monthly payments on this loan if the interest rate is 6the duration of the loan is 5 years.

b. Create a table of values that illustrates the trace of M with r fixed at 5%. Use yearly values of t from 2 to 6. Round payments to the nearest penny. Explain in detail in words what this trace tells us about M.

d. Consider the combinations of interest rates and durations of loans that result in a monthly payment of \$200. Solve the equation $M(r;t) = 200$ for t to write the duration of the loan in terms of the interest rate. Graph this level curve and explain as best you can the relationship between t and r.

Bài 5: Dựa trên dữ liệu từ năm 1998 đến 2001, doanh thu của công ty Kellogg và những công ty con được mô tả bởi hàm

$$S(a, e) = -0.36661a + 0.16556e + 4671.3(\text{triệu\$})$$

trong đó a là số lượng tiền để trả cho quảng cáo (triệu \$) và e là số lượng nhân viên của công ty.Vào năm 2001, công ty có 26424 nhân viên, phải trả 519.2 triệu \$ tiền quảng cáo, và doanh thu là 8853.3 triệu \$. Nếu công ty tăng tiền quảng cáo lên 700 triệu \$ và giảm số lượng nhân viên còn 25000, thì doanh thu dự đoán là bao nhiêu?

Bài 6: Một nhà thiết kế hộp đã thiết kế một hộp với đáy là hình vuông (như hình). Tìm phương trình diện tích bề mặt của hộp không lắp ráp. Cần bao nhiêu inch^2 để thiết kế nên cái hộp rộng 6 inch, dài 6 inch và cao 18 inch?

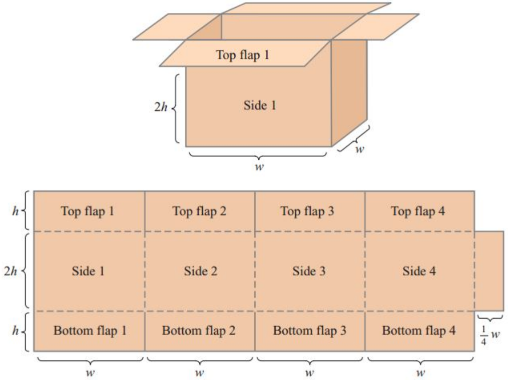


FIGURE 8.9

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Dạng 1 (kỹ thuật tính toán): Các BT về kỹ thuật tính toán cực trị tự do, cực trị có điều kiện và GTLN, GTNN, cần dùng công cụ vẽ tình các BT cho SV có thể hiểu về bản chất của các BT vừa làm.
Dạng 2: Ứng dụng thực tế (BT Tối ưu)

Ví dụ như BT 5-18 , Stewart p.978

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Bài 5. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
Bài 6. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
Bài 7. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
Bài 8. $f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$
Bài 9. $f(x,y) = (1+xy)(x+y)$
Bài 10. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
Bài 11. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
Bài 12. $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
Bài 13. $f(x,y) = e^x \cos y$
Bài 14. $f(x,y) = y \cos x$

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Bài 15. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$
Bài 16. $f(x,y) = e^y(y^2 - x^2)$
Bài 17. $f(x,y) = y^2 - 2y\cos x,\ 1 \le x \le 7$
Bài 18. $f(x,y) = \sin x \sin y,\ -\pi < x < \pi,\ -\pi < y < \pi$

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

BT: 29-36 Stewart. p.978

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Bài 29. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x, D$ là miền hình tam giác đóng có các đỉnh $(2,0), (0,2)$ và $(0,-2)$.
Bài 30. $f(x,y) = x + y - xy, D$ là miền hình tam giác đóng có các đỉnh $(0,0), (0,2)$ và $(4,0)$.
Bài 31. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4, D = \{(x,y)||x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
Bài 32. $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2, D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$.
Bài 33. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2, D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.
Bài 34. $f(x,y) = xy^2, D = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.
Bài 35. $f(x,y) = 2x^3 + y^4, D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Bài 36. $f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y, D$ là hình tứ giác mà các đỉnh của nó là $(-2,3), (2,3), (2,2)$ và $(-2,-2)$.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Định nghĩa và cách tìm cực trị tự do, cực trị có điều kiện, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (lưu ý về cách sử dụng đường mức đối với hàm 2 biến).
Ví dụ 3, ví dụ 4 trong Stewart trang 972, 973.
Bài tập 3,4 Stewart trang 9.77.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Định nghĩa và cách tìm cực trị tự do, cực trị có điều kiện, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (lưu ý về cách sử dụng đường mức đối với hàm 2 biến).

Ví dụ 3. Tìm các giá trị cực đại địa phương và cực tiểu địa phương và các điểm yên ngựa của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
Giải. Xác định các điểm tới hạn:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad\qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Cho các đạo hàm riêng này bằng 0 ta được các phương trình

$$x^3 - y = 0 \text{ và } y^3 - x = 0$$

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Giải hệ trên ta được ba điểm tới hạn là $(0,0),(1,1),(-1,-1)$
Tiếp theo ta tính đạo hàm riêng cấp hai là $D(x,y)$:

$$f_{xx}=12x^2 \qquad f_{xy}=-4 \qquad f_{yy}=12y^2$$

$$D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=144x^2y^2-16$$

Vì $D(0,0)=-16<0$, nên từ trường hợp (c) của Tiêu chuẩn Đạo hàm

cấp hai, ta suy ra gốc tọa độ là điểm yên ngựa; tức là f không có cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương tại $(0,0)$.

Vì $D(1,1)=128>0$ và $f(1,1)=12>0$, nên từ trường hợp (a) của Tiêu chuẩn, ta thấy $f(1,1)=-1$ là cực tiểu địa phương. Tương tự, ta có $D(-1,-1)=128>0$ và $f_{xx}(-1,-1)=12>0$, vì vậy $f(-1,-1)=-1$ cũng là cực tiểu địa phương.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Đồ thị của f được biểu diễn trong Figure 4 và đường mức tương ứng

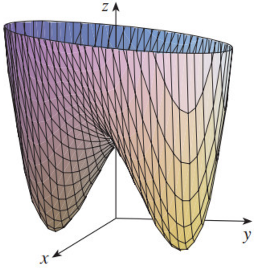
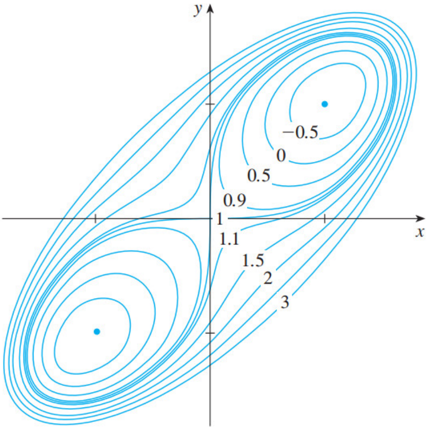


FIGURE 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$



1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Ví dụ 4. Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số

$$f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Tìm điểm cao nhất trên đồ thị của f.

Giải. Các đạo hàm riêng cấp 1 là

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad\qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Vì vậy, để tìm điểm tới hạn ta cần giải các phương trình

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0 \ (1) \text{ và } 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0 \ (2)$$

Từ (1) ta có: $x = 0$ thế vào (2) $\Rightarrow y = 0$, vì vậy điểm tới hạn $(0,0)$

Khi $10y - 5 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 5y - 2,5$ thế vào (2) ta được

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5 = 0$$

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Sử dụng máy tính vẽ đồ thị hàm $g(y)$ ta được phương trình $g(y) = 0$ có 3 nghiệm

$$y \approx -2,5452 \qquad y \approx 0,6468 \qquad y \approx 1,8984$$

Nếu $y \approx -2,5452$, thì x không có giá trị thực tương ứng. Nếu $y \approx 0,6468$, thì $x \approx \pm 0,8567$. Nếu $y \approx 1,8984$, thì $x \approx \pm 2,6442$. Vì vậy ta có ta có tất cả năm điểm tới hạn mà được phân tích trong biểu đồ sau. Tất cả các đại lượng được làm tròn đến hai chữ số thập phân.

Điểm tới hạn	Giá trị của f	f_{xx}	D	Kết luận
$(0,0)$	$0,00$	$-10,00$	$80,00$	Cực đại địa phương
$(\pm 2,64; 1,90)$	$8,50$	$-55,93$	$2488,72$	Cực đại địa phương
$(\pm 0,86; 0,65)$	$-1,48$	$-5,87$	$-187,64$	Điểm yên ngựa

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (BT ứng dụng)

Bài tập 19-52 Stewart trang 979.
Bài Tập 63 Stewart trang 994.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)

Hình 7 và 8 cho hai góc nhìn của đồ thị f và chúng ta thấy rằng bề mặt lõm hướng xuống dưới. [Điều này cũng có thể thấy được từ biểu thức tính $f(x, y)$: Các số hạng trội hơn là $-x^4 - 2y^4$ khi $|x|$ và $|y|$ nhỏ hơn.] So sánh các giá trị của f tại các điểm cực đại địa phương của nó, ta thấy rằng giá trị cực đại tuyệt đối của f là $f(\pm 2,64; 1,90) \approx 8,50$. Nói cách khác, các điểm cao nhất trên đồ thị của f là $(\pm 2,64; 1,90; 8,50)$.

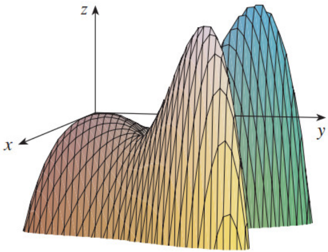


FIGURE 7

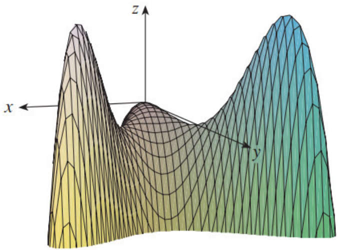
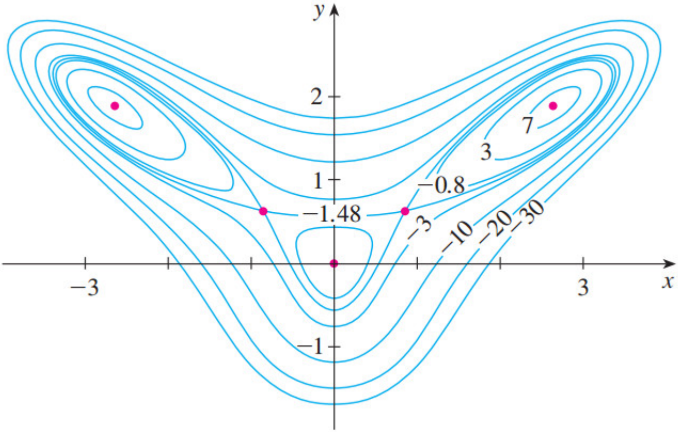


FIGURE 8

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (kỹ thuật tính toán và BT ứng dụng)



1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (BT ứng dụng)

Bài 39. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(2, 0, -3)$ đến mặt phẳng $x + y + z = 1$.

Bài 40. Tìm điểm trên mặt phẳng $x - 2y + 3z = 6$ sao cho gần điểm $(0, 1, 1)$ nhất.

Bài 41. Tìm các điểm trên hình nón $z^2 = x^2 + y^2$ sao cho gần điểm $(4, 2, 0)$ nhất.

Bài 42. Tìm các điểm trên mặt $y^2 = 9 + xz$ sao cho gần gốc tọa độ nhất.

Bài 43. Tìm bai số dương mà tổng của chúng là 100 và tích của chúng là một giá trị cực đại.

Bài 44. Tìm ba số dương mà tổng của chúng bằng 12 và tổng các bình phương của chúng là nhỏ nhất có thể.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (BT ứng dụng)

Bài 45 Tìm thể tích cực đại của hình hộp chữ nhật nội tiếp hình cầu bán kính r.

Bài 46. Tìm các chiều của hộp có thể tích $1000cm^3$ mà có diện tích bề mặt cực tiểu.

Bài 47. Tìm thể tích của hình hộp chữ nhật trong góc phần tám thứ nhất với ba mặt phẳng tọa độ và một đỉnh trong mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$.

Bài 48. Tìm các chiều của hộp có thể tích có thể tích lớn nhất nếu tổng diện tích bề mặt được cho là $64cm^2$.

Bài 49. Tìm các chiều của hộp chữ nhật có thể tích cực đại sao cho tổng chiều dài của 12 cạnh là hằng số c.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (BT ứng dụng)

Bài 50. Đáy của một bể nuôi cá thể tích V được làm bằng đá phiến và các mặt bên được làm bằng thủy tinh. Nếu đá phiến có giá (trên một đơn vị diện tích) gấp năm lần thủy tinh, tìm các chiều của bể cá mà làm giảm tối thiểu chi phí nguyên vật liệu.

Bài 51. Một cái hộp các-tông không nắp có thể tích $32,000cm^3$. Tìm các chiều của hộp mà làm giảm tối thiểu lượng các-tông được sử dụng để làm nó.

Bài 52. Một tòa nhà hình chữ nhật đang được thiết kế để giảm thiểu sự mất nhiệt. Các bức tường phía đông và phía tây mất nhiệt với tỷ lệ 10 đơn vị/m^2 một ngày, các bức tường phía bắc và phía nam mất nhiệt với tỷ lệ 8 đơn vị/m^2 một ngày, sàn nhà mất nhiệt với tỷ lệ 1 đơn vị/m^2 một ngày. Mỗi bức tường ít nhất phải dài $30m$, chiều cao ít nhất $4m$, và thể tích phải đúng $4000m^3$.

1.5 Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN, GTNN (BT ứng dụng)

(a)Tìm và phát họa miền xác định của sự mất nhiệt như một hàm theo chiều dài của các mặt.

(b) Tìm các chiều mà giảm thiểu sự mất nhiệt. (Kiểm tra các điểm tới hạn và các điểm trên biên của miền xác định).

(c) Bạn có thể thiết kế một tòa nhà với sự mất nhiệt thậm chí còn ít hơn nữa nếu xóa bỏ giới hạn độ dài của bức tường không?

Chú ý

Các Chương 2,3,4 chúng tôi chỉ thống nhất nội dung dạy và các thống nhất các dạng ứng dụng thực tế. Vì vậy, khi dạy giáo viên nên tìm và soạn dạy theo định hướng thống nhất.

Nội dung chương 2

Chương 2: Tích phân bội.
2.1 Tích phân kép
2.2 Đổi biến trong tích phân kép
2.3 Tích phân bội ba
2.4 Đổi biến trong tích phân bội 3.

Nội dung dạy tuần thứ 4

2.1 Tích phân kép

- Trình bày cách dẫn về tích phân kép: Bài toán thể tích, bài toán khối lượng (mô hình tích phân).
- Định nghĩa tích phân kép. Phát biểu định lý giá trị trung bình. Phát biểu định lý Fubini về cách tính tích phân kép. Tính chất của tích phân kép.
- Cho ví dụ về các ứng dụng của tích phân kép trong việc tính khối lượng riêng và khối lượng. (Bài toán thực tế về giá trị trung bình, moment, tọa độ trọng tâm,... sẽ làm nội dung trong BTL)

Nội dung dạy tuần thứ 5

2.2 Đổi biến trong tích phân kép
- Xây dựng tọa độ cực
- Phát biểu công thức đổi biến tổng quát. Vận dụng trong đổi biến tọa độ cực.

Nội dung dạy tuần thứ 6

2.3 Tích phân bội ba
2.4 Đổi biến trong tích phân bội 3

Định nghĩa tích phân bội ba.
- Phát biểu tính chất của tích phân bội 3.
- Phát biểu định lý Fubini và cách tính tích phân bội 3.
- Đổi biến sang tọa độ trụ, tọa độ cầu, đổi biến tổng quát.

Nội dung dạy tuần thứ 7

2.4 Đổi biến trong tích phân bội 3 (tiếp theo)

Đổi biến sang tọa độ cầu, đổi biến tổng quát.
- Kiểm tra, ôn tập giữa kỳ (không bắt buộc)

Nội dung chương 3

Chương 3: Tích phân đường
3.1 Tham số hóa đường cong.
3.2 Tích phân đường loại 1.
3.3 Tích phân đường loại 2.
3.3 Công thức Green.
3.4 Tích phân không phụ thuộc đường đi

Nội dung dạy tuần thứ 8

Chương 3: Tích phân đường
3.1 Tham số hóa đường cong.
3.2 Tích phân đường loại 1

- Trình bày cách tham số hóa đường cong trong mặt phẳng và trong không gian (lưu ý về hướng nhìn khi tham số hóa đường không gian).
- Trình bày bài toán dẫn về tích phân đường loại 1 (bài toán tính diện tích của dải băng). Nêu định nghĩa và tính chất của tích phân đường loại 1 (trong mặt phẳng và không gian).
- Trình bày cách tính tích phân đường loại 1.
- Ứng dụng trog bài toán tính khối lượng cung.

Nội dung dạy tuần thứ 9

Chương 3: Tích phân đường
3.3 Tích phân đường loại 2.
3.3 Công thức Green.
3.4 Tích phân không phụ thuộc đường đi

- Trình bày bài toán dẫn về tích phân đường 2 (bài toán tính công).
- Trình bày định nghĩa, tính chất của tích phân đường loại 2, cách tính từ việc tham số hóa đường cong.
- Phát biểu và phân tích các định lý Green, định lý về tích phân không phụ thuộc đường đi.

Nội dung chương 4

Nội dung dạy tuần thứ 10

Chương 4: Tích phân tích phân mặt
4.1 Tham số hóa mặt cong
4.2 Tích phân mặt loại 1

- Tham số hóa mặt cong. - Nêu định nghĩa và cách tính tích phân mặt loại 1. - Ứng dụng của tích phân mặt loại 1. - Ứng dụng vào tính khối lượng tấm cong.

Nội dung dạy tuần thứ 11

4.3 Tích phân mặt loại 2

Trình bày bài toán thông lượng dẫn về tích phân mặt loại 2. Trường vector.
- Định nghĩa mặt định hướng, cách xác định phía của mặt định hướng.
- Định nghĩa tích phân mặt loại 2.
- Trình bày cách tính tích phân mặt loại 2.
- Định lý Gauss-Oxtrogratski (nhấn mạnh mối liên hệ giữa 2 loại tích phân, mặt kín).
- Định lý Stokes (nhấn mạnh mối liên hệ giữa các loại tích phân).
- Bài toán thực tế: Thông lượng chất lỏng.

Nôi dung chương 5

Nội dung tuần dạy thứ 12

5.1 Chuỗi số
Trình bày định nghĩa chuỗi số, sự hội tụ của chuỗi số, tổng chuỗi, tính chất của chuỗi, điều kiện cần của sự hội tụ.
- Khảo sát chuỗi hình học (chuỗi CSN).
- Phát biểu các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số không âm(Tích phân, so sánh).
- Khảo sát chuỗi điều hòa.
- Phát biểu các tiêu chuẩn Leibnitz cho chuỗi đan dấu.

Chuỗi hình học

Chuỗi hình học

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + a.r + a.r^2 + \dots$$

Hội tụ nếu $|r| < 1$ và tổng của nó là:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1$$

Nếu $|r| > 1$, chuỗi hình học phân kỳ.

Tiếp theo đánh máy các BT trong tài liệu [1]:
Ex 5-8 P.448
Ex 69 P.69

Ứng dụng chuỗi hình học

Bài 1: Giả sử bạn thả một quả bóng từ độ cao h. Sự va chạm với mặt đất làm cho quả bóng bị mất năng lượng và do đó nó sẽ không trở lại chiều cao ban đầu. Trái bóng sau đó sẽ rơi xuống đất, bật ngược trở lại và tiếp tục. Giả sử tại mỗi lần nảy quả bóng đi được bằng 3/4 độ cao độ cao mà nó rơi xuống. Gọi h_n là chiều cao của quả bóng nảy lên thứ n, với $h_0 = h$. Trong bài tập này, chúng ta sẽ xác định quãng đường mà quả bóng đi được và thời gian cần thiết để đi được quãng đường đó.
a) Xác định h_1 theo h.
b) Xác định h_3 theo h.
c) Xác định h_n theo h.
d) Viết một chuỗi vô hạn thể hiện tổng quãng đường mà quả bóng đi được. Sau đó xác định tổng của chuỗi này.

Ứng dụng chuỗi hình học

Tiếp theo, hãy xác định tổng thời gian của bóng ở trên không.Khi quả bóng rơi từ độ cao H, nếu chúng ta giả sử lực hút trái đất tại thời điểm t được cho bởi:

$$H = 1/2g.t^2$$

Sử dụng công thức này để xác định thời gian cần thiết để bóng chạm đất sau khi bị rớt từ độ cao H.

Ứng dụng chuỗi hình học

Bài 2: The goal of a federal government stimulus package is to positively affect the economy. Economists and politicians quote numbers like "k million jobs and a net stimulus to the economy of n billion of dollars." Where do they get these numbers? Let's consider one aspect of a stimulus package: tax cuts. Economists understand that tax cuts or rebates can result in long-term spending that is many times the amount of the rebate. For example, assume that for a typical person, 75% of her entire income is spent (that is, put back into the economy). Further, assume the government provides a tax cut or rebate that totals P dollars for each person.

a. The tax cut of P dollars is income for its recipient. How much of this tax cut will be spent?

Ứng dụng chuỗi hình học

b. In this simple model, we will say that the spent portion of the tax cut/rebate from part (a) then becomes income for another person who, in turn, spends 75% of this income. After this "second round" of spent income, how many total dollars have been added to the economy as a result of the original tax cut/rebate?
c. This second round of spending becomes income for another group who spend 75% of this income, and so on. In economics this is called the multiplier effect. Explain why an original tax cut/rebate of P dollars will result in multiplied spending of $0.75P(1 + 0.75 + 0.75^2 + \cdots$ dollars.
d. Based on these assumptions, how much stimulus will a 200 billion dollar tax cut rebate to consumers add to the economy, assuming consumer spending remains consistent forever.

Ứng dụng chuỗi hình học

Xem [3], Chapter 11, Section 11.2 P.733-746.

5.2 Chuỗi lũy thừa

- Định nghĩa chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa
- Phát biểu tính chất của chuỗi lũy thừa (tính liên tục của tổng chuỗi, chuỗi đạo hàm, tích phân).

Nội dung tuần dạy thứ 13

5.3 Chuỗi Taylor

- Định nghĩa chuỗi Taylor.
- Trình bày điều kiện hội tụ và tổng của chuỗi Taylor.
- Trình bày cách sử dụng chuỗi Maclaurin để tìm tổng chuỗi số.