XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

CHƯƠNG 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT

TS. Phan Thị Hường

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: huongphan@hcmut.edu.vn

TP. HCM — 2020.

Nội dung

1. Biến cố ngẫu nhiên

NỘI DUNG

1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

2. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT

NỘI DUNG

1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN
2. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT
3. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT CĂN BẢN

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN (RANDOM EXPERIMENT)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần. Kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

VÍ DỤ 1.1

1. *Tung đồng xu/Tung xúc sắc*
2. *Điểm thi cuối học kì*
3. *Nhóm máu của một người*

Biến cố ngẫu nhiên

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.

Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, ω, $(\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).

Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, ω, $(\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Kí hiệu là A,B, C,...

Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, ω, $(\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Kí hiệu là A,B, C,...
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, ω, $(\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Kí hiệu là A,B, C,...
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.
- Biến cố luôn không xảy ra gọi là biến cố bất khả (hay biến cố không thể có) (empty event), kí hiệu $\emptyset$.

Quan hệ giữa các biến cố

Sự kéo theo

A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

Quan hệ giữa các biến cố

Sự kéo theo

A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

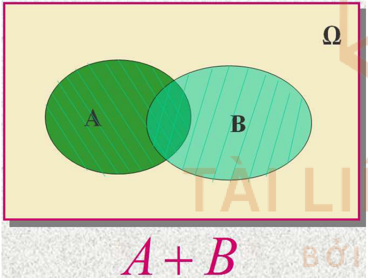
Sự tương đương

A tương đương với B, kí hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

BIẾN CỐ TỔNG (UNION)

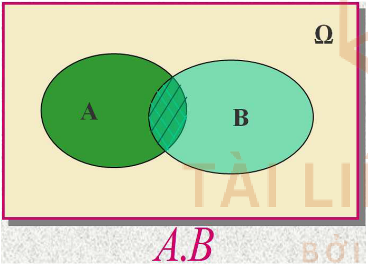
Biến cố tổng của A và B, ký hiệu $A+B$ hay $A \cup B$ là biến cố xảy ra nếu A hoặc B xảy ra (có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra).



Các phép toán trên biến cố

Biến cố tích (intersection)

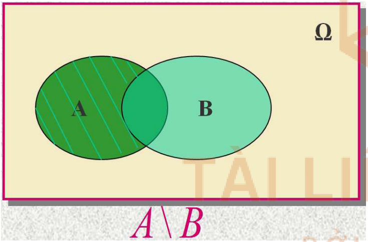
Biến cố tích của A và B, ký hiệu $A.B$ hay $A \cap B$ là biến cố xảy ra nếu A và B xảy ra (hai biến cố đồng thời xảy ra).



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

BIẾN CỐ HIỆU

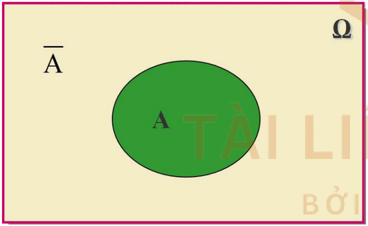
Biến hiệu của A và B, ký hiệu $A \backslash B$ là biến cố xảy ra A nhưng không xảy ra B.



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

BIẾN CỐ ĐỐI LẬP (BIẾN CỐ BÙ) (COMPLEMENT)

Biến cố đối lập của A, ký hiệu $\bar{A}$ hay A^c, là biến cố xảy ra khi A không xảy ra và ngược lại, nghia là $\begin{cases} A \cup \bar{A} = \Omega \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$ hay $\bar{A} = \Omega \setminus A$.



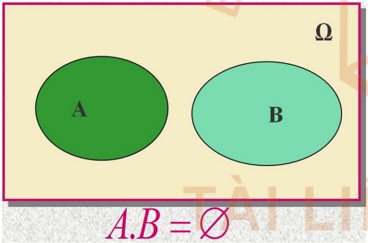
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

1. Công thức De-Morgan:
   - $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$.
   - $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.
2. Tính chất phân phối:
   - $A(B+C) = AB + AC$.
   - $A + (BC) = (A+B)(A+C)$.
3. Tính chất trừ:
   - $A - (B+C) = (A-B)(A-C)$
   - $A - (BC) = (A-B) + (A-C)$

Các phép toán trên biến cố

Biến cố xung khắc (mutually exclusive)

Biến cố A xung khắc với biến cố B, nếu hai biến cố này không đồng thời xảy ra, kí hiệu $A.B = \emptyset$.



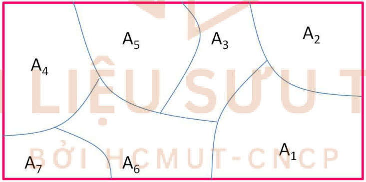
Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi một nếu $A_i.A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN BIẾN CỐ

HỆ ĐẦY ĐỦ CÁC BIẾN CỐ (EXHAUSTIVE)

Dãy n các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

$$\begin{cases} A_i.A_j = \emptyset, \; i, j \in \overline{1, n} \\ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega \end{cases}$$



Ví dụ 1.2

Giả sử rằng chúng ta cần kiểm tra chất lượng của 3 thiết bị điện tử, và chúng ta chỉ quan tâm đến việc 3 thiết bị này có đạt yêu cầu kỹ thuật hay không. Gọi các biến cố: A_i*: "thiết bị thứ i đạt yêu cầu",* $i = 1,2,3$*. Hãy biểu diễn theo* A_i *các biến cố sau:*

- (A) *Không gian mẫu,* Ω.
- (B) *Có ít nhất một thiết bị đạt yêu cầu,* E_1.
- (C) *Có không quá hai thiết bị đạt yêu cầu,* E_2.
- (D) *Cả 3 thiết bị đều không đạt yêu cầu,* E_3.

Ví dụ 1.3

Giả sử rằng nhà sản xuất cần kiểm tra chất lượng của một loại đĩa CD dựa trên 2 tiêu chí là khả năng chống xước và khả năng chống va đập. Bảng số liệu sau đây thống kê số lượng đĩa dựa trên 2 tiêu chí trên và phân loại theo 2 mức đánh giá: Thấp và cao.

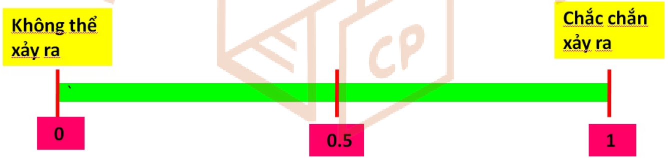
		Chống va đập	
Chống	*Cao*	*Cao*	*Thấp*
xước	*Thấp*	*16*	*5*

Giả sử một chiếc đĩa được lựa chọn mẫu nhiên. Gọi biến cố A là đĩa được chọn đạt tiêu chuẩn chống va đập cao. Gọi biến cố B là đĩa được chọn đạt tiêu chuẩn chống xước cao.
Hãy tìm số đĩa thuộc các biến cố sau: $A \cap B$, A^c, và $A \cup B$.

KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

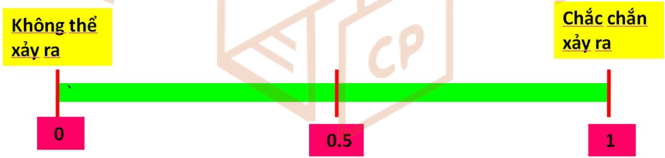
Xác suất của biến cố A là một con số, số đó đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng. Ký hiệu là $P(A)$



KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

Xác suất của biến cố A là một con số, số đó đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng. Ký hiệu là $P(A)$



GHI CHÚ 2.1

- *$P(A)$ càng lớn (càng gần 1) thì khả năng xuất hiện A càng nhiều.*
- *$P(A)$ càng nhỏ (càng gần 0) thì khả năng xuất hiện A càng ít.*

XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

ĐỊNH NGHĨA 2.1 (ĐN XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM CỔ ĐIỂN)

Nếu trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả năng, nghĩa là $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \dfrac{1}{n}$, *trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của A, ký hiệu,* $P(A)$, *là tỉ số* $\dfrac{m}{n}$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số biến cố thuận lợi cho } A}{\text{Số tất cả các biến cố có thể}} \tag{1}$$

VÍ DỤ 2.1

*Tung một con xúc sắc **đồng chất**, hãy tính xác suất để số chấm của mặt trên là lẻ.*

Xác suất cổ điển

Ưu điểm và nhược điểm

- **Ưu điểm**: tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.

Xác suất cổ điển

Ưu điểm và nhược điểm

- **Ưu điểm**: tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.
- **Nhược điểm**: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó. Vì vậy, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

ĐỊNH NGHĨA 2.2 (ĐN XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ)

Thực hiện phép thử n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện m lần. Khi đó m gọi là tần số xuất hiện biến cố A trong n phép thử, và tỷ số $\frac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử, ký hiệu, $f_n(A) = \frac{m}{n}$.

Thực hiện phép thử vô hạn lần, $(n \to \infty)$ tần suất xuất hiện biến cố A tiến dần về một số xác định gọi là xác suất của biến cố A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \frac{m}{n} \tag{2}$$

Hay nói cách khác:

$$f_n(A) \approx P(A)$$

khi n đủ lớn.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

Ví dụ 2.2

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung đồng tiền, người ta tiến hành tung đồng tiền đó nhiều lần và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	*Số lần tung n*	*Số lần nhận mặt sấp m*	*Tần suất $\left(\frac{m}{n}\right)$*
Buffon	*4040*	*2048*	*0.5069*
Pearson	*12000*	*6019*	*0.5016*
Pearson	*24000*	*12012*	*0.5005*

Bảng trên cho thấy, khi số lần tung càng lớn thì tần suất xuất hiện mặt sấp $\frac{m}{n}$ càng gần $\frac{1}{2}$.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

VÍ DỤ 2.2

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung đồng tiền, người ta tiến hành tung đồng tiền đó nhiều lần và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung n	Số lần nhận mặt sấp m	Tần suất $\left(\frac{m}{n}\right)$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Bảng trên cho thấy, khi số lần tung càng lớn thì tần suất xuất hiện mặt sấp $\frac{m}{n}$ *càng gần* $\frac{1}{2}$.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

VÍ DỤ 2.2

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung đồng tiền, người ta tiến hành tung đồng tiền đó nhiều lần và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	*Số lần tung n*	*Số lần nhận mặt sấp m*	*Tần suất $\left(\frac{m}{n}\right)$*
Buffon	*4040*	*2048*	*0.5069*
Pearson	*12000*	*6019*	*0.5016*
Pearson	*24000*	*12012*	*0.5005*

Bảng trên cho thấy, khi số lần tung càng lớn thì tần suất xuất hiện mặt sấp $\frac{m}{n}$ *càng gần* $\frac{1}{2}$.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

ƯU ĐIỂM VÀ NHƯỢC ĐIỂM

- Ưu điểm: không đòi hỏi phép thử có hữu hạn biến cố đồng khả năng, tính xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM THỐNG KÊ

ƯU ĐIỂM VÀ NHƯỢC ĐIỂM

- Ưu điểm: không đòi hỏi phép thử có hữu hạn biến cố đồng khả năng, tính xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.
- Nhược điểm: đòi hỏi phải lặp lại nhiều lần phép thử. Trong nhiều bài toán thực tế điều này không cho phép do điều kiện và kinh phí làm phép thử…

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM HÌNH HỌC

ĐỊNH NGHĨA 2.3 (ĐN THEO QUAN ĐIỂM HÌNH HỌC)

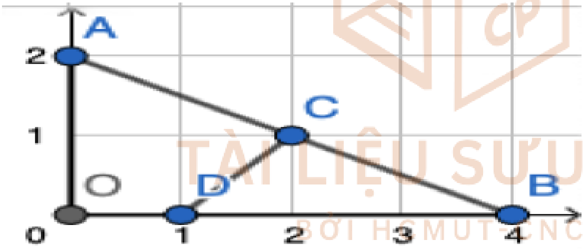
Xét một phép thử đồng khả năng, không gian mẫu có vô hạn phần tử và được biểu diễn thành một miền hình học Ω có độ đo xác định (độ dài, diện tích, thể tích). Biến cố $A \subset \Omega$ được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó, xác suất xảy ra A được xác định bởi:

$$P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega}. \tag{3}$$

XÁC SUẤT THEO QUAN ĐIỂM HÌNH HỌC

VÍ DỤ 2.3 (ĐỀ THI GIỮA KỲ HỌC KỲ 202)

Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong hình tam giác OAB. Tìm xác suất M nằm bên trong hình tứ giác OACD.



ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT THEO TIÊU ĐỀ

ĐỊNH NGHĨA 2.4

Kí hiệu A là một biến cố trong một phép thử ngẫu nhiên. Ta gọi xác suất là một quy tắc đặt mỗi A với một giá trị $P(A)$ *thỏa mãn các tiêu đề sau:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
3. *Với mỗi dãy biến cố đôi một xung khắc* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *ta có* $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT THEO TIÊU ĐỀ

TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

1. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.
2. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

1. Cộng 2 biến cố

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

2. Cộng 3 biến cố

$$\mathbb{P}(A+B+C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(ABC)$$

3. Công thức tổng quát,

$$\mathbb{P}\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \ldots$$

CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

VÍ DỤ 3.1

Qua điều tra người dân trong 1 khu vực, biết 40% *người dân mắc bệnh viêm mũi,* 55% *bị tổn thương thính giác và* 30% *bị cả hai loại bệnh. Chọn ngẫu nhiên một người trong khu vực. Tính xác suất để người được chọn là*

(A) *Người bị bệnh (viêm mũi hay tổn thương thính giác).*

(B) *Không bị cả hai loại bệnh trên.*

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Giả sử rằng trong một hệ thống truyền tín hiệu, cứ 1000 bit được truyền đi thì có 1 bit bị lỗi. Tuy nhiên từ những thông số kỹ thuật chúng ta biết rằng nếu một bit bị lỗi thì có khả năng sẽ kéo theo các bit tiếp theo cũng bị lỗi.

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Giả sử rằng trong một hệ thống truyền tín hiệu, cứ 1000 bit được truyền đi thì có 1 bit bị lỗi. Tuy nhiên từ những thông số kỹ thuật chúng ta biết rằng nếu một bit bị lỗi thì có khả năng sẽ kéo theo các bit tiếp theo cũng bị lỗi.
==> Xác suất để một bit bất kỳ bị lỗi là 1/1000. Nhưng giả sử nếu bit thứ 3 bị lỗi vậy thì xác suất để bit thứ 4 bị lỗi > 1/1000.

ĐỊNH NGHĨA 3.1

Xác suất có điều kiện, ký hiệu $P(A|B)$, nghĩa là xác suất xảy ra biến cố A nếu biết trước biến cố B đã xảy ra.

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

VÍ DỤ 3.2

Giả sử rằng chúng ta muốn khảo sát điểm thi cuối kì của các em sinh viên trong một lớp học. Nếu biết rằng sinh viên sẽ qua môn nếu điểm cuối kì ≥ 5 *và không qua môn nếu điểm cuối kì* < 5, *và giả sử rằng điểm số của một sinh viên là một số nguyên ngẫu nhiên từ 1 đến 10. Chọn một sinh viên bất kì, nếu gọi biến cố A là sinh viên qua môn, và biến cố B là sinh đạt điểm* 8. *Hãy lần lượt tính* $P(A|B)$ *và* $P(B|A)$.

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

ĐỊNH NGHĨA 3.2 (CONDITIONAL PROBABILITY)

Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{4}$$

Tương tự, với $P(A) > 0$, xác suất xảy ra biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra là

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0 \tag{5}$$

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

VÍ DỤ 3.3

Một nhóm gồm 300 người trong đó có 200 nam và 100 nữ. Trong 200 nam có 100 người hút thuốc. Trong 100 nữ có 20 người hút thuốc. Chọn ngẫu nhiên một người

(A) *Biết đã chọn được nữ, tính xác suất người đó là người hút thuốc?*

(B) *Biết đã chọn được người hút thuốc, tính xác suất người đó là nam?*

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

VÍ DỤ 3.4

Người ta kiểm tra 400 đĩa CD và ghi nhận chất lượng của các chiếc đĩa dựa trên 2 tiêu chí: Có vết xước (Có/Không) và vẫn hoạt động (Có/Không). Kết quả được tổng kết như bảng bên dưới.

		Vết xước	
		Có	không
Hoạt động	Có	10	18
	Không	30	342

Giả sử rằng một chiếc đĩa được lựa chọn ngẫu nhiên hãy tính các xác suất sau.

- (A) *Chiếc đĩa được chọn vẫn hoạt động.*
- (B) *Chiếc đĩa được chọn vẫn hoạt động biết rằng nó có vết xước.*
- (C) *Chiếc đĩa được chọn vẫn hoạt động biết rằng nó không có vết xước.*

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

TÍNH CHẤT XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- $0 \le P(A|B) \le 1$

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

TÍNH CHẤT XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(B|B) = 1$

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

TÍNH CHẤT XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(B|B) = 1$
- Nếu $AC = \emptyset$ thì $P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất xác suất có điều kiện

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(B|B) = 1$
- Nếu $AC = \emptyset$ thì $P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$
- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

HỆ QUẢ 3.1 (MULTIPLICATION RULE)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

HỆ QUẢ 3.1 (MULTIPLICATION RULE)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT TỔNG QUÁT

Cho A_i $(i = 1, ..., n)$ là họ n biến cố, khi đó

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$$

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

VÍ DỤ 3.5

Một hộp có 20 ống thuốc, trong đó có 5 ống thuốc kém chất lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 3 ống thuốc. Tính xác suất

(A) *Lấy được 3 ống thuốc tốt.*

(B) *Lấy được 2 ống thuốc tốt, 1 kém chất lượng.*

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ

ĐỊNH NGHĨA 3.3 (DẠNG ĐƠN GIẢN)

Cho hai biến cố A và B. Khi đó

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

ĐỊNH NGHĨA 3.4 (DẠNG TỔNG QUÁT)

Cho A_i $(i = 1, \ldots, n)$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là một biến cố nào đó liên quan đến hệ thì

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n) \tag{6}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \tag{7}$$

Sự độc lập giữa các biến cố

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập (independent) với nhau nếu

$$P(AB) = P(A).P(B) \tag{8}$$

Suy ra, nếu A độc lập với B thì

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 3.6

Khảo sát giới tính của những đứa con trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không?
Không gian biến cố sơ cấp của phép thử: $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$ *Đặt:*
$A =$ *"Con đầu là con trai"*$= \{TT, TG\}$
$B =$ *"Con thứ hai là con gái"*$= \{TG, GG\}$
Ta có:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

và $P(AB) = \dfrac{1}{4} = P(A).P(B)$. *Vậy A, B độc lập.*

Sự độc lập giữa các biến cố

n BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$
$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập ba (i, j, k), ... của n chỉ số.

Sự độc lập giữa các biến cố

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$$
$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập ba (i, j, k), ... của n chỉ số.

Chú ý:

Sự độc lập từng đôi không dẫn đến sự độc lập toàn phần.

SỰ ĐỘC LẬP GIỮA CÁC BIẾN CỐ

VÍ DỤ 3.7

Xét phép thử ngẫu nhiên có các kết quả đồng khả năng

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Đặt: $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$ *thì*

$$P(AB) = P(A).P(B)$$
$$P(AC) = P(A).P(C)$$
$$P(BC) = P(B).P(C)$$

nhưng

$$P(ABC) \neq P(A).P(B).P(C)$$

Công thức Bayes

Định nghĩa 3.5 (Dạng đơn giản)

Cho hai biến cố A và B bất kì. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Định nghĩa 3.6 (Dạng tổng quát)

Cho A_i $(i = 1, \ldots, n)$ là hệ đầy đủ các biến cố, B là một biến cố nào đó liên quan đến hệ sao cho $P(B) > 0$. Khi đó với mọi i $(i = 1, \ldots, n)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{9}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP 3.1

Có 10 *lá thăm, trong đó có* 4 *thăm có thưởng. Sinh viên A rút trước, B rút sau.*

(A) *Hỏi trò chơi có công bằng không?*

(B) *Nếu B được thưởng, tính xác suất A được thưởng?*

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP 3.2

Tỷ lệ bệnh B tại một địa phương bằng $0,02$. *Dùng một phản ứng giúp chẩn đoán, nếu người bị bệnh thì phản ứng dương tính* 95%; *nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính* 10%.

(A) *Tìm xác suất dương tính của phản ứng.*

(B) *Một người làm phản ứng thấy dương tính, tìm xác suất người đó là người bị bệnh.*

(C) *Tìm xác suất chẩn đoán đúng của phản ứng.*