Chương 1

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

MẢNG BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. Đời sống.
2. Vật lý.
3. Kỹ thuật.
4. Y tế, sinh học.
5. Môi trường.
6. Kinh doanh, kinh tế.

1 Hàm số

1. **Ý nghĩa của $f(x_0, y_0)$ trong bài toán thực tế**

   Một khu vực cho thuê chỗ bán hàng Tết thông báo giá thuê chỗ như sau: giá dọn dẹp là 2500 đồng, giá thuê là 20000 đồng mỗi ngày tính trên mỗi mét chiều dài chỗ thuê.

   a/ Biểu diễn giá thuê chỗ (ngàn đồng) của một người bán hàng như 1 hàm theo 2 biến $T(n, x)$: n ngày thuê, x số mét thuê.

   b/ Từ kết quả trên, tính $T(5, 8)$ và nêu ý nghĩa của kết quả vừa tính.

2. **Miền xác định của hàm số.**

Câu 1. Tìm miền xác định D_f của hàm

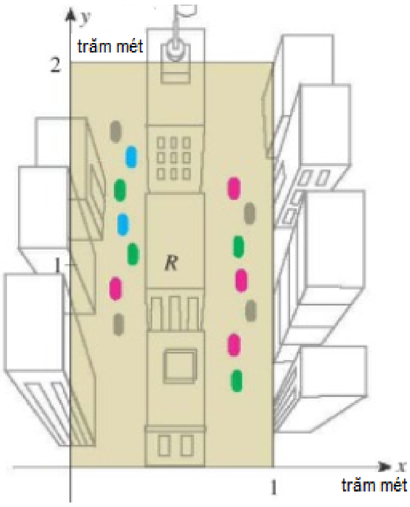
$$f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \ln\left(4 - 2x^2 - y^2\right)$$

Câu 2. Trung tâm tài chính của một thành phố là vùng R trong hình vẽ dưới đây. Giá trị đất (triệu đồng/ m^2) ở quanh trung tâm được tính theo hàm:

$$p(x,y) = 200 - 10\,(0.01x - 0.5)^2 - 15\,(0.01y - 1)^2$$

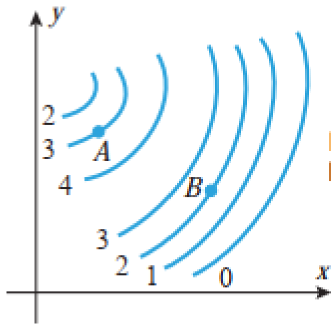
(a) Tìm miền xác định của hàm $p(x,y)$

(b) Tính $p(0.5;1), p(0;0)$, có nhận xét gì về các kết quả vừa tính.



3. **Đường mức, contour map: vẽ đường mức, ý nghĩa đường mức, đọc contour map.**

Câu 1. Hình dưới là bản đồ đường mức cho hàm độ cao (tính bằng trăm mét) của một vùng đất. Trả lời các câu hỏi sau:



a/ Xuất phát tại A và di chuyển sao cho y không đổi và x tăng, độ cao sẽ bắt đầu tăng hay giảm?

b/ Xuất phát tại B và di chuyển sao cho x không đổi và y giảm, độ cao sẽ bắt đầu tăng hay giảm?

Câu 2. Vẽ các đường mức $z = k$ của hàm số$z = f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$ ứng với $k = 0,\ 5$.

4. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a/ $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 2y = 4$

b/ $x^2+y^2-2z^2-4x+2y=4$

c/ $x+4y^2-z^2+4y=1$

d/ $2y+4z^2=2z$

2 Đạo hàm riêng và vi phân hàm nhiều biến

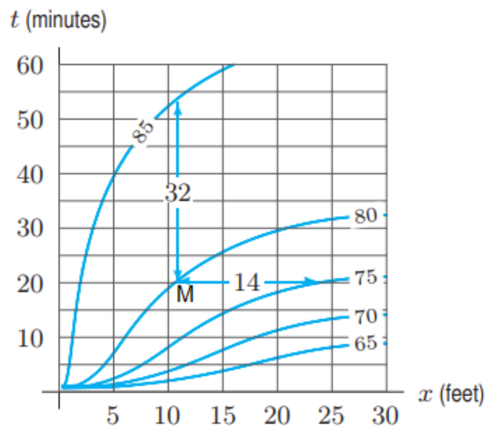
2.1 Đạo hàm riêng cấp 1

1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa

   Cho hàm số $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Tính f'_x, f'_y tại $(1;0),\ (0;0)$.

2. (Xét dấu đạo hàm dựa trên bản đồ mức)

   Hình dưới cho thấy bản đồ đường mức cho nhiệt độ H ($^\circ F$) trong phòng dưới dạng hàm theo khoảng cách x (feet) từ lò sưởi và thời gian t (phút) sau khi bật lò sưởi . Xác định dấu của 2 đạo hàm riêng (đhr) H'_x, H'_t tại điểm M trên hình vẽ.



3. Tính các đạo hàm riêng $f'_x,\ f'_y$ của hàm dưới đây trên miền xác định của nó.

   a/ $f(x,y,z)=\ln(x^2+2yz)+xe^{y-z}$

   b/ $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2-3xy}+\arctan\dfrac{y}{x}$

4. Ý nghĩa hình học của đhr (hệ số góc tiếp tuyến).

   Cho parabol (P) là giao tuyến của mặt yên ngựa $x^2-y^2-2x-4y=z$ với mặt phẳng $x=0.5$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với (P) tại điểm $M(0.5;-2.5;3)$

5. Ý nghĩa thực tế của đhr: sự biến thiên của f khi $M(x,y)$di chuyển qua (x_0,y_0) theo chiều dương trục Ox, Oy.

   a/ Nhiệt độ ($^\circ$ C) tại một điểm (x,y) trên một tấm kim loại trong mặt phẳng Oxy là $T(x,y)=x^3+2y^2+x$

Giả sử rằng khoảng cách được đo bằng centimet. Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ theo khoảng cách nếu ta bắt đầu tại điểm $(1, 2)$ và di chuyển:

- Sang bên phải và song song với trục x.
- Hướng lên và song song với trục y.

b/ Lợi nhuận hàng tháng P (tính bằng ngàn đồng) của một cửa hàng bách hóa nhỏ phụ thuộc vào giá trị hàng tồn kho x (tính bằng triệu đồng) và diện tích sàn y (tính bằng m^2) có sẵn để trưng bày hàng hóa, được mô hình hóa bằng hàm

$$P(x, y) = -0.02x^2 - 15y^2 + xy + 39x + 25y - 20000$$

Tính P'_x, P'_y khi $x = 4000$ và $y = 150$, giải thích kết quả.

2.2 Đạo hàm cấp cao

1. Tính các đạo hàm cấp 2 của $f(x, y) = x^3 \sin y + y^2 \sin x$ tại $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Tính $f'''_{xyz}(1, 2, -2)$ với $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$

2.3 Vi phân hàm nhiều biến

1. Tính vi phân cấp 1, cấp 2 tại $(1, -1)$ của $f(x, y) = xy + e^{x+y}$
2. Cho $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5xy$, Tính d$d(1, 2)$ nếu $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = -0.1$.
3. Một trong các công thức tính diện tích da người (m^2) được các bác sĩ sử dụng khi kê toa thuốc cho bệnh nhân là $\frac{\sqrt{HW}}{60}$, trong đó H là chiều cao tính bằng centimet, W là cân nặng tính bằng kilograms. Dùng vi phân để ước tính sai số của diện tích da của một bệnh nhân cao 1m67, cân nặng 62 kg biết khi đo chiều cao có sai số là $\Delta H = 1$cm và cân nặng có sai số là $\Delta W = 0.2$kg .

2.4 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. Tính đạo hàm, vi phân cấp 1 của hàm hợp tại 1 điểm cho biểu thức cụ thể.

a/ Cho hàm $z = x^2y - 3xy^2 + 2x + 4y$, trong đó $x = ue^v, y = \ln(1 + u^2 + v^2)$. Tính z'_u, z'_v tại $u = 1, v = 0$, suy ra $\mathrm{d}z(1,0)$ theo $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$.

b/ Cho hàm $z = e^{x+y} + x^2 - 2y$, trong đó $x = \sin 2t, y = \cos(2t + \pi)$. Tính $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(\frac{\pi}{4})$.

c/ Cho hàm $y = \arctan(x^2 + 1)$, trong đó $x = u^v + 2u - 5v$. Tính $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$ tại $(u, v) = (2, 0)$.

d/ Cho hàm $z = \frac{x + y}{1 + x^2}$, trong đó $y = \arctan\frac{1}{x}$. Tính $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ tại $x = \sqrt{3}$.

2. Bài toán thực tế.

Nhiệt độ (độ C) tại điểm (x, y) trên một tấm kim loại được cho bởi hàm $T(x, y)$. Một con bọ điện tử bò theo đường cong C có phương trình tham số $x = \sqrt{1 + t}, y = 2 + \frac{t}{3}$, trong đó x, y tính bằng centimet. Cho biết hàm nhiệt độ thỏa $T'_x(2, 3) = 4, T'_y(2, 3) = 3$, tính tốc độ thay đổi của nhiệt độ trên đường đi của con bọ sau 3 giây.

2.5 Đạo hàm vi phân hàm ẩn

Tính đạo hàm, vi phân cấp 1 của hàm ẩn 1 biến, 2 biến tại điểm cụ thể.

1. Cho hàm $y = y(x)$ xác định từ phương trình $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Tính $\frac{\mathrm{d}y(1)}{\mathrm{d}x}$ biết $y(1) = 1$.

2. Cho hàm $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $x^2 + y + z = e^{-z}$. Tính z'_x, z'_y, $\mathrm{d}z$ tại $(1, 0)$, biết $z(1, 0) = 0$.

2.6 Đạo hàm theo hướng

1. Cho hàm $f(x, y) = e^{x+y}$, điểm $M(1, -1)$ và vecto $\vec{a} = (3, -4)$. Tính $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M)$.

2. Cho hàm $f(x, y, z) = 3xyz - x^2 + \ln(y + z)$, điểm $M(2, -1, 2)$ và vecto $\vec{a} = (2, -2, 1)$. Tính $\nabla f(0, -1, 2)$ và $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M)$.

3. Cho hàm $f(x, y) = \frac{y}{x + y}$. Tìm vecto đơn vị $\vec{a}$ sao cho $f'_{\vec{a}}(2, 3) = 0$.

4. Cho hàm $f(x, y) = \frac{y}{x + y}$.

a/ Tìm vecto đơn vị $\vec{a}$ sao cho $\dfrac{\partial f(2,3)}{\partial \vec{a}}(2,3) = 0$.

b/ Tìm hướng tăng nhanh nhất của f khi đi qua $(2,3)$.

5. Trên một ngọn núi, độ cao z tại một điểm (x,y) trong một mặt phẳng Oxy ở độ cao bằng mực nước biển được cho bởi hàm

$$z = 2000 - 0.02x^2 - 0.04y^2,$$

trong đó x, y, z tính bằng mét. Giả sử hướng của trục Ox là đông, và hướng của trục Oy là bắc. Một người leo núi đang ở điểm $P(-20, 5, 1991)$.

a/ Nếu người leo núi đi bộ về phía tây thì người đó sẽ bắt đầu đi lên hay đi xuống?

b/ Nếu người leo núi đi bộ về phía đông bắc thì người đó sẽ bắt đầu đi lên hay đi xuống? Độ dốc là bao nhiêu?

c/ Để đi bộ theo hướng dốc nhất của núi thì người này nên đi theo hướng nào?

2.7 Tiếp diện, vector pháp tuyến (pháp vector) của mặt cong

1. Viết phương trình tiếp diện tại M_0 với mặt cong S:

a/ Mặt S có phương trình $z = ye^{-x}$, điểm $M_0(0,2,2)$.

b/ Mặt S có phương trình $xy + 2yz - 5zx + 5 = 0$, điểm $M_0(1,1,2)$.

c/ Mặt S có phương trình tham số $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ thì vecto pháp tuyến của mặt tại điểm M_0 ứng với $(u,v) = (u_0, v_0)$ là :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

Áp dụng: Tìm phương trình tiếp diện của các mặt cong:

i/ $x = u^2 + 1, y = v^3 + 1, z = u + v, M_0(5,2,3)$

ii/ $x = u^2, y = 2u\sin v, z = u\cos v, (u_0, v_0) = (1, 0)$

2. Tìm pháp vector của mặt cong với 3 dạng trên.

2.8 Cực trị, Giá trị lớn nhất-Giá trị nhỏ nhất

1. • Tìm cực trị tự do của các hàm số $f(x,y)$ dưới đây.

   a/ $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$

   b/ $f(x,y) = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{b^3}{y}, a \neq 0, b \neq 0$

   c/ $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$

   d/ $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2\ln x - 12\ln y^2$

   • Ứng dụng

   Câu 1. Người ta làm 1 hồ cá thể tích 500cm^3 với đáy là đá granit và 4 mặt xung quanh bằng kính. Nếu giá 1m^2 đá cao gấp 5 lần kính thì cần làm hồ với kích thước thế nào để tiết kiệm chi phí nhất?

   Câu 2. Ban quản lý của một siêu thị đã xác định rằng số lượng bán mỗi tuần đối với bông cải xanh là x và đối với bông cải trắng là y (cả hai đều tính bằng kg) tương ứng với đơn giá p và q (tính bằng mười ngàn đồng) của chúng theo phương trình: $x = 640 - 40p - 20q$ và $y = 560 - 20p - 40q$ Siêu thị nên tính giá bao nhiêu cho mỗi loại để tối đa hóa doanh thu hàng tuần? Khi đó họ sẽ bán được bao nhiêu kg mỗi loại? Doanh thu tối đa là bao nhiêu?

2. Nhân tử Lagrange của $f(x,y)$. Không dạy cực trị điều kiện.

   Xác định hàm Lagrange $L(x,y)$ của $f(x,y) = xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$, từ đó xác định nhân tử Lagrange λ và điểm dừng của L.

3. Tìm min, max hàm $f(x,y)$ trên miền đóng và bị chặn (miền đặt, đường cong hữu hạn).

   Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = xy$ trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

1 Tích phân kép

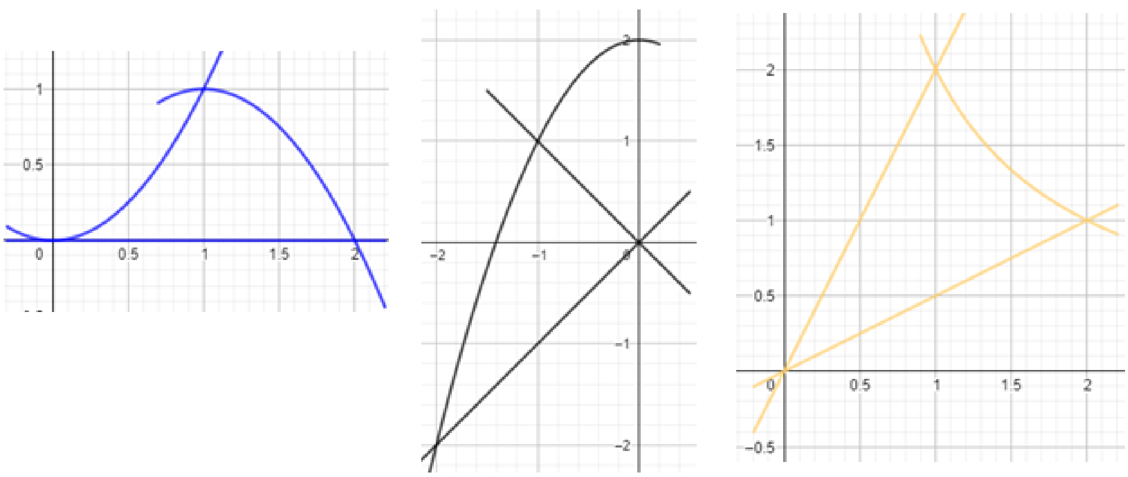
1.1 Tọa độ Descartes

1. **Nhận Dạng miền lấy tích phân** D: Xác định từng miền trong mặt phẳng Oxy ở hình vẽ dưới đây tương ứng với các biểu thức D_1, D_2, D_3 nào.

   $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2 - x^2, x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$

   $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, y \leq 2x - x^2, y \geq 0\}$

   $D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \dfrac{2}{x}, \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2x\right\}$



2. Tính tích phân lặp và vẽ hình miền tính tích phân

$$I_3 = \int\limits_{-2}^{3} \mathrm{d}x \int\limits_{x^2-9}^{x-3} 2y\mathrm{d}y$$

3. Tính tích phân kép với miền D cho trước:

$$I_1 = \iint\limits_D (x - 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x + y \geq 0, y \geq 0$$

$$I_2 = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : y = x^2 - 2x, y = x, y = 0$$

4. Mô tả bằng hình vẽ vật thể dạng trụ cong có thể tích được tính bằng tích phân bên dưới (đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, nắp trên là mặt cong $z = f(x, y)$, $f(x, y)$ là hàm dưới dấu tích phân):

$$I_9 = \iint\limits_D \left(4 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 \leq 4$$

5. Tính giá trị trung bình của $f(x, y)$ trên miền D.

$f(x, y) = x \sin y, D$ giới hạn bởi các đường cong $y = 0, y = 1, y = x^2$

6. Không làm các bài tập đổi thứ tự tích phân lặp

1.2 Đổi biến tọa độ cực

1. Viết cận các tích phân sau khi đổi biến $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

a/ $I_1 = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 + 2x = 0, x + y = 0, x = 0$

b/ $I_2 = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 2$

2. Tính tích phân sau

$$I_5 = \iint\limits_D (y + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y$$

3. Tính các tích phân sau bằng cách sử dụng **tọa độ cực mở rộng**

a/ $I_7 = \iint\limits_D (2x - y + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : x^2 + y^2 + 4y \leq 2x, 2x + y \leq 0$

b/ $I_8 = \iint\limits_D (2x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1, 3x + 2y \leq 0, x \leq 0$

1.3 Ứng dụng

1. Tính diện tích các miền phẳng dưới đây:

   D1 $=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq -2x,\ x+\sqrt{3}y \leq 0, y \geq 0\right\}$

   D2 $=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=e^x, x+y=1, y=4\right\}$

2. Tính thể tích vật thể $V i$ giới hạn bởi các mặt cong dưới đây:

   V1 $: z=0, z=x^2+y^2=4, y=x^2, y=1$

   V2 $: z \geq 0, z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \geq 1$

3. Tính khối lượng mảnh phẳng D có hàm mật độ $\rho(x, y)=4-y$ tại mỗi điểm $(x, y) \in D$:

   $D=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=0, x+y=2, y=0\right\}$, với $\rho(x, y)=4-y$

2 Tích phân bội ba

2.1 Tọa độ Descartes

Tính các tích phân sau:

1. $I_1=\iiint\limits_{\Omega}(2z-x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$,

   Ω giới hạn bởi các mặt $y=4-x^2, y=2+x^2, z=2, z=-2x$.

2. $I_2=\iiint\limits_{\Omega}(z \sqrt{x^2+y^2}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$,

   Ω giới hạn bởi các mặt $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. $I_3=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \Omega$ giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2, z=2x$.

2.2 Đổi biến

1. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ trụ:

   a/ $I_3=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \Omega$ giới hạn bởi các mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=x^2+y^2$

b/ $I_4 = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Ω giới hạn bởi các mặt cong $x^2 + z^2 = 1, x^2 + z^2 = 4, y = 1, y = -1$

2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ cầu thường: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho\cos\theta$.

a. $I_1 = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Ω giới hạn bởi các mặt cong $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, z \geq 0$

b. $I_2 = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Ω giới hạn bởi $\Omega = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0, y \geq x, y \geq -x\sqrt{3}\right\}$

c. $I_3 = \iiint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Ω giới hạn bởi $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, y \leq x\right\}$

2.3 Ứng dụng

1. Tính thể tích các vật thể V dưới đây:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z = 0, y = x, y = -x\sqrt{3}\right\}$$

2. Tính khối lượng vật thể V với khối lượng riêng (hàm mật độ) tại mỗi điểm $(x, y, z) \in V$ tương ứng.

3. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - x^2 - y^2, z \geq 2x\}\,; \rho(x, y, z) = 4 - z$

4. Tính giá trị trung bình của hàm $f(x, , z)$ trên khối Ω tương ứng:

5. $f(x, y, z) = x + y + z; \Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right\}$