PGS. TS Trịnh Văn Quang

PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN & PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG TRUYỀN NHIỆT

Bài giảng môn Truyền nhiệt
cho các lớp cao học Cơ khí

Bộ môn Kỹ Thuật nhiệt – Khoa Cơ khí
ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NÔI
Hà nội -2009

Mục lục

Lời nói đầu

Do yêu cầu giải quyết các bài toán thực tế, nhiều năm qua đã có nhiều phương pháp số phát triển. Phương pháp phổ biến nhất được sử dụng trong kỹ thuật tính nhiệt là các phương pháp sai phân hữu hạn, thể tích hữu hạn và phần tử hữu hạn…ngoài ra còn có phương pháp phần tử biên giới. ở đây nêu nội dung cơ bản của ba phương pháp đầu.

- *Phương pháp Sai phân hữu hạn* (SPHH) là phương pháp số tương đối đơn giản và ổn định. Nội dung của phương pháp này là biến đổi một cách gần đúng các đạo hàm riêng của phương trình vi phân chủ đạo thành thương của các số gia tương ứng. Bằng cách dùng các họ đường song song với các trục toạ độ để tạo thành một mạng lưới chia miền nghiệm trong vật thể thành một số hữu hạn các điểm nút, rồi xác định nhiệt độ của phần tử tại các nút đó thay cho việc tính nhiệt độ trên toàn miền. Như vậy phương pháp SPHH đã xấp xỉ các phương trình vi phân đạo hàm riêng thành các phương trình đại số. Kết quả thiết lập được hệ phương trình đại số gồm n phương trình tương ứng với giá trị nhiệt độ của n nút cần tìm.

Mức độ chính xác của nghiệm trong phương pháp SPHH có thể được cải thiện nhờ việc tăng số điểm nút. Phương pháp SPHH rất hữu hiệu trong việc giải nhiều bài toán truyền nhiệt phức tạp mà phương pháp giải tích gặp khó khăn. Bởi vậy trong các giáo trình truyền nhiệt hiện đại, phương pháp SPHH được trình bày khá kỹ cho chương trình đại học (Holman ..). Tuy nhiên khi gặp phải vật thể có hình dạng bất quy tắc hoặc điều kiện biên giới bất thường, phương pháp SPHH cũng có thể khó sử dụng.

- *Phương pháp thể tích hữu hạn* (TTHH) có tinh tế hơn phương pháp SPHH và trở nên phổ biến trong kỹ thuật tính nhiệt và động học dòng chảy (Patankar 1980). Trong tính nhiệt, phương pháp TTHH dựa trên cơ sở cân bằng năng lượng của phân tố thể tích. Kỹ thuật thể tích hữu hạn tập trung vào điểm giữa phân tố thể tích rất tương tự với phương pháp SPHH (Malan et al 2002).

PHẦN 1. PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

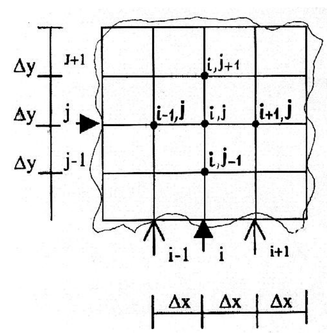
2.1 . Bài toán ổn định hai chiều

1. Phương trình sai phân hữu hạn

Phương trình vi phân dẫn nhiệt ổn định hai chiều có dạng :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Xây dựng phương trình sai phân hữu hạn (SPHH) như sau :
Chia vật thể bởi một mạng các đường vuông góc có bước mạng Δx, Δy, ứng với hai chiều x,y. Khi đó tại điểm nút i,j các đạo hàm bậc nhất và bậc hai của nhiệt độ viết dạng sai phân như sau (hình 2.1) :



Hình 2.1. Mạng các điểm nút

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta x)^2} = \frac{(T_{i+1j} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{(\Delta x)^2} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta y)^2} = \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{(\Delta y)^2} \qquad (2.3)$$

Thay (2.2) và (2.3) vào phương trình vi phân (2.1) sẽ được :

$$\frac{(T_{i+1j} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{(\Delta x)^2} + \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad (2.4)$$

(2.4) là phương trình SPHH dẫn nhiệt viết cho điểm nút (i,j)

2. Xây dựng hệ phương trình bậc nhất

Để giải (2.4) , có thể chọn $\Delta x = \Delta y$. Khi đó sẽ được :

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) \qquad (2.5)$$

Vậy nhiệt độ tại điểm nút bằng trung bình cộng của bốn điểm nút xung quanh .

Từ (2.5) viết lần lượt cho các điểm, rồi chuyển các nhiệt độ đã biết sang vế phải, các nhiệt độ chưa biết sang vế trái, sắp xếp lại sẽ được n phương trình cho n điểm nút chưa biết nhiệt độ bên trong vật, tạo thành hệ phương trình bậc nhất :

$$\left.\begin{array}{llllll} a_{11}T_1 & +a_{12}T_2 & +\ldots+ & +a_{1n}T_n & = & C_1 \\ a_{21}T_1 & +a_{22}T_2 & +\ldots+ & +a_{21}T_n & = & C_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & = & \\ a_{n1}T_1 & +a_{n2}T_2 & +\ldots+ & +a_{nn}T_n & = & C_n \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Từ đó có thể giải ra các nhiệt độ cần tìm bằng các phương pháp: Gauss, Gauss Seidel, Gauss Jordan, Ma trận nghịch đảo ...

2.2 . Bài toán dẫn nhiệt không ổn định một chiều

1. Phương pháp Ma trận nghịch đảo

Phương trình vi phân dẫn nhiệt không ổn định 1 chiều :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

a. Các điểm bên trong vật

Gọi p là thời điểm trước, (p+1) là thời điểm sau. Phương trình (2.7) được sai phân hoá như sau :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta \tau} \tag{2.8}$$

Vế phải của (2.8) viết cho thời điểm sau (p+1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta x)^2} = \frac{(T_{i-1}^{p+1} - T_i^{p+1}) - (T_i^{p+1} - T_{i+1}^{p+1})}{(\Delta x)^2} \tag{2.9}$$

thay (2.8) và (2.9) vào (2.7):

$$\frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta \tau} = a\frac{(T_{i-1}^{p+1} - T_i^{p+1}) - (T_i^{p+1} - T_{i+1}^{p+1})}{(\Delta x)^2} \tag{2.10}$$

(2.10) là phương trình SPHH dẫn nhiệt không ổn định 1 chiều, để giải (2.10) cần biến đổi:

$$\frac{a.\Delta \tau}{(\Delta x)^2}(T_{i-1}^{p+1} - 2T_i^{p+1} + T_{i+1}^{p+1}) = T_i^{p+1} - T_i^p \tag{2.11}$$

Đặt $Fo = \dfrac{a.\Delta \tau}{(\Delta x)^2}$ sẽ được

$$T_i^{p+1} - T_i^p = Fo.(T_{i-1}^{p+1} - 2T_i^{p+1} + T_{i+1}^{p+1}) \tag{2.12}$$

vậy :

$$-FoT_{i-1}^{p+1} + (1+2Fo)T_i^{p+1} - Fo.T_{i+1}^{p+1} = T_i^p \tag{2.13}$$

Phương trình (2.13) biểu thị các nhiệt độ tại thời điểm sau theo nhiệt độ tại thời điểm trước.

b. Các điểm trên biên

Các điểm trên biên có i = 1. Phân tố bề mặt vật có bề dày Δx/2, diện tích Δy.Δz = 1m×1m, nhận nhiệt từ môi trường và nhiệt từ phân tố liền kề phía trong (i = 2)

- Dòng toả nhiệt từ môi trường bên ngoài tới sau thời gian Δτ :

$$q_h = h\left(T_K^{p+1} - T_1^{p+1}\right)\Delta\tau \qquad (2.14)$$

- Dòng nhiệt dẫn từ phân tố bên trong tới sau thời gian Δτ:

$$q_k = \frac{k}{\Delta x}(T_2^{p+1} - T_1^{p+1})\Delta\tau \qquad (2.15)$$

Độ tăng nội năng dU phân tố sau thời gian Δτ :

$$dU = c\rho.\Delta V(T_1^{p+1} - T_1^{p}) = c\rho\frac{\Delta x}{2}(T_1^{p+1} - T_1^{p}) \qquad (2.16)$$

Độ tăng nội năng dU bằng tổng hai dòng nhiệt trên :

$$h\left(T_K^{p+1} - T_1^{p+1}\right)\Delta\tau + \frac{k}{\Delta x}(T_2^{p+1} - T_1^{p+1})\Delta\tau = c\rho\frac{\Delta x}{2}(T_1^{p+1} - T_1^{p}) \qquad (2.17)$$

$$2\frac{k}{c\rho}\frac{h\Delta x}{k}\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left(T_K^{p+1} - T_1^{p+1}\right) + 2\frac{k}{c\rho}\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}(T_2^{p+1} - T_1^{p+1}) = T_1^{p+1} - T_1^{p} \qquad (2.18)$$

Đặt $Fo = \frac{a.\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$, $Bi = \frac{h.\Delta x}{k}$, $a = \frac{k}{c\rho}$; Fo là tiêu chuẩn Phuriê, Bi là tiêu chuẩn Biô, a là hệ số khuyếch tán nhiệt độ sẽ được :

$$2Bi.Fo\left(T_K^{p+1} - T_1^{p+1}\right) + 2Fo(T_2^{p+1} - T_1^{p+1}) = T_1^{p+1} - T_1^{p}$$

Chuyển nhiệt độ và các đại lượng đã biết sang vế phải

$$\left(2Bi.Fo + 2Fo + 1\right).T_1^{p+1} - 2Fo.T_2^{p+1} = 2Bi.Fo.T_K^{p+1} + T_1^{p} \qquad (2.19)$$

(2.13) và (2.19) là các phương trình dạng hàm ẩn đối với nhiệt độ cần tìm các điểm ở thời điểm sau theo nhiệt độ thời điểm trước và nhiệt độ môi trường. Từ đó có thể thành lập hệ phương trình tuyến tính các nhiệt độ cần tìm sau :

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11}T_1 & +a_{12}T_2 & +\ldots+ & +a_{1n}T_n & = & C_1 \\ a_{21}T_1 & +a_{22}T_2 & +\ldots+ & +a_{21}T_n & = & C_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & = & \\ a_{n1}T_1 & +a_{n2}T_2 & +\ldots+ & +a_{nn}T_n & = & C_n \end{array}\right\} \qquad (2.20)$$

trong đó:

a_{ij} là các hệ số của nhiệt độ phải tìm,

T_i là nhiệt độ cần tìm ở thời điểm (p+1), viết gọn của T_i^{P+1}

C_i là các hệ số chính là nhiệt độ đã biết ở thời điểm trước

Hệ trên viết dạng ma trận như sau :

$$\left[a_{ij}\right]\left\{T_i\right\} = \left\{C_i\right\} \qquad (2.21)$$

trong đó:

$\left[a_{ij}\right]$ là ma trận vuông gồm các hệ số của nhiệt độ phải tìm,

$\left\{T_i\right\}$ là ma trận cột gồm nhiệt độ cần tìm ở thời điểm (p+1)

$\left\{C_i\right\}$ là ma trận cột gồm các hệ số chính là nhiệt độ đã biết ở thời điểm trước

Từ đó giải ra các nhiệt độ cần tìm tại thời điểm (p+1):

$$\{T_i\} = [a_{ij}]^{-1}\{C_i\} \tag{2.22}$$

$[a_{ij}]^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của $[a_{ii}]$,

Sau khi giải ra các nhiệt độ tại thời điểm nào đó, thì các nhiệt độ đã biết này trở thành hệ số $[C_i]$ trong phương trình (2.22) để tính các nhiệt độ ở thời điểm tiếp theo

2. Phương pháp tính lặp

a. Các điểm bên trong vật

Gọi p là thời điểm trước, (p+1) là thời điểm sau. Phương trình (2.7) được sai phân hoá như sau :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta \tau} \tag{2.23}$$

Vế phải của (2.7) viết cho thời điểm trước p :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta x)^2} = \frac{(T_{i-1}^p - T_i^p) - (T_i^p - T_{i+1}^p)}{(\Delta x)^2} \tag{2.24}$$

thay (2.23)và (2.24)vào (2.7) :

$$\frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta \tau} = a\frac{(T_{i-1}^p - T_i^p) - (T_i^p - T_{i+1}^p)}{(\Delta x)^2} \tag{2.25}$$

Để giải (2.25) cần biến đổi như sau :

$$T_i^{p+1} - T_i^p = \frac{a.\Delta \tau}{(\Delta x)^2}(T_{i-1}^p - 2T_i^p + T_{i+1}^p) \tag{2.26}$$

Đặt $Fo = \dfrac{a.\Delta \tau}{(\Delta x)^2}$ sẽ được :

$$T_i^{p+1} - T_i^p = Fo.(T_{i-1}^p - 2T_i^p + T_{i+1}^p)$$

Vậy :

$$T_i^{p+1} = Fo.T_{i-1}^p + (1 - 2Fo.)T_i^p + Fo.T_{i+1}^p \tag{2.27}$$

Phương trình (2.27) cho biết mỗi nhiệt độ tại vị trí i ở thời điểm sau (p+1) được tính theo các nhiệt độ ở thời điểm trước. Phương trình có dạng hàm tường, bởi vậy không thể lập ma trận được mà phải tính dần. Có thể áp dụng phương pháp tính lặp.

Để các nghiệm hội tụ cần điều kiện :

$$(1- 2Fo) \geq 0 \tag{2.28}$$

tức là :

$$Fo \leq \frac{1}{2}$$

hay phải chọn bước thời gian đủ nhỏ :

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a} \tag{2.29}$$

b. Các điểm trên biên

Phân tố bề mặt vật có bề dày Δx/2, diện tích Δy.Δz = 1×1 nhận nhiệt từ môi trường và nhiệt từ phân tố phía trong

- Dòng toả nhiệt từ môi trường bên ngoài tới sau thời gian Δτ :

$$q_h = h\left(T_K^p - T_1^p\right)\Delta\tau \tag{2.30}$$

- Dòng nhiệt dẫn từ phân tố bên trong tới sau thời gian Δτ:

$$q_k = \frac{k}{\Delta x}(T_2^p - T_1^p)\Delta\tau \tag{2.31}$$

- Độ tăng nội năng dU phân tố dày Δx/2 sau thời gian Δτ :

$$dU = c\rho.\Delta V(T_1^{p+1} - T_1^p) = c\rho\frac{\Delta x}{2}(T_1^{p+1} - T_1^p) \tag{2.32}$$

- Độ tăng nội năng dU bằng tổng hai dòng nhiệt trên :

$$h\left(T_K^p - T_1^p\right)\Delta\tau + \frac{k}{\Delta x}(T_2^p - T_1^p)\Delta\tau = c\rho\frac{\Delta x}{2}(T_1^{p+1} - T_1^p) \tag{2.33}$$

Hay

$$2\frac{k}{c\rho}\frac{h\Delta x}{k}\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left(T_K^p - T_1^p\right) + 2\frac{k}{c\rho}\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}(T_2^p - T_1^p) = T_1^{p+1} - T_1^p \tag{2.34}$$

Với $Fo = \frac{a.\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$, $Bi = \frac{h.\Delta x}{k}$, $a = \frac{k}{c\rho}$ sẽ được :

$$2Bi.Fo\left(T_K^p - T_1^p\right) + 2Fo(T_2^p - T_1^p) = T_1^{p+1} - T_1^p$$

Chuyển nhiệt độ tại thời điểm sau cần tính sang vế trái, chuyển các đại lượng đã biết và nhiệt độ thời điểm trước sang vế phải

$$T_1^{p+1} = 2Bi.Fo.T_K^p + (1 - 2Fo - 2Bi.Fo)T_1^p + 2FoT_2^p \tag{2.35}$$

(2.35) là phương trình dạng hàm tường cho biết nhiệt độ tại biên thời điểm sau t_1^{p+1} theo nhiệt độ các điểm thời điểm trước.

Điều kiện để xác định T_1^{p+1}, tức nghiệm hội tụ cần phải thoả mãn :

$$(1- 2Fo -2Bi.Fo) \geq 0 \tag{2.36}$$

2.3. Bài toán dẫn nhiệt không ổn định hai chiều

Bài toán dẫn nhiệt không ổn định hai chiều, với điều kiện biên hỗn hợp loại 2 và loại 3 được mô tả bởi

- Phương trình vi phân dẫn nhiệt ổn định hai chiều:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a.\nabla^2 T = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{2.37}$$

- Điều kiên biên loại 2 : với một biên giả sử là chữ nhật có x = 0 ÷ a; y = 0 ÷ b

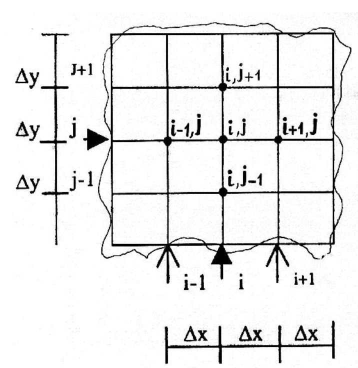
$$\left.\begin{aligned} q|_{x=0} = q_1(\tau) \,;\, q|_{x=a} = q_2(\tau) \\ q|_{y=0} = q_3(\tau) \,;\, q|_{y=b} = q_4(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

- Điều kiện biên loại 3 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}_{|x=0} = -\frac{h_1}{k}\Delta T \,;\, \frac{\partial T}{\partial x}_{|x=a} = -\frac{h_2}{k}\Delta T \\ \frac{\partial T}{\partial x}_{|y=0} = -\frac{h_3}{k}\Delta T \,;\, \frac{\partial T}{\partial x}_{|y=b} = -\frac{h_4}{k}\Delta T \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Đối với các hình phức tạp không thể giải bằng phương pháp giải tích, nên phải dùng phương pháp số . Một trong các phương pháp số là PP SPHH được xây dựng như sau :

Chia vật thể bởi một mạng các đường vuông góc có bước mạng Δx , Δy, ứng với hai chiều x,y. Khi đó tại điểm nút i,j các đạo hàm bậc nhất và bậc hai của nhiệt độ viết dạng sai phân như sau (hình 2.2) :



Hình 2.2. Mạng các điểm nút

a. Các điểm bên trong vật

Tại nút i, j , ở mỗi thời điểm các số hạng có thể viết

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta x)^2} = \frac{(T_{i+1j} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{(\Delta x)^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2.T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta(\Delta T)}{(\Delta y)^2} = \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2.T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \tag{2.41}$$

Riêng đạo hàm theo thời gian luôn có

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}}{\Delta \tau} \tag{2.42}$$

Viết (2.40), (2.41) ở thời điểm p rồi cùng với (2.42) thay vào phương trình vi phân (2.37) sẽ được :

$$\frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}}{\Delta \tau} = \frac{k}{c.\rho}\left(\frac{T_{i-1,j}^{p} - 2.T_{i,j}^{p} + T_{i+1,j}^{p}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{p} - 2.T_{i,j}^{p} + T_{i,j+1}^{p}}{(\Delta y)^2}\right) \tag{2.43}$$

Viết (2.40), (2.41) ở thời điểm (p+1) rồi cùng với (2.42) thay vào phương trình vi phân (2.37) sẽ được :

$$\frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}}{\Delta \tau} = \frac{k}{c.\rho}\left(\frac{T_{i-1,j}^{p+1} - 2.T_{i,j}^{p+1} + T_{i+1,j}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{p+1} - 2.T_{i,j}^{p+1} + T_{i,j+1}^{p+1}}{(\Delta y)^2}\right) \tag{2.44}$$

(2.43) và (2.44) sẽ dẫn tới các hệ phương trình nhiệt độ tại các điểm nút bên trong vật, giải theo phương pháp khác nhau.

- Từ (2.43) sẽ có:

$$T_{i,j}^{p+1} = \left(\frac{T_{i-1,j}^{p} - 2.T_{i,j}^{p} + T_{i+1,j}^{p}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{p} - 2.T_{i,j}^{p} + T_{i,j+1}^{p}}{(\Delta y)^2}\right)\frac{k}{c.\rho}.\Delta \tau + T_{i,j}^{p} \tag{2.45}$$

(2.45) là dạng hàm tường vì vế trái chưá một nhiệt độ tại điểm i,j ở thời điểm (p+1), phải giải bằng phương pháp tính thế dần.

- Từ (2.44) sẽ có:

$$\left(\frac{t_{i-1,j}^{p+1} - 2.t_{i,j}^{p+1} + t_{i+1,j}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{t_{i,j-1}^{p+1} - 2.t_{i,j}^{p+1} + t_{i,j+1}^{p+1}}{(\Delta y)^2}\right).\frac{k}{c.\rho}.\Delta \tau - t_{i,j}^{p+1} = t_{i,j}^{p} \tag{2.46}$$

(2.46) là dạng hàm ẩn vì chưá nhiệt độ các điểm ở thời điểm (p+1). (2.46) tạo thành hệ n phương trình bậc nhất, giải bằng phương pháp ma trận nghịch đảo, có thể chọn bước thời gian Δτ tuỳ ý.

Từ (2.45) và (2.46) có thể tìm được nhiệt độ tại các điểm bên trong vật.

b. Các điểm trên biên

Các điểm trên biên phải áp dụng phương pháp cân bằng năng lượng trên phân tố thể tích .
Tại bề mặt điều kiên loại 2 được quy về điều kiện loại 3 tại thời điểm p như sau :

- Điều kiên loại 2 :

  Dòng bức xạ là $q_R(\tau) = \varepsilon . I^P$, với ε là hệ số hấp thụ của vật, I^P là năng suất bức xạ chiếu tới
- Điều kiên loại 3 :

  Dòng đối lưu từ không khí là $q_K(\tau) = h(T_K^P - T_m^P)$
- Dòng nhiệt tổng :

$$q_\Sigma(\tau) = h(T_K^P - T_m^P) + \varepsilon . I^P = h\left(T_K^P + \frac{\varepsilon . I^P}{h} - T_m^P\right) = h(T_{\Sigma K}^P - T_m^P) \qquad (2.47)$$

trong đó :

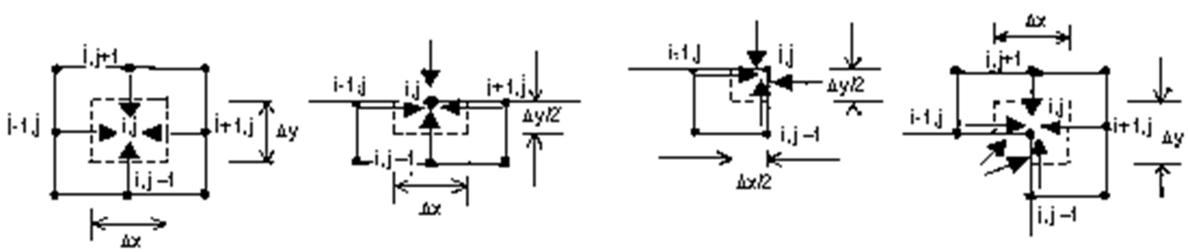
T_K^P , T_m^P là nhiệt độ không khí và nhiệt độ bề mặt của kết cấu

h , ε là hệ số toả nhiệt và hệ số hấp thụ của bề mặt

$\dfrac{\varepsilon . I^P}{h}$ là nhiệt độ quy đổi của bức xạ

$T_{\Sigma K}^P = T_K^P + \dfrac{\varepsilon . I^P}{h}$ là nhiệt độ tương đương của không khí có kể đến bức xạ

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng thì tại phần tử thuộc nút (i,j) tổng các dòng nhiệt nhận dẫn đến phần tử từ xung quanh sau thời gian Δτ bằng độ tăng nội năng của phần tử . Bởi vậy phương trình cân bằng năng lượng viết cho các phần tử (được giới hạn bởi đường nét đứt trong hình) như sau :



Hình 2.3 a Hình 2.3 b Hình 2.3 c Hình 2.3 d.

+ Các phần tử bên trong mặt cắt , hình 2.3 a : Phần tử (i,j) rộng Δx , cao Δx, dài 1m :

$$\left[\left(T_{i-1,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}\Delta y + \left(T_{1+1,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}\Delta y + \left(T_{i,j-1}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}\Delta x + \left(T_{i,j+1}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}\Delta x\right]\Delta\tau =$$
$$= c\rho . \Delta x . \Delta y\left(T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}\right) \qquad (2.48)$$

+ Tại biên giới tiết diện, phần tử rộng Δx, cao Δy/2, hình 2.3b, có bức xạ và đối lưu tại mặt trên:

$$\left[\left(T_{i-1,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}\frac{\Delta y}{2} + \left(T_{i+1,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}\frac{\Delta y}{2} + \left(T_{i,j-1}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}\Delta x + h\left(T_{\Sigma K}^{p+1} - T_{i,j}^{p+1}\right)\Delta x\right]\Delta\tau =$$
$$= c\rho . \Delta x\frac{\Delta y}{2}\left(T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}\right) \qquad (2.49)$$

+ Các phần tử tại góc lồi, hình 2.3c : phần tử rộng Δx/2, cao Δy/2, có bức xạ, đối lưu tại 2 mặt lồi ngoài :

$$\left[\left(T_{i-1,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}\frac{\Delta y}{2}+h\left(T_{\Sigma K}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{\Delta y}{2}+\left(T_{i,j-1}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}\frac{\Delta x}{2}+h\left(T_{\Sigma K}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta\tau=$$

$$=c\rho\frac{\Delta x}{2}.\frac{\Delta y}{2}\left(T_{i,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p}\right) \tag{2.50}$$

+ Các phần tử tại góc khuyết trong, hình 2.3d : rộng Δx, cao Δy, có đối lưu, bức xạ tại hai mặt khuyết :

$$\left[\left(T_{i-1,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}.\frac{\Delta y}{2}+\left(T_{i+1,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta x}.\Delta y+h\left(T_{\Sigma K}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{\Delta y}{2}\right]\Delta\tau+$$

$$+\left[\left(T_{i,j-1}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}.\frac{\Delta x}{2}+h\left(T_{\Sigma K}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{\Delta x}{2}+\left(T_{i,j+1}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}\right)\frac{k}{\Delta y}.\Delta x\right]\Delta\tau=c\rho\frac{3}{4}\Delta x\Delta y\left(T_{i,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p}\right) \tag{2.51}$$

Sau khi lấy Δx = Δy , và đặt $Fo=\frac{k}{c\rho}\times\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$, $Bi=\frac{h.\Delta x}{k}$, thay vào các phương trình trên sẽ được :

Phương trình tại các phần tử thuộc nút bên trong :

$$-Fo(T_{i-1,j}^{p+1}+T_{i+1,j}^{p+1}+T_{i,j-1}^{p+1}+T_{i,j+1}^{p+1})+(1+4)\mathrm{Fo}T_{i,j}^{p+1}=T_{i,j}^{p} \tag{2.52}$$

Phương trình tại các phần tử thuộc nút trên biên :

$$-\left(T_{i-1,j}^{p+1}+T_{i+1,j}^{p+1}+2T_{i,j-1}^{p+1}\right)Fo+\left(1+4Fo+2Bi.Fo\right)T_{i,j}^{p+1}=T_{i,j}^{p}+2Bi.Fo.T_{\Sigma K}^{p+1} \tag{2.53}$$

Phương trình tại các phần tử thuộc nút ở góc lồi :

$$-2Fo(T_{i-1,j}^{p+1}+T_{i,j-1}^{p+1})+\left[4Fo\left(Bi+1\right)\right]T_{i,j}^{p+1}=T_{i,j}^{p}+4Bi.Fo.T_{\Sigma K}^{p+1} \tag{2.54}$$

Phương trình tại các phần tử thuộc nút ở góc lõm :

$$-\frac{2}{3}Fo(T_{i-1,j}^{p+1}+2T_{i+1,j}^{p+1}+T_{i,j-1}^{p+1}+2T_{i,j+1}^{p+1})+\left(4Fo+\frac{4}{3}Bi.Fo+1\right)T_{i,j}^{p+1}=T_{i,j}^{p}+\frac{4}{3}Bi.Fo.T_{\Sigma K}^{p+1}$$

(2.55)

(2.52), (2.53), (2.54) và (2.55) là các phương trình đặc trưng để tính nhiệt độ tại các nút trong bài toán dẫn nhiệt không ổn định hai chiều, tuỳ thuộc vị trí nút cụ thể trong hình mặt cắt mà các chỉ số i,j được lấy giá trị tương ứng. Từ đó viết lần lượt cho các nút, lập thành hệ phương trình bậc nhất của nhiệt độ.

2.4. Giải hệ phương trình tuyến tính của nhiệt độ

Khi nhiệt độ viết dạng hàm ẩn được biểu thị bởi hệ phương trình

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}T_1 & +a_{12}T_2 & +\ldots+ & +a_{1n}T_n & = C_1 \\
a_{21}T_1 & +a_{22}T_2 & +\ldots+ & +a_{21}T_n & = C_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & = \\
a_{n1}T_1 & +a_{n2}T_2 & +\ldots+ & +a_{nn}T_n & = C_n
\end{array}
\qquad (2.56)
$$

Viết dạng ma trận :

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{21} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \ldots \\ T_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \\ C_n \end{Bmatrix}
\qquad (2.57)
$$

Các phương pháp giải thông dụng

1. Phương pháp định thức

$$
D=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix};
D_1=\begin{bmatrix}
C_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
C_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
C_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix};
$$

$$
D_2=\begin{bmatrix}
a_{11} & C_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & C_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & C_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix};\ldots,
D_n=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & C_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & C_2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & C_n
\end{bmatrix};
$$

Nghiệm sẽ là $$T_1=\frac{D_1}{D};T_2=\frac{D_2}{D};\ldots;T_n=\frac{D_n}{D}; \qquad (2.58)$$

2. Phương pháp Gauss

Biến ma trận vuông a_{ij} thành ma trận "tam giác".
Phép biến đổi ma trận dựa trên nguyên tắc biến đổi hệ phương trình cơ bản quen thuộc sau:

1. Nhân (hay chia) một phương trình với một hằng số thì phương trình đó không đổi
2. Cộng (hay trừ) một phương trình với một phương trình khác trong hệ sẽ được phương trình mới tương đương với tương với phương trình ban đầu

Thí dụ 2.1 : Cho hệ phương trình (a1), (b1)

Hệ ban đầu: hệ 1	áp dụng tính chất 1 với (a1)	áp dụng tính chất 2 với (b1)
2x + 2y = 4 (a1)	(a1)/2→ x + y = 2 (a2) hệ 2 ≡ hệ 1	x + y = 2 (a2) hệ 3 ≡ hệ 2

x + 4y = 3 (b1)	x + 4y = 3 (b1)	(b1)-(a2)$\rightarrow$ 0 + 3y = 1 (b2)

(b2) $\rightarrow$ y = 1/3 ; (a2) $\rightarrow$ x = 2 - y = 2 – 1/3 = 5/3.

Thử lại : (a1) : 2.(5/3) + 2.(1/3) = 12/3 = 4
(b1): 5/3 + 4.(1/3) = 9/3 = 3

Các bước của phương pháp Gauss

Hệ ban đầu

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \dots & a_{3n}^1 \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^1 \\ C_2^1 \\ \dots \\ C_n^1 \end{Bmatrix} \textbf{(1)}$$

a. Làm các số hạng đầu của mỗi hàng thành 1, bằng cách chia từng hàng cho số hạng đầu tiên của mỗi hàng đó:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1/a_{11}^1 & a_{12}^1/a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1/a_{11}^1 \\ a_{21}^1/a_{21}^1 & a_{22}^1/a_{21}^1 & \dots & a_{2n}^1/a_{21}^1 \\ a_{31}^1/a_{31}^1 & a_{32}^1/a_{31}^1 & a_{33}^1/a_{31}^1 \dots & a_{3n}^1/a_{31}^1 \\ a_{n1}^1/a_{n1}^1 & a_{n2}^1/a_{n1}^1 & a_{n3}^1/a_{n1}^1 \dots & a_{nn}^1/a_{n1}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^1/a_{11}^1 \\ C_2^1/a_{21}^1 \\ \dots/a_{31}^1 \\ C_n^1/a_{n1}^1 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 1 & a_{22}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ 1 & a_{32}^2 & a_{33}^2 \dots & a_{3n}^2 \\ 1 & a_{n2}^2 & a_{n3}^2 \dots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^2 \\ \\ C_n^2 \end{Bmatrix} \textbf{(2)}$$

b. Từ hàng thứ 2, làm các số hạng đầu của các hàng bằng 0, bằng cách lấy các hàng 2, 3...n trừ đi hàng 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 1-1 & (a_{22}^2 - a_{12}^2) & \dots & (a_{2n}^2 - a_{1n}^2) \\ 1-1 & (a_{32}^2 - a_{12}^2) & (a_{33}^2 - a_{13}^2)\dots & (a_{3n}^2 - a_{1n}^2) \\ 1-1 & (a_{n2}^2 - a_{12}^2) & (a_{n3}^2 - a_{13}^2)\dots & (a_{nn}^2 - a_{1n}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ (C_2^2 - C_1^2) \\ \\ (C_n^2 - C_1^2) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & a_{22}^3 & \dots & a_{2n}^3 \\ 0 & a_{32}^3 & a_{33}^3 \dots & a_{3n}^3 \\ 0 & a_{n2}^3 & a_{n3}^3 \dots & a_{nn}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^3 \\ \\ C_n^3 \end{Bmatrix} \textbf{(3)}$$

c. Từ hàng 2 trở đi , làm các số hạng thứ 2 của mỗi hàng thành 1, bằng cách chia mỗi hàng cho số hạng thứ 2 của hàng đó (tức lập lại bước 1 với hàng 2 trở đi)

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & a_{22}^3/a_{22}^3 & \dots & a_{2n}^3/a_{22}^3 \\ 0 & a_{32}^3/a_{32}^3 & a_{33}^3/a_{32}^3\dots & a_{3n}^3/a_{32}^3 \\ 0 & a_{n2}^3/a_{n2}^3 & a_{n3}^3/a_{n2}^3\dots & a_{nn}^3/a_{n2}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^3/a_{22}^3 \\ \\ C_n^3/a_{n2}^3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 1 & a_{33}^4\dots & a_{3n}^4 \\ 0 & 1 & a_{n3}^4\dots & a_{nn}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ \\ C_n^4 \end{Bmatrix} \textbf{(4)}$$

d. Làm các số hạng thứ hàng thứ 3 trở đị bằng 0, bằng cách lấy hàng 3, 4.. n trừ đi hàng 2 (tức lập lại bước 2 với hàng thứ 3 trở đi)

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 1-1 & a_{33}^4 - a_{23}^4\dots & a_{3n}^4 - a_{2n}^4 \\ 0 & 1-1 & a_{n3}^4 - a_{23}^4\dots & a_{nn}^4 - a_{2n}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ \\ C_n^4 - C_2^4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 0 & a_{33}^5\dots & a_{3n}^5 \\ 0 & 0 & a_{n3}^5\dots & a_{nn}^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ \\ C_n^5 \end{Bmatrix} \textbf{(5)}$$

e. Lập lại bước 1 đối với hàng 3 trở đi …để các số hàng thứ 3 của mỗi hàng trở thành 1

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 0 & a_{33}^5/a_{33}^5\dots & a_{3n}^5/a_{33}^5 \\ 0 & 0 & a_{n3}^5/a_{n3}^5\dots & a_{nn}^5/a_{n3}^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ C_3^4/a_{33}^5 \\ C_n^5/a_{n3}^5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 0 & 1\dots & a_{3n}^6 \\ 0 & 0 & 1\dots & a_{nn}^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ C_3^6.. \\ C_n^6 \end{Bmatrix} \textbf{(6)}$$

g. Tiếp tục như vậy cho đến khi số hạng $a_{nn}^k = 1$, thì sẽ được tam giác sau

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^4\dots & a_{2n}^4 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^2 \\ C_2^4 \\ C_3^6.. \\ C_n^k \end{Bmatrix} \textbf{(7)}$$

h. Giải ra tính ngược từ dưới lên: hàng dưới cùng : $T_n = C_n^k$;

hàng chứa T_3 có : $T_3 + a_{3n}^6 T_n = C_3^6 \rightarrow T_3 = a_{3n}^6 T_n - C_3^6$,.

3. Phương pháp Gauss - Jordan

Là phương pháp biến ma trận $[a_{ij}]$ thành ma trận đơn vị.
Giả sử đã có hệ phương trình ban đầu là ma trận tam giác là

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1\dots & a_{1n}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^1\dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C1 \\ C_2^1 \\ C_3^1.. \\ C_n^1 \end{Bmatrix}$$

a. Lấy hàng 2 làm gốc, nhân hàng 2 với a_{12}^1 sẽ được:

$$\begin{vmatrix}0 & a_{12}^1 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n}^2\end{vmatrix}\{T_2\} = \{C_2^2\}$$

Lấy hàng 1 trừ đi hàng vừa có ở trên

$$\begin{bmatrix}1-0 & a_{12}^1 - a_{12}^1 & a_{13}^1 - a_{23}^2\dots & a_{1n}^1 - a_{2n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^1\dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^1 - C_2^2 \\ C_2^1 \\ C_3^1.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & a_{13}^2\dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^1\dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^2 \\ C_2^1 \\ C_3^1.. \\ C_n^1\end{Bmatrix}$$

(1)

b. Lấy hàng 3 làm gốc, nhân hàng 3 với a_{23}^1 sẽ được: $\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{23}^1 & \dots & a_{3n}^2\end{vmatrix}\{T_3\} = \{C_3^2\}$; Lấy hàng 2 trừ đi hàng vừa có

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & a_{13}^2\dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^1 - a_{23}^1. & a_{2n}^1 - a_{3n}^2 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^2 \\ C_2^1 - C_3^2 \\ C_3^1.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & a_{13}^2\dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & 0. & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{3n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^2 \\ C_2^2 \\ C_3^1.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \mathbf{(2)}$$

c. Tiếp tục như vậy sẽ được

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & a_{13}^2\dots & a_{1n}^2 \\ 0 & 1 & 0\dots & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^2 \\ C_2^2 \\ C_3^2.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \mathbf{(4)}$$

d. Để triệt tiêu a_{13}^2 của hàng 1, lấy hàng 3 làm gốc, nhân hàng 3 với a_{13}^2, rồi lấy hàng 1 trừ đi kết quả mới có. ..

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\dots a_{14}^3 & a_{1n}^3 \\ 0 & 1 & 0\dots & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^3 \\ C_2^2 \\ C_3^2.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \mathbf{(5)}$$

e. Để triệt tiêu a_{14}^3 của hàng 1, lấy hàng 4 làm gốc, nhân hàng 4 với a_{14}^3 rồi lấy hàng 1 trừ đi kết quả mới có.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\dots 0 & a_{1n}^4 \\ 0 & 1 & 0\dots a_{24}^2 & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_1^4 \\ C_2^2 \\ C_3^2.. \\ C_n^1\end{Bmatrix} \mathbf{(6)}$$

Cứ như vậy đến khi hàng 1 chỉ còn số hạng đầu , các số hạng khác đều bằng 0.
Tiếp tục làm với hàng 2, 3, ..n

g. Cuối cùng có ma trận đơn vị như sau, và có ngay các nghiệm cần tìm

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0...0 & 0 \\ 0 & 1 & 0...0 & 0 \\ 0 & 0 & 0...1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ C_3^k .. \\ C_n^k \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 .. \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ C_3^k ... \\ C_n^k \end{Bmatrix} \qquad (2.59)$$

4. Phương pháp Gauss - Seidel

Nội dung cơ bản của phương pháp này là cách tính lặp. Phương pháp Gauss- Seidel bao gồm các bước sau. Ban đầu chuyển hệ phương trình nhiệt độ dạng hàm tường cho các nút dạng như sau

$$\begin{aligned} &T_1 = a_{21}T_2 + a_{31}T_3 + .. + a_{n1}T_n ;(1) \\ &T_2 = a_{12}T_1 + a_{32}T_3 + .. + a_{n2}T_n : (2) \\ &...... \\ &T_n = a_{1n}T_1 + a_{2n}T_2 + .. + a_{n-1.n}T_{n-1} ;(n) \end{aligned}$$

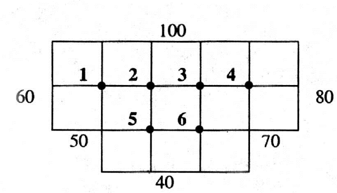
Lần 1:
- Bước 1. Trừ một nhiệt độ tại nút 1 (hoặc nút m nào đó định tính trước tiên), tất cả nhiệt độ còn lại cho bằng không, thay vào (1) tính ra T_1
- Bước 2. Thay các giá trị T_1 mới và $T_3 = 0$, ..,$T_n = 0$ vào (2) tính ra T_2
- Bước 3. Thay các giá trị T_1 , T_2 mới và $T_4 = 0$, ..,$T_n = 0$ vào (3) tính ra T_3. ......
- Bước n. Thay các giá trị T_1 , T_2 , ..., T_{n-1} mới vào (n) tính ra T_n.

Như vậy khi tính được một giá trị nhiệt độ mới phải sử dụng ngay trong các phương trình còn lại . Nghĩa là mọi phương trình luôn phải nhận được giá trị mới nhất nếu có, cho đến phương trình cuối cùng.

Lần 2: Lặp lại từ đầu
- Bước 1. Thay các giá trị T_2, T_3, .., T_n vừa có ở lần 1 vào (1) để tính T_1 mới.
- Bước 2. Thay các giá trị T_3, .., T_n của lần 1 đã có và T_1 mới vào (2) để tính T_2 mới... Tiếp tục như lần 1 đến T_n.

Quá trình tính được tính lặp lại lần 3 , lần 4 ...với các giá trị nhiệt độ mới nhất, cho đến khi nào chênh lệch nhiệt độ tại mọi điểm ở hai lần tính sát nhau nhỏ tới mức đủ chấp nhận thì dừng.

Thí dụ 2.2
Giải bài toán ổn định hai chiều điều kiện biên loại 1:
Một dầm bêtông , tiết diện ngang có hình dạng như hình bên có Δx=Δy. Biết nhiệt độ tại các cạnh và góc của tiết diện như trên hình 2.4 . Xác định nhiệt độ tại các điểm bên trong.1,2,3,4,5,6 .



Giải : Do Δx=Δy , theo (4) các nhiệt trở thành phần của mọi phân tố đều bằng nhau là $R_{ij} = 1/\lambda$, nên sẽ có :

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}\left(T_{i1} + T_{i2} + T_{i3} + T_{i4}\right),$$

Hình 2.4. Chia mạng tiết diện ngang dầm bêtông

Tại các điểm 1,2,3,4,5,6 viết được 6 phương trình nhiệt độ dạng hàm tường sau :

$T_1 = (T_2 + 60 + 100 + 50)/ 4$ (1) $T_4 = (T_3 +100 + 80 +70)/ 4$ (4)
$T_2 = (T_1 + T_3 + T_5 + 100)/4$ (2) $T_5 = (T_2 + T_6 + 50 + 40)/ 4$ (5)
$T_3 = (T_2 + T_4 + T_6 + 100)/4$ (3) $T_6 = (T_3 + T_5 + 70 + 40)/ 4$ (6)

Bước 1: Thay $T_2 = 0$; $T_3 = 0$; $T_4 = 0$; $T_5 = 0$; $T_6 = 0$ vào (1) tính được $T_1 = 52,50$
Bước 2: Thay $T_1 =52,5$ (giá trị mới) và $T_3 = 0$; $T_5 = 0$ vào (2) tính được $T_2 = 38,125$
Bước 3: Thay $T_2 = 38,125$ vào (3) tính được $T_3 = 34.5313$
Bước 4: .....tiếp tục như vậy sẽ tính được T_4, T_5 , T_6 thứ tự như sau :

52.5000 38.1250 34.5313 71.1328 32.0313 44.1406

Các lần sau : Kết quả tính lặp sau 8 lần viết theo ma trận hàng $T = [T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5\ T_6]$ như sau

(1)	*52.5000*	*38.1250*	*34.5313*	*71.1328*	*32.0313*	*44.1406*
(2)	*62.0313*	*57.1484*	*68.1055*	*79.5264*	*47.8223*	*56.4819*
(3)	*66.7871*	*70.6787*	*76.6718*	*81.6679*	*54.2902*	*60.2405*
(4)	*70.1697*	*75.2829*	*79.2978*	*82.3245*	*56.3808*	*61.4197*
(5)	*71.3207*	*76.7498*	*80.1235*	*82.5309*	*57.0424*	*61.7915*
(6)	*71.6875*	*77.2133*	*80.3839*	*82.5960*	*57.2512*	*61.9088*
(7)	*71.8033*	*77.3596*	*80.4661*	*82.6165*	*57.3171*	*61.9458*
(8)	*71.8399*	*77.4058*	*80.4920*	*82.6230*	*57.3379*	*61.9575*

Bước 6 : Sai số tuyệt đối 2 lần cuối tương ứng là :

0.0366 0.0462 0.0259 0.0065 0.0208 0.0117

là quá nhỏ nên có thể dừng phép tính lặp .
Nếu tính theo phương pháp ma trận nghịch đảo , nhiệt độ các điểm tương ứng sẽ là :

71.8630 77.4380 80.5120 82.6310 57.3340 61.9500

Các bài toán thực tế có số nhiệt độ phải tìm lên tới hàng trăm thì phương pháp Gauss -Seidel tỏ rõ rất ưu thế.

5. Phương pháp Ma trận nghịch đảo

Hệ phương trình tuyến tính nhiệt độ dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \\ C_n \end{Bmatrix} \qquad (2.60)$$

Hay ở dạng gọn sau :

$$[a_{ij}].\ [T_i] = [C_i] \tag{2.61}$$

Từ đó sẽ rút ra được :

$$[T_i] = [C_i]\ [a_{ij}]^{-1} \tag{2.62}$$

trong đó $[a_{ij}]^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của $[a_{ij}]$ có dạng :

$$[a]_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_{21} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Các phần tử b_{ij} của ma trận nghịch đảo là phần bù của ma trận chuyển vị của $[a_{ij}]$.
Khi đó nhiệt độ phải tìm sẽ là :

$$\begin{aligned} T_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3 + \dots + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + b_{22}C_2 + b_{23}C_3 + \dots + b_{2n}C_n \\ T_3 &= b_{31}C_1 + b_{32}C_2 + b_{33}C_3 + \dots + b_{3n}C_n \\ &\dots\dots \qquad \dots\dots\dots \qquad \dots\ \dots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + b_{n3}C_3 + \dots + b_{nn}C_n \end{aligned} \tag{2.64}$$

Ngày nay nhờ công cụ tính toán hiện đại và các phần mềm tiên tiến nên phương pháp ma trận nghịch đảo được giải rất thuận tiện .

Phần 2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Giới thiệu khái quát

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một công cụ số để xác định nghiệm xấp xỉ đối với một lớp rất rộng các bài toán kỹ thuật. Phương pháp PTHH rất được chú ý trong đào tạo kỹ thuật và công nghệ bởi vì nó là một công cụ phân tích có tính đa dạng và mềm dẻo cao.

Phương pháp PTHH bắt đầu được hình thành từ nhu cầu giải các bài toán phân tích kết cấu trong lý thuyết đàn hồi trong kỹ thuật công trình và kỹ thuật hàng không. Những người đầu tiên đưa ra phương pháp này là Alexander Hrennikoff (1941) và Richard Courant (1942). Sau Courant đã có nhiều tác giả sử dụng phương pháp rời rạc hoá như Polya, Hersch,Weinberger... tập trung vào nghiên cứu các bài toán giá trị riêng. Từ nửa cuối năm 1950, các tác giả đã phát triển dần hoàn chỉnh phương pháp PTHH. Năm 1959 Greestadt sử dụng nguyên lý biến phân để xác định hàm xấp xỉ trong từng phần tử, và xây dựng các nội dung cơ bản của phương pháp và sau này trở thành lý thuyết toán học của phương pháp PTHH.

Các nhà vật lý cũng đã phát triển phương pháp PTHH để áp dụng trong các bài toán vật lý, kỹ thuật như Prager, Synge. Besselinh, Melosh, Fraeijs de Veubeke và Jones đã coi phương pháp PTHH là một dạng của phương pháp Ritz, và là một phương pháp tổng quát nhất để nghiên cứu các bài toán đàn hồi. Họ đã áp dụng cho các bài toán biến phân trong cơ học chất rắn và đã đạt được kết quả khá chính xác. Năm 1965, Zienkiewicz và Cheung đã chứng minh rằng Phương pháp PTHH có thể áp dụng cho tất cả các bài toán của lý thuyết trường, và được công nhận là một phương pháp nội suy rộng.

Năm 1973, Fix và Strang đã xây dựng những lý luận toán học chặt chẽ cho phương pháp PTHH, và từ đó nó trở thành một lĩnh vực toán học ứng dụng và được phổ biến và ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật, để xây dựng mô hình dạng số cho các hiện tượng vật lý như trường điện từ và động học chất lỏng…

2.5. Nội dung cơ bản, trình tự giải bài toán nhiệt bằng phương pháp PTHH

Việc giải các bài toán liên tục bằng phương pháp PTHH luôn được thực hiện theo một trình tự gồm các bước nối tiếp nhau như sau:

Bước 1: Rời rạc hóa bài toán , chọn phần tử hữu hạn
Miền nghiệm của bài toán, tức vật thể, được chia thành các phần tử có kích thước nhỏ gọi là các phần tử hữu hạn sao cho không có kẽ hở cũng như sự chồng lên nhau giữa các phần tử để bảo đảm tính liên tục của bài toán. Kết quả tạo nên một mạng các phần tử hữu hạn.
Tùy thuộc tính chất của bài toán mà chọn phần tử có hình dạng khác nhau:
- Với bài toán một chiều, các phần tử được chọn là các đoạn thẳng.
- Với bài toán hai chiều, các phần tử được chọn là các hình phẳng như tam giác, tứ giác, chữ nhật…
- Với bài toán ba chiều, phần tử được chọn là các hình khối, như khối tứ diện, lập phương, hình hộp, lăng trụ …

Mỗi loại phần tử có thể chọn là bậc nhất, bậc hai hoặc bậc ba…tùy theo nhiệt độ phụ thuộc vào toạ độ là hàm bậc mấy. Đặc biệt là trong một loại bài toán có thể dùng các phần tử có dạng khác nhau. Giữa các phần tử ngăn cách nhau bởi biên giới là các nút, đoạn thẳng, hay bề mặt.