# Chương III: VECTƠ NGẪU NHIÊN

## ( ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU)

### III.1. Khái niệm.

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cùng xác định trên các kết quả của một phép thử thì ta nói $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một vectơ ngẫu nhiên *n* chiều.

### III.2. Vectơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều (X,Y).

III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời.

III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lề).

III.2.3 PP XS có điều kiện.

III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y.

III.2.5 Hàm phân phối XS của (X,Y).

## III.3. Vectơ ngẫu nhiên liên tục 2 chiều (X,Y). **THAM KHẢO**

III.3.1 Hàm mật độ đồng thời.

III.3.2 Hàm mật độ của các BNN thành phần X, Y (Hàm mật độ lề).

III.3.3 Điều kiện độc lập của X và Y.

III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y).

III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện.

## III.4 Một số tham số đặc trưng của vectơ ngẫu nhiên.

* Kỳ vọng toán
* Kỳ vọng của hàm φ(X,Y).
* Kỳ vọng có điều kiện
* Covarian ( Hiệp phương sai)
* Ma trận tương quan
* Hệ số tương quan & ý nghĩa.
* Sử dụng máy tính bỏ túi để tính một số tham số đặc trưng.

## III.5. Hàm của vectơ ngẫu nhiên (X,Y).

## III.2 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN RỜI RẠC 2 CHIỀU

### III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời:

Cho $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$; $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Đặt $\mathbf{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)}$; $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$. Dưới đây là **bảng phân phối xác suất đồng thời** của $(X, Y)$:

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | ... | $Y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | ... | $p_{1n}$ |
| $x_2$ | $P_{21}$ | $P_{22}$ | ... | $P_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_m$ | $p_{m1}$ | $p_{m2}$ | ... | $p_{mn}$ |

Khi đó $0 \le p_{ij} \le 1$ và $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

## III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lề).

Đặt: $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(X = x_i), i = \overline{1, m}$

Ta được bảng phân phối xác suất của *X*:

| X | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P^X$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_m$ |

Đặt: $q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = P(Y = y_j), j = \overline{1, n}$

Ta được bảng phân phối xác suất của Y:

| X | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P^Y$ | $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_n$ |

## III.2.3 Phân phối xác suất có điều kiện:

Bảng PPXS của X với điều kiện $Y = y_j (j = \overline{1, n})$ là:

| X | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P^{X/y_j}$ | $\frac{p_{1j}}{q_j}$ | $\frac{p_{2j}}{q_j}$ | ... | $\frac{p_{mj}}{q_j}$ |

tức là $P(X=x_i \mid Y=y_j) = \dfrac{p_{ij}}{q_j}$

Bảng PPXS của Y đối với điều kiện $X = x_i (i = \overline{1, m})$ là:

| Y | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P^{Y/x_i}$ | $\frac{p_{i1}}{p_i}$ | $\frac{p_{i2}}{p_i}$ | ... | $\frac{p_{in}}{p_i}$ |

## III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y.

*X* và *Y* độc lập

$\Leftrightarrow$ $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$ $\forall i,j$ hay $p_{ij} = p_i q_j$ $\forall i, j$.

$\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$;

( $F_X$ , $F_Y$ là các hàm *PPXS của* X,Y , hay gọi la các hàm phân phối lề..)

## III.2.5 Hàm phân phối đồng thời của (X,Y) .

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$$

*Lưu ý:*

- *F(x,y) chính là xác suất để điểm ngẫu nhiên M(X,Y) rơi vào hình chữ nhật vô hạn có đỉnh phía trên, bên phải là (x,y).*

## III.3 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN LIÊN TỤC (X,Y) *(Tham khảo)*

**III.3.1 Hàm mật độ XS đồng thời:** của VTNN (X,Y) là hàm xác định trên toàn mặt phẳng, thỏa:

$$\begin{cases} \bullet\ f(x,y) \ge 0;\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \bullet\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 \end{cases}$$

- **Tính chất:** $P\big((X,Y) \in D\big) = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$

**III.3.2 Hàm mật độ lề:**

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\ x \in \mathbb{R}$ là **hàm mật độ** theo $X$;

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,\ y \in \mathbb{R}$ là **hàm mật độ** theo $Y$.

**III.3.3 Điều kiện độc lập của X, Y:**

X và Y độc lập $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y) \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

## III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y):

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$$

- Từ đó suy ra:

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Trong trường hợp riêng, khi miền D là hình chữ nhật:

*P(a≤X< b; c≤X< d] = F(b, d) – F(a, d) – F(b, c) + F(a, c).*



## III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện VTNN liên tục (X,Y).

Hàm mật độ của X với điều kiện *Y* = *y* là: $f_{X/y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Hàm mật độ của Y với điều kiện *X* = *x* là: $f_{Y/x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

## III.4 MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG của BNN hai chiều:

*** Kỳ vọng toán:** E(X,Y) = (E(X),E(Y))

*** Hiệp phương sai (Covarian, mômen tương quan):**

cov(X,Y)= E[(X-E(X)).(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X).E(Y)

*** Ma trận tương quan** ( ma trận hiệp phương sai) của (X,Y):

$$D(X,Y)=\begin{bmatrix} \text{cov}(X,X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{cov}(Y,Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & D(Y) \end{bmatrix}$$

*** Hệ số tương quan của X và Y:**

$$R_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\,\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY)\text{-}E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}\,\sqrt{D(Y)}}$$

Hệ số tương quan và covarian dùng để đặc trưng cho mức độ chặt chẽ của mối liên hệ phụ thuộc giữa các BNN X và Y.

Nếu $R_{XY} = 0$ thì ta nói X, Y không tương quan, ngược lại khi $R_{XY} \neq 0$ ta nói X, Y có tương quan.

Nếu X, Y độc lập thì cov(X,Y)= $R_{XY} = 0$.

Điều ngược lại không đúng, tức là nếu cov(X,Y)= 0 thì hoặc X, Y độc lập, hoặc X, Y phụ thuộc ở một dạng thức nào đó. Khi (X,Y) có phân phối chuẩn thì X,Y độc lập $\Leftrightarrow R_{XY} = 0$.

Hệ số tương quan không có đơn vị đo và $\mathbf{|R_{XY}| \leq 1}$.

Nếu $R_{XY} = \pm 1$ thì X, Y có tương quan tuyến tính (thuận /nghịch).

Khi $R_{XY} \approx \pm 1$ thì X, Y có tương quan "gần" tuyến tính.

## *Ví dụ 1*

*Một hộp đựng 5 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm mà không kiểm tra thì không biết. Các sản phẩm được lấy ra kiểm tra cho đến khi phát hiện thấy 2 phế phẩm thì dừng lại.*

*Kí hiệu X là BNN chỉ số lần kiểm tra cho tới khi phế phẩm đầu tiên được phát hiện. Y là BNN chỉ số lần kiểm tra thêm cho tới khi phế phẩm thứ hai được phát hiện.*

*Hãy :*

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y).

b) Tính cov(X,Y) và hệ số tương quan của X, Y.

c) X,Y có độc lập hay không ?

d) Tìm phân phối XS và kỳ vọng có điều kiện của X khi Y=2.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3/10 | 2/10 | 1/10 |
| 2 | 2/10 | 1/10 | 0 |
| 3 | 1/10 | 0 | 0 |

$$p_{11} = P(X=1;Y=1) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$p_{12} = P(X=1;Y=2) = P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{13} = P(X=1;Y=3) = P(\overline{A_1}.A_2.A_3.\overline{A_4}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{21} = P(X=2;Y=1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{22} = P(X=2;Y=2) = P(A_1.\overline{A_2}.A_3.\overline{A_4}) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{31} = P(X=3;Y=1) = P(A_1.A_2.\overline{A_3}.\overline{A_4}) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.1.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{23} = P(X=2;Y=3) = 0$$

$$p_{32} = P(X=3;Y=2) = 0$$

$$p_{33} = P(X=3;Y=3) = 0$$

b) Tính Cov(X,Y) và $R_{XY}$:

| Y / X | 1 | 2 | 3 | $P^X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3/10 | 2/10 | 1/10 | 6/10 |
| 2 | 2/10 | 1/10 | 0 | 3/10 |
| 3 | 1/10 | 0 | 0 | 1/10 |
| $P^Y$ | 6/10 | 3/10 | 1/10 | |

Viết lại các bảng PPXS thành phần của X và Y ( phân phối lề):

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P^X$ | 6/10 | 3/10 | 1/10 |

| Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P^Y$ | 6/10 | 3/10 | 1/10 |

E(X)= E(Y)=1,5 D(X)= D(Y) = 0,45

$$E\left(XY\right)=\sum_{i;j}x_i y_j p_{ij}=1.1.\frac{3}{10}+1.2.\frac{2}{10}+1.3.\frac{1}{10}+2.1.\frac{2}{10}+2.2.\frac{1}{10}+3.1.\frac{1}{10}=2,1$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=-0,15. \quad R_{XY}=\frac{E(XY)-E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-1}{3}$$

# HD Sử dụng MTBT tìm 1 số đặc trưng của VTNN rời rạc:

<table>
<tr><th>Các bước thực hiện</th><th>Máy CASIO fx 570 ES (PLUS)...</th><th>Máy CASIO fx 500 MS....</th></tr>
<tr><td>Mở cột tần số<br>(nếu máy chưa mở)</td><td>SHIFT -- MODE (SETUP) -- ▼ --<br>-- 4 (STAT) -- 1 (ON)</td><td></td></tr>
<tr><td>Vào chế độ thống kê hai biến.</td><td>MODE -- 3 (STAT) -- 2 (A+BX)</td><td>MODE -- MODE --...-- 2 (REG)<br>--- 1 (Lin)</td></tr>
<tr><td>Nhập dữ liệu</td><td><table>
<tr><th></th><th>X</th><th>Y</th><th>FREQ</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x1</td><td>y1</td><td>p11</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x1</td><td>y2</td><td>p12</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>....</td></tr>
<tr><td>...</td><td>xn</td><td>ym</td><td>pnm</td></tr>
</table>AC</td><td>Nhập lần lượt theo từng dòng , thứ tự nhập như sau:<br>$X_i$ , $Y_j$ ; $p_{ij}$ M+</td></tr>
<tr><td>Đọc kết quả<br>E(X); E(Y)</td><td>SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) –<br>--- 2 ($\bar{x}$ ) -- =<br>Muốn có kq E(Y) thì chọn $\bar{y}$</td><td>SHIFT – 2 (SVAR) -1 ($\bar{x}$ )-- =<br>SHIFT – 2( SVAR) - ▶ -1 ($\bar{y}$ )-- =</td></tr>
<tr><td>Đọc kết quả<br>$\sqrt{D(X)}$ $\sqrt{D(Y)}$</td><td>SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) –<br>--- 3 ( $\sigma X$) -- =<br>Muốn có kq $\sqrt{D(Y)}$ thì chọn $\sigma Y$</td><td>SHIFT – 2 (SVAR)- 2 ($x\sigma n$ )-- =<br>SHIFT – 2( SVAR) - ▶ -1 ($y\sigma n$ )<br>-- =</td></tr>
<tr><td>Đọc kết quả $R_{XY}$</td><td>SHIFT – 1 (STAT)-6(REG)–3 (r ) --=</td><td>SHIFT – 2 (SVAR) - ▶ - ▶ 3( r)-=</td></tr>
<tr><td>Tham khảo các KQ trung gian</td><td>SHIFT – 1 (STAT)- 3 (SUM) - ....</td><td>SHIFT – 1 (SSUM) - ......</td></tr>
</table>

c) Theo đn, X,Y độc lập $\Leftrightarrow$ $P(X=x_i; Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$; $\forall$ i,j.

Trong bảng PPXS đồng thời, $P(X=1;Y=1) = 3/10$ ;

nhưng $P(X=1).P(Y=1) = (6/10).(6/10) =1/100 \neq P(X=1;Y=1)$

nên ta kết luận X,Y không độc lập.

d) Từ bảng PPXS đồng thời, suy ra bảng phân phối xác suất của X với điều kiện Y=2:

| $X^{\|Y=2}$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P^{X\|Y=2}$ | $\dfrac{2/10}{3/10} = \dfrac{2}{3}$ | $\dfrac{1/10}{3/10} = \dfrac{1}{3}$ |

và $E(X|Y=2) = 4/3$.

**Ví dụ 2**

Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y độc lập có các bảng phân phối xác suất:

| $Y$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $X$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

a) Lập bảng phân phối xác suất của $Z = 3X^2 + 2Y$; Tính E(Z),D(Z).

b) Tính E(U),D(U) với $U = 5X - 3Y + 10$ .

*Hướng dẫn:* Do X,Y độc lập nên $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j), \forall i,j$.

Lập bảng PPXS đồng thời của X, Y rồi tính giá trị hàm $Z=3X^2+2Y$.

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| -1 | 1/8 Z = 3 | 1/8 Z = 5 |
| 1 | 2/8 Z = 3 | 2/8 Z = 5 |
| 2 | 1/8 Z = 12 | 1/8 Z = 14 |

Suy ra bảng phân phối xác suất của Z:

| $Z$ | 3 | 5 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |



Vậy E(Z) = 6,25 và D(Z) = 16,1875.

b) HD: E(5X - 3Y +10) = 5E(X) - 3E(Y) + 10.

D(5X -3Y + 10) = 25D(X) + 9D(Y).

## *Ví dụ 3*

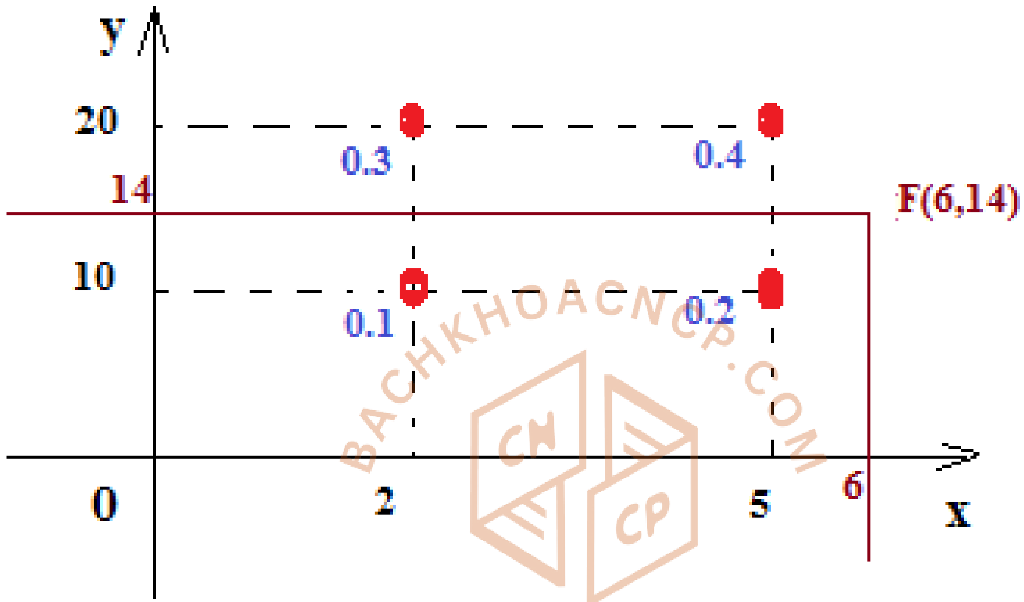
Dưới đây là bảng PPXS đồng thời của 2 biến ngẫu nhiên X,Y. Tìm hàm phân phối XS của (X,Y).

| X \ Y | 10 | 20 |
|---|---|---|
| 2 | 0.1 | 0.3 |
| 5 | 0.2 | 0.4 |



*Hướng dẫn :*

$$F(x,y) = P(X<x;\ Y<y) = \sum_{i,j} p_{ij} \quad ;\ x_i < x \ \&\ y_j < y.$$






Ví dụ:

+ $F(x,y) = P(X<x; Y<y)$.

+ $F(6; 14)=P(X< 6; Y< 14) = 0,3$

+ $F(3; 20)=P(X<3,Y<20)= 0,1$.

+ $F(4;25)=P(X<4; Y<25) =0,4$.

*Đáp số:*

$$F(x,y)=\begin{cases} 0,1 & (x,y)\in(2,\ 5]\times(10,\ 20] \\ 0,1+0,3 & (x,y)\in(2,\ 5]\times(20,+\infty) \\ 0,1+0,2 & (x,y)\in(5,+\infty)\times(10,\ 20] \\ 1 & (x,y)\in(5,+\infty)\times(20,+\infty) \\ 0 & (x,y)\neq \end{cases}$$

## *Ví dụ 4*

Biến ngẫu nhiên 2 chiều (X,Y ) có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

| **X \ Y** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|
| **0** | 0,12 | 0,15 | 0,03 |
| **1** | 0,28 | 0,35 | 007 |

a) Chứng minh X ,Y là độc lập.

b) Tìm hệ số tương quan Rxy.

c) Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Z =XY.

d) Tính E(Z) bằng 2 cách khác nhau.

## *Ví dụ 5:*

Giả thiết các biến ngẫu nhiên $X_1$; $X_2$; $X_3$ độc lập với nhau, cùng tuân theo phân phối Poisson với các tham số tương ứng lần lượt là $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$ .

Gọi biến ngẫu nhiên $Y = \max\{ X_1 ; X_2 ; X_3 \}$.

a) Tìm xác suất $Y > 1$

b) Tìm xác suất $Y = 2$

## *Ví dụ 6:*

Giả thiết các biến ngẫu nhiên $X_1$; $X_2$; $X_3$ độc lập với nhau, cùng tuân theo phân phối mũ với các tham số tương ứng lần lượt là $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$ .

Gọi biến ngẫu nhiên $Y = \min\{ X_1 ; X_2 ; X_3 \}$

Lập hàm phân phối xác suất của Y.

*Ví dụ 7:*

Một sinh viên có xác suất nghỉ một buổi học bất kỳ là 5%; xác suất đi học trễ một buổi là 20%. Giả thiết trong 1 tuần, sinh viên đó có 5 buổi học trên trường.

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời giữa biến X là số buổi sinh viên đó nghỉ trong 1 tuần và Y là số buổi sinh viên đó đi học trễ trong cùng tuần đó.

b) Lập bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện trong tuần có 1 buổi sinh viên nghỉ học.