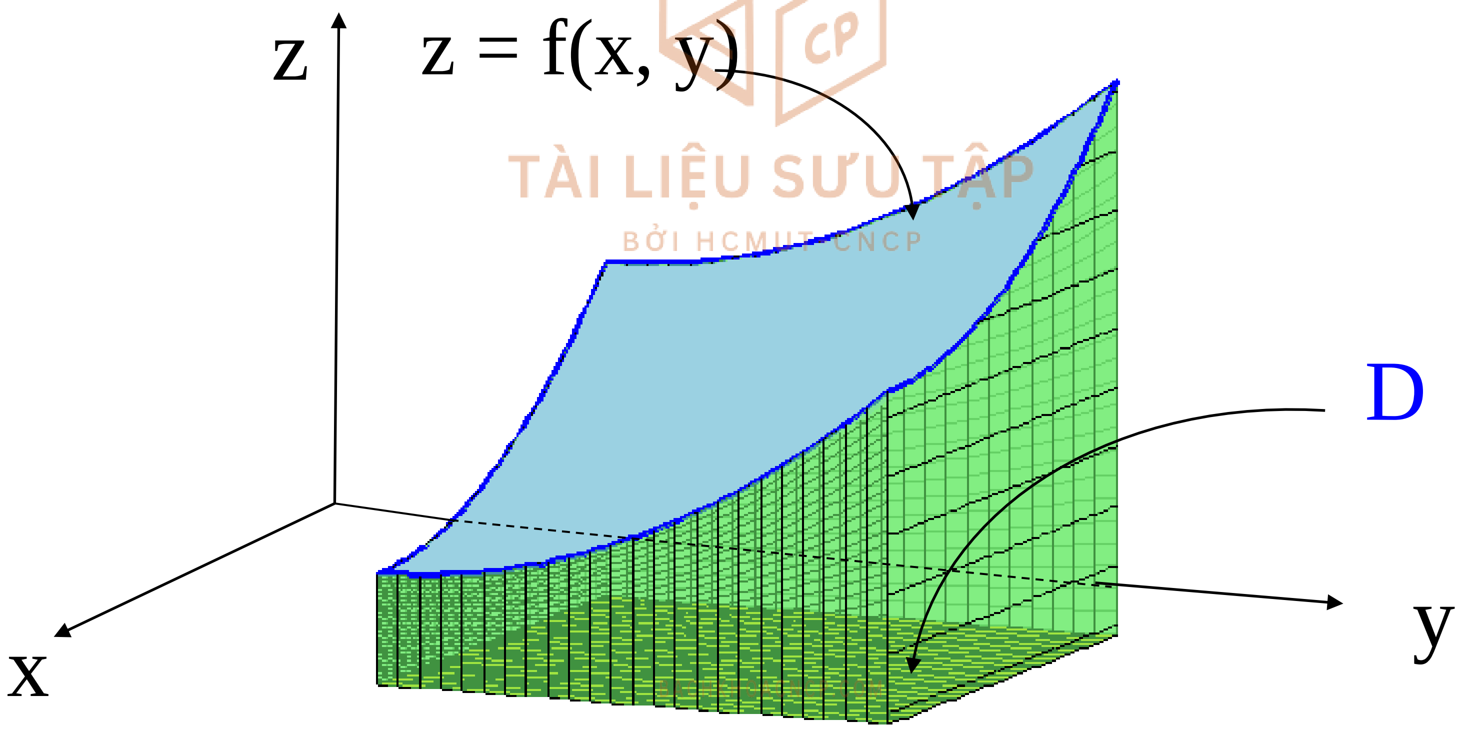
Chương 2:

TÍCH PHÂN BỘI

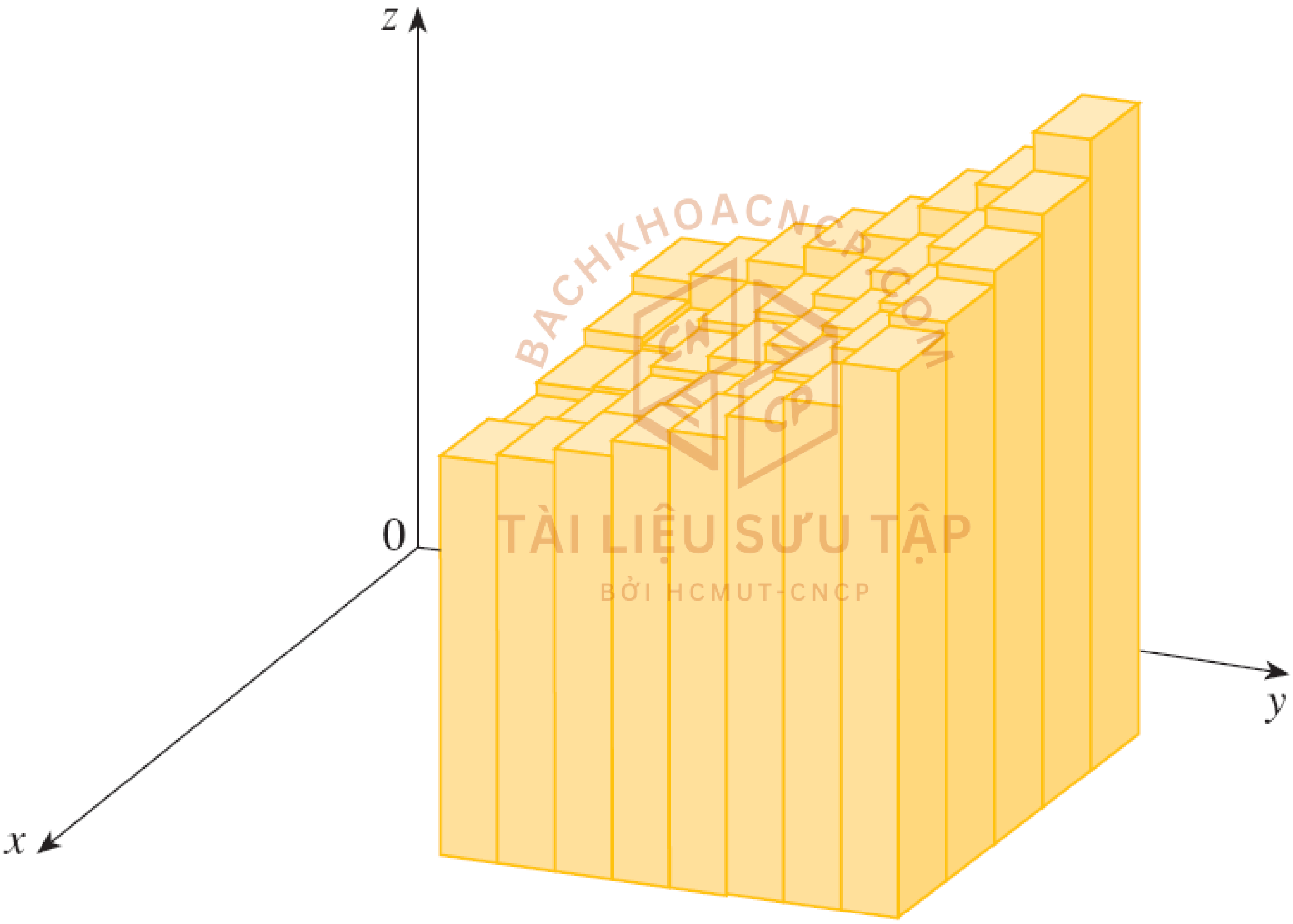
Phần 1: TÍCH PHÂN KÉP

BÀI TOÁN THỂ TÍCH

Xét vật thể hình trụ Ω được giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x, y) > 0$, mặt dưới là Oxy, bao xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz và đường chuẩn là biên của miền D đóng và bị chặn trong Oxy. Tìm thể tích Ω.

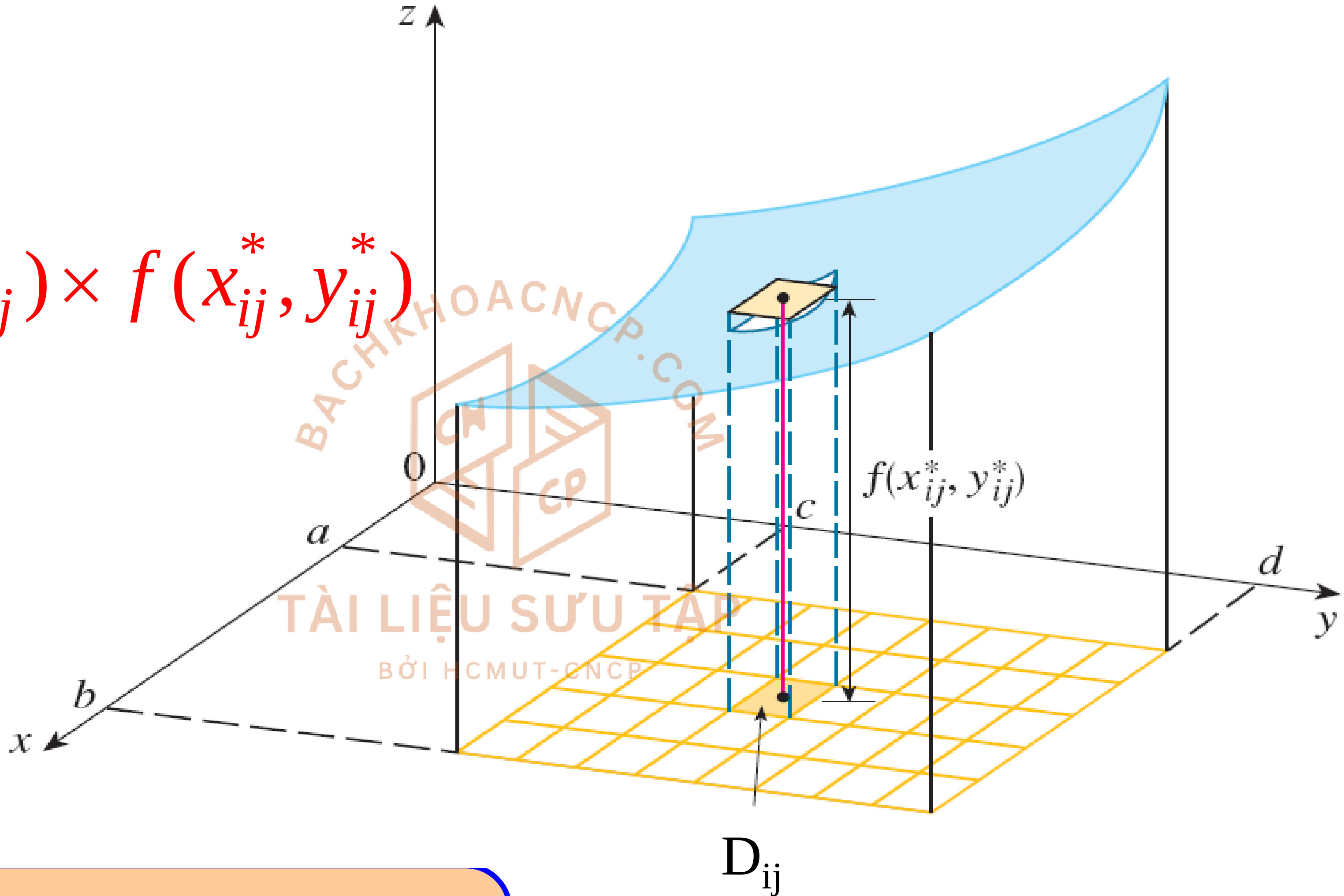


Xấp xỉ Ω bằng các hình trụ con



Thể tích xấp xỉ của hình trụ con

$$V_{ij} \approx S(D_{ij}) \times f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$$



$$V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) S\left(D_{ij}\right)$$

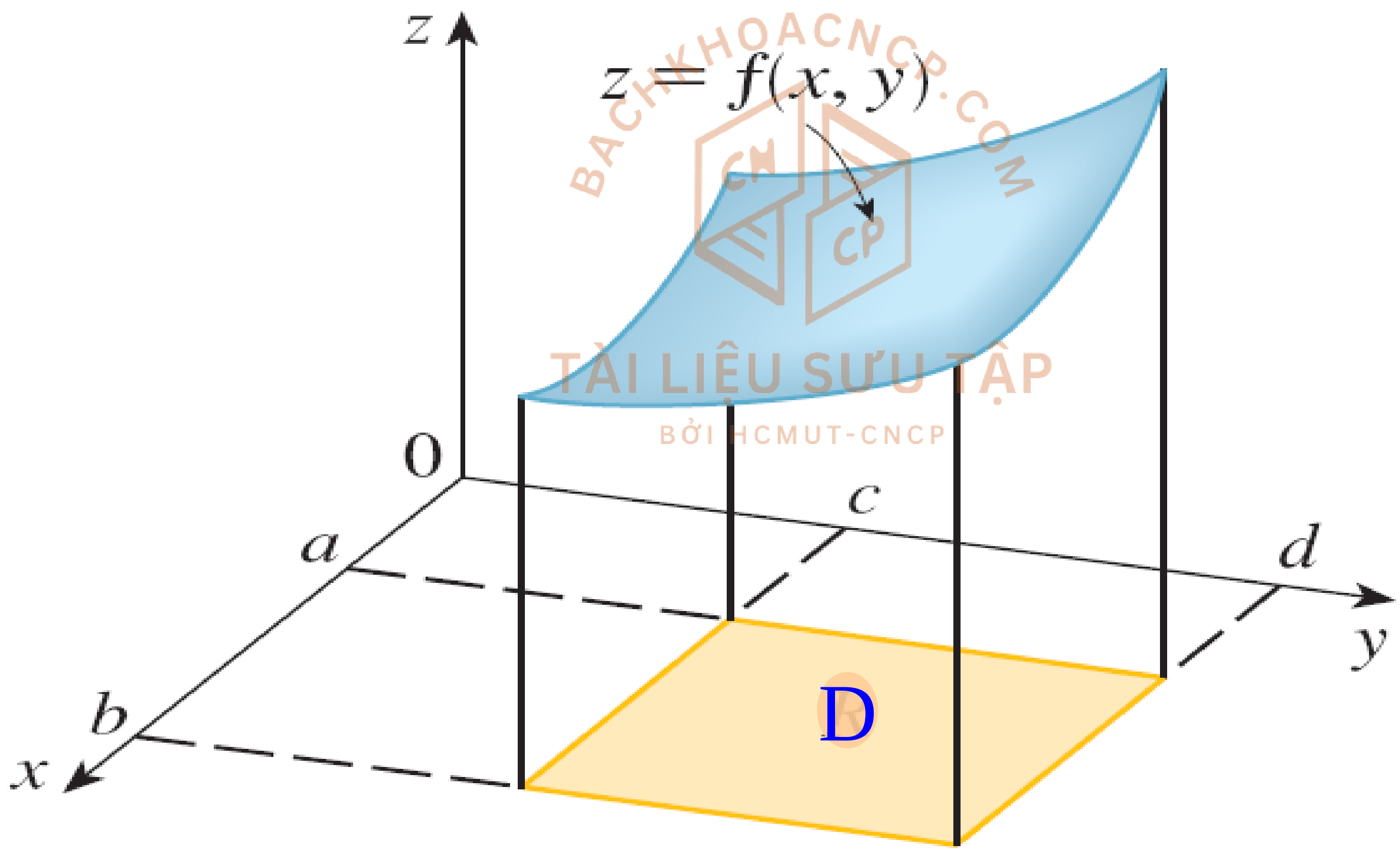
BÀI TOÁN KHỐI LƯỢNG MẢNH PHẲNG

- Một mảnh phẳng D đồng chất có khối lượng riêng ρ và diện tích là S thì khối lượng là ρS.
- Nếu D không đồng chất và mật độ khối lượng tại mỗi điểm (x, y) trên D là $\rho(x, y)$, khi đó, để tính khối lượng gần đúng của D, ta chia nhỏ D thành các mảnh con.

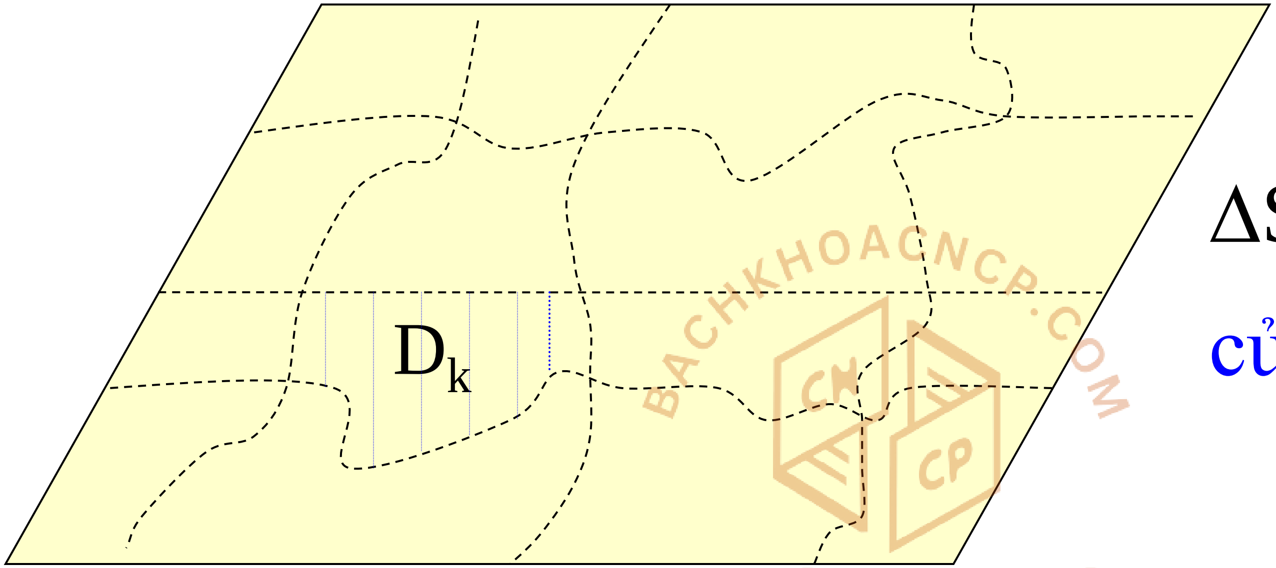
Mỗi mảnh con D_k đủ nhỏ được xem như mảnh phẳng đồng chất.

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP

Cho hàm số z = f(x, y) xác định trong miền D đóng và bị chặn.



Phân hoạch D thành các miền con $D_1, D_2, \ldots, D_n$

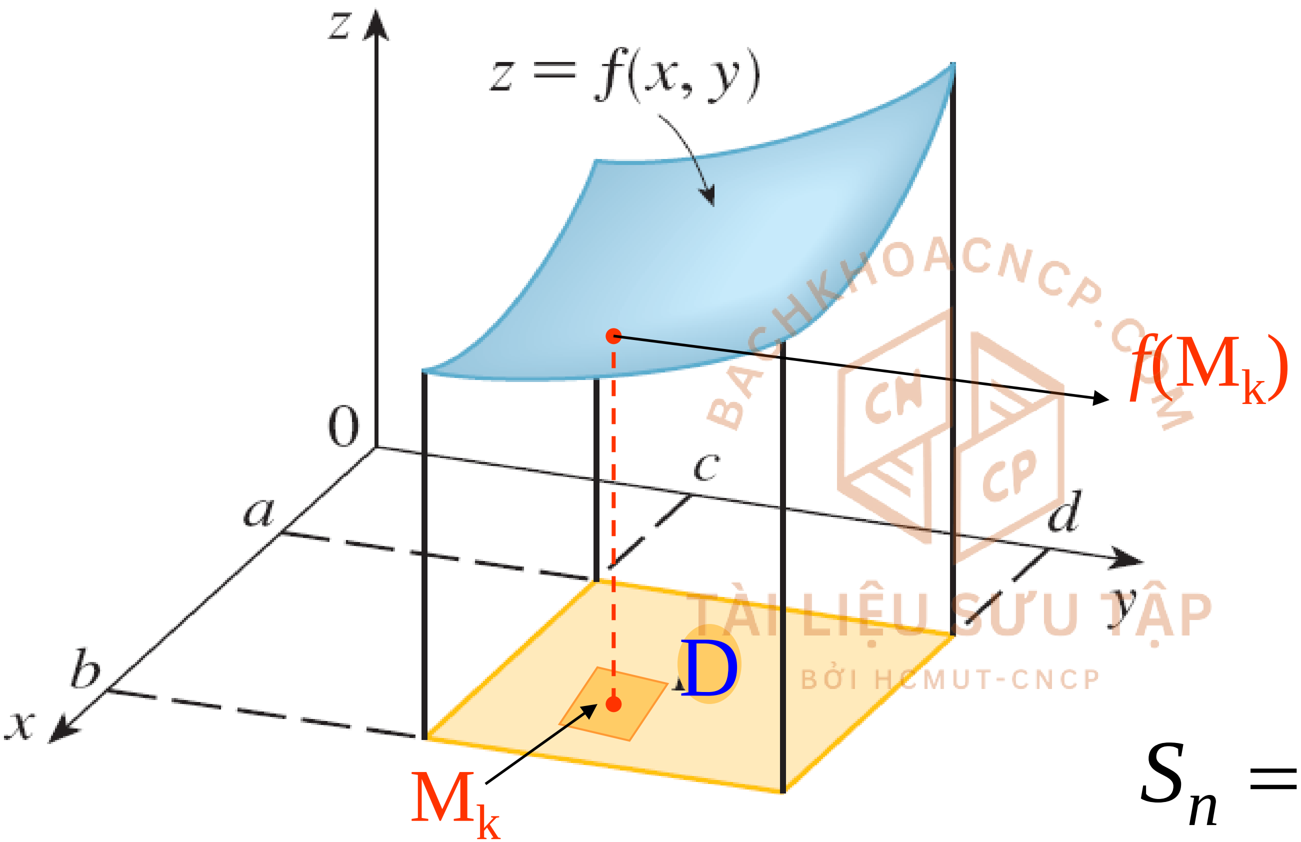


ΔS_k là diện tích của miền con D_k.

$d(D_k)$ = đường kính D_k = khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm trong D_k.

$$d = \max_{k=\overline{1,n}} \{d(D_k)\}$$ Đường kính phân hoạch

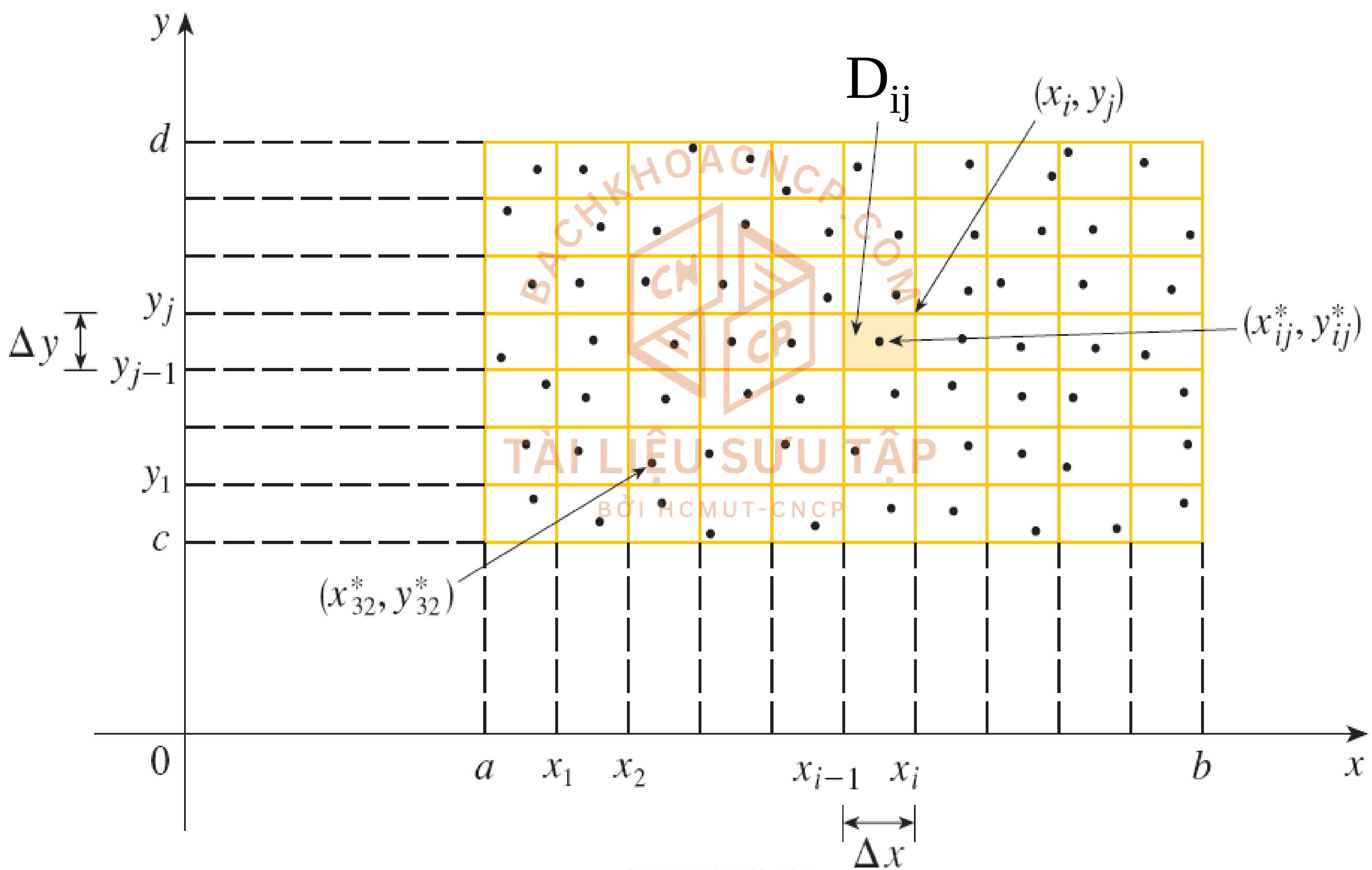
M_k được chọn tùy ý trong D_k



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)ds = \lim_{d\to 0} S_n}$$

Phân hoạch D theo các đường // Ox, Oy



Khi f khả tích, việc tính tích phân không phụ thuộc vào phân hoạch. Do đó có thể phân hoạch D theo các đường song song Ox, Oy.

D_k là hình chữ nhật với các cạnh Δx, Δy

$$\Rightarrow \Delta S_k = \Delta x.\, \Delta y$$

$\Rightarrow$ Thay cách viết tp kép

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)ds}$$

Nhận dạng hàm khả tích

• Đường cong (C) : $y = y(x)$ trơn tại $M(x_0,y_0) \in (C)$ nếu $y'(x)$ liên tục tại x_0.

• (C) trơn từng khúc nếu (C) được chia thành hữu hạn các đoạn trơn.

Nếu f(x,y) liên tục trên miền D đóng, bị chặn và có biên trơn từng khúc thì f khả tích trên D.

Tính chất hàm khả tích

Cho D là miền đóng và bị chặn

$$1/\ S(D) = \iint\limits_D 1dxdy$$ (Diện tích D)

$$2/\ \iint\limits_D c.f(x,y)dxdy = c.\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$\iint\limits_D (f+g)dxdy = \iint\limits_D fdxdy + \iint\limits_D gdxdy$$

$3/\ D = D_1 \bigcup D_2, D_1$ ***và*** D_2 ***không dẫm nhau***

(tối đa chỉ dính biên)

$$\iint\limits_{D_1 \bigcup D_2} fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy$$

Định lý giá trị trung bình

D là miền liên thông nếu 2 điểm tùy ý trong D có thể nối nhau bởi 1đường cong liên tục trong D.

Cho f liên tục trên tập đóng, bị chặn, liên thông D. Khi đó tồn tại $M_0(x_0, y_0) \in D$ sao cho

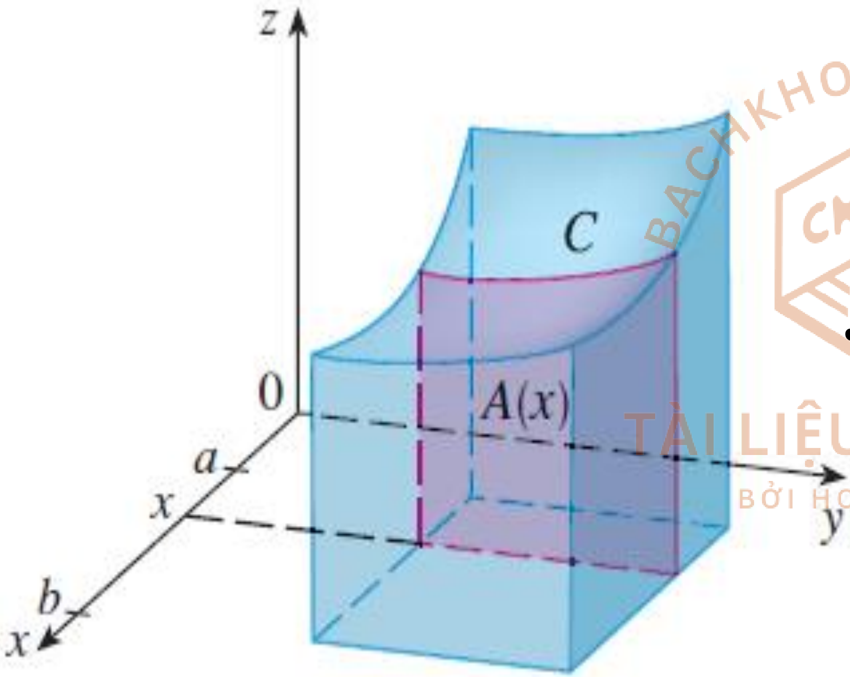
$$f(M_0) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$$

$$\frac{1}{S(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$$

gọi là giá trị trung bình của f trên D.

Cách tính tích phân kép

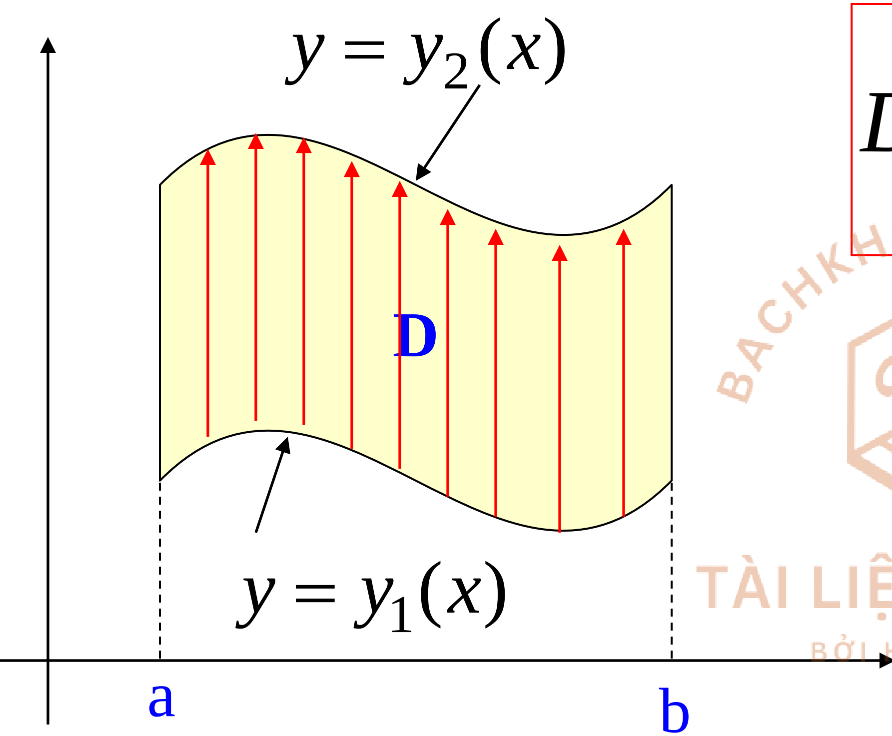
Định lý Fubini: nếu D là hình chữ nhật $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP



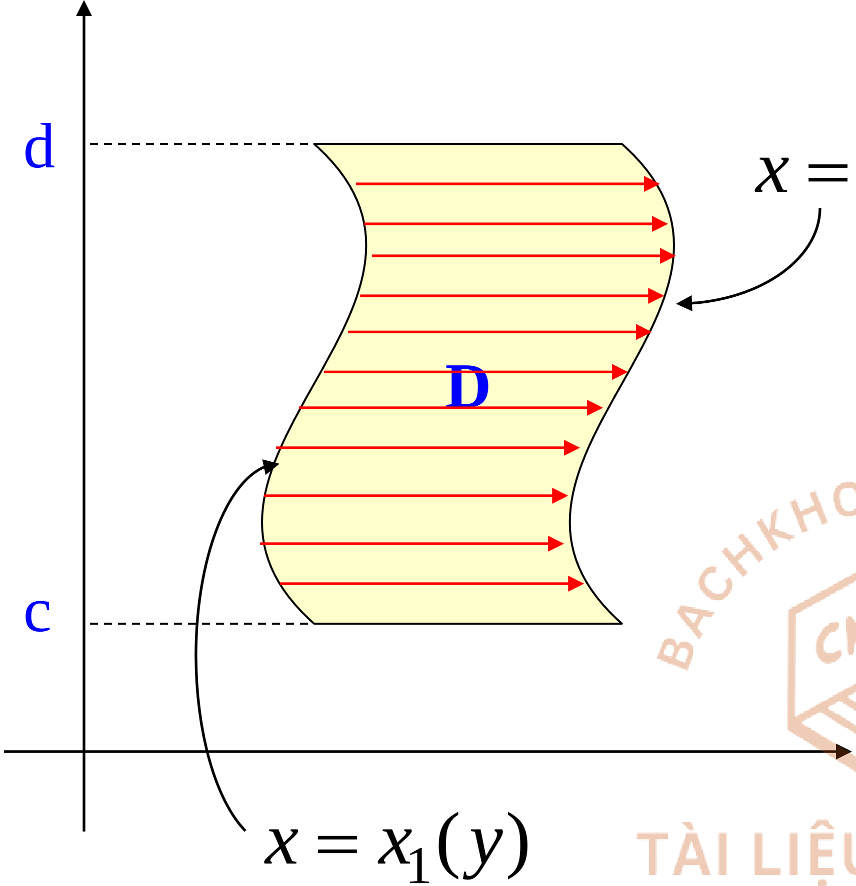
$$D : \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

|| Cách tính

Cách viết:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



$$D: \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

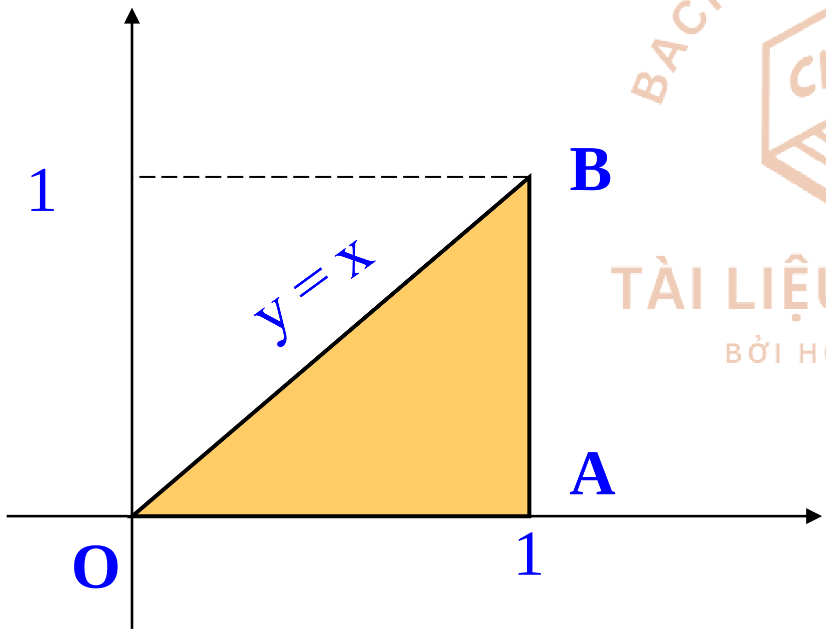
$$||$$

Cách viết: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

VÍ DỤ

1/ Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$

với D là tam giác OAB,O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)



Ví dụ 2

Tính $I = \iint\limits_{D} (x^2 - y)dxdy$ với D giới hạn bởi $0 \le y \le x^2 + 1, -1 \le x \le 2.$

3/ Tính $$I = \iint_D (x+1)\,dxdy$$

với D giới hạn bởi các đường $y \leq 5x, y \leq 5, y \geq \frac{x^2}{2}$

Ví dụ 4

Tính $I = \iint\limits_D x\sqrt{4y^2 + 1}\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2.$

Ví dụ 5

Tính khối lượng mảnh phẳng $D: 0 \le x \le 2, x \le 2y \le 2,$ biết mật độ khối lượng tại điểm (x, y) là $\rho(x, y) = x\sqrt{4y^2 - x^2}$.

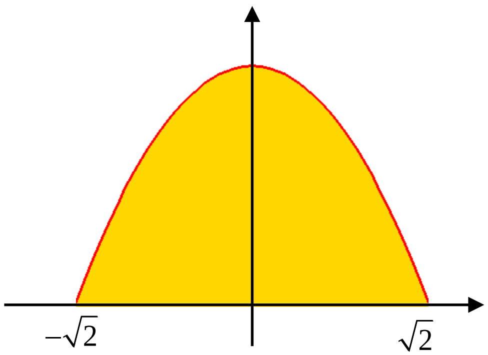
Ví dụ 6

Tính $\iint\limits_D -2dxdy, D: x^2 + y^2 \le 1, x + y \le 1$

Ví dụ 8

Tính $\iint\limits_D |x-y|\,dxdy,$ miền D giới hạn bởi các đường:

$$y = 0, y = 2 - x^2.$$



Ví dụ 9

Tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

$$f(x,y) = \begin{cases} x, x^2 \geq y, \\ x+y, x^2 < y. \end{cases} ;\ D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x.$$

Ví dụ 10

Vẽ miền lấy tích phân:

$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx \qquad 2/\ I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$$

Ví dụ 11

Các tích phân sau đây dùng để tính thể tích các trụ cong có đáy dưới là miền D trong Oxy và đáy trên là đồ thị của hàm dưới dấu tích phân. Hãy vẽ các trụ cong này.

$$I = \iint_D 2dxdy, \quad D = \Delta OAB, \; O(0,0), A(0,2), B(1,1)$$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 + x^2 + y^2) dy$$

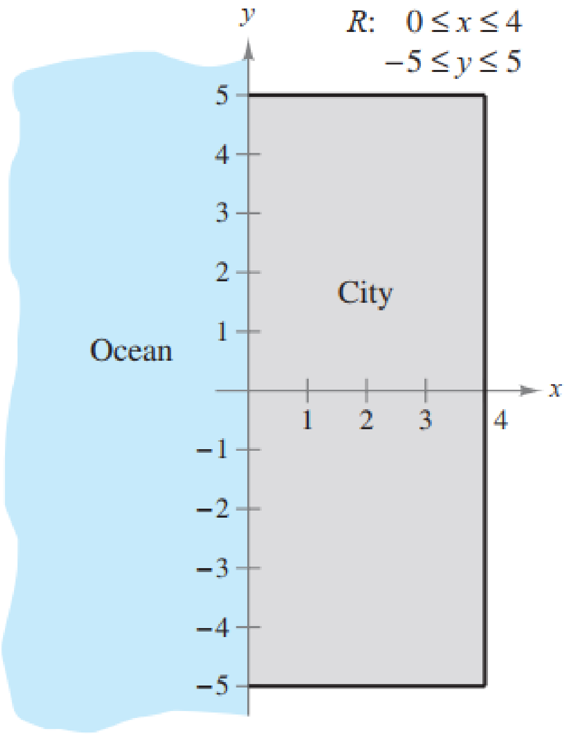
Ví dụ 11

Các tích phân sau đây dùng để tính thể tích các trụ cong có đáy dưới là miền D trong Oxy và đáy trên là đồ thị của hàm dưới dấu tích phân. Hãy vẽ các trụ cong này.

$$\iint_D \left(x^2+1\right)dxdy$$

trong đó D la hình chữ nhật $-1 \le x \le 1, 1 \le y \le 4.$

Ví dụ 12



Một vùng dân cư ven biển có dạng hình chữ nhật như hình vẽ. Mật độ dân số tại một vị trí có tọa độ (x, y) cho bởi mô hình

$$\rho(x,y) = \frac{25.000}{x + |y| + 1} \quad \text{(Ngàn người/km}^2\text{)}$$

Tìm dân số của vùng dân cư này.

Ví dụ 13

Một công ty sản xuất và bán đồ nội thất ước tính lợi nhuận hàng tuần khi bán x bộ bàn ghế hoàn chỉnh và y bộ chưa hoàn chỉnh được cho theo công thức

$$P(x,y) = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 100x - 90y - 4000$$

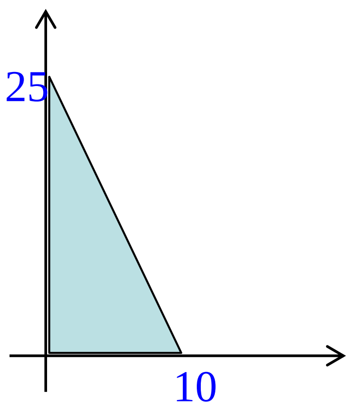
Nếu trong 1 tuần, số bộ hoàn chỉnh được sản xuất và bán ra 180 đến 200 bộ, số bộ chưa hoàn chỉnh được sản xuất và bán ra từ100 đến 120 bộ, ước tính lợi nhuận bình quân một tuần cho công ty này.

Ví dụ 14

Một vùng ven biển dạng hình tam giác như hình vẽ, có độ cao so với mực nước biển cho bởi mô hình

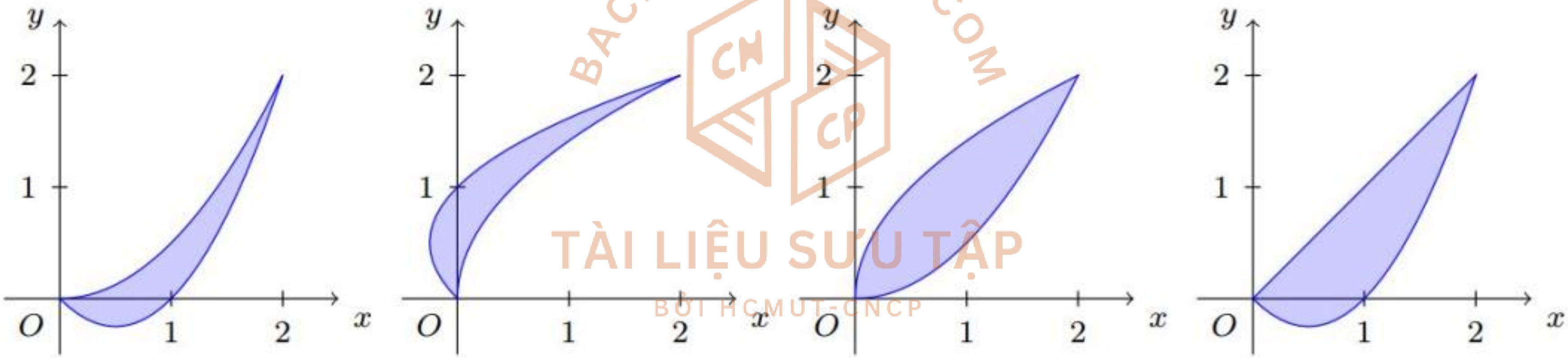
$$h(x, y) = 0.25 - 0.025x - 0.01y$$

Tìm độ cao trung bình của vùng đất này so với mực nước biển.



Ví dụ 15

Câu 2. Hình vẽ nào mô tả miền tích phân của $I = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2-y}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$.



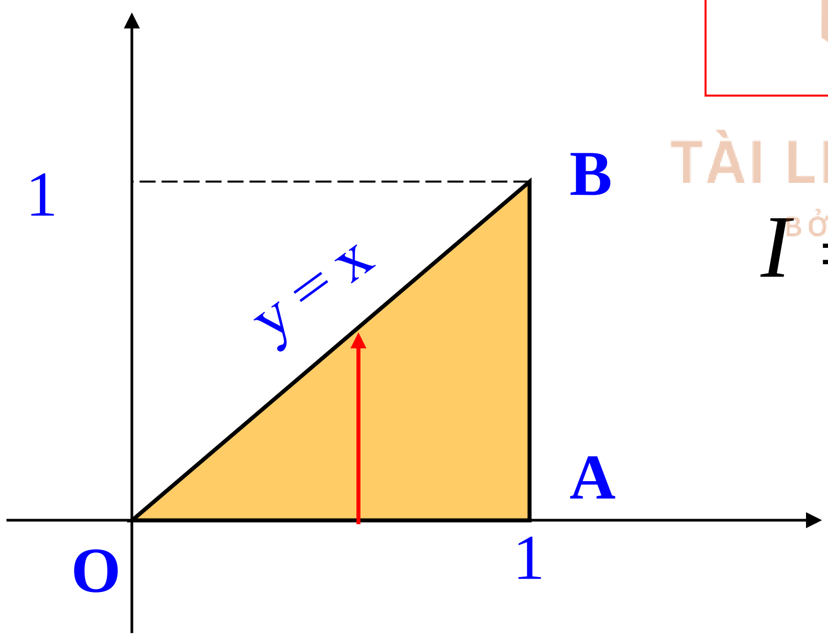
(I) (II) (III) (IV)

VÍ DỤ

1/ Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$

với D là tam giác OAB,O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)

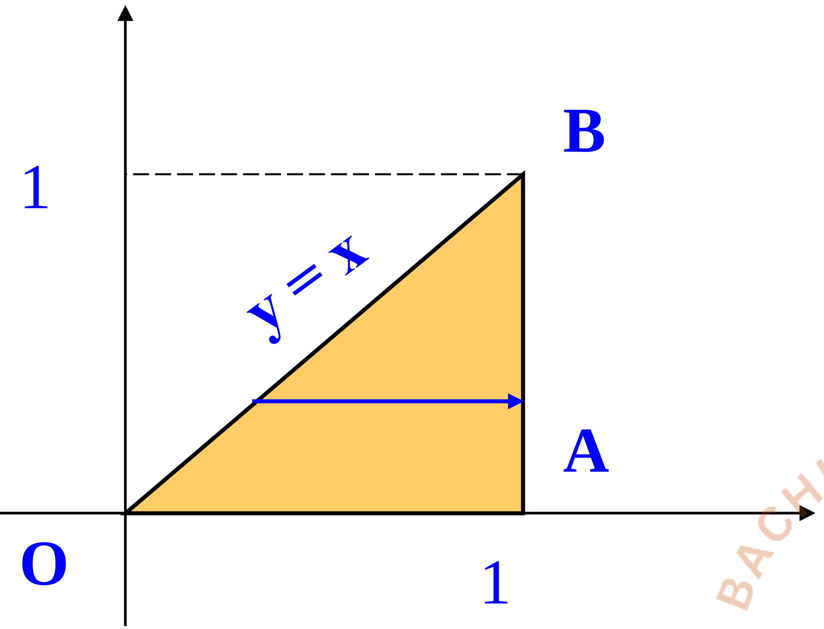
Cách 1:



$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$



$$I = \iint\limits_D xydxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^1 xydx$$

$$= \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 y\frac{1-y^2}{2}dy = \frac{1}{8}$$

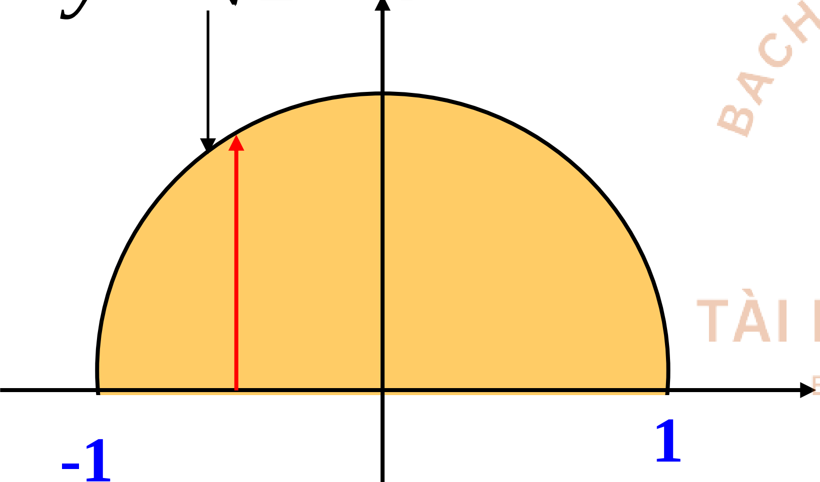
Cách 2:

$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$$

2/ Tính $I = \iint\limits_D (x+y)\,dxdy$

với D: $x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$

$y = \sqrt{1-x^2}$

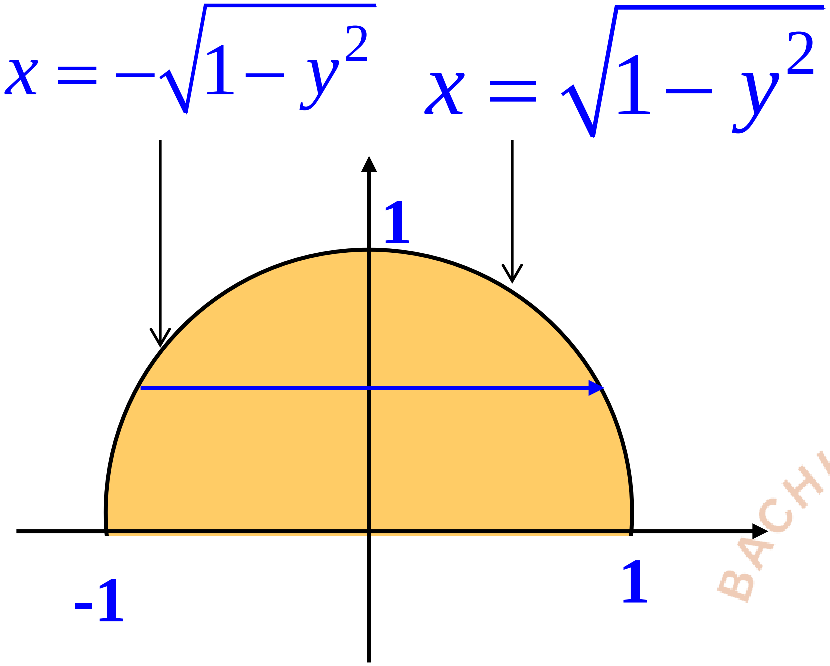


$$D : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} \right] dx = \frac{2}{3}$$



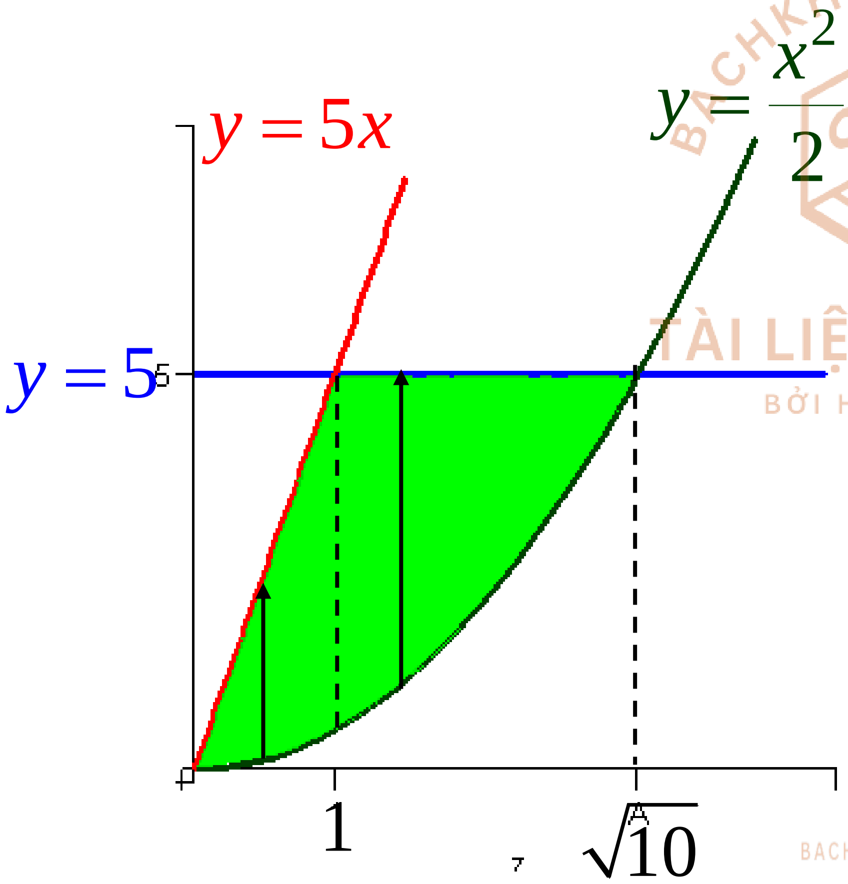
$$D:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x+y)\,dx \qquad =\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy \qquad =\frac{2}{3}$$

3/ Tính $I = \iint\limits_D (x+1)dxdy$

với D giới hạn bởi các đường y <= 5x, y <= 5,y = x²/2

$$0 \le x \le \sqrt{10}$$



$$D_1 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 5x \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{10} \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 5 \end{cases}$$

Bài 1: Vẽ miền lấy tích phân:

1. $I_1 = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

2. $I_2 = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

3. $I_3 = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

Bài 2: Tính tích phân sau:

1. $I_1 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xe^{y^2} dy$

2. $I_2 = \iint_D |x-y|dxdy$, D được giới hạn bởi $y=0, y=2-x^2$

3. $I_3 = \iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$, $D = \{(x,y): -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

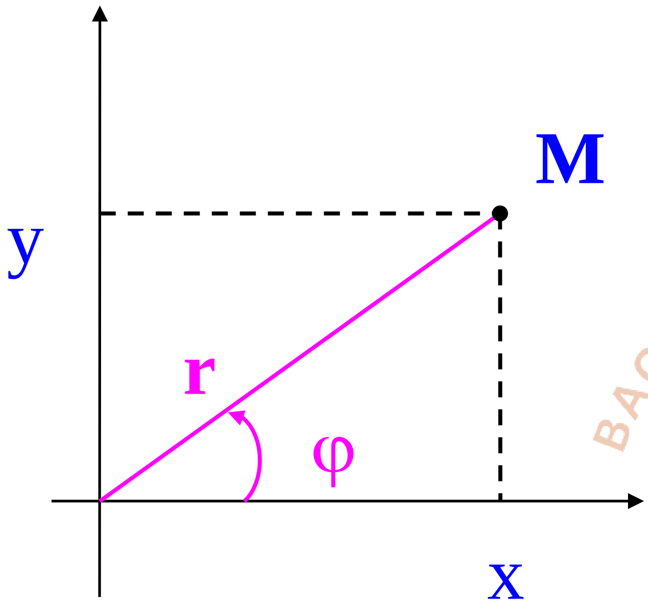
4. $I_4 = \iint_D (x^2-2xy)dxdy$, D: $y=2x, y=-2x, y=-2$

5. $I_5 = \iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$, $D: y=0, y=4-x^2, x \ge 0$

6. $I_6 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}dxdy$, $D: y=\sqrt{3}x^2, y=0, x=1$

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN KÉP

TỌA ĐỘ CỰC



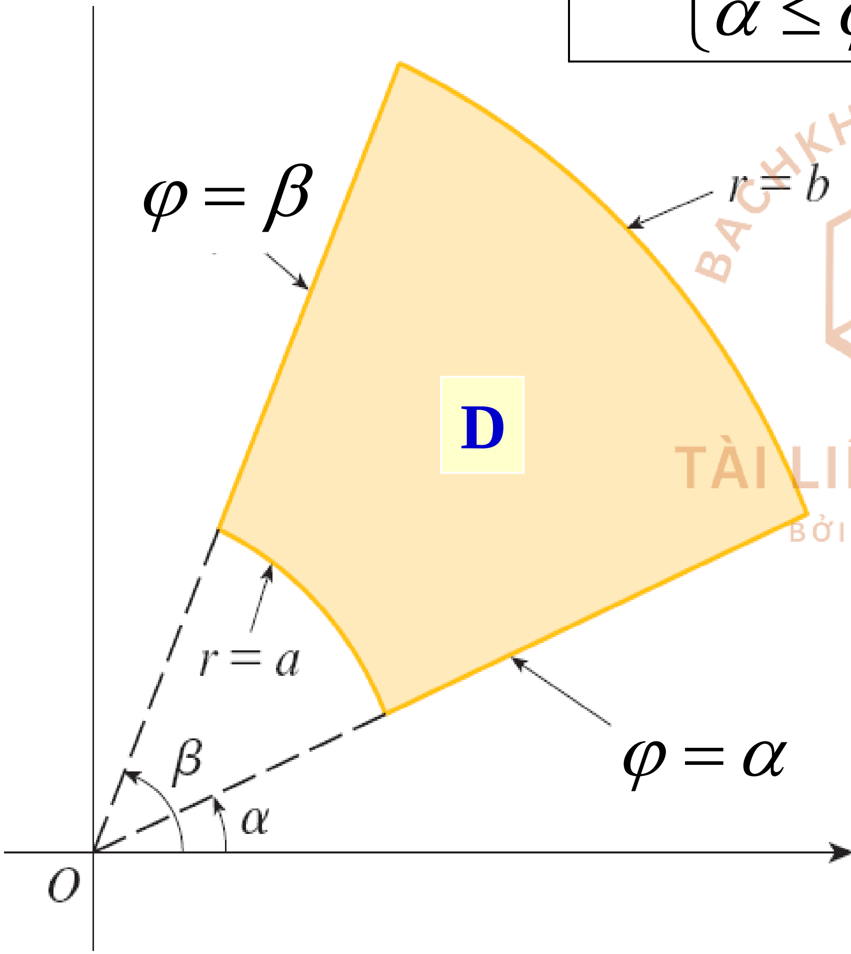
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

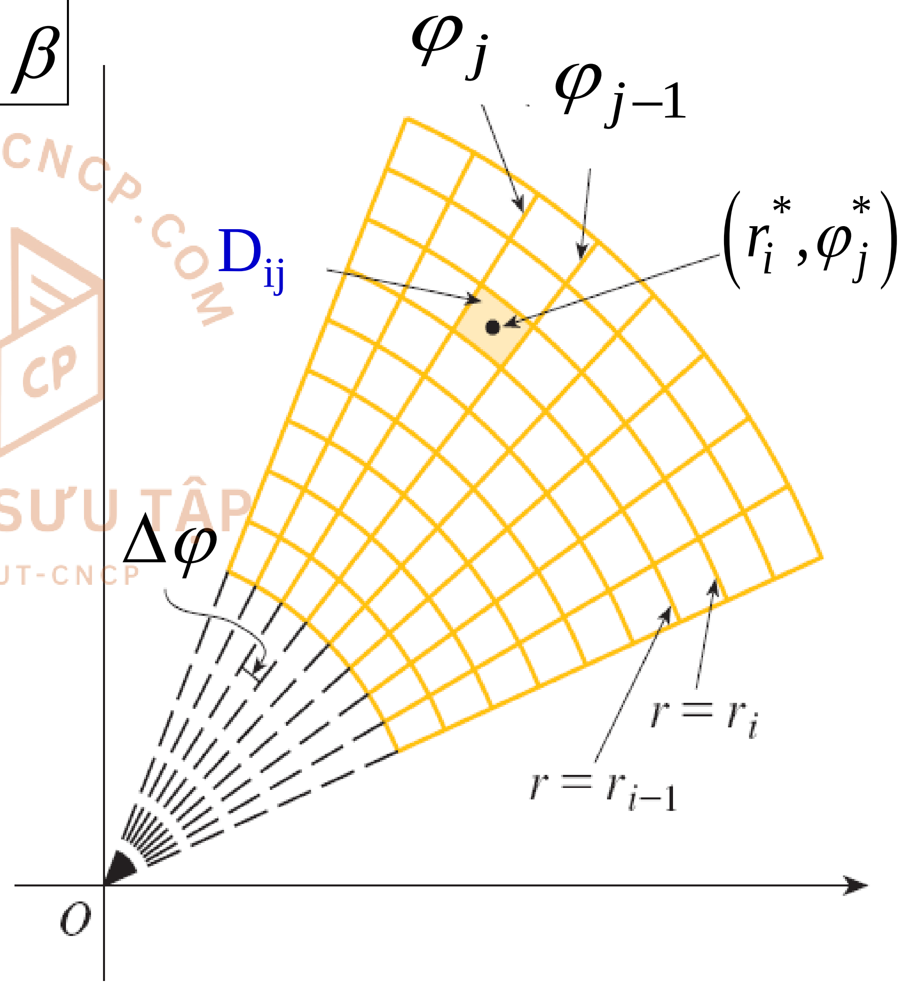
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi] \text{ hay } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ CỰC

$$D:\begin{cases} a \le r \le b \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$$





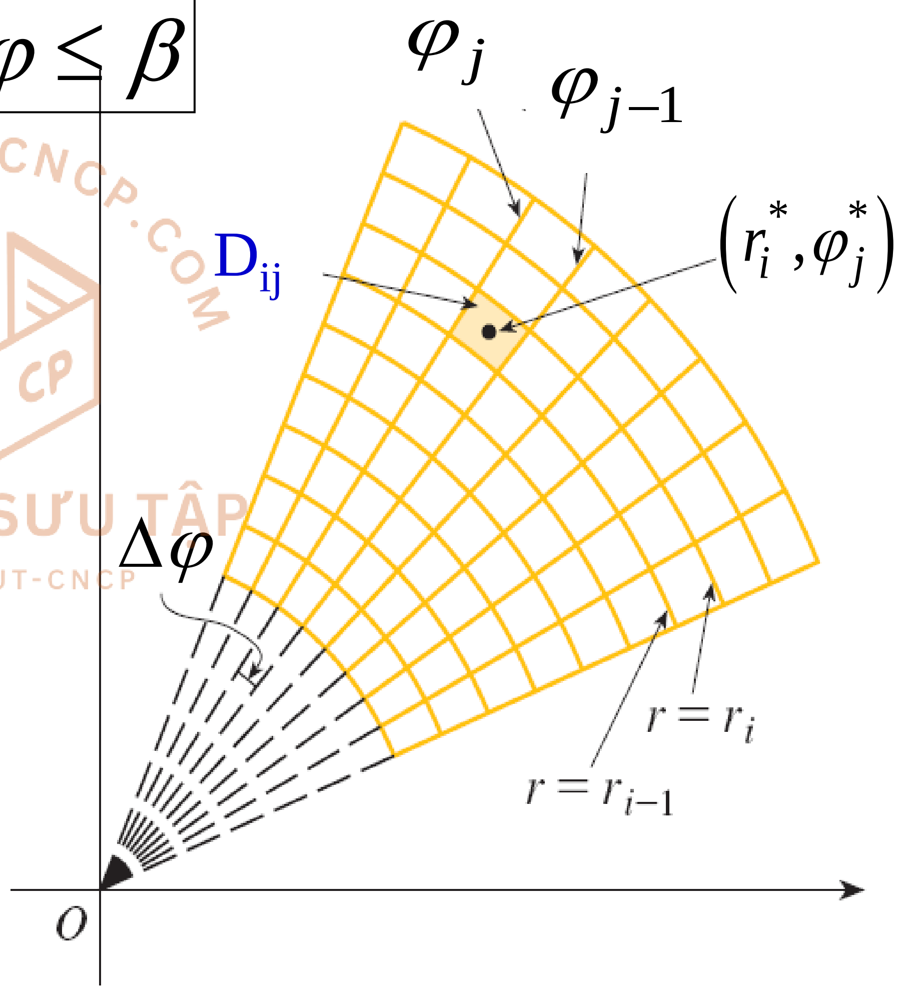
TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ CỰC

$$\boxed{D:\begin{cases} a \le r \le b \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}}$$

$$S\left(D_{ij}\right) = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(r_i + r_{i-1}\right)\left(r_i - r_{i-1}\right)\Delta\varphi$$

$$\approx r_i^* \Delta r \Delta\varphi$$



Tổng tích phân

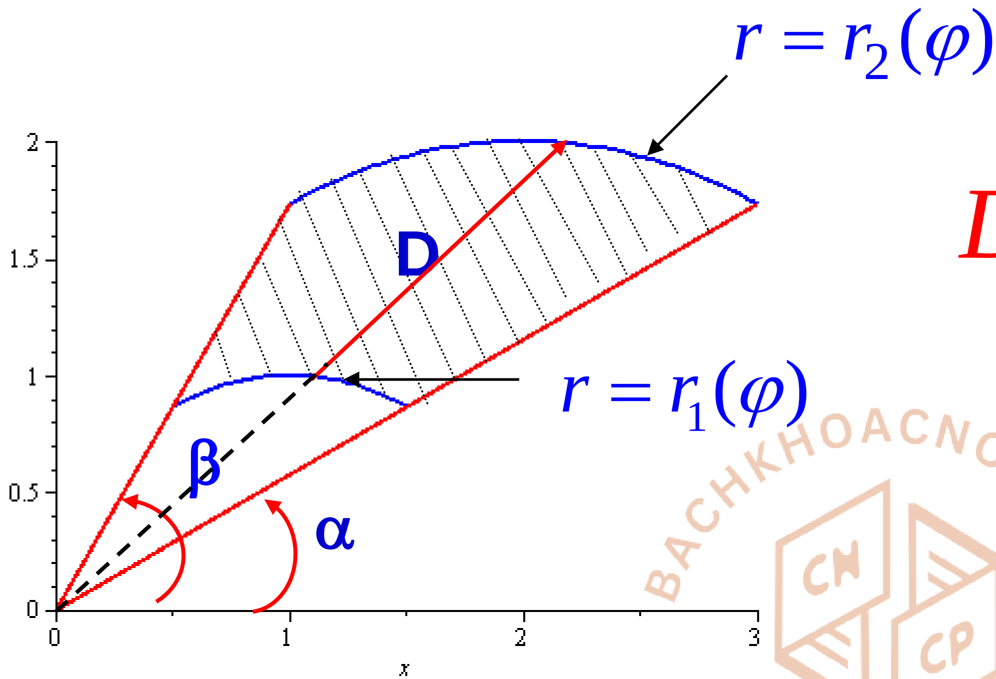
$$S_n = \sum_{i,j} f(r_i^* \cos\varphi_j^*, r_i^* \sin\varphi_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\varphi$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

Công thức đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$



$$D:\begin{cases} r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$$

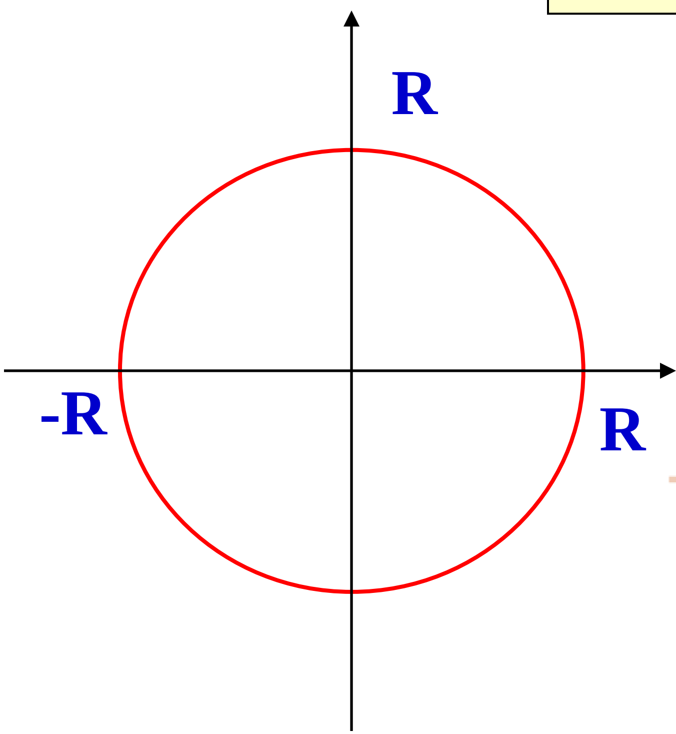
$$(0 < \beta - \alpha \le 2\pi)$$

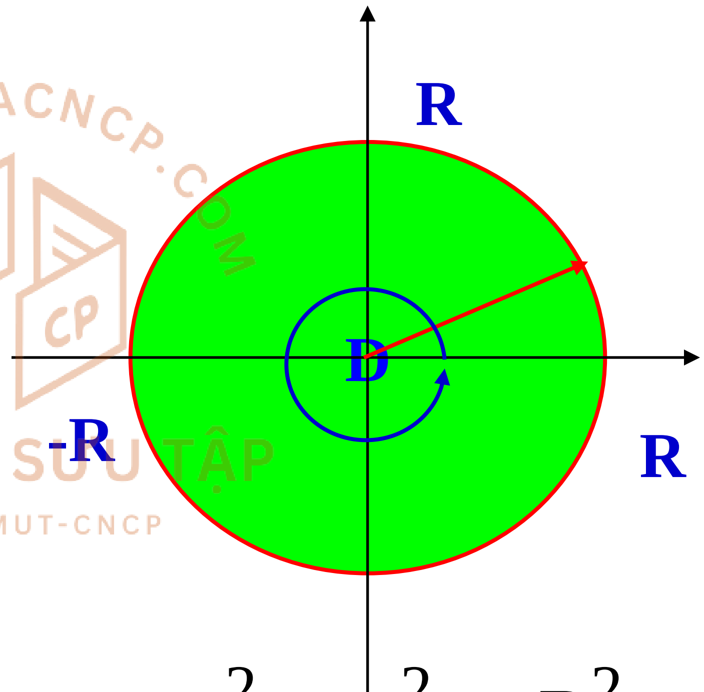
$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

Một số đường cong và miền D trong tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$





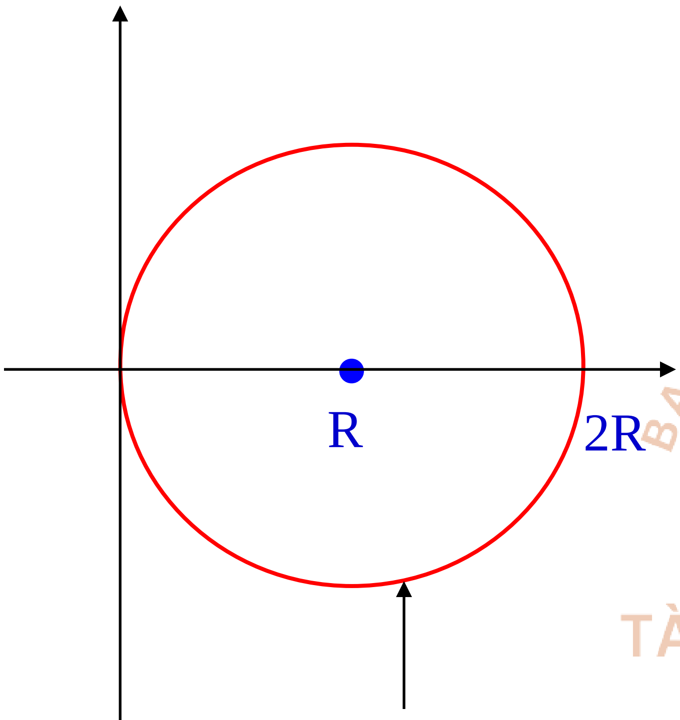
$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow r = R$$

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

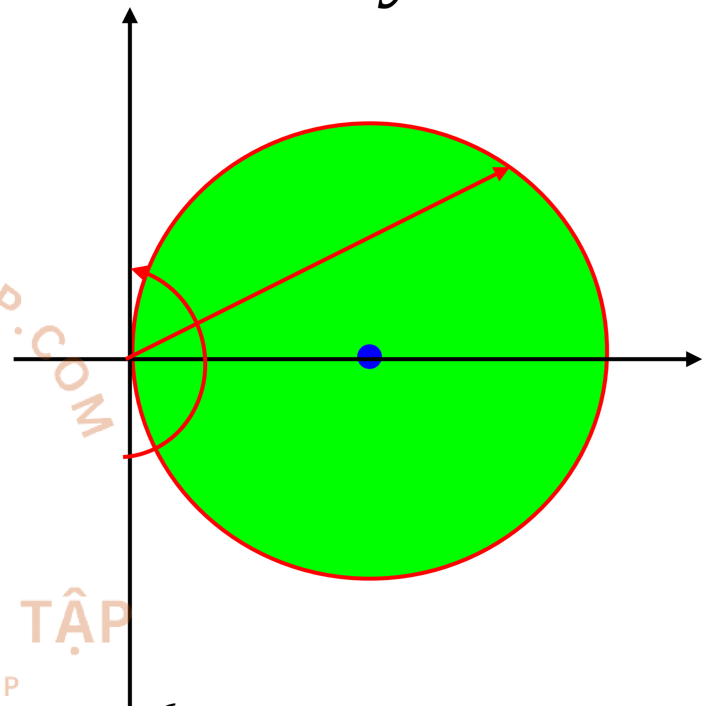
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 2Rx$$



$$r = 2R\cos\varphi$$

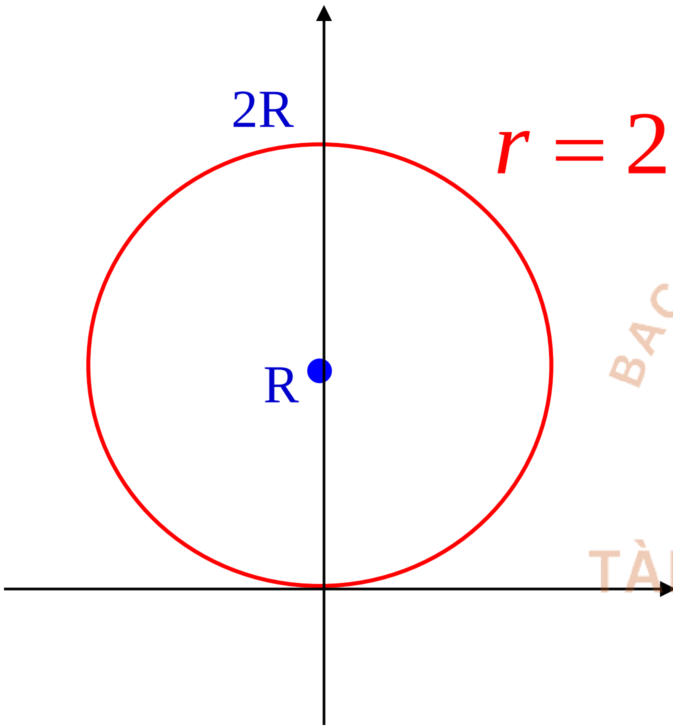
$$x^2 + y^2 \le 2Rx$$



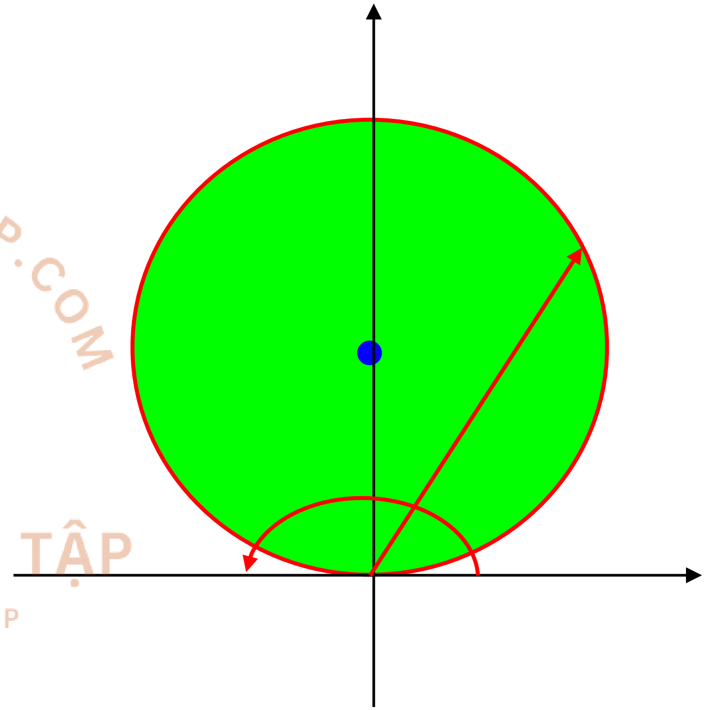
$$\begin{cases} 0 \le r \le 2R\cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 2Ry$$

$$x^2 + y^2 \le 2Ry$$



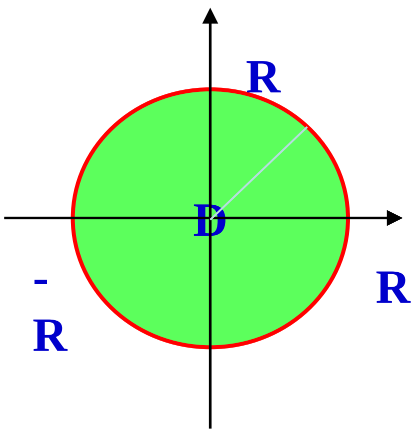
$$r = 2R\sin\varphi$$



$$\begin{cases} 0 \le r \le 2R\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

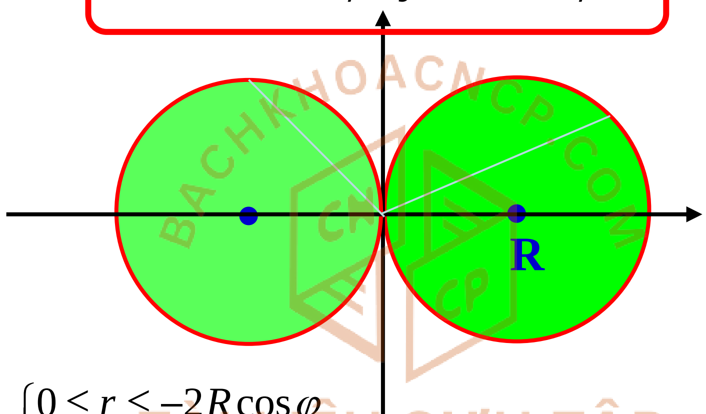
Các hình tròn cơ bản

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$$



$$\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

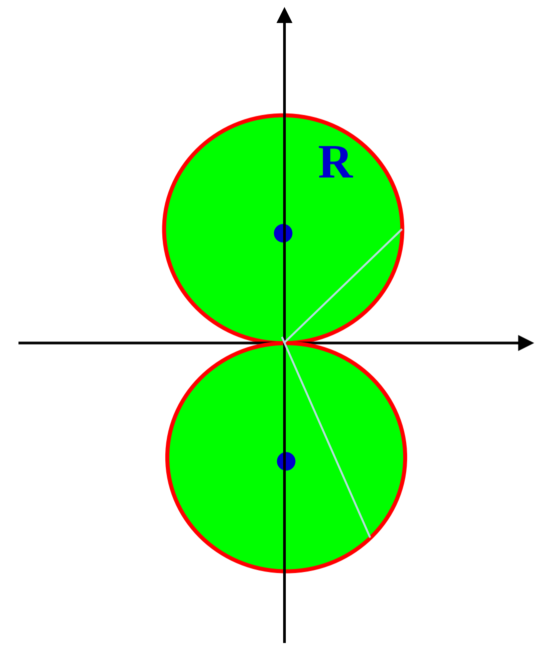
$$(-\pi \le \varphi \le \pi)$$



$$\begin{cases} 0 \le r \le -2R\cos\varphi \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

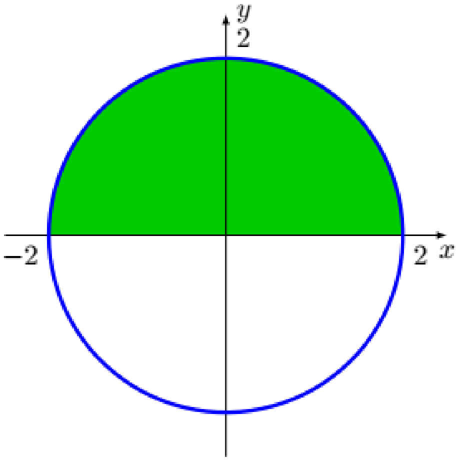
$$\begin{cases} 0 \le r \le 2R\cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

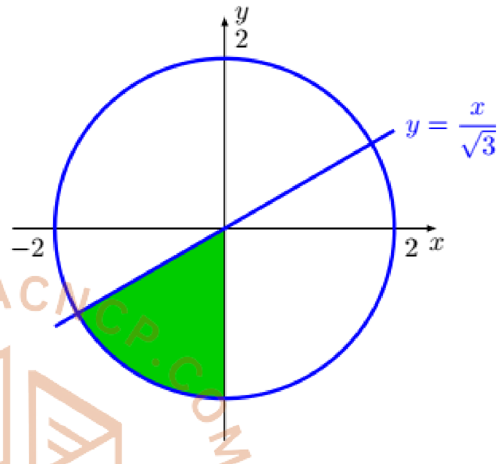
$$\begin{cases} 0 \le r \le 2R\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

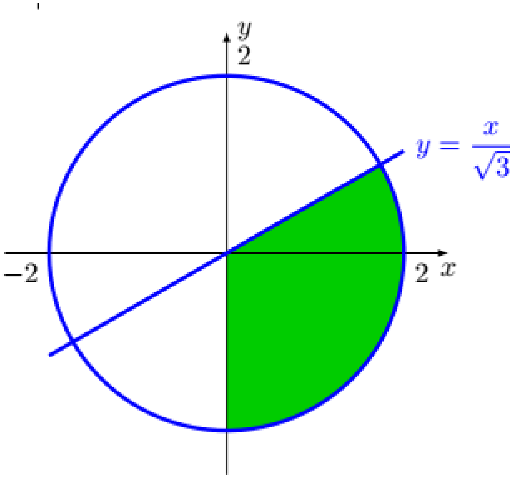


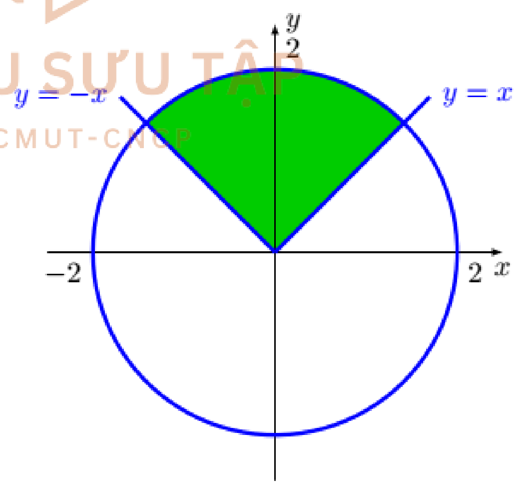
$$\begin{cases} 0 \le r \le -2R\sin\varphi \\ -\pi \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

Mô tả miền phẳng theo tọa độ cực.

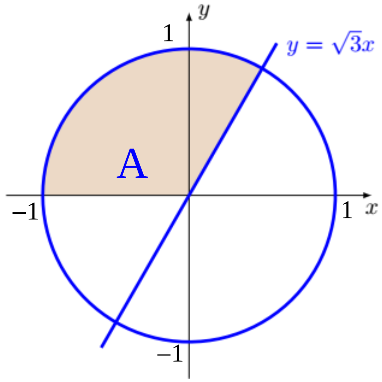


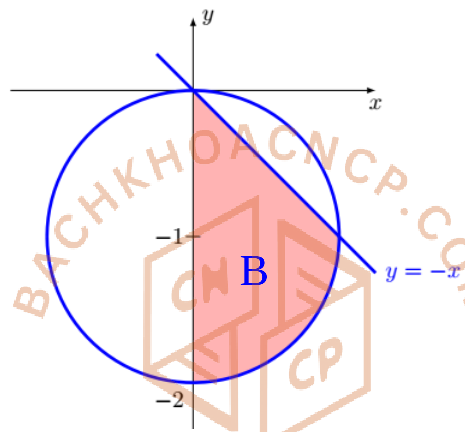


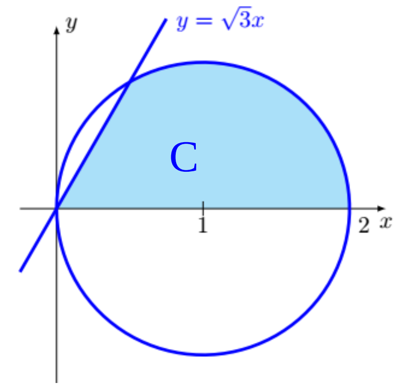




Chọn hình tương ứng với mô tả miền phẳng







$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ 0 \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge \sqrt{3}x, y \ge 0 \end{cases}$$

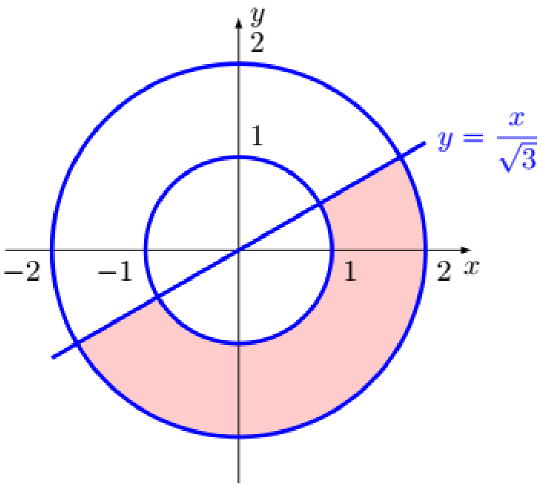
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le -2y \\ 0 \le x \le -y \end{cases}$$

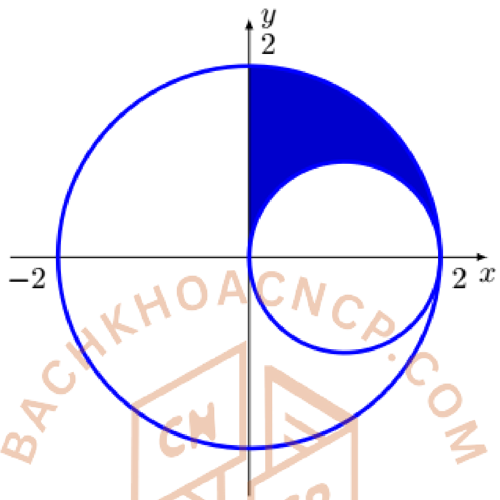
$$\begin{cases} 0 \le r \le -2\sin\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

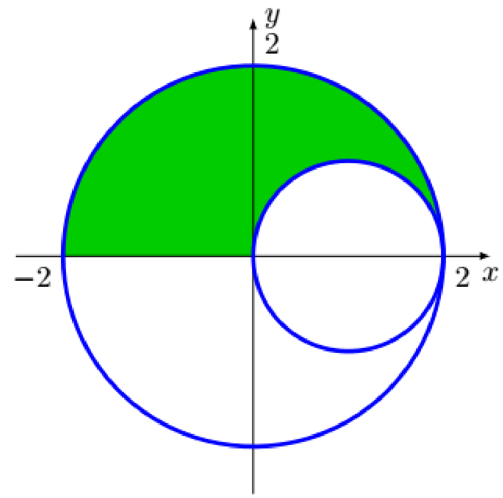
$$\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

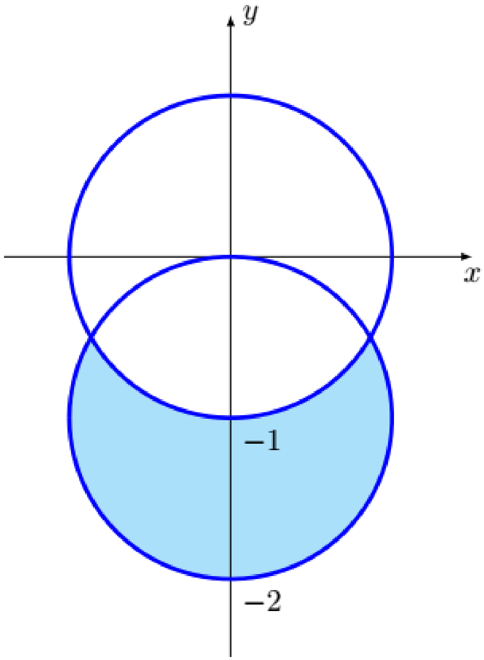
Mô tả miền phẳng theo tđ Descartes và tđ cực

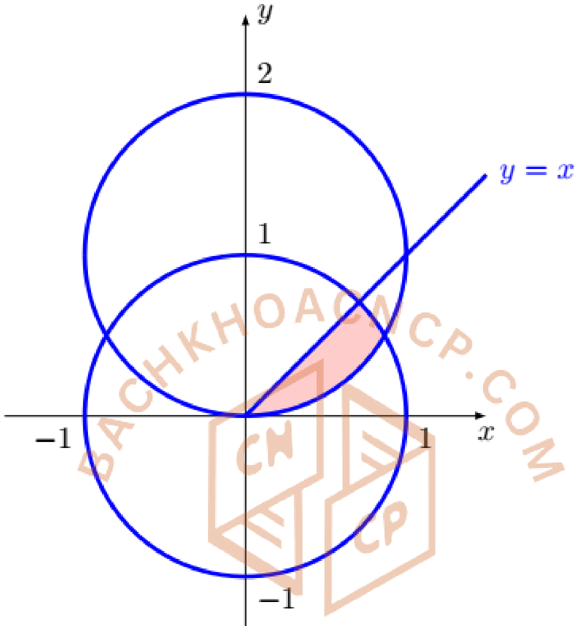


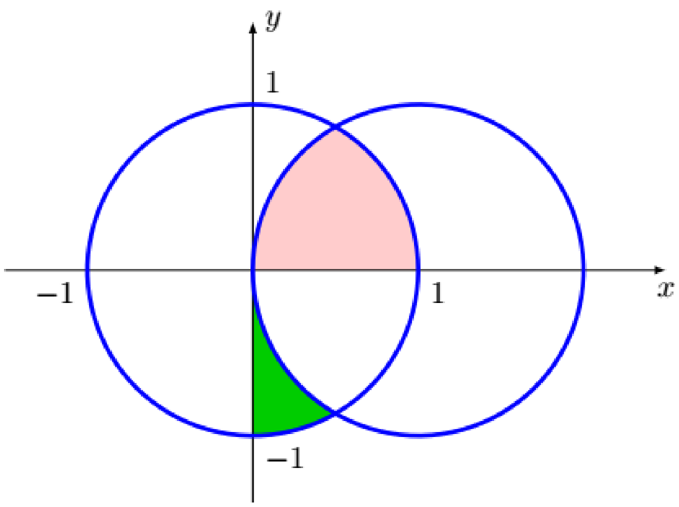




Mô tả miền phẳng theo tọa độ cực







VÍ DỤ

1/ Tính: $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$ với $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

2/ Tính: $$I = \iint_D (x-y)\,dxdy$$

$$D: \begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge x, y \ge -x \end{cases}$$

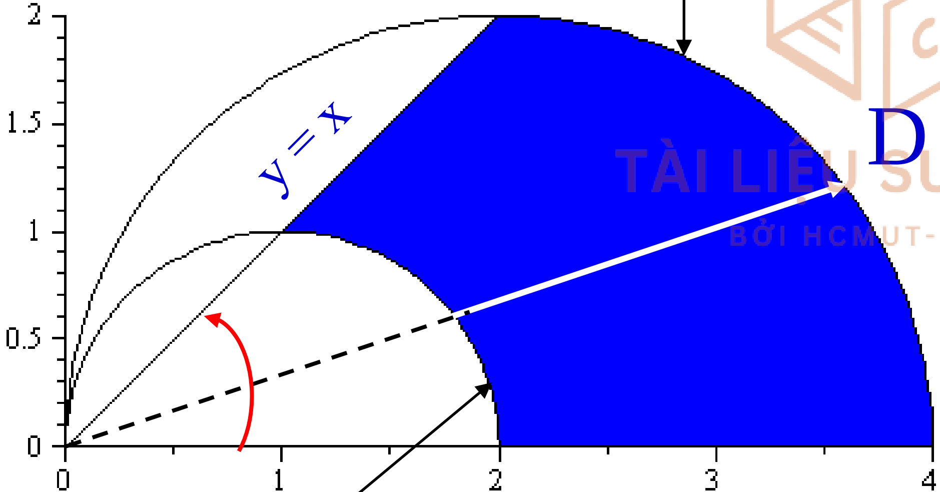
3/ Tính: $I = \iint\limits_D x\,dx\,dy$ với $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2y \\ y \le -x \end{cases}$

4/ Tính diện tích miền D giới hạn bởi:

$$x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 2x, y = x, y = 0$$

r = 4cosφ

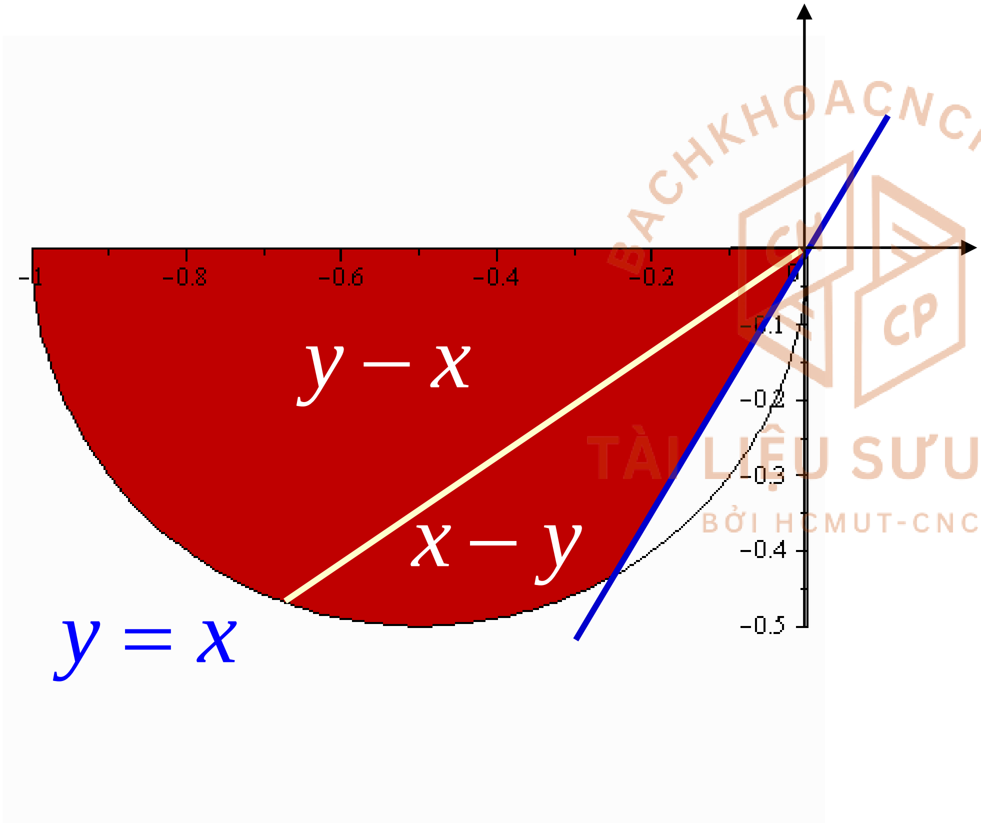
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$



$$D \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$$

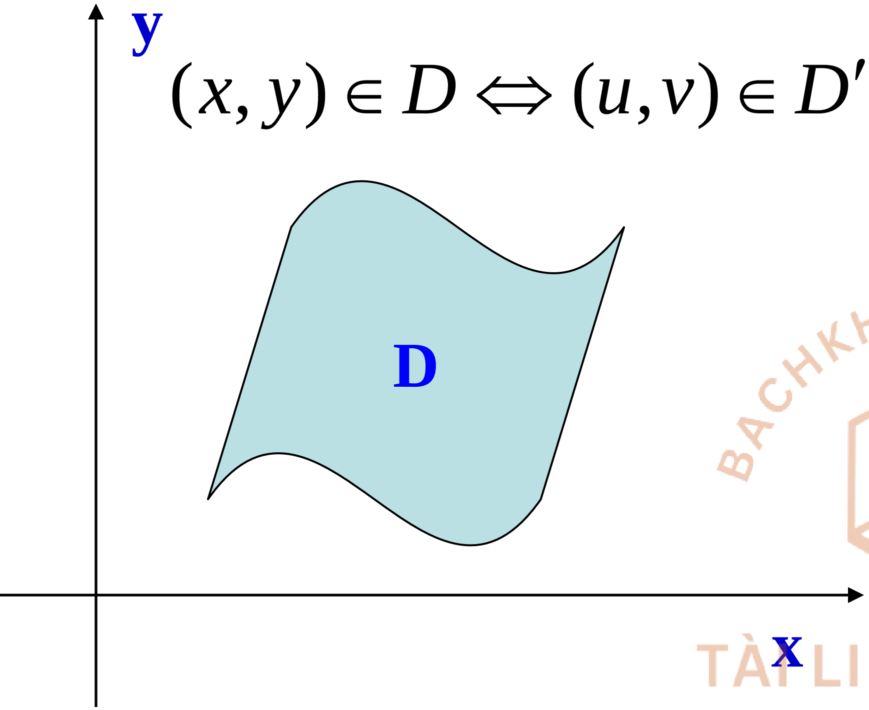
r = 2cosφ

Tính: $I = \iint\limits_D |x - y|\,dxdy \quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le -x \\ \sqrt{3}x \le y \le 0 \end{cases}$



ĐỔI BIẾN TỔNG QUÁT

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in D'$$



x = x(u,v), y= y(u,v)

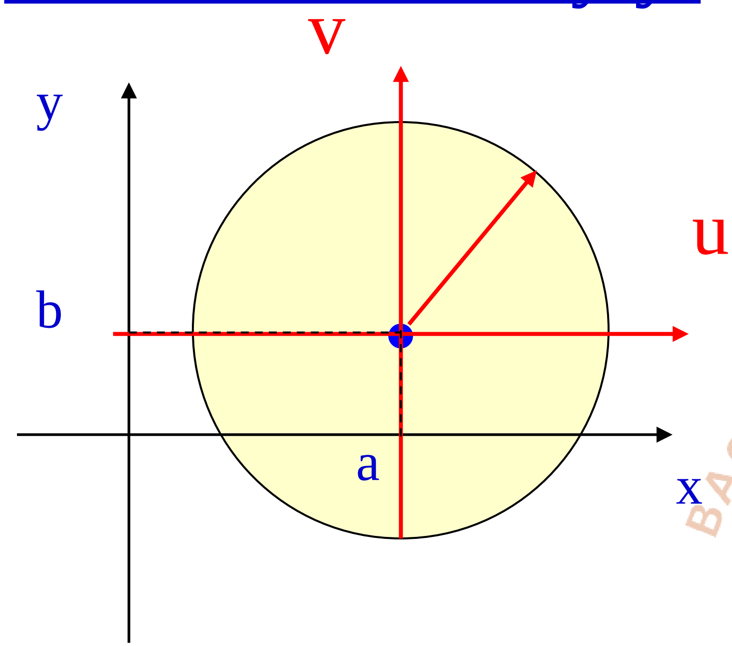
$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Công thức đổi biến

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

Hình tròn tâm tùy ý:

$$\boxed{D: (x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2}$$



Dời gốc tọa độ đến tâm

$$x = u + a,\ y = v + b$$

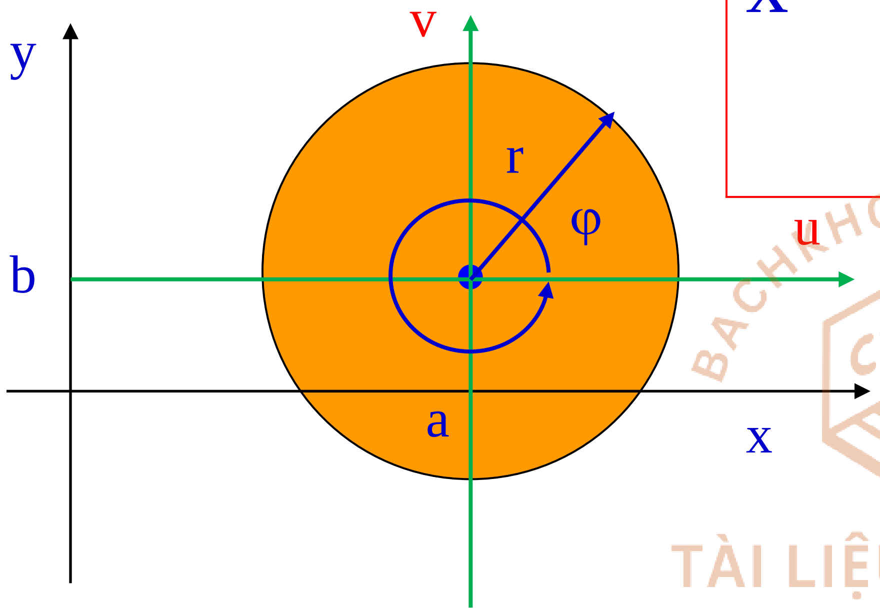
$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{u^2+v^2\le R^2} g(u,v).1\,dudv$$

Đổi tiếp sang tọa độ cực: $u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi$

Tóm tắt:

$$D: (x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2$$



$$x = a + r\cos\varphi,\ y = b + r\sin\varphi$$

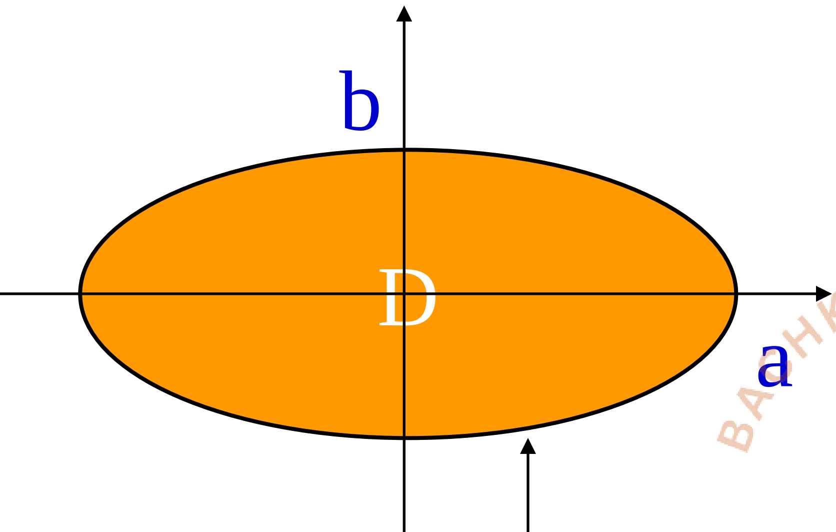
$$J = r$$

$$D': \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(a + r\cos\varphi, b + r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

Đổi biến trong ellipse

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

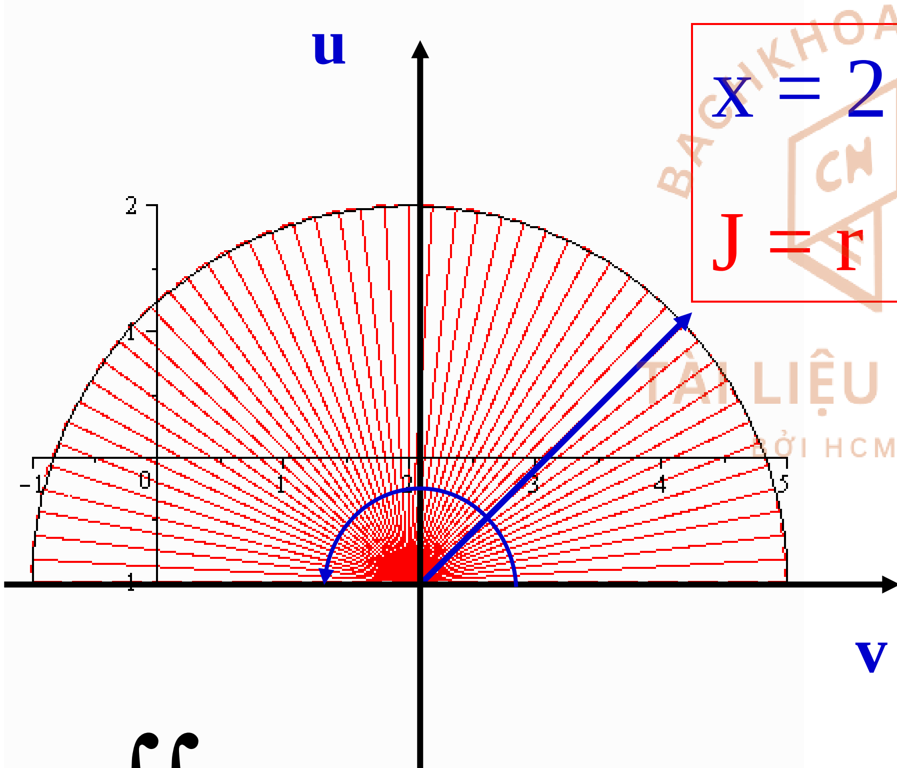
x = arcosφ, y = brsinφ

J = abr

$$D': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdrd\varphi$$

1/ Tính: $I = \iint\limits_D xydxdy$ với D là nửa trên của hình tròn: $(x-2)^2 + (y+1)^2 \le 9$



$x = 2 + r\cos\varphi,\ y = -1 + r\sin\varphi$

$J = r$

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D (2 + r\cos\varphi)(-1 + r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

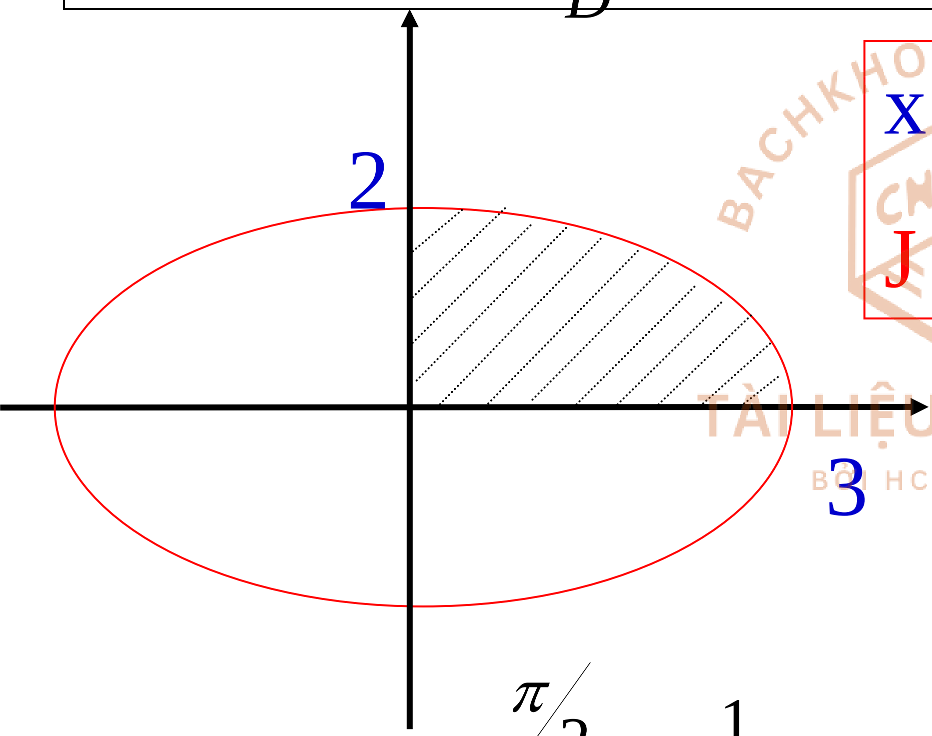
$$I = \iint\limits_{D'} (2 + r\cos\varphi)(-1 + r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{3} (-2 - r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + r^2 \sin\varphi\cos\varphi) r dr$$

$$= -9\pi + 36$$

Ví dụ

2/ Tính: $I = \iint\limits_D xydxdy, D: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1; y \ge 0; x \ge 0$



x = 3rcosφ, y = 2rsinφ

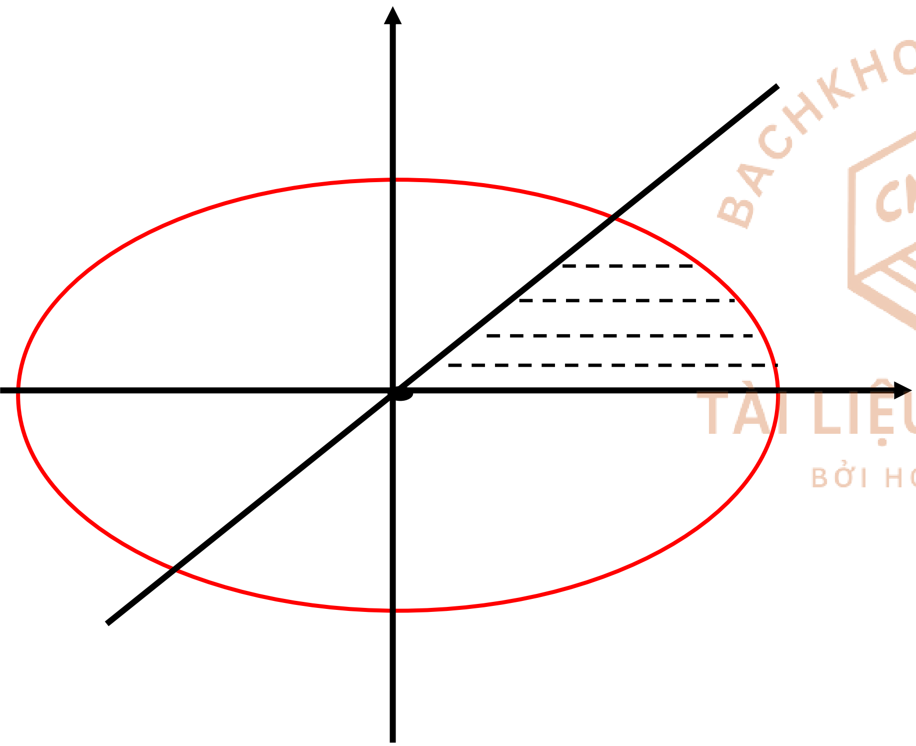
J = 3.2.r = 6r

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 3r\cos\varphi.2r\sin\varphi.6rdr \quad = \frac{9}{2}$$

3/ Tính diện tích miền giới hạn bởi

$$ellipse \ \ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\ y=0,\ y=x,\ x\geq 0$$



$$x=\sqrt{3}r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$$

$$J=\sqrt{3}r$$

Miền D được viết lại:

$$\frac{x^2}{3}+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq r\leq 1, \\ 0\leq r\sin\varphi\leq\sqrt{3}r\cos\varphi \end{cases}$$

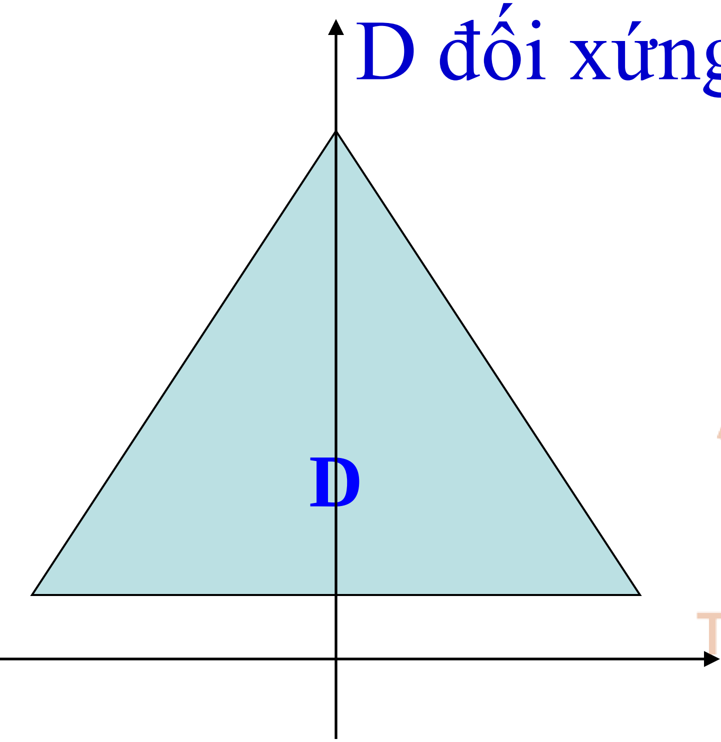
$$\begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le r\sin\varphi \le \sqrt{3}r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \le \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

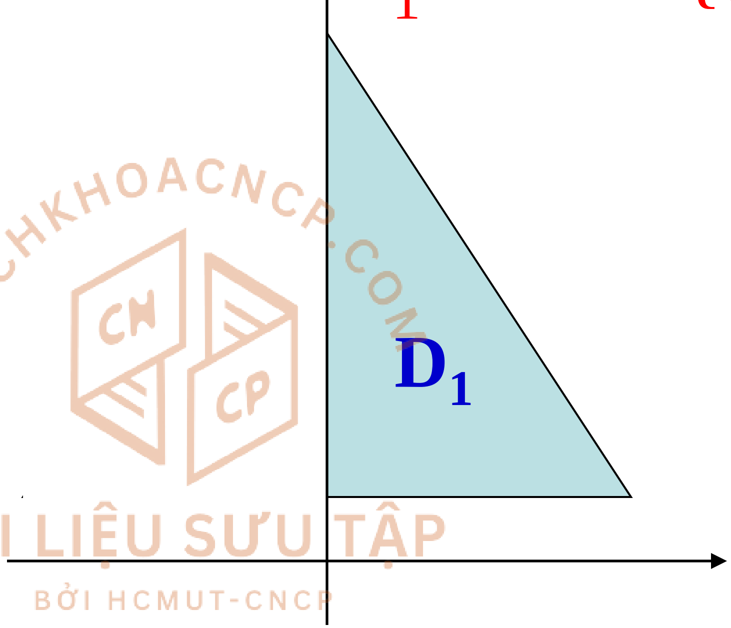
$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{3}rdr$$

Tính đối xứng của miền D trong tính tp kép

D đối xứng qua oy



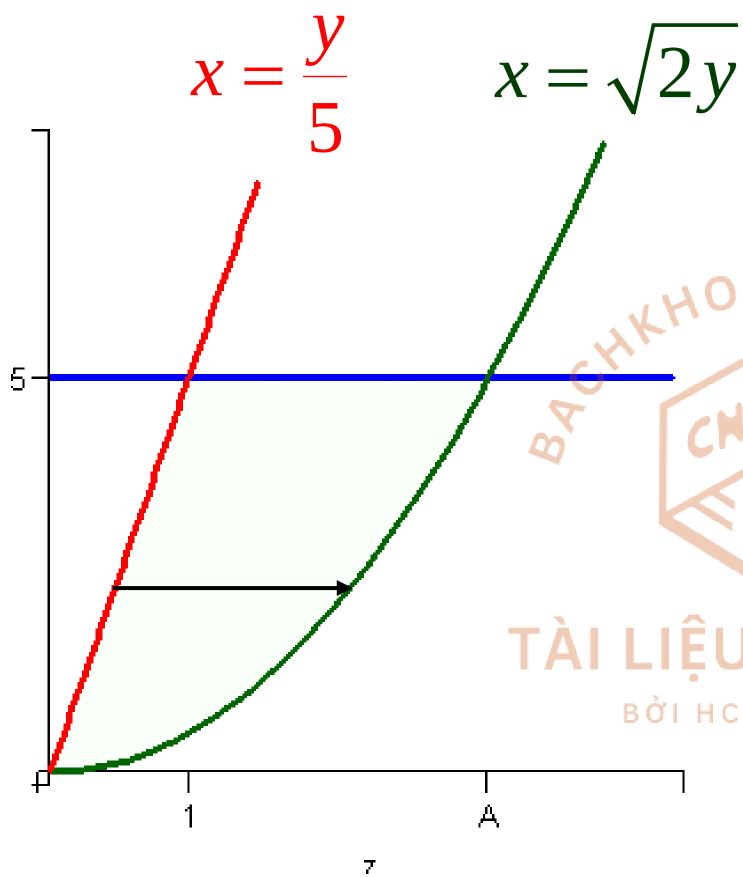
$D_1 = D \cap \{(x,y) \,/ x \geq 0\}$



f(x,y) chẵn theo x: $$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

f(x,y) lẻ theo x: $$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

Đổi thứ tự tính:



$$D\begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ \frac{y}{5} \le x \le \sqrt{2y} \end{cases}$$

$$I = \iint_D (x+1)\,dxdy$$

$$= \int_0^5 dy \int_{\frac{y}{5}}^{\sqrt{2y}} (x+1)\,dx$$

$$\iint_D (x+1)dxdy = \iint_{D_1} (x+1)dxdy + \iint_{D_2} (x+1)dxdy$$

$$D_1 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 5x \end{cases} \quad = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{5x} (x+1)dy$$

$$D_2 \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{10} \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 5 \end{cases} \quad + \int_1^{\sqrt{10}} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{5} (x+1)dy$$

5/ Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường

$$y=(2-x)\sqrt{x},\ \ y=x^2-2x$$

Hoành độ giao điểm

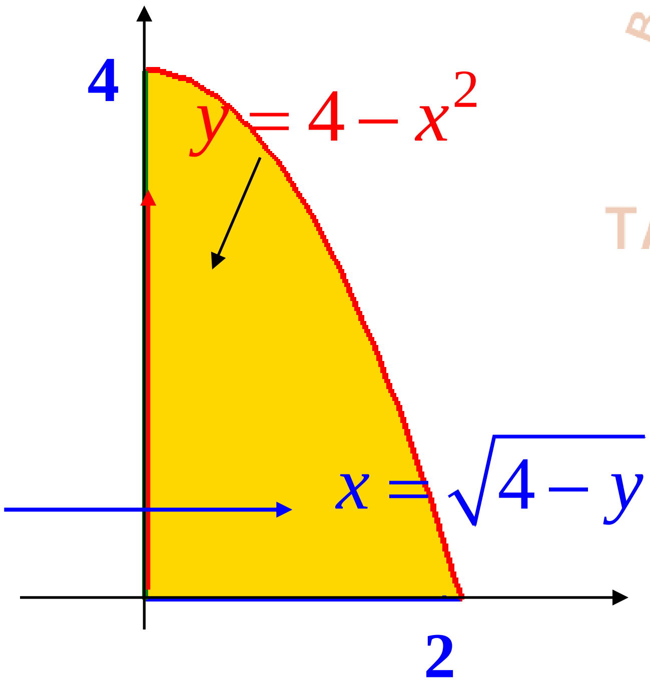
$$\begin{cases}(2-x)\sqrt{x}=x^2-2x\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=0, x=2$$

$$\boxed{D:\begin{cases}0\leq x\leq 2\\ x^2-2x\leq y\leq (2-x)\sqrt{x}\end{cases}}$$

$$S(D)=\iint_D dxdy \ =\int_0^2 dx\int_{x^2-2x}^{(2-x)\sqrt{x}} dy$$

6/ Tính $\iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: y = 0, y= 4 – x², x ≥ 0.



$$I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dy$$

Khó lấy nguyên hàm

Đổi thứ tự

$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}dx$$

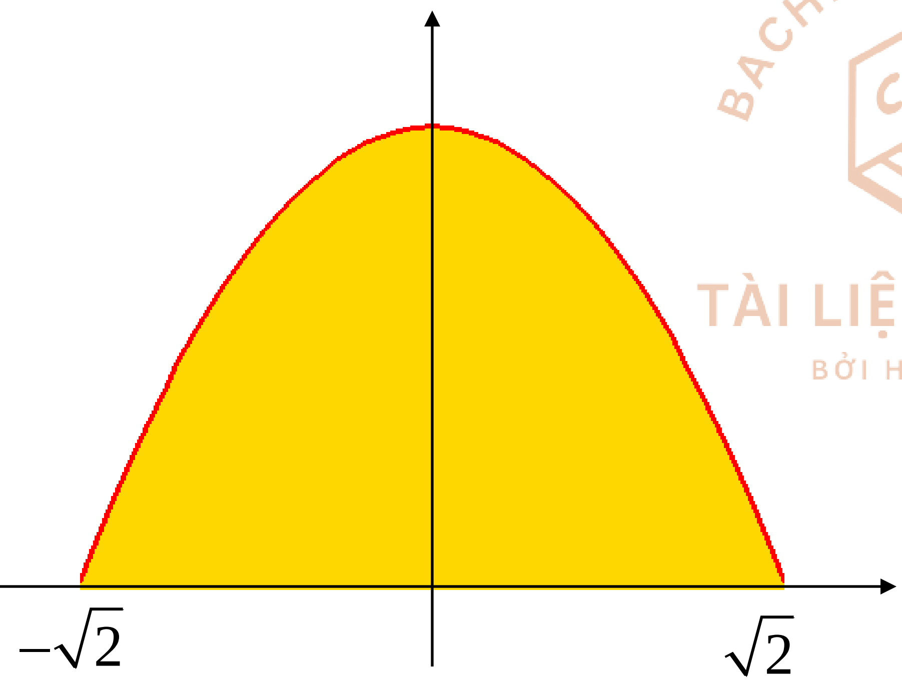
$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy \qquad = \frac{e^8}{4} - \frac{1}{4}$$

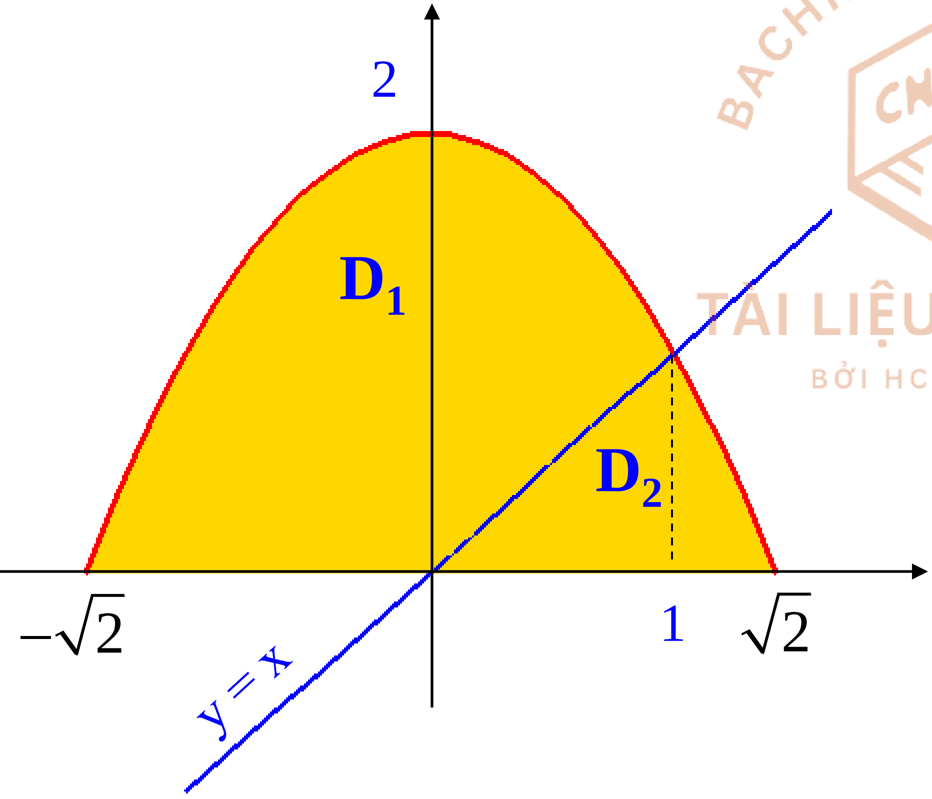
6/ Tính $\iint\limits_D |x-y|\,dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: y = 0, y= $2 - x^2$



6/ Tính $\iint_D |x-y|\,dxdy$

miền D giới hạn bởi các đường: y = 0, y= 2 – x^2

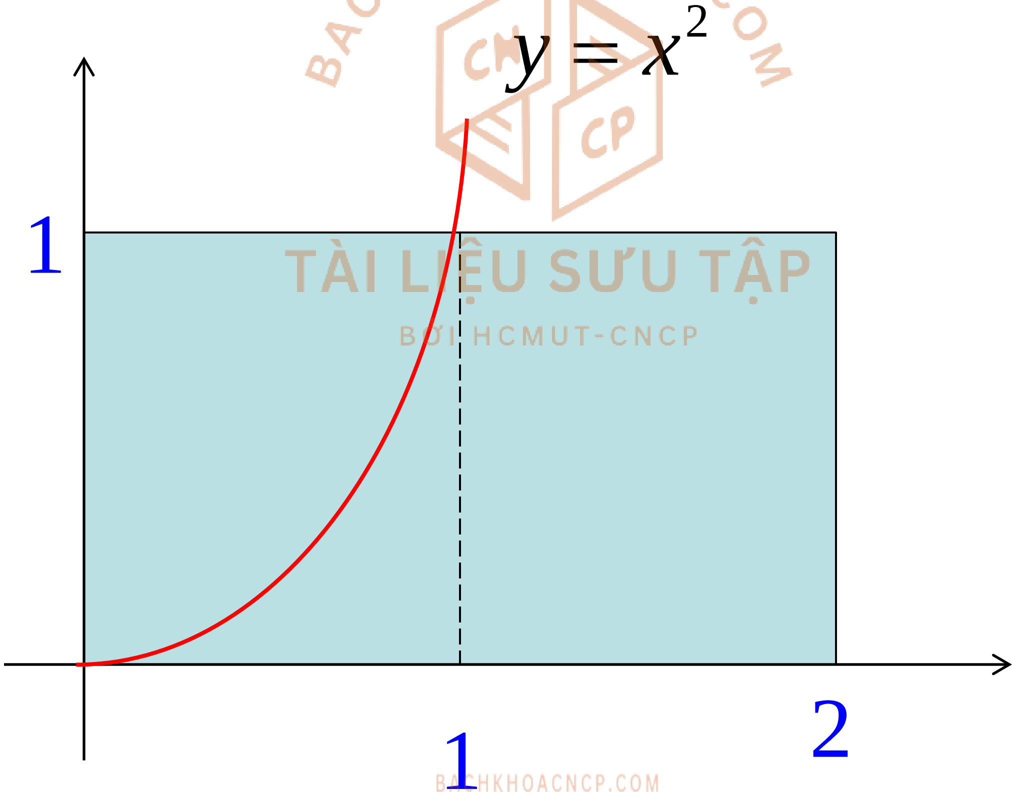


$$I = \iint_{D_1} (y-x)\,dxdy$$

$$+\iint_{D_2} (x-y)\,dxdy$$

7/ Tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

$$f(x,y) = \begin{cases} x, x^2 \geq y, \\ x + y, x^2 < y. \end{cases} \quad ; \quad D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$$



8/ Vẽ miền lấy tích phân:

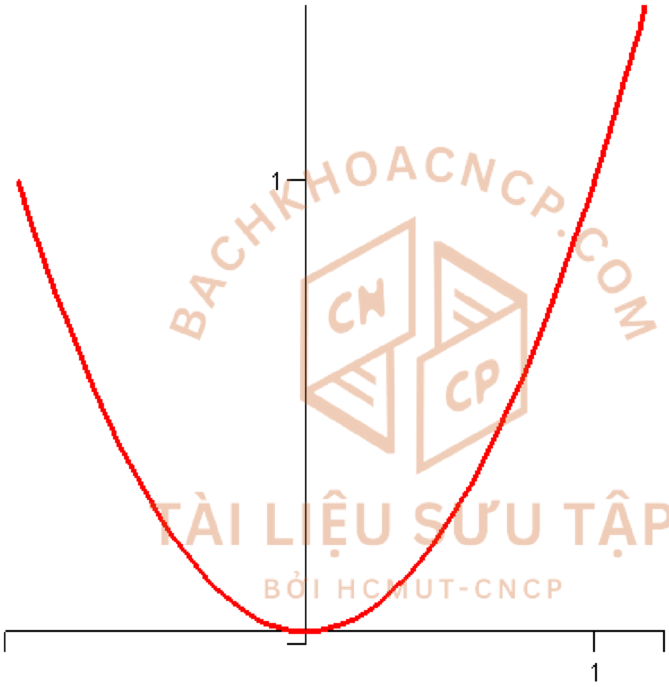
$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

$$2/\ I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$$

$$3/\ I = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

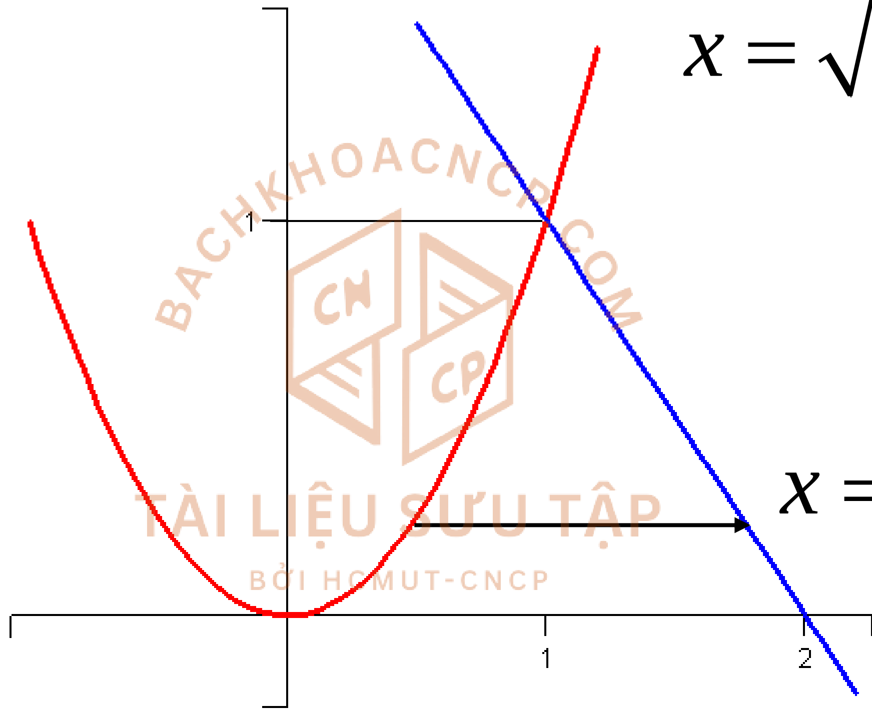
$$4/\ I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{4y}} f(x,y)dx$$

$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$



$$x = \sqrt{y}$$

$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$



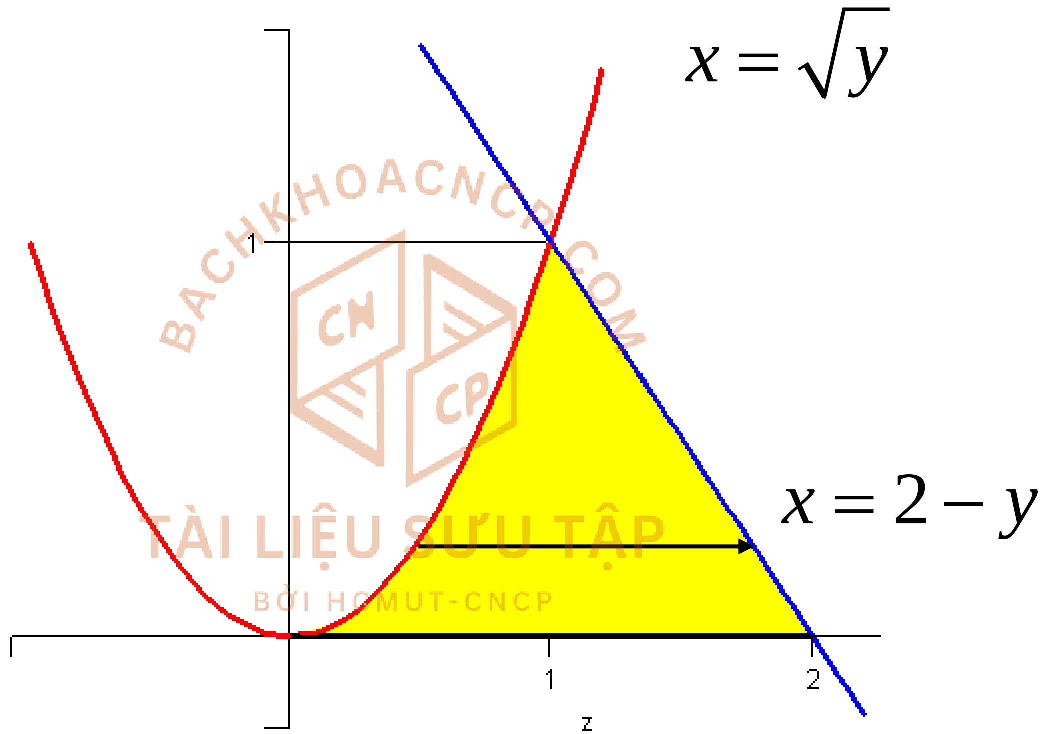
$$x = \sqrt{y}$$

$$x = 2 - y$$

$$\sqrt{y} \xrightarrow{x} 2 - y$$

$$0 \xrightarrow{y} 1$$

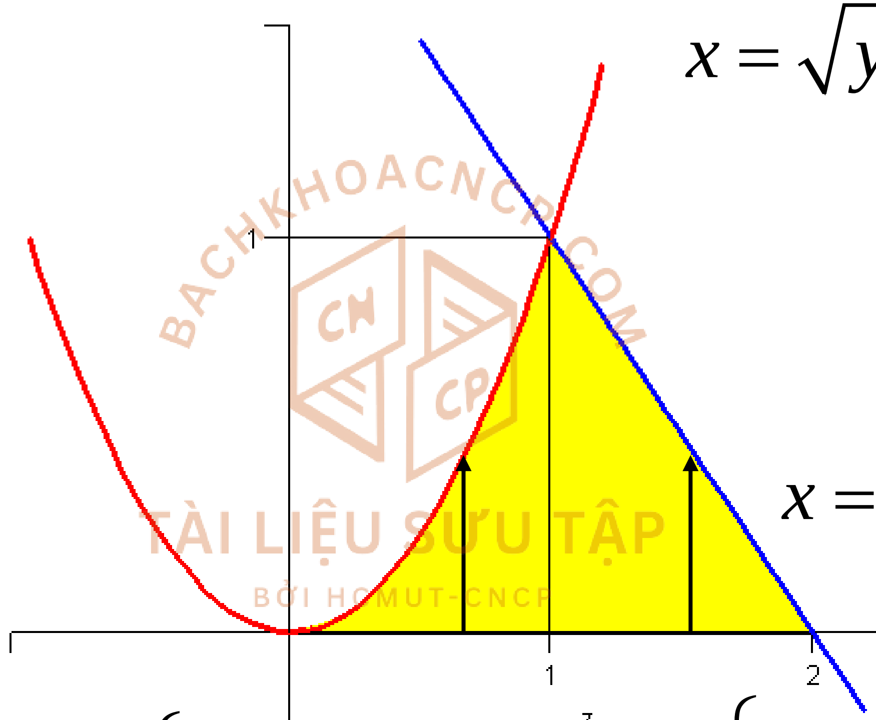
$$1/\ I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$



$$\sqrt{y} \xrightarrow{x} 2 - y$$

$$0 \xrightarrow{y} 1$$

$$1/\ I=\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)\,dx$$



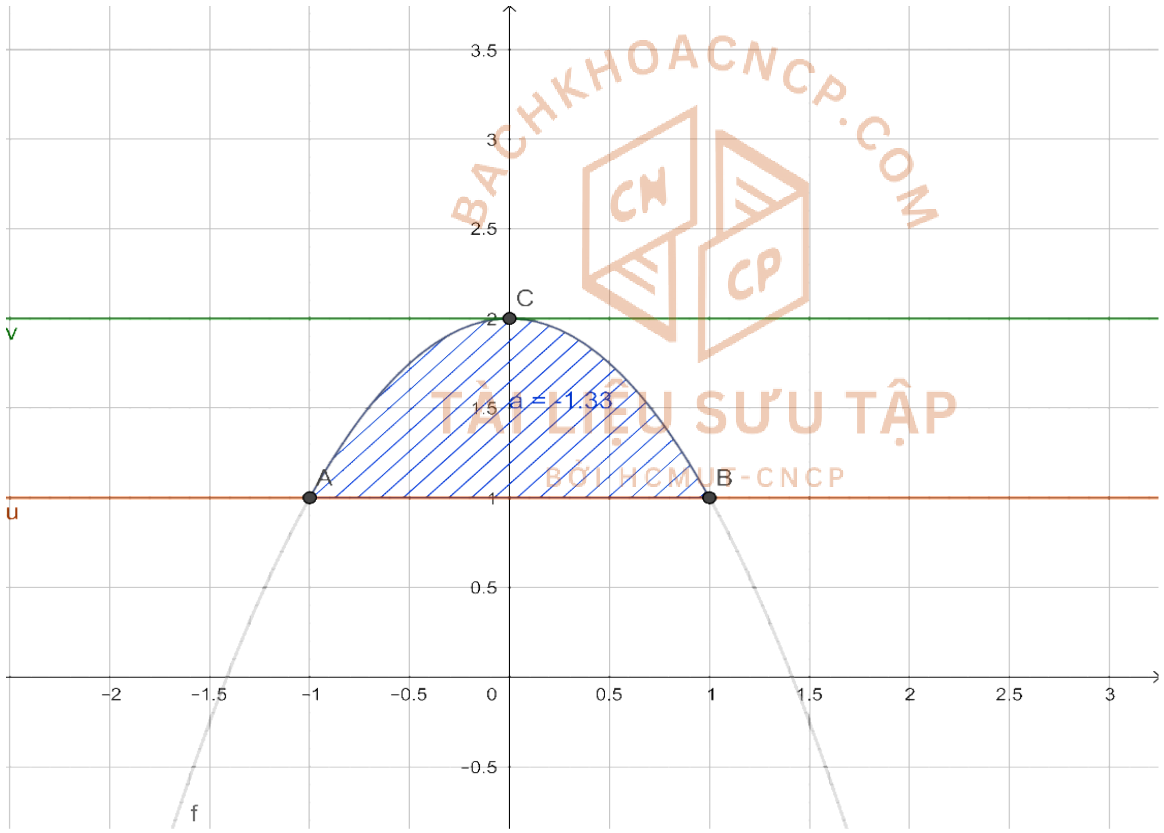
$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\;y\;} x^2 \\ 0 \xrightarrow{\;x\;} 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{y} \xrightarrow{\;x\;} 2-y$$

$$0 \xrightarrow{\;y\;} 1$$

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\;y\;} 2-x \\ 1 \xrightarrow{\;x\;} 2 \end{cases}$$

$$3/\ I=\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)dx$$



Bài 1: Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$1.\ I_1 = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy \qquad 2.\ I_2 = \int_1^2 dx \int_0^x f(x,y)dy$$

Bài 2: Viết cận tích phân dưới dạng tọa độ cực

1. $I_1 = \iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, \quad D: \frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le \pi^2$

2. $I_2 = \iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)dxdy, \quad D: x^2+y^2 \le -2y, 0 \le x \le \frac{-y}{\sqrt{3}}$

3. $I_3 = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^x xydy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydy$

4. $I_4 = \iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D: x^2+y^2 \le 2x, |y| \le x$

5. $I_5 = \iint_D \left(x^2+y^2-2x+2y\right)dxdy, \ D: x-y \le 2, \mathrm{y+x} \ge 0, \ x^2+y^2-2x+2y+1 \le 0$

6. $I_6 = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

Bài 3: Viết cận cho tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với miền D được giới hạn bởi:

1. $x \le y^2,\ x \ge 0,\ x - y \le 2$
2. $x \le 2 - y^2,\ x \ge 0,\ x + y \le 0$
3. $x^2 + y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge \sqrt{x}$
4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y \le 4,\ x \ge 1$

Bài 4: Tính tích phân:

1. $I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy$
2. $I_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 \frac{1}{y^3} e^{\frac{x}{y}} dy$
3. $I_3 = \iint\limits_D y\,dxdy,\ D: x - y^2 + 9 = 0,\ x - y + 3 = 0$
4. $I_4 = \iint\limits_D (2xy - 3)dxdy,\ D: y \le 2 - x^2,\ y \ge 0,\ y \ge x,\ y \ge -x$

5. $I_5 = \iint\limits_D e^{-y^2}.y^2 dxdy,\ D: 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1$

6. $I_6 = \iint\limits_D \sin x^2 dxdy,\ D: y \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$

7. $I_7 = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin\left(x^2 + y^2\right) dy$

10. $I_{10} = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$

8. $I_8 = \iint\limits_D \left(x^2 - 2xy\right) dxdy,\ D: y = 2x,\ y = -2x,\ y = -2$

9. $I_9 = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,\ D: x^2 + y^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \le x$

11. $I_{11} = \iint\limits_D |x| dxdy,\ D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ -y \le x \le y$

12. $I_{12} = \iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy,\ D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x$

Bài 5: Đổi các tp từ tọa độ cực sang tọa độ Đề-cac và tính tp (nếu có)

1. $$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3.\sin\varphi.\cos\varphi dr$$

2. $$I_2 = \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r.\cos\varphi \,\mathrm{dr}$$

3. $$I_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r.f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{dr}$$