TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
Bộ môn Toán Ứng dụng
—— o O o ——

ĐỀ THI MẪU CUỐI KỲ HK232
Môn thi: PHƯƠNG PHÁP TÍNH
Thời lượng: 100 PHÚT **(VP-232)**

Phần I. (Sử dụng cho các câu từ 1 đến 3) Cho bảng số của hàm $y = f(x)$

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1.2 & 1.5 & 1.7 & 2.0 \\ \hline y & 2.15 & 3.33 & 4.27 & 3.89 \end{array} \quad (1)$$

Câu 1. Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến, hãy xấp xỉ đạo hàm $f'(x)$ tại điểm $x = 1.32$.

Câu 2. Sử dụng đa thức nội suy spline bậc ba tự nhiên, hãy xấp xỉ giá trị của hàm f và đạo hàm f' tại điểm $x = 1.32$.

Lý thuyết	Ví dụ 6
Xác định $h_0, h_1, ...$	
Tìm ma trận A là ma trận vuông có kích thước nxn $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cụ thể: • Nếu có 3 nút $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

• Nếu có 4 nút $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Tìm ma trận B có kích thước nx1 $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\frac{y_2-y_1}{h_1} - 3\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$	
Tìm ma trận C có kích thước nx1 $C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_{n-1} \end{pmatrix}$	
Tìm hệ số từng spline $\begin{cases} a_k = y_k \\ b_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1}+2c_k) \\ d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k}, \forall k = 0..n-1 \end{cases}$	

Câu 3. Tìm hàm $g(x) = Ax^2 + B\sqrt{x}$ xấp xỉ tốt nhất bảng số (1) bằng phương pháp bình phương bé nhất. Tính $g'(1.32)$.

Lý thuyết:

Hàm $\boldsymbol{f(x)}$ có dạng $\boldsymbol{Ap(x) + Bq(x)}$

Tìm A, B giải hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p^2(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k) \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} q^2(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} q(x_k) \end{cases}$$

Hướng dẫn bấm máy tính (bật chế độ Radian)

$$A = A + p^2(x): B = B + p(x).q(x): C = C + p(x).Y: D = D + q^2(x): M = M + q(x).Y$$

CALC A,B,C,D,M=0, giá trị x, y nhập theo bảng cho đến hết.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Phần II. (Sử dụng cho các câu từ 4 đến 5) Xét tích phân

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx \qquad (2)$$

Câu 4. Sử dụng công thức Simpson mở rộng với $n = 10$ hãy xấp xỉ tích phân (2).

Bấm máy

$A = A + \frac{h}{3}B.f(x): X = X + h$ (thế $h = \frac{b-a}{2n}$ nhé)

Phần III. (Sử dụng cho các câu từ 6 đến 7) Một mạch điện gồm một tụ điện có điện dung không đổi $C = 1.1Fara$ mắc nối tiếp với một điện trở có điện trở không đổi $R_0 = 2,1\Omega$. Một điện áp $E(t) = 110\sin t$ được đặt vào thời điểm $t = 0$. Khi điện trở nóng lên, điện trở trở thành hàm số của cường độ dòng điện i và phương trình vi phân của i có dạng

$$\left(1 + \frac{1.8}{R_0} i\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{R_0 C} = \frac{1}{R_0}\frac{dE}{dt}$$

Giả sử cường độ dòng điện bằng 0 tại thời điểm ban đầu $t = 0$.

Câu 6. Sử dụng công thức Euler hãy xấp xỉ giá trị của dòng điện i tại thời điểm $t = 2$ giây với bước $h = 0.5$ giây.

Công thức Euler: $y_{k+1} = y_k + h\,y_k' \quad hay \quad y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k)$

Bấm máy: $Y = Y + hf(X,Y): X = X + h$

Câu 7. Sử dụng công thức Runge-Kutta cấp 4 hãy xấp xỉ giá trị của dòng điện i tại thời điểm $t = 2$ giây với bước $h = 1$ giây.

Cho phương trình vi phân cấp 1: $y' = f(x,y)$, bước chia h

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \text{ Với } \begin{cases} K_1^k = hf(x_k; y_k) \\ K_2^k = hf(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{K_1^k}{2}) \\ K_3^k = hf\left(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{K_2^k}{2}\right) \\ K_4^k = hf(x_k + h; y_k + K_3^k) \end{cases}$$

Phần IV. (Sử dụng cho câu 8) Xét bài toán biên

$$\begin{cases} y'' + (1+x^2)y' - 12xy = 4x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ y(1) = 0.2,\ y(2) = 1.7 \end{cases}$$

Câu 8. Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm $y(x)$ trong đoạn $[1;2]$ với bước $h = 0.2$.

Thế đạo hàm và đạo hàm cấp 1 vô phương trình vi phân cấp 2 rồi lập hệ phương trình

- $y''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$
- $y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$