

- 1 Tích phân bội ba
 - Định nghĩa
 - Định lý Fubini
 - Ứng dụng
- 2 Phép đổi biến số trong tích phân bội ba
 - Phép đổi biến số tổng quát
 - Phép đổi biến tọa độ trụ
 - Phép đổi biến tọa độ cầu

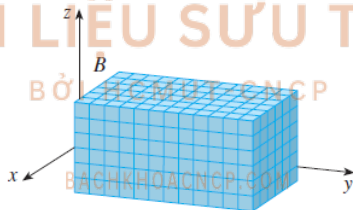
BACHKHOACNCP.COM

Định nghĩa

Tích phân bội ba (triple integral) của $f(x, y, z)$ trên khối hộp chữ nhật B là

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, trong đó mỗi $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ là một điểm mẫu tùy ý thuộc khối con B_{ijk} .



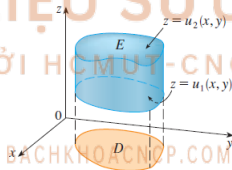
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y) \right\},$$

thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$



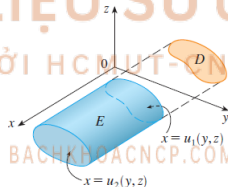
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z) \right\},$$

thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz.$$



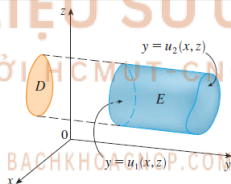
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z) \right\},$$

thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz.$$

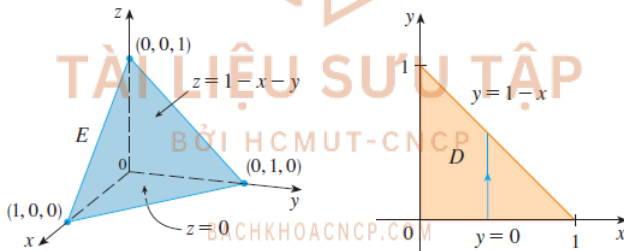


Ví dụ

Tính tích phân bội ba

$$\iiint_E z dx dy dz,$$

trong đó E là khối tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, và $x + y + z = 1$.



Ứng dụng tính thể tích của vật thể

Nếu ta tích phân hàm hằng $f(x, y, z) = 1$ trên khối bị chặn E , thì ta thu được thể tích của khối E , tức là

$$V(E) = \iiint_E 1 dx dy dz.$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

Ứng dụng tính khối lượng của vật thể

- Xét một vật thể chiếm một khối E trong không gian $Oxyz$ và **mật độ (density)** của nó tại điểm (x, y, z) được cho bởi $\rho(x, y, z)$, trong đó ρ là một hàm liên tục trên E .
- Khi đó, **khối lượng (mass)** của vật thể này là

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

BACHKHOACNCP.COM

- Xét **phép biến đổi T (transformation)** từ không gian $Ouvw$ sang không gian $Oxyz$ định bởi các phương trình:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

- **Jacobi** của phép biến đổi T được định nghĩa bởi:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

BACHKHOACNCP.COM

Với các giả thiết tương tự như trong công thức đổi biến cho tích phân kép, ta có công thức đổi biến tổng quát cho tích phân bội ba

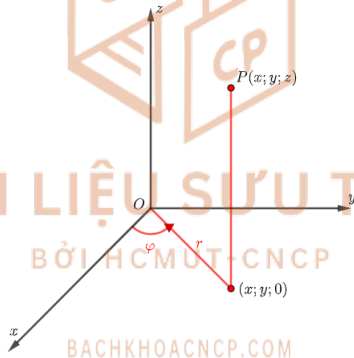
$$\begin{aligned} & \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw \end{aligned}$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

BACHKHOACNCP.COM

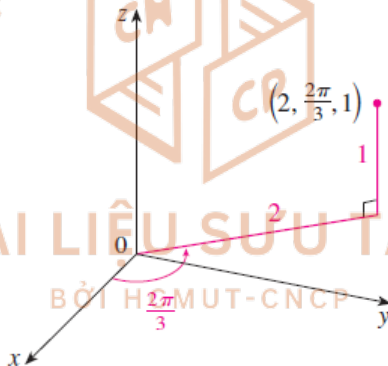
Tọa độ trụ (r, φ, z) (cylindrical coordinates) của điểm P liên hệ với tọa độ Descartes (x, y, z) của nó bởi các công thức sau:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$



Ví dụ

Hãy vẽ điểm có tọa độ trụ là $(2, 2\pi/3, 1)$ và tìm tọa độ Descartes của nó.



BACHKHOACNCP.COM

- Xét **phép đổi biến tọa độ trụ**:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

- Jacobi của nó là

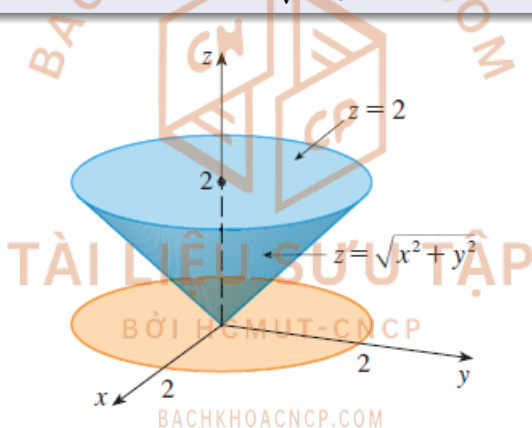
$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

- Công thức đổi biến tọa độ trụ cho tích phân bội ba:

$$\begin{aligned} & \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_E f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz \end{aligned}$$

Ví dụ

Tính tích phân lặp $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx.$

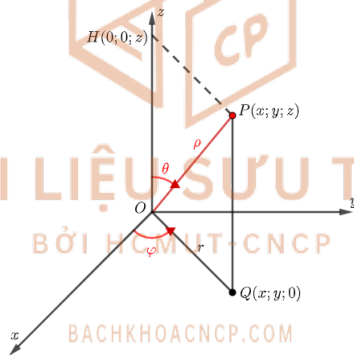


Tọa độ cầu (ρ, φ, θ) (**spherical coordinates**) của điểm P được liên hệ với tọa độ Descartes (x, y, z) của nó bởi các công thức sau:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

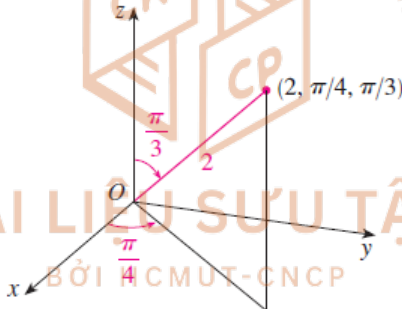
$$z = \rho \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$



Ví dụ

Hãy vẽ điểm có tọa độ cầu là $(2, \pi/4, \pi/3)$ và tìm tọa độ Descartes của nó.



BACHKHOACNCP.COM

- Xét **phép đổi biến tọa độ cầu**:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

- Jacobi của nó là

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \theta$$

- Công thức đổi biến tọa độ cầu cho tích phân bội ba:

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_E f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Ví dụ

Tính tích phân bội ba

$$\iiint_B e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz,$$

trong đó B là khối cầu đơn vị:

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Ví dụ

Tính thể tích của khối nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

