Mục lục

Chương1

ÁNH XẠ-HÀM SỐ

1.1 Ánh xạ

1.1.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.1 (Ánh xạ)

Cho hai tập hợp khác rỗng X và Y. Ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng một phần tử $x \in X$ với duy nhất một phần tử $y \in Y$.

Ký hiệu $\begin{aligned} f: \ X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

Định nghĩa 1.2

Cho ánh xạ $\begin{aligned} f: \ X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

a. X: **tập xác định của** f.

b. $y = f(x)$: ảnh của x qua f.

c. x: tạo ảnh của y qua f.

d. $A \subset X,\ f(A) = \{f(x) : x \in A\}$: **tập ảnh của** A qua f.

e. $f^{-1}(y) = \{x \in X : y = f(x)\}$: tập hợp các tạo ảnh của y.

f. $B \subset Y,\ f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$: nghịch ảnh của B qua f.

1.1.2 Các loại ánh xạ

Định nghĩa 1.3

Cho ánh xạ $\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$

a. f đơn ánh nếu $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
Đơn ánh còn gọi là ánh xạ 1-1.

b. f toàn ánh nếu $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$.

c. f song ánh nếu f vừa đơn ánh, vừa toàn ánh.

Định lý 1.1

Cho ánh xạ $\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$

a. f đơn ánh khi và chỉ khi $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

b. f toàn ánh khi và chỉ khi $f(X) = Y$ (mọi $y \in Y$ đều có $x \in X$ tương ứng).

c. f song ánh khi và chỉ khi **với mọi** $y \in Y$, **tồn tại duy nhất** $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Định nghĩa 1.4

Cho hai ánh xạ

$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$ $\qquad$ $\begin{aligned} g: Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto z = g(y) \end{aligned}$

$\begin{aligned} g \circ f: X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto z = g(f(x)) \end{aligned}$ gọi là ánh xạ hợp của f và g.

Định nghĩa 1.5 (Ánh xạ ngược)

Cho **song ánh** $f : X \longrightarrow Y$.

$\begin{aligned} f^{-1}: Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x \text{ với } f(x) = y \end{aligned}$

gọi là ánh xạ ngược của f.

1.1.3 Ví dụ

***Ví dụ* 1.1.1.** Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto y = f(n) = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

a. Tìm $f(3)$.

b. Tìm $f^{-1}(1/9)$.

c. Tìm $f(A)$ với $A = \{2, 17\}$.

d. Tìm $f^{-1}(B)$ với $B = \{1/3, 1/11\}$.

Giải:

1. $f(3) = \dfrac{1}{3+2} = \dfrac{1}{5}$.
2. $f^{-1}(1/9) = \left\{n \in \mathbb{N} : f(n) = \dfrac{1}{9}\right\}$.
   $\dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow n + 2 = 9$
   $\Leftrightarrow n = 7.$
   Vậy $f^{-1}(1/9) = \{7\}$.
3. $f(A) = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{19}\right\}$.
4. $f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in B\}$.
   $f^{-1}(B) = \{1, 9\}$.

***Ví dụ* 1.1.2.** Cho $X = \{$ Tên sinh viên K20 của trường ĐHBK$\}$ (X chỉ chứa các tên khác nhau),
$Y = \{$ Mã số sinh viên K20 của trường ĐHBK $\}$

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \text{ Mã số sinh viên của } x. \end{array}$$

Kiểm tra f có là ánh xạ hay không. Nếu f là ánh xạ thì f có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

Giải:
f là một ánh xạ vì mỗi Tên sinh viên luôn luôn có 1 Mã số sinh viên duy nhất.
f không là đơn ánh vì có trường hợp có nhiều Mã số sinh viên khác nhau nhưng có cùng Tên sinh viên.
f là 1 toàn ánh vì tất cả các Mã số sinh viên trong Y đều có Tên sinh viên tương ứng trong X.
f không là song ánh vì f không là đơn ánh.

***Ví dụ* 1.1.3.** Cho ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & [0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

Chứng minh f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

Giải:
f là đơn ánh vì
Nếu $f(x) = f(x')$ và $x, x' \geq 0$.
$\Leftrightarrow x^2 = x'^2$ và $x, x' \geq 0$.
$\Leftrightarrow x = x'$.
f không là toàn ánh vì có những giá trị $y \in \mathbb{R}$ không có tạo ảnh x. Chẳng hạn $y = -1$ không có $x \in [0, +\infty)$ để $x^2 = -1$ hay không có $x \in [0, +\infty)$ để $f(x) = y$.

***Ví dụ* 1.1.4.** Cho ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

Chứng minh f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

Giải:
f không là đơn ánh vì có 2 giá trị x và x' khác nhau nhưng có cùng ảnh y. Cụ thể $2 \neq -2$ nhưng $f(2) = f(-2) = 4$.
f là toàn ánh vì mọi giá trị $y \in [0,+\infty)$ luôn luôn có tạo ảnh $x \in \mathbb{R}$. Cụ thể
$y = f(x) = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ hay $x = -\sqrt{y}$.

***Ví dụ* 1.1.5.** Cho ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

Chứng minh f là một song ánh.

Giải:
f là song ánh vì mọi giá trị $y \in [0,+\infty)$ (tập đến Y) đều có **duy nhất** tạo ảnh $x \in [0,+\infty)$ (tập đi X). Cụ thể
Với mọi $y \in [0,+\infty)$: $y = f(x) = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \in [0,+\infty)$.

***Ví dụ* 1.1.6.** Cho 2 ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = g(x) = 2x+3 \end{array}$$

Tìm công thức của $g \circ f(x)$.

Giải:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= 2\,(f(x)) + 3 \\ &= 2x^2 + 3. \end{aligned}$$

***Ví dụ* 1.1.7.** Cho song ánh

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

Tìm ánh xạ ngược f^{-1} của f.

Giải:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2,\ x \in [0,+\infty) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \end{aligned}$$

Vậy ta tìm được ánh xạ ngược

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{array}$$

***Ví dụ* 1.1.8.** Cho ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,\infty) & \longrightarrow & (0,1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \dfrac{1}{x^3}. \end{array}$$

Chứng minh f là một song ánh và tìm f^{-1}.

Giải:
Với mỗi $y \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x^3}, \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \in [1, \infty) \end{aligned}$$

Do với mỗi $y \in (0,1]$, có duy nhất $x \in [1,+\infty)$ để $y = f(x)$ nên f là song ánh. Từ kết quả tìm x ở trên, ta cũng rút ra được công thức $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Vậy: $\begin{aligned} f:\ (0,1] &\longrightarrow [1,+\infty) \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}. \end{aligned}$

1.2 Hàm số

1.2.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 2.1 (Hàm số thực)

Cho X, Y là những tập hợp không rỗng, trong đó $Y \subset \mathbb{R}$. Ánh xạ $f: X \longrightarrow Y$ được gọi là một hàm số thực.

Nếu X trong định nghĩa trên là tập con của $\mathbb{R}$, f được gọi là **hàm số thực một biến**. Thông thường tập xác định của hàm số được ký hiệu là D.

Định nghĩa 2.2 (Tập giá trị)

Cho hàm số $\begin{aligned} f:\ D &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

$R = \{f(x) : x \in D\}$ gọi là tập giá trị (miền giá trị) của f.

Định nghĩa 2.3 (Hàm số hợp)

Cho 2 hàm số $f : D_f \longrightarrow Y$ và $g : Y \Longleftrightarrow Z$ (**tập giá trị R_f của f là tập con của tập xác định D_g của g**). Khi đó

$\begin{aligned} g \circ f:\ D_f &\longrightarrow Z \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$

gọi là hàm số hợp của f và g.

Định nghĩa 2.4 (Hàm số ngược)

Nếu hàm số $\begin{aligned} f:\ D_f &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

là song ánh, thì ánh xạ ngược của f gọi là hàm số ngược của f , cũng ký hiệu f^{-1}.

Lưu ý: Nếu hàm số f là song ánh, ta có $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Định nghĩa 2.5 (Đồ thị của hàm số $y = f(x)$)

Cho hàm số f có tập xác định D. Tập hợp các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ trong mặt phẳng Oxy gọi là đồ thị của f.

Nhận xét: Từ định nghĩa của hàm số, đồ thị của một hàm số f là một đường cong trải ngang theo trục Ox.

Định nghĩa 2.6 (Hàm số chẵn và hàm số lẻ)

Giả sử hàm số f có tập xác định D là $\mathbb{R}$ hoặc $(-a, a)$ hay $[-a, a]$ với $a > 0$.

a. f là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x0$ với mọi $x \in D$.

b. f là hàm số lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in D$.

Định nghĩa 2.7 (Hàm số đơn điệu)

Hàm số f thỏa $\forall x, x' \in D : x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$ gọi là hàm đồng biến (tăng). Hàm số f thỏa $\forall x, x' \in D : x > x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ gọi là hàm nghịch biến (giảm). Hàm số đồng biến hay nghịch biến gọi chng là hàm số đơn điệu.

Lưu ý: Nếu trong bất đẳng thức thứ 2 không có dấu =, f gọi là hàm tăng chặt hoặc giảm chặt.

Định lý 1.2

- Nếu hàm số $f: \quad D_f \longrightarrow \quad R_f$ tăng chặt hoặc giảm chặt thì f^{-1} tồn tại.
- Đồ thị của f và f^{-1} đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

Cách tìm $f^{-1}(x)$

Bước 1. Giải phương trình $y = f(x), \forall y \in R_f$, nghiệm duy nhất là $x = \varphi(y)$.

Bước 2. Đổi vai trò của x và y trong nghiệm ở Bước 1: $y = \varphi(x)$.

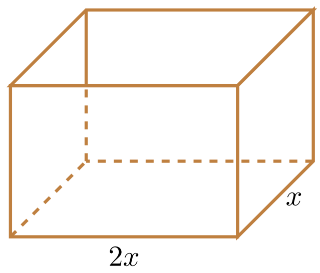
Bước 3. $f^{-1}(x) = \varphi(x)$.

1.2.2 Những cách cho hàm số

Có 4 cách cho hàm số:

a. Mô tả bằng lời.

***Ví dụ* 1.2.1.** Một bồn chứa hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 10 m^3, chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng. Biết rằng giá nguyên liệu làm thành bồn là 200 ngàn/m^2, giá nguyên liệu làm đáy bồn là 250 ngàn/m^2. Xác định giá nguyên liệu để làm bồn theo kích thước chiều rộng của đáy.



Ở đây hàm số cần tìm là hàm giá nguyên liệu và biến là chiều rộng của đáy bồn.

b. Mô tả bằng biểu thức.

***Ví dụ* 1.2.2.** Trong ví dụ 1.2.1, thay vì mô tả, bạn có thể được cung cấp biểu thức như sau: giá nguyên liệu để làm một bồn chứa hình hộp chữ nhật thể tích 10 m^3, có chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng là:

$$C(x) = 500x + \frac{6000}{x} \quad \text{(ngàn)},$$

trong đó x là chiều rộng của đáy tính bằng mét (m).

c. Mô tả bằng bảng số: dành cho dữ liệu rời rạc.

***Ví dụ* 1.2.3.** Thống kê số ca nhiễm mới với virus sars-covid-2 trên cả nước Việt nam trong 10 ngày đầu tháng 6 năm 2021 cho bởi bảng dưới đây

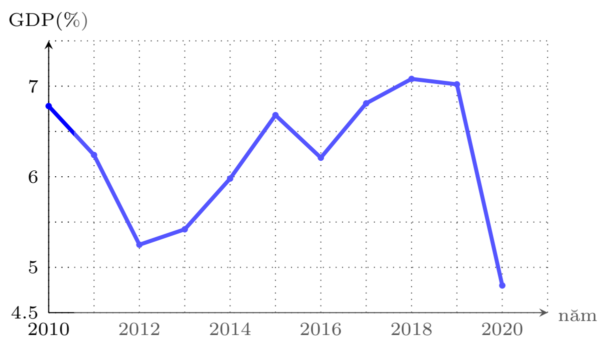
Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số ca mắc mới	193	245	193	301	216	211	236	195	413	200

(Nguồn: https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19)

Bảng trên mô tả hàm số $f = f(x)$, trong đó $x =$ ngày là một trong 10 ngày đầu tháng 6 năm 2021, $y =$ số ca mắc mới.

d. Mô tả bằng đồ thị.

***Ví dụ* 1.2.4.** Đồ thị dưới đây mô tả tốc độ tăng trưởng GDP của Việt nam trong giai đoạn từ năm 2010 đến năm 2020.



Hình 1.1: Tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2010-2020 (nguồn: VIETRF)

Đồ thị trên là của hàm số $y = f(x)$ với x là các năm từ năm 2010 đến 2020, y là tốc độ tăng trưởng GDP tương ứng với năm x.

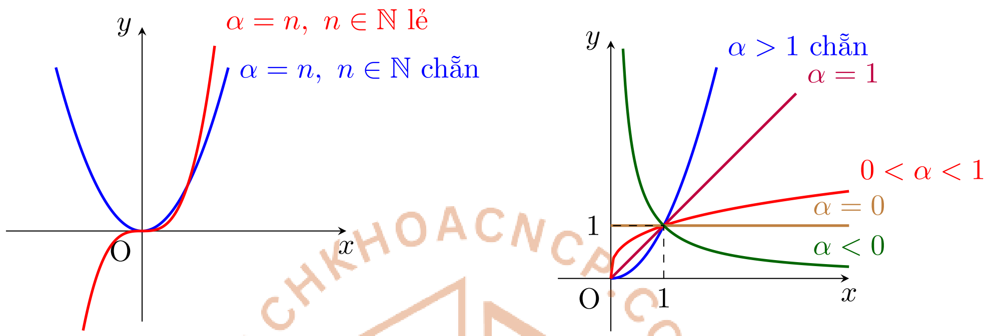
1.3 Hàm số sơ cấp cơ bản

1.3.1 Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$

a. Tập xác định, tập giá trị

- Tổng quát: $D = (0, +\infty)$, $R = (0, +\infty)$.
- Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N} : D = \mathbb{R}$, $R = [0, +\infty)$ nếu n chẵn, $R = \mathbb{R}$ nếu n lẻ.
- Nếu $\alpha = m$ là số nguyên âm: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $R = (0, +\infty)$ nếu n chẵn, $R = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nếu n lẻ.
- Nếu $\alpha = \dfrac{p}{q}$ là số hữu tỷ thì tùy thuộc vào bậc căn.

b. Tính đơn điệu: x^α đồng biến nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến nếu $\alpha < 0$.



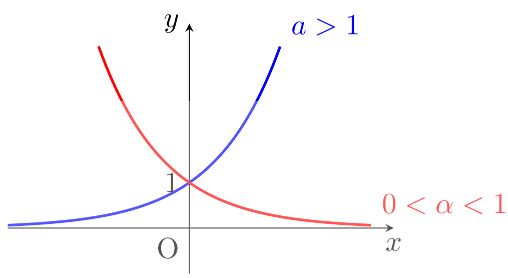
Hình 1.2: Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$

1.3.2 Hàm mũ $y = a^x$

Điều kiện cơ số: $a > 0$.

a. Tập xác định, tập giá trị: $D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$.

b. Tính đơn điệu: $y = a^x$ đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$.



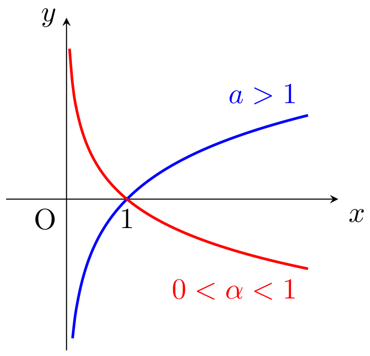
Hình 1.3: Đồ thị hàm số $y = a^x$

1.3.3 Hàm logarit $y = \log_a x$

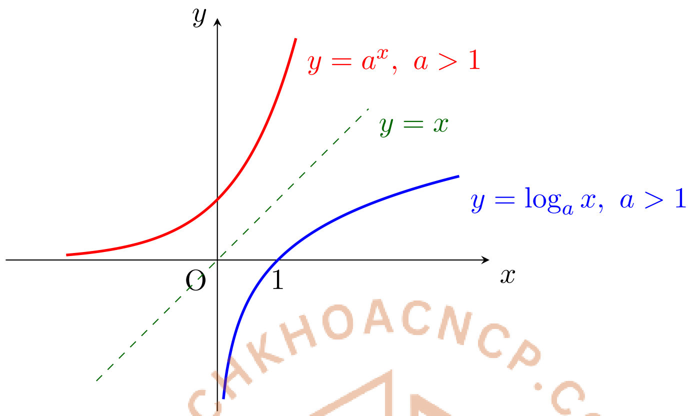
Điều kiện cơ số: $a > 0$.

a. Tập xác định, tập giá trị: $D = (0, +\infty)$, $R = \mathbb{R}$.

b. Tính đơn điệu: $y = \log_a x$ đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$.



Hình 1.4: Đồ thị hàm số $y = \log_a x$



Hình 1.5: Hàm số a^x và $\log_a x$

Định lý 1.3

$$\begin{array}{rcl|rcl} f(x) = a^x & \Leftrightarrow & f^{-1}(x) = \log_a x. & f(x) = \mathrm{e}^x & \Leftrightarrow & f^{-1}(x) = \ln x. \\ f(x) = \log_a x & \Leftrightarrow & f^{-1}(x) = a^x. & f(x) = \ln x & \Leftrightarrow & f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x. \end{array}$$

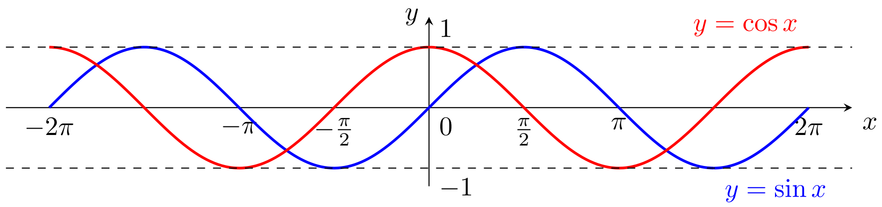
1.3.4 Hàm lượng giác

1. $y = \sin x$

- Tập xác định, tập giá trị: $D = \mathbb{R},\ R = [-1, 1]$.
- Là hàm lẻ, đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
- Tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Tính đơn điệu trên $[0, \pi]$: đồng biến trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2. $y = \cos x$

- Tập xác định, tập giá trị: $D = \mathbb{R},\ R = [-1, 1]$.
- Là hàm chẵn, đồ thị đối xứng qua trục Oy.
- Tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Tính đơn điệu trên $[0, \pi]$: nghịch biến trên $[0, \pi]$.



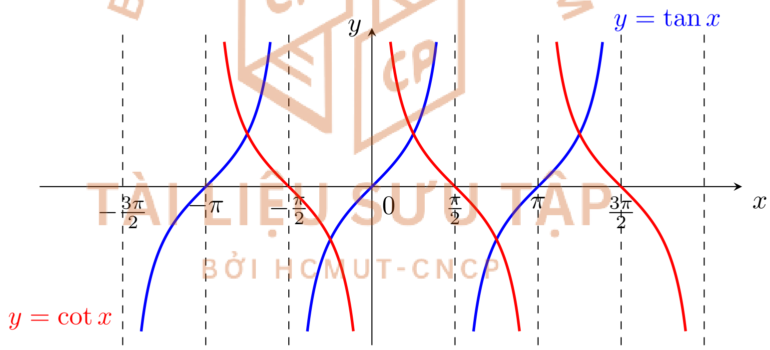
Hình 1.6: Đồ thị hàm số $y = \sin x,\ y = \cos x$

3. $y = \tan x$

   - Tập xác định, tập giá trị: $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ R = \mathbb{R}$.
   - Là hàm lẻ, đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
   - Tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
   - Tính đơn điệu trên: đồng biến biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbb{Z}$.

4. $y = \cot x$

   - Tập xác định, tập giá trị: $D = \mathbb{R} \backslash \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ R = \mathbb{R}$.
   - Là hàm lẻ, đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
   - Tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
   - Tính đơn điệu trên: nghịch biến biến trên $(k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.



Hình 1.7: Đồ thị hàm số $y = \tan x,\ y = \cot x$

1.3.5 Hàm lượng giác ngược

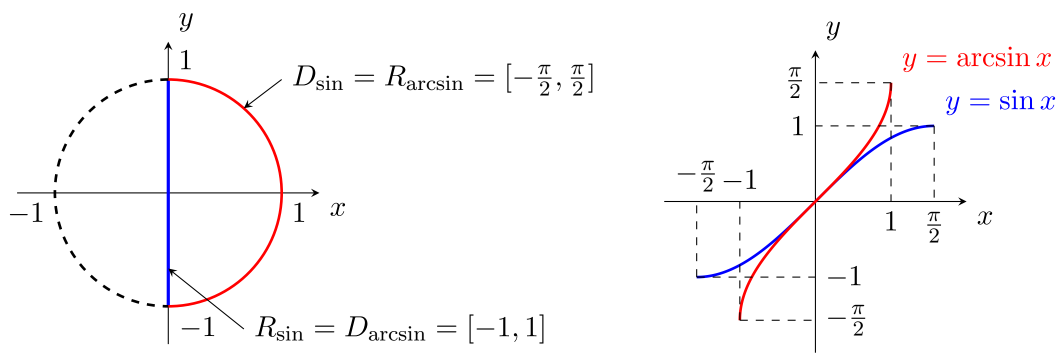
1. Hàm $y = \arcsin x$

Định nghĩa 3.1

Hàm số $y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, là song ánh và có hàm ngược là $\sin^{-1} x$ hay $\arcsin x$.

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ x &\mapsto y = \arcsin x \end{aligned}$$

2. Hàm $y = \arccos x$

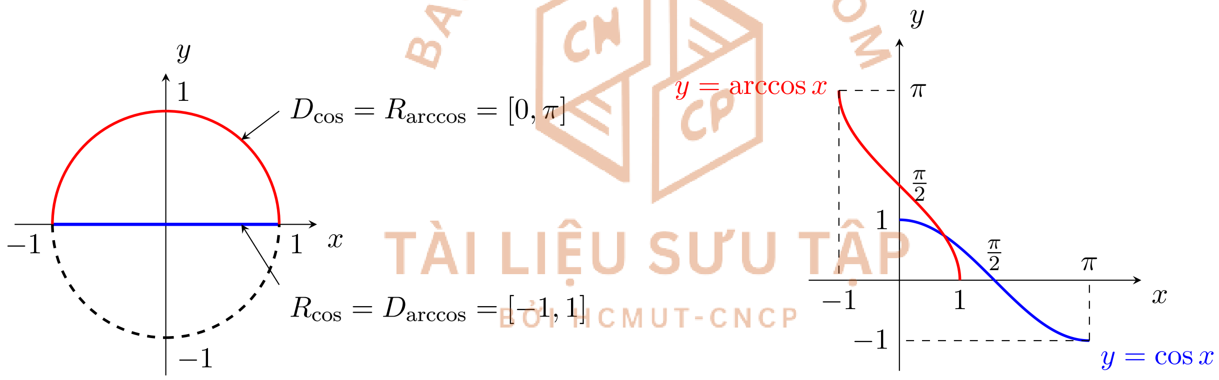


Hình 1.8: Đồ thị hàm $\sin x$ và $\arcsin x$

Định nghĩa 3.2

Hàm số $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$, là song ánh và có hàm ngược là $\cos^{-1} x$ hay $\arccos x$.

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto y = \arccos x \end{aligned}$$



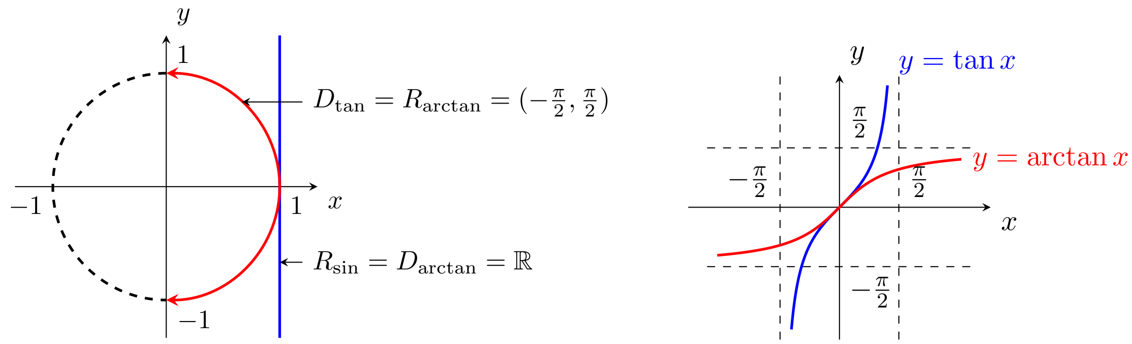
Hình 1.9: Đồ thị hàm $\cos x$ và $\arccos x$

3. Hàm $y = \arctan x$

Định nghĩa 3.3

Hàm số $y = \sin x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, là song ánh và có hàm ngược là $\tan^{-1} x$ hay $\arctan x$.

$$\begin{aligned} \arcsin : \mathbb{R} &\longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longmapsto y = \arctan x \end{aligned}$$



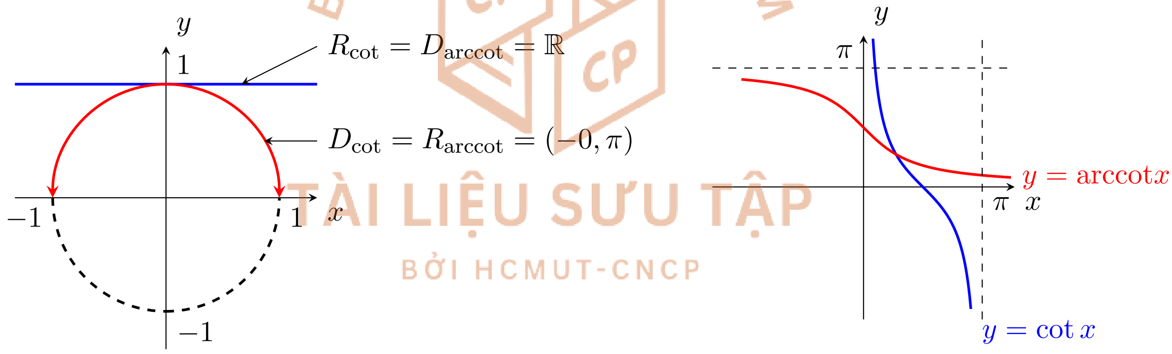
Hình 1.10: Đồ thị hàm $\tan x$ và $\arctan x$

4. Hàm $y = \text{arccot} x$

Định nghĩa 3.4

Hàm số $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$, là song ánh và có hàm ngược là $\cot^{-1} x$ hay $\text{arccot} x$.

$$\begin{aligned} \text{arccot}: \mathbb{R} &\longrightarrow (0, \pi) \\ x &\mapsto y = \text{arccot} x \end{aligned}$$



(a) (b)

Hình 1.11: Đồ thị hàm $\cot x$ và $\text{arccot} x$

Chú ý

- $\begin{cases} y = \sin x, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \arcsin y$
- $\begin{cases} y = \tan x, \\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \arctan y$
- $\begin{cases} y = \cos x, \\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \arccos y$
- $\begin{cases} y = \cot x, \\ 0 < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \text{arccot} y$

Định lý 1.4

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\arctan x + \text{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

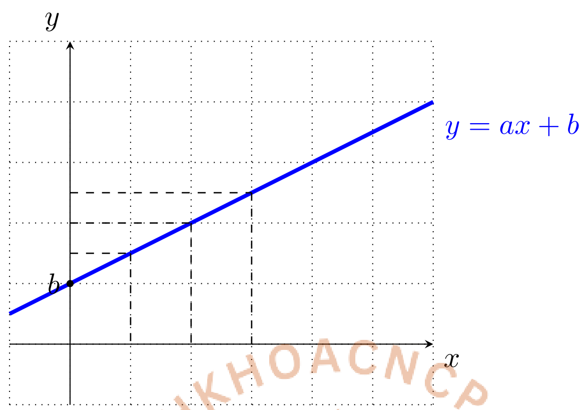
1.3.6 Hàm tuyến tính

Định nghĩa 3.5

Hàm tuyến tính là hàm số có tốc độ biến thiên không đổi và được mô tả dạng

$$f(x) = ax + b,$$

trong đó, a là tốc độ biến thiên của f.



Hình 1.12: Hàm tuyến tính có đồ thị là đường thẳng

Chú ý

- Đồ thị của hàm tuyến tính $f(x) = ax + b$ là đường thẳng với hệ số góc a.
- $a > 0$, f đồng biến, $a < 0$, f nghịch biến.
- $(0, b)$ là tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung.

***Ví dụ* 1.3.1.** Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$.

Giải:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ xác định} &\Leftrightarrow \sqrt{x} \text{ xác định} \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy tập xác định là $D = [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} x \in [0, +\infty) &\Rightarrow \sqrt{x} \in [0, +\infty) \\ &\Rightarrow 2^{\sqrt{x}} \in [1, +\infty) \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của f là $R = [1, +\infty)$

***Ví dụ* 1.3.2.** Tìm giá trị của $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arctan(1)$, $\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)$.

Giải:

$$\begin{aligned} x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ và } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

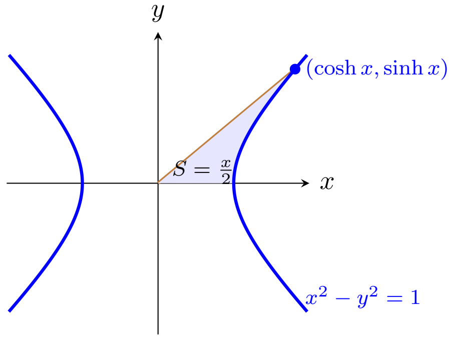
$$\begin{aligned} x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } x \in [0, \pi] \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

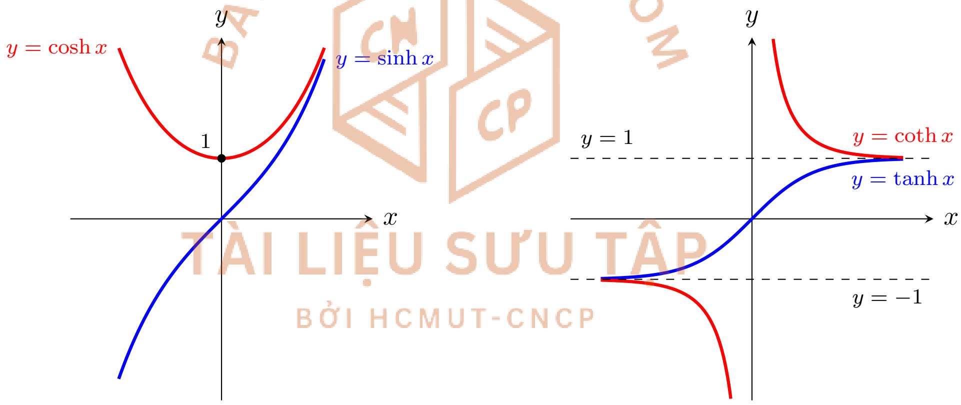
$$
\begin{aligned}
x = \arctan(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \tan x = 1 \text{ và } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \\
x = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \cot x = \sqrt{3} \text{ và } x \in (0, \pi) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

1.3.7 Hàm hyperbolic

Định nghĩa 3.6

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R}, \ R = \mathbb{R} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R}, \ R = [1, +\infty] \\
\tan x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad D = \mathbb{R}, \ R = (-1, 1) \\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \ R = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)
\end{aligned}
$$





Hình 1.13: Đồ thị các hàm số hyperbolic

Công thức hàm lượng giác và hàm hyperbolic

Hàm lượng giác	Hàm hyperbolic
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$
$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	$\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$	$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

***Ví dụ* 1.3.3.** Giải phương trình $\sinh x = 1$.

Giải:

$$\begin{aligned}\sinh x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^2x - 2\mathrm{e}^x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

***Ví dụ* 1.3.4.** Tìm hàm ngược của $f(x) = \sinh x$.

Giải:

Dựa vào định nghĩa và đồ thị của $\sinh x$ ta thấy f là một song ánh trên $\mathbb{R}$.

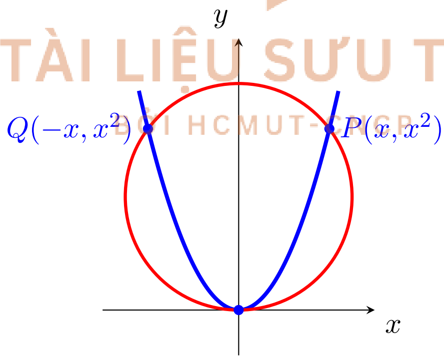
$$\begin{aligned}y = \sinh x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^2x - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}\\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).\end{aligned}$$

Vậy $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

1.4 Các dạng bài tập

1.4.1 Thành lập hàm số

Bài tập 1.4.1. P là một điểm trên parabol $y = x^2$, Q là điểm đối xứng của P qua trục tung. Giả sử $x > 0$ là hoành độ của P, xác định bán kính của đường tròn đi qua P, Q và gốc thọa độ như một hàm số theo biến x



Hình 1.14: Đường tròn đi qua đỉnh parabol va cắt parabol tại 2 điểm đối xứng

Giải:

Gọi $R(x)$ là bán kính của đường tròn, do P cũng nằm trên đường tròn nên ta có liên hệ

$$x^2 + [x^2 - R(x)]^2 = R^2(x).$$

Do giả thiết $x > 0$, ta tìm được $R(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$.

Bài tập 1.4.2. Tính từ đầu năm 2019, một loại gạo tăng đều đặn 150 đồng/kg mỗi tháng. Biết rằng vào đầu tháng 11/2019, giá của loại gạo này là 14600 đồng/kg. Tìm hàm số mô tả giá của loại gạo này ở đầu tháng thứ t của năm 2019 và tìm giá gạo ở thời điểm đầu năm.

Giải:

Do giả thiết giá gạo tăng đều 150 đồng/kg mỗi tháng nên hàm số cần tìm là hàm tuyến tính $P(t) = 150t + b,\ 1 \le t \le 12$ (đồng/kg).

Cũng theo giả thiết

$$\begin{aligned} P(11) = 14,600 \quad &\Rightarrow \quad 14600 = 150 * 11 + b \\ &\Rightarrow \quad b = 12,950. \end{aligned}$$

Vậy $P(t) = 150t + 12950,\ 1 \le t \le 12$ (đồng/kg).

Giá gạo đầu tháng 1/2019 là $P(1) = 13,100$ đồng/kg.

Bài tập 1.4.3. Tính từ đầu năm 2019, giá một loại gạo tăng 1%/kg mỗi tháng. Biết rằng vào đầu tháng 11/2019, giá của loại gạo này là 14600 đồng/kg. Tìm hàm số mô tả giá của loại gạo này ở đầu tháng thứ t của năm 2019 và tìm giá gạo ở thời điểm đầu năm.

Giải:

Do giả thiết giá gạo tăng 1% mỗi tháng, nếu gọi $P(1)$ là giá gạo ở đầu tháng thứ 1 thì $P(t) = P(1)\,(1 + 0.01)^{t-1},\ 1 \le t \le 12$ (đồng/kg)

Cũng theo giả thiết

$$\begin{aligned} P(11) = 14,600 \quad &\Rightarrow \quad 14,600 = P(1)\,(1 + 0.01)^{10}) \\ &\Rightarrow \quad P(1) \approx 13,217. \end{aligned}$$

Vậy giá gạo ở đầu tháng thứ t của năm 2019 là $P(t) = 13,217 \cdot (1.01)^{t-1},\ 1 \le t \le 12$ đồng/kg và giá gạo đầu năm 2019 là 13,217 đồng/kg.

Chú ý

- Hàm tuyến tính mô tả những đại lượng có tốc độ biến thiên không đổi.
- Hàm mũ mô tả những đại lượng có tốc độ biến thiên tính theo tỷ lệ %

Bài tập 1.4.4. **(Hàm nhiều biểu thức)** Bảng giá nước sinh hoạt ở thành phố Hồ Chí Minh áp dụng trong năm 2021 được cho như bảng bên dưới (giá này đã bao gồm 5% thuế giá trị gia tăng và 10% phí bảo vệ môi trường cho mỗi mét khối (m^3) nước.

Mức sử dụng (m^3/tháng/hộ)	Giá thanh toán cho 1 m^3 (ngàn đồng)
10 m^3 đầu tiên	6.869
Trên 10 m^3 đến 20 m^3	8.110
Trên 20 m^3 đến 30 m^3	9.969
Trên 30 m^2	18.318

Lập hàm số $C(x)$ mô tả số tiền một hộ dân nào đó phải thanh toán trong một tháng khi sử dụng x m^3 nước.

Giải:

Hàm số cần tìm có dạng

$$C(x) = \begin{cases} 6.869 \cdot x, & \text{nếu } x \le 10 \\ 68.69 + 8.110 \cdot (x - 10), & \text{nếu } 10 < x \le 20 \\ 68.69 + 81.1 + 9.969 \cdot (x - 20), & \text{nếu } 20 < x \le 30 \\ 68.69 + 81.1 + 99.69 + 18.318 \cdot (x - 30)x, & \text{nếu } x > 30 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 6.869 \cdot x, & \text{nếu } x \leq 10 \\ 68.69 + 8.110 \cdot (x - 10), & \text{nếu } 10 < x \leq 20 \\ 149.79 + 9.969 \cdot (x - 20), & \text{nếu } 20 < x \leq 30 \\ 249.48 + 18.318 \cdot (x - 30), & \text{nếu } x > 30 \end{cases}$$

1.4.2 Ý nghĩa hàm số

Bài tập 1.4.5. Theo thống kê của WHO, số người trên thế giới bị mắc đái tháo đường trong giai đoạn từ năm 2000 đến 2017 được mô phỏng bởi hàm số

$$P(t) = -0.0961t^2 + 19.044t + 143.02,$$

trong đó t tính theo năm và $t = 0$ ứng với năm 2000, P tính theo triệu người.

a. Tính $P(8)$ và cho biết ý nghĩa của giá trị này.

b. Hãy cho biết số người mắc đái tháo đường vào năm 2013 là bao nhiêu?

Giải:

a. $P(8) = 289.2216 \approx 289.22$. Năm 2008, số người mắc đái tháo đường trên toàn thế giới khoảng 289.22 triệu người.

b. Số người mắc đái tháo đường trên thế giới vào năm 2013 là

$$P(13) = 374.3511 \approx 374.35 \text{ triệu người.}$$

Bài tập 1.4.6. Mức năng lượng tiêu hao khi bơi (tính bằng kcal/km) của động vật bơi trên mặt nước phụ thuộc vào khối lượng của chúng và được ước tính bởi hàm số

$$y = f(x) = 0.01x^{0.88}$$

Trong đó x là khối lượng của động vật tính bằng gam. Tìm lượng năng lượng tiêu hao của các động vật sau:

a. Một con chuột xạ hương nặng 800 g.

b. Một con rái cá biển nặng 20 kg.

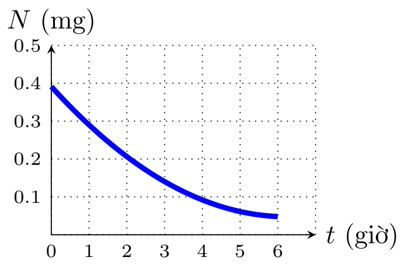
Giải:

a. $f(800) = 3.59$. Vậy chuột xạ hương có mức tiêu hao năng lượng khi bơi là 3.59 (kcal/km)

b. $20\text{kg} = 20.000\text{g} \Rightarrow f(20.000) = 60.94$
Vậy con rái cá biển nặng 20 kg có mức tiêu hao năng lượng khi bơi là 60 (kcal/km).

1.4.3 Đọc đồ thị

Bài tập 1.4.7. Sau khi hít khói thuốc lá, lượng nicotin nhanh chóng xâm nhập vào máu. Trong một trường hợp cụ thể, quá trình đào thải nicotin diễn ra như đồ thị bên dưới.



Hình 1.15: Đồ thị về quá trình hấp thu và đào thải Nicotin sau khi hít khói thuốc lá

a. Sau khoảng mấy giờ, lượng nicotin trong máu giảm một nửa so với lúc ban đầu?

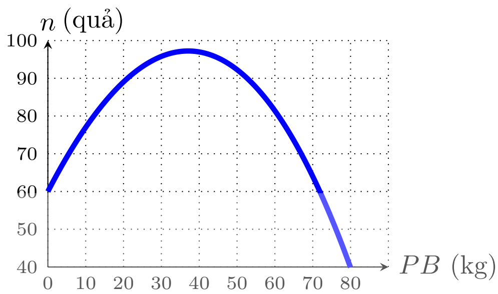
b. Nếu đồ thị cắt trục hoành tại t_0, giá trị này có ý nghĩa gì?

Giải:

a. Dựa vào đồ thị, tại thời điểm $t = 0$, lượng nicotin trong máu là 0.4 mg, tại thời điểm $t = 2$ lượng nicotin còn 0.2 mg. Vậy sau 2 giờ lượng nicotin trong máu giảm một nửa so với lúc ban đầu.

b. Nếu đồ thị cắt trục hoành tại $t = t_0$, điều đó có nghĩa là sau t_0 giờ nicotin đã được đào thải hết.

Bài tập 1.4.8. Quan sát trên một giống bưởi, một kỹ sư nông nghiệp nhận thấy rằng, năng suất bưởi (trên 10 năm tuổi) phụ thuộc vào lượng phân bón hỗn hợp bón cho mỗi cây hàng năm và mối quan hệ này được cho bởi đồ thị bên dưới.



Hình 1.16: Đồ thị mối quan hệ giữa lượng phân bón và năng suất một cây bưởi.

1. Nếu năm nào đó không bón phân, năng suất cây bưởi là bao nhiêu.

2. Năng suất cao nhất của cây bưởi tương ứng lượng phân bón nào?

3. Giao điểm của đồ thị với trục hoành có ý nghĩa gì?

Giải:

1. Nếu năm đó không bón phân thì cây bưởi cho khoảng 60 quả.

2. Năng suất cây bưởi đạt cao nhất khoảng 97 quả nếu sử khoảng 36 − 37 kg phân bón hỗn hợp mỗi năm.

3. Đồ thị cắt trục hoành khi lượng phân bón 80 kg/năm, có nghĩa là lượng phân bón quá nhiều sẽ không tốt cho cây và làm năng suất giảm còn 40 quả/năm.

1.4.4 Tập xác định, tập giá trị của hàm số.

Việc tìm tập xác định và tập của hàm số dựa trên tập xác định và tập giá trị của các hàm số sơ cấp cơ bản. Tuy nhiên với các hàm số phức tạp thì việc tìm tập giá trị đưa về bài toán khảo sát hàm số mà ta sẽ xét ở chương phía sau.

Bài tập 1.4.9. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau:

1. $f(x) = \ln(1 + \cos x)$.

2. $f(x) = \arcsin(1 - 2x)$.

3. $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$.

Giải:

1. Do $\ln x$ xác định khi $x > 0$ nên
$$\begin{aligned} f \text{ xác định} &\Leftrightarrow 1 + \cos x > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$
Vậy tập xác định của f là $D = \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}$.
Với $x \in D$, $0 < 1 + \cos x \le 2$, do $\ln x$ là hàm đồng biến nên
$-\infty < \ln(1 + \cos x) \le \ln 2 \ \Rightarrow R = (-\infty, \ln 2]$.

2. Do $\arcsin x$ xác định khi $-1 \le x \le 1$ nên
$$\begin{aligned} f \text{ xác định} &\Leftrightarrow -1 \le 1 - 2x \le 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$
Vậy tập xác định của f là $D = [0, 1]$.
Với $x \in D$, $1 - 2x \in [-1, 1] \ \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \le f(x) \le \dfrac{\pi}{2}$.
Vậy tập giá trị của f là $R = \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Do $\arctan x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên f xác định khi $x \neq 0$.Vậy tập xác định của f là $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
Với $x \in D$, $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, do đó $\arctan \dfrac{1}{x} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Vậy tập giá tri của f là $R = \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài tập 1.4.10. Một gia đình dự định tổ chức tiệc ở một nhà hàng. Mức phục vụ chung cho bữa tiệc (mặt bằng, trang trí,...) là 5 triệu đồng. Nhà hàng nhận tối thiểu 2 bàn, mỗi bàn 10 người. Giá cho mỗi khách dự tiệc là 250 ngàn đồng. Gia đình dự tính chi tối đa 25 triệu. Nếu gọi x là số khách mời, $C(x)$ là chi phí cho bữa tiệc. Tìm tập xác định D và tập giá trị R của C. Chỉ ra biểu thức $C(x)$.

Giải:

Do nhà hàng nhận đặt tối thiểu 2 bàn, mỗi bàn 10 người, nên số khách tối thiểu gia đình sẽ mời là $x = 20$ người.

Do gia đình dự chi 25 triệu mà phí cố định của nhà hàng là 5 triệu nên tiền đặt bàn chỉ còn 20 triệu. Mức chi cho mỗi khách là 250 ngàn đồng nên số khách mời tối đa là $x = 20 : 0.25 = 80$ người.

Vậy tập xác định của C là $D = [20, 80] \cap \mathbb{N}$.

Số tiền chi tối thiểu là: $5 + 20 \times 0.25 = 10$ triệu đồng.

Số tiền chi tối đa khi mời 80 khách là 25 triệu. Vậy $C(x) = 5 + x \times 0.25, \quad x \in [20, 80] \cap \mathbb{N}$ (triệu đồng) và $10 \leq C(x) \leq 25$ (triệu đồng).

Ta có thể nói: $R = \{5 + x \times 0.25(\text{ triệu đồng})/x \in [20, 80] \cap \mathbb{N}\}$.

1.4.5 Hàm số hợp

Bài tập 1.4.11. Hai hàm số f, g xác định trên $\mathbb{R}$ và có một số giá trị được cho trong bảng dưới đây

x	-7	-4	-1	0	3	12	17	23
$f(x)$	8	17	12	-4	-1	6	0	41
$g(x)$	20	13	0	-7	-1	23	24	12

Xác định các giá trị sau: $g \circ f(0)$, $g \circ f(17)$, $f \circ g(23)$, $f \circ g(12)$.

Giải:

- $g \circ f(0) = g(f(0)) = g(-4) = 13$.
- $g \circ f(17) = g(f(17)) = g(0) = -7$.
- $f \circ g(23) = f(g(23)) = f(12) = 6$.
- $f \circ g(12) = f(g(12)) = f(23) = 41$.

Bài tập 1.4.12. Cho $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$. Tìm $g \circ f(x)$ tại những điểm mà biểu thức này có nghĩa.

Giải:

$g \circ f$ xác định nếu $R_f \subset D_g$.

$D_g = [-1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} R_f \subset D_g &\Leftrightarrow D_f \subset [-1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x - 3 < +\infty \\ &\Leftrightarrow 2 \leq x < +\infty \end{aligned}$$

Với $2 \leq x < +\infty$,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-3) \\ &= \sqrt{(x-3)+1} \\ &= \sqrt{x-2} \end{aligned}$$

Bài tập 1.4.13. Một nghiên cứu cho thấy mức độ khí CO trung bình hàng ngày trong không khí tại 1 khu vực X có p nghìn dân là

$$C(p) = 0.5p + 1 \quad (\text{‰}).$$

Người ta cũng ước tính rằng, sau t năm kể từ thời điểm hiện tại, dân số ở khu vực này sẽ là

$$p(t) = 10 + 0.1t^2 \quad \text{(nghìn)}.$$

Tìm mức CO trung bình hàng ngày sau t năm kể từ thời điểm hiện tại và cho biết đến khi nào thì mức CO trung bình hàng ngày sẽ đạt 6.8 ‱.

Giải:

Mức CO trung bình hàng ngày theo sau t năm tính từ thời điểm hiện tại là

$$\begin{aligned} C(t) &= C(p(t)) \\ &= 0.5\left(10 + 0.1t^2\right) + 1 \\ &= 6 + 0.05t^2 \quad (‱). \end{aligned}$$

Mức CO đạt 6.8 ‱ khi

$$\begin{aligned} C(t) &= 6.8 \quad (‱) \\ &\Leftrightarrow 6 + 0.05t^2 = 6.8 \\ &\Leftrightarrow t = 4 \quad \text{(năm)} \end{aligned}$$

Vậy sau 4 năm kể tự thời điểm hiện tại, khu vực X có mức CO trong không khí trung bình hàng ngày là 6.8 ‱.

1.4.6 Hàm ngược

Bài tập 1.4.14. Hàm số f xác định và đơn điệu chặt trên $\mathbb{R}$, có một số giá trị được cho trong bảng dưới đây

x	-7	-4	-1	0	3	12	17	23
$f(x)$	8	17	12	-1	-4	-6	-10	-17

Xác định $f^{-1}(-1),\ f^{-1}(12)$.

Giải:

Nhắc lại $y = f(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

- $x = f^{-1}(-1) \Leftrightarrow f(x) = -1$. Đối chiếu với bảng giá trị ta có $f(0) = -1$. Vậy $f^{-1}(-1) = 0$.
- Tương tự $f^{-1}(12) = -1$ vì $f(-1) = 12$.

Bài tập 1.4.15. Cho $f : (2, +\infty) \to (1, +\infty)\,, f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.
Chứng minh f là một song ánh. Tìm $f^{-1}(x)$.

Giải:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

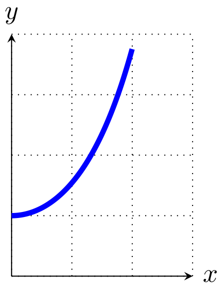
Nhận thấy rằng $f(x)$ đơn điệu giảm trong $(2, +\infty)$ và $R_f = (1, +\infty)$ nên f là song ánh.

Với $y \in R_f$

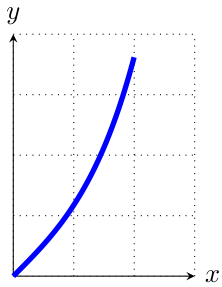
$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{x+1}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Vậy $f^{-1}(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}$ hay $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

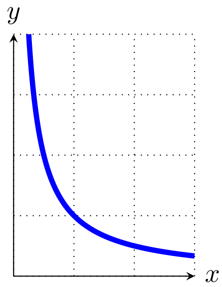
Bài tập 1.4.16. Hình (a), (b), (c) là đồ thị của các hàm số f và (d), (e), (f) là đồ thị của các hàm f^{-1}. Tìm các cặp $\left(f, f^{-1}\right)$ tương ứng.



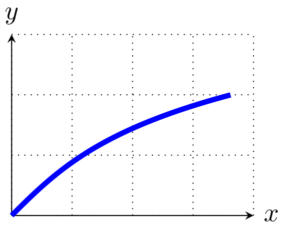
(a)



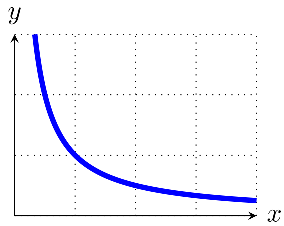
(b)



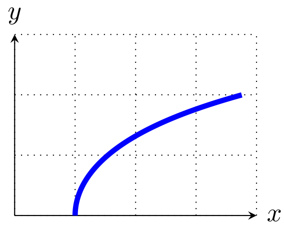
(c)



(d)



(e)



(f)

Giải:
Vì đồ thị của $f(x)$ và $f^{-1}(x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ nên ta chọn được các cặp tương ứng là (a)-(f), (b)-(d), (c)-(e).

Bài tập 1.4.17. Tổng chi cho hoạt động nghiên cứu và phát triển (NCPT) ở một quốc gia A trong giai đoạn từ năm 2003 đến năm 2020, tính theo tỷ USD, được cho bởi hàm số

$$S(t) = 73.77 \ln(5 + t) + 67.75, \text{ trong đó } t = 0 \text{ tương ứng năm 2003.}$$

Tìm $S^{-1}(289)$ và cho biết ý nghĩa.

Giải:
Giả sử $S^{-1}(289) = t_0 \in [0, 17]$, khi đó

$$\begin{aligned} S(t_0) = 289 \quad &\Leftrightarrow \quad 73.77 \ln(5 + t_0) + 67.75 = 289 \\ &\Leftrightarrow \quad t_0 \approx 15.07 \end{aligned}$$

Tổng chi cho hoạt động NCPT ở quốc gia A từ năm 2003 đến năm 2018 là 289 tỷ USD.

1.5 Một số dạng toán ứng dụng thực tế

1.5.1 Kỹ thuật

Bài tập 1.5.1. Công nghệ Maglev (Magnetic Levitation) trong tàu điện là sử dụng lực từ cực mạnh để nhấc toàn bộ toa tàu lên trên, cách đường ray vài centimet. Hệ thống nam châm được bố trí dọc theo đường ray sẽ liên tục đổi cực âm, dương một cách xen kẽ để đẩy toa tàu đi về phía trước.
Một tàu điện sử dụng công nghệ Maglev thử nghiệm trên một đường ray đơn. Để mô tả chuyển động của tàu, xem như đường ray là trục tọa độ. Từ dữ liệu thu được, các kỹ sư đã ước tính quãng đường đi được của tàu, tính bằng met (m), theo thời gian t, tính bằng giây, bởi hàm số

$$s = f(t) = 1.2t^2, \ 0 \leq t \leq 30.$$

Tìm $f^{-1}(s)$. Hãy cho biết ý nghĩa và tập xác định của hàm số này.

Giải:

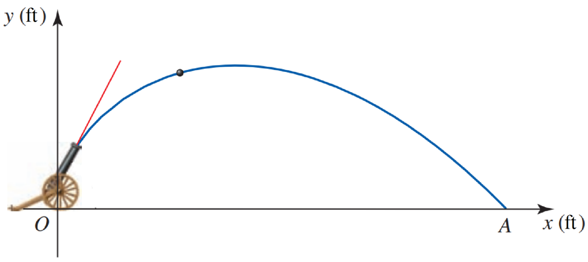
$$\text{Với } t \in [0,30],\ s = f(t) \Leftrightarrow s = 1.2t^2 \Leftrightarrow t = 0.91\sqrt{s}$$

Vậy $f^{-1}(s) = 0.91\sqrt{s}$.
$f^{-1}(s)$ cho biết thời gian để tàu đi được s met.
Tập xác định của f^{-1} là tập giá trị của f. Với $t \in [0,30]$, $f(t) = 1.2t^2 \in [0,1080]$. Do đó tập xác định của f^{-1} là $[0,1080]$

Bài tập 1.5.2. Một đại bác được đặt trên mặt đất, nòng pháo hướng lên và được gắn với một hệ trục Oxy như hình vẽ dưới. Đơn vị trên các trục tính bằng feet (ft) (1 ft = 0.3048 m).

Một quả đạn pháo được bắn ra có đường đi mô tả bởi hàm số

$$y = \sqrt{3}x - \frac{x^2}{400}.$$



1. Tìm độ cao lớn nhất của quả đạn pháo.
2. Tìm vị trí tiếp đất của quả đạn pháo.

Giải:

1. Do đường đi có dạng parabol, nên độ cao lớn nhất của quả đạn pháo nằm ở đỉnh parabol ($y = ax^2 + bx + c$, đỉnh đặt tại hoành độ $x = -\dfrac{b}{2a}$).
Tọa độ đỉnh là $(x,y) = \left(200\sqrt{3}, 300\right)$. Vậy quả đạn pháo đạt độ cao lớn nhất là 300 ft.
2. Quả đạn pháo tiếp đất khi $y = 0$ và $x > 0$. Giải phương trình $y = 0$ ta được các nghiệm $x = 0$ và $x = 400\sqrt{3}$. Vậy quả đạn pháo tiếp đất cách nơi đặt đại bác $400\sqrt{3}$ ft ≈ 211 m.

1.5.2 Ứng dụng trong kinh doanh-kinh tế

Các hàm số thường sử dụng trong kinh doanh, kinh tế bao gồm: hàm chi phí C (cost), hàm doanh thu R (revenue), hàm lợi nhuận P (profit), hàm cung S (supply) và hàm cầu D (demand).

1. Hàm chi phí C có thể là chi phí lưu động ($C(x) = x \times$ giá tạo ra 1 sản phẩm, với x là số sản phẩm) hoặc tổng chi phí ($C(x) = C_0 +$ chi phí lưu động, C_0 là chi phí cố định như thuê nhà xưởng, kho bãi, khấu hao máy móc,...).
2. Hàm doanh thu $R(x)$ là doanh thu trên x sản phẩm.
3. Hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x)$ là lợi nhuận trên x sản phẩm.
4. Hàm cầu biểu diễn sự tương quan giữa x sản phẩm theo nhu cầu thị trường và giá giá bán mỗi sản phẩm $p = D(x)$.
5. Hàm cung thể hiện mối tương quan giữa x sản phẩm mà nhà cung cấp sẵn sàng cung cấp và giá bán mỗi sản phẩm $p = S(x)$.

Trong thực tế, các đại lượng này còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác.

Bài tập 1.5.3. Một nhà máy sản xuất giấy cho biết, chi phí để sản suất 1 ream giấy (500 tờ) A_4 loại 1 là 50 ngàn đồng và họ có thể bán ra với giá 80 ngàn đồng (giá sỉ). Hiện tại mỗi tháng nhà sản suất bán được 4000 ream giấy loại 1 và đang có kế hoạch tăng giá. Họ ước tính, nếu tăng thêm 20 ngàn đồng 1 ream thì số ream giấy bán ra mỗi tháng giảm 400 ream. Tìm hàm số mô tả lợi nhuận của nhà sản xuất theo giá 1 ream giấy được bán ra.

Giải:

Nếu gọi $x \geq 80$ là giá bán 1 ream giấy thì số ream giấy bán ra bị giảm đi $400 \times k$ nếu tăng thêm $k \times 20$ ngàn, với $k = \dfrac{x-80}{20}$.

Vậy số ream giấy bán ra mỗi tháng là $4000 - 400 \times \dfrac{x-80}{20}$.

Lợi nhuận cho mỗi ream giấy bán ra là $x - 50$, do đó lợi nhuận mỗi tháng của nhà sản xuất trên loại giấy này là:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-50)\left(4000 - 400 \times \frac{x-80}{20}\right) \\ &= -20x^2 + 6,600x - 28,000 \quad \text{ngàn đồng} \end{aligned}$$

Bài tập 1.5.4. Một công ty sản xuất đồ gỗ nội thất sản xuất và bán ra x chiếc ghế ngả với giá $p(x) = 1.5 - 0.003x$ (triệu đồng). Chi phí để sản xuất 1 chiếc ghế là 0.02 triệu/chiếc và chi phí cố định là 66.5 triệu. Công ty dự định sản xuất và bán ra không quá 300 ghế.

1. Công ty phải bán ra bao nhiêu ghế để hòa vốn và giá ghế khi đó là bao nhiêu?
2. Để lãi 50 triệu đồng, công ty phải sản xuất bao nhiêu ghế?

Giải:

1. Tổng chi phí để sản xuất x ghế là: $C(x) = 66.5 + 0.02x$ triệu đồng.
   Tổng doanh thu nếu sản xuất và bán x ghế là: $R(x) = x \cdot p(x) = x(1.5 - 0.003x)$ triệu đồng.
   Lợi nhuận trên x ghế bán ra là: $P(x) = R(x) - C(x) = -0.003x^2 + 1.48x - 66.5$ triệu đồng.
   Công ty hòa vốn cho mặt hàng này nếu lợi nhuận $P(x) = 0$.
   $$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow -0.003x^2 + 1.48x - 66.5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 50 \vee x = 443.33 \end{aligned}$$
   Do công ty không sản xuất quá 300 ghế nên số ghế cần sản xuất để hòa vốn là 50.

2. Công ty lãi 50 triệu đồng từ việc sản xuất này có nghĩa $P(x) = 50$.
   $P(x) = 50$.
   $$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow -0.003x^2 + 1.48x - 116.5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 98.31 \vee x = 395.03 \end{aligned}$$
   Tương tự câu trên, giá trị x được chọn là 98.31.
   Vậy để lãi 50 triệu đồng, công ty cần sản xuất và bán 99 ghế.

1.5.3 Khoa học đời sống

Bài tập 1.5.5. Tại một vườn trồng cam người ta thấy rằng nếu trồng 50 cây cam trên 1000 m^2 thì năng suất thu hoạch trung bình là 70kg/cây. Nếu cứ tăng thêm một cây/1000 m^2 thì năng suất giảm trung bình khoảng 3kg/cây. Giả sử x là số cây vượt trên 50 và không quá 10, tìm hàm số biểu diễn sản lượng trung bình của 1000m^2 vườn cam theo x.

Giải:

Sản lượng của 1000 m^2 vườn cam = Số cây × năng suất mỗi cây.

Số cây cam trong vườn là $50 + x,\ 0 \leq x \leq 10$.

Nếu trồng 50 cây/1000m^2 thì trung bình mỗi cây thu được 70kg, nếu tăng thêm x cây, năng suất của mỗi cây là $70 - 3x$.
Vậy sản lượng trên 1000 m^2 vườn cam là $P(x) = (50 + x) \times (70 - 3x)$.

Bài tập 1.5.6. Trên thang đo nhiệt độ Fahrenheit, nước đóng băng ở 32^0F và sôi ở 212^0F. Trên thang đo Celsius , nước đóng băng ở 0^0C và sôi ở 100^0C.

a. Tìm mối liên hệ giữa 2 loại nhiệt độ trên như 1 hàm tuyến tính theo t là Celsius và $T = f(t)$ là Fahrenheit.

b. Trong các khung nhiệt độ ở trên, tìm hàm ngược của hàm số $f(t)$.

Giải:

a. Giả sử $f(t) = at + b$, theo giả thiết $f(0) = 32$ và $f(100) = 212$, ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 32 \\ a \cdot 100 + b = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1.8 \\ b = 32 \end{cases}$$

Vậy hàm số $f(t) = 1.8t + 32$ mô tả cách tính ∘F theo ∘C.

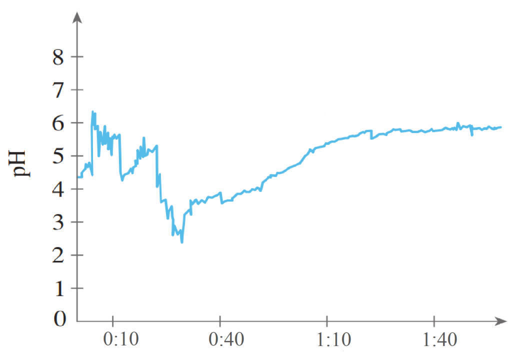
b. Trên tập xác định $D_f = [0, 100]$ và tập giá trị $R_f = [32, 212]$, f là hàm tăng chặt, do đó tồn tại hàm ngược f^{-1}.

$$\begin{aligned} f(t) = 1.8t + 32 \quad &\Leftrightarrow \quad T = 9t + 32 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{T - 32}{1.8} \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{5(T - 32)}{9} \end{aligned}$$

Vậy $f^{-1}(T) = \dfrac{5(T - 32)}{9}$.

1.5.4 Y tế

Bài tập 1.5.7. Thực quản khỏe mạnh có độ pH khoảng 7.0. Khi trào ngược dạ dày thực quản xảy ra, axit dạ dày (có độ pH dao động từ 1.0 đến 3.0) chảy ngược từ dạ dày vào thực quản. Khi độ pH của thực quản thấp hơn hơn 4.0, giai đoạn này được gọi là "trào ngược axit lâm sàng", có thể gây loét và làm tổn thương niêm mạc của thực quản. Đồ thị bên dưới hiển thị độ pH thực quản cho một bệnh nhân đang ngủ với axit trào ngược. Trong khoảng thời gian nào bệnh nhân này có một đợt trào ngược axit lâm sàng?



Hình 1.17: Đồ thị mô tả sự thay đổi pH thực quản của một bệnh nhân đang ngủ.

Giải:

Dựa vào đồ thị, trong khoảng thời gian từ 0 giờ 25 phút đến 0 giờ 55 phút thì pH thực quản thấp hơn 4.0, nên trong khoảng thời gian này xảy ra trào ngược axit lâm sàng.

Bài tập 1.5.8. Các enzym tiêu hóa đôi khi được tạo ra bởi các tế bào ung thư để tiêu hóa các mô xung quanh khối u, giúp nó phát triển và lây lan. Trong các khối u rắn, các enzym chỉ được tạo ra bởi các tế bào trên bề mặt của khối u. Giả sử đường kính d của một khối u hình cầu đang gia tăng với tốc độ a mm/năm.

a. (a) Tìm công thức đường kính d của khối u theo thời gian t (năm)?

b. Giả sử tốc độ tạo enzym tiêu hóa P tỉ lệ thuận với diện tích S của bề mặt của khối u. Tìm $P \circ S \circ d$ và nêu ý nghĩa của hàm số này.

Giải:

Theo giả thiết, đường kính khối u tăng a mm/năm, vậy $d = at$, trong đó t là số năm tính từ lúc khối u bắt đầu hình thành.
P tỷ lệ thuận với S do đó $P(S) = kS$.
Công thức tính diện tích mặt cầu S theo đường kính d là $S = \pi d^2$.
Áp dụng cách tính của hàm số hợp ta có

$$\begin{aligned} P \circ S \circ d(t) &= P\left(S\left(d(t)\right)\right) \\ &= k\left(S\left(d(t)\right)\right) \\ &= k\pi\left[d(t)\right]^2 \\ &= k\pi(at)^2 \end{aligned}$$

Vậy $P(t) = a^2 k\pi t^2$. Hàm số này nói rằng, tốc độ tạo ra enzym tiêu hóa của khối u này tỷ lệ thuận với bình phương số năm khối u được hình thành.

1.5.5 Dân số

Bài tập 1.5.9. Mô hình gia tăng dân số tự nhiên: trong điều kiện môi trường không bị hạn chế (không gian và điều kiện sinh sống), kích thước quần thể P(số lượng cá thể của quần thể) được cho bởi mô hình

$$P(t) = P_0 \mathrm{e}^{\mathrm{k}t},$$

trong đó t là thời gian và $t = 0$ là thời điểm bắt đầu khảo sát, P_0 là kích thước quần thể tại $t = 0$, k là hằng số liên quan đến tỷ lệ thay đổi kích thước P.
Áp dụng: một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm và được cho phát triển tự nhiên. Ban đầu có $1,000$ vi khuẩn, sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là $3,000$. Hỏi sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ đạt $100,000$?

Giải:

Áp dụng mô hình nêu trên, với số lượng vi khuẩn ban đầu là $P_0 = 1,000$, số lượng vi khuẩn sau t giờ là

$$P(t) = 1000\mathrm{e}^{\mathrm{k}t}$$

Theo giả thiết, $P(2) = 3000$, thay vào công thức ta có

$$\begin{aligned} 3000 &= 1000\mathrm{e}^{2\mathrm{k}} \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{k} &= \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $P(t) = 1000\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}t}$ hay $P(t) = 1000 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$.

$$\begin{aligned} P(t) = 100,000 \quad &\Leftrightarrow \quad 1000 \cdot 3^{\frac{t}{2}} = 100,000 \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{\frac{t}{2}} = 100 \\ &\Leftrightarrow \quad t \approx 8.4 \end{aligned}$$

Vậy sau khoảng 8.4 giờ thì số vi khuẩn sẽ đạt $100,000$.

Bài tập 1.5.10. Mô hình kích thước quần thể đơn loài trong một môi trường giới hạn được cho bởi hàm số:

$$P(t) = \frac{L}{Ce^{-kt} + 1},$$

trong đó P là kích thước quần thể (số lượng cá thể), t là thời gian năm kể từ lúc bắt đầu khảo sát, L gọi là sức chứa môi trường (số lượng cá thể lớn nhất có thể tồn tại trong môi trường), k là hằng số liên quan đến tốc độ tăng trưởng tự nhiên của quần thể, $C = \dfrac{L - P_0}{P_0}$, P_0 là kích thước ban đầu của quần thể.

Áp dụng: Một hồ cá thiên nhiên ban đầu có 400 con. Số cá có thể sinh sống trong hồ tối đa là $10,000$ con. Biết rằng sau một năm số cá tăng gấp 3 lần. Tìm số lượng cá sau t năm. Sau bao lâu thì số cá trong hồ đạt $5,000$ con.

Giải:

Theo mô hình trên, sức chứa của hồ là $L = 10,000$ con, số cá trong hồ ban đầu $P_0 = 400$, số cá trong hồ sau t năm là

$$P(t) = \frac{10,000}{Ce^{-kt} + 1},$$

với $C = \dfrac{10,000 - 400}{400} = 24$, ta có

$$P(t) = \frac{10,000}{24e^{-kt} + 1}.$$

Theo giả thiết, khi $t = 1$, số cá trong hồ là $1,200$ con

$$\begin{aligned} P(1) = 1,200 \quad &\Leftrightarrow \quad 1,200 = \frac{10,000}{24e^{-k} + 1} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-k} = \frac{11}{36} \\ &\Leftrightarrow \quad k = \ln\frac{36}{11} \end{aligned}$$

Vậy mô hình tìm được là

$$P(t) = \frac{10,000}{24\left(\dfrac{11}{36}\right)^t + 1}$$

. Khi số cá đạt $5,000$ con thì

$$\begin{aligned} P(t) = 5,000 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{10,000}{24\left(\dfrac{11}{36}\right)^t + 1} = 5,000 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{11}{36}\right)^t = \frac{1}{24} \\ &\Leftrightarrow \quad t \approx 2.68 \end{aligned}$$

Vậy Sau khoảng 2 năm 8 tháng. số cá trong hồ đạt $5,000$ con.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Thành lập hàm số

1. Để tạo ảnh hoạt hình tiếp cận người chơi game, người tạo game đã bắt đầu từ 1 ảnh hình tròn có bán kính 25 pixels (pel). Sau đó bán kính được cho tăng với tốc độ 10 pixels mỗi giây. Xác định diện tích của ảnh sau t giây.

2. Câu hỏi tương tự bài tập 1 nhưng ảnh xuất phát là hình vuông có chiều dài cạnh 15 pel.

3. Khi không khí di chuyển lên cao, nó nở ra và lạnh đi. Nếu nhiệt độ trung bình của mặt đất là 20°C và giảm 6.5°C khi độ cao tăng lên 1000 mét. Hãy lập một mô hình phù hợp thể hiện nhiệt độ trung bình T của không khí ($^\circ$C) theo độ cao h(km).

4. Dân số của một thành phố A vào năm 2008 là 50.000. Mỗi năm tỷ lệ gia tăng dân số tự nhiên là 4.5%.

a. Lập một hàm số mô tả dân số từ năm 2008 của thành phố này.

b. Dân số vào năm 2018 là bao nhiêu?

c. Khi nào thì dân số đạt 100.000?

5. Trên toàn thế giới, công suất sản xuất năng lượng gió, W, là 39.295 megawatt (MW) vào năm 2003 và là $120,903$ MW vào năm 2008.

1. Sử dụng các giá trị được đưa ra để viết W như là một hàm tuyến tính của t, là số năm kể từ năm 2003.

2. Tương tự câu trên, nếu $W(t) = \mathrm{k}e^{at}$.

3. Dùng phần mềm để vẽ đồ thị các hàm tìm thấy trong 2 phần trên trên cùng một hệ trục.

4. Sử dụng các hàm vừa tìm trong 2 phần trên để dự đoán năng lượng gió được tạo ra trong năm 2010. Nhận xét về kết quả: Ước tính nào gần với giá trị thực tế hơn biết: Năng lượng gió thực tế được tạo ra trong năm 2010 là 196.653 MW.

6. Một bác sỹ mua một quyển sách với giá 1.500 USD. Giả sử giá trị của sách giảm đều đặn aUSD sau từng năm, và đến cuối năm thứ 10, giá trị của sách còn 230USD. Hãy biểu diễn giá trị $C(t)$ của quyển sách đến cuối năm thứ t như một hàm số theo t.

7. Dịch vụ giao hàng qua đêm tính phí 250 ngàn đồng cho gói hàng có trọng lượng 2 kg. Đối với mỗi kg bổ sung, hoặc một phần của chúng, chi phí tăng thêm là 30 ngàn đồng. Hãy lập biểu thức $f(x)$ biểu thị chi phí để gửi gói hàng có trọng lượng x kg. Vẽ đồ thị của f với x trong khoảng $[0, 6]$.

8. Một nhà máy sản xuất nước mắm cho biết chi phí cố định mỗi tháng là 50 triệu đồng. Chi phí bình quân để sản mỗi chai nước mắm là 30 ngàn đồng. Nếu gọi x là số chai nước mắm mà nhà máy sản xuất được trong một tháng, tìm hàm số $C(x)$ mô tả chi phí sản xuất hàng tháng của nhà máy, lấy đơn vị của $C(x)$ là triệu đồng.

9. Vào tuần đầu tháng 9, nhà vườn trồng cam sành bắt đầu thu hoạch. Giá bán lúc này là 3 triệu đồng mỗi tạ cam (100kg). Sau đó, mỗi tuần giá cam giảm 200 ngàn một tạ, đồng thời số cam trong vườn cũng tăng thêm 30kg. Biết tuần đầu tháng 9, nhà vườn này hái được 5 tạ cam. Tìm doanh thu của nhà vườn ở tuần thứ x của tháng 9, 10 và miền xác định của hàm doanh thu(giả sử tháng 9 và 10 có 9 tuần).

10. Một công ty sản xuất hộp thiếc dựng thực phẩm đóng hộp. Theo đơn đặt hàng, công ty phải thiết kế một hộp hình trụ tròn kín có bán kính đáy $r \geq 4$ (cm) và thể tích 750 cm^3. Giá thiếc làm đáy hộp là 140 ngàn đồng/m^2, giá thiếc làm thành hộp là 120 ngàn đồng/m^2. Tìm công thức tính giá nguyên liệu để sản xuất hộp thiếc này theo bán kính đáy r (giá này chưa tính chi phí in trên hộp).

11. Một công ty sản xuất và bán các loại áo thun. Chi phí cố định cho việc sản xuất và bán là 70 triệu đồng, chi phí để sản xuất một áo là 50 ngàn đồng.

1. Nếu giá bán ra mỗi áo là 90 ngàn đồng, hãy xác định hàm doanh thu $R(x)$ và hàm lợi nhuận $P(x)$ nếu công ty bán ra x áo thun.

2. Do nhu cầu của thị trường, công ty sẽ điều chỉnh giá bán. Với giá bán là p ngàn đồng, số lượng áo thun được bán ra là $x(p) = 8000 - 90p$. Nếu giá bán là 80 ngàn đồng một áo, số lượng áo bán ra là bao nhiêu và lợi nhuận của công ty trong trường hợp này là bao nhiêu?

3. Xác định hàm doanh thu R và hàm lợi nhuận P theo giá bán p (ngàn đồng).

Miền xác định-Miền giá trị

12. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1. $f(x) = \ln\left(2 - \dfrac{3}{2x+1}\right)$
2. $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$
3. $f(x) = \dfrac{1+x}{\cos x}$
4. $f(x) = \sqrt{3 - 2^{-x^2}}$
5. $f(x) = \sqrt{3 - 2^x}$
6. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi - \arctan x}{\pi - 4\arctan x}}$
8. $f(x) = \operatorname{arccot} \sqrt[3]{3x-2}$
9. $f(x) = \sinh\left(-\sqrt{x}\right)$
10. $f(x) = \coth(4x+3)$

13. Trong một chương trình tiêm chủng quốc gia, chi phí để tiêm cho $x\%$ dân số là

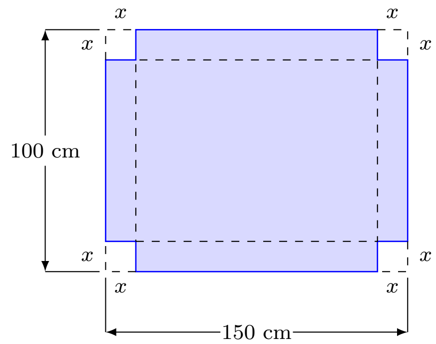
$$C(x) = \frac{150x}{200-x}.$$

Tìm tập xác định của $C(x)$.

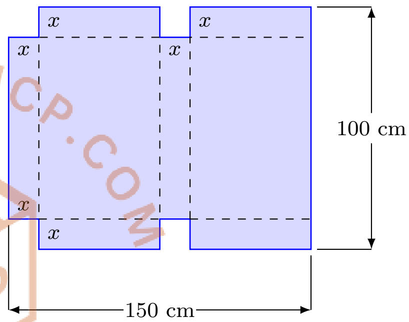
14. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$
5. $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{nếu } x < 0 \\ 2 - x, & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$
6. $\ln\left(\dfrac{1}{1 + cos^2 x}\right)$
7. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
8. $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$
9. $f(x) = \arctan\left(1 + e^x\right)$
10. $f(x) = \cosh\left(\dfrac{2}{x+3}\right),\ x \geq 1$

15. Từ một tấm giấy hình chữ nhật có kích thước 150×100 (cm), người ta cắt bỏ 4 hình vuông có chiều dài cạnh là x ở 4 góc để gấp 1 chiếc hộp không nắp (xem hình). Viết hàm số mô tả thể tích của hộp giấy theo x. Hãy cho biết tập xác định và tập giá trị của hàm số này.



16. Câu hỏi tương tự bài tập 15 nhưng hộp có nắp và giấy cắt như hình vẽ bên dưới.



Ý nghĩa hàm số

17. Trong một đợt dịch bệnh lan truyền mạnh, tại thành phố X số ca mắc mới ở ngày thứ t (tính từ ngày thống kê đầu tiên) là hàm số $S(t)$. Hãy cho biết ý nghĩa của $S(15) = 400$.

Dựa vào mô hình trong 1.5.5, nếu $L = 64,\ C = 31,\ \mathrm{k} = 0.79$, tính $P(10)$ và cho biết ý nghĩa của giá trị này.

18. Một vật có nhiệt độ ban đầu $T_0(°C)$ được đặt vào môi trường có nhiệt độ không đổi là a (°C). Sau t phút, nhiệt độ của vật được cho bởi công thức $T(t) = (T_0 - a)e^{-kt}$. Nếu $T_0 = 100, a = 20$, k$= 0.5$, tìm $T(10)$ và cho biết ý nghĩa của giá trị này. Sau bao lâu thì nhiệt độ của vật là 70°C.

Hàm số hợp

19. Hai hàm số f, g xác định trên $\mathbb{R}$ và có một số giá trị được cho trong bảng dưới đây

x	1	4	5	9	13	15	16	20
$f(x)$	-1	-7	2	4	-1	1	0	1
$g(x)$	0	3	-10	-3	-1	3	4	8

Xác định $(g \circ f)(9)$, $(f \circ g)(16)$.

20. Cho $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ và $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Tìm điều kiện của x để $(f \circ g)(x)$ có nghĩa và tập xác định của hàm số này.

21. Cho $f(x) = 2x + x^2$ và
$$g(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{x}{2}, & \text{nếu } x \geq 3 \\ 2x - 5, & \text{nếu } x < 3. \end{cases}$$

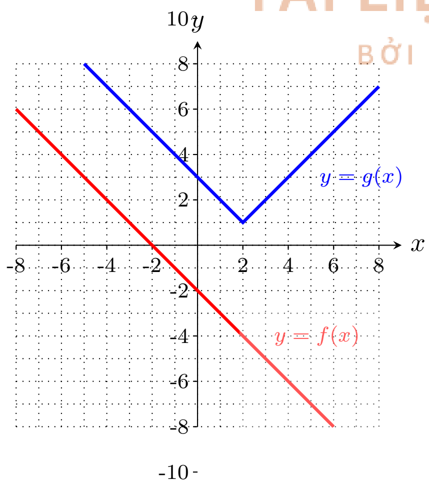
1. Tìm $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(8)$.
2. Tìm $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$.

22. Cho $\begin{cases} f(x) = 2 - |x|, & -1 \leq x \leq 3 \\ g(x) = 1 - |x-2|, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$

1. Chứng minh rằng $(f \circ g)$ tồn tại.
2. Tìm $(f \circ g)(1)$.
3. Tìm Tập giá trị của $(f \circ g)$.

23. Cho $f(x) = x^3 + x - 1$ và $g(x) = 3x + 2$. Tìm $g \circ f(x)$, $f(g(2x))$, $g(f(x-1))$.

24. Cho các hàm số f và g có đồ thị như hình bên dưới.



1. Tìm miền xác định và miền giá trị của f, g.
2. Chứng minh $g \circ f$ tồn tại.
3. Tìm $(g \circ f)(-7)$.

25. Số người sống ở vùng ven biển S sẽ ảnh hưởng đến số lượng cá voi của vùng biển gần đó. Nếu gọi $p(n)$ là số lượng cá voi được tính theo n, là số người sống ở ven biển, $k(p)$ là số loài phù du ở vùng biển đó, phụ thuộc vào số lượng cá voi. Người ta ước tính
$$\begin{cases} p(n) = 100 - \dfrac{n}{2}, \\ k(p) = 400 - \dfrac{p}{5}. \end{cases}$$
Tìm $k \circ p(100,000)$ và cho biết ý nghĩa của giá trị này.

26. Thuốc kháng sinh được sử dụng để điều trị vi khuẩn viêm xoang. Giả sử với liều x milligam (mg) được dùng bằng đường uống, lượng hấp thụ mg vào máu qua dạ dày là $h(x) = 8x/(x+8)$. Nếu x mg kháng sinh đi vào máu sẽ được lọc qua gan và lượng còn lại sau quá trình lọc này là $g(x) = \dfrac{1}{4}x$. Cuối cùng, nếu x mg kháng sinh còn lại qua quá trình lọc qua gan thì lượng đến xoang bướm là
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{nếu } x > 1, \\ 0, & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

1. Tìm lượng kháng sinh đến xoang bướm nếu bệnh nhân uống x mg kháng sinh.
2. Thay vì uống, nếu bệnh nhân được tiêm x mg kháng sinh qua tĩnh mạch thì lượng kháng sinh đến xoang bướm là bao nhiêu?

27. Một cây thang dài 3 met (m) chống vào một bức tường. Khoảng cách từ chân tường đến chân thang là x (m). Góc hợp bởi thang và tường là θ. Khi thang trượt, θ thay đổi theo thời gian và được ước tính bởi công thức:
$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t-10}{2t+5} \text{ (rad)}.$$
Xác định khoảng cách x theo thời gian t.

Hàm ngược

28. Cho hàm số $f(x) = 2x + \ln x$. Có tồn tại f^{-1} hay không? Giải thích đáp án mà bạn lựa chọn. Nếu f^{-1} tồn tại, hãy xác định $f^{-1}(2)$.

29. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$. Vẽ đồ thị của f bằng một ứng dụng. Dựa trên đó hãy cho biết trong miền nào của x thì f^{-1} tồn tại. Khi đó hãy xác định $f^{-1}(x)$.

30. Chứng minh các hàm số sau có hàm ngược và xác định biểu thức của hàm ngược.

1. $f(x) = 4x^3 + 1$
2. $f(x) = \ln(2x - 1)$
3. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$
4. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

31. Kích thước của quần thể loài A (số lượng cá thể của quần thể loài A) trong môi trường giới hạn, tính từ thời điểm hiện tại, được mô tả bởi hàm số

$$P(t) = \frac{100,000}{100 + 900e^{-t}} (\text{ (đơn vị tính là trăm).}$$

trong đó t là thời gian tính theo năm.

1. Tìm miền xác định và miền giá trị của P.

2. Vẽ đồ thị của P (bằng một ứng dụng nào đó) và dựa vào đồ thị ước tính khi nào kích thước quần thể này đạt 90,000 cá thể.

3. Khi nào kích thước quần thể đạt 900 cá thể, so sánh kết quả của câu 31.

4. Tìm hàm ngược của P và cho biết ý nghĩa của hàm ngược này.

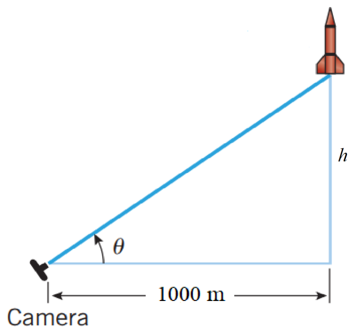
32.

Năm sinh	TTTB	Năm sinh	TTTB
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

Nếu bảng trên mô tả hàm số $f(n)$, số tuổi thọ trung bình theo năm sinh n thì f^{-1} có tồn tại hay không? Giải thích cho đáp án của bạn. Nếu f^{-1} tồn tại, hãy xác định $f^{-1}(57.4)$ và cho biết ý nghĩa.

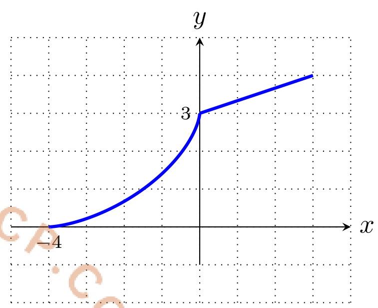
33. Một đĩa quay trong chất lỏng với vận tốc góc $w(t) = 5\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{120}}$ (vòng/giây). Tìm $w^{-1}(1)$ và cho biết ý nghĩa của giá trị này.

34. Camera quan sát đặt cách vị trí cất cánh của một chiếc tên lửa 1000 mét (m). Khi rời bệ phóng, tên lửa bay lên thẳng đứng và camera sẽ xoay theo. Độ cao so với mặt đất của tên lửa sau t giây (s) là $h(t) = 7000t - 160t^2$ (m), $0 \leq t \leq 10$. Tìm góc nhìn θ (rad) theo thời gian t.



Đọc đồ thị

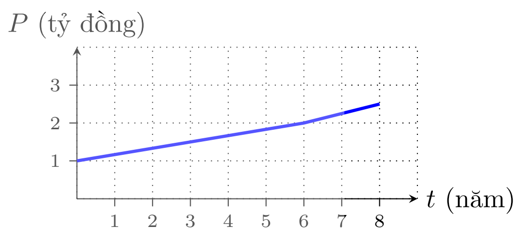
35. Cho hàm số f có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1. $y = f(x + 2)$
2. $y = f(-x)$
3. $y = f(x - 3)$
4. $y = f(x) + 1$
5. $y = f(x) - 3$
6. $y = 2f(x) + 1$
7. $y = f^{-1}(x)$
8. $y = f^{-1}(x + 3)$

36. Lợi nhuận bình quân hàng năm của một cửa hàng bách hóa trong giai đoạn 2004 đến 2012 được môt tả như đồ thị dưới đây, với $t = 0$ tương ứng năm 2004.

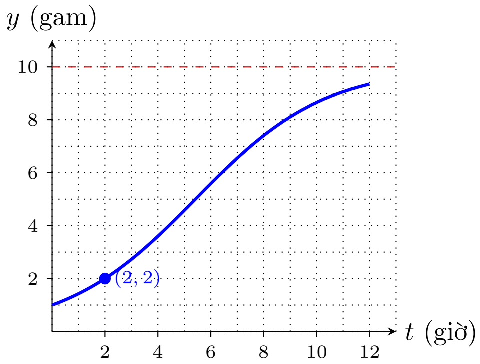


1. Hãy cho biết ý nghĩa giao điểm của đồ thị với trục tung.

2. Tốc độ gia tăng lợi nhuận bình quân mỗi năm trong giai đoạn 2004 đến 2010 của cửa hàng này là bao nhiêu, có đều đặn hay không?

3. Tốc độ gia tăng lợi nhuận bình quân của của hàng trong giai đoạn 2010 đến 2012 so với giai đoạn trước như thế nào, giải thích nhận xét của bạn.

37. Một mẻ cấy vi khuẩn 1 gam tại thời điểm ban đầu, sau t giờ khối lượng của mẻ cấy được mô tả bởi đồ thị bên dưới.



1. Sau 2 giờ, 6 giờ, 10 giờ, số gam của mẻ cây vi khuẩn là bao nhiêu.

2. Biết rằng số gam vi khuẩn của mẻ cấy sau t giờ cho bởi công thức

$$P(t) = \frac{10}{1 + 9e^{kx}}$$

Hãy xác định hằng số k.

Lời giải bài tập chương 2