Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có dạng

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x),$$

trong đó P, Q, R, G là các hàm số liên tục.

- Nếu $G \equiv 0$, ta có phương trình **thuần nhất (homogeneous)**

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0.$$

Định lý

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0.$$

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm **độc lập tuyến tính** *của phương trình, và $P(x)$ luôn khác không, thì nghiệm tổng quát của phương trình là*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số.

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất với hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

- Một "ứng cử viên nghiệm" là hàm có dạng

$$y = e^{\lambda x},$$

trong đó λ là hằng số.

- Hàm $y = e^{\lambda x}$ là một nghiệm khi và chỉ khi λ phải thỏa mãn **phương trình đặc trưng (characteristic equation)**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Trường hợp $\Delta > 0$

- Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Khi đó, nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

```
>> syms y(x);
>> dsolve(diff(y, 2) + diff(y) - 6*y == 0)

ans =

C12*exp(2*x) + C13*exp(-3*x)
```

Trường hợp $\Delta = 0$

- Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ chỉ có một nghiệm

$$\lambda = -\frac{b}{2a}.$$

- Khi đó, nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân:

$$4y'' + 12y' + 9y = 0.$$

```
>> syms x;
>> dsolve(4*diff(y, 2) + 12*diff(y) + 9*y == 0)

ans =

C15*exp(-(3*x)/2) + C16*x*exp(-(3*x)/2)
```

Trường hợp $\Delta < 0$

- Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có hai nghiệm phức

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

  trong đó α, β là các số thực.

- Khi đó, nghiệm tổng quát là

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

```
>> syms x;
>> dsolve(diff(y, 2) - 6*diff(y) + 13*y == 0)

ans =

C18*cos(2*x)*exp(3*x) + C19*sin(2*x)*exp(3*x)
```

Tổng kết về nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thuần nhất với hệ số hằng:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Nghiệm của $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	Nghiệm tổng quát
λ_1, λ_2 là số thực và phân biệt	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
λ_1, λ_2 là số phức: $\alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai **không thuần nhất** với hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

trong đó a, b, c là các hằng số, $a \neq 0$, và G là hàm số liên tục.

- Phương trình **thuần nhất** tương ứng

$$ay'' + by' + cy = 0$$

đóng vai trò quan trọng trong việc xác định nghiệm của phương trình không thuần nhất.

Định lý

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân **không thuần nhất** $ay'' + by' + cy = G(x)$ *là*

$$y(x) = y_r(x) + y_0(x),$$

trong đó

- y_r *là một* **nghiệm riêng** *của phương trình* **không thuần nhất** $ay'' + by' + cy = G(x)$;
- y_0 *là* **nghiệm tổng quát** *của phương trình* **thuần nhất** *tương ứng* $ay'' + by' + cy = 0$.

Một phương pháp thường dùng để tìm một nghiệm riêng y_r là **phương pháp hệ số bất định (method of undetermined coefficients)**.

Dạng của $G(x)$	Dạng của nghiệm riêng y_r
$G(x) = e^{kx}P(x)$	$y_r(x) = e^{kx}Q(x)$
$G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$	$y_r(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\sin mx$
$G(x) = e^{kx}P(x)\sin mx$	$y_r(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\sin mx$

- P, Q, R là các đa thức cùng bậc.
- Nếu mọi số hạng của y_r đều là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng, thì ta nhân y_r với x (hoặc x^2 nếu cần thiết).

Ví dụ

Hãy xác định dạng nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x.$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Định lý

Giả sử y_1 *và* y_2 *lần lượt là nghiệm của*

$$ay'' + by' + cy = G_1(x), \quad ay'' + by' + cy = G_2(x).$$

Khi đó, $y_1 + y_2$ *là nghiệm của phương trình vi phân*

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x).$$

Ví dụ

Hãy xác định dạng nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$y'' - 4y = xe^x + \cos 2x.$$

Một phương pháp khác để tìm một nghiệm riêng y_r là **phương pháp biến thiên tham số (method of variation of parameters)**:

- Giả sử ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $ay'' + by' + cy = 0$ là

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

- Ta đi tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $ay'' + by' + cy = G(x)$ dưới dạng

$$y_r = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ là 2 hàm được xác định bởi 2 điều kiện được đặt ra như sau.

- Tính đạo hàm cấp một $y_r' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$, từ đó ta đặt ra điều kiện thứ nhất:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0.$$

- Tính đạo hàm cấp hai:

$$y_r'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'',$$

rồi thay vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$a(C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'') + b(C_1y_1' + C_2y_2') + c = G,$$

hay

$$C_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + C_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(C_1'y_1' + C_2'y_2') = G.$$

- Từ đó ta có điều kiện thứ hai:

$$a(C_1'y_1' + C_2'y_2') = G.$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

```
>> syms x;
>> dsolve(diff(y, 2) + 4*diff(y) + 4*y == exp(-2*x)*log(x))

ans =

C21*exp(-2*x) + C22*x*exp(-2*x) + x^2*exp(-2*x)*(log(x) - 1) - (x^2*exp(-2*x)*(log(x) - 1/2))
```