

Bài tập chương 9

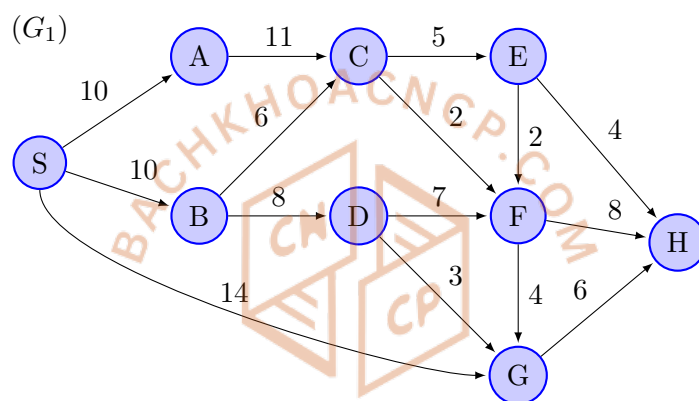
Tính liên thông trong đồ thị

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các bài toán, giải thuật và ứng dụng của tính liên thông trong đồ thị. Sinh viên cần xem lại lý thuyết trước khi thực hiện những bài tập này.

2 Bài tập cần giải

Đồ thị G_1 như hình bên dưới đây.



Câu 1.

Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Dijkstra.

Lời giải. □

Câu 2.

Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Bellman-Ford.

Lời giải. □

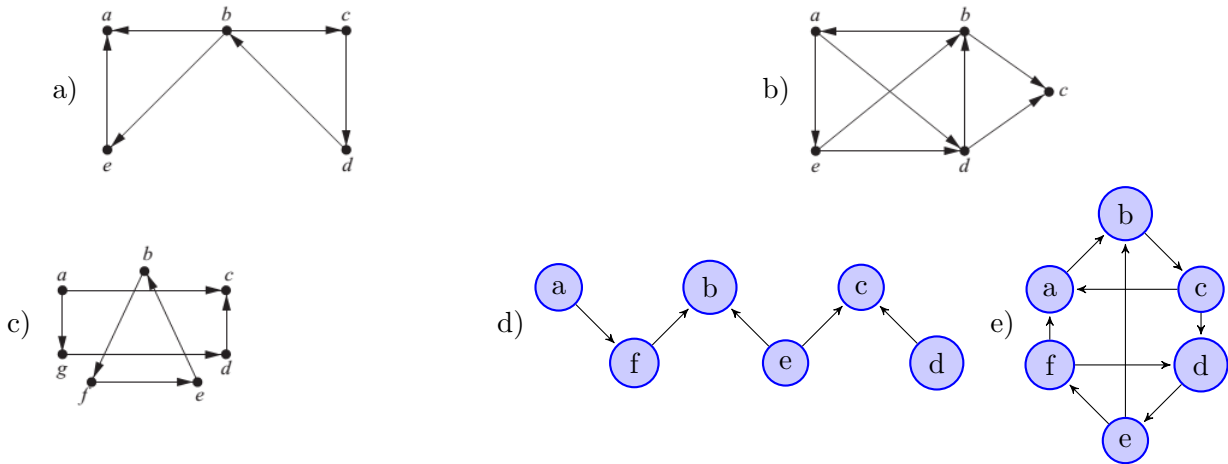
Câu 3.

Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ S đến tất cả các đỉnh còn lại bằng giải thuật Floyd-Warshall.

Lời giải. □

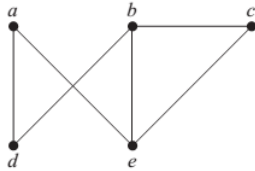
Câu 4.

Xác định xem những đồ thị dưới đây có liên thông mạnh hay không, nếu không, thì nó có liên thông yếu hay không.

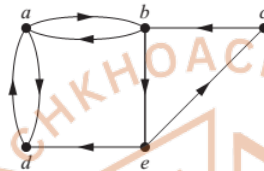


Câu 5.

Trong các danh sách các đỉnh dưới đây, danh sách nào tạo thành một đường đi trong đồ thị sau? Đây là đường đi đơn? Đây là chu trình? Và hãy xác định chiều dài của những đường đi?



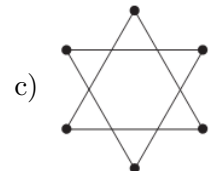
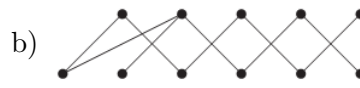
- a) a, e, b, c, b.
- b) a, e, a, d, b, c, a.
- c) e, b, a, d, b, e.
- d) c, b, d, a, e, c.



- a) a, b, e, c, b.
- b) a, d, a, d, a.
- c) a, d, b, e, a.
- d) a, b, e, c, b, d, a.

Câu 6.

Hãy xác định đồ thị nào liên thông. Và có bao nhiêu thành phần liên thông trong các đồ thị sau.

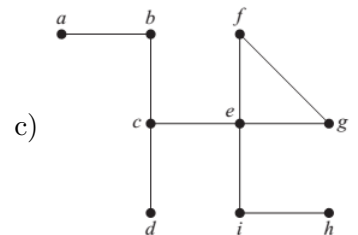
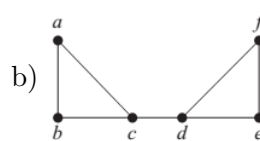
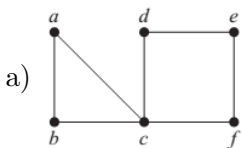


Câu 7.

Tìm đường đi có chiều dài là n giữa hai đỉnh khác nhau trong đồ thị K_4 nếu n là a) 2 b) 3.

Câu 8.

Hãy xác định tập các đỉnh cắt và cạnh cắt của các đồ thị bên dưới.



Câu 9.

Xác định tất cả đỉnh cắt (cut vertex), và cạnh cắt (cut edges) của các đồ thị sau.

- a) C_n , với $n \geq 3$
- b) W_n với $n \geq 3$
- c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2, n \geq 2$

Câu 10.

Chứng minh rằng các đồ thị sau không có đỉnh cắt.

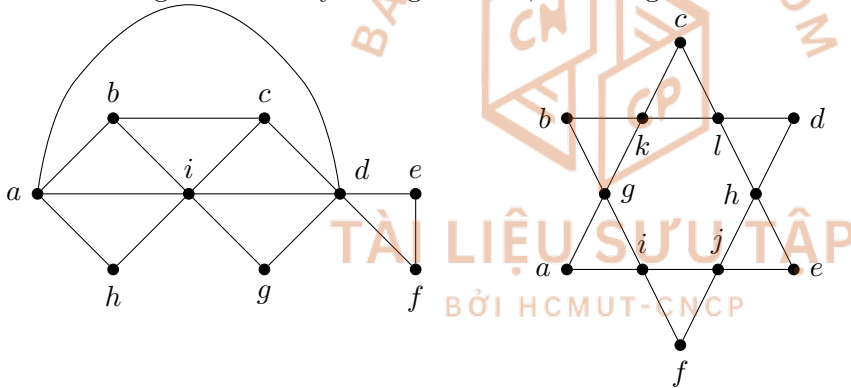
- a) C_n với $n \geq 3$
- b) W_n với $n \geq 3$
- c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$
- d) Q_n với $n \geq 2$

Câu 11.

Hãy vẽ một đồ thị G có $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, và bậc nhỏ nhất của các đỉnh là 3.

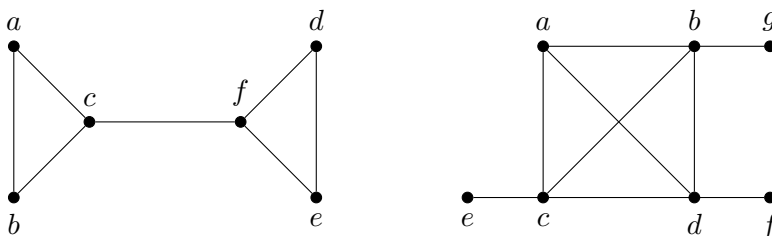
Câu 12.

Xác định xem đồ thị sau có chu trình Euler hay không. Nếu có, hãy xác định. Nếu không, xác định xem nó có đường đi Euler hay không. Nếu có, vẽ đường đi Euler.



Câu 13.

Xác định xem đồ thị sau có chu trình Hamilton hay không. Nếu có, hãy xác định nó. Nếu không, hãy đưa lý luận tại sao không có.

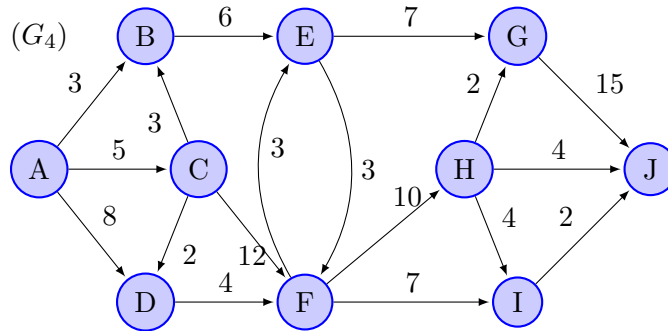
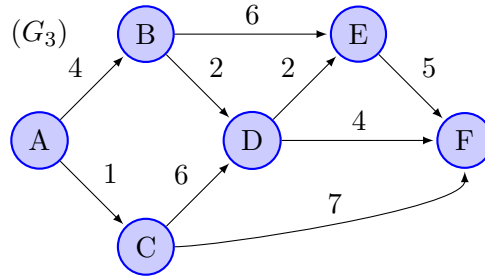


Câu 14.

Hãy dùng giải thuật Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_3 như sau.

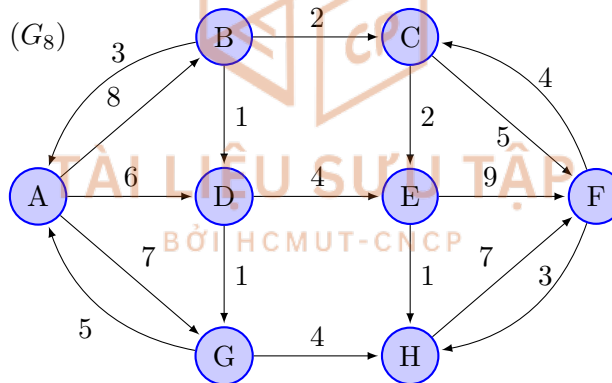
Câu 15.

Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_4 bên dưới.



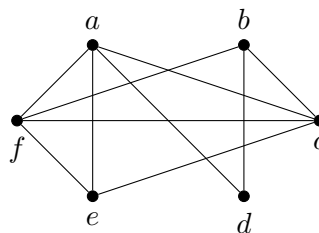
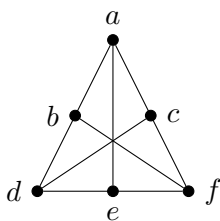
Câu 16.

Hãy dùng giải thuật Floyd-Warshall để tìm đường đi ngắn nhất của một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh khác bất kỳ trong đồ thị G_8 như bên dưới.



Câu 17.

Xác định xem các đồ thị sau có phẳng hay không. Nếu có, hãy vẽ lại đồ thị sao cho không có cạnh nào giao nhau.



3 Bài tập làm thêm

Câu 18.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Đỉnh $w \in V$ được gọi là **đến được** từ đỉnh $v \in V$ nếu có một đường đi có hướng từ v sang w . Hai đỉnh v và w được gọi là **đến được nhau** nếu tồn tại đường đi có hướng từ v đến w và đường đi có hướng từ w đến v trong G .

Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng và u, v , và w là các đỉnh thuộc V trong đó u và v là đến được nhau và v và w là đến được nhau, thì u và w cũng đến được nhau.

Câu 19.

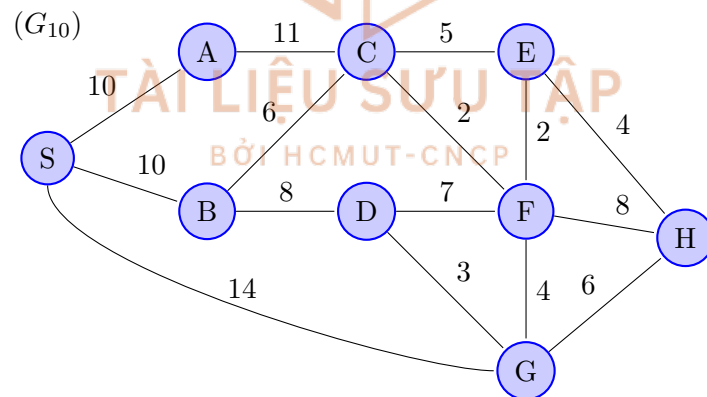
Chứng minh rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh phải có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Câu 20.

- Bạn được trao một cái bình 3 lít và một cái bình 5 lít. Bạn có thể làm một trong ba hành động, đổ nước đầy mỗi bình, đổ nước hoàn toàn ra khỏi mỗi bình, và đổ nước qua lại mỗi bình. Hãy sử dụng một đường đi trong đồ thị có hướng để cho thấy bạn thể làm cho một bình có chứa đúng 1 lít nước.
- Có hai cặp vợ chồng muốn qua sông. Họ chỉ có một chiếc thuyền duy nhất có thể chở một lần một hoặc hai người từ bờ này sang bờ bên kia. Vấn đề ở chỗ hai ông chồng đều có tính ghen tuông tới mức không muốn để vợ mình lại với người đàn ông khác, dù trên thuyền hay trên bờ. Làm cách nào để bốn người này đều qua được bờ bên kia?

Câu 21.

Hãy xác định xem các đồ thị vô hướng sau có chứa đường đi/chu trình Euler và Hamilton không? Nếu có, hãy vẽ ra.



Câu 22.

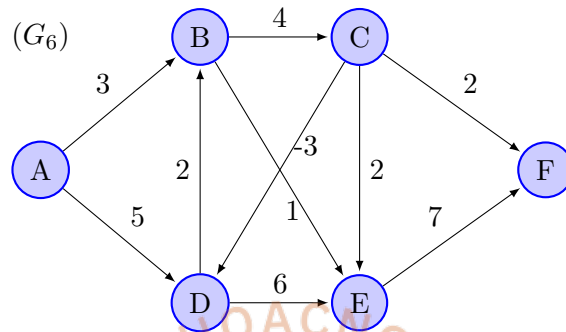
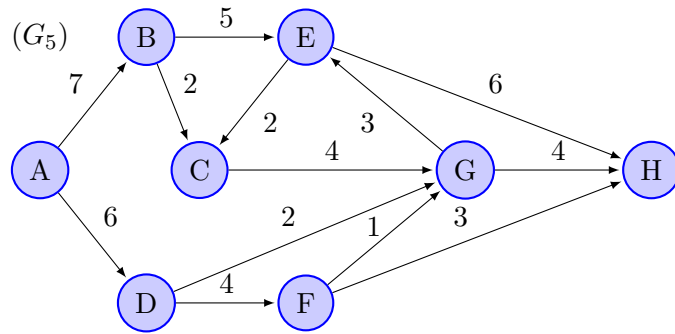
Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Hãy tìm cách để sắp xếp chỗ ngồi của các đại biểu chung quanh một bàn tròn, sao cho mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

Câu 23.

Hãy dùng giải thuật Dijkstra và giải thuật Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_5 như bên dưới.

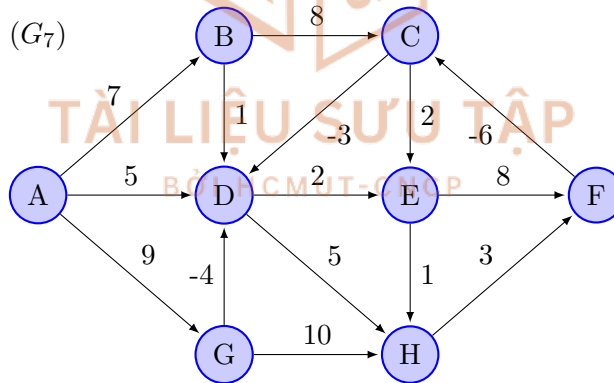
Câu 24.

Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_6 như bên dưới.



Câu 25.

Hãy dùng giải thuật Bellman-Ford để tìm đường đi ngắn nhất của đỉnh A đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_7 như bên dưới.



Câu 26.

Liệu có thể dùng giải thuật Dijkstra để giải bài toán tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác không? Nếu có hãy minh họa bằng áp dụng vào các đồ thị từ G_5 đến G_8 .

Câu 27.

Hãy thiết kế một giải thuật để đếm số đường đi ngắn nhất trong một đồ thị cho sẵn.

Câu 28.

a) Làm thế nào đếm được số đường đi khác nhau xuất phát từ một đỉnh u và đến một đỉnh v trong một đồ thị G cho trước?

b) Hãy vẽ một đồ thị và minh họa việc đếm.

c) Liệu có tồn tại giải thuật đếm số đường đi có thể có từ u đến v không?

Câu 29.

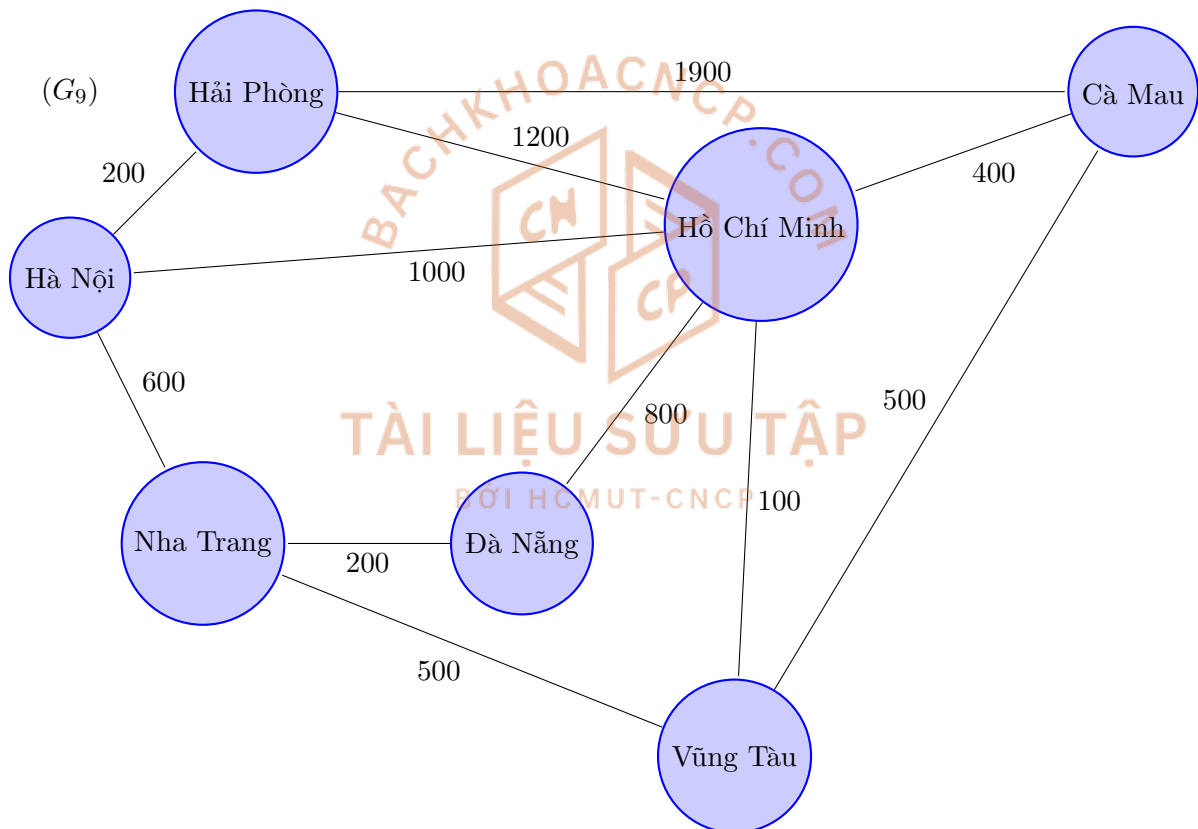
Liệu có tồn tại giải thuật xác định một cách nhanh chóng sự tồn tại của chu trình trong một đồ thị cho trước không? Nếu có hãy viết giải thuật đó.

Câu 30.

Gọi Π^* là đường đi ngắn nhất trong một đồ thị. Nếu trọng số của tất cả các cạnh đều tăng lên một giá trị hằng số nào đó thì liệu Π^* có vẫn là đường đi ngắn nhất trong đồ thị mới không?

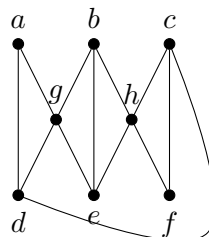
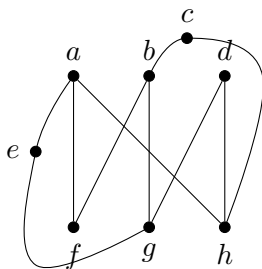
Câu 31.

Tìm đường đi ngắn nhất của một đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác trong đồ thị G_9 sau.



Câu 32.

Xác định xem các đồ thị sau có đồng phôi với $K_{3,3}$ hay không.



Câu 33.

Một vườn thú muốn mở một số khu vực trưng bày thú. Tuy nhiên, một vài loài thú sẽ ăn thịt lẫn nhau nếu có cơ hội. Mô hình đồ thị và phương pháp tô màu sẽ giúp ích được gì trong việc xác định xem vườn thú cần mở bao nhiêu khu vực trưng bày và cách sắp đặt các con thú thế nào trong các khu vực này?

Câu 34.

Số màu của W_n là bao nhiêu?

4 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với lý thuyết về đường đi và chu trình (tham khảo chi tiết lý thuyết trong chương 9). Và các bài tập này cũng đã giúp chúng ta phần nào hiểu thêm về các ý tưởng, các hướng giải thuật để giải được vài bài toán thực tế đơn giản chung quanh chúng ta.

