Môn học : GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

(Học trong giờ Bài tập)

CHƯƠNG 2: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

2.1 Giới thiệu các loại hàm : Hàm hợp, hàm ngược, các hàm lượng giác ngược, các hàm hyperbol

2.2 Giới hạn hàm số - Hàm liên tục

2.3 Vô cùng lớn – Vô cùng bé

CHƯƠNG 3: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

3.1 Đạo hàm hàm y=f(x), hàm ngược, hàm cho bởi phương trình tham số

3.2 Đạo hàm cấp cao

3.3 Vi phân, vi phân cấp cao

3.4 Công thức Taylor – Maclaurint. Ứng dụng tính giới hạn hàm

3.5 Quy tắc L'Hospital

3.6 Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm y=f(x)

3.7 Giới thiệu phần mềm MatLab để giải bài toán giải tích

CHƯƠNG 4: TÍCH PHÂN HÀM 1 BIẾN

4.1 Tích phân bất định

4.2 Tích phân xác định – Công thức Newton-Leibnitz

4.3 Tích phân suy rộng: Tích phân với cận vô tận và Tích phân hàm không bị chặn

4.4 Ứng dụng của tích phân

CHƯƠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

5.1 Phương trình vi phân cấp 1: 5 dạng

5.2 Phương trình vi phân cấp 2: Pt giảm cấp được và Pt tuyến tính

5.3 Hệ Phương trình vi phân tuyến tính

CHƯƠNG 2: **GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC**

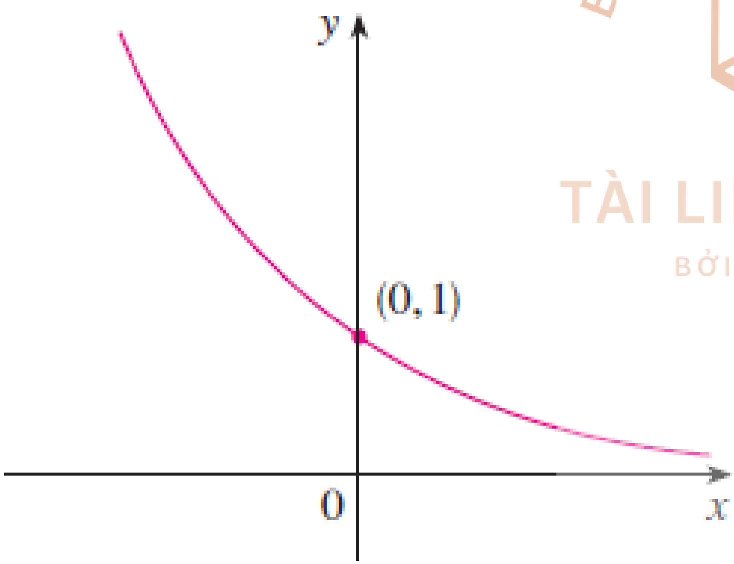
2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm số mũ: $y = a^x$

Nếu a=1 thì $a^x = 1, \forall x$, nên ta chỉ tính khi *a≠1*

Điều kiện : a>0, a≠1

MXĐ: (-∞,+∞), MGT: (0,+∞)



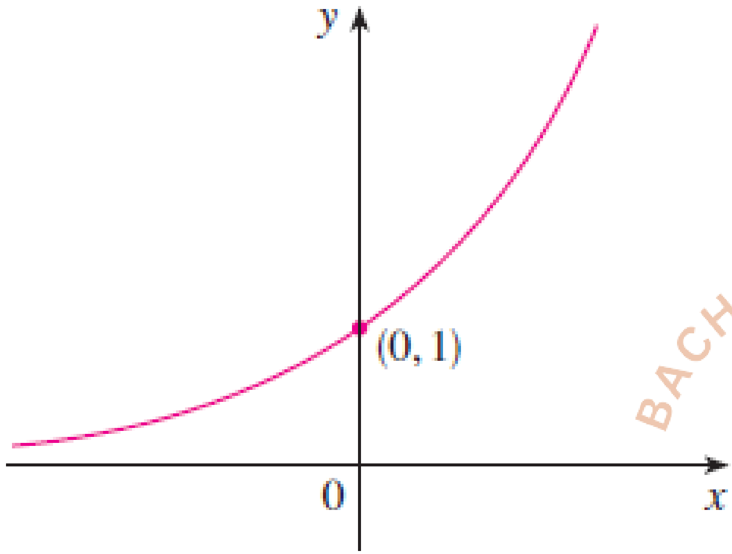
(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$

Khi 0<a<1:

- Hàm nghịch biến

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

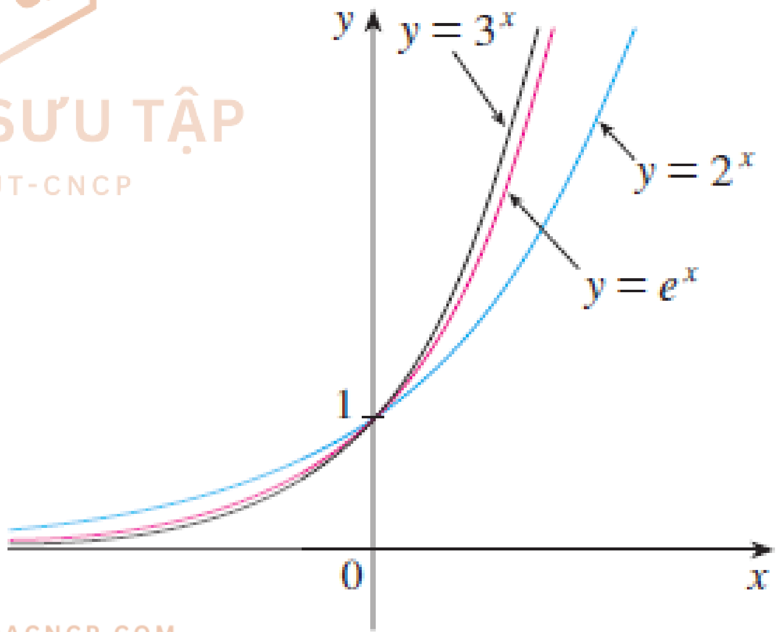


(c) $y = a^x$, $a > 1$

Khi a>1:

Hàm đồng biến

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$



So sánh 3 hàm $y=2^x$, $y=e^x$, $y=3^x$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm logarit: $y=\log_a x$, a>0, a ≠1

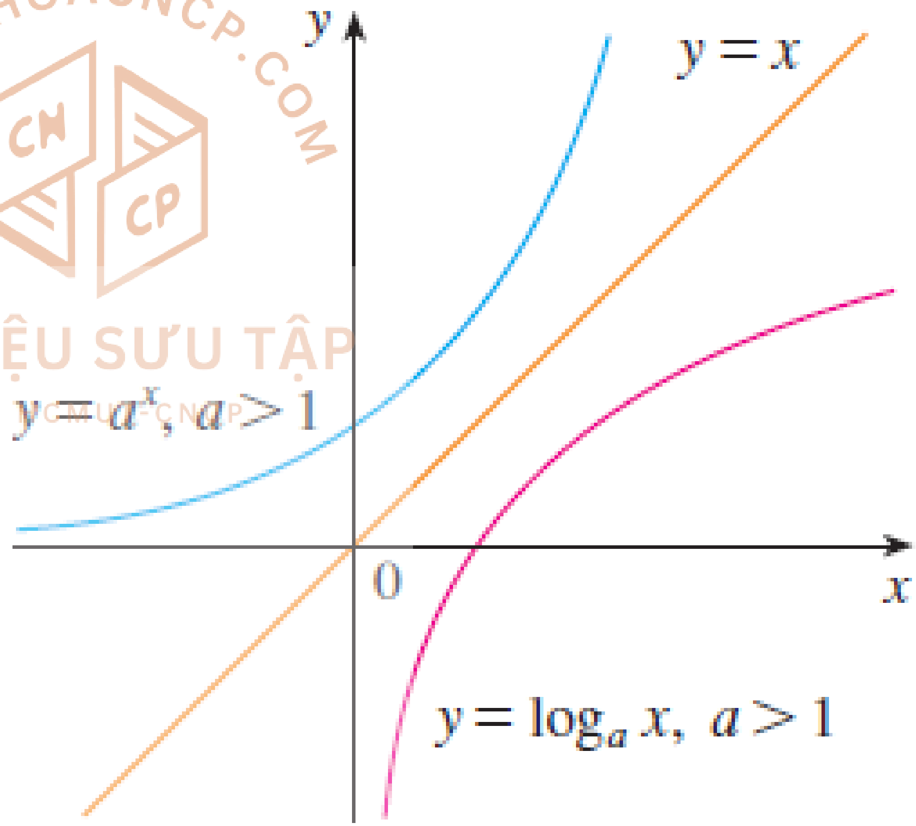
MXĐ : (0,+∞), MGT: (- ∞,+∞)

a>1:

Hàm đồng biến

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$



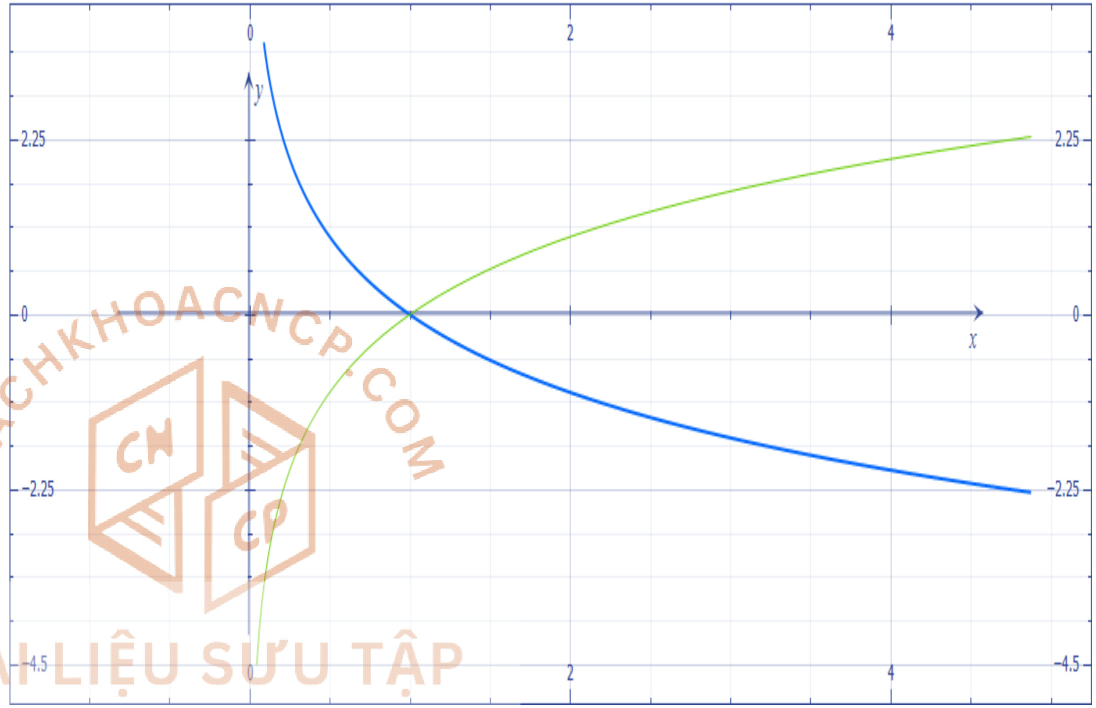
2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

0<a<1:

Hàm nghịch biến

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$



Tính chất:

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_a(a^x) = x, \forall x$$

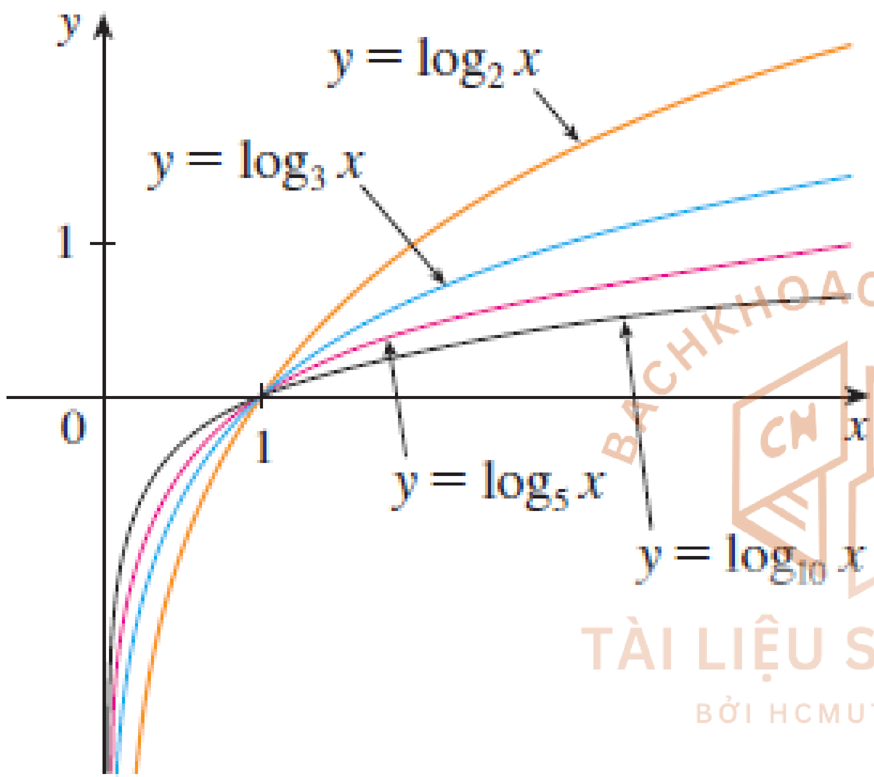
$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r\log_a x, \forall r \in R$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học



So sánh một số hàm logarit với a>1 cụ thể

Đặc biệt: khi a=e, ta kí hiệu đơn giản $log_e x = ln x$

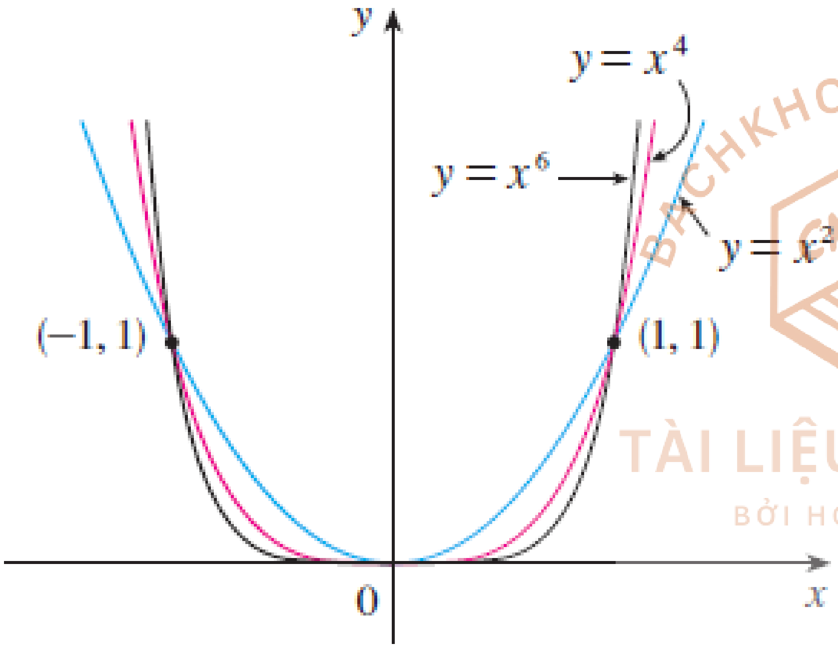
và ta có công thức

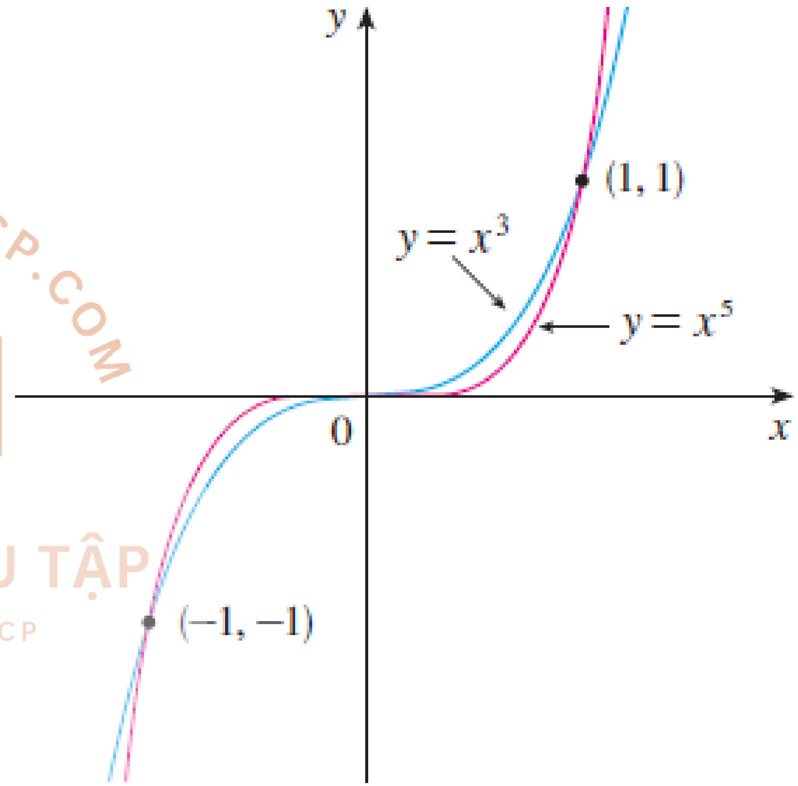
$$\boxed{\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm lũy thừa : $y=x^a$

MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a

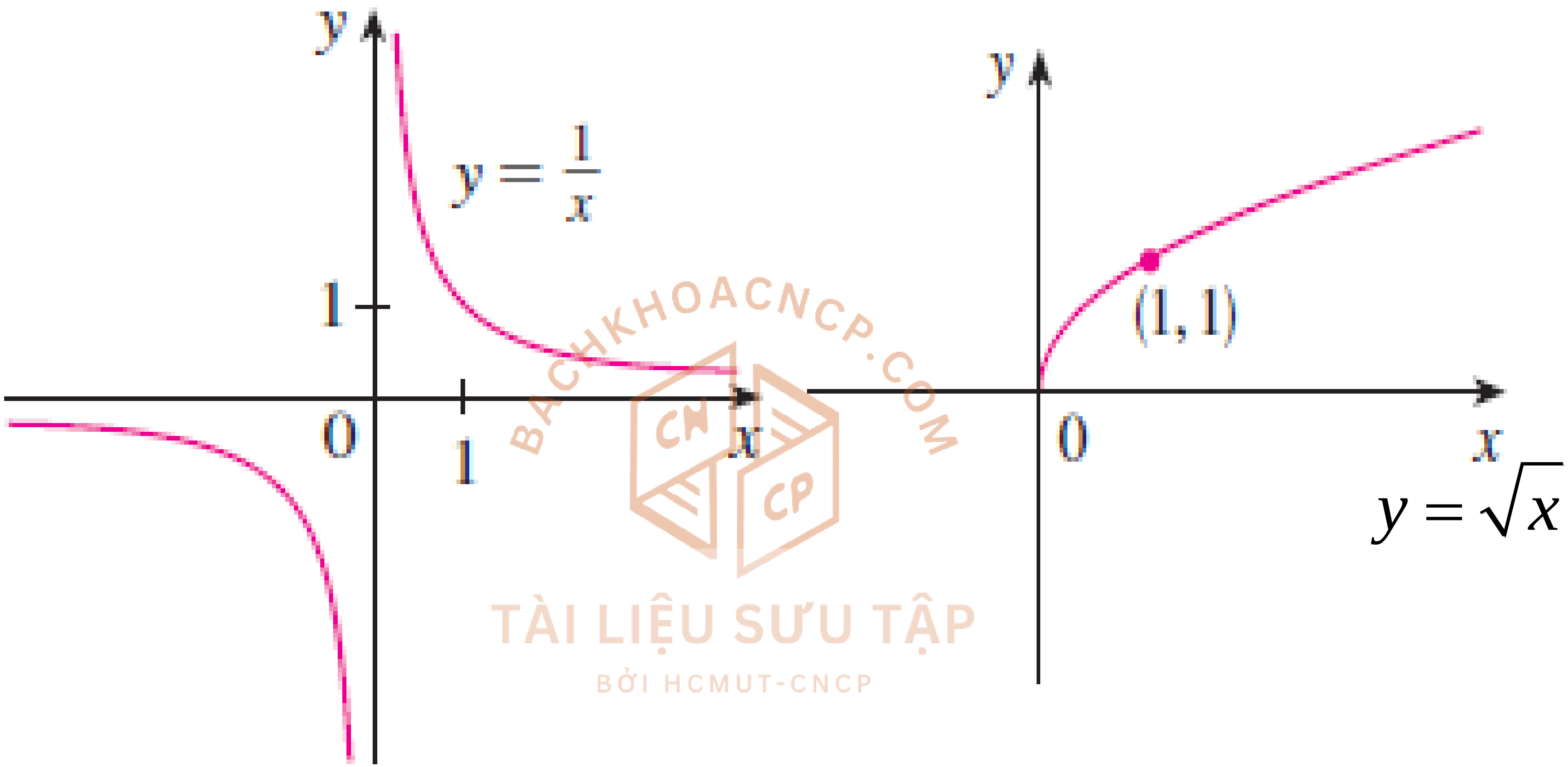




a=2, 4, 6: MXĐ: (- ∞,+∞), MGT: [0,+∞)

a=3, 5: MXĐ: (- ∞,+∞), MGT: (- ∞,+∞)

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học



a = -1: MXĐ: R*=R\{0},
MGT: R*. Ta còn gọi đây là
đường Hyperbol

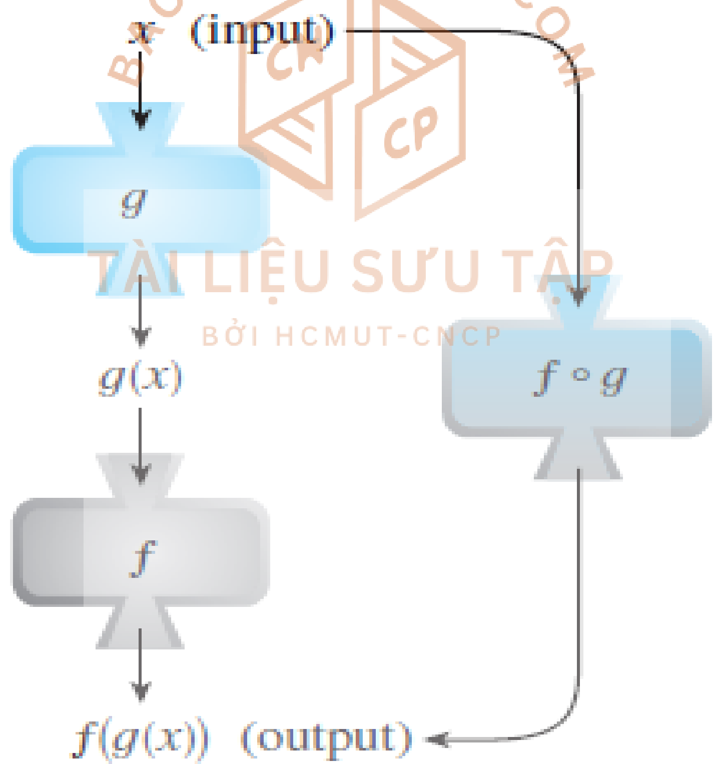
a=1/2: MXĐ [0,+∞),
MGT [0,+∞)

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Hàm hợp : Cho 2 hàm $g: X \to Y, f: Y \to Z$

Ta gọi hàm hợp của 2 hàm trên là $h = f \circ g$

Được xác định như sau : $h: X \to Z, h(x) = f(g(x))$



2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Cho 2 hàm $f(x)=2x+1, g(x)=\sqrt{x^2+1}$
Tìm $f\circ g, g\circ f$ và tính giá trị của chúng tại x = 2

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2+1})=2\sqrt{x^2+1}+1$$

$$\Rightarrow f\circ g(2)=2\sqrt{5}+1$$

$$g\circ f(x)=g(2x+1)=\sqrt{(2x+1)^2+1}=\sqrt{4x^2+4x+2}$$

$$\Rightarrow g\circ f(2)=\sqrt{26}$$

Lưu ý : Nói chung 2 hàm $f\circ g, g\circ f$ không bằng nhau

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Cho 2 hàm $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Tìm các hàm và MXĐ của chúng $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[6]{x-1}$ MXĐ là [1,+∞)

$g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$ MXĐ là [0, +∞)

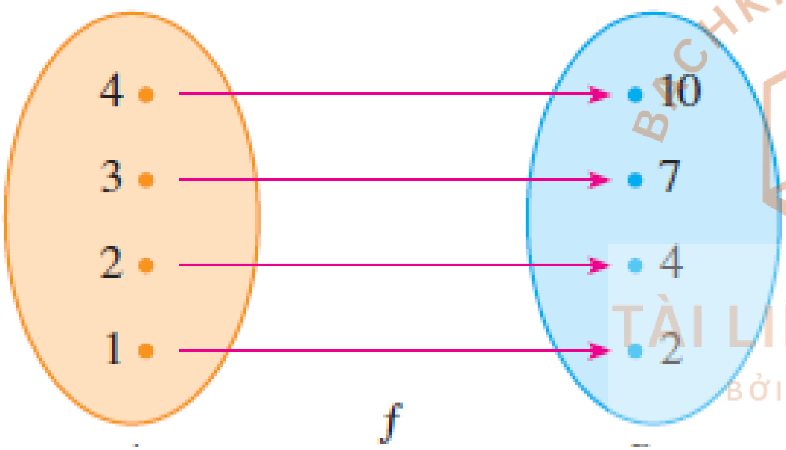
$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ MXĐ là [0, +∞)

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x-1}-1}$ MXĐ là R

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

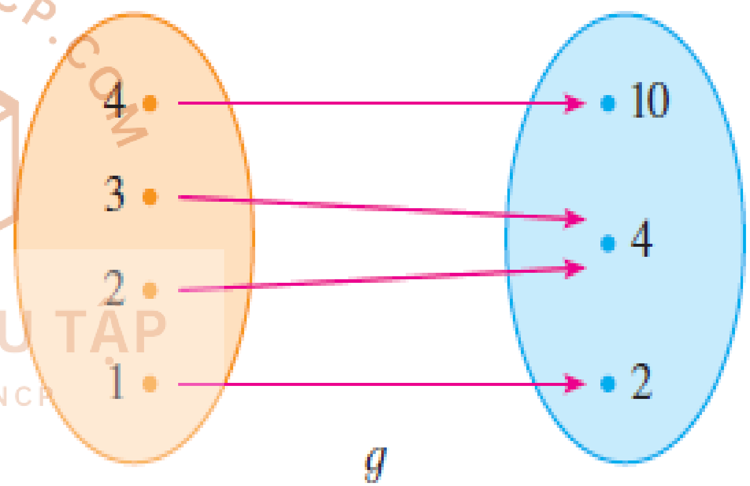
Hàm 1-1 : Hàm $f : X \to Y,\ f(x) = y$

được gọi làm hàm 1-1 nếu $\forall x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$



$X - - - - - - - - > Y$

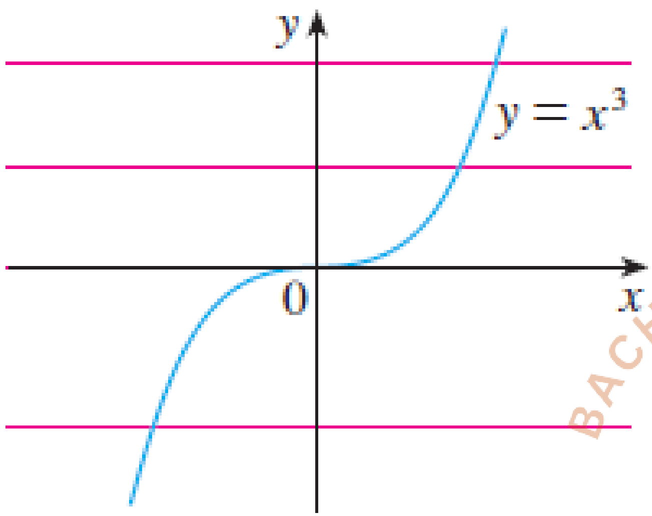
Hàm 1-1

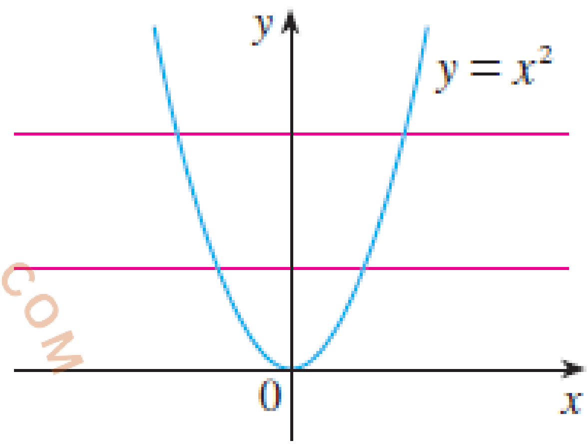


$X - - - - - - - - > Y$

Không là hàm 1-1

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược





Hàm $y=x^3$ là hàm 1-1

Hàm $y=x^2$ không là hàm 1-1

Hàm 1-1 có đồ thị chỉ cắt mọi đường thẳng y = C, với C thuộc MGT của hàm tại duy nhất 1 điểm.

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Hàm ngược : Cho hàm 1-1 $f : X \to Y, f(x) = y$

hàm ngược của hàm, được kí hiệu là *y = f* $^{-1}$*(x)*,

$f^{-1} : Y \to X$ sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Như vậy : *f(f* $^{-1}$*(y))=y* và *f* $^{-1}$*(f(x))=x*

Ta có: MXĐ của hàm f $^{-1}$ là MGT của hàm f và MGT của hàm f $^{-1}$ là MXĐ của hàm f

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm $y = x^3 - 1$

Ta sẽ tìm hàm y = $f^{-1}(x)$ bằng cách tính x theo y

$$y = x^3 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

Thay x bởi y, y bởi x, ta được hàm ngược

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

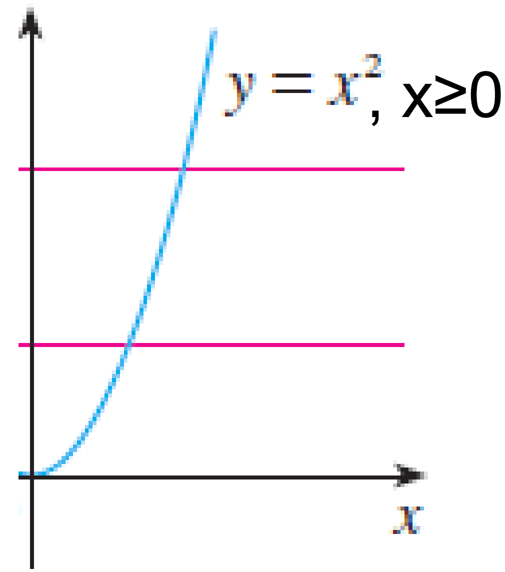
$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x$$

MXĐ và MGT của cả 2 hàm f và f^{-1} đều là R

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

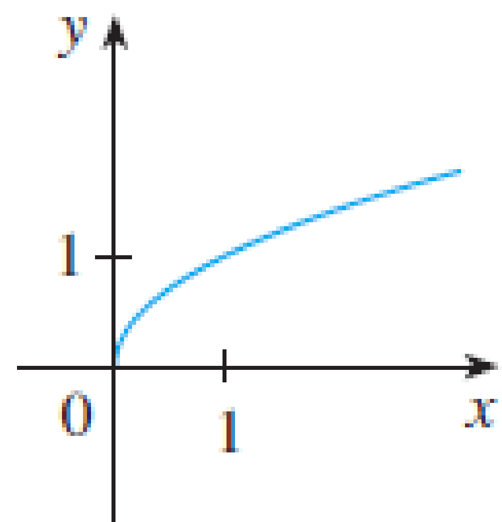
Ví dụ: Hàm $y=x^2$ không làm hàm 1-1 trên (-∞,+∞)

Tuy vậy, nếu ta giới hạn bớt MXĐ của hàm là (0 ,+∞) thì ta được hàm 1-1 $\begin{cases} y = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases}$



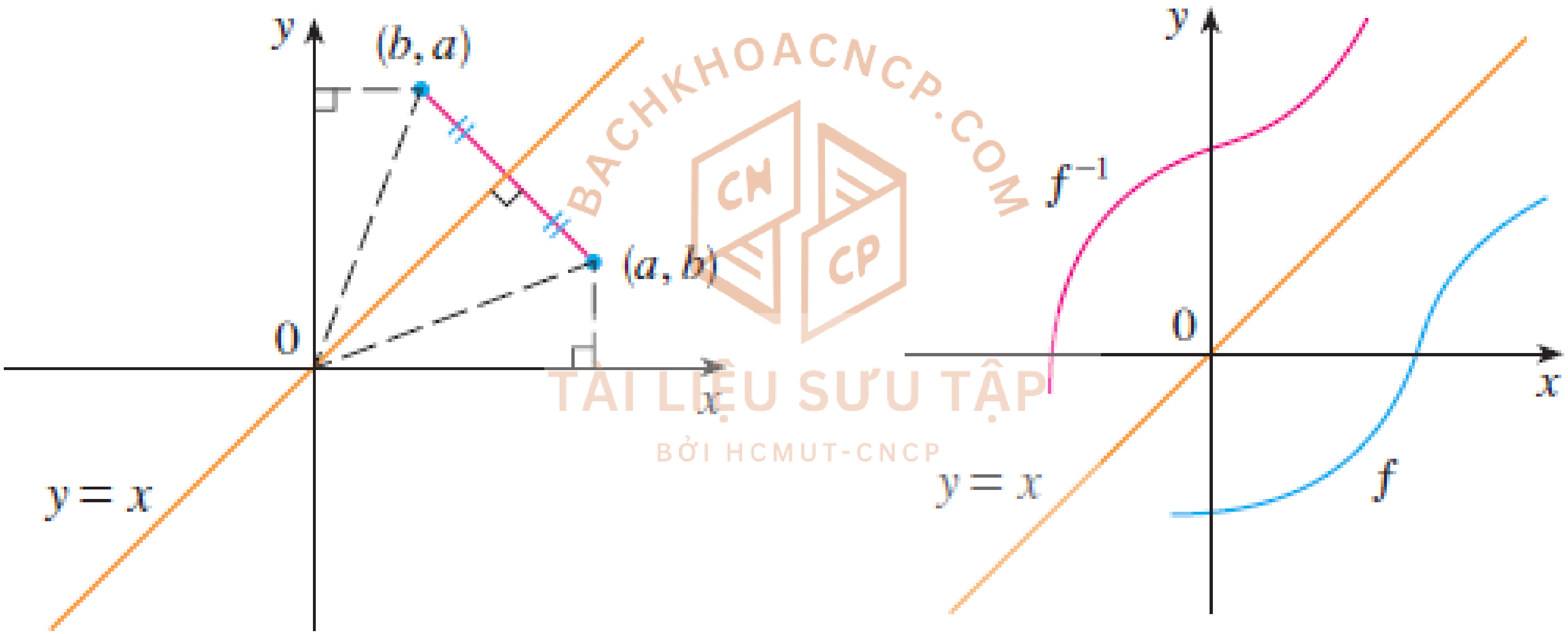
Khi đó, ta vẫn có hàm ngược

$$y = \sqrt{x}, x \geq 0$$



Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Với mọi a thuộc MXĐ của hàm y = f(x), đặt b = f(a) thì a = f^{-1}(b) tức là điểm (a,b) thuộc đồ thị hàm f(x) thì điểm (b,a) thuộc đồ thị hàm f^{-1}(x).



Đồ thị của hàm y = f(x) và hàm y=f^{-1}(x) đối xứng nhau qua đường thẳng y = x

Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Điều kiện để tồn tại hàm ngược

Mệnh đề 1: Hàm $f : X \to Y$ có hàm ngược khi và chỉ khi f là ánh xạ 1-1 từ X vào Y

Mệnh đề 2: Hàm $f : X \to Y$ có hàm ngược trên khoảng (a,b) nếu f là đơn điệu tăng chặt trên (a,b)

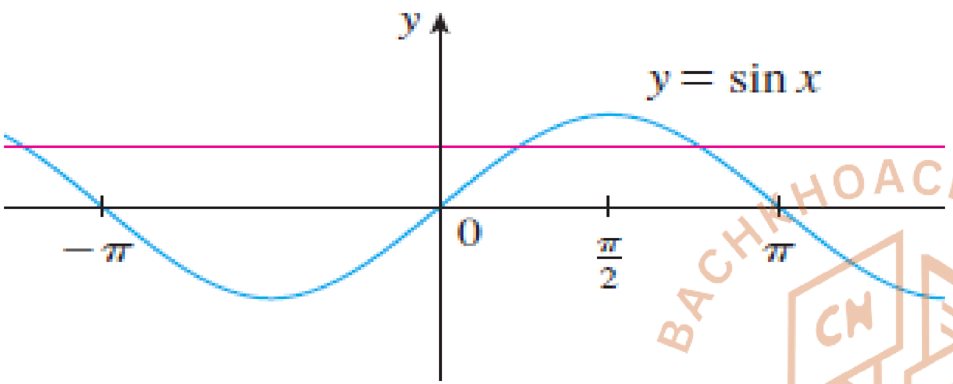
$$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$$

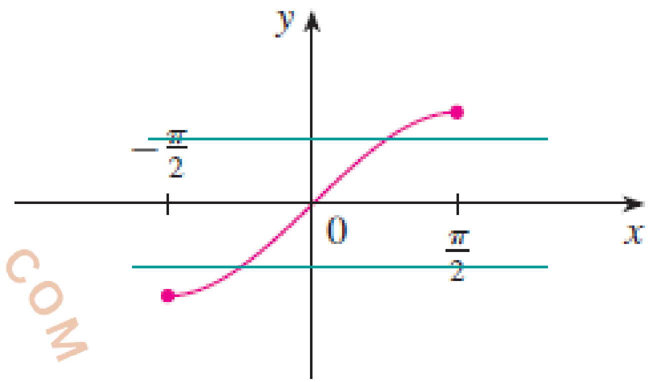
hoặc f là đơn điệu giảm chặt trên (a,b)

$$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \to f(x_1) > (x_2))$$

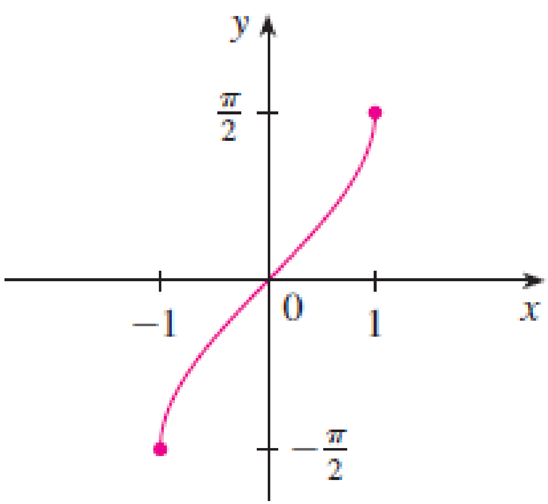
Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược & hàm hyperbol

Hàm ngược của hàm y = sinx : hàm y=arcsinx





Trên đọan $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ Hàm y = sinx là hàm 1-1



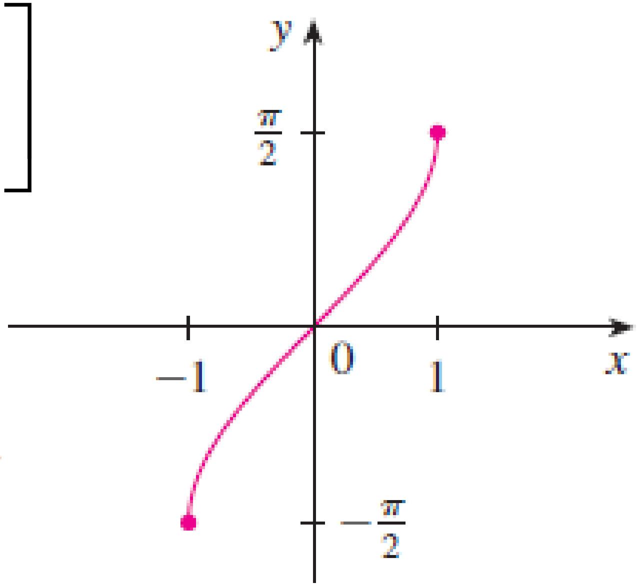
Tồn tại hàm ngược là hàm y=arcsinx

Hàm y=arcsinx có MXĐ là [-1.1]

MGT là $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

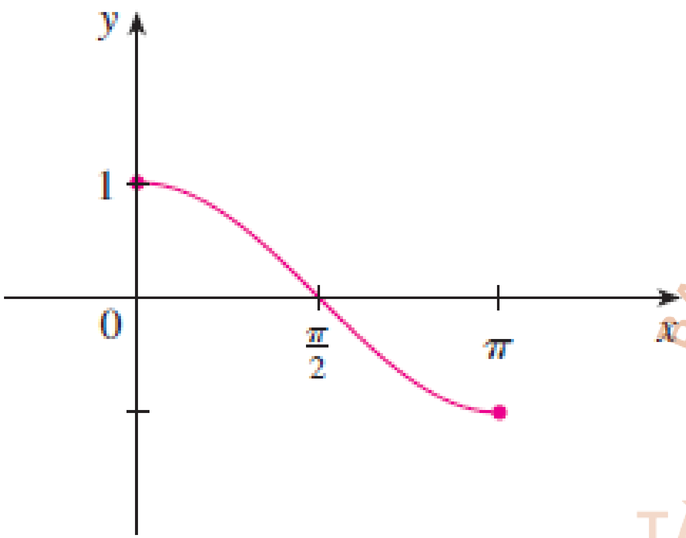
$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$$

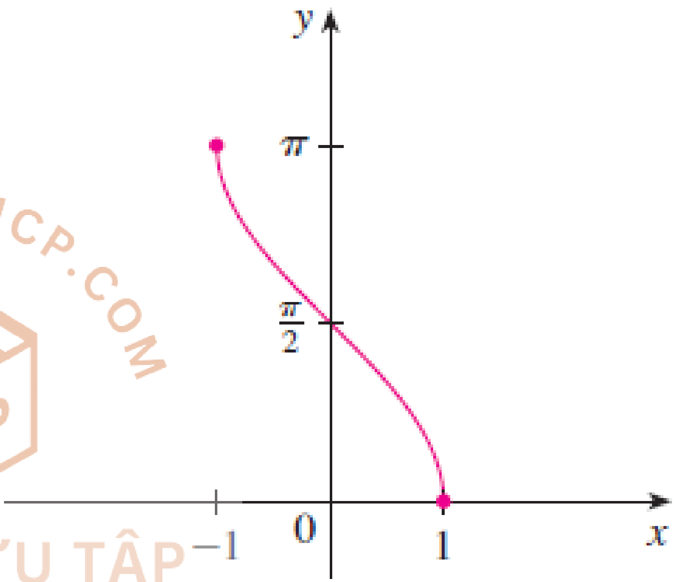
$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin(0) = 0, \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm y = cosx : hàm y=arccosx





Trên đoạn [0,π], hàm y=cosx là hàm 1-1, tồn tại hàm ngược

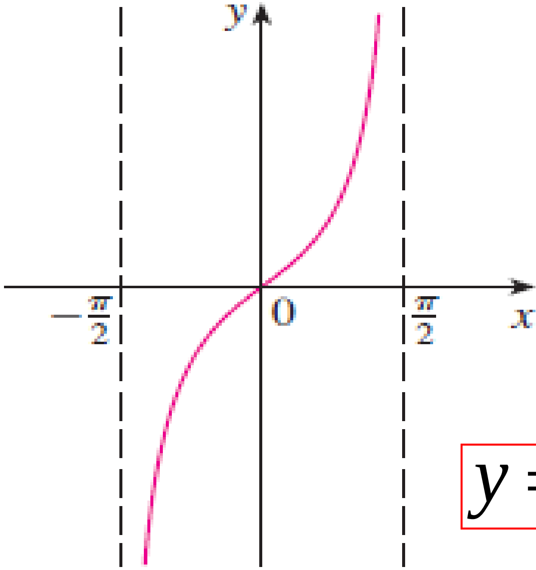
y=arccosx, MXĐ là [-1,1], MGT là [0,π]

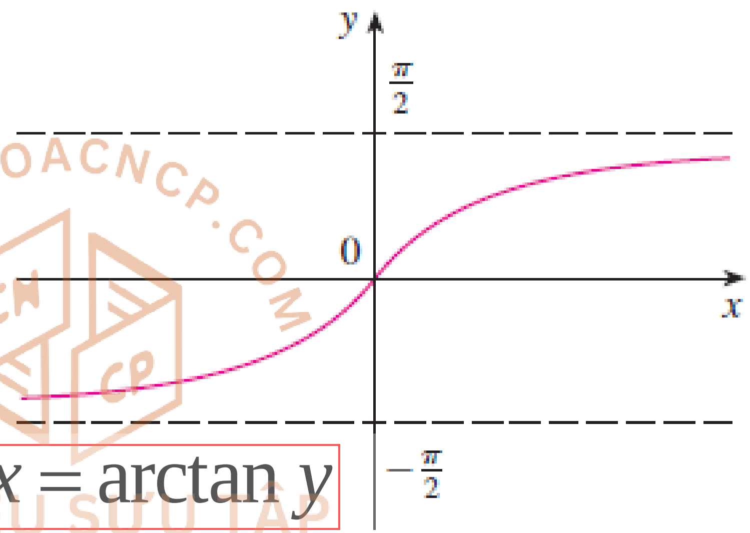
$$\boxed{y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y}$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}, \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm y = tanx : hàm y=arctanx





$$\boxed{y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y}$$

Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Hàm y=tanx là hàm 1-1

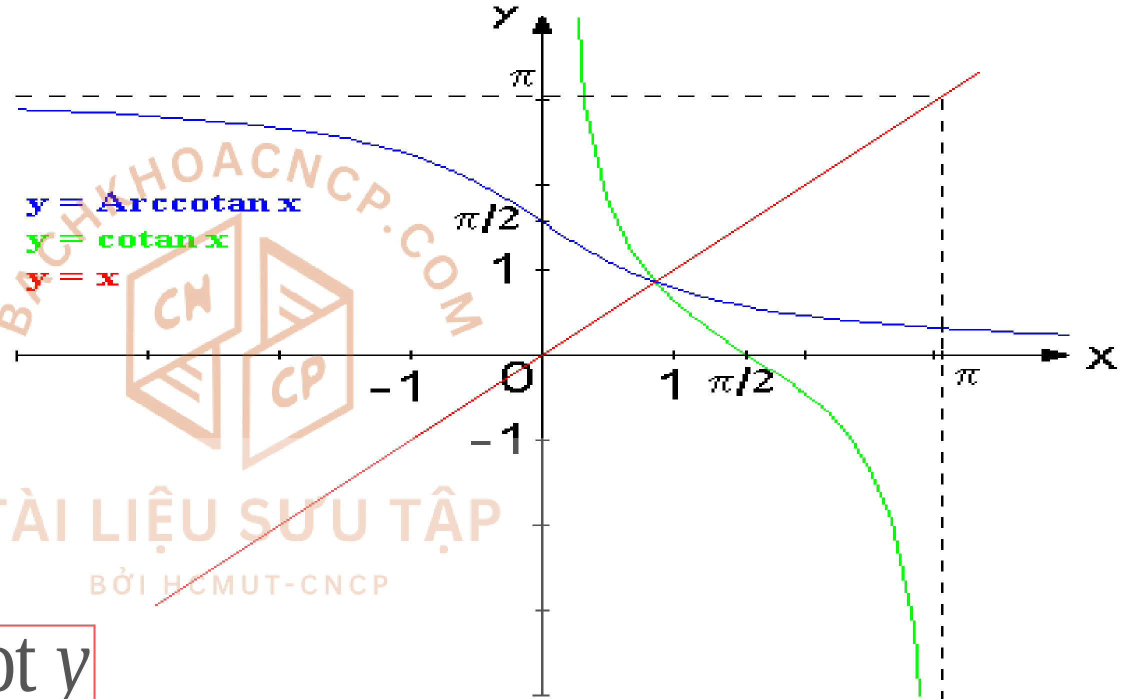
Hàm y=arctanx, MXĐ là R, MGT là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}, \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm y = cotx : hàm y=arccotx

Trên khoảng (0,π) hàm là hàm 1-1



Hàm y=arccotx có MXĐ là R, MGT là (0,π)

$$\boxed{y = \cot x \Leftrightarrow x = arc\cot y}$$

$$arc\cot(0) = 0, arc\cot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}, arc\cot(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

Định nghĩa (hàm Hyperbolic)

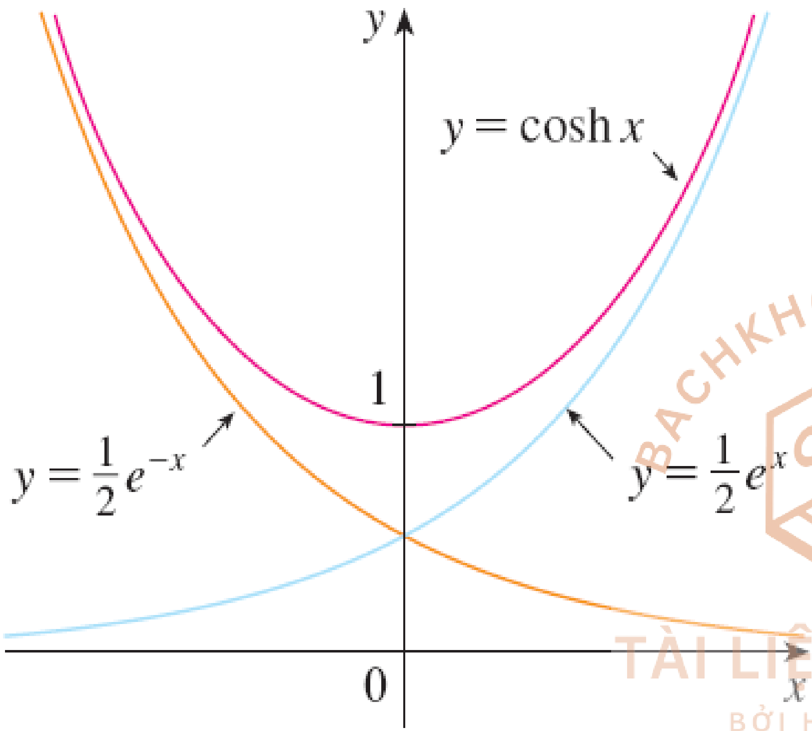
sin hyperbolic $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ =shx

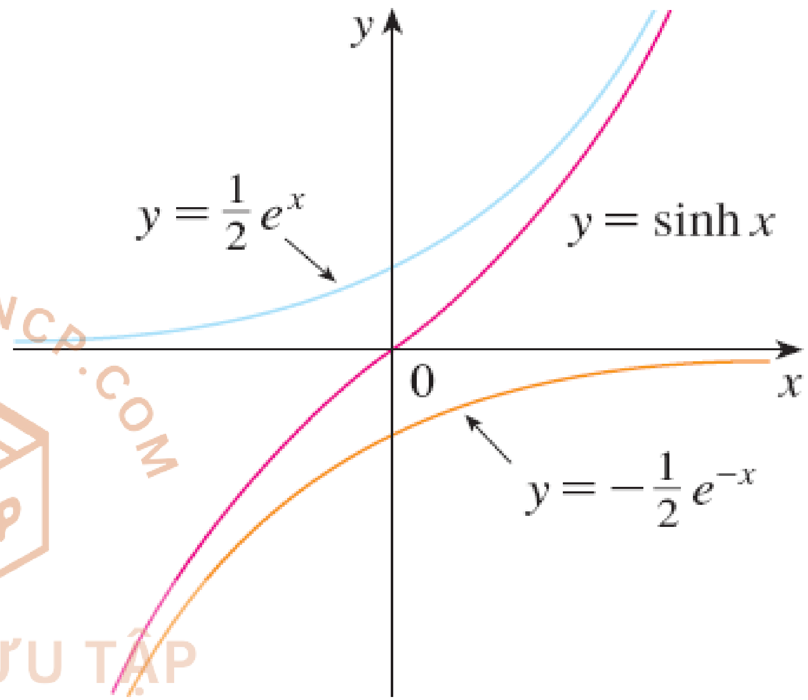
cos hyperbolic $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ =chx

tan hyperbolic $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ =thx

cotan hyperbolic $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ =cthx

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

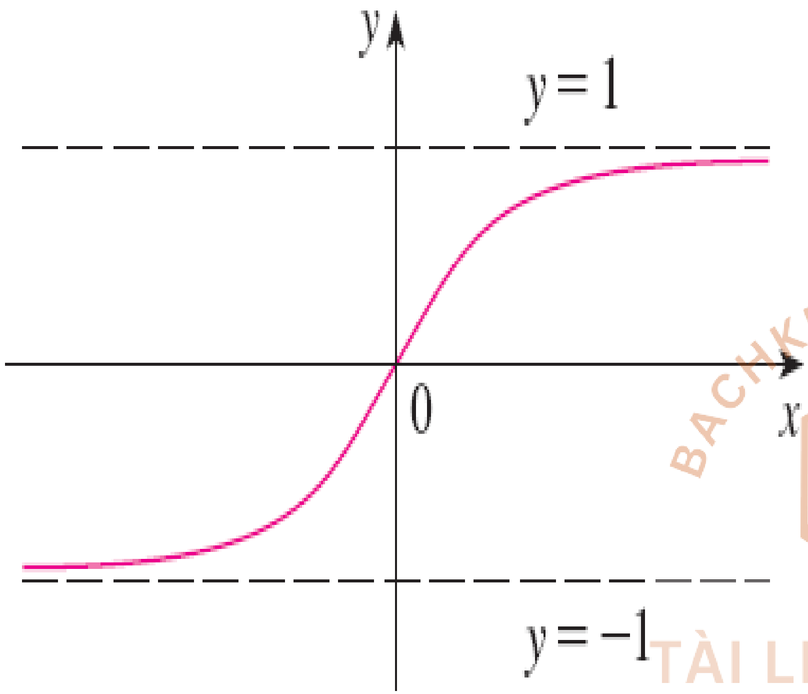


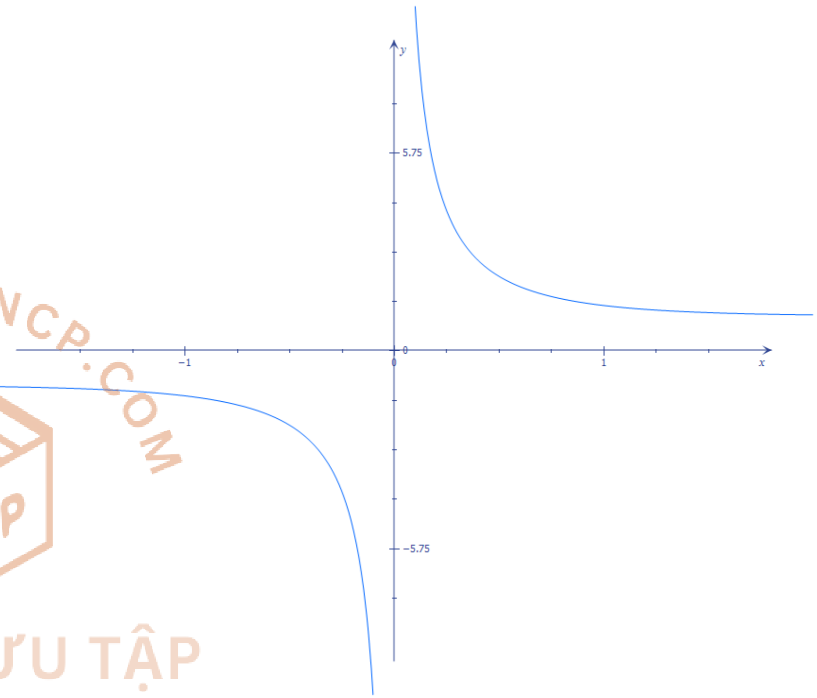


Hàm y = coshx (chx)

Hàm y = sinhx (shx)

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic





Hàm y = tanhx (thx)

Hàm y=cothx (ctx)

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

Có các công thức sau (tương tự công thức lượng giác)

1/ $ch^2x - sh^2x = 1$

2/ $sh(2x)=2shx.chx$, $ch(2x) = ch^2x + sh^2x$

3/ $ch(x+y) = chx.chy + shx.shy$

4/ $ch(x-y) = chx.chy - shx.shy$

5/ $sh(x+y) = shx.chy + shy.chx$

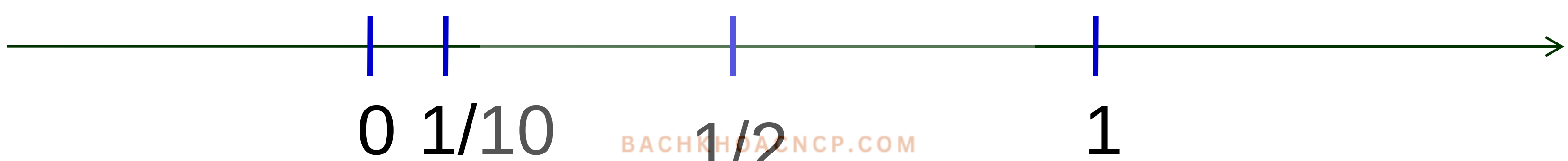
6/ $sh(x-y) = shx.chy - shy.chx$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Điểm tụ: Cho D là tập số thực. Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của tập D nếu trong mọi lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ của x_0 đều chứa vô số các phần tử của D

Ví dụ. D = (0,1) mọi điểm thuộc [0,1] đều là điểm tụ

$$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$$ Có duy nhất 1 điểm tụ là 0



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ ε – δ) :

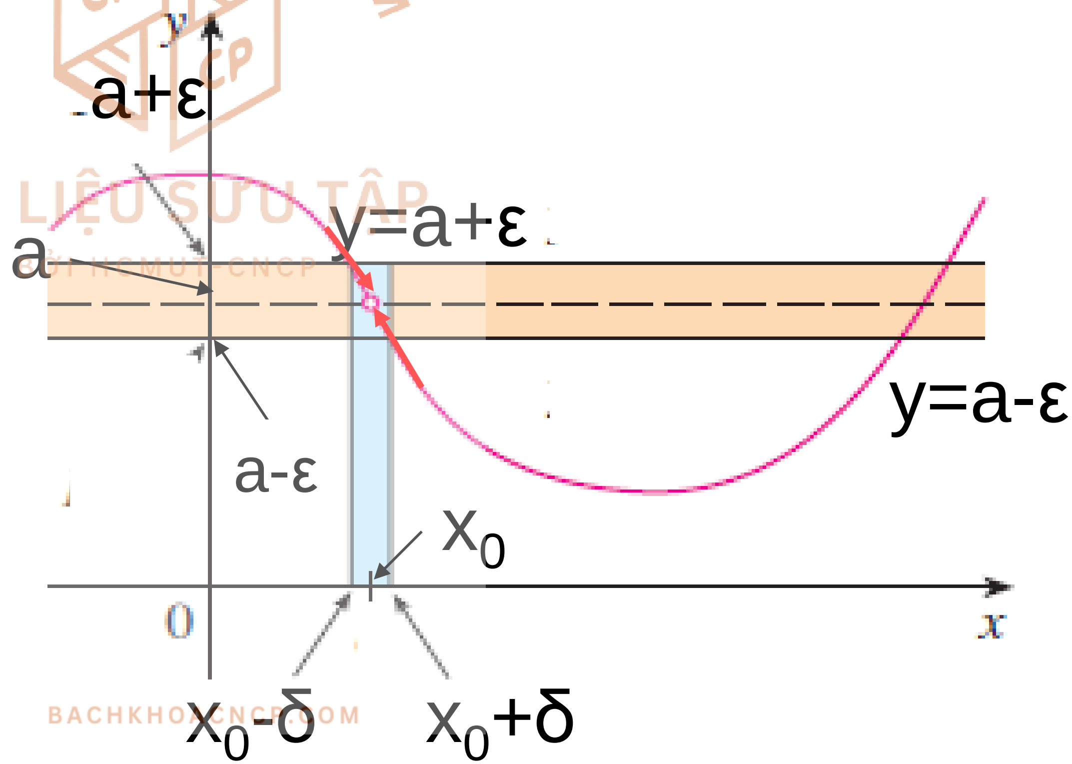
Cho hàm f(x) và x_0 là 1 điểm tụ của MXĐ D_f của hàm

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$$

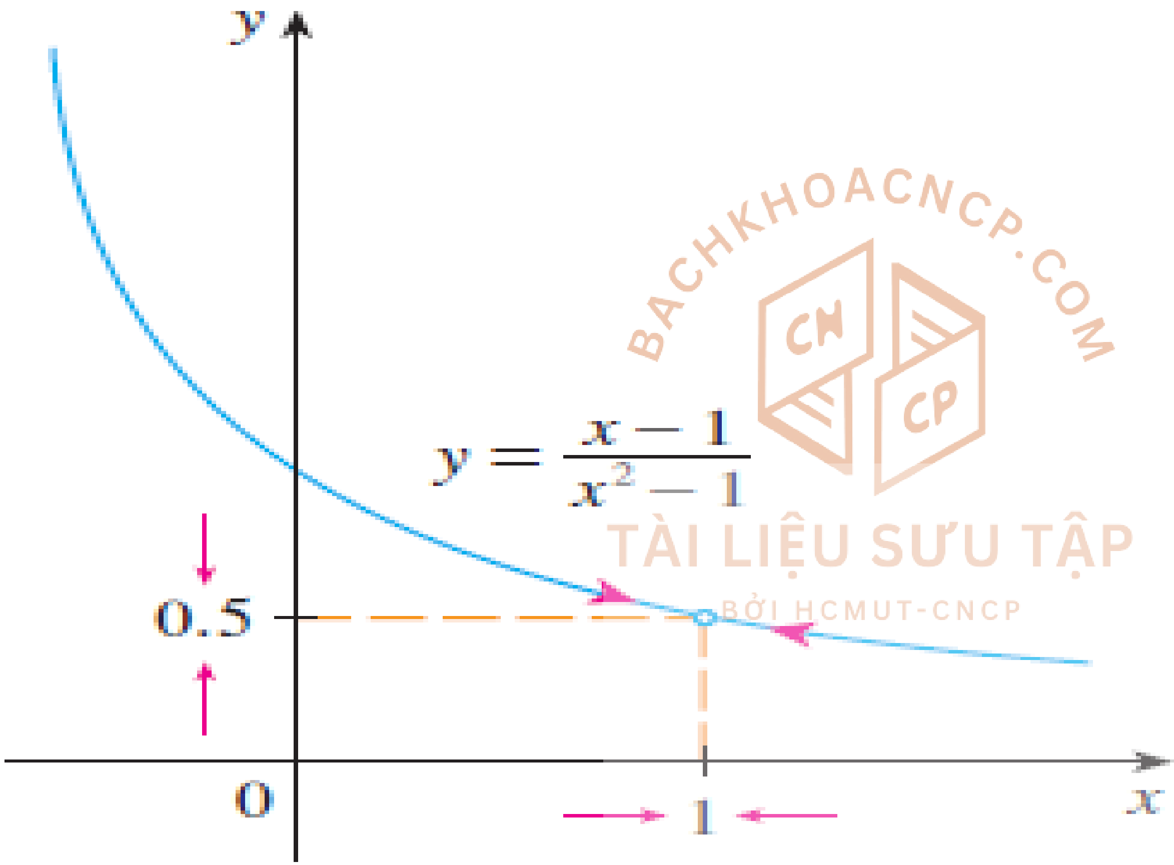
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Chú ý:

Hàm f(x) có thể không xác định tại x_0



Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$



Hàm không xác định tại $x_0=1$, giới hạn đã cho có dạng $\dfrac{0}{0}$

Ta vẽ đường cong để minh họa cho kết quả dễ thấy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ dãy):

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm f(x)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_o$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy $(x_n), (x_n^{'}) \to x_0$ sao cho 2 dãy tương ứng $f(x_n), f(x_n^{'})$ có 2 giới hạn khác nhau

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Chứng minh rằng giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

Chọn 2 dãy

$$\{x_n\} = \{n\pi\} \Rightarrow f(x_n) = \sin n\pi = 0 \forall n$$

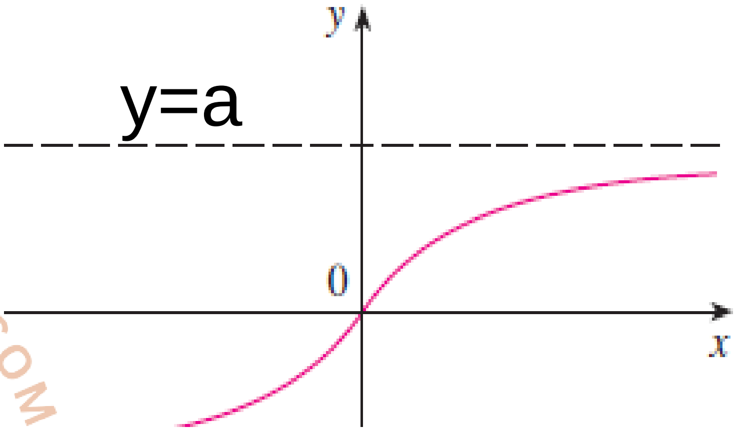
$$\{x_n'\} = \left\{\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(x_n') = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \forall n$$

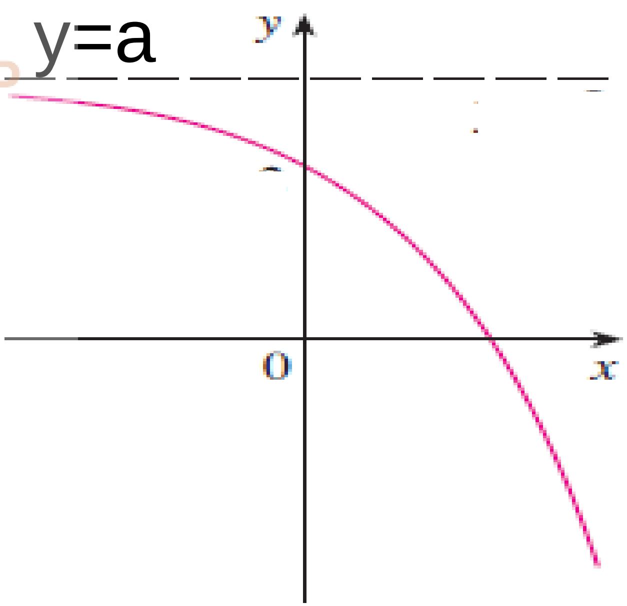
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn ở vô cực :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A > 0$$
$$\forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$





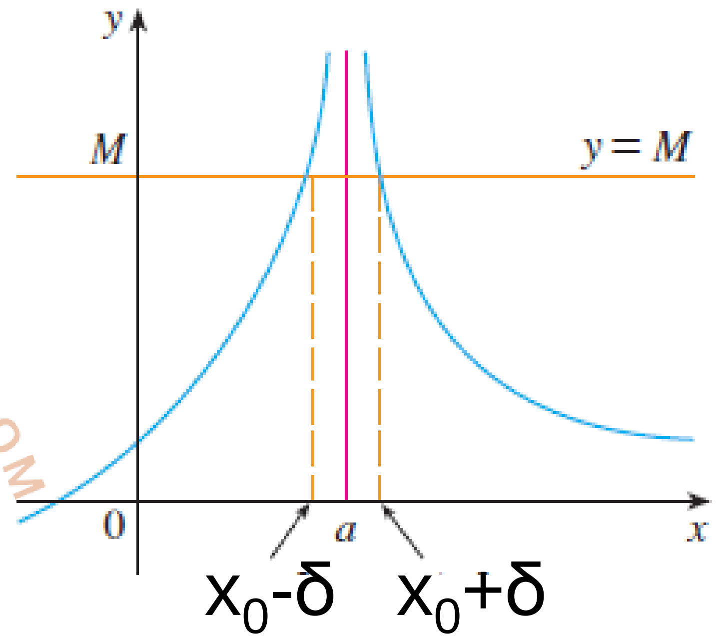
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B < 0$$
$$\forall x \in D_f, x < B \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn ra vô cực :

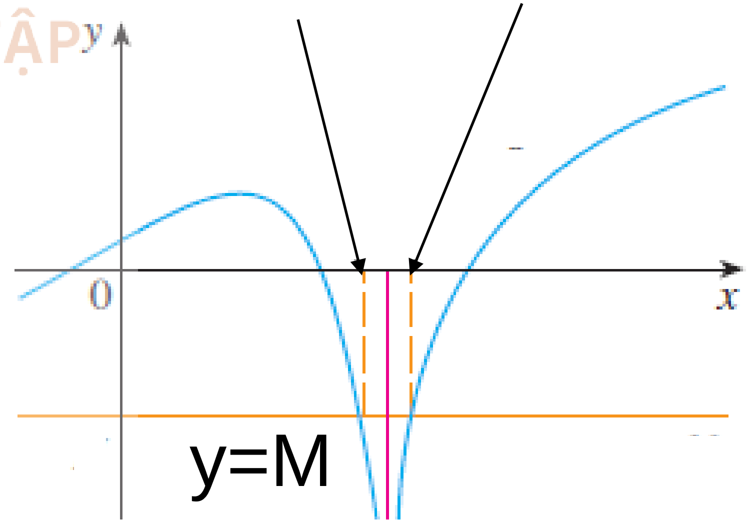
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \;\; \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Tính chất của giới hạn hàm

Cho : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f) = \alpha a, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g) = a+b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g) = a\cdot b$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g} = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0$

5) $\left(\forall x \in V_\varepsilon(x_0), f(x) \le g(x)\right) \Rightarrow a \le b$

6) $\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} h = a \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ *(Định lý kẹp)*

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Số e :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn dạng $u(x)^{v(x)}$:

Giả sử :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b \end{cases}$$

Ta có :

$$\lim_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln\left(u(x)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln(u(x))}$$

$$= e^{b\ln a} = a^b.$$

Vậy: $$\boxed{\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} u(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi x→0

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\alpha x\right)^{1/x}=e^\alpha$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi x→∞

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty, \quad a > 1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\alpha}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ không tồn tại

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Các dạng vô định:

1) $\dfrac{0}{0}$

2) $\dfrac{\infty}{\infty}$

3) $0 \cdot \infty$

4) $\infty - \infty$

5) 1^{∞}

6) 0^{0}

7) ∞^{0}

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các giới hạn cơ bản

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} \quad \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1.1.(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x} \underline{\underline{t = x-1}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(e^t-1\right)}{\ln(1+t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(e^t-1\right)}{e^t - 1} \frac{t}{\ln(1+t)} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là *giới hạn trái* của $y = f(x)$ tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

Số a gọi là *giới hạn phải* của $y = f(x)$ tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Định lý:

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý:

1. *Ta có thể dùng định lý trên để chứng minh không tồn tại giới hạn hàm (Ngoài cách dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy).*
2. *Giới hạn một phía thường được dùng trong các trường hợp hàm chứa căn bậc chẵn, chứa trị tuyệt đối, hoặc hàm ghép.*

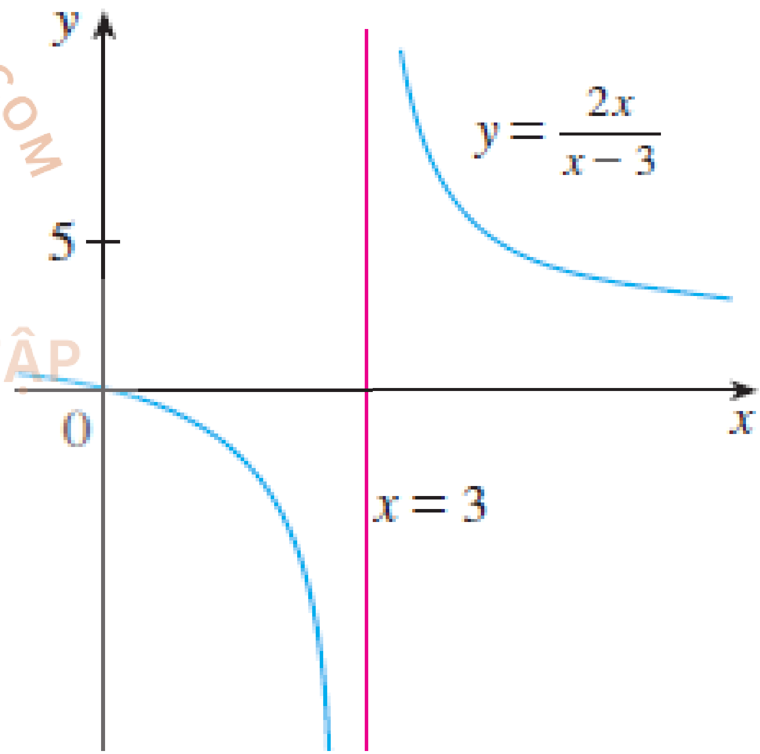
Ví dụ: Chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$ bằng cách tìm giới hạn 1 phía

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=-\infty$

vì khi $x\to 3^-$ thì $x-3<0$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=+\infty$$

vì khi $x\to 3^+$ thì $x-3>0$



Vậy: $\overline{\exists}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$

vì giới hạn trái, phải tồn tại nhưng không bằng nhau

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} 2^{\frac{1}{x-1}}$

Giới hạn phải: $x \to 1^{+} \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ Tức là

$$\frac{1}{x-1} \to +\infty$$

Vậy: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty}$

Giới hạn trái: $x \to 1^{-} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ Tức là

$$\frac{1}{x-1} \to -\infty$$

Vậy: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0}$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ : Tìm a để hàm f(x) có giới hạn khi x→0

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, x > 0 \\ 5x + a, x \le 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

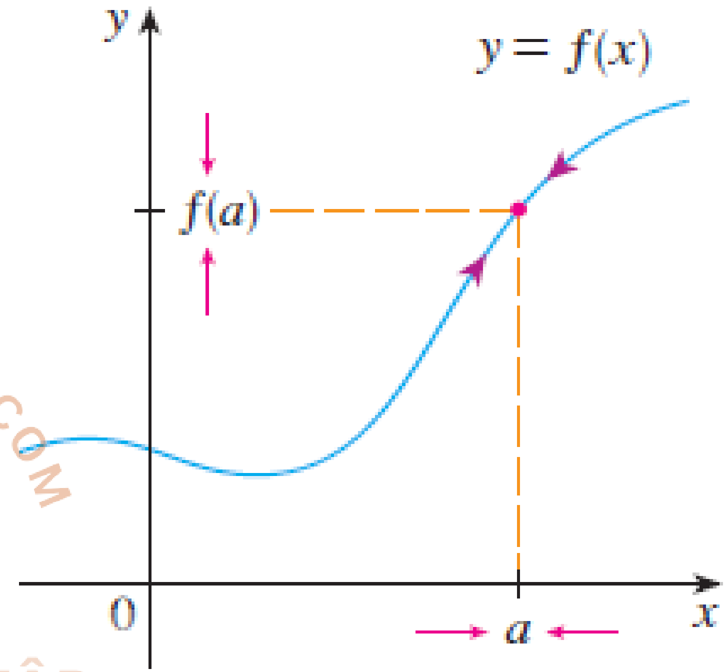
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (5x + a) = a$$

Để hàm có giới hạn khi x →0 ta phải có 2 giới hạn trên bằng nhau tức là : a=2

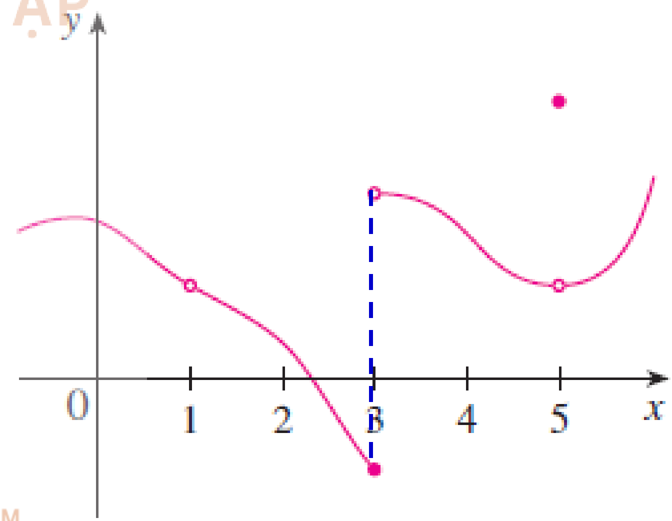
2.2Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Hàm liên tục: Hàm y=f(x) được gọi là liên tục tại điểm x=a thuộc MXĐ của hàm nếu

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$



Hàm gián đoạn tại x=a nếu nó không liên tục tại đó



Đồ thị của hàm y=f(x) gián đoạn tại x=3

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Các hàm sơ cấp cơ bản là 5 lớp hàm sau

1. Hàm số mũ : $y=a^x$
2. Hàm lũy thừa: $y=x^a$
3. Hàm loga: $y=\log_a x$
4. Các hàm lượng giác: 4 hàm
5. Các hàm lượng giác ngược: 4 hàm

Hàm sơ cấp là các hàm tạo từ các hàm sơ cấp cơ bản với 4 phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và phép hợp hàm

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

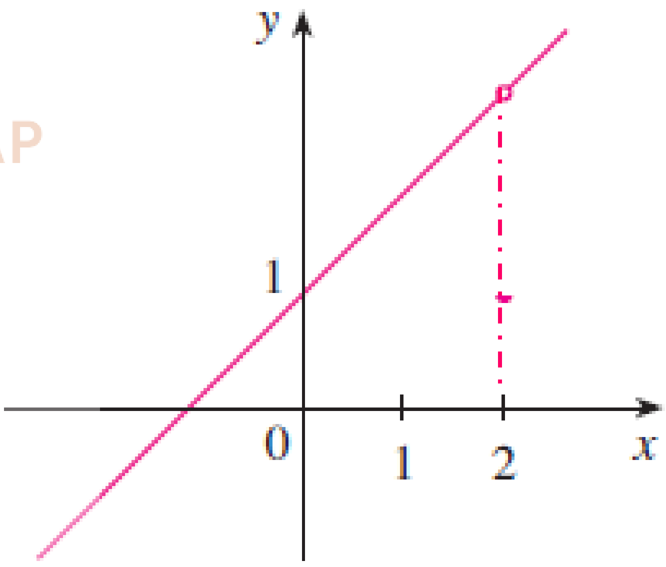
Định lý (về sự liên tục của các hàm sơ cấp):

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

Ví dụ: Khảo sát sự liên tục của hàm $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Dễ thấy, y là hàm sơ cấp và không xác định tại x=2 nên nó không liên tục tại x=2.

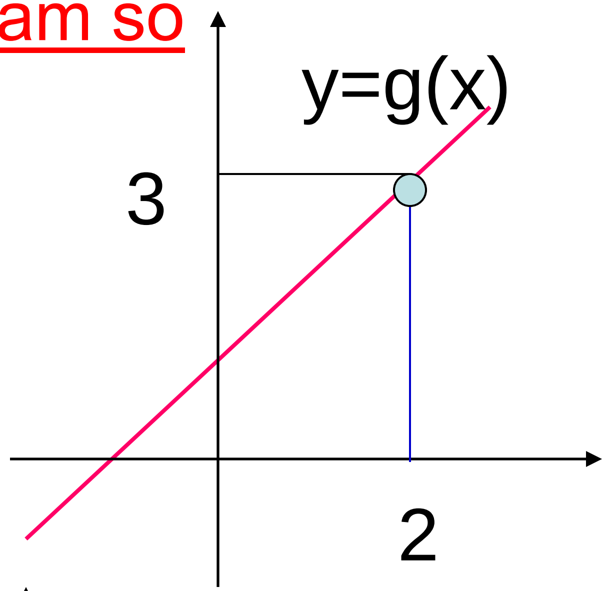
Điểm x=2 gọi là điểm gián đoạn của hàm



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

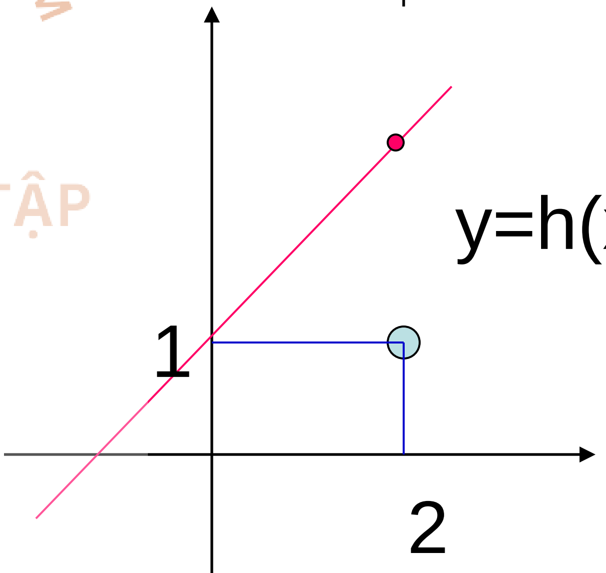
$= \lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$



$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$$

Đặt:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$



Thì hàm g(x) là hàm liên tục với mọi x, hàm h(x) là, hàm gián đọan tại x=2

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Liên tục 1 phía: Thay giới hạn trong định nghĩa hàm liên tục bởi 2 giới hạn 1 phía, tương ứng ta có khái niệm liên tục trái, liên tục phải

Định lý: Hàm liên tục tại x=a khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại x=a

Tính chất hàm liên tục: Tổng, tích, thương và hợp các hàm liên tục lại là các hàm liên tục

Ví dụ: Tìm a để hàm $f(x) = \begin{cases} x+1, x \le 1 \\ 3 - ax^2, x > 1 \end{cases}$

liên tục với mọi x

Với x≠1, f(x) là hàm sơ cấp nên nó liên tục.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 = f(1)$$ Hàm liên tục trái tại 1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - ax^2) = 3 - a$$

Hàm liên tục phải tại 1 khi: $3 - a = f(1) = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy với a= 1, hàm f(x) liên tục với mọi x

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

VCB: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) *khi* $x \longrightarrow x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Ví dụ:

Hàm $\alpha(x) = 2x^3 + x$ là:

+ VCB khi $x \longrightarrow 0$ vì $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x) = 0$

+ không là VCB khi $x \longrightarrow 1$ vì $\lim\limits_{x \to 1} \alpha(x) = 3$

Tính chất của các VCB

1) Tổng hữu hạn của các VCB là một VCB.

2) Tích của hai VCB là một VCB.

3) Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.

4) Thương của hai VCB có thể không là một VCB.

So sánh các VCB:

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to x_0$

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$

1) Nếu $k = 0$, thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$, kí hiệu là $\alpha(x) = O(\beta(x))$

2) Nếu k hữu hạn, khác không, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp.

3) Nếu $k = 1$, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là : $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) Nếu $\alpha(x)$ cùng bậc với $(\beta(x))^m$ thì ta nói bậc của $\alpha(x)$ là m so với $\beta(x)$

Ví dụ: So sánh các VCB sau

1. Khi x→0 : $\alpha(x) = \sin^2 x + x^2, \beta(x) = \tan 2x$

2. Khi x→1 : $\alpha(x) = \ln x, \beta(x) = e^{1-x} - 1$

Ta dùng định nghĩa để so sánh, tức là ta sẽ tính giới hạn của tỉ số 2 VCB cần so sánh

$$1. \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{2x^2}\frac{2x^2}{\tan 2x} = 0$$

Vậy $\alpha(x) = O(\beta(x))$

$$2. \lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}\frac{x-1}{e^{1-x}-1} = -1$$

α(x), β(x) là 2 VCB cùng bậc

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Các VCB tương đương thường gặp khi x→0

1) $\sin x \sim x$

2) $e^x - 1 \sim x$

3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

4) $\ln(1+x) \sim x$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

6) $\arcsin x \sim x$

7) $\arctan x \sim x$

8) $\tan x \sim x$

9) $\sinh x \sim x$

10) $\cosh x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Qui tắc thay VCB tương đương với tích, thương

Cho các VCB tương đương $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$

Ta được:

$$f_1(x).g_1(x) \sim f_2(x).g_2(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Qui tắc thay VCB tương đương với tổng nhiều VCB

Giả sử a≠0, b ≠0, α, β là các hằng số thực sao cho

$f_1(x) \sim ax^{\alpha}$, $f_2(x) \sim bx^{\beta}$ với *x→0, $f_1(x)$, $f_2(x)$ là VCB*

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \left[\begin{array}{l} 1.ax^{\alpha}, \text{khi } \alpha \neq \beta (\alpha > \beta) \\ 2.(a+b)x^{\alpha}, \text{khi } \alpha = \beta \ \& \ a+b \neq 0 \\ 3.\text{khong thay duoc,khi } \alpha = \beta \ \& \text{a+b=0} \end{array}\right.$$

Chú ý: Trường hợp duy nhất KHÔNG ĐƯỢC THAY VCB tương đương là HIỆU 2 VCB CÙNG TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI VCB THỨ BA

Ví dụ: So sánh các VCB sau khi x→0:

$$1.\alpha(x) = x, \beta(x) = x\sin {}^{1}\!/_{x}$$

$$2.\alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x, \beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin {}^{1}\!/_{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

Giới hạn không tồn tại tức là 2 VCB này không so sánh được

2. Ta sẽ so sánh bằng cách tính bậc của 2 VCB đó

$$\alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x \ = (e^{x^2 \ln 2} - 1) - (\cos x - 1) \sim x^2 \ln 2 + \frac{1}{2} x^2$$

$$= x^2 (\ln 2 + 1/2)$$

Như vậy, bậc của α(x) là 2 so với x

$$\beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2 \sim x^{3/2} - x^2$$

$$\sim x^{3/2}$$

Bậc của β(x) là 3/2 so với x

Vậy $\boxed{\alpha(x) = O(\beta(x))}$

Ví dụ: Tìm a, b để α(x) tương đương với ax^b khi $x \to 0$

$1.\alpha(x) = \sin(\sqrt{1-x} - 1)$ $\quad\quad 2.\alpha(x) = \tan x^2 + 2x$

Ta đi tính bậc của các VCB

$$1.\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1-x} - 1\right) \sim \left(\sqrt{1-x} - 1\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x} + 1} \sim \frac{-1}{2} x^1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

$$2.\alpha(x) \sim x^2 + 2x \sim 2x^1$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1$$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{3x^2 + \ln(1+x)}$

1. Ta thay VCB tương đương như sau, khi $x \to 0$

$$1-\cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

(VCB tương đương cơ bản)

$$\Rightarrow 3x^2 + \ln(1+x) \sim 3x^2 + x \sim x$$

(Tổng các VCB không cùng bậc tương đương với VCB có bậc thấp nhất)

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x} = 0$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính giới hạn $L_2 = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sin 2(x-1)}{e^{x-1} - \cos\sqrt{x-1}}$

Lưu ý: Vì trong hàm dưới dấu *lim* có $\cos\sqrt{x-1}$ tức là $x \geq 1$ nên ta chỉ tính giới hạn phải

Khi $x \to 1^+$ thì (x-1) là VCB nên :

$$\sin\left(2(x-1)\right) \sim \left(2(x-1)\right)$$

$$e^{x-1} - \cos\sqrt{x-1} = (e^{x-1} - 1) + (1 - \cos\sqrt{x-1}) \sim (x-1) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}(x-1)$$

$$L_2 = \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{\frac{3}{2}(x-1)} = \frac{4}{3}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{\tan 3x}$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - x}{3x} = \frac{1}{3}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính $L_4 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{3x}$

$$L_4 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{3x}$$

Đến đây, không thể thay VCB tương đương như trên được vì:

$$\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \end{cases}$$

Tử số là HIỆU CỦA 2 VCB CÙNG TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI VCB THỨ 3

Ta sẽ có cách làm khác: hoặc dùng quy tắc L'Hospital hoặc dùng CT Taylor - Maclaurint

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

VCL: Hàm số $A(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) *khi $x \to x_0$* nếu $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty.$

Ví dụ:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 + \sin x) = \infty$

Nên $A(x)=2x^2+\sin x$ là VCL *khi $x \to \infty$*

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

$\Rightarrow A(x) = \dfrac{1}{x}$ là VCL *khi $x \to 0$*

So sánh các VCL:

Cho A(*x*) và B(*x*) là hai vô cùng lớn khi $x \to x_0$.

Giả sử $$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = k.$$

1) Nếu k = ∞ , thì *A*(*x*) gọi là VCL bậc cao hơn *B*(*x*),

2) Nếu *k* hữu hạn, khác không, thì A(*x*) và B(*x*) là hai VCL cùng cấp.

3) Nếu k=1, thì A(*x*) và *B*(*x*) là hai VCL tương đương

4) Nếu A(x) cùng bậc với $(B(x))^m$ thì bậc của A(x) là *m* so với B(x)

Qui tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{10}-2x^5+2}-2x^3+x^4}{\sqrt{x^5+2x^3}-x+x^2+3x^3-2x^4}$

Khi $x \to \infty$ thì cả trên tử số và dưới mẫu số đều là tổng của các vô cùng lớn không cùng bậc

Bậc lớn nhất ở tử số và cả mẫu số đều là 4

Vậy: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{10}-2x^5+2}-2x^3+x^4}{\sqrt{x^5+2x^3}-x+x^2+3x^3-2x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{-2x^4} = -\dfrac{1}{2}$

Giới hạn & liên tục – Phụ lục

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(1+\frac{x}{32}\right)^{1/5}-1\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2.\frac{1}{5}\frac{x}{32}}{x} = \frac{1}{80}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x - 1)-(\cos 7x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}9x^2+\frac{1}{2}49x^2}{x^2} = 20$$

Giới hạn & liên tục – Phụ lục

$$L_3 = \lim_{x\to\pi/4} \cot 2x \cdot \cot(\pi/4 - x)$$

$$= \lim_{x\to\pi/4} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{\frac{\pi}{4} - x} = 2$$

$$L_4 = \lim_{x\to 0}\left(1 - \tan^2 x\right)^{1/\sin^2(2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1 - \tan^2 x\right)^{1/\tan^2 x}\right]^{\frac{\tan^2 x}{\sin^2(2x)}} = \frac{1}{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(2x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$