BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG 1. DÃY SỐ THỰC

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG - BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Ngày 09/09/2020

Nội dung

Nội dung

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.1

1. Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ vào tập $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}.$$

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của nó.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.1

1. Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ vào tập $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}.$$

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của nó.

2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.1

1. Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ vào tập $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}.$$

Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của nó.

2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.1

1. Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ vào tập $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}.$$

   Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của nó.

2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

3. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.1

1. Dãy số thực (hay gọn hơn: dãy số) là ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ vào tập $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N}^* \mapsto x_n \in \mathbb{R}.$$

   Dãy số trên được ký hiệu là $\{x_n\}$ và x_n là số hạng tổng quát của nó.

2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Một dãy đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

3. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, và được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Dãy được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

$\ast$ **Chú ý:** $\{x_n\}$ bị chặn tương đương với mệnh đề

$$\exists M > 0 \text{ sao cho } |x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.1

a) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.1

a) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1.1

a) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không tồn tại số M sao cho $n^2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.1

a) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không tồn tại số M sao cho $n^2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$.

Xét đk $y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow (-1)^{n+1} > (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n < 0 \Leftrightarrow n$ là số lẻ.
Như vậy bất đẳng thức $y_{n+1} > y_n$ không thoả mãn với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó y_n không là dãy đơn diệu tăng. Tương tự ta có y_n cũng không là dãy đơn điệu giảm.

Ví dụ 1.1

a) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$.

Đây là dãy đơn điệu tăng vì $(n+1)^2 > n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy này bị chặn dưới vì $n^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy này không bị chặn trên vì không tồn tại số M sao cho $n^2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Xét dãy $\{y_n\}$ trong đó $y_n = (-1)^n$.

Xét đk $y_{n+1} > y_n \Leftrightarrow (-1)^{n+1} > (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n < 0 \Leftrightarrow n$ là số lẻ.
Như vậy bất đẳng thức $y_{n+1} > y_n$ không thoả mãn với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó y_n không là dãy đơn diệu tăng. Tương tự ta có y_n cũng không là dãy đơn điệu giảm.

Ngoài ra $(-1)^n = 1$ nếu n chẵn và $(-1)^n = -1$ nếu n lẻ, suy ra $-1 \leq y_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì vậy y_n là dãy bị chặn.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} =$
$\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$. Vậy dãy tăng và bị chặn.

b) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0.$

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$. Vậy dãy tăng và bị chặn.

b) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} . \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0, \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.2

a) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$.

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow 0 < u_n < 1$. Vậy dãy tăng và bị chặn.

b) Xét dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} . \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0, \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall \geq n_0$$

Kí hiệu $a = \lim x_n$ hay $x_n \to a$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall \geq n_0$$

Kí hiệu $a = \lim x_n$ hay $x_n \to a$.

Dãy có giới hạn gọi là **dãy hội tụ**, dãy không có giới hạn gọi là dãy **phân kỳ**.

⊕ **Nhận xét**: Số a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu và chỉ nếu mọi khoảng $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn số hạng.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.2

Số thực a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall \geq n_0$$

Kí hiệu $a = \lim x_n$ hay $x_n \to a$.

Dãy có giới hạn gọi là **dãy hội tụ**, dãy không có giới hạn gọi là dãy **phân kỳ**.

⊕ **Nhận xét**: Số a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu và chỉ nếu mọi khoảng $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn số hạng.

Định lý 1.1

1. *Nếu dãy x_n hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất;*
2. *Nếu $\lim x_n = a$ thì $\lim |x_n| = |a|$;*
3. *Nếu dãy x_n hội tụ thì nó bị chặn.*

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.3

- Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.3

- Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| - 1 = \frac{1}{n}$$

Ví dụ 1.3

- Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có
$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| - 1 = \frac{1}{n}$$
Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó
$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$
- Dãy $0, 1, 0, 1, \ldots$ là dãy phân kì.

Ví dụ 1.3

- Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có
$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| - 1 = \frac{1}{n}$$
Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó
$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$
- Dãy $0, 1, 0, 1, \ldots$ là dãy phân kì. Thật vậy, ta sẽ chứng tỏ mọi số thực a đều không phải là giới hạn của dãy.
+ Trường hợp $a = 0$: lấy $\varepsilon = 1/2$ thì $1 \notin (-\varepsilon; \varepsilon)$ tức là không chứa vô số các số hạng mang chỉ số lẻ.

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.3

- Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ là dãy hội tụ đến 1. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| - 1 = \frac{1}{n}$$

Nếu chọn số tự nhiên $n_0 > 1/\varepsilon$ thì $1/n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, do đó

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

- Dãy $0, 1, 0, 1, \dots$ là dãy phân kì. Thật vậy, ta sẽ chứng tỏ mọi số thực a đều không phải là giới hạn của dãy.

  + Trường hợp $a = 0$: lấy $\varepsilon = 1/2$ thì $1 \notin (-\varepsilon; \varepsilon)$ tức là không chứa vô số các số hạng mang chỉ số lẻ. Tương tự với trường hợp $a = 1$.

  +Trường hợp $a \neq 0$ và $a \neq 1$, ta có thể chọn ε đủ nhỏ (chẳng hạn $\varepsilon < \min\{|a|, |a - 1|\}$) để $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ không chứa cả 0 và 1.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định lý 1.2

Giả sử các dãy x_n và y_n hội tụ. Khi đó:

1. Dãy số thực và giới hạn

Định lý 1.2

Giả sử các dãy x_n và y_n hội tụ. Khi đó:

1. *Dãy* $x_n + y_n$ *hội tụ và* $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
2. *Dãy* $x_n \cdot y_n$ *hội tụ và* $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;
3. *Nếu* $\lim y_n \neq 0$ *thì dãy* $\dfrac{x_n}{y_n}$ *hội tụ và* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Định lý 1.2

Giả sử các dãy x_n và y_n hội tụ. Khi đó:

1. *Dãy* $x_n + y_n$ *hội tụ và* $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
2. *Dãy* $x_n \cdot y_n$ *hội tụ và* $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;
3. *Nếu* $\lim y_n \neq 0$ *thì dãy* $\dfrac{x_n}{y_n}$ *hội tụ và* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Định lý 1.3

1. *Nếu* x_n *và* y_n *là các dãy hội tụ và* $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *thì* $\lim x_n \leq \lim y_n$.
2. *Giả sử các dãy* x_n, y_n, z_n *thoả mãn* $\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim x_n = \lim z_n = a \end{cases}$. *Khi đó* $\lim y_n = a$.
3. *Nếu dãy số đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ. Nếu dãy số đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.*

Một số giới hạn cơ bản

1. $\lim C = C$;
2. $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $\forall k > 0$;
3. $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$;
4. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

1. Dãy số thực và giới hạn

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

1. Dãy số thực và giới hạn

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Lại có $x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$

Để ý rằng $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n$ đơn điệu tăng.

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Khai triển nhị thức Newton ta có

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n!}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Lại có $x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$

Để ý rằng $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n$ đơn điệu tăng.
Hơn nữa, ta chứng minh được $n! \geq 2^{n-1}$ với $\forall n \geq 2$, suy ra

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3$$

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ và $2 \leq \lim x_n \leq 3$, kí hiệu $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

Định nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

1. Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một **dãy con** của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

1. Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một **dãy con** của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
2. Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to a$ thì a được gọi là một **giới hạn riêng** của $\{x_n\}$.

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

1. Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một **dãy con** của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
2. Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to a$ thì a được gọi là một **giới hạn riêng** của $\{x_n\}$.
3. Ta gọi giới hạn riêng lớn nhất của $\{x_n\}$ là **giới hạn trên**, kí hiệu $\overline{\lim} x_n$ và gọi giới hạn riêng nhỏ nhất của $\{x_n\}$ là **giới hạn dưới**, kí hiệu $\underline{\lim} x_n$.

   Hiển nhiên
$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

1. Dãy số thực và giới hạn

1. 4. Giới hạn trên và giới hạn dưới

Định nghĩa 1.3

Cho dãy $\{x_n\}$.

1. Nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên thì dãy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ gọi là một **dãy con** của dãy $\{x_n\}$, kí hiệu là $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.
2. Nếu tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to a$ thì a được gọi là một **giới hạn riêng** của $\{x_n\}$.
3. Ta gọi giới hạn riêng lớn nhất của $\{x_n\}$ là **giới hạn trên**, kí hiệu $\overline{\lim} x_n$ và gọi giới hạn riêng nhỏ nhất của $\{x_n\}$ là **giới hạn dưới**, kí hiệu $\underline{\lim} x_n$.

   Hiển nhiên
$$\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$$

Định lý 1.4

$$\lim x_n = a \iff \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = a.$$

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k}, a_{2k-1}, a_{3k+2}, a_{k^2}.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2}$,

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \dfrac{2k}{(2k-1)^2}$,

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \dfrac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \dfrac{k^2+1}{(k^2)^2} = \dfrac{k^2+1}{k^4}$

1. Dãy số thực và giới hạn

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức a_{2k}, a_{2k-1}, a_{3k+2}, a_{k^2}.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \dfrac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \dfrac{k^2+1}{(k^2)^2} = \dfrac{k^2+1}{k^4}$

b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2},\ a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2},\ a_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \dfrac{2k}{(2k-1)^2},\ a_{k^2} = \dfrac{k^2+1}{(k^2)^2} = \dfrac{k^2+1}{k^4}$

b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.

c) Ta có $\begin{cases} \lim a_{2k} = \lim \dfrac{(-1)^k}{k-2} = 0 \\ \\ \end{cases}$

Ví dụ 1.4

a) Cho $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$, xác định công thức $a_{2k},\ a_{2k-1},\ a_{3k+2},\ a_{k^2}$.

b) Cho $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$, tìm giới hạn của a_n.

c) Cho $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k-2}$, $a_{2k+1} = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. Tìm giới hạn của a_n.

Giải

a) Ta có $a_{2k} = \dfrac{(2k)+1}{(2k)^2} = \dfrac{2k+1}{4k^2}$, $a_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)+1}{(2k-1)^2} = \dfrac{2k}{(2k-1)^2}$, $a_{k^2} = \dfrac{k^2+1}{(k^2)^2} = \dfrac{k^2+1}{k^4}$

b) a_n có 2 dãy con $a_{2k} = 1$ và $a_{2k+1} = -1$, do đó 2 giới hạn trên và dưới khác nhau, suy ra dãy phân kì.

c) Ta có $\begin{cases} \lim a_{2k} = \lim \dfrac{(-1)^k}{k-2} = 0 \\ \lim a_{2k+1} = \lim \dfrac{k^2}{k^3+1} = 0. \end{cases} \Longrightarrow \lim a_n = 0.$

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1. Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

1. Dãy số thực và giới hạn

Định nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1. Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng ", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

2. Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n < -M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "âm vô cùng ", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to -\infty$).

$\ast$ **Chú ý:** Một dãy có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ nhưng vẫn không phải dãy hội tụ. Do đó không áp dụng được các tính chất của dãy hội tụ.

Định nghĩa 1.4

Cho dãy $\{x_n\}$

1. Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "dương vô cùng ", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to +\infty$).

2. Nếu mọi số dương M lớn tùy ý, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$x_n < -M, \quad \forall n \geq n_0$$

thì ta nói dãy $\{x_n\}$ có giới hạn "âm vô cùng ", kí hiệu $\lim x_n = +\infty$ (hoặc $x_n \to -\infty$).

$*$ **Chú ý:** Một dãy có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ nhưng vẫn không phải dãy hội tụ. Do đó không áp dụng được các tính chất của dãy hội tụ.

Các dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Nội dung

TRAO ĐỔI