

# TÍNH LỒI LỖM VÀ ĐIỂM UỐN

*Định nghĩa:*

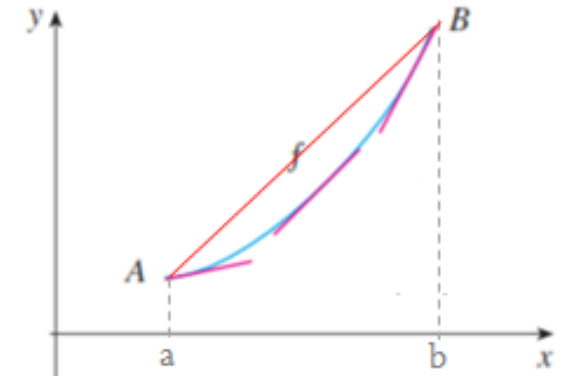
- Hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trong khoảng  $(a,b)$  được gọi là lõm trong khoảng  $(a,b)$  nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), \forall t \in [0,1]: f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

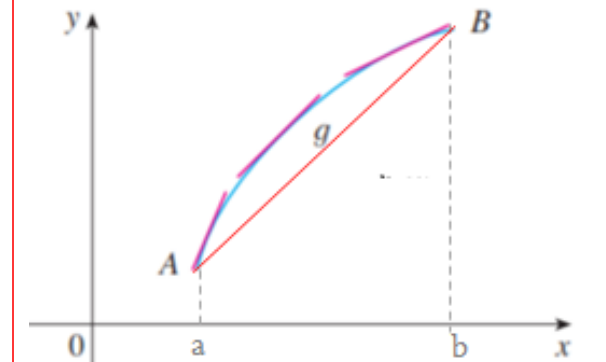
Trên đồ thị: hàm lõm nếu đường cong nằm dưới dây cung hoặc đường cong nằm trên tiếp tuyến với mọi điểm thuộc cung

$$AB(A(a, f(a)), B(b, f(b)))$$

- Hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trong khoảng  $(a,b)$  được gọi là lồi trong khoảng  $(a,b)$  nếu hàm  $y = -f(x)$  là hàm lõm. Khi đó, đồ thị nằm trên dây cung hoặc dưới tiếp tuyến trên cung AB.

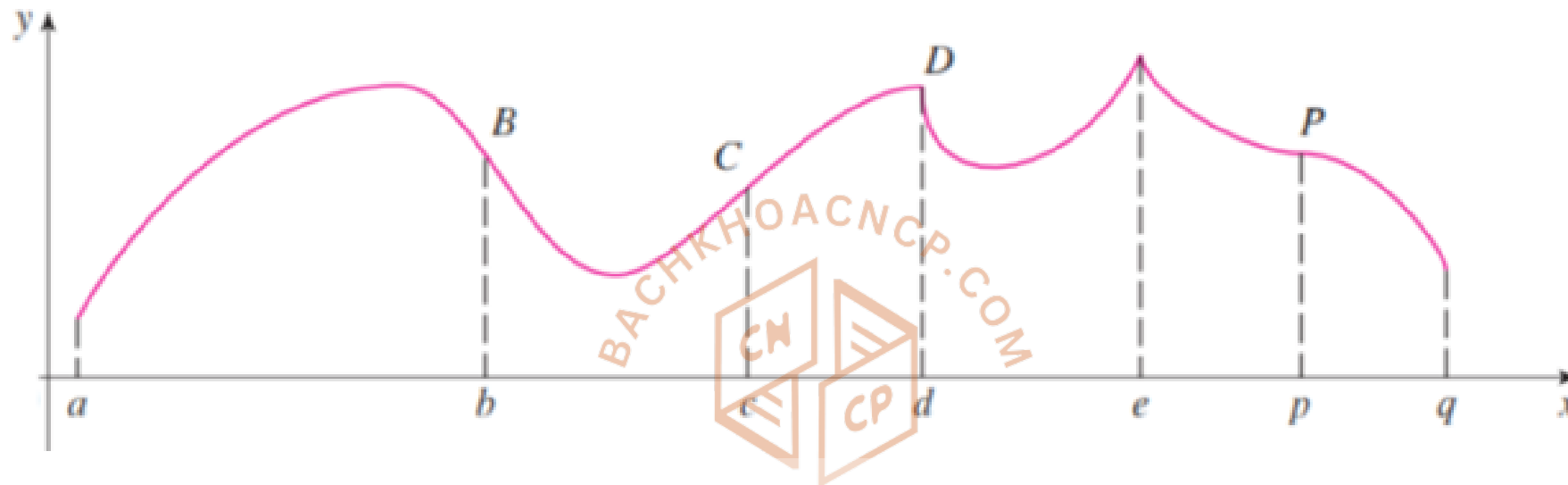


Hàm lõm trong khoảng  $(a,b)$



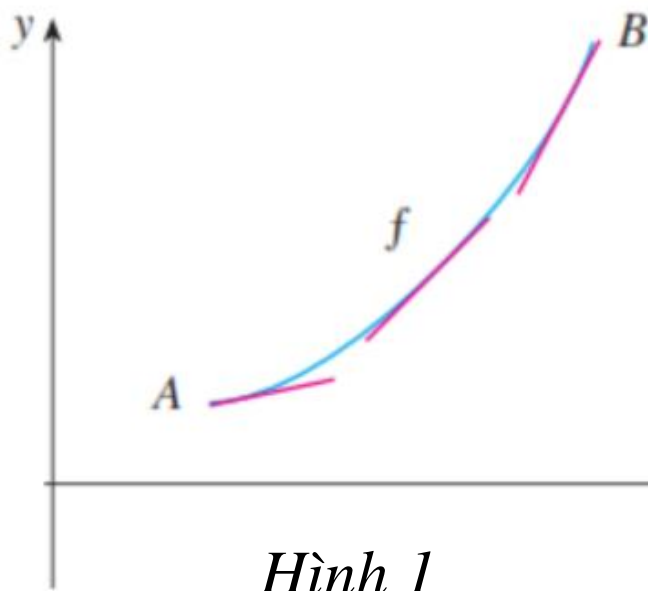
Hàm lồi trong khoảng  $(a,b)$

# TÍNH LỒI LỖM VÀ ĐIỂM UỐN

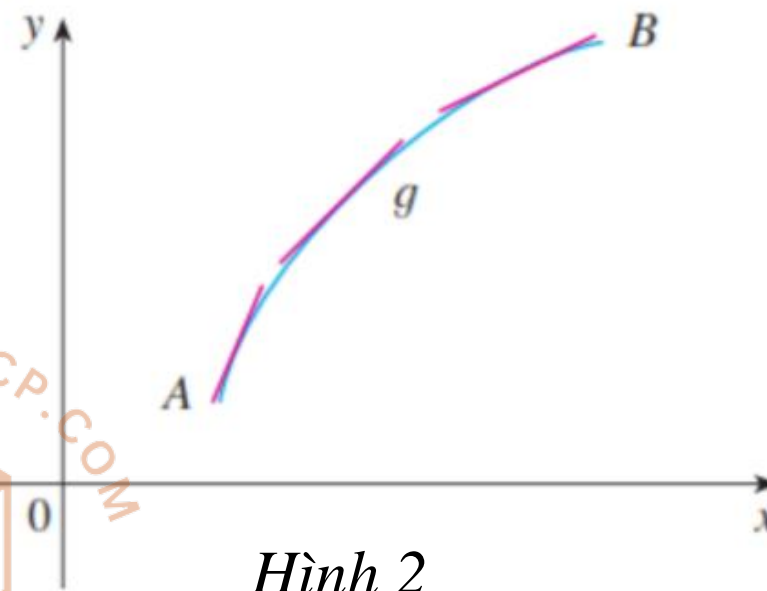


- Trong các khoảng  $(b, c)$ ,  $(d, e)$  và  $(e, p)$ : đồ thị hàm số *lõm*
- Trong các khoảng  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  và  $(p, q)$ : đồ thị hàm số *lồi*

# TÍNH LỒI LỒM VÀ ĐIỂM UỐN



Hình 1



Hình 2

*Nhận xét : Nếu  $f''(x)$  tồn tại trong khoảng đang xét*

Khi đi từ trái sang phải:

- Hình 1: Vì hệ số góc của tiếp tuyến tăng dần nên  $f'$  là hàm số đồng biến  $\Rightarrow f'' > 0$ .
- Hình 2: Vì hệ số góc của tiếp tuyến giảm dần nên  $f'$  là hàm số nghịch biến  $\Rightarrow f'' < 0$ .

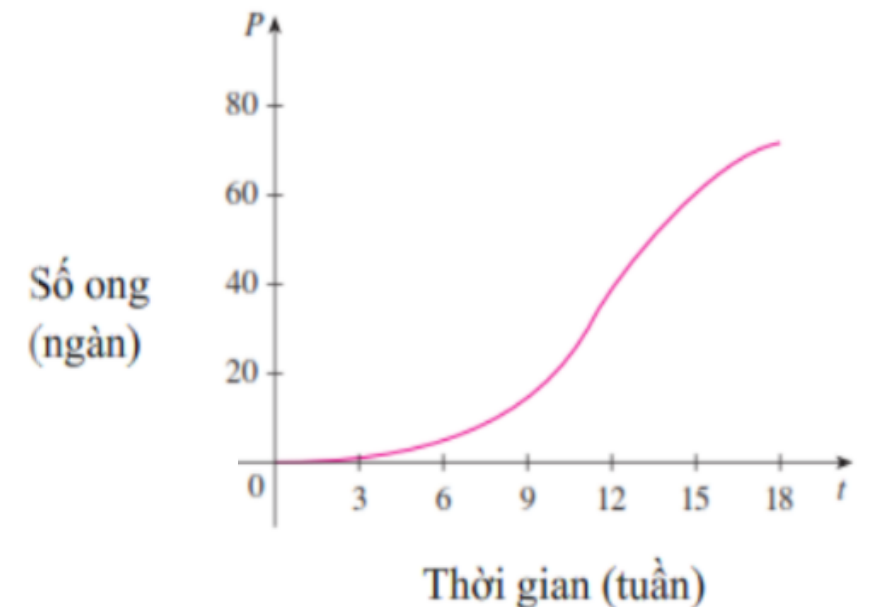
# TÍNH LỒI LỖM VÀ ĐIỂM UỐN

## Dấu hiệu lồi lõm

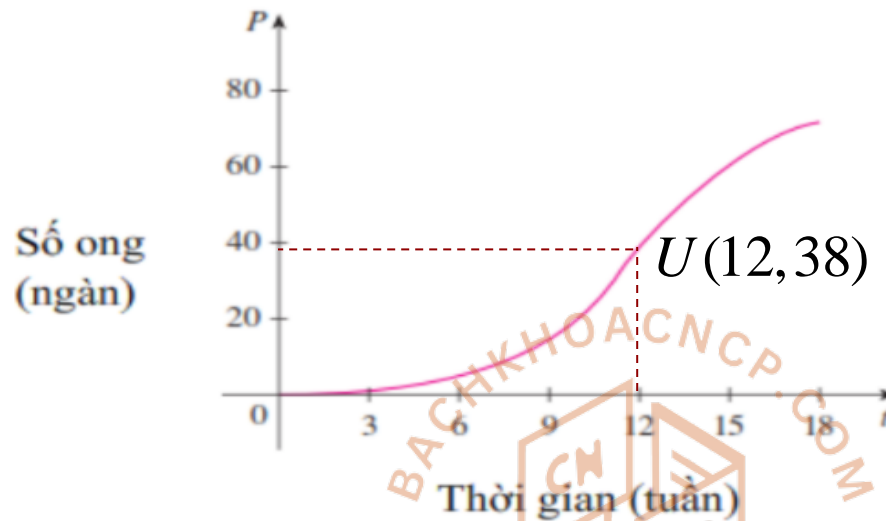
- Nếu  $f''(x) > 0$  với mọi  $x \in (a, b)$  thì đồ thị của hàm  $f$  **lõm** trong khoảng  $(a, b)$ .
- Nếu  $f''(x) < 0$  với mọi  $x \in (a, b)$  thì đồ thị của hàm  $f$  **lồi** trong khoảng  $(a, b)$ .

**Ví dụ:** Đồ thị bên biểu diễn sự thay đổi số lượng loài ong mật Cyprian P (ngàn con) được nuôi trong tổ theo thời gian  $t$  (tuần) (tính từ lúc bắt đầu nuôi). Hàm  $P$  lồi /lõm trong khoảng nào? Tốc độ tăng của  $P$  biến thiên như thế nào theo thời gian?

Khi nào tốc độ tăng là lớn nhất?



# TÍNH LỒI LỖM VÀ ĐIỂM UỐN



1/ Nhìn vào đồ thị: khi  $t$  tăng, số lượng ong lúc đầu tăng chậm, sau đó nhanh dần, đến khoảng  $t = 12$  thì tăng chậm lại (ta thấy  $P'$  tăng đến  $t = 12$  thì bắt đầu giảm). Vậy tốc độ tăng của  $P$  lớn nhất là vào khoảng tuần thứ 12 kể từ ngày bắt đầu nuôi.

2/ Đồ thị hàm số lõm trong khoảng  $(0, 12)$  và lồi trong khoảng  $(12, 18)$ .

*Nhận xét: đồ thị hàm số  $P(t)$  thay đổi từ lõm sang lồi tại điểm  $U(12, 38)$ .*

# TÍNH LỒI LŨM VÀ ĐIỂM UỐN

Đồ thị hàm số  $P(t)$  thay đổi từ lõm sang lồi tại điểm  $U(12, 38)$ . Điểm này gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm số  $P(t)$ .

**Nhận xét:** Nếu  $P(t)$  tăng hay đường cong chuyển từ lõm sang lồi thì  $P'$  đạt cực đại tại điểm uốn.

**Định nghĩa:**

Một điểm  $U$  thuộc đường cong  $y = f(x)$  được gọi là một **điểm uốn** nếu hàm  $f$  liên tục tại điểm đó và đường cong thay đổi từ lõm sang lồi hoặc từ lồi sang lõm tại điểm  $U$ .

**Tìm điểm uốn:**

- 1/ Tìm các giá trị  $x_0$  sao cho  $f''(x_0) = 0$  hoặc  $\nexists f''(x_0)$
- 2/ Xét dấu  $f''(x)$ , nếu qua  $x_0$ ,  $f''$  đổi dấu thì  $x_0$  là điểm uốn.

# TÍNH LỒI LỖM VÀ ĐIỂM UỐN

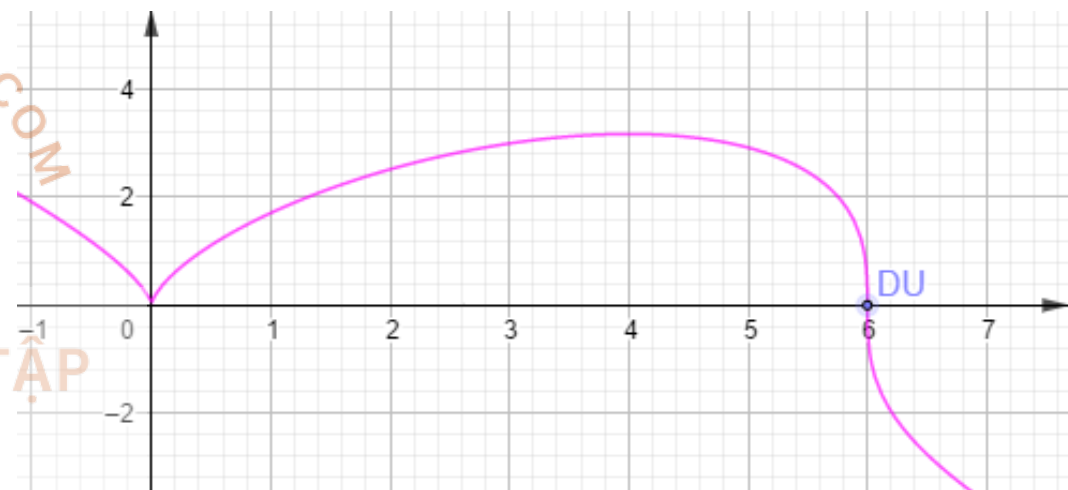
*Ví dụ:* Xét tính lồi lõm, điểm uốn của đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}, \quad f''(x) = \frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$6$	$+\infty$		
$f''(x)$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$



Đồ thị hàm số lồi trong khoảng  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 6)$  và lõm trong khoảng  $(6, +\infty)$

Điểm uốn:  $(6, 0)$ .