TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

1. Đối với 1 ma trận vuông A:

* Giả sử A là 1 ma trận vuông thực cấp n. Véctơ $X \in R^n$, $X \neq 0$ được gọi là véc tơ riêng (VTR) của ma trận A nếu có một số thực k sao cho A.[X] = k.[X] . Giá trị k đó được gọi là trị riêng (TR) của ma trận A ứng với VTR X.

\+ Giả sử X,Y là 2 VTR tương ứng với cùng TR *ko* của ma trận A.
Với a,b $\in$ R sao cho (a.X+b.Y) $\neq$ 0,
do A.(a[X]+b.[Y]) = A.a.[X] + A.b.[Y] = a.(A.[X]) + b.(A.[Y])
= a.*ko*.[X] + b.*ko*[X] (đn VTR)
= *ko*.(a.X+b.Y) , suy ra (a.X+b.Y) cũng là 1 VTR của A.

$\Rightarrow$ Tập hợp các VTR tương ứng với cùng một trị riêng *ko* và véc tơ 0 tạo thành 1 không gian con của R^n; gọi là không gian riêng của A ứng với TR *ko*.

* Giả sử X là VTR của A tương ứng với TR k. Theo định nghĩa thì A.[X] = k.[X]
$\Rightarrow$ [A – kI][X] = 0. Do X phải khác véctơ không nên suy ra hệ [A – kI][X] = 0 có nghiệm khác nghiệm tầm thường, tức là | A – k.I | = 0.

\+ Để tìm các TR của A, ta giải phương trình đặc trưng | A – k.I | = 0.
Bội của nghiệm k trong phương trình đặc trưng gọi là bội đại số của k.

\+ Để tìm không gian riêng của A tương ứng với TR *ko* đã biết, ta giải hệ phương trình: [A-*ko*.I].[X] =0. Nghiệm khác 0 của hệ [A-*ko*.I].[X]=0 chính là các VTR tương ứng TR *ko*. Tập nghiệm của hệ phương trình chính là không gian riêng ứng với TR ko. Số chiều của không gian riêng chính là bội hình học của *ko*, và 1 $\le$ BHH $\le$ BĐS.

\+ Một hệ gồm các VTR trong các không gian riêng khác nhau đôi một luôn là độc lập tuyến tính.

* *Tính chất:* Giả sử k và X là TR và VTR tương ứng của ma trận A. Khi đó:

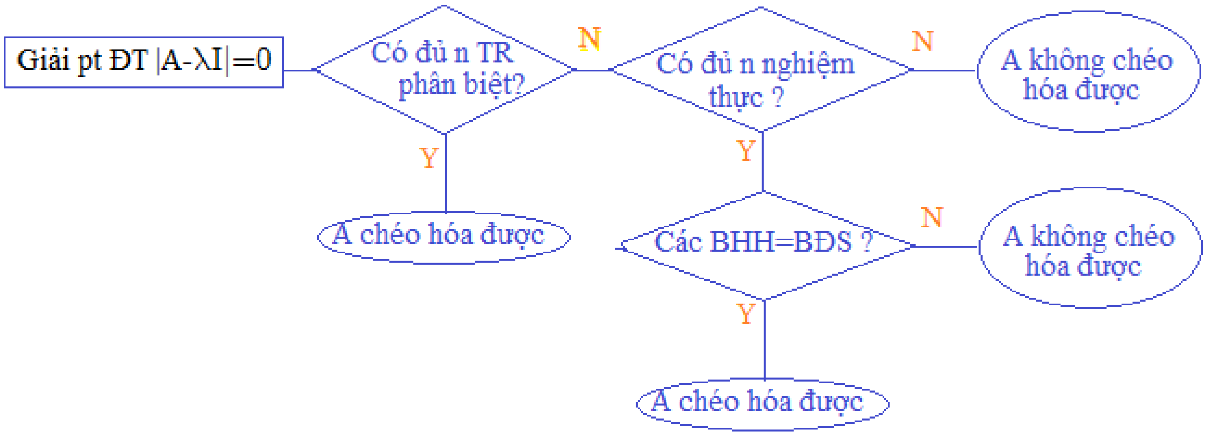
- k^n và X cũng là các TR và VTR tương ứng của ma trận A^n.
- k^{-1} và X cũng là các TR và VTR tương ứng của ma trận A^{-1}, nếu A khả nghịch.

* Ma trận A gọi là chéo hóa được nếu A đồng dạng với 1 ma trận chéo, tức là có ma trận P khả nghịch nào đó sao cho $P^{-1}.A.P = D$ là ma trận chéo.
Việc đi tìm ma trận P và ma trận D gọi là (quá trình) chéo hóa ma trận A. Ma trận P còn được gọi là ma trận làm chéo hóa A.

\+ Ma trận A chéo hóa được $\Leftrightarrow$ A có đủ n VTR độc lập tuyến tính.

Trong trường hợp này, ma trận P chỉ cần là ma trận bất kỳ có các cột là các VTR độc lập tuyến tính được lấy từ các cơ sở của những không gian riêng. Còn ma trận chéo D chỉ gồm các TR tương ứng theo cột với các VTR trong P. Mặc dù công thức xác định D có chứa cả ma trận P^{-1} nhưng khi xác định được P thì ta có ngay ma trận D.

\+ Kiểm tra điều kiện ma trận A chéo hóa được (trên trường số thực):



* Trường hợp riêng: khi A là ma trận vuông thực và đối xứng. Người ta chứng minh được A luôn chéo hóa được và các không gian riêng của A luôn trực giao với nhau (tức là 2 véctơ riêng bất kỳ tương ứng với 2 TR khác nhau luôn vuông góc nhau).

Nếu chúng ta chọn ma trận cột của P là các VTR trực chuẩn thì ma trận P gọi là ma trận trực giao. Ma trận trực giao có tính chất $P^{-1} = P^T$.

Việc chéo hóa ma trận A thực, đối xứng bằng cách sử dụng ma trận P trực giao còn gọi là chéo hóa trực giao.

**** Các dạng bài tập thường gặp:***

- Tìm điều kiện của tham số m để một véc tơ cho trước là 1 VTR của ma trận A; hay 1 giá trị k nào đó là 1 TR của A.
- Tìm TR, VTR của A.
- Chéo hóa ma trận A (hay chéo hóa trực giao A) nếu được; hoặc tìm điều kiện của tham số m để ma trận A chéo hóa được.
- Cho ma trận A (chéo hóa được). Tính A^n.
- Cho ma trận A (chéo hóa được). Tìm ma trận B vuông thỏa $B^n = A$.
- Xác định ma trận A với các TR cho trước + thỏa 1 số điều kiện nào đó…

2. Đối với một ánh xạ tuyến tính f: $R^n \to R^n$.

* Véctơ $x \in R^n$, $x \neq 0$, là một véctơ riêng của f nếu có một số thực k sao cho f(x) = k.x .
Giá trị k đó được gọi là TR của axtt f ứng với VTR x.
Nếu A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc trong R^n thì [f(x)]=A.[x]. Do đó TR và VTR của f cũng chính là TR và VTR của A.

* Axtt f gọi là chéo hóa được nếu có 1 cơ sở E nào đó của R^n chỉ gồm các VTR sao cho ma trận của f đối với cơ sở E là ma trận chéo.

\+ Đồng thời ta có thể nhận thấy rằng ma trận của cùng một axtt đối với các cơ sở khác nhau là đồng dạng. Do đó f chéo hóa được đồng nghĩa với ma trận chính tắc là chéo hóa được. Khi đó các véctơ cột của ma trận P chính là cơ sở E cần tìm. (P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E).

* Cũng từ đó ta có nhận xét: Tất cả các ma trận đồng dạng đều có cùng tập các TR, (các TR này có cùng BĐS và BHH), tuy nhiên các VTR nói chung không giống nhau vì tọa độ của nó coi như được xem xét ở các cơ sở khác nhau.

\+ Công thức liên hệ giữa tọa độ của cùng véctơ x đối với cơ sở chính tắc và cơ sở E là:

$$[x] = P.[x]_E .$$

Cách viết khác dưới dạng đổi biến: $X = P.Y$ hay $Y=P^{-1}.X$.

(Trong dạng toàn phương ở chương cuối, do P là ma trận trực giao nên người ta kí hiệu phép đổi biến $X= P.Y$ hay $Y=P^T.X$; với X là tọa độ của véctơ trong cơ sở chính tắc, Y là tọa độ của cùng véctơ đó trong cơ sở E , tạo bởi các véctơ cột của P).

Phần chéo hóa axtt không nằm trong nội dung thi.

BÀI TẬP

10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \longrightarrow R^3$, biết $f(1, 1, 1) = (1 ,-2, 1)$, $f(0 , 1, 1) = (3,-2, 1)$, $f(0 , 0 , 1) = (3 , 0 , 1)$. Tìm m để $x = (m,-1 , 0)$ là véctơ riêng của f.

11. Tìm m để $\lambda = 1$ là giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & m & -5 \end{bmatrix}$

12. Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \longrightarrow R^3$, biết

$f(x_1, x_2, x_3) = (5 x_1 - 4 x_2 - 2 x_3, -4 x_1 + 5 x_2 + 2 x_3; -2 x_1 + 2 x_2 + 2 x_3)$

Tìm tất cả các trị riêng thực và véctơ riêng của f.

13. Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \longrightarrow R^3$, biết nhân sinh ra bởi (1 , 1 , 1) ; (1 , 1 , 0) và $f(1 , 0 , 1) = (2 , 0 , 2)$. Tìm trị riêng và cơ sở của các không gian con riêng.

14. Tìm một ma trận đối xứng thực A cấp 3 (không là ma trận chéo), sao cho A có ba trị riêng là 2 , 4 , 5 .