Hệ phương trình tuyến tính hệ số hằng

Định nghĩa: Hệ ptvp là hệ gồm các ptvp chứa đạo hàm của các hàm cần tìm

Ví dụ: Các hệ ptvp

Hệ 2 ptvp cấp 1
$$\begin{cases} F(t,x,y,x',y')=0 \\ G(t,x,y,x',y')=0 \end{cases}$$
Trong đó

t là biến độc lập, x(t), y(t) là các hàm cần tìm.

Hệ 3 ptvp cấp 1 dạng chính tắc
$$\begin{cases} x' = f(t,x,y,z) \\ y' = g(t,x,y,z) \\ z' = h(t,x,y,z) \end{cases}$$

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng

Hệ ptvp tuyến tính cấp 1 hệ số hằng là hệ ptvp có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Trong đó $f_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ là các hàm liên tục trong (a,b)

Hệ pt tuyến tính cấp 1hệ số hằng

Đặt

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad F(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Thì hpt trên có thể viết thành

$$\frac{dX}{dt}=AX+F(t) \qquad (1)$$ Hệ không thuần nhất

$$\frac{dX}{dt}=AX \qquad (2)$$ Hệ thuần nhất

Nghiệm của hệ là 1 hàm vecto trong (a,b) gồm các hàm khả vi, liên tục trong (a,b) và thỏa hệ

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

Ta kí hiệu phép lấy đạo hàm là $D = \frac{d}{dt}$ Suy ra

$$\mathrm{D}^2 = \frac{d^2}{dt^2},\ \mathrm{D}^3 = \frac{d^3}{dt^3}, \ldots$$

Ví dụ với hệ ptvp sau

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = x - 2y + t \end{cases}$$

Ta viết thành

$$\begin{cases} (D-2)x - y = e^t \\ -x + (D+2)y = t \end{cases}$$

Sau đó, ta dùng phương pháp khử như đối với hpt đại số tuyến tính

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

Ví dụ: Giải hpt $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + t \end{cases}$

Ta viết lại hpt $\begin{cases} (D-3)x_1 - x_2 = e^t & (1) \\ -2x_1 + (D-2)x_2 = t & (2) \end{cases}$

Lấy *2*(1)+(D-3)*(2)* để khử x_1, ta được :

$$(-2+(D-2)(D-3))x_2 = 2e^t + (D-3)t$$

$$\Leftrightarrow D^2x_2 - 5Dx_2 + 4x_2 = 2e^t - 3t + 1$$

Viết lại kí hiệu thường $x_2'' - 5x_2' + 4x_2 = 2e^t - 3t + 1$

Ta giải pt trên

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

$$x_2'' - 5x_2' + 4x_2 = 2e^t - 3t + 1$$

$$x_2 = C_1e^t + C_2e^{4t} - \frac{2}{3}te^t - \frac{3}{4}t - \frac{11}{16}$$

Thay vào pt $(2) \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2'}{2} - x_2 - \frac{t}{2}$

$$\Leftrightarrow x_1 = C_2e^{4t} - \frac{1}{2}C_1e^t + \frac{1}{3}e^t(t-1) + \frac{1}{4}t + \frac{41}{24}$$

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

Ví dụ: Giải hpt $\begin{cases} x' = 5x - y + 2t + 1 \\ y' = x + 3y + e^{2t} \end{cases}$

Ta viết lại hpt $\begin{cases} (D-5)x + y = 2t + 1 \quad (1) \\ -x + (D-3)y = e^{2t} \quad (2) \end{cases}$

Lấy *(1)+(D-5)*(2)* để khử x, ta được :

$$\left[1 + (D-3)(D-5)\right] y = 2t + 1 + (D-5)e^{2t}$$

$$\left(D^2 - 8D + 16\right) y = -3e^{2t} + 2t + 1 \quad (3)$$

Viết lại kí hiệu thường $y'' - 8y' + 16y = -3e^{2t} + 2t + 1 \quad (3)$

Và giải pt (3)

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

$$y'' - 8y' + 16y = -3e^{2t} + 2t + 1 \quad (3)$$

$$\to y = C_1 e^{4t} + C_2 t e^{4t} - \frac{3}{4} e^{2t} + \frac{1}{8}(t+1)$$

Thay vào pt (2)

$$x = (D-3)y + e^{2t}$$

$$= (C_1 + C_2)e^{4t} + C_2 t e^{4t} + \frac{7}{4} e^{2t} - \frac{3}{8} t - \frac{1}{4}$$

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

Ví dụ: Giải hpt $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_2' = -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$

Ta viết lại hpt: $\begin{cases} (D-2)x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 & (1) \\ 4x_1 + (D+6)x_2 + 3x_3 = 0 & (2) \\ -3x_1 - 3x_2 + (D-1)x_3 = 0 & (3) \end{cases}$

Khử x_3: (1)+(2) và 3*(3)-(D-1)*(2)

$$\begin{cases} (D+2)x_1 + (D+2)x_2 = 0 \\ (-4(D-1)-9)x_1 + (-(D-1)(D+6)-9)x_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ pt tuyến tính cấp 1 hệ số hằng – PP khử

Hệ trên tương đương với:

$$\begin{cases}(D+2)x_1+(D+2)x_2=0 & (4)\\ (-4D-5)x_1+(-D^2-5D-3)x_2=0 & (5)\end{cases}$$

Khử x_2: $(D^2+5D+3)*(4)+(D+2)*(5)$

$$(D^2+5D+3)(D+2)x_1+(-4D-5)(D+2)x_1=0$$

$$\Leftrightarrow (D^3+3D^2-4)x_1=0 \Leftrightarrow x_1'''+3x_1''-4x_1=0$$

$$\Rightarrow x_1=C_1e^t+C_2e^{-2t}+C_3te^{-2t}$$

Thay vào pt (4) để tìm x_2: $x_2=-C_1e^t+C_4e^{-2t}-C_3te^{-2t}$

Thay vào (1) để tìm x_3: $x_3=C_1e^t-\frac{1}{3}(4C_2+C_3+4C_4)e^{-2t}$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Hệ pt $\dfrac{dX}{dt} = AX + F(t)$

Với A là ma trận thực, vuông chéo được

Tồn tại ma trận S khả nghịch sao cho $A=SDS^{-1}$

Thay vào hpt $\dfrac{dX}{dt} = SDS^{-1}X + F(t)$

$$\Leftrightarrow S^{-1}\frac{dX}{dt} = DS^{-1}X + S^{-1}F(t)$$

Đặt $Y=S^{-1}X \Rightarrow \dfrac{dY}{dt} = S^{-1}\dfrac{dX}{dt}$ Thay vào hpt trên

$\dfrac{dY}{dt} = DY + S^{-1}F(t)$ Đây là n-ptvp cấp 1 riêng biệt

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Ví dụ: Giải hpt $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t^2 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Đặt $Y=S^{-1}X$, ta được hpt:

$$\frac{dY}{dt} = DY + S^{-1}F(t) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + t^2 - 2 \\ y_2' = 3y_2 - t^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\int 2dt}\left(\int (t^2 - 2)e^{-\int 2dt} dt + C_1\right) \\ y_1 = e^{\int 3dt}\left(\int (-t^2 + 4)e^{-\int 3dt} dt + C_2\right) \end{cases}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{4} + C_1e^{2t} \\ y_2 = \dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{4}{9}t - \dfrac{34}{27} + C_2e^{3t} \end{cases}$$

Ta tính $X = SY = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{5}{9}t + \dfrac{17}{54} + 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ x_2 = -\dfrac{5}{6}t^2 + \dfrac{1}{18}t + \dfrac{55}{108} - C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Ví dụ: Giải hpt $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 3x_3 + e^{-2t} \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + e^{-2t} \\ x_3' = 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2t \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ -2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Đặt $Y=S^{-1}X$, *ta được hpt*

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + e^{-2t} + t \\ y_2' = -2y_2 \\ y_3' = 4y_3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ y_2 = C_2 e^{-2t} \\ y_3 = C_3 e^{4t} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{16} \end{cases}$$

Vậy

$$X = SY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2)e^{-2t} + C_3 e^{4t} + \frac{3}{4}t - \frac{3}{16} \\ C_1 e^{-2t} + C_3 e^{4t} + \frac{3}{4}t - \frac{3}{16} \\ -C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{4t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Ví dụ: Giải hpt
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + t^2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - t^2 \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – PP trị riêng vecto riêng

Đặt $Y=S^{-1}X$, *ta được hpt*

$$\begin{cases} y_1' = -t \\ y_2' = 4y_2 + t \\ y_3' = -4y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2}t^2 + C_1 \\ y_2 = C_2e^{4t} - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{16} \\ y_3 = C_3e^{-4t} \end{cases}$$

$$X = SY \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 + C_2e^{4t} + C_2e^{4t} - \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{16} \\ x_2 = C_1 + C_2e^{4t} - C_2e^{4t} - \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{16} \\ x_3 = -C_1 + C_2e^{4t} + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – Bài tập

Giải các hpt sau

$$1.\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 2x + 3y + t \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} x' + y' = 2x + 6y - \cos t \\ y' = x + 3y + \sin t \end{cases}$$

$$4.\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 - 4x_3 + e^t \\ x_2' = 8x_1 - 11x_2 - 8x_3 + 2t \\ x_3' = -8x_1 + 8x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Hệ pt tt cấp 1 hệ số hằng – Bài tập

$$5.\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + t^2 \\ x_2' = 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 2t \\ x_3' = -8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

$$6.\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2t \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 - e^{-2t} \\ x_3' = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$$