

- Đề thi gồm 2 trang A4.
- Thí sinh được dùng các bảng tra số và máy tính bỏ túi.
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu khác.

Câu 1: (1đ)

Có 4 đứa trẻ chơi cờ cá ngựa. Theo thứ tự, chúng lần lượt đổ một con xúc xắc. Ai đổ được mặt lục thì sẽ được ra quân. Tính xác suất đứa trẻ thứ 3 được ra quân trước tiên.

Câu 2: (1đ)

Biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên đoạn $[-1; 3]$. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.

Câu 3: (2đ) Giả sử rằng xác suất để một đứa trẻ sinh ra là trai hay gái đều bằng 0,5 và không phụ thuộc vào các trẻ khác trong gia đình. Ở một vùng, người ta thống kê được như sau:

Số con trong gia đình (n)	0	1	2	3	4
Tỉ lệ % gia đình có n con (trong tổng số các gia đình)	15	20	50	12	3

a) Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong vùng. Tìm xác suất gia đình đó có đúng 2 con gái (có thể có con trai trong gia đình).

b) Chọn ngẫu nhiên một đứa con trong số những đứa trẻ của các gia đình. Tìm xác suất để đứa con ấy thuộc gia đình có đúng 2 con gái đã nhắc đến trong câu a).

Câu 4: (6đ) Dưới đây là những số liệu mẫu thu được khi người ta khảo sát số tiền mà các hộ gia đình trong vùng đã chi tiêu để mua sữa và các sản phẩm từ sữa (gọi chung là các sản phẩm từ sữa). Gọi X là số con trong một gia đình, và Y là số tiền chi tiêu (đơn vị: ngàn đồng) hàng tháng gia đình đó đã dùng để mua các sản phẩm từ sữa.

Bảng 1: Số liệu ghi nhận lại từ năm trước:

Số hộ được khảo sát: 150 hộ.	
Số tiền chi tiêu trung bình của 1 hộ trong 1 tháng: 1150 (ngàn đồng)	
Độ lệch mẫu hiệu chỉnh: 720	
Số hộ có mức chi tiêu thấp (khi $Y < 500$):	40 hộ
Số hộ có mức chi tiêu trung bình (khi $500 \leq Y < 2500$):	100 hộ
Số hộ có mức chi tiêu cao (khi $Y \geq 2500$):	10 hộ

Bảng 2: Số liệu trong năm nay:

$X \backslash Y$	0 – 500	500 – 1500	1500 – 2500	2500 – 3500	Tổng hàng
0	20	13			33
1	18	42	12		72
2	11	49	44	8	112
3		8	15	4	27
4		1	3	2	6
Tổng cột	49	113	74	14	$n = 250$

- Từ Bảng 2, hãy tìm hệ số tương quan giữa X,Y và phương trình đường hồi quy tuyến tính mẫu Y theo X.
- Từ Bảng 2, hãy tìm khoảng ước lượng với độ tin cậy 97% về tỉ lệ hộ có *mức chi tiêu cao* trong những gia đình có 2 đứa con.
- Có thể cho rằng số tiền chi tiêu trung bình hàng tháng cho sản phẩm từ sữa của các hộ trong năm nay đã tăng so với năm trước hay không, xét với mức ý nghĩa 1% ?
- Với mức ý nghĩa 5%, hãy xét xem mức độ chi tiêu với sản phẩm từ sữa (*cao, trung bình, thấp*) của các gia đình có phụ thuộc vào năm làm khảo sát hay không.
- Từ Bảng 2, với mức ý nghĩa 1%, hãy kiểm định xem số con trong một hộ gia đình có tuân theo phân phối Poisson hay không.

GV tổng hợp đề

Chủ nhiệm Bộ môn

Nguyễn Kiều Dung

TS. Nguyễn Tiến Dũng

Phụ lục đề thi theo Chuẩn đầu ra môn học CDIO

Nội dung trên đề thi	Nội dung tương ứng chuẩn đầu ra môn học	
Câu 1	Có khả năng phân tích bài toán xác suất, vận dụng các công thức xác suất để giải.	LO.2.1
Câu 2	Phân tích bài toán, vận dụng tư duy suy luận để tìm thấy mối liên hệ giữa các biến ngẫu nhiên.	LO.2.1
Câu 3a)	Nhận dạng bài toán xác suất, vận dụng kết hợp các công thức để giải bài toán.	LO.2.1
Câu 3b)	Phân tích bài toán rồi vận dụng kết hợp các công thức để giải.	LO.2.1
Câu 4a)	Có kỹ năng sử dụng MTBT và nhớ một số công thức của bài toán hồi quy tuyến tính.	LO.1.1
Câu 4b)	Hiểu khái niệm, nhận dạng bài toán ước lượng và vận dụng công thức, tính toán.	LO.2.1
Câu 4c)	Hiểu khái niệm, nhận dạng bài toán kiểm định tham số và vận dụng công thức, tính toán.	LO.2.1
Câu 4d)	Hiểu khái niệm, nhận dạng bài toán kiểm định phi tham số và vận dụng công thức, tính toán.	LO.2.1
Câu 4e)	Hiểu khái niệm, nhận dạng bài toán kiểm định phi tham số và vận dụng công thức, tính toán.	LO.2.1



ĐÁP ÁN

Câu 1: 1đ Gọi A là biến cố đứa trẻ thứ 3 được ra quân trước.

$$A = \overline{S_1} \overline{S_2} S_3 + \overline{S_1} \overline{S_2} S_3 \overline{S_4} \overline{S_5} \overline{S_6} S_7 + \dots$$

$$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4} = \frac{150}{671} \approx 0,2235$$

Câu 2: 1đ

X có hàm mật độ xác suất: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [-1; 3] \\ \frac{1}{4} & x \in [-1; 3] \end{cases}$

Gọi F_Y là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} 0 & \text{khi } y \leq 0 \\ P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) & \text{khi } y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 < \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < y \leq 1 \\ \frac{1 + \sqrt{y}}{4} & 1 < \sqrt{y} \leq 3 \Leftrightarrow 1 < y \leq 9 \\ 1 & \sqrt{y} > 3 \Leftrightarrow y > 9 \end{cases}$$

Suy ra hàm mật độ xác suất của Y:

$$f_Y(y) = [F_Y(y)]' = \begin{cases} 0 & y \notin (0; 9) \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1 < y < 9 \end{cases}$$

Câu 3: 2 đ

a) (1 đ) Đặt biến cố H_i : chọn ngẫu nhiên được gia đình có i con, $i = 0; 1; \dots; 4$.

A : gia đình đó có đúng 2 con gái.

$$P(A) = \sum_{i=2}^4 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = 0,5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0,12 \times C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 0,03 \times C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{160} = 0,18125$$

b) (1 đ) Cách 1: B : gia đình đứa trẻ có đúng 2 con gái.

T_i : chọn ngẫu nhiên được một đứa trẻ trong gia đình có i con, $i = 1; \dots; 4$.

$$P(T_2) = \frac{0,5 \times 2}{0,2 \times 1 + 0,5 \times 2 + 0,12 \times 3 + 0,03 \times 4} = \frac{25}{42}$$

$$P(T_3) = \frac{0,12 \times 3}{0,2 \times 1 + 0,5 \times 2 + 0,12 \times 3 + 0,03 \times 4} = \frac{3}{14}$$

$$P(T_4) = \frac{0,03 \times 4}{0,2 \times 1 + 0,5 \times 2 + 0,12 \times 3 + 0,03 \times 4} = \frac{1}{14}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(T_i) \cdot P(B/T_i) = \frac{25}{42} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{14} \times C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{14} \times C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{43}{168} = 0,25595$$

Cách 2: ...

$$\frac{2 \times 50\% \times 0,5^2 + 3 \times 12\% \times C_3^2 \times 0,5^3 + 4 \times 3\% \times C_4^2 \times 0,5^4}{0 \times 15\% + 1 \times 20\% + 2 \times 50\% \times 0,5^2 + 3 \times 12\% \times C_3^2 \times 0,5^3 + 4 \times 3\% \times C_4^2 \times 0,5^4} = \frac{43}{168} = 0,25595$$

Cách 3: Không mất tính tổng quát, giả sử ta có 100 hộ với tỉ lệ các gia đình có i con như trong đề.

Câu 4: 6 đ

a) (1 đ) $n=250$.

$$R_{XY} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_X \times s_Y} = \frac{2400 - 1,604 \times 1261}{0,9291 \times 749,7526} = 0,5417$$

$$B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_X^2} = 437,1675 \quad A = \bar{y} - B\bar{x} = 559,7833$$

PT đường HQT mẫu: $y = A + Bx = 559,7833 + 437,1675x$

b) (1 đ) Gọi p là tỉ lệ hộ có mức chi tiêu cao trong các gia đình có 2 con.

$$n=112. f = 8/112.$$

KUL cho p là :

$$f \pm \frac{z_{\alpha} \sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} = \frac{8}{112} \pm \frac{2,17 \times \sqrt{\frac{8}{112} \times \frac{104}{112}}}{\sqrt{112}} = 0,0714 \pm 0,0528 = (0,0186; 0,1242)$$

c) (1,5 đ) Gọi a_1 là mức chi tiêu trung bình (/1 tháng) của 1 hộ gia đình trong năm trước.

Gọi a_2 là mức chi tiêu trung bình (/1 tháng) của 1 hộ gia đình trong năm nay.

$$n_1 = 150; \bar{y}_1 = 1150; s_1 = 720$$

$$n_2 = 250; \bar{y}_2 = 1261; s_2 = 751,2566$$

C1: Gtđ Ho: $a_1 = a_2$

Giả thiết đối $H_1: a_1 < a_2$

Mbb ($-\infty; -2,33$)

$$T_{\text{ckđ}}: z_{qs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = -1,4685 \notin \text{Mbb} . \text{ Chưa bác bỏ được Ho.}$$

Chưa thể kết luận mức chi tiêu trung bình của các hộ đã tăng.

C2: Gtđ Ho: $a_1 = a_2$

Giả thiết đối $H_1: a_1 \neq a_2$

$$Z_{\alpha} = 2,58$$

Tính Z_{qs} (như C1)

$$|Z_{qs}| = 1,4685 < Z_{\alpha}, \text{ ta chưa bác bỏ được Ho}$$

Xem như mức chi tiêu trung bình của các hộ là không thay đổi.

d) (1 đ) H_0 : mức độ chi tiêu của các hộ độc lập với năm làm khảo sát.

H_1 : mức độ chi tiêu của các hộ phụ thuộc vào năm làm khảo sát.

Mbb (5,99; $+\infty$)

Bảng tần số thực nghiệm:

40	100	10	150
49	187	14	250
	89	287	24
			400

Bảng tần số lý thuyết:

33,375	107,625	9
55,625	179,375	15

$$\chi_{qs}^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 3,1462 \notin Mbb \quad . \text{Chấp nhận } H_0.$$

e) (1,5 đ)

H_0 : mẫu phù hợp với phân phối Poisson với $\lambda \approx \bar{x} \approx 1,604$

H_1 : mẫu không phù hợp với phân phối Poisson.

Miền bác bỏ: $W_\alpha = (11,34; +\infty)$. $n = 250$.

Công thức tính p_i : $p_i = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^i}{i!} \quad i=0,1,2,3,4$.

P_i	0,2011	0,3225	0,2587	0,1383	0,0555
$E_i = n \cdot p_i$	50,273	80,637	64,671	34,577	13,866

Tiêu chuẩn kđ: $\chi_0^2 = \sum_{i=0}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 47,6193 \in W_\alpha \Rightarrow$ Bác bỏ được H_0 .

Mẫu không phù hợp với phân phối Poisson.