CHƯƠNG 1:

HÀM NHIỀU BIẾN

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Functions of several variables

NỘI DUNG:

- 1. Định nghĩa hàm nhiều biến
- 2. Đạo hàm riêng hàm nhiều biến
- 3. Vi phân hàm nhiều biến
- 4. Đạo hàm theo hướng – vector gradient
- 5. Đạo hàm riêng hàm hợp
- 6. Đạo hàm hàm ẩn
- 7. Công thức Taylor
- 8. Cực trị tự do
- 9. Giá trị lớn nhất – Giá trị bé nhất trên miền bị đóng và bị chặn

HÀM NHIỀU BIẾN

Hàm nhiều biến f là một quy luật biến mỗi điểm X của miền $D \subset R_n$ thành một số thực duy nhất $f(X)$.

$$f : D \subset R_n \longrightarrow R$$

D gọi là miền xác định của f.

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$$

1. $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

2. $z = f(x, y) = x^y$

3. $z = f(x, y) = \sqrt{\dfrac{xy}{x^2 + y^2}}$

4. $z = f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x + y + 1}{1 - x}}$

Ví dụ 1:

Một công ty chuyên sản xuất hộp giấy với 3 kích cỡ khác nhau: nhỏ, vừa, lớn. Chi phí sản xuất một hộp giấy nhỏ, vừa, lớn tương ứng là 2.5 ; 4 ; 4.5 dollar. Chi phí sản xuất cố dịnh là 8000 dollar.

a. Hãy biểu diễn tổng chi phí sản xuất x hôp giấy nhỏ, y hộp giấy vừa và z hộp giấy lớn như một hàm ba biến:

$$C = f(x, y, z)$$

b. Tìm $f(3000; 5000; 4000)$ và cho biết ý nghĩa của nó.

c. Tìm miền xác định của f.

Ví dụ 2:

Một công ty sản xuất hai loại nước giải khát. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra rằng: nếu giá bán của nước giải khát loại 1 là x và nước giải khát loại 2 là y thì nhu cầu nước giải khát loại 1 là $D_1(x, y) = 200 - 10x + 20y$ lít mỗi tháng và nhu cầu của nước giải khát loại 2 là $D_2(x, y) = 100 + 5x - 10y$ lít mỗi tháng.

a. Mô tả doanh thu hàng tháng của công ty từ hai loại nước giải khát trên như hàm của hai biến x và y.
b. Tìm miền xác định của hàm doanh thu.
c. Tính doanh thu của công ty nếu công ty bán với giá của nước giải khát loại 1 là 6 dollar/lit và loại 2 là 5 dollar/lit.

Các cách biểu diễn hàm nhiều biến

1. Bằng lời (bằng cách mô tả bằng lời)
2. Bằng số (bằng bảng các giá trị)
3. Mô tả công thức tường minh
4. Bằng thị giác (bằng đồ thị hay các đường mức)

Ví dụ 1

Ở vùng có thời tiết mùa đông khắc nghiệt, *chỉ số lạnh do gió* (*wind-chill index*) thường được sử dụng để mô tả độ khắc nghiệt của cái lạnh, ký hiệu W, chỉ số W này là nhiệt độ chủ quan phụ thuộc vào nhiệt độ thực tế T và tốc độ gió v và ta có thể viết $W=f(T,v)$. Bảng sau ghi các giá trị W được thu thập bởi trung tâm khí tượng quốc gia Mỹ và Canada.

Bảng số liệu 1

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Nếu nhiệt độ là -5 độ và tốc độ 50 km/h thì một ta cảm thấy lạnh như khoảng -15 độ:

$f(-5,50)=-15$

Ví dụ : Mô hình hóa sự tăng trưởng kinh tế Mỹ

Vào năm 1928, Charles Cobb và Paul Douglas đã đưa ra một nghiên cứu về sự tăng trưởng của nền kinh tế Mỹ 1899-1922. Họ đã xét quan điểm kinh tế được đơn giản hóa mà trong đó sản lượng P được quyết định bởi lượng công nhân *L* và lượng vốn đầu tư *K*. Mặc dù có nhiều yếu tố khác ảnh hưởng đến hiệu quả kinh tế nhưng mô hình của họ đã chứng tỏ là rất chính xác. Hàm số mà họ sử sụng để mô hình hóa có dạng

$$P(K,L) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

P: giá trị quy ra tiền của hàng hóa trong năm

L: tổng số giờ lv của công dân trong năm

K: giá trị máy móc, thiết bị

Bảng số liệu

Cobb và Douglas đã sử dụng dữ liệu kinh tế được phát hành bởi chính phủ để có bảng số liệu bên.

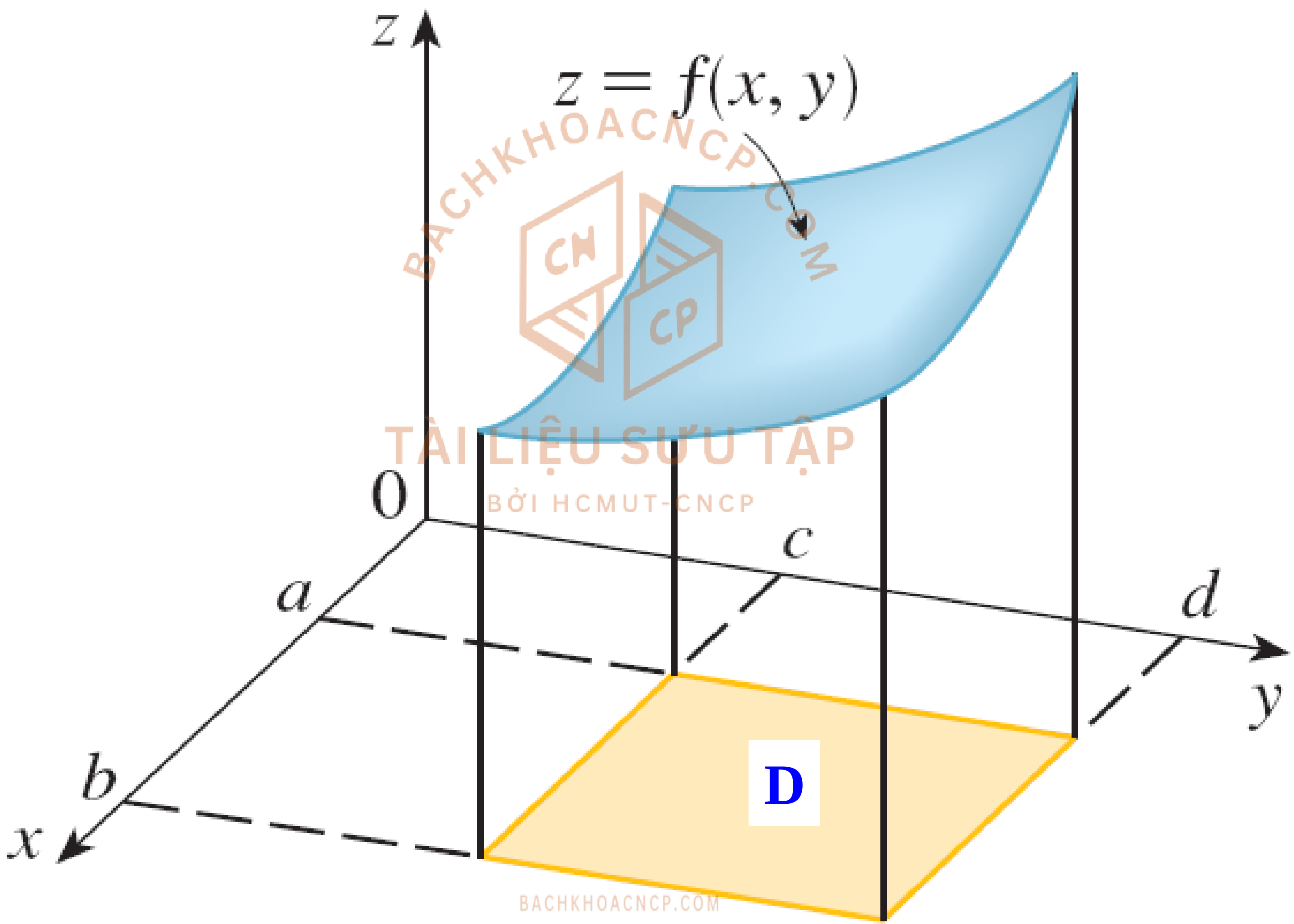
Dùng pp bình phương bé nhất để là bảng dữ liệu phù hợp với hàm số

$$P(K,L) = 1.01 \quad L^{0.75} K^{0.25}$$

Year	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA HÀM 2 BIẾN

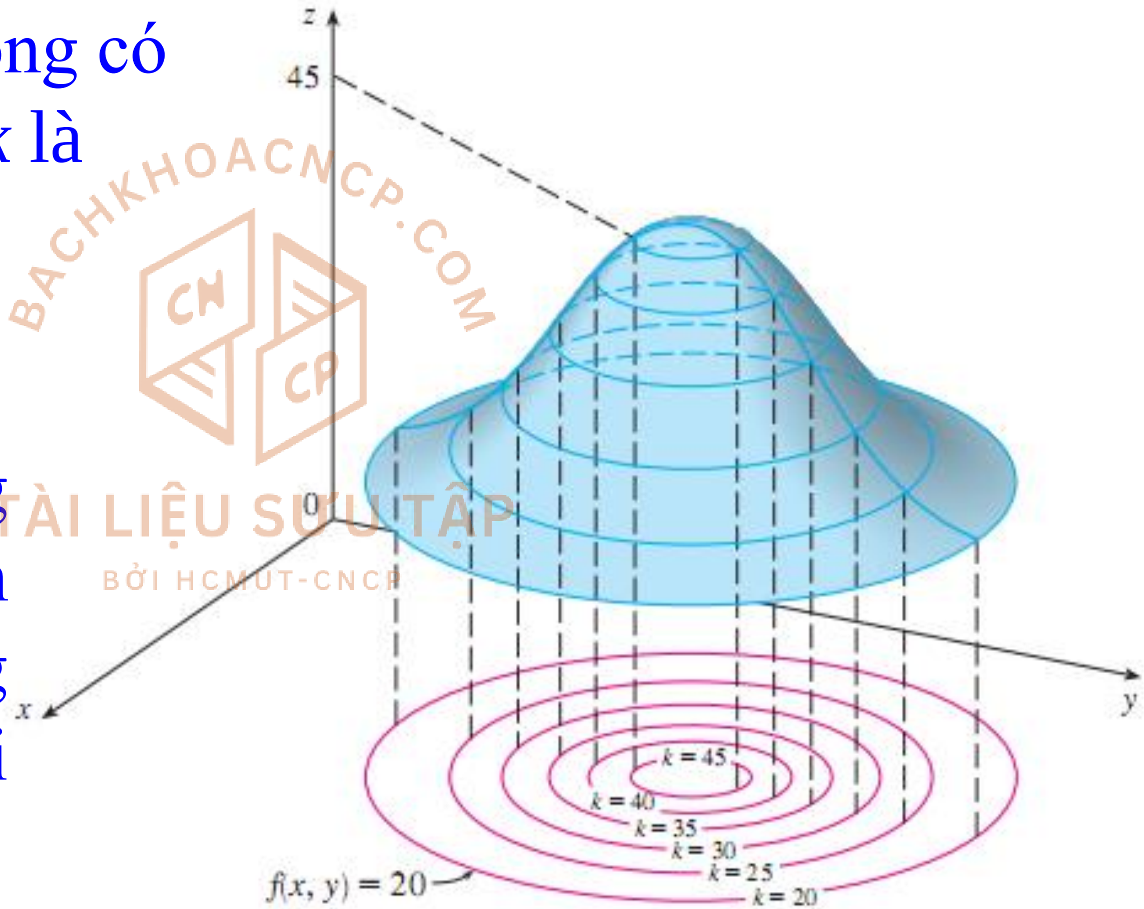
Hàm số $z = f(x, y)$ biểu diễn một mặt cong trong không gian.

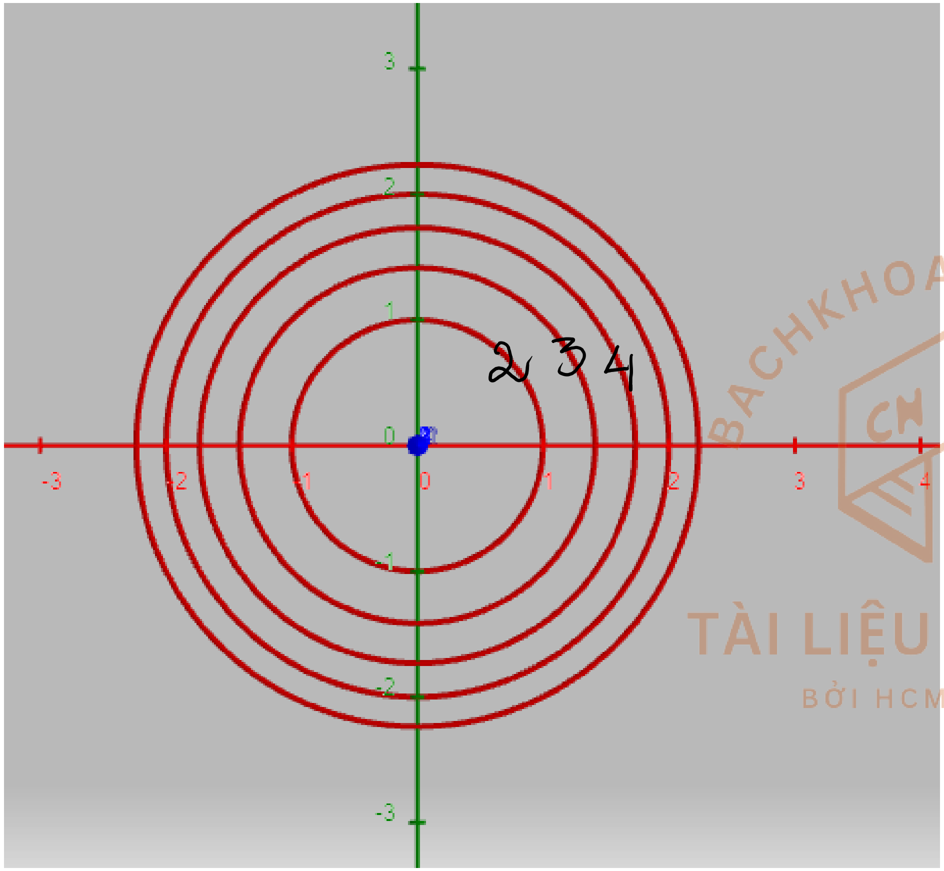


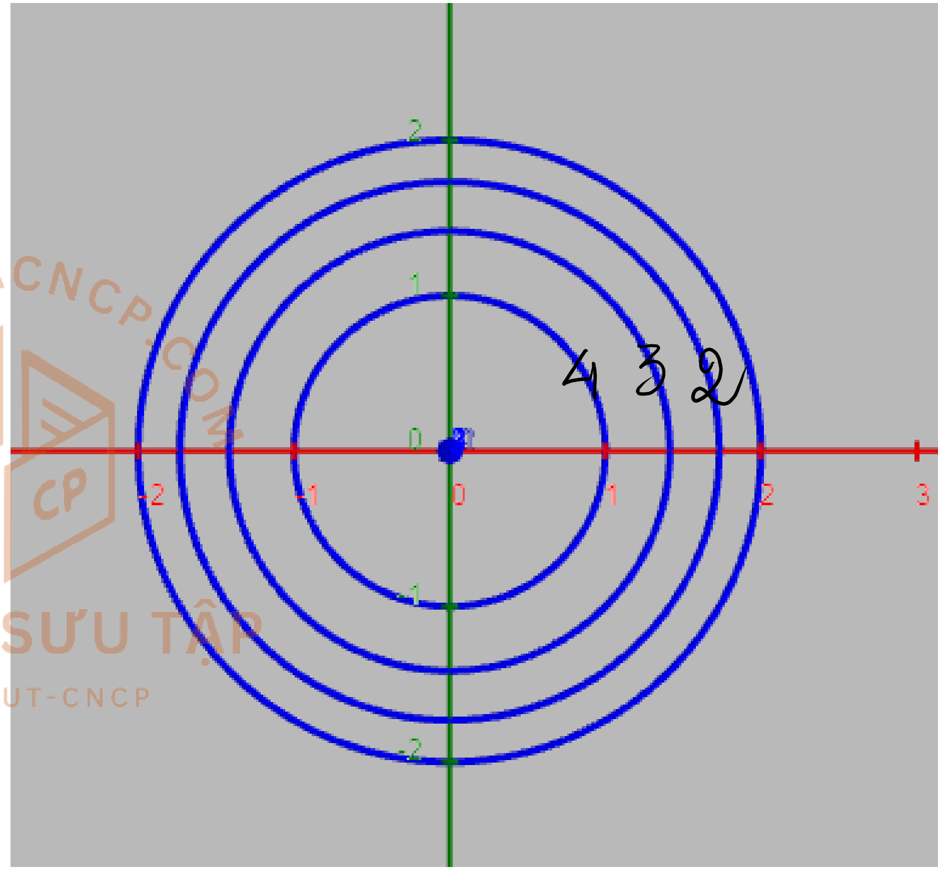
Biểu diễn hàm hai biến qua đường mức

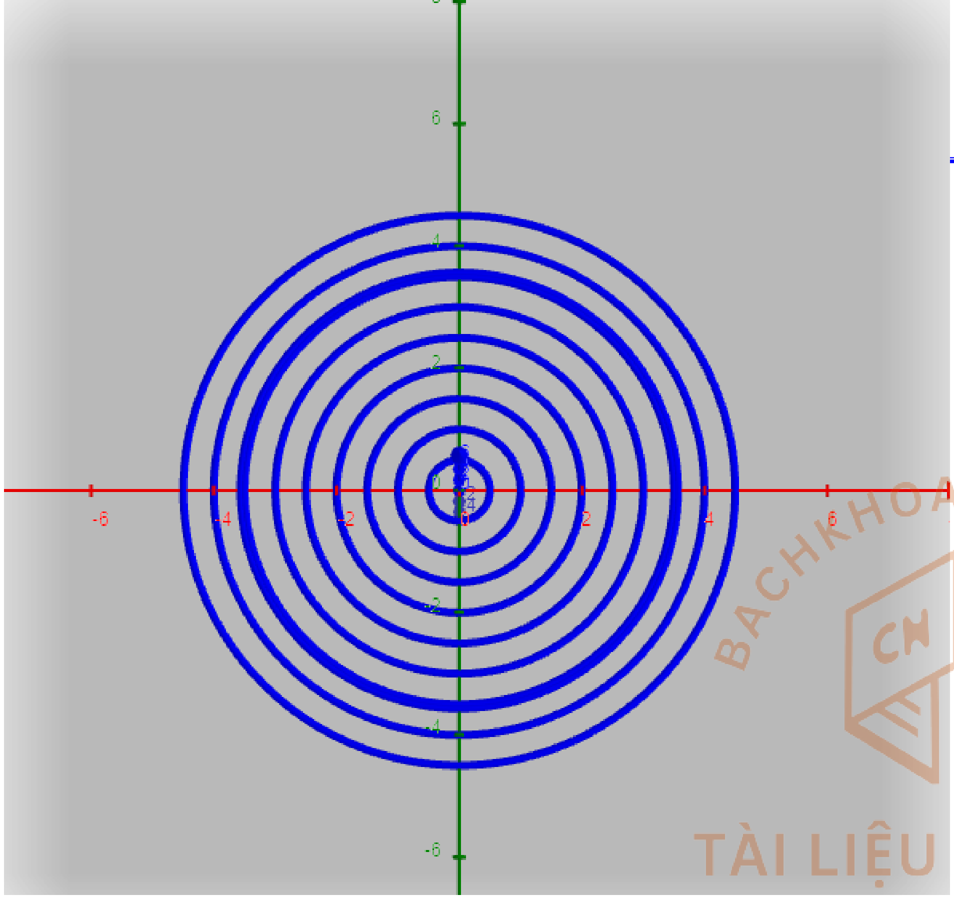
Đường mức của hàm hai biến f là các đường cong có pt: $f(x,y)=k$, trong đó k là hằng số.

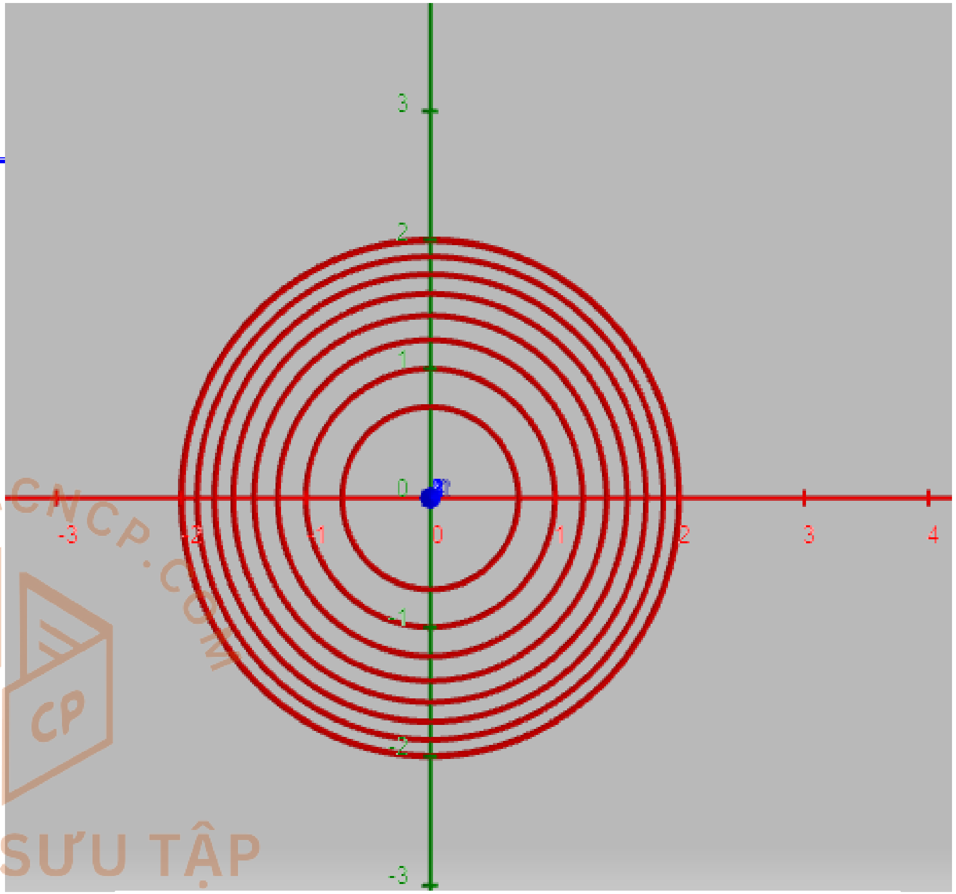
Tập hợp các đường mức được gọi là bản đồ mức (các đường mức tương ứng với từng độ cao)




2 3 4


4 3 2





Bản đồ mức của hàm
$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Bản đồ mức của hàm
$f(x,y) = x^2 + y^2$

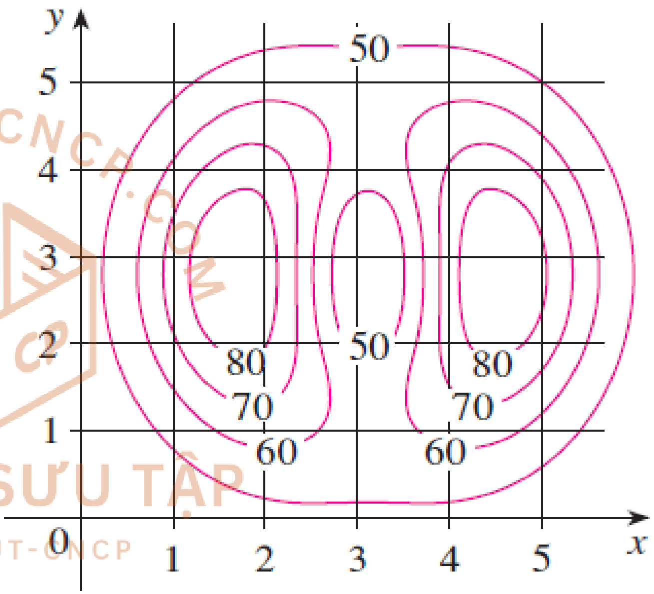
Dựa vào bản đồ mức cho ta biết độ dốc của vật thể: Nếu khoảng cách của 2 đường mức liên tiếp trên bản đồ mức ngày càng hẹp dần thì độ dốc tăng dần.

Link tham khảo

https://www.youtube.com/watch?v=604maRE7uw0

Đường Mức

Ví dụ 4: Bảng đồ đường mức của Hình 4 để ước tính các giá trị của f(1,3)~73, f(4,5)~56



Hình 4

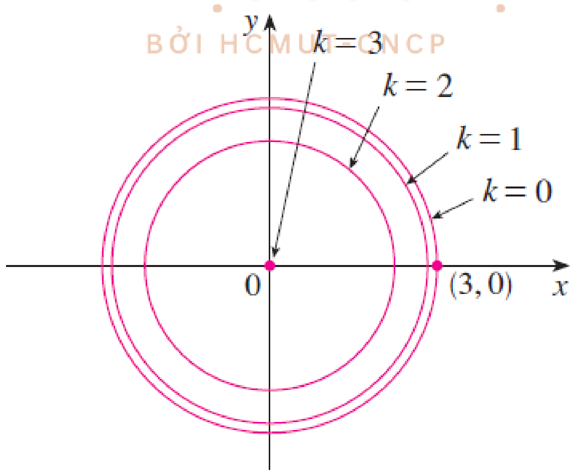
Ví dụ 5: Vẽ các đường mức của hàm số

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Với k=0, 1, 2, 3

Giải

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

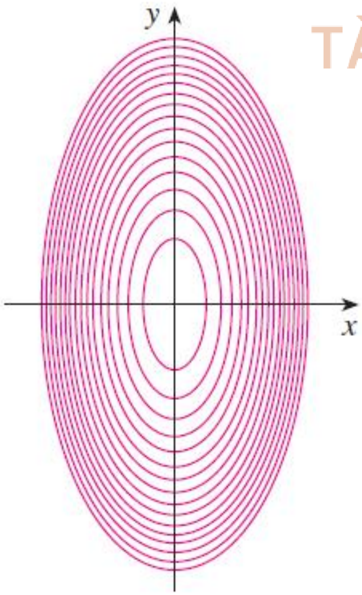


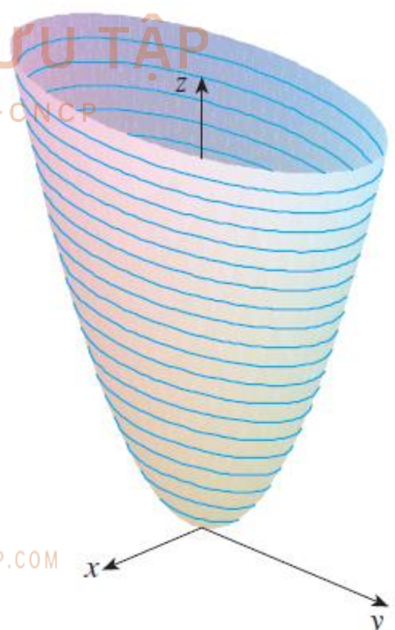
Vẽ một vài đường mức của hàm

$$h(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$$

Giải

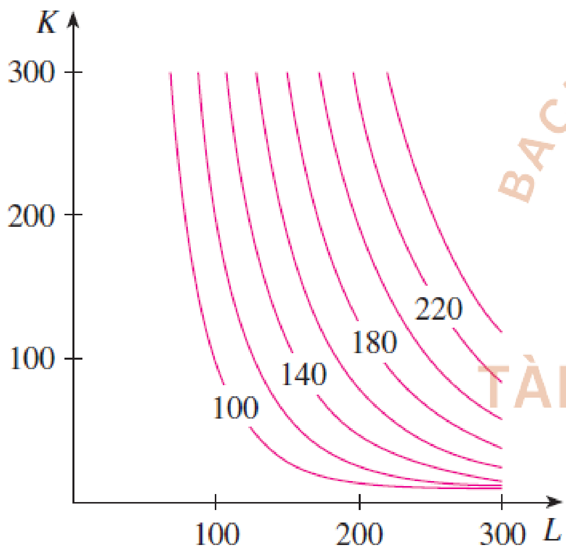
$$4x^2 + y^2 + 1 = k \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

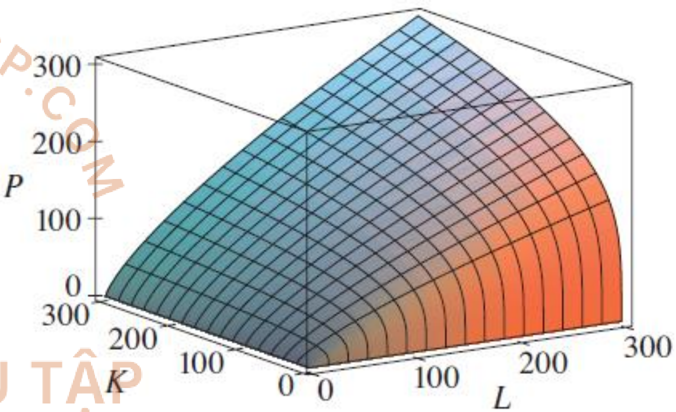




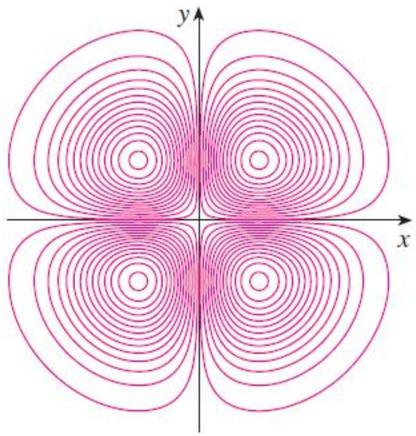
Vẽ đường mức của hàm Cobb-Douglas ở VD 3

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

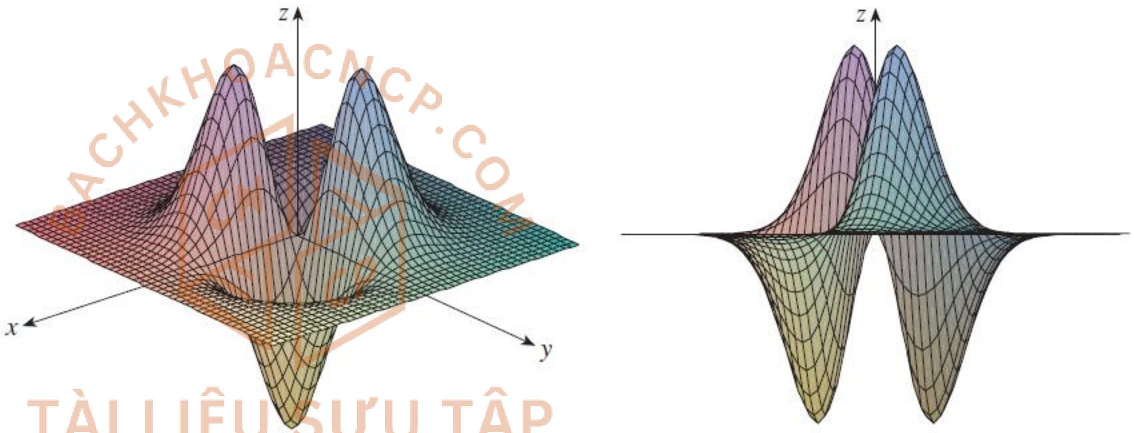




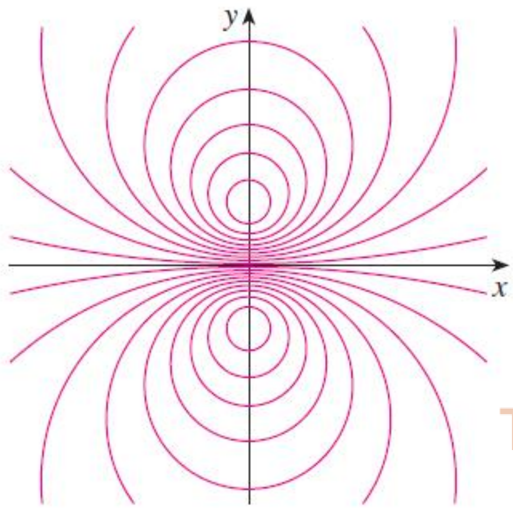
Ví dụ về đồ thị và đường mức của hàm số



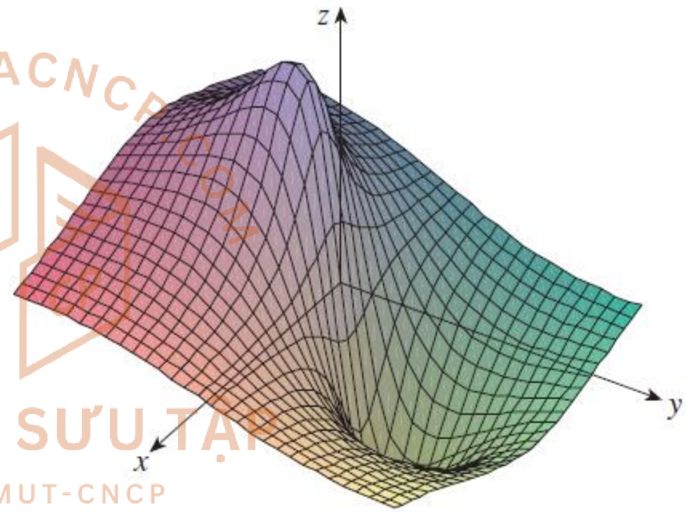
(a) Level curves of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Two views of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

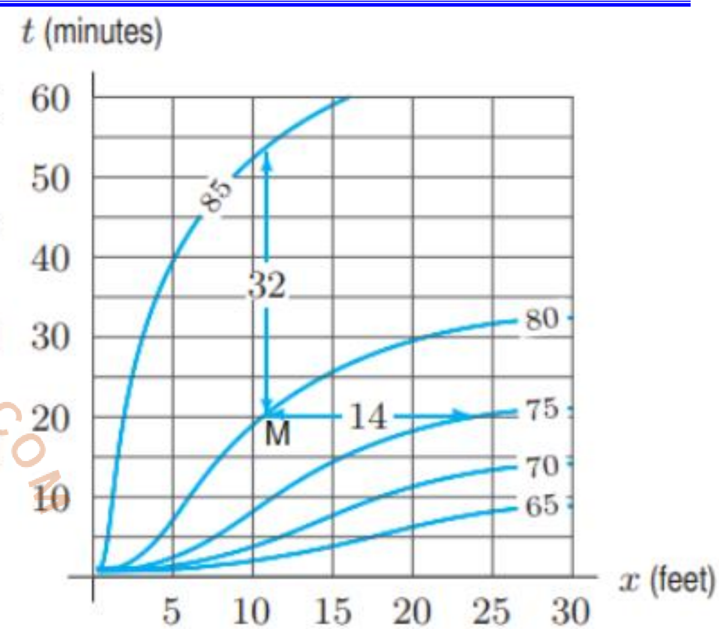


(c) Level curves of $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Hình dưới cho thấy bản đồ đường mức cho nhiệt độ H ($^\circ F$) trong phòng dưới dạng hàm theo khoảng cách x (feet) từ lò sưởi và thời gian t (phút) sau khi bật lò sưởi . Xác định dấu của 2 đạo hàm riêng (đhr) H'_x, H'_t tại điểm M trên hình vẽ.



GIỚI HẠN HÀM 2 BIẾN

Cho *f (x, y), (x,y)∈ D, f hội tụ về a khi (x, y)→ (x₀, y₀)*

nếu:

$$\forall (x_n, y_n) \in D, (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0):$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a$$

Cách viết giới hạn:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

Lưu ý: *không lấy giới hạn theo x trước, y sau hoặc ngược lại.*

HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ TÍNH CHẤT

$f(x, y)$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$ nếu : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Những tính chất quan trọng của hàm số liên tục

• Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định,

• f liên tục trên tập A đóng và bị chặn thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A.

Lưu ý: mọi phát biểu trên không gian n chiều cũng tương tự trên không gian 2 chiều.

Ví dụ

$$1/\ f(x,y)=x,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=x_0,$$

Vì $D = R_2$ và $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow x_n \to x_0,\ \ y_n \to y_0$

$\Rightarrow f(x_n, y_n) = x_n \to x_0, \forall (x_n, y_n)$

Vậy

$$f(x,y)=y,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=y_0,$$

Ví dụ

$$2/\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x+y}{\ln(x+y)} = \frac{2}{\ln 2},$$

Lấy $(x_n, y_n) \to (1,1)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{\ln(x_n + y_n)} \to \frac{2}{\ln 2}$$

Một số lưu ý trong tính giới hạn

• Các phép toán và tính chất của giới hạn hàm 1 biến vẫn còn đúng cho hàm nhiều biến(tổng, hiệu, tích , thương, giới hạn kẹp,….)

• Thay tương đương VCB, VCL, khai triển Taylor, qtắc L'Hospitale chỉ áp dụng nếu chuyển được sang hàm 1 biến.

• Để ý dạng vô định khi tính giới hạn.

$$3/\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{xy-2x-y+2}{x-1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (y-2) = -1$$

$$4/\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{\ln(1+xy)}$$

$$=\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{1+u}-1}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{u}{2}}{u} = \frac{1}{2}$$

$$5/\ f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Không có ghạn khi (x,y)→ (0, 0)

Chọn 2 dãy điểm:

$$X_n=(0,\frac{1}{n})\to(0,0),Y_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$$

nhưng

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n)=0\neq\lim_{n\to\infty} f(Y_n)=\frac{1}{2}$$

$$6/\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\xrightarrow[\substack{x\to0\\y\to0}]{}0$$

vì $\quad 0\le|f(x,y)|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}$

$$\le\frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2}$$

$$=|y|\xrightarrow[\substack{x\to0\\y\to0}]{}0$$

nên $\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|f(x,y)|=0$