GIẢI ÔN TẬP CUỐI KỲ MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Bài giảng điện tử

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2014.

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 2x^2 + \cos x - 10 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1, 2]$. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

Kết quả. $x_2 \approx$ ____________________; $\Delta x_2 \approx$ ____________________

Giải.

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) = e^x + 4x - \sin x > 0, \forall x \in [1, 2]$ và $f''(x) = e^x + 4 - \cos x > 0, \forall x \in [1, 2]$ nên chọn $x_0 = 2$. Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2x_{n-1}^2 + \cos x_{n-1} - 10}{e^{x_{n-1}} + 4x_{n-1} - \sin x_{n-1}}$$

Tìm $\min\{|f'(1)|, |f'(2)|\}$. **Bấm máy.** Shift-$\dfrac{d}{dx}$ chọn $X = 1$ và $X = 2$. So sánh $|f'(1)|, |f'(2)|$. Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = |f'(1)| = m$. Shift-STO-A. Do đó sai số của nghiệm gần đúng x_n và nghiệm chính xác $\overline{x}$ là

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n} + 2x_n^2 + \cos x_n - 10|}{m} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.656561316	
2	1.597323235	0.002748308

Bấm máy. Tính x_n

$$X - \frac{e^X + 2X^2 + \cos X - 10}{e^X + 4X - \sin X}$$

CALC $x = 2 \Rightarrow x_1$
CALC Ans $\Rightarrow x_2$
Sai số

$$\frac{abs(e^X + 2X^2 + \cos X - 10)}{A}$$

CALC Ans $\Rightarrow \Delta x_2$
Kết quả. $x_2 \approx$ 1.5973; $\Delta x_2 \approx$ 0.0028

Câu 2. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{10 - 2x}$. Sử dụng phương pháp lặp đơn, tìm chỉ số n nhỏ nhất để $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-10}$ biết $x_0 = 2$

Kết quả. $n =$ ________________

Giải. $x = \sqrt[3]{10 - 2x} = g(x)$. Chọn $x_0 = 2$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = g(x_{n-1}) = \sqrt[3]{10 - 2x_{n-1}}$.

Tiếp tục quá trình như vậy đến khi n thỏa $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-10}$

Bấm máy. $D = D + 1 : A = \sqrt[3]{10 - 2B} : |A - B| - 10^{-10} : B = A$, CALC D?=0, B?=2, trong đó D là biến đếm n. Bấm đến khi nào

$|x_n - x_{n-1}| - 10^{-10} < 0$ có nghĩa là $|A - B| - 10^{-10} < 0$.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert - 10^{-10}$
0	2	
1	1.817120593	0.1828794071
2	1.853318496	0.03619790318
3	1.846265953	$7.052542708 \times 10^{-3}$
4	1.847644247	$1.378293616 \times 10^{-3}$
5	1.847375046	$2.692011592 \times 10^{-4}$
6	1.847427631	$5.258507458 \times 10^{-5}$
7	1.847417359	$1.027153565 \times 10^{-5}$
8	1.847419366	$2.00630146 \times 10^{-6}$
9	1.847418974	3.9181843×10^{-7}
10	1.84741905	7.645501×10^{-8}
11	1.847419035	1.48538×10^{-8}
12	1.847419038	2.82099×10^{-9}
13	1.847419038	4.7057×10^{-10}
14	1.847419038	1.145×10^{-11}
15	1.847419038	-7.823×10^{-11}

Kết quả. $n =$ 15

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{cases}$. Sử dụng phân tích $A = LU$ theo Doolittle, tính ℓ_{32}, u_{33} và nghiệm x_3

Kết quả. $\ell_{32} =$ ________; $u_{33} =$ ________; $x_3 =$ ________

$1.u_{11} + 0.0 + 0.0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2$;

$1.u_{12} + 0.u_{22} + 0.0 = a_{12} = 2 \Rightarrow u_{12} = 2$;

$1.u_{13} + 0.u_{23} + 0.u_{33} = a_{13} = -3 \Rightarrow u_{13} = -3$.

$\ell_{21}.u_{11} + 1.0 + 0.0 = a_{21} = -4 \Rightarrow \ell_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} = \dfrac{-4}{2} = -2$;

$\ell_{21}.u_{12} + 1.u_{22} + 0.0 = a_{22} = -3 \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \ell_{21}.u_{12} = -3 - (-2) \times 2 = 1$;

$\ell_{21}.u_{13} + 1.u_{23} + 0.u_{33} = a_{23} = 4 \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \ell_{21}.u_{13} = 4 - (-2) \times (-3) = -2$;

$\ell_{31}.u_{11} + \ell_{31}.0 + 1.0 = a_{31} = 2 \Rightarrow \ell_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1$;

$\ell_{31}.u_{12} + \ell_{32}.u_{22} + 1.0 = a_{32} = 1 \Rightarrow \ell_{32} = \dfrac{a_{32} - \ell_{31}.u_{12}}{u_{22}} = \dfrac{1 - 1 \times 2}{1} = -1$;

$\ell_{31}.u_{13} + \ell_{32}.u_{23} + 1.u_{33} = a_{33} = 2 \Rightarrow u_{33} = a_{33} - \ell_{31}.u_{13} - \ell_{32}.u_{23} = 2 - 1 \times (-3) - (-1) \times (-2) = 3$;

Do đó $LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Y = L^{-1}B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = U^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hoặc bấm máy giải hệ 3 phương trình 3 ẩn số vì phương pháp LU là phương pháp giải nghiệm chính xác.

Kết quả. $\ell_{32} =$ ____ -1 ____; $u_{33} =$ ____ 3 ____; $x_3 =$ ____ -1 ____

Câu 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 14.3x_1 + 1.73x_2 - 1.85x_3 = 12.891 \\ 1.34x_1 + 16.5x_2 - 3.24x_3 = 15.731 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 18.7x_3 = 18.421 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp Jacobi, với $x^{(0)} = (1.5, 0.3, 3.4)^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$

Kết quả. $x_1^{(3)} \approx$ ________; $x_2^{(3)} \approx$ ________; $x_3^{(3)} \approx$ ________

Giải.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{14.3}(12.891 - 1.73x_2 + 1.85x_3) \\ \quad = \frac{12.89}{14.3} - \frac{1.73}{14.3}x_2 + \frac{1.85}{14.3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{16.5}(15.731 - 1.34x_1 + 3.24x_3) \\ \quad = \frac{15.731}{16.5} - \frac{1.34}{16.5}x_1 + \frac{3.24}{16.5}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{18.7}(18.421 - 1.18x_1 + 4.87x_2) \\ \quad = \frac{18.421}{18.7} - \frac{1.18}{18.7}x_1 + \frac{4.87}{18.7}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12.89}{14.3} \\ \frac{15.731}{16.5} \\ \frac{18.421}{18.7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1.73}{14.3} & \frac{1.85}{14.3} \\ -\frac{1.34}{16.5} & 0 & \frac{3.24}{16.5} \\ -\frac{1.18}{18.7} & \frac{4.87}{18.7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Khi đó công thức lặp có dạng

$$X^{(m)} = T_j X^{(m-1)} + C_j, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Chọn $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.3 \\ 3.4 \end{pmatrix}$ tính $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$

$$MatA = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1.73}{14.3} & \frac{1.85}{14.3} \\ -\frac{1.34}{16.5} & 0 & \frac{3.24}{16.5} \\ -\frac{1.18}{18.7} & \frac{4.87}{18.7} & 0 \end{pmatrix}, MatB = \begin{pmatrix} \frac{12.89}{14.3} \\ \frac{15.731}{16.5} \\ \frac{18.421}{18.7} \end{pmatrix},$$

$$MatC = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.3 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

Bấm máy. Mode - 6 -Matrix.

Dim - MatA - 3 $\times$ 3- AC

Shift 4 - Dim - MatB - 3 $\times$ 1 - AC

Shift 4 - Dim - MatC - 3 $\times$ 1 - AC

Shift 4 - MatB+MatA*MatC= $\Rightarrow x^{(1)}$ - AC

Shift 4 - MatB+MatA*MatAns= $\Rightarrow x^{(2)}$ - AC

Shift 4 - MatB+MatA*MatAns= $\Rightarrow x^{(3)}$ - AC

Kết quả. $x_1^{(3)} \approx \underline{0.9432}$; $x_2^{(3)} \approx \underline{1.1387}$; $x_3^{(3)} \approx \underline{1.2020}$

Cách 2

Bấm máy.

$X = (12.891 - 1.73B + 1.85C) \div 14.3 : Y = (15.731 - 1.34A + 3.24C) \div 16.5 :$

$$C = (18.421 - 1.18A + 4.87B) \div 18.7 : A = X : B = Y$$

CALC B=0.3, C=3.4, A=1.5
Nhấn tiếp dấu "=" cho tới nghiệm $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}$
Kết quả. $x_1^{(3)} \approx \underline{0.9432}$; $x_2^{(3)} \approx \underline{1.1387}$; $x_3^{(3)} \approx \underline{1.2020}$

Câu 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 34x_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 29x_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 32.6x_3 = 18.42 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, với $x^{(0)} = (0.1, 0.3, 0.4)^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$.

Kết quả. $x_1^{(3)} \approx$ ________; $x_2^{(3)} \approx$ ________; $x_3^{(3)} \approx$ ________

Bấm máy. 0.1 Shift-STO-A, 0.3 Shift-STO-B, 0.4 Shift-STO-C,

$\dfrac{12.89 - 2.73B + 1.85C}{34}$ Shift-STO-A.

$\dfrac{15.73 - 1.34A + 3.24C}{29}$ Shift-STO-B.

$\dfrac{18.42 - 1.18A + 4.87B}{32.6}$ Shift-STO-C.

Thực hiện liên tiếp thêm 2 lần nữa để được $x^{(3)}$.

Kết quả. $x_1^{(3)} \approx \underline{0.3661}$; $x_2^{(3)} \approx \underline{0.5971}$; $x_3^{(3)} \approx \underline{0.6410}$

Cách 2

Bấm máy.
$A = (12.89 - 2.73B + 1.85C) \div 34$:
$B = (15.73 - 1.34A + 3.24C) \div 29$:
$C = (18.42 - 1.18A + 4.87B) \div 32.6$
CALC B=0.3, C=0.4. (không nhập A)
Nhấn tiếp dấu "=" cho tới nghiệm $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}$
Kết quả. $x_1^{(3)} \approx \underline{0.3661}$; $x_2^{(3)} \approx \underline{0.5971}$; $x_3^{(3)} \approx \underline{0.6410}$

Câu 6. Cho bảng số

x	1.3	1.7	2.3	2.7
y	1.2	8.6	4.7	6.6

.Sử dụng Spline bậc ba tự nhiên $g(x)$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.4$ và $x = 2.5$.

Kết quả. $g(1.4) \approx$ ______________ ; $g(2.5) \approx$ ______________

$n = 3, h_0 = 1.7 - 1.3 = 0.4; h_1 = 2.3 - 1.7 = 0.6; h_2 = 2.7 - 2.3 = 0.4.$

Do là spline bậc ba tự nhiên nên $c_0 = c_3 = 0$. Hệ số c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(h_0 + h_1).c_1 + h_1.c_2 = 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ h_1.c_1 + 2(h_1 + h_2).c_2 = 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.c_1 + 0.6.c_2 = -75 \\ 0.6.c_1 + 2.c_2 = \dfrac{135}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{17025}{364} \\ c_2 = \dfrac{5625}{182} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 1.2 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \dfrac{2251}{91} \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = -\dfrac{28375}{728}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 8.6 \\ b_1 &= \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \dfrac{1097}{182} \\ d_1 &= \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = \dfrac{3625}{84}, \end{cases}$$

Khi $k = 2$ ta có

$$\begin{cases} a_2 &= y_2 = 4.7 \\ b_2 &= \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = -\dfrac{1271}{364} \\ d_2 &= \dfrac{c_3 - c_2}{3h_2} = -\dfrac{9375}{364}, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba tự nhiên cần tìm là $g(x) =$

$$\begin{cases} 1.2 + \dfrac{2251}{91}(x - 1.3) - \dfrac{28375}{728}(x - 1.3)^3, x \in [1.3, 1.7] \\ 8.6 + \dfrac{1097}{182}(x - 1.7) - \dfrac{17025}{364}(x - 1.7)^2 + \dfrac{3625}{84}(x - 1.7)^3, x \in [1.7, 2.3] \\ 4.7 - \dfrac{1271}{364}(x - 2.3) + \dfrac{5625}{182}(x - 2.3)^2 - \dfrac{9375}{364}(x - 2.3)^3, x \in [2.3, 2.7] \end{cases}$$

Kết quả. $g(1.4) \approx$ 3.6346 ; $g(2.5) \approx$ 5.0319

Câu 7. Cho bảng số

x	1.1	1.6	2.1
y	2.2	5.3	6.6

.Sử dụng Spline bậc ba $g(x)$ thỏa điều kiện $g'(1.1) = 0.2$ và $g'(2.1) = 0.5$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.4$ và $x = 1.9$.

Kết quả. $g(1.4) \approx$ ____________________ ; $g(1.9) \approx$ ____________________

$n = 2, h_0 = 1.6 - 1.1 = 0.5; h_1 = 2.1 - 1.6 = 0.5; \alpha = 0.2; \beta = 0.5$. Hệ số c_0, c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.c_0 + 0.5c_1 + 0.c_2 &= 18 \\ 0.5c_0 + 2c_1 + 0.5c_2 &= -\frac{54}{5} \\ 0.c_0 + 0.5c_1 + 1.c_2 &= -\frac{63}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 &= \frac{471}{20} \\ c_1 &= -\frac{111}{10} \\ c_2 &= -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 2.2 \\ b_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \frac{1}{5} \\ d_0 &= \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = -\frac{231}{10}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 5.3 \\ b_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \frac{257}{40} \\ d_1 &= \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = \frac{69}{10}, \end{cases}$$

Chú ý. Nếu tính ra $b_0 \neq \alpha$ thì CHÚNG TA ĐÃ TÍNH SAI vì $b_0 = g'(x_0)$.
Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 2.2 + \frac{1}{5}(x-1.1) + \frac{471}{20}(x-1.1)^2 - \frac{231}{10}(x-1.1)^3, x \in [1.1, 1.6] \\ 5.3 + \frac{257}{40}(x-1.6) - \frac{111}{10}(x-1.6)^2 + \frac{69}{10}(x-1.6)^3, x \in [1.6, 2.1] \end{cases}$$

Kết quả. $g(1.4) \approx$ 3.7558 ; $g(1.9) \approx$ 6.4148

Câu 8. Cho bảng số:

x	0.7	1.0	1.2	1.3	1.5
y	3.1	2	4.5	2.6	6.7

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A + B\sin x + C\cos^2 x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Kết quả. $A \approx$ ________ ;$B \approx$ ________ ; $C \approx$ ________

Đặt $t = \sin x \Rightarrow f(x) = g(t) = A + Bt + C(1 - t^2) = (A + C) + Bt - Ct^2$.

Bấm máy. Bấm Mode 3 - STAT. Chọn 3- $_{+}cx^2$. Nhập dữ liệu của 2 cột x, y, như sau:

x	y
$\sin 0.7$	3.1
$\sin 1.0$	2
$\sin 1.2$	4.5
$\sin 1.3$	2.6
$\sin 1.5$	6.7

Sau đó, bấm AC - Thoát ra. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 1- A =. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 2- B =. Chọn Shift 1 - chọn 7 - Reg - chọn 3- C =.

Như vậy $A + C = 55.37359957$ Shift-STO-X ; $B = -138.2293327$;
$-C = 88.70697384$ Shift-STO-Y $\Rightarrow A = X - C = X + Y = 144.0805734$

Kết quả. $A \approx$ 144.0806;$B \approx$ −138.2293; $C \approx$ −88.7070

Câu 9. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7
y	2	2.5	5	4.5	5.5

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x^2+1} + B\cos x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Kết quả. $A \approx$ ____________ $; B \approx$ ____________

Ta có $n = 5$, $p(x) = \sqrt{x^2+1}$, $q(x) = \cos(x)$ và

$$\sum_{k=1}^{n} p^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 1 = 15.23, \text{ Shift-STO-A}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2+1}.\cos(x_k) = 1.170576375, \text{ Shift-STO-B.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2+1}.y_k = 34.78691598, \text{ Shift-STO-C.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(x_k) = 0.2533522506, \text{ Shift-STO-D.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(x_k).y_k = 1.852970984, \text{ Shift-STO-M.}$$

Hệ phương trình để xác định A, B :

$$\begin{cases} A.A + B.B = C \\ B.A + D.B = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2.670210227 \\ B = -5.023496029 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = 2.6702\sqrt{x} - 5.0235\cos(x)$.

Kết quả. $A \approx$ ____2.6702____ ; $B \approx$ ____-5.0235____

Bấm máy. Shift-Mode-STAT-Frequency-ON

1. Tìm ma trận hệ số
   - Mode 3-STAT - 2: A+BX. Nhập vào cột X là $\sqrt{X^2+1}$, nhập vào cột Y là $\cos(X)$. AC-thoát ra.
   - Shift - 1 - 4: Sum - 1:$\sum x^2$ = Shift-STO-A
   - Shift - 1 - 4: Sum - 5:$\sum xy$ = Shift-STO-B
   - Shift - 1 - 4: Sum - 3:$\sum y^2$ = Shift-STO-D
2. Tìm cột hệ số tự do
   - Shift - 1 - 2: Data
   - Nhập giá trị của cột FREQ là giá trị y. AC-thoát ra
   - Shift - 1 - 5: Var - 2:$\overline{x}$ $\times$ Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-C
   - Shift - 1 - 5: Var - 5:$\overline{y}$ $\times$ Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-M
3. Giải hệ phương trình: Mode-5:EQN-1:anX+bnY=cn

Cách 2

Bấm máy:

$$A = A + \sqrt{X^2+1}^2 : B = B + \sqrt{X^2+1}\cos(X) : C = C + \sqrt{X^2+1}Y :$$

$$D = D + (\cos(X))^2 : M = M + \cos(X)Y$$

Bấm CALC $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0, M = 0$ và nhập X, Y theo bảng số cho đến hết.
Hệ phương trình để xác định A, B :

$$\begin{cases} A.A + B.B = C \\ B.A + D.B = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2.670210227 \\ B = -5.023496029 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = 2.6702\sqrt{x} - 5.0235\cos(x)$.
Kết quả. $A \approx$ ____2.6702____ ; $B \approx$ ____-5.0235____

Câu 10. Cho bảng số:

x	1.1	1.7	2.4	3.3
y	1.3	3.9	4.5	α

. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, tìm giá trị của α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ của đạo hàm tại $x = 1.5$ là $y'(1.5) \approx 2.8$

Kết quả. $\alpha \approx$ ______________

Đa thức nội suy Lagrange có dạng sau $\mathcal{L}_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} p_3^k(x).y_k$, trong đó

$$p_3^0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1.7)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.1-1.7)(1.1-2.4)(1.1-3.3)}$$

$$p_3^1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.7-1.1)(1.7-2.4)(1.7-3.3)}$$

$$p_3^2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-3.3)}{(2.4-1.1)(2.4-1.7)(2.4-3.3)}$$

$$p_3^3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-2.4)}{(3.3-1.1)(3.3-1.7)(3.3-2.4)}$$

$$y'(x) \approx \mathcal{L}_3'(x) =$$

$$= \frac{1.3}{-1.716}[(x-2.4)(x-3.3)+(x-1.7)(x-3.3)+(x-1.7)(x-2.4)]+$$

$$+\frac{3.9}{0.672}[(x-2.4)(x-3.3)+(x-1.1)(x-3.3)+(x-1.1)(x-2.4)]+$$

$$+\frac{4.5}{-0.819}[(x-1.7)(x-3.3)+(x-1.1)(x-3.3)+(x-1.1)(x-1.7)]+$$

$$+\frac{\alpha}{3.168}[(x-1.7)(x-2.4)+(x-1.1)(x-2.4)+(x-1.1)(x-1.7)]$$

$$\Rightarrow y'(1.5) \approx \frac{1.3}{-1.716} \times \frac{54}{25} + \frac{3.9}{0.672} \times \frac{27}{50} + \frac{4.5}{-0.819} \times \frac{-11}{25} + \frac{\alpha}{3.168} \times \frac{-13}{50}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(2.8 - \frac{1.3}{-1.716} \times \frac{54}{25} - \frac{3.9}{0.672} \times \frac{27}{50} - \frac{4.5}{-0.819} \times \frac{-11}{25}\right) \times \frac{3.168 \times 50}{-13}$$

$$= 13.58764159$$

Kết quả. $\alpha \approx$ 13.5876

Cách 2

Vì đa thức nội suy là duy nhất nên ta gọi đa thức nội suy cần tìm là $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Vì đa thức nội suy đi qua tất cả các nút nội suy nên ta có

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \times 1.1 + a_2 \times (1.1)^2 + a_3 \times (1.1)^3 = 1.3 & (1) \\ a_0 + a_1 \times 1.7 + a_2 \times (1.7)^2 + a_3 \times (1.7)^3 = 3.9 & (2) \\ a_0 + a_1 \times 2.4 + a_2 \times (2.4)^2 + a_3 \times (2.4)^3 = 4.5 & (3) \\ a_0 + a_1 \times 3.3 + a_2 \times (3.3)^2 + a_3 \times (3.3)^3 = \alpha & (4) \end{cases}$$

Ta có
$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \Rightarrow y'(1.5) = a_1 + 2a_2 \times 1.5 + 3a_3 \times (1.5)^2 = 2.8 \quad (5).$
Lấy (2)-(1), (3)-(2) và (5) ta được hệ

$$\begin{cases} (1.7 - 1.1)a_1 + [(1.7)^2 - (1.1)^2]a_2 + [(1.7)^3 - (1.1)^3]a_3 = 3.9 - 1.3 \\ (2.4 - 1.7)a_1 + [(2.4)^2 - (1.7)^2]a_2 + [(2.4)^3 - (1.7)^3]a_3 = 4.5 - 3.9 \\ a_1 + 2 \times 1.5a_2 + 3 \times (1.5)^2 a_3 = 2.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 44.81056636 \\ a_2 = -22.64468864 \\ a_3 = 3.840518456 \end{cases}$$

Từ (1) ta được

$a_0 = 1.3 - a_1 \times 1.1 - a_2 \times (1.1)^2 - a_3 \times (1.1)^3 = -25.70327981$. Vậy

$$\alpha = a_0 + a_1 \times 3.3 + a_2 \times (3.3)^2 + a_3 \times (3.3)^3 = 13.58764165$$

Chú ý. Khi giải hệ ta ra nghiệm nhưng không nhớ lại được nên kết quả sẽ có sai số làm tròn.

Câu 11. Cho bảng số:

x	0.1	0.3	0.6	0.9
y	2.4	3.7	3.2	4.3

. Sử dụng đa thức nội suy Newton, hãy xấp xỉ đạo hàm cấp một của hàm số tại $x = 0.5$.

Kết quả. $y'(0.5) \approx$ ______________

x_k	$f(x_k)$	Tỉ sai phân I	Tỉ sai phân II	Tỉ sai phân III
0.1	2.4			
		$\dfrac{3.7-2.4}{0.3-0.1} = \dfrac{13}{2}$		
0.3	3.7		$\dfrac{\frac{-5}{3} - \frac{13}{2}}{0.6-0.1} = \dfrac{-49}{3}$	
		$\dfrac{3.2-3.7}{0.6-0.3} = \dfrac{-5}{3}$		$\dfrac{\frac{80}{9} - \frac{-49}{3}}{0.9-0.1} = \dfrac{1135}{36}$
0.6	3.2		$\dfrac{\frac{11}{3} - \frac{-5}{3}}{0.9-0.3} = \dfrac{80}{9}$	
		$\dfrac{4.3-3.2}{0.9-0.6} = \dfrac{11}{3}$		
0.9	4.3			

Như vậy công thức nội suy Newton tiến là

$$\mathcal{N}_4^{(1)}(x) = 2.4 + \frac{13}{2}.(x-0.1) + \frac{-49}{3}(x-0.1)(x-0.3) +$$

$$+\frac{1135}{36}(x-0.1)(x-0.3)(x-0.6)$$

$y'(x) \approx \frac{13}{2} + \frac{-49}{3}[(x-0.3)+(x-0.1)] + \frac{1135}{36}[(x-0.3)(x-0.6) + (x-0.1)(x-0.6)+(x-0.1)(x-0.3)]$.

CALC X=0.5. $\Rightarrow y'(0.5) \approx -\frac{961}{360}$

Kết quả. $y'(0.5) \approx$ -2.6694

Câu 12. Cho tích phân $I = \int\limits_{1.3}^{2.5} \ln\sqrt{x+6}\,dx$. Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức hình thang mở rộng với $n = 8$.

Kết quả. $I \approx$ ____________

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.5-1.3}{8} = \frac{3}{20}, x_0 = 1.3, x_k = 1.3 + k.\frac{3}{20},$$

$$y_k = \ln\sqrt{x_k+6} = \ln\sqrt{1.3 + k.\frac{3}{20} + 6}$$

Vậy $I \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{7}(y_k + y_{k+1}) =$

$$\frac{3}{40}\sum_{k=0}^{7}\left(\ln\sqrt{1.3 + k.\frac{3}{20} + 6} + \ln\sqrt{1.3 + (k+1).\frac{3}{20} + 6}\right) = 1.239521694$$

Bấm máy. Với $h = \frac{3}{20} = 0.15$, ta có

$$A = A + \frac{h}{2}[\ln\sqrt{X+6} + \ln\sqrt{(X+h)+6}] : X = X + h$$

CALC A=0, X=a=1.3. Nhấn dấu $'='$ cho tới khi tính CALC tại $X = b - h = 2.5 - 0.15 = 2.35 = \frac{47}{20}$.

Kết quả. $I \approx$ 1.2395

Câu 13. Cho bảng

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x)$	4	3.3	2.4	4.3	10.2	6.2	7.4

của hàm $f(x)$. Sử dụng công thức hình thang mở rộng hãy xấp xỉ tích phân

$$I = \int_{1.0}^{2.2} (xf^2(x) + 4.4x^3)dx$$

Kết quả. $I \approx$ ____________

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.2-1.0}{n} = 0.2 \Rightarrow n = 6, x_0 = 1.0, x_k = 1.0 + 0.2k,$$

$y_k = x_k f^2(x_k) + 4.4x_k^3$. Vậy $I \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{5} (y_k + y_{k+1})$.

Bấm máy. Với $h = 0.2$, ta có

$$A = A + \frac{h}{2}[(XY^2 + 4.4X^3) + (BC^2 + 4.4B^3)] : X = X + h : B = B + h$$

CALC A=0, X=1.0, Y=4, B=1.2, C=3.3. Nhấn dấu $'='$ cho tới khi tính CALC tại $X = b - h = 2.2 - 0.2 = 2, B = b = 2.2$.

Chú ý. Nhập giá trị Y tương ứng với X và C tương ứng với B.

Kết quả. $I \approx$ 101.4579

Cách 2

$XY^2 + 4.4X^3$ - CALC X=, Y=
$y_0 = x_0 f^2(x_0) + 4.4x_0^3 = 1.0 \times 4^2 + 4.4 \times (1.0)^3 = 20.4$ Shift-STO-A
$y_1 = x_1 f^2(x_1) + 4.4x_1^3 = 1.2 \times (3.3)^2 + 4.4 \times (1.2)^3 = 20.6712$
Shift-STO-B
$y_2 = x_2 f^2(x_2) + 4.4x_2^3 = 1.4 \times (2.4)^2 + 4.4 \times (1.4)^3 = 20.1376$
Shift-STO-C
$y_3 = x_3 f^2(x_3) + 4.4x_3^3 = 1.6 \times (4.3)^2 + 4.4 \times (1.6)^3 = 47.6064$
Shift-STO-D
$y_4 = x_4 f^2(x_4) + 4.4x_4^3 = 1.8 \times (10.2)^2 + 4.4 \times (1.8)^3 = 212.9328$
Shift-STO-E
$y_5 = x_5 f^2(x_5) + 4.4x_5^3 = 2.0 \times (6.2)^2 + 4.4 \times (2.0)^3 = 112.08$ Shift-STO-F
$y_6 = x_6 f^2(x_6) + 4.4x_6^3 = 2.2 \times (7.4)^2 + 4.4 \times (2.2)^3 = 167.3232$
Shift-STO-M Vậy

$$I \approx \frac{0.2}{2}(A + 2B + 2C + 2D + 2E + 2F + M) = 101.45792$$

Kết quả. $I \approx$ 101.4579

Câu 14. Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_{0.2}^{6.8} \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x+6}dx$ bằng công thức Simpson mở rộng khi chia đoạn $[0.2; 6.8]$ thành $n = 6$ đoạn nhỏ.

Kết quả. $I \approx$ ____________

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6.8-0.2}{6} = \frac{11}{10} = 1.1, x_0 = 0.2, x_k = 0.2 + 1.1k,$

$x'_{k+1} = \frac{x_{k+1}+x_k}{2} = 0.2 + \frac{1.1(2k+1)}{2} = 1.1k + 0.75,$

$x_{k+1} = 0.2 + 1.1(k+1) = 1.3 + 1.1k,$

$y_k = f(x_k) = \frac{2x_k^2+3x_k+1}{x_k^3+x_k+6},$

$y_{k+1} = f(x_{k+1}) = \frac{2x_{k+1}^2+3x_{k+1}+1}{x_{k+1}^3+x_{k+1}+6},$

$y'_{k+1} = f(x'_{k+1}) = \frac{2x'^2_{k+1}+3x'_{k+1}+1}{x'^3_{k+1}+x'_{k+1}+6}$

Vậy $I \approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{5}(y_k + 4y'_{k+1} + y_{k+1}) =$

$$\frac{1.1}{6}\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{2x_k^2+3x_k+1}{x_k^3+x_k+6} + 4\frac{2x'^2_{k+1}+3x'_{k+1}+1}{x'^3_{k+1}+x'_{k+1}+6} + \frac{2x_{k+1}^2+3x_{k+1}+1}{x_{k+1}^3+x_{k+1}+6}\right) =$$

$$\frac{1.1}{6}\left[\sum_{k=0}^{5}\frac{2x_k^2+3x_k+1}{x_k^3+x_k+6} + 4\sum_{k=0}^{5}\frac{2x'^2_k+3x'_k+1}{x'^3_k+x'_k+6} + \sum_{k=0}^{5}\frac{2x_{k+1}^2+3x_{k+1}+1}{x_{k+1}^3+x_{k+1}+6}\right]$$

$$\frac{1.1}{6}(A+4B+C) = 4.14206153 \approx 4.1421$$

Kết quả. $I \approx$ 4.1421

Bấm máy: Với $h = 1.1$, ta có

$$A = A + \frac{h}{6}\left(\frac{2X^2 + 3X + 1}{X^3 + X + 6}\right) : X = X + h$$

CALC A=0, X=a=0.2. Nhấn dấu $'='$ cho tới khi tính CALC tại $X = 6.8 - h = 5.7$

$$B = B + \frac{h}{6}\left(\frac{2(X + 0.55)^2 + 3(X + 0.55) + 1}{(X + 0.55)^3 + (X + 0.55) + 6}\right)$$

CALC B=0, X=a=0.2. Nhấn dấu $'='$ cho tới khi tính CALC tại $X = 6.8 - h = 5.7$

$$C = C + \frac{h}{6}\left(\frac{2(X + 1.1)^2 + 3(X + 1.1) + 1}{(X + 1.1)^3 + (X + 1.1) + 6}\right) : X = X + h$$

CALC C=0, X=a=0.2. Nhấn dấu $'='$ cho tới khi tính CALC tại $X = 6.8 - h = 5.7$

Vậy $I = A + 4B + C = 4.14206153 \approx 4.1421$

Câu 15. Cho bảng số:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x)$	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2	7.4

. Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân

$I = \int\limits_{1.0}^{2.2} [xf^2(x) + 2.2x^3]\, dx.$

Kết quả. $I \approx$ ____________

$h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2.2-1.0}{n} = 0.4 \Rightarrow n = 3, x_0 = 1.0, x_k = 1.0 + 0.4k,$

$x'_{k+1} = \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2} = 1.2 + 0.4k,$

$$y_k = x_k f^2(x_k) + 2.2x_k^3,$$

$$y'_{k+1} = x'_{k+1} f^2(x'_{k+1}) + 2.2x'^3_{k+1}$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} f^2(x_{k+1}) + 2.2x^3_{k+1},$$

$$I \approx \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{2}(y_k + 4y'_{k+1} + y_{k+1}) = \frac{0.4}{6}(\sum_{k=0}^{2}(y_k) + 4\sum_{k=0}^{2}(y'_{k+1}) + \sum_{k=0}^{2}(y_{k+1})) =$$
$$\frac{0.4}{6}((y_0 + y_1 + y_2) + 4(y'_1 + y'_2 + y'_3) + (y_1 + y_2 + y_3)) =$$
$$\frac{0.4}{6}((y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3) + 4(y'_1 + y'_2 + y'_3))$$

Bấm máy. $XY^2 + 2.2X^3$

$1.0 * 2^2 + 2.2 * 1.0^3$ shift-STO-A

$1.4 * 2.4^2 + 2.2 * 1.4^3$ shift-STO-B

$1.8 * 5.1^2 + 2.2 * 1.8^3$ shift-STO-C

$2.2 * 7.4^2 + 2.2 * 2.2^3$ shift-STO-D

$\frac{0.4}{6} * (A + 2B + 2C + D)$ shift-STO-M

$1.2 * 3.3^2 + 2.2 * 1.2^3$ shift-STO-A

$1.6 * 4.3^2 + 2.2 * 1.6^3$ shift-STO-B

$2.0 * 6.2^2 + 2.2 * 2.0^3$ shift-STO-C

$\frac{4 * 0.4}{6} * (A + B + C)$

Vậy $I = Ans + M = 59.82501333 \approx 59.8250$

Kết quả. $I \approx$ 59.8250

Cách 2

$$I \approx \frac{0.4}{6}(y_0 + 4y_1' + 2y_1 + 4y_2' + 2y_2 + 4y_3' + y_3)$$

Bấm máy.

$$A = A + B * \frac{0.4}{6} * (XY^2 + 2.2X^3) : X = X + 0.2$$

CALC A=0, B, X, Y được nhập theo bảng sau

X	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
Y	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2	7.4
B	1	4	2	4	2	4	1

Chú ý. Nhập giá trị Y tương ứng với X
Vậy $I = 59.82501333 \approx 59.8250$
Kết quả. $I \approx$ 59.8250

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = e^x \ln(x^4+1) - 4x$. Sử dụng sai phân hướng tâm, xấp xỉ giá trị của $f'(0.7)$ và $f''(0.7)$ với bước $h = 0.15$

Kết quả. $f'(0.7) \approx$ ________________ ; $f''(0.7) \approx$ ________________

Công thức sai phân hướng tâm

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \Rightarrow f'(0.7) \approx \frac{f(0.7+0.15) - f(0.7-0.15)}{2*0.15}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$\Rightarrow f''(0.7) \approx \frac{f(0.7+0.15) - 2f(0.7) + f(0.7-0.15)}{0.15^2}$$

Bấm máy. $e^X * \ln(X^4+1) - 4X$

CALC X=$0.7+0.15$, shift-STO-A; CALC X=0.7, shift-STO-B;

CALC X=$0.7-0.15$, shift-STO-C

$$f'(0.7) \approx \frac{A-C}{2*0.15} = -1.230136214,$$

$$f''(0.7) \approx \frac{A-2B+C}{0.15^2} = 11.90198219$$

Kết quả. $f'(0.7) \approx$ ___ -1.2301 ___ ; $f''(0.7) \approx$ ___ 11.9020 ___

Câu 17. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} y' = 2x + x\sin(x+2y), & x \geqslant 1 \\ y(1) = 2.4 \end{cases}$. Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ $y(1.2)$ với bước $h = 0.2$.

Kết quả. $y(1.2) \approx$ ____________

Với $h = 0.2, x_1 = x_0 + 0.2 = 1.2, y_0 = 2.4$. Ta có

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0.2[2x + x\sin(x+2y)],$$

$$K_2^0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^0}{2}\right),$$

$$K_3^0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^0}{2}\right),$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0).$$

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y(1.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) =$$

Bấm máy. $0.2(2X + X\sin(X + 2Y))$.
Tính K_1^0. CALC $X = 1.0, Y = 2.4. \Rightarrow K_1^0$ Shift-STO-A
Tính K_2^0. CALC $X = 1.0 + \frac{0.2}{2}, Y = 2.4 + \frac{A}{2}. \Rightarrow K_2^0$ Shift-STO-B
Tính K_3^0. CALC $X = 1.0 + \frac{0.2}{2}, Y = 2.4 + \frac{B}{2}. \Rightarrow K_3^0$ Shift-STO-C
Tính K_4^0. CALC $X = 1.0 + 0.2, Y = 2.4 + C. \Rightarrow K_4^0$ Shift-STO-D

$$y(1.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) =$$

$$= 2.4 + \frac{1}{6}(A + 2B + 2C + D) = 2.844936848$$

Kết quả. $y(1.2) \approx \underline{2.8449}$

Câu 18. Cho bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = 4.2x' + 2t^2x + 2.6, & 1 \leqslant t \leqslant 1.8 \\ x(1) = 1.2, \ x'(1) = 1 \end{cases}$$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng $x(1.2)$ và $x(1.8)$ với bước $h = 0.2$.

Kết quả. $x(1.2) \approx$ ____________________ ;$x(1.8) \approx$ ____________________

Đặt $y(t) = x'(t)$. Phương trình đã cho được biến đổi thành hệ

$$\begin{cases} x'(t) &= & f(t, x(t), y(t)) = y \\ y'(t) &= & g(t, x(t), y(t)) = 4.2y + 2t^2x + 2.6 \\ x(1) &= & x_0 = 1.2 \\ y(1) &= & y_0 = 1 \end{cases}$$

Với bước $h = 0.2$, $t_0 = 1$, $t_k = t_0 + kh = 1 + 0.2k$. Theo công thức Euler, ta có

$$\begin{cases} x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ \qquad = x_{k-1} + hy_{k-1} \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ \qquad = y_{k-1} + h(4.2y_{k-1} + 2t_{k-1}^2 x_{k-1} + 2.6) \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Bấm máy.

$$A = X + 0.2Y : B = Y + 0.2(4.2Y + 2C^2X + 2.6) :$$

$$C = C + 0.2 : X = A : Y = B$$

CALC $X = x_0 = 1.2,\ Y = y_0 = 1.0,\ C = t_0 = 1.0$. Nhấn dấu '=' ta được $A = 1.4 = x_1 \approx x(1.2),\ B = 2.84 = y_1$. Nhấn dấu '=' ta được x_2, y_2. Nhấn tiếp dấu '=' đến khi tính CALC tại $C = 1.6$ ta được $x_4 = 6.1021184 \approx x(1.8), y_4$

Kết quả. $x(1.2) \approx$ 1.4000 ;$x(1.8) \approx$ 6.1021

Câu 19. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} x''(t) = 4x' + t^2x + 2.6, & 1 \leqslant t \leqslant 1.6 \\ x(1) = 0.3, \; x'(1) = 1.1 \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler cải tiến, giải gần đúng $x(1.2)$ và $x(1.6)$ với bước $h = 0.2$.

Kết quả. $x(1.2) \approx$ ________________ ; $x(1.6) \approx$ ________________

Đặt $y(t) = x'(t)$. Phương trình đã cho được biến đổi thành hệ

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) = y \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) = 4y + t^2x + 2.6 \\ x(1) &= x_0 = 0.3 \\ y(1) &= y_0 = 1.1 \end{cases}$$

Với bước $h = 0.2$, $t_0 = 1$, ta có $t_k = t_0 + kh = 1 + 0.2k$. Từ đó, ta có nếu $t_k = 1.2$ thì $k = 1$, còn nếu $t_k = 1.6$ thì $k = 3$.

Theo công thức Euler cải tiến, ta có

$$\begin{cases} K_{1x} = hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} = hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} = hf(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ K_{2y} = hg(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Bấm máy.

$A = .2Y : B = .2(4Y + M^2X + 2.6) : C = .2(Y + B) : M = M + .2 :$

$D = .2(4(Y+B)+M^2(X+A)+2.6) : X = X+(A+C)\div 2 : Y = Y+(B+D)\div 2$

CALC $Y = y_0 = 1.1$, $M = t_0 = 1.0$, $X = x_0 = 0.3$. Nhấn dấu '=' ta được $X = 0.6660 = x_1 \approx x(1.2)$, $Y = y_1$. Nhấn tiếp dấu '=' đến khi tính CALC tại $M = 1.4$ ta được $x_3 = 3.962611845 \approx x(1.6)$.

Kết quả. $x(1.2) \approx$ 0.6660 ; $x(1.6) \approx$ 3.9626

Câu 20. Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + x^3y' - 30y = -x(x+1), x \in [0;1] \\ y(0) = 1,\ y(1) = 1.2 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm $y(x)$ trên đoạn $[0;1]$ với bước $h = 0.25$.

Kết quả. $y(0.25) \approx$ ________, $y(0.50) \approx$ ________, $y(0.75) \approx$ ________

$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1.$

$p(x) = x+2, q(x) = x^3, r(x) = -30, f(x) = -x(x+1);$

$p_1 = x_1 + 2, p_2 = x_2 + 2, p_3 = x_3 + 2;\ q_1 = x_1^3, q_2 = x_2^3, q_3 = x_3^3;$

$r_1 = r_2 = r_3 = -30;\ f_1 = -x_1(x_1+1), f_2 = -x_2(x_2+1), f_3 = -x_3(x_3+1)$

$$\begin{cases} y_0 = 1, y_4 = 1.2 \\ \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right)y_0 + \left(r_1 - \frac{2p_1}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h}\right)y_2 = f_1 \\ \left(\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h}\right)y_1 + \left(r_2 - \frac{2p_2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h}\right)y_3 = f_2 \\ \left(\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h}\right)y_2 + \left(r_3 - \frac{2p_3}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right)y_4 = f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1, y_4 = 1.2 \\ (r_1 - \frac{2p_1}{h^2})y_1 + (\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h})y_2 + 0y_3 = f_1 - (\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h})y_0 \\ (\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h})y_1 + (r_2 - \frac{2p_2}{h^2})y_2 + (\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h})y_3 = f_2 \\ 0y_1 + (\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h})y_2 + (r_3 - \frac{2p_3}{h^2})y_3 = f_3 - (\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h})y_4 \end{cases}$$

Bấm máy. Mode-5 - EQN.

$$r_1 - \frac{2p_1}{h^2} = -30 - \frac{2.(0.25+2)}{(0.25)^2}.$$

$$\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} = \frac{0.25+2}{0.25^2} + \frac{(0.25)^3}{2 \times 0.25}.$$

0

$$f_1 - \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right) y_0 = -0.25(0.25+1) - \left(\frac{0.25+2}{0.25^2} - \frac{(0.25)^3}{2 \times 0.25}\right) \times 1$$

$$\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} = \frac{0.5+2}{0.25^2} - \frac{(0.5)^3}{2\times 0.25}$$
$$r_2 - \frac{2p_2}{h^2} = -30 - \frac{2.(0.5+2)}{(0.25)^2}.$$
$$\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} = \frac{0.5+2}{0.25^2} + \frac{(0.5)^3}{2\times 0.25}$$
$$f_2 = -16x_2^2 = -0.5(0.5+1)$$

0
$$\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} = \frac{0.75+2}{0.25^2} - \frac{(0.75)^3}{2\times 0.25}$$
$$r_3 - \frac{2p_3}{h^2} = -30 - \frac{2(0.75+2)}{0.25^2}$$
$$f_3 - \left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right) y_4 = -0.75(0.75+1) - \left(\frac{0.75+2}{0.25^2} + \frac{(0.75)^3}{2\times 0.25}\right)\times 1.2$$

Nhấn dấu '=' ta được $y_1 = 0.5022031448$, $y_2 = 0.4147363961$, $y_3 = 0.6188429457$.

Kết quả. $y(0.25) \approx \underline{0.5022}$, $y(0.50) \approx \underline{0.4147}$, $y(0.75) \approx \underline{0.6188}$