

Công thức cơ bản:

1. **Khối tâm của vật mỏng có khối lượng M :** gắn trục tọa độ Ox vào trục đối xứng của vật, trục mà bạn dự

đoán khối tâm nằm trên đó:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x dm$$

dm là 1 phần nhỏ của vật thể, sao cho tập hợp tất cả dm theo 1 chiều sẽ thành đúng vật thể M .

- ❖ Nếu vật hình sợi và không có diện tích thì đặc trưng của nó là chiều dài, ta dùng phép biến đổi :

$$\frac{dm}{dl} = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \frac{m}{l} dl, \text{ tiếp tục biến đổi } x \text{ về } l, \text{ tính không ra giống đáp án nào thì đổi } l \text{ về } x, dl \rightarrow dx,$$

$$\text{ví dụ } l = x \Rightarrow dl = dx; l = x \cos \alpha \Rightarrow dl = \cos \alpha dx$$

- ❖ Nếu vật mỏng không có thể tích mà có diện tích thì ta dùng phép biến đổi:

$$\frac{dm}{dS} = \frac{M}{S_{full}} \Rightarrow dm = \frac{M}{S_{full}} dS, \text{ tiếp tục biến đổi } dS \rightarrow (dr, d\alpha, dl) \dots, \text{ ví dụ } S = R^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow dS = r dr \cdot d\alpha, \text{ sau}$$

đó biến đổi x về các đại lượng đó.

2. **Khối tâm của vật có thể tích V_{full} , khối lượng M :**

$$r_G = \frac{1}{M} \int_{r_1}^{r_2} r dm, \text{ trong đó:}$$

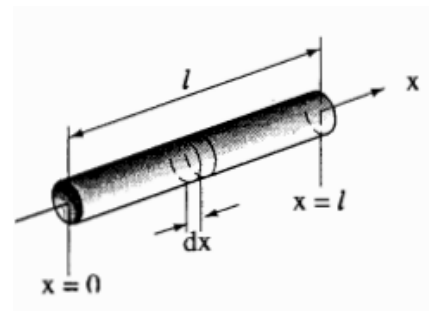
r_G là khoảng cách từ khối tâm đến gốc tọa độ O , r là khoảng cách từ dm tới O

$$dm = \frac{M}{V_{full}} dV, \text{ với } dV \text{ là một phần thể tích rất nhỏ có hình dáng của vật thể, cắt một lớp mỏng song}$$

song với trục quay (vẫn như phần trên, lát mỏng này mang hình dáng của vật thể, như trái nhãn thì gồm nhiều lớp hình dáng và mỏng như vỏ nhãn từ trong hột ra đến vỏ).

Ở trên công thức đã ghi rõ $S_{full}; V_{full}$ là diện tích, thể tích toàn phần của vật rắn để phân biệt nó là hằng số, đừng có biến đổi ra rồi nhầm lẫn triệt tiêu với biến tích phân. Tính xong tích phân mới biến đổi chúng ra rồi rút gọn.

- ❖ Ví dụ: tìm vị trí khối tâm của một hình trụ tròn có khối lượng M , bán kính R và chiều dài L .



Chọn trục tọa độ trùng với trục chứa khối tâm, gốc tọa độ như hình vẽ, ta có: $x_G = \frac{1}{M} \int_0^L x dm$

Ta cắt mỏng 1 lớp vuông góc với trục đối xứng có khối lượng dm : $dm = \frac{M}{V_{full}} dV$

Ta cắt L thành nhiều phần nhỏ dl chứ không phải cắt diện tích $S \Rightarrow dV = Sdl$, và thay $x = l$:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^L l \frac{M}{V_{full}} \pi R^2 dl = \frac{\pi R^2}{V_{full}} \int_0^L l dl = \frac{\pi R^2}{V_{full}} \frac{l^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\pi R^2}{L \pi R^2} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

3. Khối tâm của vật thể bị khuyết:

Đừng tư duy theo kiểu vật bị khuyết, hãy thử tư duy thế này: cái vật hoàn hảo (chưa khuyết) gồm 2 phần: phần bị khuyết có khối tâm G_1 và phần khuyết có khối tâm $G_2, G_3 \dots$ thường thì chỉ khuyết 1, 2 phần.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy (hoặc Oxyz, nhưng ít khi dùng hệ 3 trục) sao cho thích hợp, có thể chỉ còn 1 trục x, chọn khéo léo sao cho x trùng với trục đối xứng của hình sẽ chứa khối tâm trên đó. Gốc tọa độ O thì đặt tại khối tâm của vật hoàn hảo.

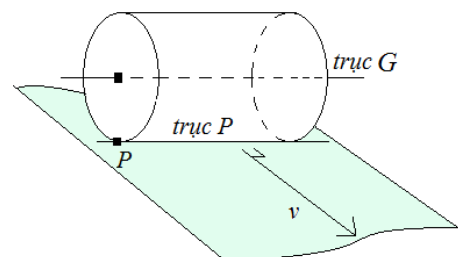
$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad y_G = \frac{m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

4. Chuyển động của khối tâm của hệ chất điểm: $v_G = \frac{1}{M} \sum m_i v_i$

5. Mômen quán tính của hệ chất điểm: $I = \sum m_i R_i^2$ với R_i là khoảng cách từ chất điểm có khối lượng m_i đến trục quay.

6. Mômen quán tính của vật rắn: $I = \int r^2 dm$. Với dm là một phần khối lượng rất nhỏ tính như các mục trên, r là khoảng cách của dm tới trục quay.

7. Mômen quán tính của vật rắn quay quanh 1 trục song song với trục qua khối tâm: $I_P = I_G + Md^2$ với d là khoảng cách 2 trục.



8. Lưu ý đối với tính mômen:

- Nếu yêu cầu tính I_P thì ta tính I_G trước.
- Vật rắn có hình thể nằm trong mặt phẳng Oxy thì ta cắt dm song song với trục quay.
- Nếu vật rắn có hình thể không gian Oxyz thì ta bỏ mặt phẳng nào vuông góc với trục G, ta chiếu 2 mặt còn lại lên 2 mặt phẳng tọa độ song song với trục G, nếu 2 hình chiếu này có hình dáng khác

nhau thì ta tính tổng mômen của 2 mặt này theo diện tích của 2 hình chiếu này (ví dụ hình hộp chữ nhật) chính là mômen cần tìm.

- Nếu vật rắn có hình thể Oxyz nhưng 2 hình chiếu đã nói ở trên có hình dạng giống hệt nhau thì ta tính mômen toàn vật thể theo thể tích (ví dụ hình trụ tròn, hình cầu, hình lập phương).

❖ Ví dụ 1: tính mômen của cánh cửa quay quanh trục P có chiều cao là h , bề dày là b và chiều dài là a và khối lượng M trong 2 trường hợp (a) xem bề dày b không đáng kể và (b) bề dày b đáng kể.

(a). Do bề dày b không đáng kể nên ta xem cánh cửa như 1 bản mỏng, tức là chỉ có diện tích.

Ta tính mômen I_G trước: $I_G = \int r^2 dm$, ta chỉ có thể lát mỏng M thành dm theo kiểu chia nhỏ đoạn a (lát mỏng theo phương song song với trục), nên $-\frac{a}{2} \leq r \leq \frac{a}{2}$, do có diện tích nên

$$dm = \frac{M}{S_{full}} dS$$

$$S = a.h \Rightarrow dS = h dr \text{ (do } a \text{ đã chia nhỏ thành } dr)$$

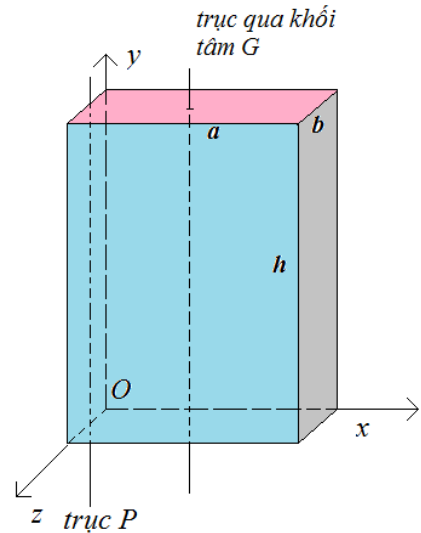
$$\Rightarrow I_G = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r^2 \frac{M}{S_{full}} h dr = \frac{M}{S_{full}} \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{Mh}{ah} \frac{a^3}{12} = \frac{Ma^2}{12} \Rightarrow I_P = I_G + Md^2 = \frac{Ma^2}{12} + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{Ma^2}{3}$$

(b). Đây là không gian Oxyz, đặt gốc tọa độ tại 1 đỉnh của cánh cửa, sao cho $a//Ox$, $b//Oy$, $h//Oz$ thì mặt Oxz vuông góc với trục G nên ta bỏ đi, còn lại 2 hình chiếu của cánh cửa lên mặt phẳng Oxy là hình chữ nhật (a,h) và mặt Oyz là hình chữ nhật (b,h) . Hai hình chữ nhật khác nhau nên ta tính mômen theo 2 diện tích, ta có:

$$I_G = I_{G(a,h)} + I_{G(b,h)} \Rightarrow I_P = I_{P(a,h)} + I_{P(b,h)}$$

$$\text{Với } I_{P(a,h)} = \frac{Ma^2}{3}, \text{ hai hình chữ nhật trên chỉ khác nhau về độ dài của } a \text{ và } b \text{ nên ta có } I_{G(b,h)} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\text{Nhưng hình chiếu lên Oyz có trục } G \equiv \text{ trục } P \text{ nên } I_{P(b,h)} = I_{G(b,h)} \Rightarrow I_P = \frac{Ma^2}{3} + \frac{Mb^2}{12}$$



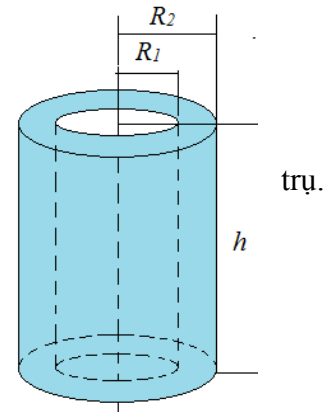
- ❖ Ví dụ 2: tính mômen của khối trụ rỗng với trục đối xứng của nó, biết bán kính trong là R_1 và bán kính ngoài là R_2 , chiều cao h , khối lượng M .

$$I_G = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{M}{V_{full}} dV$$

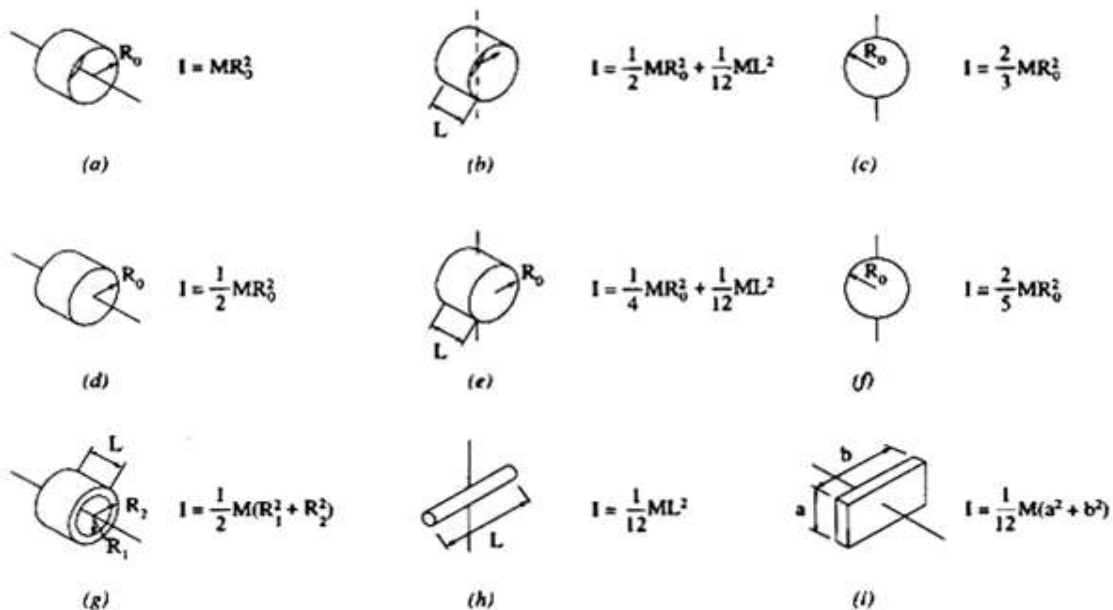
Ta cắt lát mỏng dm song song với trục quay: là một vành mỏng, rỗng hình

Ta có: $V = hS = h\pi r^2 \Rightarrow dV = h\pi 2rdr$

$$\Rightarrow I_G = \frac{M 2\pi h}{V_{full}} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M 2\pi h}{h\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$



Bảng 8-2. Một số momen quán tính tiêu biểu. Trong các trường hợp cho dưới đây mật độ khối lượng là đều, và trục quay đi qua khối tâm. (a) Hình trụ thành mỏng ; (b) Hình trụ thành mỏng ; (c) Hình cầu rỗng thành mỏng ; (d) Khối trụ đặc ; (e) Khối trụ đặc ; (f) Khối cầu đặc ; (g) Khối trụ rỗng thành dày ; (h) Thanh mảnh và dài ; (i) Tấm chữ nhật.



9. Động năng quay: $W_d = \frac{1}{2} I_G \omega^2$

10. Động năng của vật lăn (vừa tịnh tiến vừa quay nhưng không trượt): $K = \frac{1}{2} (I_G + Md^2) \omega^2$ với I_G là

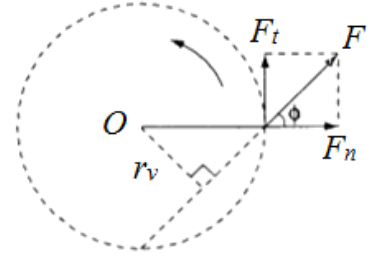
mômen quán tính của vật lăn đối với trục vuông góc với phương chuyển động, song song với bề mặt và đi qua G (hình minh họa):

$$K = \frac{1}{2} (I_G + Md^2) \omega^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_G^2$$

(Do lăn không trượt nên $v = \omega R$ và $d = R$)

11. Mômen lực của vật đối với một trục quay: chiếu các lực trên mặt phẳng Oxy và quay quanh trục z (O là khối tâm), dùng để giải bài tập về ngoại lực tác động lên hệ.

$$M_z = \sum F_i r_{iv} = \sum F_{ti} r_i = I_G \beta_z$$



Với $\beta_z = \frac{a_z}{r}$ là gia tốc góc trên mặt phẳng Oxy, r là khoảng cách

từ khối tâm đến vành, hoặc r_v là hình chiếu của khối tâm lên phương của lực F. Nếu các lực quay cùng chiều với nhau thì cộng lại, các lực ngược chiều nhau thì trừ ra.

Chú ý kí hiệu M_z là mômen, M là khối lượng của vật rắn.

❖ **GHI NHỚ:**

- Các lực đi qua tâm G thì không sinh ra Mômen.
- Kết hợp với II Newton cho tổng hợp lực F_z để giải bài tập lăn không trượt.

$$\left. \begin{array}{l} F_z = Ma_G \\ M_z = I_G \beta \\ a_G = R\beta \\ v_G = R\omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_z = Ma_G \\ M_z = F_t R = I_G \frac{a_G}{R} \end{array} \right.$$

- ω là của chung từng vị trí trên vật quay.

12. Mômen động lượng của một hạt: $\ell = pr_v = p_t r$

13. Mômen động lượng của hệ hạt: tách chuyển động của hệ thành 2 phần:

$F_{ngoại} = \frac{dp}{dt}$, với p là động lượng toàn phần của hệ, tượng trưng cho chuyển động tịnh tiến của hệ.

$M_{ngoại} = \frac{dL}{dt} = \frac{d\ell_1}{dt} + \frac{d\ell_2}{dt} + \dots$, với L là tổng mômen động lượng toàn phần của hệ, tượng trưng cho chuyển động quay của hệ.

14. Mômen động lượng của vật rắn quay quanh 1 trục cố định: $L_z = I_G \omega = M_z t$

15. Công và công suất của vật rắn:

$$dA = F_t dS = F_t r d\alpha = M_z d\alpha$$

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\alpha}{dt} = M\omega$$

16. Cân bằng tĩnh:

Bài tập E-learning:

1. Một viên đá rơi tại thời điểm $t = 0$. Viên đá thứ 2 có khối lượng gấp đôi viên đầu, cùng rơi từ cùng điểm đó tại thời điểm 100ms. Hỏi tại thời điểm 300ms, khối tâm của 2 viên đá ở cách vị trí được buông rơi một khoảng bao nhiêu ? Đ/s: 27,8cm.

Chọn trục Ox hướng xuống, gốc tọa độ tại điểm rơi của viên đá 1.

Đây là bài toán xem như khối tâm của hệ (gồm 2) chất điểm. Công thức khối tâm:

$$x_G = \frac{x_{G1}m_1 + x_{G2}m_2}{m_1 + m_2}$$

Tại thời điểm $t = 0,3s$:

$$\left. \begin{aligned} x_{G1} &= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 0,3^2 = 0,441(m) \\ x_{G2} &= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 0,2^2 = 0,196(m) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_G = \frac{0,441 \cdot m + 0,196 \cdot 2m}{3m} = 0,2776m = 27,76cm$$

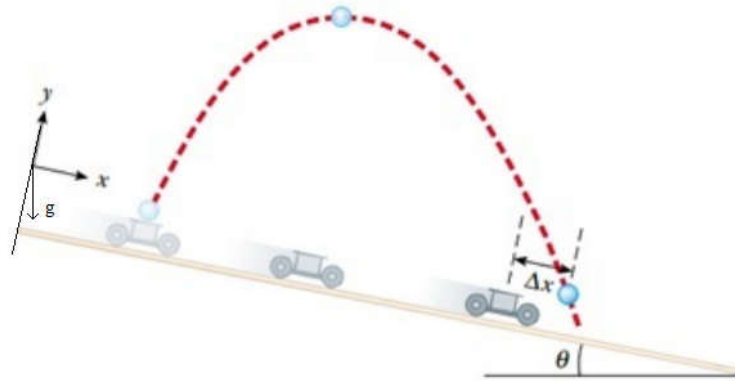
2. Vật A có khối lượng 4kg đang chuyển động với vận tốc 2m/s trong khi đó vật B có khối lượng 8kg đang chuyển động theo hướng ngược lại với vận tốc 3m/s. Khối tâm của 2 vật đó sẽ di chuyển với vận tốc bao nhiêu? Đ/s: 1,3m/s cùng hướng chuyển động của B.

Chọn chiều dương là chiều chuyển động của A:

$$v_G = \frac{v_A m_A - v_B m_B}{m_A + m_B} = \frac{4 \cdot 2 - 8 \cdot 3}{4 + 8} = -1,33(m/s), \text{ v âm tức khối tâm xem như chuyển động theo B}$$

3. Một chiếc xe được giữ đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng hợp với phương ngang góc θ . Ngay khi xe được thả ra cho chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0, một quả banh được bắn lên từ một lò xo của chiếc xe này, theo phương vuông góc với phương chuyển động của xe, tốc độ ban đầu của quả banh bằng V_{yi} . Khối lượng của xe (kể cả 2 bánh) là M. Mômen quán tính của mỗi bánh xe là $mR^2/2$. Giả sử không có ma sát giữa xe và các trục và các bánh xe lăn không trượt. Hỏi gia tốc của xe theo phương mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu? quả banh khi rơi trở lại mặt phẳng thì độ lệch Δx so với xe là bao nhiêu?

D/s: $a_x = \frac{M}{m+M} g \sin \theta$ và $\Delta x = \frac{2m}{M+m} \cdot \frac{v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$



❖ Manh mỗi ban đầu:

- Vật đứng yên rồi chuyển động xuống dốc : bảo toàn cơ năng.
- Có nhắc đến mômen quán tính.
- Vì không cho kích thước xe nên xem xe là hệ 2 chất điểm là 2 bánh xe.

❖ Xét chuyển động của quả banh: $\begin{cases} x_b = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 \\ y_b = v_{yi} t - \frac{1}{2} g \cos \theta t^2 \end{cases}$. Khi banh rơi trở lại mặt đường, $y_b = 0$:

$$\Rightarrow t = \frac{2v_{yi}}{g \cos \theta} \Rightarrow x_b = \frac{1}{2} g \sin \theta \left(\frac{2v_{yi}}{g \cos \theta} \right)^2 = \frac{2v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

❖ Xét chuyển động của xe:

Mômen quán tính của chiếc xe: $I_G = 2I_{banh-xe} = mR^2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II Newton : } Mg \sin \theta - F_{ms} = Ma_G \\ \text{Momen : } F_{ms} R = I_G \frac{a_G}{R} \Rightarrow F_{ms} = ma_G \end{array} \right\} \Rightarrow a_G = \frac{M}{m+M} g \sin \theta$$

$$x_G = \frac{1}{2} a_G t^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{m+M} g \sin \theta \left(\frac{2v_{yi}}{g \cos \theta} \right)^2 = \frac{M}{m+M} \frac{2v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

$$\Delta x = x_b - x_G = \frac{2v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta} - \frac{M}{m+M} \frac{2v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta} = \frac{2m}{m+M} \frac{v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

Có thể tính x_G theo bảo toàn cơ năng:

Động năng của xe: $K = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{v_G}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} (m + M) v_G^2$

Bảo toàn cơ năng: $M g x_G \sin \theta = \frac{1}{2} (m + M) v_G^2 \Rightarrow x_G = \frac{1}{2} \frac{m + M}{M g \sin \theta} v_G^2$

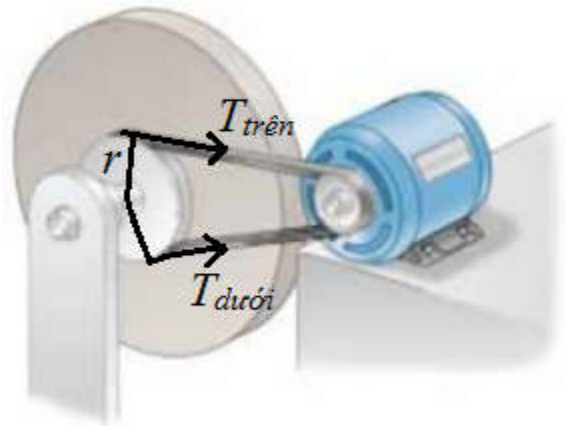
$\Rightarrow v_G = a_G t = \frac{M}{m + M} g \sin \theta \frac{2 v_{yi}}{g \cos \theta} = \frac{M}{m + M} \frac{2 v_{yi} \sin \theta}{\cos \theta}$

$\Rightarrow x_G = \frac{1}{2} \frac{m + M}{M g \sin \theta} \left(\frac{M}{m + M} \frac{2 v_{yi} \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{M}{m + M} \frac{2 v_{yi}^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$

Việc tính này nó dài dòng hơn, nhưng đôi khi lúc ngồi thi thì nghĩ được gì thì áp dụng đó. Lực ma sát ở trên là của chung 2 bánh xe, không cần phân biệt 2 lực riêng biệt vì chúng như nhau.

4. Một motor điện kéo quay một vô lăng như hình.

Vô lăng là một đĩa rắn có khối lượng 80kg, đường kính 1,25m. Vô lăng có thể quay quanh trục không ma sát. Ròng rọc của vô lăng có khối lượng nhỏ hơn rất nhiều và có bán kính 0,23m. Lực căng dây ở phần trên là 135N. Vô lăng quay theo chiều kim đồng hồ với gia tốc góc 1,67rad/s². Lực căng dây ở phần bên dưới là ? Đ/s: 21,5N



Mômen quán tính của Vô lăng là khối trụ đặc $I_G = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot \left(\frac{1,25}{2} \right)^2 = 15,625 (kg.m^2)$

Phương trình mômen lực:

$$M_z = (T_{trên} - T_{dưới}) r_v = I_G \beta \Rightarrow T_{dưới} = T_{trên} - \frac{I_G \beta}{r_v} = 135 - \frac{15,625 \cdot 1,67}{0,23} = 21,55 N$$

(Ở bài này ta áp dụng $M_z = F \cdot r_v$ chứ không dùng $M_z = F_t \cdot r$, vì sao thì các bạn tự suy nghĩ nhé)

5. Một bánh xe đang quay đều quanh trục Δ cố định với động năng là 484J. Biết mômen quán tính của bánh xe đối với trục là 2kg.m². Tốc độ góc của bánh xe là ? Đ/s: 22rad/s.

$$W_d = \frac{1}{2} I_G \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 W_d}{I_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 484}{2}} = 22 (rad / s)$$

6. Một cái đĩa bắt đầu quay quanh trục của nó với gia tốc góc không đổi. Sau 10s nó quay được 50 rad. Vận tốc tức thời của đĩa tại thời điểm t = 15s là ? Đ/s: 15rad/s.

$$\varphi = \frac{1}{2} \beta t^2 \Rightarrow \beta = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2.50}{10^2} = 1 \text{ (rad / s}^2\text{)} \Rightarrow \omega = \beta t = 1.15 = 15 \text{ (rad / s)}$$

7. Một khối gỗ có khối lượng $M = 0,2\text{kg}$ nằm yên trên mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Khối gỗ được nối với thanh nhẹ, chiều dài $l = 30\text{cm}$, thanh có 1 đầu được giữ cố định. Một viên đạn có khối lượng 70g bay với tốc độ $v = 300\text{m/s}$ theo phương song song với mặt nằm ngang và vuông góc với thanh, đến va chạm với khối gỗ. Sau va chạm, viên đạn được giữ lại bên trong khối gỗ. Mômen động lượng của hệ đạn – khối gỗ và tỉ lệ lượng động năng mất mát trong quá trình va chạm là ? Đ/s: $6,3\text{kg.m}^2/\text{s}$ và 74%

Cho vật rắn mà không cho kích thước thì xem nó như chất điểm.

Động lượng hệ được bảo toàn: $p_{he} = p_1 = m_1 v_1 = 0,07.300 = 21 \text{ (kg.m / s)}$

Mômen động lượng của vật (trong hệ này xem vật như chất điểm):

$$L = p.r_v = 21.0,3 = 6,3 \text{ (kg.m}^2 \text{ / s)}$$

Động năng sau va chạm: $W_{dsau} = \frac{1}{2} I_G \omega^2$, ta cần tính I_G và $\omega = \frac{v_{he}}{R} = \frac{v_{he}}{l}$

Cũng từ bảo toàn động lượng, suy ra :

$$v_{he} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0,07}{0,07 + 0,2} 300 = \frac{700}{9} \text{ (m / s)} \Rightarrow \omega = \frac{700}{9.0,3} = 259 \text{ (rad / s)}$$

Do vật xem như chất điểm nên I_G tính theo công thức chất điểm:

$$I_G = m_{he} R^2 = 0,27.0,3^2 = 0,0243 \text{ (kg.m}^2\text{)} \text{ (R ở đây là khoảng cách từ chất điểm đến trục quay)}$$

$$\Rightarrow W_{dsau} = \frac{1}{2} . 0,0243 . 259^2 = 815 \text{ J}$$

Động năng lúc đầu: $W_{dtruoc} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} . 0,07 . 300^2 = 3150 \text{ J}$

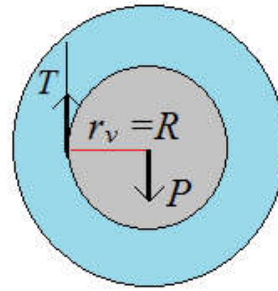
Vậy tỉ lệ động năng bị mất: $k = \frac{W_{dtruoc} - W_{dsau}}{W_{dtruoc}} = \frac{3150 - 815}{3150} = 0,74$

8. Giả sử trái đất là quả cầu đồng chất, khối lượng phân bố đều, khối lượng trái đất $5,9.10^{24}\text{kg}$, bán kính trái đất $6,37.10^6\text{m}$. Mômen quán tính của nó là ? Đ/s: 9.10^{37}kg.m^2

Áp dụng công thức mômen quán tính quả cầu đồng chất:

$$I_G = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5} \cdot 5,9 \cdot 10^{24} \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 = 9,57 \cdot 10^{37} \text{ (kg.m}^2\text{)}$$

9. Một cái yoyo có mômen quán tính là 950g.cm^2 và khối lượng 120g . Bán kính trục của nó là $3,2\text{mm}$, dây dài 120cm . Yoyo lăn xuống từ trạng thái nghỉ tới đầu dây. Khi tới cuối dây, vận tốc dài của nó ở cuối dây là ? Đ/s: $0,548\text{m/s}$.



Cách 1 - 2 phương trình:

$$\text{II Newton: } P - T = Ma_G$$

$$\text{Phương trình mômen: } M_z = I\beta = F.r_v \Leftrightarrow T.R = I \frac{a_G}{R} \Rightarrow T = \frac{Ia_G}{R^2}$$

$$\Rightarrow a_G \left(M + \frac{I}{R^2} \right) = Mg \Leftrightarrow a_G = \frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}} = \frac{0,12 \cdot 9,8}{0,12 + \frac{950 \cdot 10^{-7}}{(3,2 \cdot 10^{-3})^2}} = 0,125 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2a_G s} = \sqrt{2 \cdot 0,125 \cdot 1,2} = 0,548 \text{ (m/s)}$$

Cách 2 - bảo toàn cơ năng nếu giả sử yoyo treo thẳng đứng:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + \frac{I}{R^2}}} = 0,548 \text{ (m/s)}$$

10. Một đĩa đặc đồng chất được cho quay xung quanh trục đi qua khối tâm của nó với tốc độ góc ban đầu ω_1 . Khi đang quay với tốc độ như vậy, đĩa được đặt nhẹ nhàng xuống mặt phẳng nằm ngang. Xác định tốc độ góc của đĩa khi đạt trạng thái lăn không trượt. Tỷ lệ lượng năng lượng bị mất mát từ thời điểm đĩa được thả ra đến khi đạt trạng thái lăn không trượt là bao nhiêu ? Đ/s:

$$\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1; \quad \frac{2}{3}$$

$$\text{Mômen quán tính của đĩa đặc: } I_G = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow W_{d1} = \frac{1}{2}I_G\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_1^2$$

$$\text{Khi đĩa lăn không trượt: } W_{d2} = \frac{1}{2}I_G\omega_2^2 + \frac{1}{2}m(\omega_2 R)^2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2 \right) = \frac{3}{4}mR^2\omega_2^2$$

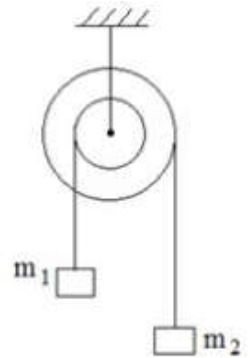
$$\frac{W_{d2}}{W_{d1}} = \frac{\frac{3}{4}mR^2\omega_2^2}{\frac{1}{4}mR^2\omega_1^2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\Delta W_d}{W_{d1}} = \frac{W_{d1} - W_{d2}}{W_{d1}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

11. Cho hệ như hình vẽ. Ròng rọc là 2 vành tròn đồng tâm, có mômen quán tính đối với trục là I . Bỏ qua mọi ma sát. Trong trường hợp $m_1 > 2m_2$, hệ sẽ chuyển động như thế nào? Đ/s: không thể xác định được.

Phương trình mômen: $M_z = P_1 r_1 - P_2 r_2$

Do không biết độ lớn của r_1 so với r_2 nên không thể xác định được.

Đề troll ghê.



12. Mômen động lượng của một người 84Kg ở xích đạo với tâm trái đất, do sự quay của trái đất sinh ra là ? Đ/s: $2,48.10^{11} (kg.m^2 / s)$

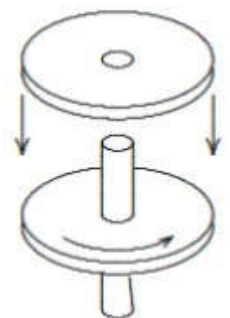
Vận tốc quay của người đó sẽ bằng vận tốc quay của trái đất:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.60.60} = 7,27.10^{-5} (rad / s)$$

Mômen động lượng của người đó:

$$\ell = pr_v = m\omega R.R = 84.7,27.10^{-5}.(6,37.10^6)^2 = 2,478.10^{11} (kg.m^2 / s)$$

13. Một bánh xe có mômen quán tính I , được gắn trên một trục thẳng đứng có mômen quán tính không đáng kể đang quay với vận tốc góc ω_0 . Một bánh xe không quay có mômen quán tính $2I$ đột ngột rơi xuống cùng trục như hình vẽ. Kết quả hệ thống 2 bánh xe và trục sẽ quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu ? Đ/s: $\omega_0 / 3$



Nhìn hình, ta thấy $R_1 = R_2$, mà $\frac{I_2}{I_1} = 2 \Rightarrow m_2 = 2m_1$

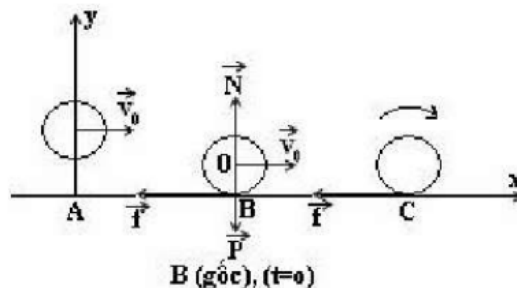
$$\text{Bảo toàn động lượng } m_1 \omega_0 R = (m_1 + m_2) \omega_{\text{moi}} R \Rightarrow \omega_{\text{moi}} = \frac{m_1}{m_1 + 2m_1} \omega_0 = \frac{\omega_0}{3}$$

14. Hai quả cầu nhỏ có khối lượng lần lượt là 2,4kg và 0,6kg gắn ở hai đầu một thanh cứng và nhẹ. Momen quán tính của hệ đối với trục quay đi qua trung tâm điểm của thanh và vuông góc với thanh là 0,27kg.m². Chiều dài của thanh là ? Đ/s: 0,6m.

Gọi thanh có chiều dài L. Do đề cho thanh “nhẹ” nên không có khối lượng, vật không có khối lượng thì không có mômen. Vậy:

$$M_z = \sum m_i r_i^2 = m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 = 0,27 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,27}{2,4 + 0,6}} = 0,6(m)$$

15. Một quả cầu bowling ban đầu trượt không lăn với tốc độ dài v_0 trên mặt nằm ngang. Hệ số ma sát giữa quả cầu và bề mặt là μ . Hỏi ở thời điểm quả cầu bắt đầu lăn không trượt, tốc độ dài của nó bằng bao nhiêu ? Trước khi lăn không trượt, khoảng thời gian chuyển động và quãng đường chuyển động của quả cầu là bao nhiêu ? Đ/s: $v_2 = \frac{5}{7}v_0; t = \frac{2v_0}{7g\mu}; s = \frac{12v_0^2}{49g\mu}$



Chọn gốc thời gian $t = 0$ tại điểm bowling bắt đầu vừa lăn vừa trượt (thời điểm quả bowling vừa chạm vào sàn).

Theo II Newton cho chuyển động trượt: $-F_{ms} = ma_G \Rightarrow a_G = -\mu g$

Mômen lực cho chuyển động lăn: $M = I\beta = F_{ms}R \Leftrightarrow \beta = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$

Nhận xét: khi vừa lăn, vừa trượt ta thấy $\beta \neq \frac{a_G}{R}$, còn trong chuyển động lăn không trượt thì $\beta = \frac{a_G}{R}$.

Vậy khi vừa lăn vừa trượt, 2 chuyển động này độc lập nhau.

Vận tốc trượt: $v = v_0 + a_G t = v_0 - \mu g t$ (1)

Vận tốc lăn: $\omega = \omega_0 + \frac{5\mu g}{2R} t = \frac{5\mu g}{2R} t$ (2)

Ở thời điểm $t = t'$, quả bowling bắt đầu lăn không trượt, ta mới có thể dùng công thức: $v = \omega R$. Thay (1) và (2) vào, ta được:

$$v_0 - \mu g t' = \frac{5\mu g}{2R} t' R \Leftrightarrow t' = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

Tốc độ dài lúc lăn không trượt (không gọi là tốc độ trượt nữa, mà gọi là tốc độ tịnh tiến):

$$v = v_0 - \mu g \frac{2v_0}{7\mu g} = \frac{5}{7} v_0$$

$$\text{Quãng đường đi được lúc trượt: } s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_G} = \frac{\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 - v_0^2}{-2\mu g} = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

Vậy những chuyển động mà ban đầu có vừa lăn vừa trượt thì $\beta \neq \frac{a_G}{R}$.

- 16. Một chất điểm có khối lượng $m = 1\text{kg}$ chuyển động biến đổi đều dưới tác dụng của lực $F = 3\text{N}$, vận tốc ban đầu bằng 0. Động lượng của chất điểm sau 2s chuyển động là ? Đ/s: 6kg.m/s^2**

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow v = at = \frac{F}{m} t \Rightarrow p = m \frac{F}{m} t = Ft = 3.2 = 6 \left(\text{kg.m/s}^2 \right)$$

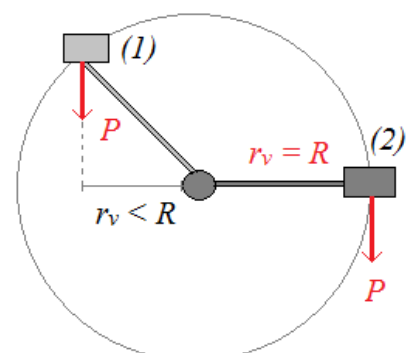
- 17. Một đĩa mài có mômen quán tính $I = 1,2.10^{-3} \left(\text{kg.m}^2 \right)$ được gắn vào một cái khoan điện, khoan này cho nó một mômen quay là 50Nm . Tốc độ góc và mômen động lượng của đĩa sau khi động cơ khởi động là 30 mili giây. Đ/s: 1250 rad/s và $1,5 \text{ kg.m}^2/\text{s}$**

$$L_z = M_z t = 50.30.10^{-3} = 1,5 \left(\text{kg.m}^2 / \text{s} \right)$$

$$\omega = \frac{M_z}{I} t = \frac{50}{1,2.10^{-3}} . 30.10^{-3} = 1250 \left(\text{rad} / \text{s} \right)$$

- 18. Một người có khối lượng 70kg khi đi xe đạp lên dốc anh ta đặt toàn bộ trọng lượng lên bàn đạp. Đường kính chuyển động của bàn đạp là $0,2\text{m}$. Mômen lực lớn nhất mà anh ta tác dụng trong quá trình đó là ? Lấy $g = 9,8\text{m/s}^2$. Đ/s: 137N**

Do đề đã nói toàn bộ trọng lượng đặt lên bàn đạp nên xem bàn đạp như một chất điểm có khối lượng 70kg quay quanh 1 trục cố định như hình vẽ. Ta xét 2 vị trí (1) và (2). Từ công thức Mômen lực $M_z = F.r_v$, ta thấy ở vị trí (2) thì M_z mới đạt cực đại.



$$M_{z(\max)} = F \cdot r_{v(\max)} = mg \cdot R = 70 \cdot 9,8 \cdot 0,2 = 137,2 \text{ N}$$

19. Hai hình trụ giống nhau có khối lượng khác nhau và mômen quán tính khác nhau. Chúng đồng thời chuyển động từ trạng thái đứng yên ở đỉnh của mặt phẳng nghiêng và lăn không trượt xuống mặt phẳng nghiêng. Hỏi hình trụ nào tới chân mặt phẳng nghiêng trước ? Đ/s: Cả hai đến cùng lúc.

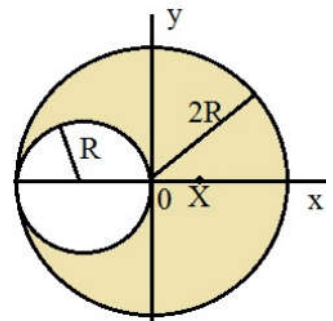
Theo 2 phương trình lăn không trượt quen thuộc:

$$\left. \begin{aligned} -F_{ms1} + P_1 \sin \alpha &= m_1 a_1 \\ F_{ms1} R &= \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{a_1}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

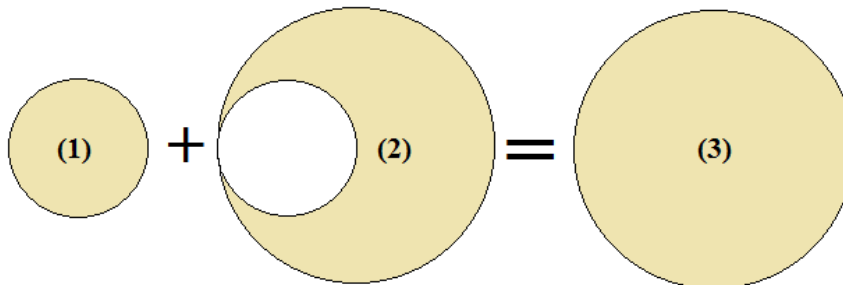
$$\left. \begin{aligned} -F_{ms2} + P_2 \sin \alpha &= m_2 a_2 \\ F_{ms2} R &= \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{a_2}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Như vậy ta thấy chúng lăn cùng gia tốc, nên sẽ đến chân dốc cùng lúc.

20. Một đĩa kim loại có bán kính $2R$ được khoét đi đĩa tròn bán kính R như hình vẽ. Sau khi khoét thì đĩa có khối tâm nằm trên trục Ox . Vị trí khối tâm tại X có tọa độ là ? Đ/s: $R/3$



Ta có:



$$\text{Do vậy, áp dụng công thức: } x_{G3} = \frac{x_{G1}m_1 + x_{G2}m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{-Rm_1 + x_{G2}m_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow x_{G2} = R \frac{m_1}{m_2}$$

$$\text{Do khối lượng tỉ lệ với diện tích nên ta có: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi (2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_{G2} = \frac{R}{3}$$

21. Ở một số thành phố có vấn đề về ô nhiễm không khí, xe buýt không chạy bằng động cơ nổ. Chúng lấy năng lượng từ bánh đà lớn, có khả năng quay rất nhanh nằm ở bên dưới sàn xe và được quay bằng các động cơ điện gắn ở đầu cuối xe. Bánh đà có dạng trụ đặc đồng chất, khối lượng 1600kg, bán kính 0,65m và được gia tốc đến tốc độ cực đại 4000 vòng/phút. Khi xe đã tăng tốc thì bánh đà sẽ giảm tốc nhẹ và được động cơ kéo quay lại khi xe muốn tăng tốc. Những chiếc xe này chạy với công suất 13428W. Với

tốc độ trung bình là Hỏi xe có thể chạy bao xa trước khi các vô lăng được quay lại để tăng tốc cho xe ?

22. Hai hình trụ đồng chất (một rỗng, một đặc) được làm từ những vật liệu khác nhau, nhưng có cùng khối lượng và bán kính ngoài. Mômen quán tính của hình trụ rỗng và trụ đặc đối với trục đối xứng của chúng lần lượt là I_r và I_d . So sánh I_r và I_d ? Đ/s: $I_r > I_d$

Theo công thức thì ta có ngay đáp án.

23. Một đĩa tròn, phẳng, đồng chất có mômen quán tính 8kg.m^2 đối với trục Δ cố định đi qua tâm đĩa và vuông góc với bề mặt đĩa. Đĩa quay quanh Δ với gia tốc góc bằng 3rad/s . Mômen lực tác dụng lên đĩa đối với trục Δ có độ lớn là ? Đ/s: 24N.m

$$M_z = I \cdot \beta = 8 \cdot 3 = 24 (\text{N.m})$$

24. Một vật có khối lượng 2 kg bắt đầu chuyển động từ vị trí cách gốc tọa độ 3m theo chiều dương của trục Ox từ trạng thái đứng yên có gia tốc $a = 4\vec{i} - 3\vec{j} (\text{m/s}^2)$. Tìm mômen động lượng của vật quay xung quanh gốc tọa độ vào giây thứ 2. Đ/s: $-36\text{kg.m}^2 / \text{s}$

$$I_G = mR^2 = 2 \cdot 3^2 = 18\text{kg.m}^2 \Rightarrow \ell = M_z t = I_G \frac{a_G}{R} t = 18 \cdot \frac{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}{3} \cdot 2 = 60 (\text{kg.m}^2 / \text{s})$$

Kí hiệu \vec{k} ý nói quay quanh trục Oz có vectơ đơn vị là \vec{k} .

25. Bạn ở trên chiếc thuyền trượt băng, với tổng khối lượng là M , nằm trên mặt băng bằng phẳng, không ma sát. Trên thuyền có 2 hòn đá với khối lượng là m_1 và m_2 . Với $M = 3m_1 = 5m_2$. Muốn cho thuyền chuyển động, bạn ném viên đá về phía sau. Nếu ném viên đá m_1 trước rồi đến m_2 nhưng đều với tốc độ V_r so với thuyền. Hỏi tốc độ của thuyền là bao nhiêu ? Đ/s: $-0,38V_r$

(Đặt $m_2 = 3\text{kg}$ cho dễ tính, dung bảo toàn động lượng)