

## BÀI TẬP ĐẠO HÀM RIÊNG

**Bài 1** Nhiệt độ  $T$  (theo  $^{\circ}\text{C}$ ) tại một địa điểm ở Bán Cầu Bắc phụ thuộc vào kinh độ  $x$ , vĩ độ  $y$  và thời gian  $t$ , vì vậy chúng ta có thể viết  $T = f(x, y, t)$ . Xét thời gian (giờ) bắt đầu từ tháng 1.

- a. Ý nghĩa đạo hàm riêng  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$  và  $\frac{\partial T}{\partial t}$  là gì?
- b. Honolulu có kinh độ  $158^{\circ}$  Tây và vĩ độ  $21^{\circ}$  Bắc. Giả sử vào lúc 9h00 sáng tháng 1, gió thổi không khí nóng về hướng Đông Bắc, vì vậy không khí về hướng tây và nam là ấm và không khí về hướng bắc và đông là mát hơn. Theo bạn  $f_x(158, 21, 9)$ ,  $f_y(158, 21, 9)$ ,  $f_t(158, 21, 9)$  dương hay âm? Giải thích.

**Bài 2** Chỉ số lạnh do gió  $W$  là nhiệt độ cảm nhận khi nhiệt độ thật là  $T$  và tốc độ gió là  $v$ , vì vậy ta viết  $W = f(T, v)$ . Bảng giá trị sau được thu thập bởi trung tâm khí tượng quốc gia Mỹ và cơ quan khí tượng Canada.

		Wind speed (km/h)					
Actual temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )	$v$	20	30	40	50	60	70
	$T$						
	-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23
	-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30
	-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37
	-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44

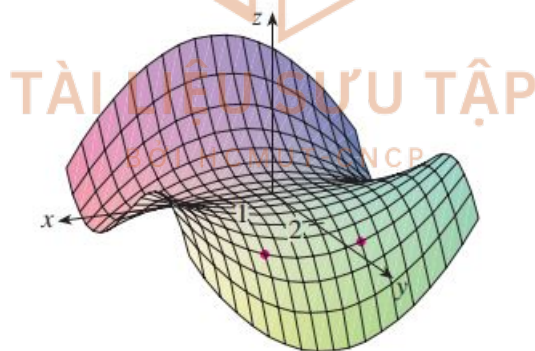
- a. Ước tính các giá trị của  $f_T(-15, 20)$  và  $f_v(-15, 20)$ . Ý nghĩa thực tế của các giá trị này là gì?
- b. Tổng quát, bạn có thể nói gì về dấu của  $\frac{\partial W}{\partial T}$  và  $\frac{\partial W}{\partial v}$
- c. Tính  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$ .

**Bài 3** Chiều cao  $h$  của sóng trong đại dương phụ thuộc vào vận tốc  $v$  của gió và khoảng thời gian gió thổi  $t$  tại vận tốc đó. Các giá trị của hàm  $h = f(v, t)$  được ghi lại (feet) trong bảng sau:

		Duration (hours)						
Wind speed (knots)	$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
	10	2	2	2	2	2	2	2
	15	4	4	5	5	5	5	5
	20	5	7	8	8	9	9	9
	30	9	13	16	17	18	19	19
	40	14	21	25	28	31	33	33
	50	19	29	36	40	45	48	50
	60	24	37	47	54	62	67	69

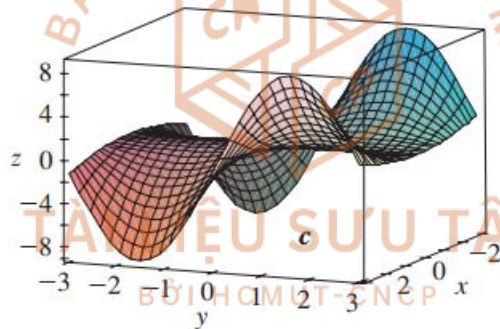
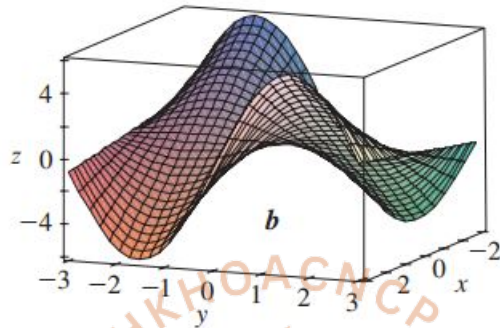
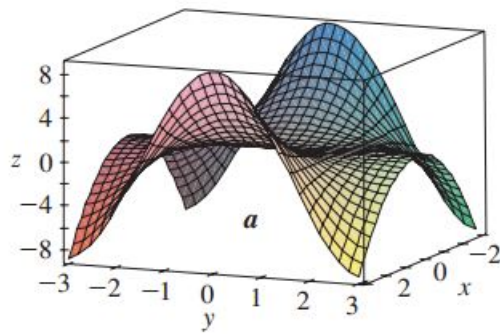
- a. Ý nghĩa đạo hàm riêng  $\frac{\partial h}{\partial v}$  và  $\frac{\partial h}{\partial t}$  là gì?
- b. Ước tính các giá trị của  $f_v(40, 15)$  và  $f_t(40, 15)$ . Ý nghĩa thực tế của các giá trị này là gì?
- c. Tính  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$ .

**Bài 4** Xác định dấu của các đạo hàm riêng hàm  $f$  mà đồ thị của nó được cho dưới đây :

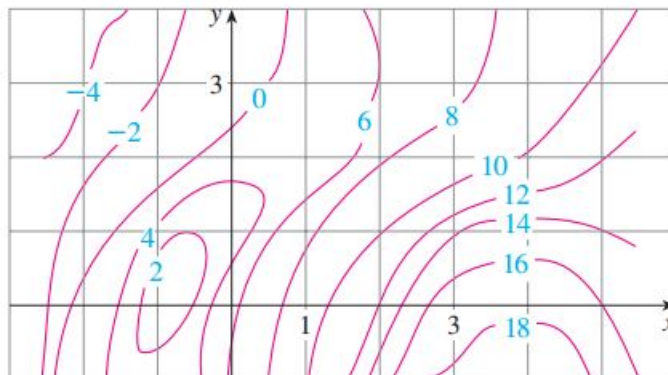


- a.  $f_x(1, 2), f_y(1, 2)$
- b.  $f_x(-1, 2), f_y(-1, 2)$
- c.  $f_{xx}(-1, 2), f_{yy}(-1, 2)$
- d.  $f_{xy}(1, 2), f_{xy}(-1, 2)$

**Bài 5** Cho mặt  $a, b$  và  $c$  dưới đây là các đồ thị của hàm  $f$  và các đạo hàm riêng của nó  $f_x$  và  $f_y$ . Hãy nhận dạng mỗi mặt và giải thích cho sự lựa chọn của bạn.



**Bài 6** Cho biểu đồ đường mức của hàm  $f$ . Sử dụng nó để ước tính  $f_x(2, 1)$  và  $f_y(2, 1)$



**Bài 7** Nếu  $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ , tìm  $f_x(1, 2)$ ,  $f_y(1, 2)$  và xem các số này là hệ số góc. Minh họa bằng đồ thị vẽ tay hoặc bằng máy tính.

**Bài 8** Nếu  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ , tìm  $f_x(1, 0)$ ,  $f_y(1, 0)$  và xem các số này là hệ số góc. Minh họa bằng đồ thị vẽ tay hoặc bằng máy tính.

**Bài 9** Tìm  $f_x$  và  $f_y$  và vẽ đồ thị  $f, f_x, f_y$  với miền xác định và góc nhìn mà giúp bạn biết được mối quan hệ giữa chúng.

a.  $f(x, y) = x^2y^3$

b.  $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$

**Bài 10** Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau:

15.  $f(x, y) = x^4 + 5xy^3$

16.  $f(x, y) = x^2y - 3y^4$

17.  $f(x, t) = t^2e^{-x}$

18.  $f(x, t) = \sqrt{3x + 4t}$

19.  $z = \ln(x + t^2)$

20.  $z = x \sin(xy)$

21.  $f(x, y) = \frac{x}{y}$

22.  $f(x, y) = \frac{x}{(x + y)^2}$

23.  $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$

24.  $w = \frac{e^v}{u + v^2}$

25.  $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$

26.  $u(r, \theta) = \sin(r \cos \theta)$

27.  $R(p, q) = \tan^{-1}(pq^2)$

28.  $f(x, y) = x^y$

29.  $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

30.  $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1} dt$

31.  $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2yz$

32.  $f(x, y, z) = xy^2e^{-xz}$

33.  $w = \ln(x + 2y + 3z)$

34.  $w = y \tan(x + 2z)$

35.  $p = \sqrt{t^4 + u^2} \cos v$

36.  $u = x^{y/z}$

37.  $h(x, y, z, t) = x^2y \cos(z/t)$

38.  $\phi(x, y, z, t) = \frac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

39.  $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

40.  $u = \sin(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n)$

**Bài 11** Tìm đạo hàm riêng theo yêu cầu

a.  $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $f_x(3, 4)$

b.  $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ ,  $f_x(2, 3)$

c.  $f(x, y, z) = \frac{y}{x+y+z}$ ,  $f_y(2, 1, -1)$

d.  $f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$ ;  $f_z(0, 0, \frac{\pi}{4})$

**Bài 12** Tìm  $\frac{\partial z}{\partial x}$  và  $\frac{\partial z}{\partial y}$

- a.  $z = f(x) + g(y)$
- b.  $z = f(x + y)$
- c.  $z = f(x)g(y)$
- d.  $z = f(xy)$
- e.  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$

**Bài 13** Tìm đạo hàm riêng cấp 2:

- a.  $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$
- b.  $f(x, y) = \sin^2(mx + ny)$
- c.  $w = \sqrt{u^2 + v^2}$
- d.  $v = \frac{xy}{x-y}$
- e.  $u = \cos(x^2y)$
- f.  $u = \ln(x + 2y)$

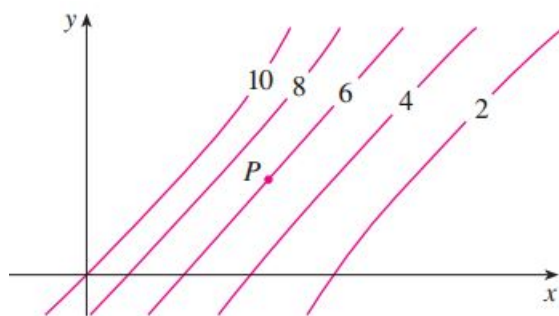
**Bài 14** Tìm đạo hàm riêng theo yêu cầu

- a.  $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y; f_{xxx}, f_{yx}$
- b.  $f(x, y) = \sin(2x + 5y); f_{yxy}$
- c.  $f(x, y, z) = e^{xyz^2}; f_{xyz}$
- d.  $g(r, s, t) = e^r \sin(st); g_{rst}$
- e.  $u = e^{r\theta} \sin \theta; \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta}$
- f.  $z = u\sqrt{v-w}; \frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$
- g.  $w = \frac{x}{y+2z}; \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

**Bài 15** Sử dụng bảng giá trị của  $f(x, y)$  để ước tính giá trị của  $f_x(3, 2), f_x(3, 2.2), f_{xy}(3, 2)$

$x \backslash y$	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

**Bài 16** Cho các đường mức của 1 hàm  $f$ . Xác định các đạo hàm riêng  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  là dương hay âm tại điểm  $P$ .



**Bài 17** Nhiệt độ tại điểm  $(x, y)$  trên một đĩa kim loại phẳng được cho là  $T(x, y) = \frac{60}{1+x^2+y^2}$ , trong đó  $T$  được tính bằng  $^{\circ}C$  và  $x, y$  được tính bằng mét. Tìm tốc độ biến thiên của nhiệt độ theo khoảng cách tại điểm  $(2, 1)$  theo

- hướng  $x$
- hướng  $y$

**Bài 18** Cobb và Douglas đã sử dụng phương trình  $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$  để mô hình hóa kinh tế Mỹ từ 1899 đến 1922, trong đó  $L$  là lượng nhân công và  $K$  là lượng vốn.

- Tính  $P_L$  và  $P_K$
- Tìm năng suất biên của nhân công và năng suất biên của vốn trong năm 1920, khi  $L = 194$  và  $K = 407$  (so với các giá trị ấn định  $L = 100$  và  $K = 100$  vào năm 1899). Giải thích kết quả.
- Vào năm 1920, cái nào nâng cao sản lượng hơn, sự tăng vốn hay tăng chi phí của nhân công?

**Bài 19** Phương trình *van der Waals* của  $n$  mol khí là  $\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ , trong đó  $P$  là áp suất,  $V$  là thể tích và  $T$  là nhiệt độ khí;  $R$  là hằng số khí lí tưởng,  $a$  và  $b$  là hằng số dương đặc trưng cho một khí cụ thể. Tính  $\frac{\partial T}{\partial P}$  và  $\frac{\partial P}{\partial V}$ .

**Bài 20** Chỉ số lạnh do gió được mô hình hóa với hàm số

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

trong đó  $T$  là nhiệt độ  $^{\circ}C$  và  $v$  là tốc độ gió (km/h). Khi  $T = -15^{\circ}C$  và  $v = 30$  km/h, bạn dự tính nhiệt độ biểu kiến  $W$  giảm bao nhiêu nếu nhiệt độ thật giảm  $1^{\circ}C$ ? Điều gì xảy ra nếu tốc độ gió tăng 1 km/h.

**Bài 21** Giao của mặt paraboloid  $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$  và mặt phẳng  $x = 1$  là một đường parabol. Tìm các phương trình tham số của tiếp tuyến với đường parabol này tại điểm  $(1, 2, -4)$ . Vẽ đồ thị mặt paraboloid, đường parabol và tiếp tuyến trên cùng màn hình hiển thị (Sử dụng máy tính).

**Bài 22** Giao của mặt ellipsoid  $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$  và mặt phẳng  $y = 2$  là một đường ellipse. Tìm các phương trình tham số của tiếp tuyến với đường ellipse này tại điểm  $(1, 2, 2)$ .

**Bài 23** Trong nghiên cứu về sự đóng băng, người ta nhận thấy rằng nhiệt độ  $T$  tại thời gian  $t$  (tính theo ngày) tại độ sâu  $x$  (tính theo feet) có thể được mô hình hóa bằng hàm số:

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

trong đó  $\omega = \frac{2\pi}{365}$  và  $\lambda$  là hằng số dương.

- Tìm  $\frac{\partial T}{\partial x}$ . Ý nghĩa vật lý của nó là gì?
- Tìm  $\frac{\partial T}{\partial t}$ . Ý nghĩa vật lý của nó là gì?
- Chứng minh  $T$  thỏa mãn phương trình nhiệt  $T_t = kT_{xx}$  với hằng số  $k$  cụ thể nào đó.
- Nếu  $\lambda = 0.2$ ,  $T_0 = 0$  và  $T_1 = 10$ , sử dụng máy tính để vẽ đồ thị  $T(x, y)$ .
- Ý nghĩa vật lý của biểu thức  $-\lambda x$  trong biểu thức  $\sin(\omega t - \lambda x)$  là gì?

**Bài 24** a. Hàm hai biến có bao nhiêu đạo hàm riêng cấp  $n$ ?

- Nếu tất cả các đạo hàm riêng này liên tục thì bao nhiêu trong số chúng có thể khác nhau?
- Trả lời câu hỏi của (a.) với hàm ba biến.

**Bài 25** Cho  $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2 y)}$ . Tìm  $f_x(1, 0)$ .

**Bài 26** Cho  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ . Tìm  $f_x(0, 0)$ .

**Bài 27** Cho 
$$\begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & , \text{ nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Sử dụng máy tính vẽ đồ thị  $f$
- Tìm  $f_x(x, y)$  và  $f_y(x, y)$  khi  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- Tìm  $f_x(0, 0)$  và  $f_y(0, 0)$
- Chứng minh  $f_{xy}(0, 0) = -1$  và  $f_{yx}(0, 0) = 1$ .

## BÀI TẬP GIÁO TRÌNH

**Bài 28** Tìm đạo hàm riêng của  $z'_x; z'_y$

- $z = x^3 + 3x^2 y + e^{xy}$
- $z = \cos^3(x^2 + 2y)$
- $z = \ln(3 + \frac{y}{x})$
- $z = e^y(\cos x + y \sin x)$



e.  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f.  $z = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

**Bài 29** Tính đạo hàm riêng cấp 1 của  $z = (x + 2y)^2$  tại  $x = 1$  và  $y = 2$

**Bài 30** Tìm đạo hàm riêng cấp 2

a.  $z = xe^{xy}$

b.  $z = \cos(e^{2y} - 2x)$

**Bài 31** Tính đạo hàm riêng cấp 2 tại điểm cho trước

a.  $z = \frac{2x+3y}{x+y}$  tại  $x = 1, y = 1$

b.  $z = (x + 2y)e^{x+y}$  tại  $x = 2, y = 0$

c.  $z = \arctan \frac{2x}{y}$  tại  $x = 1, y = 1$

d.  $z = \frac{e^{xy}}{x}$  tại  $x = 2, y = 1$

e.  $z = \arctan\left(\frac{x}{y} + y\right)$  tại  $x = 0, y = -1$

**Bài 32** Cho  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ . Tìm  $A = f''_{xx}(1, -1) + 2f''_{yy}(-1, 1)$

