Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Định nghĩa:

PT vp tuyến tính cấp n hệ số hằng là ptvp có dạng

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

Trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các hằng số thực

PT (1) gọi là pt thuần nhất

PT (2) gọi là pt không thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Hệ hàm độc lập tuyến tính trên (a,b)

Hệ $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ được gọi là độc lập tuyến tính trong (a,b) nếu từ đẳng thức

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+\ldots+\lambda_n y_n(x)=0$$

Ta suy ra $\lambda_1= \lambda_2 = \ldots = \lambda_n=0$

Định thức Wronski của các hàm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ có đạo hàm đến cấp (n-1) trong (a,b) là

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Phương trình tuyến tính cấp n hệ số hằng

Định lý: Cho các hàm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ có đạo hàm đến cấp (n-1) trong (a,b).

Nếu $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ thì hệ trên đltt trong (a,b)

Ví dụ: 2 hàm $y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x$ đltt với mọi x

Ta đi tính định thức Wronski của 2 hàm đã cho

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x}(1+x) - xe^{2x}$$

$$= e^{2x} \neq 0, \forall x$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1.1)}$$

Cấu trúc nghiệm: Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng đltt của (1.1) thì NTQ của pt (1.1) là

$$y_{tn} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Ta đi tìm nghiệm của (1.1) ở dạng $y = e^{kx}$

Thay vào (1.1) : $k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0$

$$\Leftrightarrow k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (3)$$

Vậy hàm $y = e^{kx}$ là nghiệm của pt (1.1) khi và chỉ khi

k là nghiệm của pt (3)

Ta gọi pt (3) là pt đặc trưng của pt (1.1)

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

Pt thuần nhất : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Pt đặc trưng : $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ (3)

TH 1: (3) có 2 nghiệm thực

$$\mathrm{k}_1 \neq \mathrm{k}_2 : y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$ *đltt*

TH 2: (3) có 1 nghiệm thực

$$k = k_1 = k_2 : y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$$ *đltt*

TH 3: (3) có cặp nghiệm phức liên hợp

$$k = \alpha \pm i\beta : y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$ đltt

NTQ của pt thuần nhất là $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

Ví dụ: Tìm NTQ của các pt

$1. y'' - 5y' + 6y = 0$

$2. y'' + 4y' + 4y = 0$

$3. y'' + y = 0$

$$1. k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$2. k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$3. k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0 \pm i$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Phương trình tt cấp cao hệ số hằng thuần nhất

Tương tự cho các pt tuyến tính cấp cao hệ số hằng thuần nhất. Ta sẽ làm với ví dụ sau

Ví dụ: Tìm NTQ của các pt

$1.\ y''' + 5y'' + 4y' = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-4x}$

$2.\ y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$$(y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x})$$

$3.\ y''' - 8y = 0$

$$(y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x)$$

$4.\ y^{(4)} + y = 0$

$$\left(y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right)$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2.1)$$

Cấu trúc nghiệm của pt không thuần nhất

Ta gọi y_{tn} là nghiệm tổng quát của pt thuần nhất (1.1)

và y_r là 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất (2.1)

Thì NTQ của pt không thuần nhất (2.1) là

$$\boxed{y_{tq} = y_{tn} + y_r}$$

NTQ của pt thuần nhất (1.1) là y_{tn} ta đã tìm ở trên

Ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất là y_r

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Trường hợp đặc biệt : f(x) có thể viết dưới dạng

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)}$$

Ta sẽ viết y_r dưới dạng sau

$$\boxed{y_r = x^h e^{\alpha x}\left(T_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right)}$$

Trong đó : $s = \max\{m, n\}$,
$\alpha \pm i\beta$ là nghiệm bội *h* của pt đặc trưng

Sau đó, ta sẽ tính các đh cấp 1, cấp 2 của hàm y_r rồi thay vào pt ban đầu để tìm các đa thức $T_s(x)$ và $R_s(x)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$

PT đặc trưng: $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2,3$

NTQ của pt thuần nhất: $y_{tn} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Hàm vế phải có dạng đặc biệt :

$$f(x) = xe^{2x} = e^{2x}(x^1.\cos 0x + x^0.\sin 0x)$$

So với dạng chính tắc:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

Ta được: $\alpha = 2, \beta = 0, n = 1, m = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \pm i\beta = 2 & \text{Là nghiệm đơn (bội 1) của ptđt, h=1} \\ s = \max(m,n) = 1 \end{cases}$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

$$1.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} \qquad y_{tn} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

$$y_r = x^h e^{\alpha x}\left(T_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right)$$

$$= x^1 e^{2x}\left((ax^1 + b)\cos 0x + (cx^1 + d)\sin 0x\right)$$

$$= e^{2x}(ax^2 + bx^1)$$

Ta tính đh cấp 1, cấp 2 của y_r và thay vào pt đã cho

$$y_r' = e^{2x}(2ax^2 + 2bx^1 + 2ax + b)$$

$$y_r'' = e^{2x}(4ax^2 + (4b + 4a)x + 4ax + 2a + 2b)$$

Ta được: $\left((-2a + 4b)x + (2a - 3b)\right)e^{2x} = (1.x + 0)e^{2x}$

Đồng nhất hệ số 2 vế: *a=3/2, b=1*

Vậy NTQ: $y_{tq} = y_{tn} + y_r = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^{2x}(\frac{3}{2}x^2 + x)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Tìm dạng nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$$

$$2.\ y'' - 2y' + y = 2e^{x}$$

$$3.\ y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\left(\sin x - \cos x\right)$$

PT	k_1, k_2	$\alpha + i\beta$	h	n, m	s	y_r
1	2, 3	2	1	1, 0	1	$y_r = x^1 e^{2x}\left(\left(ax+b\right)\cos 0x\right)$
2	1, 1	1	2	0, 0	0	$y_r = x^2 e^{1x}\left(\left(a\right)\cos 0x\right)$
3	$2 \pm i$	$2 + i$	1	0	0	$y_r = x^1 e^{2x}\left(a.\cos(1.x) + b.\sin(1.x)\right)$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Nếu f(x) có thể tách được thành tổng 2 hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có dạng đặc biệt

Ta sử dụng nguyên lý chồng nghiệm như sau:

Nếu y_1, y_2 là nghiệm riêng của pt sau

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x), \quad y'' + a_1 y' + a_2 = f_2(x)$$

Thì y_1+y_2 là nghiệm riêng của pt

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$

$$y_{tn} = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$$

$$f(x) = 3x + 5\sin 2x = f_1(x) + f_2(x)$$

$$y_{r1} = ax + b, y_{r2} = c\cos 2x + d\sin 2x$$

$$y'_{r1} = a, y''_{r1} = 0$$

$$y'_{r2} = -2c\sin 2x + 2d\cos 2x, y''_{r2} = -4c\cos 2x - 4d\sin 2x$$

Thay y_{r1}, y_{r2} vào 2 pt tương ứng, ta được:

$$a = 3/2, b = 0, c = 3/4, d = -1/4$$

Vậy NTQ là $\boxed{y_{tq} = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x}$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Trường hợp hàm f(x) không thể viết như trên

Ta sẽ dùng phương pháp biến thiên hằng số bằng cách

khi NTQ của pt thuần nhất (1.1) là

$$y_{tn} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

tìm NTQ của pt không thuần nhất (2) ở dạng

$$y_{tq} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (*)$$

Từ (*) :

$$y'_{tq} = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

Để việc tính toán đơn giản hơn, ta thêm điều kiện

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \quad \text{(a)}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Khi đó: $y'_{tq} = C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x)$

Ta tính tiếp đh cấp 2, rồi thay y', y'' vào pt không t.nhất

$$y''_{tq} = C_1{}'(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x)$$

Lưu ý rằng y_1, y_2 là nghiệm của pt t.nhất, tức là

$$y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1 = 0, y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2 = 0$$

Ta được $C_1{}'(x)y'_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) = f(x)$ (b)

Suy ra, $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ là nghiệm của hpt (a), (b)

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x)y'_1(x) + C_2{}'(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Phương pháp biến thiên hằng số để giải pt

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (2)$$

1. Giải pt đặc trưng $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$
2. Viết 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ của pt thuần nhất
3. Tìm NTQ ở dạng $y_{tq} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

Rồi đi tìm $C_1'(x), C_2'(x)$ bằng cách giải hpt

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

4. Lấy tích phân $C_1'(x), C_2'(x)$ rồi thay vào y_{tq}

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Ví dụ: Gpt $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

Từ pt đ.tr $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = xe^{-2x}$

Ta giải hpt $\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-2)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-2x}(1-2x) = e^{-2x}\ln x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x\ln x \\ C_2'(x) = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + C_1 \\ C_2(x) = x\ln x - x + C_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của pt đã cho là

$$y_{tq} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$\boxed{y_{tq} = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4}\right)}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

PT Euler – Cauchy là pt có dạng

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x)$$

Ta đưa về pt tt hệ số không đổi bằng cách đặt

$x = e^t$ (x>0) hoặc $x = -e^t$ (x<0). Sau đây, giả sử $x=e^t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t \left(= x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \boxed{xy'_x = y'_t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \boxed{x^2 y''_x = y''_t - y'_t}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Thay $x^2 y''_x = y''_t - y'_t, xy'_x = y'_t$ vào pt ban đầu cấp 2:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$$

Ta được pt tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

$$a_2\left(y''_t - y'_t\right) + a_1 y'_t + a_2 y = f(e^t)$$

$$\Leftrightarrow a_2 y''_t + (a_1 - a_2) y'_t + a_2 y = f(e^t)$$

Giải pt trên rồi thay $x=e^t$, ta được nghiệm của pt Euler – Cauchy cấp 2

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Ví dụ: Gpt $x^2y'' - xy' + y = \ln x$ *(x>0)*

Vì *x>0* nên ta có thể đặt *x=e^t*

Thay $x^2y''_x = y''_t - y'_t, xy'_x = y'_t$ vào pt đã cho, ta được

$$y'' - 2y' + y = t$$

$$y_{tn} = C_1e^t + C_2te^t$$

$$y_r = at + b \Rightarrow y'_r = a, y''_r = 0$$ Thay vào pt trên

$$y_r = t + 2$$

Vậy nghiệm của pt đã cho là

$$\boxed{y_{tn} = C_1x + C_2x\ln x + \ln x + 2}$$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – pt Euler-Cauchy

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của pt

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2, y'(1) = y(1) = -\tfrac{1}{2}$$

Đặt $x=e^t$, ta được pt $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$

$$y_{tn} = C_1e^t + C_2e^{2t},$$

$$y_r = ate^{2t} \Rightarrow y_r' = ae^{2t}(1+2t), y_r'' = ae^{2t}(4+4t)$$

Thay vào pt trên, ta được : $a=1$

Suy ra, NTQ của pt đã cho $y_{tq} = C_1x + C_2x^2 + x^2\ln x$

Tính thêm y'_{tq}, thay điều kiện đầu vào, tìm được C_1, C_2

Vậy nghiệm riêng là: $\boxed{y = \frac{1}{2}x - x^2 + x^2\ln x}$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – Bài tập

Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$1.\ y'' - 5y' + 6y = x\cos x$

$2.\ y'' - 5y' + 4y = (x^2 + 1)\sin x$

$3.\ y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$

$4.\ y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

$5.\ y'' + 4y = \cos 2x + x\sin 2x$

$6.\ y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + \cos 2x,$

$7.\ y'' + y = tgx$

Phương trình tt cấp 2 hệ số hằng – Bài tập

$8. y'' + 9y = 2\sin x \sin 2x$

$9. y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$

$10. x^2 y'' + xy' + y = \sin(2\ln x)$

$11. x^2 y'' + 3xy' + y = 1/x$

$12. x^2 y'' - 3xy' + 4y = \dfrac{x^3}{2}$

$13. (4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$

$14. x^2 y'' - xy' + y = \cos\ln x$