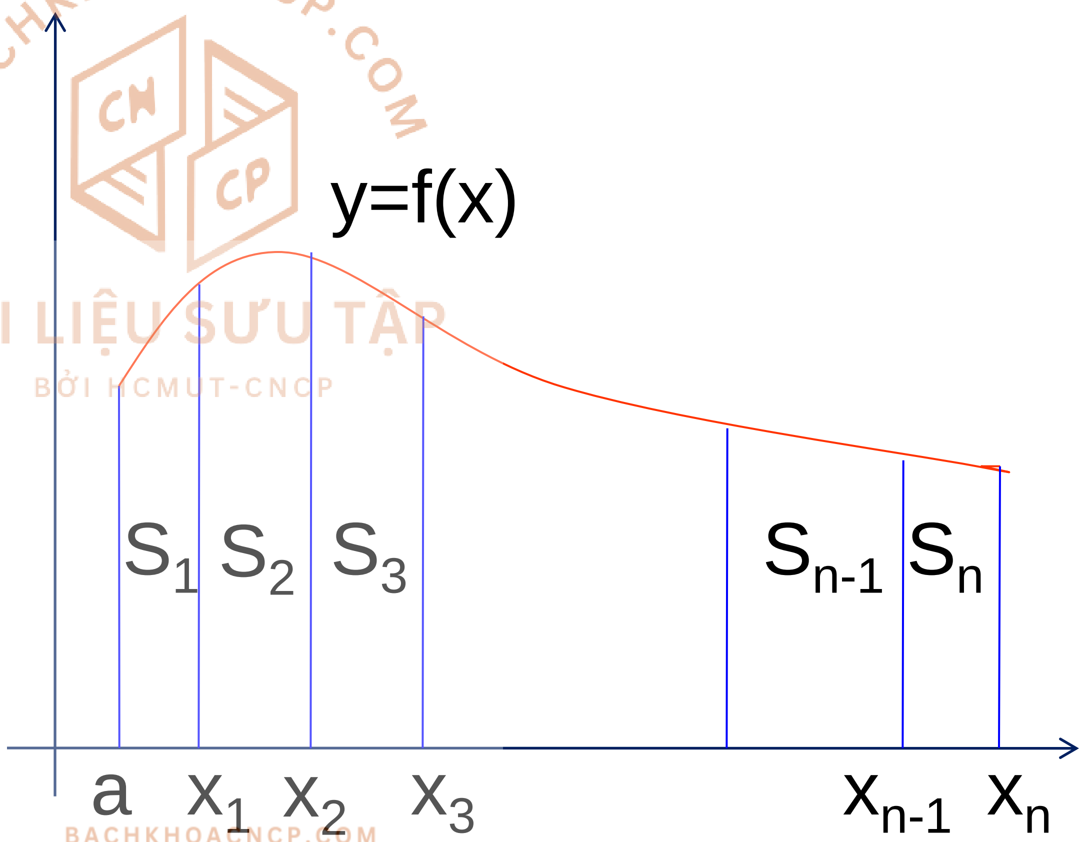
Tích phân xác định

Bài toán tính diện tích hình thang cong:

Cho hàm f(x) liên tục và không âm trên [a,b]. Miền D giới hạn bởi đường cong y=f(x), 3 đường thẳng x=a, x=b, y=0 được gọi là hình thang cong

Yêu cầu đặt ra là tính diện tích hình thang

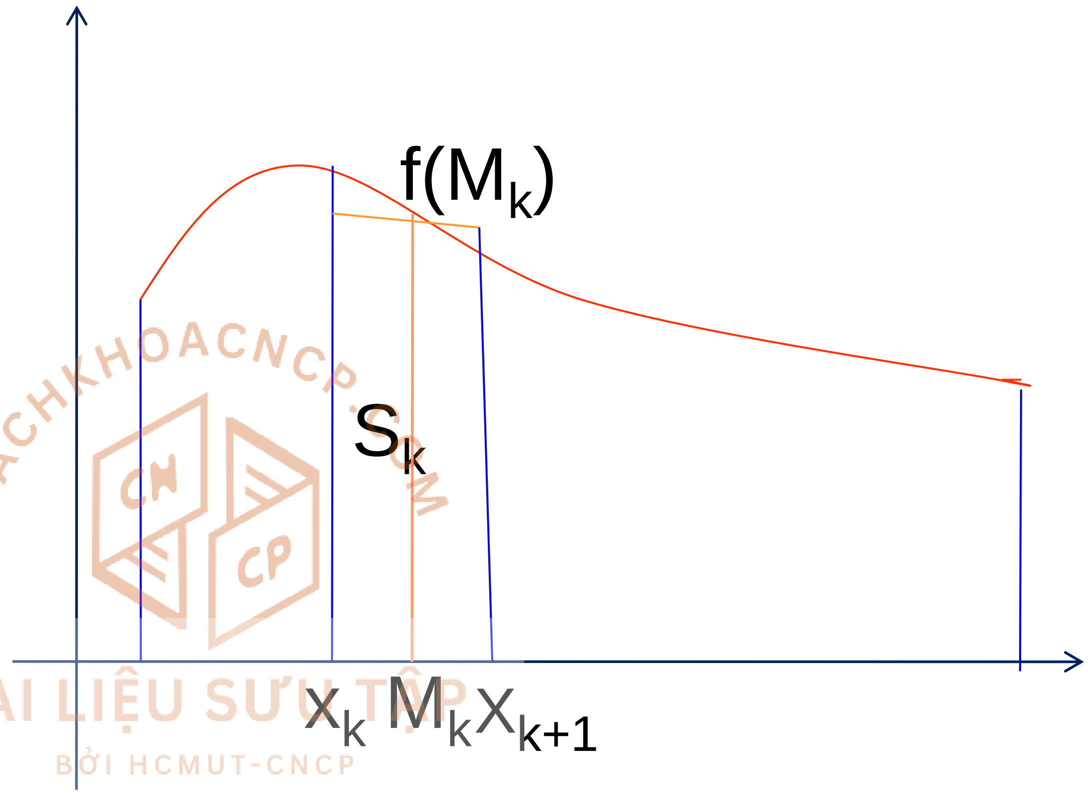


Chia đoạn [a,b] thành n-phần tùy ý bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Tích phân xác định

Ta tính gần đúng diện tích hình thang cong thứ k bằng cách lấy điểm M_k tùy ý trong $[x_k, x_{k+1}]$



Coi diện tích hình thang cong nhỏ xấp xỉ với diện tích hình chữ nhật cạnh $x_k x_{k+1}$, $f(M_k)$, tức là bằng $f(M_k).(x_{k+1} - x_k)$

Với n- điểm chia ta có n-hình thang cong nhỏ với diện tích được tính xấp xỉ như trên nên diện tích hình thang cong D được tính xấp xỉ với

Tích phân xác định

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k).\Delta x_k, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

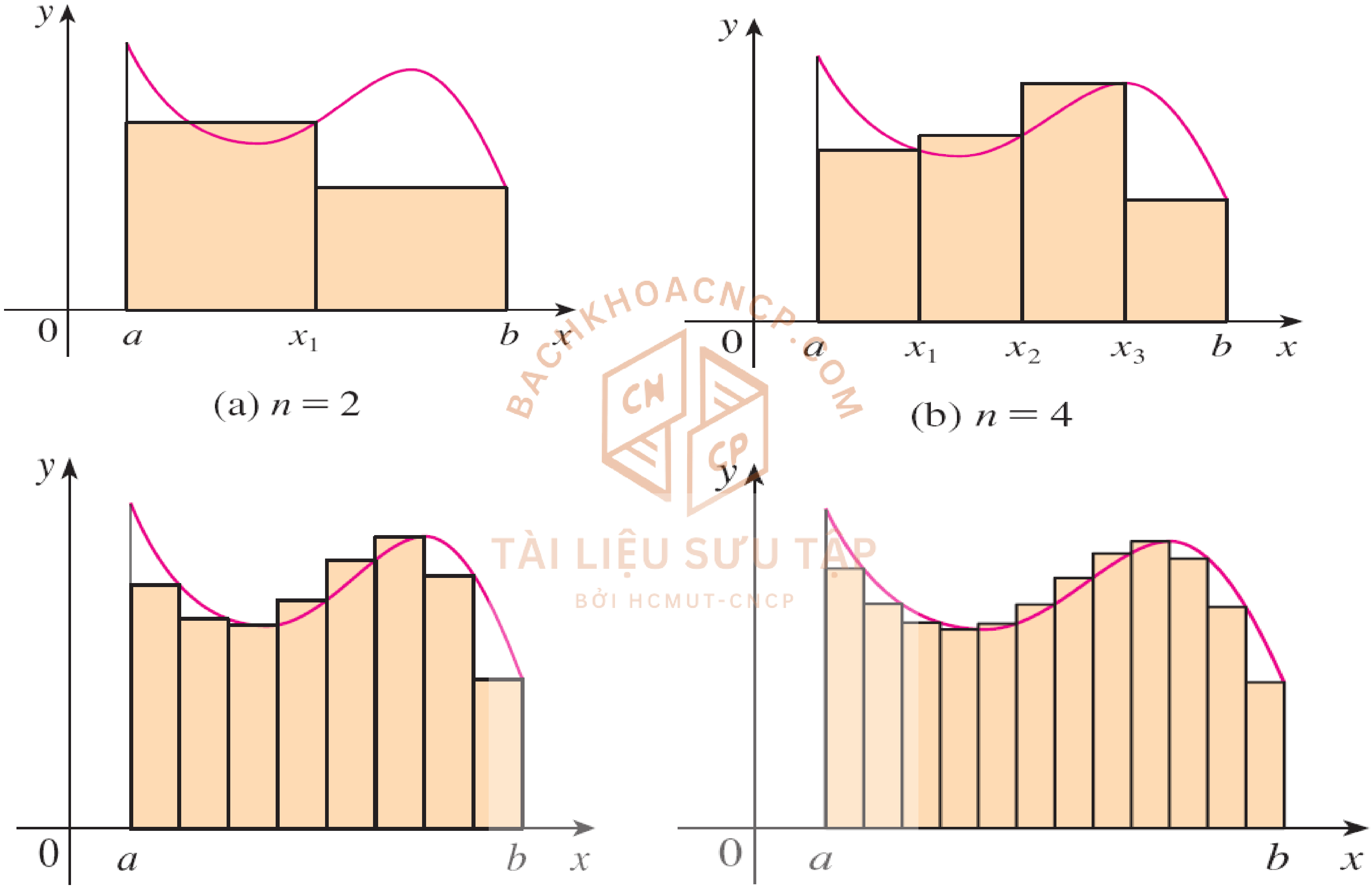
Rõ ràng, công thức xấp xỉ trên càng chính xác nếu số các hình thang cong nhỏ càng nhiều.

Ta cho $\max \Delta x_k \to 0$ (khi do: n $\to \infty$, $\Delta x_k \to 0$)

Nếu S_n tiến đến một giới hạn hữu hạn mà không phụ thuộc cách chia [a,b] và cách lấy điểm M_k thì giới hạn đó được gọi là diện tích của hình thang cong D

$$S(D) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k).\Delta x_k$$

Tích phân xác định



(a) $n = 2$

(b) $n = 4$

(c) $n = 8$

(d) $n = 12$

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định: Cho hàm f(x) xác định trên [a,b]. Chia [a,b] thành n-phần tùy ý bởi các điểm chia (ta gọi là một phân hoạch của đoạn [a,b])

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Lấy điểm bất kỳ $M_k \in [x_k, x_{k+1}]$, lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k).\Delta x_k, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$ (Tổng Riemann)

Ta cho $\max \Delta x_k \to 0$, nếu S_n tiến đến một giới hạn hữu hạn mà không phụ thuộc cách chia [a,b] và cách lấy điểm M_k thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm f(x) trên [a,b] và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx$$ Khi ấy, ta nói hàm f(x) khả tích trên [a,b]

Tích phân xác định

Ví dụ: Tính tích phân sau bằng định nghĩa $I_1 = \int_0^1 2^x dx$

Chia [0,1] thành n phần bằng nhau thì các điểm chia sẽ là

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \ldots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = 1$$

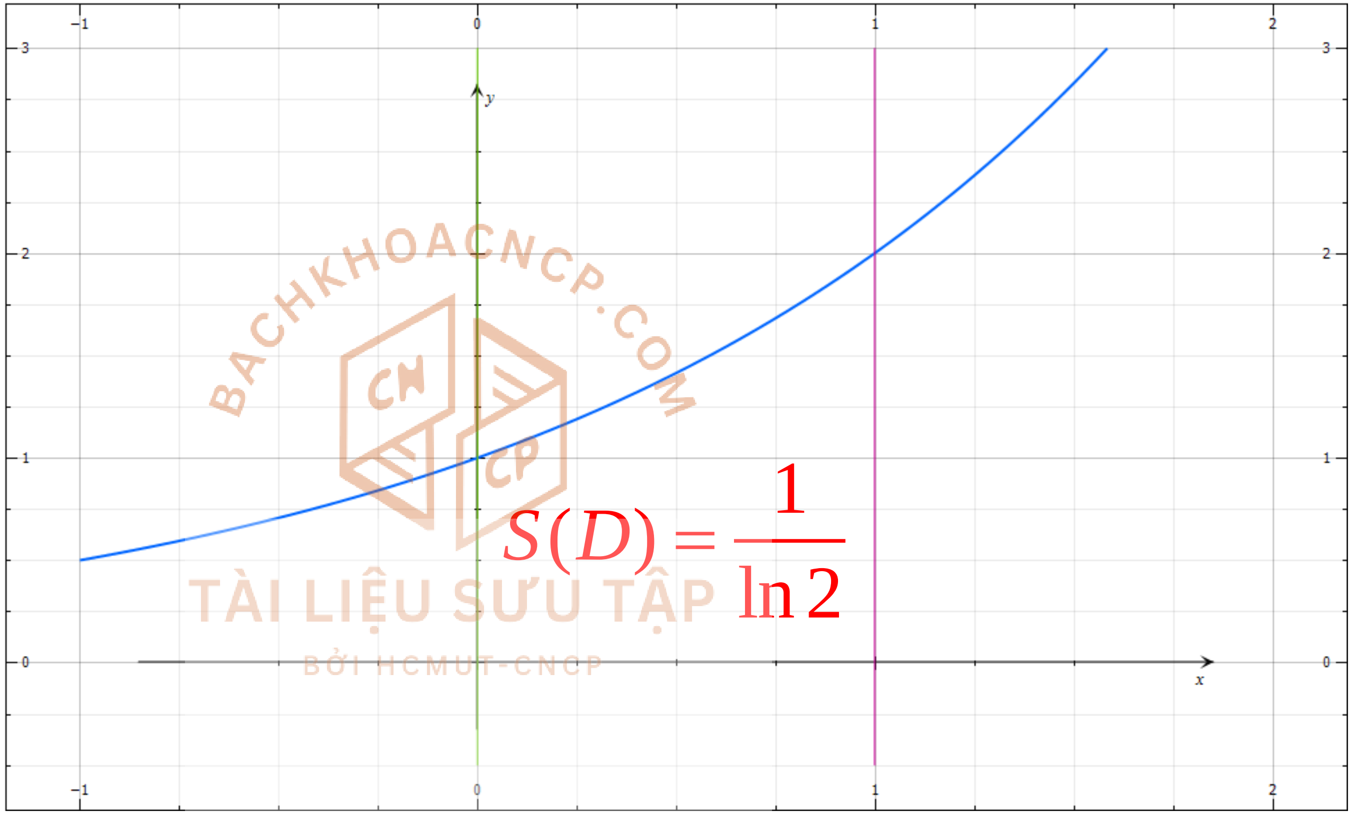
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} 2^{k/n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + 2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \ldots + 2^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{2^{1/n} - 1} = \frac{1}{n} \frac{1}{e^{1/n \ln 2} - 1}$$

$$\Rightarrow I_1 = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{\ln 2}$$

Tích phân xác định

Theo định nghĩa, tích phân I_1 cho ta diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi 2 trục Ox, Oy, đt x=1 và đường cong $y=2^x$



Tích phân xác định

Ta có thể tính bằng cách dùng MatLab

Khai báo biến x: syms x

Nhập hàm: *f=2^x*

Nhập cận lấy tp: *a=0, b=1*. Sau đó thực hiện các bước sau

<u>Bước 1</u>: Tính giá trị hàm f tại điểm x_k bằng lệnh *subs(f,x_k)*

Bước 2: Tính tổng Sn bằng lệnh *S=symsum(f(xk).(x_{k+1}-x_k),k,0,n-1): Tính tổng các số hạng dạng f(xk).(xk+1-xk) theo k, với k từ 0 đến n-1*

Bước 3: Tính giới hạn của Sn bằng lệnh *limit(S,n,inf): tính giới hạn của S theo n, n dần đến ∞ (inf)*

Tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định

Định lý 1: Hàm liên tục trên [a,b] thì khả tích trên [a,b]

Định lý 2: Hàm có hữu hạn điểm gián đoạn trên [a,b] thì khả tích trên [a,b]

Trong các tính chất dưới đây, đều có f(x), g(x) là các hàm khả tích trên [a,b]

$$1/\ \int_a^b dx = b - a \qquad 2/\ \int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$$

$$3/\ \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Tích phân xác định

$$4/\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$5/\ \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx, \quad f(x) \ge g(x) \forall x \in [a,b]$$

$$6/\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

f(x) khả tích trên [a,c], [c,b], [a,b]

$$7/\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$8/\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \ f(x) \text{ là hàm lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx, \ f(x) \text{ là hàm chẵn} \end{cases}$$

Tích phân xác định

9 / $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx, f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T

7 / $m(b-a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a)$ M, m là GLNN, GTNN của f(x) trên [a,b]

<u>Định lý giá trị trung bình</u>: Cho hàm f(x) liên tục trên [a,b], tồn tại điểm c trong [a,b] sao cho

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Ta gọi f(c) là giá trị trung bình của hàm f(x) trên [a,b]

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Tích phân xác định

Công thức đạo hàm dưới dấu tích phân

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)' = f(b(x)).b'(x) - f(a(x)).a'(x)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm theo x của $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(t^2)dt$

$$f'(x) = \cos(\cos^2 x)(-\sin x) - \cos(\sin^2 x)\cos x$$

Tích phân xác định

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x (\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x (\arctan t)^2\,dt = +\infty$ tức là giới hạn trên có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$, nên ta áp dụng quy tắc L'Hospital

$$\frac{\int_0^x (\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\arctan x)^2\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\pi^2}{4}$$

Tích phân xác định

Công thức Newton – Leibnitz:

Nếu hàm f(x) liên tục trên [a,b] và G(x) là một nguyên hàm của f(x) thì ta có

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Ví dụ: Tính tích phân $I_2 = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}$

$$I_2 = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x(e^x - 1)} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x} \right) de^x$$

$$= \ln(e^x - 1)\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} - \ln(e^x)\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

Tích phân xác định

Phương pháp đổi biến

Nếu $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } [a,b] \\ \varphi(t) \text{ khả vi, liên tục trên } [t_1,t_2] \\ \varphi([t_1,t_2]) \subset [a,b], \varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b \end{cases}$

Thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Tích phân xác định

Ví dụ: Tính $I_3 = \int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

Đặt $\sqrt{3x-2} = t \Rightarrow dx = \frac{2t}{3}dt, \frac{x=1, t=1}{x=6, t=4}$

$$I_3 = \int_1^4 \frac{2tdt}{3}\frac{1}{1+t} = \frac{2}{3}\int_1^4 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{2}{3}\left(t - \ln|t+1|\right)_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left(3 - \ln\frac{5}{2}\right)$$

Tích phân xác định

Phương pháp tích phân từng phần

Nếu 2 hàm u(x), v(x) khả vi, liên tục trên [a,b] thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Ví dụ: Tính $I_4 = \int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$

$$I_4 = 2\int_0^1 \arcsin x d(\sqrt{1+x}) = 2\arcsin x\sqrt{1+x}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+x}d(\arcsin x)$$

$$= \frac{\pi}{2}.\sqrt{2} - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 4\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - 4$$

Tích phân xác định

Lưu ý 1: Trong MatLab, để tính tích phân bất định hàm f(x), ta có thể dùng lệnh *int(f,x)* hoặc *int(f)*

Và để tính tích phân xác định của hàm f trên [a,b] ta dùng lệnh *int(f,a,b)*

Tuy nhiên, có những hàm ta sẽ không thể dùng lệnh *int* để tính tp bất định cũng như tp xác định (Hàm f trong ví dụ trên).

Khi đó, ta chỉ có thể tính được trong MatLab các tích phân xác định bằng cách dùng thêm lệnh *double* : *double(int(f,a,b))*

Tức là ta chỉ có thể dùng MatLab để tính gần đúng các tích phân xác định như vậy

Tích phân xác định

Để tính gần đúng tích phân xác định, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đơn giản nhất là phương pháp hình thang như sau:

Ta sẽ chia [a,b] thành lần lượt thành 2 phần, 4 phần, 8 phần, …, 2^n phần bằng nhau và áp dụng công thức tính trong các trường hợp trên là

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2} I_{n-1} + \frac{b-a}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{2^{n-2}} f\left(a + \frac{2i-1}{2^{n-1}}(b-a)\right)}$$

Số lần chia sẽ dừng lại sau khi ta đánh giá sai số nhỏ hơn giá trị mà ta đưa ra. Tuy nhiên, phần đánh giá sai số sẽ được làm một cách cụ thể trong môn học Phương pháp tính.

Tích phân xác định

Trong MatLab, ta sẽ lập hàm để tính tích phân xác định của hàm f trên [a,b] với số đọan chia là 2^n với tên gọi và cú pháp như sau:

Tên hàm: *hinhthang(f,a,b,solan) (solan là n thì số đọan chia là 2^n)*

Nhập vào : *syms x, nhập vào hàm f, cận a, b, số n bằng lệnh input*

Tính giá trị đầu: *fa = subs(f, a); fb = subs(f, b); I = (fa + fb)*(b-a)/2; sum=0*

Lập vòng lặp để tính tổng và vòng lặp để tính tp I

Tích phân xác định

```
for  n = 2:solan
      k=2^(n-2)
      h=(b-a)/(2*k)
      x = a + h;
      sum = 0;
      for i = 1:k
            fx = subs(f, x);
            sum = sum + fx;
            x = x + (b-a)/k;
     end
     I=(I/2)+h*sum
end
```

Tích phân xác định

Lưu ý 2: Các tích phân không áp dụng được công thức Newton – Leibnitz

$$\int_{-e}^{e} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-e}^{e} = 0$$

Cách tính này sai vì hàm dưới dấu tp không liên tục trên [-e,e]

Để tính đúng tp trên, ta phải chia tp ra làm 2 với điểm chia là điểm gián đọan của hàm: x=0

$$\int_{-e}^{e} \frac{dx}{x} = \int_{-e}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{e} \frac{dx}{x}$$

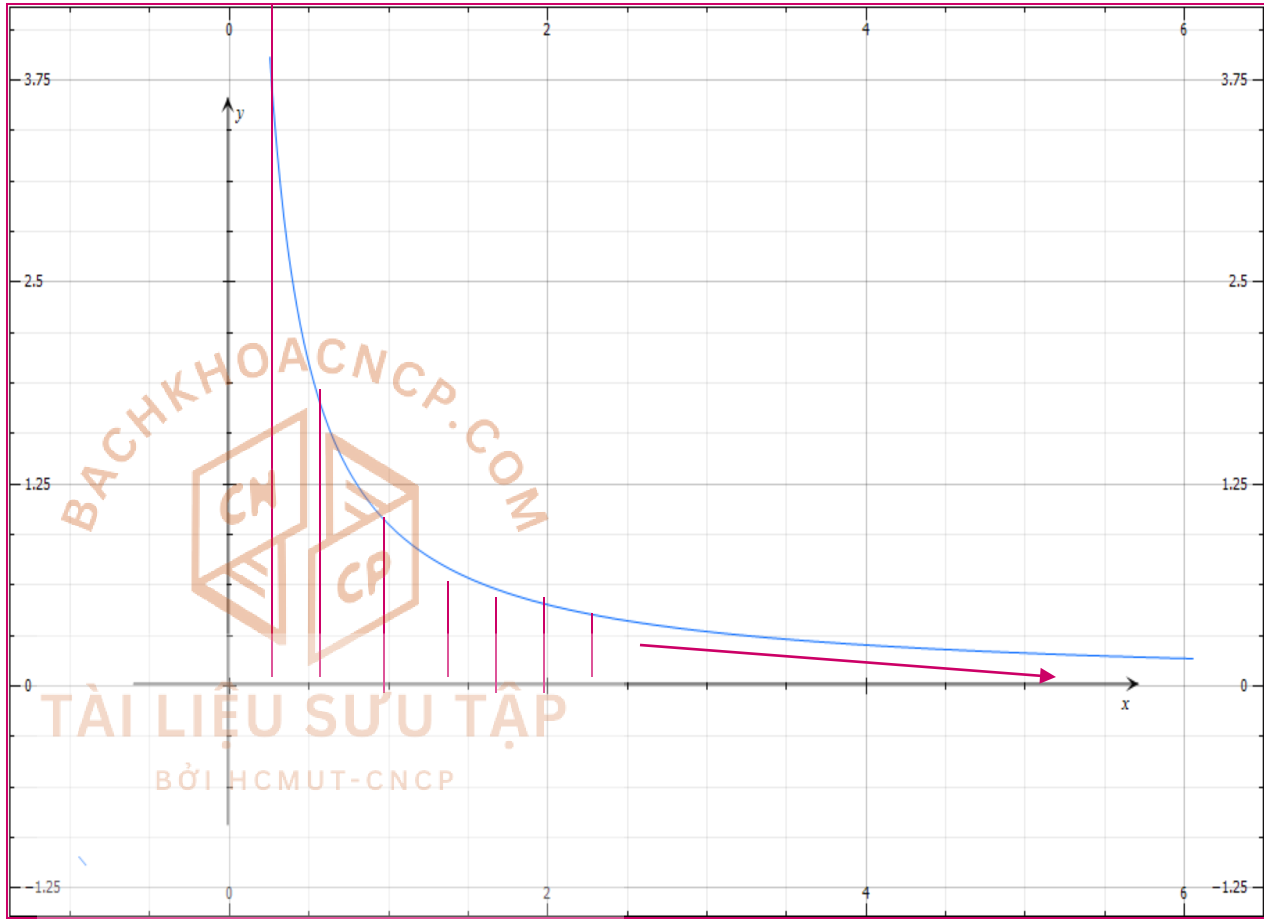
Hai tp thành phần ta gọi là tp của hàm không bị chặn hay là tp suy rộng lọai 2

Tích phân suy rộng loại 1

Cho đường cong

$$y = \frac{1}{x}$$

Giả sử ta cần tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong trên và 2 nửa dương 2 trục Ox, Oy



Khi đó, theo phần trên ta có $S(D) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

Tích phân suy rộng loại 1

Để có diện tích miền D, ta sẽ phải tính tích phân khi $x \to \infty$ và khi $x \to 0$

Ta gọi những tích phân như vậy là tích phân suy rộng

Có 2 loại tích phân suy rộng: Tích phân với cận vô tận (tp suy rộng loại 1) và tích phân của hàm không bị chặn (tp suy rộng loại 2)

Tích phân suy rộng loại 1

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 1:

Cho hàm f(x) khả tích trên [a,b] , $\forall b > a$

Tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

Được gọi là tp suy rộng loại 1 của hàm f(x) trên [a,+∞)

Nếu giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói tp hội tụ, tp không hội tụ thì gọi là tp phân kỳ

Tương tự, ta có thêm 2 dạng tp suy rộng loại 1:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: Xét tp sau $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Nếu α=1: $I_1 = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$

Tp phân kỳ

Nếu α≠1: $I_1 = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$

Nếu 1- α>0 : $I_1 = +\infty$ Tp phân kỳ

Nếu 1- α<0 : $I_1 = -\frac{1}{1-\alpha}$ Tp hội tụ

Vậy $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ nếu α>1 và phân kỳ nếu α≤1

Tích phân suy rộng loại 1

Sử dụng CT Newton – Leibnitz để tính tp suy rộng

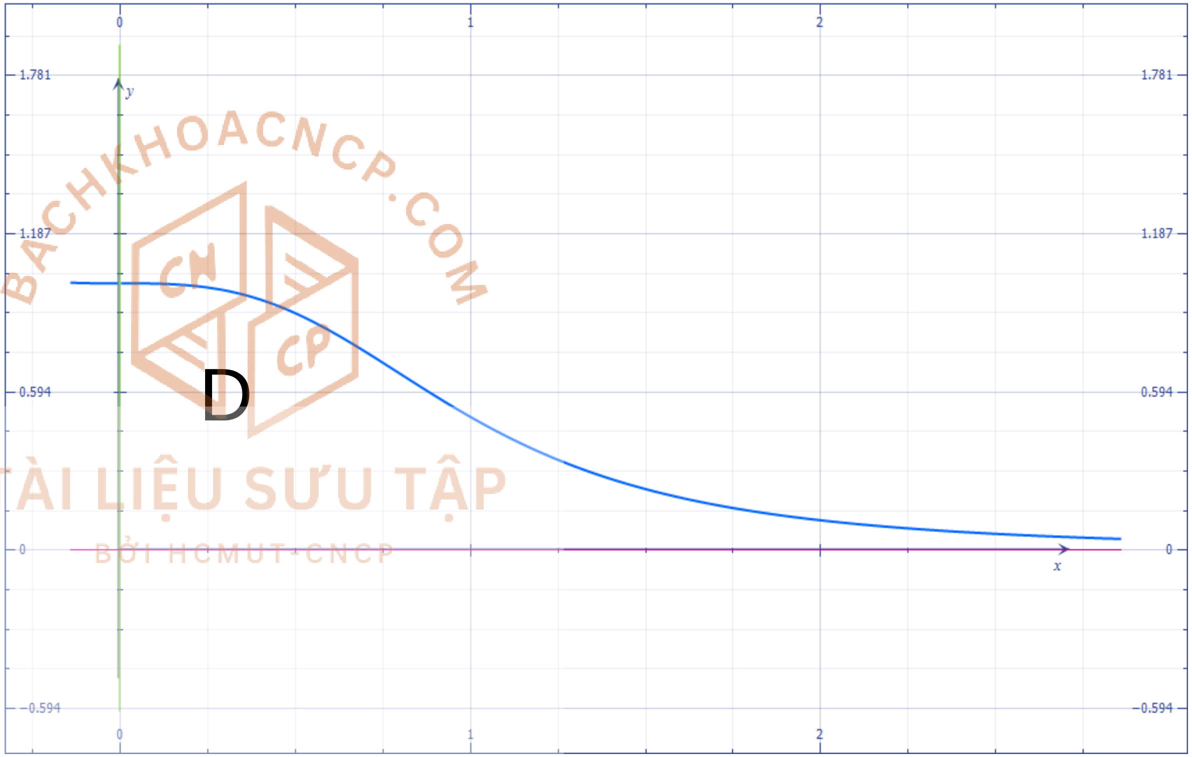
Nếu hàm f(x) có nguyên hàm là G(x) trên [a,+∞) thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} G(x)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^{+\infty}$$

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: Tính dt miền D giới hạn bởi $y = \dfrac{1}{1+x^3}, x = 0, y = 0$
x>0



$$S(D) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

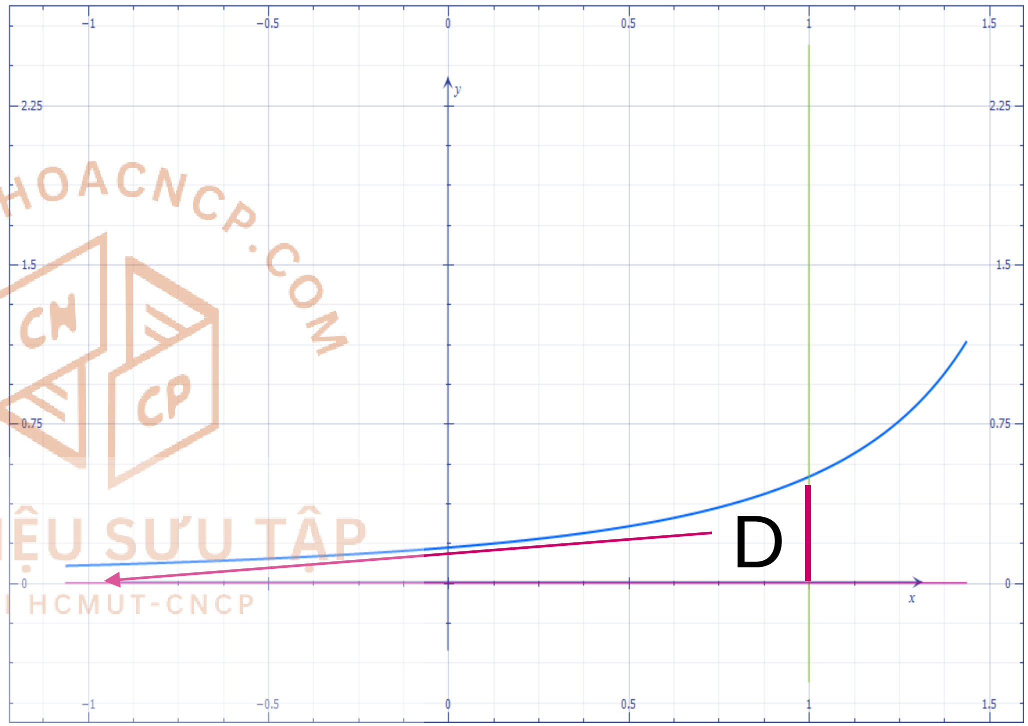
$$S(D) = \left[\frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: Tính dt miền D ghạn bởi $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}, x = 1, y = 0$

$$S(D) = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= \Big[\ln|x-3| - \ln|x-2|\Big]_{-\infty}^{1}$$



Ta có giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$

$$S(D) = \left[\ln\frac{|x-3|}{|x-2|}\right]_{-\infty}^{1} = \ln 2$$

Tích phân suy rộng loại 1

Giả sử hàm f(x)≥0, khả tích trên [a, +∞).

Ta đặt $g(b) = \int_a^b f(x)dx$ Ta có:

$$g(b+\alpha) = \int_a^{b+\alpha} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+\alpha} f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = g(b), \forall \alpha \geq 0$$

tức là hàm g(b) không giảm trên [a, +∞).

Suy ra: $\exists \lim\limits_{b\to\infty} g(b) \Leftrightarrow \exists M > 0 : g(b) \leq M, \forall b \geq a$

Vậy:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\exists M : \int_a^b f(x)dx \leq M, \forall b \in [a, +\infty)$

Tích phân suy rộng loại 1

Khảo sát sự HT của tp suy rộng lọai 1 với hàm không âm

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho 2 hàm f(x), g(x) không âm, khả tích trên [a,+∞) thỏa f(x) ≥ g(x) ở lân cận của ∞. Ta có:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ \ HT \ \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ HT}$$

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \ \ PK \ \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ PK}$$

Ta thường so sánh với tp cơ bản $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \begin{cases} \alpha > 1 : HT \\ \alpha \le 1 : PK \end{cases}$

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Khi $x > e-1$ thì $\ln(1+x)>1$, suy ra $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x}$

Mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ PK Vậy I_2 PK

Ví dụ: KS sự HT của $I_3 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin 2x}{x^2+\sqrt{x}} dx$

$\frac{3+\sin 2x}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{4}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{4}{x^2}$ Vì $\int\limits_1^{+\infty} \frac{4}{x^2} dx$ HT

Suy ra tp I_3 HT

Tích phân suy rộng loại 1

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho 2 hàm f(x), g(x) không âm, khả tích trên [a,+∞)

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ thì ta có các kết luận sau:

K=0: $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ HT} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ HT}$

K=+∞: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ HT} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ HT}$

0<K<+∞: 2 tp trên cùng HT hoặc cùng PK

Tích phân suy rộng loại 1

Để khảo sát sự HT của tp $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ta làm như sau:

1. Xác định hàm f(x) không âm với mọi x>a

2. Khi x→∞, tìm hàm g(x) tương đương với f(x) hoặc đánh giá f(x) lớn hay nhỏ hơn hàm g(x)

3. Nếu là hàm tương đương thì dùng t/c so sánh 2, nếu là hàm nhỏ hay lớn hơn thì dùng t/c so sánh 1

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_4 = \int\limits_1^{+\infty} (1 - \cos\frac{1}{x})dx$

Khi x→∞ , hàm đã cho không âm và

$$f(x) = 1 - \cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2} = g(x)$$

Tức là $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 = K \text{ , } 0 < K < +\infty$

Đây là trường hợp 2 tp cùng HT hoặc cùng PK

Do $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ HT nên tp I_4 HT

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_5 = \int\limits_3^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$

Với x≥3, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} > 0$

$Khi\ x \to +\infty$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}} = g(x)$

$Do \int\limits_3^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_3^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ HT

Vậy tp I_5 HT

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

Ta có $I_6 = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\ln x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ Vậy Tp I_6 HT

Ví dụ: KS sự HT của $I_7 = \int_1^{+\infty} \left(\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \right) dx$

Khi x→∞ thì 1/x →0 nên ta có thể biến đổi và thay VCB tương đương như khi tính giới hạn

$$f(x) = \tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{1-\cos{}^1\!/_x}{\cos{}^1\!/_x} \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$Do \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \;\; HT$ nên TP I_7 HT`

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_8 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x}dx$

$$\arctan x \xrightarrow{x\to+\infty} +\pi/2$$

$$f(x) = \frac{\arctan x}{2+e^x} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2+e^x)} \sim \frac{\pi}{2e^x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2e^x} = -\frac{1}{2e^x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2e}$$

Tp này HT nên Tp I_8 cũng HT

Tích phân suy rộng loại 1

Tích phân hàm có dấu bất kỳ

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ HT Thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ HT

Khi đó, ta nói tp $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là tp hội tụ tuyệt đối

Nếu là tp của hàm có dấu bất kỳ, ta sẽ khảo sát tp của hàm không âm sau bằng 1 trong 2 tiêu chuẩn so sánh

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Tp trên HT thì Tp cần khảo sát là tp HTTĐ

Tp trên PK thì chưa có kết luận cho tp cần khảo sát

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

Trước tiên, ta tính tp từng phần

$$I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{d(\sin x)}{x} = \left.\frac{\sin x}{x}\right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \sin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$= -\sin 1 + J$$

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ là Tp HT Suy ra J là tp HTTĐ

Mặt khác, sin1 là hằng số hữu hạn nên I_9 HT

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: Tìm α để tp sau HT $I_{10}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^3+\sin x\right)x^\alpha}$

Khi $x\to\infty$ thì x^3 là VCL, sinx là hàm bị chặn nên

$$\left(x^3+\sin x\right)x^\alpha \sim x^{3+\alpha}$$

$$\frac{1}{\left(x^3+\sin x\right)x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{3+\alpha}}$$

Suy ra, Tp I10 HT khi và chỉ khi tp $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3+\alpha}}$ HT

Vậy I_{10} HT khi và chỉ khi $3+\alpha>1\Leftrightarrow\alpha>-2$

Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ: KS sự HT của $I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \ln 2}$

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2 + \ln 2}\right| \le \frac{1}{x^2 + \ln 2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ HT} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln 2} dx \text{ HT} \Rightarrow I_{11} \text{ HT}$$

Kết quả này SAI

vì tp mà ta so sánh không chỉ là tp suy rộng loại 1

Tích phân suy rộng loại 1

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2 + \ln 2}\right| \le \frac{1}{x^2+\ln 2} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

Ta xét tp $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Tp J là tp suy rộng lọai 1 vì có cận vô tận, tuy nhiên hàm dưới dấu tp còn là hàm không bị chặn tại đầu dưới x = 0

Ta sẽ tách tp J thành tổng

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx + \int\limits_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$$

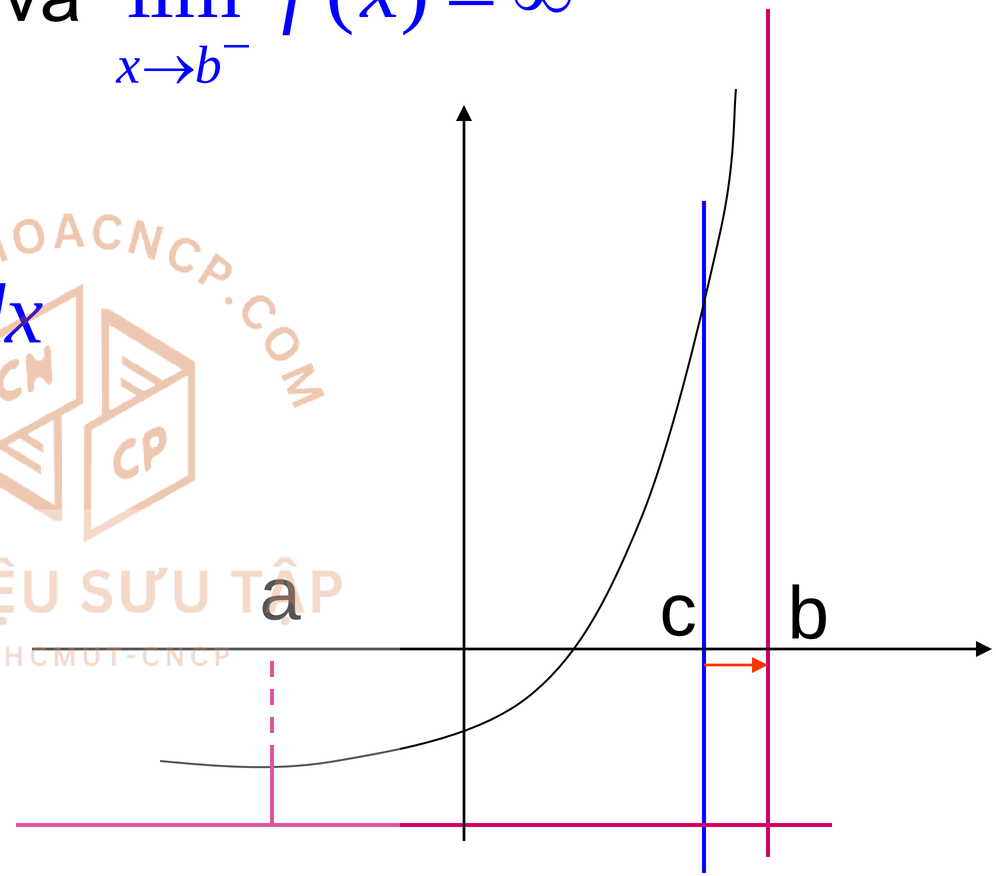
Tp thứ nhất là tp suy rộng lọai 1 HT, còn tp thứ hai ta sẽ xét tiếp ở phần tp suy rộng lọai 2 (Tp PK)

Tích phân suy rộng loại 2

Định nghĩa: Cho hàm f(x) xác định và khả tích trong [a,c] với mọi c: a≤c<b và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$

Tích phân trên [a,b]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$



Được gọi là tp suy rộng loại 2 (tp của hàm không bị chặn) của hàm f(x) trên [a,b]

Nếu giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói tp là HT, tp không HT thì gọi là tp PK

Tích phân suy rộng loại 2

Nếu $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ Thì $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$

Nếu trong [a,b] có 1 điểm c mà tại đó hàm f(x) không bị chặn thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tức là ta có tổng 2 tp suy rộng loại 2. Nếu 2 tp thành phần HT thì tổng HT

Ta cũng có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b^-} G(c) - G(a)$$

Trong đó G(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên [a,b]

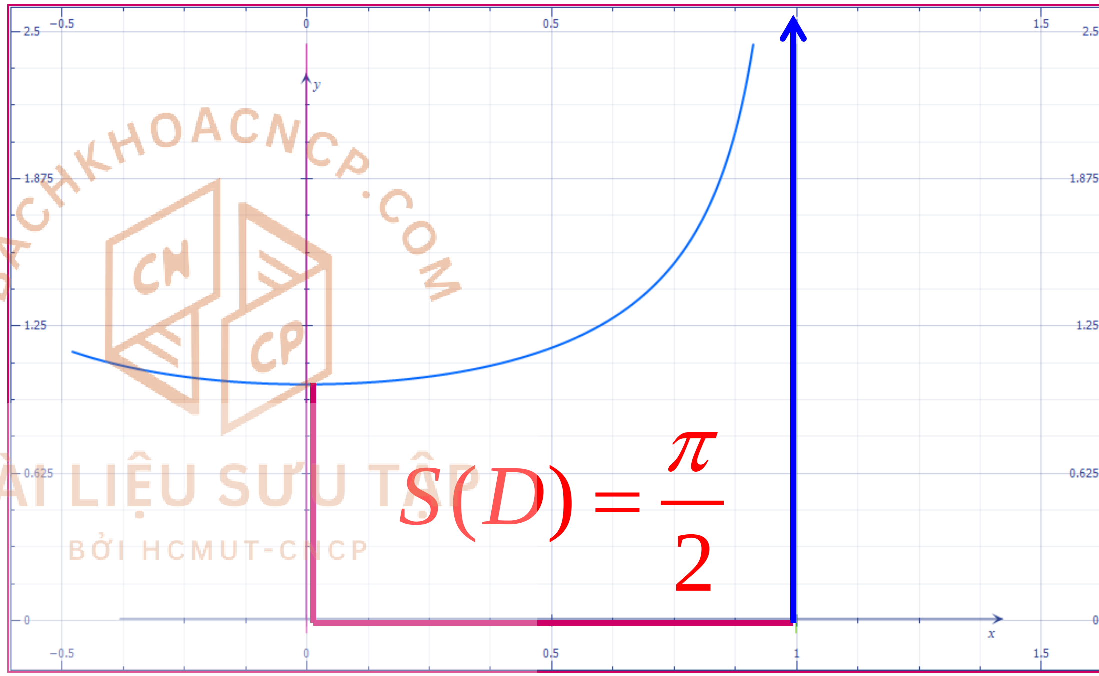
Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Tính $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\mathrm{I}_1 = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{c\to 1^-} \arcsin x \Big|_0^c$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$

Nếu α = 1: $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \ln(b-x)\Big|_a^b = -\infty$ Tp PK

Nếu α ≠ 1: $I_2 = \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{-1+\alpha}\Bigg|_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{-1+\alpha} + \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Nếu α>1: $I_2 = \infty,\ Tp$ PK

Nếu α<1: $I_2 = -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ Tp$ HT

Vậy $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ HT nếu α<1 và PK nếu α≥1

Tích phân suy rộng loại 2

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho 2 hàm f(x), g(x) không âm, khả tích trên [a,b), không bị chặn tại b và f(x) ≤ g(x) với mọi x thuộc lân cận của b. Ta có:

$$\int_a^b g(x)dx \text{ HT } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ HT}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ PK } \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ PK}$$

Để khảo sát sự HT của tp $\int_a^b f(x)dx$ ta sẽ so sánh f(x) với $\frac{1}{(b-x)^\alpha}, \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ rồi sử dụng kết quả trên

Tích phân suy rộng loại 2

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho 2 hàm f(x), g(x) không âm, khả tích trên [a,b), không bị chặn tại b và $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ Ta có:

$$K=0:\ \int_a^b g(x)dx \text{ HT } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ HT}$$

$$K=\infty:\ \int_a^b f(x)dx \text{ HT } \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ HT}$$

$0<K<\infty$: 2 tp cùng HT hoặc cùng PK

Ta cũng tìm hàm g(x) để so sánh như khi khảo sát tp suy rộng loại 1 khi $x\to b^-$

Tích phân suy rộng loại 2

Cách xác định và khảo sát tp suy rộng loại 2

Tìm D_f để có các giá trị $x_0 \notin Df, x_0 \in [a,b]$

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

Nếu $c \neq \infty$ ta có tích phân xác định (luôn HT)

Nếu $c = \infty$ ta có tp suy rộng loại 2,

so sánh hàm f(x) với $\dfrac{1}{\left(\pm(x - x_0)\right)^{\alpha}}$

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_3 = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$

Hàm không xác định tại 1 điểm x = 1, tại đó hàm không bị chặn và đó là điểm duy nhất trên đọan lấy tp mà hàm không bị chặn.

Ta sẽ chỉ xét $x \to 1^-$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}} \overset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}(1-x)^{1/2}} = g(x)$$

Tức là: $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 2 tp cùng HT hoặc cùng PK

Vậy: $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3}(1-x)^{1/2}}$ HT $\Leftrightarrow$ I_3 HT

Tích phân suy rộng loại 2

Tích phân hàm có dấu bất kỳ - Hội tụ tuyệt đối

Với hàm f(x) khả tích trên [a,b) và không bị chặn tại b

Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ HT thì $\int_a^b f(x)dx$ HT

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_4 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$

Xét tại 2 điểm đặc biệt x=0, x=1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(-2x)x} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\infty$$

Tức là hàm không bị chặn tại x=0 Tp này HT

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_5 = \int_0^1 \frac{3x^3 - \sqrt{2x^5}}{\sin x - x} dx$

Ta chỉ xét khi x→0:

$$f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt{2x^5}}{\sin x - x} \sim \frac{-\sqrt{2}.x^{5/2}}{(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^3)) - x}$$

$$\sim \frac{6\sqrt{2}}{x^{1/2}} = g(x)$$

Do $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{6\sqrt{2}}{x^{1/2}} dx$ HT $\Leftrightarrow$ I_5 HT

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_6 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$

Hàm dưới dấu tp không bị chặn tại cả 2 cận

$$I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

Khi $x \to 0^+$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}.x^{1/2}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}.x^{1/2}}$ HT

Khi $x \to 2^-$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}.(2-x)^{1/2}}$, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2}.(2-x)^{1/2}}$ HT

Như vậy, I_6 là tổng của 2 tp HT nên I_6 HT

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Khảo sát sự HT của $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x - \cos x}$

Tp trên vừa là tp suy rộng lọai 1, vừa là tp suy rộng loại 2

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - \cos x} + \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

Khi $x \to +\infty$: $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x} \sim \frac{1}{e^x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x} = \left.\frac{-1}{e^x}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$ HT

Khi $x \to 0^+$: $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x} = \frac{1}{(e^x - 1) + (1 - \cos x)} \sim \frac{1}{x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^1}$ PK

Như vậy, I_7 là tổng của 1 tp HT và 1 tp PK nên I_7 PK

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Tính $I_8 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx \quad (1)$

Đặt $\boxed{t = \pi/2 - x}$

$$I_8 = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - t))(-dt) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt \quad (2)$$

Cộng 2 vế (1) và (2):

$$2I_8 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2t}{2}dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)dt - \int_0^{\pi/2} \ln 2dt$$

Đặt $\boxed{u = 2t}$

Tích phân suy rộng loại 2

$$2I_8 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)du - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)du + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)du - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Đặt $\boxed{x = u - \pi/2}$

$$2I_8 = \frac{1}{2}I_8 - \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x + \pi/2))dx$$

$$= \frac{1}{2}I_8 - \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = I_8 - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Vậy: $\boxed{I_8 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Tìm α để tp sau HT $I_9 = \int_0^1 \frac{x - \ln(1+x)}{x^\alpha} dx$

Ta tính khi x→0

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^\alpha} = \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^2)\right)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2x^{\alpha-2}} = g(x)$$

Tp I_9 HT khi và chỉ khi tp $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^{\alpha-2}} dx$ HT

Vậy I_9 HT khi và chỉ khi $\alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Tìm α để tp sau HT $I_{10} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^4 + \ln(1+x^2)\right)x^{5\alpha}}$

$$I_{10} = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx,\ f(x) = \frac{1}{\left(x^4 + \ln(1+x^2)\right)x^{5\alpha}}$$

$$\text{Khi } x \to 0^+ : f(x) \sim \frac{1}{x^{5\alpha+2}} \Rightarrow \left(\int\limits_0^1 f(x)dx \text{ HT } \leftrightarrow \alpha < \frac{-1}{5}\right)$$

$$\text{Khi } x \to +\infty : f(x) \sim \frac{1}{x^{5\alpha+4}} \Rightarrow \left(\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \text{ HT } \leftrightarrow \alpha > \frac{-3}{5}\right)$$

HT+PK -3/5 -1/5 HT+PK

Rõ ràng, chỉ với $\alpha \in \left(\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ tp I_{10} là tp HT

Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ: Cho tích phân $I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$

Tìm α để I_8 hội tụ và tính tích phân khi $\alpha = -\frac{1}{3}$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \sqrt[3]{(x^2+1)^4}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt[3]{(x^2+1)^4}} = J_1 + J_2$$

Khi x → 0: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \sqrt[3]{(x^2+1)^4}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$

J_1 là tp suy rộng loại 2, nó HT khi và chỉ khi $\alpha < 1$

Tích phân suy rộng loại 2

$$Khi \;\; x \to +\infty : f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^4}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+\frac{8}{3}}}$$

J_2 là tpsr loại 1, HT khi và chỉ khi $\alpha + \frac{8}{3} > 1 \leftrightarrow \alpha > \frac{-5}{3}$

Ta vẽ trục toạ độ để biểu diễn

Trong khoảng (-5/3,1), 2 tp J1, J2 đều HT, ngoài khoảng này thì 1 tp HT, 1 tp PK nên ta được kết quả

I_8 HT khi và chỉ khi $\frac{-5}{3} < \alpha < 1$

Tích phân suy rộng loại 2

$\alpha = -\frac{1}{3}$ $I_8 = \int\limits_0^{+\infty} x^{\frac{-1}{3}}\left(1+x^2\right)^{\frac{-4}{3}} dx$ là tích phân Trebusev

$$f(x) = x^{\frac{-1}{3}}\left(1+x^2\right)^{\frac{-4}{3}} : m = -\frac{1}{3}, n = 2, p = -\frac{4}{3} \to \frac{m+1}{n} + p = -1 \in \mathbb{Z}$$

Đặt : $t^s = a.x^{-n} + b \leftrightarrow t^3 = 1 + \frac{1}{x^2} = \left(1+x^2\right)x^{-2}$

Lấy đạo hàm 2 vế: $3t^2dt = \frac{-2}{x^3}dx \leftrightarrow \frac{-3}{2}t^2dt = x^{-3}dx$

Biến đổi:

$$f(x)dx = x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^2\right)^{-\frac{4}{3}} dx = x^{-\frac{1}{3}}\left(\left(1+x^2\right)x^{-2}.x^2\right)^{-\frac{4}{3}}.x^3\left(x^{-3}dx\right)$$

Tích phân suy rộng loại 2

$$f(x)dx = x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^2\right)^{-\frac{4}{3}}dx = x^{-\frac{1}{3}}\left(\left(1+x^2\right)x^{-2}.x^2\right)^{-\frac{4}{3}}.x^3\left(x^{-3}dx\right)$$

$$= x^{-\frac{1}{3}}.x^{-\frac{8}{3}}.x^3\left(t^3\right)^{-\frac{4}{3}}.\frac{-3}{2}t^2dt = -\frac{3}{2t^2}dt$$

Vậy:

$$I_8 = \int_{+\infty}^{1}\frac{-3}{2t^2}dt = \left.\frac{3}{2t}\right|_{+\infty}^{1} = \frac{3}{2}$$

Tích phân suy rộng - Phụ lục

Tính các tp

$$I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$I_6 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$I_7 = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + 4x^2)\sqrt{1 + x^2}}, t = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$I_{10} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \arcsin x dx}{\sqrt{|1 - x^2|}}$$

$$I_{12} = \int_{-1}^{+1} \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$I_{13} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

$$I_{14} = \int_{-3}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Tích phân suy rộng - Phụ lục

Tìm α để các tp sau HT

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)(1+x^\alpha)} dx, \alpha > 0, \min$$

$$I_4 = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha \sqrt[3]{1+x^2}} dx$$

$$I_5 = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^\alpha + 1\right)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{\left(4 + x^\alpha\right)\sqrt[3]{x^4+1}} dx$$

$$I_7 = \int_4^{+\infty} \frac{3^{-x} + 4x}{\left(5 + x^\alpha\right)^{\alpha - 1}} dx$$

$$I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\left(4x+1\right) \cdot 2^{-x}}{x^\alpha + 4} dx$$

$$I_9 = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha - 1} dx$$

$$I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1 + x^3}$$