Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

GV. Nguyễn Hữu Hiệp

Bộ môn toán Ứng dụng, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh.

E-mail: nguyenhuuhiep@hcmut.edu.vn

Ngày 25 tháng 2 năm 2022

Định nghĩa (Ánh xạ tuyến tính)

Cho X, Y là hai không gian trên cùng trường số K.

Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ gọi là ánh xạ tuyến tính(axtt) nếu

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Định nghĩa (Ánh xạ tuyến tính)

Cho X, Y là hai không gian trên cùng trường số K.
Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ gọi là ánh xạ tuyến tính(axtt) nếu

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Nhân(Ker) và ảnh(Im)

Cho axtt $f : X \longrightarrow Y$
Nhân của f được định nghĩa là $\ker f = \{x \in X | f(x) = 0\}$

Ảnh của f

$$Imf = \{y = f(x) \in Y | x \in X\}$$

Ví dụ 1.

Các ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính

- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x_1;x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x_1;x_2)=x_1-3x_2+4$
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x_1;x_2)=3x_1-4x_2.$
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1;x_2)=(3x_1+x_2;-x_1).$
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4, f(x_1;x_2)=(x_1;0;x_1+2x_2;3x_1-2x_2)$
- $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x_1;x_2;x_3)=(2x_1+x_2-3x_3;x_1-4x_2)$

Ví dụ 1.

Các ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1; x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1; x_2) = x_1 - 3x_2 + 4$
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1; x_2) = 3x_1 - 4x_2.$
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1; x_2) = (3x_1 + x_2; -x_1).$
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, f(x_1; x_2) = (x_1; 0; x_1 + 2x_2; 3x_1 - 2x_2)$
- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2)$
- Các phép biến hình trong $(Oxyz)$ (ở phổ thông) là các ánh xạ tuyến tính, như là Phép đối xứng qua một đường thẳng (qua O) hoặc mặt phẳng (qua O), qua gốc tọa độ; phép chiếu vuông góc hoặc song song xuống một đường thẳng(qua O) hoặc mặt phẳng(qua O); các phép quay và phép vị tự...

Ví dụ 2.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$, biết
$f(1;1;0) = (2;-1)$,
$f(1;1;1) = (1;2)$,
$f(1;0;1) = (-1;1)$.
a/Tìm $f(3;3;2)$ b/ Tìm $f(x_1;x_2;x_3)$

Ví dụ 2.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$, biết
$f(1;1;0) = (2;-1)$,
$f(1;1;1) = (1;2)$,
$f(1;0;1) = (-1;1)$.
a/Tìm $f(3;3;2)$ b/ Tìm $f(x_1;x_2;x_3)$

a/ Có $(3;3;2) = (1;1;0) + 2(1;1;1)$
$\Rightarrow f(3;3;2) = f(1;1;0) + 2f(1;1;1) = (2;-1) + 2.(1;2) = (4;3)$.

b/Có $f(0;0;1) = f(1;1;1) - f(1;1;0) = (-1;3)$.
$f(0;1;0) = f(1;1;1) - f(1;0;1) = (2;1)$.
$f(1;0;0) = f(1;1;0) - f(0;1;0) = (0;-2)$

$\Rightarrow f(x_1;x_2;x_3) = x_1 f(1;0;0) + x_2 f(0;1;0) + x_3 f(0;0;1)$
$= x_1(0;-2) + x_2(2;1) + x_3(-1;3) f(x_1;x_2;x_3) = (2x_2 - x_3; -2x_1 + x_2 + 3x_3)$

Định lý 1.

Cho axtt $f : X \longrightarrow Y$

Ảnh của tập sinh là tập sinh của ảnh:

$$X = < e_1, e_2, \ldots, e_n > \Rightarrow Im(f) = < f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) >$$

Định lý 2.

Cho axtt $f : X \longrightarrow Y$. Khi đó, $\ker(f)$ là không gian con của X; $Im(f)$ là không gian con của Y và

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(X)$$

Ví dụ 3.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$ thỏa $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3)$.
Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$

Ví dụ 3.

Cho axtt $f: R^3 \longrightarrow R^2$ thỏa $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3)$.
Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$

a/ $x \in Ker(f) \Longrightarrow f(x) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 3x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow x = (x_2; x_2; 3x_2) = x_2(1;1;3).$$

Vậy cơ sở của $\ker(f)$ là $\{(1;1;3)\}$ và $\dim(\ker f) = 1$.

b/ $\mathbb{R}^3 =< (1;0;0),(0;1;0),(0;0;1) > \Rightarrow Im(f) =< f(1;0;0), f(0;1;0), f(0;0;1)) >$
$\Rightarrow Im(f) =< (1;1),(-1;2),(0;-1) > = < (1;1),(0;3),(0;0) >$.

Cơ sở của $Im(f)$ là $\{(1;1),(0;3)\}$ và $\dim(Im(f)) = 2$.

Ví dụ 4.

Cho axtt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2; x_2 - x_3; x_3 - x_1)$.
Tìm cơ sở và số chiều của $\ker(f)$ và $im(f)$.

Ví dụ 4.

Cho axtt $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - x_2; x_2 - x_3; x_3 - x_1)$.
Tìm cơ sở và số chiều của $\ker(f)$ và $im(f)$.

Ta có $[f(x)] = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A.[x]$

a/ $x \in \ker(f) \iff [f(x)] = A[x] = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x = (1;1;1)t$. Vậy cơ sở của $\ker(f)$ là $\{(1;1;1)\}$ và $\dim(\ker(f)) = 1$

Ví dụ 5.

Cho axtt $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-x_2;x_2-x_3;x_3-x_1)$.
Tìm cơ sở và số chiều của $\ker(f)$ và $im(f)$.

b/ $\mathbb{R}^3=<(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)>\Rightarrow Im(f)=<f(1;0;0),f(0;1;0),f(0;0;1))>$

$\Rightarrow Im(f)=<(1;0;-1),(-1;1;0),(-1;0;1)>$.

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Cơ sở của $Im(f)$ là $\{(1;0;-1),(0;1;-1)\}$ và $\dim(Im(f))=2$

Ví dụ 6.

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$ là phép chiếu vuông góc xuống

$$(P) : x + 2y + 3z = 0.$$

Tìm cơ sở và số chiều của Imf và $\ker f$.

Ví dụ 6.

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$ là phép chiếu vuông góc xuống

$$(P) : x + 2y + 3z = 0.$$

Tìm cơ sở và số chiều của Imf và $\ker f$.

Mp (P) có cặp vtcp là $a_1 = (3; 0; -1), a_2 = (2; -1; 0)$ và véc tơ pháp tuyến là $n = (1; 2; 3)$.

Vì hình chiếu của mỗi véc tơ đều thuộc P nên $P \equiv Imf$.

Suy ra cơ sở của Imf là $\{(3; 0; -1), (2; -1; 0)\}$.

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x) = 0\} =< n >$$

Vậy CS của $\ker f$ là $\{(1; 2; 3)\}$.

Ma trận của axtt

Cho axtt $f : X \to Y$.
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở của X.
$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ là cơ sở của Y.

Ma trận của f trong cặp cơ sở E, F, ký hiệu là $A_{E,F}$, thoả

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E, \quad \forall x \in X.$$

Ma trận của axtt

Cho axtt $f : X \to Y$.
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là cơ sở của X.
$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ là cơ sở của Y.

Ma trận của f trong cặp cơ sở E, F, ký hiệu là $A_{E,F}$, thoả

$$[f(x)]_F = A_{E,F}[x]_E, \quad \forall x \in X.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$A_{E,F} = [f(E)]_F.$$

Nếu X, Y là không gian $\mathbb{R}^n$ thì

$$A_{E,F} = F^{-1}AE.$$

Ví dụ 7

Cho $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_3)$.
Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở
a/ $E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}, F = \{(1;3), (2;5)\}$.
b/ Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc.

Ví dụ 7

Cho $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_3)$.
Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở
a/ $E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}$, $F = \{(1;3), (2;5)\}$.
b/ Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc.

$$f(1;1;1) = (0;3) \Longrightarrow [f(1;1;1)]_F = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$f(1;0;1) = (-2;3) \Longrightarrow [f(1;0;1)]_F = \begin{pmatrix} 16 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$f(1;1;0) = (3;2) \Longrightarrow [f(1;1;0)]_F = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}. \Rightarrow A_{E,F} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cách 2

Ví dụ 7

Cho $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1+2x_2-3x_3; 2x_1+x_3)$.
Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở
a/ $E = \{(1;1;1),(1;0;1),(1;1;0)\}, F = \{(1;3),(2;5)\}$.
b/ Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc.

$$f(1;1;1) = (0;3) \Longrightarrow [f(1;1;1)]_F = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$f(1;0;1) = (-2;3) \Longrightarrow [f(1;0;1)]_F = \begin{pmatrix} 16 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$f(1;1;0) = (3;2) \Longrightarrow [f(1;1;0)]_F = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}. \Rightarrow A_{E,F} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cách 2

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 8

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$. Biết ma trận của f trong cặp CS

$E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}$, $F = \{(1;1), (2;1)\}$ là $A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a/ Tìm $f(1;1;1)$ b/ Tìm $f(x_1;x_2;x_3)$.

c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ d/ Tìm cơ sở của $Im(f)$

Ví dụ 8

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^2$. Biết ma trận của f trong cặp CS

$E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\}$, $F = \{(1;1), (2;1)\}$ là $A_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a/ Tìm $f(1;1;1)$ b/ Tìm $f(x_1;x_2;x_3)$.

c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ d/ Tìm cơ sở của $Im(f)$

Ta có $[f(x)] = F[f(x)]_E = FA_{E,F}[x]_E = FA_{E,F}E^{-1}[x] \Rightarrow \boxed{A = FA_{E,F}E^{-1}}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a/ \Rightarrow [f(1;1;1)] = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b/ $f(x_1; x_2; x_3)$

b/ $f(x_1; x_2; x_3) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 - 5x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

c/ $x \in \ker(f)$

b/ $f(x_1;x_2;x_3) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 - 5x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

c/ $x \in \ker(f) \iff [f(x)] = A[x] = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \iff$

$\begin{cases} x_1 = 11t \\ x_2 = 19t \\ x_3 = 5t \end{cases}$

$\iff x = (11;19;5)t$. Vậy cơ sở của $\ker(f)$ là $\{(11;19;5)\}$

d/ Có $\mathbb{R}^3 =< (1;0;0),(0;1;0),(0;0;1) >$

$\Rightarrow Im(f) =< f(1;0;0), f(0;1;0), f(0;0;1) >=< (10;3),(-5;-2),(-3;1) >$

Vậy cơ sở của $Im(f)$ là $\{(-3;1),(0;-11)\}$.

Ví dụ 9.

Cho axtt $f : R^2 \to R^2$ và cơ sở $E = \{(1; -2), (2; -3)\}$.

Ma trận của f trong cơ sở E $(E \equiv F)$ là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(3; 1)$

b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{(2; -1), (5; -3)\}$

Ví dụ 9.

Cho axtt $f : R^2 \to R^2$ và cơ sở $E = \{(1;-2),(2;-3)\}$.

Ma trận của f trong cơ sở E $(E \equiv F)$ là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(3;1)$ b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{(2;-1),(5;-3)\}$

Ta có $[f(x)] = E[f(x)]_E = EA_E[x]_E = EA_EE^{-1}[x] \Rightarrow \boxed{A = EA_EE^{-1}}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

a/ $\Rightarrow [f(3;1)] = A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 39 \end{pmatrix}$.

b/ $x \in \ker(f) \iff [f(x)] = A[x] = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \end{array}\right] \iff x = 0$

Vậy $\dim(\ker(f)) = 0$ và không có cơ sở.

c/ Ta có

$$[f(x)]_G = G^{-1}[f(x)] = G^{-1}Ax = G^{-1}AG[x]_G \Rightarrow \boxed{A_G = G^{-1}AG}.$$

$$A_G = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 85 \\ -17 & -36 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 10.

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả $f(-2;3) = (2;-1), f(-3;4) = (-1;5)$.

a/ Tìm $f(-1;2)$

b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$

c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$

d/ Tìm $A_G, G = \{(2;-1),(-5;3)\}$

Ví dụ 10.

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả $f(-2;3) = (2;-1), f(-3;4) = (-1;5)$.

a/ Tìm $f(-1;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$

c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ d/ Tìm $A_G, G = \{(2;-1),(-5;3)\}$

Xét cơ sở $E = \{e_1 = (-2;3), e_2 = (-3;4)\} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta có $f(E) = AE \Rightarrow A = f(E)E^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -19 & -13 \end{pmatrix}$.

a/ $[f(-1;2)] = A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

b/ $\mathbb{R}^2 =< E >\Rightarrow Im(f) =< f(E) >=< (2;-1),(-1;5) >$.

Cơ sở của $Im(f)$ là $\{(2;-1),(-1;5)\}$

Ví dụ 10.

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả $f(-2;3) = (2;-1), f(-3;4) = (-1;5)$.

a/ Tìm $f(-1;2)$

b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$

c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$

d/ Tìm $A_G, G = \{(2;-1),(-5;3)\}$

Ví dụ 10.

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả $f(-2;3) = (2;-1), f(-3;4) = (-1;5)$.
a/ Tìm $f(-1;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$
c/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ d/ Tìm $A_G, G = \{(2;-1),(-5;3)\}$

c/ $x \in \ker(f) \iff [f(x)] = Ax = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} 11 & 8 & 0 \\ -19 & -13 & 0 \end{array}\right] \iff x = 0.$

Vậy $\dim(\ker(f)) = 0$ và không có cơ sở.

d/ $A_G = G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -19 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -83 & 187 \\ -36 & 81 \end{pmatrix}.$

Ví dụ 11

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$ biết $f(1;2;3) = (1;0;1)$
$f(2;1;1) = (-1;2;1); f(0;5;8) = (-3;4;1)$.
a/ Tìm $f(0;8;13)$. b/ Tìm cơ sở của Imf và $\ker f$.

Ví dụ 11

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$ biết $f(1;2;3) = (1;0;1)$
$f(2;1;1) = (-1;2;1); f(0;5;8) = (-3;4;1)$.
a/ Tìm $f(0;8;13)$. b/ Tìm cơ sở của Imf và $\ker f$.

Ta có

$$f(E) = AE \iff A = f(E)E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -39 & 24 \\ -6 & 36 & -22 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{a/ } [f(0;8;13)] = A\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -39 & 24 \\ -6 & 36 & -22 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b/ $\mathbb{R}^3 =< e_1, e_2, e_3 > \Rightarrow Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cơ sở của $Im(f)$ là $\{(1;0;1),(0;2;2)\}$

$x \in \ker(f) \iff [f(x)] = A[x] = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -39 & 24 & 0 \\ -6 & 36 & -22 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 9t \end{cases} \iff x = (-3;5;9)t.$$

Cơ sở của $\ker(f)$ là $\{(-3;5;9)\}$.

Ví dụ 12.

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép chiếu vuông góc (theo tích vô hướng chính tắc) xuống mặt phẳng $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm $f(x_1; x_2; x_3)$

Ví dụ 12.

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép chiếu vuông góc (theo tích vô hướng chính tắc) xuống mặt phẳng $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm $f(x_1; x_2; x_3)$

Cặp véc tơ chỉ phương của F là $\{a = (1; 0; 1), b = (0; 1; 2)\}$
và véc tơ pháp tuyến $n = (1; 2; -1)$.

Xét cơ sở $E = \{a; b; n\}$ có $f(a) = a, f(b) = b, f(n) = 0$

$$f(E) = AE \iff A = f(E)E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6.(5x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 1/3.(-x_1 + x_2 + x_3) \\ 1/6.(x_1 + 2x_2 + 5x_3) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p(x)) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.
a/ Tìm $f(x^2 - 2x + 3)$ b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$
c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p(x)) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.
a/ Tìm $f(x^2 - 2x + 3)$ b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$
c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

a/ $f(x^2 - 2x + 3) = (x^2 - 2x + 3)' - 3(x^2 - 2x + 3) = -3x^2 + 8x - 11.$

b/ $P_2[x] =< x^2, x, 1 >$
$\Rightarrow Im(f) =< f(x^2), f(x), f(1) >=< -3x^2 + 2x, -3x + 1, -3 >$

$$[f(x)]_{CT} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det([M]_{CT}) = -27 \neq 0.$$

$\Rightarrow M$ ĐLTT. Vậy cơ sở của $Im(f)$ là $\{-3x^2 + 2x, -3x + 1, -3\}$.

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p)(x) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.

a/ Tìm $f(x^2 - 2x + 3)$ b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p)(x) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.
a/ Tìm $f(x^2 - 2x + 3)$ b/ Tìm cơ sở của $\ker(f)$ và $Im(f)$
c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

b/ Xét $p(x) = ax^2 + bx + c \in \ker(f) \iff f(p)(x) = (2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = 0$

$$\iff \begin{cases} -3a = 0 \\ 2a - 3b = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \iff p = 0.$$

Vậy $\ker(f) = \{0\}$ và không có cơ sở.

c/

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p)(x) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.
c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

Ví dụ 13.

Cho axtt $f : P_2[x] \to P_2[x]$ biết $f(p)(x) = p'(x) - 3p(x), \forall p \in P_2[x]$.
c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $G = \{x^2 + x; 2x^2 + 3x + 1; x + 2\}$

c/ Ta có $A_G = [f(G)]_G = P_{G\to CT}[f(G)]_{CT} = P^{-1}_{CT\to G}.[f(G)]_{CT}$

Ma trận chuyển cơ sở $P = P_{CT\to G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ta có $f(g_1) = -3x^2 - x + 1, \quad f(g_2) = -6x^2 - 3x, \quad f(g_3) = -3x - 5$.

$$A_G = P^{-1}_{CT\to G}.[f(G)]_{CT} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -18 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Định nghĩa
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
3. Luyện tập

Ví dụ 14.

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - 3x_3)$
a/ Tìm Cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$
b/ Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở
$E = \{(1; 2; 3), (0; 1; -2), (2; 3; 7)\}, F = \{(1; 2), (3; 5)\}$

Ví dụ 15.

Cho $f : R^2 \to R^2$ thỏa $f(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_2)$.
Tìm ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1; 3), (2; 5)\}$

Ví dụ 15.

Cho $f : R^2 \to R^2$ thỏa $f(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_2)$.
Tìm ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1;3), (2;5)\}$

$$A_E = E^{-1}AE = \begin{pmatrix} 20 & 33 \\ -11 & -18 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 16.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.

c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 16.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.

c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 16.

Cho axtt $f: R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là
$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.
c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 17.

Trong axtt $f : R^3 \to R^3$, biết $f(1;2;0) = (3;1;2)$,
$f(2;3;2) = (1;2;3)$ $f(1;1;1) = (5;0;1)$.
a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.
c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 18.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.

c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 18.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.

c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 18.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;2),(1;1;1)\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a/ Tìm $f(1;3;2)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$.

c/ Tìm mt của f trong CS $F = \{(1;2;3),(2;3;5),(5;8;4)\}$.

Ví dụ 19.

Cho f là phép đối xứng qua mặt phẳng $2x - y + 3z = 0$ là phép biến đổi tuyến tính trong không gian $Oxyz$.
a/ Tìm cơ sở và số chiều của $Im(f)$ và $\ker(f)$. b/ Hãy tìm $f(x_1; x_2; x_3)$.

Ví dụ 19.

Cho f là phép đối xứng qua mặt phẳng $2x - y + 3z = 0$ là phép biến đổi tuyến tính trong không gian $Oxyz$.
a/ Tìm cơ sở và số chiều của $Im(f)$ và $\ker(f)$. b/ Hãy tìm $f(x_1; x_2; x_3)$.

Ví dụ 20.

Cho axtt $f : X \to X$ và $u, v \in X$. $E = \{u + 2v; u + v\}$ là một cơ sở của X. Biết ma trận của f trong cơ sở E là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $F = \{u - 2v, 3u - 5v\}$.

Ví dụ 20.

Cho axtt $f : X \to X$ và $u, v \in X$. $E = \{u + 2v; u + v\}$ là một cơ sở của X. Biết ma trận của f trong cơ sở E là $A_E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $F = \{u - 2v, 3u - 5v\}$.

Gọi cơ sở $CT = \{u; v\}$. Ma trận chuyển cơ sở

$$P = P_{F\to E} = P_{CT\to F}^{-1} P_{CT\to E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[f(x)]_F = P[f(x)]_E = PA_E[x]_E = PA_EP^{-1}[x]_F \Rightarrow A_F = PA_EP^{-1} = \begin{pmatrix} 65 & 170 \\ -23 & -60 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 21

Cho axtt $f : M_2(R) \to M_2(R)$ và ma trận $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ thoả $f(X) = MX$.

a/ Tính $f\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ví dụ 21

Cho axtt $f : M_2(R) \to M_2(R)$ và ma trận $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ thoả $f(X) = MX$.

a/ Tính $f\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ví dụ 21

Cho axtt $f : M_2(R) \to M_2(R)$ và ma trận $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ thoả $f(X) = MX$.

a/ Tính $f\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ví dụ 22.

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$, biết ma trận của f trong cơ sở

$E = \{(1;1;0),(1;2;2),(1;3;5)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(-1;2;3)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\{(1;2;2),(0;1;2),(1;5;10)\}$

Ví dụ 22.

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$, biết ma trận của f trong cơ sở

$E = \{(1;1;0),(1;2;2),(1;3;5)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm $f(-1;2;3)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\{(1;2;2),(0;1;2),(1;5;10)\}$

Ví dụ 22.

Cho axtt $f : R^3 \to R^3$, biết ma trận của f trong cơ sở

$$E = \{(1;1;0),(1;2;2),(1;3;5)\} \text{ là } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

a/ Tìm $f(-1;2;3)$ b/ Tìm cơ sở của $Im(f)$ và $\ker(f)$

c/ Tìm ma trận của f trong cơ sở $\{(1;2;2),(0;1;2),(1;5;10)\}$

•

THANK YOU FOR ATTENTION