BÀI 2. 8. ĐẠO HÀM XÉT NHƯ MỘT HÀM SỐ

Trong bài trước ta xem đạo hàm của hàm số f tại một số a cố định là:

1 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

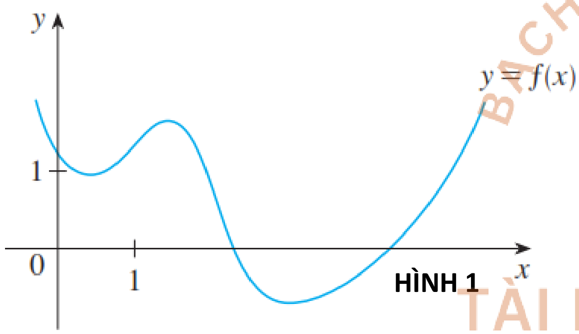
Ở đây ta thay đổi quan điểm của mình và cho số a thay đổi. Nếu ta thay a trong 1 bằng biến số x, ta được

2 $$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Với mọi số x cho trước mà giới hạn này tồn tại, ta gán cho nó một số f '(x). Vì thế ta có thể coi f ' như một hàm số mới, gọi là **đạo hàm của f** và được định nghĩa bằng Phương trình 2. Ta biết rằng giá trị của f ' tại x, tức f '(x), có ý nghĩa hình học là độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm (x, f(x)).

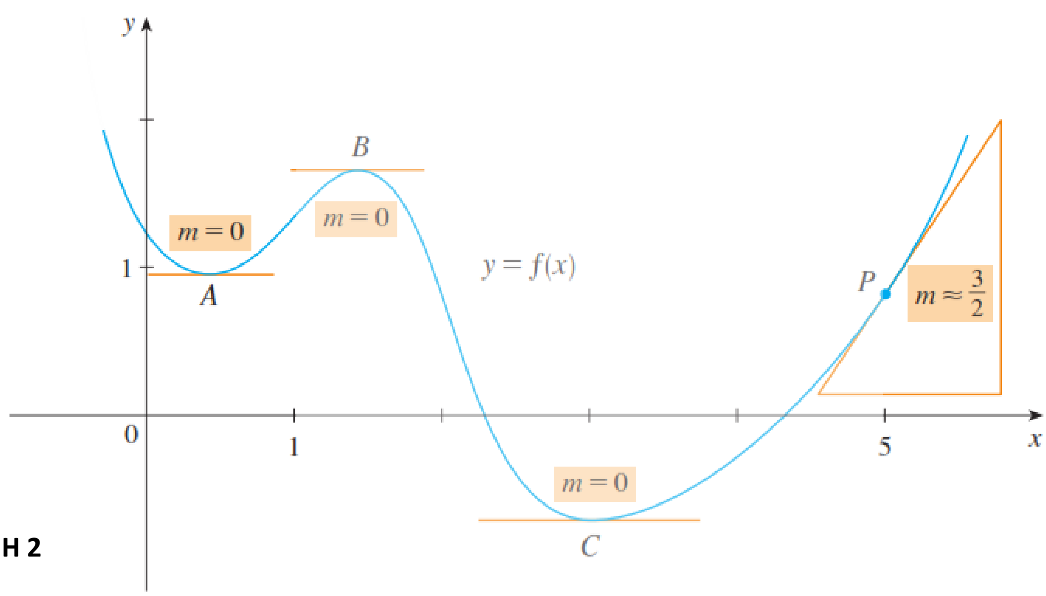
Hàm số f ' được gọi là đạo hàm của f bởi vì nó đã được 'rút ra' từ f bằng một phép lấy giới hạn. (Từ đạo hàm là derivative lấy từ gốc là derive nghĩa là 'rút ra'). Tập xác định của f ' là tập hợp {x/ f' (x) tồn tại} và có thể là tập con của của tập xác định của f.

VÍ DỤ 1 Đồ thị của hàm số f cho bởi hình dưới. Dùng đồ thị này để vẽ đồ thị của hàm số f '.



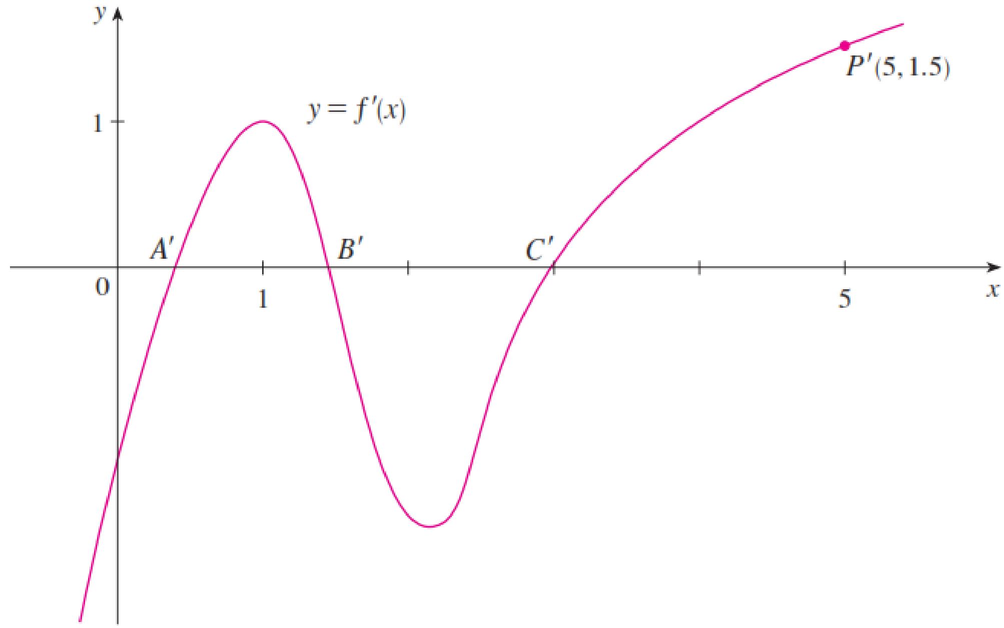
HÌNH 1

GIẢI Ta có thể ước tính đạo hàm tại bất kỳ giá trị nào của x bằng cách vẽ tiếp tuyến tại điểm (x, f(x)) và ước tính độ dốc của nó. Chẳng hạn, với x = 5, ta vẽ tiếp tuyến tại P trong Hình 2(a) và ước tính độ dốc khoảng 3/2., suy ra f '(5) ≈ 1. 5. Từ đó ta có thể vẽ được điểm P'(5, 1.5) trên đồ thị f ' ngay bên dưới điểm P. Lập lại tiến trình này tại vài điểm, ta được đồ thị cho bởi Hình 2(b). Chú ý là tiếp tuyến tại A, B, và C nằm ngang, do đó đạo hàm tại những điểm này bằng 0 và đồ thị f ' cắt trục x tại điểm A', B' và C' ngay bên dưới A, B, và C. Giữa A và B các tiếp tuyến có độ dốc dương , do đó đạo hàm f '(x) tại đó cũng dương. Nhưng giữa B và C các tiếp tuyến có độ dốc âm, nên f '(x) tại đó cũng âm.



HÌNH 2

(a)



(b)

VÍ DỤ 2

(a) Nếu f(x) = x^3 - x , tìm công thức cho f '(x).

(b) Minh họa bằng cách so sánh đồ thị của f và f '.

GIẢI

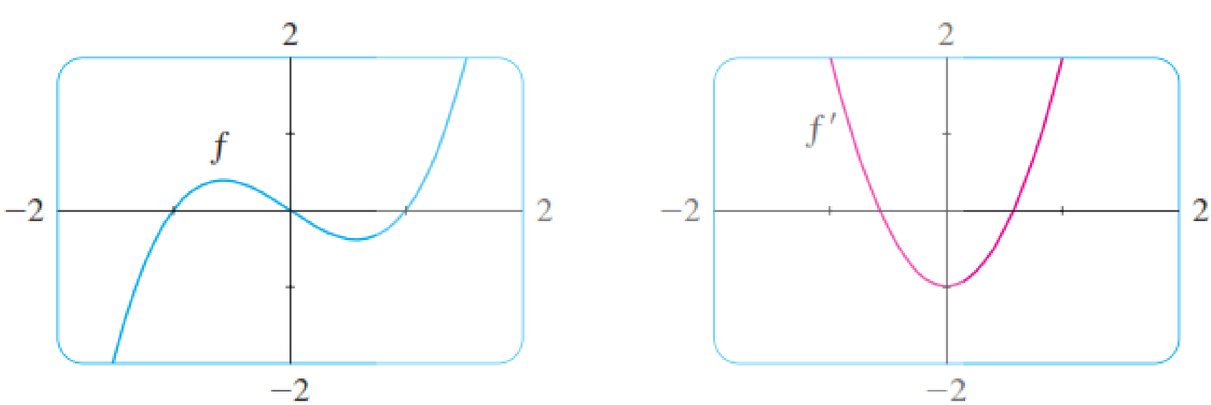
(a) Khi dùng Phương trình 2 để tính đạo hàm, ta phải nhớ biến là h và x được tạm thời coi như hằng số khi tính giới hạn.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3-(x+h)]-[x^3-x]}{h}$$

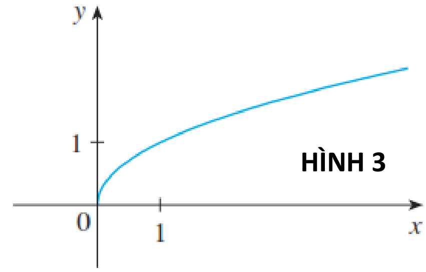
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1$$

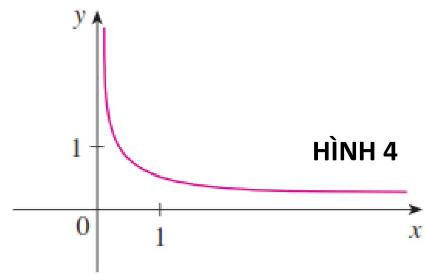
(b) Ta dùng phần mềm vẽ đồ thị để vẽ đồ thị của f và f ', kết qua cho bởi hình dưới. Chú ý là f '(x) = 0 khi f có tiếp tuyến nằm ngang và f '(x) dương khi tiếp tuyến có độ dốc dương. Vì thế những đồ thị coi như giúp ta kiểm tra kết quả đã làm ở câu (a).



VÍ DỤ 3 Nếu f(x) = $\sqrt{x}$, tìm đạo hàm của f. Cho biết tập xác định của f '.



(a) $f(x)=\sqrt{x}$



(b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

GIẢI

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Ta thấy rằng f '(x) tồn tại nếu x > 0, do đó tập xác định của f ' là (0, oo), trong khi tập xác định của f là [0, oo).

VÍ DỤ 4 Tìm f ' biết f(x) = $\dfrac{1-x}{2+x}$.

GIẢI

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\dfrac{1-x}{2+x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(1-x-h)(2+x)-(1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2-x-2h-x^2-xh)-(2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}
\end{aligned}
$$

CÁC KÍ HIỆU KHÁC

Nếu ta dùng kí hiệu truyền thống y = f(x) để chỉ biến độc lập x và biến phụ thuộc y, thì một vài kí hiệu thông dụng cho đạo hàm sẽ như sau:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Biểu tượng D và d/dx được gọi là các **phép tính vi phân** vì chúng chỉ tiến trình tính một đạo hàm.

Biểu tượng dy/dx, được Leibniz giới thiệu, không nên được coi như là tỉ số (ngay lúc này); nó đơn giản chỉ là đồng nghĩa với f '(x). Dù sao, nó là kí hiệu rất hữu dụng, nhất là khi được dùng phối hợp với kí hiệu số gia. Tham chiếu phương trình 2.7.6, ta có thể viết lại định nghĩa của đạo hàm theo kí hiệu Leibniz

Leibniz , nhà toán học Đức, cùng với Newton, đã tìm ra phép tính vi tích phân một cách độc lập. Newton khám phá trước, nhưng Leibniz mới là người đầu tiên xuất bản công trình vĩ đại của mình (1684). Các kí hiệu vi tích phân do ông đặt ra tiện lợi hơn của Newton) dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nếu ta muốn chỉ giá trị của đạo hàm dy/dx theo kí hiệu Leibniz tại một số đặc biệt a, ta dùng kí hiệu sau

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad hay \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

đồng nghĩa với f '(a).

3 ĐỊNH NGHĨA Một hàm số f được gọi là **khả vi** tại a nếu f'(a) tồn tại. Hàm số **khả vi trên khoảng (a, b)** [hoặc trên (a, ∞) hoặc (- ∞, a) hoặc (-∞, ∞) nếu nó khả vi tại mọi số thuộc khoảng đó.

VÍ DỤ 5 Hàm số f(x) = | x | khả vi tại đâu?

GIẢI Nếu x > 0, thì | x | = x và ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho x + h > 0 và do đó | x + h | = x + h. Suy ra, với x > 0, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

và vì thế f khả vi với mọi x > 0.

Tương tự với x < 0 , ta có | x | = - x và ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho | x + h | < 0 và do đó | x + h | = - (x + h). Suy ra, với x < 0

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$ và vì thế f khả vi với mọi x < 0.

Với x = 0 ta phải xét xem giới hạn sau có tồn tại không.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

Ta phải tìm giới hạn bên trái và bên phải riêng:

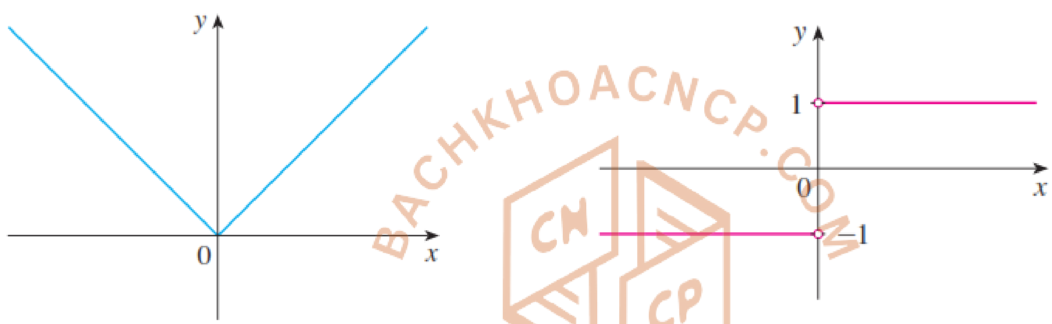
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

Vì các giới hạn này khác nhau nên f ' (0) không tồn tại. Do đó f khả vi tại mọi x khác 0.
Biểu thức của f ' là

$$f'(x)=\begin{cases}1 & khi \quad x>0\\ -1 & khi \quad x<0\end{cases}$$

và đồ thị của f và f ' cho bởi Hình 5. Sự kiện f '(0) không tồn tại có thể đoán nhận hình học là do đường y = | x | không có tiếp tuyến tại điểm (0, 0) [Xem Hình 5(a))]



(a) $y=f(x)=|x|$ **HÌNH 5** (b) $y=f'(x)$

Tính liên tục và tính khả vi đều là các tính chất đáng mong muốn của một hàm số. Định lí sau chứng tỏ mối liên hệ giữa hai tính chất.

4 Định lý Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a.

CM Để chứng minh f liên tục tại a, ta phải chứng minh

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ hay chứng minh f(x) - f(a) tiến đến 0 khi x tiến đến a.

Giả thiết là f khả vi tại a, nghĩa là

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

tồn tại. Để làm cầu nối giữa giả thiết và kết luận, ta chia và nhân f(x) - f(a) cho x - a (điều này thực hiện được vì x khác a):

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

Dùng qui tắc nhân của giới hạn và (2.7.5), ta có:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

$= f\,'(a).\,0 = 0$

Mà $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a)$ [qui tắc trừ giới hạn) , suy ra:

$$0 = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) \quad hay \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a)$$

Vậy f liên tục tại a.

GHI CHÚ : Phần đảo của định lí trên là sai, nghĩa là, hàm số có thể liên tục nhưng không khả vi. Chẳng hạn hàm số f(x) = | x | liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 (Ví dụ 5)

CÁCH NẢO MỘT HÀM SỐ KHÔNG THỂ KHẢ VI

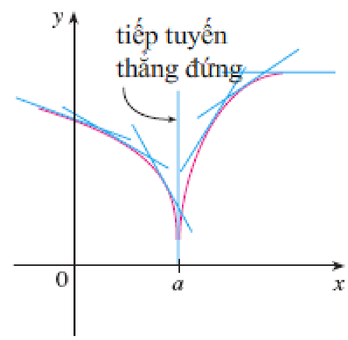
Ta thấy rằng hàm số y = |x| trong ví dụ 5 không khả vi tại 0 và đồ thị của nó đổi hướng đột ngột khi qua x = 0. Tổng quát, nếu đồ thị của một hàm số f có một "điểm góc" hoặc "chênh" , thì đồ thị f không có tiếp tuyến tại điểm này và f không khả vi tại đó. [Khi cố tính f '(a), ta thấy rằng giới hạn bên trái và bên phải khác nhau.]

Định lí 4 cho ta một cách khác để biết hàm số không có đạo hàm. Theo đó nếu f không liên tục tại a, thì nó không khả vi tại a. Vì thế tại bất kỳ điểm gián đoạn nào hàm số sẽ không khả vi.

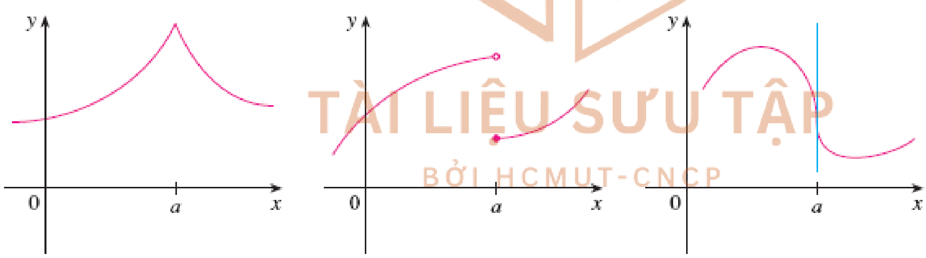
Một khả năng thứ ba là khi đồ thị có một tiếp tuyến thẳng đứng tại x = a; đó là, nếu f liên tục tại a và

$$\lim_{x\to a} |\, f\,'(x)\,| = \infty$$

HÌNH 6



Điều này có nghĩa các tiếp tuyến càng lúc càng dốc khi x $\to$ a. Hình 6 bên minh họa điều này. Hình 7 dưới minh họa ba khả năng mà ta đã trình bày.

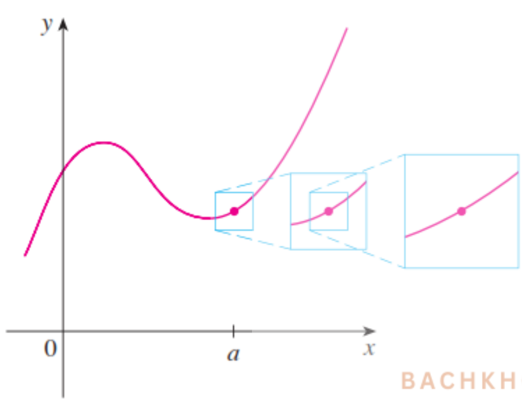


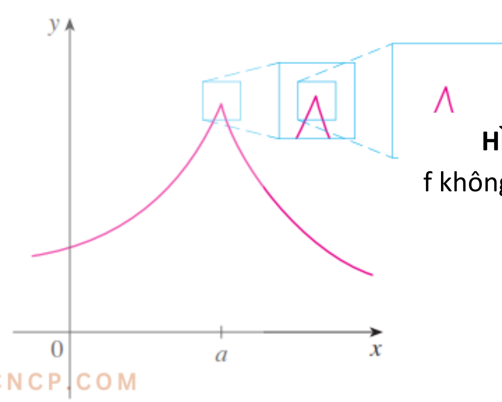
(a) Điểm góc (b) Điểm gián đoạn (c) Tiếp tuyến thẳng đứng

HÌNH 7
3 dạng f không khả vi tại a

Máy tính có vẽ cho ta thêm một phương cách nhìn vào tính khả vi. Nếu f khả vi tại a, thế thì khi ta phóng to quanh điểm (a, f(a)), đồ thị dẹt ra, càng lúc càng trông giống một đường thẳng.(Xem Hình 8. Ta đã được thấy một ví dụ của trường hợp này trong Hình 2 của Bài 2.7.) Nhưng dù cho ta có phóng to bao nhiêu lần đi nữa quanh các điểm trong Hình 6 và 7(a), ta cũng không thể loại bỏ được điểm nhọn hoặc điểm góc (Xem Hình 9)

HÌNH 8
f khả vi tại a





HÌNH 9
f không khả vi tại

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Nếu f là hàm số khả vi, thì đạo hàm f ' của nó cũng là một hàm số, vì thế f ' có thể có một đạo hàm của riêng nó, kí hiệu (f ')' = f ". Hàm số mới f " này gọi là **đạo hàm cấp hai** của f. Sử dụng kí hiệu Leibniz, ta viết đạo hàm cấp hai của y = f(x) như sau

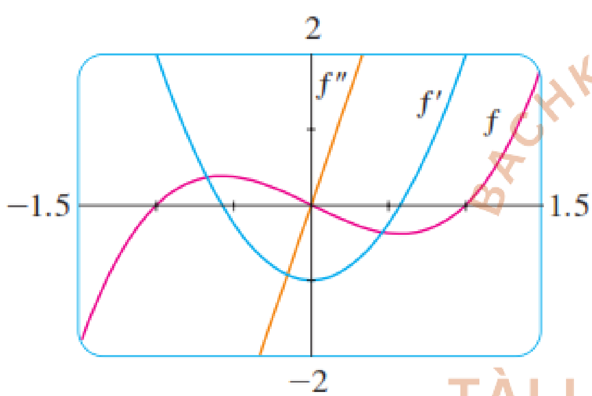
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

VÍ DỤ 6 Nếu $f(x) = x^3 - x$, tìm và giải thích ý nghĩa của f "(x).

GIẢI Trong Ví dụ 2, ta đã tìm được đạo hàm cấp một là $f'(x) = 3x^2 - 1$. Do đó đạo hàm cấp hai là

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$



HÌNH 10

Các đồ thị của f, f ' và f " được cho trong Hình 10.

Ta có thể giải thích f "(x) như là độ dốc của đường cong y = f '(x) tại điểm (x, f '(x)). Nói cách khác, đó là tốc độ biến thiên của độ dốc của đường cong ban đầu y = f(x).

Chú ý qua hình trên là f "(x) âm (đồ thị f " ở bên dưới trục x) khi y = f '(x) có độ dốc âm và dương (đồ thị f " ở bên trên trục x) khi y = f '(x) có độ dốc dương. Vì thế đồ thị có thể giúp ta kiểm tra kết quả của phép tính.

Tổng quát, ta có thể coi đạo hàm cấp hai như là tốc độ biến thiên của tốc độ biến thiên. Ví dụ quen thuộc nhất của khái niệm này là gia tốc, được định nghĩa như sau.

Nếu s = s(t) là hàm số vị trí của một vật thể chuyển động trên đường thẳng, ta biết đạo hàm cấp một của nó biểu thị vận tốc v(t) của vật thể là một hàm số theo thời gian.

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Vận tốc biến thiên tức thời của vận tốc theo thời gian gọi là **gia tốc** a(t) của vật thể. Do đó hàm số gia tốc chính là đạo hàm của hàm số vận tốc và do đó nó là đạo hàm cấp hai của hàm số vị trí:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

hoặc, theo kí hiệu Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Đạo hàm cấp ba f "' là đạo hàm của đạo hàm cấp hai: f"' = (f ")'. Vì thế f "'(x) có thể được xem là độ dốc của đường cong y = f "(x) hoặc như là vận tốc biến thiên của f "(x). Nếu y = f(x), kí hiệu cho đạo hàm cấp ba là :

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^{3y}}{dx^3}$$

Tiến trình có thể được tiếp tục. Đạo hàm cấp 4 f "" thường được kí hiệu $f^{(4)}$. Tổng quát, đạo hàm cấp n của f được kí hiệu $f^{(n)}$ có được bằng cách lấy đạo hàm n lần. Nếu y = f(x), ta viết

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

VÍ DỤ 7 Nếu $f(x) = x^3 - x$, tìm f '''(x) và $f^{(4)}(x)$.

GIẢI Trong ví dụ 6 ta đã tìm được f "(x) = 6x. Đồ thị của đạo hàm cấp 2 có phương trình y = 6x, là đường thẳng có độ dốc bằng 6. Vì đạo hàm f '''(x) là độ dốc của f "(x), ta có

$$f'''(x) = 6$$

với mọi x. Suy ra f ''' là hàm số hằng và đồ thị là một đường thẳng nằm ngang. Do đó, với mọi x

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Ta đã thấy một ứng dụng của đạo hàm cấp 2 là gia tốc của chuyển động của một vật thể đi trên đường thẳng mà hàm số vị trí là s = s(t). Vì s‴ = (s″) ′, đạo hàm cấp ba của hàm số vị trí là đạo hàm của gia tốc và được gọi là **độ giật xốc:**

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

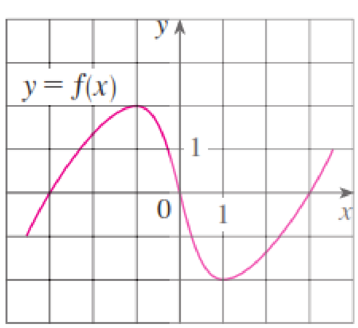
Do đó độ giật xốc j là tốc độ biến thiên của gia tốc. Sở dĩ được gọi là giật xốc vì nó có nghĩa là một sự thay đổi đột ngột về gia tốc, khiến vật thể chuyển động bất ngờ.

Trong bài 4.3 ta sẽ biết thêm vai trò của f " trong việc tạo dáng của đồ thị hàm số f. Và trong chương 11, ta sẽ biết bằng cách nào đạo hàm cấp hai và cấp cao hơn giúp chúng ta biểu diễn các hàm số thành tổng của một chuỗi vô hạn.

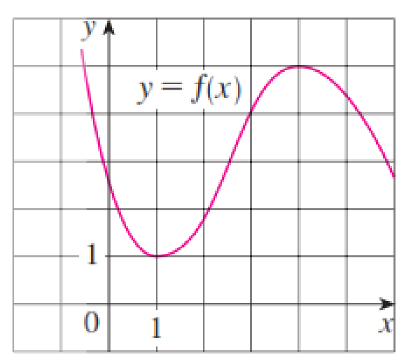
BÀI TẬP

1-2. Dùng đồ thị đã cho để ước tính giá trị của đạo hàm. Rồi phác họa đồ thị hàm số f '.

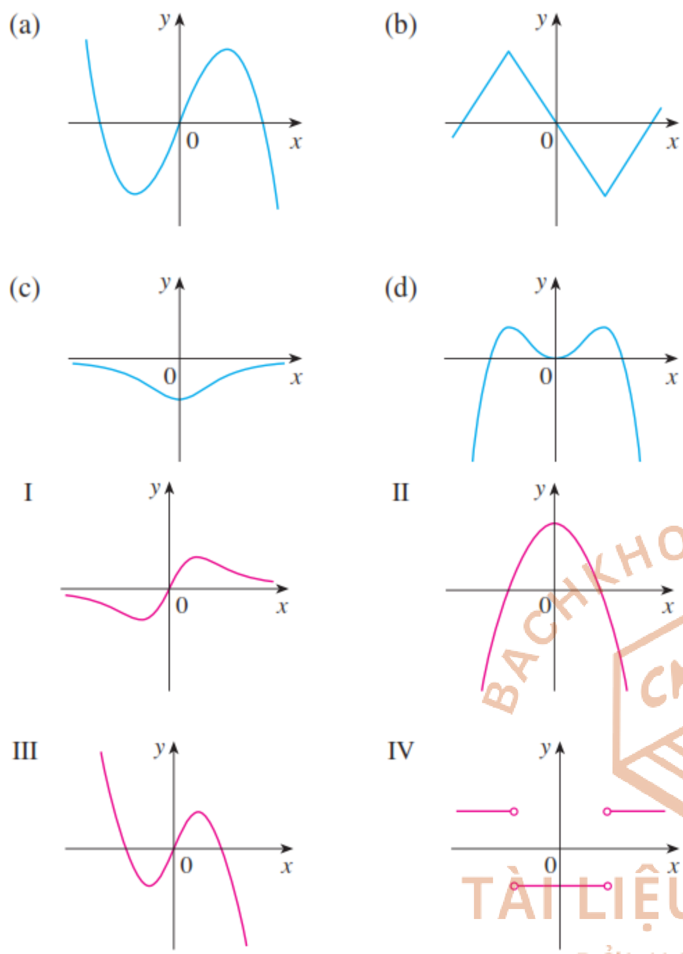
1. (a) f '(- 3)
(b) f '(- 2)
(c) f '(- 1)
(d) f '(0)
(e) f '(1)
(f) f '(2)
(g) f '(3)



2. (a) f '(0)
(b) f '(1)
(c) f '(2)
(d) f '(3)
(e) f '(4)
(f) f '(5)

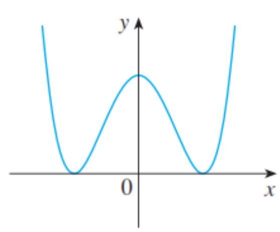


3. Cặp đôi đồ thị mỗi hàm số trong (a)-(d) với đồ thị của đạo hàm của nó trong I-IV. Cho biết lý do mà bạn chọn lựa.

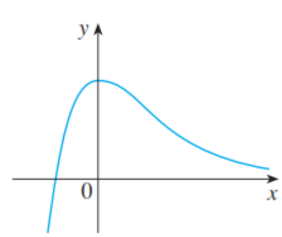


4-11 Sao chép đồ thị cho trước f. (Giả định hai trục có đơn vị như nhau.) Sau đó dùng phương pháp của Ví dụ 1 để phác họa đồ thị f ’ ngay bên dưới đồ thị của f.

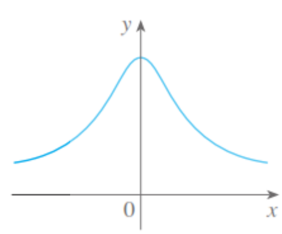
4.



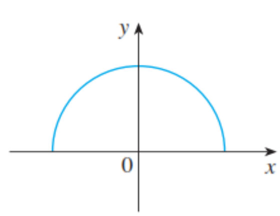
5.



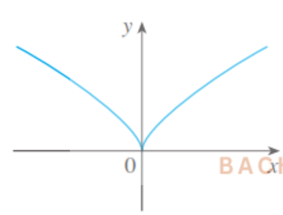
6.



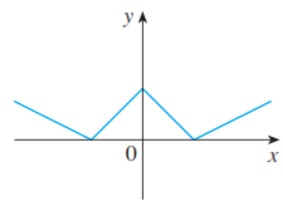
7.



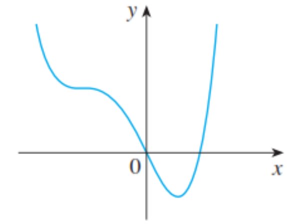
8.



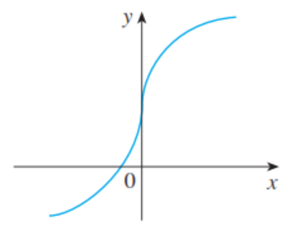
9.



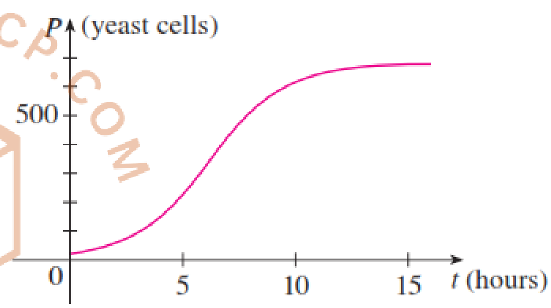
10.



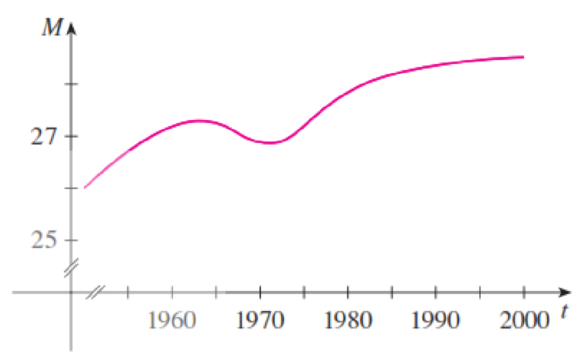
11.



12. Đồ thị bên dưới là của hàm số dân số P(t) các tế bào men bia được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm. Dùng phương pháp của Ví dụ 1 để vẽ đồ thị đạo hàm P’(t). Đồ thị của P’ cho chúng ta biết điều gì về dân số của men



13. Đồ thị cho thấy tuổi thọ trung bình của hôn nhân đầu tiên của đàn ông Nhật đã thay đổi trong nửa cuối của thế kỷ 20. Phác họa đồ thị của hàm số đạo hàm M’(t). Trong những năm nào thì đạo hàm là âm?



14-16 Vẽ đồ thị hàm số f và bên dưới nó phác họa đồ thị của hàm số f’ theo cách của các Bài tập 4-11. Từ đồ thị của f ’, bạn có thể đoán ra công thức của f ’ không?

14. f(x) = sin x **15. f(x) = e^x**

16. f(x) = ln x

17. Cho f(x) = x^2.

(a) Ước tính những giá trị của f ‘(0), f ‘(1/2), f ’(1), và f‘(2) bằng cách dùng máy tính vẽ để phóng to đồ thị của f.

(b) Dùng đối xứng để suy ra những giá trị của f ‘(- 1/2), f ‘(- 1), và f ‘(- 2).

(c) Dùng những kết quả từ phần (a) và (b) để dự đoán một công thức cho f ‘(x).

(d) Dùng định nghĩa của đạo hàm để chứng tỏ dự đoán của bạn trong phần (c) là đúng.

18. Cho f(x) = x^3.

(a) Ước tính những giá trị của f ‘(0), f ‘(1/2), f ’(1), f ‘(2) và f‘(3) bằng cách dùng máy tính vẽ để phóng to đồ thị của f.

(b) Dùng đối xứng để suy ra những giá trị của f ‘(- 1/2), f ‘(- 1), f ‘(- 2)và f ‘(- 3).

(c) Dùng những kết quả từ phần (a) và (b) để vẽ đồ thị của f ’.

(d) Đoán một công thức cho f ‘(x).

(d) Dùng định nghĩa của đạo hàm để chứng tỏ dự đoán của bạn trong phần (d) là đúng.

19-29 Tìm đạo hàm của hàm số sau bằng cách dùng định nghĩa của đạo hàm. Cho biết tập xác định của hàm số và tập xác định của đạo hàm của nó.

19. f(x) = ½ x – $^1/_3$ **20.** f(x) = mx + b

21. f(t) = 5t – $9t^2$ **22.** f(x) = $1.5x^2 – x + 3.7$

23. f(x) = $x^3 – 3x + 5$ **24.** f(x) = x + $\sqrt{x}$

25. g(x) = $\sqrt{1+2x}$ **26.** f(x) = $\dfrac{3+x}{1-3x}$

27. $G(t)=\dfrac{4t}{t+1}$ **28.** $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

30. (a) Vẽ đồ thị hàm số f(x) = $\sqrt{6-x}$ từ đồ thị của hàm số y = $\sqrt{x}$ và các phép biến đổi của Bài 1.3.

(b) Dùng đồ thị của phần (a) để phác họa đồ thị hàm số f ’.

(c) Dùng định nghĩa của đạo hàm để tìm f ‘. Tập xác định của f và f ‘ là gì?

(d) Dùng máy tính để vẽ đồ thị f ‘ và so sánh với đồ thị mà bạn phác họa trong phần (b).

31. (a) Nếu f(x) = x^4 + 2x, tìm f ‘(x).

(b) Bằng cách so sánh đồ thị của f và f ‘ (vẽ bằng máy) để kiểm tra kết quả bạn làm ở phần (a) xem có hợp lý không.

32. (a) Nếu f(t) = t^2 - $\sqrt{t}$, tìm f ‘(t).

(b) Bằng cách so sánh đồ thị của f và f ‘ (vẽ bằng máy để kiểm tra kết quả bạn làm ở phần (a) xem có hợp lý không.

33. Tỷ lệ thất nghiệp U(t) thay đổi theo theo thời gian. Bảng dưới (theo Thống Kê của Văn Phòng Lao Động) cho thấy phần trăm người thất nghiệp trong lực lượng lao động Mỹ từ 1993 đến 2002.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1993	6.9	1998	4.5
1994	6.1	1999	4.2
1995	5.6	2000	4.0
1996	5.4	2001	4.7
1997	4.9	2002	5.8

(a) U ‘(t) có nghĩa là gì? Đơn vị nó thế nào?

(b) Lập ra bảng giá trị của U ‘(t).

34. Cho P(t) là phần trăm dân số Mỹ dưới 18 tuổi tại thời điểm t. Bảng dưới cho những giá trị của hàm số này trong những năm thống kê dân số từ 1950 đến 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

(a) P’(t) có nghĩa là gì? Đơn vị nó thế nào?

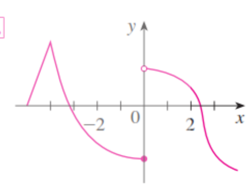
(b) Lập ra bảng giá trị ước tính của P ‘(t).

(c) Vẽ đồ thị P và P’.

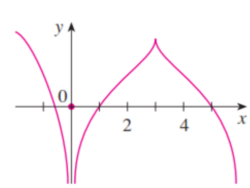
(d) Những giá trị của P ‘(t) có thể tính chính xác hơn bằng cách nào?

35-38. Đồ thị của f được cho trước. Cho biết, có giải thích, những điểm nào tại đó f không khả vi.

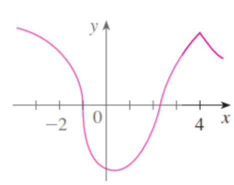
35.



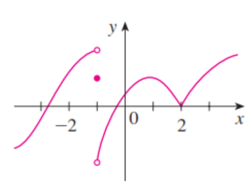
36.



37.



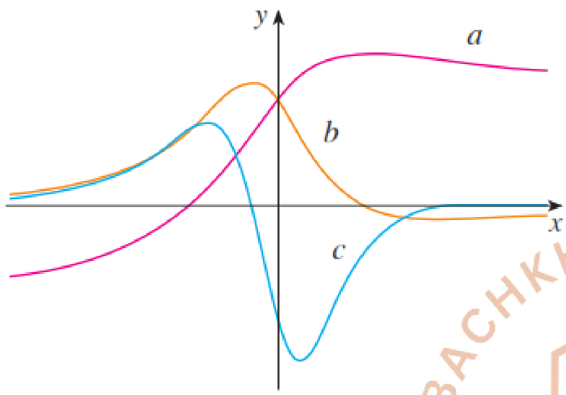
38.



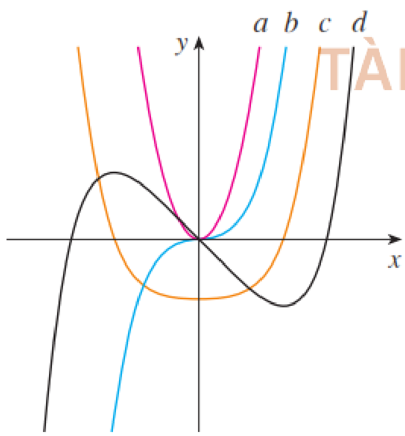
39. Vẽ đồ thị (bằng máy) hàm số $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Phóng to liên tiếp, trước tiên đến điểm (- 1, 0) và rồi đến điểm gốc. Dáng vẽ của f quanh điểm này có gì khác nhau? Bạn kết luận gì về tính khả vi của f?

40. Phóng to đến điểm (1, 0), và (- 1, 0) vào đồ thị (vẽ bằng máy) của hàm số $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$. Bạn nhận xét gì? Điều bạn nhận xét có nghĩa gì đối với tính khả vi của g.

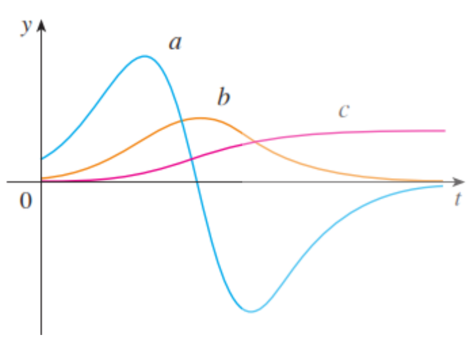
41. Hình dưới là đồ thị của f, f ‘, và f “. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.



42. Hình dưới là đồ thị của f, f ‘, f “, và f ”’. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.

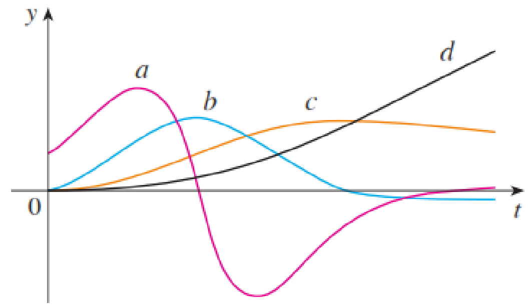


43. Hình dưới là đồ thị của ba hàm số. Một là hàm số vị trí của một ô-tô, một là vận tốc của ô-tô đó, và một là gia tốc của



nó. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.

44. Hình dưới là đồ thị của bốn hàm số. Một là hàm số vị trí của một ô-tô, một là vận tốc của ô-tô đó, một là gia tốc của nó, và một là độ giật xốc Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.

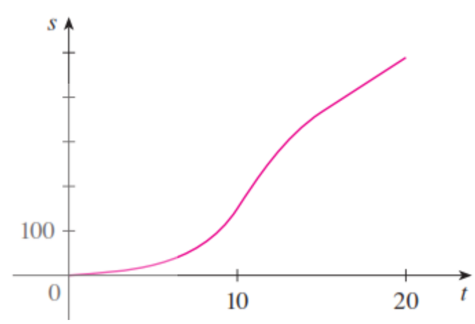


45-46 Dùng định nghĩa đạo hàm để tìm f ‘(x) và f “(x). Sau đó vẽ đồ thị f, f ‘, và f “ trên cùng một khung hình và kiểm tra xem bạn có trả lời hợp lý chưa.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Biết $f(x) = 2x^2 - x^3$, tìm f ‘(x), f “(x), f ”’(x), và $f^{(4)}(x)$. Vẽ đồ thị bốn hàm số này trên cùng một khung hình. Các đồ thị này có khớp với đoán nhận hình học của những đạo hàm này không?

48. (a) Đồ thị của một hàm số vị trí của một ô-tô được cho bên dưới, trong đó s tính bằng feet và t bằng giây. Dùng đồ thị này để vẽ đồ thị vận tốc và gia tốc của ô-tô. Tìm gia tốc lúc t = 10 giây.



(b) Dùng đồ thị gia tốc trong phần (a) để ước tính cú giật xốc lúc t = 10 giây. Đơn vị của độ giật xốc là gì?

49. Cho $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Nếu a ≠ 0, dùng Phương trình 2.7.5 để tìm f ‘(a).

(b) Chứng tỏ f ‘(0) không tồn tại.

(c) Chứng tỏ rằng y = $\sqrt[3]{x}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại (0, 0). (Nhớ lại hình dạng của đồ thị f. Xem Hình 13 trong Bài 1.2.)

50. (a) Nếu g(x) = $x^{2/3}$, chứng tỏ rằng g ’(0) không tồn tại.

(b) Nếu a ≠ 0, tìm g ‘(a).

(c) Chứng tỏ rằng y = $x^{2/3}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại (0, 0).

(d) Minh họa phần (c) bằng cách vẽ đồ thị bằng máy của hàm số y = $x^{2/3}$.

51. Chứng tỏ hàm số f(x) = | x – 6 | không khả vi tại 6. Tìm công thức của f ‘ và phác họa đồ thị của nó.

52. Tại đâu thì hàm số phần nguyên f(x) = [[x]] không khả vi? Tìm công thức của f “ và phác họa đồ thị của nó.

53. (a) Vẽ đồ thị của hàm số f(x) = x | x |.

(b) Tìm x tại đó f khả vi.

(c) Tìm công thức cho f ‘.

54. Đạo hàm bên trái và **đạo hàm bên phải** của f tại a được định nghĩa bởi

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

và
$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

nếu những giới hạn này tồn tại. Khi đó f ‘(a) tồn tại khi và chỉ khi những đạo hàm một bên này tồn tại và bằng nhau.

(a) Tìm $f'_-(4)$ và $f'_+(4)$ của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi\ \ x \le 0 \\ 5-x & khi\ \ 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & khi\ x \ge 4 \end{cases}$$

(b) Vẽ đồ thị của f.

(c) Tìm những điểm gián đoạn của f.

(d) Tìm những điểm không khả vi của f.

55. Nhớ rằng hàm số f được gọi là *chẵn* nếu f(- x) = f(x) và lẻ nếu f(- x) = - f(x) với mọi x trong tập xác định. Chứng tỏ những tính chất sau.

(a) Đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ.

(b) Đạo hàm của một hàm số lẻ là một hàm số chẵn.

(d) Tìm những điểm không khả vi của f.

56. Khi bạn mở vòi nước nóng, nhiệt độ T của nước phụ thuộc vào thời gian nước chảy.

(a) Phác họa một đồ thị có thể có của T xem như một hàm số theo thời gian t kể từ lúc vòi bắt đầu mở ra.

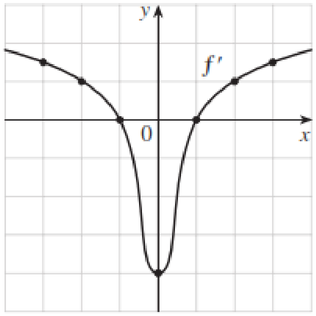
(b) Mô tả vận tốc biến thiên của T đối với t thay đổi thế nào khi t tăng lên.

(c) Phác họa đồ thị của đạo hàm của T.

57. Gọi l là đường tiếp tuyến voi parabol y = x^2 tại điểm (1, 1). *Góc nghiêng* của l là góc θ mà l hợp với tia Ox của hệ trục Oxy. Tính θ đúng đến độ gần nhất.

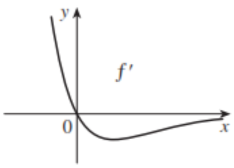
ĐÁP SỐ

1. (a) 1.5
(b) 1
(c) 0
(d) −4
(e) 0
(f) 1
(g) 1.5

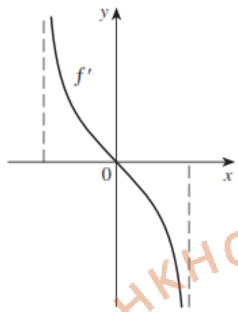


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

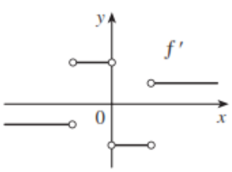
5.



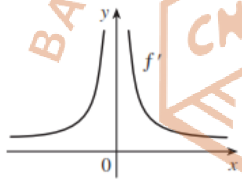
7.



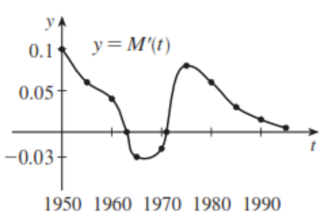
9.



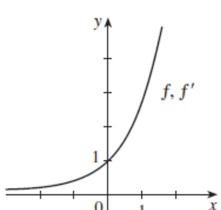
11.



13. 1963 to 1971



15. $f'(x) = e^x$



17. (a) 0, 1, 2, 4 (b) −1, −2, −4 (c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = \frac{1}{2}$, ℝ, ℝ **21.** $f'(t) = 5 - 18t$, ℝ, ℝ

23. $f'(x) = 3x^2 - 3$, ℝ, ℝ

25. $g'(x) = 1/\sqrt{1 + 2x}$, $[-\frac{1}{2}, \infty)$, $(-\frac{1}{2}, \infty)$

27. $G'(t) = \dfrac{4}{(t+1)^2}$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

29. $f'(x) = 4x^3$, ℝ, ℝ **31.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

33. (a) Tốc độ mà tỷ lệ thất nghiệp thay đổi, tính theo đơn vị là số phần trăm thất nghiệp mỗi năm.

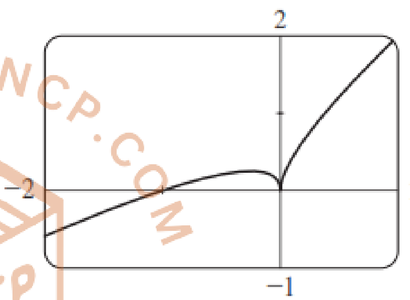
(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1993	−0.80	1998	−0.35
1994	−0.65	1999	−0.25
1995	−0.35	2000	0.25
1996	−0.35	2001	0.90
1997	−0.45	2002	1.10

35. – 4 (điểm góc), 0 (gián đoạn)

37. – 1 (tiếp tuyến thẳng đứng), 4 (điểm góc)

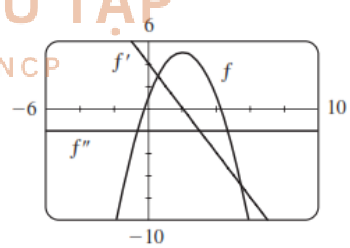
39. Khả vi tại – 1; không khả vi tại 0



41. a = f, b = f ‘, c = f “

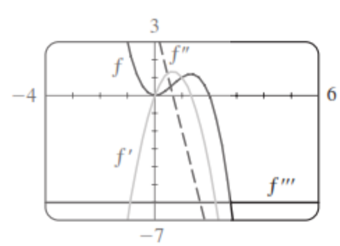
43. a = gia tốc, b : vận tốc, c = vị trí

45.



$f'(x) = 4 - 2x$,
$f''(x) = -2$

47.

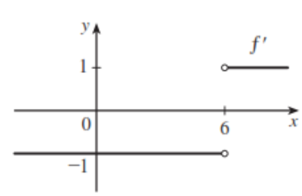


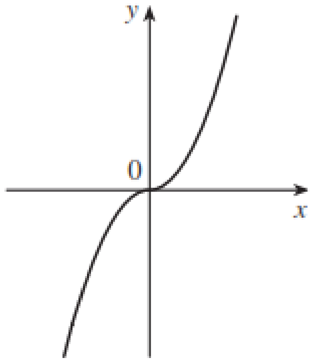
$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

49. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

51. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 6 \\ 1 & \text{if } x > 6 \end{cases}$

or $f'(x) = \dfrac{x - 6}{|x - 6|}$



53. (b) Mọi x (c) f ‘(x) = 2| x |
(a)


57. 63^{o}