BÀI TẬP ĐẠO HÀM HÀM NHIỀU BIẾN

1 Đạo hàm riêng và vi phân cấp một

Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp một tại các điểm được chỉ ra:

1. $f(x,y) = x^2y + 3xy^2, (x_0, y_0) = (2, -1)$.
2. $f(x,y) = x^3\sin(y-x), (x_0, y_0) = (\pi, \pi)$.
3. $f(x,y) = (y-1)e^{x^2+2y}, (x_0, y_0) = (-1, 1)$.
4. $f(x,y) = tanh\left(\dfrac{x}{y}\right), (x_0, y_0) = (0, 1)$.
5. $f(x,y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ tại các điểm (x_0, y) sao cho $x_0 \neq 0$.

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp một của hàm ba biến.

1. Tính $f'_x(1,0,1), f'_z(1,-1,1)$ của $f(x,y,z) = \dfrac{y}{xz}\ln(y^2+2z)$.
2. Tính $f'_y(x,y,z)$ của $f(x,y,z) = y\sqrt{y^2+x^2+z^2}$.
3. Tính f'_x, f'_y, f'_z của $f(x,y,z) = \arctan\dfrac{x+z}{y}$ tại những điểm mà f xác định.
4. Tính $f'_x(x,y,z)$ của $f(x,y,z) = (xy)^z$
5. Tính $df(1,2,1)$ với $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

Tìm miền xác định của

1. f'_x với $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. f'_y với $f(x,y) = \ln(x-2y)$.
3. f'_x, f'_y với $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2+y^2}$.
4. f'_x với $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 1, (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. f'_x, f'_y với $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, x \neq 0 \\ y, x = 0 \end{cases}$.

Với hàm số f cho trước, tính giá trị biểu thức $A(x,y)$ theo x, y hoặc $A(x,y,z)$ theo x, y, z.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, A(x,y) = x^2f'_x(x,y) + y^2f'_y(x,y)$. ĐS : $\dfrac{x^3}{y}$
2. $f(x,y) = xy + x^2\ln\left(\dfrac{y}{x}\right), A(x,y) = xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) - 2f(x,y)$. ĐS : 0
3. $f(x,y) = 4e^{-2y} + (2x+4y-3)e^{-y} - x - 1, A(x,y) = (f'_x)^2 + f'_y + z$. ĐS : $-x$
4. $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz), A(x,y,z) = f'_x + f'_y + f'_z$. ĐS : $\dfrac{3}{x+y+z}$

Trong các bài dưới đây, tìm hàm $f(x, y)$ khả vi thỏa mãn điều kiện đã cho

1. $f'_x(x, y) = x^2 - y, f'_y(x, y) = y^2 - x$.

2. $f'_x(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, f'_y(x, y) = 6xy + x^2 + 3$.

3. $df(x, y) = (e^x + y + \sin x)\, dx + (e^y + x + \sin y)\, dy$.

4. $df(x, y) = \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy$.

Tính số gia và vi phân của các hàm số dưới đây tại các điểm được chỉ ra

1. $f(x, y) = x^2 y, (x_0, y_0) = (1, 1)$.

2. $f(x, y) = x^2 y, (x_0, y_0) = (1, 1), \Delta x = -0.1, \Delta y = 0.01$.

3. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ nếu x thay đổi từ 2 đến 2.1 và y thay đổi từ 1 đến 1.2.

Các bài toán ứng dụng.

1. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $S : z = x^2 y + 2yx^y$ và mặt phẳng $y = -1$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

2. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $S : z = \sin xy + 2x^2 - y$ và mặt phẳng $x = \pi$ tại điểm có tung độ $y = 1$.

3. Một chiếc thùng hình trụ có kích thước bên trong là: bán kính $R = 2.5m$, chiều cao $H = 4m$, độ dày thành và đáy là $1dm$. Hãy tính gần đúng thể tích vật tư sử dụng cho việc chế tạo thùng.

4. Một hình hộp chữ nhật có kích thước các cạnh là : $a = 2m, b = 3m, c = 6m$. Hãy tính gần đúng độ dài đường chéo hình hộp nếu a tăng $2cm$, b tăng $1cm$ và c giảm $3cm$.

5. Trong nón cụt có bán kính đáy dưới $R = 20cm$, bán kính đáy trên $r = 10cm$, chiều cao $h = 30cm$. Tính xấp xỉ sự thay đổi thể tích nếu R tăng thêm $2mm$, r tăng thêm $3mm$ và h giảm đi $1mm$.

2 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Tính các đạo hàm cấp hai theo yêu cầu tại các điểm được chỉ ra.

1. $f"_{xx}(1, 0), f"_{xy}(-1, 1)$ với $f(x, y) = \arctan(x + 2y^2)$.

2. $f"_{yy}(2, 0)$ với $f(x, y) = \sin(\pi x + x^2 y)$.

3. $f"_{xy}(x, y), f"_{yy}(x, y)$ với $f(x, y) = \ln \left[\cosh \left(\dfrac{x}{y}\right)\right]$.

4. $f"_{xz}(0, 1, -1), f"_{zz}(1, 0, 0)$ với $f(x, y, z) = xyz - \arctan(x^2 + z)$.

5. $f"_{yz}(x, y, z)$ với $f(x, y, z) = (yz)^x$.

Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra

1. $f(x, y) = x^3 + x^2 y - 2x^2 y^2 + 3xy^2 - 1, (x_0, y_0) = (2, -3)$.

2. $f(x, y) = \ln(x^2 + 2xy), (x_0, y_0) = (1, 0)$.

3. $f(x, y) = tan^2(2x - y), (x_0, y_0) = (0, 0)$.

Tìm đạo hàm cấp cao tại các điểm được chỉ ra.

1. $f^{(4)}_{xy^3}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), f(x,y) = x\cos(x+2y)$.

2. $f^{(6)}_{xy^5}(x,y), f(x,y) = (x+1)e^{x^2y}$.

3. $f^{(6)}_{x^2y^5}(1,-1), f(x,y) = xe^{x^2y}$.

4. $f^{(10)}_{x^5y^5}(-1,-1), f(x,y) = \dfrac{1}{2x-3y}$.

5. $f^{(10)}_{x^5y^5}(-1,-1), f(x,y) = \sin(2x-y)$.

6. $f^{(12)}_{x^8y^4}(x,y), f(x,y) = (x-y^2)\,e^{x+y}$

7. $f"_{xz}(0,1,-1), f"_{zz}(0,1,-1)$ với $f(x,y,z) = yz - \arctan(x^2+z)$.

8. $f"_{yz}(1,1,2)$ với $f(x,y,z) = (xy)^z$.

3 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. Cho $z = f(u,v) = u^2v - uv^2$, trong đó $u = \sin(x-y), v = \sin(x.y)$. Tính $z'_x(\pi, \dfrac{\pi}{2}), z'_y(0,\pi)$.

2. Cho $u = f(x,y,z) = xyz$, với $x = t^2+1, y = \ln t, z = \tan t$. Tính $u'(t)$.

3. Cho $u = f(x,y,z) = \dfrac{yz}{x} + 2y$, với $x = \arctan t, y = t^2+1, z = e^{t-1}$. Tính $du(1)$.

4. Với 1mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái cho bởi $PV = 8.31T$, trong đó $P(kPascal), V(Lit), T(Kenvin)$. Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300^0K và thể tích khí đạt $100lit$, vận tốc tăng nhiệt là $0.1K/s$ và vận tốc tăng thể tích là $0.2L/s$, tính tốc độ thay đổi của áp suất P.

5. Cho $z = f(x) = tanh\,(x^2+2x)$. Nếu $x = u+v-e^{2u}$, tính $z'_v(u,v)$.

6. Cho $z = f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$.
   a/ Tính $f'_x(0,1), f'_y(0,1)$.
   b/ Nếu $y = \ln(x^2+e)$, tính $dz(0)$.
   c/ Nếu $x = 2t-1, y = t^3+2$, tính $dz(t)$.

7. Cho $z = f(x,y)$, với f là hàm khả vi và $x = x(t), y = y(t)$. Biết rằng $x(3) = 12, y(3) = -4, x'(3) = 1, y'(3) = 6, f'_x(12,-4) = -2, f'_y(12,-4) = 7$. Tính $z'(3)$.

8. Cho $z = f(x,y) = \arcsin(x-y)$, với $x = u^2+v^2, y = 1-2uv$. Tính z'_u, z'_v.

9. Cho $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$. Biết
   $x(-1,2) = 2, x'_s(-1,2) = 0, x'_t(-1,2) = -3,$
   $y(-1,2) = 3, y'_s(-1,2) = 1, y'_t(-1,2) = 5,$
   $f'_x(2,3) = -3, f'_y(2,3) = 6.$
   Tính $g'_s(-1,2), g'_t(-1,2)$.

10. Cho $f(x,y)$ là hàm khả vi theo hai biến x, y và $z(u,v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$. Biết $f'_x(1,2) = 3, f'_y(1,2) = 6$, tính $z'_u(0,0), z'_v(0,0)$.

11. Cho $z = f(x,y)$, với $x = s+t, y = s-t$. Chứng minh rằng $(f'_x)^2 - \left(f'_y\right)^2 = z'_s z'_t$.

12. Cho $z = f(x,y)$, với $x = e^s\cos t, y = e^s\sin t$..
    Chứng minh rằng $(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 = e^{-2s}\left[(z'_s)^2 + (z'_t)^2\right]$.

13. Cho $z = \dfrac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$, Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

14. Cho $u = f(x-y, y-z, z-x)$. Chứng minh rằng $u'_x + u'_y + u'_z = 0$.

15. Cho $z = x^2 + xy$ với $x = t^2, y = 3t$. Tính $z"(t)$.

16. Cho $z = x^2y - 2\ln\dfrac{x}{y}$, với $x = u^2 - v^2, y = uv$. Tính $z"_{uu}(1,1), z"_{uv}(1,1)$.

17. Chứng minh rằng hàm số $u = xf(x+y) + yg(x+y)$, với f, g khả vi, thỏa mãn phương trình :
$u"_{xx} - 2u"_{xy} + u"_{yy} = 0$.

18. Cho $u = f(x, xy, xyz)$, với f là hàm khả vi. Tìm $du(x,y,z)$.

19. Cho f, g là các hàm khả vi và $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right) + yg\left(\dfrac{x}{y}\right)$, chứng minh $xz'_x + yz'_y = z$.

20. Cho f là hàm khả vi và $z = xf\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$, chứng minh $2xz'_x + yz'_y = 2z$.

21. Cho f, g là hàm khả vi và $z = f(x+y) + g(x-y)$, chứng minh $z"_{xx} - z"_{yy} = 0$.

4 Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1. Hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình $x + y = e^{x-y}$. Tính $y'(x), y"(x)$.

2. Cho hàm ẩn $y = y(x)$ thỏa phương trình $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ và $y(1) = 1$. Tìm $dy(1), d^2y(1)$.

3. Cho hàm ẩn $z = z(x,y)$ thỏa phương trình : $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$. Tìm z'_x, z'_y.

4. Tìm $z'_x(1,-2), z'_y(1,-2)$ nếu $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0, z(1,-2) = 2$.

5. Tính $z"_{xy}$ nếu $z = z(x,y)$ thỏa phương trình $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

6. Với f là hàm hai biến khả vi, cho hàm ẩn$z = z(x,y)$ thỏa $f(yz, e^{xz}) = 0$, tìm z'_x, z'_y.

7. Cho $z = z(x,y)$ xác định từ hệ
$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha) \end{cases},$$
trong đó $f = f(\alpha), \alpha = \alpha(x,y)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng:
$\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 = z^2$.

8. Cho hàm ẩn $z = z(x,y)$ xác định từ hệ
$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v \end{cases}.$$
Tìm z'_x, z'_y tại $u = 1, v = 1$.

9. Cho $z = z(x,y)$ thỏa $ze^z = xe^x + ye^y$ và $u = \dfrac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x, u'_y.

5 Đạo hàm theo hướng và vector gradient

1. Cho $f(x,y,z) = x + e^{xyz} + \tanh(z-y)$. Tìm $\nabla f(0,1,-1)$.
2. Cho $f(x,y) = x^3\sin(x+y-y^2)$. Tìm $\nabla f(\pi,1)$.
3. Cho $f(x,y) = x^2y + \arctan(x+y)$ và vector $\overrightarrow{a} = (1,-1)$. Tìm $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \overrightarrow{a}}$.
4. Cho $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2+1}$. Tìm hướng tăng nhanh nhất của f tại $M(1,2)$.
5. Cho $f(x,y) = -3 + 2xy^2 + x^3 + y^3$ và $M(2,1)$. So sánh tốc độ thay đổi của f tại M theo các hướng $\overrightarrow{a} = (3,4)$, $\overrightarrow{b} = (-3,4)$.
6. Cho $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + +xy + 3x - 2y - 6z$. Gọi vector $\overrightarrow{a} = \nabla f(0,0,0)$. Tìm $\dfrac{\partial f(1,-2,2)}{\partial \overrightarrow{a}}, \dfrac{\partial f(0,0,0)}{\partial \overrightarrow{a}}$.
7. Tại những điểm nào của không gian thì vector $\nabla f(x,y,z)$ của $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
   a/ Vuông góc với trục Oz.
   b/ Song song với trục Oz.
8. Cho $g = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ với f là hàm khả vi, tìm $\nabla g(x,y,z)$.
9. Tìm phương trình mặt tiếp diện và pháp tuyến của các mặt cong sau tại các điểm được chỉ ra.
   a/ $x^2+y^2+z^2 = 4$ tại điểm $M(1,1,\sqrt{2})$.
   b/ $z = \sin x\cos y$ tại điểm $M\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.
   c/ $z = e^{x\cos y}$ tại điểm $M\left(1, \pi, \dfrac{1}{e}\right)$.
   d/ $x(t+z)(xy-z)+8 = 0$ tại điểm $M(2,1,3)$

6 Khai triển Taylor

1. Tìm khai triển Maclaurin cấp 2 của $f(x,y) =$

7 Cực trị hàm nhiều biến

7.1 Cực trị tự do

Tìm cực trị các hàm số sau:

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $f(x,y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
3. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, (x > 0, y > 0)$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.
5. $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
6. $f(x,y) = xy^2(1-x-y), (x > 0, y > 0)$.

7. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.
8. $f(x,y,z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$.

7.2 Cực trị có điều kiện

Tìm cực trị của các hàm số dưới đây với điều kiện tương ứng.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, x + y + 3 = 0$.
2. $f(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}, x^2 + y^2 = 1$.
3. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2, 4x^2 + y^2 = 25$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2, x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
5. $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 1$.

8 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Trong các bài dưới đây, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên miền được chỉ ra.

1. $f(x,y) = xy, x^2 + y^2 \leq 1$.
2. $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, x^2 + y^3 \leq 4$.
3. $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, 2x^2 + 3y^2 \leq 25$.
4. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1$