ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

----------o0o----------

TÀI LIỆU HỌC TẬP

Môn: Phương pháp tính - MT1009

A. NỘI DUNG KIỂM TRA GIỮA KỲ

Chương 1: SAI SỐ

1. **Sai số tuyệt đối**
2. **Sai số tương đối**
3. **Sai số quy tròn**
4. **Sai số của hàm**

Chương 2: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH (f(x) = 0)

1. **Phương pháp chia đôi**
2. **Phương pháp lặp**
3. **Phương pháp Newton**
4. **Đánh giá sai số của các phương pháp**

Chương 3: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (Ax = b)

1. **Phương pháp A = L.U**
2. **Phương pháp Cholesky**
3. **Phương pháp lặp**
   - **3.1. Phương pháp Jacobi**
   - **3.2. Phương pháp Gauss - Seidel**
   - **3.3. Đánh giá sai số của các phương pháp**

Chương 1: SAI SỐ

1. Sai số tuyệt đối

$|A - a| \le \Delta_a$, trong đó: A là số đúng (hay số chính xác), a là số gần đúng, Δ_a là sai số tuyệt đối

Δ_a là không duy nhất, càng nhỏ càng tốt (độ chính xác cao)

Ta có: $a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$, tuy nhiên ta thường viết dưới dạng $A = a \pm \Delta_a$

2. Sai số tương đối

$\delta_a = \frac{|A-a|}{|A|} \approx \frac{\Delta_a}{a}$ $(a \ne 0, A \ne 0)$, trong đó: δ_a là sai số tương đối

Sai số tương đối không có đơn vị, thường được biểu diễn dưới dạng %

3. Sai số quy tròn (hay sai số làm tròn)

Số gần đúng a được quy tròn thành a^*

$|a - a*| = \theta_{a*}$, trong đó: θ_{a*} là sai số quy tròn

4. Các quy tắc

4.1. Quy tắc quá bán (hay quy tròn thông thường)

Quy tắc quá bán được sử dụng khi đáp số là một **CON SỐ**

4.2. Quy tắc làm tròn

Quy tắc làm tròn được sử dụng khi đáp số là bất đẳng thức: số nhỏ làm tròn lên, số lớn làm tròn xuống.

$$\uparrow a \le x \le b \downarrow$$

- Quy tròn lên là cách quy tròn để con số được tăng lên đến giá trị gần nhất.
- Quy tròn xuống là cách quy tròn để con số được giảm đi đến giá trị gần nhất.

➢ **Lưu ý:** Nếu đáp số là **SAI SỐ** thì luôn **QUY TRÒN LÊN**.

5. Sai số tuyệt đối của số quy tròn

$\Delta_{a*} = \Delta_a + \theta_{a*}$, trong đó: Δ_{a*} là sai số tuyệt đối của số quy tròn

6. Công thức tính sai số của hàm

Xét hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ với sai số tương ứng của các biến là $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \ldots, \Delta_{xn}$.

Khi đó sai số của hàm là:

$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial xi}\right| . \Delta_{xi}$, trong đó: Δf là sai số tuyệt đối, $\frac{\partial f}{\partial xi}$ là đạo hàm riêng

❖ **Đặc biệt hàm 2 biến f(x,y)**

$$\Delta f(x,y) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|.\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.\Delta_y$$

❖ **Sai số tuyệt đối của hàm**

$$\delta f = \frac{\Delta f}{|f|}$$

Chương 2: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

1. Định nghĩa

Khoảng $[a, b]$ gọi là khoảng cách ly nghiệm (k.c.l.n) nếu trong khoảng đó phương trình f(x) = 0 có duy nhất một nghiệm.

2. Định lý

Xét hàm f(x) có đạo hàm trên $[a, b]$

Nếu: **1)** $f'(x) > 0$ hoặc $f'(x) < 0$ (hàm đơn điệu) $\forall x \in [a, b]$

2) f(a).f(b) < 0 (2 đầu trái dấu)

Thì: $[a, b]$ là khoảng cách ly nghiệm

3. Công thức sai số tổng quát

X_d là nghiệm đúng, x_{gd} là nghiệm gần đúng

Công thức sai số tổng quát:

$$|x_{gd} - x_d| < \frac{|f(x_{gd})|}{m^{(1)}}$$

$\mathbf{m^{(1)} = Min}|f'(x)|$ $\forall x \in [a, b]$ (k.c.l.n)

4. Các phương pháp tìm nghiệm gần đúng

4.1. Phương pháp chia đôi

Nếu $[a, b]$ là k.c.l.n thì $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ hoặc $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ sẽ là k.c.l.n mới. Lặp lại quá trình phân chia này nhiều lần.

Đánh giá sai số phương pháp chia đôi:

$$|x_n - x_d| \le \frac{(b-a)}{2^{n+1}}$$

4.2. Phương pháp lặp

4.2.1. Nội dung

Đưa phương trình f(x) = 0 về dạng tương đồng $x = \varphi(x)$

Kiểm tra điều kiện đối với hàm $\varphi(x)$

$$q = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1$$

Lấy x_0 là 1 giá trị ban đầu tùy ý thuộc $[a, b]$

Xây dựng dãy lặp: $x_n = \varphi(x_{n-1})$

4.2.2. Đánh giá sai số

1/ $|x_n - x_d| \leq \frac{q|x_n - x_{n-1}|}{1-q}$ (Sai số hậu nghiệm)

2/ $|x_n - x_d| \leq \frac{q^n|x_1 - x_0|}{1-q}$ (Sai số tiên nghiệm)

4.2.3. Nhận xét

Nếu q ≥ 1 thì phương pháp lặp **KHÔNG** sử dụng được

φ(x) có q < 1 thì φ(x) gọi là **HÀM CO**, q là **HỆ SỐ CO**

4.2.4. Chú ý

Nếu biết q, x_0, x_1 ta có thể tính trước số bước cần lặp n theo công thức sai số tiên nghiệm với sai số nhỏ hơn hoặc bằng ε cho trước.

$q^n \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}$ => $\mathbf{n \geq \log_q\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}\right)}$

4.3. Phương pháp Newton (phương pháp tiếp tuyến)

4.3.1. Nội dung: Đưa f(x) = 0 về dạng lặp đặc biệt $\mathbf{x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)}$

4.3.2. Sai số: Công thức sai số tổng quát: $|x_n - x_d| < \frac{|f(x_n)|}{m^{(1)}}$

- Quy ước chọn điểm x_0 như sau:

  - Chọn x_0 = a nếu a là điểm Fourier

    f(a).f''(a) > 0

  - Chọn x = b nếu b là điểm Fourier

    f(b).f''(b) > 0

  (Chỉ có duy nhất a hoặc b là điểm Fourier)

Chương 3: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. A là ma trận tam giác trên: Tính nghiệm từ dưới lên

2. A là ma trận tam giác dưới: Tính nghiệm từ trên xuống

3. Phương pháp nhân tử L.U (Quan trọng)*

3.1. Nội dung: Phân tích ma trận A = L.U trong đó L (low) là ma trận tam giác dưới, U (up) là ma trận tam giác trên. Việc giải hệ phương trình tuyến tính sẽ đưa về giải 2 hệ phương trình dạng tam giác.

Ax = b

A = L.U

L.U.x = b

Đặt U.x = y

=> L.y = b (Hệ phương trình tam giác dưới)

Giải tìm y

=> U.x = y (Hệ phương trình tam giác trên)

Giải tìm x

3.2. Cách giải để tìm L, U từ ma trận A

- Quy ước: $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ nghiệm duy nhất (Doolitte)

➢ Cách tìm L và U theo Doolitte: Để tìm L, U ta nhân ma trận L với U theo trình tự nhân hàng với cột từ trái sang phải và từ trên xuống dưới.

VD:
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 6 & -7 & 14\\ 4 & -8 & 30\end{pmatrix}}_{A}$$

3.3. Nhận xét

1) Hàng 1 của U chính là hàng 1 của A.

2) Cột 1 của L là cột 1 của A chia cho a_{11}

3) $\mathbf{U_{11} = D_1}$

$U_{22} = \dfrac{D_2}{D_1}$

$U_{33} = \dfrac{D_3}{D_2}$

Với D_1, D_2, D_3 lần lượt là các định thức chính cấp 1, 2, 3 của ma trận A.

4) (Dùng để lập trình phần mềm máy tính): Trong phương pháp LU, tổng số các phép toán cần thực hiện là $\frac{n^3}{3}$.

4. Phương pháp Cholesky (Quan trọng)*

4.1. Nội dung: Phân tích ma trận A dưới dạng A = B.B^T trong đó B là ma trận tam giác dưới.

4.2. Nhận xét

1) Cách tìm B tương tự như phương pháp LU nhưng số phép tính giảm 2 lần.

2) Phương pháp Cholesky không quy ước đường chéo ma trận B bằng 1.

3) Khi lấy căn bậc 2 quy ước lấy căn số học, không dùng căn đại số.

4) $B_{11} = \sqrt{D_1}$

$B_{22} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$

$B_{33} = \sqrt{\frac{D_3}{D_2}}$

Với B_{11}, B_{22}, B_{33} lần lượt là các định thức chính cấp 1, 2, 3 của ma trận A.

5) Phương pháp Cholesky chỉ dùng nếu A **ĐỐI XỨNG** và **XÁC ĐỊNH DƯƠNG**.

<u>**VD:**</u> $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{B^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}}_{A}$$

5. Phương pháp lặp (Quan trọng)*

5.1. Định nghĩa (Chuẩn ma trận)

$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ (Chuẩn vô hạn, chuẩn hàng)

$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ (Chuẩn 1, chuẩn cột)

➢ **Chú ý:**

$\|A\|_{\infty,1} \ge 0$

$\|A\|_{\infty,1} = 0$

$\|A\|$ nếu là số lẻ thì quy ước làm tròn lên

5.2. Định nghĩa (Số điều kiện của ma trận A)

$\boldsymbol{k_1}(\mathbf{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 . \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1$

$k_\infty(\mathrm{A}) = \|A\|_\infty.\|A^{-1}\|_\infty$

❖ **Ý nghĩa của số điều kiện:**

$$\mathbf{k(A)}\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}'\| \approx \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|$$

➢ **Chú ý:** Số điều kiện cũng làm tròn lên

6. Phương pháp Jacobi (Quan trọng)*

6.1. Nội dung

- Đưa hệ Ax=b về dạng x = ϕx + g
- Kiểm tra điều kiện $\|\phi\|$ = q < 1 (Chuẩn hàng hoặc cột)
- Lấy $x^{(0)}$ là vecto giá trị ban đầu tùy ý
- Dãy lặp $x^{(k)}$ xây dựng theo công thức $x^{(k+1)} = \phi x^{(k)} + g$

6.2. Đánh giá sai số

$$\|x^{(k)} - x^{d}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \textbf{(Công thức tiên nghiệm)}$$

$$\|x^{(k)} - x^{d}\| \le \frac{q}{1-q}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad \textbf{(Công thức hậu nghiệm)}$$

(Quy ước lấy theo chuẩn 1)

<u>**VD:**</u> Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = -10 \end{cases}$ (Ax=b)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \quad 0.1x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 0 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} - 1.0 \end{cases} \quad (*) \qquad (\mathrm{x} = \phi\mathrm{x} + \mathrm{g})$$

$\|\phi\|_\infty = q_\infty = 0.5 < 1$

Lấy $x^{(0)}$ là vecto bất kỳ

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \to x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.4 \\ -1.15 \end{pmatrix}$$

Khi tính nếu bước lặp sau bằng bước lặp trước nó thì dừng chương trình.

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x:**

Ta gán các giá trị $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$ lần lượt thành các biến D, X, Y và gán biến $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ lần lượt thành các biến A, B, C vào (*) ta được:

$$\begin{cases} D = \frac{B-2C}{10} \\ X = \frac{-A+C+5}{10} \\ Y = \frac{-2A-3B-10}{10} \end{cases}$$

Ta nhập vào máy tính như sau:

Bước 1: Lưu $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vào các biến A, B, C

Bước 2: Nhập dãy trình tự sau:

$D = \frac{B-2C}{10}$ **:** $X = \frac{-A+C+5}{10}$ **:** $Y = \frac{-2A-3B-10}{10}$ **:** A=D **:** B=X **:** C=Y

***Lưu ý:** Dấu = ta nhập [ALPHA] → [SOLVE]([CALC])

Dấu **:** ta nhập [ALPHA] → $\left[\frac{d}{dx}\right]$([$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$])

Bước 3: Bấm [CALC] → Bấm [=] → Xuất hiện $D = \frac{B-2C}{10}$ = 0 → Bấm [=] → Xuất hiện $X = \frac{-A+C+5}{10}$ = 0.5 → Bấm [=] → Xuất hiện $Y = \frac{-2A-3B-10}{10}$ = -1

Vậy ta tìm được $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Để tìm $x^{(2)}$, $x^{(3)}$,... ta tiếp tục bấm [=] đến khi xuất hiện các D, X, Y tương ứng thỏa yêu cầu đề bài.

- **Chú ý:** Hệ 2 phương trình + 2 ẩn

- **Đánh giá sai số nghiệm $x^{(3)}$ của phương pháp lặp Jacobi theo công thức hậu nghiệm với chuẩn vô hạn (trong ví dụ đầu tiên)**

$$\left\|x^{(3)} - x^d\right\|_\infty \le \frac{q_\infty}{1-q_\infty}\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = 0.04$$

$q_\infty = 0.5$

$\frac{q_\infty}{1-q_\infty} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$ $\qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.4 \\ -1.15 \end{pmatrix}$ $\qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.36 \\ -1.17 \end{pmatrix}$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = \left\|\begin{matrix} 0.02 \\ -0.04 \\ -0.02 \end{matrix}\right\| = 0.04$$

VD: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 15x_1 - 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 11x_2 = 7 \end{cases}$ Theo phương pháp Jacobi, lấy $x^{(0)} = \begin{pmatrix}1.0\\1.5\end{pmatrix}$. Tìm số lần lặp cần thiết để nghiệm có sai số (tiên nghiệm) theo chuẩn vô hạn nhỏ hơn 10^{-5}.

$$\|x^{(k)} - x^d\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \le \varepsilon$$

$$k \ge \log_{q_\infty}\left(\frac{\varepsilon.(1-q_\infty)}{\|x_1 - x_0\|_\infty}\right)$$

$k \ge 9.2045 \rightarrow k = 10 \ (k\epsilon\mathbb{N})$

7. Phương pháp lặp Gauss - Seidel

7.1. Nội dung: Các thành phần của $x_i^{(k+1)}$ vừa tính được đã dùng ngay để tính $x_{i+1}^{(k+1)}$ trong bước tiếp theo

VD: $$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \quad 0.1x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 0 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} - 0.3x_2^{(k+1)} - 1.0 \end{cases}$$

Cho $x^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0.5\\-1\end{pmatrix}$

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x:**

Bước 1: Lưu $x^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ vào các biến A, B, C

Bước 2: Nhập dãy trình tự sau:

A = 0.1B - 0.2C : B = - 0.1A + 0.1C + 0.5 : C = -0.2A - 0.3B - 1

***Lưu ý:** Dấu = ta nhập [ALPHA] → [SOLVE]([CALC])

Dấu : ta nhập [ALPHA] → $\left[\frac{d}{dx}\right]$([$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$])

Bước 3: Bấm [CALC] → Bấm [=] → Xuất hiện A = 0.1B - 0.2C = 0 → Bấm [=] → Xuất hiện B = - 0.1A + 0.1C + 0.5 = 0.5 → Bấm [=] → Xuất hiện C = -0.2A - 0.3B - 1 = -1

Vậy ta tìm được $x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0.5\\-1\end{pmatrix}$

Để tìm $x^{(2)}$, $x^{(3)}$,... ta tiếp tục bấm [=] đến khi xuất hiện các A, B, C tương ứng thỏa yêu cầu đề bài.

***Ưu điểm** của phương pháp giải bằng máy tính theo phương pháp Gauss - Seidel so với giải bằng máy tính theo phương pháp Jacobi là đã giảm đi 3 biến D, X, Y.

➢ **Chú ý:** Hệ 2 phương trình + 2 ẩn

◆ **Đánh giá sai số của phương pháp Gauss - Seidel**

Ax=b

D: ma trận đường chéo lấy từ A

L: ma trận tam giác dưới lấy từ A và đổi dấu

U: ma trận tam giác trên lấy từ A và đổi dấu

D - L - U = A

(D - L - U)x = b

$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$

$x = \phi x + g$

=> $\boldsymbol{\phi_g = (D - L)^{-1}.U}$

__VD__: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 = 3 \\ -5x_1 + 11x_2 = 6 \end{cases}$ Theo phương pháp Gauss - Seidel tìm ma trận lặp $\phi_g = ?$

$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D - L = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

$(D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 1/22 & 1/22 \end{pmatrix}$

$\phi_g = (D - L)^{-1}.U = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 \\ 0 & 3/22 \end{pmatrix}$

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x:**

__**Bước 1**__**:** Chọn chế độ tính ma trận

__**Bước 2**__: Nhập ma trận $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

Bước 3: Nhập ma trận $B_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bước 4: Tính $A^{-1}.B$

Giải thích: Ma trận A đóng vai trò là (D - L); Ma trận B đóng vai trò là U; $A^{-1}.B$ đóng vai trò là ϕ_g.

Cho $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ Tìm sai số tiên nghiệm của $x^{(3)}$ với chuẩn vô hạn.

Ta có: $\phi_g = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 \\ 0 & 3/22 \end{pmatrix}$ => $q_\infty = 3/10$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ => $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 9/25 \\ 39/55 \end{pmatrix}$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \left\|\begin{matrix} 13/50 \\ 28/55 \end{matrix}\right\| = 28/55$$

$$\left\|x^{(3)} - x^d\right\|_\infty \le \frac{q_\infty^3}{1 - q_\infty}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \frac{(0.3)^3}{1 - 0.3}.\frac{28}{55} \approx 0.0197$$

❖ **Hướng dẫn các bước tìm sai số tiên nghiệm theo phương pháp Gauss - Seidel:**

Bước 1: Tìm ϕ_g => q_∞

Bước 2: Tìm $x^{(1)}$

Bước 3: Tính $\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty$

Bước 4: Tính $\Delta x^{(k)} = \left\|x^{(k)} - x^d\right\|_\infty \le \frac{q_\infty^k}{1-q_\infty}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty$

***Chú ý:** Tìm sai số hậu nghiệm cũng tương tự

B. NỘI DUNG THI CUỐI KỲ

Chương 1: SAI SỐ

Chương 2: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH (f(x) = 0)

Chương 3: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (Ax = b)

Chương 4: NỘI SUY

Chương 5: TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Chương 6: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương 4: NỘI SUY

1. Nội suy đa thức

1.1. Theo phương pháp Lagrange

1.1.1. Nội dung.

Biết các giá trị y_i của hàm y = f(x) tại các điểm x_i theo bảng

x	x_0	x_1	x_2	…	..	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	..	y_{n-1}	y_n

Tìm lại f(x)

*Thay vì tìm f(x) ta tìm hàm đa thức bậc n: P(x) thỏa điều kiện $P(x_i) = y_i$

*Lời giải là duy nhất

1.1.2. Các bước tìm đa thức P(x)

Bước 1: Thiết lập đa thức cơ sở Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}$$

Tính chất:

1) $L_i(x)$ là đa thức bậc n (∀i) (Tử số là đa thức bậc n, mẫu số là hằng số)
2) $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Bước 2: Thiết lập đa thức P(x)

$$\mathrm{P(x)} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i L_i(x)} = \mathrm{y_0 L_0(x)} + \mathrm{y_1 L_1(x)} + \ldots + \mathrm{y_n L_n(x)}$$

*Sai số (Hiếm khi cho thi): $|f(x) - P(x)| \leq \frac{M^{(n+1)}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$

$$M^{(n+1)} = \max_{x\in[x_0,x_n]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

VD: Tìm đa thức nội suy từ bảng số liệu:

x	-1	0	1
y	1/3	1	3

Từ đó tính giá trị của bảng tại x = 0.7

n = 2

Bước 1: Ta tìm các đa thức Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x^2+x}{2}$$

Bước 2: Thiết lập đa thức P(x)

$\mathrm{P(x)} = \mathrm{y_0L_0(x)} + \mathrm{y_1L_1(x)} + \mathrm{y_2L_2(x)} = \frac{2x^2+4x+3}{3}$ P(x) là đa thức bậc 2

Thay x = 0.7 vào P(x) => P(0.7) = 2.26

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x cho ví dụ trên:**

Bước 1: Chọn **"Thống kê"**:

Bấm [MENU]([SETUP]) → Bấm [6] → Bấm [3](y=a+bx+cx^2)

Bước 2: Nhập số liệu vào bảng

	x	y
1	-1	1/3
2	0	1
3	1	3

Sau khi nhập xong bấm [AC]([OFF])

Bước 3: Nhập 0.7 → Bấm [OPTN]→ Bấm chọn xuống [∇] → Bấm [4](Hồi quy) → Bấm [6]($\hat{y}$) → Bấm [=]. Ta được kết quả là 2.26

Chú ý: Ta chỉ sử dụng cách bấm máy đối với các bài toán cho **bảng 3 số liệu**

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

VD: Cho bảng số sau:

1.1	1.7	2.4
3.3	4.5	m

a) Tìm m sao cho đa thức nội suy P(x) thỏa P(1.8) = 4.0

Cách 1: đa thức nội suy là duy nhất

1.1	1.7	1.8	2.4
3.3	4.7	4.0	m

P(x)

Sau khi có bảng số liệu mới, ta sử dụng máy tính để tìm m. Cách bấm tương tự như ví dụ trên. ***Lưu ý**: ta chỉ sử dụng máy tính đối với bảng 3 số liệu.**

Kết quả: m = -3.2

Cách 2: Tổng quát

$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$

$P(1.8) = y_0L_0(1.8) + y_1L_1(1.8) + y_2L_2(1.8)$ (*)

Ta tính $L_0(1.8)$, $L_1(1.8)$, $L_2(1.8)$; sau đó thay vào (*) ta tìm được m

Kết quả: m = -3.2

b) Tìm m sao cho đa thức nội suy P(x) thỏa $P'(1.8) = 2.1$

Ta có: $P'(1.8) = y_0L_0'(1.8) + y_1L_1'(1.8) + y_2L_2'(1.8)$ (**)

Ta tính $L_0'(1.8)$ bằng cách bấm máy: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-1.7)(x-2.4)}{(1.1-1.7)(1.1-2.4)}\right)_{|x=1.8} = \frac{-15}{39}$

Sau đó lưu kết quả vừa tìm được vào biến A.

Tương tự tính $L_1'(1.8)$, $L_2'(1.8)$ và lần lượt lưu vào biến B và C

Thay các biến A, B, C vào (**) ta tìm được m

1.2. Phương pháp Newton tiến

1.2.1. Tỷ sai phân

Tỷ sai phân bậc 0 của f tại x_0 là $f[x_0]$

Tỷ sai phân bậc 1 của f tại x_0, x_1 là $f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$

Tỷ sai phân bậc 2 của f tại x_0, x_1, x_2 là $f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

1.2.2. Bảng tỷ sai phân

VD: Cho bảng sau:

x	-1	0	1
y	1/3	1	3

Ta có:

x	y (Tỷ sai phân bậc 0)	Tỷ sai phân bậc 1	Tỷ sai phân bậc 2
-1	1/3		
		$f[x_0,x_1] = \frac{1-1/3}{0-(-1)} = 2/3$	
0	1		$f[x_0,x_1,x_2] = 2/3$
		$f[x_1,x_2] = \frac{3-1}{1-0} = 2$	
1	3		

1.3. Công thức tìm P(x) theo bảng tỷ sai phân TIẾN

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

$a_0 = f[x_0]$

$a_1 = f[x_0, x_1]$

$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

...

$a_n = f[x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n]$

VD:

x	y (Tỷ sai phân bậc 0)	Tỷ sai phân bậc 1	Tỷ sai phân bậc 2
-1	1/3		
		$f[x_0,x_1] = \frac{1-1/3}{0-(-1)} = 2/3$	
0	1		$f[x_0,x_1,x_2] = 2/3$
		$f[x_1,x_2] = \frac{3-1}{1-0} = 2$	
1	3		

a_0 a_1 a_2

$P(x) = 1/3 + 2/3(x + 1) + 2/3(x + 1)(x - 0) = 2/3x^2 + 4/3x + 1$

1.4. Công thức tìm P(x) theo bảng tỷ sai phân lùi

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)$

$a_0 = f[x_n]$

$a_1 = f[x_n, x_{n-1}]$

$a_2 = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$

...

$a_n = f[x_n, x_{n-1},..., x_3, x_2, x_1, x_0]$

VD:

x	y (Tỷ sai phân bậc 0)	Tỷ sai phân bậc 1	Tỷ sai phân bậc 2
-1	1/3		
		$f[x_0,x_1] = \frac{1-1/3}{0-(-1)} = 2/3$	
0	1		$f[x_0,x_1,x_2] = 2/3$
		$f[x_1,x_2] = \frac{3-1}{1-0} = 2$	
1	3		

a_0 a_1 a_2

$P(x) = 3 + 2(x - 1) + 2/3(x - 1)(x - 0) = 2/3x^2 + 4/3x + 1$

➢ **Chú ý:**

1) Kết quả tìm P(x) của 3 công thức nội suy Lagrange, Newton tiến, Newton lùi là như nhau

2) Đối với các bài toán bảng nội suy ta có thể sử dụng cả 3 cách (Công thức Lagrange, công thức Newton tiến, công thức Newton lùi). Nhưng để làm nhanh, ta làm như sau:

- Nếu bài toán cho toàn là **HẰNG SỐ** thì nên sử dụng **NEWTON TIẾN, NEWTON LÙI**

- Nếu bài toán cho có chứa **THAM SỐ** thì nên sử dụng **LAGRANGE**

2. Phương pháp bình phương cực tiểu

2.1. Nội dung: Từ bảng số liệu:

x	x_1	x_2	...	..	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	...	..	y_{n-1}	y_n

Tìm hàm số có dạng biết trước sao cho tổng bình phương độ lệch so với bảng số liệu đã cho là nhỏ nhất.

❖ Trường hợp hàm số có dạng biết trước có dạng tổng quát: y = a.f(x) + b.g(x), f(x), g(x) cho trước; a, b là hằng số cần xác định

Tổng bình phương độ lệch:

$\sum_{i=1}^{n}[a.f(x_i)+b.g(x_i)-y_i]^2 = F(a,b)$ đạt giá trị cực tiểu nếu a, b thỏa hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}2[a.f(x_i)+b.g(x_i)-y_i].f(x_i)=0\\ \sum_{i=1}^{n}2[a.f(x_i)+b.g(x_i)-y_i].g(x_i)=0\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}f^2(x_i)+b\sum_{i=1}^{n}g(x_i)f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}y_if(x_i)\\ a\sum_{i=1}^{n}g(x_i)f(x_i)+b\sum_{i=1}^{n}g^2(x_i)=\sum_{i=1}^{n}y_ig(x_i)\end{cases}}$$

2.2. Đặc biệt: Hàm tuyến tính y = a + bx

VD: Cho bàng số liệu sau:

x	0.5	1.0	1.5	2.0
y	2.01	2.98	4.05	4.96

Tìm công thức dạng y = a + bx, theo phương pháp bình phương cực tiểu

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x:**

Bước 1: Chọn **“Thống kê”**:

Bấm [MENU]([SETUP]) → Bấm [6] → Bấm [2](y=a+bx)

Bước 2: Nhập số liệu vào bảng

	x	y
1	0.5	2.01
2	1	2.98
3	1.5	4.05
4	2.0	4.96

Sau khi nhập xong bấm [AC]([OFF])

Bước 3: Bấm [OPTN]→ Bấm chọn xuống [∇] → Bấm [4](Hồi quy) → Bấm [1](a) → Bấm [=]. Ta được kết quả là 1.02. Bấm [OPTN]→ Bấm chọn xuống [∇] → Bấm [4](Hồi quy) → Bấm [2](b) → Bấm [=]. Ta được kết quả là 1.984

Vậy y = 1.02 + 1.984x

VD: Cho bảng số liệu sau:

x	1.0	2.0	3.0	4.0
y	2.01	4.98	10.05	16.56

Tìm công thức dạng $y = a + bx^2$ tho phương pháp bình phương cực tiểu

- **Chú ý**: Đối với các bài toán tìm công thức khác dạng y = a + bx. Ta đưa công thức đó về dạng y = a + bx bằng cách đặt ẩn t và làm tương tự như trên.

$t = x^2$	1.0	4.0	9.0	16.0
y	2.01	4.98	10.05	16.56

y = a + bt

Kết quả: a = 1.1128; b = 0.9716

VD: Cho bảng số liệu:

x	1.0	2.0	3.0	4.0
y	2.5	7.4	16.4	29.9

Tìm hàm $y = a + b(x + 2) + c(x + 1)^2$ theo phương pháp bình phương cực tiểu.

=> $y = (a + b) + b(x + 1) + c(x + 1)^2$

Đặt t = x + 1; A = a + b; B = b; C = c => $y = A + Bt + Ct^2$. Tính tương tự như trên

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -1.63 \\ C = 2.15 \end{cases} \quad => \begin{cases} a = 11.71 \\ b = -5.93 \\ c = 2.15 \end{cases}$$

2.3. Dạng tổng quát: y = a.f(x) + b.g(x)

VD: Cho bảng số liệu:

x	1.3	1.6	1.8	2.1	2.4	2.6
y	1.27	1.75	3.9	4.25	5.46	6.87

(i=6)

Tìm hàm $y = a\sqrt{1 + x^2} + b\cos x$ theo phương pháp bình phương cực tiểu.

- **Chú ý**: Đối với các bài dạng tổng quát y = a.f(x) + b.g(x), ta tính như sau:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(x_i) \\ a\sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i g(x_i) \end{cases}$$

❖ **Giải bằng máy tính CASIO fx - 580VN x dựa theo hệ phương trình trên:**

Bước 1: Nhập theo thứ tự sau:

A = A + $(\sqrt{1+X^2})^2$: B = B + cos(X)$\sqrt{1+X^2}$: C = C + Y$\sqrt{1+X^2}$: D = D + cos(X)^2 : E = E + Ycos(X)

Trong đó: A = $f^2(x_i)$; B = $g(x_i)f(x_i)$; C = $y_i f(x_i)$; D = $g^2(x_i)$; E = $y_i g(x_i)$

Bước 2: Bấm [CALC] → Nhập A = 0 → Nhập X = 1.3 → Nhập B = 0 → Nhập C = 0 → Nhập Y = 1.27 → Nhập D = 0 → Nhập E = 0 → Bấm [=] → Ta được giá trị A, B, C, D, E lần thứ nhất → Bấm [=] → Ta giữa nguyên các giá trị A, B, C, D, E lần thứ nhất và chỉ thay đổi giá trị x = 1.6 và y = 1.75 → Bấm [=] →Ta được các giá trị A, B, C, D, E lần thứ hai → Bấm [=] → Ta giữa nguyên các giá trị A, B, C, D, E lần thứ hai và chỉ thay đổi giá trị x = 1.8 và y = 3.90 → Bấm [=] → Ta được các giá trị A, B, C, D, E lần thứ ba → Bấm [=] → Ta giữa nguyên các giá trị A, B, C, D, E lần thứ ba và chỉ thay đổi giá trị x = 2.1 và y = 4.25 → Bấm [=] → Ta được các giá trị A, B, C, D, E lần thứ tư → Bấm [=] → Ta giữa nguyên các giá trị A, B, C, D, E lần thứ tư và chỉ thay đổi giá trị x = 2.4 và y = 5.46 → Bấm [=] → Ta được các giá trị A, B, C, D, E lần thứ năm → Bấm [=] → Ta giữa nguyên các giá trị A, B, C, D, E lần thứ năm và chỉ thay đổi giá trị x = 2.6 và y = 6.87 → Bấm [=] → Ta được các giá trị A, B, C, D, E lần cuối cùng (i=6).

Bước 3: Ta giải hệ phương trình 2 ẩn. Trong đó A, B, C, D, E là các giá trị lần cuối cùng.

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = E \end{cases}$$

Kết quả: X = a = 1.2043433; Y = b = -3.5950588

3. Nội suy Spline bậc 3 (Khó nhất) (Thi thì làm sau cùng!!!)

3.1. Nội suy Spline bậc 3 biên tự nhiên

3.1.1. Nội dung:

x	x_0	x_1	x_2	…	..	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	..	y_{n-1}	y_n

Tìm hàm $S_j(x)$ là các đa thức bậc 3 xác định trên $[x_j, x_{j+1}]$

- $j = 0$: $S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$ $\quad x_0 \le x \le x_1$
- $j = 1$: $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$ $\quad x_1 \le x \le x_2$
- $j = 2$: $S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$ $\quad x_2 \le x \le x_3$
- $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$

$S_j(x)$ thỏa các điều kiện sau:

A) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_j + 1$

B) $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$

C) $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$

D) $S_0''(0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ **(biên tự nhiên)**

$h_0 = x_1 - x_0$

$h_1 = x_2 - x_1$

$h_2 = x_3 - x_2$

$h_j = x_{j+1} - x_j$

$$a_j = y_j \qquad (*)$$

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j.\frac{c_{j+1} - 2c_j}{3h_j} \qquad (**)$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \qquad (***)$$

Các hệ số c_j tìm từ hệ phương trình Ax = B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \dots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

VD: Nội suy Spline bậc 3 biên tự nhiên của bảng:

$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$y_0 = 0$	$y_1 = 1$	$y_2 = 4$	$y_3 = 0$

Thiết lập bảng sau:

$a_0 = 0$	$b_0 = 0$	$c_0 = 0$	$d_0 = 1$
$a_1 = 1$	$b_1 = 3$	$c_1 = 3$	$d_1 = -3$
$a_2 = 4$	$b_2 = 0$	$c_2 = -6$	$d_2 = 2$
$a_3 = 0$		$c_3 = 0$	

- $S_0(x) = 0 + 0(x - 0) + 0(x - 0)^2 + 1(x - 0)^3 \quad 0 \leq x \leq 1$
- $S_1(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 - 3(x - 1)^3 \quad 1 \leq x \leq 2$
- $S_2(x) = 4 + 0(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3 \quad 2 \leq x \leq 3$

Các hệ số c_j tính theo hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bài toán cho biên tự nhiên: $c_0 = c_n = 0$

$S(1.5) = S_1(1.5) \quad 1 \leq x \leq 2$

3.2. Nội suy Spline bậc 3 biên ràng buộc

- Các điều kiện A, B, C giống với biên tự nhiên.

  Chỉ khác ở điều kiện D: $S_0'(x_0) = \alpha,\ S_{n-1}'(x_n) = \beta$ (Biên ràng buộc). $\alpha,\ \beta$ là giá trị cho trước.

- Công thức tính a, b, d không đổi. Chỉ thay đổi công thức tính c

  Hệ phương trình tìm c_j:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ --- \\ --- \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3\alpha \\ --- \\ 3\beta - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

A x (x_0, x_n có thể $\neq 0$) B

Các phần bỏ trống giống như biên tự nhiên

VD: Hàm S(x) Spline bậc 3 nội suy theo bảng số liệu

x	3	5
y	2.5	6

Với điều kiện ràng buộc $S_0^{'}(3) = \alpha = 2,\ S_0^{'}(5) = \beta = 0.25$. Tính gái trị của hàm S(x) tại điểm x = 4.

Thiết lập bảng:

$a_0 = 2.5$	$b_0 = 2.0$	$c_0 = 0.5$	$d_0 = -0.3125$
$a_1 = 6.0$		$c_1 = -1.375$	

$S_0(x) = 2.5 + 2(x - 3) + 0.5(x - 3)^2 - 0.3125(x - 3)^3$

$S(4) = 4.6875$

$S'(4) = 2.0625$

Các hệ số c_j tính theo hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(6 - 2.5) - 3.(2) \\ 3.(0.25) - \frac{3}{2}(6 - 2.5) \end{bmatrix}$$

Chương 5: TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

1. Tính gần đúng tích phân xác định

1.1. Công thức hình thang

1.1.1. Nội dung: Chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau bởi các điểm x_0, x_1, $x_2,\dots,x_n$ với bước chia $h = \frac{(b-a)}{n}$

Ký hiệu: $y(x_i) = y_i$

$dtD = dtD_1 + dtD_2 + \dots + dtD_n$

$dt(D_1) \approx$ diện tích hình thang $= \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$

➢ **Công thức hình thang (mở rộng):**

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

1.1.2. Sai số: $\frac{M^{(2)}h^2}{12}(b-a)$

$$M^{(2)} = \underset{x\in[a,\,b]}{\text{Max}} |y''(x)|$$

1.2. Công thức Simpson

Chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau n là số chẵn (n = 2m)

➢ **Công thức Simpson:**

$$I = \int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2m-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k}\right]$$
$$\approx \frac{h}{3}\left[y_{\text{đầu}} + y_{\text{cuối}} + 4\sum y_{\text{lẻ}} + 2\sum y_{\text{chẵn}}\right]$$

<u>VD</u>: Tính gần đúng

$$\int_0^{0.6} \frac{1}{1-x}dx$$

theo công thức Simpson với số khoảng chia n = 6

$$\int_0^{0.6} \frac{1}{1-x}dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \approx 0.4700$$

2. Tính gần đúng đạo hàm cấp 1, 2

2.1. Tính gần đúng đạo hàm cấp 1

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + R$ (1)

$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0).h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + R'$ (2)

(1)-(2) => $\boldsymbol{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}}$ (Công thức sai phân hướng tâm)

2.2. Tính gần đúng đạo hàm cấp 2

(1)+(2) => $\boldsymbol{f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}}$

Chương 6: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Giải gần đúng phương trình vi phân cấp 1

Bài toán giá trị ban đầu

Cho phương trình vi phân cấp 1: $y'(x) = f(x, y(x))$ với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$. Tìm giá trị $y(b)$ với b bất kỳ.

1.1. Phương pháp Euler

Nội dung: chia đoạn $[x_0, b]$ thành n phần đều nhau, bởi các điểm chia $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ bước chia là $h = \frac{b-x_0}{n}$, ký hiệu $y(x_i) = y_i$

Công thức Euler: $y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i)$

<u>**VD**</u>: Phương trình $y'(x) = 1 + (x - y)^2$ với điều kiện ban đầu $y(2) = 1$. Tính gần đúng nghiệm $y(2.6)$ với bước $h = 0.2$

$y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

$f(x, y) = 1 + (x - y)^2$

❖ **Bấm máy tính:**

- **Lưu** 2→ X, 1 → Y, 0.2 → F
- **Nhập** Y = Y + F(1 + (X - Y)²) : X = X + F
- **Bấm** [CALC] → [=] theo cách lặp trên máy tính

$x_0 = 2$	$y_0 = 1$
$x_1 = 2.2$	$y_1 = 7/5$
$x_2 = 2.4$	$y_2 = 1.728$
$x_3 = 2.6$	$y_3 = 2.0183168$

1.2. Phương pháp Euler cải tiến

Nội dung: Công thức Taylor bậc 2

$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1+k_2}{2}$

$k_1 = h.f(x_0, y_0)$

$k_2 = h.f(x_i + h, y_i + k_1)$

$(i = 0) \Rightarrow \mathbf{y_1 = y_0 + \frac{k_1+k_2}{2}}$

$\mathbf{k_1 = h.f(x_0, y_0)}$

$\mathbf{k_2 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_1)}$

VD: Giải phương trình $y' = 1 + (x - y)^2$ với điều kiện ban đầu $y(2) = 1$ trong ví dụ trước theo phương pháp Euler cải tiến với h = 0.2. Tìm $y(2.6) = y_3$

❖ **Bấm máy tính:**

- **Lưu** 2→ X, 1 → Y, 0.2 → F
- **Nhập** $A = F(1+(X - Y)^2) : B = F(1 + ((X + F) - (Y + A))^2) : Y = Y + \frac{A+B}{2} : X = X + F$
- **Bấm** [CALC] → [=] theo cách lặp trên máy tính

$x_0 = 2$	$y_0 = 1$
$x_1 = 2.2$	$y_1 = 1.364$
$x_2 = 2.4$	$y_2 = 1.68236194$
$x_3 = 2.6$	$y_3 = 1.971640265$

1.3. Công thức Runge - Kutta

Nội dung: Công thức Taylor bậc 4

$(i = 0) \Rightarrow \mathbf{y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$

$\mathbf{k_1 = h.f(x_0, y_0)}$

$\mathbf{k_2 = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)}$

$\mathbf{k_3 = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)}$

$\mathbf{k_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3)}$

VD: Giải theo Runge - Kutta, cho phương trình $y' = 1 + (x - y)^2$ thỏa điều kiện $y(2) = 1$. Tìm $y(2.2) = y_1$ với h = 0.2.

❖ **Bấm máy tính:**

Bước 1: Lưu 0.2→ F

Bước 2: Nhập $F(1+(X - Y)^2)$

Bước 3: Bấm [CALC] → Nhập giá trị $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ → Bấm [=] → k_1 → Lưu vào A → Bấm hướng lên → Thay giá trị $x_0 + \frac{F}{2}$, $y_0 + \frac{A}{2}$ → Bấm [=] → k_2 → Lưu vào B →

Bấm ✥ hướng lên → Thay giá trị $x_0 + \frac{F}{2}$, $y_0 + \frac{B}{2}$ → Bấm [=] → k_3 → Lưu vào C → Bấm ✥ hướng lên → Thay giá trị x_0 + F, y_0 + C → Bấm [=] → k_4 → Lưu vào D

$k_1 = 0.4 \rightarrow A$
$k_2 = 0.362 \rightarrow B$
$k_3 = 0.3689122 \rightarrow C$
$k_4 = 0.3381413863 \rightarrow D$

Bước 4: Nhập $1 + \frac{A+2B+2C+D}{6}$ => y(2.2) = 1.366660964 ≈ 1.3667