1. Mặt tham số
2. Tích phân mặt loại 1
   - Định nghĩa
   - Ứng dụng
   - Cách tính
3. Mặt định hướng
   - Cách xác định pháp vectơ của mặt
   - Khái niệm mặt định hướng

- Ta đã mô tả một **đường** trong không gian bởi một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)$ theo một tham số t:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

- Tương tự, ta cũng có thể mô tả một **mặt** bởi một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v)$ theo hai tham số u và v:

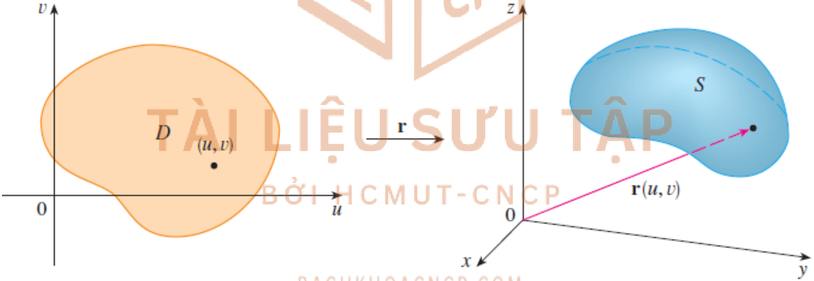
$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u, v)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(u, v)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

Định nghĩa

Ta gọi tập hợp S gồm các điểm (x, y, z) thỏa mãn

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

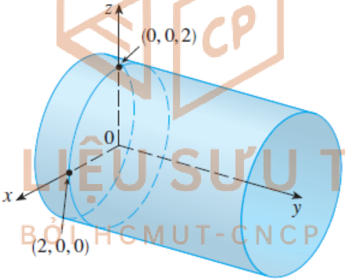
là một **mặt tham số (parametric surface)**.



Ví dụ

Hãy xác định và vẽ mặt tham số

$$\vec{\mathbf{r}}(u,v) = 2\cos u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}} + 2\sin u\,\vec{\mathbf{k}}.$$



Ví dụ

Hãy tìm phương trình tham số của các mặt sau:

(a) $z = x^2 + 2x - y^2 + 2.$

(b) $x^2 + y^2 = 1.$

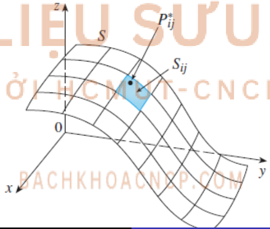
(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Định nghĩa

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số xác định trên mặt S. **Tích phân mặt loại 1** của f trên mặt S là

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij},$$

nếu giới hạn này tồn tại, trong đó mỗi P_{ij}^* là một điểm mẫu tùy ý thuộc mặt con S_{ij}.



Tính chất

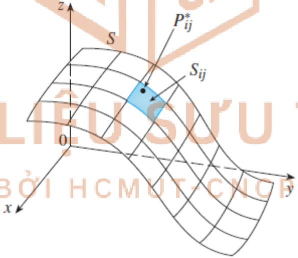
Nếu S là một mặt trơn từng khúc, tức là S là hợp của hữu hạn các mặt trơn $S_1, \ldots, S_n$ mà chúng chỉ giao nhau ở biên, thì ta có

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS + \cdots + \iint\limits_{S_n} f(x,y,z)dS$$

Ứng dụng tính diện tích mặt

Diện tích của mặt cong S được tính bởi:

$$S = \iint_S 1 dS.$$



Ứng dụng tính khối lượng tấm mỏng

- Giả sử một tấm mỏng có hình dạng là một mặt S và mật độ tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$.
- Khối lượng của tấm mỏng được tính bởi:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

Nếu mặt S được mô tả bởi phương trình tham số

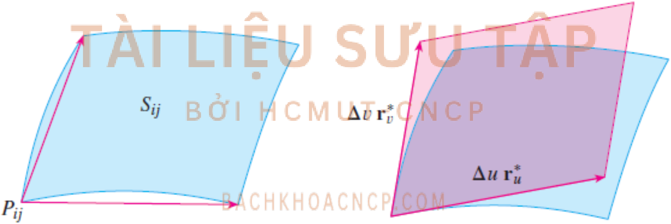
$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v) = x(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(u,v)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad (u,v) \in D,$$

thì

$$dS = |[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]|dudv,$$

do đó, tích phân mặt loại 1 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v))|[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]|dudv$$



Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $z = z(x, y)$, thì

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

do đó tích phân mặt loại 1 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

trong đó D_{xy} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oxy.

Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $y = y(x,z)$, thì

$$dS = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1},$$

do đó, tích phân mặt loại 1 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}dxdz,$$

trong đó D_{xz} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oxz.

Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $x = x(y, z)$, thì

$$dS = \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz,$$

do đó, ta tính tích phân mặt loại 1 bởi công thức sau:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz,$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oyz.

Ta thấy sự tương tự giữa công thức tính **tích phân mặt loại 1**

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v))|[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]|dudv$$

với công thức tính **tích phân đường loại 1**

$$\int\limits_C f(x,y,z)dl = \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}})|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)|dt$$

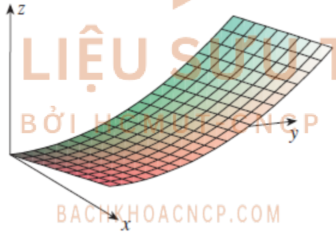
Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt loại 1

$$\iint\limits_S y dS,$$

trong đó S *là mặt cong* $z = x + y^2$, *với* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

ĐS: $13\sqrt{2}/3$



Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt loại 1

$$\iint_S x^2 dS,$$

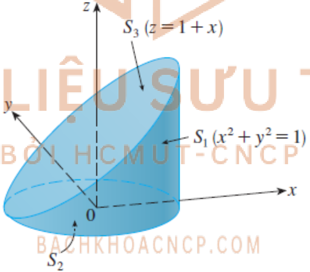
trong đó S là mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

ĐS: $4\pi/3$

Ví dụ

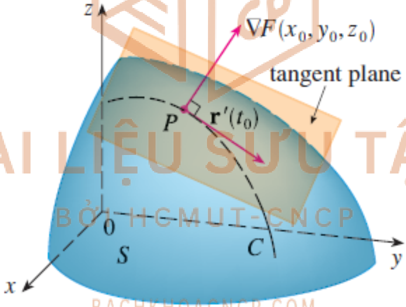
Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S z dS$, *trong đó* S *bao gồm mặt xung quanh* S_1 *là mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$, *mặt đáy* S_2 *là đĩa tròn* $x^2 + y^2 \leq 1$ *nằm trên mặt phẳng* $z = 0$, *và mặt trên* S_3 *là phần mặt phẳng* $z = 1 + x$ *nằm trên* S_2.

ĐS: $3\pi/2 + \pi\sqrt{2}$



Pháp vectơ của mặt mức

- Xét S là mặt có phương trình $F(x, y, z) = k$, đó cũng là mặt mức của hàm số ba biến $F(x, y, z)$.
- Vectơ $\overrightarrow{\nabla F}(x_0, y_0, z_0)$ là một pháp vectơ của mặt S tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$, nếu $\overrightarrow{\nabla F}(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.



Ví dụ

Tìm một pháp vectơ của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tại:*

(a) *điểm* $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

(b) *điểm* (x_0, y_0, z_0) *thuộc mặt cầu.*

Pháp vectơ của mặt đồ thị hàm số

- Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $z = z(x, y)$, thì một pháp vectơ của mặt S tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là
$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = (-z'_x(x_0, y_0), -z'_y(x_0, y_0), 1)$$
- Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $y = y(x, z)$, thì một pháp vectơ của mặt S tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là
$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = (-y'_x(x_0, z_0), 1, -y'_z(x_0, z_0))$$
- Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $x = x(y, z)$, thì một pháp vectơ của mặt S tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là
$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = (1, -x'_y(y_0, z_0), -x'_z(y_0, z_0))$$

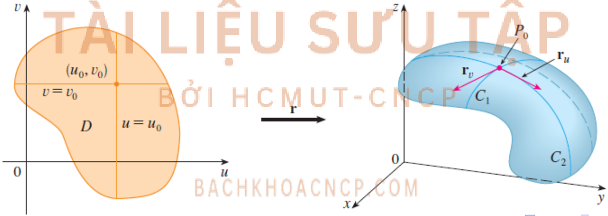
Pháp vectơ của mặt tham số

- Xét mặt tham số S:

$$\vec{\mathbf{r}}(u,v) = x(u,v)\,\vec{\mathbf{i}} + y(u,v)\,\vec{\mathbf{j}} + z(u,v)\,\vec{\mathbf{k}}, \quad (u,v) \in D$$

- Một pháp vectơ của S tại điểm $P_0 = \vec{\mathbf{r}}(u_0, v_0)$ là $[\vec{\mathbf{r}}'_u, \vec{\mathbf{r}}'_v]$, trong đó

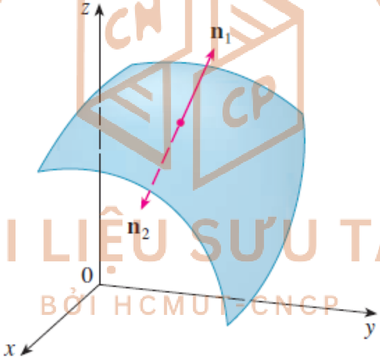
$$\vec{\mathbf{r}}'_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \vec{\mathbf{r}}'_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \text{ tính tại } (u_0, v_0)$$



Ví dụ

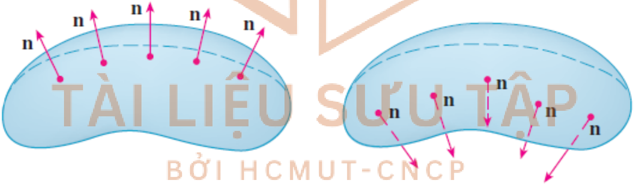
Tìm một pháp vectơ của mặt $z = x^2 + y^2 + 1$ *tại điểm* $(1, 2, 6)$.

- Xét S là một mặt có tiếp diện tại mọi điểm.
- Khi đó, tại mỗi điểm thuộc S ta luôn có 2 pháp vectơ đơn vị là $\overrightarrow{\mathbf{n}}_1$ và $\overrightarrow{\mathbf{n}}_2 = -\overrightarrow{\mathbf{n}}_1$.



Định nghĩa

Nếu ta có thể chọn được tại mỗi điểm (x, y, z) thuộc S một pháp vectơ đơn vị $\overrightarrow{\mathbf{n}}(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ biến thiên một cách **liên tục** trên S, thì S được gọi là **mặt định hướng (oriented surface)** và **hướng** của mặt S được xác định bởi hướng của $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.



- Dải Mobius là một ví dụ về "mặt không định hướng".