Chương 2: Hàm số

Nguyễn Thị Hồng Nhung

Ngày 5 tháng 10 năm 2021

Nội dung

1. Định nghĩa
   - Ánh xạ
   - Hàm số
   - Hàm hợp
   - Hàm ngược

2. Một số hàm số sơ cấp thường gặp
   - Hàm luỹ thừa
   - Hàm lượng giác

Ánh xạ

Ánh xạ

Cho hai tập hợp A và B khác rỗng. **Ánh xạ** f từ tập A vào tập B, viết là $f : A \to B$ là một phép liên kết mỗi phần tử x của tập A với một và chỉ một phần tử, được ký hiệu là $f(x)$, của tập B mà thôi. Khi đó ta nói $f(x)$ là **ảnh** của x qua ánh xạ f, và x là **tiền ảnh** của $f(x)$.

Ghi chú. Nếu đã ngầm hiểu về A và B thì ánh xạ trên còn được ký hiệu bởi $x \mapsto f(x)$.

Toàn ánh

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là **toàn ánh** khi mà mỗi phần tử y của tập B đều có (**ít nhất**) một tiền ảnh x trong A, nghĩa là có (**ít nhất**)một phần tử x của A sao cho $y = f(x)$.

Ánh xạ

Đơn ánh, hay ánh xạ 1-1

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là **đơn ánh** khi mà bất kỳ hai phần tử x_1 và x_2 khác nhau của tập A đều có ảnh $f(x_1)$ và $f(x_2)$ khác nhau.

Song ánh

Song ánh là ánh xạ có hai tính chất: vừa là toàn ánh, vừa là đơn ánh.

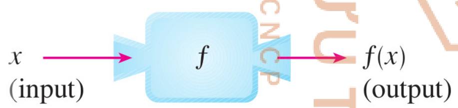
Song ánh ngược

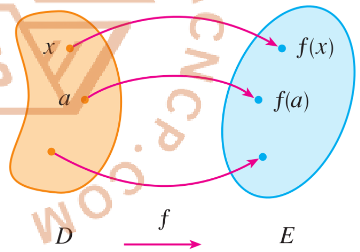
Nếu có một song ánh f từ A tới B thì ta có thể xây dựng một song ánh từ B tới A bằng cách cho mỗi $y \in B$ liên kết với $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Song ánh này có tên gọi là **song ánh ngược** của f và thường được ký hiệu là f^{-1}.

Hàm số

Cho D và E là hai tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $f : D \to E$ được gọi là **hàm số**. D được gọi là **miền xác định** của f.
- Nếu x là ký hiệu đại diện cho một số tùy ý trong D thì x được gọi là **biến độc lập** (hay **đối số**), và nếu ta viết $y = f(x)$ thì y được gọi là **biến phụ thuộc** (theo x). Số $f(x)$ là **giá trị của f tại x**, hay gọi tắt là **f của x**.
- Tập $R_f = \{y \in E | \exists x \in D, f(x) = y\}$ được gọi là **miền giá trị** (hay **tập ảnh**) của hàm f.





Hàm số

Các phương pháp biểu diễn hàm số

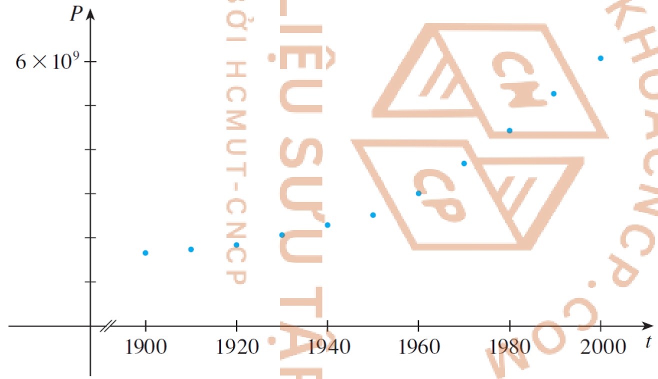
1. Mô tả bằng lời
2. Trưng bảng giá trị
3. Biểu diễn đồ thị hàm số
4. Biểu diễn bởi công thức tường minh

Ví dụ: dân số thế giới tại thời điểm t (chỉ năm) là $P(t)$, nghĩa là P là hàm số với biến độc lập t. Người ta biểu diễn hàm số này bằng cách trưng bảng giá trị như hình bên.

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

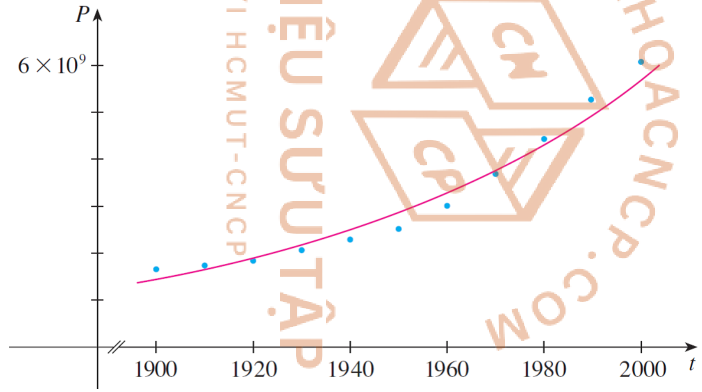
Hàm số

Dựa vào bảng dữ liệu, ta chấm các điểm trên mặt phẳng đồ thị, ta có cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị như sau



Hàm số

Ngoài ra, bằng các phương pháp lập mô hình trong toán học, người ta xấp xỉ $P(t) \approx f(t) = (0,008079266).(1.013731)^t$, và ta có biểu diễn hàm số bởi công thức tường minh của hàm số f. Sau đây là đồ thị của f



Hàm số

Một ví dụ về cách biểu diễn hàm số bằng lời: Ký hiệu $C(w)$ là cước phí gửi nhanh cho thư có trọng lượng w (nghĩa là C là hàm số theo biến w). Luật tính phí ở bưu điện Mỹ năm 2007 như sau: 39 xu cho trọng lượng lên đến tối đa 1 ounce đầu tiên, cộng thêm 24 xu cho mỗi ounce tiếp theo trong số tối đa 13 ounces. Dựa vào lời mô tả này, ta có thể biểu diễn hàm C với bảng giá trị như hình bên.

w (ounces)	$C(w)$ (dollars)
$0 < w \leqslant 1$	0.39
$1 < w \leqslant 2$	0.63
$2 < w \leqslant 3$	0.87
$3 < w \leqslant 4$	1.11
$4 < w \leqslant 5$	1.35
$\vdots$	$\vdots$
$12 < w \leqslant 13$	3.27

Hàm số

Các phép toán trên hàm số. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên tập D.

- $f = g$ nếu $f(x) = g(x)$ với mọi x thuộc D
- $f \neq g$ nếu tồn tại x thuộc D mà $f(x) \neq g(x)$
- $f > g$ nếu $f(x) > g(x)$ với mọi x thuộc D
- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$
- $(f.g)(x) := f(x).g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ (khi $g(x) \neq 0$)

Hàm hợp

Hàm hợp

Cho hai hàm $g : X \to Y, f : Y \to Z$.
Khi đó tồn tại hàm hợp $f \circ g : X \to Z$ định bởi

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Ví dụ

$$g(x) = x - 3; \quad f(x) = x^2$$

- $\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$
- $\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$

Cần lưu ý rằng $f \circ g \neq g \circ f$

Hàm hợp

Ví dụ

Cho $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x}$. Tìm các hàm số sau và miền xác định của nó:

$$a) f \circ g; \quad b) g \circ f; \quad c) f \circ f; \quad d) g \circ g$$

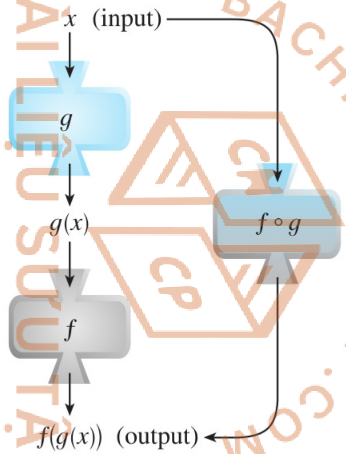
a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$ $\quad \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, 2]$

b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ $\quad \Rightarrow D_{g \circ f} = [0, 4]$

c) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$ $\quad \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, +\infty)$

d) $(g \circ g)(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ $\quad \Rightarrow D_{f \circ g} = [-2, 2]$

Hàm hợp



Hình: Hàm hợp

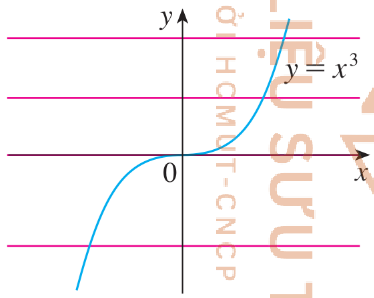
Hàm $1-1$

Hàm $1-1$, còn gọi hàm đơn ánh

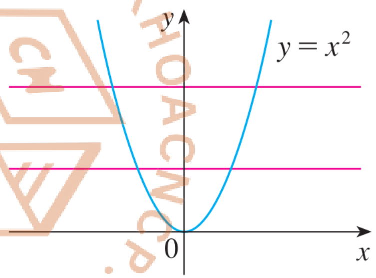
- Hàm f được gọi là hàm $1-1$ (hàm đơn ánh), nếu $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f, f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Hàm f là hàm $1-1$ khi và chỉ khi không tồn tại đường thẳng nằm ngang cắt đồ thị nhiều hơn một điểm. Nói cách khác, $\forall m$, phương trình $f(x)=m$ có tối đa một nghiệm, nghĩa là vô nghiệm hoặc có duy nhất nghiệm.

Hàm $1-1$

Ví dụ:



Hình: Hàm $1-1$



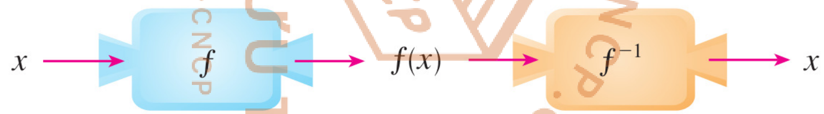
Hình: Không là hàm $1-1$

Hàm ngược

Hàm ngược

Cho $y = f(x)$ là hàm $1-1$ với miền xác định D và miền giá trị R_f. Hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm từ R_f vào D, ký hiệu $x = f^{-1}(y)$, xác định bởi

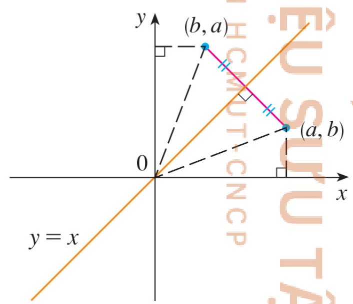
$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

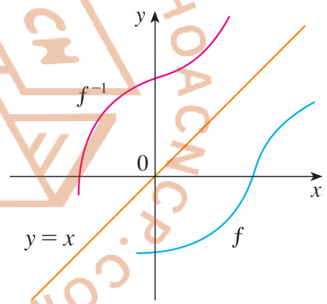


Hàm ngược

Chú ý

Vì $a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$, nên (a, b) thuộc đồ thị $y = f(x)$ khi và chỉ khi (b, a) thuộc đồ thị của f^{-1}.



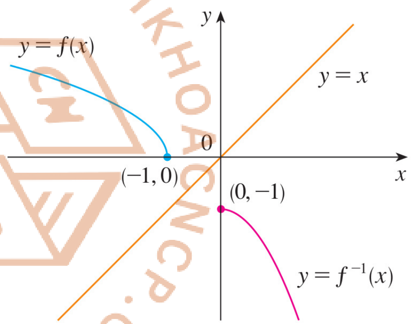


Đồ thị $y = f(x)$ và đồ thị f^{-1} đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Hàm ngược

Ví dụ

Vẽ đồ thị của $y = \sqrt{-x-1}$ và đồ thị hàm ngược.



Hàm số

Các hàm sơ cấp thường gặp

Phạm vi của giáo trình Vi tích phân 1C không trình bày cơ sở lý thuyết xây dựng nên các hàm sơ cấp, mà xem như sinh viên đã làm quen với các hàm số này ở bậc phổ thông. Các hàm đó bao gồm hàm đa thức; hàm phân thức; hàm lũy thừa; hàm số mũ; hàm logarit; các hàm lượng giác; hàm lượng giác ngược; các hàm là kết quả của tổng hợp các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, hàm hợp v.v.. giữa các hàm nói trên.

Hàm luỹ thừa

Hàm lũy thừa

Với x là một số thực khác 0,

$$x^n = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ lần } x} & \text{nếu } n \text{ là số nguyên dương,} \\ 1 & \text{nếu } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}} & \text{nếu } n \text{ là số nguyên âm.} \end{cases}$$

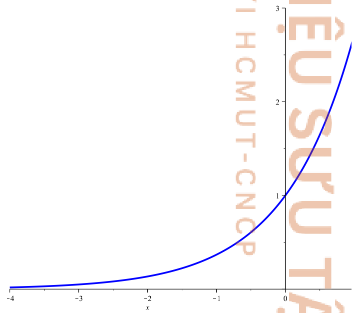
Hàm luỹ thừa

Hàm lũy thừa

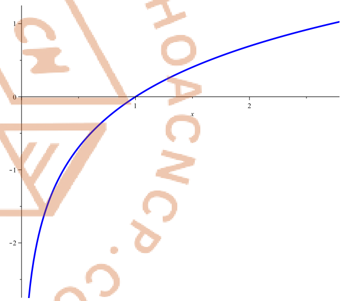
- Nếu $x > 0$ và n là một số nguyên dương thì có duy nhất một số thực dương a sao cho $a^n = x$. Điều này có thể chứng minh bằng tính đầy đủ của tập hợp số thực. Số a được gọi là căn bậc n của x, kí hiệu là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$.
- Nếu $x > 0$ và $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^{\frac{m}{n}}$ được định nghĩa là $\sqrt[n]{x^m}$. Như vậy khi $x > 0$ và $r \in \mathbb{Q}$ thì x^r đã được định nghĩa. Khi $r \in \mathbb{R}$ thì định nghĩa thông qua giới hạn dãy số, từ việc xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ. Hàm $f(x) = x^r$ được gọi là một hàm lũy thừa.

Hàm mũ- Hàm logarit

Hàm số $x \mapsto a^x$ (với $a > 0$) là song ánh với miền xác định $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $\mathbb{R}^+$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \log_a x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này ứng với $a = e$ (e là số Népère) (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



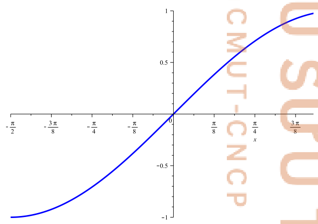
Đồ thị hàm $x \mapsto a^x$



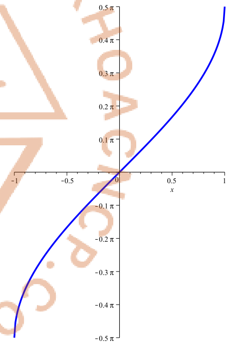
Đồ thị hàm $x \mapsto \log_a x$

Hàm lượng giác

Hàm số $x \mapsto \sin x$ là song ánh với miền xác định $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ và miền giá trị là $[-1, 1]$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \arcsin x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



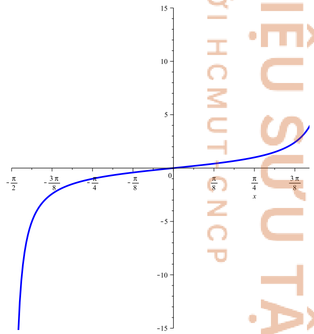
Đồ thị hàm $x \mapsto \sin x$



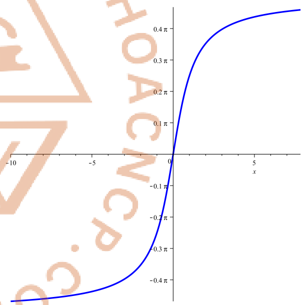
Đồ thị hàm $x \mapsto \arcsin x$

Hàm lượng giác

Hàm số $x \mapsto \tan x$ là song ánh với miền xác định $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và miền giá trị là $\mathbb{R}$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \arctan x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



Đồ thị hàm $x \mapsto \tan x$



Đồ thị hàm $x \mapsto \arctan x$