1. Hàm số lượng giác ngược
2. Hàm số hyperbolic
3. Giới hạn hàm số
   - Các giới hạn cơ bản
   - Đại lượng vô cùng bé
   - Đại lượng vô cùng lớn

Định nghĩa

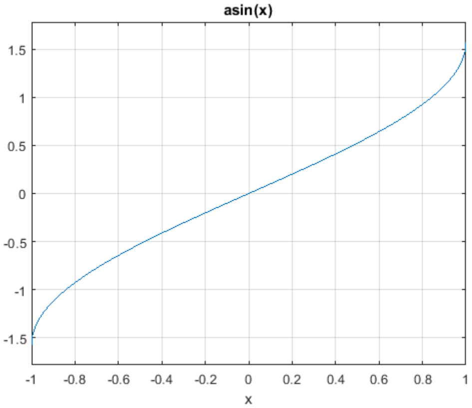
Các hàm số $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$, *được gọi là* các hàm số lượng giác ngược (inverse trigonometric functions), *trong đó*

- $\arcsin x = y \iff \sin y = x$ *và* $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$;
- $\arccos x = y \iff \cos y = x$ *và* $0 \leq y \leq \pi$;
- $\arctan x = y \iff \tan y = x$ *và* $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Hàm số $y = \arcsin x$

- Tập xác định $D = [-1, 1]$.
- Tập giá trị $R = [-\pi/2, \pi/2]$.

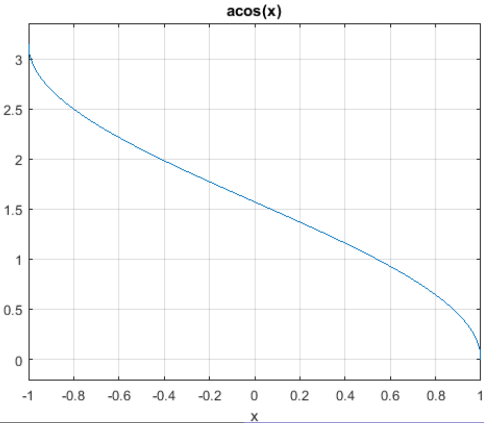
```
>> syms x;
>> ezplot(asin(x)); grid on
```



Hàm số $y = \arccos x$

- Tập xác định $D = [-1, 1]$.
- Tập giá trị $R = [0, \pi]$.

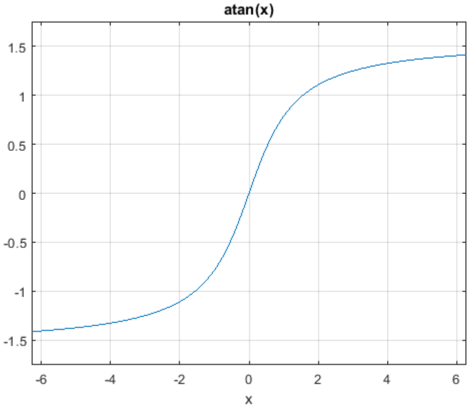
```
>> syms x;
>> ezplot(acos(x)); grid on
```



Hàm số $y = \arctan x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $R = (-\pi/2, \pi/2)$.

```
>> syms x;
>> ezplot(atan(x)); grid on
```



Định nghĩa

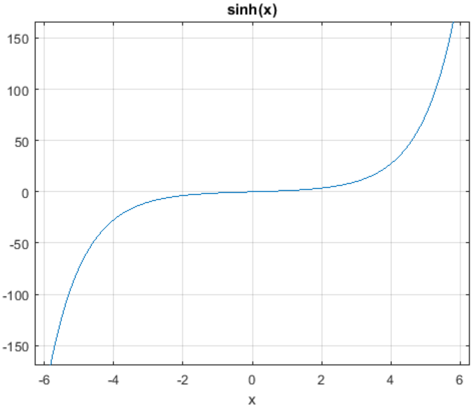
Các hàm số $f(x) = \sinh x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = \tanh x$, $f(x) = \coth x$, *được gọi là* các hàm số hyperbolic (hyperbolic functions), *trong đó*

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$;
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.

Hàm số $y = \sinh x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $R = \mathbb{R}$.

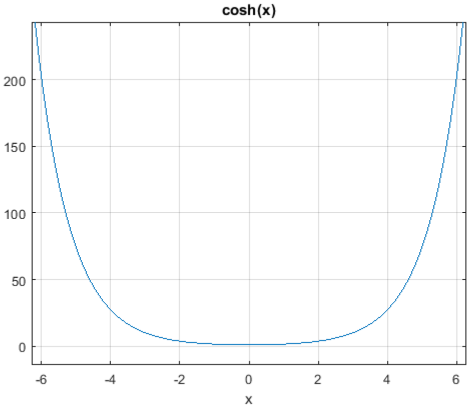
```
>> syms x;
>> ezplot(sinh(x)); grid on
```



Hàm số $y = \cosh x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $R = [1, +\infty)$.

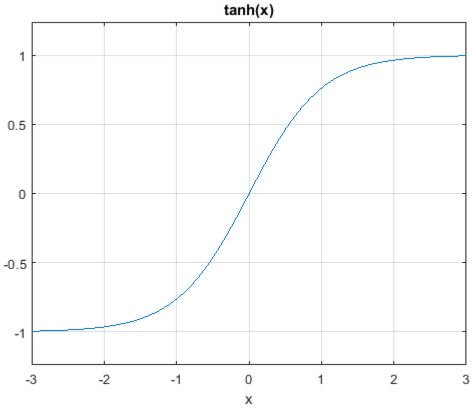
```
>> syms x;
>> ezplot(cosh(x)); grid on
```



Hàm số $y = \tanh x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $R = (-1, 1)$.

```
>> syms x;
>> ezplot(tanh(x)); grid on
```

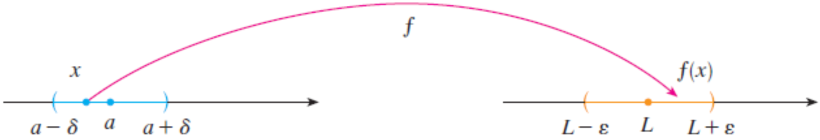


Cho f là một hàm số xác định trên một khoảng nào đó chứa điểm a, có thể trừ tại điểm a. Ta viết

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$ luôn có một số $\delta > 0$ tương ứng sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Các giới hạn cơ bản

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

```
>> syms x alpha;
>> limit(((1+x)^alpha - 1)/x, x, 0)

ans =

alpha
```

Các giới hạn cơ bản

- $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$ với mọi $q \in (-1;1)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$ với mọi $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

```
>> syms x alpha;
>> limit((1 + alpha/x)^x, x, Inf)

ans =

exp(alpha)
```

Định nghĩa

Hàm số $\alpha(x)$ *được gọi là một* vô cùng bé (infinitesimal) *khi* $x \to a$ *nếu*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

tức là, với $\varepsilon > 0$ *nhỏ tùy ý, ta có thể đạt được* $|\alpha(x)| < \varepsilon$ *miễn là chọn* x *đủ gần* a.

Nhận xét:

- Tổng của một số hữu hạn các VCB là một VCB.
- Tích của một số hữu hạn các VCB là một VCB.
- Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *là*

$$f(x) = L + \alpha(x),$$

trong đó $\alpha(x)$ *là một VCB khi* $x \to a$.

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$ và giả sử

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L.$$

- Nếu $L = 0$, ta nói $\alpha(x)$ là VCB **cấp cao hơn** $\beta(x)$, và ta viết

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

- Nếu $L \neq 0$ và L hữu hạn, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB **cùng cấp**, và ta viết

$$\alpha(x) = O(\beta(x)).$$

- Đặc biệt, nếu $L = 1$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB **tương đương**, và ta viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Các vô cùng bé tương đương khi $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \sinh x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$
- $\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim \cosh x - 1.$
- $\alpha \cdot x \sim (1+x)^\alpha - 1.$
- $x \cdot \ln a \sim a^x - 1.$

```
>> syms x;
>> limit((1-cos(x))/(x^2/2), x, 0)

ans =


1
```

Nguyên tắc thay VCB

Định lý

Cho các VCB tương đương khi $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x),$$
$$\beta(x) \sim \beta_1(x).$$

Khi đó

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) \sim \alpha_1(x) \cdot \beta_1(x).$$

Ví dụ

Khi $x \to 0$*, hãy rút gọn VCB*

$$f(x) = (e^{2x} - 1) \cdot \sin(\sqrt[3]{x}).$$

Nguyên tắc thay VCB

Định lý

Cho $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ *và* $f(x) \to L \neq 0$ *khi* $x \to a$. *Khi đó*

$$f(x) \cdot \alpha(x) \sim L \cdot \alpha_1(x).$$

Ví dụ

Khi $x \to 0$, *hãy rút gọn VCB*

$$f(x) = (2x + 3) \cdot \ln(1 + x).$$

Nguyên tắc thay VCB

Nguyên tắc ngắt bỏ những VCB cấp cao hơn trong tổng các VCB:

Định lý

Cho $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ là các vô cùng bé khi $x \to a$. Khi đó

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \cdots + \alpha_n(x) \sim \alpha_i(x),$$

trong đó $\alpha_i(x)$ là VCB có cấp thấp nhất.

Ví dụ

Khi $x \to 0$*, hãy rút gọn VCB*

$$f(x) = \sin(x^4) + x^3 - 2x^2.$$

Nguyên tắc thay VCB

Nguyên tắc thay tương đương qua tổng không triệt tiêu:

Định lý

Cho các VCB tương đương khi $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim L \cdot (x-a)^m,$$
$$\beta(x) \sim K \cdot (x-a)^m,$$

trong đó $L, K \neq 0$ *và* $L + K \neq 0$. *Khi đó:*

$$\alpha(x) + \beta(x) \sim (L+K) \cdot (x-a)^m.$$

Ví dụ

Khi $x \to 0$, *hãy rút gọn VCB sau:*

$$f(x) = x\cos x - x + x^3.$$

Nguyên tắc thay VCB

Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn:

Định lý

Cho các VCB tương đương khi $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x),$$
$$\beta(x) \sim \beta_1(x).$$

Khi đó

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ

Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right).$$

Định nghĩa

Hàm số $\alpha(x)$ *được gọi là một* vô cùng lớn (infinitely large quantity) *khi* $x \to a$ *nếu*

$$\lim_{x\to a} |\alpha(x)| = +\infty.$$

Nhận xét:

- Nghịch đảo của một VCB là một VCL và ngược lại.
- Tích của một số hữu hạn các VCL là một VCL.
- Tổng của một VCL và một hàm bị chặn là một VCL.

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCL khi $x \to a$ và giả sử

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right| = L.$$

- Nếu $L = +\infty$, ta nói $\alpha(x)$ là VCL **cấp cao hơn** $\beta(x)$, và ta viết

$$\beta(x) \ll \alpha(x).$$

- Nếu $0 < L < +\infty$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCL **cùng cấp**.
- Nếu $L = 1$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCL **tương đương**, và ta viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Nhận xét: Cho $p > 0$, $\alpha > 0$, $a > 1$. Khi $x \to +\infty$, ta có:

$$(\ln x)^p \ll x^\alpha \ll a^x.$$

Nguyên tắc thay VCL

- Chỉ được thay tương đương qua tích các VCL.
- Nguyên tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp: tổng các VCL khác cấp tương đương với VCL cấp cao nhất.
- Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn.

Ví dụ

Tính các giới hạn:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x + e^x}$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{x + e^x}$.