ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

NĂM HỌC 2021 - 2022
-------*-------

BÀI TẬP LỚN

Môn: Phương pháp tính

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Đề: Project 3

GVHD: Đậu Thế Phiệt

Nhóm: 03---HK 211

Họ và tên	MSSV	Nhiệm vụ

BACHKHOACNCP.COM

Lê Xuân Thiên	**2014566**	**Problem 1**
Võ Hữu Thịnh	**2014610**	**Problem 3**
Nguyễn Thanh Ngân	**1813206**	**Problem 3**
Hồ Minh Hoàng	**1913420**	**Problem 2**

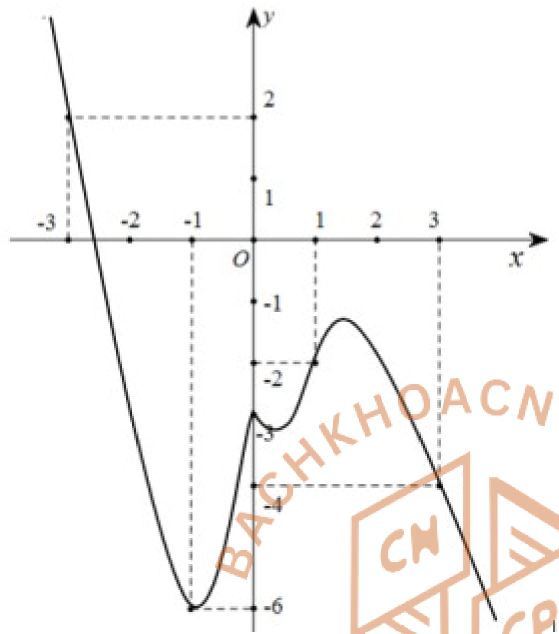
BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Problem 1)

I. ***Cơ sở lý thuyết***

1. Phương pháp chia đôi

- Phương pháp được sử dụng với mục đích tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x)= 0 với f(x) là hàm liên tục trong miền xác định của nó.
- Phương pháp này chỉ áp dụng với những nghiệm đơn nghĩa là trong 1 khoảng [a;b] chỉ có 1 nghiệm duy nhất và ta sẽ luôn luôn có f(a)*f(b) < 0.



Giả sử (*a, b*) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

Giả sử phương trình f(x) có nghiệm chính xác *x* trong khoảng cách ly nghiệm [*a, b*] và *f* (*a*)**f* (*b*) < 0. Đặt *a*0 = *a, b*0= *b*

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Ta có:

$$c=\frac{a+b}{2}$$

Nếu *f* (*a*)**f* (*c*) < 0 thì đặt b=c tiếp tục chia đôi và ngược lại.

- Công thức đánh giá sai số:
  - ❖ Sai số tương đối :

    $\Delta_{x_n}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$
  - ❖ Sai số tổng quát :

    $\left|x^{¿}-\acute{x}\right|=\left|\frac{f\left(x^{¿}\right)}{m}\right|$

    Với $x^{¿}$ là nghiệm gần đúng , m là giá trị nhỏ nhất $f^{'}(x)$ trên [a,b]

Nhận xét:

- Ưu điểm : đơn giản dễ lập trình
- Nhược điểm : tốc độ hội tụ chậm độ chính xác không cao.

2. Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy hay còn gọi là bài toán điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ với } t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Với $y = y(t)$ là hàm khả vi cần tìm, khả vi với $t \geq t_0$, y_0 là giá trị ban đầu cho trước của hàm tại thời điểm $t = t_0$ và $f(t, y)$ là hàm hai biến liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó.

Đối với bài toán Cauchy ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp $f(x, y)$ có dạng bất kỳ thì nói chung không có phương pháp giải.

Ngoài ra, trong những trường hợp có thể tìm ra nghiệm đúng của bài toán Cauchy quá phức tạp thì người ta cũng ít dùng. Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng bài toán Cauchy có vai trò rất quan trọng trong thực tế.

a) Phương pháp Euler's

- Giả sử bài toán Cauchy trên có nghiệm gần đúng trên [a;b] thì ta chia đoạn [a;b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau:

  $$h = \frac{b-a}{n}$$

- Khi đó $t_0 = a, t_k = t_0 + kh$, với $k = 0,1,2,3,\ldots,n, t_n = b$
- Giả sử $y(t)$ là nghiệm duy nhất của bài toán và có đạo hàm liên tục trên đoạn [a;b] thì ta luôn có trên đoạn $[t_k; t_{k+1}¿ \in [a; b]$ với k=0,1,2,…,n-1 :

  $$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + y''(\varepsilon_k)\frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2}$$

  Với $\varepsilon_k \in (t_{k;} t_{k+1})$

- $h = (t_{k+1} - t_k)$ nên ta có :

  $$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k) * h + y''(\varepsilon_k)\frac{h^2}{2}$$

- Bằng cách bỏ đi phần dư ta được:

  $$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h * f(t_k; y_k)$$

  Và đây chính là công thức Euler's

b) Công thức Rungge-Kutta's

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BACHKHOACNCP.COM

– Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cao hơn công thức Euler, vì dùng khai triển Taylor nghiệm $y = y(x)$ của bài toán (1) với nhiều số hạng hơn. Sử dụng quá trình xây dựng trên đối với công thức Taylor bâc cao hơn, ta có thể xây dựng Phương pháp Runge - Kutta với các bậc cao, và phổ biến nhất là bậc 4

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_k; y_k) \\ K_2 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf(t_k + h; y_k + K_3) \end{cases}$$

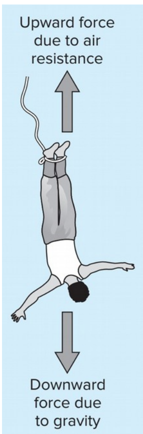
$$y_{k+1} = y(t_k + h) = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

II. Bài tập vận dụng

A bungee jumper jumps from a mountain with the downward vertical velocity v described by the mathematical model:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{C_d}{m} v^2$$

(see the picture) where m is the mass of jumper and c_d is called drag



coefficient.

a) Suppose that the jumper is initial at rest, find analytically the expression of v.

b) Let $g = 9.8(m/s^2)$, $m = 68.1(kg)$, $c_d = 0.25(kg/m)$ and the jumper is initial at rest, establish the table to compute the velocity of the jumper for the first 10 seconds with step size

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

$h = 1(s)$ by using modified Euler's and Runge-Kutta's method. Compare the results to the exact values found in a).

c) Using the result of a) and the bisection method, the secant method to determine the drag coefficient for a jumper with the weight of $95(kg)$ and the velocity $v = 46(m/s)$ after 10 seconds of fall until the relative error is less than 5%(Guess the isolated interval containing root)

1. Bài giải thường:

a)

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{C_d}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{mg-C_d \text{¿} v^2}=\frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{C_d*\left(\frac{mg}{C_d}-v^2\right)}=\frac{dt}{m} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{mg}{C_d}-v^2}=\frac{C_d}{m}dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{C_d}}}*\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mg}{C_d}}+v}{\sqrt{\frac{mg}{C_d}}-v}\right|=\frac{C_d t}{m} \Rightarrow \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mg}{C_d}}+v}{\sqrt{\frac{mg}{C_d}}-v}\right|=2*\sqrt{\frac{C_d*g}{m}}*t$$

$$\text{đặt} \sqrt{\frac{m*g}{C_d}}=u$$

$$\Rightarrow \frac{u+v}{u-v}=e^{2\sqrt{\frac{m*g}{C_d}}*t}$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

$$\Rightarrow v=\frac{u*\left(e^{\sqrt{\frac{m*g}{C_d}}*t}\right)^2-1}{\left(e^{\sqrt{\frac{m.g}{C_d}}*t}\right)^2+1}=u*\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d*g}{m}}*t\right)$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{m*g}{C_d}}*\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d*g}{m}}*t\right)$$

b)

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{C_d}{m}v^2$$

$g = 9.8(m/s^2)$, $m = 68.1(kg)$, $c_d = 0.25(kg/m)$

Thay vào biểu thức ta được:

$$\frac{dv}{dt}=9.8-\frac{0.25}{68.1}*v^2$$

Phương pháp Euler's:

Ta gắn biến:

$v_0=B=0\,;h=F=1\,;M=t_0=M\,;A=v$

Nhập vào máy tính

$$A=F*\left(9.8-\frac{0.25}{68.1}*B^2\right):X=X+h:B=A:M=M+1$$

Nhập các giá trị ở trên sau đó ta được kết quả qua 10(s) như sau:

A=v(m/s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M=t(s)	9.8	19.2474	27.6874	34.6732	40.0597	43.9685	46.6715	48.4750	49.6486	50.3994

Phương pháp Runge-Kutta's:

Ta gắn biến:

$v_0=Y=0; h=F=1\,;M=t_0=M\,;A=v$

Nhập vào máy tính:

$$A=F*\left(9.8-\frac{0.25}{68.1}*Y^2\right):$$

BACHKHOACNCP.COM
CN CP
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

$$B=F*\left(9.8-\frac{0.25}{68.1}*\left(Y+\frac{A}{2}\right)^2\right):$$

$$C=F*\left(9.8-\frac{0.25}{68.1}*\left(Y+\frac{B}{2}\right)^2\right):$$

$$D=F*\left(9.8-\frac{0.25}{68.1}*\left(Y+\frac{C}{2}\right)^2\right):$$

$$E=Y+\frac{1}{6}*(A+2B+2C+D):$$

$$X=X+F:$$

$$Y=E:$$

$$M=M+F$$

Nhập các giá trị ở trên sau đó ta được kết quả qua 10(s) như sau:

M=t(s)	1	2	3	4	5

BACHKHOACNCP.COM

Y=v(m/s)	9.8	19.2474	27.6874	34.6732	40.0600

6	7	8	9	10
43.9685	46.6715	48.4750	49.6486	50.3995

c)

$$v=\sqrt{\frac{m*g}{C_d}}*\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d*g}{m}}*t\right)$$

$$f(c)=\sqrt{\frac{m*g}{C_d}}*\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d*g}{m}}*t\right)-46$$

Thay số vào ta được:

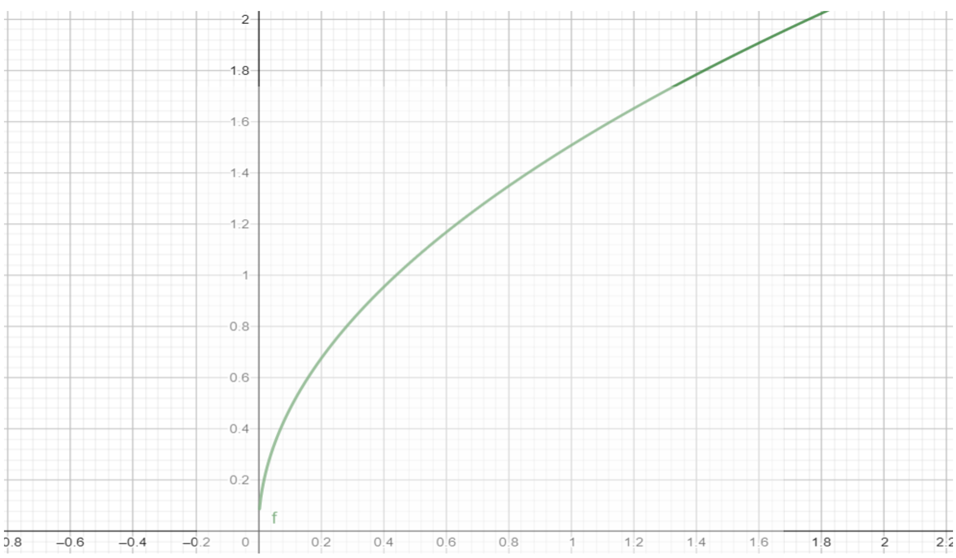
$$f(c)=\sqrt{\frac{95*9.8}{C_d}}*\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d*9.8}{m}}*10\right)-46$$

Để xác định khoảng cách li nghiệm ta dùng geogbre để phác họa đồ thị của 2 phương trình:

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

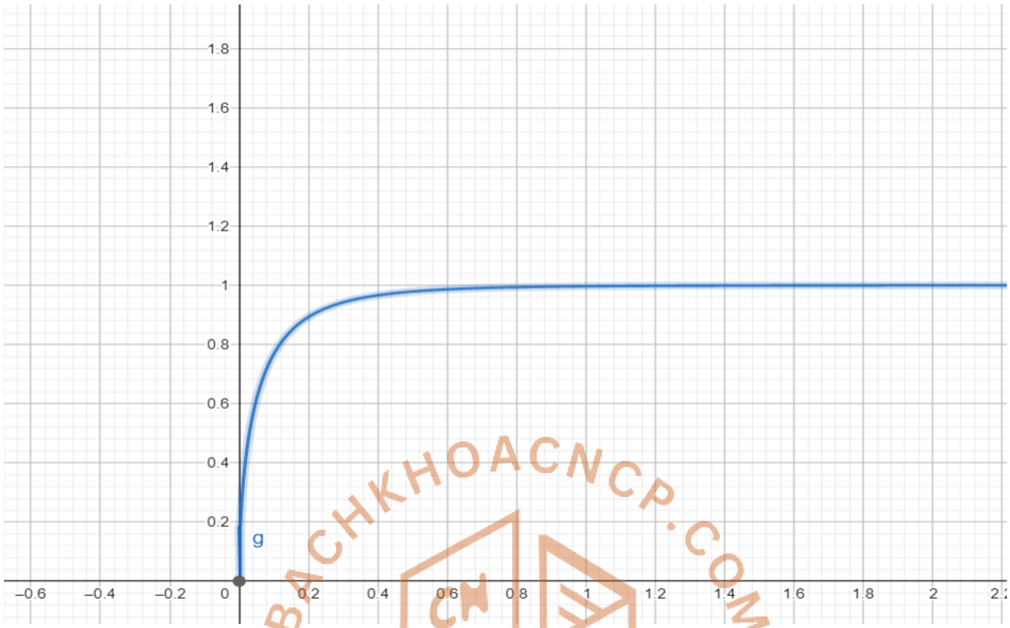
Phương trình 1:

$$f(x)=\frac{46}{\sqrt{\frac{95*9.8}{x}}}$$

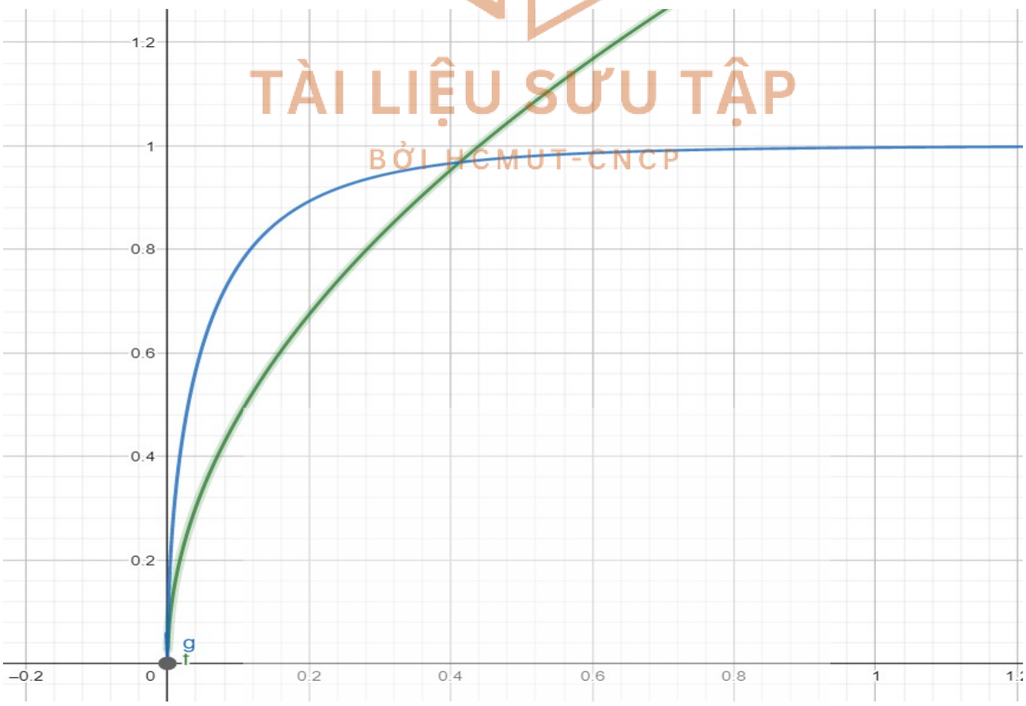


Phương trình 2:

$$g(x) = \tanh\left(\sqrt{\frac{C_d * 9.8}{m}} * t\right)$$



Nghiệm của phương trình ban đầu là giao của 2 phương trình này:



Ta thấy phương trình có nghiệm trong khoảng [0.4 ; 0.5] nên khoảng cách li nghiệm sẽ là khoảng này

Sai số tương đối : $\Delta_x = 0.05$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Số lần lặp là :

$$n+1=\sqrt{\frac{0.5-0.4}{0.05}}=\sqrt{2}\,nhưng\ vì\ số\ lần\ lặp\ là\ số\ nguyên\ nên\ n=1$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.4	0.5	0.45	−¿
1	0.4	0.45	0.4125	−¿

1. Bài giải bằng MATLAB:

Câu b:

<u>*Code MATLAB phương pháp Euler’s:*</u>

Editor - E:\MATLAB\R2019a\bin\euler.m

rk4th.m | euler.m | Untitled15.m | Untitled.m

```
1  function euler
2  t0 = input('\n nhap thoi diem ban dau t0 = ');
3  v0 = input('\n nhap van toc tai thoi diem ban dau v0= ');
4  h  = input('\n nhap h = ');
5  tc = input('\n nhap thoi diem cuoi cung tc = ');
6  g  = input('\n nhap gia toc g =');
7  cd = input('\n nhap he so luc can cd =');
8  m  = input('\n nhap khoi luong nguoi do m =');
9  n  =(tc-t0)/h;
10 for i=1:n
11      v =v0+h*(g-cd*v0*v0/m);
12      t =t0+h;
13      t0=t;
14      v0=v;
15      fprintf('Step %d: t = %2.0f, v = %18.15f\n', i, t,v);
16 end
17
```

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Giải thích code:

Dòng 1 – dòng 8 : nhập các giá trị

- t0 : thời điểm ban đầu
- v0 : vận tốc tại thời điểm ban đầu

BACHKHOACNCP.COM

- tc : thời điểm cuối cùng
- g : gia tốc
- cd : hệ số lực cản
- m : khối lượng người đó
- n : số lần dùng công thức Euler's

Dòng 11 – dòng : 14 công thức Euler's

Dòng 15 : in kết quả

Dòng 16 : kết thúc

Kết quả chạy thử nghiệm :

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

```
>> euler

 nhap thoi diem ban dau t0 = 0

 nhap van toc tai thoi diem ban dau v0= 0

 nhap h = 1

 nhap thoi diem cuoi cung tc = 10

 nhap gia toc g =9.8

 nhap he so luc can cd =0.25

 nhap khoi luong nguoi do m =68.1
Step 1: t =  1, v =  9.800000000000001
Step 2: t =  2, v = 19.247430249632892
Step 3: t =  3, v = 27.687431823735377
Step 4: t =  4, v = 34.673210527869024
Step 5: t =  5, v = 40.059732083265764
Step 6: t =  6, v = 43.968461398306026
Step 7: t =  7, v = 46.671451127622007
Step 8: t =  8, v = 48.475032807658685
Step 9: t =  9, v = 49.648642184664610
Step 10: t = 10, v = 50.399495081944863
>>
```

BACHKHOACNCP
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

<u>Code MATLAB phương pháp Runge-Kutta's:</u>

BACHKHOACNCP.COM

```
1  function rungekutta
2  t0 = input('\n nhap thoi diem ban dau t0 = ');
3  v0 = input('\n nhap van toc tai thoi diem ban dau v0= ');
4  h  = input('\n nhap h = ');
5  tc = input('\n nhap thoi diem cuoi cung tc = ');
6  g  = input('\n nhap gia toc g =');
7  cd = input('\n nhap he so luc can cd =');
8  m  = input('\n nhap khoi luong nguoi do m =');
9  n  =(tc-t0)/h;
10
11 for i=1:n
12 k1 = h*(g-cd*v0*v0/m);
13 k2 = h*(g-cd*(v0+k1/2)*(v0+k1/2)/m);
14 k3 = h*(g-cd*(v0+k2/2)*(v0+k2/2)/m);
15 k4 = h*(g-cd*(v0+k3)*(v0+k3)/m);
16 v  = v0 + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
17 t  = t0+h ;
18 t0 = t;
19 v0 = v;
20 fprintf('Step %d: t = %2.0f, v = %18.15f\n', i, t,v);
21 end
```

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Giải thích code:

Dòng 1 – dòng 8 : nhập các giá trị

- t0 : thời điểm ban đầu
- v0 : vận tốc tại thời điểm ban đầu
- tc : thời điểm cuối cùng
- g : gia tốc
- cd : hệ số lực cản
- m : khối lượng người đó
- n : số lần dùng công thức Euler's

Dòng 11 – dòng : 19 công thức Euler's

Dòng 20 : in kết quả

Dòng 21 : kết thúc

Kết quả chạy thử nghiệm :

```
>> rk4th

 nhap thoi diem ban dau t0 = 0

 nhap van toc tai thoi diem ban dau v0= 0

 nhap h = 1

 nhap thoi diem cuoi cung tc = 10

 nhap gia toc g =9.8

 nhap he so luc can cd =0.25

 nhap khoi luong nguoi do m =68.1
Step 1: t =  1, v =  9.684036388388860
Step 2: t =  2, v = 18.710698215936876
Step 3: t =  3, v = 26.589750925581093
Step 4: t =  4, v = 33.082409419241621
Step 5: t =  5, v = 38.183597894400293
Step 6: t =  6, v = 42.043512414815844
Step 7: t =  7, v = 44.881854618313220
Step 8: t =  8, v = 46.925413365192661
Step 9: t =  9, v = 48.374495255234024
Step 10: t = 10, v = 49.390971665770572
>> 
```

Nhận xét : Phương pháp Rugge-Kutta's cho chúng ta kết qua chính xác hơn phương pháp Euler's nhưng phương pháp Euler's tính toán không quá cầu kì và tốn ít thời gian hơn.

Câu c:

Code MATLAB phương pháp chia đôi:

BACHKHOACNCP.COM TÀI LIỆU SƯU TẬP

```
1
2 -     t = input('\n nhap thoi diem t = ');
3 -     v = input('\n nhap van toc tai thoi diem t v = ');
4 -     g = input('\n nhap gia toc g = ');
5 -     m = input('\n nhap khoi luong nguoi do m = ');
6 -     a = input('\n nhap khoang cach dau li nghiem a = ');
7 -     b = input('\n nhap khoang cach dau li nghiem b = ');
8 -   for i=1:2
9 -         fa = sqrt(m*g/a)*tanh(sqrt(a*g/m)*t)-v ;
10 -        fb = sqrt(m*g/b)*tanh(sqrt(b*g/m)*t)-v ;
11 -        c = (a+b)/2 ;
12 -        fc = sqrt(m*g/c)*tanh(sqrt(c*g/m)*10)-v ;
13 -        if sign(fc)==sign(fa)
14 -             a=c;
15 -             fa=fc;
16 -             x=(c+b)/2;
17 -         else
18 -             b=c;
19 -             fb=fc;
20 -             x=(c+a)/2;
21 -         end;
22 -         fprintf('Step %d\nx = %18.6f\n', i,x);
23 -   end
24
```

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Giải thích code:

Dòng 2 – dòng 7 : nhập các giá trị

- t : thời điểm
- v : vận tốc tại thời điểm t
- m : khối lượng người đó
- a và b : khoảng cách li nghiệm

Dòng 9 – dòng 21 : công thức chia đôi

- dòng 13- dòng 16 : nếu fc cùng dấu fa thì gán a=c , fa=fc và tính x
- dòng 17- dòng 21 : nếu fc không cùng dấu fa thì gán b=c ,fb=fc và tính x

Dòng 22 : in kết quả

Dòng 23 : kết thúc

Kết quả chạy thử nghiệm :

```
 nhap thoi diem t = 10

 nhap van toc tai thoi diem t v = 46

 nhap gia toc g = 9.8

 nhap khoi luong nguoi do m = 95

 nhap khoang cach dau li nghiem a = 0.4

 nhap khoang cach dau li nghiem b = 0.5
Step 1
x =            0.425000
Step 2
x =            0.412500
>>
```

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Problem 2)

I. Cơ sở lý thuyết:

Phương pháp bình phương nhỏ nhất

- Phương pháp bình phương nhỏ nhất dùng để lập công thức thực nghiệm hay xác định hàm xấp xỉ f(x) từ bảng thực nghiệm thu được qua các kết quả thực nghiệm từ thực tế.

- Bài toán đưa về dạng cực tiểu của hàm

$$g=\sum \left(f\left(x_i\right)-y_i\right)^2$$

Ta xét một số dạng hàm xấp xỉ đã biết sau đây:

Y = a + bx

Y = a + bx +cx^2

Y = acosx + bsinx

Với a, b, c là các tham số thực

BACHKHOACNCP.COM

Hàm số y = a + bx:

Tìm a, b để hàm g(a, b) đạt cực tiểu với $g(a,b)=\sum (a+bx_i-y_i)^2$

Điểm dừng

$$\begin{cases} g'_a=2\sum (a+bx_i-y_i)=0 \\ g'_b=2\sum x_i(a+bx_i-y_i)=0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} (n+1)a+b\sum x_i=\sum y_i \\ a\sum x_i+b\sum x_i^2=\sum x_i y_i \end{cases}$$

Hàm số y =a + bx + cx²:

Tìm a, b, c để hàm S(a, b, c) = $\sum (a+bx_i+cx_i^2-y_i)^2$ đạt cực tiểu.

Điểm dừng

$$\begin{cases} S'_a=2\sum (a+bx_i+cx_i^2-y_i)=0 \\ S'_b=2\sum x_i(a+bx_i+cx_i^2-y_i)=0 \\ S'_c=2\sum x_i^2(a+bx_i+cx_i^2-y_i)=0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} (n+1)a+b\sum x_i+c\sum x_i^2=\sum y_i \\ a\sum x_i+b\sum x_i^2+c\sum x_i^3=\sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2+b\sum x_i^3+c\sum x_i^4=\sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Hàm số y = acosx +bsinx:

Tìm a, b để hàm S(a, b) = $\sum (a\cos x_i+b\sin x_i-y_i)^2$ đạt cực tiểu.

Điểm dừng

$$\begin{cases} S'_a=2\sum \cos x_i(a\cos x_i+b\sin x_i-y_i)=0 \\ S'_b=2\sum \sin x_i(a\cos x_i+b\sin x_i-y_i)=0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} a\sum \cos^2 x_i+b\sum \sin x_i\cos x_i=\sum y_i\cos x_i \\ a\sum \sin x_i\cos x_i+b\sum \sin^2 x_i=\sum y_i\sin x_i \end{cases}$$

Problem 3)

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

I. Cơ sở lý thuyết

Xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình vi phân cấp một, để đơn giản cho cách trình bày, ta sẽ xét hệ gồm hai phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} x_t' = f(t, x(t), y(t)) \\ y_t' = y(t, x(t), y(t)) \\ x(t_0) = \alpha, y(t_0) = \beta \end{cases} \quad t \in [t_0, t_0 + H]$$

Chia đoạn $[t_0, t_0 + H]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài bằng h = $\frac{H}{n}$, khi đó các điểm chia là $t_k = t_0 + kh$, k=0,1,2,...n. Giá trị gần đúng của hàm x(t) tại điểm t_k là $x_k \approx x(t_k)$, còn giá trị gần đúng của hàm y(t) tại đểm t_k là $y_k \approx y(t_k)$. Từ đó ta có công thức Euler như sau:

$$\begin{cases} K_{1x} &= hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} &= hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} &= hf(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ K_{2y} &= hg(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ x(t_k) &\approx x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ y(t_k) &\approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) \\ k &= 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

II. Bài tập vận dụng

Bài toán 3) Trong sinh học, mô hình thú săn mồi-con mồi được sử dụng để quan sát sự tương tác gữa các loài. Một mô hình được đề xuất bởi Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Trong đó x, y lần lượt là số lượng con mồi và thú săn mồi, a là tốc độ phát triển của con mồi, c là tỉ lệ chết của thú săn mồi, b và d lần lượt là tỉ lệ đặc trưng cho tác động của thú

BACHKHOACNCP.COM

săn mồi đối với cái chết của con mồi và sự phát triển của thú săn mồi. t là thời gian được tính bằng tháng.

a) Cho các số liệu sau: $a=1{,}2\,;b=0{,}6\,;c=0{,}8\,;d=0{,}3$ với điều kiện ban đầu là $x=2$ và $y=1$. Tìm số lượng con mồi và thú săn mồi sau 10 tháng bằng phương pháp Euler cải tiến với độ dài bước $h=0{,}625$.
b) Với dữ liệu tìm được, hãy xây dựng đường cong khối(cubic spline) cho x và y. Vẽ đồ thị của $x(t)$ và $y(t)$ trong cùng 1 hình.

Bài giải:

a)

- Với $a=1{,}2\,;b=0{,}6\,;c=0{,}8\,;d=0{,}3$ ta có được hệ phương trình:

$$\frac{dx}{dt}=1.2x-0.6xy=f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=-0.8y+0.3xy=g(x,y)$$

với x(0)=2; y(0)=1

- Ta có: h = 0.625 và t = 10 (tháng) => $k=\frac{t}{h}$ = 16

Dựa vào công thức Euler cải tiến đối với hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} K_{1x} &= hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} &= hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} &= hf(t_{k-1}+h, x_{k-1}+K_{1x}, y_{k-1}+K_{1y}) \\ K_{2y} &= hg(t_{k-1}+h, x_{k-1}+K_{1x}, y_{k-1}+K_{1y}) \\ x(t_k) &\approx x_k = x_{k-1}+\frac{1}{2}(K_{1x}+K_{2x}) \\ y(t_k) &\approx y_k = y_{k-1}+\frac{1}{2}(K_{1y}+K_{2y}) \\ k &= 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

$K1x=h(1.2x_0-0.6x_0y_0)=0.625\times(1.2\times 2-0.6\times 2\times 1)$

¿0.75

$K1y=h(-0.8y_0+0.3x_0y_0)=0.625\times(-0.8\times 1+0.3\times 2\times 1)$

¿−0.125

$K2x=h$¿

BACHKHOACNCP.COM

$K2y = h¿$

$¿0.014$

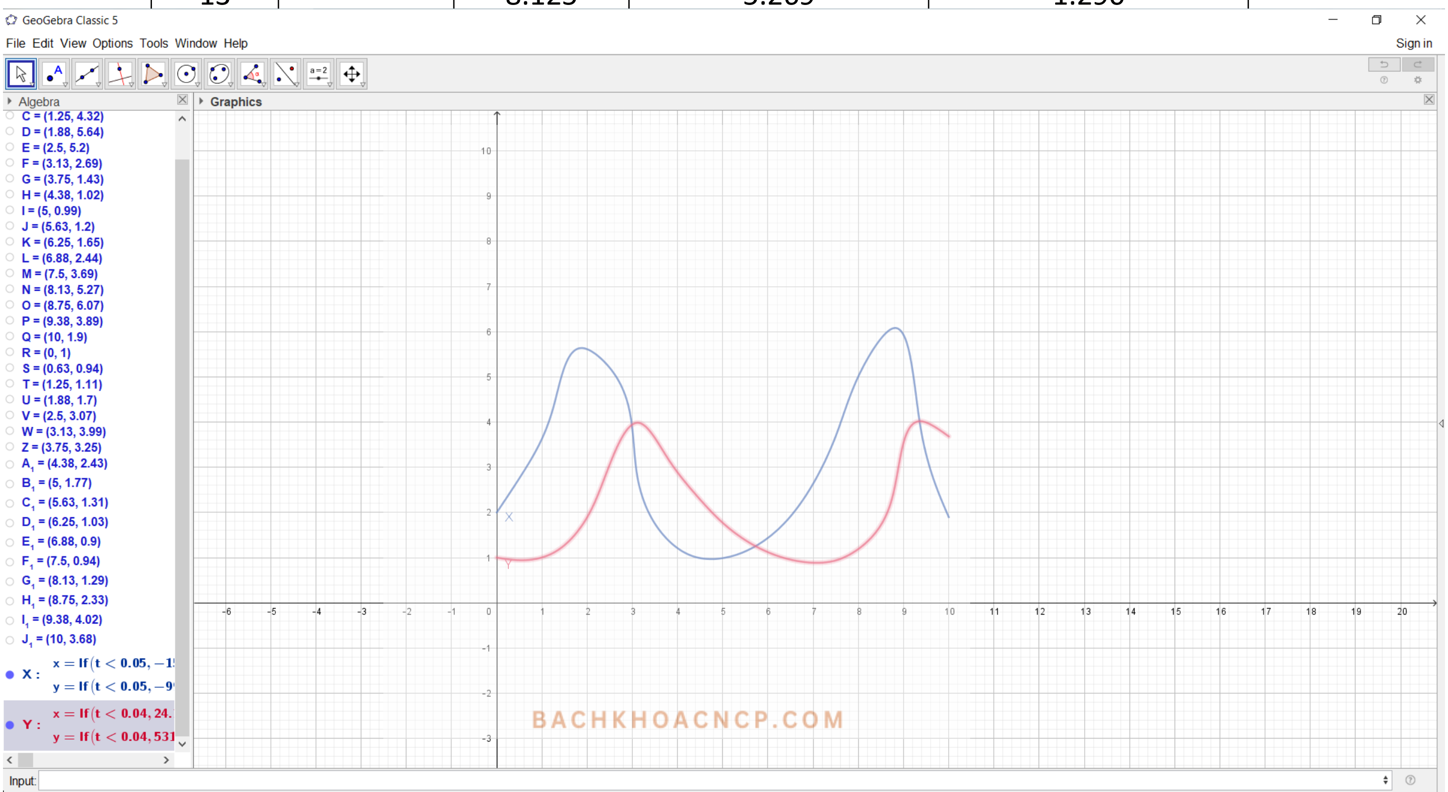
$$x_1 = x_0 + \frac{1}{2}(K1x + K2x) = 2 + \frac{1}{2}(0.75 + 1.16) = 2.96$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K1y + K2y) = 1 + \frac{1}{2}(-0.125 + 0.014) = 0.944$$

Lặp lại các bước tương tự cho đến t =10 (16 lần lặp), ta được bảng kết quả như sau:

k	h	t_k	x_k	y_k
0		0	2	1
1		0.625	2.955	0.944
2		1.25	4.317	1.106
3		1.875	5.637	1.698
4		2.5	5.200	3.065
5		3.125	2.686	3.986
6		3.75	1.428	3.250
7		4.375	1.023	2.427
8		5.0	0.993	1.768
9	0.625	5.625	1.195	1.310
10		6.25	1.647	1.026
11		6.875	2.440	0.895
12		7.5	3.685	0.939
13		8.125	5.269	1.290

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP



Chú thích:

- X là đồ thị của đường cong x(t)

- Y là đồ thị của đường cong y(t)

Bài 3

```
a = 1.2;
b = 0.6;
c = 0.8;
d = 0.3;
h = 0.625;
t = 10;
k = t/h;

syms f(x,y) g(x,y)
f(x,y) = a*x - b*x*y;
g(x,y) = -c*y + d*x*y;
```

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

⇨ Khởi tạo giá trị và các hàm f, g

BACHKHOACNCP.COM

```
tb = table(K, T, X, Y);
tb.Properties.VariableNames = ["k", "t", "x", "y"];
tb

hold on
plot(T,X,"Color","blue","LineWidth",1.5);
plot(T,Y,"Color","red","LineWidth",1.5);
axis equal
```

⇨ lập bảng kết quả và vẽ biểu đồ 2 đường với trục X là T trục Y lần lượt là X và Y


```
tb = table(K, T, X, Y);
tb.Properties.VariableNames = ["k", "t", "x", "y"];
tb

hold on
plot(T,X,"Color","blue","LineWidth",1.5);
plot(T,Y,"Color","red","LineWidth",1.5);
axis equal
```

⇨ lập bảng kết quả và vẽ biểu đồ 2 đường với trục X là T trục Y lần lượt là X và Y

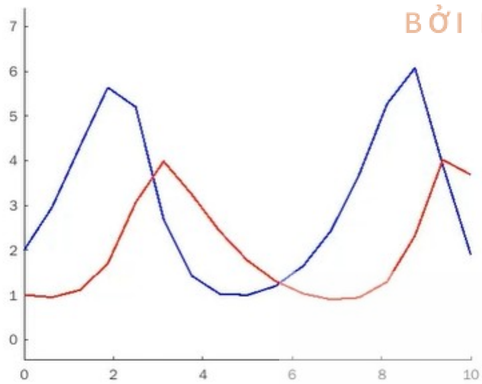
KẾT QUẢ THU ĐƯỢC:

tb = 17×4 table

	k	t	x	y
1	0	0	2	1
2	1	0.6250	2.9551	0.9443
3	2	1.2500	4.3170	1.1060
4	3	1.8750	5.6371	1.6976
5	4	2.5000	5.1999	3.0648
6	5	3.1250	2.6855	3.9863
7	6	3.7500	1.4284	3.2502
8	7	4.3750	1.0230	2.4265
9	8	5	0.9930	1.7682

Câu 3a

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP



Biểu đồ thu được câu 3b

BACHKHOACNCP.COM

```
K = (0:k)';
T = h*(0:k)';
X = zeros(k,1);
Y = zeros(k,1);
X(1) = 2;
Y(1) = 1;
for i = 1:k
    K1x = single(h*f(X(i), Y(i)));
    K1y = single(h*g(X(i), Y(i)));
    K2x = single(h*f(X(i) + K1x, Y(i) + K1y));
    K2y = single(h*g(X(i) + K1x, Y(i) + K1y));
    X(i+1) = single(X(i) + 1/2*(K1x + K2x));
    Y(i+1) = single(Y(i) + 1/2*(K1y + K2y));
end
```

- ⇨ Tạo bảng các thời điểm của K và T, đặt giá trị tại thời điển ban đầu K=0 T=0 cho X và Y
- ⇨ tính X Y tại các thời điểm tiếp theo từ K=1 đến K=16

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Tài liệu tham khảo:

1. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists by Steven C. Chapra Dr
2. Giáo Trình Phương Pháp Tính (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH)

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP