1. Tích phân đường loại 1
   - Định nghĩa
   - Ứng dụng
   - Cách tính

2. Tích phân đường loại 2
   - Định nghĩa
   - Ứng dụng
   - Cách tính

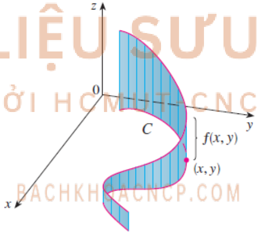
BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Bài toán tính diện tích dải băng

- Xét một dải băng có đáy là cung C và chiều cao ứng với điểm (x, y) là $f(x, y)$.
- Diện tích của dải băng được xấp xỉ bởi

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta l_i,$$

trong đó $\Delta l_i = |\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|$ và (x_i^*, y_i^*) là điểm mẫu tùy ý thuộc cung $P_{i-1}P_i$.



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Định nghĩa

Cho C là một đường cong phẳng trơn và $f(x, y)$ là một hàm số xác định trên C. **Tích phân đường loại 1 của f dọc theo C** là

$$\int_C f(x, y)dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta l_i,$$

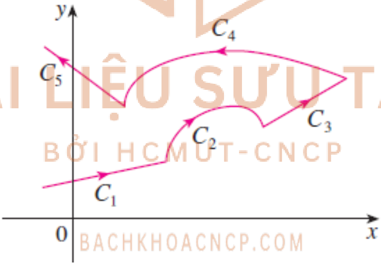
nếu giới hạn này tồn tại.

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Tính chất

Nếu C là một **đường cong trơn từng khúc (piecewise-smooth curve)**, tức là C là hợp của hữu hạn những đường cong trơn $C_1, \ldots, C_n$, thì

$$\int_C f(x,y)dl = \int_{C_1} f(x,y)dl + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)dl$$

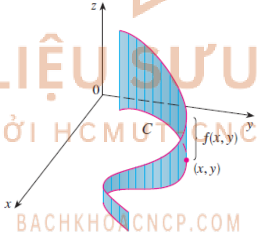


TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ứng dụng tính diện tích dải băng

- Xét một dải băng có đáy là cung C và chiều cao ứng với điểm (x, y) là $f(x, y)$.
- Diện tích của dải băng được tính bởi:

$$S = \int_C f(x, y) dl.$$



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ứng dụng tính khối lượng sợi dây

- Giả sử một sợi dây có hình dạng là một cung C và mật độ tại điểm (x, y) là $\rho(x, y)$.
- Khi đó, khối lượng của sợi dây được tính bởi:

$$m = \int_C \rho(x, y) dl$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ứng dụng tính chiều dài sợi dây

Chiều dài L của sợi dây C được tính bởi:

$$L = \int\limits_C 1 dl$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Nếu đường cong C là đồ thị của hàm số

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

thì

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx,$$

do đó, tích phân đường loại 1 được tính bởi công thức:

$$\int_C f(x, y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Nếu đường cong C được tham số bởi

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad a \leq t \leq b,$$

thì

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$

do đó, tích phân đường loại 1 được tính bởi công thức:

$$\int\limits_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Viết ngắn gọn bởi công thức vectơ là

$$\int\limits_C f(x,y)dl = \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)|dt$$

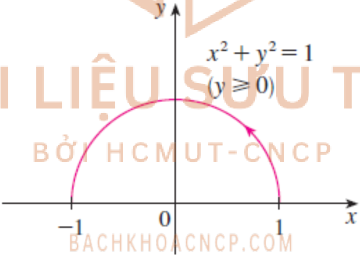
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường loại 1

$$\int_C (2 + x^2 y) dl,$$

trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.



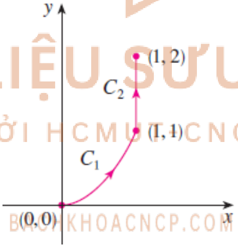
BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường loại 1

$$\int_C 2x\,dl,$$

trong đó C gồm cung C_1 *của parabol* $y = x^2$ *từ* $(0,0)$ *đến* $(1,1)$ *và đoạn thẳng đứng* C_2 *từ* $(1,1)$ *đến* $(1,2)$.



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Tích phân đường loại 1 trong không gian

- Cho C là một đường cong trơn trong không gian định bởi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

  và $f(x, y, z)$ là một hàm số xác định trên C. Tích phân đường loại 1 của f dọc theo C cũng được định nghĩa tương tự như trường hợp C phẳng.

- Công thức tính:

$$\int_C f(x, y, z) dl$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Bài toán tính công của một trường lực

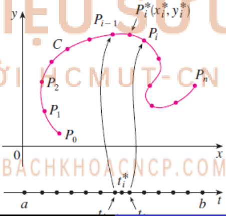
- Xét bài toán tính công W của một trường lực phẳng $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y)$ khi di chuyển một chất điểm dọc theo **đường đi** C **(path)**:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

theo chiều $t : a \to b$.

- Khi đó, ta xấp xỉ công W bởi

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}_i$$



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Định nghĩa

Tích phân đường loại 2 *của trường vecto* $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y)$ *dọc theo chiều của đường đi* C *là*

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta\overrightarrow{\mathbf{r}}_i,$$

nếu giới hạn này tồn tại.

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

- Ta có
$$d\overrightarrow{\mathbf{r}} = (dx, dy).$$

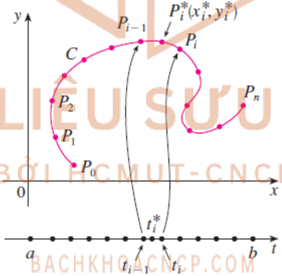
- Do đó, nếu P, Q lần lượt là hai hàm thành phần của trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, tức là
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = \Big(P(x, y), Q(x, y)\Big),$$
thì tích phân đường loại 2 $\int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ còn được ký hiệu là
$$\int\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ứng dụng tính công của một trường lực

Công của một trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ khi di chuyển một chất điểm dọc theo đường đi C được tính bởi tích phân đường loại 2:

$$W = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$$



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Nếu **đường đi** C **(path)** có phương trình tham số:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

theo chiều $t : a \to b$, thì tích phân đường loại 2 được tính bởi công thức

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt$$

Viết ngắn gọn bằng công thức vectơ là

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_a^b \mathbf{F}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)dt$$

BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Nếu đường đi C là đồ thị của hàm số

$$y = y(x)$$

theo chiều $x : a \to b$, thì tích phân đường loại 2 được tính bởi công thức

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_a^b \Big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\Big)dx$$

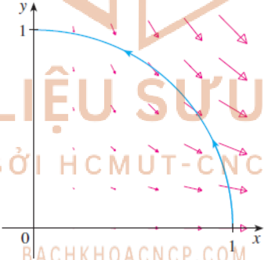
BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP

Ví dụ

Hãy tính công được thực hiện bởi trường lực

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - xy\,\overrightarrow{\mathbf{j}},$$

khi di chuyển một chất điểm đi từ điểm $(1,0)$ *đến điểm* $(0,1)$ *dọc theo cung góc tư của đường tròn đơn vị tâm* O.



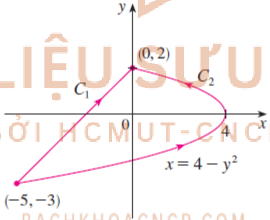
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\int_C y^2 dx + xdy$, *trong mỗi trường hợp sau:*

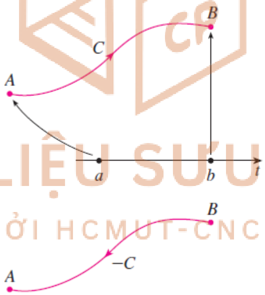
(a) *C là đoạn thẳng C_1 từ điểm* $(-5; -3)$ *đến điểm* $(0; 2)$.

(b) *C là một cung C_2 của parabol* $x = 4 - y^2$ *từ điểm* $(-5; -3)$ *đến điểm* $(0; 2)$.



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

- Hàm vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t : a \to b$ xác định một **đường đi** C có chiều ứng với chiều của $t : a \to b$, tức là đi từ điểm $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a)$ đến điểm $\overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$.
- Ta ký hiệu $-C$ là đường cong trùng với C nhưng ngược chiều với C, đó là chiều $t : b \to a$, tức là đi từ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$ đến $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a)$.

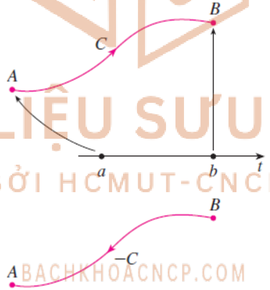


TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

- Ta có

$$\int\limits_{-C} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = -\int\limits_{C} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} \text{ (tích phân đường loại 2)},$$

$$\int\limits_{-C} f(x,y)dl = \int\limits_{C} f(x,y)dl \text{ (tích phân đường loại 1)}.$$



TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Nếu đường đi C là một đường cong trong không gian:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad t : a \to b,$$

và trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ gồm 3 thành phần P, Q, R xác định trên C

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\overrightarrow{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\overrightarrow{\mathbf{k}},$$

thì với định nghĩa tương tự, ta có tích phân đường loại 2 trong không gian:

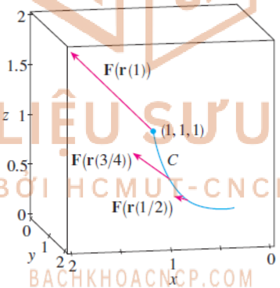
$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\int\limits_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}}$, *trong đó* $\vec{\mathbf{F}} = (xy, yz, zx)$, *và* C *là đường đi theo chiều* $t : 0 \to 1$ *có phương trình tham số*

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$



BACHKHOACNCP.COM
TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP
BACHKHOACNCP.COM