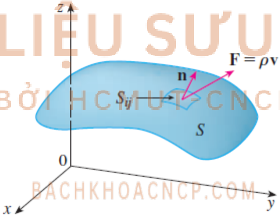
1. Tích phân mặt loại 2
   - Định nghĩa
   - Ứng dụng
   - Cách tính
2. Định lý Gauss - Ostrogradsky
3. Định lý Stokes

Bài toán tính thông lượng

- Giả sử ta cần tính thông lượng Φ của chất lỏng có mật độ $\rho(x, y, z)$ và có trường vận tốc $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x, y, z)$ chảy qua một mặt định hướng S.
- Thông lượng Φ được xấp xỉ bởi

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}}(P_{ij}^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}(P_{ij}^*) \Delta S_{ij},$$

trong đó $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \rho \overrightarrow{\mathbf{v}}$, và P_{ij}^* là một điểm mẫu thuộc S_{ij}.



Định nghĩa

Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là một trường vectơ liên tục trên mặt định hướng S. **Tích phân mặt loại 2** của $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ trên S là

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}}(P_{ij}^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}(P_{ij}^*) \Delta S_{ij},$$

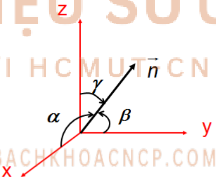
nếu giới hạn này tồn tại.

Vì $\overrightarrow{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, và (P, Q, R) là ba hàm thành phần của vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, nên tích phân mặt $\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS$ còn được viết là

$$\iint\limits_S \Big[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\Big] dS,$$

hoặc

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$



Ứng dụng tính thông lượng

Thông lượng của trường vectơ

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

chảy qua một mặt định hướng S được tính bởi tích phân:

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS$$

Cách 1: Sử dụng phương trình tham số của mặt S.

- Tính pháp vectơ đơn vị $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ của mặt S:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \pm \frac{[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]}{\|[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]\|},$$

  trong đó, dựa vào **hướng** của S, ta chọn dấu $(+, -)$ phù hợp.

- Tính dS:

$$dS = \|[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]\| du dv$$

- Thay vào tích phân mặt, ta được:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} \, dS = \iint\limits_D \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(u,v)) \cdot (\pm[\overrightarrow{\mathbf{r}}'_u, \overrightarrow{\mathbf{r}}'_v]) du dv$$

Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $z = z(x, y)$, thì

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \pm \frac{(-z'_x, -z'_y, 1)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} dS = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z(x, y)) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1)dxdy$$

trong đó D_{xy} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oxy; lấy dấu $(+)$ nếu mặt S hướng về chiều dương của tia Oz; lấy dấu $(-)$ nếu mặt S hướng về chiều âm của tia Oz.

Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $y = y(x,z)$, thì

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \pm\frac{(-y'_x, 1, -y'_z)}{\sqrt{(y'_x)^2 + ('_z)^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1 dxdz},$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} dS = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y(x,z), z) \cdot (-y'_x, 1, -y'_z) dxdz$$

trong đó D_{xz} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oxz; lấy dấu $(+)$ nếu mặt S hướng về chiều dương của tia Oy; lấy dấu $(-)$ nếu mặt S hướng về chiều âm của tia Oy.

Nếu mặt S là đồ thị của hàm số $x = x(y, z)$, thì

$$\vec{\mathbf{n}} = \pm \frac{(1, -x'_y, -x'_z)}{\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz,$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính bởi công thức:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \pm \iint\limits_{D_{yz}} \vec{\mathbf{F}}(x(y,z), y, z) \cdot (1, -x'_y, -x'_z) dydz$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu vuông góc của mặt S lên mặt phẳng Oyz; lấy dấu $(+)$ nếu mặt S hướng về chiều dương của tia Ox; lấy dấu $(-)$ nếu mặt S hướng về chiều âm của tia Ox.

Cách 2: Tính từng thành phần trong tích phân mặt loại 2

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

- Chẳng hạn, để tính $\iint_S R(x,y,z)dxdy$, đầu tiên ta viết pt mặt phẳng S dưới dạng hàm số $z = z(x,y)$.
- Sau đó, tìm hình chiếu D_{xy} của mặt S lên mặt phẳng Oxy.
- Khi đó,

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

trong đó, lấy dấu $(+)$ nếu mặt S hướng về chiều dương của tia Oz; lấy dấu $(-)$ nếu mặt S hướng về chiều âm của tia Oz.

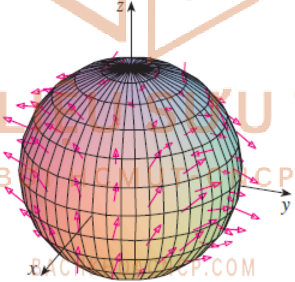
Ví dụ

Hãy tính thông lượng của trường vectơ

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = z\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + x\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

qua mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

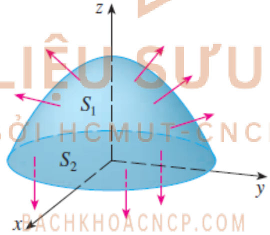
ĐS: $4\pi/3$



Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS$, *trong đó* $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ *và* S *là mặt biên của khối* E *giới hạn bởi mặt paraboloid* $z = 1 - x^2 - y^2$ *và mặt phẳng* $z = 0$, *hướng ra ngoài.*

ĐS: $\pi/2$



Định lý (Gauss - Ostrogradsky)

Cho E là một khối đơn và gọi S là mặt biên của E. Giả sử $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$ là một trường vectơ sao cho các thành phần của nó đều có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở nào đó chứa E. Khi đó:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iiint\limits_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

trong đó, lấy dấu $(+)$ nếu S hướng ra ngoài; lấy dấu $(-)$ nếu S hướng vào trong.

Ta có thể viết công thức Gauss - Ostrogradsky ngắn gọn bằng công thức vectơ như sau:

$$\iint\limits_{\text{biên } E} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS = \pm \iiint\limits_{E} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dxdydz$$

trong đó

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{F}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

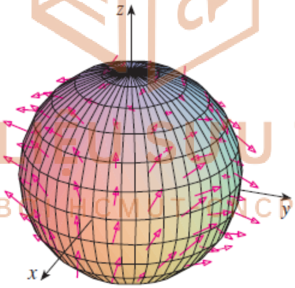
được gọi là **toán tử Divergence** của $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.

Ví dụ

Sử dụng định lý Gauss - Ostrogradsky, hãy tính thông lượng của trường vectơ

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = z\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

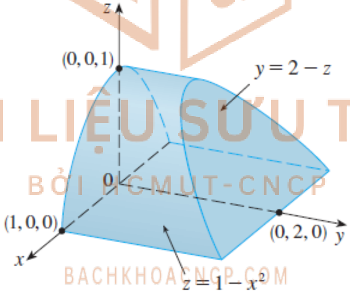
qua mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



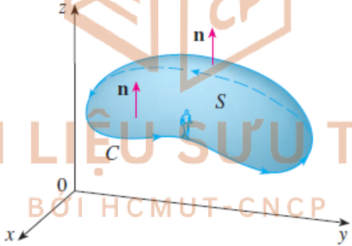
Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS$, *trong đó*

$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y^2 + e^{xz^2})\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \sin(xy)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, *và S là mặt biên của khối E được giới hạn bởi mặt trụ parabolic* $z = 1 - x^2$ *và các mặt phẳng* $z = 0$, $y = 0$, *và* $y + z = 2$, *hướng vào trong.*



- Cho mặt định hướng S với pháp vectơ đơn vị $\overrightarrow{\mathbf{n}}$.
- Xét đường cong kín C là biên của mặt S.
- Ta quy ước **chiều dương** của C là chiều mà nếu ta đi theo chiều đó sao cho pháp tuyến $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ hướng từ chân đến đầu, thì ta luôn thấy mặt S ở bên tay trái.



Định lý (Stokes' theorem)

Cho S là một mặt định hướng trơn từng khúc được giới hạn bởi một đường cong đơn kín trơn từng khúc C. Giả sử $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$ là một trường vectơ sao cho các thành phần của nó đều có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở nào đó chứa S. Khi đó

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \pm \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

trong đó, lấy dấu $(+)$ nếu đường đi trên C theo chiều dương; lấy dấu $(-)$ nếu đường đi trên C theo chiều âm.

Ta có thể viết công thức Stokes ngắn gọn bằng công thức vectơ như sau:

$$\oint_{\text{biên } S} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \pm \iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS,$$

trong đó

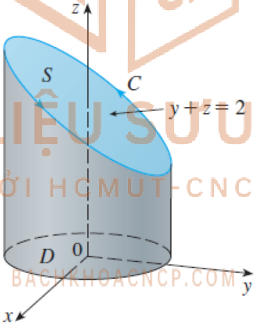
$$\operatorname{rot} \overrightarrow{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

là **trường xoáy** của $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$, *trong đó*

$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = -y^2\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^2\overrightarrow{\mathbf{k}}$, *và* C *là đường cong giao tuyến của mặt phẳng* $y+z=2$ *và mặt trụ* $x^2+y^2=1$, *theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống.*



Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S rot\,\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}\, dS$*, trong đó*

$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = xz\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + yz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + xy\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$*, và S là mặt ngoài của phần mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=4$ *nằm bên trong mặt trụ* $x^2+y^2=1$ *và nằm bên trên mặt phẳng Oxy.*