ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN KÉP

NỘI DUNG

- Tính diện tích miền phẳng
- Tính thể tích vật thể trong R_3
- Tính diện tích mặt cong

TÍNH DIỆN TÍCH MIỀN PHẲNG

D là miền đóng và bị chặn trong R_2:

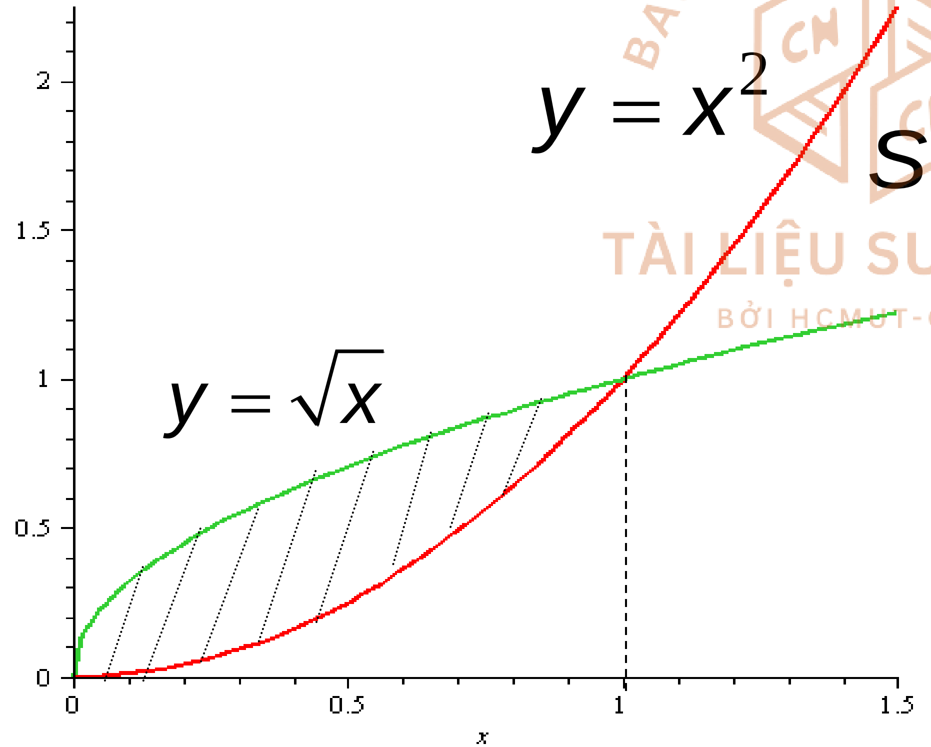
$$S(D) = \iint_D dxdy$$

Có thể dùng cách tính của tp xác định trong GT1 cho những bài không đổi biến.

Ví dụ

1/ Tính diện tích miền D giới hạn bởi:

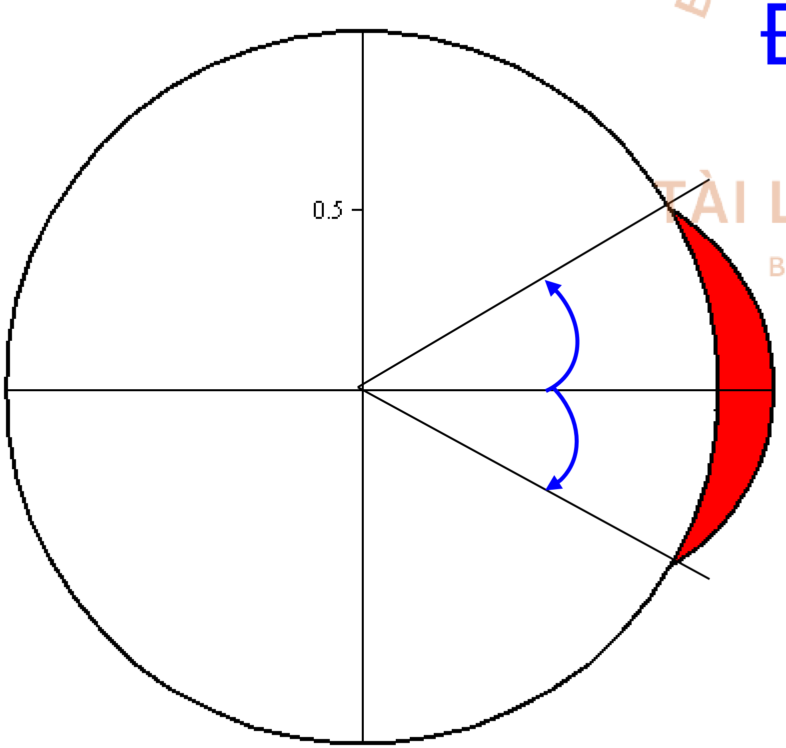
$$y = x^2, y = \sqrt{x}$$



$$S(D) = \iint_D dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \quad = \frac{1}{3}$$

2/ Tính diện tích miền D là phần nằm ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$ và nằm trong đường tròn $x^2+y^2=\frac{2}{\sqrt{3}}x$



Đổi biến: x = rcosφ, y = rsinφ

Tọa độ giao điểm

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=\frac{2}{\sqrt{3}}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \varphi=\pm\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} -\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6} \\ 1\le r\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi \end{cases}$$

$$S(D)=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{1}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} r\,dr \;=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}$$

Nếu sử dụng tính đối xứng của D

Miền D đối xứng qua Ox

$D_1 = D \cap \{x,y)/\ y \geq 0\} \Rightarrow S(D) = 2S(D_1)$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 1 \leq r \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos\varphi \end{cases}$$

$$S(D) = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} r dr$$

BÀI TOÁN THỂ TÍCH

Xét vật thể hình trụ Ω được giới hạn trên bởi mặt cong $z = f_2(x, y)$, mặt dưới là $z = f_1(x, y)$, bao xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz và đường chuẩn là biên của miền D đóng và bị chặn trong Oxy.

$$V(\Omega) = \iint\limits_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$$

Khi đó, hình chiếu của Ω lên Oxy là D.

Cách xác định hàm tính tích phân và hình chiếu D

B_1: Chọn hàm tính tích phân:

Chọn hàm tương ứng với biến chỉ xuất hiện 2 lần trong các pt giới hạn miền tính thể tích (Ω).

VD: z chỉ xuất hiện 2 lần : $z = f_1(x,y)$, $z = f_2(x,y)$, hàm tính tp là

$$z = |f_2(x,y) - f_1(x,y)|$$

Cách xác định hàm tính tích phân và hình chiếu D

B_2: Xác định miền tính tp D

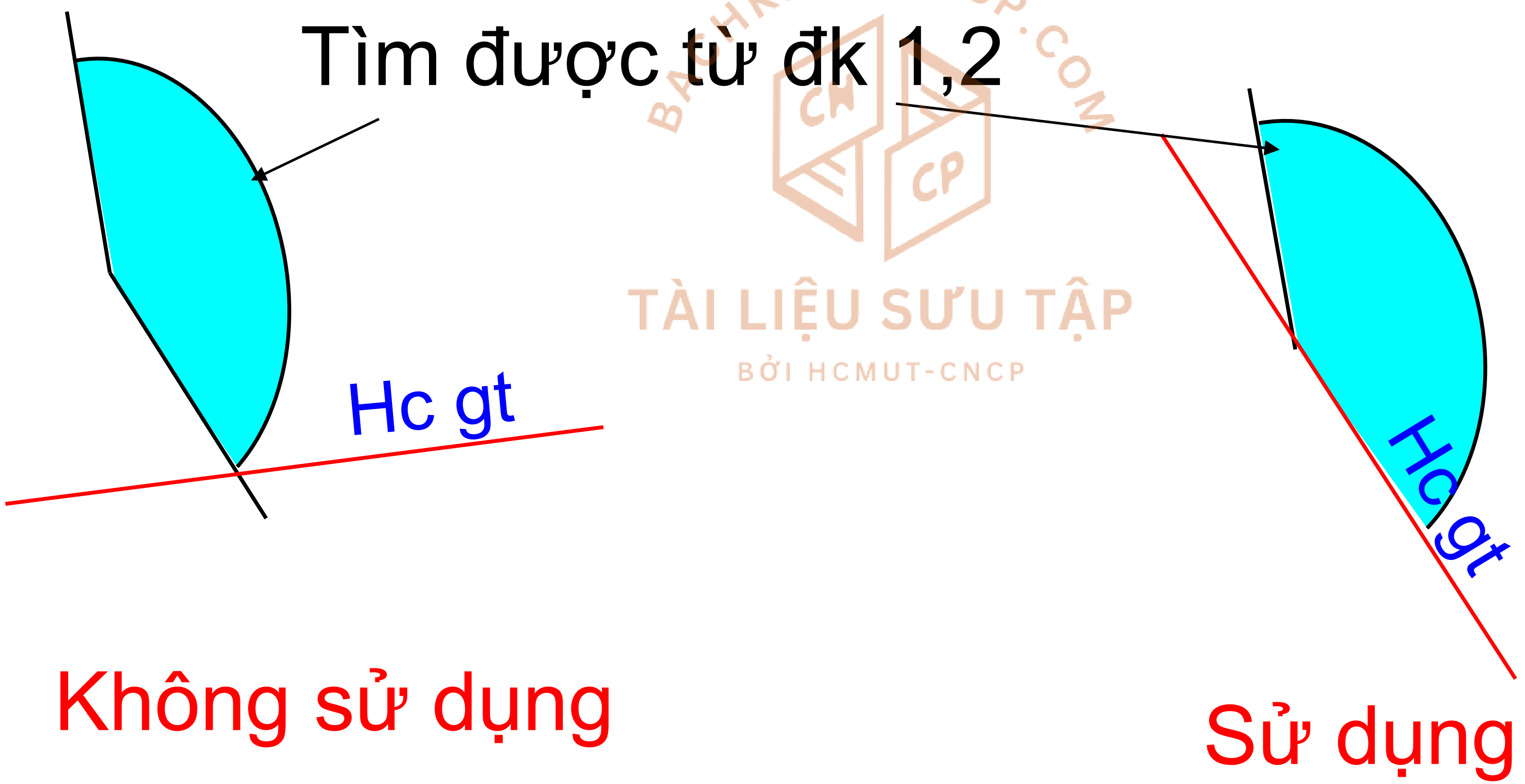
Gs hàm tính tp là $z = f(x,y)$, D là hình chiếu của Ω lên mp Oxy và được xác định từ các yếu tố sau:

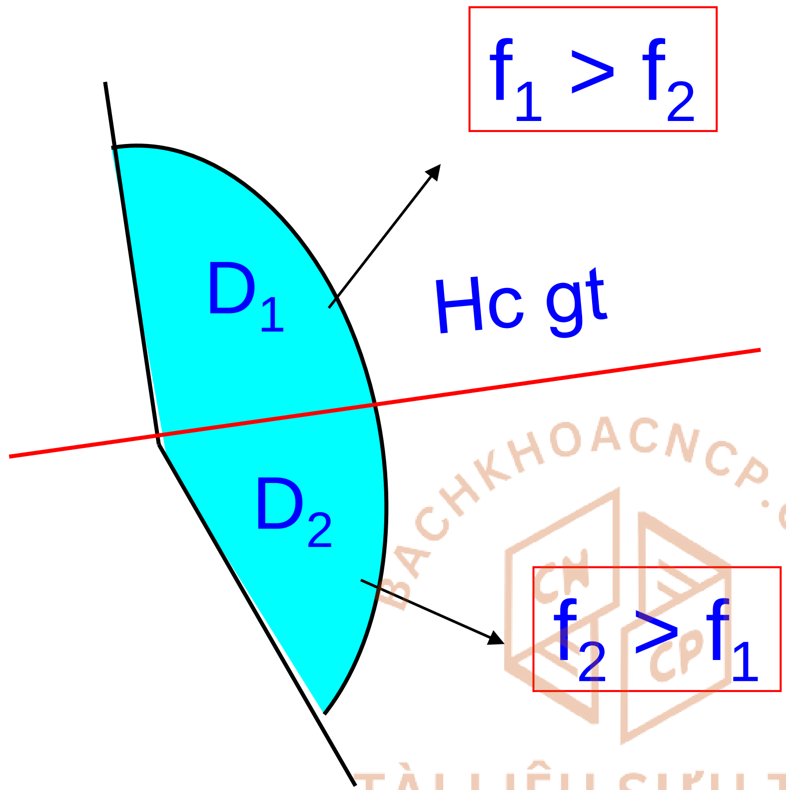
1. Điều kiện xác định của hàm tính tp
2. Các pt không chứa z giới hạn của miền Ω.
3. Hình chiếu giao tuyến của $z = f_1(x,y)$ và $z = f_2(x,y)$ *(có thể không sử dụng)*

Hình chiếu giao tuyến

1.Được tìm bằng cách khử z từ các pt chứa z.

2. Các TH sử dụng hc giao tuyến.





Sử dụng để xác định dấu của $f_2 - f_1$

Ví dụ

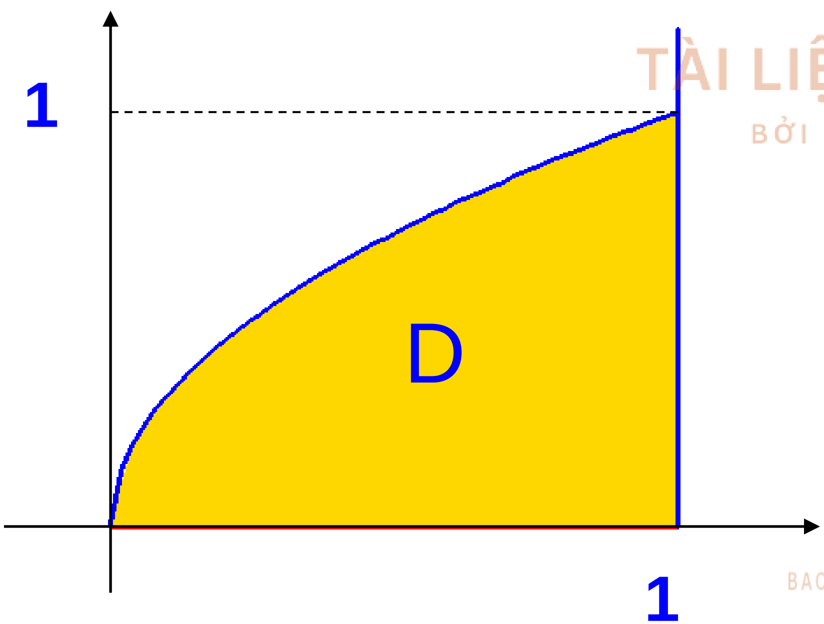
1/ Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$

<u>Cách 1</u>: z xuất hiện 2 lần nên hàm lấy tp là

$z = 1 - x$ và $z = 0$ (các hàm xác định trên R_2)

$$D = hc_{Oxy}\,\Omega$$



- các pt không chứa z

$$y = 0, y = \sqrt{x}$$

- Hc giao tuyến: $1 - x = 0$

$$V(\Omega) = \iint_D [(1-x)-0]dxdy$$

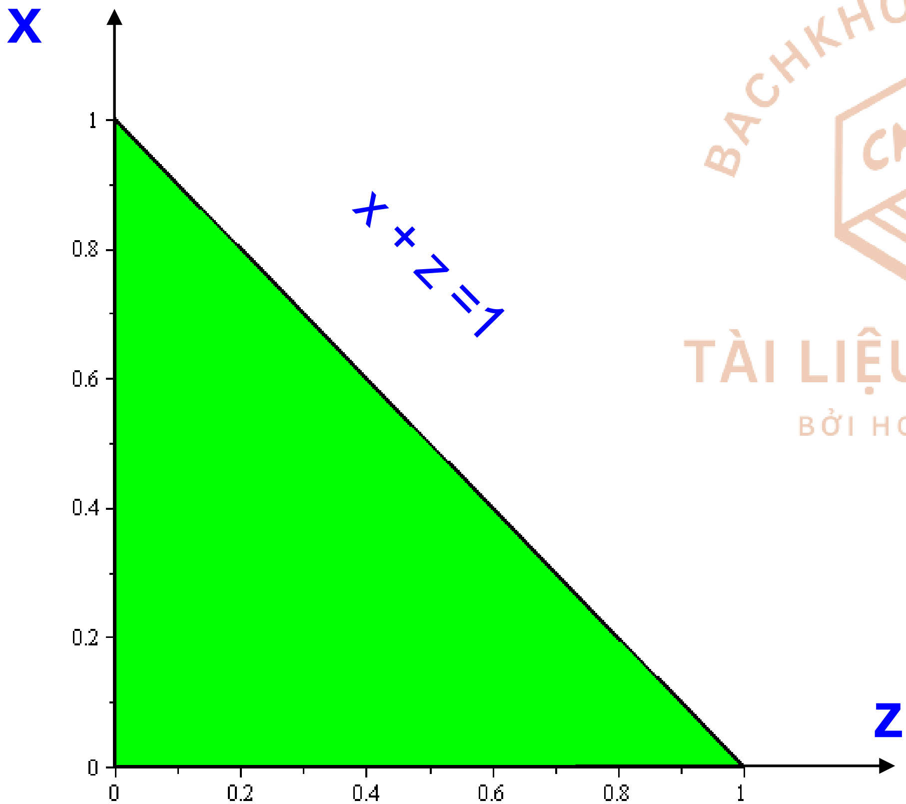
$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (1-x)dx$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (1-x)dx = \frac{4}{15}$$

$$\Omega: y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=1$$

Cách 2: y xuất hiện 2 lần, chọn hàm tính tp là

$$y=0, y=\sqrt{x} \qquad D=\underset{Oxz}{hc}\,\Omega$$



- Đk xác định của hàm tính tp: $x \geq 0$
- Các pt không chứa y: $x+z=1, z=0$
- Hc giao tuyến: $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$

$$V(\Omega) = \iint_D [\sqrt{x} - 0]\,dxdz$$

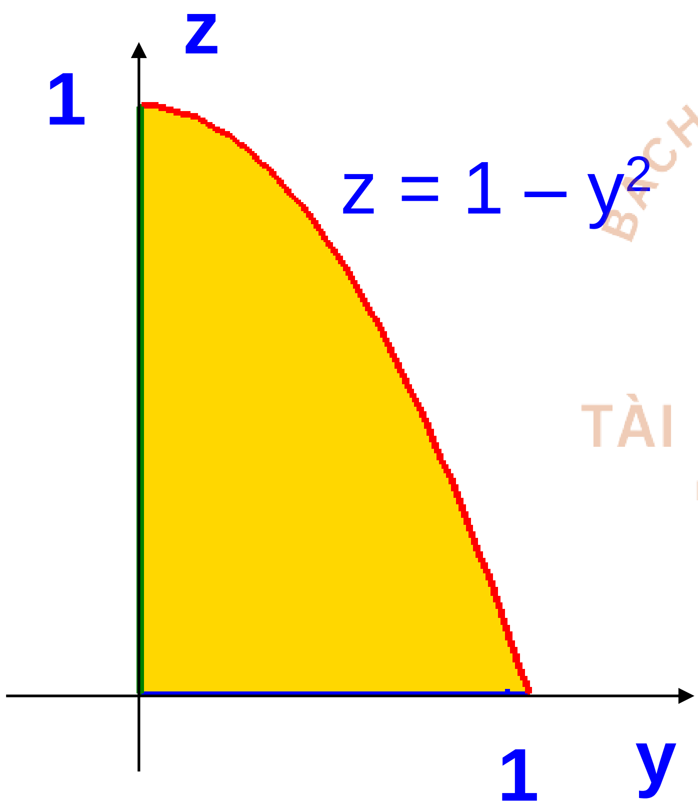
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x}\,dz$$

$$= \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^{3/2}\right) dx = \frac{4}{15}$$

$$\Omega : y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$

Cách 3: x xuất hiện 2 lần, chọn hàm tính tp là

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2,\ \ x = 1 - z$$



$$D = \underset{Oyz}{hc}\,\Omega$$

- Đk xác định hàm: $y \geq 0$
- Các pt không chứa x:

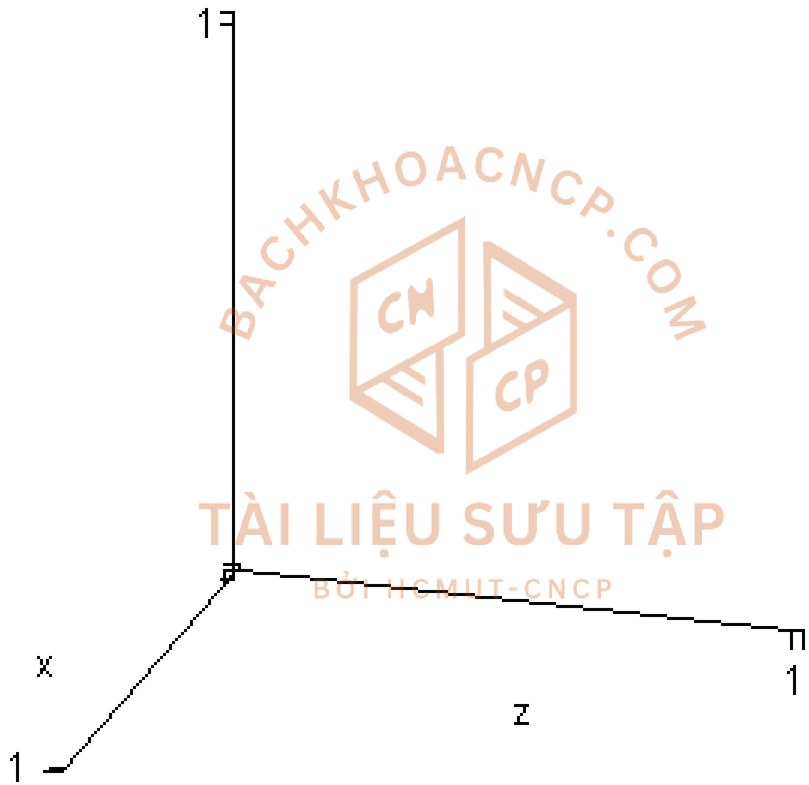
$$y = 0, z = 0$$

- Hc giao tuyến: $1 - z = y^2$

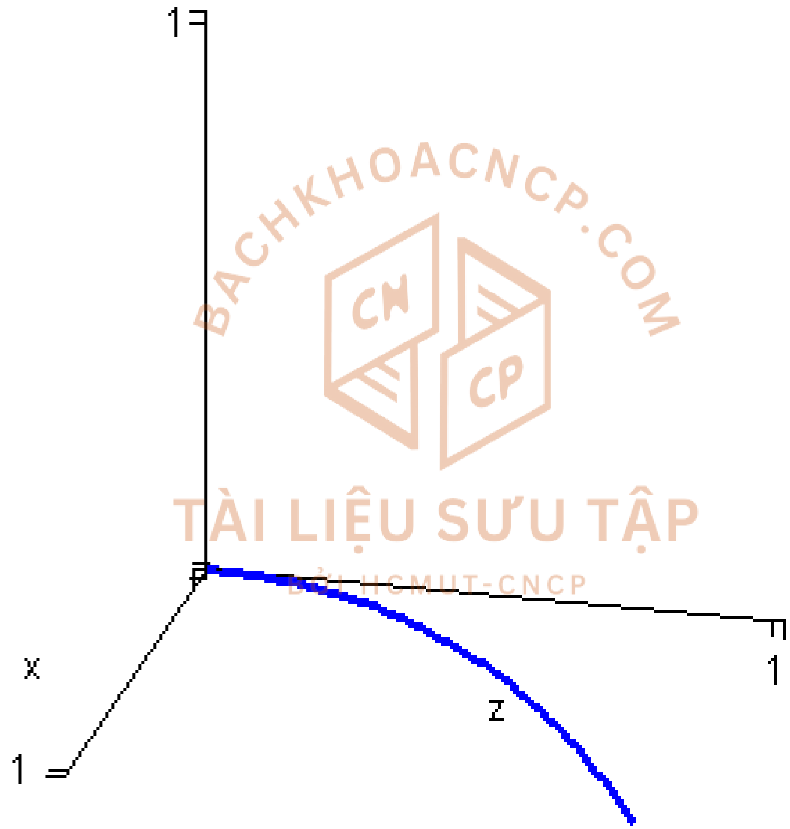
$$V(\Omega) = \iint_D [(1-z) - y^2]\,dydz$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} (1 - z - y^2)\,dz = \frac{4}{15}$$

$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$

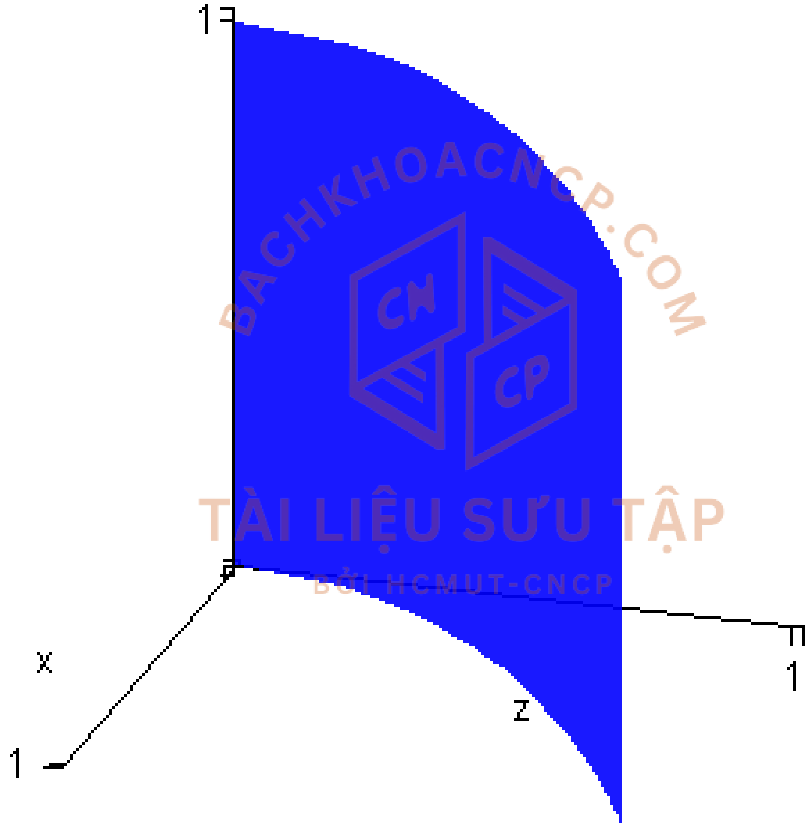


$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$



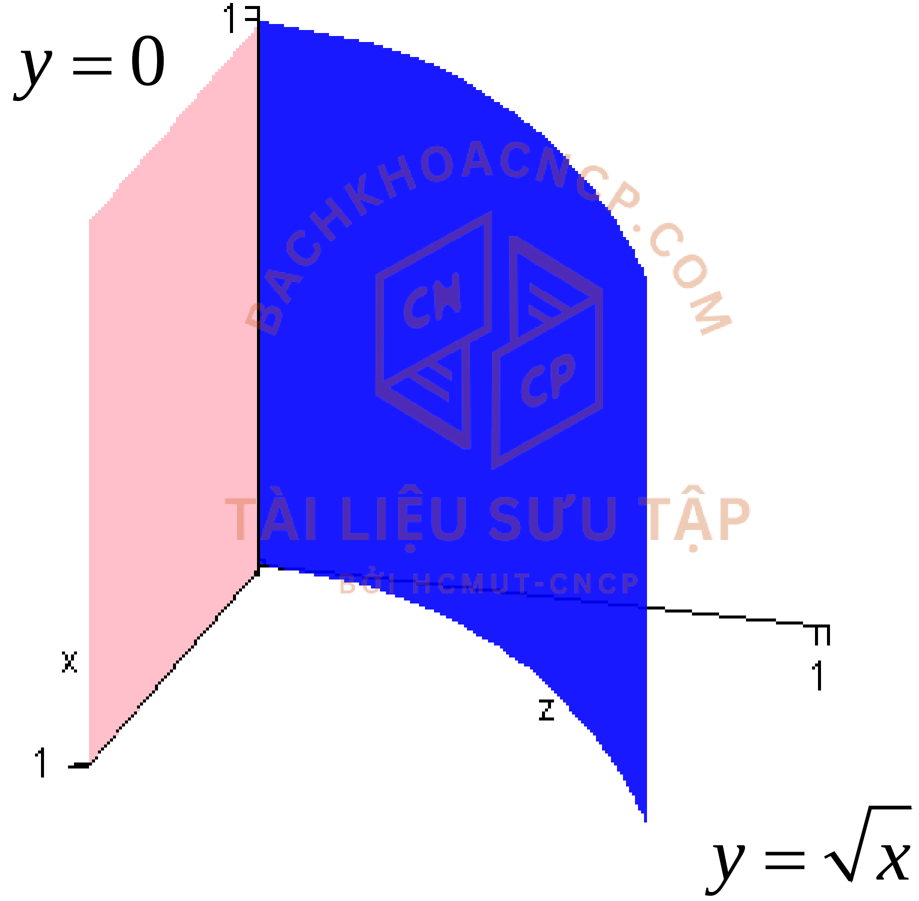
$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$

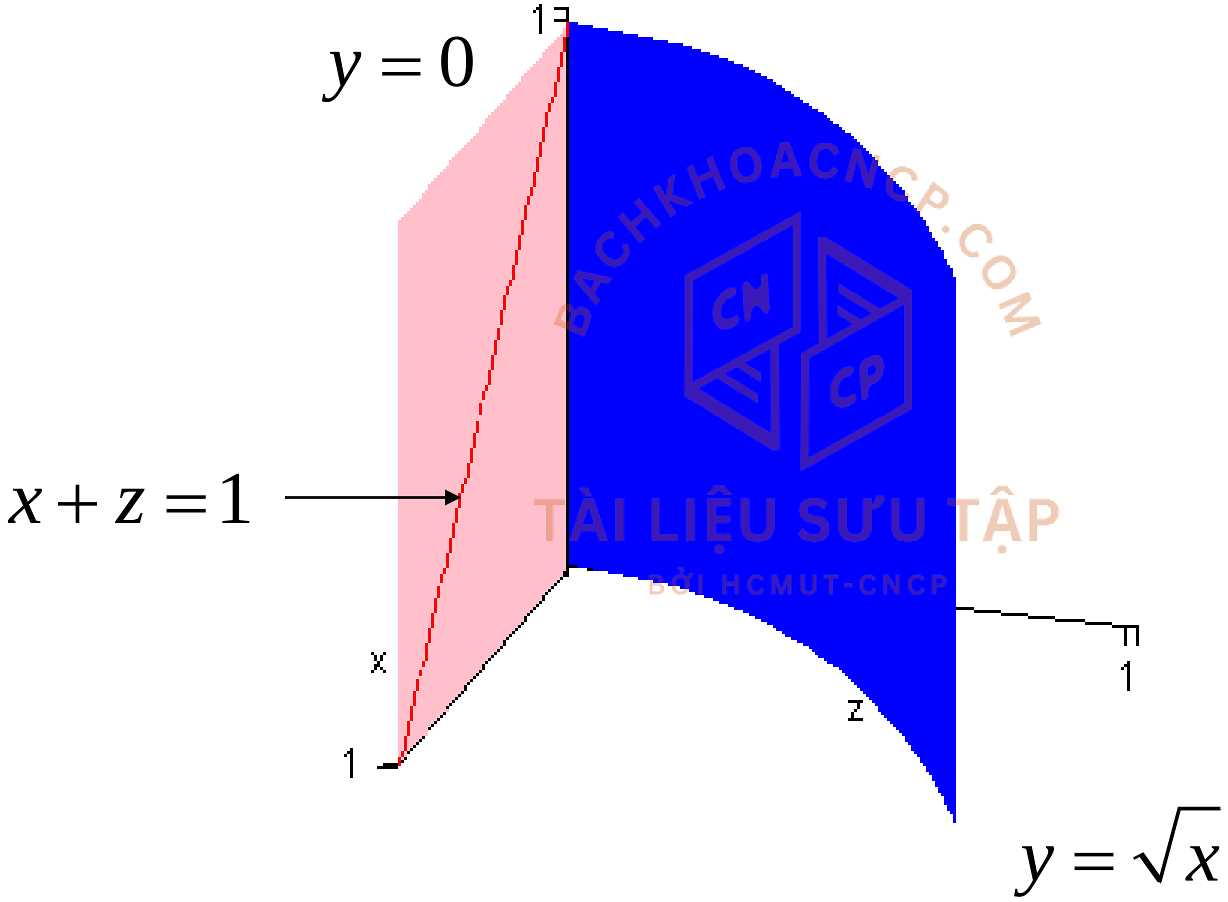


$$y = \sqrt{x}$$

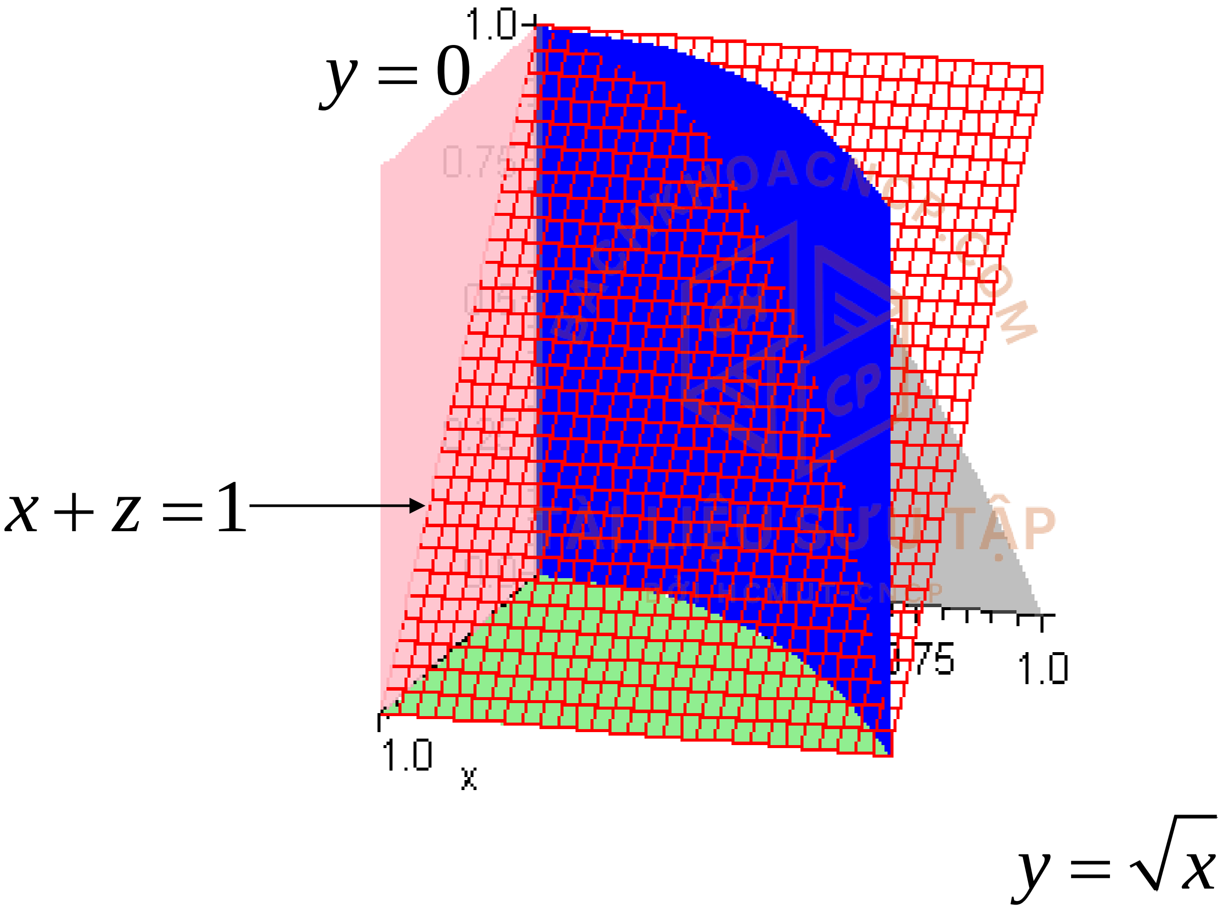
$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$



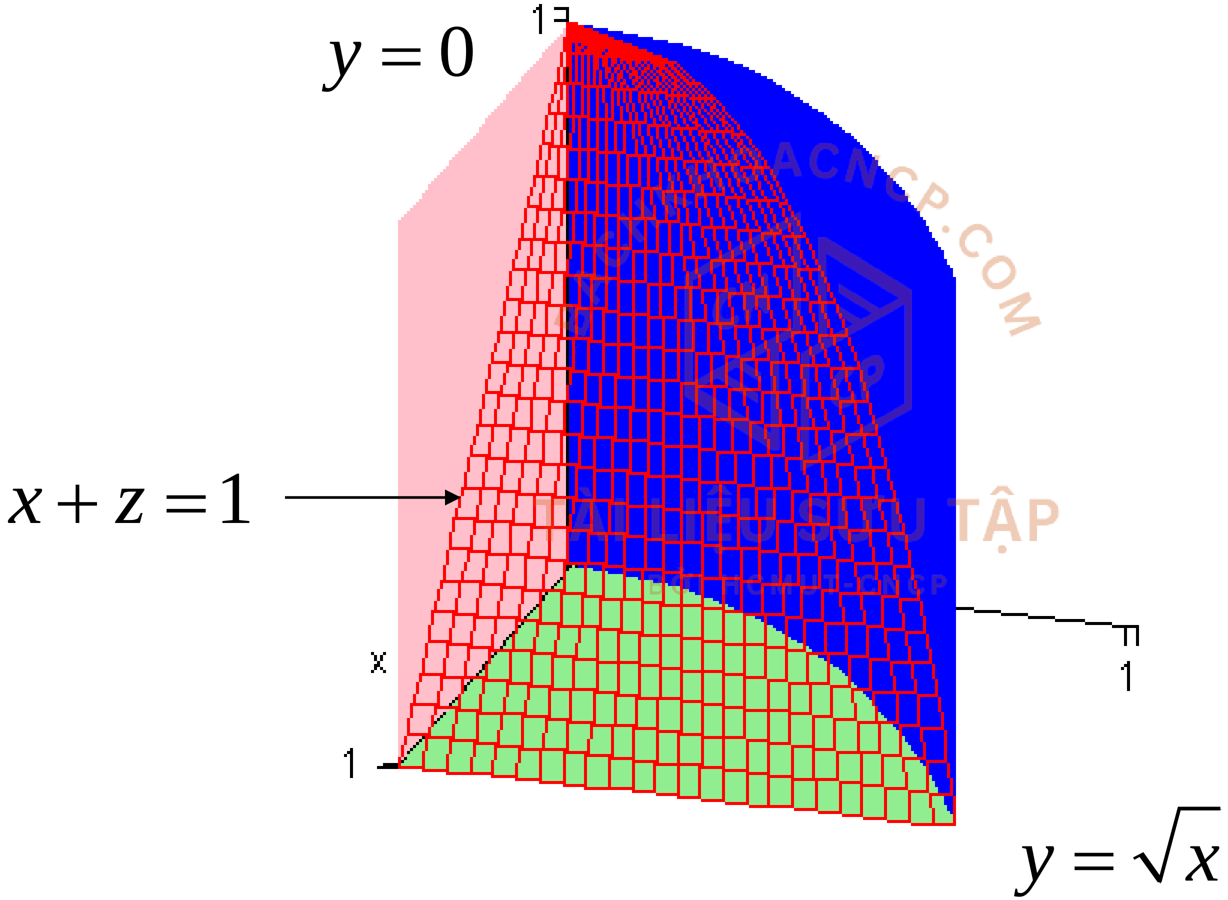
$$y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=1$$



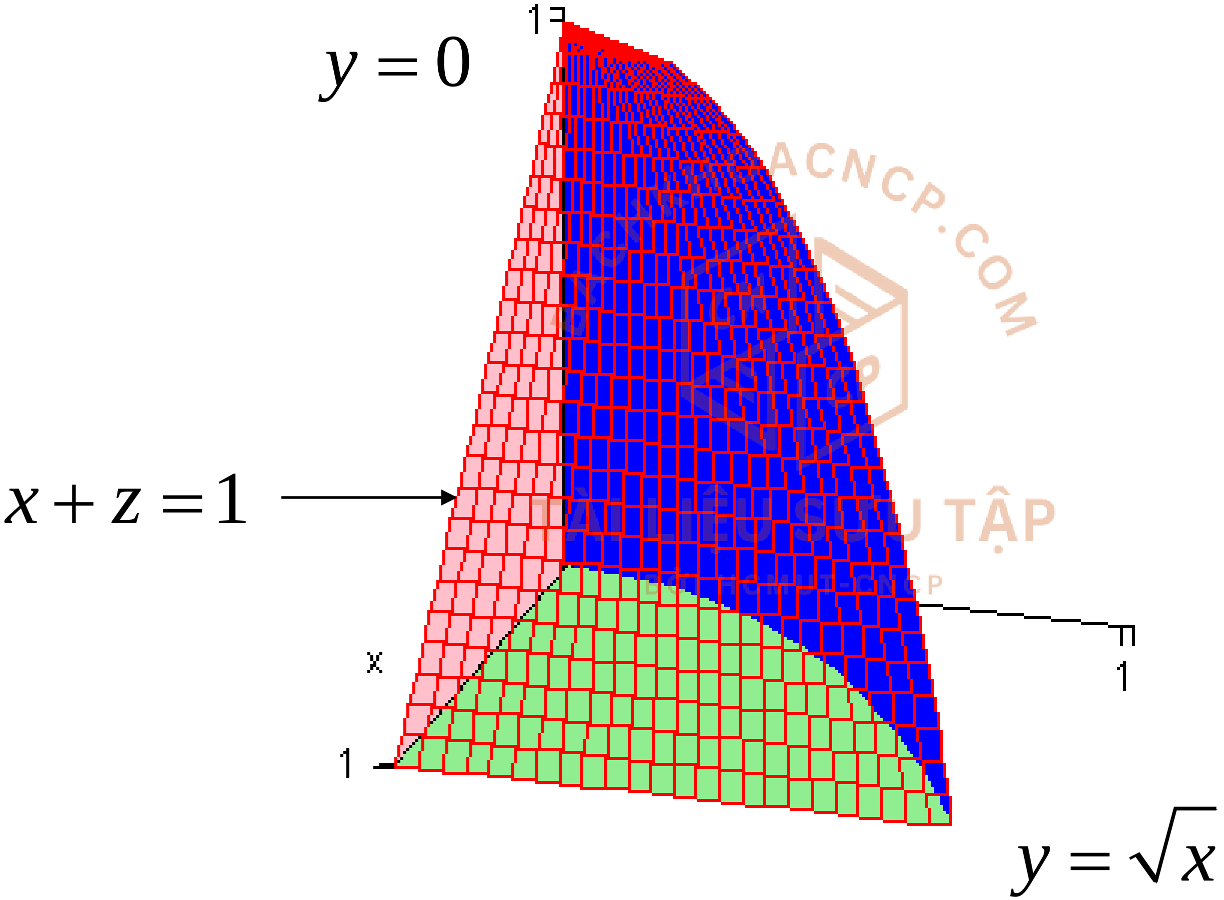
$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$

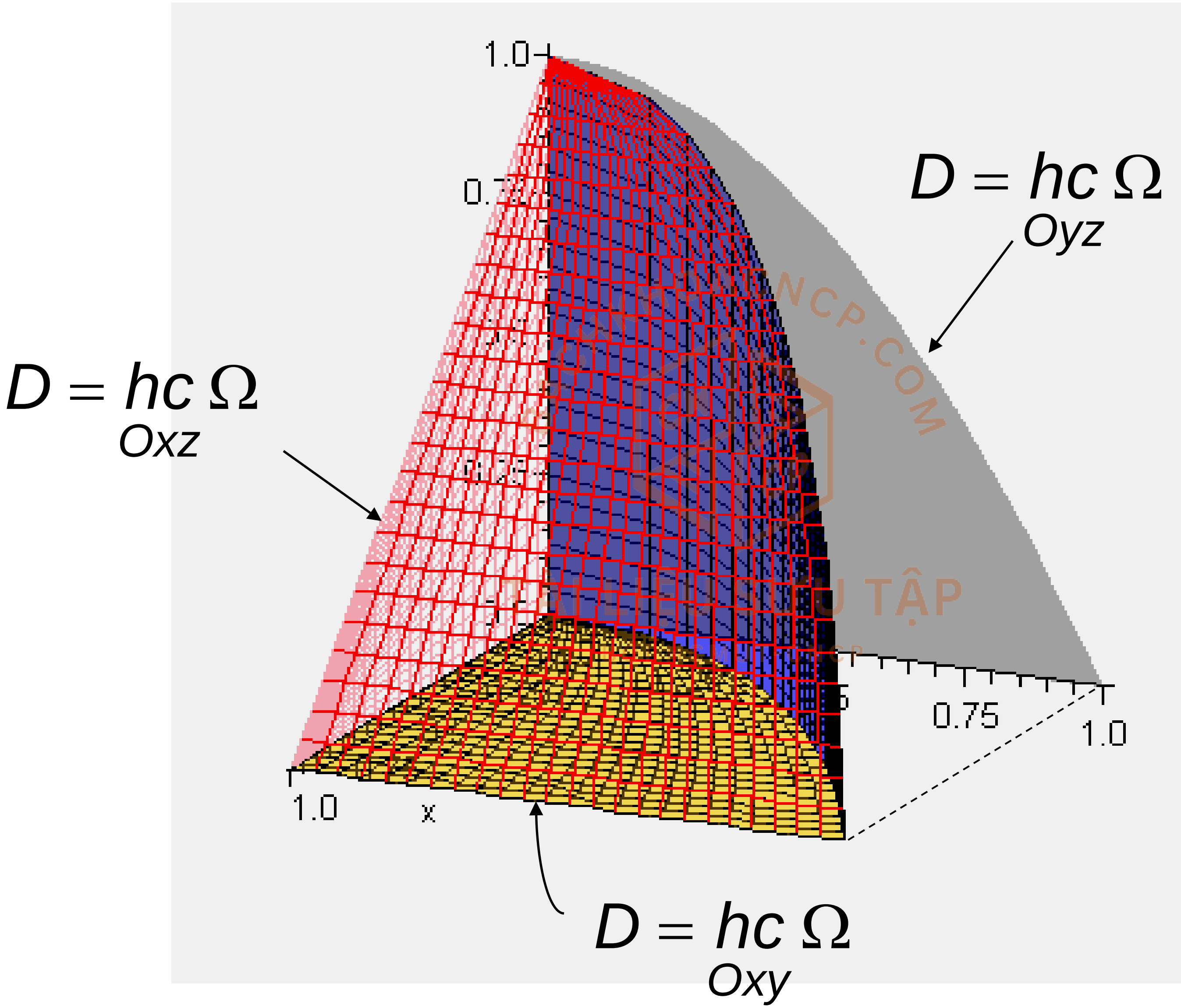


$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = 1$$



$$y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=1$$





D = hc Ω
Oyz
D = hc Ω
Oxz
D = hc Ω
Oxy
1.0
0.75
1.0
1.0
x
0.75

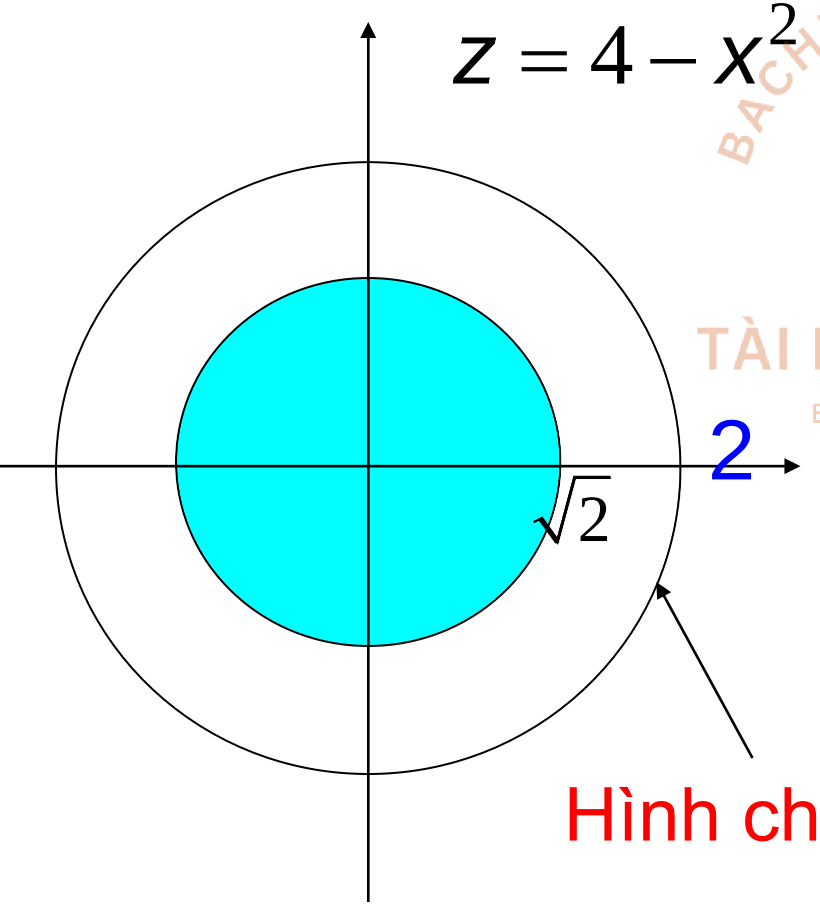
2/ Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x^2 + y^2 \le 2$$

z xuất hiện 2 lần nên hàm lấy tp là:

$$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$$

$$D = hc_{Oxy}\,\Omega$$



- Các pt không chứa z:

$$x^2 + y^2 = 2$$

- Hc hiếu giao tuyến:

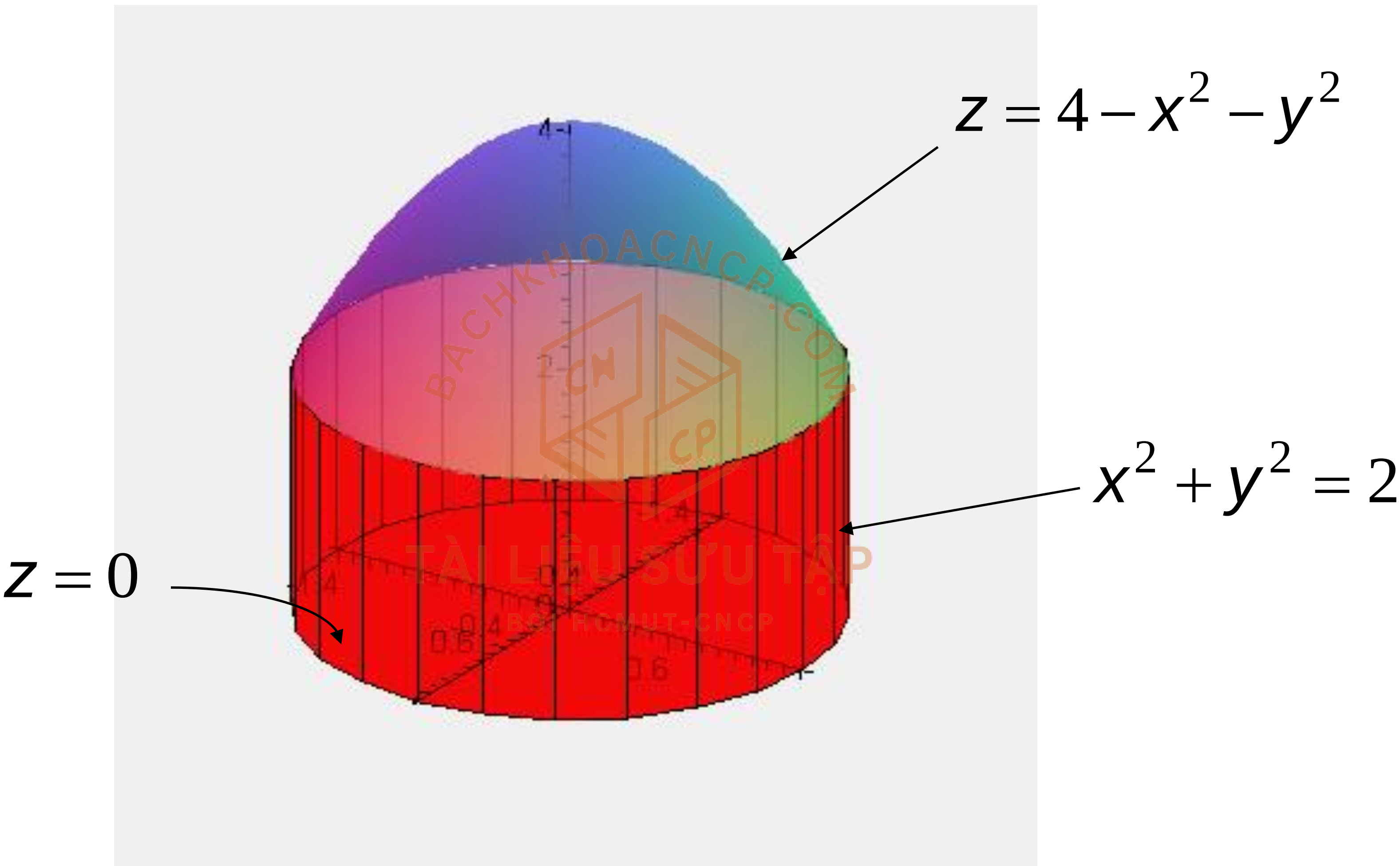
$$0 = 4 - x^2 - y^2$$

Hình chiếu giao tuyến không sử dụng

$$V(\Omega) = \iint\limits_{D} [(4 - x^2 - y^2) - 0] dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr$$

$$= 6\pi$$


$z = 4 - x^2 - y^2$
$x^2 + y^2 = 2$
$z = 0$

3/ Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = x^2 + y^2 + 2$$

Hàm tính tp: $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 1 + \frac{x^2 + y^2}{2}$

$D = \underset{Oxy}{hc}\,\Omega :\ 4 - x^2 - y^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + 1$ (hc giao tuyến)

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$V(\Omega) = \iint_D \left((4 - x^2 - y^2) - \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right) dxdy$$

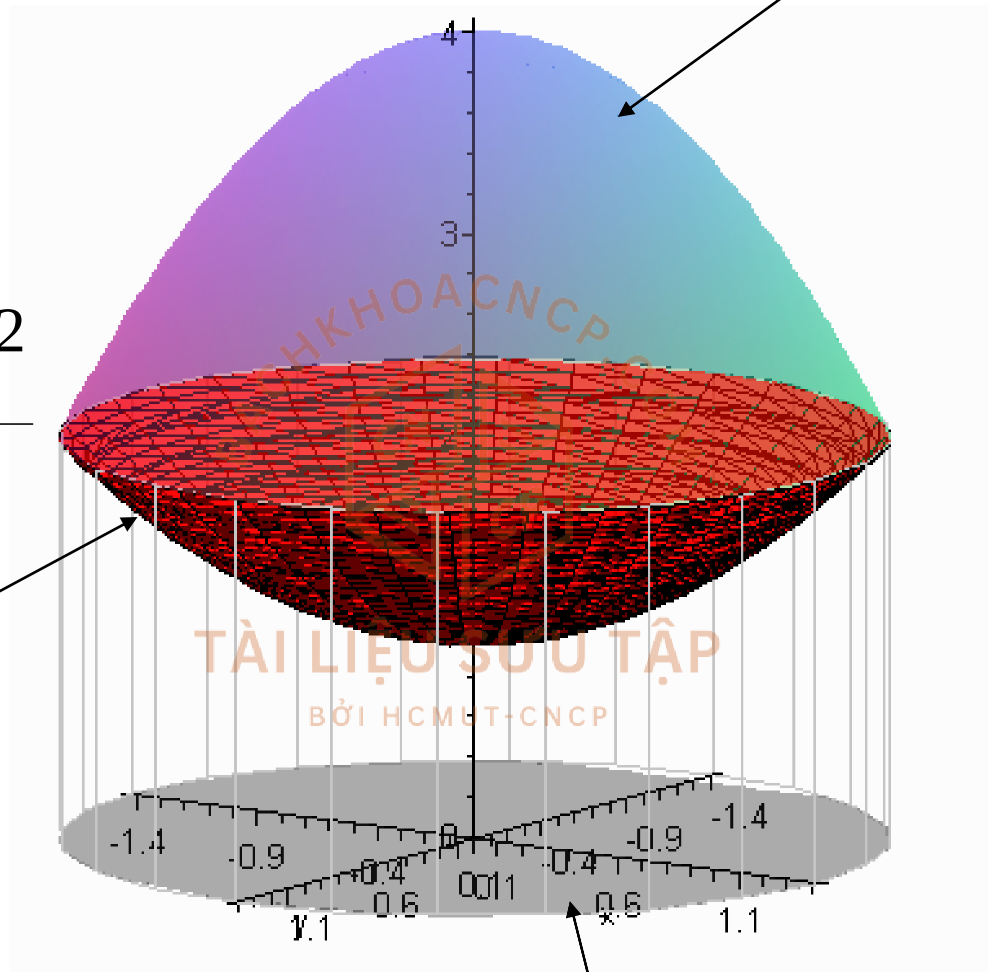
$$V(\Omega) = \iint\limits_D \left((4 - x^2 - y^2) - \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_D \left(6 - 3x^2 - 3y^2 \right) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr = 3\pi$$

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

$$z = 1 + \frac{x^2 + y^2}{2}$$



Hình chiếu: $x^2 + y^2 \le 2$

4/ Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

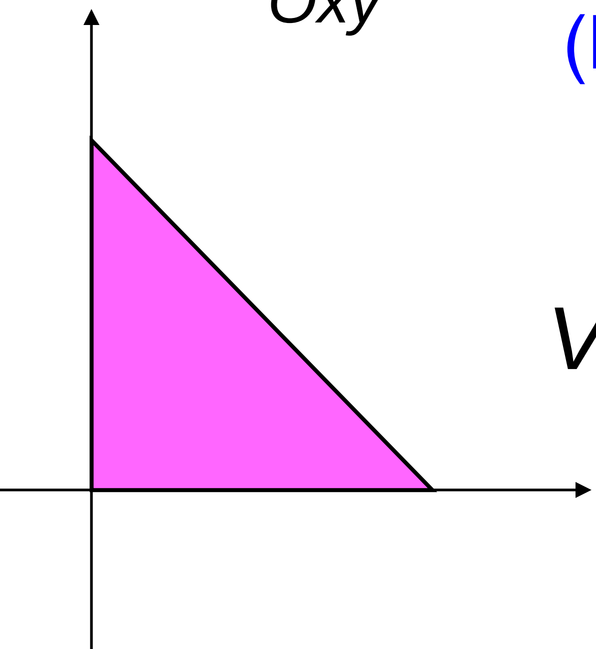
$z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1$ và các mặt tọa độ.

Các mặt tọa độ bao gồm: x = 0, y = 0, z = 0

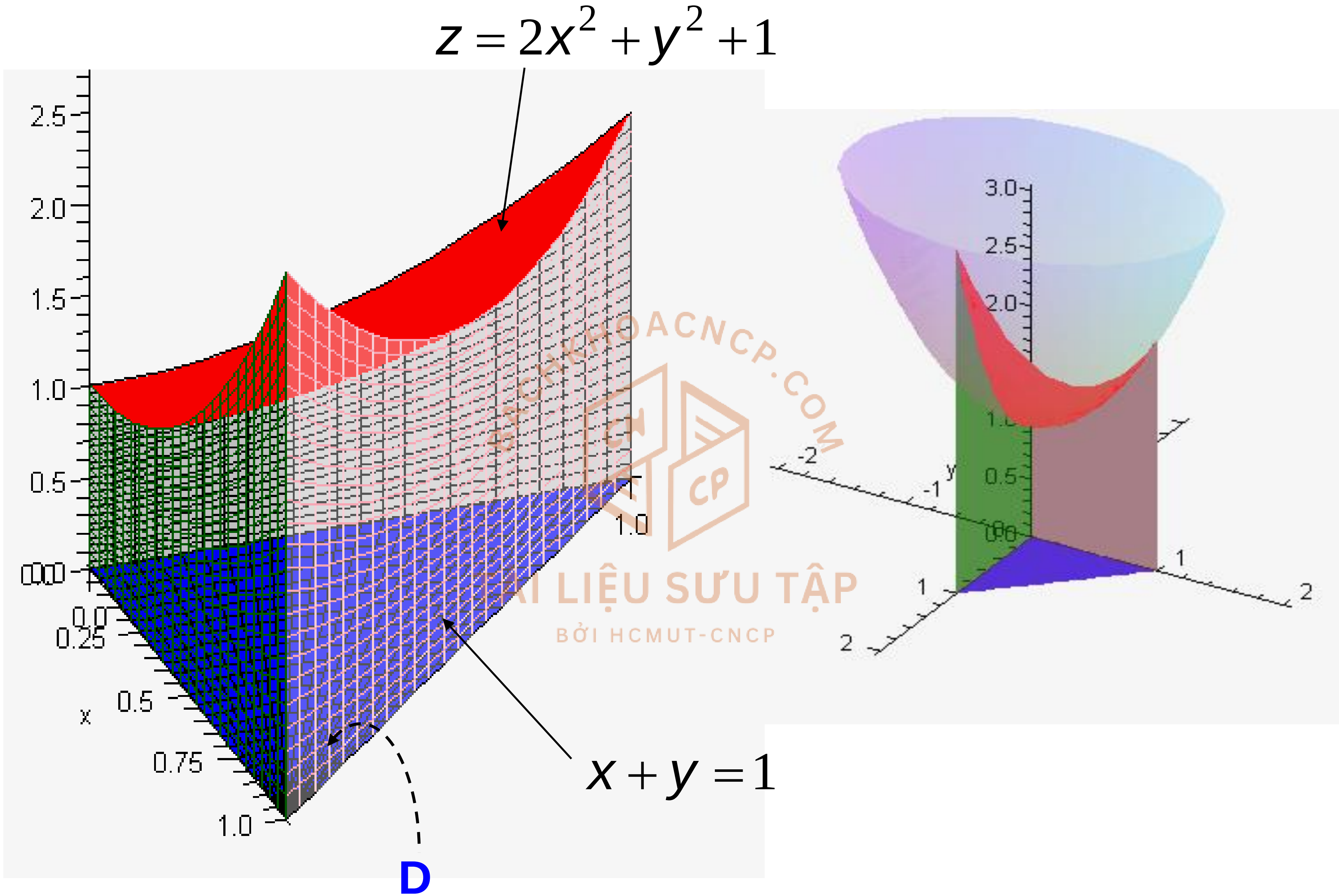
Hàm tp: $z = 2x^2 + y^2 + 1, z = 0$

$D = hc_{Oxy}\Omega: \quad x + y = 1, x = 0, y = 0$

(Không có gt của 2 mặt cong tính tp)



$$V(\Omega) = \iint_D \left(1 + 2x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{3}{4}$$



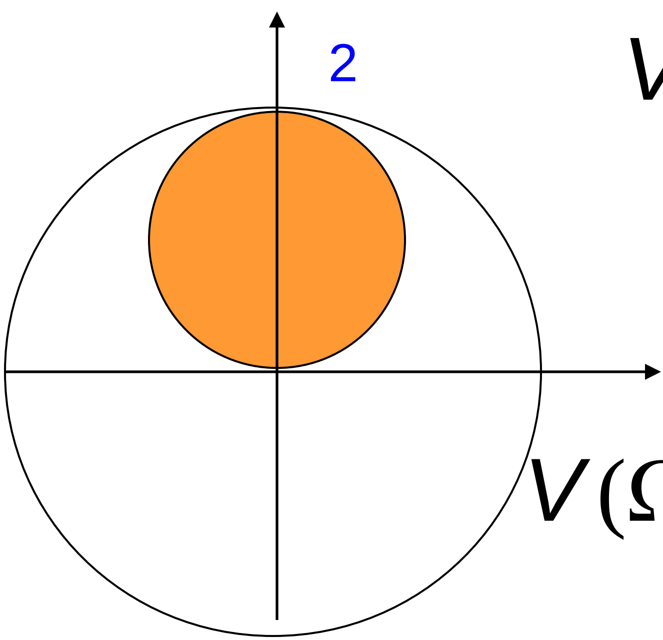
$z = 2x^2 + y^2 + 1$
$x + y = 1$
D

5/ Tính thể tích của vật thể cho bởi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + y^2 \le 2y,\ z \ge 0$$

Hàm tp : $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$

$D = hc_{Oxy}\,\Omega :$ $x^2 + y^2 \le 4, x^2 + y^2 \le 2y$

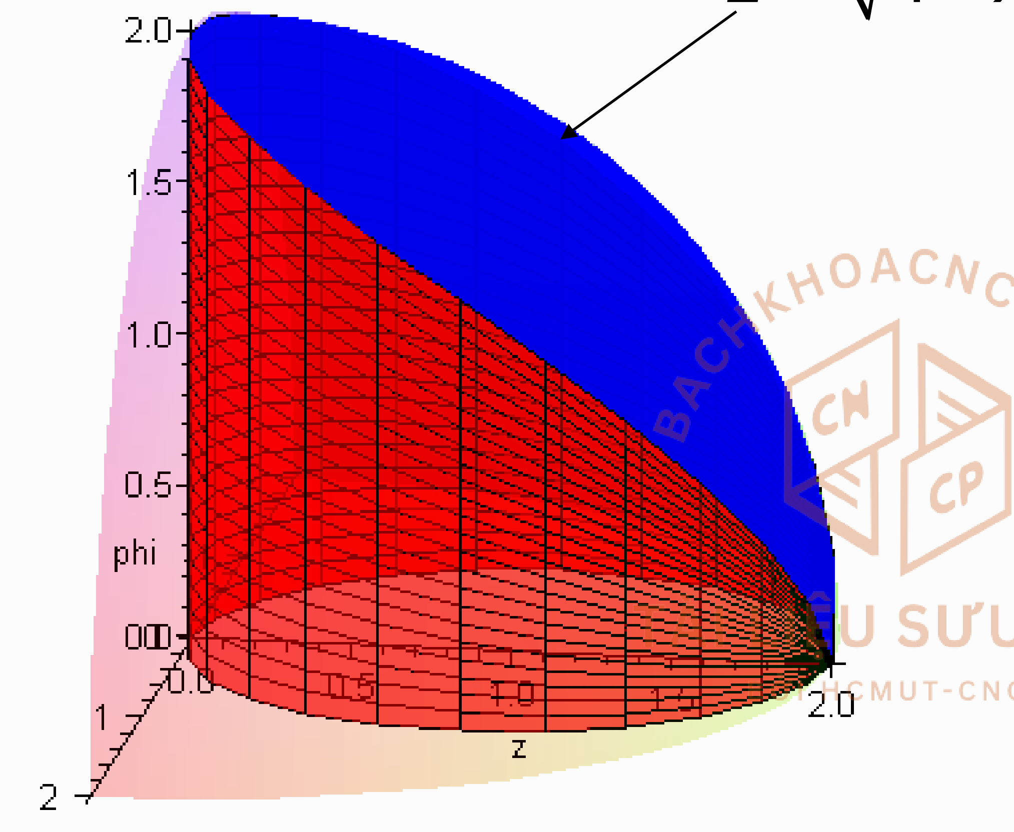


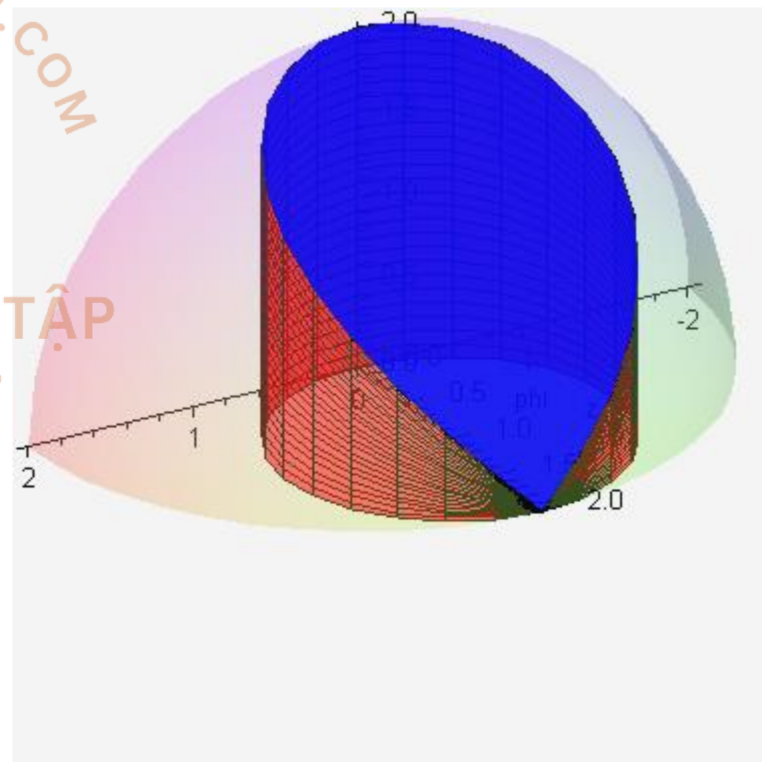
$$V(\Omega) = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

sử dụng tính đối xứng của D:

$$V(\Omega) = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4 - r^2}\,r\,dr = \frac{8\pi}{3}$$

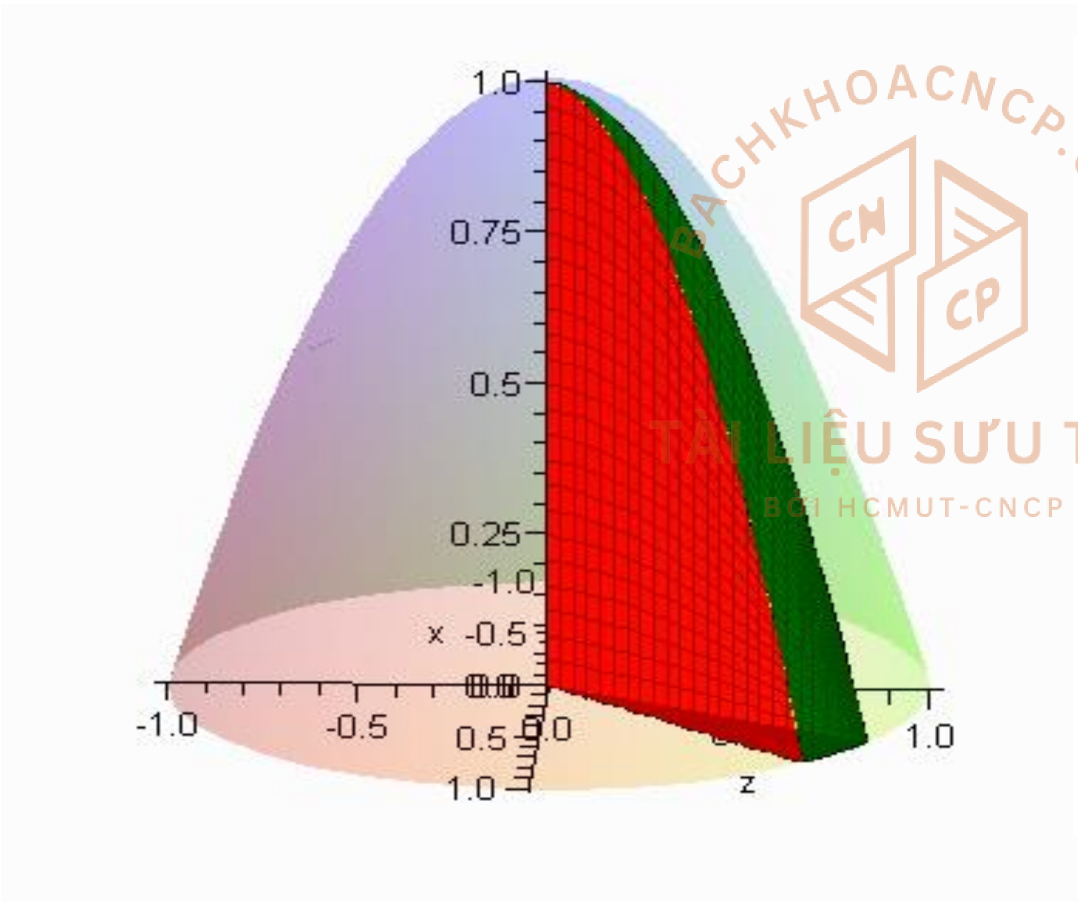
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

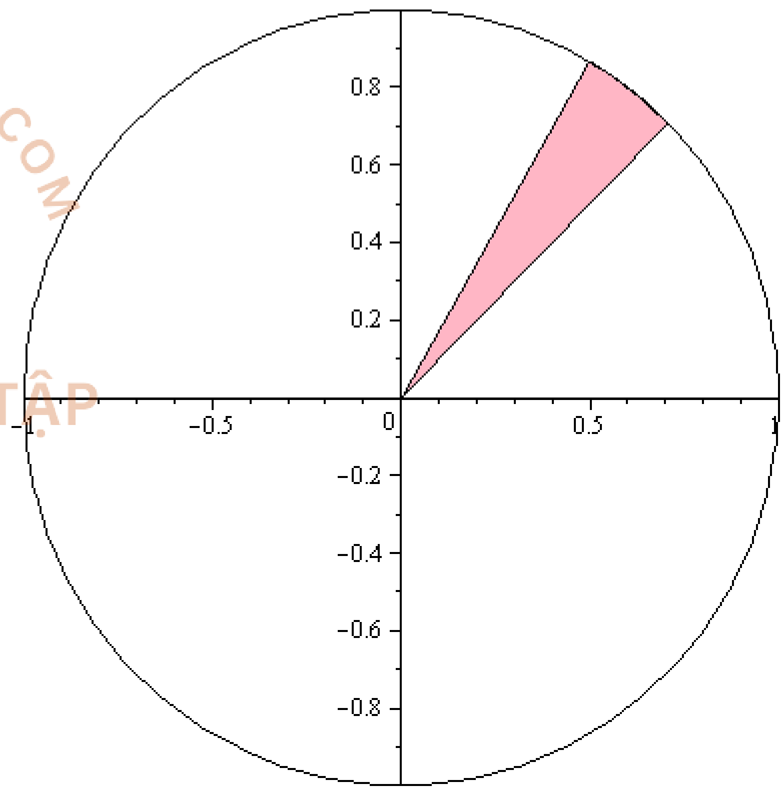




6/ Tính thể tích của vật thể cho bởi:

$$z = 1 - x^2 - y^2, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0; x, y, z \geq 0$$





Bài tập:

Bài 1: Tính diện tích miền phẳng:

1. $D: x + y^2 = 1,\ y - x = 1,\ x = 0$
2. $D: y = x^2,\ y = 2 - x^2$
3. $D: x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y \le x$
4. $D: x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 6y,\ y \ge \sqrt{3}x,\ x \ge 0$
5. $D: \{|x| + |y| \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

1. $19/6$, 2. $8/3$, 3. $3/2 + 9\pi/4$,

4. $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$, 5. $\pi - 2$

Bài 2: Tinh thể tích vật thể

1. $\Omega: z = 16 - x^2 - 2y^2,\ y = 2,\ y = 0,\ \mathrm{x} = 2,\ \mathrm{x} = 0,\ \mathrm{z} = 0$
2. $\Omega: z = x^2 + y^2,\ y = 2x,\ y = x^2,\ z = 0$
3. $\Omega: z = 0,\ z = 1 - x^2 - y^2$
4. $\Omega: z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 2$

1. $V_1 = 48$, 2. $V_2 = 216/35$
3. $V_3 = \pi/2$, 4. $V_4 = 2\pi$

TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CONG

Mặt cong S có phương trình: z = f(x, y), bị chắn trong mặt trụ có đường chuẩn là biên của D (trong Oxy) và đường sinh // Oz.

$$D = hc_{Oxy} S$$

Diện tích của S tính bởi công thức

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy$$

Cách tính diện tích mặt cong

Giả sử S có pt tổng quát $F(x,y,z)=0$

1. Chọn cách viết tp mặt cong S(tương ứng với biến xuất hiện ít nhất trong pt các mặt chắn và pt của S)
2. Tính phần vi phân mặt cho hàm lấy tp.
3. Tìm hình chiếu D(giống như tính thể tích)

VÍ DỤ

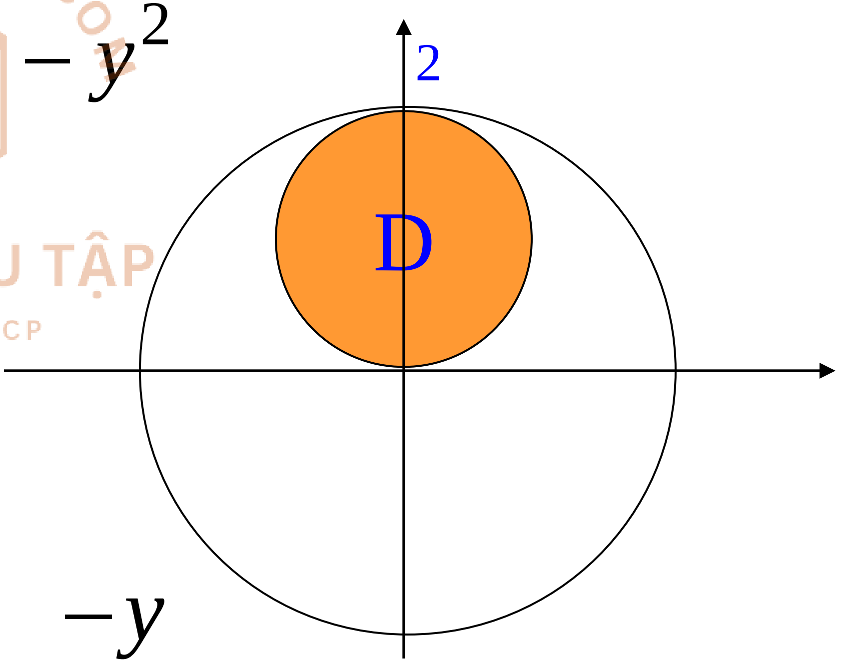
1/ Tính diện tích của $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

bị chắn trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$

Pt mặt cong: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$D = hc_{Oxy}\,\Omega:$

$x^2 + y^2 \le 4, x^2 + y^2 \le 2y$



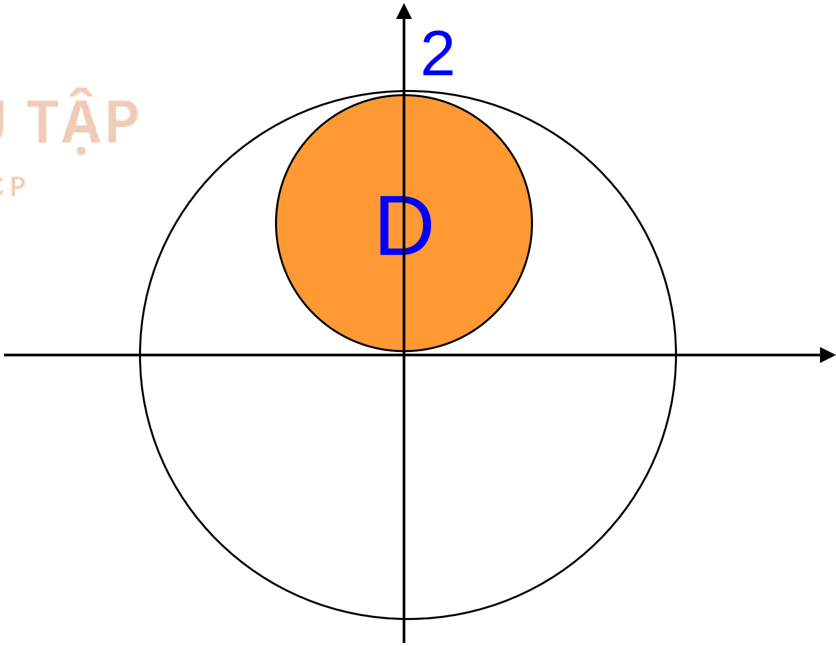
$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

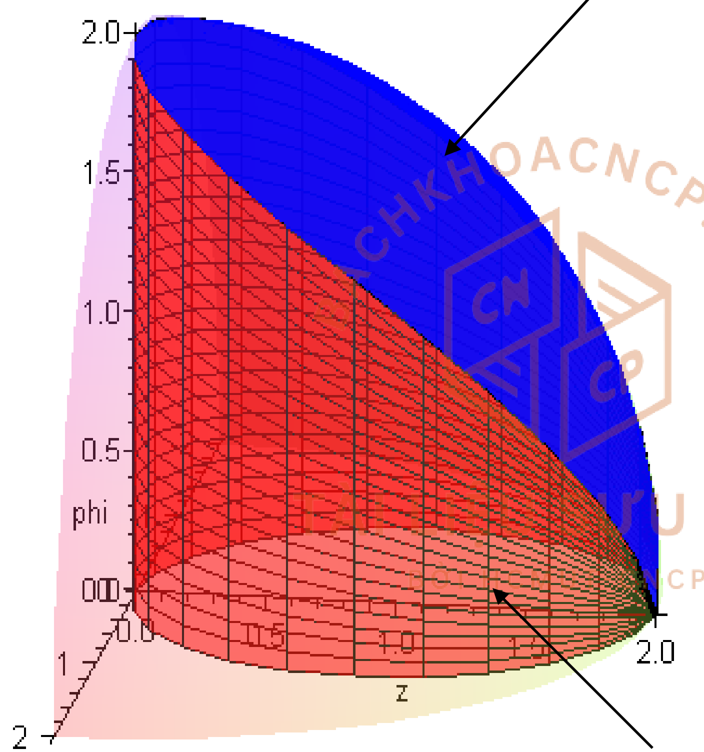
$$=\iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$=4\pi-8$$



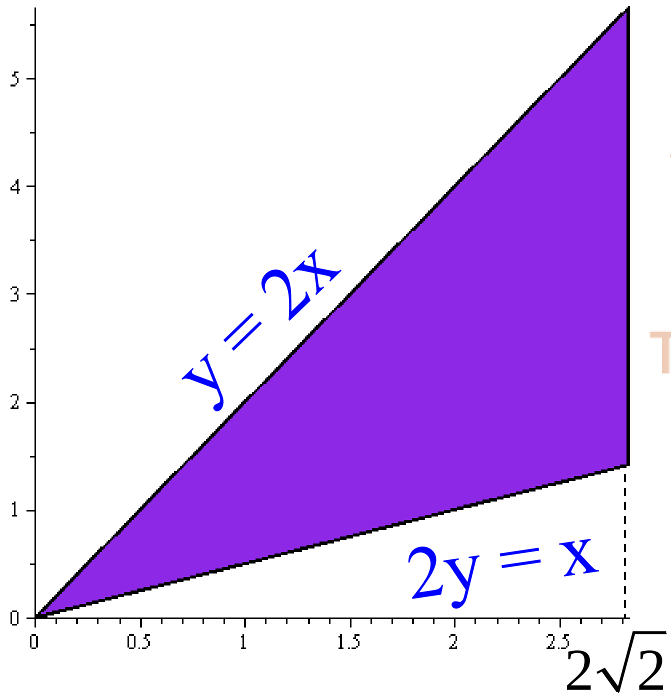
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



$$x^2 + y^2 = 2y$$

2/ Tính diện tích của phần mặt trụ: $2z = x^2$

bị chắn bởi các mặt $x - 2y = 0, y - 2x = 0, x = 2\sqrt{2}$



Phương trình mặt cong:

$$z = \frac{x^2}{2}$$

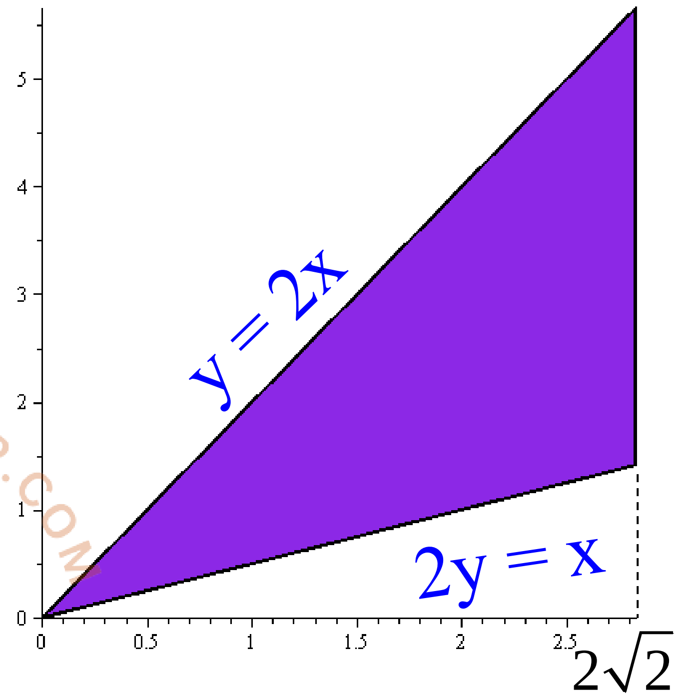
$$D = \underset{Oxy}{hc}\,\Omega :$$

$$x - 2y = 0, y - 2x = 0, x = 2\sqrt{2}$$

$$S=\iint_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$$

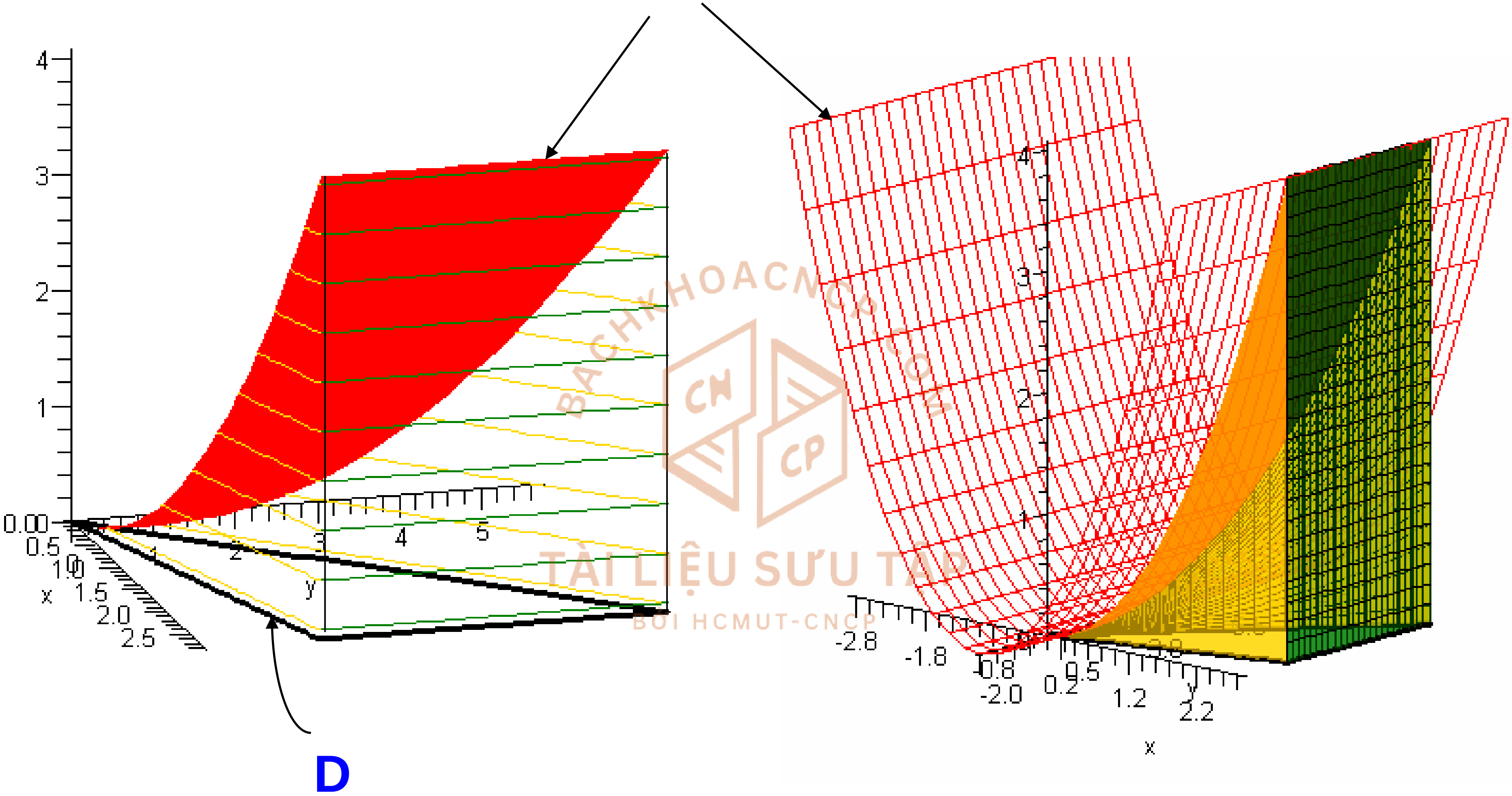
$$=\iint_D \sqrt{1+x^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{2x} \sqrt{1+x^2}\,dy = 13$$



$$z=\frac{x^2}{2}$$

$$2z = x^2$$



3/ Tính diện tích của phần mặt nón:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$ bị chắn bởi mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$D = \underset{Oxy}{hc}\,\Omega: \quad x^2 + y^2 = 1$$

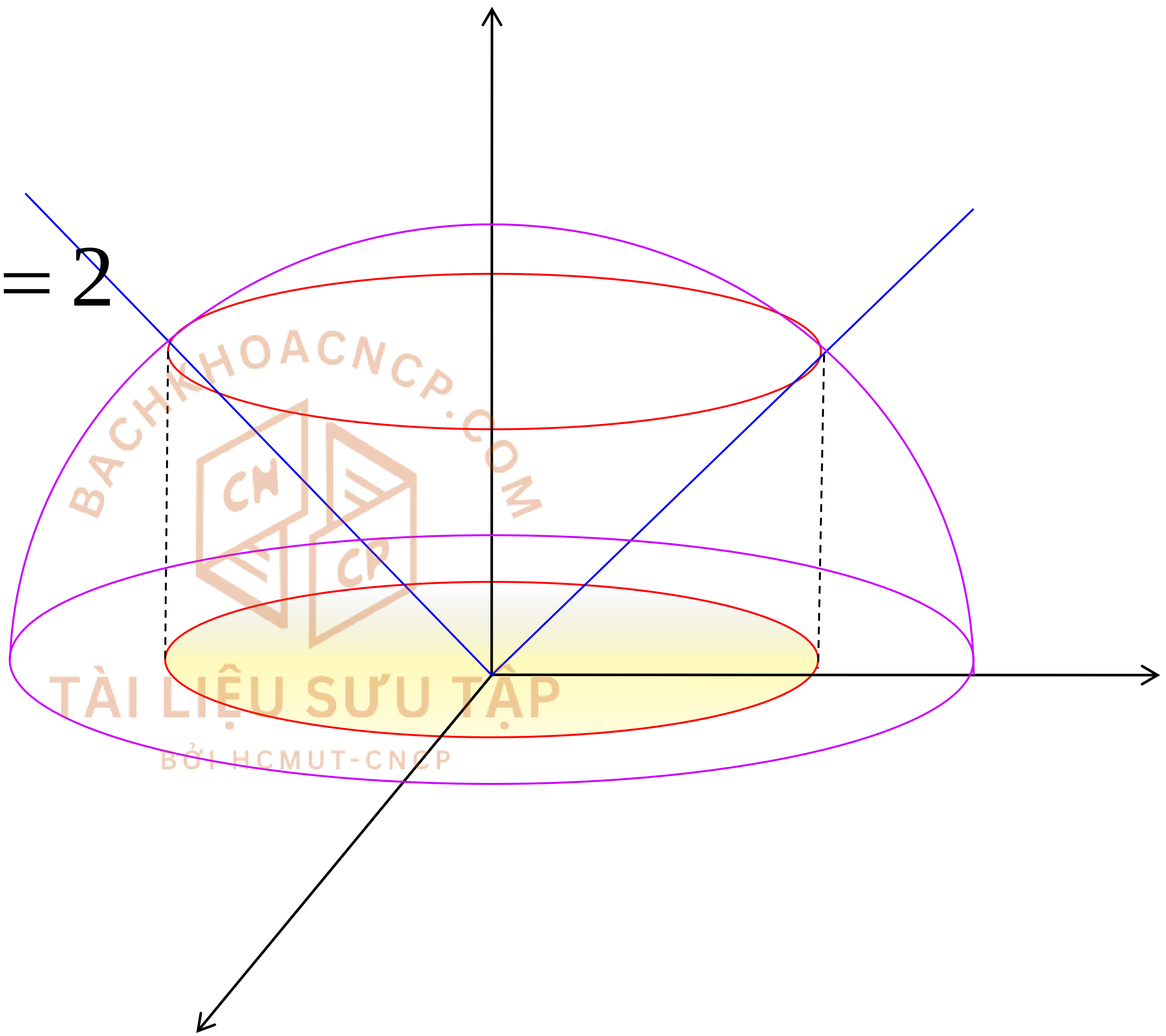
$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy$$

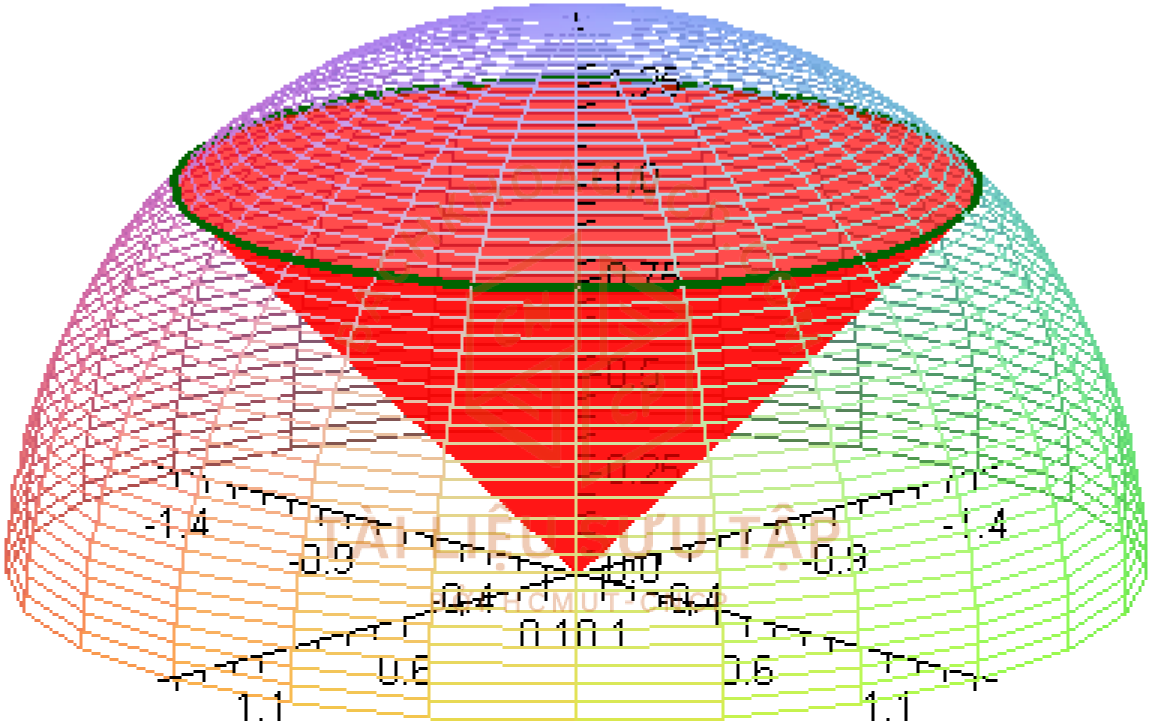
$$= \sqrt{2}S(D) = \sqrt{2}\pi$$

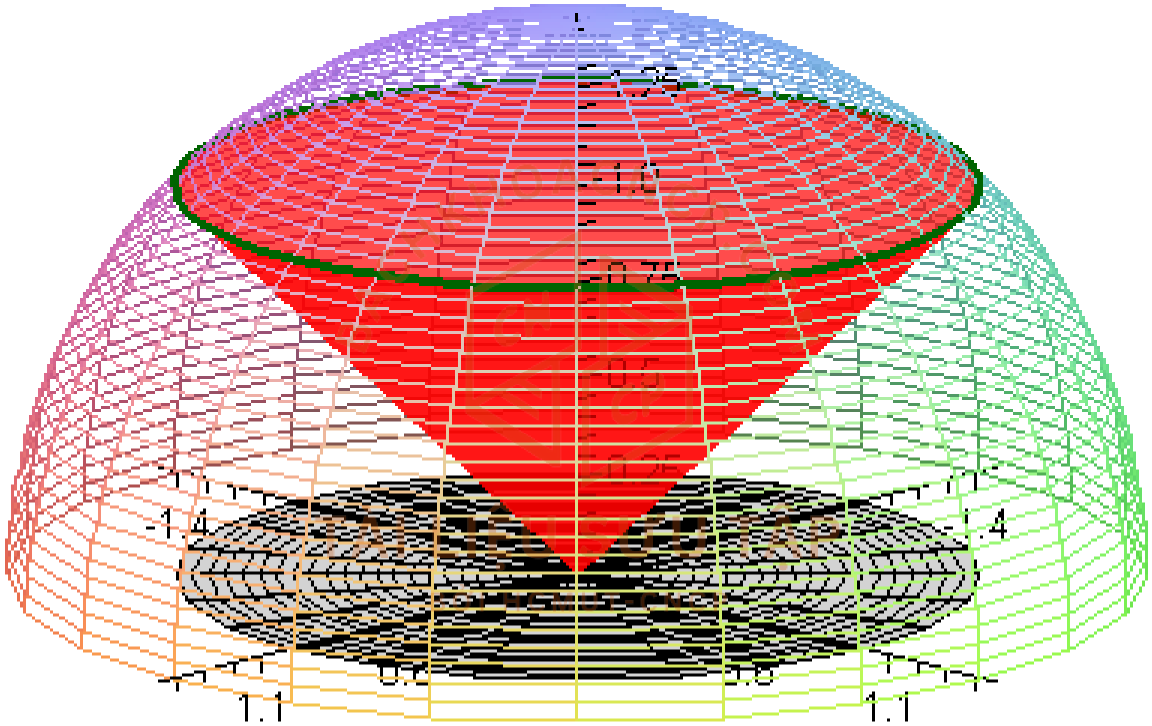
(S(D) là diện tích hình tròn có R = 1)

$$S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MC: x^2 + y^2 + z^2 = 2$$




1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
-1.4
-0.9
-0.4
0.1
0.6
1.1
-1.4
-0.9
-0.4
0.1
0.6
1.1



1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
-1.4
1.4
1.1
1.1

4/ Tính diện tích của phần mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$ bị chắn bởi các mặt:

$$x = z,\ z = \sqrt{3}x,\ \ x \geq 0$$

Phần mặt cầu gồm 2 nửa S_1 và S_2:

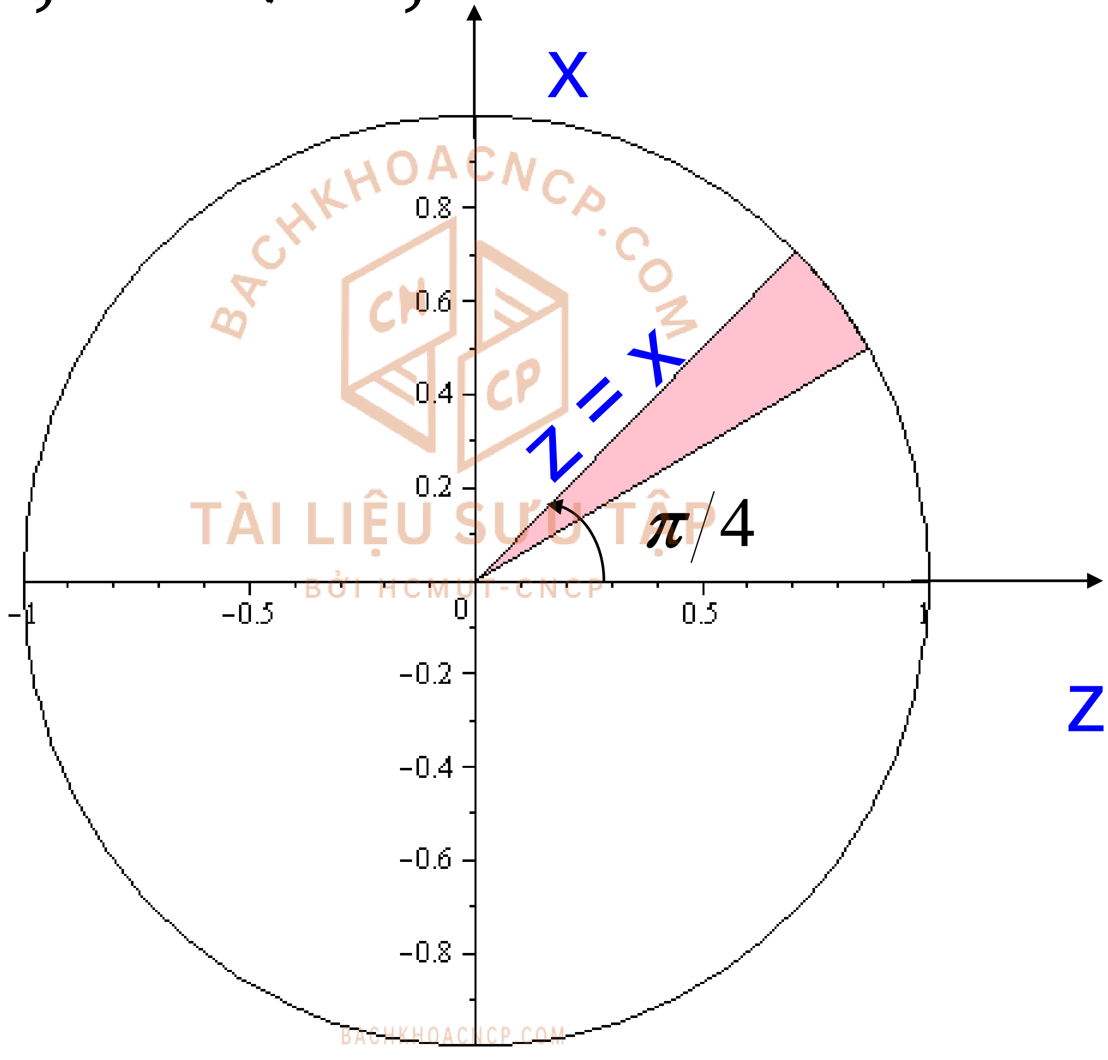
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{4 - x^2 - z^2}$$

Hình chiếu của S_1 và S_2 lên Oxz giống nhau và xác định bởi:

$$D: \begin{cases} 4 - x^2 - z^2 \geq 0, \\ z = x, z = \sqrt{3}x, x \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S = S_1 + S_2$

$$D:\begin{cases} 4-x^2-z^2 \geq 0, \\ z=x, z=\sqrt{3}x, x \geq 0 \end{cases}$$



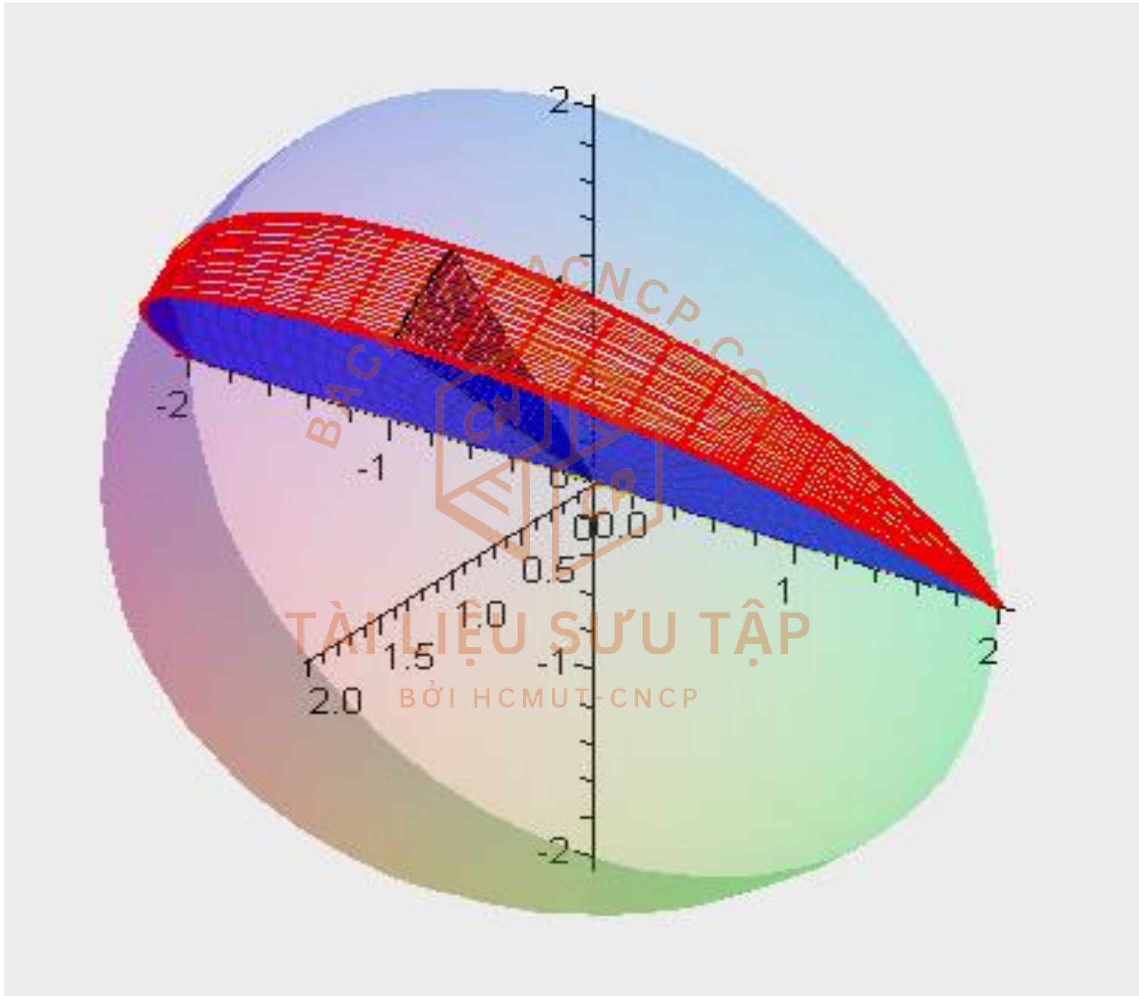
$$S_1 = S_2 = \iint\limits_D \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz$$

$$= \iint\limits_D \frac{2dxdz}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \frac{2rdr}{\sqrt{4 - r^2}} = \frac{\pi}{12}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}$$


2
-2
-1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
1
2
-1
-2