Chương 1. Ma trận

Bài 3. Hệ phương trình

GV. Nguyễn Hữu Hiệp

Bộ môn toán Ứng dụng, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh.

E-mail: nguyenhuuhiep@hcmut.edu.vn

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa (Hệ phương trình tuyến tính)

Hpt tuyến tính gồm m pt, n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.,$$

Định nghĩa (Hệ phương trình tuyến tính)

Hpt tuyến tính gồm m pt, n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right., \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Định nghĩa (Hệ phương trình tuyến tính)

Hpt tuyến tính gồm m pt, n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right., \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Cách viết ma trận

$$AX = b, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Định lý Kronecker Capelli

Cho hệ phương trình $Ax = b, A \in M_{m\times n}$.

- $r(A) < r(A|b)$: hệ vô nghiệm.
- $r(A) = r(A|b) = r$: hệ có nghiệm $\longrightarrow \left[\begin{array}{l} r = n : \text{duy nhất nghiệm,} \\ r < n : \text{vô số nghiệm.} \end{array}\right.$

Ví dụ 1.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$

Ví dụ 1.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : AX = b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Ví dụ 1.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : AX = b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = r(A|b) = 2 < n = 3 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r = 1$ ts.

Đặt $x_3 = t$. Từ (2) $\iff x_2 = \frac{1}{3}$. Từ (1) : $x_1 + \frac{2}{3} + t = 2 \iff x_1 = \frac{4}{3} - t$.

Vậy $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - t \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \end{cases}$

Ví dụ 2.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \end{cases}$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Ví dụ 2.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \end{cases}$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Vì $r(A) = 2 < r(A|b) = 3$ nên hệ vô nghiệm.

Ví dụ 3.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -19 \end{cases}$$

Ví dụ 3.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -19 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & -19 \end{array}\right]$$

Ví dụ 3.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -19 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & -19 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \; r(A) = r(A|b) = n : \text{hệ có 1 nghiệm.}$$

Ví dụ 3.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -19 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & -19 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \ r(A) = r(A|b) = n : \text{hệ có 1 nghiệm.}$$

Từ (3): $x_3 = 4$. Từ (2): $x_2 = -2$.

Từ (1): $x_1 = 5 - x_2 - x_3 = 3$. Vậy nghiệm là $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$

Ví dụ 4.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$$

Ví dụ 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

Ví dụ 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Ví dụ 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$r(A) = r(A|b) = 3 < n = 4$: hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 4.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$r(A) = r(A|b) = 3 < n = 4$: hệ có vô số nghiệm.

Đặt $x_4 = t$. Từ pt (3): $x_3 = -1$

Pt (2): $x_2 + 1 - t = 1 \iff x_2 = t$.

Pt(1):$x_1 + t + 1 + 2t = 1 \iff x_1 = -3t$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3t, t, -1, t), t \in R$.

Ví dụ 5.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 6 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 & = -3 \end{cases}$$

Ví dụ 5.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -3 \end{cases}$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Ví dụ 5.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 &= -3 \end{cases}$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \ r(A) = r(A|b) = 2 < n = 4:$$

hệ vô số nghiệm.

Ví dụ 5.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 6 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 & = -3 \end{cases}$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \; r(A) = r(A|b) = 2 < n = 4:$$

hệ vô số nghiệm. Đặt $x_2 = \alpha, x_4 = \beta$.

Từ pt(2): $x_3 = 4 - x_4 = 4 - \beta$.

Từ pt(1): $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 - \alpha - 4 + \beta - 2\beta = -3 - \alpha - \beta$

Vậy nghiệm của hệ là

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-3 - \alpha - \beta; \alpha; 4 - \beta; \beta), \forall \alpha, \beta \in R$$

.

Ví dụ 6.

Giải hệ
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -11 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -49 \end{cases}$$

Ví dụ 6.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -11 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -49 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 5 & -8 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ví dụ 6.

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -11 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -49 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 5 & -8 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Có $r(A) = r(A|b) = 2 < n = 4 \Rightarrow$ hệ VSN phụ thuộc vào $n - r = 2$ tham số.

Đặt $x_3 = a; x_4 = b$. Từ $(2) : 3x_2 + 5a - 8b = 37 \iff x_2 = \dfrac{37}{3} - \dfrac{5}{3}a + \dfrac{8}{3}b$

Từ $(1) : x_1 + \dfrac{74}{3} - \dfrac{10}{3}a + \dfrac{16}{3}b - a + 3b = 12 \iff x_1 = \dfrac{38}{3} - \dfrac{7}{3}a + \dfrac{7}{3}b$.

Vậy $(x_1; x_2; x_3; x_4) = \left(\dfrac{38}{3} - \dfrac{7}{3}a + \dfrac{7}{3}b; \dfrac{37}{3} - \dfrac{5}{3}a + \dfrac{8}{3}b; a; b\right), a, b \in \mathbb{R}$.

Hệ Cramer

Một hệ n phương trình, n ẩn số (số pt= số ẩn)

$$Ax = b, \quad A \in M_n \qquad (*)$$

có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\det(A) \neq 0.$$

Gọi là hệ Cramer

Ví dụ 7.

Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + mx_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 7.

Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + mx_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi

$$\det(A) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff -m - 8 \neq 0 \iff m \neq -8.$$

Hệ thuần nhất

có dạng $AX = 0, A \in M_n, X \in \mathbb{R}_{m\times n}$ luôn có ít nhất một nghiệm $X = 0$ (nghiệm tầm thường).

$$\left[\begin{array}{ll} r(A) = n: & \text{Hệ có duy nhất nghiệm } X=0 \\ r(A) < n: & \text{Hệ có vô số nghiệm: có nghiệm không tầm thường.} \end{array}\right.$$

Ví dụ.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$ chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường.

Ví dụ.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$ chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường.

Hệ chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow 2m + 1 \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 8.

Tìm m để hệ $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Ví dụ 8.

Tìm m để hệ $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) < n \iff |A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = (m+3)(m-1)^3.$$

Ví dụ 9.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 2 \\ x_1 + mx_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_4 = 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 9.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 2 \\ x_1 + mx_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_4 = 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hệ có nghiệm duy nhất $\iff r(A) = r(A|b) = n$.

Mà $A \in M_{3\times 4}$ nên $r(A) \leq 3 < n = 4$.

Vậy không tồn tại m để hệ có duy nhất nghiệm.

Ví dụ 10.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + mx_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$ vô nghiệm

Ví dụ 10.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + mx_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$ vô nghiệm

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & m & -7 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -m+2 & 3m-14 \end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) < r(A|b) \iff \begin{cases} -m+2 = 0 \\ 3m - 14 \neq 0 \end{cases} \iff m = 2.$$

Ví dụ 11.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2m - 1 \\ x_1 + 5x_2 + mx_3 = 12 \end{cases}$ có nghiệm

Ví dụ 11.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2m - 1 \\ x_1 + 5x_2 + mx_3 = 12 \end{cases}$ có nghiệm

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & 5 & m & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 2m-11 \\ 0 & 0 & m-2 & 2m-4 \end{array}\right].$$

Hệ có nghiệm $\iff r(A) = r(A|b) \iff \forall m \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 12.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + (m-1)x_2 & = -1 \\ x_1 + 2mx_2 + (1+m)x_3 & = -2-m \end{cases}$ vô số nghiệm.

Ví dụ 12.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + (m-1)x_2 & = -1 \\ x_1 + 2mx_2 + (1+m)x_3 & = -2-m \end{cases}$ vô số nghiệm.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2m & 1+m & -2-m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & -1 & -2 \\ 0 & 2m-1 & m & -3-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2h_2-h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2-m & m \\ 0 & 2m-1 & m & -3-m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2-m & -1+m \\ 0 & 0 & 2-2m^2 & 2m^2-6m-8 \end{array}\right]$$

Hệ vô số nghiệm $\iff \begin{cases} 2-2m^2 = 0 \\ 2m^2-6m-8 = 0 \end{cases} \iff m = -1.$

Ví dụ 13.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + (m+1)x_3 & = m+2 \\ -3x_1 + 3x_2 + (2m-9)x_3 & = m \end{cases}$ vô nghiệm.

Ví dụ 13.

Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + (m+1)x_3 & = m+2 \\ -3x_1 + 3x_2 + (2m-9)x_3 & = m \end{cases}$ vô nghiệm.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m+1 & m+2 \\ -3 & 3 & 2m-9 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & 2m-3 & m+3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2h_2 - h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 2m-3 & m+3 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3-(2m-3)h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2m^2+6m \end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm $\iff r(A) < r(A|b) \iff -2m^2 + 6m \neq 0 \iff \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases}.$

Ví dụ 14.

Biện luận số nghiệm của hệ $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$.

Ví dụ 14.

Biện luận số nghiệm của hệ $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$.

1. Hệ phương trình tuyến tính
2. Mô hình Input-Output Leontief

Mô hình I/O

Giả sử một ngành kinh tế có 3 ngành: công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ (Giá trị được tính bằng tiền USD).
Cầu trung gian x_{ij} là giá trị hàng hoá mà ngành i cung cấp cho ngành j cần để sx.
Cầu cuối b_i là giá trị hàng hoá của ngành i cần cho lao động, tiêu dùng và xuất khẩu...
Tổng cầu x_i là tổng giá trị hàng hoá của của cầu trung gian và cầu cuối (Tổng giá trị hàng hoá được tạo ra).

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + b_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + b_2 \\ x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + b_3 \end{cases}$$

Mô hình I/O

Giả sử một ngành kinh tế có 3 ngành: công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ (Giá trị được tính bằng tiền USD).
Cầu trung gian x_{ij} là giá trị hàng hoá mà ngành i cung cấp cho ngành j cần để sx.
Cầu cuối b_i là giá trị hàng hoá của ngành i cần cho lao động, tiêu dùng và xuất khẩu...
Tổng cầu x_i là tổng giá trị hàng hoá của của cầu trung gian và cầu cuối (Tổng giá trị hàng hoá được tạo ra).

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + b_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + b_2 \\ x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_{11}}{x_1} x_1 + \frac{x_{12}}{x_2} x_2 + \frac{x_{13}}{x_3} x_3 + b_1 \\ x_2 = \frac{x_{21}}{x_1} x_1 + \frac{x_{22}}{x_2} x_2 + \frac{x_{23}}{x_3} x_3 + b_2 \\ x_3 = \frac{x_{31}}{x_1} x_1 + \frac{x_{32}}{x_2} x_2 + \frac{x_{33}}{x_3} x_3 + b_3 \end{cases}$$

Mô hình I/O

Đặt $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$: gọi là hệ số chi phí trực tiếp (trên tổng GTSP của ngành j).

$\longrightarrow$ để tạo ra 1 (USD) GTSP ngành j, cần a_{ij} giá trị sản phẩm của ngành i.

Mô hình I/O

Đặt $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$: gọi là hệ số chi phí trực tiếp (trên tổng GTSP của ngành j).

$\longrightarrow$ để tạo ra 1 (USD) GTSP ngành j, cần a_{ij} giá trị sản phẩm của ngành i.

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$$X = AX + b, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ma trận A gọi là ma trận hệ số chí phí trực tiếp (hoặc mt kỹ thuật, mt đầu vào).

Ví dụ 15

Mô hình cân đối giữa 3 ngành công nghiệp, nông nghiêp và dịch vụ của một quốc gia có ma trận hệ số chi phí trực tiếp là $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.05 & 0.15 \\ 0.1 & 0.25 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

a/ Nêu ý nghĩa của từng số liệu trong ma trận.
b/ Trong năm 2021, ngành công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ lần lượt tạo ra được 2000, 5000 và 3000 (triệu USD). Tính cầu cuối và nêu ý nghĩa.

Ví dụ 15

Mô hình cân đối giữa 3 ngành công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ của một quốc gia có ma trận hệ số chi phí trực tiếp là $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.05 & 0.15 \\ 0.1 & 0.25 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

a/ Nêu ý nghĩa của từng số liệu trong ma trận.
b/ Trong năm 2021, ngành công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ lần lượt tạo ra được 2000, 5000 và 3000 (triệu USD). Tính cầu cuối và nêu ý nghĩa.

Ta có $X = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$. Cầu cuối là

$$b = (I - A)X = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.05 & -0.15 \\ -0.1 & 0.75 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 2950 \\ 1700 \end{pmatrix}.$$

c/

Giả sử chính phủ đặt ra mục tiêu năm 2022 là 3 ngành phải tạo ra cầu cuối lần lượt là 2000, 5000 và 3000 (triệu USD). Hãy tính tổng GTSP mà mỗi ngành cần sản xuất.

c/

Giả sử chính phủ đặt ra mục tiêu năm 2022 là 3 ngành phải tạo ra cầu cuối lần lượt là 2000, 5000 và 3000 (triệu USD). Hãy tính tổng GTSP mà mỗi ngành cần sản xuất.

Ta có $b = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$. Tổng cầu trong năm 2022 là

$$X = (I - A)^{-1} b = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.05 & -0.15 \\ -0.1 & 0.75 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4643 \\ 8751 \\ 8422 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 16

Giả sử để sản xuất được 1($), ngành công nghiệp cần 0.25$ của ngành công nghiệp, 0.3$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ; ngành nông nghiệp cần 0.15$ của ngành công nghiệp, 0.2$ của ngành nông nghiệp, 0.2$ của ngành dịch vụ; ngành dịch vụ cần 0.1$ ngành công nghiệp, 0.1$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ.

a/ Lập ma trận đầu vào của mô hình I-O(Ma trận kỹ thuật).

b/ Biết cầu cuối là $b = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ (triệu $). Tính tổng cầu.

Ví dụ 16

Giả sử để sản xuất được 1($), ngành công nghiệp cần 0.25$ của ngành công nghiệp, 0.3$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ; ngành nông nghiệp cần 0.15$ của ngành công nghiệp, 0.2$ của ngành nông nghiệp, 0.2$ của ngành dịch vụ; ngành dịch vụ cần 0.1$ ngành công nghiệp, 0.1$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ.

a/ Lập ma trận đầu vào của mô hình I-O(Ma trận kỹ thuật).

b/ Biết cầu cuối là $b = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ (triệu $). Tính tổng cầu.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$

Ví dụ 16

Giả sử để sản xuất được 1($), ngành công nghiệp cần 0.25$ của ngành công nghiệp, 0.3$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ; ngành nông nghiệp cần 0.15$ của ngành công nghiệp, 0.2$ của ngành nông nghiệp, 0.2$ của ngành dịch vụ; ngành dịch vụ cần 0.1$ ngành công nghiệp, 0.1$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ.

a/ Lập ma trận đầu vào của mô hình I-O(Ma trận kỹ thuật).

b/ Biết cầu cuối là $b = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ (triệu $). Tính tổng cầu.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow X = (I - A)^{-1} b \approx \begin{pmatrix} 5647 \\ 5189 \\ 4570 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 17.

Cho số liệu của 3 ngành Công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ của một quốc gia trong một năm như sau.

Tổng cầu	Cầu trung gian			Cầu cuối
8000	1000	2000	1300	
7500		1200	2400	3200
6500	800	1200		2800

(đơn vị triệu $)

a/ Điền các số liệu còn thiếu trong bảng và lập ma trận hệ số chi phí trực tiếp của bài toán (giả sử chi phí giữa các ngành không đổi qua từng năm.)

Ví dụ 17.

Cho số liệu của 3 ngành Công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ của một quốc gia trong một năm như sau.

Tổng cầu	Cầu trung gian			Cầu cuối
8000	1000	2000	1300	
7500		1200	2400	3200
6500	800	1200		2800

(đơn vị triệu $)

a/ Điền các số liệu còn thiếu trong bảng và lập ma trận hệ số chi phí trực tiếp của bài toán (giả sử chi phí giữa các ngành không đổi qua từng năm.)

$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2667 & 0.2 \\ 0.0875 & 0.16 & 0.4 \\ 0.1 & 0.16 & 0.2833 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2667 & 0.2 \\ 0.0875 & 0.16 & 0.369 \\ 0.1 & 0.16 & 0.2615 \end{pmatrix}$$

b/ Năm 2020, giá trị sản phẩm tạo ra mỗi ngành là $10000, 12000, 8000$ (triệu \$). Tính giá trị của cầu cuối.

Ví dụ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2667 & 0.2 \\ 0.0875 & 0.16 & 0.369 \\ 0.1 & 0.16 & 0.2615 \end{pmatrix}$$

b/ Năm 2020, giá trị sản phẩm tạo ra mỗi ngành là 10000, 12000, 8000 (triệu $). Tính giá trị của cầu cuối.

Ta có tổng cầu $X = \begin{pmatrix} 10000 \\ 12000 \\ 8000 \end{pmatrix}$. Tính cầu cuối là

$$b = (I - A).X = \begin{pmatrix} 3950 \\ 6251.2 \\ 2987.7 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2667 & 0.2 \\ 0.0875 & 0.16 & 0.369 \\ 0.1 & 0.16 & 0.2615 \end{pmatrix}$$

c/ Giả sử mục tiêu năm mới cần tạo ra giá trị mỗi ngành là $5000, 6000, 2000$ để sử dụng cho lao động, tiêu dùng và xuất khẩu. Tính giá trị sản phẩm của mỗi ngành cần sản xuất trong năm 2022.

Ví dụ 17.

$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2667 & 0.2 \\ 0.0875 & 0.16 & 0.369 \\ 0.1 & 0.16 & 0.2615 \end{pmatrix}$$

c/ Giả sử mục tiêu năm mới cần tạo ra giá trị mỗi ngành là $5000, 6000, 2000$ để sử dụng cho lao động, tiêu dùng và xuất khẩu. Tính giá trị sản phẩm của mỗi ngành cần sản xuất trong năm 2022.

Ta có cầu cuối là $b = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \\ 2000 \end{pmatrix}$. Tổng cầu là

$$X = (I - A)^{-1} b = \begin{pmatrix} 10604 \\ 11813 \\ 7133 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 17.

d/ Giả sử năm 2021, giá trị sản phẩm được tạo ra bởi 3 ngành là $10000, 12000, 8000$. Tính chi phí trực tiếp giữa các ngành (tức giá trị mỗi ngành này cung cấp cho ngành kia)

Ví dụ 17.

d/ Giả sử năm 2021, giá trị sản phẩm được tạo ra bởi 3 ngành là $10000, 12000, 8000$. Tính chi phí trực tiếp giữa các ngành (tức giá trị mỗi ngành này cung cấp cho ngành kia)

Xét $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$. Chi phí các ngành cung cấp cho ngành công nghiệp là

$$B_1 = A_1.10000 = \begin{pmatrix} 1250 \\ 875 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 17.

d/ Giả sử năm 2021, giá trị sản phẩm được tạo ra bởi 3 ngành là $10000, 12000, 8000$. Tính chi phí trực tiếp giữa các ngành (tức giá trị mỗi ngành này cung cấp cho ngành kia)

Xét $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$. Chi phí các ngành cung cấp cho ngành công nghiệp là

$$B_1 = A_1.10000 = \begin{pmatrix} 1250 \\ 875 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Tương tự cho ngành nông nghiệp và dịch vụ là

$$B2 = A_2.12000 = \begin{pmatrix} 3200 \\ 1920 \\ 1920 \end{pmatrix}, \quad B_3 = A_3.8000 = \begin{pmatrix} 1600 \\ 2953.8 \\ 2092.3 \end{pmatrix}$$

Tổng kết

Hệ tổng quát $AX = b, A \in M_{m\times n}$

- Nếu định lý Kronecker Capelli
- Hệ có nghiệm khi.................
- Hệ vô nghiệm khi.................
- Hệ có vô số nghiệm khi.............
- Hệ có nghiệm duy nhất khi............

Tổng kết

Hệ vuông $AX = b, A \in M_n$

- Hệ có nghiệm duy nhất khi.......... được gọi là hệ Cramer
- Nếu $\det(A) = 0$ thì hệ.....................

Hệ thuần nhất $AX = 0$

- Hệ có duy nhất khi.............
- hệ vô số nghiệm khi............
- Hệ vô nghiệm khi...............

Mô hình Input-Output Leontief

- Ma trận kỹ thuật $A = (a_{ij})_n \in M_n$. a_{ij} có ý là ....
  ....
- Công thức mô hình $I - O$....................
- x_i được gọi là............... có ý nghĩa là..............
- b_i được gọi là............... có ý nghĩa là..............
- x_{ij} được gọi là............. có ý nghĩa là..............

Bài tập 1. Giải hệ phương trình tuyến tính

1/ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

2/ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right]$

3/ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$.

4/ $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$

5/ $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$

6/ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

Bài tập 1. Giải hệ.

$$1/\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$2/\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Bài tập 2.

1/ Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$
có duy nhất nghiệm $X = 0$.

2/ Tìm m để hệ có vô số nghiệm, $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + mx_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$

Bài tập 2

3/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 2 \\ x_1 + mx_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_4 = 3 \end{cases}$.

4/ Tìm $m \in R$ để hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + mx_3 + 2x_4 = 0 \\ mx_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Bài tập 2.

5/ Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau vô nghiệm $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + mx_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$

6/ Tìm tất cả $m \in R$ để hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2m - 1 \\ x_1 + 5x_2 + mx_3 = 12 \end{cases}$ có nghiệm

Bài tập 2

7/ Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + (m-1)x_2 & = -1 \\ x_1 + 2mx_2 + (1+m)x_3 & = -2 - m \end{cases}$

8/ Tìm m để hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + (m+1)x_3 & = m+2 \\ -3x_1 + 3x_2 + (2m-9)x_3 & = m \end{cases}$

vô nghiệm.

Bài tập 3.

Biện luận **số nghiệm** của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

Bài tập 4.

Mô hình cân đối giữa 3 ngành công nghiệp, nông nghiêp và dịch vụ của một quốc gia có ma trận hệ số chi phí trực tiếp là

$$A = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.1 & 0.12 \\ 0.13 & 0.2 & 0.15 \\ 0.14 & 0.13 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a/ Nêu ý nghĩa của từng số liệu trong ma trận.

b/ Trong năm 2021, ngành công nghiệp, nông nghiệp và dịch vụ lần lượt tạo ra được 2000, 5000 và 3000 (triệu USD). Tính cầu cuối và nêu ý nghĩa.

c/ Cho cầu cuối là $7000, 6000, 5000$ (triệu USD). Tính tổng cầu và cầu trung gian (giá trị chi phí trực tiếp giữa các ngành).

Bài tập 5.

Giả sử để sản xuất được 1($), ngành công nghiệp cần 0.2$ của ngành công nghiệp, 0.12$ của ngành nông nghiệp, 0.09$ của ngành dịch vụ; ngành nông nghiệp cần 0.25$ của ngành công nghiệp, 0.2$ của ngành nông nghiệp, 0.15$ của ngành dịch vụ; ngành dịch vụ cần 0.1$ ngành công nghiệp, 0.15$ của ngành nông nghiệp, 0.1$ của ngành dịch vụ.

a/ Lập ma trận hệ số chi phí trực tiếp của mô hình I-O trên.

b/ Biết cầu cuối là $10000, 12000, 15000$ (triệu $). Tính cầu cuối.

c/ Biết cầu cuối là $b = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix}$ (triệu $). Tính tổng cầu và cầu trung gian.

Bài tập 6.

Trong một mô hình kinh tế đơn giản gồm 3 ngành: sản xuất, dịch vụ và nông nghiệp, người ta mô hình hóa bằng mô hình Input - output. Ma trận đầu vào khi xếp 3 ngành trên tương ứng theo các cột được cho như sau

Ngành	Sản xuất	Dịch vụ	Nông nghiệp
Sản xuất	0.2	0.12	0.13
Dịch vụ	0.14	0.1	0.15
Nông nghiệp	0.11	0.1	0.17

a/ Để tạo ra 1 (triệu đồng) giá trị sản phẩm, ngành nông nghiệp cần bao nhiêu (triệu đồng) giá trị sản phẩm của ngành dịch vụ.

b/ Cho tổng cầu là (2; 1.5; 3) (tỷ $). Tính cầu cuối.

c/ Tính giá trị sản phẩm mà ngành nông nghiệp cung cấp cho ngành dịch vụ.

Ví dụ 7.

Xét mô hình Input-Output mở gồm 3 ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$. Biết cầu cuối của 3 ngành là $(1500, 2000, 1600)$.

a/ Tính tổng cầu

b/ Tính cầu trung gian.

THANK YOU FOR ATTENTION