

CÂU LẠC BỘ CHÚNG TA CÙNG TIỀN

BÀI TẬP TỰ LUYỆN CUỐI KÌ

MÔN: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

ĐÁP ÁN

CÁC CÂU HỎI ỨNG DỤNG

I. Mô hình Leslie

Câu 1. Giả sử độ tuổi lớn nhất của con cá thuộc một loài động vật là 3 năm. Người ta chia con cá thành 3 lớp tuổi với thời gian 1 năm cho mỗi nhóm tuổi. Ở lứa thứ nhất, cá thể cá chưa sinh sản. Ở lứa tuổi thứ hai, trung bình mỗi cá thể sinh ra 7 cá thể lứa thứ nhất; lứa tuổi thứ ba sinh trung bình 4 cá thể. Biết có khoảng 30% cá thể cá thuộc lớp thứ nhất sống sót qua lứa thứ hai, khoảng 50% cá thể cá thuộc lớp thứ hai sống và trở thành lứa thứ ba. Giả sử ban đầu lứa thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt có số cá thể cá trong bầy là 80,60,30.

Hỏi tổng số cá thể cá của bầy đang xét sau 5 năm?

Câu 2. Một nhóm nghiên cứu đang khảo sát các cá thể cá của một đàn cá basa. Chia cá thành các nhóm theo độ tuổi của chúng, nhóm I độ tuổi từ 0-4 tháng, nhóm II từ 4-8 tháng, nhóm III từ 8 tháng trở lên. Biết tỉ lệ sống sót của cá nhóm I để đến nhóm II là 0.65; tỉ lệ của cá nhóm II để đến nhóm III là 0.7; tỉ lệ sống của cá nhóm III qua mỗi 4 tháng là 0.9. Ngoài ra, tỉ lệ sinh con cá của nhóm II là 0.4, nhóm III là 0.5. Biết ban đầu có 300 cá thể nhóm I, 200 cá thể nhóm II và 50 cá thể nhóm III. Hỏi sau 1 năm có bao nhiêu cá thể cá nhóm III?

II. Mô hình Markov- Chuỗi Markov

(Bài toán sau đây dùng cho câu 3 và 4.) Một tập đoàn có 3 chuỗi tiệm spa trong một thành phố, lần lượt là A,B và C. Theo quan sát, người ta nhận thấy rằng sau một tháng, khách hàng ban đầu đến A sẽ có 30% đến cửa hàng B và 30% đến C, còn lại vẫn sẽ đến A; khách hàng ban đầu đến B sẽ có 20% đến A và 25% đến C trong tháng sau, còn lại vẫn đến B; khách hàng ban đầu đến C sẽ có 25% đến A và 10% đến B, còn lại vẫn đến C. Biết ban đầu tỉ lệ khách hàng giữa 3 tiệm A,B,C lần lượt là $(0.4; 0.4; 0.2)^T$.

Câu 3. Hỏi tỉ lệ (làm tròn đến 2 chữ số) phân bố khách hàng giữa 3 tiệm sau 3 tháng?

Câu 4. Hỏi về lâu dài, tỉ lệ khách hàng đến B là bao nhiêu?

III. Hệ phương trình tuyến tính

Câu 5. Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = \frac{45}{2} \\ -4x_1 + 6x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 19 \end{cases}$$

Câu 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ -9x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

IV. Mô hình I-O Leontief

(Bài toán sau dùng cho câu 7 và 8.) Xét giữa 3 ngành dầu khí, than đá và vận tải. Để tạo được lượng hàng đầu vào có giá trị 1\$ thì ngành dầu khí cần 0.15\$ của than đá, 0.25\$ của vận tải và 0.1\$ của chính dầu khí; than đá cần 0.1\$ của dầu khí, 0.2\$ của than đá và 0.25\$ của vận tải; vận tải cần 0.3\$ của dầu khí, 0.1\$ của than đá và 0.1\$ của vận tải. Biết nhu cầu cuối cùng của mỗi ngành lần lượt là 400, 300 và 450.

Câu 7. Tìm đầu ra của mỗi ngành.

Câu 8. Tìm đầu ra cuối cùng của ngành dầu khí, giả sử nhờ cải tiến kĩ thuật mà ngành than đá có thể cắt giảm 50% chi phí từ ngành dầu khí.

V. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Câu 9. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

với $x_1(0) = 8, x_2(0) = 0$.

Câu 10. Một cái hồ chứa cá và tảo. Biết tảo là nguồn thức ăn chính của cá. Sinh khối của cá và tảo (đơn vị tấn) tại thời điểm t (đơn vị năm) lần lượt là $x(t), y(t)$. Bằng dự đoán người ta đưa ra mô hình phát triển của hai loài này là:

$$\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t} \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

Biết khi $t = 0$, ta có $x(0) = 0.3, y(0) = 0.7$. Hỏi sau bao lâu thì tảo biến mất khỏi hồ (sinh khối của tảo bằng 0)? Kết quả làm tròn đến 2 chữ số.

(A) 0.46.

(B) 0.35.

(C) 0.72.

(D) 0.84.

VI. Phương pháp bình phương cực tiểu

Câu 11. Tìm hàm bậc 2 $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, biết đồ thị đi qua tập hợp điểm $D = \{(1; 0.8), (2; 5), (1.3; 2.5), (4; 16.3)\}$.