HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

TP. HCM — 2018

NỘI DUNG BÀI HỌC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ
2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS
3. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU
4. CHUẨN CỦA VÉCTƠ, CHUẨN CỦA MA TRẬN
5. NHỮNG PHƯƠNG PHÁP LẶP

ĐẶT VẤN ĐỀ

Hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \quad (1)$$

thường xuất hiện trong các bài toán kỹ thuật.

1. Ta chỉ xét hệ gồm n phương trình và n ẩn số, trong đó $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ và $\det A \neq 0$. Do đó hệ sẽ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$.
2. Tuy nhiên, việc tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} đôi khi còn khó khăn gấp nhiều lần so với việc giải trực tiếp hệ phương trình (1). Do đó cần phải có phương pháp để giải hệ (1) hiệu quả.

SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN HÀNG ĐỂ GIẢI HỆ

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Nếu thực hiện các phép biến đổi sơ cấp sau trên hệ (1):

1. Đổi chỗ các phương trình của hệ $(h_i \leftrightarrow h_j)$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ có đánh số lại các ẩn.
2. Nhân vào một phương trình của hệ một số $\lambda \neq 0 (h_i \to \lambda h_i)$.
3. Cộng vào một phương trình của hệ một phương trình khác đã được nhân với một số $(h_i \to h_i + \lambda h_j)$

thì ta sẽ được một hệ phương trình mới tương đương với hệ (1).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{BĐ sơ cấp trên hàng}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right) \text{với}$$

$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n.$

PHƯƠNG PHÁP GAUSS

1. Viết ma trận mở rộng $A_B = (A|B)$ của hệ (1).
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng biến đổi ma trận mở rộng về ma trận bậc thang.
3. Viết hệ phương trình tương ứng với ma trận bậc thang.
4. Ta giải hệ phương trình ngược từ dưới lên, tìm biến x_n sau đó $x_{n-1}, \ldots, x_1$ ta được 1 nghiệm duy nhất.

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa 3.1

Ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *được gọi là* ***ma trận tam giác trên***.

ĐỊNH NGHĨA 3.2

Ma trận vuông $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *được gọi là ma trận tam giác dưới.*

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Nội dung của phương pháp nhân tử LU là phân tích ma trận A thành tích của 2 ma trận L và U, trong đó L là ma trận tam giác dưới, còn U là ma trận tam giác trên.
2. Khi đó việc giải hệ (1) sẽ trở thành giải 2 hệ phương trình $LY = B$ và $UX = Y$.
3. Có nhiều phương pháp phân tích $A = LU$, tuy nhiên ta thường xét trường hợp L có đường chéo chính bằng 1 và gọi là phương pháp Doolittle.

L và U có dạng

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Các phần tử của 2 ma trận L và U được xác định theo công thức

$$\begin{cases} u_{1j} &= a_{1j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \\ \ell_{i1} &= \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} \quad (2 \leqslant i \leqslant n) \\ u_{ij} &= a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \quad (1 < i \leqslant j) \\ \ell_{ij} &= \dfrac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) \quad (1 < j < i) \end{cases}$$

Ví dụ 3.1

Giải hệ phương trình bằng phương pháp LU

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{cases}$$

Giải.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Theo công thức nhân 2 ma trận L và U ta có

$1.u_{11} + 0.0 + 0.0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2$;

$1.u_{12} + 0.u_{22} + 0.0 = a_{12} = 2 \Rightarrow u_{12} = 2$;

$1.u_{13} + 0.u_{23} + 0.u_{33} = a_{13} = -3 \Rightarrow u_{13} = -3$.

$\ell_{21}.u_{11} + 1.0 + 0.0 = a_{21} \Rightarrow \ell_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} = \dfrac{-4}{2} = -2$;

$\ell_{21}.u_{12} + 1.u_{22} + 0.0 = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \ell_{21}.u_{12} = -3 - (-2).2 = 1$;

$\ell_{21}.u_{13} + 1.u_{23} + 0.u_{33} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \ell_{21}.u_{13} = 4 - (-2).(-3) = -2$;

$\ell_{31}.u_{11} + \ell_{32}.0 + 1.0 = a_{31} \Rightarrow \ell_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1;$

$\ell_{31}.u_{12} + \ell_{32}.u_{22} + 1.0 = a_{32} \Rightarrow \ell_{32} = \dfrac{1}{u_{22}}(a_{32} - \ell_{31}.u_{12}) = \dfrac{1}{1}(1 - 1.2) = -1;$

$\ell_{31}.u_{13} + \ell_{32}.u_{23} + 1.u_{33} = a_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - \ell_{31}.u_{13} - \ell_{32}.u_{23} = 2 - 1.(-3) - (-1).(-2) = 3$

Do đó $LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Y = L^{-1}B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = U^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bài tập

Bài tập 3.1

Sử dụng phương pháp nhân tử LU giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Đáp số $(x_1, x_2, x_3) = (89/34, 2/17, -31/34)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

VÍ DỤ 3.2

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. *Phân tích* $A = LU$ *theo phương pháp Doolittle, phần tử* ℓ_{32} *ma trận* L *là:*

1. 3.0000
2. 4.0000
3. 5.0000
4. 6.0000
5. *Các câu kia sai.*

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$1.u_{11} + 0.0 + 0.0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2;$$

$$1.u_{12} + 0.u_{22} + 0.0 = a_{12} = 3 \Rightarrow u_{12} = 3;$$

$$1.u_{13} + 0.u_{23} + 0.u_{33} = a_{13} = 3 \Rightarrow u_{13} = 3.$$

$$\ell_{21}.u_{11} + 1.0 + 0.0 = a_{21} = 2 \Rightarrow \ell_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\ell_{21}.u_{12} + 1.u_{22} + 0.0 = a_{22} = 2$$

$$\Rightarrow u_{22} = a_{22} - \ell_{21}.u_{12} = 2 - 1.3 = -1;$$

$$\ell_{31}.u_{11} + \ell_{31}.0 + 1.0 = a_{31} = 6 \Rightarrow \ell_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$\ell_{31}.u_{12} + \ell_{32}.u_{22} + 1.0 = a_{32} = 5$$

$$\Rightarrow \ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}.u_{12}}{u_{22}} = \frac{5 - 3 * 3}{-1} = 4;$$

ĐS. $\Rightarrow$ Câu 2

Ví dụ 3.3

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Phân tích* $A = LU$ *theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử* $u_{11} + u_{22} + u_{33}$ *của ma trận U là*

1. 63.7500
2. 64.7500
3. 65.7500
4. 66.7500
5. *Các câu kia sai.*

$$1.u_{11}+0.0+0.0=a_{11}=2\Rightarrow u_{11}=2;$$

$$1.u_{12}+0.u_{22}+0.0=a_{12}=1\Rightarrow u_{12}=1;$$

$$1.u_{13}+0.u_{23}+0.u_{33}=a_{13}=8\Rightarrow u_{13}=8.$$

$$\ell_{21}.u_{11}+1.0+0.0=a_{21}=6\Rightarrow \ell_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}=\frac{6}{2}=3;$$

$$\ell_{21}.u_{12}+1.u_{22}+0.0=a_{22}=5$$

$$\Rightarrow u_{22}=a_{22}-\ell_{21}.u_{12}=5-3.1=2;$$

$$\ell_{21}.u_{13}+1.u_{23}+0.u_{33}=a_{23}=3$$

$$\Rightarrow u_{23}=a_{23}-\ell_{21}.u_{13}=3-3.8=-21;$$

$\ell_{31}.u_{11} + \ell_{31}.0 + 1.0 = a_{31} = 1 \Rightarrow \ell_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}} = \dfrac{1}{2};$

$\ell_{31}.u_{12} + \ell_{32}.u_{22} + 1.0 = a_{32} = 6$

$\Rightarrow \ell_{32} = \dfrac{a_{32} - \ell_{31}.u_{12}}{u_{22}} = \dfrac{6 - \frac{1}{2} * 1}{2} = \dfrac{11}{4};$

$\ell_{31}.u_{13} + \ell_{32}.u_{23} + 1.u_{33} = a_{33} = 9$

$\Rightarrow u_{33} = a_{33} - \ell_{31}.u_{13} - \ell_{32}.u_{23} =$

$9 - \dfrac{1}{2} * 8 - \dfrac{11}{4} * (-21) = \dfrac{251}{4};$

Vậy $u_{11} + u_{22} + u_{33} = 2 + 2 + \dfrac{251}{4} = 66.75.$

$\Rightarrow$ Câu 4

ĐỊNH NGHĨA 3.3

Ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu $A^T = A$.

ĐỊNH NGHĨA 3.4

Ma trận vuông A được gọi là xác định dương nếu như $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : x^T A x > 0$.

ĐỊNH LÝ 3.1

Ma trận vuông A xác định dương khi và chỉ khi tất cả những định thức con chính của nó đều lớn hơn 0.

ĐỊNH LÝ 3.2

Cho ma trận vuông A là đối xứng và xác định dương. Khi đó $A = B.B^T$, với B là ma trận tam giác dưới và được xác định như sau:

$$\begin{cases} b_{11} = \sqrt{a_{11}}, b_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{b_{11}}, & (2 \leqslant i \leqslant n) \\ b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, & (1 < i \leqslant n) \\ b_{ij} = \dfrac{1}{b_{jj}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}\right), & (1 < j < i) \end{cases}$$

VÍ DỤ 3.4

Giải hệ phương trình bằng phương pháp Choleski

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_3 &= 3 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng

$\Delta_1 = |1| = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0$. Vậy A là ma trận xác định dương.

$$A = B.B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình viết lại dưới dạng ma trận

$$Ax = b \Rightarrow B.B^T.x = b \Leftrightarrow \begin{cases} By = b \\ B^T x = y \end{cases}$$

$$By = b \Rightarrow y = B^{-1}.b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T x = y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

VÍ DỤ 3.5

Tìm ma trận B trong phép phân tích Choleski của ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

BÀI TẬP 5.1

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & \alpha \\ 4 & 6 & 2 \\ \alpha & 2 & 7 \end{pmatrix}$. *Với những giá trị nào của* α *thì ma trận A là xác định dương*

$$\Delta_1 = |4| = 4 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & \alpha \\ 4 & 6 & 2 \\ \alpha & 2 & 7 \end{vmatrix} = -6.\alpha^2 + 16\alpha + 40 > 0$$

BÀI TẬP 5.2

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *Phân tích* $A = BB^T$ *theo phương pháp Choleski, ma trận* B *là*

1. $B = \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ 1 & 2.24 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ -1 & 2.24 \end{pmatrix}$.
3. $B = \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ 0 & 2.28 \end{pmatrix}$.
4. $B = \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ -1 & 2.28 \end{pmatrix}$.
5. *Các câu kia sai*

$$A = B.B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

$b_{11}b_{11} + 0 \times 0 = a_{11} = 4 \Rightarrow b_{11} = 2.$

$b_{11}b_{21} + 0.b_{22} = a_{12} = 2 \Rightarrow b_{21} = 1.$

$b_{21}b_{11} + 0.b_{22} = a_{21} = 2 \Rightarrow$ thỏa

$b_{21}b_{21} + b_{22}.b_{22} = a_{22} = 6 \Rightarrow b_{22} = \sqrt{5}. \Rightarrow$ Câu 1

BÀI TẬP 5.3

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 25 \end{pmatrix}$. *Phân tích* $A = BB^T$ *theo phương pháp Choleski, tổng các phần tử* $b_{11} + b_{22} + b_{33}$ *của ma trận B là*

1. 5.3182
2. 5.3184
3. 5.3186
4. 5.3188
5. *Các câu kia sai.*

$$A = B.B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{11}b_{11} + 0 \times 0 + 0 \times 0 = a_{11} = 4 \Rightarrow b_{11} = 2.$$

$$b_{11}b_{21} + 0.b_{22} + 0 \times 0 = a_{12} = 2 \Rightarrow b_{21} = 1.$$

$$b_{11}b_{31} + 0.b_{32} + 0.b_{33} = a_{13} = -5 \Rightarrow b_{31} = -\frac{5}{2}.$$

$$b_{21}b_{11} + 0.b_{22} + 0 \times 0 = a_{21} = 2 \Rightarrow \text{thỏa}$$

$$b_{21}b_{21} + b_{22}.b_{22} + 0 \times 0 = a_{22} = 3 \Rightarrow b_{22} = \sqrt{2}.$$

$$b_{21}b_{31} + b_{22}.b_{32} + 0.b_{33} = a_{23} = 3 \Rightarrow b_{32} = \frac{11}{2\sqrt{2}}.$$

$$b_{31}b_{11} + 0.b_{32} + 0.b_{33} = a_{31} = -5 \Rightarrow \text{thỏa}$$

$$b_{31}b_{21} + b_{32}.b_{22} + 0.b_{33} = a_{32} = 3 \Rightarrow \text{thỏa}$$

$$b_{31}b_{31} + b_{32}.b_{32} + b_{33}.b_{33} = a_{33} = 25 \Rightarrow b_{33} = \frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}}.$$

$b_{11} + b_{22} + b_{33} \approx 5.3182.$ Câu 1

ĐỊNH NGHĨA 4.1

Trong không gian tuyến tính thực $\mathbb{R}^n$. *Chuẩn của véctơ* $X \in \mathbb{R}^n$ *là một số thực, ký hiệu* $||X||$ *thỏa các điều kiện sau:*

1. $\forall X \in \mathbb{R}^n, ||X|| \geqslant 0, ||X|| = 0 \Leftrightarrow X = 0$
2. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda X|| = |\lambda|.||X||$
3. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, ||X + Y|| \leqslant ||X|| + ||Y||.$

Trong $\mathbb{R}^n$ có rất nhiều chuẩn, tuy nhiên ta chỉ xét chủ yếu 2 chuẩn thường dùng sau:

$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

- $||X||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$
- $||X||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|.$

Ví dụ 4.1

Cho $X = (1, 2, 3, -5)^T$. $||X||_1 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11$ *và* $||X||_\infty = \max\{1, 2, 3, 5\} = 5$

CHUẨN CỦA MA TRẬN

ĐỊNH NGHĨA 4.2

Chuẩn của ma trận tương ứng với chuẩn véctơ được xác định theo công thức

$$||A|| = \max_{||X||=1} ||AX|| = \max_{||X||\neq 0} \frac{||AX||}{||X||}$$

Từ định nghĩa chuẩn của ma trận, ta có $||AX|| \leqslant ||A||.||X||$

ĐỊNH LÝ 4.1

Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij})$ *được xác định như sau:*

- $||A||_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ – *chuẩn cột*
- $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ – *chuẩn hàng*

VÍ DỤ 4.2

$$Cho\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}.\ Lúc\ này$$

$$||A||_1 = \max\{2+5+6, 1+3+7, 4+2+3\} = 13,$$

$$||A||_\infty = \max\{2+1+4, 5+3+2, 6+7+3\} = 16.$$

Bài tập

Bài tập 3.1

Tính chuẩn $||.||_1$ *và* $||.||_\infty$ *của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Đáp số $||A||_1 = 6$ và $||A||_\infty = 6$

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa 5.1

Xét dãy các véctơ $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *với* $X^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. *Dãy các véctơ này được gọi là* ***hội tụ*** *về véctơ* $\overline{X}$ *khi* $m \to +\infty$ *nếu và chỉ nếu* $||X^{(m)} - \overline{X}|| \to 0$ *khi* $m \to +\infty$ *(hội tụ theo chuẩn).*

ĐỊNH LÝ 5.1

Để dãy các véctơ $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *hội tụ về véctơ* $\overline{X}$ *khi* $m \to +\infty$ *thì điều kiện cần và đủ là những dãy* $(x_k^{(m)})$ *hội tụ về* $\overline{x_k}, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. *(hội tụ theo tọa độ).*

Xét hệ phương trình $AX = B(det(A) \neq 0)$ có nghiệm $x = A^{-1}.B$. Cho B một số gia ΔB, khi đó nghiệm X tương ứng sẽ có số gia ΔX và $A.\Delta X = \Delta B \Leftrightarrow \Delta X = A^{-1}.\Delta B$. Như vậy, ta có

$$||\Delta X|| = ||A^{-1}.\Delta B|| \leqslant ||A^{-1}||.||\Delta B||$$

và

$$||B|| = ||AX|| \leqslant ||A||.||X||$$

Từ đây ta được

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leqslant ||A||.||A^{-1}||.\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

ĐỊNH NGHĨA 5.2

Số nhỏ nhất $k(A)$ *thỏa điều kiện* $k(A) \leqslant Cond(A) = ||A||.||A^{-1}||$ *được gọi là* ***số điều kiện của ma trận A.***

Số điều kiện $k(A)$ của ma trận A thỏa $1 \leqslant k(A) \leqslant +\infty$

Trong thực hành tính toán, ta có thể gặp những hệ phương trình tuyến tính mà những thay đổi nhỏ trên các hệ số tự do của hệ sẽ gây ra những thay đổi rất lớn về nghiệm. Hệ phương trình tuyến tính như vậy được gọi là hệ phương trình không ổn định trong tính toán. Nếu ngược lại, hệ được gọi là hệ phương trình ổn định trong tính toán

Chú ý. Người ta chứng minh được rằng, số điều kiện của ma trận đặc trưng cho tính ổn định của hệ phương trình tuyến tính. Giá trị $k(A)$ càng gần với 1 thì hệ càng ổn định. Số điều kiện $k(A)$ càng lớn thì hệ càng mất ổn định.

Ví dụ 5.1

Xét hệ phương trình $AX = B$ *với* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.01 \end{pmatrix}$. *Dễ dàng thấy được hệ có nghiệm* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Bây giờ xét hệ* $A\widetilde{X} = \widetilde{B}$ *với* $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.1 \end{pmatrix}$.

Nghiệm bây giờ của hệ là $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \end{pmatrix}$. *Ta thấy* $k_\infty(A) = 1207.01 >> 1$. *Do đó* $B \approx \widetilde{B}$ *nhưng* X *và* $\widetilde{X}$ *khác nhau rất xa.*

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP 4.1

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Số điều kiện tính theo chuẩn một của ma trận A là:*

1. 3.6429
2. 4.6429
3. 5.6429
4. 6.6429
5. *Các câu kia sai.*

$Mat A \; x^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$

$k = ||A||_1.||A^{-1}||_1 = \max\{|2|+|6|,$
$|-4|+|9|\} * \max\{|\frac{3}{14}|+|-\frac{1}{7}|, |\frac{2}{21}|+|\frac{1}{21}|\} = 13 * \frac{5}{14} \approx$
$4.64285 \Rightarrow$ Câu 2

Bài tập 4.2

Cho $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 7 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. *Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:*

1. 4.6854
2. 4.6954
3. 4.7054
4. 4.7154
5. *Các câu kia sai.*

$$MatA\,x^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{112} & -\frac{19}{448} & -\frac{53}{448} \\ -\frac{3}{28} & -\frac{13}{112} & \frac{5}{112} \\ -\frac{1}{56} & -\frac{23}{224} & -\frac{17}{224} \end{pmatrix}$$

$k = ||A||_\infty.||A^{-1}||_\infty =$
$\max\{|-6|+|-4|+|7|, |4|+|-3|+|-8|,$
$|-4|+|5|+|-4|\} * \max\{|-\frac{13}{112}|+|-\frac{19}{448}|+|-\frac{53}{448}|, |-$
$\frac{3}{28}|+|-\frac{13}{112}|+|\frac{5}{112}|, |-\frac{1}{56}|+|-\frac{23}{224}|+|-\frac{17}{224}|\} =$
$17 * \frac{31}{112} \approx 4.70535 \Rightarrow$ Câu 3

Những phương pháp lặp là những phương pháp giải gần đúng hệ phương trình tuyến tính. Để giải hệ (1) ta đưa nó về dạng tương đương $X = TX + C$, với T là ma trận vuông cấp n và C và 1 véctơ cột đã biết. Xuất phát từ véctơ ban đầu $X^{(0)}$ ta xây dựng dãy $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ theo công thức

$$X^{(m)} = TX^{(m-1)} + C, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

ĐỊNH LÝ 5.2

Nếu $||T|| < 1$ *thì dãy các véctơ* $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *xác định theo công thức lặp (2) sẽ hội tụ về véctơ nghiệm* $\overline{X}$ *của hệ với mọi véctơ lặp ban đầu* $X^{(0)}$. *Khi đó công thức đánh giá sai số là:*

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T||^m}{1-||T||}.||X^{(1)} - X^{(0)}||(\textit{tiên nghiệm})$$

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T||}{1-||T||}.||X^{(m)} - X^{(m-1)}||(\textit{hậu nghiệm}$$

ĐỊNH NGHĨA 5.3

Ma trận A được gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Chú ý. Nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt thì $det A \neq 0$ và $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$

Xét hệ phương trình (1) với A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt. Ta phân tích ma trận A theo dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= D - L - U.$$

Do $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ nên $det D \neq 0$. Như vậy

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Ta có $AX = B \Leftrightarrow (D - L - U)X = B \Leftrightarrow (D)X = (L + U)X + B$

$\Leftrightarrow X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B.$

Ký hiệu $T_j = D^{-1}(L + U)$ và $C_j = D^{-1}B$. Khi đó công thức lặp có dạng

$$X^{(m)} = T_j X^{(m-1)} + C_j, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Dạng tường minh của công thức lặp Jacobi là

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{m-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{m-1} + b_i\right).$$

Ta có

$$||T_j||_\infty = ||D^{-1}(L+U)||_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

do A là ma trận đường chéo trội nghiệm ngặt. Vậy $||T_j|| < 1$ nên phương pháp Jacobi luôn hội tụ với mọi véctơ lặp ban đầu $X^{(0)}$.

Thường thì ta chọn $X^{(0)} = C_j$

Nội dung phương pháp

Đưa hệ (1) về dạng tương đương $X = TX + C$. Chọn véctơ xấp xỉ ban đầu $X^{(0)}$ (thường thì ta chọn $X^{(0)} = C$.) Trong đó

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \text{ và } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Từ hệ phương trình (2) ta được $(D-L)X = UX + B \Rightarrow X = (D-L)^{-1}UX + (D-L)^{-1}B$.

Đặt $T_g = (D-L)^{-1}U, C_g = (D-L)^{-1}B$ ta được công thức lặp Gauss-Seidel có dạng

$$X^{(m)} = T_g X^{(m-1)} + C_g, \quad m = 1, 2, \ldots$$

DẠNG TƯỜNG MINH CỦA CÔNG THỨC LẶP GAUSS-SEIDEL

$$x_1^{(m)} = c_1 + \sum_{j=2}^{n} t_{1j} x_j^{m-1},$$

$$x_2^{(m)} = c_2 + t_{21} x_1^{(m)} + \sum_{j=3}^{n} t_{2j} x_j^{m-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i^{(m)} = c_i + \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij} x_j^{(m)} + \sum_{j=i+1}^{n} t_{ij} x_j^{m-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n^{(m)} = c_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_{nj} x_j^{(m)}, \ (m = 1, 2, \ldots)$$

Phương pháp Gauss-Seidel có thể xem là 1 biến dạng của phương pháp lặp Jacobi, nhưng khác phương pháp Jacobi ở chỗ: khi tính thành phần thứ i của véctơ lặp $X^{(m)}$ thì ta sử dụng ngay những thành phần $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{i-1}^{(m)}$ vừa tính được.

Sự hội tụ của phương pháp Gauss-Seidel

Điều kiện hội tụ của phương pháp Gauss-Seidel hoàn toàn giống với phương pháp Jacobi.

Công thức đánh giá sai số của nghiệm gần đúng

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T_g||}{1 - ||T_g||}.||X^{(m)} - X^{(m-1)}||$$

hoặc

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T_g||^m}{1 - ||T_g||}.||X^{(1)} - X^{(0)}||$$

THANK YOU