



ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN KÉP

A. Ứng dụng hình học

I. Diện tích hình phẳng

Cách tính: Diện tích miền D trong mặt phẳng Oxy được tính bằng

Bài tập áp dụng:

1. Tính diện tích miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$ ta được $S(D) = a + \frac{b}{\ln 2}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Tìm khẳng định đúng nhất:

- A. $a = 2b$
B. $a + 2b = 3$
- C. $a + b = 10$
D. $a + b = 5$

2. Diện tích miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 = 4y \\ y^2 = 4x \end{cases}$ là:

- A. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{32}{3}$
B. $\frac{16}{3}$ D. Đáp án khác

3. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y=0, y^2=4ax \\ x+y=3a, y\leq 0 \end{cases}$ ($a>0$) là $S(D)=ka^2$. Khi đó,

hệ số k là:

- A. 12
B. 18
C. 16
D. Đáp án khác

4. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0 \end{cases}$ là $S(D) = a(\frac{\pi}{b} + \frac{1}{c})$ với (a, b, c

là các số nguyên). Tìm kết luận đúng

- A. $b = c$
B. $b = 2c$
C. $b = 3c$
D. Cả A, B, C đều sai

**II. Thể tích vật thể:**

Cách tính: Thể tích vật thể giới hạn bởi 2 mặt $z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$ và có các đường sinh song song với Oz (dạng đứng) có thể tích là

$$V = \iint_D |f_1 - f_2| dx dy \text{ Với } D \text{ là hình chiếu xuống mặt Oxy}$$

Bài tập áp dụng:

1. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi
$$\begin{cases} 3x + y \geq 1 \\ 3x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$
 ta được $V =$

A. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{27}$

B. $\frac{1}{9}$

D. Đáp án khác

2. Thể tích vật thể nằm bên dưới mặt $z = 3 + x^2 - 2y$ và được giới hạn bởi miền $0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x$ là $V =$

A. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

D. Đáp án khác

3. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z = f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ và

$$z = g(x, y) = 2x^2 + 2y^2 \text{ là } V = \frac{a}{b} \pi \text{ (a, b là số nguyên và phân số là tối giản).}$$

Tìm khẳng định đúng nhất:

A. $a + 1 = b$

C. $2a + b = 8$

B. $a - 1 = b$

D. Cả B, C đều đúng

4. Thể tích vật thể giới hạn bởi
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$
 là :

A. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

D. Đáp án khác

III. Tính diện tích mặt cong:



Cách tính: Cho mặt $z = f(x, y)$ có giới hạn là đường cong kín có hình chiếu xuống Oxy là miền D thì diện tích sẽ được tính bằng $S = \iint_D \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1} dx dy$

Bài tập áp dụng:

1. Diện tích của mặt $z = 2 + 3x + 4y$ nằm trong miền D: $0 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 4$ là:
A. $5\sqrt{17}$ C. $30\sqrt{17}$
B. $15\sqrt{17}$ D. Đáp án khác
2. Diện tích phần mặt $3x + 2y + z = 6$ nằm trong góc phần tám thứ nhất là:
A. $3\sqrt{14}$ C. $\sqrt{14}$
B. $6\sqrt{14}$ D. Đáp án khác
3. Tính diện tích phần mặt $z = xy$ giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1$ ta được S gần với giá trị nào nhất?
A. 3 C. 4
B. 3.5 D. 4.5
4. Tính diện tích phần paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4$ và nằm trong góc phần tám thứ nhất là: $S = \frac{\pi}{a}(b\sqrt{b} - 1)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tìm khẳng định đúng:
A. $a - b < 0$ C. $a + b$ chia hết cho 3
B. b là số nguyên tố D. Cả 3 đáp án trên đều sai

B. Ứng dụng trong vật lý:

I. Tính khối lượng mảnh phẳng:

Cách tính: Cho hàm mật độ khối lượng $f(x, y)$ của mảnh D, khi đó khối lượng của mảnh D được tính: $M = \iint_D f(x, y) dx dy$

Bài tập áp dụng: Cho đĩa tròn D: $x^2 + y^2 = 2y$ có khối lượng tại một điểm là: $f(x, y) = 1 + y$. Tính khối lượng của D:

- A. π C. $\frac{3}{2}\pi$
B. 2π D. Đáp án khác

**II. Tìm khối tâm của mảnh phẳng:**

Cách xác định: Giả sử mảnh D có khối lượng M và hàm mật độ khối lượng $f(x, y)$, khi đó tọa độ khối tâm của mảnh D được xác định:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D xf(x, y) dx dy \\ \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D yf(x, y) dx dy \end{cases}$$

Bài tập áp dụng: Tìm tọa độ khối tâm của đĩa D ở trên, ta được vị trí đó là điểm:

A. $(0, \frac{27}{12})$

C. $(0, 1)$

B. $(0, \frac{27}{24})$

D. Đáp án khác

C. Định lý giá trị trung bình:

Cách tính: Giá trị trung bình của hàm $f(x, y)$ trên miền D được tính

$$f_{tb} = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ khi đó tồn tại điểm } (x_0, y_0) \text{ sao cho } f(x_0, y_0) = f_{tb}$$

Bài tập áp dụng: Cho một ván gỗ tròn bán kính 40cm D có độ dày phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm theo công thức $d = 50 - r$. Độ dày trung bình của ván gỗ gần với giá trị nào nhất?

A. 23

C. 23.2

B. 23.1

D. 23.3



Đáp án

Phần A:

I. 1 C 2 B 3 B 4 B

II. 1A 2 C 3 D 4 C

III. 1 B 2 A 3 C 4 B

Phần B:

I. B

II. B

Phần C: D