Môn học : GIẢI TÍCH 1

Tài liệu tham khảo:

1. Giải tích 1 (Nhóm tác giả BM Toán – ĐHBKTpHCM)
2. Calculus – James Stewart (Bản pdf miễn phí trên Bkel)

Cách đánh giá môn học

1. Điểm BT 5%: Các bài kiểm tra chung trên BKel – 5% tổng điểm môn học
2. Điểm GHK: thi trắc nghiệm toàn khóa, sau khi học xong nửa học kỳ – 25% tổng điểm môn học
3. Điểm BTL: làm theo nhóm trong lớp lý thuyết – 20% tổng điểm môn học
4. Điểm CHK: thi chung toàn khóa, sau khi học xong học kỳ – 50% tổng điểm môn học

Môn học : GIẢI TÍCH 1

Nội dung môn học:

CHƯƠNG 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ (Chỉ học bài tập)

CHƯƠNG 2: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

1. Hàm số - Hàm hợp: Định nghĩa, các cách cho một hàm số, TXĐ – TGT của hàm số.
2. *Các loại hàm số đã học: Hàm số mũ, hàm lũy thừa, hàm logarit, hàm lượng giác.(Tự đọc)*
3. Các loại hàm mới: Hàm hợp, hàm ngược, các hàm lượng giác ngược, các hàm hyperbol.
4. Giới hạn hàm số - Hàm liên tục
5. Vô cùng lớn – Vô cùng bé

CHƯƠNG 3: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm: hàm y=f(x), hàm ngược, hàm cho bởi pt tham số
2. Đạo hàm cấp cao
3. Vi phân và ứng dụng. Vi phân cấp cao
4. Công thức Taylor – Maclaurint.
5. Quy tắc L'Hospital
6. Ứng dụng đạo hàm giải các bài toán tối ưu.
7. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm cho bởi pt tham số

CHƯƠNG 4: TÍCH PHÂN

1. Tích phân bất định
2. Tích phân xác định – Công thức Newton-Leibnitz
3. Tích phân suy rộng: Tích phân với cận vô tận và Tích phân hàm không bị chặn
4. Ứng dụng của tích phân

CHƯƠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Phương trình vi phân cấp 1: 4 dạng
2. Phương trình vi phân cấp 2: PT tuyến tính
3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

CHƯƠNG 2:

GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

Hàm số - Các khái niệm mở đầu (Xem video)

Khái niệm hàm: Hàm f là 1 quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với 1 và chỉ 1 phần tử y thuộc tập hợp Y. Kí hiệu y=f(x)

TXĐ - D: là tập hợp tất cả các giá trị có thể của x

TGT - R: là tập hợp tất cả các giá trị của y khi x biến thiên trong D

Các cách biểu diễn 1 hàm: có 4 cách

- Bằng lời (mô tả bằng lời)
- Bằng số (bảng giá trị)
- Bằng đồ thị
- Bằng biểu thức đại số

Hàm số - Các khái niệm mở đầu

GHK201

Một nhà máy sản xuất nước mắm cho biết chi phí cố định mỗi tháng là 50 triệu đồng. Chi phí bình quân để sản xuất mỗi chai nước mắm là 30 ngàn đồng.
Nếu gọi x là số chai nước mắm mà nhà máy sản xuất được trong một tháng, $C(x)$ là tổng chi phí hàng tháng của nhà máy, lấy đơn vị triệu đồng, thì đồ thị của hàm $C(x)$ là đường thẳng.
Hãy cho biết tung độ giao điểm y_0 của đồ thị với trục tung và hệ số góc k của đồ thị.

A. $y_0 = 50, k = 30$ B. $y_0 = 0, k = 0.03$ C. $y_0 = 50, k = 0.03$ D. $y_0 = 30, k = 50$

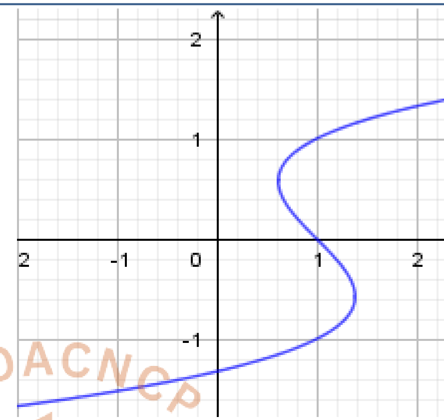
GHK201

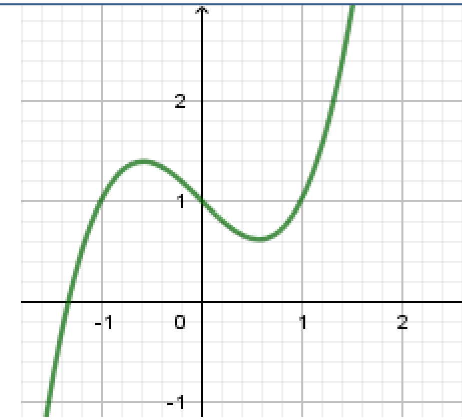
Một bác sỹ mua một quyển sách với giá 1.500 USD. Giả sử giá trị của sách giảm đều đặn a USD sau từng năm, và đến cuối năm thứ 10, giá trị của sách còn 230 USD. Hãy biểu diễn giá trị $C(t)$ của quyển sách đến cuối năm thứ t (kể từ ngày mua) như một hàm số theo t.

A. $-127t + 1.500$ B. $-230t + 1.500$ C. $-132t + 1.500$ D. $-112t + 1.500$

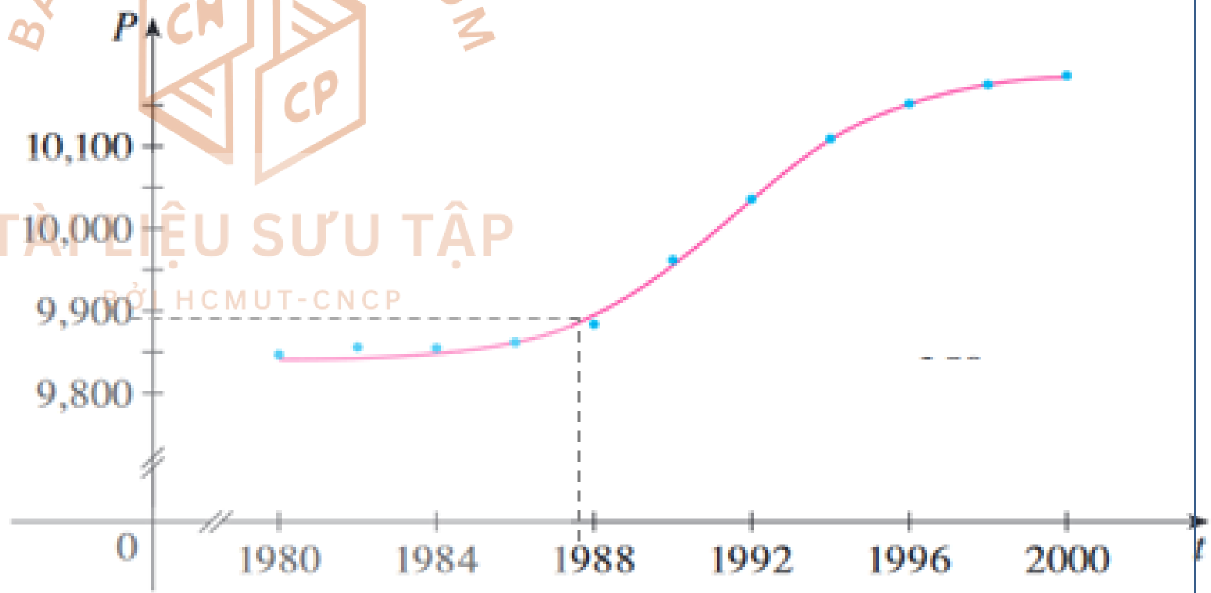
Hàm số - Các khái niệm mở đầu

Ví dụ: Trong 2 đường cong bên cạnh, đường cong nào không thể là đồ thị của hàm 1 hàm y=f(x) nào đó? Tại sao?





VD: Đồ thị bên cạnh biểu diễn dân số P (nghìn người) nước Bỉ tại thời điểm t, từ năm 1980 đến năm 2000.



1. Ước tính dân số Bỉ vào năm 1988.

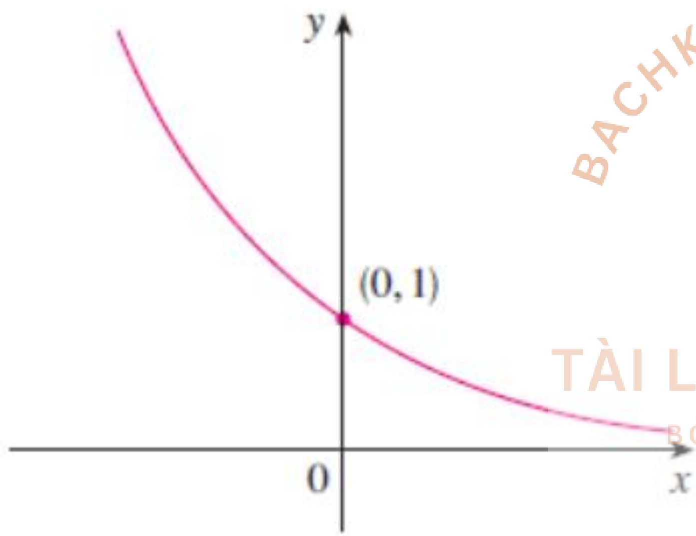
2. Có nhận xét gì về mức tăng dân số trong 2 khoảng thời gian từ 1980-1984 và 1988-1992?

Nhắc lại các hàm số đã học (Xem video)

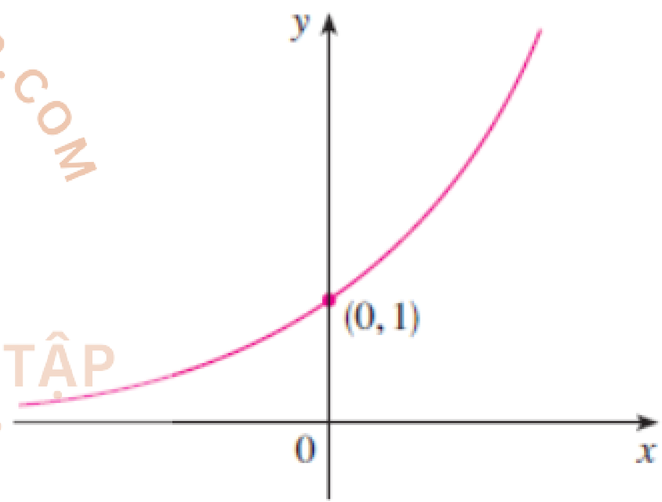
1. Hàm số mũ: $y = a^x$ Điều kiện : $a>0,\ a\neq 1$

Nếu a=1 thì $a^x = 1, \forall x$, nên ta chỉ tính khi $a\neq 1$

TXĐ: $(-\infty,+\infty)$, TGT: $(0,+\infty)$



(a) $y = a^x,\ 0 < a < 1$



(c) $y = a^x,\ a > 1$

- Hàm nghịch biến

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

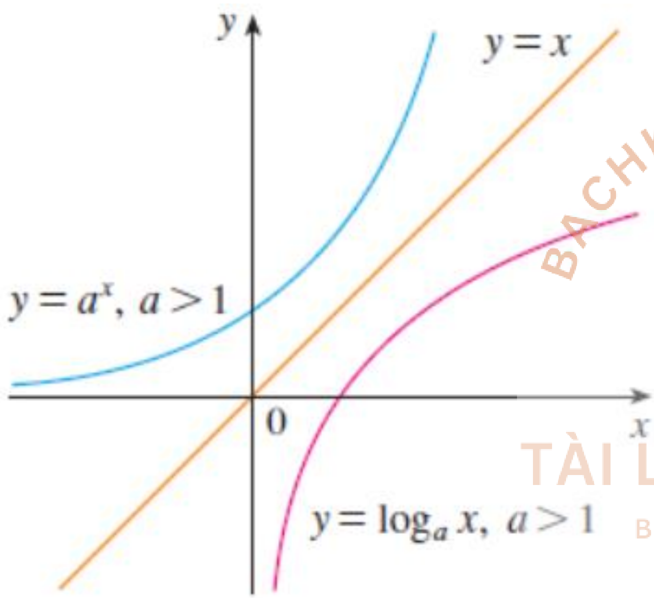
- Hàm đồng biến

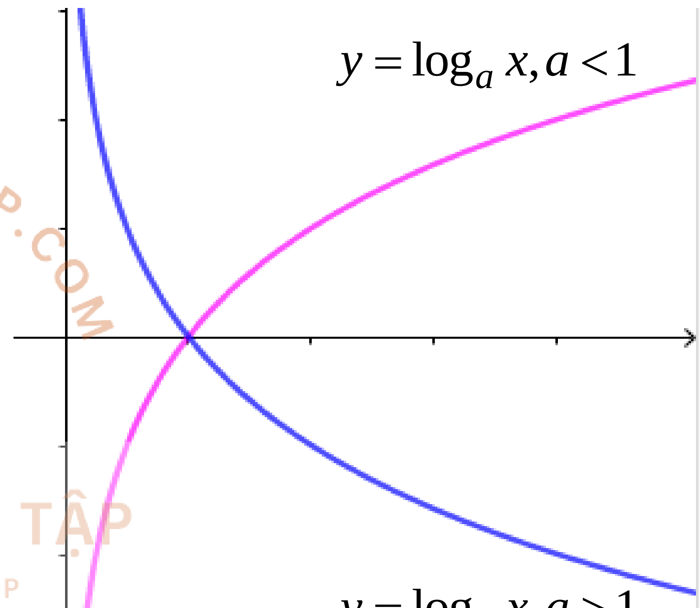
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

Nhắc lại các hàm số đã học (Xem video)

2. *Hàm logarit: $y=\log_a x$, a>0, a ≠1* TXĐ : (0,+∞), TGT: (- ∞,+∞)

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$





a>1: Hàm đồng biến

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$

a<1: hàm nghịch biến

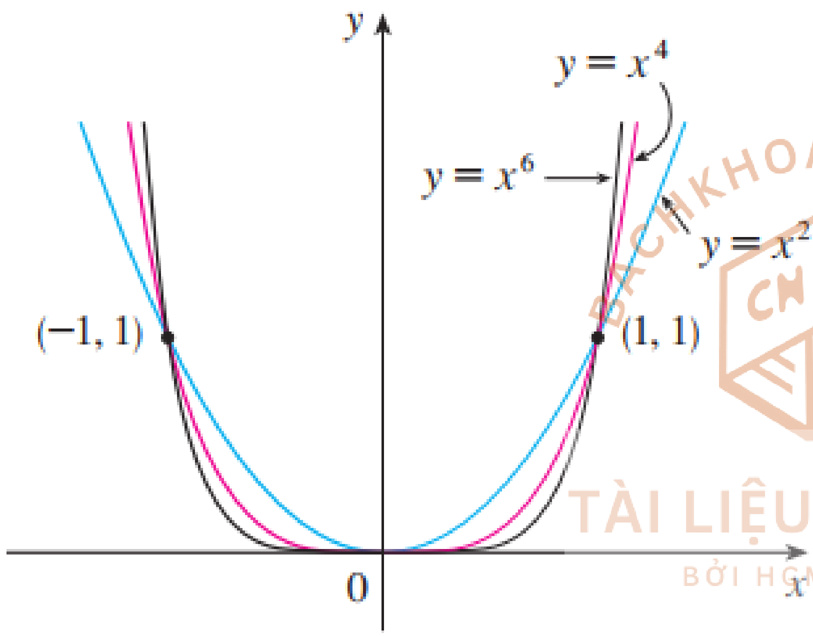
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$$

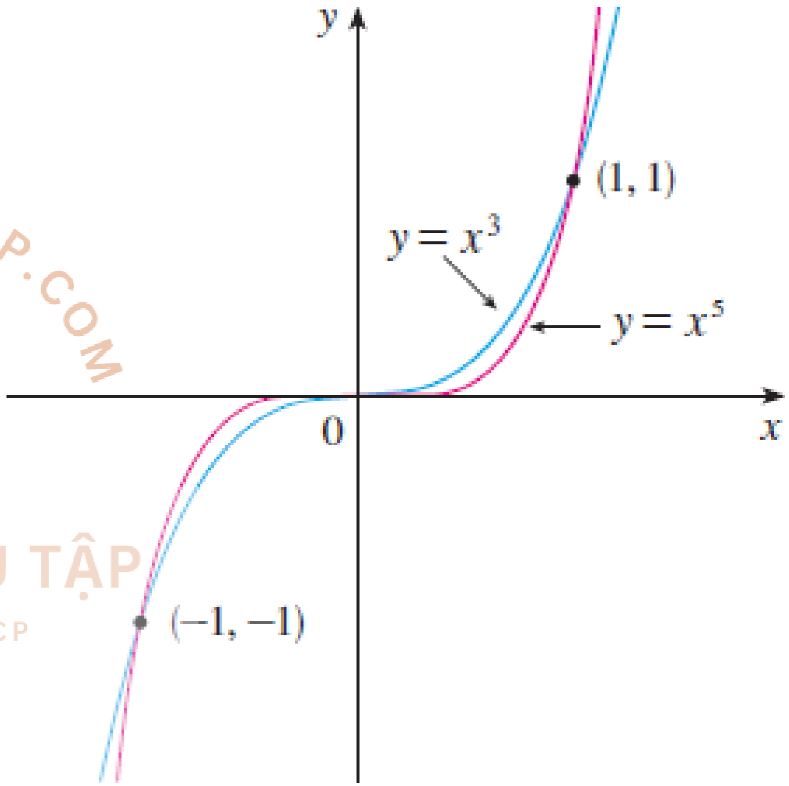
$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Nhắc lại các hàm số đã học (Xem video)

3. Hàm lũy thừa : $y=x^a$

MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a





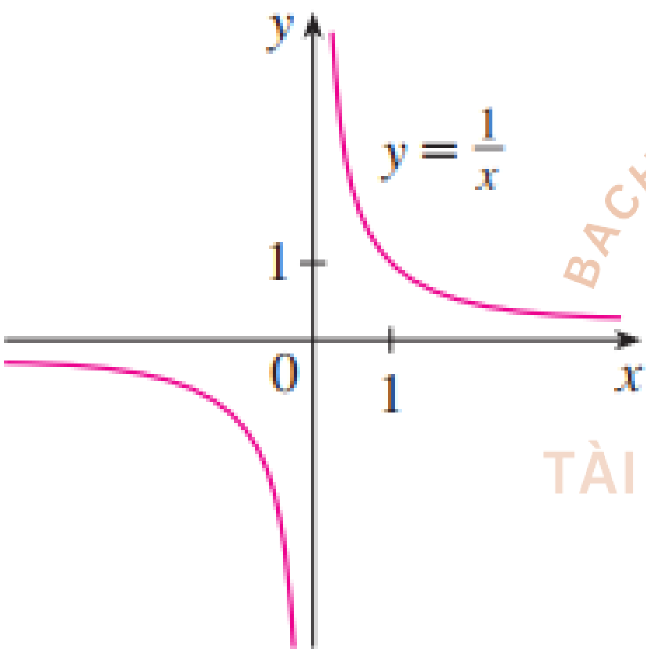
a=2, 4, 6: MXĐ: (- ∞,+∞), MGT: [0,+∞)

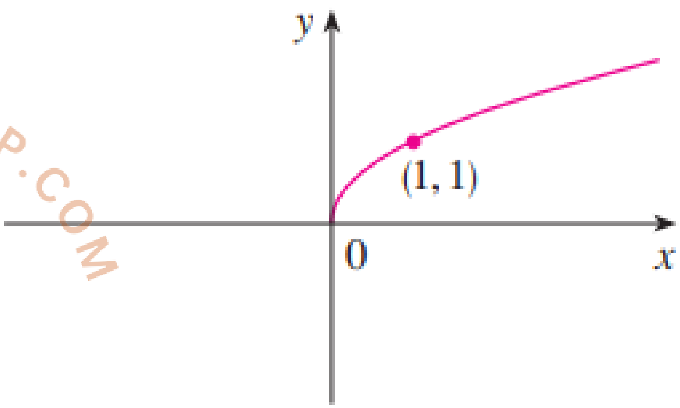
a=3, 5: MXĐ: (- ∞,+∞), MGT: (- ∞,+∞)

Nhắc lại các hàm số đã học (Xem video)

3. Hàm lũy thừa : $y=x^a$

MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a





(a) $f(x) = \sqrt{x}$

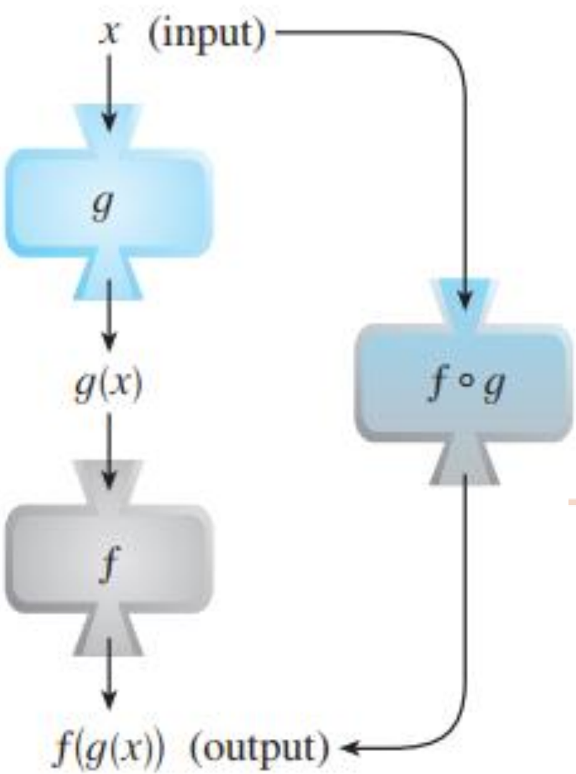
a = -1: MXĐ: R*=R\{0}, MGT: R*.
Ta còn gọi đây là đường Hyperbol

a=1/2: Nửa đường parabol

MXĐ [0,+∞), MGT [0,+∞)

Hàm hợp và hàm ngược

Hàm hợp :



Định nghĩa : Cho 2 hàm

$$g : X \to Y$$
$$x \mapsto y = g(x)$$
$$f : Y \to Z$$
$$y \mapsto z = f(y)$$

Ta gọi hàm hợp của 2 hàm trên là

$$h = f \circ g$$

Được xác định như sau :

$$h : X \to Z, h(x) = f(g(x))$$

Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Thực hiện thống kê và phân tích dữ liệu quan trắc từ một vùng nuôi thủy sản nước lợ (vùng cửa biển) cho thấy: nồng độ ô xy hòa tan trong nước (đơn vị tính *mg/m*^{3}) là DO (Dissolved Oxygen) được xác định bởi hàm số:

$$f(x) = 14.62 - 0.166x$$

trong đó *x* là nồng độ clorua hòa tan trong nước phụ thuộc vào nhiệt độ t (^{0}C) xác định bởi:

$$x(t) = 13.51 \times 0.98^t$$

1. Tìm hàm hợp $f \circ x$
2. Tính $(f \circ x)(25)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả này.

$$(f \circ x)(t) = f(x(t)) = 14.62 - 0.166\left(13.51 \times 0.98^t\right)$$

$$\rightarrow (f \circ x)(25) = 13.27$$

Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Cho 2 hàm $f(x) = 2x+1, g(x) = \sqrt{x^2+1}$
Tìm $f \circ g,\ g \circ f$ và tính giá trị của chúng khi x = 2

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = 2\sqrt{x^2+1}+1$$

$$\Rightarrow f \circ g(2) = 2\sqrt{5}+1$$

$$(g \circ f)(x) = g(2x+1) = \sqrt{(2x+1)^2+1} = \sqrt{4x^2+4x+2}$$

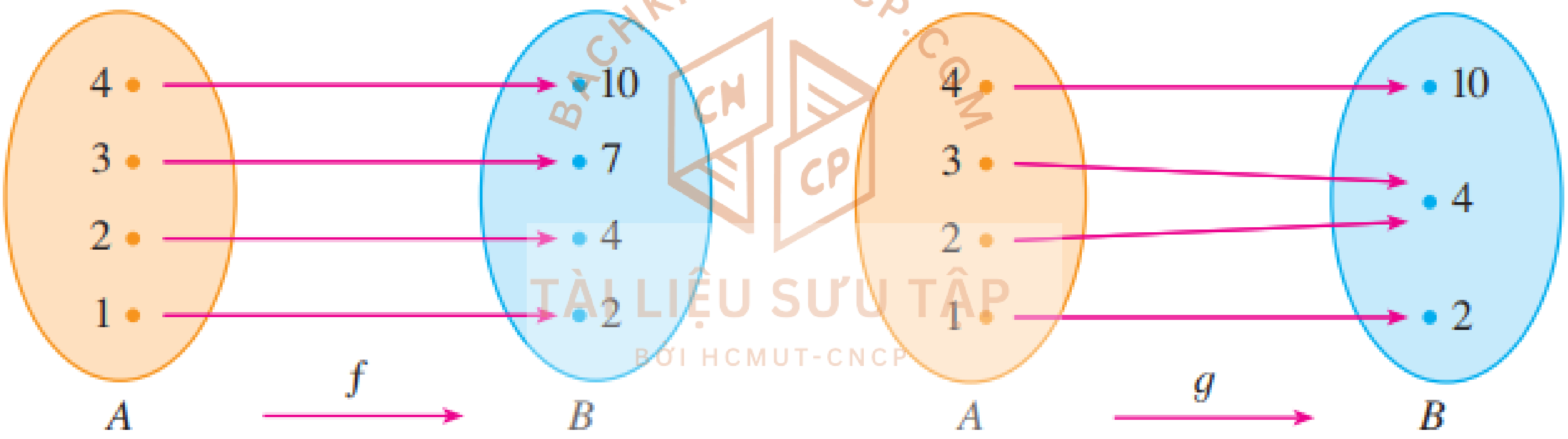
$$\Rightarrow (g \circ f)(2) = \sqrt{26}$$

Lưu ý : Nói chung 2 hàm $f \circ g,\ g \circ f$ không bằng nhau

Hàm hợp và hàm ngược

Hàm 1-1 : Hàm $f : X \to Y,\ f(x) = y$

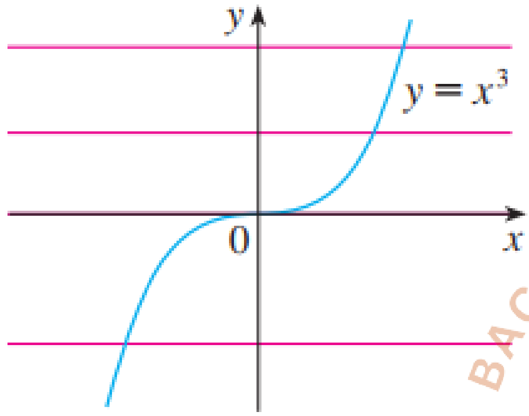
được gọi làm hàm 1-1 nếu $\forall x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$

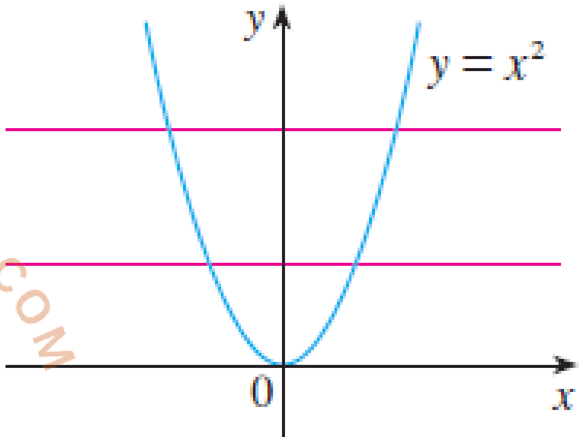


Hàm 1-1

Không là hàm 1-1

Hàm hợp và hàm ngược





Hàm $y=x^3$ là hàm 1-1 Hàm $y=x^2$ không là hàm 1-1

Hàm 1-1 có đồ thị chỉ cắt mọi đường thẳng y = C, với C thuộc TGT của hàm tại duy nhất 1 điểm.

Hàm hợp và hàm ngược

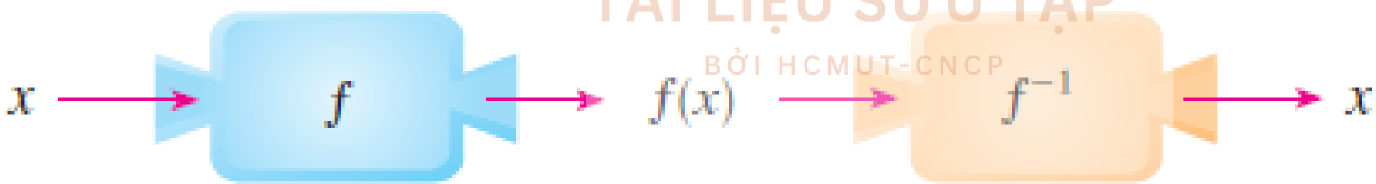
Hàm ngược : Cho hàm 1-1 $f : X \to Y, f(x) = y$

hàm ngược của hàm f, được kí hiệu là $y = f^{-1}(x)$,

$$f^{-1} : Y \to X$$

sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Như vậy : $f(f^{-1}(y))=y$ và $f^{-1}(f(x))=x$



TXĐ của hàm f $^{-1}$ là TGT của hàm f và TGT của hàm f $^{-1}$ là TXĐ của hàm f

Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm $y = x^3 - 1$

Ta sẽ tìm hàm y = $f^{-1}(x)$ theo 2 bước:

Bước 1: Tính ngược x theo y

$$y = x^3 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

Bước 2: Thay x bởi y, y bởi x, ta được hàm ngược

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Thử lại: $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt[3]{x+1}\right) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x$

MXĐ và MGT của cả 2 hàm f và f^{-1} đều là $\mathbb{R}$

Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Hàm ngược của hàm số mũ là hàm logarit

Ví dụ: Cho f(t) là số lượng loài chim trên 1 hòn đảo (đơn vị tính là trăm loài), t là số năm tính từ năm 2007. Cho biết ý nghĩa của đẳng thức $f^{-1}(3.6)=4$.

Ví dụ tự làm: Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 100 cá thể và tăng gấp đôi sau mỗi 3 giờ.

a. Tìm số lượng vi khuẩn của quần thể sau t giờ như 1 hàm theo t (n=f(t)).

b. Tìm hàm ngược và nêu ý nghĩa của hàm ngược.

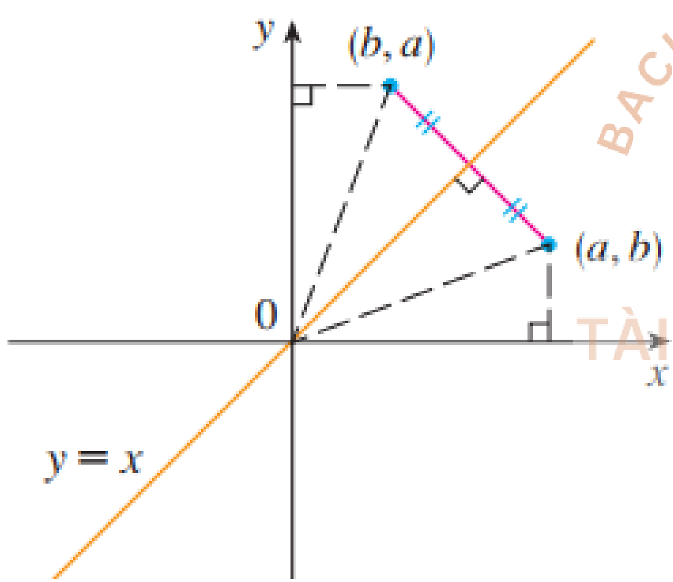
c. Khi nào quần thể có khoảng 50.000 cá thể?

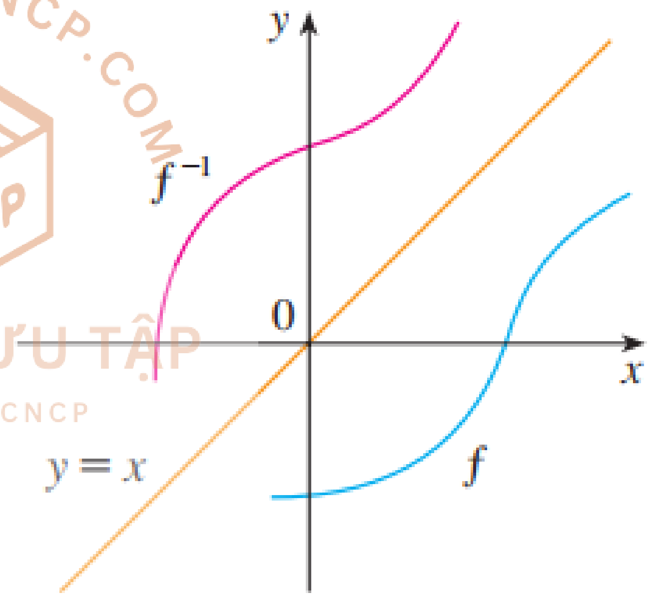
$$n = f(t) = 100 \times 2^{t/3}, t = 3\frac{\ln n - \ln 100}{\ln 2}, t(50000) \approx 27$$

Hàm hợp và hàm ngược

Đồ thị của hàm ngược

Với mọi a thuộc MXĐ của hàm y = f(x), đặt b = f(a) thì a = f^{-1}(b) tức là điểm (a,b) thuộc đồ thị hàm f(x) thì điểm (b,a) thuộc đồ thị hàm f^{-1}(x).



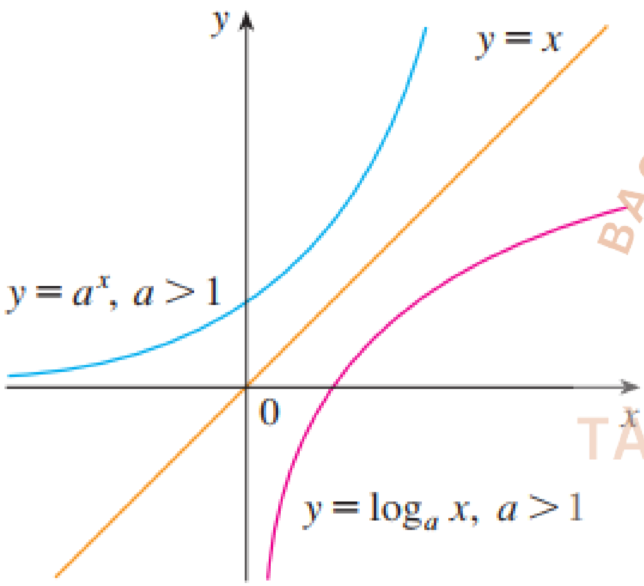


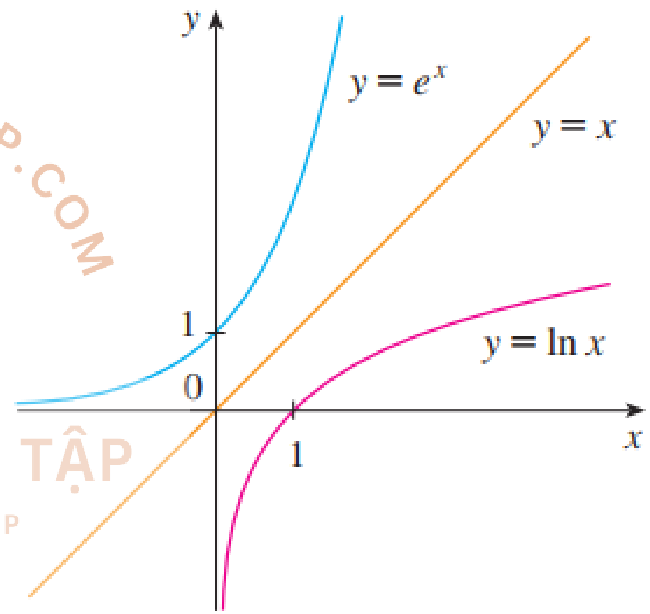
Đồ thị của hàm y = f(x) và hàm y=f^{-1}(x) đối xứng nhau qua đường thẳng y = x

Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Hàm số mũ và hàm logarit

$$y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$$

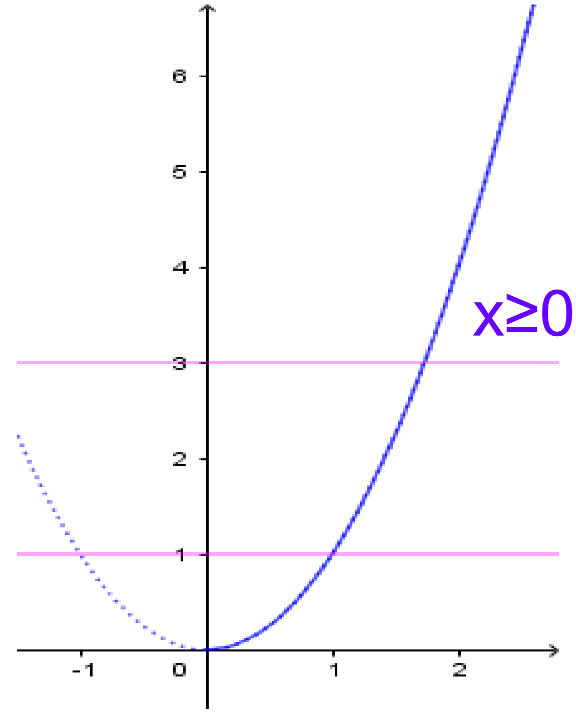




Đồ thị của hàm $y = a^x$ và hàm $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

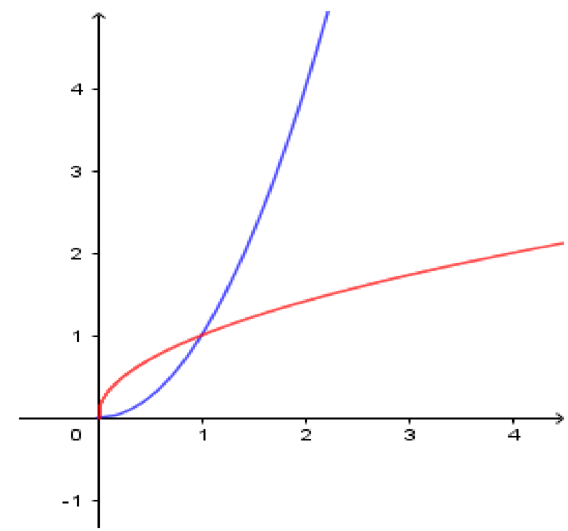
Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Hàm lũy thừa $y=x^2$ không là hàm 1-1 trên $(-\infty,+\infty)$



Nếu ta chỉ lấy nhánh bên phải của đồ thị (hoặc nhánh bên trái) thì mọi đường cong $y=C$ $(C\geq 0)$ sẽ chỉ cắt đường cong tại 1 điểm. Đường cong sẽ biểu diễn hàm 1-1:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Khi đó, ta vẫn có hàm ngược

$$y = \sqrt{x}$$

Hàm hợp và hàm ngược

Điều kiện để tồn tại hàm ngược

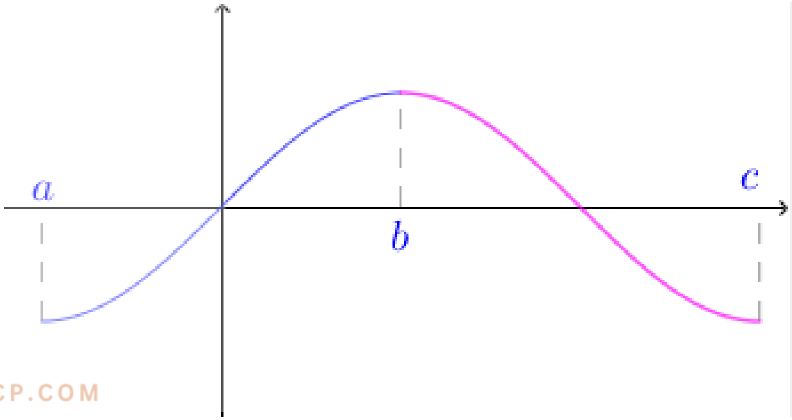
Mệnh đề 1: Hàm $y = f(x)$ có hàm ngược khi và chỉ khi f là ánh xạ 1-1 từ X vào Y

Mệnh đề 2: Hàm $y = f(x)$ có hàm ngược trong khoảng (a,b) nếu f là đơn điệu tăng chặt hoặc giảm chặt trong (a,b) tức là

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$$

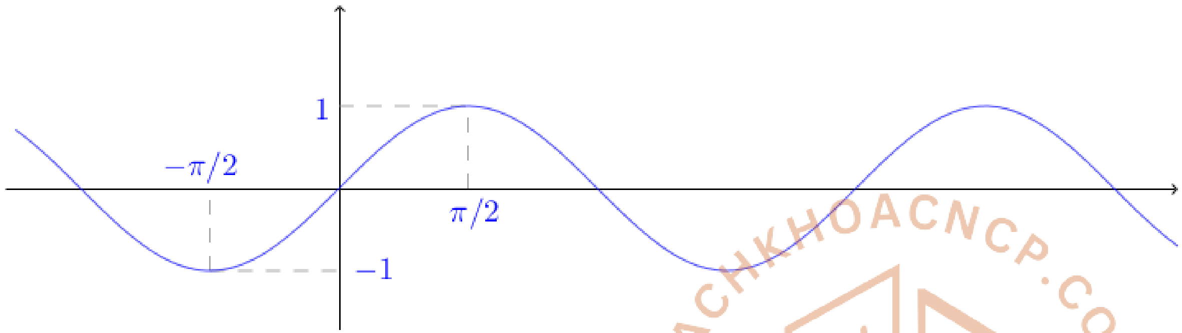
hoặc $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$

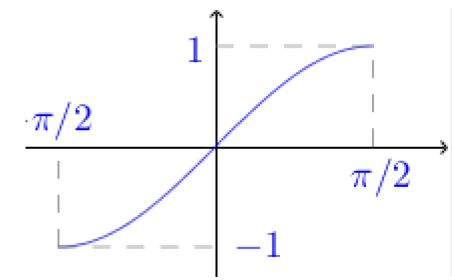
Ví dụ: Hàm $y = f(x)$ trong hình vẽ bên tăng chặt trong (a;b) và giảm chặt trong (b;c)



Hàm lượng giác ngược

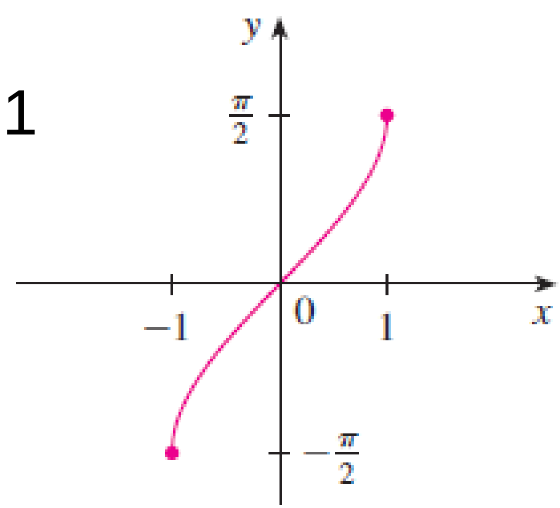
Hàm ngược của hàm y = sinx $\leftrightarrow x = \arcsin y, x \in [-\pi/2, \pi/2]$





Trên đọan $[-\pi/2;\pi/2]$ hàm y = sinx là hàm 1-1

nên tồn tại hàm ngược, kí hiệu $sin^{-1}x=arcsin$



Hàm y=arcsinx: MXĐ là [-1;1]

MGT là $[-\pi/2;\pi/2]$

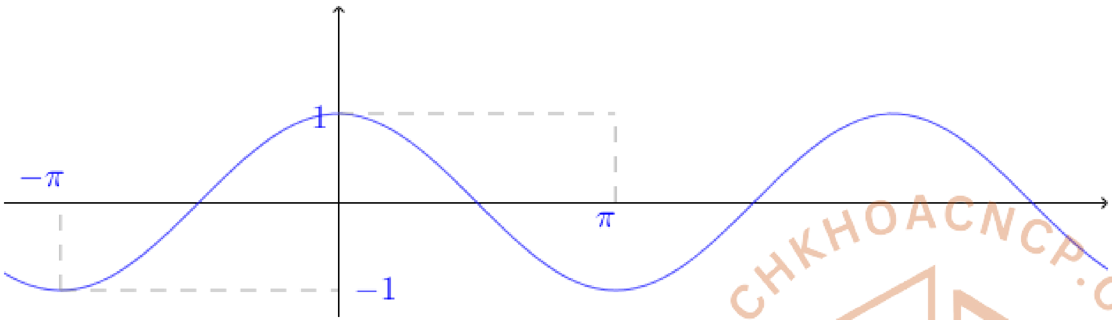
$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\pi/2;\pi/2]$. $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$

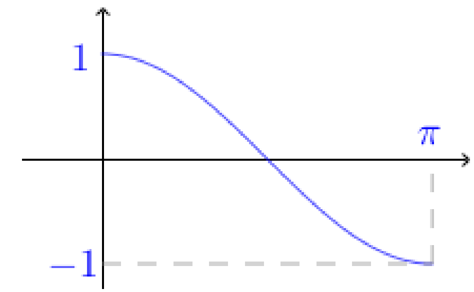
$\sin(\pi/6) = 0.5 \longleftrightarrow \arcsin(0.5) = \pi/6.$

$\sin(5\pi/6) = 0.5 \xleftrightarrow{SAI} \arcsin(0.5) = 5\pi/6$

Hàm lượng giác ngược

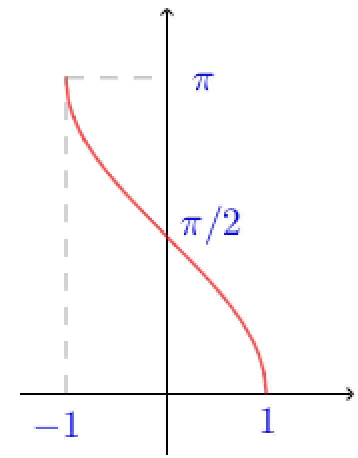
Hàm ngược của hàm y = cosx $\leftrightarrow x = \arccos y, x \in [0, \pi]$





Trên đoạn [0,π], hàm y=cosx là hàm 1-1, tồn tại hàm ngược

y=arccosx, MXĐ là [-1,1], MGT là [0,π]

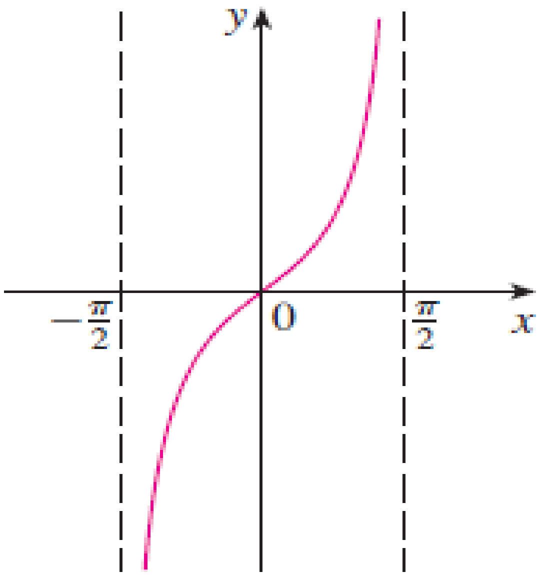


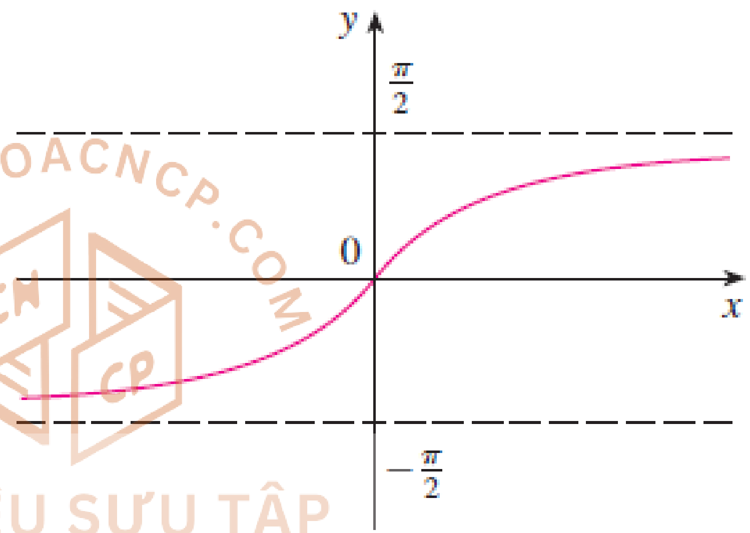
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \longleftrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \xleftrightarrow{SAI} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm y = tanx $\leftrightarrow x = \arctan y, x \in (-\pi/2; \pi/2)$



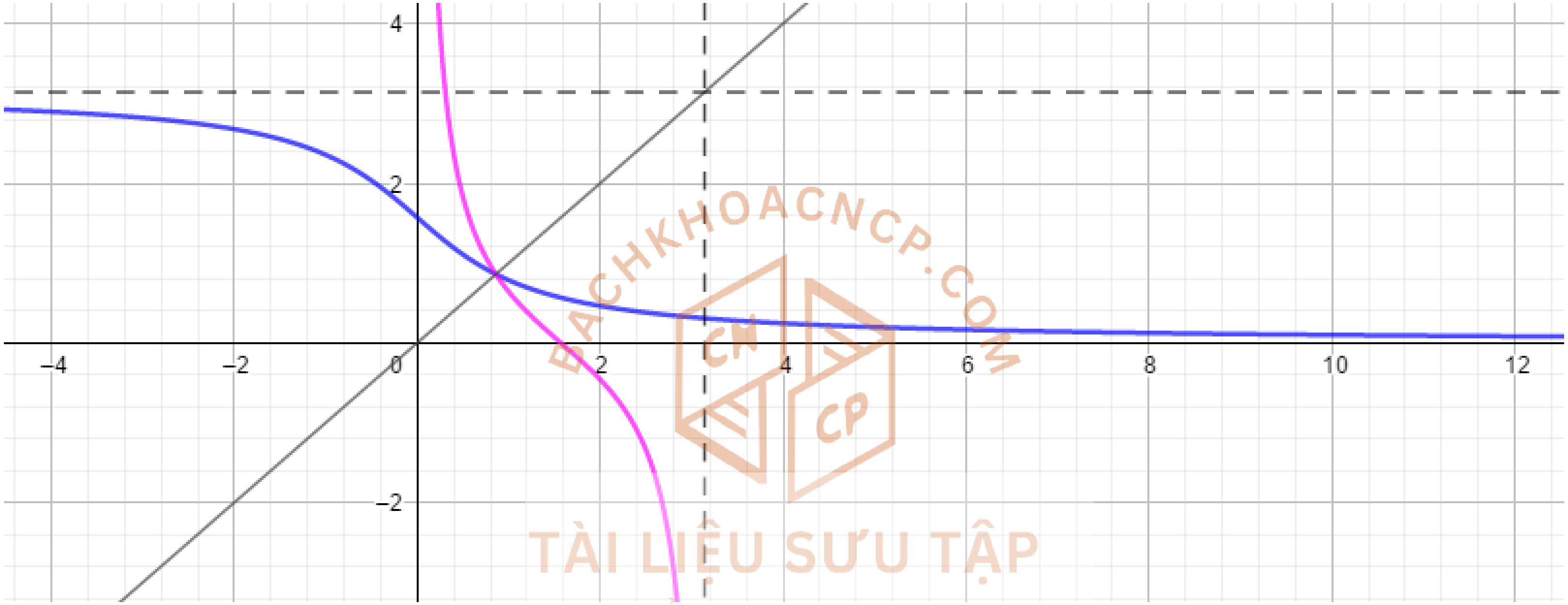


Trong khoảng $(-\pi/2; \pi/2)$, hàm y=tanx là hàm 1-1 nên tồn tại hàm ngược

Hàm y=arctanx: MXĐ là $\mathbb{R}$, MGT là $(-\pi/2; \pi/2)$

Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm y = cotx $\leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y, x \in (0;\pi)$



Trên khoảng (0,π) hàm y=cot(x) là hàm 1-1

Hàm y=arccotx: MXĐ là $\mathbb{R}$, MGT là $(0;\pi)$

Hàm lượng giác ngược

Ví dụ: Tìm MXĐ của hàm $y = \arccos\left(1 - \sqrt{x^2+3}\right)$

$$-1 \le 1 - \sqrt{x^2+3} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

Vậy MXĐ là : [-1,1]

Ví dụ: Tìm MGT của các hàm

$$y = \sqrt{\arctan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$y = \arcsin\frac{-2x}{1+x^2} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Hàm hyperbolic

Định nghĩa (hàm Hyperbolic)

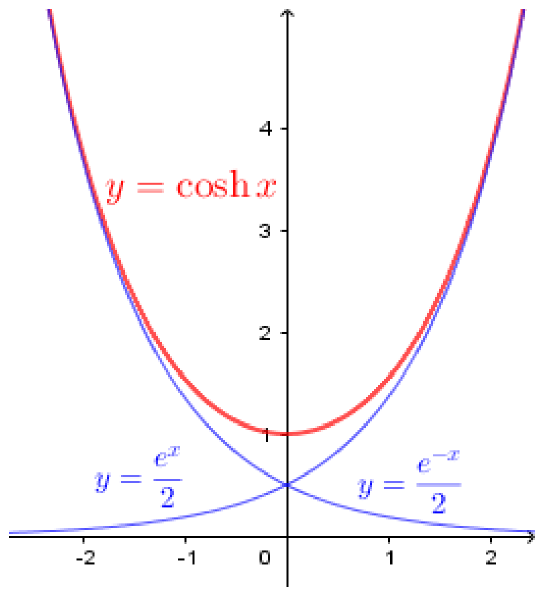
sin hyperbolic $\sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ =shx

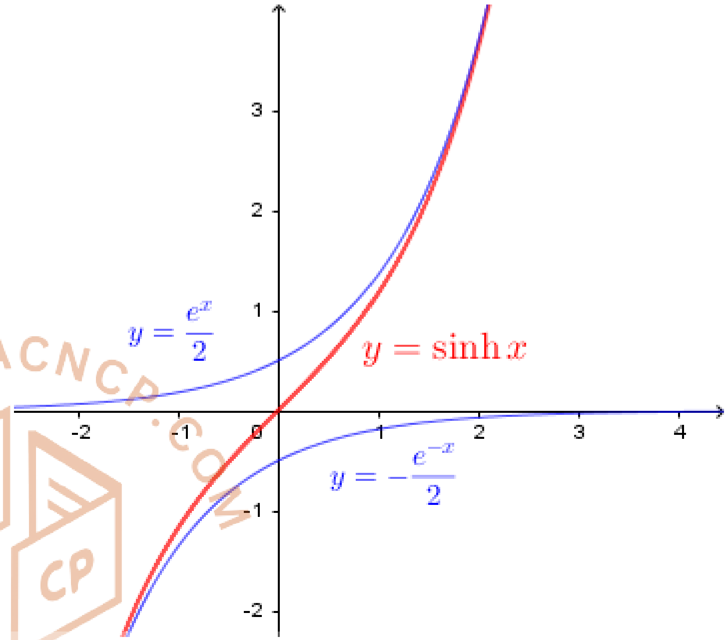
cos hyperbolic $\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ =chx

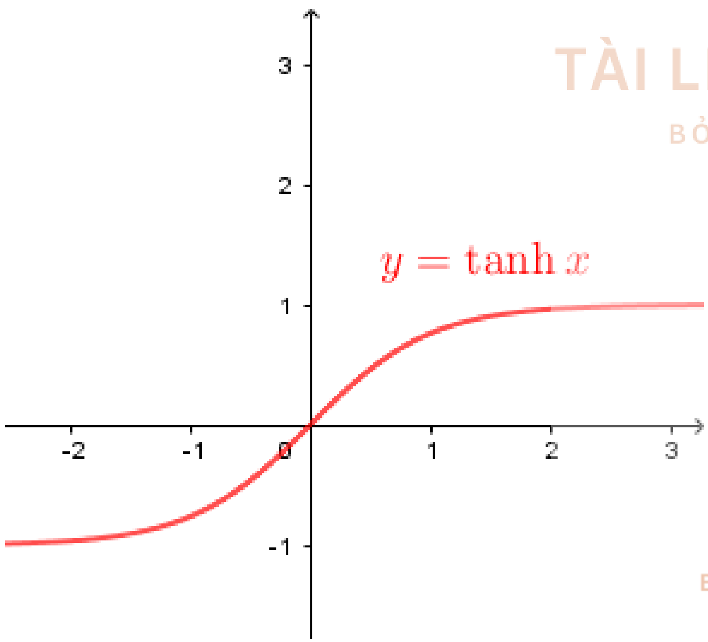
tan hyperbolic $\tanh(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ =thx

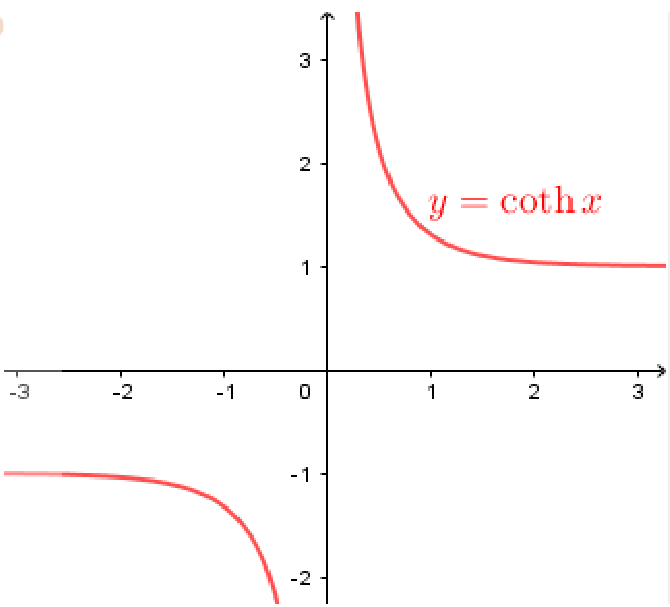
cotan hyperbolic $\coth(x) = \dfrac{1}{\tanh x}$ =cthx

Hàm hyperbolic









Hàm hyperbolic

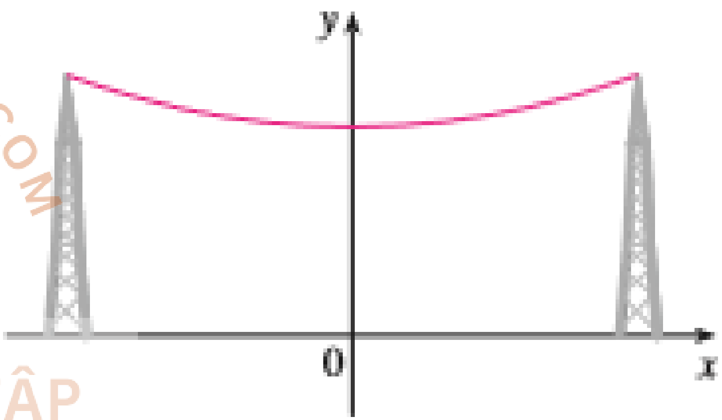
Một số ứng dụng của hàm hyperbol

VD 1: Hình ảnh của 1 dây cáp mềm (đường dây điện, điện thoại) được treo giữa 2 điểm ở cùng độ cao (như hình vẽ)

Người ta chứng minh được rằng hình dạng của nó có phương trình là

$$y = c + a.\cosh\frac{x}{a}$$

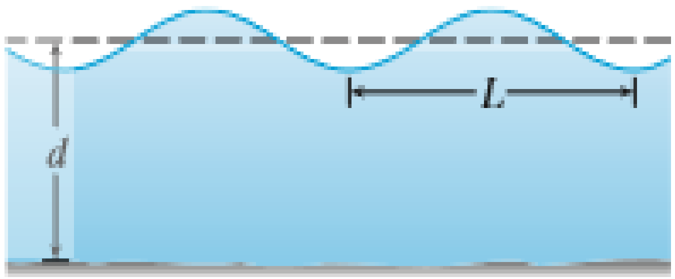
với a, c là hằng số, a>0



VD 2: Vận tốc của sóng biển với chiều dài L di chuyển qua 1 khối nước với chiều sâu d được mô hình hóa bởi hàm số

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L}}$$

với g là gia tốc trọng trường



Hàm hyperbolic

Có các công thức sau (tương tự công thức lượng giác)

$$1/\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2/\ \sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x, \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$3/\ \cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$$

$$4/\ \cosh(x-y) = \cosh x\cosh y - \sinh x\sinh y$$

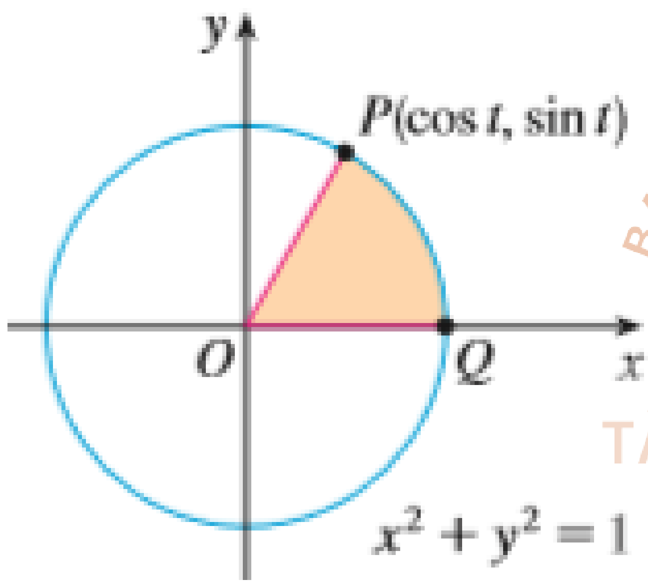
$$5/\ \sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \sinh y\cosh x$$

$$6/\ \sinh(x+y) = \sinh x\cosh y - \sinh y\cosh x$$

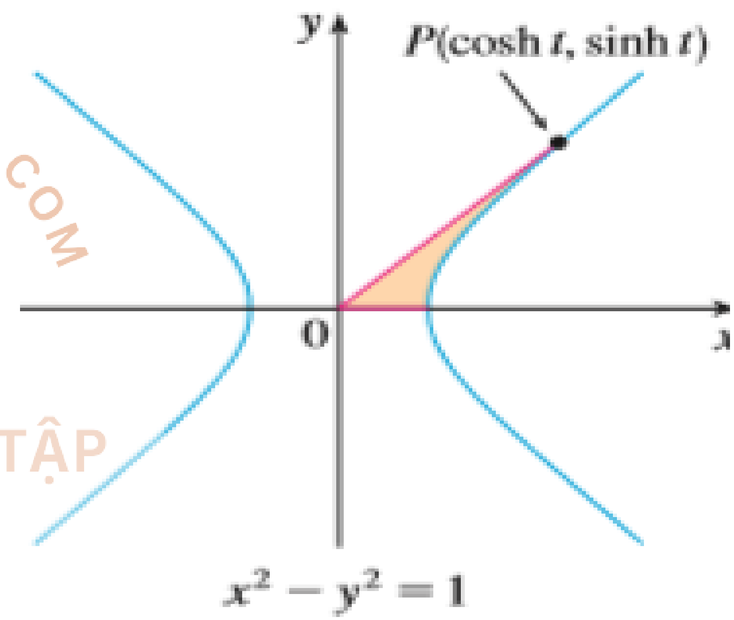
Hàm hyperbolic

Công thức tương tự công thức lượng giác

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$



$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$



t là số đo (tính theo radian) của góc POQ,

t là 2 lần diện tích của hình quạt tròn được tô màu trong hình vẽ

t là 2 lần diện tích của hình được tô màu trong hình vẽ

Hàm hyperbolic

Các hàm hyperbol ngược

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \forall x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tỉ lệ ánh sáng (%) xuyên qua nước biển thông thường đến độ sâu x feet là $L\left(x\right) = e^{-0.44x}$ (1 feet = 0.3048m)

Tìm tỷ lệ ánh sáng xuyên qua đến độ sâu:

a. 3 feet, 10 feet

b. Điều gì xảy ra nếu càng xuống sâu dưới biển?

GHK 201

Một công ty ép nhựa cho biết, nếu sử dụng $x\%$ số máy của công ty thì tổng chi phí mỗi tháng cho hoạt động của số máy này là

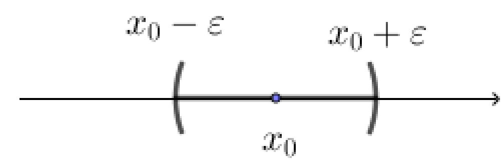
$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960} \text{ triệu đồng.}$$

Công ty có chế độ bảo trì luân phiên nhằm sử dụng đến gần 80% số máy (công suất lý tưởng). Hỏi nếu công suất sử dụng máy đạt đến mức lý tưởng, tổng chi phí mà công ty phải chi ra cho hoạt động của số máy này là bao nhiêu?

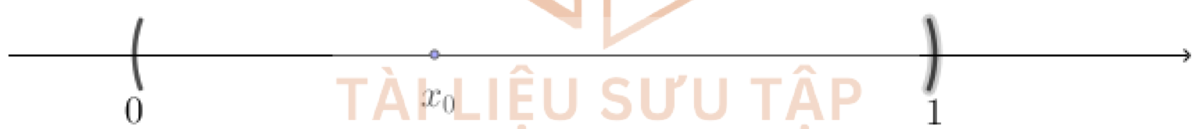
A. 8 triệu đồng. B. 9 triệu đồng. C. 10 triệu đồng. D. 7 triệu đồng.

Giới hạn hàm số

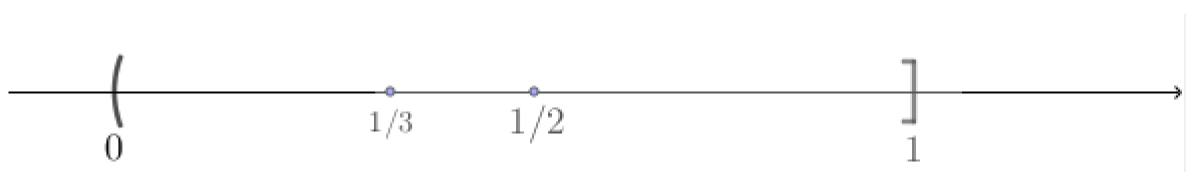
Điểm tụ: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của tập D nếu trong mọi lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ của x_0 đều chứa vô số các phần tử của D



VD. D = (0,1) mọi điểm thuộc D và 2 điểm $0, 1 \notin D$ đều là điểm tụ



$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ Có duy nhất 1 điểm tụ là $0 \notin D$



Giới hạn hàm số

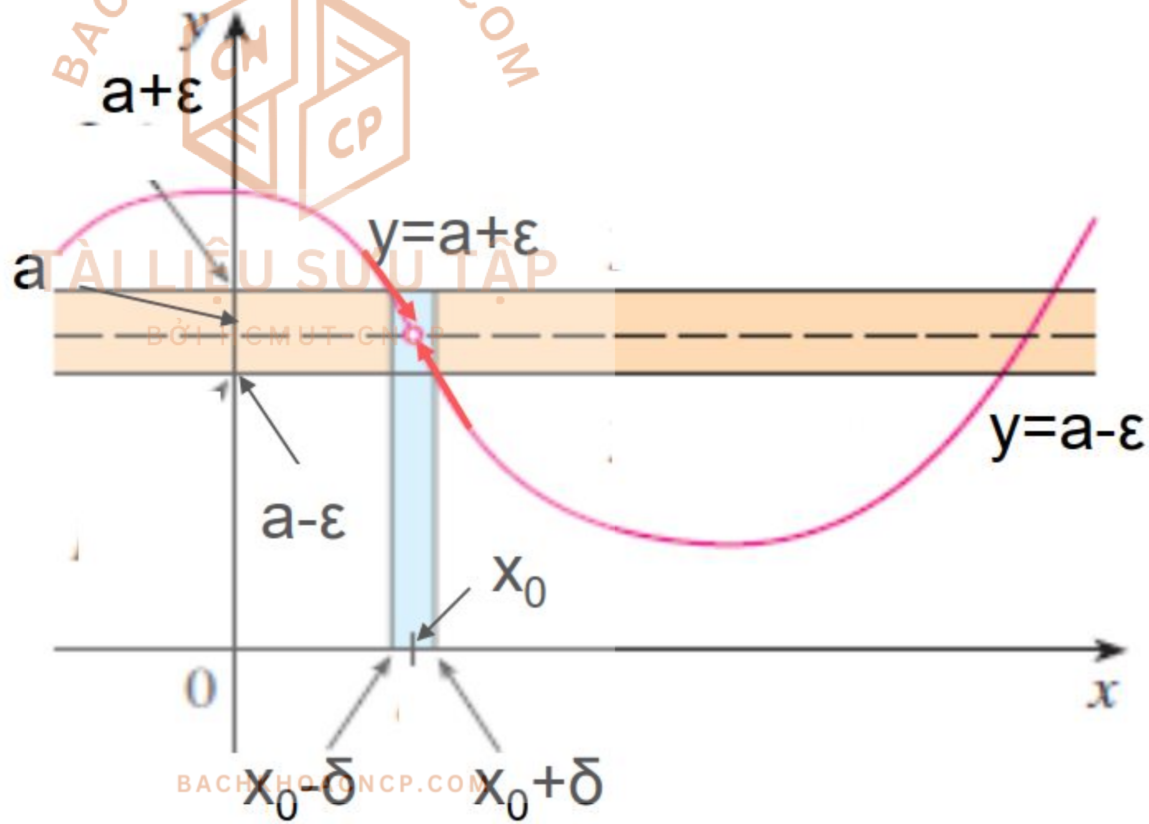
Giới hạn hàm số (ngôn ngữ ε – δ) :

Cho hàm f(x) và x_0 là 1 điểm tụ của MXĐ D_f của hàm

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$$

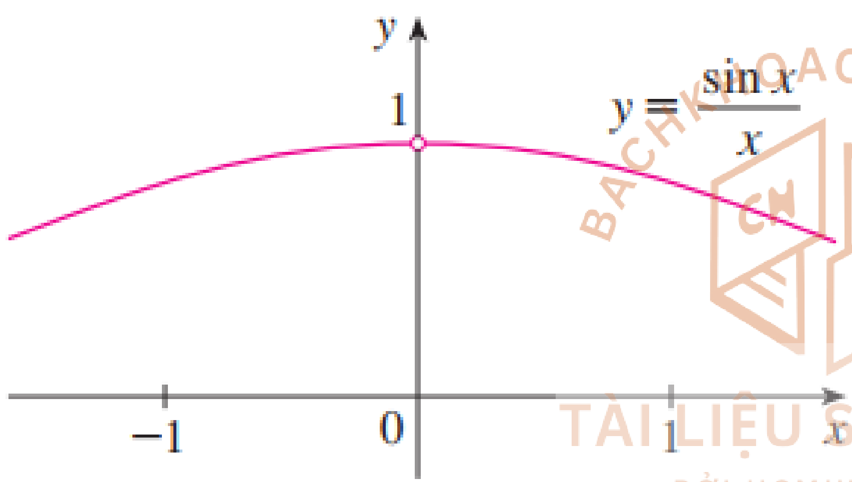
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

Chú ý: Hàm f(x) có thể không xác định tại x_0.
Khi đó, ta nói giới hạn có dạng vô định.



Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$



Hàm không xác định tại $x_0=0$, giới hạn đã cho có dạng

$$\frac{0}{0}$$

Ta vẽ đường cong để minh họa cho kết quả

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \; (a>0)$

TH1: a>1 hàm a^x đồng biến. Vì $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)$

Nên ta dùng đ/n để cm: $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \to 1-\varepsilon^2 < 1 \to 1-\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon}$$

Chọn $\delta = \log_a(\varepsilon+1) \to a^{\delta} = 1+\varepsilon, a^{-\delta} = \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon$

Khi đó: $\forall x : |x-x_0| < \delta \leftrightarrow -\delta < x-x_0 < \delta$

Suy ra: $a^{-\delta} < a^{x-x_0} < a^{\delta} \leftrightarrow (1-\varepsilon <)\frac{1}{1+\varepsilon} < a^{x-x_0} < 1+\varepsilon$

$$\leftrightarrow -\varepsilon < a^{x-x_0} - 1 < \varepsilon \quad \leftrightarrow \left|a^{x-x_0} - 1\right| < \varepsilon$$

TH1: a>1 làm tương tự.

Giới hạn hàm số

Tương tự, ta cũng chứng minh được kết quả cho các hàm sơ cấp cơ bản khác: *(với hàm xác định tại x_0)*

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^{\,a}$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ dãy):

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm f(x)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f,\ x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_o$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy số cùng dần đến x_0:

$$\{x_n\}, \{x'_n\} \to x_0$$

sao cho 2 dãy số tương ứng

$$\{f(x_n)\}, \{f(x'_n)\}$$

có 2 giới hạn khác nhau

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ không tồn tại

Chọn 2 dãy $\{x_n\} = \{n\pi\} \to \infty$

$$\{y_n\} = \left\{\frac{4n+1}{2}\pi\right\} \to \infty$$

2 dãy tương ứng có 2 giới hạn khác nhau:

$$\{x_n\} = \{n\pi\} \Rightarrow f(x_n) = \sin n\pi = 0 \forall n$$

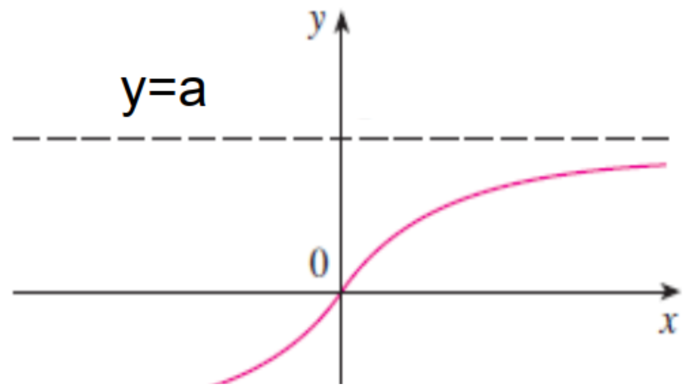
$$\{y_n\} = \left\{\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(y_n) = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \forall n$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn ở vô cực :

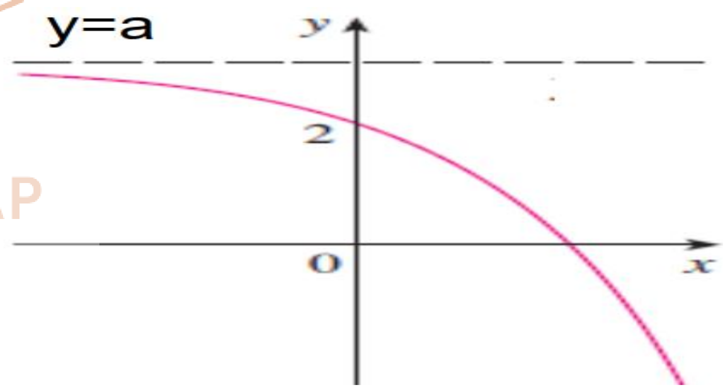
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A>0$$

$$\forall x\in D_f, x>A \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B<0$$

$$\forall x\in D_f, x<B \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$



Tiệm cận ngang: Khi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$

Ta nói đồ thị hàm y=f(x) có TCN (phải hoặc trái) là y=a

Giới hạn hàm số

Giới hạn ra vô cực :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0$$

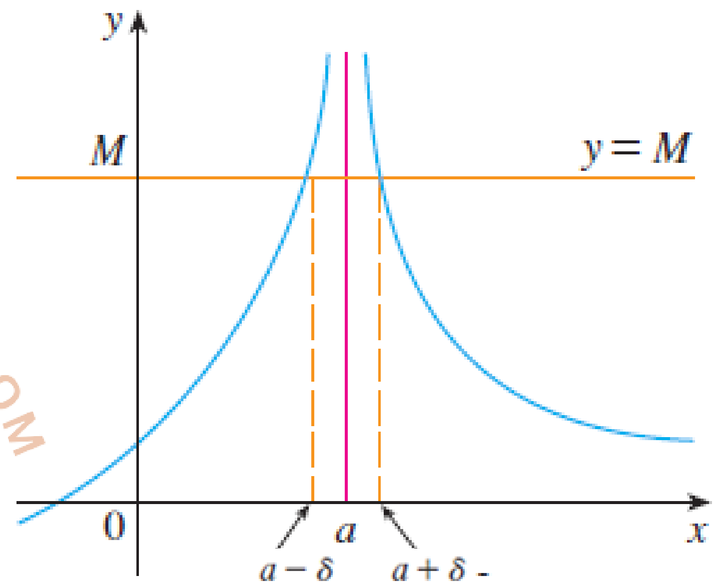
$$\forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

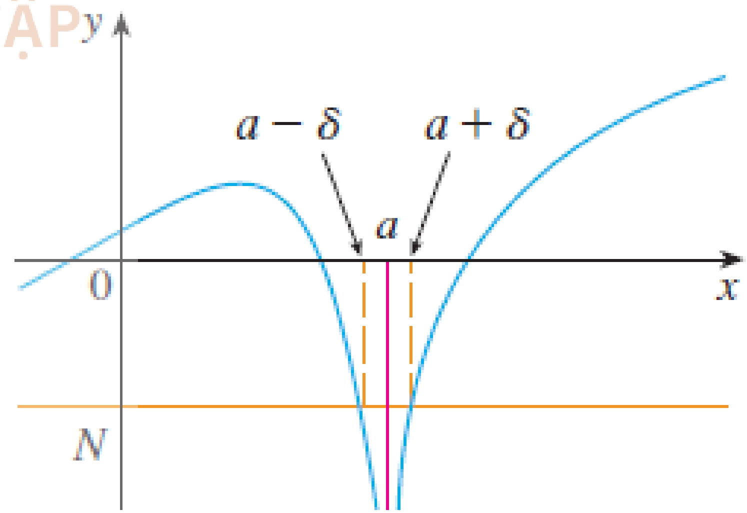
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0\ \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N.$$

Tiệm cận đứng: Khi $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Ta nói đồ thị hàm y=f(x) có TCĐ $x=x_0$



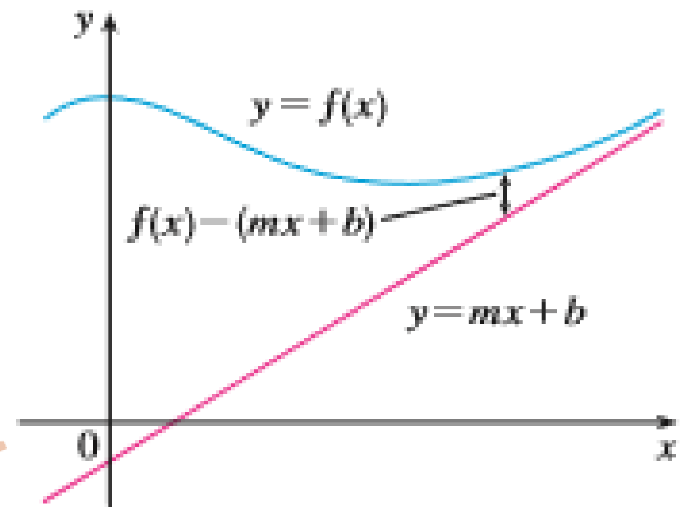


Giới hạn hàm số

Giới hạn ở vô cực ra vô cực :

Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Thì đồ thị hàm y=f(x) có thể có Tiệm cận xiên (Tiệm cận là đường thẳng nằm xiên)



Tiệm cận xiên: Khi $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$

ta nói đồ thị hàm y=f(x) có TCX y=mx+b

Cách tìm 2 hệ số m, b: tính lần lượt 3 giới hạn

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \to \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m \to \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right] = b$$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tìm tiệm cận của các hàm, sau đó dùng máy tính để vẽ đồ thị và các tiệm cận này.

$$1/\ y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}\quad (x=1, x=-1, y=x)$$

TCX: $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}=\frac{x^3-x-2x}{x^2-1}=x-\frac{2x}{x^2-1}$

Suy ra: $y-x=\frac{2x}{x^2-1}\xrightarrow{x\to\pm\infty}0$

Vậy theo định nghĩa, hàm có TCX: y=x

$$2/\ y=\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+3}}\quad (y=x+2, y=-x-2)$$

Giới hạn hàm số

Tính chất của giới hạn hàm

Cho : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

1/ $\lim\limits_{x\to x_0}(Cf) = Ca,\quad C\in\mathbb{R}$

2/ $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g) = a+b$

3/ $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g) = a\times b$

4/ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g} = \dfrac{a}{b},\quad b\neq 0$

5/ $\left(\forall x\in\left(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon\right), f(x)\le g(x)\right)\Rightarrow a\le b$

6/ $\begin{cases} f(x)\le f_1(x)\le f_2(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} f_2 = a \end{cases} \to \lim\limits_{x\to x_0} f_1 = a$ *(Định lý kẹp)*

Giới hạn hàm số

Số e : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Giới hạn dạng $u(x)^{v(x)}$:

Giả sử : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0\\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b\end{cases}$ và sử dụng công thức: $\boxed{u^{v}=e^{v\ln u}}$

$$\lim_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln\left(u(x)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln(u(x))}$$

$$=e^{b\ln a}=a^{b}.$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}$

Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi x→0

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}=e^{\alpha}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi x→∞

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty, \quad a > 1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\alpha}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x, \ \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ không tồn tại

Giới hạn hàm số

7 dạng vô định:

$1/\ \frac{0}{0}$ $\quad 2/\ \frac{\infty}{\infty}$ $\quad 3/\ 0\cdot\infty$

$4/\ \infty-\infty$ $\quad 5/\ 1^{\infty}$

$6/\ 0^{0}$ $\quad 7/\ \infty^{0}$

Ví dụ: Tìm a để các hàm sau có dạng vô định

$1.\ y = x\left(e^{a/x}-1\right), x\to 0^-$ Ta cần: $e^{a/x}-1\to\infty \Rightarrow a<0$

$2.\ y = \frac{a^x-1}{a^x+1}, x\to -\infty$ Ta cần: $a^x\to\infty \Rightarrow 0<a<1$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các giới hạn cơ bản

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} \quad \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)} \qquad L_1 = -\frac{1}{2}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x} \quad \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)} \qquad L_2 = 1$$

$$L_3 = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{2/x}-1\right) \quad \text{(Dạng } \infty.0\text{)} \qquad L_3 = 2$$

$$L_4 = \lim_{x\to\pi} (\pi - x)\tan\frac{x}{2} \quad \text{(Dạng } 0.\infty\text{)} \qquad L_4 = 2$$

$$L_5 = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \quad \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)} \qquad L_5 = \frac{\sqrt[6]{2^5}}{3}$$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các giới hạn cơ bản

$$L_6 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+a) - \ln x\right)$$

$$L_7 = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a>0)$$

$$L_8 = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là *giới hạn trái* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$

Số a gọi là *giới hạn phải* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

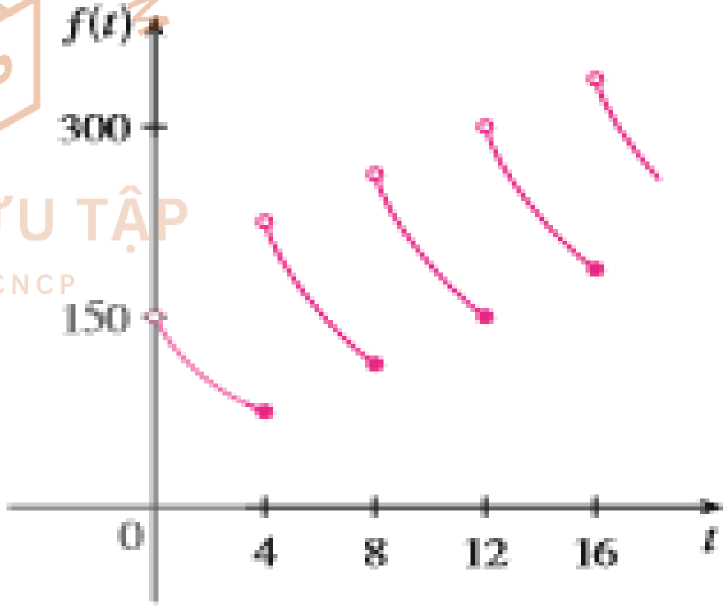
ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Một bệnh nhân được tiêm 1 loại thuốc theo chu kỳ 4 tiếng 1 lần với 150mg thuốc cho 1 lần tiêm. Đồ thị dưới đây cho thấy lượng thuốc f(t) trong máu sau t giờ.

Tìm và giải thích ý nghĩa của 2 giới hạn sau

$$\lim_{t\to 12^+} f(t), \lim_{t\to 12^-} f(t)$$



Giới hạn hàm số

Định lý:

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý:

1. Ta có thể dùng định lý trên để chứng minh không tồn tại giới hạn hàm (Ngoài cách dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy).

2. Giới hạn một phía thường được dùng trong các trường hợp hàm số mũ, hàm chứa căn bậc chẵn, chứa trị tuyệt đối, hoặc hàm ghép.

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính các giới hạn

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} 3^{\frac{1}{2-x}}$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x),\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, x>1 \\ 2x-x^2, x\le 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pi\pm 0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Giới hạn hàm số

Ví dụ : Tìm a để hàm f(x) có giới hạn khi x→0

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, x>0\\ 5x+a, x\le 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

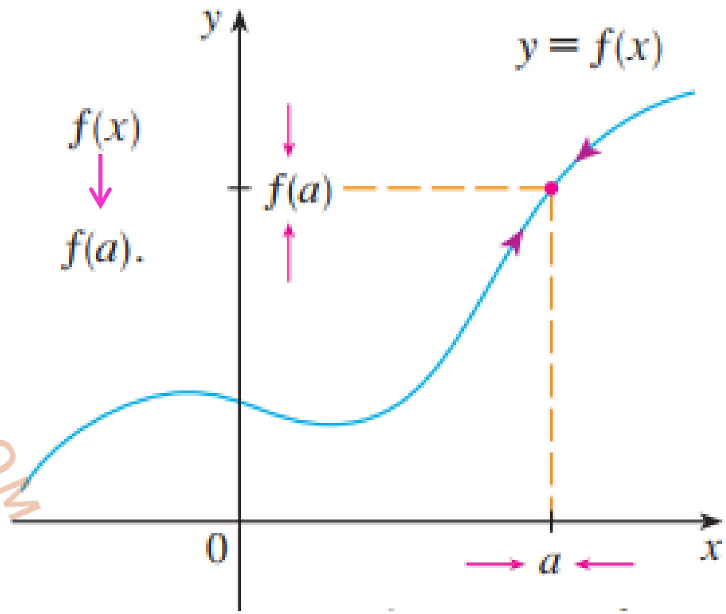
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(5x+a)=a$$

Để hàm có giới hạn khi x →0 ta phải có 2 giới hạn trên bằng nhau tức là : a=2

Hàm số liên tục

Hàm liên tục: Hàm y=f(x) được gọi là liên tục trái (phải) tại điểm x=a thuộc MXĐ của hàm nếu

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = f(a)$$



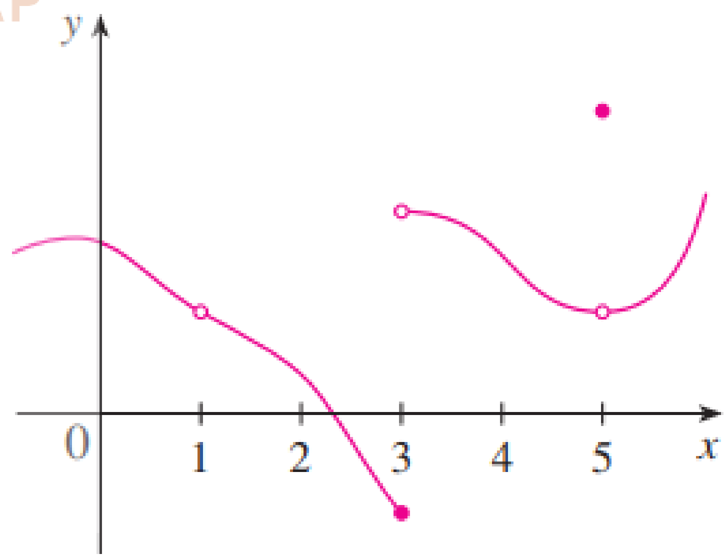
Định lý: Hàm liên tục tại x=a khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại x=a

Hàm gián đoạn tại x=a nếu nó không liên tục tại đó

Ví dụ: Hàm y=f(x) có đồ thị ở hình bên, gián đoạn tại x=1, 3, 5 vì:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3), \lim_{x\to 3^+} f(x) \neq f(3)$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5), \nexists f(1)$$

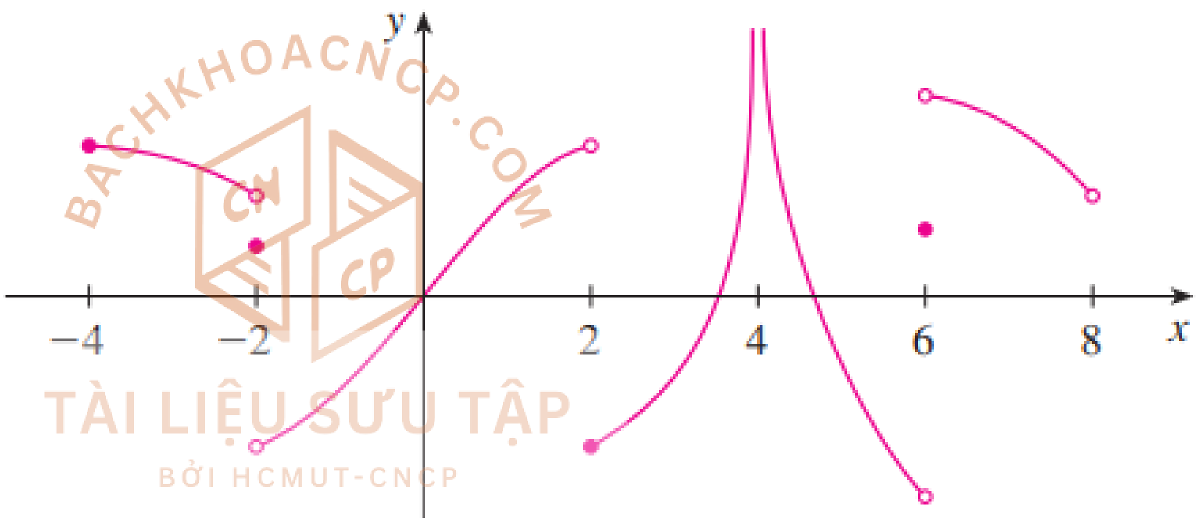


Hàm số liên tục

Ví dụ: Từ đồ thị của hàm y=f(x) xác định

a. f(x) không liên tục tại những điểm nào?

b. Tại những điểm tìm được ở câu a. xác định xem f(x) liên tục phải liên tục trái hay không liên tục 1 phía nào cả



Ví dụ: Các hàm sau đây liên tục hay gián đoạn

1. Hàm về nhiệt độ tại 1 địa điểm theo thời gian
2. Hàm về giá cước taxi theo thời gian di chuyển

Hàm số liên tục

Các hàm sơ cấp cơ bản là 5 lớp hàm sau

1. Hàm số mũ : $y=a^x$
2. Hàm lũy thừa: $y=x^a$
3. Hàm logarit: $y=\log_a x$
4. Các hàm lượng giác: 4 hàm
5. Các hàm lượng giác ngược: 4 hàm

Hàm sơ cấp là các hàm tạo từ các hàm sơ cấp cơ bản với 4 phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và phép hợp hàm

VD Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(I) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(II) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x)}{x}, & x < 0 \\ 1 - 4x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

(III) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x)}{x}, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(IV) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$

A. (III) B. (IV) C. (II) D. (IV)

Hàm số liên tục

Định lý (về sự liên tục của các hàm sơ cấp):

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

Tính chất hàm liên tục: Tổng, tích, thương và hợp các hàm liên tục lại là các hàm liên tục

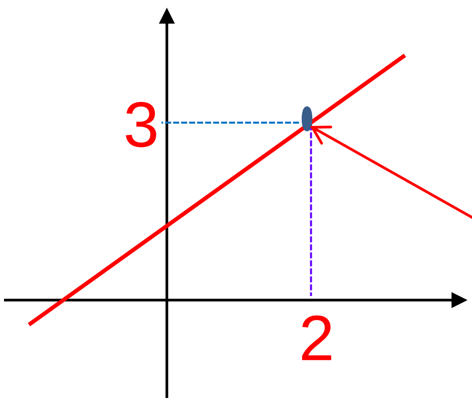
Ví dụ: Tìm tất cả điểm gián đoạn của các hàm sau và so sánh các điểm gián đoạn.

$1/\ f_1(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ $\quad 2/\ f_2(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$ $\quad 3/\ f_3(x) = \dfrac{1}{x}$

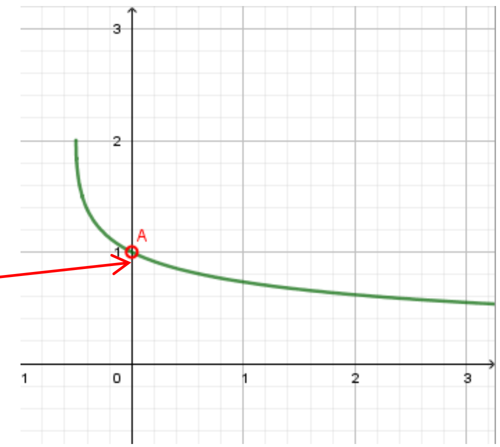
3 hàm đã cho đều là hàm sơ cấp nên hàm không xác định tại đâu thì gián đoạn tại đó

Hàm số liên tục

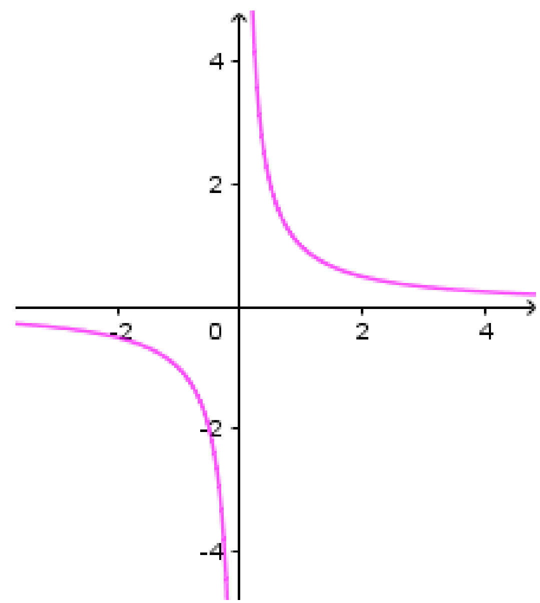
$$\lim_{x\to 2} f_1 = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3 \qquad \lim_{x\to 0} f_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 1$$



Điểm gián đoạn bỏ được



$$\lim_{x\to 0} f_3 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$



x=0 là điểm gián đoạn không bỏ được

Ta còn nói hàm f_3 không bị chặn tại x=0

Hàm số liên tục

Ví dụ: Tìm a để hàm $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ 3-ax^2, x>1 \end{cases}$

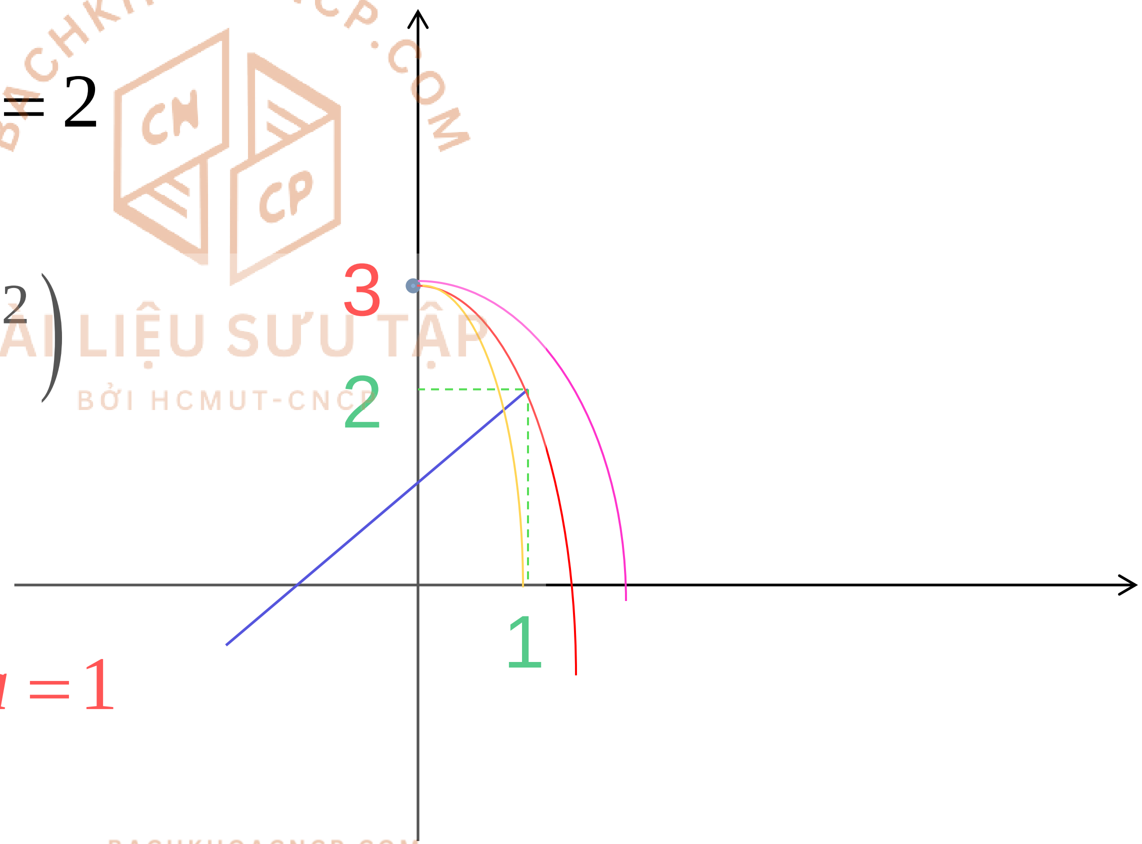
liên tục với mọi x

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+}\left(3-ax^2\right)$$

$$= 3-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^+} y \Leftrightarrow a=1$$



VCL và VCB

VCB: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) *khi $x \to x_0$* nếu

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Ví dụ:

Hàm $\alpha(x) = 2x^3 + x$ là:

+ VCB khi $x \to 0$ vì $\lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$

+ <u>không</u> là VCB khi $x \to 1$ vì $\lim_{x \to 1} \alpha(x) = 3$

VCL và VCB

Tính chất của các VCB

1) Tổng hữu hạn của các VCB là một VCB.

2) Tích của hai VCB là một VCB.

3) Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.

4) Thương của hai VCB có thể không là một VCB.

VCL và VCB

So sánh 2 VCB:

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to x_0$

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì ta nói 2 VBC này so sánh được và

1) Nếu $k = 0$, thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ hay *$\alpha(x)$ giảm về 0 nhanh hơn $\beta(x)$*, kí hiệu là $\alpha(x) = 0(\beta(x))$

2) Nếu k hữu hạn, khác không, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp hay tốc độ giảm về 0 của $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ bằng nhau.

3) Nếu $k = 1$, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) Nếu $\alpha(x)$ cùng bậc với $(\beta(x))^m$ thì ta nói bậc của $\alpha(x)$ là m so với $\beta(x)$

VCL và VCB

Ví dụ: So sánh các VCB sau

$$1.Khi\ x \to 0: \alpha(x) = \sin^2 x + x^2, \beta(x) = \tan 2x$$

$$2.Khi\ x \to 1: \alpha(x) = \sin(\pi x), \beta(x) = \sqrt[3]{x} - 1$$

$$3.Khi\ x \to +\infty: \alpha(x) = \ln\frac{x+1}{x}, \beta(x) = e^{1/x} - 1$$

Kiểm tra các đại lượng đã cho chắc chắn là VCB. Sau đó, dùng định nghĩa để so sánh.

$$1. \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \to \alpha(x) = 0(\beta(x))$$

$$2. \lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = -3\pi \to$$ *α(x), β(x) là 2 VCB cùng bậc*

$$3. \lim_{x\to +\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \to \alpha(x) \sim \beta(x)$$

VCL và VCB

Các VCB tương đương thường gặp khi x→0

1) $\sin x \sim x$

2) $e^x - 1 \sim x$

3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

4) $\ln(1+x) \sim x$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

6) $\arcsin x \sim x$

7) $\arctan x \sim x$

8) $\tan x \sim x$

9) $\sinh x \sim x$

10) $\cosh x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

VCL và VCB

Ví dụ: So sánh các VCB sau khi x→0:

$$1.\alpha(x) = x, \beta(x) = x\sin {}^{1}\!/_{x}$$

$$2.\alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x, \beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin {}^{1}\!/_{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

Giới hạn không tồn tại tức là 2 VCB này không so sánh được

VCL và VCB

2. Ta sẽ so sánh bằng cách tính bậc của 2 VCB đó

$$\alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x = (e^{x^2 \ln 2} - 1) - (\cos x - 1) \sim x^2 \ln 2 + \frac{1}{2} x^2$$

$$= x^2 \left(\ln 2 + {}^{1}\!/_{2} \right)$$

Như vậy, bậc của α(x) là 2 so với x

$$\beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2 \sim x^{3/2} - x^2 \sim x^{3/2}$$

Bậc của β(x) là 3/2 so với x

Vậy $\alpha(x) = 0\left(\beta(x)\right)$

VCL và VCB

Ví dụ: Tìm a, b để α(x) tương đương với ax^b khi $x \to 0$

$$1.\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1-x} - 1\right) \qquad 2.\alpha(x) = \tan x^2 + 2x$$

Ta đi tính bậc của các VCB

$$1.\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1-x} - 1\right) \sim \left(\sqrt{1-x} - 1\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}+1} \sim \frac{-1}{2}x^1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

$$2.\alpha(x) \sim x^2 + 2x \sim 2x^1$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1$$

VCL và VCB

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực a và p để hai hàm số sau tương đương khi $x \to 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2a-1)\left(1-\cos\frac{x^{p+2}}{2}\right), \\ g(x) &= p\left(\sqrt[3]{1+6x^2}-1\right)-4x^3. \end{aligned}$$

A. $a = -\dfrac{15}{2}$, $p = -1$. B. $a = \dfrac{17}{2}$, $p = -1$. C. $a = \dfrac{3}{2}$, $p = \dfrac{1}{2}$. D. $a = \dfrac{1}{2}$, $p = 1$.

Câu 7. Cho $f(x) = \sqrt[3]{6x^p+1} - 1 - 4x^3$.
Tìm tất cả các giá trị $p > 0$ để $f(x) = o\left(x^2\right)$ khi $x \to 0$.

A. Với mọi $p > 2$. B. Với mọi $p > 1$. C. Với mọi $p > 3$. D. Với mọi $p > 0$.

VCL và VCB

Qui tắc thay VCB tương đương với tích, thương

Giả sử $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ thỏa:

$$f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x): \begin{cases} f_1(x).g_1(x) \sim f_2(x).g_2(x), \\ \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \end{cases}$$

Qui tắc thay VCB tương đương với tổng các VCB

Giả sử a≠0, b ≠0, α, β là các hằng số thực sao cho:

khi $x \to x_0$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ là VCB và $f_1(x) \sim ax^\alpha$, $f_2(x) \sim bx^\beta$

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \left[\begin{array}{l} 1.\, ax^\alpha, \text{khi } \alpha \neq \beta (\alpha < \beta) \\ 2.\, (a+b)x^\alpha, \text{khi } \alpha = \beta \,\&\, a+b \neq 0 \\ 3.\ \text{Không thay được, khi } \alpha = \beta \,\&\, a+b=0 \end{array}\right.$$

VCL và VCB

Ví dụ: Tính giới hạn $L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(ax)}{3x^2 + \ln(1+x)}$

Ta thay VCB tương đương như sau, khi x→0

$$1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

(VCB tương đương cơ bản)

$$\Rightarrow 3x^2 + \ln(1+x) \sim 3x^2 + x \sim x$$

(Tổng các VCB không cùng bậc tương đương với VCB có bậc thấp nhất)

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x} = 0$$

VCL và VCB

Ví dụ: Tính giới hạn $L_2 = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin 2(x-1)}{e^{x-1} - \cos\sqrt{x-1}}$

Lưu ý: Vì trong hàm dưới dấu giới hạn có $\cos\sqrt{x-1}$ nên cần điều kiện x≥1 suy ra: ta chỉ tính giới hạn phải

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{{}^3\!/_2\,(x-1)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ: Tính $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1) - (e^{\sin x} - 1)}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

VCL và VCB

Ví dụ: Tính $L_4 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{3x^3}$

Thay VCB tương đương: $\begin{cases} \tan x \sim x \\ \sin x \sim x \end{cases}$

Ta sẽ có kết quả là tử số bằng 0, và $L_4 = 0$

Đây là kết quả sai, vì thay VCB sai

Kết quả đúng là :

$$L_4 = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\frac{x^2}{2}}{3x^3} = \frac{1}{6}$$

VCL và VCB

Ví dụ: Tính $L_5 = \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

$$L_5 = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1\right) - \left(e^{\sin x} - 1\right)}{x^3}$$

Đến đây, không thể thay VCB tương đương được vì:

$$\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \end{cases}$$

Tử số là HIỆU CỦA 2 VCB CÙNG TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI VCB THỨ 3

Kết quả đúng là $L_5 = \dfrac{1}{6}$

VCL và VCB

Ví dụ: Tính bậc của các VCB sau so với $x-x_0$, từ đó suy ra giới hạn tỉ số các VCB đó khi $x \to x_0$

$$1.\ Khi\ x \to 0: \alpha(x) = a^{\sqrt{x}} - 1,\ \beta(x) = \sqrt[5]{x^5 - ax^3} + \sqrt[4]{x^4 + 2ax^2}$$

$$2.\ Khi\ x \to 1: \alpha(x) = \ln^2 x + \sqrt[3]{x^2} - 1,\ \beta(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$$

Ví dụ: Phát hiện lỗi trong cách làm sau

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \overset{t = x-1}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{n+1} - (n+1)(t+1) + n}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)\left[(1+t)^n - 1\right] - nt}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)[nt] - nt}{t^2} = n$$

VCL và VCB

VCL: Hàm số $A(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) *khi $x \to x_0$* nếu

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \infty.$$

Ví dụ:

1. $\lim_{x \to \infty} (2x^2 + \sin x) = \infty$ nên $A(x)=2x^2+\sin x$ là VCL *khi $x \to \infty$*

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow A(x) = \frac{1}{x}$ là VCL *khi $x \to 0$*

VCL và VCB

So sánh các VCL

Cho A(*x*) và B(*x*) là hai vô cùng lớn khi $x \to x_0$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = k$

1) Nếu k = ∞ , thì *A*(*x*) gọi là VCL bậc cao hơn *B*(*x*), kí hiệu

$$A(x) \gg B(x).$$

2) Nếu *k* hữu hạn, khác không, thì A(*x*) và B(*x*) là hai VCL cùng cấp.

3) Nếu k=1, thì A(*x*) và *B*(*x*) là hai VCL tương đương:

$$A(x) \sim B(x).$$

4) Nếu A(x) cùng bậc với $(B(x))^m$ thì bậc của A(x) là *m* so với B(x)

VCL và VCB

Qui tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

VCL và VCB

Ví dụ: So sánh các VCL sau khi $x \to +\infty$

$$A(x) = x + 2^x, B(x) = x^2, C(x) = e^x$$

Khi $x \to +\infty$: $x \ll x^2 \ll 2^x \ll e^x$

$$A(x) = x + 2^x \sim 2^x \longrightarrow B(x) \ll A(x) \ll C(x)$$

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị a và p sao cho hai hàm số sau tương đương khi $x \to +\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2ax^p}{\arctan(x)} - x + 2, \\ g(x) &= e^{-x^3} - 1 + 3x^2. \end{aligned}$$

A. $a = \frac{3\pi}{2}$, $p = 3$.
B. $a = \frac{\pi}{2}$, $p = 4$.
C. $a = \frac{3\pi}{4}$, $p = 2$.
D. Các câu khác đều sai.