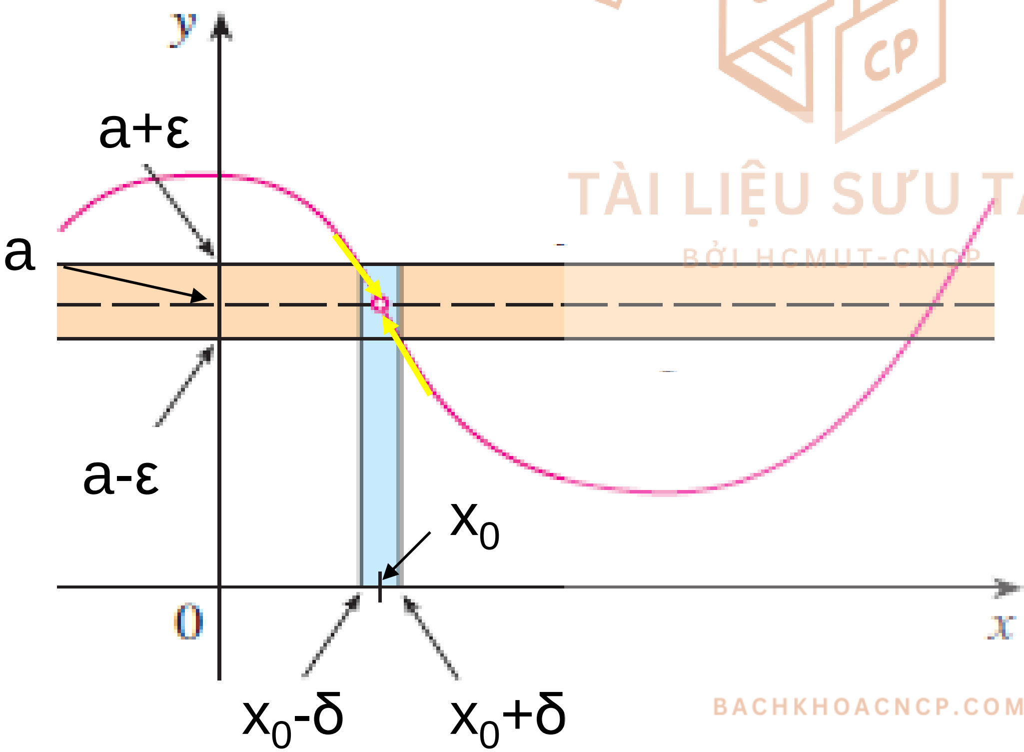
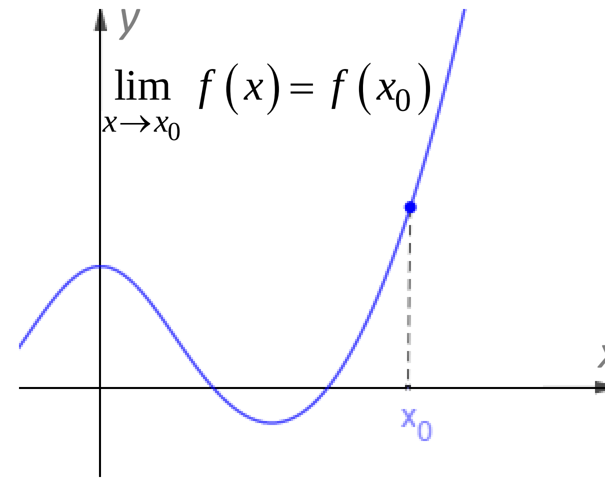
Giới hạn hàm số

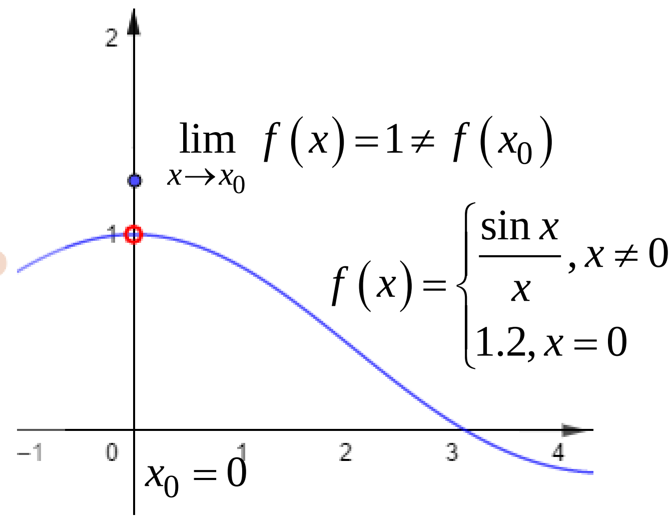
Định nghĩa 1:

Cho hàm f(x) có TXĐ là D_f và x_0 là 1 điểm tụ của D_f (có vô số các phần tử của D_f "tụ tập" quanh x_0)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0: \ \exists\delta > 0$$
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$







Chú ý: Hàm f(x) có thể không xác định tại x_0. Khi đó, ta nói giới hạn có dạng vô định.

Giới hạn hàm số

Ví dụ: Một công ty cho biết x tuần sau khi kết thúc 1 đợt quảng cáo, doanh số hàng tuần (triệu đồng) của sản phẩm mới là

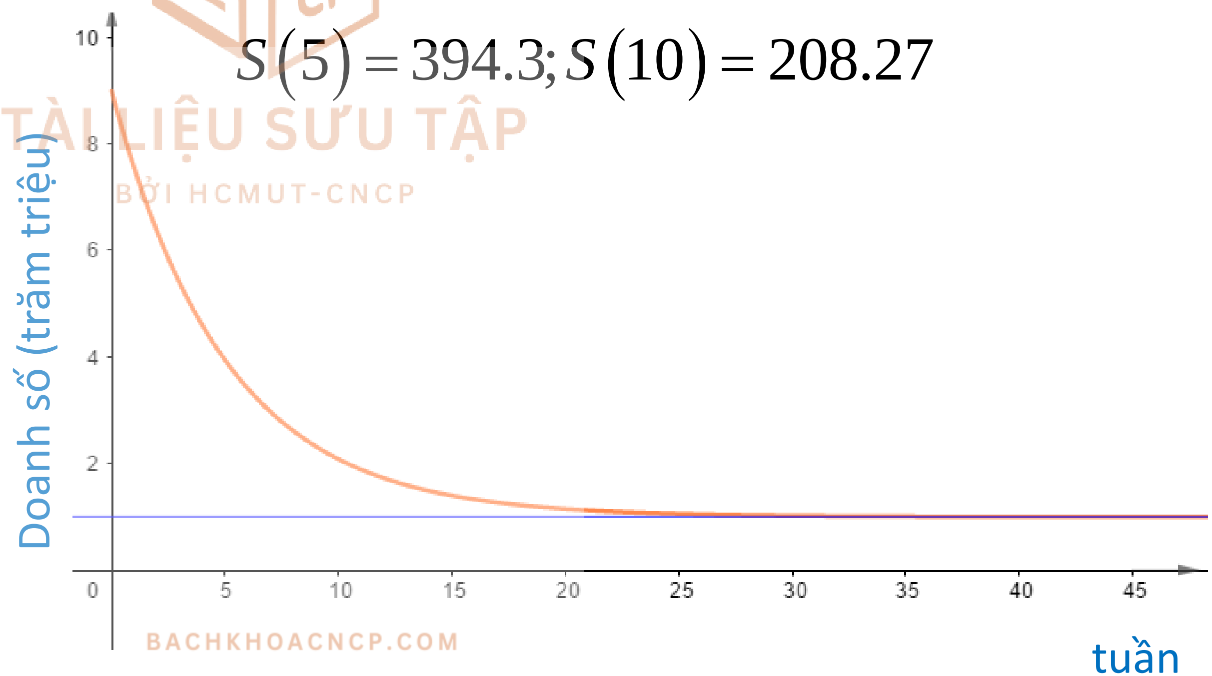
$$S(x) = 100 + 800 \times e^{-0.2x}$$

a. Tìm doanh số hàng tuần vào tuần thứ 5, 10 sau khi kết thúc đợt quảng cáo.

b. Điều gì xảy ra nếu công ty thôi không quảng cáo nữa?

Nếu thôi không quảng cáo thì doanh số hàng tuần sẽ giảm còn khoảng 100 triệu cho đến khi bán hết sản phẩm.

$$S(5) = 394.3; S(10) = 208.27$$

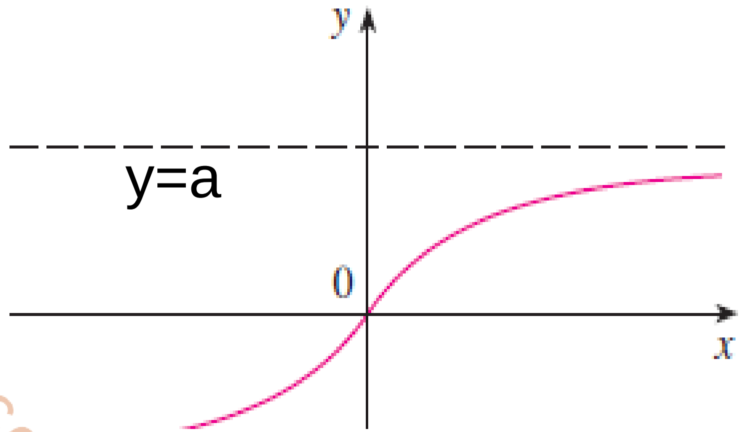


Giới hạn hàm số

Giới hạn ở vô cực :

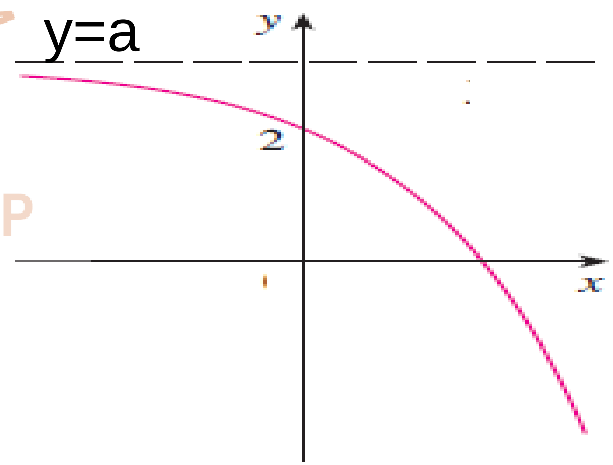
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$$

$$\forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B < 0$$

$$\forall x \in D_f, x < B \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



Tiệm cận ngang: Khi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

Ta nói đồ thị hàm y=f(x) có TCN (phải hoặc trái) là y=a

Giới hạn hàm số

Giới hạn ra vô cực :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0$$

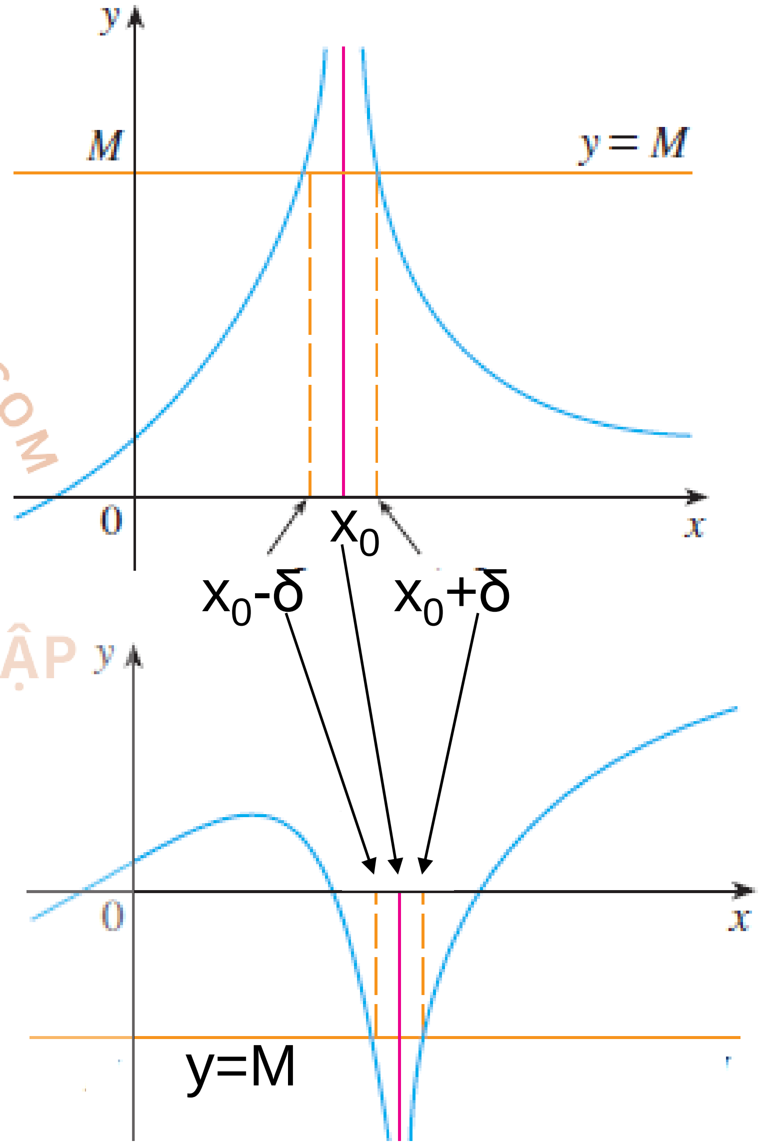
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Tiệm cận đứng: Khi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Ta nói đồ thị hàm y=f(x) có TCĐ $x=x_0$



Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là *giới hạn trái* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$

Số a gọi là *giới hạn phải* của *y* = *f*(*x*) tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa 2:

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm f(x)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f,\ x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_o$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa này để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy số cùng dần đến x_0:

$$\{x_n\}, \{x'_n\} \to x_0$$

nhưng 2 dãy số tương ứng

$$\{f(x_n)\}, \{f(x'_n)\}$$

có 2 giới hạn khác nhau

Ví dụ: Chứng minh rằng giới hạn $\lim_{x\to\infty} \sin x$ không tồn tại

Chọn 2 dãy: $\{x_n\} = \{n\pi\}, \{x_n'\} = \left\{\frac{(4n+1)}{2}\pi\right\}$ đều dần đến ∞

và 2 dãy:

$$f(x_n) = \sin n\pi = 0, \forall n$$

$$f(x_n') = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \forall n$$

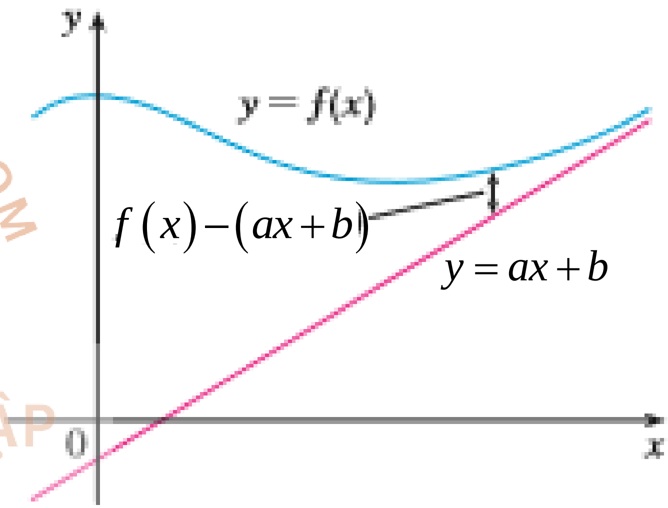
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1$$

Tiệm cận của hàm số

Tiệm cận ngang: $y = a$ *khi* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ *nếu TXĐ có* $\pm\infty$

Tiệm cận đứng: $x = a$ *khi* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *nếu a không thuộc TXĐ*

Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$



Thì đồ thị hàm y=f(x) có thể có Tiệm cận xiên

Tiệm cận xiên: $y = ax + b$ *khi* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

Cách tìm 2 hệ số a, b:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\to \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right] = b$$

Tiệm cận của hàm số

Ví dụ: Tìm tiệm cận hàm $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Với TXĐ trên, ta tìm các TC bằng cách các tính giới hạn khi:

$$x \to \pm 1, x \to \pm\infty$$

$\lim\limits_{x\to 1} y = \infty, \lim\limits_{x\to -1} y = \infty$: 2 TCĐ x=1, x=-1

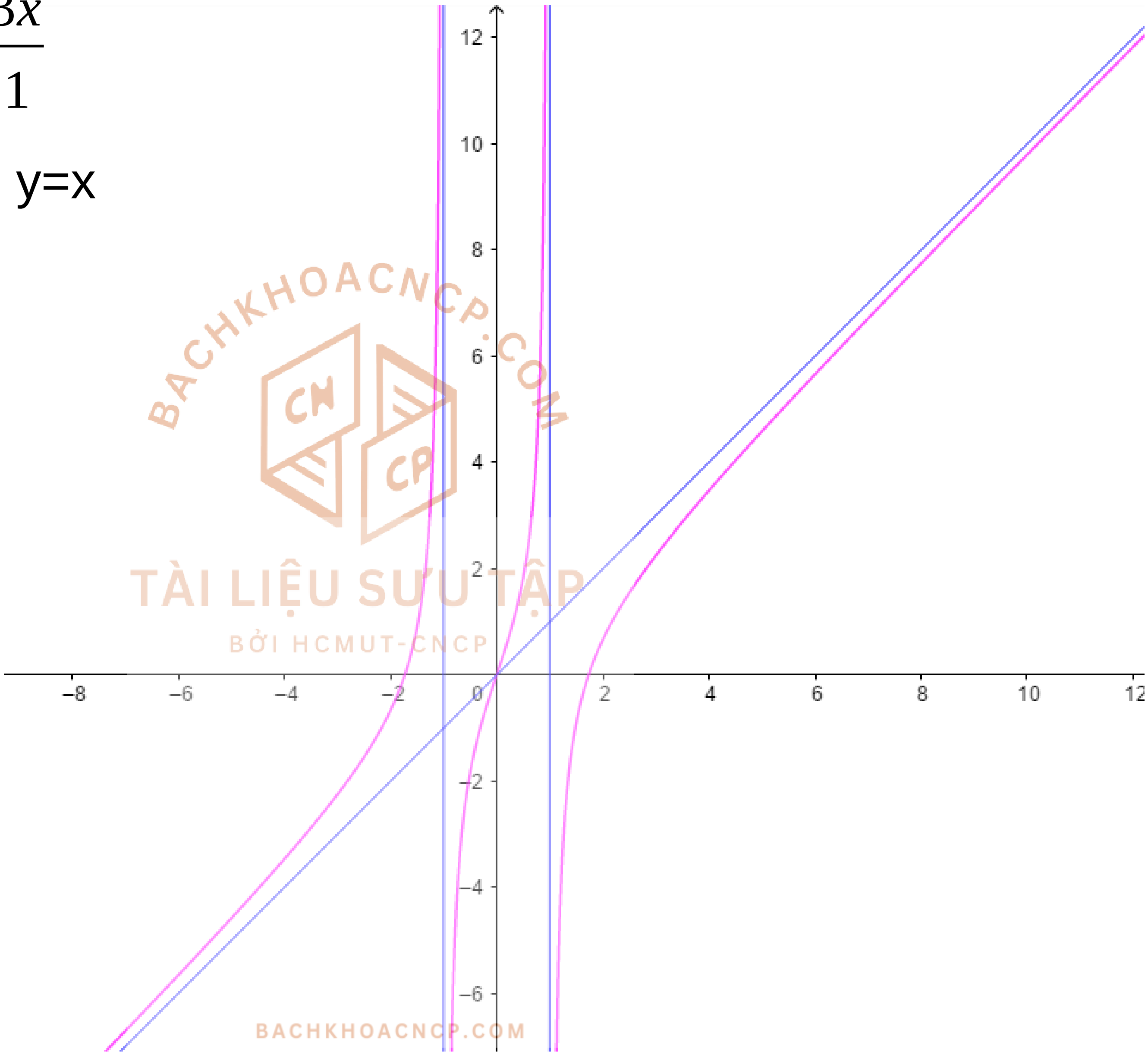
$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{2x}{x\left(x^2-1\right)}\right) = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{2x}{x^2-1}\right) = 0$: TCX y=x từ 2 phía

Tiệm cận của hàm số

Hàm $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

3 TC: x=1, x=-1, y=x



Tiệm cận của hàm số

Ví dụ: Tìm tất cả tiệm cận của hàm $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

TXĐ: $\begin{cases} x^3(x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x \leq 0 \end{array} \right.$

Ta sẽ tính các giới hạn sau để tìm tiệm cận bằng cách bấm máy tính

$\lim\limits_{x \to 0^-} y = 0$: không có TC

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$: *TCĐ x=1 từ bên phải, lên trên*

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{|x|}{x} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (y - x) = 0.5 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (y + x) = -0.5 \end{cases}$

: *2 TCX y=x+0.5 (bên phải), y=-x-0.5 (bên trái)*

Tiệm cận của hàm số

Tiệm cận của hàm $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

$$y = x + 0.5, y = -x - 0.5, x = 1$$