Chương II : GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ax=b

1) Hệ có A là ma trận tam giác trên

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Tính nghiệm

$$x_n \to x_{n-1} \to x_{n-2} \to x_{n-3} \cdots \to x_1$$

Ví dụ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18.0 \\ 0 + 0.1x_2 + 2x_3 = 20.2 \\ 0 + 0 + 0.01x_3 = 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 10 \end{cases}$$

2) Hệ có A là ma trận tam giác dưới

$$A\,x = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Tính nghiệm $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 .... \to x_n$

3) Giải bằng phương pháp nhân tử LU :

(A ma trận vuông bất kỳ)

a) Nội dung : Phân tích ma trận A = L.U

L là ma trận tam giác dưới

U là ma trận tam giác trên

Việc giải hệ phương trình sẽ đưa về giải **hai hệ** phương trình dạng **tam giác**

Quy ước $l_{11} = l_{22} = l_{33} = .. = 1$: có nghiệm duy nhất

Cách tìm L, U từ ma trận A :

Nhân hàng1 của L với cột 1 của U tìm được u_{11}

Nhân hàng2 của L với cột 1 của U tìm được l_{21}

Nhân hàng3 của L với cột 1 của U tìm được l_{31}

Nhân hàng1 của L với cột 2 của U tìm được u_{12}

Nhân hàng1 của L với cột 3 của U tìm được u_{13}

Nhân hàng2 của L với cột 2 của U tìm được u_{22}

Nhân hàng3 của L với cột 2 của U tìm được l_{32}

Nhân hàng2 của L với cột 3 của U tìm được u_{23}

Nhân hàng3 của L với cột 3 của U tìm được u_{33}

4) Phương pháp Cholesky
(phương pháp căn bậc hai)

a) Nội dung :

Biểu diễn ma trận A dưới dạng $A = B.B^T$

trong đó B là ma trận tam giác dưới

(B^T : ma trận chuyển vị của B, là ma trận tam giác trên)

b) Nhận xét :

Cách tìm B **tương tự** như phương pháp LU

nhưng số phép tính giảm đi 2 lần

Phương pháp Cholesky **không** đòi hỏi đường

chéo của ma trận B bằng 1

Khi lấy căn bậc 2 quy ước rằng lấy **căn số học**

(**căn là số dương**)

Ví dụ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

b) Nhận xét :

*) Phương pháp chỉ dùng được nếu A là **đối xứng** và **xác định dương**

5) Các phương pháp lặp :

(thường dùng cho các hệ với ma trận A có kích thước rất lớn)

5.1) Định nghĩa : (Chuẩn của vectơ)

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i |$$

(x_i : các thành phần của véctơ x)

(chuẩn vô hạn , hàng)

5.1) Định nghĩa : (Chuẩn của vectơ)

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

(chuẩn 1, cột)

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\| x \|_\infty =$$

$$\| x \|_1 =$$

$$\| x \| \geq 0$$

$$\| x \| = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$$

5.2) Định nghĩa (Chuẩn của ma trận)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

(chuẩn vô hạn , chuẩn hàng)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

(chuẩn 1 , chuẩn cột)

Ví dụ : $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ta có

$$\|A\|_{\infty}=\underset{1\le i\le n}{Max}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)=Max\,(7,3)=7$$

$$\|A\|_{1}=\underset{1\le j\le n}{Max}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)=Max(6,4)=6$$

Các tính chất của chuẩn ma trận :

$$\|A\|\ge 0$$

$$\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$$

$$\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$$

$$\|A.\,x\| \le \|A\|\,.\,\|x\|$$

5.3) Định nghĩa (Số điều kiện cuả ma trận A)

$$k_1(A) = cond_1(A) = \|A\|_1 . \|A^{-1}\|_1$$

$$k_\infty(A) = cond_\infty(A) = \|A\|_\infty . \|A^{-1}\|_\infty$$

Ví dụ : $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty . \|A^{-1}\|_\infty = 7.3 = 21$$

$$k_1(A) = \|A\|_1 . \|A^{-1}\|_1 = 6\frac{7}{2} = 21$$

Ví dụ :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4.1 & 4\\ 3 & 6.1 & 5.01\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-3859 & -3920 & 3900\\ 1980 & 2010 & -2000\\ -100 & -100 & 100\end{bmatrix}$$

$$k_\infty(A)=164790.69$$

$$k_1(A)=73566$$

Sự biến thiên của nghiệm tỷ lệ với sự biến thiên của vế phải với **hệ số tỷ lệ** là $k(A)$

$$\| x - x' \| \approx k(A) \| b - b' \|$$

5.4) Phương pháp lặp Jacobi (lặp đơn) :

a) Nội dung:

*) Đưa hệ $A x = b$ về dạng $x = \Phi x + g$

*) Kiểm tra điều kiện $\|\Phi\| = q < 1$

(chuẩn hàng hoặc cột)

*) Lấy $x^{(0)}$ là véctơ giá trị ban đầu tùy ý

*) Dãy lặp $x^{(k)}$ xây dựng theo công thức

$$x^{(k+1)} = \Phi x^{(k)} + g$$

b) Đánh giá sai số :

$$\left\| x^{(k)} - x^{d} \right\| \leq \frac{q^{k}}{1-q} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$$

công thức tiên nghiệm

$$\left\| x^{(k)} - x^{d} \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$$

công thức hậu nghiệm

Ví dụ : Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ 1x_1 + 10x_2 - 1x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \quad\quad + 0.1x_2 - 0.2x_3 + 0 \\ x_2 = -0.1x_1 \quad + 0.1x_3 + 0.5 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.3x_2 \quad -1 \end{cases}$$

$$\|\Phi\|_\infty = 0.5 = q_\infty$$

$$\|\Phi\|_1 = 0.4 = q_1$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & +0.1x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 0 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} & +0.1x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} & -1 \end{cases}$$

Với $x^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$, số bước lặp là k = 3

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	0	0	0.25	
$x_2^{(k)}$	0	0.5	0.4	
$x_3^{(k)}$	0	-1	-1.15	
Sai số $\lVert \ \rVert_\infty$	-			

c)Nhận xét :

A ma trận có **đường chéo trội** theo **hàng**:

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \Rightarrow \quad \|\Phi\|_\infty < 1$$

A ma trận có **đường chéo trội** theo **cột**

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \Rightarrow \quad \|\Phi\|_1 < 1$$

5.5) Phương pháp lặp Gauss - Seidel :

Nội dung : Các thành phần của $x_i^{(k+1)}$ vừa tính được đã **dùng ngay** để tính $x_{i+1}^{(k+1)}$ trong bước tiếp theo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phantom{-0.1x_1^{(k+1)}} +0.1x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 0 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k+1)} \phantom{+0.1x_2^{(k)}} + 0.1x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} - 0.3x_2^{(k+1)} \phantom{- 0.2x_3^{(k)}} - 1 \end{cases}$$

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	0	0	0.28	
$x_2^{(k)}$	0	0.5	0.357	
$x_3^{(k)}$	0	-1.15	-1.1631	

c) Nhận xét:

Phương pháp Gauss – Seidel thông thường có tốc độ hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp jacobi

Giải thuật đơn giản hơn so với phương pháp Jacobi .

Nhược điểm : Đánh giá sai số phức tạp

Jacobi

$$Ax = b$$

$$A = D - L - U$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$x = \Phi x + g$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$A = D - L - U$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

$$x = (D - L)^{-1}U \; x + (D - L)^{-1}b$$

$$(D - L)^{-1}U = \Phi$$

$$(D - L)^{-1}b = g$$

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 = 3 \\ -5x_1 + 11x_2 = 6 \end{cases}$

Theo phương pháp Gauss-Seidel, ma trận lặp $\Phi_g = ?$ (làm tròn hai chữ số lẻ)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \qquad D - L = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.04545454 & 0.09090909 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0.136363636 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$