BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG 1. DÃY SỐ THỰC

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

ĐT/Zalo: 0913.066.940 - Email: duongnda@hcmut.edu.vn

Ngày 9 tháng 10 năm 2020

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) viết dưới dạng khai triển $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số $(n \in \mathbb{N}^*)$.

A. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) viết dưới dạng khai triển $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số $(n \in \mathbb{N}^*)$.

A. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) viết dưới dạng khai triển $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số $(n \in \mathbb{N}^*)$.

A. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. **B.** $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$. **C.** $u_n = \frac{n^2}{n+1}$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra $u_n = \frac{n}{n+1}$. D

Bài 2.

Cho $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $S_n = \frac{n+1}{n}$. **B.** $S_n = \frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n = \frac{n+2}{2n+7}$. **D.** $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+2-n}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+2}{n(n+2)} - \dfrac{n}{n(n+2)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right).$

Do đó

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&= \frac{n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Vậy $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

B

Bài 3.

Cho dãysố $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

Bài 3.

Cho dãysố $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Bài 3.

Cho dãysố $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 5$; $u_3 = u_2 + 2 = 7$; $u_4 = u_3 + 3 = 10$. Do đó số hạng thứ 5 của dãy số là $u_5 = u_4 + 4 = 14$ D

Bài 4.

Cho dãysố (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Bài 4.

Cho dãysố (u_n) xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Lời giải

Bài 4.

Cho dãysố (u_n) xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Lời giải

Ta có $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(1 + 2 + \cdots + n) = \dfrac{1}{2} + n(n+1)$.

Bài 4.

Cho dãysố (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{1}{2} + 2(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2} + n(n+1)$.

Suy ra $u_{50} = \frac{1}{2} + 50.51 = 2550,5$. D

Bài 5.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin n$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (u_n) là dãy giảm.
B. (u_n) là dãy tăng.
C. (u_n) là dãy không tăng không giảm.
D. (u_n) là dãy không đổi.

Bài 5.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin n$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (u_n) là dãy giảm. **B.** (u_n) là dãy tăng.

C. (u_n) là dãy không tăng không giảm. **D.** (u_n) là dãy không đổi.

Lời giải

Bài 5.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin n$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (u_n) là dãy giảm. **B.** (u_n) là dãy tăng.
C. (u_n) là dãy không tăng không giảm. **D.** (u_n) là dãy không đổi.

Lời giải

Ta có: $\sin 1 < \sin 2$ nhưng $\sin 2 > \sin 3$ nên u_n không tăng không giảm. B

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Gọi M, m sao cho $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $M + m$.

A. $\frac{2}{3}$.
B. $\sqrt{3}$.
C. $\frac{3}{2}$.
D. $\frac{1}{2}$.

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Gọi M, m sao cho $m \le u_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $M + m$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Gọi M, m sao cho $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $M + m$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2}$.

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Gọi M, m sao cho $m \le u_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $M + m$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} \ge \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} \le 1 \Rightarrow M = 1$.

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Gọi M, m sao cho $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $M + m$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2}$.

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \Rightarrow M = 1$.

Vậy $m = \frac{1}{2}, M = 1 \Rightarrow M + m = \frac{3}{2}$. C

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \ \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n$.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n.$
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1.$

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n$.
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1$.
Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n$.
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1$.
Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.
Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n$.
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1$.
Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.
Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng.
Ta có: $u_1 < u_2$, giả sử $u_{n-1} < u_n, \forall n \leq k$.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n$.
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1$.
Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.
Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng.
Ta có: $u_1 < u_2$, giả sử $u_{n-1} < u_n, \forall n \leq k$.
Khi đó $\begin{cases} u_k < u_{k-1} \\ u_{k-1} < u_{k-2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} \Rightarrow u_{k+1} < u_k$.

Bài 7.

Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

A. Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn. **C.** Tăng, chặn dưới. **D.** Giảm, chặn trên.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $1 < u_n < 4, \forall n.$
Điều này hiển nhiên đúng với $n = 1.$
Giả sử $1 < u_n < 4$, ta có: $1 < u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4.$
Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng.
Ta có: $u_1 < u_2$, giả sử $u_{n-1} < u_n, \forall n \leq k.$
Khi đó $\begin{cases} u_k < u_{k-1} \\ u_{k-1} < u_{k-2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} \Rightarrow u_{k+1} < u_k.$
Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn. A

Bài 8.

(HK181) Khi khảo sát tính đơn điệu của hai dãy số

$$x_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - n \quad \text{và} \quad y_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

khẳng định nào đúng ?

A. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ tăng.
B. Cả hai cùng giảm.
C. Cả hai cùng tăng.
D. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ không tăng, không giảm.

Bài 8.

(HK181) Khi khảo sát tính đơn điệu của hai dãy số

$$x_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - n \quad \text{và} \quad y_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

khẳng định nào đúng ?

A. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ tăng.
B. Cả hai cùng giảm.
C. Cả hai cùng tăng.
D. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ không tăng, không giảm.

Lời giải

Bài 8.

(HK181) Khi khảo sát tính đơn điệu của hai dãy số

$$x_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - n \quad \text{và} \quad y_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

khẳng định nào đúng ?

A. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ tăng.
B. Cả hai cùng giảm.
C. Cả hai cùng tăng.
D. $\{x_n\}$ giảm, $\{y_n\}$ không tăng, không giảm.

Lời giải

B

Bài 9.

(HK191) Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Dãy $\{a_n\}$ không có giới hạn.

B. $\lim a_n = 1$.

C. $\lim a_n = -1$.

D. $\lim |a_n| = +\infty$.

Bài 9.

(HK191) Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Dãy $\{a_n\}$ không có giới hạn.

B. $\lim a_n = 1$.

C. $\lim a_n = -1$.

D. $\lim |a_n| = +\infty$.

Lời giải

Bài 9.

(HK191) Xét dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Dãy $\{a_n\}$ không có giới hạn.
B. $\lim a_n = 1$.
C. $\lim a_n = -1$.
D. $\lim |a_n| = +\infty$.

Lời giải

• Với $n = 2k$, ta có $\lim a_n = 1$; • Với $n = 2k + 1$, ta có $\lim a_n = -1 \implies \nexists \lim a_n$. A

Bài 10.

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-3n^2+5n+1}{2n^2-n+3}$;

b) $\lim \dfrac{2n^2+5n+1}{1+2n^3}$;

c) $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1}$;

d) $\lim \dfrac{2n^3-11n+1}{-n^2-2}$;

e) $\lim \dfrac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$;

f) $\lim \dfrac{1+3^2+3^4+\cdots+3^{2n}}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$.

Bài 10.

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-3n^2+5n+1}{2n^2-n+3}$; b) $\lim \dfrac{2n^2+5n+1}{1+2n^3}$; c) $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1}$;

d) $\lim \dfrac{2n^3-11n+1}{-n^2-2}$; e) $\lim \dfrac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$; f) $\lim \dfrac{1+3^2+3^4+\cdots+3^{2n}}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$.

Lời giải

Bài 10.

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-3n^2+5n+1}{2n^2-n+3}$; b) $\lim \dfrac{2n^2+5n+1}{1+2n^3}$; c) $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1}$;

d) $\lim \dfrac{2n^3-11n+1}{-n^2-2}$; e) $\lim \dfrac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$; f) $\lim \dfrac{1+3^2+3^4+\cdots+3^{2n}}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$.

Lời giải

Đáp số:

Bài 10.

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-3n^2+5n+1}{2n^2-n+3}$; b) $\lim \dfrac{2n^2+5n+1}{1+2n^3}$; c) $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1}$;

d) $\lim \dfrac{2n^3-11n+1}{-n^2-2}$; e) $\lim \dfrac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$; f) $\lim \dfrac{1+3^2+3^4+\cdots+3^{2n}}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$.

Lời giải

Đáp số:

a) $-3/2$ b) 0 c) $-\dfrac{1}{16}$ d) $-\infty$ e) 3 f) $+\infty$

Bài 11.

Tính các giới hạn sau:

a) $L_1 = \lim\left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n\right)$;

b) $L_2 = \lim\left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}\right)$;

c) $L_3 = \lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}\right)$;

d) $L_4 = \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - 3\sqrt{4n^2 + n + 1} + 5n\right)$;

e) $L_5 = \lim \dfrac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n}$;

f) $L_6 = \lim \dfrac{2n - \sqrt{4n^2 + n}}{n + \sqrt[3]{4n^2 - n^3}}$.

Lời giải

a) Ta có $L_1 = \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$

$$= \lim \frac{\left(n^2-2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \lim \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$$

$$= \lim \frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1.$$

b) Ta có $L_2 = \lim\left(n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right) = \lim \dfrac{n^3-(n^3+3n^2+1)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}}$

$$= \lim \frac{-3-\dfrac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)^2}} = -1$$

c) Ta có $L_3 = \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) - \lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} - \lim \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} - \lim \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}+1} = \frac{1}{3}.$$

d) Ta có $L_4 = \lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right) - 3\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$.

Mà $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right) = \frac{1}{3}$; $\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right) = \frac{1}{4}$.

Do đó: $L_4 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{12}$.

e) Ta có

$$\bullet \lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \lim\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$

$$=\lim\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\lim\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}=\frac{3}{4}.$$

Suy ra $L_5=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}.$

f) Ta có

$$\bullet \lim\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)=\lim\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$$

$$=\lim\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\lim\frac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}=-\frac{1}{4}.$$

$$\bullet \lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)=\lim\frac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left(n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{(4n^2-n^3)^2}\right)}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{(4n^2-n^3)^2}}$$

$$=\lim\frac{4n^2}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{(4n^2-n^3)^2}}=\lim\frac{4}{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{n}-1\right)^2}}=\frac{4}{3}.$$

Suy ra $L_6=\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}=\left(-\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{16}.$

Bài 12.

Sử dụng định lí kẹp tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sin 2020n}{n}$;

b) $\lim \left(5 - \dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$;

c) $\lim \left(n^2 \sin \dfrac{n\pi}{5} - 2n^3\right)$;

d) $\lim \dfrac{n}{4^n}$;

e) $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$;

f) $\lim u_n$ với $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$.

Lời giải

a) Ta có: $\left|\dfrac{\sin 2020n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp thì $\lim \dfrac{\sin 2020n}{n} = 0$;

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $\left|\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right| \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.

Mà $\lim \dfrac{n}{n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0$

Khi đó $\lim \left(\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right) = 0 \Rightarrow \lim \left(5 - \dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right) = 5$.

c) Ta có $\lim \left(n^2 \sin \dfrac{n\pi}{5} - 2n^3\right) = \lim n^3 \left(\dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{5}}{n} - 2\right) = -\infty$.

d) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học ta có $n \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Khi đó $n \leq 2^n \Leftrightarrow \dfrac{n}{2^n} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2^n \cdot 2^n} \leq \dfrac{1}{2^n} \Leftrightarrow \dfrac{n}{4^n} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Suy ra $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, mà $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$.

e) Ta có $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}} \leq \dfrac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+2n}}$.

Mà $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^3+2n}} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}} = 0$.

f) Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}, k = 1, 2, \ldots, n$

Suy ra $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < u_n < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Mà $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \Rightarrow \lim u_n = 1$.

Bài 13.

Chứng minh rằng:

a) $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0;$ b) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0;$ c) $\lim \dfrac{a^n}{n^n} = 0;$

d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1;$ e) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0.$

Bài 13.

Chứng minh rằng:

a) $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0;$ b) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0;$ c) $\lim \dfrac{a^n}{n^n} = 0;$

d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1;$ e) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0.$

Lời giải

Bài 13.

Chứng minh rằng:

a) $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$; b) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0$; c) $\lim \dfrac{a^n}{n^n} = 0$;

d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$; e) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Lời giải

Gợi ý:

Bài 13.

Chứng minh rằng:

a) $\lim \frac{n}{2^n} = 0;$ b) $\lim \frac{2^n}{n!} = 0;$ c) $\lim \frac{a^n}{n^n} = 0;$

d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1;$ e) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Lời giải

Gợi ý:

a) Ta có $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n > \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n-1}$.

b) Ta có $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{n}, \forall n \geq 2$.

c) Với $n > 2a$ ta có $0 < \frac{a^n}{n^n} < \frac{1}{2^n}$.

Tốc độ tiến ra $+\infty$

$$\ln^\alpha n \qquad n^\beta \ (\beta > 0) \qquad a^n \ (a > 1) \qquad n! \qquad n^n$$

d) Đặt $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1+\alpha_n)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \implies 0 < \alpha_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$.

Theo nguyên lý kẹp $\implies \lim \alpha_n = 0 \implies \lim \sqrt[n]{n} = 1$.

e) • Nếu $a = 1 \implies$ ok.

• Nếu $a > 1$, ta có $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ với $\forall n > a \implies \lim \sqrt[n]{a} = 1$.

• Nếu $a < 1$, đặt $a' = \dfrac{1}{a} > 1 \implies \lim \sqrt[n]{a'} = 1$.

Bài 14.

a) Cho dãy $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}, x_1 = 1$. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right), x_1 > 0$. Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn và tính $\lim x_n$.

Bài 14.

a) Cho dãy $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$. Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn và tính $\lim x_n$.

Lời giải

Bài 14.

a) Cho dãy $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$. Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn và tính $\lim x_n$.

Lời giải

Bài 14.

a) Cho dãy $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}, x_1 = 1$. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right), x_1 > 0$. Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn và tính $\lim x_n$.

Lời giải

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0, \forall n \geq 1$, từ đó suy ra $x_{n+1} > x_n, \forall n \geq 1$.

Bài 14.

a) Cho dãy $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, x_1 = 1$. Chứng minh $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), x_1 > 0$. Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn và tính $\lim x_n$.

Lời giải

a) Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0, \forall n \geq 1$, từ đó suy ra $x_{n+1} > x_n, \forall n \geq 1$.
Giả sử $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Khi đó $a > 0$ và $a = a + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 0$ (vô lý).

b) Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0, \forall n \geq 1$.
Nhờ BĐT Cauchy ta có $x_n \geq 1$, tức là $\{x_n\}$ bị chặn dưới.
Lại có $x_n \geq \dfrac{1}{x_n} \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \{x_n\}$ giảm.
Vì dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim x_n$.
Giả sử $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Khi đó $a \geq 1$ và $a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right) \Rightarrow a = 1$.

Bài 15.

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

b) $\lim \left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$;

c) $\lim \dfrac{2n^3 - 4^{n+1}}{3^n - 2^{2n-1} + 5n^7}$;

d) $\lim \left[\cos(\ln n) - \cos\left(\ln(n+1)\right)\right]$;

e) $x_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

f) $\lim \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}\right)$;

g) $\lim \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{n}{3^n}\right)$;

h) $\lim \left[\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$

Lời giải

Gợi ý:

a) Sử dụng giới hạn $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (ĐS: $\frac{1}{e}$)

b) ĐS: e

c) Chia cả tử và mẫu cho 4^n (ĐS: 8).

d) Sử dụng công thức $\cos(\ln n) - \cos\left(\ln(n+1)\right) = -2\sin\frac{\ln n(n+1)}{2}\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}$,

suy ra $\begin{cases} 0 \leq |\cos(\ln n) - \cos\left(\ln(n+1)\right)| \leq 2\left|\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}\right| \\ \lim \sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2} = 0 \end{cases}$ (ĐS: 0).

e) ĐS: phân kì

f) Tính $S_n - \frac{1}{2}S_n \Rightarrow \lim S_n = 2$;

g) Tính $S_n - \frac{1}{3}S_n \Rightarrow \lim S_n = \frac{3}{4}$.

h) Ta có $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ (ĐS: $\frac{1}{4}$).

Bài 16.

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

a) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 > 0, a > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right), \forall n \geq 1. \end{cases}$

Bài 16.

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

a) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 > 0, a > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right), \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải

Bài 16.

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

a) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 > 0, a > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right), \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải

Bài 16.

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

a) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 > 0, a > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right), \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải

a) ĐS: $\lim u_n = 2$;

b) ĐS: $\lim u_n = \sqrt{a}$.