Chương III: VECTƠ NGẪU NHIÊN
(ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU)

III.1. Khái niệm.

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cùng xác định trên các kết quả của một phép thử thì ta nói $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một vectơ ngẫu nhiên *n* chiều.

III.2. Vectơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều (X,Y).

III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời.

III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lề).

III.2.3 PP XS có điều kiện.

III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y.

III.2.5 Hàm phân phối XS của (X,Y).

III.3. Vectơ ngẫu nhiên liên tục 2 chiều (X,Y).

III.3.1 Hàm mật độ đồng thời.

III.3.2 Hàm mật độ của các BNN thành phần X, Y (Hàm mật độ lề).

III.3.3 Điều kiện độc lập của X và Y.

III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y).

III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện.

III.4 Một số tham số đặc trưng của vectơ ngẫu nhiên.

* Kỳ vọng toán

* Kỳ vọng của hàm $\varphi(X,Y)$.

* Kỳ vọng có điều kiện

* Covarian (Hiệp phương sai)

* Ma trận tương quan

* Hệ số tương quan & ý nghĩa.

* Sử dụng máy tính bỏ túi để tính một số tham số đặc trưng.

III.5. Hàm của vectơ ngẫu nhiên (X,Y).

III.2 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN RỜI RẠC 2 CHIỀU

III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời:

Cho $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$; $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Đặt $\mathbf{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)}$; $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Dưới đây là **bảng phân phối xác suất đồng thời** của (X, Y):

X \ Y	y_1	y_2	…	Y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Khi đó $0 \le p_{ij} \le 1$ và $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lề).

Đặt: $$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(X = x_i), i = \overline{1, m}$$

Ta được bảng phân phối xác suất của X:

X	x_1	x_2	...	x_m
P^X	p_1	p_2	...	p_m

Đặt: $$q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = P(Y = y_j), j = \overline{1, n}$$

Ta được bảng phân phối xác suất của Y:

X	y_1	y_2	...	y_n
P^Y	q_1	q_2	...	q_n

III.2.3 Phân phối xác suất có điều kiện:

Bảng PPXS của X với điều kiện $Y = y_j (j = \overline{1, n})$ là:

X	x_1	x_2	…	x_m
P^{X/y_j}	$\frac{p_{1j}}{q_j}$	$\frac{p_{2j}}{q_j}$	…	$\frac{p_{mj}}{q_j}$

tức là $P(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$

Bảng PPXS của Y đối với điều kiện $X = x_i (i = \overline{1, m})$ là:

Y	y_1	y_2	…	y_n
P^{Y/x_i}	$\frac{p_{i1}}{p_i}$	$\frac{p_{i2}}{p_i}$	…	$\frac{p_{in}}{p_i}$

III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y.

X và *Y* độc lập

$\Leftrightarrow$ $P(X=x_i,Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$ $\forall i,j$ hay $p_{ij} = p_i q_j$ $\forall i, j$.

$\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$;

(F_X , F_Y là các hàm *PPXS của* X,Y , hay gọi la các hàm phân phối lề..)

III.2.5 Hàm phân phối đồng thời của (X,Y) .

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}$$

Lưu ý:

- *F(x,y) chính là xác suất để điểm ngẫu nhiên M(X,Y) rơi vào hình chữ nhật vô hạn có đỉnh phía trên, bên phải là (x,y).*

III.3 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN LIÊN TỤC (X,Y)

III.3.1 Hàm mật độ XS đồng thời: của VTNN (X,Y) là hàm xác định trên toàn mặt phẳng, thỏa:

$$\begin{cases} \bullet\ f(x,y) \ge 0;\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \bullet\ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 \end{cases}$$

- **Tính chất:** $P\big((X,Y) \in D\big) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

III.3.2 Hàm mật độ lề:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\ x \in \mathbb{R}$ là **hàm mật độ** theo X;

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,\ y \in \mathbb{R}$ là **hàm mật độ** theo Y.

III.3.3 Điều kiện độc lập của X, Y:

X và Y độc lập $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y) \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y):

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$$

- Từ đó suy ra:

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Trong trường hợp riêng, khi miền D là hình chữ nhật:

P(a≤X< b; c≤X< d] = F(b, d) – F(a, d) – F(b, c) + F(a, c).

III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện VTNN liên tục (X,Y).

Hàm mật độ của X với điều kiện *Y* = *y* là: $f_{X/y} = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Hàm mật độ của Y với điều kiện *X* = *x* là: $f_{Y/x}(y) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

III.4 MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG của BNN hai chiều:

*** Kỳ vọng toán:** $E(X,Y) = (E(X),E(Y))$

*** Hiệp phương sai (Covarian, mômen tương quan):**

$$\operatorname{cov}(X,Y)= E[(X-E(X)).(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X).E(Y)$$

*** Ma trận tương quan** (ma trận hiệp phương sai) của (X,Y):

$$D(X,Y)=\begin{bmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & D(Y) \end{bmatrix}$$

*** Hệ số tương quan của X và Y:**

$$R_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY)\text{-}E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Hệ số tương quan và covarian dùng để đặc trưng cho mức độ chặt chẽ của mối liên hệ phụ thuộc giữa các BNN X và Y.

Nếu $R_{XY} = 0$ thì ta nói X, Y không tương quan, ngược lại khi $R_{XY} \neq 0$ ta nói X, Y có tương quan.

Nếu X, Y độc lập thì cov(X,Y)= $R_{XY} = 0$.

Điều ngược lại không đúng, tức là nếu cov(X,Y)= 0 thì hoặc X, Y độc lập, hoặc X, Y phụ thuộc ở một dạng thức nào đó. Khi (X,Y) có phân phối chuẩn thì X,Y độc lập $\Leftrightarrow R_{XY}= 0$.

Hệ số tương quan không có đơn vị đo và $|R_{XY}| \leq 1$.

Nếu $R_{XY} = \pm 1$ thì X, Y có tương quan tuyến tính (thuận /nghịch).

Khi $R_{XY} \approx \pm 1$ thì X, Y có tương quan “gần” tuyến tính.

Ví dụ 1

Một hộp đựng 5 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm mà không kiểm tra thì không biết. Các sản phẩm được lấy ra kiểm tra cho đến khi phát hiện thấy 2 phế phẩm thì dừng lại.

Kí hiệu X là BNN chỉ số lần kiểm tra cho tới khi phế phẩm đầu tiên được phát hiện. Y là BNN chỉ số lần kiểm tra thêm cho tới khi phế phẩm thứ hai được phát hiện.

Hãy :

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y).

b) Tính cov(X,Y) và hệ số tương quan của X, Y.

c) X,Y có độc lập hay không ?

d) Tìm phân phối XS và kỳ vọng có điều kiện của X khi Y=2.

Y \ X	1	2	3
1	3/10	2/10	1/10
2	2/10	1/10	0
3	1/10	0	0

$$p_{11} = P(X=1;Y=1) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$p_{12} = P(X=1;Y=2) = P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{13} = P(X=1;Y=3) = P(\overline{A_1}.A_2.A_3.\overline{A_4}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{21} = P(X=2;Y=1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{22} = P(X=2;Y=2) = P(A_1.\overline{A_2}.A_3.\overline{A_4}) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{31} = P(X=3;Y=1) = P(A_1.A_2.\overline{A_3}.\overline{A_4}) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.1.1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{23} = P(X=2;Y=3) = 0$$

$$p_{32} = P(X=3;Y=2) = 0$$

$$p_{33} = P(X=3;Y=3) = 0$$

b) Tính Cov(X,Y) và R_{XY}:

X \ Y	1	2	3	P^X
1	3/10	2/10	1/10	6/10
2	2/10	1/10	0	3/10
3	1/10	0	0	1/10
P^Y	6/10	3/10	1/10	

Viết lại các bảng PPXS thành phần của X và Y (phân phối lề):

X	1	2	3
P^X	6/10	3/10	1/10

Y	1	2	3
P^Y	6/10	3/10	1/10

E(X)= E(Y)=1,5 D(X)= D(Y) = 0,45

$$E(XY)=\sum_{i;j} x_i y_j p_{ij} = 1.1.\frac{3}{10}+1.2.\frac{2}{10}+1.3.\frac{1}{10}+2.1.\frac{2}{10}+2.2.\frac{1}{10}+3.1.\frac{1}{10}=2,1$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)= E(XY)- E(X).E(Y) = -0,15. \quad R_{XY}=\frac{E(XY)-E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-1}{3}$$

HD Sử dụng MTBT tìm 1 số đặc trưng của VTNN rời rạc:

Các bước thực hiện	Máy CASIO fx 570 ES (PLUS)...	Máy CASIO fx 500 MS....
Mở cột tần số (nếu máy chưa mở)	**SHIFT -- MODE (SETUP) -- ▼ --** **-- 4 (STAT) -- 1 (ON)**	
Vào chế độ thống kê hai biến.	**MODE -- 3 (STAT) -- 2 (A+BX)**	**MODE -- MODE --...-- 2 (REG)** **--- 1 (Lin)**
Nhập dữ liệu		X	Y	FREQ 1	x1	y1	p11 2	x1	y2	p12 ...	...	...	....	xn	ym	pnm AC	**Nhập lần lượt theo từng dòng , thứ tự nhập như sau:** X_i , Y_j ; p_{ij} M+
Đọc kết quả **E(X); E(Y)**	**SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) –** **--- 2 ($\bar{x}$) -- =** ***Muốn có kq E(Y) thì chọn*** $\bar{y}$	**SHIFT – 2 (SVAR) -1 ($\bar{x}$)-- =** **SHIFT – 2(SVAR) - ▶ -1 ($\bar{y}$)-- =**
Đọc kết quả $\sqrt{D(X)}$ $\sqrt{D(Y)}$	**SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) –** **--- 3 (σX) -- =** ***Muốn có kq*** $\sqrt{D(Y)}$ ***thì chọn*** σY	**SHIFT – 2 (SVAR)- 2 ($x\sigma n$)-- =** **SHIFT – 2(SVAR) - ▶ -1 ($y\sigma n$)** **-- =**
Đọc kết quả R_{XY}	**SHIFT – 1 (STAT)-6(REG)–3 (r) --=**	**SHIFT – 2 (SVAR) - ▶ - ▶ 3(r)-=**
Tham khảo các KQ trung gian	**SHIFT – 1 (STAT)- 3 (SUM) - ....**	**SHIFT – 1 (SSUM) - ......**

c) Theo đn, X,Y độc lập $\Leftrightarrow$ $P(X=x_i; Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$; $\forall$ i,j.

Trong bảng PPXS đồng thời, $P(X=1;Y=1) = 3/10$;

nhưng $P(X=1).P(Y=1) = (6/10).(6/10) =1/100 \neq P(X=1;Y=1)$

nên ta kết luận X,Y không độc lập.

d) Từ bảng PPXS đồng thời, suy ra bảng phân phối xác suất của X với điều kiện Y=2:

$X^{\mid Y=2}$	1	2
$P^{X\mid Y=2}$	$\frac{2/10}{3/10}=\frac{2}{3}$	$\frac{1/10}{3/10}=\frac{1}{3}$

và $E(X|Y=2) = 4/3$.

Ví dụ 2

Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y độc lập có các bảng phân phối xác suất:

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) Lập bảng phân phối xác suất của $Z = 3X^2 + 2Y$; Tính E(Z),D(Z).

b) Tính E(U),D(U) với $U = 5X - 3Y + 10$.

Hướng dẫn: Do X,Y độc lập nên $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j)$, $\forall i,j$.

Lập bảng PPXS đồng thời của X, Y rồi tính giá trị hàm $Z=3X^2+2Y$.

Y / X	0	1
-1	1/8 Z = 3	1/8 Z = 5
1	2/8 Z = 3	2/8 Z = 5
2	1/8 Z = 12	1/8 Z = 14

Suy ra bảng phân phối xác suất của Z:

Z	3	5	12	14
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Vậy E(Z) = 6,25 và D(Z) = 16,1875.

b) HD: E(5X - 3Y +10) = 5E(X) - 3E(Y) + 10.

D(5X -3Y + 10) = 25D(X) + 9D(Y).

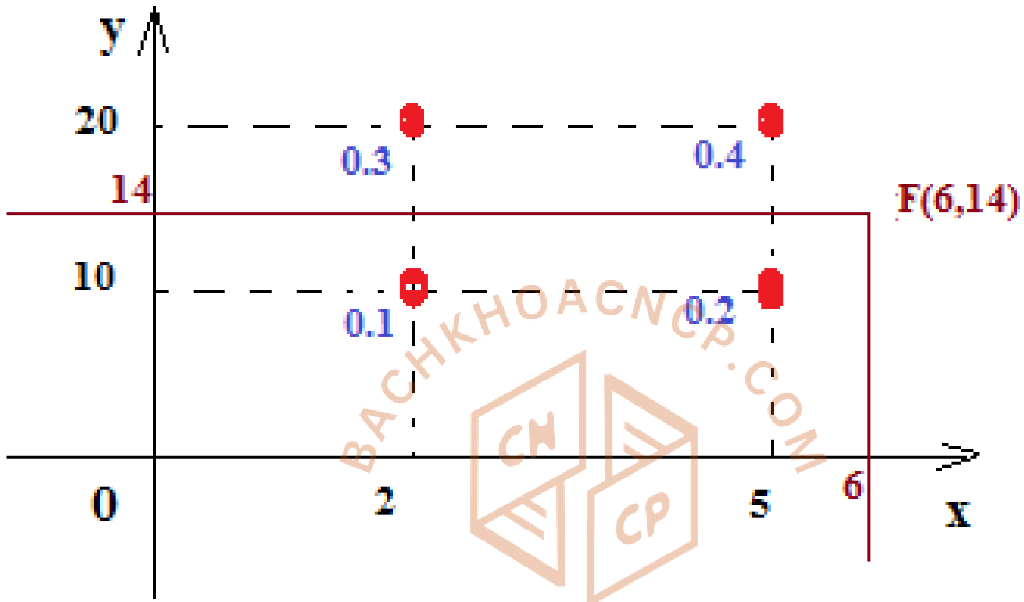
Ví dụ 3

Dưới đây là bảng PPXS đồng thời của 2 biến ngẫu nhiên X,Y. Tìm hàm phân phối XS của (X,Y).

X \ Y	10	20
2	0.1	0.3
5	0.2	0.4

Hướng dẫn :

$$F(x,y) = P(X<x;\ Y<y) = \sum_{i,j} p_{ij} \quad ;\ x_i < x\ \&\ y_j < y.$$



Ví dụ:

+ $F(x,y) = P(X<x; Y<y)$.

+ $F(6; 14)=P(X< 6; Y< 14) = 0,3$

+ $F(3; 20)=P(X<3,Y<20)= 0,1$.

+ $F(4;25)=P(X<4; Y<25) =0,4$.

Đáp số:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0,1 & (x,y)\in(2,\ 5]\times(10,\ 20] \\ 0,1+0,3 & (x,y)\in(2,\ 5]\times(20,+\infty) \\ 0,1+0,2 & (x,y)\in(5,+\infty)\times(10,\ 20] \\ 1 & (x,y)\in(5,+\infty)\times(20,+\infty) \\ 0 & (x,y)\neq \end{cases}$$

Ví dụ 4

Cho vec tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y)=\begin{cases} a\left(x+y^2\right) & khi\ \ 0<y<\dfrac{x}{2}<1 \\ 0 & \text{ở nơi khác} \end{cases}$$

a) Xác định hệ số *a*.

b) Tìm P(X<1; Y<1/4).

c) Tìm các hàm mật độ xác suất của X, của Y (hàm mật độ lề).

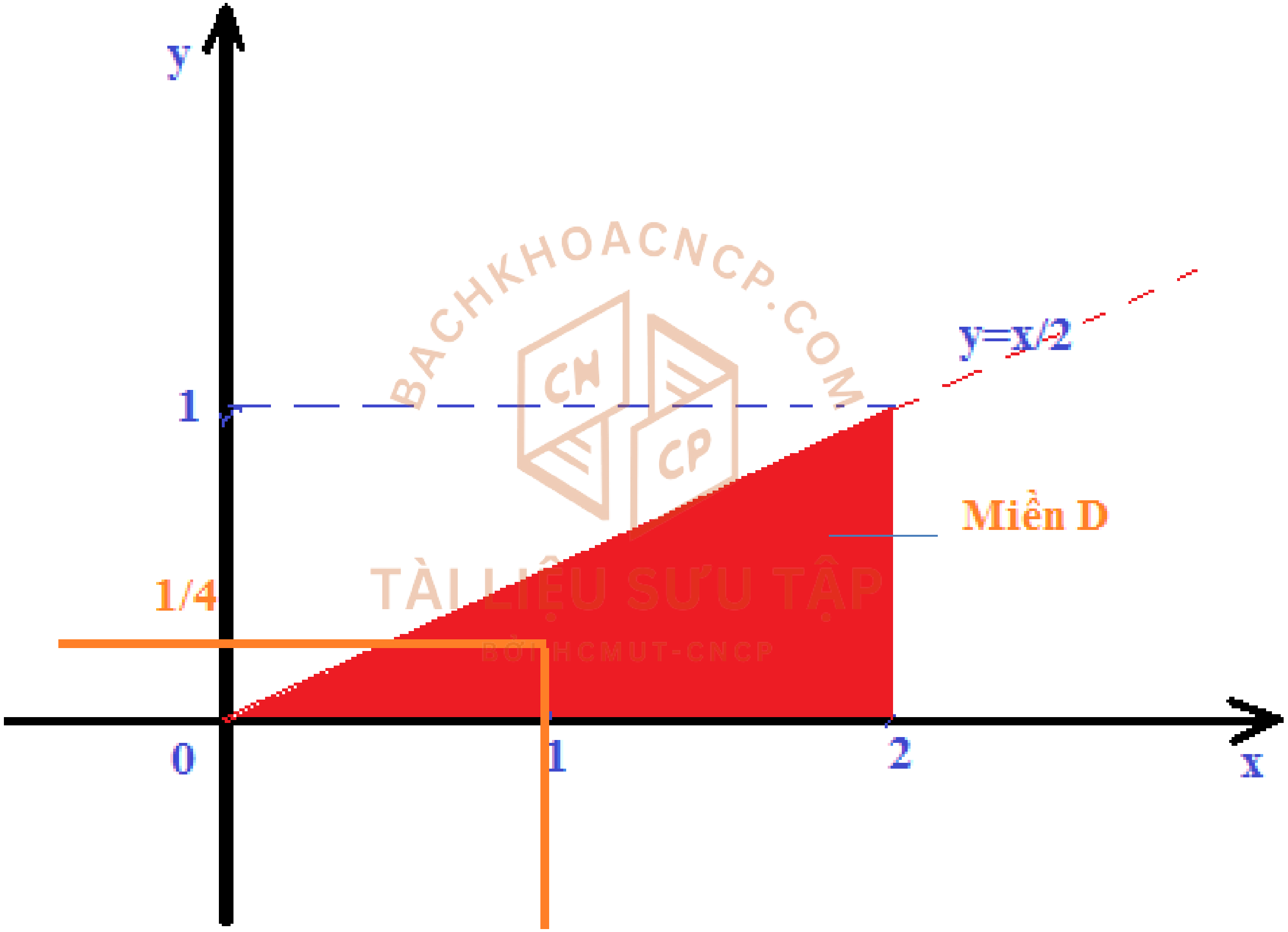
d) Tính covarian của vec tơ ngẫu nhiên (X,Y).

e) Tìm hệ số tương quan của X,Y.

f) Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của X,Y.

g) Tìm các hàm mật độ có điều kiện của X,Y.

Hình vẽ cho câu a,b)



a) f(x,y) là hàm mật độ XS của một vectơ ngẫu nhiên nào đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 & (1) \\ \iint\limits_{D} a(x+y^2)dxdy = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \int_0^2 dx \int_0^{x/2} a(x+y^2)dy = 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$, thỏa (1).

b)

$$P\left(X<1; Y<\frac{1}{4}\right) = \int_{-\infty}^{1} dx \int_{-\infty}^{1/4} f(x,y)dy = \int_0^{1/2} dx \int_0^{x/2} \frac{2}{3}(x+y^2)dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_0^{1/4} \frac{2}{3}(x+y^2)dy$$

$$\text{hay } P\left(X<1; Y<\frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} dy \int_{2y}^{1} \frac{2}{3}(x+y^2)dx = \frac{2}{3}\int_0^{1/4}\left(-2y^3 - y^2 + \frac{1}{2}\right)dy = \frac{181}{2304}$$

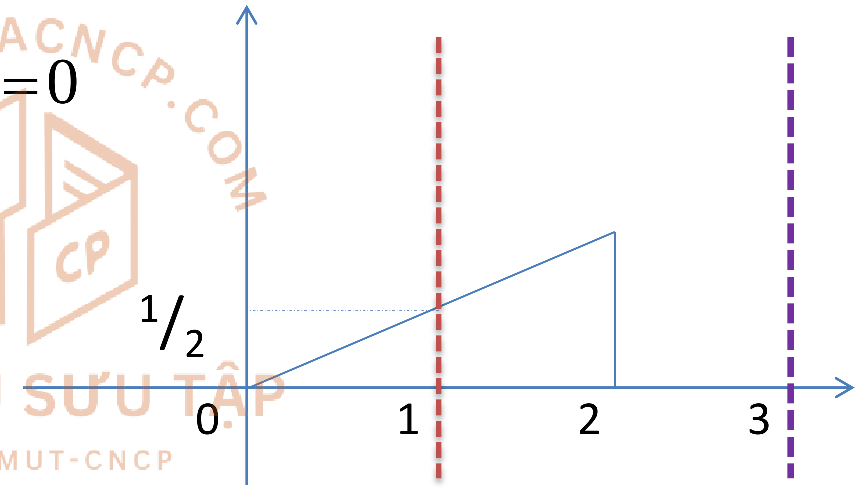
c) Trước tiên ta tìm hàm mật độ lề theo X:

Với mỗi $x \in R$, $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

Ví dụ 2 trường hợp x=1 và x = 3:

- $$f_X(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(1, y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int_{0}^{1/2} (1 + y^2)\,dy + \int_{1/2}^{+\infty} 0\,dy = \frac{13}{36}$$

- $$f_X(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(3, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0$$



Như vậy :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_{0}^{x/2} \frac{2}{3}\left(x + y^2\right)dy & x \in (0;2) \\ 0 & x \notin (0;2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2(x+12)}{36} & x \in (0;2) \\ 0 & x \notin (0;2) \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{2y}^{2}\frac{2}{3}\left(x+y^2\right)dx & y\in(0;1)\\ 0 & y\notin(0;1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{3}-\frac{4y^3}{3} & y\in(0;1)\\ 0 & y\notin(0;1)\end{cases}$$

d) $$E(X)\overset{ct1}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx=\int_0^2 x.\frac{x^2(x+12)}{36}dx=\frac{68}{45}$$

$$E(Y)\overset{ct1}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} y.f_Y(y)dy=\int_0^1 y.\left(\frac{4}{3}-\frac{4y^3}{3}\right)dy=\frac{2}{5}$$

$$E(XY)=\iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{x/2}\frac{2}{3}xy(x+y^2)dy=\frac{29}{45}$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=\frac{1}{25}$$

Công thức khác: $\mathrm{E(X)}\overset{ct2}{=}\iint_{R^2}\mathrm{x.f(x,y)dxdy}$; $\mathrm{E(Y)}\overset{ct2}{=}\iint_{R^2}\mathrm{y.f(x,y)dxdy}$;

e) $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_X(x)dx-E(X)^2=$

$$=\int_0^2 x^2.\frac{x^2(x+12)}{36}dx-\left(\frac{68}{45}\right)^2=\frac{296}{2025}$$

$$D(Y)=\int_0^1 y^2.\left(\frac{4}{3}-\frac{4y^3}{3}\right)dy-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{14}{225}$$

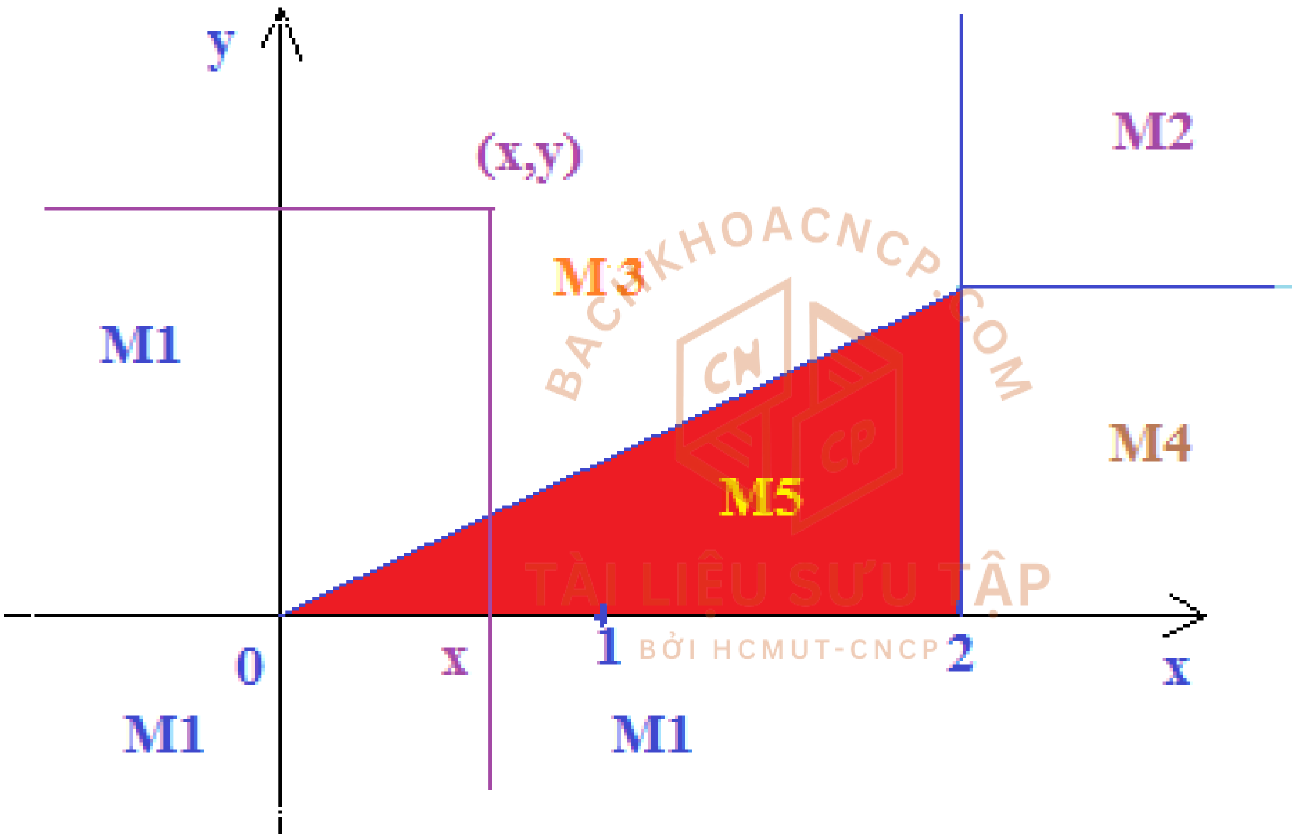
$$R_{XY}=\frac{E(XY)-E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}.\sqrt{D(Y)}}=\frac{27\sqrt{259}}{1036}\approx 0.4194$$

Công thức khác:

$$D(X)\overset{ct2}{=}\iint_{R^2} x^2 f(x,y)dxdy-E(X)^2;\quad D(Y)\overset{ct2}{=}\iint_{R^2} y^2 f(x,y)dxdy-E(Y)^2$$

f) F(x,y) = P(X<x; Y<y) = $\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$

$$
= \begin{cases}
0 & (x,y) \in M1 \\
1 & (x,y) \in M2 \\
\int_0^x du \int_0^{x/2} \frac{2}{3}(u+v^2)dv = \frac{x^3(x+6)}{36} & (x,y) \in M3 \\
\int_0^y dv \int_{2y}^{2} \frac{2}{3}(u+v^2)du = \frac{-4y(y^3+2y^2-3)}{9} & (x,y) \in M4 \\
\int_0^y dv \int_{2y}^{x} \frac{2}{3}(u+v^2)du = \frac{y^3(2x-4y)}{9} + \frac{y(x^2-4y^2)}{3} & (x,y) \in M5
\end{cases}
$$



Hình vẽ cho câu f)

g) Hàm mật độ có điều kiện của X, Y.

* Khi $y \in [0,1]$:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(x+y^2)}{\dfrac{4}{3} - \dfrac{4y^3}{3}} & 2y \le x \le 2 \\ 0 & \ne \end{cases}$$

* Khi $x \in [0,2]$:

$$\varphi(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(x+y^2)}{\dfrac{x^2(x+12)}{36}} & 0 \le y \le x/2 \\ 0 & \ne \end{cases}$$

Ví dụ 6

Véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

Tìm hàm mật độ lề của biến ngẫu nhiên Y.

Hướng dẫn:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2-2y^2}dx$$

$$=e^{-2y^2}.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}dx\overset{(*)}{=}\frac{e^{-2y^2}}{\pi}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{e^{-2y^2}}{\pi}.\sqrt{2\pi}$$

Giải thích (*): Đặt t=x+y , coi y như hằng số , đưa về tích phân Euler-Poisson.

Ví dụ 7 *Đoạn thẳng AB có độ dài a cm. Chia ngẫu nhiên AB thành 3 đoạn thẳng. Tìm thể tích trung bình của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh tạo bởi 3 đoạn trên.*

Hướng dẫn

Gọi X, Y, a-X-Y là các BNN chỉ độ dài 3 đoạn thẳng. Khi đó (X,Y) có phân phối đều trên miền phẳng D ={(x,y)/ 0<x< a; 0<y< x-a}

Suy ra VTNN (X,Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y)=\begin{cases} C & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{S(D)} = \frac{2}{a^2}$$

Thể tích hình hộp: $V = XY(a-X-Y) = aXY - X^2Y - XY^2$

$\Rightarrow E(V) = E[aXY - X^2Y - XY^2]$

$$= \iint_{R^2} (axy - x^2y - xy^2) f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{2}{a^2}(axy - x^2y - xy^2)dy = \frac{a^3}{60}$$

Ví dụ 8

a) Đlnn X có hàm mật độ: $f(x) = c.e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$

Tìm hệ số c và tính E(X); D(X).

b) Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = k.e^{-(x^2+2xy+2y^2)}$$

Tìm hệ số k và các hàm mật độ xác suất thành phần.

Hướng dẫn: Ngoài cách tính như đã trình bày ở các ví dụ trên, ta có thể dựa vào dạng của hàm phân phối chuẩn 1 chiều và phân phối chuẩn 2 chiều.

a) X có dạng phân phối chuẩn 1 chiều với hàm mật độ tổng quát:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow a = E(X) = 0; \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}; D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

b) (X,Y) có dạng hàm phân phối chuẩn 2 chiều *(tham khảo):*

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\left(\frac{x-a}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\sigma_Y}\right)^2-2R\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

ở đây R là hệ số tương quan của X,Y.

Biến đổi hàm mật độ đồng thời f(x,y) đã cho theo dạng trên, ta tìm được:

- a= 0; σ_X= 1; b=0; $\sigma_Y=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $R=\frac{-1}{\sqrt{2}}$; $k=\frac{1}{\pi}$
- Hàm mật độ lề theo X và hàm mật độ lề theo Y:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$$

- Lưu ý thêm, ở đây R ≠ 0 nên X,Y không độc lập.

Ví dụ 9 :

Vtnn (X,Y) có hàm mật độ XS: $f(x,y)=\begin{cases} k & khi\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1 \\ 0 & khi\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1 \end{cases}$.

a) Tìm hệ số k.

b) Tìm các hàm mật độ lề.

Hướng dẫn:

a) k Diện tích elip = 1* $\Rightarrow$ *k = 1/(6π)*

b)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 0 & khi\ |x|>3 \\ \displaystyle\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\frac{1}{6\pi}dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2} & khi\ |x|\le 3 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} 0 & khi\ |y|>2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2} & khi\ |y|\le 2 \end{cases}$$

Ví dụ 10 :

Vtnn X có hàm mật độ XS: $f(x,y)=\begin{cases} k & khi\ |x|+|y|\le 1 \\ 0 & khi\ |x|+|y|>1 \end{cases}$

a) Tìm hệ số k. .

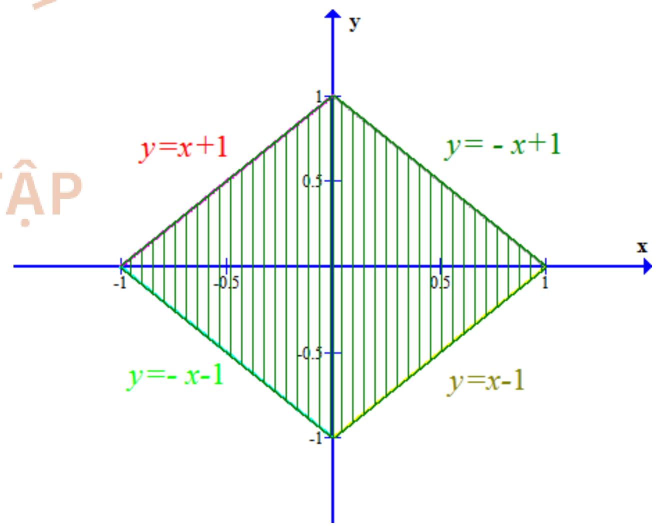
b) Tìm các hàm mật độ XS của X .

Hướng dẫn:

a) k Diện tích hình vuông = 1* $\Rightarrow$ *k = 1/2*

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{-x-1}^{x+1} dy = 1 + x\ khi = -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}\int\limits_{x-1}^{1-x} dy = 1 - x\ \ khi = 0 \le x \le 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad |x| > 1 \end{cases}$$



Ví dụ 11 : *Vtnn X có hàm phân phối XS:*

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right) & x,y \ge 0; a,b>0 \\ 0 & khi\,(x,y) \ne \dots \end{cases}$$

a) Tìm các hàm mật độ XS của X ,Y.

b) Tìm P(0 <X<2; 1<Y<5).

Hướng dẫn:

a) C1: Tìm hàm mật độ XS đồng thời $f_{XY}(x,y) = [F_{XY}(x,y)]'_{x}{}'_{y}$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} abe^{-ax}.e^{-by} & x,y \ge 0; a,b>0 \\ 0 & khi\,(x,y) \ne \dots \end{cases}$$

sau đó tìm hàm mật độ lề của X và của Y.

C2: Tìm hàm phân phối lề $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty)$; $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y)$; sau đó đạo hàm tương ứng theo x, y để có được $f_X(x)$; $f_Y(y)$.

b) XS cần tìm = F(2;5) – F(2;1) – F(0;5) + F(0;1)

III.5 HÀM CỦA VTNN 2 CHIỀU:

- *Đối với BNN rời rạc: xem VD2; VD3. Đối với BNN liên tục: VD 9.*

Ví dụ 12 *Giả sử các BNN X,Y độc lập và cùng có phân phối đều trên đoạn [0; 1]. Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Z=X+Y.*

Hướng dẫn: Các hàm mật độ của X và Y là:

$$f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases}1 & khi\ x\in[0;1]\\ 0 & khi\ x\notin[0;1]\end{cases}$$

Do X, Y độc lập nên:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)=\begin{cases}1 & khi\ (x,y)\in D\equiv[0;1]\times[0;1]\\ 0 & khi\ (x,y)\notin D\end{cases}$$

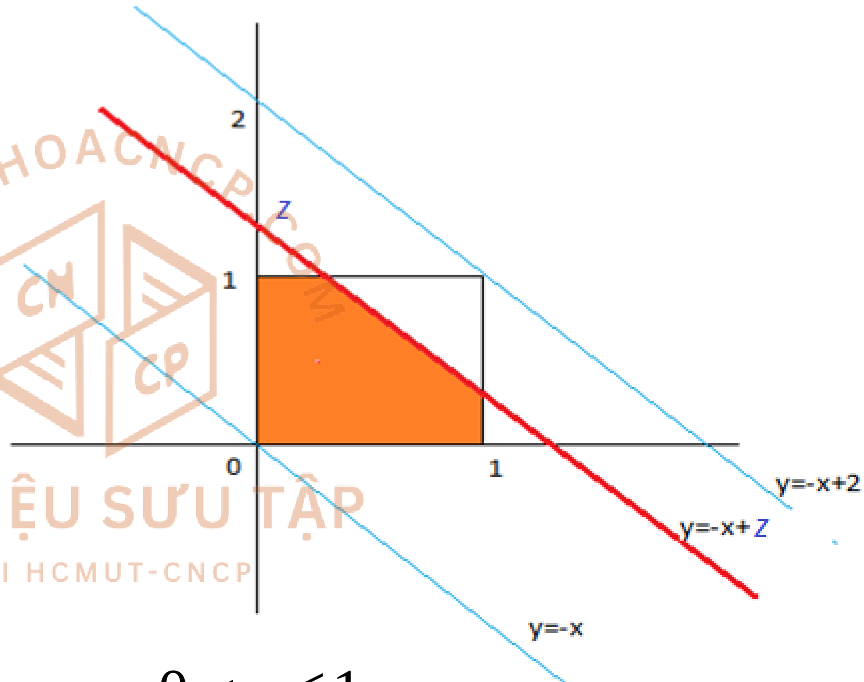
Trước hết ta tìm hàm phân phối XS của Z:

$$F_Z(z) = P(Z< z) = P(X+Y< z) = P((X,Y)\in G); \qquad z\in\mathbb{R}$$

$$\textit{ở đây}: \ G\equiv\{(x,y): x+y<z\}=\{(x,y): y<-x+z\}, z\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad F_Z(z) = \iint_G f_{XY}(x,y)dxdy = \iint_{D\cap G} 1dxdy = S_{(D\cap G)}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{z^2}{2} & 0 < z \le 1 \\ 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2} & 1 < z \le 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \qquad f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & z \notin (0;2) \end{cases}$$