SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

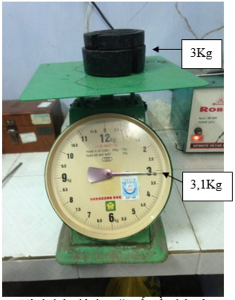
BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: ntcvantud@gmail.com

NỘI DUNG BÀI HỌC

BÀI TOÁN THỰC TẾ



Hình kéo lệch mặt số về phí trên

Hình kéo lệch mặt số về phí dưới

HÌNH: Sai số

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1

Độ sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác được gọi là sai số.

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1

Độ sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác được gọi là sai số.

Định nghĩa 1.2

Số a được gọi là số gần đúng của số chính xác A, kí hiệu là $a \approx A$ (đọc là a xấp xỉ A) nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Định nghĩa 1.3

Đại lượng $\Delta = |a - A|$ *được gọi là* ***sai số thật sự*** *của số gần đúng* a.

ĐỊNH NGHĨA 1.3

*Đại lượng $\Delta = |a - A|$ được gọi là **sai số thật sự** của số gần đúng a. Trong thực tế, do không biết số chính xác A, ta ước lượng **một đại lượng dương Δ_a** càng bé càng tốt thỏa điều kiện $|A - a| \leqslant \Delta_a$ được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a.*

ĐỊNH NGHĨA 1.3

Đại lượng $\Delta = |a - A|$ được gọi là sai số thật sự của số gần đúng a. Trong thực tế, do không biết số chính xác A, ta ước lượng một đại lượng dương Δ_a càng bé càng tốt thỏa điều kiện $|A - a| \leqslant \Delta_a$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Vậy sai số tuyệt đối $\leqslant \Delta_a$

ĐỊNH NGHĨA 1.3

Đại lượng $\Delta = |a - A|$ được gọi là sai số thật sự của số gần đúng a. Trong thực tế, do không biết số chính xác A, ta ước lượng một đại lượng dương Δ_a càng bé càng tốt thỏa điều kiện $|A - a| \leqslant \Delta_a$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Vậy sai số tuyệt đối $\leqslant \Delta_a$

Chú ý. Trong thực tế ta sẽ ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$.

Ví dụ 1.1

Giả sử $A = \pi; a = 3.14$. *Do*

$$3.13 = 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01 = 3.15,$$

nên ta có thể chọn $\Delta_a = 0.01$.

Ví dụ 1.1

Giả sử $A = \pi; a = 3.14$. *Do*

$$3.13 = 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01 = 3.15,$$

nên ta có thể chọn $\Delta_a = 0.01$. *Mặt khác,*

$$3.138 = 3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002 = 3.142,$$

do đó ta cũng có thể chọn $\Delta_a = 0.002$.

Ví dụ 1.1

Giả sử $A = \pi; a = 3.14$. *Do*

$$3.13 = 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01 = 3.15,$$

nên ta có thể chọn $\Delta_a = 0.01$. *Mặt khác,*

$$3.138 = 3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002 = 3.142,$$

do đó ta cũng có thể chọn $\Delta_a = 0.002$. *Như vậy, với cùng một giá trị gần đúng, có thể có nhiều sai số tuyệt đối khác nhau.*

Ví dụ 1.2

Vận tốc của một vật thể đo được là $v = 2.8m/s$ *với sai số* 0.5%. *Khi đó sai số tuyệt đối là*

$$\Delta_v = 0.5\% \times 2.8m/s = 0.014m/s.$$

ĐỊNH NGHĨA 1.4

Sai số tương đối của số gần đúng a so với số chính xác A là đại lượng nhỏ hơn hoặc bằng δ_a, với δ_a được tính theo công thức

$$\delta_a = \frac{|A - a|}{|A|}.$$

ĐỊNH NGHĨA 1.4

Sai số tương đối của số gần đúng a so với số chính xác A là đại lượng nhỏ hơn hoặc bằng δ_a, *với* δ_a *được tính theo công thức*

$$\delta_a = \frac{|A-a|}{|A|}.$$

Chú ý. Trong nhiều trường hợp, nếu không biết A ta có thể thay thế $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Vậy sai số tương đối $\leqslant \frac{\Delta_a}{|a|}$

Ví dụ 1.3

Đo độ dài hai đoạn thẳng ta được $a = 10cm$ *và* $b = 1cm$ *với* $\Delta_a = \Delta_b = 0.01cm$. *Khi đó*

$$\delta_a = \frac{0.01}{10} = 0.1\%, \delta_b = \frac{0.01}{1} = 1\%$$

hay $\delta_b = 10\delta_a$. *Từ đó suy ra phép đo a chính xác hơn phép đo b mặc dù* $\Delta_a = \Delta_b$. *Như vậy, độ chính xác của một phép đo thể hiện qua sai số tương đối.*

CHỮ SỐ CÓ NGHĨA

Mọi số thực a có thể được biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn

$$a = \pm(\alpha_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_1\alpha_0.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-n}) = \pm\sum_{k=-n}^{m}\alpha_k 10^k, m, n \in \mathbb{N}, m \geqslant 0, n \geqslant 1, \alpha_m \neq 0, \alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Chữ số có nghĩa

Mọi số thực a có thể được biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn

$a = \pm(\alpha_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_1\alpha_0.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-n}) = \pm\sum_{k=-n}^{m}\alpha_k 10^k, m, n \in \mathbb{N}, m \geqslant 0, n \geqslant 1, \alpha_m \neq 0,$
$\alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$

Ví dụ 1.4

$$324.59 = 3\times 10^2 + 2\times 10^1 + 4\times 10^0 + 5\times 10^{-1} + \\ +9\times 10^{-2}.$$

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Ví dụ 20.25 có 4 chữ số, 0.03047 có 6 chữ số.

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Ví dụ 20.25 có 4 chữ số, 0.03047 có 6 chữ số.

ĐỊNH NGHĨA 1.5

Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Ví dụ 20.25 có 4 chữ số, 0.03047 có 6 chữ số.

ĐỊNH NGHĨA 1.5

Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

VÍ DỤ 1.5

Số 20.25 *có* 4 *chữ số có nghĩa. Số* 0.03047 *cũng có* 4 *chữ số có nghĩa.*

ĐỊNH NGHĨA 1.6

Làm tròn một số thập phân a là bỏ một số các chữ số bên phải a sau dấu chấm thập phân để được một số $\tilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với a.

ĐỊNH NGHĨA 1.6

Làm tròn một số thập phân a là bỏ một số các chữ số bên phải a sau dấu chấm thập phân để được một số $\tilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với a.

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}.

ĐỊNH NGHĨA 1.6

Làm tròn một số thập phân a là bỏ một số các chữ số bên phải a sau dấu chấm thập phân để được một số $\tilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với a.

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}. Nếu $\alpha_{k+1} \geqslant 5$, ta tăng α_k lên 1 đơn vị;

ĐỊNH NGHĨA 1.6

Làm tròn một số thập phân a là bỏ một số các chữ số bên phải a sau dấu chấm thập phân để được một số $\tilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với a.

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}. Nếu $\alpha_{k+1} \geqslant 5$, ta tăng α_k lên 1 đơn vị; còn nếu $\alpha_{k+1} < 5$ ta giữ nguyên chữ số α_k. Sau đó bỏ phần đuôi từ chữ số α_{k+1} trở đi.

Ví dụ 1.6

Làm tròn số $\pi = 3.1415926535...$ *đến chữ số thứ* $4;3;2$ *sau dấu chấm thập phân nhận được các số gần đúng lần lượt là* $3.1416; 3.142; 3.14.$

ĐỊNH NGHĨA 1.7

*Sai số thực sự của ã so với a được gọi là **sai số làm tròn**. Vậy* $\theta_{\tilde{a}} = |a - \tilde{a}|$.

Định nghĩa 1.7

Sai số thực sự của $\tilde{a}$ so với a được gọi là sai số làm tròn. Vậy $\theta_{\tilde{a}} = |a - \tilde{a}|$.

Sai số tuyệt đối của $\tilde{a}$ so với A được đánh giá như sau: $|\tilde{a} - A| = |(\tilde{a} - a) + (a - A)| \leqslant |\tilde{a} - a| + |a - A| \leqslant \theta_{\tilde{a}} + \Delta_a = \Delta_{\tilde{a}}$. Vì $\theta_{\tilde{a}} \geqslant 0$ nên $\Delta_{\tilde{a}} \geqslant \Delta_a$.

ĐỊNH NGHĨA 1.7

Sai số thực sự của $\tilde{a}$ so với a được gọi là sai số làm tròn. Vậy $\theta_{\tilde{a}} = |a - \tilde{a}|$.

Sai số tuyệt đối của $\tilde{a}$ so với A được đánh giá như sau: $|\tilde{a} - A| = |(\tilde{a} - a) + (a - A)| \leqslant |\tilde{a} - a| + |a - A| \leqslant \theta_{\tilde{a}} + \Delta_a = \Delta_{\tilde{a}}$. Vì $\theta_{\tilde{a}} \geqslant 0$ nên $\Delta_{\tilde{a}} \geqslant \Delta_a$. Do đó sau khi làm tròn sai số tăng lên. Vì vậy, khi tính toán ta tránh làm tròn các phép toán trung gian, chỉ nên làm tròn kết quả cuối cùng.

SỰ LÀM TRÒN SỐ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

Trường hợp làm tròn số trong bất đẳng thức, ta sử dụng khái niệm làm tròn lên và làm tròn xuống.

SỰ LÀM TRÒN SỐ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

Trường hợp làm tròn số trong bất đẳng thức, ta sử dụng khái niệm làm tròn lên và làm tròn xuống.

VÍ DỤ 1.7

$a < 13.9236$ *khi làm tròn lên đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được* $a < 13.93$ *và* $b > 78.6789$ *khi làm tròn xuống đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được* $b > 78.67$.

ĐỊNH NGHĨA 1.8

Cho $a \approx A$. Chữ số α_k trong phép biểu diễn dưới dạng thập phân được gọi là ***đáng tin****, nếu $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^k$. Trong trường hợp ngược lại, chữ số α_k được gọi là* ***không đáng tin****.*

ĐỊNH NGHĨA 1.8

*Cho $a \approx A$. Chữ số α_k trong phép biểu diễn dưới dạng thập phân được gọi là **đáng tin**, nếu $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^k$. Trong trường hợp ngược lại, chữ số α_k được gọi là **không đáng tin**.*

VÍ DỤ 1.8

Số gần đúng $a = 3.7284$ với sai số tuyệt đối là $\Delta_a = 0.0047$ có 3 chữ số đáng tin là $3, 7, 2$ và 2 chữ số không đáng tin là $8, 4$

Cách viết số gần đúng

Chúng ta viết số gần đúng a của số chính xác A với sai số tuyệt đối Δ_a theo quy tắc sau:

CÁCH VIẾT SỐ GẦN ĐÚNG

Chúng ta viết số gần đúng a của số chính xác A với sai số tuyệt đối Δ_a theo quy tắc sau:

1. Viết số gần đúng a kèm theo sai số tuyệt đối Δ_a dưới dạng $a \pm \Delta_a$. Ví dụ 17.358 ± 0.003. Cách này thường được dùng để biểu diễn các kết quả tính toán hoặc phép đo.

CÁCH VIẾT SỐ GẦN ĐÚNG

Chúng ta viết số gần đúng a của số chính xác A với sai số tuyệt đối Δ_a theo quy tắc sau:

1. Viết số gần đúng a kèm theo sai số tuyệt đối Δ_a dưới dạng $a \pm \Delta_a$. Ví dụ 17.358 ± 0.003. Cách này thường được dùng để biểu diễn các kết quả tính toán hoặc phép đo.
2. Viết số gần đúng theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin. Điều này có nghĩa là sai số tuyệt đối Δ_a không lớn hơn một nửa đơn vị của chữ số cuối cùng bên phải.

Ví dụ 1.9

$a = 23.54$ *thì sai số tuyệt đối*

$$\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005,$$

trong khi nếu viết $a = 23.5400$ *thì sai số tuyệt đối*

$$\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0.00005.$$

Cách này thường dùng để trình bày các bảng số.

CÔNG THỨC TÍNH SAI SỐ CỦA HÀM HAI BIẾN

Xét hàm số $u = f(x, y)$.

1. x là giá trị gần đúng của giá trị chính xác X. Đặt $\Delta x = |X - x| \Rightarrow \Delta x \leqslant \Delta_x$.

CÔNG THỨC TÍNH SAI SỐ CỦA HÀM HAI BIẾN

Xét hàm số $u = f(x, y)$.

1. x là giá trị gần đúng của giá trị chính xác X. Đặt $\Delta x = |X - x| \Rightarrow \Delta x \leqslant \Delta_x$.
2. y là giá trị gần đúng của giá trị chính xác Y. Đặt $\Delta y = |Y - y| \Rightarrow \Delta y \leqslant \Delta_y$.

CÔNG THỨC TÍNH SAI SỐ CỦA HÀM HAI BIẾN

Xét hàm số $u = f(x, y)$.

1. x là giá trị gần đúng của giá trị chính xác X. Đặt $\Delta x = |X - x| \Rightarrow \Delta x \leqslant \Delta_x$.
2. y là giá trị gần đúng của giá trị chính xác Y. Đặt $\Delta y = |Y - y| \Rightarrow \Delta y \leqslant \Delta_y$.
3. $u = f(x, y)$ là giá trị gần đúng của giá trị chính xác $U = f(X, Y)$.

CÔNG THỨC TÍNH SAI SỐ CỦA HÀM HAI BIẾN

Xét hàm số $u = f(x, y)$.

1. x là giá trị gần đúng của giá trị chính xác X. Đặt $\Delta x = |X - x| \Rightarrow \Delta x \leqslant \Delta_x$.
2. y là giá trị gần đúng của giá trị chính xác Y. Đặt $\Delta y = |Y - y| \Rightarrow \Delta y \leqslant \Delta_y$.
3. $u = f(x, y)$ là giá trị gần đúng của giá trị chính xác $U = f(X, Y)$.

Hãy tìm sai số tuyệt đối và sai số tương đối của hàm số $u = f(x, y)$?

$$|U - u| = |f(X, Y) - f(x, y)|$$

$$|U - u| = |f(X, Y) - f(x, y)|$$

$$\approx \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).\Delta y \right|$$

$$|U - u| = |f(X, Y) - f(x, y)|$$

$$\approx \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).\Delta y \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| .\Delta_x + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| .\Delta_y$$

$$|U-u| = |f(X,Y) - f(x,y)|$$

$$\approx \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y).\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).\Delta y\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|.\Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|.\Delta_y$$

Vậy sai số tuyệt đối của hàm số u nhỏ hơn hoặc bằng

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|.\Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|.\Delta_y$$

Sai số tương đối của hàm số u nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|.\Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|.\Delta_y}{|u|}$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,y)\right|.\Delta_x + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln f(x,y)\right|.\Delta_y$$

Công thức tổng quát của sai số

Cho hàm số khả vi liên tục $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và giả sử biết sai số tuyệt đối Δ_{x_i} của các đối số x_i $(i = \overline{1..n})$. Gọi X_i, Y và x_i, y $(i = \overline{1..n})$ là các giá trị chính xác và các giá trị gần đúng của đối số và hàm số. Khi đó

CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA SAI SỐ

Cho hàm số khả vi liên tục $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và giả sử biết sai số tuyệt đối Δ_{x_i} của các đối số x_i $(i = \overline{1..n})$. Gọi X_i, Y và x_i, y $(i = \overline{1..n})$ là các giá trị chính xác và các giá trị gần đúng của đối số và hàm số. Khi đó

$|Y - y| = |f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| .|X_i - x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| .\Delta_{x_i}$. Vậy sai số tuyệt đối của hàm số $y \leqslant \Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| .\Delta_{x_i}$

Sai số tương đối của hàm số y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| .\Delta_{x_i}}{|f|}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| .\Delta_{x_i}$$

CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA SAI SỐ

VÍ DỤ 2.1

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, *biết đường kính* $d = 3.70cm \pm 0.05cm$ *và* $\pi = 3.14 \pm 0.0016$.

CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA SAI SỐ

VÍ DỤ 2.1

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, *biết đường kính* $d = 3.70cm \pm 0.05cm$ *và* $\pi = 3.14 \pm 0.0016$.

Xem π và d là những đối số của hàm số V, ta có $\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3 = \frac{1}{6} \times (3.70)^3$ và

$\frac{\partial v}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = \frac{1}{2} \times (3.14) \times (3.70)^2$.

Vậy $\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right|.\Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial d}\right|.\Delta_d = \frac{1}{6} \times (3.70)^3 \times 0.0016 + \frac{1}{2} \times (3.14) \times (3.70)^2 \times 0.05 = 1.088172467$

Shift-STO-M ≈ 1.0882.

Vậy $\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right|.\Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial d}\right|.\Delta_d = \frac{1}{6} \times (3.70)^3 \times 0.0016 + \frac{1}{2} \times (3.14) \times (3.70)^2 \times 0.05 = 1.088172467$
Shift-STO-M ≈ 1.0882.
Do đó, sai số tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 1.0882.
Sai số tương đối nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_v = \frac{\Delta_v}{|v|} = 0.04105009468 \approx 0.0411.$$

Bấm máy: $\dfrac{M}{|\frac{1}{6} \times 3.14 \times 3.70^3|}$

SAI SỐ CỦA TỔNG ĐẠI SỐ

Xét hàm số $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$. Khi đó $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1,\ (i = \overline{1..n})$. Do đó, sai số tuyệt đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}$$

và sai số tương đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|}.$$

VÍ DỤ 2.2

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a + b + c$ *với* $a = 47.132 \pm 0.003$; $b = 47.111 \pm 0.02$; $c = 45.234 \pm 0.5$.

Ví dụ 2.2

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a + b + c$ *với* $a = 47.132 \pm 0.003$; $b = 47.111 \pm 0.02$; $c = 45.234 \pm 0.5$.

Sai số tuyệt đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\Delta_y = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.003 + 0.02 + 0.5 = 0.523.$$

Shift-STO-M

Sai số tương đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = 0.003749722 \approx 0.0038.$$

Bấm máy: $\dfrac{M}{|47.132 + 47.111 + 45.234|}$

Sai số của tích

Xét hàm số $y = x_1.x_2\ldots x_n$. Khi đó

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y\right| = \frac{1}{|x_i|},\ (i = \overline{1..n}).$$

Do đó, sai số tương đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}$$

và sai số tuyệt đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\Delta_y = \delta_y.|y|.$$

Ví dụ 2.3

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a.b.c$ *với* $a = 47.132 \pm 0.003;$ $b = 47.111 \pm 0.02; c = 45.234 \pm 0.5.$

VÍ DỤ 2.3

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a.b.c$ *với* $a = 47.132 \pm 0.003$; $b = 47.111 \pm 0.02$; $c = 45.234 \pm 0.5$.

Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}, \delta_b = \dfrac{\Delta_b}{|b|}, \delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|}$,

Sai số tương đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_y = \delta_a + \delta_b + \delta_c = \frac{0.003}{47.132} + \frac{0.02}{47.111} + \frac{0.5}{45.234} =$$

0.01154181255 Shift-STO-M ≈ 0.0116.

Do đó sai số tuyệt đối của y nhỏ hơn hoặc bằng

$\Delta_y = \delta_y.|y| = M \times |47.132 \times 47.111 \times 45.234| = 1159.250261 \approx 1159.2503.$

Bài tập

Bài tập 1.1

Cho $a = 1.85$ *với sai số tương đối* $\delta_a = 0.12\%$. *Tính sai số tuyệt đối của* a.

BÀI TẬP

BÀI TẬP 1.1

Cho $a = 1.85$ với sai số tương đối $\delta_a = 0.12\%$. Tính sai số tuyệt đối của a.

Giải.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \times |a| = 0.12\% \times 1.85 = 0.00222$$

Sai số tuyệt đối của a nhỏ hơn hoặc bằng $\Delta_a \Rightarrow$ Làm tròn kết quả đến 4 chữ số thập phân ta được, sai số tuyệt đối của $a \leqslant 0.0023$.

BÀI TẬP 1.2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau:

$a = 12.6724; b = 1.5476; c \leqslant 12.8713; d \geqslant 1.2354.$

Giải.

Bài tập 1.2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau:

$a = 12.6724; b = 1.5476; c \leqslant 12.8713; d \geqslant 1.2354.$

Giải.

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67.$

BÀI TẬP 1.2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau:

$a = 12.6724; b = 1.5476; c \leqslant 12.8713; d \geqslant 1.2354.$

Giải.

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67.$
- $b = 1.5476 \Rightarrow b \approx 1.55.$

BÀI TẬP 1.2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau:

$a = 12.6724; b = 1.5476; c \leqslant 12.8713; d \geqslant 1.2354.$

Giải.

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67.$
- $b = 1.5476 \Rightarrow b \approx 1.55.$
- $c \leqslant 12.8713 \Rightarrow c \leqslant 12.88.$

BÀI TẬP 1.2

Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau:

$a = 12.6724; b = 1.5476; c \leqslant 12.8713; d \geqslant 1.2354.$

Giải.

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67.$
- $b = 1.5476 \Rightarrow b \approx 1.55.$
- $c \leqslant 12.8713 \Rightarrow c \leqslant 12.88.$
- $d \geqslant 1.2354 \Rightarrow d \geqslant 1.23.$

BÀI TẬP 1.3

Xác định số các chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của các số sau:

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023.$

BÀI TẬP 1.3

Xác định số các chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của các số sau:

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023.$
2. $a = 154.2341, \Delta_a = 6.23 \times 10^{-3}.$

BÀI TẬP 1.3

Xác định số các chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của các số sau:

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023.$
2. $a = 154.2341, \Delta_a = 6.23 \times 10^{-3}.$
3. $a = 3.4167, \delta_a = 0.25\%.$

Giải.

Giải. $\Delta_a \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 10^k \Rightarrow k \geqslant \log_{10}(2\Delta_a)$

Giải. $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^k \Rightarrow k \geqslant \log_{10}(2\Delta_a)$

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023 \Rightarrow$ số đáng tin là 1,3,4. **Đáp số: 3.**

Giải. $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^k \Rightarrow k \geqslant \log_{10}(2\Delta_a)$

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023 \Rightarrow$ số đáng tin là 1,3,4. **Đáp số: 3**.
2. $a = 154.2341, \Delta_a = 6.23 \times 10^{-3} = 0.00623 \Rightarrow$ số đáng tin là 1,5,4,2. **Đáp số: 4**.

Giải. $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^k \Rightarrow k \geqslant \log_{10}(2\Delta_a)$

1. $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023 \Rightarrow$ số đáng tin là 1,3,4. Đáp số: 3.
2. $a = 154.2341, \Delta_a = 6.23 \times 10^{-3} = 0.00623 \Rightarrow$ số đáng tin là 1,5,4,2. Đáp số: 4.
3. $a = 3.4167, \delta_a = 0.25\% \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \times |a| = 8.54175 \times 10^{-3} = 0.00854175 \Rightarrow$ số đáng tin là 3,4. Đáp số: 2.

BÀI TẬP 1.4

Cho hình cầu có bán kính $R = 5 \pm 0.005(m)$ *và số* $\pi = 3.14 \pm 0.002$. *Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu.*

Giải.

Giải. Xem π và R là những đối số của hàm số $v = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, ta có

$$\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right| .\Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| .\Delta_R$$

$= \dfrac{4}{3} \times (5)^3 \times 0.002 + 4 \times (3.14) \times (5)^2 \times 0.005 =$ 1.90333333 Shift-STO-M ≈ 1.9034.

Giải. Xem π và R là những đối số của hàm số $v = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, ta có

$$\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right|.\Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial R}\right|.\Delta_R$$

$= \dfrac{4}{3} \times (5)^3 \times 0.002 + 4 \times (3.14) \times (5)^2 \times 0.005 =$
1.90333333 Shift-STO-M ≈ 1.9034.
Do đó, sai số tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 1.9034

Sai số tương đối nhỏ hơn hoặc bằng

$$\delta_v = \frac{\Delta_v}{|v|} = 0.003636942 \approx 0.0037.$$

Bấm máy: $\dfrac{M}{|\frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3|}$

BÀI TẬP

BÀI TẬP 1.5

Cho

$a = 15.00 \pm 0.02, b = 0.123 \pm 0.001, c = 137 \pm 0.5.$

Hãy tính sai số tuyệt đối của

BÀI TẬP

BÀI TẬP 1.5

Cho

$a = 15.00 \pm 0.02, b = 0.123 \pm 0.001, c = 137 \pm 0.5.$

Hãy tính sai số tuyệt đối của

1. $A = a + b + c$

BÀI TẬP

BÀI TẬP 1.5

Cho

$a = 15.00 \pm 0.02, b = 0.123 \pm 0.001, c = 137 \pm 0.5.$

Hãy tính sai số tuyệt đối của

1. $A = a + b + c$
2. $B = 20a - 100b + c$

BÀI TẬP

BÀI TẬP 1.5

Cho

$a = 15.00 \pm 0.02, b = 0.123 \pm 0.001, c = 137 \pm 0.5.$

Hãy tính sai số tuyệt đối của

1. $A = a + b + c$
2. $B = 20a - 100b + c$
3. $C = a + bc.$

Giải.

Giải.

1. $A = a + b + c \Rightarrow \Delta_A = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.521.$

Giải.

1. $A = a + b + c \Rightarrow \Delta_A = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.521.$
2. $B = 20a - 100b + c$

   $\Rightarrow \Delta_B = 20.\Delta_a + 100.\Delta_b + \Delta_c = 1.$

Giải.

1. $A = a + b + c \Rightarrow \Delta_A = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.521.$
2. $B = 20a - 100b + c$

   $\Rightarrow \Delta_B = 20.\Delta_a + 100.\Delta_b + \Delta_c = 1.$
3. $C = a + bc$

   $\Rightarrow \Delta_C = \Delta_a + |c|.\Delta_b + |b|.\Delta_c = 0.2185.$

BÀI TẬP 1.6

Cho hàm $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$ *và* $x = 1.234 \pm 0.00015$. *Tìm sai số tuyệt đối của hàm số* $f(x)$.

BÀI TẬP 1.6

Cho hàm $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$ *và* $x = 1.234 \pm 0.00015$. *Tìm sai số tuyệt đối của hàm số* $f(x)$.

Giải. Ta có $f'(x) = 15x^4 - 4x$ và

$$\Delta_f = |f'(x)|.\Delta_x$$

nên

Bài tập 1.6

Cho hàm $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$ *và* $x = 1.234 \pm 0.00015$. *Tìm sai số tuyệt đối của hàm số* $f(x)$.

Giải. Ta có $f'(x) = 15x^4 - 4x$ và

$$\Delta_f = |f'(x)|.\Delta_x$$

nên

$$\Delta_f = |15 \times (1.234)^4 - 4 \times 1.234| \times 0.00015 =$$

$$= 0.004476868 \approx 0.0045$$

BÀI TẬP 2.1

Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.3317$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.54\%$. *Ta làm tròn a thành* $a^* = 3.33$. *Sai số tuyệt đối của* a^* *là*

1. *0.0195*

BÀI TẬP 2.1

Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.3317$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.54\%$. *Ta làm tròn a thành* $a^* = 3.33$. *Sai số tuyệt đối của* a^* *là*

1. *0.0195*
2. *0.0196*

BÀI TẬP 2.1

Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.3317$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.54\%$. *Ta làm tròn a thành* $a^* = 3.33$. *Sai số tuyệt đối của* a^* *là*

1. *0.0195*
2. *0.0196*
3. *0.0197*

BÀI TẬP 2.1

Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.3317$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.54\%$. *Ta làm tròn a thành* $a^* = 3.33$. *Sai số tuyệt đối của* a^* *là*

1. *0.0195*
2. *0.0196*
3. *0.0197*
4. *0.0198*

BÀI TẬP 2.1

Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.3317$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.54\%$. *Ta làm tròn a thành* $a^* = 3.33$. *Sai số tuyệt đối của* a^* *là*

1. *0.0195*
2. *0.0196*
3. *0.0197*
4. *0.0198*
5. *Các câu kia sai*

Sai số tuyệt đối của a^* nhỏ hơn hoặc bằng
$\Delta_{a^*} = \Delta_a + \theta_{a^*} = \delta_a \times |a| + |a^* - a| = 0.01969118.$
Làm tròn lên $\Rightarrow$ Câu 3

BÀI TẬP 2.2

Cho $a = 5.5848$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.67\%$. *Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là*

1. *1*

BÀI TẬP 2.2

Cho $a = 5.5848$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.67\%$. *Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là*

1. *1*
2. *2*

BÀI TẬP 2.2

Cho $a = 5.5848$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.67\%$. *Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là*

1. *1*
2. *2*
3. *3*

BÀI TẬP 2.2

Cho $a = 5.5848$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.67\%$. *Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là*

1. *1*
2. *2*
3. *3*
4. *4*

BÀI TẬP 2.2

Cho $a = 5.5848$ *với sai số tương đối là* $\delta_a = 0.67\%$. *Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là*

1. *1*
2. *2*
3. *3*
4. *4*
5. *Các câu kia sai*

Sai số tuyệt đối
$\Delta_a = \delta_a.|a| = 0.67\% \times 5.5848 = 0.03741816$. Các chữ số đáng tin là $5, 5$. $\Rightarrow$ Câu 2

BÀI TẬP 2.3

Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. *Biết* $x = 0.8907 \pm 0.0013$ *và* $y = 4.9954 \pm 0.0017$. *Sai số tuyệt đối của* f *là*

1. *0.1384*

BÀI TẬP 2.3

Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. *Biết* $x = 0.8907 \pm 0.0013$ *và* $y = 4.9954 \pm 0.0017$. *Sai số tuyệt đối của* f *là*

1. *0.1384*
2. *0.1385*

Bài tập 2.3

Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$*. Biết* $x = 0.8907 \pm 0.0013$ *và* $y = 4.9954 \pm 0.0017$*. Sai số tuyệt đối của* f *là*

1. *0.1384*
2. *0.1385*
3. *0.1386*

BÀI TẬP 2.3

Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. *Biết* $x = 0.8907 \pm 0.0013$ *và* $y = 4.9954 \pm 0.0017$. *Sai số tuyệt đối của* f *là*

1. *0.1384*
2. *0.1385*
3. *0.1386*
4. *0.1387*

BÀI TẬP 2.3

Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. *Biết* $x = 0.8907 \pm 0.0013$ *và* $y = 4.9954 \pm 0.0017$. *Sai số tuyệt đối của* f *là*

1. *0.1384*
2. *0.1385*
3. *0.1386*
4. *0.1387*
5. *Các câu kia sai*

Sai số tuyệt đối của f nhỏ hơn hoặc bằng

$$\Delta_f = |f'_x|.\Delta_x + |f'_y|.\Delta_y =$$

$$= |3x^2 + y|.\Delta_x + |x + 3y^2|.\Delta_y =$$

$$= |3 \times 0.8907^2 + 4.9954| \times 0.0013 +$$

$$+|0.8907 + 3 \times 4.9954^2| \times 0.0017 = 0.1383677692.$$

Làm tròn lên $\Rightarrow$ Câu 1

CÁM ƠN CÁC EM ĐÃ CHÚ Ý LẮNG NGHE