

Chương IV : Tính gần đúng tích phân xác định và đạo hàm

1) Tính gần đúng tích phân xác định

1.1) Công thức hình thang :

a) Nội dung :

Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi các

điểm : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ với bước chia đều $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a < x_0 + h = x_1 < x_0 + 2h = x_2 < \dots < x_0 + nh = x_n = b$$

Xấp xỉ hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_1]$ bởi đa thức nội suy **bậc nhất** $P(x)$ trên **hai mốc** nội suy $[x_0, x_1]$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx = \frac{h}{2} [y_0 + y_1]$$

Công thức hình thang :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

b) Sai số :

$$\frac{M^{(2)} h^2}{12} (b - a)$$

Ví dụ : Tính tích phân $I = \int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}$ theo công thức

hình thang bằng cách chia đoạn $[0,0.6]$ thành 6 phần bằng nhau , sau đó đánh giá sai số



x	y
0	$y_0 = 1$
0.1	$y_1 = 0.9090909091$
0.2	$y_2 = 0.8333333333$
0.3	$y_3 = 0.7692307692$
0.4	$y_4 = 0.7142857143$
0.5	$y_5 = 0.6666666667$
0.6	$y_6 = 0.6250000000$

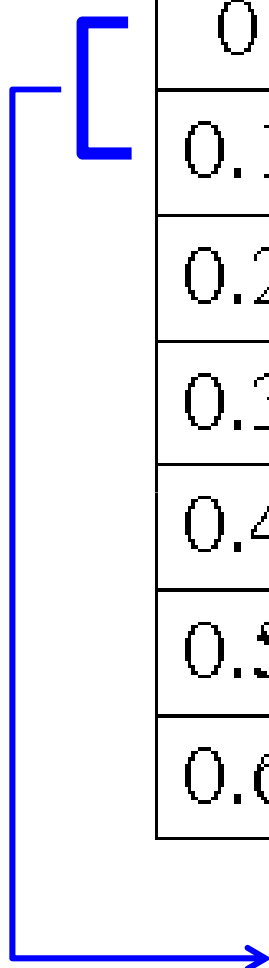
$$\frac{1}{1+X}$$

CALC

$$X = ? \quad 0$$

CALC

$$X = ? \quad 0.1$$



$$I = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_6 + 2 \sum_{i=1}^5 y_i \right] = 0.470510739$$

Sai số :

$$\frac{M^{(2)}h^2(b-a)}{12} = 0.001$$

$$b-a=0.6$$

$$h=0.1$$

$$M^{(2)} = \text{Max}|f''(x)| = \text{Max} \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| \quad x \in [0, 0.6]$$

$$= \text{Max} \frac{2}{(1+x)^3} = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$> 0$$

1.2) Công thức Simpson :

a) Nội dung : Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần đều nhau (n chẵn : $n = 2m$). Xấp xỉ hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_2]$ bởi đa thức nội suy bậc hai trên các mốc nội suy x_0, x_1, x_2

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Công thức :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{k=1}^m y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} \right]$$

b) Sai số :
$$\frac{M^{(4)} h^4 (b-a)}{180}$$

$$M^{(4)} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$



Ví dụ : tính gần đúng $\int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} dx$

theo công thức **Simpson** với số khoảng chia $n=6$

x	y
0	$y_0 = 1$
0.1	$y_1 = 0.9090909091$
0.2	$y_2 = 0.8333333333$
0.3	$y_3 = 0.7692307692$
0.4	$y_4 = 0.7142857143$
0.5	$y_5 = 0.6666666667$
0.6	$y_6 = 0.6250000000$

$$I = \frac{h}{3} [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] = 0.47000638$$

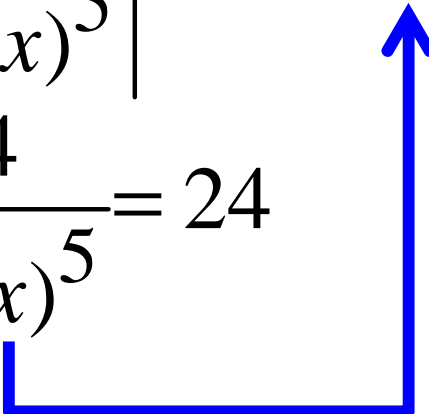
x	y	
0	$y_0 = 1$	→ 1
0.1	$y_1 = 0.9090909091$	→ 4
0.2	$y_2 = 0.8333333333$	→ 2
0.3	$y_3 = 0.7692307692$	→ 4
0.4	$y_4 = 0.7142857143$	→ 2
0.5	$y_5 = 0.6666666667$	→ 4
0.6	$y_6 = 0.6250000000$	→ 1

Sai số :

$$\frac{M^{(4)} h^4 (b-a)}{180} = 0.000008$$

$$b-a=0.6$$

$$h=0.1$$

$$M^{(4)} = \text{Max} |f^{(4)}(x)| = \text{Max} \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| \quad x \in [0, 0.6]$$
$$= \text{Max} \frac{24}{(1+x)^5} = 24$$


2) Tính gần đúng đạo hàm :

a) Tính gần đúng đạo hàm cấp 1 :

Cho bảng số liệu với mốc cách đều (h) :

x	x_0	x_1	x_2	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_{n-1}	y_n

Tính gần đúng giá trị $y'(x_i)$, $y''(x_i)$

Công thức **trung tâm** tính gần đúng đạo hàm cấp 1:

$$y'_i = y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

b) Công thức tính gần đúng đạo hàm cấp 2

$$y''(x_i) = y''_i \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

Tính gần đúng giá trị $y'(1)$, $y''(1)$ nếu hàm $y(x) = \cos^4(\sqrt[3]{x})$, với $h = 0.1$

$$y'(1) = -0.17824017$$

$$y''(1) = 0.3573462$$