

ÔN TẬP PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Những bài dưới đây là những bài lạ và cơ bản nhất, nên xem thêm slide, trật tử không chịu trách nhiệm

NHỚ ĐỔI QUA RADIAN

Câu 1:

Cho phương trình $e^x + 2x^2 + \cos x - 10 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1, 2]$. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng của x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của Δx_0 .

Đáp số : $x_2 = 1.5973$ $\Delta x_2 = 0.0028$

Bài giải

$$f(x) = e^x + 2x^2 + \cos x - 10; a = 1; b = 2$$

$$m = \min |f'(x)| \quad \text{"SHIFT" "STO" "A"}$$

Nếu $f(a)f''(a) > 0$ chọn $x_0 = a$, $f(a)f''(a) < 0$ chọn $x_0 = b$

Nhập vào máy tính:

$$X = X - \frac{f(X)}{f'(X)} \cdot \frac{|f(X)|}{A}$$

"CALL" "x₀"

NHỚ ĐỔI QUA RADIAN

Câu 2:

Cho hệ phương trình;

$$\begin{cases} 34x_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 29x_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 32.6x_3 = 18.42 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Jacobi với $x^{(0)} = (0.1, 0.3, 0.4)^T$, tìm vecto lặp $x^{(3)}$

Đáp số: $x_1^{(3)} = 0.3663$

$x_2^{(3)} = 0.5969$

$x_3^{(3)} = 0.6404$

Bài giải

Nhập vào máy tính:

“ $X = (12.89 - 2.73B + 1.85C) \div 34$: $Y = (15.73 - 1.34A + 3.24C) \div 29$: $C = (18.42 - 1.18A + 4.87B) \div 32.6$: $A = X$: $B = Y$ ”

“CALL”

$B = 0.3$; $C = 0.4$; $A = 0.1$

Nhấn tiếp “=” cho tới kết quả

	X_1	X_2	X_3
(1)	0.3768	0.5825	0.6062
(2)	0.3653	0.5927	0.6384
(3)	0.3663	0.5969	0.6404

Câu 3:

Cho hệ phương trình;

$$\begin{cases} 34x_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 29x_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 32.6x_3 = 18.42 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel với $x^{(0)} = (0.1, 0.3, 0.4)^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$

Đáp số : $x_1^{(3)} = 0.3661$

$x_2^{(3)} = 0.5971$

$x_3^{(3)} = 0.6410$

Bài giải

Nhập vào máy tính:

“ $A = (12.89 - 2.73B + 1.85C) \div 34$: $B = (15.73 - 1.34A + 3.24C) \div 29$: $C = (18.42 - 1.18A + 4.87B) \div 32.6$ ”

“CALL”

$B = 0.3$; $C = 0.4$; (KHÔNG NHẬP A)

Nhấn tiếp “=” cho tới kết quả

	X_1	X_2	X_3
(1)	0.3768	0.5697	0.6365

(2)	0.3680	0.5965	0.6408
(3)	0.3661	0.5971	0.6410

Câu 4:

Cho bảng số

x	1.1	1.6	2.1
y	2.2	5.3	6.6

Spline bậc ba $g(x)$ thỏa điều kiện $g'(1.1)=0.2$ và $g'(2.1)=0.5$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x=1.4$ và $x=1.9$

Đáp số : $g(1.4)=3.7558$; $g(1.9)= 6.4148$

Bài giải

Kẻ bảng cho không bị lộn

x_k	h_k	a_k	$[\]$	B	C_k	b_k	d_k
1.1	0.5	2.2	$\alpha = 0.2$	18	23.55	$\alpha = 0.2$	-23.1
1.6		5.3	6.2	-10.8	-11.1		
	0.5		2.6			6.425	6.9
2.1		6.6	$\beta = 0.5$	-6.3	-0.75		

Ta có

$$\diamond h_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\diamond a_k = y_k$$

$$\diamond [\] = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

$$\diamond B = 3([\]_{k+1} - [\]_k)$$

$$\diamond A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ mà } A.C = B \Rightarrow C = A^{-1}.B \text{ (Dùng ma}$$

trận để giải tìm ra C, A ma trận 3x3, B là ma trận 3x1)

$$\diamond b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(C_{k+1} + 2C_k) = [\] - \frac{h_k}{3}(C_{k+1} + 2C_k)$$

$$\diamond d_k = \frac{C_{k+1} - C_k}{3h_k}$$

Nếu $b_{k1} \neq \alpha$ tính lại từ đầu hoặc bỏ làm câu khác.

Bảng hệ số:

	a	b	c	d
(0)	2.2	0.2	23.55	-23.1
(1)	5.3	6.425	-11.1	6.9

Ta có phương trình

$$\begin{cases} g(x) = 2.2 + 0.2(x-1.1) + 23.55(x-1.1)^2 - \frac{346}{15}(x-1.1)^3; 1.1 \leq x \leq 1.6 \\ g(x) = 5.3 + 6.425(x-1.6) - 11.1(x-1.6)^2 - 6.9(x-1.6)^3; 1.6 \leq x \leq 2.1 \end{cases}$$

Tính $g(1.4)$ thế $x=1.4$ vào $g(x)$ tại $1.1 \leq x \leq 1.6$

Tính $g(1.9)$ thế $x=1.9$ vào $g(x)$ tại $1.6 \leq x \leq 2.1$

Câu 5

Cho bảng số

x	0.7	1.0	1.2	1.3	1.5
y	3.1	2	4.5	2.6	6.7

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A + B \sin x + C \cos^2 x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên

Đáp số : $A=144.0806$; $B= -138.2293$; $C= -88.7070$

Bài giải

$$f(x) = A + B \sin x + C \cos^2 x = (A + C) + B \sin x - C \sin^2 x$$

$$C \leftrightarrow -C$$

$$B \leftrightarrow B$$

$$A \leftrightarrow A + C$$

Nhập vào máy tính:

Dạng f(x)	Phím ấn
$A+Bx$	2
$A+Bx+Cx^2$	3
$\ln(A+Bx)$	4
Ae^{Bx}	5
$A.B^x$	6
$A.x^B$	7
$\frac{1}{A+Bx}$	8

Chọn chế độ “STAT” (“MODE” “3”)

Nhập giá trị x và y (chú ý: nhập sinx chứ không phải nhập x)

sinx	y
sin(0.7)	3.1
sin(1.0)	2
sin(1.2)	4.5
sin(1.3)	2.6
sin(1.5)	6.7

Nhấn “SHIFT” “1” “7” để có giá trị A,B,C

NHỚ ĐỔI QUA RADIAN

Câu 6

Cho bảng số

x	0.7	1.0	1.2	1.3	1.5
y	3.1	2	4.5	2.6	6.7

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = Ax + B \cos x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên

Đáp số : $A = 3.5255$; $B = -0.6210$

Bài giải

Đặt $g(x) = x$; $h(x) = \cos x$

Nhập vào máy tính:

“ $A = A + g^2(x)$: $B = B + g(x)h(x)$: $C = C + g(x)Y$: $D = D + h^2(x)$: $M = M + h(x)Y$ ”

A,B,C,D,M ban đầu nhập bằng không.

X,Y nhập theo bảng cho đến hết

Sau khi tính ra A,B,C,D,M giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Kết quả là giá trị cần tìm

Câu 7(dạng này lạ, mấy câu khác dễ hơn có trong slide)

Cho bảng số

x	0.1	0.3	0.6	0.9
y	2.4	3.7	3.2	4.3

Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, hãy xấp xỉ đạo hàm cấp 1 của hàm tại $x=0.5$

Đáp số : $y'(0.5) \approx -2.6694$

Bài giải

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3, i = 0, 1, 2, 3$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 \\ x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ y_3 - y_0 \end{pmatrix}$$

a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ phương trình

$$y'(x^*) \approx P'(x^*) = a_1 + 2a_2x^* + 3a_3(x^*)^2$$

a_1	a_2	a_3
$\frac{5171}{240}$	$\frac{-1723}{36}$	$\frac{1135}{36}$

$$y'(0.5) \approx P'(0.5) = \frac{5171}{240} + 2 \frac{-1723}{36} (0.5) + 3 \frac{1135}{36} (0.5)^2$$

Câu 8

Cho bảng số

x	1.1	1.7	2.4	3.3
y	1.3	3.9	4.5	α

Sử dụng đa thức nội suy Newton, tìm giá trị của α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ đạo hàm tại $x = 1.5$ là $y'(1.5) = 2.8$

Bài giải

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$y'(x^*) \approx P'(x^*) = a_1 + 2a_2x^* + 3a_3(x^*)^2 = y^*$$

$$y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3$$

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & | & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & | & y_2 - y_0 \\ 1 & 2x^* & 3x^{*2} & | & y^* \end{pmatrix}$$

Ta có a_1, a_2, a_3 là 3 nghiệm của hệ phương trình

$$\text{Từ } y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 \Rightarrow a_0$$

$$\alpha = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3$$

	a_1	a_2	a_3	a_0	α
	44.810566	-22.644688	3.840518	-26.427049	12.86386
STO	B	C	D	A	

Câu 9(còn mấy dạng nữa, xem thêm slide cho chắc cũng dễ ah)

Cho tích phân $I = \int_{1.3}^{2.5} \ln \sqrt{x+6} dx$. Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức hình thang mở rộng với $n=8$

Đáp số : $I=1.2395$

Bài giải

$$\text{Đặt } f(x) = \ln \sqrt{x+6}; a=1.3; b=2.5; h = \frac{b-a}{n}$$

Nhập vào máy tính

$$A = A + \frac{h}{2} [f(X) + f(X+h)]; X = X + h$$

Cho A ban đầu bằng 0, X ban đầu bằng a, nhấn “=” cho tới khi $X = b - h$

Câu 10

Cho bảng số

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2	7.4

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2} [xf^2(x) + 2.2x^3] dx$

Đáp số : $I=59.8250$

Bài giải

Đặt $F(X,Y)=XY^2+2.2X^3$

$h = x_1 - x_0 = 0.2$

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2	7.4
k	0	1	2	3	4	5	6
B	1	4	2	4	2	4	1

Nhập vào máy tính

“ $A = A + B \frac{h}{3} F(X,Y) : X = X + h$ ”

A ban đầu bằng 0, X ban đầu bằng x_0 , Y nhập theo bảng.

B	1	ở vị trí đầu và cuối
	2	ở vị trí chẵn ở giữa
	4	ở vị trí lẻ, ở giữa

Câu 11

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x + x \sin(x + 2y), x \geq 1 \\ y(1) = 2.4 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ $y(1.2)$ với bước $h=0.2$

Đáp số : $y(1.2)=2.8449$

Bài giải

Đặt $f(X,Y)=2X+X\sin(X+2Y)$

$x_0=1; y_0=2.4$

Nhập vào máy tính hàm $h.f(X,Y)$

“ $0.2(2X+X\sin(X+2Y))$ ”

“CALL”

X	Y	STO
x_0	y_0	A
$x_0+h\div 2$	$y_0+A\div 2$	B
$x_0+h\div 2$	$y_0+B\div 2$	C
x_0+h	y_0+C	D

Ta có :

$$y_1 = y_0 + (A+2B+2C+D) \div 6$$

NHỚ ĐỔI QUA RADIANT

Câu 12

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) = 4y'' - xy' + 2x^2y + 2; 1 \leq x \leq 1.8 \\ y(1) = 1.2; y'(1) = 1.1; y''(1) = 2.1 \end{cases}$$

Dùng hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng phương trình vi phân với bước chia $h=0.2$

Đáp số : $y(1.2)=1.4200$ $y(1.8)=3.041$

Bài giải

Đặt $y_1 = y'$; $y_2 = y'' \rightarrow y_1' = y_2$

$$y_2' = 4y_2 - xy_1 + 2x^2y + 2$$

$$y(1) = 1.2; y_1(1) = 1.1; y_2(1) = 2.1$$

Nhập vào máy tính

“C = Y + hA: D = A + hB: B = B + h(4B - XA + 2X²Y + 2): X = X + h: Y = C: A = D”

“CALC”

$$Y \rightarrow y_0 \quad ; \quad A \rightarrow y_{10} \quad ; \quad B \rightarrow y_{20} \quad ; \quad X \rightarrow x_0$$

Lấy kết quả ở “C”

X	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	1.4200	1.7240	2.2056	3.041

Câu 13

$$\begin{cases} y''(x) = 4y' + x^2y = 2.6; 1 \leq x \leq 1.6 \\ y(1) = 0.3; y'(1) = 1.1 \end{cases}$$

Dùng hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler cải tiến, giải gần đúng phương trình vi phân với bước chia $h=0.2$

Đáp số : $y(1.2)=0.6660$ $y(1.6)=3.9626$

Bài giải

Đặt $z = y'$; $z' = y'' \rightarrow z(1)=1.1$

$$\begin{cases} y' = z; y(1) = 0.3; z(1) = 1.1 \\ z' = 4z + x^2 y + 2.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K1y = h z_i \\ K1z = h(4z_i + x_i^2 y_i + 2.6) \\ K2y = h(z_i + K1z) \\ K2z = h(4[z_i + K1z] + x_{i+1}^2 [y + K1y] + 2.6) \\ y_{i+1} = y_i + (K1y + K2y) / 2 \\ z_{i+1} = z_i + (K1z + K2z) / 2 \end{cases}$$

$K1y \rightarrow A$; $K1z \rightarrow B$; $K2y \rightarrow C$; $K2z \rightarrow D$

Nhập vào máy tính(lưu ý máy tính không đủ độ dài nên “0.2” bấm “.2”)

“A=.2M:

B=.2(4M+X²Y+2.6):

C=.2(M+B):

X=X+.2:

D=.2(4(M+B)+X²(Y+A)+2.6):

Y=Y+(A+C)÷2:

M=M+(B+D)÷2”

“CALC”

$x_0=1 \rightarrow X$; $y_0=0.3 \rightarrow Y$; $z_0=1.1 \rightarrow M$;

Lấy kết quả ở “Y”

X	1.2	1.4	1.6
y	0.6660	1.6301	3.9626

Câu 14(câu này 10 ăn 1 không dễ nuốt, mà hình như chắc chắn có)

Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2

$$\begin{cases} xy'' + x^2 y' - 4.6y = 2 + 2(x+2)^2; 0.4 \leq x \leq 1.2 \\ y(0.4) = 0.3; y(1.2) = 2.6 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm $y(x)$ trên đoạn $[0.4; 1.2]$ với bước chia $h=0.2$

Đáp số : $y(0.6) = -0.3821$ $y(0.8) = -0.1215$ $y(1.0) = 0.8932$

Bài giải

Đặt $p(x)=x$

$$q(x)=x^2$$

$$r(x) = -4.6$$

$$f(x) = 2 + 2(x+2)^2$$

$$a=0.4$$

$$b=1.2$$

$$h=0.2$$

$$x_1 = a + h = 0.6$$

$$x_2 = a + 2h = 0.8$$

$$x_3 = a + 3h = 1.0$$

$$\alpha = 0.3$$

$$\beta = 2.6$$

Nhập vào máy tính Casio (Không dùng máy vinacal)

“ $A = p(x) \div h^2$: $B = q(x) \div 2 \div h$: $C = A - B$: $r(x) - 2A$: $D = A + B$: $f(x) - MC - YD$ ”

“CALL”

$$X? \rightarrow x_1 \quad ; \quad M? \rightarrow \alpha; \quad y? \rightarrow 0 \quad (4;5;6)$$

$$X? \rightarrow x_2 \quad ; \quad M? \rightarrow 0 \quad ; \quad y? \rightarrow 0 \quad (3;4;5;6)$$

$$X? \rightarrow x_3 \quad ; \quad M? \rightarrow 0 \quad ; \quad y? \rightarrow \beta \quad (3;4;6)$$

Ta có bảng giá trị

15	0.9	14.1	-34.6(1)	15.9(2)	11.29(3)
20	1.6	18.4(4)	-44.6(5)	21.6(6)	17.68(7)
25	2.5	22.5(8)	-54.6(9)	27.5	-51.5(10)

Lấy các giá trị theo vị trí như trên ráp vào hệ phương trình 3 phương trình:

$$\begin{cases} (1)x + (2)y + 0.z = (3) \\ (4)x + (5)y + (6)z = (7) \\ 0.x + (8)y + (9)z = (10) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ra ta được $y(0.6)$; $y(0.8)$; $y(1.0)$, (theo đúng thứ tự)

Câu 15

Cho hàm $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x} - \ln(x^4 + 2)\sin(3x + 1)$. Sử dụng sai phân hướng tâm xấp xỉ $f'(0.7)$, $f''(0.7)$ với bước chia $h=0.15$.

Bài giải

$$X^* = 0.7$$

Nhập vào máy tính hàm $f(x)$

$$“(X^2 + 1)e^{2X} - \ln(X^4 + 2)\sin(3X + 1)”$$

“CALC”

	STO
$X^* + h$	A
$X^* - h$	B
X^*	C

Ta có:

$$f'(0.7) = \frac{A - B}{2h}$$

$$f''(0.7) = \frac{A - 2C + B}{h^2}$$



TÀI LIỆU SƯU TẬP
BỞI HCMUT-CNCP