§2. Chuỗi lũy thừa – Miền hội tụ

Miền HT của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ là tập D nếu

$\forall x = x_0 \in D$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ HT

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Là chuỗi cấp số nhân nên HT khi và chỉ khi |x|<1

Suy ra MHT của chuỗi là (-1,1)

§2. Chuỗi lũy thừa – Miền hội tụ

Ví dụ: Tìm MHT của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

$$u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$ xác định với mọi x

Khi |x|<1: Cho $n \to \infty$ ta được $x^{2n} \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ chuỗi PK theo đkcssht

Khi |x|=1: $x^{2n} = 1, \forall n \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}, \forall n$ Chuỗi PK

Khi |x|>1: Cho $n \to \infty$ $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}} \sim \frac{1}{(x^2)^n} = \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^n$

Chuỗi HT vì |x|>1

Vậy MHT là (-∞,-1)U(1,+ ∞)

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Tổng quát: giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x=x_0$,

tức là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ HT. Theo đkccsht ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0 : \left|a_n x_0^n\right| < M, \forall n$$

Biến đổi số hạng tổng quát của chuỗi:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| < M \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = v_n, \forall n$$

Nếu $|x|<|x_0|$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ HT

Suy ra chuỗi ban đầu HTTĐ theo t/c so sánh.

Vậy ta chứng minh xong định lý Abel sau đây.

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Định lý Abel :

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x_0 \neq 0$

thì nó HTTĐ tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

Hệ quả: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ PK tại x_1

thì nó PK với mọi x thỏa $|x|>|x_1|$

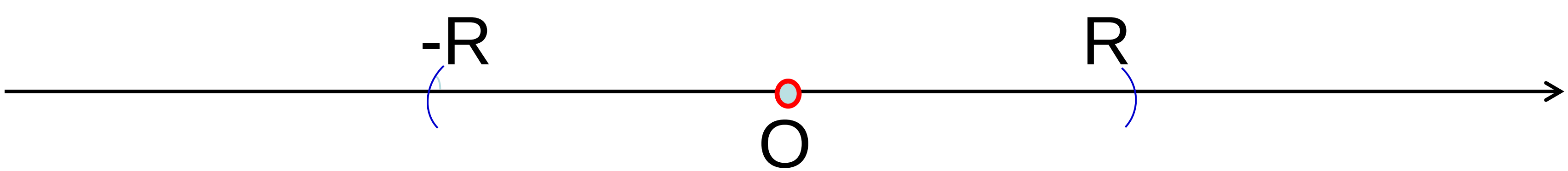
Bán kính hội tụ (BKHT) là ***số dương R*** *sao cho chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n : \begin{cases} HT, \forall x : |X| < R \\ PK, \forall x : |X| > R \end{cases}$$

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Cách tìm BKHT của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$$R = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \end{cases}$$



§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Cách tìm MHT của chuỗi lũy thừa (D)

Bước 1: Tìm BKHT R

Bước 1: Khảo sát sự HT của 2 chuỗi số rồi kết luận

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \, HT, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \, HT \right. \rightarrow D = [-R; R]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \, PK, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \, PK \right. \rightarrow D = (-R; R)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \, HT, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \, PK \right. \rightarrow D = (-R; R]$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \, HK, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \, HT \right. \rightarrow D = [-R; R)$$

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Ví dụ: Tìm BKHT, MHT của các chuỗi sau

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n . n^2}$

1. $a_n = n^n$, X=x: $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow R = 0$

BKHT R=0 tức là MHT chỉ gồm 1 điểm duy nhất {0}

2. $a_n = \frac{1}{2^n . n^2}$, X=x: $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n^2}}} = 2$

Khi x=2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi số dương HT

Khi x=-2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ là chuỗi HTTĐ Vậy MHT [-2,2]

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Ví dụ: Tìm BKHT, MHT của các chuỗi:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n+5^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n (x-1)^{2n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)!\,x^n}{5^n}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n x^n}$

1. Chuỗi lũy thừa với BKHT R=5, MHT là (-5,5)

$$a_n = \frac{1}{3^n+5^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+5^n}} = \frac{1}{5} \to R=5$$

Khi x=± 5: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\pm 5)^n}{3^n+5^n}$ Là 2 chuỗi PK theo đkccsht

Chú ý: Khi chuỗi số dương PK theo đkccsht thì chuỗi đan dấu tương ứng cũng PK theo đkccsht

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

2. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n, X = (x-1)^2 \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{2} \to \text{R=2}$$

Ta chỉ xét X=2: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n 2^n$ Chuỗi PK theo đkccsht vì

$$u_n = \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n = \left(\left(1+\frac{3}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{3}}\right)^{n\frac{3}{2n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{3/2} \neq 0$$

Suy ra, chuỗi đã cho HT khi

$$0 \leq X < 2 \leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 < 2 \leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$

Vậy BKHT R=2, MHT: $1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

3. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \dfrac{(n-1)!}{5^n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5} = +\infty \to R=0$$

Vậy BKHT R=0, MHT là {0}

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

4. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \dfrac{n!}{n^n}, X = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+!}} . \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$\to$ R=e

Khi X=e: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} e^n$

$$\Rightarrow D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{n! e^n} = \frac{e}{\left(1+ {}^{1}\!/_{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Tuy nhiên, vì $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n$

Nên $D_n > 1$. Vậy chuỗi **PK theo t/c d'Alembert**

§2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

4. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \dfrac{n!}{n^n}, X = \dfrac{1}{x}$, R=e

Khi X=-e: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}(-e)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{n^n} e^n$

Chuỗi trị tuyệt đối PK theo tiêu chuẩn d'A nên nó cũng PK

Suy ra, chuỗi đã cho HT khi

$$|X| < e \leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < e \leftrightarrow \frac{1}{e} < |x| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{e} \\ x < -\frac{1}{e} \end{array}\right.$$

Vậy BKHT R=e, MHT $(-\infty, {}^{-1}/_{e}) \cup ({}^{1}/_{e}, +\infty)$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

Tính chất của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (1)

Cho chuỗi (1) với BKHT là R, MHT là D :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in D$$

1. Hàm S(x) liên tục trong MHT D

2. ***Trong MHT D***, ta có thể *lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi* và được *chuỗi lũy thừa cũng có BKHT là R*

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \forall x \in (-R,R)}$$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in D$$

3. ***Trong MHT D***, ta có thể *lấy tích phân từng số hạng của chuỗi* và được *chuỗi lũy thừa cũng có BKHT là R*

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in (-R,R)$$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

Ví dụ: Tìm BKHT và tính tổng các chuỗi sau

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n-1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+n}$

1. Chuỗi có $a_n = \dfrac{1}{n}$ Dễ dàng suy ra R=1.

Với $x \in -1,1$ chuỗi có tổng nên ta đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

$$\Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1,1)$$

Vậy: $S(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x), \forall x \in (-1,1)$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

2. Dễ dàng thấy R=1, $\forall x \in (-1,1)$ chuỗi có tổng

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$S(x) = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(x\frac{1}{1-x}\right)' = x\frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1,1)}$$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

3. Dễ dàng thấy R=1, $\forall x \in (-1,1)$ ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right)'$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n \right)'$$

$$= \left((-x^2) \frac{1}{1-(-x^2)} \right)'$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) + x^2.2x}{(1+x^2)^2}$$

Vậy: $\boxed{S(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \forall x \in (-1,1)}$

§2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

4. Dễ dàng thấy R=1, $\forall x \in (-1,1)$ ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \neq 0$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x}{1} \right)$$ Sử dụng kết quả câu 1.

$$S(x) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x \right)$$

Vậy :
$$S(x) = \begin{cases} \ln(1-x)\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 1, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Cho hàm f(x) khả vi vô hạn lần trong lân cận của x_0

Ta gọi chuỗi Taylor của f(x) là chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Khi $x_0=0$, ta được chuỗi Maclaurint của hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tuy nhiên, các chuỗi trên chưa chắc đã HT với mọi x, tức là chưa chắc chúng đã có tổng và tổng có thể không bằng f(x).

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Định lý: *(Điều kiện để hàm f(x) có thể khai triển thành chuỗi Taylor)*

Giả sử trong lân cận (x_0-R, x_0+R), hàm f(x) thỏa

1. f(x) khả vi vô hạn lần
2. Tồn tại hằng số C>0: $|f^{(n)}(x)| \le C^n$, với mọi n

thì $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)}$$

Chú ý: Trong khi làm bài, ta sẽ không kiểm tra 2 điều kiện trên để có chuỗi Taylor của hàm f(x) mà ta sẽ sử dụng các kết quả sau đây để chỉ ra MHT của chuỗi Taylor - Maclaurint

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Một số chuỗi Maclaurint cơ bản

$$1/\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{MHT: } D = R$$

$$2/\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad D = (-1,1)$$

$$3/\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$D = \begin{cases} R, & \alpha \in N \\ [-1,1], & \alpha > 0 \\ (-1,1], & -1 < \alpha < 0 \\ (-1,1), & \alpha \le -1 \end{cases}$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

$$4/\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad D=(-1,1]$$

$$5/\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad D=R$$

$$6/\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad D=(-1,1)$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurint các hàm:

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ 2. $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}=x\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$$=x\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)=x\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$$

Vậy: $\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^{n+1}}$ MHT: (-2,2)

Chuỗi HT nếu $-1<\dfrac{x}{3}<1$ và $-1<\dfrac{x}{2}<1$ $\leftrightarrow$ -2<x<2

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

2. $f(x)=ln(2-3x+x^2) = ln((1-x)(2-x)) = ln(1-x) + ln(2-x)$

$$f(x) = \ln(1+(-x)) + \ln 2 + \ln(1+(-\frac{x}{2}))$$

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\boxed{f(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n}$$

MHT: (-1,1]

Chuỗi HT nếu $\begin{cases} -1 < -x \le 1 \\ -1 < \dfrac{-x}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 1$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurint hàm: $f(x)=\ln\ x+\sqrt{1+x^2}$

Ta tính $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

Tìm chuỗi Maclaurint của hàm *f'*(x):

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+\cdots$$

$$+\cdots\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\cdots$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

Hàm khai triển được nếu $0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Suy ra: $f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

MHT : $-1 \le x \le 1$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tìm chuỗi Taylor ở lân cận $x_0=3$ của hàm

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

Đặt $X=x-3$

$$f(x)=\frac{1}{2+(x-3)}=\frac{1}{2}\frac{2}{1+\frac{x-3}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-3)^n}$$

MHT: (1,5)

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ngoài việc áp dụng khai triển các hàm cơ bản thành chuỗi Maclaurint vào việc tìm chuỗi Taylor , chuỗi Maclaurint các hàm bình thường. Ta còn có thể áp dụng để tính tổng các chuỗi lũy thừa, chuỗi số

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n+1)},\ x \in (-1,1)$$

Chuỗi trên là chuỗi lũy thừa với $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$

Nên dễ thấy BKHT R=1, tức là với -1<x<1 ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n+1)}$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{1}{x}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right), x\neq 0$$

$$=(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{-1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$=(-1)\ln(1+x)+\frac{-1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-1\right)$$

Vậy: $\boxed{\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n(n+1)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x},\ \forall x\in -1,0\cup 0,1\\ 0, x=0\end{cases}}$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2.4.6...(2n)} x.x^{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.x^{n} - x^{n}}{2^{n}.n!}$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} \right)$$

$$= x\left(\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} \right)$$

$$= \frac{x^{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} - x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} - 1 \right)$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(2n)!!}x^{n+1}=\frac{x^2}{2}e^{x/2}-x(e^{x/2}-1)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{x/2}+x,\ \forall x$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Sử dụng khai triển Maclaurint hàm dưới dấu tích phân bằng chuỗi, tính tích phân

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$$

Ta có: $$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}$$

Thay vào tích phân trên

$$I = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1(-x)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{-1}{n+1}$$

Ta tính tổng của chuỗi số bằng định nghĩa

Tổng riêng : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ *và tổng S*

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

$$S_n = -\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$S_n = -\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\xrightarrow{n\to\infty} -1$$

Vậy $$\boxed{I=\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx=-1}$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Tính tổng các chuỗi số sau

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n.5^n}{n!}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{n(n+2)7^{n+1}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n+1}}{(2n)!!}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}.2.5.8...(3n-4)}{2^{3n-1}.n!}$

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n.5^n}{n!} = 0 + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!} = 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = 5e^5$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.2^{2n}}{2.4.6...(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.2^{2n}}{2^n n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - 1\right) = 2(e^2 - 1)$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n(n+2).7^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{7.7^n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{14}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{-1}{14}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{7}\right)^n-\frac{1}{14}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1)^{n+1}}{n+2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2}\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=\frac{-1}{14}\ln(1+\frac{2}{7})+\frac{1}{14}\frac{49}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{7}\right)^n-\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n(n+2).7^{n+1}}=\frac{45}{56}\ln\frac{9}{7}-\frac{3}{14}}$$

§3. Chuỗi Taylor - Maclaurint

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}.2.5.8...(3n-4)}{2^{3n-1}.n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}.(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)...(\frac{1}{3}-(n-1)).3^n}{2^{-1}.2^{3n}.n!}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}.(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)...(\frac{1}{3}-(n-1))}{n!}\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

$$= 2\left(\left(1+\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right) = 2\sqrt[3]{\frac{11}{8}}-2 = \sqrt[3]{11}-2$$

Chuỗi lũy thừa, Chuỗi Taylor Maclaurint – Bài tập

CÁC BƯỚC TÌM MHT CỦA CHUỖI LŨY THỪA

Bước 1: Viết rõ ràng a_n, $X=x-x_0$ để chuỗi có dạng chính tắc

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$$

Bước 2: Tùy vào biểu thức của a_n để sử dụng 1 trong 2 cách tính BKHT: R (giống khi sử dụng t/c Cauchy, d'Alembert cho chuỗi số)

Bước 3: Khảo sát sự HT của 2 chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 a_n R^n$$

bằng cách dùng đkccsht hoặc t/c so sánh

Bước 4: Kết luận Theo kết quả của bước 2 và 3, lưu ý thay x theo X

Chuỗi lũy thừa, Chuỗi Taylor Maclaurint – Bài tập

CÁC BƯỚC TÍNH TỔNG CHUỖI LŨY THỪA

Bước 1: Tìm MHT vì trong MHT, chuỗi lũy thừa mới có tổng. LƯU Ý SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CHUỖI khi $n=n_0$

Bước 2: Nếu số hạng tổng quát $a_n.u_n(x)$ trùng với 1 trong các số hạng tổng quát của các chuỗi Maclaurint các hàm cơ bản thì sử dụng chuỗi Maclaurint.

Bước 3: Nếu số hạng tổng quát $a_n.u_n(x)$ không trùng với 1 trong các số hạng tổng quát của các chuỗi Maclaurint các hàm cơ bản thì sử dụng tính chất lấy đạo hàm hoặc tích phân từng số hạng của chuỗi trong MHT,

Chuỗi lũy thừa, Chuỗi Taylor Maclaurint – Bài tập

CÁC BƯỚC TÍNH TỔNG CHUỖI SỐ

Bước 1: Tìm cách đặt x để đưa chuỗi được cho về thành chuỗi lũy thừa. Kiểm tra giá trị x thuộc MHT của chuỗi lũy thừa

Bước 2: Tính tổng chuỗi lũy thừa. Sau đó thay x bằng giá trị cụ thể từ bước 1

Chuỗi lũy thừa, Chuỗi Taylor Maclaurint – Bài tập

Tìm MHT của các chuỗi sau

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n-1}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \sqrt{n^2+1}}{2^{2n+1}(n^2-1)}(x-2)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+5^n}(2x-1)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^{2n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}(x-1)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.2^n+3^n}{3^n+5^n}(2x+1)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n^2.2^{2n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{2n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}+n-1}{\ln n+n^2}(x-1)^{2n+1}$

Chuỗi lũy thừa, Chuỗi Taylor Maclaurint – Bài tập

Tìm chuỗi Taylor tại lân cận x=x_0 của các hàm (x=1/2)

1. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}, x_0=0.$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}1.3.5...(2n-1)}{2^n n!}x^n$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=3.$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{(n+1)!}\right)\dfrac{1}{2^n}$

3. $f(x)=\dfrac{x}{4+x^4}, x_0=0$

Tính tổng của các chuỗi sau

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-2}, x\in(-1,1)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}, x\in(-1,1)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x^{n-1}, x\in(-1,1)$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(\pi)^{2n}}{4^n.(n+1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n.3^n}$