Chương I : Giải phương trình f(x)=0

1)Định nghĩa: Khoảng $[a, b]$ gọi là một **khoảng cách ly nghiệm** nếu trong khoảng đó phương trình $f(x) = 0$ chỉ có duy nhất một nghiệm .

Định lý:

Nếu $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$

1) $f'(x)$ giữ dấu trên $[a, b]$

2) $f(a)f(b) < 0$

thì $[a, b]$ là khoảng cách ly nghiệm .

Ví dụ : Phương trình $x^4 - 4x - 1 = 0$

$f(1.5) = -1.94 < 0$

$f(2) = 7 > 0$.

Hàm đơn điệu trong $[1.5\ ,\ 2]$ $\quad f'(x) > 0$

khoảng cách ly nghiệm : $[1.5\ ,\ 2]$

khoảng cách ly nghiệm thứ 2 : $[-1\ ,\ 0]$ (BTập)

2)Công thức sai số tổng quát :

x_d : nghiệm đúng của $f(x)=0$

x_{gd} : nghiệm gần đúng.

Công thức sai số : $\left|x_{gd}-x_d\right| \le \dfrac{\left|f(x_{gd})\right|}{m^{(1)}}$

Ký hiệu :

$$m^{(1)}=Min\left|f'(x)\right|,\ \forall x\in[a,b]$$

Ví dụ : Phương trình $x^4 - 4x - 1 = 0$ xét trong khoảng cách ly nghiệm : $[1.5,\ 2]$

giả sử $x_{gd} = 1.663$. Đánh giá sai số tuyệt đối

$$|f(1.663)| = 0.003629$$

$$m^{(1)} = 9.5$$

sai số : $|1.663 - x^*| \le \dfrac{0.003629}{9.5} \approx 0.0004$

3)Phương pháp chia đôi :

a)Nội dung :

Nếu $[a,b]$ là khoảng cách ly nghiệm thì

$[a,\frac{a+b}{2}]$ hoặc $[\frac{a+b}{2},b]$ sẽ là khoảng cách

ly nghiệm mới .

Lặp lại quá trình phân chia này nhiều lần .

b) Đánh giá sai số :

$$\left| x_n - x_d \right| \le \frac{(b-a)}{2^{n+1}}$$

c)Nhận xét :

Luôn cho nghiệm gần đúng.

Giải thuật đơn giản.

Tốc độ hội tụ khá chậm .

Ví dụ 1: Phương trình $x - \cos x = 0$ với khoảng cách ly nghiệm $[0, 1]$, chia đôi tới x_4

Kết quả cho theo bảng sau

x
0.50000000
0.62500000
0.68750000
0.71875000

Sai số **phương pháp chia đôi** là

$$\frac{b-a}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.3125$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $x - e^{-x} = 0$ với khoảng cách ly nghiệm $[0,1]$ đến x_3

0.5

0.75

0.625

0.5625

2) Phương pháp lặp đơn

(phương pháp điểm bất động, phương pháp ánh xạ co)

a) Nội dung :

*) Đưa phương trình $f(x) = 0$ về dạng tương đương $x = \varphi(x)$

*) Kiểm tra **điều kiện** đối với hàm $\varphi(x)$:

$$Max\left|\varphi'(x)\right| = q < 1 \quad \forall x \in [a,b]$$

*) Lấy x_0 là một giá trị ban đầu **tùy ý** $\in$ [a, b]

Xây dựng dãy lặp : $x_1 = \varphi(x_0)$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$x_3 = \varphi(x_2)$$

Lấy **n hữu hạn** $x_n = x_{gd}$

b) Đánh giá sai số :

1) $\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{q^n \left|x_1 - x_0\right|}{1-q}$

(đánh giá **tiên nghiệm**)

2) $\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{q\left|x_n - x_{n-1}\right|}{1-q}$

(đánh giá **hậu nghiệm**)

c) Nhận xét :

Có **vô số** cách chọn hàm $\varphi(x)$

Hàm $\varphi(x)$ có tính chất $q < 1$ gọi là **hàm co**

q là **hệ số co**

q càng nhỏ thì tốc độ hội tụ càng cao

$q \geq 1$ Không sử dụng được

Ví dụ1 : Xét phương trình $x^3 + x - 1000 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[9, 10]$

a) $x^3 + x - 1000 = 0$

$x = 1000 - x^3$

$\varphi(x) = 1000 - x^3$

$\varphi'(x) = -3x^2$

$|\varphi'(x)| = 3x^2$

$q = Max|\varphi'(x)| = 300$ **> 1**

Không sử dụng được

b)

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

$$x^3 = 1000 - x$$

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

$$q = Max \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}} = 0.003355742403$$

$x_0=10.0$

9.966554934
9.966667166
9.966666789
9.966666791

Sai số hậu nghiệm x_4 6.74×10^{-12}

c)

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

$$x^3 = 1000 - x$$

$$x^2 = \frac{1000 - x}{x}$$

$$x = \sqrt{\frac{1000 - x}{x}}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1000 - x}{x}}$$

Với $x_0 = 10$ ta có $x_{gd} = 9{,}966666791$ với số bước lặp

Phương pháp Newton
(Phương pháp Tiếp tuyến)

a) Nội dung : Đưa $f(x)=0$ về dạng lặp

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x) .$$

Chọn x_0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

b) Đánh giá sai số :

Sai số theo công thức sai số tổng quát

$$\left| x_{gd} - x^* \right| \le \frac{\left| f(x_{gd}) \right|}{m^{(1)}}$$

c)Nhận xét :

Phương pháp sử dụng được nếu $f'(x)$ và $f''(x)$

không đổi dấu trên khoảng cách ly nghiệm .

Điểm x_0 là điểm Fourier nếu $f(x_0)$ cùng dấu

với $f''(x_0)$

Chọn $x = a,\ x_0 = b$ nếu a , b là **điểm Fourier**

Vídụ: Phương trình $x^3 + x - 1000 = 0$ với khoảng cách ly nghiệm [9, 10]

Điểm nào là điểm Fourier trong hai điểm 9 , 10

Với x_0 tìm được , tính x_2 .

Đánh giá sai số của x_2

	x_{n-1}	x_n	Sai số
1	10.0	9.966777409	
2		9.966666792	0.3×10^{-9}

Ví dụ: Phương pháp Newton tìm nghiệm của

phương trình $x - \cos x = 0$

Khoảng cách ly nghiệm [0 , 1]

1) Điểm nào là Fourier trong hai đầu

2) Tìm x_3 3) Đánh giá sai số của x_3

n	x_{n-1}	x_n	Sai số
1	1.0	0.750363867	
2		0.73911289	
3		0.739085133	0.4×10^{-9}