1. Khảo sát hàm số cho bởi phương trình tham số
   - Tiệm cận xiên
   - Tính lồi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

2. Tích phân bất định
   - Định nghĩa
   - Cách tính tích phân hàm hữu tỷ

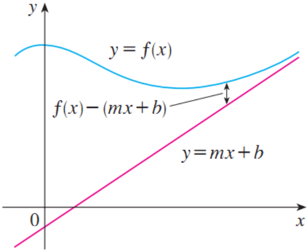
Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

1. Tìm tập xác định;
2. Xác định tính chẵn lẻ và tính tuần hoàn;
3. Tính các giới hạn và xác định các tiệm cận;
4. Xác định các khoảng đơn điệu;
5. Xác định các giá trị cực đại và cực tiểu;
6. Xác định các khoảng lồi, lõm và xác định điểm uốn;
7. Xác định các điểm đặc biệt và vẽ đồ thị.

Định nghĩa

Đường thẳng $y = mx + b$ *(với* $m \neq 0$*) được gọi là một* tiệm cận xiên (slant asymptote) *của đường cong* $y = f(x)$ *nếu ít nhất một trong các mệnh đề sau đây là đúng:*

- $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$



Định lý

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ *và* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b$, *thì đường thẳng* $y = mx + b$ *là* tiệm cận xiên *của đường cong* $y = f(x)$.

Tương tự với $x \to -\infty$.

Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{2}{t}, \\ y = t^2 + \dfrac{1}{t} + 1, \end{cases} \qquad t > 0.$$

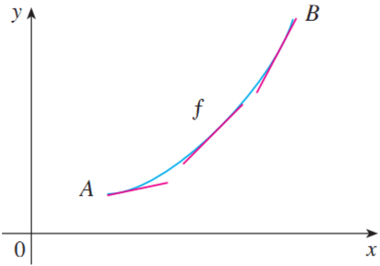
Xác định tiệm cận của đồ thị hàm số.

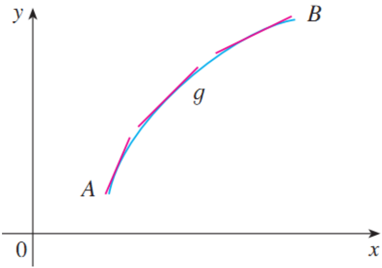
Định nghĩa

Cho hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

(a) *Nếu đồ thị của f nằm* phía trên *mọi tiếp tuyến của nó trên khoảng I, ta nói đồ thị của f* lõm *trên I.*

(b) *Nếu đồ thị của f nằm* phía dưới *mọi tiếp tuyến của nó trên khoảng I, ta nói đồ thị của f* lồi *trên I.*



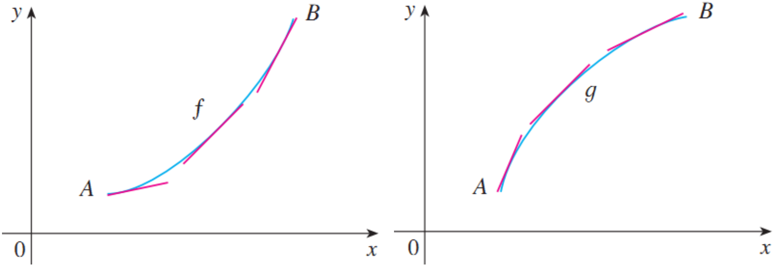


Định lý

Cho hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng I.

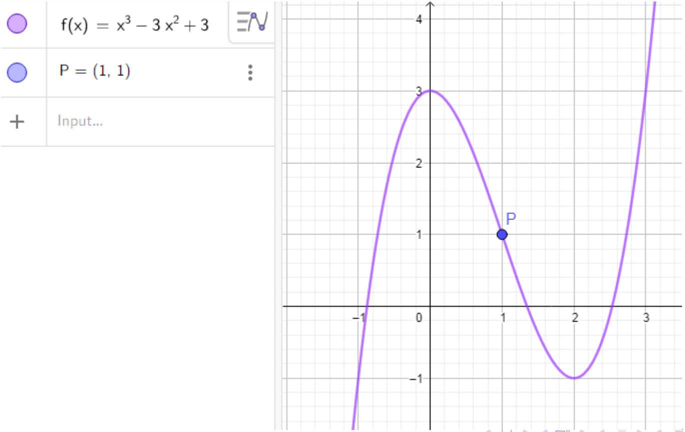
(a) *Nếu* $f''(x) > 0$ *với mọi x thuộc I, thì đồ thị của f* lõm *trên I.*

(b) *Nếu* $f''(x) < 0$ *với mọi x thuộc I, thì đồ thị của f* lồi *trên I.*



Định nghĩa

Điểm P trên đường cong $y = f(x)$ được gọi là điểm uốn (inflection point) *nếu f liên tục tại đó và đường cong thay đổi từ lồi sang lõm hoặc từ lõm sang lồi tại P.*



Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - 3t, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

(a) *Khảo sát sự biến thiên và cực trị của hàm số.*

(b) *Khảo sát tính lồi, lõm và xác định điểm uốn của đồ thị hàm số.*

Định nghĩa

Hàm số F được gọi là một nguyên hàm (antiderivative) *của f trên khoảng I nếu*

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in I.$$

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = x^2$.

- Hàm số $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của f.
- Hàm số $G(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 100$ cũng là một nguyên hàm của f.
- Mọi hàm số có dạng $H(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + C$, trong đó C là hằng số, đều là nguyên hàm của f.

Định lý

Nếu F là một nguyên hàm của f trên một khoảng I, thì nguyên hàm tổng quát của f trên I là

$$F(x) + C,$$

trong đó C là một hằng số bất kỳ.

Định nghĩa

Ký hiệu $\int f(x)dx$ *dùng để chỉ nguyên hàm tổng quát của* f *và được gọi là* tích phân bất định (indefinite integral).

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ví dụ

Nếu gọi $C(t)$ là mức CO_2 bình quân trong không khí tính theo tỷ lệ phần triệu và t là thời gian tính theo năm tính từ năm 1959, thì mô hình khí thải này tại một khu vực xác định được cho bởi công thức

$$C'(t) = 0.5 + 0.03t.$$

Biết rằng mức CO_2 bình quân trong không khí vào năm 1959 là 311 *phần triệu. Hãy tìm công thức $C(t)$.*

Bổ sung một số công thức tích phân bất định

(1) $\displaystyle\int \sinh x dx = \cosh x + C$

(2) $\displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$

```
>> syms x k;
>> int(1/sqrt(x^2 + k), x)

ans =

log(x + (x^2 + k)^(1/2))
```

Phương pháp tính tích phân bất định

(1) Phương pháp đổi biến số:

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Dạng $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, với $\deg(P) \geq \deg(Q)$

Ta chia đa thức

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

trong đó $\deg(R) < \deg(Q)$.

Ví dụ

Tính

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx.$$

Dạng $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $\deg(P) < \deg(Q)$

Trường hợp 1: $Q(x)$ là tích các nhân tử bậc nhất phân biệt. Chẳng hạn, nếu

$$Q(x) = (ax+b)\cdot(cx+d),$$

thì ta biểu diễn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}.$$

Ví dụ

Tính tích phân:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx.$$

Dạng $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $\deg(P) < \deg(Q)$

Trường hợp 2: $Q(x)$ là tích các nhân tử bậc nhất, trong đó có nhân tử được lặp lại nhiều lần. Chẳng hạn, nếu

$$Q(x) = (ax+b)^m \cdot (cx+d),$$

thì ta biểu diễn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m} + \frac{B}{cx+d}.$$

Ví dụ

Tính tích phân:

$$\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}dx.$$

Dạng $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $\deg(P) < \deg(Q)$

Trường hợp 3: $Q(x)$ có chứa nhân tử bậc hai bất khả quy không lặp lại. Chẳng hạn, nếu

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot(dx + e),\ \text{trong đó } b^2 - 4ac < 0,$$

thì ta biểu diễn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{C}{dx + e}.$$

Ví dụ

Tính tích phân:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}dx.$$

Dạng $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $\deg(P) < \deg(Q)$

Trường hợp 4: $Q(x)$ có chứa nhân tử bậc hai bất khả quy lặp lại. Chẳng hạn, nếu

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^m \cdot (dx + e), \text{ trong đó } b^2 - 4ac < 0,$$

thì ta biểu diễn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{C}{dx + e}.$$

Ví dụ

Tính tích phân:

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$