CHƯƠNG III - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

MỘT SỐ KHÁI NIỆM và TÍNH CHẤT

Giả sử X,Y là các không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$.

E={ $e_1, e_2,\dots, e_n$} là một cơ sở của X. B ={ $u_1, u_2,\dots, u_m$} là một cơ sở của Y.

* Ánh xạ f: X → Y được gọi là ánh xạ tuyến tính (hay đồng cấu)

$\Leftrightarrow \forall x,y \in X; \forall a,b \in R$: $f(a.x+b.y) = a.f(x) + b.f(y)$

* f: X → Y là axtt $\Rightarrow f(0_X) = 0_Y$.

* Ma trận A của axtt f đối với cặp cơ sở E trong X và cơ sở B trong Y:

$$A = \boxed{[f]_{E,B} \overset{dn}{=} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [f(e_1)]_B & [f(e_2)]_B & \dots & [f(e_n)]_B \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}.}$$

Ký hiệu $[f]_{E,E} = [f]_E$

* Liên hệ giữa tọa độ của x∈ X và f(x):

+ CT tổng quát: $\boxed{[f(x)]_B = [f]_{E,B}.[x]_E}$

Ở đây $[x]_E$ là tọa độ cột của véctơ x đối với cơ sở E; $[f(x)]_B$ là tọa độ cột của véctơ f(x) đối với cơ sở B; và $[f]_{E,B}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở E trong X và B trong Y.

+ Trường hợp f: X →X (f là phép tự đồng cấu):

$$\boxed{[f(x)]_E = [f]_E\,[x]_E}$$

+ Trường hợp f: $R^n \to R^m$, nếu ta ký hiệu [f] là ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc trong R^n, R^m thì $\boxed{[f(x)] = [f].[x]}$. Đây cũng chính là biểu thức xác định ánh xạ tuyến tính f.

* Ánh xạ tuyến tính f được xác định duy nhất khi và chỉ khi:

⇔(1) Biết biểu thức $f(x_1,x_2,..,x_n)$ hay ma trận A: f(X)=A.X
(ở đây tọa độ của $X= (x_1,x_2,..,x_n)^T$ và $f(X)= [f(x_1,x_2,..,x_n)]$)

⇔(2) Biết ma trận của f đối với một cặp cơ sở E trong X và B trong Y.

⇔(3) Biết ảnh của một cơ sở E trong X, (tức là biết các véctơ $f(e_1), f(e_2),..,f(e_n)$)

Về mặt thực hành: Chúng ta xét mối liên hệ giữa (1) và (3) để giải bài toán:
Cho axtt f: $R^n \to R^m$, xác định bởi $f(e_i) = b_i$; i=1,2,…n , E = { $e_1, e_2,\dots, e_n$} là một cơ sở của R^n. Gọi A=[f]. Tìm ma trận A.
Từ công thức thì f(X)=A.X, suy ra $[b_1 \mid b_2 \dots \mid b_n]=A[e_1 \mid e_2 \dots \mid e_n]$
Gọi [B] là ma trận mà các cột lần lượt là tọa độ của các véctơ b_i ; [E] là ma trận mà các cột lần lượt là tọa độ của các véctơ e_i thì [B] = A.[E] hay $\mathbf{A = [B].[E]^{-1}}$.

* Ánh xạ tuyến tính có tính chất bảo toàn cấu trúc đại số:

+ Nếu A là kg con của X thì f(A) là kg con của Y; dim f(A) ≤ dim A.
+ Nếu B là kg con của Y thì $f^{-1}(B)$ là kg con của X.
+ Nếu { $x_1, x_2, \dots, x_n$ } là một hệ sinh của không gian con A của X thì { $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$} là một hệ sinh của không gian con f(A).

* Ảnh và hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính f:

+ $\boxed{\text{Im}f \equiv f(X) = \{\, f(x);\ x \in X \,\}} = \boxed{\{\, y \in Y: \exists\, x \in X,\ f(x) = y \,\}}$ được gọi là ảnh của f.

$\boxed{\text{Im}f = \langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \rangle}$, với $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ là một cơ sở bất kỳ của X

= < Hệ các véctơ cột trong mt chính tắc của f > khi $X = R^n$; $Y = R^m$.

Dim Imf = Hạng của 1 ma trận (bất kỳ) của f. ($\le$ dim X).

+ Định nghĩa: Hạng của axtt f = dim Imf

+ $\boxed{\text{Ker}f = f^{-1}(\{0\}) = \{\, x \in X:\ f(x) = 0_Y \,\}}$ gọi là hạt nhân của axtt f.

+ Liên hệ về số chiều: $\boxed{\text{dim Im}f + \text{dim Ker}f = \text{dim } X.}$

* Đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu (tham khảo):

+ f là đơn cấu $\Leftrightarrow$ f là đồng cấu + f đơn ánh (?).

$\Leftrightarrow$ Kerf ={0} hay dim Kerf=0

+ f là toàn cấu $\Leftrightarrow$ f là đồng cấu + f toàn ánh (?).

$\Leftrightarrow$ Imf = Y hay dim Imf = dim Y.

+ f là đẳng cấu $\Leftrightarrow$ f là đồng cấu + f song ánh

$\Leftrightarrow$ dim X = dim Y và dim kerf =0 (hay dim Imf = dim Y).

*** Liên hệ giữa các ma trận của cùng một axtt f đối với các cặp cơ sở khác nhau:**

+ Giả sử f: X $\to$ Y là axtt.

E_1, E_2 là 2 cơ sở tùy ý của X.

S là ma trận chuyển từ cơ sở E_1 sang E_2.

B_1, B_2 là 2 cơ sở tùy ý của Y.

T là ma trận chuyển từ cơ sở B_1 sang B_2.

$[\,f\,]_{E_1,B_1} = A;\quad [\,f\,]_{E_2,B_2} = B$

thì $\boxed{\mathbf{B = T^{-1}AS}}$

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$\begin{tikzcd}
(E_1) \arrow[r, dash, "A"] \arrow[d, "S"'] & (B_1) \arrow[d, "T"] \\
(E_2) \arrow[r, dash, "B"] & (B_2)
\end{tikzcd}$$

+ Trường hợp riêng (thường gặp hơn):

Giả sử f: X $\to$ X là phép biến đổi tuyến tính .

E_1, E_2 là 2 cơ sở tùy ý của X.

S là ma trận chuyển từ cơ sở E_1 sang E_2.

$[\,f\,]_{E_1} = A;\quad [\,f\,]_{E_2} = B$

thì $\boxed{\mathbf{B = S^{-1}AS}}$

$$f: X \longrightarrow X$$

$$\begin{tikzcd}
(E_1) \arrow[r, dash, "A"] \arrow[d, "S"'] & (E_1) \arrow[d, "S"] \\
(E_2) \arrow[r, dash, "B"] & (E_2)
\end{tikzcd}$$

(Nhắc lại cách tìm $S_{E_1 \to E_2}$: Do $[E_1].S_{E_1 \to E_2} = [E_2]$ nên $S_{E_1 \to E_2} = [E_1]^{-1}[E_2]$)

* Khái niệm **2 ma trận đồng dạng**:

Ta nói 2 ma trận vuông A, B là đồng dạng nếu có một ma trận P khả nghịch sao cho $B = P^{-1}AP$. Dễ thấy 2 ma trận của cùng 1 phép biến đổi tuyến tính trên R^n đối với các cơ sở khác nhau là đồng dạng.

BÀI TẬP

1. Cho f: $R^2 \to R^3$ là một axtt xác định bởi f(2,3) =(0,7,8); f(1,1) = (1,4,4). Tìm f(x,y).

2. Axtt f: $R^3 \to R^3$ xác định bởi f(1,2,0) =(5,1,1); f(1,1,0)=(3,2,1); f(1,1,1)=(4,4,6).
a) Tìm f(2,3,4) b) Tìm f(x,y,z).

3. Trong không gian R^3, cho ánh xạ tuyến tính f là phép lấy đối xứng điểm trong không gian qua mặt phẳng x+ y -2z = 0. Tìm biểu thức f(x,y,z).

4. Axtt f: $R^3 \to R^2$ xác định bởi f(x,y,z)=(2x+5y-3z, x-4y+7z).
a) Tìm ma trận chính tắc của f.
b) Tìm ma trận của f đối với các cơ sở E={x_1= (1,2,1); x_2= (1,1,0) ;x_3=(0,3,1)} trong R^3 và B={y_1=(1,3); y_2=(2,5)} trong R^2. (theo nhiều cách)
c) Giả sử véctơ $x \in R^3$ có tọa độ đối với cơ sở E là (1,2,3). Tìm véctơ f(x) và tọa độ của f(x) đối với cơ sở B (làm theo nhiều cách).
d) Tìm cơ sở và chiều của Kerf; Imf.

5. (ĐCK) Cho axtt f: $R^4 \to R^3$ có ma trận chính tắc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
a) Tìm f(x,y,z,t).
b) Xác định nhân và ảnh của axtt f (xác định cơ sở và chiều).

6. Cho axtt f: $R^3 \to R^3$ xác định bởi f(x,y,z) = (x-y+z, x+z, x+y+α.z).
a) Tìm giá trị của α để f không là đẳng cấu.
b) Với điều kiện của câu a), tìm cơ sở và chiều của Imf, Kerf.
c) Biết A={(x,y,z): x-2y+z=0}. Tìm cơ sở và chiều của f(A).

7. Biết rằng axtt f:$R^2 \to R^2$ có ma trận A=$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở E={(2,1);(1,3)}.
a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của R^2.
b) Tìm f(4,5) bằng nhiều cách ; Tìm f(x,y).
c) Tìm ma trận của f đối với cơ sở B={ (1,1); (1,2)}

8. Giả sử phép biến đổi tuyến tính f trên R^3 có ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở
E={ (0, 1, 2); (4,1,0); (1, 0, 2)} .
a) Tìm biểu thức f(x,y,z).
b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở B = { (1, 2, 3); (3, 4, 2); (0, 1, -1)}.
c) Tìm cơ sở và chiều của Imf; Kerf (làm bằng nhiều cách).

9. Hãy xác định một ánh xạ tuyến tính f: $R^3 \to R^4$ sao cho Kerf = <(1, 2, 3)> và Imf = < (1, 2, 1, 0); (2, 3, 1 , 1) > . Ánh xạ tuyến tính f thỏa yêu cầu đề bài có xác định duy nhất hay không, vì sao?