ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 3: Không gian Euclide

TS. Đặng Văn Vinh

Bộ môn Toán Ứng Dụng
Khoa Khoa học Ứng dụng
Đại học Bách Khoa Tp.HCM

Tài liệu: Đặng Văn Vinh. Đại số tuyến tính. NXB ĐHQG tp HCM, 2019

Ngày 11 tháng 3 năm 2020

Vấn đề 1. Tích vô hướng và các khái niệm.

Vấn đề 2. Tìm cơ sở và số chiều của không gian bù vuông góc.

Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ thực. Tích vô hướng của hai véctơ x và y là một số thực và được ký hiệu (x, y) thỏa 4 tính chất sau:

1/ Tính xác định dương: $\forall x \in V, (x, x) \geq 0$ *và* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2/ Tính giao hoán: $\forall x, y \in V, (x, y) = (y, x)$;

3/ Tính tuyến tính: $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4/ Tính tuyến tính: $\forall x, y, z \in V, (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

1/ Độ dài véctơ $x \in V$ là đại lượng: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

2/ Mỗi véctơ trong không gian n chiều coi là một điểm. Khoảng cách giữa hai véctơ x và y là khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn bởi x và y là đại lượng: $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$

3/ Góc α giữa hai véctơ x và y thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ thực. Tích vô hướng của hai véctơ x và y là một số thực và được ký hiệu (x, y) thỏa 4 tính chất sau:
1/ Tính xác định dương: $\forall x \in V, (x, x) \geq 0$ *và* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2/ Tính giao hoán: $\forall x, y \in V, (x, y) = (y, x)$;
3/ Tính tuyến tính: $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4/ Tính tuyến tính: $\forall x, y, z \in V, (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

1/ Độ dài véctơ $x \in V$ là đại lượng: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

2/ Mỗi véctơ trong không gian n chiều coi là một điểm. Khoảng cách giữa hai véctơ x và y là khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn bởi x và y là đại lượng: $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$

3/ Góc α giữa hai véctơ x và y thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Tích vô hướng

Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ thực. Tích vô hướng của hai véctơ x và y là một số thực và được ký hiệu (x, y) thỏa 4 tính chất sau:
1/ Tính xác định dương: $\forall x \in V, (x, x) \geq 0$ *và* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2/ Tính giao hoán: $\forall x, y \in V, (x, y) = (y, x)$;
3/ Tính tuyến tính: $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4/ Tính tuyến tính: $\forall x, y, z \in V, (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

1/ Độ dài véctơ $x \in V$ là đại lượng: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
2/ Mỗi véctơ trong không gian n chiều coi là một điểm. Khoảng cách giữa hai véctơ x và y là khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn bởi x và y là đại lượng: $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$

3/ Góc α giữa hai véctơ x và y thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ thực. Tích vô hướng của hai véctơ x và y là một số thực và được ký hiệu (x, y) thỏa 4 tính chất sau:
1/ Tính xác định dương: $\forall x \in V, (x, x) \geq 0$ và $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2/ Tính giao hoán: $\forall x, y \in V, (x, y) = (y, x)$;
3/ Tính tuyến tính: $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4/ Tính tuyến tính: $\forall x, y, z \in V, (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

1/ Độ dài véctơ $x \in V$ là đại lượng: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
2/ Mỗi véctơ trong không gian n chiều coi là một điểm. Khoảng cách giữa hai véctơ x và y là khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn bởi x và y là đại lượng: $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$

3/ Góc α giữa hai véctơ x và y thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với
$(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:

1/ (u, v);
2/ $\|u\|, \|v\|$;
3/ góc α giữa u, v;
4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6.$

Ngoài ra ta có cách tính sau:

$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$

$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với $(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:

1/ (u, v);
2/ $\|u\|, \|v\|$;
3/ góc α giữa u, v;
4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6.$

Ngoài ra ta có cách tính sau:

$$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$$
$$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$$
$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Tích vô hướng

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với
$(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:

1/ (u, v);

2/ $\|u\|, \|v\|$;

3/ góc α giữa u, v;

4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6$.

Ngoài ra ta có cách tính sau:

$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$

$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$

$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Tích vô hướng

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với $(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:

1/ (u, v);
2/ $\|u\|, \|v\|$;
3/ góc α giữa u, v;
4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6$.
Ngoài ra ta có cách tính sau:

$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$
$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$

$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với
$(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:

1/ (u, v); 2/ $\|u\|, \|v\|$;

3/ góc α giữa u, v; 4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6$.

Ngoài ra ta có cách tính sau:

$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$

$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$

$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_2$ cho tích vô hướng $\forall x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2)$, với
$(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.
Cho hai véctơ $u = (3; 1), v = (2; -4)$. Tính:
1/ (u, v); 2/ $\|u\|, \|v\|$;
3/ góc α giữa u, v; 4/ Khoảng cách giữa u và v.

1/ $(u, v) = ((3; 1), (2; -4)) = 2.3.2 - 3.(-4) - 1.2 + 4.1.(-4) = 6$.
Ngoài ra ta có cách tính sau:

$$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$$
$$= (2x_1 - x_2)y_1 + (-x_1 + 4x_2)y_2$$
$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \cdot M \cdot y^T$$

Suy ra $(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 6$

$$2/\ \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{u\cdot M\cdot u^T} = \sqrt{\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}} = 4$$

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{v\cdot M\cdot v^T} = \sqrt{\begin{pmatrix}2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}} = \sqrt{88}$$

3/ Góc α giữa u và v thỏa

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{6}{4\cdot\sqrt{88}} = \frac{3\sqrt{22}}{88} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{3\sqrt{22}}{88}.$$

4/ Khoảng cách giữa u và v:

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|(1;5)\| = \sqrt{\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}} = \sqrt{92}.$$

$$2/\ \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{u \cdot M \cdot u^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = 4$$

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{v \cdot M \cdot v^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \sqrt{88}$$

3/ Góc α giữa u và v thỏa

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{6}{4 \cdot \sqrt{88}} = \frac{3\sqrt{22}}{88} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{3\sqrt{22}}{88}.$$

4/ Khoảng cách giữa u và v:

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(1;5)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \sqrt{92}.$$

$$2/\ \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{u \cdot M \cdot u^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = 4$$

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{v \cdot M \cdot v^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \sqrt{88}$$

3/ Góc α giữa u và v thỏa

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{6}{4 \cdot \sqrt{88}} = \frac{3\sqrt{22}}{88} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3\sqrt{22}}{88}.$$

4/ Khoảng cách giữa u và v:

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(1;5)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \sqrt{92}.$$

Tích vô hướng

$$2/\ \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{u\cdot M\cdot u^T} = \sqrt{\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}} = 4$$

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{v\cdot M\cdot v^T} = \sqrt{\begin{pmatrix}2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}} = \sqrt{88}$$

3/ Góc α giữa u và v thỏa

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{6}{4\cdot\sqrt{88}} = \frac{3\sqrt{22}}{88} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{3\sqrt{22}}{88}.$$

4/ Khoảng cách giữa u và v:

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|(1;5)\| = \sqrt{\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}} = \sqrt{92}.$$

Phần bù vuông góc

Định nghĩa

Cho F là không gian con của V. Tập hợp $F^{\perp} = \left\{ x \in V \middle| x \perp F \right\}$ được gọi là phần bù vuông góc của không gian con F.

Định lý

Cho F là không gian con của V. Khi đó $F^{\perp}$ là không gian con của V.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho không gian con F là mặt phẳng (P) với phương trình $2x + 3y - z = 0$. Tìm không gian con bù vuông góc của F.

Không gian bù vuông góc của F là đường thẳng qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng (P)

Phần bù vuông góc

Định nghĩa

Cho F là không gian con của V. Tập hợp $F^{\perp} = \left\{ x \in V \middle| x \perp F \right\}$ được gọi là phần bù vuông góc của không gian con F.

Định lý

Cho F là không gian con của V. Khi đó $F^{\perp}$ là không gian con của V.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho không gian con F là mặt phẳng (P) với phương trình $2x + 3y - z = 0$. Tìm không gian con bù vuông góc của F.

Không gian bù vuông góc của F là đường thẳng qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng (P)

Phần bù vuông góc

Định nghĩa

Cho F là không gian con của V. Tập hợp $F^{\perp} = \left\{ x \in V \middle| x \perp F \right\}$ được gọi là phần bù vuông góc của không gian con F.

Định lý

Cho F là không gian con của V. Khi đó $F^{\perp}$ là không gian con của V.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho không gian con F là mặt phẳng (P) với phương trình $2x + 3y - z = 0$. Tìm không gian con bù vuông góc của F.

Không gian bù vuông góc của F là đường thẳng qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng (P)

Phần bù vuông góc

Định nghĩa

Cho F là không gian con của V. Tập hợp $F^{\perp} = \left\{x \in V \middle| x \perp F\right\}$ được gọi là phần bù vuông góc của không gian con F.

Định lý

Cho F là không gian con của V. Khi đó $F^{\perp}$ là không gian con của V.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho không gian con F là mặt phẳng (P) với phương trình $2x + 3y - z = 0$. Tìm không gian con bù vuông góc của F.

Không gian bù vuông góc của F là đường thẳng qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng (P)

Phần bù vuông góc

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \dots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \dots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases}$ (*)

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \dots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $FMx^T = 0$

Phần bù vuông góc

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \dots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \dots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases} \quad (*)$

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \dots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $FMx^T = 0$

Phần bù vuông góc

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \dots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \dots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases}$ (*)

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \dots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $AMx^T = 0$

Phần bù vuông góc

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \dots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \dots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases}$ (*)

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \dots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $AMx^T = 0$

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^\perp$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \ldots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \ldots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases}$ (*)

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \ldots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $FMx^T = 0$

Phần bù vuông góc

Định lý

Véctơ x vuông góc với không gian con F khi và chỉ khi x vuông góc với một tập sinh của F.

Các bước tìm số chiều và một cơ sở của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm một tập sinh của F là $E = \{f_1; f_2; \cdots; f_k\}$.

Bước 2. $\forall x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \\ \dots \\ x \perp f_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \\ \dots \\ (f_k, x) = 0 \end{cases}$ (*)

Giả sử $(x, y) = xMy^T$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 M x^T = 0 \\ f_2 M x^T = 0 \\ \dots \\ f_k M x^T = 0 \end{cases}$.

Ở dạng ma trận, ta được: $FMx^T = 0$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$

Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3)$

Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^\perp$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3),(y_1;y_2;y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a;b;c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b$.

Suy ra $f = (a;b;2a+3b) = a(1;0;2) + b(0;1;3)$

Hay $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,f_1) = 0 \\ (x,f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha;-3\alpha;\alpha) = -\alpha(2;3;-1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(2;3;-1)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$

Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3)$

Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b$.

Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3)$.

Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^\perp$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$

Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3)$.

Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3),$ $(y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.
$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$
Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3).$
Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$

Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3).$

Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^\perp$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.
$\forall f = (a; b; c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$
Suy ra $f = (a; b; 2a + 3b) = a(1; 0; 2) + b(0; 1; 3).$
Hay $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$ là tập sinh của F.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha; -3\alpha; \alpha) = -\alpha(2; 3; -1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(2; 3; -1)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Phần bù vuông góc

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng chính tắc $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3),(y_1;y_2;y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$. Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tìm tập sinh của F.

$\forall f = (a;b;c) \in F \Rightarrow 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b$.

Suy ra $f = (a;b;2a+3b) = a(1;0;2) + b(0;1;3)$.

Hay $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$ là tập sinh của F.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,f_1) = 0 \\ (x,f_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (-2\alpha;-3\alpha;\alpha) = -\alpha(2;3;-1).$$

Vậy tập sinh và cũng là cơ sở của $F^\perp$ là $\{(2;3;-1)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3)(y_1;y_2;y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1,x) = 0 \\ (f_2,x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315;240;-258)$$

Cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(315;240;-258)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3)(y_1;y_2;y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$.

Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(315;240;-258)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3)(y_1; y_2; y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(315; 240; -258)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3)(y_1; y_2; y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow FMx^T = 0$, với $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(315; 240; -258)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3)(y_1; y_2; y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1; x_2; x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^{\perp}$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1; 0; 2), f_2 = (0; 1; 3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^{\perp}$.

$$\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^{\perp}$ là $\{(315; 240; -258)\}$ và $dim(F^{\perp}) = 1$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3)(y_1;y_2;y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3) | 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(315;240;-258)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}_3$ với tích vô hướng $(x,y) = ((x_1;x_2;x_3)(y_1;y_2;y_3))$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$,
cho không gian con $F = \{(x_1;x_2;x_3)|2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
Tìm một cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bước 1. Tập sinh của F là $E = \{f_1 = (1;0;2), f_2 = (0;1;3)\}$.
Bước 2. Tìm cơ sở, số chiều của $F^\perp$.

$$\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in F^\perp \Leftrightarrow x \perp F \Leftrightarrow x \perp E \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp f_1 \\ x \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1, x) = 0 \\ (f_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow FMx^T = 0, \text{ với } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 15 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha(315; 240; -258)$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(315; 240; -258)\}$ và $dim(F^\perp) = 1$.