

Hình thức thi tự luận: Đề gồm 7 câu.

Câu 1: Cho $f(x, y, z) = e^{\arctan \frac{x+z}{y}}$ và $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Tính $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1, -1)$.

Câu 2: Cho (L) là đường gấp khúc ABC , trong đó AB là cung $y = 1 - x^2$, BC là cung $y = (x - 1)^2$ và tọa độ các điểm là $A(-1, 0), B(0, 1), C(1, 0)$.
Tính $I = \int_A^C \cos^2 y dx - (2xy + x \sin 2y) dy$ theo đường cong (L) .

Câu 3: Tính tích phân $I = \iiint_{\Omega} (x + 2z) dx dy dz$, với Ω là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq -1 + \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0$.

Câu 4: Tính tích phân $I = \iint_S 2y dz + (y^2 - 2x - z) dx dy$, với S là phần mặt trụ $z = 2x - x^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $y = 3x, y = -2x$ và trên mặt phẳng $z = 0$, lấy phía dưới theo hướng trục Oz .

Câu 5: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.4.7 \dots (3n+1) + \ln n}{(2n)!! 2^n}$.

Câu 6: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{4n^2 - 3} \right)^n (x - 2)^n$.

Câu 7: Tính tổng S hoặc chứng minh phân kỳ chuỗi số sau : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+3)}$.

Sinh viên không được sử dụng tài liệu.

Phó chủ nhiệm bộ môn

TS. Nguyễn Bá Thi

ĐÁP ÁN

Câu 1: $\nabla f(2, 1, -1) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2}(1, -1, 1)$ (0.5đ), $\langle \nabla(M), u \rangle = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ (0.5đ), $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1, -1) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ (0.5đ)

Câu 2: Gọi C là đường $y = 0, x : 1 \rightarrow -1$, khi đó $C \cup L$ là biên âm của miền phẳng D .

$$\int_{L \cup C} \cos^2 y dx - (2xy + x \sin 2y) dy = - \iint_D -2y dx dy \quad (0.5đ)$$

$$I = - \iint_D -2y dx dy - \int_C \cos^2 y dx - (2xy + x \sin 2y) dy$$

$$= - \left[\int_{-1}^0 dx \int_0^{1-x^2} 2y dy + \int_0^1 dx \int_0^{(1-x)^2} 2y dy \right] - \int_1^{-1} x \cdot 1 dx = \frac{11}{15} - 0 = \frac{11}{15}.$$

Mỗi tp tính đúng là **0.5đ**.

Nếu đúng tp kép nhưng sai chiều của C , có thể cho cả bài 0.5.

Câu 3: $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 dr \int_{-1+r}^{\sqrt{1-r^2}} r(r \cos \varphi + 2z) dz = \frac{\pi}{6}.$

cận z : (0.5đ), cận r, φ (0.5đ), đáp số : (0.5đ)

Câu 4: $D_{xy} : 0 \leq x \leq 2, -2x \leq y \leq 3x.$

$$I = - \iint_{D_{xy}} (2, 0, y^2 - 2x - 2x + x^2)(2x - 2, 0, 1) dx dy \quad (0.5đ)$$

$$= - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 - 4) dx dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_{-2x}^{3x} (x^2 + y^2 - 4) dy \quad (0.5đ)$$

$$= -\frac{80}{3}. \quad (0.5đ)$$

Câu 5: $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (0.5đ) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4(n+1)} = \frac{3}{4}$ (0.5đ). Kết luận hội tụ : (0.5đ). **Nếu thiếu trị tuyệt đối và kết luận đúng, cả bài cho 0.5đ.**

Câu 6: Bán kính hội tụ $R = 4$, (0.5đ)

Hai cận phân kỳ theo Điều kiện cần hoặc Cauchy C_n . (0.5đ)

Câu 7: $S = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n+3}$ (0.5đ)

$$= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \arctan 1 = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \frac{\pi}{4} - \frac{4}{9} \quad (1đ)$$