ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 4: Ánh xạ tuyến tính

TS. Đặng Văn Vinh

Bộ môn Toán Ứng Dụng
Khoa Khoa học Ứng dụng
Đại học Bách Khoa Tp.HCM

Tài liệu: Đặng Văn Vinh. Đại số tuyến tính. NXB ĐHQG tp HCM, 2019

Ngày 10 tháng 3 năm 2020

Vấn đề 1. Ánh xạ tuyến tính và các ví dụ.

Vấn đề 2. Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính.

Định nghĩa

*Cho V, W là hai $\mathbb{K}$ – kgv. Ánh xạ $f : V \longrightarrow W$ được gọi là ánh xạ **tuyến tính**, nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:*

1/ $\forall X, Y \in V, f(X + Y) = f(X) + f(Y)$,

2/ $\forall \alpha \in K, \forall X \in V, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

Ví dụ

Xét ánh xạ f là phép đối xứng của đường thẳng $(\Delta) : y = 2x$ trong không gian $\mathbb{R}^2$. Kiểm tra trực tiếp hai tính chất của ánh xạ tuyến tính đều thỏa. Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V, W là hai $\mathbb{K}$ – kgv. Ánh xạ $f : V \longrightarrow W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính, nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:
1/ $\forall X, Y \in V, f(X+Y) = f(X) + f(Y)$,
2/ $\forall \alpha \in K, \forall X \in V, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

Ví dụ

Xét ánh xạ f là phép đối xứng qua đường thẳng $(\Delta) : y = 2x$ trong không gian $\mathbb{R}^2$. Kiểm tra trực tiếp hai tính chất của ánh xạ tuyến tính đều thỏa. Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép quay quanh gốc O ngược chiều kim đồng hồ một góc α trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy.

Theo chương 1, ta có công thức tính ảnh của một véctơ $\overrightarrow{OM} = (a; b)$ là

$$f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X) = R \cdot X$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép lấy đạo hàm trong không gian $P_2[x]$. Khi đó với $p(x) = ax^2 + bx + c$ ta có ảnh của phép biến đổi là $p'(x) = 2ax + b$.
f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép quay quanh gốc O ngược chiều kim đồng hồ một góc α trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy.

Theo chương 1, ta có công thức tính ảnh của một véctơ $\overrightarrow{OM} = (a; b)$ là

$$f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X) = R \cdot X$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép lấy đạo hàm trong không gian $P_2[x]$. Khi đó với $p(x) = ax^2 + bx + c$ ta có ảnh của phép biến đổi là $p'(x) = 2ax + b$.

f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép quay quanh gốc O ngược chiều kim đồng hồ một góc α trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy.

Theo chương 1, ta có công thức tính ảnh của một véctơ $\overrightarrow{OM} = (a; b)$ là

$$f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X) = R \cdot X$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép lấy đạo hàm trong không gian $P_2[x]$. Khi đó với $p(x) = ax^2 + bx + c$ ta có ảnh của phép biến đổi là $p'(x) = 2ax + b$.

f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép quay quanh gốc O ngược chiều kim đồng hồ một góc α trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy.

Theo chương 1, ta có công thức tính ảnh của một véctơ $\overrightarrow{OM} = (a; b)$ là

$$f(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X) = R \cdot X$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ f là phép lấy đạo hàm trong không gian $P_2[x]$. Khi đó với $p(x) = ax^2 + bx + c$ ta có ảnh qua phép biến đổi là $p'(x) = 2ax + b$.

f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $\forall x = (x_1; x_2; x_3)$,
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_1 + 4x_2 - x_3)$. Tìm $f(2; 1; 3)$.

Ảnh của véctơ $(2; 1; 3)$ là $f(2; 1; 3) = (3.2 - 2.1 + 3; 2.2 + 4.1 - 3) = (7; 5)$.
Mặt khác ta có
$$f(x) = f(x_1; x_2; x_3)$$
$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_1 + 4x_2 - x_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Suy ra $f(2; 1; 3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Có nghĩa là ta có thể tìm ảnh sử dụng ma trận.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $\forall x = (x_1; x_2; x_3)$,
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_1 + 4x_2 - x_3)$. Tìm $f(2;1;3)$.

Ảnh của véctơ $(2;1;3)$ là $f(2;1;3) = (3.2 - 2.1 + 3; 2.2 + 4.1 - 3) = (7;5)$.

Mặt khác ta có

$$f(x) = f(x_1; x_2; x_3)$$

$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_1 + 4x_2 - x_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Suy ra $f(2;1;3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Có nghĩa là ta có thể tìm ảnh sử dụng ma trận.

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $\forall x = (x_1; x_2; x_3)$,
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_1 + 4x_2 - x_3)$. Tìm $f(2;1;3)$.

Ảnh của véctơ $(2;1;3)$ là $f(2;1;3) = (3.2 - 2.1 + 3; 2.2 + 4.1 - 3) = (7;5)$.
Mặt khác ta có
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3)$

$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_1 + 4x_2 - x_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Suy ra $f(2;1;3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Có nghĩa là ta có thể tìm ảnh sử dụng ma trận.

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $\forall x = (x_1; x_2; x_3)$,
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_1 + 4x_2 - x_3)$. Tìm $f(2;1;3)$.

Ảnh của véctơ $(2;1;3)$ là $f(2;1;3) = (3.2 - 2.1 + 3; 2.2 + 4.1 - 3) = (7;5)$.
Mặt khác ta có
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3)$

$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_1 + 4x_2 - x_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Suy ra $f(2;1;3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Có nghĩa là ta có thể tìm ảnh sử dụng ma trận.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $\forall x = (x_1; x_2; x_3)$,
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 2x_1 + 4x_2 - x_3)$. Tìm $f(2; 1; 3)$.

Ảnh của véctơ $(2; 1; 3)$ là $f(2; 1; 3) = (3.2 - 2.1 + 3; 2.2 + 4.1 - 3) = (7; 5)$.
Mặt khác ta có
$f(x) = f(x_1; x_2; x_3)$

$$= (3x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_1 + 4x_2 - x_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Suy ra $f(2; 1; 3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Có nghĩa là ta có thể tìm ảnh sử dụng ma trận.

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$. Gọi $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V và $F = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ là một cơ sở của W. Ma trận A cỡ $m \times n$ có cột thứ i là tọa độ của $f(e_i)$ trong cơ sở F được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, F.

Tức là $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F] \end{array} \right)$.

Công thức dùng để tìm ảnh của một véctơ: $\forall x \in V, [f(x)]_F = A \cdot [x]_E$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.

Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F \end{array} \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} F^{-1} \cdot f(e_1) & F^{-1} \cdot f(e_2) & \cdots & F^{-1} \cdot f(e_n) \end{array} \right]$.

$= F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:

$A = F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} M \cdot e_1 & M \cdot e_2 & \cdots & M \cdot e_n \end{array} \right]$.

$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \right]$

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} \cdot M \cdot E} \quad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:

$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.

Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \quad (2)$$

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F \end{array} \right)$.

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\; [f(e_1)]_F \; \middle| \; [f(e_2)]_F \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; [f(e_n)]_F \; \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[\; F^{-1} \cdot f(e_1) \; \middle| \; F^{-1} \cdot f(e_2) \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; F^{-1} \cdot f(e_n) \; \right]$.

$= F^{-1} \left[\; f(e_1) \; \middle| \; f(e_2) \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; f(e_n) \; \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:

$A = F^{-1} \left[\; M \cdot e_1 \; \middle| \; M \cdot e_2 \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; M \cdot e_n \; \right]$.

$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[\; e_1 \; \middle| \; e_2 \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; e_n \; \right]$

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} M E} \qquad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.
Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \qquad (2)$$

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F \end{array} \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} F^{-1} \cdot f(e_1) & F^{-1} \cdot f(e_2) & \cdots & F^{-1} \cdot f(e_n) \end{array} \right]$.

$= F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:

$A = F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} M \cdot e_1 & M \cdot e_2 & \cdots & M \cdot e_n \end{array} \right]$.

$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \right]$

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} \cdot M \cdot E} \quad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.

Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \quad (2)$$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\; [f(e_1)]_F \; \middle| \; [f(e_2)]_F \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; [f(e_n)]_F \; \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[\; F^{-1} \cdot f(e_1) \; \middle| \; F^{-1} \cdot f(e_2) \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; F^{-1} \cdot f(e_n) \; \right]$.

$= F^{-1} \left[\; f(e_1) \; \middle| \; f(e_2) \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; f(e_n) \; \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:

$A = F^{-1} \left[\; M \cdot e_1 \; \middle| \; M \cdot e_2 \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; M \cdot e_n \; \right]$.

$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[\; e_1 \; \middle| \; e_2 \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; e_n \; \right]$

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} \cdot M \cdot E} \qquad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.

Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \qquad (2)$$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left([f(e_1)]_F \mid [f(e_2)]_F \mid \cdots \mid [f(e_n)]_F \right)$.
$\Leftrightarrow A = \left[F^{-1} \cdot f(e_1) \mid F^{-1} \cdot f(e_2) \mid \cdots \mid F^{-1} \cdot f(e_n) \right]$.
$= F^{-1} \left[f(e_1) \mid f(e_2) \mid \cdots \mid f(e_n) \right]$.
Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:
$A = F^{-1} \left[M \cdot e_1 \mid M \cdot e_2 \mid \cdots \mid M \cdot e_n \right]$.
$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n \right]$.
Suy ra:

$$A = F^{-1} M E \quad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.
Vậy:

$$f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x \quad (2)$$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [f(e_1)]_F & [f(e_2)]_F & \cdots & [f(e_n)]_F \end{array} \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} F^{-1} \cdot f(e_1) & F^{-1} \cdot f(e_2) & \cdots & F^{-1} \cdot f(e_n) \end{array} \right]$.

$= F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:

$A = F^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} M \cdot e_1 & M \cdot e_2 & \cdots & M \cdot e_n \end{array} \right]$.

$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \right]$.

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} \cdot M \cdot E} \qquad (1)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:

$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.

Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \qquad (2)$$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1}\cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left([f(e_1)]_F \mid [f(e_2)]_F \mid \cdots \mid [f(e_n)]_F \right)$.

$\Leftrightarrow A = \left[F^{-1}\cdot f(e_1) \mid F^{-1}\cdot f(e_2) \mid \cdots \mid F^{-1}\cdot f(e_n) \right]$.

$= F^{-1}\left[f(e_1) \mid f(e_2) \mid \cdots \mid f(e_n) \right]$.

Nếu $\forall x \in V, f(x) = M\cdot x$, thì:

$A = F^{-1}\left[M\cdot e_1 \mid M\cdot e_2 \mid \cdots \mid M\cdot e_n \right]$.

$A = F^{-1}\cdot M\cdot\left[e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n \right]$.

Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1}\cdot M\cdot E} \tag{1}$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1}\cdot f(x) = A\cdot E^{-1}\cdot x$.

Vậy:

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Trong chương 2, ta đã biết tọa độ của véctơ x trong cơ sở E là $E^{-1} \cdot x$.
Với ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$, ta có ma trận của f trong cặp cơ sở E, F là $A = \left([f(e_1)]_F \mid [f(e_2)]_F \mid \cdots \mid [f(e_n)]_F \right)$.
$\Leftrightarrow A = \left[F^{-1} \cdot f(e_1) \mid F^{-1} \cdot f(e_2) \mid \cdots \mid F^{-1} \cdot f(e_n) \right]$.
$= F^{-1} \left[f(e_1) \mid f(e_2) \mid \cdots \mid f(e_n) \right]$.
Nếu $\forall x \in V, f(x) = M \cdot x$, thì:
$A = F^{-1} \left[M \cdot e_1 \mid M \cdot e_2 \mid \cdots \mid M \cdot e_n \right]$.
$A = F^{-1} \cdot M \cdot \left[e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n \right]$.
Suy ra:

$$\boxed{A = F^{-1} \cdot M \cdot E} \tag{1}$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:
$\forall x \in V, [f(x)]_F = A[x]_E \Leftrightarrow F^{-1} \cdot f(x) = A \cdot E^{-1} \cdot x$.
Vậy:

$$\boxed{f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \tag{2}$$

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow V$. *Gọi* $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *là một cơ sở của* V. *Ma trận* A *vuông cấp* n *có cột thứ* i *là tọa độ của* $f(e_i)$ *trong cơ sở* E *được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính* f *trong cặp cơ sở* E, E, *hay thường gọi ma trận của* f *trong một cơ sở* E.

Tức là $A = \left(\; [f(e_1)]_E \;\; | \;\; f(e_2)]_E \;\; | \;\; \cdots \;\; | \;\; f(e_n)]_E] \; \right)$.

Ta có công thức $\forall x \in V, [f(x)]_E = A \cdot [x]_E$.

$$\boxed{A = E^{-1} M E} \qquad (3)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:

$$\boxed{f(x) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \qquad (4)$$

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow V$. *Gọi* $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *là một cơ sở của* V. *Ma trận* A *vuông cấp* n *có cột thứ* i *là tọa độ của* $f(e_i)$ *trong cơ sở* E *được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính* f *trong cặp cơ sở* E, E, *hay thường gọi ma trận của* f *trong một cơ sở* E.
Tức là $A = \left(\; [f(e_1)]_E \;\; | \;\; f(e_2)]_E \;\; | \;\; \cdots \;\; | \; f(e_n)]_E] \; \right)$.

Ta có công thức $\forall x \in V, [f(x)]_E = A \cdot [x]_E$.

$$\boxed{A = E^{-1} \cdot M \cdot E} \qquad (3)$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:

$$\boxed{f(x) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \qquad (4)$$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow V$. Gọi $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Ma trận A vuông cấp n có cột thứ i là tọa độ của $f(e_i)$ trong cơ sở E được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở E, E, hay thường gọi ma trận của f trong một cơ sở E.

Tức là $A = \left([f(e_1)]_E \;\middle|\; f(e_2)]_E \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; f(e_n)]_E] \right)$.

Ta có công thức $\forall x \in V, [f(x)]_E = A \cdot [x]_E$.

$$\boxed{A = E^{-1} \cdot M \cdot E} \tag{3}$$

Công thức dùng để tính ảnh của véctơ khi biết ma trận:

$$\boxed{f(x) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x} \tag{4}$$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, biết $\forall x = (x_1; x_2; x_3), f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 + x_2 - 5x_3, 3x_1 + 2x_2 - 7x_3)$.
21 Tìm ma trận A của f trong cơ sở $E = \{(1; 2; -1), (2; 5; -3), (3; 7; -5)\}$.
2/ Sử dụng A, tính $f(6; 4; 5)$.

1/ $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$

Theo công thức (3) ta có $A = E^{-1}ME$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 25 & 65 & 100 \\ 17 & 46 & 74 \\ -18 & -48 & -76 \end{pmatrix}$

2/ Theo công thức (4) ta có $f(6;4;5) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, biết $\forall x = (x_1; x_2; x_3), f(x) =$ $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 + x_2 - 5x_3, 3x_1 + 2x_2 - 7x_3)$.
21 Tìm ma trận A của f trong cơ sở $E = \{(1; 2; -1), (2; 5; -3), (3; 7; -5)\}$.
2/ Sử dụng A, tính $f(6; 4; 5)$.

$$1/\ f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$$

Theo công thức (3) ta có $A = E^{-1}ME$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 25 & 65 & 100 \\ 17 & 46 & 74 \\ -18 & -48 & -76 \end{pmatrix}$$

2/ Theo công thức (4) ta có $f(6; 4; 5) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, biết $\forall x = (x_1; x_2; x_3), f(x) = f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 + x_2 - 5x_3, 3x_1 + 2x_2 - 7x_3)$.
21 Tìm ma trận A của f trong cơ sở $E = \{(1; 2; -1), (2; 5; -3), (3; 7; -5)\}$.
2/ Sử dụng A, tính $f(6; 4; 5)$.

1/ $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = MX$

Theo công thức (3) ta có $A = E^{-1}ME$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 25 & 65 & 100 \\ 17 & 46 & 74 \\ -18 & -48 & -76 \end{pmatrix}$

2/ Theo công thức (4) ta có $f(6; 4; 5) = E \cdot A \cdot E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, biết ma trận của ánh xạ f trong cặp cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;1),(2;1;1)\}$ và $F = \{(1;1),(3;4)\}$ là
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.
1/ Tính $f(4;1;5)$.
2/ $\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}_3$, tính $f(x)$.

1/ Ta có $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow f(4;1;5) = (-145;-188)$.

2/ $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -54 \\ 35 & 22 & -70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f(x) = (27x_1 + 17x_2 - 54x_3; 35x_1 + 22x_2 - 70x_3)$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, biết ma trận của ánh xạ f trong cặp cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;1),(2;1;1)\}$ và $F = \{(1;1),(3;4)\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1/ Tính $f(4;1;5)$.

2/ $\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}_3$, tính $f(x)$.

1/ Ta có $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow f(4;1;5) = (-145;-188)$.

2/ $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -54 \\ 35 & 22 & -70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f(x) = (27x_1 + 17x_2 - 54x_3; 35x_1 + 22x_2 - 70x_3)$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, biết ma trận của ánh xạ f trong cặp cơ sở $E = \{(1;2;1),(1;1;1),(2;1;1)\}$ và $F = \{(1;1),(3;4)\}$ là
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.
1/ Tính $f(4;1;5)$.
2/ $\forall x = (x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}_3$, tính $f(x)$.

1/ Ta có $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x$, với $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow f(4;1;5) = (-145;-188)$.

2/ $f(x) = F \cdot A \cdot E^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -54 \\ 35 & 22 & -70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f(x) = (27x_1 + 17x_2 - 54x_3; 35x_1 + 22x_2 - 70x_3)$