Định nghĩa

Nếu ta cộng tất cả các số hạng của một dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ta được một biểu thức có dạng

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

và được gọi là một **chuỗi số (series)**, ký hiệu là

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hoặc } \sum a_n.$$

Ví dụ, tổng sau đây là một chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Định nghĩa

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta gọi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

là tổng riêng thứ n.

Ví dụ: Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

- Tổng riêng thứ 5 là $S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0.96875$;
- Tổng riêng thứ n là

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Định nghĩa

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$.

- Nếu dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến S, thì ta nói chuỗi hội tụ (convergent), và ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

- Ngược lại, ta nói chuỗi phân kỳ (divergent).

Ví dụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

bởi vì

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 1$$

Định lý

Chuỗi điều hòa (harmonic series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

là chuỗi phân kỳ.

Bởi vì dãy con $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \ldots$ tiến tới vô cùng. Cụ thể:

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Tính chất

Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, thì các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ (với c là hằng số), $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, và $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ cũng hội tụ, và

- $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Định lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bởi vì

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

Hệ quả

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại hoặc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ: Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2+4}$ phân kỳ (theo **điều kiện cần**), bởi vì

$$\frac{n^2}{5n^2+4} \to \frac{1}{5} \neq 0.$$

Định lý

Xét **chuỗi hình học (geometric series)**, trong đó $a \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots.$$

- Nếu $|q| < 1$ thì chuỗi hội tụ và tổng của nó là

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

- Nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Chuỗi hình học còn được gọi là "chuỗi cấp số nhân".

Ví dụ

Tìm tổng của chuỗi số sau:

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Định lý

Giả sử f là một hàm số liên tục, dương, giảm trên $[1;\infty)$. Đặt

$$a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Chuỗi số p

Định lý

Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- Nếu $p > 1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $p \leq 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ: Chuỗi điều hòa (ứng với $p = 1$) là chuỗi phân kỳ.

Định lý

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số không âm và

$$a_n \leq b_n, \text{ với mọi } n \geq n_0,$$

trong đó $n_0 \in \mathbb{N}^*$ là một chỉ số nào đó.

(a) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

(b) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của các chuỗi số sau:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Định lý

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi dương. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0,$$

thì cả hai chuỗi số hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số dương sau:

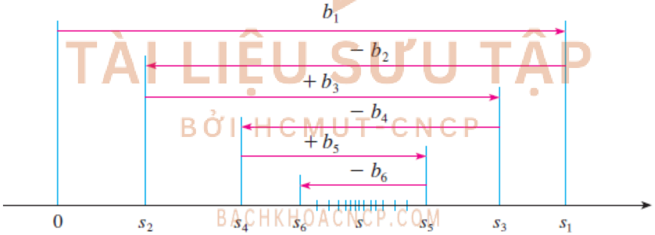
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

Định lý (Leibnitz)

Xét **chuỗi đan dấu**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots,$$

trong đó $b_n > 0$ với mọi n. Nếu $\{b_n\}$ là dãy số giảm và hội tụ về 0, thì chuỗi hội tụ.



Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của chuỗi đan dấu sau:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối (absolutely convergent)** nếu chuỗi các giá trị tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

hội tụ.

Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, thì nó hội tụ.

Chiều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz nhưng chuỗi các giá trị tuyệt đối là $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ không hội tụ (vì là chuỗi điều hòa).

Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Tiêu chuẩn tỷ số D'Alembert

Định lý

(a) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối (và do đó nó hội tụ).

(b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Tiêu chuẩn căn Cauchy

Định lý

(a) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối (và do đó nó hội tụ).

(b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ

Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n.$$