ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Ứng Dụng

GV: Đặng Thu Huyền

Bộ môn Toán Ứng Dụng
Khoa Khoa học Ứng dụng
Đại học Bách Khoa Tp.HCM

Ngày 11 tháng 12 năm 2019

1. Mô hình Markov

Bài 1: Khảo sát sự chuyển động dân cư của một thành phố A.

Giả sử năm 2018 dân cư trong thành phố A và vùng ngoại ô tương ứng là r_0 và s_0. Gọi:

$X_o = \begin{pmatrix} r_o \\ s_o \end{pmatrix}$ biểu thị dân cư của thành phố và vùng ngoại ô năm 2018,

$X_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$ là dân cư ở thành phố và vùng ngoại ô các năm 2019, 2020,...

Theo nghiên cứu người ta nhận thấy mỗi năm có khoảng 10% dân thành phố chuyển ra sống ở vùng ngoại ô và 5% dân ở vùng ngoại ô chuyển vào thành phố.

Sau một năm:

r_o dân cư của thành phố được phân bố: $\begin{pmatrix} 0.9r_o \\ 0.1r_o \end{pmatrix} = r_o \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

và s_0 dân cư của ngoại ô được phân bố $\begin{pmatrix} 0.05s_o \\ 0.95s_o \end{pmatrix} = s_0 \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \end{pmatrix}$.

Cư dân của thành phố và ngoại ô năm 2019:

$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = r_o \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix} + s_o \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_o \\ s_o \end{pmatrix}$.

Ta có: $X_1 = M \cdot X_0$, với $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix}$ (ma trận Markov).

Giả sử, sự di chuyển dân số là ổn định. Khi đó, dân cư của thành phố và ngoại ô ở các năm 2019, 2020, 2021 lần lượt là:

$$X_1 = M \cdot X_o$$
$$X_2 = M \cdot X_1 = M^2 \cdot X_o$$
$$X_3 = M \cdot X_2 = M^3 \cdot X_o$$

....

Nói chung, ta có công thức:

$$\boxed{X_k = M^k \cdot X_o}$$

Giả sử, dân cư của thành phố và vùng ngoại ô năm 2018 là: $\begin{pmatrix} 800000 \\ 300000 \end{pmatrix}$

Ta tính được dân cư ở thành phố và ngoại ô năm 2019 là:

$$X_1 = M \cdot X_o = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800000 \\ 300000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 735000 \\ 365000 \end{pmatrix}$$

Dân cư của thành phố và vùng ngoại ô năm 2022 là: $X_4 = M^4 \cdot X_o$.

Trong chuỗi Markov ba trạng thái, ma trận chuyển đổi có dạng là:

$$P = \begin{array}{c} \text{Trạng thái trước} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 1 \\ 2 \quad \text{Trạng thái sau} \\ 3 \end{array}$$

Trong ma trận này:

p_{12} là xác suất chuyển từ trạng thái 2 sang trạng thái 1.

p_{33} là xác suất vẫn ở trạng thái 3 nếu trước đó nó ở trạng thái 3.

<u>Bài 2:</u> Một chuỗi nhà hàng gồm ba địa điểm khác nhau, ký hiệu: 1, 2 và 3. Một khách hàng sau khi ăn tại một trong ba địa điểm trên sẽ được phát phiếu giảm giá vào lần ăn tiếp theo tại bất kỳ một trong ba địa điểm đó. Chủ nhà hàng nhận thấy rằng khách hàng sử dụng phiếu giảm giá tại các địa điểm khác nhau theo xác suất sau:

Vị trí phát phiếu

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ P = & \left(\begin{array}{ccc} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 \\ 0.55 & 0.6 & 0.7 \end{array}\right) & & \end{array}\begin{array}{l} 1 \\ 2 \text{ Vị trí sử dụng} \\ 3 \end{array}$$

Từ ma trận này, ta biết được:

0.15 là xác suất một phiếu giảm giá từ vị trí số 1 sẽ được sử dụng ở vị trí số 2.

0.7 là xác suất một phiếu giảm giá từ vị trí số 3 sẽ được sử dụng ở vị trí số 3.

....

<u>Bài 3:</u> Xét lại ví dụ trên, nếu 1 phiếu giảm giá đầu tiên được phát ở vị trí 2 thì véctơ trạng thái ban đầu là: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tính xác suất khách hàng sử dụng phiếu giảm giá tại mỗi vị trí sau 3 năm.

<u>Giải:</u>

Véctơ trạng thái sau 3 năm là:

$$x^{(3)} = P^3 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.222 \\ 0.124 \\ 0.654 \end{pmatrix}$$

- Xác suất khách hàng sử dụng phiếu giảm giá ở vị trí 1 là 0.222
- Xác suất khách hàng sử dụng phiếu giảm giá ở vị trí 2 là 0.124
- Xác suất khách hàng sử dụng phiếu giảm giá ở vị trí 3 là 0.654

Sự hội tụ của véctơ trạng thái

Ngoài 3 năm trên, ta tìm được các véctơ trạng thái sau (lấy theo dạng phân số):

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1111/5000 \\ 247/2000 \\ 388/593 \end{pmatrix}, x^{(5)} = \begin{pmatrix} 11111/50000 \\ 471/3815 \\ 8179/12500 \end{pmatrix}, x^{(6)} = \begin{pmatrix} 111111/500000 \\ 7261/58814 \\ 53/81 \end{pmatrix},$$

$$x^{(7)} = x^{(8)} = x^{(9)} = \ldots = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/81 \\ 53/81 \end{pmatrix}$$

Vậy khi $n > 7$, ta có:

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/81 \\ 53/81 \end{pmatrix}$$

Nói cách khác, khi số lượng các lần quan sát tăng lên hay khi n đủ lớn thì các véctơ trạng thái sẽ hội tụ về một véctơ cố định.

Tuy nhiên, không phải lúc nào véctơ trạng thái cũng sẽ hội tụ về một véctơ cố định khi số lượng các lần quan sát tăng lên như trên.

Bây giờ, chúng ta xét một ví dụ như sau:

Xét ma trận chuyển đổi trạng thái và véctơ trạng thái ban đầu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$P^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^3 = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(1)} = x^{(3)} = x^{(5)} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ x^{(2)} = x^{(4)} = x^{(6)} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Nếu P là ma trận chuyển đổi thuần nhất, x là véctơ xác suất bất kỳ và q là véctơ trạng thái cố định thì khi $n \to \infty$, ta có:

$$\begin{cases} P^n x \longrightarrow q & (1) \\ P^{n+1} x \longrightarrow q & (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế (1) với ma trận P:

$$PP^n x \longrightarrow Pq$$

$$\Leftrightarrow P^{n+1} x \longrightarrow Pq \quad (3)$$

P là ma trận chuyển đổi thuần nhất nên từ (2) và (3), suy ra:

$$P.q = q \Rightarrow q - P.q = 0 \Leftrightarrow (I - P).q = 0$$

Xét lại ví dụ trên với ma trận chuyển đổi trạng thái:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 \\ 0.55 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Bây giờ chúng ta sẽ tìm véctơ trạng thái cố định theo cách nói trên.
Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(I - P).q = 0$ có dạng:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.2 \\ -0.15 & 0.8 & -0.1 \\ -0.55 & -0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nghiệm:

$$q = \begin{pmatrix} \alpha \times 1.8 \\ \alpha \\ \alpha \times 5.3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \\ 5.3 \end{pmatrix}$$

Để đưa véctơ q về dạng véctơ xác suất, ta đặt: $\alpha = \dfrac{1}{1.8 + 1 + 5.3} = \dfrac{10}{81}$

Do đó:

$$q = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/81 \\ 53/81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.222... \\ 0.124... \\ 0.654... \end{pmatrix}$$

Bài 4: Dân của thành phố A đọc ba tờ báo Tuổi trẻ, Thanh niên và Người lao động. Qua khảo sát người ta nhận thấy: sau một tháng có 10% bạn đọc của Tuổi trẻ chuyển sang đọc Thanh niên, và 10% chuyển sang đọc Người lao động; có 10% bạn đọc Thanh niên chuyển sang đọc Tuổi Trẻ và 20% chuyển sang đọc Người Lao Động; có 10% bạn đọc Người lao động chuyển sang đọc Tuổi trẻ và 30% chuyển sang đọc Thanh niên. Viết ma trận chuyển trạng thái Markov cho mô hình trên.

Giải: Ma trận chuyển trạng thái Markov cho mô hình trên là:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Bài 2:

Một công ty cho thuê xe có ba cửa hàng A, B, C. Một người có thể mượn và trả xe ở bất kỳ cửa hàng nào cũng được. Đơn vị thời gian là một tháng. Xác suất mượn và trả xe ở các cửa hàng được mô tả trong bảng: $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$.

a/ Giải thích ý nghĩa các số được tô màu đỏ trong bảng trên.

b/ Giả sử lượng xe ban đầu tại các cửa hàng A, B, C đều là 1000 chiếc. Khảo sát sự phân bố xe ở mỗi cửa hàng này sau 3 tháng.

Giải bài 2:

Ta có: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

a/ Xác suất mượn xe ở cửa hàng A và trả lại xe ở cửa hàng B là 10%.
Xác suất mượn xe ở cửa hàng B và trả lại xe ở cửa hàng C là 20%.
Xác suất mượn xe ở cửa hàng C và trả lại xe ở cửa hàng A là 40%.

b/ Ta có công thức: $\boxed{X_k = P^k \cdot X_o}$ với k là chu kỳ.
Sự phân bố xe của cửa hàng này sau 3 tháng là:

$$x_3 = P^3 x_o = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1489 \\ 650 \\ 861 \end{pmatrix}.$$

2. Mô hình Leslei

Bài 1: Giả sử độ tuổi lớn nhất của một con cái của một loài động vật là 15 tuổi. Người ta chia con cái thành 3 lớp tuổi với thời lượng bằng nhau là 5 năm: lớp thứ nhất I từ 1 đến 5 tuổi, lớp thứ hai II từ 6 đến 10 tuổi, lớp thứ III từ 11 đến 15 tuổi. Ở lớp tuổi thứ nhất I, con cái chưa sinh sản, ở lớp tuổi II mỗi con cái sinh trung bình 4 con cái khác (không kể con đực), ở lớp tuổi thứ III mỗi con cái sinh trung bình 3 con cái khác. Khoảng 50 % con cái được sống sót từ lớp tuổi I sang lớp tuổi II và 25 % con cái được sống sót từ lớp tuổi II sang lớp tuổi III.

Giả sử ban đầu ở mỗi lớp tuổi có 1000 con cái.

Ta ký hiệu véctơ: $X_o = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$.

Sau 5 năm, số con cái ở lớp tuổi thứ nhất sẽ là:

$$1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 4 + 1000 \cdot 3 = 7000$$

có nghĩa là 1000 con cái ở lớp thứ I không sinh sản nên nhân với 0, 1000 con cái ở lớp thứ II, mỗi con sinh ra 4 con cái khác nên $1000 \cdot 4$, 1000 con cái ở lớp thứ III, mỗi con sinh ra 3 con cái khác nên $1000 \cdot 3$. Vậy sau 5 năm, số con cái ở lớp thứ nhất có được do các con cái ở lớp thứ II và lớp thứ III sinh ra.

Sau 5 năm, số con cái của lớp thứ II có được do con cái của lớp thứ I lớn lên với tỷ lệ sống sót là 50%:

$$1000 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 500$$

Sau 5 năm, số con cái của lớp thứ III có được do con cái của lớp thứ II lớn lên và tỷ lệ sống sót là 25%:

$$1000 \cdot 0 + 1000 \cdot \frac{1}{4} + 1000 \cdot 0 = 250$$

Ở dạng ma trận, ta có: $X_1 = \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = LX_o.$

Ma trận L được gọi là ma trận Leslei.
Sau 10 năm, số lượng con cái ở mỗi lớp tuổi là:

$$X_2 = L \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Sau $5n$ năm, $n \in \mathbb{N}$, số lượng con cái ở mỗi lớp tuổi là:

$$\boxed{X_n = L^n \cdot X_o}$$

Bài 2: Để minh họa, ta xét một loại động vật có tuổi thọ tối đa của một con cái là 15 năm được chia ra thành ba lớp tuổi chính, mỗi lớp kéo dài 5 năm. Ma trận Leslie và phân bố ban đầu được cho như sau:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 192 \\ 264 \end{pmatrix}$$

Số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 5 năm, 10 năm, 15 năm là bao nhiêu?

Số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 5 năm là:

$$x^{(1)} = Lx^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1200 \\ 192 \\ 264 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2472 \\ 200 \\ 144 \end{pmatrix}$$

Số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 10 năm là:

$$x^{(2)} = L^2 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 412 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 15 năm là:

$$x^{(3)} = L^3 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3222 \\ 320 \\ 309 \end{pmatrix}.$$

Bài 3: Giả sử độ tuổi lớn nhất của một con cái của một loài động vật là 15 tuổi. Người ta chia con cái thành 3 lớp tuổi với thời lượng bằng nhau là 5 năm: lớp thứ nhất I từ 1 đến 5 tuổi, lớp thứ hai II từ 6 đến 10 tuổi, lớp thứ III từ 11 đến 15 tuổi. Ở lớp tuổi thứ nhất I, con cái chưa sinh sản, ở lớp tuổi II mỗi con cái sinh trung bình 5 con cái khác (không kể con đực), ở lớp tuổi thứ III mỗi con cái sinh trung bình 4 con cái khác. Khoảng 75% con cái được sống sót từ lớp tuổi I sang lớp tuổi II và 50% con cái được sống sót từ lớp tuổi II sang lớp tuổi III.

Lập ma trận Leslei cho mô hình trên.

Giải bài 3:

Lớp tuổi thứ nhất I, con cái chưa sinh sản, ở lớp tuổi II mỗi con cái sinh trung bình 5 con cái khác (không kể con đực), ở lớp tuổi thứ III mỗi con cái sinh trung bình 4 con cái khác.

Khoảng 75% con cái được sống sót từ lớp tuổi I sang lớp tuổi II và 50% con cái được sống sót từ lớp tuổi II sang lớp tuổi III.

$\Rightarrow$ Ma trận Leslei cho mô hình trên là: $L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 4: Xét một loại động vật có tuổi thọ tối đa của một con cái là 15 năm được chia ra thành ba lớp tuổi, mỗi lớp kéo dài 5 năm. Ma trận Leslie và phân bố ban đầu được cho như sau:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad x_o = \begin{pmatrix} 1200 \\ 192 \\ 264 \end{pmatrix}$$

a/ Tính số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 10 năm.

b/ Từ mô hình trên, hãy cho biết số 6 và số $\dfrac{3}{4}$ có ý nghĩa gì?

Giải bài 4:

Sau n chu kỳ, $n \in \mathbb{N}$, số lượng con cái ở mỗi lớp tuổi là:

$$\boxed{X_n = L^n \cdot X_o}$$

a/ Số lượng của loài vật này ở mỗi nhóm sau 10 năm là:

$$x_2 = L^2 x_o = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1200 \\ 192 \\ 264 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 412 \\ 150 \end{pmatrix}$$

b/ Lớp tuổi thứ II mỗi con cái sinh trung bình 6 con cái khác.
Khoảng 75% con cái được sống sót từ lớp tuổi II sang lớp tuổi III.

Bài 1: Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn: cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như trong bảng sau: A: 1, 1, 1, 1, 1; B: 4, 3, 3, 2, 1; C: 8, 12, 6, 3, 1; D: 12, 15, 10, 4, 1 và E: 20, 24, 10, 5, 1. Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn có số giờ công tối đa trong một tuần lần lượt là 180, 220, 120, 60, 20. Trong thiết kế ban đầu của nhà máy có phương án về số lượng mỗi loại sản phẩm nhà máy phải sản xuất trong một tuần để sử dụng hết công suất các bộ phận. Tính số lượng mỗi loại sản phẩm được sản xuất trong một tuần theo phương án đó.

Giải bài 1:

Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
Để sử dụng hết công suất của nhà máy thì

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 20x_5 = 180 \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 15x_4 + 24x_5 = 220 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 120 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \end{cases}$$

Ta có nghiệm:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 4.$$

Bài 2: Một cửa hàng bán 3 loại vải: len, kaki và lụa. Ngày đầu bán được 5m vải len, 3m vải kaki và 4m vải lụa thu được 1 triệu 440 ngàn VND. Ngày thứ hai bán được 8m vải len, 10m vải kaki và 9m vải lụa thu được 3 triệu 110 ngàn VND. Ngày thứ ba bán được 15m vải len, 22m vải kaki và 18m vải lụa thu được 6 triệu 260 ngàn VND. Giả sử giá của 3 loại vải trên không thay đổi theo ngày. Hãy cho biết giá tiền mỗi mét vải của từng loại vải trên, đơn vị VND?

Giải: Gọi giá tiền của 3 loại vải: len, kaki và lụa lần lượt là x, y, z.

Ta có HPT sau: $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 1440 \\ 8x + 10y + 9z = 3110 \\ 15x + 22y + 18z = 6260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 80 \\ z = 150 \end{cases}$

Vậy mỗi mét vải len, kaki và lụa lần lượt là: $120k$, $80k$, $150k$.