1. Tìm thể tích của khối vật thể được giới hạn bởi $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0, y \leq x, y \geq -x\sqrt{3}$
2. Tính $I = \iiint_\Omega (x + y + z)dxdydz$, *với* Ω được *giới hạn bởi* : $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$
3. File BT tích phân bội: Bài 1(2, 3, 5), Bài 2(12, 1,…), Bài 3, Bài 4, Bài 5.

Chương 3:

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Phần 1: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

NỘI DUNG

1. Tham số hóa đường cong
2. Định nghĩa tích phân đường loại 1
3. Tính chất tích phân đường loại 1
4. Cách tính tích phân đường loại 1

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẲNG

Tham số hóa đường cong là việc biểu diễn tọa độ các điểm trên đường cong theo một tham số duy nhất.

Các dạng TSH thường gặp trong đường cong phẳng:

1. Theo tọa độ Descartes : tham số là x hoặc y.
2. Theo tham số tổng quát t.
3. Theo tọa độ cực : tham số là r hoặc φ.

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẲNG

(C) viết dạng tham số tổng quát:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$$

Ví dụ :

1/ Đoạn thẳng nối $A(a_1, a_2)$ và $B(b_1, b_2)$

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

2/ Đường cong

$$y = f(x),\ a \le x \le b \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases},\ a \le t \le b$$

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẲNG

3/ Đường tròn: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi \;\; (\text{or} -\pi \le t \le \pi)$$

4/ Ellipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẲNG

Tham số hóa theo tọa độ cực: C : $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

VD: đường tròn : $x^2 + y^2 = 2y$

$$\Leftrightarrow r = 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$$

Tham số: $\begin{cases} x = r\cos\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = 2\sin^2\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le \pi$

THAM SỐ HÓA ĐC TRONG KHÔNG GIAN

B1: Chiếu đường cong lên mặt phẳng thích hợp

B2: Tham số hóa cho đường cong hình chiếu (trong mặt phẳng)

B3: Tham số hóa cho biến còn lại

Tham số hóa đường cong trong không gian

(giao tuyến của 2 mặt)

+ Cách 1: Nếu có 1 phương trình mặt chứa 2 biến, xem nó như đường phẳng để tham số hóa, dùng phương trình còn lại tìm tham số cho biến số 3.

+ Cách 2: Xác định hình chiếu giao tuyến lên 1 mặt phẳng tọa độ, tham số hóa cho hình chiếu này rồi dùng 1 phương trình mặt để tìm tham số cho biến thứ 3.

Ví dụ

1/ Tham số hóa cho giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 3$

2/ Tham số hóa cho giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ và mặt phẳng $z = 3 - x$

3/ Viết phương trình tham số của phần đường tròn tâm I(0;1), bán kính 1, phần ứng với $y \geq x$.

4/ Giao tuyến của mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 2x - 4y + 4$.

5/ Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

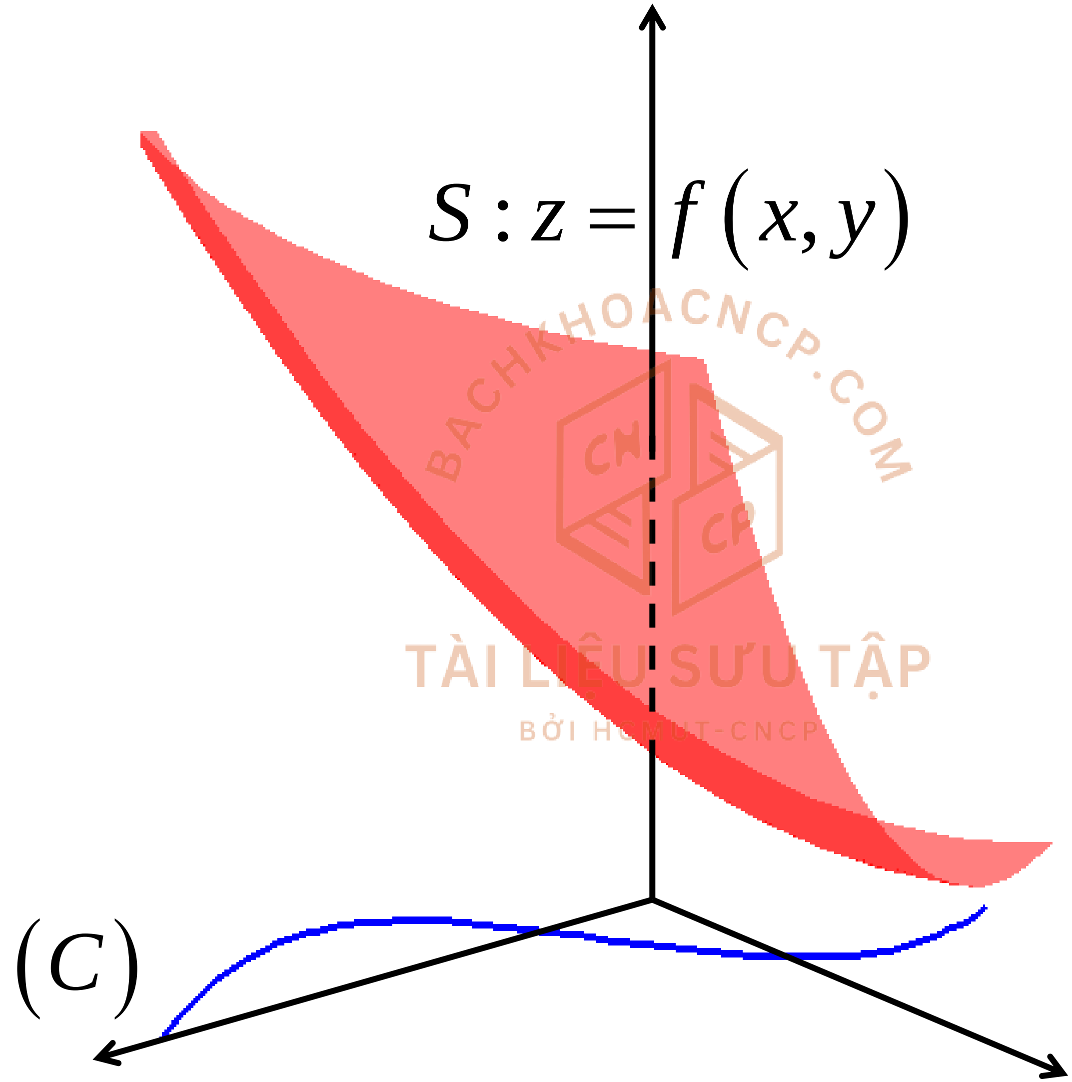
6/ Giao tuyến của mặt trụ $y = x^2$ và $z = 2 + x$., lấy phần từ điểm A(-2;4;0) đến điểm B(0;0;2).

Bài tập:

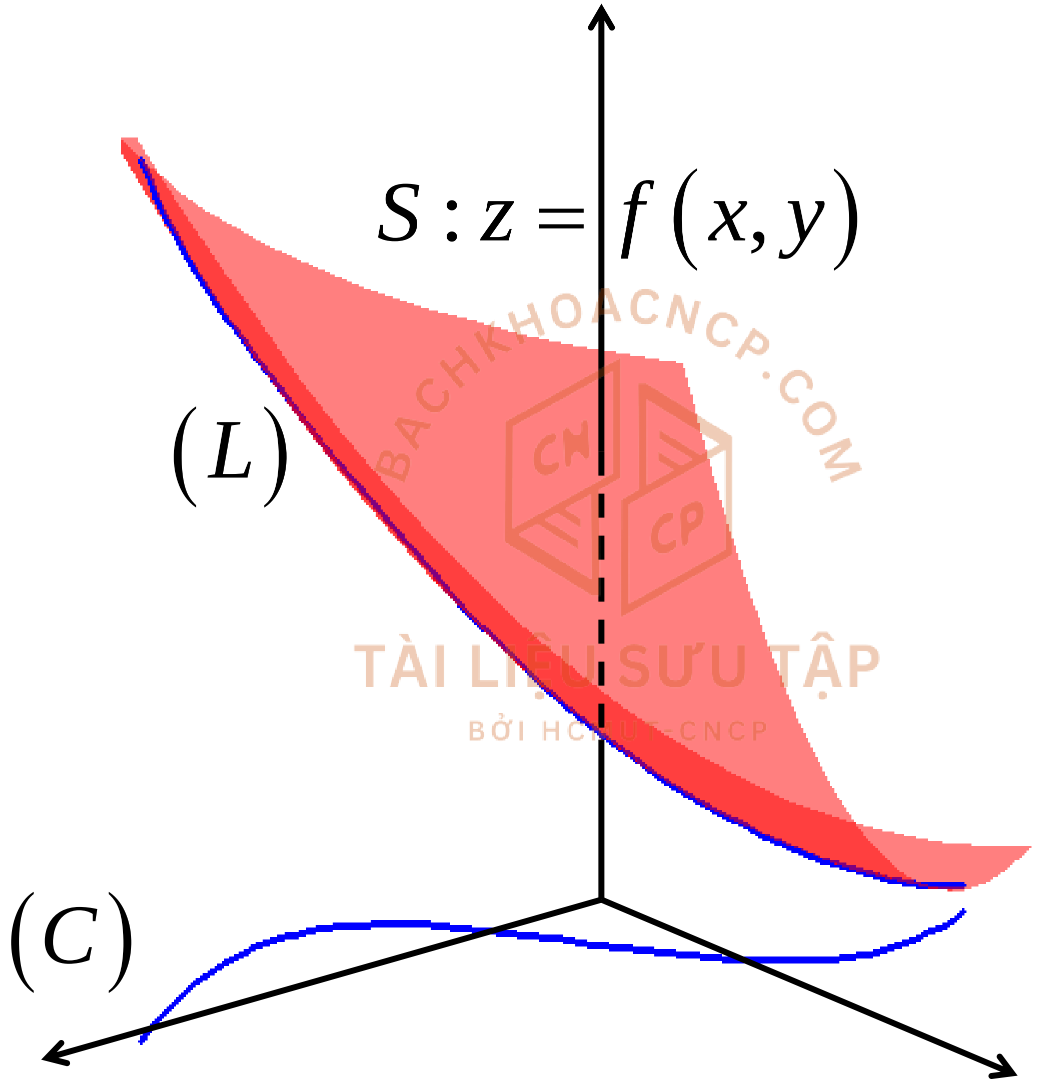
Tham số hóa đường cong C cho giao tuyến của các mặt:

1. $x^2 + y^2 = z^2, \mathrm{ax} = y^2, z \geq 0$
2. $x^2 = y, \; x = z \geq 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \; x^2 + y^2 = z^2$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y$
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 2x, z \geq 0$
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 6z, z = 3 - x$
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x + y + z = 0$

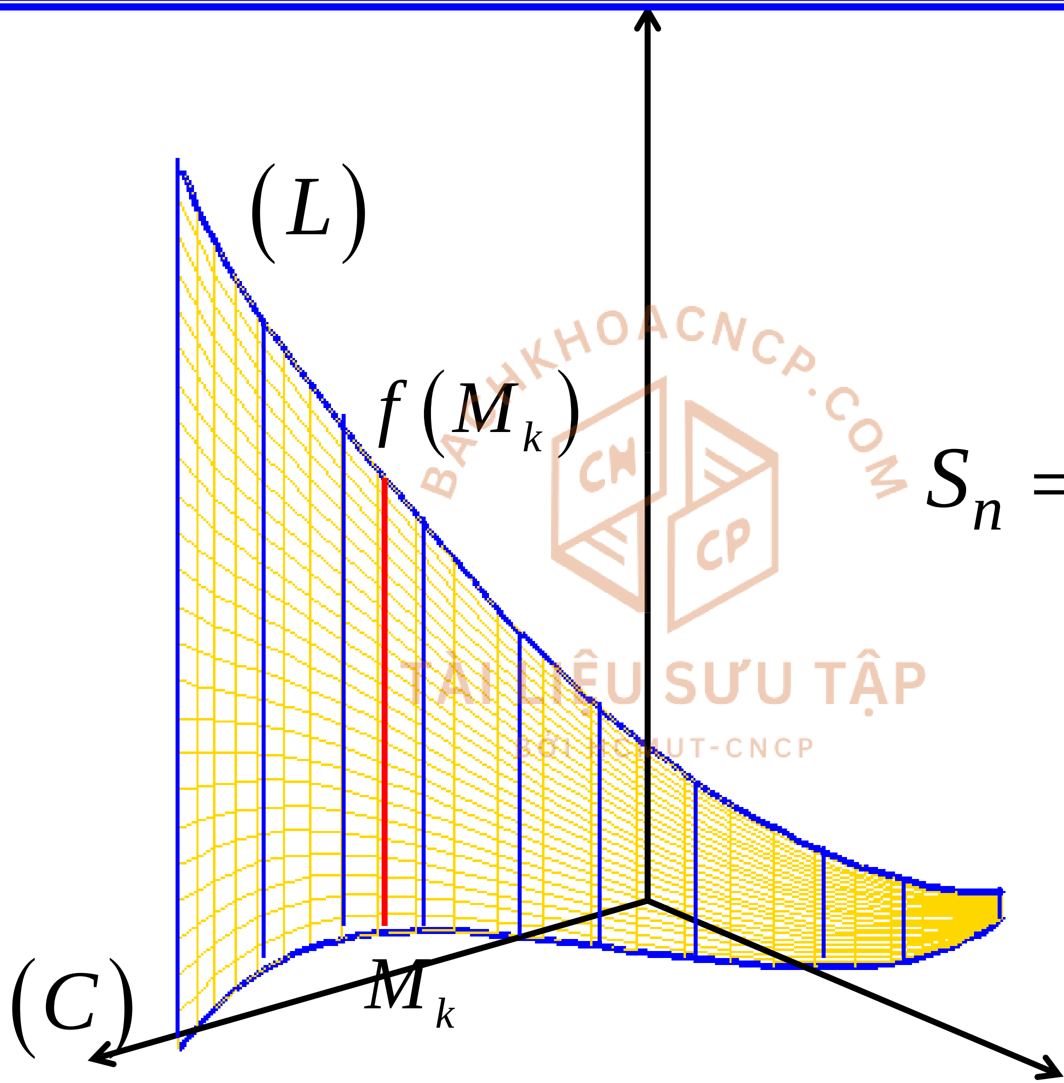
BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH BĂNG CONG



BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH BĂNG CONG

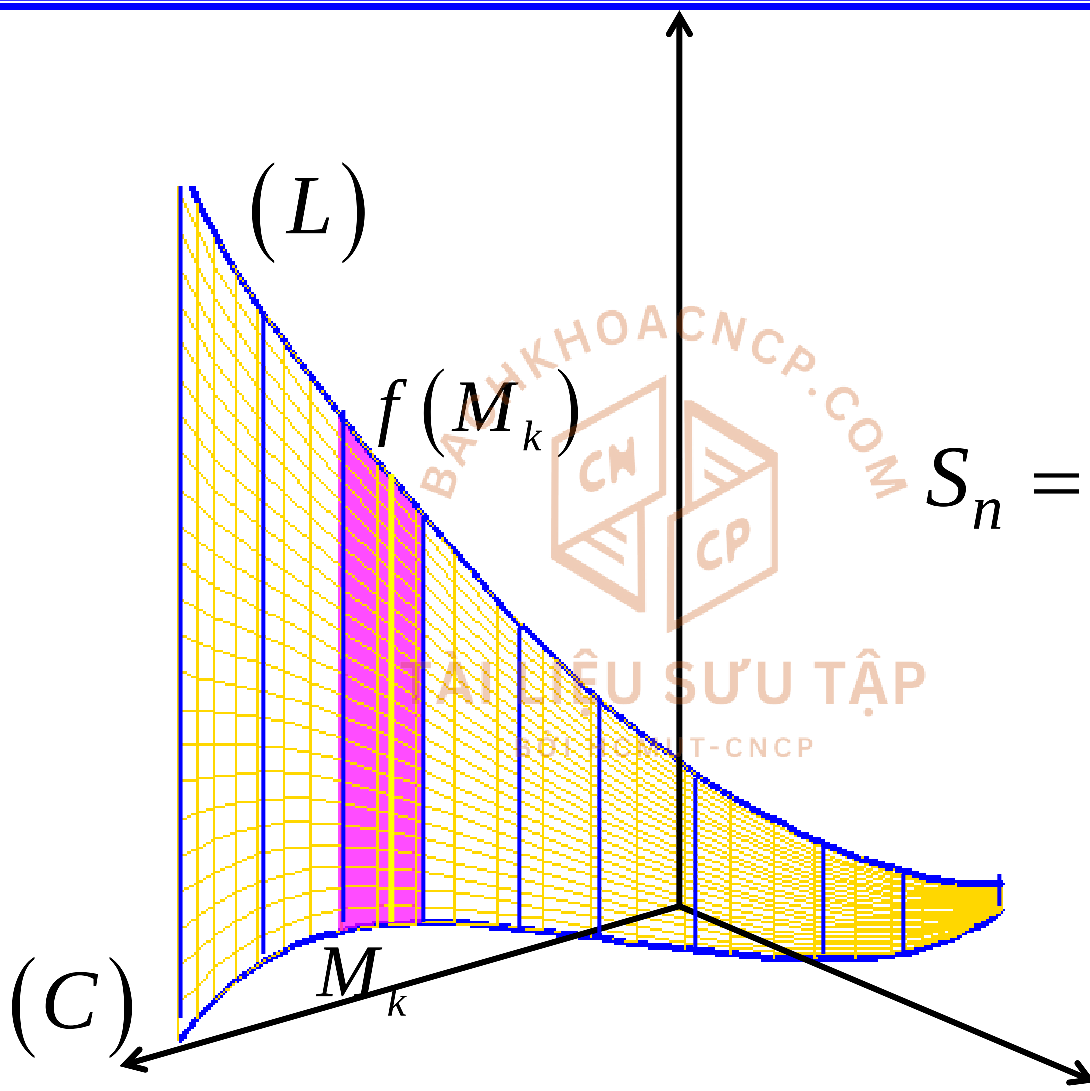


BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH BĂNG CONG



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k$$

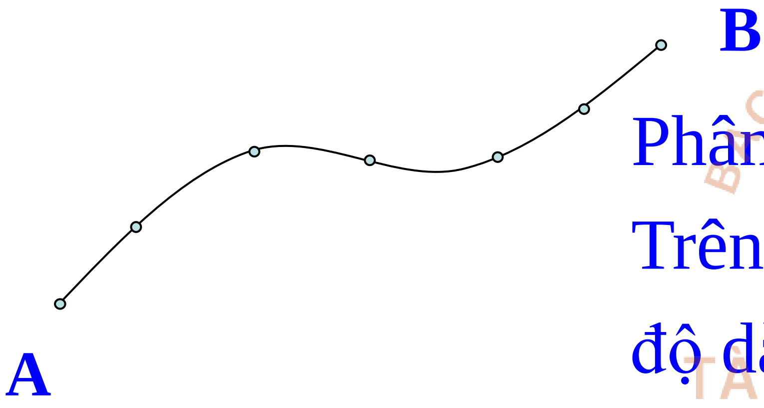
BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH BĂNG CONG



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k$$

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1

Cho AB là đường cong hữu hạn trong mặt phẳng Oxy, f(x,y) xác định trên đường cong.



Phân hoạch cung AB thành những cung C_k. Trên mỗi cung C_k lấy điểm M_k, gọi Δl_k là độ dài cung C_k, tính tổng tích phân

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k$$

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{n\to\infty} S_n$$: tp đường loại 1 của *f* trên AB

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

1. Tính độ dài cung: $L_C = \int_C dl$

2. Diện tích phần dải trụ có đường sinh song song với trục Oz nằm giữa 2 mặt cong $z_1 = f(x, y)$ và $z_2 = f(x, y)$:

$$S = \int_C |z_1 - z_2| dl$$

3. Khối lượng của sợi dây kim loại có hàm mật độ tuyến tính là $\rho(x, y)$:

$$m = \int_C \rho(x, y) dl$$

Ứng dụng thực tế của tích phân đường loại 1

1. Cho C là 1 cung phẳng có hàm khối lượng riêng $\rho(x, y)$

* Khối lượng của C: $m = \int_C \rho(x, y)\, dl$

* Moment của C đối với trục Ox: $M_x = \int_C y\rho(x, y)\, dl$

* Moment của C đối với trục Oy: $M_y = \int_C x\rho(x, y)\, dl$

* Tọa độ trọng tâm C: $x_C = \frac{M_y}{m}, y_C = \frac{M_x}{m}$

2. Cho C là 1 cung phẳng có hàm khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$

* Khối lượng của C: $m = \int_C \rho(x, y, z)\, dl$

* Moment của C đối với trục Ozx: $M_{zx} = \int_C y\rho(x, y, z)\, dl$

* Moment của C đối với trục Oyz: $M_{yz} = \int_C x\rho(x, y, z)\, dl$

* Moment của C đối với trục Oyz: $M_{xy} = \int_C z\rho(x, y, z)\, dl$

* Tọa độ trọng tâm C: $x_C = \frac{M_{yz}}{m}, y_C = \frac{M_{xz}}{m}, z_C = \frac{M_{xy}}{m}$

TÍNH CHẤT TP ĐƯỜNG LOẠI 1

1/ Tp đường loại 1 không phụ thuộc chiều đường đi

$$2/\ L = \int_{AB} 1dl \quad = \text{độ dài cung AB}$$

$$3/\ \int_{AB} c.fdl = c\int_{AB} fdl\ ,\ \int_{AB} (f+g)dl = \int_{AB} fdl + \int_{AB} gdl$$

$$4/\ C = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \int_{C} fdl = \int_{C_1} fdl + \int_{C_2} fdl$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 1

TH1: (C) dạng tham số:

$$x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt}$$

TH2: (C) trong tọa độ Descartes $y = y(x), a \le x \le b$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx}$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 1

<u>TH3</u>: (C) trong tọa độ cực $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}$$

(C) là đường cong trong không gian

(C) viết dạng tham số:

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2$

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt}$$

Lưu ý: nếu $C = C_1 \cup C_2$ (trong R_2)đối xứng qua trục x = 0:

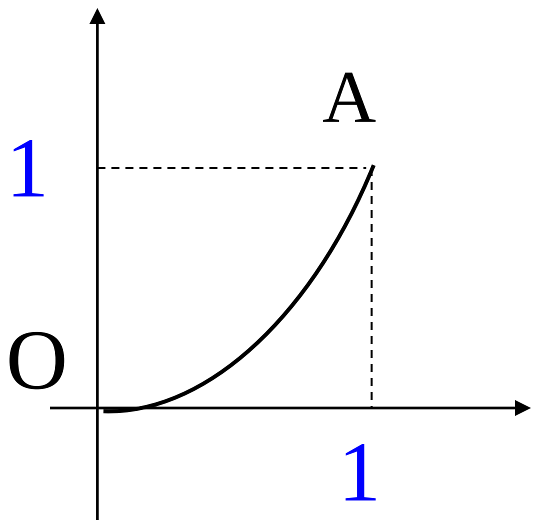
- f lẻ theo x: $$\int_C f(x,y)dl = 0$$

- f chẵn theo x: $$\int_C f(x,y)dl = 2\int_{C_1} f(x,y)dl$$

* Trên R_3, xét tính đối xứng qua các mặt tọa độ.

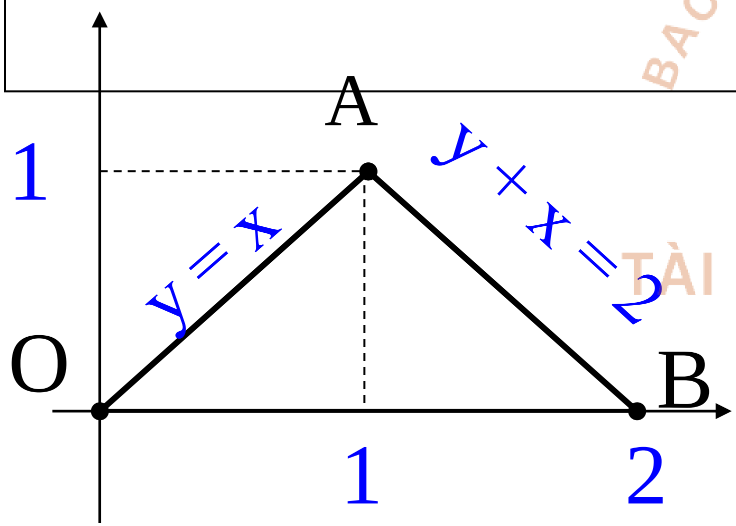
Ví dụ

1/ Tính $\quad I = \int\limits_C x\,dl, \quad C: y = x^2, O(0,0) \to A(1,1)$



Ví dụ

2/ Tính $I = \int_C (x+y)dl$ C là biên tam giác OAB, với O(0, 0), A(1, 1), B(2, 0)



$$I = \int_{OA} (x+y)dl + \int_{AB} (x+y)dl + \int_{OB} (x+y)dl$$

6/ Tính $I = \int_C (x + y^2) dl$ C là biên miền phẳng

$D: x = 4 - y^2, y - x = 2.$

7/ Tính $I = \int_C xy dl$ với $C: x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$

8/ Tính $I = \int_C \left(x^2 + y^2\right) dl$ với C là nửa đường tròn

$x^2 + y^2 = 2x, x \geq 1$

9/ Tính $I = \int_C 2x dl$, với C là giao tuyến của

$x^2 + y^2 = 4, x + z = 4$

Tính diện tích phần mặt trụ $y = x^2$, ứng với $0 \leq x \leq 2$ song song với trục Oz giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$ và mặt $x + y + z = 2$.

Một dây mỏng không đồng chất có dạng là một phần của ellipse $x^2+\frac{y^2}{3}=1$ đi từ điểm A(0;1) đến giao điểm thứ nhất của ellipse với đường thẳng $y=x\sqrt{3}$ lấy ngược chiều kim đồng hồ. Biết mật độ khối lượng tại mỗi điểm là $\rho(x,y)=|y|$. Tính khối lượng của dây mỏng đó.

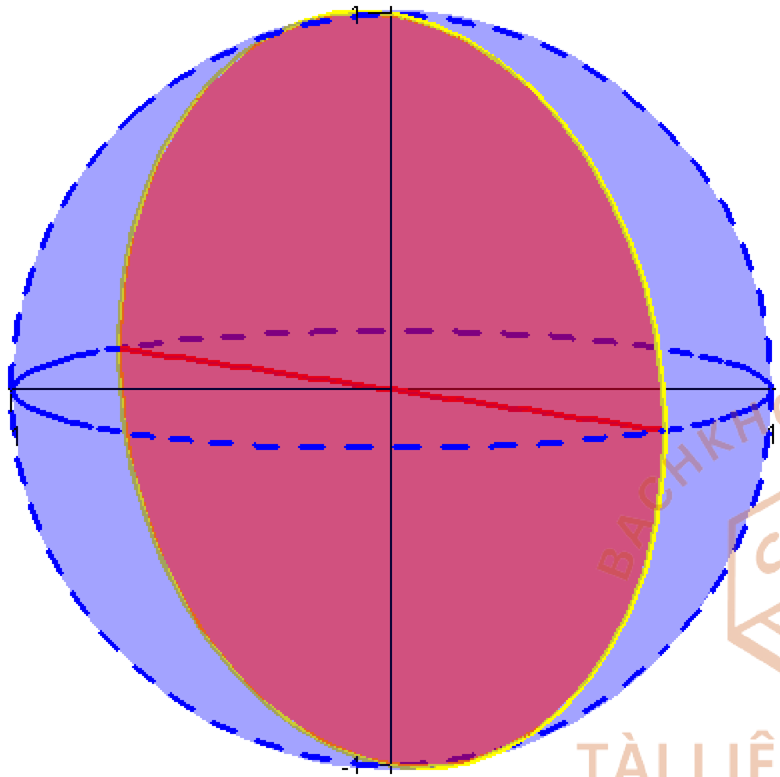
3/ Tính $I = \int\limits_C \sqrt{2x^2 + z^2}\,dl$, C là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mp $y = x$

Hình chiếu của C lên mp Oxz là ellipse:

$$2x^2 + z^2 = 1$$

C có dạng tham số là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, z = \sin t, y = x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, z = \sin t, \\ y = x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$I = \int_C \sqrt{2x^2 + z^2}\,dl = \int_0^{2\pi} 1.1\,dt = 2\pi$$

4/ Tính $I=\int\limits_C xzdl$ với C là phần giao tuyến của

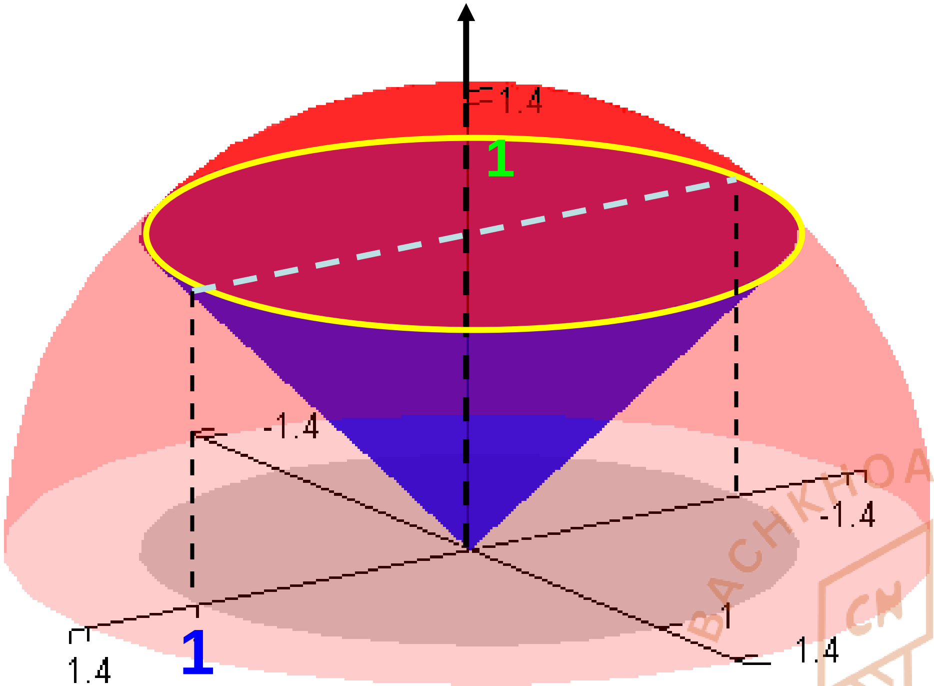
$$x^2+y^2+z^2=2, z=\sqrt{x^2+y^2},$$

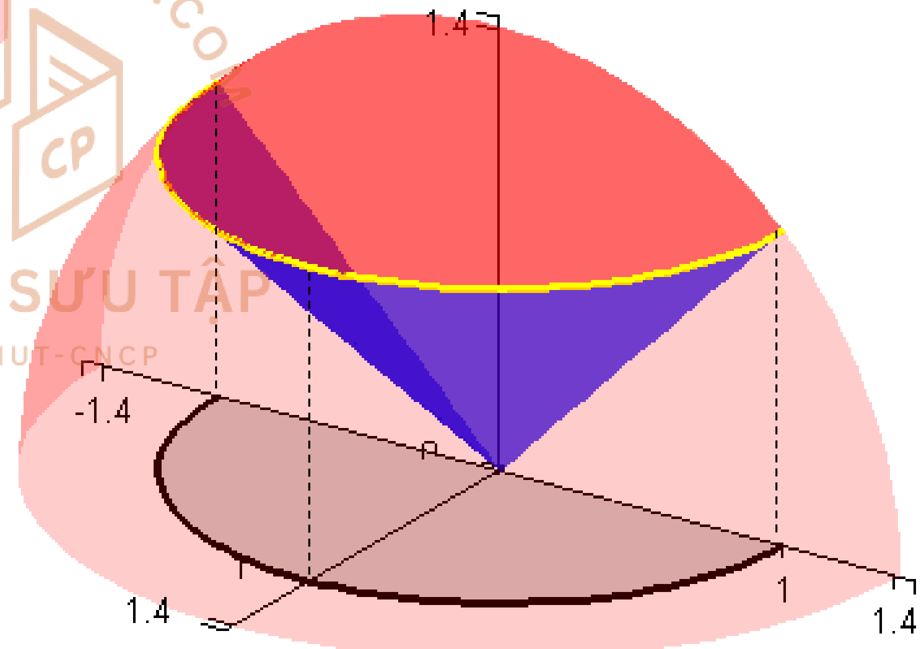
trong vùng : $x\geq 0$

Tham số hóa của C:

$$\begin{cases} z=1, x^2+y^2=1 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\cos t, y=\sin t, z=1 \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I=\int\limits_C xzdl=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t.1\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+0}dt \quad =2$$


1.4
1
-1.4
-1.4
1
1.4
1.4
1


1.4
-1.4
0
1
1.4
1
1.4

5/ Tính $I = \int\limits_C x^2 dl$ với C là phần giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mp $x + y + z = 0$

Việc tham số hóa cho C rất phức tạp.

<u>Nhận xét</u>: vai trò của x, y, z như nhau trên đường cong C.

$$I = \int\limits_C x^2 dl = \int\limits_C y^2 dl = \int\limits_C z^2 dl = \frac{1}{3}\int\limits_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl$$

$$\int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl = \int_C 4dl = 4L$$

với L là độ dài cung C.

Vì mp đi qua tâm của mặt cầu, nên C là đường tròn có bán kính là bán kính mặt cầu.

Vậy: $$L = 2\pi \times 2 = 4\pi \Rightarrow I = \frac{16\pi}{3}$$

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

NỘI DUNG

1. Bài toán Vật lý dẫn đến tích phân đường loại 2.
2. Định nghĩa tp đường loại 2.
3. Tính chất tp đường loại 2.
4. Cách tính tp đường loại 2.
5. Định lý Green.
6. Tích phân không phụ thuộc đường đi.

Bài toán Vật lý dẫn đến tích phân đường loại 2

$\vec{F}$: lực không đổi

BC : đoạn thẳng

$$A = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\alpha = \vec{F}.\overrightarrow{BC}$$

Bài Toán Vật Lý dẫn đến TP đường loại 2

Công của lực $\overrightarrow{F}$ để di chuyển chất điểm M từ điểm B đến điểm C theo đường thẳng BC

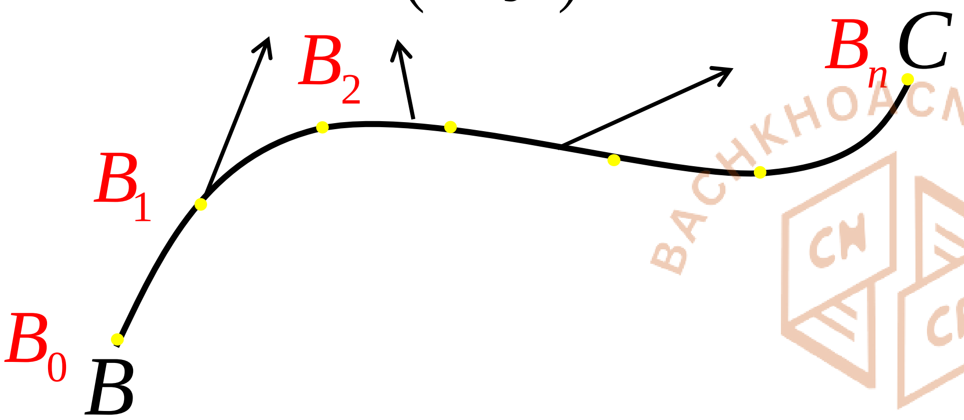
$$A = \left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\alpha = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{BC}$$

Bài toán đặt ra: hãy tính công của lực $\overrightarrow{F}$ để di chuyển chất điểm M từ B đến điểm C theo một đường cong trơn nối điểm B với điểm C trong (Oxy)

Bài toán Vật lý dẫn đến tích phân đường loại 2

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y)$$

$$BC = \bigcup_{k=0}^{n-1} C_k = \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k B_{k+1}$$



Khi L(C_k) bé, $C_k = B_k B_{k+1} \approx \overline{B_k B_{k+1}}$

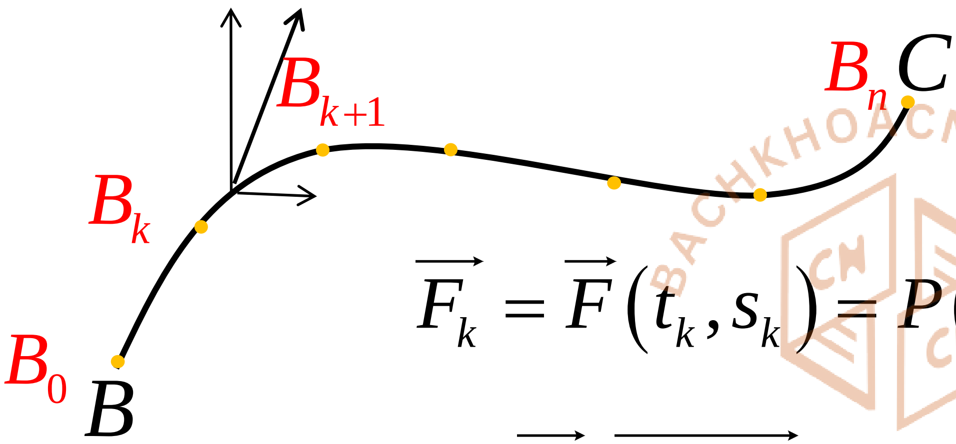
$\vec{F}$ xem như không đổi trên C_k.

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

Bài toán Vật lý dẫn đến tích phân đường loại 2

$$\overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{F}(t_k, s_k)$$

$$\overrightarrow{B_k B_{k+1}} = (\Delta x_k, \Delta y_k)$$



$$\overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{F}(t_k, s_k) = P(t_k, s_k)\vec{i} + Q(t_k, s_k)\vec{j}$$

$$A_k = \overrightarrow{F_k} . \overrightarrow{B_k B_{k+1}} = P(t_k, s_k)\Delta x_k + Q(t_k, s_k)\Delta y_k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(t_k, s_k)\Delta x_k + Q(t_k, s_k)\Delta y_k \right]$$

$$A = \lim_{\substack{L(C_k)\to 0 \\ (n\to\infty)}} S_n$$ (Nếu tồn tại hữu hạn)

Bài 1: Tìm công sinh bởi trường lực $F(x,y) = x^2 i - xyj$ khi di chuyển một hạt dọc theo một phần tư đường tròn:

$$r(t) = cost\, i + \text{sint}\, j\ , 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

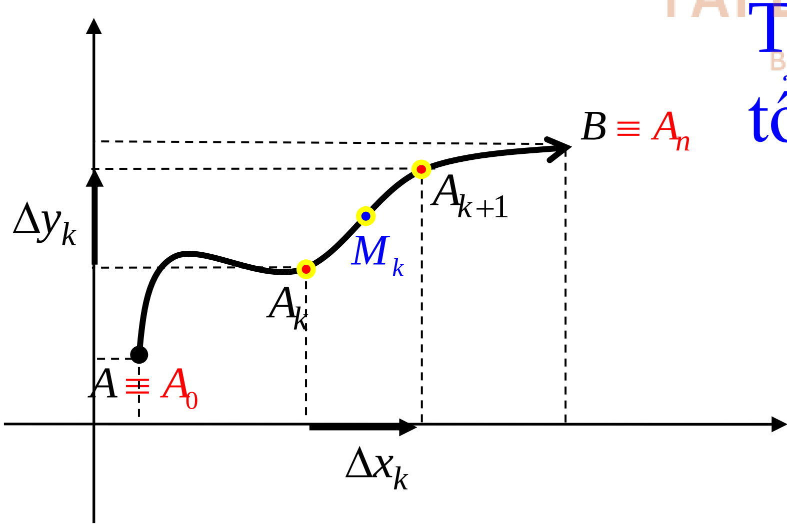
Bài 2: Tính $\int_C F.dr$, trong đó $F(x,y,z) = xy\, i + yz\, j + zx\, k$ và C là đường xoắn bậc 3 được cho bởi: $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \le t \le 1$.

ĐỊNH NGHĨA

Trong mp *Oxy*, cho cung *AB* và 2 hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên *AB*.

Phân hoạch *AB* bởi các điểm $\{A_0, A_2, .., A_n\}$, với $A_0 = A$, $A_n = B$. Giả sử $A_k = (x_k, y_k)$, $k = 0,\ldots,n$.

Gọi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $k = 0,\ldots, n\text{-}1$.



Trên cung A_kA_{k+1}, lấy điểm M_k , xét tổng tp

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k\right]$$

$$\boxed{\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

TÍNH CHẤT TP ĐƯỜNG LOẠI 2

1. Tp đường loại 2 phụ thuộc vào chiều đường đi

$$\int_A^B Pdx + Qdy = -\int_B^A Pdx + Qdy$$

Đổi chiều đường đi thì tp đổi dấu.

2. Nếu $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 2

Khi tham số hóa đường cong, lưu ý về chiều đường đi.

TH1: (C) viết dạng tham số $x = x(t), y = y(t)$,

t_1 :điểm đầu, t_2: điểm cuối

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] dt$$

TH2: (C) viết dạng $y = y(x)$,

$x = a$: điểm đầu, $x = b$: điểm cuối

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$$

TH3: (C) viết dạng $x = x(y)$,

$y = c$: điểm đầu, $y = d$: điểm cuối

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy$$

Lưu ý

Khi tham số hóa cho cung tròn, ellipse, ngược chiều kim đồng hồ là tham số tăng dần, cùng chiều kim đồng hồ là tham số giảm dần.

Cách tính Tp đường loại 2 trong không gian

$$I = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Cách tính: $(C): x = x(t), y = y(t), z = z(t),$

t_1 :điểm đầu, t_2: điểm cuối

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(-,-,-)y'(t) + R(-,-,-)z'(t) \right] dt$$

VÍ DỤ

1/ Tính: $$I = \int_C x^2dx + xydy$$

C là đoạn nối từ $A(0,0)$ đến $B(1,1)$ theo các đường cong sau đây:

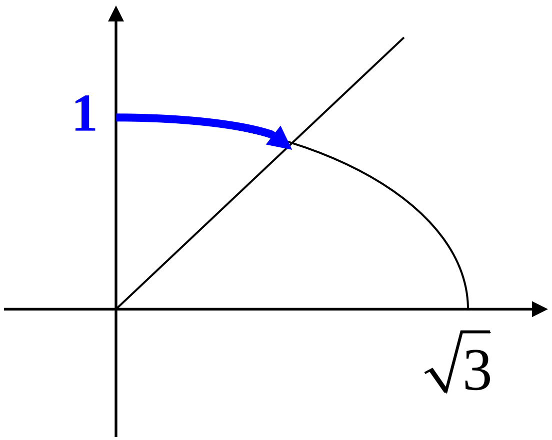
a. Đoạn thẳng AB

b. Parabol: $x = y^2$

c. Đường tròn: $x^2+y^2 = 2y$, lấy ngược chiều KĐH

2/ Tính: $$I = \int_C 2y\,dx + x\,dy$$

với C là cung ellipse $x^2 + 3y^2 = 3$ đi từ (0, 1) đến giao điểm đầu tiên của ellipse với đường thẳng $y = x$, lấy theo chiều KĐH.



Cho C là biên miền phẳng giới hạn bởi $x = 4 - y^2$, $y - x = 2$, lấy theo chiều kim đồng hồ.

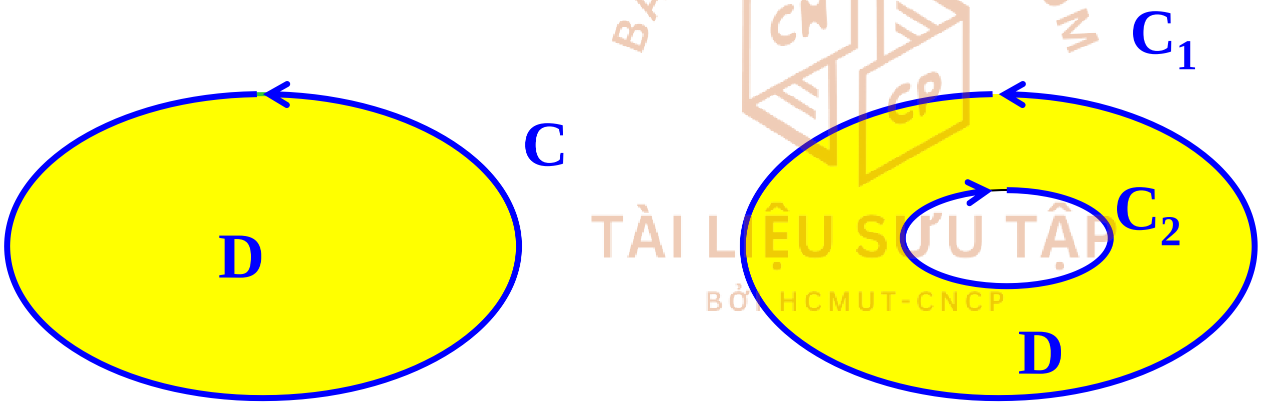
Tính $I = \int_C (2y - x)dx + (x + 2)dy$

Cho C là cung cardioid $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $\varphi: 0 \to \pi$

Tính $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}dx - 2dy$

CÔNG THỨC GREEN

<u>Định nghĩa</u>: Nếu chu tuyến C (đường cong kín) là biên của miền $D \subset R_2$, chiều dương của C là chiều mà đi trên đó, miền D nằm về bên trái.



Định lý

D là miền đóng và bị chặn trong R_2, C là biên định hướng dương của D. Giả sử P, Q và các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(Công thức Green)

Lưu ý:

C có thể gồm nhiều chu tuyến giới hạn miền D.

Ứng dụng tính diện tích phẳng

Trong công thức Green, lấy $P=-y, Q=x$ ta được

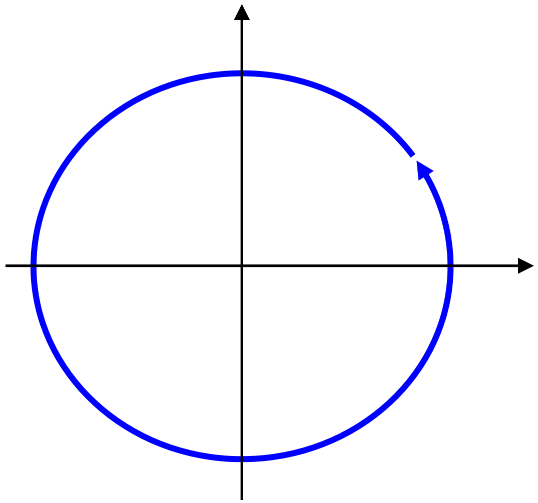
$$\oint_C xdy - ydx = 2\iint_D dxdy = 2S(\mathrm{D})$$

Vậy diện tích miền D trên biên C là

$$S(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \oint_C xdy = \oint_C -ydx$$

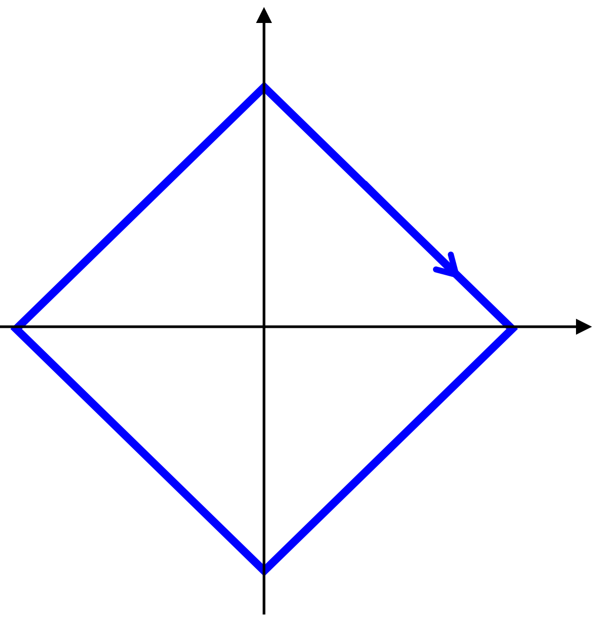
VÍ DỤ

1/ Tính: $I = \int\limits_C x^2 y dx - \left(x + x^2\right) y^2 dy$ trong đó C là đtròn $x^2 + y^2 = 1$, lấy ngược chiều KĐH.



2/ Tính: $$I = \int_C (x - 2y)dx + (3x^2 + y)dy$$

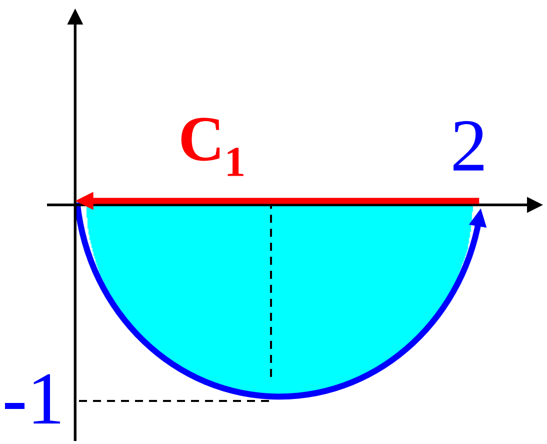
C = {(x, y)/ |x| + |y| = 1} , lấy theo chiều KĐH.



3/ Tính:

$$I = \int_C (x^2 + y\cos xy)dx + (\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy)dy$$

C là nửa dưới đt $x^2 + y^2 = 2x$, ngược chiều KĐH



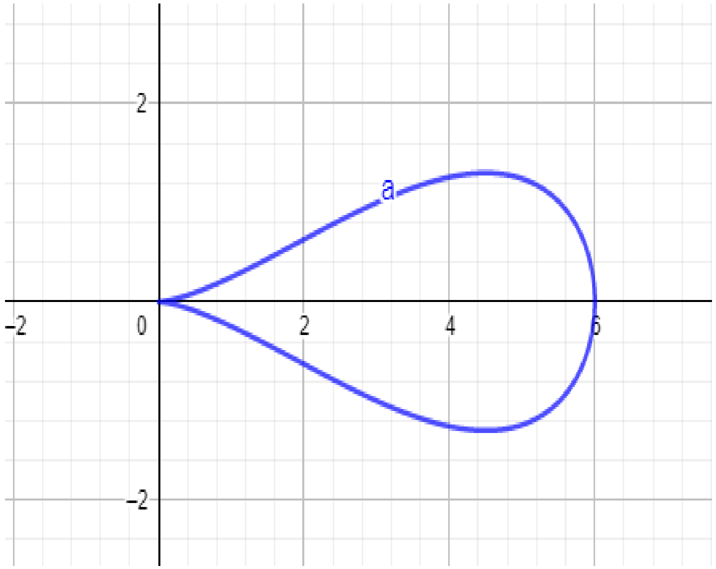
Tính công do lực $F(x,y) = (x^2 + xy).i + (y - x^2y).j$ làm dịch chuyển chất điểm dọc theo đường cong $\left(x(t), y(t)\right) = (1 - t, \frac{1}{t})$ từ điểm (0,1) đến (-1; $\frac{1}{2}$).

Một hạt bắt đầu tại điểm (-2;0) di chuyển dọc theo trục x đến (2;0) và rồi dọc theo nửa đường tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$ đến điểm bắt đầu. Tìm công sinh ra trên hạt này bởi trường lực

$$F(x, y) = x.i + (x^3 + 3xy^2).j$$

Tính tích phân $I = \int_C (2x + 3y)dx - (2x - 3y)dy$, với C là biên miền phẳng D: $y = 1 - |1 - x|$, $y = -2x + x^2$, lấy cùng chiều KĐH.

Miền D được tạo bởi $(C): \begin{cases} x = 3(1 + sint) \\ y = cost(1 + sint) \end{cases}$, theo hướng tăng tham số t từ $0 \to 2\pi$. Dùng công thức Green $S = \int_C -ydx$ để tính miền D



Tính tích phân $I = \int_C \left(\frac{3x^2}{y} + 2xy\right) dx + \left(x^3 y - \frac{x^3}{y^2}\right) dy$, với C là phần đường parabol $y = 2 - x^2$, đi từ điểm (-1;1) đến (1;1).

4/ Cho $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, kiểm tra: $P'_y = Q'_x$

Tính : $I = \int_C Pdx + Qdy$ trong các TH sau:

a)C là đtr $x^2 + y^2 = R^2, R > 0$ tùy ý.

b)C là biên hình chữ nhật $1 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$

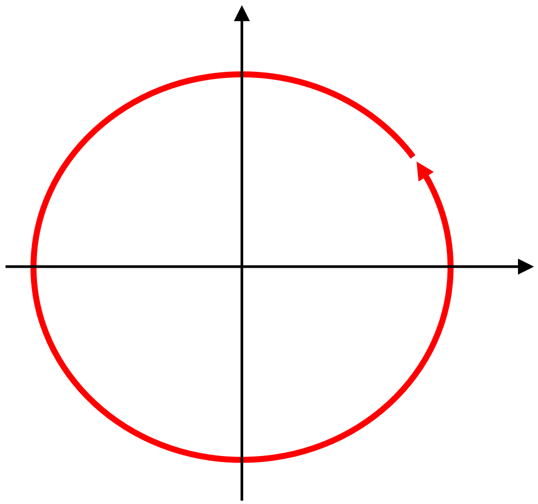
c)C là biên của miền D: $y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$

Các đường cong đều lấy ngược chiều KĐH.

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$Q'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = P'_y$$

a) C là đtr $x^2 + y^2 = R^2, R > 0$



Vì P, Q và các đạo hàm riêng không xác định tại (0, 0) nên không thể áp dụng công thức Green trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Tham số hóa C: $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q = \dfrac{x}{x^2+y^2},$

$$\begin{cases} x = R\cos t, y = R\sin t \\ t: 0 \to 2\pi \end{cases}$$

$$I = \int_C P dx + Q dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t(-R\sin t) + R\cos t(R\cos t)}{R^2} dt$$

$$= 2\pi$$

Nhận xét: trên đường tròn C, do $x^2 + y^2 = R^2$, thay vào tp ta có

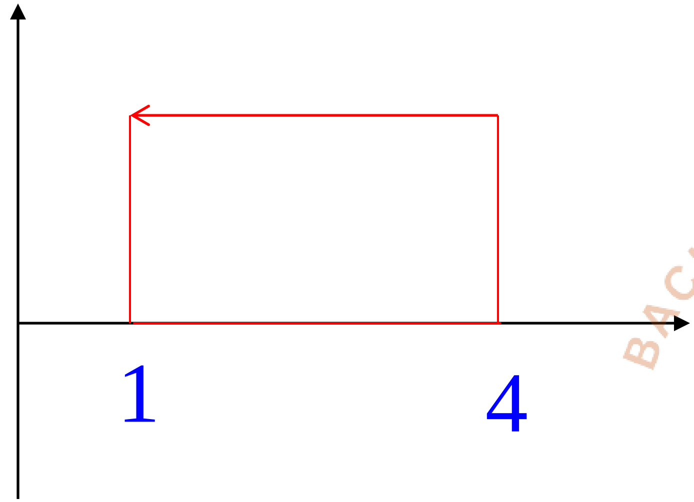
$$I = \int_C Pdx + Qdy = \int_C \frac{-ydx + xdy}{R^2}$$

Lúc này : $P = -\frac{y}{R^2}, Q = \frac{x}{R^2},$ xác định tại (0, 0).

$\Rightarrow$ Áp dụng ct Green được

$$I = \int_C \frac{-ydx + xdy}{R^2} = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{-1}{R^2} \right) dxdy = 2\pi$$

b)C là biên hcn $1 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$

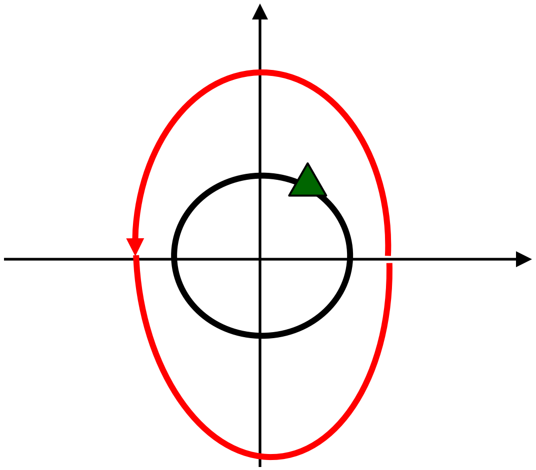


Áp dụng ct Green trên hình tròn biên C

$$I = \int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$

$$= 0$$

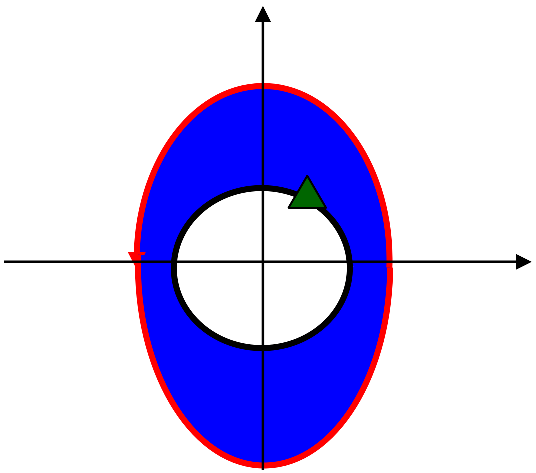
c)C là biên của D: $y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$



Không thể áp dụng ct Green trên miền D (P, Q không xác định tại (0,0)).

Dùng 1 đường tròn C' đủ nhỏ bao gốc O (hoặc 1 đtròn đủ lớn bao cả đường cong C). Áp dụng ct Green trên hình vành khăn (HVK) giới hạn bởi C và C'(hình vành khăn sẽ không chứa (0,0)).

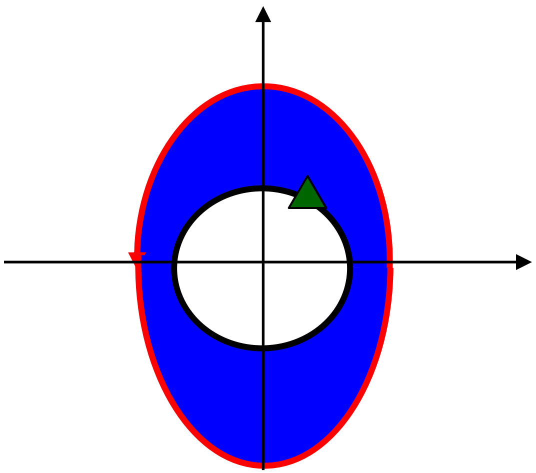
c)C là biên của D: $y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$



Không thể áp dụng ct Green trên miền D (P, Q không xác định tại (0,0)).

Dùng 1 đường tròn C' đủ nhỏ bao gốc O (hoặc 1 đtròn đủ lớn bao cả đường cong C). Áp dụng ct Green trên hình vành khăn (HVK) giới hạn bởi C và C'(hình vành khăn sẽ không chứa (0,0)).

$C': x^2 + y^2 = R^2$ lấy cùng chiều KĐH



$$I = \int\limits_{C \cup C'} Pdx + Qdy$$

$$= \iint\limits_{HVK} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy \; = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{C} Pdx + Qdy = -\int\limits_{C'} Pdx + Qdy \; = 2\pi \text{(theo câu a)}$$

Nhận xét: khi tính tp trong câu c) theo cách này, không sử dụng tham số hóa của đc (C),

Nếu C là đường cong tùy ý bao gốc O?

TÍCH PHÂN KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG ĐI

Định nghĩa: Miền đơn liên là miền mà mọi chu tuyến trong miền này có thể co về 1 điểm trong miền(không chứa lỗ thủng).

TÍCH PHÂN KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG ĐI

D là miền mở đơn liên. P, Q và các đạo hàm riêng liên tục trên D. Các điều sau tương đương:

1/ $\int\limits_A^B Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối A, B

2/ $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ với mọi chu tuyến trong D

3/ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

4/ *Tồn tại hàm U(x, y) thỏa:* $dU = Pdx + Qdy$

Chứng minh $3 \Leftrightarrow 4$

Gs: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ và $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Khi đó: $U'_x(x,y) = P(x,y)$ $\left(U'_y(x,y) = Q(x,y)\right)$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + U(x_0,y)$$

$$\Rightarrow U'_y(x,y) = \int_{x_0}^{x} P'_y(t,y)dt + U'(x_0,y)$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} Q'_x(t,y)dt + U'(x_0,y)$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} Q'_x(t,y)\,dt + U'(x_0,y)$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + U'(x_0,y)$$

Chọn

$$\Rightarrow U'(x_0,y) = Q(x_0,y) \Rightarrow U(x_0,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + U(x_0,y)$$

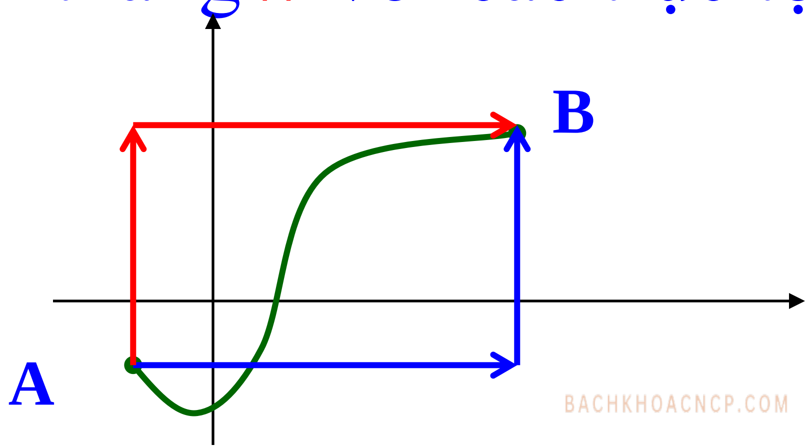
$$= \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt$$

Áp dụng

1. Thông thường ta sẽ kiểm tra điều kiện 3 và tính liên tục của các hàm.

2. Nếu kiểm tra được điều kiện 3, có 2 cách tính tp từ A đến B.

C_1: Đổi đường lấy tp thông thường đi theo các đoạn thẳng // với các trục tọa độ



Lưu ý miền D

C_2: với hàm U trong đk 4 (chỉ chọn cách này nếu đoán nhanh hàm U)

$$\int_A^B Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

Cách tìm U:

C_1: Tìm U từ hệ : $U'_x = P$, $U'_y = Q$

C_2: chọn (x_0, y_0) tùy ý trong D

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

$$hay \quad U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

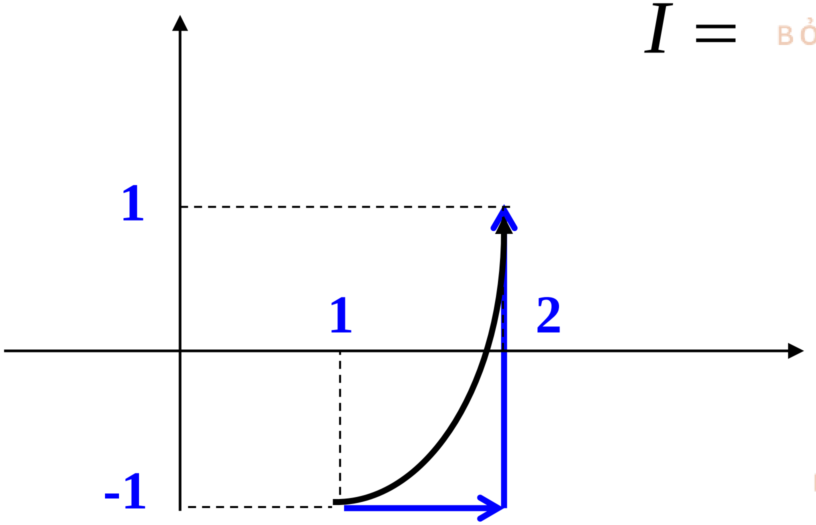
VÍ DỤ

1/ Tính : $I = \int_C y\,dx + x\,dy$

C: $y = 2x^2 - 4x + 1$ từ (1, -1) đến (2,1).

P'$_y$ = Q'$_x$ trên R_2 nên tp không phụ thuộc đường đi.

$$I = \int_1^2 -1\,dx + \int_{-1}^1 2\,dy \quad = 3$$



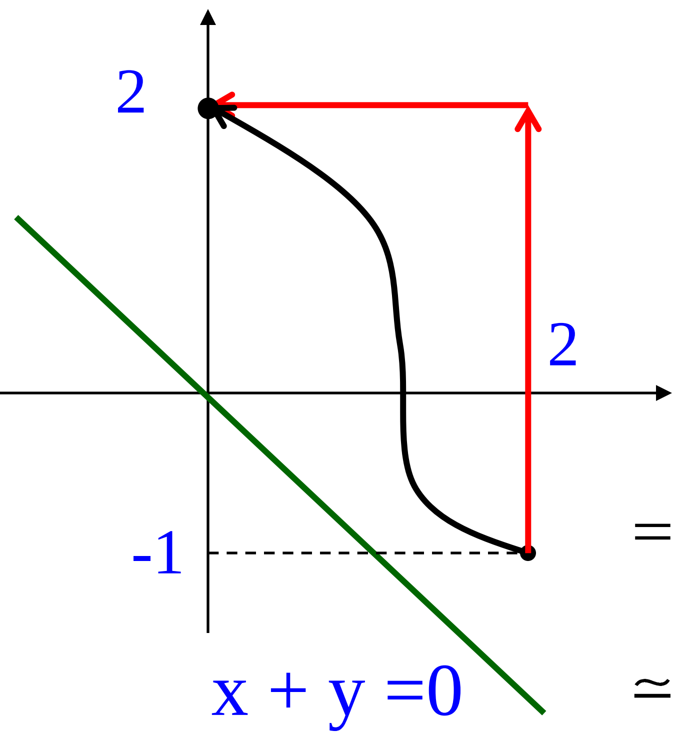
Cách khác: nhận thấy hàm $U(x, y) = xy$ thỏa

$$dU = ydx + xdy \text{ trên } R_2 \text{ nên}$$

$$I = U(2, 1) - U(1, -1) = 2 + 1 = 3$$

2/ Tính : $$I = \int_{(2,-1)}^{(0,2)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

Theo đường không cắt đường thẳng x + y = 0



$P'_y = Q'_x, \quad \forall (x,y): x + y \neq 0$

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{ydy}{(2+y)^2} + \int_{2}^{0} \frac{(x+4)dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left(\frac{2}{x+2} + \ln(x+2) \right)\Bigg|_{-1}^{2} + \left(\ln(x+2) - \frac{2}{x+2} \right)\Bigg|_{2}^{0}$$

$$\simeq \ln 2 - 2$$

Hoặc(tính U): chọn $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$U(x,y) = \int_1^x \frac{(t+0)dt}{(t+0)^2} + \int_0^y \frac{tdt}{(x+t)^2}$$

$$= \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} - 1$$

3/ Tìm các hằng số a, b sao cho tp

$$\int_A^B (axy^2 + 3y)dx + [(b-2)x^2y + (a+b)x]dy$$

không phụ thuộc đường đi. Sau đó, với a, b vừa tìm được, tính tp với A(-1, 2), B(0,3).

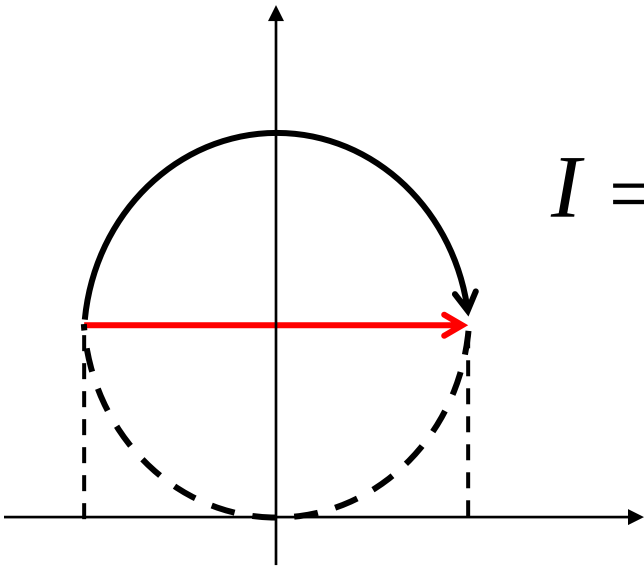
$$P'_y = Q'_x \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \qquad U(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + 3xy$$

$$\int_A^B Pdx + Qdy = U(B) - U(A) = 5$$

4/ Tìm hàm số h(y) thỏa h(1) = 1 sao cho tp

$$\int_A^B (2xy+3)h(y)dy - y^2h(y)dx$$

không phụ thuộc đường đi. Sau đó, với h vừa tìm được, tính tp với A(-1,1), B(1,1) theo đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, lấy cùng chiều KĐH.



$$I=\int_A^B (2xy+3)h(y)dy - y^2h(y)dx$$

$$P'_y = Q'_x \Rightarrow h(y)=\frac{1}{y^4}$$

$$I=\int_{(-1,1)}^{(1,1)} -\frac{dx}{y^2}+\left(\frac{2x}{y^3}+\frac{3}{y^4}\right)dy$$ theo nửa trên đường tròn

Đổi đường lấy tp: chọn đường thẳng nối A, B.

$$I=\int_{-1}^{1} -\frac{dx}{1^2} = -2$$

1) Công thức Green: $\begin{cases} Đường\ cong\ (C)\ kín \\ P, Q, đạo\ hàm\ riêng\ liên\ tục \\ Định\ hướng\ dương\ (âm) \end{cases}$

$$\Longrightarrow I = \int_C Pdx + Qdy = \pm \iint_D (Q'_x - P'_y)\mathrm{dxdy}$$

2) Tích phân không phụ thuộc đường đi:

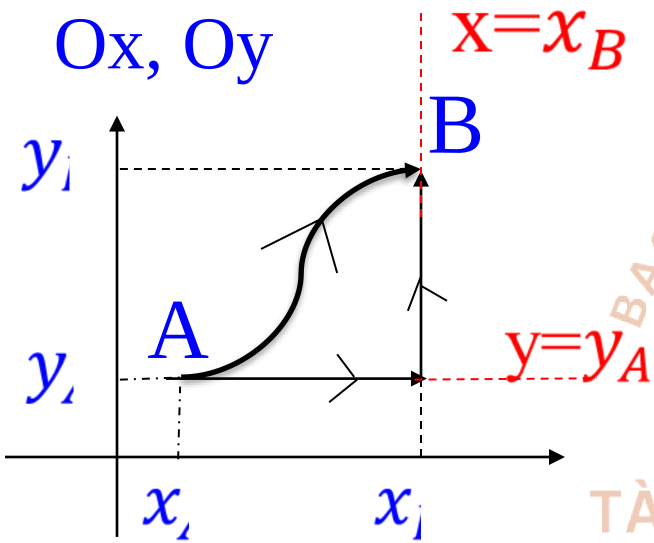
Đk: P,Q, đạo hàm riêng liên tục

Bước 1: Kiểm tra $Q'_x = P'_y$

$$\left[\begin{array}{l} Nếu\ (C) khép\ kín\ \Rightarrow I = 0 \\ Nếu\ (C) không\ kín \Rightarrow bước\ 2 \end{array}\right.$$

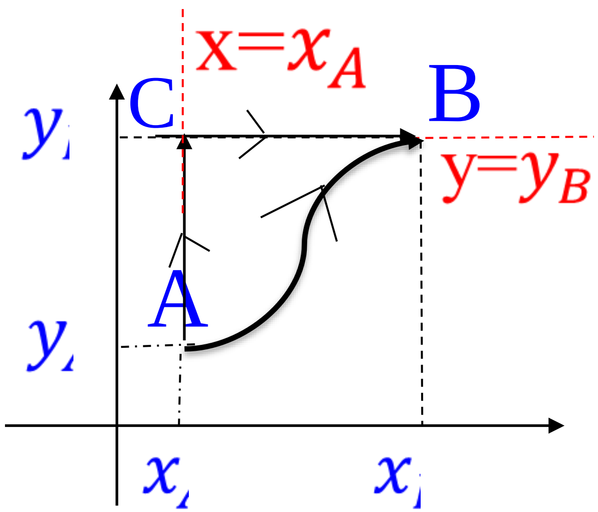
Bước 2: có 2 cách tính

- Cách 1: Đổi đường lấy tích phân: những đường song song Ox, Oy



$$I=\int_C=\int_{AC}+\int_{CB}$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}P(x,y_A)dx+\int_{y_A}^{y_B}Q(x_B,y)dy$$



$$I=\int_C=\int_{AC}+\int_{CB}$$

$$=\int_{y_A}^{y_B}Q(x_A,y)dy+\int_{x_A}^{x_B}P(x,y_B)dx$$

- Cách 2: Tìm hàm u(x,y)

Tồn tại hàm u(x,y) sao cho du=Pdx+Qdy

$$\left.\begin{array}{l} P=u'_x \\ \\ Q=u'_y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y) \\ \\ \Longrightarrow \; u'_y = \left[\int P(x,y)dx\right]'_y + g'(y) = Q \end{array}$$

Đồng nhất 2 vế => g'(y) => g(y) => u(x,y)

* Note: Phải kiểm tra lại du = Pdx+Qdy

Do đó,

$$I = \int_A^B du = u(B) - u(A)$$