BÀI TẬP TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

# 1 Tham số hóa các đường cong trong không gian sau đây.

1. Giao tuyến của mặt phẳng $z = 2y$ và paraboloid $z = x^2 + y^2$.
   $x = \cos t, y = 1 + \sin t, z = 2\sin t, t \in [0, 2\pi]$
2. Giao tuyến của trụ $z = x^2$ và trụ $x^2 + y^2 = 1$ .
   $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos^2 t, t \in [0, 2\pi]$
3. Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $y = x$.
   $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi]$
4. Giao tuyến của mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ và trụ $x^2 + y^2 = 2x$.
   $x = 1 + \cos t, y = \sin t, z = 2\sin \frac{t}{2}, t \in [0, 2\pi]$
5. Giao tuyến của paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và mặt phẳng $x + y = 1$, lấy trong miền $x \geq 0, y \geq 0$.
   $x = t, y = 1 - t, z = 3t^2 - 2t + 1, 0 \leq t \leq 1$
6. Giao tuyến của trụ $x = \frac{y^2}{2}$ và mặt phẳng $z + 2x = 1$, lấy vùng $z \geq 0$.
   $y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = 1 - t^2, t \in [-1, 1]$
7. Giao tuyến của trụ $x = \frac{y^2}{2}$ và mặt phẳng $x - z = 1$, lấy vùng $z \leq 0$.
   $y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^2}{2} - 1, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



# 2 Tính các tích phân đường loại một sau đây

1. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} dl$, trong đó $C$ là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ từ $(0, 0)$ đến $(1, -1)$.
   ĐS : $4 - 2\sqrt{2}$
2. $\int\limits_C x dl$, trong đó $C$ là cung parabol $y = 1 - x^2$ từ $(0, 1)$ đến $(-1, 0)$. ĐS : $\frac{1 - 5\sqrt{5}}{12}$
3. $I = \int\limits_C \frac{x - 2y}{\sqrt{1 + 4x^2}} dl$ trong đó $C$ là cung parabol , $y = 1 - x^2$ từ $A(1, 0)$ đến $B(-2, -3)$. ĐS : $-\frac{3}{2}$
4. $I = \int\limits_C x^2 dl$, trong đó $C$ là đường cong $y = \ln x, 1 \leq x \leq e$. ĐS : $\frac{1}{3}\left[(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$
5. $\int\limits_C z dl$, trong đó $C$ là giao tuyến của nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và trụ $y = \sqrt{2x}$, đi từ điểm từ $(0, 0, 0)$ đến $(2, 2, 2\sqrt{2})$. ĐS : 5.8139
6. $\int\limits_C (zy - 2x) dl$ trong đó $C$ là giao tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng $y = x$ lấy phần nằm dưới mặt phẳng $z = 3$. ĐS : 0

## 3 Tính độ dài các đường cong sau

1. $C$ là cung parabol $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ , $-1 \le x \le 2$. ĐS : 4.1057

2. $C$ là cung cycloid $x = 2(t - \sin t), x = 2(1 - \cos t), 0 \le t \le \pi$. ĐS : $4\sqrt{2}$

## 4 Tính các tích phân đường loại hai theo cách tham số hóa đường cong

1. $I = \int\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy$ , trong đó $C$ là cung parabol $y = 2x^2 + x - 1$, đi từ $A(1, 2)$ đến $B(-3, 14)$. ĐS : $-136$

2. $I = \int_{(0,-2)}^{(1,-1)} (x^2 + y^2)dx + ydy$, theo một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = -2y$. ĐS : $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}$

3. $I = \int\limits_C xydx - (x^2 + y^2 - 2x)dy$, trong đó $C$ là nửa trên của đường tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, lấy ngược chiều kim đồng hồ. ĐS : $-2\pi$

4. $I = \int\limits_C x^2dx + xdy$, trong đó $C$ là cung ellipse $3x^2 + y^2 = 9$, đi từ điểm $(\sqrt{3}, 0)$ đến giao điểm đầu tiên với đường $y = \sqrt{3}x$, lấy theo chiều KĐH. ĐS : $\dfrac{-\sqrt{3}}{8}\left(9\pi + 2\sqrt{2} + 2\right)$

5. $I = \int\limits_C (2x^2 + y)dx - xdy$, trong đó $C$ là biên của miền $D$, giới hạn bởi $y = x^2 - 2x, y = x$, lấy theo chiều kim đồng hồ. ĐS : $\dfrac{9}{2}$

6. $I = \int\limits_C x^2zdx + 2zdy - (x + y)dz$, $C$ là giao tuyến của 2mặt phẳng $z = 3, x + y = 1$ đi từ $A(1, 0, 3)$ đến $B(-1, 2, 3)$. ĐS : $-10$

7. $\int\limits_C \arctan \dfrac{z}{x} dy$, trong đó $C$ là giao tuyến của paraboloid $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ và mặt phẳng $y = x$, lấy phần $z \le 3$, đi ngược chiều KĐH nhìn từ $Ox^+$.ĐS : 0

8. $I = \int\limits_C (x+y)dx + zdz$, trong đó $C$ là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 2x$ và mặt phẳng $z = x$, lấy ngược chiều KĐH nhìn điểm $(1, 0, 0)$. ĐS : $2\pi$

## 5 Tính tích phân sử dụng công thức Green hoặc định lý về tích phân không phụ thuộc đường đi

1. $\oint\limits_C (3x - 2y)dx + (2x^2 - 9y)dy$, với $C$ là biên của miền $D : y = x^2 - 2x, y = x$, lấy ngược chiều KĐH. ĐS : 36

2. $\oint\limits_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \dfrac{x^3}{y}\right) dy$, trong đó $C$ là đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \dfrac{1}{4}$, lấy ngược chiều kim đồng hồ. ĐS : $-\dfrac{\pi}{2}$

3. $\oint\limits_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \dfrac{x^3}{y}\right) dy$, trong đó $C$ là đường $y = e^x, x : -1 \to 1$. ĐS : $-\dfrac{e^2 + 3e^{-2}}{2} - \dfrac{2}{3}$

4. $\oint \left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)\, dy$, trong đó $C$ là biên định hướng âm của miền $D$ : $x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0$. ĐS : $\dfrac{3\pi}{4}$

5. $\int\limits_C xdy - y(1 + xy)dy$, trong đó $C$ là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, đi từ điểm $(2, 0)$ đến điểm $(0, 0)$ theo chiều kim đồng hồ.

6. $\int\limits_C \left(2xy + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} dy$, với $C$ là cung parabol $y = 4 - x^2$ đi từ điểm $(-1, 3)$ đến điểm $(1, 3)$. ĐS : $3 - 3e^{\frac{1}{2}}$

7. $\int\limits_C \left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} dy$, với $C$ là cung parabol $y = 4 - x^2$ đi từ điểm $(-1, 3)$ đến điểm $(0, 4)$. ĐS : $1 - e^{-\frac{1}{3}}$

8. $\int\limits_C \dfrac{x}{x^2 + y^2} dy - \dfrac{y}{x^2 + y^2} dx$, trong đó $C$ là cung $y = \cos x, x : -\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}$. ĐS : $-\pi$

9. $\oint\limits_C e^x \cos y dx + (-2xy - e^x \sin y) dy$, với $C$ là biên của tam giác $ABC, O(-2, 0), B(1, -1), C(1, 1)$, lấy ngược chiếu kim đồng hồ. ĐS : 0.

# 6 Điều kiện để tích phân không phụ thuộc đường đi

1. Tìm các số tự nhiên $m, n$ để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

   $I = \int\limits_C x^m y^{n+1}(3 - 2xy^2)dx + x^{m+1}y^n(4 - 3xy^2)dy.$

   ĐS : $m = 2, n = 3$

2. Tìm hàm số $h = h(x^2 + y^2)$ để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

   $I = \int\limits_C (x - y)\, hdx + (x + y)\, hdy.$

   ĐS : $h = \dfrac{C}{x^2 + y^2}$