GIẢI ÔN TẬP CUỐI KỲ MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2016.

$M = 3.2$

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 2.1x^2 + \sin x - 10 + M = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1,2]$. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

Kết quả. $x_2 \approx$ ________________ ; $\Delta x_2 \approx$ ________________

$M = 3.2$

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 2.1x^2 + \sin x - 10 + M = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1,2]$. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

Kết quả. $x_2 \approx$ ________________ ; $\Delta x_2 \approx$ ________________

Giải. $M = 3.2$, $f(x) = e^x + 2.1x^2 + \sin x - 10 + M$

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) = e^x + 4.2x + \cos x > 0, \forall x \in [1,2]$ và $f''(x) = e^x + 4.2 - \sin x > 0, \forall x \in [1,2]$ nên chọn $x_0 = 2$. Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2.1x_{n-1}^2 + \sin x_{n-1} - 10 + M}{e^{x_{n-1}} + 4.2x_{n-1} + \cos x_{n-1}}$$

$M = 3.2$

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 2.1x^2 + \sin x - 10 + M = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1,2]$. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

Kết quả. $x_2 \approx$ ________________ ; $\Delta x_2 \approx$ ________________

Giải. $M = 3.2$, $f(x) = e^x + 2.1x^2 + \sin x - 10 + M$

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) = e^x + 4.2x + \cos x > 0, \forall x \in [1,2]$ và $f''(x) = e^x + 4.2 - \sin x > 0, \forall x \in [1,2]$ nên chọn $x_0 = 2$. Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2.1x_{n-1}^2 + \sin x_{n-1} - 10 + M}{e^{x_{n-1}} + 4.2x_{n-1} + \cos x_{n-1}}$$

Tìm $\min\{|f'(1)|, |f'(2)|\}$. **Bấm máy.** Shift-$\dfrac{d}{dx}$– chọn $X = 1$ và $X = 2$. So sánh $|f'(1)|, |f'(2)|$. Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = |f'(1)| = m$.

Shift-STO-A.

Do đó sai số của nghiệm gần đúng x_n và nghiệm chính xác $\overline{x}$ là

$$|\overline{x}-x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n}+2.1x_n^2+\sin x_n-10+M|}{m} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.356117092	
2	1.159979536	0.01774

Bấm máy. Tính x_n

$$X-\frac{e^X+2.1X^2+\sin X-10+M}{e^X+4.2X+\cos X}$$

CALC $x=2 \Rightarrow x_1$, CALC Ans $\Rightarrow x_2$
Sai số

$$\frac{abs(e^X+2.1X^2+\sin X-10+M)}{A}$$

CALC Ans $\Rightarrow \Delta x_2$
Kết quả. $x_2 \approx$ 1.1560; $\Delta x_2 \approx$ 0.0178

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 24Mx_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 &= 12.89 \\ 1.34x_1 + 22Mx_2 - 3.24x_3 &= 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 23Mx_3 &= 18.42 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Jacobi, với $x^{(0)} = (0.1, 1.3, 0.4)^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$.

Kết quả. $x_1^{(3)} \approx$ ________; $x_2^{(3)} \approx$ ________; $x_3^{(3)} \approx$ ________

Giải.

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{24M}(12.89 - 2.73x_2 + 1.85x_3) \\ &= \frac{12.89}{24M} - \frac{2.73}{24M}x_2 + \frac{1.85}{24M}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{22M}(15.73 - 1.34x_1 + 3.24x_3) \\ &= \frac{15.73}{22M} - \frac{1.34}{22M}x_1 + \frac{3.24}{22M}x_3 \\ x_3 &= \frac{1}{23M}(18.42 - 1.18x_1 + 4.87x_2) \\ &= \frac{18.42}{23M} - \frac{1.18}{23M}x_1 + \frac{4.87}{23M}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12.89}{24M} \\ \frac{15.73}{22M} \\ \frac{18.42}{23M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2.73}{24M} & \frac{1.85}{24M} \\ -\frac{1.34}{22M} & 0 & \frac{3.24}{22M} \\ -\frac{1.18}{23M} & \frac{4.87}{23M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Khi đó công thức lặp có dạng

$$X^{(m)} = T_j X^{(m-1)} + C_j, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Chọn $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ tính $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$

Bấm máy.

$$X = (12.89 - 2.73B + 1.85C) \div 24M : Y = (15.73 - 1.34A + 3.24C) \div 22M :$$

$$C = (18.42 - 1.18A + 4.87B) \div 23M : A = X : B = Y$$

CALC B=1.3, C=0.4, A=0.1
Nhấn tiếp dấu ”=” cho tới nghiệm $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}$
Kết quả. $x_1^{(3)} \approx \underline{0.1658}$; $x_2^{(3)} \approx \underline{0.2324}$; $x_3^{(3)} \approx \underline{0.2632}$

Câu 3. Cho bảng số

x	1.1	1.6	2.0
y	$2M$	5.7	6.4

.Sử dụng Spline bậc ba $g(x)$ thỏa điều kiện $g'(1.1) = 1.5$ và $g'(2) = 0.5$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.4$ và $x = 1.8$.

Kết quả. $g(1.4) \approx$ ______________ ; $g(1.8) \approx$ ______________

$n = 2, h_0 = 1.6 - 1.1 = 0.5; h_1 = 2.0 - 1.6 = 0.4; \alpha = 1.5; \beta = 0.5$. Hệ số c_0, c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.c_0 + 0.5c_1 + 0.c_2 &= -8.7 \\ 0.5c_0 + 1.8c_1 + 0.4c_2 &= 9.45 \\ 0.c_0 + 0.4c_1 + 1.c_2 &= -3.75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 &= -\dfrac{2611}{180} \\ c_1 &= \dfrac{209}{18} \\ c_2 &= -\dfrac{1511}{144} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 2M = 6.4 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 1.5 \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{1567}{90}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.c_0 + 0.5c_1 + 0.c_2 &= -8.7 \\ 0.5c_0 + 1.8c_1 + 0.4c_2 &= 9.45 \\ 0.c_0 + 0.4c_1 + 1.c_2 &= -3.75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 &= -\dfrac{2611}{180} \\ c_1 &= \dfrac{209}{18} \\ c_2 &= -\dfrac{1511}{144} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 &= y_0 = 2M = 6.4 \\ b_0 &= \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 1.5 \\ d_0 &= \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = \dfrac{1567}{90}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 &= y_1 = 5.7 \\ b_1 &= \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \dfrac{19}{360} \\ d_1 &= \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = -\dfrac{5305}{288}, \end{cases}$$

Chú ý. Nếu tính ra $b_0 \neq \alpha$ thì CHÚNG TA ĐÃ TÍNH SAI vì $b_0 = g'(x_0)$.
Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 2M + 1.5(x-1.1) - \dfrac{2611}{180}(x-1.1)^2 + \dfrac{1567}{90}(x-1.1)^3, x \in [1.1, 1.6] \\ 5.7 + \dfrac{19}{360}(x-1.6) + \dfrac{209}{18}(x-1.6)^2 - \dfrac{5305}{288}(x-1.6)^3, x \in [1.6, 2.0] \end{cases}$$

Kết quả. $g(1.4) \approx$ ____6.0146____ ; $g(1.8) \approx$ ____6.0276____

Câu 4. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7
y	$2M$	2.5	5	4.5	5.5

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x^3+2.5} + B\cos x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Kết quả. $A \approx$ ______________ ; $B \approx$ ______________

Ta có $n = 5$, $p(x) = \sqrt{x^3+2.5}$, $q(x) = \cos(x)$ và

$$\sum_{k=1}^{n} p^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 2.5 = 27.457, \text{ Shift-STO-A}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)q(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^3+2.5}.\cos(x_k) = 1.534696256, \text{ Shift-STO-B.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^3+2.5}.y_k = 55.90980977, \text{ Shift-STO-C.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(x_k) = 0.2533522506, \text{ Shift-STO-D.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q(x_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(x_k).y_k = 3.447345104, \text{ Shift-STO-M.}$$

Hệ phương trình để xác định A, B:

$$\begin{cases} A.A + B.B = C \\ B.A + D.B = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1.928765101 \\ B = 1.923316341 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = 1.9288\sqrt{x^3 + 2.5} + 1.9233\cos(x)$.

Kết quả. $A \approx$ 1.9288 ; $B \approx$ 1.9233

Bấm máy. Shift-Mode-STAT-Frequency-ON

1. Tìm ma trận hệ số
   - Mode 3-STAT - 2: A+BX. Nhập vào cột X là $\sqrt{X^3 + 2.5}$, nhập vào cột Y là $\cos(X)$. AC-thoát ra.
   - Shift - 1 - 4: Sum - 1:$\sum x^2$ = Shift-STO-A
   - Shift - 1 - 4: Sum - 5:$\sum xy$ = Shift-STO-B
   - Shift - 1 - 4: Sum - 3:$\sum y^2$ = Shift-STO-D
2. Tìm cột hệ số tự do.
   - Shift - 1 - 2: Data
   - Nhập giá trị của cột FREQ là giá trị y. AC-thoát ra
   - Shift - 1 - 5: Var - 2:$\overline{x}$ × Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-C
   - Shift - 1 - 5: Var - 5:$\overline{y}$ × Shift - 1 - 5: Var -1:n = Shift-STO-M
3. Giải hệ phương trình: Mode-5:EQN-1:anX+bnY=cn

Câu 5. Cho bảng số:

x	1.1	1.7	2.4	3.3
y	$1.1M$	3.3	α	4.5

;

Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, tìm giá trị của α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ của đạo hàm tại $x = 1.8$ là $y'(1.8) \approx 2.8$

Kết quả. $\alpha \approx$ ______________

Đa thức nội suy Lagrange có dạng sau $\mathscr{L}_3(x) = \sum_{k=0}^{3} p_3^k(x).y_k$, trong đó

$$p_3^0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1.7)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.1-1.7)(1.1-2.4)(1.1-3.3)}$$

$$p_3^1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.7-1.1)(1.7-2.4)(1.7-3.3)}$$

$$p_3^2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-3.3)}{(2.4-1.1)(2.4-1.7)(2.4-3.3)}$$

$$p_3^3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-2.4)}{(3.3-1.1)(3.3-1.7)(3.3-2.4)}$$

$$y'(x) \approx \mathscr{L}_3'(x) =$$

$$= \frac{1.1M}{-1.716}[(x-2.4)(x-3.3)+(x-1.7)(x-3.3)+(x-1.7)(x-2.4)]+$$

$$+\frac{3.3}{0.672}[(x-2.4)(x-3.3)+(x-1.1)(x-3.3)+(x-1.1)(x-2.4)]+$$

$$+\frac{\alpha}{-0.819}[(x-1.7)(x-3.3)+(x-1.1)(x-3.3)+(x-1.1)(x-1.7)]+$$

$$+\frac{4.5}{3.168}[(x-1.7)(x-2.4)+(x-1.1)(x-2.4)+(x-1.1)(x-1.7)]$$

$$\Rightarrow y'(1.8) \approx \frac{1.1M}{-1.716}\times 0.69+\frac{3.3}{0.672}\times(-0.57)+\frac{\alpha}{-0.819}\times(-1.13)+\frac{4.5}{3.168}\times(-0.41)$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(2.8-\frac{1.1M}{-1.716}\times 0.69-\frac{3.3}{0.672}\times(-0.57)-\frac{4.5}{3.168}\times(-0.41)\right)\times\frac{-0.819}{-1.13}$$

$$= 5.506055913$$

Kết quả. $\alpha \approx$ 5.5061

Câu 6. Cho bảng

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$f(x)$	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2M	7.4

của hàm $f(x)$. Sử dụng công thức Simpson mở rộng hãy xấp xỉ tích phân $I=\int_{1.0}^{2.2}\left(Mxf^2(x)+2.5x^2\right)dx$. **Kết quả.** $I\approx$ ____________

$$h=\frac{b-a}{2n}=\frac{2.2-1.0}{2n}=0.2\Rightarrow n=3, x_0=1.0, x_k=1.0+0.2k,$$

$$y_k=Mx_kf^2(x_k)+2.5x_k^2,$$

$$I\approx\frac{h}{3}\sum_{k=0}^{2}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2})=\frac{0.2}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+y_6)$$

Bấm máy. $A=A+\frac{0.2}{3}B(MXY^2+2.5X^2):X=X+0.2$ CALC A=0, B, X, Y được nhập theo bảng sau

X	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
Y	2	3.3	2.4	4.3	5.1	$6.2M$	7.4
B	1	4	2	4	2	4	1

Chú ý. Nhập giá trị Y tương ứng với X. Vậy $I=766.1944107\approx766.1944$

Kết quả. $I\approx$ 766.1944

Câu 7. Cho $A = \begin{pmatrix} 5M & 2.34 & 1.34 & 5.34 \\ 2.23 & 4M & 3.23 & 1.45 \\ 4.23 & 5.21 & 7M & 4.65 \\ 2.34 & 1.56 & 4.21 & 8M \end{pmatrix}$

Sử dụng phân tích $A = LU$ theo Doolittle, tính ℓ_{42}, u_{33}.

Kết quả. $\ell_{42} =$ __________; $u_{33} =$ __________

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$1.u_{11} + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = a_{11} = 5M \Rightarrow u_{11} = 5M$;

$1.u_{12} + 0.u_{22} + 0 \times 0 + 0 \times 0 = a_{12} = 2.34 \Rightarrow u_{12} = 2.34$;

$1.u_{13} + 0.u_{23} + 0.u_{33} + 0 \times 0 = a_{13} = 1.34 \Rightarrow u_{13} = 1.34$.

$1.u_{14} + 0.u_{24} + 0.u_{34} + 0.u_{34} = a_{14} = 5.34 \Rightarrow u_{14} = 5.34$.

$\ell_{21}.u_{11} + 1.0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = a_{21} = 2.23 \Rightarrow \ell_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} = \dfrac{2.23}{5M} = 0.139375$;

$\ell_{21}.u_{12} + 1.u_{22} + 0 \times 0 + 0 \times 0 = a_{22} = 4M \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \ell_{21}.u_{12} = 12.4738625$;

$\ell_{21}.u_{13} + 1.u_{23} + 0.u_{33} + 0 \times 0 = a_{23} = 3.23 \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \ell_{21}.u_{13} = 3.0432375$;

$\ell_{31}.u_{11}+\ell_{31}.0+1\times 0+0\times 0=a_{31}=4.23 \Rightarrow \ell_{31}=\dfrac{a_{31}}{u_{11}}=0.264375;$

$\ell_{31}.u_{12}+\ell_{32}.u_{22}+1\times 0+0\times 0=a_{32}=5.21 \Rightarrow \ell_{32}=\dfrac{a_{32}-\ell_{31}.u_{12}}{u_{22}}=$
$0.3680786525;$

$\ell_{31}.u_{13}+\ell_{32}.u_{23}+1.u_{33}+0\times 0=a_{33}=7M \Rightarrow u_{33}=a_{33}-\ell_{31}.u_{13}-\ell_{32}.u_{23}=$
$20.92558674;$

$\ell_{41}.u_{11}+\ell_{42}\times 0+\ell_{43}\times 0+1\times 0=a_{41}=2.34 \Rightarrow \ell_{41}=\dfrac{a_{41}}{u_{11}}=0.14625;$

$\ell_{41}.u_{12}+\ell_{42}.u_{22}+\ell_{43}\times 0+1\times 0=a_{42}=1.56 \Rightarrow \ell_{42}=\dfrac{a_{42}-\ell_{41}.u_{12}}{u_{22}}=$
$0.09762613625.;$

Kết quả. $\ell_{42}=$ 0.0976 ; $u_{33}=$ 20.9256

Câu 8. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} y' = x - Mx\sin(x+3.5y), & x \geqslant 1.1 \\ y(1.1) = 0.4 \end{cases}$. Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ $y(1.3)$ với bước $h = 0.2$.

Kết quả. $y(1.3) \approx$ ______________

Với $h = 0.2, x_0 = 1.1, x_1 = x_0 + 0.2 = 1.3, y_0 = 0.4$. Ta có

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0.2[x_0 - Mx_0 \sin(x_0 + 3.5y_0)],$$

$$K_2^0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^0}{2}\right),$$

$$K_3^0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^0}{2}\right),$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0).$$

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y(1.3) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) =$$

Bấm máy. $0.2(X - MX\sin(X + 3.5Y))$.

Tính K_1^0. CALC $X = 1.1, Y = 0.4$. $\Rightarrow K_1^0$ Shift-STO-A

Tính K_2^0. CALC $X = 1.1 + \frac{0.2}{2}, Y = 0.4 + \frac{A}{2}$. $\Rightarrow K_2^0$ Shift-STO-B

Tính K_3^0. CALC $X = 1.1 + \frac{0.2}{2}, Y = 0.4 + \frac{B}{2}$. $\Rightarrow K_3^0$ Shift-STO-C

Tính K_4^0. CALC $X = 1.1 + 0.2, Y = 0.4 + C$. $\Rightarrow K_4^0$ Shift-STO-D

$$y(1.3) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) =$$

$$= 0.4 + \frac{1}{6}(A + 2B + 2C + D) = 0.01322395852$$

Kết quả. $y(1.3) \approx \underline{0.0132}$

Câu 9. Cho bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(x) = 2y'' + xy' + x^2y + 2.9M, & 1 \leqslant x \leqslant 1.8 \\ y(1) = M;\ y'(1) = 1.4;\ y''(1) = 1.1 \end{cases}$$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng $y(1.2)$ và $y(1.8)$ với bước $h = 0.2$.

Kết quả. $y(1.2) \approx$ ____________ ; $y(1.8) \approx$ ____________

Đặt $u = y'(x), v = u'(x) = y''(x)$. Phương trình đã cho được biến đổi thành hệ

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y,u,v) = u \\ u'(x) &= g(x,y,u,v) = v \\ v'(t) &= k(x,y,u,v) = 2v + x.u + x^2.y + 2.9M \\ y(1) &= y_0 = M \\ u(1) &= u_0 = y'(1) = 1.4 \\ v(1) &= v_0 = y''(1) = 1.1 \end{cases}$$

Với bước $h = 0.2, x_0 = 1, x_k = x_0 + kh = 1 + 0.2k$.

Theo công thức Euler, ta có

$$\begin{cases} y(x_k) \approx y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}, v_{k-1}) \\ \qquad = y_{k-1} + hu_{k-1} \\ u(x_k) \approx u_k = u_{k-1} + hg(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}, v_{k-1}) \\ \qquad = u_{k-1} + hv_{k-1} \\ v(x_k) \approx v_k = v_{k-1} + hk(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}, v_{k-1}) \\ = v_{k-1} + h(2v_{k-1} + x_{k-1}.u_{k-1} + x_{k-1}^2.y_{k-1} + 2.9M) \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Bấm máy.

$$A = Y + 0.2D : B = D + 0.2E : C = E + 0.2(2E + XD + X^2Y + 2.9M) :$$

$$X = X + 0.2 : Y = A : D = B : E = C$$

CALC $Y = y_0 = M$, $D = u_0 = 1.4$, $E = v_0 = 1.1$, $X = x_0 = 1$, $M = 3.2$, $A =$, $B =$, $C =$. Nhấn dấu '=' ta được $A = 3.48 = y_1 \approx y(1.2)$, $B = 1.62 = u_1$, $C = 4.316 = v_1$. Nhấn dấu '=' ta được y_2, u_2, v_2. Nhấn tiếp dấu '=' đến khi tính CALC tại $X = 1.6$ ta được $y_4 = 5.1688576 \approx y(1.8)$

Kết quả. $y(1.2) \approx$ 3.4800 ; $y(1.8) \approx$ 5.1689

Câu 10. Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2:

$$\begin{cases} (x+3.5)y'' + x^3y' - 30y = Mx(x+1), x \in [0.5;1.5] \\ y(0.5) = M,\ y(1.5) = 2.7 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm $y(x)$ trên đoạn $[0.5;1.5]$ với bước $h = 0.25$.

Kết quả. $y(0.75) \approx$ ________, $y(1) \approx$ ________, $y(1.25) \approx$ ________

$x_0 = 0.5, x_1 = 0.75, x_2 = 1, x_3 = 1.25, x_4 = 1.5.$

$p(x) = x+3.5, q(x) = x^3, r(x) = -30, f(x) = Mx(x+1);$

$p_1 = x_1 + 3.5, p_2 = x_2 + 3.5, p_3 = x_3 + 3.5; q_1 = x_1^3, q_2 = x_2^3, q_3 = x_3^3;$

$r_1 = r_2 = r_3 = -30; f_1 = Mx_1(x_1+1), f_2 = Mx_2(x_2+1), f_3 = Mx_3(x_3+1)$

$$\begin{cases} y_0 = M, y_4 = 2.7 \\ \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right)y_0 + \left(r_1 - \frac{2p_1}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h}\right)y_2 = f_1 \\ \left(\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h}\right)y_1 + \left(r_2 - \frac{2p_2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h}\right)y_3 = f_2 \\ \left(\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h}\right)y_2 + \left(r_3 - \frac{2p_3}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right)y_4 = f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = M, y_4 = 2.7 \\ (r_1 - \frac{2p_1}{h^2})y_1 + (\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h})y_2 + 0y_3 = f_1 - (\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h})y_0 \\ (\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h})y_1 + (r_2 - \frac{2p_2}{h^2})y_2 + (\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h})y_3 = f_2 \\ 0y_1 + (\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h})y_2 + (r_3 - \frac{2p_3}{h^2})y_3 = f_3 - (\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h})y_4 \end{cases}$$

Bấm máy. Mode-5 - EQN.

$$r_1 - \frac{2p_1}{h^2} = -30 - \frac{2 \times (0.75 + 3.5)}{(0.25)^2}.$$

$$\frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} = \frac{0.75 + 3.5}{0.25^2} + \frac{(0.75)^3}{2 \times 0.25}.$$

0

$$f_1 - \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right) y_0 = M \times 0.75(0.75 + 1) - \left(\frac{0.75 + 3.5}{0.25^2} - \frac{(0.25)^3}{2 \times 0.25}\right) \times M$$

$$\frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} = \frac{1+3.5}{0.25^2} - \frac{1^3}{2\times 0.25}$$

$$r_2 - \frac{2p_2}{h^2} = -30 - \frac{2\times(1+3.5)}{(0.25)^2}.$$

$$\frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} = \frac{1+3.5}{0.25^2} + \frac{1^3}{2\times 0.25}$$

$$f_2 = M\times 1\times(1+1)$$

0

$$\frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} = \frac{1.25+3.5}{0.25^2} - \frac{(1.25)^3}{2\times 0.25}$$

$$r_3 - \frac{2p_3}{h^2} = -30 - \frac{2\times(1.25+3.5)}{0.25^2}$$

$$f_3 - \left(\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h}\right)y_4 = M\times 1.25(1.25+1) - \left(\frac{1.25+3.5}{0.25^2} + \frac{(1.25)^3}{2\times 0.25}\right)\times 2.7$$

Nhấn dấu '=' ta được $y_1 = 1.866352997$, $y_2 = 1.43970364$, $y_3 = 1.706266535$.

Kết quả. $y(0.75) \approx \underline{1.8664}$, $y(1.0) \approx \underline{1.4397}$, $y(1.25) \approx \underline{1.7063}$