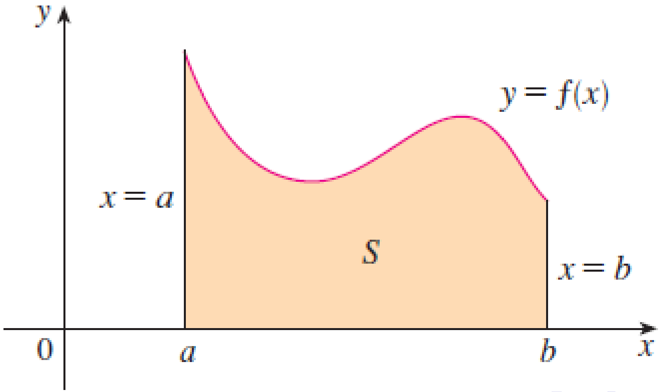
Bài toán diện tích hình thang cong

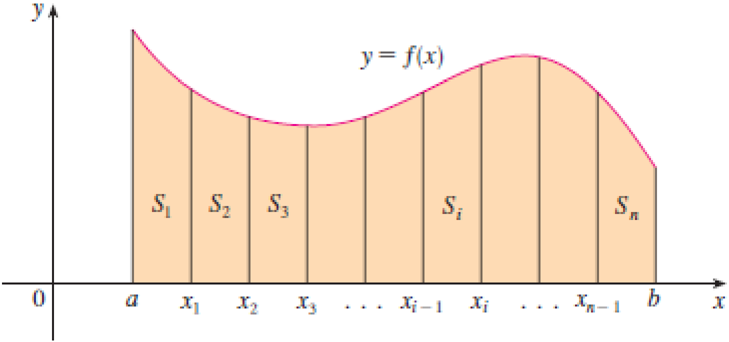
Tìm **diện tích** của miền S nằm bên dưới đường cong $y = f(x)$ từ a đến b

$$S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



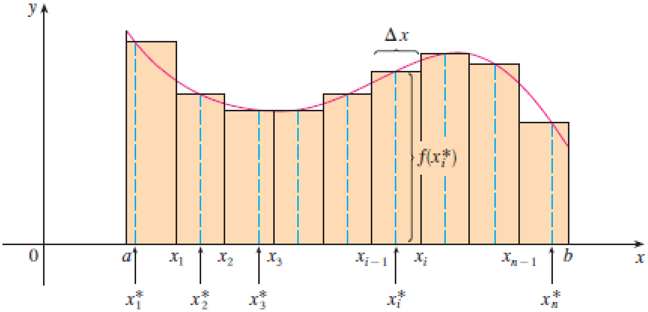
- **Ý tưởng** là chia miền S thành n miền con $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bởi các đường thẳng đứng tại các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



- Sau đó, mỗi hình con S_i được xấp xỉ bởi **hình chữ nhật** với chiều rộng là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và chiều dài là $f(x_i^*)$, trong đó mỗi x_i^* là một **điểm mẫu (sample point)** tùy ý trong mỗi đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$.
- Diện tích của miền S được xấp xỉ bởi tổng các hình chữ nhật:

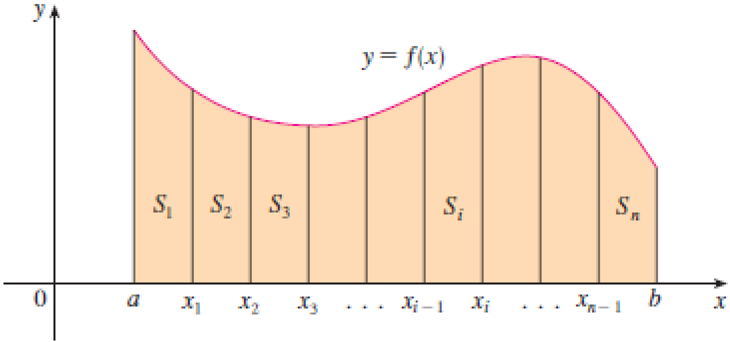
$$\text{Diện tích} \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_1 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_i.$$



- Ta gọi một tập hợp các điểm chia của đoạn $[a, b]$ thỏa mãn

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

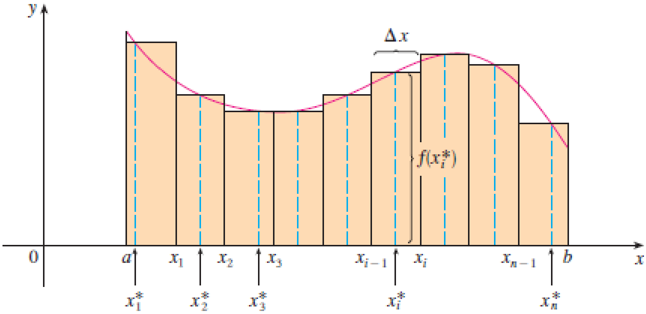
là một **phân hoạch** của $[a, b]$.



- Với mỗi phân hoạch $\mathcal{P}$ của đoạn $[a, b]$, ta gọi

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

là **tổng tích phân** của f ứng với phân hoạch $\mathcal{P}$, trong đó mỗi x_i^* là một **điểm mẫu (sample point)** tùy ý trong $[x_{i-1}; x_i]$.



- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

với mọi phân hoạch $\mathcal{P}$ của đoạn $[a, b]$, thì ta nói f **khả tích** trên $[a, b]$.

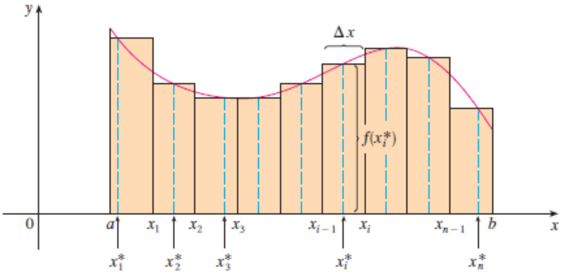
Định nghĩa

Tích phân xác định *(definite intergral) của f từ a đến b là*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

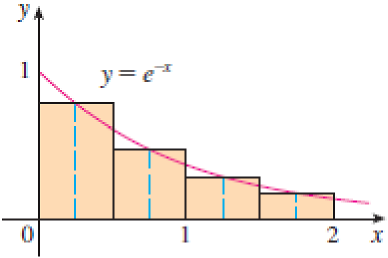
nếu f khả tích trên $[a, b]$.

- Xét tổng tích phân $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$.
- Nếu ta lấy $x_i^* = x_{i-1}$, thì ta gọi là **tổng Riemann trái**.
- Nếu ta lấy $x_i^* = x_i$, thì ta gọi là **tổng Riemann phải**.
- Nếu ta lấy $x_i^* = (x_{i-1} + x_i)/2$, thì ta gọi là **tổng Riemann trung tâm**.

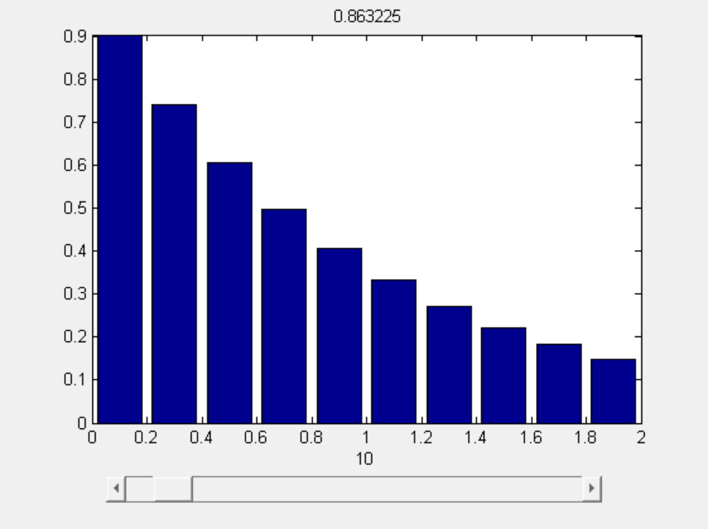


Ví dụ

Gọi S là diện tích của miền nằm dưới đồ thị hàm số $f(x) = e^{-x}$ giữa $x = 0$ và $x = 2$. Hãy ước lượng S bằng tổng Riemann trái, phải, trung tâm, ứng với phân hoạch $[0, 2]$ thành 4 đoạn con bằng nhau.



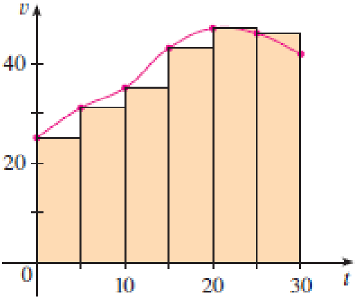
```
>> syms x;
>> rsums(exp(-x), [0, 2])
```



Ví dụ

Giả sử đồng hồ đo quảng đường trên xe hơi của bạn bị hư và bạn muốn ước lượng quãng đường đi được trong khoảng thời gian 30 giây lái xe. Giả sử bạn sử dụng đồng hồ đo tốc độ mỗi 5 giây và ghi lại các kết quả trong bảng sau:

Thời gian (s)	0	5	10	15	20	25	30
Vận tốc (ft/s)	25	31	35	43	47	46	41



Định lý

Nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$ ngoại trừ một số hữu hạn những điểm gián đoạn bỏ được thì f khả tích trên $[a, b]$.

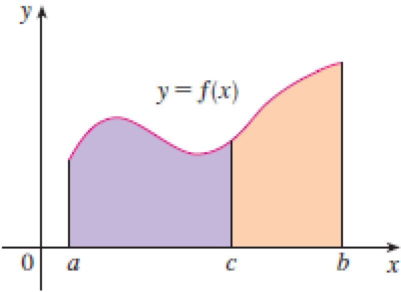
Ví dụ: $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x} dx$ là tích phân xác định, vì $x = 0$ là điểm gián đoạn bỏ được.

Các tính chất của tích phân xác định

- Nếu f khả tích trên $[a,b]$ thì f bị chặn trên $[a,b]$.
- Nếu f khả tích trên $[a,b]$ thì $|f|$ cũng khả tích trên $[a,b]$.
- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\displaystyle\int_a^b c dx = c(b-a)$, trong đó c là hằng số.

Các tính chất của tích phân xác định

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$, trong đó c là hằng số.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$



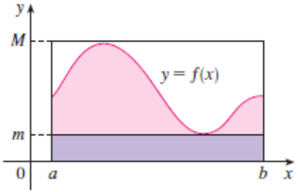
Các tính chất của tích phân xác định

- Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$, thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

- Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$, thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



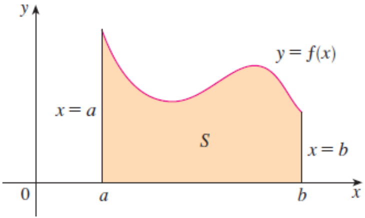
Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

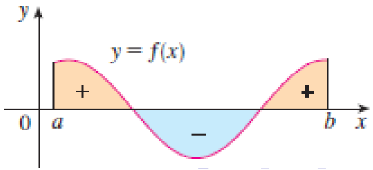
- Nếu f liên tục và không âm trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \text{diện tích miền tô màu vàng.}$$

- Nếu f liên tục và có thể nhận cả giá trị âm và dương trên $[a, b]$, thì

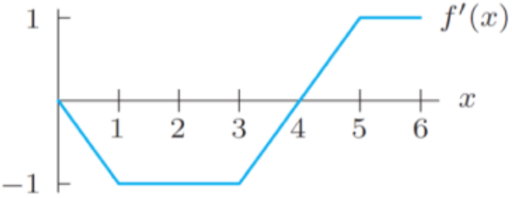
$$\int_a^b f(x)dx = \text{diện tích miền vàng} - \text{diện tích miền xanh.}$$





Ví dụ

Cho hàm số f có đạo hàm f' được cho như hình vẽ và $f(0) = 10$. Tính $f(4)$ và $f(6)$.



Tích phân của các hàm đối xứng

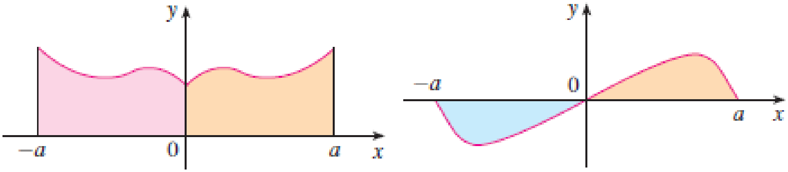
Giả sử f liên tục trên $[-a, a]$.

- Nếu f là hàm chẵn, thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

- Nếu f là hàm lẻ, thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$



Định nghĩa

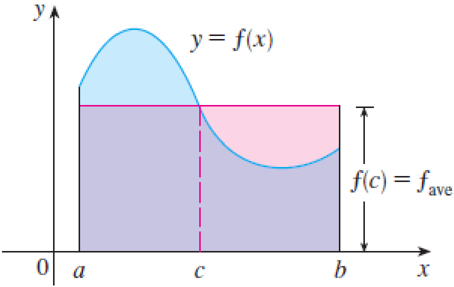
Cho f *là hàm khả tích trên* $[a, b]$. **Giá trị trung bình** *của* f *trên* $[a, b]$ *là*

$$f_{tb} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Định lý (The mean value theorem for integrals)

Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất một điểm c thuộc $[a, b]$ sao cho f đạt được giá trị trung bình tại c, tức là

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx.$$



Ví dụ

Cho hàm số $f(x) = 1 + x^2$.

(a) *Tìm giá trị trung bình của* f *trên đoạn* $[-1, 2]$.

(b) *Tìm điểm* $c \in [-1, 2]$ *sao cho* f *đạt giá trị trung bình tại* c.