PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

BÀI GIẢNG ĐIỆN TỬ

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

Ngày 12 tháng 2 năm 2018

NỘI DUNG

Nội dung

1. Bài toán Cauchy

2. Hệ phương trình vi phân

Nội dung

Nhiều bài toán của khoa học kỹ thuật dẫn đến việc giải phương trình vi phân. Bài toán đơn giản nhất là bài toán Cauchy

Nhiều bài toán của khoa học kỹ thuật dẫn đến việc giải phương trình vi phân. Bài toán đơn giản nhất là bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Nhiều bài toán của khoa học kỹ thuật dẫn đến việc giải phương trình vi phân. Bài toán đơn giản nhất là bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

với $y = y(x)$ là hàm cần tìm, khả vi trên đoạn $[a, b]$, y_0 là giá trị ban đầu cho trước của $y(x)$ tại $x = a$.

Đối với bài toán Cauchy (1) ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp $f(x,y)$ có dạng bất kỳ thì nói chung không có phương pháp giải.

Đối với bài toán Cauchy (1) ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp $f(x, y)$ có dạng bất kỳ thì nói chung không có phương pháp giải.
Ngoài ra, trong những trường hợp có thể tìm ra nghiệm đúng của bài toán Cauchy (1) quá phức tạp thì người ta cũng ít dùng.

Đối với bài toán Cauchy (1) ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp $f(x,y)$ có dạng bất kỳ thì nói chung không có phương pháp giải.

Ngoài ra, trong những trường hợp có thể tìm ra nghiệm đúng của bài toán Cauchy (1) quá phức tạp thì người ta cũng ít dùng.

Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng bài toán Cauchy có vai trò rất quan trọng trong thực tế.

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán (1) ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau với $h = \dfrac{b-a}{n}$. Khi đó các điểm chia là $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, 2, \ldots, n, x_n = b$. Giá trị gần đúng cần tìm của hàm tại điểm x_k được ký hiệu là y_k và ta có $y_k \approx y(x_k)$

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán (1) ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau với $h = \dfrac{b-a}{n}$. Khi đó các điểm chia là $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 0,1,2,\ldots,n, x_n = b$. Giá trị gần đúng cần tìm của hàm tại điểm x_k được ký hiệu là y_k và ta có $y_k \approx y(x_k)$
Giả sử $y(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (1), có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên đoạn $[a,b]$. Với mỗi $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ theo công thức Taylor trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, ta có

$y(x_{k+1}) =$
$y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + y''(\xi_k)\dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$, với
$\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$.

$y(x_{k+1}) =$

$y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + y''(\xi_k)\dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$, với $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$. Vì $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (1) và $h = x_{k+1} - x_k$ nên ta có

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h.f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k)$$

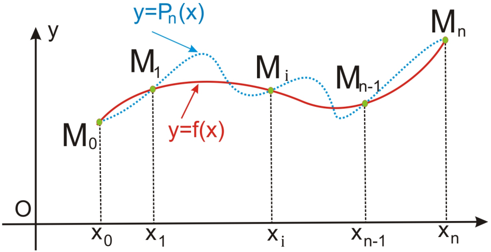
$y(x_{k+1}) =$
$y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + y''(\xi_k)\dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$, với $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$. Vì $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (1) và $h = x_{k+1} - x_k$ nên ta có

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h.f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k)$$

Bỏ đi phần dư và thay các giá trị gần đúng của hàm tại các điểm nút, ta được công thức Euler

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA PHƯƠNG PHÁP EULER



Ý nghĩa hình học của công thức Euler là từ điểm (x_k, y_k) thuộc đường cong $y = y(x)$, kẻ tiếp tuyến với đường cong. Đường tiếp tuyến sẽ cắt $x = x_{k+1}$ tại y_{k+1} chính là giá trị gần đúng của hàm tại $x = x_k$

Ví dụ 1.1

Sử dụng phương pháp Euler để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - x^2 + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Giải.

Với $n = 10$ thì $h = \dfrac{2-0}{10} = 0.2, x_k = 0.2k, y_0 = 0.5.$

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - x_k^2 + 1)$$

với $k = 0, 1, \ldots, 9.$

Giải.

Với $n = 10$ thì $h = \dfrac{2-0}{10} = 0.2, x_k = 0.2k, y_0 = 0.5.$

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - x_k^2 + 1)$$

với $k = 0, 1, \ldots, 9.$

Bấm máy. $Y = Y + 0.2(Y - X^2 + 1) : X = X + 0.2$

1. CALC $Y = 0.5 =, X = 0 =$
2. $Y =, X = 0.2 =$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
2	0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
3	0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
4	0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
5	1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
6	1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
7	1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
8	1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
9	1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
10	2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Trong công thức Euler, thay $f(x_k, y_k)$ bởi $\dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}$ ta được công thức Euler cải tiến

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Việc tính toán theo công thức Euler cải tiến rất phức tạp vì cả 2 vế đều chứa y_{k+1} là ẩn cần tìm. Để đơn giản ta thay y_{k+1} ở vế phải bởi $y_k + hf(x_k, y_k)$.

Lúc này ta có công thức

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} =$$

$$y_k + h \cdot \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))}{2},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Ví dụ 1.2

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= y - x^2 + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Với $n = 10$ thì $h = \dfrac{2-0}{10} = 0.2$, $y_0 = 0.5$. Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))}{2}$$

với $k = 0, 1, \ldots, 9$.

Bấm máy. $Y = Y + 0.1 \times (Y - X^2 + 1 + Y + 0.2(Y - X^2 + 1) - (X + 0.2)^2 + 1) : X = X + 0.2$

1. CALC $Y = 0.5 = X = 0 =$
2. $Y =, X = 0.2$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\|y(x_k) - y_k\|$
0	0.0	0.5	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.826	0.8292986	0.0032986
2	0.4	1.20692	1.2140877	0.0071677
3	0.6	1.6372424	1.6489406	0.0116982
4	0.8	2.110235728	2.1272295	0.0169938
5	1.0	2.617687588	2.6408591	0.0231715
6	1.2	3.149578858	3.1799415	0.0303627
7	1.4	3.693686206	3.7324000	0.0387138
8	1.6	4.235097172	4.2834838	0.0483866
9	1.8	4.755618549	4.8151763	0.0595577
10	2.0	5.23305463	5.3054720	0.0724173

$$\begin{cases} y_{k+1} & = & y(x_k+h) \approx y_k + \sum\limits_{j=1}^{n} A_j K_j^k \\ K_1^k & = & hf(x_k, y_k) \\ K_2^k & = & hf(x_k+\alpha_2 h, y_k+\beta_{21}K_1^k) \\ K_3^k & = & hf(x_k+\alpha_3 h, y_k+\beta_{31}K_1^k+\beta_{32}K_2^k) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_n^k & = & hf(x_k+\alpha_n h, y_k+\beta_{n1}K_1^k+\beta_{n2}K_2^k+\ldots+\beta_{n,n-1}K_{n-1}^k) \end{cases}$$

trong đó các hệ số $A_1, A_2, \ldots, A_n; \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n; \beta_{21}, \beta_{31}, \ldots, \beta_{n,n-1}$ được xác định theo phương pháp sau. Đặt

$$\varphi(h) = y(x_k+h) - y_k - \sum_{j=1}^{n} A_j K_j^k.$$

Các hệ số cần tìm thỏa mãn điều kiện $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(m)}(0) = 0.$

Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cao hơn công thức Euler, vì dùng khai triển Taylor nghiệm $y = y(x)$ của bài toán (1) với nhiều số hạng hơn.
Trong trường hợp $n = m = 4$ ta có công thức Runge-Kutta bậc bốn

$$\begin{cases} y_{k+1} & = & y(x_k + h) \approx y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \\ K_1^k & = & hf(x_k, y_k) \\ K_2^k & = & hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1^k}{2}) \\ K_3^k & = & hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2^k}{2}) \\ K_4^k & = & hf(x_k + h, y_k + K_3^k) \end{cases}$$

Ví dụ 1.3

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - x^2 + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Giải.

Với $n = 10$ thì $h = \dfrac{2-0}{10} = 0.2, x_k = 0.2k, y_0 = 0.5$. Ta có

$K_1^k = hf(x_k, y_k) = 0.2(y_k - 0.04k^2 + 1)$,

$K_2^k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1^k}{2}) = h\left[y_k + \frac{K_1^k}{2} - \left(x_k + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right]$,

$K_3^k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2^k}{2}) = h\left[y_k + \frac{K_2^k}{2} - \left(x_k + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right]$,

$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k) = h\left[y_k + K_3^k - (x_k + h)^2 + 1\right]$.

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k)$$

với $k = 0, 1, \ldots, 9$.

Bấm máy. $0.2(Y - X^2 + 1)$

Tính K_1^0. CALC $X = 0, Y = 0.5 \Rightarrow K_1^0$
Shift-STO-A

Tính K_2^0. CALC $X = 0 + 0.2 \div 2, Y = 0.5 + A \div 2.$
$\Rightarrow K_2^0$ Shift-STO-B

Tính K_3^0. CALC $X = 0 + 0.2 \div 2, Y = 0.5 + B \div 2.$
$\Rightarrow K_3^0$ Shift-STO-C

Tính K_4^0. CALC $X = 0 + 0.2, Y = 0.5 + C. \Rightarrow K_4^0$
Shift-STO-D

$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) =$$

$$= 0.5 + \frac{1}{6}(A + 2B + 2C + D) \approx 0.8292933$$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
2	0.4	1.2114362	1.2140877	0.0000114
3	0.6	1.6404175	1.6489406	0.0026515
4	0.8	2.1088953	2.1272295	0.0183342
5	1.0	2.6079021	2.6408591	0.032957
6	1.2	3.1264849	3.1799415	0.0000474
7	1.4	3.6512660	3.7324000	0.0000599
8	1.6	4.1659056	4.2834838	0.0000743
9	1.8	4.6504464	4.8151763	0.0000906
10	2.0	5.0805126	5.3054720	0.0001089

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) \\ x(t_0) &= \alpha \\ y(t_0) &= \beta \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_0 + H]$$

Chia đoạn $[t_0, t_0 + H]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài $h = \dfrac{H}{n}$. Các điểm chia là $t_k = t_0 + kh, k = 0, 1, \ldots, n$. Giá trị gần đúng tại điểm t_k của $x(t)$ là $x_k = x(t_k)$, của $y(t)$ là $y_k = y(t_k)$

CÔNG THỨC EULER

$$\begin{cases} x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ \hfill k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

CÔNG THỨC EULER CẢI TIẾN

$$\begin{cases} K_{1x} = hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} = hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} = hf(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ K_{2y} = hg(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}) \\ x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
K_{1x} = hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\
K_{1y} = hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\
K_{2x} = hf\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{1x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{1y}}{2}\right) \\
K_{2y} = hg\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{1x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{1y}}{2}\right) \\
K_{3x} = hf\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{2y}}{2}\right) \\
K_{3y} = hg\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{2y}}{2}\right) \\
K_{4x} = hf(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}, y_{k-1} + K_{3y}), \\
K_{4y} = hg(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}, y_{k-1} + K_{3y}) \\
x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \dfrac{1}{6}(K_{1x} + 2K_{2x} + 2K_{3x} + K_{4x}) \\
y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \dfrac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \\
k = 1, 2, \ldots, n
\end{cases}
$$

VÍ DỤ 2.1

Cho hệ

$$\begin{cases} x'(t) &= tx - 2y + 1 \\ y'(t) &= 2x + ty + \sin t \\ x(1) &= 0.25 \\ y(1) &= 0.75 \end{cases}, \quad t \geqslant 1$$

Sử dụng công thức Euler cải tiến để xấp xỉ giá trị của $x(t)$ *và* $y(t)$ *tại* $t = 1.2$ *với bước* $h = 0.2$.

Ta có $t_0 = 1, x_0 = 0.25, y_0 = 0.75, h = 0.2,$

$f(t,x,y) = tx - 2y + 1, \; g(t,x,y) = 2x + ty + \sin t$

$K_{1x} = hf(t_0, x_0, y_0) = h(t_0 x_0 - 2y_0 + 1) = -0.05$

$K_{1y} = hg(t_0, x_0, y_0) = h(2x_0 + t_0 y_0 + \sin t_0) = 0.4183$

$K_{2x} = hf(t_0 + h, x_0 + K_{1x}, y_0 + K_{1y}) =$

$h[(t_0 + h)(x_0 + K_{1x}) - 2(y_0 + K_{1y}) + 1] = -0.2193$

$K_{2y} = hg(t_0 + h, x_0 + K_{1x}, y_0 + K_{1y}) =$

$h[2(x_0 + K_{1x}) + (t_0 + h)(y_0 + K_{1y}) + \sin(t_0 + h)] = 0.5468$

$$x(1.2) \approx x_1 = x_0 + \frac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) = 0.1154$$

$$y(1.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) = 1.2326$$

Phương trình vi phân cấp 2

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = \alpha \\ x'(t_0) = \beta \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_0 + H]$$

được chuyển về hệ phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt $y(t) = x'(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) = y \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) = F(t, x, y) \\ x(t_0) = \alpha \\ y(t_0) = \beta \end{cases}$$

Ví dụ 2.2

Cho phương trình vi phân cấp 2 $x'' - 2x' + 2x = e^{2t}.\sin t, (0 < t < 1)$ *với điều kiện ban đầu* $x(0) = -0.4,\ x'(0) = -0.6$. *Dùng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để xấp xỉ nghiệm gần đúng của phương trình với bước* $h = 0.1$. *So sánh kết quả thu được với nghiệm chính xác* $x(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$,
$y(t) = x'(t) = 0.2e^{2t}(4\sin t - 3\cos t)$.

Đặt $y(t) = x'(t)$. Phương trình đã cho được biến đổi thành hệ

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) = y \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) = -2x + 2y + e^{2t}\sin t \\ x(0) &= -0.4 \\ y(0) &= -0.6 \end{cases}$$

Với $h = 0.1$ ta có

$$
\begin{cases}
K_{1x} = h.y_{k-1} \\
K_{1y} = h(-2x_{k-1} + 2y_{k-1} + e^{2t_{k-1}}.\sin t_{k-1}) \\
K_{2x} = h\left(y_{k-1} + \dfrac{K_{1y}}{2}\right) \\
K_{2y} = hg\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{1x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{1y}}{2}\right) \\
K_{3x} = hf\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{2y}}{2}\right) \\
K_{3y} = hg\left(t_{k-1} + \dfrac{h}{2}, x_{k-1} + \dfrac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \dfrac{K_{2y}}{2}\right) \\
K_{4x} = hf(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}y_{k-1} + K_{3y}), \\
K_{4y} = hg(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}, y_{k-1} + K_{3y}) \\
x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \dfrac{1}{6}(K_{1x} + 2K_{2x} + 2K_{3x} + K_{4x}) \\
y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \dfrac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \\
k = 1, 2, \ldots, n
\end{cases}
$$

t_k	$x(t_k)$	x_k	$x'(t_k)$	y_k
0.0	-0.4000	-0.4000	-0.60000	-0.6000
0.1	-0.4617	-0.4617	-0.6316	-0.6316
0.2	-0.5256	-0.5256	-0.6401	-0.6401
0.3	-0.5886	-0.5886	-0.6136	-0.6136
0.4	-0.6466	-0.6466	-0.5366	-0.5366

- Các phương pháp tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân thường đòi hỏi các điều kiện được cho tại một thời điểm ban đầu nào đó.
- Đối với phương trình vi phân bậc hai, ta cần 2 giá trị $y(x_0)$ và $y'(x_0)$.
- Tuy nhiên, nhiều bài toán trong thực tế cho thấy điều kiện của hàm cần tìm được cho tại nhiều thời điểm khác nhau. Vấn đề này dẫn tới việc tìm nghiệm gần đúng của **bài toán biên**.

- Trong phần này chúng ta chỉ xét bài toán biên của phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai với điều kiện biên được cho ở 2 điểm có dạng

$$\begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \\ a < x < b, \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \end{cases}$$

với phương pháp sai phân hữu hạn.

- Chọn số tự nhiên bất kỳ $n > 0$. Chia đều đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bởi các điểm chia $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_n = b$ với $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- Tại các nút $x_k, k = 1, 2, \ldots, n-1$ bên trong đoạn $[a, b]$ sử dụng công thức sai phân hướng tâm, ta có

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} =$$

$$= \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

- Thay vào phương trình đã cho ta được

$$p_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + q_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + r_k y_k = f_k,$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$ với

$p_k = p(x_k), q_k = q(x_k), r_k = r(x_k)$ và

$f_k = f(x_k)$.

- Từ các điều kiện biên $y_0 = \alpha, y_n = \beta$ sau khi biến đổi ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, y_n = \beta \\ \left(\frac{p_k}{h^2} - \frac{q_k}{2h}\right) y_{k-1} + \left(r_k - \frac{2p_k}{h^2}\right) y_k + \left(\frac{p_k}{h^2} + \frac{q_k}{2h}\right) y_{k+1} = f_k \\ \forall k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

- Đây chính là hệ phương trình đại số tuyến tính cấp $n-1 : AY = B$ với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r_{n-1} - \frac{2p_{n-1}}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]^T$$

và

$$B = \begin{pmatrix} f_1 - (\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h})\alpha \\ f_2 \\ \ldots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} - (\frac{p_{n-1}}{h^2} + \frac{q_{n-1}}{2h})\beta \end{pmatrix}$$

Ma trận A ở trên là ma trận 3 đường chéo. Để giải hệ phương trình trên thì ta dùng phương pháp phân rã LU.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó phân rã Doolittle cho ta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

VÍ DỤ 3.1

Xét bài toán biên

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ y(0) = -0.3, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -0.1 \end{cases}$$

có nghiệm chính xác $y(x) = -0.1(\sin x + 3\cos x)$. *Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn xấp xỉ nghiệm gần đúng và so sánh với nghiệm chính xác trong trường hợp* $h = \dfrac{\pi}{8}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y_0 = -0.3, y_4 = -0.1 \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{-1}{2h}\right) y_{k-1} + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_k + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{-1}{2h}\right) y_{k+1} = \cos(x_k) \\ \forall k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -0.3, y_4 = -0.1 \\ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_0 + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_1 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_1 + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_2 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_2 + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_3 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_1 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_2 + 0 y_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_0 \\ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_1 + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_2 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) y_2 + \left(-2 - \frac{2}{h^2}\right) y_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) y_4 \end{cases}$$

Bấm máy.

$\frac{\pi}{8}$ −Shift+STO+M

Mode - eqn - anx+bny+cnz=dn

Bấm máy.

$\frac{\pi}{8}$–Shift+STO+M

Mode - eqn - anx+bny+cnz=dn

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0	-0.30000	-0.30000	0.00000
1	$\frac{\pi}{8}$	-0.31569	-0.31543	0.00025
2	$\frac{\pi}{4}$	-0.28291	-0.28284	0.00007
3	$\frac{3\pi}{8}$	-0.20700	-0.20719	0.00019
4	$\frac{\pi}{2}$	-0.10000	-0.10000	0.00000

CÁM ƠN CÁC EM ĐÃ CHÚ Ý LẮNG NGHE