§4 CÔNG THỨC BAYES

4.1 Nhóm đầy đủ

* **<u>Định nghĩa</u>.** Nhóm sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n (n > 1)$ của một phép thử được gọi là (hay tạo thành) một *nhóm đầy đủ*, nếu

(i) $A_iA_j = V, \forall\ i \neq j$ (xung khắc từng đôi);

(ii) $A_1 + A_2 + ... + A_n = \text{U}$.

Theo định nghĩa này khi thực hiện phép thử trên chỉ có thể xuất hiện một và chỉ một trong số n sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n$. Ngoài ra để ý

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

* **<u>Thí dụ 1</u>**. Gieo một con xúc xắc (phép thử). Ký hiệu A_i – sự kiện xuất hiện mặt i chấm ($i = \overline{1,6}$), ta có một nhóm đầy đủ là $\{A_i, i = \overline{1,6}\}$. Để ý nhóm đầy đủ này bao gồm tất cả các sự kiện sơ cấp của phép thử. Ở đây có thể tạo ra nhiều nhóm đầy đủ khác, chẳng hạn nếu đặt $A = A_6$ thì $\bar{A} = A_1 + A_2 + ... + A_5$ và $\{A, \bar{A}\}$ tạo nên một nhóm đầy đủ; hoặc nếu đặt $A_c = A_2 + A_4 + A_6$ thì nhóm $\{A_c, A_1, A_3, A_5\}$ cũng là một nhóm đầy đủ.

Tổng quát hoá tập các sự kiện tạo nên một phân hoạch của không gian Ω là một nhóm đầy đủ. Còn nhóm $\{A, \bar{A}\}$, với A – sự kiện bất kỳ, tạo ra nhóm đầy đủ bé nhất (chỉ có 2 phần tử).

* **<u>Thí dụ 2</u>**. Đặt A là sự kiện bóng thứ nhất tốt, B là sự kiện bóng thứ hai tốt. Khi đó bộ $\{AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}\}$ tạo nên nhóm đầy đủ. Nhóm này mô tả mọi phương án (về chất lượng tốt xấu) của cả hai bóng đang xét.

4.2 Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử ta có nhóm đầy đủ $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, đồng thời xét một sự kiện H nào đó. Cũng giả thiết rằng ta biết các thông tin (tính được) qua các XS $P(A_i)$ và $P(H|A_i)$, $i = \overline{1, n}$. Bây giờ ta đi tính $P(H)$. Từ điều kiện (ii) của nhóm đầy đủ ta có

$$H = A_1H + A_2H + ... + A_nH = \sum_{i=1}^{n} A_iH.$$

Từ đó do xung khắc từng đôi ($A_iHA_jH = A_iA_jH = V$)

$$P(H) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i H\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_iH)$$

và áp dụng công thức nhân XS

$$P(H) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(H|A_i). \qquad (1)$$

Công thức (1) có tên gọi là *công thức xác suất đầy đủ* (hay có tên khác là *công thức xác suất toàn phần*).

Giải: Đặt A_1, A_2 và A_3 là sản phẩm chọn ra do máy I, II và III tương ứng. Rõ ràng $\{A_i, i = \overline{1,3}\}$ là một nhóm đầy đủ và

*** <u>Thí dụ 3</u>**. Một cậu bé có 6 bi đỏ và 4 bi trắng. Một hôm cậu thấy mất 1 viên bi. Tính XS để khi lấy hú họa ra một viên bi thì ta được bi đỏ.

Giải: Vấn đề ở đây là viên bi mất không biết màu. Ta lập một nhóm đầy đủ là rõ viên bi mất có màu nào: Đặt A_1- viên bi bị mất màu đỏ, A_2 – viên bi mất màu trắng. Rõ ràng $\{A_1, A_2\}$ là một nhóm đầy đủ. Từ đó nếu gọi H là sự kiện lấy được bi đỏ trong số bi chưa mất thì theo công thức XS đầy đủ (1)

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2)$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0,6.$$

*** <u>Thí dụ 4</u>**. Một tổ có 3 máy sản xuất cùng một loại sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng 0,5%, 1% và 2%. Cũng biết rằng máy I sản xuất 30%, máy II – 25% và máy III – 45% sản phẩm của tổ. Chọn hú hoạ ra một sản phẩm, tìm xác suất đó là phế phẩm.

Giải: Đặt A_1, A_2 và A_3 là sản phẩm chọn ra do máy I, II và III tương ứng. Rõ ràng $\{A_i, i = \overline{1,3}\}$ là một nhóm đầy đủ và

$$P(A_1) = 0{,}30;\ P(A_2) = 0{,}25;\ P(A_3) = 0{,}45.$$

Gọi H sự kiện rút được phế phẩm, áp dụng công thức XSĐĐ (1) và để ý

$$P(H|A_1) = 0{,}5\%;\ P(H|A_2) = 1\%;\ P(H|A_3) = 2\%,$$

ta có

$$P(H) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(H|A_i)$$

$$= 0{,}30.0{,}5\% + 0{,}25.1\% + 0{,}45.2\% = 1{,}3\%.$$

XS này có ý nghĩa như là tỷ lệ phế phẩm chung của cả ba máy.

*** <u>Thí dụ 5</u>**. Có 3 hộp bi: hộp I đựng 3 bi đen và 5 bi trắng, hộp II đựng 2 bi đen và 4 bi trắng, hộp III đựng 3 bi đen và 4 bi trắng. Lấy hú hoạ 2 bi từ hộp I và 1 bi từ hộp II bỏ sang hộp III rồi trộn đều, sau đó lấy hú họ một viên bi từ hộp III này. Tính XS để viên bi lấy được là đen.

Giải: Đặt A_1, A_2 và A_3 là sự kiện viên bi lấy ra thuộc hộp I, II và

III tương ứng. Khi đó A_1, A_2 và A_3 lập thành một nhóm đầy đủ và:

$$P(A_1) = 2/10 = 0{,}2;\ P(A_2) = 0{,}1;\ P(A_3) = 0{,}7.$$

Gọi H là sự kiện lấy được bi đen, ta có:

$$P(HA_1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2}\frac{C_1^1}{C_{10}^1} + \frac{C_3^2}{C_8^2}\frac{C_2^1}{C_{10}^1} = 3/40,$$

$$P(HA_2) = \frac{C_2^1}{C_6^1}\ \frac{C_1^1}{C_{10}^1} = 1/30,$$

$$P(HA_3) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1} = 3/10.$$

Bây giờ áp dụng công thức trung gian để dẫn ra công thức XS đầy đủ (1) (để ý $H = HU = H(A_1 + A_2 + A_3)$)

$$P(H) = P(HA_1) + P(HA_2) + P(HA_3)$$

$$= 3/40 + 1/30 + 3/10$$

$$= 49/120 = 0{,}4083.$$

*** <u>Thí dụ 6</u>**. Ba khẩu pháo bắn mỗi khẩu một phát vào một mục tiêu với XS trúng đích tương ứng là 0,7; 0,8 và 0,9. Xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt tương ứng nếu trúng 1 viên là 0,4, trúng 2 viên là 0,6, trúng 3 viên là 1. Tìm XS mục tiêu bị tiêu diệt.

Giải: Đặt A_i, $i = \overline{0,3}$, là sự kiện số đạn trúng mục tiêu bằng *i*. Gọi K_i, $i = \overline{1,3}$, sự kiện khẩu pháo thứ *i* bắn trúng mục tiêu. Khi đó:

$$A_0 = \overline{K}_1\overline{K}_2\overline{K}_3;\ P(A_0) = 0{,}3.0{,}2.0{,}1 = 0{,}006;$$

$$A_1 = K_1\overline{K}_2\overline{K}_3 + K_2\overline{K}_1\overline{K}_3 + K_3\overline{K}_1\overline{K}_2;$$

$$P(A_1) = 0{,}7.0{,}2.0{,}1+0{,}8.0{,}3.0{,}1+0{,}9.0{,}3.0{,}2 = 0{,}092;$$

$$A_2 = K_1K_2\overline{K}_3+K_1\overline{K}_2K_3+\overline{K}_1K_2K_3;$$

$$P(A_2) = 0{,}7.0{,}8.0{,}1+0{,}7.0{,}2.0{,}9+0{,}3.0{,}8.0{,}9 = 0{,}398;$$

$$A_3 = K_1K_2K_3;\ P(A_3) = 0{,}7.0{,}8.0{,}9 = 0{,}504.$$

Dễ thấy $\{A_i, i = \overline{0,3}\}$ lập thành một nhóm đầy đủ. Gọi H là sự kiện mục tiêu bị tiêu diệt, khi đó:

$$P(H|A_0) = 0;\ P(H|A_1) = 0{,}4;\ P(H|A_2) = 0{,}6;\ P(H|A_3) = 1;$$

$$P(H) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)P(H|A_i)$$

$$= 0{,}006.0 + 0{,}092.0{,}4 + 0{,}398.0{,}6 + 0{,}504.1 = 0{,}7796.$$

4.3 Công thức Bayes

Giả sử ta có một nhóm đầy đủ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ và một sự kiện H nào đó. Nhiều khi ta muốn xác định XS $P(A_i|H)$, trong đó *i* là một số nào đó thuộc tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Từ công thức nhân XS

$$P(A_i H) = P(A_i)P(H|A_i) = P(H)P(A_i|H),$$

ta có
$$P(A_i|H) = \frac{P(A_i)P(H|A_i)}{P(H)} \qquad (2)$$

và thay (1) vào công thức (2)

$$P(A_i|H) = \frac{P(A_i)P(H|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(H|A_i)}\,. \qquad (3)$$

Công thức (3) có tên gọi là *công thức Bayes*.

Chú ý:

- $P(A_i)$, $i = \overline{1,n}$, thường được gọi là XS tiên nghiệm (*a priori probability*);
- $P(A_i|H)$, $i = \overline{1,n}$, được tính sau khi đã có kết quả thí nghiệm nào đó thể hiện bởi sự xuất hiện *H*, thường được gọi là XS hậu nghiệm (*a postpriori probability*);
- A_i, *i* là một hằng số nào đó thuộc tập {1, 2, ..., *n*}, trong XS $P(A_i|H)$ phải là thành viên của nhóm đầy đủ.

Như vậy sự kiện cần tính XS trong $P(A_i|H)$ đã gợi ý cách chọn nhóm đầy đủ sao cho sự kiện quan tâm A_i là thành viên của nhóm. Trong trường hợp không tìm được nhóm đầy đủ như vậy, hoặc tìm được nhưng không phù hợp để tính được, nên dùng công thức

(2), tuy nhiên việc tính $P(H)$ sẽ khó hơn là dùng công thức (1).

* **<u>Thí dụ 7</u>**. Ba xạ thủ mỗi người bắn một phát vào bia với XS trúng đích tương ứng là 0,6; 0,8 và 0,9. Người báo bia thông báo có 2 viên trúng, tính XS để trong số phát trúng có của anh thứ nhất.

Giải: Đầu tiên ta sử dụng công thức Bayes để giải bài toán. Đặt $A_i, i = \overline{1,3}, là\ sự\ kiện$ xạ thủ thứ *i* bắn trúng bia, H – có hai người bắn trúng, khi đó ta cần tìm $P(A_1|H)$. Chọn nhóm đầy đủ đơn giản $\{A_1, \bar{A}_1\}$, khi đó theo (1)

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(\bar{A}_1)P(H|\bar{A}_1)$$

$$= P(A_1)P(A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2A_3)$$

$$= 0{,}6.(0{,}8.0{,}1 + 0{,}2.0{,}9) + 0{,}4.0{,}8.0{,}9 = 0{,}444.$$

Từ đó theo công thức Bayes

$$P(A_1|H) = \frac{P(A_1)P(H|A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(A_i)P(H|A_i)} = 0{,}156/0{,}444 = 0{,}3514.$$

Để ý ta có thể dùng công thức (2) mà không cần nhóm đầy đủ, khi đó $P(H)$ có thể được tính trực tiếp nhờ phân tích sự kiện

$$H = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3.$$

* **<u>Thí dụ 8</u>**. Một nhà máy có 3 phân xưởng sản xuất cùng một loại

sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 1,2 %; 1% và 0,8%. Biết phân xưởng I sản xuất 36%, phân xưởng II – 34%, phân xưởng III – 30% sản phẩm của nhà máy.

a) Lấy hú hoạ từ kho chung ra một sản phẩm thì đó là phế phẩm, tính XS sản phẩm đó thuộc phân xưởng II.

b) Phế phẩm đó có khả năng thuộc phân xưởng nào lớn nhất?

Giải:

a) Gọi H là sự kiện lấy được phế phẩm, ta cũng đã biết $P(H)$ chính là tỷ lệ phế phẩm chung của nhà máy. Đặt $A_i, i = \overline{1,3}$, là sự kiện sản phẩm do phân xưởng I sản xuất và chúng lập thành một nhóm đầy đủ. Theo dữ kiện đầu bài:

$$P(A_1) = 0,36;\ P(A_2) = 0,34;\ P(A_3) = 0,30;$$

$$P(H|A_1) = 0,012;\ P(H|A_2) = 0,01;\ P(H|A_3) = 0,009.$$

Khi đó theo công thức Bayes (3)

$$P(A_2|H) = \frac{P(A_2)P(H|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(H|A_i)}$$

$$= \frac{0,34.0,01}{0,36.0,012+0,34.0,01+0,3.0,009} = \frac{0,0034}{0,01042} = 0,3263.$$

b) Ta phải so sánh các XS $P(A_i|H), , i = \overline{1,3}$,

$$P(A_1|H) = \frac{P(A_1)P(H|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(H|A_i)} = 0{,}4146;$$

$$P(A_3|H) = \frac{P(A_3)P(H|A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(H|A_i)} = 0{,}2591.$$

Vậy khả năng phế phẩm đó thuộc phân xưởng I là lớn nhất.

*** Thí dụ 9**. Tại một phòng khám chuyên khoa tỷ lệ người đến khám có bệnh là 80%. Theo thống kê biết rằng nếu chẩn đoán có bệnh thì đúng tới 95%, còn nếu chẩn đoán không bệnh thì chỉ đúng 85%.

a) Tính XS chẩn đoán đúng.

b) Biết có một trường hợp chẩn đoán đúng, tính XS để người được chẩn đoán đó có bệnh.

Giải:

Gọi H là sự kiện chẩn đoán đúng, vậy $\overline{H}$ - sự kiện chẩn đoán sai; đặt A – người khám có bệnh, $\bar{A}$ - người khám không bệnh, B - chẩn đoán có bệnh, $\bar{B}$ - chẩn đoán không bệnh. Đầu bài đã cho: $P(H|B) = 95\%$, $P(H|\bar{B}) = 85\%$ và $P(A) = 0{,}8$.

a) Ở đây có thể dùng 2 nhóm đầy đủ là $\{A, \bar{A}\}$ và $\{B, \bar{B}\}$. Ta thử sử dụng công thức XS đầy đủ

$$P(H) = P(A)P(H|A) + P(\bar{A}\,)P(H|\bar{A}\,)$$

hoặc $$P(H) = P(B)P(H|B) + P(\bar{B})P(H|\bar{B}).$$

Ở công thức thứ nhất ta không biết các XS có điều kiện, còn trong công thức thứ hai các XS của B và $\bar{B}$ không biết, vì vậy không tính được. Ta khai thác công thức sau

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}). \qquad (*)$$

Từ ý nghĩa thực tế ta có:

$$P(A|B) = P(H|B) = 0{,}95;$$

$$P(A|\bar{B}) = P(\bar{H}|\bar{B}) = 1 - P(H|\bar{B}) = 0{,}15$$

và đặt $P(B) = x \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - x$, thay vào (*) ta tìm được $x = P(B)$ = 13/16. Bây giờ có thể sử dụng công thức XS đầy đủ thứ hai

$$P(H) = P(B)P(H|B) + P(\bar{B})P(H|\bar{B}) = \frac{13}{16}.0{,}95 + \frac{3}{16}.0{,}85$$

$$= 0{,}93125.$$

b) XS cần tìm là $P(A|H)$. Áp dụng công thức (2)

$$P(A|H) = \frac{P(A)P(H|A)}{P(H)}.$$

Nhưng ở đây $P(H|A)$ không biết, tuy nhiên từ ý nghĩ thực tế

$$P(H|A) = P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)},$$

Và thay vào công thức trên

$$P(A|H) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(H)} = \frac{0{,}8125.0{,}95}{0{,}93125} = 0{,}8289.$$

BÀI TẬP

1. Có 3 xạ thủ cùng bắn vào bia, XS trúng bia của các xạ thủ tương ứng là 0,9; 0,8 và 0,7. Gọi ngẫu nhiên một xạ thủ ra bắn một viên đạn và anh ta bắn trúng. Tìm XS anh ta là người thứ nhất.

2. Có 3 máy cùng sản xuất một loại linh kiện với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 0,02; 0,03 và 0,04. Chọn một máy để sản xuất 1 linh kiện, biết XS để chọn máy tương ứng là 0,5; 0,3 và 0,2.
   a) Tính XS để linh kiện được sản xuất ra là tốt.
   b) Biết linh kiện được sản xuất ra là tốt, tìm XS để linh kiện này do máy thứ hai sản xuất.

3. Có hai hộp: hộp I đựng 2 bi đen, 3 bi trắng, hộp II đựng 2 bi đen, 2 bi trắng. Lấy hú hoạ hai viên bi từ hộp I bỏ vào hộp II rồi rút ngẫu nhiên từ hộp II này một viên bi.
   a) Tính XS để viên bi rút ra là bi đen.
   b) Biết viên bi rút ra là đen, tính XS đó là viên bi của hộp I.

4. Một phòng máy có 30 máy tính, trong đó 14 máy có XS hỏng trong một ngày của mỗi máy là 0,1; 10 máy có XS hỏng mỗi máy là 0,2 và 6 máy có XS hỏng mỗi máy là 0,03. Giao hú hoạ cho 2 sinh viên sử dụng 2 máy trong một ngày. Tính XS để 2 máy đều không hỏng trong ngày.

5. Ba người máy độc lập chẩn đoán một bệnh nhân. Sau khi làm việc có đúng một người máy cho kết quả chẩn đoán đúng. Tìm XS đó là người máy thứ ba, biết rằng XS chẩn đoán đúng của từng người máy tương ứng là 0,8; 0,9 và 0,7.

6. Theo thống kê ở Anh năm 1993 thì có 5% cha và con cùng mắt đen, 7,9% cha mắt đen con mắt xanh, 8,9% cha xanh con đen và 78,2% cả hai cha con có cùng màu mắt xanh.
   a) Hãy tìm XS để khi cha mắt xanh thì con cũng xanh.
   b) Tìm XS để khi cha mắt đen mà con không đen.

7. Một cặp sinh đôi cùng trứng thì bao giờ cũng cùng giới. Trong trường hợp sinh đôi khác trứng thì hai trường hợp sinh cùng giới và khác giới là đồng khả năng. Biết XS sinh đôi cùng trứng là p. Một người sinh một cặp sinh đôi cùng giới, tìm XS để cặp trẻ đó cùng trứng.

8. Trong một kỳ thi 20 học sinh, có 8 học sinh xuất sắc, 6 khá, 4 trung bình và 2 trung bình yếu. Biết trong 40 vấn đề thi học sinh xuất sắc trả lời được tất cả, học sinh khá – 35 vấn đề, học sinh trung bình – 25 vấn đề và học sinh yếu trả lời được 20 vấn đề. Một học sinh đã làm được bài thi, trong đó có 3 vấn đề, tìm XS để anh ta thuộc nhóm học sinh trung bình.

9. Một chiếc máy bay có thể xuất hiện ở vị trí A với XS 2/3 và ở vị trí B với XS 1/3. Có 3 phương án bố trí 4 khẩu pháo phòng không: (1) 3 khẩu đặt tại A và 1 khẩu đặt tại B, (2) 2 khẩu tại A và 2 khẩu tại B, (3) 1 khẩu tại A và 3 khẩu tại B. Hỏi phương án nào tốt nhất, biết rằng XS bắn hạ máy bay của mỗi khẩu pháo là 0,7.

10. Trong một kho rượu số lượng chai rượu loại A và loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định loại rượu, giả sử mỗi người đó có XS đoán trúng là 75%. Sau

khi nếm thử có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B, tính XS để chai rượu được chọn là loại A.

11. Biết rằng một người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kỳ nhóm máu nào, còn nếu người có một trong 3 nhóm máu còn lại (hoặc A hoặc B hoặc O) thì chỉ có thể nhận máu của người cùng nhóm hoặc có nhóm máu O. Theo thống kê tỷ lệ người có nhóm máu O, A, B và AB tương ứng là 33,7%, 37,5%, 20,9% và 7,9%.
    a) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và một người cho máu, tính XS để sự truyền máu có thể thực hiện được.
    b) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và hai người cho máu, tính XS để sự truyền máu thực hiện được.

12. Một bệnh nhân bị nghi có thể mắc một trong 3 bệnh A, B, C với các XS tương ứng là 0,3; 0,4 và 0,3. Người đó đến khám bệnh ở 4 bác sỹ: bác sỹ I chẩn đoán mắc bệnh A, bác sỹ II – mắc bệnh B, bác sỹ III – mắc bệnh C và bác sỹ IV – măc bệnh A, cho biết XS chẩn đoán đúng của mỗi bác sỹ là 0,6 và chẩn đoán nhầm mắc hai bệnh khác có XS 0,2 và 0,2. Hỏi sau khi khám bệnh XS mắc bệnh A, B, C sẽ là bao nhiêu?