§2 CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

2.1 Định nghĩa cổ điển

a/ <u>ĐN 1</u>. Giả sử một phép thử có n phép thử *đồng khả năng*, trong đó có m phép thử thuận lợi cho A

$$\rightarrow \quad P(A) = \frac{Số\ kết\ cục\ thuận\ lợi\ cho\ A}{Tổng\ số\ kết\ cục} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

* *Ưu điểm*: đơn giản và trực quan

* *Nhược điểm*: số kết cục hữu hạn và chúng đồng khả năng.

+ <u>Thí dụ 1</u>. Hộp bi có 3 bi đỏ và 5 trắng. lấy ngẫu nhiên ra 3 bi. Tính XS:

a) trong 3 bi có đúng 1 trắng;

b) 3 bi cùng màu.

Giải:

a) $n = C_8^3 = 56$, $m = C_3^2.5 = 15 \quad \rightarrow \quad$ XS $= 15/56$.

b) $n = 56$, $m = C_3^3 + C_5^3 = 9 \quad \rightarrow \quad$ XS $= 9/56$.

+ **<u>Thí dụ 2</u>**. Tính XS khi gieo 4 đồng tiền xuất hiện đúng 2 sấp.

Giải: $n = 16\ (= 2^4)$, $m = C_4^2 = 6 \quad \rightarrow \quad$ XS $= 3/8$.

b/ <u>Tính chất</u> (1) $\quad 0 \le P(A) \le 1$;

(2) $\quad P(V) = 0$; $P(U) = 1$;

(3) Nếu A, B xung khắc thì $P(A+B) = \mathrm{P}(A) + P(B)$;

(4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

+ **<u>Thí dụ 3</u>**. Một nhóm có 6 cặp nam nữ, trong đó có 3 cặp là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người. Tính XS:

a) trong 3 người có ít nhất 1 nữ;

b) trong 3 người không có cặp vợ chồng nào.

Giải:

a) Gọi A - trong 3 người có ít nhất 1 nữ $\rightarrow$ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$= 1 - C_6^3 \,/\, C_{12}^3 = 1 - 1/11 = 5/11.$

b) Gọi A - trong 3 người không có cặp vợ chồng nào

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 3.10/\, C_{12}^3 = 1 - 3/22 = 19/22.$

+ **<u>Thí dụ 4</u>**. Cậu bé có 6 bi đỏ và 4 trắng. Một hôm cậu thấy mất 1 bi (mà không biết màu). Tính XS để lấy ngẫu nhiên ra 1 bi thì đó là bi đỏ.

Giải: $n = 9.10$; $m = 6.5 + 4.6$ $\rightarrow$ XS = 0,6

(chú ý thông tin không đổi thì XS không đổi!).

Để khắc phục hạn chế của ĐN1 về sự hữu hạn kết cục, người ta đưa ra *định nghĩa hình học* của xác suất: Giả sử tập vô hạn các kết cục đồng khả năng của phép thử có thể biểu thị bởi một miền hình học G, còn tập các kết cục thuận lợi cho A bởi một miền con S nào đó, S ⊆ G. Khi đó

b/ <u>ĐN 2</u>. $$P(A) = \frac{\text{Độ đo } S}{\text{Độ đo } G}. \qquad (2)$$

\+ **<u>Thí dụ 5</u>**. Đường dây điện thoại ngầm nối tổng đài với một trạm dài 1 km. Tính XS để dây bị đứt tại nơi cách tổng đài không quá 100 m.

Giải: Có thể coi nơi đứt dây là đồng khả năng ở một điểm bất kỳ trên toàn chiều dài của dây. Từ đó theo (2)

$$P(A) = 100/1000 = 0{,}1$$

(chú ý sự kiện có XS = 0 vẫn có thể xảy ra!)

\+ **<u>Thí dụ 6</u>**. (*coi như bài tập*) Hai người hẹn gặp nhau ở quán từ 8 giờ đến 9 giờ với quy ước ai đến trước sẽ đợi người đến sau 15 phút, sau đó bỏ đi. Tính XS hai người đó gặp được nhau, biết rằng thời điểm đến quán của mỗi người là đồng khả năng trong khoảng thời gian nói trên.

2.1 Định nghĩa thống kê (theo tần suất)

Điều kiện ĐN cổ điển của XS rất khó được đảm bảo, vì vậy tính khả thi của nó rất hạn chế.

Người ta tiến hành loạt n phép thử cùng loại và nếu sự kiện A nào đó xuất hiện trong m phép thử thì tỷ số m/n được gọi là *tần suất* xuất hiện A. Trên cơ sở quan sát khi n đủ lớn người ta thấy tần suất này rất ổn định, thay đổi ít và dao động xung quanh một hằng số nào đó. Từ đó có thể cho rằng hằng số đó là một xấp xỉ tốt cho XS khi số phép thử tăng cao. Nhưng do hằng số đó chưa biết, nên trong thực tế người ta lấy ngay tần suất đó làm XS xuất hiện sự kiện. Cách tiếp cận như vậy được gọi là *định nghĩa thống kê* của XS (về mặt toán học có thể hiểu như là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng vô hạn) và có tính thực tiễn cao.

Có thể tham khảo hai trường hợp cổ điển sau đây. Đầu tiên là tần suất xuất hiện mặt sấp khi gieo một đồng tiền nhiều lần

Người thí nghiệm	*Số lần gieo*	*Số lần sấp*	*Tần suất*
Buýt-phông	4040	2048	0,5080
Piếc-xơn	12000	6019	0,5016
Piếc-xơn	24000	12012	0,5005

Một thí dụ khác khi xác định XS phân rã của một nguyên tử chất phóng xạ *Ra* sau 100 năm là 0,04184 (độ chính xác tới 5 chữ số sau dấu phẩy), số lượng nguyên tử tham gia thí nghiệm rất lớn (cỡ 10^{23} – 10^{24}).

2.3 Định nghĩa tiên đề

Xét không gian các sự kiện sơ cấp Ω và xác định hệ thống A các tập con của Ω, các phần tử của A được coi là các sự kiện ngẫu nhiên. Yêu cầu A là *đại số Bull*

(i) A chứa Ω;

(ii) Nếu A và $B \in$ A, thì $\bar{A}, \bar{B}, A+B, AB \in$ A.

Khi có thêm điều kiện

(iii) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in$ A, thì $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$ và $A_1A_2\ldots A_n\ldots$ cũng $\in$ A,

thì ta có một *trường Borell hay* $\sigma -$ *đại số*.

Định nghĩa. Ta gọi xác suất trên (Ω,A) là một hàm số xác định trên A có giá trị trong [0, 1] và thoả mãn 3 tiên đề:

(T_1) $P(\Omega) = 1$;

(T_2) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, A, B xung khắc;

(T_3) Nếu dãy $\{A_n\}$ có tính chất $A_j \Rightarrow A_i$, $\forall\ i \leq j$ và

$$A_1A_2\ldots A_n\ldots = V, \text{ thì } P(A_n) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Tuy nhiên cách chọn XS theo định nghĩa trên không duy nhất!

Có thể thay thế tiên đề 2 và 3 bằng *tiên đề cộng mở rộng*

(T_+) Nếu dãy $\{A_n\}$ có tính chất xung khắc từng đôi và

$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in$ A, thì

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

- $P(.)$ là độ đo không âm, trực chuẩn, cộng tính.
- Tổ hợp {Ω, A, P} thường được gọi là *không gian xác suất*.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Barnes J. W. *Statistical analysis for engineers and scientists.* McGraw – Hill, 2008.
2. Monfort A. *Cours de statistique mathématique*. Economica, Paris, 1982.
3. Tống Đình Quỳ. *Giáo trình xác suất thống kê*. NXB Bách khoa Hà Nội, 2018 (*tái bản*).

BÀI TẬP

1. Một lô hàng có 18 sản phẩm, trong đó có 12 sản phẩm loại A, 5 loại B và 1 loại C. Chọn ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Tính XS để trong 3 sản phẩm đó:
   a) có 2 loại A và 1 loại B;
   b) có ít nhất 1 sản phẩm loại A;
   c) có cả 3 loại sản phẩm.

2. Một khách sạn có 5 phòng đơn, trong khi đó có 8 khách đến thuê phòng (5 nam, 3 nữ). Chọn ngẫu nhiên 5 người, tính xác suất để trong đó:
   a) có 3 nam, 2 nữ;
   b) cả 5 người cùng giới;
   c) có ít nhất 1 nữ.

3. Một công ty cần tuyển 2 nhân viên. Có 6 người đến thi tuyển, trong đó có 4 nữ và 2 nam (giả sử khả năng được tuyển của mỗi người là như nhau).
   a) Trong 4 nữ có một cô tên Hoa, tính xác suất để Hoa được chọn.
   b) Tính xác suất để có 2 nữ đươc chọn.

4. Đội A và đội B đều có 3 người cùng tham gia một cuộc thi chạy, giả sử khả năng mỗi người là như nhau. Tính xác suất để 3 người đội A về nhất, nhì, ba.

5. Trong tuần ở một thành phố có 7 tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày trong tuần có đúng 1 tai nạn.

6. Ở một vùng có 40% thích xem bóng đá. Chọn ngẫu nhiên 12 người. Tính xác suất để trong đó có đúng 5 người thích xem bóng đá.

7. Trong ga có một đoàn tầu 4 toa. 4 hành khách lên tầu, mỗi người chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất trong đó:
   a) trong 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người;
   b) 1 toa có ít nhất 2 người;
   c) toa thứ nhất có đúng 3 người lên.

8. Chọn ngẫu nhiên một vé số có 5 chữ số. Tính xác suất:
   a) trong số của vé không có chữ số 1 và không có chữ số 5;
   b) trong số vé có chữ số 5 và chữ số chẵn.

9. Xếp ngẫu nhiên 5 người ngồi quanh một chiếc bàn tròn 5 ghế.
   a) Tính xác suất để 2 người định trước được ngồi cạnh nhau.
   b) Tính như vậy cho trường hợp bàn dài.

10. Một người bỏ ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

11. Ba nữ nhân viên phục vụ A, B và C thay nhau rửa đĩa chén và giả sử ba người "khéo léo" như nhau. Trong một tháng có 4 chén bị vỡ. Tính xác suất để:
    a) A đánh vỡ 3 chén và B đánh vỡ 1 chén;
    b) một trong 3 người đánh vỡ 3 chén;
    c) một trong 3 người đánh vỡ cả 4 chén.

12. Xếp ngẫu nhiên 8 quyển sách vào 2 ngăn kéo. Tính xác suất:
    a) ngăn kéo nào cũng có sách;
    b) ngăn kéo thứ nhất có 2 quyển sách, còn ngăn thứ hai có 6 quyển.