§2 BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

2.1 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm phân phối

***** ***Khái niệm***

Khái niệm *biến ngẫu nhiên liên tục* đã được đưa ra ở tiểu mục 1.1. Ta nhắc lại các khái niệm biến liên tục và *hàm phân phối XS*.

- Biến ngẫu nhiên được gọi là *liên tục*, nếu tập giá trị của nó lấp kín một khoảng (đoạn) hoặc một số khoảng trên trục số hoặc cũng có thể là cả trục số (tập không đếm được).

- *Hàm phân phối xác suất* (*probability distribution function*) của một biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $F(x)$, được xác định như sau

$$F(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}.$$

Ý nghĩa: $F(x)$ phản ánh độ tập trung XS ở bên trái điểm x

$\Rightarrow$ *hàm phân phối tích luỹ (xác suất tích luỹ)*

$\Rightarrow$ *hàm phân phối tích phân.*

- *Tính chất*

(i) $1 \geq F(x) \geq 0$;

(ii) $F(x)$ là hàm không giảm $\Leftrightarrow \forall\, x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$;

(iii) $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;

(iv) $F(+\infty) = 1$; $F(-\infty) = 0$.

Hạn chế: + khó biết nơi nào tập trung nhiều XS hơn,

+ sau này ta thấy không thể biểu diễn $F(x)$ dưới dạng hàm sơ cấp trong một số trường hợp.

*** Thí dụ 1**. Cho hàm phân phối của biến X liên tục có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a, \\ c(x-a); & a < x \leq b, \\ 1; & x > b. \end{cases}$$

Tìm hằng số c để hàm $F(x)$ liên tục.

Giải: Dùng kiến thức của giải tích toán ta có ngay $c = \dfrac{1}{b-a}$. Dễ dàng kiểm chứng hàm $F(x)$ này thoả mãn các tính chất (i) – (iv) ở trên.

Từ tính chất (iii) nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục

$$P(X = \alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Trong trường hợp này:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta).$$

*** Thí dụ 2**. Cho hàm phân phối của biến X liên tục có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 2, \\ \alpha(x-2)^2; & 2 < x \leq 4, \\ 1; & x > 4. \end{cases}$$

Xác định hằng số α và tính $P(2 < X < 3)$.

Giải: Do $F(x)$ liên tục nên tại $x = 4$ phải có $\alpha(x-2)^2 = 1$, từ đó $\alpha = 1/4$. Sử dụng tính chất (iii) của hàm $F(x)$ ta có

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 1/4.$$

2.2 Hàm mật độ

Từ hạn chế của hàm PP ta không xác định được XS sẽ tập trung nhiều ở chỗ nào trên trục số $\Rightarrow$

*** *Định nghĩa.*** *Hàm mật độ xác suất* (*probability density function*), ký hiệu là $f(x)$, của biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối $F(x)$, được xác định từ biểu diễn sau

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \qquad (1)$$

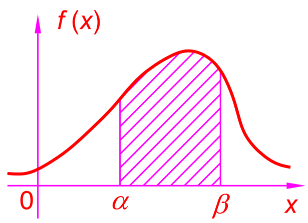
*** Tính chất:**

(i) $f(x) \geq 0$;

(ii) Nếu $F(x)$ khả vi $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$;

(iii) $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.



$P(\alpha < X < \beta)$

* **Thí dụ 3**. Xét hàm $F(x)$ trong thí dụ 1. Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X tương ứng.

Giải: Sử dụng tính chất (ii) của hàm $F(x)$, ta có

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a; b) \\ 0, \quad x \notin (a; b) \end{cases}.$$

Để ý rằng $f(x)$ luôn nhận giá trị hằng (khác 0) trên $(a; b)$, ta nói rằng X có *phân phối đều* (*liên tục*) *trên* $(a; b)$ và ký hiệu

$$X \sim \mathcal{U}(a; b).$$

$$X \sim \mathcal{U}(0; 1) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0; 1) \\ 0, x \notin (0; 1) \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0, \\ x; & 0 < x \le 1, \\ 1; & x > 1. \end{cases}$$

khi $a = 0, b = 1$, hàm $f(x) \equiv 1$ trên $(0; 1)$; trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao đã xây dựng lệnh máy để tạo ra các số ngẫu nhiên có phân phối đều trên $(0; 1)$ để tính toán mô phỏng (*simulation*).

* **Thí dụ 4**. Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x; & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0; & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

a) Tìm a và xác định hàm phân phối $F(x)$.

b) Tính XS $P(\frac{\pi}{4} < X < \pi)$.

Giải: a) Dùng tính chất (iv) của hàm mật độ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2a = 1$$

$$\Longrightarrow \qquad a = 1/2.$$

Dựa vào (1) ta có:

với $x \le -\frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$;

với $x > \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = 1$;

với $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} f(x)dx + \int_{-\pi/2}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

Từ đó

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1); & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1; & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

b) Theo tính chất (iii) của hàm phân phối

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < \pi\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

*** Thí dụ 5**. Cho XS phân rã của một nguyên tử chất phóng xạ trong khoảng thời gian đủ bé dt là λdt (giả sử việc phân rã đó không phụ thuộc vào quá khứ). Hãy xác định:

a) XS để nguyên tử đó phân rã trong khoảng thời gian t,

b) hàm mật độ XS của thời điểm phân rã của nguyên tử.

Giải:

a) XS không phân rã của một nguyên tử chất phóng xạ trong khoảng thời gian dt dễ thấy là $1 - \lambda dt$. Chia khoảng thời gian t thành t/dt các khoảng con có độ dài dt; từ đó XS để nguyên tử không phân rã trong khoảng thời gian đó xấp xỉ là (do có giả thiết độc lập) $(1 - \lambda dt)^{t/dt}$. Lấy giới hạn khi $dt \to 0$, ta có XS cần tìm

$$(1 - \lambda dt)^{t/dt} \to 1 - e^{-\lambda t}$$

(để ý $e^{-\lambda t}$ là XS nguyên tử không phân rã trong khoảng thời gian t).

b) Gọi T là thời điểm phân rã của nguyên tử và $f(t)$ là hàm mật độ của T. XS để nguyên tử phân rã trong khoảng thời gian từ t đến $t + dt$ sẽ bằng XS không phân rã trong khoảng thời gian t trước đó nhân với XS phân rã trong khoảng thời gian dt, từ đó

$$P(t < T < t + dt) = f(t)dt = e^{-\lambda t}\lambda dt.$$

Vậy ta có $$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

Đây chính là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên tuân theo *luật phân phối mũ*, ký hiệu $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, λ là tham số.

2.3 Các số đặc trưng cơ bản

A. Kỳ vọng

Ta xét *phép tính kỳ vọng* trong trường hợp biến liên tục. Giả thiết rằng X có hàm mật độ XS $f(x)$. Khi đó kỳ vọng của $Z = g(X)$ được định nghĩa như sau

*** Định nghĩa 1.** Kỳ vọng của $Z = g(X)$, với $f(x)$ là hàm mật độ đã cho của biến X, được tính theo công thức

$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Trường hợp riêng khi $Z = X$, ta có

*** Định nghĩa 2.** *Kỳ vọng của X*, với $f(x)$ là hàm mật độ XS đã cho của biến X, được tính như sau

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \qquad (2)$$

*** Tính chất**

(i) $E(c) = c$, $c = const$;

(ii) $E(cX) = cEX$;

(iii) $E(X + Y) = EX + EY$;

(iv) $E(XY) = EX.EY$, X và Y độc lập.

Chú ý: tính chất (ii) và (iii) được gọi là *tính tuyến tính* của phép toán, vốn quen thuộc trong phép tính đạo hàm hay tích phân.

Ý nghĩa thực tế: kỳ vọng là *giá trị trung bình* (*mean value*) của biến ngẫu nhiên hoặc đóng vai trò *định vị* của biến.

*** <u>Thí dụ 6</u>**. Xét lại thí dụ 3 và cần tính kỳ vọng của X.

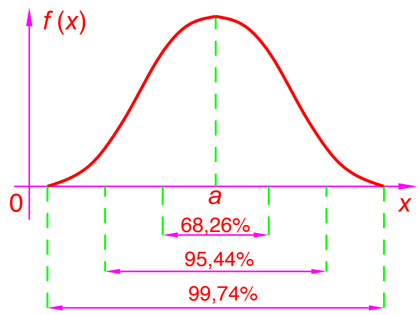
Giải: Do $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ nên sử dụng (2)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

*** <u>Thí dụ 7</u>**. Biến ngẫu nhiên X được cho là tuân theo *luật phân phối chuẩn* (*normal distribution*) hay *luật PP Gauss*, ký hiệu là

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, nếu hàm mật độ của nó dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$



Nếu $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$, thì hàm Gauss $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ chính là mật độ của biến X. Hàm Laplace $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ - tích phân của X và ta có (*tích phân Euler-Poisson*)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}/2.$$

Dễ dàng tính được $EX = \mu$. Để ý hàm e^{-x^2} không có nguyên hàm dạng hàm sơ cấp nên không viết được hàm PP dưới dạng các hàm sơ cấp. Có thể chứng minh, nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, bằng đổi biến $y = (t-\mu)/\sigma$ hay $t = \mu + \sigma y$

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sigma}}^{\frac{\beta-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$$= \phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

*** Thí dụ 8**. Gọi X là độ dài một chi tiết do một máy tự động sản xuất ra và giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, với μ được coi là độ dài quy định (trung bình), $\sigma = 2$. Tính XS để độ dài lệch so với quy định không vượt quá $\varepsilon = 3$.

Giải: Ta cần tính $P(|X-\mu| < \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon)$, áp dụng công thức (3)

$$\Rightarrow \quad P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon)$$

$$= \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\phi(1{,}5) = 2.0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Nếu coi ε là dung sai cho phép, ý nghĩa thực tế của kết quả 86,64% chính là tỷ lệ chính phẩm của máy đã cho.

*** Thí dụ 9**. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2; & 1 \geq x \geq 0 \\ 0; & x \text{ khác} \end{cases}.$$

a) Tìm hằng số k.

b) Xét biến ngẫu nhiên $Y = 2\sqrt{X}$. Tính *các XS*: $P(0{,}5 < Y < 1{,}5)$ và $P(Y > 1)$.

Giải:

a) Ta có theo tính chất (iv) của hàm mật độ

$$k\int_0^1 x^2\,dx = k/3 = 1 \;\Rightarrow\; k = 3.$$

b) Từ đó $P(0{,}5 < Y < 1{,}5) = P(1/16 < X < 9/16)$

$$= 3\int_{1/16}^{9/16} x^2\,dx = 91/512;$$

$P(Y > 1) = P(X > 1/4) = 3\int_{0,25}^{1} x^2\,dx = 63/64.$

B. Phương sai

*** Định nghĩa.** Phương sai của biến ngẫu nhiên *X*, ký hiệu là *VX*, được xác định như sau

$$VX = E[(X - EX)^2]. \qquad (4)$$

Nhận xét: $X - EX$ là độ lệch của X so với trung bình của nó

⇒ Phương sai – trung bình của bình phương độ lệch

⇒ Đặc trưng cho độ phân tán của X quanh trung bình

độ bất định; độ rủi ro …

Chú ý: Công thức (4) có dạng tương đương

$$VX = E(X^2) - (EX)^2.$$

Cách tính: $VX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (EX)^2.$$

*** Tính chất**

(i) $V(c) = 0$, $c = const$;

(ii) $V(cX) = c^2 VX$;

(iii) $V(X+Y) = VX + VY$, với X và Y độc lập.

* **Thí dụ 10**. Tính phương sai của $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ (xem thí dụ 3).

Giải: Ta đã có trong thí dụ 3 $EX = (a+b)/2$. Bây giờ ta phải tính

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

Từ đó

$$\Rightarrow VX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

* **Thí dụ 11**. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}.$$

Xác định hằng số a; sau đó tính EX và VX.

Giải: Tìm a bằng cách dùng tính chất (iv) của hàm mật độ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = a\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Bây giờ ta tính kỳ vọng và phương sai của X:

$$EX = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$VX = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx - (EX)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}-2}{2\pi}.$$

* **<u>Thí dụ 12</u>**. Chặt ngẫu nhiên một đoạn dây dài $1m$ thành hai đoạn con và lấy hai đoạn con đó làm hai cạnh của một hình chữ nhật. Tính diện tích trung bình của hình chữ nhật, sau đó tính phương sai của diện tích đó.

Giải: Gọi X là độ dài của một đoạn con, diện tích hình chữ nhật sẽ là $S = X(1-X)$. Ta tìm hàm phân phối của S, để ý $X \sim \mathcal{U}(0;1)$ và $0 < S \leq 0{,}25$,

$$F(s) = P(S < s) = P[X(1-X) < s] = P(X^2 - X + s > 0).$$

Với $0 < s \leq 0{,}25$

$$P(S < s) = P(\{x_1 < X\} \vee \{X > x_2\}), x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4s}}{2}.$$

$$\Rightarrow F(s) = P(\{x_1 < X) + P(X > x_2) = F_X(x_1) + 1 - F_X(x_2).$$

Để ý hàm PP của X với $x \in (0;1)$ nhận giá trị $F_X(x) = x$, đồng thời do $0 < x_{1;2} < 1$, nên

$$F(s) = \begin{cases} 0, & s \le 0; \\ 1 - \sqrt{1-4s}, & 0 < s \le 0{,}25; \\ 1, & s > 0{,}25. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-4s}, & s \in (0; 0{,}25); \\ 0, & s \notin (0; 0{,}25). \end{cases}$$

Từ đó:

$$ES = \int_{-\infty}^{+\infty} sf(s)ds = 2\int_0^{0,25} s\sqrt{1-4s}\,ds = 1/30\ (m);$$

$$VS = E(X^2) - (EX)^2 =$$

$$= 2\int_0^{0,25} s^2\sqrt{1-4s}\,ds - 1/900 = 1/840 - 1/900 = 1/12600.$$

BÀI TẬP

1. Cho biên độ dao động của thành tầu thuỷ là biến ngẫu nhiên X tuân theo *luật phân phối Releу* có hàm PPXS
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases},$$
trong đó σ là tham số đã biết. Tính xác suất để biên độ dao động trên lớn hơn trị trung bình của nó.

2. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ
$$f(x) = \begin{cases} k(1+x)^{-3}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}.$$
Tìm k, hàm PPXS và sau đó tính EX.

3. Cho biến ngẫu nhiên X tuân theo *luật phân phối Lô-ga chuẩn* với hàm mật độ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right]; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases},$$
trong đó α, σ là tham số đã biết. Tính EX.

4. Thời gian đi từ nhà đến trường của một sinh viên A là biến ngẫu nhiên T có phân phối chuẩn. Theo thống kê biết rằng 65% số ngày đến trường của A mất hơn 20 phút và 8% số ngày mất hơn 30 phút.
   a) Tính trị trung bình và phương sai của thời gian đến trường của A.
   b) Giả sử A xuất phát ở nhà trước giờ vào học 25 phút, tính xác suất để A muộn học.
   c) A cần xuất phát trước giờ học bao nhiêu phút để XS bị muộn học của A bé hơn 0,02?

Cho: $F(-0{,}385)$ =0,35; $F(0{,}695)$= 0,51; $F(1{,}405)$=0,92; $F(2{,}054)$=0,98; $F(x)$ là hàm PP của biến $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Chú ý: Trong (13) tiết 4 chương I có thể hiệu chỉnh x_j như sau:

$$x_2 = \frac{k_2 - np + 0,5}{\sqrt{npq}}; \qquad x_1 = \frac{k_1 - np - 0,5}{\sqrt{npq}}.$$

5. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}.$$

   a) Tìm hằng số k và hàm PPXS.
   b) Phải quan sát X bao nhiêu lần để thấy có ít nhất một lần X có giá trị rơi vào khoảng $(\ln\frac{1}{\sqrt{3}}, \ln\sqrt{3})$ với XS 0,9?

6. Cho biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\lambda = 1$. Xét biến $Y = 2X^2$. Tính: a) $P(2 < Y < 18)$, b) $P(Y < 4)$.

7. Lãi suất đầu tư vào một dự án được coi là biến ngẫu nhiên tuân theo luật chuẩn. Theo đánh giá của các chuyên gia thì với XS 0,1587 dự án cho lãi suất lớn hơn 20% và với XS 0,0288 cho lãi suất lớn hơn 25%. Vậy khả năng đầu tư không bị lỗ là bao nhiêu?

8. Trong một kỳ thi điểm số trung bình của các sinh viên là 80 và phương sai là 100. Giả sử điểm thi đó tuân theo luật phân phối chuẩn.
   a) Nếu giáo viên muốn 25% sinh viên đạt điểm A (nhóm điểm cao nhất) thì điểm số thấp nhất của nhóm phải là bao nhiêu?
   b) Nếu chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên, tính XS trong đó có nhiều hơn 10 sinh viên đạt điểm A (điểm A ở câu a).

9. Cho $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ và xét $Y = a + bX + cX^2$, a, b, c là các hằng số. Tính EY và VY.

10. Chặt ngẫu nhiên một đoạn dây có độ dài a và dùng một đoạn con làm bán kính của một mặt tròn. Tìm trị trung bình và phương sai của diện tích mặt tròn đó.

11. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = ke^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

a) Tìm k và hàm PPXS của X.
b) Tính kỳ vọng và phương sai của X.

12. Cho một phần tư mặt tròn tâm O(0,0) bán kính bằng a, ký hiệu là OAB, với toạ độ tương ứng A(a,0) và B(0,a). Trên đoạn OA lấy ngẫu nhiên một điểm C, dựng một đường thẳng đi qua C vuông góc với OA và cắt cung tròn tại điểm D. Tính kỳ vọng và phương sai của độ dài đoạn CD.