§4 MỘT SỐ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

4.1 Phân phối đều

1. Phân phối đều rời rạc

*** Định nghĩa 1.** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP đều rời rạc*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$, nếu nó có bảng PPXS

x	1	2	$\dots$	n
$p(x)$	$1/n$	$1/n$	$\dots$	$1/n$

Như vậy hàm xác suất của X có dạng $p(x) = 1/n, x = \overline{1,n}$. Ta có thể mở rộng tập giá trị $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và $p(x_i) = 1/n, i = \overline{1,n}$; trong trường hợp này ta ký hiệu $X \sim \mathcal{U}_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$.

Dễ dàng, nếu $X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$, ta có:

$$EX = \frac{n+1}{2}\,;\ VX = \frac{n^2-1}{12}\,.$$

2. Phân phối đều liên tục

*** Định nghĩa 2.** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP đều liên tục* trên (a, b), ký hiệu là $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, nếu nó có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a};\ x \in (a,b), \\ 0;\ x \notin (a,b). \end{cases}$$

Bằng tính toán đơn giản ta tính được

$$EX = \frac{a+b}{2}\,; VX = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Phân phối đều $\mathcal{U}(0;1)$ có vai trò quan trọng trong tính toán mô phỏng và nếu $X \sim \mathcal{U}(0;1)$ thì:

$$f(x) = \begin{cases} 1;\ x \in (0,1), \\ 0;\ x \notin (0,1). \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0, \\ x; & 0 < x \le 1, \\ 1; & x > 1. \end{cases}$$

4.2 Phân phối nhị thức

1. Phân phối Bernoulli

*** Định nghĩa 1.** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP Bernoulli*, ký hiệu $X \sim \mathcal{B}(1;p)$, nếu hàm xác suất của nó có dạng

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0 \text{ hoặc } 1.$$

Bảng PPXS của biến $X \sim \mathcal{B}(1;p)$ là

x	0	1
$p(x)$	$q = 1 - p$	p

Để ý mọi phép thử chỉ có 2 kết cục đều có thể mô hình hoá bằng phân phối này. Dễ dàng có được nếu $X \sim \mathcal{B}(1;p)$

$$EX = p\,; VX = pq.$$

2. Phân phối nhị thức

*** Định nghĩa 2.** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP nhị thức*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, nếu hàm xác suất của nó có dạng

$$p(x) = C_n^x\, p^x (1-p)^{n-x}, x = \overline{0, n}.$$

Biến ngẫu nhiên này liên quan chặt chẽ đến khái niệm lược đồ và công thức Bernoulli đã nói đến ở chương I. Cần nhắc lại các điều kiện của lược đồ Bernoulli:

- dãy n phép thử giống nhau và độc lập;
- trong mỗi phép thử, sự kiện quan tâm xuất hiện với XS p.

Dễ thấy PP Bernoulli là một trường hợp riêng của PP nhị thức.

*** <u>Thí dụ 1</u>**. Cho biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{B}(5; 0{,}25)$. Lập bảng PP của X, tính EX, sau đó tìm: a) $P(X > 3)$; b) $P(X \leq 4)$.

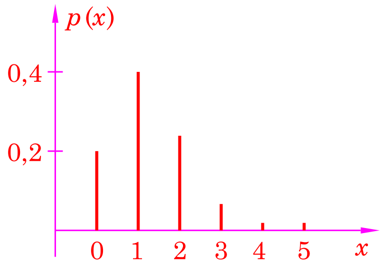
Giải. Sử dụng công thức Bernoulli trong định nghĩa, ta có

$$EX = \sum_{\forall x} xp(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, C_n^x\, p^x q^{n-x} = np = 1{,}25,$$

còn $p(x)$ cho trong bảng PPXS của X

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

Đồ thị của hàm XS



Bây giờ ta có ngay: a) $P(X > 3) = p(4) + p(5) = 0{,}0156$ và

b) $P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - p(5) = 0{,}999$.

Mặt khác ở §2 chương II ta đã biết $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i độc lập cùng

PP $\sim \mathcal{B}(1; p)$, suy ra:

$$EX = np\ ; VX = npq.$$

Chú ý rằng khi n khá lớn mức độ đối xứng (đối với kỳ vọng) của hàm XS càng rõ rệt. Ngoài ra có thể chứng minh hai kết quả sau:

(1) Nếu $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ thì $Y = n - X \sim \mathcal{B}(n; 1 - p)$;

(2) Nếu $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1; p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2; p)$, thì $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$.

4.3 Phân phối Poisson

**** Định nghĩa.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP Poisson*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, nếu hàm xác suất của nó có dạng

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

Phân phối Poisson có nhiều ứng dụng thực tế trong lý thuyết phục vụ công cộng, kiểm tra chất lượng sản phẩm…

Có thể chứng minh rằng $C_n^x\, p^x q^{n-x}$, khi $n \to +\infty$, $p \to 0$ sao cho $np \to \lambda = const$, có giới hạn $\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. Trong thực hành, khi n khá lớn và p đủ bé (trong thực tế $n > 50;\ p < 0{,}1$), thì ($\lambda = np$)

$$P_n(x) = C_n^x\, p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

* **<u>Thí dụ 2</u>**. Người ta vận chuyển 5000 chai rượu vào kho với XS mỗi chai bị vỡ là 0,0004. Tính XS để khi vận chuyển có không quá 1 chai bị vỡ.

Giải. Có thể dùng công thức Bernoulli để tính, nhưng ở đây $n =$ 5000 khá lớn trong khi $p = 0{,}0004$ quá bé. Nếu gọi X là số chai bị vỡ khi vận chuyển, dễ thấy X có phân phối xấp xỉ Poisson với $\lambda \approx np = 2$, từ đó

$$P(0 \le X \le 1) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{3}{e^2} \approx 0{,}406.$$

Các đặc trưng của $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\quad EX = \lambda;\ VX = \lambda.$

Để ý giá trị $X = 1$ chính là mod$X$. Người ta đã chứng minh $\lambda - 1 \le$ mod$X \le \lambda$: nếu λ không nguyên thì mod$X$ là số nguyên nằm giữa λ và $\lambda - 1$; còn nếu λ nguyên thì ta có hai mốt là λ và $\lambda - 1$. Trong thí dụ 2, mốt của X là các giá trị 1 và 2 (xác suất = 0,2707 cho cả hai trường hợp).

4.4 Các phân phối rời rạc khác

1. Phân phối siêu bội

Một trong giả thiết của PP nhị thức là sự độc lập của các phép thử thành viên. Một trường hợp cổ điển là giả sử ta có N sản phẩm, trong đó có một tỷ lệ phế phẩm p, nếu ta chọn không hoàn lại ra n sản phẩm và gọi $X = m$ là số phế phẩm được rút ra thì $P(X = m)$ sẽ không thể tính theo công thức Bernoulli.

**** Định nghĩa 1.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP siêu bội*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$ (với p là tỷ lệ phế phẩm lúc ban đầu $\Rightarrow$ Np số phế phẩm ban đầu), nếu hàm XS của nó có dạng

$$p(x) = \frac{C_{Np}^{x} C_{N-Np}^{n-x}}{C_N^n}, x = \overline{1,n}.$$

Để ý nếu đặt $q = 1 - p$, thì công thức trên có thể viết lại

$$p(x) = \frac{C_{Np}^{x} C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}, x = \overline{1,n}.$$

Khi N rất lớn, p sẽ ít thay đổi (coi là hằng số xác định) và phân phối siêu bội có thể xấp xỉ bằng phân phối nhị thức.

*** <u>Thí dụ 3</u>**. Trong một hộp đèn 15 bóng có 5 bóng kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên ra 10 bóng (không hoàn lại), hãy lập bảng PPXS của số bóng kém chất lượng trong mẫu chọn ra.

Giải. Gọi X là số bóng kém chất lượng trong mẫu, rõ ràng

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,00033	0,01665	0,14985	0,39960	0,34965	0,08392

Trong thực hành khi $N > 10n$ mới xấp xỉ bằng PP nhị thức.

Có thể tính được các đặc trưng của $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$:

$$EX = np;\, VX = npq\,\frac{N-n}{N-1}\,.$$

Ngoài ra khi $N \to +\infty$ sao cho $n/N \to 0$, ta sẽ có

$$\lim_{\frac{n}{N}\to 0} \frac{C_{Np}^{x} C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n} = C_n^x\, p^x q^{n-x}.$$

Trên cơ sở lược đồ Bernoulli ta có thể đưa ra hai PP khác.

2. Phân phối hình học

**** Định nghĩa 2.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP học*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{G}(p)$, nếu hàm XS của nó có dạng

$$p(x) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$$

Nếu đặt A là sự kiện trong dãy phép thử Bernoulli với $p = P(A)$, thì X là số lần không xuất hiện trước lần xuất hiện đầu tiên của A.

Dễ dàng chứng minh khi $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$EX = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}; VX = \frac{q}{p^2}.$$

3. Phân phối nhị thức âm

**** Định nghĩa 3.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP nhị thức âm*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{NB}(r, p)$, nếu hàm XS của nó có dạng

$$p(x) = C_{r+x+1}^{x}\, p^r (1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ý nghĩa của X chính là số lần không xuất hiện trước lần xuất hiện thứ r ($r > 0$) của một sự kiện A trong dãy phép thử Bernoulli. So sánh với định nghĩa 2 ở trên ta thấy PP hình học là trường hợp riêng của PP nhị thức âm khi $r = 1$.

Cũng có thể tính được nếu $X \sim \mathcal{NB}(r, p)$: với $q = 1 - p$

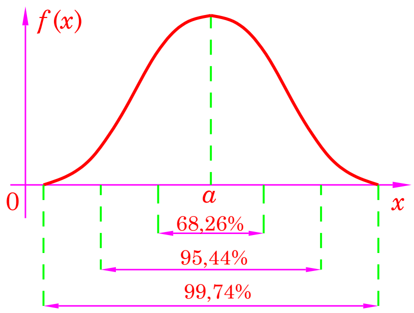
$$EX = \frac{rq}{p}; VX = \frac{rq}{p^2}.$$

4.5 Phân phối chuẩn

**** Định nghĩa.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP chuẩn* (hay *luật Gauss*), ký hiệu là $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Đồ thị của $f(x)$



Ta đã biết từ §2 và §3 $EX = \mu; VX = \sigma^2$ (σ là độ lệch chuẩn).

Đường cong mật độ chuẩn có dạng chuông, nên trong ứng dụng người ta còn gọi là *PP dạng chuông*. Trong đồ thị $\mu = a$, giá trị này vừa là trị trung bình, vừa là mốt và trung vị của X. Còn

$$P(|X-\mu| < \sigma) = 0{,}6826;\ P(|X-\mu| < 2\sigma) = 0{,}9544;$$

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) = 0{,}9974\ (\textit{quy tắc } 3\sigma).$$

*** <u>Thí dụ 4</u>**. Độ dài một chi tiết máy giả sử tuân theo luật chuẩn với trị trung bình 20 *cm* và độ lệch chuẩn là 0,5 *cm*. Hãy tính XS để với một chi tiết loại trên được chọn ngẫu nhiên thì độ dài của nó:

a) lớn hơn 20*cm*; b) bé hơn 19,5*cm*; c) lớn hơn 21,5*cm*.

Giải. Gọi X là độ dài chi tiết máy ở trên $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(20; 0{,}5^2)$

a) Do tính đối xứng của PP qua kỳ vọng nên $P(X > 20) = 0{,}5$.

b) Do $P(19{,}5 < X < 20{,}5) = 68{,}28\% \Rightarrow$ XS nằm ngoài khoảng bằng 31,74%. Do tính đối xứng $P(X < 19{,}5) = 15{,}87\%$ (và cũng bằng $P(X > 20{,}5)$).

c) Do cùng các lý do như trên và dùng quy tắc 3σ $P(X > 20{,}5)$ $= (1-99{,}74\%)/2 = 0{,}0013$ (XS khá bé).

Trong trường hợp tổng quát ta có, nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right),$$

với $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ là hàm Laplace, và $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\,\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Để ý hàm phân phối của X sẽ thoả mãn $F(x) = \phi(x) + 0{,}5$. Đồng thời bằng phép biến đổi $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ta có thể đưa $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ về $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ với hàm mật độ (hàm Gauss)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}.$$

Tổng của n biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối chuẩn là một biến ngẫu nhiên chuẩn (ta sẽ thấy chặt chẽ hơn ở chương III).

Từ đó nếu $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\ \forall i = \overline{1,n}$ và độc lập thì

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

và $$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0; 1) \qquad (\textit{PP chuẩn chuẩn tắc}).$$

Cuối cùng PP chuẩn có thể được dùng để xấp xỉ khá tốt cho một số PP rời rạc. Về mặt lý thuyết có thể chứng minh nếu $X \sim \mathcal{B}(n; p)$

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \to \infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0; 1) \qquad (\textit{hội tụ theo luật PP}).$$

Chính sự kiện này cho phép ta xấp xỉ phân phối nhị thức với n khá lớn và $np \geq 5$ (khi $p \leq 0{,}5$) *hoặc* $n(1-p) \geq 0{,}5$ (*khi* $p \geq 0{,}5$) bằng phân phối chuẩn: Nếu $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, thì

$$P(X = \alpha) = \frac{\varphi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)}{\sqrt{npq}};$$

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

*** <u>Thí dụ 5</u>**. Cho $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}4)$, tính $P(4 \leq X \leq 13)$.

Giải. Theo công thức ở trên

$$P(4 \leq X \leq 13) = \phi\left(\frac{13-8}{\sqrt{4{,}8}}\right) - \phi\left(\frac{4-8}{\sqrt{4{,}8}}\right) = \phi(2{,}28) + \phi(1{,}83)$$

$$= 0{,}4884 + 0{,}4664 = 0{,}9548.$$

Nhưng do n =20 chưa thật lớn, trong thực hành người ta hiệu chỉnh công thức xấp xỉ trên như sau

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \phi\left(\frac{\beta+0{,}5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha-0{,}5-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Từ đó $\quad P(4 \leq X \leq 13) = \ \phi(2{,}51) + \phi(1{,}60) = 0{,}9743.$

Để ý kết quả đúng của XS này là 0,978.

Người ta cũng chứng minh được rằng, nếu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ thì

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0;1) \qquad (\textit{hội tụ theo luật PP}).$$

4.6 Phân phối mũ

Định nghĩa. Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP mũ*, ký hiệu là $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x > 0, \\ 0; & x \leq 0. \end{cases}$$

Dễ dàng tính được:

$$EX = \frac{1}{\lambda}\,; VX = \frac{1}{\lambda^2}\,;$$

và hàm PPXS $\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0.$

*** <u>Thí dụ 6</u>**. Thời gian hoạt động của một bóng đèn là biến ngẫu nhiên X có PP mũ với kỳ vọng là 500. Tìm XS để thời gian hoạt động của bóng đèn không bé hơn 1000 giờ.

Giải. Vì $EX = \dfrac{1}{\lambda} = 500$ nên $\lambda = 0{,}002$. Vậy XS phải tìm là

$P(X \geq 1000) = 1 - P(X < 1000) = e^{-0{,}002.1000} = e^{-2} \approx 0{,}1353.$

4.7 Các phân phối liên tục khác

1. Phân phối χ^2

Nhiều PP liên tục được cảm sinh trực tiếp bởi PP chuẩn. Các PP này cũng rất quan trọng và hay được dùng trong thống kê.

**** Định nghĩa 1.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP χ^2 với n bậc tự do*, ký hiệu là $X \sim \chi^2(n)$, nếu hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x > 0, n > 0,$$

trong đó hàm ga-ma đã quen thuộc trong giải tích toán

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$$

với các tính chất $\forall\ i\ nguyên$

(i) $\Gamma(i+1) = i!\ (i > 0);$

(ii) $\Gamma\left(\frac{i}{2}\right) = \left(\frac{i}{2}-1\right)\left(\frac{i}{2}-2\right)\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (i lẻ > 2);

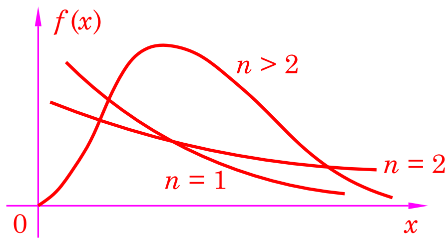
(iii) $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), x \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên cách định nghĩa này khá phức tạp và khó cho phép nhận biết PP rõ ràng trong thực hành.

*** Định nghĩa 2.** Cho n biến ngẫu nhiên độc lập $X_i \sim \mathcal{N}(0;1)$, $i = \overline{1,n}$. Khi đó biến ngẫu nhiên

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \sim \chi^2(n).$$

Đồ thị của hàm mật độ:



Các đặc trưng:

$EU_n = n; VU_n = 2n$.

Phân phối χ^2 có một số tính chất quan trọng:

(i) Nếu $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ và độc lập $\Rightarrow X + Y \sim \chi^2(n+m)$.

(ii) $\frac{U_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ (*hội tụ theo luật PP*).

Trong thống kê ta dùng một hệ quả quan trọng của tính chất (ii):

Nếu ta có n biến ngẫu nhiên độc lập $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = \overline{1,n}$, và

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

2. Phân phối Student (phân phối $t(n)$)

**** Định nghĩa 1.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP Student với* n *bậc tự do,* ký hiệu là $X \sim t(n)$, nếu hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\left[\frac{n+1}{2}\right]}, n > 0.$$

*** Định nghĩa 2.** Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo luật $\mathcal{N}(0; 1)$ và $\chi^2(n)$ tương ứng. Khi đó biến ngẫu nhiên

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

Đồ thị của PP $t(n)$ có dạng rất giống với đường cong chuẩn $\mathcal{N}(0; 1)$. Các số đặc trưng của T_n:

$$ET_n = 0 \ (n > 1); VT_n = \frac{n}{n-2} \ (n > 2).$$

PP Student có tính chất

$$T_n \xrightarrow[n \to \infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0; 1) \qquad\qquad (\textit{hội tụ theo luật PP}).$$

Trong thực hành, khi $n \geq 30$, đồ thị của mật độ phân phối $t(n)$ đã rất gần với đồ thị mật độ chuẩn $\mathcal{N}(0; 1)$. Chú ý khi $n = 1$, ta có T_1 tuân theo *PP Cauchy* với hàm mật độ $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, là PPXS không có mô men nào.

3. Phân phối Fisher - Snedecor (phân phối $\mathcal{F}(n,m)$)

**** Định nghĩa 1.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP Fisher - Snedecor với n và m bậc tự do,* ký hiệu là $X \sim \mathcal{F}(n,m)$, nếu hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} (m + nx)^{-\frac{n+m}{2}};\ x, m, n > 0.$$

Ta đưa ra một định nghĩa khác giúp nhận dạng biến có PP $\mathcal{F}(n,m)$ dễ dàng hơn.

*** Định nghĩa 2.** Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo luật $\chi^2(n)$ và $\chi^2(m)$ tương ứng. Khi đó biến ngẫu nhiên

$$U = \frac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}(n,m).$$

Đồ thị của hàm mật độ PP $\mathcal{F}(n,m)$ có dạng gần giống với mật độ của PP χ^2. Các số đặc trưng:

$$EX = \frac{m}{m-2}\ (m > 2);\ VX = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2}\ (m > 4).$$

Nếu $n = 1$ ta thấy $(T_m)^2 = \mathcal{F}(1,m)$.

3. Phân phối gamma

**** Định nghĩa 1.*** Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo *luật PP gamma,* ký hiệu là $X \sim \gamma(r,\lambda)$, nếu hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} x^{r-1};\ x, r, \lambda > 0.$$

Các số đặc trưng của $X \sim \gamma(r,\lambda)$:

$$EX = \frac{r}{\lambda};\ VX = \frac{r}{\lambda^2}.$$

Một số tính chất quan trọng của PP gamma:

(i) Nếu $X \sim \gamma(p,\lambda)$, $Y \sim \gamma(q,\lambda)$ và độc lập $\Rightarrow X + Y \sim \gamma(p+q,\lambda)$.

(ii) Nếu $X \sim \gamma(r,\lambda)$ thì $\frac{X-r}{\sqrt{r}} \xrightarrow[r\to\infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

(*hội tụ theo luật PP*).

Để ý nếu $r = 1$ ta có phân phối mũ $\mathcal{E}(\lambda)$.

BÀI TẬP

1. Một dây chuyền sản xuất mỗi ngày 2000 chi tiết máy, biết XS để một chi tiết bị lỗi là 5%. Người ta lấy ngẫu nhiên ra một mẫu gồm 1% của số chi tiết được sản xuất trong ngày nào đó. Tính XS để trong mẫu đó số chi tiết bị lỗi không quá 10%.

2. Thống kê liên quan đến xe ô tô tư nhân ở Gotham City cho thấy XS để một xe vượt chuẩn Federal EPA là 0,45. Hỏi một thanh tra viên của thành phố này cần kiểm tra bao nhiêu xe trước khi với XS lớn hơn 0,95 anh ta tìm được 3 xe vượt chuẩn EPA?

3. Giả sử một thiết bị ngừng hoạt động do môi trường nhiệt độ cao và cho biết XS để một công tắc điện tử kích hoạt thiết bị dự phòng là 0,6. Nếu các công tắc hoạt động độc lập và chỉ kích hoạt mỗi lần một thiết bị, thì cần lắp song song bao nhiêu công tắc để XS kích hoạt thành công đạt ít nhất 95%?

4. XS để bán được 1 chiếc máy giặt mới trong vòng 1 ngày là 0,006. Tìm XS để trong ngày tiêu thụ được không quá 9 chiếc từ lô hàng 1000 chiếc.

5. Một quyển sách 500 trang có 500 lỗi. Tính XS để:
   a) trong một trang nào đó có không ít hơn 3 lỗi;
   b) ít nhất 1 trang chứa nhiều hơn 4 lỗi.

6. Trung bình người bạch tạng chiếm 1% cư dân; đánh giá khả năng trong 200 cư dân được chọn ngẫu nhiên có không ít hơn 4 người bạch tạng.

7. (Bài toán Banach) Một người có trong túi 2 bao diêm, mỗi bao có n que. Mỗi khi cần diêm anh ta rút hú hoạ ra một bao. Tìm XS sao cho khi người đó lần đầu rút phải bao rỗng thì trong bao kia còn đúng k que.

8. Cho biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn σ. Hãy tính $P(|X-\pi|<3\sigma)$ cho các trường hợp:
   a) X có PP Poisson với tham số $\lambda = 0{,}09$;
   b) X có PP đều trên $(0, 1)$;
   c) X có PP mũ với tham số λ.

9. Tìm XS để một biến ngẫu nhiên có PP $t(14)$ se nhận giá trị: a) lớn hơn 2,145; b) lớn hơn – 2,145.

10. Tìm XS để một biến ngẫu nhiên có PP $\chi^2(12)$ lấy giá trị lớn hơn 23,337. Biến $X \sim \chi^2(17)$ sẽ nhận các giá trị nào để XS lớn hơn 0,05?

11. Cho 2 biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ và $Y \sim \chi^2(17)$. Tính XS $P(X > \sqrt{Y} + 10)$.

12. Sức bền thiết kế của một dây chịu lực cầu dây văng có PP $\chi^2(9)$. Sau khi cầu xây xong ứng suất lực dây đó phải chịu có PP $\chi^2(4)$. Hỏi dây chịu lực có đủ sức bền cần thiết hay không?