PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 13

§2. Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

- Phép biến đổi của đạo hàm
- Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu
- Hệ phương trình vi phân tuyến tính
- Những kĩ thuật biến đổi bổ sung

1. Đặt vấn đề

- Vận dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

với điều kiện $x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0'$

- So sánh với các phương pháp giải đã học
- Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính

2. Phép biến đổi của đạo hàm

Định lý 1. Cho $f(t)$ liên tục và trơn từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ (tức tồn tại hằng số không âm c, M và T thoả mãn:

$$|f(t)| \le Me^{ct},\quad t \ge T \qquad (2.1)$$

Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ với $s > c$ và có $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$

Chứng minh. +) $\mathcal{L}\{f'(s)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-st} df(t)$

+) $= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

Do $|f(t)| \le Me^{ct}, t \ge T \Rightarrow e^{-st} f(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ khi $s > c$

+) Từ Định lí 2 (bài 1) $\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ hội tụ với $s > c$

+) Từ đó ta có $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là trơn từng khúc trên $[a;\ b]$ $\Leftrightarrow$ nó khả vi trên $[a;\ b]$ trừ ra hữu hạn điểm và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a;\ b]$

3. Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

Hệ quả. Phép biến đổi của đạo hàm bậc cao

Giả sử rằng các hàm số $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$. Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ với $s > c$ và có

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ví dụ 1. Sử dụng Định lí 1, chứng minh rằng

a) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n = 1,2,3,\ldots$

Chứng minh bằng qui nạp

+) $n = 1$: $f(t) = te^{at} \Rightarrow f'(t) = ate^{at} + e^{at} \Rightarrow sF(s) - f(0) = aF(s) + \dfrac{1}{s-a}$

$\Rightarrow F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

+) $n = k$: $\mathcal{L}\{t^k e^{at}\} = \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$

+) $\mathcal{L}\{t^{k+1} e^{at}\} = \dfrac{k+1}{s-a}\mathcal{L}\{t^k e^{at}\} = \dfrac{k+1}{s-a}\cdot\dfrac{k!}{(s-a^{k+1})} = \dfrac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}}$

b) $\mathcal{L}\{t\sinh kt\} = \dfrac{2sk}{s^2-k^2}$

+) $f(t) = t.\sinh kt \Rightarrow f(0) = 0$ và có

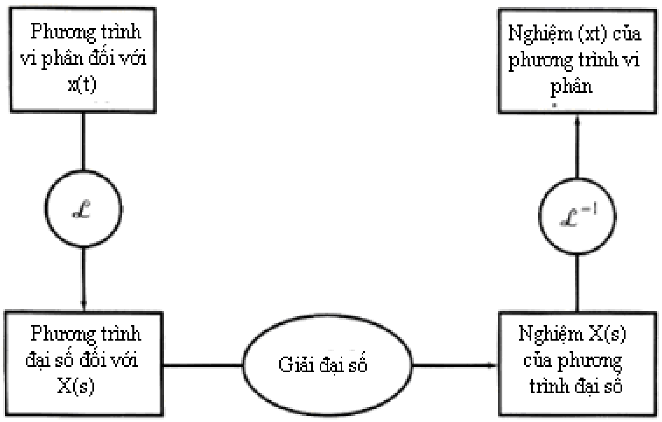
+) $f'(t) = \sinh kt + kt\cosh kt$, $f'(0) = 0$

$f''(t) = 2k\cosh kt + k^2 t\sinh kt$

+) $\mathcal{L}\{2k\cosh kt + k^2 t\sin kt\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

+) $2k\dfrac{s}{(s^2-k^2)} + k^2F(s) = s^2F(s)$, ở đó $F(s) = \mathcal{L}\{t\sinh kt\}$

+) $F(s) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$



Hình 4. 2. 4. Sử dụng biến đổi Laplace để giải một phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $x'' - x' - 6x = 0$ với điều kiện $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$

• Ta có: $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 2$

• $\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(x) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1$

• Thay vào phương trình đã cho có

$$\left(s^2X(s)-2s+1\right)-\left(sX(s)-2\right)-6X(s)=0 \Leftrightarrow \left(s^2-s-6\right)X(s)-2s+3=0$$

• $X(s)=\dfrac{2s-3}{s^2-s-6}=\dfrac{2s-3}{(s-3)(s+2)}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{1}{s+2}$.

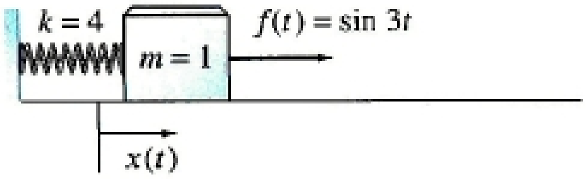
• Do $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$ nên có $x(t)=\dfrac{3}{5}e^{3t}+\dfrac{7}{5}e^{-2t}$

là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu.

Ví dụ 3. Giải bài toán giá trị ban đầu

a) $x''+4x=\sin 3t,\quad x(0)=x'(0)=0$

Bài toán này gắn liền với quá trình chuyển động của một hệ vật – lò xo với tác động của lực bên ngoài)



Hình 4. 2. 2. Hệ vật – lò xo thỏa mãn bài toán điều kiện đầu trong Ví dụ 2. Điều kiện đầu của vật là vị trí cân bằng của nó.

• Từ điều kiện ban đầu có: $\mathcal{L}\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$

• Từ bảng 4.1.2 có $\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\dfrac{3}{s^2+3^2}$.

• Thay vào ta có $s^2X(s)+4X(s)=\dfrac{3}{s^2+9}$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}=\frac{As+B}{(s^2+4)}+\frac{Cs+D}{(s^2+9)}$$

• Đồng nhất ta có $A=C=0,\ B=\dfrac{3}{5},\ D=-\dfrac{3}{5}$, do đó

$$X(s)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{s^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

• Do $\mathcal{L}\{\sin 2t\}=\dfrac{2}{s^2+4}$, $\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\dfrac{3}{s^2+3^2}$ nên ta có $x(t)=\dfrac{3}{10}\sin 2t-\dfrac{1}{5}\sin 3t$.

b) $x''+9x=0,\ x(0)=3,\ x'(0)=4$ $\quad\left(x(t)=3\cos 3t+\dfrac{4}{3}\sin 3t\right)$

c) $x''+8x'+15x=0,\ x(0)=2,\ x'(0)=-3$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{2}\left(7e^{-3t}-3e^{-5t}\right)\right)$

d) $x''+4x=\cos t,\ x(0)=0,\ x'(0)=0$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)\right)$

e) $x''+9x=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=0$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{9}(1-\cos 3t)\right)$

Nhận xét. Như vậy phương pháp biến đổi Laplace cho lời giải trực tiếp tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu mà không cần phân biệt đó là phương trình vi phân thuần nhất hay là không thuần nhất.

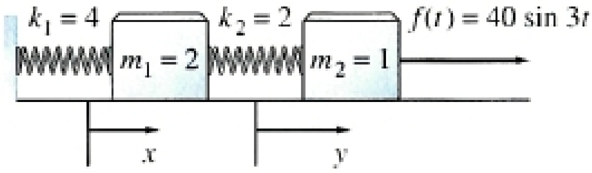
4. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

• Phép biến đổi Laplace có khả năng biến đổi hệ phương trình vi phân tuyến tính thành một hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4. a) Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính $\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y, \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t \end{cases}$

với điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

• Đây là bài toán giá trị ban đầu xác định hàm dịch chuyển $x(t)$ và $y(t)$ của hệ hai vật thể được chỉ ra trong Hình 4.2.5, giả sử rằng lực $f(t) = 40\sin 3t$ là tác động bất ngờ tới vật thể thứ hai tại thời điểm t = 0 khi cả hai vật thể đang ở trạng thái tĩnh tại vị trí cân bằng của chúng.



Hình 4. 2. 5. Hệ vật thể thỏa mãn điều kiện đầu trong Ví dụ 3. Cả hai vật thể đang ở vị trí cân bằng.

• Từ điều kiện ban đầu có $\mathcal{L}\,\{x''(t)\} = s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) = s^2X(s)$

• Tương tự $\mathcal{L}\,\{y''(t)\} = s^2Y(s)$

• Do $\mathcal{L}\,\{\sin 3t\} = \dfrac{3}{s^2+9}$, thay vào hệ phương trình có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2s^2X(s) = -6X(s) + 2Y(s) \\ s^2Y(s) = 2X(s) - 2Y(s) + \dfrac{120}{s^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s^2+3)X(s) - Y(s) = 0 \\ -2X(s) + (s^2+2)Y(s) = \dfrac{120}{s^2+9} \end{cases}$$

• $\Delta = \begin{vmatrix} (s^2+3) & -1 \\ -2 & (s^2+2) \end{vmatrix} = (s^2+1)(s^2+4)$

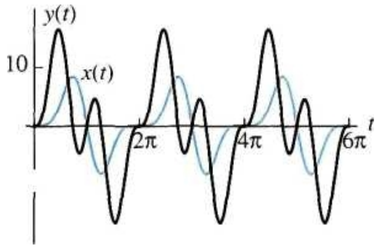
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{120}{s^2+9} & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{120}{s^2+9}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & \dfrac{120}{s^2+9} \end{vmatrix} = \frac{120\left(s^2+3\right)}{s^2+9}$$

• Do đó $X(s) = \dfrac{120}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{5}{s^2+1} - \dfrac{8}{s^2+4} + \dfrac{3}{s^2+9}$

• Do đó $x(t) = 5\sin t - 4\sin 2t + \sin 3t$

• Tương tự có $Y(s) = \dfrac{120(s^2+3)}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{10}{(s^2+1)} + \dfrac{8}{s^2+4} - \dfrac{18}{s^2+9}$

• nên có $y(t) = 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t$



Hình 4. 2. 6. Các hàm định vị $x(t)$ và $y(t)$ trong Ví dụ 3 a).

b) $\begin{cases} x' + 2y' + x = 0, \; x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, \;\; y(0) = 1 \end{cases}$

Tác động toán tử Laplace, sử dụng điều kiện ban đầu có

$$\begin{cases} sX(s) + 2[sY(s) - 1] + X(s) = 0 \\ \quad sX(s) - [sY(s) - 1] + Y(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X(s) + 2sY(s) = 2 \\ sX(s) + (1-s)Y(s) = -1 \end{cases}$$

Giải hệ 2 phương trình tuyến tính cấp 1 ta có

+) $X(s) = -\dfrac{2}{3s^2 - 1} = \dfrac{2}{-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1/\sqrt{3}}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} L \left\{ \sinh \dfrac{t}{\sqrt{3}} \right\}$

$$Y(s) = \frac{3s+1}{3s^2 - 1} = \frac{s + 1/3}{s^2 - 1/3} = \frac{s}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2}$$

$$= L \left\{ \cosh \frac{t}{\sqrt{3}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} L \left\{ \sinh \frac{t}{\sqrt{3}} \right\}$$

+) $x(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \sinh \dfrac{t}{\sqrt{3}}, \;\; y(t) = \cosh \dfrac{t}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sinh \dfrac{t}{\sqrt{3}}$

c) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + e^{-t}, \;\; x(0) = 0 = y(0) \end{cases}$

$\left(x(t) = \dfrac{2}{9}\left(e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t}\right), y(t) = \dfrac{1}{9}\left(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t}\right) \right)$

d) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = 0, \; x(0) = y(0) = 0 \\ y'' + x + 2y = 0, \;\; x'(0) = y'(0) = -1 \end{cases}$

$\left(x(t) = \dfrac{1}{4}(2t - 3\sin 2t), y(t) = -\dfrac{1}{8}(2t + 3\sin 2t) \right)$

e) 1°/ $\begin{cases} x' + 3y' + x = 0, \;\; x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, \;\;\; y(0) = 2 \end{cases}$

$\left(x(t) = -3\sinh \dfrac{t}{2}, \;\; y(t) = 2\cosh \dfrac{t}{2} + \sinh \dfrac{t}{2} \right)$

2°/ $\begin{cases} x' - 3y' + x = 0, & x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, & y(0) = -2 \end{cases}$

$\left(x(t) = 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2},\ y(t) = -2\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$

f) 1) $\begin{cases} x'' = -3x + y \\ y'' = 2x - 2y + \sqrt{3}\sin\left(t\sqrt{3}\right) \end{cases}$, $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

2) $\begin{cases} x'' = -2x + 2y + \sqrt{3}\sin\left(t\sqrt{3}\right) \\ y'' = x - 3y \end{cases}$, $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

g) $\begin{cases} x'' = -3x + y, & x(0) = 0 = x'(0) \\ y'' = 2x - 2y, & y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$, $\left(\begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{6}(2\sin t - \sin 2t) \\ y(t) = \frac{1}{6}(\sin 2t + 4\sin t) \end{array} \right)$

5. Những kỹ thuật biến đổi bổ sung

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

• Đặt $f(t) = te^{at}$ thì có $f(0) = 0,\ f'(t) = e^{at} + ate^{at}$. Do đó có

$\mathcal{L}\left\{e^{at} + ate^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$

• Do phép biến đổi tuyến tính nên có: $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + a\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = s\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$

• Do đó $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}}{s-a} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ (Do $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$)

Ví dụ 6. Tìm $\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\}$

Đặt $f(t) = t\sin kt$ thì có $f(0) = 0,\ f'(t) = \sin kt + kt\cos kt,\ f'(0) = 0$

• $f''(t) = 2k\cos kt - k^2 t\sin kt$

• Mặt khác $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$, $\mathcal{L}\left\{\cos kt\right\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$ nên có

$$\frac{2ks}{s^2 + k^2} - k^2\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\}$$

• Do đó $\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\} = \dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$

Định lí 2. Phép biến đổi của tích phân

Nếu $f(t)$ liên tục từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ thì

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{F(s)}{s} \text{ với } s > c$$

hay là: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F\}(\tau)d\tau$

Chứng minh. +) f liên tục từng khúc $\Rightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ liên tục, trơn từng khúc với $t \geq 0$ và có $|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|d\tau \leq M\int_0^t e^{c\tau}d\tau = \frac{M}{C}(e^{ct} - 1) < \frac{M}{C}e^{ct}$

$\Rightarrow g(t)$ là hàm bậc mũ khi $t \to \infty$

+) Sử dụng định lí 1 ta có $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$

+) Do $g(0) = 0$ nên ta có $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$

Ví dụ 6. Tìm nghịch đảo của phép biến đổi Laplace của $G(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$

• Ta có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}d\tau = \int_0^t e^{a\tau}d\tau = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$

• Từ đó và tiếp tục có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}d\tau$

$= \int_0^t \frac{1}{a}(e^{a\tau} - 1)d\tau = \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau} - \tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!