

**HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ**  
**KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

**PGS TS Tô Văn Ban (Chủ biên)**  
**ThS Nguyễn Văn Hồng**

# **BÀI GIẢNG CHI TIẾT**

# **GIẢI TÍCH I**

**Hà nội, 4-2013**

**BỘ MÔN DUYỆT**  
**Chủ nhiệm Bộ môn**

**BÀI GIẢNG CHI TIẾT**  
(Dùng cho 75 tiết giảng)

**Thay mặt nhóm**  
**môn học**

Học phần: GIẢI TÍCH I  
Nhóm môn học: Giải tích  
Bộ môn: Toán

Tô Văn Ban

Khoa: Công nghệ Thông tin

Tô Văn Ban

Chủ biên: PGS TS Tô Văn Ban

Tham gia: ThS Nguyễn Văn Hồng

**Thông tin về nhóm môn học**

TT	Họ tên giáo viên	Học hàm	Học vị
1	Tô Văn Ban	PGS	TS
2	Nguyễn Xuân Viên	PGS	TS
3	Nguyễn Đức Nụ	Giảng viên chính	TS
4	Vũ Thanh Hà	Giảng viên chính	TS
5	Tạ Ngọc Ánh	Giảng viên	TS
6	Bùi Văn Định	Giảng viên	ThS
7	Bùi Hoàng Yên	Giảng viên	ThS
8	Nguyễn Thị Thanh Hà	Giảng viên	ThS
9	Nguyễn Văn Hồng	Giảng viên	ThS
10	Nguyễn Thu Hương	Giảng viên	ThS
11	Đào Trọng Quyết	Giảng viên	ThS
12	Nguyễn Hồng Nam	Giảng viên	ThS

**Địa điểm làm việc:** Bộ Môn Toán, P1408, Nhà A1 (Gần đường HQ Việt)

**Điện thoại, email:** 069 515 330, bomontoan\_hvktqs@yahoo.com

**Bài giảng1: Giới hạn – Liên tục – Đạo hàm**

Chương I: Giới hạn, liên tục, phép tính vi phân của hàm một biến

Mục: § 1.1. số thực (2 tiết)

§ 1.2. giới hạn dãy số (3 tiết)

Tiết thứ: 1-5, Tuần thứ: 1

**- Mục đích, yêu cầu:**

- Nắm sơ lược về Học phần, các chính sách riêng của giáo viên, địa chỉ Giáo viên, bầu lớp trưởng Học phần.
- Nắm được vài khái niệm về tập số như sup, inf, định lý về cận trên;
- Tìm giới hạn của dãy thông thường, dãy đơn điệu;
- Tìm giới hạn của hàm dùng các phép thay tương đương;

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**Giới thiệu học phần GIẢI TÍCH I (15 phút)**

Giải tích toán học là bộ môn của toán học liên quan đến những vấn đề của biến đổi và chuyển động. Phương tiện chủ yếu của nó là nghiên cứu các đại lượng vô cùng bé. Nó đề cập đến chuyển những đại lượng nọ tiến đến những đại lượng kia. Hai nhánh chính của giải tích là phép tính vi phân và phép tính tích phân được liên hệ với nhau bởi định lý cơ bản của giải tích.

- Dưới dạng toán giải tích, I. Newton đã giải thích chuyển động của các hành tinh xung quanh mặt trời. Ngày nay, giải tích dùng để tính toán quỹ đạo của các vệ tinh, dự báo kích cỡ quần thể, các chỉ số kinh tế, dự báo thời tiết, đo thông số tim mạch, tính toán phí bảo hiểm ...

- Một số chứng minh định lý ... được lược giản, nhưng dung lượng kiến thức, tầm sâu trí tuệ tư duy lô gíc hoàn toàn đảm bảo, đủ để sinh viên kỹ thuật và công nghệ dư sức lĩnh hội được dung lượng các môn học khác - mà nhiều khi ngày một lớn - ở bậc đại học. Chúng tôi chú trọng đến khía cạnh áp dụng của vấn đề. Những ví dụ, bài tập có tính ứng dụng cao trả lời cho người học câu hỏi học phần này, để làm gì, tác dụng ra sao với các môn học tiếp, với năng lực người kỹ sư tương lai.

- Chúng ta sẽ thấy rất nhiều ví dụ, bài tập liên quan đến thực tiễn
- Các khái niệm, định lý, tính chất ... thường được phát biểu bằng lời và kết hợp với công thức...

**Chính sách riêng**

Mỗi lần lên bảng chữa bài tập đúng được ghi nhận, cộng vào điểm quá trình 0.5 điểm. Chữa bài tập sai không bị trừ điểm.

Hết Chương 1 nộp Bài làm của Bài tập Chương 1.

Sự hiện diện trên lớp: Không đi học  $\geq 5$  buổi sẽ không được thi.

**Tài liệu tham khảo**

TT	Tên tài liệu	Tác giả	Nxb	Năm xb
1	Giáo trình Giải tích I	Tô Văn Ban	Giáo dục	2012
2	Toán học cao cấp (T2,3)	Nguyễn Đình Trí và ...	Giáo dục	2007
3	Giải tích 1	Trần Bình	KH và KT	2007
4	Bài tập giải tích	Nguyễn Xuân Viên	HVKTQS	2006

5	Bài tập Giải sẵn giải tích I	Trần Bình	KH và KT	2007
6	Calculus (Early Transcendentals),	Jon Rogawski	W.H.Freeman and Co.	2007

**BÀI TẬP VỀ NHÀ** Ví dụ: Tự đọc; Bài tập: Chữa trên lớp

**CHƯƠNG I.** Trợ: 3; 4(b); 7; 11; 17(b); 25(b).  
**Chính:** 8(a, b, c); 9; 12(11 → 31, Chữa: 11, 14, 16, 18, 24, 27, 29, 31); 13(d → i; Chữa: e, f, i); 14(a-f, Chữa: a, b, d, f); 15; 19(a, b); 20; 23.

**Ví dụ cuối chương 1 (b, d, e)**

**CHƯƠNG II** Trợ: 1(1, 3, 5, 7, 9, 12, 15, 17, 19); 18(a, d, e); 34; 36(a, b); 41, 42.

**Chính:** 1(13, 21); 3; 6(a, b); 7(b); 9(a, b); 12(a, b, c, d); 13(d); 15(a, c); 16;

18(a); 21; 22(a, b); 25(c); 32(a, b, c, d); 38(a, b); 39(b).

**BS 1.** Nghiệm lại định lý Rolle với các hàm số sau, chỉ rõ điểm trung gian c trong đoạn  $[-1, 1]$  trong định lý nếu nó tồn tại:

$$(a) f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \quad (b) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ 1 - x^3 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

(b) **BS 2.** Biết rằng hàm ẩn  $y = y(x)$  từ phương trình  $xy = \ln y + 2$  khả vi và  $y(2) = 1$ . Hãy tính  $y''$  tại  $x = 2$ .

**VD 2.8; VD 2.16(a, b); 2.21; 2.26(a, b, d); 2.30(d); 2.33; VD 39; VD 2.40 (hình 2.32 a:  $r = \arcsin \theta$ ).**

**CHƯƠNG III.** Trợ: 1(2, 3, 4, 10, 14, 15, 25, 34); 14(a); 15(a); 18; 25(a, c)

**Chính:** 1(7, 19, 21, 22, 24, 27, 29, 30); 3(g); 2(c, d); 4(a, b); 10(c); 18. 19(c, d, e, f); 20(b, c); 21(a, b); 22; 34(h, i, j, k, l); 35(a → f, Chữa: a, b, c);

36(a → i, Chữa: a, b, d, h, i).

**BS.** Xét sự hội tụ của ác tích phân suy rộng  $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x} dx$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ ;

$$\int_2^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^6}} dx; \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} dx; \int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}; \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^5}} dx; \int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**VD 3.26; VD 3.27; VD 3.28. VD 3.32; VD 3.38 (a, b); VD 3.39; VD 3.40;**

**VD 3.41; VD 3.42; VD 3.43; VD 3.44(a).**

**CHƯƠNG IV.** Trợ: 1(2, 5, 11, 12, 13, 18, 26); 2, 3(1, 5, 9, 12); 5(b, f).

**Chính:** 1(28, 29, 30); 11(f); 12(c); 14(c → l, Chữa: c, e, f, i, j, l); 15(a, b, c); 16(a, b); 18(d, e); 21; 23(c, e); 24(a, b); 26(a → i, Chữa: a, c, e, h) 27(a → f, Chữa: a, c, d, f); 33(a, c); 34(a, b, c).

• **BS 1.**  $f(x) = \ln(1+2x)$ . Tính đạo hàm  $f^{(2000)}(0)$ .

- **BS 2.** Xét sự hội tụ  $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$

- **BS 3.** Cho chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n$

a) Tính tổng riêng thứ 5 tại  $x = 0$ . b) Tìm miền hội tụ của chuỗi.

**VD 4.19 (b); VD 4.23(b); VD 4.24 (b, c, d); VD 4.25(a, b, c, d)); 4.5.7 (Ví dụ khác) (a, b, c); VD 4.27; VD4.29 (b).**

#### Tài liệu tham khảo cho Học phần GTI

TT	Tên tài liệu	Tác giả	Nxb	Năm xb
1	Giáo trình Giải tích I	Tô Văn Ban	Nxb Giáo dục	2012
2	Giải tích I	Trần Bình	KH và KT	2007
3	Toán học cao cấp (T 2)	Nguyễn Đình Trí và ...	Giáo dục	2007
4	Bài tập Giải tích	Nguyễn Xuân Viên	HV KTQS	2006
4	Bài tập Giải sẵn giải tích Tập 1	Trần Bình	KH và KT	2007
5	Calculus (Early Transcendentals),	Jon Rogawski	W.H.Freeman and Co.	2007

#### CẤU TRÚC ĐỀ THI, CÁCH THỨC CHO ĐIỂM

Câu số	Về phần	Số điểm
Câu 1	Lý thuyết	2đ
Câu 2	Chương 1: Giới hạn, liên tục	2đ
Câu 3	Chương 2: Đạo hàm	2đ
Câu 4	Chương 3: Tích phân	2đ
Câu 5	Chương 4: Chuỗi	2đ
Điểm bài thi		10đ
Điểm quá trình		10đ
Điểm chuyên cần		10đ
Tổng điểm = điểm chuyên cần x 10% + điểm quá trình x 20% + điểm bài thi x 70%		10đ

**Hình thức thi:** Thi viết

**Bầu lớp trưởng lớp học phần.** Kết quả:

**Số điện thoại giáo viên:**

**Địa chỉ Email cần:**

**Webside cần:**

**Danh sách SV (Ít nhất 7 cột kiểm tra sĩ số)**

**Giới thiệu bảng chữ cái Hy Lạp (Greek Alphabet)**

$\alpha$	alpha	$\iota$	iota	$\rho$	rho
$\beta$	beta	$\kappa$	kappa	$\sigma$	sigma
$\gamma$	gamma	$\lambda$	lambda	$\tau$	tau
$\delta$	delta	$\mu$	mu	$\upsilon$	upsilon
$\epsilon$	epsilon	$\nu$	nu	$\phi$	phi
$\zeta$	zeta	$\xi$	xi	$\chi$	chi
$\eta$	eta	$\omicron$	omicron	$\psi$	psi
$\theta$	theta	$\pi$	pi	$\omega$	omega

## Chương 1

### GIỚI HẠN, LIÊN TỤC

#### § 1.1. SỐ THỰC (2 tiết)

##### 1.1.1. Mở đầu

###### a. Giới thiệu về các tập số

$$* 1, 2, \dots, n, \dots : \mathbb{N}^*;$$

$$* 0, 1, \dots, n, \dots : \mathbb{N}.$$

$$* \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots : \mathbb{Z}.$$

$$* \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z} \right\} : \mathbb{Q} \text{ (} \mathbb{Q} \text{ là một trường).}$$

Trong  $\mathbb{Q}$  không có các phân tử kiểu như  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$ , ... , gọi là các số vô tỷ. Cần đưa vào  $\mathbb{Q}$  các số vô tỷ để được  $\mathbb{R}$  - tập các số thực - rộng hơn  $\mathbb{Q}$ .

###### b. Tiên đề số thực

Chúng ta công nhận sự tồn tại và duy nhất tập hợp các số thực, ký hiệu là  $\mathbb{R}$ , ở đó có trang bị phép cộng  $+$ , phép nhân  $\cdot$ , và một quan hệ thứ tự  $\leq$  thỏa mãn các tiên đề (i) – (iv) dưới đây:

(i)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  là một trường, cụ thể là: (Xem [1])

(ii)  $\leq$  là một quan hệ thứ tự toàn phần trong  $\mathbb{R}$ , cụ thể là:

1)  $\leq$  có tính chất phản xạ:  $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$ .

2)  $\leq$  có tính chất phản đối xứng:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

3)  $\leq$  có tính chất bắc cầu:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$ .

4)  $\leq$  là quan hệ thứ tự toàn phần:  $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases}$

Nếu  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $a \leq b$ ,  $a \neq b$ , ta nói  $a$  nhỏ hơn  $b$  và viết  $a < b$ .

(iii) Giữa các phép toán  $+$ ,  $\cdot$  và quan hệ thứ tự  $\leq$  có mối liên hệ sau đây:

$$1) a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$2) d > 0, a \leq b \Rightarrow a \cdot d \leq b \cdot d$$

(iv) Mỗi tập không trống và bị chặn trên đều có cận trên đúng.

Riêng tiên đề (iv) cần có những giải thích tỷ mỉ hơn sau đây.

### c. Cận, bị chặn

Ta nói  $x \in \mathbb{R}$  là một cận trên (hay biên trên) của tập hợp  $A \subset \mathbb{R}$  nếu  $\forall a \in A, a \leq x$ .

Ta nói  $y \in \mathbb{R}$  là một cận dưới (hay biên dưới) của tập hợp  $A \subset \mathbb{R}$  nếu  $\forall a \in A, y \leq a$ .

Ta nói  $x$  là phần tử lớn nhất (hay giá trị lớn nhất) của tập hợp  $A \subset \mathbb{R}$  nếu  $x \in A$  và  $x$  là một cận trên của  $A$ :

$$\begin{cases} x \in A \\ \forall a \in A, x \leq a. \end{cases}$$

Ký hiệu phần tử lớn nhất của tập hợp  $A$  là  $\text{Max}(A)$ .

Tương tự đối với khái niệm phần tử nhỏ nhất; ký hiệu là  $\text{Min}(A)$ .

Khi  $A$  là hữu hạn, ta dùng ký hiệu  $\text{Max}(a_1, \dots, a_n)$  hay  $\text{Max}_{1 \leq i \leq n} a_i$

Tập con  $A \subset \mathbb{R}$  được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại (ít nhất) một cận trên của nó. Tương tự ta có thể hiểu khái niệm bị chặn dưới.

Tập hợp  $A$  được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

**Supremum.** Phần tử bé nhất trong các cận trên của tập hợp  $A$ , nếu tồn tại, được gọi là cận trên đúng của  $A$ , ký hiệu là  $\text{Sup}(A)$

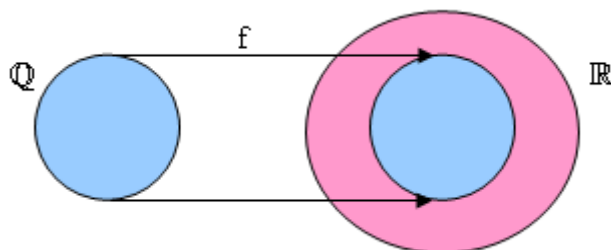
Phần tử lớn nhất trong các cận dưới của tập hợp  $A$ , nếu tồn tại, được gọi là cận dưới đúng của  $A$ , ký hiệu là  $\text{Inf}(A)$ .

Có thể xảy ra trường hợp  $\text{Sup}(A) \notin A$  hoặc (và)  $\text{Inf}(A) \notin A$ . Chẳng hạn khi  $A = (a; b)$ .

Dễ thấy tiên đề (iv) tương đương với:

iv') Mỗi tập không trống và bị chặn dưới đều có cận dưới đúng.

### d. Nhúng $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{R}$ (☞) (☞)



Hình 1.1. Mỗi số hữu tỷ xem là một số thực

### e. Các loại khoảng

Có 9 loại khoảng suy rộng sau đây trong  $\mathbb{R}$

- 1)  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,
- 2)  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,
- 3)  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,
- 4)  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ,
- 5)  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ,
- 6)  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ,
- 7)  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ,
- 8)  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ .
- 9)  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

Các khoảng  $[a, b]$ ;  $(-\infty, a]$ ;  $[b, +\infty)$ ;  $(-\infty, +\infty)$ : đóng,

$(a, b)$ ;  $(-\infty, a)$ ;  $(b, +\infty)$ ;  $(-\infty, +\infty)$ : mở,

$[a, b)$ ;  $(a, b]$  : nửa đóng, nửa mở;

$a, b$  : (đầu) mút của khoảng.

### 1.1.2. Các tính chất cơ bản của tập các số thực

#### a. Các bất đẳng thức thường gặp

- $\forall x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$ ;
- $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \Rightarrow xu \leq yv$ .
- Bất đẳng thức Cauchy:

Với  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$  thì  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ .

- Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacopski-Schwartz:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

**b. Giá trị tuyệt đối.** Giá trị tuyệt đối của số thực  $x$  là một số thực, ký hiệu là  $|x|$ , xác định bởi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0, \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

#### c. Khoảng cách thông thường trong $\mathbb{R}$

#### d. Cận trên.

Chúng ta nhắc lại tiên đề về cận trên đúng:

Mọi tập  $A$  không trống và bị chặn trên đều có cận trên đúng  $\text{Sup}(A)$ .

**Hệ quả.** Mọi tập  $A$  không trống và bị chặn dưới đều có cận dưới đúng  $\text{Inf}(A)$ .

**Định lý 1.1.** Cho  $A \subset \mathbb{R}$  là tập không trống. Khi đó

$$M = \text{Sup}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ là một cận trên,} & (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a \leq M. & (**) \end{cases}$$



**Chứng minh.** (i) Điều kiện cần. Giả sử  $M = \sup(A)$ . Vậy  $M$  là một cận trên. Ta giả sử không xảy ra (\*\*), nghĩa là  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall a \in A, a \leq M - \varepsilon_0$ . Như vậy,  $M - \varepsilon_0$  cũng là 1 cận trên của  $A$ . Rõ ràng  $M - \varepsilon_0 < M$ . Vậy  $M$  không là cận trên nhỏ nhất, mâu thuẫn.

(ii) Điều kiện đủ. Giả sử xảy ra (\*) và (\*\*). Như vậy  $M$  là một cận trên. Giả sử  $M$  không là cận trên nhỏ nhất. Vì  $A$  bị chặn trên (ít ra bởi  $M$ ) nên tồn tại cận trên nhỏ nhất  $M'$  và  $M' < M$ . Đặt  $\varepsilon = M - M' > 0$ . Theo (\*\*),

$$\exists a \in A : M - \varepsilon = M - (M - M') = M' < a \leq M.$$

Vậy  $M'$  không là cận trên, mâu thuẫn.  $\square$

**Lưu ý.** Điểm  $a$  nói ở (\*\*) có thể chính là  $\sup(A)$  hoặc không. Bạn đọc cũng dễ dàng phát biểu khẳng định tương tự với  $\inf(A)$ .

**Ví dụ 1.1.** Tìm cận trên đúng, cận dưới đúng, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp  $E = \left\{ \frac{2}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

### e. Căn bậc $n$ của số dương (☼) (☼)

**Mệnh đề.**  $\forall a \geq 0, \forall n$  nguyên dương,  $\exists! b \geq 0$  sao cho  $b^n = a$ .

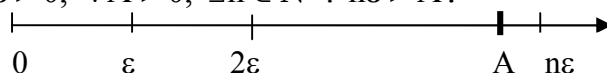
Phân tử  $b$  này được ký hiệu bởi  $\sqrt[n]{a}$  hay  $a^{1/n}$  và gọi là căn bậc  $n$  của  $a$ . Với  $n = 2$ , ta ký hiệu  $\sqrt{a}$  thay cho  $\sqrt[2]{a}$ .

Độc giả có thể tự xử lý tương tự với căn bậc lẻ của số âm:  $\sqrt[2n+1]{a}, a < 0$ .

### f. Tính chất Archimede - Phần nguyên

**Định lý 1.2.**  $\mathbb{R}$  có tính chất Archimede sau đây:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* : n\varepsilon > A.$$



**Định lý 1.3.** Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất số nguyên  $n \in \mathbb{Z}$  sao cho  $n \leq x < n + 1$ .

Số nguyên này được gọi là phần nguyên của  $x$ , ký hiệu là  $[x]$ .

### g. Sự trù mật (☼)

**Định nghĩa.** Cho hai tập hợp số thực  $A, B$ , hơn nữa  $A \subset B$ . Ta nói tập hợp  $A$  trù mật trong tập hợp  $B$  nếu

$$\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : b - \varepsilon < a < b + \varepsilon.$$

**Hệ quả:** Cho  $x$  và  $y$  là hai số thực bất kỳ, hơn nữa  $x < y$ . Tồn tại số hữu tỷ  $a$  để  $x < a < y$ .

Hình ảnh trực quan: Hai số thực - dù gần nhau bao nhiêu chăng nữa - luôn có ít ra một số hữu tỷ ở giữa. (☼)

### h. Số vô tỷ

Một số thực được gọi là số vô tỷ nếu nó không là số hữu tỷ.

(Tập số vô tỷ là  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ).

$$\text{Lưu ý. } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x / y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Tổng, tích, thương một số hữu tỷ với một số vô tỷ là một số vô tỷ).

**Định lý 1.5.** Tập hợp các số vô tỷ  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  trù mật trong  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.3. Tập số thực mở rộng

### 1.1.4. Lực lượng của $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ (✱)

*Định nghĩa.* Cho hai tập bất kỳ A và B. A được gọi là có lực lượng bé hơn lực lượng của B nếu tồn tại một đơn ánh  $f: A \rightarrow B$ .

A và B được gọi là có cùng lực lượng (có lực lượng như nhau) nếu tồn tại song ánh  $f: A \rightarrow B$ .

Lực lượng của tập hợp A ký hiệu là  $\text{Card}(A)$  (có tài liệu ghi là  $\#A$ ).

Nếu A là tập hữu hạn n phần tử:  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  thì quy ước  $\text{Card}(A) = n$ .

Nếu lực lượng của A bé hơn lực lượng của B thì ta viết

$$\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B).$$

Tập hợp A được gọi là có lực lượng đếm được, gọi tắt: A là tập đếm được, nếu có thể sắp xếp các phần tử của A thành dãy; cụ thể là, tồn tại một song ánh  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow A$ .

Tập hợp vô hạn không phải là tập đếm được được gọi là có lực lượng không đếm được (gọi tắt: tập không đếm được).

**Tính chất.** Lực lượng của tập các số hữu tỷ trên  $[0, 1]$  là đếm được.

Ngoài ra chúng ta có:

Tập các số hữu tỷ là đếm được.

Tập các điểm trên hình vuông đơn vị  $[0, a] \times [0, a]$  với cả hai tọa độ hữu tỷ là đếm được ...

## § 1.2. GIỚI HẠN DÃY SỐ (2 tiết)

### 1.2.1. Sự hội tụ - Phân kỳ

#### a. Những khái niệm và kết quả mở đầu

##### a.1. Dãy số

Một ánh xạ xác định trên tập các số nguyên dương và nhận giá trị thực

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow u(n) \in \mathbb{R}$$

được gọi là một dãy số.

$u_1 = u(1)$ : số hạng thứ nhất, ...,

$u_n = u(n)$ : số hạng thứ n hay số hạng tổng quát.

Ký hiệu dãy số bởi  $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$  hay  $\{u_n, n \geq 1\}$  hay đơn giản  $\{u_n\}$ .

Dãy số cũng được viết dưới dạng khai triển:  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

Cũng hay xét các dãy

$$\left\{ \frac{1}{n+2}, n \geq 1 \right\}, \left\{ \frac{1}{n+2}, n \geq 3 \right\}, \left\{ \frac{1}{n+2}, n \geq -1 \right\}.$$

Chúng lần lượt là  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ,  $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ ,  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

## a.2. Sự hội tụ, phân kỳ của dãy số

**Định nghĩa.** Dãy  $\{u_n\}$  được gọi là hội tụ đến giới hạn  $\ell$  (hay có giới hạn  $\ell$ ) nếu với mọi số  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N \in \mathbb{N}$  sao cho  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ,  $\forall n > N$ .

Khi đó ta viết  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$  hay  $u_n \rightarrow \ell$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Hình ảnh trực quan của điều này là: Từ chỉ số  $N$  đủ lớn trở đi,  $u_n$  sẽ "rơi" vào lân cận  $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ .

$\{u_n\}$  là dãy hội tụ nếu ...

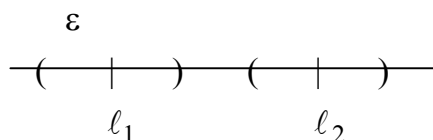
$\{u_n\}$  là dãy phân kỳ nếu:

**Chú ý.** Rất dễ dàng nhận được kết quả:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ell| = 0.$$

**Định lý 1.6 (Tính duy nhất của giới hạn).** Giới hạn của dãy số, nếu tồn tại thì duy nhất. Cụ thể là:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2.$$



*Chứng minh.*

□

*Chú ý.*

- Mỗi dãy dừng (nghĩa là không đổi từ một số hạng nào đó trở đi) là dãy hội tụ, hội tụ đến số không đổi đã nêu.
- Hai dãy số trùng nhau từ một số hạng nào đó trở đi cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.
- Nếu ta thay đổi một số hữu hạn số hạng, hay thêm vào hoặc bớt đi một số hữu hạn số hạng của dãy thì được một dãy cùng hội tụ hay cùng phân kỳ như dãy đã cho.

## a.3. Dãy bị chặn

Ta nói dãy  $\{u_n\}$  là bị chặn (tương ứng: bị chặn trên, bị chặn dưới) nếu tập hợp  $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$  là bị chặn (tương ứng: bị chặn trên, bị chặn dưới).

**Định lý 1.7.** Dãy hội tụ thì bị chặn.

*Chứng minh.*

□

## a.4. Giới hạn vô hạn

Ta nói dãy  $\{u_n\}$  tiến đến  $+\infty$  (hay  $\{u_n\}$  có giới hạn  $+\infty$ ) nếu:

$$\forall L > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N, u_n \geq L.$$

Khi đó ta viết  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  hoặc  $u_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Chúng ta dễ hiểu ý nghĩa của ký hiệu  $u_n \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Ta nói dãy  $\{u_n\}$  tiến đến  $\infty$  (hay  $\{u_n\}$  có giới hạn  $\infty$ ,  $\{u_n\}$  nhận  $\infty$  làm giới hạn) nếu:

$$\forall L > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N, |u_n| \geq L.$$

**Định lý 1.8.** Mỗi dãy dần ra  $+\infty$  đều bị chặn dưới. Tương tự, mỗi dãy dần ra  $-\infty$  đều bị chặn trên.

*Chứng minh.* □

### **b. Tính chất về thứ tự của giới hạn**

**Định lý 1.9.** Giả sử  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  là hai dãy thỏa mãn điều kiện  $u_n \leq v_n$  với  $n \geq N$  nào đó và tồn tại các giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ . Khi đó  $u \leq v$ .

**Định lý 1.10.** Cho hai dãy  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty.$$

*Chứng minh.* □

**Định lý 1.11 (Định lý kẹp).** Cho  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ ,  $\{w_n\}$  là ba dãy. Nếu từ một chỉ số  $N$  nào đó trở đi xảy ra bất đẳng thức  $u_n \leq w_n \leq v_n$  còn  $\{u_n\}$  và  $\{v_n\}$  cùng hội tụ đến giới hạn  $\ell$  thì  $\{w_n\}$  cũng hội tụ đến  $\ell$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n > N, u_n \leq w_n \leq v_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \ell.$$

### **c. Các phép toán về giới hạn**

**Định lý 1.12.** Cho  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  là hai dãy,  $\lambda$ ,  $\ell$ ,  $\ell'$  là ba số thực.

$$(a) u_n \rightarrow \ell \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow |u_n| \rightarrow |\ell| \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(b) u_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow |u_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \ (n \rightarrow \infty) \\ v_n \rightarrow \ell' \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \pm v_n \rightarrow \ell \pm \ell' \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(d) u_n \rightarrow \ell \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lambda u_n \rightarrow \lambda \ell \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} u_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \\ \{v_n\} \text{ bị chặn} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n v_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \ (n \rightarrow \infty) \\ v_n \rightarrow \ell' \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n v_n \rightarrow \ell \ell' \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(g) u_n \rightarrow \ell \neq 0 \ (n \rightarrow \infty) \text{ thì dãy } \left\{ \frac{1}{u_n} \right\} \text{ được xác định từ một chỉ số}$$

$N$  nào đó trở đi và  $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell} \ (n \rightarrow \infty)$ .

(h)  $u_n \rightarrow \ell, v_n \rightarrow \ell' \neq 0 \ (n \rightarrow \infty)$  thì dãy  $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$  được xác định từ

một chỉ số  $N$  nào đó trở đi và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$ .

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh (e) và (h).

□

**Định lý 1.13.** Cho hai dãy  $\{u_n\}, \{v_n\}$ .

$$(a) \left. \begin{array}{l} * u_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \\ v_n \text{ bị chặn dưới} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$$

$$* \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \\ v_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$$

$$* \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \\ v_n \rightarrow \ell \ (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \\ \exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, v_n > C \end{array} \right\} \Rightarrow u_n v_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$$

$$(c) u_n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \left\{ \frac{1}{u_n} \right\} \text{ xác định từ một chỉ số nào đó và}$$

$$\frac{1}{u_n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

$$(d) \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \\ \exists N, \forall n > N, u_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty).$$

Như vậy, khi gặp các giới hạn dạng như ở Định lý trên, ta coi đây là các **giới hạn thông thường**, không phải là dạng vô định, không cần phải "khử dạng vô định".

**Ví dụ 1.2.** Xét sự hội tụ của dãy  $\{\sqrt[n]{a}\}$ ,  $(a > 0)$ .

$$\text{Kết quả:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0). \quad (1.3)$$

$$\text{Ngoài ra} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (\text{Mạnh hơn!})$$

*Nhận xét.* Sau này ta có nhiều công cụ giải bài toán trên nhanh hơn. #

**Ví dụ 1.3.** Xét sự hội tụ của dãy  $\frac{a^n}{n^m}$  với  $a > 1$  và  $m$  nguyên dương cố định.

Trước hết xét trường hợp  $m=1$ , cụ thể ta sẽ chứng minh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n} = \infty, \quad \forall A > 1.$$

Bây giờ xét sự hội tụ của dãy  $\left\{ \frac{a^n}{n^m} \right\}$ ,  $a > 1$ .

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^m} = \infty, \forall a > 1, \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (1.5)$$

Ta nói hàm mũ dần ra vô hạn nhanh hơn bất kỳ hàm lũy thừa nào (hay hàm mũ trội hơn hàm lũy thừa). #

**Ví dụ 1.4.** Chứng minh rằng

$$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad (1.6)$$

Ta nói giai thừa trội hơn hàm mũ ( $n!$  dần ra  $+\infty$  nhanh hơn  $a^n$ ). #

### 1.2.2. Dãy đơn điệu

**a. Định nghĩa.** Dãy  $\{u_n\}$  được gọi là tăng (giảm) nếu  $u_n \leq u_{n+1}$  ( $u_n \geq u_{n+1}$ ) với mọi  $n$ .

Dãy  $\{u_n\}$  được gọi là tăng (giảm) thực sự nếu  $u_n < u_{n+1}$  ( $u_n > u_{n+1}$ ) với mọi  $n$ .

Dãy tăng hoặc giảm gọi chung là dãy đơn điệu.

**Định lý 1.14.** Dãy tăng (giảm), bị chặn trên (dưới) thì hội tụ.

*Chứng minh.*

+ Giả sử dãy  $\{u_n\}$  tăng và bị chặn trên:  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq L < +\infty$ .

+ Đối với dãy  $\{u_n\}$  giảm và bị chặn dưới, xét dãy  $\{-u_n\}$ . Phần còn lại là rõ ràng.  $\square$

**Hệ quả.** Dãy tăng, không bị chặn trên thì hội tụ tới  $+\infty$ ,

Dãy giảm, không bị chặn dưới thì hội tụ tới  $-\infty$ .

### b. Dãy kề nhau

**Định nghĩa.** Hai dãy  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  được gọi là kề nhau nếu  $\{u_n\}$  tăng,  $\{v_n\}$  giảm và  $v_n - u_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Định lý 1.15.** Hai dãy  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  kề nhau thì chúng hội tụ đến cùng một giới hạn  $\ell$ . Hơn nữa

$$u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Chứng minh.*  $\square$

**Ví dụ 1.5.** Hai dãy  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$ ,

$n = 1, 2, \dots$  là kề nhau. Vậy chúng có cùng giới hạn, gọi là  $e$ . Ta biết  $e \approx 2.718\,281\,828$ .

(Một định nghĩa khác của số  $e$  là:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ). #

### 1.2.3. Dãy con

**Định nghĩa.** Cho dãy  $\{u_n\}: u_1, u_2, \dots$ . Dãy  $\{u_{n_k}, k=1, 2, \dots\}$  với các chỉ số  $n_k$  thỏa mãn:  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  được gọi là một dãy con trích ra từ dãy  $\{u_n\}$ .

Chẳng hạn,  $\{u_n\}$  là dãy cho trước,

$\{u_{2n}\}: u_2, u_4, u_6, \dots$  : dãy "chẵn"

$\{u_{2n-1}\}: u_1, u_3, u_5, \dots$  : dãy "lẻ"

$\{u_{3n}\}: u_3, u_6, u_9, \dots$

là các dãy con. Tuy nhiên

$\{u_{n^2-3n+3}\}: u_1, u_1, u_3, u_7, \dots$

là dãy, nhưng không là dãy con của  $\{u_n\}$  vì chỉ số 1 bị lặp lại!

**Định lý 1.16.** Nếu  $\{u_n\}$  có giới hạn  $\ell$  thì mọi dãy con trích ra từ đó cũng có giới hạn  $\ell$ .

*Chứng minh.* □

Định lý này có tác dụng tốt để CM một dãy nào đó không hội tụ.

**Ví dụ 1.6.** Xét sự hội tụ của dãy  $\{(-1)^n\}$ .

$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$

$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty).$

Vì  $1 \neq -1$ , theo Định lý 1.16, dãy này không thể hội tụ, vậy nó phân kỳ. #

**Định lý 1.17.** Cho  $\{u_n\}$  là một dãy, còn  $\ell$  là một số thực. Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases} \quad \square$$

*Lưu ý:* Có thể mở rộng Định lý trên bằng cách tách  $\{u_n\}$  thành  $k$  dãy con rời nhau.

**Định lý 1.18 (Bổ đề Bolzano-Weierstrass).** Từ mọi dãy số thực bị chặn đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

*Chứng minh.* Cho dãy bị chặn  $\{u_n\}$ .  $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}^*, a_1 \leq u_n \leq b_1$ . Đặt  $h = b_1 - a_1 > 0$ . Rõ ràng đoạn  $[a_1, b_1]$  chứa vô hạn phần tử của dãy  $\{u_n\}$ . Chọn một phần tử  $u_{n_1}$  tùy ý của dãy  $\{u_n\}$ . Như vậy  $a_1 \leq u_{n_1} \leq b_1$ .

Chia đôi đoạn  $[a_1, b_1]$  bởi điểm  $(a_1 + b_1)/2$ , được 2 đoạn,  $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ ,  $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ . Có ít nhất một trong 2 đoạn này chứa vô hạn các phần tử của dãy  $\{u_n\}$ . Gọi đoạn đó là  $[a_2, b_2]$ .

$$\text{Rõ ràng } [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]; \quad b_2 - a_2 = \frac{h}{2} \quad \left( = \frac{b_1 - a_1}{2} \right).$$

Chọn một phần tử  $u_{n_2}$  tùy ý của  $\{u_n\}$  sao cho  $n_2 > n_1$  và  $u_{n_2}$  nằm trong đoạn  $[a_2, b_2]$ :  $a_2 \leq u_{n_2} \leq b_2$ .

Tương tự, bằng quy nạp ta xây dựng được dãy đoạn  $[a_n, b_n]$  mà

+ Chứa vô hạn các phần tử của dãy  $\{u_n\}$ ,

$$+ [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]; \quad |b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{|b_k - a_k|}{2} = \dots = \frac{h}{2^k}.$$

Chọn một phần tử  $u_{n_k}$  của dãy  $\{u_n\}$  sao cho  $n_k > n_{k-1}$  và

$$a_k \leq u_{n_k} \leq b_k. \quad (*)$$

Hai dãy  $\{a_k\}, \{b_k\}$  là kề nhau (nói cách khác, dãy đoạn  $[a_k, b_k]$  là lồng nhau). Theo Định lý 1.15, tồn tại giới hạn chung của chúng:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \ell.$$

Theo định lý kẹp  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \ell$  (đpcm).  $\square$

### Bài tập về nhà cho cả Chương 1

Trợ: 3; 4(b); 7; 11; 17(b); 25(b).

Chính: 8(a, b, c); 9; 12(11  $\rightarrow$  31, Chũ: 11, 14, 16, 18, 24, 27, 29, 31); 13(d  $\rightarrow$  i: Chũ: e, f, i); 14(a-f, Chũ: a, b, d, f); 15; 19(a, b); 20; 23.

**Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Tự đọc: Ví dụ cuối chương 1 (b, d, e);

Làm bài tập theo kế hoạch;

Đọc trước TL[1]: §1.2. Giới hạn dãy số tr 30 - 35

### Bài giảng2: Giới hạn dãy số - Giới hạn, liên tục của hàm số

#### Chương 1: Giới hạn, liên tục

Mục § 1.2 Giới hạn dãy số (tiếp – 1t)

§1.3. Hàm một biến số - Giới hạn, liên tục của hàm số (2t)

Bài tập: Giới hạn dãy số (2t)

Tiết thứ: 6-10,

Tuần thứ: 2

- **Mục đích, yêu cầu:**



Giới hạn dãy số (tiếp): Một số hiểu biết bổ sung về GH dãy

Giới hạn, liên tục của hàm số: Nắm được vài tính chất ban đầu của GH hàm, tính được một số GH dãy ở bài trước

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**§ 1.2. GIỚI HẠN DÃY SỐ (tiếp - 1 tiết)**

**1.2 Giới hạn trên, GH dưới**

**Định nghĩa.** Cho  $\{u_n\}$  là một dãy số;  $\{u_{n_k}\}$  là một dãy con của nó thỏa mãn:

(i)  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \ell$ ;

(ii) Đối với mọi dãy con  $\{u_{m_k}\}$  khác mà  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} u_{m_k} = \ell'$  thì  $\ell' \leq \ell$ .

Khi đó  $\ell$  được gọi là giới hạn trên của dãy  $\{u_n\}$  và ký hiệu là  $\overline{\lim} u_n$ .

Giới hạn dưới  $\underline{\lim} u_n$ : Tự định nghĩa!

**Định lý 1.19**

i. Luôn tồn tại  $\overline{\lim} u_n \leq +\infty$ .

Hơn nữa nếu  $\{u_n\}$  không bị chặn trên thì  $\overline{\lim} u_n = +\infty$ .

ii. Nếu  $\{u_n\}$  bị chặn trên bởi M thì  $\overline{\lim} u_n \leq M$ .

iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \overline{\lim} u_n = \underline{\lim} u_n = \ell$ .

**Định nghĩa.** Dãy  $\{u_n\}$  được gọi là dãy cơ bản (hay dãy Cauchy) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N: |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Điều này tương đương với:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \geq 0: |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

**Định lý 1.20 (Nguyên lý Cauchy)**

Dãy  $\{u_n\}$  là dãy Cauchy khi và chỉ khi nó hội tụ.

*Chứng minh.*

□

**Ví dụ 1.7.** Xét sự hội tụ của dãy  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

$\forall N \in \mathbb{N}$ , chọn  $n > N$ ,  $m = 2n > N$ . Ta có

$$|x_n - x_{2n}| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $\{x_n\}$  không là dãy Cauchy; theo Định lý 1.20 nó không hội tụ. #

**Ví dụ 1.8.** Chứng minh rằng các dãy  $\{\sin n\}$ ,  $\{\cos n\}$  không hội tụ.

#### 1.2.4. Dãy truy hồi (✳)

Bây giờ ta xét dãy  $\{u_n\}$ , các số hạng của nó xác định theo quy nạp dạng  $u_{n+1} = f(u_n)$ , trong đó  $f(x)$  là hàm nào đó từ khoảng đóng  $I$  vào  $I$ . (☼)

**Ví dụ 1.9.** Tìm giới hạn của dãy  $\{u_n\}$ :  $u_0 = 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$ .

Ta thấy  $u_n > 0 \quad \forall n$ .

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{u_n}{u_n^2 + 1} = \frac{-u_n^3}{u_n^2 + 1} < 0, \quad \forall n \Rightarrow \{u_n\} \text{ giảm.}$$

$$\Rightarrow \exists \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0.$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$  được  $\ell = \frac{\ell}{\ell^2 + 1} \Rightarrow \ell = 0$ .

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . #

**Ví dụ 1.10.** Tìm giới hạn của dãy  $\{u_n\}$ :  $u_0 \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ .

*Hướng dẫn.*  $u_n \geq 0$ . Xét ánh xạ (hàm số)  $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$ , nó có 2 điểm bất động là  $x = 2$ ,  $x = 4$ .

$$u_0 \in [0, 2] \Rightarrow \exists \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

$$\text{ĐS. } u_0 \in [2, 4) \Rightarrow \exists \ell = 2$$

$$u_0 = 4 \Rightarrow \ell = 4$$

$$u_0 > 4 : \text{ Dãy phân kỳ.} \quad \#$$

## § 1.3. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

### 1.3.1. Sơ lược về hàm số (✳)

#### b. Các phương pháp biểu diễn hàm số

Hàm số được biểu diễn theo một trong 4 cách:

- Bằng biểu thức
- Bằng bảng số liệu
- Bằng đồ thị
- Bằng lời

### 1.3.2. Hàm số chẵn, lẻ

#### Định nghĩa.

**Ví dụ 1.17.** Xét xem mỗi hàm sau đây là chẵn hay lẻ

- a)  $f(x) = 2x - x^5$ ;      b)  $g(x) = 3 - x^6$ ;  
 c)  $h(x) = 2 - x + 3x^4$ ;      d)  $k(x) = x^2 - 2x^4, x \geq 0$ .

### 1.3.3. Hàm số ngược

Bây giờ ta coi hàm số như một ánh xạ. Giả sử

$$f: X \rightarrow Y \quad (X, Y \subset \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightarrow y = f(x) \in Y$$

là một song ánh. Khi đó

+ Tập xác định của  $f$  là  $X$ , tập giá trị của  $f$  là  $Y$ .

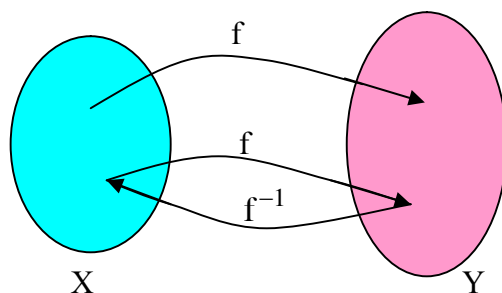
+  $f$  là đơn ánh:  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

+  $f$  là toàn ánh:  $\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$ .

Vậy với mọi  $y \in Y$ , tồn tại duy nhất  $x \in X$  để  $f(x) = y$ .

Phép tương ứng đó xác định một ánh xạ (một hàm số) từ  $Y$  vào  $X$ , ký hiệu là  $f^{-1}$ , gọi là ánh xạ (hàm số) ngược của  $f$ :

$$f^{-1}(y) = x \text{ sao cho } f(x) = y.$$



**Hình 1.12.** Hàm xuôi và hàm ngược

Theo thói quen, ta dùng chữ cái  $x$  để chỉ đối số, chữ cái  $y$  để chỉ hàm số. Như vậy ta sẽ ký hiệu hàm ngược của hàm  $y = f(x)$  là

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in Y.$$

**Tính chất.** Nếu hàm  $f(x)$  có hàm ngược và đồng biến (hay nghịch biến) thì hàm ngược cũng đồng biến (hay nghịch biến).

(hàm ngược biến thiên cùng chiều với hàm xuôi.)

Hàm  $f(x)$  là lẻ thì hàm ngược cũng lẻ; hàm chẵn không có hàm ngược.

Đồ thị hàm ngược đối xứng với đồ thị hàm xuất phát qua phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Bây giờ cho  $y = f(x), x \in X$  là đơn ánh. (Ta không chỉ rõ tập giá trị). Gọi  $Y = \{f(x), x \in X\}$  là tập giá trị của  $f$ . Thế thì  $f: X \rightarrow Y$  là song ánh. Theo phân tích trên, tồn tại  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , cũng được gọi là hàm ngược của hàm ban đầu.

**Ví dụ 1.18.** a.  $y = x^2$ . Đây là ánh xạ, tập xác định là  $\mathbb{R}$ , không đơn ánh. Vậy không có hàm ngược.

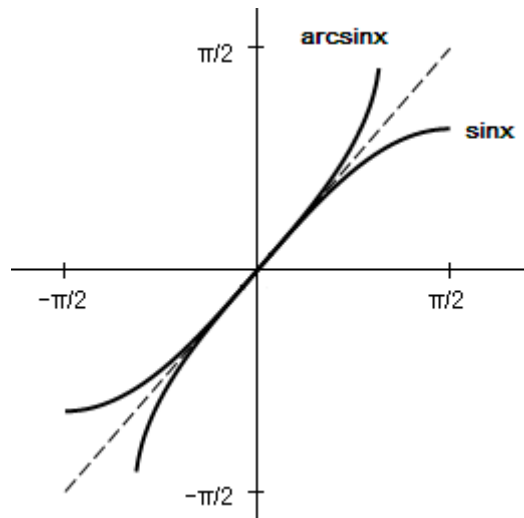
b.  $y = x^2, x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, y \geq 0$ . Hàm ngược là  $y = \sqrt{x}$ . #

**Ví dụ 1.19.** Xét hàm số  $y = \sin x$ . Hàm này xác định trên  $\mathbb{R}$ , không là đơn ánh nên không có hàm ngược.

Bây giờ xét hàm số  $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Hàm số này đồng biến. Vậy tồn tại hàm ngược, ký hiệu là  $\arcsin x$ , hay đầy đủ hơn  $y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$ , đồ thị cho ở Hình 1.13. Rõ ràng là

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{với } x \in [-1, 1];$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{với } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad \#$$

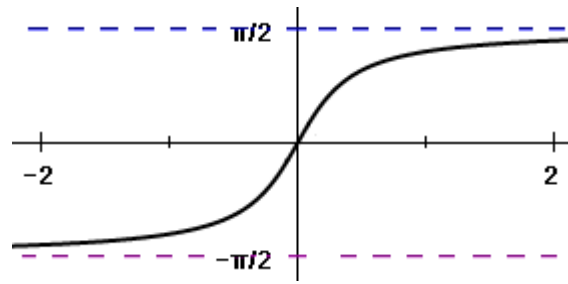


**Hình 1.13.** Hàm  $\sin x$  và hàm  $\arcsin x$

**Ví dụ 1.20.** Tương tự, hàm  $y = \tan x$  không có hàm ngược. Nếu ta xét hàm  $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  thì lại có hàm ngược, ký hiệu là  $\arctan x$  - hay đầy đủ hơn -  $y = \arctan x, x \in (-\infty, \infty)$ . Đây là hàm lẻ, đồng biến, và đồ thị của nó cho ở Hình 1.14. Lưu ý rằng

$$\arctan(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arctan(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$



**Hình 1.14.** Hàm  $\arctan x$

*Công thức cộng arctan*

### 1.3.4. Các hàm sơ cấp cơ bản

$$y = x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad y = a^x \quad (0 < a \neq 1)$$

$$y = \log_a x, \quad x > 0 \quad (0 < a \neq 1);$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x;$$

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1] \text{ là hàm ngược của hàm } y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1] \text{ là hàm ngược của hàm } y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$y = \arctan x, \quad x \in (-\infty, \infty) \text{ là hàm ngược của hàm } y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{arccot} x, \quad x \in (-\infty, \infty) \text{ là hàm ngược của hàm } y = \cot x, \quad 0 < x < \pi;$$

Hàm lượng giác hyperbolic:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad : \text{ cos hyperbol;}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad : \text{ sin hyperbol;}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad : \text{ tan hyperbol;}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad : \text{ cotang hyperbol.}$$

$$\text{Tính chất: } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \dots$$

**Hàm sơ cấp:** Gồm các hàm sơ cấp cơ bản, các hàm tạo bởi một số hữu hạn lần các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa và hợp các hàm sơ cấp cơ bản.

**Lưu ý:** Một số tài liệu dùng hàm:  $\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$

Một số tài liệu ký hiệu các hàm  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot} x$  lần lượt là  $\sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$ ,  $\tan^{-1} x$ ,  $\cot^{-1} x$ .

### 1.3.5. Một số hàm số thông dụng khác

a. **Hàm bước nhảy đơn vị**  $y = u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x. \end{cases}$

b. **Hàm phần nguyên:**  $y = [x]$

(Số nguyên lớn nhất (gần nhất) nhỏ thua  $x$ ).

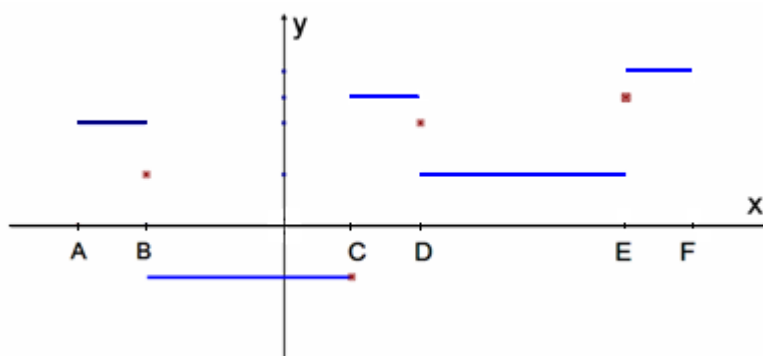
c. **Hàm phần phân:**  $y = x - [x]$ , ký hiệu là  $\{x\}$ .

d. **Hàm dấu**

Hàm dấu  $\operatorname{sgn} x$  (đọc là signum của  $x$ ) (có thể viết  $\operatorname{sign} x$ ) cho bởi

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

e. **Hàm bậc thang**



Hình 1.17. Đồ thị hàm bậc thang

### 1.3.6. Mô hình toán học (☼) (☼)

## § 1.4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (1 tiết)

### 1.4.1. Định nghĩa

+ Cho hàm số  $f(x)$  xác định trong khoảng  $(a, b)$  (có thể trừ ra tại  $x_0 \in (a, b)$ ). Ta nói  $f(x)$  có giới hạn  $\ell$  khi  $x$  dần đến  $x_0$  (hoặc tại  $x = x_0$ ) và viết  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  (hay  $f(x) \rightarrow \ell$  khi  $x \rightarrow x_0$ ) nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a; b): 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

+ Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . Ta nói  $f(x)$  có giới hạn  $\ell$  khi  $x$  dần đến  $a$  từ bên phải, và viết  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$  nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, b): 0 < x - a < \delta \text{ thì } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

+ Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in (a, +\infty)$ . Ta nói  $f(x)$  có giới hạn  $\ell$  khi  $x$  dần ra  $+\infty$  (hoặc tại  $x = +\infty$ ), và viết  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall x > A, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của các ký hiệu  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

+ Cho hàm số  $f(x)$  xác định trong khoảng  $(a, b)$  (có thể trừ ra tại  $x_0 \in (a, b)$ ). Ta nói  $f(x)$  có giới hạn  $+\infty$  khi  $x$  dần đến  $x_0$  (hoặc tại  $x = x_0$ ) và viết  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  nếu:

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, b): 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } f(x) > A.$$

Chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của các ký hiệu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \dots$$

Minh họa (xem [1])

#### 1.4.2. Một số tính chất ban đầu của giới hạn hàm số

**Định lý 1.21** (Tính duy nhất của giới hạn). Nếu hàm số nhận  $\ell$  và  $\ell'$  làm giới hạn tại  $x_0$  thì  $\ell = \ell'$ .

**Định lý 1.22** (Điều kiện cần để hàm số có giới hạn). Cho hàm số  $y = f(x)$ ,  $x \in I$ , trong đó  $I$  là một khoảng của  $\mathbb{R}$ . Nếu  $f(x)$  có giới hạn tại  $x_0 \in \bar{I}$  ( $\bar{I}$  là bao đóng của  $I$ ) thì  $f(x)$  bị chặn trong một lân cận của  $x_0$ .

**Ví dụ 1.21.**  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

Đồ thị của hàm số ở Ví dụ 1.21 (xem [1])

Dễ thấy  $f(x)$  không bị chặn trong một lân cận tùy ý của 0 nên không tồn tại giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . #

**Định lý 1.23.** Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng suy rộng  $I$  có giới hạn  $\ell$  tại  $x_0 \in \bar{I}$  khi và chỉ khi với mỗi dãy  $\{x_n\}$  trong  $I$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$ .

Vì Định lý trên nêu lên điều kiện cần và đủ nên nó được coi như định nghĩa giới hạn bằng dãy. Lưu ý rằng  $x_0$  trong Định lý có thể lấy bằng  $\infty$ . Một trong những ứng dụng của Định lý là chứng minh hàm số không có giới hạn.

**Ví dụ 1.22.** Chúng ta chứng tỏ rằng hàm số  $y = \sin \frac{1}{x}$  không có giới hạn khi  $x \rightarrow 0$ .

Ứng dụng tiếp theo của Định lý 1.23 là có thể tính giới hạn dãy số thông qua giới hạn hàm số. Cụ thể là, khi tính giới hạn dãy số  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , ta có thể nhìn  $u_n$  như là giá trị của hàm  $f(x)$  nào đó tại  $x = n$ , tức là  $u_n = f(n)$ . Nếu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  thì  $\{u_n\}$  cũng có giới hạn  $\ell$ . Ưu điểm của phương pháp này là tìm giới hạn hàm số đường như "dễ hơn" tìm giới hạn dãy số. Ta sẽ trở về vấn đề này ở mục 2.3.3.

**Định lý 1.24 (Định lý kẹp).** Cho ba hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  xác định trên khoảng suy rộng  $I$  của  $\mathbb{R}$ . Giả sử

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in I;$$

$$c \in \overline{I}, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell.$$

Khi đó, tồn tại giới hạn của hàm  $g(x)$  tại  $x = c$  và  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$ .

#### **Yêu cầu SV chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: Giới hạn dãy số (2t), 4(b); 8(a, b, c); 9; 12(11  $\rightarrow$  31, Chữa: 11, 14, 16, 18).

Đọc trước TL[1], tr 54-59: Giới hạn hàm số (tiếp) + tr 68-71: §1.5. Sự liên tục của hàm số. Tự đọc TL[1], tr 39 -44: Sơ lược về hàm số + Mô hình toán học.

### **Bài giảng 3: Giới hạn hàm (tiếp) – Sự liên tục**

#### Chương 1: Giới hạn, liên tục

Mục §1.4 Giới hạn hàm số (tiếp – 1t)

§1.5 Sự liên tục (2t)

Bài tập: Giới hạn hàm số (1t)

Sự liên tục (1t)

#### **- Mục đích, yêu cầu:**

Tìm giới hạn của hàm dùng các phép thay tương đương;

Nắm các định nghĩa, tính chất của hàm liên tục, liên tục trên đoạn kín, giới nội.

Tính được một số GH dãy ở bài trước, một số bài tập về hàm liên tục

#### **- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

- **Nội dung chính:**



## §1.4 GIỚI HẠN HÀM SỐ (tiếp – 1t)

**Định lý 1.25** (Giới hạn các hàm đơn điệu)

Cho  $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ,  $y = f(x)$  là hàm số tăng trên  $(a, b)$ .

(i) Nếu hàm  $f(x)$  bị chặn trên thì nó có giới hạn hữu hạn tại  $b$  và

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a; b)} f(x).$$

(ii) Nếu hàm  $f(x)$  không bị chặn trên thì nó có giới hạn  $+\infty$  tại  $b$  và

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

### 1.4.3. Các phép toán về giới hạn hàm số

**Định lý 1.26.** Cho  $f(x), g(x), x \in I$  là hai hàm số trên khoảng mở rộng  $I$ ;  $a \in \overline{I}$  (bao đóng của  $I$ );  $\lambda, \ell, \ell'$  là ba số thực. Khi đó

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

$$3. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm \ell' \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot \ell' \end{cases}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \ell.$$

$$5. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ bị chặn trong một lân cận của } a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

$$6. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

**Giới hạn quan trọng.** Các giới hạn sau đây hay được sử dụng:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad (c') \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e;$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad (a > 0);$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Ví dụ 1.23.** Tìm các giới hạn sau:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin 7x}{2x}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} |1 + \sin 7x| \leq 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \sin 7x}{2x} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin 7x}{2x} = 0.$$

$$(ii) \quad m, n \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} \cdot \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$

#### 1.4.4. Vô cùng bé, vô cùng lớn

**Định nghĩa.** Ta nói  $f(x)$  là vô cùng bé (VCB) khi  $x \rightarrow a$  nếu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Ta nói  $f(x)$  là vô cùng lớn (VCL) khi  $x \rightarrow a$  nếu  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$ .

**Định nghĩa.** Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  là những VCB (khi  $x \rightarrow x_0$ ) và  $g(x) \neq 0$  trong một lân cận của  $x_0$  và khác  $x_0$ . Ta nói:

(a)  $f(x)$  là VCB bậc cao hơn (so với)  $g(x)$ , viết  $f(x) = o(g(x))$  khi  $x \rightarrow x_0$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Khi đó ta cũng nói  $g(x)$  là VCB bậc thấp hơn (so với)  $f(x)$ .

(b)  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai VCB cùng bậc, ta viết  $f(x) = O(g(x))$  khi  $x \rightarrow x_0$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad (C \neq 0; C \neq \infty).$$

(c)  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai vô cùng bé tương đương, ta viết  $f(x) \sim g(x)$  khi  $x \rightarrow x_0$ , nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Vậy nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad (C \neq 0; C \neq \infty)$  thì  $f(x) \sim Cg(x)$  khi  $x \rightarrow x_0$ .

Quan hệ  $\sim$  nói trên là quan hệ tương đương trong lớp các hàm không triệt tiêu tại một lân cận điểm  $x_0$ , có thể trừ ra tại  $x_0$ ; cụ thể, nó có ba tính chất:

Phản xạ :  $f(x) \sim f(x)$ ;

Đối xứng :  $f(x) \sim g(x) \Rightarrow g(x) \sim f(x)$ ;

Bắc cầu :  $f(x) \sim g(x)$  và  $g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x)$ .

**Ví dụ 1.24**

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 / x) = 0 \Rightarrow x^2 = o(x)$  (khi  $x \rightarrow 0$ ).

(ii) Nếu  $0 < \alpha < \beta$  thì  $x^\beta = o(x^\alpha)$  (khi  $x \rightarrow 0^+$ ).

$$x^\alpha = o(x^\beta) \text{ (khi } x \rightarrow +\infty).$$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = o(x)$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

(iv) Với  $a > 1, \alpha \in \mathbb{R}$  thì  $x^\alpha = o(a^x)$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

$$a^x = o(x^\alpha) \text{ (} x \rightarrow -\infty).$$

(v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \Rightarrow \tan x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ).

(vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \Rightarrow \arcsin x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ).

(vii)  $x \sim \sin x, x \sim \tan x \Rightarrow \sin x \sim \tan x$ .

#

**Định lý 1.27** (Các phép toán về VCB). Giả sử  $f(x), g(x), h(x)$  là những hàm xác định tại lân cận của  $x_0, C \in \mathbb{R}, C \neq 0$ .

1.  $\begin{cases} f(x) = o(h(x)) \\ g(x) = o(h(x)) \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(x) = o(h(x))$

2.  $f(x) = o(h(x)) \Rightarrow Cf(x) = o(h(x))$ .

3.  $\begin{cases} f(x) = o(h(x)) \\ g(x) = o(k(x)) \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$

4.  $\begin{cases} f(x) = o(h(x)) \\ g(x) \text{ bị chặn} \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) = o(h(x))$

\* Quy tắc thay tương đương với tổng (xem [1])

**Ví dụ 1.25**

$$f(x) \sim 2x^2; g(x) \sim -4x^4 \Rightarrow f(x) + g(x) \sim 2x^2;$$

$$f(x) \sim 2x^4; g(x) \sim -4x^4 \Rightarrow f(x) + g(x) \sim -2x^4;$$

$$f(x) \sim 3x^3; g(x) \sim -3x^3, \text{ ta không thể suy ra } f(x) + g(x) \sim 0. \#$$

Khi thì

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x).$$

Hệ quả của điều này là

$$\frac{1}{n} \sim \sin \frac{1}{n} \sim \arcsin \frac{1}{n} \sim \tan \frac{1}{n} \sim \arctan \frac{1}{n} \sim \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \tan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \dots \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2!}$$

\* *Thay tương đương thừa số có giới hạn*

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \cdot \gamma(x) \text{ là VCB hoặc VCL } (x \rightarrow x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = C, \quad C \neq 0; \quad C \neq \infty \end{cases} \Rightarrow \alpha(x) \sim C \cdot \beta(x)$$

$$\begin{cases} a_n = b_n \cdot c_n \text{ là VCB hoặc VCL} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C, \quad (C \neq 0, \quad C \neq \infty) \end{cases} \Leftrightarrow a_n \sim C \cdot b_n. \quad (1.8)$$

Khi chúng ta nắm được các quy tắc thay tương đương, các giới hạn phải tính nhiều khi trở nên rất dễ dàng.

**Ví dụ 1.26.** Tìm các VCB, VCL tương đương với các VCB, VCL sau:

$$(i) \ a_n = n^2 \ln \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right) \cos \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right); \quad (ii) \ b_n = \frac{(n+1)^2}{n} \sqrt{2+n^2}.$$

$$\text{Giải. } (i) \ a_n = n^2 \ln \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right) \cos \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right) \sim n^2 \cdot \frac{2}{n^3} \cdot \cos 2 = \frac{2 \cos 2}{n}.$$

$$(ii) \ b_n = \frac{(n+1)^2}{n} \sqrt{2+n^2} = n^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^3 \left( 2 + \frac{1}{n^3} \right)} \sim \sqrt{2} n^{5/2}. \quad \#$$

**Ví dụ 1.27.** Tìm các giới hạn

$$(i) \ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} (ii) \ \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)^{\cot(\pi/2-x)} = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{\cot t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\cot t \ln(\cos t)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\sin t} \ln(1-t^2/2)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\sin t} (-t^2/2)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$(iii) \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3 \tan x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x}{2x} = \frac{3}{2}. \quad \#$$

#### 1.4.5. Biểu thức của các giới hạn quan trọng (xem [1])

## § 1.5. HÀM SỐ LIÊN TỤC (2 tiết)

### 1.5.1. Định nghĩa

\* Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  và điểm  $x_0 \in (a, b)$ . Hàm  $f(x)$  được gọi là liên tục tại  $x_0$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Cụ thể là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, b), |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

\* Hàm  $f(x)$  được gọi là gián đoạn tại  $x_0$  nếu nó xác định tại một lân cận của  $x_0$ , có thể trừ ra tại chính điểm này, và không liên tục tại đó.

\* Hàm  $f(x)$  được gọi là gián đoạn khử được tại  $x_0$  nếu nó gián đoạn tại  $x_0$  và tồn tại giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

Xét hàm mới

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I - \{x_0\} \\ f(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Hàm này liên tục tại  $x_0$ , chỉ "khác chút xíu" với hàm  $f(x)$ . Vì thế, trong một số trường hợp, có thể coi hàm gián đoạn khử được tại  $x_0$  là liên tục tại  $x_0$ .

\* Hàm  $f(x)$  được gọi là gián đoạn loại một tại  $x_0$ , (lúc đó ta nói  $x_0$  là điểm gián đoạn loại một của  $f(x)$ ) nếu:

- $f(x)$  gián đoạn tại  $x_0$ ;
- tồn tại các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Gián đoạn khử được  $\Rightarrow$  gián đoạn loại một.

\* Nếu hàm  $f(x)$  gián đoạn tại  $x_0$  nhưng không gián đoạn loại một tại đó thì  $f(x)$  được gọi là gián đoạn loại hai tại  $x_0$ ;  $x_0$  là điểm gián đoạn loại hai.

\* Hàm  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  được gọi là liên tục trong khoảng  $(a, b)$  nếu nó liên tục tại mọi điểm  $x_0 \in (a, b)$ .

\* Hàm  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  được gọi là liên tục trên đoạn  $[a, b]$  nếu nó liên tục tại mọi điểm  $x_0 \in (a, b)$  và liên tục phải tại  $a$ , liên tục trái tại  $b$ , nghĩa là:

**Nhận xét.** \* Đồ thị của hàm liên tục là đường cong liền nét; khi vẽ, ta không phải nhắc bút lên khỏi giấy (phấn lên khỏi bảng).

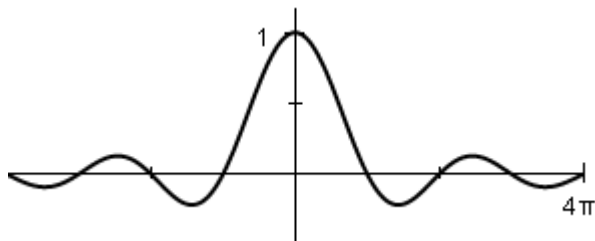
\* Đặt  $\Delta x = x - x_0$  ( $\Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x$ ),

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Từ định nghĩa, ta suy ngay ra rằng,  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$  khi và chỉ khi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0. \quad (1.9)$$

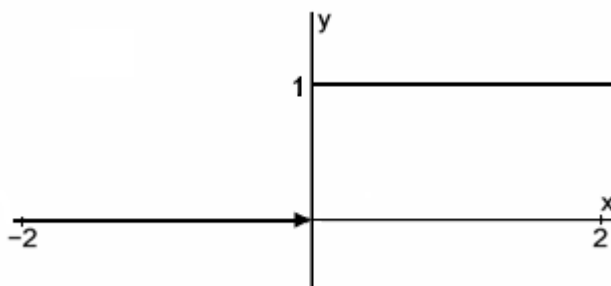
**Ví dụ 1.28.** (i) Hàm Sa(x). Xét hàm  $y = \frac{\sin x}{x}$ .



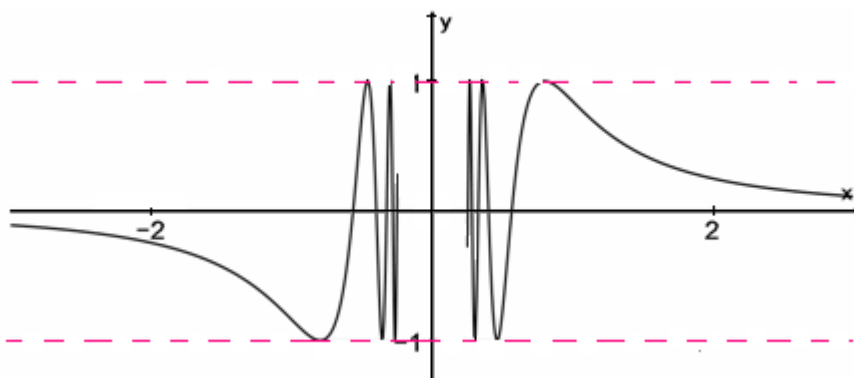
**Hình 1.21.** Đồ thị hàm  $Sa(x)$

$$\text{Hàm số } Sa(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \text{ liên tục,}$$

(ii) Hàm bước nhảy đơn vị  $y = u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x. \end{cases}$



$$(iii) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



**Ví dụ 1.30.** Tìm hằng số  $a$  để hàm sau đây liên tục trên toàn trục số

$$y = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ ax + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

**Giải.** Để thấy hàm đã cho liên tục trên các khoảng  $\{x < 1\}$  và  $\{x > 1\}$ .

Tại  $x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 1) = a + 1 = f(1)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x = e$ .

Vậy hàm liên tục tại  $x = 1 \Leftrightarrow a + 1 = e$  hay  $a = e - 1$ . #

### 1.5.2. Các phép toán với các hàm số liên tục

**Định lý 1.29.** Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là những hàm liên tục tại  $x_0 \in (a; b)$  thì

(a)  $f(x) \pm g(x)$ ;  $f(x)g(x)$ ;  $|f(x)|$  liên tục tại  $x_0$ .

(b)  $\forall C \in \mathbb{R}$ ,  $Cf(x)$  liên tục tại  $x_0$ .

(c) Nếu  $g(x_0) \neq 0$  thì  $\frac{f(x)}{g(x)}$  liên tục tại  $x_0$ .

**Định lý 1.30 (Sự liên tục của hàm hợp)**

(a) Cho  $u = u(x)$ ,  $x \in (a, b)$  là hàm liên tục tại  $x_0 \in (a, b)$ . Giả sử tập giá trị của hàm này chứa trong khoảng  $(c, d)$  và  $z = f(u)$ ,  $u \in (c, d)$  là hàm liên tục tại  $u_0 = u(x_0)$ . Khi đó hàm hợp  $z = f(u(x))$  liên tục tại  $x_0$ .

(b) Cho  $u = u(x)$  là hàm liên tục trong khoảng  $(a, b)$ . Giả sử tập giá trị của hàm này được chứa trong khoảng  $(c, d)$  và  $z = f(u)$  là hàm liên tục trong  $(c, d)$ . Khi đó hàm hợp  $z = f(u(x))$  liên tục trong  $(a, b)$ .

Nói một cách ngắn gọn, hợp của hai hàm liên tục là một hàm liên tục.

**Hệ quả**

- Hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định của chúng.
- Hàm sơ cấp xác định trong khoảng  $(a, b)$  thì liên tục trong khoảng đó.

Cũng vậy: Nếu trong một lân cận nào đó của điểm  $x_0$ ,  $f(x)$  là hàm sơ cấp thì  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$ .

### 1.5.3. Các tính chất của hàm số liên tục trên đoạn kín

**Định lý 1.31 (Định lý về sự triệt tiêu của hàm liên tục)**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[a, b]$  sao cho  $f(a) f(b) < 0$ . Khi đó có điểm  $c$  trong khoảng  $(a, b)$  để  $f(c) = 0$ .

**Chứng minh.** Rõ ràng ta chỉ cần xét trường hợp  $f(a) < 0 < f(b)$ .

Ta xây dựng hai dãy  $\{c_n\}$ ,  $\{d_n\}$  theo quy nạp như sau.

+ Đặt  $c_0 = a$ ;  $d_0 = b$ . Ta có  $f(c_0) < 0 < f(d_0)$ ;  $|d_0 - c_0| = b - a$ .

+ Đặt  $u_0 = (c_0 + d_0) / 2$ . Nếu  $f(u_0) = 0$  thì  $u_0$  là điểm  $c$  phải tìm; dừng quá trình. Nếu  $f(u_0) < 0$  thì đặt  $c_1 = u_0$  và  $d_1 = d_0$ . Nếu  $f(u_0) > 0$  thì đặt  $c_1 = c_0$  và  $d_1 = u_0$ .

Trên đoạn  $[c_1, d_1]$ , hàm  $f(x)$  liên tục;  $f(c_1) < 0 < f(d_1)$ ,  $|d_1 - c_1| = (b - a) / 2$ .

+ Giả sử phải tiếp tục quá trình trên, đặt  $u_1 = (c_1 + d_1) / 2$ . Nếu  $f(u_1) = 0$  thì  $u_1$  là điểm c phải tìm; dừng quá trình.

Nếu  $f(u_1) < 0$ , đặt  $c_2 = u_1$  và  $d_2 = d_1$ . Nếu  $f(u_1) > 0$ , đặt  $c_2 = c_1$ ,  $d_2 = u_1$ .

Trên đoạn  $[c_2, d_2]$ , hàm  $f(x)$  liên tục và

$$f(c_2) < 0 < f(d_2); \quad |d_2 - c_2| = (b - a) / 2^2.$$

Tiếp tục quá trình trên. Giả sử quá trình dừng lại ở bước thứ  $n$  nào đó,  $u_n$  là giá trị c cần tìm.

Giả sử quá trình là vô hạn, khi đó ta có hai dãy kề nhau  $\{c_n\}, \{d_n\}$ . Chúng có giới hạn chung là c:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = c, \quad c \in (a, b)$ .

Từ tính liên tục của hàm  $f(x)$  suy ra

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n) = f(c) \Rightarrow f(c) = 0. \quad \square$$

**Hệ quả (Định lý về các giá trị trung gian).** Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn đóng  $[a, b]$  sẽ nhận mọi giá trị trung gian giữa  $f(a)$  và  $f(b)$ .

**Định lý 1.32 (Định lý Weierstrass).** Cho  $f(x)$  liên tục trên đoạn đóng giới nội  $[a, b]$ . Khi đó nó bị chặn, đạt được giá trị lớn nhất  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

và giá trị nhỏ nhất  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ .

**Chứng minh.** + Trước hết ta chứng minh tập giá trị  $J = \{f(x), x \in [a, b]\}$  của hàm  $f(x)$  là bị chặn. Giả sử ngược lại,  $J$  không bị chặn, chẳng hạn, không bị chặn trên. Khi đó

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists x_N \in [a, b]: f(x_N) \geq N.$$

Dãy  $\{x_n\}$  bị chặn, theo Bổ đề Bolzano - Weierstrass, ta trích ra được một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  hội tụ:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$ . Vì  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$  nên  $f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ , mâu thuẫn. Vậy tập  $J$  bị chặn trên.

Tương tự,  $J$  bị chặn dưới, từ đó  $J$  bị chặn. Đặt

$$m = \inf_{[a, b]} f(x); \quad M = \sup_{[a, b]} f(x).$$

+ Bây giờ ta chứng tỏ tồn tại  $t_0 \in [a, b]$ ,  $f(t_0) = M$ . Thực vậy, theo tính chất của Suprimum,

$$\forall \varepsilon = 1/n, \exists t_n \in [a, b]: M - \varepsilon = M - 1/n < f(t_n) \leq M. \quad (*)$$

Do dãy  $\{t_n, n=1, 2, \dots\}$  bị chặn, lại theo Bổ đề Bolzano-Weierstrass tồn tại dãy con  $\{t_{n_k}\}$  hội tụ:  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0 \in [a, b]$ .

Từ tính liên tục của  $f(x)$  và (\*) suy ra  $f(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}) = M$ .



Như vậy hàm  $f(x)$  đạt được giá trị lớn nhất  $M$  tại  $t_0$ . Tương tự,  $f(x)$  cũng đạt giá trị nhỏ nhất  $m$ .  
□

**Định lý 1.34** (Sự liên tục của hàm ngược)

Cho  $I$  là một khoảng suy rộng (chứa đầu mút hay không) và  $y = f(x)$ ,  $x \in I$  là hàm số liên tục và đơn điệu thực sự trên  $I$ .

Gọi  $J$  là tập giá trị của  $f$ . Tồn tại hàm ngược  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x \in J$  liên tục, đơn điệu thực sự, biến thiên cùng chiều với  $f$ .

**Yêu cầu SV chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Giới hạn hàm số (1 t), Sự liên tục (1 t) 24, 27, 29, 31**); 13(d  $\rightarrow$  i: Chứa: **e, f, i**); 14( a-f, Chứa: **a, b, d, f**);

Đọc trước TL[1], tr 72-76: Liên tục đều

Tự đọc TL [1], tr 68-68: Biến thể của các giới hạn quan trọng

**Bài giảng4: Liên tục đều – Đạo hàm, vi phân cấp I**

Chương 1, Chương 2: Đạo hàm và vi phân

Mục: § 1.5 Liên tục (tiếp – liên tục đều- 1t)

§2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1 (2t)

Bài tập: Giới hạn hàm số (1 tiết)

Sự liên tục (1 tiết)

Tiết thứ: 16 - 20,

Tuần thứ: 4

**- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm được định nghĩa, tầm quan trọng của liên tục đều.

Những khái niệm ban đầu về đạo hàm, mối liên hệ hàm có đạo hàm và khả vi

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**§ 1.5. HÀM SỐ LIÊN TỤC** (tiếp -1 tiết)

**Định nghĩa.** Giả sử  $f(x)$  là hàm số xác định trên  $I$  là một khoảng mở rộng của  $\mathbb{R}$ . Ta nói hàm số  $f(x)$  là liên tục đều trên  $I$  nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta \text{ thì } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

**Nhận xét.** i. Nếu ta tìm được số  $\varepsilon_0$  và hai dãy  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0 \text{ nhưng } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

thì  $f(x)$  không liên tục đều trên  $I$ .

- ii. Nếu  $f(x)$  liên tục đều trên  $I$  thì liên tục đều trên  $I$ .
- ii. Nếu hàm  $f(x)$  liên tục đều trên  $I$  thì cũng liên tục đều trên mọi khoảng con  $J$  của nó.
- iii. Nếu hàm  $f(x)$  liên tục đều trên 2 khoảng  $I, J$  thì cũng liên tục đều trên  $I \cup J$ .

**Ví dụ 1.31.** Chứng minh rằng hàm  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  liên tục trong khoảng  $(0; 1)$  nhưng không liên tục đều trong khoảng đó.

Thực vậy,  $f(x)$  là hàm sơ cấp trong khoảng  $(0, 1)$  nên nó liên tục trên khoảng này.

Ta chọn 2 dãy  $x_n = \frac{1}{2n}, t_n = \frac{1}{2n+1/2}$  thì  $x_n, t_n \in (0, 1)$ ,  
 $|x_n - t_n| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$  còn  $|f(x_n) - f(t_n)| = 1$ . Vậy  $f(x)$  liên tục không đều trong  $(0; 1)$ . #

**Định lý 1.35 (Định lý Heine-Cantor).** Cho  $f(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $f(x)$  liên tục đều trên  $[a, b]$ .

Nói cách khác, hàm liên tục trên đoạn kín, giới nội thì liên tục đều trên đó.

**Chứng minh.** Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  nhưng không liên tục đều trên đó. Vậy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n, v_n \in [a, b]:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_n - v_n| < 1/n \\ |f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon \end{array} \right. \quad (**)$$

Xét dãy  $\{u_n\}$ . Đây là dãy bị chặn, theo bổ đề Bolzano–Weiestrass, tồn tại dãy con  $\{u_{n_k}\}$  hội tụ đến giới hạn  $c \in [a, b]$ .

Xét dãy con  $\{v_{n_k}\}$  của dãy  $\{v_n\}$ . Vì  $\{u_{n_k}\}$  là dãy hội tụ và từ  $(*)$ ,  $\{v_{n_k}\}$  cũng là dãy hội tụ đến  $c$ . Vì  $f(x)$  liên tục nên

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(v_{n_k}) = f(c).$$

Vậy  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(u_{n_k}) - f(c)| + \lim_{n \rightarrow \infty} |f(c) - f(v_{n_k})| = 0$ ,  
 mâu thuẫn với  $(**)$ . Mâu thuẫn này chứng minh khẳng định của định lý.  
 $\square$

**Ví dụ 1.32.** Xét sự liên tục đều của hàm  $\sin x / x$  trên các tập  $[1, \pi], (0, \pi)$ ,

a. Trên  $[1, \pi]$ , hàm đã cho là hàm sơ cấp, nó liên tục. Theo Định lý 1.35,  $f(x)$  liên tục đều trên đoạn này.

b. Xét một thác triển liên tục của hàm  $f(x)$  lên đoạn  $[0, \pi]$ , đó là hàm

$$g(x) = \begin{cases} \sin x / x & x \in (0, \pi] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Trên  $(0, \pi]$ ,  $g(x)$  là hàm liên tục do nó là hàm sơ cấp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / x) = 1 = g(0) : \text{Hàm } g(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

Vậy  $g(x)$  liên tục trên đoạn kín  $[0, \pi]$ . Theo Định lý H-Cantor, nó liên tục đều trên đoạn này. Từ đó, nó cũng liên tục đều trên khoảng  $(0, \pi)$ . #

**Ví dụ cuối chương (tự đọc)**

## TÓM TẮT CHƯƠNG 1 (tự đọc)

- **Định lý.**  $M = \text{Sup}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ là một cận trên,} & (*) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a \leq M. & (**) \end{cases}$

- **Giới hạn của dãy số**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- Dãy tăng (giảm), bị chặn trên (dưới) thì hội tụ.

- **Bổ đề Bolzano-Weierstrass**

Từ mọi dãy số thực bị chặn đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

- **Dãy Cauchy**

$$\{u_n\} \text{ - dãy Cauchy: } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N : |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

- Hàm đã cho đơn điệu thì hàm ngược biến thiên cùng chiều với hàm xuôi.

- **Giới hạn của hàm số.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell :$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a; b) : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- **VCB, VCL tương đương.** Hai VCB (VCL)  $f(x), g(x)$  ( $x \rightarrow x_0$ ) được gọi là tương đương ( $f(x) \sim g(x)$ ) nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

- **Sự liên tục.** Hàm  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, b), |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ ,  $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$  để  $f(c) = 0$ .
- Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn đóng giới nội  $[a, b]$  thì bị chặn, đạt được GTLN  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  và GTNN  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ .
- Hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định của nó.

- **Liên tục đều**

Hàm  $f(x)$  liên tục đều trên đoạn  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  thì liên tục đều trên đó:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \text{ thì } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**BÀI TẬP:** Giới hạn hàm số (tiếp, 1 tiết),  
Sự liên tục (tiếp, 1 tiết).

## Chương 2

### ĐẠO HÀM - VI PHÂN

#### §2.1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP MỘT (2 tiết)

##### 2.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(a, b)$ . Ta nói  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$  nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm  $f(x)$  tại  $x_0$ , và được kí hiệu

là  $f'(x_0)$ , hay  $\frac{df(x_0)}{dx}$ , hay  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

**Nhận xét.** Nếu ta đặt

$$\Delta x = x - x_0 \quad (\Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x); \quad \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

thì  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$  và định nghĩa được viết lại dưới dạng

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

##### Ý nghĩa hình học

$f'(x_0)$  bằng hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại  $M(x_0, f(x_0))$ .

**Tính chất.**  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x = x_0 \in (a, b)$  thì  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$ .

**Lưu ý.** Điều ngược lại không phải luôn đúng. Xét ví dụ sau.

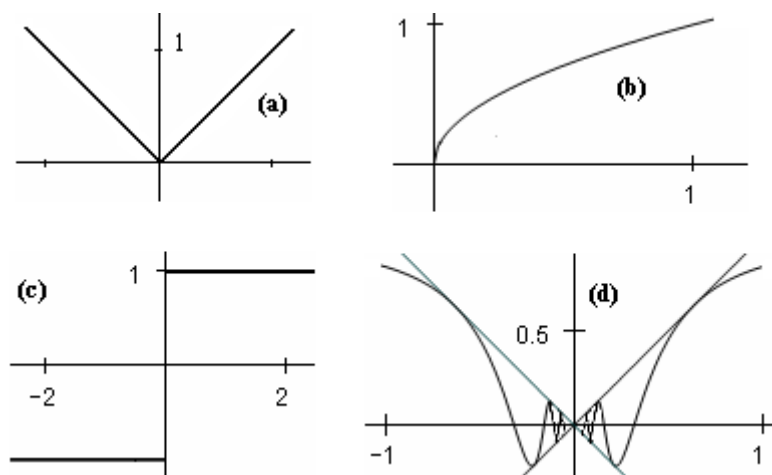
**Ví dụ 2.1.** Xét sự tồn tại đạo hàm của các hàm số sau tại  $x = 0$ :

$$(i) y = |x|; \quad (ii) y = \sqrt{x}; \quad (iii) y = \operatorname{sgn} x, \quad (iv) y = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

**Giải.** (i) Hàm này liên tục trên  $\mathbb{R}$ , đặc biệt tại  $x = 0$ . Mặt khác,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \Rightarrow \nexists f'(0).$$

Tương tự, ba hàm còn lại cũng không có đạo hàm tại  $x = 0$ . Nhìn vào đồ thị của chúng ở Hình 2.2 độc giả đã có thể tiên đoán ngay ra điều này. #



**Hình 2.2.** Một số hàm không khả vi tại 0

**Định nghĩa.** Ta nói hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trong khoảng  $(a, b)$  nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm  $x_0 \in (a, b)$ .

Khi đó ta có một hàm mới,  $f'(x)$ , xác định tại mọi điểm  $x \in (a, b)$ , ký hiệu bởi một trong các ký hiệu  $f'(x)$ ,  $\frac{d}{dx}(f(x))$ ,  $\frac{df}{dx}$ , ..., được gọi là (hàm) đạo hàm của hàm  $f(x)$  trên khoảng  $(a, b)$ .

### 2.1.2. Các phép toán với đạo hàm

**Định lý 2.1.** Cho hai hàm số  $u(x)$  và  $v(x)$  xác định trên  $(a, b)$ , có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$  còn  $C$  là một số thực. Khi đó:

- Các hàm  $u(x) + v(x)$ ,  $Cu(x)$ ,  $(uv)(x) = u(x)v(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$  và

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0); \quad (2.2)$$

$$(Cu)'(x_0) = Cu'(x_0); \quad (2.3)$$

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0). \quad (2.4)$$

- Nếu  $u(x_0) \neq 0$  thì  $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$  có đạo hàm tại  $x_0$  và

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \quad (2.5)$$

\* *Mở rộng.* Nếu mỗi hàm số  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$  thì hàm tích  $(u_1 \dots u_n)(x) = u_1(x) \dots u_n(x)$  cũng có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$  và

$$(u_1 \dots u_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n u_1(x_0) \dots u_{k-1}(x_0) u'_k(x_0) u_{k+1}(x_0) \dots u_n(x_0). \quad (2.6)$$

Chẳng hạn,

$$(u.v.w)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0)w(x_0) + u(x_0)v'(x_0)w(x_0) + u(x_0)v(x_0)w'(x_0).$$

### 2.1.3. Đạo hàm của hàm hợp

**Định lý 2.2.** Cho  $u = u(x)$ ,  $x \in (a, b)$  là hàm có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$ . Giả sử tập giá trị của hàm này được chứa trong khoảng  $(c, d)$  và hàm  $z = f(u)$ ,  $u \in (c, d)$  có đạo hàm tại  $u_0 = u(x_0)$ . Khi đó hàm hợp  $F(x) = f(u(x))$  có đạo hàm tại  $x_0$  và

$$F'(x_0) = f'(u(x_0)) u'(x_0).$$

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \quad \text{hay} \quad (u + v)' = u' + v',$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \text{hay} \quad (uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0) \quad \text{hay} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x) \quad \text{hay} \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (2.7)$$

Dùng đạo hàm hàm hợp ta thu được công thức sau đây rất tiện lợi:

$$(e^{ax}f(x))' = e^{ax}(f'(x) + af(x)) \quad \text{hay} \quad (e^{ax}f)' = e^{ax}(f' + af).$$

Tổng quát

$$(e^g f)' = e^g (f' + g'f). \quad (2.8)$$

### 2.1.4. Đạo hàm của hàm ngược

**Định lý 2.3.** Giả sử hàm  $y = y(x)$  xác định trên khoảng  $(a, b)$  và có tập giá trị là  $J = \{y(x) : x \in (a, b)\}$ . Nếu  $y(x)$  là hàm đơn điệu thực sự, khả vi và  $y'(x) \neq 0$  trên  $(a, b)$  thì tồn tại hàm ngược  $x = x(y)$  xác định, khả vi trên  $J$  và

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}, \quad y \in J. \quad (2.9)$$

*Chứng minh.*

**Lưu ý.** Thông thường, để tìm đạo hàm hàm ngược khi biết chắc rằng nó tồn tại, ta viết đồng nhất thức

$$f(f^{-1}(x)) \equiv x \quad \text{hoặc} \quad f^{-1}(f(x)) \equiv x$$

trên tập xác định rồi đạo hàm hai vế sẽ rất hiệu quả.

**Ví dụ 2.2.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = \arccos x$ .

Ta có  $\cos(\arccos x) = x, \forall x \in (-1, 1)$ . Vậy  $-\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Tương tự, để tính đạo hàm hàm số  $y = \arcsin x$ , bằng cách xét  $x = \sin(\arcsin x), x \in (-1, 1)$  ta nhận được

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad \#$$

Bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp (xem [1]).

### 2.1.5. Đạo hàm một phía - Đạo hàm vô cùng

#### a. Định nghĩa

\* Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b)$ . Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  thì hàm  $f(x)$  được gọi là có đạo hàm (phía) phải tại  $a$ , giới hạn trên được gọi là đạo hàm (phía) phải tại  $a$  của hàm  $f(x)$ , kí hiệu là  $f'_+(a)$ .

\* Tương tự, chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa đạo hàm trái  $f'_-(a)$ .

\* Hàm số  $f(x)$  gọi là có đạo hàm trên đoạn  $[a, b]$  nếu nó có đạo hàm trong khoảng  $(a, b)$ , có đạo hàm phải tại  $a$  và có đạo hàm trái tại  $b$ .

\* Ứng với các đạo hàm phải (trái) ta có các tiếp tuyến phải (trái) (tự hiểu!).

\* Nếu  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty$ , ta nói  $f(x)$  có đạo hàm vô cùng tại  $c$ , và viết  $f'(c) = \infty$ . Nếu hàm số liên tục tại  $x = c$  thì tiếp tuyến tương ứng song song với trục Oy. Lưu ý rằng khi ấy hàm  $f(x)$  không có đạo hàm hữu hạn (khả vi) tại  $x = c$ .

### ***b. Tính chất***

(i) Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0 \in (a, b)$  khi và chỉ khi

$$\exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0); f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

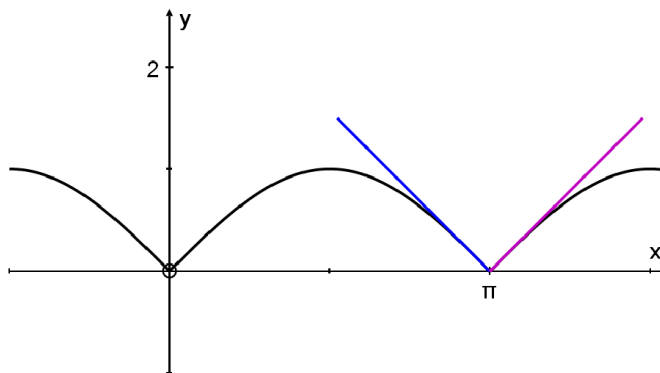
Khi đó,  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

(ii) Nếu  $f(x)$  có đạo hàm trong khoảng  $(a, b)$  thì  $f'(x)$  không có điểm gián đoạn loại I.

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$  có điểm gián đoạn loại I trong khoảng  $(a, b)$  thì không có nguyên hàm trên đó.

(Ta sẽ xét khái niệm nguyên hàm sau).

**Ví dụ 2.3.** (iii)  $y = |\sin x|$ : Xét sự tồn tại của đạo hàm tại  $x = \pi$ .



**Hình 2.3.** Tiếp tuyến trái, phải của hàm  $y = |\sin x|$

$$y'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x| - |\sin \pi|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin(x - \pi)|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\sin(x - \pi)}{x - \pi} = -1,$$

$$y'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x| - |\sin \pi|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin(x - \pi)|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = 1.$$

Từ đó không tồn tại đạo hàm  $y'(\pi)$ . Trên Hình 2.3, tiếp tuyến phải và trái tại  $x = \pi$  không đồng nhất, điều này cũng xác nhận khẳng định trên của ta.



$$\text{iv. } y = \text{Sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

### 2.1.6. Vi phân

**a. Định nghĩa.** Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  và  $x_0 \in (a, b)$ . Nếu số gia hàm số  $\Delta f$  được viết dưới dạng

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad (2.10)$$

trong đó  $A$  là hằng số, không phụ thuộc vào  $\Delta x$ ,  $o(\Delta x)$  là VCB bậc cao hơn của  $\Delta x$ , thì hàm  $f(x)$  được gọi là khả vi tại  $x_0$ ,  $A \cdot \Delta x$  được gọi là vi phân của hàm  $f(x)$  tại điểm  $x_0$  ứng với số gia  $\Delta x$  của đối số  $x$ , ký hiệu là  $df(x_0)$ .

**Ví dụ 2.4.** Xét hàm số  $y = x$ . Như thường lệ,  $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$ . Vậy  $dx = \Delta x$ . #

**Định lý 2.4.** Hàm số  $y = f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  khả vi tại  $x_0 \in (a, b)$  khi và chỉ khi  $f(x)$  có đạo hàm tại đó. Khi đó,

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x = f'(x_0) dx.$$

Nếu  $f(x)$  khả vi tại mọi điểm  $x_0 \in (a, b)$  thì ta nói  $f(x)$  khả vi trong khoảng  $(a, b)$  và vi phân của  $f(x)$  tại  $x$  được tính theo công thức:

$$df(x) = f'(x) dx. \quad (2.11)$$

Ta nhận được  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ , phù hợp với ký hiệu sử dụng ở đầu bài.

**Ví dụ 2.5.** Tìm vi phân của hàm  $y = x^5$  tại  $x = 10$  và ứng với  $\Delta x = 0,1$ .

$$\text{Giải. } df(10) = f'(10) \Delta x = 5 \cdot 10^4 \Delta x = 50000 \Delta x.$$

$$\text{Với } \Delta x = 0,1: df(10) = 5000.$$

Như vậy, tại  $x = 10$ , khi  $x$  biến thiên một đoạn 0,1 thì  $y$  biến thiên một đoạn cỡ 5 000 (!) #

### b. Tính bất biến dạng của vi phân cấp I

Từ công thức (2.11), nếu  $x$  là biến độc lập,  $y = f(x)$  là biến phụ thuộc thì

$$dy = f'(x) dx. \quad (*)$$

Vi phân cấp I của hàm  $f(x)$  luôn có dạng  $dy = f'(x)dx$  dù rằng  $x$  là biến độc lập hay  $x$  là biến phụ thuộc.

**c. Các phép toán về vi phân.** Bằng cách đạo hàm, ta dễ dàng suy ra công thức sau đây với giả thiết  $f(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  là các hàm khả vi:

$$\begin{aligned} df(u) &= f'(u) du \\ d(u \pm v) &= du \pm dv, \\ d(uv) &= vdu + u dv, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (\text{nếu } v(x) \neq 0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

**d. Ứng dụng.** Dùng vi phân, chúng ta có thể tính gần đúng giá trị của hàm số. Cho hàm số  $y = f(x)$  sao cho có thể tính dễ dàng (hoặc biết trước) giá trị  $f(x_0)$  cũng như đạo hàm  $f'(x_0)$ . Giá trị gần đúng của hàm tại  $x$  gần  $x_0$  cho bởi

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + df(x_0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Để áp dụng công thức trên, chúng ta cần chỉ ra dạng hàm  $f(x)$ , điểm  $x_0$ , số gia  $\Delta x$  phải đủ nhỏ.

**Ví dụ 2.6.** Tính giá trị gần đúng  $A = \sqrt[5]{33}$ .

*Giải.* Nhận xét rằng  $A = \sqrt[5]{32+1}$ , ta giải bài toán trên như sau.

Xét hàm  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ , với  $x_0 = 32$ ,  $x = 33$  thì  $\Delta x = 33 - 32 = 1$ .

Ta có  $A = \sqrt[5]{33} \approx f(32) + f'(32) \cdot \Delta x$

$$f(32) = 2; \quad f'(x) = \frac{1}{5x^{4/5}} \Rightarrow f'(32) = \frac{1}{5 \cdot 32^{4/5}} = \frac{1}{80}.$$

Vậy  $A \approx 2 + 1/80 = 2.0125$ . (Bấm máy tính ta được  $\sqrt[5]{33} = 2.01235$ ). #

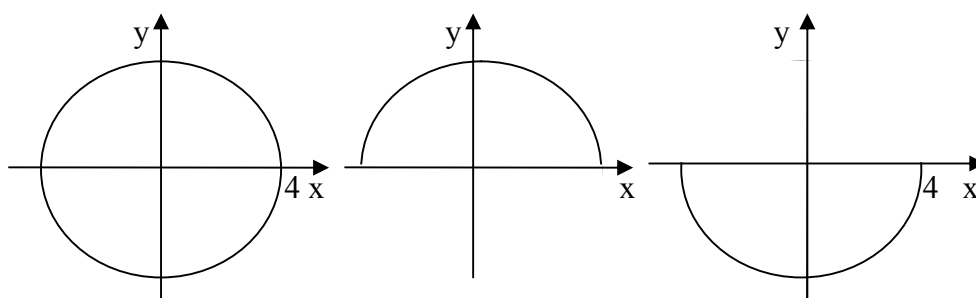
### 2.1.7. Đạo hàm của hàm ẩn

Một số hàm lại được xác định một cách ẩn thông qua một ràng buộc giữa các biến, chẳng hạn

$$(i) \quad x^2 + y^2 = 16; \quad (ii) \quad x^3 + y^3 = 6xy.$$

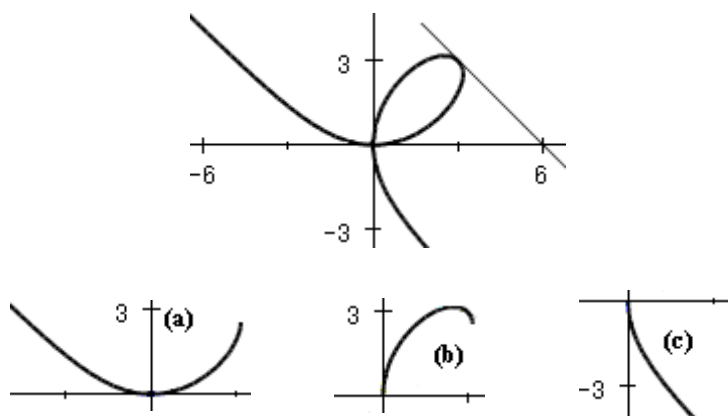
Trong một số trường hợp, ta có thể giải phương trình để tìm ra  $y$  như là hàm (hay một số hàm) hiển của biến  $x$ . Chẳng hạn ở (i) ta có  $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ . Như vậy ta nhận được hai hàm  $f(x) = \sqrt{16-x^2}$  và

$g(x) = -\sqrt{16-x^2}$ , đồ thị của chúng là nửa trên và nửa dưới của đường tròn  $x^2 + y^2 = 16$  (Xem Hình 2.4).



**Hình 2.4.** Hai hàm ẩn từ phương trình  $x^2 + y^2 = 16$

Tuy vậy, không phải lúc nào cũng dễ dàng giải ra  $y$  qua  $x$ , thậm chí nhiều khi là không thể. Dù sao, từ ràng buộc đã cho có tồn tại một hoặc một số hàm biểu diễn biến  $y$  qua biến  $x$ , mà khi thay vào phương trình đã cho trở thành đồng nhất thức. Hàm như thế gọi là hàm ẩn (ngụ ý: xác định một cách ẩn) từ phương trình đã cho. Chẳng hạn, phương trình (ii) biểu diễn lá Descartes (Hình 2.5); từ đây có ít ra 3 hàm ẩn có đồ thị như ở Hình 2.5 a), b) c) .



**Hình 2.5.** Lá Descartes và các hàm số tương ứng

Rất may, việc tính đạo hàm và vi phân hàm ẩn rất thuận lợi, ta chỉ việc coi  $y$  là hàm của biến  $x$ :  $y = y(x)$ ; thay vào phương trình ràng buộc, rồi lấy đạo hàm hay vi phân đồng nhất thức thu được (dùng các quy tắc đạo hàm hàm hợp), từ đó suy ra  $y'(x)$  hay  $dy(x)$ . Ta luôn giả thiết hàm ẩn thu được là khả vi để việc đạo hàm được thuận lợi.

**Ví dụ 2.7.** Lá Descartes có phương trình  $x^3 + y^3 = 6xy$ . Tìm  $y'$ ; tìm tiếp tuyến (d) tại điểm  $(3,3)$ .

*Giải.* Đạo hàm hai vế, lưu ý  $y = y(x)$  ta được

$$3x^3 + 3y^2 y' = 6y + 6xy' \Rightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}. \quad (*)$$

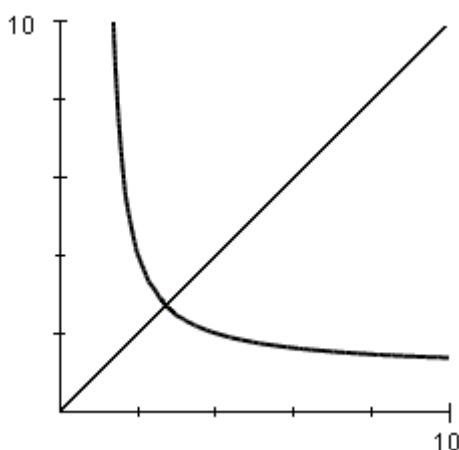
Tại  $x = y = 3$  thì  $y' = \dots = -1 \Rightarrow (d): y = -1(x - 3) + 3 \Leftrightarrow y = -x + 6$ .

Kiểm tra trên đồ thị ở Hình 2.5, ta thấy đáp số này là khả dĩ. #

**Ví dụ 2.8.** Tính vi phân của hàm ẩn  $y = y(x)$  xác định từ phương trình  $x^y = y^x$ .

*Giải.* Điều kiện  $x > 0, y > 0$ . Phương trình đã cho tương đương với  $y \ln x = x \ln y$ . Coi  $y = y(x)$ , vi phân hai vế ta được

$$dy \cdot \ln x + \frac{y}{x} dx = dx \cdot \ln y + \frac{x}{y} dy \Rightarrow dy = \frac{y \cdot x \ln y - y}{x \cdot y \ln x - x} dx. \quad (*)$$



**Hình 2.6.** Hai hàm ẩn xác định từ phương trình  $x^y = y^x$

**Nhận xét.** Đường cong đối xứng qua phân giác góc phần tư thứ nhất. Có hai hàm ẩn xác định từ phương trình (\*), trong đó một hàm là  $y = x, x > 0$  (xem Hình 2.4). Bất luận là hàm nào trong hai hàm này, công thức (\*) đều đúng. #

### 2.1.8. Tính gần đúng đạo hàm

**BÀI TẬP:** Giới hạn hàm số (1 tiết)  
Sự liên tục (1 tiết)

**Yêu cầu SV chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch

Đọc trước TL[1], tr101-103: Đạo hàm và vi phân cấp cao

Tự đọc TL [1]: Ví dụ: VD 2.8; VD 2.16(a, b); 2.21; 2.26(a, b, d); 2.30(d); 2.33; VD 39; VD 2.40 (hình 2.32 a:  $r = \arcsin \theta$ ).

## TÓM TẮT CHƯƠNG 2

### Bài tập về nhà cho Chương 2:

Bổ trợ: 1(1, 3, 5, 7, 9, 12, 15, 17, 19); 18(a, d, e); 34; 36(a, b); 41, 42.

Chính: 1(13, 21); 3; 6(a, b); 7(b); 9(a, b); 12(a, b, c, d); 13(d); 15(a, c); 16; 18(a); 21; 22(a, b); 25(c); 32(a, b, c, d); 38(a, b); 39(b).

Thêm: Biết rằng hàm ẩn  $y = y(x)$  từ phương trình  $xy = \ln y + 2$  khả vi và  $y(2) = 1$ . Hãy tính  $y''$  tại  $x = 2$ .

### **Bài giảng 5: Đạo hàm và vi phân cấp cao – Các DL cơ bản**

#### Chương 2: Đạo hàm và vi phân

Mục: § 2.2 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1t)

§2.3. Các định lý cơ bản về đạo hàm (2t)

Bài tập: Sự liên tục (1 tiết)

Đạo hàm, vi phân cấp I (1 tiết)

Tiết thứ: 21-25, Tuần thứ: 5

#### **- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm được cách tính đạo hàm cấp cao theo CT Leibniz, tính vi phân cấp 2, 3

Nắm được các giả thiết của DL Roll, nêu được vài ứng dụng của DL Lagrange

#### **- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

#### **- Nội dung chính:**

### **§2.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO ( 1 tiết)**

#### **2.2.1. Định nghĩa**

Giả sử  $f(x)$  khả vi tại mọi điểm  $x \in (a, b)$ . Khi đó  $f'(x)$  là một hàm nào đó xác định trong khoảng  $(a, b)$ . Nếu hàm  $f'(x)$  khả vi tại  $c \in (a, b)$  thì ta nói  $f(x)$  khả vi hai lần tại  $c$  và đạo hàm của hàm  $f'(x)$  tại  $c$  được gọi là đạo hàm cấp hai của  $f(x)$  tại  $c$ , kí hiệu  $f''(c)$ .

$$f''(c) = (f'(x))' \Big|_{x=c} . \quad (2.14)$$

Hàm  $f(x)$   $x \in (a, b)$  được gọi là khả vi  $n$  lần trên  $(a, b)$  ( $n \geq 2$ ) nếu  $f(x)$  khả vi  $n - 1$  lần trên  $(a, b)$  và đạo hàm cấp  $n - 1$  cũng khả vi. Khi đó

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad (2.15)$$

và được gọi là đạo hàm cấp  $n$  của  $f(x)$ .

Quy ước  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

### **Tính chất**

$$(i) \quad f^{(n)}(x) = [f'(x)]^{(n-1)} = [f''(x)]^{(n-2)} \dots$$

$$(ii) \quad (af(x) + bg(x))^{(n)} = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x).$$

**Ý nghĩa cơ học.** Xem [1]

**Ví dụ 2.10.** Chúng ta dễ dàng kiểm tra các đạo hàm cấp cao sau đây, thường chúng được chứng minh bằng quy nạp.

$$i. \quad (x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} & (k < n) \\ k! & (n = k) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

Chẳng hạn,  $(x^{11})^{(17)} = 0$ ;  $(x^{11})^{(11)} = 11!$ ;  $(x^{11})^{(5)} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 x^6$ .

$$ii. \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & (n = 2k) \\ (-1)^k \cos x & (n = 2k+1) \end{cases}$$

$$iii. \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & (n = 2k) \\ (-1)^k \sin x & (n = 2k+1) \end{cases}$$

$$iv. \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

#

### **2.2.2. Quy tắc Leibniz (tính đạo hàm cấp cao của một tích)**

Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm số khả vi tới cấp  $n$  thì tích  $f(x)g(x)$  cũng khả vi tới cấp  $n$  và

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= f^{(n)} g^{(0)} + n f^{(n-1)} g^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)} g^{(2)} + \dots + n f^{(1)} g^{(n-1)} + f g^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

**Ví dụ 2.11.**  $(x^2 \sin x)^{(100)} =$

$$= C_{100}^0 x^2 (\sin x)^{(100)} + C_{100}^1 (2x) (\sin x)^{(99)} + C_{100}^2 \cdot 2 \cdot (\sin x)^{(98)}$$

$$= x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x.$$

#

### 2.2.3. Vi phân cấp cao

Giả sử  $f(x)$  khả vi tại mọi điểm  $x \in (a, b)$ . Khi đó

$$df(x) = f'(x)dx, \forall x \in (a, b).$$

Khi  $dx$  không đổi,  $df(x)$  là một hàm của  $x$ , lại có thể nói đến vi phân của nó. Vi phân của vi phân cấp một (của  $f(x)$ ), nếu tồn tại được gọi là vi phân cấp hai (của  $f(x)$ ), kí hiệu là  $d^2f(x)$ , hoặc đơn giản,  $d^2f$

$$d^2f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2.$$

Tương tự, vi phân của vi phân cấp  $n - 1$  là vi phân cấp  $n$ , ký hiệu là  $d^n f$  và ta có

$$d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (2.17)$$

**Lưu ý.** Vi phân cấp cao biến dạng với biến phụ thuộc.

## §2.3. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM (2 tiết)

### 2.3.1. Định lý Rolle

**Định nghĩa.** Hàm  $f(x)$  được gọi là có cực đại tại  $x = x_0$  nếu trong một lân cận đủ nhỏ của  $x_0$  xảy ra bất đẳng thức

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Khi đó điểm  $x_0$  được gọi là điểm cực đại,  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực đại của hàm số, điểm  $M(x_0, f(x_0))$  trên đồ thị được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Ta cũng nói hàm số đạt được cực đại tại  $x_0$ .

Lưu ý rằng cụm từ “cực đại” chỉ có ý nghĩa cục bộ, địa phương. Ta cũng dễ dàng hiểu các khái niệm điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu ... Giá trị cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị.

**Bổ đề (Định lý Ferma - Điều kiện cần của cực trị)**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(a, b)$ . Nếu  $f(x)$  đạt cực trị tại  $c \in (a, b)$  và khả vi tại đó thì  $f'(c) = 0$ .

**Chứng minh.** Giả sử  $c$  là điểm cực đại của hàm  $f(x)$ .

$$f(x) \leq f(c), \forall x < c, x \text{ đủ gần } c \Rightarrow f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \ell_1 \geq 0;$$

$$f(x) \leq f(c), \forall x > c, x \text{ đủ gần } c \Rightarrow f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \ell_2 \leq 0.$$

Vì tồn tại đạo hàm  $f'(c)$  nên  $\ell_1 = \ell_2 = 0 \Rightarrow f'(c) = 0$ .

Tương tự cho trường hợp  $c$  là điểm cực tiểu.  $\square$

**Định lý 2.5 (Định lý Rolle).** Giả sử  $f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $[a, b]$  hữu hạn, khả vi trong khoảng  $(a, b)$  và  $f(a) = f(b)$ . Khi đó, tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  để  $f'(c) = 0$ .

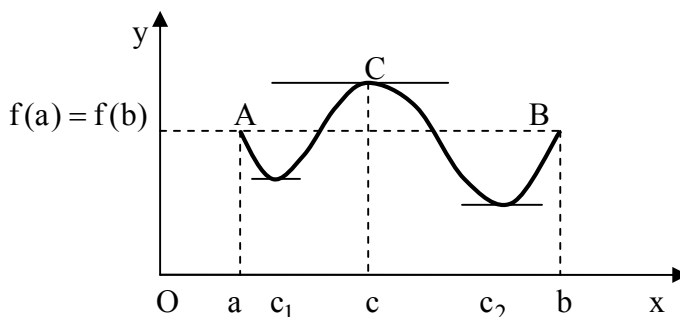
*Chứng minh.* Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn đóng  $[a, b]$ , do đó nó đạt được giá trị lớn nhất  $M = \max_{[a, b]} f(x)$  và giá trị nhỏ nhất  $m = \min_{[a, b]} f(x)$  (theo định lý Weierstrass).

Nếu  $m = M$  thì  $f(x) = f(a) = \text{const} \quad \forall x \in [a, b]$ , kết luận của định lý là rõ ràng.

Nếu  $m < M$ ,  $f(a)$  phải khác với ít nhất một trong hai giá trị  $m$  hoặc  $M$ , chẳng hạn  $f(a) \neq M$ . Vì  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất nên tồn tại  $c \in [a, b]$  để  $f(c) = M$ .  $f(c) \neq f(a) = f(b)$  nên  $c$  không thể là đầu mút  $a$  cũng như đầu mút  $b$ . Vậy  $c \in (a, b)$ . Theo bổ đề,  $f'(c) = 0$ .

$\square$

*Ý nghĩa hình học.* Khi các điều kiện ở giả thiết thỏa mãn, đặc biệt là  $f(a) = f(b)$ , sẽ có ít ra 1 điểm  $C(c, f(c))$  trên đồ thị để tiếp tuyến tại  $C \parallel Ox$  (cũng vậy, tiếp tuyến tại  $C \parallel$  dây cung  $AB$ ).



**Hình 2.9.** Điểm trung gian  $c$  trong định lý Rolle

**Ví dụ 2.12.** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ , khả vi trong  $(a, b)$ ;  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Chứng minh rằng tồn tại điểm  $c$  trong khoảng  $(a, b)$  để  $\frac{f'(c)}{f(c)} = 1000$ .

**Nhận xét**

(i) Có thể có nhiều điểm  $c$  nói đến ở Định lý Rolle (xem Hình 2.9).

(ii) Ánh xạ  $g: (0, 1) \rightarrow (a, b)$  xác định bởi  $\theta \rightarrow a + \theta(b - a)$  là song ánh nên kết luận của Định lý 2.5 có thể thay thế bởi:

$$\exists \theta \in (0, 1): f'(a + \theta(b - a)) = 0.$$



(iii) Giả thiết  $f(x)$  liên tục trên đoạn đóng không bỏ qua được. Thực vậy, xét hàm số  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Đối với hàm này ta thấy  $f(1) = f(0)$ ;  $\exists f'(x) \forall x \in (0, 1)$ . Tuy nhiên nó lại không liên tục trên đoạn  $[0, 1]$  nên không áp dụng Định lý Rolle được. Cụ thể,  $\nexists x \in (0, 1): f'(x) = 0$ .

(iv) Giả thiết  $f(x)$  khả vi trong  $(a, b)$  cũng không bỏ qua được. Thực vậy, xét hàm số  $y = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Ta thấy  $f(-1) = f(1) = 1$ ;  $f(x)$  liên tục trên  $[-1, 1]$ , song  $f(x)$  không khả vi trên  $(-1, 1)$ . Đúng là ở đây không tồn tại  $x \in (-1, 1)$  để  $f'(x) = 0$ .



**Hình 2.10.** Hàm số không thoả mãn điều kiện của Định lý Rolle

### 2.3.2. Định lý Lagrange

**Định lý 2.6 (Định lý Lagrange).** Cho hàm  $f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó, tồn tại điểm  $c \in (a, b)$ :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.18)$$

$$\text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (2.19)$$

(công thức số gia giới nội).

**Ý nghĩa hình học.** Vế phải của (2.18) là hệ số góc của dây cung AB, vế trái là hệ số góc của tiếp tuyến tại  $C(c, f(c))$ . Vậy:

Với các giả thiết của Định lý, có điểm C trên đồ thị hàm số  $f(x)$  sao cho tiếp tuyến tại đó song song với dây cung AB. (Xem Hình 2.11).

**Ý nghĩa tổng quát:** Vế phải của (2.18) là tốc độ biến thiên trung bình của hàm  $f(x)$  trên đoạn  $[a, b]$ . Vậy:

Với các giả thiết của Định lý, tốc độ biến thiên trung bình của hàm trên đoạn  $[a, b]$  bằng tốc độ biến thiên tức thời của hàm tại điểm trung gian  $c \in (a, b)$  nào đó.

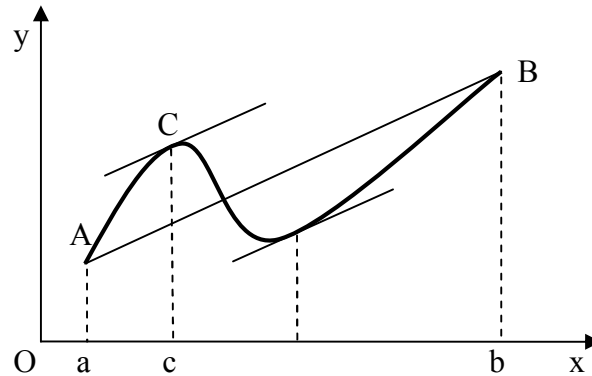
Ta cũng có thể viết công thức số gia giới nội dưới dạng

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h \quad \text{với } 0 < \theta < 1. \quad (2.20)$$

**Chứng minh.** Ta xây dựng một hàm số thoả mãn định lý Rolle, đó là

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Hàm này liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Áp dụng định lý Rolle, tồn tại  $c \in (a, b)$  để  $\varphi'(c) = 0$ .



**Hình 2.11.** Điểm trung gian  $c$  trong Định lý Lagrange

Từ đó  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$  hay  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . □

**Lưu ý.** Có thể có nhiều điểm trung gian  $c$  như đòi hỏi (Hình 2.11).

### Hệ quả

- (i)  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$  tăng trên  $(a, b)$ .
- (ii)  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ , dấu " $=$ " xảy ra chỉ tại một số hữu hạn điểm thì  $f(x)$  tăng thực sự trên  $(a, b)$ .
- (iii)  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f(x)$  là hằng số trên  $(a, b)$ .
- (iv)  $f(x)$  liên tục,  $f'(x)$  đổi dấu khi  $x$  qua  $x_0 \in (a, b)$  thì  $x = x_0$  là một điểm cực trị của hàm  $f(x)$ .

**Ví dụ 2.13.** Chứng minh rằng với  $0 < a < b$  và  $n \geq 1$  thì

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a). \quad (*)$$

Thực vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}. \quad (**)$$

Nhận xét rằng  $b^n = (x^n)|_{x=b}$ ,  $a^n = (x^n)|_{x=a}$ . Vậy ta nên xét hàm số  $f(x) = x^n$  trên đoạn  $[a, b]$ . Theo Định lý Lagrange,  $\exists c \in (a, b)$ :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow \frac{b^n - a^n}{b - a} = nc^{n-1}.$$

Rõ ràng  $na^{n-1} < nc^{n-1} < nb^{n-1}$ . Nhận được (\*\*). #

**Ví dụ 2.14.** Chứng tỏ rằng hàm số  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^x - x - 1, & 0 < x \end{cases}$

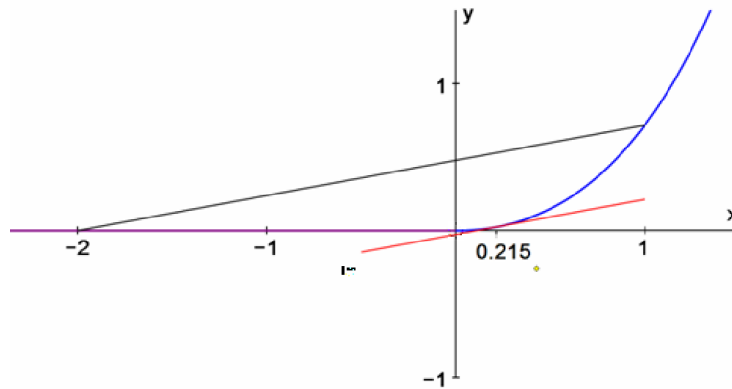
thỏa mãn Định lý Lagrange trên đoạn  $[-2, 1]$ . Tìm điểm trung gian  $c$  trong Định lý. Vẽ đồ thị và tiếp tuyến tại  $M$  có hoành độ  $c$ .

*Giải.* \* Hàm  $f(x)$  là hàm sơ cấp trên các khoảng  $[-2, 0)$  và  $(0, 1]$  nên nó liên tục trên các khoảng này. Tại  $x = 0$  thì

$$f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0; \quad f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x - 1) = 0; \quad f(0) = 0.$$

Vậy  $f(x)$  liên tục tại  $x = 0$ . Từ đó  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2, 1]$ .

\* Tương tự,  $f(x)$  khả vi trên các khoảng  $(-2, 0)$  và  $(0, 1)$ :



**Hình 2.12.** Đồ thị hàm số trong Ví dụ 2.14

$$f'(x) = 0 \text{ khi } x < 0; \quad f'(x) = e^x - 1 \text{ khi } x > 0.$$

Tại  $x = 0$  thì

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0-0}{x-0} = 0; \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1 - 0}{x - 0} = 0.$$

Vậy  $f(x)$  khả vi tại  $x = 0$  và  $f'(0) = 0$ .

Như vậy,  $f(x)$  khả vi trong khoảng  $(-2, 1)$ .

Tóm lại, đối với hàm  $f(x)$ , mọi điều kiện của Định lý Lagrange đều thỏa mãn. Ta có

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{e - 2}{3} = e^c - 1 \Leftrightarrow c = \ln\left(\frac{e+1}{3}\right) \approx 0.2146.$$

Đồ thị như Hình 2.12.

#

**Yêu cầu SV chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Sự liên tục (1 tiết)**

**Đạo hàm, vi phân cấp I (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 104-106: Các định lý cơ bản về đạo hàm

Tự đọc TL [1]: Ví dụ: VD 2.8; VD 2.16(a, b); 2.21; 2.26(a, b, d); 2.30(d); 2.33; VD 39; VD 2.40 (hình 2.32 a:  $r = \arcsin \theta$ ).

**Bài giảng 6: Các định lý cơ bản về đạo hàm (tiếp) + Công thức Taylor + Các ứng dụng của đạo hàm**

**Chương 2: Đạo hàm và vi phân**

Mục: § 2.3 Các định lý cơ bản về đạo hàm (tiếp - 1t)

§2.4. Công thức Taylor (1t)

§2.5. Các ứng dụng của đạo hàm (1t)

Bài tập: Đạo hàm, vi phân cấp cao (1tiết).

Các Đ. lý về GT trung bình (1tiết).

Tiết thứ: 26 - 30, Tuần thứ: 6

**- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm được cách áp dụng quy tắc L'Hospital để tìm các giới hạn vô định

Khai triển Taylor của đến cấp 2,3 của vài hàm đơn giản

Nắm được khai triển Maclaurin của vài hàm sơ cấp, tính gần đúng

Nắm được vài ứng dụng của đạo hàm như quy trình khảo sát hàm số; đặc biệt là khảo sát đường cong theo tham số.

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**§2.3. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM (tiếp - 1tiết)**

**Định lý 2.7 (Định lý Cauchy).** Cho hai hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trên khoảng  $(a, b)$ , ngoài ra  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Khi đó có điểm  $c \in (a, b)$  sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (2.21)$$

**Lưu ý**

(i) Các bạn hãy phát hiện sai lầm trong chứng minh "đơn giản" sau đây của Định lý Cauchy. Cả hai hàm  $f(x)$  và  $g(x)$  đều thỏa mãn Định lý Lagrange trên đoạn  $[a, b]$  nên tồn tại điểm  $c \in [a, b]$  để

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a); \quad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a). \text{ Vậy}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(c)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} !$$

(ii) Chọn  $g(x) = x$ , từ (2.21) ta nhận được Định lý Lagrange.

Hơn nữa, từ Định lý Lagrange, nếu  $f(b) = f(a)$  ta nhận được Định lý Rolle. Ta nói Định lý Cauchy là tổng quát hơn Định lý Lagrange, Định lý Lagrange là tổng quát hơn Định lý Rolle.

### 2.3.3. Quy tắc L'Hospital

Dùng Định lý Cauchy ta có thể chứng minh định lý sau, đó là một quy tắc rất hiệu quả để khử các dạng vô định.

**Định lý 2.8** (Quy tắc L'Hospital khử dạng vô định  $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$ )

Giả sử  $f(x)$ ,  $g(x)$  khả vi trong một lân cận nào đó của điểm  $a$  ( $-\infty \leq a \leq +\infty$ ) có thể trừ ra tại điểm  $a$ , và  $g'(x) \neq 0$  với mọi  $x$  trong lân cận đó có thể trừ ra tại  $a$ . Hơn nữa giả sử

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$(\text{hoặc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty).$$

Khi đó, nếu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$  (hữu hạn hoặc vô hạn) thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

*Chứng minh.* (xem [1])

*Lưu ý:* (i) Quy tắc đúng cho cả trường hợp giới hạn trái, phải.

Chẳng hạn, ta có thể thay  $x \rightarrow a$  bởi  $x \rightarrow a^+$  với một chút thay đổi: Giả sử  $f(x)$ ,  $g(x)$  khả vi trong một lân cận phải của điểm  $a$  có thể trừ ra tại  $a$ , giả sử  $g'(x) \neq 0$  với mọi  $x$  thuộc một lân cận phải của  $a$  có thể trừ ra tại  $a$  ...

Như vậy, khi  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  mà giới hạn có dạng vô định  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  ta có thể dùng quy tắc L'Hospital. Các dạng vô định khác như  $1^\infty; \infty^0; \infty - \infty$  có thể dễ dàng chuyển về hai dạng vô định này.

(ii) Khi giải bài tập, chúng ta có thể phải dùng Quy tắc L'Hospital nhiều lần, và (hoặc) kết hợp với các phương pháp tìm giới hạn khác, chẳng hạn, phương pháp thay tương đương, và sau này là khai triển hữu hạn.

(iii) Quy tắc L'Hospital cho ta điều kiện đủ để có giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \text{ mà không phải là điều kiện cần (xem Ví dụ 2.17).}$$

**Ví dụ 2.15.** Tính các giới hạn

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0); \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x}{x^3};$$

**Ví dụ 2.16.** Tìm các giới hạn

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{6/x^2}; \quad b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)}{(\arctan(1+x^2) - \arctan(1-x^2))}.$$

**Ví dụ 2.17.** Chúng ta thấy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 2}{\frac{\cos x}{x} + 2} = 1.$

Tuy nhiên, giới hạn của thương hai đạo hàm  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x + 2x)'}{(\cos x + 2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x + 2}{-\sin x + 2}$  lại không tồn tại.

**Ví dụ 2.18.** Chứng minh rằng

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, \quad (a > 0); \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty.$$

*Giải.* Theo những nhận xét ở cuối Định lý 1.23, ta có thể tìm giới hạn dãy số thông qua giới hạn hàm số tương ứng.

a) Theo quy tắc L' Hospital ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^{1/x} - 1}{1/x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t \ln a}{1} = \ln a.$$

Vậy với  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a.$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[x]{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(1/x) \ln x} - 1}{(1/x)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t \ln t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-t \ln t} (\ln t + 1)}{1} = +\infty.$$

Vậy dãy đã cho có giới hạn  $+\infty.$

#

## §2.4. CÔNG THỨC TAYLOR (1 tiết)

### 2.4.1. Thiết lập công thức

\* *Tự đọc*

\* **Định lý 2.9** (Công thức Taylor (Khai triển Taylor hữu hạn)).

Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trong  $(a; b)$ . Khi đó  $\forall x_0 \in (a, b)$  ta có:

(i) Nếu  $f(x)$  khả vi liên tục tới cấp  $n - 1$  trên  $(a, b)$ , khả vi cấp  $n$  tại  $x_0$  thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n. \quad (2.22)$$

(Công thức Taylor với phần dư Peano).

(ii) Nếu  $f(x)$  khả vi liên tục tới cấp  $n$  trong  $(a, b)$ , khả vi cấp  $(n + 1)$  trong  $(a, b)$  thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (2.23)$$

( $x^*$  nằm giữa  $x$  và  $x_0$ )

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1). \quad (2.24)$$

(Công thức Taylor với phần dư Lagrange).

\* Đặt  $x = x_0 + h$ , ta nhận được dạng sau khá tiện lợi của (2.24):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}}_{o(h^n)}. \quad (2.25)$$

Để tiện ứng dụng, chúng ta sẽ gọi  $n$  là cấp khai triển,  $x_0$  là điểm khai triển,  $x$  là điểm áp dụng.

**Nhận xét.** Để có thể khai triển đến cấp  $n$ , công thức với phần dư Peano cần điều kiện nhẹ hơn so với phần dư Lagrange.

\* Trong trường hợp  $x_0 = 0$ , công thức có tên là công thức (khai triển) Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{o(x^n)} \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.26)$$

### **Đánh giá sai số**

Nếu hàm  $f(x)$  khả vi đến cấp  $n+1$  trên  $[a, b]$  thì

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (2.27)$$

với  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|.$

### **2.4.2. Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp**

(i)

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^m.$$

(ii)  $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

(iii)  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$

(iv)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).$

(v)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$

(vi)  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

(vii)  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}).$

### **Hệ quả (xem [1])**

**Ví dụ 2.19.** Tìm khai triển Maclaurin của các hàm

(i)  $y = \sqrt{1+4x}$  đến cấp 3, (ii)  $y = \sin 4x + \ln(1+2x)$  đến cấp 2.

*Giải.* (i) Áp dụng công thức  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$  ta được



$$\begin{aligned}\sqrt{1+4x} &= 1 + \frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{8}(4x)^2 + \frac{1}{16}(4x)^3 + o((4x)^3) \\ &= 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad \sin 4x + \ln(1+2x) &= (4x) + o((4x)^2) + (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) \\ &= 6x - 2x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

**Ví dụ 2.20.** Khai triển Maclaurin của các hàm  $y = \sin 2x + \sqrt{1+3x^2}$  đến cấp 4; áp dụng tính gần đúng  $y(0.2)$ .

$$\begin{aligned}\text{Giải.} \quad \sin 2x + \sqrt{1+3x^2} &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o((2x)^4) \\ &+ 1 + \frac{1}{2}(3x^2) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)(3x^2)^2 + o((3x^2)^2) \\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{8}x^4 + o(x^4); \quad y(0.2) = 1.4475. \quad \# \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.21.** Cho hàm ẩn  $y = y(x)$  xác định từ phương trình

$$\arctan(xy) + 1 = e^{x+y}.$$

Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 2 của hàm này với phần dư dạng Peano. Từ đó, tính gần đúng  $y(0.1)$ .

**Giải.** Trước hết thấy  $x = 0$  thì  $y = 0$ . Coi  $y = y(x)$ , đạo hàm 2 vế dẫn đến

$$\frac{y + xy'}{1 + (xy)^2} = e^{x+y}(1 + y'). \quad (*)$$

Thay  $x = 0$  nhận được  $y'(0) = -1$ .

Đạo hàm hai vế (\*) lần nữa:

$$\frac{(2y' + xy'')(1 + (xy)^2) - (y + xy')(2(xy)(y + xy'))}{(1 + (xy)^2)^2} = e^{x+y}((1 + y')^2 + y'').$$

Thay  $x = 0$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = -1$  suy ra

$$\frac{-2 - 0}{1} = 1(0 + y''(0)) \quad \text{hay} \quad y''(0) = -2.$$

Vậy  $y(x) = -x - x^2 + o(x^2)$ .

$$y(0.1) \approx -0.1 - 0.01 = -0.11$$

*Nhận xét.* Chúng ta cần tính giá trị các đạo hàm hàm ẩn tại  $x = 0$  (tức là  $y'(0), y''(0)$ ), mà không phải là biểu thức cho  $y'(x), y''(x)$  (tại điểm tổng quát). Cách làm trên đã đơn giản đáng kể lời giải. #

### 2.4.3. Ứng dụng để tính gần đúng

#### a. Tìm biểu thức gần đúng của hàm số

Khai triển Taylor hay được sử dụng trong vật lý. Để thu được những điều thiết yếu từ một hiện tượng, các nhà vật lý thường đơn giản hóa hàm số bằng cách xét chỉ một, hai hoặc ba số hạng đầu trong khai triển Taylor của nó. Bất đẳng thức Taylor (2.27) được dùng để đánh giá sự phù hợp của xấp xỉ.

#### b. Tính giá trị gần đúng của biểu thức

Một ứng dụng quan trọng của công thức Taylor là tính gần đúng giá trị của biểu thức. Chẳng hạn, ta cần tính giá trị gần đúng của  $A = f(x)$ ,  $f(x)$  là hàm đủ trơn,  $x$  cho trước. Theo công thức Taylor thì

$$A = f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{n!} h^n \quad (2.28)$$

với  $h = x - x_0$ ,  $x^*$  giữa  $x_0$  và  $x$ .

Ta sẽ dùng xấp xỉ

$$A \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n. \quad (2.29)$$

Sai số mắc phải là

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} h^{n+1} \right|. \quad (2.30)$$

Trong nhiều trường hợp ta có thể dùng đánh giá

$$|R_n| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$$\text{với } M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad ([a, b] \text{ chứa } x \text{ và } x_0). \quad (2.31)$$

### 2.4.4. Ứng dụng để tìm giới hạn

#### a. Khai triển hữu hạn (KTHH)

#### c. Tìm giới hạn dùng KTHH

*Ví dụ 2.25.* Tìm các giới hạn

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - 1}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

*Giải.* Sử dụng định lý về các phép toán của KTHH ta có

$$(a) I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - (x - x^3/6 + o(x^3)))}{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/6 + o(x^3)}{x^2/2} = 0.$$

$$(b) (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x} (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = e^{-\frac{x}{2} + o(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = e^{\frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x}} - 1 = e^{\frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)} - 1 \rightarrow -\frac{e}{2} \quad (x \rightarrow 0). \quad \#$$

## § 2.5. CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM (1 tiết)

### 2.5.1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$

#### a. Tiệm cận

- $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_0$  (hoặc  $x \rightarrow (x_0)^\pm$ ))  
 $\Rightarrow$  Đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng.
- $f(x) \rightarrow y_0$  ( $x \rightarrow \infty$  (hoặc  $x \rightarrow \pm\infty$ ))  
 $\Rightarrow$  Đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang.
- $(f(x) - (ax + b)) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$  (hoặc  $x \rightarrow \pm\infty$ )) ( $a \neq 0$ )  
 $\Rightarrow$  Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên.

Cũng có thể tìm hệ số  $a, b$  riêng rẽ, chẳng hạn

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax).$$

Nếu cả  $a$  và  $b$  hữu hạn thì  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên.

#### b. Sự tăng và giảm của hàm số

Nếu  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$  tăng trên  $(a, b)$ .

Nếu  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , dấu "=" xảy ra chỉ tại một số hữu hạn điểm thì  $f(x)$  tăng thực sự trên  $(a, b)$ .

Tất nhiên, hàm sẽ giảm khi có dấu bất đẳng thức ngược lại. Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 2.27.** Khảo sát tính chất tăng và giảm của hàm số  $y = x - \sin x$ . Từ đó chứng minh rằng  $\sin x \leq x$ ,  $\forall x \geq 0$ .

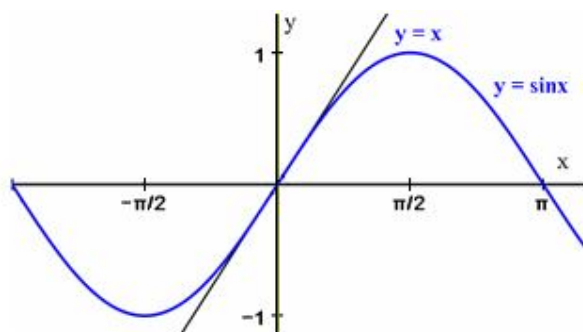
Giải.  $y' = 1 - \cos x$ ,  $0 \leq y'$ ,  $0 = y' \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Trong đoạn  $[a, b]$  hữu hạn bất kỳ, đạo hàm chỉ triệt tiêu tại hữu hạn điểm, vậy hàm số tăng thực sự trên  $[a, b]$ . Từ đó hàm số tăng thực sự trên  $\mathbb{R}$ .

Bây giờ lấy  $x \geq 0$ . Do  $y(x)$  tăng nên  $0 = f(0) \leq f(x) = x - \sin x$  hay

$\sin x \leq x$ ,  $\forall x \geq 0$ , dấu bằng xảy ra chỉ tại  $x = 0$ .

Đồ thị của hàm  $y = x$ ,  $y = \sin x$  cho trên Hình 2.13.



**Hình 2.13.** Đồ thị hàm  $y = x$  và  $y = \sin x$

### c. Cực trị của hàm số

**Quy tắc I** (để tìm cực trị). Giả sử  $f(x)$  là hàm liên tục.

- Giải phương trình  $f'(x) = 0$  và các khảo sát khác nếu cần thiết để tìm ra các điểm nghi ngờ cực trị  $x_1, \dots, x_n$ .
- Xét dấu  $f'(x)$ . Nếu  $f'(x)$  đổi dấu khi  $x$  qua  $x_i$  thì  $x_i$  là một điểm cực trị.

**Định lý 2.12.** (Dùng ĐH cấp cao để khảo sát cực trị)

**Quy tắc II** (để tìm cực trị). Giả sử  $f''(x)$  là hàm liên tục.

- Giải phương trình  $f'(x) = 0$  để tìm ra các điểm dừng  $x_i$ .
- Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì  $x_i$  là một điểm cực tiểu;  
Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì  $x_i$  là một điểm cực đại.

### d. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (cực trị tuyệt đối)

Ta nhận được quy tắc sau đây

**Quy tắc** (để tìm cực trị tuyệt đối). Giả sử  $f(x)$  là hàm liên tục.

- Tìm các điểm nghi ngờ cực trị  $x_1, \dots, x_n$  trong  $(a; b)$ .
- Tính  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f(x_1)$ , ...,  $f(x_n)$ .
- Kết luận về GTLN, GTNN.

**Ví dụ 2.28.** Xét sự tăng, giảm, tìm cực trị địa phương, cực trị tuyệt đối

và tiệm cận của hàm  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ .

**Giải.** \* Tập xác định của hàm số là  $\{x > -1\}$  (hay  $(-1, \infty)$ ).

Vì  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$  nên đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng.

$$* f'(x) = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

\* Xét dấu đạo hàm ta thấy hàm giảm trên  $(-1, 0)$ , tăng trên  $(0, +\infty)$ .

Vậy  $x_{CT} = 0$ ,  $f_{CT} = f(0) = 0$ . Đây cũng là GTNN.

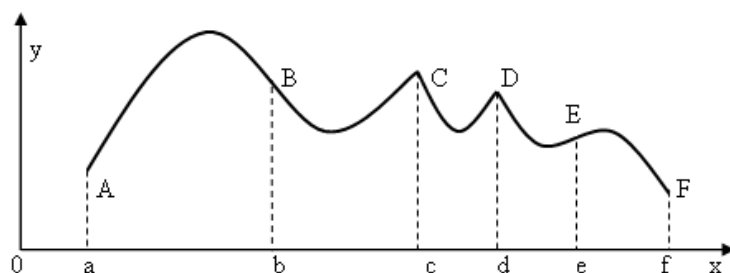
Vì  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = +\infty$  nên hàm không đạt GTLN.

### e. Lồi, lõm, điểm uốn

(tự đọc [1])

**Định lý 2.13** (Bất đẳng thức Jensen).

**Định nghĩa.** Nếu có một số  $\delta > 0$  đủ nhỏ để hàm số là lồi (lõm) trong khoảng  $(x_0 - \delta, x_0)$  và hàm số là lõm (lồi) trong khoảng  $(x_0, x_0 + \delta)$  thì  $x = x_0$  được gọi là điểm uốn của hàm số, đồng thời điểm  $M(x_0, f(x_0))$  được gọi là điểm uốn của đồ thị của hàm số.



**Hình 2.15.** Các cung lồi, lõm của đường cong

**f. Các khảo sát khác.** Để khảo sát đầy đủ đáng điệu biến thiên của hàm số một số khảo sát khác cũng hết sức có ích. Đó là xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn ... Tuy nhiên, nếu những khảo sát này phức tạp thì có thể bỏ qua.

### g. Sơ đồ khảo sát hàm số

(1) Tìm tập xác định, các điểm gián đoạn của hàm số. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn, tìm các đường tiệm cận (nếu có). Tìm các giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ, tìm toạ độ của các điểm đặc biệt.

(2) Chiều biến thiên: Cần tính đạo hàm cấp một, tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị (nếu có). Lập bảng biến thiên của hàm số.

(3) Tính đạo hàm bậc hai, khảo sát tính lồi, lõm, điểm uốn (nếu có).

(4) Vẽ đồ thị hàm số.

Tất nhiên, không cần đúng theo thứ tự này. Đồng thời chúng ta cũng có thể bỏ qua một số khâu, như tính đạo hàm bậc hai, tính lồi lõm... khi điều này phức tạp, nhất là với các hàm vô tỷ. Đôi khi cũng bỏ qua việc tìm tiệm cận.

**Ví dụ 2.29.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = xe^x$ .

**Giải.** \* Tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

Giới hạn.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ .

Vậy, tiệm cận ngang là trục Ox.

Chiều biến thiên.  $f'(x) = e^x(x+1)$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

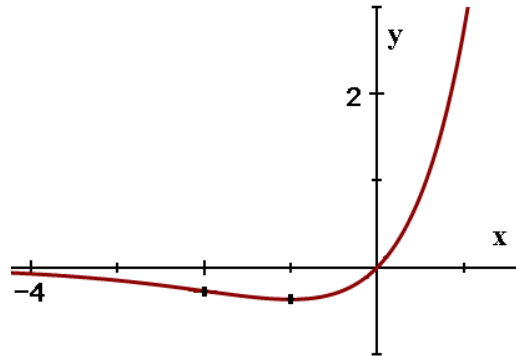
$f''(x) = e^x(x+2)$ ;  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

Ta nhận được bảng

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$y'$	-	-	0	+	+
$y''$	-	0	+	+	+
y	$0 \rightarrow -2/e^2 \rightarrow -1/e \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$				

Hàm số lõm trong khoảng  $(-\infty, -2)$ ; lồi trong khoảng  $(-2, +\infty)$ ; điểm uốn tại  $x = -2$ .

Đồ thị hàm số cho trên Hình 2.16.



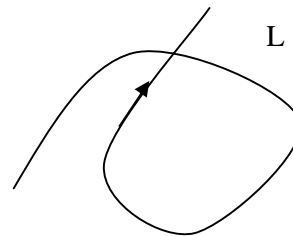
**Hình 2.16.** Đồ thị hàm số  $y = xe^x$

### 2.5.2. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số

Tọa độ  $x, y$  của chất điểm phụ thuộc vào thời gian  $t$ , vậy vị trí của chất điểm có thể biểu diễn qua hệ hai phương trình

$$x = x(t), y = y(t).$$

Tổng quát hiện tượng này dẫn đến



**Hình 2.19.** Đường cong thắt nút

**a. Khái niệm.** Cho hai hàm số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (2.35)$$

Mỗi điểm  $t \in I = (\alpha, \beta)$  ứng với một điểm  $M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Khi  $t$  biến thiên từ  $\alpha$  đến  $\beta$ , điểm  $M$  vạch nên một đường cong  $(C)$  trong  $\mathbb{R}^2$ . Hệ (2.35) được gọi là phương trình tham số của đường cong  $(C)$ ,  $t$  là tham số.

Bản thân tập xác định  $(\alpha, \beta)$  và hệ (2.35) được gọi là một phép tham số hóa của  $(C)$ . Cùng một đường cong  $(C)$  nhưng có thể có nhiều phép tham số hóa.

Thông thường tham số là thời gian, cũng có thể có ý nghĩa khác, và dùng ký hiệu khác như  $\varphi, \theta, \dots$ .

Ở trên ta đã xét khoảng  $(\alpha, \beta)$ , điều đó không ngăn cản ta xét các trường hợp khác, đoạn  $[\alpha, \beta]$  hay nửa khoảng.

Ta nói đường cong  $C$  là:

+ trơn nếu  $x(t), y(t)$  là những hàm khả vi liên tục, đạo hàm không đồng thời bằng 0;

+ trơn từng khúc nếu  $x(t), y(t)$  là những hàm khả vi liên tục và đạo hàm không đồng thời bằng 0, trừ một số hữu hạn điểm;

+ kín nếu điểm đầu và điểm cuối trùng nhau:  $(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta))$ ;

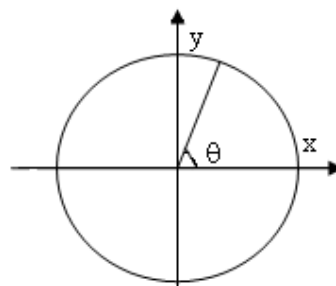
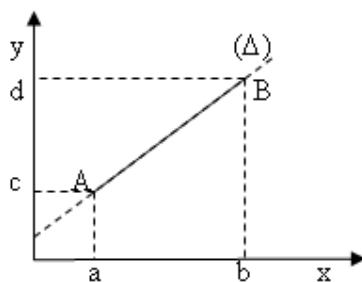
+ không tự cắt nếu điểm chung duy nhất chỉ có thể là điểm đầu và điểm cuối.

**Ví dụ 2.31.** Với  $A(a, b), B(c, d)$ , dễ thấy phương trình tham số của:

(i) đường thẳng  $AB$ : 
$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + c, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (m = b - a, n = d - c);$$

(ii) đoạn thẳng  $AB$ : 
$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + c, \end{cases} \quad (t \in [0, 1]);$$

(iii) đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ : 
$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

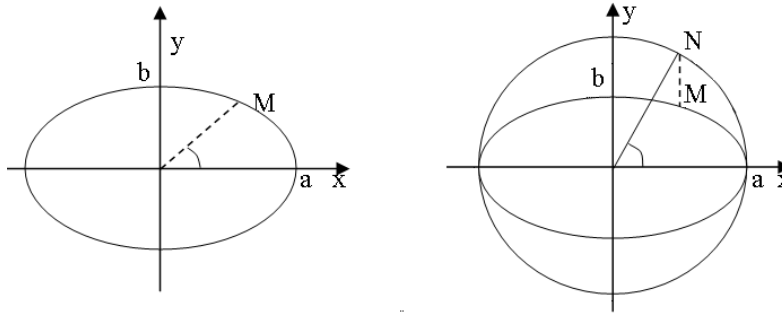


**Hình 2.20.** Đường (đoạn) thẳng  $AB$  (trái) và đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$

(iv) elip bán trục  $a, b$ :  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Tuy nhiên, điểm  $M \in (E)$  không phải ứng với góc  $\theta$  như Hình 2.21 (trái), mà ứng với góc  $\theta$  ở Hình 2.21 (phải)!

#



**Hình 2.21.** Elíp bán trục  $a, b$

**b. Hệ số góc của tiếp tuyến**

Giả sử đối với đường cong (C) ở (2.35) cả hai hàm  $x(t)$ ,  $y(t)$  đều khả vi liên tục và  $x'(t_0) \neq 0$ . Thế thì trong lân cận này  $x'(t) \neq 0$  và tồn tại hàm ngược  $t = t(x)$  của hàm số  $x = x(t)$ . Thay vào hàm thứ hai ta được  $y = y(t(x))$ . Theo Định lý về đạo hàm hàm hợp, hàm ngược ta có

$$y'_x = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy}{dt}(t(x)) \cdot \frac{dt}{dx}(t(x)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

hay  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$  với  $x'(t) \neq 0$ . (2.36)

Từ đây thấy ngay rằng tiếp tuyến nằm ngang nếu  $y'(t) = 0$  (và  $x'(t) \neq 0$ ) và tiếp tuyến dốc đứng nếu  $x'(t) = 0$  (và  $y(t) \neq 0$ ).

Thay  $y$  bởi  $dy/dx$ , ta tính được đạo hàm bậc hai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt}(y'(t))}{x'(t)}. \quad (2.37)$$

(Cách nhớ: Xem  $y' = \frac{dy}{dx}$  là hàm của  $t$ )

**Ví dụ 2.32.** Elíp bán trục  $a, b$  cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Khi đó  $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$ .

Đây là hệ số góc của tiếp tuyến của elíp tại điểm  $M(a \cos t, b \sin t)$ . #



### c. Khảo sát

Khi khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số ta khảo sát như thường lệ với hai hàm  $x(t)$ ,  $y(t)$  với một số lưu ý:

\* Ta cần lập bảng biến thiên đồng thời.

\* Trong bảng biến thiên nên có thêm dòng đạo hàm  $y'_x$  tính theo công thức  $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ . Đây là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm  $M(x(t), y(t))$ .

**Ví dụ.** Khảo sát và vẽ đường cong  $x = e^t - t$ ,  $y = 4e^{t/2}$ ,  $-8 \leq t \leq 3$

Giải. + Tập xác định:  $-8 \leq t \leq 3$  (đã cho).

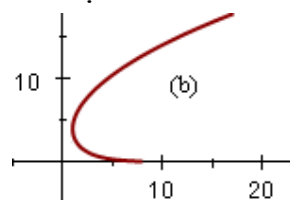
+ Chiều biến thiên.  $x' = e^t - 1$ ,  $x' = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1, y = 4$

$$y' = 2e^{t/2} > 0.$$

+ Bảng biến thiên

t	-8	0	3
$x'$	-	0	-
x	$e^{-8} + 8$	1	$e^3 - 3$
$y'$	-	+	
y	$4e^{-4}$	$4e^{3/2}$	$4e^{3/2}$
$y'_x = \frac{dy}{dx}$	-	$\infty$	+

Đồ thị



**Ví dụ 2.34.** Khảo sát và vẽ đường asteroit cho dưới dạng tham số:

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (a > 0).$$

Chỉ ra sự chuyển động của điểm  $M(x(t), y(t))$  trên đường cong khi tham số  $t$  biến thiên từ  $\pi/2$  đến  $\pi$ , và từ  $2\pi$  đến  $3\pi/2$ .

Chỉ ra sự biến thiên của tham số  $t$  khi điểm  $M$  chuyển động trên đường cong từ  $D(0, -a) \rightarrow A(-a, 0)$ .

*Giải.* Vì  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq a$  nên đường cong không có tiệm cận.

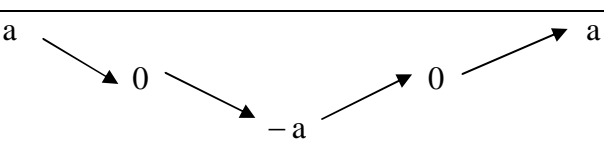
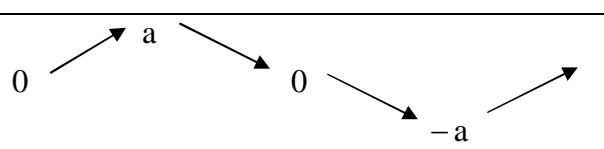
Cả hai hàm  $x(t)$ ,  $y(t)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  nên ta chỉ cần khảo sát với  $t \in [0, 2\pi]$ . Ta có

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t; \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t; \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t.$$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}.$$

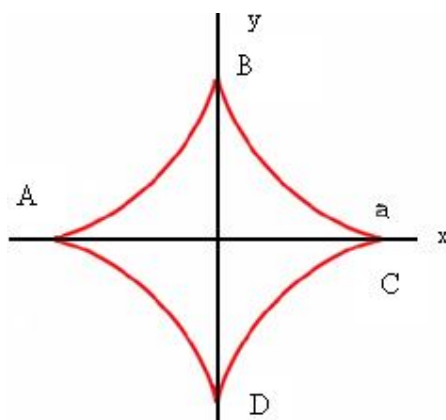
$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2} \Rightarrow y'_x = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow t = 0; \pi \\ \infty \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$					
$x'(t)$	0	-	0	-	0	+	0	+	0	
$x(t)$	a									a
$y'(t)$	0	+	0	-	0	-	0	+	0	
$y(t)$	0									0
$y'(x)$	0	-	$\infty$	+	0	-	$\infty$	+	0	

Đồ thị như Hình 2.22.

Rõ ràng là  $M : B \rightarrow A$  và  $M : C \rightarrow D$ ;  $t : 3\pi/2 \rightarrow \pi$ . #



**Hình 2.22.** Đường astroid

**Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: Đạo hàm, vi phân cấp cao (1 tiết).

Các Đ.lý về GT trung bình (1 tiết).

Đọc trước TL[1], tr 127- 138: Các ứng dụng của đạo hàm

Tự đọc TL [1]: Ví dụ: VD 2.8; VD 2.16(a, b); 2.21; 2.26(a, b, d); 2.30(d); 2.33; VD 39; VD 2.40 (hình 2.32 a:  $r = \arcsin \theta$ ).

**Bài giảng 7: Các ứng dụng của ĐH (tiếp) - Tích phân bất định**

Chương 2, Chương 3: Tích phân

Mục: § 2.5 Các ứng dụng của đạo hàm (tiếp – 1t)

§3.1 Tích phân bất định (2t)

Bài tập: **Công thức Taylor (1 tiết)**

**Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)**

Tiết thứ: 31- 35,

Tuần thứ: 7

**- Mục đích, yêu cầu:**

- Nắm được quy trình khảo sát ĐC trong tọa độ cực, đặc biệt là cách vẽ.

- Nắm được bảng tích phân cơ bản, vận dụng một số phương pháp tính tích phân để tìm NH của một số hàm đơn giản.

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

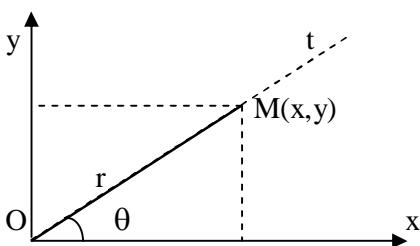
- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:****§ 2.5. CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM (tiếp - 1 tiết)****2.5.3. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tọa độ cực****a. Tọa độ cực**

Ta cho ứng mỗi điểm  $M(x, y)$  trong mặt phẳng Oxy với cặp số  $(r, \theta)$  như hình vẽ. Cặp số  $(r, \theta)$  được gọi là tọa độ cực của điểm M. Ta cũng nói điểm M được biểu diễn bởi tọa độ cực là  $(r, \theta)$ . Từ đó:

$$M(x, y) \leftrightarrow (r, \varphi); \quad (x, y) \mapsto (r, \theta): \begin{cases} 0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ \sin \theta \text{ cĩ ng đĩu vĩ i } y. \end{cases}$$

$$(r, \theta) \Rightarrow (x, y): \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (2.38)$$



**Hình 2.23.** *Tọa độ cực của một điểm*

Cũng có thể chọn khoảng biến thiên của  $\theta$  là  $-\pi \leq \theta < \pi$ .

Điểm O gọi là gốc cực, trục Ox là trục cực;

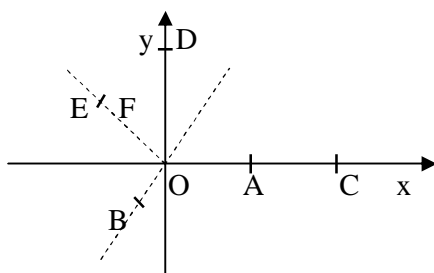
$r$  là bán kính cực,  $\theta$  là góc cực của điểm M. Khi không sợ làm lẫn, ta có thể viết  $M(x,y)$  với ngụ ý rằng điểm M có tọa độ Descartes  $(x,y)$ , hoặc  $M(r,\theta)$  với ngụ ý rằng điểm M có tọa độ cực  $(r,\theta)$ .

Trừ điểm  $O(0,0)$ , các điểm còn lại của mặt phẳng có tương ứng 1 – 1 giữa tọa độ Descartes và tọa độ cực.

Trong Pháo binh, Ra đa người ta hay dùng tọa độ cực để chỉ vị trí: Khi nói cự ly 3200, phương vị  $41^\circ$  thì có nghĩa rằng mục tiêu có tọa độ cực  $(3200, 41^\circ)$ .

*Tọa độ cực suy rộng.* Người ta còn xét tọa độ cực với  $r, \theta$  bất kỳ trên  $(-\infty, \infty)$ . Từ mỗi cặp số  $(r, \theta)$  như vậy, dùng (2.38) ta tính được  $x, y$ . Trong mặt phẳng, điểm M với tọa độ Descartes  $(x,y)$  sẽ có tọa độ cực (suy rộng)  $(r, \theta)$ .

Để xác định điểm M trên mặt phẳng với tọa độ cực suy rộng  $(r, \theta)$ , ta kẻ tia Ot hợp với tia Ox một góc lượng giác  $\theta$ , trên đó ta lấy điểm M với độ dài đại số  $\overline{OM} = r$ . Chẳng hạn, các điểm cho trong tọa độ cực tương ứng  $A(1,0); B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right); C(-2,-3\pi); D\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{2}\right); E\left(1, \frac{11\pi}{4}\right), F\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$  là các điểm trên mặt phẳng như Hình 2.24.



**Hình 2.24.** Một số điểm trên mặt phẳng

Tương ứng như vậy không đơn ánh: Điểm M với tọa độ Descartes  $(x,y)$  sẽ không có tọa độ cực suy rộng duy nhất.

Một số tài liệu ký hiệu góc cực là  $\varphi$ . Tuy nhiên chúng ta dùng ký hiệu  $\theta$  để phù hợp với các phần mềm hiện đại, cũng như nhiều tài liệu khác.

**b. Đường cong trong tọa độ cực**

Xét hàm số  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in (\alpha, \beta)$ . Khi góc cực  $\theta$  biến thiên từ  $\alpha$  đến  $\beta$ , điểm M với tọa độ cực  $(r(\theta), \theta)$  vạch nên một đường cong (C) trong mặt phẳng. Ta nói đường cong (C) trong tọa độ cực có phương trình  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in (\alpha, \beta)$ .

$$\text{Rõ ràng là } \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \end{cases} \theta \in (\alpha, \beta).$$

Vậy dạng tọa độ cực  $r = r(\theta)$  là dạng tham số đặc biệt của đường cong.

Tổng quát, với hàm hai biến  $f$  cho trước, tập các điểm có tọa độ cực  $(r, \theta)$  thỏa mãn phương trình  $f(r, \theta) = 0$  được xem là một đường cong trong tọa độ cực và  $f(r, \theta) = 0$  là phương trình của đường cong này.

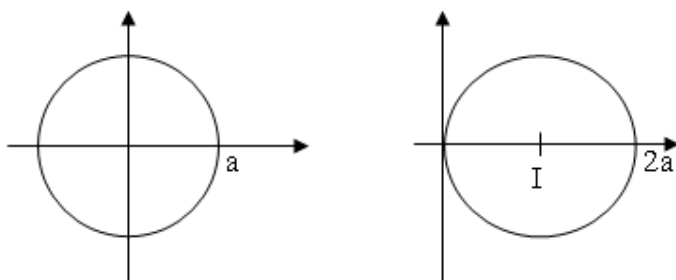
**Ví dụ 2.35.** Viết phương trình dạng tọa độ cực của các đường tròn bán kính  $a > 0$  với tâm (i)  $O(0, 0)$ ; (ii)  $I(a, 0)$ .

(i) Rõ ràng phương trình là  $r = a$ .

(ii) (C):  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ .

Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , thay vào phương trình đường tròn ta được

$$(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2 \text{ hay } r = 2a \cos \theta \ (a > 0).$$



**Hình 2.25.** Các đường tròn ở Ví dụ 2.35

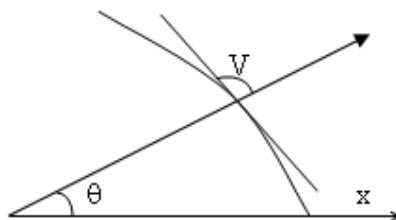
**Nhận xét.** Đường tròn bên phải trục tung, tiếp xúc với trục tung tại gốc tọa độ, đường kính  $2a$  có phương trình  $r = 2a \cos \theta$ .

Tương tự, có thể thấy đường tròn nằm phía trên trục hoành, đường kính  $2a$ , tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ có PT  $r = 2a \sin \theta$ . #

### c. Phương pháp khảo sát

Chúng ta tiến hành khảo sát như với hàm số thông thường.

**Lưu ý.** (i) Gọi  $V$  là góc lượng giác như hình vẽ thì  $\tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ .



**Hình 2.26.** Góc hợp bởi tiếp tuyến dương với véc tơ bán kính

(ii) Để khảo sát đường cong (L) cho trong tọa độ Descartes, đôi khi ta đưa nó về dạng tọa độ cực lại dễ dàng hơn nhiều.

Đặt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta \Rightarrow \dots \Rightarrow r = r(\theta)$  (L)

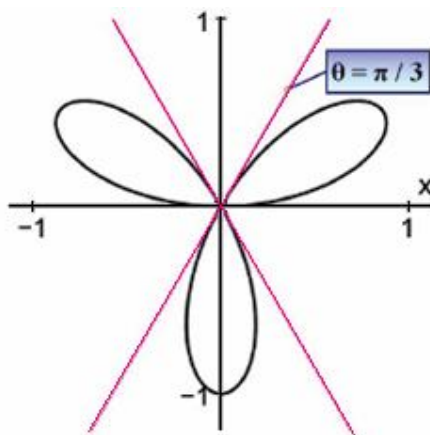
**Ví dụ 2.36.** Khảo sát và vẽ đường hoa hồng 3 cánh có phương trình  $r = a \sin 3\theta$  ( $a > 0$ ).

**Giải.** Hàm  $r(\theta)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi/3$  nên ta chỉ cần khảo sát trong đoạn  $[0, 2\pi/3]$ . Ta có  $r' = 3a \cos 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ ;

$$\tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{\tan 3\theta}{3} = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \\ \infty, & \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Nhận được bảng biến thiên

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$				
$3\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$				
$r'$	3a	+	0	-	-3a	-	0	+	3a
$r$	<div><div>0</div><div><div></div><div>a</div><div></div></div><div>0</div><div><div></div><div>-a</div><div></div></div><div>0</div></div>								
$\tan V$	0	$\infty$	0	$\infty$	0				



**Hình 2.27.** Đường hoa hồng 3 cánh

Đồ thị như hình 2.27, nằm ở góc phần tư thứ nhất.

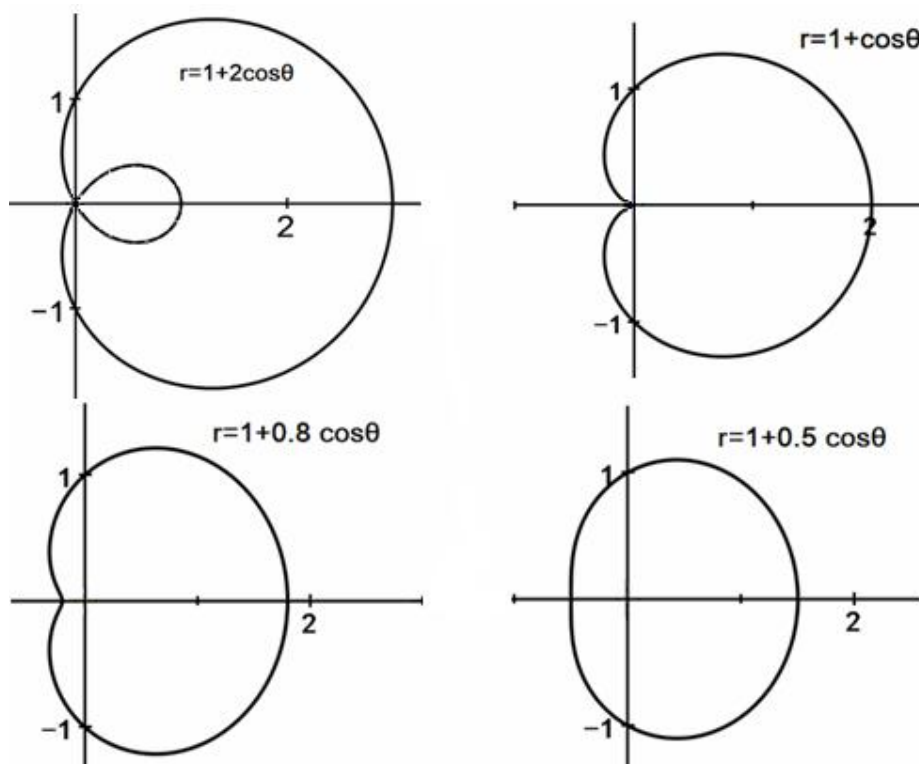
Sau khi được đồ thị cho một chu kỳ, ta chỉ việc quay đường vừa vẽ một góc  $2\pi/3$ ,  $4\pi/3$  ta sẽ nhận được đường cong đầy đủ (Hình 2.27). #

**Ví dụ 2.37.** Khảo sát và vẽ đường cardioid (đường hình tim) dạng tọa độ cực

(i)  $r = 1 + a \cos \theta$  ( $a > 1$ );

(ii)  $r = 1 + \cos \theta$ ;

(iii)  $r = 1 + a \cos \theta$  ( $0 < a < 1$ ).



**Hình 2.28.** Một số đường hình tim (cardioid)

Đường cong cho ở góc trên bên trái của Hình 2.28. Các đường (ii), (iii) cho ở các phần còn lại. #

**Ví dụ 2.38.** (Đọc thêm) Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong

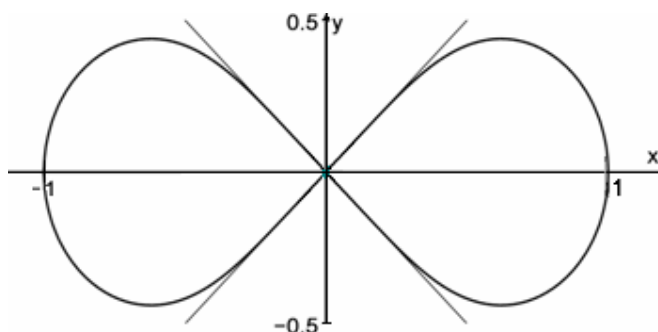
$$(x^2 + y^2)^3 = a^4(x^2 - y^2) \quad (a > 0).$$

**Nhận xét.** Rất khó nếu ta khảo sát trong hệ trục Oxy thông thường.

**Giải.** Đưa về tọa độ cực bằng cách đặt  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  ( $r > 0$ ):

$$(r^2)^3 = a^4 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Leftrightarrow r^4 = a^4 \cos 2\theta \Leftrightarrow r = a \sqrt[4]{\cos 2\theta}.$$

Vậy  $r = a \sqrt[4]{\cos 2\theta}$  là phương trình dạng tọa độ cực của đường cong đã cho.



**Hình 2.29.** Đường cong ở Ví dụ 2.38

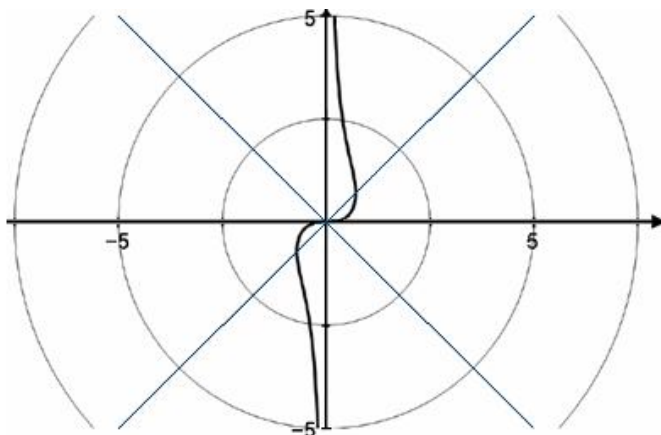


**Ví dụ 2.39.** Khảo sát, vẽ đồ thị đường cong

$$(x^2 + y^2)x = a^2 y \quad (a = \text{const} > 0)$$

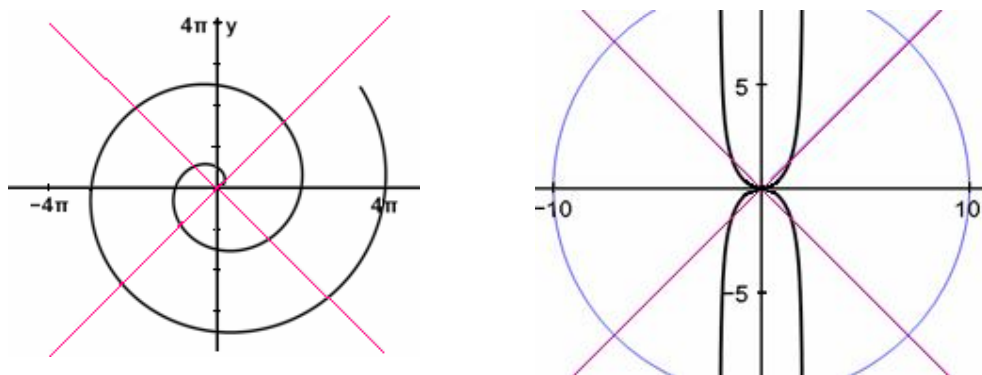
bằng cách đưa nó về dạng tọa độ cực.

HD. Đặt  $x = r \cos \theta$ ;  $y = r \sin \theta$  ta được  $r = a\sqrt{\tan \theta}$ .

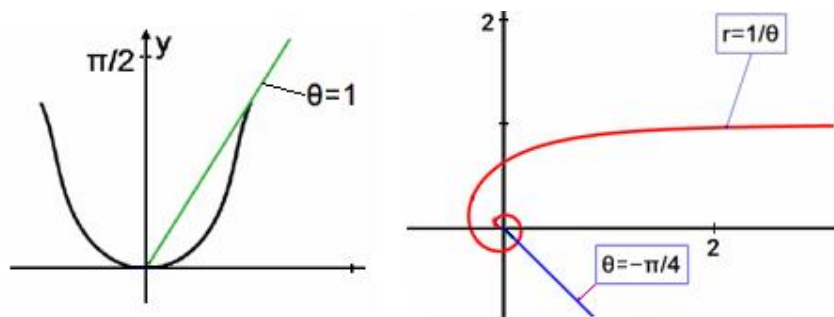


**Hình 2.30.** Đường  $r = a\sqrt{\tan \theta}$  (với  $a = 1$ )

**Ví dụ 2.40** ( Một số đường cong trong dưới dạng tọa độ cực)



**Hình 2.31.** Đường xoắn ốc Archimede  $r = \theta$  ( $\theta \geq 0$ ) (trái) và  $r = 2 \tan \theta$  (phải)



**Hình 2.32.** Đường  $r = \arcsin \theta$  (trái), và đường  $r = 1 / \theta$ ,  $\theta = -\pi / 4$  (phải)

**Một số Ví dụ thực tiễn (xem [1])**

## TÓM TẮT CHƯƠNG 2

- **Định nghĩa đạo hàm.**  $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .
- **Đạo hàm một số hàm sơ cấp.** Bảng 2.1.
- **Đạo hàm hàm hợp.**  $f = f(u(x)) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .
- **Đạo hàm hàm ngược.**  $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ .
- **Vi phân.**  $df(x) = f'(x)dx$ .
- **Sự bất biến dạng của vi phân cấp I.** Vi phân cấp một của hàm  $f(x)$  luôn có dạng  $dy = f'(x)dx$  dù rằng  $x$  là biến độc lập hay  $x$  là biến phụ thuộc.
- **Phép toán với vi phân.**  $d(uv) = v du + u dv$ ,  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ .
- **Ứng dụng.**  $f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ .
- **Tính đạo hàm (vi phân) hàm ẩn**  
 Coi  $y = y(x)$  là hàm của  $x \rightarrow$  Thay vào phương trình ràng buộc  $\rightarrow$  Lấy đạo hàm (vi phân) đồng nhất thức thu được  $\rightarrow$  Suy ra  $y'(x)$  ( $dy(x)$ ).
- **Vi phân cấp cao.**  $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$ .
- **Định lý Rolle.** Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$ ,  $f(a) = f(b)$  thì tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  để  $f'(c) = 0$ .
- **Định lý Lagrange.** Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  sao cho
 
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
- **Định lý Cauchy.** Hai hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trong khoảng  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$  thì có điểm  $c \in (a, b)$  sao cho:
 
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
- **Quy tắc L'Hospital** khử dạng vô định  $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

$f(x), g(x)$  là VCB (VCL) tại lân cận  $a \dots$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- **Công thức Maclaurin**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{o(x^n)} \quad (0 < \theta < 1).$$

- **Hàm lồi.** Hàm số  $f(x)$  lồi (xuống dưới) trên khoảng mở rộng  $I$  nếu:

$$f(tc + (1-t)d) \leq tf(c) + (1-t)f(d), \quad \forall c, d \in I, \forall t \in [0, 1].$$

- **Bất đẳng thức Jensen.** Hàm số  $f(x)$  lồi trên khoảng  $I$  thì  $\forall n$  nguyên dương,  $\forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0: \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Đặc biệt,  $f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{f(c) + f(d)}{2}, \quad c, d \in I.$

- Giả sử  $f(x)$  khả vi hai lần trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó  $f(x)$  lồi trên  $(a, b)$  khi và chỉ khi  $f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$ .

- **Khảo sát đường cong** không cần đúng theo thứ tự 4 bước. Cũng có thể bỏ qua khâu tìm tiệm cận, tính đạo hàm bậc hai, tính lồi lõm ... khi điều này phức tạp.

- **Khảo sát đường cong dưới dạng tham số**

Khảo sát như thường lệ với hai hàm  $x(t), y(t)$ , nên lập bảng biến thiên đồng thời, nên có thêm dòng đạo hàm  $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

- **Toạ độ cực.** Mối liên hệ  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

- **Đưa PT đường cong về dạng toạ độ cực**

Thay  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  vào PT đường cong  $\rightarrow$  Giải ra  $r = r(\theta)$ .

- **Đưa PT đường cong dạng toạ độ cực về dạng tham số**

$$L: r = r(\theta), \alpha < \theta < \beta \Rightarrow \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \theta \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

- **Khảo sát đường cong dạng toạ độ cực**

Khảo sát như thường lệ, nên có thêm dòng  $\tan V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ .

## Chương 3 TÍCH PHÂN

### § 3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (2 tiết)

#### 3.1.1. Định nghĩa, tính chất

**Định nghĩa.** Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . Ta nói hàm số  $F(x)$ ,  $x \in (a, b)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên khoảng  $(a, b)$  nếu  $F(x)$  khả vi trong khoảng này và

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b). \quad (3.1)$$

**Định lý 3.1.** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trong khoảng  $(a, b)$  thì:

(i) Với  $C$  là hằng số tùy ý,  $F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  trong khoảng  $(a, b)$ .

(ii) Mọi nguyên hàm của  $f(x)$  trong khoảng  $(a, b)$  đều có dạng  $F(x) + C$ , với  $C$  là hằng số nào đó.

**Định nghĩa.** Họ các hàm số  $F(x) + C$ , trong đó  $C$  là hằng số tùy ý,  $F(x)$  là một nguyên hàm bất kỳ của  $f(x)$  trong khoảng  $(a, b)$  được gọi là họ nguyên hàm hay tích phân bất định của  $f(x)$  trong khoảng  $(a, b)$  và được ký hiệu là  $\int f(x)dx$ .

Dễ dàng suy ra nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a, b]$

**Tính chất.**

$$(i) \quad \int F'(x)dx = F(x) + C;$$

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Tích phân bất định và đạo hàm là hai phép toán ngược của nhau.

Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  là những hàm có nguyên hàm, khi đó:

$$(ii) \quad \int a f(x)dx = a \int f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Gộp lại:

$$(iii)' \quad \int [a f(x) + b g(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

**Định lý 3.2.** Hàm số liên tục trên khoảng suy rộng thì có nguyên hàm trên khoảng này.

**Bảng các tích phân cơ bản** xem Bảng 3.1 trong [1].

**Bảng 3.2. Một số tích phân quan trọng (xem [1])**

#### 3.1.2. Phương pháp tính tích phân bất định

**a. Biến đổi hàm dưới dấu tích phân, đưa về tích phân cơ bản**

**Ví dụ 3.1.** (i)  $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + 3.$

(ii)  $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{((x-1)+1)^2}{(x-1)^{100}} dx.$

$$= \frac{-1}{97.(x-1)^{97}} + \frac{-2}{98.(x-1)^{98}} + \frac{-1}{99.(x-1)^{99}} + C.$$

(iii)  $\int \sin 3x \sin 5x dx$

$$= \int \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 8x] dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

Thực ra ta có thể tách thành tổng để tính các tích phân sau

$$\int \sin ax \cos bx dx; \int \sin ax \sin bx dx; \int \cos ax \cos bx dx.$$

**b. Đặt biến**

**Định lý 3.3.** Cho  $\varphi: I \rightarrow K$  là hàm khả vi liên tục,  $g: L \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm liên tục, trong đó  $I, K, L$  là những khoảng suy rộng,  $K \subset L$ .

Giả sử ta tính được  $\int g(u) du = G(u) + C$ . Khi đó

$$\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Một cách hình thức,

$$\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int g(\varphi(x)) d\varphi(x) = \left( \int g(u) du \right) \Big|_{u=\varphi(x)}.$$

Để sử dụng hiệu quả công thức này, khi tính tích phân  $\int f(x) dx$  ta viết nó dưới dạng  $\int f(x) dx = \int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int g(\varphi(x)) d\varphi(x)$ .

Nói cách khác, ta phải đưa "một thừa số của  $f(x)$ " vào trong dấu vi phân  $d(\cdot)$  sao cho có thể tính dễ dàng tích phân nhận được.

**Ví dụ 3.2**

$$(i) \int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

$$(ii) \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

$$(iii) \int \frac{\cos x}{a^2 + \sin^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{a^2 + \sin^2 x} = \frac{1}{a} \arctan \frac{\sin x}{a} + C.$$

$$(iv) \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x^2}} = \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt[3]{1-3x^2}} = \frac{1}{-6} \int \frac{d(1-3x^2)}{\sqrt[3]{1-3x^2}} = -\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1-3x^2)^2} + C.$$

$$(v) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}} \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}| + C.$$

$$(vi) \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx = \int \frac{d(2^x)}{\ln 2 \sqrt{1-(2^x)^2}} = \frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + C.$$

#

### Ví dụ 3.3

$$(i) \int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+5)} = \dots = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-2}{x+5} \right| + C.$$

$$(ii) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + x + 5/4} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + 1} \\ = \frac{1}{4} \arctan(x+1/2) + C = \frac{1}{4} \arctan \frac{2x+1}{2} + C.$$

$$(iii) I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{9} - \frac{2}{3}x - x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x+1/3)}{\sqrt{\frac{1}{3} - \left(x+\frac{1}{3}\right)^2}} \\ = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x+1/3}{1/\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$(iv) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \ln \left( x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right) + C. \quad \#$$

### c. Đổi biến.

**Định lý 3.4.** Giả sử  $x = x(t)$  là hàm khả vi liên tục trên khoảng suy rộng  $I$ , tập giá trị  $K$ ;  $y = f(x)$  là hàm liên tục trên khoảng suy rộng  $L$  chứa  $K$ . Ngoài ra

(i)  $x'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

(ii) Tồn tại hàm ngược  $t = t(x)$  của hàm  $x(t)$ .

Khi đó xảy ra đẳng thức

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt \Big|_{t=t(x)}. \quad (3.2)$$

**Ví dụ 3.4** (i) Tính tích phân  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  bằng cách đổi biến  $x = \frac{1}{t}$ .

Trước hết xét  $x > 0$ . Ta có  $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ ,  $t = \frac{1}{x} > 0$ . Ta được

$$I = -\int \frac{t dt}{t^2 \sqrt{1/t^2 - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C.$$

Trở về biến cũ,  $I = -\arcsin(1/x) + C$ . Kết quả tương tự với  $x < 0$ .

#### **d. Tích phân từng phần**

$$I = \int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u dv = uv - \int v du$$

Muốn áp dụng thành công phương pháp này, điều quan trọng là phải đưa một thừa số của hàm  $f(x)$  vào dấu vi phân  $d(\cdot)$ . Động tác này thực chất là một phép lấy tích phân. Trong trường hợp dễ, ta có thể thực hiện ngay.

Trong trường hợp khó khăn hơn, ta phải tính  $v(x) = \int v'(x)dx$  nghiêm túc.

#### **Ví dụ 3.5**

(i)  $\int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$

(ii)  $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$   
 $= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

$$(iii) \int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cdot 2x dx$$

$$x_i = x_0 + i h, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad \#$$

Có 6 dạng tích phân ở Bảng 3.3 dễ dàng dùng phương pháp từng phần.

**Bảng 3.3. Các dạng tích phân dùng phương pháp từng phần thuận lợi**

$\int P_n(x) e^{ax} dx$	Đưa $e^{ax}$ vào $d(\cdot)$	TP từng phần n lần
$\int P_n(x) \sin ax dx$	Đưa $\sin ax$ vào $d(\cdot)$	TP từng phần n lần
$\int P_n(x) \cos ax dx$	Đưa $\cos ax$ vào $d(\cdot)$	TP từng phần n lần
$\int P_n(x) \log_a^m x dx$	Đưa $P_n(x)$ vào $d(\cdot)$	TP từng phần m lần
$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$	Đưa 1 trong 2 thừa số vào $d(\cdot)$	TP từng phần 2 lần
$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$	Đưa 1 trong 2 thừa số vào $d(\cdot)$	TP từng phần 2 lần

**Ví dụ 3.6.** (i)  $I = \int e^{4x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int e^{4x} d(\sin 3x)$

$$= \frac{1}{3} \left[ e^{4x} \sin 3x - \int \sin 3x d(e^{4x}) \right] = \frac{1}{3} \left[ e^{4x} \sin 3x - 4 \int \sin 3x e^{4x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{4x} \sin 3x + \frac{4}{3^2} \int e^{4x} d(\cos 3x)$$

$$= \frac{1}{3} e^{4x} \sin 3x + \frac{4}{9} \left[ e^{4x} \cos 3x - 4 \int \cos 3x e^{4x} dx \right]$$

$$\Rightarrow \left( 1 + \frac{16}{9} \right) I = \frac{1}{3} e^{4x} \sin 3x + \frac{4}{9} e^{4x} \cos 3x + C$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{4 \cos 3x + 3 \sin 3x}{25} e^{4x} + C.$$

$$(ii) I = \int \sqrt{x^2 + k} dx = x \sqrt{x^2 + k} - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$$



$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \\
&= x\sqrt{x^2+k} - I + \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C.
\end{aligned}$$

Ta nhận được công thức quan trọng

$$\int \sqrt{x^2+k} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C. \quad \#$$

### 3.1.3. Tích phân bất định của một số lớp hàm sơ cấp

#### a. Tích phân các phân thức hữu tỷ $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

##### a.1. Dùng các phương pháp thông thường đã biết

##### Ví dụ 3.7

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \int \frac{x \, dx}{x^8-1} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^4-1)(x^4+1)} = \frac{1}{4} \int \left[ \frac{1}{x^4-1} - \frac{1}{x^4+1} \right] d(x^2) \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-1} - \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1} \right] = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| - \frac{1}{4} \arctan x^2 + C.
\end{aligned}$$

##### a.2. Phương pháp hệ số bất định

**Bước 1.** Khai triển  $f(x)$  thành tổng các phân thức đơn giản

Nếu  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  có bậc  $n$  của tử  $>$  bậc  $m$  của mẫu, thì phân thức

được gọi là không thực sự. Thực hiện phép chia đa thức để được một phần nguyên (đa thức) và một phân thức thực sự có bậc của tử  $<$  bậc của mẫu.

Vậy ta có thể giả thiết rằng  $f(x)$  là phân thức thực sự, tức là  $n < m$ .

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}. \quad (3.4)$$

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A(\text{Mẫu})'}{x^2+px+q} + \frac{B}{x^2+px+q}. \quad (3.5)$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3};$$

$$\begin{aligned}
\frac{ax^2 + bx + c}{(x - x_1)^2(x - x_2)} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{C}{x - x_2}; \\
\frac{ax^2 + bx + c}{(x - x_1)(x^2 + px + q)} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}; \\
\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x - x_1)^2(x^2 + px + q)} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + px + q}; \\
\frac{P_4(x)}{(x - x_1)(x^2 + px + q)^2} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} + \frac{Dx + E}{(x^2 + px + q)^2}; \\
&\dots\dots\dots (p^2 - 4q < 0). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

**Đặc điểm:** - Mẫu là lũy thừa của nhị thức  $x - a$  : Tử là hằng.

- Mẫu là lũy thừa của tam thức không nghiệm  $x^2 + px + q$  : Tử là nhị thức.

Các hằng số  $A, B, C, \dots$  được tính theo phương pháp hệ số bất định.

**Bước 2.** Tích phân các phân thức đơn giản thu được

\* Tích phân các phân thức  $\frac{1}{(x - a)^n}$  dễ dàng :

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln|x - a| + C; \quad \int \frac{dx}{(x - a)^n} = \frac{(x - a)^{-n+1}}{-n + 1} + C.$$

\* Tích phân các phân thức  $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$  theo công thức truy hồi.

**Ví dụ 3.8.** (i).  $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0).$

Chia đa thức rồi lấy tích phân ta được

$$F(x) = \int \left[ x^2 - a^2 + \frac{a^4}{x^2 + a^2} \right] dx = \frac{x^3}{3} - a^2x + a^3 \arctan \frac{x}{a} + C.$$

(ii)  $\int \frac{(2x^2 + 1)dx}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}.$  Ta có

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{(x-1)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Sau khi quy đồng mẫu số, hai tử thức ở hai vế phải bằng nhau. Vậy

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \left[ \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{-x}{2(x^2+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

*Lưu ý.* Ta có thể trình bày gọn hơn, không nêu quá trình tìm hệ số. #

### **Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Công thức Taylor (1 tiết)- Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 184 - 193: Tích phân bất định (tiếp)

Tự đọc TL [1]:

Tóm tắt Chương 2.

VD 3.26; VD 3.27; VD 3.28. VD 3.32; VD 3.38 (a, b); VD 3.39; VD 3.40; VD 3.41; VD 3.42; VD 3.43; VD 3.44(a).

Bảng các tích phân cơ bản xem Bảng 3.1 trong [1].

Một số tích phân quan trọng (xem [1])

Các dạng tích phân dùng phương pháp từng phần thuận lợi

Bài tập về nhà cho Chương 3:

Bổ trợ: 1(2, 3, 4, 10, 14, 15, 25, 34, 38) ; 14 (a); 15(a); 18; 25(a, c)

Chính: 1(7, 19, 21, 22, 24, 27, 29, 30); 3(g); 2(c,d); 4(a, b); 10(c); 18. 19(c, d, e, f); 20(b, c); 21 (a, b); 22; 34(h, i, j, k, l); 35(a → f, Chữa: a, b, c));

36(a → i, Chữa: a, b, d, h, i ).

BS. Xét sự hội tụ  $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x} dx$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ ;  $\int_2^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^6}} dx$ ;

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} dx$ ;  $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ ;  $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^5}} dx$ ;  $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

## **Bài giảng 8: Tích phân bất định (tiếp) – tích phân xác định**

### **Chương 3: Tích phân**

Mục §3.1 Tích phân bất định (tiếp – 1t)

§3.2 Tích phân xác định (2t)

Bài tập: Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)

Tích phân bất định (1 tiết)

Tiết thứ: 36 - 40,

Tuần thứ: 8

**- Mục đích, yêu cầu:**

Tính được các tích phân của các biểu thức vô tỷ khá đơn giản, của các hàm lượng giác không quá khó

Nắm được ĐN của TP xác định qua tổng tích phân, một vài tính chất ban đầu của tích phân xác định

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**§ 3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (tiếp - 1 tiết)**

***b. Tích phân các biểu thức vô tỷ***

$$b.1. f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\ell}\right)$$

trong đó  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ ;  $r_1, \dots, r_\ell \in \mathbb{Q}$  là các số hữu tỷ:  $r_i = \frac{k_i}{m_i}$ ;

$R(x_1, \dots, x_n)$  là biểu thức hữu tỷ của các biến.

Gọi  $m = \text{BCNN}(m_1, \dots, m_\ell)$ . Đặt  $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}$ .

Đặc biệt,

$f(x) = R(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_\ell})$ : Đặt  $t = (ax+b)^{1/m}$ .

$f(x) = R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_\ell})$ : Đặt  $t = x^{1/m}$ .

**Ví dụ 3.10.** (i)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ . Đặt  $t = \sqrt[6]{x} > 0 \Leftrightarrow x = t^6$ ;  $dx = 6t^5 dt$ .

$$I = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = \dots = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

$$(ii) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$$

Trước hết, biến đổi hàm dưới dấu tích phân về dạng quen biết ta được:

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \Leftrightarrow x = 2 \frac{1-t^3}{1+t^3}; dx = -\frac{12t^2 dt}{(1+t^3)^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx = -\int \frac{(1+t^3)^2}{(4t^3)^2} \cdot t \cdot \frac{12t^2}{(1+t^3)^2} dt$$

$$= -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \quad \#$$

### b.2. Đặt biến lượng giác

Trước hết, các biểu thức có chứa  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  dễ dàng được đưa về các biểu thức có chứa  $\sqrt{t^2 - A^2}$  hay  $\sqrt{t^2 + A^2}$ .

$$f(t) = R(t, \sqrt{A^2 - t^2}): \text{Đặt } t = A \sin u \text{ hay } t = A \cos u$$

$$f(t) = R(t, \sqrt{A^2 + t^2}): \text{Đặt } t = A \tan u \text{ hay } t = A \sinh u.$$

**Ví dụ 3.11.** 
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$$

$$\text{Đặt } x+1 = 2 \sin u \Leftrightarrow u = \arcsin \frac{x+1}{2}$$

$$dx = 2 \cos u du; \sqrt{4-(x+1)^2} = 2 \cos u;$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2 \sin u - 1)^2 2 \cos u}{2 \cos u} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (4 \sin^2 u - 4 \sin u + 1) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (3 - 2 \cos 2u - 4 \sin u) du = \frac{1}{\sqrt{2}} [3u - \sin 2u + 4 \cos u] + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 2x - x^2};$$

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u = \frac{x+1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{4} \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} (3-x) \sqrt{3 - 2x - x^2} + C. \quad \#$$

### c. Tích phân các hàm lượng giác

\* Ba dạng sau có thể tách hàm dưới dấu tích phân thành tổng

$$\int \cos ax \cos bx \, dx; \int \sin ax \sin bx \, dx; \int \sin ax \cos bx \, dx.$$

\*  $\int \cos^n x \, dx; \int \sin^n x \, dx; n \leq 6$ : Hạ bậc;  $n \geq 6$ : Đưa ra công thức truy

hồi.

$$* \int \tan^n x \, dx: \quad \text{Viết } \tan^n x = \tan^{n-2} x [(\tan^2 x + 1) - 1].$$

$$* \int \cot^n x \, dx: \quad \text{Viết } \cot^n x = \cot^{n-2} x [(\cot^2 x + 1) - 1].$$

\*  $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$  ( $R(u, v)$  là biểu thức hữu tỷ của 2 biến  $u, v$ )

- $R(\sin x, \cos x)$  là hàm lẻ với  $\sin x$  : Đặt  $t = \cos x$  ;
- $R(\sin x, \cos x)$  là hàm lẻ với  $\cos x$  : Đặt  $t = \sin x$ ;
- $R(\sin x, \cos x)$  chẵn với  $\sin x$  và  $\cos x$  : Đặt  $t = \tan x$ .
- Trường hợp tổng quát : Đặt  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

$$\text{Ví dụ 3.12. (i) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x)$$

$$= \dots = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

$$\text{(ii) } \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan^3 x \cos^6 x} d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3} \, dt \quad (t = \tan x)$$

$$\Rightarrow I = \dots = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{3}{2} \tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \tan^2 x} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \int \cot^6 x \, dx &= \int \cot^4 x ((\cot^2 x + 1) - 1) \, dx \\ &= \int \cot^4 x \frac{1}{\sin^2 x} \, dx - \int \cot^4 x \, dx \\ &= -\int \cot^4 x \, d(\cot x) - \int \cot^2 x ((\cot^2 x + 1) - 1) \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \cot^5 x + \int \cot^2 x \, d(\cot x) + \int (\cot^2 x + 1) \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

#### ***d. Sử dụng bảng tích phân và phần mềm***

Người ta đã lập ra những bảng tích phân bất định để tiện dùng trong thực tế. Các bảng này có thể là vài chục hàm thông dụng nhất, cho đến hàng trăm, thậm chí cả ngàn hàm.

Nhiều phần mềm tính toán khoa học như MAPLE cũng có thể tính được rất nhiều nguyên hàm của các hàm sơ cấp. Ví dụ, theo MAPLE thì (xem [1])

#### ***d. Tích phân eliptic***

$$\begin{aligned} &\int \frac{e^x}{x} \, dx; \int \frac{\sin x}{x} \, dx; \int \frac{1}{\ln x} \, dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int \sqrt{x^3 + 1} \, dx; \\ &\int e^{-x^2} \, dx; \int \cos x^2 \, dx; \int \sin x^2 \, dx \dots \end{aligned}$$

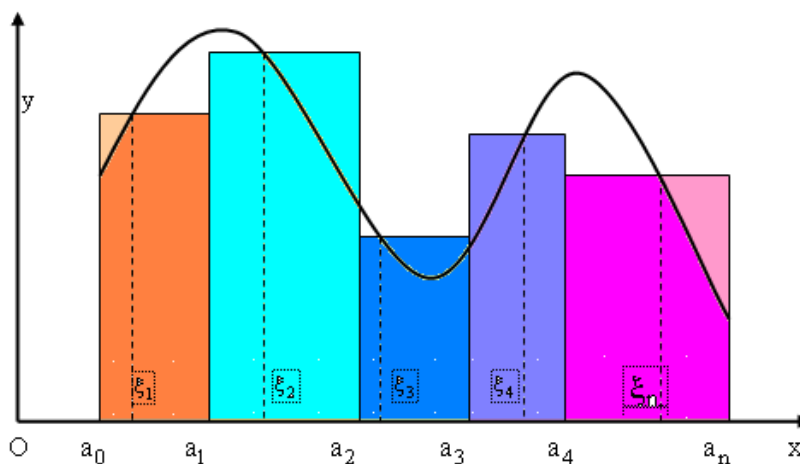
### **§ 3.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (2 tiết)**

#### **3.2.1. Định nghĩa và các tính chất mở đầu**

**Định nghĩa.** Cho  $f(x)$  xác định trên đoạn  $[a, b]$ . Xét phép phân hoạch đoạn  $[a, b]$  xác định bởi các điểm chia liên tiếp  $x_0, x_1, \dots, x_n$  với

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Đặt  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  là độ dài của đoạn con thứ  $i$   $[x_{i-1}, x_i]$ . Trên mỗi đoạn con này lấy một điểm  $\xi_i$  tùy ý. Tổng



**Hình 3.2.** Một tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

được gọi là một tổng tích phân của hàm  $f(x)$  ứng với phép phân hoạch và cách chọn các điểm trung gian  $(\xi_i)$  đã nêu.

Nếu khi  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $\lambda_n = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  mà  $S_n$  có giới hạn hữu

hạn, không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn  $[a, b]$  và cách chọn các điểm  $(\xi_i)$  thì giới hạn  $I$  được gọi là tích phân (xác định) của hàm  $f(x)$  trên

$[a, b]$  và được kí hiệu là  $\int_a^b f(x) dx$  hay  $\int_{[a, b]} f(x) dx$ .

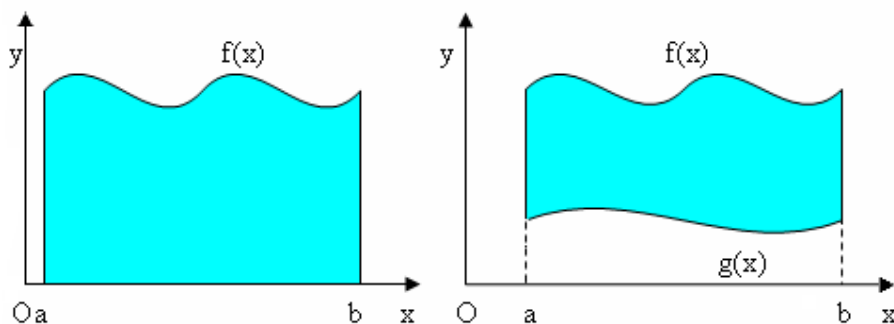
Khi đó hàm  $f(x)$  được gọi là khả tích (Riemann) trên đoạn  $[a, b]$ ;  $f(x)$  là hàm dưới dấu tích phân,  $x$  là biến lấy tích phân,  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên của tích phân.

$$* \text{ Quy ước } \int_a^a f(x) dx = 0; \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

*Ý nghĩa hình học.*  $f(x) \geq 0$  liên tục:  $\int_a^b f(x) dx$  là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và 2 đường thẳng  $x = a, x = b$ .

Tổng quát, diện tích miền cho bởi  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$





**Hình 3.3.** Diện tích hình thang cong

### **Tính chất sơ bộ**

Nếu hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$  thì bị chặn trên đó.

### **3.2.2. Các lớp hàm khả tích**

**Định lý 3.5.** Hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  thì khả tích trên đó.

**Định lý 3.6.** Hàm số  $f(x)$  bị chặn trên  $[a, b]$  và có không quá một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đoạn này thì khả tích trên đó.

Hàm số  $f(x)$  được gọi là liên tục từng khúc trên  $[a, b]$  nếu nó liên tục tại tất cả các điểm trên  $[a, b]$  có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm, tại đó hàm có gián đoạn loại I.

**Hệ quả.** Hàm liên tục từng khúc trên  $[a, b]$  thì khả tích trên đó.

**Chú ý.** Điều kiện rộng rãi nhất của khả tích là:

Hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$  khi và chỉ khi nó bị chặn, tập các điểm gián đoạn của nó có độ đo Lebesgue bằng không.

**Ví dụ 3.13.** 
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hàm này bị chặn, chỉ có một điểm gián đoạn (loại II) tại  $x = 0$ . Vậy hàm này khả tích trên đoạn  $[a, b]$  bất kỳ. Đồ thị hàm này đã cho ở Hình 1.22. #

**Định lý 3.7.** Hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  trên đoạn  $[a, b]$  chỉ khác nhau một số hữu hạn điểm thì chúng cùng khả tích hoặc không trên đoạn  $[a, b]$ . Nếu chúng khả tích thì tích phân của chúng bằng nhau:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

**Hệ quả.** Tính khả tích và giá trị của tích phân (nếu có) của hàm số không thay đổi nếu ta thay đổi giá trị của hàm số tại một số hữu hạn điểm.

**Định lý 3.8 (Tính khả tích của hàm hợp).** Giả sử

(i)  $y = f(u)$  là hàm khả tích trên đoạn  $[A, B]$ .

(ii)  $u = u(x)$ ,  $x \in [a, b]$  là hàm liên tục và có tập giá trị chứa trong  $[A, B]$ .

Khi đó hàm hợp  $y = f(u(x))$ ,  $x \in [a, b]$  khả tích.

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm khả tích trên  $[a, b]$  thì tích  $f(x)g(x)$  và hàm trị tuyệt đối  $|f(x)|$  cũng khả tích trên  $[a, b]$ .

**Định lý 3.9.** Hàm đơn điệu và giới nội trên đoạn  $[a, b]$  thì khả tích trên đó.

**Ví dụ 3.14.**  $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq \pm 1 \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$

Hàm này gián đoạn chỉ tại hai điểm  $\pm 1$ , bị chặn trên đoạn hữu hạn  $[a, b]$  bất kỳ. Vậy nó khả tích trên  $[a, b]$ . Ta có

$$I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 x dx = 0. \quad \#$$

**Ví dụ 3.15.** Tính tích phân  $\int_1^2 e^x dx$  theo phương pháp tổng tích phân.

**Giải.** Hàm số  $e^x$  liên tục nên tích phân tồn tại. Ta hãy chọn cách chia đặc biệt, đó là chia đều đoạn  $[1, 2]$  thành  $n$  đoạn bởi các điểm chia

$$1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2; \quad x_i = 1 + i/n.$$

Chọn  $\xi_i$  là mút trái  $x_{i-1}$  của đoạn  $[x_{i-1}, x_i]$ . Lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{x_{i-1}} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n e^{1+\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} e \sum_{i=1}^n e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{e}{n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$$

Khi  $n \rightarrow \infty$  thì rõ ràng là  $\lambda = \max \Delta x_i = 1/n \rightarrow 0$ . Vậy

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = e(1-e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1-e^{1/n}}{1/n}} = e^2 - e. \quad \#$$

Dùng tích phân xác định chúng ta có thể tính được giới hạn của một số tổng. Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 3.16.** Cho hai dãy  $\{a_n\}$  và  $\{b_n\}$  xác định bởi

$$a_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{2\pi}{2n}} + \dots + \frac{1}{1 + \sin \frac{n\pi}{2n}} \right);$$

$$b_n = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left( 1 + \frac{2i-1}{n} \right)^{-1/4}.$$

Mô tả các dãy này như là tổng tích phân rồi tìm giới hạn của dãy.

**Giải.** \*  $a_n$  là tổng tích phân của hàm  $f(x) = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}}$  trên  $[0, 1]$  với

phép chia đều  $[0, 1]$  thành  $n$  đoạn và chọn điểm  $\xi_i$  tại đầu mút phải của đoạn  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ . Bởi vì độ dài các đoạn con bằng nhau và bằng  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), hàm  $f(x)$  liên tục, vậy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}} = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4}\right)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\left(\tan \frac{\pi x}{4} + 1\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{4}} dx = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{\tan \frac{\pi x}{4} + 1} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

\*  $b_n$  là tổng tích phân của hàm  $f(x) = (1+x)^{-1/4}$  trên đoạn  $[0, 2]$  với phép chia đều đoạn  $[0, 2]$  thành  $n$  đoạn con  $\left[0, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n}\right]$ , điểm trung

gian  $\xi_i$  là trung điểm của đoạn  $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$ .

Vì  $h = \frac{2}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), hàm  $f(x)$  liên tục, vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^2 (1+x)^{-1/4} dx = \frac{4}{3} (3^{3/4} - 1). \quad \#$$

### 3.2.3. Các tính chất của tích phân xác định

**Định lý 3.10 (Tính chất tuyến tính).** Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm khả tích trên đoạn  $[a, b]$  còn  $\alpha$  và  $\beta$  là hai số thực tùy ý. Khi đó hàm  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  cũng khả tích trên  $[a, b]$  và

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (3.7)$$

**Hệ quả.** Giả sử  $f(x)$  và  $g(x)$  là những hàm khả tích trên đoạn  $[a, b]$  còn  $C$  là một số thực. Khi đó:

$$\int_a^b dx = b - a,$$

$$\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx;$$

$f(x) \pm g(x)$  khả tích và

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad (3.8)$$

**Định lý 3.11** (*Hệ thức Chasles*). Hàm  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi nó khả tích trên mỗi đoạn con bất kì. Khi đó

$$\forall c \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.9)$$

**Mở rộng.** Nếu hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$  còn  $c_1, c_2, \dots, c_n$  là các điểm trên  $[a, b]$  thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx. \quad (3.10)$$

**Định lý 3.12** (*Tính dương của tích phân*)

Nếu  $f(x)$  không âm và khả tích trên đoạn  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Hệ quả.** (i) Cho  $f(x)$  và  $g(x)$  khả tích trên  $[a, b]$ , ngoài ra  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Cho  $f(x)$  khả tích  $[a, b]$ . Đặt  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ;  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Khi đó

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (3.11)$$

**Định lý 3.13.** Cho  $f(x)$  không âm và khả tích trên  $[a, b]$ . Giả sử có  $x_0 \in [a, b]$  sao cho  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$  và  $f(x_0) > 0$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

**Định lý 3.14.** Nếu hàm số  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  thì hàm số  $|f(x)|$  cũng khả tích trên đó và

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.12)$$

**Định lý 3.15** (Định lý trung bình thứ nhất của tích phân)

Cho hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$  và  $m, M$  là hai số thực sao cho  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ . Khi đó tồn tại  $\mu \in [m, M]$  để

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a). \quad (3.13)$$

Đặc biệt, nếu hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  thì  $\exists c \in (a, b)$  để

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad \left( \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right). \quad (3.14)$$

*Chứng minh.* Theo tính chất của tích phân,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Chọn  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  sẽ thỏa mãn tính chất đòi hỏi.

Nếu bây giờ hàm  $f(x)$  liên tục, tồn tại hai giá trị  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x);$

$M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$  Vì  $\mu \in (m, M),$  từ Định lý giá trị trung gian của hàm liên

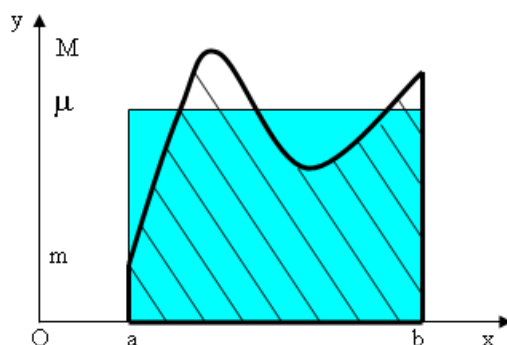
tục, tồn tại  $c \in (a, b): f(c) = \mu.$  □

**Ý nghĩa hình học**

Diện tích hình thang cong = Diện tích hình chữ nhật trung gian. Vậy:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

và được gọi là giá trị trung bình của hàm  $f(x)$  trên đoạn  $[a, b].$



**Hình 3.4.** Giá trị trung bình của hàm  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$

**Định lý 3.16** (Định lý trung bình thứ hai của tích phân)

Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm khả tích trên đoạn  $[a, b]$ , còn  $g(x)$  giữ dấu trên  $[a, b]$  thì có điểm  $\mu \in [m, M]$  với  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ;  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (3.15)$$

Đặc biệt, nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$  thì có  $c \in (a, b)$

để

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (3.16)$$

**Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)**

**Tích phân bất định (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 199-203: Tích phân xác định (tiếp)

Tự đọc TL [1]: Sử dụng bảng tích phân và phần mềm

Tích phân elliptic

## **Bài giảng 9: Tích phân xác định (tiếp) - ứng dụng**

### **Chương 3: Tích phân**

Mục: § 3.2 TP xác định (tiếp – 2t)

§ 3.3 Ứng dụng của TP XĐ (1t)

Bài tập: Tích phân bất định (1 tiết)

Tích phân XĐ (1 tiết)

Tiết thứ: 41 - 45,

Tuần thứ: 9

**- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm được cách tính TPXĐ chủ yếu như sử dụng công thức N-L, đặt, đổi biến, TP từng phần.

Nắm được cách tính diện tích hình phẳng, độ dài đường cong, diện tích mặt cong, thể tích vật thể. Một vài ứng dụng cơ học, và ứng dụng khác.

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

- Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu
- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t
  - **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
  - **Nội dung chính:**

### § 3.2. TP XÁC ĐỊNH (tiếp - 2 tiết)

#### 3.2.4. Cách tính tích phân xác định

##### a. Công thức Newton-Leibniz

##### a.1. Tích phân xác định với cận trên biến thiên

Cho hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$ . Khi đó, với mọi  $x$  trên đoạn này,  $f(x)$  khả tích trên  $[a, x]$ . Đặt

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b], \quad (3.17)$$

và gọi là tích phân xác định với cận trên biến thiên.

Chúng ta dễ dàng hiểu khái niệm tích phân xác định với cận dưới biến thiên  $\int_x^b f(t)dt$ .

##### Định lý 3.17

- (i) Nếu hàm  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  thì  $\Phi(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ .
- (ii) Nếu  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  và liên tục tại  $x_0 \in [a, b]$  thì  $\Phi(x)$  khả vi tại  $x_0$  và  $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ .

*Chứng minh.* (i) Xét  $h$  đủ nhỏ sao cho  $x_0 + h \in [a, b]$ . Để đơn giản trình bày ta giả sử  $x_0 \in (a, b)$  và  $h > 0$ . Ta có

$$\Delta\Phi = \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Theo định lý trung bình thứ nhất thì

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \mu h \quad (*)$$

trong đó  $\mu \in [m', M']$  với  $m' = \inf_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x)$ ;  $M' = \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x)$ .

Do  $[m', M'] \subset [m, M]$  với  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ;  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  nên  $\mu$  bị

chặn. Cho qua giới hạn ta được

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \mu h = 0.$$

Vậy  $\Phi(x)$  liên tục tại  $x_0$ .

(ii)  $\square$

**Hệ quả** (Định lý cơ bản của giải tích)

(i) Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $[a, b]$ :

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t)dt \right) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.18)$$

(ii) Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của nó trên đoạn này thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (3.19)$$

(Công thức Newton - Leibniz).

*Chứng minh.* (i) Trực tiếp áp dụng phần (ii) của Định lý.

(ii) Theo (i),  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $[a, b]$ .

Mặt khác,  $F(x)$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$ . Theo Định lý 3.1, tồn tại hằng số  $C$  để  $\Phi(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in [a, b]$ .

Vậy  $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$ . Ta nhận được

$$I = \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a). \quad \square$$

**Lưu ý:** Phải kiểm tra tính liên tục của hàm  $f(x)$ .

**Ví dụ 3.17.** (i).  $I = \int_a^b x^\alpha dx \quad (a, b > 0; \alpha \neq -1)$ .

$$I = \int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b = \frac{1}{\alpha+1} [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}].$$

$$(ii) \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} = \int_2^4 \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 + 6}}$$



$$= \ln \left( x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10} \right) \Big|_2^4 = \ln \frac{6 + \sqrt{42}}{4 + \sqrt{22}}.$$

$$(iii) \quad I = \int_{-3}^2 \left| \frac{x}{x+4} \right| dx = - \int_{-3}^0 \frac{x}{x+4} dx + \int_0^2 \frac{x}{x+4} dx.$$

$$\text{Vì } \int \frac{x}{x+4} dx = \int \left( 1 - \frac{4}{x+4} \right) dx = x - 4 \ln |x+4| + C \text{ nên}$$

$$I = - \left( x - 4 \ln |x+4| \right) \Big|_{-3}^0 + \left( x - 4 \ln |x+4| \right) \Big|_0^2 = 2 \ln 4 - \ln 6 - 1. \quad \#$$

**Ví dụ 3.18.** Chỉ ra sai lầm trong trình toán sau đây:

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \Big|_{-2}^1 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Dùng đạo hàm theo cận trên và quy tắc đạo hàm hàm hợp ta nhận được

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , còn  $g(x)$  và  $h(x)$  là những hàm khả vi liên tục và nhận giá trị trên đoạn  $[a, b]$  thì

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \int_a^{k(x)} f(t) dt \right] &= f(k(x)) k'(x); \\ \frac{d}{dx} \left[ \int_{h(x)}^b f(t) dt \right] &= -f(h(x)) h'(x); \\ \frac{d}{dx} \left[ \int_{h(x)}^{k(x)} f(t) dt \right] &= f(k(x)) k'(x) - f(h(x)) h'(x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Ví dụ 3.19.** Áp dụng (3.20) chúng ta có thể tính các đạo hàm

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_a^b \sin^2 x \, dx \right); \quad \frac{d}{dx} \left( \int_a^x \sin^2 t \, dt \right); \quad \frac{d}{dx} \left( \int_x^b \sin^2 t^2 \, dt \right); \\ \frac{d}{dx} \left( \int_a^{x^2} \sin t^2 \, dt \right); \quad \frac{d}{dx} \left( \int_x^{x^2} \sin^2 t \, dt \right) \end{aligned}$$

và kết quả là  $0$ ;  $\sin^2 x$ ;  $-\sin^2 x^2$ ;  $2x \sin x^4$ ;  $2x \sin^2 x^2 - \sin^2 x$ . #

**Ví dụ 3.20.** Tính các giới hạn

$$(i) A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2} \int_2^x \ln t \, dt.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \sin^3 x / \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt.$$

### **b. Phương pháp đổi biến**

**Định lý 3.18.** Giả sử :

(i) Hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng suy rộng  $J$  chứa hai điểm  $a, b$ .

(ii) Hàm số  $x(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  có đạo hàm  $x'(t)$  liên tục và giữ dấu (hoặc có thể đổi dấu hữu hạn lần) trên  $[\alpha, \beta]$ , tập giá trị  $x([\alpha, \beta])$  của nó nằm trong  $J$  và  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt. \quad (3.21)$$

Như vậy, khi cần tính tích phân ở vế trái, ta tìm phép đổi biến  $x = x(t)$  phù hợp sao cho tích phân ở vế phải (3.21) tính thuận lợi.

Chúng ta sử dụng tất cả các phép đổi biến như khi tìm nguyên hàm; ngoài ra ta có phép đổi biến "đảo cận" rất hiệu quả sau đây:

$$\int_0^a f(x) dx : \text{Đặt } x = a - t \ (\Leftrightarrow t = a - x);$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx : \quad x = -t \ (\Leftrightarrow t = -x);$$

$$\int_a^b f(x) dx : \quad x = (a + b) - t \ (\Leftrightarrow t = (a + b) - x);$$

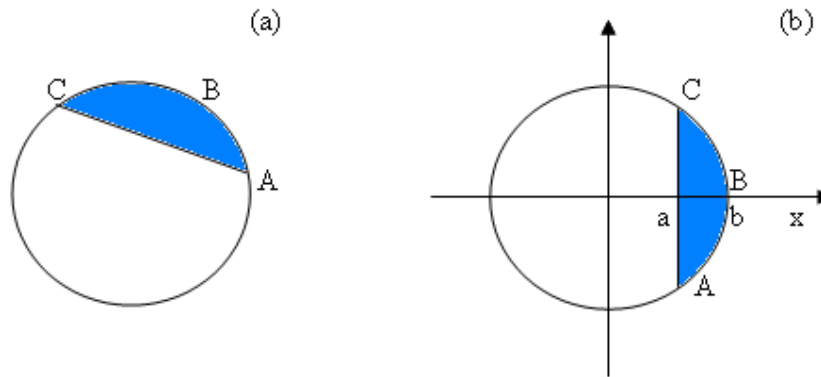
$$\int_0^{\infty} f(x) dx : \quad x = \frac{1}{t}.$$

**Ví dụ 3.21.** Cho hàm  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[-a, a]$ . Khi đó

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ lĩ}, \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{nếu } f(x) \text{ chẵn}. \end{cases} \quad (3.22)$$

**Ví dụ 3.22** Tính diện tích hình viên phân ABC ở Hình 3.5 a.

*Giải.* Lập hệ trục như Hình 3.5b. Cung  $\widehat{BC}$  có phương trình  $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ . Từ tính đối xứng, ta có  $S = 2S_1 = 2 \int_a^b \sqrt{b^2 - x^2} dx$ .



**Hình 3.5.** Hình viên phân ở Ví dụ 3.22

Đặt  $x = b \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin \frac{x}{b}$ ;  $t: \alpha \rightarrow \pi/2$  ( $\alpha = \arcsin \frac{a}{b}$ );  $dx = b \cos t dt$ .

$$S = 2 \int_{\alpha}^{\pi/2} b^2 \cos^2 t dt = b^2 (t + \sin t \cos t) \Big|_{\alpha}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} b^2 - b^2 \arcsin \frac{a}{b} - a \sqrt{b^2 - a^2} . \#$$

**Ví dụ 3.23** (i) Chứng minh rằng  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ .

(ii) Tính tích phân  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$ .

*Giải.* (i) Chỉ việc đặt  $x = \pi/2 - t$ .

(ii) Đặt  $t = 6 - x \Leftrightarrow x = 6 - t$ ;  $dx = -dt$

$$I = \int_2^4 \dots = \int_4^2 \dots \Rightarrow 2I = \int_2^4 1 dt = 2 \Leftrightarrow I = 1.$$

*Nhận xét.* Thực ra theo quy nạp có thể thấy rằng

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{khi } n \text{ lẻ.} \end{cases} \quad (3.23) \quad \#$$

### c. Phương pháp đặt biến

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(u(x)) u'(x) dx = \int_a^b g(u(x)) d(u(x)) = G(\varphi(x)) \Big|_a^b$$

trong đó  $G(u)$  là một nguyên hàm của hàm  $g(u)$ .

**Ví dụ 3.24.** Tính các tích phân

$$(a) \int_{-1}^2 x \cos(x^2) dx; \quad (b) I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$$

Giải. (a) Cách I. 
$$\int_{-1}^2 x e^{x^2} dx = \int_{-1}^1 x e^{x^2} dx + \int_1^2 x e^{x^2} dx$$
$$= 0 + \frac{1}{2} \int_1^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^4 - e}{2}.$$

Cách II. 
$$\int_{-1}^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{-1}^2 = \frac{e^4 - e}{2}.$$

(b) Do  $\alpha \in (0; \pi)$  nên  $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 > 0$ . Vậy hàm dưới dấu tích phân liên tục trên  $[-1; 1]$ .

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d(x - \cos \alpha)}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \arctan \left( \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \Big|_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{\sin \alpha} \left[ \arctan \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) - \arctan \left( \frac{-1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \right] = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}. \quad \#$$

#### **d. Tích phân từng phần**

Khi cần tính tích phân  $\int_a^b f(x) dx$ , ta cố gắng viết hàm  $f(x)$  dưới dạng

$f(x) = u(x) v'(x)$  trong đó  $u(x), v(x)$  là những hàm khả vi liên tục. Khi đó

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(b) v(b) - u(a) v(a)) - \int_a^b v(x) u'(x) dx,$$

hay viết gọn lại dưới dạng

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3.24)$$

**Ví dụ 3.25.** Tính các tích phân sau

(i) 
$$\int_1^e x^{999} \ln x dx = \frac{1}{1000} \int_1^e \ln x dx^{1000}$$
$$= \frac{1}{1000} \left( x^{1000} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^{999} dx \right) = \frac{999 e^{1000} + 1}{1\,000\,000}.$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \int_0^{\pi/3} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi/3} (x + \sin x) d(\tan x) \\
&= (x + \sin x) \tan x \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x (1 + \cos x) dx \\
&= \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{3} - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \sin x dx = \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1 - \ln 2.
\end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad I = \int_{3\pi/4}^{\pi} (\tan^2 x - \tan x) e^{-x} dx.$$

$$I = \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan^2 x e^{-x} dx - \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x e^{-x} dx = I_1 - I_2.$$

$$I_2 = \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x e^{-x} dx = - \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x d(e^{-x})$$

$$= \tan x e^{-x} \Big|_{3\pi/4}^{\pi} + \int_{3\pi/4}^{\pi} e^{-x} (1 + \tan^2 x) dx$$

$$= -e^{-\pi} + I_1 \Rightarrow I = I_1 - (-e^{-\pi} + I_1) = e^{-\pi}. \quad \#$$

*Lưu ý.* (i) Với tích phân bất định chúng ta có 6 dạng có thể tính tích phân từng phần thuận lợi (xem Bảng 3.3). Với tích phân xác định 6 dạng đã nêu cũng có thể tính theo phương pháp tích phân từng phần.

(ii) Có thể ta không phải đưa bất kì thừa số nào vào dấu  $d(\cdot)$ , nói cách khác, ta đặt  $u = f(x)$ ,  $v = x$ ; đôi khi điều này rất hiệu quả.

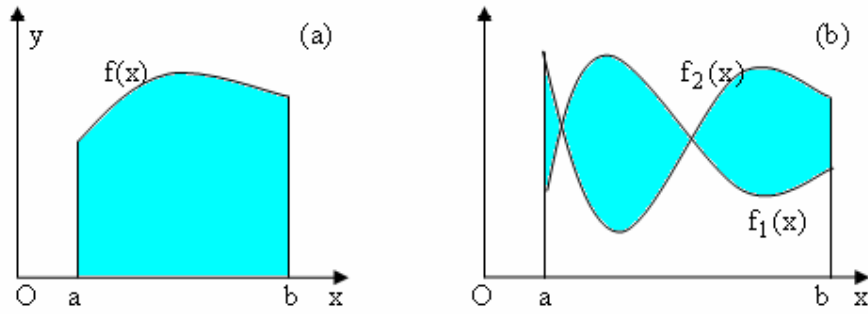
### 3.2.5. Tính gần đúng tích phân xác định (xem [1])

## § 3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (1 tiết)

### 3.3.1. Tính diện tích hình phẳng

#### a. Trong tọa độ Descartes

Khi các hàm  $f(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  liên tục, diện tích hình phẳng ở các Hình 3.9a, 3.9b cho bởi công thức



**Hình 3.9.** Hình phẳng trong tọa độ Descartes

$$S_{(a)} = \int_a^b f(x) dx; \quad S_{(b)} = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx. \quad (3.31)$$

**b. Đường cong dưới dạng tham số**

Khi cần tính diện tích hình phẳng ở Hình 3.9a mà đường cong (L) cho dưới dạng tham số  $(L): x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ , còn các hàm  $y(t), x'(t)$  liên tục,  $x'(t)$  **giữ dấu**.

- Nếu điểm  $(x(\alpha), y(\alpha))$  là đầu mút trái của (L) ( $\Leftrightarrow x'(t) \geq 0$ ) thì:

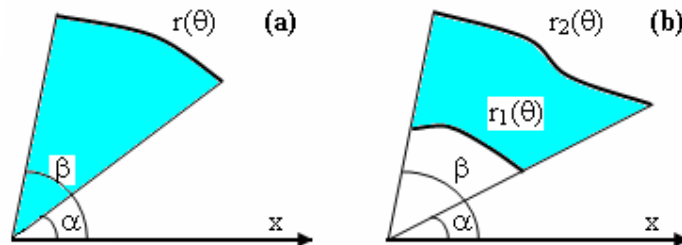
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt$$

- Nếu điểm  $(x(\alpha), y(\alpha))$  là đầu mút phải của (L) ( $\Leftrightarrow x'(t) \leq 0$ ) thì:

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt \quad (3.32)$$

Có cách tính cho trường hợp tổng quát hơn.

**c. Đường cong cho dưới dạng tọa độ cực**



**Hình 3.10.** Hình cong phẳng cho trong tọa độ cực

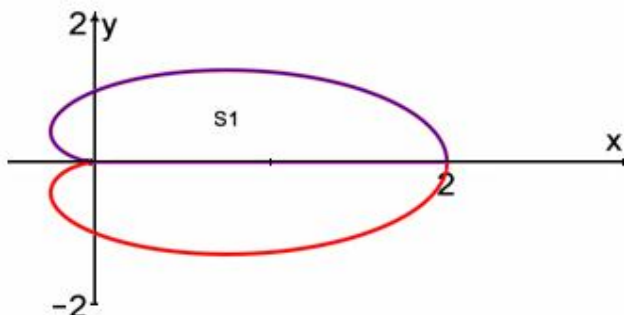
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta. \quad (3.33)$$

Trường hợp tổng quát hơn ở Hình 3.10 (b) thì

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta. \quad (3.34)$$

**Ví dụ 3.26.** Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi cung hình tim (cardioid)  $r = a(1 + \cos\theta)$ .

*Giải.* Do tính đối xứng,  $S = 2S_1 = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \dots = \frac{3}{2} \pi a^2$ . #



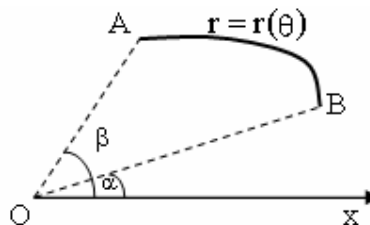
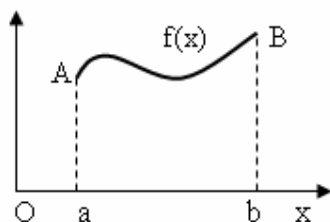
**Hình 3.11.** Cardioid khi  $a = 1$

### 3.3.2. Tính độ dài đường cong

#### a. Đường cong cho dưới dạng tọa độ Descartes

Nếu đường cong (L) là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  thì

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3.35)$$



**Hình 3.12.** Đường cong dạng tọa độ Descartes (a) và dạng tọa độ cực (b)

#### b. Đường cong cho dưới dạng tham số

$$(L): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

thì 
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

(3.36)

Trường hợp đường cong trong không gian cho dưới dạng tham số

$$(L): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \end{cases} \Rightarrow s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

**c. Đường cong dưới dạng tọa độ cực**

$$r = r(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Chuyển sang dạng tham số ta được

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = r(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = r(\theta) \sin \theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta. \end{cases}$$

Áp dụng công thức (3.36) thì

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (3.37)$$

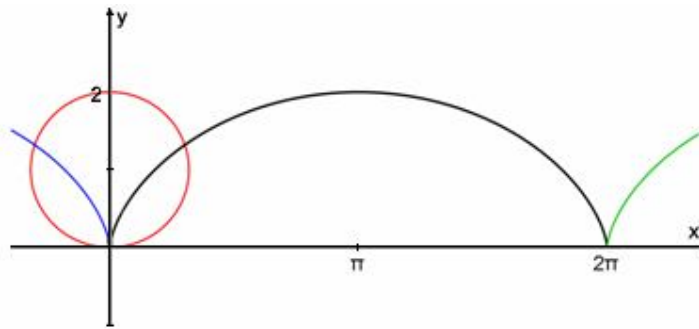
**Ví dụ 3.27.** Tính độ dài một chu kỳ của đường cycloide

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad (a > 0). \end{cases}$$

Đây là tọa độ của điểm trên biên của bánh xe bán kính  $a$  lăn không trượt trên mặt phẳng (xem Hình 3.13 ).

Ta xét chu kỳ đầu, khi ấy  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Vậy

$$s = \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} a \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \quad \#$$

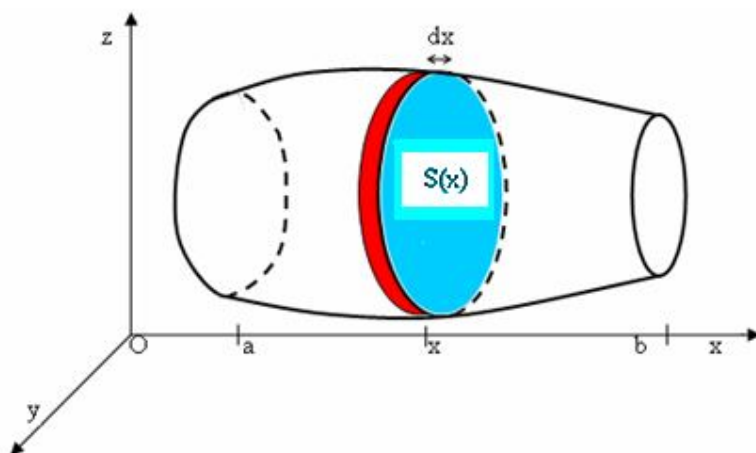


**Hình 3.13.** Đường cycloide với  $a = 1$

### 3.3.3. Tính thể tích vật thể



**a. Trường hợp tổng quát.**



**Hình 3.14.** Vật thể trong không gian với vi phân thể tích

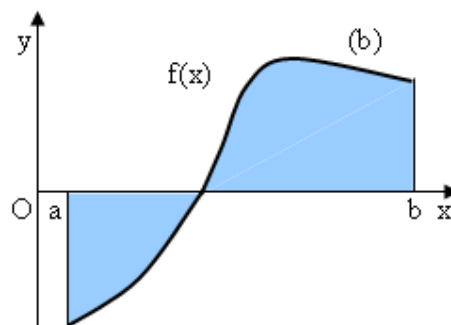
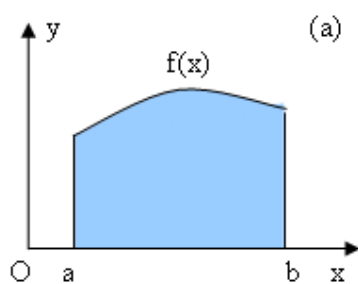
$$V = \int_a^b dV = \int_a^b S(x) dx.$$

(3.38)

**b. Thể tích vật thể tròn xoay**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

(3.39)



**Hình 3.15.** Hình thang cong tạo ra vật thể tròn xoay

**3.3.4. Tính diện tích mặt tròn xoay**

Giả sử (L) là đồ thị hàm số  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , với  $f(x), f'(x)$  là những hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$ . Cho (L) quay xung quanh trục Ox ta được mặt tròn xoay.

Dùng lược đồ vi phân ta thu được công thức tính diện tích mặt tròn xoay:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3.40)$$

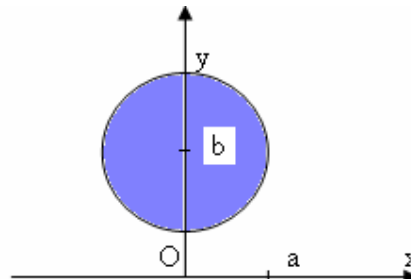
**Ví dụ 3.28.** Tính diện tích hình xuyến (hình vòng khuyên) sinh ra bởi đường tròn  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ , ( $b > a$ ) quay quanh trục Ox.

Ta có

$$S = S_1 + S_2$$

$$(S_1): y = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(S_2): y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Trong cả hai trường hợp thì  $y'^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$ . Vậy

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a \left( b + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &\quad + 2\pi \int_{-a}^a \left( b - \sqrt{a^2 - x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8\pi ab \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 8\pi^2 ab. \quad \# \end{aligned}$$

*Lưu ý.* Nếu khối tròn xoay, mặt cong, ... nhận được do quay hình phẳng, đường cong ... quanh trục Oy thì cần chuyển sang biến y, hàm là  $x = x(y)$ .

### 3.3.5. Các áp dụng khác của tích phân (☀)

**Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Tích phân bất định (1 tiết)**

**Tích phân XD (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 236-232: Tích phân suy rộng

Tự đọc TL [1]: 212-214: Tính gần đúng tích phân xác định.

### **Bài giảng 10: Tích phân suy rộng**

Chương 3: Tích phân

Mục: § 3.4. Tích phân suy rộng (2t)

Ôn tập (1 tiết)

Bài tập: Cách tính TPXD (1 tiết)

**- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm chắc định nghĩa 2 loại TP suy rộng

Một số tiêu chuẩn hội tụ

Hệ thống hóa chương III

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

**§ 3.4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG (2 tiết)**

**3.4.1. Tích phân với cận vô hạn (Tích phân suy rộng loại I)**

**a. Định nghĩa**

\* Cho hàm số  $f(x)$ ,  $x \in [a, +\infty)$ . Biểu thức hình thức  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  được

gọi là tích phân suy rộng (loại I) của hàm  $f(x)$  trên  $[a, +\infty)$ .

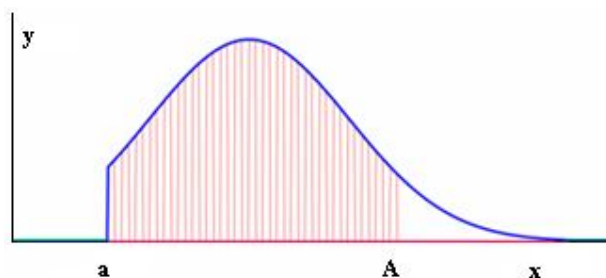
Giả sử hàm  $f(x)$  khả tích trên  $[a, A]$ ,  $\forall A > a$ . Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

thì ta nói tích phân suy rộng  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ, có giá trị bằng  $I$ , và ta viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = I.$$

Trái lại, khi không tồn tại giới hạn hoặc giới hạn vô hạn, ta nói tích phân suy rộng phân kì.



**Hình 3.16.** Hình thang cong vô hạn như là giới hạn của hình thang cong hữu hạn

Chúng ta dễ dàng hiểu ý nghĩa của tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ .

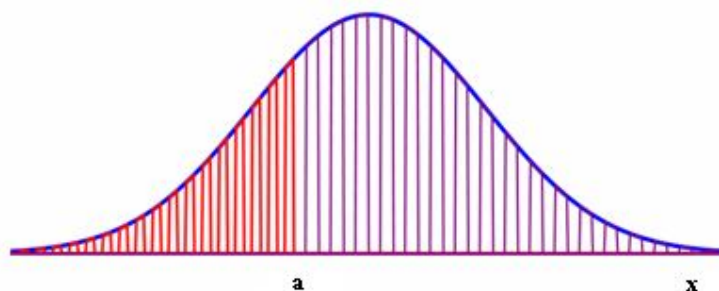
\* Nếu với  $a \in \mathbb{R}$  nào đó, cả hai tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  và

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ, ta nói tích phân  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ và giá trị của nó được tính bởi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx. \quad (3.42)$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  hoặc  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

phân kì, ta nói tích phân  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  phân kì. Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian  $a$ .



**Hình 3.17.** Hình thang cong vô hạn 2 phía

**b. Công thức Newton-Leibniz.**

Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[a, +\infty)$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của nó thì

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \quad (3.43)$$

trong đó  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

**Ví dụ 3.32.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \text{Giải. Ta có } \int_0^A x e^{-x} dx &= - \int_0^A x d(e^{-x}) = -x e^{-x} \Big|_0^A + \int_0^A e^{-x} dx \\ &= -A e^{-A} + 0 - e^{-A} + 1 \rightarrow 1 \quad (\text{khi } A \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Trình bày lại:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x d(e^{-x}) = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 + 0 - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1. \quad \#$$

**Ví dụ 3.33.** Khảo sát sự hội tụ và tính giá trị (nếu có) của p-tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0).$$

$$\text{Giải. Với } p = 1, \text{ tích phân trở thành } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{\infty} = \infty.$$

$$\text{Với } p \neq 1, I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Tóm lại,

$$p \leq 1: \text{ Tích phân } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ phân kỳ}$$

$$p > 1: \text{ Tích phân } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ hội tụ và } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}. \quad \#$$

### c. Tiêu chuẩn hội tụ

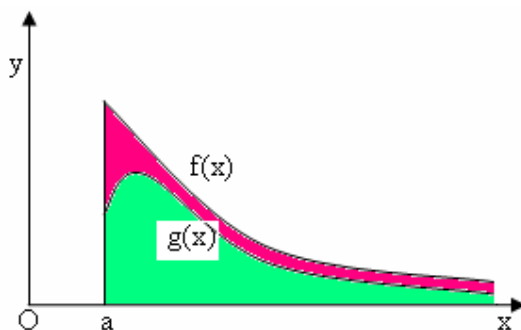
**Định lý 3.20.** Cho hàm  $f(x)$  không âm và khả tích trên đoạn  $[a, A]$  bất kỳ,  $a < A$ . Khi đó:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ khi và chỉ khi  $\int_a^A f(x)dx$  bị chặn (theo A).

**Định lý 3.21** (Tiêu chuẩn so sánh). Cho  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm khả tích trên  $[a, A]$ , ( $a < A$ ), ngoài ra  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ .

+ Nếu  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  hội tụ thì  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ ;

+ Nếu  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  phân kì thì  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  phân kì.



**Hình 3.18.** So sánh diện tích 2 miền

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$ ,  $g(x)$  liên tục, không âm và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < \infty$$

thì các tích phân  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  và  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

(iii) Vì  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  hội tụ  $\Leftrightarrow p > 1$ , người ta hay so sánh  $f(x)$  với  $\frac{1}{x^p}$ :

Nếu khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \sim \frac{A}{x^p}$  ( $A \neq 0$ ) thì  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ  $\Leftrightarrow p > 1$ .

**Ví dụ 3.35.** Xét sự hội tụ của tích phân (i)  $\int_a^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ ,

(ii)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ .

*Giải.* (i) Khi  $x \rightarrow \infty$  thì  $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1/x^2+1)} \frac{1}{x^{1/2}} \sim \frac{1}{2x^{1/2}}$ .

Vì  $p = 1/2 < 1$  nên tích phân phân kỳ.

(ii) Khi  $x \rightarrow \infty$  thì  $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ .

Vì  $p = 3/2 > 1$  nên tích phân hội tụ.

#

#### **d. Hội tụ tuyệt đối**

**Định lý 3.23.** Giả sử  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, A]$ ,  $\forall A > a$ .

Nếu tích phân  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  hội tụ thì  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  cũng hội tụ.

Chẳng hạn, để xét sự hội tụ của tích phân  $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  ta thấy

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ hội tụ (vì } p = 2 > 1).$$

Theo tiêu chuẩn so sánh tích phân  $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$  hội tụ, từ đó tích

phân  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  hội tụ.

**Định nghĩa.** Đối với hàm  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, A]$  tùy ý, nếu tích phân  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  hội tụ, ta nói tích phân  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ tuyệt đối.

Trái lại, nếu tích phân  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ còn tích phân  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  không hội tụ, ta nói tích phân  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  là bán hội tụ hay hội tụ không tuyệt đối, hay hội tụ có điều kiện.

#### **3.4.2. Tích phân của hàm không bị chặn** (Tích phân suy rộng loại II)

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a; b)$ , không giới nội lại lân cận điểm

b. Biểu thức hình thức  $\int_a^b f(x)dx$  gọi là tích phân suy rộng (loại II) của hàm  $f(x)$  trên  $[a, b)$ .

Giả sử  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b - \eta]$ ,  $\forall \eta > 0$  đủ nhỏ. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx,$$

thì ta nói tích phân suy rộng  $\int_a^b f(x) dx$  hội tụ, có giá trị bằng  $I$ , và ta viết

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Trái lại, nếu giới hạn đó vô hạn hay không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng phân kì.

\* Nếu  $f(x)$  khả tích thông thường trên đoạn  $[a, b]$  thì theo Định lý cơ bản,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Trong trường hợp này, tích phân suy rộng (chúng ta đã lạm dụng từ này) chính là tích phân thông thường.

\* Tương tự, ta có thể định nghĩa tích phân suy rộng (loại II) cho hàm  $f(x)$  không bị chặn tại mút trái  $a$  của đoạn  $[a, b]$ .

\* Cho hàm  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$ , không giới nội tại lân cận điểm  $a$  cũng như lân cận điểm  $b$ . Nếu có điểm  $c \in (a, b)$  sao cho cả hai tích phân  $\int_a^c f(x) dx$  và  $\int_c^b f(x) dx$  hội tụ, ta nói tích phân suy rộng (loại II)  $\int_a^b f(x) dx$  hội tụ và giá trị của nó bằng

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.44)$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân  $\int_a^c f(x) dx$ ,  $\int_c^b f(x) dx$  phân

kì, ta nói tích phân suy rộng (loại II)  $\int_a^b f(x) dx$  phân kì.

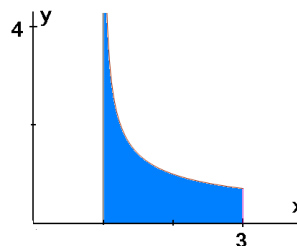
Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian  $c$ .



Ta còn có thể định nghĩa tích phân suy rộng cho trường hợp điểm bất thường trong khoảng  $(a, b)$ , hay trường hợp có một số điểm bất thường cũng như tích phân suy rộng hỗn hợp cả loại I và II.

**Ví dụ 3.36.** Tính diện tích miền nằm dưới đường  $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ,  $1 < x \leq 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Giải. } S &= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} \Big|_1^3 \\ &= 2\sqrt{2} = 2.83 \quad (\text{đvdt}). \end{aligned}$$



**Ví dụ 3.37.** Khảo sát sự hội tụ của  $p$ -tích phân  $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ).

**Giải.** Tương tự như đã làm ở Ví dụ 3.33, ta thu được kết quả sau

$$p < 1: \text{ Tích phân } \int_0^a \frac{dx}{x^p} \text{ hội tụ và } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

$$p \geq 1: \text{ Tích phân } \int_0^a \frac{dx}{x^p} \text{ phân kỳ.} \quad \#$$

**Nhận xét.** Tích phân  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$  phân kỳ với mọi giá trị của  $p$ . Thực vậy,

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = I_1 + I_2,$$

trong đó  $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ,  $I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ . Khi  $p \geq 1$  thì  $I_1$  phân kỳ nên  $I$  phân kỳ. Khi

$p < 1$  thì  $I_2$  phân kỳ nên  $I$  phân kỳ. Như vậy với mọi  $p$ , tích phân  $I$  phân kỳ.

**Định lý 3.24 (Tiêu chuẩn so sánh).** Giả sử rằng  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm xác định trên  $(a; b]$ , không giới nội tại lân cận điểm  $a$  và khả tích trên  $[a + \eta, b]$ ,  $\forall \eta > 0$  đủ nhỏ.

Giả sử  $\forall x \in (a; b]$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Khi đó:

Tích phân  $\int_a^b g(x) dx$  hội tụ thì tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  hội tụ và

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  phân kỳ thì tích phân  $\int_a^b g(x) dx$  phân kỳ.

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm liên tục, không âm và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < \infty)$$

thì hai tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  và  $\int_a^b g(x) dx$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

**Hệ quả.** Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $(0; b]$  và  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$  (khi  $x \rightarrow 0^+$ ) thì

$$\int_0^b f(x) dx \text{ hội tụ với } p < 1 \text{ và phân kỳ với } p \geq 1.$$

Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $(a; b]$  và  $f(x) = O\left(\frac{1}{x-a}\right)^p$  (khi  $x \rightarrow a^+$ ) thì

$$\int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ với } p < 1 \text{ và phân kỳ với } p \geq 1.$$

**Ví dụ 3.38.** Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\text{a. } \int_1^{\infty} \sin x^2 dx;$$

$$\text{b. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx.$$

Đặt biến  $x^2 = t$  ( $x = \sqrt{t} > 0$ ) ta được  $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ .

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = - \int_1^{\infty} \frac{d(\cos t)}{2\sqrt{t}} = - \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{\cos t dt}{2(-2)t^{3/2}} = \frac{\cos 1}{2} + \frac{-1}{4} \int_1^{\infty} \frac{\cos t dt}{t^{3/2}}.$$

Ta thấy

$$0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}, \quad p = 3/2 > 1 \text{ nên } \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \text{ hội tụ.}$$

Vậy  $\int_1^{\infty} \frac{\cos t dt}{t^{3/2}}$  hội tụ, từ đó tích phân I hội tụ.

**Cách 2.** Dùng tiêu chuẩn Diriclet.

$$(b) I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx = I_1 + I_2.$$

$$* I_1 \text{ hữu hạn vì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} = 0.$$

$$* \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} \sim \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \rightarrow \infty); \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ phân kỳ. Vậy } I_2 \text{ phân kỳ.}$$

Do đó tích phân đã cho phân kỳ.

#

### ÔN TẬP (1 tiết)

### TÓM TẮT CHƯƠNG 3 (tự đọc)

#### TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

- **Bảng các tích phân cơ bản:** Bảng 3.1.
- **Phương pháp tính tích phân bất định:** Biến đổi tương đương, đưa về tích phân cơ bản - Đặt biến - Đổi biến - Tích phân từng phần (có 6 dạng hàm dùng dùng PP tích phân từng phần thuận lợi).

#### • Tích phân bất định một số lớp hàm

*Tích phân các phân thức hữu tỷ:* + PP thông thường + PP hệ số bất định: Đưa về phân thức thực sự; khai triển  $f(x)$  thành tổng các phân thức đơn giản; tích phân các phân thức thu được. (Mẫu là lũy thừa của nhị thức  $x - a$ : Tử là hằng; mẫu là lũy thừa của tam thức không có nghiệm  $x^2 + px + q$ : Tử là nhị thức).

*Tích phân các biểu thức vô tỷ:* Đặt biến căn thức hay lượng giác.

*Tích phân các hàm lượng giác.*

#### TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

- Nếu hàm số  $f(x)$  khả tích trên đoạn  $[a, b]$  thì bị chặn trên đó.
- Các lớp hàm khả tích trên đoạn kín: hàm liên tục - hàm đơn điệu, bị chặn - hàm bị chặn, chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn...
- Giới hạn của dãy cho dưới dạng tổng. Viết dãy dưới dạng tổng tích phân: Xác định hàm và kiểm tra tính liên tục, cách chia (thường là chia đều), cách chọn điểm trung gian (mút trái, phải ...). Khi đó, giới hạn của tổng là tích phân thích hợp.
- $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  thì  $\exists c \in (a, b)$  để

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- Hàm  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  là một nguyên

$$\text{hàm của nó trên } [a, b]: \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

#### Cách tính tích phân xác định

- **Sử dụng công thức Newton-Leibniz.**  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ ,  $F(x)$  là nguyên

hàm trên đó thì  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \triangleq F(b) - F(a)$ .

- **Phương pháp đổi biến**                      **Phương pháp đặt biến**
- **Sử dụng tích phân từng phần**
- **Diện tích hình phẳng**

- ĐC cho trong toạ độ Descartes:  $S_1 = \int_a^b f(x) dx$ .

- ĐC cho dưới dạng tham số:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

$$+ x'(t) \geq 0 \text{ (từ trái sang phải), } y(t) \geq 0: S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt;$$

$$+ x'(t) \leq 0 \text{ (từ phải sang trái), } y(t) \geq 0: S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt.$$

- ĐC cho dưới dạng toạ độ cực:  $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$ .

### **Độ dài đường cong**

- ĐC cho trong toạ độ Descartes:  $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ .

- ĐC cho dưới dạng tham số:  $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ .

- **Thể tích:**  $V = \int_a^b S(x) dx$ ; **vật thể tròn xoay:**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

- **Diện tích mặt tròn xoay:**  $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ .

### **TÍCH PHÂN SUY RỘNG**

Các hàm nói đến khả tích trên  $[a, A]$ ,  $\forall A > a$ .

- Nếu  $I = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  hữu hạn thì TPSR  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ, có giá trị bằng  $I$ ,

$\int_a^{+\infty} f(x) dx = I$ . Trái lại, tích phân suy rộng phân kỳ.

- $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  hội tụ thì  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ.

- VCB  $f(x), g(x) \geq 0$ ,  $f(x) \sim Cg(x)$  ( $0 < C < \infty$ ) khi  $x \rightarrow \infty$  thì  $\int_a^\infty f(x)dx$  và  $\int_a^\infty g(x)dx$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
- $f(x) \geq 0, \sim \frac{1}{x^p}$ :  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ với  $p > 1$ , phân kỳ với  $p \leq 1$ .
- $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  hội tụ thì  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  hội tụ.
- Tương tự với TPSR loại II  $\int_a^b f(x)dx$  và  $\int_a^b g(x)dx$ .
- $f(x) \geq 0$ , liên tục trên  $(a, b]$  và  $f(x) \sim \frac{1}{(x-a)^p}$  thì  $\int_a^b f(x)dx$  hội tụ với  $p < 1$  và phân kỳ với  $p \geq 1$ . Lưu ý trường hợp  $a = 0$ .

**- Yêu cầu SV chuẩn bị:**

làm bài tập theo kế hoạch: **Cách tính TPXD (1 tiết)**

**Ứng dụng của TP (1tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 263 – 268: Chuỗi số

**Bài giảng 11: Chuỗi số – Chuỗi số dương**

Chương 4: Chuỗi

Mục: Bài tập: Tích phân suy rộng (2t)

Kiểm tra (1t)

§4.1 Chuỗi số (1t)

§4.2 Chuỗi số dương (1t)

Tiết thứ: 51 – 55

Tuần thứ: 11

**- Mục đích, yêu cầu:**

Nắm chắc khái niệm hội tụ của chuỗi số, các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
- **Nội dung chính:**

## Chương 4: CHUỖI

### § 4.1. CHUỖI SỐ (1 tiết)

#### 4.1.1. Định nghĩa

\* Cho  $\{u_n\}$  là một dãy số. Tổng hình thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots \quad (4.1)$$

được gọi là một chuỗi số.

$u_1, u_2, \dots$ : các số hạng;  $u_n$ : số hạng thứ  $n$  hay số hạng tổng quát.

$$\begin{aligned} \text{Đặt} \quad S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$S_n$  gọi là tổng riêng thứ  $n$ . Dãy  $\{S_n\}$  gọi là dãy tổng riêng.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  ta nói chuỗi hội tụ, có tổng  $S$

(số  $S$  gọi là tổng của chuỗi) và viết  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  hay  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

Trái lại, ta nói chuỗi phân kì.

**Nhận xét.** \* Sự hội tụ hay phân kì của chuỗi không thay đổi khi ta thêm, hoặc bớt, hoặc thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi.

\* Đôi khi cần thiết hoặc thuận lợi nếu chuỗi bắt đầu tại một chỉ số khác 1:

\*  $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$  được gọi là phần dư thứ  $n$  của chuỗi. Chuỗi hội tụ khi

và chỉ khi chuỗi phần dư  $\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$  hội tụ. Rõ ràng khi đó  $R_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Ví dụ 4.1.** Chứng tỏ rằng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  hội tụ và tính tổng của nó.

$$\begin{aligned} \text{Giải. } S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ . Vậy chuỗi hội tụ, có tổng bằng 1:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ . #

**Ví dụ 4.2** (Chuỗi hình học (chuỗi "cấp số nhân")).

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots \quad (4.2)$$

$$\text{Với } q \neq 1: S_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$|q| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

$$|q| > 1: \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

$$q = 1: S_n = n \rightarrow \infty \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$$

$$q = -1: S_{2n} = 1, S_{2n+1} = 0. \text{ Vậy không tồn tại giới hạn } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  hội tụ khi  $|q| < 1$ ,

phân kỳ khi  $|q| \geq 1$ .

Các tổng riêng  $S_6$  và  $S_{15}$  của chuỗi (4.2) thể hiện ở Hình 4.1. #

#### 4.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

**Định lý 4.1.** Nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Chứng minh.** Từ chỗ  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ suy ra tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Từ đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ .

□

**Nhận xét.** Mệnh đề phản đảo của Định lý trên cho ta một phương pháp rất tốt để chứng minh một chuỗi phân kỳ. Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 4.4.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ .

Từ Ví dụ 1.8 ta biết rằng, không tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ . Vậy chuỗi đã cho không hội tụ. #

#### 4.1.3. Tiêu chuẩn Cauchy

**Định lý 4.2 (Tiêu chuẩn Cauchy).** Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n > N, p > 0: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \quad (4.3)$$

**Ví dụ 4.5.** Xét chuỗi điều hòa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

Ta thấy với  $\varepsilon = 1/2$ , với  $n$  nguyên dương bất kỳ thì

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Vậy chuỗi điều hòa không hội tụ.

**Lưu ý.** Có thể chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n \quad (4.4)$$

với  $C = 0,5772\dots$  là hằng số Euler,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). #

#### 4.1.4. Các tính chất về phép toán



**Định lý 4.3.** Nếu các chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ còn  $a$  là số thực bất kỳ thì

các chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (a u_n), \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  cũng hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a u_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

## § 4.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG ( 1 tiết)

### 4.2.1. Các tính chất mở đầu

Khi  $u_n \geq 0 \forall n$ , chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  được gọi là chuỗi số dương.

Với chuỗi số dương, dãy tổng riêng không giảm, thực vậy:

$$S_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n,$$

Ta có ngay định lý:

**Định lý 4.4.** Chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng  $\{S_n\}$  bị chặn, tức là tồn tại một số  $M > 0$  sao cho với mỗi  $n \geq 1$ ,

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq M.$$

**Hệ quả.** Chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ khi và chỉ khi nó phân kỳ tới vô cùng, tức là  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ .

**Định lý 4.5 (Định lý so sánh).** Cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sao cho  $0 \leq u_n \leq v_n$ . Khi đó

(i) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ;

(ii) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  phân kỳ;

(iii) Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ , ( $0 < k < \infty$ ) thì hai chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  cùng

hội tụ hoặc cùng phân kì.

**Ví dụ 4.6.** Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

*Giải.*

(i)  $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$  khi  $n \geq 3$ ; chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ. Vậy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  phân kỳ.

(ii)  $\sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$  ( $n \rightarrow \infty$ ); chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$  hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

(iii)  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$  ( $n \rightarrow \infty$ ); chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

**Lưu ý.** Nếu bỏ đi điều kiện chuỗi dương thì hệ quả trên không còn đúng. Ví dụ ở [1].

#### 4.2.2. Các quy tắc khảo sát sự hội tụ

**Định lý 4.6** (Tiêu chuẩn D'Alembert (Kiểm định tỷ số)). Giả sử đối với chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  với  $u_n > 0$ , tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ .

Nếu  $\ell < 1$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ;

Nếu  $\ell > 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kì.

*Chứng minh.*

**Ví dụ 4.7.** Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ .

*Giải.* Đây là chuỗi số dương. Lại có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} < 1$ .

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

#

**Định lý 4.7** (Tiêu chuẩn Cauchy (Kiểm định căn)). Cho chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .

Nếu  $\ell < 1$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ;

Nếu  $\ell > 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

*Chứng minh.*  $\square$

*Nhận xét.* \* Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy mà ta nhận được  $\ell > 1$  thì số hạng tổng quát của chuỗi dần ra vô hạn:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ ; từ đó

chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

\* Trường hợp  $\ell = 1$ , cả hai tiêu chuẩn D'Alembert và Cauchy đều chưa có kết luận: Thực tế, chuỗi có thể hội tụ, có thể phân kỳ.

**Ví dụ 4.8.** Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ .

*Giải.* Đây là chuỗi số dương với  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$ . Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. #

**Ví dụ 4.9.** Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{2[(n+1)/2]} = q^2 + q^2 + q^4 + q^4 + q^6 + q^6 + \dots$$

trong đó  $0 < q < 1$  và  $[(n+1)/2]$  là phần nguyên của số  $(n+1)/2$ .

*Giải.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{2\left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot \frac{1}{n}} = q < 1$ .

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Lưu ý rằng nếu ta áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert thì chưa có kết luận. #

**Định lý 4.8** (Tiêu chuẩn (so sánh với) tích phân). Cho hàm  $f(x)$  liên tục, không âm, đơn điệu giảm trên  $[a, +\infty)$ . Khi đó tích phân suy rộng

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ và tổng } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ với } u_n = f(n) \text{ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.}$$

*Chứng minh.*

**Lưu ý.** Thực ra chỉ cần đẳng thức  $u_n = f(n)$  xảy ra với  $n$  đủ lớn.

**Ví dụ 4.10.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$

(Chuỗi Riemann hay  $p$ -chuỗi).

Với  $p \leq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} > 0$  nên chuỗi không hội tụ.

Với  $p > 0$ , xét hàm số  $f(x) = 1/x^p$ . Hàm này đơn điệu giảm đến 0 khi  $n \rightarrow \infty$ ,  $f(n) = 1/n^p$ .

Hơn nữa  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  hội tụ khi  $p > 1$ , phân kỳ khi  $p \leq 1$ . Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{hội tụ khi } p > 1 \\ \text{phân kỳ khi } p \leq 1 \end{cases}$$

Đặc biệt, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  phân kỳ, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  hội tụ. (L. Euler chỉ ra

rằng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , xem Ví dụ 4.29). #

**Ví dụ 4.11.** Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{\alpha}}{n^n}, (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \beta, \left(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Giải. (i) Ta có } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^{\alpha}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^{\alpha}} = (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1}.$$

\*  $\alpha > 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ : Chuỗi phân kỳ.

\*  $\alpha = 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ : Chuỗi hội tụ.

\*  $\alpha < 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ : Chuỗi hội tụ.

Tóm lại, chuỗi hội tụ  $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$ .

(ii) Ta có  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{2/n}} \sin^2 \beta \rightarrow 2 \sin^2 \beta \quad (n \rightarrow \infty)$ .

\*  $\sin^2 \beta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$ : Chuỗi phân kỳ

\*  $\sin^2 \beta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \beta < \frac{\pi}{4}$ : Chuỗi hội tụ.

\*  $\sin^2 \beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$ . Chuỗi trở thành  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , là chuỗi hội tụ (p-chuỗi với  $p = 2 > 1$ ).

Tóm lại, chuỗi hội tụ  $\Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ . #

### - Yêu cầu SV chuẩn bị:

Đọc trước TL[1], tr 275 – 277: Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

Tự đọc TL [1]: VD 4.19 (b); VD 4.23(b); VD 4.24 (b, c, d); VD 4.25(a, b, c, d); 4.5.7 (Ví dụ khác) (a, b, c); VD 4.27; VD4.29 (b).

#### Bài tập về nhà cho cả Chương 4

Trợ: 1( 2, 5, 11, 12, 13, 18, 26); 2, 3( 1, 5, 9, 12); 5(b, f).

Chính: 1(28, 29, 30); 11(f); 12(c); 14 (c  $\rightarrow$  l, Chữa: c, e, f, i, j, l); 15(a, b, c); 16(a, b); 18(d, e); 21; 23 (c, e); 24(a, b); 26(a  $\rightarrow$  i, Chữa: a, c, e, h) 27(a  $\rightarrow$  f, Chữa: a, c, d, f); 33(a, c); 34(a, b, c).

•BS 1.  $f(x) = \ln(1+2x)$ . Tính đạo hàm  $f^{(2000)}(0)$ .

•BS 2. Xét sự hội tụ  $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$

•BS 3. Cho chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n$

Tính tổng riêng thứ 5 tại  $x = 0$ . b) Tìm miền hội tụ của chuỗi.

### **Bài giảng 12: Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ - Chuỗi hàm số**

#### Chương 4: Chuỗi

Mục: § 4.3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ (1t)

§ 4.4. Chuỗi hàm số (1t)

Bài tập: Chuỗi số dương (2 tiết)

Chuỗi có dấu tùy ý (1 tiết)

Tiết thứ: 56 – 60

Tuần thứ: 12

### - Mục đích, yêu cầu:

- Vận dụng được tiêu chuẩn Leibniz
- Thấy mối quan hệ giữa hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ
- Nắm được khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm số
- Nắm được sự hội tụ của các chuỗi quen thuộc: Chuỗi điều hòa, điều hòa đan dấu, chuỗi hình học, p-chuỗi

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

**- Nội dung chính:**

### § 4.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ (1 tiết)

#### 4.3.1. Chuỗi đan dấu

*Định nghĩa.* Với  $u_n > 0$ , các chuỗi

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \\ -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

gọi là các chuỗi đan dấu.

**Định lý 4.9 (Định lý Leibniz)**

Cho chuỗi đan dấu  $u_1 - u_2 + u_3 - \dots$  ( $u_n > 0$ ).

Nếu  $\{u_n\}$  là dãy đơn điệu giảm đến 0 thì chuỗi hội tụ đến tổng S.

Ngoài ra

$$|S_n| = \left| \sum_{i=1}^n u_i \right| < u_1; \quad |S| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \right| < u_1. \quad (4.6)$$

*Chứng minh.*  $S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}) > 0$ .

Vậy  $\{S_{2n}, n = 1, 2, \dots\}$  là dãy tăng, dương.

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} < u_1 \quad (4.7)$$

Vậy  $\{S_{2k}\}$  là dãy bị chặn trên. Từ đó nó hội tụ. Đặt  $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} + u_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = S.$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Bây giờ từ (4.7) ta thấy (4.6) đúng với n chẵn. Với n lẻ thì

$$S_{2k+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k} - u_{2k+1}) < u_1$$

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1} \geq 0 \geq -u_1.$$

Vậy (4.6) cũng xảy ra với  $n$  lẻ. □

**Ví dụ 4.13** (Chuỗi điều hòa đan dấu). Đó là chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Tất nhiên, đây là chuỗi đan dấu. Lại có  $\frac{1}{n} \downarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ); theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi hội tụ.

Số hạng tổng quát  $a_n = (-1)^{n-1} / n$  và các tổng riêng  $S_n$  của chuỗi thể hiện ở Hình 4.3. [1]. Dãy  $\{S_n\}$  có dạng zig - zag dần đến giới hạn khoảng 0.7. Sau này ta biết (xem mục 4.5.4c) tổng chính xác của chuỗi là  $\ln 2 = 0.693$ .

Tương tự, ta thấy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\lambda}$  hội tụ với  $\lambda > 0$ . #

#### 4.3.2. Hội tụ tuyệt đối

**Định lý 4.10.** Nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

hội tụ thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ.

*Chứng minh.* Theo tiêu chuẩn Cauchy với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  thì

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |u_i| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Lại theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ. □

**Ví dụ 4.14.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ .

Ta có  $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  là chuỗi hội tụ, vậy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$  hội tụ.

Từ đó chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$  hội tụ. #

**Định nghĩa.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  hội tụ, được gọi là hội tụ không tuyệt đối hay bán hội tụ (hay hội tụ điều kiện) nếu nó hội tụ nhưng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  không hội tụ.

Từ Định lý (4.10), hội tụ tuyệt đối là tính chất mạnh hơn: Một chuỗi hội tụ tuyệt đối sẽ hội tụ; trái lại, có những chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Như đã thấy ở Ví dụ 1.14, chuỗi điều hòa đan dấu hội tụ. Mặt khác,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  là chuỗi phân kỳ. Vậy chuỗi điều hòa đan dấu bán hội tụ.

Từ tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi số dương, ta nhận được định lý sau đây để khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

**Định lý 4.11.** Giả sử rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$  hoặc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$ .

Nếu  $\ell < 1$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ tuyệt đối,

Nếu  $\ell > 1$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

(Lưu ý rằng, với  $\ell = 1$  thì chưa có kết luận).

Về sự hội tụ tuyệt đối, ta có định lý đặc sắc sau đây:

**Định lý 4.12 (Định lý Riemann).** Nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng  $S$  thì khi thay đổi thứ tự các số hạng của nó một cách tùy ý, và (hoặc) nhóm một cách tùy ý các số hạng của chuỗi ta sẽ luôn luôn nhận được chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng  $S$ .

Nếu chuỗi đã cho bán hội tụ thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để nhận được chuỗi hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước; hay được một chuỗi phân kỳ; thậm chí, được một chuỗi phân kỳ ra vô hạn.

Như vậy, chuỗi hội tụ tuyệt đối có tính chất giống với tổng hữu hạn: Có thể hoán vị thứ tự các số hạng. Tính hội tụ tuyệt đối còn đảm bảo một số tính chất khác nữa giống với tổng hữu hạn như tính tích 2 chuỗi, thương 2 chuỗi ...

## § 4.4. CHUỖI HÀM SỐ (1 tiết)

### 4.4.1. Sự hội tụ, miền hội tụ

**Định nghĩa.** Cho dãy hàm số  $\{u_n(x)\}: u_1(x); u_2(x); \dots$  xác định trên tập  $X \subset \mathbb{R}$ . Tổng hình thức



$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots \quad (4.8)$$

được gọi là chuỗi hàm số,

$X$ : tập xác định,

$u_1(x)$ : số hạng thứ nhất,  $u_2(x)$ : số hạng thứ hai, ... ,

$u_n(x)$ : số hạng thứ  $n$  hay số hạng tổng quát.

Nếu không cho trước tập xác định, ta hiểu tập xác định  $X$  của chuỗi (4.8) là giao của tất cả các tập xác định của các số hạng  $u_n(x)$ .

Nếu  $x_0 \in X$  mà chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  hội tụ thì  $x_0$  được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (4.8). Tập các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ (hay tập hội tụ) của nó. Trái lại, nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  phân kỳ thì  $x_0$  được gọi là điểm phân kỳ.

Giá trị của tổng của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  với  $x$  nằm trên miền hội tụ được gọi là tổng của chuỗi.

**Ví dụ 4.15.** Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$

Nếu  $|x| < 1$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  : Chuỗi hội tụ

$|x| \geq 1$ : Chuỗi phân kỳ.

Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là  $(-1, 1)$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . #

**Ví dụ 4.16.** Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Chúng ta nhớ lại rằng khi dùng tiêu chuẩn tích phân ở Ví dụ 4.10 ta đã thấy với  $x > 1$  thì chuỗi hội tụ, với  $x \leq 1$  thì chuỗi phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là  $x > 1$ . Khi ấy, chuỗi hội tụ đến hàm  $\zeta(x)$ , gọi là hàm Riemann. #

#### 4.4.2. Hội tụ đều

Chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $x \in X$  được gọi là hội tụ đều trên tập  $D \subset X$  đến hàm số  $S(x)$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in D. \quad (4.9)$$

Như vậy, nếu chuỗi hội tụ đều thì dù  $\varepsilon$  cho trước có bé thế nào chẳng nữa, tổng riêng  $S_n(x)$  sẽ gần tổng  $S(x)$  của chuỗi một cách tùy ý, tại tất cả mọi điểm của  $D$ , nếu chỉ số  $n$  đủ lớn.

**Ví dụ 4.17.** Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$ .

Đây là chuỗi đan dấu. Hơn nữa  $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \downarrow 0, (n \rightarrow \infty) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy nó hội tụ. Chuỗi phần dư  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + k}$  của chuỗi này cũng là chuỗi đan

dấu, lại có,  $1/(x^2 + k) \downarrow 0$  (khi  $k \rightarrow \infty$ ). Theo Định lý 4.9,

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + k} \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2 + (n+1)} < \frac{1}{n}.$$

Nếu  $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$  thì  $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ : Chuỗi hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ . #

**Định lý 4.13** (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Nếu  $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D$  và chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ thì chuỗi

hàm

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ tuyệt đối và đều trên  $D$ .

**Ví dụ 4.18.** Cho chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ .

Ta có  $\left| \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ . Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ

đều trên  $\mathbb{R}$ . #

#### 4.4.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

**Định lý 4.14.** Giả sử với mọi  $n$  nguyên dương thì hàm  $u_n(x)$  liên tục

trên khoảng suy rộng  $D$  và chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ đều trên  $D$ . Khi đó

tổng  $S(x)$  của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  là hàm số liên tục trên  $D$ .

**Định lý 4.15.** Giả sử với mọi  $n$  thì hàm  $u_n(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ đều trên  $[a, b]$ . Khi đó tổng  $S(x)$  của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  là hàm số khả tích trên  $[a, b]$  và ta có

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4.10)$$

Nói ngắn gọn, nếu chuỗi của các hàm số liên tục là hội tụ đều thì ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi.

**Định lý 4.16.** Cho  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  là các hàm liên tục cùng các đạo hàm  $u'_n(x)$  của chúng trên khoảng  $(a, b)$ . Hơn nữa, giả sử rằng chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ và có tổng bằng  $S(x)$  trên  $(a, b)$ , còn chuỗi đạo hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  hội tụ đều trên  $(a, b)$ . Khi đó  $S(x)$  là hàm khả vi và

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in (a, b). \quad (4.11)$$

**Yêu cầu SV chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Chuỗi số dương (2 tiết)**

**Chuỗi có dấu tùy ý (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 279-282: Chuỗi hàm số

Tự đọc TL [1]: Định lý Riemann

### **Bài giảng 13: Chuỗi lũy thừa**

#### **Chương 4: Chuỗi**

Mục: § 4.5. Chuỗi lũy thừa (2t)

Bài tập: Chuỗi có dấu tùy ý (2 tiết)

Chuỗi hàm (1 tiết)

Tiết thứ: 61 - 65,

Tuần thứ: 13

**- Mục đích, yêu cầu:**

Tìm được bán kính hội tụ - miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Một số cách tìm MHT của các chuỗi hàm khác

**- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t
- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
- **Nội dung chính:**

#### § 4.5. CHUỖI LŨY THỪA (2 tiết)

##### 4.5.1. Khái niệm chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

trong đó  $x$  là biến, hằng số  $a_n$  là hệ số của  $x^n$ .

Tổng quát, cho trước  $x_0, a_n \in \mathbb{R}$ , chuỗi hàm số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots \quad (4.13)$$

được gọi là chuỗi lũy thừa của  $x - x_0$  (hay chuỗi lũy thừa tại  $x = x_0$ ).

Đặt  $X = x - x_0$ , chuỗi (4.13) trở thành  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ , lại có dạng (4.12). Vì thế chúng ta chỉ cần xét chuỗi lũy thừa dạng (4.12).

Chuỗi (4.12) luôn hội tụ tại  $x = 0$ . Về sự hội tụ của nó, chúng ta có:

**Định lý 4.17 (Abel).** Nếu chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hội tụ tại  $x_0 \neq 0$  thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm  $x$  mà  $|x| < |x_0|$ .

*Chứng minh.* Do chuỗi (4.12) hội tụ tại  $x = x_0$  nên số hạng tổng quát của nó có giới hạn 0. Vậy tồn tại số dương  $M$  sao cho  $|a_n x_0^n| < M, \forall n$ . Từ đó

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \forall n.$$

Lại thấy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  hội tụ với  $|x| < |x_0|$ . Áp dụng tiêu chuẩn so sánh, nhận được đpcm.  
□

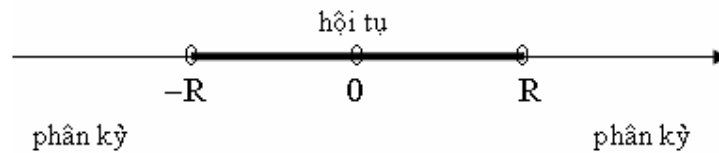
**Hệ quả.** Nếu chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  phân kỳ tại  $x_1$  thì nó cũng phân kỳ tại  $x$  mà  $|x| > |x_1|$ .

**Hệ quả.** Tồn tại số  $R \geq 0$  để chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hội tụ trong khoảng  $(-R, R)$ ; phân kỳ trong  $(-\infty, -R)$  và  $(R, +\infty)$ .

$R$  như thế được gọi là bán kính hội tụ; khoảng  $(-R, R)$  gọi là khoảng hội tụ.

**Nhận xét.** Từ Hệ quả, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa có một trong 4 dạng

$$(-R, R); \quad (-R, R]; \quad [-R, R); \quad [-R, R].$$



#### 4.5.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

**Định lý 4.18.** Nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{hoặc} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \quad (4.14)$$

thì bán kính hội tụ  $R$  của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  xác định bởi

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

#### Phương pháp tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Tìm bán kính hội tụ theo quy tắc trên;

Xét sự hội tụ của chuỗi tại đầu mút  $-R$  và  $R$ ;

Kết luận.

Tính chất sau cũng rất có ích khi tìm miền hội tụ.

**Tính chất.** Hai chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.17)$$

cùng hội tụ hay phân kỳ, có thể trừ ra tại điểm  $x = 0$ .

(Nhân hay chia chuỗi lũy thừa với lũy thừa của biến  $x$  được chuỗi có cùng miền hội tụ, có thể trừ ra tại  $x = 0$ ).

### Phương pháp tìm miền hội tụ của chuỗi tùy ý

Cách I: “Lũy thừa hóa”, đưa chuỗi đã cho về chuỗi lũy thừa.

Cách II: Coi  $x$  là tham số,  $x$  cố định thuộc tập xác định, chuỗi hàm trở thành chuỗi số. Dùng các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn D'Alembert, Cauchy ... với chuỗi số để xét sự hội tụ (phải biện luận).

*Nhận xét.* Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy với chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  ( $x$  là tham số) mà ta nhận được  $\ell > 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| = \infty$ . Từ đó,

chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  phân kỳ.

**Ví dụ 4.19.** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n (x-2)^{2n}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

(i) Đây là chuỗi lũy thừa, hơn nữa  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

Vậy  $R = 1/2$  và khoảng hội tụ của chuỗi là  $(-1/2; 1/2)$ .

Tại  $x = -1/2$ , chuỗi trở thành  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$  Đây là chuỗi điều hòa đan dấu nên nó hội tụ.

Tại  $x = 1/2$ , chuỗi trở thành  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ , là chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi đã cho là  $[-1/2, 1/2)$ .

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n (x-2)^{2n}} = \frac{(x-2)^2}{2}.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi phân kỳ khi  $\frac{(x-2)^2}{2} > 1$ , hội tụ khi

$$\frac{(x-2)^2}{2} < 1, \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x-2 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}.$$

\* Tại  $x = 2 \pm \sqrt{2}$  chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^n.$$

Ta không thể dùng tiêu chuẩn D'Alembert cũng như Cauchy cho chuỗi này vì đều nhận được  $\ell = 1$ , song nhận thấy rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n+1} \right]^{\frac{n}{2n+1}} = e^{1/2} \neq 0: \text{Chuỗi phân kỳ.}$$

$$\text{ĐS: } 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}.$$

**Cách II.** Đặt  $t = (x-2)^2 \geq 0$  được chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n t^n$  và khảo sát

như thông thường. (Tuy nhiên với chuỗi lũy thừa này, ta không cần xét tại mút trái  $t = -2$  của khoảng hội tụ  $(-2, 2)$  vì  $t \geq 0$ ).

(iii) Rõ ràng không thể lũy thừa hóa được chuỗi này. Ta có

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}} \right| = \begin{cases} |x| & \text{khi } |x| < 1 \\ 1/|x| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Vậy với  $x \neq \pm 1$  thì  $\ell < 1$ : Chuỗi hội tụ.

\* Xét tại  $x = \pm 1$  được chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{2}$ , chuỗi phân kỳ vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

$$\text{ĐS: } (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

#

#### 4.5.3. Tính chất của chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa (4.12) với khoảng hội tụ  $(-R, R)$  và tổng của chuỗi là hàm  $S(x)$  trên  $(-R, R)$ .

**Định lý 4.19.** Chuỗi (4.12) hội tụ tuyệt đối trên khoảng hội tụ  $(-R, R)$ .

**Định lý 4.20.** Với  $[a, b] \subset (-R, R)$  tùy ý, chuỗi (4.12) hội tụ đều trên  $[a, b]$ .

(Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên đoạn tùy ý nằm trong khoảng hội tụ của nó).

**Định lý 4.21.** Tổng  $S(x)$  của chuỗi lũy thừa (4.12) là hàm số liên tục trên khoảng hội tụ  $(-R, R)$  của nó. Nếu chuỗi hội tụ tại mút trái (phải) của khoảng hội tụ thì tổng  $S(x)$  liên tục phía phải (trái) tại mút ấy.

**Định lý 4.22.** Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa (4.12) trên mọi đoạn  $[a; b]$  nằm trong khoảng hội tụ  $(-R, R)$  của nó:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \quad (4.18)$$

Đặc biệt,  $\forall x \in (-R, R)$ ,

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (4.19)$$

Một cách tương đương,

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (4.20)$$

Chuỗi ở vế phải của (4.19), (4.20) cũng có khoảng hội tụ là  $(-R, R)$ .

**Định lý 4.23.** Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa (4.12) tại mọi điểm trong khoảng hội tụ của nó:  $\forall x \in (-R, R)$  thì

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad (4.21)$$

Chuỗi ở vế phải của (4.21) cũng có khoảng hội tụ là  $(-R, R)$ .

**Hệ quả.** Có thể lấy đạo hàm (hoặc lấy nguyên hàm) một số tùy ý lần chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó; các chuỗi thu được có cùng khoảng hội tụ với khoảng hội tụ của chuỗi đã cho.

#### 4.5.4. Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa

**a. Vấn đề khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa (xem [1])**

**Định nghĩa.** \* Cho hàm số  $f(x)$  xác định tại điểm  $x_0$  và lân cận và có đạo hàm mọi cấp tại  $x_0$ . Chuỗi hàm

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (4.24)$$

được gọi là chuỗi Taylor của hàm  $f(x)$  tại  $x_0$ .

\* Nếu  $x_0 = 0$ , chuỗi Taylor trở thành

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (4.25)$$

được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm  $f(x)$ .

\* Nếu chuỗi Taylor (4.24) hội tụ tại một lân cận  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  của điểm  $x_0$  và hội tụ đến  $f(x)$  trong lân cận này:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots, x \in I$$

thì ta nói hàm  $f(x)$  khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận đã nêu của  $x_0$ .



Từ phân tích trên ta nhận được định lý sau đây:

**Định lý 4.24** (Tính duy nhất của khai triển). Nếu  $f(x)$  có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong một lân cận nào đó của điểm  $x_0$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

thì  $f(x)$  khả vi vô hạn tại lân cận này và chuỗi ở vế phải chính là chuỗi (4.24).

**b. Điều kiện để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor** (☀)

**c. Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad x \in [-1, 1].$$

Dùng các khai triển Maclaurin ở trên, đôi khi ta nhanh chóng nhận được khai triển của hàm số. Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 4.21.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số  $y = \frac{x^3}{3+x}$ .

$$\begin{aligned} \text{Giải. } y &= \frac{x^3}{3} \frac{1}{(1+(x/3))} = \frac{x^3}{3} (1 - (x/3) + (x/3)^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3^2} x^4 + \frac{1}{3^3} x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (-1)^{n+1} x^{n+2}. \quad \# \end{aligned}$$

#### 4.5.5. Ứng dụng

**a. Tính gần đúng giá trị biểu thức.** Xem mục 2.4.3.

**b. Tính đạo hàm tại điểm cho trước.** Dùng các khai triển quen biết có thể ta tìm được khai triển Taylor của hàm  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Khi đó tìm các đạo hàm của hàm này tại  $x_0$  như sau:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = a_n n! \quad (4.28)$$

**Ví dụ 4.22.** Cho hàm số  $f(x) = \sin x^2$ . Tính đạo hàm  $f^{(2000)}(0)$ .

*Giải.*  $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \Rightarrow \sin x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{4n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$

$$4n - 2 = 2000 \Leftrightarrow n = 500.5 \text{ không nguyên. Vậy } f^{(2000)}(0) = 0.$$

Ngoài ra ta có

$$\begin{cases} a_{2k+1} = a_{4k} = 0 \\ a_{8k+2} = \frac{1}{(4k+1)!} \\ a_{8k+6} = \frac{-1}{(4k+3)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{(2k+1)}(0) = y^{(4k)}(0) = 0 \\ y^{(8k+2)}(0) = \frac{1}{(4k+1)!} (8k+2)! \\ y^{(8k+6)}(0) = \frac{-1}{(4k+3)!} (8k+6)! \end{cases} \quad \#$$

#### 4.5.6. Tính tổng một số chuỗi (☼)

##### a. Sử dụng trực tiếp các chuỗi quen biết

Ba chuỗi thông dụng nhất là

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1) :$$

“chuỗi hình học” hay “chuỗi cấp số nhân”

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad : \text{ “chuỗi e – mũ”}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1) \dots : \text{ “chuỗi loga”}.$$

##### b. Đạo hàm hay tích phân chuỗi quen biết hay chuỗi đã cho

*Bước 1:* Đưa ra một khai triển quen biết, ví dụ

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1, 1).$$

*Bước 2 (nếu cần):* Đạo hàm hay tích phân 2 vế trên khoảng hội tụ, ví dụ

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots \quad x \in (-1, 1),$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1).$$

*Bước 3 (nếu cần):* Biểu diễn chuỗi đã cho thông qua những chuỗi này.

*Bước 4 (nếu cần):* Thay  $x = x_0$  thích hợp.

Cũng có thể ta làm các bước ở trên nhưng với chuỗi đã cho. Nhớ rằng việc lấy đạo hàm thường dễ hơn lấy tích phân.

Đạo hàm chuỗi đã cho  $\Leftrightarrow$  Tích phân chuỗi quen biết.

Đạo hàm chuỗi quen biết  $\Leftrightarrow$  Tích phân chuỗi đã cho.

*c. Tách chuỗi đã cho thành tổng*

**Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: **Chuỗi có dấu tùy ý (2 tiết)**

**Chuỗi hàm (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 302-306: Chuỗi Fourier

Tự đọc TL [1]: Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Tính tổng một số chuỗi

## **Bài giảng 14: Chuỗi Fourier**

### Chương 4: Chuỗi

Mục: Bài tập: Chuỗi lũy thừa (1 tiết)

§ 4.6. Chuỗi Fourier (2t)

Bài tập: Chuỗi Fourier (1t)

Tiết thứ: 66 - 70,

Tuần thứ: 14

#### **- Mục đích, yêu cầu:**

Khai triển hàm thành chuỗi lượng giác

Khai triển hàm theo các hàm sin hoặc cosin

#### **- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

**- Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

**- Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

#### **- Nội dung chính:**

**BÀI TẬP: Chuỗi hàm, Chuỗi lũy thừa (2 tiết)**

**§ 4.6. CHUỖI FUORIER (2 tiết)**

#### 4.6.1. Chuỗi lượng giác

*Định nghĩa.* Chuỗi hàm

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.31)$$

trong đó  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$  được gọi là chuỗi lượng giác.

Hai định lý sau đây nêu lên những tính chất khởi đầu của chuỗi lượng giác.

**Định lý 4.26.** Nếu hai chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  hội tụ thì chuỗi lượng giác (4.31) hội tụ tuyệt đối và đều trên  $\mathbb{R}$ .

*Chứng minh.* Ta có

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass ta thu được đpcm.  $\square$

**Định lý 4.27.** Nếu  $a_n \downarrow 0$  và  $b_n \downarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) thì chuỗi lượng giác (4.31) hội tụ tại  $x \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

#### 4.6.2. Chuỗi Fourier

##### a. Chuỗi Fourier của hàm số

**Bổ đề.** Cho  $p, q$  là những số nguyên bất kỳ. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \, dx &= 0; & \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \, dx &= 0 \quad (p \neq 0); \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin qx \, dx &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, dx &= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \pi, & p = q \neq 0 \\ 2\pi, & p = q = 0; \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, dx &= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 0, & p = q = 0 \\ \pi, & p = q \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Bây giờ giả sử rằng hàm số  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  và có thể khai triển được thành chuỗi lượng giác dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Giả sử có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi ở vế phải thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = a_0 \pi.$$

$$\text{Vậy } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Nhân hai vế của (4.33) với  $\cos kx$ ,  $k=1,2,\dots$  và giả sử rằng chuỗi thu được ở vế phải có thể lấy tích phân từng số hạng, ta đi đến:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \\ &= 0 + a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos kx dx + 0 = a_k \pi \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \end{aligned}$$

Lại nhân hai vế của (4.33) với  $\sin kx$ ,  $k=1,2,\dots$  và giả sử rằng chuỗi thu được ở vế phải có thể lấy tích phân từng số hạng, ta được

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx \right) \\ &= 0 + 0 + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx dx = b_k \pi. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Tóm lại, các hệ số  $a_i, b_i$  phải thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.34)$$

**Định nghĩa.** Cho hàm  $f(x)$  tuần hoàn, khả tích trên đoạn  $[-\pi, \pi]$ . Các hệ số  $a_n, b_n$  xác định theo (4.34) được gọi là hệ số Fourier của hàm  $f(x)$ . Chuỗi lượng giác tương ứng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm  $f(x)$ .

**Nhận xét.** Nếu hàm  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

Vậy, khi tính hệ số Fourier, ta có thể lấy tích phân trên đoạn bất kỳ có độ dài  $2\pi$ .

**Tính chất.**

Nếu thêm điều kiện  $f(x)$  là hàm chẵn thì:

$$\begin{cases} b_n = 0, & n = 1, 2, \dots \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.36)$$

Nếu thêm điều kiện  $f(x)$  là hàm lẻ thì:

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.37)$$

**Chứng minh.** Nếu hàm  $f(x)$  chẵn thì hàm  $f(x)\cos nx$  chẵn, hàm  $f(x)\sin nx$  lẻ. Trái lại, nếu  $f(x)$  lẻ thì hàm  $f(x)\cos nx$  lẻ, hàm  $f(x)\sin nx$  chẵn. Sử dụng Ví dụ 3.22 ta nhận được đpcm.  $\square$

### **b. Điều kiện đủ để có khai triển Fourier**

**Định nghĩa.** Hàm số  $f(x)$  được gọi là đơn điệu từng khúc trên đoạn  $[a, b]$  nếu có một số hữu hạn điểm  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  sao cho trên mỗi khoảng  $(a_0, a_1); \dots; (a_{n-1}, a_n)$  hàm  $f(x)$  là đơn điệu.

**Tính chất.** Hàm bị chặn và đơn điệu từng khúc chỉ có thể có các điểm gián đoạn loại một.

### **Định lý 4.28 (Định lý Diriclet)**

Nếu hàm  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ , đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên  $\mathbb{R}$  đến tổng  $S(x)$ :

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.38)$$

Hơn nữa,

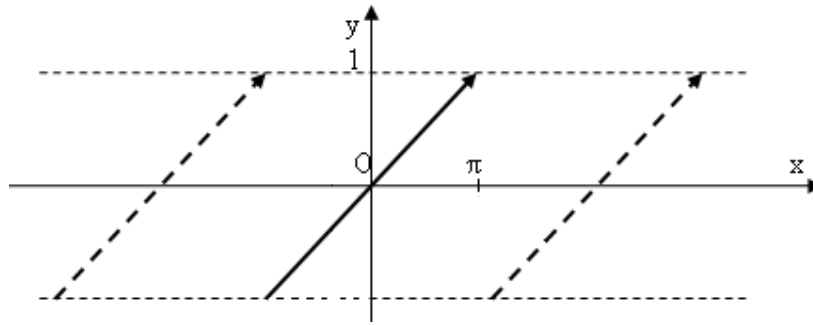
$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x_0 \text{ là điểm liên tục của } f(x), \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{nếu } x_0 \text{ là điểm gián đoạn của } f(x). \end{cases}$$

**Lưu ý.** Để đơn giản, ta vẫn viết công thức (4.38) dưới dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.39)$$

với chú ý như đã nêu.

**Ví dụ 4.26.** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  biết rằng trên khoảng  $[-\pi, \pi)$  thì  $f(x) = x$ .



**Hình 4.6.** Hàm  $y = x$ ,  $x \in [-\pi, \pi)$  và thác triển tuần hoàn của nó

Ta nhận thấy rằng hàm này thỏa mãn mọi điều kiện của Định lý Diriclet, vậy có thể khai triển nó thành chuỗi Fourier. Ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \dots = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right).$$

Lưu ý rằng tại  $x = \pi$  tổng của chuỗi bằng

$$S(\pi) = \frac{1}{2} [f(\pi+0) + f(\pi-0)] = 0.$$

Tương tự,  $S(-\pi) = 0$ .

#

### c. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $2\ell$

Giả sử hàm  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\ell$ , đơn điệu từng khúc, bị chặn. Bằng phép đổi biến

$$x' = \frac{\pi}{\ell} x \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{\pi} x' \quad (x: -\ell \rightarrow \ell \Rightarrow x': -\pi \rightarrow \pi)$$

ta được  $f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi} x'\right) = F(x')$ .

Thế thì  $F(x')$  là hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ , đơn điệu từng khúc, bị chặn. Vậy ta có thể khai triển nó thành chuỗi Fourier:

$$F(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx' + b_n \sin nx')$$

hay

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (4.40)$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x') dx' = \dots = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x') \cos nx' dx' = \dots = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x') \sin nx' dx' = \dots = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \end{aligned} \quad (4.41)$$

**Ví dụ 4.27.** Khai triển hàm  $f(x) = |\cos x|$  thành chuỗi Fourier.

*Giải.* Hàm  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $\pi$ . Hơn nữa, nó là hàm chẵn nên  $b_n = 0, \forall n = 1, 2, \dots$  Theo (4.41),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi/2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2nx dx \\ &= \frac{4}{\pi \cdot 2} \int_0^{\pi/2} [\cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x] dx = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\text{Vậy} \quad |\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Vì hàm  $f(x) = |\cos x|$  liên tục nên công thức trên đúng với mọi  $x$ . #

#### ***d. Khai triển hàm số bất kỳ thành chuỗi Fourier***

Giả sử  $f(x)$  là hàm đơn điệu từng khúc, bị chặn trên  $[a, b]$ . Ta xây dựng một hàm số  $g(x)$ :



- Tuần hoàn chu kỳ  $T = 2\ell \geq b - a$ ;
- Đơn điệu từng khúc, bị chặn;
- $g(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ .

Rõ ràng có nhiều hàm như vậy. Ta gọi việc làm trên là thác triển tuần hoàn hàm  $f(x)$  đã cho.

Khi đó hàm  $g(x)$  khai triển được thành chuỗi Fourier, tổng của chuỗi bằng  $g(x)$ , và do đó bằng  $f(x)$  tại những điểm liên tục của hàm  $f(x)$ .

Đặc điểm của chuỗi thu được là:

- Nếu hàm  $g(x)$  chẵn: Chuỗi chỉ gồm toàn hàm số cosin;
- Nếu hàm  $g(x)$  lẻ: Chuỗi chỉ gồm toàn hàm số sin.

**Ví dụ 4.28.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Hãy khai triển hàm này thành chuỗi Fourier sao cho chuỗi thu được

(a) chỉ chứa hàm số sin; (b) chỉ chứa hàm số cosin.

*Giải.* (a) Xét hàm  $g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ , tuần hoàn chu kỳ 4 và

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2] \\ -f(-x), & x \in [-2, 0] \end{cases}$$

Hàm này đơn điệu từng khúc, bị chặn, tuần hoàn chu kỳ  $2\ell = 4$  nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. Hơn nữa, hàm  $g(x)$  lẻ nên chuỗi chỉ chứa hàm số sin.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 g(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \dots = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^2} (-1)^{k-1}, & n = 2k-1 \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy 
$$g(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}. \quad (*)$$

Trên đoạn  $[0, 2]$ , tổng của chuỗi bằng  $f(x)$ .

(b) Bây giờ đặt 
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ f(-x), & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Hàm  $g(x)$  chẵn, vậy  $b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$  Ta cũng tính được  $a_n$ .

Từ đó ta được

$$g(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \left[ \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{4^2} \cos \frac{4\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} - \frac{2}{6^2} \cos \frac{6\pi x}{2} \dots \right] \quad (**)$$

Vì  $g(x)$  liên tục nên đồng nhất thức xảy ra với mọi  $x$ . Từ đó khai triển trên cũng chính là khai triển của  $f(x)$  trên  $[0, 2]$ .  
#

**Nhận xét.** (i) Chuỗi hàm số (\*) có các hệ số cỡ  $\frac{1}{n}$ , trong khi đó chuỗi hàm số (\*\*) có các hệ số cỡ  $\frac{1}{n^2}$ . Chuỗi (\*\*) hội tụ nhanh hơn.

(ii) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm  $f(x)$  liên tục thì các hệ số Fourier của nó có cấp VCB  $\frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \geq 2$ . Từ đó chuỗi Fourier hội tụ đều.

Trái lại, các hệ số Fourier của hàm gián đoạn có cấp VCB  $1/n$ .

### ***e. Áp dụng để tính tổng của một số chuỗi***

**Ví dụ 4.29.** Cho hàm số  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ , và  $f(x) = x^2$  với  $x \in [-\pi, \pi]$ . Hãy khai triển hàm  $f(x)$  thành chuỗi Fourier. Dựa vào đó tính

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

**Giải.** Hàm  $f(x)$  thỏa mãn các điều kiện khai triển thành chuỗi Fourier. Nó là hàm chẵn, vậy  $b_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \dots = 4(-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Các tổng riêng  $S_2$  và  $S_5$  của chuỗi thể hiện ở Hình 4.7.

$$* x = 0: 0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \Rightarrow S_a = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$* x = \pi: f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S_b = \left( \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$* S_c = \frac{1}{2} (S_a + S_b) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ta ghi lại kết quả đẹp đẽ trên để sử dụng sau này.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{6}, \\ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{12}, \\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned} \quad (4.42) \quad \#$$

## TÓM TẮT CHƯƠNG 4

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$  : Chuỗi hình học, hội tụ  $\Leftrightarrow |q| < 1$ .
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  : Chuỗi điều hoà, phân kỳ
- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$  : Chuỗi điều hoà đan dấu, hội tụ.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1^p + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$  :  $p$  – chuỗi, hội tụ  $\Leftrightarrow p > 1$ .
- Chuỗi số dương phân kỳ thì phân kỳ tới vô cùng.
- **Tiêu chuẩn so sánh**

$v_n \sim u_n$ ,  $u_n, v_n > 0$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

- **Tiêu chuẩn D'Alembert.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  là chuỗi số dương,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ .

$\ell < 1$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ;  $\ell > 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

- **Tiêu chuẩn Cauchy.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  là chuỗi số dương,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .

$\ell < 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ;  $\ell > 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

- **Tiêu chuẩn tích phân.**  $f(x) \geq 0$  liên tục, đơn điệu giảm trên  $[a, +\infty)$ .

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ (} u_n = f(n) \text{)} \text{ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.}$$

• **Tiêu chuẩn Leibniz.**  $u_n \downarrow 0$  thì chuỗi đan dấu  $u_1 - u_2 + u_3 - \dots$  hội tụ.

• **Hội tụ tuyệt đối**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ; } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ được gọi là hội tụ tuyệt đối.}$$

• **Hội tụ đều.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $x \in X$  hội tụ đều trên  $D \subset X$  đến  $S(x)$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

• **Tiêu chuẩn Weierstrass**

$$|u_n(x)| \leq a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ hội tụ tuyệt đối, đều trên } D.$$

• **Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.** Một trong 4 dạng  $(-R, R)$ ,  $(-R, R]$ ,  $[-R, R)$ ,  $[-R, R]$ ;  $R$ : bán kính hội tụ,  $(-R, R)$ : khoảng hội tụ.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \text{ hoặc } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}.$$

• Có thể lấy đạo hàm (hoặc lấy nguyên hàm) một số tùy ý lần chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó; các chuỗi thu được có cùng khoảng hội tụ với khoảng hội tụ của chuỗi đã cho.

• **Khai triển Taylor**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

• **Tính đạo hàm tại 1 điểm.**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = a_n n!$

• **Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp**

• **Tính tổng của chuỗi hàm:** Dùng các chuỗi quen biết - Đạo hàm hay TP chuỗi quen biết hay chuỗi đã cho - Tách chuỗi đã cho thành tổng.

• **Chuỗi Fourier.**

\*  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ , đơn điệu từng khúc, bị chặn:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

\*  $f(x)$  tuần hoàn chu kỳ  $2\ell$ , đơn điệu từng khúc, bị chặn:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

### **\*CÔNG BỐ KẾT QUẢ** điểm Quá trình, điểm thường xuyên

Học viên thắc mắc – Giáo viên trả lời về điểm Quá trình – Thường xuyên

#### **Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:**

Làm bài tập theo kế hoạch: Chuỗi Fourier (1t)

Đọc trước TL[1], tr 307-310: Chuỗi Fourier cho hàm tùy ý

Tự đọc: TÓM TẮT CHƯƠNG 4

#### **Bài giảng 15: Ôn tập**

Chương 4: Chuỗi

- Mục: Bài tập: Chuỗi Fourier (1 tiết)  
Ôn tổng hợp (4t)

Tiết thứ: 71 - 75,

Tuần thứ: 15

#### **- Mục đích, yêu cầu:**

- \* Củng cố những bài tập cũ
- \* Hoàn thành những bài tập chưa chữa ở chương IV
- \* Duyệt lại có hệ thống các bài tập cả học phần
- \* Sẵn sàng để thi cuối học kỳ

#### **- Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

#### **- Nội dung chính:**

- Bài tập: Chuỗi Fourier (tiếp - 1tiết)

- Chữa các bài chưa có điều kiện chữa  
Làm lại các ví dụ chưa kịp giới thiệu (3 tiết)
- (Giáo viên làm là chính)**

- **Chuẩn bị thi:**
- Nhắc lại về các câu hỏi lý thuyết, cách học chúng
- Một số kinh nghiệm khi thi
- Nhắc lại tinh thần nghiêm túc trong thi cử
- Nhắc một số quy định trong kỳ thi
- Động viên tinh thần SV thi tốt

***Yêu cầu SV chuẩn bị:***

Nắm chắc thời gian thi + phòng thi + các quy chế thi