B-Tree

Nội dung

- Nhu cầu (Motivation)
- Định nghĩa (Definition)
- Các thao tác (Operations)
  - Searching
  - Insertion
  - Deletion
- Ứng dụng
- Bài tập

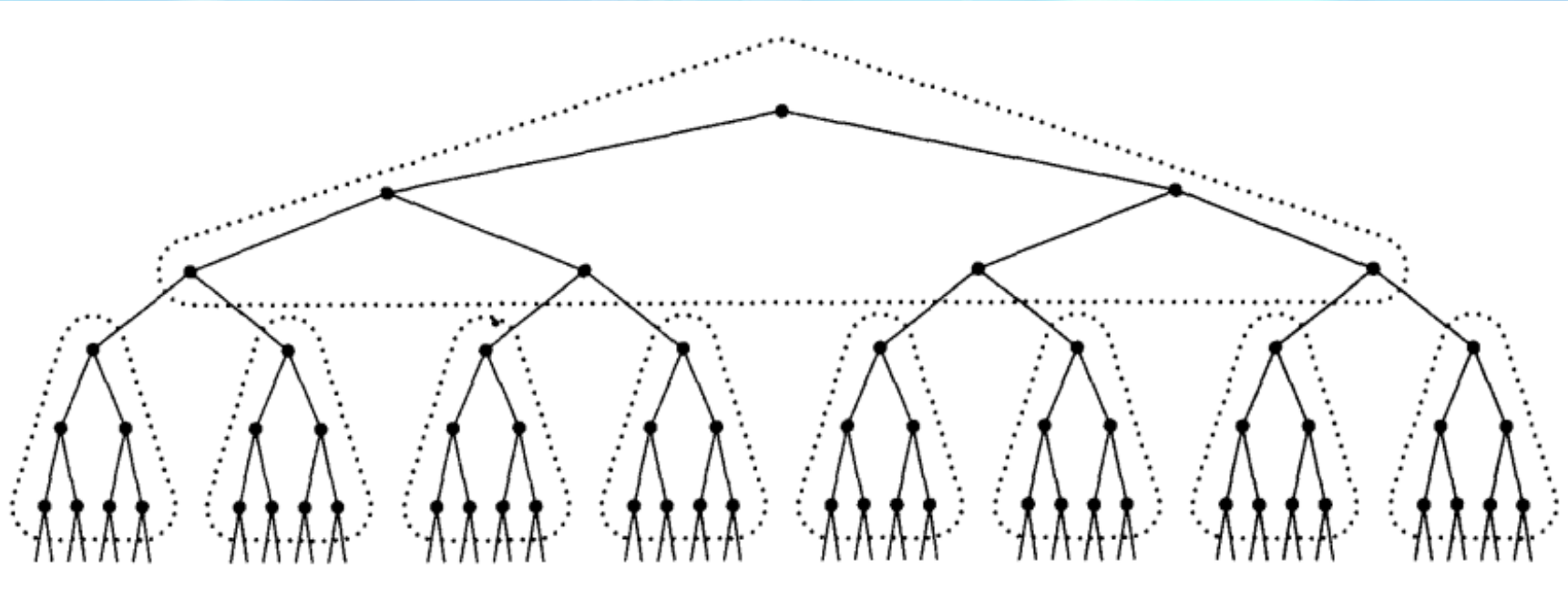
Motivation

- Độ phức tạp < O(log(n)) cho 3 thao thác
  - Searching
  - Insertion
  - Deletion
- Tối ưu trên đĩa cứng ⌨ ?
- ⮕ Các nhược điểm của BST?

Motivation

- Gom nhiều node thành một “super node”

- Knuth, D. E. (2007). The Art of Computer Programming: Sorting and searching. Vol. 3,



Definition

- BAYER, R., & MCCREIGHT, E. (1972). Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes. Acta Informatica, 1, 173-189.
- Cho số tự nhiên $k > 0$, B-Trees bậc m với $m = 2*k+1$ là một cây thỏa mãn các tính chất:
  i. Tất cả node lá nằm trên cùng một mức
  ii. Tất cả các node, trừ node gốc và node lá, có ***tối thiểu*** $k+1$ node con.
  iii. Tất cả các node có ***tối đa*** m con
  iv. Tất cả các node, trừ node gốc , có từ k cho đến $m - 1$ khóa (keys). Node gốc có từ 1 dến m-1 khóa.
  v. Một node không phải lá và có *n* khóa thì phải có n+1 node con.

Definition

- Bố trí khóa trong một node:
  - Tất cả các khóa $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ trong node được sắp thứ tự tăng dần. Tương ứng với n khóa này là n+1 con trỏ $p_0, p_1, \ldots, p_n$ trỏ đến các node con.
- Gọi $K(p_i)$ là tập các khóa trong node trỏ tới bởi con trỏ p_i , B-Trees đảm bảo:

$$\forall\ y \in K(p_0), y < k_0$$
$$\forall\ y \in K(p_i), k_{i-1} < y < k_i; i = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\forall\ y \in K(p_n), k_{n-1} < y$$

Definition

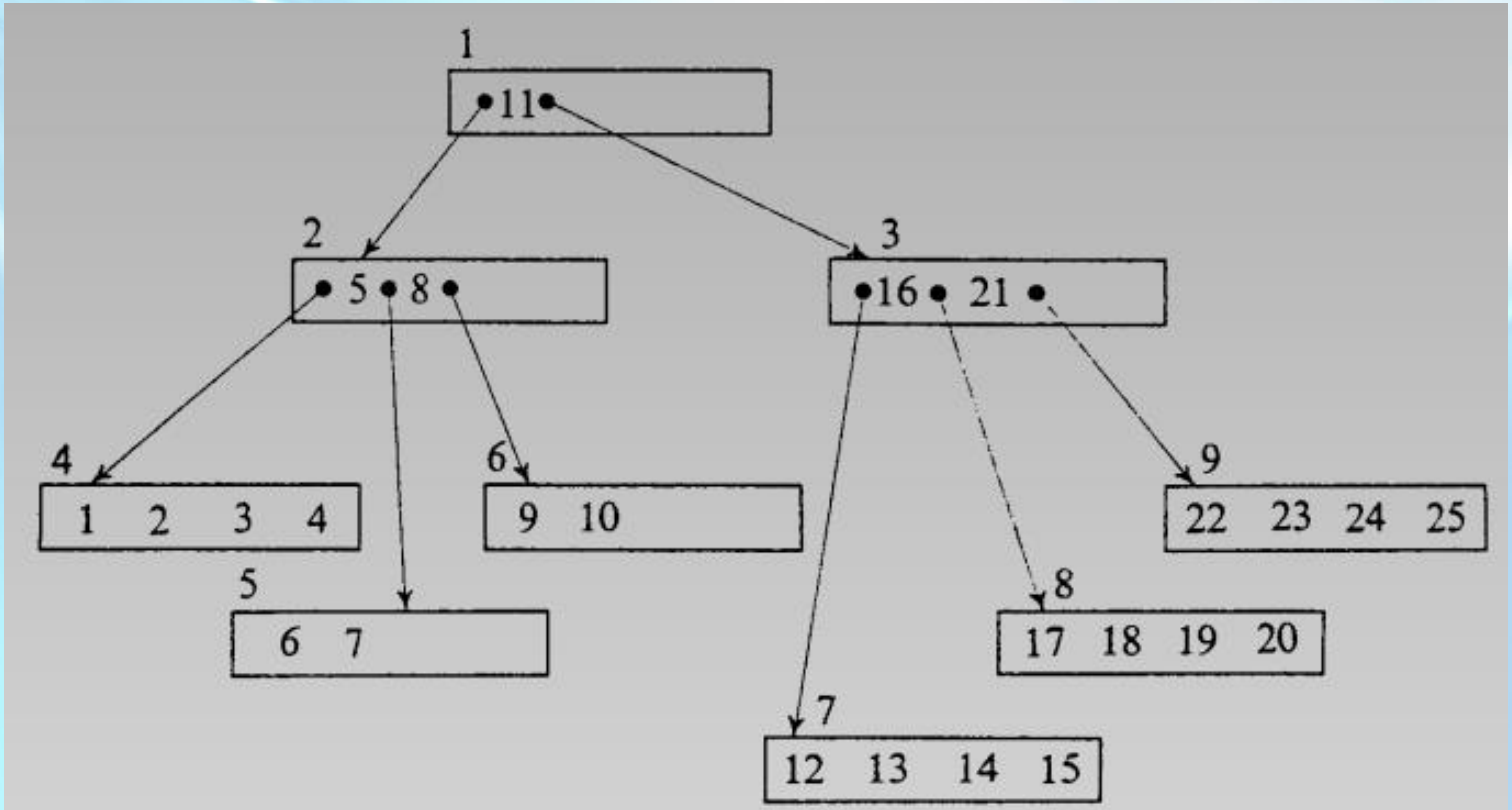


Fig. 2. A data structure in $\tau(2, 3)$ for an index

- B-Tree bậc 5, chiều cao là 3 (trong ví dụ của Bayer và McCreight)

Operations - class definition

- Cấu trúc dữ liệu cho B-Tree

```
class BTree_node{
        vector<my_data> keys;
        vector<BTree_node*>children;
        bool is_leaf(){ return children.empty(); }
        friend class BTree;
};
class BTree{
public:
        BTree(int initializing_m){
                if (initializing_m %2 == 0) { initializing_m = initializing_m/2
                +1; }
                this->_m = initializing_m;
                root = NULL;}
        bool empty(){
                return root == NULL;}
private:
        BTree_node *root;
        int _m;
```

Operations - searching

- INPUT
  - BTree_node *root
  - my_data x
- OUTPUT
  - true nếu tìm thấy khóa x trong B-Tree
  - false nếu không thấy
- Bước 2 cần sử dụng binary search

Nếu root == NULL, **return** false

Tìm i là số lượng khóa nhỏ hơn x

Nếu i == keys.size() và keys[i] == x, **return** true;

Nếu root là lá, **return** false

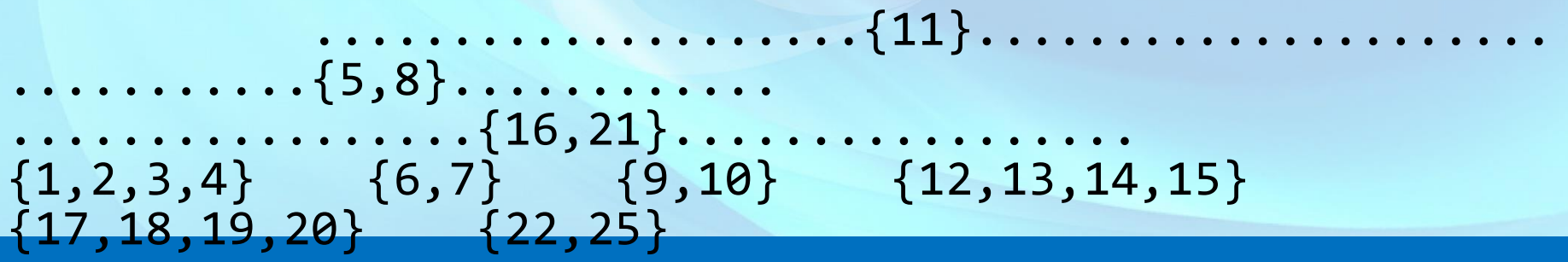
Root = children[i], **quay lại** bước (2)

Operations - searching

- Minh họa cài đặt thao tác tìm kiếm
  - Kết quả trả về của hàm?
  - Hàm std::lower_bound
- Hàm này phức tạp hơn thuật toán mô tả!

```
pair<int, vector<BTree_node*>> search(BTree_node*root, my_data key){
    vector<BTree_node*> path;
    auto p = root;
    while(p != NULL){
        path.push_back(p);
        auto i = lower_bound(p->keys.begin(), p->keys.end(), key);
        if (i != p->keys.end() && *i == key){
            return {i - p->keys.begin(), path}; ///FOUND
        } else {
            if (p->is_leaf() == 0) break;
            p = p->children[i - p->keys.begin()];
        }
    }
    return {-1, path};
}
```

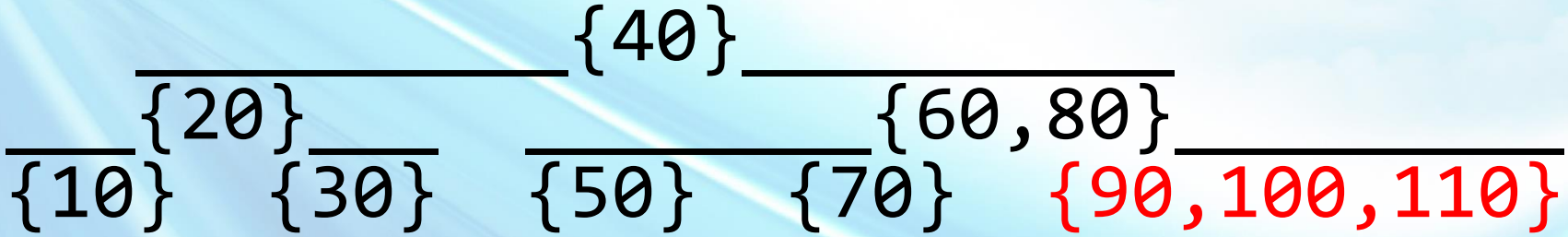
- Tìm giá trị 7
  - Root = {11}, i = 0
  - Root = {5,8}, i = 1
  - Root = {6,7}, i = 1, khóa keys[1] có giá trị 7 == 7 ==> Tìm thấy
- Tìm giá trị 14.5
  - Root = {11}, i = 1
  - Root = {16,21}, i = 0
  - Root = {12,13,14,15}, i = 3. Khóa keys[3] có giá trị 15 != 14.5 ==> Không tìm thấy



Operations - node splitting

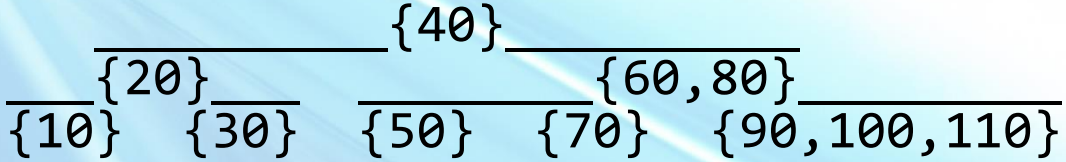
- Cho node N có cha là P và hiện tại N có **nhiều hơn** m-1 khóa
  - **Di chuyển** khóa ở giữa của N lên P
  - Tạo node N’ mới, **di chuyển** phân nửa số node và phân nửa số cây con còn lại sang N’
  - Thêm N’ vào danh sách cây con của P
- Thao tác splitting có thể lan truyền (propagate) đến nhiều mức phía trên

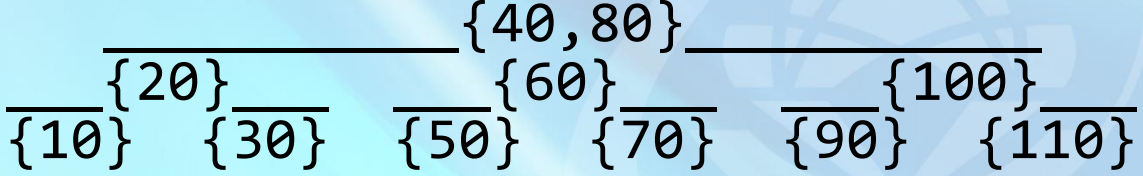
Operations - node splitting



- Cho B-Tree bậc 3, k = 1.
- Node in đỏ có 3 khóa

Operation – node splitting





- Sau khi split, 100 được đưa lên node cha.
- Node cha lại có quá nhiều khóa (vượt quá 3)
- 80 được đưa lên node cha
- B-Tree trở về đúng định nghĩa
- Nếu ta split node gốc??

Operation - node splitting

- Hàm kiểm tra và split node i có cha là p
  - Trường hợp không cần split

```
BTree_node* split(BTree_node *i, BTree_node*p){
    if(i->keys.size() < this->_m){//No need to split
        return NULL;
    }
    //Create new BTree_node
    auto n = new BTree_node;
    auto move_up = i->keys[i->keys.size()/2];
    move(i->keys.begin() + i->keys.size()/2 + 1, i->keys.end(),
    back_inserter(n->keys));
    if ( !i->is_leaf() ) {
        move(i->children.begin() + i->keys.size()/2+1, i-
        >children.end(), back_inserter(n->children));
    }
    if (!i->is_leaf()) i->children.resize(i->keys.size()/2+1);
    i->keys.resize(i->keys.size()/2);
    if (p == NULL){// if i has no parent
        p = new BTree_node;
        p->children.emplace_back(i);
    }
```

Operation - node splitting

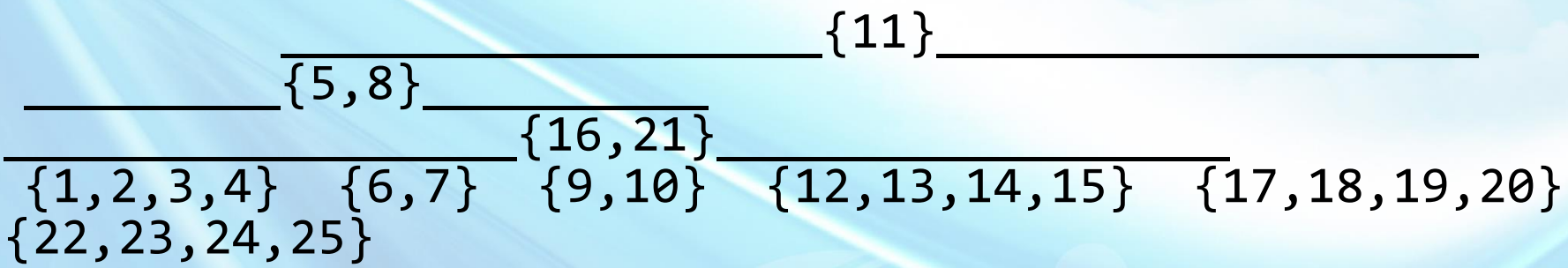
- INPUT:
  - Đường đi từ gốc đến một node
- TASK:
  - Tiến hành split node đó và lan truyền ngược nếu cần

```
BTree_node* split(vector<BTree_node*> &path){
        auto i = path.end() - 1;
        BTree_node*n;
        int move_up;
        while(i != path.begin() - 1){
                auto p = i - 1;
                if (i == path.begin()){
                        auto x = split(*i, NULL);
                        if (x == NULL) return path.front();
                        else return x;
                } else {
                        auto x = split(*i, *p);
                        if (x == NULL) return path.front();
                        else {
                                i = p; // Move up the path
                        }
                }
        }
}
```

Operation - insertion

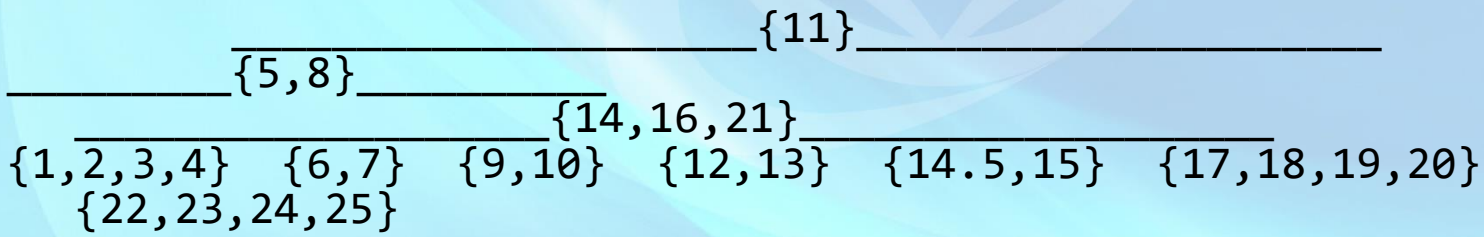
- Thao tác chèn luôn tiến hành tại lá
  - Tại sao?
  - Lá nào sẽ được chèn?
- Sau khi chèn
  - Split node lá nếu cần
  - Lan truyền lên mức trên nếu cần
- Đảm bảo 5 yêu cầu của B-Tree
- Tận dụng các hàm đã viết

Operation - Insertion



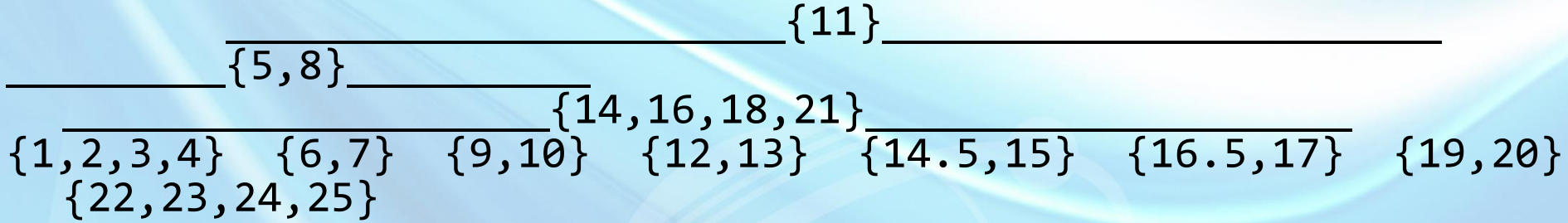
- B-Tree bậc 5

- Chèn thêm khóa 14.5

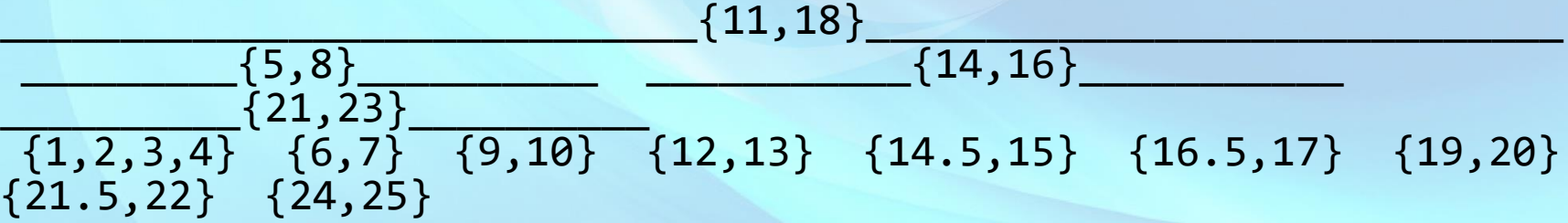


Operation - Insertion

- Chèn thêm khóa 16.5



- Chèn thêm khóa 21.5



Operations - proactive splitting

- Proactive splitting - preemptive splitting
  - Khi tìm node để thêm khóa mới, nếu gặp một node có vừa đủ m-1 khóa thì split luôn.
- Triệt tiêu lan truyền ngược
- Không tận dụng được hàm search
- Ưu nhược điểm khác ??

Operation - Catenation

- Node P có 02 người con N’ và N’’
  - lần lượt ở vị trí i và i + 1
- N’ có n’ khóa
- N’’ có n’’ khóa

P	…	k_{i-1}	k_i	k_{i+1}	…	
	…	p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	p_{i+2}	…

N’	k'_0	…	k'_{n-1}	
P.p_i	p'_0	p'_1	…	p'_n

N’’	k''_0	…	$k''_{n''-1}$	
P.p_{i+1}	p''_0	p''_1	…	$p''_{n''}$

Operations - Catenation

- Ta có thể gộp N’ và N’’ thành một node
- P mất đi một khóa và một cây con
  - Nếu P là node gốc??
- Các chỉ số được đánh lại sau khi gộp

P	…	k_{i-1}	k_{i+1}	…	
	…	p_{i-1}	p_i	p_{i+2}	…

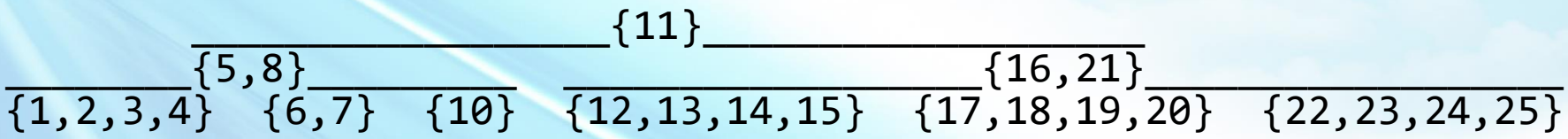
N’ (p_i)	k'_0	…	$k'_{n'}$	k_i	k''_0	…	$k''_{n''}$	
	p'_0	p'_1	…	$p'_{n'+1}$	p''_0	p''_1	…	$p''_{n''+1}$

Operations - Catenation

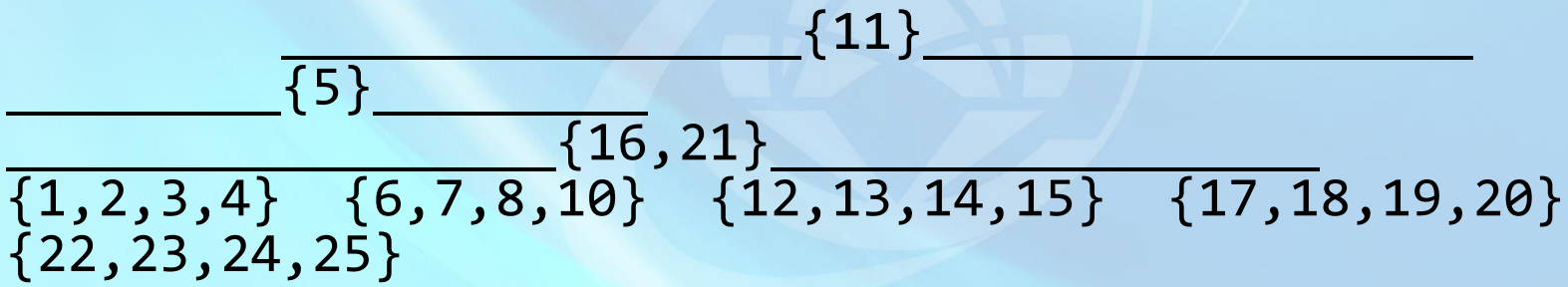
- Hàm *find_cat_partner* tìm node anh em có thể gộp
- Hàm *catenation* gộp node con ở vị trí icat với node con icat+1

```
int find_cat_partner(BTree_node* p, int ip){
        int s = p->children[ip]->keys.size();
        if (ip > 0 && p->children[ip - 1]->keys.size() + s < this->_m - 1)
                return ip - 1;
        if (ip < p->children.size()-1 && p->children[ip+1]->keys.size() + s < this->_m - 1)
                return ip;
        return -1;
}
my_data catenation(BTree_node* p, int icat){
        auto moved_key = p->keys[icat];
        p->children[icat]->keys.emplace_back(p->keys[icat]);
        move(p→children[icat+1]→keys.begin()
                , p→children[icat+1]→keys.end()
                , back_inserter(p->children[icat]->keys));
        move(p→children[icat+1]→children.begin()
                , p→children[icat+1]→children.end()
                , back_inserter(p->children[icat]->children));
        delete(p->children[icat+1]);
        p->keys.erase(p->keys.begin()+icat);
        p->children.erase(p->children.begin()+icat+1);
        return moved_key;
}
```

Operations - Catenation



- B-Tree bậc 5 có node {10} quá ít khóa
- Gộp node {6,7} và {10} thì node cha bị mất khóa 8



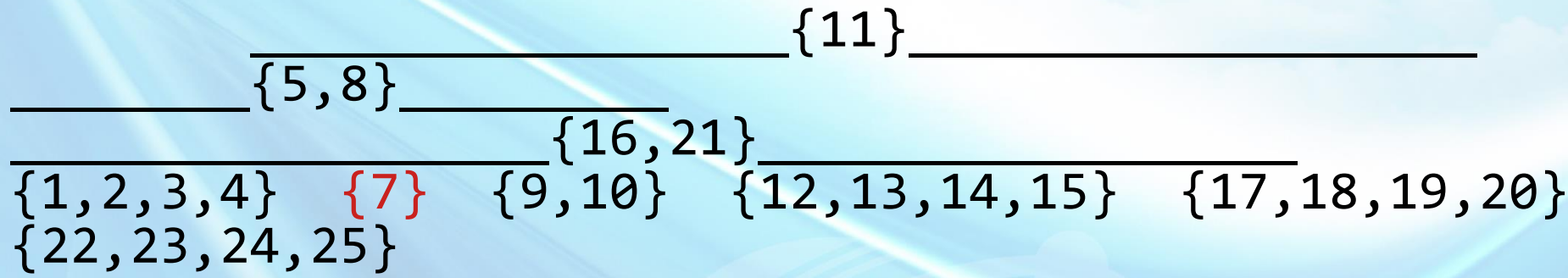
Operations - Underflow

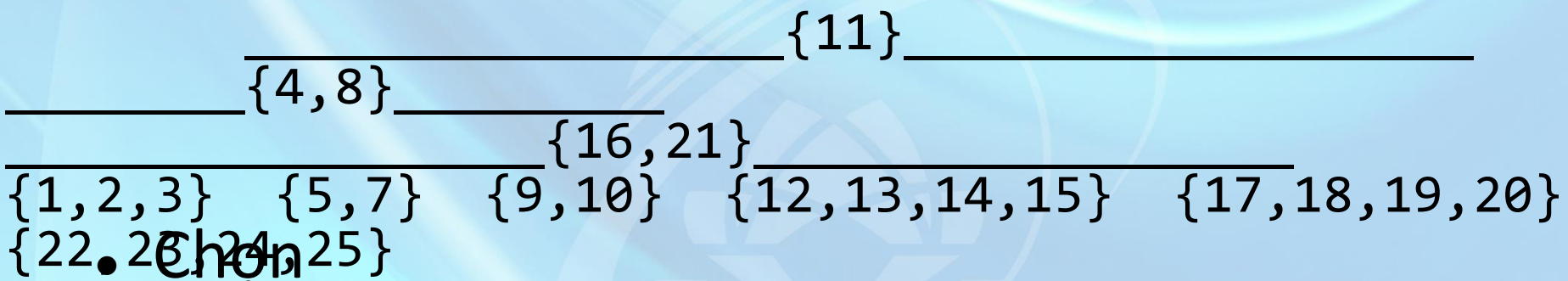
- P có 02 người con N’ và N’’
  - Một trong 02 node có ít hơn k khóa
  - Tổng số khóa trong 2 node lại > 2*k
- Node to sẽ nhường vài khóa và con cho node nhỏ => underflow

1)Catenate N’ và N’’ vào thành một node to

2)Split node to này thành 02 node đều nhau hơn

Operations - Underflow





- Chọn
  - underflow{1,2,3,4},{7} hoặc
  - catenate{7}+{9, 10}
- Tại sao underflow thì khóa 4 lại nằm ở node trên?

Operation - deletion

- Xóa bắt đầu từ lá
- Nếu khóa không nằm ở lá:
  - kiếm một **khóa thế mạng** ở lá
  - Swap
  - Xóa khóa ở lá
- Kiểm tra nếu cần thực hiện underflow và Catenation.

Operation - deletion

- Input: Kết quả tìm kiếm node cần xóa
- Tìm phần tử thế mạng và hoán đổi.

```
my_data find_replace_and_swap(int &idx,
vector<BTree_node*>&path){
        auto x = path.back();
        auto i = path.back()->children[idx];
        while(!i->is_leaf()){
            path.push_back(i);
            i = i->children.back();
        }
        path.push_back(i);
        auto back = i->keys.back();
        swap(x->keys[idx], i->keys.back());
        idx = i->keys.size() - 1;
        return back;
}
```

Operation - deletion

- Kiểm tra và thực hiện underflow, catenation nếu cần

```
BTree_node* check_for_underflow_and_cat(my_data
remove_key, vector<BTree_node*> path){
    auto i = path.end() - 1;
    auto p = i - 1;
    while(i != path.begin()){
        int ip = lower_bound((*p)->keys.begin(), (*p)-
        >keys.end(), remove_key)
        - (*p)->keys.begin();
        int iu = underflow_check(*p, ip);
        if (iu != -1){
            //If we can underflow, we do underflow first
            underflow(*p, iu); return *(path.begin());
        }
        //we check for catenation
        int icat = find_cat_partner(*p, ip);
        if (icat != -1){
        //The catenation propagate
```

Ứng dụng

- B-Tree có nhiều biến thể và cải tiến
  - B^+ -Tree
  - B^* -Tree
- Quản lý dữ liệu trên đĩa cứng, dữ liệu lớn

Ứng dụng

- File system - Hệ thống quản lý file trên đĩa cứng
  - Danh sách các block còn trống
  - File x đang nằm ở block số mấy?
- Windows:
  - NTFS, FAT32,...
- MacOS
  - HFS+
- Linux
  - Btrfs, Ext, xFS
- Other:
  - HFS, Reiser4, HAMMER, ...

Ứng dụng

- Database
  - Indexing - quản lý tập các khóa và dữ liệu
  - Rank, between, v.v…
- MySQL
- MariaDB
- MS-SQL
- MongoDB

Bài tập (1)

1. Theo định nghĩa thì không thể có B-Tree bậc 1 và 2. Tại sao Bayer và McCreight không định nghĩa loại B-Tree này??
2. Viết hàm thêm node trong B-Tree, không dùng chiến lược proactive splitting (tham khảo hàm search và split đã cho)
3. Viết hàm xóa node trong B-Tree (tham khảo hàm underflow, catenation đã cho)
4. (*)Tìm công thức tính chiều cao tối đa của B-Tree bậc m có N khóa
5. Tìm công thức tính chiều cao tối thiểu của B-Tree bậc m có N khóa

Bài tập (2)

1. Vẽ cây B-Tree bậc 5 khi lần lượt thêm các số từ 1-25.
   1. Không dùng proactive splitting?
   2. Dùng proactive splitting?
2. (*) Lần lượt thêm các khóa có giá trị 1,2, ..., n vào B-Tree. Tìm công thức tính số node của B-Tree trên theo *n*
3. Cho một danh sách các khóa. Vẽ B-Tree ít node nhất có thể chứa tất cả các khóa này
4. Cho một danh sách các khóa. Vẽ B-Tree nhiều node nhất có thể chứa tất cả các khóa này
5. Cho sẵn một B-Tree, tìm bậc và thứ tự các khóa

Bài tập (3)

1. Viết hàm đếm số node trong B-Tree
2. Viết hàm tạo ra một B-Tree bản sao, có cấu trúc y chang một B-Tree cho trước
3. Viết hàm xuất các khóa trong B-Tree theo thứ tự giảm dần
4. Viết hàm tìm khóa có giá trị lớn nhất mà nhỏ hơn x
5. Viết hàm tìm khóa có giá trị gần với x nhất
6. (*) Viết hàm tìm số lượng khóa nhỏ hơn x (thứ hạng của x)

1. Muốn thực hiện thao tác tìm thứ hạng với độ phức tạp O(Log(n)) cần thêm thông tin vào trong BTree_node