



TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
KHOA KỸ THUẬT MÁY TÍNH

IT012 – TỔ CHỨC VÀ CẤU TRÚC MÁY TÍNH II

# CHƯƠNG 3

## ĐẠI SỐ BOOLEAN

TRẦN ĐẠI DƯƠNG

*Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 09 tháng 09 năm 2022*



## Mục tiêu

- Nắm được các tiên đề và định lý của đại số Boolean
- Biết được các công luận lý
- Có thể tối ưu luận lý bằng Phương pháp đại số Boolean
- Có thể tối ưu luận lý bằng Phương pháp Karnaugh



# Nội dung

1. Đại số Boolean
2. Cổng luận lý
3. Tối ưu luận lý
4. Phương pháp Karnaugh
5. Câu hỏi và Bài tập



# Đại số Boolean (1/8) – Định nghĩa

- Đại số Boolean (luận lý nhị phân) là một cấu trúc đại số liên quan đến việc thao tác với các biến luận lý nhị phân (biến luận lý)
  - Biến luận lý chỉ mang 2 giá trị: 0 và 1, cao và thấp, đúng và sai, ...
  - Thao tác luận lý: AND ( $\cdot$ ,  $\&$ ), OR ( $+$ ,  $|$ ), NOT ( $\sim$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ )
- Ví dụ: A và B là 2 biến luận lý nhị phân:
  - $A \cdot B = A \& B = \text{AND}(A, B) = AB$
  - $A + B = A | B = \text{OR}(A, B)$
  - $\sim A = \bar{A}$



## Đại số Boolean (2/8) – Định nghĩa

- Một tập  $B$  khác rỗng cùng với các thao tác (phép toán) AND ( $\cdot$ ), OR ( $+$ ) và NOT ( $\bar{\phantom{x}}$ ) được gọi là một đại số Boolean nếu các tiên đề sau đây được thỏa mãn với mọi  $x, y, z \in B$ 
  - Tiên đề 1: Cấu trúc đóng với các phép toán  $\cdot$  và  $+$ . Nếu  $x, y \in B$  thì:  $(x + y) \in B$  và  $x \cdot y \in B$
  - Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa. Tồn tại 2 phần tử trung hòa khác nhau thuộc  $B$ , ký hiệu là 0 và 1 sao cho:
    - $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
    - $x + 0 = 0 + x = x$



## Đại số Boolean (3/8) – Định nghĩa

- Tiên đề 3: Tính giao hoán
  - $x \cdot y = y \cdot x$
  - $x + y = y + x$
- Tiên đề 4: Tính phân phối
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  - $x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$
- Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù. Với mọi  $x \in B$ , tồn tại duy nhất  $\bar{x} \in B$  sao cho:
  - $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$
  - $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$ $\bar{x}$  được gọi là phần tử bù của  $x$
- Tiên đề 6: Tồn tại ít nhất 2 phần tử  $x, y \in B$  sao cho  $x \neq y$



## Đại số Boolean (4/8) – Hàm Boolean

- Kết hợp các biến, hằng số, toán tử, dấu ngoặc tạo thành một **Biểu thức Boolean**.
  - Ví dụ:  $x1 + y(z' + 0)$
- Kết hợp theo thứ tự: 1 tên hàm, 1 dấu bằng và cuối cùng là 1 biểu thức Boolean sẽ cho chúng ta được một **Hàm Boolean (Hàm Boolean Dạng chuẩn)**
  - Ví dụ:  $f(x, y, z) = x1 + y(z' + 0)$



## Đại số Boolean (5/8) – Bảng chân trị

- **Bảng chân trị** (hay còn gọi là bảng tổ hợp) thể hiện mối quan hệ giữa giá trị của một hàm Boolean và các biến của hàm đó

- $2^n$  hàng ( $n$  là số biến)
- $n+1$  cột

$$f(x, y, z) = x + yz$$

*Liệt kê tất cả các tổ hợp có thể*

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

*Giá trị của hàm tương ứng với mỗi tổ hợp các biến*





# Đại số Boolean (6/8) – Dạng chính tắc

- Dạng chính tắc là dạng biểu diễn hàm Boolean bằng tổng của các minterm khiến hàm Boolean có giá trị 1 (1-minterm) hoặc tích của các maxterm khiến hàm Boolean có giá trị 0 (0-maxterm)

Biến			Minterm		Maxterm	
x	y	z	Biểu thức	Ký hiệu	Biểu thức	Ký hiệu
0	0	0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	$m_0$	$x + y + z$	$M_0$
0	0	1	$\bar{x} \bar{y} z$	$m_1$	$x + y + \bar{z}$	$M_1$
0	1	0	$\bar{x} y \bar{z}$	$m_2$	$x + \bar{y} + z$	$M_2$
0	1	1	$\bar{x} y z$	$m_3$	$x + \bar{y} + \bar{z}$	$M_3$
1	0	0	$x \bar{y} \bar{z}$	$m_4$	$\bar{x} + y + z$	$M_4$
1	0	1	$x \bar{y} z$	$m_5$	$\bar{x} + y + \bar{z}$	$M_5$
1	1	0	$x y \bar{z}$	$m_6$	$\bar{x} + \bar{y} + z$	$M_6$
1	1	1	$x y z$	$m_7$	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	$M_7$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z} + x y z$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z) (x + \bar{y} + z) (\bar{x} + y + \bar{z})$$



## Đại số Boolean (7/8) – Tính đối ngẫu

- Biểu thức:  $x + yz$
- Hàm:  $f(x, y, z) = x + yz$
- Nếu một biểu thức Boolean là đúng thì biểu thức đối ngẫu của nó cũng đúng:
  - $0 \leftrightarrow 1$
  - AND  $\leftrightarrow$  OR
- Ví dụ:
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  đối ngẫu  $x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$
  - $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$  đối ngẫu  $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$



# Đại số Boolean (8/8) – Định lý

- Định lý 1: Tính lũy đẳng

- $x + x = x$
- $x \cdot x = x$

- Định lý 2: Tính nuốt

- $x + 1 = 1$
- $x \cdot 0 = 0$

- Định lý 3: Tính hấp thụ

- $x + x \cdot y = x$
- $x(x + y) = x$

- Định lý 4: Tính phủ định của phủ định

- $\overline{\overline{x}} = x$

- Định lý 5: Tính kết hợp

- $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$

- Định lý 6: Định lý De-Morgan

- $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
- $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$



# Cổng luận lý

- Cổng luận lý là thiết bị điện tử có đặc điểm sau:
  - Chức năng: Thực hiện một phép toán luận lý
  - Cấu tạo: Có **ít nhất 1 ngõ vào** và có **duy nhất 1 ngõ ra**

Tên	Ký hiệu	Hàm Boolean	Bảng chân trị		
AND		$F = AB$	A	B	F
			0	0	0
			0	1	0
			1	0	0
			1	1	1
OR		$F = A + B$	A	B	F
			0	0	0
			0	1	1
			1	0	1
			1	1	1
NOT		$F = \bar{A}$	A	F	
			0	1	
			1	0	

Tên	Ký hiệu	Hàm
AND		$F = ABC$
OR		$F = A + B + C$
NAND		$F = \overline{ABC}$



## Tối ưu luận lý (1/2)

- Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa
  - $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - $x + 0 = 0 + x = x$
- Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù
  - $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$
  - $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$

Tối ưu luận lý là làm giảm số lượng tổng/tích hoặc số lượng biến hoặc phần bù của nó trong mỗi tổng/tích

- Định lý 1: Tính lũy đẳng
  - $x + x = x$
  - $x \cdot x = x$
- Định lý 2: Tính nuốt
  - $x + 1 = 1$
  - $x \cdot 0 = 0$
- Định lý 3: Tính hấp thụ
  - $x + x \cdot y = x$
  - $x(x + y) = x$



## Tối ưu luận lý (2/2)

$$f(x, y, z) = x + y\bar{z} + xy$$

$$f(x, y, z) = (x + y)(\bar{z} + x + y)$$

- Có nhiều định lý và tiên đề
  - Nên sử dụng định lý nào? Tiên đề nào?
- Biểu thức đã tối ưu hay chưa?
  - Làm sao để phán đoán là biểu thức chưa tối ưu?



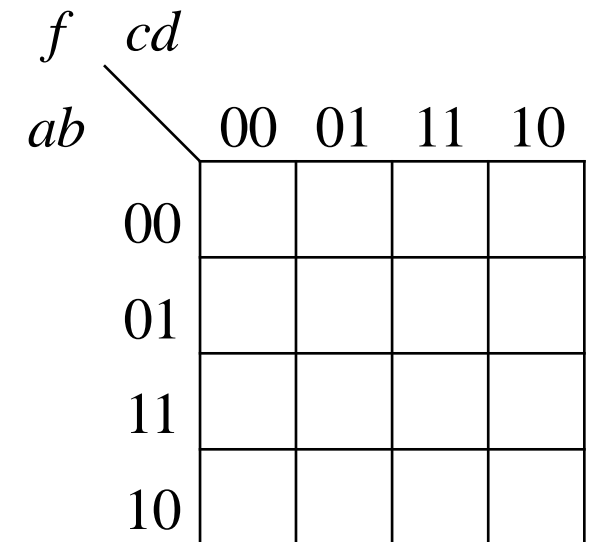
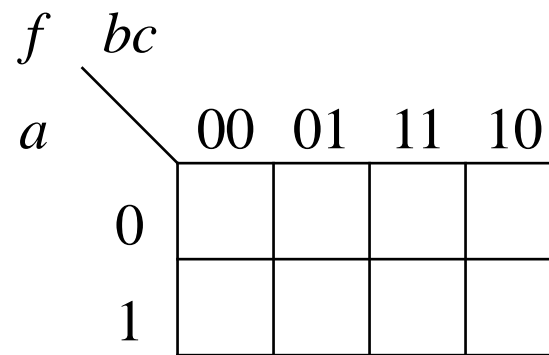
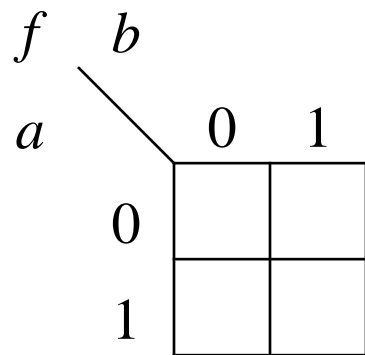
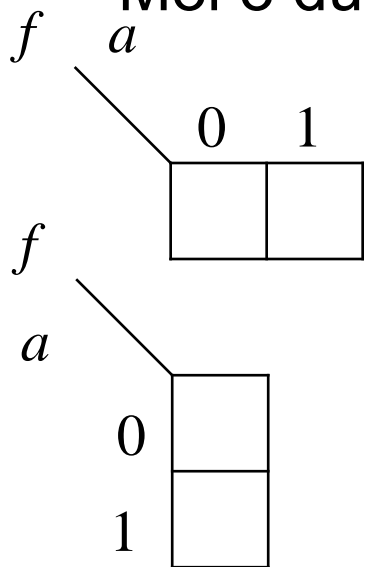
## Phương pháp Karnaugh (1/6) – Cơ sở

- K-map là phương pháp tối ưu luận lý bằng hình học trực quan dựa trên các tính chất của đại số Boolean:
  - $xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x \cdot 1 = x$ 
    - Tổng của hai tích khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau
      - Tổng của 2 1-minterm khác nhau đúng 1 bit?
  - $(x + y)(x + \bar{y}) = x + y\bar{y} = x + 0 = x$ 
    - Tích của hai tổng khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau
      - Tích của 2 0-maxterm khác nhau đúng 1 bit?



## Phương pháp Karnaugh (2/6) – Cấu trúc

- K-map là mảng 2 chiều các ô
  - Số lượng ô =  $2^n$  ( $n$  là số biến)
  - Số lượng ô trên mỗi chiều =  $2^i$  ( $i$  là số biến được gán trên mỗi chiều)
  - Mỗi ô được gán 1 tổ hợp theo mã Gray: 2 chuỗi bit liên tiếp khác nhau 1 bit







# Phương pháp Karnaugh (3/6) – Cấu trúc

$x$	$y$	$z$	$f$
0	0	0	$m_0/M_0$
0	0	1	$m_1/M_1$
0	1	0	$m_2/M_2$
0	1	1	$m_3/M_3$
1	0	0	$m_4/M_4$
1	0	1	$m_5/M_5$
1	1	0	$m_6/M_6$
1	1	1	$m_7/M_7$

$f$	$yz$	00	01	11	10
$x$	0	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	1	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

$f$	$yz$	00	01	11	10
$x$	0	$M_0$	$M_1$	$M_3$	$M_2$
	1	$M_4$	$M_5$	$M_7$	$M_6$



## Phương pháp Karnaugh (4/6) – Nguyên tắc

- Gom các nhóm  $2^k$  ô liên kề với  $k \geq 0$ 
  - $k$  là số biến được tối ưu trong mỗi nhóm
  - Gom các 1-minterm -> Tổng các tích có giá trị 1
  - Gom các 0-maxterm -> Tích các tổng có giá trị 0
- Số lần gom phải ít nhất
  - Số tích/tổng của biểu thức cuối cùng là ít nhất
- Mỗi nhóm phải có ít nhất 1 ô không thuộc các nhóm khác
  - Tránh trường hợp dư thừa các tích/tổng mà các nhóm khác đã bao phủ



# Phương pháp Karnaugh (5/6)

$$F(x, y, z) = \sum m(1, 3, 4, 7)$$

$F$		$yz$			
		$x$	00	01	11
0			1	1	
1		1		1	

$$F(x, y, z) = \bar{x}z + yz + x\bar{y}\bar{z}$$

$$F(a, b, c) = \prod M(1, 4, 6, 7)$$

$F$		$bc$			
		$a$	00	01	11
0			0		
1	0			0	0

$$F(a, b, c) = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + c)(a + b + \bar{c})$$



# Phương pháp Karnaugh (6/6)

$$f(x, y, z) = x + \bar{x}yz$$

$f$ $x \backslash yz$		00	01	11	10
0				1	
1	1	1	1	1	

$$F(x, y, z) = x + yz$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}(x + y + \bar{z})$$

$f$ $x \backslash yz$		00	01	11	10
0			0		
1	0	0	0	0	

$$F(x, y, z) = \bar{x}(y + \bar{z})$$



# Quiz

- $F(A, B, C, D) = A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}BCD + CD$

$F$		$CD$			
$AB$		00	01	11	10
	00				
	01				
	11				
	10				



## Câu hỏi và Bài tập (1/2)

- Trình bày sự khác nhau giữa số học nhị phân và luận lý nhị phân (đại số Boolean)?
- Chứng minh 6 định lý của đại số Boolean?
- Trình bày các phương pháp biểu diễn một hàm Boolean? Ưu và nhược điểm của mỗi phương pháp là gì?
- Tối ưu luận lý bằng phương pháp đại số Boolean:
  - $F(A, B, C) = AB + A\bar{B}C + AB\bar{C}$
  - $F(X, Y, Z) = (X + Y)(X + \bar{Y})(X + Y + Z)$



## Câu hỏi và Bài tập (2/2)

- Lập bảng chân trị và sau đó tối ưu luận lý bằng phương pháp K-map cho các hàm luận lý sau:
  - $F(A,B,C,D) = \sum m(1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 15)$
  - $K(W,X,Y,Z) = (W + X)(\bar{W} + X + Y)(W + \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})(X + \bar{Y} + Z)$
- Sử dụng K-map để tìm các 1-minterm và 0-maxterm và sau đó tối ưu luận lý các hàm Boolean sau:
  - $F(A, B, C, D) = A\bar{B}C + \bar{A}B + \bar{A}C + CD$
  - $F(A, B, C, D) = (A + B + C)(\bar{A} + B)(B + C + D)$