



# **Cấu Trúc Dữ Liệu & Giải Thuật**

## **Tổng quan Đồ thị**



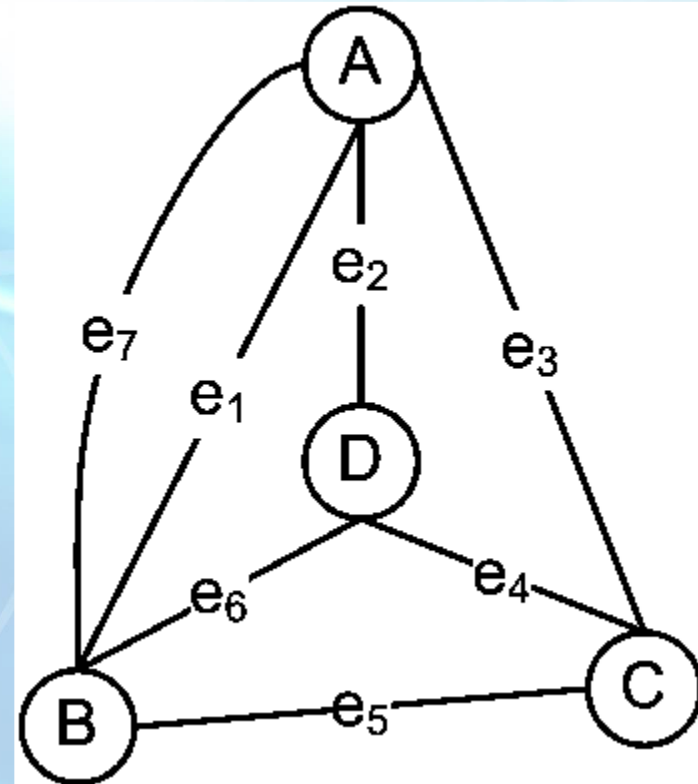
# NỘI DUNG

- Đồ thị và các khái niệm trên đồ thị
- Biểu diễn đồ thị trên máy tính
- Duyệt đồ thị theo chiều sâu và chiều rộng
- Một số ứng dụng



# ĐỊNH NGHĨA – ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

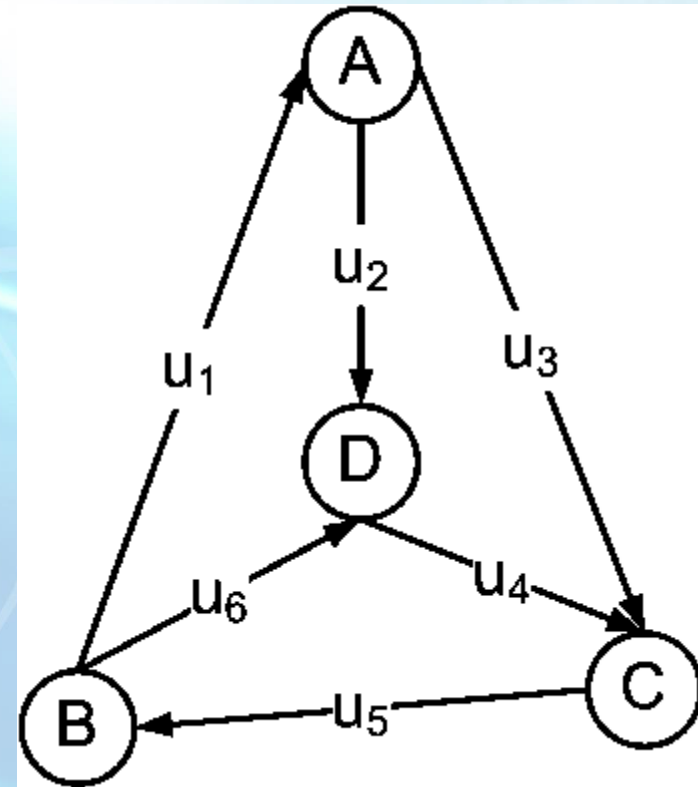
- Một đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$  được định nghĩa bởi:
  - Tập hợp  $V$  được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
  - Tập hợp  $E$  là tập các cạnh của đồ thị;
  - Mỗi cạnh  $e \in E$  được liên kết với một cặp đỉnh  $\{i, j\} \in V^2$ , không phân biệt thứ tự





# ĐỊNH NGHĨA – ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

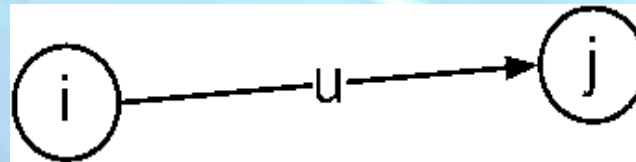
- Một đồ thị có hướng  $G = (V, U)$  được định nghĩa bởi:
  - Tập hợp  $V$  được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
  - Tập hợp  $U$  là tập các cạnh của đồ thị;
  - Mỗi cạnh  $u \in U$  được liên kết với một cặp đỉnh  $(i, j) \in V^2$ .





# ĐỈNH KỀ

- Trên đồ thị có hướng, xét cạnh  $u$  được liên kết với cặp đỉnh  $(i, j)$ :



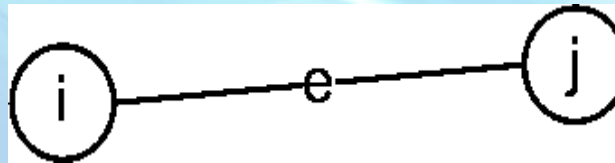
- Cạnh  $u$  **kề** với đỉnh  $i$  và đỉnh  $j$  (hay đỉnh  $i$  và đỉnh  $j$  **kề** với cạnh  $u$ ); có thể viết tắt  $u = (i, j)$ . Cạnh  $u$  đi ra khỏi đỉnh  $i$  và đi vào đỉnh  $j$
- Đỉnh  $j$  được gọi là đỉnh kề của đỉnh  $i$





# ĐỈNH KỀ

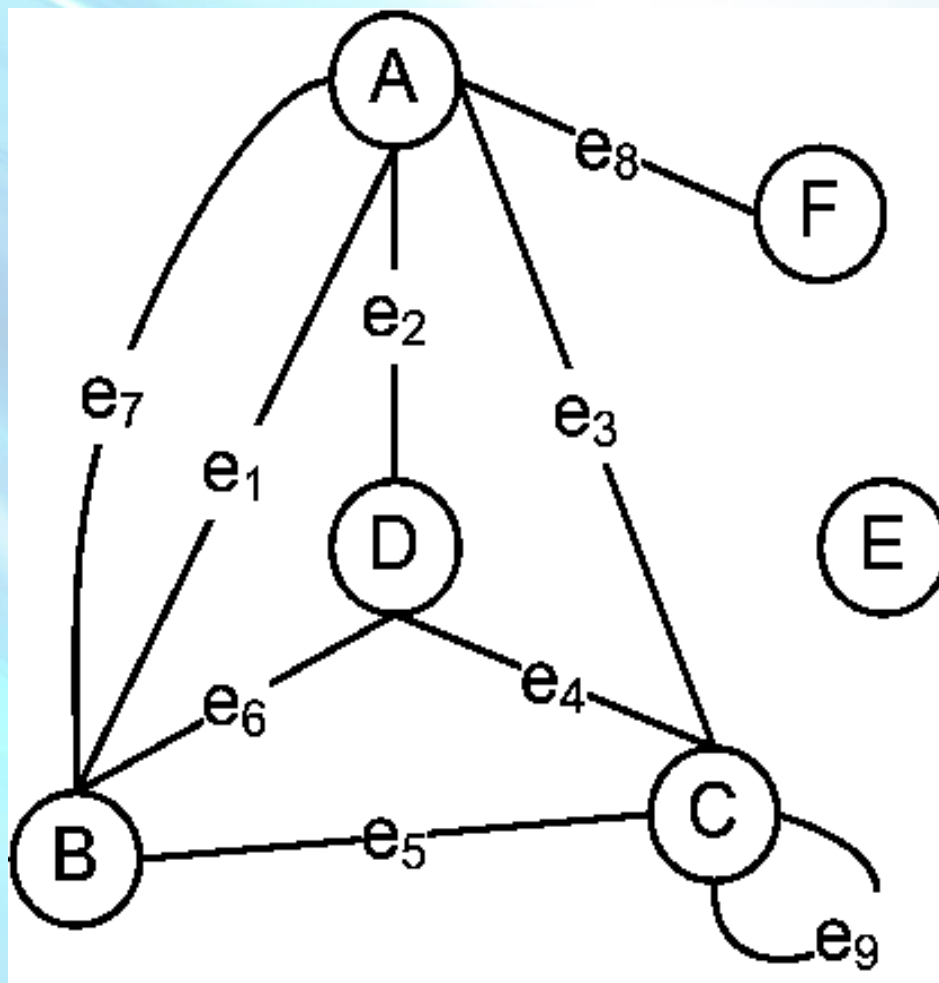
- Trên đồ thị vô hướng, xét cạnh  $e$  được liên kết với cặp đỉnh  $(i, j)$ :



- Cạnh  $e$  **kề** với đỉnh  $i$  và đỉnh  $j$  (hay đỉnh  $i$  và đỉnh  $j$  **kề** với cạnh  $e$ ); có thể viết tắt  $e = (i, j)$ .
- Đỉnh  $i$  và đỉnh  $j$  được gọi là 2 đỉnh kề nhau (hay đỉnh  $i$  kề với đỉnh  $j$  và ngược lại, đỉnh  $j$  kề với đỉnh  $i$ )



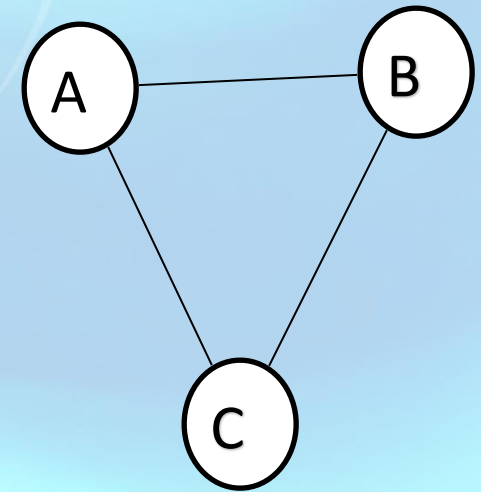
# KHUYÊN, ĐỈNH TREO, ĐỈNH CÔ LẬP





# CÁC DẠNG ĐỒ THỊ

- Đồ thị RỖNG: tập cạnh là tập rỗng
- Đồ thị ĐƠN: không có khuyên và cạnh song song
- Đồ thị ĐỦ: đồ thị vô hướng, đơn, giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh.
  - Đồ thị đủ  $N$  đỉnh ký hiệu là  $K_N$ .
  - $K_N$  có  $N(N - 1)/2$  cạnh.





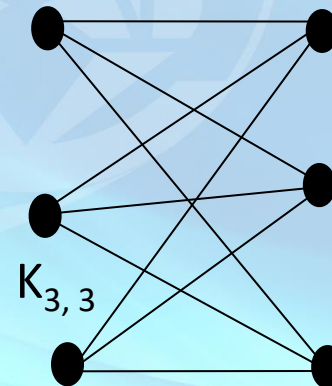
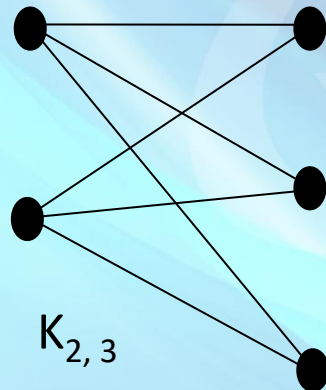
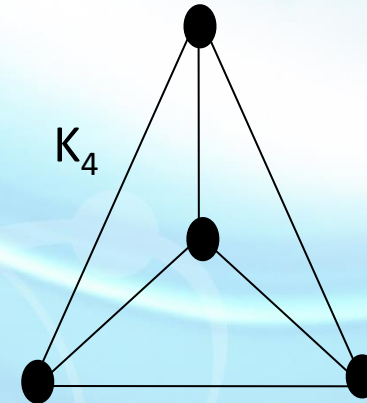
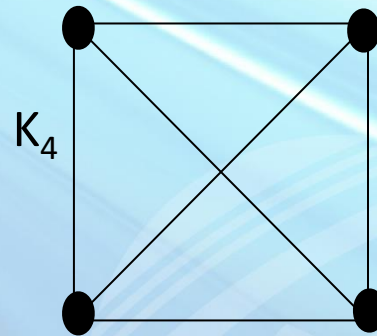
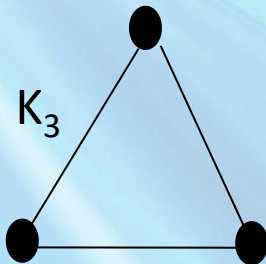


# CÁC DẠNG ĐỒ THỊ

- Đồ thị LƯỠNG PHÂN: đồ thị  $G = (X, E)$  được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập  $X$  được chia thành hai tập  $X_1$  và  $X_2$  thỏa:
  - $X_1$  và  $X_2$  phân hoạch;
  - Cạnh chỉ nối giữa  $X_1$  và  $X_2$ .
- Đồ thị LƯỠNG PHÂN ĐỦ: là đồ thị lưỡng phân đơn, vô hướng thỏa với  $\forall(i, j): i \in X_1$  và  $j \in X_2$  có đúng một cạnh  $i$  và  $j$ .



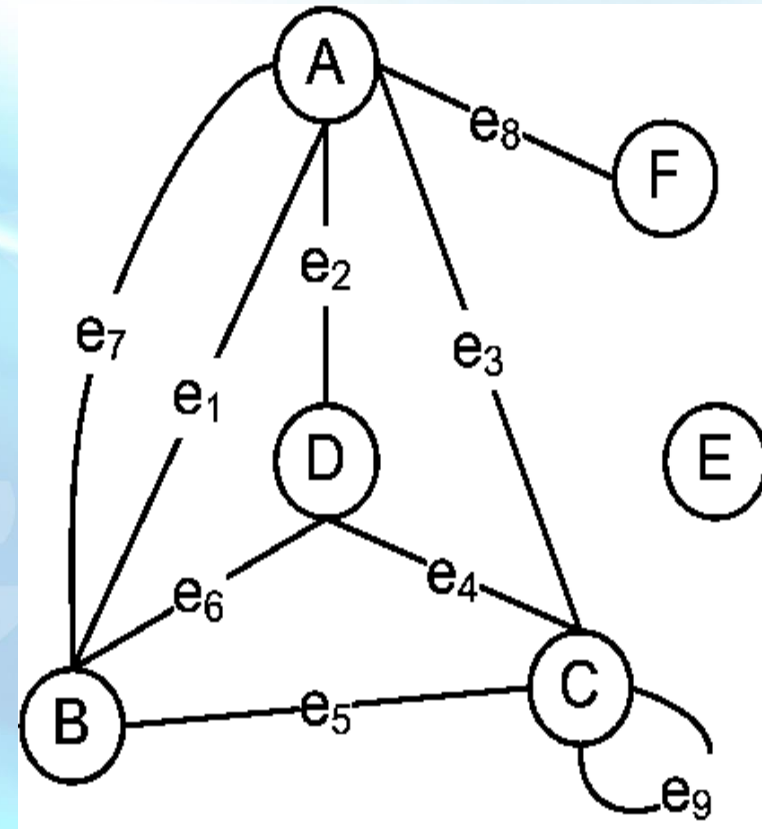
# VÍ DỤ ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ





# BẬC CỦA ĐỈNH

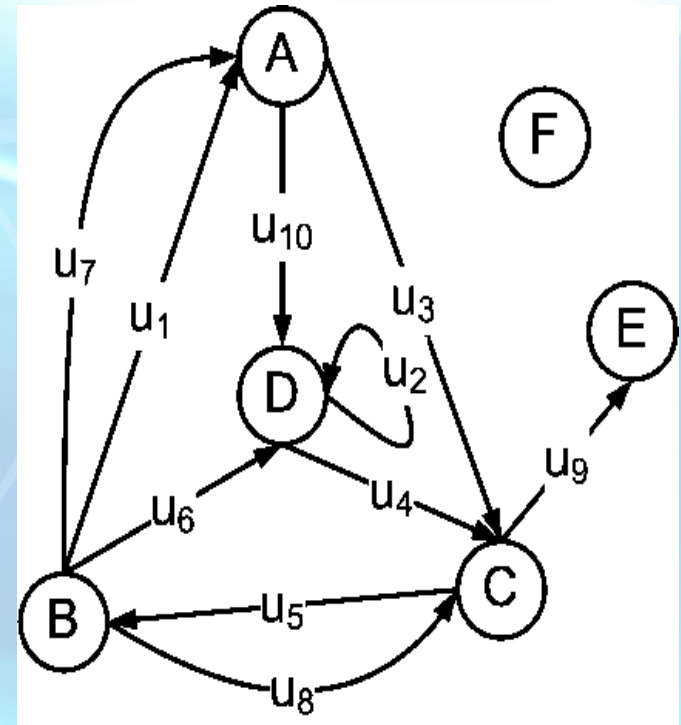
- Xét đồ thị vô hướng  $G$ 
  - Bậc của đỉnh  $x$  trong đồ thị  $G$  là số các cạnh kề với đỉnh  $x$ , mỗi khuyên được tính hai lần
  - Ký hiệu:  $dG(x)$  (hay  $d(x)$ ) nếu đang xét một đồ thị nào đó.





# BẬC CỦA ĐỒ THỊ

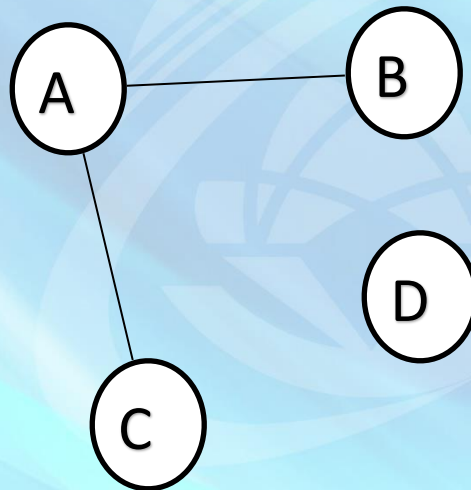
- Xét đồ thị có hướng  $G$ 
  - **Nửa bậc ngoài** của đỉnh  $x$  là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh  $x$ , ký hiệu  $d^+(x)$ .
  - **Nửa bậc trong** của đỉnh  $x$  là số các cạnh đi vào đỉnh  $x$ , ký hiệu  $d^-(x)$ .
  - **Bậc** của đỉnh  $x$ :  $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$





# BẬC CỦA ĐỈNH

- Đỉnh TREO là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh CÔ LẬP là đỉnh có bậc bằng 0.







# MỐI LIÊN HỆ BẬC – SỐ CẠNH

- Định lý:

- Xét đồ thị có hướng  $G = (X, U)$ . Ta có:

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) \text{ và } \sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$$

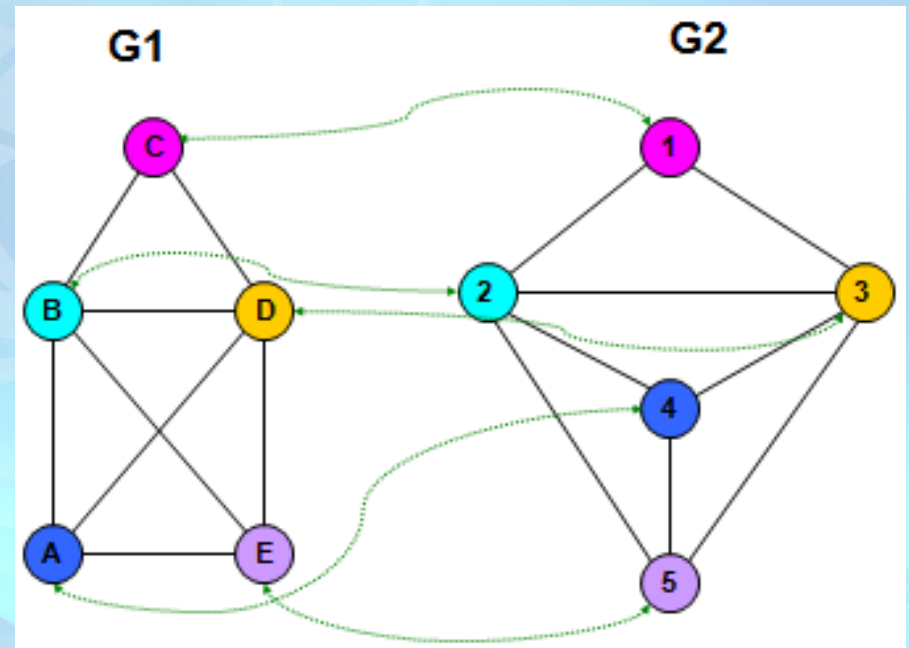
- Xét đồ thị vô hướng  $G = (X, E)$ . Ta có:

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|E|$$



# ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

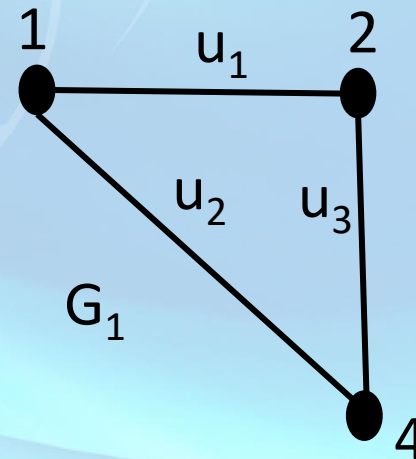
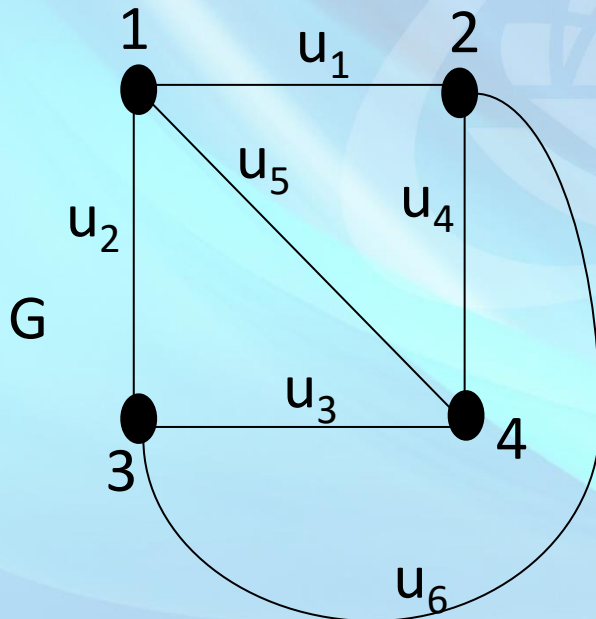
- Hai đồ thị vô hướng  $G_1 = (X_1, U_1)$  và  $G_2 = (X_2, U_2)$  được gọi là đẳng cấu với nhau nếu :
  - Có cùng số đỉnh.
  - Có cùng số đỉnh bậc  $k$ , mọi  $k$  nguyên dương  $\geq 0$ .
  - Cùng số cạnh.
  - Cùng số thành phần.





# ĐỒ THỊ CON

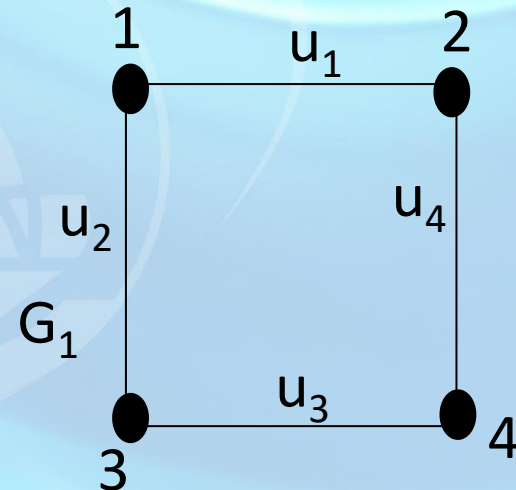
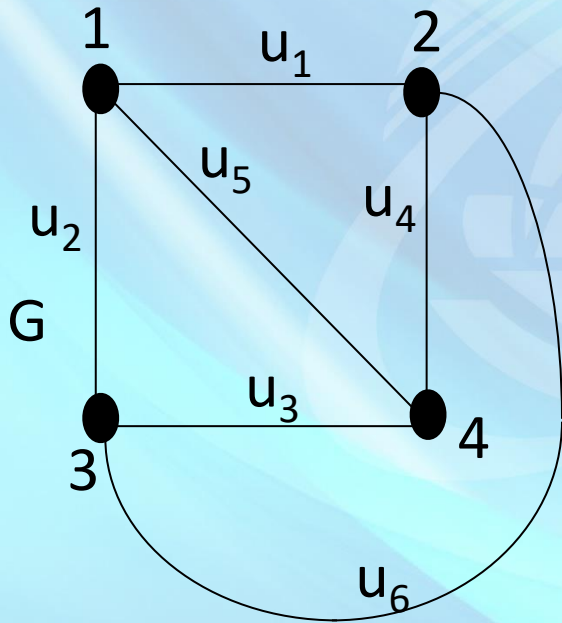
- Xét hai đồ thị  $G = (X, U)$  và  $G_1 = (X_1, U_1)$ .  $G_1$  được gọi là đồ thị con của  $G$  và ký hiệu  $G_1 \in G$  nếu:
  - $X_1 \in X; U_1 \in U$
  - $u = (i, j) \in U$  của  $G$ , nếu  $u \in U_1$  thì  $i, j \in X_1$





# ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

- Đồ thị con  $G_1 = (X_1, U_1)$  của đồ thị  $G = (X, U)$  được gọi là đồ thị bộ phận của  $G$  nếu  $X = X_1$ .







# DÂY CHUYỀN, CHU TRÌNH

- Một dây chuyền trong  $G = (X, U)$  là một đồ thị con  $C = (V, E)$  của  $G$  với:
  - $V = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$
  - $E = \{u_1, u_2, \dots, u_{M-1}\}$  với  $u_1 = x_1x_2, u_2 = x_2x_3, \dots, u_{M-1} = x_{M-1}x_M$ ; liên kết  $x_i x_{i+1}$  không phân biệt thứ tự
- Khi đó,  $x_1$  và  $x_M$  được nối với nhau bằng dây chuyền  $C$ .  $x_1$  là đỉnh đầu và  $x_M$  là đỉnh cuối của  $C$ .
- Số cạnh của  $C$  được gọi là độ dài của  $C$ .
- Khi các cạnh hoàn toàn xác định bởi cặp đỉnh kề, dây chuyền có thể viết gọn  $(x_1, x_2, \dots, x_M)$





# DÂY CHUYỀN, CHU TRÌNH

- Dây chuyền SƠ CẤP: dây chuyền không có đỉnh lặp lại.
- CHU TRÌNH: là một dây chuyền có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.



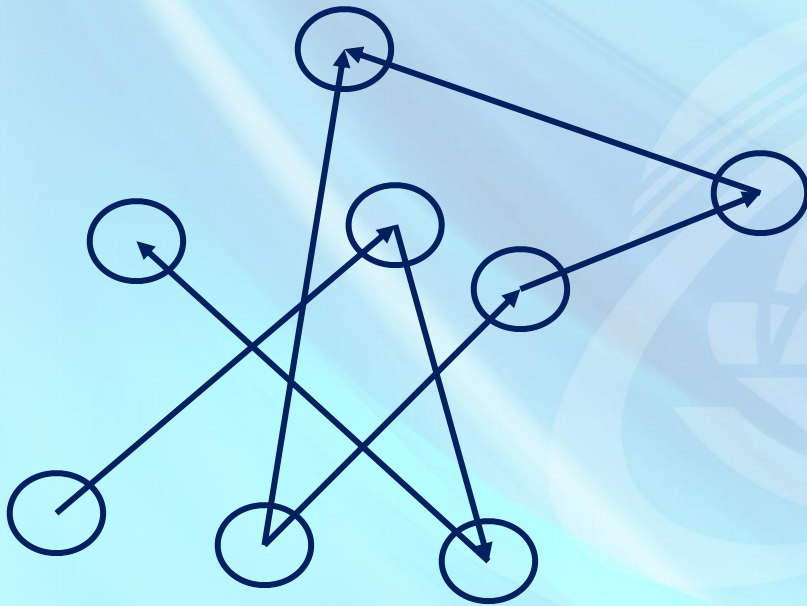
# THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

- Một **thành phần liên thông** của một đồ thị vô hướng là một đồ thị con trong đó:
  - Giữa bất kì hai đỉnh nào đều có đường đi đến nhau, và
  - Không thể nhận thêm bất kì một đỉnh nào mà vẫn duy trì tính chất trên.

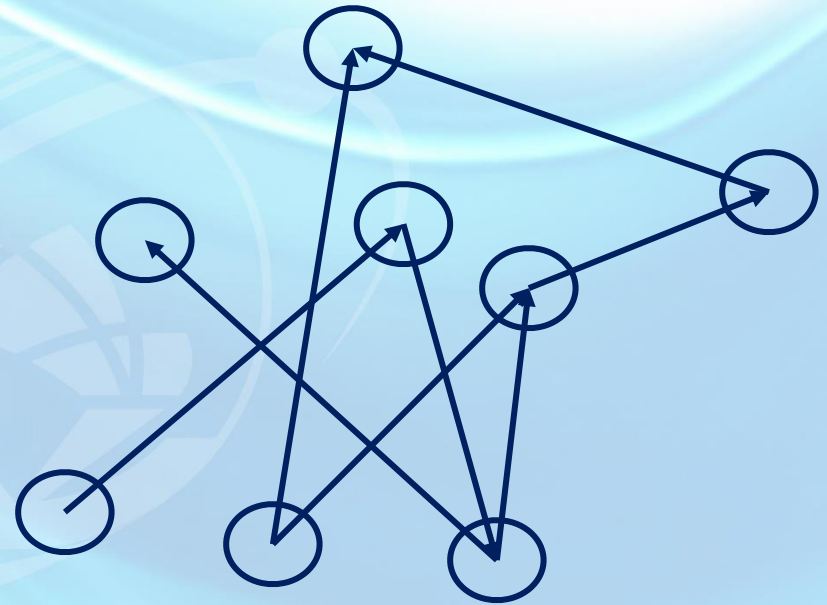


# THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

- $G$  gồm 2 thành phần liên thông,  $H$  là đồ thị liên thông



G



H



# THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

Thuật toán xác định các thành phần liên thông

**Input**: đồ thị  $G = (X, E)$ , tập  $X$  gồm  $N$  đỉnh  $1, 2, \dots, N$

**Output**: các đỉnh của  $G$  được gán nhãn là số hiệu của thành phần liên thông tương ứng

1. Khởi tạo biến  $label = 0$  và gán nhãn 0 cho tất cả các đỉnh
2. Duyệt qua tất cả các đỉnh  $i \in X$

Nếu nhãn của  $i$  là 0

1.  $label = label + 1$
2. Gán nhãn cho tất cả các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với  $i$  là  $label$



# THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

Thuật toán gán nhãn các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với đỉnh  $i$  –  $\text{Visit}(i, \text{label})$

**Input**: đồ thị  $G = (X, E)$ , đỉnh  $i$ , nhãn  $\text{label}$

**Output**: các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với  $i$  được gán nhãn  $\text{label}$

1. Gán nhãn  $\text{label}$  cho đỉnh  $i$
2. Duyệt qua tất cả các đỉnh  $j \in X$  và có cạnh nối với  $i$

Nếu nhãn của  $j$  là 0

$\text{Visit}(j, \text{label})$



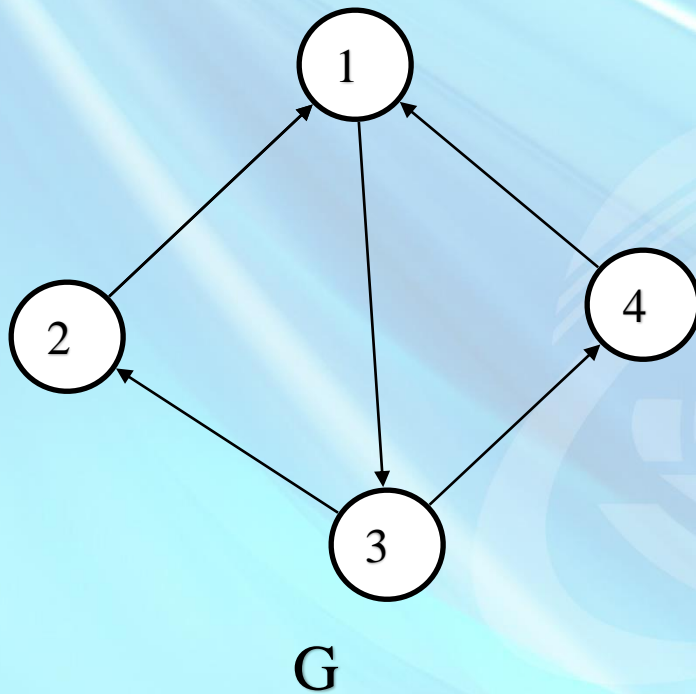


# BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

- Ma trận KỀ:
  - Xét đồ thị  $G = (X, U)$ , giả sử tập  $X$  gồm  $N$  đỉnh và được sắp thứ tự  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , tập  $U$  gồm  $M$  cạnh và được sắp thứ tự  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$ .
  - Ma trận kề của đồ thị  $G$ , ký hiệu  $B(G)$ , là một ma trận nhị phân cấp  $N \times N$ :  $B = (B_{ij})$  với  $B_{ij}$  được định nghĩa:
    - $B_{ij} = 1$  nếu có cạnh nối  $x_i$  tới  $x_j$ ,
    - $B_{ij} = 0$  trong trường hợp ngược lại.



# BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN KỀ



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

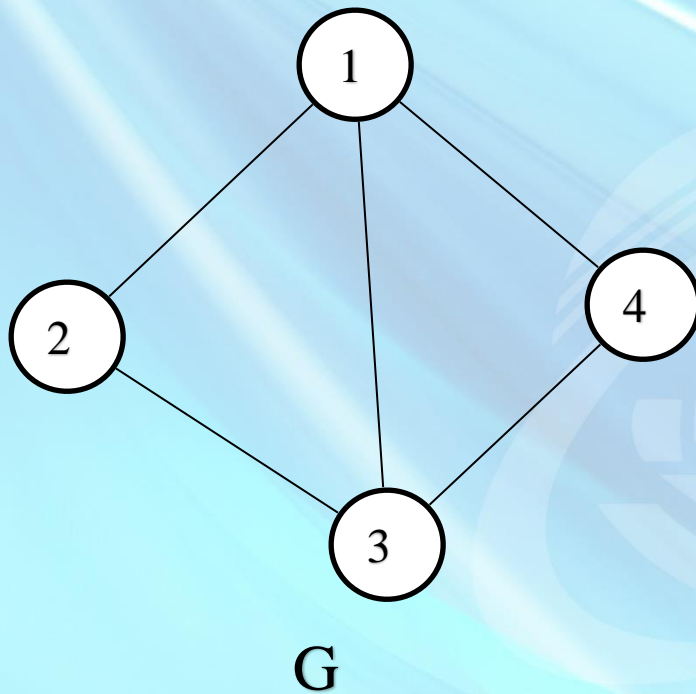


# BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

- Ma trận của đồ thị vô hướng:
  - Xét đồ thị  $G = (X, U)$  vô hướng, giả sử tập  $X$  gồm  $N$  đỉnh và được sắp thứ tự  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , tập  $U$  gồm  $M$  cạnh và được sắp thứ tự  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$ .
  - Ma trận của  $G$ , ký hiệu  $A(G)$ , là ma trận nhị phân  $N \times M$ :  $A = (A_{ij})$  với  $A_{ij}$  được định nghĩa:
    - $A_{ij} = 1$  nếu đỉnh  $x_i$  kề với cạnh  $u_j$ ,
    - $A_{ij} = 0$  nếu ngược lại.



# BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN KỀ



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN TRỌNG SỐ

