



COMPUTER ENGINEERING

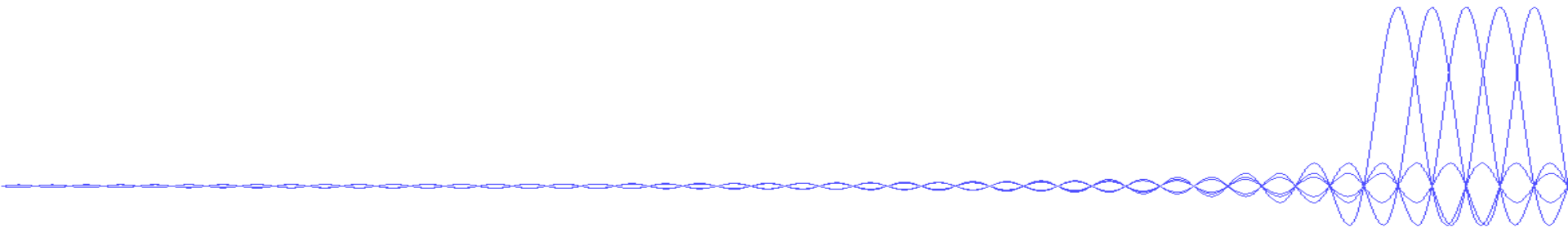


UIT
TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

TỔ CHỨC VÀ CẤU TRÚC MÁY TÍNH II

Chương 3

Đại số Boolean





- Đại số Boolean
- Công luận lý
- Tối ưu luận lý
- Phương pháp Karnaugh
- Bài tập



Đại số Boolean (1/8) – Định nghĩa

- Đại số Boolean (luận lý nhị phân) là một cấu trúc đại số liên quan đến việc thao tác với các biến luận lý nhị phân (biến luận lý)
 - Biến luận lý chỉ mang 2 giá trị: 0 và 1, cao và thấp, đúng và sai, ...
 - Thao tác luận lý: AND (\cdot , $\&$), OR ($+$, $|$), NOT (\sim , $\bar{}$)
- Ví dụ: A và B là 2 biến luận lý nhị phân:
 - $A \cdot B = A \& B = \text{AND}(A, B) = AB$
 - $A + B = A | B = \text{OR}(A, B)$
 - $\sim A = \bar{A}$



Đại số Boolean (2/8) – Định nghĩa

- Một tập B khác rỗng cùng với các thao tác (phép toán) AND (\cdot), OR ($+$) và NOT ($\bar{}$) được gọi là một đại số Boolean nếu các tiên đề sau đây được thỏa mãn với mọi $x, y, z \in B$
 - Tiên đề 1: Cấu trúc đóng với các phép toán \cdot và $+$. Nếu $x, y \in B$ thì: $(x + y) \in B$ và $x \cdot y \in B$
 - Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa. Tồn tại 2 phần tử trung hòa khác nhau thuộc B , ký hiệu là 0 và 1 sao cho:
 - $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
 - $x + 0 = 0 + x = x$



Đại số Boolean (3/8) – Định nghĩa

■ Tiên đề 3: Tính giao hoán

$$\square x \cdot y = y \cdot x$$

$$\square x + y = y + x$$

■ Tiên đề 4: Tính phân phối

$$\square x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$\square x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$$

■ Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù. Với mọi $x \in B$, tồn tại duy nhất $\bar{x} \in B$ (\bar{x} được gọi là phần tử bù của x) sao cho:

$$\square x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$$

$$\square x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$$

■ Tiên đề 6: Tồn tại ít nhất 2 phần tử $x, y \in B$ sao cho $x \neq y$



Đại số Boolean (4/8) – Hàm Boolean

- Kết hợp các biến, hằng số, toán tử, dấu ngoặc tạo thành một **Biểu thức Boolean**.

□ Ví dụ: $x + yz$

- Kết hợp theo thứ tự: 1 tên hàm, 1 dấu bằng và cuối cùng là 1 biểu thức Boolean sẽ cho chúng ta được một **Hàm Boolean (Hàm Boolean Dạng chuẩn)**

□ Ví dụ: $f(x, y, z) = x + yz$



Đại số Boolean (5/8) – Bảng chân trị

■ **Bảng chân trị** (hay còn gọi là bảng tổ hợp) thể hiện mối quan hệ giữa giá trị của một hàm Boolean và các biến của hàm đó

□ 2^n hàng (n là số biến)

□ $n+1$ cột

$$f(x, y, z) = x + yz$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Giá trị của hàm tương ứng với mỗi tổ hợp các biến

Liệt kê tất cả các tổ hợp có thể



Đại số Boolean (6/8) – Dạng chính tắc

- Dạng chính tắc là dạng biểu diễn hàm Boolean bằng tổng của các minterm khiến hàm Boolean có giá trị 1 (1-minterm) hoặc tích của các maxterm khiến hàm Boolean có giá trị 0 (0-maxterm)

Biến			Minterm		Maxterm	
x	y	z	Biểu thức	Ký hiệu	Biểu thức	Ký hiệu
0	0	0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$\bar{x} \bar{y} z$	m_1	$x + y + \bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x} y \bar{z}$	m_2	$x + \bar{y} + z$	M_2
0	1	1	$\bar{x} y z$	m_3	$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1	0	0	$x \bar{y} \bar{z}$	m_4	$\bar{x} + y + z$	M_4
1	0	1	$x \bar{y} z$	m_5	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1	1	0	$x y \bar{z}$	m_6	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1	1	1	$x y z$	m_7	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z} + x y z$

$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$



Đại số Boolean (7/8) – Tính đối ngẫu

- Biểu thức: $x + yz$
- Hàm: $f(x, y, z) = x + yz$
- Nếu một biểu thức Boolean là đúng thì biểu thức đối ngẫu của nó cũng đúng khi thay:
 - $0 \leftrightarrow 1$
 - AND \leftrightarrow OR
- Ví dụ:
 - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ đối ngẫu $x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$
 - $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$ đối ngẫu $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$



Đại số Boolean (8/8) – Định lý

■ Định lý 1: Tính lũy đẳng

$$\square x + x = x$$

$$\square x \cdot x = x$$

■ Định lý 2: Tính nuốt

$$\square x + 1 = 1$$

$$\square x \cdot 0 = 0$$

■ Định lý 3: Tính hấp thụ

$$\square x + x \cdot y = x$$

$$\square x(x + y) = x$$

■ Định lý 4: Tính phủ định của phủ định

$$\triangleright \overline{\overline{x}} = x$$

■ Định lý 5: Tính kết hợp

$$\triangleright x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\triangleright x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$$

■ Định lý 6: Định lý De-Morgan

$$\triangleright \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\triangleright \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$



Công luận lý

■ Công luận lý là thiết bị điện tử có đặc điểm sau:

□ Chức năng: Thực hiện một phép toán luận lý

□ Cấu tạo: Có ít nhất 1 ngõ vào và có duy nhất 1 ngõ ra

Tên	Ký hiệu	Hàm Boolean	Bảng chân trị		
AND		$F = AB$	A	B	F
			0	0	0
			0	1	0
			1	0	0
OR		$F = A + B$	A	B	F
			0	0	0
			0	1	1
			1	0	1
NOT		$F = \bar{A}$	A	F	
			0	1	
			1	0	

Tên	Ký hiệu	Hàm
AND		$F = ABC$
OR		$F = A + B + C$
NAND		$F = \overline{ABC}$



Tối ưu luận lý (1/2)

■ Tiên đề 2: Tồn tại phần tử trung hòa

$$\square x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$\square x + 0 = 0 + x = x$$

■ Tiên đề 5: Tồn tại phần tử bù

$$\square x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0$$

$$\square x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1$$

Tối ưu luận lý là làm giảm số lượng tổng/tích hoặc số lượng biến hoặc phần bù của nó trong mỗi tổng/tích

• Định lý 1: Tính lũy đẳng

$$\triangleright x + x = x$$

$$\triangleright x \cdot x = x$$

• Định lý 2: Tính nuốt

$$\triangleright x + 1 = 1$$

$$\triangleright x \cdot 0 = 0$$

• Định lý 3: Tính hấp thụ

$$\triangleright x + x \cdot y = x$$

$$\triangleright x(x + y) = x$$



Tối ưu luận lý (2/2)

$$f(x, y, z) = x + y\bar{z} + xy$$

$$f(x, y, z) = (x + y)(\bar{z} + x + y)$$

- Có nhiều định lý và tiên đề
 - Nên sử dụng định lý nào? Tiên đề nào?
- Biểu thức đã tối ưu hay chưa?
 - Làm sao để phán đoán là biểu thức chưa tối ưu?



Phương pháp Karnaugh (1/6) – Cơ sở

- K-map là phương pháp tối ưu luận lý bằng hình học trực quan dựa trên các tính chất của đại số Boolean:

- $xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x \cdot 1 = x$

- Tổng của hai tích khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau

- Tổng của 2 1-minterm khác nhau đúng 1 bit?

- $(x + y)(x + \bar{y}) = x + y\bar{y} = x + 0 = x$

- Tích của hai tổng khác nhau đúng 1 bit thì kết quả sẽ rút gọn được bit khác nhau

- Tích của 2 0-maxterm khác nhau đúng 1 bit?



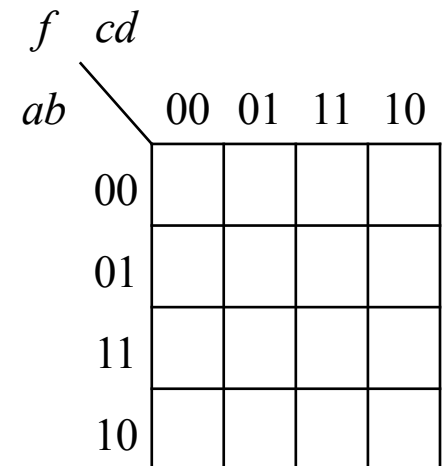
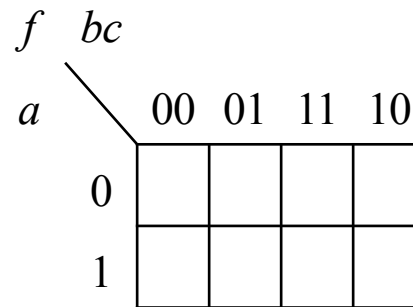
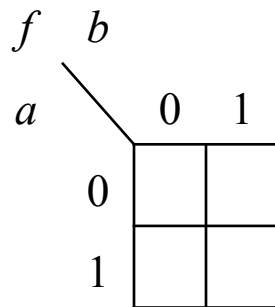
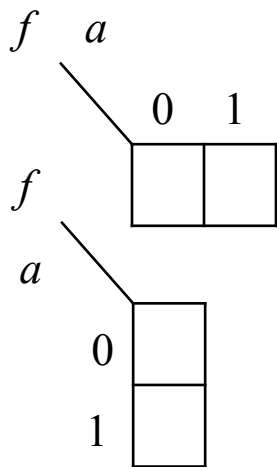
Phương pháp Karnaugh (2/6) – Cấu trúc

■ K-map là mảng 2 chiều các ô

▣ Số lượng ô = 2^n (n là số biến)

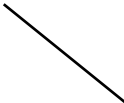
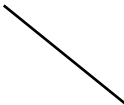
▣ Số lượng ô trên mỗi chiều = 2^i (i là số biến được gán trên mỗi chiều)

▣ Mỗi ô được gán 1 tổ hợp theo mã Gray: 2 chuỗi bit liên tiếp khác nhau 1 bit





Phương pháp Karnaugh (3/6) – Cấu trúc

x	y	z	f	f	yz					
0	0	0	m_0/M_0	x		00	01	11	10	
0	0	1	m_1/M_1			0	m_0	m_1	m_3	m_2
0	1	0	m_2/M_2			1	m_4	m_5	m_7	m_6
0	1	1	m_3/M_3							
1	0	0	m_4/M_4	f		00	01	11	10	
1	0	1	m_5/M_5			0	M_0	M_1	M_3	M_2
1	1	0	m_6/M_6			1	M_4	M_5	M_7	M_6
1	1	1	m_7/M_7							



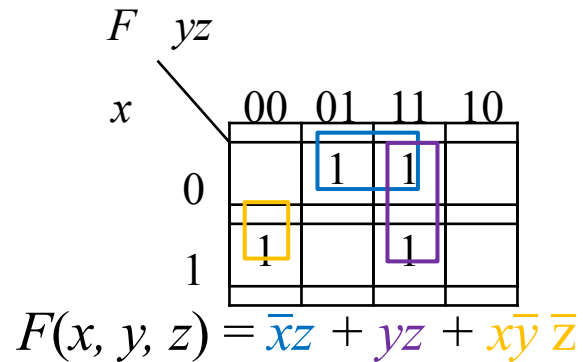
Phương pháp Karnaugh (4/6) – Nguyên tắc

- Gom các nhóm 2^k ô liên kề với $k \geq 0$
 - k là số biến được tối ưu trong mỗi nhóm
 - Gom các 1-minterm \rightarrow Tổng các tích có giá trị 1
 - Gom các 0-maxterm \rightarrow Tích các tổng có giá trị 0
- Mỗi nhóm phải có ít nhất 1 ô không thuộc các nhóm khác
 - Tránh trường hợp dư thừa các tích/tổng mà các nhóm khác đã bao phủ
- Số lần gom phải ít nhất
 - Số tích/tổng của biểu thức cuối cùng là ít nhất

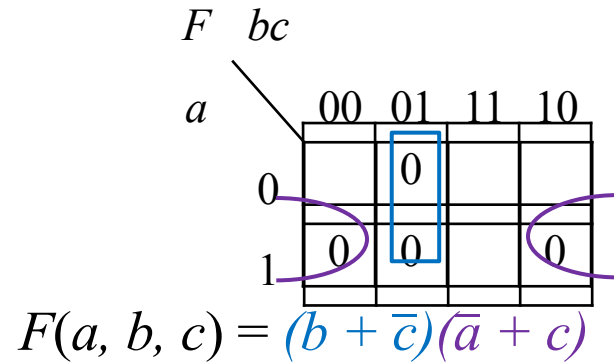


Phương pháp Karnaugh (5/6)

$$F(x, y, z) = \sum m(1, 3, 4, 7)$$



$$F(a, b, c) = \prod M(1, 4, 5, 6)$$





Phương pháp Karnaugh (6/6)

$$f(x, y, z) = x + \bar{x}yz$$

f yz

x

	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

$F(x, y, z) = x + yz$

$$f(x, y, z) = \bar{x}(x + y + \bar{z})$$

f yz

x

	00	01	11	10
0		0		
1	0	0	0	0

$F(x, y, z) = \bar{x}(y + \bar{z})$



■ $F(A, B, C, D) = A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}BCD + CD$

F		CD			
AB		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					



Bài tập (1/2)

- Trình bày sự khác nhau giữa số học nhị phân và luận lý nhị phân (đại số Boolean)?
- Chứng minh 6 định lý của đại số Boolean?
- Trình bày các phương pháp biểu diễn một hàm Boolean? Ưu và nhược điểm của mỗi phương pháp là gì?
- Tối ưu luận lý bằng phương pháp đại số Boolean:
 - $F(A, B, C) = AB + A\bar{B}C + AB\bar{C}$
 - $F(X, Y, Z) = (X + Y)(X + \bar{Y})(X + Y + Z)$



Bài tập (2/2)

- Lập bảng chân trị và sau đó tối ưu luận lý bằng phương pháp K-map cho các hàm Boolean sau:

- $F(A,B,C,D) = \sum m(1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 15)$

- $K(W,X,Y,Z) = (W + X)(\bar{W} + X + Y)(W + \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})(X + \bar{Y} + Z)$

- Sử dụng K-map để tìm các 1-minterm và 0-maxterm, sau đó tối ưu luận lý các hàm Boolean sau:

- $F(A, B, C, D) = A\bar{B}C + \bar{A}B + \bar{A}C + CD$

- $F(A, B, C, D) = (A + B + C)(\bar{A} + B)(B + C + D)$



COMPUTER ENGINEERING



UIT
TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

THẢO LUẬN

