

I. BÀI TẬP ĐỊNH THỨC

1.1: Tính các định thức

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
 \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 \text{e)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} & \\
 \text{f)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\
 \text{h)} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} & \text{i)} \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} \\
 \text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix} & \text{k)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix} \\
 \text{l)} \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} &
 \end{array}$$

a) 5; b) 40; c) -6; d) 20; e) $a^3+b^3+c^3-3abc$; f) $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)$; g) $-2(x^3+y^3)$
 h) $x^2(x-y-z)(x+y+z)$; i) $abc+abx+bcx+cax$; j) $(-1)^{n-1} n!$; k) $\frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$; l) $(-1)^{n-1} n!$

1.2: Chứng minh bài toán định thức

$$\mathbf{a)} \quad \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad (a, b, c \neq 0)$$

$$\mathbf{d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{e)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{f)} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

1.3: Giải phương trình, bất phương trình từ định thức

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0 \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} x & 9 & -1 & x \\ 1 & x & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{f) } \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ x & x & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{g) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i) } \begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

a) $x = 2, 3, \text{ or } 4$; b) $\forall x \in \mathbb{R}$; c) $-6 < x < -4$; d) $x = 1, 3 + \sqrt{2}, \text{ or } 3 - \sqrt{2}$; e) $x = \pm 3, \text{ or } \pm 4$

II. BÀI TẬP MA TRẬN

2.1: Phép tính ma trận

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } (4 \ 1 \ 3 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ 9 \ 3) \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 2)$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; f(x) = 3x^2 + 2x - 4. \text{ Tính } f(A) \\ g(x) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{x} \rightarrow g(A) = ?$$

Tính $(2A + 3B)C$.

$$\text{g) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Tính } (AB)C, C^T B^T A^T.$$

$$\text{h) Tính } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \text{i) } \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}^n \quad \text{j) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \text{k) } \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n$$

2.2: Tìm ma trận

* Tìm các số x, y, z, w nếu: **a)** $3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$

* Tìm ma trận X trong các trường hợp sau:

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

* Tìm ma trận giao hoán với ma trận sau: **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.3: Ma trận nghịch đảo

*Tìm ma trận nghịch đảo: **a)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

*Định m để tồn tại ma trận nghịch đảo (khả nghịch, không suy biến) và tìm ma trận nghịch đảo

d) $\begin{pmatrix} m & m^3 \\ 0 & m - 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

e) $\begin{pmatrix} m & m + 1 & m - 1 \\ 0 & m - 1 & 1 \\ 0 & 0 & m + 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

2.4: Hạng của ma trận

*Tìm hạng của ma trận: **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

*Định tham số m để có hạng xác định hoặc biện luận hạng theo m :

c) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 1 & 2m & 1 & 4 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$.
 $r(A) = 2.$ $r(A) = 3$ $r(A) < 3.$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & m+5 & m^2+1 \\ 1 & -1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & m \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & m & 12 \end{pmatrix}$

III. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1: Giải hệ pttt

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{cases} & \mathbf{b)} \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2. \end{cases} & \mathbf{c)} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -10. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{d)} \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{cases} & \mathbf{e)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{cases} \end{array}$$

3.2: Giải hệ và biện luận nghiệm ptst theo tham số

$$\mathbf{a)} \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases} \quad \mathbf{b)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2m \\ x - 3y = m \end{cases} \quad \mathbf{c)} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \quad \mathbf{e)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = m \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 4m \end{cases}$$

$$\mathbf{f)} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases} \quad \mathbf{g)} \begin{cases} x_1 - ax_2 + a^2x_3 = a \\ ax_1 - a^2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 - a^3x_3 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{h)} \begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}$$

IV. TÌM HỆ NGHIỆM CƠ BẢN

$$\mathbf{a)} \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{b)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{c)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} \begin{cases} x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$