Phép toán ma trận, ma trận khả nghịch, định thức và quy tắc Cramer

Dr. Nguyen Van Hoi

University of Information Technology

Ngày 8 tháng 9 năm 2023

Phép toán ma trận

❒ Cộng: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, khi đó

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

❒ Nhân với số thực $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

❒ Nhân hai ma trận: $A = (a_{ij})_{m\times p}$ và $B = (b_{ij})_{p\times n}$, khi đó

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times n},$$

với

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{bmatrix}.$$

❒ Một số tính chất:

(i) $AB \neq BA$ và $A(BC) = (AB)C$.

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ và $kAB = A(kB)$.

Ma trận chuyển vị

Xét ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của A, kya hiệu là A^T (hoặc A^t).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

❒ Tính chất:

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = kA^T$.

(ii) $(AB)^T = B^TA^T$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $rank(A) = rank(A^T)$.

Ma trận nghịch đảo

Nghịch đảo của ma trận vuông A cấp n là ma trận vuông B cấp n thỏa

$$AB = \mathbb{I}_n, \qquad BA = \mathbb{I}_n,$$

với $\mathbb{I}_n$ là ma trận đơn vị. Trong trường hợp đó, ta ký hiệu $B = A^{-1}$ và A được gọi là ma trận khả nghịch.

❒ A khả nghịch nếu và chỉ nếu

$$rref(A) = I_n$$

hoặc tương đương

$$rank(A) = n.$$

Tại sao là khả nghịch và cách tìm ma trận nghịch đảo

❒ Hệ phương trình tuyến tính: $Ax = b$. Nếu A khả nghịch thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x = A^{-1}b.$$

Ngược lại thì hệ có vố số nghiệm hoặc vô nghiệm.

❒ Trong trường hợp $b = 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $x = 0$ khi A khả nghịch hoặc vô số nghiệm khi A không khả nghịch.

❒ Cách tìm ma trận nghịch đảo: dùng các phép biến đối sơ cấp

$$[A \mid I_n] \quad \text{về} \quad [I_n \mid B]$$

khi đó

$$B = A^{-1}.$$

Ma trận sau có khả nghịch? Tìm ma trận nghịch đảo của nó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -2(\mathrm{I}) \\ -3(\mathrm{I}) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -(\mathrm{II}) \\ \\ -5(\mathrm{II}) \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \div(-1) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -(\mathrm{III}) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = \mathrm{rref}(A)$$

Suy ra A khả nghịch.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ -2(\mathrm{I}) \\ -3(\mathrm{I}) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -(\mathrm{II}) \\ \longrightarrow \\ -5(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \div(-1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -(\mathrm{III}) \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Định thức

Định thức ma trận $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ được định nghĩa là

$$\det(B) = ad - bc.$$

B khả nghịch khi và chỉ khi $\det(B) \neq 0$.

Cho ma trận A cỡ $m \times n$, ma trận con ứng với phần từ a_{ij} là A_{ij} (thu được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j)

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❒ Định thức của A:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \leftarrow \text{ Biến đổi theo dòng } i.$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \leftarrow \text{ Biến đổi theo cột } j.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm xem dòng (hoặc cột) có nhiều số không nhất

$$\det(A) = -a_{12}\det(A_{12}) + a_{22}\det(A_{22}) - a_{32}\det(A_{32}) + a_{42}\det(A_{42})$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 2\left(2\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

Định thức của ma trận tam giác

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

☎ Để tìm $\det(A)$, ta áp dụng phép biến đổi sơ cấp để chuyển A về dạng ma trận tam giác hoặc $rref(A)$.

☎ Hơn nữa, A khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det(A) \neq 0$.

Tính chất của định thức

- Nếu $B = (1/k)A$, thì
$$\det(A) = k\det(B).$$
- Nếu B nhận được từ A bằng cách đổi chỗ 2 dòng, thì
$$\det(A) = -\det(B).$$
- Nếu B nhận được từ A bằng cách nhân 1 dòng của A với số thực và cộng với dòng khác thì
$$\det(A) = \det(B).$$
- Định thức ma trận chuyển vị: $\det(A^T) = \det(A)$.
- Định thức của tích ma trận: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Định thức của ma trận nghịch đảo $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -\,(\mathrm{I}) \\ -\,(\mathrm{I}) \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Định thức và ma trận khả nghịch

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thỏa $\det(A) \neq 0$. Khi đó,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó $C = (c_{ij})_{n\times n}$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quy tắc Cramer

Xét hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ với A là ma trận vuông cấp n và b vec tơ cột cấp n. Giả sử $\det(A) \neq 0$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$ tức là

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Trong đó A_j là ma trận suy ra từ A bằng cách thay cột j bởi b.

$$\begin{cases} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{cases}$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 44 \neq 0; \det(A_1) = -40,\ \det(A_2) = 72,\ \det(A_3) = 152.$

Suy ta hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{-40}{44},\ x_2 = \frac{72}{44},\ x_3 = \frac{152}{44}.$$

Thank you for listening!

Nguyen Van Hoi

hoinv@uit.edu.vn