Phần B
LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

Chương 1

1. a) Các trường hợp thuận lợi là (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1).

Vậy $P = \frac{1}{6}$.

b) Các trường hợp thuận lợi là (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2).

Vậy $P = \frac{5}{36}$.

c) $P = \frac{2}{9}$.

2. a) Các trường hợp có tổng bằng 8 là (2, 3, 3); (2, 2, 4); (1, 1, 6); (1, 2, 5); (1, 3, 4) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là: 3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 21

Do đó $P = \frac{21}{216}$.

b) Các trường hợp có tổng bằng 11 là (1, 4, 6); (1, 5, 5); (2, 3, 6); (2, 4, 5); (3, 4, 4); (3, 3, 5) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là: 6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27

Do đó $P = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

3. a) $P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$.

b) $P = \frac{C_6^4.C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$

c) $P = \frac{C_4^2.C_6^4 + C_4^3.C_6^3 + C_4^4.C_6^2}{C_{10}^6} = \frac{185}{210} = \frac{37}{42}$

4. Số trường hợp có thể C_{12}^6.

Số trường hợp thuận lợi $C_6^3.C_4^2.C_2^1$.

Vậy $P = \frac{20}{77}$.

5. a) $P = \dfrac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}} \approx \dfrac{1}{10005} \approx 0{,}0001$.

b) Trong 30 số từ 1 đến 30 có đúng 10 số chia hết cho 3.

Vậy $P = \dfrac{C_{10}^{5}.C_{20}^{5}}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}130$.

c) Trong 30 số từ có 15 số lẻ, 15 số chẵn trong đó chỉ có 3 số chia hết cho 10. Vậy:

$$P = \frac{C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{3}^{1}}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}1484.$$

6. a) Gọi A: "cả hai nữ được chọn"

B: "ít nhất có một nữ được chọn"

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{6/15}{14/15} = \frac{3}{7}.$$

b) Xác suất để Hoa được chọn là $\dfrac{5}{15}$. Do đó xác suất để Hoa được chọn nếu biết rằng có 1 nữ được chọn là $\dfrac{5/15}{14/15} = \dfrac{5}{14}$.

7. $p = 1 - \dfrac{C_5^2}{C_9^2} = \dfrac{13}{18}$

8. a) $p = 1 - \dfrac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 0{,}7525$

b) $p = \dfrac{2^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 4126.10^{-14}$

9. Số trường hợp có thể: 12^{12}

Số trường hợp thuận lợi: 12 !

Vậy $p = \dfrac{12!}{12^{12}}$

10. $p = \dfrac{7!}{7^7}$

11. Số cách chọn một toa có 3 người, một toa có 1 người và hai toa trống là $A_4^2 = 12$.

Từ đó: $p = \dfrac{A_4^2.C_4^3}{4^4} = \dfrac{3}{16}$

12. a) Gọi A là biến cố: "có ít nhất một viên trúng A"

B là biến cố: "cả hai viên trúng B".

Khi đó P(A) = 1 – $0{,}85^2$;   P(B) = $(0{,}3)^2$

Xác suất để máy bay rơi là:

P = P(A) + P(B) = 0,3675

b) Máy bay không rơi khi có 1 viên trúng vào B và 2 viên trúng vào C. Xác suất này là $3(0{,}55)^2(0{,}3)$.

Vậy P {máy bay rơi} = 1 – $3(0{,}55)^2(0{,}3)$ = 0,72775.

13. a) Đánh số bộ phận A, B, C, D là 1, 2, 3, 4.

Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b), trong đó:

a: điểm rơi của viên đạn 1

b: điểm rơi của viên đạn 2; $1 \le a \le 4, \quad 1 \le b \le 4$.

Khi đó p = $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

b) Chia bộ phận A làm hai bộ phận có diện tích bằng nhau A_1 và A_2.

Đánh số các bộ phận A_1, A_2, B, C, D là 1, 2, 3, 4, 5. Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b), $1 \le a \le 5, \quad 1 \le b \le 5$. Máy bay rơi khi các kết quả là: (1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (1, 3); (3, 1); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4); ...

Có cả thảy 15 trường hợp thuận lợi.

Vậy p = $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

14. Gọi A là biến cố: “vé có chữ số 1” và B là biến cố: “vé có chữ số 5”.

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\overline{B}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\overline{A}\,\overline{B}) = \left(\frac{8}{10}\right)^5$$

Xác suất cần tìm là:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 2\left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5$$

15. Gọi A là biến cố: “vé có chữ số 5” và B là biến cố “vé có chữ số chẵn”. Ta cần tính P(AB). Chuyển sang tính xác suất của biến cố đối. Biến cố đối của AB là $(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Ta có $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B})$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5; \quad P(\overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5; \quad P(\overline{A}\,\overline{B}) = \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

Vậy $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = (0{,}9)^5 + (0{,}5)^5 - (0{,}4)^5$.

Suy ra:

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 + (0{,}4)^5 - (0{,}9)^5 - (0{,}5)^5.$$

16. Giả sử ba toa tàu được ký hiệu là A, B và C. Gọi A, B và C tương ứng là các biến cố: "toa A không có hành khách mới lên", "toa B không có hành khách mới lên", và "toa C không có hành khách mới lên".

Dễ thấy biến cố đối của biến cố đang xét là biến cố $A \cup B \cup C$ "có ít nhất một toa không có hành khách mới lên".

Ta có:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

Dễ thấy:

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = \left(\frac{1}{3}\right)^5; \quad P(ABC) = 0$$

Thay vào ta được:

$$P(A \cup B \cup C) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{31}{81}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{50}{81}$.

17. Ký hiệu ba lá thư đó là A, B, C. Gọi A là biến cố: "lá thư A bỏ đúng địa chỉ", B là biến cố: "lá thư B bỏ đúng địa chỉ" và C là biến cố: "lá thư C bỏ đúng địa chỉ".

Ta phải tìm:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Dễ thấy:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = P(ABC) = \frac{1}{6}$$

Vậy: $P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

18. Gọi A là biến cố: "xạ thủ A không bắn trúng" và B là biến cố "xạ thủ B không bắn trúng".

Ta có: $P(A) = (1 - p_1)^n$; $P(B) = (1 - p_2)^m$

$P(AB)$ = P {mục tiêu không bị trúng đạn} = $P(A)P(B)$

$= (1 - p_1)^n(1 - p_2)^m$

Từ đó xác suất cần tìm là $1 - (1 - p_1)^n(1 - p_2)^m$

19. Áp dụng công thức Becnuli:

$$p = C_{12}^5 (0,65)^5 (0,35)^7 = 0,0591$$

20. $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}6651$

21. $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914$

22. a) $p = (0{,}97)^{20} \approx 0{,}5438$

b) $p = 20(0{,}03)(0{,}97)^{19} + 190(0{,}03)^2(0{,}97)^{18}$

$= 0{,}3364 + 0{,}0988 = 0{,}4352$

c) 1 – 0,54338 – 0,4352 = 0,021

23. Xác suất để một bóng sáng là $\frac{3}{4}$. Do đó P { có ít nhất 4 bóng sáng }.

$$= C_6^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right) + C_6^6\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}8305$$

Vậy P { lớp không đủ ánh sáng } = 0,1695.

24. a) Anh ta được 13 điểm trong trường hợp trả lời đúng 5 câu và trả lời sai 7 câu. Vậy xác suất là:

$$C_{12}^5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0{,}0532$$

b) Anh ta bị điểm âm khi trả lời đúng ít hơn 3 câu. Thật vậy, gọi x là số câu đúng, số câu sai là 12 – x. Bất phương trình 4x < 12 – x xảy ra khi x = 0, 1, 2.

Vậy:

P { nhận điểm âm } =

$$= C_{12}^0\left(\frac{4}{5}\right)^{12} + C_{12}^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{11} + C_{12}^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

= 0,0687 + 0,2062 + 0,2835 = 0,5583

25. Xác suất thắng trong 1 ván là:

$$C_{12}^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

Vậy xác suất để thắng ít nhất 3 ván là:

$$C_5^3\left(\frac{2}{27}\right)^3\left(\frac{25}{27}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{2}{27}\right)^4\left(\frac{25}{27}\right) + \left(\frac{2}{27}\right)^5$$

26. Từ điều kiện bài toán suy ra xác suất bắn trúng vòng 10 là 0,2; trúng vòng 9 là 0,25. Xạ thủ đạt ít nhất 28 điểm trong các trường hợp sau:

a) 1 viên 10 và 2 viên 9. Xác suất là:

$3(0{,}2)(0{,}25)^2 = 0{,}0375$

b) 2 viên 10 và 1 viên 9. Xác suất là:

$3(0{,}2)^2(0{,}25) = 0{,}03$

c) 2 viên 10 và 1 viên 8. Xác suất là:

$3(0{,}2)^2(0{,}15) = 0{,}018$

d) Cả 3 viên 10. Xác suất là 0,008.

Vậy P { ít nhất 28 điểm } = 0,0935.

27. a) Máy bay sẽ rơi khi tất cả các động cơ đều hỏng hoặc chỉ có 1 động cơ làm việc.

P { tất cả các động cơ hỏng } = $(0,1)^3\,(0,05)^2$

P { 4 động cơ hỏng } = $2(0,1)^3\,(0,05)\,(0,95) + 3(0,1)^2\,(0,9)\,(0,05)^2$

Vậy P { máy bay rơi } = $(0,1)^3\,(0,05)^2 + 2(0,1)^3(0,05)\,(0,95) + 3(0,1)^2\,(0,9)\,(0,05)^2 = 0,00016$

Vậy P { máy bay bay an toàn } = 0,99984.

b) P { cánh phải có ít nhất 1 động cơ làm việc } = $1 - (0,1)^2 = 0,99$.

P { cánh trái có ít nhất 1 động cơ làm việc } = $1 - (0,05)^2 = 0,9975$.

Vậy P { máy bay bay an toàn } = (0,99) (0,9975) ≈ 0,9875.

28. a) Anh ta trở lại điểm xuất phát khi tiến 4 bước và lùi 4 bước.

Vậy: $$p = C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$$

b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4m nếu số bước tiến là 8, 7, 0, 1. Vậy:

$$p = C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right) = C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{18}{256}$$

29. a) Gọi A là biến cố: "tổng số nốt là 8" và B là biến cố: "có ít nhất một con ra nốt 1".

(Trong bài tập 2 ta có P(A) = $\frac{21}{216}$); P(A/B) = $\frac{P(AB)}{P(B)}$

Để tính P(AB), ta thấy các tổ hợp có tổng bằng 8 mà trong đó có "1" là (1, 1, 6); (1, 2, 5); (1, 3, 4).

$$P(A/B) = \frac{3+6+6}{216} = \frac{15}{216}$$

Dễ thấy: $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$

Vậy: $P(A/B) = \frac{15}{91}$

b) Gọi A: "có ít nhất 1 con ra lục"

B: "số nốt trên 3 con khác nhau"

Ta có: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(A/B) = \frac{3\times 5\times 4}{216} = \frac{60}{216}$$

$$P(B) = \frac{6\times 5\times 4}{216} = \frac{120}{216}$$

Vậy: $P(A/B) = \dfrac{1}{2}$.

30. A: “cả hai đứa là trai”

B: “ít nhất có 1 đứa là trai”

Ta có: $P(A/B) = \dfrac{1}{4}$; $P(B) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Vậy: $P(A/B) = \dfrac{1}{3}$.

31. a) p = (0,9) (0,8) (0,9) = 0,648

b) P { trượt ở vòng 2 } = (0,9) (0,2) = 0,18.

Vậy xác suất để thí sinh trượt ở vòng 2 nếu biết rằng thí sinh đó trượt là:

$$\frac{P\{\,tröôït\ ôû voøng 2\,\}}{P\{\,tröôït\,\}} = \frac{0{,}18}{0{,}352} = 0{,}511$$

32. a) Ký hiệu B_1: “cặp sinh đôi là thật”

B_2: “cặp sinh đôi là giả”

A : “cặp sinh đôi cùng giới”.

Theo giả thiết P(A) = 0,34 + 0,3 = 0,64 và $P(A/B_1) = 1$; $P(A/B_2) = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $P(B_1) = x$; $P(B_2) = 1 - x$.

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2)$$

$$\Leftrightarrow\ 0{,}64 = x + \frac{1-x}{2}\ \Rightarrow\ x = 0{,}28$$

b) $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}64} = 0{,}4375$

33. Ký hiệu E_1: “từ chuồng 2 bắt được thỏ trắng”

E_2: “từ chuồng 2 bắt được thỏ đen”

A : “bắt được thỏ trắng ở lần bắt sau”

B : “bắt được thỏ trắng của chuồng 1 ở lần bắt sau”

Ta có:

$$P(A) = P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) = \frac{3}{10}\times\frac{11}{16} + \frac{7}{10}\times\frac{10}{16} = \frac{103}{160}$$

$$P(B) = P(E_1)\,P(B/E_1) + P(E_2)\,P(B/E_2) = \frac{3}{10}\times\frac{10}{16} + \frac{7}{10}\times\frac{10}{16} = \frac{100}{160}$$

Vậy: $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{100}{103}$

34. E_1: "bắt được hai gà trống"

E_2: "bắt được hai gà mái"

E_3: "bắt được một gà trống và một gà mái"

E_1, E_2, E_3 là hệ đầy đủ với:

$$P(E_1) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{60}$$

$$P(E_2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

$$P(E_3) = 1 - \frac{5}{60} - \frac{9}{60} = \frac{46}{60}$$

A: "bắt được gà trống từ chuồng thứ ba". Khi đó:

$$P(A) = P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) + P(E_3)\,P(A/E_3)$$

$$= \frac{5}{60} \times \frac{4}{14} + \frac{9}{60} \times \frac{6}{14} + \frac{46}{60} \times \frac{5}{14} = \frac{304}{840} = 0{,}3619$$

35. Xét phương án 1. Nếu máy bay xuất hiện ở A thì xác suất bắn hạ là $1 - (0{,}3)^3 = 0{,}973$. Nếu máy bay xuất hiện ở B thì xác suất bắn hạ là 0,7. Vậy theo công thức xác suất đầy đủ xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 1 là:

$$\frac{2}{3}(0{,}973) + \frac{0{,}7}{3} = 0{,}882$$

Tương tự xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 2 là:

$$\frac{2}{3}[1 - (0{,}3)^2] + \frac{1}{3}[1 - (0{,}3)^2] = 0{,}91$$

Xác suất hạ máy bay theo phương án 3 là:

$$\frac{2}{3}(0{,}7) + \frac{1}{3}(0{,}973) = 0{,}971$$

Vậy theo phương án 2 là tốt nhất.

36. Gọi E_1: "bóng đèn tốt"

E_2: "bóng đèn hỏng"

A : "bóng đèn được đóng dấu đã kiểm tra".

Ta có: $P(E_1) = 0{,}8$

$P(E_2) = 0{,}2$

$P(A/E_1) = 0{,}9$ và $P(A/E_2) = 0{,}05$.

Thành thử:

$$(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$

$$= \frac{(0{,}8)(0{,}9)}{(0{,}8)(0{,}9) + (0{,}2)(0{,}05)} = 0{,}986$$

37. Gọi E_1: "xạ thủ thuộc nhóm 1"

E_2: "xạ thủ thuộc nhóm 2"

E_3: "xạ thủ thuộc nhóm 3"

E_4: "xạ thủ thuộc nhóm 4"

A : "xạ thủ bắn trượt".

Theo đầu bài ta có:

$P(E_1) = \frac{5}{18}$; $P(E_2) = \frac{7}{18}$; $P(E_3) = \frac{4}{18}$; $P(E_4) = \frac{2}{18}$

$P(A/E_1) = 0{,}2$; $P(A/E_2) = 0{,}3$; $P(A/E_3) = 0{,}4$ và $P(A/E_4) = 0{,}5$.

Áp dụng công thức Bayet, ta thu được:

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{5}{18}(0{,}2)}{\frac{5}{18}(0{,}2) + \frac{7}{18}(0{,}3) + \frac{4}{18}(0{,}4) + \frac{2}{18}(0{,}5)} = \frac{10}{57}$$

Tương tự $P(E_2/A) = \frac{21}{57}$; $P(E_3/A) = \frac{16}{57}$; $P(E_4/A) = \frac{10}{57}$

Vậy xạ thủ có khả năng ở nhóm 2 nhất.

38. Gọi A: "bệnh nhân điều trị bệnh A"

B: "bệnh nhân điều trị bệnh B"

C: "bệnh nhân điều trị bệnh C"

H: "bệnh nhân được chữa khỏi bệnh".

Từ đó theo công thức Bayet:

$$P(A/H) = \frac{(0{,}5)(0{,}7)}{(0{,}5)(0{,}7) + (0{,}3)(0{,}8) + (0{,}2)(0{,}9)} = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$$

39. Gọi A là biến cố: "chai rượu thuộc loại A", B là biến cố: "chai rượu thuộc loại B" và H là biến cố: "có 4 người kết luận rượu loại A, 1 người kết luận rượu loại B".

Ta cần tính P(A/H).

Áp dụng công thức Bayet:

$$P(A/H) = \frac{P(A)P(H/A)}{P(A)P(H/A) + P(A)P(H/B)}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(H/A) = C_5^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4}; \quad P(H/B) = C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4}$$

Thay vào ta thu được:

$$P(A/H) = \frac{27}{28} \approx 0{,}9642$$

40. a) Ký hiệu O, A, B và AB tương ứng là các biến cố: "người cần tiếp máu có nhóm máu là O, A, B và AB".

Gọi H là biến cố: "sự truyền máu thực hiện được". Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

P(H) = P(O) P(H/O) + P(A) P(H/A) + P(B) P(H/B) + P(AB) P(H/AB)

Theo dữ kiện của bài:

P(O) = 0,337; P(A) = 0,375; P(B) = 0,209

P(AB) = 0,079

P(H/O) = P(O) = 0,337

P(H/A) = P(O) + P(A) = 0,712

P(H/B) = P(O) + P(B) = 0,546

P(H/AB) = 1

Thay vào ta được: P(H) = 0,5737

b) Gọi E là biến cố: "sự truyền máu không thực hiện được".

Ta có:

$P(E/O) = [1 - P(O)]^2 = 0,663^2$

$P(E/A) = [1 - P(O) - P(A)]^2 = 0,288^2$

$P(E/B) = [1 - P(O) - P(B)]^2 = 0,454^2$

P(E/AB) = 0

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được:

P(E) = 0,2223

Vậy xác suất để truyền máu được là:

1 – P(E) = 0,7777

41. Ký hiệu H là biến cố đã xảy ra. Ta có:

P(H/A) = (0,6) (0,2) (0,2) (0,6) = 0,0144

P(H/B) = (0,2) (0,6) (0,2) (0,2) = 0,0048

P(H/C) = (0,2) (0,2) (0,6) (0,2) = 0,0048

Vậy: $P(A/H) = \dfrac{P(A)(P(H/A)}{P(H)} =$

$$= \frac{(0,3)\,(0,0144)}{(0,3)\,(0,0144) + (0,4)\,(0,0048) + (0,3)\,(0,0048)} = \frac{432}{768}\,0,5625$$

P(B/H) = 0,25

P(C/H) = 0,1875

Chương 2

42. $P\{X = 0\} = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{5}{30}$

$P\{X = 1\} = \dfrac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \dfrac{15}{30}$

$$P\{X=2\} = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{9}{30}$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

Vậy bảng phân bố của X là:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

Từ đó EX = 1,2; DX = 0,56; modX = 1.

43. Rõ ràng Y nhận các giá trị 1, 3, 4

$P\{Y=1\} = P\{X=1\} = 0{,}1$

$P\{Y=3\} = P\{X=3\} = 0{,}2$

$P\{Y=4\} = P\{X=5\} + P\{X=7\} + P\{X=9\} = 0{,}7$

44. a) $$P\{X=0\} = \frac{C_6^3}{C_{16}^3} = \frac{2}{56}$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_{10}^1 C_6^2}{C_{16}^3} = \frac{15}{56}$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_{10}^2 C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{27}{56}$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{12}{56}$$

b) Ta có Y = 5X + (3 – X)8 = 24 – 3X

$$P\{X=0\} = P\{Y=24\} = \frac{2}{56}$$

$$P\{X=1\} = P\{Y=21\} = \frac{15}{56}$$

$$P\{X=2\} = P\{Y=18\} = \frac{27}{56}$$

$$P\{X=3\} = P\{Y=15\} = \frac{12}{56}$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

Y	15	18	21	24
P	$\frac{12}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{2}{56}$

45. Bảng quy luật phân bố của X như sau:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

EX = 7; DX = 5,833.

46. $P\{X = 2\} = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

$P\{X = 3\} = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{4}{20}$

$P\{X = 4\} = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} + \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{6}{20}$

$P\{X = 5\} = 1 - \left(\frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20}\right) = \frac{8}{20}$

Trung bình cần EX = 4 lần thử.

47. a) Ký hiệu A_i là biến cố: "A bắn trúng i viên", B_i là biến cố: "B bắn trúng i viên" (i = 0, 1, 2). Dễ thấy:

$P(A_o) = 0,36$; $P(A_1) = 0,48$; $P(A_2) = 0,16$

$P(B_o) = 0,25$; $P(B_1) = 0,5$; $P(B_2) = 0,25$

Từ đó:

$P\{X = -2\} = P(A_o)P(B_2) = 0,09$

$P\{X = -1\} = P(A_o)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) = 0,18 + 0,12 =$ 0,3

$P\{X = 0\} = P(A_o)P(B_o) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) =$ 0,37

$P\{X = 1\} = P(A_1)P(B_o) + P(A_2)P(B_1) = 0,2$

$P\{X = 2\} = P(A_2)P(B_o) = 0,04$

Vậy bảng quy luật xác suất của X là:

X	–2	–1	0	1	2
P	0,09	0,3	0,37	0,2	0,04

b) $P\{Y = 0\} = 0,37$

$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} + P\{X = -1\} = 0,5$

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = -2\} = 0,13$

48. $P\{X = 3\} = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$

$P\{X = 4\} = \frac{1}{6}$

$P\{X = 5\} = \frac{2}{6}$

$P\{X = 6\} = \frac{1}{6}$ và $P\{X = 7\} = \frac{1}{6}$

49. Ta có: $P\{X = k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}$

Bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	1	2	3	4	....
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	

Với 243 người có khoảng $\frac{243}{3} = 81$ người thi đạt ngay lần đầu, $\frac{243}{9} \times 2 = 54$ người phải thi 2 lần. Xác suất để một người phải thi ít nhất 4 lần là $P\{X \geq 4\} = 1 - P\{X \leq 3\} = \frac{8}{27}$. Thành thử có khoảng $243 \times \frac{8}{27} = 72$ người phải thí ít nhất 4 lần.

50. EX = 1,82; EY = 1,7

$P\{X + Y \leq 3\} = P\{X + Y = 0\} + P\{X + Y = 1\} +$
$+ P\{X + Y = 2\} + P\{X + Y = 3\}$

$P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0\} P\{Y = 1\} + P\{X = 1\} P\{Y = 0\} = 0,12$

$P\{X + Y = 0\} = 0,045$

Tương tự tính $P\{X + Y = 2\}$, $P\{X + Y = 3\}$. Cuối cùng ta thu được $P\{X + Y \leq 3\} = 0,5225$.

51. a) A thắng trong các tình huống sau:

A_1: "A thắng trong 3 ván đầu". Khi đó:

$$P(A_1) = (0,4)^3 = 0,064$$

A_2: "3 ván đầu A thắng 2, ván thứ 4 A thắng"

$$P(A_2) = C_3^2(0,4)^2(0,6)(0,4) = 0,1152$$

A_3: "4 ván đầu A thắng 2, ván thứ 5 A thắng"

$$P(A_3) = C_4^2(0,4)^2(0,6)^2(0,4) = 0,13824$$

A_4: "5 ván đầu A thắng 2, ván thứ 6 A thắng"

$$P(A_4) = C_5^2(0,4)^2(0,6)^3(0,4) = 0,13824$$

A_5: "6 ván đầu A thắng 2, ván thứ 7 A thắng"

$$P(A_5) = C_6^2(0,4)^2(0,6)^4(0,4) = 0,124416$$

Vậy xác suất thắng của A là:

$$P = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) = 0,58$$

b) Ta có: $P\{X = 3\} = P(A_1) = 0,064$

$P\{X = 4\} = P(A_2) = 0,1152$

$P\{X = 5\} = P(A_3) + P(\text{B thắng}) = 0,13824 + (0,6)^5 =$ 0,216

$P\{X = 6\} = P(A_4) + P(\text{B thắng})$

$= 0{,}13824 + C_5^4(0{,}6)^4(0{,}4)(0{,}6) =$ 0,29376

$P\{X = 7\} = P(A_5) + C_6^4(0{,}6)^4(0{,}4)^2(0{,}6) = 0{,}31104$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	3	4	5	6	7
P	0,064	0,1152	0,216	0,29376	0,31104

52.

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$EX = \frac{16}{7}$.

53. $P\{X = 2\} = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{6}{45}$

$P\{X = 3\} = P\{\text{chọn tấm thẻ số 1 và số 2}\} = \dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^2} = \dfrac{12}{45}$

$P\{X = 4\} = P\{\text{chọn tấm thẻ số 1, số 3}\} + P\{\text{chọn hai thẻ số 2}\}$

$$= \frac{C_4^1C_2^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$$

$P\{X = 5\} = P\{\text{chọn thẻ số 1 và 4}\} + P\{\text{chọn thẻ số 2 và 3}\}$

$$= \frac{C_4^1C_1^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^1C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$$

Tương tự:

$P\{X = 6\} = \dfrac{4}{45}$

$P\{X = 7\} = \dfrac{2}{45}$

Phân bố của X là:

X	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

54. $P\{X = 1\} = \dfrac{2}{7} = \dfrac{12}{42}$

$P\{X = 2\} = \dfrac{5}{7}.\dfrac{2}{6} = \dfrac{10}{42}$

$P\{X=3\} = \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5} = \frac{8}{42}$

$P\{X=4\} = \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4} = \frac{6}{42}$

$P\{X=5\} = \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{4}{42}$

$P\{X=6\} = \frac{2}{42}$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{12}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{2}{42}$

55. Ký hiệu T: "rút được quả cầu trắng"; D: "rút được quả cầu đen".

Các kết quả có thể là:

$\omega_1 = D$; $\omega_2 = TD$; $\omega_3 = TTD$; $\omega_4 = TTTD$; $\omega_5 = TTTTD$

Ta có: $P(\omega_1) = \frac{3}{7}$; $P(\omega_2) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7}$; $P(\omega_3) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{3}{5} = \frac{6}{35}$

$P(\omega_4) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{2}{5}.\frac{3}{4} = \frac{3}{35}$; $P(\omega_5) = \frac{1}{35}$

Nếu xảy ra ω_1 thì X = –5.

Nếu xảy ra ω_2 thì X = 10.

Nếu xảy ra ω_3, ω_4 hoặc ω_5 thì X = –15, 20 hoặc –25.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	–25	–15	–5	10	20
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{3}{35}$

$EX = -\frac{6}{7}$, tức là trung bình một ván A thua $\frac{6}{7}$ đô la:

Nếu chơi 150 ván thì A sẽ mất khoảng $150 \times \frac{6}{7} = 128{,}57$ USD.

56. a) Các bảng phân bố của X và Y như sau:

X	1	2
P	0,3	0,7

;

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Từ đó dễ thấy hệ thức $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} P\{Y = y\}$ thỏa mãn với mọi $x \in \{1, 2\}$ và $y \in \{1, 2, 3\}$.

b) $P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}12$

$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0{,}15 + 0{,}28 = 0{,}43$...

Kết quả như sau:

Z	1	2	3	4	6
P	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

c) Cách thứ nhất: Từ bảng phân bố của Z ta có:

$EZ = (0,12).1 + (0,43).2 + ... + (0,07).6 = 2,89$

Cách 2: Tính $EZ = \Sigma xyP\{X = x, Y = y\}$.

Ta có: $EX = 1,7$; $EY = 1,7$ và $EX.EY = 2,89 = EZ$

57. a) Dễ thấy phân bố đồng thời của X, Y là:

X \ Z	0	1	2	3	4
0	0,04	0,12	0,16	0,06	0,02
1	0,03	0,09	0,12	0,045	0,015
2	0,02	0,06	0,08	0,03	0,01
3	0,01	0,03	0,04	0,015	0,005

b) $P\{X > Y\} = 0,19$

58. $EX = -\dfrac{1}{8}$; $EY = 0$.

$\text{cov}(X, Y) = -\dfrac{1}{8}$ và $\rho(X, Y) = -0,15$

59. a) $EX = -\dfrac{1}{5}$; $EY = 0$; $\rho(X, Y) = 0$

b) X và Y không độc lập vì:

$P\{X = 1\} = \dfrac{2}{15}$; $P\{Y = 1\} = \dfrac{5}{15}$ và $P\{X = 1, Y = 1\} = 0$

60. $P\{Y = 1\} = P\{X = 3\} = 0,25$

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} = 0,3$

$P\{Y = 10\} = P\{X = 0\} + P\{X = 4\} = 0,25$

$P\{Y = 7\} = P\{X = 1\} = 0,2$

Vậy kết quả là:

Y	1	2	7	10
P	0,25	0,3	0,2	0,25

$EY = 4,75$

$EY^2 = 36,25$

$DY = 13,6875$

61. Ta có $T = X + Y + Z \sim B(30; 0,1)$

Vậy $P\{T = 4\} = C_{30}^4 (0,1)^4 (0,9)^{26} \approx 0,1771$

62. Ta có bảng phân bố của X và Y như sau:

X	0	1	2
Y	0,36	0,48	0,16

X	0	1	2
Y	0,09	0,42	0,49

đặt Z = X + Y. Ta có:

P{Z = 0} = P{X = 0} P{Y = 0} = 0,0324

P{Z = 1} = P{X = 0} P{Y = 1} + P{X = 1} P{Y = 0} = 0,1944

Tương tự:

P{Z = 2} = 0,3924

P{Z = 3} = 0,3024

P{Z = 4} = P{X = 2} P{Y = 2} = 0,0784

Vậy bảng quy luật xác suất của X + Y là:

$X+Y$	0	1	2	3	4
P	0,0324	0,1944	0,3924	0,3024	0,0784

b) Giả sử trái lại T = X + Y có phân bố nhị thức T ~ B(4, p).

Khi đó: $P\{T = 4\} = p^4 = 0{,}0784$.

Mặt khác: $P\{T = 0\} = 1 - p)^4 = 0{,}0324$

Vậy ta phải có $\begin{cases} p^4 = 0{,}0784 \\ (1-p)^4 = 0{,}0324 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} p = \sqrt[4]{0{,}0784} \\ p = 1 - \sqrt[4]{0{,}0324} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \sqrt[4]{0{,}0784} + \sqrt[4]{0{,}0324}$$. Vô lý !

63. a)

X	0	1
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

;

Y	0	1	2
P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

$X + Y \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right)$. Do đó ta có bảng:

$X+Y$	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

b)

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tương tự như bài tập 62 ta có:

$X+Y$	0	1	2	3
P	0,32	0,48	0,18	0,02

Nếu X + Y có phân bố nhị thức thì X + Y ~ B(3, p).

Suy ra: $p^3 = P\{X + Y = 3\} = 0{,}02$

$(1 - p)^3 = P\{X + Y = 0\} = 0{,}32$

Điều này không xảy ra.

64. Ta có: f(n) = $C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$; $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$

65. Xác suất để A thắng r ván là:

$$C_{2m+1}^{r} p^{r}(1-p)^{2m+1-r}$$

Vậy xác suất để A thắng ít nhất m + 1 ván là:

$$\sum_{r=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^{r} p^{r}(1-p)^{2m+1-r} = 1 - \sum_{r=0}^{m} C_{2m+1}^{r} p^{r}(1-p)^{2m+1-r}$$

Với m = 2; p = 0,25; xác suất này là $\frac{53}{512}$.

66. Tại thời điểm đó nhà toán học đã rút ra 2n – k que diêm.

Gọi A là biến cố cần tìm.

A_1: "rút n que túi phải, n – k que túi trái và lần thứ 2n – k + 1 chọn túi phải".

A_2: "rút n que túi trái, n – k que túi phải và lần thứ 2n – k + 1 chọn túi trái".

Ta có: $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

Rõ ràng: $P(A_1) = C_{2n-k}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.\frac{1}{2}$

$$P(A_2) = C_{2n-k}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.\frac{1}{2}$$

Vậy: $P(A) = C_{2n-k}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$

67. Gọi n là số vé cần mua. Ta phải có:

$$1-(0,9)^{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,9)^{n} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,9} = 28,8$$

Vậy n = 29.

68. a) Gọi X là số người chết trong vòng 1 ngày: X ~ Poátxông $\left(\frac{2}{7}\right)$.

Vậy tra bảng phân bố Poátxông ta được $P\{X = 0\} \approx 0,7515$.

b) Gọi Y là số người chết trong vòng 2 ngày:

$$Y \sim \text{Poátxông} \left(\frac{4}{7}\right)$$

Vậy tra bảng ta được $P\{Y \geq 3\} \approx 0,0204$.

69. a) Gọi X là số xe đi qua trong thời gian 3 phút.

Ta có X ~ Poátxông (6)

Tra bảng ta được $P\{X = 6\} = 0,1606$.

b) Gọi X là xe đi qua trong khoảng thời gian t phút. Ta có Y ~ Poátxông (2t). Từ đó $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - e^{-2t} = 0{,}99$.

Suy ra t = 2,303.

70. a) Gọi X là số tai nạn xảy ra trong 3 tháng.

Ta có X ~ Poátxông (6).

Vậy tra bảng ta được $P\{X \leq 3\} = 0{,}151$.

b) Gọi Y là số tai nạn xảy ra trong 1 tháng.

Ta có Y ~ Poátxông (2). Vậy $P\{Y \leq 1\} = 0{,}406$. Xác suất để 3 tháng liên tiếp mỗi tháng không có quá 1 tai nạn là $(0{,}406)^3 = 0{,}067$.

71. Ta có bảng phân bố của X là:

X	0	1	2	3	≥ 4
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,3081

a) Từ bảng phân bố của X ta thu được bảng phân bố của Y:

$$P\{Y = -24\} = P\{X = 0\}$$
$$P\{Y = -4\} = P\{X = 1\}$$
$$P\{Y = 16\} = P\{X = 2\}$$
$$P\{Y = 36\} = P\{X \geq 3\}$$

Y	– 24	– 4	16	36
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

Từ đó EY = 20,8.

b) Nếu trạm có 4 chiếc xe thì phân bố của số tiền Z mà trạm thu được trong 1 ngày sẽ là:

Z	– 32	– 12	8	28	48
P	0,0608	0,1703	0,2834	0,2225	0,3081

Từ đó EZ = 18,9.

c) Vậy thì trạm nên có 3 chiếc xe.

72. a) $P\{X = 0\} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$

$$P\{X = 2\} = e^{-1{,}5} \times \frac{1{,}5^2}{2!} \approx 0{,}2510$$

$P\{X \leq 2\} \approx 0{,}8088$

$P\{X \geq 4\} = 1 - P\{X \leq 3\} \approx 0{,}0656$

73. a) Ta có X ~ Poátxông (2).

Gọi Y là số ôtô cho thuê. Ta có:

$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} \approx 0{,}1353$

$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} \approx 0{,}2707$

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} \approx 0{,}2707$

$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} \approx 0{,}1804$

$P\{Y = 4\} = P\{X \geq 4\} \approx 0{,}1429$

Từ đó: EY ≈ 1,925

b) Gọi n là số ôtô mà cửa hàng cần có. Ta phải có:

$$P\{X \le n\} > 0,98$$

Tra bảng ta thấy: $P\{X \le 4\} > 0,9473$; $P\{X \le 5\} > 0,9834$

Vậy n = 5.

74. a) Gọi X là số hoa trên một chậu cây: X ~ Poátxông (3)

Ta có: $P\{X = 2\} \approx 0,2240$

$$P\{X = 3\} \approx 0,2240$$
$$P\{X = 4\} \approx 0,1680$$
$$P\{X = 5\} \approx 0,1008$$

và: $P\{2 \le X \le 5\} \approx 0,7169$

Gọi Y là số hoa của chậu cây đem bán. Ta có:

$$P\{Y = 2\} = \frac{P\{X = 2\}}{P\{2 \le X \le 5\}} = 0,3125$$

Tương tự: $P\{Y = 3\} = 0,3125$

$$P\{Y = 4\} = 0,2344$$
$$P\{Y = 5\} = 0,1406$$

b) $EY = 3,203$; $EY^2 = 11,328$; $\sigma_Y = 1,033$

75. a) Dễ thấy $X(\Omega) = \{1, 2, ...\}$, và $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$, $(k \ge 1)$.

b) Gọi B là biến cố: "trong n lần gieo đều tiên chỉ có đúng một lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

Ta phải tìm $P\{X = k/B\}$

Rõ ràng với k > n thì $P\{X = k/B\} = 0$.

Xét $k \le n$. Ta có:

$$P\{X = k/B\} = \frac{P\{X = k, B\}}{P(B)}$$

$$P(B) = C_n^1 pq^{n-1} = npq^{n-1} \quad (\text{ở đây } q = 1 - p)$$

$$P\{X = k, B\} = pq^{n-1}$$

Do đó $P\{X = k/B\} = \dfrac{1}{n}$

76. Ta có:

$$P\{X = k/X + Y = n\} = \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}}$$

Ta có: $P\{X = k, X + Y = n\} = P\{X = k, Y = n - k\} =$

$$= P\{X = k\}\,P\{Y = n - k\} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

Vì X + Y ~ Poátxông $(\lambda_1 + \lambda_2)$ nên:

$$P\{X + Y = n\} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$$

Từ đó: P{X = k/X + Y = n} = $C_n^k\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$

Như vậy phân bố của X với điều kiện X + Y = n là phân bố nhị thức với p = $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Chương 3

77. a) k = 12

b) modX = $\dfrac{2}{3}$

c) P{0,4 < X < 0,6} = $12\int_{0,4}^{0,6} x^2(1-x)dx = 0{,}296$

78. k = 2; EX = $2\int_0^1 x(1-x)dx = \dfrac{1}{3}$; DX = $\dfrac{1}{18}$

Tìm median: hàm phân bố của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & vôùi\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & vôùi\ x \le 0 \\ 1 & vôùi\ x \ge 1 \end{cases}$$

Nếu x_o là median thì x_o là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} F(x_o) = \dfrac{1}{2} \\ 0 \le x_o \le 1 \end{cases}$$

Vậy: $x_o = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

79. Hàm mật độ f(x) = F'(x) = $\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & vôùi\ x > 0 \\ 0 & vôùi\ x < 0 \end{cases}$

EX = $\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; DX = $\dfrac{4-\pi}{2}$; median = $\sqrt{2\log 2}$; modX = 1

80. P{2 < X^2 < 5} = P{$\sqrt{2}$ < X < $\sqrt{5}$} = P{$\sqrt{2}$ < X < 2} = 2 – $\sqrt{2}$

81. P{X^2 < 2} = P{–$\sqrt{2}$ < X < $\sqrt{2}$} = P{–1 < X < $\sqrt{2}$} = $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$

82. a) $\int_0^\infty \dfrac{dx}{(1+x)^3} = \dfrac{1}{2}$, do đó k = 2.

b) $EX = 2\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^3} = 1$

83. Vì F(1) = 1 nên k = $\frac{1}{\alpha - \beta}$

Hàm mật độ f(x) = F'(x) = $\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(x^{\beta-1} - x^{\alpha-1})$

Từ đó EX = $\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\int_0^1 (x^\beta - x^\alpha)dx = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

84. a) Ta có $\int_0^3 f(x)dx = 9k$. Suy ra k = $\frac{1}{9}$.

b) P{X > 2} = $\frac{1}{9}\int_2^3 x^2 dx = \frac{19}{27}$

c) Hàm phân bố F(x) = $\begin{cases} 0 & \text{vôùi } x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & \text{vôùi } 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{vôùi } x \ge 3 \end{cases}$

Median m là nghiệm của phương trình:

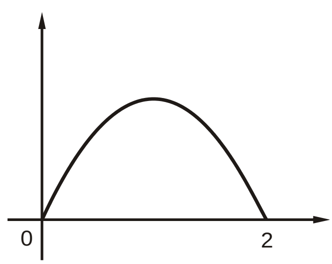
$$\frac{x^3}{27} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

d) F(a) = $\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a^3}{27} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \approx 2{,}726$

85. a) đồ thị của f(x) như sau:

P{X > 1,5} ≈ 0,15625

P{0,9 < X < 1,1} ≈ 0,1495



Hình 1

86. a) k = 2

b) Median là $1 + \sqrt{2}$

c) f'(x) = 0 khi x = $\frac{1}{2}$ và f''(x) = $-\frac{6(1-x)}{(1+x)^5} < 0$ với x = $\frac{1}{2}$

Vậy modX = $\frac{1}{2}$.

87. a) Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha tgx} \dfrac{1}{\cos^2 x} & \textit{neáu}\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

b) $f'(x) = f(x)\left[2tgx - \dfrac{\alpha}{\cos^2 x}\right] = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2tgx = \dfrac{\alpha}{\cos^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \alpha$ (*)

Ta có:

$$f''(x) = f(x)\left[2tgx - \frac{\alpha}{\cos^2 x}\right]^2 + 2f(x)\frac{1}{\cos^2 x}[1 - \alpha tgx]$$

Do đó $f''(x) < 0$ nếu $tgx > \dfrac{1}{\alpha}$. Từ phương trình (*) suy ra:

$$tgx = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

Vậy $modX = m_o$ là giá trị mà:

$$tgm_o = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \qquad 0 < m_o < \frac{\pi}{2}$$

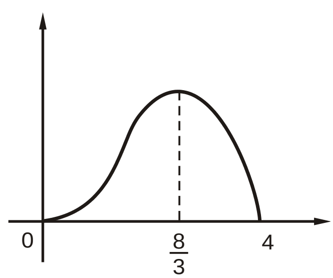
88. a) Vì $\displaystyle\int_0^4 x^2(4-x)dx = \frac{64}{3}$

Suy ra $k = \dfrac{3}{64}$

Đồ thị của f(x) như sau:

b) $f'(x) = 0$ suy ra $modX = \dfrac{8}{3}$

c) $P\{X < 1\} = \displaystyle\int_0^1 \frac{3}{64}x^2(4-x)dx = \frac{13}{256}$



Hình 2

89. $EX = \displaystyle\int_{-2}^{0} x\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)dx + \int_0^2 x\left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)dx = 0$; $DX = \dfrac{2}{3}$

90. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k\int_0^1 xdx + 3k = \frac{k}{2} + 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{7}$

b) $EX = \displaystyle\frac{2}{7}\int_0^1 x^2dx + \frac{2}{7}\int_1^4 xdx = \frac{47}{21} \approx 2{,}238$

$EX^2 = \displaystyle\frac{2}{7}\int_0^1 x^3dx + \frac{2}{7}\int_1^4 x^2dx = \frac{85}{14}$

Từ đó DX = $EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{937}{882} \approx 1{,}062$

Median X = $\dfrac{9}{4}$.

91. a) Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2} & \textit{neáu}\ 0 \le x \le \alpha \\ 0 & \textit{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

b) EX = $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{2\alpha x(\alpha^2 - x^2)dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$

Dùng phép đổi biến x = αtgu, ta tìm được:

$$EX = \alpha(1 - \ln 2) \approx \frac{3\alpha}{10}$$

Tương tự $EX^2 = \alpha^2(\pi - 3)$

Từ đó: $DX = \alpha^2[(\pi - 3) - (1 - \ln 2)^2] \approx \dfrac{\alpha^2}{20}$

Ở đây $\pi \approx 3{,}1416$; $\ln 2 = 0{,}693$.

92. Ta có: $\displaystyle\int_2^3 (x^2 - 1)dx = \frac{16}{3}$. Từ đó k = $\dfrac{3}{16}$.

$EX = \dfrac{3}{16}\displaystyle\int_2^3 x(x^2 - 1)dx \approx 2{,}578\ \ (kg)$

$EX^2 = 6{,}725$

Từ đó: $DX = 6{,}725 - (2{,}578)^2 \approx 0{,}0789\ (kg^2)$

Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_X = \sqrt{DX} \approx 0{,}2809$ (kg)

93. Hàm mật độ f(x) = $\alpha x^{\alpha - 1}$ với $0 \le x \le 1$ và bằng 0 nếu trái lại.

a) Suy ra: $EX^k = \dfrac{\alpha}{\alpha + k}$

b) Từ đó tính được các mômen trung tâm:

$\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 2)}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^3(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$$

$$\alpha_4 = \frac{3\alpha(3\alpha^2 - \alpha + 2)}{(\alpha + 1)^4(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}$$

c) Hệ số bất đối xứng là:

$$S = \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}} = -\frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 3}\left(\frac{\alpha + 2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hệ số nhọn là:

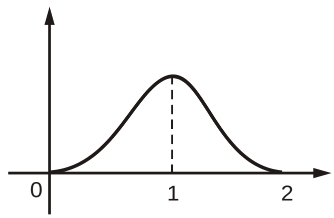
$$E = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2} - 3 = \frac{6(\alpha^3 - \alpha^2 - 6\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 3)(\alpha + 4)}$$

94. a) $\int_0^2 x^2(x-2)^2\,dx = \frac{16}{15}$, suy ra $k = \frac{15}{16}$. Đồ thị của f(x) có dạng như sau:

b) EX = $\frac{15}{16}\int_0^2 x^3(x-2)^2\,dx = 1$

EX² = $\frac{15}{16}\int_0^2 x^4(x-2)^2\,dx = \frac{8}{7}$

Từ đó DX = $\frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$



Hình 3

95. a) k = $\frac{1}{2}$

Hàm phân bố F(x) = 0 với x < 1; với x ≥ 1 thì:

F(x) = $\frac{1}{2}\int_1^x t^{-3/2}\,dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) Trước hết ta tìm hàm phân bố của Y. Với y > 0:

$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} = P\left\{X > \frac{1}{y}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right) =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{neáu } y > 1 \\ \sqrt{y} & \text{neáu } 0 < y < 1 \end{cases}$$

Với y < 0 thì $F_Y(y) = 0$.

Vậy hàm mật độ của Y là:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{neáu } 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

c) P{0,1 < Y < 0,2} = $F_Y(0{,}2) - F_Y(0{,}1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{10}}$

96. k = $\frac{3}{4}$

EY = $\frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 2x^2(1 - x^2)\,dx = \frac{2}{5}$

$EY^2 = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 4x^4(1-x^2)dx = \frac{12}{35}$

Từ đó $DY = \frac{32}{175}$

97. $S = \pi R^2$

Vậy: $ES = \frac{\pi}{a}\int_0^a r^2 dr = \frac{\pi a^2}{3}$

$ES^2 = \frac{\pi^2}{a}\int_0^a r^4 dr = \frac{\pi^2 a^4}{5}$

Vậy: $DS = \frac{4}{45}\pi^2 a^4$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_S = \frac{2}{3\sqrt{5}}\pi a^2$

98. Ta có $\int_{-1}^{\infty} e^{-x}(1+x)^2 dx = 2e$ (dùng phép đổi biến y = 1 + x).

Từ đó $k = \frac{1}{2e}$

Median m thỏa mãn điều kiện:

$\frac{1}{2e}\int_{-1}^{m} e^{-x}(1+x)^2 dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{1+m} e^{-y}y^2 dy = 1$

Nguyên hàm của $e^{-y}y^2$ là $-e^{-y}[(y+1)^2+1]$

Suy ra $e^{(-1-m)}[(m+2)^2+1] = 1$

Điều phải chứng minh.

99. a) k = 3

$$P\left\{\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2}\right\} = P\left\{\frac{1}{16} < X < \frac{9}{16}\right\} = 3\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{9}{16}} x^2 dx = \frac{91}{512}$$

b) $$P\{Y > 1\} = P\left\{X > \frac{1}{4}\right\} = 3\int_{\frac{1}{4}}^{1} x^2 dx = \frac{63}{64}$$

100. Ký hiệu AP = X, BP = 10 – X. Theo giả thiết X có phân bố đều trên đoạn [0, 10]. Ta có S = X(10 – X). Vậy diện tích trung bình là:

$ES = \frac{1}{10}\int_0^{10} x(10-x)dx = \frac{50}{3}\ (cm^2)$

$ES^2 = \frac{1}{10}\int_0^{10} x^2(10-x)^2 dx = \frac{1000}{3}$

Từ đó DS = $\frac{500}{9}$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_S = \frac{10\sqrt{5}}{3}\ (cm^2)$.

101. Ta có EY = $\alpha + \beta EZ + \gamma EZ^2 = \alpha + \gamma$

$$EY^2 = E(\alpha + \beta Z + \gamma Z^2) =$$
$$=$$
$$E(\alpha^2 + \beta^2 Z^2 + \gamma^2 Z^4 + 2\alpha\beta Z + 2\alpha\gamma Z^2 + 2\gamma\beta Z^3)$$

Chú ý rằng $EZ = EZ^3 = 0$; $EZ^2 = 1$; $EZ^4 = 3$

(sử dụng tích phân từng phần), ta thu được:

$$EY^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 3\gamma^2$$

Từ đó DY = $EY^2 - (\alpha + \gamma)^2 = \beta^2 + 2\gamma^2$

102. Gọi T là thời gian đi từ nhà tới trường (đơn vị là phút).

Khi đó: $V = \frac{600}{60T} = \frac{10}{T}$ (m/s)

a) Vậy thì EV = $\frac{1}{4}\int_6^{10}\frac{10dt}{t} = \frac{5}{2}\ln\frac{10}{6} \approx 1{,}277$ (m/s)

$$EV^2 = \frac{1}{4}\int_6^{10}\frac{100}{t^2}dt = \frac{5}{3}$$

Từ đó DV = 0,0358 và σ_V = 0,189 (m/s)

103. a) $P\{X > 300\} = 1 - \phi(1{,}25) = 0{,}1056$

b) $P\{X < 175\} = \phi(-1{,}875) = 0{,}0303$

c) $P\{260 < X < 270\} = \phi(0{,}5) - \phi(0{,}25) = 0{,}0928$

104. a) Ta có $k\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\lambda}{2}$

Với x > 0: F(x) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$

Với x < 0: F(x) = $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x \lambda e^{\lambda t}dt = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$

c) EX = 0; DX = $\frac{2}{\lambda^2}$ còn modX = 0 và median X = 0.

105. a) Ta có: $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}dx = \left.\frac{x^2 e^{-2x}}{2}\right|_o^{\infty} + \int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = \int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{4}$.

Từ đó k = 4.

b) Hàm phân bố là:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{2x}(2x^2 + 2x + 1) & neáu\, x > 0 \\ 0 & neáu\, x < 0 \end{cases}$$

c) f'(x) = $8e^{-2x}x(1-x)$

Vậy f'(x) = 0 tại x = 1, tại điểm đó f''(1) < 0, do đó modX = 1.

d) EX = $\frac{3}{2}$; $EX^2 = 3$.

Vậy DX = $3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

106. a) Ta có P{T > 20} = 0,65

$\Rightarrow$ P{T < 20} = $\phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}35 = \phi(-0{,}3853)$

Vậy: $\frac{20-\mu}{\sigma} = -0{,}3853$ (1)

Tương tự: P{T > 30} = 0,08

$\Rightarrow \phi\left(\frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 = \phi(1{,}405) \Rightarrow \frac{30-\mu}{\sigma} = 1{,}405$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: μ = 22,12 (phút); σ = 5,59 (phút).

b) Ta có P{T > 20} = 0,65

$\Rightarrow$ P{T > 25} = $1 - \phi\left(\frac{25-22{,}12}{5{,}59}\right) = 1 - \phi(0{,}51) = 0{,}3050$

c) Giả sử An cần đi khỏi nhà trước t phút trước giờ vào học. Ta phải xác định t bé nhất để: P{T > t} ≤ 0,02 $\Rightarrow$ t ≥ 33,6

Vậy t = 33,6 (phút).

107. Gọi X là trọng lượng sản phẩm. Xác suất để sản phẩm bị loại là:

$$p = P\{X < 8\} = \phi(8-\mu)$$

Gọi Y là lợi nhuận thu được cho một sản phẩm. Ta có Y = –c với xác suất p và Y = 1 – c với xác suất q = 1 – p.

Vậy lợi nhuận trung bình trên một sản phẩm là:

$$\begin{aligned} EY &= -pc + (1-c)q = q - c = 1 - p - c \\ &= 1 - \phi(8-\mu) - 0{,}05\mu - 0{,}3 \end{aligned}$$

Xét hàm f(x) = 0,7 – 0,05x – ϕ(8 – x)

f'(x) = –0,05 + φ(8 – x), ở đó $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

f'(x) = 0 khi $\left[\begin{array}{l} x = 10{,}04 \\ x = 5{,}96 \end{array}\right.$

Mặt khác f''(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(8-x)^2}{2}}(8-x) < 0$ khi x = 10,04.

Vậy f(x) đạt max tại x = 10,04.

Vậy cần chọn μ = 10,04 (kg) để lợi nhuận nhà máy đạt cực đại.

108. a) Gọi X là chiều cao của cây. Ta có:

$$P\{X < 18\} = \frac{25}{640} = 0{,}039 = \phi(-1{,}762)$$

$$P\{X > 24\} = \frac{110}{640} = 0{,}1718$$

$\Rightarrow$ $P\{X < 24\} = 0{,}8281 = \phi(0{,}9463)$

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{18-\mu}{\sigma} = -1{,}762 \\ \dfrac{24-\mu}{\sigma} = 0{,}9463 \end{cases}$$

ở đó $\mu = EX$ và $\sigma^2 = DX$.

Từ hệ trên ta tìm được: $\mu = 21{,}9$ (m); $\sigma = 2{,}22$ (m)

b) Ta có: $P\{16 < X < 20\} = \phi\left(\dfrac{20-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{16-\mu}{\sigma}\right) =$

$$= \phi(-0{,}859) - \phi(-2{,}665) = 0{,}1913$$

Vậy trong 640 cây có khoảng $640 \times 0{,}1913 = 122$ cây có chiều cao trong khoảng từ 16m đến 20m.

109. Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{neáu } x \geq 0 \\ 0 & \text{neáu traùi laïi} \end{cases}$$

Vậy nếu $Y = e^{-X}$ thì:

$$EY = 2\int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}dx = \frac{2}{3}$$

$$EY^2 = 2\int_0^\infty e^{-2x}e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

Suy ra: $DY = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{18}$; $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1}{18}} \approx 0{,}2357$

110. a) Ta có: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{2h^2}e^{-h^2x^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2h^2}$. Suy ra $a = 2h^2$.

b) $EX = 2h^2\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-h^2x^2}dx$

Đổi biến số đặt $u = \sqrt{2}\,hx$. Khi đó:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2}h}\int_0^\infty u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$$

$$EX^2 = 2h^2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-h^2x^2} dx$$

Tích phân từng phần với u = x^2, dv = $2h^2 x e^{-h^2x^2} dx$, cho ta $EX^2 = \dfrac{1}{h^2}$. Từ đó:

$$DX = \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{4h^2} = \frac{4-\pi}{4h^2}$$

$$P\left\{X < \frac{1}{h\sqrt{2}}\right\} = 2h^2 \int_0^{h\sqrt{2}} x e^{-h^2x^2} dx = 0{,}0393$$

111. a) Ta có: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = arctge^x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$

Vậy k = $\dfrac{2}{\pi}$

b) F(x) = $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi} arctge^x$

c) Ta có: $P\left\{X \in \left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ln\sqrt{3}\right)\right\} =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi}\left[arctg\sqrt{3} - arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{3}$$

Gọi n là số quan sát cần thiết.

Ta cần có P{ không quan sát được $X \in \left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ln\sqrt{3}\right)$ } =

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \le 0{,}1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \ge 10 \Rightarrow n \ge \frac{1}{\lg 1{,}5} = 5{,}67$$

Vậy n = 6.

112. a) P{2 < Y < 18} = P{1 < X < 3} = 0,3181

b) P{Y < 4} = P{X < $\sqrt{2}$} = $1 - e^{-\sqrt{2}}$

113. a) P{$|X - \mu| < 3\sigma$} = $P\left\{\left|X - \dfrac{1}{\lambda}\right| < \dfrac{3}{\lambda}\right\} =$

$$= P\left\{-\frac{2}{\lambda} < X < \frac{4}{\lambda}\right\} = \int_0^{4/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-4} \approx 0{,}98168$$

c) Nếu X có phân bố đều trên [–1, 1] thì DX = $\dfrac{1}{3}$.

Do đó: $\mu = 0, \sigma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $P\{|X-\mu|<3\sigma\}=P\{|X|<\sqrt{3}\}=1$

c) Nếu X có phân bố Poátxông (0,09) thì:

$\mu = 0{,}09$; $\sigma=\sqrt{0{,}09}=0{,}3$

Vậy: $P\{|X-\mu|<3\sigma\}=P\{|X-0{,}09|<0{,}9\}=$

$$=P\{X=0\}=e^{-0{,}09}=0{,}91393$$

Chương 4

114. a) Ta có $\int_0^1\int_0^x kududv=\int_0^1 ku^2du=\frac{k}{3}$. Suy ra k = 3.

b) Ta có $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$, nếu 0 < x < 1.

Vậy $$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{neáu}\ 0<x<1\\ 0 & \text{neáu traùi laïi}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3(1-y^2)}{2}$$

Vậy $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2) & \text{neáu}\ 0<y<1\\ 0 & \text{neáu traùi laïi}\end{cases}$$

c) X và Y không độc lập vì

$P\left\{X<\frac{1}{2},\ Y>\frac{1}{2}\right\}=0$ nhưng $P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}\neq 0,\ P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}\neq 0$

115. Ta có

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{2}{6\pi}\int_0^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$$

Vậy $$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi} & \text{neáu}\ |x|<3\\ 0 & \text{neáu}\ |x|\geq 3\end{cases}$$

Tương tự ta tìm được

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2} & \text{neáu}\ |y|\leq 2\\ 0 & \text{neáu}\ |y|>2\end{cases}$$

116. Theo công thức tính xác suất. Để (X, Y) rơi vào hình chữ nhật ta có:

$$P\left\{\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right\}$$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}08$$

117. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1 \iff k\int_0^1\int_0^2\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)dxdy = 1$

Dễ dàng tính được $\int_0^1\int_0^2 x^2dxdy = \frac{2}{3}$ và $\int_0^1\int_0^2 \frac{xy}{2}dxdy = \frac{1}{2}$

Từ đó $k = \frac{6}{7}$

b) Rõ ràng với $x < 0, y < 0$ thì $F(x, y) = 0$ và với $x > 1, y > 2$ thì $F(x, y) = 1$. Ta xét các trường hợp còn lại.

i) Nếu $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_y^x\int_0^y\left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) = \frac{6}{7}\int_0^x\int_0^y u^2dudv + \frac{6}{7}\int_0^x\int_0^y \frac{uv}{2}dudv$$

$$= \frac{6}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{8}\right)$$

ii) Nếu $0 \le x \le 1, y > 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_0^x\int_0^2\left(u^2 + \frac{uv}{2}\right)dudv = \frac{6}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2}{2}\right)$$

iii) Nếu $x > 1,\ 0 \le y \le 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_0^1\int_0^y(u^2 + \frac{uv}{2})dudv = \frac{6}{7}\left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{8}\right)$$

118. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$

$$\iff k\int_0^\infty e^{-x}dx\int_x^\infty e^{-y}dy = k\int_0^\infty e^{-2x}dx = \frac{k}{2} = 1$$

Vậy k = 2

b) Hàm mật độ của X: với x > 0

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{\infty} 2e^{-x}e^{-y}dy = 2e^{-2x}$$

Vậy $$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & neáu\ x > 0 \\ 0 & neáu\ x \le 0 \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y: với y > 0

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{y} 2e^{-x}e^{-y}dx = 2e^{-y}[1-e^{-y}]$$

Vậy $$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y}[1-e^{-y}] & neáu\ y > 0 \\ 0 & neáu\ y < 0 \end{cases}$$

c) Ta có $P\{X > 2, Y < 1\} = \int_{2}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{1} f(x,y)dx$

Tuy nhiên P{X > 2} > 0; P{Y < 1} > 0

119. a) $k = \dfrac{1}{\pi^2}$

b) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\dfrac{dv}{1+v^2}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{du}{1+u^2}$

$$= \left(\frac{1}{\pi}arctgx + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctgy + \frac{1}{2}\right)$$

c) Hàm phân bố của X là

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \frac{1}{\pi}arctgx + \frac{1}{2}$$

Tương tự $$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \frac{1}{\pi}arctgy + \frac{1}{2}$$

Vì $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ nên ta kết luận: X và Y độc lập.

d) Ta có $P = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{0}^{1}\int_{1}^{3}\dfrac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{1}{48}$

Hoặc dùng cách khác: theo câu c) thì X và Y độc lập do đó

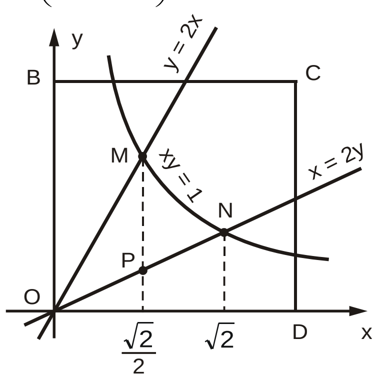
$$P\{1 < X < \sqrt{3}, 0 < Y < 1\} = P\{1 < X < \sqrt{3}\}P\{0 < Y < 1\}$$

$$= \frac{1}{12}\frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

120. Xác suất cần tìm là $\dfrac{1}{4}$ của diện tích hình A cho bởi điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \\ xy \le 1 \\ y \le 2x \\ x \le 2y \end{cases}$$

Hình A là tam giác cong OMN ở đó O(0, 0); $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ và $N\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (hình 4).



Hình 4

$$S_{OMN} = S_{OMP} + S_{MPN}$$

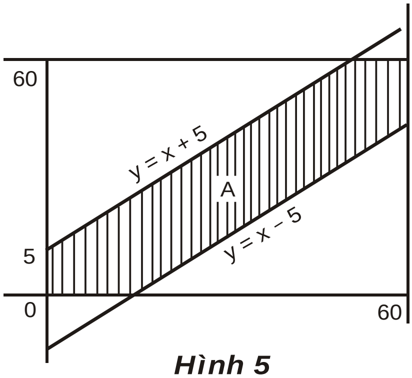
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{2}\right)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \ln 2$$

Vậy $p = \dfrac{\ln 2}{4}$

121. Lấy gốc tọa độ là 5 giờ. Gọi X và Y là thời điểm đến của hai người (đo bằng phút). X và Y là hai ĐLNN có phân bố đều trong [0, 60]. Xác suất cần tìm là:

$$\frac{1}{60 \times 60} \text{ diện tích hình } A = \frac{575}{3600} \approx 0{,}1597$$

(hình 5: A là hình gạch sọc)

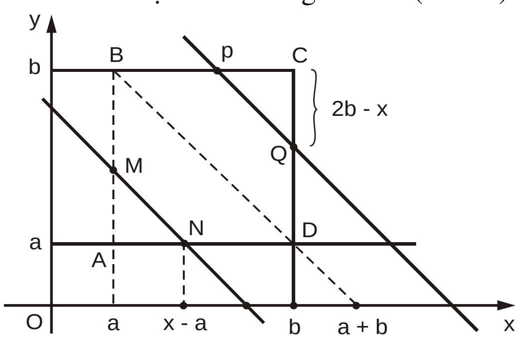


Hình 5

122. $P\{X + Y < x\} = 0$ khi x ≤ 2a

$P\{X + Y < x\} = 1$ khi x > 2b

Khi $2a < x \le a + b, P\{X + Y < x\}$ bằng tỷ số diện tích tam giác AMN với diện tích vuông ABCD (hình 6).



Hình 6

$$P\{X + Y < x\} = \frac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2}$$

Khi $a + b < x \le 2b$, $P\{X + Y < x\}$ bằng tỷ số diện tích đa giác ABPQDA với diện tích hình vông ABCD. Vậy:

$$P\{X + Y < x\} = 1 - \frac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2}$$

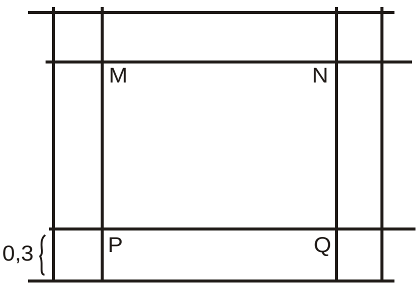
Thành thử

$$F(x) = \begin{cases} 0 & neáu x \le 2a \\ \dfrac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2} & neáu 2a < x \le a + b \\ 1 - \dfrac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2} & neáu a + b < x \le 2b \\ 1 & neáu x > 2b \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2a}{(b-a)^2} & \textit{neáu}\,2a<x\le a+b\\ \dfrac{2b-x}{(b-a)^2} & \textit{neáu}\,a+b<x\le 2b\\ 0 & \textit{neáu}\,\textit{traùi laïi}\end{cases}$$

123. Ta tìm xác suất của biến cố đối: "khoảng cách từ A đến các cạnh của hình vuông đều vượt quá 0,3". Đó chính là diện tích hình vuông MNPQ = $(0{,}4)^2 = 0{,}16$.

Vậy xác suất cần tìm là: $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.



Hình 7

124. Ta cần tính tích phân

$$I=\iint_A \frac{3}{\pi}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

ở đó A là hình tròn tâm O, bán kính $\dfrac{1}{2}$.

Ta chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân trên.

Đặt $x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi$

Ta có $\displaystyle I=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\frac{3}{\pi}(1-r)rdrd\varphi=\frac{1}{2}$

125. Cố định Z > 0. Ta tìm

$$P\left\{\frac{X}{Y}<z\right\}=P\{X<zY\}=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\int_0^{zy}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda yz})dy=1-\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y(z+1)}dy=1-\frac{1}{z+1}$$

Vậy hàm phân bố của $Z=\dfrac{X}{Y}$ là

$$F(z) = \begin{cases} 0 & neáu\, z < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{z+1} & neáu\, z \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2} & neáu\, z > 0 \\ 0 & neáu\, z < 0 \end{cases}$$

126. Hàm mật độ đồng thời của X, Y là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & neáu\, 0 \leq x \leq 2 \\ & \quad 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & neáu\, traùi\ laïi \end{cases}$$

cố định z > 0.

$$F(z) = P\{X + Y < Z\} = \iint\limits_{\{x+y\leq Z\}\cap B} \frac{1}{20}\, dxdy$$

ở đó B là hình chữ nhật $OABC = \{0 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 10\}$.

i) Nếu z < 0 thì rõ ràng F(z) = 0

ii) Nếu $0 \leq z \leq 2$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OEF} = \frac{z^2}{40} \text{ (hình 8)}$$

iii) Nếu $2 \leq z \leq 10$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OGKC} = \frac{z-1}{10}$$

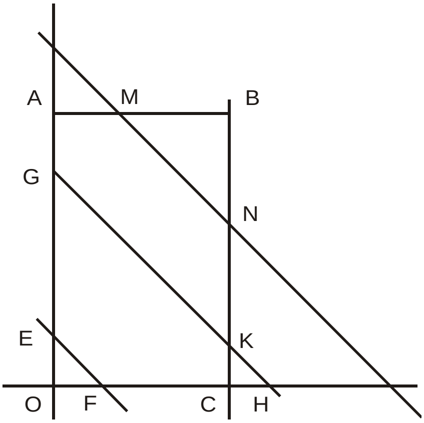
iv) Nếu $10 \leq z \leq 12$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OAMNC} = \frac{1}{20}\left[20 - \frac{(12-z)^2}{2}\right] = \frac{24z - z^2 - 104}{40}$$

v) Nếu z > 12 thì f(z) = 1

Vậy hàm phân bố của Z = X + Y là

$$F(z) = \begin{cases} 0 & neáu\, z < 0 \\ \dfrac{z^2}{40} & neáu\, 0 \leq z \leq 2 \\ \dfrac{z-1}{10} & neáu\, 2 \leq z \leq 10 \\ \dfrac{24z - z^2 - 104}{40} & neáu\, 10 \leq z \leq 12 \\ 1 & neáu\, z \geq 12 \end{cases}$$



Hình 8

Hàm mật độ của Z = X + Y là

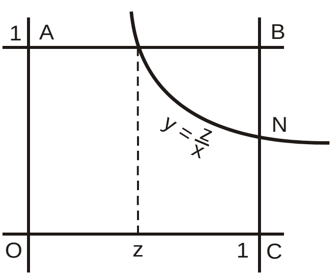
$$F(z) = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} \textit{neáu} z < 0 \\ \textit{hoaëc} z \geq 12 \end{array} \\ \dfrac{z}{20} & \textit{neáu} 0 \leq z \leq 2 \\ \dfrac{1}{10} & \textit{neáu} 2 \leq z \leq 10 \\ \dfrac{12 - z}{20} & \textit{neáu} 10 \leq z \leq 12 \end{cases}$$

127. Xem bài tập 134

128. Cố định Z > 0

Ta có $F(z) = P\{XY < z\} = \iint\limits_{\{xy - z\} \cap B} dxdy$

ở đó B là hình vuông đơn vị OABC



Hình 9

Nếu $0 < z < 1$ thì F(z) chính là diện tích hình OAMNC. Vậy:

$$F(z) = \int_0^z dz + \int_z^1 \frac{zdx}{x} = z - z \ln z$$

Hiển nhiên F(z) = 0 nếu z < 0 và F(z) = 1 nếu z > 1.

$$\text{Vậy} \qquad F(z) = \begin{cases} 0 & \textit{neáu} \; z < 0 \\ z(1 - \ln z) & \textit{neáu} \; 0 < z \le 1 \\ 1 & \textit{neáu} \; z > 1 \end{cases}$$

Suy ra hàm mật độ

$$f(z) = \begin{cases} -\ln z & \textit{neáu} \; 0 < z < 1 \\ 0 & \textit{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

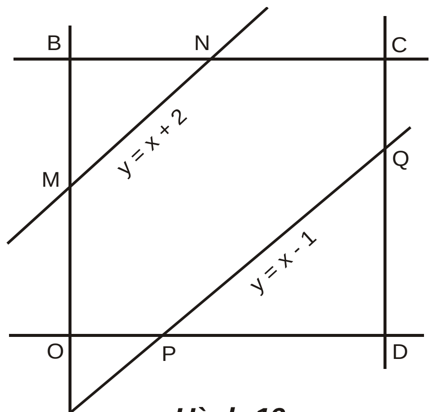
129. Ký hiệu $A = \{(x, y) : x - 1 \le y \le x + 2\}$

$$B = \{(x, y) : 0 \le x \le 6, \; 0 \le y \le 6\}$$

Xác suất cần tìm là $\frac{1}{36}$ diện tích (A ∩ B).

Trên hình vẽ ta thấy A là phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng y = x + 2 và y = x – 1, B là hình vuông OBCD có cạnh OD = 6. Thành thử A ∩ B = đa giác OMNCPQ.

Dễ thấy $S_{OMNCPQ} = \frac{31}{2}$.



Hình 10

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{31}{72}$.

130. Theo điều kiện hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \textit{neáu} \; 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ 0 & \textit{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y là

$$g(y) = \begin{cases} 5e^{-5y} & \textit{neáu} \; y \ge 0 \\ 0 & \textit{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Thành thử hàm mật độ đồng thời của X và Y là:

$$f(x, y) = f(x) f(y) = \begin{cases} 25e^{-5y} & \textit{neáu} \begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ y \ge 0 \end{cases} \\ 0 & \textit{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Vậy $P\{Y \le X\} = \int\limits_{\{y \le x\} \cap B} 25e^{-5y} dxdy$

ở đó $B = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{1}{5}, y \ge 0\}$

Suy ra $P\{Y \le X\} = \int\limits_0^{\frac{1}{5}} dx \int\limits_0^{x} 25e^{-5y} dy = \frac{1}{e}$

131. Xét phép biến đổi

$$\begin{cases} X = Z\cos\theta \\ Y = Z\sin\theta \end{cases}$$

ở đó $Z \ge 0,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Jacobian là: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = Z$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, θ) là

$f(Z, \theta) = 4Z^3 \cos\theta \sin\theta e^{-z^2}$

trên miền $Z \ge 0,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

và bằng 0 nếu trái lại. Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4z^3 \cos\theta \sin\theta e^{-z^2} d\theta = 2z^3 e^{-z^2}\ neáu z > 0$$

132. Xét phép biến đổi $\begin{cases} Z = X + Y \\ V = X \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = v \\ y = z - v \end{cases}$

Miền $\{x \ge 0, y \ge 0\}$ biến thành miền $\{v \ge 0,\ z \ge v\}$.

$| J(z, v)| = 1$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, V) là

$$f(z, v) = \begin{cases} a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1) - a_2 z} & neáu v \ge 0,\ z \ge v \\ 0 & neáu traùi laïi \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ của Z là

$F(z) = 0$ nếu z < 0 và với z > 0

$$f(z) = \int_0^z a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1)v - a_2 z} dv = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\left[e^{-a_1 z} - e^{-a_2 z}\right]$$

133. Xét phép biến đổi $\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$

Miền $\{x > 0, y > 0\}$ sẽ biến thành miền {u > 0, 0 < v < 1}

$$|J(u, v)| = |-u| = u$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$f(u, v) = e^{-uv - u + uv} u$$

$$= ue^{-u} \quad \text{neáu}\, u > 0$$

$$0 < v < 1$$

và f(u, v) = 0 nếu trái lại.

Hàm mật độ của U là

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv = \int_0^1 ue^{-u} dv = ue^{-u}$$ nếu u > 0

và f(u, v) = 0 nếu trái lại

Hàm mật độ của V là

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv = \int_0^{\infty} ue^{-u} du = 1$$ nếu 0 < v < 1

và g(v) = 0 nếu trái lại.

b) Ta thấy rằng f(u, v) = f(u)g(v)

Vậy U và V độc lập. Tương tự X và Y cũng độc lập.

134. Hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \;\; \text{neáu} \;\; 0 \le x \le 1 \\ \qquad\qquad 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Xét phép biến đổi $\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$

Miền $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ biến thành miền

$$\{0 < uv < 1,\ 0 < u(1-v) < 1\}$$

Hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$f(u,v) = \begin{cases} u & neáu \begin{cases} 0 < uv < 1 \\ 0 < u(1-v) < 1 \end{cases} \\ 0 & neáutraùi\ laïi \end{cases}$$

Ta tìm hàm mật độ f(u) của U. Nếu u < 0 thì f(u) = 0. Xét u > 0.

Khi đó $f(u,v) = v$ nếu $0 < v < \dfrac{1}{u}$ và $\dfrac{u-1}{u} < v < 1$.

i) Nếu 0 < u < 1 ta có

$$f(u) = \int_0^1 u dv = u$$

ii) Nếu u > 1 và $\dfrac{1}{u} > \dfrac{u-1}{u} \Leftrightarrow u < 2$ thì

$$f(u) = \int_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{1}{u}} v dv = 2 - u$$

iii) Nếu $u > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{u} < \dfrac{u-1}{u}$ thì f(u) = 0

Tóm lại $f(u) = \begin{cases} 0 & neáu u < 0 \\ u & neáu 0 \le u \le 1 \\ 2-u & neáu 1 \le u \le 2 \\ 0 & neáu u > 2 \end{cases}$

Tiếp theo ta tìm hàm mật độ g(v) của V.

Nếu V < 0 hay v > 1 thì g(v) = 0.

Xét $0 < v < 1$. Khi đó $f(u,v) = u$ nếu $0 < 0 < \dfrac{1}{v}$ và $0 < u < \dfrac{1}{1-v}$.

Vậy: Nếu $\dfrac{1}{v} < \dfrac{1}{1-v} \Leftrightarrow v > \dfrac{1}{2}$ thì $g(v) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{v}} u du = \dfrac{1}{2v^2}$

Nếu $\dfrac{1}{v} > \dfrac{1}{1-v} \Leftrightarrow v < \dfrac{1}{2}$ thì $g(v) = \displaystyle\int_0^{1/1-v} u du = \dfrac{1}{2(1-v)^2}$

Vậy: $$g(v)=\begin{cases}0 & \text{neáu } v<0\\ \dfrac{1}{2(1-v)^2} & \text{neáu } 0<v<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2v^2} & \text{neáu } \dfrac{1}{2}\le v\le 1\\ 0 & \text{neáu } v>1\end{cases}$$

135. Xét phép biến đổi $\begin{cases}u=x-y\\ v=x\end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases}x=v\\ y=v-u\end{cases}$

Miền $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ biến thành miền

$$A=\{0\le v\le 1,\ u\le v\le 1+u\}$$

Khi đó $f(u,v)=1$ nếu $(u,v)\in A$.

Gọi f(u) là hàm mật độ của X – Y

Rõ ràng nếu u < –1 hoặc u > 1 thì f(u) = 0

Nếu $-1<u<0$ thì $f(u)=\int_0^{1+u}dv=1+u$

Nếu $0<u<1$ thì $f(u)=\int_u^1 dv=1-u$

Tóm lại $$f(u)=\begin{cases}1-|u| & \text{neáu } |u|\le 1\\ 0 & \text{neáu } |u|\ge 1\end{cases}$$

136. Tương tự như bài 135 hàm mật độ đồng thời của U, V với

$U=X-Y,\ V=X$ là

$$f(u,v)=\begin{cases}e^{-2v+u} & \text{neáu } (u,v)\in A\\ 0 & \text{neáu traùi laïi}\end{cases}$$

ở đó $A=\{0\le v, u\le v\}$

Gọi f(u) là hàm mật độ của X – Y.

Nếu u < 0 thì: $f(u)=\int_0^{\infty}e^{-2v+u}dv=\dfrac{e^u}{2}$

Nếu u > 0 thì: $f(u)=\int_u^{\infty}e^{-2v+u}dv=\dfrac{e^{-u}}{2}$

Tóm lại: $f(u)=\dfrac{e^{-|u|}}{2}$ với mọi u.

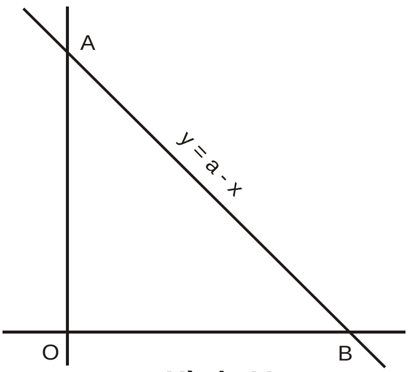
137. Ký hiệu $P(a) = P\{X + Y < a\}$.

Nếu a < 0 thì hiển nhiên P(a) = 0

Nếu a > 0 ta có

$$P\{X + Y < a\} = \iint_{OAB} \lambda^2 e^{-(x+y)} dxdy$$

ở đó OAB là tam giác vuông giới hạn bởi phần dương của trục Ox, Oy và đường thẳng y = a – x (hình 11).



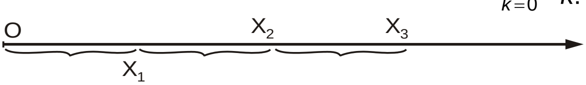
Hình 11

Vậy:

$$P(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{a-x} \lambda e^{-y} dy = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}[1 - e^{-\lambda(a-x)}]dx$$
$$= 1 - e^{-\lambda a} - \lambda a e^{-\lambda a}$$

138. a) Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ lần lượt là khoảng thời gian liên tiếp giữa hai lần xuất hiện của một biến cố ngẫu nhiên E nào đó thì biến cố $X_1 + X_2 + ... + X_n > t$ có nghĩa là trong khoảng thời gian [0, t] có nhiều nhất n – 1 lần biến cố E xuất hiện. Mặt khác số lần xuất hiện của biến cố E trong khoảng thời gian [0, t] là một ĐLNN có phân bố Poátxông với tham số λt.

Vậy $P\{X_1 + X_2 + ... + X_n > t\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$



Hình 12

b) Hàm phân bố F(t) của $T = X_1 + ... + X_n$ là

$F(t) = 0$ nếu t < 0

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Hàm mật độ f(t) là

$$f(t) = F'(t) = -\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

139. a) Trước hết ta tìm hàm mật độ của U = X + Y. Theo bài tập 127 hàm mật độ của U là

$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{neáu } u < 0 \text{ hoaëc } u > 2 \\ u & \text{neáu } 0 \le u \le 1 \\ 2-u & \text{neáu } 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

Hàm mật độ của X + Y + Z = U + Z là

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) f_U(t-z)dz = \int_0^1 f_V(t-z)dz$$

Đổi biến đặt $u = t - z$, ta được

$$g(t) = \int_{t-1}^{t} f_U(u)du$$

i) Nếu $t < 0 \Rightarrow g(t) = 0$

ii) Nếu $0 \le t \le 1$ ta có

$$g(t) = \int_0^t udu = \frac{t^2}{2}$$

iii) Nếu $1 \le t \le 2$

$$g(t) = \int_{t-1}^{1} udu + \int_1^t (2-u)du = 1 - \frac{(t-1)^2 + (2-t)^2}{2}$$

$$= -t^2 + 3t - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2$$

iv) Nếu $2 \le t \le 3$

$$g(t) = \int_{t-1}^{2} (2-u)du = \frac{(3-t)^2}{2}$$

v) Nếu $t \le 3$ thì $g(t) = 0$

Vậy kết quả là

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{neáu } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{3}{4} - \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 & \text{neáu } 1 \le t \le 2 \\ \dfrac{(3-t)^2}{2} & \text{neáu } 2 \le t \le 3 \\ 0 & \text{vôùi } t \text{ coøn laïi} \end{cases}$$

b) $\dfrac{23}{24} = 0{,}96033$.

140. P{kim không cắt đường thẳng nào}

$$P\left\{\frac{\sin\theta}{2} < Z < 1 - \frac{\sin\theta}{2}\right\} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{2}{\pi}$.

141. Giải bằng phương pháp tương tự như của bài tập 139.

a) Hàm mật độ $f_U(u)$ là

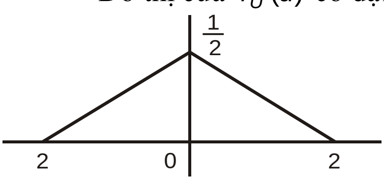
$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{neáu} |u| \geq 2 \\ \dfrac{u+2}{4} & \text{neáu} -2 \leq u \leq 0 \\ \dfrac{2-u}{4} & \text{neáu} \, 0 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

ĐLNN có hàm mật độ như trên gọi là ĐLNN có phân bố Simsơn.

b) Hàm mật độ $f_V(v)$ là

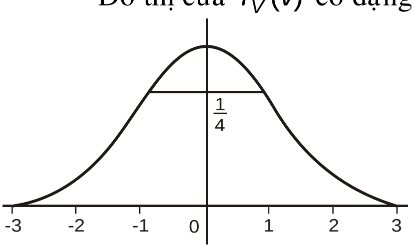
$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{neáu} |v| \geq 3 \\ \dfrac{(v+3)^2}{16} & \text{neáu} -3 \leq v \leq -1 \\ \dfrac{3-v^2}{8} & \text{neáu} -1 \leq v \leq 1 \\ \dfrac{(v-3)^2}{16} & \text{neáu} \, 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$$

Đồ thị của $f_U(u)$ có dạng sau:



Hình 13

Đồ thị của $f_V(v)$ có dạng sau:



Hình 14

142. Ta đã thấy ở bài tập 128 hàm mật độ của U = XY là:

$$f(u) = \begin{cases} -\ln u & \text{neáu} 0 < u < 1 \\ 0 & \text{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Hàm mật độ của $V = Z^2$ dễ thấy là:

$$g(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{v}} & \text{neáu} 0 < v < 1 \\ 0 & \text{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ đồng thời (U, V) là:

$$f(u, v) = \begin{cases} -\dfrac{\ln u}{2\sqrt{v}} & \text{neáu} 0 \le u \le 1 \\ 0 & \text{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

$$P\{XY < Z^2\} = P\{U < V\} = -\int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v}} \int_0^v \ln u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{v}(1 - \ln v)dv = \frac{5}{9}$$

143. Hàm mật độ của XY là:

$$f(u) = \begin{cases} -\ln u & \text{neáu} 0 < u < 1 \\ 0 & \text{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Hàm mật độ của $V = Z^2$ dễ thấy là:

$$g(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\{h(\sqrt{v}) + h(-\sqrt{v})\} = 1 \text{ nếu } 0 \le v \le 1$$

và $g(v) = 0$ nếu trái lại.

Từ đó hàm mật độ của $T = XY + Z^2$ là:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) f(t - v)dv = \int_0^1 f(t - v)dv = \int_{t-1}^{t} f(u)du$$

i) Nếu $0 < t < 1$ thì

$$\varphi(t) = \int_0^t -\ln u\, du = t(1 - \ln t)$$

ii) Nếu $1 < t < 2$ thì

$$\varphi(t) = \int_{t-1}^1 -\ln u\, du = (t-1)\ln(t-1) + 2 - t$$

với $t < 0$ hay $t > 2$, $\varphi(t) = 0$.

144. Ta có $P\{Z \le z/X = x\} =$

$= P\{X + Y \le z/X = x\} = P\{Y \le z - x/X = x\} =$

$$= P\{Y \le z - x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(z-x)} & \text{neáu} z > x \\ 0 & \text{neáu} z < x \end{cases}$$

Từ đó:

$$f(z/x) = \frac{dP\{Z \le z / X = x\}}{dz} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & \text{neáu} z > x \\ 0 & \text{neáu} z < x \end{cases}$$

Hàm mật độ đồng thời của Z, X là:

$$f(z, x) = f(x)f(z/x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} & \text{neáu} z > x > 0 \\ 0 & \text{neáutraùi laïi} \end{cases}$$

Vậy hàm mật độ của X với điều kiện Z = z là:

$$f(x/z) = \frac{f(z,x)}{f_Z(z)} \quad \text{với } z > 0$$

ở đó: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,x)dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z > 0)$

Suy ra: $f(x/z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{vôùi} z > 0 \\ 0 & \text{vôùi} z \le 0 \end{cases}$

Như vậy phân bố của X với điều kiện Z = z là phân bố đều trên đoạn [0, z].

145. a) Dễ thấy rằng hàm mật độ của X là $f_X(x) = 1$ nếu $0 < x \le 1$.

Từ đó hàm mật độ của Y với điều kiện X = x là:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{nếu } 0 \le y \le x \le 1$$

tức là phân bố của Y với điều kiện X = x là phân bố đều trên [0, x].

b) Ta có: $P\{X^2 + Y^2 \le 1\} = \iint_A \frac{dxdy}{x}$

ở đó $A = \{(x, y) : 0 \le y \le x \le 1, x^2 + y^2 \le 1\}$

Trên hình A là tam giác cong ODC.

Chuyển sang tọa độ cực ta được

$$P\{X^2 + Y^2 \le 1\} = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{rdrd\varphi}{r\cos\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$= \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left| tg\frac{3\pi}{8}\right| = \ln(1+\sqrt{2})$$

146. Hàm mật độ của X là:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{neáu} x \ge 1 \\ 0 & \text{neáu} x < 1 \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y là:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y^2} & \text{neáu} 1 \le y < \infty \\ \dfrac{1}{2} & \text{neáu} 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

[Thật vậy nếu $0 \le y \le 1$ thì

$$f_Y(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 y} = \frac{1}{2}$$

Nếu $y \ge 1$ thì

$$f_Y(y) = \int_{y}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 y} = \frac{1}{2y^2} \text{]}$$

Từ đó hàm mật độ của Y với điều kiện $X = x(x > 1)$ là:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2y\ln x} \quad \text{nếu } \frac{1}{x} \le y \le x$$

Hàm mật độ của X với điều kiện $Y = y(y > 0)$ là:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 y} & \text{neáu} 0 \le y \le 1;\quad x \ge \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{y}{x^2} & \text{neáu} y \ge 1;\quad y \le x \end{cases}$$

147. $E(2X - 3Y) = 2EX - 3EY = 10$

$D(2X - 3Y) \quad = 4DX + 9DY - 12\sqrt{DXDY}\,\rho(X,Y) = 57{,}6$

148. Gọi X là thời gian học và Y là thời gian chơi. Ta có:

$E(X + Y) = 4{,}7$

$D(X + Y) = DX + DY + 2\sigma_X\sigma_Y\rho(X,Y) = 0{,}28$

$\sigma_{X+Y} = \sqrt{D(X+Y)} = 0{,}5292$

Vậy $P\{X + Y > 5\} = 1 - \phi(0{,}567) = 0{,}2853$

b) Ta có: $E(X - Y) = EX - EY = -0{,}3$

$D(X - Y) = DX + DY - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 0{,}76 \Rightarrow \sigma_{X-Y} = 0{,}8718$

$X - Y \sim N(-0{,}3;\ 0{,}76)$

Vậy: $P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = 1 - \phi(0{,}344) = 0{,}3654$

149. Gọi X là trọng lượng hành khách, Y là trọng lượng hành lý mang theo của người đó.

a) Theo giả thiết:

$$P\{X > 85\} = 0{,}1 \Rightarrow P\left\{Z > \frac{85 - 74}{\sigma_X}\right\} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{85 - 74}{\sigma_X} = 1{,}282$$

Tương tự:

$$P\{Y > 24\} = 0{,}2 \Leftrightarrow P\left\{Z > \frac{24-20}{\sigma_Y}\right\} = 0{,}2 \Rightarrow \frac{24-20}{\sigma_Y} = 0{,}8416$$

Từ đó tìm được: $\sigma_X = 8{,}58$ kg; $\sigma_Y = 4{,}753$ kg

b) Ta có E(X + Y) = EX + EY = 94

Từ điều kiện: P{X + Y > 108} = 0,1 $\Rightarrow$

$$P\left\{Z > \frac{108-94}{\sigma_{X+Y}}\right\} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{108-84}{\sigma_{X+Y}} = 1{,}282$$

Từ đó $\sigma_{X+Y} = 10{,}92$.

Từ đẳng thức D(X + Y) = DX + DY + $2\rho\sigma_X\sigma_Y$, ta tìm được $\rho(X,Y) = 0{,}283$.

150. a) Ta có E(X + Y) = EX + EY = 104

D(X + Y) = DX + DY + $2\rho(X,Y)\sigma_X\sigma_Y$ =

$= 15^2 + 12^2 + 2 \times 0{,}7 \times 15 \times 12 \Rightarrow \sigma = 24{,}92$

Vậy P{X + Y > 130} = P{Z > 1,043} = 0,1485

P{X + Y < 90} = 0,2870

b) E(X – Y) = –8

D(X – Y) = $15^2 - 2(0{,}7)(15)(12) + 12^2 \Rightarrow \sigma_X\sigma_Y = 10{,}82$

Vậy P{X > Y} = P{X – Y > 0} = P{Z > 0,740} = 0,2296.

151. k = 0,25; cov (X, Y) = $-\frac{1}{15}$ và $\rho(X,Y) = -\frac{1}{5}$

152. E(X + Y) = EX + EY = 12

Vì X và Y độc lập nên:

D(X + Y) = DX + DY = $1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 2{,}25$

$\sigma_{X+Y} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

Do đó:

$$P\{X + Y < 9{,}5\} = P\left\{Z < \frac{9{,}5-12}{1{,}5}\right\} = P\{Z < -1{,}667\} = 0{,}0478$$

Ta cần tìm P{X < Y} = P{X – Y < 0}

Ta có: E(X – Y) = EX – EY = 2

D(X – Y) = DX + DY = 2,25

Do đó:

$$P\{X - Y < 0\} = P\left\{Z < \frac{0-2}{1{,}5}\right\} = P\{Z < -1{,}333\} = 0{,}0913$$

c) E(X – 2Y) = EX – 2EY = –3

D(X – 2Y) = DX + 4DY = 4,68

$\sigma_{X-2Y} = \sqrt{4{,}68} = 2{,}163$

Do đó:

P{X > 2Y} = $P\{X - 2Y > 0\} = P\left\{Z > \dfrac{0+3}{2{,}163}\right\} = \{Z > 1{,}387\} = 0{,}0827$

153. Gọi X và Y là trọng lượng của người chồng và của người vợ.

Ta có:

E(X – Y) = EX – EY = 20

D(X – Y) = DX + DY = $2\rho\sigma_X\sigma_Y = 81 + 16 - \dfrac{2}{3}.9.4 = 73$

$\sqrt{73} = 8{,}54$

Vậy P{X < Y} = $P\left\{Z < \dfrac{0-20}{8{,}54}\right\} = \phi(-2{,}34) = 1 - \phi(2{,}34) \approx 0{,}01$

Chương 5

154. Ta có $E|Z_n|^2 = \dfrac{1}{n}.n^{2\alpha} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right).0 = n^{2\alpha-1}$.

Do đó $\lim E|Z_n|^2 = 0$ khi và chỉ khi $2\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \dfrac{1}{2}$.

155. Đặt $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$. Ta có:

ES = 12 × 16 = 192 và DS = 12 × 1 = 12

Theo bất đẳng thức Trêbưsep

$P\{|S - 192| \le \varepsilon\} \ge 1 - \dfrac{DS}{\varepsilon^2} = 1 - \dfrac{12}{\varepsilon^2}$

Ta chọn ε sao cho:

$1 - \dfrac{12}{\varepsilon^2} \ge 0{,}99 \Leftrightarrow \dfrac{12}{\varepsilon^2} \le 0{,}01 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \ge 1200 \Rightarrow \varepsilon \ge 34{,}64$

Từ đó $P\{192 - 34{,}64 \le S \le 192 + 34{,}64\} \ge 0{,}99$

Như vậy có thể lấy a = 157,36; b = 226,64

156. Đặt $S = \sum_{i=1}^{10^4} X_i$. Ta có:

ES = 0; DS = $10^4.\dfrac{1}{12}$

Theo bất đẳng thức Trêbưsep

$P\{|S| \le \varepsilon\} \ge 500\} \le \dfrac{DS}{500^2} = \dfrac{10^4}{25.12.10^4} = \dfrac{1}{300}$

157. Ta biết rằng S là ĐLNN có phân bố nhị thức với $P = \frac{1}{6}$.

Vậy $ES = \frac{n}{6}$ và $DS = \frac{5n}{36}$. Theo BĐT Trêbưsep:

$$P\{|S - ES| < \sqrt{n}\} \geq 1 - \frac{DS}{n} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

$$\Leftrightarrow\ P\{\frac{n}{6} - \sqrt{n} < S < \frac{n}{6} + \sqrt{n} \geq \frac{31}{36}$$

158. Đặt $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$. Ta cần tìm M nhỏ nhất để:

$$P\{\sum_{i=1}^{12} X_i \leq M\} \geq 0{,}99$$

Ta có ES = 192; DS = 12. Giả sử ε > 0. Khi đó:

$$P\{|S - 192| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DS}{\varepsilon^2} \geq 0{,}99 \ \Rightarrow\ \varepsilon \geq 34{,}64$$

Vậy M = 192 + 34,64 = 226,64

159. a) $P\{3 < X < 7\} = P\{|X - 5| < 2\} \geq 1 - \frac{DX}{4} = 1 - \frac{0{,}16}{4} = 0{,}96$

b) $P\{2 < X < 8\} = P\{|X - 5| < 3\} \geq 1 - \frac{DX}{9} = 1 - \frac{0{,}16}{9} = 0{,}982$

c) Đặt $\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_9}{9}$. Khi đó: $E\overline{X} = 5;\ D\overline{X} = \frac{0{,}16}{9}$.

Vậy:

$$P\{3 < \overline{X} < 7\} = P\{\overline{X} - 5| < 2\} \geq 1 - \frac{D\overline{X}}{4} = 1 - \frac{0{,}16}{36} = 0{,}995$$

160. $EX_n = 0$ và $DX_n = n^{2\alpha}$

Vậy: $$\frac{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} DX_k}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}}{n^2} < \frac{n.n^{2\alpha}}{n^2} = n^{2\alpha-1} \to 0$$

khi $n \to \infty$ nếu $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Theo định lý Markov, dãy tuân theo luật số lớn.

161. Ta có $EX_n = 0$; $DX_n = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} DX_k}{n^2} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

Theo định lý Markov, dãy tuân theo luật số lớn.

162. Ta có với mỗi k:

$EX_k = 0$

$$DX_k = \frac{2a_k^2}{(2k+1)^3}\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{2a_k^2 k(k+1)}{6(2k+1)^2} < \frac{a_k^2}{3}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k < \frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

Áp dụng định lý Marbov ta có (X_n) tuân theo luật số lớn.

163. Ta có: $EX_n = 0$; $DX_n = \ln n$. Vậy:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln k \le \frac{1}{n^2}\int_1^{n+1} \ln x dx \le \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n^2} \to 0$$

khi $n \to \infty$ (dùng quy tắc Lôpitan).

Vậy dãy đó tuân theo luật số lớn.

164. Gọi X là số sản phẩm hỏng. Ta có X ~ B (250; 2%). X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 250(0{,}02) = 5$.

Từ đó tra bảng ta được:

a) $P\{X = 2\} = 0{,}0842$

b) $P\{X \le 2\} = 0{,}1247$

165. Gọi X là số hạt không nảy mầm. Ta có X ~ B (150; 3%). X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 150(0{,}03) = 4{,}5$.

Từ đó tra bảng ta được:

$P\{X \ge 6\} = 1 - P\{X \le 5\} = 0{,}2971$

166. Gọi X là số gia đình gặp sự cố về điện. Ta có X ~ B (160; 2%). X sẽ có xấp xỉ phân bố Poátxông với $\lambda = 160(0{,}02) = 3{,}2$.

Từ đó tra bảng ta được:

a) $P\{X = 4\} = 0{,}178$

b) $P\{X \in [2{,}5]\} = \sum_{i=2}^{5} P\{X = i\} = 0{,}724$

167. Gọi X là số lần xuất hiện lục.

a) X ~ B (120; $\frac{1}{6}$). X có xấp xỉ phân bố chuẩn với:

$$\mu = 20;\ \sigma = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = 4{,}08$$

Từ đó $P\{x < 15\} = P\left\{Z < \frac{-5}{4{,}08}\right\} = 1 - \phi(1{,}22) = 0{,}1131$

b) X ~ B (120; $\frac{1}{10}$). X có xấp xỉ phân bố chuẩn với $\mu = 12$; $\sigma = 3{,}286$

Từ đó $P\{X < 15\} = P\left\{Z < \frac{3}{3{,}286}\right\} = \phi(0{,}912) = 0{,}8159$

168. Giả sử X là số người chọn ăn ở đợt 1. Khi đó 1000 – X là số người chọn ăn ở đợt 2. Gọi k là số chỗ ngồi trong nhà ăn. Ta phải chọn k nhỏ nhất để:

$$P\{X < k,\ 1000 - X < k\} \geq 0{,}99 \iff P\{1000 - k < X < k\} \geq 0{,}99$$

Ta xem X có phân bố chuẩn với $\mu = 500$; $\sigma = \sqrt{250}$.

Vậy ta phải có:

$$\phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) - \phi\left(\frac{500-k}{\sqrt{250}}\right) \geq 0{,}99 \iff 2\phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) \geq 1{,}99$$

$$\iff \left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) \geq \phi(2{,}58)$$

Từ đó $k \geq 500 + 2{,}58\sqrt{250} = 540{,}79$

Vậy k = 541.

169. Gọi X là số cặp vợ chồng chọn ăn ở đợt 1. Khi đó 500 – X là số cặp chọn ăn ở đợt 2. Ta phải chọn k nhỏ nhất để:

$$P\{2X < k,\ 1000 - 2X < k\} \geq 0{,}99 \iff P\{500 - \frac{k}{2} < X < \frac{k}{2}\} \geq 0{,}99$$

X có phân bố nhị thức X ~ B(500, $\frac{1}{2}$). Dùng xấp xỉ chuẩn ta có X ~ N(250, 125). Vậy ta phải có:

$$\phi\left(\frac{\frac{k}{2} - 250}{\sqrt{125}}\right) - \phi\left(\frac{250 - \frac{k}{2}}{\sqrt{125}}\right) \geq 0{,}99$$

$$\iff \frac{k}{2} \geq 250 + 2{,}58\sqrt{125} \iff k \geq 557{,}69$$

Vậy k = 558.

170. Gọi X là số người thi đỗ. Ta có X ~ B(50, $\frac{1}{3}$).

Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$P\{X > k\} = 1 - \phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \frac{50}{3}}{\sqrt{50.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}}}\right) \geq 0{,}95$$

$$\iff \frac{k + 0{,}5 - 16{,}667}{10/3} \leq -1{,}645 \iff k \leq 10{,}68$$

Vậy k = 10.

171. Gọi X là số câu trả lời đúng của sinh viên.

Ta có X ~ B(45, $\frac{1}{4}$)

Dùng xấp xỉ chuẩn ta được:

a) $P\{X \ge 16\} = P\{\tilde{X} > 15{,}5\} = P\left\{Z > \frac{15{,}5 - 11{,}25}{2{,}904}\right\} =$

$$= 1 - \phi(1{,}463) = 0{,}0717$$

b) $P\{X < 10\} = P\{\tilde{X} \le 9{,}5\} = 0{,}2737$

c) $P\{8 \le X \le 12\} = P\{7{,}5 < \tilde{X} \le 12{,}5\} = 0{,}5681$

172. Gọi X là số sinh viên bị ốm trong một ngày. Ta có X ~ B(730, $\frac{1}{365}$) . Dùng xấp xỉ Poátxông ta xem X có phân bố Poátxông với tham số λ = 2.

Ta cần xác định k bé nhất để thỏa mãn bất đẳng thức:

$$P\{X \le k\} > 0{,}99$$

Tra bảng phân bố Poátxông với λ = 2 ta tìm được k = 6.

173. Gọi X là số người dưới 30 tuổi. Ta có X ~ B(100, 0,46). Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$P\{X > 50\} = P\{\tilde{X} \ge 50{,}5\} = 1 - \phi\left(\frac{50{,}5 - 46}{\sqrt{24{,}84}}\right) = 0{,}1833$$

Nếu mẫu được chọn có kích thước n = 225 thì:

$$P\{X \ge 113\} = P\{\tilde{X} > 112{,}5\} = 1 - \phi\left(\frac{112{,}5 - 103{,}5}{\sqrt{55{,}89}}\right) = 0{,}1144$$

174. Gọi X là số nhân viên đi nghỉ mát. Ta có X ~ B(80, $\frac{1}{5}$). Dùng xấp xỉ chuẩn ta có:

$$P\{X \le k\} = P\{\tilde{X} < k + 0{,}5\} = \phi\left(\frac{k + 0{,}5 - 16}{3{,}578}\right) \ge 0{,}99 = \phi(2{,}326)$$

$$\Rightarrow k \ge (3{,}578)(2{,}326) + 16 - 0{,}5 = 23{,}82$$

Vậy k = 24.

175. Ta có $P\left\{\left|\frac{X - 500}{22{,}13}\right|\right\} < \varepsilon = 2\phi(\varepsilon) - 1 = 0{,}95$. Suy ra ε = 1,96.

Vậy $P\{500 - (1{,}96)(22{,}130 < X < 500 + (1{,}96)(22{,}13)\} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ $P\{456{,}62 < X < 543{,}37\} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ Vậy a = 457; b = 543

176. a) Ký hiệu $Y = \frac{X}{450}$ khi đó EY = 0,54 và độ lệch tiêu chuẩn σ_Y = 0,02349.

Từ đó $P\{Y < 0,5\} = \phi\left(\dfrac{0,5 - 0,54}{0,02349}\right) = 0,0443$

b) Ta có $P\{\dfrac{X}{n} < 0,5\} = 0,01 = \phi(-2,326)$

$$\Leftrightarrow \ \phi\left(\frac{(0,5 - 0,54)\sqrt{n}}{\sqrt{(0,54)(0,46)}}\right) = \phi(-2,326) \ \Leftrightarrow \ \frac{n}{(0,54)(0,46)} = \frac{(2,326)^2}{(0,04)^2}$$

n = 840.

177. a) 0,686 < θ < 0,794

b) c = 0,675

178. a) Gọi X là số người trúng tuyển. Ta có X ~ N(325, 90%). X có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = 292,5 và σ = 5,4.

Vậy:

$$P\{X \le 300\} = P\{\tilde{X} < 300,5\} = \phi\left(\frac{300,5 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) \ge 0,99 = \phi(2,33)$$

$$\Leftrightarrow \ 300,5 - 0,9n \ge (0,3)(2,33)\sqrt{n}$$

Đặt $\sqrt{n} = u$, ta cần có:

$$0,9u^2 + 0,699u - 300,5 \le 0 \ \Rightarrow u \le 17,88 \ \Rightarrow \ n \le 319,99$$

Vậy n = 319.

179. a) 0,154 < P < 0,266

180. a) Gọi X là số học sinh tốt nghiệp. Nếu giả thuyết P = 0,8 là đúng thì X có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = 57,6 và σ = 3,39.

Vậy $P\{X \le 50\} = P\{\tilde{X} < 50,5\} = 1 - \phi(2,09) = 0,02$

b) Đây là một xác suất nhỏ do đó theo nguyên lý xác suất nhỏ, báo cáo của tỉnh là không tin cậy.

181. 210,66 kg < μ < 220,14 kg

182. a) Theo công thức: $P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = 2\phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1$

ta có trong bài toán này n = 400; σ = 0,22; ε = 0,02.

Từ đó độ tin cậy là $2\phi\left(\dfrac{(0,02)20}{0,22}\right) - 1 = 0,93$

b) Ta phải tìm $P\{\mu > \overline{X} - 0,01\}$

$$= P\{\overline{X} - \mu < 0,01\} = \phi\left(\frac{(0,01)20}{0,22}\right) = \phi(0,909) = 0,818$$

183. a) $\overline{X}$ có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = 258 và $\sigma = \dfrac{45}{\sqrt{36}} = \dfrac{45}{6}$

Vậy: $P\{\overline{X} \geq 274\} = 1 - \phi\left(\frac{(274-258)6}{45}\right) = 1 - \phi(2{,}133) = 0{,}0165$

Như vậy khoảng 1,6% trường hợp cho ta $\overline{X} \geq 274$.

b) Theo nguyên lý xác suất nhỏ, ta phải bác bỏ giả thiết "thuốc A không có tác dụng tới thời gian sống của chuột".

184. Gọi $S = \sum_{i=1}^{30} X_i$

Theo định lý giới hạn trung tâm, S có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = 250 × 30 = 7500 giờ, và độ lệch tiêu chuẩn σ = 1369,3 giờ.

Vậy $P\{S > 8760\} = 1 - \phi\left(\frac{8760-7500}{1369{,}3}\right) = 1 - \phi(0{,}92) = 0{,}1788$

b) Giả sử n là số linh kiện dự trữ $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

S có phân bố xấp xỉ chuẩn với trung bình μ = 250n và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 250\sqrt{n}$.

Ta cần có: P{S > 8760} ≥ 0,99

$$\Leftrightarrow\ 1 - \phi\left(\frac{8760-250n}{250\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}99 = \phi(2{,}33)$$

$$\Leftrightarrow\ 250n - 8760 \geq 250(2{,}33)\sqrt{n} \ \Leftrightarrow\ n - 2{,}33\sqrt{n} - 35{,}04 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{n} \geq 7{,}195 \ \Rightarrow\ n \geq 51{,}76$$

Vậy n = 52.

185. Gọi X_i là số phế phẩm của lô thứ i. $X_i \sim B(5, \frac{1}{10})$.

Từ đó $EX_i = 0{,}5$ và $DX_i = 0{,}45$; $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Khi đó S có phân bố xấp xỉ chuẩn với ES = μ = 50 và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = \sqrt{45} = 6{,}7$.

Vậy $P\{40 \leq S \leq 55\} = \phi\left(\frac{5}{6{,}7}\right) - \phi\left(-\frac{10}{6{,}7}\right) = 0{,}7083$

186. Lượng xăng tiêu thụ X trên quãng đường 3300 km có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = EX 3300 × (0,9) = 2970 lít và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 0{,}05\sqrt{3300} = 2{,}87$.

Ta có: $P\{|X - \mu| < \varepsilon\sigma\} = 2\phi(\varepsilon) - 1 = 0{,}95 \ \Rightarrow\ \varepsilon = 1{,}96$

Từ đó: $\mu - \varepsilon\sigma < X < \mu + \varepsilon\sigma \ \Leftrightarrow\ 2964{,}37\ \mathit{lít} < X < 2975{,}62\ \mathit{lít}$

187. Gọi n là số bóng cần dùng.

Tổng số giờ thắp đèn của 150 bóng trong 6 tháng là:

900 × 150 = 135000 giờ

Ký hiệu X_i là thời gian làm việc của bóng thứ i. Ta cần xác định n để

$$P\{\sum_{i=1}^{n} X_i < 135000\} < 0,05$$

Đặt $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ta có ES = 200n và DS = $(200)^2$n

S có phân bố xấp xỉ chuẩn với μ = 200n và σ = $200\sqrt{n}$

Vậy ta có:

$$P\{S < 135000\} = \phi\left(\frac{135000 - 200n}{200\sqrt{n}}\right) \le 0,05$$

$$\Leftrightarrow \ \phi\left(\frac{675 - n}{\sqrt{n}}\right) \le 0,05 = \phi(-1,67) \ \Leftrightarrow \ \frac{675 - n}{\sqrt{n}} \le -1,67$$

$$\Leftrightarrow n - 1,67\sqrt{n} - 675 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{n} \ge 26,825$$

$\Rightarrow \ n \ge 719,58$. Vậy n = 720.