CHƯƠNG 3: PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM:

Cho hàm số $f(x,y)$ có tập xác định là miền D_{xy}, và cho trước điểm $M_0(x_0,y_0)$ (thường là thuộc D_{xy})

Gọi $M(x,y)\in D_{xy}$.

Cố định $y=y_0$, ta xét giới hạn: $k_1=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$.

Nếu tồn tại k_1 thì ta gọi đây là giá trị đạo hàm của hàm f theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và kí hiệu là:

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Nếu không tồn tại k_1 thì ta nói hàm f không có đạo hàm riêng theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và kí hiệu là: $\nexists f'_x(x_0,y_0)$

Tương tự, cố định $x=x_0$, ta xét giới hạn: $k_2=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$.

Nếu tồn tại k_2 thì ta gọi đây là giá trị đạo hàm của hàm f theo biến y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và kí hiệu là:

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Nếu không tồn tại k_2 thì ta nói hàm f không có đạo hàm riêng theo biến y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và kí hiệu là: $\nexists f'_y(x_0,y_0)$

Nếu hàm f có đạo hàm riêng theo biến x tại mọi điểm $M_0(x_0,y_0)$ (thường là thuộc D_{xy}) thì ta nói f có đạo hàm riêng tổng quát theo biến x, và kí hiệu là:

$$f'_x \quad \text{hay} \quad \dot{f}_x \quad \text{hay} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

Nếu hàm f có đạo hàm riêng theo biến y tại mọi điểm $M_0(x_0,y_0)$ (thường là thuộc D_{xy}) thì ta nói f có đạo hàm riêng tổng quát theo biến y, và kí hiệu là:

$$f'_y \quad \text{hay} \quad \dot{f}_y \quad \text{hay} \quad \frac{df}{dy} \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

* ***Quy tắc tính đạo hàm riêng của hàm nhiều biến***:

Khi tính đạo hàm riêng (ĐHR) của hàm f theo biến nào thì ta xem tất cả các biến còn lại như là những hằng số, rồi áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm 1 biến cho biến đang xét.

Ví dụ mẫu 1:

Cho hàm số $f(x,y)=\arctan\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)$

Tìm các ĐHR f'_x và f'_y

Giải:

Ta có $$f'_x=\frac{\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}=\frac{\frac{(x-3y)'(x^2+y^2+1)-(x^2+y^2+1)'(x-3y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1.(x^2+y^2+1)-2x(x-3y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}=\frac{x^2+y^2+1-2x^2+6xy}{(x^2+y^2+1)^2}.\frac{(x^2+y^2+1)^2}{(x^2+y^2+1)^2+(x-3y)^2}$$

$$=\frac{y^2-x^2+1+6xy}{(x^2+y^2+1)^2+(x-3y)^2}$$

Và $$f'_y=\frac{\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}=\frac{\frac{(x-3y)'(x^2+y^2+1)-(x^2+y^2+1)'(x-3y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{-3.(x^2+y^2+1)-2y(x-3y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{1+\left(\frac{x-3y}{x^2+y^2+1}\right)^2}=\frac{-3x^2-3y^2-3-2xy+6y^2}{(x^2+y^2+1)^2}.\frac{(x^2+y^2+1)^2}{(x^2+y^2+1)^2+(x-3y)^2}$$

$$=\frac{3y^2-3x^2-3-2xy}{(x^2+y^2+1)^2+(x-3y)^2}$$

Ví dụ mẫu 2:

Cho hàm số $f(x,y,z)=x^2y^3z^4+e^{xyz}+\sin(x^2+2yz^3)$. Tìm f'_x, f'_y, f'_z

Giải:

Ta có $f'_x=2xy^3z^4+(xyz)'e^{xyz}+(x^2+2yz^3)'.\cos(x^2+2yz^3)$

$=2xy^3z^4+yze^{xyz}+2x\cos(x^2+2yz^3)$.

$f'_y=3x^2y^2z^4+(xyz)'e^{xyz}+(x^2+2yz^3)'.\cos(x^2+2yz^3)$

$=3x^2y^2z^4+xze^{xyz}+2z^3\cos(x^2+2yz^3)$.

$$f'_z = 4x^2y^3z^3 + (xyz)'e^{xyz} + (x^2+2yz^3)'.\cos(x^2+2yz^3)$$
$$= 4x^2y^3z^3 + xye^{xyz} + 6yz^2\cos(x^2+2yz^3).$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hàm số $f(x,y) = \sin^2(xy^3+1) + \ln(x^4+y^2+3) - e^{xy}$. Tìm f'_x, f'_y.

Bài 2: Cho hàm số $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{xy}{x^4+y^4+2}\right)$. Tìm f'_x, f'_y.

Bài 3: Cho hàm số $f(x,y) = 5^{\sin(xy+1)} + \sqrt[3]{x^2y^5+2}$. Tìm f'_x, f'_y.

Bài 4: Cho hàm số $f(x,y,z) = \sin^3(x+2y+3z) - arc\cot(xyz^2) + 2^{xyz}$. Tìm f'_x, f'_y, f'_z.

Bài 5: Cho hàm số $f(x,y,z) = \tan\sqrt{\frac{4x^2+y^6}{x^4+3y^8+1}} + \sin(xyz) - 4z^3$. Tìm f'_x, f'_y, f'_z.

2/ ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO:

Xét hàm số 2 biến $f(x,y)$. Giả sử f có các ĐHR cấp 1 là f'_x và f'_y.

Ta thấy bản thân các ĐHR này cũng là hàm nhiều biến, nên chúng cũng có ĐHR của mình. Ta gọi ĐHR của ĐHR cấp 1 là ĐHR cấp 2 của hàm số f.

Ta có các ĐHR sau:

$(f'_x)'_x = f''_{xx} = f''_{x^2}$: ĐHR cấp 2 theo biến x hai lần.

$(f'_y)'_y = f''_{yy} = f''_{y^2}$: ĐHR cấp 2 theo biến y hai lần.

$(f'_x)'_y = f''_{xy}$: ĐHR hỗn hợp theo 2 biến x và y.

$(f'_y)'_x = f''_{yx}$: ĐHR hỗn hợp theo 2 biến x và y.

Lưu ý:

Nếu f là hàm số sơ cấp 2 biến thì ta có $f''_{xy} = f''_{yx}$

Nếu f là hàm số sơ cấp 3 biến thì ta có $f''_{xy} = f''_{yx}$; $f''_{yz} = f''_{zy}$ và $f''_{xz} = f''_{zx}$

Tương tự cho các ĐHR của hàm 3 biến, 4 biến,…

Ví dụ mẫu 3:

Cho hàm số $f(x,y) = e^{xy} + \sin(xy^2+1)$. Tìm $f'_x; f'_y; f''_{xx}; f''_{xy}; f''_{yy}$

Giải:

Ta có $f'_x = ye^{xy} + y^2\cos(xy^2+1)$;

$$f'_y = xe^{xy} + 2xy\cos(xy^2+1);$$
$$f''_{xx} = y.ye^{xy} + y^2[-y^2\sin(xy^2+1)] = y^2e^{xy} - y^4\sin(xy^2+1);$$
$$f''_{yy} = x.xe^{xy} + 2x[y'\cos(xy^2+1) + y.(-2xy\sin(xy^2+1))]$$
$$= x^2e^{xy} + 2x[\cos(xy^2+1) - 2xy^2\sin(xy^2+1)]$$

$$f''_{xy} = (y'e^{xy} + y.xe^{xy}) + [2y\cos(xy^2+1) + y^2.(-2xy\sin(xy^2+1))]$$
$$= e^{xy} + xye^{xy} + 2y\cos(xy^2+1) - 2xy^3\sin(xy^2+1)$$

<u>Bài tập tương tự</u>:

<u>Bài 6</u>: Cho hàm số $f(x,y) = \sin(xy+1) + 2x^2y^3 + 5^{x+y}$. Tìm $f'_x; f'_y; f''_{xx}; f''_{xy}; f''_{yy}$

<u>Bài 7</u>: Cho hàm số $f(x,y) = x^y + y^x$. Tìm $f'_x; f'_y; f''_{xx}; f''_{xy}; f''_{yy}$

<u>Bài 8</u>: Cho hàm số $f(x,y,z) = e^{xyz} + x^2y^3z^4$. Tìm $f''_{xy}; f''_{yz}; f''_{zx}$.

<u>Bài 9</u>: Cho hàm số $f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x$. Tìm $f'''_{xyz}; f'''_{zyx}$.

3/ <u>KHẢO SÁT CỰC TRỊ (TỰ DO) CỦA HÀM NHIỀU BIẾN</u>:

Khảo sát cực trị của hàm số $f(x,y) = ...$

<u>Bước 1</u>: Ta tính các ĐHR cấp 1 là: f'_x và f'_y.

<u>Bước 2</u>: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ (*)

Nếu hệ phương trình vô nghiệm ➔ Hàm f không có cực trị.

Nếu hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = ... \\ y_1 = ... \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_2 = ... \\ y_2 = ... \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_3 = ... \\ y_3 = ... \end{cases}, \ldots$$

Thì ta nói hàm f có các điểm dừng (saddle points) là $P_1(x_1;y_1), P_2(x_2;y_2), P_3(x_3;y_3), ...$

<u>Bước 3</u>: Ta tính các ĐHR cấp 2: $f''_{xx}; f''_{xy}; f''_{yy}$

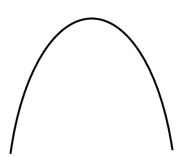
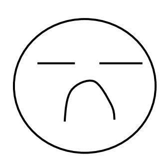
<u>Bước 4</u>: Ta xét tại mỗi điểm dừng:

Tại điểm dừng $P_i(x_i;y_i)$, ta có:

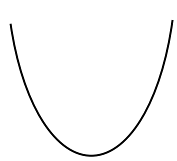
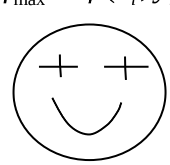
$$\begin{cases} A = f''_{xx}(x_i;y_i) = ... \\ B = f''_{xy}(x_i;y_i) = ... \\ C = f''_{yy}(x_i;y_i) = ... \end{cases} \quad \text{suy ra } \Delta = B^2 - AC = ...$$

<u>TH1</u>: Nếu $\Delta > 0$ thì $P_i(x_i;y_i)$ không phải là cực trị của f.

<u>TH2</u>: Nếu $\Delta < 0$ ta xét dấu của A theo quy tắc "***âm lồi, dương lõm***", như sau:

Nếu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A < 0 \end{cases}$  

thì $P_i(x_i;y_i)$ là điểm cực đại của f, với $f_{\max} = f(x_i;y_i) = ...$

Nếu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$  

thì $P_i(x_i;y_i)$ là điểm cực tiểu của f, với $f_{\min}=f(x_i;y_i)=...$

<u>TH3</u>: Nếu $\Delta=0$ hoặc các ĐHR f'_x và f'_y không tồn tại ở vị trí $P_i(x_i;y_i)$ thì ta xét

$f(x,y)-f(x_i,y_i)=...$ (**)

<u>TH3.1</u>: Nếu (**) > 0, với mọi $(x,y)\neq(x_i,y_i)$ (<u>ví dụ</u>: (**)= $(x+2y)^2+1>0$)

thì $P_i(x_i;y_i)$ là điểm cực tiểu của f, với $f_{\min}=f(x_i;y_i)=...$

<u>TH3.2</u>: Nếu (**) < 0, với mọi $(x,y)\neq(x_i,y_i)$ (<u>ví dụ</u>: (**)= $-3x^2-2y^4-5<0$)

thì $P_i(x_i;y_i)$ là điểm cực đại của f, với $f_{\max}=f(x_i;y_i)=...$

<u>TH3.3</u>: Nếu (**) không ổn định về dấu (<u>ví dụ</u>: (**)= $x^2-2y^2+4x-3y+xy$)

Ta chọn điểm $M(x_M,y_M)$ cụ thể, gần điểm $P_i(x_i;y_i)$ sao cho

khi thay $M(x_M,y_M)$ vào (**) ta có:

$f(x_M,y_M)-f(x_i,y_i)>0$

Ta chọn điểm $N(x_N,y_N)$ cụ thể, gần điểm $P_i(x_i;y_i)$ sao cho

khi thay $N(x_N,y_N)$ vào (**) ta có:

$f(x_N,y_N)-f(x_i,y_i)<0$

Suy ra (**) không ổn định về dấu

(Ví dụ: xét tại $P(1,1)$ và có (**)= $x^2-2y^2+4x-3y+xy$

Ta chọn $M(1,0)$ thay vào (**)

ta có: (**)= $1^2-2.0^2+4.1-3.0+1.0=5>0$

Ta chọn $N(0,1)$ thay vào (**)

ta có: (**)= $0^2-2.1^2+4.0-3.1+0.1=-5<0$

nên (**) không ổn định về dấu)

Cho nên $P_i(x_i;y_i)$ không phải là cực trị của f.

<u>Bước 5</u>: Ta lặp lại Bước 4 cho tất cả các điểm dừng.

<u>Ví dụ mẫu 4</u>: Khảo sát cực trị hàm số $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+3$

<u>Ví dụ mẫu 5</u>: Khảo sát cực trị hàm số $f(x,y)=2-\sqrt{x^2+2y^4}$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 4</u>:

Ta có: $\begin{cases} f'_x=4x^3-4y \\ f'_y=4y^3-4x \end{cases}$.

Giải hệ $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-4y=0 & (1) \\ 4y^3-4x=0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) theo vế ta có $4x^3-4y^3-4y+4x=0 \Leftrightarrow x^3-y^3+x-y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y & (3) \\ x^2+xy+y^2+1=0 & (4) \end{array}\right.$

Xét (4) ta có $x^2+xy+y^2+1=x^2+2x\dfrac{y}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}+y^2+1=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+1>0$

Nên pt (4) vô nghiệm.

Xét (3) ta thay vào (1), ta có:

$(1)\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x(x^2-1)\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$

hay $x=1\Rightarrow y=1$

hay $x=-1\Rightarrow y=-1$

Nên hàm số có 3 điểm dừng là $P_1(0,0),P_2(1,1),P_3(-1,-1)$.

Ta tính các ĐHR cấp 2 sau:

$f''_{xx}=12x^2$

$f''_{xy}=-4$

$f''_{yy}=12y^2$

Tại $P_1(0,0)$

$A=f''_{xx}(0,0)=12.0^2=0;$

Ta có: $B=f''_{xy}(0,0)=-4;$ $\Rightarrow \Delta=B^2-AC=(-4)^2-0.0=16>0$

$C=f''_{yy}(0,0)=12.0^2=0$

Nên $P_1(0,0)$ không là cực trị của f.

Tại $P_2(1,1)$

$A=f''_{xx}(1,1)=12.1^2=12;$

Ta có: $B=f''_{xy}(1,1)=-4;$ $\Rightarrow \Delta=B^2-AC=(-4)^2-12.12=-128<0$

$C=f''_{yy}(1,1)=12.1^2=12$

Mà $A=12>0$ nên $P_2(1,1)$ là điểm cực tiểu, với $f_{\min}=f(1,1)=1^4+1^4-4.1.1+3=1$

Tại $P_3(-1,-1)$

$A=f''_{xx}(-1,-1)=12.(-1)^2=12;$

Ta có: $B=f''_{xy}(-1,-1)=-4;$ $\Rightarrow \Delta=B^2-AC=(-4)^2-12.12=-128<0$

$C=f''_{yy}(-1,-1)=12.(-1)^2=12$

Mà $A=12>0$ nên $P_3(-1,-1)$ là điểm cực tiểu,

với $f_{\min}=f(-1,-1)=(-1)^4+(-1)^4-4.(-1).(-1)+3=1$.

Ví dụ mẫu 5:

Ta có: $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + 2y^4}$

Suy ra: $f'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+2y^4}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+2y^4}}$ và $f'_y = \dfrac{-8y^3}{2\sqrt{x^2+2y^4}} = \dfrac{-4y^3}{\sqrt{x^2+2y^4}}$

Giải hệ pt $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+2y^4}} = 0 \\ \dfrac{-4y^3}{\sqrt{x^2+2y^4}} = 0 \end{cases}$

Hệ này chỉ có nghiệm khi $x = 0, y = 0$. Nhưng tại điểm (0,0) thì các ĐHR f'_x và f'_y không xác định được (không tồn tại) do có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Xét tại điểm $P(0,0)$, ta có

$$f(x,y) - f(0,0) = (2 - \sqrt{x^2+2y^4}) - (2 - \sqrt{0^2 + 2.0^4}) = -\sqrt{x^2+2y^4} < 0$$

với mọi $(x,y) \neq (0,0)$

suy ra, $P(0,0)$ là điểm cực đại, với $f_{\max} = f(0,0) = 2 - \sqrt{0^2 + 2.0^4} = 2$.

Bài tập tương tự:

Khảo sát cực trị các hàm số sau:

a/ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy + 1$

b/ $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 7$

c/ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8xy - 3$

d/ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy - 2$

e/ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy - 5$

f/ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 8$

g/ $f(x,y) = x^4 - 2y^3 - 12xy + 1$

h/ $f(x,y) = x^3 - y^4 - 12xy^2 + 3$

i/ $f(x,y) = xye^{xy}$

j/ $f(x,y) = e^{4y - x^2 - 2y^2}$

k/ $f(x,y) = (4 - x^2 - 2y^2)(25 - 16x - 9y)$

l/ $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2}$

m/ $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$, với $0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi$

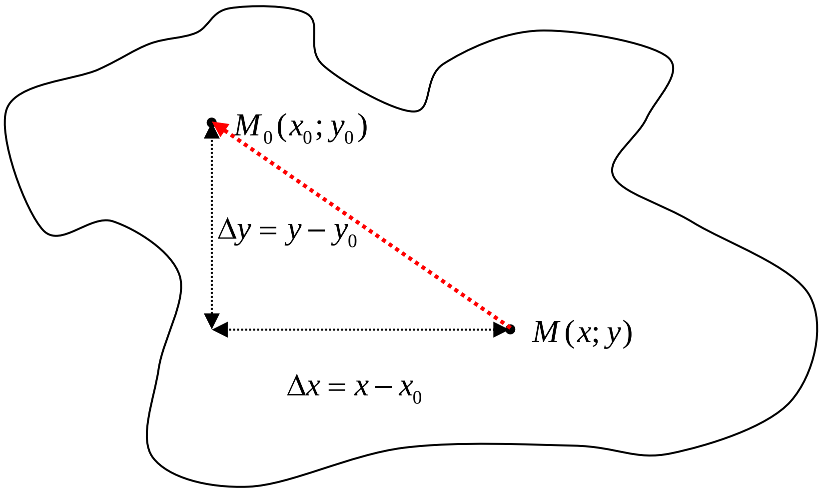
n/ $f(x,y) = x^3 - 3y^2 - 12xy + 5$

o/ $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 - 2x^2y^2 - 9$.

3/ <u>GIỚI HẠN KÉP VÀ GIỚI HẠN LẶP CỦA HÀM NHIỀU BIẾN</u>:

Cho hàm số $f(x,y)$ có tập xác định (TXĐ) là D_{xy}, và cho trước điểm $M_0(x_0;y_0)$ (thường là thuộc D_{xy}).

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc miền D_{xy}, và nằm gần điểm $M_0(x_0;y_0)$.



Ta gọi số L là giới hạn kép của hàm $f(x;y)$ khi $x \to x_0, y \to y_0$ hay là khi $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$, nếu:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x;y) \neq (x_0;y_0), (x;y) \in D_{xy}$, ta có:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow | f(x;y) - L | < \varepsilon .$$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = L \text{ hay là } \lim_{M \to M_0} f(M) = L \text{ hay là } \lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} f(x;y) = L .$$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: Tính $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{x-1}{x^2+y^2} = ?$

<u>Giải</u>:

Ta có: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{x-1}{x^2+y^2} = \dfrac{0-1}{0^2+1^2} = -1.$

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: Tính $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} = ?$

<u>Giải</u>:

Ta có: $x^2 + y^2 \geq x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{x^2}, \forall (x;y) \neq (0;0)$

$\Rightarrow 0 \leq \left| \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \dfrac{2x^2|y|}{x^2}$

$$\Rightarrow 0 \le \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \le 2|y|.$$

Khi $\begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$, ta có Vế trái $\to 0$ và Vế phải $= 2|y| \to 0$, nên theo nguyên lý kẹp,

Ta có:

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \to 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

<u>Ví dụ mẫu 8</u>: Tính $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = ?$

<u>Giải</u>:

Ta chứng tỏ giới hạn này không tồn tại, như sau:

<u>Cách 1</u>:

Chọn $x = 2y$ thì khi $y \to 0$ ta có $x \to 0$. Khi đó

$$k_1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2y.y}{(2y)^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{2}{5}$$

Chọn $x = 3y$ thì khi $y \to 0$ ta có $x \to 0$. Khi đó

$$k_2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3y.y}{(3y)^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3y^2}{10y^2} = \frac{3}{10}$$

Mà $\frac{2}{5} \ne \frac{3}{10} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

<u>Cách 2</u>:

Chọn dãy $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ thì khi $n \to \infty$ ta có $\begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to 0 \end{cases}$

Lúc này

$$k_1 = \lim_{\substack{x_n\to 0\\ y_n\to 0}} \frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right).\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Chọn dãy $x_n = \frac{1}{n}; y_n = \frac{3}{n}$ thì khi $n \to \infty$ ta có $\begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to 0 \end{cases}$

Lúc này

$$k_2 = \lim_{\substack{x_n\to 0\\ y_n\to 0}} \frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right).\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{10}{n^2}} = \frac{3}{10}$$

Mà $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{10} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

<u>Ví dụ mẫu 9</u>: Tính $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4xy^2}{x^2+3y^4} = ?$

<u>Giải</u>:

Ta chứng tỏ giới hạn này không tồn tại, như sau:

Chọn $x = ky^2$ thì khi $y \to 0$ ta có $x \to 0$.

Lúc này

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4xy^2}{x^2+3y^4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4(ky^2)y^2}{(ky^2)^2+3y^4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4ky^4}{k^2y^4+3y^4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4ky^4}{(k^2+3)y^4} = \frac{4k}{k^2+3}$$

(phụ thuộc $k \in \mathbb{R}$), nên không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4xy^2}{x^2+3y^4}$

<u>*Bài tập tương tự*</u>: Tính các giới hạn kép sau (nếu có)

a/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[x\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right]$;

b/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5x^6y^3}{4x^6+y^6}$;

c/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x^4y^5}{x^8+y^8}$;

d/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+3y^2}{x^2+5y^2}$;

e/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

f/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right]$;

g/ $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

h/ $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 2}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$;

i/ $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left[(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\right]$;

j/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

k/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^8+y^8}$;

l/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \left[(1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}} \right]$;

m/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right]$;

n/ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

o/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$;

p/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{2-\sqrt{4+xy^2}}$;

q/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$;

r/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$;

s/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

t/ $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to -\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

u/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2(1-\cos(xy))}{y^2}$;

v/ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$;

w/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

x/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$;

y/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$;

z/ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2}$.

* **<u>GIỚI HẠN LẶP</u>**:

Cho hàm số $f(x,y)$ có tập xác định (TXĐ) là D_{xy}, và cho trước điểm $M_0(x_0;y_0)$ (thường là thuộc D_{xy}).

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc miền D_{xy}, và nằm gần điểm $M_0(x_0;y_0)$.

- Cố định giá trị $y \neq y_0$, ta xem hàm $f(x,y)$ như là hàm số một biến theo x.
- Giả sử tồn tại giới hạn
$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = g(y).$$
- Nếu tồn tại giới hạn
$$\lim_{y\to y_0} g(y) = L,$$
- Thì ta gọi đây là giới hạn lặp của $f(x,y)$ khi $x \to x_0$ và $y \to y_0$, và ta ký hiệu là:
$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x;y)\right] = L.$$

Tương tự,

- Cố định giá trị $x \neq x_0$, ta xem hàm $f(x,y)$ như là hàm số một biến theo y.
- Giả sử tồn tại giới hạn
$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = h(x).$$
- Nếu tồn tại giới hạn
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = M,$$
- Thì ta gọi đây là giới hạn lặp của $f(x,y)$ khi $y \to y_0$ và $x \to x_0$, và ta ký hiệu là:
$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x;y)\right] = M.$$

<u>Ví dụ mẫu 10</u>: Tính các giới hạn lặp:
$$I = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right];$$
$$J = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right].$$

<u>Giải</u>:

Ta có: $I = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\left(\dfrac{0.y}{0^2+y^2}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\left(\dfrac{0}{y^2}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0}(0) = 0$;

và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{x.0}{x^2+0^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{0}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(0)=0$.

<u>Ví dụ mẫu 11</u>: Tính các giới hạn lặp:

$$I=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2y+x^2+3y^2}{4x+y}\right)\right];$$

$$J=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x-2y+x^2+3y^2}{4x+y}\right)\right].$$

<u>Giải</u>:

Ta có: $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-2y+x^2+3y^2}{4x+y}\right)\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{0-2y+0^2+3y^2}{4.0+y}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{-2y+3y^2}{y}\right]=-2$;

và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{x-2y+x^2+3y^2}{4x+y}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-2.0+x^2+3.0^2}{4.x+0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x+x^2}{4x}\right]=\frac{1}{4}$.

<u>*Bài tập tương tự*</u>: Tính các giới hạn lặp sau (nếu có)

a/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)\right]$;

b/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$;

c/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+5y}{4x-3y}\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{2x+5y}{4x-3y}\right)\right]$;

d/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(xy)}{4x}\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin(xy)}{4x}\right)\right]$;

e/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2y+2x)}{3x}\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2y+2x)}{3x}\right)\right]$;

f/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|^{y^2}\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(|x|^{y^2}\right)\right]$;

g/ $I=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|^y+|y|^x\right)\right]$ và $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(|x|^y+|y|^x\right)\right]$.

* **<u>SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN</u>**:

Cho hàm số $f(x,y)$ có tập xác định là miền D_{xy}, và cho trước điểm $M_0(x_0,y_0)$ (thường là thuộc D_{xy}).

Ta nói hàm số $f(x,y)$ liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu:

$$\begin{cases} + \ f(x,y) \text{ xác định tại } M_0(x_0,y_0); \\ + \text{ Tồn tại giới hạn kép } \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=L; \\ + \text{ Ta có: } \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=L=f(x_0;y_0). \end{cases}$$

Nếu có ít nhất 1 trong các tính chất này bị vi phạm thì ta nói hàm số $f(x,y)$ gián đoạn (không liên tục) tại điểm $M_0(x_0,y_0)$.

Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $M_0(x_0,y_0)\in D_{xy}$ thì ta nói hàm số liên tục trên miền xác định D_{xy}.

<u>Ví dụ mẫu 12</u>: Cho hàm số

$$f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & khi \quad (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & khi \quad (x;y)=(0;0) \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}^2$?

<u>Giải</u>:

Ta có $f(x;y)$ là các hàm số sơ cấp nên xác định trên miền nào sẽ liên tục trên miền đó. Cho nên theo đề bài thì $f(x;y)$ luôn xác định trên $\mathbb{R}^2$, do đó ta chỉ cần xét tính liên tục tại điểm (0;0) là điểm làm cho hàm chuyển công thức.

Ta có: $f(x;y)=0$ khi $(x;y)=(0;0)$ nên luôn có nghĩa (xác định được) tại điểm (0;0) (1);

Ngoài ra, ta có: $x^2+y^2\geq x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2}\leq\dfrac{1}{x^2}$, $\forall(x;y)\neq(0;0)$

$$\Rightarrow 0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{x^2|y|}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq|y|.$$

Khi $\begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$ ta có Vế trái $\to 0$ và Vế phải$=|y|\to 0$, nên theo nguyên lý kẹp ta có:

$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\to 0\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$, nghĩa là giới hạn này tồn tại và bằng 0 (2);

Ta có $f(0;0)=0\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0;0)$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra hàm số này liên tục tại điểm (0;0) nên liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

<u>*Bài tập tương tự*</u>:

Bài 1: Cho hàm số:

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4y}{x^4+y^4} & khi \quad (x;y)\neq(0;0)\\ a^2-9 & khi \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm (0;0).

Bài 2: Cho hàm số:

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & khi \quad (x;y)\neq(0;0)\\ a^2-1 & khi \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm (0;0).

Bài 3: Cho hàm số:

$$f(x;y)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) & khi \quad (x;y)\neq(0;0)\\ a^2-4 & khi \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Bài 4: Cho hàm số:

$$f(x;y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2} & khi \quad (x;y)\neq(0;0)\\ a^2-16 & khi \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm (0;0).

Bài 5: Cho hàm số:

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & khi \quad (x;y)\neq(0;0)\\ a^2-4a+3 & khi \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm (0;0).