HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2014**

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. a) Chứng minh rằng:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2) \\ 1 & a_3 & a_3(a_3-1) & a_3(a_3-1)(a_3-2) \\ 1 & a_4 & a_4(a_4-1) & a_4(a_4-1)(a_4-2) \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i).$$

b) Giả thiết a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên, chứng minh $\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i)$ chia hết cho 12.

Bài 2. Cho các số thực phân biệt a_1, a_2, a_3. Chứng minh rằng với mọi bộ số thực b_1, b_2, b_3 tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ bậc không quá 5 thỏa mãn: $P(a_i) = P'(a_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3,$ ở đây P' ký hiệu đạo hàm của đa thức P.

Bài 3. a) Ký hiệu V_4 là không gian vec tơ các đa thức với hệ số thực với bậc không quá 4. Định nghĩa ánh xạ $e : V_4 \to V_4$ như sau: với mỗi đa thức $f \in V_4$, $e(f) := \sum\limits_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}}{i!}$, trong đó $f^{(i)}$ ký hiệu đạo hàm bậc i của f, ($f^{(0)} = f$). Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ V_4 vào chính nó.

b) Ký hiệu V là không gian vec tơ các đa thức với hệ số thực. Với mỗi đa thức f, đặt $e(f) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}}{i!}$. Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ không gian V vào chính nó.

Bài 4. a) Cho ma trận khối $X = \begin{pmatrix} E_m & B \\ C & E_n \end{pmatrix}$ được tạo thành từ các ma trận đơn vị E_m, E_n cấp m, n tương ứng và các ma trận B, C với kích thước $m \times n$ và $n \times m$ tương ứng. Chứng minh rằng $\det(X) = \det(E_n - CB) = \det(E_m - BC)$.

b) Tổng quát, cho ma trận khối $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, trong đó A, D là các ma trận vuông, A khả nghịch, chứng minh rằng $\det(X) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Thí sinh chọn một trong hai câu của bài sau:

Bài 5. a) Cho P là một đa thức bậc n với hệ số hữu tỷ. Giả sử số thực a là một nghiệm của P với bội $> n/2$. Chứng minh rằng a là một số hữu tỷ.

b) Trên hình vuông $ABCD$ ta định nghĩa đường đi giữa hai đỉnh X, Y (không nhất thiết phân biệt) là một dãy các đỉnh kề nhau $XX_1X_2\ldots X_{n-1}Y$: như vậy $X_0 = X, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = Y$ là các đỉnh của hình vuông và X_iX_{i+1} là cạnh của hình vuông, số n được gọi là độ dài của đường đi. Với mỗi số tự nhiên n, gọi x_n, y_n, z_n tương ứng là số các đường đi độ dài n giữa: một đỉnh và chính nó, một đỉnh và một đỉnh cố định kề nó, một đỉnh và đỉnh đối diện (đỉnh đối xứng qua tâm). Ví dụ, $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0, x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 0, z_2 = 2$.
1) Thiết lập công thức truy hồi cho x_n, y_n, z_n;
2) Tìm công thức tổng quát của x_n, y_n, z_n.

.... Hết ....

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Bài 1. *a) Chứng minh rằng:*

$$\det\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2)\\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2)\\ 1 & a_3 & a_3(a_3-1) & a_3(a_3-1)(a_3-2)\\ 1 & a_4 & a_4(a_4-1) & a_4(a_4-1)(a_4-2)\end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i).$$

b) Giả thiết a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên, chứng minh $\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i)$ chia hết cho 12.

Giải. a) Gọi $C_1, \dots, C_4$ là các cột của ma trận đã cho. Đặt $C_i' = (a_1^{i-1}, \dots, a_4^{i-1})$. Thế thì ta dễ dàng thấy rằng $C_i = C_i' +$ tổ hợp tuyến tính của các $C_1', \dots, C_{i-1}'$.

Từ đó suy ra định thức cần tính bằng định thức của ma trận được tạo thành từ các cột $C_1', \dots, C_4'$.

Đây là định thức Vandermonde quen thuộc và do đó giá trị cần tìm bằng

$$\det(C_1', \dots, C_4') = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i).$$

b) Trong ma trận ban đầu, mỗi hệ số trên cột thứ $3, 4$ tương ứng là tích của $2, 3$ số nguyên liên tiếp, do đó chia hết cho $2!, 3!$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

Bài 2. Cho các số thực phân biệt a_1, a_2, a_3. Chứng minh rằng với mọi bộ số thực b_1, b_2, b_3 tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ bậc không quá 5 thỏa mãn: $P(a_i) = P'(a_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3,$ ở đây P' ký hiệu đạo hàm của đa thức P.

Giải. Giả thiết $P(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i x^i$. Từ các điều kiện của bài toán ta suy ra một hệ 6 phương trình tuyến tính với 6 ẩn là $c_0, \ldots, c_5$:

$$\sum_{i=0}^{5} a_k^i c_i = b_k, \quad \sum_{i=1}^{5} i a_k^{i-1} c_i = b_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Nếu $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ thì đa thức 0 là đa thức duy nhất thỏa mãn. Thật vậy, từ giả thiết suy ra $P(x) = \prod_i (x - a_i) Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc không quá 2. Từ hệ thức $P'(a_i) = 0$ ta suy ra $Q(a_i) = 0$. Do đó $Q \equiv 0$. Theo trên, khi các hệ số b_k đều bằng 0 thì hệ có nghiệm duy nhất. Do đó ta suy hệ có nghiệm duy nhất với mọi bộ b_k.

□

Cách khác:

- Xét ánh xạ ϕ từ không gian các đa thức bậc ≤ 5 với hệ số thực vào $\mathbb{R}^6$ gửi mỗi đa thức P lên $(P(a_1), P'(a_1), \ldots, P(a_3), P'(a_3))$. Bài toán yêu cầu chứng minh ϕ là một song ánh. Hiển nhiên ϕ là ánh xạ tuyến tính giữa các không gian có cùng số chiều bằng 6. Dễ dàng kiểm tra được rằng $\ker \phi = 0$ và bài toán được chứng minh.

- Cũng có thể xây dựng trực tiếp đa thức $P(x)$ bằng phương pháp nội suy.

- Thiết lập công thức nội suy Lagrange
- Xác định được đa thức bậc 2 nhận giá trị tại a_i
- Kết thúc bài toán

Bài 3. *a) Ký hiệu V_4 là không gian vec tơ các đa thức với hệ số thực với bậc không quá 4. Định nghĩa ánh xạ $e : V_4 \to V_4$ như sau: với mỗi đa thức $f \in V_4$, $e(f) := \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}}{i!}$, trong đó $f^{(i)}$ ký hiệu đạo hàm bậc i của f, ($f^{(0)} = f$). Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ V_4 vào chính nó.*

b) Ký hiệu V là không gian vec tơ các đa thức với hệ số thực. Với mỗi đa thức f, đặt $e(f) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}}{i!}$. Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ không gian V vào chính nó.

Giải. a)

- Thiết lập ma trận ánh xạ đạo hàm trong hệ cơ sở $1, x, \ldots, x^4/4!$
- Do ma trận của e theo cơ sở trên là chéo nên khả nghịch

b) Theo công thức Taylor, ta có, với mọi $f \in \mathbb{R}[x]$ thì

$$f(x+1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Nói cách khác, $e(D)$ gửi đa thức $f(x)$ lên $f(x+1)$. Hiển nhiên đây là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch.

$\square$

Ghi chú:

Thí sinh có thể dùng phương pháp của câu a) để giải câu b).

Thí sinh có thể chứng minh câu b) trước, từ đó suy ra câu a).

Bài 4. *a) Cho ma trận khối* $X = \begin{pmatrix} E_m & B \\ C & E_n \end{pmatrix}$ *được tạo thành từ các ma trận đơn vị* E_m, E_n *cấp* m, n *tương ứng và các ma trận* B, C *với kích thước* $m \times n$ *và* $n \times m$ *tương ứng. Chứng minh rằng* $\det(X) = \det(E_n - CB) = \det(E_m - BC)$.

b) Tổng quát, cho ma trận khối $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, *trong đó* A, D *là các ma trận vuông,* A *khả nghịch, chứng minh rằng* $\det(X) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Lời giải. Sử dụng biến đổi sơ cấp theo hàng ta có

$$\det(X) = \det\begin{pmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n - CB \end{pmatrix}$$

Từ đó sử dụng khai triển Laplace ta có điều phải chứng minh.

b) Với A khả nghịch, ta có khai triển

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Sử dụng các biến đổi sơ cấp đối với ma trân $\begin{pmatrix} E_m & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}$ như trong câu a) ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. *a) Cho P là một đa thức bậc n với hệ số hữu tỷ. Giả sử số thực a là một nghiệm của P với bội $> n/2$. Chứng minh rằng a là một số hữu tỷ.*

Giải. Phản chứng. Giả sử a vô tỷ. Giả sử $P = P_1 \cdots P_k$ với $P_1, \dots, P_k$ là các đa thức hệ số hữu tỷ và bất khả qui trên $\mathbb{Q}$. Bởi vì a là nghiệm của P, dĩ nhiên a là nghiệm của một số đa thức P_i. Không mất tổng quát, giả sử $P_1, \dots, P_m$ nhận a làm nghiệm. Do $P_1, \dots, P_m$ có hệ số hữu tỷ và nhận số vô tỷ a làm nghiệm ta suy ra chúng có bậc ≥ 2. Ta nhắc lại kết quả quen biết sau đây: mọi đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ chỉ có nghiệm đơn trong $\mathbb{R}$ (trong bất kì trường chứa $\mathbb{Q}$). Từ đó suy ra bội của a trong P bằng m. Suy ra

$$\deg P \geq \deg P_1 P_2 \cdots P_m \geq 2m > 2\frac{n}{2} = n.$$

Đây là điều mâu thuẫn cần tìm và bài toán được giải quyết. □

Nhận xét: bài toán còn có nhiều tiếp cận khác: qui nạp theo bậc của P, xét iđêan của $\mathbb{Q}[x]$ gồm các đa thức nhận a làm nghiệm, v.v.

Bài 5. *b) Trên hình vuông $ABCD$ ta định nghĩa đường đi giữa hai đỉnh X, Y (không nhất thiết phân biệt) là một dãy các đỉnh kề nhau $XX_1X_2 \dots X_{n-1}Y$: như vậy $X_0 = X, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$ là các đỉnh của hình vuông và X_iX_{i+1} là cạnh của hình vuông, số n được gọi là độ dài của đường đi. Với mỗi số tự nhiên n, gọi x_n, y_n, z_n tương ứng là số các đường đi độ dài n giữa: một đỉnh và chính nó, một đỉnh và một đỉnh cố định kề nó, một đỉnh và đỉnh đối diện (đỉnh đối xứng qua tâm). Ví dụ, $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0, x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 0, z_2 = 2$.*
1) Thiết lập công thức truy hồi của x_n, y_n, z_n;
2) Tìm công thức tổng quát của x_n, y_n, z_n.

Giải. 1) Theo định nghĩa x_n là số đường đi độ dài n giữa A và A. Một đường đi bắt đầu từ A và kết thúc tại A, ngay trước khi kết thúc phải dừng lại tại B hoặc D. Điều này cho thấy một đường đi độ dài n giữa A và chính nó được tạo thành từ một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới B và cạnh BA hoặc một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới D và cạnh DA. Từ đó suy ra

$$x_n = 2y_{n-1}.$$

Tương tự, một đường đi độ dài n từ A tới B được tạo thành từ một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới A và cạnh AB hoặc một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới C và cạnh CB. Do đó

$$y_n = x_{n-1} + z_{n-1}.$$

Tương tự ta có

$$z_n = 2y_{n-1}.$$

Một cách tương đương, ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

2) Ta có $x_n = z_n = 2y_{n-1}$ với mọi n. Từ đó $y_n = 2x_{n-1} = 4y_{n-2}$. Quan hệ $y_n = 4y_{n-2}$ cùng với giá trị ban đầu $y_0 = 0, y_1 = 1$ chứng tỏ $y_{2k} = 0, y_{2k+1} = 2^{2k}$. Từ đây, ta suy ra $x_{2k} = z_{2k-1} = 2y_{2k-1} = 2^{2k-1}, z_{2k+1} = x_{2k+1} = 0$. □