Hệ phương trình tuyến tình, ma trận và biến đổi Gaus-Jordan

TS. Nguyễn Văn Hợi

University of Information Technology

Ngày 8 tháng 9 năm 2023

Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 29 \\ x + 3y + 2z = 34 \\ 3x + 2y + z = 26 \end{cases}$$

❒ Để tìm x, y, z ta biến đổi hệ trên về dạng

$$\begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$

❒ Đại số tuyến ra đời để giải quyết bài toán trên.

Ma trận

❒ Ma trận cỡ (cấp) $m \times n$ là một bảng hình chữ nhật chứa m dòng (hàng) và n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

với $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở dòng i và cột j. Ký hiệu

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Ví dụ, ma trận cấp 3×4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 21 & -3 & 0 \\ -6 & -2 & -1 & 62 \\ 2 & -3 & 8 & 32 \end{bmatrix}$$

❒ **Ma trận vuông**: Là ma trận có $m = n$. Các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng xuyên qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❒ Ma trận vuông A gọi mà ma trận chéo nếu $a_{ij} = 0$ với $i \neq j$.

❒ Ma tam giác trên là ma trận vuống với $a_{ij} = 0$ với $i > j$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

❒ Ma tam giác dưới là ma trận vuống với $a_{ij} = 0$ với $i < j$.

❒ Ma trận không, O, là Ma trận với tất cả các phần tử bằng 0.

❒ Ma trận mà chỉ có một dòng gọi là vec tơ

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

❒ Ma trận chỉ có một cột gọi là vec tơ cột

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x & + & 8y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 5 \\ 4x & + & 10y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

❒ Ma trận chứa tất cả các hệ số của các biến trong hệ trên gọi là ma trận hệ số của hệ (dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

Biến đổi Gauss–Jordan

❒ Ma trận chứa tất cả các hệ số trong hệ gọi là ma trận bổ sung

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

❒ Để tìm nghiệm của hệ trên ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp để đưa ma trận hệ số về dạng ma trận đơn vị:

- Chia một dòng cho một số khác không.
- Nhân một dòng với số k rồi cộng vào dòng khác.
- Đổi vị trí 2 dòng.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \div 2 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rrrr} 2x + & 8y + & 4z = & 2 \\ 2x + & 5y + & z = & 5 \\ 4x + & 10y - & z = & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \div 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2\,(\mathrm{I}) \\ -4\,(\mathrm{I}) \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rrrr} x + & 4y + & 2z = & 1 \\ 2x + & 5y + & z = & 5 \\ 4x + & 10y - & z = & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -2\,(\mathrm{I}) \\ -4\,(\mathrm{I}) \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \div(-3) \\ \\ \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rrrr} x + & 4y + & 2z = & 1 \\ & -3y - & 3z = & 3 \\ & -6y - & 9z = & -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \div(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\,(\mathrm{II}) \\ \\ +6\,(\mathrm{II}) \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rrrr} x\, + & 4y\, + & 2z = & 1 \\ & y\, + & z = & -1 \\ & -6y\, - & 9z = & -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} -4\,(\mathrm{II}) \\ \\ +6\,(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \div(-3) \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rrrr} x & - & 2z = & 5 \\ & y\, + & z = & -1 \\ & & -3z = & -9 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \div(-3) \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{r} +2\,(\mathrm{III}) \\ -\,(\mathrm{III}) \\ \end{array} \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right| \begin{array}{r} +2\,(\mathrm{III}) \\ -\,(\mathrm{III}) \\ \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 11 \\ & & y & & & = & -4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right|.$$

Giải hệ sau

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 11y & + & 7z & = & 7 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x & & & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{cases}$$

Ma trận bậc thang rút gọn

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận thỏa

- Nếu một dòng khác không thì số hạng khác không đầu tiền là 1 (pivot).
- Cột chứa giá trị pivot thì tất cả các số hạng còn lại trong cột đó đều bằng không.
- Tại hàng chứa pivot thì tất các số hạng bên trái nó bằng không.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận bậc thang rút gọn của ma trận A ký hiệu là $rref(A)$. Thu được thông qua các phép đổi sơ cấp.

Giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 8 \end{cases}$$

Ma trận bổ sung của hệ

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & -2 & 4 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 - 2x_5 = -\frac{11}{2} \\ \quad x_2 - x_3 + x_5 = -3 \\ \quad\quad x_4 + 2x_5 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Hệ có 5 ẩn nhưng chỉ 3 phương trình, vậy sẽ có 2 ẩn tự do, và ta chọn đó là x_3, x_5 tức là

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{2} - a + 2b \\ x_2 + x_4 = -3 + b \\ x_4 = \frac{5}{2} - 2b \\ x_3 = a \\ x_5 = b \end{cases}$$

Giải hệ từ dưới lên ta được nghiệm!

Giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 9x_5 = 1 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_5 = -7 \\ 3x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 27x_4 = -33 \\ -2x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 24x_4 = 29 \\ -x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 17 \end{cases}$$

Hạn của ma trận

❒ Hạn của ma trận A, $rank(A)$, là số dòng khác không của ma trận bậc thang rút gọn của A, $rref(A)$.

❒ Xét hệ gồm n phương trình m ẩn, gọi A và $[A \mid b]$ lần lượt là ma trận hệ số và ma trận bổ sung của hệ ta có

- Nếu $rank(A) \neq rank([A \mid b])$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $rank(A) = rank([A \mid b]) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu $rank(A) = rank([A \mid b]) < n$ thì hệ vố số nghiệm.

Tìm hạn của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{bmatrix}$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 3x - y - az = 2 \\ 2x + y + 3z = b \end{cases}$$

- Tìm a, b để hệ có nghiệm duy nhất.
- Tìm a, b để hệ có vô số nghiệm.
- Tìm a, b để hệ vô nghiệm.

Thank you for listening!

Nguyen Van Hoi

hoinv@uit.edu.vn