ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

UIT TOÀN DIỆN • SÁNG TẠO • PHỤNG SỰ

BÀI GIẢNG
XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Giảng viên: TS. PHÙNG MINH ĐỨC

(Bộ môn Toán Lý)

Chương 4: Vectơ ngẫu nhiên

4.1 Vectơ ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 4.1.1

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên. Khi đó $Z = (X, Y)$ được gọi là một **vectơ ngẫu nhiên.**

Định nghĩa 4.1.1

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên. Khi đó $Z = (X, Y)$ được gọi là một **vectơ ngẫu nhiên**.
2. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc (liên tục) thì (X, Y) được gọi là **vectơ ngẫu nhiên rời rạc (liên tục)**.

Định nghĩa 4.1.2

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất đồng thời của X, Y (joint probability)

Định nghĩa 4.1.2

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất đồng thời của X, Y (joint probability) được xác định bởi

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 4.1.2

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất đồng thời của X, Y (joint probability) được xác định bởi

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Bảng phân phối xác suất đồng thời

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

trong đó $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Định nghĩa 4.1.2

2. Phân phối của từng biến X, Y được gọi là **phân phối xác suất thành phần** (phân phối biên) (marginal probability distributions) được xác định như sau

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

$$P_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_{1*}	p_{2*}	$\cdots$	p_{n*}

trong đó $p_{i*} = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{im}$.
Kỳ vọng (trung bình) thành phần của X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i*}$$

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
$P(Y = y_j)$	p_{*1}	p_{*2}	$\cdots$	p_{*m}

trong đó $p_{*j} = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{nj}$.
Kỳ vọng (trung bình) thành phần của Y

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*j}.$$

Định nghĩa 4.1.3 (Phân phối xác suất có điều kiện)

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất của X khi đã biết $Y = y_j, P_Y(y_j) > 0$:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}.$$

Xác suất của Y khi đã biết $X = x_i, P_X(x_i) > 0$:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_X(x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}.$$

Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $Y = y_j$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i \vert Y = y_j)$	$\frac{p_{1j}}{p_{*j}}$	$\frac{p_{2j}}{p_{*j}}$	$\cdots$	$\frac{p_{nj}}{p_{*j}}$

Kỳ vọng của X với điều kiện $Y = y_j$

$$E(X|Y = y_j) = x_1 \frac{p_{1j}}{p_{*j}} + x_2 \frac{p_{2j}}{p_{*j}} + \cdots + x_n \frac{p_{nj}}{p_{*j}}.$$

(tương tự với bảng phân phối XS và kỳ vọng của Y khi đã biết $X = x_i$)

Định nghĩa 3.1.3

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y là **độc lập** nếu

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y), \forall x, y.$$

Định nghĩa 3.1.3

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y là **độc lập** nếu

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y), \forall x, y.$$

Ví dụ 4.1.1 Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là số lỗi trong mô-đun 1 và Y là số lỗi trong mô-đun 2 có xác suất đồng thời như sau $P(0,0) = P(0,1) = P(1,0) = 0,2; P(1,1) = P(1,2) = P(1,3) = 0,1; P(0,2) = P(0,3) = 0,05.$

a. Tìm phân phối xác suất thành phần của X.

b. Tìm phân phối của tổng số lỗi trong chương trình.

c. Các lỗi trong hai mô-đun có xảy ra độc lập hay không?

d. Giả sử chương trình có lỗi. Tính xác suất mô-đun 1 có lỗi.

e. Giả sử mô-đun 1 có lỗi. Tính xác suất mô-đun 2 có lỗi.

Giải Bảng phân phối xác suất đồng thời của X, Y như sau

X \ Y	0	1	2	3
0	0,2	0,2	0,05	0,05
1	0,2	0,1	0,1	0,1

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4.2 Vectơ ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 4.2.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục.

1. **Hàm mật độ xác suất đồng thời** (joint probability density function) của hai biến ngẫu nhiên là một hàm $f(x, y) \geq 0$ thỏa mãn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1.$$

Định nghĩa 4.2.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục.

1. **Hàm mật độ xác suất đồng thời** (joint probability density function) của hai biến ngẫu nhiên là một hàm $f(x, y) \geq 0$ thỏa mãn
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

2. Hàm mật độ xác suất thành phần (marginal probability density function) của X và Y được lần lượt xác định như sau
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Định nghĩa 4.2.1

3. **Hàm phân phối xác suất đồng thời** (joint probability density function) của hai biến ngẫu nhiên

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Định nghĩa 4.2.1

3. **Hàm phân phối xác suất đồng thời** (joint probability density function) của hai biến ngẫu nhiên

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Mệnh đề 4.2.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục. Các điều sau là tương đương

1. X, Y là độc lập
2. $f(x, y) = f_X(x).f_Y(y), \forall x, y$
3. $F(x, y) = F_X(x).F_Y(y), \forall x, y.$

Mệnh đề 4.2.2

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó

1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

Mệnh đề 4.2.2

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó

1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
2. $F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

Mệnh đề 4.2.2

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó

1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
2. $F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

   Tổng quát: $P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

Mệnh đề 4.2.2

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó

1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
2. $F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

   Tổng quát: $P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
3. $f(x, y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$.

Ví dụ 4.2.1 Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x}e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.
b. Tính $P(X > 1, Y < 1)$.
c. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y.
d. Tính $P(X < Y)$.

Giải.

a.

b.

c.

d. $P(X < Y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = .$

....

....

....

....

....

Định nghĩa 4.2.2

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục. **Hàm mật độ xác suất có điều kiện** của X khi đã biết $Y = y$

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Định nghĩa 4.2.2

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục. **Hàm mật độ xác suất có điều kiện** của X khi đã biết $Y = y$

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

2. **Hàm mật độ xác suất có điều kiện** của Y khi đã biết $X = x$

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Định nghĩa 4.2.3

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó trung bình thành phần của X, Y lần lượt là

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy$$
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy$$

Ví dụ 4.2.2 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & , 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_Y(y|x)$.

b. Tính $P(\frac{1}{4} < Y < 1 | X = \frac{3}{4})$.

Giải. a. Hàm mật độ thành phần của X là

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

....

Tìm hàm mật độ điều kiện $f_Y(y|x)$.

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

....

....

b. Tính

$$P(\frac{1}{4} < Y < 1|X = \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} f_Y(y|X = \frac{3}{4})dy$$

$$= \text{.......................................}$$

Bài tập 1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} 10x^2y, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f(x, y)$.
b. Tính $P(Y \geq \frac{1}{2}X)$.
c. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y.
d. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_X(x|y), f_Y(y|x)$.
e. Tính $P(Y < \frac{1}{8}|X = \frac{1}{4})$.

4.3 Kỳ vọng, hiệp phương sai và hệ số tương quan

Mệnh đề 4.3.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và một hàm $h(X, Y)$. Kỳ vọng của hàm $h(X, Y)$, ký hiệu là $E(h(X, Y))$, được xác định như sau

1. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$E(h(X, Y)) = \sum_x \sum_y h(x, y) P(x, y)$$

Mệnh đề 4.3.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và một hàm $h(X, Y)$. Kỳ vọng của hàm $h(X, Y)$, ký hiệu là $E(h(X, Y))$, được xác định như sau

1. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$E(h(X,Y)) = \sum_x \sum_y h(x,y)P(x,y)$$

2. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$ thì

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

Ví dụ 4.3.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời xác định như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x + y \leq 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

và hàm $h(X,Y) = 0,75 + 0,75X + 1,5Y$. Tính $E(h(X,Y))$.

Ví dụ 4.3.1

Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời xác định như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x + y \leq 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

và hàm $h(X,Y) = 0,75 + 0,75X + 1,5Y$. Tính $E(h(X,Y))$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1\int_0^{1-y}(0,75 + 0,75x + 1,5y)24xydxdy \\ &= 1,65. \end{aligned}$$

Định nghĩa 4.3.1

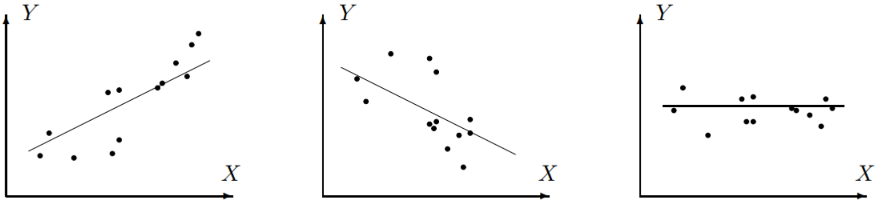
Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên.
1. **Hiệp phương sai** (covariance) của X và Y, ký hiệu $\mathrm{Cov}(X, Y)$, được xác định bởi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

2. **Hệ số tương quan** (Correlation coefficient) của X, Y được xác định như sau

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ thì X tăng suy ra Y tăng và X giảm suy ra Y giảm.
- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$ thì X tăng suy ra Y giảm và X giảm suy ra Y tăng.
- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ thì ta nói X, Y không *tương quan*.



(a) $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ (b) $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$ (c) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

- Nếu $|\rho| = 1$ thì ta nói các điểm (x_i, y_j) nằm trên một đường thẳng.
- Nếu ρ gần 1 thì ta nói X, Y có tương quan dương mạnh.
- Nếu ρ gần -1 thì ta nói X, Y có tương quan âm mạnh.
- Nếu ρ gần 0 thì ta nói X, Y có tương quan yếu hoặc không tương quan.

Ví dụ 4.3.2 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & x + y \leq 1, x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Tính $\mathrm{Cov}(X,Y)$ và $\rho(X,Y)$.

Giải.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y} 2xydxdy$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) =$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(Y^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 =$$

$$V(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} =$$

Mệnh đề 4.3.2

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
2. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
3. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$
4. $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$
5. Nếu X, Y độc lập thì $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Bài tập 2. Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tính trung bình thành phần của X, Y.
b. Tính $P(X > 0,3|Y = 0,5)$.
c. X, Y có độc lập không?
d. Tính $P(X + Y \leq 0,5), P(Y \geq 0,5)$.

Bài tập 3. Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx^2y, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.
b. Tính $P(Y \geq \frac{1}{2}X)$.
c. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y.
d. Tính trung bình thành phần của X, Y.
e. X, Y có độc lập không?
f. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_X(x|y)$.
g. Tính $P(Y > 1|X = \frac{1}{3})$.
h. Tính $P(X > \frac{1}{3}|Y > \frac{1}{4})$.