Buổi 11 – Ngày 18-05-2023 – môn CTRR – lớp MA004.N213

CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM:

Một đồ thị (Graph) G = (V, E) là một bộ gồm có 2 tập hợp:

$\begin{cases} \text{+ Tập hợp các đỉnh (Vertises): } V \neq \phi \\ \text{+ Tập hợp các cạnh (Edges): } E \end{cases}$

Trong đó, mỗi cạnh $e \in$ E, nối tương ứng 1 cặp đỉnh $u \in V, v \in V$, được minh họa bằng 1 đoạn nối trực tiếp giữa 2 đỉnh u, v, và ta kí hiệu là: $e = \overline{uv}$ hay $u \overset{e}{—} v$.

Khi $e = \overline{uv}$ thì ta gọi e là cạnh tới (incident edge) của 2 đỉnh u, v còn u, v là 2 đỉnh kề nhau (adjacent vertises).

Khi $u \equiv v$ thì ta gọi cạnh e là 1 vòng (loop) tại u và ta kí hiệu là $e = \overline{uu}$.

Hai cạnh được gọi là (đgl) song song nhau (parallel edges) nếu chúng cùng nối tương ứng 1 cặp đỉnh.

Hai đỉnh được gọi là kề nhau (liên kết nhau) (adjacent vertises) nếu chúng có cạnh nối trực tiếp với nhau.

Một đồ thị G đgl một đơn đồ thị (simple graph) nếu G không có cạnh song song và cũng không có vòng. Ngược lại, ta gọi là đa đồ thị (multi-graph).

Một đồ thị G đgl đầy đủ (completed graph) nếu như mọi cặp đỉnh của G đều kề nhau, nghĩa là mọi đỉnh đều có cạnh nối trực tiếp đến tất cả các đỉnh còn lại của G.

Một đồ thị G đgl hữu hạn (finite graph) nếu G có số đỉnh hữu hạn và số cạnh hữu hạn. Ngược lại, ta gọi G là đồ thị vô hạn (infinite graph). Trong chương này ta chỉ khảo sát các đồ thị hữu hạn.

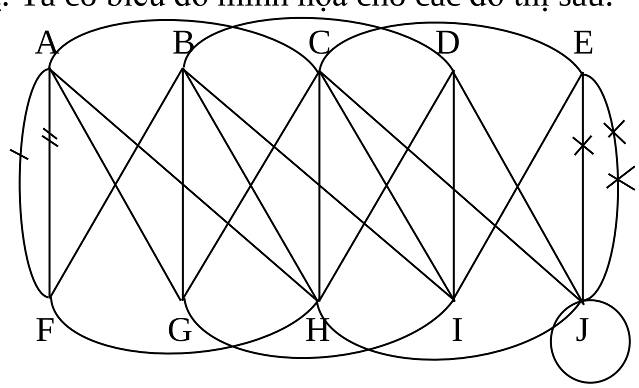
Biểu đồ là 1 dạng hình học minh họa cho đồ thị, trong đó:

+ Các đỉnh: được biểu diễn bằng các chấm điểm trong mặt phẳng Oxy hoặc trong không gian $Oxyz$.

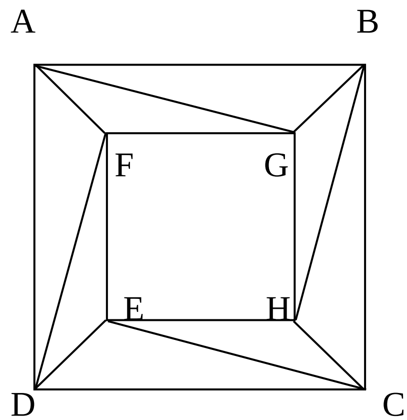
+ Các cạnh: được biểu diễn bằng những đoạn nối trực tiếp giữa các đỉnh $u, v \in V$.

Ví dụ: Ta có biểu đồ minh họa cho các đồ thị sau:

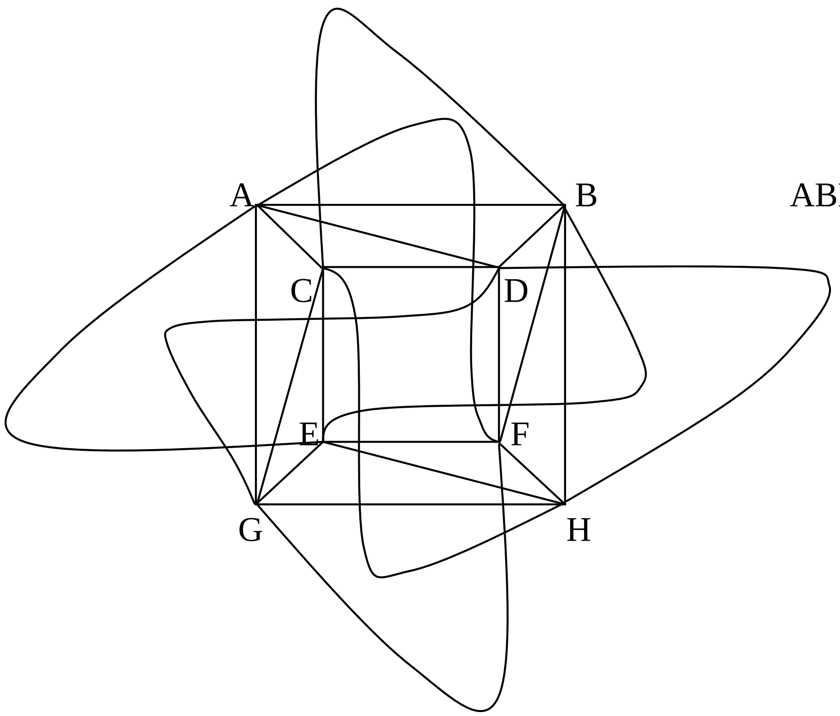
a/



b/

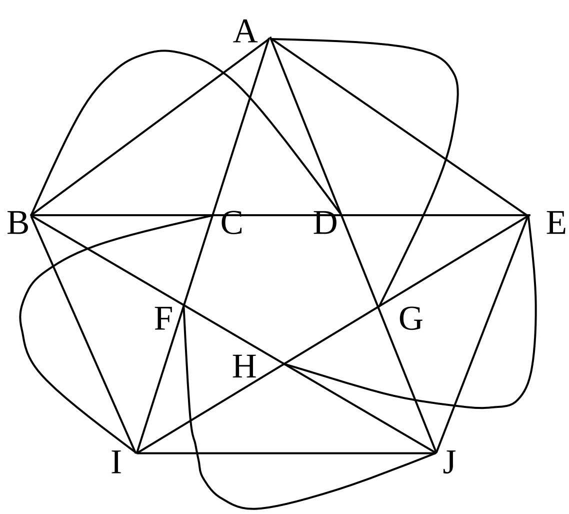


c/



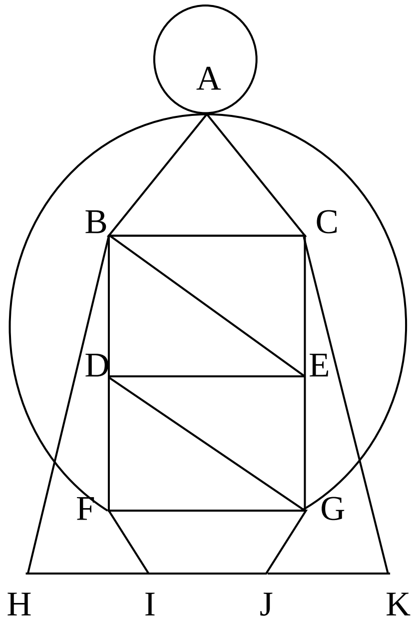
ABDC/ EFHG/ ABFE

d/

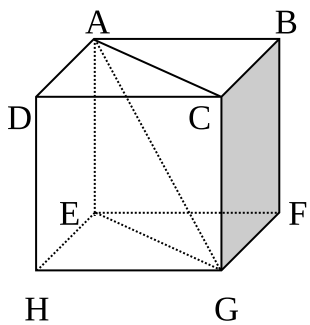


FHJI/ ABCD/ HGEJ

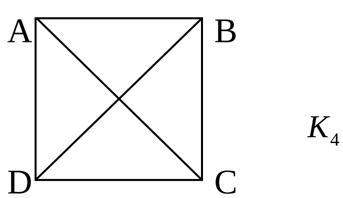
e/



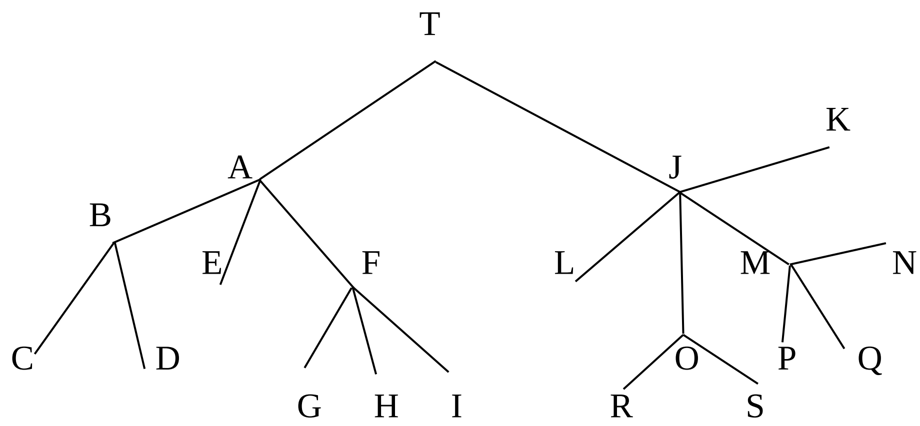
f/



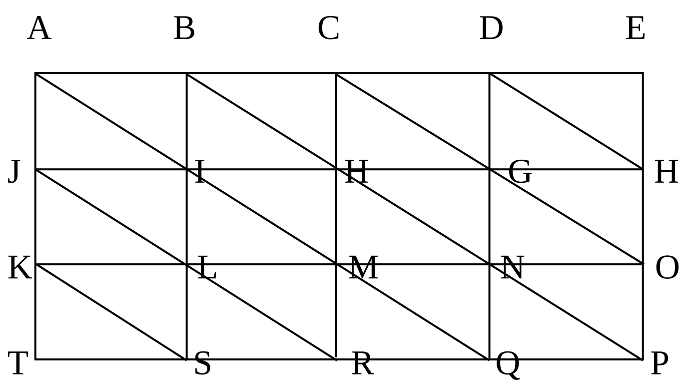
g/



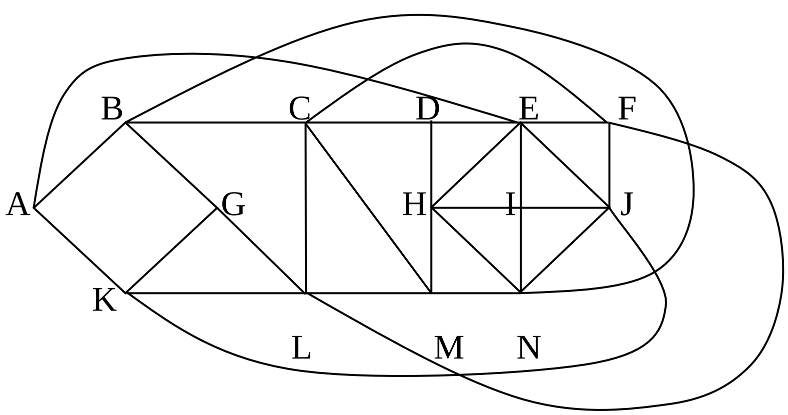
h/



i/



j/



Bậc của 1 đỉnh $u \in V$ là số cạnh nối tới u, trong đó mỗi loop (nếu có) sẽ được tính bằng 2, và ta kí hiệu là $d(u)$ hay là $\deg(u)$ (degree of u).

<u>Lưu ý</u>: mỗi loop (nếu có) tại 1 đỉnh u thì khi đếm số cạnh ta tính bằng 1.

Một đồ thị G’ = (V’, E’) được gọi là đồ thị con (sub-graph) của đồ thị G = (V, E), nếu V’ $\subset$V và E’$\subset$E.

Một đỉnh được gọi là đỉnh treo (pendant vertex) nếu đỉnh đó có bậc là 1.

Cạnh nối tới đỉnh treo thì ta gọi là cạnh treo (pendant edge).

Một đỉnh đgl đỉnh cô lập (isolated vertex) nếu đỉnh có bậc là = 0.

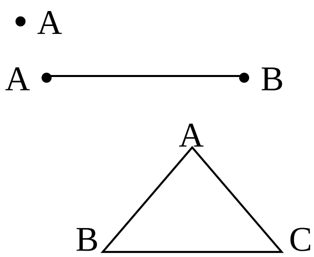
Đồ thị G nếu có mọi đỉnh cô lập thì ta gọi là đồ thị rỗng (null-graph), nghĩa là đồ thị chỉ có đỉnh mà không có cạnh nào.

Ta dùng kí hiệu K_n dùng để chỉ 1 đơn đồ thị, đầy đủ, có n đỉnh.

Ta có: K_1

K_2

K_3



* ***<u>Ma trận liên kết (adjacency matrix) (ma trận kề)</u>***:

Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng (undirected graph), với V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Ma trận liên kết thể hiện cho G là ma trận vuông cấp n như sau:

$M = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, với $a_{ij} =$ số cạnh nối trực tiếp đỉnh v_i với đỉnh v_j, trong đó mỗi loop nếu có tại 1 đỉnh sẽ được tính bằng 2.

Ma trận liên kết của đồ thị G vô hướng là ma trận đối xứng.

Tổng các phần tử theo dòng v_i = tổng các phần tử theo cột = là bậc của đỉnh v_i và ta kí hiệu là $\deg(v_i)$.

<u>Lưu ý 1</u>:

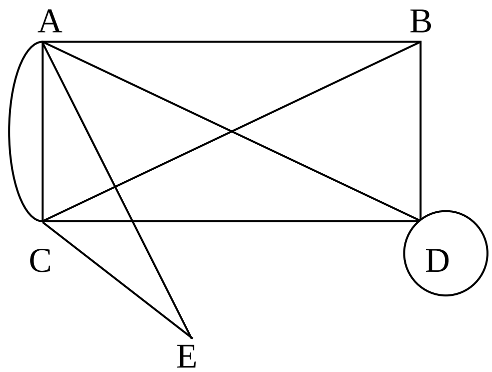
Trong đồ thị G = (V, E), ta luôn có: tổng số bậc của mọi đỉnh trong G luôn gấp đôi số cạnh của G, và kí hiệu là $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|$, với $|E| =$ số cạnh của G.

<u>Lưu ý 2</u>: Trong đồ thị G vô hướng, ta luôn có tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ luôn là số chẵn.

<u>Lưu ý 3</u>: Trong đồ thị G vô hướng, ta luôn có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

<u>Lưu ý 4</u>: Trong đồ thị K_n, ta luôn có số cạnh là $\frac{n(n-1)}{2}$.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho G là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau:



Lập ma trận liên kết cho G và xác định bậc của các đỉnh trong G, từ đó suy ra số cạnh của G.

<u>Giải</u>:

Ta có ma trận liên kết của G như sau:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ta có: deg(A) = 5; deg(B) = 3; deg(C) = 5; deg(D) = 5; deg (E) = 2;

Suy ra $\sum_{u \in V} \deg(u) = 5+3+5+5+2 = 20 = 2|\mathrm{E}| \Rightarrow |\mathrm{E}| = 10$ cạnh.

* ***<u>Đồ thị có hướng (directed graph)</u>***:

Các đồ thị ta đề cập bên trên đều là đồ thị vô hướng (undirected graph).

Bây giờ nếu mỗi cạnh e nối từ đỉnh u đến đỉnh v theo đúng thứ tự u là đỉnh bắt đầu và v là đỉnh kết thúc thì ta gọi e là cạnh có hướng và kí hiệu là $e = \overrightarrow{uv}$ hay là $u \xrightarrow{e} v$.

Đồ thị G khi đó đgl đồ thị có hướng.

Xét cạnh $e = \overrightarrow{uv}$ thì ta gọi e là cạnh tới ngoài (incident-out) của đỉnh u và

là cạnh tới trong (incident-in) của đỉnh v.

và u là đỉnh bắt đầu (initial vertex) của e,

v là đỉnh kết thúc (ended vertex – finished vertex) của e.

Tổng số cạnh tới ngoài của đỉnh u thì ta gọi là bậc ngoài (out-degree) của u và kí hiệu là $d_{out}(u)$ hay là $\deg_{out}(u)$.

Tổng số cạnh tới trong của đỉnh v thì ta gọi là bậc trong (in-degree) của v và kí hiệu là $d_{in}(v)$ hay là $\deg_{in}(v)$.

Mỗi loop (nếu có) tại 1 đỉnh của đồ thị G có hướng thì ta tính $d_{out} = d_{in} = 1$.

Một đỉnh u đgl đỉnh cân bằng (balanced vertex) nếu ta có $d_{out}(u) = d_{in}(u)$.

Đồ thị G có hướng đgl đồ thị cân bằng (balanced graph) nếu mọi đỉnh của G đều là đỉnh cân bằng.

Ma trận liên kết của đồ thị có hướng G, gồm n đỉnh $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, là ma trận có dạng

$M = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, với $a_{ij} =$ số cạnh nối trực tiếp từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j theo thứ tự.

Mỗi loop nếu có tại 1 đỉnh thì ta tính = 1.

Ma trận liên kết của đồ thị G có hướng thường là không đối xứng.

Tổng các phần tử theo dòng v_i = bậc ngoài của đỉnh v_i và ta viết là $\deg_{out}(v_i)$

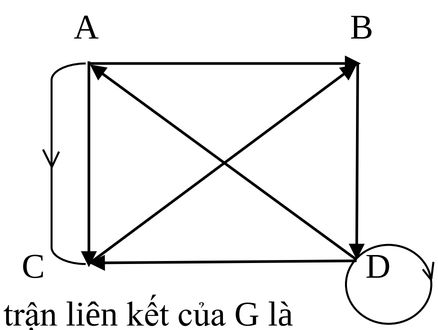
Tổng các phần tử theo cột v_j = bậc trong của đỉnh v_j và ta viết là $\deg_{in}(v_j)$.

Đối với đồ thị G có hướng thì ta luôn có: tổng bậc trong = tổng bậc ngoài (của tất cả các đỉnh) = số cạnh của G, nghĩa là:

$$\sum_{u \in V} \deg_{out}(u) = \sum_{u \in V} \deg_{in}(u) = |E|$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho G là đồ thị có hướng, có biểu đồ sau

strongly connected



Ta có ma trận liên kết của G là

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ta có $\begin{cases} \deg_{out}(A) = 3; \\ \deg_{out}(B) = 1; \\ \deg_{out}(C) = 1; \\ \deg_{out}(D) = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} \deg_{in}(A) = 1; \\ \deg_{in}(B) = 2; \\ \deg_{in}(C) = 3; \\ \deg_{in}(D) = 2 \end{cases}$

Suy ra $\sum_{u \in V} \deg_{out}(u) = 3 + 1 + 1 + 3 = 8$ và $\sum_{u \in V} \deg_{in}(u) = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$

Cho nên $\sum_{u \in V} \deg_{out}(u) = \sum_{u \in V} \deg_{in}(u) = |E| = 8$, cho nên G có 8 cạnh.

* *<u>Lưu ý</u>*: Đối với G là một đơn đồ thị, có n đỉnh, vô hướng thì luôn tồn tại ít nhất 2 đỉnh có cùng số bậc.

<u>Bài tập</u>:

1/ Hãy vẽ biểu đồ minh họa cho đồ thị G vô hướng, trong các trường hợp sau (nếu được)

a/ Có 6 đỉnh, và bậc các đỉnh là: 1,2,3,3,4,5.

b/ Có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,4,6,8,7,7.

c/ Có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,4,6,6,8,10.

d/ Có 6 đỉnh, là đơn đồ thị, và bậc các đỉnh là: 1,2,3,5,3,2

e/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị, và bậc các đỉnh là: 2,4,4,4,6,8

f/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có vòng và bậc các đỉnh là: 4,4,4,4,2,2

g/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có cạnh bội (có cạnh song song), và bậc là: 4,4,6,6,2,2

h/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có cạnh bội và có vòng, và bậc các đỉnh là: 4,4,4,8,8,8

i/ Có 8 đỉnh và bậc các đỉnh là số nguyên tố nhỏ hơn 10

j/ Có 8 đỉnh và bậc các đỉnh là: 1,1,2,2,3,3,5,5

k/ Có 10 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,3,4,5,6,7,8,1,2,2

l/ Có 10 đỉnh, là đa đồ thị và bậc các đỉnh là: 2,2,4,4,6,6,5,5,1,1

2/ Hãy xác định số đỉnh cho đồ thị G vô hướng trong các trường hợp sau:

a/ Có tổng số bậc là 28, trong đó có 2 đỉnh bậc 5, có đỉnh bậc 7, và còn lại là đỉnh có bậc >=2.

b/ Có tổng số bậc là 54, có ít nhất 6 đỉnh bậc 7, còn lại là đỉnh có bậc >=2.

c/ Có tổng số bậc là 12 và các đỉnh đều có bậc bằng nhau.

d/ Có tổng số bậc là 20, có ít nhất 2 đỉnh bậc 5, còn lại là đỉnh bậc lẻ.

e/ Có tổng số bậc là 24, có đỉnh bậc 7 và có đỉnh bậc 5, còn lại là các đỉnh có bậc >=2.

f/ Có tổng số bậc là 30, có ít nhất 2 đỉnh bậc 7, có đỉnh bậc 8 và các đỉnh còn lại có bậc >=2.

g/ Có 20 cạnh, có ít nhất 2 đỉnh bậc 7, có đỉnh bậc 8, và các đỉnh còn lại có bậc >=3.

h/ Có 18 cạnh, có ít nhất 2 đỉnh bậc 9, còn lại là đỉnh có bậc >=2.

* ***Đường đi và chu trình***:

Một đường đi (Path) P của một đồ thị G là một tập hợp liên tiếp các đỉnh, và các cạnh của G sao cho ta có thể đi từ đỉnh bắt đầu v_0 đến đỉnh kết thúc là v_k và ta kí hiệu là

P = $v_0 \underline{\quad e_1 \quad} v_1 \underline{\quad e_2 \quad} v_2 \ldots \underline{\quad e_k \quad} v_k$ hay là P = $v_0v_1v_2....v_k$

Số cạnh nằm trên đường đi thì ta gọi là chiều dài của đường đi P, và kí hiệu là: $l(P) = k$

Ta gọi v_0 là đỉnh bắt đầu và v_k là đỉnh kết thúc của đường đi P (và ngược lại).

Một đường đi đgl đơn giản (simple path) nếu ta không đi qua đỉnh nào quá 1 lần.

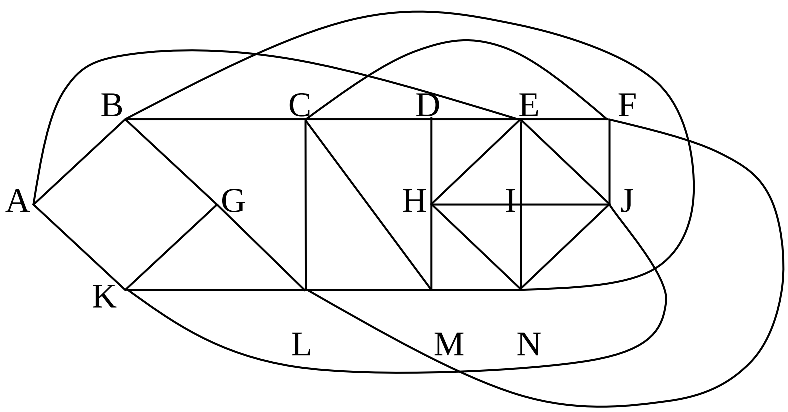
Một chu trình (circle/circuit) là một đường đi P có đỉnh đầu trùng với đỉnh kết thúc, và ta kí hiệu là:

$c = v_0v_1v_2...v_kv_0$, với $l(c) \geq 1$.

Hay nói cách khác chu trình là đường đi khép kín mà ta có cạnh nối trực tiếp giữa đỉnh kết thúc v_k với đỉnh bắt đầu v_0.

Đối với một chu trình c thì ta có thể xoay đỉnh chu trình, nghĩa là đỉnh nào bắt đầu thì đỉnh đó sẽ kết thúc chu trình c.

<u>Ví dụ</u>: xét đồ thị G vô hướng, có biểu đồ sau:



Ta có một số đường đi:

$P_1 = ABCMNHEJINBG$ → không đơn giản, có độ dài là $l(P_1) = 11$

$P_2 = KGLFEIHMCB$ → đơn giản, có độ dài là $l(P_2) = 9$

$P_3 = GKJEHDCMLG$ → đơn giản, có độ dài là $l(P_3) = 9$

Ta gọi đường đi P_3 là 1 chu trình, do có cạnh nối trực tiếp từ đỉnh cuối là L đến đỉnh đầu là G, và ta kí hiệu là $c = GKJEHDCMLG$

Ta có thể xoay đỉnh chu trình này như sau:

$c = JEHDCMLGKJ$

$c = HDCMLGKJEH$

$c = MLGKJEHDCM$

Một chu trình được gọi là đơn giản nếu chu trình đó không đi qua đỉnh nào quá 1 lần.

Ví dụ ta chu trình sau: $c_2 = GLMHEIJNMCFLKG$ → chu trình không đơn giản.

* <u>***Sự liên thông của đồ thị***</u>:

Một đồ thị vô hướng G được gọi là liên thông (connected graph) nếu như mọi cặp đỉnh đều tồn tại (ít nhất) 1 đường đi (Path) nối chúng.

Đồ thị G vô hướng không liên thông nếu G có đỉnh cô lập.

Một đồ thị có hướng G đgl liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

Một đồ thị có hướng G đgl đồ thị đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông mạnh (strongly connected) nếu mọi cặp đỉnh của G ta đều tìm được ít nhất 1 đường đi nối chúng.

Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông yếu (weakly connected) nếu có 1 cặp đỉnh u,v sao cho ta không thể tìm ra con đường để đi từ u đến v.

2/ <u>ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ CHU TRÌNH EULER</u>:

Một đường đi Euler của đồ thị G là một con đường đi qua tất cả các cạnh của G và mỗi cạnh đi qua đúng 1 lần.

Một chu trình Euler là một đường đi Euler có cạnh nối trực tiếp giữa đỉnh kết thúc với đỉnh bắt đầu.

<u>Lưu ý 1</u>: (dành cho đồ thị vô hướng).

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

<u>Lưu ý 2</u>: (dành cho đồ thị vô hướng).

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có đường đi Euler khi và chỉ khi trong G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

(2 đỉnh bậc lẻ này là đỉnh bắt đầu/kết thúc của đường đi Euler, ta thường chọn đỉnh có bậc cao hơn làm đỉnh xuất phát).

<u>Lưu ý 3</u>: (dành cho đồ thị có hướng)

Cho G là một đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có chu trình Euler khi và chỉ khi G cân bằng.

<u>Lưu ý 4</u>: (dành cho đồ thị có hướng)

Cho G là một đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có đường đi Euler khi và chỉ khi trong G có đúng 2 đỉnh u,v thỏa

$$\begin{cases} \deg_{out}(u) = \deg_{in}(u) + 1 \\ \deg_{in}(v) = \deg_{out}(v) + 1 \end{cases}$$

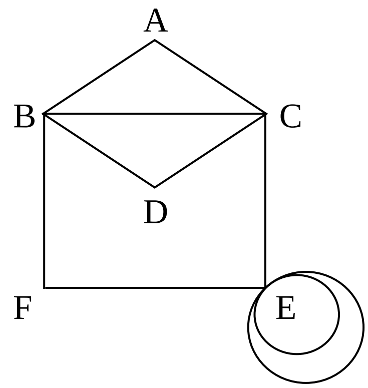
và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng.

(trong đó u là đỉnh xuất phát và v là đỉnh kết thúc của đường đi Euler).

Buổi 12 – Ngày 25-05-2023 – môn CTRR – lớp MA004.N213

CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Ví dụ mẫu 1: Cho **G** là đồ thị vô hướng có biểu đồ sau:



Hỏi G có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Euler cho G.

Giải:

Ta có ma trận liên kết của G là:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 0 & \cancel{1} & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra $\deg(A) = 2; \deg(B) = 4; \deg(C) = 4; \deg(D) = 2; \deg(E) = 6; \deg(F) = 2$

Do tất cả các đỉnh của G đều có bậc chẵn nên G có chu trình Euler.

Gọi chu trình Euler cần tìm là c_E.

Chọn 1 đỉnh làm đỉnh xuất phát. Ví dụ chọn đỉnh A, ta đưa A vào c_E.

Suy ra $c_E = A$.

Dựa vào ma trận liên kết của G ta tìm được chu trình Euler là:

$$c_E = ABCA$$

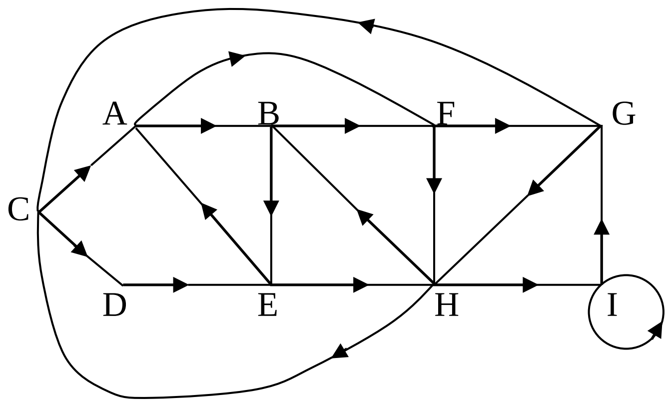
→ ta xoay đỉnh chu trình $c_E = BCAB$

Ta có: $c_E = BCABDCEEEFB$.

Do tất cả các phần tử khác 0 trên ma trận liên kết đều đã được loại bỏ, nên ta dừng bài toán. Ta có chu trình Euler cần tìm là:

$c_E = BCABDCEEEFB$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho G là đồ thị liên thông, có hướng, có biểu đồ sau:



Hỏi G có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Euler cho G.

<u>Giải</u>:

Ta có ma trận liên kết của G là:

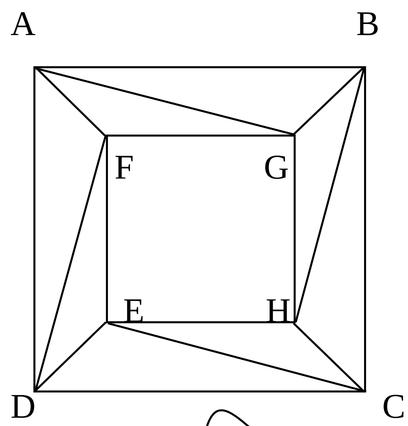
$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra $\begin{cases} \deg_{out}(A) = ...; \\ \deg_{out}(B) = ...; \\ \deg_{out}(C) = ...; \\ \deg_{out}(D) = ...; \\ \deg_{out}(E) = ...; \\ \deg_{out}(F) = ...; \\ \deg_{out}(G) = ...; \\ \deg_{out}(H) = ...; \\ \deg_{out}(I) = ... \end{cases}$ và $\begin{cases} \deg_{in}(A) = ...; \\ \deg_{in}(B) = ...; \\ \deg_{in}(C) = ...; \\ \deg_{in}(D) = ...; \\ \deg_{in}(E) = ...; \\ \deg_{in}(F) = ...; \\ \deg_{in}(G) = ...; \\ \deg_{in}(H) = ...; \\ \deg_{in}(I) = ... \end{cases}$

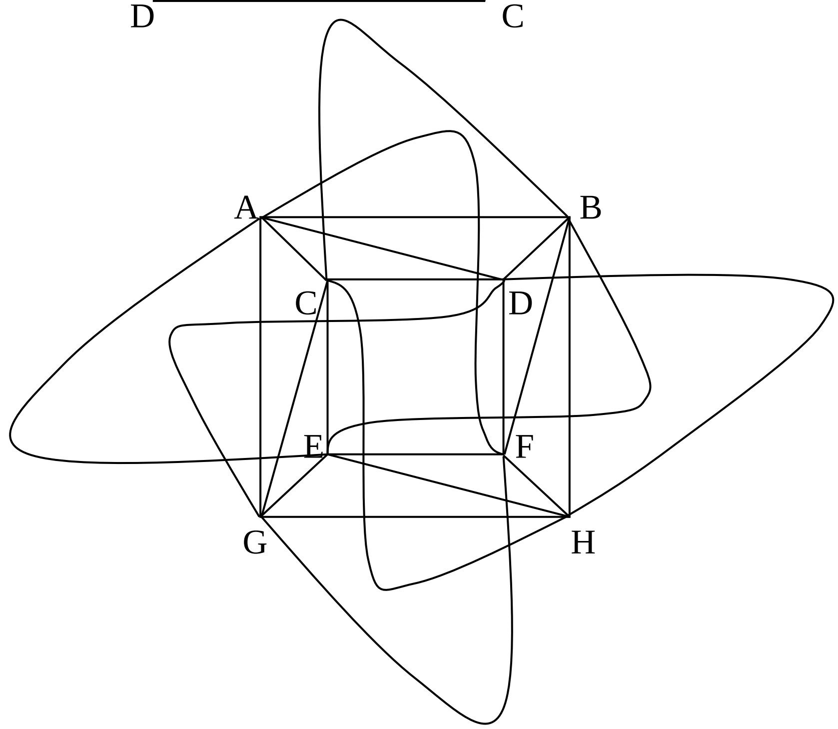
Cho nên:….

<u>Bài tập tương tự</u>: Cho G là đồ thị có biểu đồ sau. Hỏi G có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm một chu trình (đường đi) Euler cho G.

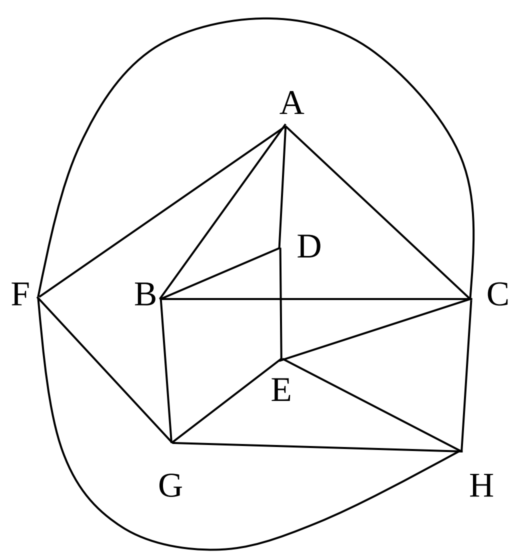
a/



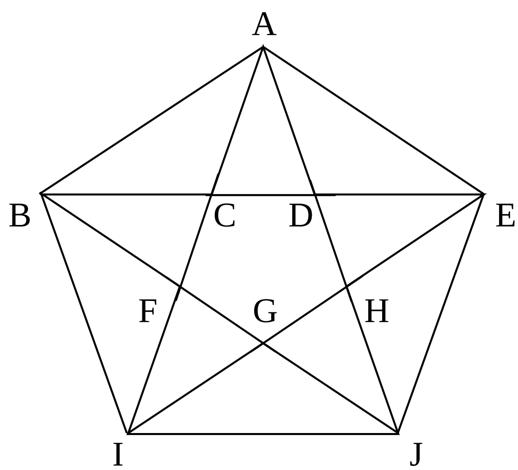
b/



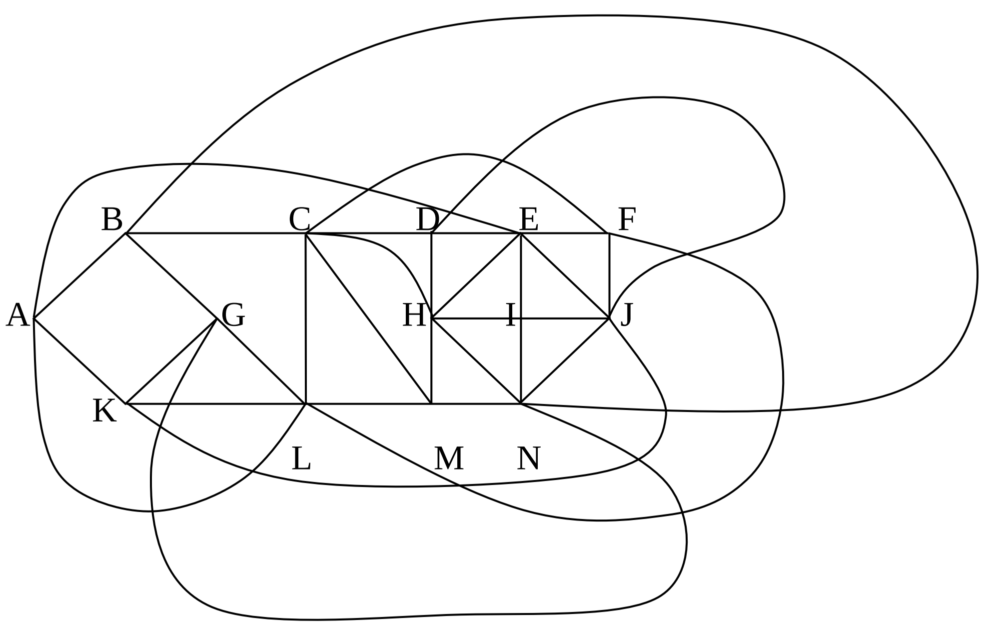
c/



d/



e/



3/ **<u>ĐƯỜNG ĐI HAMILTON VÀ CHU TRÌNH HAMILTON</u>**:

Một đường đi Hamilton của đồ thị G là một con đường đi qua tất cả các đỉnh của G và mỗi đỉnh chỉ đi qua đúng 1 lần.

Một chu trình Hamilton của G là một đường đi Hamilton khép kín, có đỉnh nối trực tiếp từ đỉnh kết thúc đến đỉnh bắt đầu.

* ***<u>Quy tắc xây dựng chu trình Hamilton</u>***:

i/ Nếu đồ thị G có (ít nhất) 1 đỉnh có bậc ≤ 1 thì G không có chu trình Hamilton.

ii/ Nếu 1 đỉnh u có bậc là 2 thì 2 cạnh tới của u ta phải đưa vào chu trình Hamilton

iii/ Chu trình Hamilton không chứa chu trình con thực sự nào.

iv/ Nếu một đỉnh u có bậc > 2 mà ta đã đưa 2 cạnh nối tới u vào trong chu trình Hamilton thì ta không thể quay về u được nữa nên ta có thể xóa bỏ những cạnh dư thừa ra khỏi đỉnh u.

Ngoài ra, ta có một số lưu ý sau:

<u>Lưu ý 1</u>: (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Nếu G là một đồ thị đầy đủ thì G có chu trình Hamilton.

<u>Lưu ý 2</u>: (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

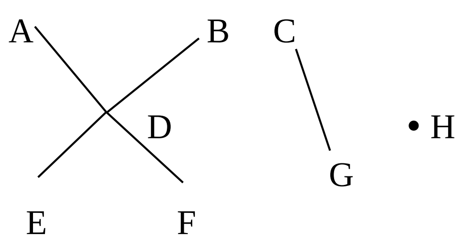
Nếu trong G có một nhóm gồm k đỉnh sao cho khi ta xóa k đỉnh này ra khỏi G cùng với các cạnh liên quan đến k đỉnh, mà số thành phần còn lại của đồ thị là nhiều hơn (>) k thành phần thì G không có chu trình Hamilton.

Ta thường chọn $k \leq \frac{n}{2}$, và nên chọn những đỉnh có bậc cao nhất để xóa.

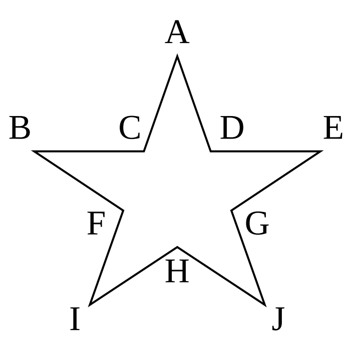
Trong đó: các thành phần của đồ thị được hiểu theo nghĩa:

+ Các cạnh rời nhau.
+ Các đỉnh cô lập.
+ Nhiều cạnh có chung 1 đỉnh → ta xem là 1 thành phần

<u>Ví dụ</u>:

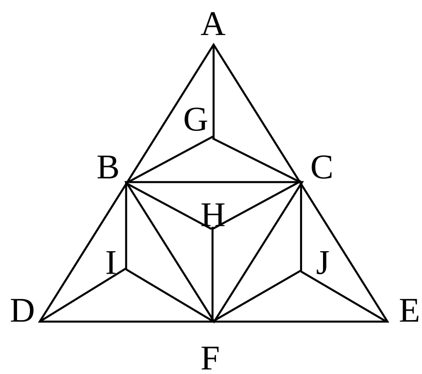


Đây là đồ thị có 3 thành phần



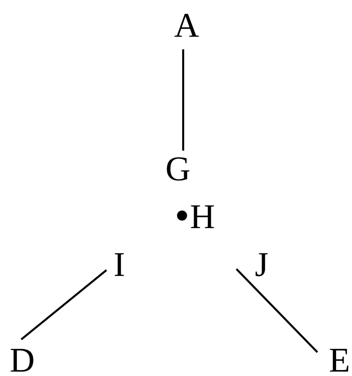
Đây là đồ thị có 1 thành phần.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho G là đồ thị vô hướng có biểu đồ sau



Ta chọn 1 nhóm 3 đỉnh B, C, F để xóa khỏi G (do đây là 3 đỉnh có bậc 7, là bậc cao nhất của các đỉnh trong G), cùng với các cạnh liên quan.

Đồ thị lúc này còn lại là:



Đồ thị lúc này còn lại 4 thành phần là 3 cạnh: AG, DI, EJ, cùng với 1 đỉnh H cô lập, nên số thành phần còn lại = 4 > 3 là số đỉnh đã xóa ➔ G không có chu trình Hamilton.

<u>Lưu ý 3</u>: (định lý Dirac) (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

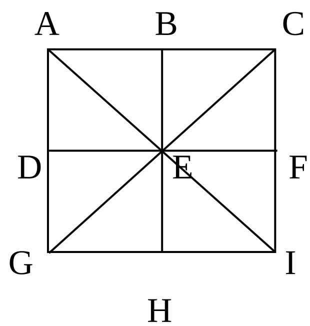
Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton (với $n \geq 3$ là số đỉnh của đồ thị).

<u>Lưu ý 4</u>: (dành cho đồ thị có hướng) (định lý König)

Cho G là đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Nếu G là đồ thị đầy đủ thì G có đường đi Hamilton.

Ví dụ mẫu 1: Cho G là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau



Hỏi G có chu trình (đường đi) Hamilton? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Hamilton cho G.

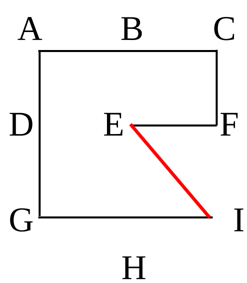
Giải:

Gọi p_H là đường đi Hamilton cần tìm.

Chọn đỉnh E làm đỉnh xuất phát (do E là đỉnh có bậc 8 là bậc lớn nhất trong số các bậc của các đỉnh).

$p_H = E$.

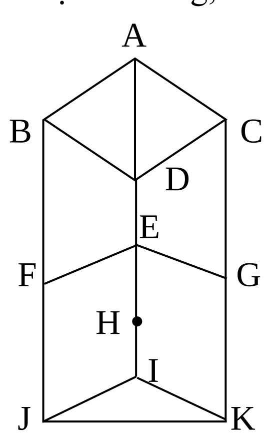
Ta có $p_H = EFCBADGHI$



Ta thấy có đoạn nối trực tiếp giữa đỉnh I với E nên ta có chu trình Hamilton là:

$c_H = EFCBADGHIE$

Ví dụ mẫu 2: Cho G là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau:



Hỏi G có chu trình (đường đi) Hamilton? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Hamilton cho G.

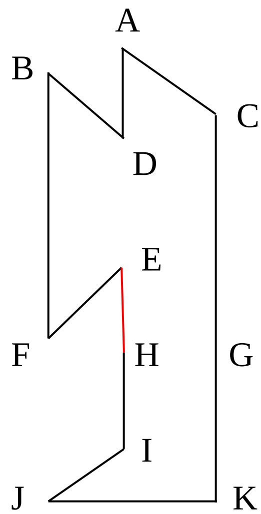
Giải:

Gọi p_H là đường đi Hamilton cần tìm.

Chọn đỉnh E làm đỉnh xuất phát (do E là đỉnh có bậc 4 là bậc lớn nhất trong số các bậc của các đỉnh).

$p_H = E$.

Ta có $p_H = EFBDACGKJIH$



Ta thấy có đoạn nối trực tiếp giữa đỉnh H với E nên ta có chu trình Hamilton là:

$$c_H = EFBDACGKJIHE$$

<u>Bài tập tương tự</u>:

1/ Hỏi đồ thị G trong ví dụ mẫu 1, ví dụ mẫu 2 (của phần đường đi và chu trình Euler), cùng với 5 bài tập của phần đường đi và chu trình Euler (bài a/ đến e/) có chu trình (đường đi) Hamilton hay không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm một chu trình (đường đi) Hamilton cho G.

2/ Hãy vẽ biểu đồ minh họa cho đồ thị G vô hướng (nếu có) trong các trường hợp sau:

a/ Có chu trình Euler và không có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

b/ Không có chu trình Euler và có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

c/ Không có chu trình Euler và không có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

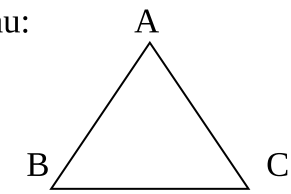
d/ Có chu trình Euler và có chu trình Hamilton trong 2 trường hợp:

d1/ Hai chu trình trùng nhau.

d2/ Hai chu trình khác nhau.

Ví dụ:

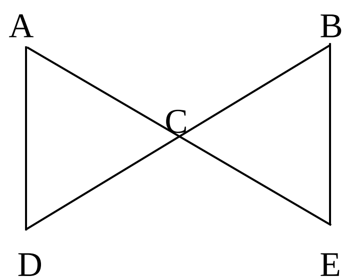
Hai chu trình trùng nhau:



Ta có chu trình Euler: $c_E = ABCA$

Ta có chu trình Hamilton là: $c_H = ABCA \equiv ACBA$, nên 2 chu trình là trùng nhau.

Ví dụ khác:



Ta có chu trình Euler do mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn, ví dụ: $c_E = CADCBEC$

Ta chọn l đỉnh là C và xóa C khỏi đồ thị cùng các cạnh liên quan, thì đồ thị còn lại là:

Nghĩa là đồ thị còn lại 2 thành phần (là 2 cạnh AD, BE) nhiều hơn 1 đỉnh đã xóa, nên G không có chu trình Hamilton.

Buổi 13 – Ngày 01-06-2023 – môn CTRR – lớp MA004.N213

CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

4/ BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Cho G là đồ thị liên thông, có trọng số và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ở đây, trọng số của mỗi cạnh $e \in E$ là các số thực, không âm và được xem là chiều dài của cạnh tương ứng.

Bài toán đặt ra lúc này là tìm con đường đi ngắn nhất nối giữa 2 đỉnh cho trước của G, hay là từ 1 đỉnh đến tất cả các đỉnh còn lại của G.

Ta quy ước: $l(u,v) =$ chiều dài của đường nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự)

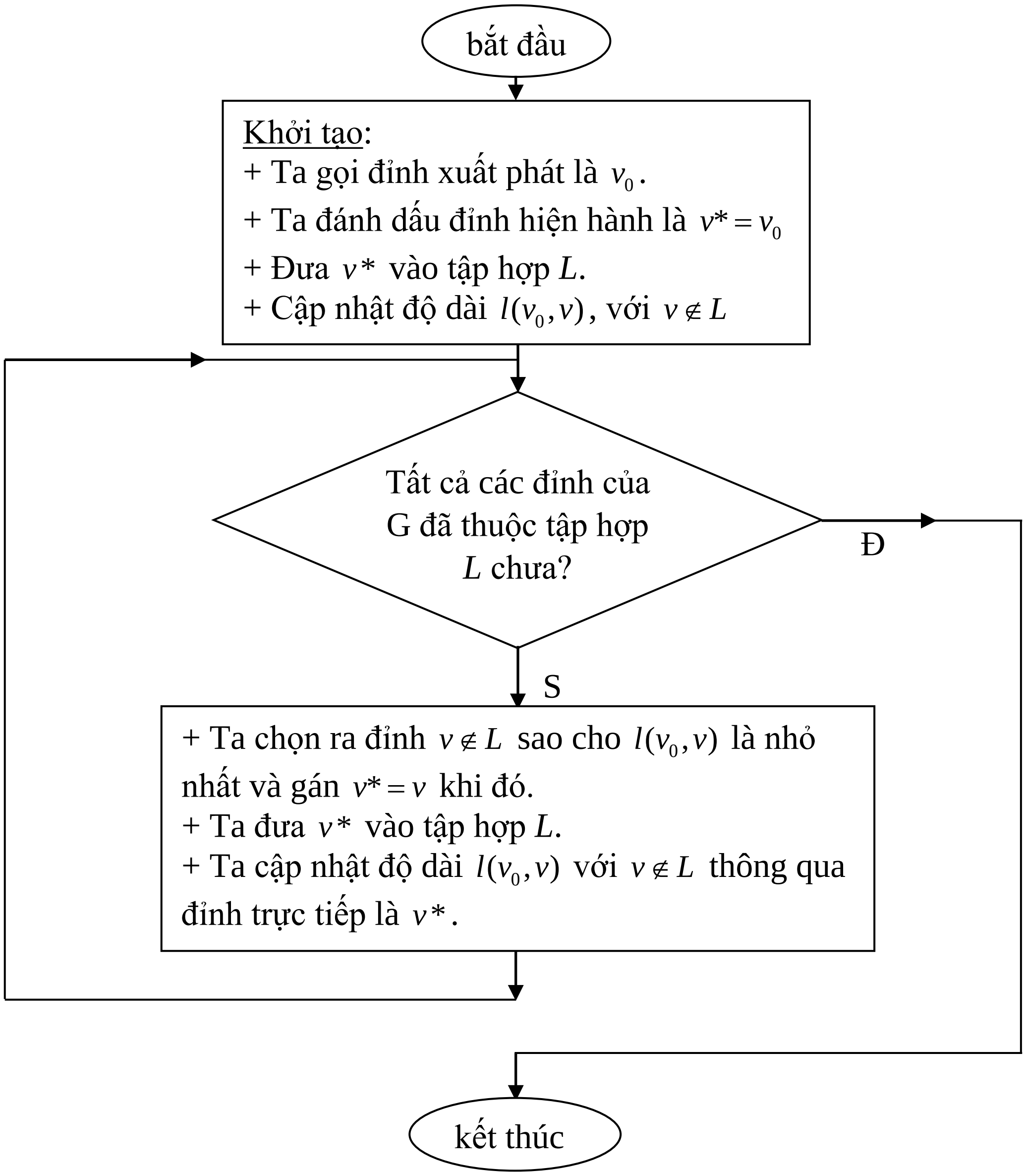
Nếu u,v có cạnh nối trực tiếp là e thì ta đặt $l(u,v) = l(e)$ = chiều dài của cạnh e = chiều dài của đường nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự) ban đầu.

Nếu u,v không có cạnh nối trực tiếp thì ta đặt $l(u,v) = +\infty$ = chiều dài của đường nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự) ban đầu.

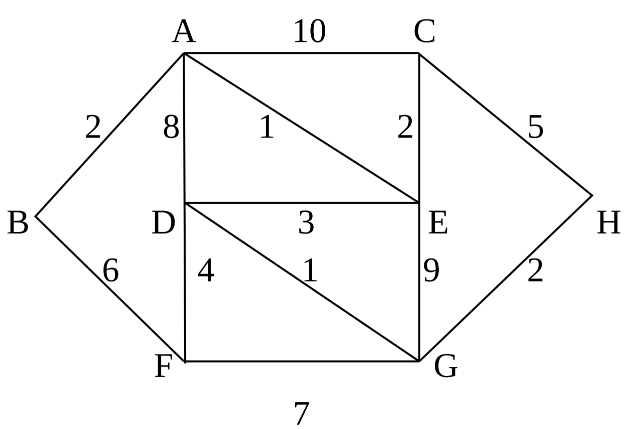
Thuật toán DIJKSTRA:

Ta có lưu đồ giải thuật sau để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát v_0 đến các đỉnh còn lại của G như sau:

Gọi L = tập hợp các đỉnh đã xét.



<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho G là đồ thị vô hướng, liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:

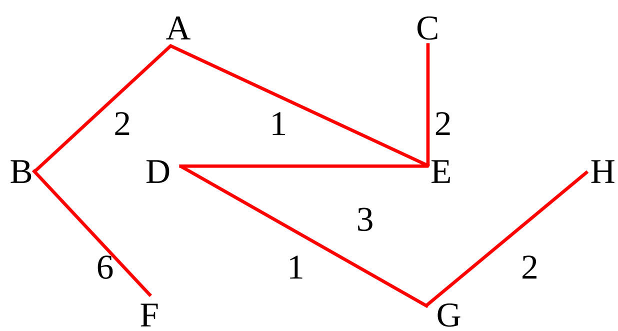


Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh B đến các đỉnh còn lại của G và chỉ ra độ dài của các đường đi tương ứng.

Giải:

Dùng thuật toán Dijkstra, ta có bảng sau:

Đỉnh / Bước	A	B	C	D	E	F	G	H	Đỉnh đã xét	Cạnh đã xét
Khởi tạo	(2,B)	*	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(6,B)	(∞,B)	(∞,B)	B	ϕ
1	*	-	(12,A)	(10,A)	(3,A)	(6,B)	(∞,A)	(∞,A)	A	BA
2	-	-	(5,E)	(6,E)	*	(6,B)	(12,E)	(∞,E)	E	AE
3	-	-	*	(6,E)	-	(6,B)	(12,E)	(10,C)	C	EC
4	-	-	-	*	-	(6,B)	(7,D)	(10,C)	D	ED
5	-	-	-	-	-	*	(7,D)	(10,C)	F	BF
6	-	-	-	-	-	-	*	(9,G)	G	DG
7	-	-	-	-	-	-	-	*	H	GH



Ta có đường đi ngắn nhất từ đỉnh B đến các đỉnh còn lại của G là:

Từ B đến A bằng đường BA có độ dài bằng 2.

C ……………BAEC…………….5.

D…………….BAED…………….6.

E…………….BAE………………3.

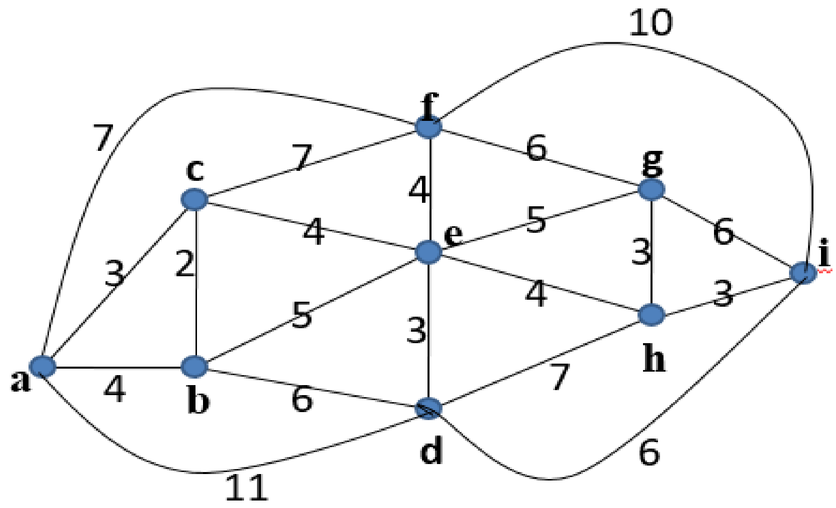
F…………….BF…………………6.

G……………BAEDG……………7.

H……………BAEDGH………...9.

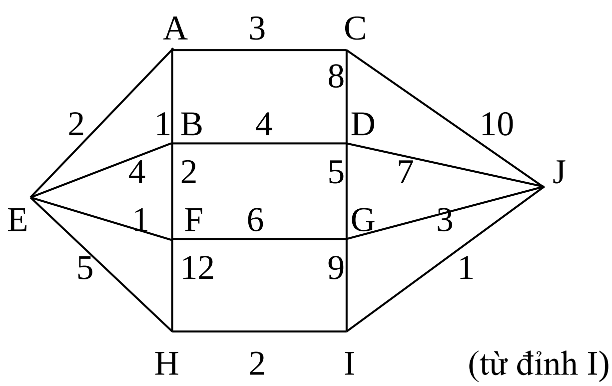
<u>Bài tập tương tự</u>: Tìm đường đi ngắn nhất từ 1 đỉnh đến các đỉnh còn lại của G và chỉ ra độ dài của đường đi tương ứng

a/



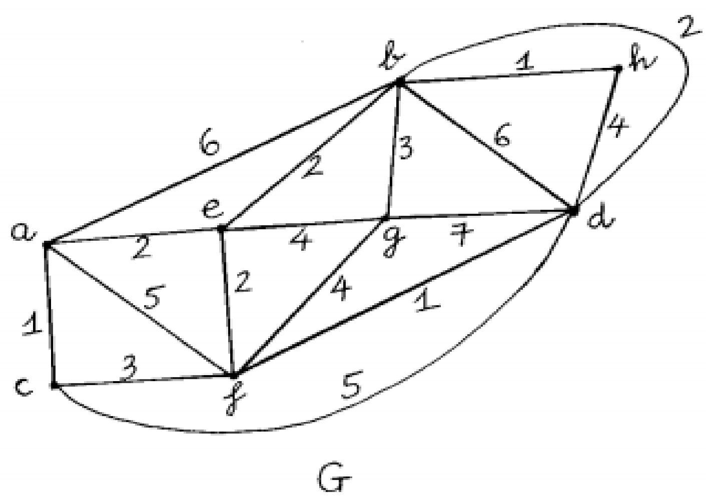
(từ đỉnh **c**)

b/



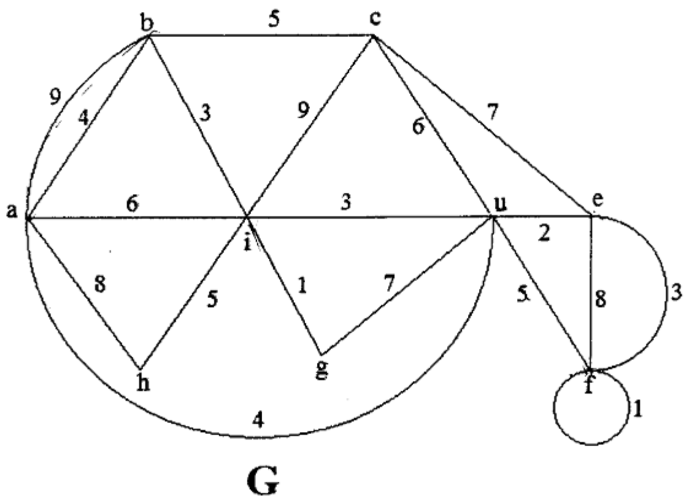
(từ đỉnh I)

c/



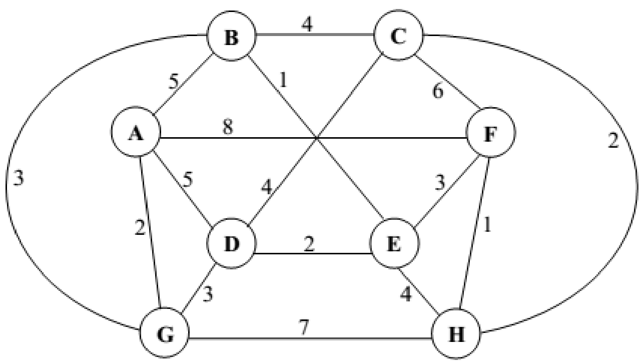
(từ đỉnh **e**)

d/



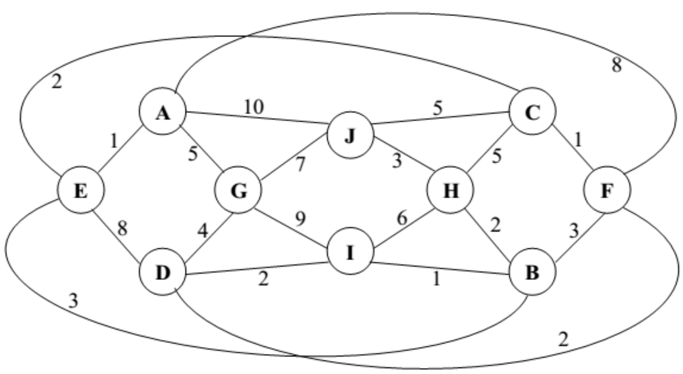
(từ đỉnh a)

e/



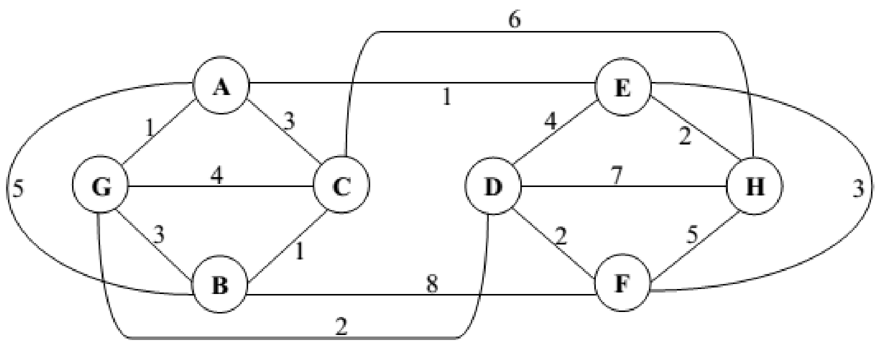
(từ đỉnh H)

f/



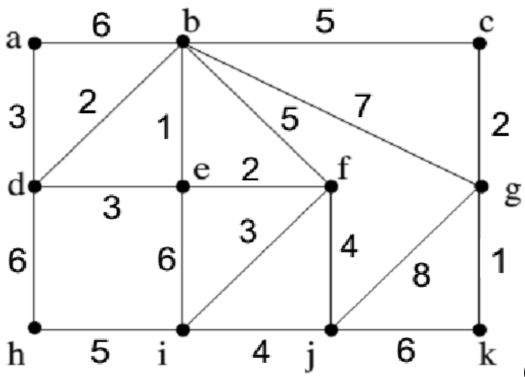
(từ đỉnh F)

g/



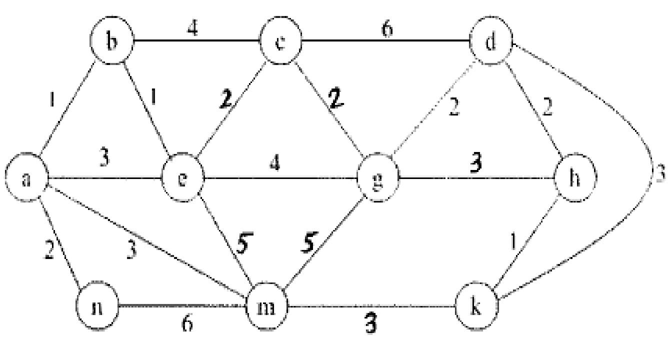
(từ đỉnh C)

h/



(từ đỉnh **g**)

i/



(từ đỉnh n)

5/ <u>CÂY VÀ CÂY BAO TRÙM</u>

Cây (Tree) hay còn gọi là cây tự do (Free Tree) là một đồ thị liên thông, không có chu trình con, và ta thường kí hiệu là T.

Xét một cây T.

Với 2 đỉnh u,v thuộc cây T thì ta luôn có 1 và chỉ 1 con đường đi nối giữa 2 đỉnh u,v.

Ta gọi $l(u,v)$ = chiều dài của con đường (duy nhất) nối giữa 2 đỉnh u,v, và gọi là khoảng cách giữa 2 đỉnh u,v, và kí hiệu là $\delta(u,v)=l(u,v)$.

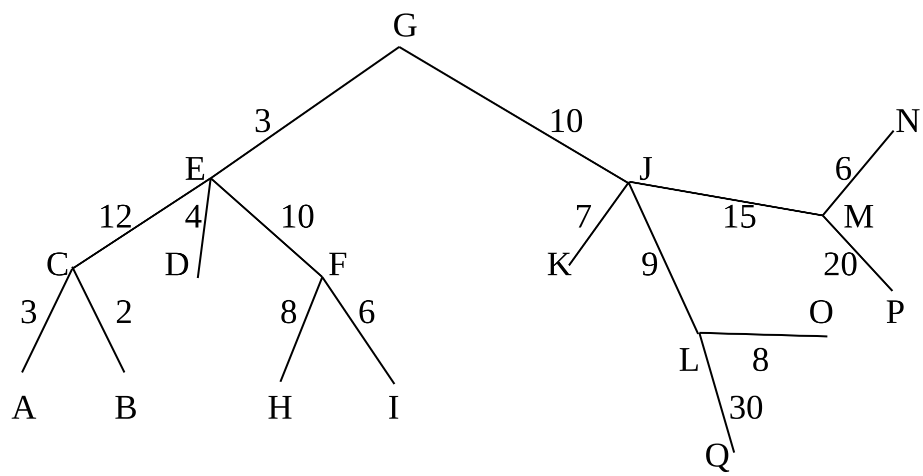
* *<u>Cây có gốc (rooted tree)</u>*:

Là một dạng cây định hướng, theo nghĩa từ gốc đến các đỉnh còn lại của cây ta luôn có con đường định hướng từ gốc đến đỉnh tương ứng.

Gốc của cây là duy nhất.

Mức (level) của 1 đỉnh $u \in T$ là chiều dài của con đường từ gốc đến đỉnh u, và ta kí hiệu là $le(u) = \delta(\text{ gốc}, u)$.

Chiều cao (height) của cây là mức cao nhất trong số các mức thu được của các đỉnh $u \in T$, và ta kí hiệu là: $h(T) = \max_{u \in T}\{le(u)\}$



Xét cây có gốc G.

Với cây tự do T thì ta có thể chọn tùy ý 1 đỉnh làm gốc thì ta có cây có gốc.

* *<u>Xét cây tự do T</u>*:

Ta gọi độ lệch tâm (eccentricity) của 1 đỉnh $u \in T$ là khoảng cách lớn nhất từ đỉnh u đến 1 đỉnh $v \in T$, và ta kí hiệu là $E(u) = \max_{v \in T}\{\delta(u, v)\}$.

Ta gọi đỉnh có độ lệch tâm nhỏ nhất là tâm (center) của cây T, và độ lệch tâm của tâm khi đó chính là bán kính (radius) của cây T.

Một cây tự do T có nhiều nhất là 2 tâm.

* ***<u>Cây bao trùm (cây khung) (spanning tree)</u>***: là cây chứa hết mọi đỉnh của đồ thị G.

Vấn đề đặt ra là ta đi tìm cây bao trùm có tổng trọng số trên cây là nhỏ nhất (minimal spanning tree – MST) hay là cây bao trùm có tổng trọng số trên cây là lớn nhất (maximal spanning tree – MST2).

a/ **<u>Thuật toán PRIM</u>**: Ta xây dựng cây bao trùm T cho G như sau:

<u>Bước 1</u>:

Chọn bất kì 1 đỉnh của G đưa vào T.

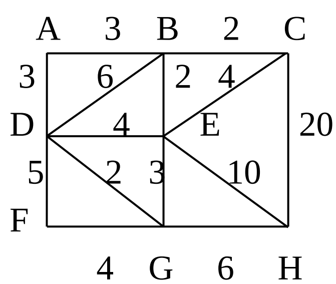
<u>Bước 2</u>:

Chọn 1 đỉnh tùy ý ngoài T mà có cạnh nối trực tiếp với 1 trong các đỉnh hiện hành trong T mà có độ dài nhỏ nhất / lớn nhất, rồi đưa đỉnh và cạnh tương ứng vào T.

<u>Bước 3</u>:

Nếu như tất cả các đỉnh của G đã thuộc T thì ta dừng bài toán.
Nếu không, nghĩa là còn có đỉnh ngoài T, thì lặp lại Bước 2.

Ví dụ mẫu: Cho G là đồ thị vô hướng liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:



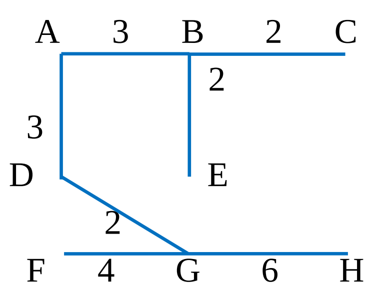
Hãy tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số nhỏ nhất của G và chỉ ra trọng số của cây khi đó.

Giải:

Dùng thuật toán PRIM ta có bảng sau:

Đỉnh / Bước	A	B	C	D	E	F	G	H	Đỉnh đã xét	Cạnh đã xét
Khởi tạo	$(\infty$,E)	(2,E)	(4,E)	(4,E)	*	$(\infty$,E)	(3,E)	(10,E)	E	ϕ
1	(3,B)	*	(2,B)	(4,E)	-	$(\infty$,B)	(3,E)	(10,E)	B	EB
2	(3,B)	-	*	(4,E)	-	$(\infty$,C)	(3,E)	(10,E)	C	BC
3	*	-	-	(3,A)	-	$(\infty$,A)	(3,E)	(10,E)	A	BA
4	-	-	-	*	-	(5,D)	(2,D)	(10,E)	D	AD
5	-	-	-	-	-	(4,G)	*	(6,G)	G	DG
6	-	-	-	-	-	*	-	(6,G)	F	GF
7	-	-	-	-	-	-	-	*	H	GH

Ta có cây bao trùm nhỏ nhất cần tìm là:



Tổng trọng số trên cây là: 3+2+2+3+2+4+6 = 22

b/ *<u>Thuật toán KRUSKAL</u>*:

<u>Bước 1</u>:

Gọi cây bao trùm cần tìm là T, và ta đặt T = (V, ϕ)

(với V = tập hợp các đỉnh của G)

<u>Bước 2</u>:

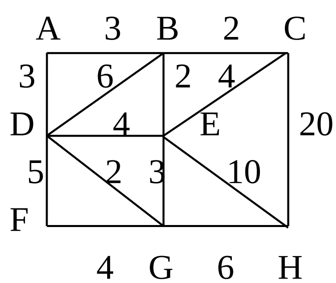
Chọn các cạnh có trọng số nhỏ nhất/ lớn nhất sao cho khi gắn cạnh vào cây T thì ta không tạo thành chu trình con → ta đưa cạnh tương ứng vào T.

<u>Bước 3</u>:

Nếu T đã liên thông thì ta dừng bài toán.

Nếu không, thì ta lặp lại Bước 2.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho G là đồ thị vô hướng liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:



Hãy tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số nhỏ nhất của G và chỉ ra trọng số của cây khi đó.

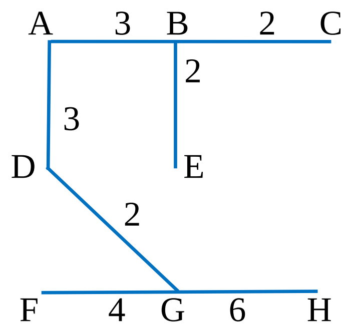
<u>Giải</u>:

Dùng KRUSKAL, ta có bảng sau:

Trọng số	Cạnh	Quyết định
2	BC	Chọn
2	BE	Chọn
2	DG	Chọn
3	AB	Chọn
3	AD	Chọn
3	EG	Không chọn (do tạo thành chu trình ABEGDA)
4	CE	Không chọn (do tạo thành chu trình BCEB)
4	DE	Không chọn (do tạo thành chu trình ABEDA)
4	GF	Chọn
5	DF	Không chọn (do tạo thành chu trình DGFD)
6	DB	Không chọn (do tạo thành chu trình ABDA)

6	GH	Chọn
10	EH	Dừng
20	CH	

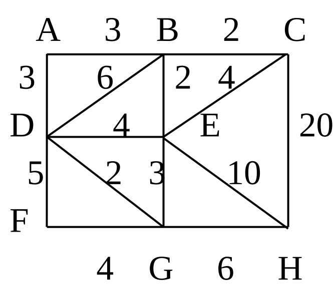
Ta có cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất cần tìm là



Tổng trọng số trên cây là: 3+2+2+3+2+4+6 = 22

Bài tập tương tự:

1/ Tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số lớn nhất cho đồ thị có biểu đồ:



2/ Dùng 9 ví dụ bên trên (phần tìm đường đi ngắn nhất) để tìm cây khung tối tiểu (MST1) và cây khung tối đại (MST2) cho đồ thị G, và chỉ ra trọng số tương ứng của cây khi đó.