Buổi 10 – Ngày 23-11-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

CHƯƠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM:

Phương trình vi phân (differential equations) là loại phương trình chứa đạo hàm ($y', y'', y''', u', v', \ldots$) hoặc là chứa biểu thức vi phân ($\square dx + \square\, dy$) trong phương trình.

Cấp của pt vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm (của vi phân) có trong phương trình.

Giải pt vi phân nghĩa là ta tìm hàm y theo biến x hoặc là tìm hàm x theo biến y sao cho pt vi phân đã cho được thỏa.

Ví dụ: ta có một số pt vi phân sau:

a/ $y' - \frac{4y}{x} = 0$, với $x \neq 0$. (→ cấp 1)

b/ $y'' - 3y' - 4y = e^x \cos x$ (→ cấp 2)

c/ $y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos(2x) - 3\sin(2x)$ (→ cấp 3)

d/ $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = (3x-1)e^{4x}$ (cấp 4)

e/ $(2xy - \sin x)dx + (6x^2 y + 1)dy = 0$ (→ cấp 1)

f/ $(4x^2 y^2 + \tan(xy))dy - (4\sin x - \cos y)dx = 0$ (→ cấp 1)

g/ $(x + y - 3)dx^2 + (4xy + 7)dy^2 = 0$ (→ cấp 2).

Ví dụ khác: giải pt vi phân $y' - 4\frac{y}{x} = 0$, với $x \neq 0$ (*).

Giải: Ta có $y' = \frac{dy}{dx}$, nên pt (*) tương đương $\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4\frac{y}{x}$

TH1: $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ nên pt tương đương $0 = 4.0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng, $\forall x \neq 0$).

TH2: $y \neq 0$ thì pt tương đương $\frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = 4\ln|x| + \ln|C|$$

(*Lưu ý*: khi VT của pt có "ln" xuất hiện thì VP của pt ta lấy "ln|C|" thay vì lấy C như thông thường).

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x|^4 + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|Cx^4|$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|Cx^4|}$$

$$\Leftrightarrow y = Cx^4$$

(với $C =$ hằng số)

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = Cx^4$ (với $C =$ hằng số).

Khi $C = 0$ ta nghiệm riêng của pt là $y_r = 0.x^4 = 0$.

Lưu ý 2: nghiệm tổng quát của pt vi phân cấp *n* luôn chứa n hằng số là $C_1, C_2, ..., C_n$.

2/ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 DẠNG TÁCH BIẾN (PHÂN LY BIẾN SỐ) (SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS):

Là pt vi phân cấp 1 mà ta có thể tách x, dx và y, dy thành 2 vế riêng biệt của phương trình.

Cách giải:

+ Ta thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$ hoặc $x' = \dfrac{dx}{dy}$ vào pt đã cho.

+ Ta tách x, dx và y, dy thành 2 vế riêng biệt của pt (thường ta đặt y, dy ở VT của pt).

+ Lấy tích phân bất định 2 vế pt

(*Lưu ý*: khi VT của pt có "ln" xuất hiện thì VP của pt ta lấy "ln|*C*|" thay vì lấy *C* như thông thường).

+ Rút gọn, ta tìm hàm y_{tq} theo biến x hoặc là tìm hàm x_{tq} theo biến y.

Bài tập tương tự: giải các pt vi phân sau:

i/ $y' - 8\dfrac{y^2}{x^2} = 0$, với $x \neq 0$

2i/ $y' = e^{\sqrt{x}}$, với $x \geq 0$

3i/ $y' = e^x \sin x$

4i/ $y' = 6\dfrac{x^3}{y^3}$, với $y \neq 0$

5i/ $x' = y^2 e^y$

6i/ $x' = 4y\cos(3y)$

7i/ $4^y.y' = \tan^3 x + \sin^2 x$

8i/ $\sqrt{1+4x^2}.y' = \sqrt{4+9y^2}$

9i/ $(2+3x)^2 y' = (4-3y)^2$

10i/ $\tan y.y' = \cot(4x)$

11i/ $\sin^2(3x)y' = \cos^2(5y)$

12i/ $y' = e^{-\sqrt[3]{x}}$

13i/ $(1+x^2)y' = (16+25y^2)$

14i/ $\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0$

15i/ $y'=xy(y+2)$

16i/ $y'=\sin(y-x-1)$ *

17i/ $y'=\cos(x-y-1)$ *

18i/ $xdx+ydy=0$

19i/ $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$

20i/ $xy^2dy=-(y+1)dx$

21i/ $y'=2x+y$ *

22i/ $y'=3x+4y$ *

23i/ $y'=x^2+2xy+y^2-1$ *

24i/ $\tan ydx-x\ln|x|dy=0$, với $x\neq 0$

25i/ $\cos x.y'=y$

26i/ $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}.y'$

27i/ $y'=(\sin\ln x+\cos\ln x)y$

28i/ $y'=a\cos y+b$, với $b>a>0$.

29i/ $y'-y^2-3y+4=0$

30i/ $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$

31i/ $y'=\sin(ax+by)$ *

32i/ $y'=\sin(ay+bx)$ *

33i/ $y'=\frac{1}{2x+y}$ *

34i/ $y'(x+y)=1$ *

35i/ $y'=\sqrt{2x+y-3}$ *

36i/ $y'=\sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$ *

37i/ $y'=\frac{x-y-1}{x-y-2}$

38i/ $x^2(y^3+5)dx+(y^3+5)y^2dy=0$ thỏa $y(0)=1$

39i/ $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx$ thỏa $y(0)=0$

40i/ $xydx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy=0$ thỏa $y(\sqrt{8})=1$

41i/ $y'=-\frac{3x+3y-1}{2(x+y)}$ thỏa $y(0)=2$

42i/ $y'\tan x = y$ thỏa $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

<u>Giải</u> 16i/ $y' = \sin(y-x-1)$ *

Đặt $z = y-x-1 \Rightarrow z' = y' - x' \Rightarrow z' = y'-1 \Rightarrow y' = z'+1$.

Nên pt đã cho tương đương $z'+1 = \sin z \Leftrightarrow z' = \sin z - 1$

Mà $z' = \frac{dz}{dx}$ nên pt tương đương $\frac{dz}{dx} = \sin z - 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{\sin z - 1} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sin z - 1} = \int dx$ (**)

Đặt $t = \tan\frac{z}{2} \Rightarrow \frac{z}{2} = \arctan t \Rightarrow z = 2\arctan t \Rightarrow dz = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ta có $\sin z = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Suy ra $\sin z - 1 = \frac{2t}{1+t^2} - 1 = \frac{2t-1-t^2}{1+t^2} = \frac{-(t^2-2t+1)}{1+t^2} = \frac{-(t-1)^2}{1+t^2}$

Suy ra (**)

$$\Leftrightarrow \int \frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{-(t-1)^2} = \int dx \Leftrightarrow \int -\frac{2dt}{(t-1)^2} = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t-1} = x+C$$

$$\Leftrightarrow t-1 = \frac{2}{x+C}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{x+C}+1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2+x+C}{x+C}$$

Mà $t = \tan\frac{z}{2} \Rightarrow \tan\frac{z}{2} = \frac{2+x+C}{x+C} \Rightarrow \frac{z}{2} = \arctan\left(\frac{2+x+C}{x+C}\right) \Rightarrow z = 2\arctan\left(\frac{2+x+C}{x+C}\right)$

Mà $z = y-x-1 \Rightarrow y = z+x+1$

Nên nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = x+1+2\arctan\left(\frac{2+x+C}{x+C}\right)$,

với $C =$ hằng số thỏa $x+C \neq 0$.

3/ <u>PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 DẠNG ĐẲNG CẤP</u>

+ Là loại pt vi phân cấp 1 mà ta không thể tách x, dx và y, dy thành 2 vế riêng biệt của pt.

+ Cấp của dx và dy là ngang bằng nhau.

+ Trong pt thường xuất hiện biểu thức $\frac{y}{x}$ hay $\frac{x}{y}$ (hoặc cả 2)

<u>*Cách giải*</u>:

+ Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + x'u = u'x + u$.

+ Thay $y' = u'x + u$ vào pt ban đầu.

+ Rút gọn, ta thu được pt dạng tách biến của hàm u theo biến x

+ Giải tiếp như phần 2/ ta tìm hàm u_{tq} theo biến x.

+ Mà $y = ux$, nên nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = u_{tq}.x$ (có chứa hằng số C)

Ví dụ mẫu 1: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, với $x \neq 0, y \neq 0$

Ví dụ mẫu 2: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{x - y + 3}{x + y + 5}$

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, với $x \neq 0, y \neq 0$ (*)

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

Thay vào (*) ta được $u'x + u = u + \dfrac{1}{u} \Leftrightarrow u'x = \dfrac{1}{u}$

Mà $u' = \dfrac{du}{dx}$ nên pt tương đương $\dfrac{du}{dx}x = \dfrac{1}{u} \Leftrightarrow udu = \dfrac{dx}{x}$ (do $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \int udu = \int \dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow \dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + |C| \Leftrightarrow u^2 = 2(\ln|x| + |C|) \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{2(\ln|x| + |C|)}$

Ta có $y = ux$ nên nghiệm tổng quát cần tìm là

$y_{tq} = u_{tq}x = x(\pm\sqrt{2(\ln|x| + |C|)})$, với C là hằng số.

Ví dụ mẫu 2: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{x - y + 3}{x + y + 5}$ (*)

Giải: Ta giải hệ pt $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta có $2x + 8 = 0 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4 = x_0$

Thay vào 1 trong 2 pt còn lại, ta có $y = -1 = y_0$

Đặt $\begin{matrix} X = x - x_0 \Rightarrow X = x + 4 \Rightarrow x = X - 4 \\ Y = y - y_0 \Rightarrow Y = y + 1 \Rightarrow Y' = y' \end{matrix}$ và $y = Y - 1$

Nên pt (*) tương đương $Y' = \dfrac{(X - 4) - (Y - 1) + 3}{(X - 4) + (Y - 1) + 5} \Leftrightarrow Y' = \dfrac{X - Y}{X + Y}$ (**)

TH1: $X = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ thay vào pt (*) ta có

$$y'=\frac{-4-y+3}{-4+y+5}\Leftrightarrow y'=\frac{-1-y}{y+1}\Leftrightarrow y'=\frac{-(1+y)}{1+y}\Leftrightarrow y'=-1\ (***)$$

Mà $y'=\frac{dy}{dx}$

nên pt (***) tương đương $\frac{dy}{dx}=-1\Leftrightarrow dy=-dx\Leftrightarrow \int dy=\int -dx\Leftrightarrow y=-x+C$

mà $x=-4\Rightarrow y=-(-4)+C=4+C\Rightarrow y'=0$ (4*)

Từ (***) và (4*) $\Rightarrow$ vô lý.

<u>TH2</u>: $X\neq 0$. Ta chia tử và mẫu của (**) cho X thì được

$$Y'=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}\quad (5*)$$

Đặt $u=\frac{Y}{X}\Rightarrow Y=uX\Rightarrow Y'=u'X+u$. Thay vào (5*) ta có:

$$u'X+u=\frac{1-u}{1+u}\Leftrightarrow u'X=\frac{1-u}{1+u}-u\Leftrightarrow u'X=\frac{1-u-u-u^2}{1+u}$$

$\Leftrightarrow u'X=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$. Mà $u'=\frac{du}{dX}$ nên pt tương đương

$$\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\frac{dX}{X}\Leftrightarrow \int\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\int\frac{dX}{X}\Leftrightarrow \frac{1}{-2}\int\frac{-2(1+u)du}{1-2u-u^2}=\int\frac{dX}{X}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|1-2u-u^2|=-2\ln|X|+\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|1-2u-u^2|=\ln|X|^{-2}+\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|1-2u-u^2|=\ln\left|\frac{C}{X^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|1-2u-u^2|}=e^{\ln\left|\frac{C}{X^2}\right|}\Leftrightarrow 1-2u-u^2=\frac{C}{X^2}\Leftrightarrow u^2+2u+\frac{C}{X^2}-1=0$$

Ta có $\Delta'=1^2-1\left(\frac{C}{X^2}-1\right)=2-\frac{C}{X^2}$

Để pt có nghiệm thì $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 2-\frac{C}{X^2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{C}{X^2}\leq 2\Leftrightarrow X^2\geq\frac{C}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\geq\sqrt{\frac{C}{2}}\\ X\leq-\sqrt{\frac{C}{2}}\end{array}\right.$

(với $C\geq 0$ là hằng số)

Nghiệm của pt là:

$$u = \frac{-1 - \sqrt{2 - \frac{C}{X^2}}}{1} = -1 - \sqrt{2 - \frac{C}{X^2}}$$

Hay $$u = \frac{-1 + \sqrt{2 - \frac{C}{X^2}}}{1} = -1 + \sqrt{2 - \frac{C}{X^2}}$$

Mà $u = \frac{Y}{X} = \frac{y+1}{x+4}$ nên nghiệm là:

$$\frac{y+1}{x+4} = -1 - \sqrt{2 - \frac{C}{(x+4)^2}} \Rightarrow y = \left[-1 - \sqrt{2 - \frac{C}{(x+4)^2}}\right](x+4) - 1$$

Hay $$\frac{y+1}{x+4} = -1 + \sqrt{2 - \frac{C}{(x+4)^2}} \Rightarrow y = \left[-1 + \sqrt{2 - \frac{C}{(x+4)^2}}\right](x+4) - 1$$

Đây là nghiệm tổng quát cần tìm của pt (*).

<u>Bài tập tương tự</u>: giải pt vi phân:

1i/ $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$

2i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1$, với $x \neq 0$ có

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}[\ln|u-1| - \ln|u+1|] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

3i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5\left(\frac{y}{x}\right) + 4$, với $x \neq 0$

4i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$, với $x \neq 0$

5i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 6$, với $x \neq 0$.

6i/ $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$, với $x \neq 0, y \neq 0$.

7i/ $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$, với $x \neq 0$.

8i/ $(2x + 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ *

9i/ $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$.

10i/ $xy' - y = \dfrac{x}{\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)}$, với $x \neq 0$ và $y(1) = 1$.

11i/ $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{xy}$, với $x \neq 0, y \neq 0$.

12i/ $y' = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ *

13i/ $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$ *

14i/ $y' = e\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x} + 1$, với $x \neq 0$.

15i/ $xy' = x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + y$, với $x \neq 0$.

16i/ $xy' + x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) - y = 0$, với $x \neq 0$.

17i/ $x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$.

18i/ $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

19i/ $(x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0$.

20i/ $xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\left(\frac{y}{x}\right)} dx$, với $x \neq 0$.

21i/ $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

22i/ $xy' = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$ và $y(1) = 1$.

23i/ $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, với $xy \geq 0$ và $y(1) = 1$.

24i/ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ thỏa $y(1) = 0$.

25i/ $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$. *

26i/ $y' = \dfrac{x + y - 3}{1 - x + y}$ *

27i/ $(x + y - 1)^2 dy = 2(y + 2)^2 dx$.

4/ <u>PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 TOÀN PHẦN</u>

Là pt vi phân cấp 1 có dạng:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

thỏa $Q'_x = P'_y$.

<u>Cách giải</u>:

+ Ta tìm hàm $u(x, y)$ sao cho $u'_x = P(x, y)$ và $u'_y = Q(x, y)$

+ Ta có $u(x,y)=\int u'_x\,dx+g(y)=\int P(x,y)dx+g(y)$, với $g(y)$ là hàm số theo y.

+ Lấy đạo hàm 2 vế theo y ta có: $u'_y=\left[\int P(x,y)dx\right]'_y+g'(y)$

+ Mà $u'_y=Q(x,y)$ nên $\left[\int P(x,y)dx\right]'_y+g'(y)=Q(x,y)$.

+ Rút gọn, ta tìm ra $g'(y)=\ldots$ suy ra $g(y)=\int g'(y)dy=\ldots.$

+ Kết luận: nghiệm tổng quát của pt ban đầu là: $u(x,y)=\ldots.=C$, với $C=$ hằng số.

<u>Ví dụ mẫu</u>: giải pt vi phân $(3y^2+2xy+2x)dx+(6xy+x^2+3)dy=0$.

<u>Giải</u>: Ta có $\begin{cases}P(x,y)=3y^2+2xy+2x\\ Q(x,y)=6xy+x^2+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'_y=6y+2x\\ Q'_x=6y+2x\end{cases}$ nên $Q'_x=P'_y$.

Cho nên đây là pt vi phân toàn phần.

Ta cần tìm hàm $u(x,y)$ sao cho: $u'_x=P(x,y)=3y^2+2xy+2x$

$$u'_y=Q(x,y)=6xy+x^2+3.$$

Ta có: $u(x,y)=\int u'_x\,dx+g(y)=\int P(x,y)dx+g(y)$, với $g(y)$ là hàm số theo y.

$$=\int(3y^2+2xy+2x)dx+g(y)$$

$$=3xy^2+x^2y+x^2+g(y)$$

Lấy đạo hàm 2 vế theo biến y ta được:

$$u'_y=6xy+x^2+g'(y) \text{ mà } u'_y=Q(x,y)=6xy+x^2+3$$

Nên ta có: $6xy+x^2+g'(y)=6xy+x^2+3\Rightarrow g'(y)=3\Rightarrow g(y)=\int g'(y)dy=\int 3dy=3y$

Suy ra $u(x,y)=3xy^2+x^2y+x^2+3y$.

Nghiệm tổng quát cần tìm là $u(x,y)=C\Leftrightarrow 3xy^2+x^2y+x^2+3y=C$, với $C=$ hằng số.

<u>Bài tập tương tự</u>: giải các pt vi phân sau:

i/ $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$.

2i/ $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$

3i/ $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

4i/ $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$

5i/ $\left(y+\dfrac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\dfrac{3}{y^2}\right)dy=0$

6i/ $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$

7i/ $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$

8i/ $(x+y-3)dx+(x-4y^2+\cos y)dy=0$

9i/ $(4x+2y-\sin x)dx+(2x+e^y)dy=0$

10i/ $(2xy+x^2-7)dx+(x^2+y\sin y+1)dy=0$.

* ***<u>Dạng mở rộng (nâng cấp) của pt vi phân toàn phần</u>***:

Xét pt vi phân: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ có: $P'_y \neq Q'_x$ (*)

Ta cần tìm hàm $m(x,y)$ sao cho $[m(x,y)P(x,y)]dx+[m(x,y)Q(x,y)]dy=0$ (**) thỏa:

$$[m(x,y)P(x,y)]'_y=[m(x,y)Q(x,y)]'_x$$

Nghĩa là pt lúc này là pt vi phân toàn phần (ta giải tiếp như dạng của pt vi phân toàn phần).

<u>Cách giải</u>:

\+ Từ pt (*) ta xác định: $\begin{cases} P(x,y)=... \\ Q(x,y)=... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=.... \\ Q'_x=.... \end{cases}$

\+ Suy ra $\Delta=P'_y-Q'_x=...$

\+ Nếu $\frac{\Delta}{Q}=f(x)=$ hàm số theo biến x thì $m(x,y)=m(x)=e^{\int f(x)dx}=...$

\+ Nếu $\frac{\Delta}{P}=g(y)=$ hàm số theo biến y thì $m(x,y)=m(y)=e^{\int g(y)dy}=...$

\+ Sau đó ta nhân $m(x,y)$ = thừa số tích phân = tìm được vào pt (*) thì có pt (**).

\+ Ta giải tiếp pt (**) như cách giải của pt vi phân toàn phần nêu trên.

<u>Ví dụ mẫu</u>: giải pt vi phân: $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin(2y)dy=0$ (*)

<u>Giải</u>:

Từ pt (*) ta có: $\begin{cases} P(x,y)=x^2-\sin^2 y \\ Q(x,y)=x\sin(2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=-2\sin y\cos y=-\sin(2y) \\ Q'_x=\sin(2y) \end{cases}$

Ta cần tìm hàm $m(x,y)$ sao cho $m(x,y)(x^2-\sin^2 y)dx+m(x,y)x\sin(2y)dy=0$ là pt vi phân toàn phần.

Ta có $\Delta=P'_y-Q'_x=-\sin(2y)-\sin(2y)=-2\sin(2y)$

Suy ra $\frac{\Delta}{Q}=\frac{-2\sin(2y)}{x\sin(2y)}=-\frac{2}{x}=f(x)$

Nên $m(x,y)=m(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=e^{\ln|x|^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

Nhân 2 vế pt (*) cho $\frac{1}{x^2}$ ta có:

$$\frac{1}{x^2}(x^2-\sin^2 y)dx+\frac{1}{x^2}.x\sin(2y)dy=0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin(2y)}{x}dy=0\ \ (**)$$

Đây là pt vi phân toàn phần, với $P(x,y)=\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)$ và $Q(x,y)=\frac{\sin(2y)}{x}$

Giải tiếp, ta tìm ta nghiệm tổng quát là:

$$u(x,y)=x+\frac{\sin^2 y}{x}=C \text{, với } C=\text{hằng số.}$$

<u>Bài tập tương tự</u>: giải các pt vi phân

i/ $ydx-xdy+\ln xdx=0$, với $x>0$

2i/ $y(1+xy)dx-xdy=0$

3i/ $(2y+xy^3)dx+(x+x^2y^2)dy=0$, với $x>0$.

4i/ $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$

5i/ $(x\cos y-y\sin x)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$

6i/ $(y^2\cos x+1)dx+\left(y\sin x-\frac{x}{y}\right)dy=0$, với $y>0$.

7i/ $(\ln y+2x-1)y'=2y$.

5/ <u>PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1</u>

Là pt vi phân cấp 1 có dạng:

$y'+p(x)y=f(x)$ (*) (tuyến tính của hàm y theo biến x).

Hoặc là

$x'+p(y)x=f(y)$ (**) (tuyến tính của hàm x theo biến y).

Xét pt (*):

Khi $f(x)=0$ ta có pt vi phân cấp 1 tuyến tính thuần nhất (của hàm y theo biến x) là:

$y'+p(x)y=0$

Khi $f(x)\neq 0$ thì ta gọi là pt vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất (của hàm y theo biến x).

Xét pt (**):

Khi $f(y)=0$ ta có pt vi phân cấp 1 tuyến tính thuần nhất (của hàm x theo biến y) là:

$$x'+p(y)x=0$$

Khi $f(y)\neq 0$ thì ta gọi là pt vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất (của hàm x theo biến y).

<u>*Cách giải*</u>: xét pt $y'+p(x)y=f(x)$ (*)

<u>Cách 1</u>: dùng pp biến thiên hằng số:

Ta có dạng thuần nhất của pt (*) là:

$$y'+p(x)y=0$$

Ta thay $y'=\dfrac{dy}{dx}$ vào pt rồi ta giải tiếp theo dạng pt vi phân cấp 1 tách biến.

Ta có nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn}=Ce^{-\int p(x)dx}$, với $C=$ hằng số.

Dùng pp biến thiên hằng số, nghĩa là ta xem $C=C(x)$, thì nghiệm của pt (*) có dạng:

$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Suy ra $y'=C'(x).e^{-\int p(x)dx}+C(x)\left[e^{-\int p(x)dx}\right]'_x$

Thay $y'=...$ và $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ vào pt (*)

Rút gọn, ta tìm ra $C'(x)=...\Rightarrow C(x)=\int C'(x)dx=...$

Kết luận: nghiệm tổng quát của pt (*) là $y_{tq}=C(x)e^{-\int p(x)dx}=....$

<u>Cách 2</u>: dùng pp Bernoulli.

<u>Cách 2.1</u>: Đặt $A(x)=e^{-\int p(x)dx}$ (không cộng thêm hằng số vào)

$B(x)=\int \dfrac{f(x)}{A(x)}dx+C$, với $C=$ hằng số.

Nghiệm tổng quát cần tìm là:

$y_{tq}=A(x).B(x)$.

<u>Cách 2.2</u>: Đặt $A(x)=e^{\int p(x)dx}$ (không cộng thêm hằng số vào)

$B(x)=\int f(x).A(x)dx+C$, với $C=$ hằng số.

Nghiệm tổng quát cần tìm là:

$y_{tq}=\dfrac{B(x)}{A(x)}$.

Ví dụ mẫu: giải pt vi phân $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ (*)

Giải:

Cách 1: dùng pp biến thiên hằng số:

Ta có dạng thuần nhất của pt (*) là: $y'+y\cos x=0$.

Ta có $y'=\frac{dy}{dx}$ nên pt tương đương $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-y\cos x$.

TH1: $y=0 \Rightarrow dy=0$ nên pt $\Leftrightarrow 0=-0.\cos x \Leftrightarrow 0=0$ luôn đúng, với mọi x.

TH2: $y\neq 0$ nên pt $\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-\cos xdx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int\cos xdx \Leftrightarrow \ln|y|=-\sin x+\ln|C|$

$\Leftrightarrow e^{\ln|y|}=e^{-\sin x+\ln|C|}$

$\Leftrightarrow y=e^{-\sin x}.e^{\ln|C|}$

$\Leftrightarrow y=Ce^{-\sin x}$

(với $C=$ hằng số).

Dùng pp biến thiên hằng số, ta xem $C=C(x)$ thì nghiệm của pt (*) có dạng

$y=C(x)e^{-\sin x}$

Suy ra $y'=C'(x).e^{-\sin x}+C(x)[e^{-\sin x}]'_x=C'(x)e^{-\sin x}+C(x)[-\cos x.e^{-\sin x}]$

Thay $y=C(x)e^{-\sin x}$ và $y'=C'(x)e^{-\sin x}+C(x)[-\cos x.e^{-\sin x}]$ vào pt

$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ ta có:

$C'(x)e^{-\sin x}+C(x)[-\cos x.e^{-\sin x}]+C(x)e^{-\sin x}.\cos x=e^{-\sin x}$

$\Leftrightarrow C'(x)e^{-\sin x}=e^{-\sin x} \Leftrightarrow C'(x)=1$

$\Rightarrow C(x)=\int C'(x)dx=\int 1.dx=x+C_1$, với C_1 là hằng số.

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq}=C(x)e^{-\sin x}=(x+C_1)e^{-\sin x}$, với C_1 là hằng số.

Cách 2: dùng pp Bernoulli

Cách 2.1: Ta có: $p(x)=\cos x$ và $f(x)=e^{-\sin x}$

Đặt $A(x)=e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int\cos xdx}=e^{-\sin x}$

$$B(x)=\int\frac{f(x)}{A(x)}dx+C=\int\frac{e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}}dx+C=\int 1dx+C=x+C$$

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là:

$y_{tq}=A(x).B(x)=e^{-\sin x}(x+C)$, với C là hằng số.

Cách 2.2:

Đặt $A(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\cos xdx}=e^{\sin x}$

$$B(x)=\int f(x).A(x)dx+C=\int e^{-\sin x}.e^{\sin x}dx+C=\int e^0dx+C=x+C$$

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là:

$$y_{tq} = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{x+C}{e^{\sin x}} = e^{-\sin x}(x+C)$$, với C là hằng số.

<u>Bài tập tương tự</u>: giải các pt vi phân sau:

1/ $y' + y\sin x = e^{\cos x}$

2/ $y' + y\cos x = \sin x\cos x$

3/ $y' + y\sin x = \sin x\cos x$

4/ $y' - \frac{y}{x} = x^2$, với $x > 0$ thỏa $y(1) = 1$.

5/ $y' = \frac{1}{1-\frac{x}{y}}$, với $y > 0$ (*) gợi ý: ta xem x là hàm theo y, với $x' = \frac{dx}{dy}$

pt đã cho tương đương $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = 1-\frac{x}{y} \Leftrightarrow x' = 1-\frac{x}{y} \Leftrightarrow x' + \frac{1}{y}.x = 1$

đây là pt vi phân tuyến tính cấp 1 của hàm x theo biến y.

6/ $y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$

7/ $y' + y\cot\tan x = \frac{-1}{\sin x}$

8/ $y' + ay = e^{bx}$, với $a + b \neq 0$

9/ $y' - 2xy = e^{2x}(1-2x^2)$

10/ $y' = \frac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$, với $x \neq 0$.

11/ $x(1+x^2)y' + y = \arctan x$.

12/ $y'(x+y^2) = y$ *

13/ $(2xy+3)dy - y^2dx = 0$ *

14/ $2ydx = (2y^2 - x)dy$ *

15/ $ydx - (x + y^2\sin y)dy = 0$ *

16/ $(1+y^2)dx = (\arctan y - x)dy$ *

17/ $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ thỏa $y(0) = 0$

18/ $y' = 2y + e^x - x$ thỏa $y(0) = \frac{1}{4}$

19/ $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ thỏa $y(1) = 1$

20/ $y' = \frac{x}{\cos y} - \tan y$. Gợi ý: đặt $z = \sin y$.

Giải bài 5: Ta có $p(y) = \frac{1}{y}$ và $f(y) = 1$.

Dùng pp Bernoulli, ta đặt

$$A(y) = e^{-\int p(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$B(y) = \int \frac{f(y)}{A(y)} dy + C = \int \frac{1}{\frac{1}{y}} dy + C = \int y dy + C = \frac{y^2}{2} + C$$

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là

$$x_{tq} = A(y).B(y) = \frac{1}{y}\left(\frac{y^2}{2} + C\right) = \frac{y}{2} + \frac{C}{y}$$, với $C =$ hằng số.