

Ngày thi: 26/12/2020  
Thời gian làm bài: **90** phút  
Không được sử dụng tài liệu

**Câu 1.**

Cho  $A$  là ma trận vuông thực, cấp  $n$  khả nghịch, thỏa  $A^{-1} = 4A$ . Tính  $\det(A^{2021} - A)$

**Câu 2.** Cho  $A, B$  là các ma trận vuông thực, cấp  $n$  khả nghịch, và  $I_n$  là ma trận đơn vị cấp  $n$ .

Chứng minh rằng:

a/  $(I_n + A)^{-1} = I_n - (A^{-1} + I_n)^{-1}$ ;

b/  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}$ .

**Câu 3.** Cho  $a > 0$ .

Chứng minh rằng ma trận  $A$  sau khả nghịch, và tìm  $A^{-1}$ , với  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

**Câu 4.** Cho  $A, B$  là các ma trận vuông thực, cấp  $n$ . Chứng minh rằng:

Nếu  $I_n - AB$  khả nghịch thì  $I_n - BA$  cũng khả nghịch, và

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$$

**Câu 5.**

Cho  $I_n$  là ma trận đơn vị cấp  $n$  và  $A$  là ma trận vuông thực, cấp 2 thỏa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ -x/n & 1 \end{pmatrix}. \text{ Tính giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} (A^n - I_n) \right) \right].$$

**Câu 6.** Cho  $A, B, C$  là các ma trận vuông thực, cấp  $n$ , thỏa

$$C^2 = I_n, \quad AC = CA, \quad BC = CB, \quad AB = 2(A + B)C$$

Chứng minh rằng:  $AB = BA$

**Câu 7.** Giải hệ phương trình sau trên trường số thực:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_2 - x_1 + 2x_3 - x_6 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_4 + x_5 - x_6 - 2x_1 - x_3 - x_2 = 1 \\ 2x_6 - x_5 - x_4 + x_3 + x_2 + 2x_1 = 1 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

