TỔNG HỢP ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH TỪ NĂM 2006 ĐẾN NĂM 2012

(Lê Phúc Lữ tổng hợp và giới thiệu)

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 26 tháng 3 năm 2013

Phần A.

CÁC ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2006

Bài 1.

Cho dãy số (x_n) xác định theo hệ thức sau

$$x_1 = 2, x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n^2 x_n, n \geq 2.$$

Tính x_{2006}.

Bài 2.

Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0;1)$ sao cho $|f(x)| \leq p, |f'(x)| \leq q, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) được xác định bởi hệ thức $x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ.

Bài 3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(0) = 0, 0 \leq P'(x) \leq P(x), \forall x \in (0;1)$.

Bài 4.

Cho hàm số liên tục $f : [0;1] \to [0;+\infty)$. Đặt $g(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)dt$ và ta giả sử rằng luôn có $g(x) \geq \left[f(x) \right]^2, \forall x \in [0;1]$. Chứng minh rằng $g(x) \leq (1+x)^2$.

Bài 5.

Tồn tại hay không hàm số liên tục $f : [a;b] \to [a;b]$ với $a < b$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x) - f(y)| > |x - y|, \forall x, y \in [a;b] \text{ và } x \neq y.$$

Bài 6.

Xác định các dãy số (x_n) biết rằng

$$x_{2n+1} = 3x_n + 2, \text{ với } n = 0, 1, 2, ...$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2007

Bài 1.

Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx$.

Bài 2.

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_0 = 2007, x_n = -2007\left(\dfrac{x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n}\right), n \geq 1$.

Tìm liên hệ giữa x_n, x_{n-1} với $n \geq 1$. Từ đó, tính tổng $S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + ... + 2^{2007} x_{2007}$.

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \dfrac{3}{x-1}, \forall x \neq 1.$

Bài 4.

Cho a,b,c,α là các số thực $\alpha \neq c-b$. Dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định bởi công thức

$$u_1 = a, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} + b - c}, n \geq 1.$$

Biết rằng $\lim u_n = \alpha$. Tính giới hạn của $\lim v_n$.

Bài 5.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên $[0;+\infty)$. Biết rằng tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + f'(x)\right] = 1$.

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Bài 6.

Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thì có ít nhất một nguyên hàm của nó là đa thức bậc ba có các nghiệm đều là số thực.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2008

Bài 1.

Dãy số (a_n) được xác định như sau $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n, n = 1,2,3...$ Tính a_{2008}.

Bài 2.

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + ... + n^{2008}}{n^{2009}}$.

Bài 3.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$ và $f(0) = f(\pi) = 0$ thỏa mãn $|f'(x)| < 1$ với $x \in (0;\pi)$. Chứng minh rằng:

i. Tồn tại $c \in (0;\pi)$ sao cho $f'(c) = \tan f(c)$.

ii. $|f(x)| < \dfrac{\pi}{2}$ với mọi $x \in (0;\pi)$.

Bài 4.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $xf(y) + yf(x) \le 1$ với $x, y \in [0;1]$. Chứng minh rằng $\int_0^1 f(x)dx \le \dfrac{\pi}{4}$.

Bài 5.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(0) = 0, f(1) = 1$, khả vi trong $(0;1)$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0;1)$, luôn tồn tại $x_1, x_2 \in (0;1)$ sao cho $\dfrac{\alpha}{f'(x_1)} + \dfrac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1$.

Bài 6.

Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) > g(0)$ và $\int_0^{\pi} f(x)dx < g(0)\pi + \dfrac{g'(0)}{2}\pi^2$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0;\pi]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2009

Bài 1.

Giả sử dãy số (x_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1, \\ x_n = (n-1)\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right), n = 3,4,5,\ldots \end{cases}$

Tính x_{2009}.

Bài 2.

Cho hàm số $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và có $f''(x) > 0$ trên $[0;1]$. Chứng minh rằng $2\int_0^1 f(t)dt \geq 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0)$.

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} f(x) \leq 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Bài 4.

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Bài 5.

Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi công thức

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, n = 1,2,3,\ldots$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2;3)$ với $n = 2,3,4,\ldots$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Bài 6. ***(Thí sinh chọn một trong hai câu)***

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2^x = P(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực.

b) Cho $f(x) - x, f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2010

Bài 1.

Cho hàm số $f(x)=\ln(x+1)$.

a. Chứng minh rằng với mọi $x>0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn $f(x)=xf'(c)$ mà ta kí hiệu là $c(x)$.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{c(x)}{x}$.

Bài 2.

Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1=1, x_{n+1}=x_n\left(1+x_n^{2010}\right)$ với $n=1,2,3,...$

Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2010}}{x_2}+\dfrac{x_2^{2010}}{x_3}+...+\dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$.

Bài 3.

Cho số thực a và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0)\geq 0$ và $f(x)+af'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$. Chứng minh rằng $f(x)\geq 0$ với mọi $x\geq 0$.

Bài 4.

Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$. Giả sử rằng $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c\in(0;1)$ sao cho $f'(c)=6$.

Bài 5.

Cho đa thức $P(x)$ bậc n có hệ số thực sao cho $P(-1)\neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)}\leq\dfrac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0|\geq 1$.

Bài 6. ***(Thí sinh chọn một trong hai câu)***

a. Xác định hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ mà $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx\leq 1$.

b. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(1)=2010$ và

$$f(x+y)=2010^x f(y)+2010^y f(x) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2011

Bài 1.

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

a. Chứng minh rằng $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ và $f'(x)$ đồng biến.

b. Chứng minh rằng dãy (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_{n+1}=f(u_n)$ thỏa mãn $u_n\in\left[\dfrac{1}{2};1\right], \forall n$.

Bài 2.

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Bài 3.

Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_{n+1}\geq \dfrac{x_n+y_n}{2}$ và $y_{n+1}\geq\sqrt{\dfrac{x_n^2+y_n^2}{2}}$ với $n\in\mathbb{N}$.

a. Chứng minh rằng các dãy (x_n+y_n), (x_ny_n) là những dãy đơn điệu tăng.

b. Giả sử rằng $(x_n),(y_n)$ bị chặn. Chứng minh rằng chúng cùng hội tụ về một điểm.

Bài 4.

Cho $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha+n}<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\beta+n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm $\min|\alpha-\beta|$.

Bài 5.

Ta gọi đoạn thẳng $[\alpha,\beta]$ là đoạn thẳng tốt nếu với mọi bộ số a,b,c thỏa mãn điều kiện $2a+3b+6c=0$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực thuộc đoạn $[\alpha,\beta]$. Trong tất cả các đoạn thẳng tốt, tìm đoạn có độ dài nhỏ nhất.

Bài 6. ***(Thí sinh chọn một trong hai câu)***

a. Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2), \forall x,y$.

b. Cho hàm số f liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $xf(x)+\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 2$ với mọi $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx\leq 2\ln 2$.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2012

Bài 1.

Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_1 = \alpha$ và $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n - \dfrac{2}{n}$ với $n = 1,2,3,\ldots$ Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Bài 2.

Cho đa thức $P(x)$ có bậc không nhỏ hơn 1 có hệ số thực và đa thức $Q(x)$ xác định bởi $Q(x) = (2012x^2+1)P(x)P'(x) + 2012x\left((P(x))^2 + (P'(x))^2\right)$. Giả sử $P(x)=0$ có đúng n nghiệm thực phân biệt trong khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, chứng minh $Q(x)=0$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

Bài 3.

Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}$.

Bài 4.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{x+y}{2012}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{2013}\right) + f\left(\dfrac{y}{2014}\right)\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Bài 5.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2012]$ và thỏa mãn $f(x)+f(2012-x)=0$ với mọi $x\in[0;2012]$. Chứng minh $\displaystyle\int_0^{2012} f(x)dx = 0$ và $(x-2012)f(x) = 2012\displaystyle\int_0^{2012-x} f(u)du$ có nghiệm trong khoảng $(0;2012)$.

Bài 6. ***(Thí sinh chọn một trong hai câu)***

a. Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(1)=0$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha\in(0;1)$, ta có $\left|\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx\right| \le \dfrac{2}{81}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|$.

b. Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ là hàm lõm (còn gọi là lồi lên phía trên), khả vi liên tục thỏa mãn $f(0)=f(1)=0$. Chứng minh $\sqrt{1+4\max\limits_{0\le x\le 1} f^2(x)} \le \displaystyle\int_0^1\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \le 1 + 2\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)$.

Phần B.

LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀ BÌNH LUẬN

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2006

Nhận xét chung.

Các dạng Toán có trong nhiều tài liệu ôn thi và là kiến thức tối thiểu cần phải nắm để tiếp cận với kì thi này xuất hiện ở các câu 1, 5, 6. Các câu còn lại nói chung chỉ đòi hỏi dùng các kĩ thuật quen thuộc nhưng tinh tế hơn. Câu 2 là một định lí hữu ích để xử lí các bài Toán về giới hạn dãy số truy hồi dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ *nhưng đã được phát biểu ở dạng tổng quát nên để giải đầy đủ là không dễ dàng. Câu 3, 4 là các câu phân loại khá tốt và các hướng tiếp cận được giới thiệu bên dưới có lẽ là con đường duy nhất để xử lí các bài này.*

Bài 1.

Cho dãy số (x_n) ***xác định theo hệ thức sau:***

$$x_1 = 2, x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^2 x_n, n \geq 2.$$

Tính x_{2006}.

Lời giải.

Trong công thức truy hồi đã cho, thay n bởi $n+1$ ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1}.$$

Suy ra $n^2 x_n + x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1} \Leftrightarrow n x_n = (n+2) x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} x_n$.

Lấy tích hai vế, ta có $\prod_{i=1}^{n} x_{i+1} = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{i}{i+2} x_i \Leftrightarrow x_{n+1} = \dfrac{n!}{(n+2)!/(1\cdot 2)} x_1 = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$.

Do đó ta được công thức tổng quát của dãy đã cho là $x_n = \dfrac{4}{n(n+1)}$ và $x_{2006} = \dfrac{4}{2006 \cdot 2007}$.

Nhận xét.

Ở các bài dãy số có dạng truy hồi liên quan đến tổng hoặc tích của các số hạng liền trước như trên, ta chỉ cần đổi n thành $n+1$, lợi dụng tính chất "đúng với mọi n" để đánh giá và triệt tiêu được một lượng khá lớn các số hạng khác, hầu hết các trường hợp là sẽ đưa được về công thức truy hồi giữa hai số hạng liên tiếp. Dưới đây là một bài toán có cùng dạng:

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1, x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{ với } n = 2, 3, 4, ...$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$.

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Bài 2.

Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0;1)$ sao cho $\left|f(x)\right| \le p, \left|f'(x)\right| \le q, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng dãy số (x_n) được xác định bởi hệ thức $x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ đã cho khả vi nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x < y$, theo định lí Lagrange thì tồn tại $z \in (x, y)$ sao cho

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y) \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(z)\right|\left|(x-y)\right|.$$

Do $\left|f'(x)\right| \le q, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $\left|f(x) - f(y)\right| < q\left|(x-y)\right|$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ thì

$$g(-p) = f(-p) + p \ge 0 \text{ và } g(p) = f(p) - p \le 0 \text{ (do } \left|f(x)\right| \le p, \forall x \in \mathbb{R}\text{)}$$

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-p; p]$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $[-p; p]$.

Giả sử phương trình $f(x)=x$ có hai nghiệm là $u<v$ thì theo định lí Lagrange, tồn tại số $t\in(u,v)$ sao cho $\left|f(u)-f(v)\right|=\left|f'(t)\right|\left|u-v\right| \Leftrightarrow \left|u-v\right|=\left|f'(t)\right|\left|u-v\right| \Leftrightarrow \left|f'(t)\right|=1$, mâu thuẫn do theo giả thiết thì $\left|f'(x)\right|\le q<1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, phương trình $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất, đặt là L. Rõ ràng $f(L)=L$.

Tiếp theo, ta thấy rằng $\left|u_n-L\right|=\left|f(u_{n-1})-f(L)\right|\le p\left|u_{n-1}-L\right|$. Lập luận tương tự, ta có

$$\left|u_n-L\right|\le p^n\left|u_0-L\right| \text{ với mọi } n.$$

Do $p\in(0;1)$ nên $p^n\to 0$ khi $n\to+\infty$, theo nguyên lí kẹp thì dãy (u_n) hội tụ về L.

Nhận xét.

Như đã nêu ở trên, đây là một định lí tổng quát để xử lí các bài toán giới hạn có dạng $u_{n+1}=f(u_n)$, trong đó $\left|f'(x)\right|<q<1$. Trong tình huống cụ thể, số q rất quan trọng và nếu ta không chỉ được sự tồn tại của nó mà mới chỉ có $\left|f'(x)\right|<1$ thì lời giải vẫn chưa thể thành công. Hãy thử áp dụng lập luận trên, giải các bài toán sau :

(1) Cho dãy số $\left\{x_n\right\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1=a, \\ x_{n+1}=\dfrac{2011}{3}\ln\left(x_n^2+2011^2\right)-2011^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\left\{x_n\right\}$ có giới hạn.

(2) Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1=a, x_{n+1}=\ln(3+\cos x_n+\sin x_n)-2008 \text{ với mọi } n=0,1,2,\ldots$$

Chứng minh rằng dãy số $\left\{x_n\right\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Bài 3.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(0)=0, 0\le P'(x)\le P(x), \forall x\in(0;1).$$

Lời giải.

Trong bất đẳng thức đã cho, tính lim các vế, ta có

$$0 \le \lim_{x \to 1^-} P(x) \Rightarrow P(1) \ge 0.$$

Xét hàm số $f(x) = e^{-x}P(x)$ thì

$$f'(x) = -e^{-x}P(x) + e^{-x}P'(x) = e^{-x}(P'(x) - P(x)) \le 0 \text{ với mọi } x \in (0;1).$$

Do đó, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Ta suy ra $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \ge f(x) \ge \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow f(0) \ge f(x) \ge f(1) \Rightarrow e^{-0}P(0) \ge e^{-x}P(x) \ge e^{-1}P(1)$.

Do $P(0) = 0$ và $P(1) \ge 0$ nên $0 \ge P(x) \ge 0$ dẫn đến $P(x) = 0$ với mọi $x \in (0;1)$.

Điều này có nghĩa là $P(x)$ nhận tất cả các giá trị $x \in (0;1)$ làm nghiệm, nhưng đa thức $P(x)$ bậc dương chỉ có hữu hạn nghiệm nên suy ra $P(x) \equiv 0$.

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) \equiv 0$ với mọi x.

Nhận xét.

Ở đây ta cần chú ý rằng hàm đa thức liên tục trên cả miền số thực nên có thể thoải mái áp dụng các tính chất của hàm số liên tục. Thêm vào đó, kĩ thuật chọn hàm số $f(x)$ có dạng như trên rất thường gặp trong các đề thi Olympic Sinh viên và trong nhiều trường hợp, các hàm chọn ra được khá rắc rối. Đưa thêm e^{-x} có hai điểm lợi: thứ nhất là giá trị của e^{-x} luôn dương nên dấu của $f(x), P(x)$ luôn như nhau; thứ hai là khi đạo hàm thì chúng ta nhận được biểu thức dạng $P'(x) - P(x)$ và tận dụng thành công giả thiết.

Bài 4.

Cho hàm số liên tục $f:[0;1] \to [0;+\infty)$***. Đặt*** $g(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)dt$ ***và ta giả sử rằng luôn có*** $g(x) \ge \left[f(x)\right]^2, \forall x \in [0;1]$***. Chứng minh rằng*** $g(x) \le (1+x)^2$***.***

Lời giải.

Đặt $F(x)$ là hàm số thỏa mãn $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Suy ra $g(x)=1+2F(x)$ và $F'(x)=f(x)$.

Theo giả thiết thì

$$1+2F(x)=g(x)\geq\left(f(x)\right)^2 \text{ nên } \frac{f(x)}{\sqrt{1+2F(x)}}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}}\leq 1.$$

Ta cần chứng minh $1+2F(x)\leq(1+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+2F(x)}-(1+x)\leq 0$.

Xét hàm số $h(x)=\sqrt{1+2F(x)}-(1+x)$ thì ta có $h'(x)=\dfrac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}}-1\leq 0$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Suy ra $h(x)\leq h(0)=\sqrt{1+2F(0)}-1$.

Chú ý rằng $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ nên $h(0)=0$. Do đó $h(x)\leq 0$ với mọi $x\in[0;1]$ hay

$$g(x)\leq(1+x)^2 \text{ với mọi } x\in[0;1].$$

Nhận xét.

Một số bạn đến đoạn $\dfrac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}}\leq 1$ sẽ tính nguyên hàm hai vế và suy ra

$$\sqrt{1+2F(x)}\leq x \text{ với } x\in[0;1], \text{ dẫn đến } g(x)=1+2F(x)\leq x^2<(x+1)^2.$$

Đây là một sai lầm rất nghiêm trọng!

Bài toán được sáng tạo ra khá thú vị khi kết hợp giữa các điều kiện liên hệ giữa hàm số và tích phân của nó để từ đó đưa về khảo sát hàm số và đạo hàm. Ở trên ta xét đạo hàm của căn bậc 2, ta hoàn toàn có thể thay bằng căn bậc n và tạo ra các bài toán tương tự.

Bài 5.

Tồn tại hay không hàm số liên tục $f:[a;b]\to[a;b]$ với $a<b$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left|f(x)-f(y)\right|>\left|x-y\right|,\forall x,y\in[a;b] \textbf{ và } x\neq y\,\textbf{?}$$

Lời giải.

Ta có $a \le f(a) \le b$ và $a \le f(b) \le b$ nên $-b \le -f(b) \le -a$. Do đó, ta có

$$a-b \le f(a)-f(b) \le -(a-b)$$

Suy ra $\left|f(a)-f(b)\right| \le \left|a-b\right|$.

Tuy nhiên, trong điều kiện $\left|f(x)-f(y)\right| > \left|x-y\right|, \forall x, y \in [a;b]$, nếu ta thay $x=a, y=b$ thì được bất đẳng thức $\left|f(a)-f(b)\right| > \left|a-b\right|$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn đề bài.

Nhận xét.

Câu hỏi dành cho bài toán này đơn giản đến bất ngờ. Nếu đổi điều kiện trong bài trên thành $\left|f(x)-f(y)\right| < \left|x-y\right|, \forall x \ne y \in [a;b]$ thì ta có thể chứng minh được rằng phương trình $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất trên $[a;b]$. Đồng thời, hàm số tương ứng trong trường hợp đó là tồn tại, chẳng hạn $f(x)=\dfrac{a+b}{2}$ với mọi $x \in [a;b]$.

Bài 6.

Xác định các dãy số (x_n) biết rằng

$$x_{2n+1} = 3x_n + 2, \textit{ với } n = 0,1,2,...$$

Lời giải.

Từ công thức xác định dãy, ta có

$$x_{2n+1} + 1 = 3(x_n + 1) \text{ với } n = 0,1,2,...$$

Đặt $y_n = x_n + 1$ thì ta được

$$y_{2n+1} = 3y_n \text{ với } n = 0,1,2,...$$

Thay $n = m-1$ thì ta có $y_{2m-2} = 3y_{m-1}$ hay $y_{2m} = 3y_m$ với mọi $m = 1,2,3,...$

Tiếp tục đặt $y_m = m^{\log_2 3} u_m$ thì ta có $u_{2m} = \dfrac{y_{2m}}{(2m)^{\log_2 3}} = \dfrac{y_{2m}}{3m^{\log_2 3}} = \dfrac{y_m}{m^{\log_2 3}} = u_m$.

Khi đó, (u_m) là hàm nhân tính chu kì 2 và ta có được

- $u_n = u_{2k+1}$ nếu n có dạng $n = 2^m(2k+1)$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ và $k \in \mathbb{N}$;
- u_n là hàm tùy ý với các trường hợp còn lại.

Do đó, ta có được $x_m = y_m - 1 = m^{\log_2 3} u_m - 1$ và u_m xác định như trên.

Nhận xét.

Để xử lí các bài toán xác định dãy số dạng này, ta chỉ cần thực hiện lần lượt các thao tác:

(1) Khử số hạng tự do.

(2) Đưa chỉ số về dạng $x_{kn} = x_n$, tức là dãy số ở đây có dạng một hàm nhân tính.

(3) Viết công thức tổng quát cho hàm nhân tính đó và kết luận.

Trong một số trường hợp, việc khử hệ số tự do cũng không đơn giản, ta cần sử dụng thêm một số kiến thức phối hợp. Chẳng hạn, nếu dãy có dạng $x_{3n} = x_n + 1$, ta có thể đặt $y_n = x_n + v_3(n)$ với $v_3(n)$ là số mũ lớn nhất của 3 trong khai triển n thành thừa số nguyên tố. Khi đó, dễ thấy $v_3(3n) = v_3(n) + 1$ và $y_{3n} = y_n$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2007

Nhận xét chung.

Đề này chứa nhiều yếu tố của Toán sơ cấp, các phần dãy số, phương trình hàm và thậm chí là bài tích phân cũng chỉ đòi hỏi các kĩ thuật xử lí quen thuộc của THPT, cụ thể là trong chương trình thi HSG. Đề thi nhìn chung có tính phân loại khá cao nhưng chưa mang nhiều dấu ấn của một đề thi Olympic Toán cao cấp dành cho Sinh viên ĐH.

Bài 1.

Tính tích phân $I=\int_0^{2\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx\\
&=\int_0^{\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx+\int_{\pi}^{2\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx\\
&=\int_0^{\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx+\int_{\pi}^{0}\ln\left(\sin(2\pi-x)+\sqrt{1+\sin^2(2\pi-x)}\right)d(2\pi-x)\\
&=\int_0^{\pi}\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx+\int_{0}^{\pi}\ln\left(-\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx=\int_0^1\ln 1dx=0
\end{aligned}$$

Vậy tích phân cần tính là $I=0$.

Nhận xét.

Ta cũng có thể giải bài toán bằng hàm $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ và $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Nói chung các nguyên hàm của hàm số dạng hàm lượng giác nằm trong hàm logarit thường rất phức tạp và ta chỉ tính được tích phân với các cận thích hợp. Trong nhiều trường hợp, ta còn cần phải sử dụng đến các kĩ thuật khó hơn, chẳng hạn như đưa thêm tham số vào rồi đổi vai trò giữa tham số và biến.

Bài 2.

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_0 = 2007, x_n = -2007\left(\frac{x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n}\right), n \ge 1.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_n, x_{n-1} với $n \ge 1$. Từ đó, tính tổng

$$S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + ... + 2^{2007}x_{2007}.$$

Lời giải.

Từ công thức xác định dãy, ta có

$$nx_n = -2007\left(x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}\right).$$

Thay n bởi $n+1$, ta có

$$(n+1)x_{n+1} = -2007\left(x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n\right)$$

Trừ từng vế các đẳng thức, ta được

$$(n+1)x_{n+1} - nx_n = -2007x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n-2007}{n+1}x_n \text{ với mọi } n.$$

Do đó, ta có liên hệ giữa x_n và x_{n-1} là $x_n = \dfrac{n-2008}{n}x_{n-1}$ với mọi $n \ge 1$.

Ta tính được $x_1 = -2007^2 = -2007C_{2007}^1, x_2 = \dfrac{-2006}{2}(-2007^2) = 2007\dfrac{2006 \cdot 2007}{1 \cdot 2} = 2007C_{2007}^2$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $x_k = -2007(-1)^k C_{2007}^k$ với $0 \le k \le 2007$. (*)

Thật vậy,

- Với $k = 0$ thì (*) đúng.

- Giả sử (*) đúng với $k \ge 0$, tức là $x_k = -2007(-1)^k C_{2007}^k$, ta có

$$x_{k+1}=\frac{k-2007}{k+1}x_k=-2007(-1)^k\frac{k-2007}{k+1}\cdot\frac{(2008-k)\cdot\ldots\cdot 2007}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot k}=-2007(-1)^{k+1}C_{2007}^{k+1}.$$

Do đó, (*) cũng đúng với $k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp thì (*) đúng với mọi $0\le k\le 2007$.

Từ đó, ta tính được $S=\sum_{i=0}^{2007}2^i x_i=-2007\sum_{i=0}^{2007}C_{2007}^k 1^{2007-k}(-2)^k=-2007(1-2)^{2007}=2007$.

Vậy biểu thức cần tính có giá trị là $S=2007$.

Nhận xét.

Nhiều bạn sẽ xử lí được công thức truy hồi ở trên vì đây là dạng quen thuộc và ít nhất là ở năm 2006 trước đó đã có một bài tương tự. Tuy nhiên, việc rút gọn được tổng S đòi hỏi ta phải tìm được công thức tổng quát của x_n và đây chính là điểm thú vị của bài toán này. Rõ ràng nếu chúng ta chịu khó tính thử vài số hạng đầu x_0, x_1, x_2, x_3 thì có thể dự đoán được và công việc còn lại là quy nạp dễ dàng (ta cũng phải căn cứ trên dạng của biểu thức S là có chứa các lũy thừa của 2 tăng dần mới có cơ sở nghĩ đến C_{2007}^k).

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+\frac{3}{x-1},\forall x\ne 1.$$

Lời giải.

Đặt $y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$, điều kiện $y\ne 1$.

Thay vào phương trình hàm đã cho, ta có

$$f(y)=2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+\frac{3}{\frac{y+1}{y-1}-1}\text{ hay }f(y)=2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+\frac{3(y-1)}{2}.$$

Đổi về biến x, ta có $f(x)=2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{3(x-1)}{2}$.

Nhân đẳng thức đã cho với 2 rồi cộng với đẳng thức này, ta được

$$2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+f(x)=4f(x)+\frac{6}{x-1}+2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{3(x-1)}{2}$$

Suy ra $3f(x)+\frac{3(x-1)}{2}+\frac{6}{x-1}=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{2}{1-x}$ với mọi $x\neq 1$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{2}{1-x}, x\neq 1$ và $f(1)$ là một số tùy ý.

Nhận xét.

Trong trường hợp này, chỉ bằng một phép đặt ẩn phụ là ta đã đưa được phương trình hàm đã cho về dạng một "hệ phương trình hàm" hai biến và giải dễ dàng. Điều này có nghĩa là hàm số $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn $\varphi(\varphi(x))=x$. Trong nhiều trường hợp, việc đặt ẩn phụ này cần phải thực hiện nhiều lần và ta phải giải một hệ gồm nhiều phương trình hơn, hãy thay $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$ trong phương trình hàm đã cho bởi $\phi(x)=\frac{x-1}{x+1}$ để thấy rõ vấn đề (nếu kiên nhẫn tính toán, ta sẽ thấy rằng $\phi(\phi(\phi(\phi(x))))=x$).

Một đặc điểm cần chú ý của bài toán là việc kết luận giá trị $f(1)$. Do không có đủ dữ kiện để xác định nên ta sẽ cho nó nhận giá trị tùy ý. Ta thử xét một bài toán tương tự:

Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ với mọi $x\neq 0$.

Bài này giải được dễ dàng bằng cách đặt thêm $t=x+\frac{1}{x}$ và có được $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$. Tuy nhiên, nếu kết luận $f(x)=x^3-3x$ thì rõ ràng là rất thiếu sót vì giả thiết chỉ có liên quan đến $|t|\geq 2$, tương ứng với $|x|\geq 2$ nên ta không có đủ dữ kiện để xác định $f(x)$ với $|x|<2$. Do đó, ta nói $f(x)$ nhận giá trị tùy ý với $|x|<2$.

Bài 4.

Cho a,b,c,α ***là các số thực thỏa*** $\alpha \neq c-b$. ***Dãy số*** $(u_n),(v_n)$ ***được xác định bởi công thức***

$$u_1 = a, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}+b-c}, n \geq 1.$$

Biết rằng $\lim u_n = \alpha$. ***Tính giới hạn của*** $\lim v_n$.

Lời giải.

Ta biểu diễn $\dfrac{u_k}{u_{k+1}+b-c}$ dưới dạng $r\left(\dfrac{1}{u_k+s} - \dfrac{1}{u_{k+1}+s}\right)$ với r,s cố định sẽ xác định sau.

Ta có $r\left(\dfrac{1}{u_k+s} - \dfrac{1}{u_{k+1}+s}\right) = \dfrac{r(u_{k+1}-u_k)}{(u_k+s)(u_{k+1}+s)} = \dfrac{r\left(\dfrac{u_k^2+bu_k}{c} - u_k\right)}{(u_k+s)(u_{k+1}+s)} = \dfrac{ru_k\left(u_k+b-c\right)}{(u_k+s)(u_{k+1}+s)}$.

So sánh với biểu thức ban đầu, ta chọn $s = b-c$ và $r = 1$; khi đó, ta được

$$\frac{u_k}{u_{k+1}+b-c} = \frac{1}{u_k+b-c} - \frac{1}{u_{k+1}+b-c}.$$

Do đó $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}+b-c} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k+b-c} - \frac{1}{u_{k+1}+b-c}\right) = \frac{1}{u_1+b-c} - \frac{1}{u_{n+1}+b-c}$.

Do $\lim u_n = \alpha \neq c-b$ và $u_1 = a$ nên ta được

$$\lim v_n = \frac{1}{a+b-c} - \frac{1}{\alpha+b-c} = \frac{\alpha - a}{(a+b-c)(\alpha+b-c)}.$$

Nhận xét.

Bài toán tuy chứa nhiều tham số nhưng ta chỉ cần nêu ra được biểu thức dạng sai phân ở trên là có thể giải quyết nó nhanh chóng. Thông thường thì các bài này sẽ được nêu dưới dạng các số cụ thể và chúng ta đoán biểu thức dạng sai phân (hầu hết là phân số như trên) rồi sử dụng tham số biến thiên để việc lập luận được rõ ràng.

Dưới đây là một số bài toán tương tự:

(1) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(u_n^2 + u_n + 4\right), n = 1,2,3,... \end{cases}$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k + 3}, n = 1,2,3,...$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)u_n^2 + \left(2\sqrt{6} - 5\right)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}, n \geq 1. \end{cases}$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k + \sqrt{2}}, n = 1,2,3,...$ Tìm $\lim v_n$.

Bài 5.

Cho hàm số $f(x)$ ***xác định và có đạo hàm trên*** $[0;+\infty)$. ***Biết rằng tồn tại giới hạn***

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) + f'(x)\right] = 1.$$

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x)e^x$ thì $g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{e^x}.$$

Theo quy tắc L'Hospital thì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(f(x) + f'(x)\right)e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + f'(x)\right) = 1.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Nhận xét.

Bài toán không thay đổi nếu thay 1 bởi một số dương tùy ý. Hãy thử giải bài toán tương tự giới hạn sau:

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Biết rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}\cdot f'(x)\right]=1.$$

Tính giới hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Bài 6.

Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ ***với*** $a,b,c\in\mathbb{R}$ ***và*** $a\neq 0$ ***có hai nghiệm thực phân biệt thì có ít nhất một nguyên hàm của nó là đa thức bậc ba có các nghiệm đều là số thực.***

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx$ thì rõ ràng $g'(x)=f(x)$ có hai nghiệm thực nên hàm số bậc ba $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Gọi $x_1<x_2$ là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì đây cũng chính là hai điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Khi đó, với các giá trị m nằm giữa $g(x_1),g(x_2)$ thì đường thẳng $y=m$ sẽ cắt đường cong $y=g(x)$ tại 3 điểm và phương trình $g(x)=m$ có đúng 3 nghiệm.

Do đó hàm số $\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx-m$ có 3 nghiệm đều thực và đây cũng chính là nguyên hàm cần tìm của $f(x)$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Đây là một bài toán nhỏ kiểm tra kiến thức về khảo sát hàm số. Ngoài cách giải trên, ta còn nhiều cách để chứng minh sự tồn tại của nguyên hàm có 3 nghiệm thực, chẳng hạn ta có thể chỉ trực tiếp nguyên hàm đó, cụ thể là

$$h(x)=g(x)-g\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2008

Nhận xét chung.

Đề thi khá hay vì bao quát các dạng, đòi hỏi phải nắm vững đầy đủ các kiến thức liên quan như: xử lí dãy số, tính giới hạn dùng kĩ thuật tích phân xác định, khảo sát tính đơn điệu của hàm số, định lí Lagrange và khai triển Taylor. Các câu cũng được sắp theo độ khó tăng dần và chỉ dừng lại ở mức độ trung bình chứ không có bài khó. Tuy một số câu chưa thật mới mẻ, sáng tạo nhưng đòi hỏi phải tập trung khai thác sâu giả thiết cũng như đặc điểm của các kết luận thì mới có thể giải quyết trọn vẹn được.

Bài 1.

Dãy số (a_n) được xác định như sau

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, n = 1,2,3...$$

***Tính** a_{2008}.*

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $a_{n+2}a_{n+1} - a_{n+1}a_n = 1$ với mọi $n = 1,2,3,...$ Do đó dãy số $u_n = a_{n+1}a_n$ là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai là 1. Khi đó,

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n}a_n \text{ với } n = 1,2,3,...$$

Từ đó suy ra $a_{2008} = \frac{2007}{2006}\frac{2005}{2004}...\frac{3}{2}a_2 = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot 2007}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2006} = \frac{2007!!}{2006!!}$.

Nhận xét.

Trong các bài toán dãy số phi tuyến tính dạng này, ta khai thác đặc điểm của công thức để đưa về một biểu thức dễ xử lí hơn, ở đây ta đã đưa được về sai phân dạng tích.

Chú ý các kí hiệu $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n$ và $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)$.

Từ công thức của dãy trên, hãy kiểm tra thử kết quả $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$?

Bài 2.

Tính $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+...+n^{2008}}{n^{2009}}$.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+...+n^{2008}}{n^{2009}} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2008} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2008} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^{2008}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2008}$.

Xét hàm số $f(x) = x^{2008}$ thì rõ ràng $f(x)$ khả tích trên $[0;1]$. Chia đoạn $[0;1]$ thành các đoạn con bởi các điểm $x_i = \frac{i}{n}$ và chọn $c_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$ với $i = 1,2,3,...,n$. Ta được

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2008} = \lim_{n\to +\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{2008}dx = \frac{1}{2009}.$$

Vậy giới hạn cần tính là $\frac{1}{2009}$.

Nhận xét.

Phương pháp sử dụng trong bài này là dùng định nghĩa tích phân xác định để tính giới hạn. Đặc điểm của các bài toán dạng này rất dễ nhận biết, đó chính là chỉ cần một số biến đổi, ta có thể đưa được về $\frac{\sum_{i=1}^{n} f(i)}{n}$. Đây có lẽ là phương pháp tốt nhất và duy nhất để giải bài này, trong nhiều trường hợp, hàm số $f(x)$ cũng không dễ dàng để nhận ra.

Ta thử xem xét các bài toán sau:

(1) Tính giới hạn sau $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right)$.

(2) Tính giới hạn sau $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

(3) Tính giới hạn sau $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^2}{2^2+n^2}+\frac{2^2}{4^3+n^3}+\frac{3^2}{8^3+n^3}...+\frac{n^2}{(2n)^2+n^3}\right)$.

Bài 3.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$ và $f(0)=f(\pi)=0$ thỏa mãn điều kiện

$$|f'(x)|<1 \textbf{ với mọi } x\in(0;\pi).$$

Chứng minh rằng

i. Tồn tại $c\in(0;\pi)$ sao cho $f'(c)=\tan f(c)$.

ii. $|f(x)|<\frac{\pi}{2}$ ***với mọi*** $x\in(0;\pi)$.

Lời giải.

i. Xét hàm số $g(x)=e^{-x}\sin f(x)$ thì rõ ràng $g(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, khả vi trong $(0;\pi)$ và $g(0)=g(\pi)=0$. Theo định lí Rolle thì tồn tại $c\in(0;\pi)$ sao cho $g'(c)=0$.

Ta cũng có $g'(x)=e^{-x}\left(-\sin f(x)+\cos f(x)f'(x)\right)$ nên

$$-\sin f(c)+\cos f(c)\cdot f'(c)=0\Leftrightarrow f'(c)=\tan f(c).$$

Do đó, giá trị c này thỏa mãn đề bài.

ii. Với mỗi $x\in(0;\pi)$ cố định, chú ý rằng $|f'(x)|<1,\forall x\in(0;\pi)$ nên theo định lí Lagrange:

- Tồn tại $c_1\in(0;x)$ sao cho $|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(c_1)||x-0|<|x|$.

- Tồn tại $c_2\in(x,\pi)$ sao cho $|f(x)|=|f(\pi)-f(x)|=|f'(c_2)||\pi-x|<|\pi-x|$.

Do $x\in(0;\pi)$ nên $\min\{|x|,|\pi-x|\}\le\frac{\pi}{2}$. Suy ra $|f(x)|<\min\{|x|,|\pi-x|\}\le\frac{\pi}{2}$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Ở câu hỏi đầu tiên, ta phân tích ngược lại từ biểu thức cần chứng minh

$$f'(c) = \tan f(c) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{\sin f(c)}{\cos f(c)} \Leftrightarrow \cos f(c) \cdot f'(c) = \sin f(c).$$

Chú ý rằng $\left(\sin f(c)\right)' = \cos f(c) \cdot f'(c)$ nên đẳng trên trên có dạng "tại một điểm nào đó, giá trị của hàm số bằng giá trị của đạo hàm". Nhưng xử lí điều này thì nói chung đã không còn xa lạ gì với việc sử dụng hàm số có dạng $e^{-x} f(x)$. Ý thứ hai của bài toán đòi hỏi phải đánh giá miền giá trị của hàm số thông qua miền giá trị cho trước của đạo hàm, việc này thường được giải quyết nhờ tính đơn điệu của hàm số hoặc định lí Lagrange. Do đó, tùy vào tình huống mà chúng ta có thể lựa chọn các công cụ phù hợp.

Bài 4.

Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[0;1]$ *thỏa mãn điều kiện

$$xf(y) + yf(x) \le 1 \textbf{ \textit{với mọi} } x, y \in [0;1].$$

***Chứng minh rằng* $\int_0^1 f(x)dx \le \frac{\pi}{4}$.**

Lời giải.

Đặt $x = \sin\varphi$ với $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ thì ta có

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

Mặt khác, nếu đặt $x = \cos\phi, \phi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ thì ta có

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\phi)\sin\phi d\phi.$$

Do đó $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(\sin t)\cos t + f(\sin t)\cos t \right) dt$.

Theo giả thiết thì $xf(y)+yf(x)\le 1$ với mọi $x,y\in[0;1]$ nên suy ra

$$2I\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}\text{ hay } I\le\frac{\pi}{4}.$$

Nhận xét.

Nhiều bạn cho rằng đánh giá theo cách đổi biến thành hàm lượng giác như trên hơi thiếu tự nhiên và có vẻ giả thiết được sử dụng chưa triệt để (giả thiết cho bất đẳng thức đúng với mọi x,y và ta chỉ sử dụng một lần khi đặt $x=\sin t, y=\cos t$); tuy nhiên, giả thiết đó được đưa ra để hướng tới đẳng thức có sẵn

$$2\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(\sin t)\cos t+f(\sin t)\cos t\right)dt$$

Bằng chứng là số 1 trong bất đẳng thức $xf(y)+yf(x)\le 1$ hoàn toàn có thể thay bằng số khác. Và vì thế, rất khó khăn khi tiếp cận bài toán theo ý tưởng dùng bất đẳng thức đại số với kinh nghiệm là $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, đưa về chứng minh $f(x)\le\frac{1}{1+x^2}$ với mọi $x\in[0;1]$. Từ giả thiết $xf(y)+yf(x)\le 1$ với mọi $x,y\in[0;1]$, trước mắt, ta có $f(x)\le\frac{1}{2x}$ với $x\in[0;1]$. Nhưng đánh giá đang yêu cầu ở trên lại chặt hơn, khai thác tiếp là điều không dễ dàng!

Bài 5.

Giả sử hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[0;1]$ *và* $f(0)=0, f(1)=1$*, khả vi trong* $(0;1)$*. Chứng minh rằng với mọi* $\alpha\in(0;1)$ *thì luôn tồn tại* $x_1,x_2\in(0;1)$ *sao cho

$$\frac{\alpha}{f'(x_1)}+\frac{1-\alpha}{f'(x_2)}=1.$$

Lời giải.

Do $f(x)$ liên tục nên với mỗi $\alpha\in[0;1]$ thì tồn tại $x_0\in(0;1)$ sao cho $f(x_0)=\alpha$.

Theo định lí Lagrange thì tồn tại $x_1\in(0;x_0)$ và $x_2\in(x_0;1)$ sao cho

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(x_1)\text{ và }\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(x_2).$$

Từ đó suy ra $f'(x_1)=\dfrac{\alpha}{x_0}, f'(x_2)=\dfrac{1-\alpha}{1-x_0}$ và

$$\frac{\alpha}{f'(x_1)}+\frac{1-\alpha}{f'(x_2)}=\frac{\alpha}{\alpha/x_0}+\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)/(1-x_0)}=x_0+1-x_0=1.$$

Ta có đpcm.

Nhận xét.

Bài này thì áp dụng định lí Lagrange là hoàn toàn tự nhiên, nếu chủ động giải thử thì có lẽ điểm quan trọng nhất ta cần vượt qua là nhận xét được tồn tại $x_0\in(0;1)$ để $f(x_0)=\alpha$.

Nếu biến đổi biểu thức trên thành $a=\dfrac{f'(x_1)f'(x_2)-f'(x_1)}{f'(x_2)-f'(x_1)}$ thì lại hoàn toàn không dễ xử lí. Rất dễ hiểu, là vì chứng minh tồn tại một số thỏa mãn một đẳng thức thì dễ nhưng chứng minh tồn tại hai số cùng thỏa mãn một đẳng thức thì không đơn giản chút nào.

Bài 6.

Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(0)>g(0) \text{ và } \int_0^\pi f(x)dx<g(0)\pi+\frac{g'(0)}{2}\pi^2.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c\in[0;\pi]$ sao cho $f(c)=g(c)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=g(x)-f(x)$ thì $h(x)$ cũng liên tục. Theo giả thiết thì $h(0)<0$.

Ta cũng có $g''(x)>0$ nên khai triển Taylor cho hàm số $h(x)$ tại $x=0$ và tính tích phân cho hàm số này, ta thu được

$$\int_0^\pi h(x)dx=\int_0^\pi g(x)dx-\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\left[g(0)+g'(0)+\frac{g''(\xi)}{2}x^2\right]dx-\int_0^\pi f(x)dx$$

$$>\int_0^\pi g(0)dx+\int_0^\pi g'(0)dx-\int_0^\pi f(x)dx=g(0)\pi+\frac{g'(0)\pi^2}{2}-\int_0^\pi f(x)dx>0$$

Suy ra tồn tại $m \in [0;\pi]$ sao cho $h(m) > 0$.

Do tính liên tục của hàm số $h(x)$ trên đoạn $[0;m]$ thì tồn tại $c \in (0;m) \subset [0;\pi]$ sao cho $h(c) = 0$. Từ đó suy ra $f(c) = g(c)$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Ta thấy rằng giả thiết cho trước rất "lộ liễu" $\int_0^{\pi} f(x)dx < g(0)\pi + \frac{g'(0)}{2}\pi^2$ với ý tưởng sử dụng khai triển Taylor cho hàm số. Do đó, trong bài này, chỉ cần nắm vững công thức khai triển Taylor của hàm số là có thể giải quyết tốt bài toán:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)! + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + R_n(x) \text{ với } R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Chúng ta hoàn toàn có thể dựa trên ý tưởng này mà phát biểu một bài toán tương tự ở dạng tổng quát như sau:

Cho các số dương $0 < a < b$ và các số nguyên dương $r < s$. Xét hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $g^{(s)}(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và s là số nguyên dương nào đó. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(a) > g(a) \text{ và } \int_a^b f(x)dx < \sum_{i=1}^{r} \frac{g(a)}{i!} b^i .$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a;b]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2009

Nhận xét chung.

Ngoài câu 2 khó ra thì các câu còn lại thuộc dạng cơ bản, không đòi hỏi nhiều kĩ thuật xử lí và thậm chí là hoàn toàn giải bằng các kiến thức về giải tích sơ cấp một cách nhẹ nhàng. Các câu 1, 3 và 5 còn nặng tính đại số; chưa thể hiện được vai trò của hàm số, đối tượng cơ bản trong Giải tích. Nói chung các bạn nào nắm vững thêm kĩ thuật tích phân từng phần để biến đổi tích phân thì có thể giải quyết trọn vẹn đề thi này khá nhanh chóng.

Bài 1.

Giả sử dãy số (x_n) ***được xác định bởi công thức***

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1, \\ x_n = (n-1)\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right), n = 3,4,5,... \end{cases}$$

Tính x_{2009}.

Lời giải.

Từ điều kiện đã cho, ta có

$$x_n - nx_{n-1} = -x_{n-1} + (n-1)x_{n-2} \text{ với mọi } n = 3,4,5,...$$

Đặt $y_n = x_n - nx_{n-1}$ thì ta có $y_n = -y_{n-1}$ và $y_2 = x_2 - 2x_1 = -1$ nên $y_n = (-1)^{n+1}$.

Suy ra $x_n - nx_{n-1} = (-1)^{n+1}$ hay $\dfrac{x_n}{n!} - \dfrac{x_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, từ công thức sai phân này, tính tổng hai vế, ta có được

$$\frac{x_n}{n!} - \frac{x_1}{1!} = \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x_i}{i!} - \frac{x_{i-1}}{(i-1)!}\right) = \sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

Do đó $\frac{x_n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ hay $x_n = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$.

Từ đó ta tính được $x_{2009} = 2009!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... - \frac{1}{2008!} + \frac{1}{2009!}\right)$.

Nhận xét.

Cũng như nhiều bài toán truy hồi phi tuyến khác, ở đây ta cần tìm cách đặt thêm dãy số mới để đơn giản hóa quan hệ truy hồi (chỉ còn truy hồi giữa hai số hạng liên tiếp).

Nếu đổi số hạng đầu tiên thành $x_1 = 0$ thì công thức của dãy số có thay đổi một ít là:

$$x_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \text{ với mọi } n.$$

Xét dãy số $y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ thì ta có kết quả quen thuộc $\lim_{n\to+\infty} y_n = e$ (khai triển Taylor của e^x tại $x = 1$). Liên hệ giữa x_n, y_n được cho bởi công thức

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n y_n}{n!} = 1 \text{ hay } \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Bài 2.

Cho hàm số $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ ***có đạo hàm cấp 2 liên tục và*** $f''(x) > 0$ ***trên*** $[0;1]$***. Chứng minh rằng*** $2\int_0^1 f(t)dt \geq 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0)$.

Lời giải.

Ta sử dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 f(t^2)dt = \int_0^1 f(t)d(\sqrt{t})$.

Đặt $u = f(t), dv = d(\sqrt{t})$ thì $du = f'(t)$ và chọn $v = \sqrt{t} - 1$. Ta có

$$\int_0^1 f(t^2)dt = f(t)(\sqrt{t} - 1)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(t)\left(\sqrt{t} - 1\right)dt = f(0) + \int_0^1 f'(t)\left(1 - \sqrt{t}\right)dt.$$

Tiếp tục áp dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 f'(t)\left(1 - \sqrt{t}\right)dt$, ta được

$$\int_0^1 f'(t)\left(1-\sqrt{t}\right)dt = \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f''(x)\left(x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dx .$$

Do đó, $\int_0^1 f(t^2)dt = f(0) + \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f''(x)\left(x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dx$.

Với tích phân $\int_0^1 f(t)dt$, ta đặt $u = f(t), dv = dt$ thì $u = f'(t)$ và chọn $v = t-1$, ta được

$$\int_0^1 f(t)dt = f(t)(t-1)\Big|_0^1 - \int_0^1 (t-1)f'(t)dt = f(0) + \int_0^1 (1-t)f'(t)dt$$

Tiếp tục áp dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 (1-t)f'(t)dt$, ta được

$$\int_0^1 (1-t)f'(t)dt = \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f''(t)dt .$$

Do đó, $\int_0^1 f(t)dt = f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f''(t)dt$.

Bất đẳng thức cần chứng minh chính là

$$2\left(f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f''(t)dt\right) \ge 3\left(f(0) + \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f''(t)\left(t - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dt\right) - f(0) \text{ hay}$$

$$\int_0^1 (1-t)^2 f''(t)dt \ge \int_0^1 f''(t)\left(2t^{\frac{3}{2}} + 1 - 3t\right)dt .$$

Tuy nhiên, dễ thấy $(1-t)^2 \ge 2t^{\frac{3}{2}} + 1 - 3t, \forall t \in [0;1]$ vì bất đẳng thức này tương đương với

$$t + t^2 \ge 2t^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 1 + t \ge 2\sqrt{t} \text{, đúng theo BĐT Cauchy.}$$

Từ đó ta có đpcm.

Nhận xét.

Cách dùng tích phân từng phần để biến đổi tích phân về dạng thích hợp để áp dụng giả thiết cũng khá phổ biến và đáng được chú ý. Nhờ nó mà ta đã chuyển hàm số dưới dấu tích phân dạng $f(x^2)$ thành $f(x)$ và tận dụng được $f''(x) \ge 0, \forall x \in [0;1]$.

Dưới đây là một bài tương tự:

Cho $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ là một hàm khả vi cấp 2 và thỏa mãn $f''(x)\ge 0,\forall x\in[0;1]$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$2\int_0^1(1-x)f(x)dx\le\int_0^1 f(x^2)dx.$$

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x)\le 4+2009x,\forall x\in\mathbb{R}\\ f(x+y)\le f(x)+f(y)-4,\forall x,y\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x)-4$ với mọi x thì ta có $\begin{cases} g(x)\le 2009x,\forall x\in\mathbb{R} & (1)\\ g(x+y)\le g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R} & (2)\end{cases}$.

Trong (1), thay $x=0$, ta có $g(0)\le 0$.

Trong (2), thay $y=0$, ta có $g(x)\le g(x)+g(0)\Leftrightarrow g(0)\ge 0$.

Do đó, ta phải có $g(0)=0$.

Trong (1), thay x bởi $-x$, ta có $g(-x)\le -2009x$, suy ra $g(x)+g(-x)\le 0$.

Trong (2), thay $y=-x$, ta có $g(x)+g(-x)\ge g(x-x)=0$.

Do đó, ta phải có $g(x)+g(-x)=0$ hay $g(-x)=-g(x)$.

Kết hợp với $g(-x)\le -2009x$, ta được $-g(x)\le -2009x\Leftrightarrow g(x)\ge 2009x$ với mọi x.

Từ bất đẳng thức này và (1), ta suy ra $g(x)=2009x$ với mọi x.

Do đó $f(x)=2009x+4$ với mọi x.

Thử lại, ta thấy thỏa.

Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=2009x+4$ với $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét.

Bài toán này có dạng một hệ bất phương trình hàm đại số. Tư tưởng chính để giải quyết dạng này là tận dụng các bất đẳng thức để:

- Hoặc chỉ ra một điều vô lí nào đó.

- Hoặc đưa về dạng $a \le b \le a$ thì dẫn đến đẳng thức $a = b$ phải xảy ra.

Dưới đây là một số bài tương tự:

(1) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge 3f(x+2y+3z) \text{ với mọi } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(2) Cho a, b là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $f(x+a) \le f(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x+b) \ge f(x) + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$, dễ thấy $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ điều kiện đã cho, ta thấy $h(x)$ không có nghiệm thực.

Giả sử tồn tại $a \ne b$ sao cho $h(a)$ và $h(b)$ trái dấu thì $h(x) = 0$ có nghiệm nằm giữa a, b, mâu thuẫn. Do đó $h(x)$ giữ nguyên dấu trên cả miền $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) > g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay x bởi $f(x)$, ta có $f\left(f(x)\right) > g\left(f(x)\right) = f\left(g(x)\right) > g\left(g(x)\right)$ với mọi x.

Từ đó suy ra phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ không có nghiệm thực.

Nhận xét.

Ở đây ta áp dụng định lí trung gian cho hàm liên tục, một kết quả quen thuộc là nếu trên một miền *D*, hàm số vô nghiệm thì nó không đổi dấu trên *D*. Định lí này còn rất hữu ích trong nhiều trường hợp, chẳng hạn để giải một bất phương trình rắc rối, ta chuyển về giải phương trình tìm các nghiệm rồi lập bảng xét dấu là xong.

Dưới đây là một bài tương tự với bài toán trên:

Cho $f, g : [0;1] \to [0;1]$ là các hàm số liên tục, thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0;1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

b. Giả sử rằng $f(x)$ đơn điệu, chứng minh tồn tại $x_0 \in [0;1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

c. Hãy cho phản ví dụ trong trường hợp thay miền $[0;1]$ bởi $\mathbb{R}$.

Bài 5.

Cho hai dãy số $(x_n),(y_n)$ ***xác định bởi công thức***

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}, n = 1,2,3,...$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2;3)$ ***với*** $n = 2,3,4,...$ ***và*** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Lời giải.

Đặt $x_1 = \cot a_1 = \sqrt{3}$ với $a = \frac{\pi}{6}$, ta có

$$x_2 = \cot a + \sqrt{1+\cot^2 a} = \cot a + \frac{1}{\sin a} = \frac{\cos a + 1}{\sin a} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \cot\frac{a}{2} = \cos\frac{\pi}{2^2\cdot 3}.$$

Do đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được $x_n = \cot\frac{\pi}{2^n \cdot 3}$ với $n \geq 1$.

Tương tự, đặt $y_1 = \tan b = \sqrt{3}$ với $b = \frac{\pi}{3}$ thì ta có

$$y_2 = \frac{\tan b}{1+\sqrt{1+\tan^2 b}} = \frac{\tan b}{1+\frac{1}{\cos b}} = \frac{\sin b}{1+\cos b} = \frac{2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}} = \tan\frac{b}{2} = \tan\frac{\pi}{3\cdot 2}.$$

Bằng quy nạp, ta cũng chứng minh được rằng $y_n = \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ với $n \geq 1$.

Từ đó suy ra $x_n y_n = \cot\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \cot\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\frac{2\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{1-\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n}} = \frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}$ với mọi $n \geq 1$. Ta thấy $\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n} > 0$ và $\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n} < \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$ nên

$$2 < x_n y_n < 3 \text{ với mọi } n = 2,3,4,...$$

Ta cũng có $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \tan 0 = 0$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Các biểu thức có dạng $f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$ và $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ rất dễ gợi ý cho ta nghĩ đến các hàm lượng giác vì $f(\cot x) = \cot\frac{x}{2}$ và $g(\tan x) = \tan\frac{x}{2}$. Sau khi đã tìm được các công thức tổng quát thì công việc lại là chỉ cần xử lí đại số là xong. Do đó, việc chú ý các đặc trưng hàm của các hàm số quen thuộc cũng là một công việc có ích khi nó giúp ta nhận biết bản chất của vấn đề nhanh chóng hơn. Chẳng hạn $f(x) = \frac{4x-4x^3}{x^4-6x^2+1}$ thỏa mãn tính chất sau $f(\tan x) = \tan 4x$.

Một bài toán tương tự:

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, n \geq 2$ và xét dãy số sau $v_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc}\cot u_i, n = 1,2,3,...$ Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Bài 6.

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2^x = P(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực.

b) Cho $f(x)-x, f(x)-x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Xét hàm số $g(x) = 2^x - P(x)$ thì dễ thấy do $P(x)$ là đa thức bậc n nên

$$P^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow g^{(n+1)}(x) = 2^x(\ln 2)^{n+1} > 0.$$

Đạo hàm cấp $n+1$ của hàm số $g(x)$ không đổi dấu nên theo định lí Rolle thì phương trình $g(x) = 0$ có không quá $n+1$ nghiệm. Ta có đpcm.

b) Giả sử tồn tại $a > b$ sao cho $f(a)-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 < f(b)-\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$, suy ra

$$f(a)-a^3+\left(a^3-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) < f(b)-b^3+\left(b^3-\frac{\sqrt{3}}{2}b^2\right) \text{ và}$$

$$f(a)-a+\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) < f(b)-b+\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2}b^2\right).$$

Theo giả thiết thì $f(x)-x, f(x)-x^3$ là các hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(a)-a^3 > f(b)-b^3 \text{ và } f(a)-a > f(b)-b.$$

Từ đó suy ra a,b nằm trong miền mà các hàm số $x^3-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và $x-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ nghịch biến.

Ta thấy $x^3-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, còn hàm số $x-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ thì nghịch biến trên $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right]$ nên ta phải có đồng thời $a,b\in\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cap\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right]=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Tuy nhiên $a>b$ nên điều này không thể xảy ra nên điều giả sử là sai.

Vậy hàm số $f(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét.

Ở câu a, ta thấy rằng phương trình đã cho có dạng hàm số mũ bằng đa thức. Ta biết rằng đạo hàm cấp $n+1$ của đa thức bậc n là bằng 0 còn của hàm số mũ dạng a^x thì lại không đổi dấu nên xử lí hoàn toàn dễ dàng. Một câu hỏi đặt ra là ứng với mỗi số nguyên dương *n*, có luôn tồn tại đa thức bậc *n* thỏa mãn phương trình $2^x=P(x)$ có đúng $n+1$ nghiệm không?

Câu b của bài này tuy không mới nhưng khá thú vị. Dù chỉ đơn thuần áp dụng định nghĩa của hàm đơn điệu nhưng cũng đòi hỏi phải lựa chọn hướng tiếp cận phù hợp là phản chứng. Ta có thể đi theo một con đường tự nhiên hơn là khảo sát dấu đạo hàm:

Giả thiết đã cho có thể viết lại là

$$f'(x)>1, f'(x)>3x^2 \text{ với mọi } x.$$

Ta cần chứng minh $f'(x)>\sqrt{3}x$ với mọi x.

Rõ ràng $f'(x)>0$ nên ta chỉ cần xét với $x>0$ vì nếu $x\le 0$ thì hiển nhiên $\sqrt{3}x<f(x)$, ta nhân hai bất đẳng thức đã cho, vế theo vế, lại thì được

$$\left(f'(x)\right)^2>3x^2 \Rightarrow f'(x)>\sqrt{3}x \text{ với mọi } x.$$

Với cách tiếp cận này, rõ ràng độ khó của hai bài a và b là như nhau.

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2010

Nhận xét chung.

Có thể nói trong các năm gần đây thì đề thi Giải tích 2010 là đề hay nhất với độ phân loại, tính mới mẻ của dạng Toán cũng như độ bao quát (bên cạnh đó thì đề Đại số 2010 cũng là một đề hay, nhiều câu khá thú vị). Nếu như ở các câu 2, 3 là quá quen thuộc và dễ thì câu 1 và 6 sẽ thuộc dạng trung bình, cần phải đầu tư thích hợp mới giải quyết được trọn vẹn. Câu 4 và 5 chính là điểm nhấn của đề với đặc trưng giải tích mà ta có thể nhận định là "thực sự dành cho SV thi Olympic". Sẽ không quá khó khăn để giải các câu 1, 2, 3 và 6 nhưng để giải quyết trọn vẹn hai câu còn lại thì đúng là một thử thách không nhỏ.

Bài 1.

Cho hàm số $f(x)=\ln(x+1)$.

a. Chứng minh rằng với mọi $x>0$, ***tồn tại duy nhất số thực*** c ***thỏa mãn*** $f(x)=xf'(c)$ ***mà ta kí hiệu là*** $c(x)$.

b. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{c(x)}{x}$.

Lời giải.

a. Ta cần chứng minh rằng phương trình $\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{1}{c+1}$ có nghiệm duy nhất là c với mọi $x>0$. Dễ dàng tính được $c=\dfrac{x}{\ln(x+1)}-1$.

b. Ta cần tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{c(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{\ln(x+1)}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}.$$

Theo quy tắc L'Hospital thì

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\dfrac{1}{1+x}}=\frac{1}{2}.$$

Vậy giới hạn cần tìm là $\frac{1}{2}$.

Nhận xét.

Đây là một bài cơ bản kiểm tra các kiến thức về đạo hàm, giới hạn. Tuy không khó nhưng phát biểu tương đối lạ và nếu ở đây không dùng quy tắc L'Hospital hoặc dùng nhưng không tách ra thành 2 phần để tính riêng thì cũng khá vất vả mới chỉ ra được giới hạn như trên.

Bài 2.

Cho dãy (x_n) ***xác định bởi*** $x_1=1, x_{n+1}=x_n\left(1+x_n^{2010}\right)$ ***với*** $n=1,2,3,...$

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2010}}{x_2}+\dfrac{x_2^{2010}}{x_3}+...+\dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$**.**

Lời giải.

Trước hết, ta thấy dãy này tăng thực sự và nếu dãy này bị chặn thì tồn tại giới hạn, đặt giới hạn đó là $L>0$. Chuyển công thức xác định của dãy qua giới hạn, ta có

$$L=L(1+L^{2010})\Leftrightarrow L=0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=+\infty$. Với mỗi $k\ge 1$, ta có

$$\frac{x_k^{2010}}{x_{k+1}}=\frac{x_k^{2011}}{x_kx_{k+1}}=\frac{x_k-x_{k+1}}{x_kx_{k+1}}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2010}}{x_2}+\dfrac{x_2^{2010}}{x_3}+...+\dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)=1$.

Vậy giới hạn cần tính là 1.

Nhận xét.

Dạng giới hạn dãy số này khá phổ biến và trong đề Giải tích trước đó cũng đã có xuất hiện. Ta có thể liệt kê ra các bước chính để xử lí dạng Toán này là:

- Chứng minh dãy (u_n) không bị chặn và tiến tới vô cực (thực ra nếu nó tiến tới một điểm cụ thể nào đó thì cũng giải quyết tương tự).

- Biểu diễn từng số hạng thành dạng sai phân rồi rút gọn.

- Tính toán giới hạn thu được rồi kết luận.

Một số bài toán tương tự:

(1) Cho $a > 0$ và xét dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{a}$ với $n = 1,2,3,...$

Tính giới hạn của tổng $\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}$.

(2) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$ với mọi $n \geq 2$.

Đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$. Chứng minh rằng:

a. Dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b. Dãy số $\frac{x_n}{n}$ hội tụ về 1.

Bài 3.

Cho số thực a ***và hàm số*** $f(x)$ ***khả vi trên*** $[0;+\infty)$ ***thỏa mãn các điều kiện*** $f(0) \geq 0$ ***và*** $f(x) + af'(x) \geq 0$ ***với mọi*** $x \in [0;+\infty)$.

Chứng minh rằng $f(x) \geq 0$ ***với mọi*** $x \geq 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=e^{ax}f(x)$ với $x\in[0;+\infty)$ thì dễ thấy hàm số này khả vi trên $[0;+\infty)$ và

$$g'(x)=e^{ax}\left(f(x)+af'(x)\right)\geq 0 \text{ với mọi } x\in[0;+\infty).$$

Do đó $g(x)\geq g(0)=e^{0}f(0)\geq 0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $e^{ax}f(x)\geq 0$ hay $f(x)\geq 0$ với mọi $x\geq 0$.

Nhận xét.

Câu hỏi dạng này đã xuất hiện nhiều trước đó và ở đây được giới thiệu với hình thức khá đơn giản. Tuy nhiên, cách đặt hàm số như thế nếu chưa sử dụng để giải toán lần nào thì nói chung cũng không phải dễ dàng để nghĩ ra.

Bài 4.

Cho hàm số $f(x)$ ***khả vi liên tục trên*** $[0;1]$***. Giả sử rằng***

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c\in(0;1)$ ***sao cho*** $f'(c)=6$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=6x-2$ thì dễ dàng thấy rằng

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 xg(x)dx=1.$$

Từ đó suy ra $\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=0$.

Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$ thì $h(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx=0$.

Do đó không thể có $h(x)>0,\forall x\in(0;1)$ hoặc $h(x)<0,\forall x\in(0;1)$. Suy ra phương trình $h(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.

Giả sử $h(x)=0$ chỉ có một nghiệm là $x=a\in(0;1)$. Ta có các trường hợp:

(1) Nếu $h(x)<0$ với mọi $x\in(0;a)$ thì $h(x)>0$ với mọi $x\in(a;1)$. Ta có

$$\int_0^1 xf(x)dx - 1 = \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 xh(x)dx = \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx$$
$$> \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx = \int_0^1 ah(x)dx = 0$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > 1$, mâu thuẫn với giả thiết.

(2) Nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in (0;a)$ thì $h(x) < 0$ với mọi $x \in (a;1)$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $\int_0^1 xf(x)dx < 1$, mâu thuẫn.

Suy ra phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0;1)$. Giả sử hai nghiệm đó là $a, b \in (0;1)$ với $a < b$.

Ta có $h(a) = h(b) = 0$ nên $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$. Do tính liên tục của hàm số $h(x)$, theo định lí Lagrange thì tồn tại $c \in (a;b) \subset (0;1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6.$$

Từ đây ta có đpcm.

Nhận xét.

Hàm số $g(x)$ được đưa vào đúng là khá bất ngờ và cũng đúng là nó thỏa mãn giả thiết

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (6x-2)dx = (3x^2 - 2x)\Big|_0^1 = 1, \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 2x)dx = (2x^3 - x^2)\Big|_0^1 = 1.$$

Liên hệ giữa giả thiết và kết luận rất khéo và một cái khó của bài toán chính là $f'(c) = 6$, tại sao lại là số 6, số khác có được không? Hãy phân tích kĩ thêm bài toán để có câu trả lời thích hợp.

Một bài tổng quát xuất phát từ ý tưởng của bài toán này:

Cho các số dương a, b. Xét hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;a]$. Giả sử rằng

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a xf(x)dx = b.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0;a)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{6b(2-a)}{a^3}$.

Bài 5.

Cho đa thức $P(x)$ ***bậc*** n ***có hệ số thực sao cho*** $P(-1)\neq 0$ ***và*** $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)}\leq\dfrac{n}{2}$. ***Chứng minh rằng*** $P(x)$ ***có ít nhất một nghiệm*** x_0 ***với*** $|x_0|\geq 1$.

Lời giải.

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$. Khi đó, theo định lí Bezout thì tồn tại $k\in\mathbb{R}$ sao cho $P(x)=k\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$. Ta có các công thức

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\Rightarrow -\frac{P'(-1)}{P(-1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}.$$

Do đó $\dfrac{n}{2}+\dfrac{P'(-1)}{P(-1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x_i+1}\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-1}{x_i+1}\right)$.

Ta có $\dfrac{x_i-1}{x_i+1}=\dfrac{(x_i-1)(\overline{x_i}+1)}{|x_i+1|^2}\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{x_i-1}{x_i+1}\right)=\dfrac{|x_i|^2-1}{|x_i+1|^2}$ với mọi $i=1,2,3,...,n$.

Vì $\dfrac{n}{2}+\dfrac{P'(-1)}{P(-1)}\in\mathbb{R}$ nên $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{|x_i|^2-1}{|x_i+1|^2}\geq 0$.

Từ đẳng thức này ra $P(x)$ phải có ít nhất một nghiệm x_0 mà $|x_0|\geq 1$.

Nhận xét.

Cái khó của bài này chính là phải xử lí trên số phức các nghiệm của phương trình. Tất nhiên dù là thực hay phức thì đa thức cũng thỏa mãn định lí Bezout, định lí Viete,... Thực ra nếu thay đa thức đã cho bằng đa thức có n nghiệm thực thì lời giải vẫn tương tự nhưng lập luận trên tập số thực sẽ dễ dàng hơn, đến đoạn

$$\frac{n}{2}+\frac{P'(-1)}{P(-1)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-1}{x_i+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2-1}{(x_i+1)^2}\right)\geq 0$$

thì bài toán hoàn tất. Dạng toán này khá lâu mới có xuất hiện lại trong đề Olympic SV.

Các bài toán tương tự:

(1) Giả sử đa thức $P(x)=x^{2008}-mx+m\left(m\neq 0\right)$ và có đủ 2008 nghiệm thực. Chứng minh rằng trong các nghiệm của $P(x)$, có ít nhất một nghiệm x_0 thoả mãn điều kiện $\left|x_0\right|\le\sqrt{2}$.

(2) Cho đa thức $P(x)=3x^6-9x^5+18x^4-21x^3+15x^2-6x+1, x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có 3 nghiệm a,b,c thực hoặc phức phân biệt mà $|a|+|c|=3+|b|$.

Bài 6.

a. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ sao cho $f(1)=ef(0)$ và

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1.$$

b. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(1)=2010$ và

$$f(x+y)=2010^x f(y)+2010^y f(x) \textbf{ \textit{với mọi} } x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải.

a. Ta có

$$0\le\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\int_0^0\frac{f'(x)}{f(x)}dx+1$$
$$=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\ln f(x)\Big|_0^1+1=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\ln\frac{f(1)}{f(0)}+1=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-1$$

Từ đó ta có $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\ge 1$.

Hơn nữa, theo giả thiết thì $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1$ nên đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx=0$$

Do hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ nên ta được

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \text{ với mọi } x \in [0;1].$$

Suy ra $f(x) = f'(x), x \in [0;1]$, do đó $f(x) = ce^x, c > 0$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn đề bài.

b. Từ giả thiết, ta có

$$2010^{-(x+y)} f(x+y) = 2010^{-y} f(y) + 2010^{-x} f(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $2010^{-x} f(x) = g(x)$. Ta có

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Đây chính là phương trình hàm Cauchy và nhờ tính liên tục của $g(x)$, ta thu được nghiệm là $g(x) = ax$, suy ra $f(x) = ax \cdot 2010^x$. Hơn nữa, từ điều kiện $f(1) = 2010$, ta có $a = 1$ và $f(x) = x \cdot 2010^x$.

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = x \cdot 2010^x, x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét.

Câu a của bài toán này đưa về một phương trình vi phân, nói chung ít xuất hiện trong các kì thi Olympic SV. Nếu không công nhận các lí thuyết về phần này thì khó có thể chứng minh rằng $f(x) = ce^x, c > 0$ đã mô tả hết các nghiệm có thể có. Đoạn lập luận để dẫn đến đẳng thức xảy ra đã khéo léo sử dụng được giả thiết. Câu b thì dễ hơn rõ ràng vì chỉ cần một thao tác chia hai vế cho 2010^{x+y} là đưa được về phương trình hàm Cauchy. Có lẽ hầu hết các thí sinh sẽ ưu tiên xử lí bài này hơn là chọn câu a.

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2011

Nhận xét chung.

Đề thi này không có bài nào quá khó, hầu hết các câu ở mức độ trung bình và cũng mang tính suy luận dựa trên kiến thức cơ bản về hàm số, giới hạn,... chứ không đòi hỏi phải có quá nhiều kinh nghiệm thi cử. Các câu 1, 2, 6 là dễ; 3,4 là trung bình và câu 5 là một bài khá mới chứ không khó (ở đề Đại số của năm này cũng có bài về định thức ma trận nhưng phát biểu thông qua một bài toán trò chơi khá thú vị). Đề thi như vậy rõ ràng là hay nhưng một điều hơi tiếc là cũng chưa có sự xuất hiện nhiều của các yếu tố Giải tích cao cấp như: khai triển Taylor, định lí Lagrange, các tính chất của tích phân cũng còn khá mờ nhạt (một học sinh THPT bỏ đi câu 6b thì cũng có thể làm trọn vẹn đề này).

Bài 1.

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

a. Chứng minh rằng $f(x)=x$ ***có nghiệm duy nhất trong*** $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ ***và*** $f'(x)$ ***đồng biến.***

b. Chứng minh dãy số (u_n) ***xác định bởi*** $u_1=1, u_{n+1}=f(u_n)$ ***thỏa mãn*** $u_n\in\left[\dfrac{1}{2};1\right],\forall n$.

Lời giải.

a. Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$ thì

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}-1<0 \text{ với mọi } x\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Do đó, $g(x)$ đơn điệu giảm trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Mặt khác, ta cũng có $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{e}}{9}-\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{e}-9}{18}>0$ và $g(1)=\frac{e}{4}-1<0$, $g(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên suy ra phương trình $g(x)=0$ hay $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}$ và $f''(x)=\frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4}>0$ với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

b. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right],\forall n\ge 1$ (*).

Thật vậy,

- Với $n=1$ thì $u_1=1\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, tức là (*) đúng với $n=1$.

- Giả sử (*) đúng với $n=k$, ta có $u_k\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Do tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trên miền $\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f(1)\le f(u_k)\le f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{e}{4}\le u_{k+1}\le\frac{4\sqrt{e}}{9}$.

Do đó $u_{k+1}\in\left[\frac{e}{4};\frac{4\sqrt{e}}{9}\right]\subset\left[\frac{1}{2};1\right]$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Các kĩ thuật sử dụng trong bài này đều quen thuộc, chỉ cần nắm vững tính chất của hàm số là có thể xử lí tốt. Ý tưởng quy nạp cho câu b cũng khá tự nhiên.

Thực ra đây là một bài toán cũ và ở đây không thấy sự xuất hiện câu hỏi quan trọng nhất của bài toán gốc là: Chứng minh dãy số (u_n) hội tụ. Các ý a, b nhằm phục vụ cho việc chứng minh này.

Bài 2.

Tính tích phân $\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$ với $x\in[-1;1]$. Ta thấy rằng

$$g(0)=\frac{1}{2} \text{ và } g(x)+g(-x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Ta cũng có $g(x)=\dfrac{1+x+x^2-\sqrt{1+3x^2+x^4}}{2(x+x^3)}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I&=\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{1}^{0}g(-x)d(-x)+\int_{0}^{1}g(x)dx \\ &=\int_{0}^{1}\big(g(-x)+g(x)\big)dx=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}. \end{aligned}.$$

Vậy tích phân cần tính là $\dfrac{\pi}{4}$.

Nhận xét.

Việc đặt thêm hàm $g(x)$ và nhân liên hợp như trên là hoàn toàn tự nhiên, kể cả tính chất $g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ cũng được chứng minh hoàn toàn dễ dàng. Tuy vậy, đối với nhiều bạn chưa nắm vững về tích phân suy rộng thì sẽ không "dám" nhân liên hợp kiểu như vậy do miền cần tính tích phân có chứa số 0 và sẽ khó có thể tìm được một lời giải thứ hai thay thế.

Bài 3.

Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn các điều kiện

$$x_{n+1}\ge\frac{x_n+y_n}{2} \text{ và } y_{n+1}\ge\sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}} \text{ với } n\in\mathbb{N}.$$

a. Chứng minh rằng các dãy (x_n+y_n), (x_ny_n) là những dãy đơn điệu tăng.

b. Giả sử các dãy số $(x_n),(y_n)$ bị chặn. Chứng minh rằng hai dãy này cùng hội tụ về một điểm nào đó.

Lời giải.

a. Dễ thấy rằng các dãy $(x_n),(y_n)$ dương với $n \ge 2$.

Đặt $x_n + y_n = s_n, x_n y_n = p_n$. Ta có

$$x_{n+1} \ge \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{s_n}{2} \ge \sqrt{p_n} \text{ và } y_{n+1} \ge \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}} \ge \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{s_n}{2} \ge \sqrt{p_n}.$$

Suy ra $s_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} \ge s_n$ và $p_{n+1} = x_{n+1} y_{n+1} \ge \frac{s_n^2}{4} \ge p_n$, tức là $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ là những dãy đơn điệu tăng.

b. Do các dãy (x_n) và (y_n) bị chặn nên dãy $(x_n + y_n)$ bị chặn, hơn nữa nó là dãy đơn điệu tăng nên có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s > 0$. Ta cũng có $p_n \le \frac{s_n^2}{4}$ và (s_n) tăng nên $p_n \le \frac{s^2}{4}$, tức là dãy (p_n) cũng bị chẵn và dãy này cũng đơn điệu tăng nên nó có giới hạn, đặt là p với $0 < p \le \frac{s^2}{4}$. Mặt khác, ta có $p_{n+1} \ge \frac{s_n^2}{4}$ nên $p = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n \ge \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n^2}{4} = \frac{s^2}{4}$.

Từ đó suy ra $p = \frac{s^2}{4}$ hay $s^2 = 4p$.

Theo định lí Viete thì x_n, y_n là các nghiệm dương của phương trình $t^2 - s_n t + p_n = 0$ và các nghiệm của phương trình này là

$$\frac{1}{2}\left(s_n + \sqrt{s_n^2 - 4p_n}\right), \frac{1}{2}\left(s_n - \sqrt{s_n^2 - 4p_n}\right).$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(s_n + \sqrt{s_n^2 - 4p_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(s_n - \sqrt{s_n^2 - 4p_n}\right) = \frac{s}{2}$.

Nhận xét.

Các dãy số trong bài toán chính là các đại lượng chuyển đổi giá trị trung bình. Câu a được giải dễ dàng bằng quy nạp nhưng câu b thực sự không đơn giản và rất dễ bị ngộ nhận. Nhiều bạn sẽ chứng minh được hai dãy hội tụ nhưng để chứng minh được chúng cùng hội tụ về một điểm qua không đặt thêm hai dãy s_n, p_n thì sẽ rất dễ bị ngộ nhận (tất nhiên là có một số cách khác để thực hiện điều này). Dưới đây là một số bài tương tự có cùng dạng:

(1) Cho hai dãy số $(x_n),(y_n)$ thỏa mãn $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$ và

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} \text{ với } n = 2,3,4,...$$

Chứng minh rằng hai dãy đã cho hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

(2) Cho hai dãy số $(x_n),(y_n)$ thỏa mãn $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$ và

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, y_n = \frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{y_{n-1}}} \text{ với } n = 2,3,4,...$$

Chứng minh rằng hai dãy đã cho hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Bài 4.

Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ***thỏa mãn điều kiện*** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Tìm $\min|\alpha - \beta|$**.**

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\alpha < \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n < \beta$ với mọi n.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$ với $x \ge 1$ thì dễ thấy f tăng. Suy ra dãy $\left(\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right)$ tăng. Do đó, ta có đánh giá sau:

$$\min|\alpha-\beta| = -\min\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right) + \sup\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right) = 1 - \frac{1}{\ln 2} + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right)$$

Theo quy tắc L'Hospital, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Do đó $\min|\alpha-\beta|=1-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

Nhận xét.

Ở bài toán này, ta chỉ cần tìm chặn trên và chặn dưới cho hàm số $f(n)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$ để từ đó xác định được khoảng cách lớn nhất giữa β,α là xong. Hàm số được chọn ở đây có thể thay bằng một hàm tùy ý và câu hỏi như trên khá phổ biến trong các bài toán về khảo sát miền giá trị của hàm số.

Tuy nhiên, có nhiều thí sinh sẽ ngộ nhận do biết trước kết quả quen thuộc sau

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Và từ đó kết luận $\alpha=0,\beta=1$ dẫn đến sai lầm đáng tiếc.

Bài 5.

Ta gọi đoạn thẳng $[\alpha,\beta]$ là đoạn thẳng tốt nếu với mọi bộ số a,b,c thỏa mãn điều kiện $2a+3b+6c=0$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực thuộc đoạn $[\alpha,\beta]$. Trong tất cả các đoạn thẳng tốt, tìm đoạn có độ dài nhỏ nhất.

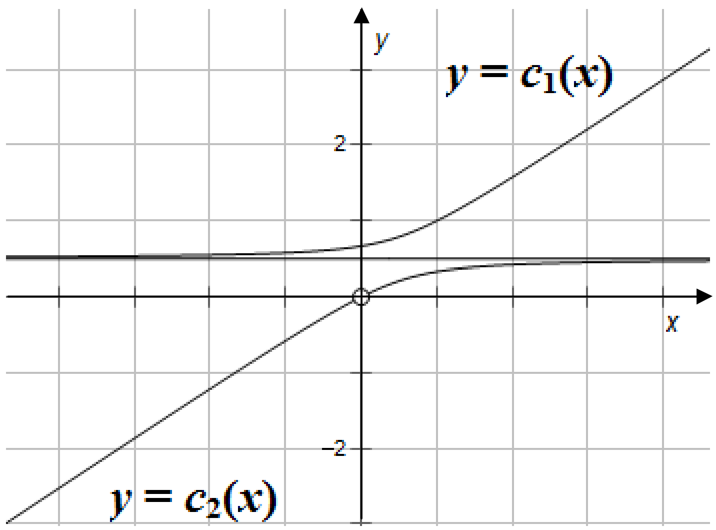
Lời giải.

Với $a=0$ thì $3b+6c=0$ và phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm là $x=\frac{1}{2}$, suy ra đoạn tốt phải chứa số $\frac{1}{2}$. Do đó $\alpha<\frac{1}{2}<\beta$.

Xét $a \neq 0$, khi đó không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a = 3$ và $b = -2 - 2c$. Phương trình đã cho viết lại thành

$$3x^2 - 2(1-c)x + c = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{1+c+\sqrt{1-c+c^2}}{3}, x_2 = \dfrac{1+c-\sqrt{1-c+c^2}}{3}$.



Dễ thấy rằng x_1, x_2 là các hàm số liên tục và tăng theo biến c; hơn nữa, ta có

$$\lim_{c\to-\infty} x_1 = \lim_{c\to+\infty} x_2 = \frac{1}{2}.$$

Giả sử $[\alpha, \beta]$ là một đoạn thẳng tốt. Khi đó, rõ ràng tồn tại duy nhất giá trị c_0 sao cho $x_1(c_0) = \beta$. Với $c > c_0$ thì $x_1(c) > \beta$, tức là $x_1(c)$ nằm ngoài đoạn tốt, suy ra $x_2(c) \geq \alpha$. Cho $c \to (c_0)^-$ thì $x_2(c_0) \geq \alpha$. Từ đó, ta có

$$\beta - \alpha \geq x_1(c_0) - x_2(c_0) = \frac{2\sqrt{1-c_0+c_0^2}}{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó, độ dài đoạn thẳng tốt không thể bé hơn $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại duy nhất đoạn thẳng như vậy.

Thật vậy, nếu chọn $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}, \beta = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ thì

- Nếu $c \ge \frac{1}{2}$, ta có $x_2 \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right] \subset [\alpha, \beta]$.

- Nếu $c < \frac{1}{2}$, ta có $x_1 \in \left(\frac{1}{2}; \beta\right] \subset [\alpha, \beta]$.

Vậy đoạn thẳng tốt có độ dài nhỏ nhất là $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{6}; \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right]$.

Nhận xét.

Đây là một bài toán rất thú vị với phát biểu khá lạ mắt, xuất phát từ một bài toán cũ hơn là với điều $2a+3b+6c=0$ đã cho, chứng minh phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm. Cần hiểu rõ bản chất của câu hỏi là: đoạn tốt là đoạn chứa ít nhất một nghiệm của phương trình đã cho chứ không phải chứa đồng thời cả hai nghiệm.

Một câu hỏi mở rộng khó hơn từ bài toán này là:

Với các số α, β như đã định nghĩa, chứng minh rằng $\alpha + \beta - 2\alpha\beta \ge \frac{2}{3}$.

Bài 6.

a. Tìm hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

b. Cho hàm số f liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$xf(x)+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) \le 2 \text{ với mọi } \forall x \in \left[\frac{1}{2};2\right].$$

Chứng minh rằng $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx \le 2\ln 2$.

Lời giải.

a. Đặt $u = x-y, v = x+y$ thì $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$ nên ta có

$$uf(v)-vf(u)=-\frac{1}{4}(u+v)(u-v)\left[(u+v)^2-(u-v)^2\right] \text{ với } u,v\in\mathbb{R}.$$

hay $uf(v)-vf(u)=-u^3v+uv^3 \Leftrightarrow v\left(f(u)-u^3\right)=u\left(f(v)-v^3\right)$.

Nếu $uv\neq 0$ thì ta viết đẳng thức trên thành

$$\frac{f(u)-u^3}{u}=\frac{f(v)-v^3}{v}.$$

Do đó tồn tại $c\in\mathbb{R}$ sao cho $\frac{f(u)-u^3}{u}=c,\forall u\neq 0 \Leftrightarrow f(u)=u^3+cu,\forall u\neq 0$.

Nếu $uv=0$ thì dễ thấy $f(0)=0$, nhưng hàm số $f(u)=u^3+cu$ cũng thỏa mãn điều này.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=x^3+cx$ thỏa mãn.

Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=x^3+cx, x\in\mathbb{R}$.

b. Xét $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$. Đặt $x=2^t$ thì $dx=2^t\ln 2dt$, thay vào tích phân này, ta được

$$I=\ln 2\int_{-1}^{1} f(2^t)2^t dt.$$

Tương tự, đặt $x=2^{-t}$, ta được $I=\ln 2\int_{-1}^{1} f(2^{-t})2^{-t}dt$.

Với $t\in[-1;1]$ thì $2^t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ nên theo giả thiết, ta có

$$f(2^t)2^t+f(2^{-t})2^{-t}\leq 2.$$

Do đó,

$$2I=\ln 2\int_{-1}^{1}\left(f(2^t)2^t+f(2^{-t})2^{-t}\right)dt\leq \ln 2\int_{-1}^{1}2dt=4\ln 2.$$

Suy ra $I\leq 2\ln 2$. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Có lẽ khi gặp phần tự chọn này, hầu hết các bạn thí sinh đều sẽ chọn câu a vì nó quen thuộc và dễ xử lí. Chỉ cần vài phép đổi biến đơn giản là có thể chuyển về đại lượng có dạng $\frac{f(u)-u^3}{u}=\frac{f(v)-v^3}{v}$ thì mọi chuyện xem như đã hoàn tất (nó phải là hằng số), đặt đại lượng này là c rồi từ đó thay ngược dần lên để ra kết quả.

Một bài toán tương tự:

Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=xy(x^4-y^4) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Ở câu b của bài toán, ngoài cách đổi biến thành dạng 2^t như trên, ta có thể làm trực tiếp như sau. Ta có

$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx$, trong tích phân thứ hai, đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$ thì

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx.$$

Từ giả thiết, ta có $f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{2}{x}$ với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ nên $I\le\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2dx}{x}=2\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=2\ln 2.$

Một câu hỏi tương tự cho câu b của bài này.

Cho hàm số f liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$xf(x)+yf\left(y\right)\le 2 \text{ với mọi } \forall x,y\in\left[\frac{1}{2};2\right].$$

Tìm giá trị lớn nhất của $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx.$

LỜI GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN MÔN GIẢI TÍCH NĂM 2012

Nhận xét chung.

Có thể nói nếu không có lỗi trong khâu biên soạn đề, dẫn đến sai ở hai câu 2 và 5 thì đây là một đề hay, cả ở tính phân loại lẫn vẻ đẹp của bài toán. Các câu dễ là 1 và 3, trung bình là 4 và 5, câu khó là 2 và 6. Các bài toán 5, 6 rất hay, mới mẻ và đẹp. Để có thể xử lí trọn vẹn được đề thi này thì cần phải nắm vững kiến thức về giải tích và hiểu rõ bản chất vấn đề. Có lẽ các thí sinh thực sự giỏi trong kì thi này chưa hẳn là những người đạt giải cao nhất mà đó chính là các bạn biết câu nào đúng, câu nào sai và cho phản ví dụ cho chúng, đó còn là người "dám" chọn câu 6a (thay vì làm một vế dễ hơn ở câu 6b) và giải quyết trọn vẹn bằng khai triển Taylor.

Bài 1.

Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện

$$a_1 = \alpha \ \textbf{\textit{và}}\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n - \frac{2}{n} \ \textbf{\textit{với}}\ n = 1,2,3,...$$

Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Lời giải.

Ta công thức xác định dãy, ta có $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n - 2}{n}$ với mọi $n \ge 1$.

Đặt $x_n = a_n - 2$ thì ta được $x_1 = \alpha - 2$ và

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n \text{ và } x_{n+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)x_1 = (n+1)x_1.$$

Suy ra $a_n = (n+1)(\alpha - 2) + 2$ với mọi n.

Nếu $\alpha \ne 2$ thì dễ thấy $a_n \to \pm\infty$ khi $n \to +\infty$ nên không thỏa.

Nếu $\alpha = 2$ thì ta có $a_n = 2$ với mọi n nên dãy (a_n) hội tụ.

Vậy giá trị cần tìm của α để dãy đã cho hội tụ là $\alpha = 2$.

Nhận xét.

Ngoài cách giải trên sử dụng trong đáp án, có một biến đổi tự nhiên hơn là đưa về

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n(n+1)}.$$

Đặt dãy số mới $b_n = \frac{a_n}{n}$ thì có ngay $b_{n+1} = b_n - \frac{2}{n(n+1)}$, chú ý rằng biểu thức $\frac{2}{n(n+1)}$ có thể viết thành sai phân $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ nên bài toán được giải quyết nhanh chóng.

Bài 2.

Cho đa thức $P(x)$ có bậc không nhỏ hơn 1 có hệ số thực và đa thức $Q(x)$ xác định bởi

$$Q(x) = (2012x^2 + 1)P(x)P'(x) + x\left(2012(P(x))^2 + (P'(x))^2\right).$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = 0$ có đúng n nghiệm thực phân biệt trong khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì phương trình $Q(x) = 0$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

Lời giải.

Ta có $Q(x) = \left(2012xP(x) + P'(x)\right)\left(xP'(x) + P(x)\right) = e^{-1006x^2}\left(e^{1006x^2}P(x)\right)'\left(xP(x)\right)'$.

Xét a, b là hai nghiệm liên tiếp trong dãy n nghiệm phân biệt của $P(x) = 0$ thì theo định lí Rolle, các phương trình $\left(e^{1006x^2}P(x)\right)'$ và $\left(xP(x)\right)'$ sẽ lần lượt có các nghiệm là r_1, r_2 sao cho $a < r_1, r_2 < b$. Ta sẽ chứng minh rằng $r_1 \neq r_2$, nếu không giả sử $r_1 = r_2 = r$ thì

$$\begin{cases} P'(r) + 2012rP(r) = 0 \\ P(r) + rP'(r) = 0 \end{cases}$$

Do $r>0$ nên ta nhân đẳng thức thứ nhất với r và trừ cho đẳng thức thứ hai, ta có

$$(2012r^2-1)P(r)=0.$$

Vì $r>a>\frac{1}{2}$ nên $2012r^2-1>0$, suy ra $P(r)=0$, cũng mâu thuẫn.

Do đó, nếu gọi $\frac{1}{2}<c_1<c_2<...<c_n$ là các nghiệm của phương trình $P(x)=0$ thì $Q(x)=0$ có ít nhất $2n-2$ nghiệm nằm giữa các khoảng $(c_1,c_2),(c_2,c_3),...,(c_{n-1},c_n)$.

Đồng thời, ta thấy rằng phương trình $xP(x)=0$ có nghiệm $x=0$ nên giữa khoảng $(0;c_1)$ thì phương trình $P(x)+xP'(x)=0$ có thêm một nghiệm nữa.

Vậy đa thức $Q(x)$ có ít nhất $(2n-2)+1=2n-1$ nghiệm thực phân biệt. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Bài toán gốc của bài này có lẽ là:

Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1 thì $Q(x)=(x^2+1)P(x)P'(x)+xP^2(x)+(P'(x))^2$ cũng có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

Dạng câu hỏi này đã có xuất hiện trong đề Đại số năm 2011 trước đó nhưng tương đối dễ hơn. Ở bài toán đang xét, ta sử dụng khéo léo tính chất của định lí Rolle để chỉ ra chặn dưới cho số nghiệm của phương trình. Cái khó chính là phân tích được đa thức đã cho thành nhân tử để có các dạng phương trình đơn giản hơn. Nếu đa thức $Q(x)$ không phân tích được thành nhân tử thì bài này thực sự khó và không dễ kiểm tra được tính đúng đắn của nó. Đề này đã có chỉnh sửa lại cho đúng vì đề gốc đáng tiếc bị sai và trong đáp án trình bày khá vắn tắt, đến nổi không hiểu cho thêm điều kiện các nghiệm không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ làm gì (sử dụng ở đoạn lập luận các nghiệm phân biệt).

Bài 3.

Tính tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}$$
$$=\int_{1}^{0}\frac{d(-x)}{(2012^{-x}+1)(1+(-x)^2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2012^x+1)(1+x^2)}$$
$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{(2012^{-x}+1)(1+x^2)}+\frac{1}{(2012^x+1)(1+x^2)}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{2012^x}{2012^x+1}+\frac{1}{2012^x+1}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

Vậy tích phân cần tính là $\frac{\pi}{4}$.

Nhận xét.

Dạng tổng quát của bài này là: Cho hàm số $f(x)$ chẵn và các số thực $a,b>0$, khi đó ta có đẳng thức tích phân sau

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx\,.$$

Nói chung dạng này quá quen thuộc ngay từ thời THPT. Hàm số $g(x)=b^x+1$ ở trên có đặc điểm là $g(x)+g(-x)=1$ nên ta hoàn toàn có thể thay bằng hàm số khác có tính chất $g(x)+g(-x)$ bằng một hằng số nào đó, chẳng hạn $g(x)=\ln\left(\sin x+\sqrt{2+\sin^2 x}\right)$.

Chú ý rằng trong trường hợp hàm $f(x)$ lẻ thì $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

Bài 4.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2012}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2013}\right)+f\left(\frac{y}{2014}\right)\right)\ \textbf{\textit{với mọi}}\ x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Lời giải.

Đặt $a=\frac{2014}{2012}, b=\frac{2014}{2013}$ thì rõ ràng $b\neq 0, b\neq 1$.

Trong đẳng thức đã cho, thay x,y lần lượt bởi $\frac{2014}{2012}x, \frac{2014}{2012}y$ thì

$$f\left(\frac{2014}{2012}(x+y)\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{2014}{2013}x\right)+f(y)\right) \text{ hay } f\left(a(x+y)\right)=\frac{1}{2}\left(f(bx)+f(y)\right).$$

Đặt $g(x)=f(x)-f(0)$, ta có

$$g\left(a(x+y)\right)=f\left(a(x+y)\right)-f(0)=\frac{1}{2}\left(f(bx)+f(y)-2f(0)\right)=\frac{1}{2}\left(g(bx)+g(y)\right).$$

Ta cũng có

$$g\left(a(x+y)\right)=g\left(a(x+y)+0\right)=\frac{1}{2}\left(g(b(x+y))+g(0)\right)=\frac{1}{2}g\left(b(x+y)\right).$$

So sánh hai đẳng thức trên, ta được

$$g\left(b(x+y)\right)=g(bx)+g(y) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Chọn y sao cho $b(x+y)=y \Leftrightarrow y=\frac{b}{1-b}x$ thì $g(bx)=0$ với mọi x.

Từ đó suy ra $f(x)=f(0)=c$ với mọi x, tức là $f(x)$ là hàm hằng.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=c\in\mathbb{R}$ với mọi x.

Nhận xét.

Đây là một bài phương trình hàm đòi hỏi kĩ thuật biến đổi đại số chứ không mang tính giải tích nào. Dễ dàng đoán ra được chỉ có thể là hàm hằng mới thỏa mãn; tuy nhiên, muốn chứng minh được điều này thì cần phải khéo léo dùng phép thế và lựa chọn thích hợp. Nhiều bạn bị ngộ nhận, dù đề không cho liên tục nhưng vẫn áp dụng tính chất $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, giải ra nhanh chóng và rõ ràng đây là một sai lầm nghiêm trọng. Nói chung, khi có thêm giả thiết liên tục thì chỉ có trường hợp $a=b$ thì mới đưa về dạng $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ với mọi x,y dẫn đến hàm số tuyến tính dạng $f(x)=ux+v$ và đủ khó để hỏi mà thôi.

Bài 5.

Giả sử hàm số $f(x)$ ***liên tục trên đoạn*** $[0;2012]$ ***và thỏa mãn điều kiện***

$$f(x)+f(2012-x)=0 \text{ với mọi } x\in[0;2012].$$

Chứng minh rằng $\int_0^{2012} f(x)dx=0$ ***và phương trình*** $(2012-x)f(x)=2012\int_0^{2012-x} f(u)du$ ***có nghiệm trong khoảng*** $(0;2012)$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì $f(x)=-f(2012-x)$ với mọi $x\in[0;2012]$, do đó

$$\int_0^{2012} f(x)dx=\int_0^{2012} -f(2012-x)dx=\int_{2012}^{0} f(2012-x)d(2012-x)=-\int_0^{2012} f(x)dx$$

Từ đó suy ra $\int_0^{2012} f(x)dx=0$.

Đặt $g(x)=(2012-x)^{2012}\int_0^{2012-x} f(u)du$ thì dễ thấy rằng hàm số này khả vi trên $[0;2012]$ và có $g(0)=g(2012)=0$. Theo định lí Rolle thì tồn tại $c\in(0;2012)$ sao cho

$$g'(c)=0 \Leftrightarrow -2012(2012-c)^{2011}\int_0^{2012-c} f(u)du-(2012-c)^{2012}f(2012-c)=0.$$

Từ đây suy ra

$$-2012\int_0^{2012-c} f(u)du+(2012-c)f(c)=0$$

hay phương trình $(2012-x)f(x)=2012\int_0^{2012-x} f(u)du$ có nghiệm. Ta có đpcm.

Nhận xét.

Trong bài này, ở đoạn chứng minh giá trị của tích phân xác định bằng 0 chỉ đòi hỏi kĩ thuật đổi biến và tận dụng giả thiết nên không có vấn đề gì.

Còn ở phần chứng minh phương trình có nghiệm thì cũng như "kịch bản" cũ, ta sẽ phải chọn một hàm số thích hợp mà đạo hàm của nó có dạng như thế rồi dùng định lí Lagrange/Rolle. Tuy nhiên, hàm số như thế trong trường hợp này là không dễ tìm, ta cố gắng phân tích như sau:

Hàm số cần tìm sẽ có dạng $g(x) = h(x) \cdot \int_0^{2012-x} f(u)du$ để khi dùng đạo hàm của hàm có dạng tích thì mới hy vọng ra được dạng trên. Chú ý rằng ta cũng cần thêm $h(0) = h(2012) = 0$ (điều này đã có sẵn). Ta có

$$g'(x) = h'(x) \cdot \int_0^{2012-x} f(u)du - h(x) \cdot f(2012-x) = h'(x) \cdot \int_0^{2012-x} f(u)du + h(x) \cdot f(x).$$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -h(x) \cdot f(x) = h'(x) \cdot \int_0^{2012-x} f(u)du$.

Do đó, so sánh với phương trình đang quan tâm, ta cần có

$$\frac{h(x)}{x-2012} = \frac{h'(x)}{2012}.$$

Đến đây, dễ dàng chọn được $h(x) = (2012-x)^{2012}$.

Bài 6.

a. Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(1) = 0$ và $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0;1)$, ta có

$$\left| \int_0^{\alpha} f(x)dx \right| \le \frac{2}{81} \max_{0 \le x \le 1} \left| f''(x) \right|.$$

b. Cho hàm số $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ là hàm lõm (còn gọi là lồi lên phía trên), khả vi liên tục thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + 4 \max_{0 \le x \le 1} f^2(x)} \le \int_0^1 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \le 1 + 2 \max_{0 \le x \le 1} f(x).$$

Lời giải.

a. Ta có

$$\int_0^1 x f'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Do đó

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x)dx = \alpha \int_0^1 \left[f(\alpha x) - f(x) - (\alpha - 1)x f'(x) \right] dx = \alpha(\alpha-1)^2 \int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2} x^2 dx$$

Suy ra $\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right| = \left|\alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2}x^2dx\right| = \left|\alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx\right|\left|f''(\theta)\right|$.

Ta có $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$ và $\alpha(\alpha-1)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha) \le \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\alpha+1-\alpha+1-\alpha}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$.

Từ đó, ta có được $\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right| \le \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{27}\left|f''(\theta)\right| \le \frac{2}{81}\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|$. Đây chính là đpcm.

b. Gọi x_0 là điểm cực đại và y_0 là giá trị cực đại của $f(x)$ trên miền $[0;1]$. Ta có

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|dx = \int_0^{x_0} f'(x)dx + \int_{x_0}^1 -f'(x)dx = \left(f(x_0)-f(0)\right) - \left(f(1)-f(x_0)\right) = 2f(x_0) \text{ nên}$$

$$\max f(x) = f(x_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|f'(x)\right|dx.$$

Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với $1+\left(\int_0^1 \left|f'(x)\right|dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\right)^2$ (*)

Ta có

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\right)^2 - \left(\int_0^1 \left|f'(x)\right|dx\right)^2$$
$$= \int_0^1\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} + \left|f'(x)\right|\right)dx\cdot\int_0^1\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} - \left|f'(x)\right|\right)dx$$
$$= \int_0^1\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} + \left|f'(x)\right|\right)dx\cdot\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} + \left|f'(x)\right|\right)}dx \ge \int_0^1 dx = 1$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (*) đúng.

Bất đẳng thức thứ hai tương đương với $\int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \le 1 + \int_0^1 \left|f'(x)\right|dx$ (**)

Ta có

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx - \int_0^1 \left|f'(x)\right|dx$$
$$= \int_0^1\left(\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} - \left|f'(x)\right|\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} + \left|f'(x)\right|}x \le \int_0^1 dx = 1$$

Từ đó suy bất đẳng thức (**) cũng đúng. Vậy ta có đpcm.

Nhận xét.

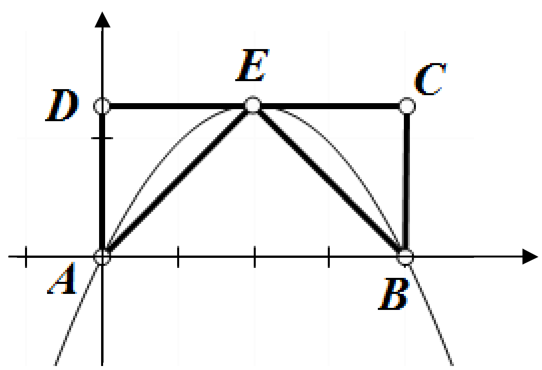
Cả 2 câu của bài toán này đều khó nhưng trên thực tế, hầu hết các thí sinh đều chọn câu b (có một ý dễ xử lí hơn). Câu a đòi hỏi phải chứng minh đẳng thức

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha(\alpha-1)^2\int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2}x^2dx.$$

Nói chung đây là một kết quả không dễ dàng có thể khai thác được từ giả thiết nếu không nắm vững khai triển Taylor. Nếu đã hoàn tất việc chứng minh được đẳng thức trên thì công việc còn lại hoàn toàn tự nhiên.

Đối với câu b, lời giải nêu trên đã chứng minh được một đánh giá đẹp $f(x_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx$, trong khi lời giải của đáp án chính thức khá rắc rối và hơi thiếu tự nhiên. Dù vậy, lời giải bằng hình học dưới đây sẽ cho ta thấy rõ bản chất vấn đề hơn.

Ta biết rằng đại lượng $l = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$ chính là độ dài của đường cong $y = f(x)$ trên miền $[0;1]$. Ta có thể minh họa hình học cho bài toán này như sau



Chọn tọa độ các điểm $A(0;0), B(1;0), C(1;y_0), D(0;y_0), E(x_0,y_0)$ như hình trên.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{1+4y_0^2} \le l \le 1+2y_0.$$

Do đồ thị của hàm số này lồi lên phía trên nên

$$l \le AD + DE + BC + CE = CD + AD + BC = 1+2y_0.$$

Hơn nữa $l \ge AE + BE = \sqrt{AD^2+DE^2} + \sqrt{BC^2+CE^2} \ge \sqrt{(AD+BC)^2+(DE+CE)^2} = \sqrt{1+4y_0^2}$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Diễn đàn http://forum.mathscope.org/

[2] Diễn đàn http://diendantoanhoc.net/

[3] Diễn đàn http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1

[4] Diễn đàn http://math.net.vn/forum.php

[5] Các đề thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc, NXB GD, 2005.