Buổi 05 – Ngày 12-10-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

6/ TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN:

Xét một chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$, với $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

Ta đặt $f(n) = a_n = ...$

Ta cần chứng tỏ:

+ $f(n)$ luôn xác định (tồn tại được), $\forall n \geq 1$.
+ $f(n)$ là hàm giảm dần, nghĩa là: $f'(n) < 0, \forall n \geq 1$ hoặc $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq 1$.

Khi đó, ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ là có cùng tính chất hội tụ (hay phân kỳ) (~) với TPSR loại 1: $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

Lưu ý: Ta thường dùng tiêu chuẩn tích phân, khi biểu thức của hàm dưới dấu sig-ma dễ lấy nguyên hàm; và thường trong biểu thức có chứa "ln".

Ví dụ mẫu 3: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

Ví dụ mẫu 4: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}$

Giải:

Ví dụ mẫu 3:

Ta đặt $f(n) = a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}, \forall n \geq 2$.

Ta có: $f(n)$ là hàm số luôn xác định được $\forall n \geq 2$.

và $f'(n) = \frac{-(n\ln^2 n)'}{n^2\ln^4 n} = -\frac{\ln^2 n + 2n\ln n\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\ln^4 n} = -\frac{\ln^2 n + 2\ln n}{n^2\ln^4 n} < 0, \forall n \geq 2$

Suy ra, chuỗi $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{+\infty} f(x)dx$

Mà $I = \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

Ta xét $J = \int_2^{b}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ (với $b \geq 2$)

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Đổi cận:

Khi $x = 2 \Rightarrow t = \ln 2$;

Khi $x = b \Rightarrow t = \ln b$;

Suy ra $J = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\ln b} = -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{b \to +\infty}(J) = \lim\limits_{b \to +\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = 0 + \frac{1}{\ln 2}$ (hữu hạn).

$\Rightarrow I$ hội tụ.

Suy ra chuỗi ban đầu: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 4</u>:

Ta đặt $f(n) = a_n = \frac{2}{(n+1)^3}, \forall n \geq 0$.

Ta có: $f(n)$ là hàm số luôn xác định được $\forall n \geq 0$.

và $f'(n) = -\frac{2((n+1)^3)'}{(n+1)^6} = -\frac{6(n+1)^2}{(n+1)^6} = -\frac{6}{(n+1)^4} < 0, \forall n \geq 0$

Suy ra, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} \sim \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$

Mà $I = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^3}dx \sim \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx = 2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$.

Mà $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ là TPSR Riemann, ứng với $\alpha = 3 > 1$ nên TPSR là hội tụ

$\Rightarrow I$ cũng hội tụ.

Suy ra, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$ cũng hội tụ.

<u>Bài tập tương tự</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

a/ $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(\ln n))}$

b/ $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(\ln(\ln n)))}$

c/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n + 4}{3n^5 + n^3 + 2n + 7}$

d/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n + 3}{8n^4 + 2n^2 + 1}$

e/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3n + 4}{5n^5 + 7}$

f/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^3+4n}{5n^6+7n^4+2}$

g/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{8n^4+n+3}$

h/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{4n^6+2n+9}$

7/ <u>TIÊU CHUẨN SO SÁNH</u>:

Xét một chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$, với $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

Ta đề xuất b_n thỏa $a_n \leq b_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n)$ là chuỗi hội tụ.

Thì ta nói chuỗi số ban đầu $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ là hội tụ.

Hoặc ta đề xuất hàm c_n thỏa $c_n \leq a_n$ và

$\sum_{n=1}^{+\infty} (c_n)$ là chuỗi phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ phân kỳ.

Hoặc ta đề xuất biểu thức d_n thỏa $a_n \sim d_n$ khi $n \to +\infty$ (ta có thể chọn d_n bằng cách dùng các VCB tương đương/ hoặc VCL tương đương ở các Chương trước). Khi đó:

$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ có cùng tính chất hội tụ/ hay phân kỳ với chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} (d_n)$.

Nghĩa là nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} (d_n)$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ hội tụ;

$\sum_{n=1}^{+\infty} (d_n)$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ phân kỳ.

<u>Lưu ý</u>: Ta thường so sánh chuỗi cần xét với chuỗi Riemann dạng:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\longrightarrow$ hội tụ khi $\alpha > 1$

$\searrow$ phân kỳ khi $\alpha \leq 1$

<u>Ví dụ mẫu 5</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}$

<u>Giải</u>:

Ví dụ mẫu 5:

Ta có: $a_n = \dfrac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5} \sim \dfrac{2n^3}{6n^2} = \dfrac{n}{3} = \dfrac{1}{3n^{-1}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n^{-1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-1}}$$

Mà ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-1}}$ là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha = -1 < 1$ nên chuỗi là phân kỳ.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}\right)$ là phân kỳ.

Ví dụ mẫu 6:

Ta có: $a_n = \dfrac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1} \sim \dfrac{n^2}{5n^3} = \dfrac{1}{5n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Mà ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha = 1$ nên chuỗi là phân kỳ.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}\right)$ là phân kỳ.

Bài tập tương tự: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

i/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2(2n+1)}{3n^4+n^3+5}$

j/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^4(n^2+2)}{5n\sqrt{n^2+3}}$

k/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^2\left(\dfrac{2n^3+1}{8n^6+3n^4+2}\right)$

l/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{3n^2+n+5}{10n^4+7n^2+9}\right)$

m/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\cos\left(\dfrac{2n+3}{6n^4+n+5}\right)\right]$

n/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^6\left(\dfrac{n+2}{n^3+n+4}\right)}{2n^2+n+7}$

o/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n^5+2n+4}{4n^4+2n+1}\right)^2$

p/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+n+3}{8n^5+6n\sqrt{n}+1}\right)$

q/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^3+n+5}{n^3+2n^2+7}\right)$

8/ <u>TIÊU CHUẨN HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI</u>:

Xét một chuỗi số có dấu tùy ý: $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ là chuỗi hội tụ thì chuỗi có dấu tùy ý ban đầu là chuỗi hội tụ.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ phân kỳ bằng tiêu chuẩn D'Alambert hay phân kỳ bằng tiêu chuẩn Cauchy thì ta kết luận chuỗi có dấu tùy ý ban đầu là chuỗi phân kỳ.

Nếu chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ là phân kỳ bằng những tiêu chuẩn không phải là D'Alambert hay không phải là tiêu chuẩn Cauchy mà chuỗi có dấu tùy ý là hội tụ thì ta gọi chuỗi ban đầu là hội tụ tương đối (hay là bán hội tụ).

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của chuỗi số:.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right|$$

Ta xét $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

Dùng tiêu chuẩn phân kỳ, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

Ta có $a_n=\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

$$\Rightarrow k=\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right]=?$$

Khi $\frac{\pi n^2}{n+1}$ thỏa chu kỳ $\frac{\pi}{3}+k2\pi,\forall k\in\mathbb{Z}$ thì $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow k_1=\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Khi $\frac{\pi n^2}{n+1}$ thỏa chu kỳ $\frac{\pi}{6}+k2\pi,\forall k\in\mathbb{Z}$ thì $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow k_2 = \lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ không tồn tại $k = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$

Suy ra chuỗi ban đầu $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ phân kỳ; và có $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right|$ cũng phân kỳ.

9/ <u>TIÊU CHUẨN LEIBNITZ</u>:

(dành riêng cho chuỗi đan dấu)

Xét một chuỗi số có dấu tùy ý, dạng : $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.(a_n)$.

Ta đặt $f(n) = a_n = ...$

Ta cần chứng tỏ:

+ $f(n)$ là hàm giảm dần, nghĩa là $f'(n) < 0, \forall n \geq 1$ hoặc $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq 1$

+ Ta có $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$

Thì chuỗi ban đầu hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibnitz).

<u>Ví dụ mẫu 8</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right)$

Ta có: $a_n = f(n) = \left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right)$

$$\Rightarrow f'(n) = \frac{(2n+1)'(3n^3+2)-(3n^3+2)'(2n+1)}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{2(3n^3+2)-(9n^2)(2n+1)}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{6n^3+4-18n^3-9n^2}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{-12n^3-9n^2+4}{(3n^3+2)^2} < 0, \forall n \geq 1$$

Mặt khác ta có: $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}}\right) = \frac{0+0}{3+0} = 0$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz ta có chuỗi ban đầu là hội tụ.

<u>*Bài tập tương tự*</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

r/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$

s/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

t/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^4+5}}\right)$

u/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n^2+n+1}{6n^5+n^2+3}\right)$

v/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n^3+7}{4n^8+2n+5}\right)$

10/ <u>CHUỖI HÀM – CHUỖI LŨY THỪA</u>:

Chuỗi lũy thừa (power series) là một trường hợp đặc biệt của chuỗi hàm; là chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Ta gọi đây là chuỗi lũy thừa có tâm (center) là x_0; và gọi a_n là số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa.

Khi $x_0=0$ ta có chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, và gọi đây là chuỗi lũy thừa tâm $x_0=0$.

Miền hội tụ của chuỗi là tập hợp chứa các giá trị thực của x sao cho chuỗi lũy thừa là hội tụ.

- ***<u>Cách tìm bán kính hội tụ (convergent radius) của chuỗi lũy thừa</u>***:

Xét chuỗi lũy thừa tâm $x_0=0$, là chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (*),

và chuỗi lũy thừa tâm x_0, là chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ (**)

Ta có: $a_n = ... \Rightarrow a_{n+1} = ...$

Suy ra: $k = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = ...$ hay $k = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = ...$

<u>Kết luận</u>: bán kính hội tụ của chuỗi là:

$$R = \frac{1}{k} = \begin{cases} 0 & khi \quad k = +\infty \\ \frac{1}{k} & khi \quad k \in \mathbb{R} \\ +\infty & khi \quad k = 0 \end{cases}$$

- ***<u>Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa như sau</u>***:

Xét chuỗi lũy thừa tâm $x_0=0$, là chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (*), và chuỗi lũy thừa tâm x_0, là chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ (**)

có bán kính hội tụ là R =… (như phần trên).

Ta tìm miền hội tụ như sau:

a/ Đối với chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (*)

Chuỗi (*) hội tụ $\Leftrightarrow |x-0| < R$

$\Leftrightarrow |x| < R$

$\Leftrightarrow -R < x < R$

Ta xét tại biên trái (left boundary): $x = -R$

Ta thay $x = -R$ vào chuỗi (*) thì ta thu được một chuỗi số.

Khảo sát chuỗi số lúc này (bằng các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi số đã học), nên tránh dùng tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy để xét (do nếu dùng thì sẽ thu được hệ số *k*=1).

Nếu tại biên trái mà chuỗi số hội tụ ➔ Ta nhận dấu "=" tại biên trái, ngược lại nếu chuỗi số phân kỳ thì ta không nhận dấu "=".

Ta xét tại biên phải (right boundary): $x = R$

Ta thay $x = R$ vào chuỗi (*) thì ta thu được một chuỗi số.

Khảo sát chuỗi số lúc này (bằng các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi số đã học), nên tránh dùng tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy để xét (do nếu dùng thì sẽ thu được hệ số *k*=1).

Nếu tại biên phải mà chuỗi số hội tụ ➔ Ta nhận dấu "=" tại biên phải, ngược lại nếu chuỗi số phân kỳ thì ta không nhận dấu "=".

<u>Kết luận</u>:

Miền hội tụ của chuỗi (*) là 1 trong 4 dạng:

$(-R;R)$; $[-R;R]$; $(-R;R]$; $[-R;R)$

<u>Lưu ý</u>:

Nếu bán kính hội tụ $R = 0$ thì chuỗi (*) chỉ hội tụ tại 1 điểm $x_0 = 0$.

Nếu bán kính hội tụ $R = +\infty$ thì ta nói chuỗi (*) hội tụ trên toàn bộ trục số $\mathbb{R}$.

b/ Đối với chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ (**)

Chuỗi (**) hội tụ $\Leftrightarrow |x-x_0| < R$

$\Leftrightarrow -R < x - x_0 < R$

$\Leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$

Ta xét tại biên trái (left boundary): $x = x_0 - R$

Ta thay $x = x_0 - R$ vào chuỗi (**) thì ta thu được một chuỗi số.

Khảo sát chuỗi số lúc này (bằng các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi số đã học), nên tránh dùng tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy để xét (do nếu dùng thì sẽ thu được hệ số k=1).

Nếu tại biên trái mà chuỗi số hội tụ ➔ Ta nhận dấu "=" tại biên trái, ngược lại nếu chuỗi số phân kỳ thì ta không nhận dấu "=".

Ta xét tại biên phải (right boundary): $x = x_0 + R$

Ta thay $x = x_0 + R$ vào chuỗi (**) thì ta thu được một chuỗi số.

Khảo sát chuỗi số lúc này (bằng các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi số đã học), nên tránh dùng tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy để xét (do nếu dùng thì sẽ thu được hệ số k=1).

Nếu tại biên phải mà chuỗi số hội tụ ➔ Ta nhận dấu "=" tại biên phải, ngược lại nếu chuỗi số phân kỳ thì ta không nhận dấu "=".

<u>Kết luận</u>:

Miền hội tụ của chuỗi (**) là 1 trong 4 dạng:

$(x_0 - R; x_0 + R)$; $[x_0 - R; x_0 + R]$;

$(x_0 - R; x_0 + R]$; $[x_0 - R; x_0 + R)$

<u>Lưu ý</u>:

Nếu bán kính hội tụ $R = 0$ thì chuỗi (**) chỉ hội tụ tại 1 điểm là x_0.

Nếu bán kính hội tụ $R = +\infty$ thì ta nói chuỗi (**) hội tụ trên toàn bộ trục số $\mathbb{R}$.

<u>Ví dụ mẫu 9</u>: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(x+3)^n$

a/ Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

b/ Tìm miền hội tụ của chuỗi.

<u>Ví dụ mẫu 10</u>: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)} x^n$

a/ Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

b/ Tìm miền hội tụ của chuỗi.

<u>Ví dụ mẫu 11</u>: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n\pi^n} x^n$

a/ Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

b/ Tìm miền hội tụ của chuỗi.

Ví dụ mẫu 12: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}$

a/ Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

b/ Tìm miền hội tụ của chuỗi.

Giải:

Ví dụ mẫu 9: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(x+3)^n$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^n.2}$

$$\Rightarrow k = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)2^n.2} \times \frac{n2^n}{1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra bán kính hội tụ của chuỗi là:

$$R = \frac{1}{k} = 2.$$

Tiếp theo ta tìm miền hội tụ cho chuỗi như sau:

Ta có chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow |x+3| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < x+3 < 2$

$\Leftrightarrow -5 < x < -1$

Xét tại biên trái, với $x = -5$, ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(-5+3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

Dùng tiêu chuẩn Leibnitz, ta đặt $u_n = f(n) = \frac{1}{n}$ thì $u_n = f(n)$ luôn xác định được $\forall n \geq 1$.

Ta có: $f'(n) = -\frac{1}{n^2} < 0, \forall n \geq 1$ nên ta nói u_n giảm dần.

Ngoài ra, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Xét tại biên phải, với $x = -1$, ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(-1+3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}(2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Đây là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha = 1$, nên đây là chuỗi phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi là $[-5;-1)$ hay là $-5 \leq x < -1$.

Ví dụ mẫu 10: Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}x^n$

Ta có: $a_n=\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}$

$$\Rightarrow k=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+3)}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n+2}-1\right)^{(n+3)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{(n+3)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)\times\frac{1}{-(n+2)}\times(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-(n+3)}{(n+2)}}=\frac{1}{4}e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}}=\frac{1}{4}e^{-1}=\frac{1}{4e}$$

Suy ra, bán kính hội tụ của chuỗi là:

$$R=\frac{1}{k}=4e$$

Chuỗi số là hội tụ $\Leftrightarrow |x|<4e$

$$\Leftrightarrow -4e<x<4e$$

Xét tại biên trái, với $x=-4e$ ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}(-4e)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^ne^n}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}$

Dùng tiêu chuẩn Cauchy, ta xét

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{4^ne^n}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}}=e\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

$$=e\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n+2}-1\right)^{(n+3)}=e\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{(n+3)}$$

$$=e\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{(n+3)}=e\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)\times\frac{1}{-(n+2)}\times(n+3)}$$

$$=e.e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-(n+3)}{(n+2)}}=e.e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}}=e.e^{-1}=\frac{e}{e}=1$$

Ta xét $|a_{n+1}|$ và $|a_n|$

Ta có $|a_n|=\frac{e^n}{1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}\Rightarrow|a_{n+1}|=\frac{e^{n+1}}{1}\left(\frac{n+1+1}{n+1+2}\right)^{(n+1)(n+1+3)}=\frac{e^n.e}{1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{(n+1)(n+4)}$

$$\Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e.e^n}{1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{(n+1)(n+4)} \times \frac{1}{e^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+3)}$$

$$= e\left(\frac{n+3-1}{n+3}\right)^{(n+1)(n+4)}\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n(n+3)}$$

$$= e\left(1+\frac{-1}{n+3}\right)^{(n+1)(n+4)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n(n+3)}$$

$$= e\left(1+\frac{1}{-(n+3)}\right)^{(n+1)(n+4)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n(n+3)}$$

$$= e\left(1+\frac{1}{-(n+3)}\right)^{-(n+3)\times\frac{1}{-(n+3)}\times(n+1)(n+4)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\times\frac{1}{n+1}\times n(n+3)}$$

Do $(n+1)(n+4) = n^2+5n+4$ tiến về $+\infty$ nhanh hơn so với $n(n+3) = n^2+3n$ tiến về $+\infty$

Nên $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n+\infty} e.e^{-\infty} = e\left(\frac{1}{e^{+\infty}}\right) \to 0 < 1$ nên ta nói dãy giảm dần nên chuỗi là hội tụ.

Xét tại biên phải, với $x = 4e$ ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}(4e)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n e^n}{4^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n(n+3)}$

Lập luận tương tự như trường hợp biên trái (nếu trên), ta có chuỗi cũng là hội tụ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi là: $[-4e;4e]$

<u>Ví dụ mẫu 11</u>:

Ta có: $|a_n| = \frac{2^n}{n\pi^n} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi^{n+1}}$

$$\Rightarrow k = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n.2}{(n+1)\pi^n.\pi}\times\frac{n\pi^n}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{(n+1)\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Suy ra bán kính hội tụ là:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\pi}{2}$$

Chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Xét tại biên trái: $x = -\frac{\pi}{2}$ ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}\left(\frac{\pi^n}{(-2)^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Đây là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha=1$ nên chuỗi phân kỳ.

Xét tại biên trái: $x=\frac{\pi}{2}$ ta có

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n\pi^n}\left(\frac{\pi^n}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Dùng tiêu chuẩn Leibnitz, ta đặt $u_n=f(n)=\frac{1}{n}$ thì $u_n=f(n)$ luôn xác định được $\forall n\geq 1$.

Ta có: $f'(n)=-\frac{1}{n^2}<0,\forall n\geq 1$ nên ta nói u_n giảm dần.

Ngoài ra, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

Nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

<u>Kết luận</u>: miền hội tụ của chuỗi là $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

<u>Ví dụ mẫu 12</u>:

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}$

Đặt $X=(x+1)^2\Rightarrow X^n=(x+1)^{2n}$

Nên chuỗi đã cho là $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{X^n}{n4^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n4^n}X^n$

Ta có: $a_n=\frac{1}{n4^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$

$$k=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)4^n.4}\times\frac{n4^n}{1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{(n+1)4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+\frac{4}{n}}=\frac{1}{4}$$

Nên bán kính hội tụ là $R=\frac{1}{k}=4$

Chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow |X|<R$

$\Leftrightarrow |X|<4$

$\Leftrightarrow -4<X<4$

$\Leftrightarrow -4<(x+1)^2<4$

$\Leftrightarrow (x+1)^2<4$

$\Leftrightarrow -2<x+1<2$

$\Leftrightarrow -3<x<1$

Xét tại biên trái: $x=-3$ ta có $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3+1)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

Đây là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha=1$ nên chuỗi phân kỳ.

Xét tại biên phải: $x=1$ ta có $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+1)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2)^{2n}}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

Đây là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha=1$ nên chuỗi phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi là $(-3;1)$ hay là $-3<x<1$.

<u>Bài tập tương tự</u>: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ cho các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n\arcsin^n x}{\pi^n(n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\ln x)^n}{2n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}e^{nx}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln x)^n}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln^n x}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2x-3)^n}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\pi^n}x^n$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}x^n$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n^2}\right)x^n$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(2n+1)}$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(2n+1)}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+2)}$
21. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$