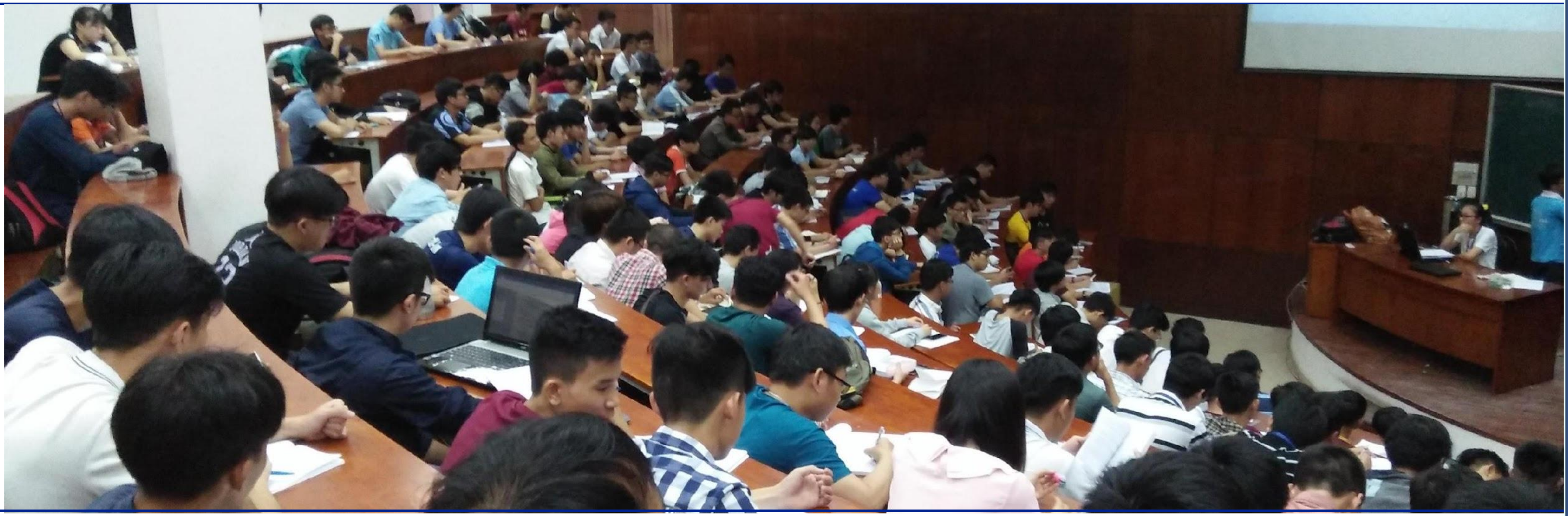
BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING GIỮA KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2023 – 2024

Sharing is learning



BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit

TRAINING

GIẢI TÍCH

Thời gian: 19:30 thứ 4 ngày 25/10/2023

Địa điểm: Mircosoft Teams

Trainers: Quách Vĩnh Cơ - KTPM2023.1

Nguyễn Thành Đạt - CNNB2023.1

Một số công thức cần nhớ

a) Hàm 1 biến

VCB tương đương: Khi $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$
2. $[\sin(x)]^m \sim x^m$
3. $\tan u \sim u$
4. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
5. $\ln(1 + x) \sim x$
6. $e^x - 1 \sim x$
7. $a^x - 1 \sim x \ln a$
8. $(1 + x)^\propto - 1 \sim \propto x$
9. $\sin^{-1} x \sim x$
10. $\tan^{-1} x \sim x$
11. $\sqrt[n]{x + 1} - 1 \sim \frac{x}{n}$

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^\propto}$$

+Khi $\propto > 1$ tích phân hội tụ
+Khi $\propto \leq 1$ tích phân phân kì

$$\int_0^b \frac{1}{x^\propto}$$

+Khi $\propto < 1$ tích phân hội tụ
+Khi $\propto \geq 1$ tích phân phân kì

Một số công thức cần nhớ

a) Hàm 1 biến

Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Quy tắc L'hospital:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Một số công thức cần nhớ

b) Chuỗi số

- Tiêu chuẩn D'Alembert: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{L}$

$$\begin{cases} L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{hội tụ} \\ L > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kì} \\ L = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ không đánh giá được} \end{cases}$$

- Tiêu chuẩn Cauchy: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ =L
- Tiêu chuẩn tích phân
- Tiêu chuẩn so sánh
- Tiêu chuẩn Leibnizt (chuỗi đan dấu)
- Phương pháp khảo sát miền hội tụ của chuỗi số lũy thừa

Đề 1

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số:
$f(x,y) = 5x^5 + 10y^2 + 20xy - 1$

Ta có : $f'_x = 25x^4 + 20y$, $f'_y = 20y + 20x$

Giải hệ: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^4 + 20y = 0 \\ 20y + 20x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^4 + 20y = 0 \\ y = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(25x^3 - 20) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} (M_1)$ hoặc $\begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \end{cases} (M_2)$

Đề 1

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số:
$f(x,y) = 5x^5 + 10y^2 + 20xy - 1$

Mặt khác: $a = f''_{x^2} = 100x^3$, $\quad$ b $= f''_{xy} = 20$, $\quad$ c $= f''_{y^2} = 20$

Tại M_1(0;0): $a = 0,\ b = 20,\ c = 20 \Rightarrow b^2 - ac = 400 > 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ không đạt cực trị tại điểm M_1(0;0)

Tại $M_2\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; -\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)$: $a = 80,\ b = 20,\ c = 20 \Rightarrow b^2 - ac =- 1200 < 0$ mà $a > 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ đạt cực tiểu tại điểm $M_2\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}; -\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)$

Đề 1

Câu 2: Tìm a sao cho hàm số:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) khi (x,y)\neq(0,0)\\ a\ khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ liên tục tại (0,0)

Ta có: $0 \leq |f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x^2+y^2|$

Mà $|x^2+y^2| \longrightarrow 0$ khi $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ mà $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$

$\Rightarrow a = 0$

Đề 1

Câu 3: a) Tính tổng của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{n^2 27^n}$

a) Ta có:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = 1$$

Đề 1

Câu 3: a) Tính tổng của hàm số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{n^2 27^n}$

b) Đặt X= $\frac{(x+3)^3}{27}$ khi đó ta có chuỗi mới $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{n^2}$ (1)

Ta có $a_n = \frac{1}{n^2}$, xét: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

R = 1 vậy khoảng hội tụ của (1) là $(-1; 1)$

Đề 1

Câu 3: a) Tính tổng của hàm số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{n^2 27^n}$

- X=-1: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt
- X=1: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

Vậy miền hội tụ của (1) là [-1;1] $\Leftrightarrow -1 \leq X \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{(x+3)^3}{27} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq x \leq 0$$

Vậy miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{n^2 27^n}$ là [-6;0]

Đề 1

Câu 4: a) Tìm điều kiện của $\propto$ để $A = \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{2x^{\propto}+x^5-1} dx$ hội tụ?

b) Xét tính hội tụ của $B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx$

a)

- Với $\alpha \le 5$: $(x \to +\infty)\ \frac{x^3+1}{2x^{\propto}+x^5-1} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow A$ hội tụ
- Với $\alpha > 5$: $(x \to +\infty)\ \frac{x^3+1}{2x^{\propto}+x^5-1} \sim \frac{1}{2x^{\alpha-3}} \Rightarrow A$ hội tụ

$\Rightarrow A$ hội tụ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Đề 1

Câu 4: a) Tìm điều kiện của $\propto$ để $A = \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{2x^{\propto}+x^5-1} dx$ hội tụ?

b) Xét tính hội tụ của $B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx$

b) Ta có: $\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \longrightarrow 0^+$.

Vì $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ hội tụ nên ta suy ra B cũng hội tụ.

Đề 2

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

Tập xác định: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0, y \neq 0\}$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ f'_y(x,y) = x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} (M)$$

Đề 2

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

Ta có: $a = f''_{x^2} = \frac{100}{x^3}$, b $= f''_{xy} = 1$, c $= f''_{y^2} = \frac{40}{y^3}$

Tại $M(5,2)$ $a = \frac{4}{5},\ b = 1,\ c = 5 \Rightarrow b^2 - ac = -3 < 0$ mà $a > 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ đạt cực tiểu tại điểm $M(5,2)$

Đề 2

Câu 2: Chứng minh rằng

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \frac{\sin(x^2y^2)}{x^4+y^4} \text{ không tồn tại}$$

Xét $x = y \to 0$, khi đó ta có:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x^4)}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác , xét $x = 0, y \to 0$, khi đó dễ thấy $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ Dễ thấy điều này không xảy ra, ta có điều phải chứng minh

Đề 2

Câu 3: a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{n^n}$

a) Ta xét sự hội tụ của tích phân:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_0^{+\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)} \quad \text{phân kì}$$

Đề 2

Câu 3: a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{n^n}$

b) Đặt $X = (x+5)^2$. Thay X vào chuỗi số ban đầu ta có:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{n^n} (1)$$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n^n}$, xét lim: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Đề 2

Câu 3: a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{n^n}$

R= 0 => chuỗi hội tụ (1) trên toàn trục số $(-\infty; +\infty)$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{n^n}$ cũng hội tụ trên toàn trục số $(-\infty;\ +\infty)$

Đề 2

Câu 4: Xét tính hội tụ của các tích phân sau:

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x} dx$ b) $B = \int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx$

a) Ta có: $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x} \sim \frac{1}{x}$ khi $x \to +\infty$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ phân kì nên ta suy ra A phân kì

Đề 2

Câu 4: Xét tính hội tụ của các tích phân sau:

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x} dx$ b) $B = \int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx$

b) Ta có: $\frac{1}{(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$

Dễ dàng nhận thấy $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$ hội tụ

Còn $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ phân kì

$\Rightarrow B$ phân kì

BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

Bài tập củng cố

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1}dx$

Ta có: $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1}dx = \int_0^{1} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1}dx + \int_1^{+\infty} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1}dx$

Đặt $f(x) = \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to 0^+$

Mà $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ nên $\int_0^1 \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1}dx$ hội tụ (1)

Bài tập củng cố

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^{+\infty} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1} dx$

Đặt $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x - 1} = 0$$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{(x^{\frac{3}{2}}+1)\sqrt{x}}{e^x-1} dx$ hội tụ (2)

Từ (1), (2)$\Longrightarrow I$ hội tụ

Bài tập củng cố

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}$

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{4}]$ và $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{sinx(cosx)^2}} = 1$

Mà $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ hội tụ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}$ cũng hội tụ (1)

Bài tập củng cố

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2}-x)^2}} > 0, \forall x[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

và $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2}-x)^2}}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt[3]{\frac{(\frac{\pi}{2}-x)^2}{sinx(cosx)^2}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{t^2}{(sint)^2}} = 1 \; (t = \frac{\pi}{2} - x)$

Mà $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2}-x)^2}} dx$ hội tụ nên $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{sinx(cosx)^2}}$ cũng hội tụ (2)

Từ (1), (2) $\Longrightarrow I$ hội tụ

BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING GIỮA KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2023 – 2024

HẾT

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI
CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit