ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC
CHÍNH THỨC MÔN GIẢI TÍCH
Ngày thi: 09/03/2019
Thời gian làm bài: 75 phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Chứng minh rằng nếu $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ và $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ thì dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

b) Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định theo công thức truy hồi sau: $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n},\quad n = 1,2,3,...$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tính $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Câu 2. *(2 điểm)*

Cho các số thực a,b,c và số nguyên dương n thỏa mãn $c = \dfrac{6(a+b)}{5(n+2)}$.

Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm trong $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$a\sin^n x + b\cos^n x + c\sin x + c = 0.$$

Câu 3. *(2 điểm)*

a) Cho f là hàm số thực trên $(0,+\infty)$ sao cho f liên tục tại 1 và $f(xy) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in (0,+\infty)$. Chứng minh rằng f liên tục trên $(0,+\infty)$.

b) Cho f là hàm số thực trên $\mathbb{R}$ sao cho f liên tục tại 0 và $f(x+y) = f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. *(2 điểm)*

Cho hàm số thực f liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm cấp một và cấp hai liên tục trên (a,b) sao cho $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $x \in [a,b]$ tồn tại $z \in (a,b)$ sao cho

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(z).$$

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho f là hàm số thực khả vi trên $(0,+\infty)$ sao cho $\lim_{n\to+\infty} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Q.TRƯỞNG BM TOÁN - LÝ

CAO THANH TÌNH