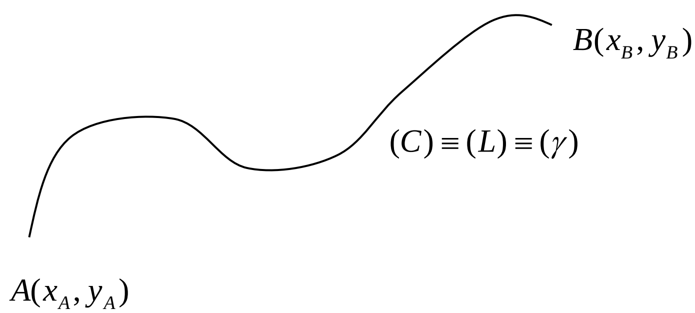
Buổi 09 – Ngày 18-11-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

*** BỔ SUNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ CẦU CỦA TÍCH PHÂN BỘI 3 (GHI TRÊN BẢNG)**

CHƯƠNG 5: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT

1/ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1:



$$I = \int_{(C)} f(x,y)dl \text{ hay là } I = \int_{(C)} f(x,y)ds \text{ hay là } I = \int_{(C)} f(x,y,z)dl$$

Trong đó: $(C) =$ curves = phần đường cong lấy tích phân, có 2 đầu mút là $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

= cung $\overset{\frown}{AB}$

Khi $f(x,y)=1$ hay $f(x,y,z)=1$ thì

$I = \int_{(C)} 1.dl = l(C) =$ chiều dài của đường cong (C) nằm giữa $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

Lưu ý: trong tích phần đường loại 1 ta luôn có ***cận dưới*** $\leq$ ***cận trên***

TH1: (C) là đường cong có pt tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, với $t_1 \leq t \leq t_2$

Ta tính $\begin{cases} x'(t) = ... \\ y'(t) = ... \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = ...$

Suy ra $I = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)).\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_{(C)} (2x^2 + 4y - xy)dl$, với $(C): \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$ và $0 \leq t \leq 1$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{(C)} (4xy - 2x + 3y)dl$, với $(C): \begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 4t + 5 \end{cases}$ và $0 \leq t \leq 2$

TH2: (C) là đường cong có pt $y = y(x)$, nghĩa là y là hàm số phụ thuộc vào biến x.

với $x_1 \le x \le x_2$, trong đó, x_1, x_2 là hoành độ của 2 đầu mút chắn đường cong (C)

Ta tìm: $y'(x) = ...$

Suy ra $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)).\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{(C)} (2x - 3y + 5)dl$, với (C): là parabol $y = x^2$, nối giữa $A(-1,1)$ và $B(3,9)$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{(C)} (4xy^2 - 1)dl$, với (C) là đoạn gấp khúc ABC và $A(-1,0), B(0,2), C(4,0)$

TH3: (C) là đường cong có pt $x = x(y)$, nghĩa là x là hàm số phụ thuộc vào biến y.

với $y_1 \le y \le y_2$, trong đó, y_1, y_2 là tung độ của 2 đầu mút chắn đường cong (C)

Ta tìm: $x'(y) = ...$

Suy ra $I = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y), y).\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_{(C)} (2y - x + 10)dl$, với (C) là parabol $x = y^2$ nối giữa $A(1,1)$ và $B(16,4)$

Ví dụ 6: Tính $I = \int_{(C)} (2xy - 1)dl$, với (C) là parabol $x = y^2$ nằm trong miền $\begin{cases} y \ge -x \\ y \ge x - 2 \end{cases}$

TH4: (C) là một phần đường tròn tâm O, bán kính R:

Đặt $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ R = const \end{cases}$

(ví dụ: xét (C) $x^2 + y^2 = 4$ → đặt $\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$)

Ta tìm $\begin{cases} x'(\varphi) = ... = -\mathrm{R}\sin\varphi \\ y'(\varphi) = ... = \mathrm{R}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} = ...$

Suy ra $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(R\cos\varphi, R\sin\varphi).\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\,d\varphi$

Ví dụ 7: Tính $I = \int_{(C)} (2x - y + 4)dl$, với (C) $x^2 + y^2 = 9$ trong miền $\begin{cases} y \ge x \\ x \ge 0 \end{cases}$

Ví dụ 8: Tính $I = \int_{(C)} (2xy - 3)dl$, với $(C): x^2 + y^2 = 1$ trong miền $\begin{cases} y \ge -x \\ y \ge \sqrt{3}x \end{cases}$

<u>TH5</u>: (C) là đường cong trong không gian có pt tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, với $t_1 \le t \le t_2$

trong đó t_1, t_2 là 2 giá trị của biến t ứng với 2 đầu mút của (C).

Ta tìm $\begin{cases} x'(t) = \ldots \\ y'(t) = \ldots \Rightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \ldots \\ z'(t) = \ldots \end{cases}$

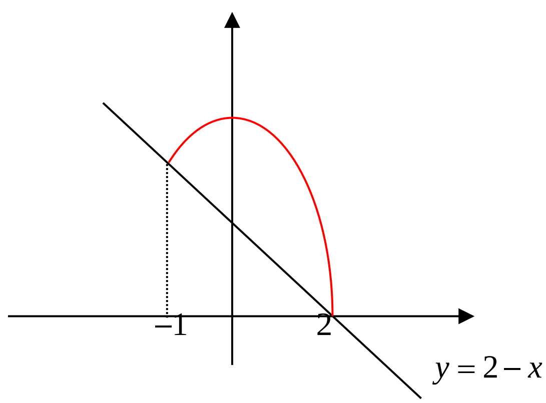
Suy ra: $I = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)).\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$

<u>Ví dụ 9</u>: Tính $I = \int\limits_{(C)} (2x - 7)dl$, với ($C$) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

<u>Ví dụ 10</u>: Tính $I = \int\limits_{(C)} (10 - x + y)dl$, với ($C$) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{cases}$

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Tính $I = \int\limits_{(C)} (4x - y + 3)dl$, với ($C$) là parabol $y = 4 - x^2$ nằm bên trên của $y = 2 - x$

<u>Giải</u>:



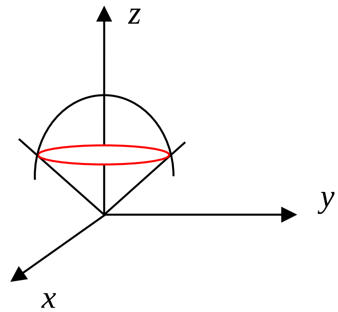
Ta có $-1 \le x \le 2$ và $y'(x) = -2x \Rightarrow (y'(x))^2 = (-2x)^2 = 4x^2$

Suy ra $I = \int\limits_{-1}^{2} (4x - (4 - x^2) + 3).\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$

$= \int\limits_{-1}^{2} (x^2 + 4x - 1)\sqrt{1 + 4x^2}\,dx \approx 22,5893$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Tính $I = \int\limits_{(C)} (x + y - 2)dl$ với (C) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} z = 2 - (x^2 + y^2) \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Ta có: đường cong (C) minh họa như sau:



Xét $2-(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+y^2}, t\geq 0$ ta có pt tương đương $2-t^2=t \Leftrightarrow t^2+t-2=0$

Tương đương $t=1$ (nhận) hay $t=-2$ (loại)

Ta có $\sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1}=1$

Nên ta tham số hóa (C) như sau

Đặt $\begin{cases} x=1.\cos\varphi \\ y=1.\sin\varphi \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi)=-\sin\varphi \\ y'(\varphi)=\cos\varphi \\ z'(\varphi)=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2+(z'(\varphi))^2}=\sqrt{(-\sin\varphi)^2+(\cos\varphi)^2+0^2}=1$$

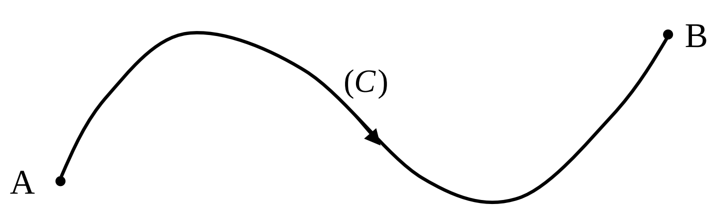
Ta có: $0\leq\varphi\leq 2\pi$

Suy ra $I=\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi-2)\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2+(z'(\varphi))^2}\,d\varphi$

$$=\left[\sin\varphi-\cos\varphi-2\varphi\right]_0^{2\pi}=(\sin(2\pi)-\sin(0))-[\cos(2\pi)-\cos(0)]-2(2\pi-0)$$

$$=0-0-(1-1)-4\pi=-4\pi$$

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2 (TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC VÀO HƯỚNG CỦA ĐƯỜNG CONG LẤY TÍCH PHÂN)



$$I=\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Trong đó: (C) là đường cong lấy tích phân, nối từ điểm A bắt đầu đến điểm B kết thúc.

Ta có: $\int\limits_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overrightarrow{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Lưu ý: Cận dưới có thể lớn hơn (hay bằng) hoặc nhỏ hơn cận trên là tùy ý.

a/ **Trường hợp (C) là đường cong tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, nối từ t_1 đến t_2.**

Trong đó: t_1 là giá trị của t ứng với điểm bắt đầu;

t_2 là giá trị của t ứng với điểm kết thúc.

Ta có: $\begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$

Suy ra: $I = \int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t)).x'(t) + Q(x(t),y(t)).y'(t)]dt = ...$

Ví dụ 1: Tính $I = \int\limits_C (4xy^2+1)dx + (10 - x + 2y)dy$, với (C) là đường cong $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 4+3t \end{cases}$ và $0 \le t \le 3$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_C (x^2y+2)dy - (xy)dx$, với (C) là đường cong $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = t+1 \end{cases}$ và t chạy từ 2 về 0.

b/ **Trường hợp (C) là đường cong $y = y(x)$, với x chạy từ x_1 đến x_2**

Trong đó: x_1 là hoành độ của điểm bắt đầu;

x_2 là hoành độ của điểm kết thúc.

Ta tính: $dy = y'(x)dx = ...$

Suy ra: $I = \int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x)]dx = ...$

Ví dụ 3: Tính $I = \int\limits_C (x^2-9)dx + xydy$, với (C) là đường parabol $y = x^2$, nối từ $A(2;4)$ đến điểm $B(-1;1)$.

Ví dụ 4: Tính $I = \int\limits_C (3+x-2y)dx - 2xydy$, với (C) là đường gấp khúc ABC theo thứ tự, và $A(6;0)$, $B(3;3)$ và $C(-3;-3)$.

c/ **Trường hợp (C) là đường cong $x = x(y)$, với y chạy từ y_1 đến y_2**

Trong đó: y_1 là tung độ của điểm bắt đầu;

y_2 là tung độ của điểm kết thúc.

Ta tính: $dx = x'(y)dy = ...$

Suy ra: $I=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{y_1}^{y_2}[P(x(y),y).x'(y)+Q(x(y),y)]dy=...$

Ví dụ 5: Tính $I=\int_C (2y-x)dx-(6x+y)dy$, với (C) là đường parabol $x=y^2$, nối từ $A(9;3)$ đến điểm $B(1;-1)$.

Ví dụ 6: Tính $I=\int_C (10+x)dx-(2y+1)dy$, với (C) là đường cong $x=(y-1)^2+1$, nối từ $A(1;1)$ đến $B(5;3)$.

d/ **Trường hợp C là (một phần) đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=$hằng số**:

Ta đặt $\begin{cases} x=R\cos\varphi \\ y=R\sin\varphi \end{cases}$, với φ chạy từ φ_1 đến φ_2.

Trong đó: φ_1 là giá trị góc φ ứng với điểm bắt đầu;

φ_2 là giá trị góc φ ứng với điểm kết thúc.

Ta tính: $\begin{cases} dx=-R\sin\varphi d\varphi \\ dy=R\cos\varphi d\varphi \end{cases}$,

Suy ra:

$$I=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}[P(R\cos\varphi,R\sin\varphi).(-R\sin\varphi)+Q(R\cos\varphi,R\sin\varphi).(R\cos\varphi)]d\varphi=...$$

Ví dụ 7: Tính $I=\int_C (x^2y+2)dx+2ydy$, với C là một phần đường tròn $x^2+y^2=4$ trong miền $\begin{cases} y\ge x \\ y\ge -\sqrt{3}x \end{cases}$, cùng chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 8: Tính $I=\int_C (xy-1)dx+y^3dy$, với C là một phần đường tròn $x^2+y^2=4$ trong miền $y\le 0$, ngược chiều kim đồng hồ.

e/ **Trường hợp (C) là đường cong trong không gian $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, với t chạy từ t_1 đến t_2.**

Ta tính $\begin{cases} dx=x'(t)dt \\ dy=y'(t)dt \\ dz=z'(t)dt \end{cases}$.

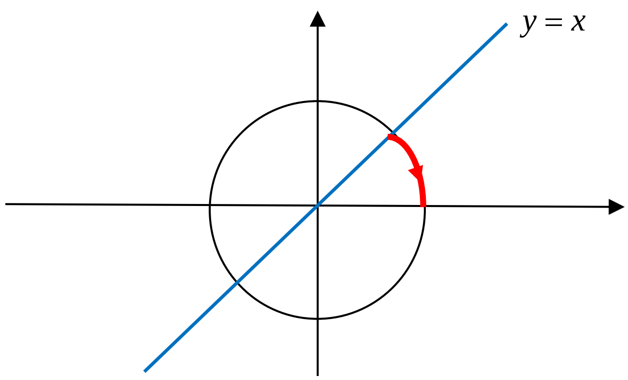
Suy ra: $I=\int_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t),z(t))].x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))].y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))].z'(t)]dt=...$

<u>Ví dụ 9</u>: Tính $I = \int_C 2xzdx - ydy + (2 - x + z)dz$, với C là đường cong $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = 10 \end{cases}$, và $0 \le t \le 2$.

<u>Ví dụ 10</u>: Tính $I = \int_C (x + y + z)dx - xydz$, với C là đường cong giao tuyến $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$, cùng chiều kim đồng hồ, nhìn từ gốc O hướng lên trục Oy.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Tính $I = \int_C (2xy + 3)dx - (2 + x)dy$, với C là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, trong miền $\begin{cases} y \ge 0 \\ y \le x \end{cases}$, cùng chiều kim đồng hồ.

<u>Giải</u>:



Đặt $\begin{cases} x = 1\cos\varphi \\ y = 1\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin\varphi d\varphi \\ dy = \cos\varphi d\varphi \end{cases}$, và ta có φ chạy từ $\frac{\pi}{4}$ về 0.

Ta có: $I = \int_C (2xy + 3)dx - (2 + x)dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} [(2\cos\varphi\sin\varphi + 3)(-\sin\varphi) - (2 + \cos\varphi)\cos\varphi]d\varphi$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} [(-2\sin^2\varphi\cos\varphi - 3\sin\varphi) - (2\cos\varphi + \cos^2\varphi)]d\varphi = ...$$

CHƯƠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

1/ <u>MỘT SỐ KHÁI NIỆM</u>:

Phương trình vi phân (differential equations) là loại phương trình chứa đạo hàm ($y', y'', y''', u', v', ...$) hoặc là chứa biểu thức vi phân ($\square dx + \square dy$) trong phương trình.

Cấp của pt vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm (của vi phân) có trong phương trình.

Giải pt vi phân nghĩa là ta tìm hàm y theo biến x hoặc là tìm hàm x theo biến y sao cho pt vi phân đã cho được thỏa.

Ví dụ: ta có một số pt vi phân sau:

a/ $y' - \frac{4y}{x} = 0$, với $x \neq 0$. (→ cấp 1)

b/ $y'' - 3y' - 4y = e^x \cos x$ (→ cấp 2)

c/ $y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos(2x) - 3\sin(2x)$ (→ cấp 3)

d/ $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = (3x-1)e^{4x}$ (cấp 4)

e/ $(2xy - \sin x)dx + (6x^2y + 1)dy = 0$ (→ cấp 1)

f/ $(4x^2y^2 + \tan(xy))dy - (4\sin x - \cos y)dx = 0$ (→ cấp 1)

g/ $(x + y - 3)dx^2 + (4xy + 7)dy^2 = 0$ (→ cấp 2).

<u>Ví dụ khác</u>: giải pt vi phân $y' - 4\frac{y}{x} = 0$, với $x \neq 0$ (*).

<u>Giải</u>: Ta có $y' = \frac{dy}{dx}$, nên pt (*) tương đương $\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4\frac{y}{x}$

<u>TH1</u>: $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ nên pt tương đương $0 = 4.0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng, $\forall x \neq 0$).

<u>TH2</u>: $y \neq 0$ thì pt tương đương $\frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = 4\ln|x| + \ln|C|$$

(*<u>Lưu ý</u>*: khi VT của pt có "ln" xuất hiện thì VP của pt ta lấy "ln|C|" thay vì lấy C như thông thường).

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x|^4 + \ln|C|$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|Cx^4|$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|Cx^4|}$$

$$\Leftrightarrow y = Cx^4$$

(với $C =$ hằng số)

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = Cx^4$ (với $C =$ hằng số).

Khi $C = 0$ ta nghiệm riêng của pt là $y_r = 0.x^4 = 0$.

<u>Lưu ý 2</u>: nghiệm tổng quát của pt vi phân cấp *n* luôn chứa n hằng số là $C_1, C_2, ..., C_n$.

2/ <u>PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 DẠNG TÁCH BIẾN (PHÂN LY BIẾN SỐ) (SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS)</u>:

Là pt vi phân cấp 1 mà ta có thể tách x, dx và y, dy thành 2 vế riêng biệt của phương trình.

<u>Cách giải</u>:

+ Ta thay $y'=\frac{dy}{dx}$ hoặc $x'=\frac{dx}{dy}$ vào pt đã cho.

+ Ta tách x,dx và y,dy thành 2 vế riêng biệt của pt (thường ta đặt y,dy ở VT của pt).

+ Lấy tích phân bất định 2 vế pt

(*Lưu ý*: khi VT của pt có "ln" xuất hiện thì VP của pt ta lấy "ln|*C*|" thay vì lấy *C* như thông thường).

+ Rút gọn, ta tìm hàm y_{tq} theo biến x hoặc là tìm hàm x_{tq} theo biến y.

Bài tập tương tự: giải các pt vi phân sau:

i/ $y'-8\frac{y^2}{x^2}=0$, với $x\neq 0$

2i/ $y'=e^{\sqrt{x}}$, với $x\geq 0$

3ii/ $y'=e^x\sin x$

4i/ $y'=6\frac{x^3}{y^3}$, với $y\neq 0$

5i/ $x'=y^2e^y$

6i/ $x'=4y\cos(3y)$

7i/ $4^y.y'=\tan^3 x+\sin^2 x$

8i/ $\sqrt{1+4x^2}.y'=\sqrt{4+9y^2}$

9i/ $(2+3x)^2y'=(4-3y)^2$

10i/ $\tan y.y'=\cot(4x)$

11i/ $\sin^2(3x)y'=\cos^2(5y)$

12i/ $y'=e^{-\sqrt[3]{x}}$

13i/ $(1+x^2)y'=(16+25y^2)$

14i/ $\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0$

15i/ $y'=xy(y+2)$

16i/ $y'=\sin(y-x-1)$ *

17i/ $y'=\cos(x-y-1)$ *

18i/ $xdx+ydy=0$

19i/ $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$

20i/ $xy^2dy=-(y+1)dx$

21i/ $y'=2x+y$ *

22i/ $y'=3x+4y$ *

23i/ $y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1$ *

24i/ $\tan y dx - x\ln|x|dy = 0$, với $x \neq 0$

25i/ $\cos x . y' = y$

26i/ $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \dfrac{3y+2}{x+1}.y'$

27i/ $y' = (\sin\ln x + \cos\ln x)y$

28i/ $y' = a\cos y + b$, với $b > a > 0$.

29i/ $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$

30i/ $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$

31i/ $y' = \sin(ax+by)$ *

32i/ $y' = \sin(ay+bx)$ *

33i/ $y' = \dfrac{1}{2x+y}$ *

34i/ $y'(x+y) = 1$ *

35i/ $y' = \sqrt{2x+y-3}$ *

36i/ $y' = \sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$ *

37i/ $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-2}$

38i/ $x^2(y^3+5)dx + (y^3+5)y^2dy = 0$ thỏa $y(0) = 1$

39i/ $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$ thỏa $y(0) = 0$

40i/ $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$ thỏa $y(\sqrt{8}) = 1$

41i/ $y' = -\dfrac{3x+3y-1}{2(x+y)}$ thỏa $y(0) = 2$

42i/ $y'\tan x = y$ thỏa $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

<u>Giải</u> 16i/ $y' = \sin(y-x-1)$ *

Đặt $z = y - x - 1 \Rightarrow z' = y' - x' \Rightarrow z' = y' - 1 \Rightarrow y' = z' + 1$.

Nên pt đã cho tương đương $z' + 1 = \sin z \Leftrightarrow z' = \sin z - 1$

Mà $z' = \dfrac{dz}{dx}$ nên pt tương đương $\dfrac{dz}{dx} = \sin z - 1 \Leftrightarrow \dfrac{dz}{\sin z - 1} = dx \Leftrightarrow \int \dfrac{dz}{\sin z - 1} = \int dx$ (**)

Đặt $t = \tan\dfrac{z}{2} \Rightarrow \dfrac{z}{2} = \arctan t \Rightarrow z = 2\arctan t \Rightarrow dz = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Ta có $\sin z = \dfrac{2t}{1+t^2}$ và $\cos z = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Suy ra $\sin z - 1 = \dfrac{2t}{1+t^2} - 1 = \dfrac{2t-1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{-(t^2-2t+1)}{1+t^2} = \dfrac{-(t-1)^2}{1+t^2}$

Suy ra (**)

$$\Leftrightarrow \int \frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{-(t-1)^2} = \int dx \Leftrightarrow \int -\frac{2dt}{(t-1)^2} = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t-1} = x + C$$

$$\Leftrightarrow t - 1 = \frac{2}{x+C}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{x+C} + 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2+x+C}{x+C}$$

Mà $t = \tan\dfrac{z}{2} \Rightarrow \tan\dfrac{z}{2} = \dfrac{2+x+C}{x+C} \Rightarrow \dfrac{z}{2} = \arctan\left(\dfrac{2+x+C}{x+C}\right) \Rightarrow z = 2\arctan\left(\dfrac{2+x+C}{x+C}\right)$

Mà $z = y - x - 1 \Rightarrow y = z + x + 1$

Nên nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = x + 1 + 2\arctan\left(\dfrac{2+x+C}{x+C}\right)$,

với $C =$ hằng số thỏa $x + C \neq 0$.

3/ <u>PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 DẠNG ĐẲNG CẤP</u>

+ Là loại pt vi phân cấp 1 mà ta không thể tách x, dx và y, dy thành 2 vế riêng biệt của pt.

+ Cấp của dx và dy là ngang bằng nhau.

+ Trong pt thường xuất hiện biểu thức $\dfrac{y}{x}$ hay $\dfrac{x}{y}$ (hoặc cả 2)

<u>*Cách giải*</u>:

+ Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + x'u = u'x + u$.

+ Thay $y' = u'x + u$ vào pt ban đầu.

+ Rút gọn, ta thu được pt dạng tách biến của hàm u theo biến x

+ Giải tiếp như phần 2/ ta tìm hàm u_{tq} theo biến x.

+ Mà $y = ux$, nên nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = u_{tq}.x$ (có chứa hằng số C)

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, với $x \neq 0, y \neq 0$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Giải pt vi phân: $y' = \dfrac{x-y+3}{x+y+5}$

<u>Giải</u>:

Ví dụ mẫu 1: Giải pt vi phân: $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$, với $x\neq 0, y\neq 0$ (*)

Đặt $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$

Thay vào (*) ta được $u'x+u=u+\frac{1}{u}\Leftrightarrow u'x=\frac{1}{u}$

Mà $u'=\frac{du}{dx}$ nên pt tương đương $\frac{du}{dx}x=\frac{1}{u}\Leftrightarrow udu=\frac{dx}{x}$ (do $x\neq 0$)

$\Leftrightarrow \int udu=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow \frac{u^2}{2}=\ln|x|+|C|\Leftrightarrow u^2=2(\ln|x|+|C|)\Leftrightarrow u=\pm\sqrt{2(\ln|x|+|C|)}$

Ta có $y=ux$ nên nghiệm tổng quát cần tìm là

$y_{tq}=u_{tq}x=x(\pm\sqrt{2(\ln|x|+|C|)})$, với C là hằng số.

Ví dụ mẫu 2: Giải pt vi phân: $y'=\frac{x-y+3}{x+y+5}$ (*)

Giải: Ta giải hệ pt $\begin{cases}x-y+3=0\\x+y+5=0\end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta có $2x+8=0\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4=x_0$

Thay vào 1 trong 2 pt còn lại, ta có $y=-1=y_0$

Đặt $\begin{matrix}X=x-x_0\Rightarrow X=x+4\Rightarrow x=X-4\\ Y=y-y_0\Rightarrow Y=y+1\Rightarrow Y'=y'\end{matrix}$ và $y=Y-1$

Nên pt (*) tương đương $Y'=\frac{(X-4)-(Y-1)+3}{(X-4)+(Y-1)+5}\Leftrightarrow Y'=\frac{X-Y}{X+Y}$ (**)

TH1: $X=0\Leftrightarrow x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ thay vào pt (*) ta có

$y'=\frac{-4-y+3}{-4+y+5}\Leftrightarrow y'=\frac{-1-y}{y+1}\Leftrightarrow y'=\frac{-(1+y)}{1+y}\Leftrightarrow y'=-1$ (***)

Mà $y'=\frac{dy}{dx}$

nên pt (***) tương đương $\frac{dy}{dx}=-1\Leftrightarrow dy=-dx\Leftrightarrow\int dy=\int -dx\Leftrightarrow y=-x+C$

mà $x=-4\Rightarrow y=-(-4)+C=4+C\Rightarrow y'=0$ (4*)

Từ (***) và (4*) $\Rightarrow$ vô lý.

TH2: $X\neq 0$. Ta chia tử và mẫu của (**) cho X thì được

$Y'=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$ (5*)

Đặt $u=\dfrac{Y}{X}\Rightarrow Y=uX\Rightarrow Y'=u'X+u$. Thay vào (5*) ta có:

$$u'X+u=\frac{1-u}{1+u}\Leftrightarrow u'X=\frac{1-u}{1+u}-u\Leftrightarrow u'X=\frac{1-u-u-u^2}{1+u}$$

$\Leftrightarrow u'X=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$. Mà $u'=\dfrac{du}{dX}$ nên pt tương đương

$$\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\frac{dX}{X}\Leftrightarrow\int\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\int\frac{dX}{X}\Leftrightarrow\frac{1}{-2}\int\frac{-2(1+u)du}{1-2u-u^2}=\int\frac{dX}{X}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow\ln|1-2u-u^2|=-2\ln|X|+\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow\ln|1-2u-u^2|=\ln|X|^{-2}+\ln|C|$$

$$\Leftrightarrow\ln|1-2u-u^2|=\ln\left|\frac{C}{X^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|1-2u-u^2|}=e^{\ln\left|\frac{C}{X^2}\right|}\Leftrightarrow1-2u-u^2=\frac{C}{X^2}\Leftrightarrow u^2+2u+\frac{C}{X^2}-1=0$$

Ta có $\Delta'=1^2-1\left(\dfrac{C}{X^2}-1\right)=2-\dfrac{C}{X^2}$

Để pt có nghiệm thì $\Delta'\ge0\Leftrightarrow2-\dfrac{C}{X^2}\ge0\Leftrightarrow\dfrac{C}{X^2}\le2\Leftrightarrow X^2\ge\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X\ge\sqrt{\dfrac{C}{2}}\\X\le-\sqrt{\dfrac{C}{2}}\end{array}\right.$

(với $C\ge0$ là hằng số)

Nghiệm của pt là:

$$u=\frac{-1-\sqrt{2-\frac{C}{X^2}}}{1}=-1-\sqrt{2-\frac{C}{X^2}}$$

Hay $$u=\frac{-1+\sqrt{2-\frac{C}{X^2}}}{1}=-1+\sqrt{2-\frac{C}{X^2}}$$

Mà $u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y+1}{x+4}$ nên nghiệm là:

$$\frac{y+1}{x+4}=-1-\sqrt{2-\frac{C}{(x+4)^2}}\Rightarrow y=\left[-1-\sqrt{2-\frac{C}{(x+4)^2}}\right](x+4)-1$$

Hay $$\frac{y+1}{x+4}=-1+\sqrt{2-\frac{C}{(x+4)^2}}\Rightarrow y=\left[-1+\sqrt{2-\frac{C}{(x+4)^2}}\right](x+4)-1$$

Đây là nghiệm tổng quát cần tìm của pt (*).

Bài tập tương tự: giải pt vi phân:

1i/ $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$

2i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1$, với $x \neq 0$ có

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}[\ln|u-1| - \ln|u+1|] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

3i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5\left(\frac{y}{x}\right) + 4$, với $x \neq 0$

4i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$, với $x \neq 0$

5i/ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 6$, với $x \neq 0$.

6i/ $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$, với $x \neq 0, y \neq 0$.

7i/ $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$, với $x \neq 0$.

8i/ $(2x + 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ *

9i/ $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$.

10i/ $xy' - y = \frac{x}{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$, với $x \neq 0$ và $y(1) = 1$.

11i/ $y' = \frac{y^2 + 2xy}{xy}$, với $x \neq 0, y \neq 0$.

12i/ $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$ *

13i/ $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$ *

14i/ $y' = e\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} + 1$, với $x \neq 0$.

15i/ $xy' = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y$, với $x \neq 0$.

16i/ $xy' + x\tan\left(\frac{y}{x}\right) - y = 0$, với $x \neq 0$.

17i/ $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$.

18i/ $(x+2y)dx - xdy = 0$.

19i/ $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$.

20i/ $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}dx$, với $x \neq 0$.

21i/ $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

22i/ $xy' = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với $x \neq 0$ và $y(1) = 1$.

23i/ $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, với $xy \geq 0$ và $y(1) = 1$.

24i/ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ thỏa $y(1) = 0$.

25i/ $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$. *

26i/ $y' = \dfrac{x + y - 3}{1 - x + y}$ *

27i/ $(x + y - 1)^2 dy = 2(y+2)^2 dx$.
