ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐỀ ĐỀ NGHỊ OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 29 NĂM 2023

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1.

Cho ma trận vuông $A=\begin{pmatrix} 2015 & -2014 \\ 2014 & -2013 \end{pmatrix}$.

Hãy xác định số nguyên dương n sao cho tồn tại ma trận vuông cấp hai X với các phần tử nguyên để

$$X^{2015}+X^{n}=2A.$$

Hãy chỉ ra X khi đó.

Bài 2.

Cho A, B là các ma trận vuông, thực, cấp 3 sao cho:

$$\det(A)=\det(B)=\det(A+B)=\det(A-B)=0.$$

Chứng minh rằng: $\det(xA+yB)=0$, với mỗi cặp số thực x, y.

Bài 3.

(a) Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix}$. Tính $\det(A)$

(b) Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của A và tìm A^{2023}.

Bài 4.

Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n, lũy linh.

(a) Tìm các trị riêng và đa thức đặc trưng của A.

(b) Giả sử $AB + A + B = O_n$. Tính $\det(I_n + 2A + 3B)$, với O_n là ma trận vuông cấp n có mọi hệ số đều bằng 0.

Bài 5.

(a) Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n, thỏa mãn $AB = BA$.

Chứng minh rằng $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Nếu bỏ điều kiện $AB = BA$ thì kết luận còn đúng không?

(b) Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n, và các đa thức $p(x), q(x)$.

Chứng minh rằng: $\det[p(A)p(B) + q(A)q(B)] = \det[p(B)p(A) + q(B)q(A)]$.

Bài 6.

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận vuông, thực, cấp n, thỏa mãn $A_1A_2 \ldots A_k = O_n$, với O_n là ma trận vuông cấp n có mọi hệ số đều bằng 0.

Chứng minh rằng: $rank(A_1) + rank(A_2) + \cdots + rank(A_k) \leq (k-1)n$.

------------------HẾT-----------------

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỀ NGHỊ OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 29 NĂM 2023

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1.

Đặt $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ thì phương trình đã cho tương đương

$$X^{2015} + X^n = 2I_2 + 4028M .$$

Ta chỉ ra X thỏa mãn phương trình $MX = XM$ và giải phương trình này để thu được $X = \alpha I_2 + \beta M$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Sử dụng $M^2 = O_2$ để chỉ ra

$$X^{2015} + X^n = (\alpha^{2015} + \alpha^n) I_2 + (2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})\beta M .$$

Từ đó quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha^{2015} + \alpha^n = 2 \\ (2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})\beta = 4028 \end{cases}.$$

Chỉ ra α là ước của 2 để giải phương trình thứ nhất và tính ra nghiệm $\alpha = 1$.

Thay $\alpha = 1$ vào phương trình thứ hai thì thu được

$$(2015 + n)\beta = 4028.$$

Dựa vào $n + 2015$ là ước số của 4028, ta khẳng định được $n + 2015 = 4028$, và suy ra $\beta = 1$.

Từ đó ta tính được $n = 2013$, va ta có $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 2.

Nếu $x = 0$ thì $\det(xA + yB) = \det(yB) = y^3 \det(B) = 0$.

Nếu $x \neq 0$ thì $\det(xA + yB) = x^3 P(t)$, trong đó $t = \dfrac{y}{x}$ và $P(t) = \det(A + tB)$ là đa thức bậc 3.

Theo giả thiết ta có: $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ nên $P(t)$ phải có dạng

$$P(t) = \alpha t(t^2 - 1), \text{ với } \alpha \text{ là hằng số.}$$

Tiếp theo, ta có $\alpha = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^3} P(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \det\left(\dfrac{1}{t} A + B\right) = \det(B) = 0$.

Từ đó ta có $P(t) = 0$, với mọi t.

Bài 3.

(a) Ta đặt $D_n = \det(A)$.

Ta biến đổi định thức theo thứ tự:

+ Lấy dòng n trừ cho dòng $(n-1)$.

+ Lấy dòng $(n-1)$ trừ cho dòng $(n-2)$.

+ ...

+ Lấy dòng 2 trừ cho dòng 1.

Lấy kết quả thu được khai triển theo cột 1.

Tiếp theo, ta biến đổi định thức theo thứ tự:

+ Lấy cột $(n-1)$ trừ cho cột $(n-2)$.

+ Lấy cột $(n-2)$ trừ cho cột $(n-3)$.

+ ...

+ Lấy cột 2 trừ cho cột 1.

Đến đây ta thu được D_{n-1}; nghĩa là $D_n = D_{n-1}$.

Nên sau cùng ta có: $D_n = 1$.

(b) Ta có các trị riêng của A là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 4$ (các trị riêng đơn).

Nên tồn tại ma trận $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa:

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Suy ra $A = TDT^{-1} \Rightarrow A^m = T\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}T^{-1}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Nên ta có:

$$A^{2023} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)4^{2023} & -\frac{3}{10}-\left(\frac{3}{10}\right)4^{2023} & -\frac{3}{10}-\left(\frac{3}{10}\right)4^{2023} \\ -\frac{3}{14}-\left(\frac{3}{14}\right)4^{2023} & -\frac{9}{14}+\frac{2}{7}(-3)^{2023}+\left(\frac{1}{14}\right)4^{2023} & -\frac{9}{14}-\frac{5}{7}(-3)^{2023}+\left(\frac{1}{14}\right)4^{2023} \\ -\frac{3}{35}-\left(\frac{3}{35}\right)4^{2023} & -\frac{9}{35}-\frac{2}{7}(-3)^{2023}+\left(\frac{1}{35}\right)4^{2023} & -\frac{9}{35}+\frac{5}{7}(-3)^{2023}+\left(\frac{1}{35}\right)4^{2023} \end{pmatrix}$$

Bài 4.

(a) Ta dễ dàng chứng minh được ma trận lũy linh chỉ có giá trị riêng $\lambda = 0$. Từ đó suy ra đa thức đặc trưng của ma trận lũy linh là $p_A(\lambda) = \lambda^n$.

(b) Từ điều kiện $AB + A + B = O_n$, ta có: $(I_n + A)(I_n + B) = I_n$, do đó:

$(I_n + B)(I_n + A) = I_n$, cho nên $AB = BA$.

Suy ra, $2A + 3B$ là ma trận lũy linh.

Đặt $C = 2A + 3B$ thì ma trận lũy linh C chỉ có giá trị riêng $\lambda = 0$.

Xét đa thức $q(x) = x + 1$ thì ma trận $q(C) = C + I_n$ có giá trị riêng

$q(\lambda) = \lambda + 1 = 1.$

Suy ra $\det(I_n + 2A + 3B) = \det[q(C)] = [q(\lambda)]^n = 1^n = 1$.

Bài 5.

(a) Với đơn vị ảo $i = \sqrt{-1}$, ta có: $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

Lưu ý rằng ta luôn có: $\det(\bar{M}) = \overline{\det(M)}$.

Ta có: $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)]$

$$= \det(A + iB).\det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0.$$

Nếu bỏ điều kiện giao hoán thì khẳng định trên không còn đúng nữa.

Ví dụ, ta chọn: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Ta thấy $p(A), q(A)$ giao hoán với nhau, và $p(B), q(B)$ giao hoán với nhau.

Xét các ma trận:

$$M = \begin{pmatrix} p(A) & q(B) \\ -q(A) & p(B) \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} p(B) & -q(A) \\ q(B) & p(A) \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng bài toán trên ta được:

$\det(M) = \det[p(A)p(B) + q(A)q(B)]$,

$\det(N) = \det[p(B)p(A) + q(B)q(A)]$.

Ta có $\det(J) = -1$ và $M = JNJ$,

Nên suy ra $\det(M) = \det(N)$ và có điều phải chứng minh.

Bài 6.

Từ bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trận, ta có:

$rank(A) + rank(B) \leq rank(AB) + n$, nên

$$\begin{aligned}0 = rank(A_1A_2...A_k) &\geq rank(A_1) + rank(A_2...A_k) - n \\ &\geq rank(A_1) + rank(A_2) + rank(A_3...A_k) - 2n \\ &\geq .... \\ &\geq rank(A_1) + rank(A_2) + \cdots + rank(A_k) - (k-1)n\,.\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

------------------HẾT------------------