Không gian vec tơ con của $\mathbb{R}^n$; cơ sở và sự độc lập tuyến tính

Dr. Nguyen Van Hoi

University of Information Technology

Ngày 9 tháng 9 năm 2023

KGVT con của $\mathbb{R}^n$

Với $W \subset \mathbb{R}^n$, ta nói W là KGVT con của $\mathbb{R}^n$ nếu và chỉ nếu

- $0 \in W$,
- Với mọi $v, u \in W$, thì $v + u \in W$ và $kv \in W$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

☎ $W\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ là KGVT con của $\mathbb{R}^2$?

☎ W là tập nghiệm của phương trình $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ là KGVT con của $\mathbb{R}^3$.

☎ Tập ảnh của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$ là KGVT con $\mathbb{R}^3$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tập sinh

Cho họ vec tơ $v_1, v_2, ..., v_m$ trong $\mathbb{R}^n$. Tập sinh:

$$\text{span}(v_1, v_2, ..., v_m) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m : c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ở đây $c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m$ là tổ hợp tuyến tính của $v_1, \cdots, v_m$.

☎ $\text{span}(v_1, v_2, ..., v_m)$ là KGVT con của $\mathbb{R}^n$?

☎ Cho họ các vec tơ sau

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

CM $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{span}(v_1, v_3)$?

◆ (v_1, v_3) là họ sinh tốt hơn (v_1, v_2, v_3, v_4) cho W. Nhưng nó có phải là họ sinh tốt nhất và nó có duy nhất?

Độc lập tuyến tính

Họ vec tơ $v_1, v_2, ..., v_m$ in $\mathbb{R}^n$ là ĐỘC LẬP tuyến tính nếu phương trình

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0 \qquad (Ac = 0)$$

có duy nhất nghiệm $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Tương đương

$$ker \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} = \{0\} \quad \text{hoặc} \quad rank \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} = m.$$

NGƯỢC LẠI, chúng được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

☎

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}.$$

CM $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ độc lập tuyến tính, trong khi đó $\{v_1, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

☎ Cho họ vec tơ

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}.$$

CM $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ tuyến tính; $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính?

Cơ sở

Tập sinh tố nhất của W

Họ $w_1, w_2, ..., w_r$ trong KVTC con W của $\mathbb{R}^n$ là cơ sở của W nếu chúng độc lập tuyến tính và $W = \text{span}(w_1, w_2, ..., w_r)$.

❒ Tìm cơ sở: giả sử $W = \text{span}(v_1, \cdots, v_m)$. Lập ma trận cột:

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix},$$

loại v_i là tổ hợp tuyến tính của $v_1, \cdots, v_{i-1}$ khỏi danh sách này.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ (1) \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ (7) \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ (5) \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

❒ Làm thế nào để tìm thấy chúng một cách hiệu quả?

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{đưa về} \quad rref(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

which shows that v_1, v_2 are linearly independent and

$$v_3 = -v_1 + 2v_2.$$

Tọa độ và chiều của KGVT con

Các họ $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ trong không gian con W của $\mathbb{R}^n$ tạo thành một cơ sở của W nếu mọi vectơ $v \in W$ có thể được biểu diễn DUY NHẤT dưới dạng sự kết hợp tuyến tính

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m \qquad \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = 0$$

Ta gọi $c_1, .., c_m$ tọa độ v ứng với cơ sở $v_1, v_2, ..., v_m$, ký hiệu, $[v]_B = [c_1, .., c_m]^T$.

❒ Xét không gian con W của $\mathbb{R}^n$. Số vectơ trong một cơ sở của W được gọi là số chiều của V, ký hiệu là $\dim(W)$.

☎ Ví dụ 1:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

CMR chúng là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm tọa độ của $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ trong cở sở đó.

Thank you for listening!

Nguyen Van Hoi

hoinv@uit.edu.vn