Mai Xuân Việt – 01678336358 – vietmxse60678@fpt.edu.vn

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII (2010)

Đề thi môn : Đại số

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho
$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2010B) = 0$.
(i) Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có
$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2009B) = 0$.

Câu 2. Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi : $u_0 = v_0 = w_0 = 1$
và $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} = -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} = -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n.

Câu 3.

(i) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương,biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s,p,q)$ bậc không quá n của các biến

$s = x + y + z,\ p = xy + yz + zx,\ q = xyz$

(ii) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s,p,q)$

Câu 4.Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. Chọn một trong hai câu sau:

5a. Cho A là ma trận thực vuông,cấp $n \geq 2$,có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $rank\ A = 1$.Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu của A (đa thức tối thiểu của A là đa thức $p(t) \neq 0$ có bậc nhỏ nhất,với hệ số thực và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1,sao cho $p(A) = 0$).

5b. Cho A, B, C là các ma trận thực ,vuông cấp n ,trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C .Giả sử $C(A+B) = B$ .Chứng minh rằng B và C giao hoán với nhau.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII (2010)

Đề thi môn : Giải tích

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1.Cho hàm số $f(x)=\ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x>0$,tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x)=xf'(c)$ mà ta kí hiệu là $c(x)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{c(x)}{x}$.

Câu 2.Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$x_1=1,\ x_{n+1}=x_n(1+x_n^{2010}), n\ge 1.$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2}+\frac{x_2^{2010}}{x_3}+\ldots+\frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$$

Câu 3. Cho $a\in\mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0)\ge 0$ và $f'(x)+af(x)\ge 0,\quad \forall x\in[0,\infty)$.

Chứng minh rằng $f(x)\ge 0,\quad \forall x\ge 0$.

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$.Giả sử rằng

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \dfrac{n}{2}$.

Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = ef(0)$ và

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

6b. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$f(1) = 2010$, $f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.