BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Chương 5: Tích phân đường - Tích phân mặt

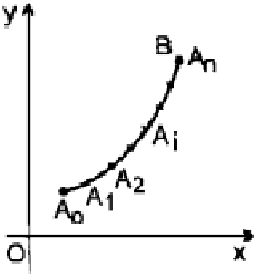
5.1 Tích phân đường loại 1

5.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1

Định nghĩa 5.1

Cho hàm $f(M) = f(x, y)$ *xác định trên một cung phẳng* $\overset{\frown}{AB}$. *Chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *thành* n *cung nhỏ bởi các điểm* $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.
Gọi độ dài mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *là* $\Delta s_i, i = 1, \ldots, n$.
Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *lấy tùy ý một điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$



5.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1

Định nghĩa 5.1

Nếu $\max \Delta s_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = I$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ cũng như cách chọn các điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$, thì ta nói hàm f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và giới hạn đó được gọi là **tích phân đường loại một** của hàm f dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds.$$

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.
- Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (hoặc trơn từng khúc). Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì nó cũng khả tích trên đó.

5.1.2 Cách tính

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.
- Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (hoặc trơn từng khúc). Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì nó cũng khả tích trên đó.
- Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(x,y)ds + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(x,y)ds.$$

5.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x), x \in [a, b]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

5.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x), x \in [a,b]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

5.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x), x \in [a, b]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

- *(trường hợp trong không gian)* Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

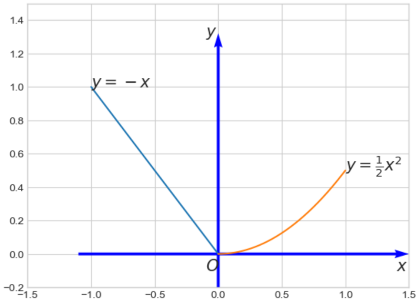
Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, L *là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, L *là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \textit{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \textit{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Giải:



Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với

$L_1 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], y = -x\}$,

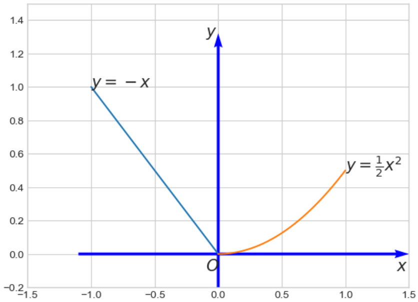
$L_2 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}x^2\}$,

do đó $I = \int_{L_1} xyds + \int_{L_2} xyds$.

Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, L *là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Giải:



Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với

$L_1 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], y = -x\}$,

$L_2 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}x^2\}$,

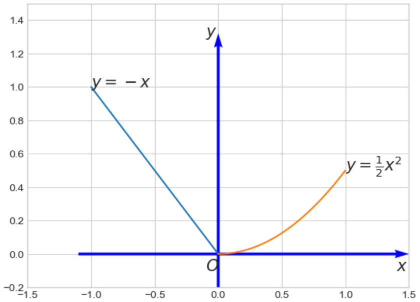
do đó $I = \int_{L_1} xyds + \int_{L_2} xyds$.

Trên $L_1 : y = -x \Rightarrow y' = -1$

Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, *L là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1,0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0,1]. \end{cases}$

Giải:

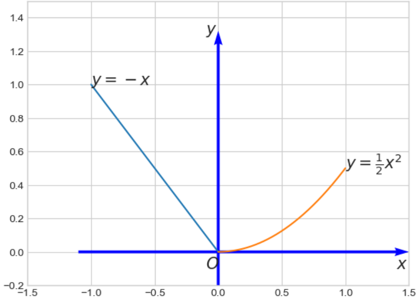


Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với
$L_1 = \{(x,y) : x \in [-1,0], y = -x\}$,
$L_2 = \{(x,y) : x \in [0,1], y = \frac{1}{2}x^2\}$,
do đó $I = \int_{L_1} xyds + \int_{L_2} xyds$.
Trên $L_1 : y = -x \Rightarrow y' = -1$
và trên $L_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x$. Do đó

Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, *L là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Giải:



Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với

$L_1 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], y = -x\}$,

$L_2 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}x^2\}$,

do đó $I = \int_{L_1} xyds + \int_{L_2} xyds$.

Trên $L_1 : y = -x \Rightarrow y' = -1$

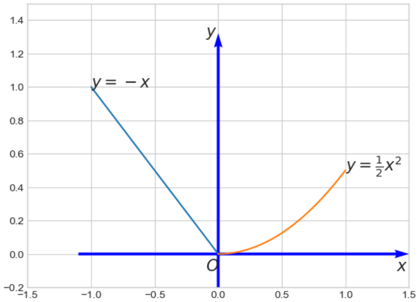
và trên $L_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x$. Do đó

$$I = \int_{-1}^{0} x(-x)\sqrt{1 + (-1)^2}dx + \int_0^1 x\frac{1}{2}x^2\sqrt{1 + x^2}dx$$

Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xyds$, *L là cung cho bởi phương trình* $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Giải:



Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với

$L_1 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], y = -x\}$,

$L_2 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}x^2\}$,

do đó $I = \int_{L_1} xyds + \int_{L_2} xyds$.

Trên $L_1 : y = -x \Rightarrow y' = -1$

và trên $L_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x$. Do đó

$$I = \int_{-1}^{0} x(-x)\sqrt{1 + (-1)^2}dx + \int_0^1 x\frac{1}{2}x^2\sqrt{1 + x^2}dx$$

$$= \cdots =$$

Ví dụ 5.2

Tính $I = \int_L z ds$, *với* L *là cung cho bởi phương trình tham số*

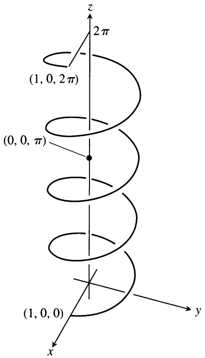
$$x = \cos 4t, y = \sin 4t, z = t, t \in [0, 2\pi].$$

Ví dụ 5.2

Tính $I = \int_L z ds$, *với* L *là cung cho bởi phương trình tham số*

$$x = \cos 4t, y = \sin 4t, z = t, t \in [0, 2\pi].$$

Giải:



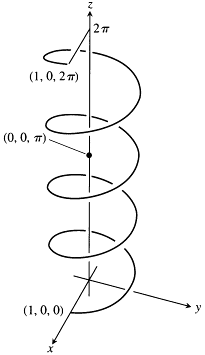
Ta có $x' = -4\sin 4t, y' = 4\cos 4t, z' = 1$, do đó

Ví dụ 5.2

Tính $I = \int_L z ds$, *với* L *là cung cho bởi phương trình tham số*

$$x = \cos 4t, y = \sin 4t, z = t, t \in [0, 2\pi].$$

Giải:



Ta có $x' = -4\sin 4t, y' = 4\cos 4t, z' = 1$, do đó

$$I = \int_0^{2\pi} t\sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1}dt$$

$$= \cdots =$$

5.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.

5.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$

5.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ là
$$m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$
- Trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi
$$x_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\rho(x, y, z) ds, \quad y_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\rho(x, y, z) ds, \quad z_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z\rho(x, y, z) ds.$$

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ *với mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ *với mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Đặt $x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow z = 1 - \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Đặt $x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow z = 1 - \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Do đó

$$x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = -\cos t.$$

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Đặt $x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow z = 1 - \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Do đó

$$x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = -\cos t.$$

Độ dài của đường cong là

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Đặt $x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow z = 1 - \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Do đó

$$x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = -\cos t.$$

Độ dài của đường cong là

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (-\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y+z=1$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$.

Giải: Đặt $x=\cos t, y=\sin t \Rightarrow z=1-\sin t, t\in[0,2\pi]$. Do đó

$$x'=-\sin t, y'=\cos t, z'=-\cos t.$$

Độ dài của đường cong là

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(-\cos t)^2}dt\\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2 t}dt = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}dt
\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y+z=1$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$.

Giải: Đặt $x=\cos t, y=\sin t \Rightarrow z=1-\sin t, t\in[0,2\pi]$. Do đó

$$x'=-\sin t, y'=\cos t, z'=-\cos t.$$

Độ dài của đường cong là

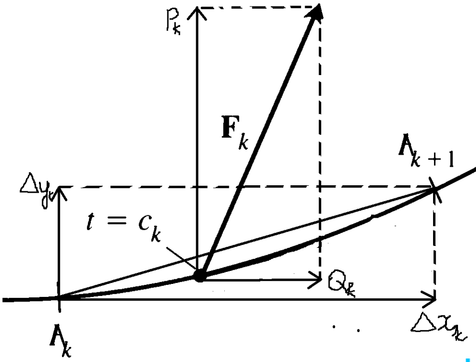
$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(-\cos t)^2}dt\\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2 t}dt = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}dt\\ &= \text{chu vi hình elip có bán trục lớn } a=\sqrt{2}, \text{bán trục nhỏ } b=1.\end{aligned}$$

5.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

Định nghĩa 5.2

Cho các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ *xác định trên một cung phẳng* $\overset{\frown}{AB}$. *Chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *thành* n *cung nhỏ bởi các điểm* $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.
Gọi độ dài đại số của hình chiếu của vector $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ *trên 2 trục* Ox, Oy *là* $\Delta x_i, \Delta y_i, i = 1, \ldots, n$. *Trên mỗi cung* $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *lấy tùy ý một điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$



5.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

Định nghĩa 5.2

Nếu $\max \Delta x_i \to 0, \max \Delta y_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = I$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ cũng như cách chọn các điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

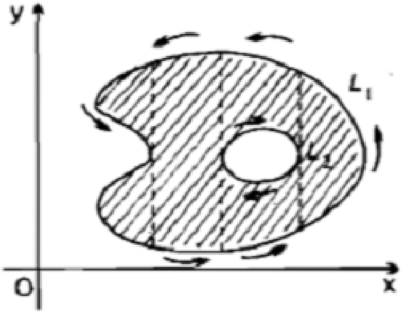
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

- Nếu đổi chiều lấy tích phân dọc theo cung $\overset{\frown}{BA}$ thì tích phân đường loại 2 bị đổi dấu

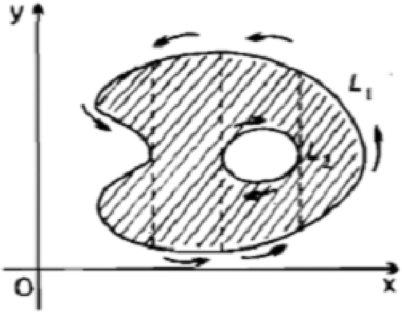
$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2



Chiều của đường cong khép kín: Một đường kín L là biên của miền D thì chiều dương của nó được xác định là chiều mà khi đi dọc L theo chiều đó, miền D nằm bên trái.

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2



Chiều của đường cong khép kín: Một đường kín L là biên của miền D thì chiều dương của nó được xác định là chiều mà khi đi dọc L theo chiều đó, miền D nằm bên trái.

• Tích phân đường loại 2 dọc theo một đường cong khép kín (L) theo chiều dương ký hiệu là

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\Big)dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\Big)dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt.$$

4.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \qquad (5.1)$$

Công thức (5.1) gọi là công thức Green.

4.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L P dx + Q dy. \tag{5.1}$$

Công thức (5.1) gọi là công thức Green.

Hệ quả 5.1

Diện tích S của miền D có biên L được tính bởi công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx.$$

4.2.4 Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lý 5.2

Giả sử hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm của chúng liên tục trong một miền đơn liên D. Khi đó các mệnh đề sau đây tương đương với nhau:

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in D$;

(b) $\oint\limits_L P dx + Q dy = 0$ *với mọi đường kín* $L \subset D$;

(c) *Tích phân* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy$ *chỉ phụ thuộc hai đầu mút* A, B *mà không phụ thuộc cung* $\overset{\frown}{AB} \subset D$;

(d) $P dx + Q dy$ *là vi phân toàn phần của một hàm* $u(x,y)$ *nào đó trong* D.

Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của Định lý 5.2:

Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của Định lý 5.2:

• Lấy $A(x_0, y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x, y) \in D$, hàm $u(x, y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} P dx + Q dy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Cách tìm hàm $u(x,y)$ trong ý (d) của Định lý 5.2:

- Lấy $A(x_0,y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x,y) \in D$, hàm $u(x,y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Cách tìm hàm $u(x,y)$ trong ý (d) của Định lý 5.2:

- Lấy $A(x_0,y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x,y) \in D$, hàm $u(x,y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Chú ý: Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

4.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

• Cho các hàm số $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại 2 của các hàm số P, Q, R dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

4.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

- Cho các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại 2 của các hàm số P, Q, R dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ thì:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \Big) dt.$$

Sinh viên tự đọc

- Tích phân mặt loại 1 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.

Sinh viên tự đọc

- Tích phân mặt loại 1 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.
- Tích phân mặt loại 2 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính
  - Công thức Stokes.
  - Điều kiện tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân.
  - Công thức Ostrogradsky.
  - Véc-tơ rôta; trường thế; div; toán tử Hamilton.