HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM | KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2022

(*Đề thi có 02 trang*)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng A

Bài A.1. (6 điểm)

(a) Tính định thức và hạng của ma trận vuông cấp n sau đây theo n:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) Giả sử $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ V. Với những giá trị nào của n thì hệ các véctơ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4 \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ cũng lập thành một cơ sở của V?

Bài A.2. (6 điểm) Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố / Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \le b \le 0,3; \\ 0,5 \le a + b \le 0,6; \\ 0,8 \le a + 2b \le 0,9. \end{cases}$$

Bài A.3. (6 điểm) Giả sử $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

(a) Biết rằng $\alpha = \frac{2021}{2023}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$, hỏi tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

(b) Trả lời câu hỏi tương tự cho $\alpha = \frac{2021}{2022}$, nghĩa là nếu $\alpha = \frac{2021}{2022}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ nói trên, thì tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

Bài A.4. (6 điểm)

(a) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là một ma trận vuông khả nghịch, cấp 2, với hệ số phức. Chứng minh rằng A có thể khai căn bậc hai được, nghĩa là tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Bài A.5. (6 điểm)

Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.

Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Tính giá trị của $f(2)$.

(c) Tìm công thức của $f(n)$ dưới dạng

$$f(n) = a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + a_3 b_3^n + a_4,$$

trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$ là các hằng số.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Bài A.1. (Tổng = 6 điểm)

(a) Tính định thức và hạng của ma trận vuông cấp n sau đây theo n:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) Giả sử $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ V. Với những giá trị nào của n thì hệ các véctơ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4 \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ cũng lập thành một cơ sở của V?

Hướng dẫn giải

(a) (3 điểm) Dùng tính chất đa tuyến tính rồi khai triển Laplace theo hàng cuối ta có

$$\begin{aligned} |D_n| &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + n! \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= n! \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \\ &= \begin{cases} 2n! & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu n lẻ thì $|D_n| = 2n! \neq 0$. Do đó ma trận có hạng bằng n.

Nếu n chẵn thì $|D_n| = 0$. Do đó hạng của ma trận nhỏ hơn n. Mặt khác, vì $n-1$ hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính, nên hạng của ma trận $\geq n-1$. Kết hợp với việc hạng nhỏ hơn n, suy ra nếu n chẵn, thì hạng của ma trận bằng $n-1$.

(b) (3 điểm) Nhận thấy ma trận chuyển từ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ sang hệ vectơ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4, \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ chính là ma trận chuyển vị D_n^T. Dựa theo phần (a) thì $|D_n| \neq 0$ khi n lẻ và $|D_n| = 0$ khi n chẵn. Do đó, khi n lẻ thì hệ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4 \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ lập thành một cơ sở của không gian V. Khi n chẵn, hệ này không phải là một cơ sở của không gian V.

Bài A.2. (A.2=B.2) (Tổng=6 điểm)

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố / Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3; \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6; \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Tỷ lệ của N trong sản phẩm là: $0,4x + 0,2y + 0,3z$.
Tỷ lệ của K trong sản phẩm là: $0,2x + 0,3y + 0,3z$.
Tỷ lệ của S trong sản phẩm là: $0,4x + 0,5y + 0,4z$.

(b): (2 điểm) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0,4x+0,2y+0,3z=0,31, \\ 0,2x+0,3y+0,3z=0,26. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có: $(x; y; z) = (0,4; 0,3; 0,3)$.

(c): (2 điểm) Gọi a, b lần lượt là tỷ lệ của N, K trong một sản phẩm. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0,4x+0,2y+0,3z=a, \\ 0,2x+0,3y+0,3z=b. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có:

$$(x; y; z) = (3-10b; 6-10a-10b; 10a+20b-8).$$

Điều kiện để có một sản phẩm là $0 \leq x, y, z \leq 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3 \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6 \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

Bài A.3. (A.3) (Tổng = 6 điểm)

Giả sử $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

(a) Biết rằng $\alpha = \frac{2021}{2023}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$, hỏi tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

(b) Trả lời câu hỏi tương tự cho $\alpha = \frac{2021}{2022}$, nghĩa là nếu $\alpha = \frac{2021}{2022}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ nói trên, thì tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

Hướng dẫn giải

(a): (4 điểm) Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ (a_i nguyên, $a_n \neq 0$). Đặt

$$Q(x) = P(x+1) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \ (b_i \text{ nguyên}).$$

Bởi vì $P\left(\frac{2021}{2023}\right) = 0$ nên $Q\left(\frac{-2}{2023}\right) = P\left(\frac{2021}{2023}\right) = 0$. Suy ra

$$b_0 + b_1\left(\frac{-2}{2023}\right) + \cdots + b_n\left(\frac{-2}{2023}\right)^n = 0,$$

tương đương

$$b_0(2023)^n + b_1(-2)(2023)^{n-1} + \cdots + b_n(-2)^n = 0.$$

Từ đó suy ra b_0 là số chẵn. Mặt khác $b_0 = Q(0) = P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Vậy tổng các hệ số của $P(x)$ không thể bằng 2023.

(b): (2 điểm) Có thể có một đa thức $P(x)$ như vậy. Chẳng hạn xét đa thức $P(x) = 2023(2022x - 2021)$. Thế thì $P(x)$ nhận $\alpha = \frac{2021}{2022}$ làm nghiệm và tổng các hệ số của nó bằng 2023.

Bài A.4. (A.4) (Tổng = 6 điểm)

(a) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là một ma trận vuông khả nghịch, cấp 2, với hệ số phức. Chứng minh rằng A có thể khai căn bậc hai được, nghĩa là tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Hướng dẫn giải

(a): (4 điểm) Ma trận A khả nghịch, cấp 2, hệ số phức, luôn đồng dạng (bởi một ma trận Q hệ số phức) với một trong hai ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Thật vậy nếu A không chéo hóa được, thì đa thức đặc trưng có dạng

$$P_A(X) = (X-\lambda)^2.$$

Chọn α_2 tùy ý không thuộc $V_\lambda = \mathbf{Ker}(A - \lambda I_2)$, và $\alpha_1 = (A-\lambda I_2)(\alpha_2)$ ta có

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2. \end{cases}$$

Do đó với Q có các cột là α_1, α_2 thì

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 1: A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một ma trận Q khả nghịch ($Q \in \mathbf{GL_2}(\mathbb{C})$) sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Vậy ta chỉ cần chọn

$$B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

thì $B^2 = A$.

Trường hợp 2: Tồn tại $Q \in \mathbf{GL_2}(\mathbb{C})$ sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Vì ma trận A khả nghịch, nên $\lambda \neq 0$. Ta sẽ tìm một ma trận

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$C^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ví dụ một ma trận như vậy là

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Vậy với ma trận

$$B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

thì ta có $B^2 = A$.

(b): (2 điểm) Giả sử tồn tại ma trận vuông cấp hai sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thế thì

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ (a+d)c = 0, \\ bc + d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Do đó $c = 0$, suy ra

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = d = 0$ và dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không khai căn bậc hai được.

Bài A.5. (Tổng = 6 điểm)

Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.
Chẳng hạn
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Tính giá trị của $f(2)$.

(c) Tìm công thức của $f(n)$ dưới dạng
$$f(n) = a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + a_3 b_3^n + a_4,$$
trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$ là các hằng số.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Nếu hai hàng bất kỳ chỉ sai khác nhau một vectơ hàng thì tổng các số trên mỗi đường hoán vị bằng tổng các số trên một hàng cố định trước cộng với một hằng số. Do đó tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau.

Đảo lại, giả sử tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau. Thế thì với i, j cho trước, k, l tùy ý ta có
$$a_{ik} + a_{jl} = a_{il} + a_{jk}.$$
Do đó
$$a_{ik} - a_{jk} = a_{il} - a_{jl} \text{ với mọi } k, l.$$
Vậy hàng i trừ hàng j bằng vectơ hàng hằng $(c, c, \ldots, c)$.

(b): (2 điểm) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng: $(-1, -1)$; $(0, 0)$, hoặc $(1, 1)$. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có 3 khả năng cho mỗi hàng
$$\begin{cases} (0, 0); \\ (1, 1); \\ (-1, -1). \end{cases}$$
Khi đó ta có 9 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 2: Cả $\mathbf{0}$ lẫn $\mathbf{1}$ (ngoại trừ $-\mathbf{1}$) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có $\mathbf{2}$ khả năng $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ hoặc $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Trường hợp này có $\mathbf{4}$ ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 3: Cả $\mathbf{0}$ lẫn $-\mathbf{1}$ (ngoại trừ $\mathbf{1}$) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả $\mathbf{4}$ ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 4: Cả $\mathbf{1}, -\mathbf{1}$ ($\mathbf{0}$ có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có $\mathbf{2}$ khả năng $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ hoặc $(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$. Do đó trường hợp này có $\mathbf{2}$ ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Vậy số ma trận Olympic cần tìm là

$$f(2) = 9 + 4 + 4 + 2 = 19.$$

(c): (2 điểm) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có $\mathbf{3}$ khả năng cho mỗi hàng

$$\begin{cases}(0, 0, \dots, 0);\\ (1, 1, \dots, 1);\\ (-1, -1, \dots, -1).\end{cases}$$

Vậy trường hợp này có tất cả $\mathbf{3}^n$ ma trận.

Trường hợp 2: Cả $\mathbf{0}$ lẫn $\mathbf{1}$ (ngoại trừ $-\mathbf{1}$) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có $\mathbf{2}^n - \mathbf{2}$ khả năng. Cố định hàng đầu tiên, các hàng sau đó sẽ đều sai khác với hàng đầu tiên $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ hoặc $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$. Vậy có $\mathbf{2}^{n-1}$ khả năng cho các hàng còn lại và trường hợp này tất cả $\mathbf{2}^{n-1}(\mathbf{2}^n - \mathbf{2})$ ma trận.

Trường hợp 3: Cả $\mathbf{0}$ lẫn $-\mathbf{1}$ (ngoại trừ $\mathbf{1}$) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả $\mathbf{2}^{n-1}(\mathbf{2}^n - \mathbf{2})$ ma trận.

Trường hợp 4: Cả $1, -1$ (số 0 có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có

$$3^n - 2 \cdot 2^n + 1$$

khả năng. (Tổng cộng có 3^n khả năng cho hàng đầu rồi loại đi $3 + 2(2^n - 2)$ khả năng của trường hợp 1,2,3.) Vậy trường hợp này có tất cả $3^n - 2 \cdot 2^n + 1$ khả năng.

Vậy số ma trận cần tìm là

$$\begin{aligned} f(n) &= 3^n + 2^{n-1} \cdot (2^n - 2) \cdot 2 + 3^n - 2^{n+1} + 1, \\ &= 4^n + 2 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1. \end{aligned}$$