Không gian vec tơ và Ánh xạ tuyến tính

Dr. Nguyen Van Hoi

University of Information Technology

Ngày 9 tháng 9 năm 2023

Không gian vec tơ

KGVT $(V, +, \cdot)$ là tập V được trang bị các phép toán $+ : f + g \in V$ với mọi $f, g \in V$ và $\cdot : kf \in V$ thỏa

- $(f + g) + h = f + (g + h)$,
- $f + g = g + f$,
- Có phần tử "0" thỏa $f + 0 = f$ với mọi $f \in V$,
- Với mọi $f \in V$, có duy nhất $g \in V$ thỏa $f + g = 0$.
- $k(f + g) = kf + kg$,
- $(c_k)f = cf + kf$,
- $1f = f$.

☎ Đặt $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tập tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ vào chính nó, với các phép toán

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(kf)(x) = kf(x)$$

là KGVT. Phần tử không là $f(x) = 0$ với mọi x.

☎ Tập hợp tất cả các dãy số thực vô hạn là một không gian tuyến tính với các toán tử

$$(x_0, x_1, x_2, \cdots)(y_0, y_1, y_2, \cdots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$$
$$(kx_0, x_1, x_2, \cdots) = (kx_0, kx_1, kx_2, \cdots).$$

Phần tử không là $(0, 0, 0, \cdots)$.

Tổ hợp tuyến tính

Ta nói rằng phần tử f của một không gian tuyến tính là tổ hợp tuyến tính của các phần tử $f_1, f_2, \cdots, f_n$ nếu

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

với các số thực $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

☎ Ví dụ: M như dưới đây là sự kết hợp tuyến tính của

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Không gian vec tơ con

W là tập con của KGVT V được gọi là không gian con của V nếu

- $0 \in W$,
- $f + g \in W$ nếu $f, g \in W$,
- $kf \in W$ nếu $f \in W$.

☎ Hàm đa thức bậc 2, denoted P_2, $f(X) = x + bx + cx^2$, là KGVT con của $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

☎ Tập hợp tất cả các ma trận B sao cho $BA = 0$ với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ là KGVT con của $M_2(\mathbb{R})$.

Tập sinh, độc lập tuyến tính

$f_1, f_2, ..., f_n$ là tập sinh của V nếu với mọi $f \in V$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính

$$f = b_1 f_2 + b_2 f_2 + \cdots + b_n f_n = 0.$$

Ta nói f_i là dư thừa nếu nó là tổ hợp tuyến tính của các phần tử trước đó. Các phần tử $f_1, f_2, ..., f_n$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu không có phần tử nào dư thừa. Tương đương,

$$c_1 f_2 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$$

có nghiệm duy nhất $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$.

Cơ sở và số chiều

Họ vec tơ $f_1, f_2, ..., f_n$ được gọi là cơ sở của KGVT V nếu nó là tập sinh của V và là độc lập với nhau.
Số chiều của V là số các vec tơ trong cơ sở của V, ta viết,

$$\dim(V) = n.$$

☎ CMR

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

☎ Tìm cơ sở của P_2?

Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Cho $B = \{v_1, \cdots v_m\}$ là một cơ sở của KGVT V và $u \in V$. Ta nói

$$[u]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

là cơ sở của u trong B nếu và chỉ nếu

$$u = c_1 v_1 + \cdots c_m v_m \qquad \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = 0$$

Cho $B' = \{v_1', \cdots v_m'\}$ là một cơ sở khác của KGVT n chiều V khi đó tọa độ của u trong B', ký hiệu

$$[u]_{B'} = \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_m' \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$[u]_B = P_{B \to B'} [u]_{B'}.$$

Trong đó $P_{B \to B'}$ ma trận chuyển cơ sở từ $B \to B'$

$$P_{B \to B'} = [[v_1']_B, [v_2']_B, \cdots, [v_m']_B]$$

☎ Trong $\mathbb{R}^2$ cho 2 cơ sở $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ và $E = \{v_1 = (1,1), v_2 = (2,-3)\}$.
Ta có

$$v_1 = 1e_1 + 1e_1, \quad v_2 = 2e_2 - 3e_2.$$

Vậy

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ngược lại

$$e_1 = \frac{3}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2, \quad e_2 = \frac{2}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2$$

Nên

$$P_{E\to B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ta thấy

$$P_{B\to E} = P_{E\to B}^{-1}.$$

Cho $u = (3,4)$ thì ta có

$$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u_E = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ta kiểm được

$$P_{B \to E} u_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = u_B.$$

Linear transformation

Cho hai KGVT V và W. Hàm $T : V \to W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \quad and \quad T(kf) = kT(f)$$

với mọi $f, g \in V$ và $k \in \mathbb{R}$.
Cho AXTT $T : V \to W$ ta định nghĩa

$$im(T) = \{T(f) \mid f \in V\} \quad and \quad ker(T) = \{f \in V \mid T(f) = 0\}.$$

Kiểm tra chúng là không gian con tương ứng của W và V?

Tập ảnh, tập nhân, hạn và nullity

Nếu $im(T)$ không gian hữu hạn chiều thì $\dim(im(T))$ gọi là hạn của T, và nếu $ker(T)$ không gian hữu hạn chiều thì $\dim(im(T))$ gọi là nullity của T.
Nếu V không gian hữu hạn chiều thì

$$\dim(V) = rank(T) + nullity(T) = \dim(im(T)) + \dim(ker(T)).$$

☎ Ví dụ 1: Cho $C[0,1]$ tập hàm số liên tục từ $[0,1] \to \mathbb{R}$, ánh xạ sau có phải là AXTT?

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

Cho V là không gian của mọi dãy số thực vô hạn. Hãy xem xét sự chuyển đổi

$$T(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$$

từ nó đến chính nó. Chứng minh rằng T là ánh xạ tuyến tính và tìm cơ sở của hạt nhân và ảnh của T.

Thank you for listening!

Nguyen Van Hoi

hoinv@uit.edu.vn