Buổi 03 – Ngày 28-09-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

* TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 1 (TIẾP THEO)

Xét tích phân suy rộng loại 1, dạng $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, với $f(x) \geq 0$ (I = Integral)

Ta đề xuất $g(x) \geq 0$ thỏa $f(x) \leq g(x)$ và $J = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ là tích phân suy rộng (TPSR) hội tụ.

Thì ta nói TPSR $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ.

Hoặc ta đề xuất hàm $h(x) \geq 0$ thỏa $h(x) \leq f(x)$ và

$K = \int_a^{+\infty} h(x)dx$ là tích phân suy rộng (TPSR) phân kỳ thì $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Hoặc ta đề xuất hàm $k(x) \geq 0$ thỏa $f(x) \sim k(x)$ khi $x \to +\infty$ (ta có thể chọn $k(x)$ bằng cách dùng các VCB tương đương/ hoặc VCL tương đương ở Chương trước). Khi đó:

$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ có cùng tính chất hội tụ/ hay phân kỳ với TPSR $L = \int_a^{+\infty} k(x)dx$.

Nghĩa là nếu *L* hội tụ thì *I* hội tụ;

L phân kỳ thì *I* phân kỳ.

Lưu ý: Ta thường so sánh TPSR loại 1 cần xét với TPSR Riemann

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ → hội tụ khi $\alpha > 1$

→ phân kỳ khi $\alpha \leq 1$

Ví dụ: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ là TPSR Riemann ứng với $\alpha = 4 > 1$ nên *I* hội tụ.

Ví dụ mẫu 6: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(3x)}{4+5x^2} dx$$

Ví dụ mẫu 7: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Ví dụ mẫu 8: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Ví dụ mẫu 9: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}+5x+2}{x^3+4x^2+1}dx$$

<u>Ví dụ mẫu 10</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{2x^4+7x^3+1}{9x^2+8x^7+3}dx$$

<u>Ví dụ mẫu 11</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{2x^3+x-1}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)dx$$

<u>Ví dụ mẫu 12</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right)\right]dx$$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: $I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(3x)}{4+5x^2}dx$

Ta có: $\cos^2(3x)\le 1$, với mọi $x\ge 1$

$\Rightarrow \frac{\cos^2(3x)}{4+5x^2}\le\frac{1}{4+5x^2}$ do $\frac{1}{4+5x^2}>0,\forall x\ge 1$

$\Rightarrow \frac{\cos^2(3x)}{4+5x^2}\le\frac{1}{4+5x^2}\le\frac{1}{5x^2}$

Nên ta có $g(x)=\frac{1}{5x^2}>0,\forall x\ge 1$

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(3x)}{4+5x^2}dx\le J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{5x^2}dx=\frac{1}{5}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx}$$

là TPSR Riemann ứng với $\alpha=2>1$ nên TP này hội tụ.

$\Rightarrow J$ hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

Dùng pp tích phân từng phần, ta xét:

$J=\int_1^{b}\frac{\sin x}{x}dx$, với $b\ge 1$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{1}{x^2}dx\\ v=-\cos x\end{cases}$

$$\Rightarrow J = uv\Big|_1^b - \int_1^b vdu = \frac{-\cos x}{x}\Bigg|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$= \frac{-\cos b}{b} + \frac{\cos 1}{1} - J_1$$

$$\Rightarrow I = \lim_{b\to+\infty} J = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-\cos b}{b} + \frac{\cos 1}{1} - J_1\right) = 0 + \cos 1 - \lim_{b\to\infty} J_1$$

$$= \underbrace{\cos 1}_{\text{hữu hạn.}} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \quad (1)$$

Ta khảo sát TPSR $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ bằng cách dùng tiêu chuẩn **HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI** như sau

Xét $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ với $f(x)$ có dấu tùy ý, nghĩa là $f(x)$ có thể > 0 hoặc < 0

Nếu $J = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ là hội tụ thì TPSR $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ sẽ hội tụ theo.

Nếu $J = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ là phân kỳ thì ta không kết luận được gì cả!

Ta áp dụng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối để khảo sát TPSR $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ như sau

Ta xét $K = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}dx$ do $x^2 > 0, \forall x \ge 1$

Ta có: $|\cos x| \le 1, \forall x \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \text{ do } \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \ge 1$$

$$\Rightarrow K = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}dx \le \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx}$$

là TPSR Riemann, ứng với $\alpha = 2 > 1$ nên TP là hội tụ.

$\Rightarrow K$ hội tụ nên suy ra TPSR $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ là hội tụ (2)

Từ (1), (2) suy ra $I = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 8</u>: $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$

Ta áp dụng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối để khảo sát TPSR $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ như sau

Ta xét $J=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx=\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx$ do $x^2>0,\forall x\geq 1$

Ta có: $|\sin x|\leq 1,\forall x\geq 1$

$\Rightarrow\frac{|\sin x|}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ do $\frac{1}{x^2}>0,\forall x\geq 1$

$\Rightarrow J=\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx\leq\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx}$

là TPSR Riemann, ứng với $\alpha=2>1$ nên TP là hội tụ.

$\Rightarrow J$ hội tụ nên suy ra TPSR $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 9</u>: $I=\int_1^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}+5x+2}{x^3+4x^2+1}dx$

Khi $x\to+\infty$ ta có: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}+5x+2}{x^3+4x^2+1}\sim\frac{x\sqrt{x}}{x^3}=k(x)$

(do $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{k(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}+5x+2}{x^3+4x^2+1}.\left[\frac{x^3}{x\sqrt{x}}\right]\right)=1$)

Suy ra $I=\int_1^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}+5x+2}{x^3+4x^2+1}dx$ có cùng tính chất hội tụ hay phân kỳ với TPSR $J=\int_1^{+\infty}k(x)dx$

Mà $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^3}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{x^3}dx=\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx}$

là TPSR Riemann, ứng với $\alpha=\frac{3}{2}>1$ nên TP là hội tụ.

$\Rightarrow J$ hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 10</u>: $I=\int_1^{+\infty}\frac{2x^4+7x^3+1}{9x^2+8x^7+3}dx$ tương tự Ví dụ mẫu 9.

<u>Ví dụ mẫu 11</u>: $I=\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{2x^3+x-1}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)dx$

Ta có $\ln\left(\frac{2x^3+x-1}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)=\ln\left(1+\frac{2x^3+x-1}{2x^3+6x^2+5x+7}-1\right)=\ln\left(1+\frac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)$

Ta có $\ln(1+\square) \sim \square$ khi $\square \to 0$ nên áp dụng vào bài này ta có:

Khi $x \to +\infty$ thì $(2x^3+6x^2+5x+7) \to +\infty$ nên $\left(\dfrac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right) \to 0$

Nên $\ln\left(1+\dfrac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right) \sim \left(\dfrac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)$ khi $x \to +\infty$

Suy ra $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{2x^3+x-1}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)dx$ có cùng tính chất hội tụ hay phân kỳ với TPSR

$$J = \int_1^{+\infty} \left(\frac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)dx$$

Xét J ta có $k(x) = \dfrac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7} \sim \dfrac{-6x^2}{2x^3} = -\dfrac{3}{x} = h(x)$ khi $x \to +\infty$.

Nên suy ra $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{-6x^2-4x-8}{2x^3+6x^2+5x+7}\right)dx \sim K = \int_1^{+\infty}\left(\frac{-3}{x}\right)dx = -3\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx}$

là TPSR Riemann ứng với $\alpha = 1$ nên TP là phân kỳ.

suy ra J là phân kỳ $\Rightarrow I$ là phân kỳ.

<u>Ví dụ mẫu 12</u>: $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right)\right]dx$

Ta có $1-\cos\square \sim \dfrac{\square^2}{2}$ khi $\square \to 0$

Nên áp dụng vào bài này ta có $1-\cos\left(\dfrac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right) \sim \dfrac{\left(\dfrac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right)^2}{2}$ khi $x \to +\infty$

(do $\left(\dfrac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right) \to 0$ khi $x \to +\infty$)

Suy ra $1-\cos\left(\dfrac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right) \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x^2}{8x^5}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4x^3}\right)^2 = \dfrac{1}{32}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$

Suy ra $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{2x^2+x+1}{8x^5+x^3+2}\right)\right]dx \sim J = \frac{1}{32}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx}$

là TPSR Riemann ứng với $\alpha = 6 > 1$ nên TP là hội tụ.

$\Rightarrow J$ hội tụ $\Rightarrow I$ là hội tụ.

Ví dụ 13: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{x^2+5x+3}{4x^4+7x+6}\right)}{2x^3+x\sqrt{x}+5}dx$$

Ví dụ 14: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin^4(3x+2)}{8x^6+7x^2+3}dx$$

Ví dụ 15: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_1^{+\infty}[e^{\left(\frac{5x^2+3x+2}{7x^6+4x^3+1}\right)}-1]dx$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Tính các tích phân suy rộng sau:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+2)}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^3}$
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$
9. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx.$
10. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

11. $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

12. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} dx$

13. $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

14. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x.\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Bài 2: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của tích phân suy rộng:

1. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x^2+\sin x}$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2\sqrt{x}}dx$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}dx$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}dx$

7. $\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$

8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

9. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

10. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^p}dx$

*** TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2 (HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN KHÔNG BỊ CHẶN)**

Cho hàm số $f(x)$ có TXĐ là D và giả sử $f(x)$ khả vi (có vi phân, có đạo hàm) trên đoạn $[a;b)\subset D$, và đồng thời:

$\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ hoặc $\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$

Gọi $c\in[a;b)$ nghĩa là $a\le c<b$.

Nếu tồn tại giới hạn $k_1 = \lim\limits_{c \to b^-} \int\limits_a^c f(x)dx$ thì ta gọi đây là tích phân suy rộng loại 2 (dạng 1) của $f(x)$ trên đoạn $[a;b)$.

Nếu $k_1 \in \mathbb{R}$ (hữu hạn) thì ta nói TPSR loại 2 này là hội tụ (về k_1).

Ngược lại, nếu tồn tại $k_1 = +\infty$ hoặc $k_1 = -\infty$ hoặc không tồn tại k_1 thì ta nói TPSR loại 2 là phân kỳ.

Như vậy, ta có dạng 1 của TPSR loại 2 (với cận trên là điểm kỳ dị), là tích phân có dạng:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Tương tự, ta có dạng 2 của TPSR loại 2, với cận dưới là điểm kỳ dị,

(nghĩa là $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$)

là TPSR: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to a^+} \int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ với $c \in (a;b]$ nghĩa là $a < c \le b$.

Ta có dạng 3 của TPSR loại 2:

TH3.1: cả 2 cận của TPSR đều là điểm kỳ dị, nghĩa là $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \text{ với } c \in (a;b) \text{ nghĩa là } a < c < b.$$

$$= \underbrace{\lim_{d \to a^+} \int\limits_d^c f(x)dx}_{\text{Dạng 2 của TPSR loại 2}} + \underbrace{\lim_{e \to b^-} \int\limits_c^e f(x)dx}_{\text{Dạng 1 của TPSR loại 2}}, \text{ với } a < d \le c \text{ và } c \le e < b$$

TH3.2: cả 2 cận của TPSR đều không phải là điểm kỳ dị, nhưng điểm kỳ dị là 1 điểm nằm giữa 2 cận này.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

(với *c* là điểm kỳ dị, nằm giữa *a*,*b*; nghĩa là $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$)

$$= \underbrace{\lim_{d \to c^-} \int\limits_a^d f(x)dx}_{\text{Dạng 1 của TPSR loại 2}} + \underbrace{\lim_{e \to c^+} \int\limits_e^b f(x)dx}_{\text{Dạng 2 của TPSR loại 2}}$$

* Tổng, hiệu, tích, thương của các TPSR (loại 2) hội tụ thì đáp số là TPSR hội tụ; nghĩa là nếu có một TPSR phân kỳ xuất hiện thì kết quả là TPSR phân kỳ.

* Tính chất hội tụ, hay phân kỳ của TPSR không thay đổi khi ta cộng, trừ, nhân, chia một hằng số khác 0 với TPSR.

Ví dụ mẫu 1: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ví dụ mẫu 2: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)(x+3)}$$

Ví dụ mẫu 3: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$$

Ví dụ mẫu 4: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$$

Ví dụ mẫu 5: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(3-x)^2}$$

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ta xét

$$J = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^c = \arcsin(c) - \arcsin(0) = \arcsin(c)\text{, với } 0 \le c < 1.$$

$$\Rightarrow I = \lim_{c\to 1^-} J = \lim_{c\to 1^-}\left[\arcsin(c)\right] = \arcsin(1^-) = \frac{\pi}{2} \text{ (hữu hạn).}$$

$\Rightarrow I$ hội tụ (về $\frac{\pi}{2}$).

Nếu đề bài yêu cầu tính TPSR $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ thì đáp số là $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ mẫu 2: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)(x+3)}$$

Ta xét

$$J=\int_0^c \frac{dx}{(4-x)(x+3)}=\frac{1}{7}\int_0^c\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{7}\left[-\int_0^c\frac{-dx}{4-x}+\int_0^c\frac{dx}{x+3}\right],\text{ với } 0\le c<4.$$

$$=\frac{1}{7}\left[-\ln|4-x|+\ln|x+3|\right]_0^c=\frac{1}{7}\left[\ln\frac{|x+3|}{|4-x|}\right]_0^c=\frac{1}{7}\left[\ln\frac{|c+3|}{|4-c|}-\ln\frac{3}{4}\right]$$

$$\Rightarrow I=\lim_{c\to4^-}J=\lim_{c\to4^-}\left[\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{c+3}{c-4}\right|-\ln\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$=\lim_{c\to4^-}\left[\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{c-4+7}{c-4}\right|-\ln\frac{3}{4}\right)\right]=\lim_{c\to4^-}\left[\frac{1}{7}\left(\ln\left|1+\frac{7}{c-4}\right|-\ln\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{7}\left(+\infty-\ln\frac{3}{4}\right)=+\infty$$

$\Rightarrow I$ phân kỳ.

Ví dụ mẫu 3: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$$

Ta xét

$$J=\int_c^1\frac{dx}{x(x+1)}=\int_c^1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_c^1,\text{ với } 0<c\le1.$$

$$=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_c^1=\left[\ln\left|\frac{x+1-1}{x+1}\right|\right]_c^1=\left[\ln\left|1+\frac{-1}{x+1}\right|\right]_c^1=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln\left|1-\frac{1}{c+1}\right|$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left|1-\frac{1}{c+1}\right|$$

$$\Rightarrow I=\lim_{c\to0^+}J=\lim_{c\to0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left|1-\frac{1}{c+1}\right|\right]=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-(-\infty)=+\infty \qquad \Rightarrow I \text{ phân kỳ.}$$

Ví dụ mẫu 4: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4\frac{dx}{x(4-x)}$$

Ví dụ mẫu 5: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$\int_0^4\frac{dx}{(3-x)^2}$$

Giải:

Ví dụ mẫu 4

Ta có $I=\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}=\int_0^1 \frac{dx}{x(4-x)}+\int_1^4 \frac{dx}{x(4-x)}=I_1+I_2$

Xét $I_1=\int_0^1 \frac{dx}{x(4-x)}$ đây là TPSR loại 2 với cận dưới là điểm kỳ dị.

Ta xét $J_1=\int_c^1 \frac{dx}{x(4-x)}=\frac{1}{4}\int_c^1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\ln x-\ln(4-x)\right]_c^1=\frac{1}{4}\ln\left[\frac{x}{4-x}\right]_c^1$ với $0<c\le 1$

$=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln\left(\frac{c}{4-c}\right)\right]$

$\Rightarrow I_1=\lim_{c\to 0^+} J_1=\lim_{c\to 0^+}\frac{1}{4}[\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln\left(\frac{c}{4-c}\right)]=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\lim_{c\to 0^+}\left[\ln\left(\frac{c}{4-c}\right)\right]=+\infty$

Nên ta nói I_1 là phân kỳ , suy ra I là phân kỳ.

Ví dụ mẫu 5:

$I=\int_0^4 \frac{dx}{(3-x)^2}$

Ta có $I=\int_0^4 \frac{dx}{(3-x)^2}=\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2}+\int_3^4 \frac{dx}{(3-x)^2}=I_1+I_2$

Xét $I_1=\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2}$ có cận trên là điểm kỳ dị.

Ta xét $J_1=\int_0^c \frac{dx}{(3-x)^2}=-\int_0^c \frac{-dx}{(3-x)^2}=\left.\frac{1}{3-x}\right|_0^c=\frac{1}{3-c}-\frac{1}{3-0}$ với $0\le c<3$

$=\frac{1}{3-c}-\frac{1}{3}$

$I_1=\lim_{c\to 3^-} J_1=\lim_{c\to 3^-}\left(\frac{1}{3-c}-\frac{1}{3}\right)=+\infty-\frac{1}{3}=+\infty$ nên ta nói TPSR I_1 là phân kỳ.

Kết luận TPSR I là phân kỳ.

* Tiếp theo, ta xét tích phân suy rộng loại 2, dạng $I=\int_a^b f(x)dx$, với b là điểm kỳ dị, nghĩa là $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ hoặc $\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$.

Ta đề xuất $g(x)$ thỏa $f(x)\le g(x)$ và $J=\int_a^b g(x)dx$ là tích phân suy rộng (TPSR) loại 2 hội tụ.

Thì ta nói TPSR $I=\int_a^b f(x)dx$ là hội tụ.

Hoặc ta đề xuất hàm $h(x)$ thỏa $h(x) \le f(x)$ và

$K = \int_a^b h(x)dx$ là tích phân suy rộng (TPSR) loại 2 phân kỳ thì $I = \int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Hoặc ta đề xuất hàm $k(x)$ thỏa $f(x) \sim k(x)$ khi $x \to b^-$ (ta có thể chọn $k(x)$ bằng cách dùng các VCB tương đương/ hoặc VCL tương đương ở Chương trước). Khi đó:

$I = \int_a^b f(x)dx$ có cùng tính chất hội tụ/ hay phân kỳ với TPSR $L = \int_a^b k(x)dx$.

Nghĩa là nếu *L* hội tụ thì *I* hội tụ;

L phân kỳ thì *I* phân kỳ.

<u>Lưu ý</u>: Ta thường so sánh TPSR loại 2 cần xét với TPSR loại 2 dạng

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ → hội tụ khi $\alpha < 1$

→ phân kỳ khi $\alpha \ge 1$ (nếu *b* là điểm kỳ dị)

Còn khi a là điểm kỳ dị, nghĩa là $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Thì ta so sánh TPSR đang xét TPSR dạng

$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ → hội tụ khi $\alpha < 1$

→ phân kỳ khi $\alpha \ge 1$

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

<u>Ví dụ mẫu 3</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$

<u>Ví dụ mẫu 4</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x^2} - \cos x}$$

<u>Ví dụ mẫu 5</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\left[1-\cos\left(2x^3+x\right)\right]}$$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$$

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Ta có: $1-x^3=(1-x)(1+1.x+x^2)$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+1+1^2)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}J$$

Ta có $J=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$.

Đây là TPSR loại 2 có dạng $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ ứng với $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \\ \alpha=1/2<1 \end{cases}$ nên J hội tụ.

Suy ra I là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: các bạn SV tự làm nhé 😊

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

<u>Ví dụ mẫu 3</u>: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

Ta có $1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2)$

Nên $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)(1+1)(1+1^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}J$

Ta xét $J=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}=\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$.

Đây là TPSR loại 2 có dạng $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ ứng với $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \\ \alpha=1/4<1 \end{cases}$ nên J hội tụ.

Suy ra I là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 4</u>: $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x^2}-\cos x}$

Khi $x\to 0^+$ ta có $e^{2x^2}-\cos x=(e^{2x^2}-1)+(1-\cos x)\sim 2x^2+\frac{x^2}{2}\sim\frac{5}{2}x^2$

Nên $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x^2}-\cos x}\sim\int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{2}x^2}=\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\frac{2}{5}J$

Ta xét $J=\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^2}$.

Đây là TPSR loại 2 có dạng $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ ứng với $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \\ \alpha=2>1 \end{cases}$ nên J phân kỳ.

Suy ra I là phân kỳ.

<u>Ví dụ mẫu 5</u>: tương tự như ví dụ mẫu 4, các bạn SV tự làm nhé 😊

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\left[1-\cos\left(2x^3+x\right)\right]}$$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

Khi $x\to 0^+$ ta có $e^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x}$ nên

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}\sim\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}=\int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$$

Đây là TPSR loại 2 có dạng $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ ứng với $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \\ \alpha=1/2<1 \end{cases}$ nên J hội tụ.

Suy ra I là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}=-\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$

Ta xét $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}\geq 0$.

Ta đề xuất $g(x)=\dfrac{1}{1-x}\geq 0$ thì ta thấy

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-x}{1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(1+\sqrt{x})=2 \text{ (hữu hạn)}$$

$\Rightarrow f(x)\sim 2g(x)$ khi $x\to 1^-$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{dx}{1-\sqrt{x}}\sim 2\int_0^1\frac{dx}{1-x}=2J$$

Ta có $J=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^1}$

Đây là TPSR loại 2 có dạng $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx$ ứng với $\begin{cases} b=1\\ a=0\\ \alpha=1\end{cases}$ nên J phân kỳ.

Suy ra I là phân kỳ.

* Ngoài ra, ta có thể khảo sát TPSR loại 2: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (với cận trên là điểm kỳ dị) bằng cách dùng tiêu chuẩn **HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI** như sau

Xét $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ có dấu tùy ý, nghĩa là *f*(*x*) có thể > 0 hoặc < 0

Nếu $J=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ là hội tụ thì TPSR $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ sẽ hội tụ theo.

Nếu $J=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ là phân kỳ thì ta không kết luận được gì cả!

Ta áp dụng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối để khảo sát TPSR $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}dx$ như sau

Ta xét $K=\displaystyle\int_0^1\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\right|dx=\int_0^1\frac{|\cos x|}{\sqrt{1-x}}dx$ do $0\leq x<1$

Ta có: $|\cos x|\leq 1,$ với $0\leq x<1$

$\Rightarrow \dfrac{|\cos x|}{\sqrt{1-x}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ với $0\leq x<1$

$$\Rightarrow K=\int_0^1\frac{|\cos x|}{\sqrt{1-x}}dx\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{1}{(1-x)^{1/2}}dx}$$

là TPSR loại 2 có dạng $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} dx$ ứng với $\begin{cases} b=1 \\ a=0 \\ \alpha = 1/2 < 1 \end{cases}$ nên J hội tụ.

Suy ra K là hội tụ nên theo tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối ta có I hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 8</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin^2(3x)}{\sqrt{1-x^3}}$$

<u>Ví dụ mẫu 9</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

<u>Ví dụ mẫu 10</u>: Khảo sự hội tụ hay phân kỳ của TPSR:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\ln\left(1 + x\sin x\right)} dx$$

<u>*Bài tập tương tự*</u>:

<u>Bài 1</u>: Tính các tích phân suy rộng loại 2 sau đây:

a/ $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

b/ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

c/ $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

d/ $\int_0^2 \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} dx$;

e/ $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} dx$;

f/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$;

g/ $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$;

h/ $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

i/ $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

j/ $\int_0^4 \frac{dx}{x(x+2)}$

Bài 2: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của các TPSR loại 2 sau:

1. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$;
2. $\int_0^1 \frac{\sin(2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}dx$;
5. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$;
6. $\int_0^1 \frac{x^2\sqrt{x}dx}{e^{\sin^4 x}-1}$;
7. $\int_0^2 \frac{xdxdx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$;
8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;
9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^5}}$;
10. $\int_0^3 \frac{dx}{(2-x)^4}$;

11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

12. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[4]{x}}-1}$

14. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\tan x - \sin x}$

15. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin 2x}-1}dx$

16. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{e^{\sqrt[3]{x^2}}-1}dx$

17. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x}-1}dx$

18. $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$

19. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}dx$

20. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$
