Chương 1 (tt): ĐỊNH THỨC

Định thức của một ma trận vuông A kí hiệu là $|A|$ hoặc det(A)

* Ma trận vuông cấp 1:
định thức cấp 1

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\times 1} = \left(a_{11}\right) \Rightarrow \det\left(A\right) = a_{11}$$

* Ma trận vuông cấp 2:
định thức cấp 2

$$A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(A\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

* Ma trận vuông cấp 3:
định thức cấp 3

$$A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(A\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

l1

Định lý Laplace

Định thức của một ma trận vuông A cấp n được tính theo các công thức sau

Khai triển theo dòng

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

Khai triển theo cột

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}$$

a_{ij} : là những phần tử của ma trận A

$(-1)^{i+j} M_{ij}$: là phần bù đại số

$M_{ij} = \det(A_{ij})$

A_{ij}: là những ma trận con của ma trận A

Có thể chọn một hàng (cột) bất kì để khai triển

$$a_{ij} = a_{11}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{13}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Slide 2

l1 levansang, 9/14/2022

$$*A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=(-1)^{1+1}.1.\det(5)+(-1)^{1+2}.(-3).\det(2)=11$$

$$*A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=(-1)^{2+1}.2.\det(-3)+(-1)^{2+2}.(5).\det(1)=11$$

$$*A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=(-1)^{1+1}.1.\det(5)+(-1)^{2+1}.2.\det(-3)=11$$

$$*A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=(-1)^{1+2}.(-3).\det(2)+(-1)^{2+2}.5.\det(1)=11$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -6 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1).(-5).1 + 2.(-6).3 + 3.4.(-2) \\ &\quad - 3.(-5).3 - (-1).(-6)(-2) - 2.4.1 \\ &= 5 - 36 - 24 + 45 + 12 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$*\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.(-1).\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.3.\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$*\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}.4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.(-5).\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}.(-6).\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$*\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.(-5).\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.(-2).\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.0.(-1) + 5.0.1 + 1.0.3 - 1.0.1 - 1.0.3 - 5.0.(-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+2}.1.\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\left[(-3).0.(-1) + 5.0.2 + 1.(-2).3 - 1.0.2 - (-3).0.3 - 5.(-2).(-1)\right] = 16$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+3}.2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2.\left[(-3).0.(-1) + 1.0.2 + 1.(-2).1 - 1.0.2 - (-3).0.1 - 1.(-2).(-1)\right] = -8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+4}.2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2.\left[(-3).0.3 + 1.0.2 + 5.(-2).1 - 5.0.2 - (-3).0.1 - 1.(-2).3\right] = 8$$

Ma trận nghịch đảo

$$A.B = B.A = I \begin{cases} \text{A là ma trận khả nghịch} \\ \text{A là không suy biến} \\ \text{B là ma trận nghịch đảo của A} \\ \text{B là ma trận duy nhất} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 \to -\frac{1}{7}h_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1 - 3h_2 \to h_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right) = (I|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix};\ A.A^{-1} = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \det(A) = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} c_{11} = (-1)^{1+1}\det(-1) = -1, & c_{12} = (-1)^{1+2}\det(2) = -2 \\ c_{21} = (-1)^{2+1}\det(3) = -3, & c_{22} = (-1)^{2+2}\det(1) = 1 \end{array}\right\} \to C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to C^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\3&1&0&0&1&0\\2&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-3h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-3\\0&0&-1&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-h_3\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-3\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow[h_2+3h_3\to h_2]{h_1-h_3\to h_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&-3&1&3\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)\Rightarrow$$

$$A.A^{-1}=A^{-1}A=I_3$$

$$\uparrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&1&3\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\det\left(A\right)=1\neq0\to\to\exists A^{-1}$$

$$c_{11}=\left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\ c_{12}=\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=-3,\ c_{13}=\left(-1\right)^{1+3}\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$c_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0,\ c_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\ c_{23}=\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}=0$$

$$c_{31}=\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ c_{32}=\left(-1\right)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=3,\ c_{33}=\left(-1\right)^{3+3}\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=2$$

$$\Rightarrow C=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$C^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&1&3\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

Các tính chất (hệ quả) cơ bản của ma trận

Nếu A và B là khả nghịch thì

$$\det(A) \neq 0$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \ k \neq 0$$

$$\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Các tính chất (hệ quả) cơ bản của định thức

1. Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay hàng bằng cột.
2. Một định thức có môt hàng (cột) toàn là số 0 thì bằng không.
3. Một định thức có hai hàng (cột) như nhau thì bằng không.
4. Một định thức có hai hàng (cột) tỉ lệ thì bằng không.
5. Định thức của một ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo.
6. Khi đổi chỗ hai hàng (cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.
7. Khi các phần tử của một hàng (cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài định thức.
8. Khi nhân các phần tử của một hàng (cột) với cùng một số *k* thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với *k*.
9. Khi ta cộng một hàng (cột) vào bội k của một hàng (cột) khác ta được một định thức mới bằng định thức cũ.
10. Khi tất cả các phần tử của một hàng (cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng hai định thức.
11. $\det(A) = \det(A^T)$.
12. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, A và B là hai ma trận vuông cùng cấp.

Đưa ma trận về dạng chéo để tính định thức

$$*\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 11\end{vmatrix}=11$$

$$*\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & -5/2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -11/2\end{vmatrix}=11$$

$$*\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -6\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 4 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 6/3\end{vmatrix}=-6$$

$$*\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -6\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=4.3\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -5/4 & -6/4\\ 1 & -2/3 & 1/3\end{vmatrix}=4.3\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3/4 & 6/4\\ 0 & 4/3 & 10/3\end{vmatrix}$$

$$=4.3.\frac{3}{4}.\frac{4}{3}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 24/12\\ 0 & 1 & 30/12\end{vmatrix}=4.3.\frac{3}{4}.\frac{4}{3}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 24/12\\ 0 & 0 & 6/12\end{vmatrix}=-6$$

Chương 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

*Tất cả $x_i = 0$: Nghiệm tầm thường

*Có ít nhất một $x_i \neq 0$: Nghiệm không tầm thường

Phương pháp giải

Gauss-Jordan

Sử dụng phép biến đổi dòng

(ma trận vuông, hình chữ nhật)

Cramer

Sử dụng định thức (chỉ ma trận vuông)

Giải hptt bằng pp Gauss-Jordan

Lập ma trận mở rộng,
đưa về dạng bậc thang, tìm hạng

$$\overline{A} = \left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ . & \dots & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \to \begin{cases} \rho(A) \\ \rho(\overline{A}) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\overline{A}) = \rho(A)$
(*định lí Kronecker-Capelli*)

+ Vô nghiệm $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\overline{A}) = \rho(A) < n$

$$* \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \to n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3h_2 - h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \rho(\overline{A}) = \rho(A) = n = 2$$

Hệ pt có ngiệm duy nhất $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$* \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \to n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \rho(\overline{A}) = 3 \neq \rho(A) = 2$$

Hệ pt vô ngiệm

$$* \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \to n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \rho(\overline{A}) = \rho(A) = 1 < n = 2$$

Hệ pt có vô số ngiệm

$$\begin{cases} y = t, & t \in R \\ x = \dfrac{1+t}{3} \end{cases}$$

Giải hptt bằng pp Cramer

$$AX = B \Longleftrightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$$\begin{array}{c} \\ |A| = \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccccc}
B & B & & B & & B \\
\left|\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{n1} \end{array}\right. &
\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{i2} \\ \\ a_{n2} \end{array} &
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \\ \dots \\ \\ \dots \end{array} &
\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{ij} \\ \\ a_{nj} \end{array} &
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \\ \dots \\ \\ \dots \end{array} &
\left.\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{in} \\ \\ a_{nn} \end{array}\right| \\
|A_1| & |A_2| & & |A_j| & & |A_n|
\end{array}$$

$|A| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A| = 0$ và tất cả $|A_j| = 0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

$$* \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ ➡ hệ pttt là hệ Cramer (có nghiệm duy nhất)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = 1$$

$$* \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ➡ hệ pttt vô nghiệm

$$* \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ➡ hệ pttt vô số nghiệm

Hệ nghiệm cơ bản

$AX = 0$ **có nghiệm không tầm thường** $\rightarrow$ **số ẩn tự do** $n-\rho(A)$

* $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(A) = 1 \end{cases}$ → Có 3 ẩn tự do x_1, x_2, x_3

→ nghiệm tổng quát $\left(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3\right)$ →

$$\left.\begin{aligned} &* x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0 \rightarrow (1, 0, 0, -1) \\ &* x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0 \rightarrow (0, 1, 0, -1) \\ &* x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0 \rightarrow (0, 0, 1, 2) \end{aligned}\right\}$$

→ Hệ nghiệm cơ bản $\left\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\right\}$

* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - 3h_1 \rightarrow h_3]{h_2 - 2h_1 \rightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{h_4 - h_3 \rightarrow h_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ \rho(A) = 2 \end{cases} \rightarrow$ có 1 ẩn tự do x_3

→ nghiệm tổng quát $\left(-\frac{5}{3}x_3, \frac{7}{3}x_3, x_3\right)$

→ Hệ nghiệm cơ bản $\left\{\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$

Ví dụ: Định thức, Ma trận ngịch đảo, giải hệ pttt, hệ nghiệm cơ bản

1. Tính/chứng minh các định thức

a) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a & a' \\ b & b & b' & b' \\ ab & a'b & ab' & a'b' \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

2. Giải hệ pttt bằng pp Gauss-Jordan, Cramer, ma trận nghịch đảo ($X=A^{-1}B$)

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 36 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 5y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 7 \\ 2x + y - z - t = -4 \\ -x + 2y + z + 2t = 5 \\ 3x + 3y - 2z - t = -7 \end{cases}$

3. Giải và biện luận hệ pttt theo tham số

a) $$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2m \\ x - 3y = m \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = m \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 4m \end{cases}$$

4. Tìm hệ nghiệm cơ bản

a) $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$