Buổi 04 – Ngày 05-10-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

Các bạn SV lấy giấy ra làm bài (trong thời gian 60 phút) và nộp lại bài tại lớp;
Được xem tài liệu thoải mái;
Trên bài làm ghi:

+ Họ và tên SV:
+ MSSV:

Đề bài:

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(e^x + e^{-x} - 2)\cot x\right]$;

b/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$.

Câu 2: Tính các tích phân sau:

a/ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

b/ $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)}$.

Câu 3: Tính các TPSR sau:

a/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$;

b/ $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x.\sqrt[5]{\ln x}}$.

Câu 4: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của các TPSR sau:

a/ $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

b/ $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln(1+x\sin x)}{e^{\sin^4 x}-1}$;

c/ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4}}$.

CHƯƠNG 2: CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI HÀM

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Một chuỗi số là một phép cộng liên tiếp, vô hạn, các con số với nhau theo một quy tắc nào đó, và ta thường kí hiệu là:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)$$

Ta gọi a_n là số hạng thứ $n+1$ (hoặc là thứ n) = số hạng tổng quát của chuỗi.

Ví dụ: ta có một số chuỗi số sau:

a/ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-3}}$

b/ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

c/ $1-1+1-1+1-1+\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

d/ $\frac{1}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

Ta nói một chuỗi số là hội tụ (convergence) nếu như tồn tại số thực M sao cho $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \right| \le M$. Ngược lại, nếu không tồn tại số thực M sao cho $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \right| \le M$ thì ta nói chuỗi số là phân kỳ (divergence). Nghĩa là $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) = +\infty$ hoặc $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) = -\infty$.

Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không bị thay đổi khi ta: cộng, trừ, nhân, chia chuỗi với một hằng số khác 0.

Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không bị thay đổi khi ta "***cắt bỏ đi***" một số lượng hữu hạn các phần tử đầu tiên của chuỗi, nghĩa là

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\square) \sim \sum_{n=100}^{+\infty} (\square) \sim \sum_{n=1000}^{+\infty} (\square) \sim \sum_{n=5000}^{+\infty} (\square) \sim$$

Tổng, hiệu, tích, thương của các chuỗi hội tụ là chuỗi hội tụ, nghĩa là nếu có chuỗi phân kỳ xuất hiện thì kết quả luôn là phân kỳ.

Còn chuỗi hàm là một phép cộng liên tiếp, vô hạn các hàm số với nhau theo một quy tắc nào đó, và ta thường ký hiệu là:

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Ví dụ: Ta có một số chuỗi hàm sau:

a/ $\sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{n!}$

b/ $1+\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{\cos^2(2x)}{4}+\dfrac{\cos^3(3x)}{8}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^n(nx)}{2^n}$

Miền hội tụ của chuỗi hàm là miền chứa các biến $x\in\mathbb{R}$ sao cho chuỗi hàm là hội tụ.

2/ <u>KHẢO SÁT SỰ HỘI TỤ HAY PHÂN KỲ CỦA CHUỖI SỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA</u>:

Xét chuỗi số: $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)$

Ta xét các tổng riêng:

$$\begin{aligned}
&S_0=a_0\\
&S_1=a_0+a_1\\
&S_2=a_0+a_1+a_2\\
&\vdots\\
&S_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n
\end{aligned}$$

Ta gọi S_n là tổng riêng thứ $n+1$ (hoặc là thứ n) của chuỗi.

Ta tính $k=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Nếu tồn tại k hữu hạn thì ta nói chuỗi số là hội tụ (về giá trị $k=M$).

Nếu tồn tại $k=+\infty$ hoặc $k=-\infty$ hoặc không tồn tại k thì ta nói chuỗi số là phân kỳ.

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số sau:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số sau:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$$

<u>Ví dụ mẫu 3</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số sau:

$$1-1+1-1+\cdots$$

<u>Ví dụ mẫu 4</u>: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Ta có: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}$

Ta xét các tổng riêng:

$$S_0 = \frac{1}{2^0}$$

$$S_1 = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1}$$

$$S_2 = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

(Nhắc lại công thức tổng các phần tử của cấp số nhân có công bội là q là:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{)}$$

Áp dụng bài này ta có $q = \frac{1}{2}$, nên

$$S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Suy ra $k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] = 2(1-0) = 2$ (hữu hạn)

Nên chuỗi số ban đầu là hội tụ (về 2).

<u>Ví dụ mẫu 2</u>:

Ta có chuỗi $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Ta xét các tổng riêng:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Suy ra

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Cho nên $k=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$ (hữu hạn)

Nên chuỗi số đã cho là hội tụ (về 1).

<u>Ví dụ mẫu 3</u>:

Ta có $1-1+1-1+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$

Ta xét các tổng riêng:

$S_0=(-1)^0=1$

$S_1=(-1)^0+(-1)^1=1-1=0$

$S_2=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2=1-1+1=1$

$S_3=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3=1-1+1-1=0$

$\vdots$

$S_n=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n$

Suy ra $k=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\left[\begin{array}{lll}1 & khi & n=2k\\ 0 & khi & n=2k+1\end{array}\right.$, nghĩa là giới hạn bằng 1 khi n là số chẵn và giới hạn bằng 0 khi n là số lẻ.

Nên không tồn tại $k=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$, cho nên chuỗi số là phân kỳ.

<u>Ví dụ mẫu 4</u>:

Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$

Ta có: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}=2-1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Vậy đáp số là $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$

<u>Bài tập tương tự</u>:

Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

a/ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$

b/ $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$

c/ $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\cdots$

d/ $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$

e/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

f/ $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$

g/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

h/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3+4^n}{6^n}=3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n$

Tính các tổng sau:

i/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$

j/ $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1+2^n}{4^n}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n$

3/ <u>KHẢO SÁT CHUỖI SỐ BẰNG TIÊU CHUẨN PHÂN KỲ</u>

Xét chuỗi số: $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)$

Ta tính $k=\lim_{n\to+\infty}(a_n)$.

Nếu tồn tại $k\neq 0$ thì chuỗi số là phân kỳ.

Nếu tồn tại $k=0$ thì ta không kết luận được gì cả! ➔ Ta phải dùng cách khác.

<u>Ví dụ mẫu 5</u>:

Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3n+5}{8n+3n^2+1}$$

<u>Giải</u>:

Ta có $k=\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+5}{8n+3n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{8}{n}+3+\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{0+3+0}=\frac{2}{3}\neq 0$

Nên chuỗi số là phân kỳ.

<u>Ví dụ mẫu 6</u>:

Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}$$

<u>Giải</u>:

$$k=\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+3}{n+1}-1\right)^{n+5}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+5}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{n+5} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right).\left(\frac{2}{n+1}\right).(n+5)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(n+5)}{n+1}} = e^{2\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+5}{n+1}} = e^{2\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = e^{2\left(\frac{1+0}{1+0}\right)} = e^2 \neq 0$$

Nên chuỗi số là phân kỳ theo tiêu chuẩn phân kỳ.

<u>Bài tập tương tự</u>:

Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

a/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^2+5n^3+2n+4}{6n+n^3+1}\right)^2$

b/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^4+3n+5}{n^2+2n+7}\right)$

c/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n+5}{8n-1}\right)^{4n+3}$

d/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n^2+1}\right)^{6n+5}$

e/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+n+4}{2n^2+n+5}\right)^{4n^2+7}$

4/ <u>TIÊU CHUẨN D'ALAMBERT</u>

Xét chuỗi số không âm: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)$, với $a_n \geq 0$

Ta có: $a_n = ... \Rightarrow a_{n+1} = ...$

Ta tìm $k = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = ...$

Nếu $k > 1 \Rightarrow$ chuỗi là phân kỳ

Nếu $k < 1 \Rightarrow$ chuỗi là hội tụ

Nếu $k = 1$ → ta xét tiếp: Nếu $a_{n+1} \geq a_n$ → chuỗi là phân kỳ

Nếu $a_{n+1} < a_n$ → chuỗi là hội tụ

Nếu ta không so sánh được a_{n+1} và a_n thì ta không kết luận được gì cả!

<u>Lưu ý</u>**:** Ta nên dùng tiêu chuẩn D'Alambert khi chuỗi có lũy thừa, số mũ, đặc biệt là có "giai thừa" xuất hiện.

5/ <u>TIÊU CHUẨN CAUCHY (CÔ-SI)</u>:

Xét chuỗi số không âm: $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$, với $a_n \geq 0$

Ta có: $a_n = ... \Rightarrow k = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = ...$

Nếu $k > 1 \Rightarrow$ chuỗi là phân kỳ

Nếu $k < 1 \Rightarrow$ chuỗi là hội tụ

Nếu $k = 1 \rightarrow$ ta xét tiếp: Nếu $a_{n+1} \geq a_n$ $\rightarrow$ chuỗi là phân kỳ

Nếu $a_{n+1} < a_n$ $\rightarrow$ chuỗi là hội tụ

Nếu ta không so sánh được a_{n+1} và a_n thì ta không kết luận được gì cả!

<u>Lưu ý</u>: Ta nên dùng tiêu chuẩn Cauchy khi chuỗi có "lũy thừa", "số mũ". Tuy nhiên, khi chuỗi có "giai thừa" thì ta không dùng tiêu chuẩn Cauchy.

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}$$

<u>Ví dụ mẫu 8</u>: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n(n+5)}$$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 7</u>: Ta có $a_n = \frac{2^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\text{Suy ra } k = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2.2^n}{n!(n+1)}\right).\left(\frac{n!}{2^n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Nên chuỗi số là hội tụ (theo tiêu chuẩn D'Alambert)

<u>Ví dụ mẫu 8</u>:

$$\text{Ta có } a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n(n+5)} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4(n+5)}$$

$$\text{Suy ra } k = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4(n+5)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n+1}{2n+3}-1\right)^{4(n+5)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{4(n+5)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n+3}{-2}\right)}\right]^{4(n+5)} = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n+3}{-2}\right)}\right]^{\left(\frac{2n+3}{-2}\right).\left(\frac{-2}{2n+3}\right)4(n+5)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-8(n+5)}{2n+3}} = e^{-8\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+5}{2n+3}} = e^{-8\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}} = e^{-8\left(\frac{1+0}{2+0}\right)} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1$$

Cho nên chuỗi số đã cho là hội tụ.

Bài tập tương tự:

Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của chuỗi số

a/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

b/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 3^n}{n!}$

c/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{8^n n^2}$

d/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

e/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$

f/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n(n+1)}$

g/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

h/ $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+3)}$

i/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n n!}{n^{2n}}$

j/ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

6/ TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN:

Xét một chuỗi số không âm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n)$, với $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

Ta đặt $f(n) = a_n = ...$

Ta cần chứng tỏ:

+ $f(n)$ luôn xác định (tồn tại được), $\forall n \geq 1$.

+ $f(n)$ là hàm giảm dần, nghĩa là: $f'(n) < 0, \forall n \geq 1$ hoặc $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq 1$.

Khi đó, ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ là có cùng tính chất hội tụ (hay phân kỳ) (~) với TPSR loại 1:

$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$

Lưu ý: Ta thường dùng tiêu chuẩn tích phân, khi biểu thức của hàm dưới dấu sig-ma dễ lấy nguyên hàm; và thường trong biểu thức có chứa "ln".

Ví dụ mẫu 3: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

Ví dụ mẫu 4: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}$

Giải:

Ví dụ mẫu 3:

Ta đặt $f(n)=a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}, \forall n\geq 2$.

Ta có: $f(n)$ là hàm số luôn xác định được $\forall n\geq 2$.

và $f'(n)=\frac{-(n\ln^2 n)'}{n^2\ln^4 n}=-\frac{\ln^2 n+2n\ln n\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\ln^4 n}=-\frac{\ln^2 n+2\ln n}{n^2\ln^4 n}<0, \forall n\geq 2$

Suy ra, chuỗi $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\sim\int_{2}^{+\infty} f(x)dx$

Mà $I=\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

Ta xét $J=\int_{2}^{b}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ (với $b\geq 2$)

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$.

Đổi cận:

Khi $x=2\Rightarrow t=\ln 2$;

Khi $x=b\Rightarrow t=\ln b$;

Suy ra $J=\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{dt}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\ln b}=-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow I=\lim_{b\to+\infty}(J)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}$ (hữu hạn).

$\Rightarrow I$ hội tụ.

Suy ra chuỗi ban đầu: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ là hội tụ.

<u>Ví dụ mẫu 4</u>:

Ta đặt $f(n)=a_n=\frac{2}{(n+1)^3}, \forall n\geq 0$.

Ta có: $f(n)$ là hàm số luôn xác định được $\forall n\geq 0$.

và $f'(n)=-\frac{2((n+1)^3)'}{(n+1)^6}=-\frac{6(n+1)^2}{(n+1)^6}=-\frac{6}{(n+1)^4}<0, \forall n\geq 0$

Suy ra, chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}\sim\int_0^{+\infty} f(x)dx$

Mà $I=\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{(x+1)^3}dx\sim\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$.

Mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ là TPSR Riemann, ứng với $\alpha=3>1$ nên TPSR là hội tụ

$\Rightarrow I$ cũng hội tụ.

Suy ra, chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}$ cũng hội tụ.

<u>*Bài tập tương tự*</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

a/ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(\ln n))}$

b/ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(\ln(\ln n)))}$

c/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+2n+4}{3n^5+n^3+2n+7}$

d/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+3}{8n^4+2n^2+1}$

e/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+4}{5n^5+7}$

f/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^3+4n}{5n^6+7n^4+2}$

g/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^2+1}{8n^4+n+3}$

h/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+5}{4n^6+2n+9}$

7/ <u>TIÊU CHUẨN SO SÁNH</u>:

Xét một chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$, với $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

Ta đề xuất b_n thỏa $a_n \leq b_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n)$ là chuỗi hội tụ.

Thì ta nói chuỗi số ban đầu $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ là hội tụ.

Hoặc ta đề xuất hàm c_n thỏa $c_n \leq a_n$ và

$\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n)$ là chuỗi phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ phân kỳ.

Hoặc ta đề xuất biểu thức d_n thỏa $a_n \sim d_n$ khi $n \to +\infty$ (ta có thể chọn d_n bằng cách dùng các VCB tương đương/ hoặc VCL tương đương ở các Chương trước). Khi đó:

$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ có cùng tính chất hội tụ/ hay phân kỳ với chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(d_n)$.

Nghĩa là nếu $\sum_{n=1}^{+\infty}(d_n)$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ hội tụ;

$\sum_{n=1}^{+\infty}(d_n)$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ phân kỳ.

<u>Lưu ý</u>: Ta thường so sánh chuỗi cần xét với chuỗi Riemann dạng:

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $\rightarrow$ hội tụ khi $\alpha > 1$

$\searrow$ phân kỳ khi $\alpha \leq 1$

<u>Ví dụ mẫu 5</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}$

<u>Giải</u>:

<u>Ví dụ mẫu 5</u>:

Ta có: $a_n = \frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5} \sim \frac{2n^3}{6n^2} = \frac{n}{3} = \frac{1}{3n^{-1}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n^{-1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-1}}$$

Mà ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-1}}$ là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha = -1 < 1$ nên chuỗi là phân kỳ.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^3+n+4}{6n^2+n+5}\right) \text{ là phân kỳ.}$$

<u>Ví dụ mẫu 6</u>:

Ta có: $a_n = \dfrac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1} \sim \dfrac{n^2}{5n^3} = \dfrac{1}{5n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Mà ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi Riemann, ứng với $\alpha = 1$ nên chuỗi là phân kỳ.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3n+7}{5n^3+6n+1}\right) \text{ là phân kỳ.}$$

<u>*Bài tập tương tự*</u>: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

i/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2(2n+1)}{3n^4+n^3+5}$

j/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^4(n^2+2)}{5n\sqrt{n^2+3}}$

k/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^2\left(\dfrac{2n^3+1}{8n^6+3n^4+2}\right)$

l/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{3n^2+n+5}{10n^4+7n^2+9}\right)$

m/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\cos\left(\dfrac{2n+3}{6n^4+n+5}\right)\right]$

n/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^6\left(\dfrac{n+2}{n^3+n+4}\right)}{2n^2+n+7}$

o/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n^5+2n+4}{4n^4+2n+1}\right)^2$

p/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+3}{8n^5+6n\sqrt{n}+1}\right)$

q/ $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\dfrac{n^3+n+5}{n^3+2n^2+7}\right)$

8/ <u>TIÊU CHUẨN HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI</u>:

Xét một chuỗi số có dấu tùy ý: $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ là chuỗi hội tụ thì chuỗi có dấu tùy ý ban đầu là chuỗi hội tụ.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ phân kỳ bằng tiêu chuẩn D'Alambert hay phân kỳ bằng tiêu chuẩn Cauchy thì ta kết luận chuỗi có dấu tùy ý ban đầu là chuỗi phân kỳ.

Nếu chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ là phân kỳ bằng những tiêu chuẩn không phải là D'Alambert hay không phải là tiêu chuẩn Cauchy mà chuỗi có dấu tùy ý là hội tụ thì ta gọi chuỗi ban đầu là hội tụ tương đối (hay là bán hội tụ).

Ví dụ mẫu 7: Khảo sát sự hội tụ (hay phân kỳ) của chuỗi số:.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) \right|$$

Ta xét $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

Dùng tiêu chuẩn phân kỳ, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

Ta có $a_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

$$\Rightarrow k = \lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right] = ?$$

Khi $\frac{\pi n^2}{n+1}$ thỏa chu kỳ $\frac{\pi}{3} + k2\pi, \forall k \in \square$ thì $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow k_1 = \lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Khi $\frac{\pi n^2}{n+1}$ thỏa chu kỳ $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \forall k \in \square$ thì $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow k_2 = \lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ không tồn tại $k = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$

Suy ra chuỗi ban đầu $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ phân kỳ; và có $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right|$ cũng phân kỳ.

9/ TIÊU CHUẨN LEIBNITZ:

(dành riêng cho chuỗi đan dấu)

Xét một chuỗi số có dấu tùy ý, dạng : $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.(a_n)$.

Ta đặt $f(n) = a_n = ...$

Ta cần chứng tỏ:

+ $f(n)$ là hàm giảm dần, nghĩa là $f'(n) < 0, \forall n \geq 1$ hoặc $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq 1$

+ Ta có $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$

Thì chuỗi ban đầu hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibnitz).

Ví dụ mẫu 8: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right)$

Ta có: $a_n = f(n) = \left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right)$

$$\Rightarrow f'(n) = \frac{(2n+1)'(3n^3+2) - (3n^3+2)'(2n+1)}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{2(3n^3+2) - (9n^2)(2n+1)}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{6n^3 + 4 - 18n^3 - 9n^2}{(3n^3+2)^2}$$

$$= \frac{-12n^3 - 9n^2 + 4}{(3n^3+2)^2} < 0, \forall n \geq 1$$

Mặt khác ta có: $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^3+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}}\right) = \frac{0+0}{3+0} = 0$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz ta có chuỗi ban đầu là hội tụ.

Bài tập tương tự: Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số:

r/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$

s/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

t/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3n^4+5}}\right)$

u/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n^2+n+1}{6n^5+n^2+3}\right)$

v/ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n^3+7}{4n^8+2n+5}\right)$