ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐỀ ĐỀ NGHỊ OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 29 NĂM 2023

MÔN: GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1.

Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} u_0 \geq -2 \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}*$

(a) Chứng tỏ rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(b) Cho hai dãy $\{v_n\}$ và $\{w_n\}$ được xác định như sau: $\begin{cases} v_n = 4^n \left|u_n - 2\right| \\ w_n = \dfrac{u_1 u_2 \ldots u_n}{2^n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}*$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

Bài 2.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2n-1^{\;2}} < 1$.

Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{x_n}{k^3} < 2$.

Bài 3.

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp hai thỏa mãn $f\;0\;=2,\ f'\;0\;=-2$ và $f\;1\;=1$.

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c\in(0;1)$ sao cho $f\;c\;f'\;c\;+f''\;c\;=0$.

Bài 4.

Cho hàm số $f:(-1;1)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp hai thỏa mãn điều kiện $f\;0\;=1$ và

$$f''\;x\;+2f'\;x\;+f\;x\;\geq 1,\ \forall x\in(-1;1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $\int_{-1}^{1} e^x f(x)\,dx$.

<u>Bài 5</u>.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ khả vi liên tục đến cấp hai thỏa mãn

$$f''(x)f(x)\ge 2\left(f'(x)\right)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

------------------HẾT-----------------

<u>Ghi chú</u>: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỀ NGHỊ OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 29 NĂM 2023

MÔN: GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút

<u>Bài 1</u>.

(a) Xét 3 trường hợp sau:

• Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Đặt $u_0 = 2\cos\varphi \quad 0 < \varphi \le \pi$

Suy ra $u_1 = \sqrt{2\ \ 1+\cos\varphi\ } = \sqrt{2.2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}} = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $u_n = 2\cos\dfrac{\varphi}{2^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\varphi}{2^n} = 2$.

• Nếu $u_0 = 2$: Ta có $u_1 = \sqrt{2+2} = 2$

Từ đó theo quy nạp dễ thấy $\{u_n\}$ là dãy hằng $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

• Nếu $u_0 > 2$: Ta luôn tìm được $\alpha > 0$ thỏa $u_0 = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow u_1 = \sqrt{2+\alpha+\dfrac{1}{\alpha}} = \sqrt{\left(\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2^n]{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 2$ (với $x = \sqrt[2^n]{\alpha}$).

Vậy trong mọi trường hợp, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

(b1) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$:

• Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Theo câu a: $u_n = 2\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$

$\Rightarrow v_n = 4^n\ \ 2-u_n\ = 4^n.2\left(1-\cos\dfrac{\varphi}{2^n}\right) = 4^{n+1}\sin^2\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 4^{n+1}\sin^2\frac{\varphi}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}}\right)^2 .\varphi^2 = \varphi^2$$

• Nếu $u_0 = 2$: Dễ thấy $v_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

• Nếu $u_0 > 2$: Theo câu a: $u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}$

$$\Rightarrow v_n = 4^n \ \ u_n - 2 \ = 4^n\left(\sqrt[2^n]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}} - 2\right) = 4^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{\alpha}}\right)^2$$

Đặt $\alpha = x^{2^n} \Rightarrow \ln\alpha = 2^n \ln x \Rightarrow 4^n = \left(\dfrac{\ln\alpha}{\ln x}\right)^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 4^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{\alpha}}\right)^2 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\ln x}\right)^2 \ln^2\alpha = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}}\right)^2 \ln^2\alpha = \ln^2\alpha$$

(b2) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$:

• Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Theo câu a: $u_n = 2\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$

$$\Rightarrow w_n = \frac{1}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\cos\dfrac{\varphi}{2}\ldots\cos\dfrac{\varphi}{2^n}\sin\dfrac{\varphi}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\dfrac{\varphi}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\dfrac{\varphi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\varphi}{2^n}}{\sin\dfrac{\varphi}{2^n}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

• Nếu $u_0 = 2$: Dễ thấy $w_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$

• Nếu $u_0 > 2$: Theo câu a: $u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}$

$$\Rightarrow w_n = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt[2^k]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[2^k]{\alpha}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\ldots\left(\sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)\left(\sqrt[2^n]{\alpha} - \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{\alpha} - \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)} = \frac{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}{2^n\left(\sqrt[2^n]{\alpha} - \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)}$$

Đặt $\alpha = x^{2^n} \Rightarrow \ln\alpha = 2^n \ln x \Rightarrow 2^n = \dfrac{\ln\alpha}{\ln x}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}{2^n\left(\sqrt[2^n]{\alpha} - \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - \dfrac{1}{x}} \cdot \frac{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}{\ln\alpha} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot \frac{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}{\ln\alpha} = \frac{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}{2\ln\alpha}$$

Bài 2.

Đặt: $S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \dfrac{x_n}{k^3} = \sum_{1\le n\le k}^{\infty} \dfrac{x_n}{k^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)$.

Ta có:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{16k}{16k^4} < \frac{16k}{16k^4 - 8k^2 + 1} = \frac{2(2k+1)^2 - 2(2k-1)^2}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{2}{(2k-1)^2} - \frac{2}{(2k+1)^2} \quad \forall k \ge 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{2}{(2k-1)^2} - \frac{2}{(2k+1)^2}\right] = \frac{2}{(2n-1)^2}$$

Suy ra: $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} x_n \dfrac{2}{(2n-1)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{(2n-1)^2} < 2$ (đpcm)

Bài 3.

Đặt $g(x) = \dfrac{1}{2} f^2(x) + f'(x)$

Suy ra $g(0) = \dfrac{1}{2} f^2(0) + f'(0) = 0$ và $g'(x) = f(x) f'(x) + f''(x)$.

Xét hai trường hợp sau đây:

- $f(x)$ không có nghiệm thuộc $(0;1)$:

  Đặt $h(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{g(x)}{f^2(x)}$

  Ta có $h(0) = h(1) = -\dfrac{1}{2}$ nên theo định lý Rolle, $\exists a \in (0;1)$ thỏa $h'(a) = 0 \Rightarrow g(a) = 0$.

  Từ đó, theo định lý Rolle, $\exists c \in (0;a) \subset (0;1)$ thỏa $g'(c) = 0$ (đpcm).

- $f(x)$ có nghiệm thuộc $x_0 \in (0;1)$:

Áp dụng định lý Lagrange, $\exists a \in (0;x_0), b \in (x_0;1)$ sao cho:

$$f'(a) = \frac{f(0) - f(x_0)}{0 - x_0} = -\frac{2}{x_0} < 0 \text{ và } f'(b) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{1}{1 - x_0} > 0$$

$\Rightarrow g(a) = f'(a) < 0$ và $g(b) = f'(b) > 0$, suy ra $g(x)$ có nghiệm $d \in [a;b]$.

Suy ra, theo định lý Rolle, $\exists c \in (0;d) \subset (0;1)$ thỏa $g'(c) = 0$ (đpcm).

Bài 4.

Đặt $g(x) = e^x\left(f(x) - 1\right)$, suy ra $g(x)$ cũng khả vi đến cấp hai và $g(0) = 0$.

Ta có: $g'(x) = e^x\left(f'(x) + f(x) - 1\right)$

$$g''(x) = e^x\left(f''(x) + 2f'(x) + f(x) - 1\right) \ge 0, \ \forall x \in (-1;1)$$

Suy ra $g(x)$ là một hàm lồi trên khoảng $(-1;1)$.

Đánh giá $g(x)$ thông qua tiếp tuyến tại $x = 0$, ta được: $g(x) \ge g(0) + g'(0)x = g'(0)x$

$$\Rightarrow e^x f(x) = g(x) + e^x \ge g'(0)x + e^x \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^x f(x) \ge \int_{-1}^{1} \left(g'(0)x + e^x\right)dx = e - \frac{1}{e}$$

Chọn $f(x) = Cxe^{-x} + 1 \Rightarrow f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1$ thỏa điều kiện đề bài, đồng thời $\int_{-1}^{1} e^x f(x) = \int_{-1}^{1} \left(Cx + e^x\right)dx = e - \frac{1}{e}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của $\int_{-1}^{1} e^x f(x)\,dx$ là $e - \frac{1}{e}$.

Bài 5.

Đặt $g(x) = \arctan f(x)$. Ta có: $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$

$$g''(x) = \frac{f''(x)\left(1 + f^2(x)\right) - 2f(x)\left(f'(x)\right)^2}{\left(1 + f^2(x)\right)^2} = \frac{f(x)\left(f''(x)f(x) - 2\left(f'(x)\right)^2\right)}{\left(1 + f^2(x)\right)^2} \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $g(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Ta chứng minh $g(x)$ là hàm hằng.

Thật vậy, giả sử $g(x)$ không là hàm hằng thì tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) > g(b)$

.

Vì $g(x)$ là hàm lồi, suy ra $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),\ \forall\lambda\in[0;1]$

Cho $x=\dfrac{a-b}{\lambda}+b,\ y=b\Rightarrow g(a)\le\lambda g\left(\dfrac{a-b}{\lambda}+b\right)+(1-\lambda)g(b)$

$$\Rightarrow\frac{g(a)-g(b)}{\lambda}+g(b)\le g\left(\frac{a-b}{\lambda}+b\right)$$

Cho $\lambda\to0^+$ thì $\dfrac{g(a)-g(b)}{\lambda}+g(b)\to+\infty$, suy ra $g(x)$ không bị chặn. Điều này vô lý vì hàm arctan là hàm bị chặn. Vậy $g(x)$ là hàm hằng, kéo theo $f(x)$ cũng là hàm hằng.

Ngược lại, nếu $f(x)=C\Rightarrow f'(x)=f''(x)=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

-----HẾT-----