HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2023

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.1 và B.1 — 6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.1	Điểm B.1
a		**Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$**	**2,00**	**2,00**
	1	Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng	1,00	1,00
		Từ định nghĩa $$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) = u_n$$ với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$	1,00	1,00
		Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.	1,00	1,00
b		**Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n**	**2,00**	**2,00**
	1	Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được $$\ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$ Vậy ta có đánh giá $$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$$	1,00	1,00
	2	Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$	1,00	1,00
		Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.	1,00	1,00
c		**Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ và tính gần đúng giới hạn**	**2,00**	**2,00**
		Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n).	1,00	2,00
		Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được $$\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$ Từ đó ta có $$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$$ Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ ta thu được $$\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1-1/4} - \frac{1}{2}\frac{1/16}{1-1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$ Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số $1,3$.	1,00	
		Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \frac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $\lvert x\rvert \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.		

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2 và B.2 — 6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm A.2	Điểm B.2
a		**Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0**	**2,00**	**2,00**
	1	Tính giới hạn của f tại 0	1,00	1,00
		Từ định nghĩa của f ta có $$\lvert f(x)\rvert = \begin{cases} \frac{\lvert x\rvert}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ \lvert x\rvert & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$ Do đó ta luôn có $0 \le \lvert f(x)\rvert \le \lvert x\rvert \; \forall x \in [-1,1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.	1,00	1,00
	2	Khẳng định tính liên tục của f tại 0	1,00	1,00
		Ở bước trước ta đã có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.	1,00	1,00
b		**Hàm f có khả vi tại 0 không?**	**2,00**	**2,00**
	1	Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$	1,00	1,00
		Xét sự tồn tại của giới hạn $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$	1,00	1,00
	2	Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$ là không tồn tại	1,00	
		Từ định nghĩa của f ta thấy $$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$ Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.	1,00	1,00
c		**Hàm f có giá trị lớn nhất/nhỏ nhất trên đoạn $[-1,1]$ không?**	**2,00**	**2,00**
	1	Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1,1]$	2,00	
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \le 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $\lvert M\rvert = \lvert f(x_0)\rvert = \lvert x_0\rvert/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $M \le 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.	2,00	
	2	Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1,1]$		2,00
		Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \ge -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $\lvert m\rvert = \lvert f(x_0)\rvert = \lvert x_0\rvert/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $m \ge -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.		2,00
		Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên đúng (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1,1]$ của hàm số f, nhưng "cận" này không phải là một giá trị của hàm f.		

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

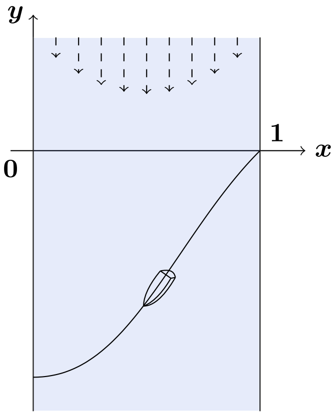
ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.3 và B.3 — 6 điểm

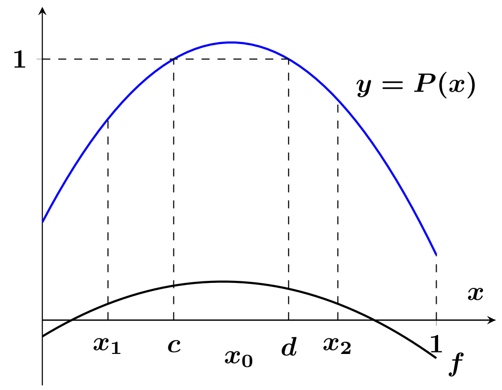
Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		**Con thuyền có đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến không?**	**2,00**
		Con thuyền đến được điểm $(0,0)$ khi và chỉ khi điểm $(0,0)$ thuộc đồ thị của hàm số $$y(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}.$$ Dễ thấy điều này là không xảy ra.	2,00
b		**Con thuyền có cập được bờ trái hay không?**	**2,00**
		Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Dễ thấy $$y(0) = -\frac{1}{2}$$ và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.	2,00
c		**Vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0,0)$ là ngắn nhất**	**2,00**
		Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x,y) trong đó $$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$ với $0 \leq x \leq 1$. Khoảng cách từ điểm $(0,0)$ đến điểm (x,y) là $$\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2}.$$ Xét hàm số f được xác định bởi  $$f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2$$ với $0 \leq x \leq 1$. Trên $[0,1]$ ta có $$f'(x) = \frac{2x(x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4)}{(x^3+2)^3}.$$ Để ý rằng $$\begin{aligned} &x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4 \\ &\quad = x^9+6x^6+x^3(1-x^2)+15x^3+4x^2+3(1-x)+1 > 0 \end{aligned}$$ nên f đồng biến trên $[0,1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái.	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4 — 6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		**Nếu $\int_0^1 f(x)P(x)^m dx = 0$ với mọi $0 \le m \in \mathbb{Z}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$**	**3,00**
		Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [x_1, x_2]$. Đặt $$c = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad d = \frac{x_0 + x_2}{2}.$$ Ta có $x_1 < c < x_0 < d < x_2$. Xét đa thức $$P(x) = (x-c)(d-x) + 1.$$  Dễ thấy $P \ge 0$ trên $[0,1]$ và $P \ge 1$ trên $[c,d] \subset [x_1,x_2] \subset (0,1)$. Từ tính đơn điệu của P ta thấy $$0 \le P(x) \le P(x_1) < 1 \quad \forall x \in [0, x_1]$$ và $$0 \le P(x) \le P(x_2) < 1 \quad \forall x \in [x_2, 1].$$ Với đa thức P ở trên ta có đánh giá $$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f(x)P(x)^m dx &= \Big(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{c} + \int_c^d + \int_d^{x_2} + \int_{x_2}^1\Big) f(x)P(x)^m dx \\ &\ge \Big(\int_0^{x_1} + \int_c^d + \int_{x_2}^1\Big) f(x)P(x)^m dx \\ &\ge -P(x_1)^m \int_0^{x_1} \lvert f(x)\rvert dx + \int_c^d f(x)dx \\ &\quad - P(x_2)^m \int_{x_2}^1 \lvert f(x)\rvert dx. \end{aligned}$$ Do $0 \le P(x_1) < 1$ và $0 \le P(x_2) < 1$ nên qua giới hạn khi $m \to +\infty$ ta phải có $$\int_c^d f(x)dx \le 0.$$ Đây là điều vô lý do f liên tục và $f > 0$ trên $[c,d]$.	3,00
b		**Khi điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất**	**3,00**
		Do mọi đa thức $P(x)^m$ đều được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các lũy thừa nguyên không âm của các đa thức bậc 1 nên kết quả của ý (b) vẫn đúng.	3,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

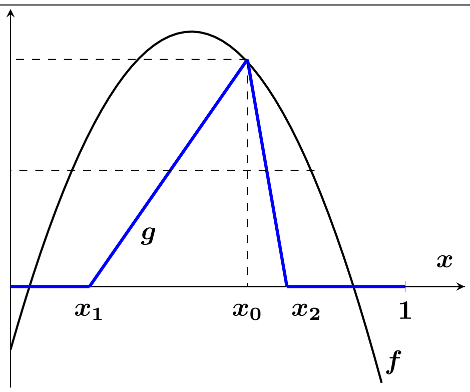
Lời giải bài B.4 — 6 điểm

<table>
<tr><th>Ý</th><th>Bước</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td>Nếu $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ với mọi hàm liên tục g mà $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$</td><td>3,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được

$$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$$

sao cho

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$



Xét hàm g trên $[0, 1]$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_1, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_0, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_2 - x) & \text{nếu } x_0 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{nếu } x_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Khi đó $g \geq 0$, liên tục trên $[0, 1]$, và có $g(0) = g(1) = 0$. Với hàm g đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f(x)g(x)dx &= \Big(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1\Big) f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx \\ &\geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Đây là điều vô lý.
</td><td>3,00</td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td>Kết luận ở ý (b) còn đúng không nếu ta thêm giả thiết $g(1/2) = 0$?</td><td>3,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
Kết luận ở ý (b) vẫn đúng vì lần lượt áp dụng các hàm trong lời giải ý (b) cho đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và cho đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$ ta thu được

$$f \equiv 0 \text{ trên } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ và trên } [\tfrac{1}{2}, 1].$$

Vậy $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.
</td><td>3,00</td></tr>
</table>

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.5 — 6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		**Có tồn tại $d \in (0,1)$ sao cho $\lvert f'(d)\rvert \le \big(f(d)\big)^2$?**	**2,00**
	1	Khẳng định không tồn tại d và đưa ra được 1 ví dụ	1,00
		Xét hàm số f được cho bởi $$f(x) = x \quad 0 \le x \le 1.$$ Khi đó f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$, và có $f(0) = 0$.	1,00
	2	Kiểm tra được tính đúng đắn của ví dụ	1,00
		Tính toán ta thấy $\lvert f'(x)\rvert = 1 > x^2 = \big(f(x)\big)^2$ với mọi $x \in (0,1)$.	1,00
b		**Nếu $\lvert f'(x)\rvert \le \big(f(x)\big)^2$ với mọi $x \in (0,1)$ thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.**	**2,00**
		Do tính liên tục của f nên ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$ là đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó tập hợp $$E = \{x \in [0, x_0] : f(x) = 0\}$$ bị chặn (do $E \subset [0,1]$) và không rỗng (do $0 \in E$). Đặt $x_1 = \sup E$. Dễ thấy $x_1 \in E$ do f liên tục. Điều này có nghĩa là $0 \le x_1 < x_0$, $f(x_1) = 0$, và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_0]$. Từ đó cùng với giả thiết ta thu được $$-1 \le \frac{f'(t)}{\big(f(t)\big)^2} \le 1 \quad \forall t \in (x_1, x_0].$$ Lấy tích phân theo t trên đoạn $[x, x_0]$ ở cả 3 vế của bất đẳng thức kép ta thu được $$x - x_0 \le g(x) - g(x_0) \le x_0 - x,$$ trong đó g là hàm số được cho bởi $g(x) = -1/f(x)$. Từ đây ta thu được $$\lvert g(x) - g(x_0)\rvert \le x_0 - x \quad \forall x \in (x_1, x_0].$$ Cho $x \to {x_1}^+$ ta thu được điều vô lý.	2,00
c		**Tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $\big(f(c)\big)^2 \le \lvert f'(c)\rvert$**	**2,00**
		Do f liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\lvert f(x)\rvert \le M$ với mọi $x \in [0,1]$. Nếu $f(c) = 0$ với $c \in (0,1)$ nào đó thì c chính là điểm cần tìm và do đó ta chỉ cần xét trường hợp $f \neq 0$ trên toàn $(0,1)$. Do tính liên tục nên ta có thể giả thiết $f > 0$ trên $(0,1)$. Do $f(0) = 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1/2)$ sao cho $$\ln f(x_0) - \ln f(\tfrac{1}{2}) \le -\frac{M}{2}.$$ Theo Định lý Lagrange áp dụng cho hàm $\ln f(x)$ ta có $$-\frac{M}{2} \ge \ln f(x_0) - \ln f(\tfrac{1}{2}) = \frac{f'(c)}{f(c)}(x_0 - \tfrac{1}{2}) \quad \text{với } c \in (x_0, \tfrac{1}{2}) \text{ nào đó.}$$ Từ đây ta thu được $\dfrac{f'(c)}{f(c)} > 0$ và do đó $-\dfrac{M}{2} \ge -\dfrac{1}{2}\dfrac{f'(c)}{f(c)}$. Vậy $\left\lvert \dfrac{f'(c)}{f(c)} \right\rvert = \dfrac{f'(c)}{f(c)} \ge M$.	2,00
		Ghi chú. Thí sinh có thể giải như sau và vẫn được điểm tối đa. Trong trường hợp $f \equiv 0$, ta có thể chọn $c \in (0,1)$ tùy ý. Trong trường hợp còn lại, nếu kết luận là sai, tức là $\big(f(x)\big)^2 > \lvert f'(x)\rvert$ với mọi $x \in (0,1)$, thì theo kết luận của ý (b) ta phải có $f \equiv 0$, mâu thuẫn.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

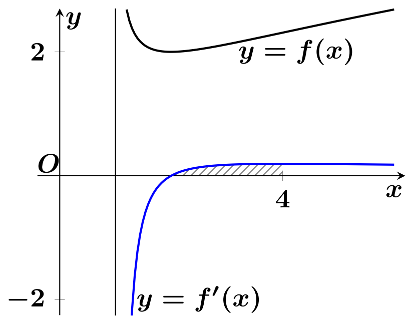
ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2023

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5 — 6 điểm

Ý	Bước	Nội dung	Điểm
a		**Chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1, +\infty)$**	**2,00**
		Dễ thấy $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2$$ với mọi $x > 1$, và dấu bằng đạt được khi $x = 2$. Vậy hàm f đạt được giá trị nhỏ nhất trên $(1, +\infty)$ tại $x = 2$. Từ đó ta kết luận phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ trên $(1, +\infty)$. 	2,00
b		**Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x**	**2,00**
		Tính toán trực tiếp thu được $$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.$$	2,00
c		**Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình)**	**2,00**
	1	Thiết lập công thức tính $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Hoành độ giao điểm giữa đồ thị của hàm f' và đường thẳng $y = 0$ là $x = 2$. Do f đơn điệu tăng (ngặt) trên $(2, +\infty)$ nên $f' \geq 0$ trên $[2, 4]$. Vậy ta có công thức tính diện tích cần tìm $$\int_2^4 f'(x)dx.$$	1,00
	2	Tính tích phân $\int_2^4 f'(x)dx$	1,00
		Theo công thức Newton–Leibniz ta có $$\int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2,$$ và đây là diện tích cần tìm.	1,00