Buổi 07 – Ngày 26-10-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

CHƯƠNG 4: TÍCH PHÂN BỘI (MULTIPLE INTEGRAL)

1/ TÍCH PHÂN BỘI HAI (TÍCH PHÂN KÉP) (DOUBLE INTEGRAL)

$I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$ **,**

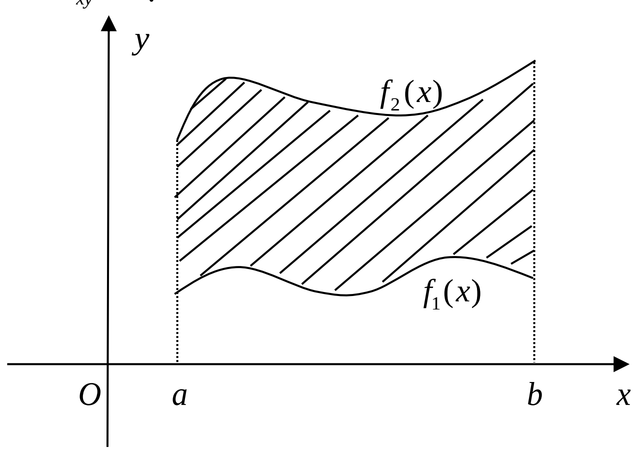
Trong đó: $f(x,y) =$ hàm số dưới dấu tích phân;

$D_{xy} =$ miền lấy tích phân trên mặt phẳng Oxy.

Khi $f(x,y)=1$ thì $I = \iint\limits_{D_{xy}} 1.dxdy = S(D_{xy})$ = diện tích của miền D_{xy}.

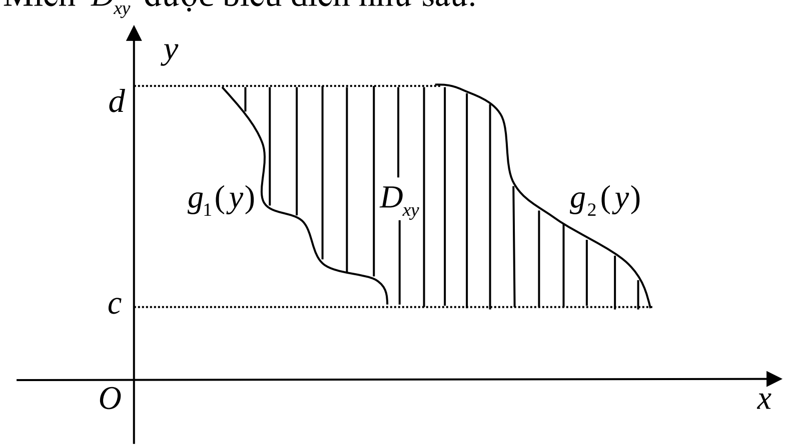
a/ *Tính I bằng cách dùng định lý Fubini*:

TH1: Miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có: $D_{xy}\begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$

TH2: Miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có: $D_{xy}:\begin{cases} c \le y \le d \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$

Ví dụ mẫu 1: Tính tích phân $I = \iint\limits_{D_{xy}} (2x - 3y + 1)dxdy$,

với D_{xy} là miền phẳng bị giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$

Ví dụ mẫu 2: Tính diện tích miền $D_{xy}:\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \le 2 - x \\ y \ge 0 \end{cases}$

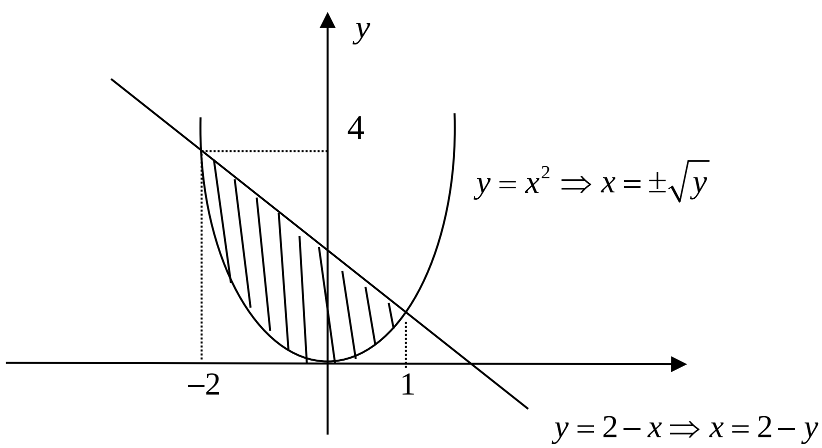
Ví dụ mẫu 3: Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (e^{x^2} - 1)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(1,1), B(1,0)$

Ví dụ mẫu 4: Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (4x - y + 5)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0)A(2,2), B(4,0)$

Ví dụ mẫu 5: Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Cách 1: Ta có $D_{xy}:\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2 - x \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} (2x - 3y + 1)dy$

Cách 2: Ta có $D_{xy}:\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ -\sqrt{y} \le x \le ? \end{cases}$ ➔ $D_{xy} = D_{xy(1)} \cup D_{xy(2)}$

với $D_{xy(1)}:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$ và $D_{xy(2)}:\begin{cases} 1 \le y \le 4 \\ -\sqrt{y} \le x \le 2 - y \end{cases}$

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2x - 3y + 1)dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} (2x - 3y + 1)dx$$

Chọn cách 1: $I = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (2x - 3y + 1)dy = \int_{-2}^{1} dx \left[2xy - \frac{3y^2}{2} + y \right]_{x^2}^{2-x}$

$$= \int_{-2}^{1} dx \left[2x(2-x) - \frac{3}{2}(2-x)^2 + (2-x) - 2x^3 + \frac{3}{2}x^4 - x^2 \right]$$

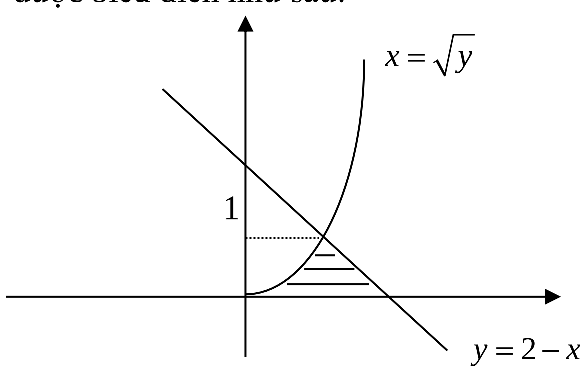
$$= \int_{-2}^{1} \left(4x - 2x^2 - 6 + 6x - \frac{3}{2}x^2 + 2 - x - 2x^3 + \frac{3}{2}x^4 - x^2 \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x - 4 \right) dx$$

$$= -\frac{108}{5}$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Tính diện tích miền $D_{xy} : \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \le 2 - x \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có: $D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 - y \end{cases} \Rightarrow S(D_{xy}) = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} 1.dx = \int_0^1 dy [x]_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y})dy$

$$= \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{y^3} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \text{ (đvdt).}$$

<u>Ví dụ mẫu 3</u>: Tính $I = \iint_{D_{xy}} (e^{x^2} - 1)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(1,1), B(1,0)$.

<u>Lưu ý</u>: Pt đường thẳng AB qua điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

Có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

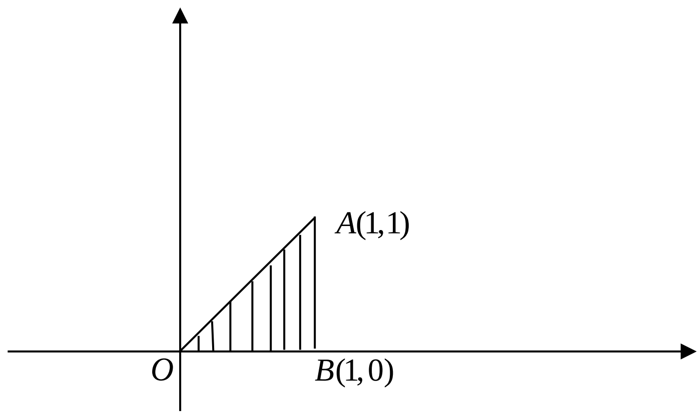
\+ Phương trình tham số là: (qua $A(x_A; y_A)$)

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}$$

+ Phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có phương trình $OA: y = x$; $OB: y = 0$; $AB: x = 1$

Cách 1: Ta có $D_{xy}: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^x (e^{x^2} - 1)dy$

Cách 2: Ta có $D_{xy}: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 dy \int_y^1 (e^{x^2} - 1)dx$ (tắc đường do không tồn tại $\int (e^{x^2})dx$)

Chọn cách 1, ta có $I = \int_0^1 dx \int_0^x (e^{x^2} - 1)dy = \int_0^1 dx \left[ye^{x^2} - y \right]_0^x = \int_0^1 (xe^{x^2} - x)dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx - \int_0^1 xdx = I_1 - I_2$

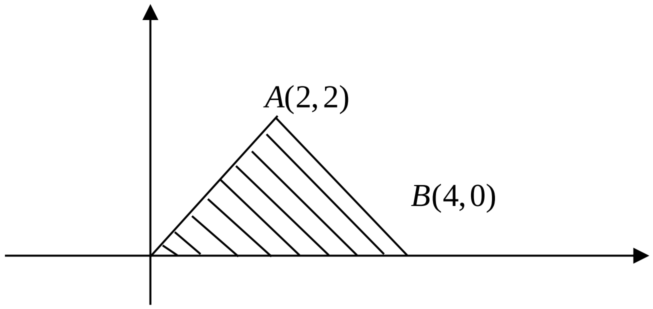
Xét $I_1 = \int_0^1 xe^{x^2} dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận: khi $\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{matrix}$ nên $I_1 = \int_0^1 e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}[e^t]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$

Xét $I_2 = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$. Suy ra $I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}(e - 1) = \frac{1}{2}(e - 2)$.

Ví dụ mẫu 4: Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (4x - y + 5)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0)A(2,2), B(4,0)$.

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có: pt các đường $OA: y = x$; $OB: y = 0$; $AB: y = 4 - x$

nên $D_{xy}: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y \le x \le 4 - y \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (4x - y + 5)dx = \int_0^2 dy \left[2x^2 - xy + 5x \right]_y^{4-y}$

$$= \int_0^2 \left[2(4-y)^2 - (4-y)y + 5(4-y) - 2y^2 + y^2 - 5y \right] dy$$

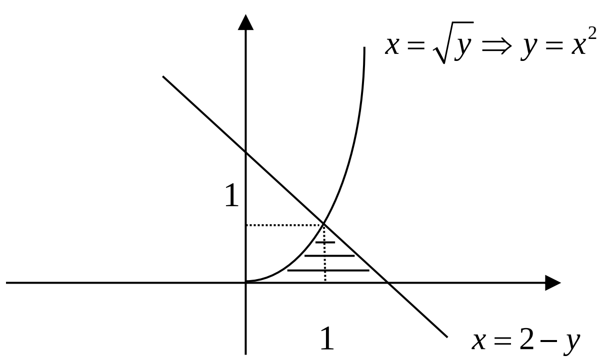
$$= \int_0^2 \left(32 - 16y + 2y^2 - 4y + y^2 + 20 - 5y - y^2 - 5y \right) dy$$

$$= \int_0^2 (2y^2 - 30y + 52) dy$$

$$= \frac{148}{3}$$

Ví dụ mẫu 5: Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)dx$

Ta có miền $D_{xy}: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 - y \end{cases}$ nên hình minh họa cho D_{xy} là:



Đổi thứ tự, ta có:

$D_{xy} = D_{xy(1)} \cup D_{xy(2)}$, với $D_{xy(1)}: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$ và $D_{xy(2)}: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 - x \end{cases}$

Suy ra: $I = I_1 + I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

<u>Bài tập tương tự</u>:

1/ Tính $I = \iint_{D_{xy}} (2x - y + 4)dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} y \le 4 - x^2 \\ y \ge x \\ y \ge -x \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

2/ $I = \iint_{D_{xy}} \sin y dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} 2y = x \\ y = 2x \\ x = \pi \end{cases}$

3/ Đổi thứ tự lấy tích phân: $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

4/ Tính $I = \iint_{D_{xy}} x \sin y dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB, và $O(0,0), A(\pi,0), B(\pi,\pi)$.

5/ Tính $I = \iint_{D_{xy}} ye^{xy} dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} y = 1 \\ y = 10 \\ x \ge 0 \\ xy = 1 \end{cases}$

6/ Đổi thứ tự tích phân $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

7/ Tính $I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy$

8/ Đổi thứ tự tích phân $I = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

9/ Đổi thứ tự tích phân $I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$

10/ Đổi thứ tự tích phân $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$.

b/ *<u>Tính I bằng phương pháp tọa độ cực và tọa độ cực mở rộng</u>*

<u>TH1</u>: Miền D_{xy} bị giới hạn bởi hình tròn tâm O, bán kính R

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \end{cases}$ (vị trí xét góc φ_1, φ_2 là gốc O).

Suy ra $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$

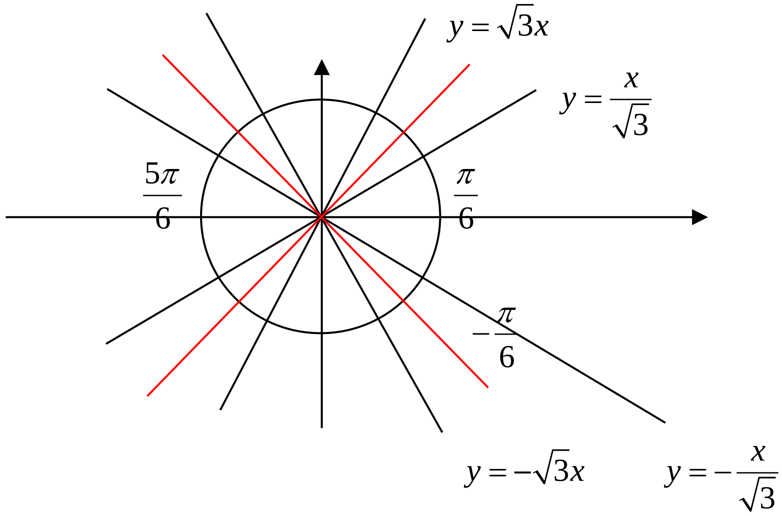
TH2: Miền D_{xy} bị giới hạn bởi hình tròn tâm $I(x_0; y_0)$, bán kính R

Đặt $\begin{cases} x - x_0 = r\cos\varphi \\ y - y_0 = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \end{cases}$

(vị trí xét góc φ_1, φ_2 là tâm $I(x_0; y_0)$)

Suy ra $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r dr$

Nhắc lại một số pt đường thẳng cắt đường tròn tâm O:



Ví dụ mẫu 1: Tính $I = \iint_{D_{xy}} (2xy - 3x + 4) dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge x \\ y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

Ví dụ mẫu 2: Tính $I = \iint_{D_{xy}} (x + y - 2) dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ y \le 0 \\ x \le 1 \end{cases}$

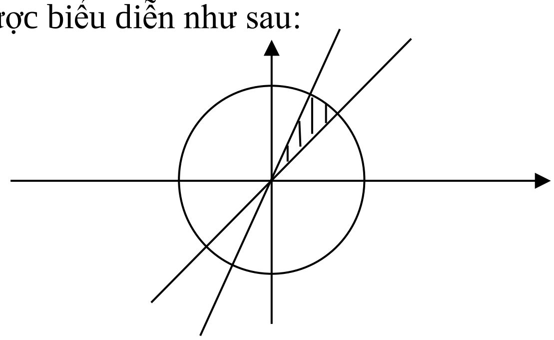
Ví dụ mẫu 3: Tính diện tích miền $D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ y \le -x \end{cases}$

Ví dụ mẫu 4: Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực $I = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(2,2), B(4,0)$.

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Tính $I=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-3x+4)dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ y\ge x\\ y\le\sqrt{3}x\end{cases}$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ với $\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\\ 0\le r\le 2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^2[2(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)-3r\cos\varphi+4]rdr$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\left[\frac{r^4}{2}\sin\varphi\cos\varphi-r^3\cos\varphi+2r^2\right]_0^2$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\left[8\sin\varphi\cos\varphi-8\cos\varphi+8\right]=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\left[4\sin(2\varphi)-8\cos\varphi+8\right]$$

$$=\left[4\left(-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right)-8\sin\varphi+8\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-8\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)+8\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

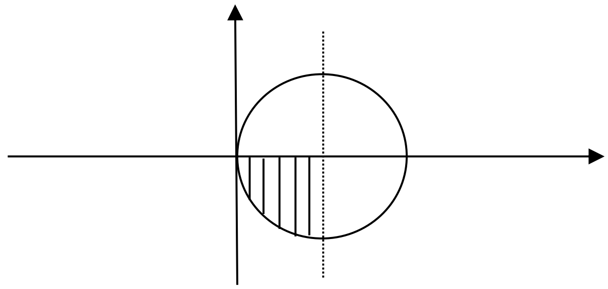
$$=-2\left(-\frac{1}{2}-0\right)-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{8\pi}{12}$$

$$=1-4(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\frac{2\pi}{3}$$

Ví dụ mẫu 2: Tính $I=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y-2)dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}x^2+y^2\le 2x\\ y\le 0\\ x\le 1\end{cases}$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:

Phân tích: $x^2+y^2\le 2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2\le 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$



Đặt $\begin{cases} x-1=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2} \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 \left[1+r\cos\varphi+r\sin\varphi-2\right]rdr$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{r^3}{3}\cos\varphi+\frac{r^3}{3}\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\right]_0^1$$

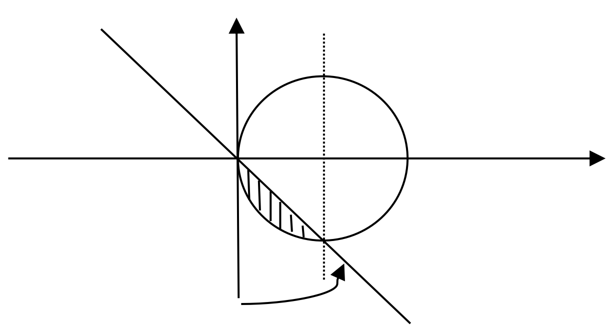
$$=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{1}{3}\cos\varphi+\frac{1}{3}\sin\varphi-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sin\varphi-\frac{1}{3}\cos\varphi-\frac{1}{2}\varphi\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\pi\right)-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)$$

$$=\frac{1}{3}(-1-0)-\frac{1}{3}(0-(-1))-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$$

Ví dụ mẫu 3: Tính diện tích miền $D_{xy}:\begin{cases} x^2+y^2\le 2x \\ y\le -x \end{cases}$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Cách 1: dùng tọa độ cực mở rộng

Đặt $\begin{cases} x-1 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \\ ? \le r \le 1 \end{cases}$ (không tính được)

Cách 2: dùng tọa độ cực thông thường:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thay vào bất pt $x^2 + y^2 \le 2x$ ta có:

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le 2(r\cos\varphi)$$
$$\Leftrightarrow r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \le 2r\cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow r^2 \le 2r\cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow r \le 2\cos\varphi$$

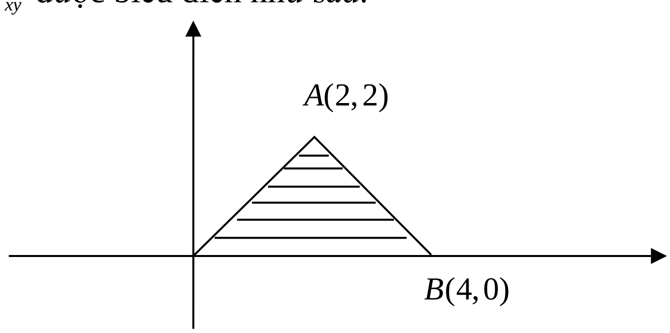
Suy ra $\begin{cases} \dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow S(D_{xy}) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} 1.rdr = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \left[\dfrac{r^2}{2}\right]_0^{2\cos\varphi} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi[2\cos^2\varphi]$

$$= 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right) d\varphi = \left[\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{2} - \sin(3\pi)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-1-0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Ví dụ mẫu 4: Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực $I = \iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(2,2), B(4,0)$.

Giải:

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có pt các cạnh tam giác là:

$OA: y = x$; $OB: y = 0$; $AB: y = 4 - x$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, với $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào pt $AB: y = 4 - x$ ta có:

$$r\sin\varphi = 4 - r\cos\varphi \Rightarrow r(\sin\varphi + \cos\varphi) = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

Suy ra $0 \le r \le \dfrac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$

Cho nên $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$.

<u>Bài tập tương tự</u>:

1/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, với $D_{xy}: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

2/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

3/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy$, với $D_{xy}: x^2 + y^2 \le 4x$

4/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} x dxdy$, với $D_{xy}: 2x \le x^2 + y^2 \le 4x$

5/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, với $D_{xy}: \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y \ge 0 \end{cases}$

6/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

7/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, với D_{xy} là miền nằm giữa 2 đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{4} \\ x^2 + y^2 = \pi^2 \end{cases}$

8/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y) dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} y \le 2 - x^2 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \end{cases}$

9/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y) dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$.

10/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y) dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} y \le 3 - 2x \\ y \ge x \\ x \ge 0 \end{cases}$

c/ <u>Phương pháp đổi biến tổng quát</u> (khi miền lấy tích phân bị chắn bởi một số đường cong đồng dạng)

Đặt $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Suy ra $D_{xy} \to D_{uv} : \begin{cases} u_1 \le u \le u_2 \\ v_1 \le v \le v_2 \end{cases}$

Ta có định thức ma trận Jacobi là:

$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u\, y'_v - x'_v\, y'_u$, hoặc

$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \ldots$

Ta có: $I = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)).|J|\,dudv$

Ví dụ mẫu: Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (x-y)^3 (x+y)^4 dxdy$, với $D_{xy} : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Giải: Đặt: u=x-y

v=x+y

với 0<=u<=2

1<=v<=3

Suy ra x=(u+v)/2

y=(v-u)/2

và x'_u=1/2; x'_v=1/2

y'_u=-1/2; y'_v=1/2

và J = (1/2)*(1/2) – (-1/2)*(1/2) = ½

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^2 du \int_1^3 u^3 v^4 dv = \frac{1}{2}\int_0^2 du \left[u^3 \frac{v^5}{5} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \times \frac{242}{5} \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^2 = \frac{484}{5}$.

2/ TÍCH PHÂN BỘI 3 (TRIPLE INTEGRAL)

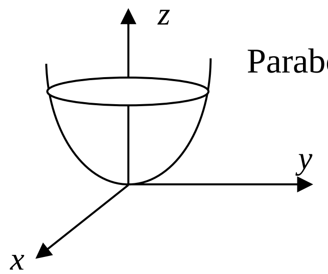
$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, trong đó:

$f(x,y,z) =$ hàm số dưới dấu tích phân.

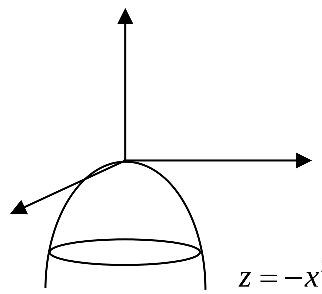
$\Omega =$ khối vật thể lấy tích phân trong không gian.

Khi $f(x,y,z) = 1$ thì $I = \iiint\limits_{\Omega} 1.dxdydz = V(\Omega) =$ thể tích khối vật thể Ω.

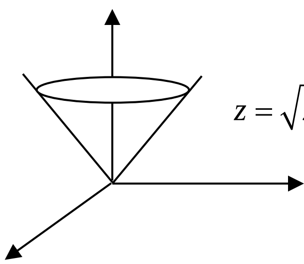
Nhắc lại một số pt mặt cong trong không gian:



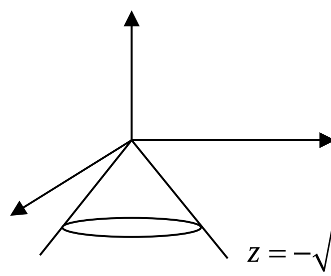
Paraboloic: $z = x^2 + y^2$



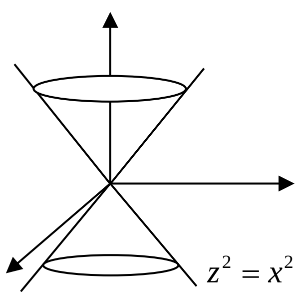
$z = -x^2 - y^2$



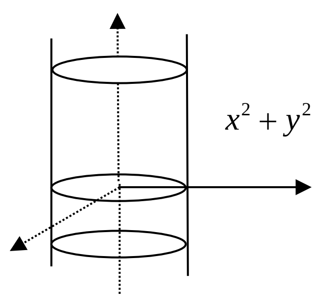
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



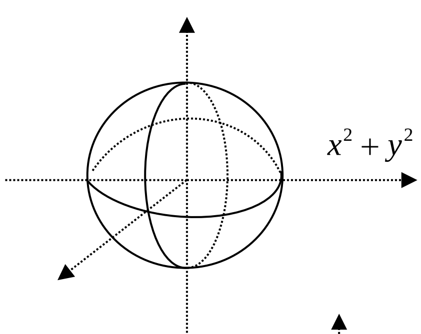
$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



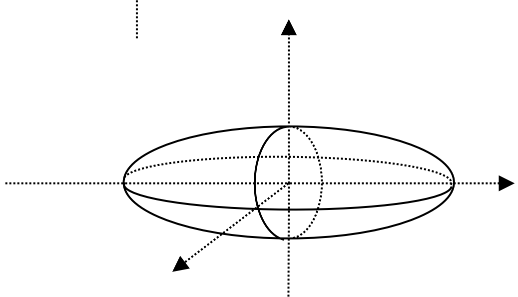
$z^2 = x^2 + y^2$



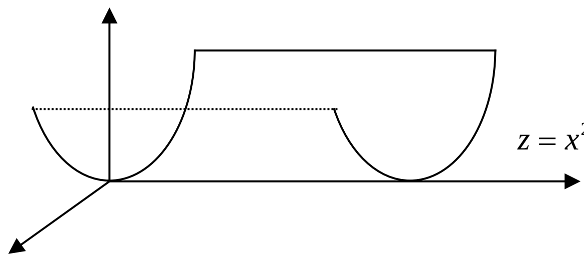
$x^2 + y^2 \le R^2$ (hình trụ)



$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ (hình cầu)



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq R^2 \text{ (elipsoic)}$$



$z = x^2$ (hình máng)