Chương 1. Giới hạn và đạo hàm của hàm một biến

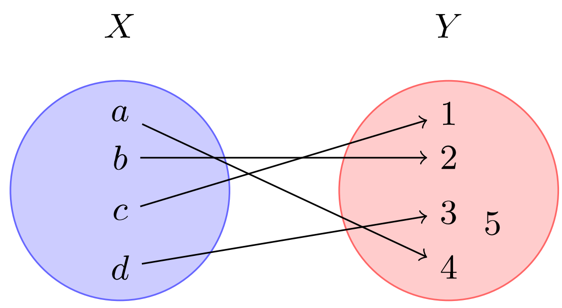
Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 14 tháng 9 năm 2023

1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1 (Ánh xạ) Cho hai tập hợp X và Y. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất, kí hiệu $f(x)$, thuộc Y.



Kí hiệu: Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{hoặc } f : X \to Y \text{ với } x \mapsto f(x).$$

- Tập X : tập nguồn (tập xác định); tập Y : tập đích.
- Phần tử $f(x)$: *ảnh* của x; phần tử x - *tạo ảnh* của $f(x)$.
- Tập $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ - tập giá trị của ánh xạ f.
- Tập tất cả các tạo ảnh của phần tử $y \in Y$

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Ví dụ 1.2 Cho X là tập hợp tất cả các sinh viên của trường Đại học Công nghệ Thông tin, Y là tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 31. Phép tương ứng f từ tập X đến tập Y xác định như sau: với mỗi $x \in X$, đặt $f(x)$ là ngày sinh của x.
Khi đó, f là một ánh xạ từ X đến Y vì mỗi sinh viên $x \in X$ có duy nhất một ngày sinh (thuộc Y).
Ví dụ 1.3 Cho phép tương ứng từ tập $\mathbb{Z}$ đến tập $\mathbb{R}$ như sau: mỗi phần tử $x \in \mathbb{Z}$, tương ứng với phần tử $y \in \mathbb{R}$ sao cho $y^2 = x$.

- Phép tương ứng trên **không** là một ánh xạ vì tồn tại $-1 \in \mathbb{Z}$ (có thể lấy số khác) không có phần tử $y \in \mathbb{R}$ tương ứng.
- **Cách khác**: phép tương ứng trên không là một ánh xạ vì nếu lấy $4 \in \mathbb{Z}$ (tập nguồn) thì có hai phần tử tương tứng $y_1 = 2, y_2 = -2 \in \mathbb{R}$ sao cho $y_1^2 = 4 = y_2^2$ (mâu thuẫn với tính duy nhất của phần tử tương ứng ở tập đích).

Ví dụ 1.4 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 3x^2 + 4$.

- Ảnh của -1
$$f(-1) = 3.(-1)^2 + 4 = 7.$$
- Tạo ảnh của 7
$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 7\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + 4 = 7\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} \\ &= \{-1, 1\}. \end{aligned}$$
- Tập xác định của f là $\mathbb{R}$ và tập giá trị $f(\mathbb{R}) = [4, +\infty)$.

Ví dụ 1.5 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 3x + 4$.

- Ảnh của -1
$$f(-1) = 3.(-1) + 4 = 1.$$
- Tạo ảnh của 7
$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 7\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 4 = 7\} \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$
- Tập xác định của f là $\mathbb{R}$ và tập giá trị $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.6 Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ và $A \subset X, B \subset Y$.

- Ảnh của $A : f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$
- Tạo ảnh của $B : f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Ví dụ 1.7 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 3x^2 + 4$.

- Ảnh của $A = [-1, 2]$ là
$$f(A) = [4, 16].$$
- Tạo ảnh của $B = (4, 7)$ là
$$\begin{aligned} f^{-1}((4, 7)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (4, 7)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < 3x^2 + 4 < 7\} \\ &= (-1, 1) \end{aligned}$$

Chú ý: Tất cả các hàm số đã học trong chương trình toán THPT đều là các ánh xạ.

Định nghĩa 1.8 Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *song ánh* nếu với mỗi $y \in Y$, tập $f^{-1}(y)$ có duy nhất một phần tử.

Ví dụ 1.9 Chứng minh ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 3x + 4$ là một song ánh.

Giải. Lấy $y \in \mathbb{R}$ (tập đích) bất kỳ và tìm tạo ảnh của y như sau

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 4 = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3}(y - 4)\}. \end{aligned}$$

Với mọi $y \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $x = \dfrac{1}{3}(y - 4) \in \mathbb{R}$ là tạo ảnh của y. Do đó ánh xạ đã cho là một song ánh.

Ví dụ 1.10 Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 3x^2 + 4$ **không** là một song ánh.Thật vậy, lấy $y \in \mathbb{R}$ (tập đích) và tìm tạo ảnh của y như sau

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + 4 = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \frac{1}{3}(y - 4)\}. \end{aligned}$$

Nếu lấy $y = 3$ thì $f^{-1}(y) = \emptyset$. Do đó ánh xạ trên không là một song ánh.

Ví dụ 1.11 Xét ánh xạ $g : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ xác định bởi $g(x) = (x - 1)^2$. Khi đó g là một song ánh. Thật vậy, với mọi $y \in [0, +\infty)$, ta có

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) &= \{x \in [1, +\infty) \mid g(x) = y\} \\ &= \{x \in [1, +\infty) \mid (x - 1)^2 = y\} \\ &= \{x \in [1, +\infty) \mid x = \sqrt{y} + 1\} \end{aligned}$$

có duy nhất một phần tử. Do đó $g(x)$ là một song ánh.

Ví dụ 1.12 Chứng minh hàm số $f : (-\infty, 1) \to (0, +\infty)$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ là một song ánh.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 1.13 Cho $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ là các ánh xạ. Ta xây dựng được một ánh xạ $h: X \to Z$ xác định bởi $h(x) = g(f(x))$ với mọi $x \in X$.
Khi đó h được gọi là *hợp thành* (tích) của f và g. Kí hiệu $h = g \circ f$ hoặc $h = gf$.
Ví dụ 1.14 Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x+1 \end{aligned} \qquad \text{và} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sin x \end{aligned}$$

Tích $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$gf(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \sin(2x+1)$$

và tích $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$fg(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = 2\sin x + 1$$

Ví dụ 1.15 Cho hai ánh xạ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x - 1$ và $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.
Tìm $gf(x)$ và $fg(x)$. ....

....

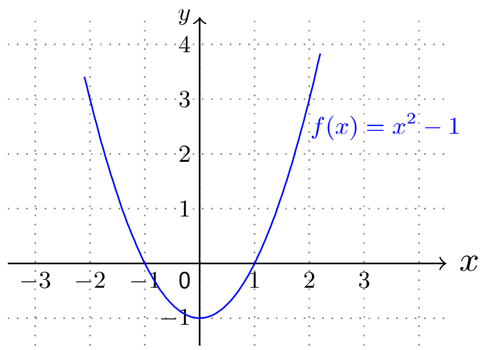
....

....

Định nghĩa 1.16 Cho $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là một hàm số (thực).
Kí hiệu một hàm số: f hoặc $y = f(x)$.
Ví dụ 1.17 Tập xác định và tập giá trị của một số hàm số

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị
$y = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$y = \sqrt{2-x}$	$(-\infty, 2]$	$[0, +\infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
$y = e^x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$

Định nghĩa 1.18 Đồ thị của một hàm số $f(x)$ là hình vẽ biểu thị các điểm $(x, f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ.
Ví dụ 1.19 Đồ thị của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ như sau



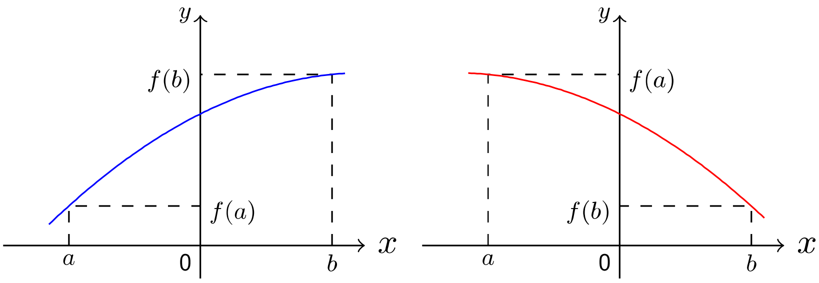
Một số hàm số cơ bản

1. Hàm số hằng: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ với c là một hằng số. Tập xác định $\mathbb{R}$; tập giá trị $\{c\}$.
2. Hàm số bậc nhất: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ với a, b là các hằng số. Tập xác định $\mathbb{R}$; tập giá trị $\mathbb{R}$.
3. Hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hằng số.
4. Hàm đa thức: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ với $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các hằng số.
5. Hàm số hữu tỉ: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ trong đó $p(x), q(x)$ là các đa thức.
6. Hàm số mũ: $y = a^x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$
7. Hàm logarit: $y = \log_a x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.
8. Hàm số lượng giác: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
9. Hàm dấu (Signum function): $y = \operatorname{sign}(x)$ xác định như sau

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Định nghĩa 1.20

1. Một hàm số được gọi là tăng nghiêm ngặt trên (a, b) nếu với mọi $c, d \in (a, b)$ với $c < d$ thì $f(c) < f(d)$.
2. Một hàm số được gọi là giảm nghiêm ngặt trên (a, b) nếu với mọi $c, d \in (a, b)$ với $c < d$ thì $f(c) > f(d)$.



Đồ thị bên trái biểu diễn hàm số tăng, đồ thị bên phải biểu diễn hàm số giảm trên (a, b).

Định nghĩa 1.21 Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập I và có miền giá trị J. Giả sử $f(x)$ là một song ánh. Khi đó, tồn tại duy nhất một hàm số $g : J \to I$ thỏa mãn

$$gf(x) = x \text{ với mọi } x \in I \text{ và } fg(y) = y \text{ với mọi } y \in J.$$

Hàm số g được gọi là *hàm số ngược* của hàm số f và kí hiệu $g = f^{-1}$.

Ví dụ 1.22 Tìm hàm số ngược của hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

Giải. Chứng minh $f(x)$ là một song ánh. Với mọi $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, tìm tạo ảnh của y

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \mid f(x) = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \mid \frac{3x}{x-2} = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \mid x = \frac{2y}{y-3} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\} \end{aligned}$$

có duy nhất một phần tử. Như vậy $f(x)$ là một song ánh.
Từ chứng minh $f(x)$ là một song ánh, ta thấy với mỗi $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ tồn tại duy nhất một phần tử tương ứng $x = \dfrac{2y}{y-3} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Do đó, ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ xác định bởi: với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, đặt

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3}.$$

Ví dụ 1.23 Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Chứng minh rằng f là một song ánh và tìm hàm số ngược của f.

Giải. ....

....

....

....

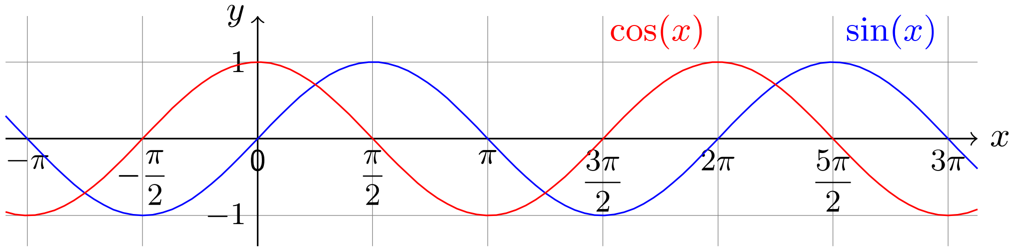
....

....

....

....

Ví dụ 1.24 a. Hàm số $y = \sin x : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ là một song ánh



Do đó, nó có hàm số ngược. Hàm số ngược của $\sin x$ được kí hiệu là

$$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

b. Hàm số $y = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ là một song ánh. Do đó, nó có hàm số ngược. Hàm số ngược của $\cos x$ được kí hiệu

$$\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

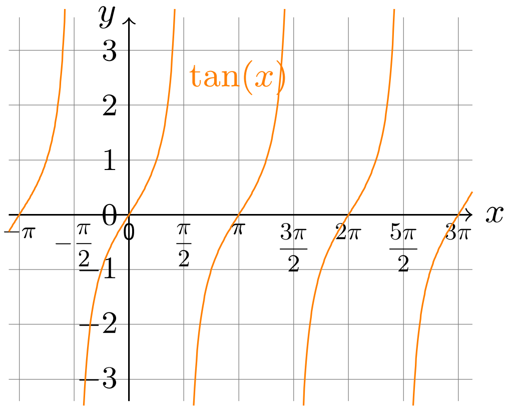
c. Xét hàm số $y = \tan x : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ là một song ánh. Hàm số ngược của $\tan x$ được kí hiệu là

$$\arctan x : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

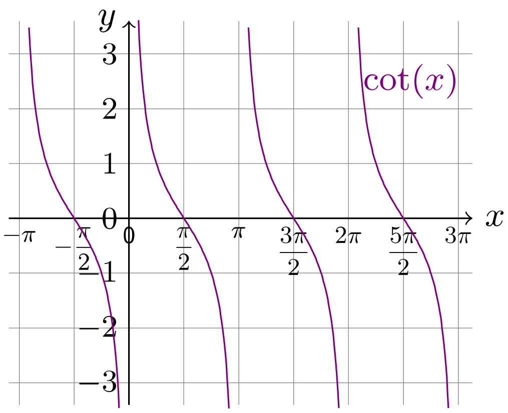
d. Xét hàm số $y = \cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ là một song ánh. Hàm số ngược của $\cot x$ được kí hiệu là

$$\text{arccot} x : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi).$$

Đồ thị của hàm số $y = \tan x$



Đồ thị của hàm số $y = \cot x$



1.2 Giới hạn của hàm số

Cho một hàm số $f(x)$ và giá trị x *càng tiến đến gần* một số a. Nếu $f(x)$ càng tiến đến gần một số L nào đó thì ta gọi L là *giới hạn của hàm số* $f(x)$ khi x tiến đến a.

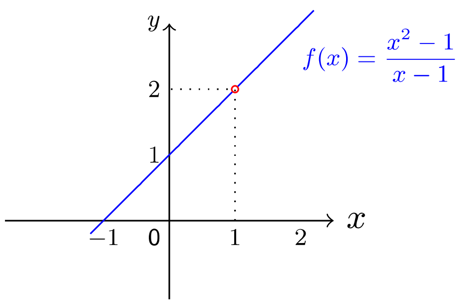
Ví dụ 1.25 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

a. Tính $f(1)$.

b. Dựa vào đồ thị của $f(x)$, dự đoán giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến 1.

Giải. a. Vì 1 không thuộc tập xác định của $f(x)$ nên không tồn tại $f(1)$.

b. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như sau



Dựa vào đồ thị, ta thấy rằng khi x tiến đến 1 thì $f(x)$ tiến đến 2. Do đó có thể dự đoán giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến 1 là 2.

Định nghĩa 1.26 Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$. Kí hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Ví dụ 1.27 Chứng minh $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ bằng định nghĩa.

Phân tích Với $\varepsilon > 0$, ta cần tìm số $\delta > 0$ (phụ thuộc vào ε) sao cho với mọi x thỏa mãn $|x-2| < \delta$ thì $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

- Từ $|f(x) - 4| < \varepsilon$, ta có $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| < \varepsilon$
- Từ $|x-2| < \delta$, suy ra $-\delta < x - 2 < \delta$ hay $-\delta + 2 < x < \delta + 2$. Do đó $-\delta + 4 < x + 2 < \delta + 4$.
- Như vậy $|(x-2)(x+2)| < \delta(\delta+4) \to$ Chọn δ thỏa mãn $\delta(\delta+4) = \varepsilon$ hay $\delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2 > 0$.

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$, với mọi x thỏa $|x-2| < \delta$ thì

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x-2)(x+2)| < \delta(\delta+4) \\ &= \left(\sqrt{\varepsilon+4} - 2\right)\left(\left(\sqrt{\varepsilon+4} - 2\right) + 4\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Như vậy $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Ví dụ 1.28 Dùng định nghĩa chứng minh

a. $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$ b. $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3 = 0$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Nhận xét. Điều kiện tương đương của định nghĩa giới hạn:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{ Với mọi } \{x_n\} \text{ thỏa mãn } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ thì } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Ví dụ 1.29 Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Giải. Ta thấy rằng nếu $x \neq 1$ thì $f(x) = x + 1$. Do đó với mọi dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_n \to 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = 2.$$

Như vậy $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Nhận xét. Nếu tồn tại hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ thì ta nói $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 1.30 Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Giải. Đặt $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ và chọn hai dãy số $\{x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\}$ và $\{y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}\}$ thỏa mãn $x_n \to 0$ và $y_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Tuy nhiên

$$f(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \to 1 \text{ và } f(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{3\pi}{2}) \to -1$$

khi $n \to \infty$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Khi viết $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nghĩa là x tiến đến a theo cả hai phía. Nếu muốn chỉ ra x chỉ tiến đến a theo một phía thì ta có thể sử dụng các ký hiệu sau:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ để chỉ giới hạn bên phải, tức là } x > a$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ để chỉ giới hạn bên trái, tức là } x < a$$

Các giới hạn bên trên (nếu tồn tại) lần lượt được gọi là giới hạn bên phải và giới hạn bên trái.

Định nghĩa 1.31

1. Số L được gọi là giới hạn trái của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < a - x < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. Số L được gọi là giới hạn phải của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < x - a < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

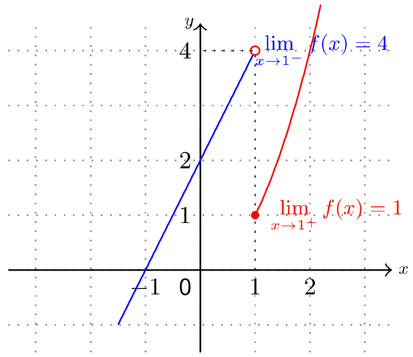
Định lý 1.32 Ta có điều sau

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Ví dụ 1.33 Cho hàm số $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

có đồ thị như sau



Các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ có tồn tại không?

Giải. Ta thấy rằng

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$$

do đó $\lim_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại.

Tuy nhiên,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \text{ và } \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

do đó $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Định nghĩa 1.34

1. Hàm số $f(x)$ tiến đến dương vô cùng khi $x \to a$ nếu với mỗi $A > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) > A$.
   Kí hiệu: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
2. Hàm số $f(x)$ tiến đến âm vô cùng khi $x \to a$ nếu với mỗi số $B > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi thỏa mãn $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) < -B$.
   Kí hiệu: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
3. Nếu với mỗi số $A > 0$, tồn tại số $B > 0$ sao cho $f(x) > A$ với mọi x thỏa mãn $x > B$ thì ta viết
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
4. Nếu với mỗi số $A > 0$, tồn tại số $B > 0$ sao cho $f(x) > A$ với mọi x thỏa mãn $x < -B$ thì ta viết
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$
5. Nếu với mỗi số $A > 0$, tồn tại số $B > 0$ sao cho $f(x) < -A$ với mọi x thỏa mãn $x > B$ thì ta viết
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$
6. Nếu với mỗi số $A < 0$, tồn tại số $B < 0$ sao cho $f(x) < A$ với mọi x thỏa mãn $x < B$ thì ta viết
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ví dụ 1.35

a. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$

b. $\lim_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty.$

c. $\lim_{x\to +\infty} 3^x = +\infty.$

d. $\lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = +\infty.$

e. $\lim_{x\to +\infty} \ln\dfrac{1}{x} = -\infty.$

f. $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty.$

Định lý 1.36

1. Nếu $f(x)$ có giới hạn khi $x \to a$ thì giới hạn đó là duy nhất.
2. $\lim_{x\to a} c = c$ với c là một hằng số.
3. $\lim_{x\to a} x = a$ và $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ với $n \in \mathbb{N}$.
4. Nếu $f(x)$ là một đa thức hay là một hàm số hữu tỉ và a thuộc tập xác định của f thì
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

5. Cho $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ khi đó

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cL \text{ với } c \text{ là hằng số}$$
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$$
$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = L.M$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ với } M \neq 0$$

6. Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ thì $\lim_{x\to a} (f(x))^t = L^t$ với t là số nguyên dương.
7. Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ thì $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ với n là số nguyên dương. (Nếu n là số chẵn thì ta giả sử $L > 0$).
8. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ và $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to a} g(x) = L$.
9. Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim_{x\to L} g(x) = M$ thì $\lim_{x\to a} g(f(x)) = M$.

Ví dụ 1.37 Tính $\lim_{x\to -1} (x^3 + 3x - 4)$.

Giải. Áp dụng các tính chất của giới hạn

$$\lim_{x\to -1} (x^3 + 3x - 4) = \lim_{x\to -1} (x^3) + 3\lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 4 = (-1)^3 + 3(-1) - 4 = -8.$$

Ví dụ 1.38 Tính $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

Giải. Vì $\lim_{x\to 1} (x - 2) \neq 0$ nên

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3 - 8)}{\lim_{x\to 1}(x - 2)} = \frac{1^3 - 8}{1 - 2} = 7.$$

Ví dụ 1.39 Tính $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Chú ý. Ta không dùng tính chất 5

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 . \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

vì $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ không tồn tại (xem Ví dụ 1.30).

Giải. Vì $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ nên

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Vì $\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} -x^2$ nên $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Một số giới hạn cơ bản:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

c. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

d. $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

e. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Các dạng vô định

Các dạng vô định là các giới hạn có dạng

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \times \infty; 0^0; 1^\infty; \infty^0$$

Ví dụ 1.40

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x+4} = \dfrac{2}{5}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = 1$
3. $$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - x)(\sqrt{x^2 + 4x} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$
   $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$
   $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} = 2$$
4. $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) \tan \dfrac{\pi x}{2}$ (dạng $0 \times \infty$)
5. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$. (Dạng 0^0)

Phương pháp. Tính $\lim\limits_{x \to c} f(x)^{g(x)}$ trong đó $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0^+$ và $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Ta có

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to c} \ln(f(x)^{g(x)})} = e^{\lim_{x \to c} g(x) \ln(f(x))}$$

Tiếp theo, tính $\lim\limits_{x \to c} g(x) \ln(f(x)) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$. (dạng 1^∞)

   Cách 1.
   $$\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4} = \left(1 + \frac{5}{x-3}\right)^{3x+4} = \left(1 + \frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5} \cdot \frac{5(3x+4)}{x-3}}$$
   $$= \left[\left(1 + \frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5(3x+4)}{x-3}}$$

   Như vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4} = e^{15}$

   Cách 2. Giả sử $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$, lấy logarit cơ số e hai vế
   $$\ln L = \lim_{x \to \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4} = \lim_{x \to \infty} (3x+4) \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = \ldots$$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)}$. (dạng ∞^0)

....

....

1.3 Đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.41 Nếu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ thì $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \to a$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Ví dụ 1.42

1. Khi $x \to 0$ thì $\sin x; 1 - \cos x$ là các VCB.
2. Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{1}{x}; \frac{x}{x^2+1}$ là VCB.

Định lý 1.43

1. Tổng của hai VCB là một VCB khi $x \to a$
2. Tích của một VCB là một hằng số là một VCB khi $x \to a$
3. Cho $g(x)$ là một VCB khi $x \to a$. Khi đó $\lim_{x \to a} f(x) = A$ nếu và chỉ nếu $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A$.

Định nghĩa 1.44 Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$ và tồn tại

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

1. Nếu $C = 1$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai VCB tương đương, kí hiệu $f(x) \sim g(x)$.
2. Nếu $C = 0$ thì $f(x)$ được gọi là VCB có cấp cao hơn $g(x)$, kí hiệu $f(x) = o(g(x))$.
3. Nếu $C \neq 0, \infty$ thì $f(x)$ được gọi là VCB cùng cấp (bậc) với $g(x)$.

Ví dụ 1.45

1. Khi $x \to 0$, ta có $1 - \cos x$ và $2x$ là các VCB. Vì
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = 0$$
nên $1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn VCB $2x$.
2. Khi $x \to 0$, ta có $\sin x$ và x là các VCB tương đương, vì
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
3. $\sin ax \sim ax$ khi $x \to 0$ ($a \in \mathbb{R}$)
4. $1 - \cos ax \sim \frac{(ax)^2}{2}$ khi $x \to 0$
5. $(1 + k.x)^a - 1 \sim a.k.x$ khi $x \to 0$
6. $\ln(1 + ax) \sim ax$ khi $x \to 0$
7. $\ln(x) \sim ?$ khi $x \to 1$
8. $\cos x \sim ?$ khi $x \to \frac{\pi}{2}$
9. $\cos(\frac{\pi}{3} + x) \sim ?$ khi $x \to \frac{\pi}{6}$
10. $\sin(\sqrt{x+1} - 1) \sim ?$ khi $x \to 0$

Ứng dụng của vô cùng bé tương đương

- Khi tìm giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, ta có thể thay VCB tương đương vào tích (thương).
  $f_1(x) \sim f_2(x); g_1(x) \sim g_2(x)$; $h_1(x) \sim h_2(x)$ khi $x \to c$ khi đó

$$\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)h_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_2(x)h_2(x)}{g_2(x)}$$

Ví dụ 1.46 Tính a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan 4x}{1-\cos 4x}$. b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$

Giải. a. Khi $x \to 0$, ta có các VCB tương đương $\tan 4x \sim 4x$ và
$1-\cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan 4x}{1-\cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x4x}{8x^2} = \frac{1}{2}.$$

b. Khi $x \to 0$, ta có các VCB tương đương $\ln(1+2\tan x) \sim 2\tan x \sim 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$$

Chú ý: Các VCB tương đương không được áp dụng cho hiệu hoặc tổng các VCB nếu chúng làm triệt tiêu tử hoặc mẫu của phân thức.

Ví dụ 1.47 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)+(e^{-x}-1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+(-x)}{x^2} = 0$ *(sai !)*

Ví dụ 1.48 Tính a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\ln(1+x\tan x)}$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 1.49 Nếu $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to a$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Ví dụ 1.50

a. Khi $x \to 0$ thì $\frac{1}{x}; \cot x$ là các VCL.

b. Khi $x \to +\infty$ thì $x; x^2, x^3 + 1$ là các VCL.

Định lý 1.51

1. Tích của hai VCL là một VCL khi $x \to a$
2. Tổng của một VCL và một hằng số là một VCL khi $x \to a$
3. Nghịch đảo của một VCL (khi $x \to a$) là một VCB (khi $x \to a$).

Định nghĩa 1.52 Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to a$ và tồn tại $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$

1. $C = \infty$: ta nói $f(x)$ là VCL có cấp cao hơn $g(x)$, kí hiệu $f(x) >> g(x)$. Hay $g(x)$ là VCL có cấp thấp hơn $f(x)$.
2. $C = 0$: ta nói $g(x)$ là VCL có cấp cao hơn $f(x)$.
3. $C \neq 0, \infty$: ta nói $f(x), g(x)$ là hai VCL bằng cấp
4. $C = 1$: ta nói $f(x), g(x)$ là VCL tương đương, kí hiệu $f(x) \sim g(x)$.

Ví dụ 1.53

- Khi $x \to \infty$ thì $x^3 + 1$ là VCL cấp cao hơn VCL $x^2 + x$
- Khi $x \to \infty$ thì $x^3 + 1$ là VCL có cấp bằng VCL $3x^3 + x$
- Ta có các VCL tương đương $x^3 + 2x + 1 \sim x^3$ khi $x \to \infty$
- Ta có các VCL tương đương $\sqrt{x^2 + 2} \sim x$ khi $x \to +\infty$

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ là một VCB khi $x \to a$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x \to a$
- Tổng của các VCL khác cấp tương đương với VCL cấp cao nhất.
- Ta có thể thay các VCL tương đương vào tích, thương khi tính giới hạn.
- Qui tắc ngắt bỏ các VCL cấp thấp: Nếu $f(x), g(x)$ là tổng của các VCL khác cấp thì giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCL cấp cao nhất trong $f(x)$ và $g(x)$.

Ví dụ 1.54 $\lim_{x \to \infty} \frac{x + x^2 + 2x^4}{2x - 2x^3 + 3x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$

1.4 Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.55

1. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại c nếu tồn tại $f(c)$ và
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$
2. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $c \in (a;b)$ thì ta nói $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$.

Ví dụ 1.56 Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Giải. Ta có $f(0) = 0$ và
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$
Vậy hàm số đã cho liên tục tại 0.

Ví dụ 1.57 Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có $f(0) = 0$ và
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \neq 0 = f(0).$$
Do đó hàm số đã cho không liên tục tại 0.

Định nghĩa 1.58

1. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trái tại a nếu tồn tại $f(a)$ và
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$
2. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục phải tại a nếu $f(a)$ tồn tại và
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$
3. Hàm số liên tục trái hoặc liên tục phải tại a thì được gọi là liên tục một phía tại a.
4. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu f liên tục trên (a,b) và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Ví dụ 1.59 Xét tính liên tục trái và liên tục phải của hàm số tại $x = 0$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x - 1, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có $f(0) = 0^2 = 0$ và
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0)$$
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục phải tại 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x-1) = -1 \neq f(0) = 0$$

Do đó hàm số $f(x)$ không liên tục trái tại 0.

Định lý 1.60 Hàm số $f(x)$ liên tục tại a khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại a.

Ví dụ 1.61 Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x-1, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có

- $f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Định lý 1.62 Các hàm số sau đây liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng: đa thức; phân thức hữu tỉ; hàm căn; hàm số lượng giác; hàm ngược của hàm số lượng giác; hàm số mũ; hàm logarit.

Ví dụ 1.63 Xác định A, B để hàm số liên tục

a. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{nếu } x \geq 0 \\ Ax+B, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

b. $f(x) = \begin{cases} x^2+Ax+B, & \text{nếu } -2 < x \leq 2 \\ 2x-B, & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 1.64 Cho $\lim_{x\to a} f(x) = b$ và $g(x)$ là một hàm số liên tục tại b. Khi đó

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Ví dụ 1.65 Tính $\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

Giải. Vì hàm số arcsin liên tục nên

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\\ &= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right)\\ &= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\ &= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Định lý 1.66 (Định lý giá trị trung gian) Cho f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $t \in (f(a), f(b))$ với $f(a) \neq f(b)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = t$.

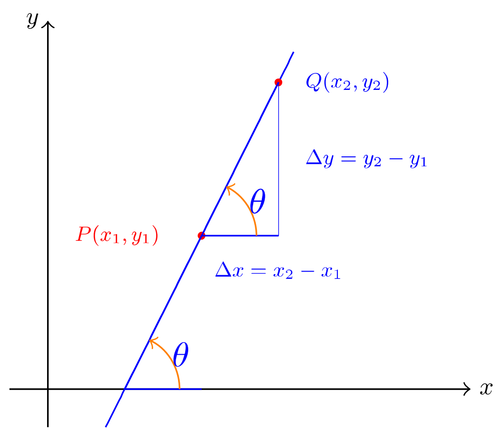
Ví dụ 1.67 Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Giải. Đặt $f(x) = x^3 + x - 1$ và $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$. Ta thấy $f(0) = -1 < 0$ và $f(1) = 1 > 0$. Theo Định lý giá trị trung gian, tồn tại $c \in (0, 1)$ thỏa mãn $f(c) = 0$. Như vậy phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

1.5 Đạo hàm và vi phân hàm một biến

Định nghĩa 1.68 Cho hai điểm $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ trong hệ trục tọa độ Oxy. Hệ số góc (độ dốc) của đường thẳng PQ được xác định bởi công thức

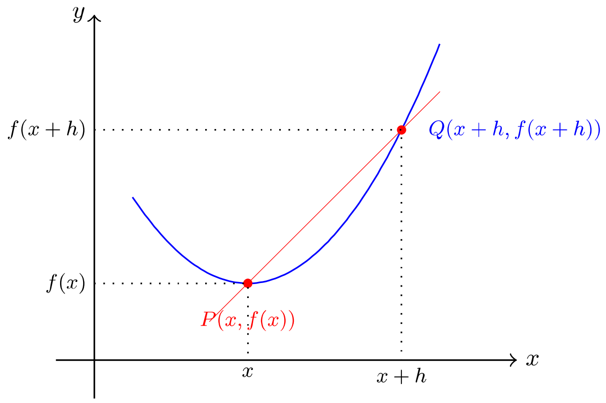
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Để xác định được tiếp tuyến của một đường cong bất kì tại điểm A, ta chọn một điểm P thuộc đường cong, nằm gần A và

- Tính hệ số góc của đường thẳng PA (so với trục Ox)
- Tính giới hạn của hệ số góc này khi P tiến gần đến A theo dọc đường cong
- Nếu giới hạn này tồn tại thì nó là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A. Từ đó, ta xác định được tiếp tuyến tại điểm A.

Ví dụ 1.69 Xác định hệ số góc của đường thẳng đi qua điểm $P(2,4)$ thuộc đường cong $y = x^2$. Viết phương trình tuyến tuyến của đường cong tại điểm P.
Giải. Lấy điểm $Q(2+h,(2+h)^2)$ thuộc đường cong.



Hệ số góc của đường thẳng PQ được xác định bởi
$$\frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-2} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h.$$
Khi Q tiến đến P, tức $h \to 0$, ta có hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm P. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm P là
$$\lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$
Phương trình tiếp tuyến tại P là
$$y = \mathbf{4}(x-2)+4 = 4x-4.$$

Định nghĩa 1.70 Cho điểm $P(a,f(a))$ thuộc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và tồn tại giới hạn
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A.$$
Đường thẳng đi qua điểm P có hệ số góc A được gọi là *tiếp tuyến* của đường cong $y=f(x)$ tại điểm P.
Ký hiệu I thay cho (a,b); $[a,b]$; $[a,b)$, $(a,b]$ và $\mathrm{Int}I = (a,b)$.
Định nghĩa 1.71

- Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $c \in (a,b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm (khả vi) tại c nếu tồn tại giới hạn
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = A.$$
Số A được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x=c$ và kí hiệu $A=f'(c)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc (a,b) thì ta nói $f(x)$ khả vi trên (a,b).

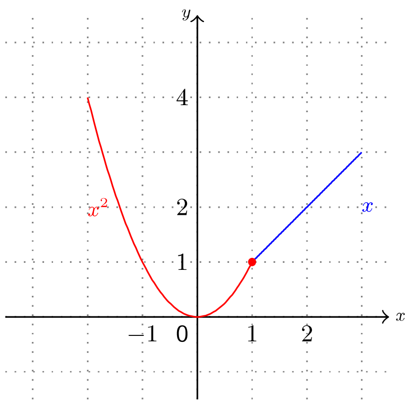
Ví dụ 1.72 Cho hàm số $f(x)=x^3$, tính $f'(a)$ và $f'(-3)$.
Giải. Với $a\in\mathbb{R}$, ta có
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3a^2+3ahx+h^2) = 3a^2$$
Do đó $f'(a)=2a^2$ và $f'(-3)=3.(-3)^2=27$.
Nhận xét. Ta thấy hàm số $f(x)=x^3$ khả vi tại mọi $a\in\mathbb{R}$. Do đó ta nói $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.73 Cho hàm số $f(x) = |x-2|$. Tính $f'(2)$.
Giải. Ta có
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{|(2+h)-2|-|2-2|}{h} = \frac{|h|}{h}, h \neq 0.$$
Khi đó
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$
Xét
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$
Suy ra $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ không tồn tại. Vậy $f'(2)$ không tồn tại.

Định nghĩa 1.74
- Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng I và $c \in I$. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm trái (khả vi bên trái) tại c nếu tồn tại giới hạn
$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = A \text{ và kí hiệu } A = f'_L(c).$$
- Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng I và $c \in I$. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm phải (khả vi bên phải) tại c nếu tồn tại giới hạn
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = A \text{ và kí hiệu } A = f'_R(c).$$

Định lý 1.75 Cho hàm số f xác định trên I và $c \in \mathrm{Int} I$. Khi đó f khả vi tại c nếu và chỉ nếu f khả vi bên trái và bên phải tại c và $f'_L(c) = f'_R(c)$.
Ví dụ 1.76 Cho hàm số
$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ nếu } x \geq 1 \\ x, \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng hàm số liên tục tại $x = 1$.
b. Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ không? Tại sao?



Giải. a. Ta có
- $f(1) = 1^2 = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2) = 1 = f(1)$;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 = f(2)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

b. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+2h+(h)^2)-1}{h} = 2\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)-1^2}{h} = 1\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ không tồn tại. Vậy $f'(1)$ không tồn tại.

Ví dụ 1.77 Tính đạo hàm của hàm số sau tại 0

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2, & \text{nếu } x < 0 \\ \sin x, & \text{nếu } 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

Ý nghĩa đạo hàm: tỉ lệ thay đổi của $f(x)$ và x khi $x = c$ là $f'(c)$.

1. Ý nghĩa hình học: Đạo hàm hỗ trợ về việc tính toán tiếp tuyến của đường cong phẳng, phương trình tiếp tuyến.
2. Ý nghĩa vật lý: Đạo hàm sẽ hỗ trợ trong việc giải thích sự biến thiên vận tốc tức thời, cường độ tức thời của dòng điện, gia tốc tức thời...
3. Ý nghĩa kinh tế: hỗ trợ tính toán tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra những quyết định đầu tư đúng đắn
4. Khoa học máy tính: Đạo hàm được sử dụng để tối ưu hóa thuật toán và phân tích hiệu suất của phần mềm; phân tích độ phức tạp về thời gian của thuật toán nhằm xác định những điểm thiếu hiệu quả tiềm ẩn và các lĩnh vực cần cải thiện.

Ví dụ 1.78 Một nhà sản xuất xác định rằng khi sản xuất x nghìn đơn vị của một mặt hàng nào đó thì lợi nhuận tạo ra sẽ là

$$f(x) = -400x^2 + 6800x - 12000$$

đô la. Lợi nhuận thay đổi với tốc độ như thế nào đối với mức sản xuất $x = 9000$ đơn vị?

Giải. Để tính tốc độ thay đổi của lợi nhuận khi 9000 đơn vị (tức là $x = 9$) được sản xuất, ta tính $f'(9)$.

- Đạo hàm của $f(x)$
$$f'(x) = -800x + 6800$$
- Tốc độ thay đổi của lợi nhuận khi 9000 đơn vị được sản xuất (tức là $x = 9$)
$$f'(9) = -800.9 + 6800 = -400$$
- Kết luận: Lợi nhuận giảm khi 9000 đơn vị được sản xuất.

Định lý 1.79 Cho f là một hàm số xác định trên (a,b) và $c \in (a,b)$. Nếu f khả vi tại c thì f liên tục tại c.

Định lý 1.80

1. Nếu c là một hằng số thì $c' = 0$.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n là một số nguyên dương)
3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
4. $(cf(x))' = cf'(x)$ trong đó c là một hằng số.
5. $(f(x).g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
6. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$
7. Giả sử $y = f(u)$ và $u = \varphi(x)$. Khi đó

$$y'(x) = y'(u).u'(x)$$

Ví dụ 1.81 Tính đạo hàm của $f(x) = (2x^2-1)^4 - 5(2x^2-1) + 6$.

Giải. Ta có $f(u) = u^4 - 5u + 6$ với $u(x) = 2x^2 - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(u)u'(x) \\ &= (4u^3 - 5)(4x) \\ &= \left(4(2x^2-1)^3 - 5\right)4x \end{aligned}$$

Đạo hàm của các hàm số cơ bản

$$\begin{aligned}
&C' = 0 \text{ với } C \text{ là hằng số} \quad . && (x^a)' = ax^{a-1} \\
&(\sin x)' = \cos x && (\cos x)' = -\sin x \\
&(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} && (\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
&(e^x)' = e^x && (a^x)' = a^x \ln a \\
&(\ln x)' = \frac{1}{x} && (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} && (\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.82 Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$, tuy nhiên $f'(x)$ không có đạo hàm tại 0.

Giải.

- Với $c > 0$, giả sử h đủ nhỏ sao cho $c + h > 0$. Khi đó

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(c+h)^2 - \frac{1}{2}c^2}{h} = \frac{1}{2}(2c+h) \to c \text{ khi } h \to 0$$

- Với $c = 0$, ta có

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2}{h}=\frac{1}{2}h=0$$

và

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{-\frac{1}{2}h^2}{h}=-\frac{1}{2}h=0$$

Do đó $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}0$ hay $f'(0)=0$.

- Với $c<0$, giả sử h đủ nhỏ sao cho $c+h<0$. Khi đó

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{-\frac{1}{2}(c+h)^2-\frac{1}{2}c^2}{h}=-\frac{1}{2}(2c+h)\to -c \text{ khi } h\to 0$$

Như vậy $f'(x)=|x|$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Bằng cách chứng minh tương tự Ví dụ 1.73, ta thấy $f'(x)$ không có đạo hàm tại 0.

Định nghĩa 1.83

- Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b) và đạo hàm tại x là $f^{'}(x)$. Đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và kí hiệu $f''(x)$.
- Đạo hàm của $f''(x)$ (nếu có) được kí hiệu là $f^{(3)}(x)$ và gọi là đạo hàm cấp ba của $f(x)$.
- Đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$ kí hiệu là $f^{(n)}(x)$ (với $n\geq 3$) được xác định như sau
$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))^{'}.$$

Ta nói $f^{'}(x)$ là đạo hàm cấp 1 của $f(x)$.

Ví dụ 1.84 Cho hàm số $y=x^2e^{-x}$. Tính $f^{(3)}(x)$.
Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}\\
f''(x)&=(f'(x))'=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}=(2-4x+x^2)e^{-x}\\
f^{(3)}(x)&=(-2+6x-x^2)e^{-x}
\end{aligned}$$

Định lý 1.85

1. $(f(x)\pm g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$
2. $(af(x))^{(n)}=af^{(n)}(x)$ với a là một hằng số.
3. $(f(x).g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)g(x)+C_n^1f^{(n-1)}(x).g'(x)+C_n^2f^{(n-2)}(x).g''(x)+\cdots+C_n^{n-1}f'(x).g^{(n-1)}(x)+f(x)g^{(n)}(x)$

Định nghĩa 1.86 Cho f là một hàm số xác định trên I và $c\in I$. Khi đó

- f đạt cực đại địa phương tại $f(c)$ nếu tồn tại một khoảng J chứa c sao cho $f(x)\leq f(c)$ với mọi $x\in J\cap I$.
- f đạt cực tiểu địa phương tại $f(c)$ nếu tồn tại một khoảng J chứa c sao cho $f(c)\leq f(x)$ với mọi $x\in J\cap I$.
- f đạt cực trị địa phương tại $f(c)$ nếu $f(c)$ là cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương.

Định lý 1.87 (Định lý cực trị địa phương) Cho f là một hàm số xác định trên $[a,b]$. Nếu f đạt cực trị địa phương tại $c\in(a,b)$ và f có đạo hàm tại c thì $f'(c)=0$.

Hệ quả. Cho f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a, b). Khi đó cực trị của f trên $[a, b]$ có thể xảy ra tại a, b hoặc $c \in (a, b)$ thỏa mãn $f'(c) = 0$.
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a, b) :

1. Tìm các điểm $c_1, c_2, \ldots \in (a, b)$ sao cho $f'(c_i) = 0$.
2. So sánh các giá trị $f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots$ số nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất; số lớn nhất là giá trị lớn nhất.

Ví dụ 1.88 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 1.89 (Định lý Rolle) Cho f là một hàm số xác định trên $[a, b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.
Ví dụ 1.90 Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.

Giải. Đặt $f(x) = x^3 + x - 1$. Ta thấy $f(0) = -1 < 0$ và $f(1) = 1 > 0$. Vì $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $(0, 1)$ nên theo Định lý giá trị trung gian, tồn tại $c \in (0, 1)$ là nghiệm của phương trình đã cho.
Giả sử phương trình đã cho có 2 nghiệm c, d (giả sử $c < d$). Vì $f(x)$ có đạo hàm trên (c, d) và $f(c) = f(d) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $e \in (c, d)$ sao cho $f'(e) = 0$.
Mặt khác, đạo hàm của $f(x)$ là

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1, \text{ với mọi } x.$$

Do đó không tồn tại $e \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(e) = 0$. Đây là một mâu thuẫn. Như vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
Định lý 1.91 (Định lý giá trị trung bình) Cho f là một hàm số xác định trên $[a, b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a, b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý 1.92 Cho f là một hàm số liên lục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\text{Int}I$.

1. Nếu $f'(x) \geq 0$ trên $\text{Int}I$ thì f tăng trên I.
2. Nếu $f'(x) \leq 0$ trên $\text{Int}I$ thì f giảm trên I.

Định lý 1.93 Cho f là một hàm số xác định trong một khoảng (a, b) chứa c và $f'(c) = 0$.

1. Nếu $f''(c) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại c.
2. Nếu $f''(c) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại c.

Định lý 1.94 (Quy tắc L'Hospital)

1. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục tại a và thỏa mãn $f(a) = g(a) = 0, g'(x) \neq 0$ với $x \approx a$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn $f(x), g(x) \to \infty$ khi $x \to a$ (hoặc a có thể là ∞). Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ 1.95 a. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$).

b. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$).

c. Tính $\lim\limits_{x\to 1} x^{\dfrac{1}{x-1}}$ (dạng 1^∞)

d. Tính $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{4}{1-2\ln x}}$ (dạng 0^0)

Giải. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

c. Đặt $y = x^{\frac{1}{x-1}}$, khi đó $\ln y = \dfrac{1}{x-1} \ln x$. Do đó
$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$
Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$.

d. Đặt $y = x^{\frac{4}{1-2\ln x}}$, khi đó $\ln y = \dfrac{4}{1-2\ln x} \ln x$. Do đó
$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{4}{x}}{-2\frac{1}{x}} = -2$$
Suy ra $\lim\limits_{x\to 0+} y = e^{-2}$.

e. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ f. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ g. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b) và $c\in(a,b)$. Giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại c, khi đó

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Khi h rất nhỏ thì $f'(c)$ gần bằng $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Ta viết

$$f'(c)\approx\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ hay } hf'(c)\approx f(c+h)-f(c).$$

Để nhấn mạnh sự thay đổi ở biến x, ta kí hiệu $h=\Delta x$ (đọc là "delta x") và đặt $\Delta f=f(c+\Delta x)-f(c)$. Khi đó

$$\Delta f\approx f'(c)\Delta x.$$

hay

$$f(c+\Delta x)\approx f'(c).\Delta x+f(c).$$

Ví dụ 1.96 Tính giá trị gần đúng của $\sqrt[4]{17}$.

Giải. Ta có $\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=\sqrt[4]{2^4+1}=\sqrt[4]{2^4(1+\frac{1}{2^4})}=2\sqrt[4]{1+\frac{1}{2^4}}$

(Ta không thể chọn $f(x)=\sqrt[4]{x}$ với $c=2^4$ và $\Delta x=1$. Ta phải chọn sao cho Δx là một số rất nhỏ, gần bằng 0)

Chọn $f(x)=2\sqrt[4]{x}$ với $c=1$ và $\Delta x=\dfrac{1}{2^4}$, ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ và $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\sqrt[4]{17}=2\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{2^4}}\approx 2\sqrt[4]{1}+\dfrac{1}{2^4}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{65}{32}\approx 2,031$

Vi phân

Đôi khi Δx được gọi là *số gia* tại x hay *vi phân của* x và kí hiệu là $\mathrm{d}x$.
Định nghĩa 1.97 Vi phân của x là $\mathrm{d}x = \Delta x$ và nếu $y = f(x)$ là hàm số khả vi thì $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ là vi phân của y.
Ví dụ 1.98 Tìm vi phân của $y = f(x) = x^3 - 7x + 2$.
Giải. $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = (3x^2 - 7)\mathrm{d}x$.
Từ định nghĩa vi phân của $y = f(x)$, ta thấy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

Ngoài ra, ta còn có các kí hiệu khác

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x).$$

Kí hiệu $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ được gọi là phép toán vi phân.