TUYEN TAP OLYMPIC TOAN SINH VIEN TOAN QUOC 1993 - 2005 (de thi & loi giai) dua theo Cac de thi Olympic toan sinh vien toan quoc cua Nguyen Van Mau, Le Ngoc Lang, Pham The Long, Nguyen Minh Tuan, Hanoi, 2006.

Chương 1

Các đề thi Olympic chính thức

1.1 Olympic năm 1993

1.1.1 Vòng 1 (Ngày thứ nhất)

Câu 1.

a) Tìm tất cả các ma trận thực $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sao cho

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Cho $2n$ số nguyên $a_1, ..., a_n$; $b_1, ..., b_n$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0.$$

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ . & . & . & . \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1 + a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Tính $|\det A|$.

Câu 2.

a) Cho $f(x) = \max\left\{2a \times \operatorname{arctg} x,\ \dfrac{x}{x^2+1}\right\},\ x \in \mathbb{R}$. Tìm một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}.$$

Câu 3.

a) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm bậc hai liên tục và không đồng nhất bằng không trên bất kỳ đoạn nào của $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $ax + by + c =$ tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu qua $x = x_0$.

b) Kí hiệu $P_n(X)$ là tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thực có bậc không vượt quá n . Cho hai số phân biệt $a, b \in \mathbb{R}$.

Xét ánh xạ $f : P_3(X) \to P_2(X)$ xác định theo công thức

$$\forall p(x) \in P_3(X) : \ \ f(p) = p(x + a) - p(x + b).$$

i) Hỏi f có phải là toàn ánh không?

ii) Tính $f^{-1}(0)$.

1.1.2 Vòng 2 (Ngày thứ hai)

Câu 1. Cho $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Chứng minh rằng, với mọi $a, b \in \mathbb{C}$, phương trình

$$z^3 - az + b = 0$$

có ít nhất một nghiệm thoả mãn điều kiện

$$|z - \alpha| \leqslant 2 - \alpha.$$

Câu 2. Cho $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ và $0 \leqslant y < +\infty$. Chứng minh rằng

$$y(\operatorname{arctg} y - x) \geq \ln\,(\cos x\sqrt{1 + y^2}).$$

Hỏi khi nào thì xảy ra dấu đẳng thức.

Câu 3. Cho $p(x)$ ($\neq$ const) là đa thức với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} \int\limits_0^x p(t)\sin t dt & = 0, \\ \int\limits_0^x p(t)\cos t dt & = 0. \end{cases}$$

có nghiệm thực thì số nghiệm thực chỉ có thể là hữu hạn.

Câu 4. Cho hai ma trận thực vuông đồng cấp A và B. Giả thiết rằng $\det(A + B) \neq 0$ và $\det(A - B) \neq 0$. Đặt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng $\det M \neq 0$.

1.2 Olympic năm 1994

1.2.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 1+a_2^2 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch. Tìm A^{-1}.

Câu 2. Cho a_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ là các số thực nguyên. Hãy giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2}x_2 & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{2}x_n & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Câu 3. Cho ma trận

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi j}{n} & -\sin\frac{2\pi j}{n} \\ \sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}; \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tính tổng

$$S_p = A_0^p + A_1^p + \cdots + A_{n-1}^p; \quad (p, n \in \mathbb{N}^*).$$

Câu 4. Tìm

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\Big),$$

trong đó E là ma trận đơn vị và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{n} \\ -\dfrac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 5. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n với $A^2 = E$ thì

$$\text{hạng } (A+E) + \text{hạng } (E-A) = n.$$

Câu 6. Cho A là ma trận vuông cấp hai thỏa mãn điều kiện $A^2 = A$. Chứng minh rằng để $AX - XA = 0$ (X là ma trận vuông cấp 2, 0 là ma trận không), điều kiện cần và đủ là tồn tại ma trận vuông cấp hai X_0 sao cho

$$X = AX_0 + X_0A - X_0.$$

1.2.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho n số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, ..., n)$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp một trên $(0, \infty)$ và không phải là hàm hằng. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn điều kiện $0 < a < b$. Chứng minh rằng, phương trình

$$xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - b(a)}{b - a}$$

có ít nhất một nghiệm thuộc (a, b).

Câu 3.

a) Cho hàm số $f : [a, b] \to [a, b]$, với $a < b$ và thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{và} \quad x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm thuộc $[a, b]$.

b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và $\forall x \in [a, b]$ thì $|f'(x)| < |f(x)|$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Câu 4. Xét tích phân

$$I_n = \int\limits_0^4 x^n\sqrt{4-x}dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Tính I_n.
b) Chứng minh rằng

$$I_n < 2^{2n+3}(2ne)^{-\frac{1}{2}}.$$

Câu 5. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y = arctg x tại $x = 0$.

Câu 6.
a) Chứng tỏ rằng tích phân

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

không phụ thuộc vào α.
b) Tính

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1.3 Olympic năm 1995

1.3.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{-1} = 3A$. Tính det$(A^{1995} - A)$.

Câu 2. Cho các số $a_{ij} + a_{ji} = 0, \quad \forall i,j = 1,2,...,n$. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường.

Câu 3. Cho ma trận $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính M^n ứng với mọi n nguyên dương cho trước.

Câu 4. Cho hai số thực phân biệt a, b và cho $B = (b_{ij})$ là ma trận vuông cấp 6 được xác định như sau

$$b_{ij} = \begin{cases} x & \text{khi } \ i = j, \\ a & \text{khi } \ i \neq j, \ \ i + j = 2n, \\ b & \text{khi } \ i = j, \ \ i = j = 2n + 1. \end{cases}$$

Giả sử

$$\det B = \sum_{k=0}^{6} \alpha_k (x - a)^k.$$

Tính α_4.

Câu 5. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n $(n > 1)$ có hạng r. Xét ma trận $A^* = (A_{ij})$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} trong A. Tìm hạng của A.

Câu 6. Cho B là ma trận vuông cấp n và α là một số thực thỏa mãn điều kiện $\det(B - \alpha E) = 0$ với E là ma trận đơn vị.

Chứng minh rằng với mọi $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ta đều có

$$\det\Big(\sum_{k-0}^{n} a_k B^k - \sum_{k-0}^{n} a_k \alpha^k E\Big) = 0$$

1.3.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, b]$ và cho $a \in [0, b]$. Chứng minh rằng

$$b \int_0^a f(x)dx \geqslant a \int_0^b f(x)dx.$$

Câu 2. Xét đa thức

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^2 - 1)^n]$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc m $(m < n)$ thì

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = 0.$$

Câu 3. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

khả vi vô hạn tại $x = 0$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

1) $\exists M > 0$ sao cho $f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng khi đó

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| = \lim_{p\to+\infty} \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Câu 6. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

a) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Câu 7. Tính

$$I_n = \int\limits_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.4 Olympic năm 1996

1.4.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho $P_n(x)$ là đa thức bậc n và cho $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

i) Nếu $P_n(x^m)$ chia hết cho $x - 1$ thì nó chia hết cho $x^m - 1$.

ii) Nếu $P_n(x^m)$ chia hết cho $x - a)^k$ thì nó chia hết cho $(x^m - a^m)^k$ $(a \neq 0)$.

Câu 2. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

i) Chứng minh rằng nếu $A^{1996} = 0$ thì $A^2 = 0$.

ii) Xác định a, b, c sao cho tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 3. Cho

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}.$$

Câu 4. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì có thể thay thế các phần tử a_{ij} của A bởi số 0 hoặc số 1, còn các phần tử khác vẫn giữ nguyên, để nhận được ma trận mới S khả nghịch.

Câu 5. Chứng minh rằng nếu $a \neq 0$ thì hệ

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x = cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

luôn luôn có nghiệm $\forall b, c, d \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Khảo sát tính khả vi của hàm số

$$f(x) = |x-1|\,|x-2| \cdots |x-1996|.$$

Câu 2. Cho $b \in \mathbb{R}$. Tính

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^b x)}.$$

Câu 3. Chứng minh rằng tồn tại hàm $h(x)$ thỏa mãn hai điều kiện sau

i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x+1+h(x+1)}-\dfrac{1}{\sqrt{x+h(x)}},\ \forall x\geqslant 0,$

ii) $\min\limits_{x\geqslant 0} h(x)=\dfrac{1}{4}.$

Câu 4. Cho $g(x)$ là một đa thức bậc 1996. Biết rằng, ứng với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta đều có

$$g(x+h)=g(x)+hg'(x+h)\theta(x,h),$$

trong đó $\theta(x,h)$ bị chặn và $g''(x)\neq 0$. Tính $\lim\limits_{h\to 0}\theta(x,h)$.

Câu 5. Cho $M>0$ và hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leqslant M.$$

Chứng minh rằng $\forall x\in\mathbb{R}$ đều tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}.$$

1.5 Olympic năm 1997

1.5.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Giả sử x_0, y_0, z_0 là các số thực cho trước. Hãy xác định tất cả các số thực x_n, y_n, z_n $(n=0,1,...)$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{n+1}=-x_n+y_n+z_n\\ y_{n+1}=x_n-y_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+y_n-z_n\end{cases}\qquad (n=0,1...)$$

Câu 2. Cho $n,p\in\mathbb{N}$ $(p\leqslant n)$. Xét tất cả các ma trận vuông $A=(a_{ij})$ cấp n hạng p trên trường số thực và thỏa mãn hệ thức $A^2=A$. Tính các giá trị có thể có của biểu thức

$$S=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

Câu 3. Chứng minh rằng với một ma trận vuông cấp n cho trước trên trường số thực, đều tìm được số nguyên dương N sao cho hạng

$$A^k = \text{ hạng } A^{k+1},\ \forall k\geqslant N.$$

Câu 4. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$M = \begin{pmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2C_2^0 & \cdots & 2^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & -2C_2^1 & \cdots & 2^{n-1}C_n^d \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}.$$

1.5.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Xét hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[0, +\infty)$ và thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Tính

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx.$$

Câu 2. Xác định tất cả các số dương a sao cho

$$a^x \geqslant 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. Chứng minh rằng, với mọi $t \geqslant 0$, phương trình $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là $x(t)$. Tính tích phân

$$\int\limits_0^t [x(t)]^2 dt.$$

Câu 4. Tính

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(n \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x dx\Big).$$

Câu 5. Xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn các điều kiện

$$P(0) = P(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 |P'(x)|dx = 1.$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Câu 6. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực $\{a_n\}$ với $a_n \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, sao cho $\cos a_n = a_n^n$. Tìm giới hạn của dãy đó.

1.6 Olympic năm 1998

1.6.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Đặt

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$.

Câu 2. Gỉa sử A là ma trận gồm $n+1$ hàng và $n+2$ cột sau đây

$$A = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 & C_{n+1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Gọi D_k là định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách gạch bỏ cột thứ k, $k = 1, 2, \ldots, n+2$. Chứng minh rằng $D_k = C_{n+1}^{k-1}$.

Câu 4. Cho

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32} & a_{33}(n) \end{pmatrix}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{ij}(n)$, với $i, j = 1, 2, 3$.

Câu 5. Gọi M là tập hợp tất cả các ma trận vuông cỡ $n \times n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, có các phần tử là 1 hoặc -1. Cho $B \in M$ có $\det(B) \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $A \in M$ sao cho

$$|\det A| = |\det B|,$$

trong đó A có tổng các phần tử trên cùng một hàng đều lớn hơn hoặc bằng 0, tổng các phần tử trên cùng một cột đều lớn hơn hoặc bằng 0.

1.6.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho $f(x) \in \mathcal{C}^1[0,1]$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

Câu 2. Cho $f(x)$ là một hàm khả vi liên tục và dương trên khoảng $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu một trong hai hàm số

$$F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{f(t) + f'(t)}; \quad G(x) = \int\limits_i^x \frac{dt}{f(t)}$$

có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$ thì hàm số còn lại cũng có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$.

Câu 3. Giả sử a, b là hai số dương và $a < b$. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \Big(\frac{a^x + b^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}}$$

là hàm đơn điệu tăng. Tìm giới hạn của $f(x)$ khi $x \to \pm\infty$

Câu 4. Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn [0, 1], $f(0) > 0$ và

$$\int\limits_0^1 f(x)dx < \frac{1}{1998}, \ \ \forall x > 0, h > 0.$$

Chứng minh rằng phương trình

$$x^{1997} = f(x)$$

luôn có ít nhất một nghiệm thuộc (0,1).

Câu 5 . Cho hàm số $f(x)$ có các tính chất

$0 < f(x) < 1, \ \forall x > 0,$

$f(x+h)[1 - f(x)] \geqslant \dfrac{1}{4}, \qquad \int\limits_0^1 f(x)dx < \dfrac{1}{1998}.$

Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1.7 Olympic năm 1999

1.7.1 Môn thi: Đại số

Câu 1.

a) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{1998} & 1999 \\ 0 & \dfrac{x}{2000} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{pmatrix}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x), \ \ i,j = 1,2.$

b) Cho $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$ và cho ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính det $f(C)$.

Câu 2.

a) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng tập các giá trị riêng của AB và BA trùng nhau.

b) Cho A là ma trận có 1999 dòng và 2000 cột. Gọi A' là ma trận chuyển vị của A và B là ma trận phụ hợp của ma trận AA'. Biết rằng $\det(AA') \neq 0$ và $B \neq 0$. Xác định hạng của ma trận B.

Câu 3. Giả sử đa thức với hệ số thực

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2, \ \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Câu 4. Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n & = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 & = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} & = n \end{cases}$$

1.7.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1.

a) Xác định các hàm $f(x)$, thoả mãn điều kiện

$$\Big|f(x+h) - f(x-h)\Big| < h^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0.$$

b) Xác định hàm $p(x)$ thoả mãn điều kiện: $\exists\ g(x)$, sao cho

$$p(x + \Delta x) - p(x) = g(x)\ \Delta x + \alpha(x, \Delta x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$|\alpha(x, \Delta x)| \leqslant c|\Delta x|^3, \ \ 0 < c = \text{const}\,.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên [0,1] và thoả mãn điều kiện

$$f(0) = 0, \ f(1) = 1, \ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng $\exists a, b \in (0,1), \ a \neq b$ sao cho $f'(a).f'(b) = 1$.

Câu 3. Cho hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, thoả mãn điều kiện

a) $f(1)$=2,

b) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n), \ \ \forall n > 1$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f(n)$.

Câu 4.

Giả sử $q(x)$ là hàm số dương và đơn điệu tăng trong $(0, +\infty)$ sao cho

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{q(2t)}{q(t)} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{q(2000t)}{q(1999t)} = 1.$$

Câu 5. Tính

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^n \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-\frac{x}{n}}}.$$

1.8 Olympic năm 2000

1.8.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho số nguyên dương $m > 1$ và số thực c có môđun bằng 1. Chứng minh rằng phương trình

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = c,$$

có các nghiệm đều thực.

Câu 2. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n và thoả mãn các điều kiện

$$AB = BA,\ \ A^{1999} = 0,\ \ B^{2000} = 0.$$

Chứng minh rằng ma trận $E + A + B$ khả nghịch.

Câu 3. Ma trận vuông cấp n dạng $A = [a_{ij}]$ được gọi là ma trận phản đối xứng nếu

$$a_{ij} + a_{ji} = 0,\ \ \forall i, j\ \ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

Chứng minh khẳng định sau:

Tích của 2 ma trận phản đối xứng A và B cũng là một ma trận phản đối xứng khi và chỉ khi $AB = -BA$.

Câu 4. Cho ma trận A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại bằng 1 hoặc bằng 2000. Chứng minh rằng hạng của A hoặc bằng n, hoặc bằng $n-1$.

Câu 5 Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$xP(x-a) = (x-b)P(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.8.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên [0,1] và khả vi trong (0, 1) và thỏa mãn các điều kiện $g(0) = g(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = g(c)$.

Câu 3. Cho $a \in (0,1)$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0, 1], thoả mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng $\exists b \in [0,1]$, sao cho, hoặc $f(b) = f(b-a)$ hoặc $f(b) = f(b+a-1)$.

Câu 4. Giả sử a là một số thực cho trước. Xét dãy số thực $\{x_n\}$ được cho bởi hệ thức
$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2, \quad n \geqslant 1.$$
Xác định b để dãy $\{x_n\}$ hội tụ và hãy tính giới hạn của dãy trong trường hợp đó.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện
$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leqslant \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$$
với mọi $x_1, x_2 \in [1,2]$ sao cho $x_1 \leqslant x_2$. Chứng minh rằng
$$\int\limits_1^2 f(x)dx \leqslant \frac{3}{2}.$$

1.9 Olympic năm 2001

1.9.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho ma trận
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Tìm tất cả các ma trận vuông B cấp 3 sao cho $AB + BA = 0$.

Câu 2. Cho các ma trận vuông thực A, B thoả mãn điều kiện sau

$$A^{2001} = 0, \quad AB = A + B.$$

Chứng minh rằng $\det B = 0$.

Câu 3. Cho a, b, c, d, e là các số thực. Chứng minh rằng nếu phương trình

$$ax^2 + (b + c)x + d + e = 0$$

có nghiệm thực thuộc khoảng $[1, \infty)$, thì phương trình

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

cũng có nghiệm thực.

Câu 4. Ký hiệu (a, b) là tích vô hướng của hai véc tơ $a, b \in \mathbb{R}^n$. Cho các véc tơ $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Đặt

$$A = \begin{bmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_{k-1}) & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_{k-1}) & (a_2, a_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{k-1}, a_1) & (a_{k-1}, a_2) & \ldots & (a_{k-1}, a_{k-1}) & (a_{k-1}, a_k) \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_{k-1}) & (a_k, a_k) \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng

1) $\det A \geqslant 0$.

2) A là ma trận đối xứng và có tất cả các giá trị riêng không âm.

Câu 5. Cho A là ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử đều là những số nguyên chẵn. Chứng minh rằng ma trận A không thể có giá trị riêng là một số nguyên lẻ.

Câu 6. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ với $a \neq b$. Tính định thức của ma trận cấp n sau

$$\begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}.$$

1.9.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và đồ thị của $f(x)$ có tiệm cận xiên $y = ax + b$ khi $x \to +\infty$.

1) Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - ax - b$ có đạo hàm $g'(x) \leqslant 0$ với mọi $x > 0$.

2) Chứng minh rằng đồ thị hàm số $f(x)$ (với $x > 0$) luôn nằm phía trên của tiệm cận xiên.

Câu 2. Cho các số $p > 0, q > 0, p + q < 1$ và dãy số $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ không âm thoả mãn điều kiện $a_{n+2} \leqslant pa_{n+1} + qa_n,\ \ n = 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ và hãy tìm giới hạn của dãy đó.

Câu 3. Chứng minh rằng tồn tại số thực $x \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2001})} = \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2001})}.$$

Câu 4. Cho hàm số f xác định và có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(x)+f''(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)+f(x+\pi) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1, +\infty)$ và thoả mãn các điều kiện sau

i) $f(1) = a > 0$,

ii) $f(x + 1) = 2001f^2(x) + f(x), \quad \forall x \in [1, +\infty)$.

Tìm

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(n)}{f(n+1)}\right].$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng số các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$ là hữu hạn.

1.10 Olympic năm 2002

1.10.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \ldots + bx_{2001}bx_{2002} = & 1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \ldots + bx_{2001}bx_{2002} = & 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \ldots + ax_{2001}bx_{2002} = & 2001 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \ldots + bx_{2001}ax_{2002} = & 2002 \end{cases}$$

Tìm điều kiện đối với a và b để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Tính A^{2002}?

Câu 3. Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng

1) Bộ số (1992, 1993, ..., 2002) là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2) Khi xoá cột thứ j trong ma trận hệ số của hệ đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng j ($j = 1, 2, \ldots, 11$). Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 4. Cho P và Q là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn các điều kiện sau :

$$P^2 = P, \;\; Q^2 = Q$$

và $I - (P + Q)$ là một ma trận khả nghịch (I là ma trận đơn vị cấp n). Chứng minh rằng hạng của P và Q bằng nhau.

Câu 5. Tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc 2002 sao cho $P(x^2 - 2001)$ chia hết cho $P(x)$?

Câu 6. Cho B là ma trận thực, vuông cấp n có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực λ sao cho $B^2 = \lambda B$.

1.10.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(2002x + \sin x)dx.$$

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \leqslant 3$, ta đều có

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \geqslant \cos x, \ \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện

$$f(a) = f(b) = 0, \ \ f(x) \neq 0, \ \ \forall x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\}$, $x_n \in (a, b)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = 2002.$$

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty, +\infty)$ và thoả mãn điều kiện sau

$$f(x) - f(y) = \int\limits_{x+2y}^{2x+y} f(t)dt, \ \ \forall x, y \in (-\infty, +\infty).$$

Câu 5. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ được xác định như sau

$$u_1 = a \in \mathbb{R}, \ \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) - 2002, \ \ n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$ là một dãy hội tụ.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1, e]$ và cho dãy số $\{J_n\}$ xác định như sau:

$$J_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm giới hạn của dãy.

1.11 Olympic năm 2003

1.11.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Với a, b là các số thực, $a > |b|$, hãy chỉ ra rằng có ít nhất một giá trị riêng của A là số dương.

Câu 2. Biết rằng mọi ma trận thực đối xứng đều có các giá trị riêng là số thực. Chứng minh rằng, nếu α, β, γ là các số thực khác 0 và a, b, c, d, p, q là các số thực tùy ý, thì ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a & b\dfrac{\alpha}{\beta} & c\dfrac{\alpha}{\gamma} \\ b\dfrac{\beta}{\alpha} & d & p\dfrac{\beta}{\gamma} \\ c\dfrac{\gamma}{\alpha} & p\dfrac{\gamma}{\beta} & q \end{pmatrix}$$

cũng có các giá trị riêng là số thực.

Câu 3. Tính tổng $S_n = d_2 + d_3 + \cdots + d_n$, trong đó d_k là các định thức cấp $k,\ \ k = 2, 3, \ldots, n$, dạng

$$d_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Câu 4. Cho P và Q là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện sau: $PQ = QP$ và tồn tại các số nguyên dương s, r sao cho $P^s = Q^r = 0$. Chứng minh rằng các ma trận $E + (P + Q)$ và $E - (P + Q)$ là các ma trận khả nghịch.

Câu 5. Cho A là ma trận vuông thỏa mãn điều kiện $A^{2003} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: hang $A =$ hang $(A + A^2 + \ldots + A^n)$.

Câu 6. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix},$$

trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1$. Tính $\det A$.

Câu 7. Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n $(n \geqslant 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = (x^2+1)P(x) + P'(x)$$

có ít nhất m nghiệm thực.

1.12 Olympic năm 2004

1.12.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \; T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tính $B = T^{-1}AT$

b) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông thực cấp hai A, B, C ta luôn có
$(AB - BA)^{2004}C = C(AB - BA)^{2004}$.

Câu 3. Biết rằng các ma trận vuông A, B đều là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$ và $AB + BA = 0$. Tính $\det(A - B)$?

Câu 4. Cho ma trận thực $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thoả mãn điều kiện

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ \pm 1 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) Nếu $n = 3$, thì tồn tại ma trận A để sao cho $\det A = 0$;

b) Nếu $n = 4$, ta luôn luôn có $\det A \neq 0$.

Câu 5.
a) Xác định đa thức $f(x)$ dạng

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

b) Cho $P(x), Q(x), R(x)$ là các đa thức với hệ số thực có bậc tương ứng là 3, 2, 3 thoả mãn điều kiện $(P(x))^2 + (Q(x))^2 = (R(x))^2$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x)Q(x)R(x)$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực (kể cả bội của nghiệm).

1.12.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:

$$x_0 = 0, \ \ x_n = \frac{x_{n-1}}{2004} + (-1)^n, \ \ \forall n \geqslant 1.$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng hàm số

$$F(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$

đồng biến trên $[0, +\infty)$.

Câu 3. Cho $0 < a < b$. Tính tích phân

a) $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx$

và tính

b) $\lim\limits_{\lambda\to 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}}$.

Câu 4. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

(i) $f(x) \geqslant e^{2004x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện $P(a) = P(b) = 0$ với $a < b$. Đặt

$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |P''(x)|.$$

Chứng minh rằng

a) $\displaystyle\int_a^b P''(x)(x-a)(x-b)dx = 2\int_a^b P(x)dx,$

b) $\displaystyle\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| \leqslant \frac{1}{12}M(b-a)^3.$

1.13 Olympic năm 2005

1.13.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Xét ma trận dạng

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_2 & x_2^2+1 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2+1 & x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & x_4^2+1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng định thức của A là một đa thức đối xứng theo các biến x_1, x_2, x_3, x_4. Tính định thức của A khi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là bộ 4 nghiệm của đa thức $P_4(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$.

Câu 2. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận B có các giá trị riêng dương sao cho $B^2 = A$.

Câu 3. 1) Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ thoả mãn $P(x) > P''(x)$ và $P'(x) > P''(x)$, với mọi x?
2) Biết rằng đa thức $Q(x)$ có tính chất $Q(x) > Q'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 4. Cho ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Đặt $M^n = \{b_{ij}(n)\}_{i,j=1,2,3}, \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$. Tính $S_n = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} b_{ij}(n)$.

Câu 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= \dfrac{a}{2004} \\ \qquad x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= \dfrac{a + x_1}{2005^2 - 1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n &= \dfrac{a + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{2005^n - 1} \end{cases}$$

1.13.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{x_n\}\,(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi công thức truy hồi sau $x_{n+1} = x_n^2 - 2,\ \ x_1 = 5$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]\,(a < b)$ và thoả mãn điều kiện

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = 2005 \int_a^c f(x)dx.$$

Câu 3. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) \geq a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx < a.$$

Chứng minh rằng khi đó trên đoạn $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thoả mãn điều kiện

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \ \ \forall x \in [0,1].$$

Hãy chứng minh

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \int_0^1 xf(x)dx.$$

Câu 5. Giả sử $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[0,1]} \{f''(x)\} \geq 8(a-b),$$

với $b = \min\limits_{x\in[0,1]} \{f(x)\}$.

Cho một mở rộng kết quả trên đối với đoạn $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$.

Chương 2

Đáp án và chỉ dẫn

2.1 Olympic năm 1993

2.1.1 Ngày thứ nhất

Câu 1.

a) Giả sử $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ thỏa mãn điều kiện $X^2 = E$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2 + yz = t^2 + yz = 1 \\ y(x+t) = z(x+t) = 0. \end{cases}$$

Giải ra, ta được ba trường hợp

$$X_1 = E, \quad X_2 = -E$$

và

$$X_3 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad yz = 1 - x^2$$

b) Ta lập công thức truy hồi.

Ta có

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + a_nb_n$$

Từ đó, suy ra

$$\Delta_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1.$$

Câu 2

a. Bằng việc chia khoảng thích hợp, ta thu được $f(x)$ nhận các giá trị

$$f_1(x) = 2a \operatorname{arctg} x$$

hoặc

$$f_2(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

trên các khoảng đó. Xảy ra ba trường hợp cần xét.

1) Xét $a \leqslant 0$. Dễ thấy ngay

$$f(x) = \begin{cases} f_2(x), & \text{khi } x \geqslant 0, \\ f_1(x), & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

2) Xét $a \geqslant 1/2$. Ta có

$$f_1'(x) = \frac{2a}{x^2+1} \geqslant \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = f_2'(x), \quad f_1(0) = f_2(0).$$

Từ đó suy ra

$$f_1(x) \geqslant f_2(x), \quad \text{khi } x \geqslant 0.$$

$$f_2(x) \geqslant f_1(x), \quad \text{khi } x < 0.$$

Do vậy

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{khi } x \geqslant 0, \\ f_2(x), & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

3) Với $0 < a < 1/2$, ta có $f_1(0) = f_2(0)$ và $f_1'(0) < f_2'(0)$. Suy ra trong một lân cận phải nào đó của điểm $x = 0$ thì $f_1(x) < f_2(x)$. Mặt khác, $f_1(+\infty) > f_2(+\infty)$ nên tồn tại $x_1 > 0$ để cho $f_1(x_1) = f_2(x_1)$.

Hơn nữa, phương trình $f_1'(x) = f_2'(x)$, hay $(2a+1)x^2 = 1 - 2a$ chỉ có một nghiệm dương, nên phương trình $f_1(x) = f_2(x)$ chỉ có 2 nghiệm 0 và x_1 trong khỏang $[0, +\infty)$. Do đó

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{khi } x \in [-x_1, 0] \cup [x_1, +\infty), \\ f_1(x), & \text{khi } x \in (-\infty, -x_1 0 \cup (0, x_1). \end{cases}$$

Vậy, nguyên hàm cần tìm là

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

b. Sử dụng đổi biến $t = \tan x$, suy ra

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} = I_1 + I_2$$

Để tính I_2, ta dùng phép đổi biến $u = \dfrac{1}{t}$. Khi đó

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{u^{\sqrt{2}}du}{(1+u^2)(1+u^{\sqrt{2}}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+u^2)}du - I_1$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Câu 3.

a) Vì đường thẳng $ax + by + c = 0$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra $b \neq 0$. Đặt

$$g(x) = f(x) + \frac{ax+c}{b},$$

thì phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt .

Do $f''(x) \equiv g''(x)$ và $f(x)$ có đạo hàm bậc hai liên tục và không đồng nhất bằng 0 trên bất kỳ một khoảng nào của $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ cũng có tính chất đó.

Theo Định lí Rolle thì tồn tại 2 nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$, của phương trình $g'(x) = 0$ sao cho $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_2)$ và $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ sao cho $g''(x_0) = 0$. Ta thấy, $g''(x)$ đổi dấu cho qua x_0 vì nếu không như vậy, thì $g''(x) \geqslant 0$ hoặc $g''(x) \leqslant 0$ trong $[x_1, x_2]$ kéo theo $g'(x)$ hoặc đồng biến hoặc nghịch biến trong $[x_1, x_2]$, điều này là không thể xảy ra. Suy ra $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu qua x_0, điều phải chứng minh.

b) Ta thấy f là ánh xạ tuyến tính từ $P_3(X)$ vào $P_2(X)$, với $p(x) \in P_3(X)$ có dạng

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$p(x) \to \; p(x+a) - p(x+b)$

i) Với mỗi $mx^2 + nx + q \in P_2(X)$, ta có

$$p(x+a) = p(x+b) = \; mx^2 + nx + q,$$

hay

$$\begin{cases} p''(a) - p''(b) = 2m \\ p'(a) - p'(b) = n \\ p(a) - p(b) = q \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_3 = \dfrac{m}{3(a-b)} \\ a_2 = \dfrac{n - m(a+b)}{2(a-b)} \\ a_1 = \dfrac{q - \frac{n-m(a+b)}{2}(a+b) - \frac{m}{3}(a^2+ab+b^2)}{a-b} \end{cases}$$

Vậy, f là toàn ánh.

ii) Thay $m = n = q = 0$, ta nhận được $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Do đó $f^{-1}(0) = a_0 \; \forall a_0 \in \mathbb{R}$. Vậy nên $f^{-1}(0) = P_0(x)$.

2.1.2 Ngày thứ hai

Câu 1.

Gọi z_1, z_2, z_3 là 3 nghiệm của phương trình $z^3 - bz + b = 0$. Khi đó, theo định lí Viet, ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z = -b \\ z_1z_2z_3 = -b \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 1 =& 1 - (z_1 + z_2 + z_3) + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) - z_1z_2z_3 \\ =& (1-z_1)(1-z_2)(1-z_3). \end{aligned}$$

hay

$$|1 - z_1| \, |1 - z_2| \, |1 - z_3| = 1.$$

Suy ra tồn tại z_i để cho $|z_i - 1| \leqslant 1$.

Khi đó

$$2 - \alpha = 1 + 1 + \alpha \geqslant |z_i - 1| + |1 - \alpha| \geqslant |z_i - \alpha|.$$

Tức là, có ít nhất một nghiệm thỏa mãn điều kiện $|z-\alpha| \leqslant 2-\alpha$.

Câu 2.

Nhận xét rằng hàm số $u = \tan t$ với $t \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ là hàm liên tục và đồng biến trên $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ nên có hàm ngược $t = \operatorname{arctg} u$ $(u \geqslant 0)$ và $u(0) = 0$. Vậy, ta có

$$\int\limits_0^x \tan t dt + \int\limits_0^y \operatorname{arctg} t dt \geqslant xy,\ \ x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big),\ \ y \in [0, +\infty).$$

Suy ra

$$(-\ln|\cos t|\Big|_0^x + t\operatorname{arctg} t\Big|_0^y - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\Big|_0^y \geqslant xy$$

hay

$$y(\operatorname{arctg}\ y - x) \geqslant \ln\,(\cos x\sqrt{1+y^2}).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = \tan x$ và $\dfrac{y}{x} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ hay $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = \sqrt{3}$.

Câu 3. Gọi $p^{(k)}(t)$ là đạo hàm cấp k của $p(t)$ $\quad (p^0(t) = p(t))$ và ký hiệu

$$U_k = \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\sin t dt,$$
$$V_k = \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\cos t dt.$$

Giả sử $\deg p = n$. Suy ra $U_k = 0,\ \ V_t = 0$ nếu $K > n$. Sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\sin t dt \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x - \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\sin t dt. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + V_{k+1} \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x - U_{k+1} \end{cases}$$

Ta có tiếp

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\sin t\Big|_0^x - U_{k+2} \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\cos t\Big|_0^x - V_{k+2} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} U_0 = & -\sum\limits_{k=0}^{2k\leqslant n} p^{(2k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{(2k+1)\leqslant n} p^{(2k+1)}(t)\sin t\Big|_0^x \\ V_0 = & \sum\limits_{k=0}^{2k\leqslant n} p^{(2k)}(t)\sin t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{(2k+1)\leqslant n} p^{(2k+1)}(t)\cos t\Big|_0^x. \end{cases}$$

đặt

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{2k+1\leqslant n} p^{(2k)}(t)$$

Suy ra $\deg p_1 = n$.

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^{2k+1\leqslant n} p^{(2k+1)}(t).$$

Suy ra $\deg p_2 = n - 1$. Khi đó, (1) được viết dưới dạng

$$\begin{cases} U_0 = & -p_1(t)\cos t\Big|_0^x + p_2(t)\sin t\Big|_0^x \\ V_0 = & p_1(t)\sin t\Big|_0^x + p_2(t)\cos\Big|_0^x \end{cases}$$

Gọi X là tập nghiệm của hệ đã cho, tức hệ

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ V_0 = 0. \end{cases}$$

Với mọi $x \in X$ ta có

$$\begin{cases} -p_1(t)\cos t|_0^x + p_2\sin t|_0^x = 0 \\ p_1(t)\sin t|_0^x + p_2\cos t|_0^x = 0. \end{cases}$$

Đặt $P_1(0) = a$, $P_2(0) = b$. Khi đó

$$\begin{cases} p_2(x)\sin x - p_1(x)\cos x = -a \\ p_2(x)\cos x + p_1(x)\sin x = b. \end{cases}$$

Suy ra

$$(p_2(x)\sin x - p_1(x)\cos x)^2 + (p_2(x)\cos x + p_1(x)\sin x)^2 = a^2 + b^2.$$

Do đó

$$p_1^2(x) + p_2^2(x) - (a^2 + b^2) = 0.$$

Gọi Y là tập nghiệm của đa thức

$$Q(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x) - (a^2 + b^2).$$

Suy ra $X \subset Y$. Từ $\deg Q = 2n$ suy ra $|X| \leqslant |Y| \leqslant 2n$. Tức X chỉ có hữu hạn phần tử.

Cách khác.

Ta có thể sử dụng số phức để giải bài toán. Viết lại hệ dưới dạng

$$F(x) := \int\limits_0^x P(t)e^{it}dt = 0.$$

Ta có

$$F'(x) = P(x)e^{it}$$

nên phương trình $F'(x) = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Suy ra phương trình $F(x) = 0$ có không quá hữu hạn nghiệm.

Câu 4. Ta có

$$\det M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

là định thức cấp $2n$.

Ta nhân (-1) vào cột $n+i$ và cộng vào cột $i(i = \overline{1,n})$ thì định thức không thay đổi, do đó

$$\det M = \begin{bmatrix} A - B & B \\ B - A & A \end{bmatrix}$$

Ta lại nhân $(+1)$ vào hàng $n+i$ và cộng vào hàng $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ thì định thức không thay đổi do đó

$$\det M = \begin{bmatrix} O & B + A \\ B - A & A \end{bmatrix}.$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu tiên ta được

$$\det M = \det(B + A)\det(B - A)(-1)^{n^2}.$$

Do $\det(B + A) \neq 0$ và $\det(B - A) \neq 0$ nên $\det M \neq 0$.

2.2 Olympic năm 1994

2.2.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Dễ thấy $A^TA = aE$, với

$$a = (1 + a_1^2)^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0.$$

Suy ra $|A| = a^2 > 0$. Do đó A khả nghịch và $\det A^{-1} = \dfrac{1}{a^2}$.

Câu 2

Hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{pmatrix} \left(a_{11} - \frac{1}{2}\right) & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & \left(a_{22} - \frac{1}{2}\right) \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & \left(a_{nn} - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Xét $P(X)$ là đa thức đặc trưng của ma trận $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Dễ thấy các hệ số của $P(X)$ nguyên. Suy ra $P\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0$. Hệ (1) có ma trận với định thức khác không, nên nó có duy nhất một nghiệm tầm thường.

Câu 3

Với mọi $p \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned} C_p &:= \sum_{j=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi pj}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin 2\pi p(j+\frac{1}{2})n - \sin\frac{2\pi p(j-\frac{1}{2})}{n}}{2\sin\frac{\pi p}{n}} \\ &= \frac{\sin 2\pi p(n-\frac{1}{2})n - \sin\frac{2\pi p(-\frac{1}{2})}{n}}{2\sin\frac{\pi p}{n}} = 0, \\ S_p &:= \sum_{j=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi pj}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\cos 2\pi p(j-\frac{1}{2})n \cos 2\pi p(j+\frac{1}{2})n}{2\cos\frac{\pi p}{n}} \\ &= \frac{\cos 2\pi p(-\frac{1}{2})n - \cos\frac{2\pi p(n-\frac{1}{2})}{n}}{2\sin\frac{\pi p}{n}} = 0, \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$S_P = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^P = \begin{pmatrix} C_p & -S_p \\ S_p & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Câu 4

Biểu diễn A dưới dạng

$$A = a\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

với

$$a = \sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}},\quad \varphi = \arcsin\frac{x}{\sqrt{n^2+x^2}}$$

Suy ra

$$A^n = a^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 1;\ \ \sin n\varphi = \sin\Big(n\text{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{n^2+x^2}}\Big)$$

$$= \sin\Big(\frac{nx}{\sqrt{n^2+x^2}} + 0\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\ \ \Big(\to \sin x\ \text{ khi }\ n\to\infty\Big)$$

Do đó $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A^n - E) = \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ \sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix}.$

Suy ra $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Câu 5.

Dễ dàng thấy rằng, nếu A và B là các ma trận cùng cỡ thì

$$\text{rank}\,(A+B) \leqslant \text{rank}\,A + \text{rank}\,B \leqslant n + \text{rank}\,(A+B).$$

Vậy nên

$$n + 0 = n\,\text{rank}\,(E - A^2) \geqslant \text{rank}\,(E+A) + \text{rank}\,(E-A) \geqslant \text{rank}\,(2E) = n,$$

suy ra ngay được điều phải chứng minh.

Câu 6

Giả sử X thỏa mãn điều kiện $AX = XA$. Xét $X_0 = 2AX - X$. Khi đó

$$AX_0 + X_0A - X_0 = (2A^2X - AX) + (2AXA - XA) - (2AX - X) = X.$$

Ngược lại, giả sử $X = AX_0 + X_0A - X_0$. Suy ra

$$AX = A^2X_0 + AX_0A - AX_0 = AX_0A + X_0A^2 - X_0A = XA.$$

2.2.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Xét hàm

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{k}\cos kx + \frac{b_k}{k}\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét rằng $F(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Xét

$$F'(x) = x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Khi đó

$$F(-\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{a_k}{k}(-1)^k\Big)$$
$$F(\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{a_k}{k}(-1)^k\Big)$$

Do đó $F(-\pi) = F(\pi)$. Sử dụng định lý Roll trong khoảng $(-\pi, \pi)$, ta nhận được điều phải chứng minh.

Câu 2 Từ giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục và có đạo hàm trên $(0, +\infty)$.

Ta có, hai hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ và $h(x) = \dfrac{1}{x}$ khả vi trên (a, b) và

$$g(x) = \Big(\frac{f(x)}{x)}\Big)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$
$$h'(x) = \Big(\frac{1}{x}\Big)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Theo định lý Lagrange, ta thấy $\exists x_0 \in (a, b)$, sao cho

$$[h(b) - h(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]h'(x_0),$$

hay

$$\Big(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\Big)\frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$$
$$= \Big(\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}\Big)\Big(-\frac{1}{x_0^2}\Big)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)\big[x_0 f'(x_0) - f(x_0)\big]}{bax_0^2} = -\frac{af(b) - bf(a)}{abx_0^2}.$$

Suy ra

$$x_0f'(x_0) - f(x_) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}.$$

Suy ra phương trình

$$xf'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}$$

có ít nhất một nghiệm thuộc (a, b), đpcm.

Câu 3.

a) Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Ta thấy $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Do đó tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$g(x_0) = \min_{x\in[a,b]} g(x). \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $g(x_0) = 0$. Thật vậy, giả sử $g(x_0) \neq 0$ và vì vậy, $f(x_0) \neq x_0$.

Từ bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\big|f(f(x_0)) - f(x_0)\big| < |f(x_0) - x_0|.$$

Suy ra

$$f(x_0) < g(x_0)$$

Điều này mâu thuẫn với (1), nghĩa là $f(x_0) = x_0$. Giả sử phương trình $f(x) = x$ còn có nghiệm x_1 với $x_0 \neq x_1 \in [a, b]$. Ta có

$$\begin{cases} x_1 \neq x_0 \\ x_1 \in [a, b]. \end{cases}$$

Suy ra

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |x_1 - x_0|,$$

Mâu thuẫn với bất đẳng thức đã cho.

Tóm lại, phương trình $f(x) = x$ có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

b) Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với $x_0 \in [a, b]$. Theo khai triển Taylor tại x_0, thì

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Xét khoảng đóng $G := \left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right] \cap [a, b]$. Vì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên $f(x)$ đạt cực đại trên đoạn đóng G. Giả sử

$$|f(x_m)| = \max_{x\in G} |f(x)|, \quad x_m \in G.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}|f(x_m)| &= |f'(c_m)|\,|x_m - x_0| \leqslant |f(c_m)|\,|x_m - x_0| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f(c_m)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_m)|.\end{aligned}$$

Hay $f(x) = 0$ với mọi $x \in G$.

Như vậy, nếu tại một điểm trên $[a, b]$ mà $f(x) = 0$ thì $f(x) = 0$ trên toàn bộ lân cận với bán kính bằng $1/2$ của điểm đó. Bằng việc xét các điểm x_0 khác nhau (mà tại đó $f(x_0) = 0$) lan dần về hai phía của đoạn $[a, b]$ thì sau một số hữu hạn bước ta sẽ được $f(x) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

Câu 4.

a) Xét $I_n = \int\limits_0^4 x^n\sqrt{4-x}dx$. Đặt $x = 4\cos^2\alpha \quad (\alpha \in [0, \pi/2)$. Suy ra

$$dx = -4.2\cos\alpha\sin\alpha = -8\sin\alpha\cos\alpha,$$

và

$$\begin{aligned}x^n\sqrt{4-x}dx &= (4\cos^2\alpha)^n\sqrt{4-4\cos^2\alpha}(-8\sin\alpha\cos\alpha) \\ &= -2^{2n+4}\cos\alpha^{2n+1}\sin^2\alpha d\alpha.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}I_n &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\Big(-2^{2n+4}\cos^{2n+1}\alpha\sin^2\alpha\Big)d\alpha \\ &= 2^{2n+4}\int\limits_0^{\pi/4}\cos^{2n+1}\alpha(1-\cos^2\alpha)dx \\ &=2^{2n+4}\Big(\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\alpha d\alpha - \int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+3}\alpha dx\Big).\end{aligned} \tag{1}$$

Xét

$$J_m = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^m\alpha d\alpha, \quad m > 1.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
J_m = &\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{m-1}\alpha d(\sin\alpha) = \\
&= \cos^{m-1}\alpha\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2}(m-1)\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha dx \\
=&(m-1)\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{m-2}\alpha(1-\cos^2\alpha)d\alpha \\
=&(m-1)\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{m-2}\alpha d\alpha - (m-1)\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{m}\alpha d\alpha.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$(m-1)J_{m-2} = mJ_m.$$

Hay

$$J_m = \frac{m-1}{m-2}J_{m-2}.$$

Dễ dàng tính được

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Thay vào (1), ta được

$$I_n = 2^{2n+4}(J_{2n+1} - J_{2n+3}).$$

Bằng qui nạp, ta thu được

$$
\begin{aligned}
I_n =&2^{2n+4}\Big(\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}.1 - \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2n}{2n+1}\cdots\frac{2}{3}.1\Big) \\
=&2^{2n+4}\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-3)\ldots 3}\Big(1-\frac{2n+2}{2n+3}\Big) \\
=&2^{2n+4}\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+3)(2n+1)\ldots 3}.
\end{aligned}
$$

b) Ta có

$$I_n = \int_0^4 x^n\sqrt{4-x}dx = \int_0^1 (4t)^n\sqrt{4-4t}d(4t)$$
$$= 2^{2n+3}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}dt$$

Ta chứng minh rằng với $t \in (0,1)$, thì

$$t^n\sqrt{1-t} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

hay

$$t2n(1-t) < \frac{1}{2ne}.$$

Thật vậy, ta có

$$t2n\sqrt{1-t} = t2n(1-t) = (2n)^{2n}\Big(\frac{t}{2n}\Big)^{2n}(1-t)$$
$$\leqslant \Big[\frac{\frac{t}{2n}+\cdots+\frac{t}{2n}+1-t}{2n+1}\Big]^{2n+1} = \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}.$$

Như vậy, ta cần chứng minh

$$\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} < \frac{1}{2ne},$$

hay

$$e < \Big(\frac{2n+1}{2n}\Big)^{2n+1}$$
$$\Leftrightarrow 1 < 2n+1\ln\Big(2n+12n\Big)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2n+1)-2n}{2n+1-2n} > \frac{1}{2n+1}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) > \frac{1}{2n+1},$$

với $f(x) = \ln x,\ \ x \in [2n, 2n+1]$. Bất đẳng thức cuối cùng tương đương với

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2n+1}$$

là hiển nhiên.

Như vậy

$$I_n = 2^{n+3}\int\limits_0^1 t^n\sqrt{1-t}dx \leqslant 2^{2n+3}\int\limits_0^1 \frac{1}{2ne}dx$$
$$= 2^{2n+3}(2ne)^{-1/2},$$

chính là đpcm.

Câu 5. Ta có

$$y = \operatorname{arctg} x,\ \ y(0) = 0$$
$$\text{và}\ \ y^{(1)} = \frac{1}{1+x^2},\ \ y'(0) = 1$$
$$\text{hay}\ \ y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ \ y''(0) = 1.$$

Từ đó suy ra

$$(1+x^2)y'' + 2xy' \equiv 0,$$

hay

$$y'' + x^2y'' + 2xy' \equiv 0.$$

Sử dụng công thức Leibnitz của đạo hàm cấp $n-2(n \geqslant 2)$, ta thu được

$$y^{(n)} + x^2y^{(n)} + C_{(n-2)}2xy^{(n+1)} + C_{n-2}^2y^{(n-2)} + 2xy^{(n-1)} + C_{n-2}^1 2y^{n-2} \equiv 0.$$

Thay $x = 0$ vào công thức vừa nhận được, ta có

$$y^{(n)}(0) + 2C_{n-2}^2y^{(n-2)}(0) + 2C_{n-2}^1y^{(n-2)}(0) = 0,$$
$$\Leftrightarrow y^{(n)}(0) = -2C_{n-1}^2y^{(n-2)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

Suy ra

$$y_{(0)}^n = \begin{cases} 0 \ \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ (-1)^{\frac{2n-1}{2}}(n-1)! \ \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Câu 6.

a) Ta có

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int\limits_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = I_1 + I_2.$$

Ta tính I_2 bằng phép đổi biến $x = \dfrac{1}{t}$. Khi đó

$$I_2 = \int\limits_1^0 \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\Big(1+1t^2\Big)\Big(1+\frac{1}{t^\alpha}\Big)} = \int\limits_9^1 \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int\limits_0^t \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

Thay vào biểu thức đã cho, ta thu được

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Như vậy I không phụ thuộc vào α, đpcm.

b) Đặt $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, ta được

$$x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2.$$

Do đó

$$(2t-1) = 1-t^2,\ \ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \quad \Big(t \neq \frac{1}{2}\Big).$$

Suy ra

$$dx = d\Big(\frac{1-t^2}{2t-1}\Big) = \frac{(2t-1)(-2t)-2(1-t^2)}{(2t-1)^2}dt = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
I = &\int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)^2\Big(\frac{2(1-t^2)}{2t-1}+t\Big)}\\
= &\int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)(2-t)} = -2\int \frac{(t^2-t+1)dt}{-2t^2+5t-2}\\
= &\int \Big(\frac{2t^2-5t+2+3t}{2t^2-5t+2}\Big)dt = t + \int \frac{3tdt}{2t^2-5t+2}\\
= &\ t + \frac{3}{2}\int \frac{(2t-5)dt}{2t^2-5t+2} + \frac{15}{4}\int \frac{dt}{\Big(t-\frac{5}{4}\Big)^2-\frac{9}{16}}\\
= &\ t + \int \Big(\frac{2}{t-2} - \frac{1}{2t-1}\Big)dt\\
= &\ t + 2\ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln|2t-1| + C\\
= &\ -x + \sqrt{x^2+x+1} + 2\ln\Big|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\Big|\\
- &\frac{1}{2}\ln\Big|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\Big| + C.
\end{aligned}$$

2.3 Olympic năm 1995

2.3.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Từ hệ thức $A^{-1} = 3A$ ta thu được $A^2 = \frac{1}{3}E$. Suy ra

$$\begin{cases} A^{1994} = \dfrac{1}{3^{997}}E,\\ |A|^2 = \dfrac{1}{3^n}. \end{cases}$$

Do đó

$$\big|A^{1995} - A\big| = \Big(\frac{1-3^{997}}{3^{997}\sqrt{3}}\Big)^n.$$

Câu 2. Đặt $A = (a_{ij})$. Dễ thấy $A^T = A$. Như vậy thì

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-)^n \det A = -\det A.$$

Do đó $\det A = 0$. Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm không tầm thường.

Câu 3. Ta viết $M = E + A$, với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $A^k = 2^{k-1}A$. Do đó

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k A^k + E = \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1} A + E \\ &= \frac{3^n - 1}{2} A + E = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Câu 4. Biến đổi định thức

$$f(x) := \begin{vmatrix} x & b & a & b & a & b \\ b & x & b & a & b & a \\ a & b & x & b & a & b \\ b & a & b & x & b & a \\ a & b & a & b & x & b \\ b & a & b & a & b & x \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & b & a-x & 0 & 0 & 0 \\ b & x & 0 & a-x & 0 & 0 \\ a & b & x-a & 0 & a-x & 0 \\ b & a & 0 & x-a & 0 & a-x \\ a & b & 0 & 0 & x-a & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cdots &= \begin{vmatrix} x+2a & 3b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & x+2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 & -1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . (x-a)^4 \\ &= (x^2 + 4ax + 4a^2 - 9b^2)(x-a)^4. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\alpha_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!} = (a^2 + 4a^2 + 4a^2 - 9b^2) = 9(a^2 - b^2).$$

Câu 5. Ta chia ra 3 trường hợp để xét.

1) Khi $r \leqslant n-2$ thì A_{ij} là định thức của ma trận vuông cấp $n-1$, hạng $\leqslant n-2$ nên $A_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ và $(A^*) = 0$. Do đó $\operatorname{rank} A^* = 0$. Dễ thấy rằng $\det A = 0$. Suy ra $A.A^* = 0$.

2) Khi $r = n-1$ thì A có một định thức con cấp $n-1$ khác không, hay $A^* \neq 0$. Suy ra $\operatorname{rank} A^* \geqslant 1$. Do vậy $\operatorname{rank} A^* = 1$.

3) Khi $r = n$ thì $|A| \neq 0$. Vì $A^t A^* = |A|E$ nên $|A^*| \neq 0$ và $\operatorname{rank}(A^*) = n$.

Câu 6. Với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$\begin{aligned}
B^k - \alpha^k E &= (B - \alpha E)(B^{k-1} + \alpha B^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-1} E) \\
&= (B - \alpha E) M_k \to \sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k E = \sum_{k=0}^{n} a_k (B^k - \alpha^k E) \\
&= (B - \alpha E) \sum_{k=0}^{n} a_k M_k = (B - \alpha E) M.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\det \left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k E \right) = |B - \alpha E|\, |M| = 0.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

2.3.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(b - a) \int_0^a f(x)dx \geqslant a \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Do $f(x)$ nghịch biến trên $[0, a]$ và $[a, b]$ nên

$$\begin{aligned}
(b - a) \int_0^a f(x)dx &\geqslant (b - a) \int_0^a f(a)dx = (b - a)a.f(a) \\
&= a \int_a^b f(a)dx \geqslant a \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh.

Câu 2. Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{(n)}(x^2-1)^n}{dx^n} f(x)dx =$$

$$= \frac{d^{(n-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} f(x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{(n-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} f'(x)dx$$

$$= \cdots = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx = \int_{-1}^{1} 0dx = 0.$$

Câu 3.

Trước hết, ta có nhận xét rằng

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

và

$$\lim_{x\to 0^+} g\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2} = 0,$$

trong đó $g(x)$ là một đa thức bất kỳ. Bây giờ, ta trở lại bài toán. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \neq 0$, ta có

$$f^{(n-1)}(x_0) = g_{n-1}\Big(\frac{1}{x_0}\Big)e^{-1/x_0^2},$$

trong đó $(g_{n-1}(t)$ là một đa thức.

Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng hàm $f(x)$ khả vi vô hạn có đạo hàm các cấp đều bằng 0 tại điểm $x = 0$.

Thật vậy, ta có

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^-1/x^2}{x} = 0.$$

Giả sử đã có $f^{(n-1)}(0) = 0$, thì

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g_{n-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} g_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2} = 0.$$

Suy ra
$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
đpcm.

Câu 4.

Ta chứng minh khẳng định sau:

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Giả thiết rằng tồn tại dãy đơn điệu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ hội tụ đến x_0 và thoả mãn điều kiện $f(a_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó, tồn tại dãy đơn điệu $\{a_{n'}\}_{n\geqslant 1}$ hội tụ đến x_0 và thỏa mãn điều kiện $f'(a_{n'}) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh.

Dễ dàng thu được phép chứng minh bằng cách sử dụng định lý Rolle trên các khoảng $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots$.

Sử dụng kết quả trên cho hàm $f(x)$ với $a_n = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, sau đó áp dụng tiếp với $f'(x), f''(x), \ldots$ ta thu được

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = 0,\\
f'(0) &= \lim_{n\to\infty} f'(a'_n) = 0,\\
f''(0) &= \lim_{n\to\infty} f(a''_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Như vậy, $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0$ ta được $f(x) \equiv 0$.

Câu 5. Vì $f(x)$ liên tục trên tập compact [0,1] nên $\exists c \in [a, b]$ để
$$|f(c)| = \max_{x\in[0,1]} |(x)| = M.$$

Giả sử $a < c < b, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x$ thoả mãn điều kiện $|x - c| < \delta$, thì
$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Khi đó
$$\begin{aligned}
&\Big(\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \Big(M - \frac{\varepsilon}{4}\Big)^n dx\Big)^{1/n} < \Big(\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} |f^n(x)|\, dx\Big)^{1/n}\\
<&\Big(\int\limits_a^b |f^n(x)|\, dx\Big)^{1/n} < \Big(\int\limits_a^b M^n dx\Big)^{1/n},
\end{aligned}$$

hay

$$(2\delta)^{1/n}(M - \frac{\varepsilon}{4}) < \Big(\int\limits_a^b |f^n(x)|\,dx\Big)^{1/n} < M(b-a)^{1/n}.$$

Dễ thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty}(2\delta)^{1/n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}(b-a)^{1/n} = 1.$$

Xét $c = a$. Ta có

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ a < x < a+\delta$ thì $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (lời giải hoàn toàn tương tự trên, chỉ đổi cận tích phân thành $a, a+\delta$).

Tương tự, nếu $c = b$, thì ta lấy tích phân với hai cận $b-\delta, b$.

Tóm lại, ta luôn nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int\limits_a^b f^n(x)dx\Big)^{1/n} = M.$$

Câu 6. Từ a) ta có

$$f(nx) \leqslant nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$f(x) \leqslant nf\Big(\frac{x}{n}\Big), \ \ f(0) \geqslant 0.$$

Do đó

$$0 \leqslant f(0) \leqslant f(x) + f(-x).$$

Với $x_0 > 0$ thì

$$\frac{f\Big(\frac{x_0}{n}\Big)}{\frac{x_0}{n}} \geqslant \frac{f(x_0)}{x_0} \geqslant \frac{f(-x_0)}{-x_0} \geqslant f\Big(-\frac{x_0}{n}\Big) - \frac{x_0}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\Big(\frac{x_0}{n}\Big)}{\frac{x_0}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{f\Big(-\frac{x_0}{n}\Big)}{-\frac{x_0}{n}} = 1 \quad (\text{theo } b))$$

$$\text{Suy ra } f\Big(\frac{x_0}{x_0}\Big) = \frac{f(-x_0)}{-x_0} = 1, \quad \forall x > 0, \quad \text{và} \quad f(x) = x, \quad \forall x \neq 0$$

Chọn $x_0 \neq 0$, ta có

$$0 \leqslant f(0) \leqslant 0 \leqslant f(x_0) + f(-x_0) = x_0 - x_0 = 0$$

nên $f(0) = 0$. Vậy $f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 7.

Với $n \geqslant 2$, ta có

$$\sin nx = \sin(n-2)x - 2\cos(n-1)x\sin x.$$

Suy ra

$$I_n = I_{n-2} - 2\int_0^\pi \cos(n-1)x dx = I_{n-2}.$$

Từ đó, ta nhận được

- Nếu n lẻ thì

$$I_n = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi.$$

- Nếu n chẵn thì

$$I_n = I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin 0}{\sin x} dx = 0.$$

2.4 Olympic năm 1996

2.4.1 Môn thi: Đại số

Câu 1

i) Sử dụng câu ii) khi $k = a = 1$.

ii) Giả sử

$$P_n(x) = a_n(x-a^m)^n + \cdots + a_2(x-a^m)^2 + a_1(x-a^m) + a_0.$$

Khi đó

$$P_n(x^m) = a_n(x^m-a^m)^n + \cdots + a_2(x^m-a^m)^2 + a_1(x^m-a^m) + a_0.$$

Ta chứng minh

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$$

bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử a_i là số khác không đầu tiên, trong đó $0 \leqslant a_i \leqslant k-1$. Dễ dàng thấy rằng $P_n(x^m)$ không chia hết cho $x-a)i+1$, với $i+1 \geqslant k$. Suy ra $P_n(x^m)$ không chia hết cho $(x-a)^k$, mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2

i) Ta có

$$A^{1996} = \begin{pmatrix} a^{1996} & * \\ 0 & c^{1996} \end{pmatrix} = 0,$$

trong đó $\star$ trong ma trận được hiểu là một số nào đó. Suy ra $a = c = 0$. Do đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hay $A^2 = 0$.

ii) $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b \\ 0 & c^n \end{pmatrix} = E$, nên $a^n = c^n = 1$.

Ta có 4 trường hợp phải xét.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nên $A_1^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và do đó $b = 0$ thỏa mãn điều kiện $A_1 = E$.

Tương tự, ta được $A_2 = -E$.

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nên $A_3^2 = E$.

Tương tự, $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 3

Đồng hệ nhất số

$$\begin{pmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) & a_{13}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1) & a_{23}(n+1) \\ a_{31}(n+1) & a_{32}(n+1) & a_{33}(n+1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$$

ta thu được

$$\begin{cases} a_{22}(n+1) = 3a_{22}(n) \\ a_{32}(n+1) = a_{22}(n) + 2a_{32}(n). \end{cases}$$

Đặt

$$u_n = \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 2}. \end{cases}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và $u_n \geqslant 1$. Suy ra tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} u_n = a \geqslant 1$. Chuyển qua giới hạn đẳng thức cuối cùng ta được $a = \dfrac{3a}{a+2}$, tức $a = 1$.

Câu 4.

Ta chứng minh bằng qui nạp theo n.

Với $n = 1$, hiển hiên đúng.

Giả thiết mệnh đề đã đúng đến $n-1$, nghĩa là ta đã thay thế các phần tử a_{ii} của A, $i = 2, \ldots, n$ bởi 0 hoặc 1 để nhận được ma trận A_{11} (ma trận A bỏ đi hàng 1 cột 1) khả nghịch.

Ta có $|A|$ bằng tổng của $a_{11}|A_{11}|$ với một đại lượng không phụ thuộc vào a_{11}. Vì $|A_{11}| \neq 0$ nên nếu ta thay

$$a_{11} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a_{11} \neq 0, \\ 1, & \text{nếu } a_{11} \neq 0, \end{cases}$$

thì $|A| \neq 0$.

Câu 5

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{bmatrix} a & 1-b & c & 1-d \\ b-1 & a & d-1 & c \\ -c & 1-d & a & b-1 \\ d-1 & -c & 1-b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

(ta có $A^t.A = mE$, với $m = a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)$). Vì $a \neq 0$ nên

$$|A| = m^2 = [a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2]^2 > 0, \ \ \forall b, c, d.$$

Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi b, c, d, điều phải chứng minh.

2.4.2 Môn thi: Giải tích

Bài 1. Khảo sát tính khả vi của hàm số

$$f(x) = |x-1|\,|x-2|\cdots|x-1996|.$$

Đặt $P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-1996)$. Khi đó, tồn tại $P'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $x_0 \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Ta có các trường hợp sau:

$-)$ $x_0 < 1$,

$-)$ $\exists i$, sao cho $i \in \{1, 2, \dots, 1995\}$ và $i < x_0 < i+1$,

$-)$ $\exists i \in \{1, 2, \dots, 1996\}$ và $x_0 = i$,

$-)$ $x_0 > 1996$.

Trường hợp 1: Khi $x_0 < 1$, ta có

$$f(x_0) = (-1)^{1996}P(x_0) = P(x_0).$$

Suy ra tồn tại $\Delta > 0$ để $x_0 + \Delta < 1$, sao cho

$$f(x_0 + \Delta) = P(x_0 + \Delta).$$

Khi đó

$$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0^+}\frac{P(x_0+\Delta) - P(x_0)}{\Delta} = P'(x_0) < +\infty$$
$$\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0^-}\frac{P(x_0+\Delta) - P(x_0)}{\Delta} = P'(x_0)$$

(do $f(x) = P(x) \quad \forall x < 1$).

Suy ra $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x_0 < 1$.

Trường hợp 2: Khi $\exists i \in \{1, 2, \dots, 1995\}$ để $i < x_0 < i + 1$. Khi đó

$$\exists \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \quad \text{sao cho} \quad \begin{cases} x_0 + \Delta_1 < i + 1, \\ x_0 - \Delta_2 > i. \end{cases}$$

Ta có

$$f(x) = (-1)^{1996-i}P(x), \quad \forall x\ i < x < i + 1 = (-1)^i P(x).$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} == (-1)^i \lim_{\Delta_1\to 0^+}\frac{P(x_0+\Delta) - P(x_0)}{\Delta_1} = (-i)^i P'(x_0)$$

và

$$\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}=\lim_{\Delta_2\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta_2)-f(x_0)}{\Delta_2}=C-D^i\lim_{\Delta_2\to 0^-}\frac{P(x_0+\Delta_2)-P(x_0)}{\Delta_2}=$$

tức $f(x)$ khả vi tại $\forall x\in(i,i+1)$ với $i=\overline{1,1999}$.

Trường hợp 3: Khi $x_0-\Delta>1996$ thì $\exists\Delta>0$ để $x_0-\Delta>1996$ và $f(x)=P(x),\quad\forall x>1996$.

Do đó

$$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{P(x_0+\Delta)-P(x_0)}{\Delta}=P'(x_0)$$

và

$$\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{P(x_0+\Delta)-P(x_0)}{\Delta}=P'(x_0).$$

Suy ra $f(x)$ khả vị tại mọi $x>1996$.

Trường hợp 4: Khi $\exists i$ để $x_0=i\in\{1,2,\dots,1996\}$ và $f(x_0)=0$. Suy ra

$$\begin{cases}\forall\Delta\in(0,1),\ \ f(x_0+\Delta)=(-1)^iP(x_0+\Delta)\\ \forall\Delta\in(-1,0),\ \ f(x_0+\Delta)=(-1)^{i-1}P(x_0+\Delta)\end{cases}$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0^+}(-1)^i\frac{P(x_0+\Delta)}{\Delta}=(-1)^iP'(x_0),$$
$$\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{j(x_0+\Delta)-j(x_0)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0^-}(-1)^{i-1}\frac{P(x_0+\Delta)}{\Delta}=(-1)^{i-1}P'(x_0).$$

Do đó

$$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{j(x_0+\Delta)-j(x_0)}{\Delta}\neq\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{d(x_0+\Delta)-j(x_0)}{\Delta}.$$

Vậy $f(x)$ không khả vi tại $\forall x=i\in\{1,2,\dots,1996\}$.

Bài 2. Với $b\in\mathbb{R}$, ta xét tích phân

$$S(a)=\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^bx)}.$$

Đặt $x = -t$. Khi đó

$$S(a) = \int\limits_{a}^{-a} \frac{-dt}{(1+t^2)(1-e^bt)} = \int\limits_{-a}^{a} \frac{dt}{(1+t^2(1-e^bt)} = \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{(1+x^2)(1-e^bx)}$$

hay

$$2S(a) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2}\Big(\frac{1}{1+e^bx} + \frac{1}{1-e^bx}\Big) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2}\frac{2}{(1-e^{2b}x^2)}.$$

Suy ra

$$S(a) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{2b}dx}{(e^{2b}+e^{2b}x^2)(1-e^{2b}x^2)} = \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{2d}dx}{e^{2b}+1}\frac{e^{2b}+e^{2b}x^2+1-e^{2b}x^2}{(e^{2b}+e^{2b}x^2)(1-e^{2b})}$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{2b}dx}{e^{2b}+1}\Big(\frac{1}{e^{2b}+e^{2b}x^2} + \frac{1}{1-e^{2b}x^2}\Big) = \frac{1}{e^{2b}+1}\Big(\int\limits_{-a}^{a} \frac{e^bd(e^bx)}{1-(e^bx)^2} + \int\limits_{-a}^{a} \frac{1dx}{1+x^2}\Big)$$

$$= \frac{e^b}{e^{2b}+1}\int\limits_{-a}^{a} \frac{d(e^bx)}{1-e^bx)^2} + \frac{1}{e^{2b}+1}\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2}$$

Đặt $e^bx = y, \quad e^b = c$, ta thu được

$$S(a) = \frac{c^2}{c^2+1}\int\limits_{-ac}^{ac} \frac{dy}{1-y^2} + \frac{1}{c^2+1}\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{c}{c^2+1}\int\limits_{-ac}^{ac} \frac{1}{2}dy\frac{2}{(1-y)(1+y)} + \frac{1}{c^2+1}\text{arctg}\, x\Big|_{-a}^{a}$$

$$S(a) = \frac{c}{c^2+1}\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-ac}^{ac} \frac{dy}{1+y} + \int\limits_{-ac}^{ac} \frac{dy}{1-y}\Big) + \frac{1}{c^2+1}(\text{arctg}\, a - \text{arctg}\,(-a)$$

$$= \frac{c}{2(c^2+1)}\Big(\ln\ |1+y|\big|_{-ac}^{ac} - \ \ln\ |1-y|\big|_{-ac}^{ac}\Big) + \frac{1}{c^2+1}2\,\text{arctg}\, a$$

$$= \frac{c}{2(c^2+1)}2\Big(\ \ln\ \Big|\frac{1+ac}{1-ac}\Big|\Big) + 2\frac{\text{arctg}\, a}{c^2+1} =$$

$$= \frac{\ln|1+ac| - \ \ln\ |1-ac|)c + 2\ \text{arctg}\ a}{c^2+1} = \frac{c\ \ln\ \Big(1+2ac-1\Big|}{c^2+1} + \frac{2\text{arctg}\, a}{c^2+1}$$

(khi $ac > 1$).

Do đó

$$\lim_{a\to+\infty} S(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{c}{c^2+1} \ln\left(1+\frac{2}{ac-1}\right) + \lim_{a\to\infty} 2\frac{\text{arctg}\, a}{c^2+1} = 0 + \frac{\pi}{c^2+1},$$

tức

$$\lim_{a\to+\infty} S(a) = \frac{\pi}{c^2+1} = \frac{\pi}{e^{2b}+1}.$$

Vậy

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^b x)} = \frac{\pi}{e^{2b}+1}.$$

Bài 3. Ta xác định hàm $h(x)$ như sau:

- Với $x < 0$, thì $h(x) = \varphi_1(x)$ tuỳ ý.
- Với $x \in [0,1)$, thì $h(x) = \varphi_2(x)$ tuỳ ý sao cho $\min_{x\in[0,1)} = \dfrac{1}{4}$.
- Với $x \in [1,+\infty)$, thì $h(x)$ xác định bởi công thức truy hồi

$$h(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1+g(x-1)}}\right)^2 - x.$$

Dễ thấy $h(x)$ thoả mãn các điều kiện cuả bài toán.

Bài 4.

Với x xác định, ta khai triển Taylor với đa thức $f(x) = g(x+h)$ tại $h = 0$:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + \frac{g''(x)}{2}h^2 + \frac{g'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{g^{1996}(x)h^{1996}}{1996!}$$

(do $f'(0) = g'(x), \ldots, f^{(1996)}(0) = g^{(1996)}(x)$).

Theo đề bài thì $g(x+h) = g(x) + hg'(x+h\theta(x,h))$. Do vậy

$$hg'(t+h\theta(x,h)) = hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) + \cdots + \frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}(x).$$

Khai triển Taylor bậc 2 với hàm $g'(x+h\theta(x,h))$ tại điểm $h = 0$.

$$g'(x+h\theta(x,h)) = g'(x) + g''(x)h\theta(x,h) + 0(h\theta(x,h)),$$

nên

$$hg'(x+h\theta(x,h)) = hg'(x)+h^2g''(x)\theta(x,h)+h0(h\theta(x,h)) = hg'(x)+\frac{h^2}{2}g''(x)+\cdots+\frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}($$

Suy ra

$$g''(x)\theta(x,h)+\frac{0(h\theta(x,h))}{h}=\frac{12}{2}g''(x)+\frac{h}{3!}g'''(x)+\cdots+\frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}(x)=\lim_{h\to 0}g''(x)\theta(x,h)=\frac{1}{2}g''(x).$$

Do $g''(x)\neq 0$ và $\lim\limits_{n\to 0}\theta(x,h)=\dfrac{1}{2}$, nên

$$\lim_{n\to 0}\theta(x,h)=\frac{1}{2}.$$

Bài 5.

Ta cố định $x\in\mathbb{R}$ và chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo $n\in\mathbb{N}$

$$|f(nx)-nf(x)|<(n-1)M<nM\ \ (n\geqslant 2).$$

Với $n=2$ thì $|f(2x)-f(x)-f(x)|<M<2M$ đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k-1$. Ta cần chứng minh với $n=k$ bất đẳng thức cũng đúng.

Thật vậy, ta có

$$|f(kx)-j((k-1)x)-j(x)|<M|f((k-1)x)-(k-1)f(x)|<(k-1)M.$$

Suy ra $|f(k-x)-kj(x)|<kM$. Mệnh đề được chứng minh.

Với $x=\alpha+n,\quad \forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, ta có

$$|f(nx)-n(p(x)|<nM,\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \ \forall n\in\mathbb{N}\geqslant 2$$

và

$$\begin{cases}|f(mnx)-nf(mx)|<nM, & \forall x\in\mathbb{R}\ \ n\geqslant 2,\ \ m\in\mathbb{N},\\ |f(nmx)-mj(nx)|<mM, & \forall x\in\mathbb{R},\ \ m\geqslant 2,\ \ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Chia cả hai vế cho mn, ta có

$$\Big\|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(mx)}{m}\Big|<\frac{M}{m}\Big\|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(nx)}{n}\Big|<\frac{M}{n}.$$

Suy ra

$$\Big\|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\Big|<\frac{M}{m}+\frac{M}{n}.$$

Với mọi $\varepsilon>0$, $\exists N:\ m,n\geqslant N$, $m\neq n$, ta luôn có

$$\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Big)M<\frac{2}{N}M$$

ở đây, ta lấy $N > \frac{2M}{\varepsilon}\Big)$.
Suy ra $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N$, để $\forall m, n \geqslant N$, ta có

$$\left\|\frac{f(mx)}{m} - \frac{f(nx)}{n}\right| < \frac{M}{m} + \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

$*$ Vậy dãy $\Big(f\frac{(nx)}{n}\Big)$ hội tụ.
Mà

$$\left|f\frac{(nx)}{n} - f(x)\right| < M$$

nên

$$\left|f\frac{(nx)}{n}\right| < M + |f(x)|.$$

Suy ra

$$\Big(f\frac{(nx)}{n}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

bị chặn khi x cố định.

Vậy ta có kết luận: Tồn tại

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(nx)}{n} = a \in (-\infty, +\infty).$$

2.5 Olympic Năm 1997

2.5.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Theo giả thiết ta có $x_{n+1} + y_{n+1} = 2z_n$. Suy ra

$$z_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1} - z_{n+1} - z_{n+1} + 2z_n.$$

Dễ dàng chứng minh rằng $\{z_n\}$ có dạng

$$z_n = \alpha + (-2)^n\beta. \qquad (*)$$

Mặt khác

$$z_1 = x_0 + y_0 - z_0.$$

Thay $n = 0$ và $n = 1$ vào (*) ta thu được

$$\alpha = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \quad \beta = \frac{2z_0 - x_0 - y_0}{3}.$$

Như vậy

$$z_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} + (-2)^n\Big(\frac{2z_0 - x_0 - y_0}{3}\Big).$$

Tương tự

$$y_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} + (-2)^n\Big(\frac{2y_0 - x_0 - z_0}{3}\Big).$$

$$x_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} + (-2)^n\Big(\frac{2x_0 - y_0 - z_0}{3}\Big).$$

Câu 2. Xét phép biến đổi tuyến tính f trong $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu A là ma trận cuả phép biến đổi này trong hệ cơ sở $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ta biết rằng $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = Tr(A)$ là số đối của hệ số λ^1 trong đa thức $\det(\lambda E - A)$, và nó không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở trong $\mathbb{R}^n$. Mặt khác, ta có $\mathbb{R}^n = \ker f \oplus f(\mathbb{R}^n)$. Hai không gian con này lần lượt có số chiều là $n - r,\ r$.

Chọn trong $\ker f$ mộcơ sở là $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_{n-r}$ và trong $f(\mathbb{R}^n)$ một cơ sở

$$\bar{e}_{n-r+1}, \bar{e}_{n-r+2}, \dots \bar{e}_n.$$

Khi đó $\{\bar{e}_k\}_{k=\overline{1,n}}$ là cơ sở trong $\mathbb{R}^n$. Ta có

$$f(\bar{e}_k) = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, n-r} \\ \bar{e}_k, & k = \overline{n-r+1, n}. \end{cases}$$

Như vậy, trong cơ sở mới ta có ma trận

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}.$$

Suy ra $Tr(f) = 1 + 1 + \dots + 1 = r$. Do đó $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = r$.

Câu 3. Từ BđT rank $(AB) \geqslant$ rank (A) suy ra

$$n \geqslant \text{ rank } A \geqslant \text{ rank } A^2 \geq \dots \geq \text{ rank } A^n \geq \dots \geqslant 0. \qquad (*)$$

Vì rank $A^k \in \mathbb{N}$ nên từ một số n_0t nào đó trở đi, các dáu trong $(*)$ trở thành đẳng thức.

Câu 4. đặt

$$X = (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

$$\bar{X} = \Big(1, (2+x), (2+x)^2, \dots, (2+x)^n\Big).$$

Dễ thấy rằng Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$XM = \bar{X}, \quad \text{hay} \quad X = \bar{X}M^{-1}. \tag{$*$}$$

Thay $x = t - 2$ vào $(*)$ ta thu được

$$\Big(1, (t-2), (t-2)^2, \ldots, (t-2)^n\Big) = \Big(1, t, t^2, \ldots, t^n\Big).M^{-1} \qquad (**).$$

đặt $M^{-1} = \Big(a_{ij}\Big)$. Khai triển $(**)$ ta thu được

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{với } i > j, \\ (-2)^{j-i}C_{j-i}^{i-1}, & \text{với } i \leqslant j. \end{cases}$$

Do đó

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^0 & -2C_1^0 & 2C_2^0 & \ldots & (-2)^n C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & -2C_2^1 & \ldots & (-2)^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \ldots & (-2)^{n-2}C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^n \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1.

Ta có

$$\int_0^1 f(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)dnx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}F(n)$$

trong đó $F'(x) = f(x)$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \to \varepsilon > 0 \exists x_0$ sao cho $|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x > x_0$ thì $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ suy ra với x đủ lớn $(x > x_0)$ thì

$$\int_0^x (A-\varepsilon)dt < \int_0^x f(t)dt < \int_0^x (A+\varepsilon)dt.$$

$$\Leftrightarrow (A-\varepsilon)x < F(x) < (A+\varepsilon)x \quad \forall x > x_0.$$

$$\Leftrightarrow (A-\varepsilon) < \frac{F(x)}{x} < A + \varepsilon$$

Suy ra $\forall n > x_0$ thì

$$A-\varepsilon < \frac{F(n)}{n} < A+\varepsilon \quad \to \quad \lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{n} = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^1 f(n,x)dx = A$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx = A$.

Câu 2. Ta có

$$a^x \geqslant 1+x \Leftrightarrow \quad x\ln a \geqslant \ \ln(1+x) \qquad (1)$$

Dễ thấy (1) tương đương với

$$x\ln a \geqslant \ln(x+1) \qquad \text{với } x>0. \qquad (2)$$

$$x\ln a \geqslant \ln(x+1) \qquad \text{với } -1<x<0 \qquad (3)$$

+ Nếu $x>0$ thì (2) $\Leftrightarrow \ \ln a \geq \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Ta thấy $x \geq \ \ln(1+x)$ thậy vậy Xét hàm số $f(x) + x - \ln(1+x) (x \geqslant 0)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geqslant 0 \to f\uparrow \to f(x) \geqslant f(0) = 0 \to x \geqslant \ \ln(1+x)$$

$$\to \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1 \quad \forall x>0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to x}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

$$\to \ln a \geqslant 1 \to a \geqslant 0 \qquad (*)$$

+ Nếu $1<x<0$ thì (3) $\Leftrightarrow \ \ln a \leq \dfrac{\ln(1+x)}{x} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)} = \frac{x}{(x+1)^2} < 0 \quad (TX\ hR^+ \cup \{0\})$$

$$\to h(x)\downarrow \geqslant h(x) \leqslant h(0) = 0 \quad \to g'(x) \leq 0 \to g(x)\downarrow$$

mà

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} \quad \text{(L'Hôpitan)}$$

$$= 1 \to \quad g(x) \geqslant 1 \quad \forall x>0 \quad \to \quad \ln a \leqslant 1 \quad \to \quad a \leqslant 0 \qquad (**)$$

từ $(*)$ và $(**)$ $\rightarrow$ $a = e$. Vậy có duy nhất giá trị của a là $a = e$.

Câu 3.

Đặt $f(x) = x^3 + tx - 8$. Suy ra $f'(x) \geqslant 0 \forall x \geqslant 0$. Mặt khác, ta có $f(0) = -8 < 0$. và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất.

Từ phương trình $x^3 + tx - 8 = 0 \;\rightarrow\; t = x^2 - \dfrac{8}{x}$. Khi $t = 0$ thì $x = 2$. Ta có

$$t = 7 \rightarrow x^3 + tx - 8 = (x-1)(x^2 + x + t) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow \int\limits_0^7 [x(t)]^2 dt = -\int\limits_2^1 x^2 d\Big(x^2 - \frac{8}{x}\Big)$$

$$= \int\limits_1^2 x^2\Big(2x + \frac{8}{x^2}\Big)dx = \int\limits_1^2 (2x^3 + 8)dx = \Big(\frac{x^4}{2}\Big|_1^2 + 8x\Big|_1^2\Big) = -\frac{31}{2}$$

Câu 4. Đặt

$$a_n = n\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$a_n = \frac{n}{n-1} - \frac{n}{n-2}a_{n-2}.$$

Nhận tháy rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ thì $A = 1/2$. Ta có

$$\Big|a_n - \frac{1}{2}\Big| = \Big|n\int\limits_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt - n\int\limits_0^1 \frac{t^{n-1}}{2}dt\Big| =$$

$$n\int\limits_0^1 \frac{t^{n-1}(1-t)^2}{2(t^2+1)}dt = n\int\limits_0^{1-1/\sqrt{n}} \frac{t^{n-1}(1-t)^2}{2(t^2+1)}dt + n\int_{1-1/\sqrt{n}}^1 \frac{t^{n-1}(1-t)^2}{2(t^2+1)}dt$$

$$\leqslant n\left[\int\limits_0^{1-1/\sqrt{n}} t^{n-1}(1-t)^2 dt + \int_{1-1/\sqrt{n}}^1 t^{n-1}(1-t)^2 dt\right]$$

$$\leqslant \int\limits_0^{1-1/\sqrt{n}} t^{n-1}dt + \int_{1-1/\sqrt{n}}^1 (1-t)^2 dt$$

$$\leqslant n\left[\frac{1}{n}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^2\right] = \left[\Big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Câu 5. Ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử $\exists x_0 \in [0,1]$ sao cho $|P(x_0)| > 1/2$.

Do $P(x) \in \mathbb{R}[x] \;\; \to \;\; P(x)$ liên tục tại x_0 suy ra

$$\int\limits_0^1 |P'(x)|dx = \int\limits_0^{x_0} |P'(x)|dx + \int\limits_{x_0}^1 |P'(x)|dx \leqslant \Big|\int\limits_0^{x_0} P'(x)dx\Big| + \Big|\int\limits_{x_0}^1 P'(x)dx\Big|$$

$$\geqslant |P(x_0) - P(0)| + |P(1) - P(x_0)| \geqslant 2|P(x_0)| > 1$$

$$(\text{mâu thuẫn với } \int\limits_0^1 |P'(x)|dx = 1).$$

Suy ra giả sử là sai.

Vậy $|P(x)| \leqslant 1/2 \quad \forall x \in [0,1]$ (đpcm).

Câu 6. Xét hàm số $f_n(x) = x^n - \cos x \quad \to \quad f_n(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta thấy $f_n(x) = nx^{n-1} + \sin x \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2] \to fn(x) \uparrow$. Mặt khác $f_n(0) = -1 < 0$

$$f_n(\pi/2) = (\pi/2)^n - 0 = (\pi/2) > 0.$$

Suy ra $f_n(x)$ có nghiệm duy nhất $a_n \in [0, \pi/2]$ hay $\exists! a_n \cos a_n = a_n^n$.

Ta chứng minh $\{a_n\}$ là dãy tăng. Giả sử ngư owng c lại

$$\begin{aligned} &\exists a_n > a_{n+1} && (1)\\ \to\;\; &\cos a_n < \cos a_{n+1} \quad (\text{do } \; a_n, a_{n+1} \in [0,1]) \\ \Leftrightarrow\;\; &a_n^n < a_{n+1}^{n+1} \leqslant a_{n+1}^n \quad (\text{do } \;\; a_{n+1} \in [0,1]) \\ \to\;\; &a_n < a_{n+1} \quad (\text{mâu thuẫn } (1)) \end{aligned}$$

Vậy $\{a_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1 $\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Ta có $a_n = (\cos a_n)^{1/n}$. Vế trái tồn tại giới hạn, suy ra $\alpha = \cos^0 \alpha = 1$. Vậy $\alpha = 1$, hay

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2.6 Olympic Năm 1998

2.6.1 Môn thi: Đại số

Câu 1.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) & -(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) & (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= A(\alpha+\beta) \quad \to \quad \text{(đpcm)}.
\end{aligned}$$

b) Tính $A^n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Do $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta) \;\; \to$ khi $\alpha \equiv$ ta có

$$\begin{aligned}
A(\alpha)A(\alpha) =& A^2(\alpha) = A(\alpha+\alpha) = A(2\alpha) \\
A^3(\alpha =& A^2(\alpha)A(\alpha) = A(2\alpha)A(\alpha) = A(2\alpha+\alpha) = A(3\alpha) \\
\cdots& \\
A^n(\alpha) =& A(\alpha+\alpha+\cdots+\alpha) = A(n\alpha) = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

với $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$$A^n = (n\alpha) = \left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos n\frac{\pi}{2} & -\sin n\dfrac{\pi}{2} \\ \sin n\frac{\pi}{2} & \cos n\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Lần lượt xét $n = 1, 2, 3, \ldots$ ta có

$$\begin{aligned}
A\Big(\frac{\pi}{2} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2\Big(\frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
A^3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0^1 & \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4\Big(\frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Một cách tổng quát ta có

$$A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^{k-1} & 0 \end{pmatrix} & \text{khi } n = 2k-1 \ \ \forall k = 1, 2, ... \\ \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} & \text{khi } n = 2k \ \ \forall k = 1, 2, ... \end{cases}$$

Câu 2.

Nhận xét rằng nếu đổi dấu 1 phân tử a_{ij} bất kỳ của A, ta được ma trận A^t mà

$$\sum_{k=1}^{n}(A_k + B_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n} B_k = A_i + \sum_{k\neq i} A_k + B_j + \sum_{k\neq j} B_k$$

và

$$\sum_{k=1}^{n}(A_k^* + B_k^*) = \sum_{k=1}^{n} A_k^* + \sum_{k=1}^{n} B_k^* = A_i^* + \sum_{k\neq i} A_k^* = B_j^* + \sum_{k\neq j} B_k^*$$

Dễ thấy $\sum\limits_{n\neq i} A_k = \sum\limits_{k\neq i} A_k^*$ (các phần tử ở các hàng có chỉ số $\neq i$ không thay đổi) và $\sum\limits_{k\neq i} B_k = \sum\limits_{k\neq j} B_k^*$ (các phần tử ở các cột có chỉ số $\neq j$ không thay đổi). Còn hiệu giữa $(A_k^* + B_k^*) - (A_k + B_k)$ luôn là một số chia hết cho 4. (Có thể bằng -4, 0, 4).

Do đó khi đổi dấu một phần tử thì sự thay đổi tổng $\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k + B_k)$ là một số chia hết cho 4.

Xét A^M là ma trận gồm toàn các phần tử là $1 Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^M + B_k^M = 2n$.

Sau một số lần thay đổi các phần tử của A^M, ta thu được ma trận A.

Giả sử $\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k + B_k) = 0$ thì theo nhận xét trên $2n \ldots 4$. Do n lẻ $\rightarrow$ vô lý.

Vậy $\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k + B_k) \neq 0$.

Câu 3.

Viết thêm một hàng cuối $1,\ x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ vào ma trận A ta được ma trận vuông cấp $n+2$. Ký hiệu D_{n+2} là định thức của ma trận mới đó. Biến đổi D_{n+2}

như sau Lấy cột k, nhan với (-1) rồi cộng vào cột $k+1$, với $k = n+1, n, \dots, 1$ ta được.

$$D_{n+2} = (x-1)D_{n+1} = \cdots = (x-1)^{n+1}.$$

Suy ra

$$D_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^{n-k} C_{n+1}^{k-1} x^{k-1} \tag{1}$$

Mặt khác, nếu khai triển D_{n+2} theo hàng cuối cùng ta được

$$D_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^{n-k} D_k x^{k-1} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $D_k = C_{n+1}^{k-1}$.

Câu 4.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}} & \frac{21}{2^n} - \frac{4}{3^{n-1}} + \frac{15}{6^n} \\ 0 & \frac{1}{3^n} & \frac{2}{3^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n) = 0 \quad \forall i, j = \overline{1,3}$.

Câu 5.

+ Trường hợp 1 Nếu B có tính chất như của A yêu cầu thì $B = A$.

+ Trường hợp 2 Nếu B có hàng (cột) nào đó có tổng âm. Ta nhân hàng (cột) đó với (-1). Rõ ràng sau một lần thực hiện phép nhân với (-1) của hàng (cột) có tổng âm ta được ma trận mới.

\- Có định thức $\neq 0$.

- Có số phần tử 1 tăng lên ít nhất một.

Mà số phần tử của ma trận là n^2 nên sau không quá n^2 bước một số bước nhỏ hơn n^2 ta nhận được ma trận A cần tìm.

2.6.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Đặt

$$f(x) = \int\limits_0^x |f(x)|\,|f'(t)|dt.$$

$$G(x) = \frac{x}{2}\int 0^x \big[f'(t)\big]^2 dt.$$

Khiđó

$$F'(x) = |f(x)f'(x)|;\;\; G'(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \big[f'(t)\big]^2 dt + \frac{x}{2}\big[f'(x)\big]^2.$$

Mặt khác $\forall x \in [0,1]$ $f(x) = \int\limits_0^x f'(t)dt$. áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Svac

$$|f(x)| = \Big|\int\limits_0^x f'(t)dt\Big| \le \Big(\int\limits_0^x dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^x \big[f'(t)\big]^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Khi đó, ta os

$$|f(x)f'(x)| \leqslant \sqrt{x}\Big(\int\limits_0^x [f'(t)]^2 dt\Big)^{1.2}.$$

$$|f(x)f'(x)| \leqslant \sqrt{x}\Big(\int\limits_0^x [f'(t)]^2 dt\Big)^{1/2}|f'(x)|.$$

$$\rightarrow\;|f(x)f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^x f^2(t)dt + \frac{x}{2}[f'(x)]^2$$

$$\rightarrow \forall x[0,1]\;F'(x) \leqslant G'(x)\;\rightarrow F(1) - F(0) \le G(1) - G(0)$$

$$\rightarrow\;\Big|\int\limits_0^1 f(t)f'(t)dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 [f'(t)]^2 dt$$

Câu 2 . Theo giả thiết, ta luôn có đánh giá

$$0 < \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)[f(x)+f'(x)]} \leq \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Xét $\int\limits_1^x \frac{f'(t)}{f^2(t)}dt = -\frac{1}{f(t)}\Big|_1^x$. Vì $f'(t) > 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến nên $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^x \Big[\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(t)+f'(t)}\Big]dt$ và từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3 biểu diễn $f(x)$ dưới dạng $b\Big(\frac{1+\alpha^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}}$ với $\alpha = \frac{a}{b}$.

a) Đặt $g(x) = \Big(\frac{1+\alpha^x}{2}\Big)^{1/x}$. Ta có

$$\ln g(x) = \frac{1}{x}[\ln(1+\alpha^x) - \ln 2].$$

Suy ra

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{1}{x^2}\Big[\frac{\alpha^x \ \ln \alpha^x}{1+\alpha^x} - \ln\frac{1+\alpha^x}{2}\Big] = \frac{1}{x^2}h(x).$$

Ta có $h(0) = 0$ và

$$h'(x) = \frac{x\alpha^x \ln^2\alpha}{(1+\alpha^x)^2}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} h'(x) \geqslant 0, & \text{khi } x > 0 \\ h'(x) \leqslant 0, & \text{khi } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Do vậy $h(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in BbbR$. Vậy $\ln g(x)$ có đạo hàm dương với mọi $x \neq 0$. Suy ra $\ln g(x)$ và $g(x)$ là các hàm đơn điệu tăng, suy ra $f(x)$ cũng đơn điệu tăng.

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1+\alpha^x}{2}\Big)^{1/2} = be^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x \ln g}{1+\alpha^x}} = be^0 = b.$$

Suy ra

$$\lim_{x\to-\infty} f(x0 = a.$$

Câu 4. Xét hàm $F(x) = x^{1997} - f(x)$ liên tục $[0,1]$

* $F(0) < 0$ (giả thiết)

* $\int\limits_0^1 F(x)dx = \dfrac{1}{1998} - \int\limits_0^1 f(x)dx > 0$ (giả thiết)
$\rightarrow\ \exists x_1 \in (0,1)\ \ F(x_1) > 0$. Do $F(x)$ liên tục $\rightarrow \exists\xi\ \ F(\xi) = 0$ (đpcm).

Câu 5.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

$f(x+h)+(1-f)(x)) \geqslant 2\sqrt{f(x+h)(1-f(x))} \geq 1, \forall h > 0 \rightarrow f(x+h) \geqslant f(x)\ \ \forall x$

$\rightarrow f(x)$ đơn điệu tăng và bị chặn trên (< 1) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a > 0.$ Từ giả thiết $f(x+h)(1-f(x)) \geq \dfrac{1}{4}\ \ \ \forall x.$

Cho $x \rightarrow +\infty$, ta được $a(1-a) \geqslant \dfrac{1}{4}$. Mặt khác $\max[a(1-a)] = \dfrac{1}{4} \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2.7 Olympic Năm 1999

2.7.1 Môn thi: Đại số

Câu 1.
a) Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{b(a^2-c^2)}{a-c} \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{b(a^2-c^2)}{a-c} \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & \dfrac{b(a^3-c^3)}{a-c} \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

Giả sử rằng

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & \dfrac{b(a^k-c^k)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Như vậy ta có

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & \dfrac{b(a^k-c^k)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & \dfrac{b(a^{k+1}-c^{k+1})}{a-c} \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$$

Theo nguyên lý quy nạp chúng ta có

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \dfrac{b(a^n - c^n)}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Thế $a = \dfrac{x}{1998}$; $b = 1999$; $c = \dfrac{x}{2000}$ ta chỉ ra được $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x) = 0 \quad \forall i,j = 1,2$.

b) Giả sử λ_k, $k = \overline{1,n}$ là giá trị riêng của ma trận A cấp n. Vậy $\det(A - \lambda E) = \prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)$.

Nếu ma trận A có giá trị riêng λ_k thì ma trận A^p có giá trị riêng λ_k^p.

Thật vậy, giả sử rằng $\exists X \neq 0$; $AX = \lambda_k X \to A^p X = \lambda_k^p X$ vì

$$\begin{aligned} A^pX &= A^{p-1}(AX) = A^{p-1}(\lambda_k) = A^{p-2}[A(\lambda_k X)] \\ &= A^{p-2}(\lambda_k^2 X) = \cdots = A(\lambda_k^{p-1}X) = \lambda_k^p X. \end{aligned}$$

Tiếp theo nếu $f(x)$ làđa thức bất kỳ, $f(X)$ có giá trị riêng $f(\lambda_k)$. Vậy $\det f(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} f(\lambda_k)$.

áp dụng

$$\det(C - \lambda E) = (2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \lambda_3 = 1,\ \ \lambda_4 = 6$$

Với $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$.

$$f(2) = 2^{1999} + 3;\quad f(-1) = -1;\quad f(1) = 1;\quad f(6) = 6^{1999} + 35.$$

Vậy $\det f(A) = -(2^{1999} + 3)(6^{1999} + 35)$.

Câu 2.

a) + Nếu A khả nghịch AB và $A^{-1}(AB)A$ có cùng đa thức đặc trưng. Mặt khác $A^{-1}(AB)A = BA \quad \to \quad AB$ và BA có cùng đa thức đặc trưng. Vì vậy AB và BA có cùng các giá trị riêng.

+ Nếu A không khả nghịch $\to \det A = 0 \quad \to \quad \exists m$ đủ lớn để thỏa mãn $A_k = A - \dfrac{1}{k}E$, $\forall k \geqslant m$ là không suy biến.

$\rightarrow A_kB$ và $BA_k (k \geqslant m)$ có cùng đa thức đặc trưng.

$$\det(A_kB - \lambda E) = \det(BA_k - \lambda E)$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta có điều phải chứng minh.

b) $\det(AA') \neq 0 \quad \rightarrow \quad r(AA') = 1999$.
$\rightarrow \quad r(A) = 1999$ (do $1999 = r(AA') \leqslant r(A) \leq 1999$) $\quad \rightarrow \quad r(A'A) \leqslant 1999$.

Do $B \neq 0$ nên không xảy ra $r(A'A) < 1999$. Ma trận $A'A$ là ma trận vuông cấp 2000 có hạng 1999. Gọi c_{ij} là các phần tử của $A'A$ và C_{ij} là phần bù đại số của c_{ij}, ta có

$$B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{2000,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{2000,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1,2000} & C_{2,2000} & \cdots & C_{2000,2000} \end{pmatrix} \quad c_{i1}C_{1j} + c_{i2}C_{2j} + \cdots + c_{i,200}C_{2000,j} = 0 \ \ \forall i, j$$

Suy ra các dòng của ma trận B là các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A'A)X = 0$ với số ẩn bằng 2000 và hạng của ma trận hệ số bằng 1999. Tập hợp các nghiệm của hệ phương trình này là một không gian con một chiều của không gian R^{2000}. Vậy các dòng của B tỷ lệ, suy ra $r(B) = 1$.

Câu 3.

Ta sẽ chứng minh

$$[Q'(x)]^2 - Q(x)Q''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

nếu $Q(x) \in \mathbb{R}(x)$, $\deg Q(x) = m$ và $Q(x)$ có m nghiệm thực đơn. Ta có

$$Q(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i), \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ \ (i \neq j)$$

Suy ra

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x - \alpha_i} \quad \rightarrow \quad \frac{[Q'(x)]^2 - Q(x)Q''(x)}{Q^2(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(x - \alpha_i)^2} \tag{2}$$

a) Nếu với $t \in \mathbb{R}$ mà $Q(t) = 0$ thì $[Q'(t)]^2 - Q(t)Q''(t) = [Q'(t)]^2 > 0$ do $Q'(t) \neq 0$ (vì t là nghiệm đơn).
b) Nếu với $t \in \mathbb{R}$ mà $Q(t) \neq 0$ thì từ (2) $\quad \rightarrow \quad$ (1).

áp dụng cho đa thức $Q(x) = P^{(k)}(x), k = 0, 1, \ldots, n-1$. Các đa thức đó đều có nghiệm thực đơn (định lý Role). Suy ra

$$P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) < [P^{(k)}]^2 \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)!a_{k-1}(k+1)!a_{k+1} < (a_k k!)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{k-1}a_{k+1} < (a_k)^2 \frac{k}{k+1} < a_k^2.$$

Câu 4.

Cộng tất cả các phương trình của hệ

$$\to \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Tiếp theo trừ phương trình thứ k cho phương trình $k-1$, $(k < n)$, trừ phương trình thứ n cho phương trình thứ nhất

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nx_k = k - (k+1) \quad \to \quad x_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{2}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

và

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nx_n = n - 1 \quad \to \quad x_n = -\frac{n-2}{n}.$$

2.7.2 Môn thi: Giải tích

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall h > 0. \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{h}{2} < \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \leqslant \frac{h}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = 0 \quad \forall x$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \equiv \ \text{const}.$$

Dễ dàng thử lại được rằng $f(x) = \text{const}$ thỏa mãn (1).

b) Theo đầu bài

$$p(x + \Delta x) - p(x) = g(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x), \quad \forall x \in R, \tag{2}$$

trong đó
$$|\alpha(x,\Delta x)| \leqslant c|\Delta x|^3, \quad c = \text{const} \ > 0. \tag{3}$$

Ta có
$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = g(x) + \alpha(x,\Delta x)\Delta x$$

Lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$ và sử dụng (3) ta thu được $g(x) = p'(x)$. Vậy (2) có dạng

$$p(x+\Delta x) - p(x) = p'(x)\Delta x + \alpha(x,\Delta x) \tag{4}$$
$$\to \ p(x) - p(x+\Delta x) = p'(x+\Delta x)(-\Delta x) + \alpha(x+\Delta x, -\Delta x) \tag{5}$$

Từ (4) và (5) chúng ta thu được

$$0 = \ -[p'(x+\Delta x) - p'(x)]\Delta x + \alpha(x+\Delta x, -\Delta x) + \alpha(x,\Delta x)$$
$$\to \quad \frac{p'(x+\Delta x) - p'(x)}{\Delta x} = \frac{\alpha(x+\Delta x, -\Delta x)}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha(x,\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$ và sử dụng (3) một lần nữa ta thu được
$$p''(x) = 0$$

Do vậy $p(x) = ax + b$. Dễ dàng thử lại được rằng $f(x) = ax + b$ thỏa mãn (2) và (3).

Câu 2.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - 1$ thì $g(x)$ là hàm khả vi trên $[0,1]$. Do $g(0) = -1$; $g = 1$ nên $\exists c \in (0,1)$ sao cho $g(c) = 0$. Suy ra $f(c) + c - 1 = 0$ hay $f(c) = 1 - c$.

áp dụng định lý Lagrange cho $f(x)$ trên các đoạn $[0,c]$ và $c,1]$
$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(a) \quad \text{với} \quad a \in (0,c) \quad \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(b) \quad \text{với} \quad b \in (c,1)$$

Từ đây ta suy ra
$$f'(a)f'(b) = \frac{f(c)}{c}\frac{1 - f(c)}{1 - c} = \frac{(1-c)c}{c(1-c)} = 1,$$

điều phải chứng minh.

Câu 3 .
$$f(1) = f(2) = 4f(2) \quad \to \quad f(2) = \frac{2}{3}.$$

Với $n \geqslant 3$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = n^2 f(n) \tag{2.1}$$
$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1) \tag{2.2}$$

Trừ hai đẳng thức trên cho nhau ta thu được

$$f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1) \quad \to \quad f(n) = \frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$
$$\to \quad f(n) = \frac{(n-1)(n-2)...2}{(n+1)n...4} f(2) = \frac{6}{n(n+1)} f(2)$$
$$= \frac{4}{n(n+1)} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} n^2 f(n) = 4$$

Câu 4.

Xét $t > 1$. Do $q(x)$ đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$ nên ta có

$$1 < \frac{q(2000t)}{q(1999t)} < \frac{q(2000t)}{q(1000t)}$$

Theo giả thiết

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{q(2000t)}{q(1999t)} = 1, \quad \text{nên} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{q(2000t)}{q(1999t)} = 1.$$

Câu 5. Đặt $t = \dfrac{x}{n} \quad \to \quad dt = \dfrac{1}{n} dx$, ta có

$$I_n = \int_0^n \frac{e^{-x}}{1 + e^{\frac{-x}{n}}} dx = n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt$$

Với $0 \leqslant t \leqslant 1$ ta có
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{e^t}{1 + e^t} \leqslant \frac{e^t}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}n\int\limits_0^1 e^{-(n+1)t}dt \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}n\int\limits_0^1 e^{(-n)t}dt.$$

$$\to \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\left[1-e^{-(n+1)}\right] \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\Big(1-e^{-n}\Big).$$

Cho $n \to +\infty$

$$\frac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^n \frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}} = \frac{1}{2}$.

2.8 Olympic Năm 2000

2.8.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Giả sử $c = \cos\theta + i\sin\theta$. Khi đó

$$\frac{1+ix}{1-ix} = e^{i\theta k};\quad \theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{2m}$$

Suy ra

$$x = \tan\frac{\theta_k}{2}$$

Câu 2. Ta có

$$AB = BA,\ (A+B)^{3999} = 0,\quad 3999 = 1999 + 2000.$$

Suy ra

$$E = E^{3999} + (A+B)^{3999} = (E+A+B)(E-(A+B)+(A+B)^2 - ...$$

Vậy $E + A + B$ khả nghịch.

Câu 3.

Ta có

$$AB = C,\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$BA = C', \quad c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$$

Vậy AB= -BA khi và chỉ khi

$$c_{ij} = c'_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = -c_{ji}$$

Câu 4.

Xét B khi có các phần tử đều bằng 1. Khi đó A-B = $\{c_{ij}\}$, $c_{ij} = -1$, $c_{ij} = 0$ hoặc =1999. det $(A-B) = (-1)^n 9$mod 1999. Suy ra det(A-B) =$(-1)^n 9$mod1999. Suy ra det(A-B)$\neq$0 và n=hạng(A-B) $\leqslant$ hạng A+hạng(-B)=hạng A+1, đpcm.

Câu 5.

i) Khi $a = 0,\ b = 0$ thì $P(x)$ tuỳ ý.
ii) Khi $a = 0,\ b \neq 0$ thì $P(x) = 0\ \forall x$.
iii) Khi $a \neq 0,\ b = 0$ thì $P(x)$ =const tuỳ ý.
iv) Khi $a \neq 0,\ b \neq 0$ thì

a) Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$ thì khi thay $x = b$ vào ta được $x = b - a$ là nghiệm. Tương tự khi thay $x = b - a$ thì sẽ có $x = b - 2a$ là nghiệm,... Suy ra $P(x) = x\ \forall x$.

b)Nếu $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ thì $P(x)$ có $x = a,\ x = 2a, \ldots, x = (n-1)a$ là nghiệm.

Suy ra $P(x) = (x-a)(x-2a)...(x-(n-1)a)Q(x)$.

Thế vào bài ta được $Q(x-a) = Q(x)\ \forall x$, hay $Q(x)$ =const. Vậy $P(x) = (x = a)(x = 2a)...(x - (n-1)a)$.

2.8.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Với $x = y = 0$ thì $f(0) = 0$. Theo giả thiết ta có

$$f(x+y) - f(x) + 2xy, \quad \forall x, y = R$$

Suy ra

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y+2xy)}{y} 2x + f'(0) = 2x + a$$

Vậy

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) = x^2 + ax$$

Câu 2.

Đặt $f(x) = e^{-x}g(x)$. Ta có $f'(x) = [g'(x) - g(x)]^{e-x}$. áp dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)$ ta tìm được $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$ hay $g'(c) - g(c)]e^{-c} = 0$. điều phải chứng minh.

Câu 3 .

Mở rộng hàm $f(x)$ ra toàn trục thực để được hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 1$. Do $f(0) = f(1) = 0$ nên hàm mới (vẫn ký hiệu là $f(x)$ liên tục trên R). Đặt $g(x) = f(x + a) - f(x)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 g(x)dx &= \int\limits_0^1 f(x+a)dx - \int\limits_0^1 f(x)dx \\ &= \int\limits_a^{1+a} f(x)dx - \int\limits_0^1 f(x)dx = 0\end{aligned}$$

Suy ra $\exists c \in (0, 1)$ sao cho $g(c) = 0 = f(c + a) - f(c) = f(c + a - 1) - f(c)$, với $n \in Z$. Nếu $c + a \in [0, 1]$ ta chọn $b = c + a$. Nếu $c = a > 1$ ta chọn $b = c$.

Câu 4.

Ta có

$$x_{n+1} = x_n^2 + (1 - 2a)x_n + a^2 = (x_n - a)^2 + x_n \geqslant x_n, \quad n \geqslant 1$$

Vậy dãy đơn điệu tăng. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Chuyển qua giới hạn ta được $l^2 = (l - a)^2 + l$. Suy ra $l = a$.

Nếu tồn tại k Để $x_k > a$ thì $x_n > a \ \forall n \geqslant k$ kéo theo dãy không có giới hạn.

Giả sử $x_n \leqslant a \ \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó $(x_n - a)^2 + x_n \leqslant a$ hay $a - 1xn \leqslant a$. Ngược lại, nếu có $a - 1 \leqslant x_n$ thì

$$x_n + l = (x_n - a)^2 + x_n \leqslant (a - x_n) + x_n = a.$$

Vậy Để tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ cần và đủ là $a - l \leqslant b \leqslant a$ và khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Câu 5.

Ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leqslant \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}.$$

hay

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \leqslant \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx.$$

Vậy

$$\int_{x_1}^{x_2} [x^2 - [f(x)]^2] dx \geqslant 0 \quad \forall x_1 \leqslant x_2$$

Suy ra tồn tại $c \in [x_1, x_2]$ sao cho $[f(c)]^2 = c^2 \leqslant 0$.

Do hàm $h(x) = x^2 - f(x)]^2$ liên tục trong $[1, 2]$ nên $[f(x)^2] - x^2 \leqslant 0$ $\forall x \in [0, 1]$. Vậy $|f(x)| \leqslant x \forall x \in [1, 2]$. Từ đó

$$\int_1^2 f(x)dx \leqslant \int_1^2 |f(x)|dx \leqslant \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}.$$

2.9 Olympic Năm 2001

2.9.1 Môn thi: Đại số

Bài 1. Dễ dàng thấy rằng $A^2 = I$. Giả sử B là ma trận vuông thoả mãn $AB + BA = 0$. Suy ra $B = -ABA$. Ta có

$$B = \frac{1}{2}(B + B) = \frac{1}{2}(A^2B - ABA) = A(\frac{1}{2}AB) - (\frac{1}{2}AB)A = AX - XA,$$

trong đó $X = \frac{1}{2}AB$. Ngược lại, mọi ma trận B có dạ ng

$$B = AX - XA$$

đều thoả mãn đẳng thức $AB + BA = 0$. Thật vậy, khi đó

$$AB + BA = A(AX - XA) + (AX - XA)A = A^2X - AXA + AXA - XA^2 = 0.$$

Vậy, ma trận B cần tìm là

$$B = AX - XA,$$

trong đó X là ma trận vuông cấp 3 tuỳ ý.

Bài 2.

Cách 1. Giả sử ngược lại, $\det B \neq 0$. Khi đó B có ma trận nghịch đảo B^{-1}. Từ các giả thiết $A^{2001} = 0,\ \ AB + BA = 0$ suy ra

$$0 = A^{2001} = A^{2001}B = A^{2000}(AB) = A^{2000}(A+B) = A^{2001}+A^{2000}B = A^{2000}B.$$

Do đó

$$0 = 0B^{-1} = A^{2000}BB^{-1} = A^{2000}.$$

Như vậy là $A^{2000} = 0$. Lặp lại quá trình trên nhiều lần nữa, ta thu được $A = 0$. Từ giả thiết $AB = A + B$ suy ra $B = 0$. Mâu thuẫn với $\det B \neq 0$.

Cách 2. Từ giả thiết $A^{2001} = 0$ suy ra $\det(A) = 0$. Mặt khác, giả thiết $A + B = AB$ suy ra $B = A(B - I)$. Do đó $\det B = \det(A(B - I)) = \det(A)\det(B - I) = 0$.

Bài 3. Gọi $x_0 \in [1, \infty)$ là nghiệm của phương trình

$$ax^2 + (b + c)x + d + e = 0,$$

nghĩa là

$$ax_0^2 + cx_0 + e = -(bx_0 + d).$$

đặt

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x_0}) &= (ax_0^2 + cx_0 + e) + \sqrt{x_0}(bx_0 + d) \\ f(-\sqrt{x_0}) &= (ax_0^2 + cx_0 + e) - \sqrt{x_0}(bx_0 + d). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x_0})f(-\sqrt{x_0}) &= (ax_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(bx_0 + d)^2 \\ &= (ax_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(ax_0^2 + cx_0 + e)^2 \\ &= (ax_0^2 + cx_0 + e)^2(1 - x_0) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Do đó, $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[-\sqrt{x_0}, \sqrt{x_0}]$. Vậy, phương trình

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có nghiệm thực.

Bài 4. 1) Ký hiệu $a_s = (a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}),\ \ s = 1, 2, \dots, k$. Khi đó

$$A = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}a_{kj} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}a_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}^2 & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}a_{kj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}a_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}a_{2j} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \end{bmatrix}.$$

Phân tích ma trận A thành n^n ma trận ta thu được

$$\det A = \sum_{1 \leqslant j_1, j_2, \dots, j_k \leqslant n} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{kj_k} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \dots & a_{kj_k} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Ký hiệu $A_{j_1<j_2<\dots<j_k}$ là những ma trận trong vế phải cuả biểu thức (*) tương ứng với $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ cố định và theo thứ tự tăng dần. Khi đó, các số hạng có cùng cặp chỉ số $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ có tổng tương ứng bằng

$$\sum_{j_1<j_2<\dots<j_k} (-1)^{\mathrm{inv}(j_1<j_2<\dots<j_k)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{kj_k} \det(A_{j_1<j_2<\dots<j_k}) =$$
$$= [\det(A_{j_1<j_2<\dots<j_k})]^2 .$$

Từ biểu thức (*) ta thu được

$$\det A = \sum_{1 \leqslant j_1<j_2<\dots<j_k \leqslant n} (\det A_{j_1<j_2<\dots<j_k})^2 \geqslant 0.$$

2) Tích vô hướng là dạng song tuyến tính đối xứng, nghĩa là $(a_i, a_j) = (a_j, a_i)$. Do vậy, A là ma trận đối xứng và có các giá trị riêng thực.

Theo phần 1), tất cả các định thức con chính cuả A đều không âm. Do đó, đa thức đặc trưng cuả A có dạng

$$P_A(t) = (-1)^k t^k + (-1)^{k-1} a_1 t^{k-1} + \dots - a_{k-1} t + a_k,$$

trong đó các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_k \geqslant 0$. Từ đó suy ra $P_A(t) > 0$ khi $t < 0$. Vậy, A có các giá trị riêng không âm.

Bài 5. Gọi $A = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ là ma trận vuông cấp n với các phần tử a_{ij} là những số nguyên chẵn. Xét ma trận đặc trưng

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Nếu λ_0 là số nguyên lẻ thì ma trận $(A-\lambda_0 I)$ có đặc điểm sau: Tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính là số nguyên lẻ, các phần tử còn lại là những số nguyên chẵn. Do đó, $\det(A-\lambda_0 I) \neq 0$. Vậy, A không thể có giá trị riêng là số nguyên lẻ.

Bài 6. Ký hiệu

$$A_n = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}.$$

1. Xét $n=1$. $\det A_1 = a+b$.
2. Xét $n=2$. $\det A_2 = a^2+ab+b^2$.
3. Xét $n \geqslant 3$. Khi đó

$$\det A_n = (a+b)\det A_{n-1} - ab \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)\det A_{n-1} - ab\det A_{n-2}.$$

Bằng qui nạp, ta chứng minh được

$$\det A_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, \quad \forall n \geqslant 3.$$

Chú ý Đáp số của bài toán có thể được viết dưới dạng

$$\det A_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n.$$

2.9.2 Môn thi: Giải tích

Bài 1.

1) Từ giả thiết suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g''(x) = f''(x) > 0\ \forall x > 0$. Giả sử ngược lại, tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $g'(x_0) > 0$. Khai triển Taylor hàm $g(x)$ tại x_0 ta thu được

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2, \quad x > 0.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Mâu thuẫn.

2) Nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $g(x_0) < 0$. Theo kết quả phần 1) $g'(x) \leqslant 0$ và do $g''(x) = f''(x) > 0$ trên khoảng $(0, +\infty)$ nên $g(x) \leqslant g(x_0)\ \forall x > x_0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \leqslant g(x_0) < 0$. Mâu thuẫn.

Hơn nữa, nếu $g(x_0) = 0$ thì $g(x) \leqslant g(x_0) = 0\ \forall x > x_0$. Suy ra $g(x) \equiv 0$ trên khoảng $[0, +\infty)$. Do vậy, $g''(x) = 0\ \forall x > x_0$. Vô lý, vì $g''(x) = f''(x) > 0$.

Vậy, đồ thị hàm số $f(x)$ (với $x > 0$) luôn nằm phía trên của tiệm cận xiên.

Bài 2. Bằng qui nạp, ta chứng minh được

$$0 \leqslant a_n \leqslant (pa_2 + qa_1)\Big(\frac{q}{1-p}\Big)^{n-3} \quad \forall n \geqslant 3.$$

Từ giả thiết suy ra $0 < \dfrac{q}{1-p} < 1$. Do đó, dễ dàng thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài 3.

Cách 1. đặt

$$f(t) = \frac{t^{2000}}{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2001})}, \quad t \in [0, 1].$$

Xét hàm số

$$F(x) = x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [0, 1].$$

Do f liên tục trên đoạn $[0, 1]$ nên F có đạo hàm trên $(0, 1)$, liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và

$$F'(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Mặt khác, ta có $F(1) = F(0) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại số $x \in (0,1)$ sao cho $F'(x) = 0$, nghĩa là

$$\int\limits_x^1 f(t)\mathrm{d}t = xf(x).$$

đây chính là điều phải chứng minh.

Cách 2. Xét hàm số

$$F(x) = \int\limits_x^1 \frac{t^{2000}\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2001})} - \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2001})}, \quad x \in [0,1].$$

Dễ dàng thấy $F(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$. Hơn nữa,

$$F(0) = \int\limits_0^1 \frac{t^{2000}\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2001})} \geqslant \int\limits_0^1 t^{2000}\mathrm{d}t = \frac{1}{2001} > 0,$$

$$F(1) = \frac{-1}{2^{2001}} < 0.$$

Từ đó suy ra tồn tại $x \in (0,1)$ để cho $F(x) = 0$. đây là điều phải chứng minh.

Bài 4. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ cố định, xét hàm số

$$g(y) = f'(y)\sin(y-x) - f(y)\cos(y-x).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$g'(y) = [f''(y) + f(y)]\sin(y-x) \geqslant 0 \quad \forall \text{ với mọi } y \in [x, x+\pi].$$

Suy ra $g(y)$ không giảm trên đoạn $[x, x+\pi]$. Do đó $g(x) \leqslant g(x+\pi)$, nghĩa là $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Bài 5. Từ giả thiết suy ra $f(n) \geqslant f(1) = a > 0 \ \forall n = 1,2,3,\ldots$ Ta có

$$f(n+1) = 2001f^2(n) + f(n).$$

Suy ra

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{1}{2001}\Big(\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)}\Big), \quad \forall n = 1,2,3,\ldots.$$

Khi đó

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{f(k+1)} = \frac{1}{2001}\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{f(n+1)}\Big).$$

Dễ dàng thấy rằng dãy số dương $\{f(n)\}_{n=1,2,3,\dots}$ đơn điệu tăng, nên tồn tại giới hạn (suy rộng)

$$\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \alpha, \qquad \text{trong đó } 0 < \alpha \leqslant +\infty.$$

Nếu $\alpha < +\infty$ thì $\alpha = 2001\alpha^2 + \alpha$. Suy ra $\alpha = 0$. Mâu thuẫn. Do vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = +\infty$, nghĩa là $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/f(n+1) = 0$. Từ đó suy ra giới hạn cần tìm

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{1}{2001a}.$$

Bài 6. Giả sử ngược lại, phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm $\{x_n\} \in [a,b],\ n = 1,2,3,\dots$ Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\} \longrightarrow \alpha \in [a,b]$. Do $f(x)$ liên tục nên $f(\alpha) = 0$. Từ giả thiết $[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0, \quad \forall x \in [a,b]$ suy ra $f'(\alpha) \neq 0$. Nhưng

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \neq 0.$$

điều này chứng tỏ $f(x) \neq 0$ trong một lân cận nào đó của điểm α. Mâu thuẫn α là điểm tụ của dãy $\{x_n\}_{n=1,2,3,\dots}$.

2.10 Olympic năm 2002

2.10.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Ký hiệu D là định thức của hệ phương trình. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

$\Big($cộng tất cả các cột với cột đầu tiên$\Big)$

$$(a+2001b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b & b \\ 1 & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & b & \dots & a & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

$(\Big($ nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào các hàng còn lại$\Big)$

$$= (a+2001b)(a-b)^{2001}.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\boldsymbol{a \neq b}$ và $\boldsymbol{a \neq -2001b}$.

Câu 2. Đặt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra được đẳng thức sau: $A = SA_1S^{-1}$. Do đó $A^n = SA_1^nS^{-1}$. Bằng qui nạp, ta chứng minh được

$$A_1^n = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{n\pi}{6} + \sin\dfrac{n\pi}{6} & -2\sin\dfrac{n\pi}{6} \\ \sin\dfrac{n\pi}{6} & \cos\dfrac{n\pi}{6} - \sin\dfrac{n\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Thay $n = 2002$ ta thu được

$$A_1^{2002} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$A^{2002} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} & \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Câu 3. Ký hiệu

$$A = \left(a_{ij}\right)_{10\times 11}$$

là ma trận hệ số của hệ phương trình. Từ giả thiết 2) suy ra rank $A = 10$, nên phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có một nghiệm độc lập tuyến tính. Theo giả thiết 1) $x_0 = (1992, 1993, \ldots, 2002)$ là một nghiệm (riêng) của phương trình, do đó mọi nghiệm của phương trình đã cho đều có dạng

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{11}) = (1992, 1993, \ldots, 2002) + (a_1, a_2 \ldots a_{11})t, \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

trong đó $(a_1, a_2 \ldots a_{11})$ là một nghiệm nào đó của phương trình thuần nhất. Vì vậy, ta chỉ cần tìm một nghiệm của hệ phương trình thuần nhất. Với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 10$ ký hiệu Q_j là ma trận vuông cấp 11 có dòng đầu tiên là dòng thứ j của ma trận A, 10 dòng còn lại vẫn là các dòng của A, nghĩa là

$$Q_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,10} & a_{j,11} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,10} & a_{1,11} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,10} & a_{j,11} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{9,1} & a_{9,2} & \cdots & a_{9,10} & a_{9,11} \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \cdots & a_{10,10} & a_{10,11} \end{pmatrix}.$$

Như vậy, $\det Q_j = 0$. Mặt khác, khai triển định thức Q_j theo dòng đầu tiên và sử dụng Giả thiết 2), ta thu được

$$a_{j,1}(1) + a_{j,2}(-2) + a_{j,3}(3) + \cdots + a_{j,10}(-10) + a_{j,11}(11) = 0, \ \ \forall j = 1, 2, \ldots, 10.$$

Từ đó suy ra $(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{11}) = (1992, 1993, 1994, \ldots, 2001, 2002) + (1, -2, 3, -4, \ldots, -10, 11)t =$$

$$(1992 + t, 1993 - 2t, 1994 + 3t, \ldots, 2001 - 10t, 2002 + 11t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. Từ giả thiết $I - P - Q$ là ma trận khả nghịch suy ra

$$\text{rank}\ [P] = \text{rank}\ [P(I - P - Q)] = \text{rank}\ [-PQ].$$

$$\text{rank}\ [Q] = \text{rank}\ [(I - P - Q)Q] = \text{rank}\ [-PQ].$$

Đó là điều cần phải chứng minh.

Câu 5. Cách 1. Xét đa thức $P(x) = (x+a)^{2002}$. Ta có

$$P(x^2-2001) = (x^2-2001+a)^{2002} = \big[(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 + a - 2001\big]^{2002}.$$

Nếu ta chọn được a sao cho

$$a^2 + a - 2001 = 0 \iff a = \frac{-1+\sqrt{8005}}{2} \quad \text{hoặc} \quad a = \frac{-1-\sqrt{8005}}{2}$$

thì

$$P(x^2-2001) = (x^2-a^2)^{2002} = (x+a)^{2002}(x-a)^{2002}$$

chia hết $P(x)$. Vậy, đa thức

$$P(x) = \Big(x + \frac{-1+\sqrt{8005}}{2}\Big)^{2002}$$

hoặc đa thức

$$P(x) = \Big(x + \frac{-1-\sqrt{8005}}{2}\Big)^{2002}$$

thoả mãn điều kiện bài toán.

Cách 2. Ta tìm đa thức dưới dạng

$$P_{2002}(x) = \prod_{k=1}^{2002}(x-a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$P_{2002}(x^2-2001) = \prod_{k=1}^{2002}(x^2-2001-a_k).$$

Nếu ta chọn được a_k sao cho

$$-a_k - 2001 = -a_k^2 \qquad (*)$$

thì

$$P_{2002}(x^2-2001) = \prod_{k=1}^{2002}(x^2-a_k^2) = P_{2002}(x)\prod_{k=1}^{2002}(x+a_k)$$

chia hết cho $P_{2002}(x)$. Tuy nhiên, dễ dàng thấy rằng

$$a_k = \frac{-1+\sqrt{8005}}{2} \quad \text{hoặc} \quad a_k = \frac{-1-\sqrt{8005}}{2}$$

thoả mãn (*).

Câu 6. Từ giả thết rank $A = 1$ suy ra tồn tại một véc tơ hàng

$$U = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

sao cho mọi véc tơ hàng khác của A đồng phương với U, nghĩa là tồn tại các số $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ sao cho các dòng của ma trận A lần lượt là $\lambda_1 U, \lambda_2 U, \dots, \lambda_n U$. Đặt

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Khi đó, dễ dàng thấy rằng

$$UV = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \lambda \in \mathbb{R}$$

và

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_1 a_2 & \dots & \lambda_1 a_{n-1} & \lambda_1 a_n \\ \lambda_2 a_1 & \lambda_2 a_2 & \dots & \lambda_2 a_{n-1} & \lambda_2 a_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-1} a_1 & \lambda_{n-1} a_2 & \dots & \lambda_{n-1} a_{n-1} & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n a_1 & \lambda_n a_2 & \dots & \lambda_n a_{n-1} & \lambda_n a_n \end{pmatrix} = VU.$$

Từ đó suy ra

$$B^2 = (VU)(VU) = V(UV)U = \lambda(VU) = \lambda B.$$

Nếu tồn tại λ' thoả mãn $B^2 = \lambda' B$ thì từ

$$0 = B^2 - B^2 = (\lambda - \lambda')B \quad \text{và} \quad B \neq 0.$$

Suy ra $\lambda = \lambda'$.

2.10.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Đổi biến $t = x - \pi$.. Khi đó ta có

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(2002x + sinx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin[2002(t+\pi) + \sin(t+\pi)]dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2002t - \sin t)dt = 0,$$

(vì $\sin(2002t - \sin t)dt$ là hàm lẻ).

Câu 2. Khi $x \in (0, \pi/2)$ thì $0 < \sin x < x$, hay $0 < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Từ đó suy ra

$$\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{\alpha} \geq \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{3}, \quad \forall \alpha \leqslant 3.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $\alpha = 3$. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau: trên khoảng $[0, \pi/2)$

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} \geqslant x.$$

Xét hàm số

$$F(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \quad \text{trên khoảng} \quad [0, \frac{\pi}{2}).$$

Ta có

$$F'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x \sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x \sqrt[3]{\cos x}}. \qquad (*)$$

Ta sẽ chứng minh

$$F'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

Thật vậy, lại xét hàm số

$$G(t) = 2t^2 - 3t\sqrt[3]{t} + 1 \quad \text{trên đoạn} \quad [0, 1].$$

Khi đó

$$G'(t) = 4(t - \sqrt[3]{t}) \leqslant 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Do đó $G(t)$ là hàm nghịch biến, nên $G(t) \geqslant G(1) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Dễ dàng suy ra $F'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Như vậy, $F(x)$ cũng là hàm đồng biến, nên $F(x) \geqslant 0$. Bài toán được chứng minh.

Câu 3. Với mỗi $n = 1, 2, 3, \dots$, xét hàm số

$$G_n(x) = \exp\Big(-\frac{2002x}{n}\Big) f(x), \quad x \in [a, b].$$

Rõ ràng $G_n(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và $G_n(a) = G_n(b)$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $x_n \in (a, b)$ thoả mãn $G_n'(x_n) = 0$.

Ta sẽ chứng minh $\{x_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ là dãy thoả mãn điều kiên bài toán. Thật vậy, ta có

$$G_n'(x_n) = -\frac{2002}{n}\exp\Big(-\frac{2002x_n}{n}\Big)f(x_n) + \exp\Big(-\frac{2002x_n}{n}\Big)f'(x_n) = 0.$$

Suy ra

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{2002}{n}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)f(x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2002}{n\Big(\exp(\frac{1}{n})-1\Big)} = 2002.$$

Câu 4. Từ giả thiết f liên tục và thay $y=0$ vào đẳng thức giả thiết ta được

$$f(x) = f(0) + \int\limits_x^{2x} f(t)dt$$

và $f \in C^1(\mathbb{R})$. Bằng qui nạp, ta cũng có $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Đạo hàm lần lượt đối với x và y, ta thu được

$$f'(x) = 2f(2x+y) - f(x+2y) \qquad (*).$$

$$f'(2x+y) = f'(x+2y).$$

Thay x bởi $-2y$ ta có tiếp $f'(-3y) = f'(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Như vậy, $f' =$ const. Do đó $f(x) = ax+b$.

Thay $f(x) = ax+b$ vào (*) và cho $x=0$ ta thu được $a=b$. Lại thay $f(x) = ax+a$ vào (*) lần nữa, ta có

$$a = 2(a(2x+y)+b) - a(x+2y) - a, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $a=0$. Vậy, hàm cần tìm là $f(x)\equiv 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Ta có

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 2002$$

là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\big|f'(x)\big| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, nếu đặt

$$g(x) = x + 2002 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = x - f(x)$$

thì $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, $g(x)$ là hàm liên tục và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$g(0)g(-2002) = -2002.\frac{1}{2}\ln(1 + 2002^2) < 0.$$

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiêm duy nhất. Gọi nghiệm đó là L. Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|u_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| = \left|f'(c)\right| |u_n - L|.$$

Suy ra

$$|u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - L|, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Do đó

$$0 \leqslant |u_n - L| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - L|$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - L| \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - L| \quad \forall n \geqslant 1.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L.$$

Câu 6. Đổi biến $t = x^n$ ta thu được

$$I_n = \int\limits_1^{u_n} t^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{t} dt,$$

trong đó $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi $t \in [1, u_n]$ ta có

$$0 \leqslant u_n \leqslant e, \quad 0 \leqslant t^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}.$$

Do đó
$$\left|I_n - \int\limits_1^{u_n} \frac{f(t)}{t}dt\right| = \left|\int\limits_1^{u_n} \left(t^{\frac{1}{n}} - 1\right)\frac{f(t)}{t}dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\int\limits_1^{u_n} \frac{f(t)}{t}dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\int\limits_1^{u_n}\left|\frac{f(t)}{t}\right|dt \leqslant \frac{1}{n}\int\limits_1^{e}\left|\frac{f(t)}{t}\right|dt.$$

Suy ra
$$\lim_{n\to\infty}\left|I_n - \int\limits_1^{u_n} \frac{f(t)}{t}dt\right| = 0.$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^{u_n} \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_1^{e} \frac{f(t)}{t}dt.$$

2.11 Olympic năm 2003

2.11.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Tính trực tiếp, ta thu được ít nhất một nghiệm dương là $\lambda_0 = a - b$.

Câu 2. Xét ánh xạ tuyến tính f với hệ véc tơ cơ sở $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Giả sử trong cơ sở này, f có ma trận B. Khi đó
$$f(\bar{u}) = a\bar{u} + b\frac{\beta}{\alpha}\bar{v} + c\frac{\gamma}{\alpha}\bar{w};$$
$$f(\bar{v}) = b\frac{\alpha}{\beta}\bar{u} + d\bar{v} + p\frac{\gamma}{\beta}\bar{w};$$
$$f(\bar{w}) = c\frac{\alpha}{\gamma}\bar{u} + p\frac{\beta}{\gamma}\bar{v} + q\bar{w};$$

Suy ra
$$f(\alpha\bar{u}) = a\alpha\bar{u} + b\beta\bar{v} + c\gamma\bar{w};$$
$$f(\beta\bar{v}) = b\alpha\bar{u} + d\beta\bar{v} + p\gamma\bar{w};$$
$$f(\alpha\bar{w}) = c\alpha\bar{u} + p\beta\bar{v} + q\gamma\bar{w}.$$

Đặt
$$\bar{u}' = \alpha\bar{u},\ \ \bar{v}' = \beta\bar{v},\ \ \bar{w}' = \gamma\bar{w}.$$

Suy ra

$$f(\bar{u}') = a\bar{u}' + b\bar{v}' + c\bar{w}'.$$
$$f(\bar{v}') = b\bar{u}' + d\bar{v}' + p\bar{w}'.$$
$$f(\bar{w}') = c\bar{u}' + p\bar{v}' + q\bar{w}'.$$

Do đó, ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ là ma trận đối xứng với các hệ số thực

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & p \\ c & p & q \end{pmatrix}.$$

Vậy, A và B là hai ma trận đồng dạng, chúng có cùng các giá trị riêng.

Câu 3. Với $x = 0$ thì $d_2 = -1$ và $d_n = 0, \quad n \geqslant 3$. Suy ra $S_n = -1$. Xét $x \neq 0$

Bước 1. Xét định thức cấp n

$$d = \begin{vmatrix} a & x & \dots & x & x \\ x & a & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a & x \\ x & x & \dots & x & a \end{vmatrix}$$

Cộng tất cả vào cột đầu, rút thừa số chung a+(n-1)x ra ngoài định thức. Trong định thức mới nhân hàng đầu với -x rồi cộng vào tất cả các hàng sau, ta được

$$d = [a + (n-1)x](a - x)^{n-1}$$

Khi $a = 0$ thì $d = (n-1)x(-x)^{n-1}$.

Bước 2. Nhân cột đầu và hàng của d_n với x ta được $x^2 d_n = d$. Suy ra

$$d_n = \frac{1}{x^2}(n-1)x(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

Do đó

$$S_n = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

1) Trường hợp $x = -1$. Suy ra

$$S_n = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

2) Trường hợp $x \neq -1$. Suy ra

$$(1 + x)S_n = -1 + x - x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1} =$$

$$\frac{(-1)\left[1-(-x)^{n-1}\right]}{1+x}+(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1}.$$

Do đó

$$S_n=\frac{(-x)^{n-1}-1}{(x+1)^2}+(-1)^{n-1}(n-1)\frac{x^{n-1}}{x+1}.$$

Câu 4. Ta chứng minh bổ đề sau đây

Bổ đề. *A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^k=0, \quad (k\geqslant 1)$. Khi đó $E-A$ và $E+A$ đều là các ma trận khả nghịch.*

Chứng minh. Ta có

$$E=E-A^k=(E-A)(E+A+...+A^{k-1}).$$

Suy ra

$$\det E=\det(E-A)\det(E+A+...+A^{k-1}).$$

Do đó $\det(E-A)\neq 0$. Mặt khác,

$$E=E+A^{2k+1}=(E+A)(E-A+A^2-...+A^{2k}).$$

Suy ra $\det(E+A)\neq 0$. Để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh tồn tại $m\in\mathbb{N}$ để $(P+Q)^m=0$. Sử dụng khai triển Newton và giả thiết $PQ=QP$ ta thu được

$$(P+Q)^m=\sum_{i=0}^{m}C_i^m P^{m-i}Q^i.$$

Chọn $m=2.\max(p,q)$ thì trong hai số $m-i$ và i luôn có ít nhất một số không nhỏ hơn $\max(p,q)$. Suy ra $P^{m-i}Q^i\equiv 0$, với mọi $i=0,1,\ldots$ Vậy $(P+Q)^m=0$.

Câu 5. Xét các phương trình

$$Ax=0;$$

$$(A+A^2+...+A^n)x=0.$$

Rõ ràng mọi nghiệm của (2.11.1) Đều là nghiệm của (2.11.1). Ta sẽ chứng minh mọi nghiệm của (2.11.1) cũng là nghiệm của (2.11.1). Thật vậy, giả sử x_0 là nghiệm của (2.11.1), nghĩa là

$$(A+A^2+...+A^n)=0.$$

Suy ra

$$Ax_0 = -A^2x_0 - ... - A^m x_0 = A^2(-E - A - ...A^{n-2})x_0.$$

Đặt

$$B = -E - A - \cdots - A^{m-2}.$$

Khi đó $AB = BA$. Do đó

$$Ax_0 = A^2Bx_0 = AB(Ax_0) = ABA^2Bx_0 = B^2A^2(Ax_0) = \cdots B^kA^k(Ax_0).$$

Khi $k \geqslant 2003$ thì $A^k = 0$. Do đó $Ax_0 = 0$. Do vậy, hai phương trình có chung tập nghiệm. Từ đó suy ra

$$\text{rank } (A + A^2 + \cdots + A^n) = m - k = \text{ rank } A,$$

trong đó k là số chiều của không gian nghiệm hai phương trình trên, còn m là cấp của ma trận A.

Câu 6. Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3x_4.$$

Sử dụng định lý Viet cho đa thức $f(x)$ ta được $\det A = 2$.

Câu 7. Xét hàm số

$$f(x) = e^{(\frac{x^3}{3} + x)}P(x).$$

Dễ thấy $f(x) = 0$ có tập hợp tất cả các nghiệm thực trùng với tập các nghiêm thực của đa thức $P(x)$. Theo Định lý Rolle phương trình

$$f'(x) = e^{(x^3/3+x)}\big[P'(x) + (x^2+1)P(x)\big] = 0$$

có ít nhất $m-1$ nghiệm thực. Hay

$$P'(x) + (x^2+1)P(x) = 0$$

có ít nhất $m-1$ nghiệm thực.
1) Xét m chẵn Nếu n lẻ thì $P(x)$ có ít nhất $m+1$ nghiệm thực. Vô lý. Do đó n phải chẵn. Khi đó

$$P'(x) + (x^2+1)P(x)$$

có bậc bằng $n+2$ là số chẵn và có $m-1$ số lẻ nghiệm thực. Suy ra đa thức

$$P'(x) + (x^2+1)P(x)$$

có bậc bằng $n+2$ là số chẵn và $m-1$ là số lẻ nghiệm thực. Suy ra đa thức này phải có ít nhất $(m-1)+1 = m$ nghiệm thực
2) Xét m lẻ Nếu n chẵn thì $P(x)$ có ít nhất $m+1$ nghiệm thực. Vô lý. Do đó n phải lẻ. Khi đó

$$P^{'}(x) + (x^2+1)P(x)$$

có bậc $n+2$ là số lẻ và có $m-1$ là số chẵn nghiệm thực Vậy số nghiệm thực của nó không ít hơn $(m-1)+1 = m$ nghiệm thực.

2.11.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Giả sử tồn tại $f(x)$ thoả mãn

$$f(x+2002)\left(f(x)+\sqrt{2003}\right) = -2004, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $f(x) \neq 0$ và $f(x) \neq -\sqrt{2003}$ với mọi x. Do $f(x)$ liên tục nên chỉ có thể xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

$$\operatorname{Im} f \subset (-\infty, -\sqrt{2003}), \quad \operatorname{Im} f \subset (-\sqrt{2003}, 0), \quad \operatorname{Im} f \subset (0, \infty).$$

- Trường hợp $\operatorname{Im} f \subset (-\infty, -\sqrt{2003})$
  Khi đó vế trái của (2.11.2) $> 0 > -2004$, vô lý.
- Trường hợp $\operatorname{Im} f \subset (0, \infty)$
  Khi đó vế trái của (2.11.2) $> 0 > -2004$ (vô lý).
- Trường hợp $\operatorname{Im} f \subset (-\sqrt{2003}, 0)$. Ta có
  $$-\sqrt{2003} < f(x) < 0$$
  $$0 < f(x) + \sqrt{2003} < \sqrt{2003}$$
  Khi đó, vế trái của (2.11.2) có trị tuyệt đối nhỏ hơn 2003, vô lý.

Vậy không tồn tại $f(x)$.

Câu 2. Xét
$$g(x) = e^{kx}[f(x) - 1], \quad \text{với} \quad k = \frac{2004}{2003}.$$
Khi đó
$$g(0) = g(1) = 0,$$
$$g'(x) = e^{kx}[f'(x) + kf(x) - k] \geqslant 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$
Vì $g(x)$ liên tục trên đoạn [0,1] nên $g(x)$ không giảm trên đoạn đó, đồng thời $g(0) = g(1) = 0$. Do đó $g(x) \equiv 0, \forall x \in [0, 1]$. Vậy, $f(x) \equiv 1, \forall x \in [0, 1]$.

Câu 3. Theo Lagrange, tồn tại $c_1 \in (a, b)$ sao cho
$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1.$$
Đặt
$$h(x) = f(x) + x - \frac{a + b}{2}.$$
Khi đó
$$h(a)h(b) = -(a - b)^2 < 0.$$
Do đó tồn tại $x_0 \in (a, b)$ để cho $h(x_0) = 0$. Hay
$$f(x_0) = \frac{a + b}{2} - x_0.$$
Theo Lagrange, tồn tại $c_2 \in (a, x_0), \quad c_2 \neq c_1$ sao cho
$$f'(c_2) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{b - x_0}{x_0 - a}.$$
Tương tự như vậy, tồn tại $c_3 \in (x_0, b), \quad c_1 \neq c_3$ để cho
$$f'(c_3) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{x_0 - a}{b - x_0}.$$
Rõ ràng c_1, c_2, c_3 phân biệt và $f'(c_1)f'(c_2)f'(c_3) = 1$.

Câu 4. Dễ dàng thấy rằng $\{x_k\}$ là dãy đơn điệu tăng. Từ đẳng thức
$$\frac{k}{(k + 1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k + 1)!}$$

Ta có

$$x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Khi đó

$$x_{2003}^n < x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2003}^n < 2003x_{2003}^n.$$

Hay

$$x_{2003} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2003}^n} < \sqrt[n]{2003}x_{2003}.$$

Suy ra

$$J = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2003}^n} = x_{2003}.$$

Vậy

$$J = 1 - \frac{1}{2004!}.$$

Câu 5. Đặt $F(x) = f(x) - \sin x$. Khi đó $F(x)$ liên tục trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$, đồng thời

$$F(0) = f(0) > 0.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx < 1,$$

hay

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx - 1 < 0.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^{\pi/2} [f(x) - \sin x]\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} F(x)dx < 0.$$

Do đó tồn tại

$$c \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

để cho $F(c) < 0$. Từ (2.11.2) và (2.11.2) suy ra $F(x) = 0$, hay $f(x) = \sin x$ có nghiệm $c_0 \in (0, c) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

Câu 6. Đặt $h(x) = g(x) - x$. Dễ thấy $h(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và

$$h(a) = g(a) - a \geqslant 0. \quad h(b) = g(b) - b \leqslant 0.$$

Do đó tồn tại $c \in [a, b]$ để cho $h(c) = 0$, hay $g(c) = c$.

- Nếu $f(c) = c$. Ta có điều phải chứng minh.
- Nếu $f(c) \neq c$. Giả sử $f(x)$ tăng. Đặt

  $$x_1 = f(c), \quad x_2 = f(x_1), \ldots, \quad x_n = f(x_{n-1}).$$

  Rõ ràng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu, thuộc đoạn $[a, b]$, nên hội tụ. Đặt

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in [a, b].$$

  Khi đó

  $$g(x_1) = g\,[f(c)] = f\,[g(c)] = f(c) = x_1.$$

  Giả sử $g(x_k) = x_k, \quad k \geqslant 1$. Bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh được $g(x_n) = x_n, \quad n \geqslant 1$. Do $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục nên ta có

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x_0).$$

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0).$$

  Vậy

  $$f(x_0) = g(x_0) = x_0.$$

2.12 Olympic năm 2004

2.12.1 Môn thi: Đại số

Câu 1. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \; T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tính $B = T^{-1}AT$

b) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A.

Giải.

a) Ta có

$$T^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} -7 & 0 & -21 \\ -15 & -10 & 5 \\ -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

b) Giá trị riêng $(-1, -3, 4)$.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông thực cấp hai A, B, C ta luôn có
$(AB - BA)^{2004}C = C(AB - BA)^{2004}$.

Giải.

Tính toán trực tiếp ta thấy với cặp ma trận vuông cấp hai A và B bất kỳ, AB và BA có cùng một vết. Từ đó suy ra ma trận $D = AB - BA$ có vết bằng 0. Vậy nên

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad D^2 = (a^2 + cb)E.$$

Do đó

$$D^{2004} = (a^2 + cb)^{1002}E$$

và nó giao hoán với mọi ma trận C.

Câu 3. Biết rằng các ma trận vuông A, B đều là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$ và $AB + BA = 0$. Tính $\det(A - B)$?

Giải.

Ta có $A^2 = A$, $B^2 = B$ nên

$$\begin{cases} (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B \\ (A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B \end{cases}$$

Đặt $\det(A - B) = \alpha,\ \det(A + B) = \beta$. Ta có

$$\begin{cases} \det(A+B)^2 = \det(A+B) \\ \det(A-B)^2 = \det(A+B) \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \beta^2 = \beta \\ \alpha^2 = \beta \end{cases}$$

Suy ra $(\alpha, \beta) = (0, 0),\ (\alpha, \beta) = (1, 1),\ (\alpha, \beta) = (-1, 1)$.

Vậy ta có ba trường hợp

(i) Với $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, thì $A = 0$, $B = 0$

(ii) Với $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, thì $A = E$ và $B = 0$

(iii) Với $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$, thì

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 4. Cho ma trận thực $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thoả mãn điều kiện

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ \pm 1 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) Nếu $n = 3$, thì tồn tại ma trận A để sao cho $\det A = 0$;

b) Nếu $n = 4$, ta luôn luôn có $\det A \neq 0$.

Giải.

a) Ví dụ, với

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ta có $\det A_3 = 0$.

b) Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta tính được $\det B = -3$.

Theo định nghĩa của định thức thì

$$\det B = \sum_{(j_1,\cdots,j_4)} (-1)^{N(j_1,\cdots,j_4)} b_{1j_1} b_{2j_2} b_{3j_3} b_{4j_4}$$

và

$$\det A = \sum_{(j_1,\cdots,j_4)} (-1)^{N(j_1,\cdots,j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}. \qquad (*)$$

Rõ ràng là nếu tích $b_{1j_1} b_{2j_2} b_{3j_3} b_{4j_4} \neq 0$ thì tích $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$ và ngược lại. Do $\det B = -3$ là một số lẻ nên số số hạng khác 0 trong (*) cũng là một số lẻ và vì vậy $\det A \neq 0$.

Câu 5.

a) Xác định đa thức $f(x)$ dạng

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

b) Cho $P(x), Q(x), R(x)$ là các đa thức với hệ số thực có bậc tương ứng là 3, 2, 3 thoả mãn điều kiện $(P(x))^2 + (Q(x))^2 = (R(x))^2$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x)Q(x)R(x)$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực (kể cả bội của nghiệm).

Giải.

a) Từ giả thiết $f(1) = f(-1) = f(2) = 0$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c-6=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta thu được $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$. Vậy đa thức cần tìm là

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$

b) Không mất tính tổng quát, có thể coi các hệ số bậc cao nhất của các đa thức P, Q, R đều dương.

Trước hết, ta chứng minh đa thức $Q(x)$ luôn luôn có 2 nghiệm thực.

Ta có $Q^2 = (R-P)(R+P)$. Vì $\deg P = \deg Q = 3$ nên $\deg(R+P) = 3$. Do $\deg Q^2 = 4$ nên $\deg(R-P) = 1$. Do đó đa thức Q^2 có nghiệm thực và vì vậy đa thức Q có nghiệm thực. Vì $\deg Q = 2$ nên Q có đúng 2 nghiệm thực.

Tiếp theo, ta chứng minh đa thức $P(x)$ luôn luôn có 3 nghiệm thực.

Ta có $P^2 = (R-Q)(R+Q)$. Vì $\deg(R-Q) = \deg(R+Q) = 3$ nên các đa thức $(R-Q)$ và $(R+Q)$ có nghiệm thực. Nếu hai nghiệm thực đó khác nhau, thì P có hai nghiệm thực phân biệt và nghiệm còn lại của P hiển nhiên cũng là nghiệm thực. Nếu $(R-Q)$ và $(R+Q)$ có chung nghiệm thực $x = a$ thì $x = a$ là nghiệm của R và của Q. Do vậy

$$R(x) = (x-a)R_1(x), \ \ Q(x) = (x-a)Q_1(x), \ \ P(x) = (x-a)P_1(x).$$

Thế vào hệ thức $P^2 = (R-Q)(R+Q)$, ta thu được $P_1^2 = R_1^2 - Q_1^2$, với P_1, R_1 là các tam thức bậc hai, Q_1 là nhị thức bậc nhất. Ta có

$$Q_1^2 = (R_1 - P_1)(R_1 + P_1).$$

Vì Q_1^2 là đa thức bậc hai và $R_1 + Q_1$ là tam thức bậc hai nên $R_1 - P_1$ là đa thức hằng. Vậy, nếu $P_1(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ và $Q_1(x) = dx + e$ thì $R_1(x) = ax^2 + bx + c + k$ và

$$k[R_1(x) + P_1(x)] = (dx + e)^2. \tag{1}$$

Suy ra $k > 0$. Thay giá trị $x = -\dfrac{e}{d}$ vào (1), ta thu được

$$R_1\Big(-\frac{e}{d}\Big) + P_1\Big(-\frac{e}{d}\Big) = 0$$

nên $P_1\Big(-\frac{e}{d}\Big) = -\frac{k}{2} < 0$. Do đó tam thức bậc hai $P_1(x)$ có 2 nghiệm thực và $P(x)$ có 3 nghiệm thực.

Trở lại bài toán. Do P có 3 nghiệm thực, Q có 2 nghiệm thực và R là đa thức bậc 3 (có ít nhất 1 nghiệm thực) nên số nghiệm thực của $T(x)$ không nhỏ thua 6.

Ví dụ, ta chọn

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x,$$
$$Q(x) = 2(x^2 + 2x + 1),$$
$$R(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

thì $P^2 + Q^2 = R^2$ và đa thức (PQR) có đúng 6 nghiệm thực.

2.12.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:

$$x_0 = 0,\ \ x_n = \frac{x_{n-1}}{2004} + (-1)^n,\ \ \forall n \geqslant 1.$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2$.

Giải.

Ta chứng minh công thức

$$x_n = \frac{(-1)^n(2004)^n - 1}{(2004)^{n-1}.2005}$$

Thật vậy, đặt $x_n = \frac{h(n)}{(2004)^n}$ ta thu được

$$\frac{1}{(2004)^n}h(n) = \frac{1}{2004}h(n-1)\frac{1}{(2004)^{n-1}} + (-1)^n.$$

Suy ra
$$h(n) - h(n-1) = (-1)^n(2004)^n$$
và
$$h(n) - h(0) = \sum_{i=1}^{n}[h(i) - h(i-1)] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(2004)^i.$$
Do $x_0 = h(0) = 0$ nên
$$x_n = \frac{1}{(2004)^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(2004)^i = \frac{(-1)^n(2004)^n - 1}{(2004)^{n-1}.2005}$$
Suy ra
$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \Big(\frac{2004}{2005}\Big)^2.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $[0,+\infty)$. Chứng minh rằng hàm số
$$F(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$
đồng biến trên $(0,+\infty)$.

Giải.

Ta có
$$F'(x) = \frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)dt - f(x)\int\limits_0^x tf(t)dt}{\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2}$$
vì
$$\frac{f(x)}{\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2} > 0$$
và
$$x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt = \int\limits_0^x (x-t)f(t)dt > 0 \text{ với } \quad f(t) > 0,\, x \geqslant t$$

nên $F'(x) \geqslant 0$ khi $x > 0$. Do vậy $F(x)$ là một hàm đồng biến trong $(0, \infty)$.

Câu 3. Cho $0 < a < b$. Tính tích phân

a) $I(\lambda) = \int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx$

b) $\lim\limits_{\lambda \to 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}}$.

Giải.

a) Đặt $bx + a(1-x) = t$, ta có

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \int\limits_a^b \frac{t^\lambda}{b-a} dt.$$

Với $\lambda \neq -1$ thì

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{\lambda+1} t^{\lambda+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\lambda+1}\frac{b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{b-a}.$$

Với $\lambda = -1$ thì

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \int\limits_a^b \frac{1}{(b-a)t} dt = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}.$$

b) Từ a) suy ra

$$[I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\Big(\frac{b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{b-a}\Big)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Suy ra

$$\lim_{\lambda \to 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}} = e^{-1}\Big(\frac{b^b}{a^a}\Big)^{\frac{1}{b-a}}.$$

Câu 4. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x) \geqslant e^{2004x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải.

Đặt $f(x) = e^{2004x}g(x)$. Theo giả thiết (i) thì $g(x) \geqslant 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.Thế vào điều kiện (ii), ta thu được

$$e^{2004(x+y)}g(x+y) \geqslant e^{2004x}g(x)e^{2004y}g(y)$$

hay

$$g(x+y) \geqslant g(x)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với $x = y = 0$ ta thu được

$$\begin{cases} g(0) \geqslant [g(0)]^2 \\ g(0) \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow g(0) = 1.$$

Suy ra

$$1 = g(0) = g(x + (-x)) \geqslant g(x)g(-x) \geqslant 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x) \equiv 1$ và $f(x) = e^{2004x}$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện $P(a) = P(b) = 0$ với $a < b$. Đặt $M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P''(x)|$. Chứng minh rằng

a) $\displaystyle\int_a^b P''(x)(x-a)(x-b)dx = 2\int_a^b P(x)dx,$

b) $\displaystyle\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| \leqslant \frac{1}{12}M(b-a)^3.$

Giải.

a) Ta chứng minh

$$\int_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx = -2\int_a^b P(x)dx \qquad (1)$$

Thật vậy, sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được

$$\int_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx = -\int_a^b P'(x)[(x-a)(b-x)]'dx =$$

$$= -\int_a^b P'(x)[(b-x)-(x-a)]dx = \int_a^b P(x)[(b-x)-(x-a)]'dx = -2\int_a^b P(x)dx.$$

b) Từ (1) ta thu được

$$\int_a^b P(x)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx.$$

Suy ra

$$\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| = \frac{1}{2}\int_a^b |P''(x)||(x-a)(b-x)|dx.$$

Vì $a \leqslant x \leqslant b$ nên $|(x-a)(b-x)| = (x-a)(b-x)$ và

$$\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

2.13 Olympic năm 2005

2.13.1 Môn thi: Đại số

Câu 1.

Ta có

$$\det A = x_1x_2x_3x_4.\det\begin{pmatrix} x_1+\dfrac{1}{x_1} & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2+\dfrac{1}{x_2} & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3+\dfrac{1}{x_3} & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4+\dfrac{1}{x_4} \end{pmatrix}$$

$$= {x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2{x_4}^2.\det\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{{x_1}^2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{1}{{x_2}^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\dfrac{1}{{x_3}^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\dfrac{1}{{x_4}^2} \end{pmatrix}$$

$$= {x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2{x_4}^2.\left\{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \dfrac{1}{{x_2}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_3}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_4}^2}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{{x_1}^2} & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_3}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_4}^2}\end{pmatrix} +\right.$$

$$+\det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{{x_1}^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{{x_2}^2} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_4}^2}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{{x_1}^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{{x_2}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_3}^2} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left. + \det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{{x_1}^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{{x_2}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_3}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{{x_4}^2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= {x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2{x_4}^2\Big(\frac{1}{{x_2}^2{x_3}^2{x_4}^2} + \frac{1}{{x_1}^2{x_3}^2{x_4}^2} + \frac{1}{{x_1}^2{x_2}^2{x_4}^2} + \frac{1}{{x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2} + \frac{1}{{x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2{x_4}^2}\Big)$$

$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + 1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 -$$

$$-2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 1.$$

Vì x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$ nên

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -5.$$

Vậy $\det A = 1 - 2.(-5) + 1 = 12$

Câu 2. Chéo hoá ma trận A

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

trong đó

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ma trận đường chéo C có các giá trị riêng dương sao cho $C^2 = D$ là ma trận dạng

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy cần tìm ma trận $B = QCQ^{-1}$ sao cho $B^2 = QC^2Q^{-1} = A = PDP^{-1}$?
Ta có $QDQ^{-1} = PDP^{-1} \;\Rightarrow D(Q^{-1}P) = (Q^{-1}P)D.$
$\Rightarrow$ Cần giải phương trình $DX = XD, X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\gamma & 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \gamma & 2\delta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \gamma = 0, \beta = 0,\;\; \alpha, \delta$ - khác 0 tuỳ ý ! Vậy ta có

$$\Rightarrow Q^{-1}P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; Q = P \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha^{-1} & \delta^{-1} \\ -\alpha^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha/3 & -\alpha/3 \\ \delta/3 & 2\delta/3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = QCQ^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Ghi chú Nếu thí sinh chọn luôn ma trận $B = PCP^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$ thì vẫn cho điểm tối đa!!!

Câu 3. 1) Dễ dàng thấy không tồn tại các đa thức bậc $0, 1, 2 P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Xét trường hợp $n \geq 3$. Giả sử tồn tại đa thức bậc $n P_n(x)$ thoả mãn điều kiện

$$P_n(x) > P_n''(x), \tag{2.3}$$

$$P'_n(x) > P''_n(x)\ \forall x \tag{2.4}$$

Từ (2.3) $\Rightarrow\ P_n(x) - P''_n(x) > 0\,\forall x\ \Rightarrow\ n$ - chẵn.
Từ (2.4) $\Rightarrow\ P'_n(x) - P''_n(x) > 0\,\forall x\ \Rightarrow\ (n-1)$ - chẵn.
Vô lý!!!!

2) Từ giả thiết suy ra n - chẵn (n - bậc của đa thức $Q(x)$). Giả sử ngược lại, $\exists x_0\, Q(x_0) \leqslant 0\ \Rightarrow$ phương trình $Q(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm (n - chẵn!). $\Rightarrow\ e^{-x}Q(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm (kể cả nghiệm bội) $\Rightarrow\ \Big(e^{-x}Q(x)\Big)' = 0$ có nghiệm. Tức là $-e^{-x}Q(x) + e^{-x}Q'(x) = 0$ có nghiệm $\Rightarrow\ Q(x) - Q'(x) = 0$ có nghiệm $\Rightarrow$ Vô lý!!!!

Ghi chú Cũng có thể chứng minh hai phương trình $Q(x) - Q'(x) = 0$ có số nghiệm không ít hơn so với phương trình $Q(x) = 0$ (bằng cách chứng minh tương tự như trên).

Câu 4. Ta có $M = E + D$ với

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng thấy rằng $E^n = E, D^n = D,\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2)$. Khi đó

$$M^n = (E+D)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k E^{n-k} D^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k E^{n-k} D^k + E = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D + E.$$

Mặt khác

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k D = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k & \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \end{pmatrix}$$

và $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$. Do đó

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Từ đây suy ra $S_n = 3.2^n$

Câu 5. Cộng thêm biểu thức $x_1 + x_2 + ... + x_{i-1}$ vào cả hai vế phương trình thứ i $(i \geq 2)$ của hệ đã cho. Với $i = 2, 3, \ldots, n$, ta có

$$x_1+x_2+...+x_{i-1}+x_i+...+x_n = \frac{a + x_1 + x_2 + ... + x_{i-1}}{2005^i - 1}+x_1+x_2+...+x_{i-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2004} = \frac{a}{2005^i - 1} + (x_1 + x_2 + ... + x_{i-1})\Big(1 + \frac{1}{2005^i - 1}\Big)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} = \frac{a}{2005^i}\Big(\frac{2005^i - 2005}{2004}\Big).$$

Vậy, với $i = 2, 3, \ldots, n$

$$x_i = (x_1 + x_2 + ... + x_i) - (x_1 + x_2 + ... + x_{i-1}) =$$

$$= \frac{a}{2005^{i+1}}\Big(\frac{2005^{i+1} - 2005}{2004}\Big) - \frac{a}{2005^i}\Big(\frac{2005^i - 2005}{2004}\Big) = \frac{a}{2005^i}.$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ đi phương trình thứ hai ta được $x_1 = \dfrac{a}{2005}$.

Vậy $x_i = \dfrac{a}{2005^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$; $x_n = \dfrac{a}{2004.2005^{n-1}}$.

2.13.2 Môn thi: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:

$$x_0 = 0, \;\; x_n = \frac{x_{n-1}}{2004} + (-1)^n, \;\; \forall n \geqslant 1.$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2$.

Giải.

Ta chứng minh công thức

$$x_n = \frac{(-1)^n(2004)^n - 1}{(2004)^{n-1}.2005}$$

Thật vậy, đặt $x_n = \frac{h(n)}{(2004)^n}$ ta thu được

$$\frac{1}{(2004)^n}h(n) = \frac{1}{2004}h(n-1)\frac{1}{(2004)^{n-1}} + (-1)^n.$$

Suy ra
$$h(n) - h(n-1) = (-1)^n(2004)^n$$
và
$$h(n) - h(0) = \sum_{i=1}^{n}[h(i) - h(i-1)] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(2004)^i.$$
Do $x_0 = h(0) = 0$ nên
$$x_n = \frac{1}{(2004)^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(2004)^i = \frac{(-1)^n(2004)^n - 1}{(2004)^{n-1}.2005}$$
Suy ra
$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \Big(\frac{2004}{2005}\Big)^2.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $[0,+\infty)$. Chứng minh rằng hàm số
$$F(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$
đồng biến trên $(0,+\infty)$.

Giải.

Ta có
$$F'(x) = \frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)dt - f(x)\int\limits_0^x tf(t)dt}{\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2}$$
vì
$$\frac{f(x)}{\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2} > 0$$
và
$$x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt = \int\limits_0^x (x-t)f(t)dt > 0 \text{ với } \quad f(t) > 0,\, x \geqslant t$$

nên $F'(x) \geqslant 0$ khi $x > 0$. Do vậy $F(x)$ là một hàm đồng biến trong $(0, \infty)$.

Câu 3. Cho $0 < a < b$. Tính tích phân

a) $I(\lambda) = \int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx$

b) $\lim\limits_{\lambda\to 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}}$.

Giải.

a) Đặt $bx + a(1-x) = t$, ta có

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \int\limits_a^b \frac{t^\lambda}{b-a} dt.$$

Với $\lambda \neq -1$ thì

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{\lambda+1} t^{\lambda+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\lambda+1}\frac{b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{b-a}.$$

Với $\lambda = -1$ thì

$$\int\limits_0^1 [bx + a(1-x)]^\lambda dx = \int\limits_a^b \frac{1}{(b-a)t} dt = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}.$$

b) Từ a) suy ra

$$[I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\Big(\frac{b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{b-a}\Big)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Suy ra

$$\lim_{\lambda\to 0} [I(\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}} = e^{-1}\Big(\frac{b^b}{a^a}\Big)^{\frac{1}{b-a}}.$$

Câu 4. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $f(x) \geqslant e^{2004x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải.

Đặt $f(x) = e^{2004x}g(x)$. Theo giả thiết (i) thì $g(x) \geqslant 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.Thế vào điều kiện (ii), ta thu được

$$e^{2004(x+y)}g(x+y) \geqslant e^{2004x}g(x)e^{2004y}g(y)$$

hay

$$g(x+y) \geqslant g(x)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với $x = y = 0$ ta thu được

$$\begin{cases} g(0) \geqslant [g(0)]^2 \\ g(0) \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow g(0) = 1.$$

Suy ra

$$1 = g(0) = g(x + (-x)) \geqslant g(x)g(-x) \geqslant 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x) \equiv 1$ và $f(x) = e^{2004x}$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện $P(a) = P(b) = 0$ với $a < b$. Đặt $M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P''(x)|$. Chứng minh rằng

a) $\displaystyle\int\limits_a^b P''(x)(x-a)(x-b)dx = 2\int\limits_a^b P(x)dx$,

b) $\displaystyle\Big|\int\limits_a^b P(x)dx\Big| \leqslant \frac{1}{12}M(b-a)^3$.

Giải.

a) Ta chứng minh

$$\int\limits_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx = -2\int\limits_a^b P(x)dx \tag{1}$$

Thật vậy, sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được

$$\int\limits_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx = -\int\limits_a^b P'(x)[(x-a)(b-x)]'dx =$$

$$= -\int\limits_a^b P'(x)[(b-x)-(x-a)]dx = \int\limits_a^b P(x)[(b-x)-(x-a)]'dx = -2\int\limits_a^b P(x)dx.$$

b) Từ (1) ta thu được

$$\int_a^b P(x)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b P''(x)(x-a)(b-x)dx.$$

Suy ra

$$\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| = \frac{1}{2}\int_a^b |P''(x)||(x-a)(b-x)|dx.$$

Vì $a \leqslant x \leqslant b$ nên $|(x-a)(b-x)| = (x-a)(b-x)$ và

$$\Big|\int_a^b P(x)dx\Big| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M}{12}(b-a)^3.$$