ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI GT CHỌN ĐỘI TUYỂN
CHÍNH THỨC DỰ THI OLYMPIC
Năm học 2022 - 2023
Ngày thi: 04/03/2023
Thời gian làm bài: 90 phút
Không được sử dụng tài liệu

Bài 1. Cho 2 dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bằng các công thức

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Chứng minh rằng các dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Bài 2. Giả sử:

1) hàm $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp $(p+q)$ $f^{(p+q)}(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, $(p, q \in \mathbb{N})$.
2) hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp $(p+q+1)$ $f^{(p+q+1)}(x)$ trong khoảng (a,b).
3) thỏa mãn các đẳng thức

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0,$$
$$f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f^{(p+q+1)}(c) = 0.$

Bài 3. Giả sử hàm $f(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ và với các số thực x, h bất kỳ ta có đẳng thức

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Chứng minh rằng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hằng số.

Bài 4. Giả sử hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a) = 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$M^2 \le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\,dx, \text{ với } M = \sup_{a \le x \le b}\{|f(x)|\}.$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm