ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
**BỘ MÔN TOÁN – LÝ**

**ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2022-2023**
**VÒNG CHÍNH THỨC MÔN ĐẠI SỐ**
Ngày thi: 04/03/2023
Thời gian làm bài: **90** phút
Không được sử dụng tài liệu

**Câu 1.**

a/ Cho $A$ là ma trận vuông thực, cấp $n$, và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\det(A-\alpha I_n)=0$, với $I_n$ là ma trận đơn vị cấp $n$. Chứng minh rằng với mọi $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, ta có $\det\left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k I_n\right)=0$.

b/ Cho $A, B, C$ là các ma trận vuông thực, cấp $n$, thỏa mãn: $C^2 = I_n, AC = CA, BC = CB, AB = 2(A+B)C$.

b1/ Chứng minh rằng: $AB = BA$.

b2/ Giả sử thêm rằng $A+B+C=O_n$. Chứng minh rằng $rank(A-C)+rank(B-C)=n$.

**Câu 2.**

Cho ma trận thực $A=\begin{pmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2C_2^0 & \cdots & 2^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2C_2^1 & \cdots & 2^{n-1}C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của $A$.

**Câu 3.**

a/ Cho $A$ là ma trận vuông thực, cấp $n$, có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực $\lambda$ sao cho $A^2 = \lambda A$.

b/ Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm $A^{2023}$.

**Câu 4.**

a/ Cho $A, B$ là các ma trận vuông thực cấp $n$, đều là nghiệm của đa thức $f(x)=x^2-x$ và $AB+BA=O_n$. Tính $\det(A-B)$, với $O_n$ là ma trận vuông cấp $n$ có mọi hệ số đều bằng 0.

b/ Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$1+P(x)=\frac{1}{2}[P(x+1)+P(x-1)], \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

a/ Cho ma trận thực $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch. Giả sử rằng $B$ là một ma trận vuông cấp 2 khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận $M=\begin{pmatrix} aA & bB \\ cA & dB \end{pmatrix}$ cũng khả nghịch.

b/ Cho $A$ là ma trận vuông thực, cấp 3, có tổng các phần tử trên mỗi dòng bằng 4, và $\det(A)=16$, trace $(A)=8$. Tìm các giá trị riêng của $A$.

**Câu 6.**

Cho $A, B$ là các ma trận vuông thực cấp $n$, lũy linh.

a/ Tìm các trị riêng và đa thức đặc trưng của $A$.

b/ Giả sử $AB+A+B=O_n$. Tính $\det(I_n+2A+3B)$.

------------------------------------

**Hết**

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

**TRƯỞNG BỘ MÔN**