Buổi 11 – Ngày 28-12-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

CHƯƠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

6/ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 DẠNG BERNOULLI:

Là pt vi phân cấp 1 có dạng:

$y'+p(x).y=f(x)y^n$ (*) dạng Bernoulli của hàm y theo biến x

Hay là $x'+p(y).x=f(y)x^n$ → dạng Bernoulli của hàm x theo biến y

với n là số thực.

TH1: $n=0$ ta có $y^0=1$ nên pt (*) tương đương $y'+p(x).y=f(x)$

Đây là pt vi phân tuyến tính cấp 1 của hàm y theo biến x

Ta giải tiếp như phần 5/

TH2: $n=1$ ta có $y^1=y$ nên pt (*) tương đương $y'+p(x).y=f(x)y$

$y'=[f(x)-p(x)]y$

Ta thay $y'=\dfrac{dy}{dx}$ vào pt và giải tiếp như pt vi phân cấp 1 dạng tách biến.

TH3: $n\neq 0, n\neq 1$

Ta đặt $z=y^{1-n}$. Suy ra $z'=(1-n)y^{-n}.y'\Rightarrow y'=\dfrac{z'}{(1-n)y^{-n}}=\dfrac{z'.y^n}{1-n}$

Ta thay y' vào pt(*) thì được

$$\frac{z'.y^n}{1-n}+p(x).y=f(x).y^n\Leftrightarrow z'.y^n+(1-n)p(x)y=(1-n)f(x).y^n \quad (**)$$

TH3.1: $y=0\Rightarrow y^n=0$ nên pt tương đương

$z'.0+(1-n)p(x).0=(1-n)f(x).0\Leftrightarrow 0=0$ (luôn đúng)

TH3.2: $y\neq 0$. Chia 2 vế pt cho y^n

Thì pt(**) $\Leftrightarrow z'+(1-n)p(x)\dfrac{y}{y^n}=(1-n)f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow z'+(1-n)p(x).y^{1-n}=(1-n)f(x)\\ \Leftrightarrow z'+(1-n)p(x).z=(1-n)f(x)\end{array}\right. \quad (***)$$

Đây là pt vi phân tuyến tính cấp 1 của hàm z theo biến x

Ta giải tiếp (như phần 5/, bằng pp Bernoulli) để tìm nghiệm tổng quát

$z_{tq}=A(x).B(x)$

Mà $z=y^{1-n}\Rightarrow y=\sqrt[1-n]{z}$ nên nghiệm tổng quát của pt (*) là

$$y_{tq} = \sqrt[1-n]{z_{tq}}$$

<u>Ví dụ mẫu</u>: giải pt vi phân $y' + \frac{y}{x} = xy^2$, với $x \neq 0$ (*)

<u>Giải</u>: Ta có $p(x) = \frac{1}{x}$ và $f(x) = x$, $n = 2$

Đặt $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -1.y^{-2}.y' \Rightarrow y' = \frac{z'}{-1.y^{-2}} = -z'.y^2$

Ta có pt (*) tương đương $-z'.y^2 + \frac{y}{x} = xy^2$ (**)

<u>TH1</u>: $y = 0 \Rightarrow y^2 = 0$ nên (**) tương đương $-z'.0 + \frac{0}{x} = x.0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng, $\forall x \neq 0$)

<u>TH2</u>: $y \neq 0$ chia 2 vế pt cho y^2 ta được

$$(**) \Leftrightarrow -z' + \frac{y}{x}.\frac{1}{y^2} = x \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}.y^{-1} = x \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}.z = x \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x}.z = -x \quad (***)$$

Đây là pt vi phân tuyến tính cấp 1 của hàm z theo biến x

Ta đặt $A(x) = e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = |x|$

$$B(x) = \int \frac{f(x)}{A(x)}dx + C = \int \frac{-x}{|x|}dx + C$$

TH2.1: $B(x) = \int \frac{f(x)}{A(x)}dx + C = \int \frac{-x}{x}dx + C = \int -1dx + C = -x + C$ (nếu $x > 0$)

TH2.2: $B(x) = \int \frac{f(x)}{A(x)}dx + C = \int \frac{-x}{-x}dx + C = \int 1dx + C = x + C$ (nếu $x < 0$)

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là

$z_{tq} = A(x).B(x) = x(-x + C)$ (nếu $x > 0$)

Hay $z_{tq} = A(x).B(x) = -x(x + C)$ (nếu $x < 0$)

Viết gọn: $z_{tq} = -x^2 + Cx$. Mà $z = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$ nên nghiệm tổng quát cần tìm là

$y_{tq} = \frac{1}{z_{tq}} = \frac{1}{-x^2 + Cx}$, với $C =$ hằng số thỏa $-x^2 + Cx \neq 0$

<u>Bài tập tương tự</u>: giải các pt vi phân sau:

1/ $y' + \frac{y}{x} = 4x^2y^4$, với $x > 0$

2/ $y' + \frac{y}{x} = x^3y^6$, với $x > 0$

3/ $x' + \frac{x}{y} = 8xy$, với $y > 0$

4/ $x' + \frac{x}{y} = 10x^3y^3$, với $x > 0, y > 0$

5/ $y'x^3 \sin y + 2y = xy'$

6/ $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$, với $x > 0, y > 0$.

7/ $y' - \frac{2y}{x} = 10x^4y^4$, với $x > 0$

8/ $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$, với $x \neq \pm 1, y \geq 0$

9/ $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$, với $x > 0$

10/ $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$, với $x > 0$

11/ $y' - 2y\tan x + y^2 \sin^2 x = 0$

12/ $y' = y(y^3 \cos x + \tan x)$

13/ $x^2y^2y' + xy^3 = 1$

14/ $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$ *

15/ $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin(2y)}$ *

16/ $xy' + y = 2x^2y\ln y.y'$, với $y > 0$.

17/ $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$ thỏa $y(0) = 1$

18/ $3dy + (1+3y^3)y\sin xdx = 0$ thỏa $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

19/ $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$ thỏa $y(1) = 0$

20/ $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$ thỏa $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

7/ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Xét dạng pt vi phân cấp 2 tuyến tính, hệ số hằng, không thuần nhất, là pt có dạng:

$y'' + p.y' + q.y = f(x)$, (*) với $p, q =$ hằng số

Cách giải:

+ Ta viết dạng thuần nhất của pt (*) là: $y'' + p.y' + q.y = 0$.

+ Ta có dạng đặc trưng của pt thuần nhất: $k^2 + p.k + q = 0$.

+ Đây là pt bậc 2 theo biến k nên ta giải tiếp bằng cách tính $\Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q$

hoặc là $\Delta' = (b')^2 - ac = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

TH1: $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$

Pt có 2 nghiệm thực phân biệt là:

$$k_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}\left(= \frac{-\frac{p}{2}-\sqrt{\Delta'}}{1}\right)$$

$$k_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}\left(= \frac{-\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta'}}{1}\right)$$

Ta có nghiệm của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, với $C_1, C_2 =$ hằng số.

TH2: $\Delta = 0$ hoặc $\Delta' = 0$

Pt đặc trưng có nghiệm kép (bội 2) là:

$$k = k_1 = k_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2}$$

Ta có nghiệm của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn} = C_1 e^{kx} + C_2 . x . e^{kx}$, với $C_1, C_2 =$ hằng số.

TH3: $\Delta < 0$ hoặc $\Delta' < 0$

Ta khai căn của số phức Δ hoặc Δ'

(ví dụ: $\Delta = -4 < 0$, khai căn phức ta có $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4i^2} = \pm 2i$)

Pt đặc trưng có 2 nghiệm phức phân biệt là:

$k_1 = \alpha - \beta i$ và

$k_2 = \alpha + \beta i$, với $\alpha =$ phần thực và $\beta =$ phần ảo của cả 2 số phức k_1, k_2

Ta có nghiệm của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn} = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$, với $C_1, C_2 =$ hằng số.

Tiếp theo, ta tìm nghiệm riêng cho pt (*) như sau:

Xét vế phải (*) $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos(bx) + Q_n(x)\sin(bx)]$

Ta xác định $P_m(x) =$ đa thức bậc m dính với biểu thức $\cos(bx) \Rightarrow m = ?$

$Q_n(x) =$ đa thức bậc n dính với biểu thức $\sin(bx) \Rightarrow n = ?$

Ta tìm $l = \max(m, n) = ?$

Ta đề xuất $A_l(x) =$ đa thức bậc l cần tìm, dính với biểu thức $\cos(bx)$

$B_l(x) =$ đa thức bậc l cần tìm, dính với biểu thức $\sin(bx)$

Từ VP của (*) ta xác định $\begin{cases} a = ... \\ b = ... \end{cases} \Rightarrow a + ib = ...?$

xem có trùng khớp với nghiệm bội (cấp r) nào của pt đặc trưng hay không?

Nếu có, thì

$$y_{riêng} = x^r.e^{ax}[A_l(x)\cos(bx) + B_l(x)\sin(bx)]$$

Nếu không trùng, thì

$$y_{riêng} = e^{ax}[A_l(x)\cos(bx) + B_l(x)\sin(bx)]$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} y'_{riêng} = ... \\ y''_{riêng} = ... \end{cases}$

Ta thay $y_{riêng}$, $y'_{riêng}$, và $y''_{riêng}$, rút gọn, ta tìm ra $\begin{cases} A_l(x) = ... \\ B_l(x) = ... \end{cases}$

Suy ra $y_{riêng} = ...$

Kết luận: nghiệm tổng quát của pt (*) là:

$$y_{tq} = y_{tqtn} + y_{riêng}$$

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Giải pt vi phân $y'' - 3y' + 2y = e^x[4\cos x - 3x\sin x]$ (*)

<u>Giải</u>:

Ta có dạng thuần nhất của pt (*) là:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Ta có dạng đặc trưng của pt thuần nhất

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k-2) = 0$$

Nghiệm của pt đặc trưng là $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, nên nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} = C_1e^x + C_2e^{2x}$, với C_1, C_2 là hằng số.

Tiếp theo, ta tìm nghiệm riêng cho pt (*) như sau

Từ VP của (*) ta có $P_m(x) = 4 \Rightarrow m = 0$

$Q_n(x) = -3x \Rightarrow n = 1$

Suy ra $l = \max(m,n) = \max(0,1) = 1$.

Gọi $A_l(x) = A_1(x) = ax + b$ và

$B_l(x) = B_1(x) = cx + d$ là 2 đa thức cần tìm.

Từ VP của (*) ta có: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+ib=1+1.i=1+i$ không trùng với nghiệm nào của pt đặc trưng, nên ta có

$$y_{riêng}=e^x[A_1(x)\cos x+B_1(x)\sin x]=e^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$$

$$y'_{riêng}=e^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]+e^x[a\cos x-\sin x(ax+b)+c\sin x+\cos x(cx+d)]$$

$$=e^x[(ax+b+a+cx+d)\cos x+(cx+d-ax-b+c)\sin x]$$

$$y''_{riêng}=e^x[(ax+b+a+cx+d)\cos x+(cx+d-ax-b+c)\sin x]$$

$$+e^x[(a+c)\cos x-\sin x(ax+b+a+cx+d)+(c-a)\sin x+\cos x(cx+d-ax-b+c)]$$

$$=e^x[(ax+b+a+cx+d+a+c+cx+d-ax-b+c)\cos x$$

$$+(cx+d-ax-b+c-ax-b-a-cx-d+c-a)\sin x]$$

Ta thay $y_{riêng}, y'_{riêng}, y''_{riêng}$ vào pt (*) thì được:

$$e^x[(ax+b+a+cx+d+a+c+cx+d-ax-b+c)\cos x$$

$$+(cx+d-ax-b+c-ax-b-a-cx-d+c-a)\sin x]$$

$$-3e^x[(ax+b+a+cx+d)\cos x+(cx+d-ax-b+c)\sin x]$$

$$+2e^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]=e^x[4\cos x-3x\sin x]$$

Do $e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$, nên đơn giản e^x rồi đồng nhất thức 2 vế ta được

$$\begin{cases} a+c+c-a-3a-3c+2a=0 \\ b+a+d+a+c+d-b+c-3b-3a-3d+2b=4 \\ c-a-a-c-3c+3a+2c=-3 \\ d-b+c-b-a-d+c-a-3d+3b-3c+2d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-c=0 \\ -a-b+2c-d=4 \\ a-c=-3 \\ -2a+b-c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2}-b+3-d=4 \\ c=\dfrac{3}{2} \\ 3+b-\dfrac{3}{2}-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ -b-d=-\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{3}{2} \\ b-d=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{3}{2} \\ d=1 \end{cases}$$

Vậy $y_{riêng}=e^x\left[\left(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cos x+\left(\frac{3}{2}x+1\right)\sin x\right]$

Kết luận nghiệm tổng quát cần tìm là:

$$y_{tq}=y_{tqtn}+y_{riêng}=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^x\left[\left(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cos x+\left(\frac{3}{2}x+1\right)\sin x\right],$$

với C_1, C_2 là hằng số.

Ví dụ mẫu 2: Giải pt vi phân $y''-4y'+4y=10e^{2x}$ (*)

Giải:

Ta có dạng thuần nhất của pt là:

$$y''-4y'+4y=0$$

Ta có dạng đặc trưng của pt thuần nhất là:

$k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow (k-2)^2=0 \Leftrightarrow k=k_1=k_2=2$ (nghiệm kép, nghiệm bội 2)

Nên nghiệm của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$, với C_1,C_2 là hằng số.

Tiếp theo, ta tìm nghiệm riêng cho pt (*) như sau:

Ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+ib=2+i.0=2$ trùng với nghiệm bội 2 của pt đặc trưng, nên

$y_{riêng}=x^2Ae^{2x}$. Suy ra

$y'_{riêng}=A[2xe^{2x}+2x^2e^{2x}]=2Ae^{2x}[x+x^2]$, và

$y''_{riêng}=2A[2e^{2x}(x+x^2)+e^{2x}(1+2x)]=2Ae^{2x}[2x+2x^2+1+2x]$

Ta thay $y_{riêng},y'_{riêng},y''_{riêng}$ vào pt (*) thì được:

$$2Ae^{2x}[2x+2x^2+1+2x]-4.2Ae^{2x}[x+x^2]+4.x^2Ae^{2x}=10e^{2x}$$

Do $e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$, nên rút gọn 2 vế cho e^{2x} rồi đồng nhất thức 2 vế ta được:

$$\begin{cases} 4A-8A+4A=0 \\ 4A+4A-8A=0 \Leftrightarrow A=5 \\ 2A=10 \end{cases}$$

Vậy $y_{riêng}=5x^2e^{2x}$.

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là:

$y_{tq}=y_{tqtn}+y_{riêng}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+5x^2e^{2x}$, với C_1,C_2 là hằng số.

Ví dụ mẫu 3: Giải pt vi phân $y''-2y'+2y=2x^2-10x+5$

Giải:

Ta có dạng thuần nhất của pt là:

$$y''-2y'+2y=0$$

Ta có dạng đặc trưng của pt thuần nhất là:

$$k^2-2k+2=0$$

Ta có $\Delta'=(-1)^2-1.2=1-2=-1<0$, nên ta khai căn của Δ' như sau:

$$\sqrt{\Delta'}=\sqrt{-1}=\sqrt{i^2}=\pm i$$

Nên pt đặc trưng có 2 nghiệm phức phân biệt là:

$$k_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-1) - i}{1} = 1 - i \text{ và}$$

$$k_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-1) + i}{1} = 1 + i$$

Cho nên phần thực là $\alpha = 1$ và phần ảo là $\beta = 1$,

Nên nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$y_{tqtn} = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] = e^{x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x]$, với C_1, C_2 là hằng số.

Tiếp theo, ta tìm nghiệm riêng cho pt (*) như sau:

Từ VP (*) ta có: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + ib = 0 + i.0 = 0$ không trùng với nghiệm nào của pt đặc trưng, nên ta có:

$y_{riêng} = ax^2 + bx + c$. Suy ra

$y'_{riêng} = 2ax + b$ và

$y"_{riêng} = 2a$

Ta thay $y_{riêng}, y'_{riêng}, y"_{riêng}$ vào pt (*) thì được:

$$2a - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 10x + 5$$

Đồng nhất thức 2 vế ta có:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -4a + 2b = -10 \\ 2a - 2b + 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ 2c = 5 - 2 + 2(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $y_{riêng} = x^2 - 3x - \dfrac{3}{2}$.

Kết luận: nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq} = y_{tqtn} + y_{riêng} = e^{x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x] + x^2 - 3x - \dfrac{3}{2}$,

với C_1, C_2 là hằng số.

<u>Bài tập tương tự</u>: giải các pt vi phân sau:

1/ $y" - y' - 6y = 4e^{3x}$

2/ $y" - 5y' + 6y = (2x + 3)e^{-x}$

3/ $y" + 4y = \cos(2x)$

4/ $y" - 4y' + 3y = 4x^2 - 8x + 3$

5/ $y" - 6y' + 5y = (20x - 8)e^{x}$

6/ $y" - 2y' + y = 1 + x$

7/ $y''-6y'+9y=6e^{3x}$

8/ $y''+y=5\sin(2x)$

9/ $y''+2y'+y=\cos x$

10/ $y''-2y'=2\cos^2 x$ (gợi ý: dùng công thức hạ bậc $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, sau đó ta đưa pt về dạng:

$y''-2y'=1+\cos(2x)$ → Viết dạng thuần nhất → $y_{tqtn}=...$

→ Tìm nghiệm riêng 1: ứng với pt: $y''-2y'=1$ → $y_{riêng1}=...$

→ Tìm nghiệm riêng 2: ứng với pt: $y''-2y'=\cos(2x)$ → $y_{riêng2}=...$

Suy ra, nghiệm tổng quát cần tìm là $y_{tq}=y_{tqtn}+y_{riêng1}+y_{riêng2}$)

11/ $y''-3y'+2y=2x^3-30$

12/ $y''-4y'+5y=3x^2$

13/ $y''+2y'-3y=4e^{-x}$

14/ $y''+y=-3\cos(2x)+\dfrac{9}{4}x\sin(2x)$

15/ $y''+y=x\cos x$

16/ $y''-2y'+2y=e^x\sin x$

17/ $y''+y'-2y=x-e^x$ *

18/ $y''-3y'+2y=3x+5\sin(2x)$ *

19/ $y''-4y'+4y=\sin x\cos(2x)$ *

20/ $y''+2y'+5y=8e^x$

21/ $y''+3y'-4y=2\cos x-5\sin x$

22/ $y''+y=4\sin x+2\cos x$

23/ $y''-2y'+5y=5x^2+4x+12$

24/ $y''-y=\cos(2x)$

25/ $y''+y=4e^x$ thỏa $y(0)=1$ và $y'(0)=-3$

26/ $y''+2y'+2y=e^x(2x+3)$

27/ $y''+3y'+2y=2e^{-x}$

28/ $y''+4y=\cos(2x)$

29/ $y''+9y=4\cos(3x)$

30/ $y''-2y'+5y=e^x(3x+4)$

31/ $y''-4y=e^{2x}$

32/ $y''+2y'=3x+e^{-2x}$ *

33/ $y''+6y'+9y=e^{-2x}$