

Bài tập Giải tích - Phần 1

Nguyễn Minh Trí

Ngày 15 tháng 9 năm 2023

1 Giới hạn và đạo hàm của hàm một biến

Bài 1.1. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nào dưới đây là song ánh?

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x + \sin x$

b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x \operatorname{sign}(x)$

c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

Bài 1.2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a. $f(x) = \arcsin(2x^2 + 3x + 1)$

b. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1 + x^2}{2x}\right)$

Bài 1.3. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a. $f(x) = \operatorname{arccot}(2x - x^2)$

b. $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$

Bài 1.4. Tính các giới hạn sau đây:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 6x}{\sin 5x - \sin 3x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}\right)$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 3x}{4x - \sin 5x}$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x + 1}\right)^x$

k. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\tan 3x - 2x}{3x - \sin^2 x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 1}{\sqrt{1 + \sin x} - 1}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$

j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + 1}\right)^x$

j. $\lim_{x \rightarrow} \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}$

Bài 1.5. Tính các giới hạn một phía

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

e. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \tan \sqrt{1-x}, & \text{với } x \leq 1 \\ \frac{\sin^2 \sqrt{x^2-1}}{3x^2-3}, & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

Tính $f(1); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Bài 1.6. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + |x|}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}, & \text{nếu } x \neq \pi \\ -\pi, & \text{nếu } x = \pi \end{cases}$ tại $x = \pi$

c. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0 \\ x^2, & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 4, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 0$ và $x = 1$

Bài 1.7. Tìm A, B sao cho các hàm số sau liên tục

a. $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{\cos x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ A, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ trên \mathbb{R} .

b. $f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & \text{nếu } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B, & \text{nếu } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \text{nếu } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ trên \mathbb{R} .

Bài 1.8. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm sau:

a. $f(x) = 1 + \ln x$ với $x = 1$

b. $f(x) = 2 \sin 3x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Bài 1.9. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng hàm số liên tục tại $x = 0$.

b. Tính đạo hàm $f'(x)$ khi $x \neq 0$.

c. Tính $f'(0)$.

Bài 1.10. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

a. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 0$.

b. Tìm m để hàm số khả vi tại $x = 0$.

Bài 1.11. Tìm a, b để các hàm số sau có đạo hàm tại $x = a$

a. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{nếu } x \neq 1 \\ ax + b, & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

b. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{nếu } x \neq 0 \\ ax + b, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

c. $f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx}, & \text{nếu } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Bài 1.12. Tính gần đúng các giá trị sau:

a. $\sin 29^\circ$

b. $\sqrt[3]{65}$

c. $\tan 44^\circ 50'$

Bài 1.13. Dùng qui tắc L'Hospital để tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$

g. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^{x^2}}$

h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x - 1)}{\ln(e^x - e)}$

j. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \tan \frac{\pi x}{2}$

k. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

l. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

m. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} \right)$

n. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$

2 Tích phân hàm số một biến

Bài 2.1. Tính các tích phân sau:

a. $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}} dx$
b. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$
c. $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$

d. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$
e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
f. $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$

Bài 2.2. Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx$
b. $\int_0^\pi x \sin x dx$
c. $\int_1^e x \ln^2 x dx$
d. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$
e. $\int_1^{\ln 2} x e^{-x} dx$
f. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

Bài 2.3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a. $y = 2x - x^2, y = -x$ (ĐS: $\frac{9}{2}$ đvdt)
b. $y = \frac{x^2}{3}, y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ (ĐS: $\frac{32}{3}$ đvdt)
c. $x = 2 - y - y^2$ và trục Oy (ĐS: $\frac{9}{2}$ đvdt)
d. $x = (2 + \sin t) \cos t, y = (2 \sin t) \sin t$ (ĐS: $\frac{9\pi}{2}$ đvdt)

Bài 2.4. Tính độ dài đường cong

a. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ từ $x = 1$ đến $x = 4$. (ĐS: 6 đvdd)
b. $2y = x^2 - 2$ phần giữa các giao điểm với Ox (ĐS: $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ đvdd)
c. $x = t^2 \sin t, y = t^2 \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$. (ĐS: $\frac{8}{3} \left((1 + \pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$ đvdd)

Bài 2.5. Tính các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ (ĐS: $\frac{1}{2}$)
b. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ (ĐS: $\frac{1}{2}$)
c. $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (ĐS: $\frac{13 \cdot 2^5}{15}$)
d. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ (ĐS: -1)
e. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$ (ĐS: $\frac{\pi}{2}$)
f. $\int_0^1 x \ln^2 x dx$ (ĐS: $\frac{1}{4}$)
g. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx$ (ĐS: $\frac{\pi}{4}$)
h. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$, ($b > a$) (ĐS: π)
i. $\int_0^1 \ln x dx$ (ĐS: -1)
j. $\int_{-1}^0 \frac{e^{-x} dx}{x^3}$
k. $\int_0^4 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ (ĐS: -1)
l. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

Bài 2.6. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

- | | |
|---|--|
| <p>a. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$ (hội tụ)</p> <p>b. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$ (phân kì)</p> <p>c. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} dx$ (hội tụ)</p> <p>d. $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$ (phân kì)</p> <p>e. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$ (hội tụ)</p> | <p>f. $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) dx$ (hội tụ)</p> <p>g. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} dx$ (hội tụ)</p> <p>h. $\int_0^1 \frac{\sin 5x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (hội tụ)</p> <p>i. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ (phân kì)</p> <p>j. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$ (phân kì)</p> |
|---|--|

Bài 2.7. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Tìm k và $P(X \geq 2)$.

Bài 2.8. Tuổi thọ của một loại máy in (tính bằng năm) là một biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 0,02e^{-0,02x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Chọn ngẫu nhiên một máy in.

- a. Tính xác suất máy đó có tuổi thọ từ 10 đến 15 năm.
- b. Xác suất máy đó sử dụng được ít nhất 1 năm là bao nhiêu?

3 Chuỗi số và chuỗi hàm

Bài 3.1. Dùng định nghĩa chứng minh các chuỗi số sau hội tụ và tính tổng của chúng

- a. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$
- b. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$
- c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
- d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
- e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n}$

Bài 3.2. Dùng các tiêu chuẩn so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

- a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{100n^2+2}$
- b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
- c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
- d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$
f. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$
g. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$
h. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
j. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
k. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 2n}$
l. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{5^n + 1}$

Bài 3.3. Dùng các tiêu chuẩn tỉ số hoặc tiêu chuẩn căn để xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{2^n}$
b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$
c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n \cdot n^2}$
d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{2n} (n-1)!}$
e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$
f. $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \cdots$

g. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$
h. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$
i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n \cdot (n!)^2}{n^{2n}}$
j. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$
k. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$
l. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n$

Bài 3.4. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$ b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)! x^n}{n!}$
c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$ d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} (x-1)^n$

Bài 3.5. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$ e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n 5^n}$
b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ f. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) 2^n}$
c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$ g. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$
d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$ h. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x)^{2n}}{n 9^n}$

4 Hàm số nhiều biến

Bài 4.1. Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, 2)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (1 + xy)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$

d. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

e. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, 2)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

f. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (1 + xy)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$

g. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

h. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Bài 4.2. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại.

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x - y}$

b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{y}$

c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

d. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4 + y^4}$

f. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y}{1 - y + \ln x}$

g. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \cos y}{x^2 + y^4}$

h. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

Bài 4.3. Tìm a để hàm số sau liên tục tại $(0, 0)$

a. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Bài 4.4. Cho hàm số sau

a. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ Tính $f_x(0, 0)$ và $f_y(0, 0)$.

b. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ Tính $f_{xy}(0, 0)$ và $f_{yx}(0, 0)$.

Bài 4.5. Tìm cực trị của hàm số

a. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

b. $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

c. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$

d. $z = 4xy - x^4 - y^4$

e. $z = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

f. $f(x, y) = xy - xy^2 - x^2y$

Bài 4.6. Tìm cực trị của hàm số

a. $f(x, y) = 2x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

b. $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 3x + 4y$

c. $z = 10x + 40y$ với điều kiện $\sqrt{xy} = 20$.

d. $z = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.