HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2022

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG A

Lời giải bài A.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm A.1
a			**Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$**	**2,00**
		1	Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng	1,00
			Từ định nghĩa $$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n$$ với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.	1,00
		2	Khẳng định $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$	1,00
			Do $$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$.	1,00
b			**Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ**	**2,00**
		1	Khẳng định (u_n) bị chặn trên	1,00
			Sử dụng đánh giá $n! \geq n(n-1)$ để thấy $$u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 2$$ với mọi $n \geq 2$.	1,00
		2	Khẳng định (u_n) hội tụ	1,00
			Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ.	1,00
c			**Chứng minh rằng giới hạn của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là một số vô tỉ**	**2,00**
			Phản chứng giả sử giới hạn của dãy là hữu tỉ, tức là $$\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots = \frac{m}{n}$$ với m, n nguyên tố cùng nhau. Nhân hai vế với $n!$ ta đi đến $$n!\Big(\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big) + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots}_{S} = (n-1)!m.$$ Vậy $S \in \mathbb{N}^*$. Từ đây suy ra $nS \geq 1$, tức là $(n+1)S - 1 \geq S$, tức là $$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots.$$ Đây là điều vô lý.	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG A

Lời giải bài A.2 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm A.2
a			**Chứng minh f liên tục tại 0**	**2,00**
		1	Tính giới hạn của f tại 0	1,00
			Với mọi x ta luôn có $$0 \leq \lvert f(x)\rvert = \sin^2 x \leq x^2.$$ Do đó theo nguyên lý kẹp thì $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.	1,00
		2	Khẳng định tính liên tục của f tại 0	1,00
			Ở bước trên ta đã có $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Nhưng $0 \in \mathbb{Q}$ nên $f(0) = \sin^2 0 = 0$. Vậy f liên tục tại 0.	1,00
b			**Hàm f có khả vi tại 0 không?**	**2,00**
		1	Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$	1,00
			Ta khảo sát giới hạn $$\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$	1,00
		2	Tính giới hạn của $f(x)/x$	1,00
			Rõ ràng với $x \neq 0$ thì $0 \leq \lvert f(x)/x\rvert \leq x$. Vậy $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$ Từ đó hàm f khả vi tại 0.	1,00
c			**Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi**	**2,00**
		1	Khẳng định f không khả vi tại $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	1,00
			Nhận xét: nếu $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì $\sin x \neq 0$. Có 2 trường hợp xảy ra: **Nếu** $x \in \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = \sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \notin \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-\sin^2 x_n) = -\sin^2 x \neq \sin^2 x = f(x).$$ **Nếu** $x \notin \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = -\sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 x_n = \sin^2 x \neq -\sin^2 x = f(x).$$	1,00
		2	Khẳng định f khả vi tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	1,00
			Cuối cùng chú ý rằng $f(k\pi) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do $$\left\lvert \frac{f(k\pi+x)-f(k\pi)}{x} \right\rvert = \left\lvert \frac{f(x)}{x} \right\rvert,$$ lý luận như ý (b) ta thấy tại các điểm $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì f khả vi với $f'(k\pi) = 0$.	1,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG A

Lời giải bài A.3 — 6 điểm

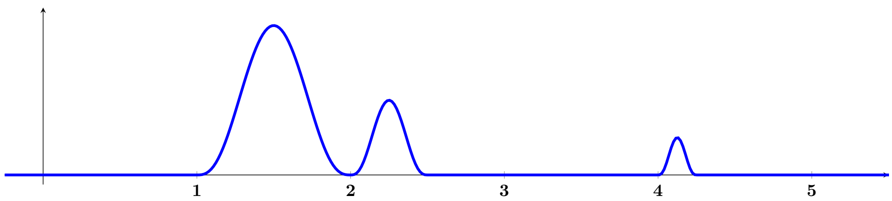
Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm A.3
a			**Chứng minh rằng tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho $f'(x_n) \to 0$**	**2,00**
		1	Sử dụng công thức giá trị trung bình	1,00
			Sử dụng công thức giá trị trung bình trên các đoạn $[n, n+1]$ ta thu được $$f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$$ với $x_n \in (n, n+1)$ nào đó.	
		2	Chỉ ra sự tồn tại một dãy $(x_n)_n$ cần tìm	1,00
			Hiển nhiên dãy $(x_n)_n$ xác định như ở bước trên tiến ra $+\infty$. Hơn nữa do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên $$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0.$$	1,00
b			**Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$**	**2,00**
		1	Đánh giá f' thông qua khai triển Taylor	1,00
			Từ công thức Khai triển Taylor ta có $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$$ với $x, h > 0$ và $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào x và h. Do f'' bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\lvert f''(x)\rvert < M$ với mọi $x > 0$. Khi đó từ công thức khai triển trên $$\lvert f'(x)\rvert \le \frac{\lvert f(x+h) - f(x)\rvert}{h} + \frac{Mh}{2}.$$	1,00
		2	Kết luận giới hạn của f'	1,00
			Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $$\lvert f(x)\rvert < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \ge x_0.$$ Do đó $$\lvert f'(x)\rvert \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \forall x \ge x_0.$$ Đến đây ta lấy $$h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$$ để thu được $$\lvert f'(x)\rvert \le \sqrt{2\varepsilon M} \quad \forall x \ge x_0.$$ Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$	1,00

<table>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td>Nếu f' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ có tồn tại không?</td><td>2,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>Xây dựng hàm f thuộc $C^2(\mathbb{R})$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
Trước tiên ta xét hàm phụ $h(x) = \phi(x)\phi(1-x)$ trong đó

$$\phi(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Hàm h xây dựng như trên có tính chất $h \in C^2(\mathbb{R})$, $h \equiv 0$ ngoài $[0,1]$, đối xứng qua $1/2$, và h' bị chặn. Tiếp theo ta xây dựng phản ví dụ cho bài toán như sau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h(2^n(x - 2^n)).$$



Dễ kiểm tra hàm f xây dựng như trên được định nghĩa tốt. Giá trị hàm f chỉ khác không trên các khoảng có dạng

$$\left(2^n, 2^n + \frac{1}{2^n}\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Do hệ số 2^{-n} nên $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td>Kết luận không tồn tại $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
Dễ kiểm tra với f như trên thì f' bị chặn vì h' bị chặn. Với các điểm

$$x_n = 2^n + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$$

thì gần x_n ta có

$$f(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n(x - 2^n))$$

và do đó

$$f'(x_n) = h'(2^n(x_n - 2^n)) = 0.$$

Tuy nhiên, với các điểm

$$y_n = 2^n + \frac{1}{4}\frac{1}{2^n}$$

thì gần y_n ta vẫn có

$$f(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n(x - 2^n))$$

do đó

$$f'(y_n) = h'(2^n(y_n - 2^n)) = \frac{27}{512}.$$

Nhận xét 1. Không khó để thấy f'' không bị chặn. Thật vậy

$$f''(x_n) = 2^n h''(2^n(x_n - 2^n)) = -3 \cdot 2^{n-3}.$$

Nhận xét 2. Hàm f xây dựng từ các tích phân Fresnel có dạng

$$f(x) = \int_0^x \left[\sin(t^2) - \cos(t^2)\right] dt$$

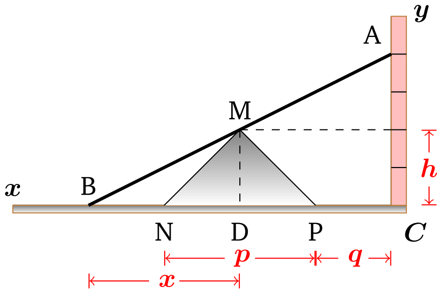
cũng là một phản ví dụ.
</td><td></td></tr>
</table>

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG A

Lời giải bài A.4 — 6 điểm



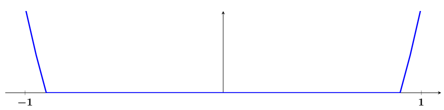
Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm A.4
			Xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB	**6,00**
		1	Đặt bài toán	2,00
			Đặt $BD = x$ mét với $x \geq p/2$. Khi đó $$BM = \sqrt{x^2 + h^2}.$$ Vì $\Delta BDM \sim \Delta BCA$ ta suy ra $$MA = \frac{DC}{DB} \times MB = \frac{p/2 + q}{x}\sqrt{x^2 + h^2}.$$ Vậy $$AB = MA + MB = \sqrt{x^2 + h^2}\frac{x + p/2 + q}{x} =: f(x).$$	2,00
		2	Khảo sát hàm f trên $[p/2, \infty)$	2,00
			Tính toán để thu được $$f'(x) = \frac{2x^3 - (p + 2q)h^2}{2x^2\sqrt{x^2 + h^2}}$$ Rõ ràng $f'(x) = 0$ tại duy nhất $$x = \left((\frac{p}{2} + q)h^2\right)^{1/3} =: x_0.$$	2,00
		3	Kết luận độ dài ngắn nhất của thang AB	2,00
			Có 2 trường hợp xảy ra: **Trường hợp** $4(p + 2q)h^2 \leq p^3$: Khi đó hàm f đồng biến trên $[p/2, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $B \equiv N$, tức là khi thang tựa trên giá đỡ. Lúc này chiều dài của thang AB là $$(p + q)\sqrt{1 + (\frac{2h}{p})^2}.$$ **Trường hợp** $4(p + 2q)h^2 > p^3$: Khi đó hàm f nghịch biến trên $[p/2, x_0]$ và đồng biến trên $[x_0, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $BN = x_0 - p/2$. Lúc này chiều dài của thang AB là $$\left(x_0 + \frac{p}{2} + q\right)\sqrt{1 + (\frac{h}{x_0})^2}.$$	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG A

Lời giải bài A.5 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm A.5
a		1	Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục	**2,00**
			Lấy $x \in [-1,1]$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta chứng minh tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào x và ε) sao cho $\lvert f(x) - f(y)\rvert < \varepsilon$ với mọi $y \in [-1,1]$ thỏa mãn $\lvert x-y\rvert < \delta$. Thật vậy ta lấy $$\delta = \frac{\varepsilon}{2022}.$$ Khi đó với $y \in [-1,1]$ bất kỳ thỏa mãn $\lvert x-y\rvert < \delta$ ta sẽ có $$\lvert f(x)-f(y)\rvert \le 2022\lvert x-y\rvert < 2022\delta = \varepsilon.$$	2,00
b			Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\int_{-1}^{1} f(x)dx \ge \frac{1}{2022}$	**2,00**
		1	Chứng minh $f(x) \ge \max(1+2022(\lvert x\rvert-1),0)$ với mọi $x \in [-1,1]$.	1,00
			Rõ ràng $$\max(1+2022(\lvert x\rvert-1),0) = 0 \quad \forall x \in [-\frac{2021}{2022}, \frac{2021}{2022}].$$ Với $-1 \le x < -\frac{2021}{2022}$ ta có $$f(x) \ge f(-1) - \lvert f(x)-f(-1)\rvert \ge 1 - 2022\lvert x+1\rvert = 1+2022(\lvert x\rvert-1).$$ Với $\frac{2021}{2022} < x \le 1$ ta có $$f(x) \ge f(1) - \lvert f(x)-f(1)\rvert \ge 1-2022\lvert x-1\rvert = 1+2022(\lvert x\rvert-1).$$	1,00
		2	Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$	1,00
			Do $f \ge 0$ trên $[-1,1]$ nên $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \ge \int_{-1}^{-\frac{2021}{2022}} (1-2022(x+1))dx + \int_{\frac{2021}{2022}}^{1} (1+2022(x-1))dx = \frac{1}{2022}.$$	1,00
c			Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không?	**2,00**
			Dấu đẳng thức đạt được với hàm số $f(x) = \max(1+2022(\lvert x\rvert-1),0)$.  Rõ ràng hàm này thỏa mãn giả thiết $f(-1)=f(1)=1$ và $$\lvert f(x)-f(y)\rvert \le 2022\lvert x-y\rvert \quad \forall x,y \in [-1,1].$$ Cũng theo ý trên ta biết rằng $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2022}$.	2,00