

Câu 1: (1,5 điểm) Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y có phân phối xác suất đồng thời như sau

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0	0,06	0,06	0,1
2	0,1	0,1	0,04	0,04
3	0,4	0,1	0	0

- X và Y có độc lập không? Vì sao?
- Tính xác suất $P(X + Y \leq 3)$.
- Tính $P(X > 1 | Y = 2)$.

Câu 2: (2,5 điểm) Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} cy + 1, & \text{nếu } x, y \geq 0, x + y < 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác.} \end{cases}$$

- Tìm c .
- Tìm hàm mật độ xác suất thành phần của X .
- Tính $P(Y < 2X^2)$.

Câu 3: (2 điểm) Trọng lượng của gói cà phê xuất khẩu do máy đóng gói tự động là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn có độ lệch chuẩn là 2,08 gam/gói. Bộ phận kiểm tra thu thập mẫu 20 gói cà phê do máy đóng và tính được trọng lượng trung bình là 99 gam/gói.

- Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một gói cà phê do máy đóng với độ tin cậy 95%.
- Nếu độ chính xác của ước lượng là 0,8 gam thì độ tin cậy bằng bao nhiêu?

Câu 4: (3 điểm) Khảo sát số lần du lịch trong năm 2021 của một số hộ gia đình trong một thành phố nọ như sau

Số lần đi du lịch	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Số hộ gia đình	5	8	9	7	6	6	4	2	1	2

a. Giám đốc một công ty du lịch nói rằng trung bình số lần đi du lịch trong năm 2021 của các hộ gia đình là nhiều hơn 3. Hãy kiểm tra phát biểu của giám đốc với mức ý nghĩa 5%.

b. Hãy ước lượng tỉ lệ hộ gia đình đi du lịch nhiều hơn 3 lần với độ tin cậy 97%.

Câu 5. (1 điểm) Một điều tra về số năm làm việc và doanh thu bán hàng (tính bằng triệu VNĐ) trong năm 2021 của một số nhân viên bán hàng tại một công ty như sau

Năm làm việc	1	3	4	4	6	8	10	10	11	13
Doanh thu bán hàng	80	97	92	102	103	111	119	123	117	136

a. Nhận xét về sự tương quan tuyến tính (mạnh hay yếu) giữa số năm làm việc và doanh thu trong năm 2021 của các nhân viên bán hàng bên trên.

b. Viết phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính để dự đoán doanh thu dựa vào số năm làm việc. Ước tính doanh thu của một nhân viên bán hàng đã làm việc 9 năm tại công ty.

_____ Hết _____

Sinh viên được sử dụng tài liệu giấy và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

TRƯỞNG BỘ MÔN TOÁN - LÝ

TS. CAO THANH BÌNH

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (1,5 điểm)

a. Ta có $P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = 0,5 \cdot 0,22$. (0,25 điểm)

Do đó X, Y không độc lập. (0,25 điểm)

b.

$$P(X + Y \leq 3) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1)$$

(0,25 điểm)

$$= 0,16$$

(0,25 điểm)

c.

$$P(X > 1 | Y = 2) = \frac{P(X > 1 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)}$$

(0,25 điểm)

$$= \frac{0,2}{0,26} = \frac{10}{13}$$

(0,25 điểm)

Câu 2: (2,5 điểm)

a. Tìm c .

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (cy + 1) dy dx$$

(0,25 điểm)

$$= \int_0^1 \frac{c}{2}(1-x)^2 + (1-x) dx$$

(0,25 điểm)

$$= \frac{1}{2} - \frac{c}{6}$$

(0,25 điểm)

Suy ra $c = 3$. (0,25 điểm)

b. Tìm $f_X(x)$. Với $0 \leq x \leq 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{1-x} (3y + 1) dy$$

(0,25 điểm)

$$= \frac{3}{2}(1-x)^2 + 1-x$$

(0,25 điểm)

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

(0,25 điểm)

c. Tính $P(Y < 2X^2)$.

$$\begin{aligned}
P(Y < 2X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2x^2} f(x, y) dy dx \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^{2x^2} (3y + 1) dy dx + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} (3y + 1) dy dx \quad (0,25 \text{ điểm}) \\
&= \int_0^{1/2} (6x^4 + 2x^2) dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{2}(1-x)^2 + 1-x \right) dx \quad (0,25 \text{ điểm}) \\
&= \frac{37}{120} = 0,308 \quad (0,25 \text{ điểm})
\end{aligned}$$

Cách khác:

$$\begin{aligned}
P(Y < 2X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2x^2} f(x, y) dy dx \\
&= \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} (3y + 1) dx dy \quad (0,25 \text{ điểm}) \\
&= 0,308 \quad (0,5 \text{ điểm})
\end{aligned}$$

Câu 3: (2 điểm)

a. Theo đề bài, $n = 20$; $\bar{x} = 99$ và $\sigma = 2,08$ (0,25 điểm)

Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,95$. Suy ra $z_{\alpha/2} = 1,96$. (0,25 điểm)

Độ chính xác $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{2,08}{\sqrt{20}} = 0,9116$ (0,25 điểm)

Khoảng tin cậy cần tìm: $[98,0884; 99,9116]$. (0,25 điểm)

b. Độ chính xác $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,8$ (0,25 điểm)

Suy ra $z_{\alpha/2} = 0,8 \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 1,72$ (0,25 điểm)

Khi đó $1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(z_{\alpha/2}) = 0,9573$ và $\alpha = 0,0854$. (0,25 điểm)

Độ tin cậy cần tìm $1 - \alpha = 0,9146$. (0,25 điểm)

Câu 4. (3 điểm)

a. Đặt μ là số lần du lịch trung bình của các hộ gia đình của thành phố đó.

Ta kiểm định: giả thuyết $H_0 : \mu = 3$ và đối thuyết $H_1 : \mu > 3$. (0,5 điểm)

Trung bình mẫu $\bar{x} = 3,3$; kích thước mẫu $n = 50$ (0,25 điểm)

Độ lệch chuẩn mẫu $s = 2,3755$. (0,25 điểm)

Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ ta có $t_\alpha = 1,645$ (0,25 điểm)

Ta có

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0,893. \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Vì $t < t_\alpha$ nên chấp nhận H_0 . (0,25 điểm)

Do đó, ta không đồng ý với phát biểu của giám đốc. (0,25 điểm)

b. Đặt f là tỉ lệ các gia đình đi du lịch nhiều hơn 3 lần trong năm 2021.

Ta có tỉ lệ mẫu $\hat{f} = \frac{21}{50} = 0,42$ và kích thước mẫu $n = 50$. (0,25 điểm)

Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,97$ suy ra $z_{\alpha/2} = 2,17$ (0,25 điểm)

Độ chính xác $z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{f}(1-\hat{f})}{n}} = 0,1515$. (0,25 điểm)

Khoảng tỉ lệ cần tìm là $[0,2685; 0,5715]$. (0,25 điểm)

Câu 5. (1 điểm)

a. Hệ số tương quan $r = 0,9646$ (0,25 điểm)

Tương quan tuyến tính mạnh. (0,25 điểm)

b. Phương trình hồi quy tuyến tính $Y = 4X + 80$. (0,25 điểm)

Khi $X = 9$, ta có $Y = 116$. (0,25 điểm)

_____ Hết _____