Chương 5: VECTOR RIÊNG - TRỊ RIÊNG - CHÉO HÓA MA TRẬN

Vector riêng – Trị riêng

$$Au = \lambda u$$

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

phương trình đặc trưng (tìm các trị riêng)

$$(A - I\lambda)u = 0$$

phương trình tìm các vector riêng

$$V_\lambda = \{u \in R^n \setminus (A - I\lambda)u = 0\}$$

các không gian riêng ứng với các trị riêng

VD1: Tìm các trị riêng, vector riêng, và không gian riêng của $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$*\det(A - \lambda I_2) = 0 \rightarrow \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 9 \end{array}\right.$$

$$*\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \in R \end{cases} \rightarrow u_1 = (-2,1) \;\&\; V_\lambda = \{(-2,1)\}$$

$$*\lambda = 9 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 / 3 \\ x_2 \in R \end{cases} \rightarrow u_2 = (1,3) \;\&\; V_\lambda = \{(1,3)\}$$

Chéo hóa ma trận vuông $A_{n \times n}$

$$Au = \lambda u$$

Thu được các V_λ

Kiểm tra điều kiện chéo hóa
(tổng số các vector riêng = n)

Lập các ma trận $P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & .. & u_n \\ \downarrow & \downarrow & .. & \downarrow \\ & & .. & \\ & & .. & \end{pmatrix}$

Thu được ma trận chéo hóa

$$D = P^{-1}AP$$

Chú ý: Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi :
1) *tổng số các vector riêng = n*
2) *A chứa n vector ĐLTT*
3) *A có n trị riêng thực phân biệt*

VD2: Thực hiện chéo hóa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda I_2) = 0 \to \left[\begin{matrix} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{matrix}\right.$$

$$*\lambda_1 = -1 \to (A + I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

$$\to u_1 = (-1,1) \to V_{\lambda_1} = \{(-1,1)\}$$

$$*\lambda_2 = 2 \to (A - 2I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} x_1 \in R \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\to u_1 = (1,0) \to V_{\lambda_2} = \{(1,0)\}$$

$* \sum_{i=1}^{2} \dim V_{\lambda_i} = 2 = n$ → chéo hóa được

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \text{hoặc} \qquad \downarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VD3: Tính A^{10} với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$*\ D = P^{-1}AP$$

$$\to D^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$\to A^n = PD^nP^{-1}$$

$$*\ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\to A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} d_2 & -d_1 + d_2 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$*\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$\to A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} d_2 & -d_1 + d_2 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

VD4: Chéo hóa & tính lũy thừa

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\to\det(A-\lambda I_3)=0\to\left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\\lambda_2=4\end{array}\right.$$

$$*\lambda_1=1\to(A-I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\to x_1+x_2+x_3=0$$

$$\to(-x_2-x_3,x_2,x_3)\to x_2(-1,1,0)+x_3(-1,0,1)$$

$$\to\begin{cases}u_1=(-1,1,0)\\u_2=(-1,0,1)\end{cases}\to V_{\lambda_1}=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

$$*\lambda_2=4\to(A-4I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\to x_1=x_2=x_3$$

$$\to(x_3,x_3,x_3)\to x_3(1,1,1)\to u_1=(1,1,1)$$

$$\to V_{\lambda_2}=\{(1,1,1)\}$$

$\sum\dim V_\lambda=n=3\ \to$ chéo hóa được

$$*\ P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\-1/3&-1/3&2/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$*\ P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\1/3&1/3&1/3\\-1/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$*\ P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to P^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\-1/3&2/3&-1/3\\-1/3&-1/3&2/3\end{pmatrix}$$

$$\to\quad D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{15}=?$$

VD5: **Tìm các trị riêng, vector riêng, và không gian riêng của**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

VD6: **Chéo hóa các ma trận sau (nếu được) và tìm lũy thừa bậc n của ma trận**

a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$