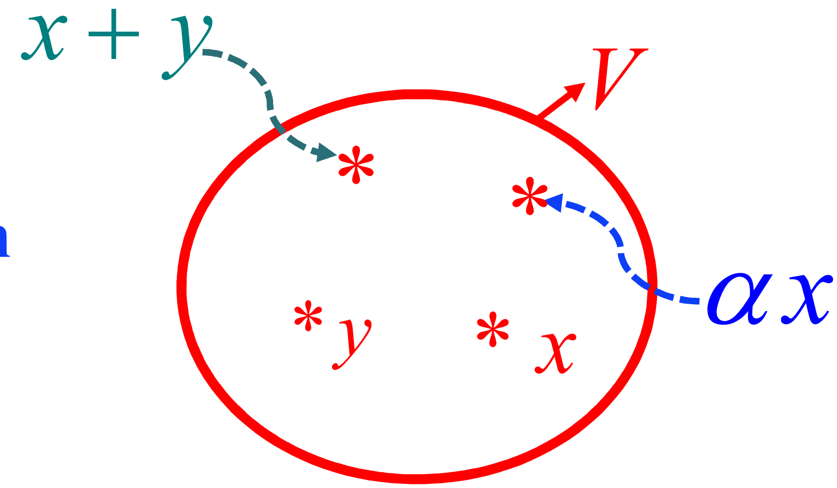
Chương 3: KHÔNG GIAN VECTOR

$$+ : \quad V \times V \to V, \quad (x, y) \to x + y$$

$$. : \quad \mathrm{K} \times V \to V, \quad (\alpha, x) \to \alpha x$$

$$V \neq \varnothing$$

Một tập **V** khác rỗng trên đó có hai phép toán: **cộng** và **nhân**



1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$

2) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K} \end{matrix}\right\} \to \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \to x + y = y + x$

4) $\forall x, y, z \in V \to (x + y) + z = x + (y + z)$

5) $\left.\begin{matrix} \exists 0_V \in V \\ \forall x \in V \end{matrix}\right\} \to x + 0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{matrix} \exists x \in V \\ \exists (-x) \in V \end{matrix}\right\} \to x + (-x) = (-x) + x = 0_V$

7) $\left.\begin{matrix} \forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K} \end{matrix}\right\} \to \alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K} \end{matrix}\right\} \to (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K} \end{matrix}\right\} \to (\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$

10) $\forall x \in V \to 1.x = x$

0_V : phần tử trung hòa (duy nhất)

-x : phần tử đối (duy nhất)

1: vô hướng đơn vị hoặc phần tử đơn vị của trường K.

$\text{VD1}: \begin{cases} V \equiv \{u \mid u \in R\} \\ K \equiv R \end{cases} \xrightarrow{\text{(1) Với}} \begin{cases} \forall x, y, z \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K (\equiv R) \end{cases} \xrightarrow{\text{(2) Kiểm tra}} \boxed{1),...,10)} \xrightarrow{\text{(3) Thỏa}}$ **V là một KGVT có**

Các phép cộng và nhân thông thường trên R

- phần tử trung hòa là $0_V = 0$

- phần tử đối của u là -u

$\text{VD2}: \begin{cases} V \equiv \{u(x, y) \mid x, y \in R\}, (V \equiv R^2) \\ K \equiv R \end{cases} \xrightarrow{\text{(1) Với}} \begin{cases} \forall u_1(x_1, y_1), u_2(x_2, y_2), u_3(x_3, y_3) \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K (\equiv R) \end{cases} \xrightarrow{\text{(2) Kiểm tra}} \boxed{1),...,10)} \xrightarrow{\text{(3) Thỏa}}$ **V là một KGVT có**

Các phép cộng và nhân thông thường vector 2 chiều trên R

- phần tử trung hòa là $0_V = (0, 0)$

- phần tử đối của u (x, y) là $-u=(-x, -y)$

1) $\forall x, y \in V \rightarrow x + y \in V$

2) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha \in K \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \rightarrow x + y = y + x$

4) $\forall x, y, z \in V \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$

5) $\left.\begin{matrix} \exists 0_V \in V \\ \forall x \in V \end{matrix}\right\} \rightarrow x + 0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{matrix} \exists x \in V \\ \exists (-x) \in V \end{matrix}\right\} \rightarrow x + (-x) = (-x) + x = 0_V$

7) $\left.\begin{matrix} \forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in K \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K \end{matrix}\right\} \rightarrow (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K \end{matrix}\right\} \rightarrow (\alpha\beta) x = \alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \rightarrow 1.x = x$

$\Rightarrow$ R^n **là không gian vector.**

$$V = \{u(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in R\} \qquad \begin{matrix} 0_V = (0, ..., 0) \\ -u = (-x_1, ..., -x_n) \end{matrix}$$

$$\text{VD3: } V=\left\{a+bx+cx^2 \,\middle|\, a,b,c\in R\right\},\ \left(V\equiv P_2(x)\right) \xrightarrow{(1)} \begin{cases} f_1(x)=a_1+b_1x+c_1x^2\in V \\ f_2(x)=a_2+b_2x+c_2x^2\in V \\ f_3(x)=a_3+b_3x+c_3x^2\in V \\ \alpha,\beta\in R \end{cases} \begin{pmatrix} a_i,b_i,c_i\in R \\ i=1,2,3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \boxed{1),\dots,10)}$$

Các phép cộng và nhân đa thức thông thường trên R

$$\left.\begin{aligned} 0_V&=(a,b,c)=(0,0,0)=0 \\ -u&=(-a,-b,-c) \end{aligned}\right\}\ V\equiv P_2(x) \text{ là một KGVT} \xleftarrow{(3)} \boxed{1),\dots,10)}$$

1) $f_1+f_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2\in V$

2) $\alpha f_1=(\alpha a_1)+(\alpha b_1)x+(\alpha c_1)x^2\in V$

3) $$\begin{aligned} f_1+f_2&=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2 \\ &=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)x+(c_2+c_1)x^2 \\ &=f_1+f_2 \end{aligned}$$

5) $f_1+0_V=(a_1+0)+(b_1+0)x+(c_1+0)x^2=f_1$

6) $$\begin{aligned} f_1+(-f_1)&=(a_1-a_1)+(b_1-b_1)x+(c_1-c_1)x^2 \\ &=0+0x+0x^2=0_V \end{aligned}$$

1) $\forall x,y\in V\ \rightarrow\ x+y\in V$

2) $\left.\begin{aligned}\forall x&\in V\\ \forall\alpha&\in \mathrm{K}\end{aligned}\right\}\rightarrow \alpha x\in V$

3) $\forall x,y\in V\ \rightarrow\ x+y=y+x$

4) $\forall x,y,z\in V\ \rightarrow\ (x+y)+z=x+(y+z)$

5) $\left.\begin{aligned}\exists 0_V&\in V\\ \forall x&\in V\end{aligned}\right\}\rightarrow x+0_V=0_V+x=x$

6) $\left.\begin{aligned}\exists x&\in V\\ \exists(-x)&\in V\end{aligned}\right\}\rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0_V$

7) $\left.\begin{aligned}\forall x,y&\in V\\ \forall\alpha&\in \mathrm{K}\end{aligned}\right\}\rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

8) $\left.\begin{aligned}\forall x&\in V\\ \forall\alpha,\beta&\in \mathrm{K}\end{aligned}\right\}\rightarrow (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

9) $\left.\begin{aligned}\forall x&\in V\\ \forall\alpha,\beta&\in \mathrm{K}\end{aligned}\right\}\rightarrow (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

10) $\forall x\in V\ \rightarrow 1.x=x$

$P_n(x)$ là một không gian vector

$$V=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \,\middle|\, a_i\in R,\ i=\overline{1,n}\right\},\ \left(V\equiv P_n(x)\right)$$

$$0_V=(a_0,\dots,a_n)=(0,\dots,0)=0,\ -u=(-a_0,\dots,-a_n)$$

1) $\forall x, y \in V \to x+y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha \in K\end{array}\right\} \to \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \to x+y = y+x$

4) $\forall x, y, z \in V \to (x+y)+z = x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l}\exists 0_V \in V \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \to x+0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{array}{l}\exists x \in V \\ \exists(-x) \in V\end{array}\right\} \to x+(-x) = (-x)+x = 0_V$

7) $\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in K\end{array}\right\} \to \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K\end{array}\right\} \to (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K\end{array}\right\} \to (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \to 1.x = x$

VD4: $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in R \right\}, \ \left(V \equiv M_2(R)\right)$

Các phép cộng và nhân ma trận thông thường trên R

$$\begin{cases} u_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} \in V; \quad x_1, y_1, z_1, t_1 \in R \\ u_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} \in V; \quad x_2, y_2, z_2, t_2 \in R \\ u_3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ z_3 & t_3 \end{pmatrix} \in V; \quad x_3, y_3, z_3, t_3 \in R \end{cases}$$

$M_2(R)$ là một không gian vector $\quad 0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -u = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$M_{m\times n}(R)$ là một không gian vector

Kiểm tra các tập sau có là KGVT không

1) $\forall x, y \in V \to x + y \in V$

2) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha \in K \end{matrix}\right\} \to \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \to x + y = y + x$

4) $\forall x, y, z \in V \to (x + y) + z = x + (y + z)$

5) $\left.\begin{matrix} \exists 0_V \in V \\ \forall x \in V \end{matrix}\right\} \to x + 0_V = 0_V + x = x$

6) $\left.\begin{matrix} \exists x \in V \\ \exists (-x) \in V \end{matrix}\right\} \to x + (-x) = (-x) + x = 0_V$

7) $\left.\begin{matrix} \forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in K \end{matrix}\right\} \to \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K \end{matrix}\right\} \to (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

9) $\left.\begin{matrix} \forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in K \end{matrix}\right\} \to (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \to 1.x = x$

VD5: $\begin{cases} V = \{x | x \in R\} \\ K = Q \end{cases}$ (Yes)

VD6: $\begin{cases} V = \{x | x \in Q\} \\ K = R \end{cases}$ (No)

VD7: $V = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in R, i = \overline{1,3} \wedge x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ (Yes)

VD8: $V = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$ (No)

$pc(+): (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$pn(.): \alpha(x, y, z) = (|\alpha| x, |\alpha| y, |\alpha| z)$

VD9: $V = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R \wedge x_1 > 0, x_2 > 0\}$ (Yes)

$pc(+): (x, y) + (x', y') = (xy, x'y')$

$pn(.): \alpha(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha)$

Kiểm tra các tập sau có là KGVT không

1) $\forall x, y \in V \rightarrow x+y \in V$

2) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha x \in V$

3) $\forall x, y \in V \rightarrow x+y=y+x$

4) $\forall x, y, z \in V \rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$

5) $\left.\begin{array}{l}\exists 0_V \in V \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+0_V=0_V+x=x$

6) $\left.\begin{array}{l}\exists x \in V \\ \exists(-x) \in V\end{array}\right\} \rightarrow x+(-x)=(-x)+x=0_V$

7) $\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in V \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

8) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

9) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in V \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}\end{array}\right\} \rightarrow (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

10) $\forall x \in V \rightarrow 1.x=x$

$VD10:\ V=\left\{u(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1,+2x_2+3x_3=0\right\}$

$VD11:\ V=\left\{u(x_1,x_2)\in R^2\right\}$

$pc(+):\ (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$pn(.):\ \alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$

$VD12:\ V=\left\{u(x_1,x_2)\in R^2\right\}$

$pc(+):\ (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$pn(.):\ \alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,0)$

VD13: $V=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y>0\}$

$$\begin{aligned}(x,y)+(u,v) &= (x+u,yv),\ \ \forall(x,y),(u,v)\in V,\\ a(x,y) &= (ax,y^a),\ \ \forall a\in\mathbf{R},(x,y)\in V.\end{aligned}$$

VD14: $V = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0 \}$ **(NO)**

VD15: $V = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_2 = x_3 \}$ **(YES)**

VD16: $V = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + ... + x_n = 1 \}$ **(NO)**

VD17: $V = \{(x, y, z) \in R^3\}$ **(NO)**

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (kx, y, z)$$

VD18: $V = \{(x, y, z) \in R^3\}$ **(NO)**

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

VD19: $V = \{(x, y) \in R^2\}$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$k(x, y) = (2kx, 2ky)$$

VD20: $V = \{(x, y) \in R^2\}$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 2)$$

$$k(x, y) = (kx, ky)$$

VD21: $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ **(NO)**

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (|k|\, x, |k|\, y, |k|\, z)$$

VD22: $V = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ **(YES)**

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (x_1^k, x_2^k)$$

KHÔNG GIAN VECTOR CON

W là không gian vector con của V

$$\begin{cases} W \neq \varnothing \\ W \subset V \\ \forall x, y \in W \quad \rightarrow \quad x + y \in W \\ \forall x \in W, \forall \alpha \in R \ \rightarrow \alpha x \in W \end{cases}$$

VD1: Chứng minh W là KGVT con của R^3

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \middle| x_1 = 2x_2 \right\}$$

$$* \ u = (2,1,0) \in W \ \Rightarrow \ W \neq \varnothing$$

$$* \ W \subset R^3$$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 = 2x_2 \\ \forall u_2 = (y_1, y_2, y_3) \in W \ \rightarrow \ y_1 = 2y_2 \end{cases}$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$x_1 + y_1 = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2)$$

$$\rightarrow \ u_1 + u_2 \in W$$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 = 2x_2 \\ \forall \alpha \in R \end{cases}$$

$$\alpha u_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$\alpha x_1 = \alpha 2 x_2 = 2(\alpha x_2)$$

$$\rightarrow \ \alpha u_1 \in W$$

Vậy W là KGVT con của R^3

$$VD2: W = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 = 0\}$$

$* \ u = (-1, 1, 0) \in W \ \Rightarrow \ W \neq \varnothing$

$* \ W \subset R^3$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 + x_2 = 0 \\ \forall u_2 = (y_1, y_2, y_3) \in W \ \rightarrow \ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

$\rightarrow \ u_1 + u_2 \in W$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W \ \rightarrow \ x_1 + x_2 = 0 \\ \forall \alpha \in R \end{cases}$$

$$\alpha u_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha (x_1 + x_2) = \alpha 0 = 0$$

$\rightarrow \ \alpha u_1 \in W$

Vậy W là KGVT con của R^3

$$VD3: W = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, \ x_2 \in R\}$$

$* \ u = (0, 0, 0) \in W \ \Rightarrow \ W \neq \varnothing$

$* \ W \subset R^3$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, 0) \in W \ \rightarrow \ x_1, x_2 \in R \\ \forall u_2 = (y_1, y_2, 0) \in W \ \rightarrow \ y_1, \ y_2 \in R \end{cases}$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0)$$

$$x_1, y_1 \in R \ \Rightarrow \ x_1 + y_1 \in R$$

$$x_2, y_2 \in R \ \Rightarrow \ x_2 + y_2 \in R$$

$\rightarrow \ u_1 + u_2 \in W$

$$* \begin{cases} \forall u_1 = (x_1, x_2, 0) \in W \ \rightarrow \ x_1, x_2 \in R \\ \forall \alpha \in R \end{cases}$$

$$\alpha u_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0)$$

$$x_1, \alpha \in R \Rightarrow \alpha x_1 \in R$$

$$x_2, \alpha \in R \Rightarrow \alpha x_2 \in R$$

$\rightarrow \ \alpha u_1 \in W$

Vậy W là KGVT con của R^3

$$VD4: W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$$

* $u=(0,0,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$

* $W\subset R^3$

* $\begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ \forall u_2=(y_1,y_2,y_3)\in W \to 2y_1-5y_2+3y_3=0\end{cases}$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$

$$2(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=$$

$$(2x_1-5x_2+3x_3)+(2y_1-5y_2+3y_3)=0+0=0$$

$\to u_1+u_2\in W$

* $\begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_3)\in W \to 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ \forall \alpha\in R\end{cases}$

$$\alpha u_1=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

$$2\alpha x_1-5\alpha x_2+3\alpha x_3=\alpha(2x_1-5x_2+3x_3)=\alpha 0=0$$

$\to \alpha u_1\in W$

Vậy W là KGVT con của R³

$$VD5: W=\{(x_1,x_2,x_1x_2)\in R^3\}$$

$$=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_3=x_1x_2\}$$

* $u=(0,0,0)\in W \Rightarrow W\neq\varnothing$

* $W\subset R^3$

* $\begin{cases}\forall u_1=(x_1,x_2,x_1x_2)\in W \to x_1,x_2\in R\\ \forall u_2=(y_1,y_2,y_1y_2)\in W \to y_1,y_2\in R\end{cases}$

$$u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_1x_2+y_1y_2)$$

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+x_1y_2+x_2y_1\neq x_1x_2+y_1y_2$$

$\to u_1+u_2\notin W$

Vậy W không là KGVT con của R³

Không gian vector con của R^n ?

VD15: $W = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}$ (Yes)

VD16: $W = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \,\middle|\, 3x_1 - x_2 = 5 \right\}$ (No)

VD17: $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,\middle|\, x_1 x_2 x_3 = 0 \right\}$ (No)

VD18: $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ (Yes)

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH - ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Tổ hợp tuyến tính: $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i; \quad c_i \in R,\ i = \overline{1,n}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_iu_i = 0_V$$

Tất cả $C_i = 0$ → **Độc lập tuyến tính**

Có ít nhất một $C_i \neq 0$ → **Phụ thuộc tuyến tính**

- ✓ Nếu hệ $S = \{u_1, u_2, \ldots., u_n\}$ là ĐLTT thì mọi hệ con của nó là cũng ĐLTT
- ✓ Hệ S có chứa một hệ con PTTT thì S là PTTT
- ✓ Hệ S là PTTT khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một vector u_i là THTT của những vector còn lại

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

$$\left.\begin{aligned} v &= (4,3) \\ u_1 &= (1,-1) \\ u_2 &= (2,5) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to v = c_1u_1 + c_2u_2 \\ &\to c_1(1,-1) + c_2(2,5) = (4,3) \\ &\to \begin{cases} 1.c_1 + 2.c_2 = 4 \\ -1.c_1 + 5.c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gauss-Jordan

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(\bar{A}) = \rho(A)$ (*định lí Kronecker-Capelli*)

+ Vô nghiệm $\rho(\bar{A}) \neq \rho(A)$

+ Nghiệm duy nhất $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = n$

+ Vô số nghiệm $\rho(\bar{A}) = \rho(A) < n$

$$X = A^{-1}B$$

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots c_nu_n = v \quad \Leftrightarrow \quad U.C = V$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & . & u_{n,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & . & u_{n,2} \\ . & . & . & . \\ u_{1,n} & u_{2,n} & . & u_{n,n} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$$

Cramer

$$AX = B \longleftrightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$|A| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính là hệ Cramer

$|A| = 0$ và tất cả $|A_j| = 0$ hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

Khi hệ có vô số nghiệm, ta sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải

$$VD1: \begin{cases} v = (2,0,6) \\ u_1 = (1,-2,3) \\ u_2 = (-1,4,-5) \\ u_3 = (2,-3,7) \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

Tìm tổ hợp tuyến tính

$$VD2: \begin{cases} v = (3,5) \\ u_1 = (2,1) \\ u_2 = (-1,3) \end{cases} \quad VD3: \begin{cases} v = (2,9) \\ u_1 = (3,2) \\ u_2 = (-1,3) \end{cases}$$

$$VD4: \begin{cases} v = (-1,1,9) \\ u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (2,1,4) \\ u_3 = (3,1,9) \end{cases} \quad VD5: \begin{cases} v = (1,1,1) \\ u_1 = (1,2,1) \\ u_2 = (-1,1,-3) \\ u_3 = (2,2,4) \end{cases}$$

Tìm m để x là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại

VD6: Trong $\mathbb{R}^3$: u = (2, 4, 2) , v = (6, 8, 7) , w = (5, 6, m) , x = (1,3, 5) .

VD7: Trong $\mathbb{R}^3$: u = (4, 4, 3) , v = (7, 2, 1) , w = (4, 1, 6) , x = (5, 9, m) .

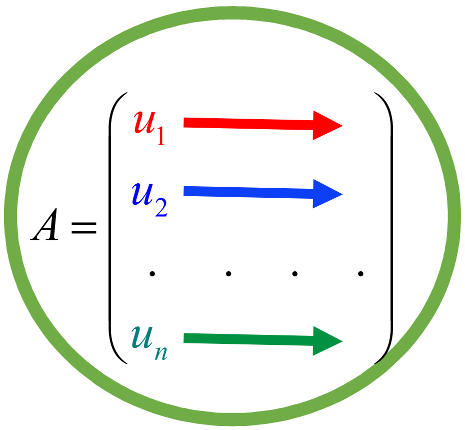
VD8: Trong $\mathbb{R}^3$: u = (1, -3, 2) , v = (2, -1, 1) , w = (3, -4, 3) , x = (1, m, 5).

VD9: Trong $\mathbb{R}^4$: u = (1, 2, -3, 2) , v = (4, 1, 3, -2) , w = (16, 9, 1, -3), x =(m, 4, -7, 7).

ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH & PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0$$

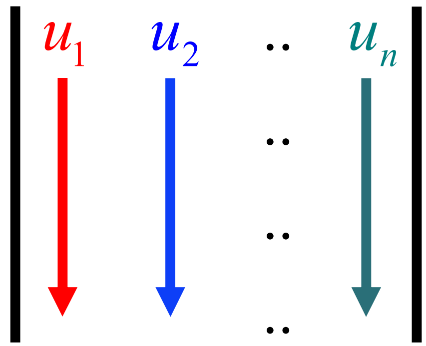
HẠNG CỦA HỆ VECTOR



Có n vector và tìm được *ρ(A)*

+ *ρ(A)* = n → ĐLTT
+ *ρ(A)* < n → PTTT

ĐỊNH THỨC



$$* \left.\begin{matrix} |B| \neq 0 \\ |B_i| = 0 \end{matrix}\right\} \to c_i = \frac{|B_i|}{|B|} = 0 \to ĐLTT$$

$$* \left.\begin{matrix} |B| = 0 \\ |B_i| = 0 \end{matrix}\right\} \to \text{Vô số nghiệm} \to PTTT$$

$$i = 1, \ldots, n$$

VD10: $u_1 = (1,-1,2,1);\ u_2 = (-2,2,-4,-2)$

$u_3 = (2,1,2,2);\ u_4 = (1,2,0,1)$

$$* \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n = 4 \\ \rho(A) = 2 \end{matrix}\right\} \to \rho(A) < n \to PTTT$$

$$* \ \det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\det(B_i) = 0,\ (i = 1, \ldots, n)$ vì có một cột bằng 0

➡ Vậy: hệ có vô số nghiệm ➡ PTTT.

ĐLTT hoặc PTTT trong R^n ?

VD11: $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (2, 3, -3)$

VD12: $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (1, 1, -2), u_3 = (1, 1, 2)$

VD13: $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (-5, 1, 1), u_3 = (7, 3, -3)$

VD14: $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (1, 1, -2), u_3 = (0, 3, 3),$
$u_4 = (2, 3, -3)$

VD15: $u_1 = (1, -1, 0, 0), u_2 = (0, 1, -1, 0),$
$u_3 = (0, 0, 1, -1), u_4 = (-1, 0, 0, 1)$

VD16: $(4, -5, 2, 6), (2, -2, 1, 3), (6, -3, 3, 9), (4, -1, 5, 6)$

m = ? → ĐLTT hoặc PTTT

VD17: $\{(1,-4,3),(3,-2,5),(2,-3,m)\}$

VD18: $\{(1,3,m),(1,2,1),(0,1,1)\}$

VD19: $\left\{\begin{matrix}(1,2,-3,2),(4,1,3,-2), \\ (16,9,1,-3),(m,4,-7,7)\end{matrix}\right\}$

VD20: $(4,4,2,8); (3,1,0,4);$
$(-2,4,-4,-6);$
$u_4 = (4,9,2,m-1)$

VD21: Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại với $u_1=(0;1;-1);u_2=(-2;1;3);u_3=(m;2;-1);u=(1;m;2)$.

<u>ĐS:</u> Là THTT khi và chỉ khi $m \neq \dfrac{-1}{2}$

VD22: Với giá trị nào của m thì họ vectơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

a) $V=\{v_1=(2;1;1;m);v_2=(2;1;-1,m);v_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $U=\{u_1=(2;1;2m);u_2=(2;1;-1);u_3=(1+m;2;-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $V=\{u_1=(m;2;1);u_2=(1;-2,m);u_3=(2;2;3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

<u>ĐS:</u> a) PTTT khi $m=\dfrac{-1}{2}$; ĐLTT khi $m \neq \dfrac{-1}{2}$

b) PTTT khi $m=\dfrac{-1}{2}$ hoặc $m=3$; ĐLTT khi $m \neq \dfrac{-1}{2}$ và $m \neq 3$

c) PTTT khi $m=-1$ hoặc $m=0$; ĐLTT khi $m \neq -1$ và $m \neq 0$