Buổi 01 – Ngày 14-09-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

Các cột điểm:
+ Cột điểm Quá trình: 20%;
+ Cột điểm Giữa kỳ: 20%; thi tập trung; hình thức thi: tự luận; thời gian: **60** phút; không sử dụng tài liệu.
+ Cột điểm Cuối kỳ: 60%; thi tập trung; hình thức thi: tự luận; thời gian: **90** phút; không sử dụng tài liệu.

Tài liệu tham khảo:
1/ Toán Cao cấp A1 (Giải tích 1)
Tác giả: Đỗ Văn Nhơn
NXB: ĐHQG-HCM
2/ Toán Cao Cấp A2 (Giải tích 2)
Tác giả: Đỗ Văn Nhơn
NXB: ĐHQG-HCM
3/ Giáo trình Toán Cao cấp – Tập I, II, III
(+ Bài tập toán cao cấp – Tập I, II, III)
Dành cho SV các trường đại học và cao đẳng (có file pdf)
Tác giả: Nguyễn Đình Trí (chủ biên)
NXB: Giáo Dục
4/ Giáo trình Toán cao cấp – Giải tích Hàm một biến (Toán 1) +
Giáo trình Toán cao cấp – Giải tích Hàm nhiều biến (Toán 3) +
Giáo trình Toán cao cấp – Chuỗi và phương trình vi phân (Toán 4)
Tác giả: Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương.
NXB: ĐHQG-HCM.
5/ Giáo trình Calculus - JAME STEWART: https://drive.google.com/file/d/1Bn8YwbxtEQ8Z3ooFiYTfMXtwK5Klg1ej/view?usp=sharing

---

Email: tuanlh@uit.edu.vn (GVC. ThS. Lê Hoàng Tuấn)
Account MS Teams: tuanlh@hcmuit.edu.vn

Chương 1: PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM: (MathType)

Ta có $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ = tập hợp các số tự nhiên.

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ = tập hợp các số nguyên

$= \{..., -3, -2, -1\} \bigcup \{0\} \bigcup \{1, 2, 3, ...\}$

$= \mathbb{Z}^- \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{Z}^+$

Với $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\} =$ tập hợp các số nguyên âm

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\} =$ tập hợp các số nguyên dương $= \mathbb{N}^*$.

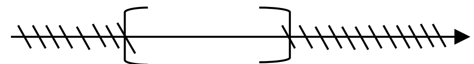
$\mathbb{Q} = \left\{..., -\frac{3}{2}, ..., -\frac{1}{4}, ..., \frac{4}{5}, ..., \frac{117}{4}, ...\right\} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\} =$ tập hợp các số hữu tỉ

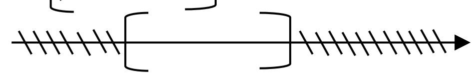
$\mathbb{R} = \left\{..., -\frac{7}{5}, ..., -1.0235, ..., -1, 0, 1, ..., \sqrt{5}, ..., \frac{19}{2}, ...\right\} =$ tập hợp các số thực

Ta có: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

* ***Các khoảng trên*** $\mathbb{R}$:

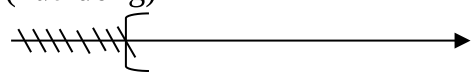
Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và giả sử $a \leq b$. Ta có các khoảng sau:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =$ khoảng mở (a,b) 

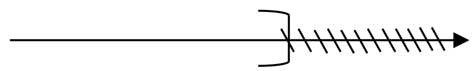
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =$ khoảng đóng (đoạn) $[a,b]$ 

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =$ khoảng nửa mở (nửa đóng)

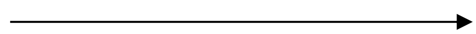
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =$ khoảng nửa mở (nửa đóng)

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} =$ khoảng mở 

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} =$ khoảng nửa mở

$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} =$ khoảng mở 

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} =$ khoảng nửa mở

$(-\infty,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} =$ toàn bộ trục $\mathbb{R}$ 

Cho D là một khoảng nào đó trên $\mathbb{R}$ (nghĩa là D là một trong các khoảng nêu trên). Ta gọi một ánh xạ (map) $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm số, nếu mỗi phần tử $x \in D$ ta xác định duy nhất phần tử $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

Ta gọi D là tập xác định (Domain of a function) của hàm số f

x là ẩn tự do, lấy giá trị tùy ý trên D

$y = f(x) \in \mathbb{R}$ là ẩn phụ thuộc.

<u>Ví dụ 1</u>: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$. Tìm TXĐ D cho f .

<u>Gợi ý</u>: Công thức của f xác định khi $\square \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$

<u>Ví dụ 2</u>: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(x^2 + x - 20) + \dfrac{1}{25 - x^2}$. Tìm TXĐ D cho f .

<u>Gợi ý</u>: Công thức của f xác định khi $\begin{cases} x^2 + x - 20 > 0 \\ 25 - x^2 \neq 0 \end{cases}$

<u>Ví dụ 3</u>: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{4+x}} + \dfrac{5}{36-x^2}$. Tìm TXĐ D cho f.

<u>Ví dụ 4</u>: Cho hàm số $y = f(x) = e^{x+\sin x - 2\sqrt{x^2-1}}$. Tìm TXĐ D cho f.

* <u>***Giới hạn của hàm số***</u>:

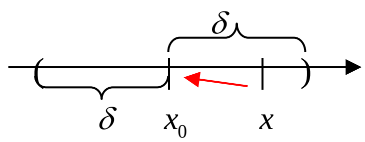
Cho hàm số $y = f(x)$ có TXĐ là D. Cho trước điểm x_0 (thường là $\in D$)

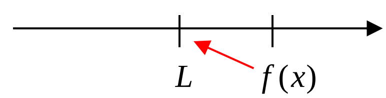
Ta nói f có giới hạn là L (L = limit) khi $x \to x_0$ và kí hiệu là

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (đủ nhỏ, ví dụ $\delta = 2\varepsilon^6 + 5\varepsilon^{12}$) sao cho $\forall x$ thỏa

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$





* <u>***Một số quy tắc tính giới hạn hàm số***</u>:

a/ <u>*Quy tắc 1*</u>:

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số hữu hạn thỏa $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$

Thì ta có:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = L.M$$

$$\lim_{x\to x_0}[kf(x)] = kL, \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}, \text{ với } M \neq 0$$

b/ <u>*Quy tắc 2*</u>: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp thì ta có $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

c/ <u>*Quy tắc 3*</u>: (<u>*nguyên lý kẹp*</u>)

Cho $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm số hữu hạn thỏa

$$\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \end{cases}$$

Thì $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$

* <u>*Một số dạng vô định thường gặp khi tính giới hạn hàm số*</u>:

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 0^∞, ∞^∞

Ví dụ mẫu 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+5x-14}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$)

Giải: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+5x-14}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+7)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{2+5}{2+7}=\dfrac{7}{9}$

Ví dụ mẫu 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x^2+2x-3}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$ (dạng $\infty-\infty$)

Giải:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x^2+2x-3}-\frac{1}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{(x-1)(x+3)}-\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x(x-1)(x+3)}-\frac{x+3}{x(x-1)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-3}{x(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

Ví dụ mẫu 3: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

Giải: Ta có $-1\le\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 1\Rightarrow -1.x\le x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x.1\Rightarrow -x\le x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x$

Nghĩa là ta có $\begin{cases} f(x)=-x; \\ g(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right); \\ h(x)=x \end{cases}$ và ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$

Theo nguyên lý kẹp, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$

Ví dụ mẫu 4: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$

Giải: Khi x thỏa chu kỳ $\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ thì $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $I_1=\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Khi x thỏa chu kỳ $\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ thì $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $I_2=\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Từ (1), (2), ta có $I_1\ne I_2$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$.

Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau:

a/ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-10x+21}$

b/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-16x+16}{x^3-8x^2+9x+6}$

c/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)$

d/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

e/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$

f/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

g/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$

h/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

i/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-2x}}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$

j/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{4x}$

* ***<u>Khử dạng vô định</u>***: $1^\infty,\ \ 0^0,\ \ \infty^0,\ \ 0^\infty,\ \ \infty^\infty$

<u>Cách 1</u>: Dùng $u^v=e^{v\ln u}$. Sau đó ta tính $k=\lim[v\ln u]$ (giữ nguyên cận như đề bài)

Suy ra, $I=\lim\limits_{x\to x_0}[u^v]=e^k$

<u>Cách 2</u>: Dùng định nghĩa của hằng số $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$

(ở đây $e\approx 2,718281828....$)

<u>Ví dụ mẫu</u>: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+4}$ (dạng 1^∞)

<u>Giải</u>:

<u>Cách 1</u>: $\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+4}=e^{(x+4)\ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)}$.

Ta xét $k=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+4)\ln\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+4)\ln\left(1+\dfrac{x+3}{x-5}-1\right)\right]$

(do

$\sin x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\sin\square \sim \square \quad khi \quad \square \to 0$

$\ln(1+x) \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\ln(1+\square) \sim \square \quad khi \quad \square \to 0$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \quad khi \quad x \to 0$

$1-\cos\square \sim \dfrac{\square^2}{2} \quad khi \quad \square \to 0$

$\tan x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\tan\square \sim \square \quad khi \quad \square \to 0$

$\arcsin x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\arcsin\square \sim \square \quad khi \quad \square \to 0$

$\arctan x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\arctan\square \sim \square \quad khi \quad \square \to 0$

) nên ta có $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+4)\ln\left(1+\dfrac{8}{x-5}\right)\right]$

Khi $x \to +\infty$ thì $(x-5) \to +\infty$, suy ra $\dfrac{8}{x-5} \to 0$

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left[(x+4)\left(\frac{8}{x-5}\right)\right] = 8\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x-5} = 8\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}} = 8\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 8$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+4} = e^k = e^8$

<u>Cách 2</u>: Dùng định nghĩa của hằng số $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{x+4} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-5}-1\right)^{x+4} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x-5}\right)^{x+4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-5}{8}}\right)^{x+4} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-5}{8}\right)}\right)^{\left(\frac{x-5}{8}\right)\left(\frac{8}{x-5}\right)(x+4)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8(x+4)}{x-5}\right)} = e^{8\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x-5}\right)} = e^{8\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}}\right)} = e^{8\left(\frac{1+0}{1-0}\right)} = e^8$$

Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau:

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{6x+1}$

b/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2+6x+3}\right)^{5x+2}$

c/ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

d/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

e/ $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^{\frac{1}{1-x}}\right]$

f/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

g/ $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$

h/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

i/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, với $a>0, b>0$.

j/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

---

* ***<u>Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL)</u>***:

Cho hàm số $f(x)$ có TXĐ là D và cho x_0 (thường là $\in D$)

Ta nói $f(x)$ là VCB khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Khi đó, $\dfrac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x\to x_0$

(Ví dụ: Cho $f(x)=x^3+10x^5$ và $x_0=0$.

Thì khi $x\to 0$ thì $f(x)=x^3+10x^5\to 0$ nên $f(x)$ là VCB khi $x\to 0$)

Khi $x\to 1$ thì $f(x)\to 1^3+10.1^5=11\neq 0$ nên $f(x)$ không phải là VCB khi $x\to 1$).

Ta nói $f(x)$ là VCL khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Khi đó, $\dfrac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x\to x_0$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ và $x_0=2$

Thì khi $x \to 2$ thì $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} \to \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ nên $f(x)$ là VCL khi $x \to 2$)

* *<u>So sánh giữa các VCB (và các VCL)</u>*:

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$, nghĩa là $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$

Ta xét biểu thức:

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

<u>TH1</u>: $k \neq 0, k \in \mathbb{R}$ (nghĩa là k hữu hạn)

Ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là cùng bậc.

<u>TH2</u>: $k = 0$.

Ta nói $f(x)$ là VCB cấp cao hơn $g(x)$ và ta kí hiệu là $f(x) << g(x)$

hay là $f(x) = O(g(x))$ khi $x \to x_0$ (ở đây $O = \text{Over}$)

<u>TH3</u>: $k = +\infty$ hoặc $k = -\infty$

Ta nói $g(x)$ là VCB cấp cao hơn $f(x)$ và ta kí hiệu là $g(x) << f(x)$

hay là $g(x) = O(f(x))$ khi $x \to x_0$

<u>Ví dụ</u>: Cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = x^8$ và $x_0 = 0$

Thì khi $x \to 0$ ta có $f(x) \to 0$ và $g(x) \to 0$, mà ta thấy tốc độ tiến về 0 của $g(x)$ là nhanh hơn của hàm $f(x)$ nên ta nói $g(x)$ là VCB cấp cao hơn hàm $f(x)$ và kí hiệu là

$g(x) = O(f(x))$ khi $x \to 0$ hay là $x^8 = O(x^2)$ khi $x \to 0$

<u>TH4</u>: $k = 1$. Ta nói $f(x)$ là tương đương với $g(x)$ và ta kí hiệu là $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to x_0$

Ta có một số VCB tương đương sau:

$\sin x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\sin\alpha \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\ln(1+x) \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\ln(1+\alpha) \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \quad khi \quad x \to 0$

$\cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2} \quad khi \quad x \to 0$

$1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2} \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\cos\alpha \sim 1-\dfrac{\alpha^2}{2} \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\tan x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\tan\alpha \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\arcsin x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\arcsin\alpha \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\arctan x \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$\arctan\alpha \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$\sin^2 x \sim x^2 \quad khi \quad x \to 0$

$\sin(x^2) \sim x^2 \quad khi \quad x \to 0$

$e^x - 1 \sim x \quad khi \quad x \to 0$

$e^\alpha - 1 \sim \alpha \quad khi \quad \alpha \to 0$

$a^x - 1 \sim x\ln a \quad khi \quad x \to 0, a > 0$

$a^\alpha - 1 \sim \alpha\ln a \quad khi \quad \alpha \to 0, a > 0$

* ***<u>Áp dụng vào quá trình tính giới hạn hàm số</u>***:

+ Ta có thể cắt bỏ đi các VCB cấp cao (chỉ giữ lại các VCB cấp thấp nhất) (cắt bỏ đi các VCL cấp thấp và giữ lại các VCL cấp cao nhất) khi tính giới hạn.

+ Ta được thay tùy ý các VCB/VCL tương đương vào các biểu thức dạng tích/thương của các hàm. Còn đối với các biểu thức dạng tổng hoặc hiệu ta hạn chế thay vào, và chỉ được thay vào khi hàm số không bị triệt tiêu.

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x+\tan^6 x}{\ln(\cos(4x))}$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

<u>Giải</u>:

Ví dụ mẫu 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x+\tan^6 x}{\ln(\cos(4x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x.x+x^6}{\ln\left(1-\dfrac{(4x)^2}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x^6}{\ln\left(1-8x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{-8x^2}=-\dfrac{1}{4}$

Ví dụ mẫu 2:

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(0\right)=0$ (sai)

Cách 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x-1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)=-1$$

(sai)

Cách 3:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2.x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\right)\ (*)$$

Dùng quy tắc L'Hospitale (đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu), ta có:

$$(*)\ =\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sin^2 x-x^2)'}{(x^4)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}\right)\ (**)$$

Cách 3.1:

$$(**)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cos x-2x}{4x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{2x^2}\right)$$

Dùng quy tắc L'Hospitale (đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu), ta có:

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{4}\right)=\frac{-1}{4}\ \text{(sai)}$$

Cách 3.2:

$$(**)\ =\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)-2x}{4x^3}\right)$$

Dùng quy tắc L'Hospitale (đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu), ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{12x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(2x)}{6}=-\frac{1}{3}$$

(đúng).

Bài tập tương tự:

a/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$

b/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$

c/ $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{e^{x-1}-1}\right)$

d/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)+x\sin^5 x}{\ln(1+2x\sin x)}$

e/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(5x))+x^{10}}$

f/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{3x^2}$

g/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

h/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2\sin x}$

i/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos(2x)}}{2x\sin x}$

j/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos(3x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{\ln(\cos x)}$