HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2023

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

(Đề thi có 02 trang)

Bảng A

Bài A.1. (6 điểm)

Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng $\mathbf{2023}$. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X]_{2023} &\to \mathbb{R}[X]_{2023}, \\ p(X) &\mapsto p''(X). \end{aligned}$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của $\mathbf{870}$ lần ánh xạ f.

(a) Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.

(b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathbf{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\mathbf{Ker}(g)$.

Bài A.2. (6 điểm)

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương $0,3$ đồng mà nó sản suất được trước đó và lượng nước tương đương $0,1$ đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương $0,2$ đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương $0,4$ đồng do chính nó sản suất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Bài A.3. (6 điểm)

Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

(a) Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.

(b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.

(c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

Bài A.4. (6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y.

(c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Bài A.5. (6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3.

(b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

——— Hết ———

__Ghi chú__: *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và bất cứ loại máy tính nào. Cán bộ coi thi không giải thích thêm.*

Bài A.1. (Tổng = 6 điểm)

Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X]_{2023} &\to \mathbb{R}[X]_{2023}, \\ p(X) &\mapsto p''(X). \end{aligned}$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f.

(a) Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.

(b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\mathrm{Ker}(g)$.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Vì mỗi ánh xạ f đều là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của nó cũng là ánh xạ tuyến tính. Do đó ánh xạ g là tuyến tính.

(b): $(4 = 2 + 2$ điểm) Ảnh của g được sinh bởi các vectơ $g(1), g(X), \ldots, g\left(X^{2023}\right)$. Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k < 1740, \\ k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (k-1739) X^{k-1740} & \text{nếu } k \geq 1740. \end{cases}$$

Do đó một cơ sở của $\mathrm{Im}(g)$ là $\left(1, X, X^2, \ldots, X^{283}\right)$. Vậy số chiều $\dim(\mathrm{Im} g) = 284$.

Xét một đa thức $p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{2023} X^{2023}$ tùy ý. Thế thì $g\,(p)$ có dạng

$$g\,(p)\,(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{283} X^{283}.$$

Đa thức $p(X) \in \mathrm{Ker}(g)$ khi và chỉ khi $b_0 + b_1 X + \cdots + b_{283} X^{283} = 0$, khi và chỉ khi

$$a_{1740} = a_{1742} = \cdots = a_{2023} = 0.$$

Do đó một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ là $\left(1, X, X^2, \ldots, X^{1739}\right)$. Vậy số chiều $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1740$.

Bài A.2. (A.2=B.3) (Tổng=6 điểm)

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương $0,3$ đồng mà nó sản suất được trước đó và lượng nước tương đương $0,1$ đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương $0,2$ đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương $0,4$ đồng do chính nó sản suất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

Hướng dẫn giải

(a): (4 điểm) Giả sử x_1, x_2 tương ứng là giá trị (tổng thể) cần sản xuất của hai nhà máy (E) và (W), đo bằng tỷ đồng. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 12, \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + 8. \end{cases}$$

Thật vậy, nhà máy (E) sản xuất được x_1 (tỷ đồng) giá trị về điện thì nó cần dùng $0,3x_1$ để làm nguyên liệu cho chính nó và chuyển lượng điện tương đương $0,2x_2$ tỷ đồng cho nhà máy (W), và còn lại lượng điện tương đương 12 tỷ phục vụ người dân. Do đó ta có phương trình thứ nhất. Tương tự ta có phương trình thứ hai. Thế thì $x = Ax + d$ trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$x = (I - A)^{-1} d = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Vậy tổng khối lượng cần sản xuất của nhà máy (E) là 22 tỷ đồng, và của nhà máy (W) là 17 tỷ đồng.

(b): (2 điểm) Với $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta chứng minh $I - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả sử ngược lại $I - A$ không khả nghịch. Thế thì các hàng của ma trận là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại bộ số (a_1, a_2) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = (0, 0),$$

trong đó α_i là hàng thứ i. Do đó

$$\begin{cases} a_1(1-a_{11}) - a_2 a_{21} = 0, \\ -a_1 a_{12} + a_2(1-a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Không mất tổng quát giả sử $|a_1| = \max\{|a_1|, |a_2| > 0$. Từ hệ phương trình trên suy ra

$$a_1 = a_1 a_{11} - a_2 a_{21}.$$

Do đó

$$0 < |a_1| \leq |a_1| \left(a_{11} + a_{21}\right) < |a_1|$$

Điều này vô lý. Vậy điều giả sử là sai, suy ra $I - A$ khả nghịch. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = (I - A)^{-1} d$.

(Nhận xét: khẳng định vẫn đúng cho A là ma trận vuông cấp n bất kỳ.)

Bài A.3. (A.3) (Tổng = 6 điểm)

Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

(a) Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.

(b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.

(c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$. Nhận thấy đa thức đạo hàm $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x-6)$ chỉ có hai nghiệm $x = 0$ (bội 2) và $x = \frac{3}{2}$ (bội 1). Các nghiệm này đều không phải là nghiệm của phương trình ban đầu $P(x) = 0$. Do đó các nghiệm của $P(x) = 0$ là phân biệt.

(b): (2 điểm) Nhận thấy $P(x) = 0$ khi và chỉ khi $x^4 = 2x^3 + 1$. Do đó nếu giả sử $\alpha^3 = \beta^3$ thì $\alpha^4 = \beta^4$. Từ đó suy ra $\alpha = \beta$.

(c): (2 điểm) Đặt $y = x^3$, suy ra $x^4 = 2y + 1$. Lũy thừa 3 cả hai vế suy ra $x^{12} = (2y+1)^3$, suy ra $y^4 = (2y+1)^3$. Do đó

$$y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Vậy kết hợp với (b) phương trình $y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$. Do đó theo Định lý Vieta ta có $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 8$.

Bài A.4. (A.4) (Tổng = 6 điểm)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y.

(c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Nhận thấy A là ma trận chéo hóa được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 1 - \sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}.$$

(b): (2 điểm) Bằng quy nạp ta tính được:

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\sin \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & y\cos x \\ 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

(c): (2 điểm) Ma trận A cấp 2, phần tử phức, luôn đồng dạng (bởi một ma trận C khả nghịch, phần tử phức) với một trong hai ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Thật vậy nếu A không chéo hóa được, thì đa thức đặc trưng có dạng

$$P_A(X) = (X - \lambda)^2.$$

Chọn α_2 tùy ý không thuộc $V_\lambda = \mathbf{Ker}(A - \lambda I_2)$, và $\alpha_1 = (A - \lambda I_2)(\alpha_2)$ ta có

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2. \end{cases}$$

Do đó với C có các cột là α_1, α_2 thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ta xét hai trường hợp: A chéo hóa được (trên trường phức) và A không chéo hóa được trên trường phức.

Trường hợp 1: A là chéo hóa được trên trường phức, nghĩa là tồn tại ma trận khả nghịch với các phần tử phức ($C \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$) sao cho $C^{-1}AC$ là một ma trận chéo. Thế thì

$$A = C \cdot \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot C^{-1},$$

trong đó $\mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo bằng λ_1, λ_2. Từ tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$A^k = C \cdot \mathbf{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k) \cdot C^{-1}$$

với mọi số nguyên không âm k. Do đó

$$\sin(A) = C \cdot \mathbf{diag}\left(f(\lambda_1), f(\lambda_2)\right) \cdot C^{-1},$$

trong đó

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Thế thì $\sin(A)$ cũng là ma trận chéo hóa được. Điều này mâu thuẫn vì ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

không chéo hóa được.

Trường hợp 2: A không chéo hóa được trên trường phức. Thế thì đa thức đặc trưng có nghiệm kép λ và tồn tại C khả nghịch với các phần tử phức sao cho

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận A có phần tử là các số thực nên vết của A là thực, do đó $\lambda \in \mathbb{R}$. Theo phần (b) ta có:

$$\sin\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda \end{pmatrix}.$$

Mặt khác

$$\sin\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = C^{-1}\sin(A)C,$$

suy ra

$$C^{-1}\sin(A)C = \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda \end{pmatrix}.$$

Giả sử tồn tại A sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

suy ra $\sin\lambda = 1$, kéo theo $\cos\lambda = 0$ suy ra $C^{-1}\sin(A)C = I_2$. Do đó $\sin(A) = I_2$. Điều này vô lý. Vậy không tồn tại ma trận thỏa mãn đề bài.

Bài A.5. (Tổng = 6 điểm)

Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3.

(b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Đặt $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{3\times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1, 2, 3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số $0, 1$. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(b): (4 điểm) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = (a_{ij})_{n\times n}$, và $A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \leq k \leq n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk}. \tag{1}$$

Vậy tồn tại $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \neq m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \neq k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $(AA^{-1})_{kl} \geq 1$. Điều này vô lý vì $k \neq l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1, 2, \dots, n\}$. Tương ứng từ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n. Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = (b_{ij})_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A. Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n. Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.

Thang điểm phần (b):

- Xây dựng ánh xạ từ P_n vào S_n (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là đơn ánh (1 điểm).
- Chứng minh ánh xạ trên là toàn ánh (1 điểm).
- Suy ra đáp số $|P_n|$ (1 điểm).