Chương 3 (tt): TẬP SINH – CƠ SỞ – SỐ CHIỀU

***B là tập sinh của V (V=<B>**
(hay B sinh ra V)

$$\begin{cases} B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, u_i \in V, i = \overline{1,n} \\ \forall v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \end{cases}$$

***B là cơ sở V**

$$\begin{cases} B \text{ là tập sinh của V} \\ B \text{ là ĐLTT} \end{cases}$$

***Số chiều của V**
dim V = số vector của B
(một số không đổi)

VD1: $B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} \subset R^3$

* $\forall v(v_1, v_2, v_3) \in R^3$

$v = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$

$\rightarrow (v_1, v_2, v_3) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1)$

$\rightarrow c_1 = v_1, c_2 = v_2, c_3 = v_3 \rightarrow v = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$

B là tập sinh của R^3

* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(A) = 3 = N_{vector} \rightarrow B: ĐLTT$

Vậy: B là cơ sở của R^3 với dim B = 3

$$R^n \rightarrow \begin{cases} B = \{u_1 = (1,0,\ldots,0); u_2 = (0,1,\ldots,0); \ldots; u_n = (0,0,\ldots,1)\} \\ \dim R^n = n \end{cases}$$

VD2: $B=\left\{u_0=1, u_1=x, u_2=x^2, \ldots, u_n=x^n\right\} \subset P_n(x)$

* $\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^3+\ldots+a_nx^n \in P_n(x)$, $(\forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in R)$

$f(x)=c_0u_0+c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$

$\rightarrow a_0+a_1x+a_2x^3+\ldots+a_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^3+\ldots+c_nx^n$

$\rightarrow c_0=a_0,\ c_1=a_1,\ c_2=a_2, \ldots, c_n=a_n$

B là tập sinh của $P_n(x)$

* $c_0u_0+c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n=0_V \rightarrow c_0+c_1x+c_2x^3+\ldots+c_nx^n=0_V$

$\rightarrow c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n=0+0x+0x^2+\ldots+0x^n$

$\rightarrow c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=0, \ldots,\ c_n=0$

B là ĐLTT

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\rho(A)=n+1=N_{vector}$$

Vậy: B là cơ sở của $P_n(x)$ với dim B = n + 1

Tính chất của cơ sở & số chiều

$* \dim V = n$ là một số không đổi

$$\left.\begin{array}{l} *B = \{u_1, \ldots, u_n\} \text{ là cơ sở của V} \\ \forall v \in V, \quad v = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n \end{array}\right\}$$

$\rightarrow c_1, \ldots, c_n$ là duy nhất

$$* \begin{cases} N_{vector} > \dim V & \rightarrow \text{S là PTTT} \\ N_{vector} < \dim V & \rightarrow \text{S không thể là hệ sinh của V} \\ N_{vector} = \dim V & \rightarrow \text{S là cơ sở của V khi và chỉ khi S là ĐLTT} \end{cases}$$

VD3: Chứng minh rằng

a) $\mathcal{S} = \{(1,\ -1), (-2,\ 3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{S} = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ -1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{S} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

VD4: Chứng minh

Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1 + 2t - 7t^2$, $f_2 = 3 + t + t^2$, $f_3 = 7 + 2t + 4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{P}_2[t]$.

VD5: Xác định m để thỏa điều kiện tập sinh

a) M = { (0, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, m)} sinh ra $\mathbb{R}^3$.

b) M = { (1, 2, -1), (0, 3, 1), (1, 5, 0), (3, 9, m)} không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

VD6: Tập nào là cơ sở của R^3 ?

a) $M = \{ u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 7, 5)\}$

b) $M = \{ u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (3,4,2),$

$u_4 = (7, 2,1)\}$

c) $M = \{ u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4), u_3 = (3, 4, 5) \}$

d) $M = \{ u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1,2,1), u_3 = (3, 2, 2) \}$

6.a) vì dim M = 2 < 3 nên M không là cơ sở của R^3.

6.b) vì dim M = 4 > 3 nên M không là cơ sở của R^3.

6.c) vì dim M = 3 nên M là cơ sở của R^3 khi và chỉ khi M là ĐLTT

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow M: \ PTTT \rightarrow$ M không là cơ sở của R^3.

6.d) vì dim M = 3 nên M là cơ sở của R^3 khi và chỉ khi M là ĐLTT

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5 \rightarrow M: \ ĐLTT \rightarrow$ M là cơ sở của R^3.

VD7: Tập nào là cơ sở của R^3 ?

a) $S_1 = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,5)\}$

b) $S_2 = \{(1,1,2),(1,2,5),(0,1,3)\}$

c) $S_3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$

VD8: Định m để tập là hoặc không là cơ sở của R^3

a) $V = \{(2,1,-1),(3,2,5),(1,-1,m)\}$

b) $M=\{(m,3,1), (0,m-1, 2), (0, 0, m+1)\}$

c) $B = \{(2,1,-1),(4,2,-2),(1,m-1,m)\}$

d) $C = \{(2,1,m),(0,2,1),(1,m-1,m)\}$

CƠ SỞ & SỐ CHIỀU CỦA KGVT CON

Cơ sở & số chiều của kgvt con W

1. Chứng minh W là kgvt con
2. Xác định số biến tự do của một vector bất kỳ x trong W
3. Biểu diễn các tọa độ của x theo các biến tự do
4. Biểu diễn x dạng tổ hợp tuyến tính của các biến tự do, sau đó tìm được tập sinh B
5. Chứng minh tập sinh B là ĐLTT, sau đó kết luận B là cơ sở
6. Số chiều của kgvtc là số vector của B

VD9: $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 = 2x_3, x_1 - x_2 = 2x_4\}$

SV tự kiểm tra lại W_1 là kgvt con của R^4

$$\forall x(x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4) \in W_1$$

$$\rightarrow x = x_3(1,1,1,0) + x_4(1,-1,0,1)$$

$$\rightarrow B = \{u_1 = (1,1,1,0), u_2 = (1,-1,0,1)\}$$

$\rightarrow B$ là tập sinh của W_1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 - h_1 \rightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \rho(B) = 2 = N_{vector} \rightarrow B : ĐLTT$$

Vậy: B là cơ sở của W_1 và dim $W_1 = 2$

VD10: Tìm cơ sở & số chiều của kgvt con

$$a)\ W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \right\}$$

$$b)\ W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, 0) \in R^4 \right\}$$

$$c)\ W_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 \right\}$$

$$d)\ W_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_1 - x_2 = 2x_4 \end{cases} \right\}$$

$$e)\ W_5 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid \begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 \\ x_4 = x_1 + x_2 \end{cases} \right\}$$

$$f)\ W_6 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$g)\ W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} x_4 - 4x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 3x_5 - 5x_4 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ 8x_3 - 3x_2 - 2x_5 + 7x_6 - x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$h)\ W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} 6x_5 - x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 8x_3 - 20x_5 + 2x_6 + x_4 - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 + 4x_6 - 5x_5 - x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

TỌA ĐỘ – MA TRẬN CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

$B=\{u_1,\dots,u_n\}$ là cơ sở của V
$v\in V \rightarrow v=c_1u_1+\dots+c_nu_n$

$\rightarrow \begin{cases}\rightarrow (v)_B=(c_1 \quad \dots \quad c_n) \\ \text{là vector tọa độ của v đối với cơ sở B} \\ \rightarrow [v]_B=\begin{pmatrix}c_1\\ \cdot \\ c_n\end{pmatrix} \\ \text{là ma trận tọa độ của V trong cơ sở B}\end{cases}$

$B=\{u_1,\dots,u_n\},\ B'=\{u'_1,\dots,u'_n\}$

$$\begin{cases}u'_1=c_{11}u_1+c_{21}u_2+\dots+c_{n1}u_n\\ \dots\dots \\ u'_n=c_{1n}u_1+c_{2n}u_2+\dots+c_{nn}u_n\end{cases}$$

$$P_{B\to B'}=\begin{pmatrix}c_{11} & \dots & c_{1n}\\ . & \dots & . \\ c_{n1} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'

$$[v]_B=P_{B\to B'}[v]_{B'}$$

$$P_{B\to B'}=B^{-1}B'$$

Chú ý: đưa B và B' về dạng ma trận cột

$P_{B'\to B}=\left(P_{B\to B'}\right)^{-1}=\left(B^{-1}B'\right)^{-1}=B'^{-1}B$

$P_{B\to E}=P_{B\to F}P_{F\to E}$

VD11: $\begin{cases}B=\{u_1=(0,1),u_2=(1,1)\}\\ v=(2,3)(v)_B=?,\ [v]_B=?\end{cases}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\rightarrow (v)_B=(1 \quad 2),\ [v]_B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

VD12: $\begin{cases}B=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}\\ E=\{u_1=(1,1),u_2=(2,-3)\}\\ [v]_E=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\ P_{B\to E}=?,\ [v]_B=?\end{cases}$ $\rightarrow$

$*\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$*\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\rightarrow [v]_B=P_{B\to E}.[v]_B=$
$=\begin{pmatrix}1&2\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-11\end{pmatrix}$

$P_{B\to E}=B^{-1}E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-3\end{pmatrix}$

TÍNH CHẤT

$$\left.\begin{array}{l}[x]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \\ [y]_B = \begin{pmatrix} c'_1 \\ . \\ c'_n \end{pmatrix}\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = y \to \begin{cases} c_1 = c'_1 \\ \dots \\ c_n = c'_n \end{cases} \\ [x+y]_B = \begin{pmatrix} c_1 + c'_1 \\ . \\ c_n + c'_n \end{pmatrix} \\ [\alpha x]_B = \begin{pmatrix} \alpha c_1 \\ . \\ \alpha c_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$P_{B\to B'} \to \exists\left(P_{B\to B'}\right)^{-1}$$

$$P_{B'\to B} = \left(P_{B\to B'}\right)^{-1}$$

$$P_{B\to B''} = P_{B\to B'}.P_{B'\to B''}$$

VD13: Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp:

$$U=\{u_1=(1;-1);u_2=(2;1)\} \text{ và } V=\{v_1=(3;1);v_2=(1;-1)\}.$$

a) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.

c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.

d) Tìm tọa độ của vectơ $x=(3;-1)$ trong cơ sở U.

e) Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(4;-5)$.

f) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở U là $z_U=(7;2)$, hãy tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở V.

VD14: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp: $U=\{u_1=(1;1;-1);u_2=(1;1;0);u_3=(2;1;-1)\}$ và $V=\{v_1=(1;1;0);v_2=(1;0;-1);v_3=(1;1;1)\}$.

a) Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.

c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.

d) Tìm tọa độ của vectơ $x=(2;3;-1)$ trong cơ sở U.

e) Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(1;1;-1)$.

f) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở V là $z_V=(1;0;2)$, hãy tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở U.

Chương 4: KHÔNG GIAN EUCLIDE

Không gian hữu hạn chiều và tồn tại tích vô hướng → không gian Euclide

$\forall u, v, w \in V,\ \alpha \in R$

$\downarrow$

$$\langle u, v\rangle = \alpha$$

$\uparrow$

Tích vô hướng

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u+w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$
3. $\langle \beta u, v\rangle = \beta\langle v, u\rangle, \forall \beta \in R$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0,\ \langle u, u\rangle = 0 \leftrightarrow u = 0_V$

Tính chất

$$\left.\begin{matrix} u(x_1, \ldots, x_n) \\ v(y_1, \ldots, y_n) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \langle u, v\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ d_{uv} = \|v-u\| = \sqrt{\langle v-u, v-u\rangle} \\ \quad = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|u\| \geq 0 \\ \|u\| = 0 \leftrightarrow u = 0_V \\ \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\| \\ \|\langle u, v\rangle\| \leq \|u\|\|v\| \\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{cases}$$

Hệ vector trực chuẩn

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leftarrow \begin{cases} \langle u_i, u_j\rangle = 0 \leftrightarrow u_i \perp u_j, \forall i, j\ \&\ i \neq j \\ \|u_i\| = 1, \forall i \end{cases}$$

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

2. $\langle u+w,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle$

3. $\langle \beta u,v\rangle = \beta\langle v,u\rangle, \forall \beta \in R$

4. $\langle u,u\rangle \ge 0,\ \langle u,u\rangle = 0 \leftrightarrow u = 0_V$

VD15: Chứng minh và tính tích vô hướng

$$\begin{cases} u=(u_1,u_2),\ v=(v_1,v_2)\in R^2 \\ \langle u,v\rangle = u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+10u_2v_2 \\ u=(1,-2),\ v=(-3,5)\to\langle u,v\rangle = ? \end{cases}$$

$$1)\ \left.\begin{matrix} \langle u|v\rangle = u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+10u_2v_2 \\ \langle u|u\rangle = v_1u_1+2v_1u_2+2v_2u_1+10v_2u_2 \end{matrix}\right\}\to\langle u|v\rangle = \langle u|u\rangle$$

$$2)\ \langle u+w|v\rangle = (u_1+w_1)v_1+2(u_1+w_1)v_2+2(u_2+w_2)v_1+10(u_2+w_2)v_2$$
$$=(u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+10u_2v_2)+(w_1v_1+2w_1v_2+2w_2v_1+10w_2v_2)$$
$$=\langle u|v\rangle + \langle w|v\rangle$$

$$3)\ \langle \alpha u|v\rangle = (\alpha u_1)v_1+2(\alpha u_1)v_2+2(\alpha u_2)v_1+10(\alpha u_2)v_2$$
$$=\alpha(u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+10u_2v_2)=\alpha\langle u|v\rangle$$

$$4)\ \langle u|u\rangle = u_1u_1+2u_1u_2+2u_2u_1+10u_2u_2 = u_1^2+4u_1u_2+10u_2^2$$
$$=(u_1+2u_2)^2+6u_2^2\ge 0,\ \forall u_1,u_2\in R \quad \to \langle u|u\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+2u_2=0 \\ u_2=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} u_1=0 \\ u_2=0 \end{cases}\Leftrightarrow u(0,0)$$

$$*\langle u|v\rangle = u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+10u_2v_2$$
$$=1.(-3)+2.1.5+2(-2).(-3)+10.(-2).5=-81$$

VD16:

Chứng minh hệ vector trực chuẩn

$$S=\left\{u_1\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right),u_2\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} *\langle u_1|u_2\rangle = 0 \\ *\|u_1\|=1 \\ *\|u_2\|=1 \end{matrix}\right\}\to ĐPCM$$

VD17: Tích vô hướng

Chứng minh các tích sau là tích vô hướng

$$a)\ \begin{cases} u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3) \\ \langle u,v\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} u=(x_1,x_2), v=(y_1,y_2) \\ \langle u,v\rangle = x_1y_1+2x_2y_2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} u=a_0+a_1x+a_2x^2 \\ v=b_0+b_1x+b_2x^2 \\ \langle u,v\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} u=f(x), v=g(x) \\ \langle u,v\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} u=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \\ \langle u,v\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4 \end{cases}$$

Tích vô hướng ?

$$f)\ \langle u,v\rangle = x_1y_1+x_3y_3$$

$$g)\ \langle u,v\rangle = x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_3^2y_3^2$$

$$h)\ \langle u,v\rangle = 2x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3$$

$$i)\ \langle u,v\rangle = x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3$$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ (Gram-Schmidt)

Cơ sở tổng quát

$$S=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$$

$$\begin{cases} v_1=u_1 \\ v_2=u_2-\dfrac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1 \\ v_3=u_3-\dfrac{\langle u_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1-\dfrac{\langle u_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2 \\ \ldots\ldots \\ v_n=u_n-\dfrac{\langle u_n,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1-\ldots-\dfrac{\langle u_n,v_{n-1}\rangle}{\langle v_{n-1},v_{n-1}\rangle}v_{n-1} \end{cases}$$

Cơ sở trực chuẩn

$$S_\perp=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

$$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|},\ e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|},\ldots,\ e_n=\frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Cơ sở trực giao

$$S_e=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$$

VD18: Tìm cơ sở trực chuẩn của cơ sở sau

$$S=\{u_1=(0,1,-1),u_1=(-1,2,0),u_3=(2,1,1)\}$$

$$v_1=u_1=(0,1,-1)$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1=(-1,2,0)-\frac{0+2+0}{2}(0,1,-1)$$

$$=(-1,1,1)$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1-\frac{\langle u_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2$$

$$=(2,1,1)-0.(0,1,-1)-0.(-1,2,0)=(2,1,1)$$

$$S_\perp=\{(0,1,-1),(-1,1,1),(2,1,1)\}$$

$$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right),\ e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$e_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$S_e=\left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right),\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right\}$$

VD19: Trong R^2/R^3 có tích vô hướng Euclid. Áp dụng phương pháp G-S biến các cơ sở thành cơ sở trực chuẩn

$$a)\ \ S_1 = \{u_1 = (1,-3), u_2 = (2,2)\}$$

$$b)\ \ S_2 = \{u_1 = (1,0), u_2 = (3,-5)\}$$

$$c)\ \ S_3 = \left\{\begin{matrix} u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,0), \\ u_3 = (1,2,1) \end{matrix}\right\}$$

$$d)\ \ S_4 = \left\{\begin{matrix} u_1 = (1,0,0), u_2 = (3,7,-2), \\ u_3 = (0,4,1) \end{matrix}\right\}$$

VD20: $Cho \begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{30}}, \dfrac{3}{\sqrt{30}}\right) \end{cases}$

Chứng minh x và y không trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid, nhưng trực chuẩn theo tích vô hướng $\langle u,v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$.

VD21: $Cho \begin{cases} S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\} \\ \langle u,v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 \end{cases}$

Áp dụng phương pháp G-S để đưa S về dạng trực chuẩn với tích vô hướng đã cho.

VD22: Trong P_2 cho $\begin{cases} S = \{1,\ x,\ x^2\} \\ \langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \end{cases}$

Áp dụng phương pháp G-S để đưa S về dạng trực chuẩn với tích vô hướng đã cho.