HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2022

(*Đề thi có 02 trang*)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng B

Bài B.1. (6 điểm)

(a) Cho a, b, c là các số thực. Tính định thức của ma trận A sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm điều kiện của a, b, c để ma trận A có hạng bằng 3. Với những số a, b, c như vậy, hãy tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Bài B.2. (6 điểm) Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố / Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \le b \le 0,3; \\ 0,5 \le a + b \le 0,6; \\ 0,8 \le a + 2b \le 0,9. \end{cases}$$

Bài B.3. (6 điểm) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ma trận A có chéo hóa được hay không? Tại sao?

(b) Tìm một ma trận khả nghịch Q sao cho:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bài B.4. (6 điểm)

(a) Với λ là một số phức khác 0, cho A là ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Bài B.5. (6 điểm) Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.

Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Hãy liệt kê tất cả các cách điền vào những vị trí $*$ còn trống của ma trận sau để thu được một ma trận Olympic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & -1 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Giải thích tại sao.

(c) Tính giá trị của $f(2)$.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Bài B.1. (Tổng = 6 điểm)

(a) Cho a, b, c là các số thực. Tính định thức của ma trận A sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm điều kiện của a, b, c để ma trận A có hạng bằng 3. Với những số a, b, c như vậy, hãy tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Khai triển Laplace (chẳng hạn theo hàng đầu) suy ra định thức của A bằng $-2abc$.

(b): (3 điểm) Ma trận A cấp 3 có hạng bằng 3 khi và chỉ khi nó là một ma trận khả nghịch, hay $abc \neq 0$. Dùng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{32}} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & \overline{a_{33}} \end{pmatrix}$$

ta suy ra khi $abc \neq 0$ thì ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2c} & -\frac{b}{2ac} \\ \frac{1}{2b} & -\frac{a}{2bc} & \frac{1}{2c} \\ -\frac{c}{2ab} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

Bài B.2. (A.2=B.2) (Tổng=6 điểm)

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Loại nguyên liệu \ Tên thành tố	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3; \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6; \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Tỷ lệ của N trong sản phẩm là: $0,4x + 0,2y + 0,3z$.
Tỷ lệ của K trong sản phẩm là: $0,2x + 0,3y + 0,3z$.
Tỷ lệ của S trong sản phẩm là: $0,4x + 0,5y + 0,4z$.

(b): (2 điểm) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0,4x+0,2y+0,3z=0,31, \\ 0,2x+0,3y+0,3z=0,26. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có: $(x; y; z) = (0,4; 0,3; 0,3)$.

(c): (2 điểm) Gọi a, b lần lượt là tỷ lệ của N, K trong một sản phẩm. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0,4x+0,2y+0,3z=a, \\ 0,2x+0,3y+0,3z=b. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có:

$$(x; y; z) = (3-10b; 6-10a-10b; 10a+20b-8).$$

Điều kiện để có một sản phẩm là $0 \leq x, y, z \leq 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3 \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6 \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

Bài B.3. (Tổng = 6 điểm)

Cho ma trận

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Ma trận $\boldsymbol{A}$ có chéo hóa được hay không? Tại sao?

(b) Tìm một ma trận khả nghịch $\boldsymbol{Q}$ sao cho:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Đa thức đặc trưng là

$$\boldsymbol{P_A(X) = (2 - X)(4 - X)^2}.$$

Các giá trị riêng tương ứng $\boldsymbol{\lambda = 2}$, $\boldsymbol{\lambda = 4}$ (số bội bằng $\mathbf{2}$). Các không gian con riêng tương ứng

$$\boldsymbol{V_2} = \mathbf{Span}\left((\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}\right), \boldsymbol{V_4} = \mathbf{Span}\left((\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}\right).$$

Tổng các không gian con này chứa trong thực sự $\mathbb{C}^{\mathbf{3}}$, nên ma trận $\boldsymbol{A}$ không chéo hóa được.

(b): (3 điểm) Ta chọn $\boldsymbol{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{u_2} = (\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$ lần lượt là các vectơ riêng ứng với $\mathbf{2}$ và $\mathbf{4}$. Ta cần tìm $\boldsymbol{u_3}$ sao cho $\boldsymbol{A u_3 = u_2 + 4 u_3}$. Điều đó nghĩa là $\boldsymbol{(A - 4E) u_3 = u_2}$. Do đó, ta có thể chọn $\boldsymbol{u_3} = \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1}\right)^{\boldsymbol{T}}$. Vậy ma trận $\boldsymbol{Q}$ cần chọn là:

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Bài B.4. (Tổng = 6 điểm)

(a) Với λ là một số phức khác 0, cho A là ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Vì $\lambda \neq 0$, nên có thể chọn chẳng hạn ma trận

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

suy ra

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vậy với

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

thì $B^2 = A$.

(b): (3 điểm) Giả sử tồn tại ma trận vuông cấp hai sao cho

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thế thì

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ (a+d)c = 0, \\ bc + d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Do đó $c = 0$, suy ra

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = d = 0$ và dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không khai căn bậc hai được.

Bài B.5. (Tổng = 6 điểm)

Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.

Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Hãy liệt kê tất cả các cách điền vào những vị trí $*$ còn trống của ma trận sau để thu được một ma trận Olympic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & -1 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Giải thích tại sao.

(c) Tính giá trị của $f(2)$.

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Nếu hai hàng bất kỳ chỉ sai khác nhau một vectơ hàng thì tổng các số trên mỗi đường hoán vị bằng tổng các số trên một hàng cố định trước cộng với một hằng số. Do đó tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau.

Đảo lại, giả sử tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau. Thế thì với i, j cho trước, k, l tùy ý ta có

$$a_{ik} + a_{jl} = a_{il} + a_{jk}.$$

Do đó

$$a_{ik} - a_{jk} = a_{il} - a_{jl} \text{ với mọi } k, l.$$

Vậy hàng i trừ hàng j bằng vectơ hàng hằng $(c, c, \dots, c)$.

(b): (2 điểm) Dùng câu (a) ta có $a_{14} = 1$. Từ đó lại dùng câu (a) lần lượt suy ra

$$a_{23} = 0; a_{32} = -1; a_{33} = 0; a_{34} = 0; a_{42} = 0; a_{43} = 1; a_{44} = 1.$$

Vậy ta thu được ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c): (2 điểm) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng: $(-1,-1)$; $(0,0)$, hoặc $(1,1)$. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có 3 khả năng cho mỗi hàng

$$\begin{cases}(0,0);\\(1,1);\\(-1,-1).\end{cases}$$

Khi đó ta có 9 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 2: Cả 0 lẫn 1 (ngoại trừ -1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có 2 khả năng $(1,0)$ hoặc $(0,1)$. Trường hợp này có 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 3: Cả 0 lẫn -1 (ngoại trừ 1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 4: Cả $1, -1$ (0 có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có 2 khả năng $(-1,1)$ hoặc $(1,-1)$. Do đó trường hợp này có 2 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Vậy số ma trận Olympic cần tìm là

$$f(2) = 9 + 4 + 4 + 2 = 19.$$