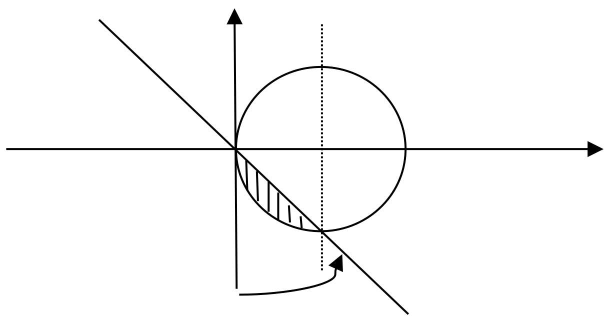
Buổi 08 – Ngày 16-11-2023 – môn Giải tích – lớp MA006.O119

CHƯƠNG 4: TÍCH PHÂN BỘI (MULTIPLE INTEGRAL)

Ví dụ mẫu 3: Tính diện tích miền $D_{xy}:\begin{cases} x^2+y^2\le 2x \\ y\le -x \end{cases}$

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Cách 1: dùng tọa độ cực mở rộng

Đặt $\begin{cases} x-1=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, với $\begin{cases} \pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2} \\ ?\le r\le 1 \end{cases}$ (không tính được)

Cách 2: dùng tọa độ cực thông thường:

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ thay vào bất pt $x^2+y^2\le 2x$ ta có:

$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2\le 2(r\cos\varphi)$$
$$\Leftrightarrow r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\le 2r\cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow r^2\le 2r\cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow r\le 2\cos\varphi$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{7\pi}{4} \\ 0\le r\le 2\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow S(D_{xy})=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}1.rdr=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi\left[\dfrac{r^2}{2}\right]_0^{2\cos\varphi}=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi[2\cos^2\varphi]$

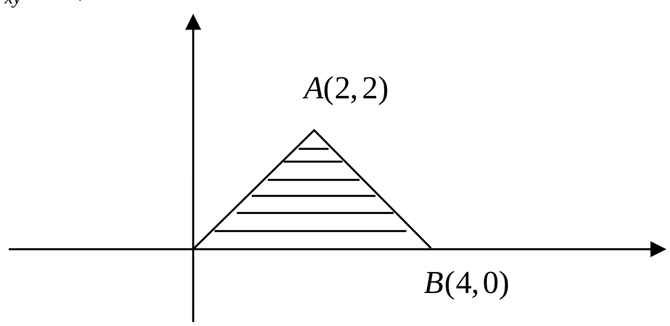
$$=2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right)d\varphi=\left[\varphi+\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}=\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{2}-\sin(3\pi)\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(-1-0)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

Ví dụ mẫu 4: Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(2,2), B(4,0)$.

Giải:

Ta có miền D_{xy} được biểu diễn như sau:



Ta có pt các cạnh tam giác là:

$OA: y = x$; $OB: y = 0$; $AB: y = 4 - x$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, với $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào pt $AB: y = 4 - x$ ta có:

$$r\sin\varphi = 4 - r\cos\varphi \Rightarrow r(\sin\varphi + \cos\varphi) = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

Suy ra $0 \le r \le \dfrac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$

Cho nên $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

Bài tập tương tự:

1/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, với $D_{xy}: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

2/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, với $D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

3/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dxdy$, với $D_{xy}: x^2 + y^2 \le 4x$

4/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} xdxdy$, với $D_{xy}: 2x \le x^2 + y^2 \le 4x$

5/ Tính $I = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, với $D_{xy}: \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y \ge 0 \end{cases}$

6/ Tính $I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}$

7/ Tính $I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, với D_{xy} là miền nằm giữa 2 đường tròn $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}\\ x^2+y^2=\pi^2\end{cases}$

8/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y)dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}y\le 2-x^2\\ y\ge x\\ x\ge 0\end{cases}$

9/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y)dxdy$, với D_{xy} là tam giác OAB và $O(0,0), A(1,1), B(0,1)$.

10/ Biểu diễn tích phân sang tọa độ cực: $I=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y)dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}y\le 3-2x\\ y\ge x\\ x\ge 0\end{cases}$

c/ <u>Phương pháp đổi biến tổng quát</u> (khi miền lấy tích phân bị chắn bởi một số đường cong đồng dạng)

Đặt $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$

Suy ra $D_{xy}\to D_{uv}:\begin{cases}u_1\le u\le u_2\\ v_1\le v\le v_2\end{cases}$

Ta có định thức ma trận Jacobi là:

$$J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=x'_u\,y'_v-x'_v\,y'_u,\qquad \text{hoặc}$$

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\ldots$$

Ta có: $I=\iint\limits_{D_{uv}}f(x(u,v),y(u,v)).|J|\,dudv$

<u>Ví dụ mẫu</u>: Tính $I=\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)^3(x+y)^4dxdy$, với $D_{xy}:\begin{cases}x-y=0\\ x-y=2\\ x+y=1\\ x+y=3\end{cases}$

<u>Giải</u>: Đặt: u=x-y

v=x+y

với 0<=u<=2

1<=v<=3

Suy ra x=(u+v)/2

y=(v-u)/2

và $x'_u=1/2$; $x'_v=1/2$

$y'_u=-1/2$; $y'_v=1/2$

và J = (1/2)*(1/2) – (-1/2)*(1/2) = ½

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^2 du \int_1^3 u^3 v^4 dv = \frac{1}{2}\int_0^2 du \left[u^3 \frac{v^5}{5} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \times \frac{242}{5} \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^2 = \frac{484}{5}.$$

2/ <u>TÍCH PHÂN BỘI 3 (TRIPLE INTEGRAL)</u>

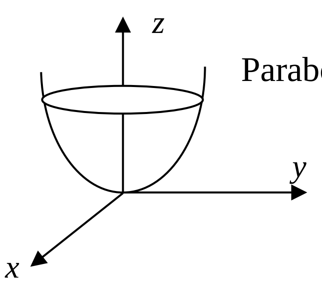
$I = \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, trong đó:

$f(x,y,z) =$ hàm số dưới dấu tích phân.

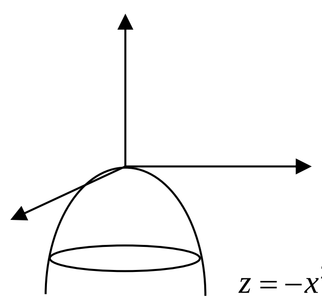
$\Omega =$ khối vật thể lấy tích phân trong không gian.

Khi $f(x,y,z) = 1$ thì $I = \iiint_\Omega 1.dxdydz = V(\Omega) =$ thể tích khối vật thể Ω.

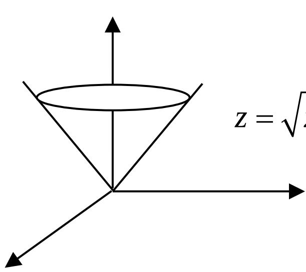
Nhắc lại một số pt mặt cong trong không gian:



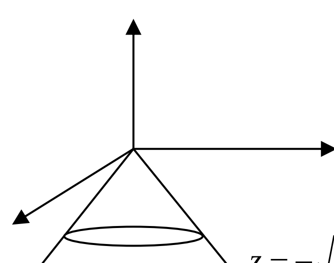
Paraboloic: $z = x^2 + y^2$



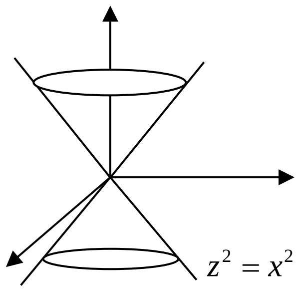
$z = -x^2 - y^2$



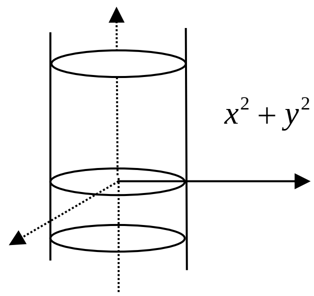
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



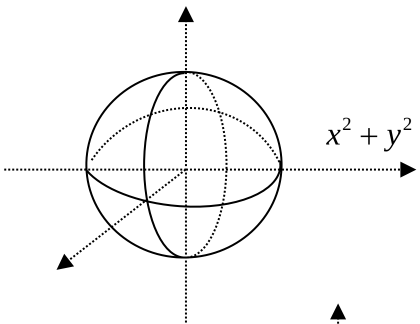
$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



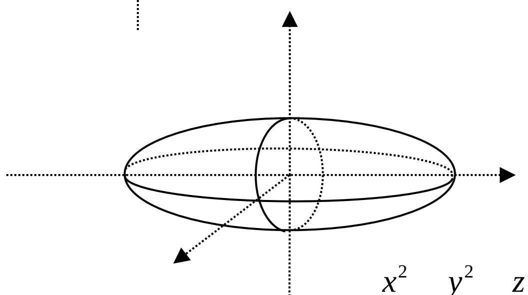
$z^2 = x^2 + y^2$



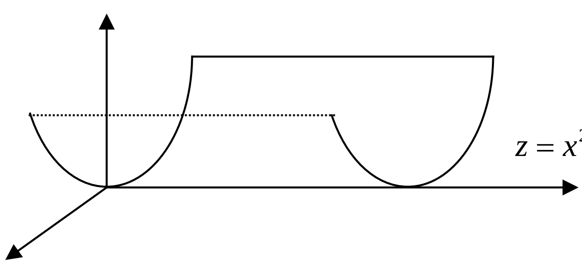
$x^2 + y^2 \le R^2$ (hình trụ)
(cylinder)



$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ (hình cầu) (sphere)



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le R^2$ (elipsoic)



$z = x^2$ (hình máng)

a/ <u>Tính I bằng cách dùng định lý Fubini</u>:

TH1: $\Omega: \begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (2xy - z)dxdydz$, với $\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2x \\ xy \le z \le 4xy \end{cases}$

TH2: $\Omega:\begin{cases} c \le y \le d \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

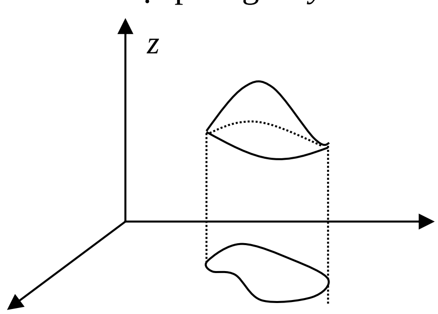
<u>Ví dụ 2</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y-3)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 2y \le x \le 4y \\ x^2y^2 \le z \le 2x^2y^2 \end{cases}$

TH3: $\Omega:\begin{cases} e \le z \le f \\ h_1(z) \le x \le h_2(z) \\ y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_e^f dz \int\limits_{h_1(z)}^{h_2(z)} dx \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$

<u>Ví dụ 3</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (x-z+1)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} 0 \le z \le 3 \\ z^2 \le x \le 2z^2 \\ x^2z \le y \le 3x^2z \end{cases}$

b/ <u>*Phương pháp chiếu (projection method)*</u>:

<u>TH1</u>: chiếu Ω lên mặt phẳng Oxy



Gọi $prj_{Oxy}(\Omega) = D_{xy}$ thỏa $S(D_{xy}) \ne 0$ hình chiếu có diện tích khác 0.

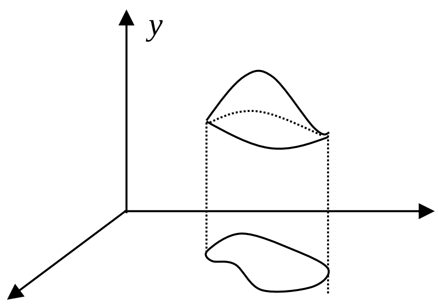
Ta xác định: + mặt trên $z_2 = z_2(x,y)$

+ mặt dưới $z_1 = z_1(x,y)$

Suy ra $I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

<u>Ví dụ 4</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (2x-y+z)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} z \ge x^2+y^2 \\ z \le 1 \end{cases}$

<u>TH2</u>: chiếu Ω lên mặt phẳng Oxz



Gọi $prj_{Oxz}(\Omega) = D_{xz}$ thỏa $S(D_{xz}) \neq 0$ hình chiếu có diện tích khác 0.

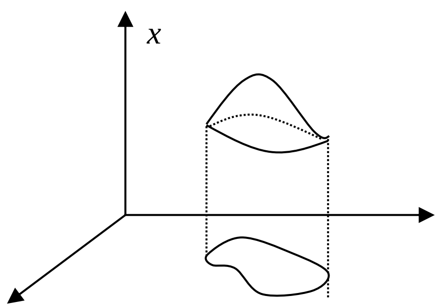
Ta xác định: + mặt trên $y_2 = y_2(x,z)$

+ mặt dưới $y_1 = y_1(x,z)$

Suy ra $I = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$

Ví dụ 5: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+z)dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} y \geq \sqrt{x^2+z^2} \\ y \leq 2-(x^2+z^2) \end{cases}$

TH3: chiếu Ω lên mặt phẳng Oyz



Gọi $prj_{Oyz}(\Omega) = D_{yz}$ thỏa $S(D_{yz}) \neq 0$ hình chiếu có diện tích khác 0.

Ta xác định: + mặt trên $x_2 = x_2(y,z)$

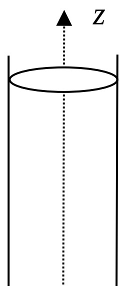
+ mặt dưới $x_1 = x_1(y,z)$

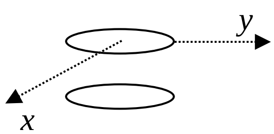
Suy ra $I = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$

Ví dụ 6: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (3y+4z)dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} x \leq 2-y^2-z^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

c/ *Phương pháp tọa độ trụ*:

TH1: Ống trụ chạy dọc theo trục Oz





Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \\ z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi) \end{cases}$

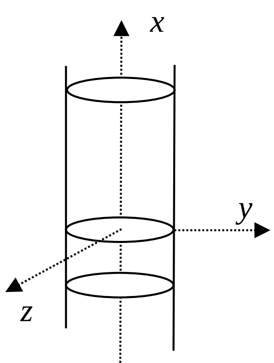
Suy ra $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} rdr \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I = \iiint_\Omega (x - 2y + 4)dxdydz$, với $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ z \ge 0 \\ z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính $I = \iiint_\Omega (2z + 1)dxdydz$, với $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z \ge x^2 + y^2 \\ z \le 4 + x^2 + y^2 \end{cases}$

<u>Ví dụ 3</u>: Tính $I = \iiint_\Omega (2y + 3)dxdydz$, với $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ y + z \le 4 \\ z \ge 0 \end{cases}$

<u>TH2</u>: Ống trụ chạy dọc theo trục Ox



Đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1 \le r \le r_2 \\ x_1(r,\varphi) \le x \le x_2(r,\varphi) \end{cases}$

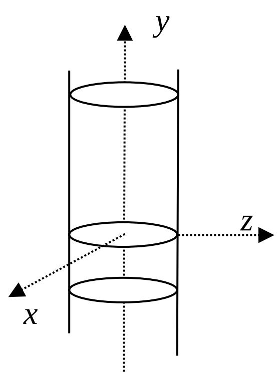
Suy ra $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} rdr \int_{x_1(r,\varphi)}^{x_2(r,\varphi)} f(x, r\sin\varphi, r\cos\varphi)dx$

Ví dụ 4: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}(4y+z)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} y^2+z^2\le 1 \\ x\le 4-\sqrt{y^2+z^2} \\ x\ge \sqrt{y^2+z^2} \end{cases}$

Ví dụ 5: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}4ydxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} 1\le y^2+z^2\le 4 \\ x\le 6-\sqrt{y^2+z^2} \\ x\ge 0 \end{cases}$

Ví dụ 6: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz$, $\Omega:\begin{cases} y^2+z^2\le 4 \\ x\le 3 \\ x\ge \sqrt{y^2+z^2} \end{cases}$

TH3: Ống trụ chạy dọc theo trục Oy



Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi \\ y=y \end{cases}$, với $\begin{cases} \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \\ r_1\le r\le r_2 \\ y_1(r,\varphi)\le y\le y_2(r,\varphi) \end{cases}$

Suy ra $I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}rdr\int\limits_{y_1(r,\varphi)}^{y_2(r,\varphi)}f(r\cos\varphi,y,r\sin\varphi)dy$

Ví dụ 7: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}2xzdxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} x^2+z^2\le 1 \\ y\ge -\sqrt{x^2+z^2} \\ y\le 3 \end{cases}$

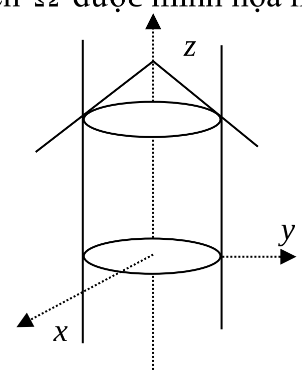
Ví dụ 8: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2z)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} x^2+z^2\le 4 \\ y\ge \sqrt{x^2+z^2} \\ y\le 5-\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$

Ví dụ 9: Tính $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+4)dxdydz$, với $\Omega:\begin{cases} x^2+z^2\le 4 \\ y\ge 0 \\ y\le 8-(x^2+z^2) \end{cases}$

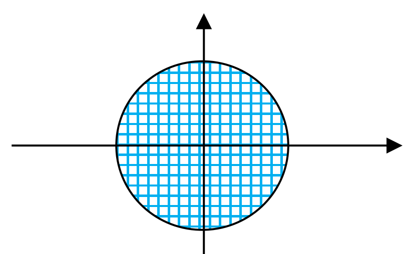
Ví dụ 10: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} x^2+z^2 \le 1 \\ y \ge -\sqrt{x^2+z^2} \\ y \le 5+(x^2+z^2) \end{cases}$

Ví dụ mẫu 1: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (2x+y)dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z \ge 0 \\ z \le 4-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Ta có miền Ω được minh họa như sau:



Dùng pp tọa độ trụ, ta đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, với



$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 4-\sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 4-r \end{cases}$$

Suy ra $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_0^{4-r} (2r\cos\varphi + r\sin\varphi)dz$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr[(2r\cos\varphi + r\sin\varphi)z]_0^{4-r}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[(2r\cos\varphi + r\sin\varphi)(4r-r^2)\right]dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[(8r^2-2r^3)\cos\varphi + (4r^2-r^3)\sin\varphi\right]dr$$

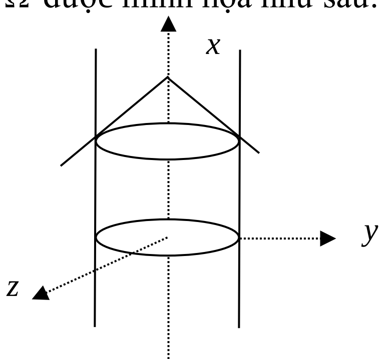
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{8r^3}{3} - \frac{r^4}{2} \right) \cos\varphi + \left(\frac{4r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \sin\varphi \right]_0^1$$

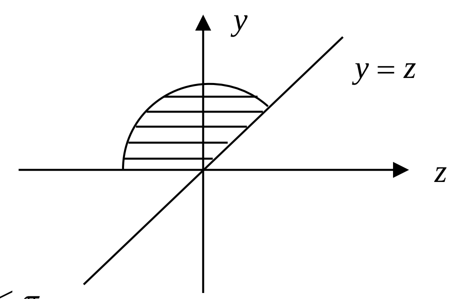
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{6} \cos\varphi + \frac{13}{12} \sin\varphi \right) d\varphi = \left[\frac{13}{6} \sin\varphi - \frac{13}{12} \cos\varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{13}{6}(0-0) - \frac{13}{12}(1-1) = 0$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} (2x+3)dxdydz$, với $\Omega : \begin{cases} y^2 + z^2 \le 1 \\ x \ge 0 \\ x \le 3 - \sqrt{y^2 + z^2} \\ y \ge z \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có miền Ω được minh họa như sau:





Dùng pp tọa độ trụ, ta đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases}$, với

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le x \le 3 - \sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le x \le 3 - r \end{cases}$$

Suy ra $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{3-r} (2x+3)dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \left[x^2 + 3x \right]_0^{3-r}$$

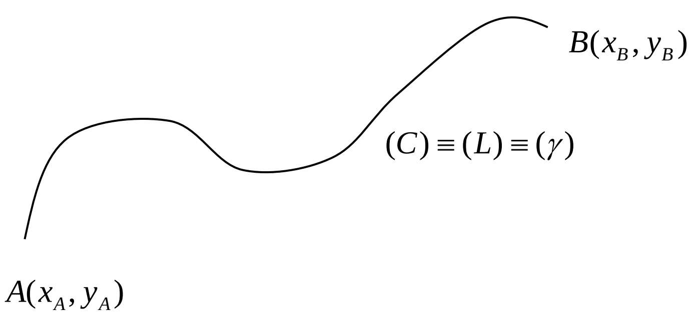
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r \left[(3-r)^2 + 3(3-r) \right] dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left[18r - 9r^2 + r^3 \right] dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \left[9r^2 - 3r^3 + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{25}{4} [\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{25}{4} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{75\pi}{16}$$

CHƯƠNG 5: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – TÍCH PHÂN MẶT

1/ <u>TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1</u>:



$I = \int_{(C)} f(x, y) dl$ hay là $I = \int_{(C)} f(x, y) ds$ hay là $I = \int_{(C)} f(x, y, z) dl$

Trong đó: $(C) =$ curves = phần đường cong lấy tích phân, có 2 đầu mút là $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

= cung $\overset{\frown}{AB}$

Khi $f(x, y) = 1$ hay $f(x, y, z) = 1$ thì

$I = \int_{(C)} 1.dl = l(C) =$ chiều dài của đường cong (C) nằm giữa $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

<u>*Lưu ý*</u>: trong tích phần đường loại 1 ta luôn có ***cận dưới*** $\leq$ ***cận trên***

<u>TH1</u>: (C) là đường cong có pt tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, với $t_1 \leq t \leq t_2$

Ta tính $\begin{cases} x'(t) = ... \\ y'(t) = ... \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = ...$

Suy ra $I=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)).\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I=\int_{(C)}(2x^2+4y-xy)dl$, với $(C):\begin{cases}x=t^2+1\\ y=2t^2-3\end{cases}$ và $0\le t\le 1$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính $I=\int_{(C)}(4xy-2x+3y)dl$, với $(C):\begin{cases}x=2t^2-1\\ y=4t+5\end{cases}$ và $0\le t\le 2$

<u>TH2</u>: (C) là đường cong có pt $y=y(x)$, nghĩa là y là hàm số phụ thuộc vào biến x.

với $x_1\le x\le x_2$, trong đó, x_1,x_2 là hoành độ của 2 đầu mút chắn đường cong (C)

Ta tìm: $y'(x)=...$

Suy ra $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x)).\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

<u>Ví dụ 3</u>: Tính $I=\int_{(C)}(2x-3y+5)dl$, với (C): là parabol $y=x^2$, nối giữa $A(-1,1)$ và $B(3,9)$

<u>Ví dụ 4</u>: Tính $I=\int_{(C)}(4xy^2-1)dl$, với (C) là đoạn gấp khúc ABC và $A(-1,0),B(0,2),C(4,0)$

<u>TH3</u>: (C) là đường cong có pt $x=x(y)$, nghĩa là x là hàm số phụ thuộc vào biến y.

với $y_1\le y\le y_2$, trong đó, y_1,y_2 là tung độ của 2 đầu mút chắn đường cong (C)

Ta tìm: $x'(y)=...$

Suy ra $I=\int_{y_1}^{y_2} f(x(y),y).\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$

<u>Ví dụ 5</u>: Tính $I=\int_{(C)}(2y-x+10)dl$, với (C) là parabol $x=y^2$ nối giữa $A(1,1)$ và $B(16,4)$

<u>Ví dụ 6</u>: Tính $I=\int_{(C)}(2xy-1)dl$, với (C) là parabol $x=y^2$ nằm trong miền $\begin{cases}y\ge -x\\ y\ge x-2\end{cases}$

<u>TH4</u>: (C) là một phần đường tròn tâm O, bán kính R:

Đặt $\begin{cases}x=R\cos\varphi\\ y=R\sin\varphi\end{cases}$, với $\begin{cases}\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\\ R=const\end{cases}$

(<u>ví dụ</u>: xét (C) $x^2+y^2=4$ → đặt $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$)

Ta tìm $\begin{cases}x'(\varphi)=...=-\mathrm{R}\sin\varphi\\ y'(\varphi)=...=\mathrm{R}\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}=...$

Suy ra $I=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(R\cos\varphi, R\sin\varphi).\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi$

Ví dụ 7: Tính $I=\int_{(C)}(2x-y+4)dl$, với (C) $x^2+y^2=9$ trong miền $\begin{cases} y\ge x \\ x\ge 0\end{cases}$

Ví dụ 8: Tính $I=\int_{(C)}(2xy-3)dl$, với $(C): x^2+y^2=1$ trong miền $\begin{cases} y\ge -x \\ y\ge \sqrt{3}x\end{cases}$

TH5: (C) là đường cong trong không gian có pt tham số: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t)\end{cases}$, với $t_1\le t\le t_2$

trong đó t_1, t_2 là 2 giá trị của biến t ứng với 2 đầu mút của (C).

Ta tìm $\begin{cases} x'(t)=... \\ y'(t)=... \Rightarrow \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=... \\ z'(t)=...\end{cases}$

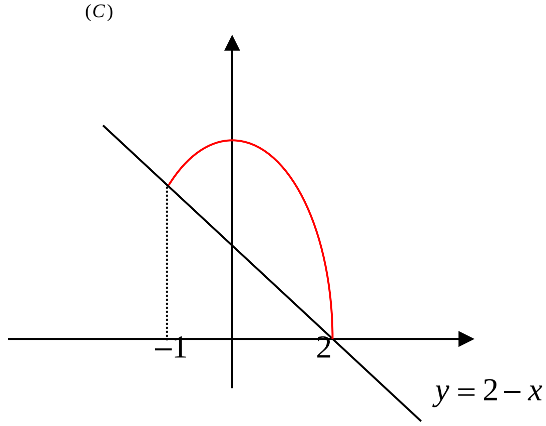
Suy ra: $I=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t)).\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

Ví dụ 9: Tính $I=\int_{(C)}(2x-7)dl$, với (C) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$

Ví dụ 10: Tính $I=\int_{(C)}(10-x+y)dl$, với (C) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1\end{cases}$

Ví dụ mẫu 1: Tính $I=\int_{(C)}(4x-y+3)dl$, với (C) là parabol $y=4-x^2$ nằm bên trên của $y=2-x$

Giải:



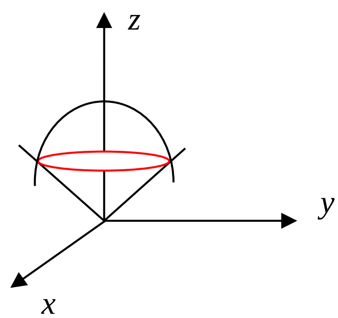
Ta có $-1\le x\le 2$ và $y'(x)=-2x \Rightarrow (y'(x))^2=(-2x)^2=4x^2$

Suy ra $I=\int_{-1}^{2}(4x-(4-x^2)+3).\sqrt{1+4x^2}\,dx$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2 + 4x - 1)\sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 22,5893$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Tính $I = \int_{(C)} (x + y - 2)dl$ với (C) là đường cong giao tuyến $\begin{cases} z = 2 - (x^2 + y^2) \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Ta có: đường cong (C) minh họa như sau:



Xét $2 - (x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + y^2}, t \ge 0$ ta có pt tương đương $2 - t^2 = t \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

Tương đương $t = 1$ (nhận) hay $t = -2$ (loại)

Ta có $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1$

Nên ta tham số hóa (C) như sau

Đặt $\begin{cases} x = 1.\cos\varphi \\ y = 1.\sin\varphi \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi) = -\sin\varphi \\ y'(\varphi) = \cos\varphi \\ z'(\varphi) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2} = \sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + 0^2} = 1$$

Ta có: $0 \le \varphi \le 2\pi$

Suy ra $I = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi - 2)\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2}\,d\varphi$

$$= \left[\sin\varphi - \cos\varphi - 2\varphi\right]_0^{2\pi} = (\sin(2\pi) - \sin(0)) - [\cos(2\pi) - \cos(0)] - 2(2\pi - 0)$$

$$= 0 - 0 - (1 - 1) - 4\pi = -4\pi$$