KÌ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN 2010 (HUẾ, 07-12/4/2010)

ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ

Câu 1:
Cho A, B là các ma trân vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = ... = \det(A+2010B)$
a/ Chứng minh $det(xA+yB)=0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$
b/ Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = ... = \det(A+2009B)$

Câu 2.
Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi: $u_0 = v_0 = w_0 = 1$
và $u_{n+1} = -u_n - 7v_n + 5w_n$, $v_{n+1} = -2u_n - 8v_n + 6w_n$, $w_{n+1} = -4u_n - 16v_n + 12w_n$
Chứng minh $v_n - 2$ chia hết cho 2^n.

Câu 3.
a/ Chứng minh ứng với mỗi số nguyên dương n , biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn được dưới dạng $P_n(s,p,q)$ bậc không quá n của các biến $s = x+y+z, p = xy+yz+zx, q = xyz$
b/ Hãy tìm tổng hệ số của $P_{2010}(s,p,q)$

Câu 4.
Xác định đa thức thực $P(x)$ thõa mãn $P(x)P(x^2) = P(x^3+2x)$

Câu 5. Tự chọn:
5a/ Cho A là ma trận thực vuông cấp $n \geq 2$, có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $\operatorname{rank} A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A.
5b/ Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n, trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B, C. Giả sử $C(A+B) = B$. Chứng minh B và C giao hoán với nhau.

KÌ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN 2010 (HUẾ, 07-12/4/2010)

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH

Câu 1.

Cho $f(x) = \ln(x+1)$

a/ Chứng minh với mọi $x > 0$. tồn tại duy nhất số thực c thõa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta ký hiệu $c(x)$.

b/ Tìm $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{c(x)}{x}$

Câu 2.

Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n(1 + x_n^{2010})$, $n \geq 1$.

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_1^{2010}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2010}}{x_3} + ... + \dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}$

Câu 3.

Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0, +\infty)$ thõa mãn $f(0) \geq 0$, $f'(x) + af(x) \geq 0$, với mọi $x \in [0; +\infty)$. Chứng minh $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Câu 4.

Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Câu 5.

Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \dfrac{n}{2}$. Chứng minh $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$

Câu 6. Tự chọn:

6a. Tìm tất cả hàm dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thõa mãn $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1$

6b. Tìm tất cả hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 2010$ và $f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$