Chương 2. Phép tính tích phân hàm một biến số

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 14 tháng 9 năm 2023

2.1 Nguyên hàm

2.2 Tích phân xác định

2.3 Ứng dụng của tích phân

2.3 Tích phân suy rộng

2.1 Nguyên hàm

Định nghĩa 2.1 Một hàm số $F(x)$ được gọi là *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ nếu

$$F'(x) = f(x)$$

với mọi x thuộc tập xác định của $f(x)$.
Ví dụ 2.2 Hàm số $F(x) = 3x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) = 6x$ vì $F'(x) = f(x)$.
Định lý 2.3 Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của một hàm số liên tục $f(x)$ thì hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ với mọi hằng số C.
Định nghĩa 2.4 Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ được kí hiệu

$$\int f(x)dx$$

và được gọi là *tích phân bất định* của $f(x)$.
Kí hiệu $\int$ được gọi là *kí hiệu tích phân*. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Các tính phân bất định cơ bản

1. $\int a\mathrm{d}x = ax + C$ (a là hằng số tùy ý)
2. $\int x^k \mathrm{d}x = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C$ (k là hằng số khác -1)

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
4. $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0$ và $a \neq 1$)
5. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$ ($\alpha \neq 0$)
6. $\displaystyle\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ ($a \neq 0$)
7. $\displaystyle\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ ($a \neq 0$)
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$ ($a \neq 0$)
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, 0 < |a| < |x|$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C, a \neq 0$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ ($a \neq 0$)
14. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ ($a \neq 0$)

Định lý 2.5

1. $\displaystyle\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$
2. $\displaystyle\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$ với c là một hằng số
3. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int f(x).g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x).g(x)\mathrm{d}x$

Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Ví dụ 2.6 Tính $\displaystyle\int (3x+7)^8\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = 3x+7$, khi đó $\mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$ hay $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}u$. Do đó

$$\int (3x+7)^8\mathrm{d}x = \int u^8\frac{1}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^8\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\frac{u^9}{9} + C = \frac{1}{27}(3x+7)^9 + C$$

Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Ví dụ 2.7 Tính $\displaystyle\int x\sin x\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\int x \sin x \mathrm{d}x = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

Ví dụ 2.8 Tính $\displaystyle\int e^x \sin x \mathrm{d}x$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

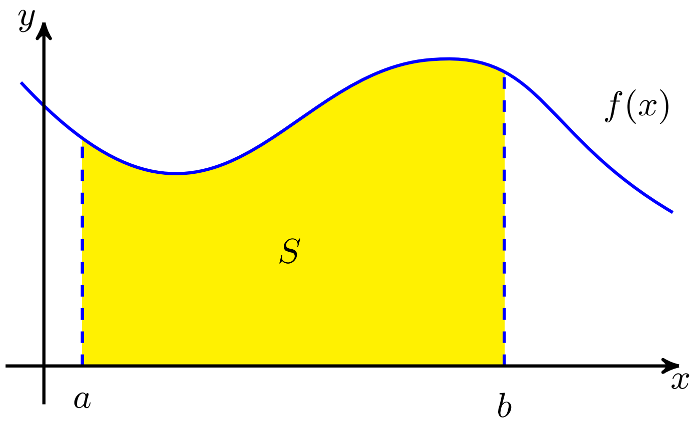
....

....

....

2.2 Tích phân xác định

Bài toán. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Tính diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$

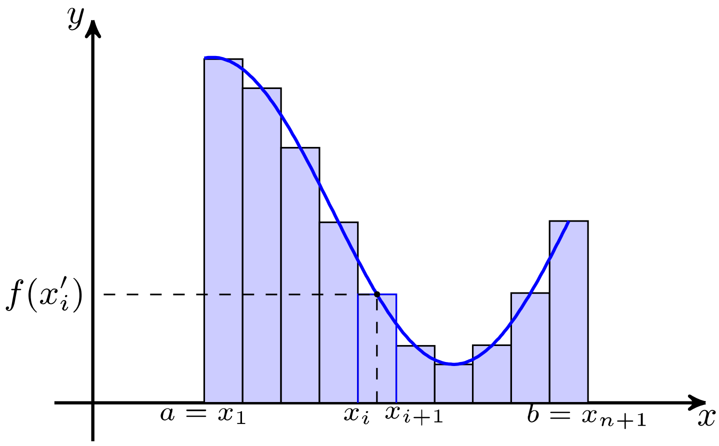


Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$;

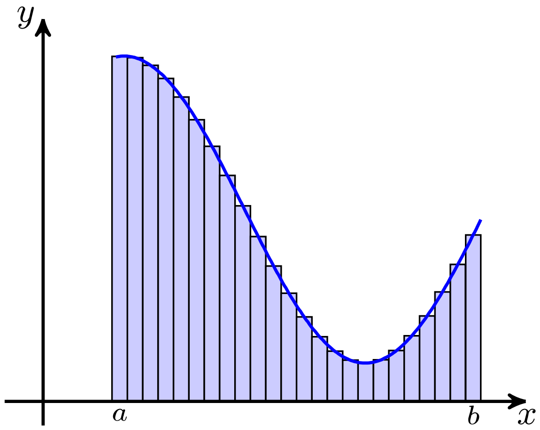
$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n+1} = b$$

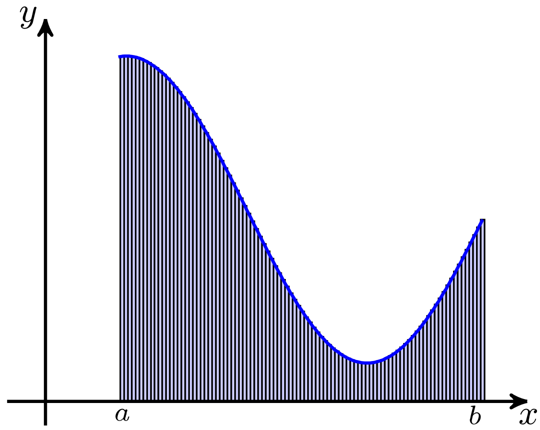
Trên mỗi đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, dựng một hình chữ nhật có chiều dài $f(x_k)$. Diện tích của mỗi hình chữ nhật là $f(x_i')\Delta x$ với $x_i' = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Tổng diện tích của các hình chữ nhật là

$$S_n = f(x_1')\Delta x + f(x_2')\Delta x + \ldots + f(x_n')\Delta x = (f(x_1') + \ldots + f(x_n'))\Delta x$$



Khi n tăng lên thì tổng S_n sẽ càng gần với diện tích mà ta cần tính. Do đó, diện tích phần hình cần tính có liên hệ với giới hạn. Số đo diện tích này được gọi là *tích phân xác định* của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.



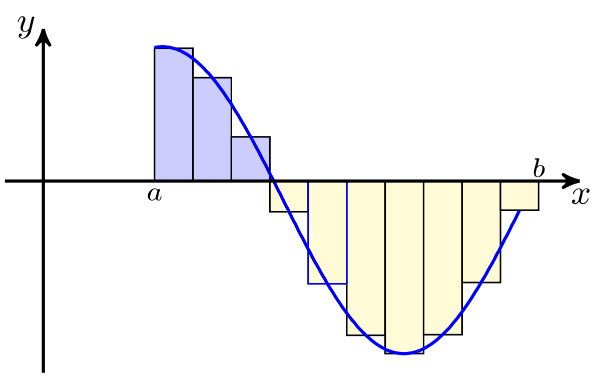


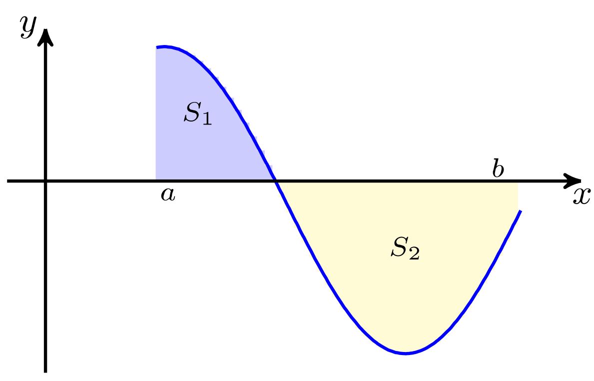
Định nghĩa 2.9 Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ là giới hạn của

$$\lim_{n\to\infty} (f(x'_1) + \cdots + f(x'_n))\Delta x.$$

Kí hiệu $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ trong đó a được gọi là cận dưới; b là cận trên của tích phân; x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm số lấy tích phân.

- Nếu giới hạn trong định nghĩa trên tồn tại thì ta nói f khả tích trên $[a, b]$.
- Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị âm và dương thì diện tích cần tìm bằng tổng diện tích của hình nằm trên trục hoành trừ tổng diện tích của hình nằm dưới trục hoành.





$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2$$

Một số tính chất của tích phân xác định

1. $\int_a^b C.f(x)\mathrm{d}x = C.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, c \in [a,b]$
4. Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
5. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
6. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
7. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a,b]$ thì
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Định lý 2.10 Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Kí hiệu: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Ví dụ 2.11 Tính $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + x^2\right)\mathrm{d}x.$

Giải.
$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x| + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3$$
$$= (\ln 3 + \frac{3^3}{3}) - (\ln 1 + \frac{1}{3}) = \ln 3 + \frac{26}{3}$$

Ví dụ 2.12 Tính $I = \int_1^3 x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x$

Giải. ....

....

....

....

....

....

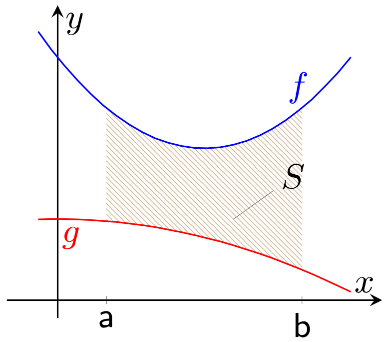
....

....

....

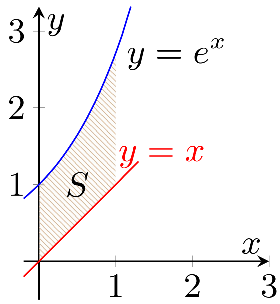
2.3 Ứng dụng của tích phân

Định lý 2.13 Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục và $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ được tính bởi



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2.14 Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các đường $y = e^x, y = x, x = 0, x = 1$.



Giải. Ta thấy e^x, x là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $e^x \geq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$S = \int_0^1 (e^x - x)\mathrm{d}x = (e^x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = e - \frac{3}{2}.$$

Định lý 2.15 Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a, b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ được tính bởi

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

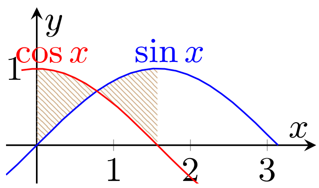
Ví dụ 2.16 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi/2.$$

Giải.

- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường cong $y = \sin x, y = \cos x$ trong đoạn $[0, \pi/2]$

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \pi/4$$



- Khi $0 \leq x \leq \pi/4$, ta có $\cos x \geq \sin x$. Khi $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$, ta có $\sin x \geq \cos x$.

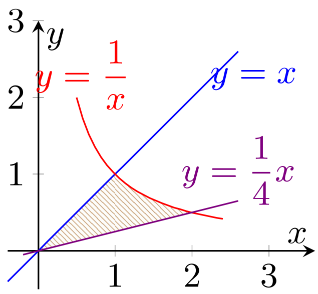
$$S = \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{2} - 2.$$

Ví dụ 2.17 Tính diện tích hình phẳng không nằm dưới trục hoành giới hạn bởi các đường $y = x, y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{4}x$.

Giải.

- Tìm giao điểm không nằm dưới trục hoành của các đường

$$x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1(\text{ loại } x = -1)$$
$$x = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = 0$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = 2(\text{ loại } x = -2)$$



Ta chia hình thành 2 phần bởi đường thẳng $x = 1$. Khi đó diện tích hình cần tính là

$$\int_0^1 (x - \frac{1}{4}x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x^2\Big|_0^1 + \left(\ln x - \frac{1}{8}x^2\right)\Big|_1^2 = \ln 2.$$

Định lý 2.18 Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a, b]$. Giá trị trung bình của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2.19 Một nghiên cứu cho thấy nhiệt độ tính từ 6 giờ sáng đến 6 giờ chiều tại một thành phố nọ là một hàm số xác định bởi

$$f(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-4)^2 \text{ với } 0 \leq t \leq 12$$

trong đó t là số giờ được tính từ 6 giờ sáng. Tính nhiệt độ trung bình của thành phố đó trong khoảng thời gian từ 8 giờ sáng đến 5 giờ chiều.

Giải. Thời gian từ 8 giờ sáng đến 5 giờ chiều tương ứng với $t = 2$ và $t = 11$. Khi đó nhiệt độ trung bình cần tìm là giá trị trung bình của hàm $f(t)$ trên đoạn $[2, 11]$. Như vậy, nhiệt độ trung bình cần tìm là

$$\frac{1}{11-2}\int_2^{11}\left(3 - \frac{1}{3}(t-4)^2\right)\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}$$

Định lý 2.20 Độ dài đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ trong đoạn $[a, b]$ được tính bởi

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2.21 Tính độ dài đường cong có phương trình $y^2 - x^3 = 0$ từ điểm $(1, 1)$ đến điểm (4,8).

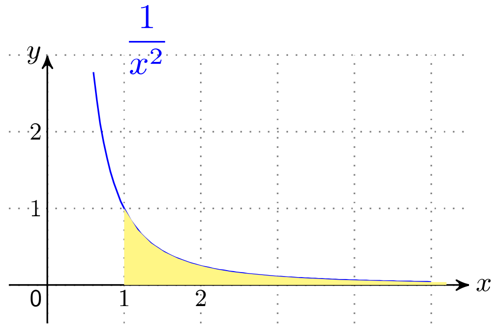
Giải. Phần đồ thị của cung từ điểm $(1, 1)$ đến điểm $(4, 8)$ là $y = \sqrt{x^3}$. Khi đó $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Độ dài cung cần tìm là

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$$

2.3 Tích phân suy rộng

2.3.1 Tích phân suy rộng loại 1

Bài toán. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x^2}$ trên $[1, +\infty)$ là hữu hạn hay vô hạn?



Định nghĩa 2.22

1. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$. Tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là tích phân suy rộng và

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $(-\infty, b]$. Tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là tích phân suy rộng và

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Nếu các giới hạn bên trên là các số hữu hạn thì ta nói các tích phân suy rộng *hội tụ*. Ngược lại, ta nói tích phân đó phân kì.

Ví dụ 2.23 Tính $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$

Giải. Ta có

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right) = 1.$$

Ví dụ 2.24 Tính a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\mathrm{d}x.$ b. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 2.25 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty, +\infty)$, các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ. Khi đó tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2.26 Tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Giải. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_0^b$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Định lý 2.27 Xét tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ với $a > 0, \alpha > 0$.

1. Nếu $\alpha > 1$ thì tích phân hội tụ.
2. Nếu $\alpha \le 1$ thì tích phân phân kì.

Định lý 2.28

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ với mọi $b > a$.
2. Nếu $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [a, +\infty)$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ khi và chỉ khi tồn tại một số $M > 0$ sao cho $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M$ với mọi $b \ge a$.

Định lý 2.29 Giả sử $0 \le f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in [a, +\infty)$.

1. Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.
2. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ phân kì.

Ví dụ 2.30 Xét sự hội tụ của các tích phân

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{10}+1}$ b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^{10}}\mathrm{d}x$

Giải. a. Ta có $0 \leq \dfrac{1}{x^{10}+1} < \dfrac{1}{x^{10}}$ với mọi $x \geq 1$. Vì $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{10}}\mathrm{d}x$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

b. Ta có

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$$

với mọi $x \geq 1$. Vì $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}\mathrm{d}x$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

c. Vì $x \leq x^{10}$ nên $0 \leq e^{-x^{10}} \leq e^{-x}$ với mọi $x \geq 1$. Ta có

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = e^{-1}$$

Do đó, tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.31 Xét sự hội tụ của các tích phân

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-\ln x}\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\mathrm{d}x$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 2.32 Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.

Ví dụ 2.33 Xét sự hội tụ của tích phân

a. $\int_1^{+\infty} e^{-x}\cos 4x\mathrm{d}x$ b. $\int_0^{+\infty} \frac{4\sin x + 1}{e^{2x} + x^2}\mathrm{d}x$ c. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

Giải. a. Ta có $|e^{-x}\cos 4x| \le e^{-x}$ với $x \ge 1$ và $\int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ.

b. Với mọi $x \ge 0$, ta có $\left|\frac{4\sin x + 1}{e^{2x} + x^2}\right| \le \frac{5}{e^{2x}}$. Hơn nữa tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{5}{e^{2x}}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{-5}{2}e^{-2x}\Big|_0^b = \frac{5}{2}$$

do đó tích phân đã cho hội tụ.

c. Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{x}\cos x\Big|_1^b - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Ta có $\lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{x}\cos x\Big|_1^b = \cos 1$. Hơn nữa, với mọi $x \ge 1$ ta có $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ hội tụ. Do đó, tích phân đã cho hội tụ.

Định lý 2.34 Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$, $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- $k > 0$: $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ và $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- $k = 0$: nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.
- $k = \infty$: nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.

Ví dụ 2.35 Xét sự hội tụ của tích phân

a. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 + 2x^3}\mathrm{d}x$ b. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + \sin x + 2x}\mathrm{d}x$

Giải. a. Đặt $f(x) = \frac{1}{1 + x^2 + 2x^3}$ và $g(x) = \frac{1}{x^3}$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1 + x^2 + 2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

b. Đặt $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x + 2x}, g(x) = \frac{1}{x}$ và $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + \sin x + 2x} = \frac{1}{2}$.

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ phân kì nên tích phân đã cho phân kì.

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\sin x - e^{-x}}{\sqrt{x^5+4}}\mathrm{d}x$

Đặt

$$f(x) = \frac{x^2+\sin x - e^{-x}}{\sqrt{x^5+4}}, g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^5}}$$

khi đó

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^5+4}} \frac{x^2}{x^2+\sin x - e^{-x}} = 1.$$

Mặt khác, tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

phân kì. Như vậy, tích phân đã cho phân kì.

Ví dụ 2.36 Xét sự hội tụ của tích phân

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\mathrm{d}x$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 Tích phân suy rộng

2.3.1 Tích phân suy rộng loại 2

Định nghĩa 2.37

1. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a, b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là tích phân suy rộng và

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $(a, b]$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$. Tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là tích phân suy rộng và

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Nếu các giới hạn bên trên là các số hữu hạn thì ta nói các tích phân suy rộng *hội tụ*. Ngược lại, ta nói tích phân đó phân kì.

Ví dụ 2.38 Tính

a. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ d. $\displaystyle\int_0^1 3x^2\ln x\mathrm{d}x$

Giải. a. Ta có

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 4^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 4^-}\left(-2\sqrt{4-x}\right)\Big|_0^t$$
$$= \lim_{t\to 4^-}\left(4-2\sqrt{4-t}\right) = 4.$$

b. Ta có

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right) = \infty.$$

Vậy tích phân đã cho phân kì.

c. Tích phân đã cho được phân tích như sau

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Ta có

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to 1^-}(3(x-1)^{\frac{1}{3}})\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1^-}(3(b-1)^{\frac{1}{3}} - 3(0-1)^{\frac{1}{3}}) = 3$$
$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{a\to 1^+}(3(x-1)^{\frac{1}{3}})\Big|_a^3$$
$$= \lim_{a\to 1^+}(3(3-1)^{\frac{1}{3}} - 3(a-1)^{\frac{1}{3}}) = 3\sqrt[3]{2}$$

Như vậy $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3+\sqrt[3]{2}$.

d. Áp dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = 3x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x^3 \end{cases}$$

do đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3x^2 \ln x \mathrm{d}x &= \lim_{b\to 0^+} x^3 \ln x\Big|_b^1 - \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to 0^+} -b^3\ln b - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \lim_{b\to 0^+} -\frac{\ln b}{1/b^3} - \frac{1}{3} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{b\to 0^+} -\frac{1/b}{-3/b^4} - \frac{1}{3} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Định lý 2.39 Xét tích phân $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\mathrm{d}x$ với $a>0, \alpha>0$.

1. Nếu $\alpha<1$ thì tích phân hội tụ.
2. Nếu $\alpha\geq 1$ thì tích phân phân kì.

Định lý 2.40

1. Giả sử $0\leq f(x)\leq g(x)$ với mọi $x\in[a,b)$. Nếu $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.
2. Nếu $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.
3. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$, và đặt $k=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$. Khi đó
   - $k>0$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ và $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
   - $k=0$: nếu $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.
   - $k=\infty$: nếu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.

Ví dụ 2.41 Xét sự hội tụ của tích phân

a. $\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ b. $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$ c. $\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ d. $\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}(e^{1-x^2}-1)}\mathrm{d}x$.

Giải. a. Ta có

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ với } 0<x\leq\pi$$

và $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ hội tụ. Do đó tích phân đã cho hội tụ.

b. Ta có

$$\frac{1}{x(x+1)} \geq \frac{1}{2x} \text{ với } 0 < x \leq 1$$

và $\int_0^1 \frac{1}{2x} \mathrm{d}x$ phân kì. Vậy tích phân đã cho phân kì.

c. Đặt $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ và $g(x) = \frac{1}{x-1}$, khi đó

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1/x} = 1.$$

Vì tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x$ phân kì nên tích phân đã cho phân kì.

d. Đặt $f(x) = \frac{\sin(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}(e^{1-x^2}-1)}, g(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{1-x}(1-x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ và

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sin(1-x)}{e^{1-x^2}-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-\cos(1-x)}{-2xe^{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

Vì tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \mathrm{d}x$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.42 Xét sự hội tụ của tích phân

a. $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ b. $\int_{-3}^0 \frac{1}{x(x+3)} \mathrm{d}x$ c. $\int_0^1 \frac{\ln}{x^2} \mathrm{d}x$ d. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-1/2}}{x^2} \mathrm{d}x.$

Giải.

- Tích phân suy rộng xuất hiện trong một số bài toán xác suất và thống kê. Ví dụ, tuổi thọ của một màn hình máy tính là một số mà ta không thể dự đoán chính xác. Nếu ta chọn ngẫu nhiên một màn hình máy tính thì việc chọn này được gọi là một **phép thử ngẫu nhiên** và tuổi thọ X của màn hình này là một **biến ngẫu nhiên liên tục**.
- Xác suất của một biến cố của một phép thử ngẫu nhiên là một số từ 0 đến 1. Nếu chọn một màn hình máy tính thì khả năng màn hình này có tuổi thọ từ 10 đến 15 năm. Nếu X là biến ngẫu nhiên ký hiệu cho tuổi thọ của màn hình thì $10 \leq X \leq 15$ và xác suất của tuổi thọ màn hình này được ký hiệu là $P(10 \leq X \leq 15)$.
- Một hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X là một hàm số thực $f(x) \geq 0$ và diện tích giới hạn giữa đồ thị của $f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ là $P(a \leq X \leq b)$.

Một hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X là một hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều sau:

1. $f(x) \geq 0$ với mọi x,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,
3. $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2.43 Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{1}{2}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Tìm k và $P(X \geq 2)$.

Giải. a. Vì $f(x)$ là hàm mật độ xác suất nên $f(x) \geq 0$ với mọi x. Suy ra $ke^{-\frac{1}{2}x} \geq 0$ hay $k \geq 0$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} ke^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(-2ke^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_{0}^{t} = 2k
\end{aligned}$$

Suy ra $k = \dfrac{1}{2}$.

b. Tính $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= \int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_{2}^{t} = e^{-1} = 0,3679.
\end{aligned}$$