BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING GIỮA KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2023 – 2024

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

BAN HỌC TẬP

Sharing is learning

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit

TRAINING

GIẢI TÍCH

Thời gian: 10:00 thứ Tư ngày 25/10/2023

Địa điểm: Phòng B708 – Tòa nhà B

Trainers: Võ Chí Cường – KTMP2023.1

Nguyễn Đình Thiên Quang – KHTN2023

Nội dung training

I. Hàm 1 biến
II. Chuỗi số
III. Hàm nhiều biến

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

a) Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (x_0 có thể là vô cùng).

Hàm số $f(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (x_0 có thể là vô cùng).

b) Ví dụ

$\sin(x), \ln(1+x), e^x - 1$ là các VCB khi $x \to 0$;

$lnx, x^2 + 2, e^x$ là các VCL khi $x \to +\infty$.

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

c) So sánh các VCB - VCL

Nếu $f(x), g(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

Khi đó:

- Nếu $k = 0$, ta nói $f(x)$ là VCB **cấp cao hơn** $g(x)$

- Nếu $0 \neq k \neq \infty$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB **cùng bậc**

  Với $k = 1$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB **tương đương**, ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

c) So sánh các VCB - VCL

Nếu $f(x), g(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

Khi đó:

- Nếu $k = \infty$, ta nói $f(x)$ là VCL **cấp cao hơn** $g(x)$.

- Nếu $0 \neq k \neq \infty$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$là các VCL **cùng bậc**

  Với $k = 1$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL **tương đương**, ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

c) So sánh các VCB - VCL

Ví dụ:

$$+ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1$ là VCL **bậc cao hơn** $x + 1$ khi $x \to +\infty$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow \sin x \sim x$ khi $x \to 0$

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

c) So sánh các VCB - VCL

Một số VCB tương đương cần nhớ khi $x \to 0$:

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$
- $\ln(x+1) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

d) Tính chất của VCB - VCL tương đương

Nếu $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ là các VCB (hoặc các VCL) khi $x \to x_0$ và $f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

d) Tính chất của VCB - VCL tương đương

Chú ý: Quy tắc trên **không áp dụng** được cho hiệu hoặc tổng các VCB nếu chúng làm **triệt tiêu** tử hoặc mẫu của phân thức.

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{-x} - 1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + (-x)}{x^2} = 0\ (SAI)$$

=> Sử dụng quy tắc L'Hospital

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

d) Tính chất của VCB - VCL tương đương

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}$

Giải:

Khi $x \to 0$ ta có: $\ln(1+x^2) \sim x^2$

$$\sin(\sqrt{1+x^2}-1) \sim \sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{x^2}{2}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

d) Tính chất của VCB - VCL tương đương

Quy tắc ngắt bỏ VCB: Cho $f(x), g(x)$ là **tổng các VCB khác cấp** khi $x \to x_0$ thì $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn tỉ số hai VCB **cấp thấp nhất** của tử và mẫu.

Ví dụ: Tính $L = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - \cos x + 1}{x^3 + 2x^2}$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + (1 - \cos x)}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \frac{1}{4}$$

Đại lượng Vô cùng bé – Vô cùng lớn

d) Tính chất của VCB - VCL tương đương

Quy tắc ngắt bỏ VCL: Cho $f(x), g(x)$ là **tổng các VCL khác cấp** khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn tỉ số hai VCB **cấp cao nhất** của tử và mẫu.

Ví dụ: Tính $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+9}{2\sqrt{x^7}+2x}$

Giải: $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+9}{2\sqrt{x^7}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2\sqrt{x^7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

Tích phân xác định

a) Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$. Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Lấy tùy ý $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và lập tổng:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

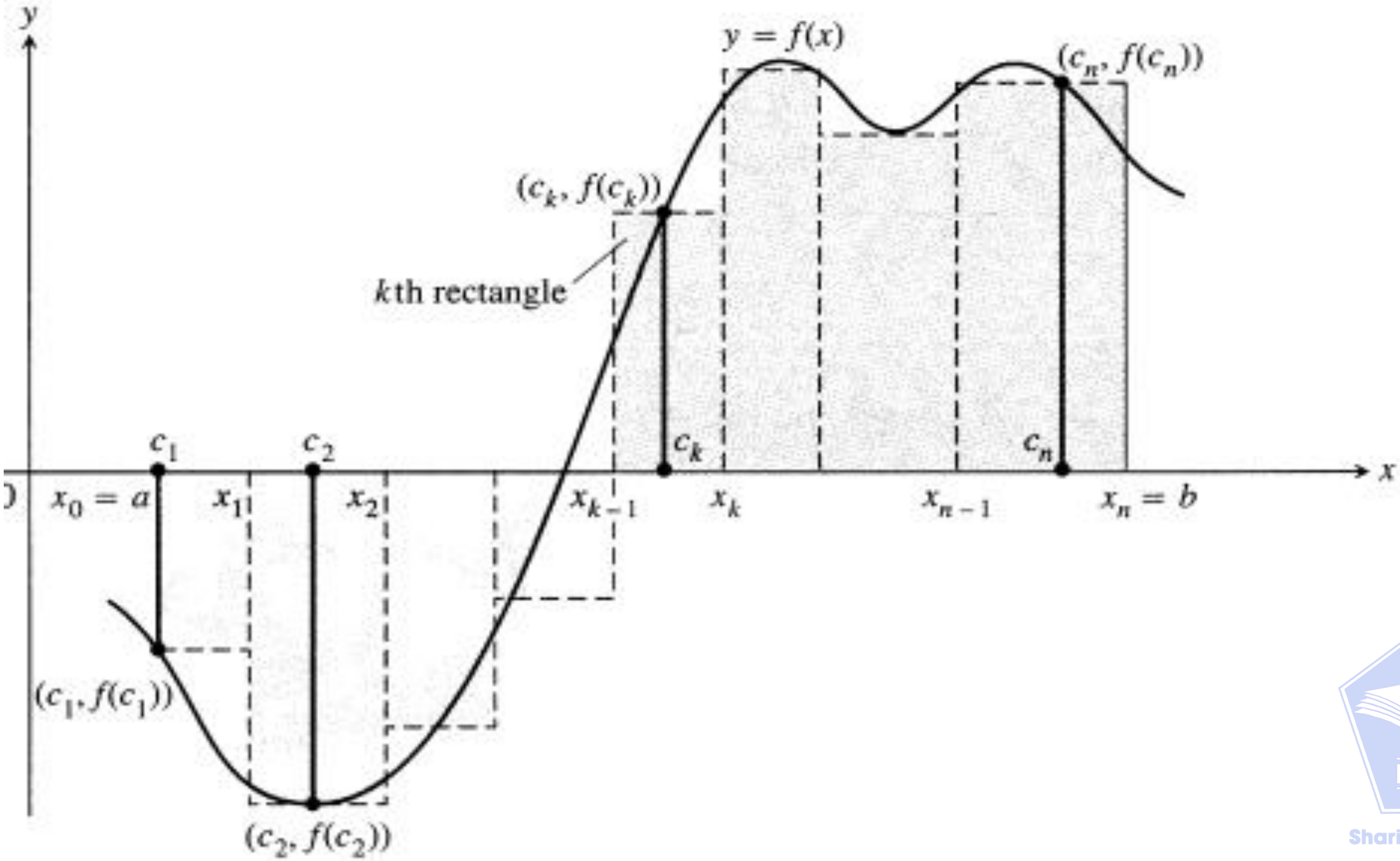
Tích phân xác định

a) Định nghĩa

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ thì I được gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên $[a, b]$ ký hiệu là:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Tích phân xác định



Tích phân xác định

b) Công thức Newton-Leibniz

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó thì:

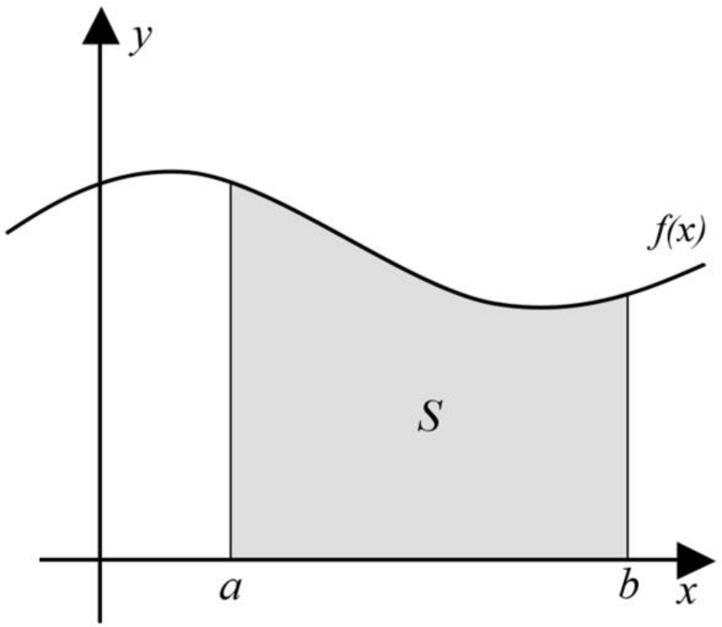
$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tích phân suy rộng loại 1

a) Khái niệm

Cho hàm số $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [a, b]$, khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f(x)$ và trục hoành là:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$



Tích phân suy rộng loại 1

a) Khái niệm

Cho hàm số $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [a, \infty)$, khi đó diện tích S có thể tính được hoặc không tính được. Trong trường hợp tính được S hữu hạn thì:

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx\,.$$

Khi đó S được gọi là **tích phân suy rộng loại 1** của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$.

Tích phân suy rộng loại 1

a) Khái niệm

Tương tự ta có các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta **nói tích phân hội tụ**, ngược lại là **tích phân phân kì**

Tích phân suy rộng loại 1

b) Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Với $\alpha \neq 1$:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \left(x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

Tích phân suy rộng loại 1

b) Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Với $\alpha = 1$:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) = +\infty$$

Vậy:

- Với $\alpha > 1$: $I = \frac{1}{\alpha - 1}$ (hội tụ)
- Với $\alpha \le 1$: $I = +\infty$ (phân kì)

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn 1: Nếu $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty)$ và

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ hội tụ thì } \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}$$

Các trường hợp khác tương tự

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn 2:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|dx \text{ hội tụ } \Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Ví dụ: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ hội tụ vì:

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1, +\infty) \text{ và } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ hội tụ}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn 3: Cho $f(x), g(x)$ liên tục, *luôn dương* trên $[a, +\infty)$ khi đó nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < \ \infty)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \ \& \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ cùng hội tụ hoặc phân kì}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn 3: Cho $f(x), g(x)$ liên tục, *luôn dương* trên $[a, +\infty)$ khi đó nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ và } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ hội tụ}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}$$

Sharing is learning

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn 3: Cho $f(x), g(x)$ liên tục, *luôn dương* trên $[a, +\infty)$ khi đó nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ và } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ phân kì}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ phân kì}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Ví dụ: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ phân kì vì:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} : \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ và } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ phân kì}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Chú ý: $f(x) \sim g(x)\ (x \to +\infty)$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ và } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ có cùng tính chất}$$

Tích phân suy rộng loại 1

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Ví dụ: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+3x+1}$ hội tụ vì:

$$\frac{1}{x^3+3x+1} \sim \frac{1}{x^3} (x \to +\infty) \text{ và } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ hội tụ}$$

Tích phân suy rộng loại 2

a) Khái niệm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b)$ và **không liên tục tại $\boldsymbol{b}$**, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx\,.$$

Khi đó I được gọi là **tích phân suy rộng loại 2** của $f(x)$ trên $[a,b)$. Lúc này, ta nói tích phân trên hội tụ.

Tích phân suy rộng loại 2

b) Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}, b > 0$

Với $\alpha \neq 1$:

$$I = \lim_{t\to 0^+} \int_t^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to 0^+} \left(x^{1-\alpha} \Big|_t^b \right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to 0^+} \left(b^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{b^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \alpha < 1 \\ +\infty, \alpha > 1 \end{cases}$$

Tích phân suy rộng loại 2

b) Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}, b > 0$

Với $\alpha = 1$:

$$I = \lim_{t \to 0^+} \int_t^b \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0^+} \left(\ln x \Big|_t^b \right) = +\infty$$

Vậy:

- Với $\alpha < 1$: $I = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ (hội tụ)
- Với $\alpha \geq 1$: $I = +\infty$ (phân kì)

Tích phân suy rộng loại 2

c) Các tiêu chuẩn hội tụ (tương tự tích phân suy rộng loại 1)

Chú ý: $f(x) \sim g(x)$ $(x \to b)$ với b là cận suy rộng thì:

$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ và $\int_{\alpha}^{b} g(x)dx$ có cùng tính chất

Tích phân suy rộng loại 2

c) Các tiêu chuẩn hội tụ

Ví dụ: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(x+1)(4-x)}}dx$ hội tụ vì:

$$\frac{x}{\sqrt{x(x+1)(4-x)}} \sim \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x \to 0^+)$$

và $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ hội tụ

Chuỗi số

I. Khái niệm chuỗi số
II. Chuỗi số dương
    1. Tiêu chuẩn Cauchy
    2. Tiêu chuẩn D'Alembert
    3. Tiêu chuẩn tích phân
    4. Tiêu chuẩn so sánh I
    5. Tiêu chuẩn so sánh II
III. Chuỗi đan dấu và tiêu chuẩn Leibnizt
IV. Chuỗi có dấu bất kỳ
    1. Tiêu chuẩn D'Alembert
    2. Tiêu chuẩn Cauchy
V. Chuỗi lũy thừa

I. Khái niệm chuỗi số

1. Định nghĩa: Cho dãy số vô hạn: $u_1, u_2, \dots, u_n$. (I)

- Biểu thức: $u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \ \dots \ \pm u_n$ được gọi là chuỗi số.

- u_n : số hạng tổ quát của chuỗi

- $S_n = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ \dots + \mathrm{u}_\mathrm{n}$: tổng riêng thứ n của chuỗi.

BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

I. Khái niệm chuỗi số

1. Định nghĩa: Cho dãy số vô hạn: $u_1, u_2, \dots, u_n$. (I)

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$: hữu hạn thì chuỗi số (I) được gọi là hội tụ và S được gọi là tổng của chuỗi, kí hiệu:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S.$$

- Ngược lại ($\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ hoặc $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$) thì chuỗi số đã cho được gọi là phân kì.

I. Khái niệm chuỗi số

Ví dụ: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

- $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$: số hạng tổng quát của chuỗi
- $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$
- Vậy chuỗi số đã cho là hội tụ và nếu vế trái lấy càng nhiều số hạng thì tổng càng gần 1.

I. Khái niệm chuỗi số

2. Điều kiện cần hội tụ

Định lý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

$\Rightarrow$ Để chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì điều kiện cần là:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì.

I. Khái niệm chuỗi số

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+3}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} = 1$$

$\Rightarrow$ Chuỗi số đã cho phân kì.

II. Chuỗi số dương

Định nghĩa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \, ; u_n \geq 0 \, , \forall \, n \geq 1$$

1. Tiêu chuẩn Cauchy

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

- Nếu $0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ
- Nếu $L > 1$: chuỗi phân kì
- Nếu $L = 1$: chưa có kết luận

II. Chuỗi số dương

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \geq 0, \forall\, n \geq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số trên hội tụ

II. Chuỗi số dương

2. Tiêu chuẩn D'Alembert

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,;\, u_n \geq 0 \,, \forall\, n \geq 1$$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- Nếu $0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ

- Nếu $L > 1$: chuỗi phân kì

- Nếu $L = 1$: chưa có kết luận

II. Chuỗi số dương

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

$$u_n = \frac{3^n n!}{n^n} \geq 0, \forall\, n \geq 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 3\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

$\Rightarrow$ Theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi phân kì

II. Chuỗi số dương

3. Tiêu chuẩn tích phân

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,;\, u_n \geq 0 \,,\forall\, n \geq 1$$

Định lý: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \,;\, f(n) \geq 0$

Khi đó $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ có cùng tính chất với tích phân

suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

II. Chuỗi số dương

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2}$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 0 + 1$

$= 1$

$\Rightarrow$ Tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ Hội tụ

II. Chuỗi số dương

Tổng quát :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ (chuỗi điều hòa)}$$

- Nếu $\alpha > 1$: chuỗi hội tụ

- Nếu $\alpha \leq 1$: chuỗi phân kì

II. Chuỗi số dương

4. Tiêu chuẩn so sánh I

Định lý

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,;\, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \,;\, u_n, v_n \geq 0 \,,\, \forall\, n \geq 1$$

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = L, L > 0$, hữu hạn thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ có cùng tính chất.

II. Chuỗi số dương

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^5-\sqrt[3]{n}}$

Đặt $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^5-\sqrt[3]{n}}$; $\mathrm{v_n} = \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^5-\sqrt[3]{n}} . n^{\frac{9}{2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^5}{n^5\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^{14}}}\right)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^{14}}}}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ Do đó $\sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty} \mathrm{u_n}$ có cùng tính chất với $\sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty} \mathrm{v_n}$. Mà $\sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$ hội tụ

$(\alpha = \frac{9}{2} > 1)$nên chuỗi số $\sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty} \mathrm{u_n}$ hội tụ.

II. Chuỗi số dương

Chú ý: Để khảo sát $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, ta đi so sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ thường chọn $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ với α là hiệu của bậc ở mẫu và tử của u_n.

II. Chuỗi số dương

5. Tiêu chuẩn so sánh II

Định lý

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n ; \sum_{n=1}^{+\infty} v_n ; u_n, v_n \geq 0 , \forall\, n \geq 1$$

Giả sử $u_n \leq v_n, \forall n \in N$. Khi đó:

- Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

- Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} n_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kỳ.

III. Chuỗi đan dấu và tiêu chuẩn Leibnizt

Định nghĩa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n \,, u_n \geq 0 \,, \forall\, n \ \in N$$

1. Tiêu chuẩn Leibnizt

Xét $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n \,, u_n \geq 0 \,, \forall\, n \ \in N$

- Nếu dãy u_n đơn điệu giảm và tiến tới 0 khi $n \to +\infty$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ sẽ hội tụ.

III. Chuỗi đan dấu và tiêu chuẩn Leibnizt

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{n}{n^2+n+1}$

Xét hàm $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

Ta có: $f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}<0;\ \forall x>1$

Đồng thời $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=0$

Vậy $u_n=\frac{n}{n^2+n+1}$ là dãy số đơn điệu giảm

và $u_n\to 0$ nên chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{n}{n^2+n+1}$ hội tụ.

III. Chuỗi đan dấu và tiêu chuẩn Leibnizt

Chú ý: Có thể áp dụng định nghĩa và điệu kiện cần của hội tụ để khảo sát hàm số.

IV. Chuỗi có dấu bất kì

Định nghĩa:

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, u_n tùy ý

1. Tiêu chuẩn D'Alembert: $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

- Nếu $0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ

- Nếu $L > 1$: chuỗi phân kì

- Nếu $L = 1$: chưa có kết luận

IV. Chuỗi có dấu bất kì

Chú ý: Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, và $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ đều hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối.

IV. Chuỗi có dấu bất kì

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2n}{n!}$

$$u_n=(-1)^n.\frac{2^n}{n!}\ ;u_{n+1}=(-1)^{n+1}.\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$L=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=0\Rightarrow$$ Chuỗi số hội tụ.

IV. Chuỗi có dấu bất kì

2. Tiêu chuẩn Cauchy: $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$

- Nếu $0 \leq L < 1$: chuỗi hội tụ

- Nếu $L > 1$: chuỗi phân kì

- Nếu $L = 1$: chưa có kết luận

IV. Chuỗi có dấu bất kì

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n . sin^n \frac{1}{2n}$

$$u_n = n^n . sin^n \frac{1}{2n}; \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n . sin \frac{1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} . \frac{sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} .1 = \frac{1}{2}$$

⇒Chuỗi số trên hội tụ

IV. Chuỗi có dấu bất kì

Chú ý: Sử dụng kết quả $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ Để tính các bài lượng giác.

V. Chuỗi lũy thừa

1. Định nghĩa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Bằng phép biến đổi $X = (x - x_0)$ ta đưa chuỗi trên về dạng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$. Do đó các kết quả của chuỗi lũy thừa chỉ cần xét cho trường hợp chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$.

Chú ý: chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = 0$.

V. Chuỗi lũy thừa

2. Định nghĩa bán kính hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- Số $R > 0$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ với mọi x: $|x| < R$ và phân kì với mọi $x : |x| > R$ được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.
- Khoảng $(-R; R)$ được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

V. Chuỗi lũy thừa

2. Định nghĩa bán kính hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ $\forall x \in R$. Ta cho $R = +\infty.$
- Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ phân kỳ $\forall x \neq 0$. Ta cho $R = 0.$

V. Chuỗi lũy thừa

3. Cách tìm bán kính hội tụ:

a) Định lý Abel: Giả sử $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$

- Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ là:

$$R = \begin{cases} 0, \quad \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \qquad p = 0 \end{cases}$$

V. Chuỗi lũy thừa

3. Cách tìm bán kính hội tụ:

b) Định lý Cauchy: Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

- Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ là:

$$R = \begin{cases} 0, \quad \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \qquad p = 0 \end{cases}$$

V. Chuỗi lũy thừa

3. Cách tìm bán kính hội tụ:

Chú ý: Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

- Bước 1: Ta dựa vào 2 định lý trên để tìm bán kính hội tụ R
- Bước 2: Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa này là:

$$-R < x < R$$

- Bước 3: Xét sự hội tụ của chuỗi số tại các đầu mút của khoảng hội tụ.

Từ đó ta sẽ có được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

V. Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n.9^n}$ $(*)$

Đặt $X = \frac{x^2}{9}$, chuỗi $(*)$ trở thành $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{X}^{\mathrm{n}}$ (1)

Ta có: $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Vậy $R = 1$. Khoảng hội tụ của chuỗi (1) $(-1; 1)$

Xét $X = -1$: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt

$X = 1$: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kì

Vậy miền hội tụ của (1): $[-1; 1) \Leftrightarrow -1 \leq \mathrm{X} < 1$

V. Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n.9^n}$ $(*)$

Vậy miền hội tụ của (1): $[-1; 1) \Leftrightarrow -1 \leq X < 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x^2}{9} < 1$

$\Leftrightarrow -9 < x < 9$

Vậy miền hội tụ của $(*)$: $(-9; 9)$

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Định nghĩa:

+ Điểm tụ của hàm số: Xét hàm số 2 biến $f(x, y)$, nếu tồn tại dãy điểm $\mathrm{M}(x_n, y_n)$ thoả $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = (x, y)$ thì điểm (x, y) được gọi là điểm tụ của hàm số

+ Giới hạn của hàm số: Nếu hàm số $f(x, y)$ có duy nhất một điểm tụ với mọi dãy điểm $\mathrm{M}(x_n, y_n)$ thoả $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ thì ta nói $f(x, y)$ có giới hạn tại điểm (x, y)

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Ví dụ:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{11}{3}$$

Ở đây ta thực hiện phép tính bằng cách thay các giá trị x, y vào hàm số, vì hàm số này liên tục và xác định tại điểm (1,2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 \ln(y)}{x + y} = 0$$

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Ví dụ:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$$

Với các bài toàn không thể tính giới hạn trực tiếp thì ta có thể dùng nguyên lý kẹp như ví dụ trên

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Ví dụ:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x \ln(y)}{e^x \ln(y) + \sqrt{e^x \ln(y)} + 1}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{t + \sqrt{t} + 1} = 0$$

Trong một số trường hợp hàm số trở nên phức tạp, ta có thể thử đặt ẩn phụ để đưa về 1 biến

74

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Định nghĩa:

- Giới hạn lặp: Là giới hạn khi ta xét theo **từng thành phần** của hàm f(x,y)

- Công thức:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

75

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Định nghĩa:

- Giới hạn lặp (bội): Là giới hạn khi ta xét theo **từng thành phần** của hàm f(x,y)

- Công thức:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

76

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Định lý:

- Nếu tồn tại giới hạn hàm số tại một điểm thì giới hạn đó **bằng giới hạn bội của hàm số tại điểm đó**

Ví dụ:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x \ln(y)}{e^x \ln(y) + \sqrt{e^x \ln(y)} + 1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \lim_{x\to 1} \frac{e^x \ln(y)}{e^x \ln(y) + \sqrt{e^x \ln(y)} + 1} = 0$$

77

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Lưu ý: tồn tại giới hạn bội không suy ra được tồn tại giới hạn
Đồng thời, một cách để chứng minh hàm số không có giới hạn tại một điểm đó là chứng minh giới hạn bội hai phía của hàm số là khác nhau

Ví dụ:

Chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y\cos y}{2x+y}$ không tồn tại

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Chọn $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{n}$ ta có $\lim f(x, y) = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}} = \lim \frac{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{3} = \frac{2}{3}$

Chọn $x = 0, y \rightarrow 0$ ta có $\lim f(x, y) = 1$

Vậy hàm số không có giới hạn

Có thể thay thế bước chọn dãy tương đối phức tạp ở đầu bằng việc cho $y = 0, x \rightarrow 0$

VI. Hàm số nhiều biến

1. Giới hạn hàm số 2 biến

Giải: Xét $y = 0, x \to 0$ thì $\lim f(x, y) = \frac{1}{2}$

Mặt khác: Xét $x = 0, y \to 0$ thì $\lim f(x, y) = 1$

Ta có điều vô lý

VD: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sinx^2y^3}{x^4+y^6}$ không tồn tại

Giải: Chọn $x^2 = y^3, y \to 0$ ta được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$

Mặt khác, lấy $x = 0, y \to 0$ thì ta được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

80

VI. Hàm số nhiều biến

2. Tính liên tục của hàm số nhiều biến

Định nghĩa:

- Hàm số nhiều biến được gọi là liên tục tại điểm M khi và chỉ khi ta có:

$$\lim_{x \to M} f(x) = f(M)$$

M ở đây được xét trong hệ toạ độ (nghĩa là với 2 biến thì M sẽ có 2 toạ độ, có 3 biến thì M sẽ có 3 toạ độ)

VI. Hàm số nhiều biến

2. Tính liên tục của hàm số nhiều biến

Ý nghĩa:

- Ta có thể tìm được cực trị của các hàm số nhiều biến trên miền xác định của nó
- Nếu hàm số liên tục thì ta có thể tính giới hạn trực tiếp thông qua tính chất đã nêu trước đó

VI. Hàm số nhiều biến

3. Đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến

Định nghĩa:

* Đạo hàm riêng của hàm số: Xét hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cố định các biến x_i trừ x_1, thực hiện lấy đạo hàm của f theo biến x_1 như bình thường thì ta được **đạo hàm riêng cấp 1 của f** theo **biến $\boldsymbol{x_1}$**

VI. Hàm số nhiều biến

3. Đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến

Ký hiệu: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots$

Ví dụ:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Khi đó: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$

VI. Hàm số nhiều biến

3. Đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến

Tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp 2 của hàm số bằng cách lấy đạo hàm cấp 1 rồi thực hiện đạo hàm theo một biến khác (hoặc theo chính biến đó)

Ví dụ:

$$f'_{xy} = -3z$$

$$f'_{xx} = 6x$$

VI. Hàm số nhiều biến

3. Đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến

Định lý: Thứ tự lấy đạo hàm cấp cao là không quan trọng (nếu đạo hàm là hàm số liên tục)

Chẳng hạn:

$$f'''_{xyz} = f'''_{zyx}, f'''_{xxy} = f'''_{xyx}$$

Định nghĩa:

- Vi phân: Từ định nghĩa vi phân một biến, ta tổng quát lên được cho 2 biến (cũng như nhiều biến)

$$\partial f(x, y) = f'_x \partial x + f'_y \partial y$$

VI. Hàm số nhiều biến

3. Đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến

Ví dụ:

Tính gần đúng $\frac{\sqrt{4.01}}{1+\sqrt{1.01}}$

Xét hàm $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$ thực hiện lấy vi phân

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)}, f'_y = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\left(1+\sqrt{y}\right)^2}$$

87

VI. Hàm số nhiều biến

3.1. Đạo hàm hàm ẩn

Định lý:

Xét hàm số $F(x, y)$ thoả mãn với mỗi giá trị x thì tồn tại duy nhất một giá trị y sao cho $F(x, y) = 0$, khi đó ta có thể tính được đạo hàm của y theo biến x thông qua công thức sau:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

VI. Hàm số nhiều biến

3.1. Đạo hàm hàm ẩn

Ví dụ:

Xét hàm $F(x, y) = ye^x - xe^y = 0$ trên miền $D = \{(x, y) |\ x, y < 0\}$

Áp dụng công thức ở trên, ta có:

$$F'_x = ye^x - e^y$$
$$F'_y = e^x - xe^y$$

Vậy
$$y'_x = \frac{ye^x - e^y}{e^x - xe^y}$$

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Đạo hàm theo hướng của hàm số nhiều biến

Cho điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và vector $\vec{u}$, Điểm A bất kì thoả
$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

Nếu tồn tại $\lim\limits_{k \to 0} \frac{f(M)-f(A)}{k}$ hữu hạn thì ta gọi giới hạn này là đạo hàm của f theo hướng u tại điểm M

90

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Đạo hàm theo hướng của hàm số nhiều biến

Định lý:

$f'(M,\vec{u}) = f'_x(M)u_1 + f'_x(M)u_1 + f'_x(M)u_1 \left(\vec{u} = (u1, u2, u3)\right)$

Từ đây ta định nghĩa được gradient của hàm 3 biến:

- Gradient: là một vector có toạ độ lần lượt là đạo hàm riêng của f tại điểm đó

Công thức: $\nabla f(M) = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$

Từ đây thì ta còn viết lại được là:

$$f'(M,\vec{u}) = \nabla f(M).\vec{u}$$

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Cực trị của hàm số nhiều biến

Cách tìm cực trị của hàm số nhiều biến:

1. Một điểm cực trị sẽ thoả đạo hàm riêng của hàm số tại điểm đó đều bằng 0 => Lập hệ phương trình và tìm tất cả điểm thoả điều kiện trên
2. Kiểm tra xem các điểm đã tìm được có thoả định nghĩa không

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Cực trị của hàm số nhiều biến

Với riêng hàm số 2 biến thì ta có điều kiện sau:

$*\, r = f''_{x^2}(M), s = f''_{xy}(M), \text{t} = f''_{y^2}(M)$

- Nếu $rt - s^2 > 0 \Rightarrow$ đạt cực trị tại M, nếu $r > 0 \Rightarrow$ CĐ và ngược lại
- Nếu $rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ không đạt cực trị
- Nếu $rt - s^2 = 0 \Rightarrow \text{Kiểm tra bằng định nghĩa}$

93

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Cực trị của hàm số nhiều biến

VD: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$

Ta có: $f'_x = 2x - 3y, f'_y = 2y - 3x \Rightarrow x = y = 0$

Mặt khác: $f''_{x^2} = 2 = r, f''_{xy} = -3, = s, f''_{y^2} = 2 = t$

$$\Rightarrow rt - s^2 < 0$$

Vậy hàm đạt cực tiểu tại điểm $M(0,0)$

94

VI. Hàm số nhiều biến

3.2. Cực trị của hàm số nhiều biến

VD: $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\ trong\ miền\ D = \{(x,y,z)|x,y,z > 0\}$

$$f'_x = 3x^2 - 3yz = 0$$
$$f'_y = 3y^2 - 3xz = 0$$
$$f'_z = 3z^2 - 3xy = 0$$
$$\Rightarrow x = y = z$$

Bằng định nghĩa thì dễ dàng chứng minh được f(x,y,z) cực tiểu tại mọi điểm $M(t,t,t)$

VI. Hàm số nhiều biến

4. Cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến

Khi tìm cực trị của hàm số trên tập $D = \{(x, y)\,|g(x, y) = 0\}$

Ta dùng phương pháp nhân tử Lagrange: Tìm bộ (x, y, α) thoả:

$$\begin{aligned} f'_x + \alpha g'_x &= 0 \\ f'_y + \alpha g'_y &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Sau đó thực hiện kiểm tra các điều kiện của cực trị đã nói trước đó

96

VI. Hàm số nhiều biến

4. Cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ trên miền $D = \{(x,y): x - 2y - 2 = 0\}$

$$f'_x + \alpha g'_x = 2x + \alpha = 0$$
$$f'_y + \alpha g'_y = 2y - 2\alpha = 0$$
$$x - 2y - 2 = 0$$

Tìm được f(x,y) đạt cực tiểu tại $M\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow f(M) = \frac{4}{5}$

97

VI. Hàm số nhiều biến

5. GTLN,GTNN của hàm số nhiều biến trên miền đóng

Ta thực hiện các bước tìm cực trị của hàm số trên miền đóng đó, sau đó so sánh với các giá trị cực trị khi ở biên

Mặt khác, một lưu ý là từ điều kiện ở biên, ta có thể chuyển bài toàn về bài toàn cực trị có điều kiện

VD:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ với } D = \{(x,y)|1 \le x + y \le 2, x, y \ge 0\}$$

VI. Hàm số nhiều biến

5. GTLN,GTNN của hàm số nhiều biến trên miền đóng

B1. Ta tìm cực trị của hàm số trước

Bằng cách tính đạo hàm riêng, ta tìm được điểm $M(0,0)$

Do điểm này không thuộc miền đóng D nên ta loại khỏi danh sách giá trị cần thử

B2. Ta tìm cực trị có điều kiện, ở đây là thử lần lượt từng điều kiện

- Xét miền đóng $Q = \{(x, y)|x + y = 1, x, y \geq 0\}$,dùng nhân tử Largrane ta tìm được điểm $M'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(M') = \frac{1}{2}$

VI. Hàm số nhiều biến

5. GTLN,GTNN của hàm số nhiều biến trên miền đóng

Xét miền mở $T = \{(x, y)|x + y = 2, x, y \geq 0\}$ tương tự ta tìm được điểm $A(1,1) \Rightarrow f(A) = 2$

Ngoài ra thì bằng việc kiểm tra các điều kiện $x, y \geq 0 \Rightarrow$ Ta tìm được các điểm $A1(0,1), B1(1,0), C1(0,2), D1(0,2)$

Khi đó thử hết các giá trị thì ta được GTNN của $f(x, y) = \frac{1}{2}$ và GTLN của $f(x, y) = 4$

100

BAN HỌC TẬP CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

TRAINING GIỮA KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2023 – 2024

Sharing is learning

HẾT

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI
CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!

BAN HỌC TẬP

Khoa Công nghệ Phần mềm

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

CONTACT

bht.cnpm.uit@gmail.com

fb.com/bhtcnpm

fb.com/groups/bht.cnpm.uit