Chương 4. Hàm số nhiều biến

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 15 tháng 9 năm 2023

4.1 Các khái niệm cơ bản

Kí hiệu
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$
và $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Cho $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, khoảng cách giữa $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ được kí hiệu và xác định như sau
$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

Định nghĩa 4.1 Một hàm số thực f trên $D \subset \mathbb{R}^n$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi bộ n-số của D với duy nhất một số thực z, ta viết
$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$
Tập D được gọi là tập xác định của f, tập các giá trị $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là tập giá trị của f. Quy tắc f được gọi là một hàm số n biến.

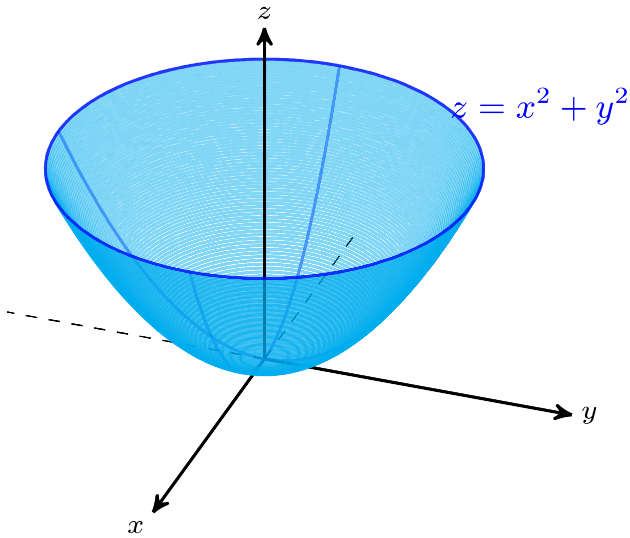
- Hàm số 2 biến: $f(x, y)$ hoặc $f(x_1, x_2)$
- Hàm số 3 biến: $f(x, y, z)$ hoặc $f(x_1, x_2, x_3)$

Ví dụ 4.2 Xét tập xác định và tập giá trị của các hàm số hai biến sau:

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị
$f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$	$x \geq y^2$	$[0, +\infty)$
$g(x,y) = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$h(x,y) = x^2 + y^2$	$\mathbb{R}^2$	$[0, +\infty)$

Định nghĩa 4.3 Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Tập các điểm $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ trong tập $\mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là đồ thị của hàm f. Đồ thị của $f(x, y)$ được gọi là *mặt* $z = f(x, y)$.

Ví dụ 4.4 Đồ thị hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$



Định nghĩa 4.5 Cho điểm $\mathbf{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ và số thực $r > 0$. Quả cầu mở tâm $\mathbf{a}$ bán kính r, kí hiệu $B(\mathbf{a}, r)$ được định nghĩa như sau

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

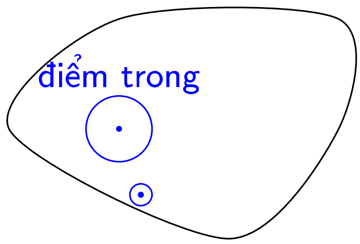
Ví dụ 4.6

- Trong $\mathbb{R}$, quả cầu mở tâm a, bán kính r là khoảng $(a - r, a + r)$.

- Trong $\mathbb{R}^2$, quả cầu mở tâm $a = (a_1, a_2)$, bán kính r là hình tròn
$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2.$$

Định nghĩa 4.7

1. Một điểm $\mathbf{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm trong* của D nếu tồn tại một số thực dương sao cho $B(\mathbf{a}, r) \subset D$.
2. Một tập $D \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập mở* nếu với mọi $\mathbf{a} \in D$, tồn tại một số thực dương sao cho $B(\mathbf{a}, r) \subset D$.
3. Một tập $K \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập đóng* nếu $\mathbb{R}^n \setminus K$ là một tập mở.



4. Tập hợp các điểm trong của tập D được gọi là *miền trong*.

Ví dụ 4.8 Trong mặt phẳng Oxy, cho các tập

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Khi đó A là một tập mở và B là một tập đóng.
- Tập A là miền trong của B.

4.2 Giới hạn và liên tục

Định nghĩa 4.9 Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ (với $D \subseteq \mathbb{R}^n$) được gọi là có giới hạn L khi $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, kí hiệu

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\mathbf{x}$ thuộc tập xác định của f thỏa mãn $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ thì $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ 4.10 Ta nói hàm số $f(x, y)$ có giới hạn L khi (x, y) tiến đến (a, b) và viết là

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi (x, y) nằm trong tập xác định của $f(x, y)$ thỏa mãn

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

thì

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Ví dụ 4.11 Chứng minh rằng $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \varepsilon$ sao cho với mọi (x, y) thỏa mãn $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \delta$ thì $|y| < \delta = \varepsilon$ và

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| \leq |y| < \varepsilon.$$

Do đó giới hạn đã cho bằng 0.

Mệnh đề 4.12 Giả sử $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ và $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = M$. Khi đó

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k$ với k là một hằng số
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a, \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = L \pm M$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y).g(x, y)] = LM$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} kf(x, y) = kL$ với k là một hằng số.
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$ nếu $M \neq 0$.
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y)]^m = L^m$ với mọi số tự nhiên m.
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ với mọi số tự nhiên lẻ n hoặc $L \geq 0, n$ là số tự nhiên chẵn.

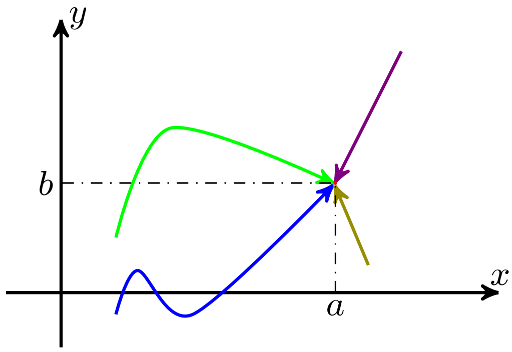
Ví dụ 4.13 Tính các giới hạn

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy - 3}{x^2 + 3xy - y^3} = \frac{0 - 0.1 - 3}{0^2 + 3.0.1 - 1^3} = 3.$

b. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-3,4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{y}{\sin y}\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)}\dfrac{y}{\sin y}=1+\dfrac{\pi}{2}.$

Khi $(x,y)\to(a,b)$ có vô số cách tiến đến. Để tính giới hạn của hàm hai biến, ta phải xét mọi hướng có thể (không như hàm một biến chỉ có giới hạn trái và giới hạn phải)



Nhận xét: Để chứng minh giới hạn của hàm số $f(x,y)$ **không** tồn tại khi $(x,y)\to(a,b)$, ta thực hiện theo 2 bước:

B1. (Chọn một cách $(x,y)\to(a,b)$) Cố định $x=a$, tính $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(a,y)$

B2. (Chọn một cách $(x,y)\to(a,b)$ khác) Cố định $y=b$, tính $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,b)$

Chọn hai cách $(x,y)\to(a,b)$ sao cho hai giới hạn bên trên khác nhau. Khi đó, ta kết luận $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Ví dụ 4.14 Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Giải. Chọn $(x,y)\to(0,0)$ theo đường $y=mx$ ($m\neq 0$ là tham số). Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xm}{x^2+m^2}=0$$

Chọn $(x,y)\to(0,0)$ theo đường $y=ax^2$ ($a\neq 0$ là tham số). Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(ax^2)}{x^4+(ax^2)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a}{1+a^2}\neq 0$$

Vậy giới hạn đã cho không tồn tại.

Ví dụ 4.15 Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{y}{x+y-1}$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 4.16 Cho U là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm $\mathbf{a} \in U$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\mathbf{x}$ thỏa mãn
$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ thì $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.
Một hàm số được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.
Kiểm tra tính liên tục của hàm số $f(x, y)$ tại (a, b)

1. tồn tại $f(a, b)$;
2. tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$;
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Ví dụ 4.17 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}$$

tại $(5, 3)$.
Giải.

- $f(5, 3) = \dfrac{3.5 + 2.3}{5 + 3 + 1} = \dfrac{21}{9}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(5,3)} \dfrac{3x + 2y}{x + y + 1} = \dfrac{3.5 + 2.3}{5 + 3 + 1} = \dfrac{21}{9} = f((5, 3))$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $(5, 3)$.

Ví dụ 4.18 Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}^2$

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Giải. a. Với mọi $(a,b) \neq (0,0)$, ta có

- $f((a,b)) = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} = f((a,b))$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại mọi $(a,b) \neq (0,0)$.
Xét tính liên tục tại $(0,0)$.

- $f((0,0)) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ (xem Ví dụ 4. 11)

Do đó hàm số liên tục tại $(0,0)$. Như vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.3 Đạo hàm riêng

Định nghĩa 4.19 Cho hàm số $f(x, y)$, đạo hàm riêng theo biến x, y tại (a, b) lần lượt được kí hiệu và xác định như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Kí hiệu khác của đạo hàm riêng theo biến x:

$$f_x(a,b) \text{ hoặc } f'_x(a,b).$$

Tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng của các hàm nhiều hơn 2 biến.

Ví dụ 4.20 Tìm các đạo hàm riêng f_x, f_y tại điểm $(4, -1)$ của hàm số

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^3 + 4.$$

Giải.

- Để tìm đạo hàm riêng theo biến x, ta xem y là một hằng số và lấy đạo hàm theo x :
$$f_x(x,y) = 2x - 3y + 0 + 0 = 2x - 3y$$
Do đó $f_x((4,-1)) = 2.4 - 3.(-1) = 11.$
- Để tìm đạo hàm riêng theo biến y, ta xem x là một hằng số và lấy đạo hàm theo y :
$$f_y(x,y) = 0 - 3x + 15y^2 + 0 = -3x + 15y^2.$$
Do đó $f_y((4,-1)) = -3.4 + 15.(-1)^2 = 3.$

Ví dụ 4.21 Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tính $f_x(0,0)$ và $f_y(0,0)$.

Giải. Ta tính giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Do đó $f_x(0,0) = 0.$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Cho hàm số $f: U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $\mathbf{a} \in U$. Đạo hàm riêng theo biến x_j của f tại $\mathbf{a}$ được xác định như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e_j}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

trong đó $\mathbf{a} + h\mathbf{e_j} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Định nghĩa 4.22 Cho hàm số $f: U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $\mathbf{a} \in U$. Đặt $Df(a)$ là ma trận hàng

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Vectơ

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^n$$

được gọi là gradient của f.

Ví dụ 4.23 Cho hàm số $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 3y^2$ và $\mathbf{a} = (2,1)$. Tìm $Df(\mathbf{a})$ và $\nabla f(\mathbf{a})$.

Giải. Tính các đạo hàm riêng của f tại $\mathbf{a} = (2,1)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 20$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 6y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2$

Như vậy $Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 20 & 2 \end{bmatrix}$ và $\nabla f(\mathbf{a}) = (20, 2)$.

Định nghĩa 4.24 Cho U là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và một hàm số $f: U \to \mathbb{R}$ và $\mathbf{a} \in U$. Ta nói f khả vi tại $\mathbf{a}$ nếu

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$$

trong đó

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4.25 Cho hàm số $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x,y) = x^2 + y^2$ và $\mathbf{a} = (1,2)$. Hàm số f có khả vi tại $\mathbf{a}$ không?

Giải. Ta có các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y$$

và $Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}, f(\mathbf{a}) = 1^2 + 2^2 = 5, \mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix}$

Tính giới hạn

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+y^2-5-\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y-2\end{bmatrix}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 0\end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho khả vi tại $(1,2)$.

Ví dụ 4.26 Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\\ 0, & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

Hàm số f có khả vi tại $\mathbf{a} = (0,0)$ không?

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lý 4.27 Nếu hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại $\mathbf{a}$ thì f liên tục tại $\mathbf{a}$.

Định lý 4.28 Nếu các đạo hàm riêng f_{x_i} của hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liên tục trên một tập mở U thì f khả vi tại mọi điểm thuộc U.

Định nghĩa 4.29 Cho hàm số 2 biến $f(x,y)$. Các đạo hàm riêng của các hàm số $f_x(x,y), f_y(x,y)$ được gọi là *các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f(x,y)$*. Ta có các đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := (f_x(x,y))_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := (f_x(x,y))_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) := (f_y(x,y))_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) := (f_y(x,y))_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

Ví dụ 4.30 Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số sau

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^4 - 5y^2.$$

Giải. ....

....

....

....

....

Định lý 4.31 Cho $f(x,y)$ là một hàm số có các đạo hàm riêng f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} xác định tại một hình tròn chứa điểm (a,b) và liên tục tại (a,b). Khi đó

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Ví dụ 4.32 Tính f_{xy} và f_{yx} của hàm số

$$f(x,y) = e^x + 4xy^4 - 5y.$$

Giải. Ta có các đạo hàm

- $f_x(x,y) = e^x + 4y^4; f_y(x,y) = 16xy^3 - 5$
- $f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = 16y^3$ và $f_{yx} = (f_y)_x(x,y) = 16y^3$

Như vậy, ta có $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 của các hàm số nhiều biến.

Ví dụ 4.33 a. Đạo hàm riêng cấp 4 của hàm hai biến $f(x,y)$:

$$f_{xyyx} = (((f_x)_y)_y)_x$$

b. Đạo hàm riêng cấp 4 của hàm số 3 biến $f(x,y,z)$:

$$f_{zyyx} = (((f_z)_y)_y)_x$$

Định lý 4.34 Cho $z = f(x,y)$ có đạo hàm tại mọi (x,y) và $x = x(t), y = y(t)$ là các hàm số có đạo hàm với mọi t. Khi đó hàm số $z = f(x(t), y(t))$ có đạo hàm với mọi t và

$$z_t = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

hay

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ví dụ 4.35 Cho hàm số $z = xy$ với $x = \cos t, y = \sin t$. Tính z_t.
Giải.
$$z_t = (xy)_x x'(t) + (xy)_y y'(t) = y(-\sin t) + x\cos t$$
$$= \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = \cos 2t.$$

Cho $w = f(x, y, z)$ là một hàm số trong đó $x = g(r, s), y = h(r, s), z = k(r, s)$. Nếu tất cả bốn hàm số khả vi thì w có đạo hàm riêng theo r và s được cho bởi
$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$
và
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Định lý 4.36 Cho hàm số $F(x, y)$ có đạo hàm tại mọi (x, y) và phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số $y(x)$ có đạo hàm tại mọi x. Khi đó tại các điểm thỏa mãn $F_y \neq 0$, ta có
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Ví dụ 4.37 Cho phương trình $y^2 + x^2 + \sin xy = 0$. Tính $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.
Giải. Đặt $F(x, y) = y^2 + 2x^2 + \sin xy$, theo Định lý 4.36, ta có
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x + y\cos xy}{2y + x\cos xy}$$

4.4 Cực trị của hàm nhiều biến

Định nghĩa 4.38

1. Hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại địa phương tại (a, b) nếu $f(x, y) \leq f(a, b)$ với mọi (x, y) thuộc một hình tròn tâm (a, b) nào đó.
2. Hàm số $f(x, y)$ đạt cực tiểu địa phương tại (a, b) nếu $f(a, b) \leq f(x, y)$ với mọi (x, y) thuộc một hình tròn tâm (a, b) nào đó.
3. Các điểm cực đại, cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.

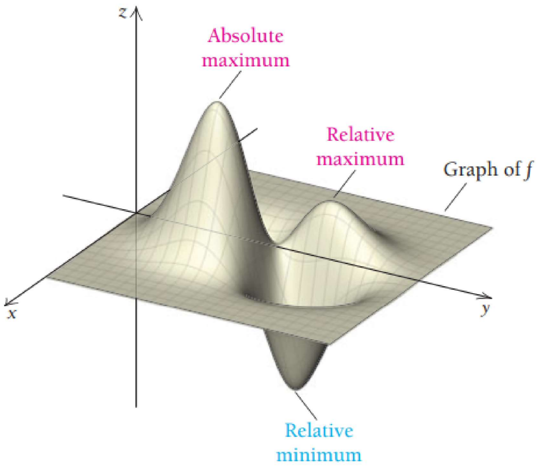
Tìm cực trị (cực đại, cực tiểu) địa phương của hàm số $f(x, y)$

B1. Tìm tập xác định của f và $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

B2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
Giả sử (a, b) là một nghiệm của hệ trên.

B3. Tính giá trị
$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

B4. Khi đó
1. nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại (a, b).
2. nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại (a, b).
3. nếu $D < 0$ thì hàm số f không đạt cực trị tại (a, b).
4. nếu $D = 0$ thì chưa thể kết luận được.



Ví dụ 4.39 Tìm cực trị của hàm số sau

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$$

Giải.

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một hình tròn chứa điểm $M(a,b)$ thuộc đường cong $(C): g(x,y)=0$. Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm M thì ta nói M là điểm cực trị có điều kiện của $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$.

B1. Đặt $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda.g(x,y)$ trong đó λ là một biến mới ta thêm vào.

B2. Tính F_x, F_y, F_λ và giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

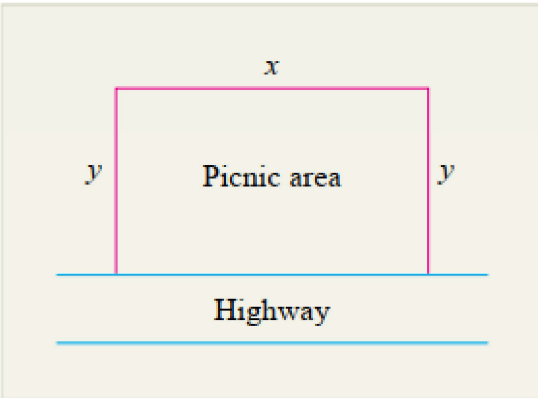
Giả sử nghiệm của hệ phương trình trên là (a,b,c).

B3. Tính $A=F_{xx}(a,b); B=F_{xy}(a,b); C=F_{yy}(a,b), D=g_x(a,b), E=g_y(a,b)$ và xét định thức

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{vmatrix}$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì hàm $f(x,y)$ đạt cực đại có điều kiện tại (a,b).
- Nếu $\Delta > 0$ thì hàm $f(x,y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại (a,b).

Ví dụ 4.40 Người ta dự định xây một trạm dừng chân hình chữ nhật rộng 5000 m^2 dọc theo một cao tốc. Hàng rào được dựng lên xung quanh ba cạnh của hình chữ nhật (trừ một cạnh phía đường cao tốc). Hỏi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là bao nhiêu để độ dài hàng rào là nhỏ nhất?



Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....