UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN DÃY SỐ, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:
Dãy số là một ánh xạ từ tập các số tự nhiên (hoặc các số nguyên không âm) vào tập các số thực

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,.$$

Đặt $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, và dùng ký hiệu $\{a_n\}$ để chỉ dãy số.

Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là:
- dương (âm) nếu $a_n > 0$ ($a_n < 0$) với mọi n;
- không âm (không dương) nếu $a_n \geq 0$ ($a_n \leq 0$) với mọi n;
- đơn điệu tăng (giảm) nếu $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) với mọi n;
- tăng (giảm) ngặt nếu $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) với mọi n;
- hội tụ tới $a \in \mathbb{R}$ (hoặc có giới hạn hữu hạn là a), nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

Trong trường hợp như thế, ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ, và gọi a là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

- phân kỳ ra $+\infty$, nếu với mọi số $A > 0$ cho trước lớn tùy ý, tồn tại $n(A) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_n > A,\ \forall n \geq n(A).$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

- phân kỳ ra $-\infty$, nếu với mọi số $A > 0$ cho trước lớn tùy ý, tồn tại $n(A) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_n < -A,\ \forall n \geq n(A).$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

- dãy Cauchy (hoặc dãy cơ bản), nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq n(\varepsilon).$$

Định lý hội tụ đơn điệu nói rằng dãy số đơn điệu (tăng hoặc giảm) và bị chặn có giới hạn hữu hạn.

Cụ thể: Dãy $\{a_n\}$ tăng và bị chặn trên thì hội tụ về $\sup\{a_1, a_2, ...\}$; dãy $\{a_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì hội tụ về $\inf\{a_1, a_2, ...\}$

Tiêu chuẩn Cauchy nói rằng dãy số hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy (dãy cơ bản).

Các tính chất cơ bản của giới hạn là

- Một dãy hội tụ thì bị chặn.
- Bảo toàn các phép tính số học, tức là, nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha a \pm \beta b, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab; \lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b \ (b \neq 0)$$

- Bảo toàn thứ tự theo nghĩa sau: nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

$a_n \geq b_n$; với $n \geq n_0$ nào đó, thì $a \geq b$.

- Định lý kẹp: Cho ba dãy số thực $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Nếu $a_n \leq c_n \leq b_n$, với $n \geq n_0$ nào đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

thì $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

1. Giả sử $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ là những số dương cố định. Xét các dãy sau:

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_p^n}{p} \text{ và } x_n = \sqrt[n]{s_n}; \ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. HD. Trước tiên xét tính đơn điệu của dãy $\left\{\frac{s_n}{s_{n-1}}\right\}$ $n \geq 2$.

2. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$, với $a_n = \dfrac{n}{2^n}, n > 1$, là dãy giảm ngặt và tìm giới hạn của dãy.

3. Cho $\{a_n\}$ là dãy bị chặn thoả mãn điều kiện $a_{n+1} \geq a_n - \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ. HD. Xét dãy $\left\{a_n - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

4. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{3}{2}, a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \text{ với } n \geq 2$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

5. Cho $c > 2$, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = c^2, a_{n+1} = (a_n - c)^2, n \geq 1.$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt. HD cm $a_n > 2c$

6. Giả sử dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện $0 < a_n < 1, a_n(1 - a_{n+1}) > \dfrac{1}{4}$ với $n \in \mathbb{N}$. Thiết lập sự hội tụ của dãy và tìm giới hạn của nó.

7. Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy được xác định theo biểu thức

$$a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \text{ với } n \geq 1.$$

8. Khảo sát tính đơn điệu của dãy và xác định giới hạn của nó.

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, n \geq 1,$$

9. Hãy xác định tính hội tụ hay phân kỳ của dãy $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, n \geq 1.$

10. Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau

$$\begin{aligned} &a) \quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}^* \\ &b) \quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}; n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

11. Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$ và $a_1 > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. HD cm $a_{n+1} > \sqrt[p]{a}$, lập hiệu $a_{n+1} - a_n$ để chứng minh $\{a_n\}$ tăng.

12. Dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

13. Tìm các hằng số $c > 0$ sao cho dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n^2), n \in \mathbb{N}$$

là hội tụ. Trong trường hợp hội tụ hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. HD cm bằng quy nạp dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt

14. Cho $a > 0$ cố định, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_1 > 0, a_{n+1} = a_n\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}, n \in \mathbb{N}.$$

Tìm tất cả các số a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong những trường hợp đó hãy tìm giới hạn của dãy. HD $a_{n+1} = a_n\left(1 - 2\dfrac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right), n \geq 1$; $a_n\dfrac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} > \sqrt{a} \Leftrightarrow (a_n - \sqrt{a})^3 > 0.$

15. Cho a là một số cố định bất kỳ và ta định nghĩa $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2, n \in \mathbb{N}.$$

Xác định a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong trường hợp như thế tìm giới hạn của nó.

16. Cho $c > 0$ và $b > a > 0$, ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = c, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a+b}$$

với $n \in \mathbb{N}$. Với những giá trị của a, b và c dãy trên sẽ hội tụ? Trong các trường hợp đó hãy xác định giới hạn của dãy.

17. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right).$$

18. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_p$ là các số dương, hãy tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}}\right).$$

19. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{2009}}{n+1} + \cos^2\frac{n^{2009}}{n+1}}\right).$$

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠO HÀM, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

Cho hàm f xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm f đạt cực đại địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân cận $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ của x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ mọi $x \in U$.

Định lý Fermat: Hàm số f xác định trên (a, b). Nếu f đạt cực trị địa phương tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Lagrange: Cho f liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b). Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Định lý Cauchy: f, g là hai hàm liên tục $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b). Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

20. Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1$.

21. Chứng minh rằng nếu f liên tục trong khoảng đóng $[a; b]$, khả vi trên khoảng mở $(a; b)$ và $f(a) = f(b) = 0$ thì với $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in (a; b)$ sao cho $\alpha f(x) + f'(x) = 0$.

22. Cho f và g là các hàm liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên khoảng mở $(a;b)$ và giả sử $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in (a;b)$ sao cho $g'(x)f(x) + f'(x) = 0$.

23. Cho f là hàm liên tục trên $[a;b]; a > 0$ và khả vi trên khoảng mở $(a;b)$. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, thì tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$:

24. Giả sử f liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Chứng minh rằng nếu $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$ thì phương trình $f'(x)f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm trong $(a;b)$.

25. Giả sử f và g liên tục, khác 0 trong $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Chứng minh rằng nếu $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ thì tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

26. Giả sử $a_0; a_1; ...; a_n$ là các số thực thoả mãn $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + ... + \dfrac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$: Chứng minh rằng đa thức $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.

27. Cho f khả vi liên tục trên $[a;b]$ và khả vi cấp hai trên $(a;b)$, giả sử $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in (a;b)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.

28. Cho f liên tục trên $[0;2]$ và khả vi cấp hai trên $(0;2)$. Chứng minh rằng nếu $(f(0) = 0; f(1) = 1$ và $f(2) = 2$ thì tồn tại $x_0 \in (0;2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.

29. Cho f liên tục $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1)$, $f(x) \neq -1, \forall x \in [0,1]$. $f(0) = 0, f(1) = 1$. CMR: $\exists \xi \in (0,1)$ sao cho $f'(\xi) = \dfrac{1}{2}[1 + f(\xi)]^2$.

30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và trên $(0, +\infty)$ và không phải là hàm hằng. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn điều kiện $0 < a < b$. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm thuộc (a,b): $xf'(x) - f(x) = \dfrac{af(b) - bf(a)}{b-a}$.

31. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại các điểm $x_1, x_2, ..., x_{2009}$, $0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2009} < 1$ sao cho $f'(x_1) + f'(x_2) + ... + f'(x_{2009}) = 2009$.

UBND Tỉnh Quảng Bình

Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÀM LIÊN TỤC, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

Cho $X \subset \mathbb{R}$. Ta gọi một ánh xạ f từ X vào $\mathbb{R}$ là một *hàm số*. Tập X được gọi là tập xác định của hàm f.

Hàm đơn điệu:

Ta nói hàm số f *đơn điệu tăng (đơn điệu giảm)* trên tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mỗi cặp $x_1, x_2 \in E$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Hàm f được gọi là *đơn điệu tăng ngặt (đơn điệu giảm ngặt)* trên tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mỗi

cặp $x_1, x_2 \in E$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.
Hàm số đơn điệu tăng (ngặt) hay đơn điệu giảm (ngặt) được gọi chung là hàm đơn điệu (ngặt).

Hàm bị chặn:
Hàm số f được gọi là *bị chặn* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in D$.
Hàm f được gọi là bị chặn dưới trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại một số m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in D$.
Hàm f vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới trên D được gọi là bị chặn trên D. Như vậy có thể suy ra rằng: hàm f bị chặn trên D nếu tồn tại số $M \geq 0$ sao cho $|f(x)| \leq M, \forall x \in D$.

Giới hạn của hàm số:
Số thực l được gọi là *giới hạn* của hàm số f khi x dần đến x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in X$ mà $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Lúc đó kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ hay $f(x) \to l$ khi $x \to x_0$.

Định lý chuyển qua dãy: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ là với mọi dãy $(x_n)_n \subset X$ mà $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$ thì $f(x_n) \to l$ khi $n \to \infty$.

Giới hạn bằng vô cùng và giới hạn ở vô cùng:
Nếu với mỗi số $M > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$ với mọi x thoả mãn bất đẳng thức $0 < |x - a| < \delta$ thì ta nói f có giới hạn bằng $+\infty$ $(-\infty)$ khi x tiến tới a và ký hiệu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ (\lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

Bây giờ ta giả thiết rằng hàm f xác định trên tập không bị chặn.

Số L được gọi là giới hạn của f khi x tiến ra $+\infty(-\infty)$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn bất đẳng thức $x > M$ $(x < -M)$ ta có: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L)$.
Nếu với mỗi số $E > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho $f(x) > E$ $(f(x) < -E)$ với mọi $x \in X$ thoả mãn $x > M$ thì ta nói hàm f có giới hạn $+\infty(-\infty)$ khi x tiến ra $+\infty$ và ký hiệu:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ (\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

Tương tự cho $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Hàm liên tục:
Hàm f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ thì
Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x : |x - a| < \delta$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tính chất hàm liên tục:
1) Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.
2) Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) = A \neq B = f(b)$. Khi ấy f nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B. (Ta nói : f lấp đầy đoạn $[A, B]$).
Hàm số được gọi là liên tục đều trên tập $X \subset \mathbb{R}$ nếu như với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu

tùy ý), ta tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in X, |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon.$$

Định lý Cantor: Hàm liên tục trên đoạn thì cũng liên tục đều trên đoạn đó.

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì f bị chặn trên đoạn $[a,b]$. Hơn nữa f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, tức là có $\alpha, \beta \in [a,b]$ để

$$f(\beta) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ và } f(\alpha) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Bài 1.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm.

b) Hãy tìm một hàm thoả mãn điều kiện trên nhưng không đồng nhất bằng x trên $\mathbb{R}$.

Bài 1.2. Cho $f : [a,b] \to [a,b]$ là một hàm liên tục sao cho $f(a) = a,\ f(b) = b$ và $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in [a,b]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [a,b]$.

Bài 1.3. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm bài toán tổng quát hơn.

b) Tìm một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ nhưng $f(x)$ không đồng nhất bằng x.

Bài 1.4. Cho f là một hàm liên tục và đơn ánh trên (a,b). Chứng minh rằng f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a,b).

Bài 1.5.Cho hàm số $f : [a,b] \to [a,b]$ thoả mãn điều kiện

$$|f(x)-f(y)| < |x-y| \textbf{ với mọi } x \in [a,b], x \ne y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có duy nhất nghiệm trên $[a,b]$.

Bài 1.6. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ **thoả mãn một trong hai điều kiện sau:**

a) f là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

b) f là một hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm. Trong mỗi trường hợp, hãy xem điều kiện duy nhất nghiệm có được đảm bảo không ?

Bài 1.7. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thì phương trình $f(x) = x$ cũng có nghiệm.

Bài 1.8. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$|f(x)| < |x| \textbf{ với mọi } x \ne 0.$$

a) **Chứng minh rằng** $f(0) = 0$.

b) **Chứng minh rằng nếu** $0 < a < b$ **thì tồn tại** $K \in [0, 1)$ **sao cho**

$$|f(x) \leq K|x|, \forall x \in [a, b].$$

Bài 1.9. Cho f **là một hàm liên tục trên** $\mathbb{R}$ **và thoả mãn một trong ba điều kiện dưới đây:**

a) $f(x) + f(2x) = 0,\ \ \forall \in \mathbb{R}$.

b) $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = f(\sin x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng f **là hàm hằng.**

Bài 1.10. Cho f **là một hàm không âm, liên tục trên** $[0, +\infty)$ **và** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k < 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, +\infty)$ **sao cho** $f(x_o) = x_o$.

UBND Tỉnh Quảng Bình
Trường Đại học Quảng Bình

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN, LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN

Biên soạn: Th.s Phan Trọng Tiến

Một số kiến thức nhắc lại:

MĐ Nếu f **là một hàm liên tục trên** $[a, b]$ **và** $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ **thì** $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

MĐ Nếu f, g **là hai hàm liên tục trên** $[a, b]$ **và** $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ **thì** $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

MĐ Nếu f **là một hàm liên tục trên** $[a, b]$ **và** $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ **và** f **không đồng nhất bằng 0 trên** $[a, b]$ **thì** $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

MĐ Nếu f **là một hàm liên tục trên** $[a, b]$ **thì** $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Số thực $\mu = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$ **gọi là giá trị trung bình của hàm** f **trên** $[a, b]$.

Mệnh đề: Nếu hàm f **khả tích trên đoạn** $[a, b]$ **và** $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ **thì tồn tại số** $\mu \in [m, M]$ **sao cho** $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$.

Hệ quả: Nếu f **là một hàm liên tục trên** $[a, b]$ **thì tồn tại ít nhất một điểm** $c \in [a, b]$ **sao cho** $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

32. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

a) $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b (f(x))^2dx . \int\limits_a^b (g(x))^2dx$.

b) $\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx \le \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

c) Nếu $f(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$, thì $\int\limits_a^b f(x)dx.\int\limits_a^b \dfrac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$.

HD b)

$$\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x^n}.\sqrt{x^n(1-x)}dx \le \Big(\int\limits_0^1 x^n dx\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int\limits_0^1 x^n(1-x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big(\int\limits_0^1 x^n dx - \int\limits_0^1 x^{n+1}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\frac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$$

33. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Chứng minh rằng nếu f là hàm chẵn thì F là hàm lẻ, nếu f là hàm lẻ thì F là hàm chẵn.

34. Cho f là một hàm liên tục và nhận giá trị dương trên $[0,1]$.

a) Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\sin x)dx}{f(\sin x)+f(\cos x)} = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Tính các tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+e^{\cos 2x}}$; $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+\sqrt{tgx}}$.

35. Cho f là một hàm chẵn liên tục trên $[-a,a], a > 0$; g là một hàm liên tục nhận giá trị dương trên $[-a,a]$ và $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)},\ \forall x \in [-a,a]$.

a) Chứng minh rằng $\int\limits_{-a}^a \dfrac{f(x)dx}{1+g(x)} = \int\limits_0^a f(x)dx$.

b) Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

c) Tính $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^a \dfrac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}$.

36. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

b) $\int\limits_0^{n\pi} f(\cos^2 x)dx = n\int\limits_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx$.

37. Cho f là một hàm liên tục nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx \ge 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

38. Cho f là một hàm khả vi liên tục trên $[a,b], f(a) = 0$ và $0 \le f'(x) \le 1,\ \forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \dfrac{1}{2}\Big[(f(b))^2 - (f(a))^2\Big]$; b) $\int\limits_a^b (f(x))^3dx \le \Big(\int\limits_a^b f(x)dx\Big)^2$.

HD $F(x) = (\int\limits_a^x f(t)dt)^2 - \int\limits_a^x (f(t))^3 dt,\ x \in [a,b]$. $F'(x) = 2.\int\limits_a^x f(t)dt.f(x) - (f(x))^3 = f(x)\Big[2\int\limits_a^x f(t)dt - (f(x))^2\Big]$.

Đặt $G(x) = 2\int\limits_x^x f(t)dt - (f(x))^2$. Ta có

$G'(x) = 2f(x) - 2f(x).f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$.

39. Cho $f \in C_{[a,b]}$; $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b], k_1, k_2, \cdots, k_n > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho

$k_1\int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2\int\limits_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \cdots + k_n\int\limits_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0.$

Giải: Xét hàm

$$\varphi(x) = k_1\int\limits_x^{x_1} f(t)dt + k_2\int\limits_x^{x_2} f(t)dt + \cdots + k_n\int\limits_x^{x_n} f(t)dt.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$k_1\varphi(x_1) + k_2\varphi(x_2) + \cdots + k_n\varphi(x_n) = 0.$$

Mặt khác φ là hàm liên tục trên $[a,b]$ và $k_i > 0$ với mọi $i = \overline{1,n}$, do đó tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, hay $k_1\int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2\int\limits_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \cdots + k_n\int\limits_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0$.

40. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $[0,1]$ sao cho $\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_x^1 f(t)dt$.

HD Lấy đạo hàm hai vế.

41. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_a^b xf(x).f'(x)dx = -\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b [f(x)]^2dx$.

b) Giả sử $\int\limits_a^b [f(x)]^2dx = 1$. Hãy chứng minh

$$\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx.\int\limits_a^b [xf(x)]^2dx \geq \frac{1}{4}.$$

42. Cho f là hàm liên tục trên $[0,\pi]$ sao cho

$$\int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx = \int\limits_0^\pi f(x)\cos x dx = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong $(0,\pi)$.

Giải:

Giả sử rằng f có không quá một nghiệm trên $(0, \pi)$.

Th1: f vô nghiệm trên $(0, \pi)$. Do tính liên tục của f ta suy ra f không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó $\int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx > 0$, mâu thuẫn.

Th2: f có duy nhất nghiệm $x_o \in (0, \pi)$. Dễ thấy rằng hàm

$g(x) = f(x)\sin(x - x_o)$ không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Do đó

$$\int\limits_0^\pi f(x)\sin(x - x_o)dx > 0.$$

Mặt khác từ giả thiết đã cho ta có

$$\int\limits_0^\pi f(x)\sin(x - x_o)dx = \cos x_o \int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx - \sin x_o \int\limits_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ f có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên $(0, \pi)$.

43. Cho f là hàm khả vi trên $[-1, 1]$ sao cho

$$\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Giải:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_1 \in [-1, 0]$,

$x_2 \in [0, 1]$ sao cho

$\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = f(x_1)$, và $\int\limits_0^1 f(x)dx = f(x_2)$.

* Nếu $x_1 \neq 0$ hoặc $x_2 \neq 0$ thì $x_1 \neq x_2$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

* Nếu $x_1 = x_2 = 0$, thì

$$\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = f(0) = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Nếu $f(x) \neq f(0)$, $\forall x \in (0, 1]$ thì $g(x) = f(x) - f(0) \neq 0$ với mọi $x \in (0, 1]$. Vì vậy $g(x)$ không đổi dấu trên $(0, 1]$ và

$$\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 g(x)dx - f(0) \neq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại $x_1 \in (0, 1]$ sao cho

$$f(x_1) = f(0).$$

Lại áp dụng định lý Rolle ta có điều cần chứng minh.

44. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\int\limits_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(c).$$

Giải:

Do f là hàm liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0, 1]$

$$f(x_1) = \min_{x\in[0,1]} f(x),\ f(x_2) = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

Do đó

$$x^2f(x_1) \le x^2f(x) \le x^2f(x_2), \forall x \in [0, 1].$$

Suy ra

$$\frac{1}{3}f(x_1) \le \int\limits_0^1 x^2f(x)dx \le \frac{1}{3}f(x_2).$$

$$\Longleftrightarrow f(x_1) \le 3\int\limits_0^1 x^2f(x)dx \le f(x_2).$$

Theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $c \in [0, 1]$ để $f(c) = 3\int\limits_0^1 x^2f(x)dx$.

45. Cho f là hàm liên tục trên $[0, n]$ và $\int\limits_0^n f(x)dx = 0,\ (n \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, n-1]$ sao cho

$$\int\limits_0^c f(x)dx = \int\limits_0^{c+1} f(x)dx.$$

Giải:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^{x+1} f(t)dt = \int\limits_x^{x+1} f(t)dt.$$

Rõ ràng φ liên tục trên $[0, n-1]$ và

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1) = 0.$$

Ta dễ dàng suy ra tồn tại $c \in [0, n-1]$ để $\varphi(c) = 0$.

46. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, $f(a)=0$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x).f'(x)|dx \le \frac{(b-a)}{2}\int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải:

Với mọi $x\in[a,b]$, ta có $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$.

Do đó $|f(x).f'(x)| \le \int_a^x |f'(t)|dt.|f'(x)|$.

Suy ra

$$\int_a^b |f(x).f'(x)|dx \le \int_a^b \Big(\int_a^x |f'(t)|dt\Big)|f'(x)|dx.$$

Ta có: $\Big(\int_a^x |f'(t)|dt\Big)' = |f'(x)|$. Do vậy

$$\int_a^b \Big(\int_a^x |f'(t)dt\Big).|f'(x)|dx = \frac{1}{2}\Big(\int_a^x |f'(t)|dt\Big)^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\Big(\int_a^b |f'(x)|dx\Big)^2 \le \frac{1}{2}(b-a).\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

47. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, $f(a)=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Giải: Ta có

$$|f(x)| = |f(x)-f(a)| = \Big|\int_a^x f'(t)dt\Big| \le \int_a^x |f'(t)|dt \le \int_a^b |f'(t)|dt.$$

Do đó

$$\int_a^b |f(x)|dx \le (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx.$$

48. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b \big(f(x)-f(a)\big)^2 dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải: Ta có

$$\big(f(x)-f(a)\big)^2=\Big(\int\limits_a^x f'(t)dt\Big)^2\le\int\limits_a^x (f'(t))^2dt.\int\limits_a^x 1^1dt\le (x-a)\int\limits_a^x (f'(t))^2dt$$
$$\le (x-a)\int\limits_a^b (f'(x))^2dx.$$

Do đó

$$\int\limits_a^b \big(f(x)-f(a)\big)^2dx\le\int\limits_a^b (x-a)dx.\int\limits_a^b (f'(x))^2dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_a^b (f'(x))^2dx.$$