ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2016-2017
VÒNG SƠ LOẠI MÔN ĐẠI SỐ

Ngày thi: 12/11/2016
Thời gian làm bài: **60** phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1.

Hãy giải hệ phương trình tuyến tính sau trên trường số thực $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a}{2016} \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a + x_1}{2017^2 - 1} \\ x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a + x_1 + x_2}{2017^3 - 1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = \dfrac{a + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{2017^n - 1} \end{cases}$$

, với a là số thực tùy ý, $n \geq 0$, n là số nguyên.

Câu 2.

Cho ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

a/ Chứng minh rằng: $A^2 - 2A + I_2 = O$ (*), với $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra A khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

b/ Với mỗi số tự nhiên $k \geq 0$, ta đặt $B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^k$.

Hãy tìm A^k và B theo A, I_2 và k.

Câu 3.

Cho A và B là các ma trận vuông cấp n, là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$, và thỏa: $AB + BA = O$. Tính $\det(A - B)$. Biết rằng $n \geq 0$, n là số nguyên.

Câu 4.

Cho Cho A và B là các ma trận vuông cấp n.

a/ Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b/ Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$,

với I_n là ma trận đơn vị cấp n, và $n \geq 0$, n là số nguyên.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

TRƯỞNG BỘ MÔN

TS. DƯƠNG TÔN ĐẢM