HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2022

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG B

Lời giải bài B.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm B.1
a			**Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$**	**2,00**
		1	Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng	1,00
			Từ định nghĩa $$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n$$ với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.	1,00
		2	Khẳng định $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$	1,00
			Do $$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$.	1,00
b			**Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ**	**4,00**
		1	Khẳng định (u_n) bị chặn trên	2,00
			Sử dụng đánh giá $n! \geq n(n-1)$ để thấy $$u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 2$$ với mọi $n \geq 2$.	2,00
		2	Khẳng định (u_n) hội tụ	2,00
			Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ.	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG B

Lời giải bài B.2 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm B.2
a			**Chứng minh f liên tục tại 0**	**2,00**
		1	Tính giới hạn của f tại 0	1,00
			Với mọi x ta luôn có $$0 \leq \lvert f(x)\rvert = \sin^2 x \leq x^2.$$ Do đó theo nguyên lý kẹp thì $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.	1,00
		2	Khẳng định tính liên tục của f tại 0	1,00
			Ở bước trên ta đã có $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Nhưng $0 \in \mathbb{Q}$ nên $f(0) = \sin^2 0 = 0$. Vậy f liên tục tại 0.	1,00
b			**Hàm f có khả vi tại 0 không?**	**2,00**
		1	Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$	1,00
			Ta khảo sát giới hạn $$\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$	1,00
		2	Tính giới hạn của $f(x)/x$	1,00
			Rõ ràng với $x \neq 0$ thì $0 \leq \lvert f(x)/x \rvert \leq x$. Vậy $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$ Từ đó hàm f khả vi tại 0.	1,00
c			**Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi**	**2,00**
		1	Khẳng định f không khả vi tại $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	1,00
			Nhận xét: nếu $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì $\sin x \neq 0$. Có 2 trường hợp xảy ra: **Nếu** $x \in \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = \sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \notin \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-\sin^2 x_n) = -\sin^2 x \neq \sin^2 x = f(x).$$ **Nếu** $x \notin \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = -\sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 x_n = \sin^2 x \neq -\sin^2 x = f(x).$$	1,00
		2	Khẳng định f khả vi tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	1,00
			Cuối cùng chú ý rằng $f(k\pi) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do $$\left\lvert \frac{f(k\pi + x) - f(k\pi)}{x} \right\rvert = \left\lvert \frac{f(x)}{x} \right\rvert,$$ lý luận như ý (b) ta thấy tại các điểm $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì f khả vi với $f'(k\pi) = 0$.	1,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG B

Lời giải bài B.3 — 6 điểm

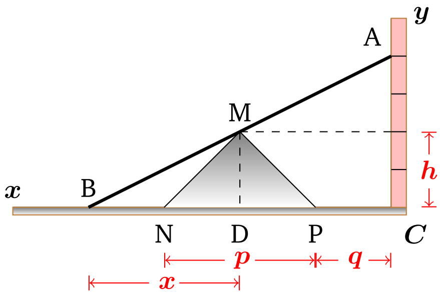
Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm B.3
a			**Chứng minh rằng tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho $f'(x_n) \to 0$**	**2,00**
		1	Sử dụng công thức giá trị trung bình	1,00
			Sử dụng công thức giá trị trung bình trên các đoạn $[n, n+1]$ ta thu được $$f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$$ với $x_n \in (n, n+1)$ nào đó.	
		2	Chỉ ra sự tồn tại một dãy $(x_n)_n$ cần tìm	1,00
			Hiển nhiên dãy $(x_n)_n$ xác định như ở bước trên tiến ra $+\infty$. Hơn nữa do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên $$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0.$$	1,00
b			**Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$**	**4,00**
		1	Đánh giá f' thông qua khai triển Taylor	2,00
			Từ công thức Khai triển Taylor ta có $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$$ với $x, h > 0$ và $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào x và h. Do f'' bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\lvert f''(x)\rvert < M$ với mọi $x > 0$. Khi đó từ công thức khai triển trên $$\lvert f'(x)\rvert \le \frac{\lvert f(x+h) - f(x)\rvert}{h} + \frac{Mh}{2}.$$	2,00
		2	Kết luận giới hạn của f'	2,00
			Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $$\lvert f(x)\rvert < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \ge x_0.$$ Do đó $$\lvert f'(x)\rvert \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \forall x \ge x_0.$$ Đến đây ta lấy $$h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$$ để thu được $$\lvert f'(x)\rvert \le \sqrt{2\varepsilon M} \quad \forall x \ge x_0.$$ Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG B

Lời giải bài B.4 — 6 điểm



Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm B.4
			Xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB	**6,00**
		1	Đặt bài toán	2,00
			Đặt $BD = x$ mét với $x \geq p/2$. Khi đó $$BM = \sqrt{x^2 + h^2}.$$ Vì $\Delta BDM \sim \Delta BCA$ ta suy ra $$MA = \frac{DC}{DB} \times MB = \frac{p/2 + q}{x}\sqrt{x^2 + h^2}.$$ Vậy $$AB = MA + MB = \sqrt{x^2 + h^2}\frac{x + p/2 + q}{x} =: f(x).$$	2,00
		2	Khảo sát hàm f trên $[p/2, \infty)$	2,00
			Tính toán để thu được $$f'(x) = \frac{2x^3 - (p + 2q)h^2}{2x^2\sqrt{x^2 + h^2}}$$ Rõ ràng $f'(x) = 0$ tại duy nhất $$x = \left((\frac{p}{2} + q)h^2\right)^{1/3} =: x_0.$$	2,00
		3	Kết luận độ dài ngắn nhất của thang AB	2,00
			Có 2 trường hợp xảy ra: **Trường hợp** $4(p + 2q)h^2 \leq p^3$: Khi đó hàm f đồng biến trên $[p/2, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $B \equiv N$, tức là khi thang tựa trên giá đỡ. Lúc này chiều dài của thang AB là $$(p + q)\sqrt{1 + (\frac{2h}{p})^2}.$$ **Trường hợp** $4(p + 2q)h^2 > p^3$: Khi đó hàm f nghịch biến trên $[p/2, x_0]$ và đồng biến trên $[x_0, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $BN = x_0 - p/2$. Lúc này chiều dài của thang AB là $$\left(x_0 + \frac{p}{2} + q\right)\sqrt{1 + (\frac{h}{x_0})^2}.$$	2,00

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2022
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN BẢNG B

Lời giải bài B.5 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm B.5
a		1	Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục	**2,00**
			Lấy $x \in [-1,1]$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta chứng minh tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào x và ε) sao cho $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ với mọi $y \in [-1,1]$ thỏa mãn $\|x - y\| < \delta$. Thật vậy ta lấy $$\delta = \frac{\varepsilon}{2022}.$$ Khi đó với $y \in [-1,1]$ bất kỳ thỏa mãn $\|x-y\| < \delta$ ta sẽ có $$\|f(x) - f(y)\| \leq 2022\|x - y\| < 2022\delta = \varepsilon.$$	2,00
b			Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2022}$	**4,00**
		1	Chứng minh $f(x) \geq \max(1 + 2022(\|x\| - 1), 0)$ với mọi $x \in [-1,1]$.	2,00
			Rõ ràng $$\max(1 + 2022(\|x\| - 1), 0) = 0 \quad \forall x \in [-\frac{2021}{2022}, \frac{2021}{2022}].$$ Với $-1 \leq x < -\frac{2021}{2022}$ ta có $$f(x) \geq f(-1) - \|f(x) - f(-1)\| \geq 1 - 2022\|x+1\| = 1 + 2022(\|x\| - 1).$$ Với $\frac{2021}{2022} < x \leq 1$ ta có $$f(x) \geq f(1) - \|f(x) - f(1)\| \geq 1 - 2022\|x - 1\| = 1 + 2022(\|x\| - 1).$$	2,00
		2	Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$	2,00
			Do $f \geq 0$ trên $[-1,1]$ nên $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \int_{-1}^{-\frac{2021}{2022}} (1 - 2022(x+1))dx + \int_{\frac{2021}{2022}}^{1} (1 + 2022(x-1))dx = \frac{1}{2022}.$$	2,00