ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

MÔN HỌC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GV hướng dẫn: Lê Văn Sáng
Email: sanglv@uit.edu.vn
DĐ: 0967-998-101

NHỮNG CHỦ ĐỀ CHÍNH CỦA MÔN HỌC

***Chương 1*: MA TRẬN – ĐỊNH THỨC**

***Chương 2*: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH**

***Chương 3*: KHÔNG GIAN VECTOR**

***Chương 4*: KHÔNG GIAN EUCLIDE**

***Chương 5*: TRỊ RIÊNG – VECTOR RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN**

***Chương 6*: DẠNG SONG TUYẾN – DẠNG TOÀN PHƯƠNG**

Giới thiệu Cơ bản của Số phức

KIỂM TRA MÔN HỌC

1. Có 03 đánh giá môn học về điểm số: điểm hoạt động học tập trên lớp (20%), điểm kiểm tra giữa kì (20%), và điểm kiểm tra cuối kì (60%).

2. Phương pháp đánh giá:

   - Kiểm tra giữa kì và cuối kì do Trường tổ chức.

   - Có 03 cách đạt điểm trên lớp như sau:

     (1) tham gia hoạt động học tập trên lớp

     (2) lấy điểm thi giữa kì làm điểm này

     (3) lấy điểm thi cuối kì làm điểm này

   Nếu Sinh viên có cả ba cột điểm này, thì Giảng viên chọn cột điểm cao nhất

Chương 0: SỐ PHỨC

$$z = a + bi \begin{cases} a,\ b: \text{là những số thực} \\ i: \text{là số ảo, với } i^2 = -1 \\ a = \mathrm{Re}(z) \text{ là phần thực} \\ b = \mathrm{Im}(z) \text{ là phần ảo} \\ a = 0,\ b \neq 0 \rightarrow Z \text{ là số thuần ảo} \\ b = 0 \rightarrow Z \text{ là số thực} \end{cases}$$

Số liên hợp phức của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$

$*z = 2 - 5i \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 2 \\ \mathrm{Im}(z) = -5 \end{cases}$

$*z = i \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 1 \end{cases}$

$*z = 2 - 5i \rightarrow \overline{z} = 2 + 5i$

$*z = 3 + i \rightarrow \overline{z} = 3 - i$

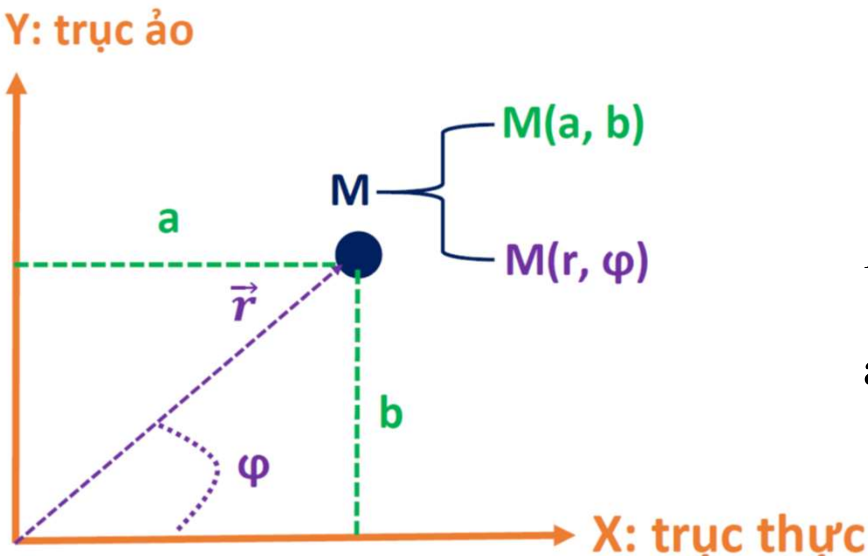
$*z = 2i \rightarrow \overline{z} = -2i$

$*z = -i \rightarrow \overline{z} = i$

$*z = -6 \rightarrow \overline{z} = -6$

$*z = 7 \rightarrow \overline{z} = 7$

Các dạng biểu diễn số phức



đại số — lượng giác — mũ

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

$$Euler: e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \text{module: } |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{argument: } \arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),\ \varphi = (0, 2\pi] \text{ or } (-\pi, 2\pi]$$

$$z_1 = z_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases}$$

$$z = \sqrt{3} + i \rightarrow \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) = \sqrt{3} \\ b = \mathrm{Im}(z) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \\ \varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\left.\begin{matrix} z_1 = 3 - 2i \\ z_2 = a + bi \\ z_1 = z_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 = re^{i\varphi} \\ z_1 = z_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} r = 5 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Các phép toán với số phức

cộng & trừ

$$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$*z_1 + z_2 = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right) i$$

$$*z_1 - z_2 = \left(a_1 - a_2\right) + \left(b_1 - b_2\right) i$$

nhân & chia

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$*z_1 z_2 = \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) i$$

$$= r_1 e^{i\varphi_1} . r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}$$

$$= r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$$

$$*\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)},\quad r_2 \neq 0$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

$$*z_1 = 3 + i,\ z_2 = -1 + 6i \rightarrow z_1 + z_2 = 2 + 7i,\ z_1 - z_2 = 4 - 5i$$

$$*z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2 = 1 + i\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 z_2 = 0 + i\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = i\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1.1 + \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{1.\sqrt{3} - 1.\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Các phép toán với số phức

lũy thừa & căn bậc n

$$*z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}(bi) + \ldots + C_n^j a^{n-j}(bi)^j + \ldots + C_n^n (bi)^n$$

$$= r^n e^{in\varphi}$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Công thức Moivre

$$\left.\begin{array}{l} *\sqrt[n]{z} = w \to w^n = z \\ z = re^{i\varphi} \\ w = r_w e^{i\varphi_w} \to w^n = r_w^n e^{in\varphi_w} \end{array}\right\} \to \begin{cases} r_w^n = r \\ n\varphi_w = \varphi + k2\pi \end{cases}$$

$$\to \sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + k2\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$*z = (1+i)^{25} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} = \sqrt{2}^{25} e^{i\frac{25\pi}{4}} = \sqrt{2}^{25} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{25}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$*z = \sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi/6+k2\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/6+k2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/6+k2\pi}{4}\right)\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{z} = 2 - i \\ \sqrt{z} = -2 + i \end{array}\right.$$

$$*z = 3 - 4i \quad \to w = \sqrt{z} = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} w = a + bi, \ (ab \neq 0) \\ \to \ w^2 = \left(a^2 - b^2\right) + i2ab \\ w^2 = z \end{array}\right\} \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} a^2 = -1 \\ a^2 = 4 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} a = \pm 2 \\ b = \mp 1 \end{array}\right.$$

Một số tính chất cơ bản của số phức

1. $\overline{\overline{z}} = z$

2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

5. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

6. $|\overline{z}| = |z|$

7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

9. $|z^n| = |z|^n$

10. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

11. $P_n(z) = 0 \;\rightarrow\; P_n(\overline{z}) = 0$

Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P(z) = z^4 - 3z^3 + 12z^2 - 36z + 45$ biết đa thức có một nghiệm là $2 - i$

$$P(2-i) = 0 \;\rightarrow\; P(2+i) = 0 \;\rightarrow\; P(z) \vdots [z - (2-i)][z - (2+i)]$$

$$\rightarrow\; P(z) = [z - (2-i)][z - (2+i)](z^2 + 9)$$

$$\rightarrow\; P(z) = 0 \;\rightarrow\; z^2 + 9 = 0 \;\rightarrow\; z^2 = -9 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{l} z = 3i \\ z = -3i \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \quad P(z) = 0 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{l} z = 2 - 1 \\ z = 2 + i \\ z = 3i \\ z = -3i \end{array}\right.$$

Bài 1.1: Cho số phức z, chứng minh rằng

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z}+z}{2}; \quad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z}-z}{2}$$

Bài 1.2: Tìm nghiệm thực (x,y) của phương trình

$$(3x - i)(2+i) + (x - iy)(1+2y) = 5+6i$$

Bài 1.3: Giải hệ phương trình phức $\begin{cases}(1+i)z_1 - z_2 = 2\\ 2iz_1 + (-1+i)z_2 = i\end{cases}$

Bài 1.4: Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z| = z$ b) $\overline{z} = z^2$

Bài 1.5: Viết các số phức sau ở dạng lượng giác và dạng mũ

a) z = -2 b) z = 3i

c) $z = -2+2\sqrt{3}i$ d) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Bài 1.6: Viết số phức sau ở dạng đại số : $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Bài 1.7: Thực hiện phép tính

a) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7$ b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$

Ví dụ: Chương 0

Bài 1.8: Rút gọn

$a.\ (2-i)^5 \qquad b.\ \frac{(2+2i)^9}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7} \qquad c.\ \frac{\left(-2+i\sqrt{12}\right)^{14}}{(1-i)^{19}}$

Bài 1.9: Giải các phương trình

$a.\ z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad b.\ z^4 + z^2 + 4 - 28i = 0$

$c.\ z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 16z + 52 = 0, \quad z_1 = 2+3i$

Bài 1.10: Chứng minh đẳng thức

$a.\ \xrightarrow{CMR} |z_1z_2| = |z_1||z_2|, \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ |z^n| = |z|^n$

$b.\ \xrightarrow{CMR} \overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \ \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2}$

$c.\ P_n(z) = 0 \xrightarrow{CMR} P_n(\overline{z}) = 0$

$d.\ \xrightarrow{CMR} i^{2022} = -1$

$e.\ z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \xrightarrow{CMR} z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$

Chương 1: MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận A cỡ m × n là một bảng số (thực hay phức) gồm m hàng và n cột.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

PHÂN BIỆT MỘT SỐ DẠNG MA TRẬN

NHỮNG TÍNH TOÁN CƠ BẢN

PHÉP BIẾN ĐỔI HÀNG

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2i \\ 6 & -i & i-1 \\ i & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & -2 \\ 8 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & i & 2i-3 & 7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

HÀNG

CỘT

VUÔNG

ĐƠN VỊ

KHÔNG

CHÉO

TAM GIÁC TRÊN

TAM GIÁC DƯỚI

BẬC THANG

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

CHUYỂN VỊ

LIÊN HỢP

BẰNG NHAU

ĐỐI XỨNG

PHẢN XỨNG

ĐỐI

NGHỊCH ĐẢO

NHỮNG TÍNH TOÁN CƠ BẢN

1. HÀNG

2. CỘT

3. VUÔNG

4. ĐƠN VỊ

5. KHÔNG

6. CHÉO

7. TAM GIÁC TRÊN

8. TAM GIÁC DƯỚI

9. BẬC THANG

1. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1) CHUYỂN VỊ:

Ma trận chuyển vị của A = $(a_{ij})_{m \times n}$ là $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$

2) LIÊN HỢP:

Ma trận liên hợp của A = $(a_{ij})_{m \times n}$ là $\overline{A} = (\overline{a}_{ji})_{n \times m}$

3) BẰNG NHAU:

Hai ma trận A = $(a_{ij})_{m \times n}$ và B = $(b_{ij})_{m \times n}$; A = B ⇔ $a_{ij} = b_{ij}$

4) ĐỐI:

Ma trận đối của ma trận A là –A

5) ĐỐI XỨNG:

Ma trận A là đối xứng nếu $A = A^T$, tức $a_{ij} = a_{ji}$

6) PHẢN XỨNG:

Ma trận A là phản xứng nếu $A = -A^T$, tức $a_{ij} = -a_{ji}$

7) NGHỊCH ĐẢO:

Ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1} với $A.A^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

1. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Đối} \quad \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hai ma trận bằng nhau

2. Ma trận đối

3. Ma trận nghịch đảo

4. Ma trận đối xứng

5. Ma trận phản xứng

Tìm các ma trận chuyển vị và liên hợp của ma trận A, B và C với

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3i & 4\\ -i & 0\\ i-3 & 2+i\end{pmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}3i & -i & i-3\\ 4 & 0 & 2+i\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{B}=\begin{pmatrix}-3i & i & -i-3\\ 4 & 0 & 2-i\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ i-1 & 2i & 7\\ 3 & 2 & 1+2i\end{pmatrix} \Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}1 & i-1 & 3\\ -i & 2i & 2\\ 0 & 7 & 1+2i\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C}=\begin{pmatrix}1 & -i-1 & 3\\ i & -2i & 2\\ 0 & 7 & 1-2i\end{pmatrix}$$

Phép tính: nhân ma trận với một số

1) $\alpha A = \alpha\left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$

2) $\alpha\beta A = \left(\alpha\beta\right)A = \alpha\left(\beta A\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Phép tính: cộng hai ma trận

1) $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$

2) $A + B = B + A$

3) $\left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right)$

4) $\alpha\left(A + B\right) = \alpha A + \alpha B$

5) $\left(\alpha + \beta\right)A = \alpha A + \beta A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 13 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Phép tính: nhân hai ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{n\times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p}$$

$$A_{m\times n} * B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 9 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -37 \\ 16 & 75 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj}$$

$$i = 1..m; j = 1..p$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 12 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

1) $\alpha(A.B) = (\alpha A).B = A.(\alpha B)$

2) $A.B.C = (A.B)C = A(B.C)$

3) $A(B+C) = A.B + A.C$

4) $(B+C)A = B.A + C.A$

Một vài tính chất đặc biệt của ma trận (so với phép tính số thực, số phức)

1. **A.B ≠ B.A, nếu A.B = B.A ta nói hai ma trận A và B giao hoán**
2. **A.B = A.C nhưng B ≠ C**
3. **A.B = 0 không suy ra A = 0 hoặc B = 0**

$$*A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 6 & 5\end{pmatrix}\ \rightarrow A.B=\begin{pmatrix}-2 & -13\\ 24 & -1\end{pmatrix}\quad \&\quad B.A=\begin{pmatrix}-12 & -28\\ 16 & 9\end{pmatrix}$$

$$*A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad \rightarrow\quad A.B=B.A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$*A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix}\quad \rightarrow\quad A.B=A.C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$*A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\quad \rightarrow\quad A.B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Phép biến đổi dòng của ma trận
Áp dụng để
đưa MT về dạng bậc thang, xác định hạng MT, tìm MT nghịch đảo, giải hệ PT tuyến tính

Có 3 phép biến đổi sơ cấp:

- đổi chỗ hai hàng
- nhân một hàng với một số α ≠ 0
- nhân một hàng với một số α ≠ 0, sau đó cộng với một hang khác

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{8h_1 \to h_1} \begin{pmatrix} 16 & 40 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2h_2 - 7h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{A và B là hai ma trận tương đương hàng}]{\text{Hữu hạn phép biến đổi hàng}} \mathbf{B}$$

Sử dụng phép biến đổi hàng để đưa một ma trận về dạng bậc thang và tìm hạng

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2+2h_1\to h_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -2\\ 0 & -3 & 7 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{h_3-h_2\to h_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \rho(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3+2h_1\to h_3]{2h_2-h_1\to h_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 3 & -5 & -1\\ 0 & 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[5h_4+2h_2\to h_4]{5h_3+3h_2\to h_3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 38 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_4-19h_3\to h_4}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -75\end{pmatrix}\Rightarrow \rho(B)=4$$

Sử dụng phép biến đổi hàng để tìm ma trận nghịch đảo (ma trận vuông)

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-7&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{7}h_2\to h_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&2/7&-1/7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1-3h_2\to h_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/7&3/7\\0&1&2/7&-1/7\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1/7&3/7\\2/7&-1/7\end{pmatrix};\quad A.A^{-1}=I$$

$$\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\3&1&0&0&1&0\\2&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-3h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-3\\0&0&-1&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-h_3\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-3\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow[h_2+3h_3\to h_2]{h_1-h_3\to h_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&-3&1&3\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&1&3\\-1&0&2\end{pmatrix};\quad A.A^{-1}=I$$

Sử dụng phép biến đổi hàng để tìm nghiệm hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases} \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$*\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2-3h_1\to h_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$*\left(A \mid I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2-3h_1\to h_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}h_2\to h_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1-2h_2\to h_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}.B=\begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$(a) \quad \begin{cases} 3x-y=8 \\ x+2y=-2 \end{cases} \rightarrow \; ?$$

$$(b) \quad \begin{cases} x+z=1 \\ 3x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \rightarrow \; ?$$

Ví dụ: Chương 1

1. Cho hai ma trận A và B, tìm các ma trận đối, chuyển vị, liên hợp của chúng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ -8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & i \\ -1 & -5i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$

2. Cho hai ma trận C và C, tìm các ma trận 2C, -5D, -C+2D và 3C-2D

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ -8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Thực hiện phép nhân các ma trận như sau:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ -8 & 9 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. Thực hiện các phép tính ma trận như sau:

$$(a)\ 5.I_2+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & -5\end{pmatrix}$$

$$(b)\ \begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}-5$$

$$(c)\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ -8 & 9 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 6 & -4\\ 4 & 6\end{pmatrix}-6.\begin{pmatrix}7 & -3\\ -5 & 4\\ -9 & 3\end{pmatrix}$$

$$(d)\ 2.\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}-5.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 9 & 4\\ -4 & 7\end{pmatrix}$$

$$(e)\ \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 5 & -9\end{pmatrix}^T$$

5. Tìm x, y, z và t trong các trường hợp sau:

$$(a)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x & y+2t\\ x-z+3t & y\end{pmatrix}\ \&\ A=B$$

$$(b)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\ \&\ A.X=B$$

$$(c)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\ \&\ A.B=B.A$$

6. Tìm kết quả trong các trường hợp sau:

$$(a)\ A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\ \&\ f(x)=2x^2-3x+I_2,\ \ f(A)=?$$

$$(b)\ A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A^n=?$$

7. Bằng phép biến đổi dòng đưa các ma trận sau về dạng bậc thang và xác định hạng của ma trận:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

8. Tìm m để thỏa điều kiện hạng của ma trận:

a) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 1 & 2m & 1 & 4 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Định m để $r(A) = 2$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$. Định m để $r(A) < 3$.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{pmatrix}$. Định m để $r(A) = 3$.

9. Tìm nghiệm các hệ phương trình bằng cách đưa về ma trận bậc thang và từ ma trận nghịch đảo

$$(a)\quad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases}$$

$$\textbf{(b)}\ \begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = -2 \end{cases}$$