NỘI DUNG CUỐI HỌC KỲ 1

1) Tập sinh, cơ sở và số chiều của không gian vectơ

2) Cơ sở và số chiều của không gia vectơ con

3) Không gian Euclide

4) Tọa độ vectơ và ma trận chuyển đổi cơ sở

5) Trực chuẩn một hệ cơ sở - phương pháp Gram-Schmidt

6) Trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa ma trận vuông
   (tìm lũy thừa bậc n của ma trận)

7) Dạng toàn phương và dạng toàn phương chính tắc

- Thời gian làm bài: **90** phút;
- Sinh viên không sử dụng tài liệu;
- Hình thức: tự luận (viết);
- Sinh viên được dùng máy tính bỏ túi khi làm bài.
- Nội dung:
- **Không gian véc tơ**:
  + Tìm hệ sinh (tập sinh), cơ sở và xác định số chiều cho không gian phụ thuộc tham số, cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất;
  + Chứng minh một tập hợp là cơ sở của một không gian véc tơ;
  + Biểu diễn tọa độ của véc tơ theo cơ sở;
  + Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b);
  + Công thức đổi tọa độ.

- **Không gian Euclide**:
  + Tích vô hướng trên không gian Euclide;
  + Độ dài véc tơ, khoảng cách giữa các véc tơ;
  + Trực giao hóa và trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt.

- **Trị riêng, véc tơ riêng, không gian riêng, đa thức đặc trưng, và chéo hóa ma trận vuông**:
  + Trị riêng, véc tơ riêng, không gian riêng, đa thức đặc trưng của ma trận vuông;
  + Chéo hóa ma trận vuông;
  + Ứng dụng chéo hóa để tìm lũy thừa của ma trận vuông.

- **Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương**:
  + Các khái niệm, tính chất về dạng song tuyến tính, dạng toàn phương;
  + Chính tắc hóa dạng toàn phương bằng pp Lagrange, pp chéo hóa trực giao ma trận vuông (khuyến khích dùng Lagrange);
  + Chỉ ra cơ sở ứng với dạng chính tắc khi đó.

1. Tập sinh - cơ sở - số chiều

Tập sinh

a) $\mathcal{S} = \{(1,\ -1), (-2,\ 3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{S} = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ -1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{S} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

d) $M = \{ (0, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, m)\}$ sinh ra $\mathbb{R}^3$.

e) $M = \{ (1, 2, -1), (0, 3, 1), (1, 5, 0), (3, 9, m)\}$ không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

Cơ sở

f) $M = \{ u_1 =(1, 2, 1) , u_2 = (1, 7, 5)\}$

g) $M = \{ u_1 =(1, 2, 3),\ u_2 = (1, 1, 1) ,\ u_3 =(3,4,2) ,$
$u_4 = (7, 2,1)\}$

h) $M = \{ u_1 =(1, 2, 3),\ u_2 =(2, 3, 4) ,\ u_3 =(3, 4, 5) \}$

i) $M = \{ u_1 = (1, 1, 2) ,\ u_2 =(1,2,1),\ u_3 =(3 , 2, 2) \}$

j) $M=\{(2,1,-1),(3,2,5),(1,-1,m)\}$

k) $M=\{(m,3,1), (0,m-1, 2), (0, 0, m+1)\}$

2. Cơ sở và số chiều của KGVT con

a) Trên R^5 cho tập hợp

$$W=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\;\middle|\;\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4-4x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-3x_3+7x_4-5x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-2x_5&=0\end{aligned}\right\}$$

Tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

b) Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\;\middle|\;\begin{aligned}&x_4-4x_6+2x_2+x_1-3x_3=0\\&3x_5-5x_4-3x_2-2x_1=0\\&8x_3-3x_2-2x_5+7x_6-x_1=0\end{aligned}\right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

3. Không gian Euclide (Sinh viên tự ôn tập)

4. Tọa độ vectơ và ma trận biến đổi cơ sở

1) Cho B = {(1; 2; 0), (1; 3; 2), (0; 1; 3)} là một cơ sở của R^3.

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc E sang cơ sở B.

b. Cho a = (2,4,9)∈ R^3. Tìm toạ độ của a trong cơ sở B.

2) Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1,0,5), \alpha_2 = (2,1,6), \alpha_3 = (3,4,0)\}$ và tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,2,2), \beta_3 = (1,2,3)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b/ Cho vector $\alpha = (4,5,2) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a}\text{; } Q = P_{\beta_0 \to \beta}\text{; và } S = P_{a \to \beta}.$$

5. Trực chuẩn một hệ cơ sở - phương pháp Gram-Schmidt

a) $a = \{\alpha_1 = (1,0,5), \alpha_2 = (2,1,6), \alpha_3 = (3,4,0)\}$

b) $\beta = \{\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,2,2), \beta_3 = (1,2,3)\}$

6. Trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa ma trận vuông (tìm lũy thừa bậc n của ma trận)

a) Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\left(\rightarrow B^n = ?\right)$

7. Dạng toàn phương và dạng toàn phương chính tắc

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

d) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

e) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

1) Cho dạng toàn phương sau:

$$f(x, x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

a. Hãy chính tắc hoá dạng toàn phương trên

b. Tìm cơ sở B ứng với dạng chính tắc này.

2) Cho dạng toàn phương $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho:

$\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X) \equiv f(X, X) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.