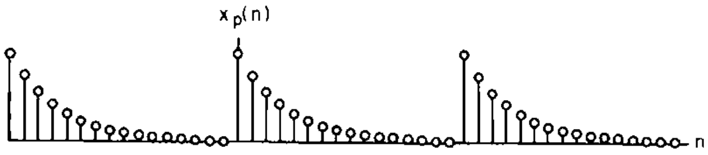
Дискретное преобразование фурье

Дискретное преобразование Фурье: одномерный сигнал – ряд Фурье

Рассмотрим периодический сигнал, разложенный в ряд фурье с периодом *N*



$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}$$

Он состоит из частот $\omega_k = 2 \cdot \pi \cdot k / N,\ -\infty < k < +\infty$

Комплексные экспоненты $2 \cdot \pi$ периодичны, поэтому частоты кратные *N* неразлечимы

$$\omega_{k \pm mN} = (2\pi/N)(k \pm mN),\ 0 < m < \infty$$

$$e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)(k \pm mN)n} \qquad 0 < m < \infty$$

Поэтому можно ограничиться только N гармониками

$$\boxed{x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}}$$

либо

$$\boxed{x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}}$$

Обратное ДПФ (представление сигнала в виде гармонических сигналов)

Дискретное преобразование Фурье: одномерный сигнал – коэффициенты Фурье

Как найти коэффициенты $X_p(k)$?

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn} \qquad | \times \, e^{-j(2\cdot\pi/N)\cdot n\cdot k}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)n(k-m)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\cdot\pi/N)\cdot n\cdot(k-m)} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Почему?

Откуда

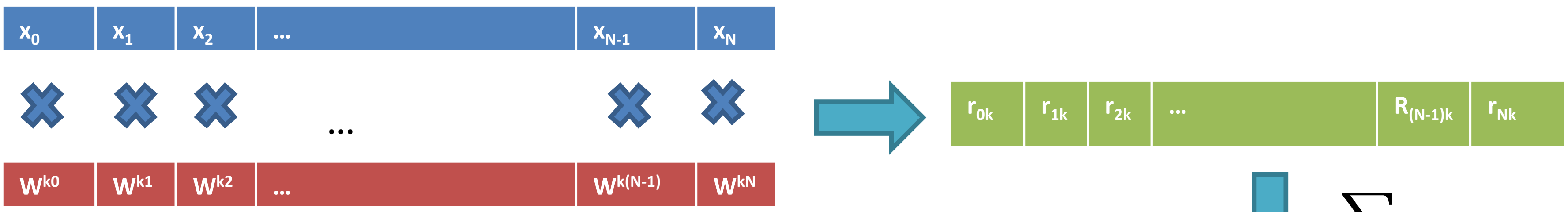
$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nm} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) u_0(k-m)$$

$$u_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

ДПФ:

$$\boxed{X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}}$$

ДПФ: реализация – «лобовой подход»



$$W = e^{-j(2\pi/N)}$$

$$X(k)$$

- комплексное умножение

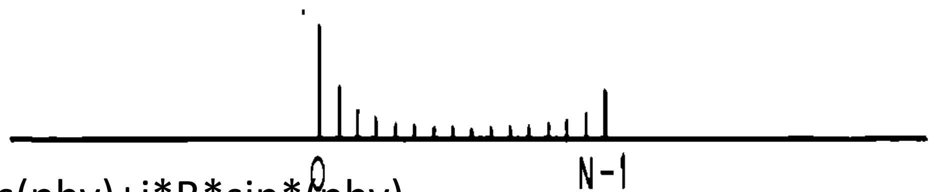
$$(a + j \cdot b) \cdot (x + j \cdot y) = (a \cdot x - b \cdot y) + j \cdot (a \cdot y + b \cdot x) = A \cdot X = P$$

$$\mathrm{Im}\{P\} = a \cdot y + b \cdot x$$

$$\mathrm{Re}\{P\} = a \cdot x - b \cdot y$$

Дискретное преобразование Фурье: сигнал конечной длительности

$$\{x(n), 0 \le n \le N-1\}$$



$a + jb = A * \exp(j * phy)$ = A*cos(phy)+j*B*sin*(phy)

Рассмотрим преобразование Фурье этого сигнала (не дискретное)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

Получим из него дискретное, задавшись дискретными значениями частоты

$$\omega_l = (2 \cdot \pi / L) \cdot l, \; l = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$$X[e^{j(2\pi/N)l}] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/L)ln}$$

Рассмотрим последовательность из *L* точек (*L*>*N*) $\hat{x}(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le L-1 \end{cases}$

Ее преобразование Фурье $X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \hat{x}(n) e^{-j(2\pi/L)kn}$

Т.к. $\hat{x}(n) = 0, \; n \ge N$ → $\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/L)kn}$ $\quad k \in [0, L-1]$

Субдискретизация по частоте

Свойства ДПФ

Линейность $\alpha \cdot x_p(\mathrm{k}) + \beta \cdot y_p(\mathrm{k}) \overset{F}{\rightleftharpoons} \alpha \cdot X_p(\mathrm{n}) + \beta \cdot Y_p(\mathrm{n})$

Временной (пространственный сдвиг) периодического сигнала $x_p(\mathrm{n} - n_0) \overset{F}{\rightleftharpoons} e^{-j(2\cdot\pi/N)\cdot n_0 \cdot k} \cdot X_p(k)$

Свойств симметрии

$$\mathrm{Re}\,[X_p(k)] = \mathrm{Re}\,[X_p(N-k)]$$

$$\mathrm{Im}\,[X_p(k)] = -\mathrm{Im}\,[X_p(N-k)]$$

$$|X_p(k)| = |X_p(N-k)|$$

$$\sphericalangle X_p(k) = -\sphericalangle X_p(-k)$$

Свертки последовательностей: периодические последовательности

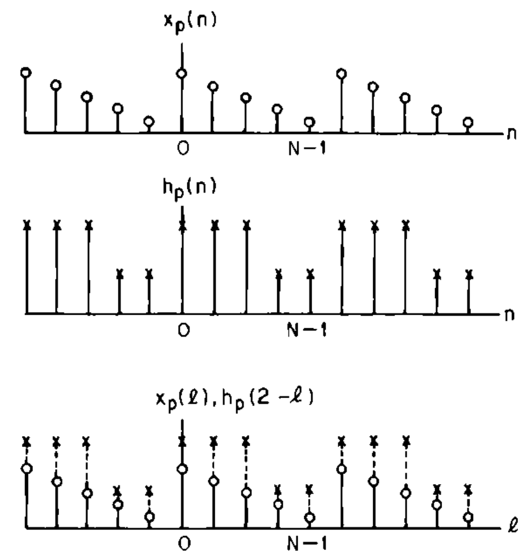
Пусть $x_p(\mathrm{n})$, $h_p(\mathrm{n})$ две периодические последовательности с периодом *N и ДПФ*

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

$$H_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

Циклической сверткой называется последовательность $y_p(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l)$
с ДПФ $Y_p(k) = H_p(k) \cdot X_p(k)$

$$\begin{aligned} Y_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) h_p(n-l) \right] e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{N-1} h_p(n-l) e^{-j(2\pi/N)(n-l)k} \right]}_{H_p(k)} e^{-j(2\pi/N)lk} \\ &= H_p(k) \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) e^{-j(2\pi/N)lk}}_{X_p(k)} \\ &= H_p(k) \cdot X_p(k) \end{aligned}$$

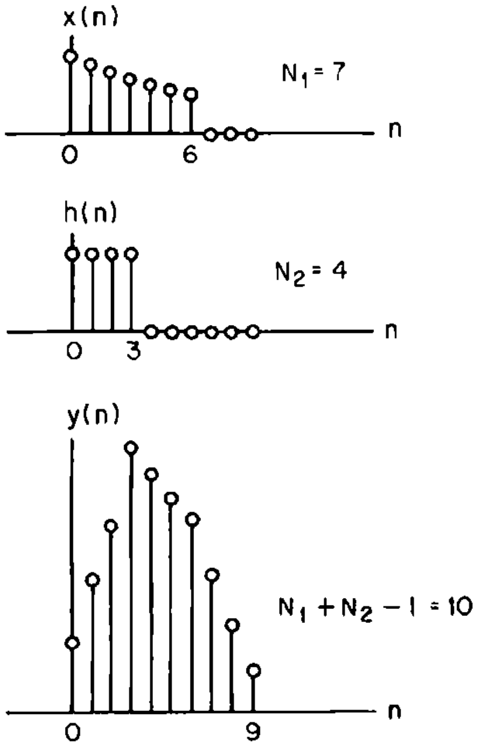


Свертки последовательностей: конечные последовательности с различной длительностью

Пусть $x_p(n)$, $h_p(n)$ две последовательности с ограниченными длительностями N_1 и N_2 (величины не равны нулю только в интервалах $0 \le n \le N_1 - 1$, $0 \le n \le N_2 - 1$)

Апериодической или линейной сверткой этих последовательностей есть последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$



длительность этой последовательности $N_1 + N_2 - 1$

(исходя из правила получения свертки)

К вопросу об минимальной величине размера изображения….

Вычисление ДПФ: быстрое преобразование Фурье (БФП)

Алгоритм Cooley-Tukey или алгоритм БПФ с основанием 2

Рассмотрим ДПФ последовательности конечной длительности $\{x(n)\}, 0 \leq n \leq N-1$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Через замену $W = e^{-j(2\pi/N)}$ придем к $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}$

W^{nk} периодична $W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk} \qquad m, l = 0, \pm 1, \ldots$

Вычисление ДПФ: быстрое преобразование Фурье (БФП)

Основная идея

Если в $\{x(n)\}, 0 \leq n \leq N-1$, N – четоное, разобьем исходную последовательность на 2 с число точек N/2 каждая

Для вычисления ДПФ исходной требуется $(N-1)^2$ комплексных умножений и N(N-1) комплексных сложений

Для вычисления ДПФ двух полу-последователносй требуется $(N)^2/2$ комплексных умножений и (N/2)(N/2-1) комплексных сложений

Вычисление ДПФ: быстрое преобразование Фурье (БФП)

Основная идея (продолжение)

Разобьем исходную последовательность на четную и нечетную под-последовательности

$$\{x(n)\}, 0 \leq n \leq N-1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1(n) &= x(2n) \qquad & n &= 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1 \\ x_2(n) &= x(2n+1) \qquad & n &= 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1 \end{aligned}$$

Запишем ДПФ исходной через ДПФ под-последовательностей

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ odd}}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} \end{aligned}$$

Вычисление ДПФ: быстрое преобразование Фурье (БФП)

Используя зависимость $W_N^2 = [e^{j(2\pi/N)}]^2 = e^{j[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2}$,получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

где $X_1(\mathrm{k})\, X_2(\mathrm{k})$ - ДПФ с числом точек N/2

Т.к. $X(\mathrm{k})$ определено на $0 \le k \le N-1$ А $X_1(\mathrm{k})\, X_2(\mathrm{k})$ на $0 \le k \le N/2-1$

необходимо ввести дополнительное правило для $k \ge N/2.$

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k) & 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1 \\ X_1\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k X_2\left(k - \frac{N}{2}\right) & \frac{N}{2} \le k \le N - 1 \end{cases}$$

$$(e^{-j4\frac{\pi}{N}})^{\frac{N}{2}} = 1$$

$$(e^{-j2\frac{\pi}{N}})^{\frac{N}{2}+r} = -e^{-j2\frac{\pi}{N}r}$$

либо

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \qquad 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$$

$$= X_1\left(k - \frac{N}{2}\right) - W_N^{k-N/2} X_2\left(k - \frac{N}{2}\right) \qquad \frac{N}{2} \le k \le N - 1$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

Вычисление ДПФ: быстрое преобразование Фурье (БФП)

Процедуру можно продолжить для последовательностей N/2 составив их из двух под-последовательностей длиной N/4, и т.д.
Например $X_1(k) = A(k) + W_{N/2}^{k} B(k)$ или $X_1(k) = A(k) + W_N^{2k} B(k)$

где A,B – ДПФ для последовательностей длиной N/4

Если длина исходной последовательности является степень 2, т.е. $N=2^s$, то деление можно продолжать пока в каждой под-последовательности не останется по два члена. Преобразование таких последовательностей не требует умножения вообще. Двухточечное преобразование Фурье содержит всего 2 члена

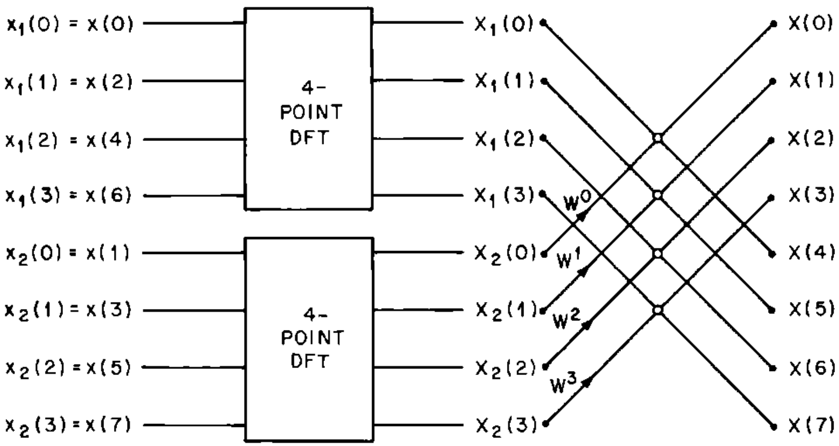
$$F(0) = f(0) + f(1)W_8^0$$

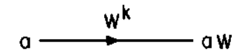
$$F(1) = f(0) + f(1)W_8^4$$

$$W_8^0 = 1$$

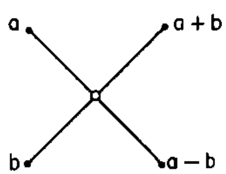
$$W_8^4 = -1$$

Пример 8-точечного БФП





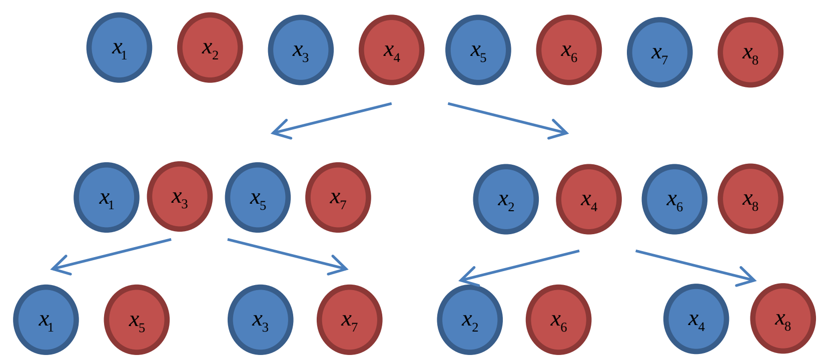
Общий потоковый граф

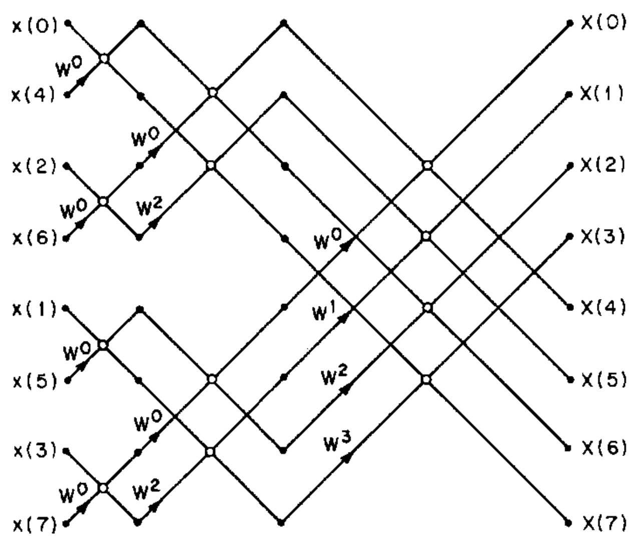


На последней стадии

Перестановка значений в последовательности

Т.к. в процессе алгоритма деления происходит постоянное составление последовательностей из четных и не четных членов, то для удобства вычисления применяется предварительна «перетасовка» значений в последовательности, чтобы на выходе получить ДФТ для исходной не перетасованной последовательности.





Если индексы в исходной последовательности длиной $N = 2^L$ могут быть записаны с помощью L-битного числа, то подобная перестановка может осуществляться реверсированием бит L-битного числа

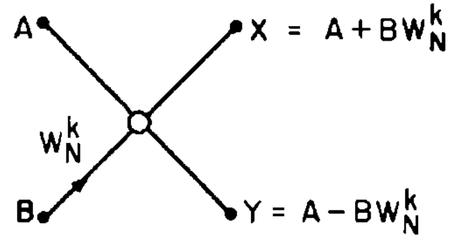
$$10 = b1010 \xrightarrow{reverse} b0101 = 5$$

Операция «Бабочка»

Приведенный выше алгоритм называется «Алгоритмом прореживания во времени». Его основной операцией является операция «Бабочка», дающая из 2-х входных последователностей A,B две выходные X,Y

$$X = A + W_N^k B$$

$$Y = A - W_N^k B$$



Вычисление коэффициентов W

В общем случае коэффициенты W_N это комплексные числа, являющиеся корнями 1 N-й степени.
Т.к. они используются на разных фазах вычисления БПФ их принято вычислять заранее и сохранять в таблице.
Основными способами вычисления являются

- прямое (через тригонометрические функции) $W_N^k = \cos(2 \cdot \pi \cdot k / N) - \mathrm{j} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k / N)$
- итеративное с использованием зависимости $W_N^k = (W_N^{k-L}) \cdot W_N^L$
- итеративное на каждой стадии деления (на каждой стадии нужны только определенные степени W: на первой W^0, W^4, на второй W^0, W^4, W^6)

Таким образом можно хранить только приращения W^0, W^2, W^4 для вычисления остальных по $W_N^k = (W_N^{k-L}) \cdot W_N^L$

Получение обратного ДПФ выполняя прямое

Получить обратное ДПФ можно выполняя прямое преобразование.
Пусть исходный сигнал имеет разложение в ряд

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-nk}$$

Найдем комплексно сопряженное к этому разложению и умножим его на N

$$Nx^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W^{nk}$$

В правой части имеем ДПФ для последовательности $\{X^*(k)\}$

Таким образом

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W^{nk}\right]^*}$$

Применение к двумерному случаю

Изображения представляют собой двумерный сигнал и также могут быть представлены через разложение во взвешенную сумму комплексных экспонент

$$x_p(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X_p(k_1, k_2) e^{j(2\pi/N_1)n_1k_1} e^{j(2\pi/N_2)n_2k_2}$$

$$X_p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_1)n_1k_1} e^{-j(2\pi/N_2)n_2k_2}$$

Заметим, что последнее можно переписать

$$X_p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-j(2\pi/N_1)n_1k_1} \left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_p(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_2)n_2k_2} \right]$$

Последнее свидетельствует о том, что двумерное преобразование можно заменить последовательным преобразованием сначала для строк, потом для столбцов (или наоборот)

Двумерное ДПФ и аффинные преобразования: сдвиг

Связь между оригинальным и смещенным изображения в пространственной области и их ДПФ осуществляется по теореме о смещении во временной области для ДПФ.

$$x'(\mathrm{i},\mathrm{j}) = x(\mathrm{i}-\mathrm{i}_0, \mathrm{j}-\mathrm{j}_0)$$

$$X'(k,\mathrm{m}) = \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} x'(n_1,n_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot n_1\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot n_2\cdot m}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} x(n_1-\mathrm{i}_0,n_2-\mathrm{j}_0)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot n_1\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot n_2\cdot m}$$

$$= \sum_{\hat{n}_1=-\mathrm{i}_0}^{N_1-\mathrm{i}_0}\sum_{\hat{n}_2=-\mathrm{j}_0}^{N_2-\mathrm{j}_0} x(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot(\hat{n}_1+\mathrm{i}_0)\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot(\hat{n}_2+\mathrm{j}_0)\cdot m}$$

$$= e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot\mathrm{i}_0\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot\mathrm{j}_0\cdot m}\cdot\sum_{\hat{n}_1=-\mathrm{i}_0}^{N_1-\mathrm{i}_0}\sum_{\hat{n}_2=-\mathrm{j}_0}^{N_2-\mathrm{j}_0} x(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot\hat{n}_1\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot\hat{n}_2\cdot m}$$

$$= e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot\mathrm{i}_0\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot\mathrm{j}_0\cdot m}\cdot X(\mathrm{k},\mathrm{m})$$

Двумерное ДПФ и аффинные преобразования: вращение

Связь между оригинальным и повернутого относительно начала координат изображения в пространственной области и их ДПФ осуществляется следующим образом

$$x'(\mathrm{i},\mathrm{j}) = x(\mathrm{i}\cdot\cos\theta - j\cdot\sin\theta,\ j\cdot\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$$

$$X'(k,\mathrm{m}) = \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} x'(n_1,n_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot n_1\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot n_2\cdot m}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2} x(n_1\cdot\cos\theta - n_2\cdot\sin\theta, n_2\cdot\cos\theta + n_1\cdot\sin\theta)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot n_1\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot n_2\cdot m}$$

$$= \sum_{\hat{n}_1=0}^{M_1}\sum_{\hat{n}_2=0}^{M_2} x(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot(\hat{n}_1\cdot\cos\theta+\hat{n}_2\cdot\sin\theta)\cdot k}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot(\hat{n}_2\cdot\cos\theta-\hat{n}_1\cdot\sin\theta)\cdot m}$$

$$= \sum_{\hat{n}_1=0}^{M_1}\sum_{\hat{n}_2=0}^{M_2} x(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot(k\cdot\cos\theta-m\cdot\sin\theta)\cdot\hat{n}_1}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot(m\cdot\cos\theta+k\cdot\sin\theta)\cdot\hat{n}_2}$$

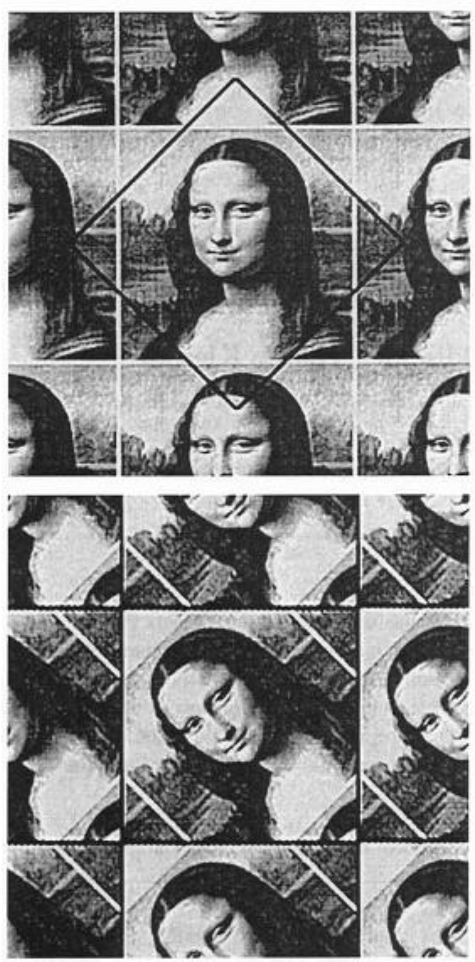
$$= \sum_{\hat{n}_1=0}^{M_1}\sum_{\hat{n}_2=0}^{M_2} x(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_1)\cdot(k')\cdot\hat{n}_1}\cdot e^{-j(2\cdot\pi/N_2)\cdot(m')\cdot\hat{n}_2}$$

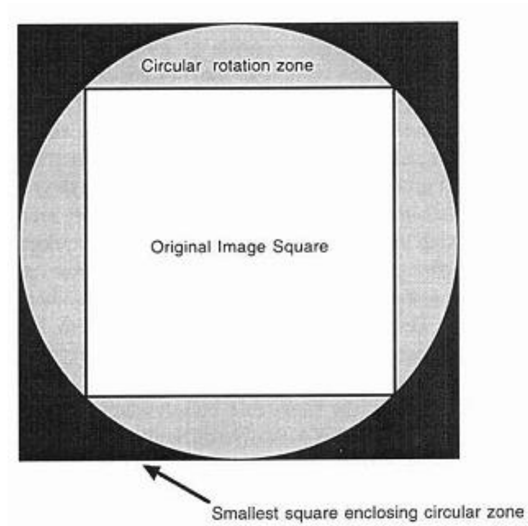
$$= X(k',m') + \Delta(k',m')$$

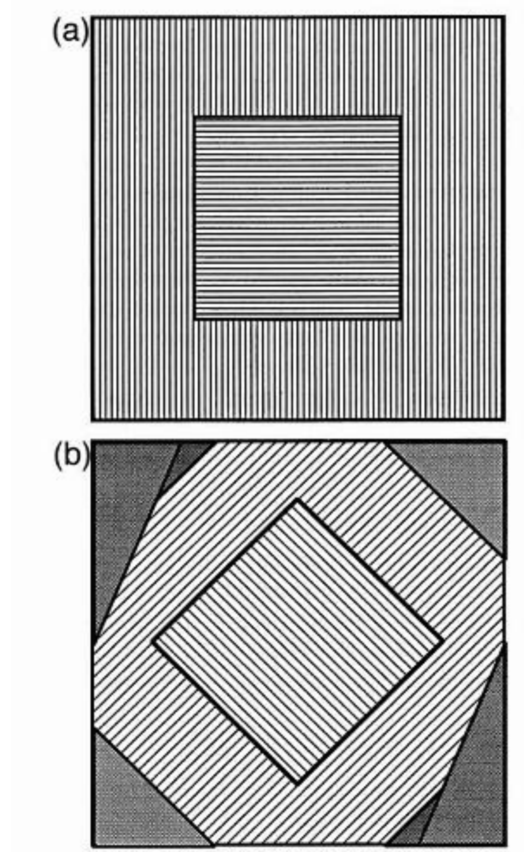
$$M_1 = \lfloor (N_1-1)\cdot\cos\theta - (N_2-1)\cdot\sin\theta \rfloor$$

$$M_2 = \lfloor (N_2-1)\cdot\cos\theta + (N_1-1)\cdot\sin\theta \rfloor$$

Двумерное ДПФ и аффинные преобразования:вращение







См. Larkina, Oldfieldb,Klemma
Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images

Задание

1. Написать свою функцию преобразования Фурье (прямое и обратное) используя «лобовой подход», т.е. по формулам

$$\boxed{X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}} \qquad \boxed{x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn}}$$

2. Написать преобразование Фурье используя алгоритм Radix-2 (по основанию 2, или «Бабочка»)
3. Сравнить быстродействие из функций из первой и второй части, а также с преобразованием из OpenCV
4. ВЫПОЛНИТЬ ОСТАВШУЮСЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ ИСПОЛЬЗУЯ СВОИ ФУНКЦИИ!