Д.П. Ким
Н.Д. Дмитриева

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Рекомендовано УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 220400 «Мехатроника и робототехника»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 519.711
ББК 32.965
К 40

Ким Д.П., Дмитриева Н.Д. **Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 168 с. — ISBN 978-5-9221-0873-7.

Учебное пособие посвящено задачам теории линейных непрерывных и дискретных систем автоматического управления. Задачи по каждой теме предваряются необходимыми теоретическими материалами и разбором примеров. Сборник в основном ориентирован на учебник Д. П. Кима «Теория автоматического управления. Том 1. Линейные системы».

Рекомендовано УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 220400 «Мехатроника и робототехника».

ISBN 978-5-9221-0873-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие посвящено задачам теории линейных непрерывных и дискретных систем автоматического управления. Задачи по каждой теме предваряются необходимыми теоретическими материалами и разбором примеров. Сборник в основном ориентирован на книгу Д. П. Кима «Теория автоматического управления. Том 1. Линейные системы» (издательство «Физматлит», 2003).

Первые пять глав посвящены задачам теории непрерывных систем управления. В главе 1 представлены задачи, связанные математическим описанием систем управления с помощью передаточных и временных функций, частотных характеристик, структурных схем и графов. В главе 2 рассматриваются задачи по описанию различных элементов систем управления. Глава 3 посвящена исследованию «обычной» и робастной устойчивости, а также выделению области устойчивости. В главе 4 рассматриваются задачи по исследованию качества в переходном и установившемся режимах. В главе 5 приведены задачи, связанные с синтезом параметров систем управления по минимуму интегральной квадратической оценки и максимуму степени устойчивости, а также с синтезом алгоритмов управления по методу желаемых передаточных функций (методу полиномиальных уравнений).

Последние четыре главы посвящены задачам теории дискретных систем управления. В главе 6 рассматриваются задачи по вычислению передаточных функций дискретных моделей импульсных систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ-систем) и с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ-систем), а также цифровых систем управления. В главе 7 представлены задачи по исследованию устойчивости дискретных систем управления. Глава 8 посвящена задачам по исследованию качества в переходном и установившемся режимах, а глава 9 — задачам синтеза алгоритмов управления дискретных систем управления методом полиномиальных уравнений.

Главы 1, 3–9 написаны Д. П. Кимом, глава 2 — Н. Д. Дмитриевой.

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Уравнения и передаточные функции

Система или звено с одним выходом y и двумя входами u и v в общем случае описывается уравнением

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)y = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m)u + \\ + (c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l)v \quad (1.1\text{а})$$

или

$$Q(p)y = P_1(p)u + P_2(p)v, \quad (1.1\text{б})$$

где p обозначает оператор дифференцирования ($p^kx = x^{(k)}$),

$$Q(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$P_1(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m,$$
$$P_2(p) = c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l.$$

Дифференциальный оператор $Q(p)$ при выходной переменной называется *собственным оператором*, а дифференциальные операторы $P_1(p)$ и $P_2(p)$ при входных переменных u и v — *операторами воздействия*. Отношение оператора воздействия к собственному оператору называется *передаточной функцией в операторной форме*.

Степень полинома знаменателя передаточной функции называют *порядком*, а разность между ее степенями знаменателя и числителя — *относительным порядком* или *относительной степенью* передаточной функции и соответствующей ей системы.

Нулями и полюсами передаточной функции $W(p) = P(p)/Q(p)$ называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т. е. корни уравнений $P(p) = 0$ и $Q(p) = 0$, где p рассматривается как переменная, а не как оператор.

Система (1.1) определяется двумя передаточными функциями: передаточной функцией

$$W_u(p) = \frac{P_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

относительно входа u и передаточной функцией

$$W_v(p) = \frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

относительно входа v. Порядок этих передаточных функций равен n, а относительный порядок — $(n-m)$ для передаточной функции $W_u(p)$ и $(n-l)$ для передаточной функции $W_v(p)$.

С помощью передаточной функции уравнение рассматриваемой системы управления можно записать в виде

$$y = W_u(p)u + W_v(p)v = \\ = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}u + \frac{c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}v.$$

Имеющее наименьший порядок отношение изображений Лапласа выходной и входной переменных, вычисленных при нулевых начальных условиях, называется *передаточной функцией в изображениях Лапласа*. В соответствии с определением передаточная функция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюса, так как в этом случае ее порядок может быть понижен путем сокращения числителя и знаменателя на общий множитель.

Передаточная функция системы управления в изображениях Лапласа $W(s)$ может быть определена по ее передаточной функции в операторной форме $W(p)$ следующим образом:

$$W(s) = W(p)|_{p=s}.$$

Если передаточная функция $W(p)$ содержит одинаковые нули и полюса, то элементарные множители, соответствующие этим корням в числителе и знаменателе, после подстановки $p = s$ должны быть сокращены.

Пример 1.1. Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

а) $\dot{y} + y = u$;

б) $\ddot{y} - y = \dot{u} - u$.

Решение. В символической форме эти уравнения записываются в виде

а) $(p+1)y = u$;

б) $(p^2 - 1)y = (p-1)u$,

а их передаточные функции в операторной форме соответственно равны

$$W_1(p) = \frac{1}{p+1}, \qquad W_2(p) = \frac{p-1}{p^2-1}.$$

Передаточные функции в изображениях Лапласа имеют вид

$$W_1(s) = W_1(p)|_{p=s} = \frac{1}{s+1}, \qquad W_2(s) = W_2(p)|_{p=s} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}.$$

Как видим, передаточные функции в изображениях Лапласа рассматриваемых звеньев совпадают, хотя они описываются разными дифференциальными уравнениями и общие решения однородных уравнений, описывающие свободные движения систем, отличаются между собой.

1.1. Определить передаточные функции в операторной форме систем управления, которые описываются следующими уравнениями (y — выход, u — вход):

а) $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 7\ddot{u} + 5\dot{u} + 4u$; б) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$;

в) $\dddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 5\dot{u} + u$; г) $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 6\dot{y} = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$;

д) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 3\dot{y} + y = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$; е) $\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$;

ж) $\dddot{y} + 8\ddot{y} + 15\dot{y} = \ddot{u} + 5\dot{u} + 4u$; з) $\dddot{y} + 8\ddot{y} + 15\dot{y} + y = \ddot{u} + 5\dot{u} + 4u$;

и) $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$; к) $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$.

1.2. Определить передаточные функции в изображениях Лапласа систем управления, которые описываются уравнениями, приведенными в задании 1.1.

1.3. Записать дифференциальные уравнения систем управления с одним выходом y и двумя входами u и v, передаточные функции которых имеют следующий вид:

а) $W_u(p) = \dfrac{5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}$, $W_v(p) = \dfrac{p+2}{p^3+2p^2+4p+3}$;

б) $W_u(p) = \dfrac{3p+2}{p^3+4p^2+3p}$, $W_v(p) = \dfrac{3}{p^3+4p^2+3p}$;

в) $W_u(p) = \dfrac{5p+2}{2p^3+4p+3}$, $W_v(p) = \dfrac{p+3}{2p^3+4p+3}$;

г) $W_u(p) = \dfrac{p+2}{3p^3+5p^2+p}$, $W_v(p) = \dfrac{5}{3p^3+5p^2+p}$;

д) $W_u(p) = \dfrac{p+3}{6p^3+4p^2+3p+1}$, $W_v(p) = \dfrac{2p+1}{6p^3+4p^2+3p+1}$;

е) $W_u(p) = \dfrac{4p+1}{p^3+3p^2+2p}$, $W_v(p) = \dfrac{4}{p^3+3p^2+2p}$;

ж) $W_u(p) = \dfrac{4}{p^3+8p^2+15p}$, $W_v(p) = \dfrac{p+4}{p^3+8p^2+15p}$;

з) $W_u(p) = \dfrac{p+4}{p^3+8p^2+15p+1}$, $W_v(p) = \dfrac{5}{p^3+8p^2+15p+1}$;

и) $W_u(p) = \dfrac{4p+3}{p^3+5p^2+4p}$, $W_v(p) = \dfrac{p+1}{p^3+5p^2+4p}$;

к) $W_u(p) = \dfrac{p+3}{p^3+5p^2+4p+1}$, $W_v(p) = \dfrac{4}{p^3+5p^2+4p+1}$.

1.2. Временные функции

Переходной функцией системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию обозначают $h(t)$. График переходной функции — кривую зависимости $h(t)$ от времени t — называют *переходной* или *разгонной характеристикой.*

Импульсной переходной или *весовой функцией* (*функцией веса*) называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. Весовую функцию обозначают $w(t)$. График импульсной переходной функции называют *импульсной переходной характеристикой*. Переходную и импульсную переходную функции называют *временными функциями*, а их графики — *временными характеристиками.*

Передаточная функция в изображениях Лапласа есть преобразование Лапласа от весовой функции:

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-st}dt.$$

Весовая функция равна производной от переходной функции:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Если изображение временной функции $x(t)$ имеет вид $X(s) = B(s)/A(s)$, где $A(s)$ и $B(s)$ — полиномы, и степень n полинома $A(s)$ больше степени m полинома $B(s)$, то

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}\, e^{s_i t}, \quad A'(s_i) = \left.\frac{dA(s)}{ds}\right|_{s=s_i}, \tag{1.2}$$

если нули s_i полинома $A(s)$ — простые. Если какой-либо полюс s_k имеет кратность n_k, то ему соответствует слагаемое

$$\frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{s\to s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} \left(X(s)(s-s_k)^{n_k} e^{st}\right). \tag{1.3}$$

Пример 1.2. Определить переходную и весовую функции колебательного звена, т. е. звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\varsigma T s + 1} \quad (0 < \varsigma < 1).$$

Решение. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$(T^2 p^2 + 2\varsigma T p + 1) y = k u.$$

Для определения переходной функции нужно решить это уравнение при входном воздействии $u = 1(t)$ и нулевых начальных условиях:

$$(T^2 p^2 + 2\varsigma T p + 1) y = k \cdot 1(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$T^2 \lambda^2 + 2\varsigma T \lambda + 1 = 0,$$

и его корнями являются $\lambda_{1,2} = -\varsigma/T \pm \sqrt{(\varsigma/T)^2 - 1/T^2}$, или

$$\lambda_{1,2} = -\varsigma/T \pm j\sqrt{1-\varsigma^2}\,/T.$$

Положив $\alpha = \varsigma/T$ и $\beta = \sqrt{1-\varsigma^2}\,/T$, общее решение однородного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y_c = (C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t) e^{-\alpha t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения $y_в = k$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_c + y_в = (C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t) e^{-\alpha t} + k.$$

Производная от этого решения

$$\dot{y} = [\beta(C_1 \cos\beta t - C_2 \sin\beta t) - \alpha(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t)] e^{-\alpha t}.$$

Начальные условия принимают вид

$$y(0) = C_2 + k = 0,$$
$$\dot{y}(0) = \beta C_1 - \alpha C_2 = 0.$$

Отсюда $C_2 = -k$, $C_1 = -\frac{\alpha}{\beta} k$. Поэтому для переходной и весовой функций имеем

$$h(t) = k\left[1 - \frac{1}{\beta}(\alpha \sin\beta t + \beta \cos\beta t) e^{-\alpha t}\right],$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t}[\alpha \sin(\beta t + \varphi_0) - \beta \cos(\beta t + \varphi_0)]$$

или, после элементарных преобразований,

$$h(t) = k\left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)\right],$$

$$w(t) = \frac{k(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\beta/\alpha)$.

Пример 1.3. Определить переходную и весовую функции звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{2(s+1)}{(0{,}5s+1)s}.$$

Решение. Передаточная функция $W(s)$ является изображением Лапласа весовой функции $w(t)$. Полюса передаточной функции $s_1 = 0$, $s_2 = -2$ являются простыми, и весовую функцию $w(t)$ можно определить по формуле (1.2). В данном случае $B(s) = 2(s+1)$, $A'(s) = s+1$ и для весовой функции в соответствии с формулой (1.2) получаем

$$w(t) = \frac{2}{1}e^0 + \frac{-2}{-1}e^{-2t} = 2(1+e^{-2t}).$$

Так как $L1(t)/s$, то для изображения переходной функции имеем

$$H(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{2(s+1)}{s^2(0{,}5s+1)}.$$

В этом случае полюс $s_1 = 0$ имеет кратность $n_1 = 2$, а полюс $s_2 = -2$ — простой. Поэтому слагаемое, соответствующее полюсу $s_1 = 0$, найдем по формуле (1.3), а слагаемое, соответствующее полюсу $s_2 = -2$, — по формуле (1.2). Согласно формуле (1.3) имеем

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(H(s)s^2e^{st}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{2(s+1)}{0{,}5s+1}e^{st}\right) =$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{2(0{,}5s+1)-2(s+1)0{,}5}{(0{,}5s+1)^2}e^{st} + \frac{2(s+1)}{0{,}5s+1}te^{st}\right) = 1+2t.$$

Так как $B(s) = 2(s+1)$, $A'(s) = 1{,}5s^2+2s$, для слагаемого, соответствующего полюсу $s_2 = -2$, имеем (см. (1.2))

$$\frac{-2}{2}e^{-2t} = -e^{-2t}.$$

Таким образом, переходная функция имеет вид

$$h(t) = 1 + 2t - e^{-2t}.$$

1.4. Определить весовые функции для звеньев со следующими передаточными функциями:

а) $W(s) = \dfrac{2(s+1)}{(s+2)^2(s+3)}$; б) $W(s) = \dfrac{3(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}$;

в) $W(s) = \dfrac{4(s+2)}{(s+3)^2(s+1)}$; г) $W(s) = \dfrac{5(s+4)}{(s+2)^2(s+1)}$;

д) $W(s) = \dfrac{6(s+2)}{(s+4)^2(s+1)}$; е) $W(s) = \dfrac{7(s+1)}{(s+2)^2(s+4)}$;

ж) $W(s) = \dfrac{8(s+5)}{(s+3)^2(s+4)}$; з) $W(s) = \dfrac{9(s+3)}{(s+5)^2(s+4)}$;

и) $W(s) = \dfrac{10(s+4)}{(s+3)^2(s+5)}$; к) $W(s) = \dfrac{8(s+2)}{(s+1)^2(s+5)}$.

1.5. Определить переходные функции для звеньев с передаточными функциями, приведенными в задании 1.4.

1.3. Частотные функции и характеристики

Функцию $W(j\omega)$, которая получается из передаточной функции в изображениях Лапласа $W(s)$ при подстановке $s = j\omega$, называют *частотной передаточной функцией*. Она является комплекснозначной функцией от действительной переменной ω, называемой *частотой*. Частотную передаточную функцию можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega).$$

Если $|\arg W(j\omega)| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$.

На комплексной плоскости частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяет вектор $\overrightarrow{OC}$ (рис. 1.1), длина которого равна $A(\omega)$, а аргумент — углу $\varphi(\omega)$, образованному этим вектором с положительной действительной полуосью. Кривую, описываемую концом вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ или от $-\infty$ до ∞, называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (*АФЧХ*).

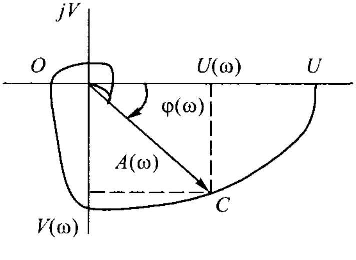


Рис. 1.1

АФЧХ, получаемую при изменении частоты от $-\infty$ до ∞, называют также *диаграммой Найквиста*. Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называют *амплитудной частотной функцией*, ее график — *амплитудной частотной характеристикой*. Аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ *называют фазовой частотной функцией*, а его график (при изменении ω от 0 до ∞) — *фазовой частотной характеристикой*.

Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ называют также *амплитудно-фазовой частотной функцией*. Ее действительную $U(\omega) = ReW(j\omega)$ и мнимую $V(\omega) = ImW(j\omega)$ части называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной функцией*, а их графики — кривые зависимостей $U = U(\omega)$ и $V = V(\omega)$ — *вещественной и мнимой частотной характеристикой* соответственно.

Кроме перечисленных частотных характеристик имеются *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ): *логарифмические амплитудные частотные характеристики* (ЛАЧХ) и *логарифмические фазовые частотные характеристики* (ЛФЧХ).

Функцию $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg |W(j\omega)|$ называют *логарифмической амплитудной частотной функцией*, а график зависимости функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $\lg\omega$ — *логарифмической амплитудной частотной характеристикой* (ЛАЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение частоты в логарифмическом масштабе и при этом на отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, записывают значение ω; по оси ординат откладывают и записывают значение $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg\omega$. При ее построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, записывают значение ω.

В ЛЧХ единицей функции $L(\omega)$ является *децибел*, а единицей $\lg\omega$ — *декада*. *Декадой* называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что частота изменилась на одну декаду.

Определенные трудности представляет вычисление фазовой частотной функции. Если эта функция по модулю не превышает $\pi/2$, то она определяется по формуле $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(V(\omega)/U(\omega))$. В общем случае нужно разложить числитель и знаменатель передаточной функции на элементарные множители и определять фазовую частотную функцию по правилу вычисления аргумента произведения и частного комплексных чисел.

Правило вычисления модуля и аргумента. При вычислении амплитудной и фазовой частотной функций полезно следующее правило вычисления модуля и аргумента произведения и частного комплексных чисел (функций).

1) Модуль произведения $Z = z_1 z_2 \ldots z_n$ комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей:

$$|Z| = |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n|,$$

а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\arg Z = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n.$$

2) Модуль частного комплексных чисел (функций) $Z = Z_1/Z_2$ равен отношению модулей

$$|Z| = |Z_1|/|Z_2|,$$

а аргумент — разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\arg Z = \arg Z_1 - \arg Z_2.$$

Элементарные звенья и их характеристики. Так как произвольный полином можно разложить на простые множители, то передаточную функцию системы (звена)

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

всегда можно представить в виде произведения простых множителей и дробей вида

$$k,\quad s,\quad \frac{1}{s},\quad Ts \pm 1,\quad \frac{1}{Ts \pm 1},\quad T^2 s^2 \pm 2\varsigma Ts + 1,\quad \frac{1}{T^2 s^2 \pm 2\varsigma Ts + 1}. \qquad (1.4)$$

Здесь k называется передаточным коэффициентом, T — постоянной времени и ς $(0 < \varsigma < 1)$ — коэффициентом демпфирования.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, называют *элементарными звеньями*. Их также называют типовыми.

Системы и звенья и их передаточные функции делятся на минимально-фазовые и неминимально-фазовые. Передаточная функция $W(s) = P(s)/Q(s)$ называется *минимально-фазовой*, если все ее нули (корни уравнения $P(s) = 0$) и полюса (корни уравнения $Q(s) = 0$) располагаются в левой полуплоскости, и *неминимально-фазовой*, если хотя бы один нуль или полюс располагается в правой полуплоскости.

Система и звено называются *минимально-фазовыми*, если их передаточные функции являются минимально-фазовыми, и *неминимально-фазовыми*, если их передаточные функции являются неминимально-фазовыми.

Передаточные функции системы, не являющиеся ни минимально-фазовыми и ни неминимально-фазовыми, иногда называют *нейтральными* или *маргинальными*. Иначе говоря, передаточная функция называется *маргинальной*, если она имеет нуль или полюс на мнимой оси, но не имеет их в правой полуплоскости.

Тип звена определяется видом его передаточной функции. При этом если передаточные функции звеньев отличаются только на постоянный множитель, то их относят к одному и тому же типу. Поэтому при определении типа элементарных звеньев будем исходить из передаточных функций, получаемых из (1.4) умножением на константу k (кроме первой).

Звено с передаточной функцией $W(s) = k$ называется *пропорциональным звеном*, звено с передаточной функцией $W(s) = ks$ — *дифференцирующим звеном*, звено с передаточной функцией $W(s) = k/s$ — *интегрирующим звеном*, звено с передаточной функцией $W(s) = k(Ts + 1)$ — *форсирующим звеном* (*первого порядка*), звено с передаточной функцией $W(s) = k/(Ts + 1)$ — *апериодическим звеном*, звено с передаточной функцией — $W(s) = k(T^2s^2 + 2\varsigma Ts + 1)$ $(0 < \varsigma < 1)$ — *форсирующим звеном второго порядка*, звено с передаточной функцией $W(s) = \dfrac{k}{T^2s^2 + 2\varsigma Ts + 1}$ $(0 < \varsigma < 1)$ — *колебательным звеном*.

Фазовые частотные функции минимально-фазовых и нейтральных звеньев с передаточными функциями, представляющими элементарный множитель первого порядка, по модулю не превышают $\pi/2$ и определяются по формуле $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(V(\omega)/U(\omega))$. В случае форсирующего звена второго порядка фазовая функция определяется по формуле $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(V(\omega)/U(\omega))$ при частотах $\omega \leqslant 1/T$, а при $\omega \geqslant 1/T$ — по формуле $\varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg}(V(\omega)/U(\omega))$.

1.6. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции и переходную функцию пропорционального звена.

1.7. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции дифференцирующего звена.

1.8. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции, переходную и весовые функции интегрирующего звена.

1.9. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции форсирующего звена.

1.10. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции, переходную и весовую функции апериодического звена.

1.11. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции форсирующего звена второго порядка.

1.12. Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции колебательного звена.

1.13. Определить переходную и весовую функции апериодического звена.

Физический смысл частотных характеристик. При гармоническом входном воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная переменная также изменяется по гармоническому закону с той же частотой, но с другими амплитудой и фазой; амплитуда равна амплитуде входного сигнала, умноженной на модуль частотной передаточной функции, а сдвиг фазы — ее аргументу. Поэтому если система с передаточной функцией $W(s)$ устойчива, то при входном воздействии

$$u = u_m \cos(\omega t + \alpha)$$

после окончания переходного процесса выходной сигнал

$$y = |W(j\omega)|\, u_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)).$$

Здесь u_m — постоянная амплитуда входного сигнала, α — начальный сдвиг фазы, $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция рассматриваемой системы, $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Пример 1.4. На вход системы подается сигнал $u = 2\sin 3t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{s+4}{(s+1)(0{,}04s^2 + 0{,}2s + 1)}.$$

Решение. В данном случае частотная передаточная функция имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{(j\omega + 1)(-0{,}04\omega^2 + 0{,}2j\omega + 1)}$$

и $\omega = 3$, $\omega < 1/T = 1/0{,}2 = 5$. Поэтому

$$A(3) = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{9+1}\,\sqrt{(1-0{,}36)^2 + 0{,}36}} \cong 1{,}8,$$

$$\varphi(3) = \mathrm{arctg}(3/4) - \mathrm{arctg}\, 3 - \mathrm{arctg}[0{,}6/(1-0{,}36)] \cong -1{,}36,$$

и соответственно $u = 3{,}6\sin(3t - 1{,}36)$.

1.14. На вход системы подается сигнал $u = 2\sin 0{,}5t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях:

а) $W(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(0{,}04s^2+0{,}2s+1)}$;

б) $W(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+1)(0{,}09s^2+0{,}3s+1)}$;

в) $W(s) = \dfrac{3(s+1)}{(s+3)(0{,}16s^2+0{,}4s+1)}$;

г) $W(s) = \dfrac{4(s+3)}{(s+1)(0{,}25s^2+0{,}5s+1)}$;

д) $W(s) = \dfrac{5(s+3)}{(s+1)(0{,}36s^2+0{,}6s+1)}$;

е) $W(s) = \dfrac{6(s+4)}{(s+1)(0{,}49s^2+0{,}7s+1)}$;

ж) $W(s) = \dfrac{7(s+4)}{(s+2)(0{,}64s^2+0{,}8s+1)}$;

з) $W(s) = \dfrac{8(s+5)}{(s+3)(0{,}25s^2+0{,}7s+1)}$;

и) $W(s) = \dfrac{9(s+5)}{(s+2)(0{,}16s^2+0{,}56s+1)}$;

к) $W(s) = \dfrac{10(s+5)}{(s+4)(0{,}36s^2+0{,}84s+1)}$.

1.15. На вход системы подается сигнал $u = 0{,}5\sin 6t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при передаточных функциях, приведенных в задании 1.14.

Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики. Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми и их легко построить. Построение ЛАЧХ других элементарных звеньев требует трудоемких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных асимптотических ЛАЧХ.

При построении асимптотической ЛАЧХ апериодического звена в выражении $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}$ при $\omega \leqslant 1/T$ под корнем пренебрегают слагаемым $(T\omega)^2$, меньшим единицы, а при $\omega > 1/T$ — единицей. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20\lg k & \text{при } \omega \leqslant 1/T, \\ 20\lg k - 20\lg T\omega & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}$$

при $\omega \leqslant 1/T$ под корнем оставляют только единицу, а при $\omega > 1/T$ — только наибольшее слагаемое $(T\omega)^4$. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20\lg k & \text{при } \omega \leqslant 1/T, \\ 20\lg k - 40\lg(T\omega) & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

Аналогично поступают при построении асимптотических ЛАЧХ форсирующих звеньев. Частоты, на которых асимптотические ЛАЧХ претерпевают излом, называются *сопрягающими частотами*.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией $W(s)$ нужно ее числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и представить $W(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев

$$W(s) = \prod_i W_i(s) \tag{1.5}$$

или в виде

$$W(s) = \frac{k}{s^\nu} W^0(s), \tag{1.6}$$

где $W^0(s)$ представляет собой отношение произведений элементарных множителей 1-го и 2-го порядка с единичным передаточным коэффициентом, т. е. множителей вида $Ts \pm 1$ и $as^2 \pm bs + 1$ $(b^2 - 4a < 0)$. Из (1.5) имеем:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\sum_i \lg|W_i(j\omega)|, \tag{1.7}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \sum_i \arg W_i(j\omega). \tag{1.8}$$

Из (1.7) следует, что для построения ЛАЧХ произвольного звена достаточно построить ЛАЧХ элементарных звеньев, на которые оно разлагается, а затем их геометрически сложить. Однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно использовать несколько иное, более простое правило. Проиллюстрируем это сначала на частном примере.

Пример 1.5. Построить асимптотическую ЛАЧХ для звена с передаточной функцией $W(s) = \dfrac{100s + 100}{(s^2 + 0{,}1s)(0{,}1s^2 + s + 10)}$

Решение. Преобразуем передаточную функцию к виду

$$W(s) = \frac{100(s+1)}{s(10s+1)(0{,}01s^2+0{,}1s+1)}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная функция

$$L(\omega) = 40 + 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{(10\omega)^2+1} - \\ - 20\lg\sqrt{(1-0{,}01\omega^2)^2+(0{,}1\omega)^2}.$$

Вычислим сопрягающие частоты и пронумеруем их в порядке возрастания:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \omega_2 = 1; \quad \omega_3 = \frac{1}{0{,}1} = 10.$$

Здесь ω_1, ω_2 и ω_3 — сопрягающие частоты апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно.

Напомним, что при построении асимптотических ЛАЧХ при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают), при частотах, больших сопрягающей частоты, — член с наивысшей степенью ω. Поэтому в рассматриваемом примере при $\omega < \omega_1$ имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega.$$

Это уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $\omega = 1$ и $L = 40$ с наклоном -20 дб/дек. Прямая имеет наклон -20 дб/дек (20 дб/дек) — это означает, что при увеличении частоты на декаду (т. е. в 10 раз) $L(\omega)$ уменьшается (увеличивается) на 20 дБ (рис. 1.2, *а*). Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте (рис. 1.2, *б*).

При $\omega_1 \leqslant \omega < \omega_2$ аналогично имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega - 20\lg(10\omega) = 20 - 40\lg\omega.$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на -20 дб/дек и обусловливается апериодическим звеном, т. е. множителем первого порядка в знаменателе рассматриваемой передаточной функции. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты под наклоном -40 дб/дек.

При $\omega_2 \leqslant \omega < \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 40\lg\omega + 20\lg\omega = 20 - 20\lg\omega.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон по отношению ко второй асимптоте изменяется на 20 дб/дек и обусловливается форсирующим звеном, т. е. множителем первого порядка в числителе. Третью асимп-

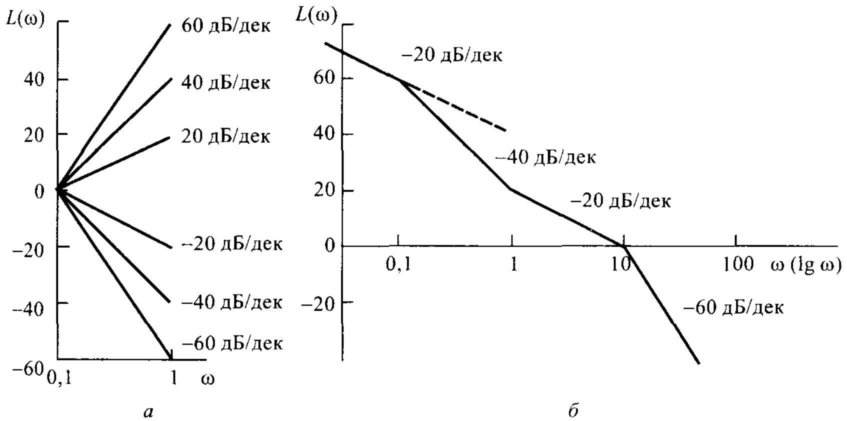


Рис. 1.2

тоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты под наклоном −20 дб/дек.

При $\omega \geqslant \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 20\lg\omega - 20\lg(0{,}1\omega)^2 = 60 - 60\lg\omega.$$

Это уравнение последней, четвертой, асимптоты. Ее наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на −40 дб/дек и обусловливается множителем второго порядка в знаменателе.

Правило построения асимптотических ЛАЧХ

1) Пользуясь представлением (1.6), вычислить $20\lg k$ и сопрягающие частоты $\omega_i = 1/T_i$, которые следует пронумеровать в порядке возрастания: $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$.

2) На оси абсцисс отметить сопрягающие частоты, а на координатной плоскости — точку $(1, 20\lg k)$. Построить первую асимптоту — прямую под наклоном $-\nu 20$ дБ/дек, проходящую через отмеченную точку на координатной плоскости. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте ω_1.

3) Построить вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты ω_2. Его наклон изменяется на ±20 дБ/дек или ±40 дБ/дек в зависимости от того, обусловливается ли ω_1 элементарным множителем первого или второго прядка соответственно. Принимается положительный знак, если указанный множитель находится в числителе, и отрицательный знак, если этот множитель находится в знаменателе.

4) Построить остальные асимптоты, которые строятся аналогично второй асимптоте: i-я асимптота начинается с конца предыдущей $(i - 1)$-й асимптоты и проводится до сопрягающей частоты ω_i. Ее наклон определяется сопрягающей частотой ω_{i-1}.

Последняя асимптота представляет собой прямую, которая начинается в конце асимптоты, соответствующей последней сопрягающей частоте, и уходит в бесконечность.

Пример 1.6. Построить асимптотическую ЛАЧХ звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{10s + 10}{s^{\nu}(s + 0{,}1)(0{,}1s^2 + s + 10)}, \quad \nu = 0, \ -1.$$

Решение. Преобразуем передаточную функцию к виду

$$W(s) = \frac{10(s + 1)}{s^{\nu}(10s + 1)(0{,}01s^2 + 0{,}1s + 1)}.$$

1) $\nu = 0$. Вычислим $20 \lg k$ и сопрягающие частоты:

$$20 \lg k = 20 \lg 10 = 20; \quad \omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \omega_2 = 1; \quad \omega_3 = \frac{1}{0{,}1} = 10.$$

Проводим через точку с координатами (1, 20) первую асимптоту под наклоном 0 дБ/дек (т. е. параллельно оси абсцисс) до первой сопрягающей частоты $\omega_1 = 0{,}1$ (рис. 1.3, *а*).

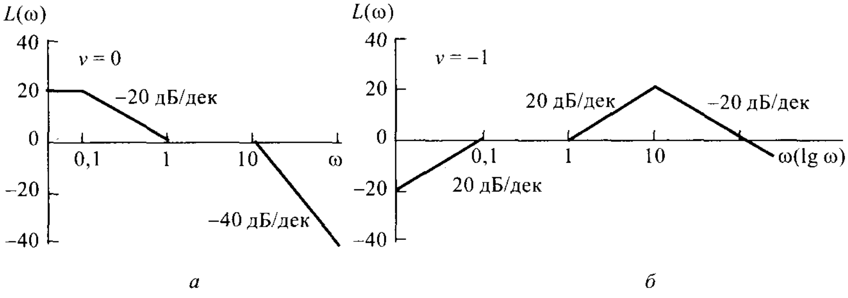


Рис. 1.3

Так как первая сопрягающая частота ω_1 обусловлена множителем первого порядка $(10s + 1)$, расположенным в знаменателе, наклон второй асимптоты изменяется на -20 дБ/дек. Поэтому вторую асимптоту проводим от конца первой асимптоты до сопрягающей частоты $\omega_2 = 1$ под наклоном -20 дБ/дек.

Сопрягающая частота ω_2 обусловлена элементарным множителем $(s + 1)$, расположенным в числителе. Поэтому наклон третьей асимптоты отличается от наклона второй на 20 дБ/дек и составляет 0 дБ/дек. Третью асимптоту проводим от конца второй асимптоты до сопрягающей частоты $\omega_3 = 10$.

Сопрягающая частота ω_3 обусловлена элементарным множителем $(0{,}01s^2 + 0{,}1s + 1)$, расположенным в знаменателе. Поэтому наклон четвертой асимптоты отличается от наклона третьей асимптоты на -40 дБ/дек. Последнюю асимптоту проводим от конца третьей асимптоты до бесконечности.

2) $\nu = -1$. Значения $20\lg k$ и сопрягающих частот те же, что и в предыдущем случае. Первую асимптоту проводим через точку с координатами (1, 20) с наклоном $-\nu 20$ дБ/дек $= 20$ дБ/дек до первой сопрягающей частоты (рис. 1.3, *б*). Все последующие асимптоты строятся так же, как и в предыдущем случае.

1.16. Построить асимптотические ЛАЧХ звеньев со следующими передаточными функциями:

а) $W(s) = \dfrac{250s + 1000}{(s+1)(0{,}1s^2 + s + 10)}$; б) $W(s) = \dfrac{10s + 10}{s(0{,}02s^2 + 0{,}3s + 1)}$;

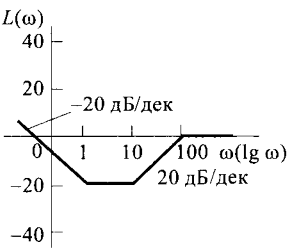
в) $W(s) = \dfrac{500s + 50}{(s+0{,}5)(s^2 + s + 1)}$; г) $W(s) = \dfrac{6s + 30}{s(0{,}01s^2 + 0{,}4s + 3)}$;

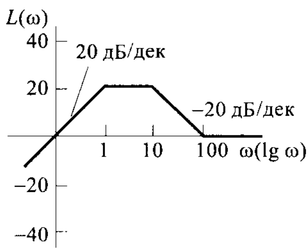
д) $W(s) = \dfrac{100s + 300}{(s+1)(0{,}03s^2 + 0{,}3s + 3)}$; е) $W(s) = \dfrac{10s + 1}{s(0{,}1s^2 + 1{,}1s + 1)}$;

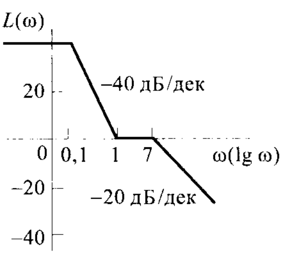
ж) $W(s) = \dfrac{50s + 5}{(s+0{,}5)(0{,}04s^2 + 0{,}2s + 1)}$; з) $W(s) = \dfrac{10s + 100}{s(0{,}0002s^2 + 0{,}03s + 1)}$;

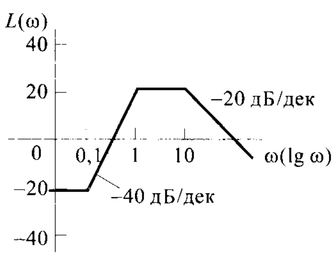
и) $W(s) = \dfrac{5000s + 2500}{(s+5)(0{,}02s^2 + s + 50)}$; к) $W(s) = \dfrac{2s + 1}{s(0{,}1s^2 + 1{,}1s + 1)}$.

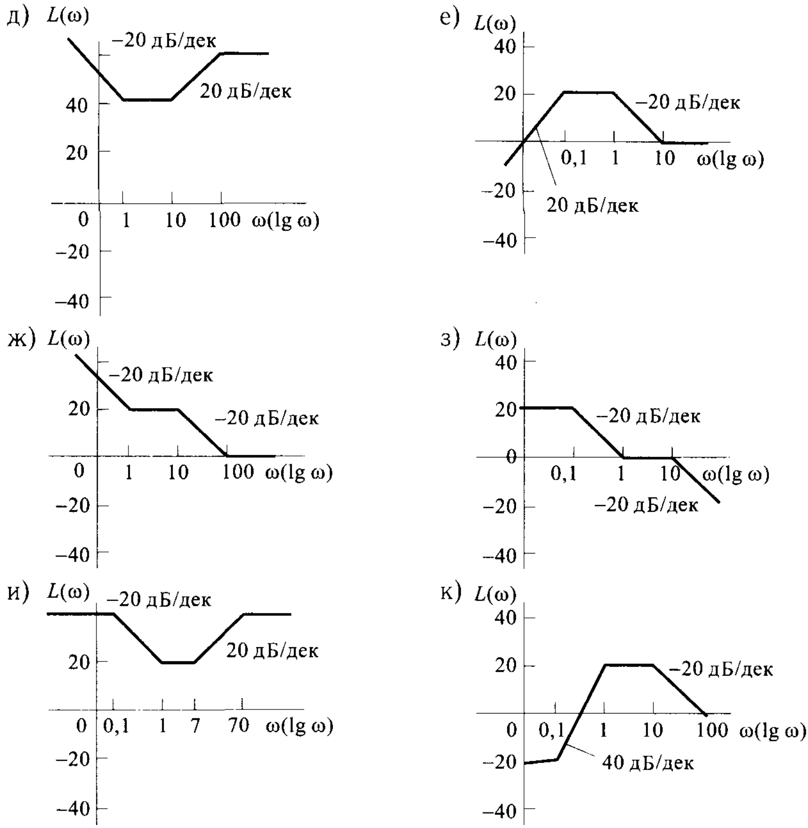
1.17. Записать передаточные функции минимально-фазовых и нейтральных звеньев, если их асимптотические ЛАЧХ имеют следующий вид:

а)


б)


в)


г)




1.4. Структурные схемы

Структурной схемой системы управления называют графическое представление ее математической модели в виде соединений звеньев, изображаемых в виде прямоугольников или круга (для сумматора), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника указывается условное обозначение оператора изображаемого им звена, а сам оператор в виде передаточной функции или дифференциального уравнения задается вне структурной схемы.

Преобразование структурных схем.

Последовательное соединение. Так называется соединение, при котором выход предыдущего звена является входом последующего (рис. 1.4, *а*). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заме-

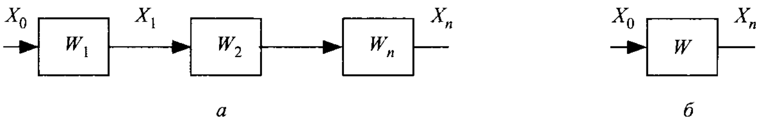


Рис. 1.4

нить одним звеном с передаточной функцией $W(s) = W_1(s)W_2(s)\ldots$ $\ldots W_n(s)$ (рис. 1.4, *б*).

Параллельное соединение. Так называется соединение, при котором на вход всех звеньев подается одно и тоже воздействие, а их выходные переменные складываются (рис. 1.5, *а*). При параллельном

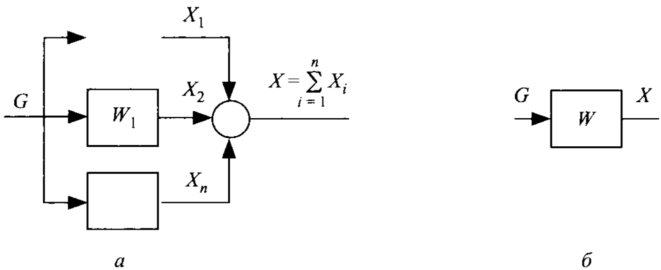


Рис. 1.5

соединении звеньев передаточные функции складываются и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)$ (рис. 1.5, *б*). Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т. е. вычитается.

Обратное соединение или *звено, охваченное обратной связью.* Так называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается с входом первого звена (рис. 1.6, *а*). Если сигнал обратной

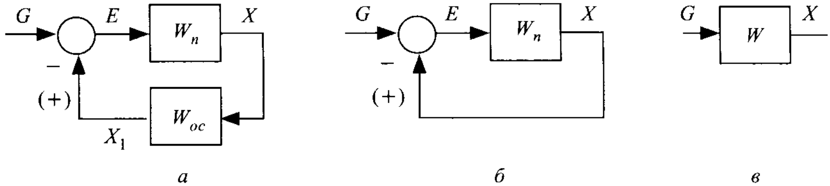


Рис. 1.6

связи (выход звена обратной связи) вычитается (т. е. складывается с отрицательным знаком), то обратная связь называется *отрицательной*; в противном случае — *положительной*. Когда передаточная функция звена обратной связи равна единице ($W_{\text{ос}}(s) = 1$), обратное соединение изображается так, как показано на рис. 1.6, *б*.

При размыкании обратной связи перед сумматором получаем последовательное соединение, передаточная функция которого равна $W_{\text{р}}(s) = W_{\text{п}}(s)W_{\text{ос}}(s)$. Эта передаточная функция называется *передаточной функцией разомкнутой цепи*.

Передаточную функцию $W_{\text{к}}(s) = W_{\text{п}}(s)W_{\text{ос}}(s)W_{\Sigma}(s)$, в которой учитывается передаточная функция сумматора по входу обратной связи, будем называть *передаточной функцией контура*. Здесь $W_{\Sigma}(s)$ — передаточная функция сумматора по входу обратной связи, она равна -1 (минус единице) при отрицательной обратной связи (перед соответствующим входом стоит знак минус) и 1 (плюс единице) при положительной обратной связи.

Передаточная функция при обратном соединении равна $W(s) = W_{\text{п}}(s)/(1 - W_{\text{к}}(s))$ и при преобразовании обратное соединение заменяется одним звеном с указанной передаточной функцией (рис. 1.6, *в*).

Перенос сумматора. При переносе сумматора по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 1.7, *а*).

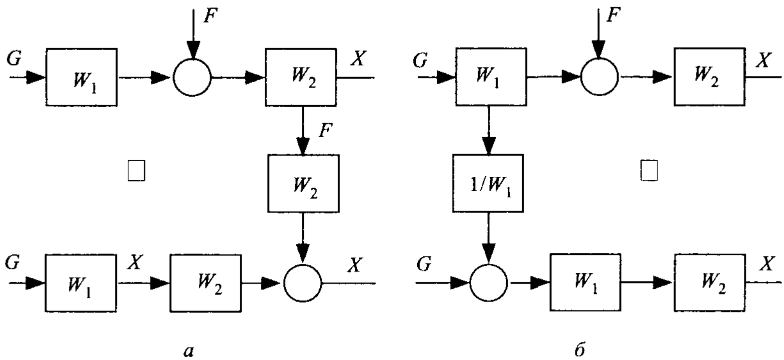


Рис. 1.7

При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 1.7, *б*).

При переносе сумматора участок цепи, через который он переносится, становится неэквивалентным. Поэтому при преобразовании структурных схем нельзя переносить сумматор через точку съема сигнала.

Перенос узла. При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 1.8, *а*).

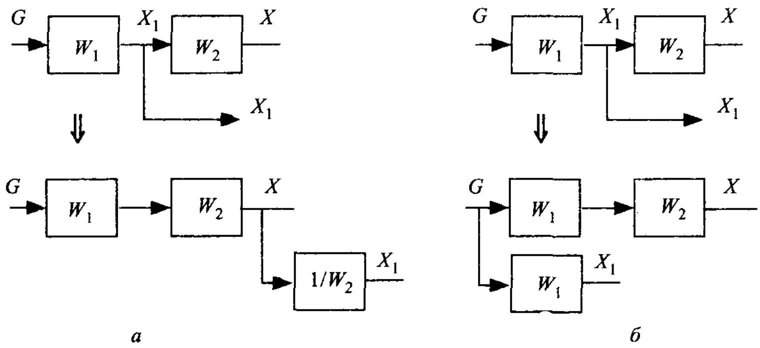


Рис. 1.8

При переносе узла против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 1.8, *б*).

Перестановка сумматоров. Сумматоры можно переставлять местами и объединять. Перестановка двух сумматоров соответствует переносу одного сумматора через другой и подчиняется правилу переноса сумматора через звено.

Сумматор 1 (рис. 1.9) переносится через сумматор 2 по направлению распространения сигнала, а сумматор 2 через сумматор 1 против направления распространения сигнала.

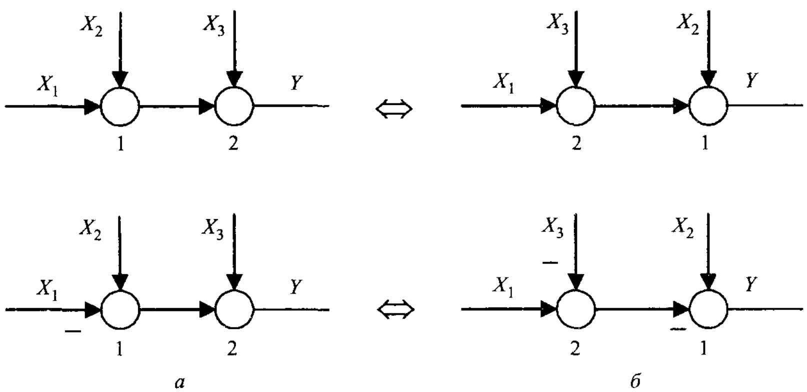


Рис. 1.9

Но так как передаточная функция сумматора по каждому входу равна 1 или -1, то и передаточная функция звена, которое добавляется при переносе сумматора, независимо от направления переноса равна 1 или -1. Поэтому если сумматор переносится через другой сумматор вдоль входа со знаком плюс, добавляется звено с передаточной функцией 1, т. е. в действительности ничего не добавляется (рис. 1.9, *а*); если сумматор переносится вдоль входа со знаком минус, то добавляется звено с передаточной функцией -1, т. е. знак по входу, куда должно быть добавлено звено, меняется на обратный (рис. 1.9, *б*).

Перестановка узлов. Узлы можно переставлять местами и объединять.

Вычисление передаточной функции одноконтурной системы. Замкнутая система называется *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается система без параллельных и обратных соединений (рис. 1.10).

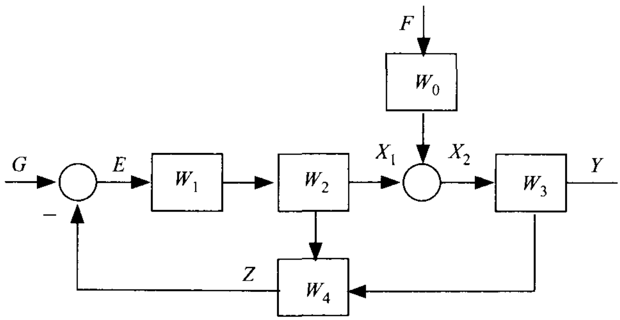


Рис. 1.10

Цепь по ходу сигнала от точки приложения входной переменной до точки съема выходной переменной *называется прямой цепью.* Передаточная функция прямой цепи $W_п$ равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в эту цепь, включая и сумматоры. Передаточная функция контура W_k равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящих в замкнутый контур, включая сумматоры. Передаточная функция сумматора по входу со знаком плюс равна плюс единице, а по входу со знаком минус — минус единице.

Правило вычисления передаточной функции замкнутой одноконтурной системы: передаточная функция одноконтурной системы относительно внешнего воздействия (входа) u и выхода x равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция контура: $W_{xu} = W_п/(1 - W_k)$.

Пример 1.7. Определить передаточные функции системы (рис. 1.10) W_{yg} относительно входа g и выхода y и W_{ef} относительно входа f и выхода e.

Решение. Прямая цепь системы (см. рис. 1.10) относительно входа g и выхода y представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_1, W_2 и W_3. Входы сумматоров в этой цепи имеют знак плюс и их передаточные функции равны единице. Поэтому передаточная функция прямой цепи $W_п = W_1 W_2 W_3$.

Прямая цепь относительно входа f и выхода e представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_0, W_3 и W_4. Вход первого сумматора имеет знак плюс, вход второго сумматора — знак минус и их передаточные функции равны 1 и -1 соответственно. Поэтому в этом случае передаточная функция прямой цепи $W_п = -W_0 W_3 W_4$.

Искомые передаточные функции имеют вид

$$W_{yg} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}, \quad W_{ef} = \frac{-W_0 W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы. Замкнутая система называется *многоконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается система, содержащая параллельное и/или обратное соединение.

Многоконтурная система не имеет перекрестных связей, если любые два контура, образованные параллельными или обратными соединениями, не имеют общих участков (рис. 1.11, *а*) или, если какие-либо два контура имеют общий участок, то один из них вложен внутрь другого (рис. 1.11, *б*).

Многоконтурная система имеет *перекрестные связи*, если она содержит два контура, которые имеют общий участок, и при этом ни один из них не вложен внутрь другого (рис. 1.11, *в*).

Порядок вычисления передаточной функции многоконтурной системы следующий:

1) путем переноса узлов и сумматоров нужно освободиться от перекрестных связей;

2) используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, нужно преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную;

3) по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы определить искомую передаточную функцию.

При преобразовании структурной схемы нужно позаботится о том, чтобы не исчезли точки съема переменных, относительно которых ищутся передаточные функции, или чтобы эти точки не оказались на неэквивалентном участке (т. е. не следует переносить сумматор через эти точки).

Пример 1.8. Определить передаточные функции W_{yg} и W_{yf} системы управления, представленной на рис. 1.12, *а*.

Решение. Сначала освободимся от перекрестных связей. Для этого перенесем сумматор 3 против хода сигнала через звено W_2 и сум-

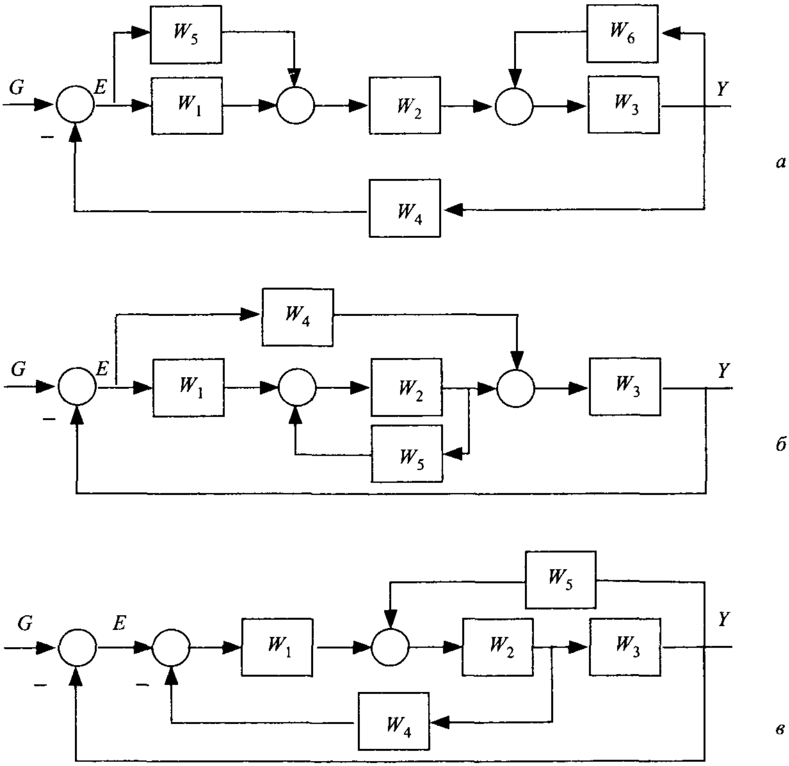


Рис. 1.11

матор 2. То же самое проделаем с сумматором 4 (рис. 1.12, *б*). Далее, заменив параллельное соединение звеном с передаточной функцией

$$W' = W_1 + W_5\frac{1}{W_2} = \frac{W_1 W_2 + W_5}{W_2}$$

и обратное соединение звеном с передаточной функцией

$$W'' = \frac{W_2}{1 + W_2 W_4},$$

получим одноконтурную систему (рис. 1.12, *в*). Из последней схемы по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы находим

$$W_{yg} = \frac{W'W''W_3}{1 + W'W''W_3}, \quad W_{yf} = \frac{W''W_3}{W_2(1 + W'W''W_3)}.$$

При вычислении передаточных функций многоконтурных систем с перекрестными связями во многих случаях целесообразно, а иногда

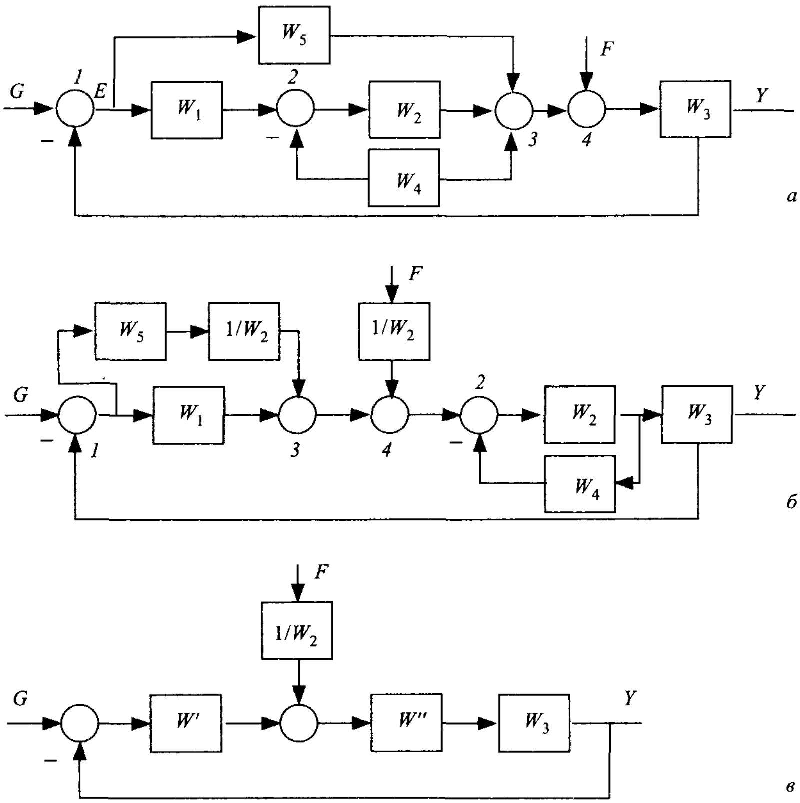


Рис. 1.12

и необходимо сначала предварительно упростить схему, используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, затем освободиться от перекрестных связей.

1.18. Для системы на рис. 1.13 определить следующие передаточные функции (ПФ):

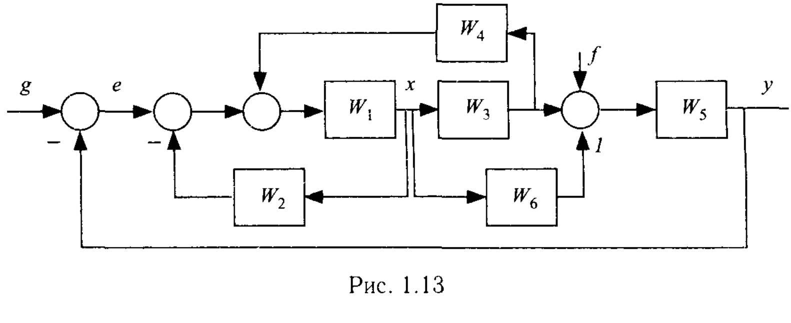


Рис. 1.13

а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

1.19. Для системы на рис. 1.14 определить следующие передаточные функции (ПФ):
а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

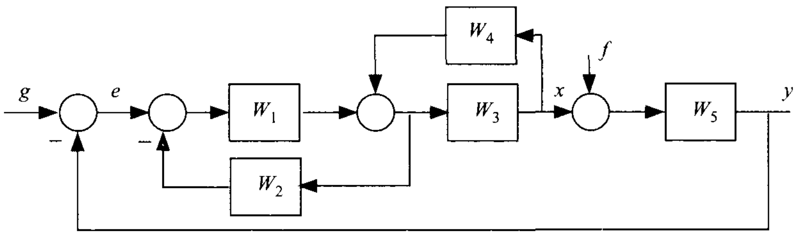


Рис. 1.14

1.20. Для системы на рис. 1.15 определить следующие передаточные функции (ПФ):
а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

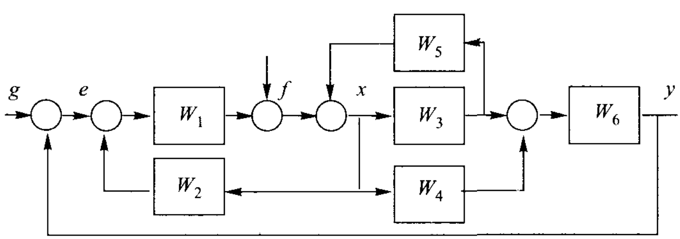


Рис. 1.15

Указание. Перерисуйте структурную схему так, чтобы линии связи, по которым сигналы подаются на входы звеньев с передаточными функциями W_2 и W_4, были полностью разделены.

1.21. Для системы на рис. 1.16 определить следующие передаточные функции (ПФ):

а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

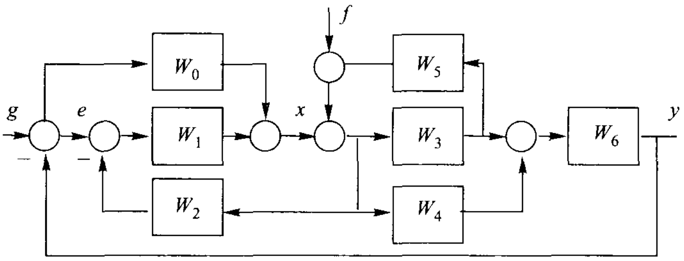


Рис. 1.16

Указание. 1) Преобразуйте схему так, чтобы линии связи, по которым сигналы подаются на входы звеньев с передаточными функциями W_2 и W_4, были полностью разделены и сумматор, куда подается возмущение f, был вынесен из контура, образованного звеньями с передаточными функциями W_3 и W_5.

2) Передаточную функцию W_{eg} можно определить по формуле $W_{eg} = 1 - W_{yg}$.

1.5. Граф системы управления

Граф системы управления состоит из дуг и вершин. *Дуга* соответствует звену и на схеме изображается отрезком линии со стрелкой, указывающей направление распространения сигнала. Дуга начинается и кончается в вершине.

Вершина на схеме изображается кружком и определяет переменную. Если к вершине подходит одна дуга, то она определяет выходную величину дуги (рис. 1.17, *а*), если же в вершину входят несколько дуг, то она соответствует сумме выходных переменных этих дуг (рис. 1.17, *б*).

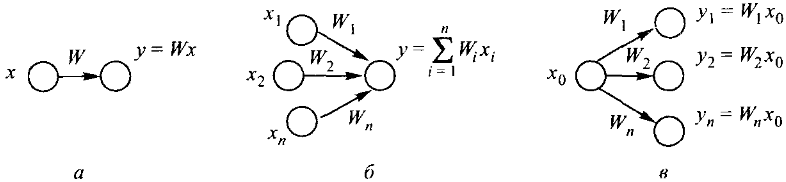


Рис. 1.17

Начальная вершина дуги определяет ее входную переменную (рис. 1.17, *в*). Вершина графа, имеющая только выходящие из нее дуги, определяет внешнее воздействие и называется *входной вершиной* графа.

Последовательность дуг W_1, $W_2, \ldots, W_n$ (не обязательно разных), для которых конечная вершина x_i дуги W_i является начальной вершиной дуги W_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, называется *ориентированным маршрутом* или *ормаршрутом*. Ормаршрут называется *замкнутым*, если конечная вершина дуги W_n совпадает с начальной вершиной дуги W_1, и *незамкнутым* в противном случае.

Ормаршрут, в котором все дуги разные, называется *путем* от начальной вершины x_0 к конечной вершине x_n, если он не замкнут, и контуром, если он замкнут (x_0 и x_n совпадают). Путь и контур называют простыми, если все вершины x_0, $x_1, \ldots, x_n$ различны. Простой путь также называют *прямым путем*.

Два контура называются *несоприкасающимися*, если они не имеют общих вершин. Три, четыре и т.д. контура называются *несоприкасающимися*, если любая пара из этих контуров является несоприкасающейся.

Граф системы управления можно построить по структурной схеме. Для этого нужно произвести следующее (рис. 1.18):

1) сумматор с выходной переменной x заменить вершиной x;

2) звено с передаточной функцией Wзаменить дугой W; если выходная переменная подается на сумматор по отрицательному входу, то указанное звено заменить дугой $-W$;

3) каждой переменной, в том числе переменной, соответствующей внешнему воздействию, сопоставить свою вершину.

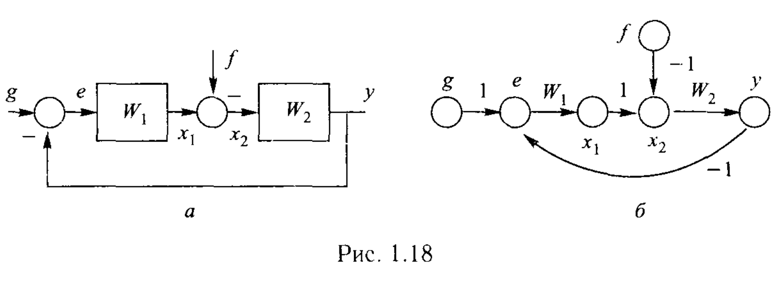


Рис. 1.18

Формула Мейсона. *Определителем графа (подграфа)* называется передаточная функция Δ, равная

$$\Delta = 1 - \sum_{j} W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j}W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j}W_{0k}W_{l} + \ldots$$

Здесь в первой сумме W_{0j} — передаточная функция j-го простого контура, равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот контур, и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме $W_{0j}W_{0k}$ — произведение передаточных функций j-го и k-го простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся парам контуров; в третьей сумме $W_{0j}W_{0k}W_{0l}$ — произведение передаточных функций j-го, k-го и l-го простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся тройкам контуров и т. д.

Подграфом i-го прямого пути называется подграф, который получается из исходного графа отбрасыванием всех дуг и вершин i-го пути, а также всех дуг, начинающихся или кончающихся на вершинах этого пути.

Передаточная функция системы управления относительно входа x и выхода z определяется следующим образом:

$$W_{zx} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m} W_{\text{п}i}\Delta_i$$

где Δ — определитель графа системы управления;

$W_{\text{п}i}$ — передаточная функция i-го прямого пути от начальной вершины x к конечной вершине z;

m — общее число таких прямых путей;

Δ_i — определитель подграфа i-го прямого пути.

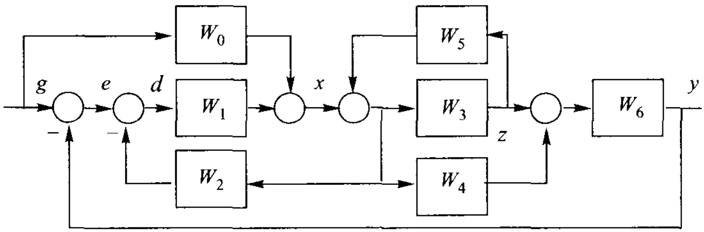
Пример 1.9. Построить граф и по теореме Мейсона определить передаточную функцию W_{yg} системы (рис. 1.19, *а*).

Решение. Граф системы управления представлен на рис. 1.19, *б*. От вершины g до вершины y имеются четыре прямых пути. Передаточные функции этих путей равны

$$W_{\text{п}1} = W_0W_3W_6, \quad W_{\text{п}2} = W_0W_4W_6,$$

$$W_{\text{п}3} = W_1W_3W_6, \quad W_{\text{п}4} = W_1W_4W_6.$$

Подграф 1-го пути состоит из вершин e и d, 2-го пути — из вершин e, d и z; подграф 3-го пути есть пустой граф, подграф 4-го пути состоит из вершины z. И так как все они не имеют контуров, их определители равны единице: $\Delta_i = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.



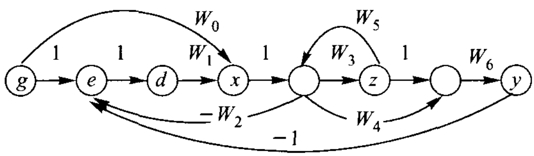


Рис. 1.19

Граф системы управления имеет четыре простых контура. Их передаточные функции имеют вид

$$W_{01} = -W_1W_2, \quad W_{02} = W_3W_5,$$
$$W_{03} = -W_1W_3W_6, \quad W_{04} = -W_1W_4W_6.$$

Несоприкасающихся пар контуров нет. Поэтому определитель графа имеет вид

$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04}).$$

Для искомой передаточной функции получаем

$$W_{yg} = \frac{W_{n1} + W_{n2} + W_{n3} + W_{n4}}{\Delta} =$$
$$= \frac{W_0W_3W_6 + W_0W_4W_6 + W_1W_3W_6 + W_1W_4W_6}{1 + W_1W_2 - W_3W_5 + W_1W_3W_6 + W_1W_4W_6}.$$

1.22. Построить граф системы управления (рис. 1.20) и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции (ПФ):

а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выходay;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

1.23. Построить граф системы управления (рис. 1.21) и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции:

а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;

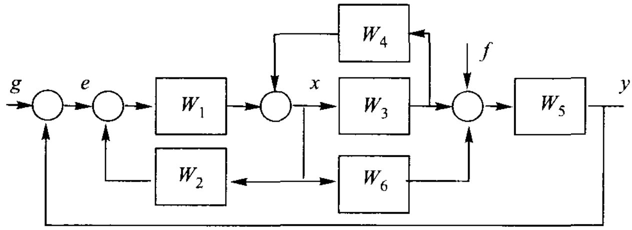


Рис. 1.20

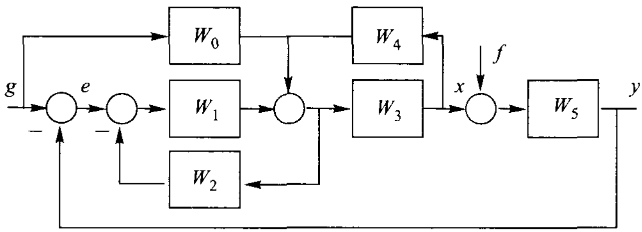


Рис. 1.21

в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

1.24. Построить граф системы управления (рис. 1.22) и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции:
а) W_{yg} — ПФ относительно входа g и выхода y;
б) W_{xg} — ПФ относительно входа g и выхода x;
в) W_{eg} — ПФ относительно входа g и выхода e;
г) W_{yf} — ПФ относительно входа f и выхода y;
д) W_{xf} — ПФ относительно входа f и выхода x;
е) W_{ef} — ПФ относительно входа f и выхода e.

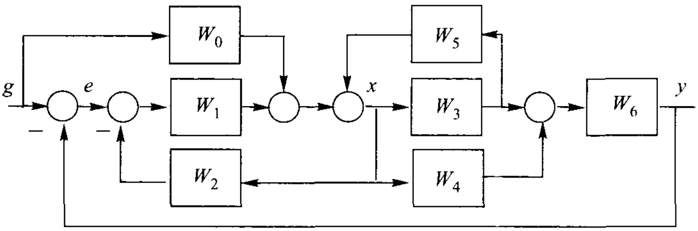


Рис. 1.22

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

В общем случае функциональная схема системы автоматического управления имеет вид, представленный на рис. 2.1, где приняты следующие обозначения: УУ — управляющее устройство, включающее

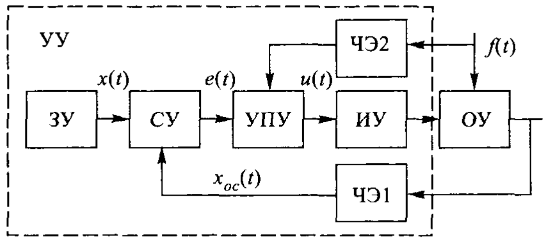


Рис. 2.1

в себя ЗУ — задающее устройство, вырабатывающее задающий сигнал $x(t)$; СУ — сравнивающее устройство, вырабатывающее сигнал ошибки $e(t) = x(t) - x_{\text{ос}}(t)$; УПУ — усилительно-преобразовательное устройство, включающее в себя помимо усилителя и преобразователь или корректирующее устройство, которое на основе сигнала ошибки $e(t)$ и измеренного возмущения $f(t)$ вырабатывает управляющее воздействие $u(t)$; ИУ — исполнительное устройство, непосредственно воздействующее на объект управления ОУ; ЧЭ1 и ЧЭ2 — чувствительные элементы (датчики), измеряющие управляемую переменную $y(t)$ и возмущение $f(t)$ и при необходимости преобразующие их в иную физическую переменную (например, механическую или тепловую в электрическую); ОУ — объект управления.

В данной главе рассматриваются задачи, связанные с математическим описанием (дифференциальными уравнениями и передаточными функциями) некоторых технических устройств, используемых в системах автоматического управления (САУ) в качестве упомянутых выше элементов.

2.1. Чувствительные элементы — датчики

Датчики линейных и угловых перемещений. В САУ для измерения линейных и угловых перемещений используются линейные и вращающиеся потенциометрические датчики (ПД). Для измерения угловых перемещений используются вращающиеся трансформаторы (ВТ) и сельсины (С). На этих элементах выполняют также и сравнивающие устройства (СУ). Принцип действия этих устройств, их схемы и основные характеристики рассматриваются в довольно обширной литературе [1, 2, 5–8, 10]. Упомянутые выше потенциометрические датчики, вращающиеся трансформаторы и сельсины при исследовании динамики считаются безынерционными звеньями с передаточной функцией

$$W(s) = k_д,$$

где $k_д$ — передаточный коэффициент датчика.

Для потенциометрических датчиков и вращающихся трансформаторов коэффициент $k_д$ определяется крутизной статической характеристики, но следует иметь в виду, что для вращающихся трансформаторов это верно при малых углах, иначе необходимо учитывать нелинейность характеристики. Передаточный коэффициент сельсина, работающего в трансформаторном режиме, также рассчитывается по крутизне характеристики, определяемой по следующей формуле:

$$k_д = \frac{dU_{вых}}{d\theta} \text{ при } |\theta| \leqslant 30^0.$$

Так, например, передаточная функция ПД типа ПП

$$W(s) = k_д = 0{,}08 \text{ В/град};$$

передаточная функция ВТ типа ВТ-5

$$W_{ВТ}(s) = k_д = 20 \text{ мВ/угл. мин.} = 1{,}2 \text{ В/град},$$

передаточная функция сельсина типа СГСМ-1

$$W_с(s) = k_д = 1{,}92 \text{ В/град}.$$

Для измерения угловой скорости используют тахогенераторы (ТГ) постоянного и переменного тока. Строго говоря, по динамическим свойствам их можно отнести к апериодическому звену второго порядка с передаточной функцией

$$W_{ТГ}(s) = \frac{U_{ТГ}(s)}{\omega(s)} = \frac{k_{ТГ}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)},$$

где $U_{ТГ}$ — напряжение на выходе ТГ, $T_1 = L_я/R_я$ — электрическая постоянная времени, $L_я$ — индуктивность обмотки якоря, $R_я$ — активное сопротивление обмотки якоря, T_2 — электромеханическая постоянная времени. Но поскольку якорь ТГ соединен с валом двигателя, скорость которого он измеряет, его момент инерции учитывается при расчете электромеханической постоянной времени двигателя в суммарном моменте инерции. Учитывая, что $T_1 \ll T_2$, ТГ можно считать безынерционным звеном с передаточной функцией $W_{\text{ТГ}}(s) = k_{\text{ТГ}}$, где $k_{\text{ТГ}}$ — передаточный коэффициент ТГ, определяемый крутизной статической характеристики $U_{\text{ТГ}}(n)$.

Например, передаточная функция ТГ типа ТП-75

$$W_{\text{ТГ}}(s) = k_{\text{ТГ}} = 20 \text{ мВ} \cdot \text{мин./об.} = 0{,}19\text{В} \cdot \text{с/рад}$$

а для ТГ типа ДГ-3ТА

$$W_{\text{ТГ}}(s) = k_{\text{ТГ}} = 1 \text{ мВ} \cdot \text{мин./об.} = 0{,}0096 \text{ В} \cdot \text{с/рад}$$

Основные характеристики некоторых типов ТГ приведены в [2, 10].

Датчики температуры. Для измерения температуры в системах автоматического управления используются электротепловые датчики: термопары (ТП) и термосопротивления (ТС) [5, 6, 8, 10]. Датчики этого типа с точки зрения динамики являются апериодическим (инерционным) звеном первого порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k_{\text{ТД}}}{1 + sT_{\text{ТД}}},$$

где $T_{\text{ТД}}$ — постоянная времени термодатчика, которая колеблется для некоторых типов датчиков от долей секунды до нескольких минут, $k_{\text{ТД}}$ — передаточный коэффициент термодатчика, который определяется крутизной статической характеристики.

2.2. Усилители

В САУ используются все известные типы усилителей: электрические, гидравлические и пневматические. В качестве электрических используются электронные (ЭУ) (полупроводниковые, тиристорные), магнитные (МУ) и электромашинные (ЭМУ).

Электронные усилители. Электронные усилители можно считать безынерционным звеном с передаточной функцией

$$W(s) = k_{\text{ус}},$$

так как их постоянная времени мала по сравнению с постоянными времени электромеханических элементов системы. Коэффициент усиления по напряжению $k_{ус}$ рассчитывается как отношение выходного напряжения усилителя $u_{вых}$ ко входному напряжению $u_{вх}$, $k_{ус} = u_{вых}/u_{вх}$.

Магнитные усилители. Наибольшее распространение в САУ получила схема двухтактного реверсивного МУ [5, 8–10]. По динамическим свойствам МУ этого типа эквивалентен апериодическому звену с передаточной функцией

$$W_{МУ}(s) = \frac{k_{МУ}}{(1 + sT_{МУ})}.$$

Для увеличения коэффициента усиления используют внутреннюю обратную связь. Постоянная времени $T_{МУ}$ для МУ с положительной обратной связью рассчитывается по следующей формуле:

$$T_{МУ} = \frac{R_{н} w_{уп}^2}{4 f R_{уп}^0 w_{Р}^2 (1 - \beta)},$$

где f — частота напряжения питания в Гц, $R_{н}$ — активное сопротивление нагрузки, $R_{уп}^0$ — общее активное сопротивление цепи управления усилителя с учетом сопротивления источника управляющего сигнала в Ом, $w_{Р}$ и $w_{УП}$ — число витков рабочей обмотки и обмотки управления соответственно, β — коэффициент положительной обратной связи. Коэффициент усиления по напряжению $k_{МУ}$ вычисляется по формуле

$$k_{МУ} = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}} = \frac{R_{н} i_{н}}{R_{уп}^0 i_{уп}},$$

где $i_{н}$ — ток в нагрузке, $i_{уп}$ — ток в обмотке управления.

Магнитные усилители рассчитываются для каждого отдельного случая, серийно промышленностью не выпускаются.

Электромашинные усилители. ЭМУ используются в САУ в случае наличия источника механической энергии (например, дизель и т. п.). Их применяют для управления двигателем постоянного тока, когда требуется высокий коэффициент усиления по мощности. Известны различные конструкции ЭМУ [3, 5, 6, 8, 10]. ЭМУ с поперечным полем описывается передаточной функцией апериодического звена второго порядка

$$W_{ЭМУ}(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{k_{ЭМУ}}{(1 + sT_{У})(1 + sT_{К})},$$

где $k_{ЭМУ}$ — коэффициент усиления ЭМУ, равный

$$k_{ЭМУ} = k_1 k_2, \quad k_1 = m_1/R_{У}, \quad k_2 = m_2/R_{К},$$

$R_{У}$ и R_K — активные сопротивления обмотки управления и поперечной короткозамкнутой обмотки соответственно, m_1 — коэффициент пропорциональности между ЭДС в поперечной обмотке и током управления, m_2 —коэффициент пропорциональности между выходной ЭДС и током в поперечной обмотке, $T_У = L_У/R_У$ — постоянная времени цепи управления, $L_У$ — индуктивность обмотки управления, $T_К = L_К/R_К$ — постоянная времени поперечной цепи, $L_К$ — индуктивность поперечной обмотки. Обычно $T_К \geqslant T_У$, их значения колеблются от сотых до десятых долей секунды. Коэффициент усиления по мощности для этого типа ЭМУ достигает 10^4.

2.3. Исполнительные устройства и объекты управления

Двигатели постоянного тока. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением может быть представлен структурной схемой, приведенной на рис. 2.2, где $W_u(s)$ —передаточная функция относительно управляющего воздействия $u_у$, $W_M(s)$ — передаточная функция относительно возмущения — момента нагрузки $M_Н$.

Когда выходом является угловая скорость, передаточная функция двигателя по управляющему воздействию $u_у$

$$W_u(s) = W_{u\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_у(s)} = \frac{k_{д1}}{(T_Я T_М s^2 + T_М s + 1)}$$

и по возмущению $M_н$

$$W_M(s) = W_{М\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_н(s)} = \frac{k_{д2}(T_Я s + 1)}{(T_Я T_М s^2 + T_М s + 1)}.$$

Здесь $k_{д1} = \dfrac{1}{c_e} = \dfrac{\omega_{хх}}{u_{уном}}$ — передаточный коэффициент двигателя по управлению, c_e — постоянная, зависящая от потока возбуждения и конструкции двигателя, $\omega_{xx} = 1{,}5\omega_{ном}$ — скорость холостого хода, $\omega_{ном}$ — номинальная скорость, $T_Я = L_Я/R_Я$ — электрическая постоянная времени якоря, $L_Я$ — индуктивность обмотки якоря, $R_Я$ — активное сопротивление обмотки якоря, $T_М = JR_Я/c_e c_м$ — электромеханическая постоянная времени, J — приведенный к валу двигателя суммарный момент инерции вращающихся частей, $k_{д2} = \dfrac{R_Я}{c_e c_m} = \dfrac{M_П R_Я}{u_{ном}}$ — передаточный коэффициент двигателя по возмущению (моменту нагрузки) $M_н$, c_m — постоянная, зависящая, как и c_e, от потока возбуждения и конструкции двигателя, $u_{ном}$ — номинальное напряжение управления, $M_П$ — пусковой момент.

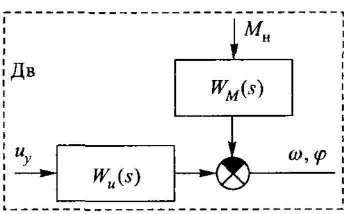


Рис. 2.2

Для большинства двигателей выполняется неравенство $T_Я \ll T_М$. Поэтому при расчете динамики САУ часто полагают $T_Я = 0$. При этом передаточные функции двигателя по управляющему воздействию $W_{u\omega}(s)$ и по возмущению $W_{M\omega}(s)$ соответственно принимают вид

$$W_{u\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_у(s)} = \frac{k_{д1}}{1+sT_М}, \quad W_{M\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_н(s)} = \frac{k_{д2}}{1+sT_М}.$$

Если за выходную величину двигателя принять угол поворота вала φ, то передаточные функции по управляющему воздействию $W_{u\varphi}(s)$ и по возмущению $W_{M\varphi}(s)$ имеют вид

$$W_{u\varphi}(s) = \frac{\varphi(s)}{U_у(s)} = \frac{k_{д1}}{s(1+sT_M)}, \quad W_{M\varphi}(s) = \frac{\varphi(s)}{M_н(s)} = \frac{k_{д2}}{s(1+sT_M)}.$$

Пример 2.1. Определить передаточные функции двигателя типа ДПМ-20-Н1/Н2-01.

Решение. Для двигателя данного типа $T_Я = 0{,}0007$ с, $T_М = 0{,}35$ с, $u_{уном} = 29$ В, $n_{уном} = 9000$ об/мин, $M_П = 60$ гсм, $R_Я = 218$ Ом.

Приведем единицы измерения параметров двигателя к системе СИ: $M_П = 60$ гсм $= 0{,}0059$ Нм, $\omega_{ном} = \frac{2\pi n_{ном}}{60} = 942$ рад/с.

Скорость холостого хода двигателя $\omega_{хх} = 1{,}5\omega_{ном} = 1413$ рад/с.

Рассчитаем передаточные коэффициенты двигателя по управлению и по возмущению:

$$k_{д1} = \frac{1413}{29} = 48{,}7\ \frac{рад}{Вс}, \quad k_{д2} = \frac{0{,}0059 \cdot 218}{29} = 0{,}044\ \frac{(Нм)Ом}{В}.$$

Тогда получим передаточные функции двигателя

$$W_{u\omega}(s) = \frac{48{,}7}{1+0{,}35s}, \quad W_{u\varphi}(s) = \frac{48{,}7}{s(1+0{,}35s)},$$

$$W_{M\omega}(s) = \frac{0{,}044}{1+0{,}35s}, \quad W_{M\varphi}(s) = \frac{0{,}044}{s(1+0{,}35s)}.$$

Асинхронные двигатели. Наиболее распространен индукционный двухфазный двигатель [1, 3, 8–10]. В динамическом отношении асинхронный двигатель рассматривается относительно угловой скорости как апериодическое звено и по управляющему воздействию $W_{U\omega}(s)$ и по возмущению $W_{M\omega}(s)$:

$$W_{u\omega}(s) = \frac{k_{д1}}{1+sT_М}, \quad W_{M\omega}(s) = \frac{k_{д2}}{1+sT_M},$$

$$W_{u\varphi}(s) = \frac{k_{д1}}{s(1+sT_M)}, \quad W_{M\varphi}(s) = \frac{k_{д2}}{s(1+sT_M)},$$

где параметры двигателя вычисляются по следующим формулам:

$$k_{\text{д}1} = \frac{\omega_{xx}}{u_{\text{уном}}}, \quad \omega_{xx} = 1{,}5\omega_{\text{ном}}, \quad k_{\text{д}2} = \frac{M_{\text{п}}}{i_{\text{рп}}}, \quad T_M = J_{\text{Р}}\frac{\omega_{xx}}{M_{\text{п}}},$$

где $i_{\text{рп}}$ — пусковой ток ротора, равный току, потребляемому от сети, $J_{\text{Р}}$ — момент инерции ротора.

Пример 2.2. Определить передаточные функции асинхронного двигателя типа АД-32Б. Технические характеристики двигателя этого типа: $T_M = 10$ мс $= 0{,}01$ с, $n_{\text{хх}} = 7000$ об/мин, $u_{\text{уном}} = 40$ В, $M_{\text{п}} = 75 \times$ $\times\ 10^{-4}$ Нм, $i_{\text{рп}} = 3$ А.

Решение. Угловая скорость двигателя при холостом ходе

$$\omega_{\text{хх}} = \frac{2\pi n_{\text{хх}}}{60} = 732 \text{ рад/с}.$$

Рассчитаем передаточные коэффициенты двигателя:

$$k_{\text{д}1} = \frac{\omega_{\text{хх}}}{u_{\text{уном}}} = 18{,}3 \text{ рад/с}, \quad k_{\text{д}2} = \frac{M_{\text{п}}}{i_{pn}} = 25 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{Нм}}{\text{А}}$$

Тогда передаточные функции двигателя

$$W_{u\omega}(s) = \frac{18{,}3}{1 + 0{,}01s}, \quad W_{u\varphi}(s) = \frac{18{,}3}{s(1 + 0{,}01s)},$$

$$W_{M\omega}(s) = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{1 + 0{,}01s}, \quad W_{M\varphi}(s) = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{s(1 + 0{,}01s)}.$$

Генератор постоянного тока. Генератор постоянного тока описывается дифференциальным уравнением первого порядка и он эквивалентен апериодическому звену [6]:

$$W_{\text{Г}}(s) = \frac{U_{\text{Г}}(s)}{U_{\text{В}}(s)} = \frac{k_{\text{Г}}}{1 + sT_{\text{Г}}},$$

где $u_{\text{Г}}$, $u_{\text{в}}$ — выходное и входное напряжения генератора, $k_{\text{Г}} = m_{\text{Г}}/R_{\text{В}}$ — передаточный коэффициент по управляющему воздействию, $R_{\text{В}}$ — активное сопротивление обмотки возбуждения, $m_{\text{Г}}$ — константа, определяющая зависимость между ЭДС генератора $E_{\text{Г}}$ и током возбуждения $i_{\text{в}}$, $T_{\text{Г}} = L_{\text{В}}/R_{\text{В}}$ — постоянная времени генератора, $L_{\text{В}}$ — индуктивность обмотки возбуждения.

Передаточная функция генератора относительно возмущения ($i_{\text{я}}$ — тока якоря)

$$W_i(s) = \frac{U_{\text{Г}}(s)}{I_{\text{Я}}(s)} = R_{\text{Я}},$$

где $R_{\text{Я}}$ — активное сопротивление цепи якоря.

2.4. Корректирующие элементы

При синтезе САУ для обеспечения ее устойчивости и требуемых показателей качества используют корректирующие элементы, в качестве которых применяют пассивные и активные четырехполюсники.

Пассивные четырехполюсники. Пассивные четырехполюсники представляют собой схемы из резисторов, конденсаторов и индуктивностей [5–7].

При вычислении передаточных функций четырехполюсников удобно воспользоваться операторными сопротивлениями: омическим R, индуктивным sL и емкостным $1/sC$. При этом пассивные четырехполюсники можно рассчитывать как схемы, составленные из одних омических сопротивлений. Общая схема пассивного четырехполюсника показана на рис. 2.3, где Z_1 и Z_2 — операторные сопротивления.

Передаточную функцию такого четырехполюсника можно записать следующим образом:

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_{\text{вых}}(s)}{Z_{\text{вх}}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}.$$

Пример 2.3. Рассчитать передаточную функцию четырехполюсника, показанного на рис. 2.4.

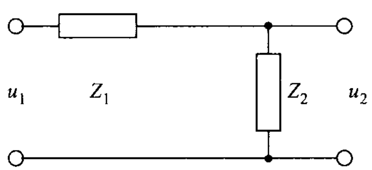


Рис. 2.3

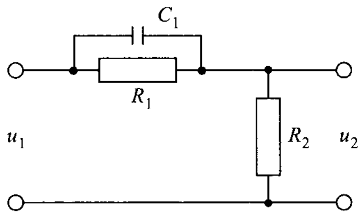


Рис. 2.4

Решение. В данном случае

$$Z_1(s) = \frac{1}{1/R_1 + sC_1} = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1}, \qquad Z_2(s) = R_2,$$

$$Z_{\text{вх}}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) = \frac{R_1 + R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_1C_1s}, \qquad Z_{\text{вых}}(s) = R_2.$$

Поэтому

$$W(s) = \frac{Z_{\text{вых}}(s)}{Z_{\text{вх}}(s)} = k\frac{T_1s + 1}{T_2s + 1},$$

где $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$, $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C_1 < T_1$.

Если соединить последовательно два пассивных четырехполюсника через разделительный усилитель (рис. 2.5), то передаточная функция этой цепи

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = W_1(s)k_{\text{ус}}W_2(s),$$

где $k_{\text{ус}}$ — коэффициент усиления усилителя, $W_1(s)$ и $W_2(s)$ — передаточные функции четырехполюсников, включенных на входе и выходе усилителя.

Эта формула справедлива при условии, что входное сопротивление усилителя достаточно велико.

Активные четырехполюсники постоянного тока. В таких четырехполюсниках используются операционные усилители (УПТ) с высоким коэффициентом усиления $k_{\text{ус}}$ [4, 6, 7, 9]. Общая схема активного четырехполюсника показана на рис. 2.6. Передаточная функция такого элемента

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \text{ при } k_{\text{ус}} \gg 1.$$

Пример 2.4. Рассчитать передаточную функцию активного четырехполюсника, показанного на рис. 2.7.

Решение. В данном случае

$$Z_1(s) = R_1, \quad Z_2(s) = \frac{1}{1/R_2 + sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2},$$

Поэтому $W(s) = -\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\dfrac{k}{1+sT}$, $k = \dfrac{R_2}{R_1}$, $T = R_2C_2$.

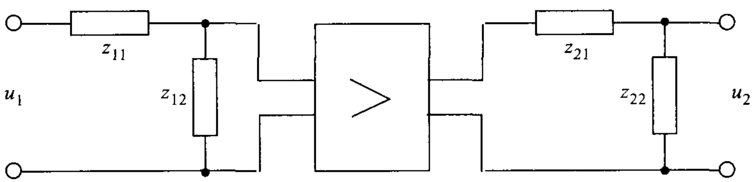


Рис. 2.5

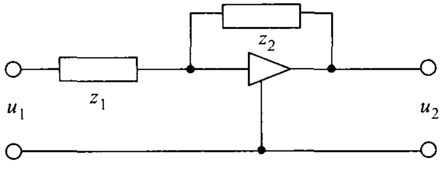


Рис. 2.6

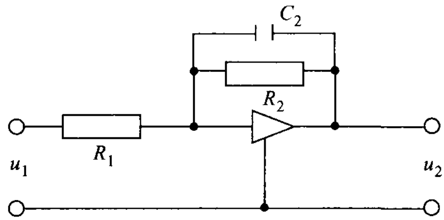


Рис. 2.7

2.5. Сравнивающие устройства (СУ)

На рис. 2.8, *а* показана схема СУ, выполненная на линейных потенциометрах $П_1$ и $П_2$, а на рис. 2.8, *б* — на кольцевых потенциометрах $П_1$ и $П_2$.

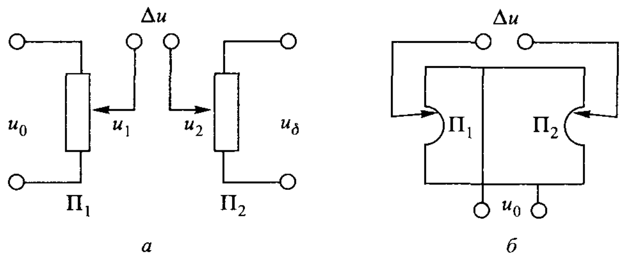


Рис. 2.8

В обеих схемах сигнал ошибки $\Delta u = 0$ при равенстве задающего сигнала u_1 и сигнала обратной связи u_2.

На рис. 2.9 показана мостовая схема СУ.

В частном случае в плечи моста могут быть включены активные сопротивления R_1, R_2, R_3 и термосопротивление $R_Д$. Если выполняется условие равновесия моста $R_1R_Д = R_2R_3$, то сигнал ошибки $\Delta u = 0$. В общем случае в плечи моста могут быть включены, помимо активных сопротивлений, индуктивности и емкости.

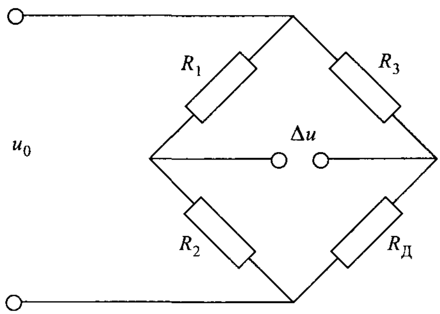


Рис. 2.9

Схема СУ может быть выполнена и на сельсинах, и на вращающихся трансформаторах. Принципиальная схема таких устройств может быть показана так, как на рис. 2.10.

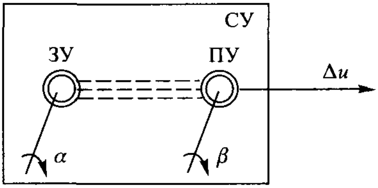


Рис. 2.10

В качестве задающего (ЗУ) и приемного (ПУ) устройств могут использоваться и сельсины (СД-сельсин-датчик, СП-сельсин-приемник) и вращающиеся трансформаторы (ВТ-1 и ВТ-2). Сигнал ошибки $\Delta u = 0$ при равенстве углов поворота задающей оси α и приемной оси β.

На рис. 2.11 показана схема СУ, выполненная на операционном усилителе (активном четырехполюснике). Сигнал ошибки $\Delta u = 0$ при равенстве напряжений $u_1 = u_2$.

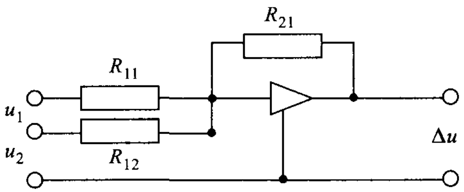


Рис. 2.11

Для всех приведенных выше схем СУ (рис. 2.8–2.11) структурная схема показана на рис. 2.12, где $x(t)$ — входной сигнал, $y(t)$ — сигнал обратной связи, $e(t) = k_{\text{СУ}}[x(t) - y(t)]$ — сигнал ошибки, $k_{\text{СУ}}$ — передаточный коэффициент СУ.

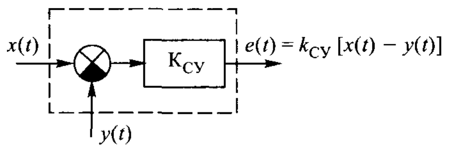


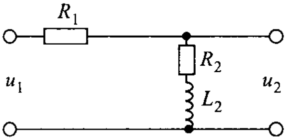
Рис. 2.12

2.1. Запишите дифференциальное уравнение и передаточные функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-20-Н1/Н2-04 по задающему сигналу и по возмущению для случаев, когда выходом являются угловая скорость и угол поворота. Технические характеристики двигателя: $T_{\text{М}} = 0{,}19$ с, $T_{\text{Я}} = 0{,}0012$ с, $\text{М}_{\text{П}} = 280$ Гсм, $R_{\text{Я}} = 5{,}4$ Ом, $u_{\text{ном}} = 14$ В, $n_{\text{уном}} = 4500$ об/мин.

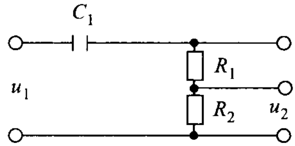
2.2. Запишите передаточную функцию асинхронного двигателя типа АД-25В относительно угловой скорости и угла поворота по управляющему воздействию и по возмущению. Технические характеристики двигателя: $T_{\text{М}} = 17$ мс, $n_{\text{хх}} = 6500$ об/мин, $u_{\text{уном}} = 40$ В, $M_{\text{Пном}} = 40 \times$ $\times\, 10^{-4}$ Нм.

2.3. Составить передаточные функции для пассивных четырехполюсников, показанных на рис. а)–д). Построить их ЛАЧХ и ЛФЧХ.

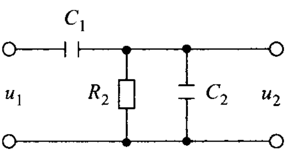
а) $R_1 = 15$ кОм, $R_2 = 5$ кОм, $L_2 = 20$ Гн.



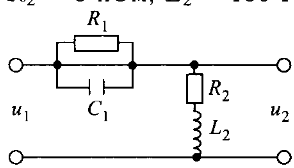
б) $C_1 = 5$ мкФ, $R_1 = 30$ кОм, $R_2 = 8$ кОм.



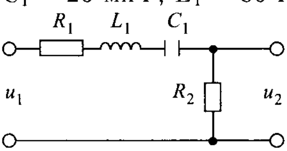
в) $C_1 = 4$ мкФ, $R_2 = 200$ кОм, $C_2 = 1$ мкФ.



г) $R_1 = 5$ кОм, $C_1 = 20$ мкФ, $R_2 = 8$ кОм, $L_2 = 150$ Гн.



д) $R_1 = 35$ кОм, $R_2 = 12$ мкФ, $C_1 = 20$ мкФ, $L_1 = 80$ Гн.



2.4. Определите передаточные функции активных четырехполюсников постоянного тока, показанных на рис. 2.13, *а*, *б*.

Выполните задание при следующих исходных данных:

1. а) $R_2 = 20$ кОм, $C_1 = 10$ мкФ; б) $R_{11} = 20$ кОм, $C_{11} = 3$ мкФ, $R_{12} = 40$ кОм, $R_{21} = 30$ кОм, $C_{21} = 10$ мкФ;
2. а) $R_2 = 1$ мОм, $C_1 = 1$ мкФ; б) $R_{11} = 10$ кОм, $C_{11} = 1$ мкФ, $R_{12} = 30$ кОм, $R_{21} = 20$ кОм, $C_{21} = 6$ мкФ
3. а) $R_2 = 0{,}1$ мОм, $C_1 = 5$ мкФ; б) $R_{11} = 5$ кОм, $C_{11} = 2$ мкФ, $R_{12} = 15$ кОм, $R_{21} = 35$ кОм, $C_{21} = 3$ мкФ
4. а) $R_2 = 40$ кОм, $C_1 = 5$ мкФ; б) $R_{11} = 0{,}1$ мОм, $C_{11} = 5$ мкФ, $R_{12} = 2$ мОм, $R_{21} = 0{,}1$ мОм, $C_{21} = 5$ мкФ
5. а) $R_2 = 20$ кОм, $C_1 = 2$ мкФ; б) $R_{11} = 0{,}01$ мОм, $C_{11} = 5$ мкФ, $R_{12} = 0{,}02$ мОм, $R_{21} = 0{,}5$ мОм, $C_{21} = 1$ мкФ.

Постройте ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.5. Для приведенной на рис. 2.14 блок-схемы последовательного соединения ЭМУ и двигателя постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-30-Н1/Н2-05 записать дифференциальное уравнение и передаточные функции относительно: а) угловой скорости ω, б) угла поворота φ при следующих исходных данных:

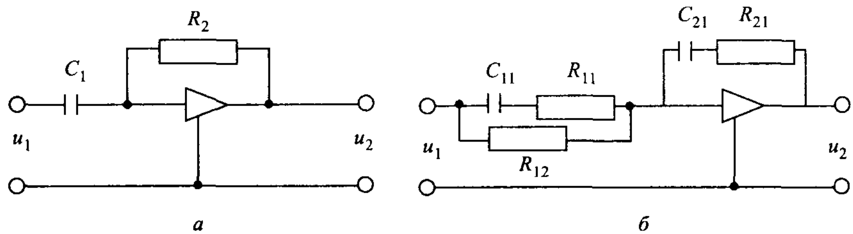


Рис. 2.13

для ЭМУ: $L_У = 60$ Гн, $R_У = 1{,}5$ кОм, $L_К = 0{,}3$ Гн, $R_К = 1$ Ом, $k_{ЭМУ} =$ $= 10$;
для двигателя: $T_Я = 0{,}0012$ с, $T_М = 0{,}19$ с, $M_П = 250$ Гсм, $R_Я =$ $= 15{,}7$ Ом, $u_{уном} = 27$ В, $n_{ном} = 6000$ об/мин.

2.6. Для схемы, приведенной в задаче 2.5, построить АФЧХ.

2.7. Для последовательного соединения магнитного усилителя МУ, двигателя Дв постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-30-Н1/Н2-10А и тахогенератора ТГ типа ТГ-4 (рис. 2.15) запишите передаточную функцию и рассчитайте переходную характеристику.

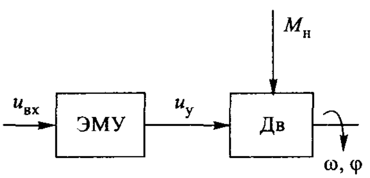


Рис. 2.14

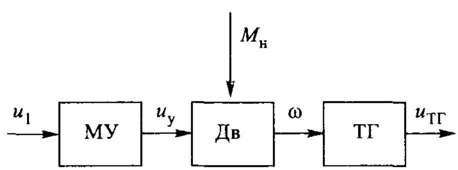


Рис. 2.15

Параметры МУ, выполненного по двухтактной реверсивной схеме, имеют следующие значения: $w_Р = 200$ витков, $w_{УП} = 550$ витков, $\beta =$ $= 0{,}95$, $R_Н = 60$ Ом, $R^0_{УП} = 160$ Ом, $f = 400$ Гц, $k_{МУ} = 8$.

Технические характеристики двигателя: $T_М = 0{,}19$ с, $T_Я = 0{,}0012$ с, $M_П = 280$ Гсм, $R_Я = 5{,}4$ Ом, $u_{уном} = 14$ В, $n_{ном} = 4500$ об/мин.

Крутизна характеристики ТГ типа ТГ-4 $k_{ТГ} = 10$ мВ · мин/об.

2.8. Для схемы, приведенной в задаче 2.7, записать выражения частотной передаточной функции $W(j\omega)$, амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик. Построить АФЧХ.

2.9. Определить передаточную функцию для последовательного соединения двух пассивных четырехполюсников и операционного усилителя (рис. 2.16) при следующих значениях параметров: $R_{11} = 50$ кОм, $C_{11} = 20$ мкФ, $R_{12} = 20$ кОм, $R_{21} = 100$ кОм, $R_{22} = 15$ кОм, $C_{22} = 12$ мкФ, $R_{У1} = 1$ мОм, $R_{У2} = 20$ мОм.

Нарисуйте структурную схему.

2.10. Для схемы, показанной на рис. 2.16 в задаче 2.9, построить ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.11. Записать передаточную функцию для последовательного соединения пассивного четырехполюсника и операционного усилителя (рис. 2.17) при следующих значениях параметров: $R_1 = 10$ кОм, $C_1 = 15$ мкФ, $R_2 = 24$ кОм, $C_2 = 21$ мкФ, $R_3 = 5$ кОм, $C_3 = 2$ мкФ.

2.12. Для схемы, приведенной в задаче 2.11, построить ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.13. Для схемы, являющейся последовательным соединением термопары ТП и активного четырехполюсника (операционного усилителя), показанного на рис. 2.18, определить передаточную функцию. Составить структурную схему. Записать дифференциальное уравнение. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Передаточный коэффициент ТП $k_{\text{ТП}} = 4$ В/град, постоянная времени ТП $T_{\text{ТП}} = 0{,}9$ с, параметры операционного усилителя имеют следующие значения: $R_1 = 100$ кОм, $C_1 = 1$ мкФ, $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 40$ кОм.

2.14. Для последовательного соединения активного четырехполюсника, электромашинного усилителя (ЭМУ) и двигателя (Дв) постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-20-Н1/Н2-11 (рис. 2.19) рассчитать передаточную функцию и составить структурную схему, записать дифференциальное уравнение. За выходную величину принять угол поворота φ.

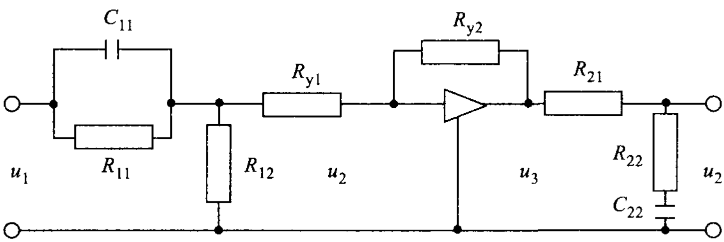


Рис. 2.16

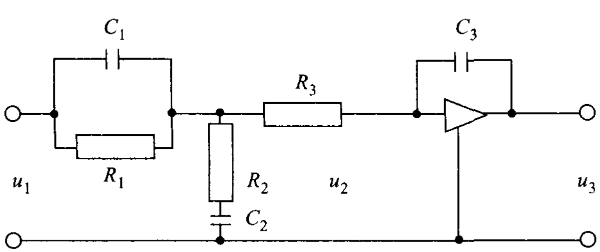


Рис. 2.17

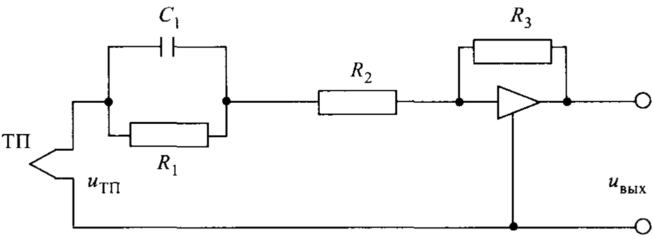


Рис. 2.18

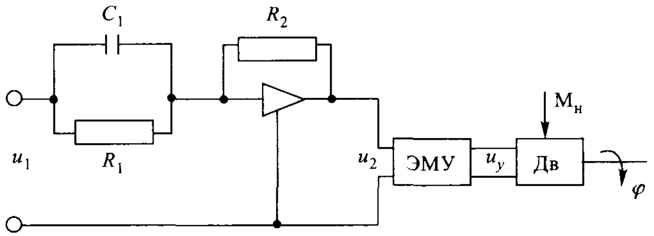


Рис. 2.19

Исходные данные:
параметры операционного усилителя: $R_1 = 100$ кОм, $C_1 = 5$ мкФ, $R_2 = 80$ кОм;
параметры ЭМУ: $L_У = 40$ Гн, $R_У = 1{,}5$ кОм, $R_К = 3$ Ом, $L_К = 0{,}4$ Гн, $k_{ЭМУ} = 20$;
параметры двигателя ДПМ-20-Н1/Н2-11: $T_M = 0{,}35$ с, $T_Я = 0{,}7 \times 10^{-3}$ с, $M_П = 60$ гсм, $R_Я = 10$ Ом, $u_{уном} = 12$ В, $n_{ном} = 9000$ об/мин.

2.15. Для схемы, приведенной в задаче 2.14 (рис. 2.19), построить ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.16. Запишите передаточную функцию электронного усилителя, охваченного отрицательной обратной связью (рис. 2.20) при следующих значениях параметров: $R_3 = 20$ кОм, $C_3 = 20$ мкФ, $k_{УС} = 50$, $R_{11} = R_{12} = R_{22} = 1$ МОм.

Постройте ЛАЧХ и ЛФЧХ для данной схемы.

2.17. Запишите передаточные функции каждого элемента системы, показанной на рис. 2.21.

Приведите структурную схему системы. Запишите передаточную функцию системы и ее дифференциальное уравнение. В данной системе используется в качестве исполнительного двигателя (ИДв) асинхронный двигатель типа АД-32Б, в качестве усилителя — электронный усилитель с передаточной функцией $W_{УС}(s) = k_{УС}$. Объект регулирования (ОР) — камера, внутри которой поддерживается температура t^0, в качестве датчика используется термопара (ТП).

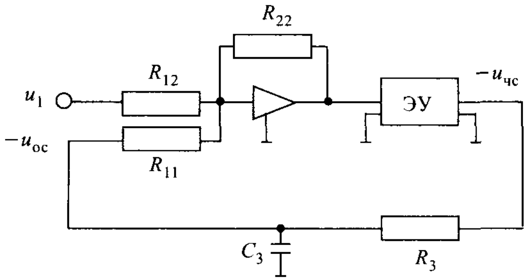


Рис. 2.20

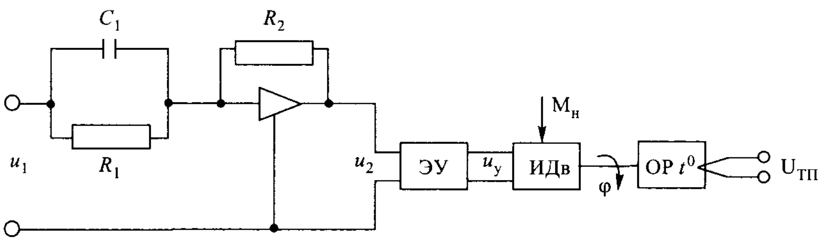


Рис. 2.21

Исходные данные: $R_1 = 20$ кОм, $C_1 = 16$ мкФ, $R_2 = 10$ кОм, $k_{ус} = 100$, $k_{ТП} = 0{,}5$, $T_{ТП} = 1$ с.

Параметры АД-32Б: $T_M = 10$ мс, $n_{xx} = 7000$ об/мин, $u_{уном} = 40$ В, $М_П = 75 \cdot 10^{-4}$ Нм.

Передаточная функция ОР: $W_о(s) = \dfrac{k_о}{1 + sT_о}$, где $k_о = 2$, $T_о = 2$ с.

Постройте для данной разомкнутой системы АФЧХ.

2.18. Для САУ угловой скоростью двигателя (рис. 2.22) определите передаточные функции всех элементов системы и составьте структурную схему. Запишите дифференциальное уравнение САУ. Составьте передаточные функции:

— разомкнутой системы,

— замкнутой относительно выходного сигнала угловой скорости ω по задающему воздействию и по возмущению;

— замкнутой системы относительно сигнала ошибки Δu по задающему воздействию и по возмущению.

На рис. 2.22 приняты следующие обозначения: Дв — объект управления — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-25-Н1/Н2-02; ЭМУ — электромашинный усилитель с поперечным полем, ОУ — обмотка управления ЭМУ; ТГ — тахогенератор типа ТГ-4; СУ — сравнивающее устройство, выполненное на двух потенциометрах $П_1$ и $П_2$; РМ — рабочий механизм, вращаемый двигателем.

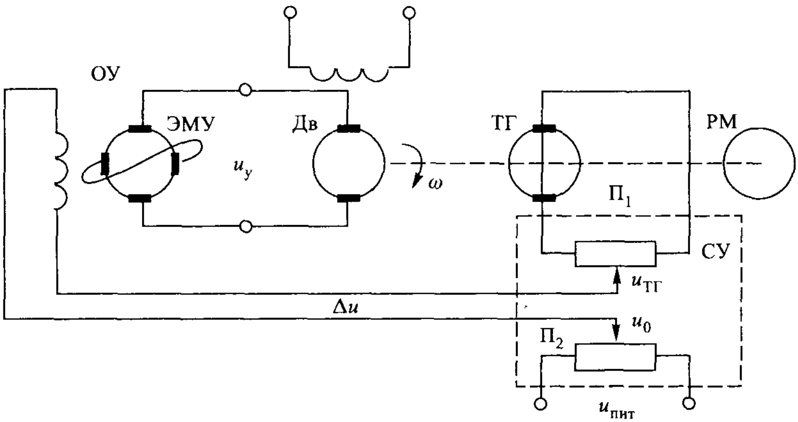


Рис. 2.22

Параметры ЭМУ: $L_У = 50$ Гн, $R_У = 3$ кОм, $L_К = 0{,}5$ Гн, $R_К = 5$ Ом, $k_{ЭМУ} = 100$.

Параметры ДПМ-25-Н1/Н2-02: $T_M = 0{,}21$ с, $T_Я = 0{,}001$ с, $М_П = 100$ гсм, $R_Я = 76{,}5$ Ом, $u_{уном} = 27$ В, $n_{ном} = 3800$ об/мин.

Крутизна выходной характеристики ТГ-4 $k_{ТГ} = 10$ мВ · мин/об.

Коэффициенты потенциометров $П_1$ и $П_2$ принять равными 1.

2.19. Для системы, рассмотренной в задаче 2.18, записать частотную передаточную функцию разомкнутой системы $W_{РАЗ}(j\omega)$, амплитудную и фазовую частотные функции. Постройте АФЧХ разомкнутой САУ и ее ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.20. На рис. 2.23 показана блок-схема следящей системы дистанционной передачи угла. В схеме приняты следующие обозначения: СУ — сравнивающее устройство, выполненное на сельсинах СД и СП, работающих в трансформаторном режиме; ЭМУ — электромашинный усилитель, ИДв — исполнительный двигатель типа ДПМ-25-Н1/Н2-04, выходным сигналом которого является угол поворота вала β; Ред — редуктор и РМ — рабочий механизм. Передаточный коэффициент СУ: $k_{су} = 20$ мВ/град.

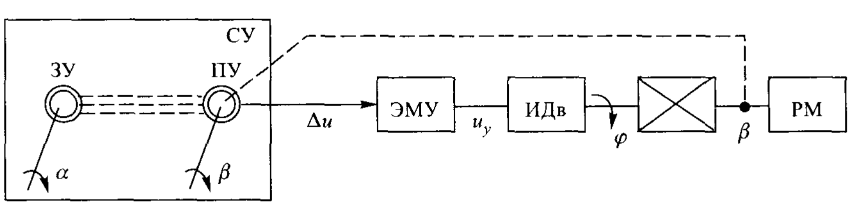


Рис. 2.23

Параметры ДПМ-25-Н1/Н2-04: $T_M = 0{,}21$ с, $T_Я = 0{,}001$ с, $M_П = 80$ Гсм, $R_Я = 107$ Ом, $u_{уном} = 27$ В, $n_{ном} = 2500$ об/мин.

Передаточное число редуктора $i = 500$.

Параметры ЭМУ принять следующими: $T_У = 0{,}035$ с, $T_К = 0{,}4$ с, $k_{ус} = 10^4$.

Требуется: определить передаточные функции всех элементов системы; составить структурную схему; записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы; записать дифференциальное уравнение системы. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы.

2.21. На рис. 2.24 приведена система автоматического регулирования температуры, которая включает в себе сравнивающее устройство (СУ), построенное по мостовой схеме, в одно из плеч которого включено термосопротивление R_t — датчик температуры; электронный усилитель (ЭУ); исполнительный двигатель (ИД) постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-30-Н1/Н2-08, редуктор (Ред), объект управления (ОУ), камера, внутри которой регулируется температура t^0, клапан (Кл) — регулирующий орган объекта, который меняет приток теплого или холодного воздуха для управления температурой в камере.

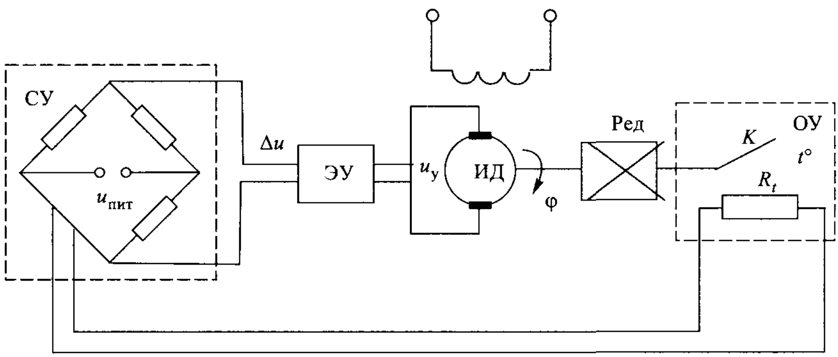


Рис. 2.24

Исходные данные:
передаточный коэффициент СУ $k_{СУ} = 2$, коэффициент усиления ЭУ $k_{ЭУ} = 30$,
параметры ДПМ-30-Н1/Н2-08: $T_М = 0{,}19$ с, $T_Я = 0{,}0012$ с, $M_П = 350$ Гсм, $R_Я = 1{,}5$ Ом, $u_{уном} = 12$ В, $n_{ном} = 9000$ об/мин;
передаточное число редуктора $i = 10^3$; передаточная функция ОУ

$$W_0(s) = \frac{k_0}{1 + sT_0}, \quad k_0 = 5, \quad T_0 = 2с.$$

Требуется: определить передаточные функции всех элементов системы, составить структурную схему, записать передаточные функции разомкнутой системы и замкнутой относительно выходного сигнала и сигнала ошибки, записать дифференциальное уравнение замкнутой системы.

2.22. Для САУ, приведенной в задаче 2.21, построить АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ в разомкнутом состоянии.

2.23. На рис. 2.25 приведена САУ скоростью двигателя. В схеме приняты следующие обозначения: Дв — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением типа ДПМ-30-Н1/Н2-08 (объект управления); ТГ — тахогенератор типа ТГ-4, ЭУ — электронный усилитель с передаточной функцией $W_{ЭУ}(s) = k_{ЭУ}$, ω — угловая скорость Дв (выходной сигнал), $U_{ТГ}$ — напряжение на выходе ТГ. При расчетах принять: $k_{ЭУ} = 20$, $R_{ТГ} = 2$ кОм, $R_{11} = 1$ кОм, $R_{12} = 1$ кОм, $R_{21} = 5$ кОм, $R_3 = 8$ кОм, $R_4 = 12$ кОм, $C_3 = 10$ мкФ.

Крутизна статической характеристики для ТГ-4: $k_{ТГ} = 10$ мВ $\times$ $\times$ мин/об. Параметры двигателя приведены в задаче 2.21.

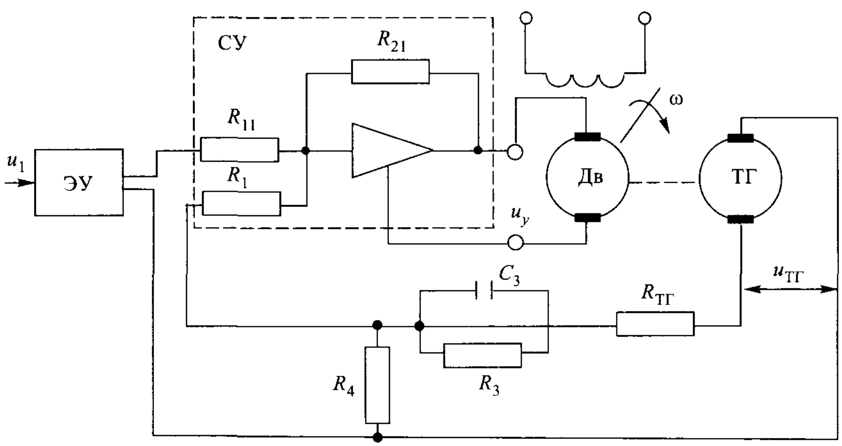


Рис. 2.25

Требуется: записать передаточные функции всех элементов системы; составить структурную схему; записать передаточные функции разомкнутой системы и замкнутой относительно выходного сигнала и сигнала ошибки по задающему сигналу и по возмущению $M_н$.

2.24. Записать частотную передаточную функцию, амплитудную и фазовую частотные функции для системы, приведенной в задаче 2.23 (рис. 2.25). Построить АФЧХ разомкнутой системы и ее ЛАЧХ и ЛФЧХ.

2.25. На рис. 2.26 показана схема САУ напряжением генератора постоянного тока. В схеме приняты следующие обозначения: Г — генератор постоянного тока (объект управления), Π_1 — потенциометр (элемент обратной связи), ЭУ — электронный усилитель, $u_{пит}$ — напряжение питания, u_o — задающий сигнал, $\Delta u = u_0 - u_{oc} = u_0 - \alpha u_Г$ — сигнал ошибки, $u_{oc} = \alpha u_Г$ — сигнал обратной связи ($u_Г$ — напряжение на выходе Г), ЭМУ — электромашинный усилитель, ОВГ — обмотка возбуждения генератора.

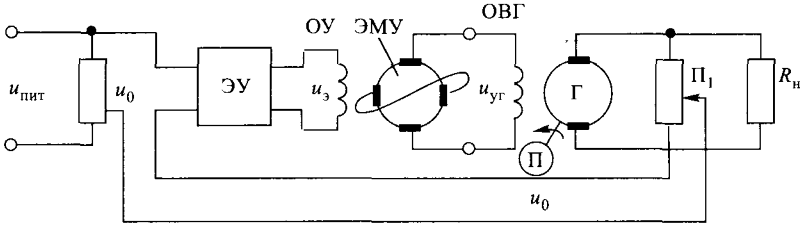


Рис. 2.26

Записать передаточные функции всех элементов САУ; составить структурную схему; записать передаточные функции разомкнутой системы и замкнутой относительно задающего воздействия U_0 и возмущения $I_я$ (тока якоря Г).

При расчетах принять: сопротивление ОВГ $R_в = 50$ Ом, индуктивность ОВГ $L_в = 30$ Гн, константу $m_Г = 100$ В/А; коэффициент усиления ЭУ $k_{эу} = 20$; параметры ЭМУ: индуктивность обмотки управления $L_у = 90$ Гн, сопротивление обмотки управления $R_у = 1{,}5$ кОм, индуктивность поперечной обмотки $L_к = 0{,}3$ Гн, сопротивление поперечной обмотки $R_н = 1{,}5$ Ом, коэффициент усиления ЭМУ $k_{эму} = 15$; коэффициент обратной связи $\alpha = 0{,}5$.

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Основное условие устойчивости: *для того чтобы непрерывная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.*

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются *левыми*, корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются *правыми*, а корни, расположенные на мнимой оси, — *нейтральными*. Поэтому основное условие устойчивости можно также сформулировать еще так: *для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми.*

Необходимое условие устойчивости. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения*

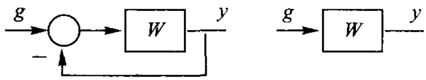
$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

были строго одного знака:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0, \ldots,\ a_n > 0 \text{ или } a_0 < 0,\ a_1 < 0, \ldots,\ a_n < 0.$$

Характеристическое уравнение. Характеристический полином $Q(\lambda)$ (левая часть характеристического уравнения $Q(\lambda) = 0$) получается из собственного оператора $Q(p)$ простой заменой оператора p на комплексную переменную λ. Если дано уравнение системы управления в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором. Если дана передаточная функция, то собственный оператор (с точностью до обозначения переменной) совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы (рис. 3.1, *а*) нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция $W(p) = R(p)/S(p)$ разомкнутой системы (рис. 3.1, *б*).



а *б*

Рис. 3.1

Ее собственный оператор $Q(p)$ равен сумме операторов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы: $Q(p) = R(p) + S(p)$.

3.1. Алгебраические критерии устойчивости

При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует, прежде всего, записав характеристическое уравнение, проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований.

Определители Гурвица. Из коэффициентов характеристического полинома

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

составим определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_5 \end{vmatrix},$$

который строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Затем, двигаясь от этих элементов вверх, помещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, вниз — в порядке их убывания. Например, при построении i-го столбца, двигаясь от элемента a_i вверх, записываются коэффициенты $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$, вниз — коэффициенты $a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots$. При этом, если индекс превышает n или принимает отрицательное значение, то вместо соответствующего коэффициента записывают нуль. Определитель Δ_n и его главные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

называют *определителями Гурвица.*

Критерий Гурвица (Hurwitz, 1895). *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определите-*

ли Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при $a_0 > 0$ *были больше нуля*:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Критерий Льенара—Шипара (Lienard, Chipard, 1914). *При выполнении необходимого условия* $a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$*для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами* $a_0 > 0$ *были положительными*:

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \ldots \tag{3.1а}$$

или

$$\Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \ldots \tag{3.1б}$$

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном n использовать условие (3.1а), а при четном n — условие (3.1б).

Выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости для $n = 1, 2, 3$:

$n = 1$: $a_0 > 0,\ a_1 > 0$;

$n = 2$: $a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$;

$n = 3$: $a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Пример 3.1. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(p) = \dfrac{k}{p^3 + 0{,}5p^2 + 4p + 1}$, $k = 0{,}5$; 2. Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

Решение. Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид

$$\lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Все коэффициенты больше нуля и определитель $\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$. Поэтому по критерию Льенара—Шипара разомкнутая система устойчива.

Характеристический полином замкнутой системы

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 1 + k.$$

Все коэффициенты этого полинома при обоих значениях k положительны, а определитель Δ_2 при $k = 0{,}5$

$$\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 1{,}5 = 0{,}5 > 0,$$

а при $k = 2$

$$\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -1 < 0.$$

Следовательно, замкнутая система при $k = 0{,}5$ устойчива, а при $k = 2$ неустойчива.

3.1. Исследовать устойчивость систем управления, у которых характеристическое уравнение имеет следующий вид:

а) $\lambda^4 + 3\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 4 = 0$; б) $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$;
в) $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 11\lambda^2 + 19\lambda + 18 = 0$; г) $\lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 19\lambda + 18 = 0$;
д) $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 8 = 0$; е) $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 8 = 0$;
ж) $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 4\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$; з) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 3y = 0$;
и) $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 7\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$; к) $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0$.

3.2. Исследовать устойчивость систем управления, которые описываются следующими уравнениями (y — выход, u — вход):

а) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 3\dfrac{d^3y}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = \dfrac{du}{dt} + 3u$;

б) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 3\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 2y = 2\dfrac{du}{dt} + u$;

в) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 4\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 3\dfrac{du}{dt} + u$;

г) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 4\dfrac{d^3y}{dt^3} + 7\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 4y = 3u$;

д) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 4\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 4y = 5\dfrac{du}{dt} + 3u$;

е) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 4\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9\dfrac{dy}{dt} + 7y = 2\dfrac{du}{dt} + 5u$;

ж) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 5\dfrac{d^3y}{dt^3} + 8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 8y = 4u$;

з) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 5\dfrac{d^3y}{dt^3} + 8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 14 = 6\dfrac{du}{dt} + 3u$;

и) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 5\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 5\dfrac{du}{dt} + 3u$;

к) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 5\dfrac{d^3y}{dt^3} + 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 10y = 7u$.

3.3. Исследовать устойчивость замкнутых систем при следующих передаточных функциях разомкнутой системы:

а) $\dfrac{2s^2 + 3s + 1}{s^4 + 4s^3 + s^2 + 2s + 3}$; б) $\dfrac{3s^2 + 4s + 3}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s - 1}$;

в) $\dfrac{4s^2 + 3s + 1}{s^4 + 4s^3 + s^2 + s + 3}$; г) $\dfrac{6s^2 + 9s + 9}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 10s + 9}$;

д) $\dfrac{3s^2 + 10s + 9}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 9s + 9}$; е) $\dfrac{2s^2 + 5s + 2}{s^4 + 4s^3 + 3s^2 + s + 2}$;

ж) $\dfrac{3s^2 + 5s + 3}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 4s + 4}$; з) $\dfrac{7s^2 + 3s + 1}{s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 4s + 2}$;

и) $\dfrac{s^2 + 3s + 2}{s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 4s + 1}$; к) $\dfrac{2s^2 + 3s + 5}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 2s + 1}$.

3.2. Частотные критерии устойчивости

Критерий Найквиста (Nyqvist, 1932). *Для того чтобы замкнутая система (с отрицательной обратной связью) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала $l/2$ раз в положительном направлении точку $(-1, j0)$, где l — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

Если разомкнутая система устойчива ($l = 0$), для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.

Пример 3.2. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

а) $W(p) = \dfrac{5}{p-1}$; б) $W(p) = \dfrac{10}{(p+1)^3}$.

Решение. Частотные передаточные функции и вещественные и мнимые частотные функции имеют вид:

а) $W(j\omega) = \dfrac{5}{j\omega - 1} = \dfrac{5(-j\omega - 1)}{1+\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega)$,

$$U(\omega) = -\frac{5}{1+\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{5\omega}{1+\omega^2};$$

б) $W(j\omega) = \dfrac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \dfrac{10[1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)]}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$,

$$U(\omega) = -\frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{10\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}.$$

Для построения АФЧХ нужно определить координаты точек ее пересечения с осями координат и соединить эти точки плавной кривой. Необходимые расчетные данные приведены в таблице 3.1. На основе этих данных построены АФЧХ (рис. 3.2).

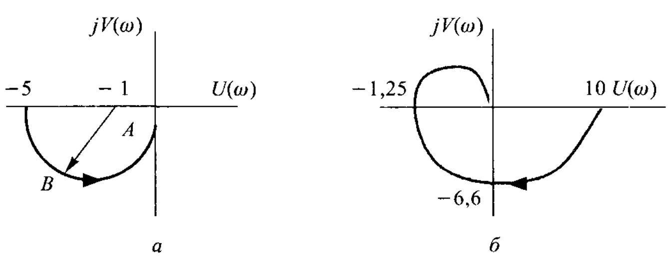


Рис. 3.2

Таблица 3.1

Расчетные данные к примеру 3.4

ω	0	$0<\omega<\infty$	∞
$U(\omega)$	-5	<0	0
$V(\omega)$	0	<0	0

Расчетные данные к примеру 3.2. б)

ω	0	$0<\omega<1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}<\omega<\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\omega>\sqrt{3}$	∞
$U(\omega)$	10	>0	0	<0	$-1{,}25$	<0	0
$V(\omega)$	0	<0	$-6{,}6$	<0	0	>0	0

В случае а) замкнутая система устойчива, так как $l = 1$ и АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$ $1/2$ раз в положительном направлении (рис. 3.2, *а*). В случае б) замкнутая система неустойчива, так как разомкнутая система устойчива ($l = 0$), а АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$ (рис. 3.2, *б*).

Случай наличия нулевых корней. Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т. е. ее передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{p^{\nu}} W_0(p), \quad W_0(0) = 1, \quad \nu \geqslant 1,$$

то АФЧХ при $\omega \to 0$ уходит в бесконечность (рис. 3.3). В этом случае АФЧХ дополняются дугой $-\nu(\pi/2)$ окружности большого радиуса (на рис. 3.3 — пунктирная линия). И для устойчивости замкнутой системы должна охватывать $l/2$ раз или при $l = 0$ не охватывать точку $(-1, j0)$ дополненная АФЧХ.

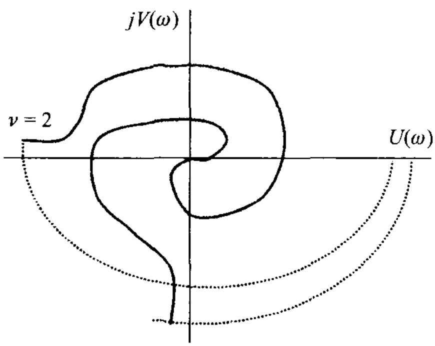


Рис. 3.3

3.4. По критерию Найквиста исследовать устойчивость замкнутых систем, у которых передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^3+2s^2+s+1}$; б) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^3+3s^2+s+2}$;

в) $W(s) = \dfrac{s+4}{s^3+2s^2+s+1}$; г) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^3+3s^2+s}$;

д) $W(s) = \dfrac{s+2}{s^3+0{,}5s^2+s+1}$; е) $W(s) = \dfrac{s+3}{s^3+6s^2+3s+2}$;

ж) $W(s) = \dfrac{s+3}{s^3+2s^2+3s}$; з) $W(s) = \dfrac{s+10}{s^3+3s^2+2s}$;

и) $W(s) = \dfrac{s+5}{s^3+2s^2+s}$; к) $W(s) = \dfrac{s+5}{s^3+2s^2+3s}$;

3.3. Устойчивость систем с чистым запаздыванием

Рассмотрим замкнутую систему управления, передаточная функция разомкнутой системы которой имеет вид

$$W_\tau(s) = W(s)e^{-\tau s}, \quad W(s) = \frac{R(s)}{S(s)}, \tag{3.2}$$

где $R(s)$, $S(s)$ — полиномы степени m и n соответственно ($m \leqslant n$). Для исследования устойчивости такой системы может быть использован критерий Найквиста.

Для того чтобы замкнутая система, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (3.2), *была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку* $(-1, j0)$ *в положительном направлении* $l/2$*раз, где* l *— число правых нулей характеристического полинома разомкнутой системы* $S(s)$.

Замкнутая система со звеном чистого запаздывания, будучи устойчивой при малом τ, с ростом τ ее АФЧХ в разомкнутом состоянии может приближаться к точке $(-1, j0)$ и при некотором значении $\tau = \tau_к$ пересечь ее, и замкнутая система окажется на границе устойчивости. Запаздывание $\tau_к$ называют *критическим*.

Частотная передаточная функция и амплитудная и фазовая частотные функции разомкнутой системы имеют вид

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\tau\omega}, \quad W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{S(j\omega)},$$

$$|W_\tau(j\omega)| = |W(j\omega)|, \quad \varphi_\tau(\omega) = \varphi(\omega) - \tau\omega,$$

где $\varphi_\tau(\omega) = \arg W_\tau(j\omega)$, $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$. Отсюда видно, что появление чистого запаздывания не меняет модуль, а только вносит дополнительный отрицательный фазовый сдвиг $-\omega\tau$, что приводит к закручиванию АФЧХ (рис. 3.4).

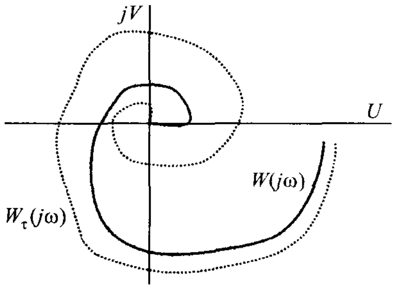


Рис. 3.4

Критическое запаздывание находится из условий

$$|W(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) - \tau_k\omega = -\pi. \tag{3.3}$$

Решив эту систему, найдем критическое запаздывание и частоту $\omega_к$, которая называется *критической частотой*.

Пример 3.3. Определить критическое запаздывание и критическую частоту для системы, у которой передаточная функция в разомкнутом состоянии $W_\tau(s) = \dfrac{\sqrt{2}}{s+1}e^{-s\tau}$.

Решение. Без запаздывания замкнутая система устойчива. Условие (3.3) принимает вид

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1, \quad -\operatorname{arctg}\omega - \omega\tau = -\pi.$$

Отсюда получаем $\omega_k = 1$ и $\tau_k = 3\pi/4$.

3.5. Определить критическое запаздывание и критическую частоту для системы, у которой передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $\dfrac{2}{0{,}25s^2+0{,}1s+1}e^{-\tau s}$; б) $\dfrac{3}{0{,}25s^2+0{,}2s+1}e^{-\tau s}$;

в) $\dfrac{4}{0{,}25s^2+0{,}3s+1}e^{-\tau s}$; г) $\dfrac{5}{0{,}25s^2+0{,}4s+1}e^{-\tau s}$;

д) $\dfrac{6}{0{,}25s^2+0{,}5s+1}e^{-\tau s}$; е) $\dfrac{1{,}1}{0{,}25s^2+0{,}6s+1}e^{-\tau s}$;

ж) $\dfrac{1{,}3}{0{,}25s^2+0{,}7s+1}e^{-\tau s}$; з) $\dfrac{1{,}5}{0{,}25s^2+0{,}8s+1}e^{-\tau s}$;

и) $\dfrac{1{,}4}{0{,}25s^2+0{,}9s+1}e^{-\tau s}$; к) $\dfrac{1{,}6}{0{,}25s^2+0{,}9s+1}e^{-\tau s}$.

3.4. Определение области устойчивости

Структура системы определяется составом элементов (звеньев) и связями между ними. При заданной структуре какие-либо параметры могут быть не фиксированными, т. е. их можно изменять. Такие параметры называют *варьируемыми*. *Областью устойчивости* в пространстве параметров называют множество всех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива.

Если существует область устойчивости в пространстве параметров, то система называется *структурно устойчивой* (*относительно заданных варьируемых параметров*). В противном случае система называется *структурно неустойчивой* (*относительно заданных варьируемых параметров*).

Область устойчивости можно определить с помощью алгебраических критериев устойчивости. Рассмотрим это на примере.

Пример 3.4. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = k/(Tp+1)^3$. Определить область устойчивости замкнутой системы на плоскости параметров (k, T).

Решение. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = T^3\lambda^3 + 3T^2\lambda^2 + 3T\lambda + 1 + k.$$

По критерию Льенара—Шипара имеем

$$T^3 > 0, \quad 3T^2 > 0, \quad 3T > 0, \quad 1 + k > 0,$$

$$\Delta_2 = 3T^2 \cdot 3T - T^3 \cdot (1 + k) = T^3(8 - k) > 0.$$

Очевидно, эти неравенства будут выполнены, если

$$T > 0, \quad -1 < k < 8.$$

Эта система неравенств определяет область устойчивости.

3.6. Определить на плоскости параметров α и β область устойчивости (ОУ) замкнутой системы при условии, что ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $\dfrac{\alpha s + \beta}{s^3 + s^2 + 3s}$; б) $\dfrac{\alpha s + \beta}{4s^3 + 2s^2 + s}$; в) $\dfrac{\alpha s + \beta}{s^3 + 4s^2 + 2s}$; г) $\dfrac{\alpha s + \beta}{2s^3 + 4s^2 + 3s}$.

3.7. Определить на плоскости параметров α и β область устойчивости (ОУ) замкнутой системы при условии, что ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $\dfrac{\alpha s + 4}{\beta s^3 + 2s^2 + 3s}$; б) $\dfrac{\alpha s + 3}{\beta s^3 + 6s^2 + 2s}$; в) $\dfrac{\alpha s + 6}{\beta s^3 + 6s^2 + 3s}$; г) $\dfrac{\alpha s + 2}{\beta s^3 + 4s^2 + 3s}$.

3.8. Определить на плоскости параметров α и β область устойчивости (ОУ) замкнутой системы при условии, что ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:
а) $\dfrac{s+\alpha}{3s^3+3s^2+\beta s}$; б) $\dfrac{s+\alpha}{2s^3+4s^2+\beta s}$; в) $\dfrac{s+\alpha}{3s^3+3s^2+\beta s}$; г) $\dfrac{3s+\alpha}{2s^3+2s^2+\beta s}$.

3.9. Определить на плоскости параметров α и β область устойчивости (ОУ) замкнутой системы при условии, что ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:
а) $\dfrac{2s+\alpha}{2s^3+\beta s^2+4s}$; б) $\dfrac{4s+\alpha}{3s^3+\beta s^2+2s}$; в) $\dfrac{3s+\alpha}{s^3+\beta s^2+3s}$; г) $\dfrac{s+\alpha}{s^3+\beta s^2+2s}$.

3.5. Робастная устойчивость

Рассмотрим характеристический полином

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Введем в рассмотрение $(n+1)$-мерный вектор $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве коэффициентов задано множество A $(A \subset R^{n+1})$. Полином $Q(\lambda)$ называется *робастно устойчивым* или *робастно устойчивым в* A, если он является устойчивым (т. е. все его нули являются левыми) при любых значениях коэффициентов a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ из множества A $(\mathbf{a} \in A)$. Система называется *робастно устойчивой* или *робастно устойчивой на множестве* A, если ее характеристический полином является робастно устойчивым полиномом на множестве A.

Полиномы Харитонова. Пусть множество A является (гипер)параллелепипедом:

$$A = \{a : \underline{a}_i \leqslant a_i \leqslant \overline{a}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n\} \tag{3.4}$$

Здесь $\underline{a}_i$ и $\overline{a}_i$ — минимальное и максимальное значения коэффициента a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Полиномы $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, $Q_3(\lambda)$, и $Q_4(\lambda)$ со следующими коэффициентами (коэффициенты выписаны в порядке убывания индексов)

$$Q_1(\lambda):\quad \overline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}, \overline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \ldots \tag{3.5а}$$

$$Q_2(\lambda):\quad \overline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \overline{a}_{n-4}, \overline{a}_{n-5}, \ldots \tag{3.5б}$$

$$Q_3(\lambda):\quad \underline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \overline{a}_{n-5}, \ldots \tag{3.5в}$$

$$Q_4(\lambda):\quad \underline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \ldots \tag{3.5г}$$

называются *полиномами Харитонова*.

Необходимое условие робастной устойчивости. Так как при робастной устойчивости в параллелепипеде (3.4) должны быть устойчивыми характеристические полиномы при всех значениях коэффициентов из этого параллелепипеда, необходимо, чтобы был устойчивым характеристический полином при значениях коэффициентов $a_i = \underline{a}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Поэтому для робастной устойчивости на множестве (3.4) необходимо, чтобы при $\underline{a}_0 > 0$ выполнялось условие

$$\underline{a}_0 > 0,\ \underline{a}_1 > 0, \ldots,\ \underline{a}_n > 0. \tag{3.6}$$

Теорема Харитонова (1978). *Для того чтобы система с характеристическим полиномом* $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda + \ldots + a_n$ *была робастно устойчива на множестве* (3.4), *необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивыми.*

В случае, когда $n = 1, 2, 3, 4, 5$, нет необходимости проверять устойчивость всех четырех полиномов Харитонова. При $n = 1, 2$ необходимое условие (3.6) является и достаточным. В случае выполнения необходимого условия робастной устойчивости для того, чтобы система была робастно устойчива на множестве (3.4), необходимо и достаточно:

а) при $n = 3$ был устойчивым полином Харитонова $Q_1(\lambda)$;

б) при $n = 4$ были устойчивыми полиномы Харитонова $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$;

в) при $n = 5$ — полиномы Харитонова $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$ и $Q_3(\lambda)$.

Пример 3.5. Исследовать робастную устойчивость системы, характеристический полином которой имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0, \quad 4 \leqslant \alpha \leqslant 5,\ 2 \leqslant \beta \leqslant 3,\ 1 \leqslant \gamma \leqslant 2.$$

Решение. В данном случае

$$A = \{\mathbf{a} : a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ 4 \leqslant a_2 \leqslant 5,\ 2 \leqslant a_3 \leqslant 3,\ 1 \leqslant a_4 \leqslant 2\}$$

$$\underline{a}_0 = \overline{a}_0 = 1,\ \underline{a}_1 = \overline{a}_1 = 3,\ \underline{a}_2 = 4,\ \overline{a}_2 = 5,$$

$$\underline{a}_3 = 2,\ \overline{a}_3 = 3,\ \underline{a}_4 = 1,\ \overline{a}_4 = 2.$$

Так как $n = 4$ и выполняется необходимое условие робастной устойчивости, достаточно рассмотреть полиномы Харитонова $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)Q_2(\lambda)$.

Из (3.5а) и (3.5б) имеем

$$Q_1(\lambda)\colon \overline{a}_4,\ \underline{a}_3,\ \underline{a}_2,\ \overline{a}_1,\ \overline{a}_0; \qquad Q_2(\lambda)\colon \overline{a}_4,\ \overline{a}_3,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_1,\ \overline{a}_0$$

или

$$Q_1(\lambda) = \overline{a}_0\lambda^4 + \overline{a}_1\lambda^3 + \underline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda + \overline{a}_4 = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

$$Q_2(\lambda) = \overline{a}_0\lambda^4 + \underline{a}_1\lambda^3 + \underline{a}_2\lambda^2 + \overline{a}_3\lambda + \overline{a}_4 = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Необходимое условие устойчивости для обоих полиномов выполняется. Для полинома $Q_1(\lambda)$ определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \overline{a}_1 & \underline{a}_3 & 0 \\ \overline{a}_0 & \underline{a}_2 & \overline{a}_4 \\ 0 & \overline{a}_1 & \underline{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(4\cdot 2 - 3\cdot 2) - 1(2\cdot 2 - 3\cdot 0) = 2 > 0,$$

а для полинома $Q_2(\lambda)$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 & \overline{a}_3 & 0 \\ \overline{a}_0 & \underline{a}_2 & \overline{a}_4 \\ 0 & \underline{a}_1 & \overline{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3(4\cdot 3 - 3\cdot 2) - 1(2\cdot 2 - 3\cdot 0) = 2 > 0.$$

На основе критерия Льенара—Шипара $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ являются устойчивыми полиномами. Следовательно, система робастно устойчива.

Пример 3.6. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{(T^2p^2 + 2\xi p + 1)p}, \quad 0{,}1 \leqslant k \leqslant 1;\ 0{,}1 \leqslant T \leqslant 0{,}5;\ 0{,}1 \leqslant \xi \leqslant 0{,}5.$$

Решение. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

где $a_0 = T^2$, $a_1 = 2\xi$, $a_2 = 1$, $a_3 = k$. Коэффициенты характеристического полинома удовлетворяют следующим условиям:

$$0{,}01 \leqslant a_0 \leqslant 0{,}25, \quad 0{,}2 \leqslant a_1 \leqslant 1, \quad a_2 = 1, \quad 0{,}1 \leqslant a_3 \leqslant 1.$$

Следовательно, в принятых выше обозначениях имеем

$$\underline{a}_0 = 0{,}01;\ \overline{a}_0 = 0{,}25;\ \underline{a}_1 = 0{,}2;\ \overline{a}_1 = 1;\ \underline{a}_2 = \overline{a}_2 = 1;\ \underline{a}_3 = 0{,}1;\ \overline{a}_3 = 1.$$

Необходимое условие робастной устойчивости выполняется. Так как $n = 3$, для робастной устойчивости необходимо и достаточно, чтобы полином $Q_1(\lambda)$ был устойчивым. Из (3.5а)

$$Q_1(\lambda) = \overline{a}_3 + \underline{a}_2\lambda + \underline{a}_1\lambda^2 + \overline{a}_0\lambda^3 = 1 + \lambda + 0{,}2\lambda^2 + 0{,}25\lambda^3.$$

Определитель Гурвица $\Delta_2 = 1 \cdot 0{,}2 - 0{,}25 < 0$. Поэтому замкнутая система не будет робастно устойчива. Теорема Харитонова справедлива при условии, что коэффициенты характеристического полинома изменяются на заданных интервалах независимо друг от друга. В противном случае устойчивость полиномов Харитонова является только достаточным условием робастной устойчивости.

Пример 3.7. Исследовать устойчивость замкнутой системы при всевозможных заданных значениях параметров при условии, что передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^3}, \quad 0{,}5 \leqslant k \leqslant 2, \quad 1 \leqslant T \leqslant 2.$$

Решение. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

где

$$a_0 = T^3, \quad a_1 = 3T^2, \quad a_2 = 3T, \quad a_3 = 1 + k.$$

Для граничных значений коэффициентов характеристического полинома имеем

$$\underline{a}_0 = 1,\ \overline{a}_0 = 8,\ \underline{a}_1 = 3,\ \overline{a}_1 = 12,\ \underline{a}_2 = 3,\ \overline{a}_2 = 6,\ \underline{a}_3 = 1{,}5,\ \overline{a}_3 = 3.$$

Необходимое условие робастной устойчивости выполняется. И так как $n = 3$, достаточно рассмотреть полином $Q_1(\lambda)$ (3.5а):

$$Q_1(\lambda) = \overline{a}_3 + \underline{a}_2\lambda + \underline{a}_1\lambda^2 + \overline{a}_0\lambda^3 = 3 + 3\lambda + 3\lambda^2 + 8\lambda^3.$$

Все коэффициенты больше нуля, но определитель Гурвица

$$\Delta_2 = \underline{a}_2\underline{a}_1 - \overline{a}_3\overline{a}_0 = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 8 < 0.$$

Следовательно, полином $Q_1(\lambda)$ не является устойчивым, т. е. условие робастной устойчивости не выполняется. Однако, в данном случае коэффициенты характеристического полинома не являются независимыми и теорема Харитонова определяет только достаточное условие робастной устойчивости. В действительности, как покажем, замкнутая система устойчива при всевозможных заданных значениях параметров.

При положительных значениях параметров необходимое условие устойчивости выполняется и определитель Гурвица

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_2 = 3T^2 3T - T^3(1 + k) = T^3(8 - k)$$

будет положительным при $k < 8$.

Следовательно, система устойчива при любых значениях параметров из области, определяемой неравенствами $T > 0$, $0 < k < 8$. Очевидно, заданные значения параметров принадлежат этой области.

3.10. Исследовать робастную устойчивость системы управления с характеристическим полиномом

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

при следующих значениях коэффициентов:

а)	$1 \leqslant a_1 \leqslant 2$,	$2 \leqslant a_2 \leqslant 3$,	$a_3 = 1$,	$0{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 1$;
б)	$2 \leqslant a_1 \leqslant 3$,	$1 \leqslant a_2 \leqslant 2$,	$0{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 1$,	$a_4 = 0{,}1$;
в)	$3 \leqslant a_1 \leqslant 4$,	$7 \leqslant a_2 \leqslant 8$,	$a_3 = 1$,	$1 \leqslant a_4 \leqslant 1{,}5$;
г)	$1 \leqslant a_1 \leqslant 2$,	$15 \leqslant a_2 \leqslant 16$,	$0{,}1 \leqslant a_3 \leqslant 0{,}5$,	$a_4 = 4$;
д)	$4 \leqslant a_1 \leqslant 5$,	$5 \leqslant a_2 \leqslant 6$,	$a_3 = 2$,	$1 \leqslant a_4 \leqslant 2$;
е)	$3 \leqslant a_1 \leqslant 5$,	$2 \leqslant a_2 \leqslant 4$,	$1 \leqslant a_3 \leqslant 1{,}5$,	$a_4 = 0{,}2$;
ж)	$2{,}5 \leqslant a_1 \leqslant 3{,}5$,	$2{,}5 \leqslant a_2 \leqslant 3$,	$a_3 = 3$,	$a_4 = 0{,}5$;
з)	$3 \leqslant a_1 \leqslant 3{,}5$,	$4 \leqslant a_2 \leqslant 5$,	$1{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 2$,	$2 \leqslant a_4 \leqslant 5$;
и)	$2 \leqslant a_1 \leqslant 3{,}5$,	$8 \leqslant a_2 \leqslant 9$,	$2 \leqslant a_3 \leqslant 2{,}5$,	$1 \leqslant a_4 \leqslant 2$;
к)	$1 \leqslant a_1 \leqslant 3$,	$7 \leqslant a_2 \leqslant 8$,	$a_3 = 5$,	$2{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 3$.

3.11. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W = \frac{b_0 s + b_1}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}.$$

Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы при следующих значениях параметров:

а) $2 \leqslant a_1 \leqslant 3$, $3 \leqslant a_2 \leqslant 4$, $1{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 2{,}5$, $b_0 = 1$, $0{,}1 \leqslant a_4 \leqslant 0{,}2$, $b_1 = 0{,}5$;

б) $3 \leqslant a_1 \leqslant 4$, $10 \leqslant a_2 \leqslant 15$, $0{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 1$, $b_0 = 2$, $1{,}2 \leqslant a_4 \leqslant 1{,}4$, $b_1 = -1$;

в) $1 \leqslant a_1 \leqslant 4$, $7 \leqslant a_2 \leqslant 9$, $1{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 2{,}5$, $b_0 = -1$, $0{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 1$, $b_1 = 0{,}5$;

г) $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$, $8 \leqslant a_2 \leqslant 9$, $0{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 1$, $b_0 = 1$, $1{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 2$, $b_1 = -1$;

д) $2 \leqslant a_1 \leqslant 3$, $6 \leqslant a_2 \leqslant 8$, $1 \leqslant a_3 \leqslant 2$, $b_0 = 0{,}5$, $0{,}1 \leqslant a_4 \leqslant 0{,}5$, $b_1 = 0{,}5$;

е) $05 \leqslant a_1 \leqslant 1$, $5 \leqslant a_2 \leqslant 6$, $1 \leqslant a_3 \leqslant 3$, $b_0 = -0{,}5$, $0{,}2 \leqslant a_4 \leqslant 0{,}4$, $b_1 = 0{,}4$;

ж) $0{,}6 \leqslant a_1 \leqslant 0{,}8$, $4 \leqslant a_2 \leqslant 5$, $2 \leqslant a_3 \leqslant 4$, $b_0 = -1$, $0{,}3 \leqslant a_4 \leqslant 0{,}7$, $b_1 = 0{,}2$;

з) $0{,}9 \leqslant a_1 \leqslant 1{,}5$, $3 \leqslant a_2 \leqslant 5$, $0{,}2 \leqslant a_3 \leqslant 0{,}5$, $b_0 = 0{,}5$, $0{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 1$, $b_1 = 0{,}5$;

и) $5 \leqslant a_1 \leqslant 6$, $2{,}5 \leqslant a_2 \leqslant 3{,}5$, $3 \leqslant a_3 \leqslant 4$, $b_0 = -1{,}5$, $2{,}5 \leqslant a_4 \leqslant 3$, $b_1 = -1{,}5$;

к) $4 \leqslant a_1 \leqslant 5$, $3{,}5 \leqslant a_2 \leqslant 4$, $2{,}5 \leqslant a_3 \leqslant 4.5$, $b_0 = -2$, $3 \leqslant a_4 \leqslant 4$, $b_1 = -2{,}5$.

Глава 4

КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Показатели качества делятся на *показатели качества в переходном режиме* и *показатели качества в установившемся режиме.*

4.1. Показатели качества в переходном режиме

Показатели качества в переходном режиме делятся на *прямые* и *косвенные*. Последние делятся на *корневые*, *частотные* и *интегральные*.

Прямыми показателями качества называются показатели, которые получаются непосредственно по переходной характеристике. Из прямых показателей качества наиболее часто используют время регулирования и перерегулирование.

Временем регулирования t_p называют минимальное время, по истечении которого отклонение выходной величины от установившегося значения $h(\infty)$ не превышает некоторой заданной величины Δ (обычно принимают $\Delta = (0{,}05 \div 0{,}1)h(\infty)$), *перерегулированием* σ — максимальное отклонение переходной функции от установившегося значения $h(\infty)$, выраженное в процентах по отношению к $h(\infty)$:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\%$$

где h_m — максимальное значение переходной функции.

Корневые показатели качества. В качестве корневых показателей используют степень устойчивости и колебательность (степень колебательности). *Степенью устойчивости* η *системы управления* (или характеристического полинома) называют расстояние от мнимой оси до ближайшего корня ее характеристического уравнения на комплексной плоскости, или

$$\eta = \min_{\nu} |\operatorname{Re} \lambda_\nu| = \min_{\nu}(-\operatorname{Re} \lambda_\nu) = -\max_{\nu} \operatorname{Re} \lambda_\nu;$$

степень колебательности системы (или ее характеристического полинома) можно определить следующим образом:

$$\mu = \max_{\nu} \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_\nu}{\operatorname{Re} \lambda_\nu} \right| \mu.$$

Здесь λ_ν — корни характеристического уравнения.

При исследовании степени устойчивости удобно воспользоваться следующим преобразованием. Полином

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n,$$

преобразуем, сделав подстановку $\lambda = q - c$. Тогда получим:

$$Q_n(q) = Q(\lambda)|_{\lambda=q-c} = a_{0n}q^n + a_{1n}q^{n-1} + \ldots + a_{nn},$$

где

$$a_{kn} = \frac{1}{(n-k)!} \left. \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}} \right|_{\lambda=-c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.1)$$

Преобразование $\lambda = q - c$ соответствует сдвигу мнимой оси влево и преобразованный полином $Q_n(q)$ будет устойчивым полиномом, если $c < \eta$ (η — степень устойчивости исходного полинома), и неустойчивым полином, если с $> \eta$. Поэтому исследование степени устойчивости полинома $Q(\lambda)$сводится к исследованию устойчивости преобразованного полинома $Q_n(q)$.

Пример 4.1. Задан характеристический полином

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Исследовать, превышает ли степень устойчивости заданного полинома единицу.

Решение. Убедимся сначала, что рассматриваемый полином является устойчивым полиномом, для чего вычислим определитель Гурвица 3-го порядка, составленный из его коэффициентов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(15-2) - 9 = 17 > 0.$$

Полином $Q(\lambda)$ является устойчивым. Сделаем подстановку $\lambda = q - 1$ и вычислим коэффициенты преобразованного полинома. В данном случае $n = 4$ и $c = 1$. Поэтому из (4.1) имеем:

$$a_{n4} = Q(\lambda)|_{\lambda=-1} = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1|_{\lambda=-1} = 2,$$

$$a_{n3} = \left. \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-1} = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 3|_{\lambda=-1} = -5.$$

Без дальнейших вычислений ясно, что необходимое условие устойчивости преобразованного полинома не выполняется, и он является неустойчивым полиномом. Следовательно, степень устойчивости $\eta < 1$.

Пример 4.2. Определить, превышает ли единицу степень устойчивости характеристического полинома

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2.$$

Решение. Сначала проверим устойчивость заданного полинома. Для этого достаточно проверить знак определителя Гурвица 2-го порядка:

$$\Delta_2 = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 > 0.$$

Полином $Q(\lambda)$ устойчив. Произведем подставку $\lambda = q - 1$ и найдем коэффициенты преобразованного полинома. В данном случае $n = 3$ и $c = 1$. Поэтому из (4.1) имеем

$$\begin{aligned}
a_{n3} &= Q(\lambda\,)|_{\lambda=-1} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2|_{\lambda=-1} = 0,\\
a_{n2} &= \left.\frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=-1} = 3\lambda^2 + 6\lambda + 4|_{\lambda=-1} = 1,\\
a_{n1} &= \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=-1} = \frac{1}{2}(6\lambda + 6\,)|_{\lambda=-1} = 0,\\
a_{n0} &= \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3}\right|_{\lambda=-1} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.
\end{aligned}$$

Преобразованное характеристическое уравнение имеет вид

$$Q_n(q) = q^3 + q = 0.$$

Все корни этого уравнения ($q_1 = 0$, $q_{2,3} = \pm j$) располагаются на мнимой оси. Следовательно, степень устойчивости рассматриваемой системы $\eta = 1$.

4.1. Исследовать, обладают ли системы управления с характеристическими уравнениями, приведенными ниже, степенью устойчивости $\eta \geqslant 1$.

а) $\lambda^3 + 3{,}1\lambda^2 + 2{,}3\lambda + 0{,}2 = 0$; б) $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$;
в) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10 = 0$; г) $\lambda^3 + 4{,}5\lambda^2 + 6{,}5\lambda + 3 = 0$;
д) $\lambda^3 + 3{,}2\lambda^2 + 2{,}6\lambda + 0{,}4 = 0$; е) $\lambda^3 + 3{,}5\lambda^2 + 3{,}5\lambda + 1 = 0$;
ж) $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$; з) $\lambda^3 + 7{,}5\lambda^2 + 17\lambda + 12 = 0$;
и) $\lambda^3 + 5{,}1\lambda^2 + 6{,}5\lambda + 0{,}6 = 0$; к) $\lambda^3 + 5{,}2\lambda^2 + 7\lambda + 1{,}2 = 0$.

4.2. Исследовать, обладают ли системы управления с характеристическими уравнениями, приведенными ниже, степенью устойчивости $\eta \geqslant 1$.

а) $\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24 = 0$;

б) $\lambda^4 + 9{,}5\lambda^3 + 30{,}5\lambda^2 + 37\lambda + 12 = 0$;
в) $\lambda^4 + 11\lambda^3 + 44\lambda^2 + 76\lambda + 48 = 0$;
г) $\lambda^4 + 9{,}2\lambda^3 + 27{,}8\lambda^2 + 29{,}2\lambda + 4{,}8 = 0$;
д) $\lambda^4 + 9\lambda^3 + 30\lambda^2 + 44\lambda + 24 = 0$;
е) $\lambda^4 + 7{,}1\lambda^3 + 16{,}7\lambda^2 + 13{,}6\lambda + 1{,}2 = 0$;
ж) $\lambda^4 + 5{,}1\lambda^3 + 8{,}5\lambda^2 + 4{,}8\lambda + 0{,}4 = 0$;
з) $\lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6 = 0$;
и) $\lambda^4 + 5{,}5\lambda^3 + 9{,}5\lambda^2 + 6{,}5\lambda + 1{,}5 = 0$;
к) $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 23\lambda^2 + 28\lambda + 12 = 0$.

Интегральные показатели качества. В качестве интегральных оценок наиболее часто используют *интегральную квадратическую ошибку* (*оценку*)

$$J_{20} = \int_0^\infty e_п^2(t)dt,$$

и *обобщенные интегральные квадратические оценки*

$$J_{2k} = \int_0^\infty \left[e_п^2(t) + \tau_1^2\dot{e}_п^2(t) + \ldots + \tau_k^{2k}\overset{(k)}{e}_п{}^2(t)\right]dt, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Здесь $e_п(t)$ — переходная составляющая ошибки: $e_п(t) = e(t) - e_\infty$, e_∞ — установившаяся ошибка; τ_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ — весовые константы.

Вычисление интегральных квадратических оценок. Из равенства *Парсеваля*

$$\int_0^\infty x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |X(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $X(s) = L\{x(t)\}$, имеем

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |E_п(j\omega)|^2 d\omega,$$

$$J_{2k} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^\infty |E_п(j\omega)|^2 d\omega + \tau_1^2\int_{-\infty}^\infty \left|\dot{E}_п(j\omega)\right|^2 d\omega + \ldots + \tau_k^{2k}\int_{-\infty}^\infty \left|\overset{(k)}{E}_п(j\omega)\right|^2 d\omega\right],$$

где

$$E_п(s) = L\{e_п(t)\},\ \dot{E}_п(s) = L\{\dot{e}_п(t)\},\ldots,\ \overset{(k)}{E}_п(s) = L\left\{\overset{(k)}{e}_п(t)\right\}.$$

Так как $\dot{E}_п(s) = L\{\dot{e}_п(t)\} = sE_п(0) - e_п(0)$, формулу для J_{21} можно записать в виде

$$J_{21} = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |E_п(j\omega)|^2\, d\omega + \tau^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_п(j\omega) - e_п(0)|^2\, d\omega\right].$$

Определение интегральных квадратических показателей сводится к вычислению интеграла вида

$$I_п = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{b_0(j\omega)^{n-1} + b_1(j\omega)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}\right|^2 d\omega. \tag{4.2}$$

Этот интеграл вычисляется с помощью теории вычетов и для $n = 1, 2, 3$ имеет следующий вид

$$n = 1: \quad I_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1}, \tag{4.3а}$$

$$n = 2: \quad I_2 = \frac{b_0^2a_2 + b_1^2a_0}{2a_0a_1a_2}, \tag{4.3б}$$

$$n = 3: \quad I_3 = \frac{b_0^2a_2a_3 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_2^2a_0a_1}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}. \tag{4.3в}$$

Пример 4.3. Вычислить интегральные показатели J_{20} и J_{21} системы (рис. 4.1, *а*), когда передаточная функция $W(p) = \dfrac{3}{0{,}1p+1}$.

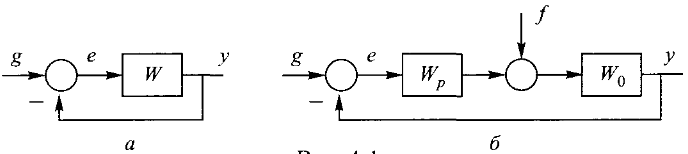


Рис. 4.1

Решение. Вычислим $E_п(s)$ и $e_п(0)$, необходимые для нахождения указанных показателей. Но, прежде всего, найдем $E(s)$. Учитывая, что $g(t) = 1(t)$ и $G(s) = L\{g(t)\} = 1/s$, можно записать

$$E(s) = W_{eg}(s)G(s) = \frac{1}{1+W(s)}\frac{1}{s} = \frac{0{,}1s+1}{(0{,}1s+4)s}.$$

Установившееся значение

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Так как $e_п(t) = e(t) - e_\infty$, то

$$E_п(s) = L\{e(t)\} - L\{e_\infty\} = E(s) - 0{,}25\frac{1}{s} = \frac{0{,}075}{0{,}1s+4}.$$

На основании свойства преобразования Лапласа

$$e_\text{п}(0) = \lim_{s\to\infty} sE_\text{п}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{0{,}075s}{0{,}1s+4} = 0{,}75.$$

Интегральная квадратическая оценка имеет вид

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{0{,}075}{0{,}1j\omega+4}\right|^2 d\omega.$$

В данном случае (4.2) $n=1$, $b_0=0{,}075$, $a_0=0{,}1$, $a_1=4$. Поэтому согласно (4.3а) $J_{20} = \dfrac{b_0^2}{2a_0a_1} = 0{,}007$.

Теперь найдем J_{21}:

$$J_{21} = J_{20} + \tau^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|j\omega E_\text{п}(j\omega) - e_\text{п}(0)\right|^2 d\omega.$$

Так как

$$sE_\text{п}(s) - e_\text{п}(0) = \frac{0{,}075s}{0{,}1s+4} - 0{,}75 = -\frac{3}{0{,}1s+4},$$

имеем

$$J_{21} = J_{20} + \tau^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{3}{0{,}1j\omega+4}\right|^2 d\omega = J_{20} + \tau^2 I_1 = 0{,}007 + 11{,}25\tau^2.$$

4.3. Определить интегральную квадратическую оценку $J_{20} = \int_0^\infty e_\text{п}^2(t)dt$ для системы управления, представленной на рис. 4.1 *а*, при условии, что передаточная функция разомкнутой системы $W = \dfrac{b}{(a_0p+a_1)s}$ и ее параметры принимают следующие значения:

а) $b=5$, $a_0=2$, $a_1=0{,}5$; б) $b=5$, $a_0=2$, $a_1=1$;
в) $b=5$, $a_0=1$, $a_1=0{,}5$; г) $b=2{,}5$, $a_0=2$, $a_1=0{,}5$;
д) $b=2{,}5$, $a_0=2{,}5$, $a_1=0{,}5$; е) $b=2{,}4$, $a_0=4$, $a_1=2$;
ж) $b=6$, $a_0=0{,}5$, $a_1=2$; з) $b=8$, $a_0=0{,}8$, $a_1=4$;
и) $b=4$, $a_0=0{,}4$, $a_1=4$; к) $b=9$, $a_0=0{,}6$, $a_1=3$.

4.4. Определить обобщенную интегральную квадратическую оценку $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_\text{п}^2(t) + \dot e_\text{п}^2(t)\right] dt$ для системы управления, представленной на рис. 4.1 *а*, при условии, что передаточная функция разомкнутой системы $W = \dfrac{b}{(a_0p+a_1)s}$ и ее параметры принимают значения, приведенные в задании 4.3.

4.5. Определить интегральную квадратическую оценку $J_{20} = \int_0^\infty e_\text{п}^2(t)dt$ для системы управления, представленной на рис. 4.1 *б* ($f = 0$), при условии, что передаточная функция регулятора $W_\text{р} = k_\text{п} + k_\text{д}p$, передаточная функция объекта $W_\text{о} = \dfrac{1}{(a_0p + a_1)p}$ и их параметры принимают следующие значения:

а)	$k_\text{п} = 5$,	$k_\text{д} = 0{,}1$,	$a_0 = 2$,	$a_1 = 0{,}5$;
б)	$k_\text{п} = 5$,	$k_\text{д} = 0{,}2$,	$a_0 = 2$,	$a_1 = 1$;
в)	$k_\text{п} = 5$,	$k_\text{д} = 0{,}3$,	$a_0 = 1$,	$a_1 = 0{,}5$;
г)	$k_\text{п} = 2{,}5$,	$k_\text{д} = 0{,}4$,	$a_0 = 2$,	$a_1 = 0{,}5$;
д)	$k_\text{п} = 2{,}5$,	$k_\text{д} = 0{,}5$,	$a_0 = 2{,}5$,	$a_1 = 0{,}5$;
е)	$k_\text{п} = 2{,}4$,	$k_\text{д} = 0{,}6$,	$a_0 = 4$,	$a_1 = 2$;
ж)	$k_\text{п} = 6$,	$k_\text{д} = 0{,}7$,	$a_0 = 0{,}5$,	$a_1 = 2$;
з)	$k_\text{п} = 8$,	$k_\text{д} = 0{,}8$,	$a_0 = 0{,}8$,	$a_1 = 4$;
и)	$k_\text{п} = 4$,	$k_\text{д} = 0{,}9$,	$a_0 = 0{,}4$,	$a_1 = 4$;
к)	$k_\text{п} = 9$,	$k_\text{д} = 1$,	$a_0 = 0{,}6$,	$a_1 = 3$.

4.6. Определить обобщенную интегральную квадратическую оценку $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_\text{п}^2(t) + \dot{e}_\text{п}^2(t)\right] dt$ для системы управления, представленной на рис. 4.1 *б* ($f = 0$), при условии, что передаточная функция регулятора $W_\text{р} = k_\text{п} + k_\text{д}p$, передаточная функция объекта $W_\text{о} = \dfrac{1}{(a_0p + a_1)p}$ и их параметры принимают значения, приведенные в задании 4.5.

4.2. Показатели качества в установившемся режиме

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является установившаяся ошибка. Если на систему действуют два внешних воздействия — задающее воздействие $g(t)$ и возмущение $f(t)$, — установившуюся ошибку можно представить в виде суммы:

$$e_\text{в}(t) = e_{\text{в}g}(t) + e_{\text{в}f}(t),$$

где $e_{\text{в}g}(t)$ и $e_{\text{в}f}(t)$ — установившиеся ошибки от задающего воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$ соответственно.

Установившиеся ошибки $e_{\text{в}g}(t)$ и $e_{\text{в}f}(t)$ можно представить в виде ряда

$$e_{\text{в}g}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt} + C_{g2}\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \ldots, \tag{4.4а}$$

$$e_{\text{в}f}(t) = C_{f0}f(t) + C_{f1}\frac{df(t)}{dt} + C_{f2}\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \ldots, \tag{4.4б}$$

где

$$C_{g0} = W_{eg}(0), \quad C_{gi} = \frac{1}{i!}\frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i}\bigg|_{s=0}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.5a}$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0), \quad C_{fi} = \frac{1}{i!}\frac{d^i W_{ef}(s)}{ds^i}\bigg|_{s=0}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{4.4б}$$

Здесь $W_{eg}(s)$ — передаточная функция относительно входа $g(t)$ и выхода $e(t)$, $W_{ef}(s)$ — передаточная функция относительно входа $f(t)$ и выхода $e(t)$. Предполагается, что возмущение не приложено в одной точке с задающим устройством. Коэффициенты C_{gk} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами ошибки по задающему воздействию*, коэффициенты C_{fk} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — *коэффициентами ошибки по возмущению*.Коэффициенты C_{g0} и C_{f0} называют *коэффициентами позиционной ошибки*, C_{g1} и C_{f1} — *коэффициентами скоростной ошибки*, C_{g2} и C_{f2} — *коэффициентами ошибки по ускорению*.

Статические и астатические системы. Установившаяся ошибка при постоянном внешнем воздействии называется *статической ошибкой*. Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю.

Система называется *статической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) отлична от нуля, и *астатической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) равна нулю.

Формулы (4.4) и (4.5) при постоянных g и f принимают вид

$$e_{\text{в}g}(t) = e_{g\infty} = C_{g0}g, \quad C_{g0} = W_{eg}(0),$$
$$e_{\text{в}f}(t) = e_{f\infty} = C_{f0}f, \quad C_{f0} = W_{ef}(0).$$

Отсюда следует, что система будет статической относительно воздействия g (возмущения f), если $C_{g0} \neq 0$ $(C_{f0} \neq 0)$, и астатической относительно задающего воздействия g (возмущения f), если $C_{g0} = 0$ $(C_{f0} = 0)$.

Говорят, что астатическая система обладает *астатизмом r-го порядка относительно задающего воздействия*, если

$$C_{g0} = C_{g1} = \ldots = C_{gr-1} = 0, \quad C_{gr} \neq 0.$$

Аналогично определяется астатическая система с астатизмом r-го порядка относительно возмущения.

Если система обладает астатизмом r-го порядка, то коэффициенты ошибок C_{gi} (C_{fi}) при $i = 1, 2, \ldots, r$ можно определить следующим образом:

$$C_{gi} = \left.\frac{W_{eg}(s)}{s^i}\right|_{s=0} \left(C_{fi} = \left.\frac{W_{ef}(s)}{s^i}\right|_{s=0}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.6}$$

Иначе говоря, этими формулами можно пользоваться при вычислении до первого отличного от нуля коэффициента.

Пример 4.4. Определить установившуюся ошибку системы (рис. 4.1, *б*) при $W_\text{р} = 0{,}5$; $W_\text{о} = \dfrac{4}{p(p+1)}$, $g(t) = 1 + 0{,}1t$ и $f(t) = 0{,}2$.

Решение. Так как все производные от $f(t)$ и производные выше 1-го порядка от $g(t)$ равны нулю, то в данном случае

$$e_{\text{в}g}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt}, \quad e_{\text{в}f}(t) = C_{f0}f(t).$$

Поэтому для определения искомой ошибки достаточно вычислить коэффициенты ошибок C_{g0}, C_{g1}, C_{f0}.

Передаточные функции ошибки имеют вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+2},$$

$$W_{ef}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{-4}{s(s+1)+2}.$$

Отсюда $C_{g0} = W_{eg}(0) = 0$, $C_{f0} = W_{eg}(0) = -2$. Так как $C_{g0} = 0$, то C_{g1} можно вычислить по формуле (4.6).

$$C_{g1} = \left.\frac{W_{eg}(s)}{s}\right|_{s=0} = \left.\frac{s+1}{s(s+1)+2}\right|_{s=0} = 0{,}5.$$

Таким образом, для ошибок имеем:

$$e_{\text{в}g} = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05; \quad e_{\text{в}f} = -2 \cdot 0{,}2 = -0{,}4;$$

$$e_\text{в} = e_{\text{в}g} + e_{\text{в}f} = 0{,}05 - 0{,}4 = -0{,}35.$$

Структура астатической системы управления. *Для того чтобы система управления была астатической с астатизмом r-го порядка относительно задающего воздействия, нужно, чтобы она содержала r последовательно соединенных интегрирующих звеньев во всем замкнутом контуре.*

Для того чтобы система управления была астатической с астатизмом r-го порядка относительно возмущения, нужно, чтобы она содержала r последовательно соединенных интегрирующих звеньев, включенных между точкой съема ошибки e и точкой приложения возмущения f.

4.7. У системы управления (рис. 4.1, *б*) передаточная функция регулятора $W_\text{р} = k_\text{п} + k_\text{д}p$, передаточная функция объекта $W_\text{о} =$

$= 1/(a_0p^2 + a_1p)$. На нее действуют задающее воздействие $g = 2t$, возмущение $f = 0{,}2$. Определить установившуюся ошибку при следующих значениях параметров:

а) $k_п = 5$, $k_д = 0{,}1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
б) $k_п = 5$, $k_д = 0{,}2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
в) $k_п = 5$, $k_д = 0{,}3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0{,}5$;
г) $k_п = 2{,}5$, $k_д = 0{,}4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
д) $k_п = 2{,}5$, $k_д = 0{,}5$, $a_0 = 2{,}5$, $a_1 = 0{,}5$;
е) $k_п = 2{,}4$, $k_д = 0{,}6$, $a_0 = 4$, $a_1 = 2$;
ж) $k_п = 6$, $k_д = 0{,}7$, $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 2$;
з) $k_п = 8$, $k_д = 0{,}8$, $a_0 = 0{,}8$, $a_1 = 4$;
и) $k_п = 4$, $k_д = 0{,}9$, $a_0 = 0{,}4$, $a_1 = 4$;
к) $k_п = 9$, $k_д = 1$, $a_0 = 0{,}6$, $a_1 = 3$.

4.8. У системы управления (рис. 4.1, *б*) передаточная функция регулятора $W_р = k_п + k_и/p$, передаточная функция объекта $W_о = 1/(a_0p + a_1)$. На нее действуют задающее воздействие $g = 2t$, возмущение $f = 0{,}2t$. Определить установившуюся ошибку при следующих значениях параметров:

а) $k_п = 5$, $k_и = 0{,}1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
б) $k_п = 5$, $k_и = 0{,}2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
в) $k_п = 5$, $k_и = 0{,}3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0{,}5$;
г) $k_п = 2{,}5$, $k_и = 0{,}4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
д) $k_п = 2{,}5$, $k_и = 0{,}5$, $a_0 = 2{,}5$, $a_1 = 0{,}5$;
е) $k_п = 2{,}4$, $k_и = 0{,}6$, $a_0 = 4$, $a_1 = 2$;
ж) $k_п = 6$, $k_и = 0{,}7$, $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 2$;
з) $k_п = 8$, $k_и = 0{,}8$, $a_0 = 0{,}8$, $a_1 = 4$;
и) $k_п = 4$, $k_и = 0{,}9$, $a_0 = 0{,}4$, $a_1 = 4$;
к) $k_п = 9$, $k_и = 1$, $a_0 = 0{,}6$, $a_1 = 3$.

4.9. У системы управления (рис. 4.1, *б*) передаточная функция регулятора $W_р = k_п + k_дp + k_и/p$, передаточная функция объекта $W_о = 1/(a_0p^2 + a_1p)$. На нее действуют задающее воздействие $g = t^2$, возмущение $f = 0{,}2t$. Определить установившуюся ошибку при следующих значениях параметров:

а) $k_п = 5$, $k_д = 4$, $k_и = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
б) $k_п = 5$, $k_д = 4$, $k_и = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
в) $k_п = 5$, $k_д = 4$, $k_и = 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0{,}5$;
г) $k_п = 2{,}5$, $k_д = 4$, $k_и = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}5$;
д) $k_п = 2{,}5$, $k_д = 6$, $k_и = 5$, $a_0 = 2{,}5$, $a_1 = 0{,}5$;
е) $k_п = 2{,}4$, $k_д = 11$, $k_и = 6$, $a_0 = 4$, $a_1 = 2$;
ж) $k_п = 6$, $k_д = 4$, $k_и = 7$, $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 2$;
з) $k_п = 8$, $k_д = 4$, $k_и = 8$, $a_0 = 0{,}8$, $a_1 = 4$;
и) $k_п = 4$, $k_д = 4$, $k_и = 9$, $a_0 = 0{,}4$, $a_1 = 4$;
к) $k_п = 9$, $k_д = 4$, $k_и = 10$, $a_0 = 0{,}6$, $a_1 = 3$.

Глава 5

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При выборе законов управления следует иметь в виду:

1) введение в закон управления интегрирующего члена делает систему астатической и улучшает качество системы в установившемся режиме, но оказывает дестабилизирующее влияние (т. е. может сделать систему неустойчивой) и ухудшает качество системы в переходном режиме;

2) введение в закон управления дифференцирующего члена оказывает стабилизирующее влияние (может сделать неустойчивую систему устойчивой) и улучшает качество системы в переходном режиме, не оказывая влияние на качество системы в установившемся режиме.

Пример 5.1. Определить, при каких типовых законах управления статическая ошибка системы (рис. 5.1) будет равна нулю, когда передаточная функция объекта имеет вид $W_0(p) = 1/(p+1)$.

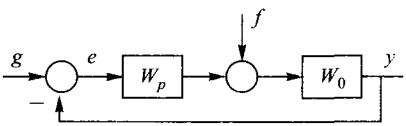


Рис. 5.1

Решение. Статическая ошибка будет равна нулю, если система будет астатической относительно задающего воздействия и возмущения. А для этого нужно, чтобы регулятор содержал интегрирующее звено. Поэтому искомыми законами управления будут пропорционально-интегральный (ПИ) закон и пропорционально интегро-дифференциальный (ПИД) закон.

Пример 5.2. Определить, при каких типовых законах управления установившаяся ошибка системы (рис. 5.1) будет равна нулю при условии, что $W_0(p) = 1/(p^2(p+1))$, $g(t) = at$ и $f(t) = b$.

Решение. Так как установившаяся ошибка от задающего воздействия и возмущения имеют вид

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}at + C_{g1}a, \quad e_{f\infty} = C_{f0}b,$$

установившаяся ошибка будет равна нулю, если $C_{g0} = C_{g1} = 0$ и $C_{f0} = 0$. Следовательно, система должна быть астатической с астатизмом 2-го порядка относительно задающего воздействия и с астатизмом 1-го порядка относительно возмущения. Так как объект включает два последовательно соединенных интегрирующих звена, система будет астатической с астатизмом не менее 2-го порядка относительно задающего воздействия при любом типовом законе управления. Однако она будет астатической относительно возмущения только при ПИ-законе и ПИД-законе. При ПИ-законе передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_{\text{р}}(p)W_0(p) = \frac{k_{\text{п}}p + k_{\text{и}}}{p^3(p+1)}$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + k_{\text{п}}\lambda + k_{\text{и}} = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при λ^2 равен нулю и необходимое условие устойчивости не выполняется. Поэтому система при ПИ-законе структурно неустойчива. При ПИД-законе передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_{\text{р}}(p)W_0(p) = \frac{k_{\text{д}}p^2 + k_{\text{п}}p + k_{\text{и}}}{p^3(p+1)}$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + k_{\text{д}}\lambda^2 + k_{\text{п}}\lambda + k_{\text{и}} = 0.$$

Определитель Гурвица 3-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & k_{\text{п}} & 0 \\ 1 & k_{\text{д}} & k_{\text{и}} \\ 0 & 1 & k_{\text{п}} \end{vmatrix} = k_{\text{д}}k_{\text{п}} - k_{\text{и}} - k_{\text{п}}^2$$

соответствующим выбором параметров регулятора можно сделать Следовательно, при ПИД-законе система структурно устойчива и искомым законом устойчива и искомым законом управления является ПИД-закон.

5.1. Синтез параметров регулятора по минимуму интегральных оценок

Постановку и решение задачи синтеза параметров регулятора по минимуму интегральной оценки рассмотрим на примерах.

Пример 5.3. При условии, что $W_р(s) = k_п$, $W_0(s) = \dfrac{1}{s(0{,}1s+1)}$ и $f(t) \equiv 0$, определить параметр $k_п$, при котором переходный процесс системы (рис. 5.1) является апериодическим и интегральная квадратическая ошибка J_{20} принимает минимальное значение.

Решение. Переходный процесс будет апериодическим, если корни характеристического уравнения рассматриваемой системы

$$0{,}1\lambda^2 + \lambda + k_п = 0$$

будут вещественными, т. е. если детерминант этого уравнения

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 0{,}1k_п \geqslant 0 \text{ или } k_п \leqslant 2{,}5.$$

Так как $f(t) \equiv 0$, то ошибка $e(t) = e_g(t)$. Объект включает интегрирующее звено. Поэтому система является астатической задающего воздействия и статическая ошибка $e_{g\infty}(t) = 0$. Переменная составляющая ошибки

$$e_п(t) = e_g(t) - e_{g\infty}(t) = e_g(t).$$

Переходя к изображениям Лапласа, получим:

$$E_п(s) = E_g(s) = W_{eg}(s)\frac{1}{s} = \frac{0{,}1s+1}{0{,}1s^2+s+k_п}.$$

Следовательно,

$$J_{20} = \int_0^\infty e_п^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E_п(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{0{,}1j\omega+1}{0{,}1(j\omega)^2+j\omega+k_п}\right|^2 d\omega = I_2.$$

В данном случае (4.2) $n = 2$; $b_0 = 0{,}1$; $b_1 = 1$; $a_0 = 0{,}1$; $a_1 = 1$; $a_2 = k_п$. Поэтому (4.3б)

$$J_{20} = \frac{b_0^2a_2 + b_1^2a_0}{2a_0a_1a_2} = \frac{0{,}01k_п + 0{,}1}{2 \cdot 0{,}1 \cdot k_п} = 0{,}05 + \frac{0{,}5}{k_п}.$$

Очевидно, что J_{20} принимает минимальное значение при условии $k_п \leqslant 2{,}5$; когда $k_п = 2{,}5$.

Пример 5.4. При условии, что $W_р(s) = k_п$, $W_0(s) = \dfrac{1}{s(0{,}1s+1)}$ и $f(t) \equiv 0$ (рис. 5.1), определить значение параметра $k_п$, при котором обобщенная интегральная квадратическая оценка J_{21} при $\tau = 0{,}5$ принимает минимальное значение.

Решение. Согласно формуле Парсеваля

$$J_{21} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |E_п(j\omega)|^2 d\omega + \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_п(j\omega) - e_п(0)|^2 d\omega\right] =$$

$$= J_{20} + 0{,}5^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_п(j\omega) - e_п(0)|^2 d\omega.$$

Как было вычислено (см. пример 5.3),

$$E_п(s) = \frac{0{,}1s + 1}{0{,}1s^2 + s + k_п}, \quad J_{20} = \frac{0{,}01k_п + 0{,}1}{0{,}2k_п}.$$

Для $e_п(0)$ имеем:

$$e_п(0) = \lim_{s\to\infty} sE_п(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(0{,}1s+1)}{0{,}1s^2 + s + k_п} = 1.$$

Поэтому

$$sE_п(s) - e(0) = \frac{s(0{,}1s+1)}{0{,}1s^2 + s + k_п} - 1 = \frac{k_п}{0{,}1s^2 + s + k_п},$$

$$J_{21} = J_{20} + 0{,}5^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{-k_п}{0{,}1(j\omega)^2 + j\omega + k_п}\right|^2 d\omega = J_{20} + 0{,}25 I_2.$$

В данном случае $n = 2$; $b_0 = 0$; $b_1 = -k_п$; $a_0 = 0{,}1$; $a_1 = 1$; $a_2 = k_п$ и

$$I_2 = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{0{,}1k_п^2}{2\cdot 0{,}1 \cdot k_п} = 0{,}5k_п.$$

Подставив это выражение и выражение для J_{20} в полученную выше формулу для J_{21}, найдем

$$J_{21} = \frac{0{,}01k_п + 0{,}1}{0{,}2\cdot k_п} + 0{,}25\cdot 0{,}5k_п = \frac{0{,}01k_п + 0{,}1 + 0{,}025k_п^2}{0{,}2k_п}.$$

Из условия

$$\frac{dJ_{21}}{dk} = \frac{0{,}025k_п^2 - 0{,}1}{0{,}2k_п^2} = 0$$

следует, что J_{21} достигает экстремума при $k_п = \sqrt{\dfrac{0{,}1}{0{,}025}} = 2$. Чтобы установить, чему (минимуму или максимуму) соответствует это значение, найдем вторую производную $\dfrac{d^2J_{21}}{dk_{\text{п}}^2} = \dfrac{1}{k_{\text{п}}^3}$. В точке экстремума эта производная положительна. Следовательно, в ней достигается минимум и соответственно решением будет $k_{\text{п}} = 2$.

5.1. Определить параметры ПИ-регулятора $W_{\text{р}} = k_{\text{п}} + k_{\text{и}}/s$, при котором интегральная оценка $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_{\text{п}}^2(t) + \dot{e}_{\text{п}}^2(t)\right] dt$ замкнутой системы (рис. 5.1) принимает минимальное значение, при следующих передаточных функциях объекта:

а) $W_o = \dfrac{1}{0{,}1s+1}$; б) $W_o = \dfrac{1}{0{,}4s+1}$; в) $W_o = \dfrac{1}{0{,}8s+1}$; г) $W_o = \dfrac{1}{s+1}$;
д) $W_o = \dfrac{5}{s+5}$; е) $W_o = \dfrac{5}{s+10}$; ж) $W_o = \dfrac{5}{s+4}$; з) $W_o = \dfrac{8}{s+2}$;
и) $W_o = \dfrac{5}{s+15}$; к) $W_o = \dfrac{5}{s+20}$.

5.2. Передаточная функция объекта имеет вид $W_0 = \dfrac{1}{s(a_0s+a_1)}$. Определить параметр $k_{\text{п}}$ пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора $W_{\text{р}} = k_{\text{п}} + 2s$, при котором интегральная оценка $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_{\text{п}}^2(t) + \tau^2\dot{e}_{\text{п}}^2(t)\right] dt$ замкнутой системы (рис. 5.1) принимает минимальное значение при следующих значениях параметров:

а) $\tau = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; б) $\tau = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
в) $\tau = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$; г) $\tau = 4$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$;
д) $\tau = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$; е) $\tau = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$;
ж) $\tau = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$; з) $\tau = 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$;
и) $\tau = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$; к) $\tau = 4$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

5.3. Передаточная функция объекта имеет вид $W_0 = \dfrac{1}{s(a_0s+a_1)}$. Определить параметр $k_{\text{д}}$ ПД-регулятора $W_{\text{р}} = 10 + k_{\text{д}}s$, при котором интегральная оценка $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_{\text{п}}^2(t) + \tau^2\dot{e}_{\text{п}}^2(t)\right] dt$ замкнутой системы (рис. 5.1) принимает минимальное значение при значениях параметров, приведенных в задании 5.2.

5.4. Передаточная функция объекта имеет вид $W_0 = \dfrac{1}{s(a_0s+a_1)}$. Определить параметры ПД-регулятора $W_{\text{р}} = k_{\text{п}} + k_{\text{д}}s$, при которых интегральная оценка $J_{21} = \int_0^\infty \left[e_{\text{п}}^2(t) + \tau^2\dot{e}_{\text{п}}^2(t)\right] dt$ замкнутой системы (рис. 5.1) принимает минимальное значение при значениях параметров, приведенных в задании 5.2.

5.2. Синтез систем управления максимальной степени устойчивости

Задача синтеза систем управления максимальной степени устойчивости ставится следующим образом. Задана структура системы управления и требуется определить $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ — вектор параметров регулятора) из условия

$$\eta^* = \eta(\boldsymbol{\alpha}^*) = \max_{\alpha} \eta(\boldsymbol{\alpha}).$$

Здесь η^* называется *оптимальной степенью устойчивости* и $\boldsymbol{\alpha}^*$ — *оптимальным (векторным) параметром*. Число параметров регулятора (размерность вектора $\boldsymbol{\alpha}$) m не должно превышать $n-1$ (n — степень характеристического уравнения). Метод решения сформулированной задачи основан на условиях граничной устойчивости.

Условия граничной (маргинальной) устойчивости. Система находится на границе устойчивости или имеет место граничная (маргинальная) устойчивость, если ее характеристический полином имеет нейтральные (т. е. расположенные на мнимой оси) нули и не имеет правых нулей. Такой полином называют *маргинально устойчивым*.

Рассмотрим полином с вещественными коэффициентами

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 > 0). \tag{5.1}$$

Утверждение. 5.1 (необходимое условие маргинальной устойчивости). *Если полином* (5.1) *маргинально устойчив, то все его коэффициенты неотрицательны*:

$$a_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Нуль z' полинома (5.1) называют *особым*, если $-z'$ также является нулем этого полинома. В частности, все нули, расположенные на мнимой оси, являются особыми.

Утверждение. 5.2 *Полином* (5.1) *маргинально устойчив и l нулей располагаются на мнимой оси в том и только в том случае, если выполняются следующие два условия*:

1) l старших определителей Гурвица равны нулю, а остальные $n-l$ определителей положительны:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} = \ldots = \Delta_{n-l+1}; \quad \Delta_{n-l} > 0, \ldots, \Delta_1 > 0. \tag{5.3}$$

2) Полином (5.1) *не имеет особых нулей, расположенных не на мнимой оси.*

Утверждение. 5.3 *При выполнении необходимого условия* (5.2) *особый нуль не может быть вещественным числом, и если* *имеются особые нули, расположенные не на мнимой оси, то их количество равно числу, кратному четырем.*

Нейтральные нули полинома $f(z)$ имеют вид $j\omega_i$, ω_i и их число совпадает с числом действительных корней уравнения $f(j\omega) = 0$, или системы уравнений

$$u(\omega) = \operatorname{Re} f(j\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots = 0, \tag{5.4а}$$

$$v(\omega) = \operatorname{Im} f(j\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots = 0. \tag{5.4б}$$

Утверждение. 5.4 *Для того чтобы все определители Гурвица полинома были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты с нечетными индексами были равны нулю.*

Метод синтеза систем управления максимальной степени устойчивости. Метод решения задачи основан на преобразовании характеристического полинома $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ путем постановки $\lambda = q - \eta$. При этой постановке преобразованный полином

$$Q_{\text{п}}(q) = Q(q - \eta) = c_0 q^n + c_1 q^{n-1} + \ldots + c_n, \tag{5.5}$$

где

$$c_k = \frac{1}{(n-k)!} \left. \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}} \right|_{\lambda = -\eta}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{5.6}$$

становится маргинально устойчивым полиномом. И для $Q_{\text{п}}(q)$ выписываются условия маргинальной устойчивости, включающие условия (5.2), (5.3) и (5.4):

$$c_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (c_0 > 0), \tag{5.7а}$$

$$\Delta_n^{\text{п}} = \Delta_{n-1}^{\text{п}} = \ldots = \Delta_{n-l+1}^{\text{п}} = 0, \quad \Delta_{n-l}^{\text{п}} > 0, \ldots, \Delta_1^{\text{п}} > 0, \tag{5.7б}$$

$$u_{\text{п}}(\omega) = \operatorname{Re} Q_{\text{п}}(j\omega) = 0, \quad v_{\text{п}}(\omega) = \operatorname{Im} Q_{\text{п}}(j\omega) = 0. \tag{5.7в}$$

Здесь $\Delta_i^{\text{п}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — определители Гурвица преобразованного полинома $Q_{\text{п}}(q)$. Следует иметь в виду, что не все соотношения в (5.7б) и (5.7в) являются независимыми.

Рассматриваемый метод состоит в следующем: решается система (5.7) относительно неизвестных параметров регулятора и степени устойчивости η и находятся решения, у которых η имеет наибольшее значение.

Утверждение. 5.5 *Максимально возможная или граничная степень устойчивости η устойчивого полинома $Q(\lambda)$ равна*

$$\eta_m = \frac{1}{n} \frac{a_1}{a_0} \quad (0 < \eta \leqslant \eta_m), \tag{5.8}$$

и она достигается, когда вещественные части всех нулей полинома $Q(\lambda)$ равны между собой.

Поиск решения задачи синтеза максимальной степени устойчивости следует начинать со случая, когда степень устойчивости принимает граничное (максимально возможное) значение. Так как это возможно, когда все нули исходного полинома имеют одинаковые вещественные части или все нули преобразованного полинома $Q_{\text{п}}(q)$ располагаются на мнимой оси, условие маргинальной устойчивости (5.7) можно представить в виде

$$c_1 = 0,\ \ c_2 \geqslant 0,\ \ c_3 = 0,\ \ c_4 \geqslant 0,\ \ldots \tag{5.9а}$$

$$c_0\omega^n - c_2\omega^{n-2} + c_4\omega^{n-4} - \ldots = 0. \tag{5.9б}$$

Если эта система не имеет решения, то нужно перейти к системе (5.7) и решить ее при $l \leqslant n-1$.

А) Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 2-го порядка

Рассмотрим синтез оптимальных по степени устойчивости параметров П- и ПИ-регуляторов для объекта 2-го порядка. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad b_0 > 0, \quad a_1 > 0.$$

П-регулятор. Передаточная функция регулятора $W_{\text{р}}(s) = k_{\text{п}}$ и передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = W_{\text{р}}(s)W_0(s) = \frac{b_0 k_{\text{п}}}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Характеристический полином принимает вид

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 + b_0 k_{\text{п}}.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\text{п}}(q) = c_0 q^2 + c_1 q + c_2$$

в соответствии с (5.6) имеем

$$c_2 = Q(\lambda)\big|_{\lambda=-\eta} = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 + b_0 k_{\text{п}})\big|_{\lambda=-\eta} = \eta^2 - a_1\eta + a_2 + b_0 k_{\text{п}},$$

$$c_1 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=-\eta} = (2\lambda + a_1)\big|_{\lambda=-\eta} = -2\eta + a_1,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial\lambda^2}\bigg|_{\lambda=-\eta} = 1.$$

В данном случае условия граничной устойчивости (5.9) принимают следующий вид:

$$c_1 = -2\eta + a_1 = 0,$$

$$c_2 = \eta^2 - a_1\eta + a_2 + b_0 k_\text{п} \geqslant 0,$$

$$u_\text{п}(\omega) = -c_0\omega^2 + \eta^2 - a_1\eta + a_2 + b_0 k_\text{п} = 0.$$

Решив эту систему, получим

$$\eta^* = \frac{a_1}{2}, \quad k_\text{п}^* = \frac{1}{b_0}\left(\omega^2 - \frac{a_1^2}{4} - a_2\right).$$

Так как степень устойчивости принимает граничное значение, найденное решение является искомым. Здесь ω — свободный параметр, пропорциональный степени колебательности.

ПИ-регулятор. Передаточная функция регулятора $W_\text{р}(s) = k_\text{п} + k_\text{и}/s$ и передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = W_\text{р}(s)W_0(s) = \frac{b_0(k_\text{п}s + k_\text{и})}{s(s^2 + a_1 s + a_2)}.$$

Характеристический полином имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0 k_\text{п})\lambda + b_0 k_\text{и}.$$

Коэффициенты преобразованного полинома

$$Q_\text{п}(q) = c_0 q^3 + c_1 q^2 + c_2 q + c_3$$

определяются следующим образом (5.6):

$$c_3 = Q(\lambda))\big|_{\lambda=-\eta} = [\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0 k_\text{п})\lambda + b_0 k_\text{и}]\big|_{\lambda=-\eta} = \\ = -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0 k_\text{п})\eta + b_0 k_\text{и},$$

$$c_2 = \frac{\partial Q(\lambda))}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=-\eta} = (3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2 + b_0 k_\text{п})\big|_{\lambda=-\eta} = \\ = 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0 k_\text{п},$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Q(\lambda))}{\partial\lambda^2}\bigg|_{\lambda=-\eta} = \frac{1}{2}\,(6\lambda + 2a_1)\big|_{\lambda=-\eta} = -3\eta + a_1,$$

$$c_0 = \frac{1}{3!}\,\frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial\lambda^3}\bigg|_{\lambda=-\eta} = 1$$

Условия граничной устойчивости (5.9) принимают вид

$$c_1 = 0, \quad c_2 \geqslant 0, \quad c_3 = 0, \quad u_\text{п}(\omega) = -\omega^3 + c_2\omega = 0. \tag{5.10}$$

Из последнего уравнения (5.10) имеем $c_2 = \omega^2$. Следовательно, неравенство в этом условии выполняется. Поэтому исключив его и подставив выражения для коэффициентов, условие (5.10) можно представить в виде

$$-3\eta + a_1 = 0,$$

$$-\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0 k_{\text{п}})\eta + b_0 k_{\text{и}} = 0,$$

$$3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0 k_{\text{п}} = \omega^2.$$

Решив эту систему, получим

$$k_{\text{п}}^* = \frac{1}{b_0}\left(\omega^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2\right), \quad k_{\text{и}}^* = \frac{a_1}{3b_0}\left(\omega^2 + \frac{a_1^2}{9}\right), \quad \eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3}.$$

Здесь ω — свободный параметр, представляющий собой мнимую часть комплексных корней характеристического уравнения синтезированной системы.

Б) Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров ПД- и ПИД-регуляторов для объекта 3-го порядка

Рассмотрим синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 3-го порядка. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad b_0 > 0, \quad a_1 > 0.$$

ПД-регулятор. Передаточная функция регулятора $W_{\text{р}}(s) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} s$ и передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = W_{\text{р}}(s)W_0(s) = \frac{b_0(k_{\text{п}} + k_{\text{д}} s)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0 k_{\text{д}})\lambda + a_3 + b_0 k_{\text{п}}.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\text{п}}(q) = q^3 + c_1 q^2 + c_2 q + c_3$$

имеем

$$c_3 = Q(\lambda))|_{\lambda=-\eta} = [\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0 k_{\text{д}})\lambda + a_3 + b_0 k_{\text{п}}]\big|_{\lambda=-\eta} =$$
$$= -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0 k_{\text{д}})\eta + a_3 + b_0 k_{\text{п}},$$

$$c_2 = \frac{\partial Q(\lambda))}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=-\eta} = 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0 k_{\text{д}},$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 Q(\lambda))}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=-\eta} = -3\eta + a_1, \quad c_0 = \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=-\eta} = 1.$$

Условия граничной устойчивости (5.9) для преобразованного полинома принимают вид

$$c_1 = 0, \quad c_2 \geqslant 0, \quad c_3 = 0, \quad v_(\omega) = -\omega^3 + c_2\omega = 0.$$

Из последнего равенства этого условия имеем $c_2 = \omega^2$. Подставив в это и другие равенства условия маргинальной устойчивости выражения для c_i $(i = 1, 2, 3)$, получим

$$\begin{gathered} -3\eta + a_1 = 0, \\ -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0k_{\text{д}})\eta + a_3 + b_0k_{\text{п}} = 0, \\ 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_{\text{д}} = \omega^2. \end{gathered}$$

Решив эту систему, найдем

$$k_{\text{п}}^* = \frac{1}{b_0}\left(\frac{a_1^3}{27} + \omega^2\frac{a_1}{3} - a_3\right), \quad k_{\text{д}}^* = \frac{1}{b_0}\left(\omega^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2\right), \quad \eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3},$$

Здесь ω — свободный параметр, представляющий собой мнимую часть комплексных корней характеристического уравнения синтезированной системы.

ПИД-регулятор. Передаточная функция регулятора $W_{\text{р}}(s) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}}s + k_{\text{и}}/s$ и передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = W_{\text{р}}(s)W_0(s) = \frac{b_0(k_{\text{п}}s + k_{\text{д}}s^2 + k_{\text{и}})}{s(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)}.$$

Характеристический полином синтезируемой системы и преобразованный полином имеют соответственно вид

$$\begin{gathered} Q(z) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + (a_2 + b_0\text{к}_{\text{д}})\lambda^2 + (a_3 + b_0\text{к}_{\text{п}})\lambda + b_0\text{к}_{\text{и}}, \\ Q_{\text{п}}(q) = q^4 + c_1q^3 + c_2q^2 + c_3q + c_4, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} c_4 = Q(\lambda)|_{\lambda=-\eta} = \eta^4 - a_1\eta^3 + (a_2 + b_0\text{к}_{\text{д}})\eta^2 - (a_3 + b_0\text{к}_{\text{п}})\eta + b_0\text{к}_{\text{и}}, \\ c_3 = \left.\frac{\partial Q(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=-\eta} = -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2(a_2 + b_0\text{к}_{\text{д}})\eta + a_3 + b_0\text{к}_{\text{п}}, \\ c_2 = \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=-\eta} = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 + b_0\text{к}_{\text{д}}, \\ c_1 = \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=-\eta} = -4\eta + a_1. \end{gathered}$$

Условие маргинальной устойчивости (5.9) принимает вид

$$c_1 = 0,\ \ c_2 \geqslant 0,\ \ c_3 = 0,\ \ c_4 \geqslant 0, \qquad \omega^4 - c_2\omega^2 + c_4 = 0. \quad c_4 = (c_2 - \omega^2)\omega^2.$$

Неравенства $c_4 \geqslant 0$ и $c_2 \geqslant 0$ будут выполнены, если $c_2 - \omega^2 \geqslant 0$. Введя дополнительный параметр β, последнее неравенство преобразуем в равенство

$$c_2 - \omega^2 - \beta^2 = 0$$

и условие маргинальной устойчивости можно записать в виде

$$c_1 = -4\eta + a_1 = 0,$$

$$c_2 = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 + b_0\text{к}_\text{д} = \omega^2 + \beta^2,$$

$$c_3 = -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2(a_2 + b_0\text{к}_\text{д})\eta + a_3 + b_0\text{к}_\text{п} = 0,$$

$$c_4 = \eta^4 - a_1\eta^3 + (a_2 + b_0\text{к}_\text{д})\eta^2 - (a_3 + b_0\text{к}_\text{п})\eta + b_0\text{к}_\text{и} = \omega^2\beta^2.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$k_\text{п}^* = \frac{1}{b_0}\left((\omega^2+\beta^2)\frac{a_1}{2} + \frac{a_1^3}{16} - a_3\right), \quad k_\text{д}^* = \frac{1}{b_0}\left(\omega^2 + \beta^2 + \frac{3}{8}a_1^2 - a_2\right),$$

$$k_\text{и}^* = \frac{1}{b_0}\left[\frac{1}{256}a_1^4 + (\omega^2+\beta^2)\frac{a_1^2}{16} + \omega^2\beta^2\right], \quad \eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{4},$$

где свободные параметры ω и β являются мнимыми частями корней характеристического уравнения синтезированной системы ($\lambda_{1,2} = -(a_1/4) \pm j\omega$, $\lambda_{3,4} = -(a_1/4) \pm j\beta$).

5.5. Определить оптимальный по степени устойчивости параметр П-регулятора ($W_\text{р} = k_\text{п}$) со степенью колебательности $\mu = 0$ при условии, что передаточная функция объекта имеет вид

$$W_\text{о} = \frac{b}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$$

и ее параметры принимают следующие значения:

а) $b = 4,\ a_0 = 2,\ a_1 = 8,\ a_2 = 2$; б) $b = 4,\ a_0 = 1,\ a_1 = 8,\ a_2 = 2$;
в) $b = 3,\ a_0 = 1{,}5,\ a_1 = 6,\ a_2 = 0$; г) $b = 3,\ a_0 = 2,\ a_1 = 10,\ a_2 = 2$;
д) $b = 4,\ a_0 = 2,\ a_1 = 8,\ a_2 = 0$; е) $b = 5,\ a_0 = 1,\ a_1 = 10,\ a_2 = 1$;
ж) $b = 1,\ a_0 = 2,\ a_1 = 10,\ a_2 = 2$; з) $b = 6,\ a_0 = 3,\ a_1 = 12,\ a_2 = 3$;
и) $b = 3,\ a_0 = 2,\ a_1 = 6,\ a_2 = 2$; к) $b = 5,\ a_0 = 5,\ a_1 = 10,\ a_2 = 2$.

5.6. Решить задачу 5.5 при условии $\mu = 1$.

5.7. Определить оптимальные по степени устойчивости параметры ПИ-регулятора ($W_\text{р} = k_\text{п} + k_\text{и}/p$) со степенью колебательности $\mu = 0$ при условии, что передаточная функция объекта имеет вид $W_\text{о} = \dfrac{b}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$ и ее параметры принимают следующие значения:

а) $b = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$, $a_2 = 2$; б) $b = 4$, $a_0 = 1$, $a_1 = 8$, $a_2 = 2$;
в) $b = 3$, $a_0 = 1{,}5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$; г) $b = 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, $a_2 = 2$;
д) $b = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$, $a_2 = 0$; е) $b = 5$, $a_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 1$;
ж) $b = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, $a_2 = 2$; з) $b = 6$, $a_0 = 3$, $a_1 = 12$, $a_2 = 3$;
и) $b = 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 2$; к) $b = 5$, $a_0 = 5$, $a_1 = 10$, $a_2 = 2$.

5.8. Решить задачу 5.7 при условии $\mu = 1$.

5.9. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{b}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Синтезировать оптимальную по степени устойчивости систему управления с ПД-регулятором, обладающую нулевой степенью колебательности ($\mu = 0$), при следующих значениях параметров объекта:

а) $b = 6$, $a_0 = 3$, $a_1 = 15$, $a_2 = 12$, $a_3 = 3$;
б) $b = 6$, $a_0 = 2$, $a_1 = 12$, $a_2 = 16$, $a_3 = 0$;
в) $b = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$;
г) $b = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0{,}5$;
д) $b = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$;
е) $b = 5$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0.5$;
ж) $b = 2$, $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0{,}1$;
з) $b = 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$;
и) $b = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$;
к) $b = 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

5.10. Решить задачу 5.9 при условии $\mu = 1$.

5.11. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{b}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Синтезировать оптимальную по степени устойчивости систему управления с ПИД-регулятором, обладающую нулевой степенью колебательности, при значениях параметров объекта, указанных в задаче 5.9.

5.12. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{b}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Синтезировать оптимальную по степени устойчивости систему управления с ПИД-регулятором, обладающую степенью колебательности $\mu = 1$, характеристическое уравнение которой имеет два действительных и два комплексных корня, при значениях параметров объекта, указанных в задаче 5.9.

5.3. Синтез систем управления по желаемой передаточной функции или метод полиномиальных уравнений

При задании желаемой передаточной функции $W_{ж}(s)$ и определении передаточной функции регулятора $W_{р}(s)$ необходимо учитывать физическую осуществимость определяемого регулятора и грубость синтезируемой системы.

Физическая осуществимость. Под *физической осуществимостью* или *реализуемостью* передаточной функции или системы, заданной этой передаточной функцией, понимают принципиальную возможность построения такой системы.

Передаточная функция физически осуществима, если степень числителя не больше степени ее знаменателя. Условие физической осуществимости передаточной функции

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

имеет вид $n - m \geqslant 0$.

Грубость. Система называется *грубой* или *робастной*, если при малом изменении ее параметров свойство системы качественно не меняется. В случае линейной системы негрубость означает, что устойчивая система при малом изменении параметров становится неустойчивой.

При синтезе систем по желаемой передаточной функции грубость может быть нарушена, если правый полюс передаточной функции объекта компенсируется правым нулем передаточной функции регулятора и правый нуль объекта — правым полюсом регулятора.

Представим передаточную функцию объекта в виде

$$W_{о}(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{P^{-}(s)P^{+}(s)}{R^{-}(s)R^{+}(s)},$$

где $P^{-}(s)$, $R^{-}(s)$ — полиномы с левыми нулями, $P^{+}(s)$, $R^{+}(s)$ — полиномы с правыми и нейтральными нулями. Если полиномы $P(s)$ и $R(s)$ не содержат левых нулей, то $P^{-}(s)$ и $R^{-}(s)$ равны константе; если они не содержат правых нулей, то $P^{+}(s)$ и $R^{+}(s)$ следует принять равными единице.

Передаточная функция регулятора синтезируемой системы имеет вид

$$W_{р}(s) = \frac{R^{-}(s)}{P^{-}(s)} \frac{\mathrm{M}(s)}{N(s)s^{r}}, \tag{5.11}$$

где полиномы $M(s)$ и $N(s)$ определяются из полиномиального уравнения
$$P^+(s)M(s) + R^+(s)N(s)s^r = G(s). \tag{5.12}$$
Здесь $G(s)$ — характеристический полином синтезируемой системы.

Условимся степень полинома обозначать буквой n с индексом, обозначающим сам полином. Например, n_T будет обозначать степень полинома $T(s)$. Коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$ определяются из системы уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обеих частей полиномиального уравнения (5.12). Эта система разрешима при выполнении *условия разрешимости*
$$n_G \leqslant n_M + n_N + 1. \tag{5.13}$$

Условие физической осуществимости регулятора (5.11):
$$n_{R^-} + n_M \leqslant n_{P^-} + n_N + r. \tag{5.14}$$

При определении степеней неопределенных полиномов необходимо учитывать условие, получаемое из *условия грубости*:
$$n_G = n_{R^+} + n_N + r. \tag{5.15}$$

Чтобы система (5.13)–(5.15) была разрешима, необходимо, чтобы порядок n_G характеристического полинома синтезируемой системы $G(s)$ удовлетворял соотношению
$$n_G - n_R \geqslant n_{R^+} + r - n_{P^-} - 1. \tag{5.16}$$

Метод синтеза регулятора по желаемой передаточной функции состоит в следующем. Исходя из заданных требований к качеству синтезируемой системы задается характеристический полином $G(s)$ с учетом условия (5.16). Из (5.13)–(5.15) определяют степени неопределенных полиномов n_M и n_N. Чтобы не усложнять регулятор, находят наименьшие возможные значения. Затем составляют полиномы $M(s)$ и $N(s)$ с неопределенными коэффициентами, подставляют их в полиномиальное уравнение и определяют неизвестные коэффициенты. Найденные полиномы $M(s)$ и $N(s)$ подставляют в (5.11) и получают искомую передаточную функцию регулятора.

Пример 5.5. Передаточная функция объекта имеет вид $W_o(s) = 1/(s(s+1))$. Определить передаточную функцию регулятора, при которой переходная составляющая ошибки $x(t)$ изменяется в соответствии с функцией
$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{-t}$$
и установившаяся ошибка равна нулю (рис. 5.1) при постоянном задающем воздействии ($g(t) = \text{const}$) и отсутствии возмущения ($f(t) \equiv 0$).

Решение. Переходная составляющая ошибки будет изменяться в соответствии с заданной функцией, если характеристический полином синтезируемой системы имеет трехкратный корень, равный -1 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$). Поэтому знаменатель желаемой передаточной функции $G(s)$ имеет вид

$$G(s) = (s+1)^3.$$

Числитель и знаменатель передаточной функции объекта раскладываются на множители

$$P^-(s) = P^+(s) = P(s) = 1, \quad R^-(s) = s+1, \quad R^+(s) = s.$$

Степени полиномов равны $n_G = 3$, $n_{P^-} = n_{P^+} = 0$, $n_{R^-} = n_{R^+} = 1$.

Статическая ошибка $e_{g\infty} = 0$, если система обладает астатизмом 1-го порядка ($\nu = 1$) относительно задающего воздействия. Так как объект содержит одно интегрирующее звено, можно принять $r = 0$.

Условия (5.13)–(5.15) принимают вид

$$3 \leqslant n_M + n_N + 1, \quad 1 + n_M \leqslant n_N, \quad 3 = 1 + n_N.$$

Из последнего равенства $n_N = 2$. Наименьшим n_M, удовлетворяющим приведенным условиям, является $n_M = 0$. Поэтому $M(s) = b_0$ и $N(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$. Подставив эти полиномы в полиномиальное уравнение (5.12), получим

$$b_0 + s(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем

$$a_0 = 1, \; a_1 = 3, \; a_2 = 3, \; b_0 = 1 \text{ и } N(s) = s^2 + 3s + 3, \; M(s) = 1.$$

Подставляя эти полиномы, а также выражения для $P^-(s)$ и $R^-(s)$ в (5.11), получим искомую передаточную функцию регулятора $W_\text{р}(s) = \dfrac{s+1}{s^2+3s+3}$.

5.13. Задана передаточная функция объекта

$$W_\text{о}(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Синтезировать астатическую систему (с астатизмом 1-го порядка), у которой характеристический полином имеет вид $(s+1)^2$, при следующих значениях параметров объекта:

а) $b = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$; б) $b = 4$, $a_1 = 4{,}5$, $a_2 = 5$;
в) $b = 3$, $a_1 = 4{,}5$, $a_2 = 2$; г) $b = 5$, $a_1 = 2{,}5$, $a_2 = 1{,}5$;
д) $b = 1$, $a_1 = 3{,}5$, $a_2 = 3$; е) $b = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6$;
ж) $b = 7$, $a_1 = 4{,}5$, $a_2 = 4{,}5$; з) $b = 8$, $a_1 = 6$, $a_2 = 8$;
и) $b = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 4$; к) $10{=}2$, $a_1 = 5{,}5$, $a_2 = 7$.

5.14. Решить задачу 5.13 при следующих значениях параметров объекта:

а) $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -2$;
б) $b_0 = 2$, $b_1 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -2$;
в) $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$;
г) $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$;
д) $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$;
е) $b_0 = 4$, $b_1 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -8$;
ж) $b_0 = 4$, $b_1 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -6$;
з) $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = -0{,}5$;
и) $b_0 = 4$, $b_1 = 2$, $a_1 = -0{,}5$, $a_2 = -0{,}5$;
к) $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = -5$.

5.15. Задана передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \frac{bs - 1}{(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)s}.$$

Синтезировать астатическую систему (с астатизмом 1-го порядка), у которой характеристический полином имеет вид $(s+1)^3$, при следующих значениях параметров объекта:

а) $b = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$; б) $b = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$;
в) $b = 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$; г) $b = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;
д) $b = 5$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$; е) $b = 6$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;
ж) $b = 5$, $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$; з) $b = 1$, $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$;
и) $b = 7$, $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$; к) $b = 8$, $a_0 = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 2$.

5.16. Задана передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \frac{bs + 1}{(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)(s-1)}.$$

Выполнить задание 5.15.

5.17. Задана передаточная функция объекта

$$W_o(s) = \frac{(b_0 s + 1)(b_1 s - \alpha)}{(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)(s-1)}.$$

Синтезировать астатическую систему (с астатизмом 1-го порядка), у которой характеристический полином имеет вид $(s+2)^3$, при следующих значениях параметров объекта:

а) $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $\alpha = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$;
б) $b_0 = 2$, $b_1 = 1$, $\alpha = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$;
в) $b_0 = 3$, $b_1 = 2$ $\alpha = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$;
г) $b_0 = 4$, $b_1 = 2$, $\alpha = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;
д) $b_0 = 5$, $b_1 = 1$, $\alpha = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$;
е) $b_0 = 6$, $b_1 = 1$, $\alpha = 1$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;
ж) $b_0 = 5$, $b_1 = 1$, $\alpha = 1$, $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$;

з) $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $\alpha = 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$;
и) $b_0 = 7$, $b_1 = 2$, $\alpha = 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$;
к) $b_0 = 8$, $b_1 = 2$, $\alpha = 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 2$.

5.4. Определение желаемой передаточной функции

Желаемая передаточная функция должна быть определена исходя из заданных требований к качеству синтезируемой системы. На ее выбор определенные ограничения накладывают условия грубости и физической осуществимости. В силу этих ограничений желаемая передаточная функция имеет вид

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{P^+(s)M(s)}{G(s)},$$

где $P^+(s)$ — множитель полинома числителя передаточной функции объекта с правыми нулями; $M(s)$ — полином, определяемый в процессе синтеза. Поэтому определение желаемой передаточной функции практически сводится к выбору полинома $G(s)$.

Передаточная функция вида

$$\widetilde{\Phi}(q) = \frac{\widetilde{b}_0 q^m + \widetilde{b}_1 q^{m-1} + \ldots + \widetilde{b}_m}{q^n + \widetilde{a}_1 q^{n-1} + \ldots + \widetilde{a}_{n-1} q + 1} \tag{5.17}$$

называется *нормированной передаточной функцией* или *передаточной функцией в форме Вышнеградского*. Нормированная передаточная характеризуется тем, что в знаменателе коэффициент при старшей степени и свободный член равны единице.

Желаемая передаточная функция, когда наряду с другими требованиями нужно обеспечить заданное время регулирования $t_{\text{р}}$, определяется следующим образом. По заданным требованиям к качеству синтезируемой системы, кроме требования к времени регулирования, находится стандартная нормированная передаточная функция вида (5.17) и для нее определяется время регулирования $\tau_{\text{р}}$. По полученному $\tau_{\text{р}}$ и заданному $t_{\text{р}}$ находится отношение $\alpha = t_{\text{р}}/\tau_{\text{р}}$. Коэффициенты желаемой передаточной функции

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

определяются так:

$$b_i = \widetilde{b}_i \alpha^{m-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{5.18а}$$

$$a_0 = \alpha^n, \quad a_k = \widetilde{a}_k \alpha^{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1; \quad a_n = 1. \tag{5.18б}$$

Стандартные нормированные передаточные функции

Рассмотрим стандартные передаточные функции, которые не имеют нулей: числители являются константами. Так как значения этих констант не влияют на характер переходного процесса, примем их равными единице.

1. Передаточная функция с одинаковыми полюсами

$$W_{\text{н}}(q) = \frac{1}{(q+1)^n}$$

обладает монотонной переходной характеристикой, неплохим быстродействием и среди передаточных функций n-го порядка с одинаковыми коэффициентами при s^{n-1} имеет наибольшую степень устойчивости. Ее знаменатель при $n = 4$, 5, 6 принимает следующий вид:

$$n = 4: \quad G_4(s) = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1;$$
$$n = 5: \quad G_5(s) = q^5 + 5q^4 + 10q^3 + 10q^2 + 5q + 1;$$
$$n = 6: \quad G_6(s) = q^6 + 6q^5 + 15q^4 + 20q^3 + 15q^2 + 6q + 1.$$

2. Оптимальная по быстродействию передаточная функция — передаточная функция с полюсами, имеющими одинаковые действительные части η и мнимые части, образующие арифметические прогрессии с разностью и первым членом, равными γ, и отношением $\mu = \gamma/\eta$, которому соответствует наименьшее время регулирования:

$$n = 1: \quad G_1(s) = q + 1;$$
$$n = 2: \quad G_2(s) = q^2 + 1{,}38q + 1;$$
$$n = 3: \quad G_3(s) = q^3 + 2{,}05q^2 + 2{,}3q + 1.$$
$$n = 4: \quad G_4(s) = q^4 + 2{,}6q^3 + 3{,}8q^2 + 2{,}8q + 1;$$
$$n = 5: \quad G_5(s) = q^5 + 2{,}5q^4 + 5{,}3q^3 + 5{,}46q^2 + 3{,}64q + 1;$$
$$n = 6: \quad G_6(s) = q^6 + 3{,}73q^5 + 8q^4 + 10{,}3q^3 + 8{,}56q^2 + 4{,}18q + 1.$$

В таблице 5.1 представлены время регулирования при $\Delta = 0{,}05h(\infty)$ и перерегулирование для приведенных стандартных нормированных передаточных функций.

Пример 5.6. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_{\text{о}}(s) = \frac{1}{(s+1)(0{,}5s+1)(0{,}2s+1)} = \frac{1}{0{,}1s^3 + 0{,}8s^2 + 1{,}7s + 1}.$$

Синтезировать регулятор, при котором переходный процесс является монотонным, время регулирования $t_{\text{р}} \leqslant 3{,}15$ и статическая ошибка равна нулю.

Таблица 5.1

а) время регулирования

	n	1	2	3	4	5	6
ПФ с одинаковыми полюсами	$\tau_р$	3	4,6	6,2	7,6	9	10,3
ПФ оптимальные по быстродействию	$\tau_р$	3	3,2	4	4,5	5,7	6,2

б) перерегулирование

	n	1	2	3	4	5	6
ПФ оптимальные по быстродействию	σ	0	5	0	5	0	5

Решение. Статическая ошибка будет равна нулю, если система будет астатической. Примем порядок астатизма $r = 1$.

В качестве стандартной передаточной функции выберем нормированную передаточную функцию с одинаковыми полюсами

$$W_н(q) = \frac{1}{(q+1)^3} = \frac{1}{q^3 + 3q^2 + 3q + 1}.$$

Для этой передаточной функции из табл. 5.1, а имеем $\tau_р = 6{,}2$ и поэтому $\alpha = 3{,}15/6{,}2 \cong 0{,}5$. Учитывая формулы (5.18б), для коэффициентов полинома знаменателя $G(s)$ желаемой передаточной функции получаем

$$a_0 = \alpha^3 = 0{,}125, \quad a_1 = \alpha^2\widetilde{a}_1 = 0{,}75, \quad a_2 = \alpha\widetilde{a}_2 = 1{,}5, \quad a_3 = 1$$

и соответственно,

$$G(s) = 0{,}125s^3 + 0{,}75s^2 + 1{,}5s + 1.$$

Числитель и знаменатель передаточной функции объекта раскладываются на множители

$$P^-(s) = P^+(s) = 1, \quad R^+(s) = 1, \quad R^-(s) = 0{,}1s^3 + 0{,}8s^2 + 1{,}7s + 1.$$

Степени полиномов равны

$$n_G = 3, \quad n_{P^-} = n_{P^+} = 0, \quad n_{R^-} = 3, \quad n_{R^+} = 0.$$

Условия (5.13), (5.14) и (5.15) принимают вид

$$3 \leqslant n_M + n_N + 1, \quad 3 + n_M \leqslant n_N + 1, \quad 3 = n_N + 1.$$

Этим условиям удовлетворяют $n_N = 2$, $n_M = 0$ и, соответственно, $N(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$, $M(s) = b_0$. При подстановке этих полиномов уравнение (5.12) принимает вид

$$b_0 + (a_0 s^2 + a_1 s + a_2)s = 0{,}125s^3 + 0{,}75s^2 + 1{,}5s + 1.$$

Отсюда $a_0 = 0{,}25$; $a_1 = 0{,}75$; $a_2 = 1{,}5$; $b_0 = 1$ и, соответственно, $N(s) = 0{,}25s^2 + 0{,}75s + 1{,}5$; $M(s) = 1$. Подставляя их и выражения для $P^-(s)$ и $R^-(s)$ в (5.11), найдем искомую передаточную функцию

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{0{,}1s^3 + 0{,}8s^2 + 1{,}7s + 1}{(0{,}25s^2 + 0{,}75s + 1{,}5)s}.$$

5.18. Определить не обладающую нулем желаемую передаточную функцию 3-го порядка, при которой переходный процесс является монотонным и время регулирования $t_{\text{р}}$ удовлетворяет условию: а) $t_{\text{р}} \leqslant 3$; б) $t_{\text{р}} \leqslant 3{,}5$; в) $t_{\text{р}} \leqslant 4$; г) $t_{\text{р}} \leqslant 4{,}5$; д) $t_{\text{р}} \leqslant 5$.

5.19. Определить не обладающую нулем желаемую передаточную функцию 4-го порядка, при которой переходный процесс является монотонным и время регулирования $t_{\text{р}}$ удовлетворяет условию: а) $t_{\text{р}} \leqslant 4$; б) $t_{\text{р}} \leqslant 4{,}5$; в) $t_{\text{р}} \leqslant 5$; г) $t_{\text{р}} \leqslant 5{,}5$; д) $t_{\text{р}} \leqslant 6$.

5.20. Определить не обладающую нулем оптимальную по быстродействию желаемую передаточную функцию 3-го порядка, у которой время регулирования $t_{\text{р}}$ удовлетворяет условию: а) $t_{\text{р}} \leqslant 2$; б) $t_{\text{р}} \leqslant 2{,}5$; в) $t_{\text{р}} \leqslant 3$; г) $t_{\text{р}} \leqslant 3{,}5$; д) $t_{\text{р}} \leqslant 3{,}8$.

5.21. Определить не обладающую нулем оптимальную по быстродействию желаемую передаточную функцию 4-го порядка, у которой время регулирования $t_{\text{р}}$ удовлетворяет условию: а) $t_{\text{р}} \leqslant 2$; б) $t_{\text{р}} \leqslant 2{,}5$; в) $t_{\text{р}} \leqslant 3$; г) $t_{\text{р}} \leqslant 3{,}5$; д) $t_{\text{р}} \leqslant 4$.

5.5. Метод обратной задачи динамики

Методом обратной задачи динамики называют метод синтеза систем, когда по заданным уравнению объекта и требованиям к качеству системы управления определяется дифференциальное уравнение, решение которого удовлетворяет заданным требованиям, а затем из найденного уравнения выражается старшая производная и, после подстановки ее вместо старшей производной в уравнение объекта, находится требуемый закон управления.

Пример 5.7. Пусть задана передаточная функция объекта

$$W_{\text{o}}(p) = \frac{b}{a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3}, \quad a_0 > 0, \quad b \neq 0.$$

Задан требуемый закон изменения $y^0(t)$ выходной переменной y. Требуется найти алгоритм управления, при котором ошибка $x(t) = y^0(t) - y(t)$ изменяется следующим образом:

$$x(t) = C_1e^{-\lambda_1 t} + C_2e^{-\lambda_2 t} + C_3e^{-\lambda_3 t}.$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; λ_1, λ_2, λ_3 — заданные положительные постоянные.

Решение. Уравнение объекта имеет вид

$$a_0 \dddot{y} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = bu, \quad a_0 > 0, \quad b \neq 0.$$

Числа $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$ являются корнями уравнения

$$(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3) = 0 \text{ или } \lambda^3 + \Lambda_1 \lambda^2 + \Lambda_2 \lambda + \Lambda_3 = 0,$$

где

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \Lambda_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad \Lambda_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Следовательно, заданная функция $x(t)$ является общим решением дифференциального уравнения

$$\dddot{x} + \Lambda_1 \ddot{x} + \Lambda_2 \dot{x} + \Lambda_3 x = 0.$$

Так как

$$\dddot{y} = \dddot{y}^0 - \dddot{x} = \dddot{y}^0 + \Lambda_1 \ddot{x} + \Lambda_2 \dot{x} + \Lambda_3 x,$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}^0 - \ddot{x}, \quad \dot{y} = \dot{y}^0 - \dot{x}, \quad y = y^0 - x,$$

подставив эти выражения в уравнение объекта, получим

$$u = \frac{1}{b}\left\{a_0\left[\left(\Lambda_1 - \frac{a_1}{a_0}\right)\ddot{x} + \left(\Lambda_2 - \frac{a_2}{a_0}\right)\dot{x} + \left(\Lambda_3 - \frac{a_3}{a_0}\right)x\right] + \right.$$
$$\left. + a_0 y^0(t) + a_1 \ddot{y}^0(t) + a_2 \dot{y}^0(t) + a_3 y^0(t)\right\}.$$

5.22. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o = \frac{b}{p^2 + a_1 p + a_2},$$

задающее воздействие — $g = g_0$ ($g_0 = \text{const}$). Определить алгоритм управления, при котором ошибка $x = g_0 - y(t)$ изменяется по закону $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, при следующих значениях параметров:

а) $b = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$;
б) $b = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
в) $b = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = -1$;
г) $b = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$;
д) $b = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
е) $b = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = -1$;
ж) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$;
з) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
и) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$;
к) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

5.23. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_{\text{o}} = \frac{b}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

задающее воздействие — $g = g_0$ ($g_0 = \text{const}$). Определить алгоритм управления, при котором ошибка $x = g_0 - y(t)$ изменяется по закону $x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t} + C_3 e^{\lambda_2 t}$, при следующих значениях параметров:

а) $b = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$;
б) $b = 4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\lambda_1 a_3 = 2$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
в) $b = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = -1$;
г) $b = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$;
д) $b = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 0{,}5$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
е) $b = 6$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1{,}5$, $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = -1$;
ж) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2{,}5$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda = -2$
з) $b = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3{,}5$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$;
и) $b = 4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$;
к) $b = 7$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

Глава 6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Определение z-преобразования. *z-преобразованием* или *преобразованием Лорана* называется соотношение

$$X^*(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x\,[lT]z^{-l},$$

ставящее дискретной функции $x[lT]$ в соответствие функцию комплексного переменного $X^*(z)$. При этом $x[lT]$ называют *оригиналом*, а $X^*(z)$ — *изображением* или *z-изображением*. Сумма в правой части называется рядом Лорана.

Оригинал и его изображение обозначают одноименными буквами: оригинал — строчной буквой, а изображение — прописной буквой со звездочкой. z-преобразование также условно записывают в виде

$$X^*(z) = Z\left\{x[lT]\right\},$$

а обратное z-преобразование — в виде

$$x[lT] = Z^{-1}\left\{X^*(z)\right\}.$$

z—преобразование от смещенной решетчатой функции $x[(l+\varepsilon)T]$

$$X^*(z,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} x\,[(l+\varepsilon)T]z^{-l}$$

называют *модифицированным z-преобразованием*. Модифицированное z-преобразование также записывают в виде

$$X^*(z,\varepsilon) = Z\left\{x[(l+\varepsilon)T]\right\} = Z^{\varepsilon}\left\{x[lT]\right\}.$$

Функцию $X^*(z,\varepsilon)$ называют z-изображением смещенной решетчатой функции $x[(l+\varepsilon)T]$ или *модифицированным z-изображением* решетчатой функции $x[lT]$.

6.1. Уравнения и передаточные функции дискретных систем

Пусть модель дискретной системы управления описывается разностным уравнением

$$a_0 y[(l+n)T] + a_1 y[(l+n-1)T] + \ldots + a_n y[lT] = \\ = b_0 u[(l+m)T] + b_1 u[(l+m-1)T] + \ldots + b_m u[lT], \quad (6.1)$$

где $y[lT]$ — выходная переменная, $u[lT]$ — входная переменная, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — константы. Используя оператор смещения E $(Ex(t) = x(t+T),\ E^k x(t) = x(t+kT))$, это уравнение можно записать в операторной форме

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \ldots + a_n) y[lT] = (b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \ldots + b_m) u[lT].$$

Разностный оператор при выходной переменной

$$Q^*(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \ldots + a_n$$

называется *собственным* (*разностным*) *оператором*, а разностный оператор при входной переменной

$$P^*(E) = b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \ldots + b_m$$

(*разностным*) *оператором воздействия*.

Таблица 6.1

z-изображения

№	$F(s)$	$f[lT]$	$F^*(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$1[lT]$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	lT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(lT)^2$	$\frac{1}{2}\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha lT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$lTe^{-\alpha lT}$	$\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
6	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin\beta lT$	$\frac{z\sin\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
7	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos\beta lT$	$\frac{z^2-z\cos\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
8	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}\sin\beta lT$	$\frac{ze^{-\alpha T}\sin\beta T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$
9	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}\cos\beta lT$	$\frac{z(z-e^{-\alpha T}\cos\beta T)}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$

Таблица 6.2

Модифицированные z-изображения

№	$F(s)$	$f[lT]$	$F^*(z,\varepsilon)$
1	$\frac{1}{s}$	$1[lT]$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	lT	$\varepsilon T\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(lT)^2$	$\frac{1}{2}\left[\varepsilon T\left(\frac{\varepsilon Tz}{z-1}+\frac{2Tz}{(z-1)^2}\right)+\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
4	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha lT}$	$e^{-\varepsilon\alpha T}\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$lTe^{-\alpha lT}$	$e^{-\varepsilon\alpha T}\left[\frac{\varepsilon Tz}{z-e^{-\alpha T}}+\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}\right]$
6	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin\beta lT$	$\frac{z^2\sin\varepsilon\beta T+z\sin(1-\varepsilon)\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
7	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos\beta lT$	$\frac{z^2\cos\varepsilon\beta T-z\cos(1-\varepsilon)\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
8	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}\sin\beta lT$	$\frac{ze^{-\varepsilon\alpha T}\left[z\sin\varepsilon\beta T+e^{-\alpha T}\sin(1-\varepsilon)\beta T\right]}{z^2-2ze^{\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$
9	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}\cos\beta lT$	$\frac{ze^{-\varepsilon\alpha T}\left[z\cos\varepsilon\beta T-e^{-\alpha T}\cos(1-\varepsilon)\beta T\right]}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называется *передаточной функцией в операторной форме.* В соответствии с этим определением передаточная функция (в операторной форме) системы управления (6.1) имеет вид

$$W^*(E)=\frac{P^*(E)}{Q^*(E)}=\frac{b_0E^m+b_1E^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0E^n+a_1E^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Имеющее наименьший порядок отношение z-изображений выходной и входной переменных, вычисленных при нулевых начальных условиях, называется *передаточной функцией в z-изображениях.*

Передаточные функции в z-преобразованиях $W^*(z)$ и в операторной форме $W^*(E)$ связаны соотношением

$$W^*(z)=W^*(E)|_{E=z}.$$

Однако если полиномы числителя и знаменателя $W^*(z)$ имеют общие нули, то они должны быть сокращены.

6.1. Определить передаточные функции (в операторной форме) дискретных систем, которые описываются следующими разностными уравнениями (y — выход, u — вход):

а) $y(t+3T)+2y(t+2T)+3y(t+T)+y(t)=3u(t+T)+u(t)$;
б) $y(t+2T)+0{,}6y(t+T)+0{,}05y(t)=0{,}1u(t+T)+u(t)$;
в) $y(t+2T)+2y(t+T)+0{,}25y(t)=0{,}2u(t+T)+5u(t)$;
г) $y(t+2T)+3y(t+T)+2y(t)=u(t+T)+u(t)$;
д) $y(t+3T)+2y(t+T)+y(t)=2u(t+T)+u(t)$;
е) $y(t+3T)+2y(t+2T)+3y(t)=u(t+T)+2u(t)$;
ж) $y(t+2T)+5y(t+T)+6y(t)=2u(t+T)+6u(t)$;
з) $y(t+2T)+5y(t+T)+6y(t)=u(t+T)+2u(t)$;
и) $y(t+3T)+2y(t+2T)+y(t)=u(t+2T)+u(t)$;
к) $y(t+3T)+2y(t+T)+3y(t)=u(t)$.

6.2. Определить передаточные функции в z-изображениях дискретных систем, которые описываются разностными уравнениями, приведенными в задании 6.1.

6.3. Записать разностные уравнения дискретных систем, которые определяются следующими передаточными функциями:

а) $W^*(E)=\dfrac{E+1}{E^2+2E+3}$; б) $W^*(E)=\dfrac{0{,}1E+1}{E^2+0{,}5}$;
в) $W^*(E)=\dfrac{E+2}{E^3+2E+1}$; г) $W^*(E)=\dfrac{2E+1}{0{,}1E^3+E^2+2}$;
д) $W^*(E)=\dfrac{E^2+2}{E^3+2E+1}$; е) $W^*(E)=\dfrac{5}{E^2+3E+5}$;
ж) $W^*(E)=\dfrac{7E+3}{E^2+5E+2}$; з) $W^*(E)=\dfrac{E^2+2}{E^3+5E+1}$;
и) $W^*(E)=\dfrac{E+1}{E^3+4E^2+2}$; к) $W^*(E)=\dfrac{2E+1}{E^2+3E+4}$.

6.4. По правилу вычисления передаточных функций (см. гл. 1) определить передаточную функцию $W^*_{yg}(z)$ относительно входа g и выхода y дискретной системы управления (рис. 6.1) при следующих передаточных функциях звеньев:

а) $W_1^*(z)=\dfrac{1}{z+1}$, $W_2^*(z)=0{,}5$, $W_3^*(z)=\dfrac{z+1}{z-2}$;
б) $W_1^*(z)=1$, $W_2^*(z)=\dfrac{0{,}5}{z+1}$, $W_3^*(z)=\dfrac{2z+1}{z-3}$;
в) $W_1^*(z)=\dfrac{z+1}{z-2}$, $W_2^*(z)=1$, $W_3^*(z)=\dfrac{1}{z+1}$;
г) $W_1^*(z)=\dfrac{z+1}{z-3}$, $W_2^*(z)=0{,}5$, $W_3^*(z)=\dfrac{2}{z+1}$;
д) $W_1^*(z)=\dfrac{z-1}{z+2}$, $W_2^*(z)=3$, $W_3^*(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$;
е) $W_1^*(z)=\dfrac{1}{z+1}$, $W_2^*(z)=\dfrac{z-2}{z+1}$, $W_3^*(z)=\dfrac{2}{z-3}$;
ж) $W_1^*(z)=\dfrac{2}{z-3}$, $W_2^*(z)=2$, $W_3^*(z)=\dfrac{z-2}{z+1}$;

з) $W_1^*(z) = \dfrac{z-2}{z+1}$, $W_2^*(z) = \dfrac{z+4}{z+1}$, $W_3^*(z) = \dfrac{1}{z+1}$.

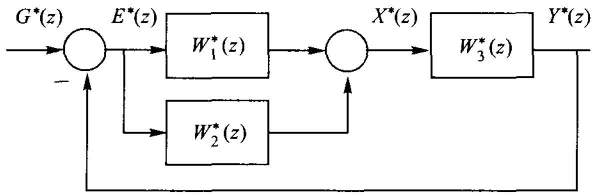


Рис. 6.1

6.5. Определить передаточную функцию $W_{xg}^*(z)$ относительно входа g и выхода x дискретной системы управления (рис. 6.1) при передаточных функциях звеньев, приведенных в задании 6.4.

6.6. Определить передаточную функцию $W_{eg}^*(z)$ относительно входа g и выхода e дискретной системы управления (рис. 6.1) при передаточных функциях звеньев, приведенных в задании 6.4.

6.2. Вычисление передаточных функций АИМ-системы

Как правило, приходится вычислять передаточные функции, когда известны характеристики дискретных элементов и передаточная функция непрерывной части. И в этом случае возникают особенности, которые делают вычисление передаточных функций дискретных систем более сложным.

АИМ-система включает АИМ-элемент (импульсный элемент с амплитудно-импульсной модуляцией) и непрерывную часть (рис. 6.2). Для получения математического описания АИМ-системы управления

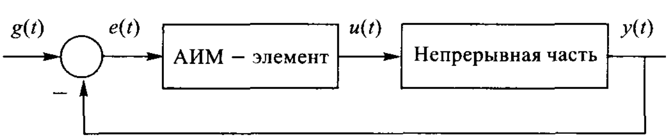


Рис. 6.2

ее представляют в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного звена 1 и приведенной непрерывной части (ПНЧ) (рис. 6.3, *а*). Простейшее импульсное звено представляет собой звено, которое преобразует входную функцию $e(t)$ в обобщенную решетчатую функцию

$$e^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e(t)\delta(t-iT),$$

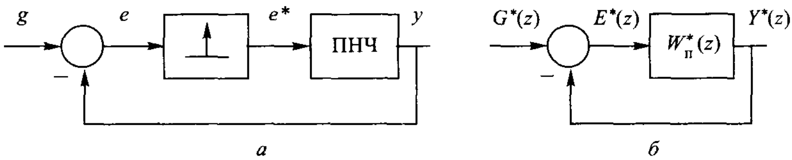


Рис. 6.3

где T — период выходного сигнала АИМ-элемента. Передаточная функция ПНЧ равна произведению передаточных функций непрерывной части и формирующего звена. Формирующее звено (ФЗ) формирует из обобщенной решетчатой функции $e^*(t)$ сигнал, тождественно равный выходному сигналу АИМ-элемента, и его передаточная функция равна изображению функции, описывающей немодулированный импульс.

Если ограничиться изучением АИМ-системы только в дискретные моменты времени $t = lT$, то получим дискретную модель (рис. 6.3, *б*), в которой передаточная функция $W^*_п(z)$ равна z-изображению решетчатой весовой функции ПНЧ:

$$W^*_п(z) = Z\{w_п[lT]\}$$

Зная связь между изображением Лапласа непрерывной функции и z-изображением соответствующей решетчатой функции (см. табл. 6.1), можно непосредственно по передаточной функции ПНЧ $W_п(s)$ определить $W^*_п(z)$. Для этого введем в рассмотрение оператор Z_T, который каждой функции $X(s) = L\{x(t)\}$ ставит в соответствие функцию $X^*(z) = Z\{x[lT]\}$:

$$X^*(z) = Z_T\{X(s)\}.$$

Оператор Z_T соответствует трем последовательным операциям: обратному преобразованию Лапласа, квантованию по времени и z-преобразованию. Так как все три указанные операции являются линейными, то оператор Z_T является линейным. Используя этот оператор, передаточную функцию $W^*_п(z)$ можно определить следующим образом:

$$W^*_п(z) = Z_T\{W_п(s)\}.$$

Дальше также используется оператор Z^ε_T, который функции $X(s) = L\{x(t)\}$ ставит в соответствие модифицированное z-изображение $X^*(z,\varepsilon) = Z\{x[(l+\varepsilon\}T]\}$:

$$X^*(z,\varepsilon) = Z^\varepsilon_T\{X(s)\}.$$

По аналогии с z-преобразованием в Z_T-преобразовании

$$X^*(z) = Z_T\{X(s)\}$$

и в Z_T^ε-преобразовании

$$X^*(z,\varepsilon) = Z_T^\varepsilon\{X(s)\}$$

$X(s)$ называют оригиналом, а $X^*(z)$ — Z_T-изображением и $X^*(z,\varepsilon)$ — Z_T^ε-изображением или модифицированным Z_T-изображением. Z_T- и Z_T^ε-изображения от основных функций можно найти в табл. 6.1 и 6.2 соответственно.

Вычисление Z_T- и Z_T^ε-изображений. Пусть оригинал имеет вид

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

где $B(s)$ и $A(s)$ — полиномы от s степени m и n соответственно, причем $m < n$. Если все полюса s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ данной функции (т. е. корни уравнения $A(s) = 0$) различны, то

$$X^*(z) = Z_T\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}\,\frac{z}{z - e^{s_i T}}, \tag{6.2}$$

$$X^*(z,\varepsilon) = Z_T^\varepsilon\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}e^{\varepsilon s_i T}\frac{z}{z - e^{s_i T}}, \tag{6.3}$$

где $A'(s_i) = \left.\dfrac{dA(s)}{ds}\right|_{s=s_i}$.

Пример 6.1. Передаточная функция ПНЧ имеет вид $W_\text{п}(s) = \dfrac{k}{[s(s+\alpha)]}$. Требуется найти дискретную передаточную функцию $W_\text{п}^*(z)$.

Решение. Полюсами данной передаточной функции (т. е. корнями уравнения $A(s) = s(s+\alpha) = 0$) являются $s_1 = 0$, $s_2 = -\alpha$. Производная $A'(s) = 2s + \alpha$. Поэтому по формуле (6.2)

$$W_\text{п}^*(z) = \frac{k}{\alpha}\frac{z}{z-1} - \frac{k}{\alpha}\frac{z}{z - e^{-\alpha T}} = \frac{kz(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha(z-1)(z - e^{-\alpha T})}.$$

Если $X(s) = B(s)/A(s)$ содержит кратные полюса, то изображения $X^*(z)$ и $X^*(z,\varepsilon)$ можно получить, разложив $X(s)$ на элементарные дроби. В простых случаях можно введением малых параметров видоизменить функцию $X(s)$ так, чтобы она не содержала кратных полюсов, и воспользоваться формулами (6.2) и (6.3), а затем произвести предельный переход, устремив малые параметры к нулю.

Пример 6.2. Передаточная функция ПНЧ имеет вид $W_\text{п}(s) = k/s^2$. Требуется определить дискретную передаточную функцию $W_\text{п}^*(z)$.

Решение. Данная передаточная функция ПНЧ имеет двукратный полюс $s_{1,2} = 0$. Введя малый параметр β, преобразуем ее к виду

$$W_{\text{п}}(s, \beta) = \frac{k}{s(s+\beta)}.$$

Преобразованная передаточная функция имеет простые полюса $s_1 = 0$ и $s_2 = -\beta$. Производная $A'(s) = 2s + \beta$. По формуле (6.2)

$$W_{\text{п}}^*(z, \beta) = \frac{kz(1 - e^{-\beta T})}{\beta(z-1)(z - e^{-\beta T})}.$$

Используя разложение $e^{-\beta T} = 1 - \beta T + o(\beta)$, где $o(\beta)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем β, получаем

$$W_{\text{п}}^*(z, \beta) = \frac{kz(\beta T + o(\beta))}{\beta(z-1)(z - 1 + \beta T - o(\beta))}.$$

Отсюда, устремив β к нулю, находим

$$W_{\text{п}}^*(z) = \lim_{\beta \to 0} W_{\text{п}}^*(z, \beta) = \frac{kzT}{(z-1)^2}.$$

Если среди простых полюсов функции $X(s)$ имеются комплексные корни, то может оказаться нецелесообразным использование формул (6.2) и (6.3). Это связано с необходимостью преобразования полученного результата для исключения мнимого числа. Во всех случаях, когда использование формул (6.2) и (6.3) невозможно или нецелесообразно, можно определить $X^*(z)$ и $X^*(z, \varepsilon)$, разложив $X(s)$ на элементарные дроби.

Пример 6.3. Определить Z_T- и Z_T^ε-изображение функции

$$X(s) = \frac{10}{s^2(s^2+s+1)}.$$

Решение. Данная функция имеет кратный полюс $s_{1,2} = 0$ и два комплексных полюса. Найдем $X^*(z)$ и $X^*(z, \varepsilon)$, разложив $X(s)$ на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{10}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2+s+1} =$$
$$= \frac{(B+C)s^3 + (A+B+D)s^2 + (A+B)s + A}{s^2(s^2+s+1)}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа и решив полученную систему уравнений, найдем $A = 10$, $B = -10$, $C = 10$, $D = 0$. Следовательно,

$$\frac{10}{s^2(s^2+s+1)} = 10\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+s+1}\right).$$

Преобразуем правую часть к табличному виду:

$$\frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, произведем Z_T^ε-преобразование:

$$Z_T^\varepsilon\left\{\frac{10}{s^2(s^2+s+1)}\right\} = 10\left(Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1}{s}\right\}\right) + \\ + 10\left(Z_T^\varepsilon\left\{\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\} - \frac{\alpha}{\beta}Z_T^\varepsilon\left\{\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}\right).$$

После подстановки соответствующих изображений из табл. 6.2 и преобразований получим

$$X^*(z,\varepsilon) = \frac{10Tz\left[(z-1)(\varepsilon-1/T)+1\right]}{(z-1)^2} + \\ + \frac{10ze^{-\varepsilon\alpha T}\left[z\cos\varepsilon\beta T - e^{-\alpha T}\cos(1-\varepsilon)\beta T\right]}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T + e^{-2\alpha T}} - \\ - \frac{10ze^{-\varepsilon\alpha T}\frac{\alpha}{\beta}\left[z\sin\varepsilon\beta T - e^{-\alpha T}\sin(1-\varepsilon)\beta T\right]}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T + e^{-2\alpha T}}.$$

Положив $\varepsilon = 0$, находим

$$X^*(z) = \frac{10Tz\left[1-(z-1)/T\right]}{(z-1)^2} + \frac{10z\left[z - e^{-\alpha T}\cos\beta T + (\alpha/\beta)e^{-\alpha T}\sin\beta T\right]}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}}.$$

Вычисление Z_T- и Z_T^ε-изображений от оригинала, включающего множитель $e^{-\tau s}$. Пусть оригинал имеет вид

$$Y(s) = e^{-\tau s}X(s),$$

где $X(s)$ — дробно-рациональная функция: $X(s) = B(s)/A(s)$. В этом случае в зависимости от величины τ для $Y^*(z)$ имеем

а) при $(k-1)T < \tau \leqslant kT$

$$Y^*(z) = Z_T\left\{e^{-\tau s}X(s)\right\} = z^{-k}Z_T^\varepsilon\left\{X(s)\right\} = z^{-k}X^*(z,\varepsilon), \tag{6.4}$$

где $\varepsilon = k - \tau/T$;

б) при $\tau = kT$

$$Y^*(z) = Z_T\left\{e^{-kT}X(s)\right\} = z^{-k}Z_T\left\{X(s)\right\} = z^{-k}X^*(z). \tag{6.5}$$

Z_T-преобразование обладает следующим свойством: если оригинал в Z_T-преобразовании содержит множитель, представляющий полином или дробно-рациональную функцию от e^{-Ts}, то этот множитель можно вынести за знак оператора Z_T, произведя подстановку $e^{Ts} = z$.

Например,

$$Z_T\left\{(a_0 + a_1 e^{-T})X(s)\right\} = (a_0 + a_1 z^{-1})Z_T\left\{X(s)\right\} \text{ или}$$

$$Z_T\left\{\frac{b_0 + b_1 e^{-T}}{a_0 + a_1 e^{-T}}X(s)\right\} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}}Z_T\left\{X(s)\right\}.$$

Пример 6.4. АИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы длительности $\tau_\text{и} = 0{,}1$ с периодом $T = 0{,}2$ и амплитудой (высотой) $A_\text{и} = 1$. Передаточная функция непрерывной части $W_\text{н}(s) = 10/(s+1)$. Требуется определить дискретную передаточную функцию $W_\text{п}^*(z)$.

Решение. Найдем сначала передаточную функцию приведенной непрерывной части. Так как передаточная функция формирующего звена

$$W_\text{ф}(s) = \frac{1 - e^{-\tau_\text{и} s}}{s} = \frac{1 - e^{-0{,}1s}}{s},$$

передаточная функция ПНЧ

$$W_\text{п}(s) = W_\text{ф}(s)W_\text{н}(s) = \frac{10(1 - e^{-0{,}1s})}{s(s+1)}$$

или

$$W_\text{п}(s) = (1 - e^{-0{,}1s})W_\text{о}(s),$$

где $W_\text{о}(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)} = \dfrac{10}{s(s+1)}$.

Дискретная передаточная функция

$$W_\text{п}^*(z) = Z_T\left\{W_\text{п}(s)\right\} = Z_T\left\{W_\text{о}(s)\right\} - Z_T\left\{e^{-0{,}1s}W_\text{о}(s)\right\}.$$

В данном случае $\tau = 0{,}1$ $(0 < \tau < T)$, $k = 1$ и $\varepsilon = 1 - \dfrac{\tau}{T} = 1 - \dfrac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$. Согласно (6.4)

$$W_\text{п}^*(z) = W_\text{о}^*(z) - z^{-1}W_\text{о}^*(z, \varepsilon).$$

Полюсами $W_\text{о}(s)$ являются $s_1 = 0$ и $s_2 = -1$, производная $A'(s) = 2s + 1$. В соответствии с (6.2) и (6.3)

$$W_\text{о}^*(z) = Z_T\left\{W_\text{о}(s)\right\} = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{z - e^{-0{,}2}},$$

$$W_\text{о}^*(z, \varepsilon) = Z_T^\varepsilon\left\{W_\text{о}(s)\right\} = \frac{10z}{z-1} - e^{-0{,}1}\frac{10z}{z - e^{-0{,}2}}.$$

Следовательно,

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-0,2}} - \frac{10}{z-1} + e^{-0,1}\frac{10}{z-e^{-0,2}} = \frac{10(e^{-0,1}-e^{-0,2})}{z-e^{-0,2}}.$$

6.7. Определить Z_T- изображения при периоде $T = 0{,}1$ следующих передаточных функций:

а) $W(s) = \dfrac{5(s+2)}{s(s+1)}$; б) $W(s) = \dfrac{5(s+3)}{s^2+3s+2}$;

в) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$; г) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$;

д) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}$; е) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2{,}5s+1}$;

ж) $W(s) = \dfrac{4}{s^2+1}$; з) $W(s) = \dfrac{5s}{s^2+1}$;

и) $W(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$; к) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+5}$.

6.8. Определить модифицированные Z_T-изображения при периоде $T = 0{,}1$ передаточных функций, приведенных в задании 6.7.

6.9. Определить Z_T-изображения при периоде $T = 0{,}1$ следующих передаточных функций:

а) $W(s) = \dfrac{5(s+2)}{s(s+1)}e^{-0,05s}$; б) $W(s) = \dfrac{5(s+3)}{s^2+3s+2}e^{-0,15s}$;

в) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+1{,}5s+0{,}5}e^{-0,2s}$; г) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}e^{-0,25s}$;

д) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}e^{-0,1s}$; е) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2{,}5s+1}e^{-0,3s}$;

ж) $W(s) = \dfrac{4}{s^2+1}e^{-0,05s}$; з) $W(s) = \dfrac{5s}{s^2+1}e^{-0,15s}$;

и) $W(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}e^{-0,45s}$; к) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+5}e^{-0,35s}$.

6.10. В АИМ-системе (рис. 6.2) АИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы длительности $\tau_{\text{и}} = 0{,}05$ с периодом $T = 0{,}1$ и амплитудой (высотой) $A_{\text{и}} = 1$. Определить передаточную функцию $W_{\text{п}}^*(z)$ дискретной модели (см. рис. 6.3, *б*) при следующих передаточных функциях непрерывной части:

а) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+3s+2}$; б) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+4s+3}$;

в) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2}{s^2+2{,}5s+1{,}5}$; г) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2}{s^2+3{,}5s+2{,}5}$;

д) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$; е) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+2{,}5s+1}$;

ж) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 0{,}75}$; з) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2 + 3s + 1{,}25}$;

и) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2 + 3{,}5s + 1{,}5}$; к) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{4}{s^2 + 4{,}5s + 2}$.

6.3. Цифровые системы управления

Если цифровое устройство оперирует числовыми представлениями со значительным количеством разрядов, то квантованием по уровню можно пренебречь. И системы управления с такими цифровыми устройствами можно рассматривать как АИМ-системы.

Цифровая система управления (ЦСУ) включает объект управления (ОУ), чувствительные элементы (ЧЭ), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) (рис. 6.4). АЦП преобразует аналоговый сигнал в цифрой, а ЦАП — цифровой сигнал в аналоговый. ЦВУ выполняет все необходимые вычисления в соответствии с заданным алгоритмом управления, т. е. представляет собой регулятор.

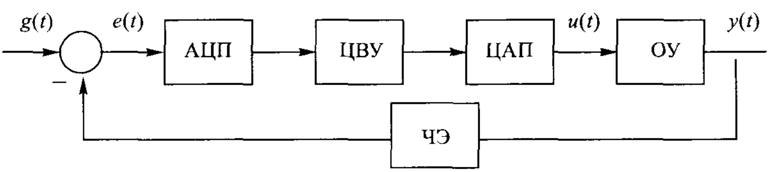


Рис. 6.4

Если пренебречь квантованием по уровню, цифровую систему управления можно представить в виде блок-схемы (рис. 6.5), состоящей из прерывателя, дискретного фильтра (ДФ), фиксатора нулевого порядка (ФНП) и непрерывной части (НЧ).

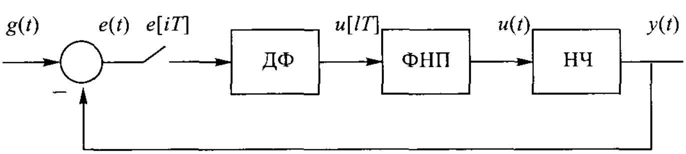


Рис. 6.5

Прерыватель является моделью АЦП и преобразует непрерывный сигнал $e(t)$ в дискретный сигнал $e[lT]$. В дальнейшем прерыватель в явном виде на схеме не будем указывать, принимая, что он входит в состав ДФ.

Дискретный фильтр представляет собой модель ЦВУ и характеризуется дискретной передаточной функцией — передаточной функцией регулятора. В качестве ЦАП чаще всего используется фиксатор нулевого порядка — элемент, который запоминает входной дискретный сигнал на один период — до прихода следующего дискретного сигнала. Фиксатор нулевого порядка можно рассматривать как АИМ-элемент, вырабатывающий прямоугольные импульсы длительности T (относительная длительность $\gamma = 1$) и с амплитудой $A_и = 1$. Представив ФНП в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного элемента и формирующего звена, получим эквивалентную схему цифровой системы управления (рис. 6.6).

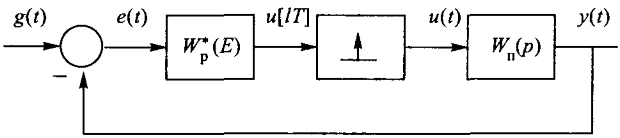


Рис. 6.6

На этой схеме $W_р^*(E)$ — передаточная функция (в операторной форме) дискретного фильтра (регулятора), $W_п(p)$ — передаточная функция ПНЧ. Передаточная функция (в изображениях Лапласа) формирующего звена $W_ф(s) = 1 - e^{-Ts}/s$.

Передаточная функция (в изображениях Лапласа) ПНЧ

$$W_п(s) = W_ф(s)W_н(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} W_н(s).$$

Дискретная передаточная функция ПНЧ

$$W_п^*(z) = Z_T\{W_п(s)\} = Z_T\left\{\frac{W_н(s)}{s}\right\} - Z_T\left\{e^{-Ts}\frac{W_н(s)}{s}\right\}$$

или

$$W_п^*(z) = (1 - z^{-1})Z_T\left\{\frac{W_н(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} Z_T\left\{\frac{W_н(s)}{s}\right\}.$$

Используя эту передаточную функцию, можно построить структурную схему дискретной модели цифровой системы управления (рис. 6.7).

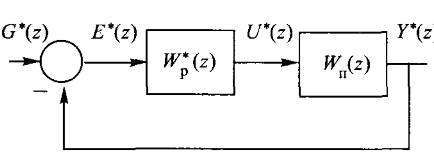


Рис. 6.7

Пример 6.5. Дана цифровая система управления, у которой передаточная функция непрерывной части $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$ и цифровое вычислительное устройство реализует алгоритм управления, определяемый разностным уравнением

$$u[(l+1)T] - u[lT] = 2e[(l+1)T] - e[lT].$$

Требуется определить передаточную функцию данной системы относительно входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ (рис. 6.6).

Решение. Запишем уравнение регулятора в операторной форме:

$$(E-1)u[lT] = (2E-1)e[lT].$$

Отсюда передаточная функция регулятора в операторной форме

$$W_{\text{р}}^*(E) = \frac{2E-1}{E-1}$$

и в z-изображениях

$$W_{\text{р}}^*(z) = W_{\text{р}}^*(E)\big|_{E=z} = \frac{2z-1}{z-1}.$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{\text{п}}(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s(s^2+3s+2)}.$$

Дискретная передаточная функция ПНЧ

$$W_{\text{п}}^*(z) = Z_T\left\{W_{\text{п}}(s)\right\} = \frac{z-1}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right\}.$$

Корнями полинома $A(s) = s(s^2+3s+2)$ являются $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -2$ и производная $A'(s) = 3s^2 + 6s + 2$. По формуле (6.2)

$$Z_T\left\{\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right\} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-2T}} = \\ = \frac{z(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2(z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}.$$

Следовательно,

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}.$$

Искомая передаточная функция замкнутой системы

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{\text{р}}^*(z)W_{\text{п}}^*(z)}{1 + W_{\text{р}}^*(z)W_{\text{п}}^*(z)} =$$

$$= \frac{(2z-1)(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2(z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-2T}) + (2z-1)(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}.$$

6.11. В цифровой системе управления (рис. 6.4 и 6.5) ЦВУ реализует алгоритм управления

$$u[(l+1)T] - u[lT] = (\alpha+\beta)e[(l+1)T] - \alpha\, e[lT],$$

ЦАП — фиксатор нулевого порядка. Определить передаточные функции $W_{\text{р}}^*(z)$ и $W_{\text{п}}^*(z)$ дискретной модели (рис. 6.7) при следующих передаточных функциях НЧ и параметрах α и β:

а) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+3s+2}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$;

б) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+4s+3}$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}2$;

в) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2}{s^2+2{,}5s+1{,}5}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}2$;

г) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2}{s^2+3{,}5s+2{,}5}$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$;

д) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}4$;

е) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+2{,}5s+1}$, $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}5$;

ж) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+0{,}75}$, $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}25$;

з) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+3s+1{,}25}$, $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 0{,}4$;

и) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+3{,}5s+1{,}5}$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$;

к) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{4}{s^2+4{,}5s+2}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

6.4. ШИМ-системы управления

Блок-схема ШИМ-системы управления включает ШИМ-элемент (импульсный элемент с широтно-импульсной модуляцией) и НЧ (рис. 6.8). Пусть ШИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы с амплитудой $A_{\text{и}}$ и периодом T. На выходе ШИМ-элемента ширина модулированного импульса пропорциональна модулю $|e[iT]|$, а ее знак совпадает со знаком входного сигнала в момент съема. Модулированный импульс на выходе ШИМ-элемента можно представить как разность двух ступенчатых функций:

$$s(t - iT) = A_и \operatorname{sign} e[iT][1(t - iT) - 1(t - (i + \gamma_i)T)],$$

где $\gamma_i = \chi\,|e[iT]|$. Здесь χ является константой, удовлетворяющей неравенству $0 < \chi < 1/e_m$, $e_m = \sup\limits_t e(t)$, и называется *коэффициентом модуляции*.

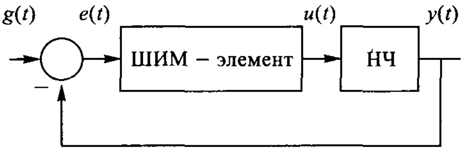


Рис. 6.8

Линеаризация. Уравнения ШИМ-элемента являются нелинейными. Если выполняется условие $\gamma_i T \ll 1$ или $T \ll 1$ $(\gamma_i \leqslant 1)$, то можно произвести линеаризацию и получить дискретно-непрерывную модель (рис. 6.9 *а*), а после дискретизации — дискретную модель (рис. 6.9 *б*). Здесь

$$W_п(p) = \chi A_и T W_н(p), \quad W_п^*(z) = Z_T\{W_п(s)\} = \chi A_и T Z_T\{W_н(s)\}.$$

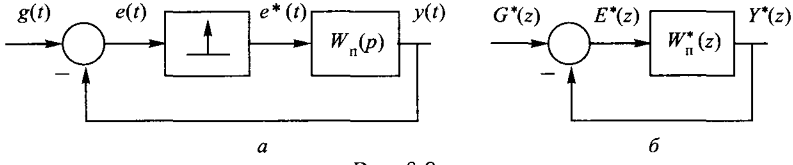


Рис. 6.9

Пример 6.6. Дана ШИМ-система управления (рис. 6.8). Амплитуда $A_и = 1$, коэффициент модуляции $\chi = 0{,}05$, период следования импульсов $T = 0{,}1$ и передаточная функция непрерывной части $W_н(s) = 200/(s(s+1))$. Требуется определить дискретную передаточную функцию замкнутой системы $W_{yg}^*(z)$.

Решение. Так как

$$W_н^*(z) = Z_T\{W_н(s)\} = Z_T\left\{\frac{200}{s(s+1)}\right\} = \frac{200z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})},$$

то

$$W_п^*(z) = \chi A_и T W_н^*(z) = \frac{z(1 - e^{-0,1})}{(z-1)(z-e^{-0,1})} \cong \frac{0{,}1z}{(z-1)(z-0{,}9)}.$$

Искомая передаточная функция

$$W^*_{yg}(z) = \frac{W^*_{\text{п}}(z)}{1+W^*_{\text{п}}(z)} = \frac{0{,}1z}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}9}.$$

6.12. В ШИМ-системе управления ШИМ-элемент вырабатывает последовательность прямоугольных импульсов с периодом следования импульсов $T = 0{,}1$, амплитудой $A_{\text{и}} = 15$, коэффициентом модуляции $\chi = 0{,}2$. Определить передаточную функцию $W^*_{\text{п}}(z)$ дискретной модели (см. рис. 6.9, *б*) при следующих передаточных функциях непрерывной части:

а) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$; б) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$;

в) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{s+2}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$; г) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$;

д) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}$; е) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2{,}5s+1}$;

ж) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{4}{s^2+1}$; з) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5s}{s^2+1}$;

и) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$; к) $W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+5}$;

6.5. Вычисление передаточных функций дискретных систем в общем случае

Выше мы рассмотрели вычисление передаточных функций дискретных систем, когда их эквивалентная схема за простейшим импульсным звеном содержит одно непрерывное звено — приведенную НЧ. Однако может потребоваться вычисление передаточных функций, эквивалентная схема которых имеет более общий вид (рис. 6.10). И в этом

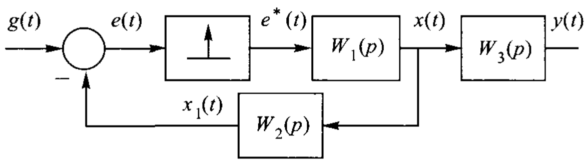


Рис. 6.10

случае справедливо правило, которое совпадает с правилом вычисления передаточных функций одноконтурной непрерывной системы: *передаточная функция относительно входа $g(t)$ и какого-либо выхода равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу* *плюс (а при положительной обратной связи минус) передаточная функция разомкнутой системы.* Согласно этому правилу имеем

$$W_{eg}^*(z) = \frac{E^*(z)}{G^*(z)} = \frac{1}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}},$$

$$W_{xg}^*(z) = \frac{X^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}.$$

$$W_{yg}^*(z) = \frac{Y^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}.$$

Следует иметь в виду, что при вычислении передаточной функции прямой цепи и передаточной функции разомкнутой системы непрерывные звенья, расположенные за простейшим импульсным звеном, нужно рассматривать как одну НЧ.

Теперь рассмотрим схему с дискретным фильтром, включенным перед простейшим импульсным звеном (рис. 6.11). Установленное выше правило вычисления дискретной передаточной функции замкнутой системы остается в силе и в данном случае:

$$W_{xg}^*(z) = \frac{W_{дф}^*(z)Z_T\{W_1(s)\}}{1 + W_{дф}^*(z)Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}},$$

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{дф}^*(z)Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}}{1 + W_{дф}^*(z)Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}},$$

$$W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W_{дф}^*(z)Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}$$

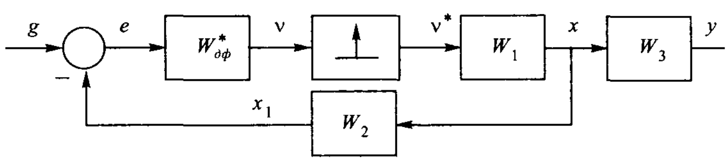


Рис. 6.11

П р и м е р 6.7. Пусть в дискретной системе, представленной на рис. 6.11, $W_{дф}^*(z) = 2$, $W_1(s) = \dfrac{20(1 - e^{-Ts})}{s(s+1)}$, $W_2(s) = \dfrac{0{,}5}{0{,}2s + 1}$, $W_3(s) = e^{-0{,}05s}$ и период следования импульсов $T = 0{,}1$. Требуется определить передаточные функции $W_{xg}^*(z)$ и $W_{yg}^*(z)$.

Р е ш е н и е. Найдем необходимые для определения требуемых передаточных функций Z_T-изображения. Учитывая, что полином $1 - e^{-Ts}$, как частный случай дробно-рациональной функции от e^{-Ts}, можно вынести за знак оператора Z_T, сделав подстановку $e^{Ts} = z$, получим

$$Z_T\{W_1(s)\} = \frac{20(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \cong \frac{2}{z-0{,}9},$$

$$Z_T\{W_1(s)W_2(s)\} = \frac{10(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(s+1)(0{,}2s+1)}\right\} \cong \frac{10z^2 - 15{,}7z + 9{,}2}{(z-0{,}9)(z-0{,}6)},$$

$$Z_T\{W_1(s)W_3(s)\} = \frac{20(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{e^{-0{,}05}}{s(s+1)}\right\} =$$

$$= \frac{20(z-1)}{z} z^{-1} Z_T^{0{,}5}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \cong \frac{z+1}{z(z-0{,}9)}.$$

Подставив полученные выражения и выражения для $W^*_{\text{дф}}(z)$ в вышеприведенные формулы, получим

$$W^*_{xg}(z) = \frac{4(z-0{,}6)}{21z^2 - 32{,}9z + 18{,}9}, \quad W^*_{yg}(z) = \frac{2(z-1)(z-0{,}6)}{z(21z^2 - 32{,}9z + 18{,}9)}.$$

6.13. Определить передаточную функцию $W^*_{xg}(z)$ дискретной модели системы управления, эквивалентная схема которой приведена на рис. 6.10, при периоде $T = 0{,}1$ и следующих передаточных функциях $W_1(p)$ и $W_2(p)$:

а) $W_1(p) = \dfrac{5}{s(s+1)}$, $W_2(p) = s+2$;

б) $W_1(p) = \dfrac{5}{s^2+3s+2}$, $W_2(p) = s+3$;

в) $W_1(p) = \dfrac{2}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$, $W_2(p) = s+2$;

г) $W_1(p) = \dfrac{2}{s^2+4s+3}$, $W_2(p) = s+2$;

д) $W_1(p) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$, $W_2(p) = 2s+1$;

е) $W_1(p) = \dfrac{1}{s^2+2{,}5s+1}$, $W_2(p) = s+1$;

ж) $W_1(p) = \dfrac{1}{s^2+1}$, $W_2(p) = 4$;

з) $W_1(p) = \dfrac{s}{s^2+1}$, $W_2(p) = 5$;

и) $W_1(p) = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$, $W_2(p) = 5$;

к) $W_1(p) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+5}$, $W_2(p) = 2$.

6.14. Определить передаточную функцию $W^*_{eg}(z)$ дискретной модели системы управления, эквивалентная схема которой приведена на рис. 6.10, при периоде $T = 0{,}1$ и передаточных функциях $W_1(p)$ и $W_2(p)$, приведенных в задании 6.13.

6.15. Определить передаточную функцию $W^*_{yg}(z)$ дискретной модели системы управления, эквивалентная схема которой приведена на рис. 6.10, при периоде $T = 0{,}1$, $W_3(p) = e^{-0{,}1}$ и передаточных функциях $W_1(p)$ и $W_2(p)$, приведенных в задании 6.13.

Глава 7

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

7.1. Характеристическое уравнение и основное условие устойчивости

Если внешние воздействия заданы, уравнения дискретной системы управления можно записать в виде

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = \varphi(t)$$

или в операторной форме

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \ldots + a_n) y(t) = \varphi(t).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

который получается при подстановке в собственный оператор

$$Q^*(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \ldots + a_n$$

вместо оператора смещения E переменной z.

Если задана передаточная функция системы управления, то при определении характеристического полинома нужно исходить из следующих положений: по определению передаточной функции в операторной форме ее знаменатель есть собственный оператор, а знаменатель передаточной функции в z-изображениях совпадает с характеристическим полиномом (при условии, что передаточная функция в операторной форме не содержит одинаковые нули и полюса).

Общее решение неоднородного разностного уравнения имеет вид

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{с}}(t),$$

где $y_{\text{в}}(t)$ — частное решение этого уравнения и $y_{\text{с}}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Линейная дискретная система управления называется *устойчивой*, если общее решение однородного разностного уравнения при $t \to \infty$ стремится к нулю: $\lim\limits_{t\to\infty} y_c[lT] = 0$.

Основное условие устойчивости: *для того чтобы линейная дискретная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю меньше единицы или, что то же, находились внутри единичного круга на z-плоскости корней.*

Пример 7.1. Передаточная функция системы

$$W^*(z) = \frac{5(z+1)}{z^2 - z + 0{,}5}.$$

Требуется исследовать ее устойчивость.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - z + 0{,}5 = 0.$$

Его корнями являются $z_{1,2} = 0{,}5 \pm j0{,}5$.

Их модули $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0{,}5} < 1$.

Система устойчива.

7.2. Алгебраические критерии устойчивости

Необходимое условие устойчивости: для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

были по модулю меньше единицы ($|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$) необходимо, чтобы при $a_0 > 0$ выполнялись неравенства

$$Q^*(1) > 0, \quad (-1)^n Q^*(-1) > 0. \tag{7.1}$$

Пример 7.2. Характеристический полином дискретной системы имеет вид

$$Q^*(z) = z^3 + 2{,}3z^2 + 0{,}5z - 0{,}2.$$

Требуется определить устойчивость системы.

Решение. Проверим необходимое условие устойчивости. В данном случае $a_0 = 1 > 0$ и

$$Q^*(1) = 1 + 2{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 3{,}6 > 0,$$

$$(-1)^3 Q^*(-1) = -(-1 + 2{,}3 - 0{,}5 - 0{,}2) = -0{,}6 < 0.$$

Необходимое условие устойчивости не выполняется. Следовательно, система неустойчива.

Исследование устойчивости, основанное на преобразовании единичного круга в левую полуплоскость. При преобразовании $v = (z-1)/(z+1)$ внутренность единичного круга на z-плоскости преобразуется в левую полуплоскость, его внешность — в правую полуплоскость и окружность (единичного радиуса) — в мнимую ось на v-плоскости. При таком преобразовании переменной характеристического уравнения для исследования устойчивости дискретных систем можно воспользоваться критериями устойчивости непрерывных систем (критерий Гурвица и др.).

Представим преобразованное характеристическое уравнение в стандартной форме:

$$G^*(z) = c_0 v^n + c_1 v^{n-1} + \ldots + c_n = 0.$$

При $n = 1, 2, 3$ коэффициенты преобразованного уравнения выражаются через коэффициенты исходного уравнения следующим образом:

$$n = 1: \quad c_0 = a_0 - a_1, \quad c_1 = a_0 + a_1; \tag{7.2а}$$

$$n = 2: \quad c_0 = a_0 - a_1 + a_2, \quad c_1 = 2(a_0 - a_2), \quad c_2 = a_0 + a_1 + a_2; \tag{7.2б}$$

$$n = 3: \quad c_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \quad c_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2,$$
$$c_2 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2, \; c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3. \tag{7.2в}$$

Для того чтобы дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни преобразованного характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости (имели отрицательную вещественную часть).

Пример 7.3. Характеристический полином дискретной системы управления имеет вид

$$Q^*(z) = z^3 - 0{,}1z^2 - 0{,}46z - 0{,}08.$$

Определить ее устойчивость.

Решение. В данном случае

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -0{,}1, \quad a_2 = -0{,}46, \quad a_3 = -0{,}08$$

и в соответствии с (7.2в) коэффициенты преобразованного уравнения

$$c_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 + 0{,}1 - 0{,}46 + 0{,}08 = 0{,}72;$$
$$c_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 = 3(1 - 0{,}08) + 0{,}1 + 0{,}46 = 3{,}32;$$
$$c_2 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 = 3(1 + 0{,}08) - 0{,}1 + 0{,}46 = 3{,}6;$$
$$c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 0{,}1 - 0{,}46 - 0{,}08 = 0{,}36.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется: все коэффициенты преобразованного характеристического уравнения больше нуля. Определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2 = c_1c_2 - c_0c_3 = 3{,}32 \cdot 3{,}6 - 0{,}72 \cdot 0{,}36 \cong 11{,}69 > 0.$$

Следовательно, система устойчива.

Критерий устойчивости Джури. Составим таблицу Джури, которая содержит $(n+1)$ строку и столько же столбцов. При этом заполненные клетки имеют треугольную форму: нулевая строка содержит $(n+1)$ заполненных клеток, а все последующие строки имеют на единицу меньше заполненных клеток, чем предыдущая строка (табл. 7.1).

Таблица 7.1

$d_{00} = a_0$	$d_{01} = a_1$	$\cdots$	$d_{0n-1} = a_{n-1}$	$d_{0n} = a_n$
d_{10}	d_{11}	$\cdots$	d_{1n-1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
d_{n-10}	d_{n-11}			
d_{n0}				

Клетки нулевой строки заполняются коэффициентами характеристического уравнения в порядке возрастания нижних индексов: $d_{0k} = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Элементы первой строки d_{1k} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ вычисляются следующим образом. Выписываются элементы нулевой строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов двух выписанных строк: $\alpha_1 = d_{0n}/d_{00} = a_n/a_0$.

$$\begin{array}{rccccl}
- & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \;\cdot \alpha_1 = \dfrac{a_n}{a_0} \\
\hline
 & d_{10} = a_0 - \alpha_1 a_n & d_{11} = a_1 - \alpha_1 a_{n-1} & \ldots & d_{1n-1} = a_{n-1} - \alpha_1 a_1 &
\end{array}$$

Последняя разность обращается в нуль, и она отбрасывается. Поэтому 1-я строка содержит n элементов — на один элемент меньше, чем нулевая строка. Элементы всех последующих строк определяются аналогично элементам 1-й строки. Так, например, для вычисления k-й строки выписываются элементы $(k-1)$-й строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов выписанных двух строк $\alpha_k = d_{k-1,n-k+1}/d_{k-10}$. Последняя разность, обращающаяся в нуль, отбрасывается. Формула для вычисления i-го элемента k-й строки ($k = 1, 2, \ldots, n$) имеет вид

$$d_{ki} = d_{k-1,i} - \alpha_k d_{k-1,n-k-i+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ i = 0, 1, \ldots, n-k.$$

Критерий Джури (E.I. Jury). *Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома*

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

находились внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все элементы нулевого столбца таблицы Джури были положительны: $d_{0i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если все элементы нулевого столбца, кроме последнего, положительны: $d_{0i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то положительность последнего элемента, т. е. условие $d_{0n} > 0$ эквивалентно необходимому условию устойчивости (7.1). Поэтому если необходимое условие выполняется, то последний элемент d_{0n} можно не вычислять.

Пример 7.4. Характеристический полином дискретной системы управления имеет вид

$$Q^*(z) = z^4 - 0{,}7z^3 - 0{,}4z^2 + 0{,}05z + 0{,}1.$$

Исследовать устойчивость данной системы.

Решение. Сначала проверим необходимое условие устойчивости:

$$Q^*(1) = 1 - 0{,}7 - 0{,}4 + 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}05 > 0,$$

$$(-1)^4 Q^*(-1) = 1 + 0{,}7 - 0{,}4 - 0{,}05 + 0{,}1 = 1{,}35 > 0.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется. Вычислим элементы таблицы Джури. Для нулевой строки имеем

$$d_{00} = 1, \quad d_{01} = -0{,}7, \quad c_{02} = -0{,}4, \quad d_{03} = 0{,}05, \quad c_{04} = 0{,}1.$$

Ниже приводится вычисление элементов таблицы Джури для остальных строк, кроме последней.

$$\begin{array}{ccccc|l}
1 & -0{,}7 & -0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}1 & \\
0{,}1 & 0{,}05 & -0{,}4 & -0{,}7 & 1 & \cdot\alpha_1 = 0{,}1 \\
\hline
0{,}99 & -0{,}705 & -0{,}36 & 0{,}12 & & \\
0{,}12 & -0{,}36 & -0{,}705 & 0{,}99 & & \cdot\alpha_2 \cong 0{,}121 \\
\hline
0{,}975 & -0{,}69 & -0{,}275 & & & \\
-0{,}275 & -0{,}69 & 0{,}975 & & & \cdot\alpha_3 \cong -0{,}282 \\
\hline
0{,}897 & -0{,}883 & & & &
\end{array}$$

Элементы нулевого столбца (кроме последнего) равны

$$d_{00} = a_0 = 1, \quad d_{10} = 0{,}99, \quad d_{20} = 0{,}975, \quad d_{30} = 0{,}897,$$

и они положительны. Так как выполняется необходимое условие устойчивости, последний элемент нулевого столбца также будет положительным. Следовательно, система устойчива.

7.1. Исследовать устойчивость дискретных систем управления, у которых характеристические уравнения имеют следующий вид:

а) $z^4 + 1{,}6z^3 + 0{,}9z^2 + 0{,}2z + 0{,}0125 = 0$;

б) $z^4 - 0{,}4z^3 + 0{,}45z^2 + 0{,}55z + 0{,}055 = 0$;

в) $z^4 + 1{,}6z^3 + 1{,}65z^2 + 0{,}65z + 0{,}05 = 0$;

г) $z^4 + 3{,}6z^3 + 3{,}85z^2 + 1{,}35z + 0{,}1 = 0$;

д) $z^4 - 0{,}4z^3 - 2{,}55z^2 - 1{,}25z - 0{,}1 = 0$;

е) $z^4 - 1{,}4z^3 + 0{,}85z^2 + 1{,}1z + 0{,}1 = 0$;

ж) $z^4 + 2{,}6z^3 + 3{,}25z^2 + 1{,}3z + 0{,}1 = 0$;

з) $z^4 + 0{,}25z^2 + 0{,}75z + 0{,}25 = 0$;

и) $z^4 + 2z^3 + 2{,}25z^2 + 1{,}25z + 0{,}25 = 0$;

к) $z^4 + 1{,}9z^3 + 1{,}35z^2 + 0{,}425z + 0{,}05 = 0$;

л) $z^4 + 1{,}5z^3 + 0{,}79z^2 + 0{,}165z + 0{,}01 = 0$;

м) $z^4 + 4z^3 + 5{,}25z^2 + 2{,}75z + 0{,}5 = 0$.

7.2. Исследовать устойчивость замкнутой системы при условии, что передаточная функция разомкнутой системы имеет следующий вид:

а) $W^*(z) = \dfrac{0{,}1z^2 + 0{,}2z + 0{,}1}{z^4 + 1{,}9z^3 + 2z^2 + 0{,}9z + 0{,}1}$;

б) $W^*(z) = \dfrac{z^3 + 0{,}25z^2 + z + 0{,}2}{z^4 + z^3 + 2z^2 + 0{,}25z + 0{,}05}$;

в) $W^*(z) = \dfrac{z^2 - 2z - 1{,}5}{z^4 - 3{,}75z^2 - 0{,}25z + 1}$;

г) $W^*(z) = \dfrac{0{,}6z^3 - 0{,}1z^2 + 0{,}2z}{z^4 + z^3 + z^2 + 0{,}0125}$;

д) $W^*(z) = \dfrac{0{,}6z^3 - 0{,}15z^2 + 0{,}5z - 0{,}1}{z^4 - 2z^3 + z^2 + z + 0{,}2}$;

е) $W^*(z) = \dfrac{z^2 - 0{,}35z - 0{,}95}{z^4 + 1{,}6z^3 + 0{,}65z^2 + z + 1}$;

ж) $W^*(z) = \dfrac{z^3 - 0{,}21z^2 - 0{,}835z - 0{,}01}{z^4 + 0{,}5z^3 + z^2 + z + 0{,}02}$;

з) $W^*(z) = \dfrac{z^3 + 0{,}4z^2 - 0{,}25z - 0{,}05}{z^4 - 1{,}45z^3 - 3z^2 - z - 0{,}05}$;

и) $W^*(z) = \dfrac{z^3 - 0{,}7z^2 + 0{,}4z + 0{,}1}{z^4 - 1{,}1z^3 + z^2 + 0{,}3z + 0{,}1}$;

к) $W^*(z) = \dfrac{z^2 + z + 0{,}5}{z^4 + 3{,}6z^3 + 2{,}85z^2 + 0{,}35z + 0{,}5}$.

7.3. Исследовать устойчивость ЦСУ, у которой период следования $T = 0{,}01$ и передаточные функции регулятора ДФ и НЧ имеют следующий вид:

а) $W_{\text{р}}^*(z) = \dfrac{2z-1}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{10}{0{,}1s+1}$;

б) $W_{\text{р}}^*(z) = \dfrac{2z-1}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{2}{s^2+3s+2}$;

в) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{0{,}1(z-1)}{z}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{10.}{0{,}1s+1}$;

г) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{0{,}1(z-1)}{z} + \dfrac{5z}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{10}{0{,}1s+1}$;

д) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{z-1}{z}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{10}{0{,}1s+1}$;

е) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{5z}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{10}{0{,}1s+1}$;

ж) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{0{,}1(z-1)}{z}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s+1}$;

з) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{0{,}1(z-1)}{z} + \dfrac{5z}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s+1}$;

и) $W_{\text{р}}^*(z) = 2 + \dfrac{5z}{z-1}$, $\quad W_{\text{н}}(s) = \dfrac{1}{s+1}$.

7.4. Исследовать устойчивость ШИМ-системы управления, у которой период следования импульсов $T = 0{,}1$, амплитуда $\text{А}_{\text{и}} = 1$, коэффициент модуляции $\chi = 0{,}05$ и передаточная функция непрерывной части имеет следующий вид:

а) $W(s) = \dfrac{5(s+2)}{s(s+1)}$; $\quad$ б) $W(s) = \dfrac{5(s+3)}{s^2+3s+2}$;

в) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$; $\quad$ г) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$;

д) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}$; $\quad$ е) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2{,}5s+1}$;

ж) $W(s) = \dfrac{4}{s^2+1}$; $\quad$ з) $W(s) = \dfrac{5s}{s^2+1}$;

и) $W(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$; $\quad$ к) $W(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+5}$.

Глава 8

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Качество дискретных систем управления определяется так же, как и качество непрерывных систем, и для его оценки можно использовать все ранее введенные при рассмотрении непрерывных систем показатели качества в переходном и установившемся режимах или их аналоги.

8.1. Показатели качества в переходном режиме

Прямые показатели качества — *время регулирования* и *перерегулирование* — определяются по переходной характеристике. Ее можно построить по дискретной переходной функции $h[lT]$, соединяя дискретные точки плавной кривой (рис. 8.1).

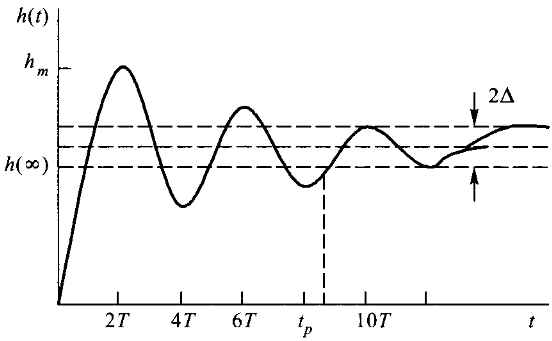


Рис. 8.1

Рассмотрим вычисление переходной функции. Так как z-изображение от единичной решетчатой функции

$$G^*(z) = Z\{1[lT]\} = z/(z-1),$$

то z-изображение переходной функции

$$H^*(z) = W^*_{yg}(z)G^*(z) = W^*_{yg}(z)\frac{z}{z-1},$$

где $W^*_{yg}(z)$ — передаточная функция относительно входа $g[lT]$ и выхода $y[lT]$.

Пусть изображение переходной функции имеет вид

$$H^*(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} \quad (m \leqslant n).$$

По определению z-преобразования

$$H^*(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h[lT] z^{-l}.$$

Поэтому значения переходной функции $h[lT]$ можно найти, разложив $H^*(z)$ в ряд Лорана путем деления числителя $B^*(z)$ на знаменатель $A^*(z)$ по правилу деления многочленов. При этом в многочленах $B^*(z)$ и $A^*(z)$ слагаемые должны располагаться в порядке убывания степени z.

Пример 8.1. Определить значения переходной функции $h[lT]$ ($l = 0, 1, \ldots, 5$) дискретной системы с передаточной функцией

$$W^*_{gy}(z) = \frac{0{,}1(z-1)}{z^2 - z + 0{,}3}.$$

Решение. z-изображение переходной функции

$$H^*(z) = W^*_{gy}(z)\frac{z}{z-1} = \frac{0{,}1z}{z^2 - z + 0{,}3}.$$

Произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, для первых пяти слагаемых получим

$$H^*(z) = 0{,}1z^{-1} + 0{,}1z^{-2} + 0{,}07z^{-3} + 0{,}04z^{-4} + 0{,}061z^{-5} + \ldots.$$

Отсюда имеем: $h(0) = 0$; $h(T) = 0{,}1$; $h(2T) = 0{,}1$; $h(3T) = 0{,}07$; $h(4T) = 0{,}04$ и $h(5T) = 0{,}061$. Если разность между степенями знаменателя и числителя равна r, то первый член разложения $H^*(z)$ в ряд Лорана будет иметь степень z^{-r}. Поэтому первые rзначений $h[lT]$ будут равны нулю:

$$h[0] = h[T] = \ldots = h[(r-1)T] = 0.$$

Другой способ вычисления переходной функции основан на формуле разложения, которая определяется следующим образом: если все полюса z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) функции $H^*(z)$ (т. е. корни уравнения $\mathrm{A}^*(z) = 0$) простые и не равны нулю, то

$$h[lT] = \sum_{i=1}^{n} \frac{B^*(z_i)}{A^{*'}(z_i)} z_i^{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{8.1}$$

где $A^{*'}(z_i) = \left.\dfrac{dA^*(z)}{dz}\right|_{z=z_i}$.

Начальные значения $h[0] = 0$ при $m < n$ и $h[0] = b_0/a_0$ при $m = n$.

Пример 8.2. Определить переходную функцию $h[lT]$, если z-изображение имеет вид

$$H^*(z) = \frac{3z+1}{z^2+5z+6}.$$

Решение. В данном случае $B^*(z) = 3z + 1$ и $A^*(z) = z^2 + 5z + 6$. Производная $A^{*'}(z) = 2z + 5$, полюсами являются $z_1 = -2$ и $z_2 = -3$. И в соответствии с формулой (8.1)

$$h[lT] = -5\,(-2)^{l-1} + 8(-3)^{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Начальное значение $h[0] = 0$, так как степень числителя меньше степени знаменателя. Если $H^*(z)$ имеет кратные полюса, то полюсу z_j кратности k_j в формуле разложения соответствует слагаемое, определяемое предельным соотношением

$$\frac{1}{(k_j-1)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{k_j-1}}{dz^{k_j-1}}\left[(z-z_j)^{k_j}\frac{B^*(z)}{A^*(z)}z^{l-1}\right]. \tag{8.2}$$

Если среди полюсов $H^*(z)$ имеется нулевой ($z_j = 0$), то при вычислении соответствующего этому полюсу слагаемого следует пользоваться формулой (8.2) и в том случае, когда этот полюс является простым.

Пример 8.3. Определить переходную функцию $h[lT]$, если ее z-изображение имеет вид

$$H^*(z) = \frac{z^2+2{,}5z+1}{z(z-1)^2(z+1)}.$$

Решение. В данном случае $B^*(z) = z^2 + 2{,}5z + 1$ и $A^*(z) = z(z-1)^2(z+1)$. Производная $A^{*'}(z) = 4z^3 - 3z^2 - 2z + 1$, полюсами являются $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z_3 = -1$. Слагаемое, соответствующее нулевому полюсу ($z_1 = 0$), в соответствии с формулой (8.2) определяется следующим образом:

$$\lim_{z\to 0}\left[z\frac{z^2+2{,}5z+1}{z(z-1)^2(z+1)}z^{l-1}\right] = \begin{cases}1 & \text{при } l = 1,\\ 0 & \text{при } l > 1.\end{cases}$$

Полюс $z_2 = 1$ имеет кратность 2 и ему соответствует слагаемое

$$\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^2+2{,}5z+1}{z(z-1)^2(z+1)}z^{l-1}\right] =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^l+2{,}5z^{l-1}+z^{l-2}}{z+1}\right] = 2{,}25l - 3{,}375.$$

Полюс $z_3 = -1$ является простым и ему соответствует слагаемое (8.1)

$$(-1)^{l-1}B^*(-1)/A^{*'}(-1) = 0{,}125(-1)^{l-1}.$$

Таким образом, имеем

$$h[T] = 1 + 2{,}25 - 3{,}375 + 0{,}125 = 0,$$

$$h[lT] = 2{,}25l - 3{,}375 + 0{,}125(-1)^{l-1}, \quad l = 2, 3, \ldots.$$

Начальное значение $h[0] = 0$.

Вычисление переходной функции между точками съема сигналов . Функция $h[lT]$ определяет значения переходной функции в моменты съема сигнала $t = lT$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$. Значения переходной функции $h_\tau[lT]$ в промежуточные моменты времени можно определить по структурной схеме (рис. 8.2 *б*), которая получается из исходной (рис. 8.2 *а*) подключением на выходе звена чистого запаздывания. Из этих схем имеем

$$W_{yg}^*(z) = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}, \quad W_{y_\tau g}^*(z) = \frac{Z_T\{W_1(s)e^{-\tau s}\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}$$

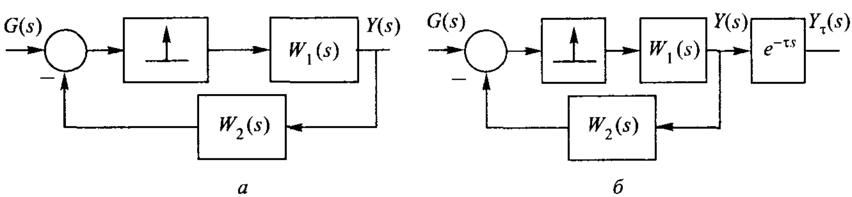


Рис. 8.2

Так как $y_\tau(t) = y(t - \tau)$ и при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях $y(t) = h(t)$ и $y_\tau(t) = h_\tau(t)$, то $h_\tau(t) = h(t - \tau)$. Соответственно для z-изображений переходных функций $h[lT]$ и $h_\tau[lT]$ имеем:

$$H^*(z) = Z\{h[lT]\} = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}\,\frac{z}{z-1},$$

$$H_\tau^*(z) = Z\{h_\tau[lT]\} = \frac{Z_T\{W_1(s)e^{-\tau s}\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}\,\frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{z^{-1}Z_T^\varepsilon\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}\,\frac{z}{z-1}, \qquad (8.3)$$

где $\varepsilon = 1 - \tau/T$.

Пример 8.4. Пусть в дискретной системе (рис. 8.2, *а*) $W_1(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}$, $W_2(s) = 1$ и период следования импульсов $T = 0{,}2$. Требуется определить решетчатую функцию, которая принимает значения переходной функции $h(t)$ в моменты $t = (l-\delta)T$, где $\delta = 0{,}25$, $l = 1, 2, \ldots$.

Решение. Искомой функцией будет $h_\tau[lT]$, где $\tau = \delta T = 0{,}05$. В данном случае $\varepsilon = 1 - \delta = 0{,}75$,

$$Z_T^\varepsilon\left\{W_1(s)\right\} = Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right\} = \frac{z}{z-1}Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0{,}15z+0{,}03}{z-0{,}82},$$

$$Z_T\left\{W_1(s)W_2(s)\right\} = Z_T\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right\} = \frac{z}{z-1}Z_T\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0{,}02}{z-0{,}82}.$$

Подставив эти выражения в (8.3), получим

$$H_\tau^*(z) = Z\left\{h_\tau[lT]\right\} = \frac{0{,}15z+0{,}03}{(z-0{,}8)(z-1)}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (8.1)

$$h_\tau[lT] = 0{,}9 - 0{,}75(0{,}8)^{l-1}, \quad l = 1,\ 2, \ldots.$$

Особенности переходного процесса дискретных систем. В непрерывных линейных системах переходная функция всегда принимает установившееся значение при $t = \infty$. Однако возможны линейные дискретные системы, в которых переходный процесс полностью заканчивается за конечное число шагов, т. е. существует такое положительное число l_0, что

$$h[lT] = h[l_0T] = h[\infty] \quad \forall l \geqslant l_0.$$

Если выполняется это условие, то переходный процесс называется *оптимальным*, а система, в которой происходит такой процесс, — *оптимальной (по переходному процессу) системой*.

Условие оптимальности системы (*по переходному процессу*). В системе с передаточной функцией вида

$$W_{yg}^*(z) = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n} \quad (m \leqslant n)$$

переходный процесс заканчивается за конечное число шагов, если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0. \tag{8.4}$$

Пример 8.5. Замкнутая дискретная система состоит из фиксатора нулевого порядка и НЧ с передаточной функцией $W_н(s) =$

$= k/(2s+1)$, период $T = 0{,}1$. Определить параметр k, при котором переходный процесс будет оптимальным.

Решение. При фиксаторе нулевого порядка передаточная функция формирующего звена $W_{\text{ф}}(s) = (1 - e^{Ts})/s$. Поэтому передаточная функция приведенной НЧ

$$W_{\text{п}}(s) = W_{\text{ф}}(s)W_{\text{н}}(s) = \frac{k(1 - e^{Ts})}{s(2s+1)}$$

и передаточная функция разомкнутой дискретной модели

$$W_{\text{п}}^*(z) = Z_T\left\{W_{\text{п}}(s)\right\} = \frac{k(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(2s+1)}\right\} = \frac{0{,}05k}{z - 0{,}95}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{\text{п}}^*(z)}{1 + W_{\text{п}}^*(z)} = \frac{0{,}05k}{z - 0{,}95 + 0{,}05k}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (8.4) для оптимального k получаем $k = 0{,}95/0{,}05 = 19$.

8.1. Определить z-изображение переходной функции $h[lT]$ системы управления (рис. 8.3) при условии, что период $T = 0{,}1$ и следующих передаточных функциях $W_1(s)$ и $W_2(s)$:

а) $W_1(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$, $\quad W_2(s) = 5(s+2)$;

б) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$, $\quad W_2(s) = 5(s+3)$;

в) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1{,}5s + 0{,}5}$, $\quad W_2(s) = 2(s+2)$;

г) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 3}$, $\quad W_2(s) = 2(s+2)$;

д) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}$, $\quad W_2(s) = 2s + 1$;

е) $W_1(s) = \dfrac{2}{s^2 + 2{,}5s + 1}$, $\quad W_2(s) = 0{,}5(s+1)$;

ж) $W_1(s) = \dfrac{2}{s^2 + 1}$, $\quad W_2(s) = 2$;

з) $W_1(s) = \dfrac{2{,}5s}{s^2 + 1}$, $\quad W_2(s) = 2$;

и) $W_1(s) = \dfrac{2{,}5}{s^2 + 2s + 2}$, $\quad W_2(s) = 2$;

к) $W_1(s) = \dfrac{4(s+2)}{s^2 + 4s + 5}$, $\quad W_2(s) = 0{,}5$.

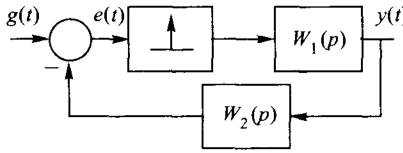


Рис. 8.3

8.2. Определить z-изображение смещенной переходной функции $h[(l+0{,}5)T]$ системы управления (рис. 8.3) при периоде $T = 0{,}1$ и передаточных функциях $W_1(s)$ и $W_2(s)$, приведенных в задании 8.1.

8.3. Определить z-изображение переходной функции $H^*(z)$ $(f(t) = 0)$ системы управления (рис. 8.4) при условии, что период дискретности $T = 0{,}1$, дискретный элемент (ДЭ) является фиксатором нулевого порядка (ФНП) и передаточные функции $W_1(p) = k_п + k_и/p$ и $W_2(p) = 1/(T_0p+1)$, где параметры принимают следующие значения:

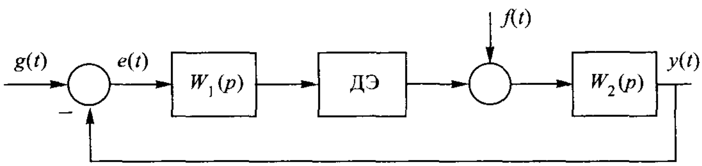


Рис. 8.4

а) $k_п = 1$, $k_и = 1$, $T_0 = 1$; б) $k_п = 1$, $k_и = 1/2$, $T_0 = 2$;
в) $k_п = 1$, $k_и = 1/3$, $T_0 = 3$; г) $k_п = 2$, $k_и = 1/2$, $T_0 = 4$;
д) $k_п = 2$, $k_и = 2/5$, $T_0 = 5$; е) $k_п = 2$, $k_и = 1/3$, $T_0 = 6$;
ж) $k_п = 3$, $k_и = 3/7$, $T_0 = 7$; з) $k_п = 3$, $k_и = 3/8$, $T_0 = 8$;
и) $k_п = 4$, $k_и = 1/2$, $T_0 = 8$; к) $k_п = 3$, $k_и = 1/3$, $T_0 = 9$.

Указание. Преобразовать структурную схему на рис. 8.4 к виду, представленному на рис. 8.5 (возмущение не указано, так как $f(t) = 0$). Из преобразованной схемы получаем

$$H^*(z) = W^*_{y\tilde{g}}(z)\widetilde{G}^*(z),$$

где $\widetilde{G}^*(z) = Z_T\{W_1(s)G(s)\} = Z_T\{W_1(s)(1/s)\}$.

8.4. Определить z-изображение ошибки $E^*(z)$ от задающего воздействия $g(t) = 1(t)$ $(f(t) = 0)$ системы управления (рис. 8.4) при условии, что период дискретности $T = 0{,}1$, дискретный элемент (ДЭ) является ФНП и передаточные функции $W_1(p) = k_п + k_и/p$ и $W_2(p) = 1/(T_0p+1)$, где параметры принимают значения, приведенные в задании 8.3.

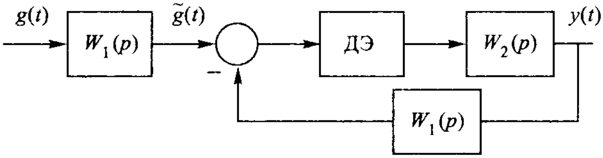


Рис. 8.5

Указание. Следует воспользоваться формулой $E^*(z) = G^*(z) - Y^*(z)$. Смотрите также указание к задаче 8.3.

8.2. Показатели качества в установившемся режиме

Наиболее полной характеристикой качества в установившемся режиме является установившаяся ошибка $e_\infty[lT\}$. Ее можно найти по z-изображению $E^*(z)$ по формуле

$$e_\infty[lT\} = \lim_{z\to 1}(z-1)E^*(z)$$

или

$$e_\infty[lT] = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \overset{(k)}{g}[lT], \tag{8.5а}$$

где

$$C_k = \frac{1}{k!}\, W_{0k}^*(z)\big|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.5б}$$

Здесь $W_{0k}^*(z)$ определяется по рекуррентной формуле

$$W_{00}^*(z) = W_{eg}^*(z), \quad W_{0k}^*(z) = Tz\frac{dW_{0k-1}^*(z)}{dz}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.5в}$$

Коэффициенты C_k $(k = 0, 1, \ldots)$ называются *коэффициентами ошибки* и являются числовыми показателями качества в установившемся режиме.

Статические и астатические системы. Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю. *Статическая ошибка* — это установившаяся ошибка при постоянных внешних воздействиях. Система является астатической и обладает *астатизмом r-го порядка*, если первые r коэффициентов равны нулю, а $(r+1)$-й коэффициент ошибки отличен от нуля:

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{r-1} = 0, \quad C_r = 0.$$

Из формул (8.5б) и (8.5в) следует, что коэффициент позиционной ошибки $C_0 = W_{eg}^*(1)$ и для нахождения остальных коэффициентов необходимо вычислять производные от передаточной функции $W_{eg}^*(z)$.

Однако для астатической системы коэффициенты до первого отличного от нуля можно определить по формуле

$$C_k = \left.\frac{T^k W_{eg}^*(z)}{(z-1)^k}\right|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, r. \tag{8.6}$$

Пример 8.6. Задающее воздействие $g = 0{,}5t$, передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия

$$W_{eg}^*(z) = \frac{(z-1)(z-0{,}9)}{(z-1)(z-0{,}9)+0{,}1z-0{,}95},$$

период $T = 0{,}05$. Определить установившуюся ошибку.

Решение. Так как $\dot{g}(t) = 0{,}5$, $\ddot{g}(t) = \dddot{g}(t) = \ldots = 0$, то $g[lT] = 0{,}5lT$, $\dot{g}[lT] = 0{,}5$, $\ddot{g}[lT] = \dddot{g}[lT] = \ldots = 0$ и установившаяся ошибка

$$e_\infty[lT] = C_0 g[lT] + C_1 \dot{g}[lT] = C_0 0{,}5lT + C_1 0{,}5.$$

Найдем коэффициенты ошибки C_0 и C_1. В соответствии с формулами (8.5б) и (8.5в)

$$C_0 = W_{eg}^*(z)\big|_{z=1} = \left.\frac{(z-1)(z-0{,}9)}{(z-1)(z-0{,}9)+0{,}1z-0{,}95}\right|_{z=1} = 0.$$

Так как $C_0 = 0$, то C_1 можно определить по формуле (8.6):

$$C_1 = \left.\frac{TW_{eg}^*(z)}{z-1}\right|_{z=1} = \left.\frac{T(z-0{,}9)}{(z-1)(z-0{,}9)+0{,}1z-0{,}95}\right|_{z=1} \cong -0{,}118.$$

Установившаяся ошибка $e_\infty[lT] = -0{,}118 \cdot 0{,}5 = -0{,}059$.

Структура астатических систем. Дискретная система (рис. 8.6) будет астатической, если передаточная функция ДФ (регулятора) включает множитель $1/(z-1)$ или НЧ (а не ПНЧ) содержит интегрирующее звено. Порядок астатизма системы равен сумме числа последовательно соединенных интегрирующих звеньев в НЧ и показателю степени $z-1$ в знаменателе ДФ.

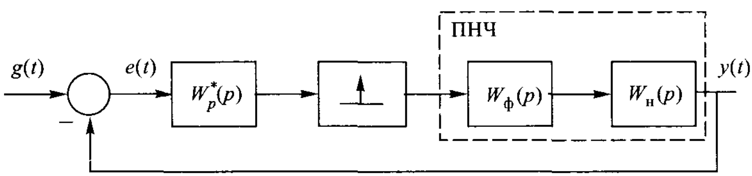


Рис. 8.6

Пример 8.7. Пусть в дискретной системе (рис. 8.6)

$$W_{\text{р}}^*(z) = k_{\text{р}}\left(1 + \frac{z+1}{z-1}\right), \quad W_{\text{ф}}(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}, \quad W_{\text{н}}(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}.$$

Задающее воздействие $g(t) = at + b$. Определить установившуюся ошибку.

Решение. В данном случае установившаяся ошибка

$$e_{\infty}[lT] = C_0 g[lT] + C_1 \dot{g}[lT].$$

Передаточная функция регулятора содержит в знаменателе множитель $z - 1$ в первой степени, и НЧ содержит одно интегрирующее звено. Поэтому система обладает астатизмом второго порядка и $C_0 = C_1 = 0$. Следовательно, $e_{\infty}[lT] = 0$.

8.5. Определить установившуюся ошибку системы управления (рис. 8.3) при периоде $T = 0{,}1$, задающем воздействии $g(t) = 2$ и следующих передаточных функциях $W_1(s)$ и $W_2(s)$:

а) $W_1(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$, $\quad W_2(s) = 5(s+2)$;

б) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$, $\quad W_2(s) = 5(s+3)$;

в) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$, $\quad W_2(s) = 2(s+2)$;

г) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}$, $\quad W_2(s) = 2(s+2)$;

д) $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$, $\quad W_2(s) = 2s+1$;

е) $W_1(s) = \dfrac{2}{s^2+2{,}5s+1}$, $\quad W_2(s) = 0{,}5(s+1)$;

ж) $W_1(s) = \dfrac{2}{s^2+1}$, $\quad W_2(s) = 2$;

з) $W_1(s) = \dfrac{2{,}5s}{s^2+1}$, $\quad W_2(s) = 2$;

и) $W_1(s) = \dfrac{2{,}5}{s^2+2s+2}$, $\quad W_2(s) = 2$;

к) $W_1(s) = \dfrac{4(s+2)}{s^2+4s+5}$, $\quad W_2(s) = 0{,}5$.

8.6. Определить установившуюся ошибку цифровой системы управления при условии, что период $T = 0{,}1$, задающее воздействие $g(t) = 2t$ ЦАП представляет собой фиксатор нулевого порядка, передаточные функции регулятора (АЦП + ЦУ) $W_{\text{р}}^*(z)$ и объекта $W_{\text{о}}(s)$ имеют следующий вид:

а) $W_p^*(z) = 1 + 0{,}5\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{2}{s(s+0{,}1)}$;

б) $W_p^*(z) = 2 + \dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$;

в) $W_p^*(z) = 2 + 2\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{1{,}5}{s(s+0{,}2)}$;

г) $W_p^*(z) = 1 + \dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{2}{s(s+0{,}5)}$;

д) $W_p^*(z) = 2 + 0{,}5\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{0{,}4}{s(s+0{,}3)}$;

е) $W_p^*(z) = 2 + 0{,}5\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{0{,}8}{s(s+0{,}4)}$;

ж) $W_p^*(z) = 1 + 0{,}5\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{4}{s(s+0{,}7)}$;

з) $W_p^*(z) = 2 + \dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{2}{s(s+0{,}6)}$;

и) $W_p^*(z) = 2 + 10\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{0{,}5}{s(s+0{,}9)}$;

к) $W_p^*(z) = 1 + 2\dfrac{z-1}{z}$, $W_o(s) = \dfrac{1}{s(s+0{,}8)}$.

8.7. В ШИМ-системе управления ШИМ-элемент вырабатывает последовательность прямоугольных импульсов с периодом следования импульсов $T = 0{,}1$, амплитудой $A_и = 10$, коэффициентом модуляции $\chi = 0{,}2$. Определить установившуюся ошибку при следующих передаточных функциях НЧ:

а) $W_н(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$; б) $W_н(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$;

в) $W_н(s) = \dfrac{s+2}{s^2+1{,}5s+0{,}5}$; г) $W_н(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$;

д) $W_н(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+5s+6}$; е) $W_н(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2{,}5s+1}$;

ж) $W_н(s) = \dfrac{4}{s^2+1}$; з) $W_н(s) = \dfrac{5s}{s^2+1}$;

и) $W_н(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$; к) $W_н(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+5}$.

Глава 9

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Метод полиномиальных уравнений. Пусть задана передаточная функция приведенной НЧ $W_п(s)$ и соответственно известна дискретная передаточная функция неизменяемой части

$$W_п^*(z) = Z_T\{W_п(s)\} = \frac{P^*(z)}{Q^*(z)}.$$

Из заданных требований к качеству синтезируемой системы получена желаемая передаточная функция $W_ж^*(z)$. Требуется синтезировать регулятор, при котором передаточная функция $W_{yg}^*(z)$ синтезированной системы (рис. 9.1) равна желаемой:

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_р^*(z)W_п^*(z)}{1 + W_р^*(z)W_п^*(z)} = W_ж^*(z). \tag{9.1}$$

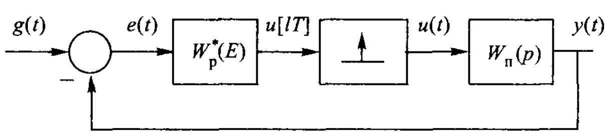


Рис. 9.1

При синтезе регулятора нужно позаботится о том, чтобы он был *физически осуществим* и синтезированная система была грубой. *Условие физической осуществимости* регулятора, состоящее в том, что следствие не может предшествовать причине, будет выполнено, если степень числителя его передаточной функции не превышает степень ее знаменателя.

Условие грубости будет нарушено, если передаточная функция неизменяемой части содержит нули или полюса вне единичного круга, и они входят в передаточную функцию регулятора. И это условие накладывает определенные ограничения на выбор желаемой передаточной функции, что в общем случае исключает возможность задания желаемой передаточной функции произвольно. Поэтому обычно задаются желаемым характеристическим полиномом синтезируемой системы.

Разложим числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых содержит нули внутри единичной окружности, другой — на и вне единичной окружности:

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{P_{\text{в}}^*(z)P_{\text{н}}^*(z)}{Q_{\text{в}}^*(z)Q_{\text{н}}^*(z)}.$$

Здесь $P_{\text{в}}^*(z)$, $Q_{\text{в}}^*(z)$ — полиномы, нули которых расположены внутри единичной окружности; $P_{\text{н}}^*(z)$, $Q_{\text{н}}^*(z)$ — полиномы, нули которых расположены на и вне единичной окружности. Искомая передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_{\text{р}}^*(z) = \frac{Q_{\text{в}}^*(z)M^*(z)}{P_{\text{в}}^*(z)N^*(z)(z-1)^r} \tag{9.2}$$

где показатель степени r множителя $(z-1)^r$ определяется требуемым порядком астатизма, $M^*(z)$ и $N^*(z)$ — неопределенные полиномы, которые определяются из *полиномиального уравнения*

$$P_{\text{н}}^*(z)M^*(z) + Q_{\text{н}}^*(z)N^*(z)(z-1)^r = G^*(z). \tag{9.3}$$

Здесь $G^*(z)$ — желаемый характеристический полином (знаменатель желаемой передаточной функции).

Обозначим степень произвольного полинома $R_i^*(z)$ через n_{R_i}. Тогда *условие физической осуществимости* можно записать в виде (9.2)

$$n_{Q_{\text{в}}} + n_M \leqslant n_{P_{\text{в}}} + n_N + r. \tag{9.4}$$

Полиномиальное уравнение (9.3) разрешимо, если число неизвестных (коэффициентов полиномов $M^*(z)$ и $N^*(z)$) не меньше числа уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в уравнении (9.3). И так как число неизвестных равно $(n_M+1)+(n_N+1)$, а число уравнений n_G+1, *условие разрешимости* полиномиального уравнения принимает вид

$$n_M + n_N + 1 \geqslant n_G. \tag{9.5}$$

Степень желаемого характеристического полинома n_G должна удовлетворять соотношению

$$n_G = n_{Q_{\text{н}}} + n_N + r, \tag{9.6}$$

а также неравенству

$$n_G \geqslant n_{Q_{\text{н}}} + r + n_Q - 1 - n_{P_{\text{в}}}, \tag{9.7}$$

где $n_Q = n_{Q_{\text{в}}} + n_{Q_{\text{н}}}$ — степень знаменателя передаточной функции неизменяемой части.

Порядок синтеза системы управления методом полиномиальных уравнений можно сформулировать следующим образом.

1. Разложить полиномы числителя и знаменателя передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых имеет нули внутри единичной окружности, другой — на и вне единичной окружности. Если указанные полиномы не имеют нулей на и вне единичной окружности, то положить $P_{\text{н}}^*(z) = 1$ и $Q_{\text{н}}^*(z) = 1$; если они не имеют нулей внутри единичной окружности, то приравнять $P_{\text{в}}^*(z)$ и $Q_{\text{в}}^*(z)$ постоянному множителю этих полиномов.

2. Исходя из требований к качеству синтезируемой системы в переходном режиме и порядку астатизма выбрать характеристический полином синтезируемой системы $G^*(z)$ и число r. Степень полинома $G^*(z)$ должна удовлетворять условию (9.7).

3. Из соотношений (9.4)–(9.6) определить степени неопределенных полиномов $M^*(z)$ и $N^*(z)$ и записать их с неизвестными коэффициентами.

4. Подставить полученные неопределенные полиномы в полиномиальное уравнение (9.3) и определить их коэффициенты.

5. Подставить найденные полиномы $M^*(z)$ и $N^*(z)$ в формулу для передаточной функции регулятора (9.2).

Для того чтобы синтезируемый регулятор был более простым, степени полиномов $G^*(z)$, $M^*(z)$ и $N^*(z)$ должны быть как можно меньшими.

Пример 9.1. Передаточная функция неизменяемой части $W_{\text{п}}^*(z) = \dfrac{z+2}{(z-0{,}5)(z-1{,}5)}$. Требуется синтезировать регулятор, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

Решение. В данном случае $P^*(z) = z+2$, $Q^*(z) = (z-0{,}5)(z-1{,}5)$ и соответственно $P_{\text{в}}^*(z) = 1$, $P_{\text{н}}^*(z) = z+2$, $Q_{\text{в}}^*(z) = z-0{,}5$ и $Q_{\text{н}}^*(z) = z-1{,}5$. Степени $n_{P_{\text{в}}} = 0$, $n_{P_{\text{н}}} = 1$, $n_Q = 2$, $n_{Q_{\text{в}}} = 1$ и $n_{Q_{\text{н}}} = 1$.

Так как статическая ошибка должна быть равна нулю, положим $r = 1$. Условие (9.7) принимает вид $n_G \geqslant 1+1+2-1 = 3$. Минимально допустимой является степень $n_G = 3$, и для того чтобы переходный процесс закончился за конечное число шагов, полагаем характеристический полином $G^*(z) = z^3$. Из условия (9.6) $n_N = 1$, а из условий (9.4) и (9.5) $n_M = 1$. Поэтому полагаем $M^*(z) = b_0z + b_1$ и $N^*(z) = a_0z + a_1$. Подставив их в полиномиальное уравнение (9.3), получим

$$(z+2)(b_0z+b_1) + (z-1{,}5)(a_0z+a_1)(z-1) = z^3$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$a_0z^3 + (b_0 - 2{,}5a_0 + a_1)z^2 + (2b_0 + b_1 - 2{,}5a_1 + 1{,}5a_0)z + 2b_1 + 1{,}5a_1 = z^3.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$a_0 = 1, \quad b_0 - 2{,}5a_0 + a_1 = 0,$$
$$2b_0 + b_1 - 2{,}5a_1 + 1{,}5a_0 = 0, \quad 2b_1 + 1{,}5a_1 = 0.$$

Решив эту систему, получим $a_0 = 1$, $a_1 \cong 1{,}24$, $b_0 \cong 1{,}26$, $b_1 \cong -0{,}93$.

Следовательно, $M^*(z) = 1{,}26z - 0{,}93$ и $N^*(z) = z + 1{,}24$. Подставив эти выражения для $M^*(z)$ и $N^*(z)$, а также выражения для $P_{\text{в}}^*(z)$ и $Q_{\text{в}}^*(z)$ в (9.2), получим искомое решение

$$W_{\text{р}}^*(z) = \frac{(z-0{,}5)(1{,}26z-0{,}93)}{(z+1{,}24)(z-1)}.$$

9.1. Определить передаточную функцию регулятора $W_{\text{р}}^*(z)$, при которой система управления (рис. 9.1) является астатической с астатизмом 1-го порядка и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов. Передаточная функция неизменной части имеет вид

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{z-\gamma}{(z-\alpha)(z-\beta)},$$

где параметры принимают следующие значения:

а) $\gamma = 1{,}1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}1$; б) $\gamma = 1{,}2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}2$;
в) $\gamma = 1{,}3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}3$; г) $\gamma = 1{,}4$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}4$;
д) $\gamma = 1{,}5$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$; е) $\gamma = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}1$;
ж) $\gamma = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}2$; з) $\gamma = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}3$;
и) $\gamma = 0{,}4$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1{,}4$; к) $\gamma = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1{,}5$.

9.2. Решить задачу 9.1, если параметры передаточной функции принимаю следующие значения:

а) $\gamma = 1$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}1$; б) $\gamma = 1{,}1$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}2$;
в) $\gamma = 1{,}2$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1{,}3$; г) $\gamma = 1{,}3$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1{,}4$;
д) $\gamma = 1{,}4$, $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 1{,}5$; е) $\gamma = 1{,}5$, $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 1{,}1$;
ж) $\gamma = 1{,}6$, $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 1{,}2$; з) $\gamma = 1{,}7$, $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 1{,}3$;
и) $\gamma = 1{,}8$, $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 1{,}4$; к) $\gamma = 1{,}9$, $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 1{,}5$.

9.3. Определить передаточную функцию регулятора $W_{\text{р}}^*(z)$, при которой система управления (рис. 9.1) обладает астатизмом 2-го порядка и переходный процесс является оптимальным. Передаточная функция неизменной части имеет вид

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{z+\alpha}{(z-\beta)(z-1)},$$

где параметры принимают следующие значения:

а) $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}1$; б) $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}2$;
в) $\alpha = 4$, $\beta = 0{,}3$; г) $\alpha = 8$, $\beta = 0{,}4$;
д) $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$; е) $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}6$;
ж) $\alpha = 4$, $\beta = 0{,}7$; з) $\alpha = 8$, $\beta = 0{,}8$;
и) $\alpha = 10$, $\beta = 0{,}9$; к) $\alpha = 10$, $\beta = 0{,}5$.

9.4. Определить передаточную функцию регулятора $W_{\text{р}}^*(z)$, при которой дискретная система управления (рис. 9.1) обладает астатизмом 2-го порядка и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов. Передаточная функция неизменной части имеет вид

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{z-\alpha}{(z-\beta)(z-1)},$$

где параметры принимают следующие значения:
а) $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 1{,}1$; б) $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1{,}2$;
в) $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 1{,}3$; г) $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 1{,}4$;
д) $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5$; е) $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 1{,}6$;
ж) $\alpha = 0{,}7$, $\beta = 1{,}7$; з) $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 1{,}8$;
и) $\alpha = 0{,}9$, $\beta = 1{,}9$; к) $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}8$.

9.5. Определить передаточную функцию регулятора $W_{\text{р}}^*(z)$, при которой дискретная система управления (рис. 9.1) обладает астатизмом 2-го порядка и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов. Передаточная функция неизменной части имеет вид

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{z+\alpha}{(z-\beta)(z-1)},$$

где параметры принимают следующие значения:
а) $\alpha = 0{,}9$, $\beta = 0{,}1$; б) $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}2$;
в) $\alpha = 0{,}7$, $\beta = 0{,}3$; г) $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 0{,}4$;
д) $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$; е) $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 0{,}6$;
ж) $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}7$; з) $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}8$;
и) $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}9$; к) $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}6$.

Ответы

1.1. а) $\dfrac{7p^2+5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}$; б) $\dfrac{p^2+3p+2}{p^3+4p^2+3p}$; в) $\dfrac{5p+1}{p^3+4p+3}$;
г) $\dfrac{p^2+3p+2}{p^3+5p^2+p}$; д) $\dfrac{p^2+4p+3}{p^3+4p^2+3p+1}$; е) $\dfrac{p^2+4p+3}{p^3+3p^2+2p}$;
ж) $\dfrac{p^2+5p+4}{p^3+8p^2+15p}$; з) $\dfrac{p^2+5p+4}{p^3+8p^2+15p+1}$; и) $\dfrac{p^2+4p+3}{p^3+5p^2+4p}$;
к) $\dfrac{p^2+4p+3}{p^3+5p^2+4p+1}$.

1.2. а) $\dfrac{7s^2+5s+4}{s^3+2s^2+4s+3}$; б) $\dfrac{s+2}{s(s+3)}$; в) $\dfrac{5s+1}{s^3+4s+3}$;
г) $\dfrac{s+2}{s(s+4)}$; д) $\dfrac{s^2+4s+3}{s^3+4s^2+3s+1}$; е) $\dfrac{s+3}{s(s+2)}$; ж) $\dfrac{s^2+5s+4}{s^3+8s^2+15s}$;
з) $\dfrac{s^2+5s+4}{s^3+8s^2+15s+1}$; и) $\dfrac{s+3}{s(s+4)}$; к) $\dfrac{s^2+4s+3}{s^3+5s^2+4s+1}$.

1.3. а) $\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+3y=5\dot{u}+4u+\dot{v}+2v$;
б) $\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}=3\dot{u}+2u+3v$; в) $2\dddot{y}+4\dot{y}+3y=5\dot{u}+2u+\dot{v}+3v$;
г) $3\dddot{y}+5\ddot{y}+6\dot{y}=\dot{u}+2u+5v$; д) $6\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}+y=\dot{u}+3u+2\dot{v}+\dot{v}$;
е) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}=4\dot{u}+u+4v$; ж) $\dddot{y}+8\ddot{y}+15\dot{y}=4u+\dot{v}+4v$;
з) $\dddot{y}+8\ddot{y}+15\dot{y}+y=\dot{u}+4u+5v$; и) $\dddot{y}+5\ddot{y}+4\dot{y}=4\dot{u}+3u+\dot{v}+v$;
к) $\dddot{y}+5\ddot{y}+4\dot{y}+y=\dot{u}+3u+4v$.

1.4. а) $2\left[(2-t)e^{-2t}-2e^{-3t}\right]$; б) $3\left[(0{,}25+0{,}5t)e^{-t}-0{,}25e^{-3t}\right]$;
в) $4[(-0{,}25+0{,}5t)e^{-3t}+0{,}25e^{-t}]$; г) $5\left[(-3-2t)e^{-2t}+3e^{-t}\right]$;
д) $6\left[(-0{,}111+0{,}667t)e^{-4t}+0{,}111e^{-t}\right]$;
е) $7\left[(0{,}75-0{,}5t)e^{-2t}-0{,}75e^{-4t}\right]$; ж) $8\left[(-1+2t)e^{-3t}+e^{-4t}\right]$;
з) $9\left[(1+2t)e^{-5t}-e^{-4t}\right]$; и) $10\left[(0{,}25+0{,}5t)e^{-3t}-0{,}25e^{-5t}\right]$;
к) $8\left[(0{,}1875+0{,}25t)e^{-t}-0{,}1875e^{-5t}\right]$.

1.5. а) $2\left[1{,}333+0{,}6667e^{-3t}+(-0{,}75-0{,}5t)e^{-2t}\right]$;
б) $3\left[0{,}6667+0{,}0833e^{-3t}+(-12+2t)e^{-t}\right]$;
в) $4\left[18-0{,}25e^{-t}+(0{,}444+0{,}667t)e^{-3t}\right]$;
г) $5\left[16-3e^{-t}+(2-t)e^{-2t}\right]$;
д) $6\left[32-0{,}1111e^{-t}+(-1{,}125+1{,}5t)e^{-4t}\right]$;
е) $7\left[1+0{,}1875e^{-4t}+(-4-t)e^{-2t}\right]$;
ж) $8\left[11{,}25-0{,}25e^{-4t}+(0{,}1111+0{,}667t)e^{-3t}\right]$;
з) $9\left[18{,}75+0{,}25e^{-4t}+(-0{,}28+0{,}4t)e^{-5t}\right]$;
и) $10\left[7{,}2+0{,}05e^{-5t}+(-2{,}222+0{,}667t)e^{-3t}\right]$;
к) $8\left[0{,}4+0{,}0375e^{-5t}+(-112+4t)e^{-t}\right]$.

1.6. $W(j\omega) = k$, $U(\omega) = k$, $V(\omega) = 0$, $A(\omega) = k$, $\varphi(\omega) = 0$, $L(\omega) = 20\lg k$, $h(t) = k1(t)$.

1.7. $W(j\omega) = jk\omega$, $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = k\omega$, $A(\omega) = k\omega$, $\varphi(\omega) = \pi/2$, $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega$.

1.8. $W(j\omega) = -jk/\omega$, $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = -k/\omega$, $A(\omega) = k/\omega$, $\varphi(\omega) = -\pi/2$, $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega$, $h(t) = kt$, $w(t) = k$.

1.9. $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1)$, $U(\omega) = k$, $V(\omega) = kT\omega$, $A(\omega) = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$, $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(T\omega)$, $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$.

1.10. $W(j\omega) = \dfrac{k}{(Tj\omega + 1)}$, $U(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$,

$V(\omega) = -\dfrac{kT\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$, $A(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$, $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(T\omega)$,

$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$, $h(t) = k[1 - e^{-\frac{t}{T}}]$, $w(t) = \dfrac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$.

1.11. $W(j\omega) = k[1 - (T\omega)^2 + j2\varsigma T\omega]$, $U(\omega) = k[1 - (T\omega)^2]$, $V(\omega) = 2k\varsigma T\omega$, $A(\omega) = k\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}$,

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{2\varsigma T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leqslant \dfrac{1}{T}, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2\varsigma T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \dfrac{1}{T}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}.$$

1.12. $W(j\omega) = \dfrac{k}{1 - (T\omega)^2 + j2\varsigma T\omega}$, $U(\omega) = \dfrac{k[1 - (T\omega)^2]}{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}$,
$V(\omega) = \dfrac{2k\varsigma T\omega}{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}$, $\mathrm{A}(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}}$,

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{2\varsigma T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leqslant \dfrac{1}{T}, \\ -\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2\varsigma T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \dfrac{1}{T}, \end{cases}$$

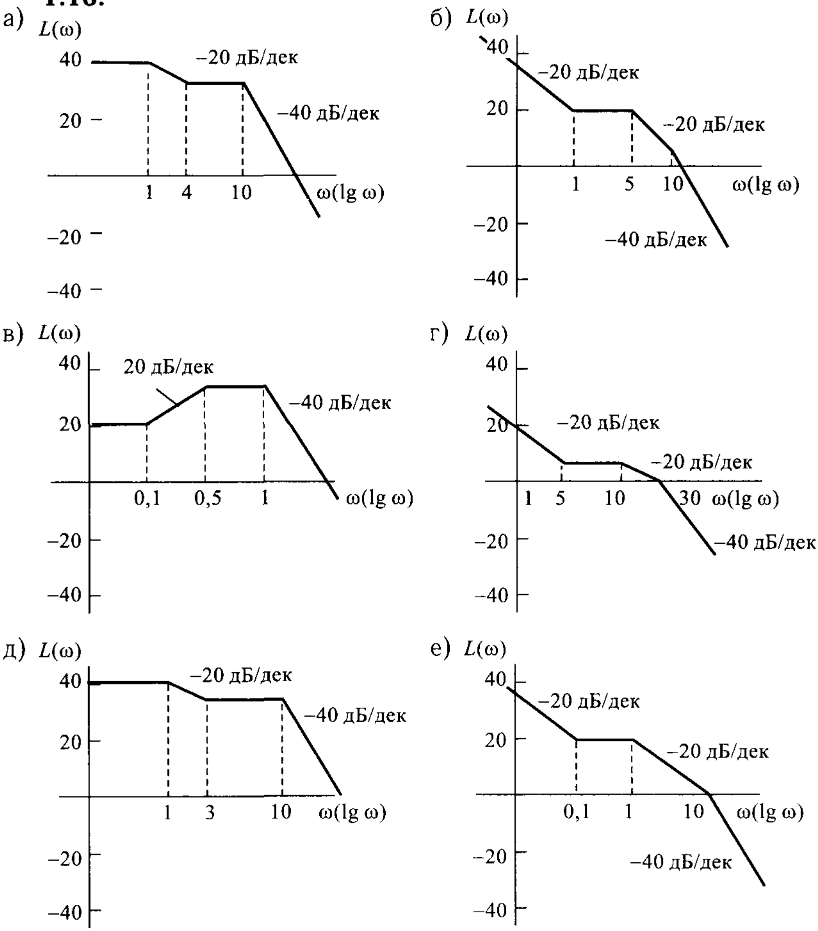
$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\varsigma T\omega)^2}.$$

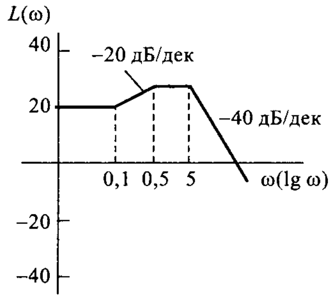
1.13. $h(t) = k\left[1 - \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)\right]$,
$w(t) = \dfrac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$, где $\alpha = \dfrac{\varsigma}{T}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{1 - \varsigma^2}}{T}$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1 - \varsigma^2}}{\varsigma}$.

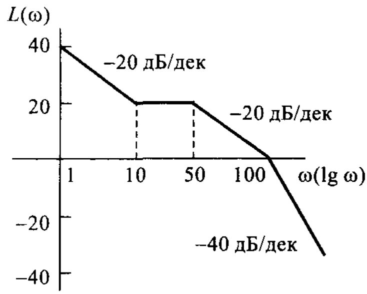
1.14. а) $y = 1{,}079\sin(0{,}5t + 0{,}118)$; б) $y = 7{,}294\sin(0{,}5t - 0{,}371)$;
в) $y = 2{,}163\sin(0{,}5t + 0{,}093)$; г) $y = 21{,}12\sin(0{,}5t - 0{,}559)$;
д) $y = 26{,}07\sin(0{,}5t - 0{,}617)$; е) $y = 40{,}88\sin(0{,}5t - 0{,}719)$;
ж) $y = 25{,}47\sin(0{,}5t - 0{,}565)$; з) $y = 26{,}45\sin(0{,}5t - 0{,}423)$;
и) $y = 43{,}87\sin(0{,}5t - 0{,}429)$; к) $y = 24{,}99\sin(0{,}5t - 0{,}457)$.

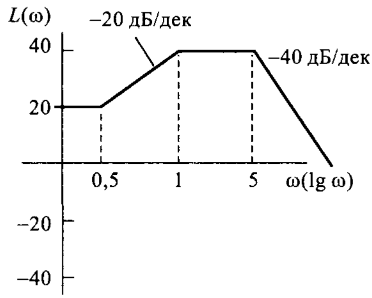
1.15. а) $y = 0{,}615\sin(0{,}5t - 1{,}766)$; б) $y = 2{,}988\sin(0{,}5t - 2{,}621)$;
в) $y = 7{,}251\sin(0{,}5t - 2{,}376)$; г) $y = 18{,}85\sin(0{,}5t - 3{,}081)$;
д) $y = 34{,}44\sin(0{,}5t - 3{,}146)$; е) $y = 61{,}04\sin(0{,}5t - 3{,}317)$;
ж) $y = 98{,}01\sin(0{,}5t - 3{,}193)$; з) $y = 42{,}08\sin(0{,}5t - 2{,}889)$;
и) $y = 32.38\sin(0{,}5t - 2{,}9)$; к) $y = 70{,}28\sin(0{,}5t - 2{,}85)$.

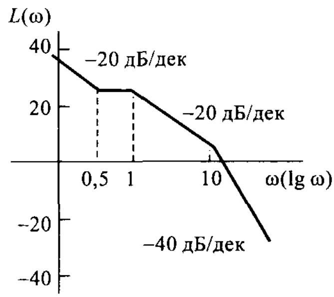
1.16.



ж) 

з) 

и) 

к) 

1.17. а) $\dfrac{0{,}1(s+1)(0{,}1s+1)}{s(0{,}01s+1)}$; б) $\dfrac{10s(0{,}01s+1)}{(s+1)(0{,}1s+1)}$; в) $\dfrac{10(s+1)(0{,}01s+1)}{s(0{,}1s+1)}$;
г) $\dfrac{10(s+1)}{(10s+1)(0{,}1s+1)}$; д) $\dfrac{100(s+1)(0{,}1s+1)}{s(0{,}01s+1)}$; е) $\dfrac{100s(0{,}1s+1)}{(10s+1)(s+1)}$;
ж) $\dfrac{100(s+1)((1/7)s+1)}{(10s+1)((1/70)s+1)}$; з) $\dfrac{0{,}1(100s^2+20\varsigma s+1)(0{,}01s+1)}{(s^2+2\xi s+1)(0{,}1s+1)}$;
и) $\dfrac{100(s^2+2\varsigma s+1)}{(100s^2+20\xi s+1)((1/7)s+1)}$; к) $\dfrac{0{,}1(100s^2+20\varsigma s+1)}{(s^2+2\xi s+1)(0{,}1s+1)}$.

1.18. $W' = \dfrac{W_1}{1+W_1W_2-W_1W_3W_4}$; а) $W_{yg} = \dfrac{W'(W_3+W_6)W_5}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$;
б) $W_{xg} = \dfrac{W'}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$; в) $W_{eg} = \dfrac{1}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$;
г) $W_{yf} = \dfrac{W_5}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$; д) $W_{xf} = \dfrac{-W'W_5}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$;
е) $W_{ef} = \dfrac{-W_5}{1+W'(W_3+W_6)W_5}$.

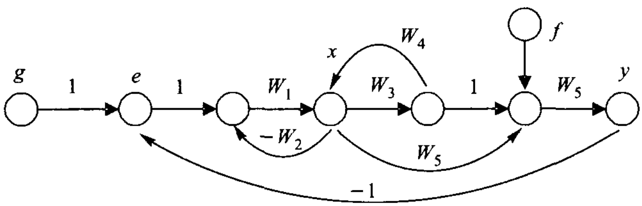
1.19. $W' = \dfrac{W_1W_3}{1+W_1W_2-W_3W_4}$; а) $W_{yg} = \dfrac{W'W_5}{1+W'W_5}$;
б) $W_{xg} = \dfrac{W'}{1+W'W_5}$; в) $W_{eg} = \dfrac{1}{1+W'W_5}$; г) $W_{yf} = \dfrac{W_5}{1+W'W_5}$;
д) $W_{xf} = \dfrac{-W'W_5}{1+W'W_5}$; е) $W_{ef} = \dfrac{-W_5}{1+W'W_5}$.

1.20. $W' = \dfrac{W_1}{1+W_1W_2-W_3W_5}$; $W'' = (W_3+W_4)W_6$;

а) $W_{yg} = \dfrac{W'W''}{1+W'W''}$; б) $W_{xg} = \dfrac{W'}{1+W'W''}$; в) $W_{eg} = \dfrac{1}{1+W'W''}$;
г) $W_{yf} = \dfrac{W'W''}{W_1(1+W'W'')}$; д) $W_{xf} = \dfrac{W'}{W_1(1+W'W'')}$;
е) $W_{ef} = \dfrac{-W'W''}{W_1(1+W'W'')}$.

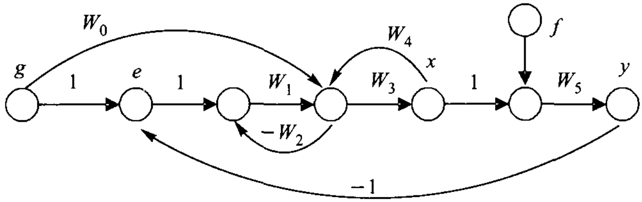
1.21. $W_0' = \dfrac{W_1 + W_0}{W_1}$; $W' = \dfrac{W_1}{1 + W_1W_2 - W_3W_5}$; $W'' = (W_3 + W_4)W_6$;
а) $W_{yg} = \dfrac{W_0'W'W''}{1+W'W''}$; б) $W_{xg} = \dfrac{W_0'W'}{1+W'W''}$; в) $W_{eg} = \dfrac{(1-W_0')W'W''+1}{1+W'W''}$;
г) $W_{yf} = \dfrac{W'W''}{W_1(1+W'W'')}$; д) $W_{xf} = \dfrac{W'}{W_1(1+W'W'')}$;
е) $W_{ef} = \dfrac{-W'W''}{W_1(1+W'W'')}$.

1.22. $\Delta = 1 + W_1W_2 - W_3W_4 + W_1W_3W_5 + W_1W_5W_6$.



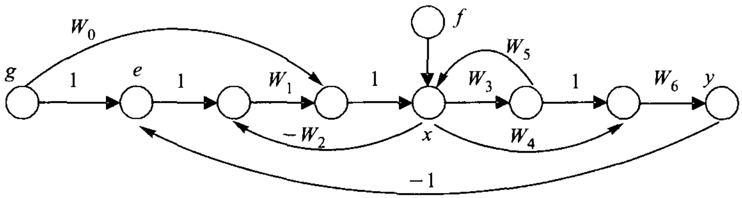
а) $W_{yg} = \dfrac{W_1W_3W_5 + W_1W_5W_6}{\Delta}$; б) $W_{xg} = \dfrac{W_1}{\Delta}$;
в) $W_{eg} = \dfrac{W_1(1 + W_1W_2 - W_3W_4)}{\Delta}$; г) $W_{yf} = \dfrac{W_5(1 + W_1W_2 - W_3W_4)}{\Delta}$;
д) $W_{xf} = -\dfrac{W_1W_5}{\Delta}$; е) $W_{ef} = -\dfrac{W_5(1 + W_1W_2 - W_3W_4)}{\Delta}$.

1.23. $\Delta = 1 + W_1W_2 - W_3W_4 + W_1W_3W_5$;



а) $W_{yg} = \dfrac{W_0W_3W_5 + W_1W_3W_5}{\Delta}$; б) $W_{xg} = \dfrac{W_0W_3 + W_1W_3}{\Delta}$;
в) $W_{eg} = \dfrac{1 + W_1W_2 - W_3W_4}{\Delta}$; г) $W_{yf} = \dfrac{W_5(1 + W_1W_2 - W_3W_4)}{\Delta}$;
д) $W_{xf} = -\dfrac{W_1W_3W_5}{\Delta}$; е) $W_{ef} = -\dfrac{W_5(1 + W_1W_2 - W_3W_4)}{\Delta}$.

1.24. $\Delta = 1 + W_1W_2 - W_3W_5 + W_1W_3W_6 + W_1W_4W_6$;



а) $W_{yg} = \dfrac{W_0W_3W_6 + W_0W_4W_6 + W_1W_3W_6 + W_1W_4W_6}{\Delta}$;

б) $W_{xg} = \dfrac{W_0 + W_1}{\Delta}$; в) $W_{eg} = \dfrac{1 + W_1W_2 - W_3W_5}{\Delta}$;

г) $W_{yf} = \dfrac{W_3W_6 + W_4W_6}{\Delta}$; д) $W_{xf} = -\dfrac{W_1W_3W_6 + W_1W_4W_6}{\Delta}$;

е) $W_{ef} = -\dfrac{W_3W_6 + W_4W_6}{\Delta}$.

2.3. а) $\dfrac{0{,}25(1 + 0{,}004s)}{(1 + 0{,}001s)}$; б) $\dfrac{0{,}04s}{1 + 0{,}19s}$; в) $\dfrac{0{,}8s}{1 + s}$

г) $\dfrac{0{,}62(1 + 0{,}1s)(1 + 0{,}019s)}{(0{,}0012s^2 + 0{,}074s + 1)}$; д) $\dfrac{0{,}24s}{(0{,}0016s^2 + 0{,}94s + 1)}$.

2.4. а) 1) $0{,}2s$; 2) s; 3) $0{,}5s$; 4) $0{,}2s$; 5) $0{,}04s$.

б) 1) $-\dfrac{2{,}5(1 + 0{,}18s)(1 + 0{,}3s)}{s(1 + 0{,}06s)}$; 2) $-\dfrac{5{,}56(1 + 0{,}12s)(1 + 0{,}04s)}{s(1 + 0{,}01s)}$;

3) $-\dfrac{22{,}2(1 + 0{,}04s)(1 + 0{,}105s)}{s(1 + 0{,}01s)}$; 4) $-\dfrac{0{,}1(1 + 10{,}5s)}{s}$;

5) $-\dfrac{50(1 + 0{,}15s)(1 + 0{,}5s)}{s(1 + 0{,}05s)}$.

2.5. $W_{u\omega}(s) = \dfrac{34{,}9}{(1 + 0{,}3s)(1 + 0{,}04s)(1 + 0{,}19s)}$;

$W_{u\varphi}(s) = \dfrac{34{,}9}{s(1 + 0{,}3s)(1 + 0{,}04s)(1 + 0{,}19s)}$.

2.7. $W_{u\omega}(s) = \dfrac{38{,}7}{(1 + 0{,}19s)(1 + 0{,}035s)}$;

$h(t) = 38{,}7(1 - 1{,}22e^{-5{,}6t} + 0{,}22e^{-28{,}6t})$.

2.9. $-\dfrac{5{,}7(1 + 0{,}18s)(1 + s)}{(1 + 0{,}29s)(1 + 1{,}38s)}$.

2.11. $-\dfrac{100(1 + 0{,}5s)(1 + 0{,}15s)}{s(0{,}075s^2 + 0{,}86s + 1)}$.

2.13. $-\dfrac{1{,}52(1 + 0{,}1s)}{(1 + 0{,}9s)(1 + 0{,}0048s)}$.

2.14. $-\dfrac{1884(1 + 0{,}5s)}{s(1 + 0{,}35s)(1 + 0{,}13s)(1 + 0{,}027s)}$.

2.16. $\dfrac{0{,}98(1 + 0{,}4s)}{(1 + 0{,}008s)}$.

2.17. $-\dfrac{915(1 + 0{,}32s)}{s(1 + 0{,}01s)(1 + s)(1 + 2s)}$.

2.18. $W_{\text{раз}}(s) = \dfrac{212{,}2}{(1+0{,}1s)(1+0{,}017s)(1+0{,}21s)}$;

$$W_{U_0}\omega(s) = \frac{2210}{0{,}36\cdot 10^{-3}s^3 + 0{,}026s^2 + 0{,}327s + 212{,}2};$$

$$W_M\omega(s) = -\frac{0{,}028(0{,}0017s^2 + 0{,}117s + 1)}{0{,}36\cdot 10^{-3}s^3 + 0{,}026s^2 + 0{,}327s + 212{,}2};$$

$$W_\Delta U_\omega(s) = \frac{(1+0{,}1s)(1+0{,}017s)(1+0{,}21s)}{0{,}36\cdot 10^{-3}s^3 + 0{,}026s^2 + 0{,}327s + 212{,}2}.$$

2.20. $W_{\text{раз}}(s) = \dfrac{1342}{s(1+0{,}035s)(1+0{,}4s)(1+0{,}21s)}$;

$$W_{\beta\alpha}(s) = \frac{342}{0{,}0029s^4 + 0{,}105s^3 + 0{,}645s^2 + s + 342}.$$

2.21. $W_{\text{раз}}(s) = \dfrac{35{,}3}{s(1+0{,}19s)(1+2s)}$;

$$W_{t_y t}(s) = \frac{35{,}3}{0{,}38s^3 + 2{,}19s^2 + s + 35{,}3}.$$

2.23. $W_{\text{раз}}(s) = \dfrac{30{,}8(1+0{,}08s)}{(1+0{,}19s)(1+0{,}05s)}$;

$$W_{U_1\omega}(s) = \frac{117{,}8\cdot 10^2(1+0{,}05s)}{0{,}0095s^2 + 2{,}7s + 31{,}8};$$

$$W_{M_1\omega}(s) = \frac{0{,}42(1+0{,}05s)}{0{,}0095s^2 + 2{,}7s + 31{,}8}.$$

2.25. $W_{\text{раз}}(s) = \dfrac{300}{(1+0{,}06s)(1+0{,}2s)(1+0{,}6s)}$;

$$W_{U_0U_\Gamma}(s) = \frac{600}{0{,}0072s^3 + 0{,}168s^2 + 0{,}86s + 301};$$

$$W_{I_я U_\Gamma}(s) = \frac{50(0{,}0072s^3 + 0{,}168s^2 + 0{,}86s + 1)}{0{,}0072s^3 + 0{,}168s^2 + 0{,}86s + 301}.$$

3.1. а), в), е), з), к) — устойчива; б), г), д), ж), и) — неустойчива.

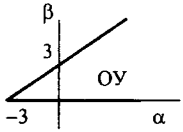
3.2. а), в), е), з), к) — неустойчива; б), г), д), ж), и) — устойчива.

3.3. а), в), д), ж), к) — неустойчива; б), г), е), з), и) — устойчива.

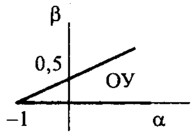
3.4. а), б), г), е), ж), к) — устойчива; в), д), з), и) — неустойчива.

3.5. а) $\tau_k = 0{,}050$, $\omega_k = 3{,}347$; б) $\tau_k = 0{,}068$, $\omega_k = 3{,}947$;
в) $\tau_k = 0{,}0764$, $\omega_k = 4{,}372$; г) $\tau_k = 0{,}0821$, $\omega_k = 4{,}744$;
д) $\tau_k = 0{,}086$, $\omega_k = 5{,}074$; е) $\tau_k = 0{,}961$, $\omega_k = 1{,}808$;
ж) $\tau_k = 0{,}914$, $\omega_k = 1{,}845$; з) $\tau_k = 0{,}886$, $\omega_k = 1{,}868$;
и) $\tau_k = 1{,}298$, $\omega_k = 1{,}469$; к) $\tau_k = 0{,}973$, $\omega_k = 1{,}760$.

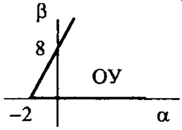
3.6. а) $\beta > 0,\ \alpha > \beta - 3$;



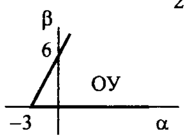
б) $\beta > 0,\ \alpha > 2\beta - 1$;



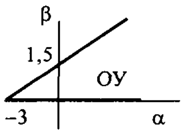
в) $\beta > 0,\ \alpha > \frac{1}{4}\beta - 2$;



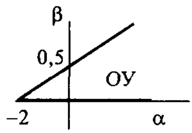
г) $\beta > 0,\ \alpha > \frac{1}{2}\beta - 3$.



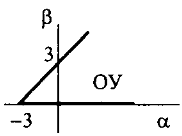
3.7. а) $\beta > 0,\ \alpha > \beta - 3$;



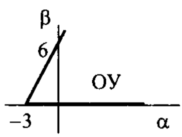
б) $\beta > 0,\ \alpha > 0{,}5\beta - 2$;



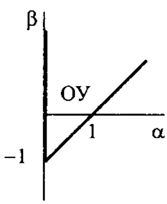
в) $\beta > 0,\ \alpha > \beta - 3$;



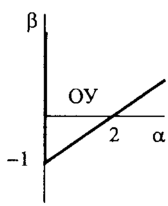
г) $\beta > 0,\ \alpha > 0{,}5\beta - 3$.



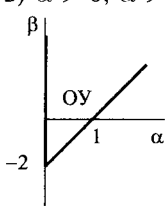
3.8. а) $\alpha > 0,\ \alpha < \beta + 1$;



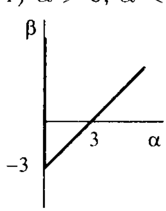
б) $\alpha > 0,\ \alpha < 2\beta + 1$;



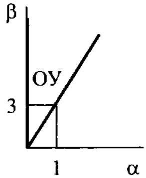
в) $\alpha > 0,\ \alpha > 0{,}5\beta + 1$;

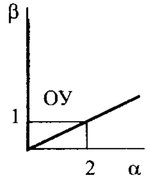


г) $\alpha > 0,\ \alpha < \beta + 3$.

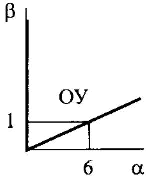


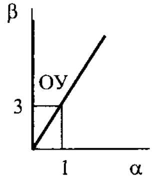
3.9. а) $0 < \alpha < 3\beta$; б) $0 < \alpha < 2\beta$;





в) $0 < \alpha < 6\beta$; г) $0 < \alpha < 3\beta$.





3.10. а), г), д), з) не устойчива робастно; б), в), е), ж), и), к) робастно устойчива.

3.11. а), б), г), д) робастно устойчива; в), е), ж), з), и), к) не устойчива робастно.

4.1. а), д), е), и), к) не обладает; б), в), г), ж), з) обладает.

4.2. а), в), д), з), к) обладает; б), г), е), ж), и) не обладает.

4.3. а) 2,05; б) 1,1; в) 1,05; г) 2,1; д) 2,6; е) 1,4167; ж) 0,2917; з) 0,35; и) 0,55; к) 0,2667.

4.4. а) 7,05; б) 3,6; в) 6,05; г) 4,6; д) 5,1; е) 2,0167; ж) 1,7917; з) 1,35; и) 1,05; к) 1,7667.

4.5. а) 1,708; б) 0,917; в) 0,656; г) 1,167; д) 1,300; е) 1,090; ж) 0,217; з) 0,292; и) 0,449; к) 0,200.

4.6. а) 5,879; б) 3,008; в) 3,838; г) 2,600; д) 2,600; е) 1,569; ж) 1,509; з) 1,208; и) 1,064; к) 1,533.

4.7. а) 0,16; б) 0,36; в) 0,16; г) 0,32; д) 0,32; е) 1,583; ж) 0,633; з) 0,975; и) 1,950; к) 0,644.

4.8. а) 12; б) 11; в) 4; г) 3; д) 2,4; е) 7; ж) 6; з) 10,25; и) 9,111; к) 6,2.

4.9. а) 1,2; б) 1,1; в) 0,4; г) 0,3; д) 0,24; е) 0,7; ж) 0,6; з) 1,025; и) 0,911; к) 0,62.

5.1. а) $k_п = 0{,}1$, $k_и = 1$; б) $k_п = 0{,}4$, $k_и = 1$; в) $k_п = 0{,}8$, $k_и = 1$; г) $k_п = 1$, $k_и = 1$; д) $k_п = 0{,}2$, $k_и = 1$; е) $k_п = 0{,}2$, $k_и = 2$; ж) $k_п = 0{,}2$, $k_и = 0{,}8$; з) $k_п = 0{,}125$, $k_и = 0{,}25$; и) $k_п = 0{,}2$, $k_и = 3$; к) $k_п = 0{,}2$, $k_и = 4$.

5.2. а) $k_п = 1$; б) $k_п = 2$; в) $k_п = 1$; г) $k_п = 0{,}5$; д) $k_п = 3$; е) $k_п = 0{,}5$; ж) $x = 0{,}5$; з) $k_п = 1$; и) $f = 1{,}5$; к) $k_п = 0{,}25$.

5.3. а) $k_д = 2{,}479$; б) $k_д = 1{,}924$; в) $k_д = 4{,}02$; г) $k_д = 3{,}885$; д) $k_д = 2{,}899$; е) $k_д = 2{,}358$; ж) $k_д = 3{,}696$; з) $k_д = 4{,}046$; и) $k_д = 2{,}518$; к) $k_д = 2{,}327$.

5.4. а) $k_п = 1$, $k_д = 1$; б) $k_п = 2$, $k_д = 1{,}366$; в) $k_п = 1$, $k_д = 2$; г) $k_п = 0{,}5$, $k_д = 2{,}25$; д) $k_п = 3$, $k_д = 3{,}083$; е) $k_п = 0{,}5$, $k_д = 0{,}658$; ж) $k_п = 0{,}5$, $k_д = 1{,}236$; з) $k_п = 1$, $k_д = 2{,}61$; и) $k_п = 1{,}5$, $k_д = 2{,}568$; к) $k_п = 0{,}25$, $k_д = 0{,}521$;

5.5. а) 1,5; б) 3,5; в) 2; г) 3,5; д) 2; е) 4,8; ж) 10,5; з) 1,5; и) 0,833; к) 0,6.

5.6. а) 3,5; б) 7,5; в) 4; г)7,667; д) 4; е) 9,8; ж) 23; з) 3,5; и) 2,333; к) 1,6.

5.7. а) $k_п = 2{,}167$, $k_и = 1{,}185$; б) $k_п = 4{,}833$, $k_и = 4{,}741$; в) $k_п = 2{,}667$, $k_и = 1{,}185$; г) $k_п = 4{,}889$, $k_и = 3{,}086$; д) $k_п = 2{,}667$, $k_и = 1{,}85$; е) $k_п = 6{,}467$, $k_и = 7{,}407$; ж) $k_п = 14{,}667$, $k_и = 9{,}259$; з) $k_п = 2{,}167$, $k_и = 1{,}185$; и) $k_п = 1{,}333$, $k_и = 0{,}667$; к) $k_п = 0{,}933$, $k_и = 0{,}296$.

5.8. а) $k_п = 3{,}056$, $k_и = 2{,}370$; б) $k_п = 6{,}611$, $k_и = 9{,}482$; в) $k_п = 3{,}056$, $k_и = 2{,}370$; г) $k_п = 6{,}741$, $k_и = 6{,}173$; д) $k_п = 3{,}556$, $k_и = 2{,}37$; е) $k_п = 8{,}689$, $k_и = 14{,}815$; ж) $k_п = 20{,}222$, $k_и = 18{,}519$; з) $k_п = 3{,}056$, $k_и = 2{,}370$; и) $k_п = 2$, $k_и = 1{,}333$; к) $k_п = 1{,}378$, $k_и = 0{,}593$.

5.9. а) $k_п = 1{,}815$, $k_д = 2{,}167$; б) $k_п = 2{,}667$, $k_д = 1{,}333$; в) $k_п = 0{,}148$, $k_д = 0{,}667$; г) $k_п = 0{,}375$, $k_д = 1{,}25$; д) $k_п = 1$, $k_д = 2{,}5$; е) $k_п = 0{,}0185$, $k_д = 0{,}533$; ж) $k_п = 4{,}691$, $k_д = 4{,}333$; з) $k_п = 15{,}5$, $k_д = 12$; и) $k_п = 4{,}75$, $k_д = 9{,}5$; к) $k_п = 0{,}124$, $k_д = 1{,}111$.

5.10. а) $k_п = 4{,}130$, $k_д = 3{,}556$; б) $k_п = 5{,}333$, $k_д = 2{,}667$; в) $k_п = 0{,}296$, $k_д = 0{,}889$; г) $k_п = 0{,}875$, $k_д = 1{,}75$; д) $k_п = 2$, $k_д = 3{,}5$; е) $k_п = 0{,}137$, $k_д = 0{,}711$; ж) $k_п = 9{,}432$, $k_д = 6{,}111$; з) $k_п = 31{,}5$, $k_д = 16$; и) $k_п = 11{,}5$, $k_д = 14$; к) $k_п = 0{,}914$, $k_д = 1{,}704$.

5.11. а) $k_п = 3{,}406$, $k_д = 2{,}688$, $k_и = 1{,}221$; б) $k_п = 4{,}500$, $k_д = 1{,}833$, $k_и = 1{,}688$; в) $k_п = 0{,}250$, $k_д = 0{,}750$, $k_и = 0{,}0313$; г) $k_п = 0{,}844$, $k_д = 1{,}438$, $k_и = 0{,}158$; д) $k_п = 1{,}688$, $k_д = 2{,}875$, $k_и = 0{,}316$; е) $k_п = 0{,}100$, $k_д = 0{,}600$, $k_и = 0{,}025$; ж) $k_п = 7{,}95$, $k_д = 5$, $k_и = 4$; з) $k_п = 26{,}5$, $k_д = 13{,}5$, $k_и = 20{,}25$; и) $k_п = 9{,}391$, $k_д = 11{,}188$, $k_и = 3{,}204$; к) $k_п = 0{,}667$, $k_д = 1{,}333$, $k_и = 0{,}333$.

5.12. а) $k_п = 5{,}359$, $k_д = 3{,}469$, $k_и = 2{,}441$; б) $k_п = 6{,}75$, $k_д = 2{,}583$, $k_и = 3{,}375$; в) $k_п = 0{,}375$, $k_д = 0{,}875$, $k_и = 0{,}0625$; г) $k_п = 1{,}266$, $k_д = 1{,}719$, $k_и = 0{,}316$; д) $k_п = 2{,}531$, $k_д = 3{,}438$, $k_и = 0{,}633$; е) $k_п = 0{,}200$, $k_д = 0{,}700$, $k_и = 0{,}050$; ж) $k_п = 11{,}95$, $k_д = 6$, $k_и = 8$; з) $k_п = 40$, $k_д = 15{,}75$, $k_и = 40{,}5$; и) $k_п = 15{,}086$, $k_д = 13{,}719$, $k_и = 6{,}407$; к) $k_п = 1{,}333$, $k_д = 1{,}667$, $k_и = 0{,}667$.

5.13. а) $W_р = \dfrac{s+1}{2s}$; б) $W_р = \dfrac{s+2{,}5}{4s}$; в) $W_р = \dfrac{(s+0{,}5)(s+4)}{3(s+2)s}$; г) $W_р = \dfrac{(s+1)(s+1{,}5)}{5(s+2)s}$; д) $W_р = \dfrac{s+1{,}5}{s}$; е) $W_р = \dfrac{s+3}{6s}$;

ж) $W_р = \dfrac{(s+3)(s+1{,}5)}{7(s+2)s}$; з) $W_р = \dfrac{s+4}{8s}$; и) $W_р = \dfrac{(s+1)(s+3)}{5(s+2)s}$;

к) $W_р = \dfrac{s+3{,}5}{10s}$.

5.14. а) $W_р = \dfrac{4s+1}{s}$; б) $W_р = \dfrac{(s+2)(3s+1)}{(2s+1)s}$;

в) $W_р = \dfrac{(s+2)(4s+1)}{(3s+1)s}$; г) $W_р = \dfrac{(s+3)(3s+1)}{(3s+2)s}$;

д) $W_р = \dfrac{s+3}{s}$; е) $W_р = \dfrac{(s+4)(4s+1)}{(4s+2)s}$;

ж) $W_р = \dfrac{s+3}{s}$; з) $W_р = \dfrac{(s+1)(2{,}5s+1)}{(s+2)s}$;

и) $W_р = \dfrac{3s+1}{4s}$; к) $W_р = \dfrac{s+5}{s}$.

5.15. а) $W_р = -\dfrac{s^2+2s+1}{s^2+3s+4}$; б) $W_р = -\dfrac{s^2+3s+2}{s^2+3s+5}$;

в) $W_р = -\dfrac{2s^2+3s+1}{s^2+3s+6}$; г) $W_р = -\dfrac{2s^2+2s+3}{s^2+3s+7}$;

д) $W_р = -\dfrac{2s^2+4s+3}{s^2+3s+8}$; е) $W_р = -\dfrac{3s^2+2s+3}{s^2+3s+9}$;

ж) $W_р = -\dfrac{4s^2+3s+2}{s^2+3s+8}$; з) $W_р = -\dfrac{5s^2+3s+2}{s^2+3s+4}$;

и) $W_р = -\dfrac{5s^2+4s+3}{s^2+3s+10}$; к) $W_р = -\dfrac{6s^2+5s+2}{s^2+3s+11}$.

5.16. а) $W_р = \dfrac{(s^2+2s+1)(7s+1)}{(s+1)(s+4)s}$; б) $W_р = \dfrac{(s^2+3s+2)(7s+1)}{(2s+1)(s+4)s}$;

в) $W_р = \dfrac{(2s^2+3s+1)(7s+1)}{(3s+1)(s+4)s}$; г) $W_р = \dfrac{(2s^2+2s+3)(7s+1)}{(4s+1)(s+4)s}$;

д) $W_р = \dfrac{(2s^2+4s+3)(7s+1)}{(5s+1)(s+4)s}$; е) $W_р = \dfrac{(3s^2+2s+3)(7s+1)}{(6s+1)(s+4)s}$;

ж) $W_р = \dfrac{(4s^2+3s+2)(7s+1)}{(5s+1)(s+4)s}$; з) $W_р = \dfrac{(5s^2+3s+2)(7s+1)}{(s+1)(s+4)s}$;

и) $W_р = \dfrac{(5s^2+4s+3)(7s+1)}{(7s+1)(s+4)s}$; к) $W_р = \dfrac{(6s^2+5s+2)(7s+1)}{(8s+1)(s+4)s}$.

5.17. а) $\dfrac{(s^2+2s+1)(36s-8)}{(s+1)(s-28)s}$; б) $\dfrac{(s^2+3s+2)(36s-8)}{(2s+1)(s-28)s}$;

в) $\dfrac{(2s^2+3s+1)(18s-4)}{(3s+1)(s-28)s}$; г) $\dfrac{(2s^2+2s+3)(18s-4)}{(4s+1)(s-28)s}$;

д) $\dfrac{(2s^2+4s+3)(18s-4)}{(5s+1)(s-28)s}$; е) $\dfrac{(3s^2+2s+3)(36s-8)}{(6s+1)(s-28)s}$;

ж) $\dfrac{(4s^2+3s+2)(36s-8)}{(5s+1)(s-28)s}$; з) $\dfrac{(5s^2+3s+2)(18s-4)}{(s+1)(s-28)s}$;

и) $\dfrac{(5s^2+4s+3)(18s-4)}{(7s+1)(s-28)s}$; к) $\dfrac{(6s^2+5s+2)(18s-4)}{(8s+1)(s-28)s}$.

5.18. а) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}113s^3 + 0{,}702s^2 + 1{,}452s + 1}$;

б) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}180s^3 + 0{,}956s^2 + 1{,}694s + 1}$;

в) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}269s^3 + 1{,}249s^2 + 1{,}936s + 1}$;

г) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}382s^3 + 1{,}580s^2 + 2{,}177s + 1}$;

д) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}525s^3 + 1{,}951s^2 + 2{,}419s + 1}$.

5.19. а) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}0767s^4 + 0{,}583s^3 + 1{,}662s^2 + 2{,}105s + 1}$;

б) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}123s^4 + 0{,}830s^3 + 2{,}104s^2 + 2{,}368s + 1}$;

в) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}187s^4 + 1{,}139s^3 + 2{,}597s^2 + 2{,}632s + 1}$;

г) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}274s^4 + 1{,}516s^3 + 3{,}142s^2 + 2{,}895s + 1}$;

д) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}389s^4 + 1{,}968s^3 + 3{,}740s^2 + 3{,}158s + 1}$.

5.20. а) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}125s^3 + 1{,}513s^2 + 1{,}1502s + 1}$;

б) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}244s^3 + 0{,}801s^2 + 1{,}438s + 1}$;

в) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}422s^3 + 1{,}153s^2 + 1{,}725s + 1}$;

г) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}670s^3 + 1{,}570s^2 + 2{,}013s + 1}$;

д) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}857s^3 + 1{,}850s^2 + 2{,}185s + 1}$.

5.21. а) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}036s^4 + 0{,}214s^3 + 0{,}718s^2 + 1{,}217s + 1}$;

б) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}087s^4 + 0{,}417s^3 + 1{,}122s^2 + 1{,}522s + 1}$;

в) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}181s^4 + 0{,}721s^3 + 1{,}616s^2 + 1{,}826s + 1}$;

г) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}335s^4 + 1{,}145s^3 + 2{,}200s^2 + 2{,}130s + 1}$;

д) $W_ж = \dfrac{1}{0{,}572s^4 + 1{,}710s^3 + 2{,}873s^2 + 2{,}435s + 1}$.

5.22. а) $u = 0{,}2\dot{x} + 0{,}4g_0$; б) $u = 0{,}6\dot{x} + 0{,}8x + 0{,}4g_0$; в) $u = -0{,}1\dot{x} - 0{,}3x + 0{,}4g_0$; г) $u = g_0$; д) $u = \dot{x} + 2x + g_0$; е) $u = -0{,}75\dot{x} - 0{,}75x + g_0$;

ж) $u = -0{,}25\dot{x} - 0{,}25x + 0{,}75g_0$; з) $u = 0{,}25\dot{x} + 0{,}75x + 0{,}75g_0$; и) $u = 0{,}5\dot{x} + 1{,}25x + 0{,}75g_0$; к) $u = 0{,}75g_0$.

5.23. а) $u = 0{,}4\ddot{x} + 0{,}6\dot{x} + 0{,}2x + 0{,}2g_0$;
б) $u = \ddot{x} + 2{,}8\dot{x} + 2x + 0{,}4g_0$; в) $u = -0{,}15\dot{x} - 0{,}15x + 0{,}2g_0$;
г) $u = 0{,}5\ddot{x} + 1{,}5\dot{x} - 0{,}5x + 1{,}5g_0$; д) $u = 2\ddot{x} + 7\dot{x} + 5{,}75x + 0{,}25g_0$;
е) $u = -0{,}5\ddot{x} - 0{,}375\dot{x} - 0{,}625x + 0{,}75g_0$;
ж) $u = 0{,}5\dot{x} - 0{,}125x + 0{,}625g_0$;
з) $u = 0{,}75\ddot{x} + 3{,}25\dot{x} + 2{,}125x + 0{,}875g_0$;
и) $u = 1{,}5\ddot{x} + 7{,}25\dot{x} + 7{,}75x + 0{,}25g_0$;
к) $u = 0{,}75\ddot{x} + 3\dot{x} + 1{,}75x + 0{,}5g_0$.

6.1. а) $W^*(E) = \dfrac{3E+1}{E^3 + 2E^2 + 3E + 1}$; б) $W^*(E) = \dfrac{0{,}1E+1}{E^2 + 0{,}6E + 0{,}05}$;
в) $W^*(E) = \dfrac{0{,}2E+5}{E^2 + 2E + 0{,}25}$; г) $W^*(E) = \dfrac{E+1}{E^2 + 3E + 2}$;
д) $W^*(E) = \dfrac{2E+1}{E^3 + 2E + 1}$; е) $W^*(E) = \dfrac{E^2+2}{E^3 + 2E^2 + 3}$;
ж) $W^*(E) = \dfrac{2E+6}{E^3 + 5E + 6}$; з) $W^*(E) = \dfrac{E+2}{E^2 + 5E + 6}$;
и) $W^*(E) = \dfrac{E^2+1}{E^3 + 2E^2 + 1}$; к) $W^*(E) = \dfrac{1}{E^3 + 2E + 3}$.

6.2. а) $W^*(z) = \dfrac{3z+1}{z^3 + 2z^2 + 3z + 1}$; б) $W^*(z) = \dfrac{0{,}1z+1}{z^2 + 0{,}6z + 0{,}05}$;
в) $W^*(z) = \dfrac{0{,}2z+5}{z^2 + 2z + 0{,}25}$; г) $W^*(z) = \dfrac{1}{z+2}$;
д) $W^*(z) = \dfrac{2z+1}{z^3 + 2z + 1}$; е) $W^*(z) = \dfrac{z^2+6}{z^3 + 2z + 3}$;
ж) $W^*(z) = \dfrac{2}{z+2}$; з) $W^*(z) = \dfrac{1}{z+3}$;
и) $W^*(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3 + 2z^2 + 1}$; к) $W^*(z) = \dfrac{1}{z^3 + 2z + 3}$.

6.3. а) $y(t+2T) + 2y(t+T) + 3y(t) = u(t+T) + u(t)$;
б) $y(t+2T) + 0{,}5y(t) = 0{,}1u(t+T) + u(t)$;
в) $y(t+3T) + 2y(t+T) + y(t) = u(t+T) + 2u(t)$;
г) $0{,}1y(t+3T) + y(t+2T) + 2y(t) = 2u(t+T) + u(t)$;
д) $y(t+3T) + 2y(t+T) + y(t) = u(t+2T) + 2u(t)$;
е) $y(t+2T) + 3y(t+T) + 5y(t) = 5u(t)$;
ж) $y(t+2T) + 5y(t+T) + 2y(t) = 7u(t+T) + 3u(t)$;
з) $y(t+3T) + 5y(t+T) + y(t) = u(t+2T) + 2u(t)$;
и) $y(t+3T) + 4y(t+2T) + 2y(t) = u(t+T) + u(t)$;
к) $y(t+2T) + 3y(t+T) + 4y(t) = 2u(t+T) + u(t)$.

6.4. а) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{0{,}5z+1{,}5}{1{,}5z - 0{,}5}$; б) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{2z^2+4z+1{,}5}{3z^2 + 2z - 1{,}5}$;
в) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{2z-1}{z^2 + z - 3}$; г) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{3z-1}{z^2 + z - 4}$;

д) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{4z^2+z-5}{5z^2+4z-3}$; е) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{2z-2}{z^2-5}$;

ж) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{2z^2-8z-8}{3z^2-10z+5}$; з) $W^*_{yg}(z) = \dfrac{2z+2}{z^2+4z+3}$.

6.5. а) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(0{,}5z+1{,}5)(z-2)}{(z+1)(1{,}5z-0{,}5)}$; б) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(z+1{,}5)(z-3)}{3z^2+2z-1{,}5}$;

в) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(2z-1)(z+1)}{z^2+z-3}$; г) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(1{,}5z-0{,}5)(z+1)}{z^2+z-4}$;

д) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(4z+5)(z+1)}{5z^2+4z-3}$; е) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(z-1)(z-3)}{z^2-5}$;

ж) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(2z-4)(z+1)}{3z^2-10z+5}$; з) $W^*_{xg}(z) = \dfrac{(2z+2)(z+1)}{z^2+4z+3}$.

6.6. а) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{0{,}5z+1{,}5}{1{,}5z-0{,}5}$; б) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2-2z-3}{3z^2+2z-1{,}5}$;

в) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2-z-2}{z^2+z-3}$; г) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2-2z-3}{z^2+z-4}$;

д) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2+3z+2}{5z^2+4z-3}$; е) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2-2z-3}{z^2-5}$;

ж) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2-2z-3}{3z^2-10z+5}$; з) $W^*_{eg}(z) = \dfrac{z^2+2z+1}{z^2+4z+3}$.

6.7. а) $\dfrac{5z(z-2e^{-0{,}1}+1}{(z-1)(z-e^{-0{,}1})}$; б) $\dfrac{5z(z-2e^{-0{,}2}+e^{-0{,}1})}{(z-e^{-0{,}1})(z-e^{-0{,}2})}$;

в) $\dfrac{2z(z-2e^{-0{,}1}+2e^{-0{,}05})}{(z-e^{-0{,}05})(z-e^{-0{,}1})}$; г) $\dfrac{z(2z-e^{-0{,}3}-e^{-0{,}1})}{(z-e^{-0{,}1})(z-e^{-0{,}3})}$;

д) $\dfrac{z(2z+3e^{-0{,}3}-5e^{-0{,}2})}{(z-e^{-0{,}2})(z-e^{-0{,}3})}$; е) $\dfrac{z(3z-e^{-0{,}2}-2e^{-0{,}05})}{3(z-e^{-0{,}05})(z-e^{-0{,}2})}$;

ж) $\dfrac{4z\sin 0{,}1}{z^2-2z\cos 0{,}1+1}$; з) $\dfrac{5(z^2-z\cos 0{,}1)}{z^2-2z\cos 0{,}1+1}$;

и) $\dfrac{5ze^{-0{,}1}\sin 0{,}1}{z^2-2ze^{-0{,}1}\cos 0{,}1+e^{-0{,}2}}$; к) $\dfrac{2z(z-e^{-0{,}2}\cos 0{,}1)}{z^2-2ze^{-0{,}2}\cos 0{,}1+e^{-0{,}4}}$.

6.8. а) $\dfrac{10z}{z-1}-\dfrac{5z}{z-e^{-0{,}1}}e^{-0{,}05}$; б) $\dfrac{10z}{z-e^{-0{,}1}}e^{-0{,}05}-\dfrac{5z}{z-e^{-0{,}2}}e^{-0{,}1}$;

в) $\dfrac{6ze^{-0{,}025}}{z-e^{-0{,}05}}-\dfrac{4ze^{-0{,}05}}{z-e^{-0{,}1}}$; г) $\dfrac{ze^{-0{,}05}}{z-e^{-0{,}1}}+\dfrac{ze^{-0{,}15}}{z-e^{-0{,}3}}$;

д) $-\dfrac{3ze^{-0{,}1}}{z-e^{-0{,}2}}+\dfrac{5ze^{-0{,}15}}{z-e^{-0{,}3}}$; е) $\dfrac{ze^{-0{,}025}}{3(z-e^{-0{,}05})}+\dfrac{2ze^{-0{,}1}}{3(z-e^{-0{,}2})}$;

ж) $\dfrac{4(z+1)z\sin 0{,}05}{z^2-2z\cos 0{,}1+1}$; з) $\dfrac{5(z-1)z\cos 0{,}05}{z^2-2z\cos 0{,}1+1}$;

и) $\dfrac{5ze^{-0{,}05}(z-e^{-0{,}1})\sin 0{,}05}{z^2-2ze^{-0{,}1}\cos 0{,}1-e^{-0{,}2}}$; к) $\dfrac{2ze^{-0{,}1}(z-e^{-0{,}2})\cos 0{,}05}{z^2-2ze^{-0{,}2}\cos 0{,}1+e^{-0{,}4}}$.

6.9. а) $\dfrac{10z}{z-1}-\dfrac{5}{z-e^{-0{,}1}}e^{-0{,}05}$; б) $\dfrac{10e^{-0{,}05}}{(z-e^{-0{,}1})z}-\dfrac{5e^{-0{,}1}}{(z-e^{-0{,}2})z}$;

в) $\dfrac{6}{(z-e^{-0,05})z}-\dfrac{4}{(z-e^{-0,1})z}$; г) $\dfrac{e^{-0,05}}{(z-e^{-0,1})z^2}+\dfrac{e^{-0.15}}{(z-e^{-0,3})z^2}$;

д) $-\dfrac{3}{z-e^{-0,2}}+\dfrac{5}{z-e^{-0,3}}$; е) $-\dfrac{3}{z-e^{-0,2}}+\dfrac{5}{z-e^{-0,3}}$;

ж) $\dfrac{4(z+1)z\sin 0,05}{z^2-2z\cos 0,1+1}$; з) $\dfrac{5(z-1)\cos 0,05}{z(z^2-2z\cos 0,1+1)}$;

и) $\dfrac{5e^{-0,05}(z-e^{-0,1})\sin 0,05}{z^4(z^2-2ze^{-0,1}\cos 0,1-e^{-0,2})}$;

к) $\dfrac{2e^{-0,1}(z-e^{-0,2})\cos 0,05}{z^3(z^2-2ze^{-0,2}\cos 0,1+e^{-0,4})}$.

6.10. а) $W_п^*(z)=2,5-\dfrac{5(z-e^{-0,05})}{z-e^{-0,1}}+2,5\dfrac{z-e^{-0,1}}{z-e^{-0,2}}$;

б) $W_п^*(z)=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}\dfrac{z-e^{-0,05}}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{5}{6}\dfrac{z-e^{-0,15}}{z-e^{-0,3}}$;

в) $W_п^*(z)=\dfrac{4}{3}-4\dfrac{z-e^{-0,05}}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{8}{3}\dfrac{z-e^{-0,075}}{z-e^{-0,15}}$;

г) $W_п^*(z)=\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{3}\dfrac{z-e^{-0,05}}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{8}{15}\dfrac{z-e^{-0,125}}{z-e^{-0,25}}$;

д) $W_п^*(z)=2-\dfrac{2}{3}\dfrac{z-e^{-0,05}}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{4}{5}\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}$;

е) $W_п^*(z)=1-\dfrac{4}{3}\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{z-e^{-0,1}}{z-e^{-0,2}}$;

ж) $W_п^*(z)=\dfrac{4}{3}-2\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}+\dfrac{2}{3}\dfrac{z-e^{-0,075}}{z-e^{-0,15}}$;

з) $W_п^*(z)=4-5\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}+\dfrac{z-e^{-0,125}}{z-e^{-0,25}}$;

и) $W_п^*(z)=\dfrac{10}{3}-4\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}+\dfrac{2}{3}\dfrac{z-e^{-0,15}}{z-e^{-0,3}}$;

к) $W_п^*(z)=2-\dfrac{16}{7}\dfrac{z-e^{-0,025}}{z-e^{-0,05}}+\dfrac{2}{7}\dfrac{z-e^{-0,2}}{z-e^{-0,4}}$.

6.11. а) $W_р^*=\dfrac{1,5z-1}{z-1}$, $\quad W_п^*=5\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{z-1}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{z-1}{2(z-e^{-0,2})}\right)$;

б) $W_р^*=\dfrac{0,7z-0,5}{z-1}$, $\quad W_п^*=5\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{z-1}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{z-1}{6(z-e^{-0,3})}\right)$;

в) $W_р^*=\dfrac{1,2z-1}{z-1}$, $\quad W_п^*=5\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{z-1}{z-e^{-0,1}}+\dfrac{2(z-1)}{3(z-e^{-0,15})}\right)$;

г) $W_р^*=2$, $\quad W_п^*=4\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{z-1}{3(z-e^{-0,1})}+\dfrac{2(z-1)}{15(z-e^{-0,25})}\right)$;

д) $W_р^*=\dfrac{0,9z-0,5}{z-1}$, $\quad W_п^*=2\left(1-\dfrac{z-1}{3(z-e^{-0,1})}-\dfrac{2(z-1)}{5(z-e^{-0,05})}\right)$;

е) $W_р^*=\dfrac{1,3z-0,8}{z-1}$, $\quad W_п^*=1-\dfrac{4(z-1)}{3(z-e^{-0,05})}+\dfrac{z-1}{3(z-e^{-0,2})}$;

ж) $W_{\text{р}}^* = \dfrac{2{,}25z - 2}{z - 1}$, $\quad W_{\text{п}}^* = 2\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{z-1}{z - e^{-0{,}05}} + \dfrac{z-1}{3(z - e^{-0{,}15})}\right)$;

з) $W_{\text{р}}^* = \dfrac{1{,}9z - 1{,}5}{z - 1}$, $\quad W_{\text{п}}^* = 4 - \dfrac{5(z-1)}{z - e^{-0{,}05}} + \dfrac{z-1}{z - e^{-025}}$;

и) $W_{\text{р}}^* = \dfrac{4z - 3}{z - 1}$, $\quad W_{\text{п}}^* = 2\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{2(z-1)}{z - e^{-0{,}05}} + \dfrac{z-1}{3(z - e^{-0{,}3})}\right)$;

к) $W_{\text{р}}^* = \dfrac{5z - 3}{z - 1}$, $\quad W_{\text{п}}^* = 2\left(1 - \dfrac{8(z-1)}{7(z - e^{-0{,}05})} + \dfrac{z-1}{7(z - e^{-0{,}4})}\right)$.

6.12. а) $\dfrac{0{,}3z(z - 2e^{-0{,}1} + 1)}{(z-1)(z - e^{-0{,}1})}$; б) $\dfrac{0{,}3z(z - e^{-0{,}2} + e^{-0{,}1})}{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}2})}$;

в) $\dfrac{0{,}3z(z - 3e^{-0{,}1} + 2e^{-0{,}05})}{(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}1})}$; г) $\dfrac{0{,}3z(z - e^{-0{,}3} - e^{-0{,}1})}{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}3})}$;

д) $\dfrac{0{,}3z(2z + 3e^{-0{,}3} - 5e^{-0{,}2})}{(z - e^{-0{,}2})(z - e^{-0{,}3})}$; е) $\dfrac{0{,}1z(3z - e^{-0{,}2} - 2e^{-0{,}05})}{(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}2})}$;

ж) $\dfrac{1{,}2z\sin 0{,}1}{z^2 - 2z\cos 0{,}1 + 1}$; з) $\dfrac{1{,}5(z^2 - z\cos 0{,}1)}{z^2 - 2z\cos 0{,}1 + 1}$;

и) $\dfrac{1{,}5ze^{-0{,}1}\sin 0{,}1}{z^2 - 2ze^{-0{,}1}\cos 0{,}1 + e^{-0{,}2}}$; к) $\dfrac{0{,}6(z - e^{-0{,}2}\cos 0{,}1)}{z^3(z^2 - 2ze^{-0{,}2}\cos 0{,}1 + e^{-0{,}4})}$.

6.13. а) $\dfrac{5z(1 - e^{-0{,}1})}{(z-1)(z - e^{-0{,}1}) + 5z(z - 2e^{-0{,}1} + 1)}$;

б) $\dfrac{5z(e^{-0{,}1} - e^{-0{,}2})}{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}2}) + 5z(z - 2e^{-0{,}2} + e^{-0{,}1})}$;

в) $\dfrac{4z(e^{-0{,}05} - e^{-0{,}1})}{(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}1}) + z(2z - 6e^{-0{,}1} + 4e^{-0{,}05})}$;

г) $\dfrac{z(e^{-0{,}1} - e^{-0{,}3})}{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}3}) + z(2z - e^{-0{,}3} - e^{-0{,}1})}$;

д) $\dfrac{z(e^{-0{,}2} - e^{-0{,}3})}{(z - e^{-0{,}2})(z - e^{-0{,}3}) + z(2z + 3e^{-0{,}3} - 5e^{-0{,}2})}$;

е) $\dfrac{2z(e^{-0{,}05} - e^{-0{,}2})}{9(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}2}) + 3z(3z - 2e^{-0{,}2} - 2e^{-0{,}05})}$;

ж) $\dfrac{z\sin 0{,}1}{z^2 - 2z(\cos 0{,}1 - 2\sin 0{,}1) + 1}$; з) $\dfrac{z(z - \cos 0{,}1)}{6z^2 - 7z\cos 0{,}1 + 1}$;

и) $\dfrac{ze^{-0{,}1}\sin 0{,}1}{z^2 - ze^{-0{,}1}(2\cos 0{,}1 - 5\sin 0{,}1) + e^{-0{,}2}}$; к) $\dfrac{z(z - e^{-0{,}2}\cos 0{,}1)}{3z^2 - 4ze^{-0{,}2}\cos 0{,}1 + e^{-0{,}4}}$.

6.14. а) $\dfrac{(z-1)(z - e^{-0{,}1})}{(z-1)(z - e^{-0{,}1}) + 5z(z - e^{-0{,}1} + 1)}$;

б) $\dfrac{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}2})}{(z - e^{-0{,}1})(z - e^{-0{,}2}) + 5z(z - 2e^{-0{,}2} + e^{-0{,}1})}$;

в) $\dfrac{(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}1})}{(z - e^{-0{,}05})(z - e^{-0{,}1}) + z(2z - 6e^{-0{,}1} + 4e^{-0{,}05})}$;

г) $\dfrac{(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,3})}{(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,3})+z(2z-e^{-0,3}+e^{-0,1})}$;

д) $\dfrac{(z-e^{-0,2})(z-e^{-0,3})}{(z-e^{-0,2})(z-e^{-0,3})+z(2z+3e^{-0,3}-5e^{-0,2})}$;

е) $\dfrac{3(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,2})}{(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,2})+z(3z-e^{-0,2}-2e^{-0,05})}$;

ж) $\dfrac{z^2-2z\cos 0,1+1}{z^2-2z(\cos 0,1-2\sin 0,1)+1}$; з) $\dfrac{z^2-2z\cos 0,1+1}{6z^2-7z\cos 0,1+1}$;

и) $\dfrac{z^2-2ze^{-0,1}\cos 0,1+e^{-0,2}}{z^2-ze^{-0,1}(2\cos 0,1-5\sin 0,1)+e^{-0,2}}$;

к) $\dfrac{z^2-2ze^{-0,2}\cos 0,1+e^{-0,4}}{3z^2-4ze^{-0,2}\cos 0,1+e^{-0,4}}$.

6.15. а) $\dfrac{z-e^{-0,1}}{(z-1)(z-e^{-0,1})+5z(z-e^{-0,1}+1)}$;

б) $\dfrac{5(e^{-0,1}-e^{-0,2})}{(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,2})+5z(z-2e^{-0,2}+e^{-0,1})}$;

в) $\dfrac{4(e^{-0,05}-e^{-0,1})}{(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,1})+z(2z-6e^{-0,1}+4e^{-0,05})}$;

г) $\dfrac{e^{-0,1}-e^{-0,3}}{(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,3})+z(2z-e^{-0,3}+e^{-0,1})}$;

д) $\dfrac{e^{-0,2}-e^{-0,3}}{(z-e^{-0,2})(z-e^{-0,3})+z(2z+3e^{-0,3}-5e^{-0,2})}$;

е) $\dfrac{2(e^{-0,05}-e^{-0,2})}{9(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,2})+3z(3z-e^{-0,2}-2e^{-0,05})}$;

ж) $\dfrac{\sin 0,1}{z^2-2z(\cos 0,1-2\sin 0,1)+1}$; з) $\dfrac{z-\cos 0,1}{6z^2-7z\cos 0,1+1}$;

и) $\dfrac{e^{-0,1}\sin 0,1}{z^2-ze^{-0,1}(2\cos 0,1-5\sin 0,1)+e^{-0,2}}$;

к) $\dfrac{z-e^{-0,2}\cos 0,1}{3z^2-4ze^{-0,2}\cos 0,1+e^{-0,4}}$.

7.1. а), б), в), з), и), к), л) устойчива; г), д), е), ж), м) неустойчива.

7.2. а), б), е), ж), и) устойчива; в), г), д), з), к) неустойчива.

7.3. а), ж), з), и) устойчива; б), в), г), д), е) неустойчива.

7.4. а), б), в), г), д), з), и), к) устойчива; е), ж) неустойчива.

8.1. а) $\dfrac{z^2(1-e^{-0,1})}{(z-1)[(z-1)(z-e^{-0,1})+5z(z-2e^{-0,1}+1)]}$;

б) $\dfrac{z^2(e^{-0,1}-e^{-0,2})}{(z-1)[(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,2})+5z(z-2e^{-0,2}+e^{-0,1})]}$;

в) $\dfrac{2z^2(e^{-0,05}-e^{-0,1})}{(z-1)[(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,1})+z(2z-6e^{-0,1}+4e^{-0,05})]}$;

г) $\dfrac{0{,}5z^2(e^{-0,1}-e^{-0,3})}{(z-1)[(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,3})+z(2z-e^{-0,3}-e^{-0,1})]}$;

д) $\dfrac{z^2(e^{-0,2}-e^{-0,3})}{(z-1)[(z-e^{-0,2})(z-e^{-0,3})+z(2z+3e^{-0,3}-5e^{-0,2})]}$;

е) $\dfrac{4z^2(e^{-0,05}-e^{-0,2})}{(z-1)[9(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,2})+3z(3z-2e^{-0,2}-2e^{-0,05})]}$;

ж) $\dfrac{2z^2\sin 0{,}1}{(z-1)[z^2-2z(\cos 0{,}1-2\sin 0{,}1)+1]}$; з) $\dfrac{2{,}5z^2(z-\cos 0{,}1)}{(z-1)(6z^2-7z\cos 0{,}1+1)}$;

и) $\dfrac{2{,}5z^2e^{-0,1}\sin 0{,}1}{(z-1)[z^2-ze^{-0,1}(2\cos 0{,}1-5\sin 0{,}1)+e^{-0,2}]}$;

к) $\dfrac{4z^2(z-e^{-0,2}\cos 0{,}1)}{(z-1)(3z^2-4ze^{-0,2}\cos 0{,}1+e^{-0,4})}$.

8.2. а) $\dfrac{z[(1-e^{0,05})z+1-e^{-0,1}]}{(z-1)[(z-1)(z-e^{-0,1})+5z(z-2e^{-0,1}+1)]}$;

б) $\dfrac{z[e^{-0,05}(z-e^{-0,2})-e^{-0,1}(z-e^{-0,1})]}{(z-1)[(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,2})+5z(z-2e^{-0,2}+e^{-0,1})]}$;

в) $\dfrac{2z[e^{-0,025}(z-e^{-0,1})-e^{-0,05}(z-e^{-0,0,05})]}{(z-1)[(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,1})+z(2z-6e^{-0,1}+4e^{-0,05})]}$;

г) $\dfrac{0{,}5z[e^{-0,05}(z-e^{0,3})-e^{-0,15}(z-e^{-0,1})}{(z-1)[(z-e^{-0,1})(z-e^{-0,3})+z(2z-e^{-0,3}-e^{-0,1})]}$;

д) $\dfrac{z[e^{-0,1}(z-e^{-0,3})-e^{-0,5}(z-e^{-0,2})]}{(z-1)[(z-e^{-0,2})(z-e^{-0,3})+z(2z+3e^{-0,3}-5e^{-0,2})]}$;

е) $\dfrac{4z[e^{-0,025}(z-e^{-0,2})-e^{-0,1}(z-e^{-0,05})]}{(z-1)[9(z-e^{-0,05})(z-e^{-0,2})+3z(3z-2e^{-0,2}-2e^{-0,05})]}$;

ж) $\dfrac{2z(z+1)\sin 0{,}05}{(z-1)[z^2-2z(\cos 0{,}1-2\sin 0{,}1)+1]}$; з) $\dfrac{2{,}5z\cos 0{,}05}{6z^2-7z\cos 0{,}1+1}$;

и) $\dfrac{2{,}5ze^{-0,05}(z+e^{-0,1})\sin 0{,}05}{(z-1)[z^2-ze^{-0,1}(2\cos 0{,}1-5\sin 0{,}1)+e^{-0,2}]}$;

к) $\dfrac{4ze^{-0,1}(z-e^{-0,2})\cos 0{,}05}{(z-1)(3z^2-4ze^{-0,2}\cos 0{,}1+e^{-0,4})}$.

8.3. а) $\dfrac{0{,}095z}{(z-0{,}905)(z-1)}$; б) $\dfrac{0{,}049z}{(z-0{,}951)(z-1)}$;

в) $\dfrac{0{,}033z}{(z-0{,}967)(z-1)}$; г) $\dfrac{0{,}0247z(2z-1{,}95)}{(z-0{,}95)(z-0{,}975)(z-1)}$;

д) $\dfrac{0{,}02z(2z-1{,}96)}{(z-0{,}96)(z-0{,}98)(z-1)}$; е) $\dfrac{0{,}0165z(2z-1{,}967)}{(z-0{,}967)(z-0{,}984)(z-1)}$;

ж) $\dfrac{0{,}0142z(3z-2{,}96)}{(z-0{,}96)(z-0{,}986)(z-1)}$; з) $\dfrac{0{,}0124z(3z-2{,}963)}{(z-0{,}963)(z-0{,}988)(z-1)}$;

и) $\dfrac{0{,}0124z(4z-3{,}95)}{(z-0{,}95)(z-0{,}988)(z-1)}$; к) $\dfrac{0{,}011z(3z-2{,}967)}{(z-0{,}967)(z-0{,}989)(z-1)}$.

8.4. а) $\dfrac{z}{z-0{,}905}$; б) $\dfrac{z}{z-0{,}951}$; в) $\dfrac{z}{z-0{,}967}$;

г) $\dfrac{z(z^2-1{,}97z+0{,}974)}{(z-0{,}95)(z-0{,}975)(z-1)}$; д) $\dfrac{z(z^2-1{,}98z+0{,}98)}{(z-0{,}96)(z-0{,}98)(z-1)}$;
е) $\dfrac{z(z^2-1{,}98z+0{,}98)}{(z-0{,}967)(z-0{,}984)(z-1)}$; ж) $\dfrac{z(z^2-1{,}99z+0{,}99)}{(z-0{,}96)(z-0{,}986)(z-1)}$;
ж) $\dfrac{z(z^2-1{,}99z+0{,}99)}{(z-0{,}963)(z-0{,}988)(z-1)}$; и) $\dfrac{z(z^2-1{,}90z+0{,}99)}{(z-0{,}95)(z-0{,}988)(z-1)}$;
к) $\dfrac{z(z^2-1{,}99z+0{,}99)}{(z-0{,}967)(z-0{,}989)(z-1)}$.

8.5. а) 0; б) 0,0255; в) 0,0244; г) 0,1302; д) 0,5345; е) 0,1737; ж) 0,0488; з) 0,5714; и) 0,0770; к) 0,1993.

8.6. а) 1; б) 0; в) 0,667; г) 0; д) 3,75; е) 0; ж) 1,7; з) 0; и) 2,15; к) 0.

8.7. а) 0; б) 0,0736; в) 0,11; г) 0,258; д), 0,646; е) 0,322; ж) 0,111; з) 0,667; и)0,167; к) 0,351.

9.1. а) $\dfrac{1-10z}{z-11}$; б) $\dfrac{1-5z}{z+6}$; в) $\dfrac{0{,}3-z}{0{,}3z+1{,}3}$; г) $\dfrac{0{,}4-z}{0{,}4z+1{,}4}$; д) $\dfrac{1-2z}{z+3}$;
е) $\dfrac{(z-0{,}5)(2{,}1z-1{,}1)}{(z-0{,}1)(z-1)}$; ж) $\dfrac{(z-0{,}5)(2{,}2z-1{,}2)}{(z-0{,}2)(z-1)}$; з) $\dfrac{(z-0{,}5)(2{,}3z-1{,}3)}{(z-0{,}3)(z-1)}$;
и) $\dfrac{(z-0{,}2)(2{,}4z-1{,}4)}{(z-0{,}4)(z-1)}$; к) $\dfrac{(z-0{,}2)(2{,}5z-1{,}5)}{(z-0{,}5)(z-1)}$.

9.2. а) $\dfrac{(z-0{,}5)(1{,}34z-0{,}838)}{(z+0{,}762)(z-1)}$; б) $\dfrac{(z-0{,}5)(1{,}38z-0{,}899)}{(z+0{,}824)(z-1)}$;
в) $\dfrac{(z-0{,}2)(1{,}41z-0{,}96)}{(z+0{,}886)(z-1)}$; г) $\dfrac{(z-0{,}2)(1{,}45z-1{,}02)}{(z+0{,}946)(z-1)}$;
д) $\dfrac{(z-0{,}4)(1{,}49z-1{,}08)}{(z+1{,}01)(z-1)}$; е) $\dfrac{(z-0{,}4)(1{,}12z-0{,}719)}{(z+0{,}981)(z-1)}$;
ж) $\dfrac{(z-0{,}6)(1{,}16z-0{,}778)}{(z+1{,}04)(z-1)}$; з) $\dfrac{(z-0{,}6)(1{,}21z-0{,}834)}{(z+1{,}09)(z-1)}$;
и) $\dfrac{(z-0{,}8)(1{,}25z-0{,}894)}{(z+1{,}15)(z-1)}$; к) $\dfrac{(z-0{,}8)(1{,}3z-0{,}951)}{(z+1{,}2)(z-1)}$.

9.3. а) $\dfrac{(z-0{,}1)(0{,}5z+1{,}5)}{(z+1{,}5)(z-1)}$; б) $\dfrac{(z-0{,}2)(0{,}57z+0{,}715)}{(z+1{,}43)(z-1)}$;
в) $\dfrac{(z-0{,}3)(0{,}435z+0{,}391)}{(z+1{,}565)(z-1)}$; г) $\dfrac{(z-0{,}4)(0{,}278z+0{,}215)}{(z+1{,}722)(z-1)}$;
д) $\dfrac{(z-0{,}5)(0{,}5z+1{,}5)}{(z+1{,}5)(z-1)}$; е) $\dfrac{(z-0{,}6)(0{,}57z+0{,}715)}{(z+1{,}43)(z-1)}$;
ж) $\dfrac{(z-0{,}7)(0{,}435z+0{,}391)}{(z+1{,}565)(z-1)}$; з) $\dfrac{(z-0{,}8)(0{,}278z+0{,}215)}{(z+1{,}722)(z-1)}$;
и) $\dfrac{(z-0{,}9)(0{,}235z+0{,}177)}{(z+1{,}765)(z-1)}$; к) $\dfrac{(z-0{,}5)(0{,}235z+0{,}177)}{(z+1{,}765)(z-1)}$.

9.4. а) $\dfrac{3{,}1z^2-3{,}2z+1{,}1}{(z-0{,}1)(z-1)}$; б) $\dfrac{3{,}2z^2-3{,}4z+1{,}2}{(z-0{,}2)(z-1)}$; в) $\dfrac{3{,}3z^2-3{,}6z+1{,}3}{(z-0{,}3)(z-1)}$;
г) $\dfrac{3{,}4z^2-3{,}8z+1{,}4}{(z-0{,}4)(z-1)}$; д) $\dfrac{3{,}5z^2-4z+1{,}5}{(z-0{,}5)(z-1)}$; е) $\dfrac{3{,}6z^2-4{,}2z+1{,}6}{(z-0{,}6)(z-1)}$;
ж) $\dfrac{3{,}7z^2-4{,}4z+1{,}7}{(z-0{,}7)(z-1)}$; з) $\dfrac{3{,}8z^2-4{,}6z+1{,}8}{(z-0{,}8)(z-1)}$; и) $\dfrac{3{,}9z^2-4{,}8z+1{,}9}{(z-0{,}9)(z-1)}$;

к) $\dfrac{3{,}8z^2 - 4{,}6z + 1{,}8}{(z-0{,}5)(z-1)}$.

9.5. а) $\dfrac{(z-0{,}1)(2z-1)}{(z+0{,}9)(z-1)}$; б) $\dfrac{(z-0{,}2)(2z-1)}{(z+0{,}8)(z-1)}$; в) $\dfrac{(z-0{,}3)(2z-1)}{(z+0{,}7)(z-1)}$;
г) $\dfrac{(z-0{,}4)(2z-1)}{(z+0{,}6)(z-1)}$; д) $\dfrac{(z-0{,}5)(2z-1)}{(z+0{,}5)(z-1)}$; е) $\dfrac{(z-0{,}6)(2z-1)}{(z+0{,}4)(z-1)}$;
ж) $\dfrac{(z-0{,}7)(2z-1)}{(z+0{,}3)(z-1)}$; з) $\dfrac{(z-0{,}8)(2z-1)}{(z+0{,}2)(z-1)}$; и) $\dfrac{(z-0{,}9)(2z-1)}{(z+0{,}1)(z-1)}$;
к) $\dfrac{(z-0{,}6)(2z-1)}{(z+0{,}2)(z-1)}$.

Список литературы

1. *Ахметжанов А.А.*, *Кочемасов А.В.* Следящие системы и регуляторы. — М.: Энергоиздат, 1986.
2. *Ахметжанов А.А.* Высокочастотные системы передачи угла автоматических устройств. — М.: Энергия, 1975.
3. *Васильев Д.В.*, *Чуич В.Г.* Системы автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1967.
4. *Воронов А.А.*, *Дмитриева Н.Д.*, *Ким Д,П. и др.* Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. *А.А. Воронова*. — М.: Высш. шк., 1986. — 367 с.
5. *Дмитриева Н.Д.* Технические средства автоматизации. — М.:МИРЭА, 1976.
6. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. — М.: Физматлит, 2003.
7. *Макаров И.М.*, *Менский Б.М.* Линейные автоматические системы. — М.: Машиностроение, 1982.
8. *Макаров И.М.*, *Дмитриева Н.Д.*, *Ким Д.П. и др.* Основы автоматизации управления производством / Под ред. *И.М. Макарова*. — М.: Высш. шк., 1986.
9. Робототехника и ГАП. Книга 2. Приводы робототехнических систем / Под ред. *И.М. Макарова*. — М.: Высш. шк., 1986.
10. Руководство по проектированию систем автоматического управления / Под ред. *В.А. Бесекерского*. — М.: Высш.шк., 1983.