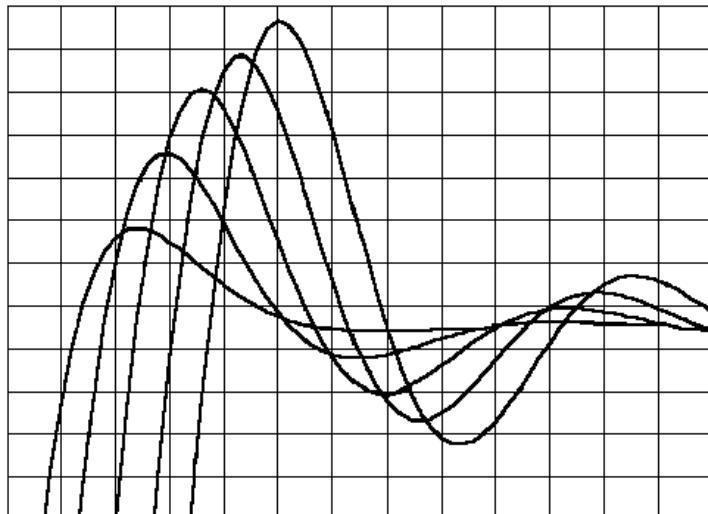


СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ



Часть 1

**Инженерные методы синтеза
законов управления в технических системах
по эталонным математическим моделям**



**Ухта
2000**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УХТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ И МЕЖДУНАРОДНОГО БИЗНЕСА

**СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ
В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Часть 1

Инженерные методы синтеза законов управления в технических системах
по эталонным математическим моделям

Под общей редакцией Р.А. Нейдорфа, З.Х. Ягубова

Учебное пособие

Ухта

2000

УДК 62.001.4

С 38

Синтез законов управления в технических системах: Учеб. пособие. Ч.1. Инженерные методы синтеза законов управления в технических системах по эталонным математическим моделям / Нейдорф Р.А., Иванов Б.А., Обухов П.С. и др.; Под общ. ред. Р.А.Нейдорфа, З.Х.Ягубова. - Ухта: УГТУ, 2000.- 168 с., ил.

ISBN 5-88179-179-7

Учебное пособие является первой частью цикла изданий, посвященного изложению задач, возможностей и методов теоретического и практического проектирования САУ. Рассматривается как методология построения математических моделей систем управления, так и конкретные методики формирования законов управления. Освещены вопросы, связанные с постановкой и решением задачи синтеза различных форм представления эталонных динамических характеристик САУ. Особое внимание уделено наиболее перспективному направлению синтеза характеристик в дифференциальной и операторной формах. Изложены как традиционные подходы к решению этой проблемы, так и новое наиболее универсальное и эффективное направление, ориентированное на построение и исследование областей допустимых структур и параметров эталонных математических моделей.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений 551300, 654500 и 634600, а также может быть рекомендовано студентам направлений 550200 и 651900, аспирантам и инженерам, решающим теоретические и практические задачи проектирования автоматических систем.

Авторы: д-р. техн. наук, проф. Р.А.Нейдорф, канд. техн. наук, доц. Б.А.Иванов, канд. техн. наук П.С.Обухов, д-р. техн. наук, проф. З.Х.Ягубов, Н.С.Тимошенко

Научный редактор: д-р. техн. наук., проф. А.А. Колесников (ТГРТУ, г. Таганрог);

Рецензенты: д-р. техн. наук. проф. Соколов С.В. (РВВИРВСН, г. Ростов-на-Дону);
кафедра робототехники РИАТМ, г. Ростов-на-Дону.



Ухтинский государственный
технический университет, 2000



Нейдорф Р.А., Иванов Б.А., Обухов П.С.,
Ягубов З.Х., Тимошенко Н.С., 2000

ISBN 5-88179-179-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Базовые положения теории управления и задача проектирования автоматических систем.....	8
1.1. Математические формы описания звеньев и систем и их свойства.....	8
1.2. Структурно-параметрические свойства типовых замкнутых систем автоматического управления.....	25
1.3. Типовые законы управления в технических системах.....	41
2. Анализ задачи проектирования системы автоматического управления.....	53
2.1. Сущность и задачи процесса проектирования систем автоматического управления.....	53
2.2. Критериальная стратегия синтеза алгоритмов управления и общая характеристика задачи.....	59
2.3. Анализ традиционных инженерных подходов к решению задачи синтеза САУ.....	66
2.4. Общая постановка задачи синтеза САУ.....	71
3. Проблемы и методы синтеза законов управления по эталонным математическим моделям проектируемых систем.....	80
3.1. Частотные методы синтеза законов управления. Метод «желаемых» ЛАЧХ.....	80
3.2. Операторные методы синтеза законов управления.....	93
3.3. Методы прямого преобразования дифференциальных уравнений..	101
4. Синтез эталонных динамических характеристик проектируемых систем по типовым переходным процессам.....	112
4.1. Теоретические основы метода.....	112
4.2. Синтез эталонных динамических характеристик замкнутых систем управления.....	119
4.3. Синтез эталонных дифференциальных уравнений по выбранным типовым переходным процессам.....	131
5. Некоторые проблемы и возможности многовариантного подхода к синтезу эталонных динамических характеристик.....	137
5.1. Методологические аспекты проблемы.....	137
5.2. Технологически и математически допустимые области корневой плоскости характеристического полинома системы.....	143
5.3. Поисковые области параметрического пространства характеристического полинома.....	153
Библиографический список.....	163

ВВЕДЕНИЕ

Содержание многочисленных учебников по теории автоматического управления (ТАУ), лишь небольшая часть которых упомянута в библиографии настоящего пособия [1-5], показывает, что наиболее развиты и решены в настоящее время задачи анализа динамических систем. В то же время проблема их проектирования или вообще не затрагивается, или излагается в виде некоторого частного подхода. Как правило, непременным и, часто, единственным представителем этого направления ТАУ является «метод желаемых логарифмических амплитудно-частотных характеристик» - удобный, в некоторых случаях эффективный, но далеко не универсальный метод решения задач организации управления в технических системах.

Данное обстоятельство объясняется тем, что задача проектирования системы с заданными показателями качества значительно сложнее задачи анализа свойств уже имеющейся системы. Во-первых, задача проектирования является многоплановой, так как подразумевает выбор стандартных технических средств, выявление нестандартно реализуемых функций, синтез алгоритмов их реализации, разработка технических решений и тому подобное обусловливают ее многоплановость. Во-вторых, в этой задаче проектирования присутствуют две ярко выраженные составляющие - структурная и параметрическая, которые требуют различных подходов и методов решения. В-третьих, имеем дело с типичной многовариантной задачей, так как любой совокупности исходных требований отвечает, чаще всего, практически бесконечное множество различных структурно-параметрических вариантов решения. Поэтому конечной стадией теоретического этапа проектирования является решение проблемы выбора наиболее рационального из вариантов.

В проблеме проектирования систем автоматического управления (САУ) целесообразно выделить ее теоретический этап, сущность которого состоит в отыскании математического выражения, определяющего закон функционирования управляющего устройства, который обеспечивает всей системе требуемые

динамические свойства. Этот этап принято называть синтезом системы, хотя по существу, синтезу подлежит при этом лишь сам закон управления (ЗУ). Именно синтез законов управления является основным предметом теории автоматического управления, и именно этот вопрос слабее всего освещен в доступной литературе. Различные методы синтеза изложены в многочисленных работах монографического характера, зачастую являющихся раритетными изданиями, что затрудняет получение целостной картины проблемы синтеза ЗУ при пользовании двумя-тремя общепринятыми базовыми учебниками.

При написании данного учебного пособия авторы преследовали цель собрать и связать единой концептуальной нитью наиболее конструктивные в инженерной практике методы синтеза ЗУ в технических системах. Изложение ведется с учетом уровня подготовки и возможностей студентов, обусловленных традицией изучения ТАУ исключительно на основе операторно-частотного аппарата. В связи с этим, настоящее пособие задумано как первая часть цикла работ, посвященных указанной актуальной проблеме теории управления – синтезу ЗУ в автоматических системах. В учебной и научной литературе рассмотрены некоторые, получившие наибольшее признание и распространение методы синтеза ЗУ, называемые обычно (и весьма неточно) «методами синтеза САУ» [1-6]. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, что обуславливает либо ограничивает их применение при решении тех или иных задач. Однако, большинство методов разработано давно - в период развития так называемой “классической” теории управления и задолго до компьютерной революции, разрубившей большинство «гордиевых узлов» нелинейности, многомерности, многосвязности, нестационарности и стохастичности. В связи с этим их применение в настоящее время нецелесообразно из-за ограниченных возможностей и неоправданной трудоемкости.

Однако, некоторые из этих методов сохраняют свое значение, так как в переработанном и логарифмированном виде могут быть с успехом использованы в инженерной практике. В этом аспекте огромную роль играет многогранное использование возможностей вычисли- вычислительной техники. В частности,

по-прежнему актуален подход, базирующийся на методологии синтеза автоматических систем управления путем предварительного построения для них так называемых «желаемых» или «эталонных» математических моделей. Без сомнения, роль этих методов в теории и практике решения сложных проблем управления ограничена. Для многих технологий и технических систем, при управлении которыми нет смысла ставить задачи предельной сложности и идти на дополнительные затраты, вполне оправдано применение упрощенных, методологически прозрачных инженерных подходов. Их возможности сейчас резко повышены мощным математическим, программным и техническим обеспечением современных персональных компьютеров, а также достижениями микропроцессорной техники.

Идеология синтеза законов управления для автоматических систем на основе задания их желаемых динамических свойств в виде некоторого динамического эталона - математической модели (ММ) с заданными свойствами, проста и понятна на инженерном уровне. Она предусматривает два основных этапа решения задачи. На первом производится синтез эталонной ММ системы, свойства которой, при адекватных реальным ситуациям воздействиях, отражали бы технологические требования к процессу управления. На втором этапе производится синтез ММ управляющего устройства (УУ) путем вычленения ее из эталонной ММ с учетом модели входящего в систему объекта управления (ОУ). При этом, ММ устройства управления как раз и выражает собой синтезируемый ЗУ (а само УУ его реализует).

Все известные к настоящему времени методы синтеза желаемых динамических характеристик традиционно рассматриваются каждым автором как обособленный инструмент решения поставленной задачи, что делает восприятие общей картины достаточно сложным. Поэтому в пособии проведена систематизация различных подходов. Это поможет читателю легче ориентироваться в различных методиках и выбирать наиболее подходящие для конкретных приложений.

На всех стадиях решения в качестве математического «инструмента» используются подходы, приемы и методы описания характерные для анализа динамических систем. Это направление ТАУ является наиболее хорошо развитым, особенно, применительно к системам, допускающим линеаризацию и, как следствие, линейное описание. Поэтому, в *первом разделе* пособия приведены самые необходимые, на взгляд авторов, сведения о математическом аппарате анализа линейных САУ.

Второй раздел работы посвящен краткому анализу проблемы проектирования САУ в целом, исследованию места и роли в ней задачи синтеза ЗУ, а также выявлению эффективных и перспективных направлений ее решения.

В третьем разделе работы рассматриваются наиболее распространенные методы синтеза ЗУ на основе желаемых ММ, и обосновываются подходы к конструированию последних.

В исследованиях проф. Нейдорфа Р.А., частично отраженных в настоящем пособии, показано, что наиболее сложным и ответственным этапом синтеза ЗУ является синтез эталонной ММ. Поэтому в четвертом и пятом разделах пособия большое внимание уделяется именно проблеме решения задач синтеза ММ с желаемыми динамическими свойствами.

Четвертый раздел посвящен синтезу эталонных ММ САУ на основе типовых переходных процессов. Дано теоретическое обоснование методики, а также подробные табличные и графические материалы для ее реализации.

В последнем, *пятом разделе* изложена концепция и рассмотрены возможности перспективного многовариантного подхода к решению задачи синтеза ММ с заданными свойствами. Показывается, что только с таких позиций можно ставить и решать задачи структурно-параметрической минимизации ЗУ в технических системах (ТС).

2. БАЗОВЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Математические формы описания звеньев и систем и их свойства

1.1.1. Операторные методы. Рассмотрим некоторые основные понятия и определения, необходимые для синтеза систем автоматического управления и расчета корректирующих устройств.

Передаточная функция. Обратимся к линейной САУ, на входе которой действует сигнал $x(t)$, а на выходе - сигнал $y(t)$ (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Условное представление САУ в координатах "вход/выход"

Из курса классической теории автоматического управления (ТАУ) известно [1-6], что, в общем случае, такая система может быть описана линейным дифференциальным уравнением (ДУ) вида

$$\begin{aligned} b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = \\ = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где n - порядок системы.

Наиболее распространенным в ТАУ способом перевода математических моделей (ММ) типа (1.1) в операторно-алгебраическую область является прямое преобразование Лапласа. Оно заключается в переходе от функций времени $f(t)$, называемых оригиналами, к функциям $F(p)$ некоторой абстрактной комплексной переменной $p = c + j\omega$, называемой изображением. Такой переход задается интегральным преобразованием, условно обозначаемым $L\{*\}$

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.2)$$

Для перехода от изображения $F(p)$ к оригиналу $f(t)$ при анализе результатов операторно-алгебраического исследования автоматической системы используется обратное преобразование Лапласа, условно обозначаемое $L^{-1}\{*\}$

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{-pt} dp, \quad (1.3)$$

где c - положительная константа, вводимая для сходимости преобразования при работе с незатухающими функциями времени.

Применим прямое преобразование Лапласа к уравнению (1.1), считая начальные условия его решения нулевыми[&],

$$\begin{aligned} L\left\{ b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) \right\} &= \\ &= L\left\{ a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $L\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = pX(p)|_{x(0)=0}$, получим уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение в изображениях по Лапласу:

$$\begin{aligned} b_n p^n Y(p) + \dots + b_2 p^2 Y(p) + b_1 p Y(p) + b_0 Y(p) &= \\ &= a_m p^m X(p) + \dots + a_2 p^2 X(p) + a_1 p X(p) + a_0 X(p). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вынося $X(p)$ и $Y(p)$ за скобки, выделим полиномы от аргумента p :

$$(b_m p^{n-2} + \dots + b_2 p + b_1 p + b_0) Y(p) = (a_m p^m + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X(p). \quad (1.5)$$

Из (1.5) получим отношение:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_n p^n + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \quad (1.6)$$

где $n > m$ (для физически реализуемых систем), математическая структура которого оказывается инвариантной к изображениям входных и выходных сигналов

[&] Это не нарушает общности преобразований, т.к. в ТАУ принято исследовать поведение объектов и систем управления в приращениях относительно номинального их состояния.

и, следовательно, описывает собственные свойства исследуемой динамической системы.

Полученный в виде рациональной дроби (1.6) математический инвариант называется **передаточной функцией** (ПФ) линейной системы (ЛС). Таким образом, передаточная функция САУ может быть определена как отношение изображения по Лапласу выходного сигнала системы к изображению по Лапласу входного сигнала системы при нулевых начальных условиях.

Существуют системы, в которых часть коэффициентов знаменателя в выражении (1.6) равна нулю ($b_0=b_1=\dots=b_{v-1}=0$). В этом случае передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{a_m p^m + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^v (b_{n-v} p^{n-v} + \dots + b_{v+2} p^2 + b_{v+1} p + b_v)} = \\ &= \frac{K_v (c_m p^m + \dots + c_2 p^2 + c_1 p + 1)}{p^v (d_n p^n + \dots + d_2 p^2 + d_1 p + 1)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $K_v = \frac{a_0}{b_v}$ - приведенный коэффициент усиления ЛС, v - порядок астатизма,

определенный количеством интегрирующих звеньев, входящих в систему. Форма представления ПФ, заданная последней дробью (1.7) называется канонической формой ее представления для линейных звеньев и систем.

Для статических систем, характеризуемых значением $v=0$, $[K_0] = \frac{[y]}{[x]}$. Для систем астатических с $v=1, 2, \dots, \infty$ (на практике v не превышает 3) $[K_v] = c^{-v} \cdot \frac{[y]}{[x]}$. В последнем случае K_v иногда называют добротностью по скорости ($v=1$), добротностью по ускорению ($v=2$), по третьей производной ($v=3$) и т.д.

При решении задач синтеза передаточную функцию системы удобно представлять в виде произведения сомножителей типа $(T^2 p^2 + 2 \xi T p + 1)$ или $(T p + 1)$, где T называется постоянной времени, а ξ - показателем затухания или коэффициентом демпфирования, причем $0 < \xi < 1$. Трехчлены входят в разложение

тогда, когда знаменатель или числитель (1.6) содержит комплексные корни. В этом случае ПФ задается канонической последовательно структурированной формой

$$W(p) = \frac{K_v \cdot \prod_{j=1}^{m-29} (T_j \cdot p + 1) \cdot \prod_{k=1}^9 (T_k^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_k \cdot p + 1)}{p^v \cdot \prod_{i=1}^{n-v-2\zeta} (1 + T_i p) \cdot \prod_{l=1}^{\zeta} (T_l^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_l \cdot p + 1)}. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) особенно удобна при построении логарифмических частотных характеристик.

1.1.2. Частотные методы. Линейные динамические системы характеризуются той особенностью, что обнаруживают довольно регулярный характер реакций на гармонические воздействия. Коэффициент передачи таких систем по амплитуде и сдвиг выходного сигнала по фазе зависят только от частоты входного сигнала и инвариантны к его амплитуде. Это позволяет эффективно использовать в практике решения задач автоматического управления т.н. частотные характеристики линейных звеньев и систем.

Частотные характеристики. Таким образом, кроме передаточной функции, любая линейная САУ может быть охарактеризована частотными характеристиками. Для построения частотных характеристик используется преобразование Фурье [7], которое связывает функцию времени $f(t)$ с ее частотным изображением $F(j\omega)$ выражениями

$$F(j\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (1.9)$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega, \quad (1.10)$$

где F и F^{-1} - обозначения операций прямого и обратного преобразования Фурье.

Преобразуем по Фурье дифференциальное уравнение (1.1):

$$\begin{aligned}
F \left\{ b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) \right\} = \\
= F \left\{ a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \right\}. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Учитывая, что $F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$, из (1.11) получим:

$$\begin{aligned}
a_0 X(j\omega) + a_1 j\omega X(j\omega) - a_2 \omega^2 X(j\omega) + \dots + a_m (j\omega)^m X(j\omega) = \\
= b_0 Y(j\omega) + b_1 j\omega Y(j\omega) - b_2 \omega^2 Y(j\omega) + \dots + b_n (j\omega)^n Y(j\omega). \tag{1.12}
\end{aligned}$$

Из уравнения (1.12) можно получить инвариантное к входным и выходным сигналам отношение, аналогичное (1.6):

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} \tag{1.13}$$

Функция $W(j\omega)$ называется *комплексным коэффициентом передачи (ККП)* линейной САУ. Таким образом, комплексный коэффициент передачи линейной САУ может быть определен как отношение изображения по Фурье выходного сигнала системы к изображению по Фурье входного сигнала системы при нулевых начальных условиях.

Функции $Y(j\omega)$ и $X(j\omega)$ принято называть частотными спектрами функций $y(t)$ и $x(t)$. В соответствии с этим, комплексный коэффициент передачи можно определить как отношение спектров выходного и входного сигналов САУ.

Комплексный коэффициент передачи изначально задается как и ПФ рациональной дробью. Аналогично любой комплексной функции он может быть представлен в классической форме как сумма действительной и мнимой частей.

$$\begin{aligned}
W(j\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{W(j\omega)\} \quad (a) \\
W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (b)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где $P(\omega)$ - вещественная составляющая комплексного коэффициента передачи, называемая вещественной частотной характеристикой (ВЧХ); $Q(\omega)$ - мнимая составляющая, называемая мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

Другой распространенной и удобной для ряда задач формой ККП является

показательная, получаемая с применением формулы Эйлера,

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.15)$$

где $A(\omega) = |W(j\omega)|$ - модуль комплексного коэффициента передачи, называемый амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) САУ; $\varphi(\omega) = \arg\{W(j\omega)\}$ - аргумент ККП, называемый фазочастотной характеристикой (ФЧХ) САУ.

Для перехода от одной формы записи к другой используются следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \\ P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega); \\ Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega). \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Геометрическое место концов векторов комплексного коэффициента передачи при изменении частоты от нуля до бесконечности называется **частотным годографом** или **амплитудно-фазовой частотной характеристикой звена** (АФЧХ).

Эту характеристику можно построить в декартовой и полярной системах координат. Обычно полярную систему координат совмещают с декартовой системой. За полюс принимается начало декартовых координат, а за полярную ось - положительная вещественная ось. Для построения АФЧХ в декартовой системе координат комплексный коэффициент передачи представляют в алгебраической форме (1.14). По оси абсцисс откладывается вещественная часть $P(\omega)$, а по оси ординат - мнимая часть $Q(\omega)$. Для каждой частоты на комплексной плоскости наносится точка. Полученные точки соединяются плавной кривой. Около нанесенных точек указываются соответствующие им частоты. Для построения АФЧХ в полярной системе координат комплексный коэффициент передачи представляют в показательной форме (1.15). Задаваясь различными значениями частоты, строят вектор в полярной системе координат, длина которого определяется модулем $A(\omega)$, а угол его поворота относительно полярной оси - аргументом $\varphi(\omega)$ комплексного коэффициента передачи системы. Пример построения амплитуд-

но-фазовой частотной характеристики показан на рис. 1.2.

Вместо амплитудно-фазовой частотной характеристики можно построить отдельно АЧХ и ФЧХ. Графики этого типа показаны на рис. 1.3. Фактически АЧХ представляет собой кривую зависимости модуля комплексного коэффициента передачи $A(\omega)$ от угловой частоты ω , т.е. характеризует изменение амплитуды гармонического сигнала произвольной частоты при прохождении его через систему. Таким образом, с практической точки зрения, АЧХ - это зависимость коэффициента усиления САУ применительно к гармоническому сигналу от его частоты:

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}(\omega)}{A_{\text{вх}}(\omega)},$$

где $A_{\text{вх}}(\omega)$, $A_{\text{вых}}(\omega)$ –

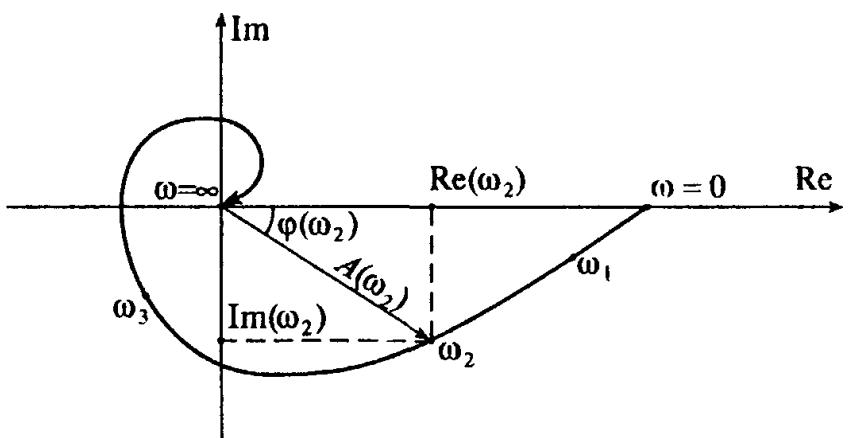


Рис. 1.2. К построению частотного годографа

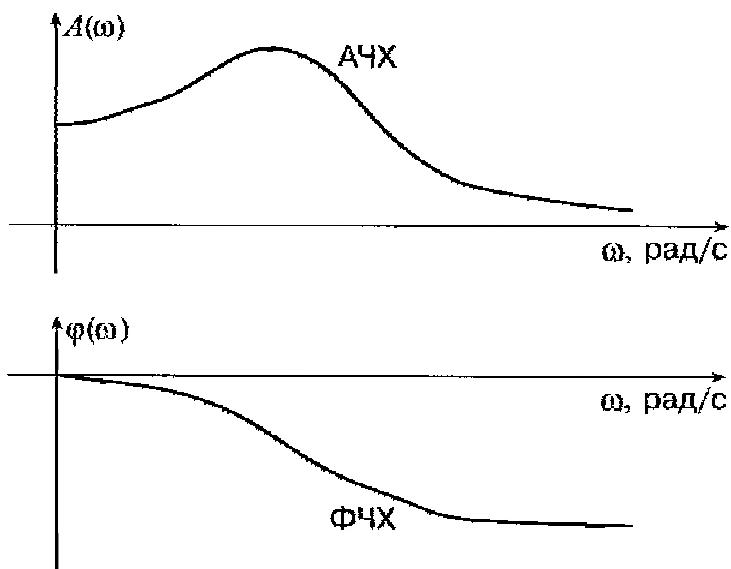


Рис. 1.3. К построению АЧХ и ФЧХ

амплитуда входного гармонического сигнала и соответствующей установившейся реакции САУ, т.е. гармонического колебания выходной координаты, которая различным образом воспроизводится системой на разных частотах.

Физическая размерность АЧХ может быть разной. Например, если выходной координатой САУ является температура воздуха в помещении ($[t^0]$ =град), а входное воздействие на систему задается в виде напряжения на клеммах нагревателя ($[U]$ =В), то $[A(\omega)] = \frac{\text{град}}{\text{В}}$. Если же, к примеру, выходной координатой

является скорость вращения вала электродвигателя $\left([\Omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1} \right)$, а в качестве задающего воздействия фигурирует давление газа ($[P]=\text{Па}$), сжимаемого насосом, то $[A(\omega)] = \frac{\text{град}}{\text{с} \cdot \text{Па}} = (\text{с} \cdot \text{Па})^{-1} = \frac{\text{рад} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$. Для большинства же, например, чисто электронных систем $A(\omega)$ безразмерна, т.к. выходные и входные сигналы измеряются в одинаковых единицах (В, А, Вт). Также безразмерным принимается, обычно, коэффициент передачи замкнутой САУ по управляющему каналу, т.к. в теоретических исследованиях принято считать сигналы задания и выходной переменной одной размерности.

Фазочастотная характеристика представляет собой кривую зависимости аргумента комплексного коэффициента передачи $\phi(\omega)$ от частоты ω и показывает, как изменяется сдвиг по фазе между выходным и входным гармоническим сигналом на различных частотах. У инерционных звеньев этот сдвиг отрицателен, т.е. выходной сигнал «отстает» от входного. У некоторых объектов и звеньев, ПФ которых характеризуются малыми значениями «нuleй»[&], чаще всего у управляющих устройств, фазовый сдвиг может оказаться положительным на части, или даже на всей ФЧХ. Однако предел значения этой характеристики у реальных звеньев не может быть больше нуля - $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) \leq 0$.

Можно построить отдельно также вещественную и мнимую частотные характеристики по аналитическим выражениям для $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (см. рис. 1.4). Вещественная частотная характеристика представляет собой кривую зависимости вещественной части ККП $P(\omega)$ от частоты ω , а мнимая частотная характеристика - зависимость мнимой части ККП $Q(\omega)$ от частоты.

[&] Корни полинома числителя ПФ. Малым корням соответствуют большие постоянные времени полиномов, что обуславливает т.н. форсирующие свойства звеньев.

Следует подчеркнуть, что в отличие от других частотных характеристик (ККП, ВЧХ, МЧХ), только АЧХ и ФЧХ можно как интерпретировать физически, так и определить экспериментально.

При исследовании систем автоматического управления АЧХ и ФЧХ удобно строить в логарифмических координатах. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при этом возможна зачастую довольно эффективная аппроксимация точных логарифмических амплитудно-частотных характеристик отрезками прямых - асимптотами. Во-вторых, логарифмическая частотная характеристика цепочки последовательно соединенных звеньев получается сложением характеристик отдельных звеньев. Это значительно упрощает анализ и синтез систем, содержащих последовательно соединенные динамические звенья.

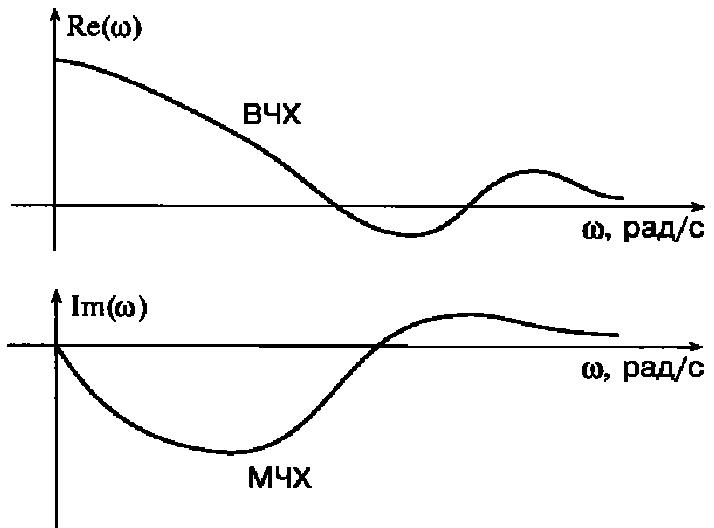


Рис. 1.4. К построению ВЧХ и МЧХ

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) строится в виде зависимости $20\lg A(\omega)$ от $\lg \omega$. Величина $20\lg A(\omega)$ обозначается, обычно, $L(\omega)$

$$L(\omega) = 20\lg |W(j\omega)| = 20\lg A(\omega) \quad (1.17)$$

В качестве единицы измерения этой величины используется децибел (дБ), равный одной десятой бела (Б). Бел был введен в технические расчеты как относительная логарифмическая единица, соответствующая увеличению мощности в 10 раз. Учитывая, что мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, можно определить бел через отношение амплитуд сигналов. Поясним это следующим образом. Если мощность выходного сигнала САУ в десять раз больше мощности входного сигнала, то

$$\lg \frac{A_{\text{вых}}^2}{A_{\text{вх}}^2} = \lg 10 = 1 \text{Б}$$

Так как бел слишком большая единица, то удобнее пользоваться производной единицей - дБ. Поскольку же $1 \text{ Б} = 10 \text{ дБ}$, то величина, имеющая размерность в дБ, должна записываться так:

$$10 \lg \frac{A_{\text{вых}}^2}{A_{\text{вх}}^2}.$$

При увеличении отношения амплитуд в десять раз отношение мощностей увеличивается в сто раз, что соответствует двум белам или двадцати децибелам. Поэтому в выражении (1.17) стоит множитель 20.

Запись выражения (1.17) нуждается еще в одной существенной оговорке: логарифмировать можно только безразмерную величину. Однако выше отмечалось, что $A(\omega)$ может иметь различную размерность. В связи с этим более корректна запись

$$L(\omega) = 20 \lg \left. \frac{A(\omega)}{A_0} \right|_{A_0=1 \text{ед}} = 20 \lg A(\omega),$$

где A_0 - эталонная величина, численно равная единице ($1 \frac{\text{град}}{\text{В}}; 1 \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{Па}}$ и т.п.).

Такое же замечание относится и к величине $\lg \omega$. Угловая частота ω имеет размерность $\frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$ и, строго говоря, не может быть прологарифмирована. По-

этому под аргументом ω в соответствующих формулах следует понимать относительную угловую частоту, определяемую выражением

$$\omega = \left. \frac{\omega_{\text{ист}}}{\omega_0} \right|_{\omega_0=1 \text{с}^{-1}},$$

где $\omega_{\text{ист}}$ – истинное (размерное) значение угловой частоты; ω_0 – эталонная частота, равная $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; ω – относительная «нормированная» частота, совпадающая по величине с истинной.

Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) строится в

полулогарифмических координатах в виде зависимости ϕ от $\lg\omega$, чтобы обе характеристики были связаны одним масштабом по оси абсцисс.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ используется стандартная сетка, приведенная на рис. 1.5. По оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе, т.е. наносятся отметки, соответствующие $\lg\omega$, а около отметок пишется само значение частоты ω в рад/с (в свете сделанного выше замечания относительно размерности логарифмируемых величин, здесь имеется в виду численное равенство $\omega_{ист}=\omega$). Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т.е. изменению частоты в 10 раз.

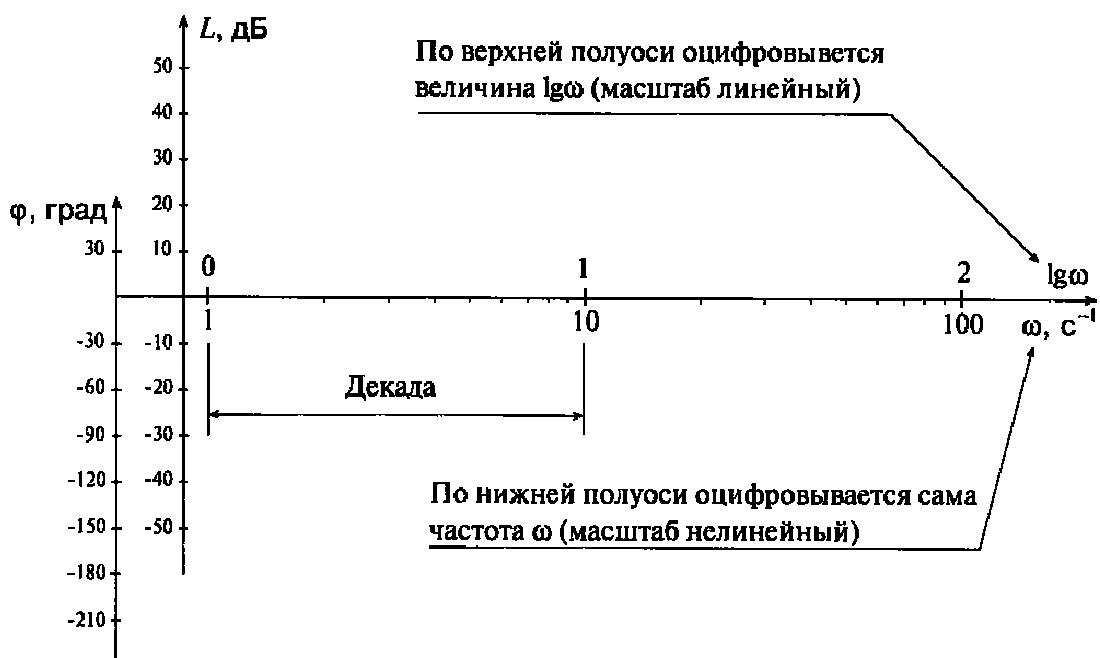


Рис. 1.5. Оси для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ

По оси ординат откладывается модуль в децибелах (дБ). Для этой цели на ней наносится равномерный масштаб. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 дБ, что соответствует значению модуля $A(\omega) = 1$. Ось ординат может пересекать ось частот в произвольном месте, т.к. точка $\omega = 0$ лежит на оси частот слева в бесконечности. Поэтому ось ординат проводят левее самой малой сопрягающей частоты ЛАЧХ. Если область активного изменения логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ) захватывает частоту $\omega = 1$, то ось ординат, зачастую, привязывают к этой точке, т.к. $\lg(\omega) = 0$. В результате координатная система предстает в привычном виде.

Для построения ЛФЧХ используется та же ось абсцисс. По оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе. Допускается оцифровывать эту ось и в радианах.

Асимптотические ЛАЧХ. На практике часто используются упрощенные или асимптотические ЛАЧХ, построение которых удобно рассмотреть на примере апериодического звена первого порядка.

Передаточная функция звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1}, \quad (1.18)$$

где k - коэффициент усиления звена; T - постоянная времени.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика строится по выражению

$$L(\omega) = 20 \lg \omega = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \quad (1.19)$$

Построение асимптотической ЛАЧХ показано на рис 1.6. На стандартной сетке проводим вертикальную прямую через точку с частотой $\omega_{\text{п}} = \frac{1}{T}$,

называемой частотой перегиба. Для частот меньших, чем частота перегиба, т.е. $\omega < \frac{1}{T}$, можно пренебречь вторым слагаемым под корнем в выражении (1.19).

Тогда $\sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 1$, т.е. $L(\omega) \approx 20 \lg k$.

Этому выражению соответствует прямая линия, параллельная оси частот и проходящая на уровне $20 \lg k$ (прямая ab). Это и есть первая асимптота.

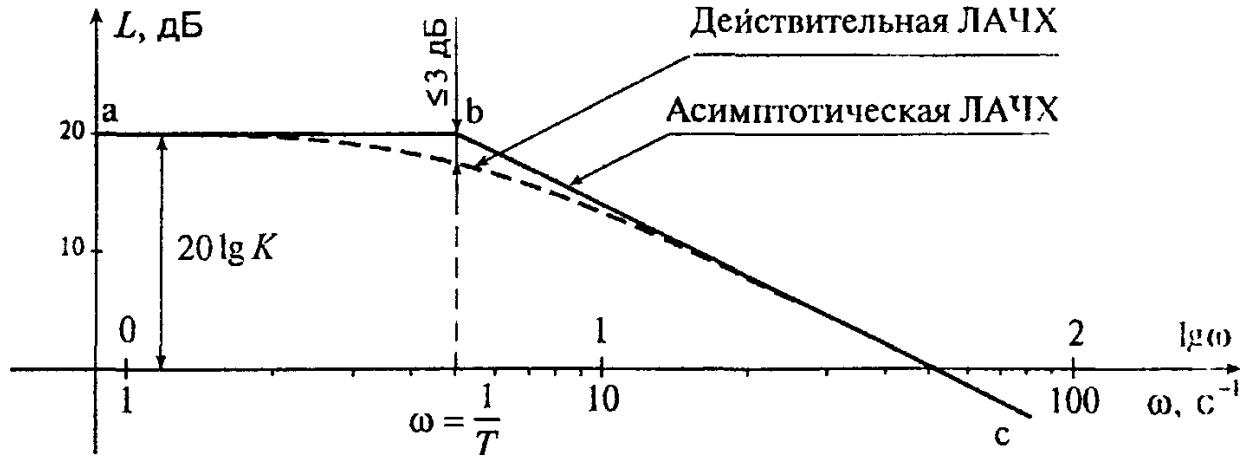


Рис. 1.6. ЛАЧХ апериодического звена первого порядка

Для частот больших, чем частота перегиба $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$, в выражении (1.19)

единицей под корнем по сравнению с $T^2\omega^2$ можно пренебречь. Тогда

$$\sqrt{1+T^2\omega^2} \approx T\omega, \text{ т.е. } L(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega.$$

В этом случае характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон -20 дБ/дек (прямая be). Эта линия является второй асимптотой. Действительно, при увеличении ω на декаду, т.е. в 10 раз, $L(\omega) \approx 20\lg k - 20\lg 10T\omega - 20\lg 10$. Таким образом, величина $L(\omega)$ уменьшилась на $20\lg 10$, т.е. на 20 дБ.

Ломаная линия abc называется асимптотической ЛАЧХ. Действительная ЛАЧХ (показана на рис. 1.6 пунктиром) будет несколько отличаться от асимптотической, причем наибольшее отклонение будет в точке перегиба $\omega_p = \frac{1}{T}$. Оно

составляет приблизительно 3 дБ. На остальных участках влево и вправо от частоты перегиба действительная ЛАЧХ апериодического звена первого порядка отличается от асимптотической еще меньше. Поэтому во многих практических инженерных расчетах достаточно ограничиться построением асимптотической ЛАЧХ.

1.1.3. Временные характеристики. Несмотря на простоту, удобство и наглядность использования операторных и частотных ММ, обойтись без исследования САУ во временной области обычно не удается. Это касается в особенностях задач, связанных с исследованием качественных показателей работы, приме-

няемых для оценки динамических свойств системы. В теории автоматического управления в зависимости от вида типовых для работы САУ входных воздействий для такой оценки, чаще всего, используют либо переходную характеристику (ПХ), либо импульсную переходную функцию (ИПФ), называемую также весовой функцией (ВХ). Однако нередко используются и другие временные характеристики, представляющие собой графики переходных процессов, вызванных в САУ другими воздействиями.

Типовые входные (испытательные) воздействия для построения временных характеристик САУ формируются как воздействия, на отработку которых ориентируется синтезируемая система. Обычно вид такого воздействия, как функции времени, выбирается из набора типовых сигналов, которые являются идеализацией встречающихся на практике [1-3]. Наиболее распространенными являются типовые функции времени из ряда, получаемого на основе импульсной функции Дирака или так называемой δ -функции. Последняя является обобщенной функцией [7, 8] и может рассматриваться как предел прямоугольного импульса $\Delta(t - t_0)$, имеющего ширину Δt и амплитуду $1/\Delta t$, как это показано на рис. 1.7:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta(t - t_0). \quad (1.20)$$

Из отношения (1.20) и рис. 1.7 видно, что δ -функция представляет собой импульс бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности, имеющий площадь (аналог мощности воздействия) равную единице и возникающий в момент, определенный аргументом t_0 . Эта функция идеализирует кратковременные воздействия на систему ощутимой мощности (шквал для управляемого летательного аппарата, удар о препятствие для управляемого транспортного средства, ввод порции вещества в химический реактор и пр.). Примечательным свойством δ -функции является то, что ее изображением по Лапласу является единица. Поэтому

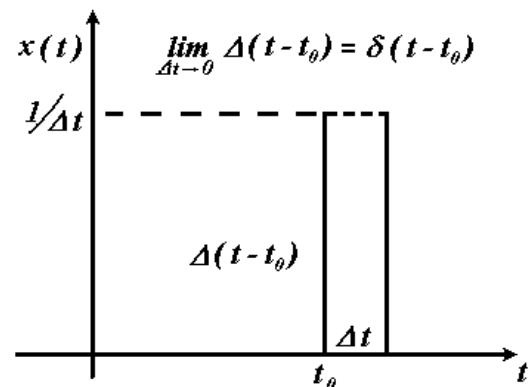


Рис. 1.7. Иллюстрация понятия δ -функции

му, согласно формуле (3.1), ПФ звена можно, наряду с данным выше определением, трактовать как изображение по Лапласу его реакции на δ -функцию при нулевых начальных условиях. Такая реакция называется "весовой функцией". Математически δ -функцию можно записать через систему условий

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

При этом согласно определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Однако δ -функция имеет и другое интересное свойство, раскрываемое следующими ниже выражениями:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = 1(t - t_0), \quad (1.21)$$

где $1(t - t_0)$ - единичная ступенчатая функция (единичный скачок, функция Хевисайда). Она имитирует воздействия, связанные с быстрым изменением их величины до некоторого нового конечного значения (смена задания для САУ, "наброс нагрузки" в приводе, переход на затяжной подъем или спуск управляемого транспорта, смена курса для автопилота и т. п.).

Двойное интегрирование δ -функции или интегрирование ступенчатой функции позволяет получить другое типовое для программных и следящих систем воздействие - линейно меняющийся во времени сигнал:

$$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t 1(\tau - t_0) \cdot d\tau \cdot dt = \int_{-\infty}^t 1(t - t_0) \cdot dt = t \cdot 1(t - t_0). \quad (1.22)$$

Отработка такого воздействия характерна для программных систем при кусочно-линейной интерполяции формообразующих функций, систем наведения и слежения за целями, движущимися с постоянной скоростью.

Продолжая процесс i -кратного интегрирования δ -функции, можно получить параболические 2-го, 3-го и т.д. порядка функции, также встречающиеся в практике эксплуатации автоматических систем. Математические выражения для

этих функций и их изображений по Лапласу приведены в табл. 1.1. Там же помещены оригиналы и изображения других функций, встречающихся в роли внешних воздействий в практике расчета САУ.

Таблица 1.1

Таблица изображений типовых входных воздействий

Оригинал	$\delta(t)$	$\delta(t - \tau)$	$1(t)$	$t \cdot 1(t)$	$t^{n-1} \cdot 1(t)$	$e^{-\alpha t}$	$\sin(\omega t)$	$1 - e^{-\alpha t}$
Изображение	1	e^{-pt}	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{(n-1)!}{p^n}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$

При известном неединичном коэффициенте μ , характеризующем интенсивность воздействия, он, в соответствии со свойством линейности преобразования Лапласа, входит в изображение входного сигнала в качестве множителя. Например, $z(t) = \mu \cdot t$, следовательно, $z(p) = \mu / p^2$.

Переходная характеристика $h(t)$ представляет собой процесс изменения выходной переменной САУ, возникающий при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия $x(t) = 1(t)$, которое, согласно (1.21), поинтервально описывается следующими значениями: $x = 0$ при $t \leq 0$ и $x = 1$ при $t > 0$. Это наглядно иллюстрируется рис. 1.8.

Переходная характеристика $h(t)$ может быть определена непосредственным решением ДУ (1.1). Однако ступенчатый характер входа вызывает затруднения при формировании правой части неоднородного уравнения при наличии там производных от входного сигнала. Их разрывный характер требует или применения аппарата обобщенных функций [8], или преобразования ДУ к форме Коши с помощью специального алгоритма [9].

В связи с этим более распространены методы построения ПХ с использованием передаточной функции и обратного преобразования Лапласа. Действительно, из (1.6) следует, что

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p). \quad (1.23)$$

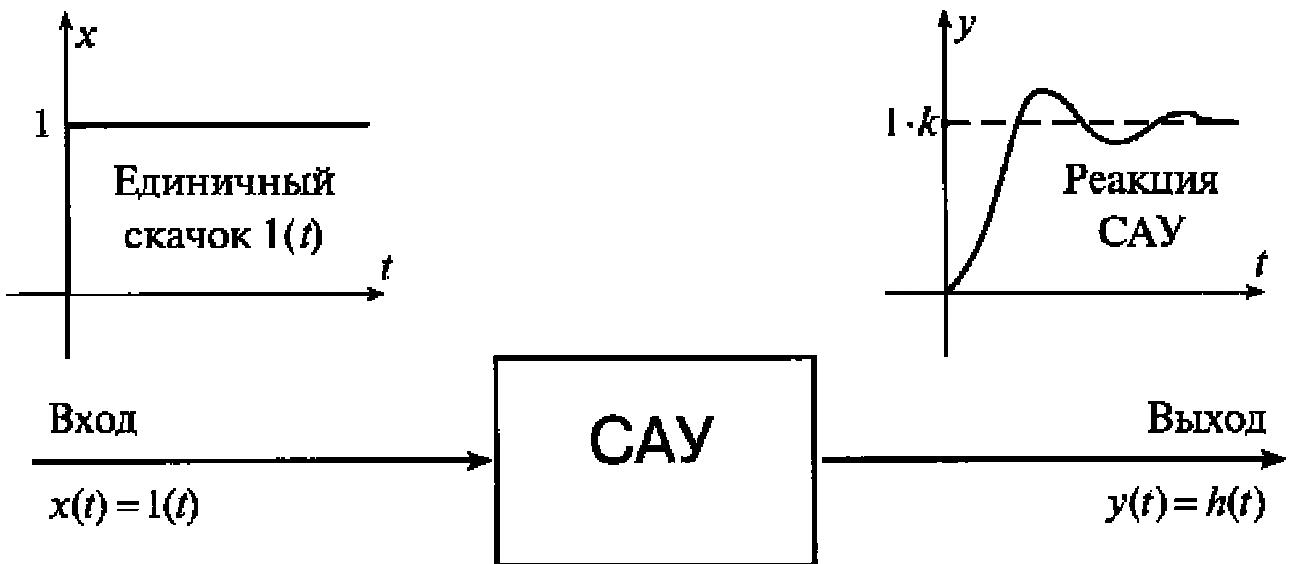


Рис. 1.8. К определению переходной характеристики

Поэтому $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\{W(p) \cdot X(p)\}$. Тогда, учитывая, что $L\{x(t)\} = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$ [1-6], получим

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (1.24)$$

Импульсная переходная функция $g(t)$ или функция веса, как уже говорилось, представляет собой реакцию системы на входное воздействие в виде δ-функции Дирака (рис. 1.9). Эта функция определена выше. Она называется единичным импульсом, так как она имеет единичную площадь при бесконечно большой амплитуде и бесконечно малой длительности.

Импульсная переходная функция $g(t)$ может быть также определена по передаточной функции $W(p)$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$g(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (1.25)$$

Кроме того, ИПФ $g(t)$ может быть получена дифференцированием по времени переходной характеристики $h(t)$:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.26)$$

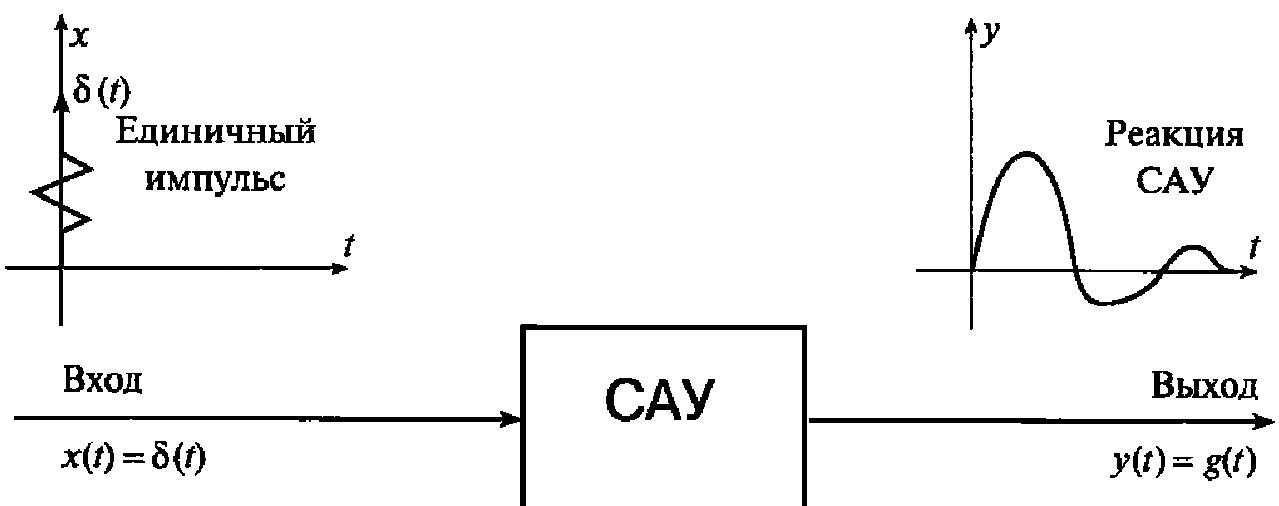


Рис. 1.9. К определению импульсной переходной функции

Связь временных характеристик с частотными устанавливается с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= F\{g(t)\}; \\
 g(t) &= F^{-1}\{W(j\omega)\}; \\
 W(j\omega) &= j\omega F\{h(t)\}; \\
 h(t) &= F^{-1}\left\{\frac{W(j\omega)}{j\omega}\right\}.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

1.2. Структурно-параметрические свойства типовых замкнутых систем автоматического управления

1.2.1. Типовая структура замкнутой САУ и ММ ее основных каналов.

Изучение динамических систем (ДС) с использованием вход-выходных характеристик удобно вести, опираясь на понятие канала. Канал ДС любой сложности задается указанием входа, на который подается испытательный сигнал, и выхода, реакция которого представляет интерес. Говоря математически, канал задается парой «вход-выход». Любое вход-выходное ДУ (например, (1.1)), ПФ или ЧХ представляют собой динамические характеристики лишь одного из каналов ДС. Следовательно, полностью охарактеризовать свойства ДС можно только всей совокупностью «канальных» характеристик.

В расчетной структурной схеме одноконтурной замкнутой системы управ-

ления "по отклонению", приведенной на рис. 1.10, по реально действующим входам можно выделить канал управления системой (входной задающий сигнал - x) и каналы действия возмущений v^x, v^u, v^y , исказжающих истинный вид входных, внутренних и выходных переменных. На рисунке приняты следующие обозначения: $W_p(p)$ - ПФ регулятора; $W_o(p)$ - ПФ объекта управления; $W_e^{x,u,y}(p)$ - эквивалентные ПФ виртуального действия реальных возмущений на соответствующие входы. По реально существующим выходам системы характеризуется каналом выходной переменной y , каналом управления объектом u и каналом ошибки управления ε . Таким образом, формально можно рассматривать 12 сочетаний входов и выходов, определяющих максимальное количество каналов исследования одноконтурной САУ. Реально таких каналов может быть как больше [&], так и меньше [#].

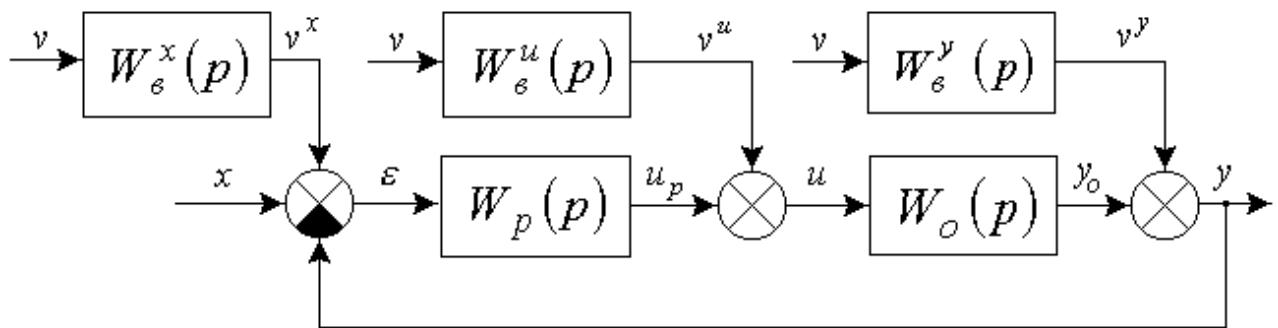


Рис. 1.10. Расчетная структурная схема САУ

При синтезе законов управления для следящих систем и систем программного управления используются обычно ММ задающего канала. Используя известные правила преобразования и описания структурных схем линейных динамических систем [1-5], можно получить необходимые исследователю ПФ для трех типовых выходных переменных САУ:

- ПФ по ошибке

$$W_{3c}^{x\varepsilon}(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}; \quad (1.28)$$

[&] Например, при исследовании поведения «внутренних» переменных ОУ (тока якоря в двигателе постоянного тока, концентрации в промежуточной тарелке ректификационной колонны и т.п.)

[#] Часть возмущающих воздействий несущественна для решаемых задач управления.

- ПФ по управлению объектом

$$W_{3c}^{xu}(p) = \frac{U(p)}{X(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}; \quad (1.29)$$

- ПФ по выходу объекта

$$W_{3c}^{xy}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_p(p) \cdot W_o(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}. \quad (1.30)$$

При расчете систем стабилизации или следящих и программных систем, работающих в условиях сильных помех, в качестве основных или дополнительных ММ САУ используются выражения для ПФ возмущающих каналов. При этом, для унификации расчетов, действие возмущения, чаще всего, «приводят» к соответствующему входу объекта. Иными словами, находят ПФ такого звена, включенного между возмущающим входом и назначенным для «приведения» звена выходом системы, которое дает на выходе системы переходный процесс, идентичный возмущенному движению. Эта операция требует вычисления эквивалентных ПФ возмущающих каналов САУ, которые указаны на рис. 1.10.

Чаще всего при расчетах используется приведение возмущения к управляющему входу с определением $W_e^u(p)$. Поэтому ниже приведены три ПФ по этому входному каналу:

- ПФ по ошибке

$$W_{3c}^{v\varepsilon}(p) = \frac{-W_e^u(p) \cdot W_o(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}, \quad (1.31)$$

- ПФ по управлению объектом

$$W_{3c}^{vu}(p) = \frac{W_e^u(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}, \quad (1.32)$$

- ПФ по выходу объекта

$$W_{3c}^{vy}(p) = \frac{W_e^u(p) \cdot W_o(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_o(p)}. \quad (1.33)$$

Эквивалентные передаточные функции возмущающих каналов v^ε, v^y могут быть, при необходимости, найдены аналогично.

1.2.2. Связь параметров (свойств) замкнутой САУ и составляющих ее звеньев. В предыдущем пункте рассмотрены способы описания динамических свойств системы управления по основным ее каналам с использованием операторных форм ММ - передаточных функций. Для линейных динамических систем такая форма является вполне адекватной, а удобства, приобретаемые за счет перевода преобразований в алгебраическую область, делают ее исключительно эффективной. Поэтому одними из первых в ТАУ появились операторные методы синтеза ПФ управляющих устройств. Однако для этого необходимо знать закономерности влияния структуры и свойств входящих в систему звеньев на свойства самой замкнутой САУ.

Искомая связь структуры и параметров закона управления при заданной операторной математической модели объекта со свойствами замкнутой системы задается не слишком сложными зависимостями. Действительно, пусть ПФ разомкнутой системы при последовательной структуре включения управляющего устройства (УУ) или регулятора в ее контур задана. Тогда общая структура ПФ этой же системы в замкнутом состоянии, рассматриваемая, например, по каналу внешнего управления [10], будет математически выражаться известной формулой

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{паз}}(p)}{1 + W_{\text{паз}}(p)}, \quad (1.34)$$

где $W_{\text{зам}}(p)$, $W_{\text{паз}}(p)$ - передаточные функции замкнутой и соответствующей ей разомкнутой систем [1-5, 11].

Формула (1.34) естественным образом приводит к аналогичной формуле для ПФ разомкнутой системы, выраженной через ПФ замкнутой:

$$W_{\text{паз}}(p) = \frac{W_{\text{зам}}(p)}{1 - W_{\text{зам}}(p)}. \quad (1.35)$$

Но передаточная функция $W_{\text{паз}}(p)$ в (1.35), в свою очередь, может быть представлена выражением

$$W_{\text{паз}}(p) = W_p(p) \cdot W_o(p), \quad (1.36)$$

откуда, с учетом (1.35), ПФ основного последовательно включенного регулятора замкнутой системы связано соотношением

$$W_p(p) = \frac{W_{\text{зам}}(p)}{W_o(p) \cdot (1 - W_{\text{зам}}(p))}. \quad (1.37)$$

Таким образом, даже не раскрывая (1.37) более детально и не реализуя процедуру синтеза, можно сделать вывод о том, что ПФ последовательного устройства управления может быть получена в виде реализуемой дробно-рациональной функции. Однако для детализации характера и особенностей взаимосвязи структуры и параметров ПФ последовательного устройства управления со свойствами ПФ замкнутой САУ рассмотрим математическую структуру (1.37) подробнее.

Поскольку ПФ реальной системы должна быть представлена в реализуемой форме дробно-рациональной функции, ее удобно записать в общем виде через полиномы $M(p)$ и $N(p)$ следующим образом:

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}. \quad (1.38)$$

Тогда соответствующая ей ПФ разомкнутой системы запишется, на основании (1.35) и (1.36), дробью

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{M(p)}{N(p) - M(p)} = \frac{M(p)}{G(p)}, \quad (1.39)$$

где $G(p)$ - характеристический полином разомкнутой системы.

Поскольку замкнутая система по своему технологическому назначению является устойчивым статическим звеном, причем, чаще всего, с единичным коэффициентом передачи, то $N(p)$, $M(p)$ могут быть представлены как полные полиномы канонического вида, т.е.

$$N(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + 1; \quad (1.40)$$

$$M(p) = b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + 1, \quad (1.41)$$

где $m \leq n$.

Структура характеристического полинома $N(p)$ определяется его поряд-

ком n , который составляется из порядков звеньев замкнутой системы. Действительно, формула (1.39) отражает лишь связь ММ разомкнутой и замкнутой систем. Фактическая структура разомкнутой системы задается формулой (1.36), которая может быть развернута в следующем виде:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \cdot \frac{Q(p)}{R(p)}, \quad (1.42)$$

где $A(p), B(p), Q(p), R(p)$ - полиномы общего вида.

Тогда математическая структура замкнутой системы, раскрывающая свернутую запись (1.34), будет иметь вид

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{A(p) \cdot Q(p)}{B(p) \cdot R(p) + A(p) \cdot Q(p)}. \quad (1.43)$$

Обозначим порядок полинома $\dim(\bullet)$. Поскольку в формуле (1.42) $\dim(A) \leq \dim(B)$, а $\dim(Q) \leq \dim(R)$, можно из (1.43) вывести естественные ограничения на порядок n системы в целом:

$$n = \dim(B) + \dim(R) \geq \dim(B). \quad (1.44)$$

Учитывая возможное сокращение полиномов $A(p)$ и $Q(p)$ с полиномами разложения знаменателя [&] и предельный, в смысле реализуемости, случай $\dim(Q) = \dim(R)$, можно (см., например, [12]) при синтезе использовать и более мягкое, чем (1.44) ограничение

$$n \geq \dim(B) - \dim(A). \quad (1.45)$$

Параметры характеристического полинома $N(p)$ влияют на собственные свойства замкнутого контура - устойчивость и показатели качества свободного возмущенного движения системы. Полином $M(p)$ влияет только на качество вынужденных переходных процессов в САУ по каналу внешнего управления и многими методиками синтеза не учитывается. Поэтому некоторые аспекты связи

[&] Следует помнить, что пользоваться подобными сокращениями необходимо весьма осторожно. Сокращенная ПФ отражает лишь “вход-выходные” свойства системы и только по исследуемому каналу, но оно ни в коем случае не отражает действительный порядок системы, который в любом случае будет определяться равенством (1.44).

структуры и параметров обоих полиномов со свойствами замкнутой системы следует рассмотреть особо.

Во-первых, при канонической форме полиномов числителя и знаменателя функции (1.38) знаменатель ПФ разомкнутой системы, согласно (1.39), не имеет свободного члена. Следовательно, каноническая форма (1.40), (1.41) полиномов $W_{\text{зам}}(p)$ обеспечивает системе астатизм не менее первого порядка.

Во-вторых, если, кроме указанного условия, выполняется еще равенство

$$b_1 = a_1 ,$$

то порядок астатизма системы окажется равным двум [11, 12].

В общем же случае, при соблюдении условий

$$\forall i \leq \nu - 1 \Rightarrow b_i = a_i , \quad (1.46)$$

система приобретает порядок астатизма равный ν .

Таким образом, формируя, например, полином $M(p)$ в соответствии с условиями (1.46), можно добиваться нужного порядка астатизма проектируемой системы автоматического управления.

Рассмотренные выше формулы (1.34-1.39) являются общими и справедливы также для статических замкнутых систем. В соответствии с определенными в ТАУ их свойствами, такие замкнутые системы будут иметь неединичный коэффициент передачи [1-5, 10, 11]. Если в (1.38) за полиномом $N(p)$ сохранить канонический вид, то $M(p)$ уже не сможет отвечать канонической форме, и будет справедливой формула $k_{\text{зам}} = b_0$. При этом структура (1.34) показывает, что при отрицательной обратной связи в замкнутой системе всегда выполняется условие $k_{\text{зам}} < 1$. Таким образом, для статической САУ справедливо

$$k_{\text{зам}} = b_0 < 1 . \quad (1.47)$$

Более полный анализ связи параметров звеньев САУ и ее качества проводится в следующем пункте пособия.

1.2.3. Важнейшие показатели качества управления в технических системах. В классической теории управления традиционно рассматривается два ви-

да оценок качества управления: прямые и косвенные. Косвенные оценки качества по самому их определению приблизительны. Их преимущество, однако, состоит в прямой связи с параметрами ММ САУ (в основном их частотных форм), простоте определения и, в то же время, достаточной эффективности. Последнее свойство состоит в довольно регулярной связи косвенных и прямых показателей качества. Виды и сущность косвенных оценок исчерпывающе описаны в распространенных учебниках [1-5].

Однако наиболее содержательными на фоне решаемых задач управления являются, все-таки, прямые показатели качества. Вопросы оценки стандартных показателей качества по кривым переходных процессов также достаточно полно освещены в специальной и учебной литературе [1-6, 10-15]. Однако для удобства чтения пособия краткое их описание приводится в настоящем пункте.

Из рассмотренного в цитированных работах перечня целесообразно выделить основополагающие показатели, совокупности & которых чаще всего бывает достаточно для оценки соответствия исследуемой САУ возложенным на нее технологическим задачам. Таких показателей не-

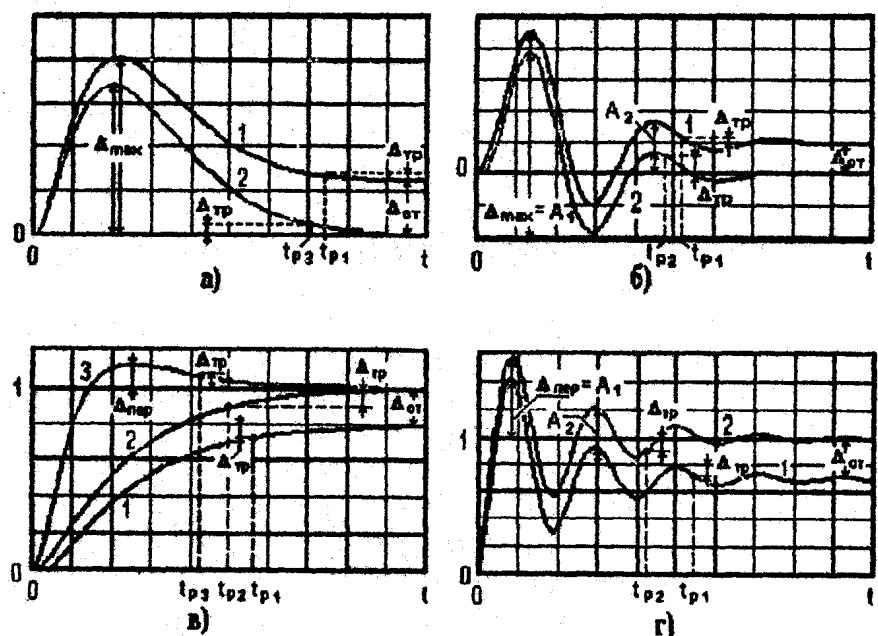


Рис. 1.11. Распространенные показатели качества регулирования

много. Это, прежде всего, точность, слагающаяся из статической и динамической составляющих, быстродействие и затраты на управление. Все остальные

[&] На самом деле для полного соответствия своему функциональному назначению системе автоматического управления достаточно удовлетворять одному критерию – оптимальному быстродействию, т.к. предельная статическая и динамическая точность такой САУ обеспечивается при удовлетворении исходному динамическому критерию автоматически.

показатели и критерии делятся на две категории. Одни дополняют эти основные в специальных случаях, как, например, колебательность в не допускающих этого свойства технологиях. Другие приближенно заменяют их, как это имеет место при использовании всевозможных интегральных квадратичных критериев качества, уравновешивающих с помощью т.н. «весовых коэффициентов» противоречивые требования к управлению главных показателей. В связи с этим ниже рассматриваются лишь основные прямые оценки качества САУ.

На рис. 1.11 приведены часто встречающиеся формы переходных процессов отработки задающих и подавления возмущающих воздействия. Смысл и методика оценки оцениваемых по ним показателей достаточно наглядно отражается непосредственно на рисунках.

Точностные показатели качества управления

Качество работы любой системы управления и в любой момент времени оценивается ее точностью - величиной т.н. ошибки регулирования, равной разности между требуемым $y_3(t)$ и действительным $y(t)$ текущими значениями регулируемой величины:

$$\epsilon(t) = y_3(t) - y(t). \quad (1.51)$$

Обобщающая оценка (1.51) разбивается в ТАУ на два показателя:

- статическая или установившаяся точность – ошибка регулирования в установленном состоянии системы

$$\epsilon_{\text{ст}} = \epsilon(\infty) = y_3(\infty) - y(\infty). \quad (1.52)$$

- динамическая точность, характеризуемая несколькими типичными значениями ошибки регулирования в неустановившемся режиме управления, такими как максимальная динамическая ошибка, перерегулирование (см. рис. 1.11) и т.п.

Поскольку на первом месте по значимости стоят, обычно, точностные показатели САУ, рассмотрим основные из них.

А) Точность управления в установившемся режиме.

В первую очередь при анализе качества САУ оценивают определяемую формулой (1.52) установившуюся или статическую ошибку регулирования $\varepsilon_{\text{ст}}$ (кривые I на рис. 1.11а-г). Здесь нужно иметь ввиду, что понятие установившейся ошибки не ограничивается оценкой точности перевода в заданную точку фазового пространства системы или, как ее называют, задачей позиционирования. Для оценки статической точности САУ может использоваться также величина установившейся ошибки в различных типовых режимах движения. Рассмотрим основные из них.

Задача позиционирования. В качестве типового режима рассматривается установившееся состояние при постоянных значениях задающего и возмущающего воздействий. Ошибка системы в этом случае называется статической ($\varepsilon_{\text{ст}}$).

Рассмотрим систему, в которой возмущения отсутствуют, а входное воздействие представляет собой ступенчатую функцию $x(t) = \mu \cdot l(t)$. В этом случае ошибка системы будет представлять собой статическую ошибку по входному воздействию ($\varepsilon_{\text{ст}}$). Для статических систем она определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{ст}}^x = \frac{\mu}{1 + W_{\text{паз}}(0)} = \frac{\mu}{1 + K_{\text{паз}}}, \quad (1.53)$$

где $K_{\text{паз}}$ - коэффициент усиления разомкнутой САУ.

Наличие статической ошибки в САУ иллюстрируется рис. 1.12.

В астатических системах соблюдается условие $\varepsilon_{\text{ст}}^x = 0$. Поэтому можно сформулировать понятие астатизма как свойства САУ:

астатизм системы к некоторому внешнему воздействию – это ее свойство отрабатывать данное воздействие с нулевой установившейся ошибкой.

Следует отметить, что словом "астатизм" часто называют не свойство САУ, а численную характеристику этого свойства, более точно именуемую порядком астатизма [1-5].

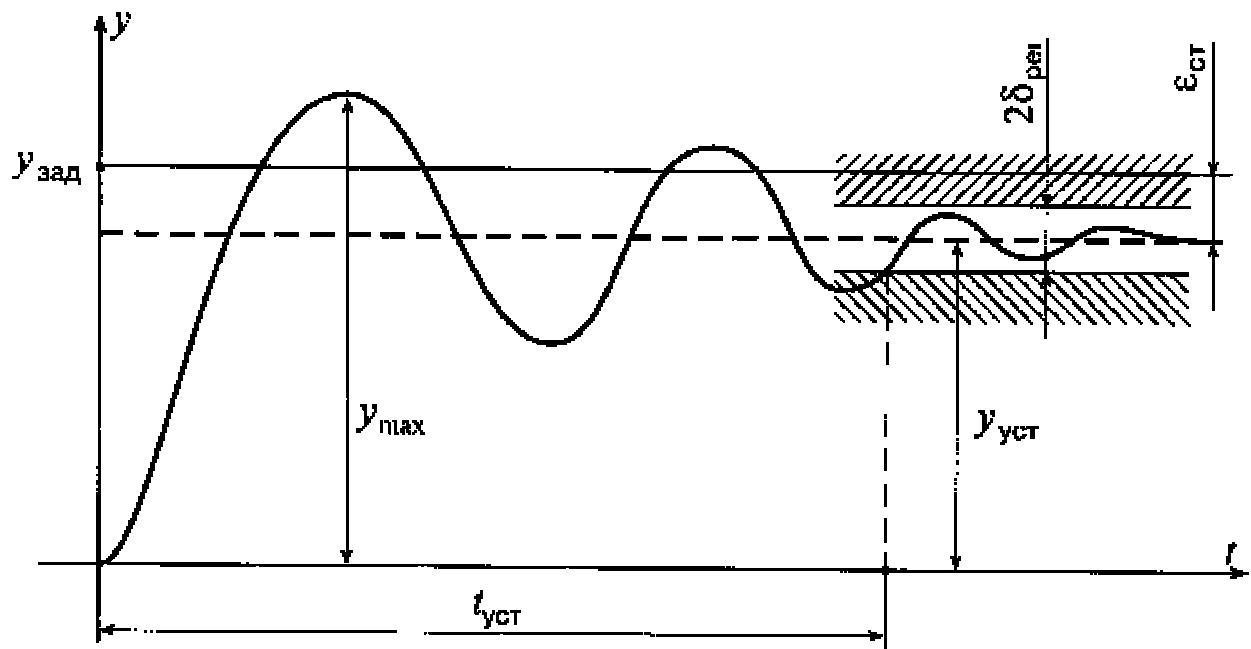


Рис. 1.12. К определению основных показателей качества регулирования

Здесь y_3 - заданное значение выходной координаты; $y_{\text{уст}}$ - установившееся значение выходной координаты; $\varepsilon_{\text{ст}}$ - статическая ошибка; y_{max} - максимальное значение выходной координаты в процессе регулирования.

Отработка движения с постоянной скоростью. В качестве другого типового воздействия используется режим движения системы с постоянной скоростью $\frac{dx}{dt} = v_3 = \text{const}$, который наблюдается в установившемся состоянии при изменении входного воздействия по закону $x(t) = v_3 \cdot t$, где $v_3 = \text{const}$. Установившаяся ошибка в этом случае носит название скоростной ошибки ($\varepsilon_{\text{ск}}$).

Для систем с астатизмом первого порядка скоростная ошибка равна отношению скорости изменения входного воздействия к коэффициенту усиления разомкнутой системы

$$\varepsilon_{\text{ск}}^x = \frac{v}{K_p}. \quad (1.54)$$

Заметим, что коэффициент усиления K_p в этом случае часто называют добродотностью САУ по скорости.

Графически наличие скоростной ошибки иллюстрируется рис. 1.12.

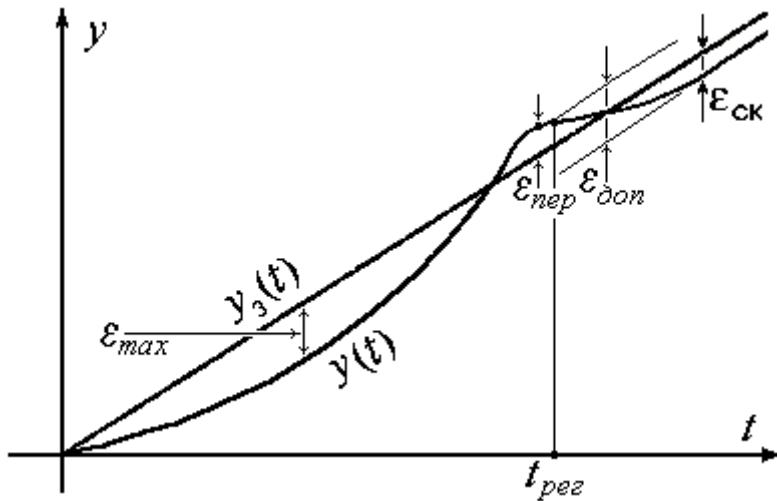


Рис. 1.12. К определению скоростной ошибки САУ.

У статических систем $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{ck}(t) \rightarrow \infty$, а у астатических систем выше первого порядка ($v > 1$) $\varepsilon_{ck}^x = 0$. Поэтому режим движения с постоянной скоростью, как правило, используется для оценки точности систем с астатизмом именно первого порядка. Для исследования точности САУ используются также такие типовые воздействия, как движение с постоянным ускорением и гармонический задающий сигнал [1-6].

Б) Точность управления в динамическом режиме.

Как уже указывалось, динамическая точность САУ или динамическая ошибка управления ε_{din} может оцениваться несколькими показателями. В зависимости от условий работы и исследования системы она обычно оценивается либо максимальным динамическим отклонением ε_{max} (процессы подавления возмущений - кривые на рис. 1.11 *a, б*), либо перерегулированием ε_{nep} (для переходных процессов отработки ступенчатого задающего сигнала - кривые на рис. 1.11 *в, г*), либо какой-либо интегральной оценкой на интервале наблюдения, например,

$$J_{\Delta} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} (y(t) - y(t_0))^2 \cdot dt. \quad (1.55)$$

Существуют и другие интегральные оценки точности, построенные на основе четных подынтегральных функций (возведение в квадрат, взятие модуля и пр.).

Важнейшим показателем динамической точности для следящих и программных систем является *перерегулирование*. Часто оно характеризует еще и склонность системы к колебаниям, а, следовательно, и запас устойчивости. Однако к перерегулированию, и довольно значительному, могут быть склонны и апериодические системы. Это свойство определяется соотношением нулей и полюсов замкнутой САУ, т.е. корней полиномов $M(p)$ и $N(p)$ в (1.38). Для некоторых технологий перерегулирование совершенно недопустимо, т.к. приводит к необратимому браку или даже аварии. В качестве примеров можно привести обработку металлов резанием или стабилизацию цепных реакций.

Определяется перерегулирование по кривой переходного процесса, вызванного приложением на вход системы скачка управляющего воздействия номинальной амплитуды. С учетом обозначений на рис. 1.11 формула для нахождения перерегулирования имеет вид

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\text{уст}}}{y_{\text{уст}}} \cdot 100\% \quad (1.56)$$

Допустимое перерегулирование для той или иной системы автоматического управления устанавливается, исходя из свойств объекта управления и особенностей технологического процесса, в котором используется система. В большинстве случаев считается, что запас устойчивости является достаточным, если величина перерегулирования не превышает 10÷30%. Однако в некоторых случаях требуется, чтобы переходный процесс протекал вообще без перерегулирования, т.е. был монотонным. В ряде случаев допускается перерегулирование 50÷70 %.

В формуле (1.56) $\varepsilon_{\max} = y_{\text{уст}}$ представляет собой вторую по важности оценку динамической точности - *максимальное динамическое отклонение* (МДО). Следует заметить, что в отличие от перерегулирования эта оценка всегда является ненулевой. Например, при апериодическом и монотонном характере управления МДО переходной функции все равно совпадает с

величиной задающего скачка $\varepsilon_{\max} = \mu$. Для ступенчатых воздействий оно никогда не может быть меньше значения ошибки в начальный момент времени. Для более плавных воздействий момент наступления МДО зависит от динамических особенностей САУ. Пример оценки перерегулирования и МДО при отработке линейно нарастающего задающего сигнала показан на рис. 1.12. Из сути отображаемого процесса управления ясно, что МДО, в данном случае, можно было бы назвать «недорегулированием».

Показатели быстродействия управления

Второй по технологической значимости можно считать оценку быстродействия САУ, которую принято выражать через т.н. время регулирования t_p , или время затухания переходного процесса, или время его установления. Оно характеризует быстродействие системы и определяется как время вхождения процесса в трубку регулирования. Таким образом, t_p принято оценивать как время, протекающее от момента приложения на вход системы номинального ступенчатого воздействия до момента, после которого имеет место неравенство $|y(t) - y_{\text{уст}}| \leq \varepsilon_{\text{доп}}$, где $\varepsilon_{\text{доп}}$ - заданное значение допустимого отклонения процесса от абсолютно установившегося значения $y_{\text{уст}}$, определяющее точность нахождения $t_{\text{рег}}$. Диапазон возможных значений $\varepsilon_{\text{доп}}$ в реальных технических системах весьма широк: от $\sim 10\%$ стабилизируемого уровня в буферных емкостях до десятых и даже сотых долей процента от установившейся температуры в ректификационных колоннах, или от координат позиционирования при изготовлении микросхем. Обычно же их диапазон лежит в пределах $0,5 - 5\%$. Если величина $\varepsilon_{\text{доп}}$ не оговаривается, то его принимают равным 5% от $y_{\text{уст}}$.

Более корректно определить t_p следующим выражением:

$$t_p = t - t_0 : \quad \forall t \geq t_p \rightarrow |\varepsilon(t) - \varepsilon_{\text{ст}}| \leq \varepsilon_{\text{доп}}, \quad (1.49)$$

где $\varepsilon(t)$ - текущее значение отклонения регулируемой переменной $y(t)$ от ее начальной величины $y(t_0)$; и $\varepsilon_{\text{доп}}$ - упомянутая трубка регулирования или величина

допустимого отклонения от установившегося значения $\varepsilon_{\text{ст}}$, при котором переходный процесс можно считать законченным (чаще всего она определяется разрешающей способностью средств наблюдения).

Допустимое значение времени регулирования определяется особенностями технологического процесса, в котором применяется САУ, и варьируется от десятитысячных (в схемах управления радиоэлектронной аппаратурой) и тысячных (в быстродействующих микроприводах) долей секунды до нескольких суток в системах регулирования тепловых режимов цементных или плавильных печей. Длительность переходных процессов управления биологическими, экологическими, экономическими, социальными системами исчисляется годами и десятилетиями.

Другие показатели качества переходных процессов

Не основной, в большинстве случаев, но важной для многих технических систем является оценка колебательности процессов в САУ. Для ее количественного выражения предложена специальная величина [1-5, 13-15], названная степенью затухания колебаний ψ . Способ вычисления этого показателя качества ясен из рис. 1.11 б, г и следующей формулы:

$$\psi = \frac{A_i - A_{i+1}}{A_i} = 1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}, \quad (1.50)$$

где A_i - амплитуды двух соседних (сдвинутых на один период колебаний) экстремумов отклонения $\varepsilon(t)$ от установившегося значения (см. рис. 1.11 б, г).

Величина показателя ψ связана со значениями декремента затухания m и показателя колебательности ξ зависимостями, которые у звена второго порядка однозначно определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 1 - e^{-2\pi m}; \\ m &= \frac{\alpha}{\omega} = -\frac{\ln(1-\psi)}{2\pi}; \\ \xi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

где α и ω - действительная и мнимая части комплексно-сопряженного корня колебательного звена.

Для систем высокого порядка использование формул (1.51) приводит к значительному расхождению с результатами реального наблюдения. Причем это расхождение увеличивается с увеличением порядка. Объясняется этот факт исказяющим действием на основные колебания других динамических звеньев. Однако для приближенных или прикидочных инженерных расчетов формулы (1.51) вполне приемлемы. Для удобства такого использования соответственные значения параметров, характеризующих интенсивность затухания колебаний для дискретного ряда ψ , сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Соответствие параметров процесса затухания колебаний

Ψ	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
M	4.59	4.000	3.50	3.08	2.71	2.380	2.080	1.810	1.550	1.290
m	0.11	0.127	0.146	0.167	0.192	0.221	0.256	0.302	0.366	0.477
ξ	0.11	0.128	0.144	0.165	0.188	0.215	0.248	0.289	0.344	0.430

Существуют также другие показатели качества переходного процесса. Например, интегральные оценки [2-6] или показатели, основанные на корневых методах анализа особенностей динамики САУ [1-3]. Однако рассмотрение этих, далеко не распространенных и, в значительной степени, устаревших оценок выходят за рамки настоящего пособия.

1.3. Типовые законы управления в технических системах

Типовые аналоговые и цифровые законы управления (ЗУ) используются практически во всех отраслях промышленности и в большинстве технических систем. Они реализуются в промышленно выпускаемых регуляторах и системах управления (например, электроприводах), универсальных микропроцессорных управляющих комплексах (например, типа “Ремиконт”) и SCADA-системах (например, Trace Mode). Это необходимо учитывать при решении задач синтеза ЗУ. Если технологические задачи, поставленные перед САУ, можно реализовать с использованием типовых законов, то такое техническое решение следует считать предпочтительным. Поэтому при создании САПР САУ большинство разработчиков, в первую очередь, реализуют алгоритмы параметрической оптимизации типовых ЗУ.

К типовым аналоговым законам управления относят следующие:

- пропорциональный (П-закон);
- интегральный (И-закон);
- пропорционально-интегральный (ПИ-закон);
- пропорционально-дифференциальный (ПД-закон);
- пропорционально-дифференциально-дифференциальный (ПДД-закон);
- пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-закон).

1.3.1. Элементарные компоненты типовых ЗУ. Типовые законы управления построены на совокупной реализации простейших алгебраических и операторных преобразований, как это яствует из их названий. Естественно, что микроосновы их функциональных возможностей, также, как и принципы их технической реализации, связаны с сущностью этих элементарных операций. Поэтому их целесообразно рассмотреть отдельно.

Основными компонентами типовых ЗУ, реализующими законы любой сложности, являются П-закон, И-закон и Д-закон. Первые два закона, при этом, являются одновременно и типовыми. Последний же - Д-закон - типовым не является, так как дифференцирующее управление принципиально невозможно. Поэтому он может лишь входить в качестве со-

ставляющей в более сложные законы, либо использовать для коррекции динамических свойств устройств или объектов управления.

П-закон управления

Запись пропорционального ЗУ во временной области имеет вид:

$$u_{\Pi}(t) = u_0 + k_p \cdot \varepsilon(t). \quad (1.52)$$

где u_0 - номинальная для каждой системы величина управляющего сигнала; $\varepsilon = x - y$ - ошибка управления; x и y - заданное и текущее значения управляемой переменной.

Эта же запись в приращениях относительно u_0 (ошибка регулирования ε сама, по сути, является приращением и в номинальном режиме равна 0) может быть представлена выражением

$$\Delta u_{\Pi}(t) = k_p \cdot \varepsilon(t), \quad (1.52\text{п})$$

а передаточная функция звена, реализующего П-закон, в соответствии с формулой (1.6) - выражением

$$W_{\Pi}(p) = \frac{\Delta u_{\Pi}(p)}{\varepsilon(p)} = k_p. \quad (1.53)$$

Таким образом, П-закон реализуется хорошо известным в ТАУ пропорциональным звеном (П-звеном). Сведения, касающиеся частотных и иных характеристик П-звена, можно найти в работах [1, 3, 10, 13-15]. К основным же свойствам П-закона относятся:

- 1) статизм (для того, чтобы появился и сохранялся управляющий сигнал Δu , необходимо наличие ошибки управления $\varepsilon(t)$; поэтому при пропорциональном управлении неизбежна установившаяся ошибка отработки входных сигналов, ограниченных по амплитуде);
- 2) быстродействие (управление мгновенно меняется с появлением отклонения $\varepsilon(t)$);
- 3) простота реализации и настройки.

Этот закон рекомендуется применять для управления объектами невысокого порядка без запаздывания. Повышение коэффициента усиления регулятора приводит к увеличению быстродействия и уменьшению статической ошибки регулирования, но, в общем случае, снижает устойчивость системы. Такая аль-

тернатива дает возможность ставить и решать задачи параметрической оптимизации П-закона. Нужно, однако, заметить, что в отдельных случаях повышение k_p может, до определенных пределов, наоборот увеличивать устойчивость.

Пропорциональный закон является основой для всех многопараметрических ЗУ, а при решении задач синтеза определение параметра его настройки - k_p - является, обычно, ключевым этапом.

Д-закон управления

Во временной области идеальный Д-закон управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$u_D(t) = u_0 + T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.54)$$

или в приращениях относительно u_0

$$\Delta u_D(t) = T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.54\text{п})$$

Соответственно, ПФ Д-звена имеет вид

$$W_D(p) = \frac{\Delta u_D(p)}{\varepsilon(p)} = T_D \cdot p. \quad (1.55)$$

Настроечная константа этого закона - T_D , называемая постоянной времени дифференцирования, которая определяет интенсивность воздействия по производной.

Как уже указывалось, Д-закон не может выполнять функции управляющего устройства (УУ) или главного регулятора. Это связано с тем, что он реагирует, согласно (1.55), лишь на скорость изменения ошибки и безразличен к ее абсолютному значению в установившемся состоянии ($\Delta u_D = 0$ при $\varepsilon = \text{const}$). Однако в составе сложных ЗУ он значительно повышает быстродействие и уменьшает динамическую ошибку управления за счет "предсказания" дальнейшего ее поведения. Его корректирующее воздействие в замкнутых контурах обеспечивает снижение или повышение интенсивности изменения корректируемого сигнала в зависимости от знака обратной связи.

В чистом виде (идеальный) Д-закон не реализуем [16], так как соответст-

вует предсказанию поведения функции при еще не найденном решении. Однако приближение этого закона может быть получено практически сколь угодно точное.

И-закон управления

Данный закон описывается ДУ следующего вида:

$$T_{\text{И}} \cdot \frac{d u_{\text{И}}(t)}{d t} = T_{\text{И}} \cdot \frac{d \Delta u_{\text{И}}(t)}{d t} = \varepsilon(t), \quad (1.56)$$

или эквивалентной ему интегральной формой записи

$$u_{\text{И}}(t) = u_{\text{И}}(t_0) + \frac{1}{T_{\text{И}}} \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) \cdot d t. \quad (1.56\text{и})$$

Здесь $T_{\text{И}}$ представляет собой настроечную константу И-закона и носит название время интегрирования (в технической литературе прошлых лет применялся термин время изодрома). Увеличение $T_{\text{И}}$ приводит к замедлению нарастания управляющего сигнала при наличии ошибки управления.

Переходя к приращениям относительно $u_{\text{И}}(t_0)$

$$\Delta u_{\text{И}}(t) = \frac{1}{T_{\text{И}}} \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) \cdot d t, \quad (1.56\text{п})$$

можно получить ПФ для И-закона, которая будет иметь вид

$$W_{\text{И}}(p) = \frac{\Delta u_{\text{И}}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_{\text{И}} \cdot p}. \quad (1.57)$$

Этот закон часто называют "управлением с памятью" или управлением по накопленному опыту изменения ошибки. Его фундаментальным свойством является астатизм первого порядка, т.е. отсутствие установившейся ошибки управления при действии на систему ограниченных по величине входных воздействий (как задающих, так и возмущающих) с затухающими производными. Это объясняется тем, что управляющий сигнал $\Delta u_{\text{И}}(t)$, согласно (1.56п), меняется во времени до тех пор, пока $\varepsilon \neq 0$. Он как бы "ищет" такое значение управления, которое компенсирует влияние входного воздействия (вызвавшего появление ненулевой ошибки, независимо от того, управляющее оно или возмущающее).

Однако поисковый характер И-закона определяет также и его основной недостаток - низкое быстродействие. Кроме того, включение в замкнутую систему Извена снижает степень его устойчивости за счет опускания фазочастотной характеристики разомкнутой системы на $\pi/2$. Интегральный закон управления рекомендуется применять в тех случаях, когда недопустима установившаяся ошибка, а быстродействие объекта значительно выше, чем то, которое требуется в проектируемой системе. Более подробные сведения о характеристиках и свойствах И-закона можно найти в работах [1, 3, 10, 13-15].

Общая оценка элементарных компонентов ЗУ

Итак, пропорциональный компонент типового закона реализует постоянное наблюдение за текущим значением ошибки регулирования и мгновенно вырабатывает управление, стремящееся ее уменьшить. Дифференциальный компонент следит за тенденцией изменения ошибки регулирования и вырабатывает составляющую закона управления, стремящуюся предвосхитить появление ошибки или уменьшить интенсивность ее нарастания. Наконец, интегральный компонент запоминает прошедший переходный процесс подавления ошибки и вырабатывает составляющую управления, компенсирующую влияние установленного на данный отрезок времени значения внешнего воздействия. Таким образом, на уровне концептуального осмысления задач и методов управления эти компоненты можно охарактеризовать следующими функциями:

- П-закон осуществляет наблюдение за текущим значением ошибкой, для подавления которой вырабатывает пропорциональное ей воздействие;
- И-закон формирует интегральную память о прошлых отклонениях ошибки от нуля, вырабатывая пропорциональную интегралу от этих отклонений составляющую управления, близкую к номиналу на текущий момент;
- Д-закон упреждает будущее изменение ошибки регулирования, оценивая знак и текущую интенсивность этого изменения, формируя пропорциональный ей противосигнал, корректирующий управляющее воздействие до фактического появления ошибки.

Из рассмотренных компонентов П- и И-законы входят в число самостоя-

тельных типовых законов. Эти ЗУ реализуются в промышленно выпускаемых т.н. «типовых» регуляторах и поставляемых вместе с объектами системах управления. Чрезвычайно распространено пропорциональное управление приводом постоянного тока, а также П- и И-управление различными накопительными емкостями и инерционными тепловыми объектами.

1.3.2. Составные типовые законы управления. Сложные законы управления формируются путем суммирования элементарных компонентов, каждый из которых привносит в общий закон свои положительные свойства и частично компенсирует недостатки других составляющих. Кроме элементарных П- и И-законов, наиболее распространенными в промышленной автоматике являются три составных типовых аналоговых закона управления: ПД-, ПИ- и ПИД-законы. Первый из них характеризуется весьма ограниченной областью применения, хотя дополнение П-закона дифференцирующим компонентом резко улучшает динамическую эффективность управления. Второй – ПИ-закон – является, благодаря своим уникальным свойством, наиболее распространенным типовым ЗУ. Наиболее универсальным и эффективным среди составных законов является ПИД-закон.

ПД-закон управления

Математическая модель ПД-закона с идеальным Д-компонентом задается уравнением

$$u_{\text{ПД}}(t) = u_0 + k_p \cdot \varepsilon(t) + T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.58\text{н})$$

Анализ этого выражения показывает, что в статике ПД-регулятор работает как пропорциональный, т. е. характеризуется наличием статической ошибки регулирования, уменьшающейся с увеличением k_p . Однако в динамике ПД-закон является более эффективным, т. к. обладает более высоким быстродействием и обеспечивает меньшую степень колебательности замкнутой системы. Последнее обеспечивается действием дифференциальной составляющей, описанной выше.

Реализация ПД-закона в виде (1.58) обеспечивается регулятором с так на-

зываемыми "несвязанными" настройками, т. е. аддитивные П- и Д-компоненты характеризуются независимым изменением соответствующих настроек параметров: k_p и T_d . В ряде случаев либо из-за простоты реализации, либо из-за удобства настройки на процесс управления объектом ММ ПД-регулятора рассматривают в несколько ином виде:

$$u_{PD} = u_0 + k_p \cdot \left(\varepsilon(t) + T_d^* \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right), \quad (1.58c)$$

где равенство $k_p \cdot T_d^* = T_d$ задает связь новой настройки с параметром Д-закона. Поэтому регуляторы с ММ (1.58c) называются регуляторами со связанными настройками (варьирование k_p изменяет и T_d). Это необходимо учитывать как при расчете параметров, так и при настройке регулятора на реальном объекте.

Таким образом, передаточная функция ПД-регулятора в зависимости от реализации может иметь одну из двух форм:

$$W_{PD}^{nc}(p) = k_p + T_d \cdot p; \quad (1.59n)$$

$$W_{PD}^{ce}(p) = k_p \cdot (1 + T_d^* \cdot p), \quad (1.59c)$$

где верхние индексы "nc" и "ce" символизируют "несвязанность" или "связанность" настроек используемого устройства.

Необходимо отметить, что законы (1.59n) и (1.59c) физически нереализуемы из-за нереализуемости Д-компонента. В ММ реальных устройств порядок левой части ДУ должен быть не ниже порядка правой [12]. Поэтому ПФ реальных ПД-звеньев должны иметь как минимум двучлен с аргументом p в знаменателе:

$$W_{PD}^{ph}(p) = k_p + \frac{T_d^* \cdot p}{T_p \cdot p + 1}, \quad (1.60n)$$

$$W_{PD}^{pc}(p) = k_p \cdot \frac{T_d^* \cdot p + 1}{T_p \cdot p + 1}, \quad (1.60c)$$

где T_p - эквивалентная постоянная времени звена, несколько «демпфирующего» Д-закон и обеспечивающего его физическую и техническую реализуемость.

Здесь индексы "рн" и "рс" отмечают реализуемость передаточной функции ПД-звена с "несвязанными" и "связанными" настройками соответственно.

Данный закон может использоваться как самостоятельный, но чаще входит в состав более сложных законов. Иногда он реализуется с единичным коэффициентом передачи и используется в сочетании с П-регулятором.

ПИ-закон управления

Соединение пропорционального и интегрального компонентов дает ПИ-закон, ММ которого имеет вид

$$u_{\text{ПИ}}(t) = k_p \cdot \varepsilon(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) \cdot dt + u_I(t_0) \quad (1.61\text{h})$$

в случае несвязанных настроек, и

$$u_{\text{ПИ}}(t) = k_p \cdot \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_I^*} \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) \cdot dt + u_I(t_0) \right) \quad (1.61\text{c})$$

при их связанности, причем в последнем случае реальное значение времени интегрирования составляет $T_I = T_I^*/k_p$. Именно T_I^* в технике автоматизации называется «временем изодрома».

Передаточные функции, соответствующие уравнениям (1.61h), (1.61c) имеют вид

$$W_{\text{ПИ}}^{nc}(p) = k_p + \frac{1}{T_I \cdot p} = \frac{k_p \cdot T_I \cdot p + 1}{T_I \cdot p}, \quad (1.62\text{h})$$

$$W_{\text{ПИ}}^{cg}(p) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I^* \cdot p} \right) = k_p \cdot \frac{T_I \cdot p + 1}{T_I \cdot p}. \quad (1.62\text{c})$$

В промышленных системах автоматизации ПИ-регулятор является наиболее распространенным устройством управления. Это объясняется высокими эксплуатационными свойствами реализуемого им алгоритма, который обеспечивает среднее быстродействие между И- и П-законами, обладая при этом астатизмом 1-го порядка, как и И-закон, и обеспечивая, таким образом, хорошее сочетание устойчивости и динамической точности.

Более подробно о частотных характеристиках, динамических свойствах и

областях применения ПД- и ПИ-регуляторов можно прочесть в уже упомянутых работах [1, 3, 10, 13-15], а также во многих других учебниках по теории автоматического управления и автоматизации различных производственных процессов. При этом следует помнить, что формы их описания и способы их настройки существенно зависят от технической реализации.

ПИД-закон управления

Наиболее эффективным, но и наиболее сложным из типовых промышленных ЗУ является ПИД-закон, идеальная ММ которого описывается ДУ следующего вида:

$$\frac{d u_{\text{ПИД}}^{u\partial}(t)}{dt} = T_{\Delta} \cdot \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + k_p \cdot \frac{d \varepsilon(t)}{dt} + \frac{\varepsilon(t)}{T_I} \quad (1.63\text{д})$$

или в более наглядной интегро-дифференциальной форме

$$u_{\text{ПИД}}^{u\partial}(t) = k_p \cdot \varepsilon(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_{t_0}^t \varepsilon(t) \cdot dt + u_I(t_0) + T_{\Delta} \cdot \frac{d \varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.63\text{ид})$$

Динамическое звено с такой ММ описывается ПФ вида

$$W_{\text{ПИД}}^{u\partial}(p) = k_p + \frac{1}{T_I \cdot p} + T_{\Delta} \cdot p = \frac{T_I \cdot T_{\Delta} \cdot p^2 + k_p \cdot T_I \cdot p + 1}{T_I \cdot p}. \quad (1.64)$$

С учетом физической реализуемости действительный вид ПФ может быть представлен выражением

$$W_{\text{ПИД}}^{pl}(p) = k_p + \frac{1}{T_I \cdot p} + \frac{T_{\Delta} \cdot p}{T_p \cdot p + 1}, \quad (1.65)$$

которое при условиях $T_p \ll T_I$ и $T_p \ll T_{\Delta}$ приводится к дробно-рациональной функции

$$W_{\text{ПИД}}^{pl}(p) \approx \frac{T_I \cdot T_{\Delta} \cdot p^2 + k_p \cdot T_I \cdot p + 1}{T_I p \cdot (T_p \cdot p + 1)}. \quad (1.65a)$$

В действительности же реальный ПИД-регулятор чаще всего реализуют как последовательно включенные ПИ- и ПД-регуляторы. Тогда ПФ такого устройства может быть представлена в виде

$$W_{\text{ПИД}}^{real}(p) = W_{\text{ПИ}}(p) \cdot W_{\text{ПД}}(p) = k_p \cdot \frac{(T_I \cdot p + 1) \cdot (T_{\Delta} \cdot p + 1)}{T_I p \cdot (T_p \cdot p + 1)}. \quad (1.65\delta)$$

В результате аддитивного наложения свойств всех компонентов ПИД-закон сочетает в себе все их достоинства и нивелирует недостатки. Он имеет высокое быстродействие и обладает большими возможностями по обеспечению устойчивости замкнутой системы, уступая в этом только ПД-закону. Наличие астатизма 1-го порядка гарантирует нулевую установившуюся ошибку при воздействиях, ограниченных по амплитуде, и ограниченную коэффициентом усиления разомкнутой системы ошибку отработки линейно меняющихся во времени входных воздействий. Эксплуатационными недостатками его является сложность реализации и настройки, а также чувствительность к высокочастотным помехам (это же характерно и для ПД-регулятора).

1.3.3. Сложные законы управления на основе типовых. Более сложные, чем типовые линейные законы управления строятся в основном при необходимости повысить либо порядок астатизма САУ, либо дифференцирующий эффект управления (так называемое форсирование). Проще всего это достигается последовательным включением с основным регулятором устройства, реализующего соответственно интегральный (астатический), либо дифференциальный закон. Последовательное формирование сложного ЗУ, таким образом, задается формулой

$$W_{\text{пер}}(p) = W_{\text{осн}}(p) \cdot W_{\text{доп}}(p), \quad (1.66)$$

где $W_{\text{осн}}(p)$ и $W_{\text{доп}}(p)$ - суть передаточные функции основного (усложняемого) закона и дополнительного звена, корректирующего свойства основного. Коррекция может осуществляться как стандартными типовыми звеньями элементарных и составных ЗУ, так и специально рассчитанными и реализованными устройствами

Часто встречающимся на практике случаем является необходимость построения замкнутой системы с астатизмом 2-го порядка. Это характерно для высокоэффективных следящих и программных систем, отрабатывающих линейные и параболические входные воздействия. Такая задача может быть решена различными способами, например, последовательным включением ПИ- и И-

регуляторов или, что более эффективно, двух ПИ-регуляторов. Последовательное включение в замкнутую цепь двух И-регуляторов возможно только при наличии форсирующих свойств у самого ОУ или неизменяемой части САУ [2]. При этом закон управления имеет одну настройку, которая может обеспечить лишь некоторую степень устойчивости САУ при очень невысоком быстродействии. При решении сложных динамических задач возможно последовательное включение ПИ- и ПИД-, или даже ПИД- и ПИД-регуляторов.

Эффект форсирования управления достигается последовательным включением с любым типовым регулятором одного или нескольких ПД-звеньев. Поскольку присутствие дифференциальной составляющей снижает помехоустойчивость системы, на практике более двух ПД-звеньев в одной цепи применяют редко. В одной из современных Российских SCADA-систем – Trace Mode – реализована возможность организации т.н. ПДД-закона, который, фактически, и представляет собой звено двойного форсирования.

Для более сложных ЗУ такого рода передаточная функция может определяться произведением ПФ составляющих по закону

$$W_{\text{сл}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Сложные законы можно строить также как параллельным соединением звеньев, так и охватом их обратными связями. Однако это усложняет анализ результата, а принципиально новых законов в рамках линейных операторов не дает. Более подробные сведения о свойствах и применении типовых ЗУ можно найти в приведенных выше работах, так и в специальной научно-технической литературе монографического характера.

3. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Сущность и задачи процесса проектирования систем автоматического управления

При решении задач проектирования САУ любого уровня проектировщик технически и функционально связан, с одной стороны, структурой и параметрами объекта управления, а с другой, реальными возможностями комплекса технических средств, обеспечивающих реализацию процесса управления в системе. Объект управления (ОУ) обычно рассматривается проектировщиком как некий структурно и параметрически неизменяемый динамический модуль. Аналогично часть технических средств управления выбирается из некоторого стандартного набора и не подлежит изменению в процессе проектирования. Совокупность ОУ и жестко заданных технических средств принято называть неизменяемой частью (НЧ) системы автоматического управления [17]. Часто под термином ОУ подразумевают именно НЧ системы.

Целесообразность такого подхода связана, прежде всего, с тем, что неуправляемый технологический аппарат или агрегат технической системы (химический реактор, промышленный робот, летательный аппарат и т.п.) имеет динамические свойства, обусловленные его внутренней структурой, параметрами, порядком и другими особенностями. Но эти свойства, как правило, не в полной мере отвечают требованиям технологического процесса или технической системы, в составе которых он функционирует. Тогда возникает необходимость построения на основе имеющегося объекта САУ, задачей которой является обеспечение требуемых условий его работы.

Для достижения поставленной цели необходимо, чтобы эта система содержала некоторые устройства, автоматически воздействующие на объект в соответствии с задаваемыми извне целями управления Z , действующими и измеряемыми возмущениями V и его текущим состоянием Y .

Соответствующая такому видению технических условий проектирования блочно-функциональная схема САУ изображена на рис. 2.1, где приняты следующие сокращения и обозначения:

НЧ САУ - неизменяемая часть САУ;

УЧ САУ - управляющая часть САУ;

КСВО - комплекс средств воздействия на ОУ;

КИИС - комплекс информационно-измерительных средств измерения управляемых переменных и преобразования их в форму, доступную для наблюдения человеком, а также для выработки сигналов, подаваемых на УУ;

КСЛУ - комплекс средств локального управления;

КСУУ - комплекс средств усиления управляющих сигналов;

УВК - управляющий вычислительный комплекс;

U_o, Y_o - векторы входных воздействий и выходных переменных ОУ;

Z, U, Y, V - векторы цели управления, управляющего сигнала, управляемой переменной и возмущающих воздействий.

Совокупность технических средств, являющаяся для проектировщика САУ неизменяемой частью системы, попадает на рис. 2.1 в верхнюю пунктирную рамку. Проиллюстрируем сущность обозначенной особенности проектирования САУ элементарным примером анализа задачи управления одним из простейших объектов многих промышленных технологий - буферной емкости для хранения необходимого запаса технологического раствора (рис. 2.2).

Из изображенных на рис. 2.2 устройств к НЧ относятся: поплавковый датчик уровня 1; задатчик уровня ручного действия 2; исполнительное устройство 3 (регулирующий клапан); вентиль отбора жидкости, иллюстрирующий возможный источник внешних для системы воздействий 4.

Устройством, обеспечивающим связь перечисленных элементов системы и играющим роль регулятора с

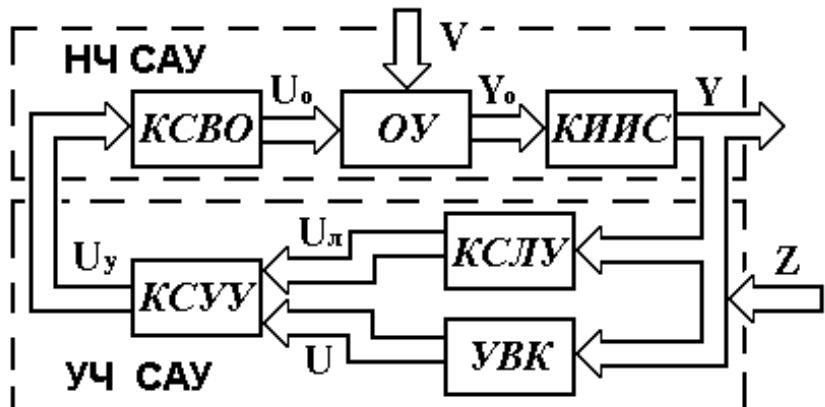


Рис. 2.1. Блочно-функциональная схема САУ

настраиваемым коэффициентом жесткой обратной связи k_p , является рычаг 5.

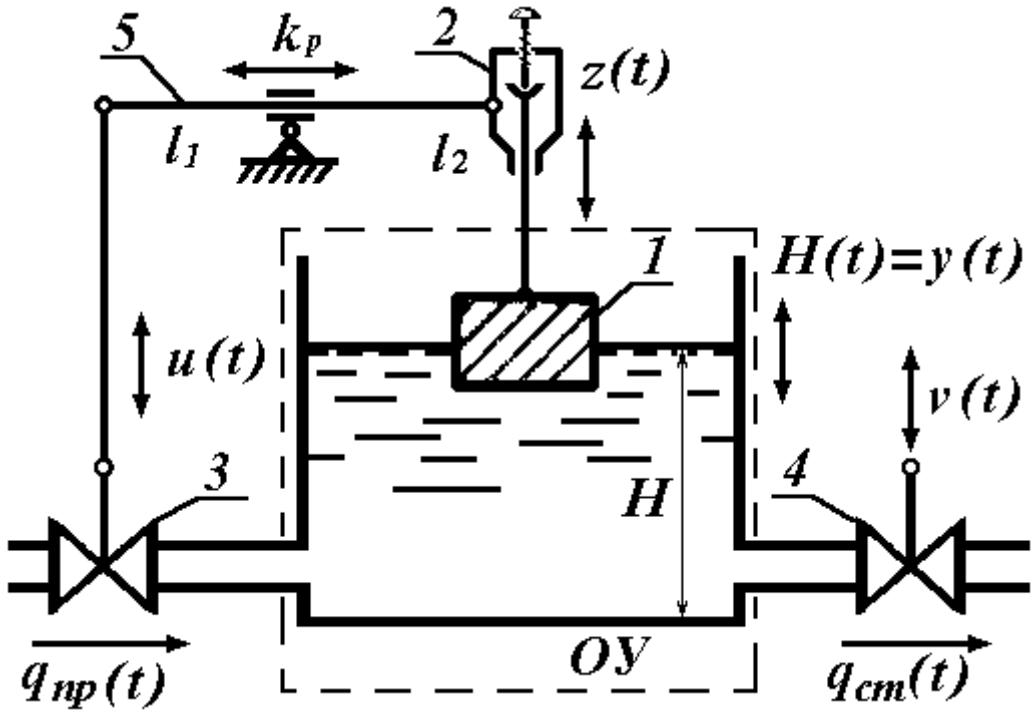


Рис. 2.2. Простейшая система автоматического регулирования уровня жидкости

Эти устройства обеспечивают систему информацией и формируют управляющие воздействия, а также подают их на входы объекта для приятия всей системе требуемых статических и динамических свойств. Основные из них, обеспечивающие взаимосвязь всех элементов системы и вырабатывающие закон управления объектом, обычно называют управляющими устройствами (УУ) или регуляторами. Поэтому главной проблемой при построении САУ является получение ММ именно этих устройств, так как их свойствами в сочетании с естественной динамикой ОУ задается алгоритм функционирования всей системы в целом.

Очевидно, что при заданном и неизменном ОУ такой алгоритм определяется исключительно алгоритмом работы УУ. В простейших случаях он задается мгновенно вычисляемой функцией некоторых переменных и называется законом управления (ЗУ). Проблема его синтеза представляет собой одну из важнейших и наиболее сложных задач теории автоматического управления. Под синтезом принято понимать теоретический этап проектирования. Его сущность, применительно к созданию САУ, состоит в отыскании математического выражения для ЗУ, т. е. его ММ, обеспечивающего проектируемой системе требуемые динамические свойства [10].

В состав неизменяемой части системы, таким образом, включается совокупность собственно технологического объекта и комплекса технических средств (в принятых на схеме обозначениях - КИИС и КСВО), обеспечивающих оценку его состояния и реализующих выработанные регулятором воздействия на протекающие в нем процессы [17]. Эти устройства выбираются на предварительном этапе технического проектирования САУ и не подлежат изменению на этапе разработки УУ, но их свойства необходимо учитывать в ММ объекта. Именно поэтому, употребляя термин «объект управления», имеют в виду всю неизменяемую часть системы. В дальнейшем авторы будут придерживаться

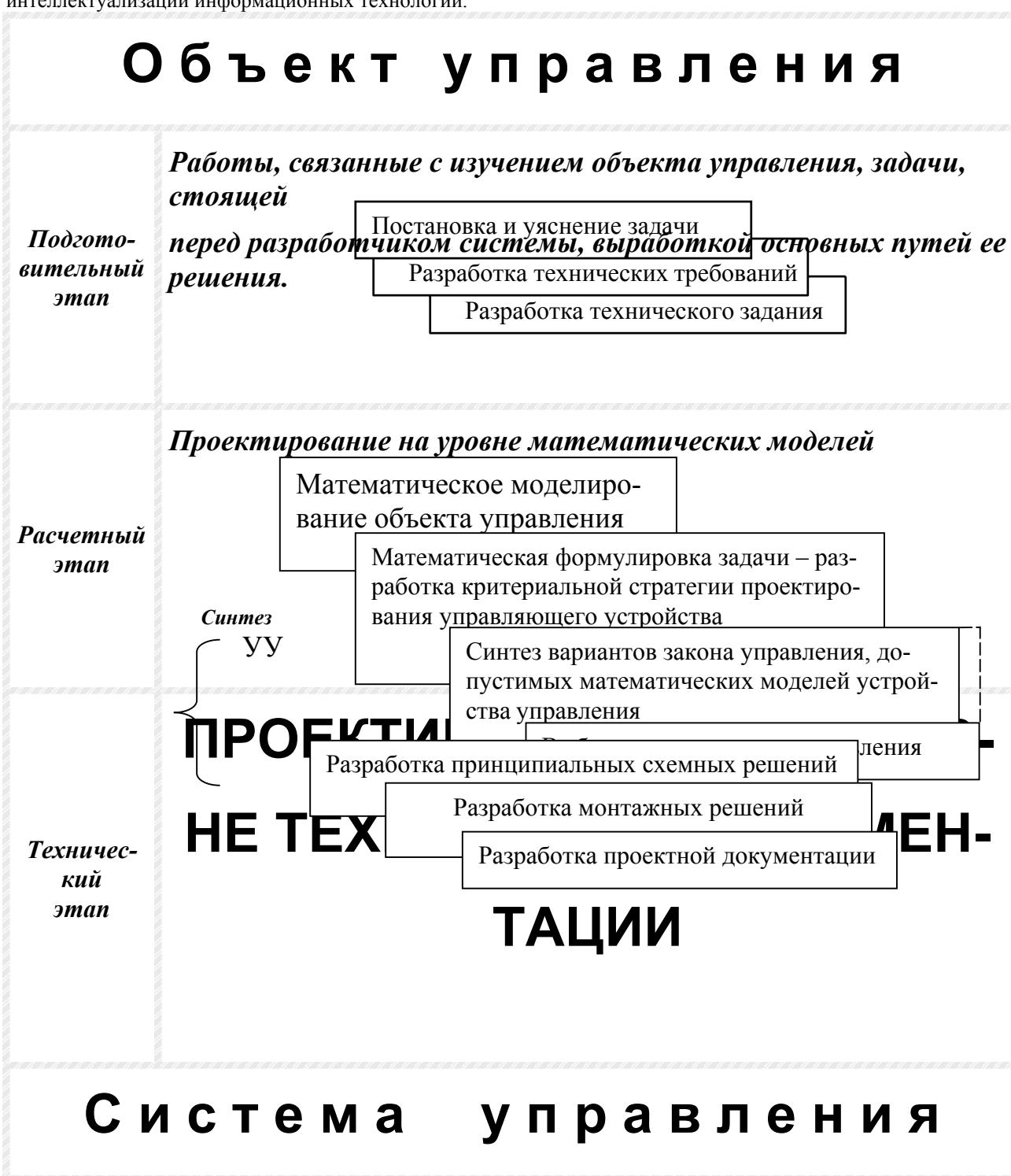
именно этой терминологии.

Часто управляющая часть САУ, представленная на рис. 2.1 как комплекс технических средств с условно или фактически разделенными функциями, рассматривается как одно управляющее устройство. В данной работе при изложении задач и методов синтеза законов управления такая идеология подразумевается по умолчанию.

Таким образом, задача проектирования САУ сужена до разработки собственно УУ (или управляющего вычислительного комплекса – УВК), обеспечивающего ей требуемые динамические свойства. Решение этой задачи подразумевает выполнение нескольких существенно отличающихся по содержанию этапов, которые иллюстрируются таблицей на рис. 2.3.

Следует отметить, что подготовительный этап является сугубо эвристическим и пока практически не поддается формализации. Технический же этап, наоборот, формализован и даже автоматизирован на сегодняшний день на довольно высоком уровне. Наиболее сложным, слабо формализованным и трудно поддающимся автоматизации является расчетный этап. Он требует наиболее высокой квалификации по сравнению с остальным комплексом работ по проектированию, а решение задачи его компьютеризации относится, по сути, к проблеме интеллектуализации информационных технологий.

О бъект уп рав л е н и я



Rис.2.3. Основные этапы проектирования систем управления

Расчетный этап проектирования автоматической системы выполняется в несколько обособленных стадий. На первой стадии расчетного этапа проектировщику необходимо получить полную математическую модель ОУ. После этого нужно построить критериальную стратегию проектирования САУ и довести ее до математической формулировки задачи. Эти два компонента разработки системы позволяют перейти к заключительной стадии этапа - синтезу структуры и параметров закона, который обеспечит проектируемой системе выполнение критериальных требований. Если критериальная стратегия синтеза допускает многовариантность решения задачи, то в процедуре синтеза появляется стадия выбора конкретного варианта.

Таким образом, под синтезом ЗУ подразумевается математическая процедура, позволяющая получить структуру и параметры выражений, описывающих проектируемое управляющее устройство системы, т.е. его ММ. Поскольку математическая модель определяется своей структурой и параметрами, можно считать, что проблема синтеза сводится к нахождению этих компонентов ММ. Наиболее сложной и ответственной является задача нахождения структуры ЗУ, способной решить технологические задачи, поставленные проектировщиком. Далее возникает задача определения его параметров, которые в рамках выбранной структуры обеспечивали бы наилучшее или достаточное качество реализации управляющих функций. Такой подход позволяет разделить процедуру синтеза ЗУ на этапы, в конечном итоге упрощая решение всей задачи.

Задачей настоящего пособия (его следующих разделов) является изучение основных доступных студенту и инженеру по автоматизации методов синтеза как типовых, так и нестандартных законов управления для автоматических систем общетехнического назначения. Однако прежде, чем перейти к этой основной задаче, целесообразно остановиться на общей схеме синтеза ЗУ. При этом основным фактором, определяющим метод и результат этой процедуры, является общая технологическая цель, которая преследуется при проектировании и построении САУ. В данной работе она будет называться критериальной стратегией.

3.2. Критериальная стратегия синтеза алгоритмов управления и общая характеристика задачи

Для правильного понимания целей и методов синтеза ЗУ целесообразно начать с рассмотрения общей формулировки задачи, которая позволит выделить и проклассифицировать основные ее признаки и свойства, а также вести изложение различных подходов с единых позиций.

Задача проектируемой системы - удовлетворить в процессе эксплуатации некоторой совокупности показателей качества, ММ которых представляют собой, в общем случае, функционалы Q_i от переменных состояния ОУ и САУ, а также от их входных воздействий и выходных переменных

$$Q = \{Q_i\}, \quad i = \overline{1, n_q}; \quad Q_i = Q_i(t, \tau, u, v, x, y, \{\xi\}), \quad (2.1)$$

где n_q - количество привлекаемых показателей или критериев синтеза;

$\{\xi\}$ - множество конструктивных, технических, экономических и других показателей, которыми должна характеризоваться проектируемая система управления.

Критерии синтеза могут быть весьма разнородны как по физическому смыслу, так и по характеру используемых математических преобразований. Последние как раз и отражают критериальную стратегию синтеза, которая комбинируется из требований двух типов: критериальные ограничения и критериальная оптимизация. В связи с этим необходимо рассмотреть постановку и запись каждой из задач.

В любой технической системе, в которой осуществляется управление, существуют ограничения на значения переменных или их совокупностей, характеризующих определенный режим функционирования. Иными словами, для некоторого подмножества показателей качества $Q^0 \subseteq Q$ должны выполняться соотношения типа ограничений

$$Q^0 \subseteq Q_D, \quad (2.2)$$

где Q_D - допустимая область, ограничивающая значения критериев Q^0 [18].

Обычно перед проектировщиком стоит также задача назначения одного или нескольких критериев $Q^\delta \subseteq Q$, от которых необходимо потребовать достижения в процессе управления экстремального значения некоторого обобщающего их функционала $J(Q^\delta)$, сводящего многокритериальную задачу к однокритериальной. Такое требование можно записать следующим образом:

$$J(Q^\delta) \rightarrow \text{extr.} \quad (2.3)$$

Таким образом, обобщенная критериальная стратегия синтеза ЗУ в технической системе может быть выражена следующей системой отношений:

$$\begin{cases} J(Q^\delta) \rightarrow \text{extr;} \\ Q^0 \subseteq Q_D; \\ Q^\delta \vee Q^0 = Q. \end{cases} \quad (2.4)$$

При такой трактовке целей синтеза ЗУ возможны три принципиально различных варианта критериальной стратегии:

- 1) $Q^0 = 0$ - оптимизации подлежит вся совокупность критериев;
- 2) $Q^\delta = 0$ - вся совокупность критериев подлежит ограничениям (наиболее распространенный технологический вариант);
- 3) $Q^0 = 0, Q^\delta = 0, Q^\delta \vee Q^0 = Q$ - комбинированный вариант, наиболее подходящий для выработки обобщенного подхода.

Функциональные этапы выработки критериальной стратегии отражены в схеме, представленной на рис. 2.4. Первый вариант методологически и технически самый жесткий и труднодостижимый, хотя критериально наиболее обоснованный и предпочтительный.

Второй вариант наиболее реален с технической точки зрения, но пользоваться им затруднительно из-за многовариантности решения. В итоге он, обычно, сводится к третьему варианту за счет искусственного введения оптимизируемого критерия. Таким образом, третий вариант представляет собой наиболее распространенный и обоснованный подход к построению критериальной стратегии синтеза ЗУ.

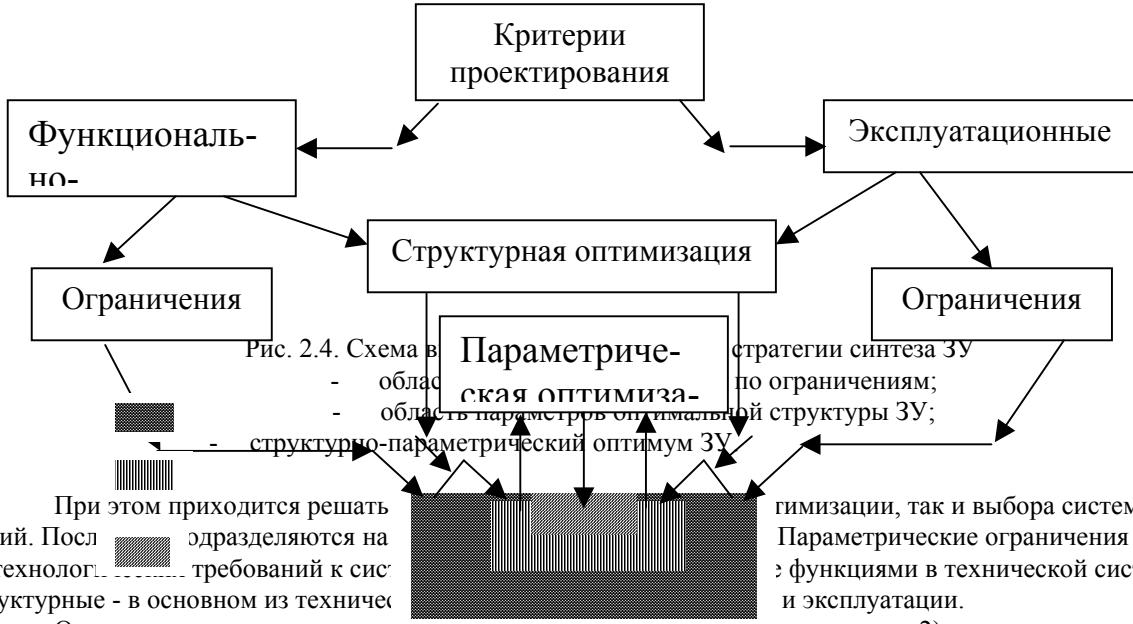


Рис. 2.4. Схема в

- област

- област

- стро

- структурно-

- параметрических

- требований к си

- структурные - в основн

- из технолого

- вий

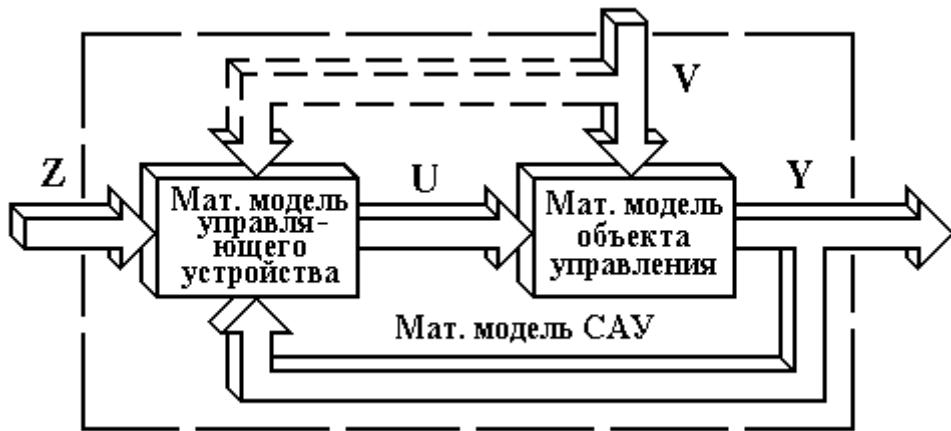


Рис.2.6. Структура формирования ММ САУ

В результате совместного решения этих ММ формируется динамическая модель всей системы. Такое прямое решение математической задачи “свертывания” ММ с получением результирующей модели является задачей анализа и не представляет особого труда. При осуществлении же синтеза системы решается, фактически, обратная задача, связанная с выделением ММ управляющего устройства (т. е. закона управления) из модели проектируемой системы при известном математическом описании объекта. Очевидно, что при заданном и неизменном ОУ структуру САУ в целом будет задавать только устройство управления.

Таким образом, из всего многообразия задач, решаемых при проектировании САУ, выделена задача синтеза управляющего устройства, под которым понимается проектирование его на уровне математической модели. При этом исходной информацией для синтеза являются математическая модель объекта, цель управления и показатели его качества, обусловленные автоматизируемой технологией. Конечным результатом процесса синтеза считается математическая модель управляющего устройства, т.е. закон управления, задающий окончательные динамические свойства системы. Промежуточным же результатом процесса синтеза может быть, например, желаемая математическая модель САУ, заданная либо в критериальной, либо в динамической формах.

Для лучшего понимания концептуально сформулированной проблемы рассмотрим ее на простом примере.

Пусть ММ объекта управления на рис. 2.7 описывается ПФ колебательного звена, которое имеет динамическую характеристику, изображенную на рис. 2.7a,

$$W_{ob}(p) = \frac{2}{p^2 + 0,2p + 1} \quad (2.5)$$

Пусть также по условиям технологии эксплуатации данного объекта в переходных процессах при изменении режимов работы допустимо перерегулирование не более 1%, а время регулирования при двухпроцентной трубке может составлять не более 7 секунд.

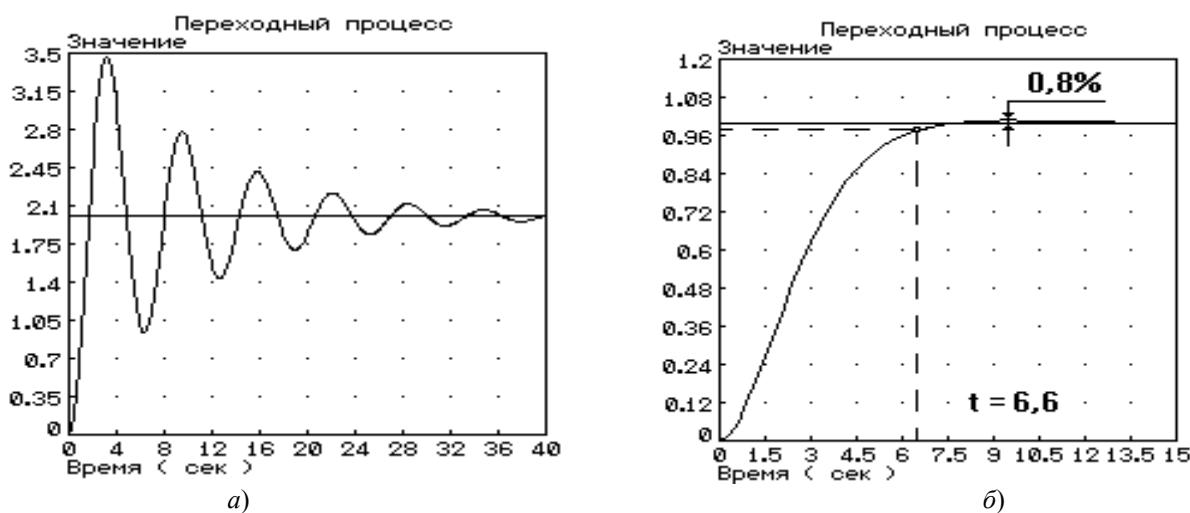


Рис. 2.7. Переходные процессы в ОУ (а) и САУ (б).

Исследования показывают, что такого результата удается добиться, если построить систему на основе управляющего устройства со следующей ПФ:

$$W_{yy}(p) = \frac{p^2 + 0,205p + 1}{5p^2 + 5,34p}. \quad (2.6)$$

Действительно, подставляя (2.5) и (2.6) в формулу ПФ замкнутой системы (1.34), можно получить

$$W_c(p) = \frac{p^2 + 0,205p + 1}{2,5p^4 + 3,17p^3 + 4,034p^2 + 2,875p + 1}. \quad (2.7)$$

Построение и исследование переходной характеристики динамического звена с ПФ (2.7), показанной на рис. 2.7б, подтверждает правильность выбора ММ УУ в виде (2.6). Из графика видно, что перерегулирование переходного процесса не превышает допустимого значения, а время регулирования при двухпроцентной трубке регулирования [1, 10, 11] составляет 6,6 секунды.

Рассмотренный пример, при сравнении рис. 2.7 а и б, показывает, что выбором $W_{yy}(p)$ можно значительно скорректировать исходные динамические свойства управляемого объекта. Но для того, чтобы добиться нужного результата, необходимо найти такую модель УУ, которая придаст системе заданные динамические свойства. В принципе, это можно сделать подбором структуры и параметров передаточной функции УУ. Однако этот путь является слишком трудоемким и нерегулярным, так как требует исследования множества возможных вариантов. Это существенно усложняет процедуру синтеза из-за необходимости многократных и громоздких расчетов. Результат в этом случае будет зависеть от таланта и опыта проектировщика. Построение же регулярного метода синтеза ЗУ всегда связано с некоторым сужением класса решаемых задач за счет выбора

- а) общей идеологии (методологии) решения задачи;
- б) основы критериальной стратегии решения задачи;
- в) математической формы представления и обработки информации;
- г) математического аппарата преобразования исходных ММ в ЗУ.

Анализу этих непростых и неоднозначных вопросов посвящен следующий параграф настоящего пособия.

2.3. Анализ традиционных инженерных подходов к решению задачи синтеза САУ

В настоящее время в теории автоматического управления (ТАУ) известно достаточно большое количество различных подходов к решению проблемы синтеза систем управления. Каждый из них имеет свои особенности, преимущества и недостатки. Проектировщик выбирает конкретный инструмент решения задачи синтеза в зависимости от многих причин.

Первой из них является совокупность технологических требований к системе. На втором месте стоят, обычно, технические возможности, в частности, предполагаемая элементная база. Далее идут экономические, надежностные, конструкторские и другие характеристики. Таким образом, задача выбора метода непроста и неоднозначна.

Поэтому многообразие подходов, характерное для задач синтеза САУ, целесообразно рассмотреть с некоторой общей точки зрения и выделить методы, представляющие наибольший интерес в настоящее время. Разработкой методов синтеза САУ, удобных для решения практических задач, занимались многие ученые России и зарубежных стран. Большой вклад в развитие и совершенствование методов синтеза сделали ученые: В.С. Кулебакин, Э.Г. Удерман, Т.Н. Соколов, В.Р. Эванс, В.Г. Сегалин, В.В. Соловьевников, А.А. Красовский, А.А. Колесников, П.Д. Крутко и др. Разработанные ими методы получили широкое распространение в инженерной практике.

Еще Кулебакиным [20] задача синтеза САУ разделялась на два этапа:

- выбор желаемой ММ САУ, удовлетворяющей поставленным техническим требованиям;
- определение параметров элементов, входящих в систему управления, из условия сопоставления желаемой и реальной ММ этой системы.

Такое разделение на две самостоятельные математические задачи способствовало успешной разработке различных методов решения. В.С. Кулебакин [20] предложил метод синтеза САУ, описываемых линейными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядков, удовлетворяющих ряду технических требований. Для таких систем желаемая ММ в форме передаточной функции выбирается из условия заданной формы переходного процесса. На основе выбранной передаточной функции можно найти параметры реальной системы. Этот подход носит название “метода стандартных коэффициентов”. Характерная особенность его заключается в том, что искомые параметры определяются при решении системы уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при соответствующих операторах желаемой и реальной передаточной функции системы регулирования. Основными недостатками метода, при решении задачи синтеза на втором этапе, являются необходимость задания структурной схемы САУ и, характерная для многих случаев, неразрешимость системы уравнений, служащей для определения параметров этой системы.

Сделать систему уравнений совместной путем введения соответствующего числа переменных полюсов в желаемую передаточную функцию предложил Э.Г. Удерман [21]. Однако такой прием незначительно расширяет возможности данного метода. Указанные недостатки ограничивают применение метода стандартных коэффициентов.

Метод выбора параметров САУ, который исключает неразрешимость системы уравнений, разработал Т.Н. Соколов [22]. Согласно его результатам, параметры можно выбирать по заданным коэффициентам ошибок. При этом специальный подбор коэффициентов передаточной функции обеспечивает заданную форму переходного процесса, т.е. требуемые показатели колебательности и перерегулирования. Коэффициенты желаемой передаточной функции САУ формируются с учетом технических возможностей реализации выбранной схемы управления. Практически это приводит к тому, что параметры системы имеют вполне определенные значения, изменять которые нельзя, так как в противном случае форма переходного процесса не будет соответствовать заданной. Стремление получить более короткий по длительности переходный процесс при той же форме потребует новой схемы управления. При такой схеме регулятора всегда будет иметь место математическое решение, но не всегда это решение будет отвечать техническим требованиям.

Основной недостаток такого метода выбора параметров заключается в том, что структурная схема управления должна быть задана. Однако обоснованных рекомендаций по выбору оптимальных структурных схем систем управления не существует. Поэтому удачный выбор структурной схемы управления, обычно, определяется интуицией проектировщика.

В 1948 г. В.Р. Эванс [23] разработал метод корневых годографов, применяемый для выбора параметров системы управления. Метод корневого годографа основан на связи между нулями и полюсами передаточной функции замкнутой и разомкнутой систем. Целью расчета является получение передаточной функции замкнутой системы с заданным распределением нулей и полюсов путем выбора коэффициента усиления и параметров элементов разомкнутой системы. Недостаток метода корневых годографов также заключается в том, что структур-

ная схема системы регулирования должна быть задана. Возможности этого метода несколько уже по сравнению с методом выбора параметров системы управления, разработанного Т. Н. Соколовым [22].

Более широкими возможностями обладает метод синтеза, предложенный В.Г. Сегалиным [24], который так же, как и Кулебакин, делит синтез САУ на два этапа:

- определение желаемой ММ системы (в форме передаточной функции) в разомкнутом состоянии;
- определение передаточной функции регулятора.

Эта задача решается аналитически. При этом легко определяются передаточные функции последовательных, параллельных и смешанных корректирующих устройств. Однако недостаточная разработанность метода воспрепятствовала, в свое время, его внедрению в инженерную практику.

Наиболее полно разработан метод синтеза САУ на основе желаемых логарифмических характеристик [2-3, 6, 13, 14, 17], основоположником которого в России считается проф. В. В. Солодовников.

Этот метод также состоит из двух основных этапов:

- определение желаемой логарифмической частотной характеристики (ЛАЧХ) системы в разомкнутом состоянии;

- определение передаточной функции регулятора.

Задача решается графоаналитическим способом. Наиболее просто определяются передаточные функции последовательных корректирующих устройств, а для параллельных корректирующих устройств используются специально разработанные номограммы. По сравнению со всеми выше перечисленными, метод желаемых ЛАЧХ обладает наибольшей простотой и наглядностью при решении задачи синтеза САУ, а также наиболее общей постановкой этой задачи.

Хотя этот метод получил широкое распространение на практике, для синтеза линейных систем он, однако, имеет существенные недостатки:

- отсутствие однозначной связи между численными показателями частотной амплитудной характеристики системы в разомкнутом состоянии и динамическими показателями переходной функции системы;
- затруднительность расчета сложных многоконтурных УУ, исходя из простоты их технической реализации [17].

До сих пор рассматривались методы, получившие широкое распространение в инженерной практике еще в 50-е годы. Некоторые из них не потеряли своей актуальности и до наших дней. Многие современные методы построены таким образом, что в них в той или иной мере используются уже известные подходы. Например, в работе [25] рассматривается метод типовых характеристических уравнений. Это фактически метод, разработанный еще Н.И. Соколовым в работе [12], но имеющий свои особенности. Метод типовых характеристических уравнений дает несколько более широкую возможность удовлетворения требований к динамическим свойствам системы, чем метод типовых переходных процессов Соколова. Его преимущество в том, что значительно расширена гамма типовых моделей, так как рассматриваются типовые характеристические уравнения для синтеза САУ до двенадцатого порядка включительно. При каждом значении n дается значительное число (от 18 до 57) уравнений, отличающихся коэффициентами и, следовательно, распределением корней. Для каждого уравнения указаны показатели качества соответствующей ему переходной характеристики. Даны также значения показателя колебательности и резонансной частоты амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) соответствующей системы. Все это позволяет

значительно расширить возможность подбора желаемой математической модели проектируемой системы. Однако использование метода [25] ограничено по тем же причинам, что и метода типовых переходных процессов [12]. Хотя изложенные методы и не лишены недостатков, все-таки их рассмотрение позволяет получить хотя бы представление о том, к каким значениям параметров элементов системы следует стремиться. В этом несомненное достоинство этих простых методов.

В настоящее время разработан и получает все большее распространение метод, подходящий к проблеме синтеза с позиций, близких к идеологии желаемых ММ, но на более современном уровне. Отличительной особенностью критериальной стратегии этого метода является то, что наряду с технологическими требованиями к управлению, выраженными в виде функционалов, в нем постулируется искусственное введение в желаемую ММ системы притягивающих инвариантных многообразий [26].

Подводя итог обзору, можно сделать два полезных вывода:

- во-первых, всем перечисленным методам синтеза САУ присущи общие недостатки, ограничивающие диапазон их применения, - возможность определения желаемых ММ проектируемой системы в замкнутом состоянии лишь для небольшого числа типовых воздействий, несогласованность энергетического расчета отдельных элементов, входящих в систему, с динамическим расчетом системы, сложность и трудоемкость;
- во-вторых, большинство из них роднит общая методологическая посылка - задание в той или иной форме желаемых (или эталонных) ММ проектируемой системы и двухэтапность решения задачи.

В целом можно отметить, что методы синтеза ЗУ по т.н. «желаемым» или «эталонным» математическим моделям не только не утратили своего значения для теории и практики решения задач управления и автоматизации, но, наоборот, укрепили и расширили свои позиции. На это указывает то, что по-прежнему в центральных периодических изданиях появляются работы этого направления [27], что прогрессивные новые направления науки об управлении формируются в русле его основной идеи [26], что, наконец, существуют научные школы, продолжающие исследование и развитие методов синтеза ЗУ на основе эталонных ММ [28-34].

2.4. Общая постановка задачи синтеза САУ

2.4.1. Формально-математическое описание задачи. Итак, с определенной выше структурой задачи синтеза ЗУ проектировщик на первом этапе имеет ММ объекта управления, вид которой можно, для общности, представить некоторым операторным уравнением

$$y = \Phi_{ob}(\tau, t, u, v, y), \quad (2.8)$$

где y - вектор управляемых (или выходных) переменных;

Φ_{ob} - так называемый оператор перехода [35], определяющий динамические свойства ОУ;

u - вектор управляющих воздействий данного объекта;

v - вектор возмущающих внешних воздействий на ОУ;

τ, t - начальный и текущий моменты времени исследования системы;

$\tau, t \in T$ (T - отрезок времени исследования системы);

$u \in U, v \in V, y \in Y; U(t), V(t), Y(t) \subseteq C(t)$, т.е. воздействия и переменные принадлежат множеству непрерывных ограниченных функций времени.

После расчета и реализации ЗУ необходимо получить динамическую систему, ММ которой отвечает требованиям критериальной стратегии синтеза, которая выработана на стадии подготовки задачи синтеза ЗУ, и задается условиями (2.1)-(2.4).

Естественно предположить, что общий вид полученного для модели выражения по математической структуре будет подобен (2.8):

$$y = \Phi_{cistm}(\tau, t, x, u, v, y), \quad (2.9)$$

где x - вектор цели управления (задание); $x \in X, X \subseteq C(t)$;

Φ_{cistm} - оператор перехода, описывающий динамические свойства реализованной замкнутой системы.

Задачей проектировщика системы управления является нахождение и реализация такого алгоритма

преобразования ММ (2.1)-(2.4) и. (2.8), который обеспечит построение закона управления

$$u = \Phi_{ypr}(t, \tau, u, v, x, y), \quad (2.10)$$

где Φ_{ypr} - оператор перехода, задающий ММ управляющего устройства, который обеспечивает выполнение отношений (2.4) при воздействии на объект управления, описываемый выражением (2.8).

Таким образом, лаконичной теоретико-множественной математической моделью процедуры синтеза ЗУ [36, 37], является следующая запись:

$$\text{найти } \Phi_{ypr} : (\Phi_{ypr}, \Phi_{ob}) \rightarrow \Phi_{cuct} : J(Q^\delta) \rightarrow extr; Q^0 \subseteq Q_D. \quad (2.11)$$

Первое отношение алгоритмической цепочки, заданной выражением (2.10), отражает задачу структурного синтеза, т.к. вид ММ ЗУ, задаваемый оператором перехода Φ_{ypr} , определяет структуру проектируемой системы. Простейшим вариантом осуществления этого этапа общего алгоритма является волевой выбор ЗУ. Наиболее распространенным примером такого решения является выбор для САУ промышленного регулятора, обеспечивающего реализацию какого-либо, или нескольких из описанных ниже типовых законов управления.

Второе отношение сконструированной выше модели синтеза ЗУ методологически может содержать два этапа: структурную и параметрическую оптимизационные задачи. В зависимости от выбранной проектировщиком критериальной стратегии один из этапов или оба (см. 2-й вариант реализации общей системы отношений (2.4)) могут отсутствовать в процедуре синтеза.

Наконец, третье, последнее, отношение выражения (2.11) отражает конечный и методологически наиболее простой этап - параметрический синтез настроек ЗУ, обеспечивающих заданные технологические и эксплуатационные ограничения на систему. Во втором варианте общей критериальной стратегии синтеза (2.4) после волевого выбора закона управления сразу следует этот этап синтеза. Он определяет сущность синтеза ЗУ для наиболее простой постановки задачи.

Знание целей, возможностей и наиболее эффективных методов решения задач этого этапа обязательно для инженера по автоматизации. Познакомиться с ними можно в работах [1-3, 10, 15].

2.4.2. Общая постановка задачи синтеза ЗУ на основе эталонных ММ САУ. Анализ научных трудов и учебной литературы по синтезу САУ, проведенный в предыдущем параграфе, позволил сделать вывод о том, что наиболее перспективными и универсальными среди инженерных методов синтеза являются методы, основывающиеся на задании т.н. «эталонных» динамических свойств САУ [11]. Эта процедура может осуществляться в различных математических формах. Задание желаемых свойств САУ конкретной моделью значительно естественнее волевого выбора закона управления, так как прямо связано с технологическими требованиями.

Сущность идеологии синтеза по желаемым ММ проиллюстрирована на рис. 1.5. Процедура синтеза по желаемым характеристикам традиционно делится на два этапа:

1. Синтез самой желаемой характеристики - ММ САУ.
2. Синтез ЗУ по заданным моделям системы и объекта управления.

На первом этапе используется два разнородных математических объекта:

- 1) динамическая модель ОУ, представленная своей структурой, параметрами, порядком и т.п.;

2) требования к проектируемой системе, заданные в виде критериальной стратегии синтеза [10,11], ММ которой значительно отличается от динамической и по форме, и по использованию. На основании анализа этих объектов синтезируется желаемая ММ системы в той математической форме, в которой решаются задачи следующего этапа.

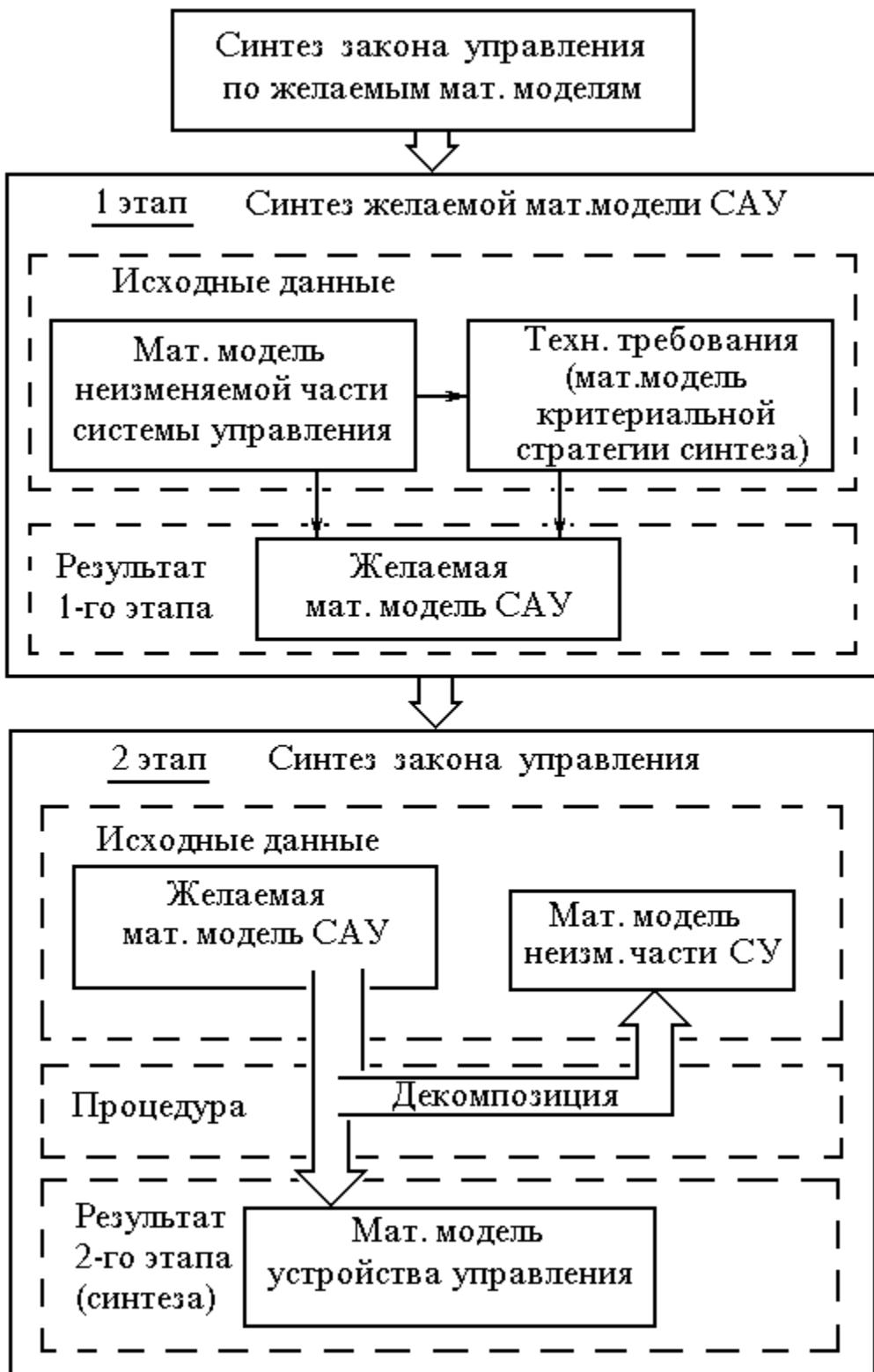


Рис. 2.8. Сущность идеологии синтеза математических моделей САУ

На втором этапе синтеза также используются два математических объекта: желаемая ММ системы и модель ОУ. Результатом синтеза является ММ устройства управления или закон управления.

В зависимости от формы математического описания динамических свойств ОУ, используемой на обоих этапах синтеза, существуют различные методики получения ЗУ. Их условно можно подразделить на три группы:

1) частотные методы синтеза, основывающиеся на использовании аналитически или графически заданных частотных характеристик;

2) операторно-алгебраические методы синтеза, когда ММ задана в виде операторных уравнений или передаточных функций;

3) дифференциально-операторные методы, когда преобразованию подлежат дифференциальные уравнения.

Последние могут подразделяться также на методы, использующие вход-выходные модели и модели в пространстве состояний.

Среди частотных наиболее распространен в инженерной практике метод желаемых ЛАЧХ, основоположником которого в нашей стране является профессор В.В. Соловьев. Желаемыми он называет такие динамические характеристики, которые получаются в результате аппроксимации оптимального режима на основе компромиссного решения между качеством и точностью, с одной стороны, и простотой технической реализации, с другой [17]. Упомянутый метод, хотя и устарел, но достаточно хорошо исследован и адаптирован для практического применения. Для него построено большое количество номограмм, упрощающих необходимые преобразования, и разработан четкий алгоритм как построения желаемой ЛАЧХ, так и синтеза корректирующих устройств. Из недостатков, присущих данному методу, необходимо отметить следующие:

- отсутствие однозначной связи между параметрами АЧХ разомкнутой системы и показателями качества переходной функции замкнутой (косвенность определения качественных показателей);

- неформальное построение высокочастотного участка ЛАЧХ;

- ограниченность области применения метода классом линейных минимально-фазовых систем.

К общим недостаткам всех частотных методов синтеза [14, 17] можно отнести также:

- предварительное задание структуры и места включения корректирующих устройств;

- графоаналитический характер, требующий большого объема ручных построений и ограничивающий применение компьютерной техники;

- необходимость аппроксимации результирующих кривых набором типовых характеристик, что повышает погрешность преобразований.

В основу алгебраических методов положен тот факт, что характер распределения нулей и полюсов ПФ замкнутой системы тесно взаимосвязан с качественными и количественными показателями переходного процесса в системе. Однако в них прослеживается тенденция к игнорированию такого важного свойства синтезируемой системы как сложность [1, 12, 17, 19].

Типовым и наиболее разработанным представителем алгебраического подхода является предлагаемый в работе [12] метод синтеза, основывающийся на выборе желаемого дифференциального уравнения (ДУ) замкнутой системы по качеству переходного процесса в ней. Здесь используются нормированные ПФ с заданным распределением коэффициентов характеристического уравнения. Построенные автором универсальные таблицы позволяют синтезировать системы высокого порядка по таким показателям, как перерегулирование и время регулирования при реакции САУ на ступенчатые задающие воздействия. Результаты синтеза могут быть распространены на случай отработки входных сигналов в виде степенных функций времени.

Недостаток этого метода состоит в том, что в качестве типовых переходных процессов рассматриваются только ограниченные функции времени, а выбор показателей качества проектируемой САУ представлен лишь четырьмя типовыми процессами. Совершенно не учитывается в этом методе математическая структура модели неизменяемой части системы, вследствие чего синтезированные УУ имеют неоправданно сложную структуру. В частности, порядок УУ, в общем случае, равен N .

Из группы операторно-дифференциальных методов своей простотой и универсальностью выделяется метод отождествления высших производных [38]. Он пригоден для синтеза управлений как линейными, так и нелинейными объектами и ограничивается лишь требованиями разрешимости ММ относительно высшей производной и обращаемости правой части уравнения ОУ. Однако в методике синтеза ЗУ [38] совершенно не предусматривается направленное построение желаемого ДУ. Это неоправданно усложняет ЗУ и динамическую модель системы в целом. Как показано в [28], гораздо эффективнее перед синтезом закона управления производить синтез желаемого ДУ с ориентацией не только на качество решения, но и на структуру ММ объекта. Это позволяет минимизировать сложность системы управления.

Подводя итоги краткого анализа наиболее значительных и распространенных методов синтеза ЗУ по желаемым математическим моделям САУ, можно выделить общие недостатки рассмотренных методов:

- необходимость предварительного задания структурной схемы замкнутой цепи обратной связи;

- ориентация на какую-либо одну, как правило, ступенчатую форму входного воздействия;

- небольшое количество фиксированных показателей качества и их значений или типовых процессов управления, на которые должен ориентироваться проектировщик;

- отсутствие и ограниченный характер учета структуры и свойств ОУ с целью минимизации сложности результатов синтеза.

Большинство из перечисленных недостатков возникают из-за того, что практически во всех рассмотренных методах совершенно не разработан вопрос об эффективном выборе желаемой ММ САУ. Все авторы в этом пункте ссылаются на разработанные в 50-х годах методы синтеза типовых желаемых ДУ и других характеристик.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод об актуальности тематики настоящего пособия, обобщить и сформулировать некоторые принципиальные положения, которые должны учитываться при решении задачи эффективного синтеза желаемых математических моделей САУ и составляющих ее элементов.

Во-первых, эффективной методики конструирования желаемой ММ проектируемой системы с учетом структуры ММ ОУ не существует. Это делает актуальными исследования в данном направлении. В известных

же методах явно выражена "точечность" решения при построении ММ с заданными динамическими свойствами. Она сводится к получению фиксированной математической структуры, не адаптированной к специфике решаемой задачи. Гораздо эффективнее при синтезе таких моделей ориентироваться на некоторые допустимые области с дальнейшей регуляризацией многовариантной задачи. Следовательно, конструирование ММ системы должно вестись на основе анализа структуры ММ ОУ, а свойства проектируемой САУ должны задаваться допустимой областью, которая обуславливает получение некоторого класса допустимых ММ взамен "точечного" решения.

Во-вторых, ЗУ, полученный для реализации “точечно” заданных динамических свойств системы, всегда является неоправданно сложным. В нем содержатся производные управляемой переменной высокого порядка. Реализация такого закона - достаточно трудоемкая задача. Но чаще всего ЗУ оказывается и вовсе физически нереализуемым.

Таким образом, в методике синтеза допустимых областей желаемых ММ САУ должна быть предусмотрена возможность такого варьирования их структурой и параметрами, которая позволит уменьшать сложности УУ за счет исключения из него нереализуемых и сложно реализуемых членов.

Становится ясно, что конструирование желаемой ММ проектируемой системы является очень сложным и ответственным этапом процедуры синтеза, существенно влияющим на эффективность результатов проектирования. Однако способы решения задач этого этапа существенно зависят от методологии и математических форм осуществления второго, завершающего этапа - получения ММ управляющего устройства. Поэтому в следующем разделе пособия подробно рассматриваются известные методы синтеза законов управления с использованием желаемой ММ проектируемой системы в наиболее общей и распространенной дифференциально-операторной форме.

Гораздо естественнее сначала, на основе анализа сформулированных технологических требований, построить такую математическую модель всей системы в целом (т.е., в нашем случае, ПФ (1.3)), решение которой удовлетворяло бы наложенным ограничениям. Затем, зная ММ управляемого объекта и располагая полученной моделью системы, можно было бы сформировать ММ управляющего устройства. Причем, при наличии соответствующих методик, эта операция могла бы производиться регулярными методами.

Сказанное можно резюмировать как некоторую методологию, в которой решение задачи синтеза автоматической системы с заданной динамикой необходимо осуществить посредством следующих основных операций:

во-первых, каким-либо образом получить желаемую ММ системы; во-вторых, найти ММ управляющего устройства, которое обеспечивало бы функционирование системы в соответствии с желаемой моделью.

Анализу задачи синтеза законов управления в данной постановке посвящены следующие параграфы настоящего раздела.

В дальнейшем для упрощения изложения будем пользоваться термином объект или аббревиатурой ОУ, подразумевая при этом неизменяемую часть системы.

3. ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭТАЛОННЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ПРОЕКТИРУЕМЫХ СИСТЕМ

3.1. Частотные методы синтеза законов управления. Метод «желаемых» ЛАЧХ

3.1.1. Область применения и возможности частотных методов в задачах

синтеза ЗУ по эталонным ММ. Частотные формы представления ММ отличаются рядом существенных преимуществ перед временными и даже операторными формами. Во-первых, существует довольно тесная связь частотных и временных характеристик, что позволяет во многих случаях оценивать статические и динамические свойства САУ, не прибегая к фактическому построению переходных процессов. На этой связи построены практически все косвенные оценки качества замкнутых систем управления, хорошо описанные в литературе по классической ТАУ. Во-вторых, благодаря свойствам, подробно описанным в первом разделе пособия, частотные характеристики чрезвычайно наглядны, прости в построении и удобны в инженерных графоаналитических расчетах. Эти методы, особенно использующие логарифмические частотные характеристики, до сих пор не потеряли значения и широко применяются, несмотря, даже, на бурное развитие компьютерной техники в последние годы. В-третьих, частотные характеристики могут быть получены как прямой результат экспериментального математического описания ОУ с применением автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), что делает удобным их непосредственное использование в задачах синтеза ЗУ.

Наиболее широкое распространение эти методы нашли в задачах т.н. частотной коррекции динамических свойств линейных САУ. При этом результаты использования такой коррекции и методы решения самой задачи коррекции существенно зависят от выбираемого проектировщиком способа включения корректирующего устройства. Необходимо отметить, что наиболее наглядным и эффективным методом оказалась последовательная частотная коррекция, когда корректирующее устройство (КУ) включается последовательно с элементами основного контура регулирования, как это показано на рис. 3.1.

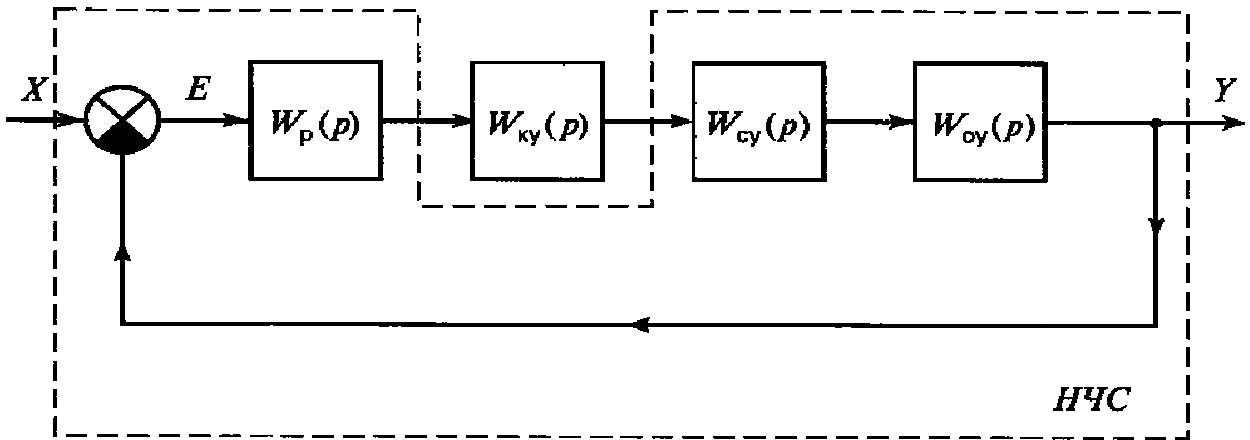


Рис. 3.1. Структурная схема САУ с последовательной коррекцией

НЧС - неизменяемая часть системы;

$W_{oy}(p)$ - ПФ объекта управления;

$W_p(p)$ - ПФ регулятора;

$W_{cy}(p)$ - ПФ силового преобразовательного устройства;

$W_{ky}(p)$ - ПФ корректирующего устройства.

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы в этом случае имеет вид

$$W(p) = W_p(p) \cdot W_{ky}(p) \cdot W_{cy}(p) \cdot W_{oy}(p). \quad (3.1)$$

В настоящее время разработано большое число приближенных методов синтеза корректирующих устройств. Наибольшее распространение в инженерной практике получили графоаналитические методы синтеза, основанные на спектральном (или частотном) описании систем управления [39]. Здесь широко используются косвенные оценки качества переходного процесса, такие как запас устойчивости по фазе и по амплитуде, колебательность, частота среза, которые можно непосредственно определить по частотным характеристикам.

Наиболее простым, наглядным и хорошо разработанным инженерным методом синтеза корректирующих устройств является метод «желаемых» логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ), который является частотной разновидностью группы методов синтеза ЗУ по «эталонным» математическим

моделям, описываемых в настоящем пособии. Синтез методом ЛЧХ основан на связи вещественной частотной характеристики замкнутой системы с показателями качества процесса регулирования. Данный метод позволяет по заданным показателям качества построить желаемую ЛАЧХ разомкнутой скорректированной системы, а затем найти передаточную функцию, выбрать схему и определить параметры корректирующего устройства. В подавляющем большинстве случаев метод применяется для синтеза САУ с последовательной коррекцией, что объясняется как простотой технической реализации, так и наглядностью требуемых построений. В связи с этим ниже будем рассматривать только вопросы, относящиеся к последовательной частотной коррекции САУ.

3.1.2. Общая структура решения задачи синтеза методом желаемых ЛАЧХ. Излагаемая ниже методика синтеза КУ ориентирована исключительно на минимально-фазовые системы, т.е. системы, у которых имеется однозначная зависимость между видом ЛАЧХ и логарифмической фазочастотной характеристикой. Это позволяет судить о переходном процессе по одной ЛАЧХ.

При синтезе корректирующего устройства САУ методом ЛЧХ обычно используется приведенный ниже порядок решения задачи.

1) Записывается передаточная функция разомкнутой нескорректированной САУ $W_{\text{пр}}(p)$. Если исходная САУ охвачена единичной обратной связью (рис. 3.2), то ее ПФ будет иметь вид

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_{\text{пр}}(p). \quad (3.2)$$

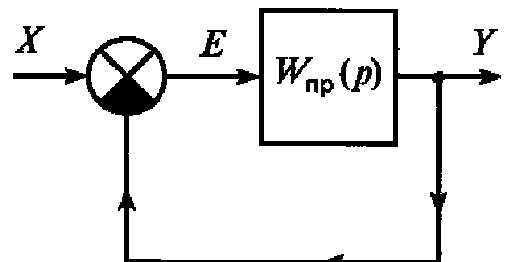


Рис.3.2. Структурная схема САУ с единичной обратной связью: $W_{\text{пр}}(p)$ - ПФ цепи прямого преобразования сигнала

Если же исходная система имеет в цепи обратной связи звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$ (рис.3.3), то необходимо (см. рис. 3.4) осуществить ее приведение к единичной обратной связи (ОС). В этом случае

$$W_{phc}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_{np}(p)W_{oc}(p) \quad (3.3)$$

2) Строится ЛАЧХ нескорректированной системы с учетом требуемого коэффициента усиления системы K_p в разомкнутом состоянии. Коэффициент K_p находится из условия получения ошибки в установившемся режиме не выше заданной.

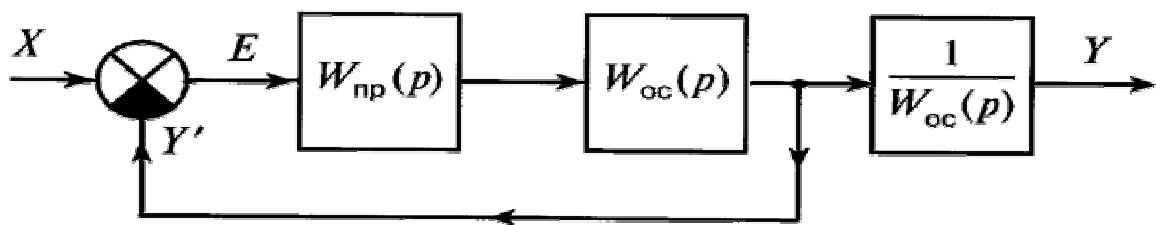
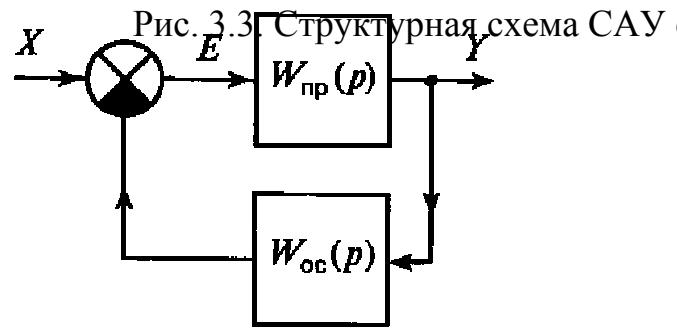


Рис. 3.4. Структурная схема САУ, приведенная к единичной ОС

3) Строится ЛФЧХ нескорректированной системы и определяется устойчивость замкнутой системы. Для устойчивой системы находятся запасы устойчивости по фазе и по амплитуде.

4) По заданным показателям качества (перерегулировании $\sigma_{зад}$, времени регулирования $t_{уст}$ и ошибке в установившемся режиме $\varepsilon_{уст}$) с учетом ЛАЧХ нескорректированной системы строится желаемая ЛАЧХ $L_ж(\omega)$.

5) Строится желаемая ЛФЧХ системы и проверяется запас устойчивости по фазе на границах среднечастотного участка ЛАЧХ. Если требуемый запас по фазе не выдержан, то среднечастотный участок расширяется и снова производится проверка.

6) На основании желаемой ЛАЧХ и ЛАЧХ нескорректированной системы определяется ЛАЧХ корректирующего устройства $L_{ку}(\omega)$. В случае применения

последовательного корректирующего устройства его ЛАЧХ получается вычитанием ординат ЛАЧХ нескорректированной системы из ординат желаемой ЛАЧХ.

$$L_{\text{ку}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{прс}}(\omega). \quad (3.4)$$

7) По полученной ЛАЧХ корректирующего устройства находится передаточная функция корректирующего устройства и подбирается наиболее простой способ его реализации. Определяются параметры корректирующего устройства.

8) По построенной ЛАЧХ скорректированной системы определяется передаточная функция разомкнутой системы, а затем и замкнутой скорректированной САУ.

3.1.3. Методика построения желаемых ЛАЧХ. Наиболее сложным и ответственным этапом при синтезе является построение желаемой ЛАЧХ. Существует целый ряд способов определения желаемой ЛАЧХ и расчета ее параметров. Основными из них являются перечисленные ниже.

1) Метод В. В. Солодовникова. Для расчета желаемой ЛАЧХ используются номограммы и вещественные частотные характеристики $P(\omega)$. При этом в качестве исходных данных берутся коэффициенты ошибок $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, величина перерегулирования σ и время регулирования $t_{\text{уст}}$.

2) Методы Г. Честната – Р.Майера, В. В. Солодовникова. Используются полные номограммы, позволяющие определять параметры желаемой ЛАЧХ в зависимости от требуемой точности (коэффициентов ошибок), величины перерегулирования σ , времени регулирования $t_{\text{уст}}$, запасов устойчивости по фазе и амплитуде, показателя колебательности M и др.

3) Метод Крейнермана. Для расчета параметров желаемой ЛАЧХ использует заданные значения ошибок и запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

4) Метод Я.Е.Гукайло и В.А.Бесекерского. В этом методе для построения желаемой ЛАЧХ используются заданные значения ошибок и показатель колебательности.

Рассмотрим подробнее метод синтеза, разработанный В. В. Солодовнико-

вым для систем с астатизмом первого порядка.

В основу критериальной стратегии синтеза положены следующие показатели качества:

- перерегулирование $\sigma_{\text{зад}}$ при ступенчатом воздействии на входе;
- время переходного процесса $t_{\text{уст}}$;
- коэффициенты ошибок C_1 и $\frac{C_2}{2}$.

Коэффициенты ошибок используются для вычисления установившегося отклонения в случае, если задающее воздействие является медленно меняющейся функцией времени. Установившаяся ошибка определяется по формуле

$$\varepsilon_{\text{уст}} = C_0 x(t) + \frac{C_1 dx}{1! dt} + \frac{C_2 d^2 x}{2! dt^2} + \dots + \frac{C_n d^n x}{n! dt^n}, \quad \text{где } C_i - \text{коэффициенты ошибок};$$

$$x(t) + \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + \frac{d^n x}{dt^n}, \quad \text{- входная величина и ее производные.}$$

Коэффициенты можно определить, разложив передаточную функцию замкнутой системы по ошибке в степенной ряд. Так как передаточная функция замкнутой системы по ошибке представляет собой дробно-рациональную функцию вида

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

то коэффициенты ошибок можно получить путем деления ее числителя на знаменатель.

В системах с астатизмом первого порядка

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{K_p} [c]; \quad C_2 = \frac{1}{b_0} \left(a_2 - \frac{b_1}{K_p} \right) [c^2],$$

где K_p - коэффициент усиления разомкнутой системы.

При построении желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы выделяют три области: низкие, средние и высокие частоты.

Область низких частот. Содержит частоты, близкие к нулевой, и опреде-

ляет точность регулирования в установившемся режиме. Установившаяся ошибка системы в значительной степени зависит от коэффициента усиления нескорректированной системы при частотах, меньших первой сопрягающей частоты. ЛАЧХ системы в этой области имеет наклон - 20 дБ/дек, соответствующий астатизму первого порядка.

Для определения положения асимптоты достаточно задать одну из ее ординат. При частоте $\omega = 1\text{c}^{-1}$ ордината низкочастотной асимптоты равна $20\lg K_p$, дБ. Коэффициент добротности K_p в астатической системе первого порядка определяется по заданной допустимой скоростной ошибке $\varepsilon_{\text{ск}}$ при заданной постоянной скорости изменения входного воздействия $v=dx(t)/dt=const$:

$$K_p = \frac{v}{\varepsilon_{\text{ск}}}, \quad [\text{c}^{-1}] \quad (3.5)$$

Так как заданный коэффициент добротности K_p получается с помощью последовательно включенных безынерционных звеньев, то сначала осуществляется коррекция коэффициента усиления разомкнутой системы. Желаемая ЛАЧХ в рассматриваемой области частот должна совпадать с ЛАЧХ нескорректированной системы, построенной с учетом требуемого коэффициента усиления. Следовательно, вид желаемой ЛАЧХ в области низких частот определяется величиной коэффициента усиления разомкнутой системы, выбираемого из условия обеспечения требуемой точности при медленно меняющихся воздействиях.

Область средних частот. Эта область определяет запас устойчивости по амплитуде и по фазе, а также показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии.

Для построения среднечастотной асимптоты вводится типовая вещественная частотная характеристика замкнутой системы. Упрощенный вид такой характеристики показан на рис.3.5. Она описывается следующими величинами:

$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_n}$ – основной коэффициент наклона; $\chi_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$ и $\chi_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ – дополнительные

коэффициенты наклона; $\lambda_1 = \frac{\omega_b}{\omega_n}$ и $\lambda_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$ – и основной и дополнительный ко-

эффициенты формы; ω_n – интервал положительности.

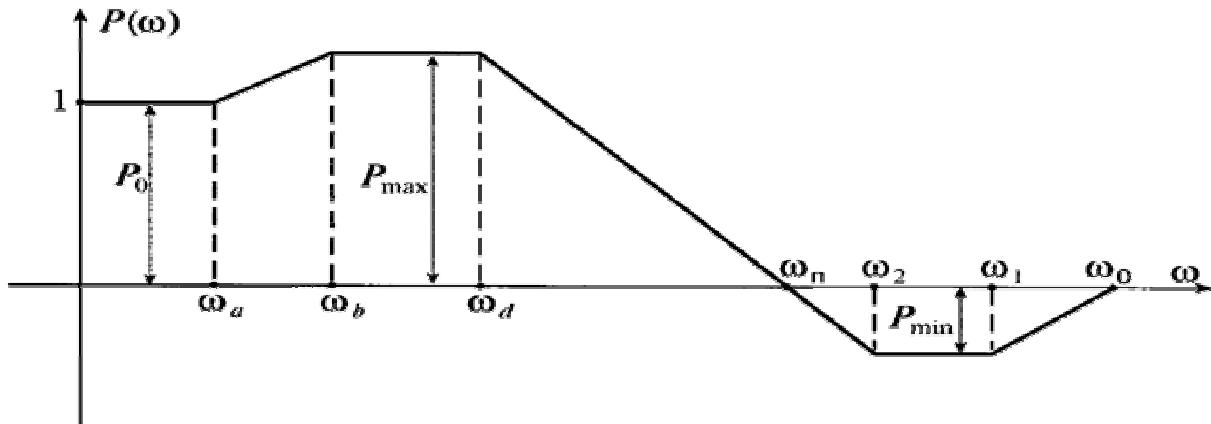


Рис. 3.5. Типовая вещественная частотная характеристика

Если в системе с приемлемыми динамическими качествами выполняются условия: $\chi \leq 0,8$; $\chi_a \geq 0,4$; $\lambda \geq 0,5$; то величина перерегулирования в основном определяется P_{max} . В этом случае перерегулирование σ и время регулирования $t_{уст}$ могут быть определены по кривым, приведенным на рис.3.6.

Таким образом, на основании заданного перерегулирования $\sigma_{зад}$ можно определить P_{max} и затем по P_{max} – зависимость между временем регулирования $t_{уст}$ и частотой ω_n . По заданному значению $t_{уст}$ легко определить требуемое значение ω_n .

Однако, отрицательная часть вещественной характеристики также влияет на перерегулирование, увеличивая его на величину $\Delta\sigma \leq 0,3 P_{min}$. Это можно учесть, положив

$$P_{min} = P_{max} - 1. \quad (3.6)$$

Общее перерегулирование будет равно

$$\sigma = \sigma(P_{max}) + 0,3 P_{min} 100\%, \quad (3.7)$$

где $\sigma(P_{\max})$ – составляющая перерегулирования, обусловленная положительным выбросом ВЧХ.

Теперь, имея график $\sigma = f(P_{\max})$ (рис. 3.6) и учитывая выражения (3.6) и (3.7), можно определить P_{\max} и P_{\min} , соответствующие заданному перерегулированию $\sigma_{\text{зад}}$. Для этого зададимся значением $\sigma_1 < \sigma_{\text{зад}}$, по графику (рис. 3.6) определим соответствующее значение P_{\max} . Подставив это значение в выражение (3.6), найдем P_{\min} . Подсчитаем значение σ , используя выражение (3.7). Если полученное значение $\sigma \approx \sigma_{\text{зад}}$, то считаем, что P_{\max} определено верно. Если же полученное значение $\sigma \neq \sigma_{\text{зад}}$, то задаем новое значение σ_1 и повторяем расчет для этого значения.

Когда P_{\max} окончательно найдено, можно определить ω_n по заданному времени регулирования. Из сравнения кривых переходного процесса, соответствующих типовой ВЧХ (рис. 3.4), установлено, что время регулирования $t_{\text{уст}}$ зависит от частоты положительности ω_n , в некоторой степени от P_{\max} и почти не зависит от вида ВЧХ в области частот $\omega > \omega_n$.

Зависимость $t_{\text{уст}} = \frac{k\pi}{\omega_n} = f(P_{\max})$ изображена на рис. 3.6. С помощью этой

кривой можно определить ω_n типовой ВЧХ, если задано время регулирования $t_{\text{уст}}$. Зная P_{\max} , которое определяется описанным выше способом, исходя из заданного значения $\sigma_{\text{зад}}$, по рис. 3.6 находим соответствующее значение коэф-

фициента k , входящего в выражение $t_{\text{уст}} = \frac{k\pi}{\omega_n}$. Из этого выражения затем нахо-

дим ω_n , отвечающее заданному времени регулирования $t_{\text{уст}}$

$$\omega_n = k\pi/t_{\text{уст}}. \quad (3.8)$$

Частота среза желаемой ЛАЧХ выбирается равной

$$\omega_{\text{срж}} = (0,6 \div 0,9) \omega_n. \quad (3.9)$$

В качестве среднечастотной части желаемой ЛАЧХ принимается прямолинейный отрезок, проходящий через $\omega_{срж}$ и имеющий наклон -20 дБ/дек. Теперь необходимо найти границы

среднечастотной асимптоты $L_ж(\omega)$.

Для этого следует определить запасы устойчивости по амплитуде ΔL и фазе $\Delta\varphi$, которые должны обеспечиваться на граничных частотах среднечастотного участка $L_ж(\omega)$. Для этого используются графики зависимости $\Delta L = f(\sigma)$ и $\Delta\varphi = f(\sigma)$, изображенные на рис.

3.7.

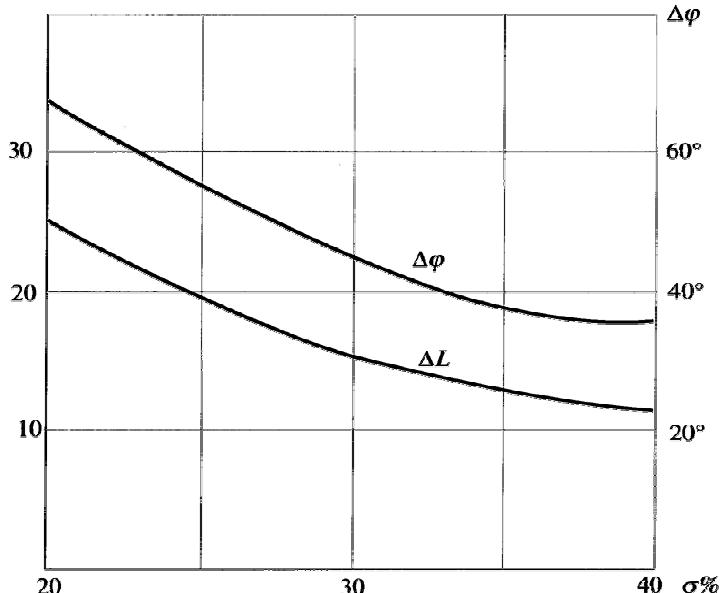


Рис. 3.7. К определению запасов устойчивости

Определив конкретные значения ΔL и $\Delta\varphi$, можно построить области запрета на графиках ЛАЧХ и ЛФЧХ, как показано на рис. 3.8.

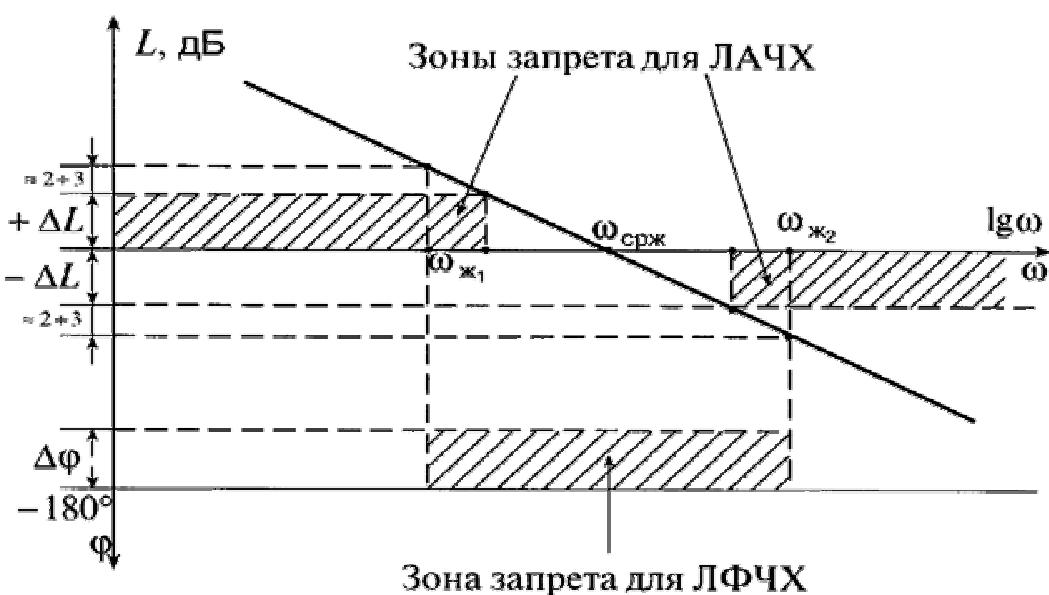


Рис. 3.8. К определению областей запрета для ЛАЧХ и ЛФЧХ

Частоты $\omega_{ж1}$ и $\omega_{ж2}$, ограничивающие среднечастотную асимптоту $L_ж(\omega)$ слева и справа, выбираются так, чтобы выполнялось условие

$$|L_{\text{ж}}(\omega_{\text{ж}1,2}) - \Delta L| \approx 2 \div 3 \text{ дБ.} \quad (3.10)$$

На этом построение желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики $L_{\text{ж}}(\omega)$ в области средних частот заканчивается.

Протяженность среднечастотной асимптоты $L_{\text{ж}}(\omega)$ должна быть менее одной декады. В противном случае (при правильных построениях) допускается некоторое расширение этого участка ЛАЧХ.

Область высоких частот может быть названа также областью малых параметров. Содержит все сопрягающие частоты, которые несущественно влияют на показатели качества переходного процесса и на точность в установившемся режиме системы. В области высоких частот корректирующее устройство почти не влияет на вид амплитудно-фазовой характеристики скорректированной системы, и она определяется параметрами нескорректированной системы. Поэтому в области высоких частот желаемая ЛАЧХ $L_{\text{ж}}(\omega)$ совпадает с ЛАЧХ нескорректированной системы $L_{\text{phc}}(\omega)$.

После построения всех основных участков асимптот желаемой ЛАЧХ САУ необходимо произвести их сопряжение.

Сопряжение среднечастотной и низкочастотной асимптот желаемой ЛАЧХ производится таким образом, чтобы получить наиболее простое корректирующее устройство. Техническая реализация звена тем проще, чем меньше изломов имеет его ЛАЧХ. Поэтому сопряжение низкочастотной и среднечастотной асимптот выполняется с помощью отрезка прямой, наклон которой отличается от наклона среднечастотной асимптоты на $-20k$ дБ/дек ($k=1,2,3,\dots$).

Сопряжение среднечастотной и высокочастотной асимптот желаемой ЛАЧХ также производится с учетом получения наиболее простого корректирующего устройства. Сопряжение осуществляется линиями с наклоном $-20k$ дБ/дек ($k=0,1,2,\dots$). При этом желательно, чтобы, начиная с некоторой частоты ω_b , сопрягающие частоты желаемой ЛАЧХ совпадали с частотами сопряжения ЛАЧХ нескорректированной системы, и характеристики в этих точках имели одинаковое изменение наклона. С этой целью допускается даже некоторое изме-

нение верхней граничной частоты среднечастотной асимптоты. Однако, следует подчеркнуть, что упомянутое совпадение не является принципиально необходимым, хотя и способствует упрощению КУ. На этом построение желаемой ЛАЧХ системы заканчивается.

3.1.4. Методика синтеза ЛАЧХ корректирующего устройства. Теперь можно определить ЛАЧХ корректирующего устройства. Если корректирующее устройство включено последовательно в прямую цепь управления САУ, то передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна произведению передаточных функций корректирующего устройства и неизменяемой части системы

$$W_{\text{рск}}(p) = W_{\text{ky}}(p) \cdot W_{\text{phc}}(p).$$

Соответственно логарифмические частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ) равны сумме соответствующих логарифмических частотных характеристик корректирующего звена и неизменяемой части системы. Так как при расчетах передаточная функция корректирующего звена может быть представлена как $W'_{\text{ky}}(p) = K_{\text{ky}} W_{\text{ky}}(p)$. Значение можно найти из соотношения

$$K_{\text{ky}} = \frac{K_{\text{рск}}}{K_{\text{phc}}}.$$
 (3.11)

Для получения нужного коэффициента усиления K_{ky} используется последовательно включенное безынерционное звено. Сначала, при построении ЛАЧХ корректирующего устройства $L_{\text{ky}}(\omega)$, его влияние можно не учитывать.

Таким образом, можно определить ЛАЧХ корректирующего устройства путем вычитания ординат ЛАЧХ нескорректированной системы, построенной с учетом необходимого коэффициента усиления из ординат желаемой ЛАЧХ

$$L_{\text{ky}}(\omega) = L_{\text{jк}}(\omega) - L_{\text{phc}}(\omega).$$

Для окончательного формирования ЛАЧХ корректирующего устройства достаточно переместить полученную ЛАЧХ на величину $20\lg K_{\text{ky}}[\text{дБ}]$ вдоль оси ординат (т.е., учесть свойства безынерционного звена, задающего усиление КУ).

Передаточная функция корректирующего устройства может быть представлена в общем виде как

$$W_{\text{ку}}(p) = K_{\text{ку}} \frac{\prod_{i=1}^N (T_i p + 1) \prod_{j=1}^M (T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1)}{\prod_{l=1}^R (T_l p + 1) \prod_{z=1}^S (T_z^2 p^2 + 2\xi_z T_z p + 1)}, \quad (3.12)$$

где N - число форссирующих звеньев первого порядка;

R - число апериодических звеньев первого порядка;

S - число колебательных (или апериодических) звеньев второго порядка,

M – число идеальных форссирующих звеньев второго порядка.

Для восстановления передаточной функции минимально-фазового звена КУ по полученной ЛАЧХ $L_{\text{ку}}(\omega)$ используются следующие правила:

- 1) для точек излома (перегиба) ЛАЧХ определяются соответствующие им частоты перегиба ω_i , ω_j , ω_l и ω_z и вычисляются соответствующие постоянные времени;
- 2) если наклоны смежных отрезков в точке перегиба отличаются на +20 дБ/дек (излом вверх), то в числитель передаточной функции помещается множитель $(T_i p + 1)$, а если наблюдается отличие на -20 дБ/дек (излом вниз), то множитель $(T_i p + 1)$ помещается в знаменатель передаточной функции;
- 3) при разности наклонов в точке перегиба, равной +40 дБ/дек (излом вверх), в числитель передаточной функции помещается множитель $(T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1)$, а если имеется разность в -40 дБ/дек (излом вниз), то множитель $(T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1)$ помещается в знаменатель $\Pi\Phi^&;$
- 4) находится коэффициент усиления КУ по формуле (3.11), где под $K_{\text{пск}}$ (коэффициент усиления разомкнутой скорректированной САУ) понимается величина, определяемая формулой (3.5).

[&] Коэффициенты демпфирования ξ определяются приближенно по величине пика ЛАЧХ в точке сопряжения асимптот (см. ЛАЧХ колебательного звена, например, в [2, 3]). При отсутствии пика принимаем $\xi=1$, что равносильно представлению множителя второго порядка в виде $(T_j p + 1)^2$ или $(T_z p + 1)^2$. В этом случае в составе КУ будут использоваться форссирующие и апериодические звенья второго порядка.

Таким образом, передаточная функция корректирующего звена восстанавливается в виде (3.11). Следует отметить, что в большинстве практических случаев ЛАЧХ КУ не имеет острых пиков или провалов и, следовательно, ПФ сразу отыскивается в виде

$$W_{\text{ky}}(p) = K_{\text{ky}} \frac{\prod_{i=1}^N (T_i p + 1) \prod_{j=1}^M (T_j p + 1)^2}{\prod_{l=1}^R (T_l p + 1) \prod_{z=1}^S (T_z p + 1)^2}. \quad (3.13)$$

Более того, часто встречается ситуация, когда в ПФ КУ фигурируют только множители первого порядка (изломы ЛАЧХ на +20 дБ/дек) и

$$W_{\text{ky}}(p) = K_{\text{ky}} \frac{\prod_{i=1}^N (T_i p + 1)}{\prod_{l=1}^R (T_l p + 1)}. \quad (3.14)$$

В этом случае реализация КУ упрощается. Например, если $N = R = 2$, то КУ реализуется одним инерционно-форсирующим звеном. В других случаях, КУ выполняется в виде последовательного соединения соответствующих звеньев, что соответствует операциям перемножения в формулах (3.12), (3.13) и (3.14).

Последним этапом в синтезе САУ является построение логарифмических характеристик скорректированной системы и проверка ее запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Для окончательной проверки результатов синтеза производится моделирование полученной САУ на ЭВМ и сравнение показателей качества переходного процесса с заданными.

3.2. Операторные методы синтеза законов управления

3.2.1. Основные структурные условия синтеза. В предыдущем разделе рассмотрен пример, в котором задание и исследование динамических свойств объекта и системы управления осуществлялось с использованием операторных форм записи ММ - передаточных функций. Для линейных динамических систем такая форма является вполне адекватной, а удобства, приобретаемые за счет пе-

ревода преобразований в алгебраическую область, делают ее исключительно эффективной. Поэтому второй в данном разделе (после метода желаемых ЛАЧХ) рассматривается методика получения ПФ управляющего устройства по известным передаточным функциям системы и входящего в нее ОУ. Очевидным недостатком метода желаемых ЛАЧХ является то, что синтез характеристики разомкнутой системы позволяет лишь косвенно учесть требуемое качество замкнутой системы. Поэтому методы синтеза, ориентирующиеся на желаемые характеристики замкнутых систем, предпочтительны.

Синтез требуемого закона управления при заданных операторных математических моделях объекта и замкнутой системы, а также структуры включения устройства управления несложен. Действительно, пусть, например, на основе анализа критериальной стратегии синтеза построена удовлетворяющая требованиям технологии ПФ замкнутой системы $W_{зам}^{эм}(p)$, а также выбрана последовательная структура включения УУ в ее контур.

Тогда общая структура системы, рассматриваемая по каналу внешнего управления, будет, согласно (1.6) математически отражаться формулой

$$W_{зам}^{эм}(p) = \frac{W_{раз}^{эм}(p)}{1 + W_{раз}^{эм}(p)}, \quad (3.15)$$

где $W_{зам}^{эм}(p)$, $W_{раз}^{эм}(p)$ - эталонные передаточные функции замкнутой и разомкнутой систем. При этом эталонная ММ разомкнутой системы естественным образом выразится из (3.15)

$$W_{раз}^{эм}(p) = \frac{W_{зам}^{эм}(p)}{1 - W_{зам}^{эм}(p)}. \quad (3.16)$$

Но требуемую ПФ разомкнутой системы при заданной ММ ОУ можно получить, только включив в контур САУ такое управляющее устройство $W_{yy}^{эм}(p)$, которое обеспечит решение поставленной задачи. Иными словами

$$W_{раз}^{эм}(p) = W_{об}(p) \cdot W_{yy}^{эм}(p), \quad (3.17)$$

и ПФ требуемого УУ может быть вычислено по формуле

$$W_{yy}^{\vartheta m}(p) = \frac{W_{зам}^{\vartheta m}(p)}{W_{об}(p) \cdot (1 - W_{зам}^{\vartheta m}(p))}. \quad (3.18)$$

Структура формулы (3.18) показывает, что вычисляемая по ней ПФ последовательного УУ всегда будет реализуемой дробно-рациональной функцией, если реализуема $W_{зам}^{\vartheta m}(p)$. Следовательно, в представленной дробно-рациональной функцией эталонной ПФ

$$W_{зам}^{\vartheta m}(p) = \frac{M^{\vartheta m}(p)}{N^{\vartheta m}(p)} \quad (3.19)$$

должны выполняться условия

$$\dim(N) \geq \dim(M), \quad (3.20)$$

где $\dim(\bullet)$ - порядок полинома.

Подставляя (3.19) в (3.15), можно получить полиномиальную запись эталонной ПФ разомкнутой системы

$$W_{раз}^{\vartheta m}(p) = \frac{M^{\vartheta m}(p)}{N^{\vartheta m}(p) - M^{\vartheta m}(p)} = \frac{M^{\vartheta m}(p)}{G^{\vartheta m}(p)}, \quad (3.21)$$

где $G^{\vartheta m}(p)$ - характеристический полином разомкнутой системы.

Замкнутая САУ с условно единичной обратной связью по технологическому назначению должна быть, во-первых, асимптотически устойчивой статической системой, а, во-вторых, повторять задающий сигнал без установившейся ошибки. Такое условие означает, что $N^{\vartheta m}(p)$ и $M^{\vartheta m}(p)$ могут быть представлены как полные полиномы канонического вида, т.е.,

$$N^{\vartheta m}(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + 1; \quad (3.22)$$

$$M^{\vartheta m}(p) = b_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + a_1 \cdot p + 1, \quad (3.23)$$

где, с учетом (3.20), $m \leq n$.

Структура характеристического полинома $N^{\vartheta m}(p)$ определяется его порядком n , который выбирается из условия физической реализуемости замкнутой системы при заданной структуре ПФ объекта управления. Действительно, формула (3.21) отражает лишь связь ММ разомкнутой и замкнутой систем. Фактиче-

ская же структура разомкнутой системы задается формулой (3.17), полиномиальное представление которой может быть записано в виде

$$W_{\text{раз}}^{\text{эм}}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \cdot \frac{Q^{\text{эм}}(p)}{R^{\text{эм}}(p)}, \quad (3.24)$$

где $A(p), B(p), Q^{\text{эм}}(p), R^{\text{эм}}(p)$ - полиномы общего вида.

Тогда полиномиальная структура замкнутой системы примет вид

$$W_{\text{зам}}^{\text{эм}}(p) = \frac{A(p) \cdot Q(p)}{B(p) \cdot R(p) + A(p) \cdot Q(p)}. \quad (3.25)$$

Поскольку в формуле (3.24) неизбежно соблюдается условие $\dim(A) \leq \dim(B)$, а $\dim(Q) \leq \dim(R)$, то можно из (3.25) вывести естественные ограничения на выбираемый при синтезе порядок проектируемой системы n

$$n = \dim(B) + \dim(R) \geq \dim(B). \quad (3.26)$$

При синтезе УУ ориентируются, обычно, на предельный, в смысле физической реализуемости, случай $\dim(Q) = \dim(R)$. Кроме того, целесообразно учесть возможное сокращение полиномов $A(p)$ и $Q(p)$ с полиномами разложения знаменателя ^{*)}. Тогда можно использовать при синтезе и более мягкое [12], чем (3.26) ограничение следующего вида:

$$n \geq \dim(B) - \dim(A). \quad (3.27)$$

3.2.2. Основные параметрические условия синтеза. Параметры характеристического полинома $N^{\text{эм}}(p)$ выбираются, исходя из требований к собственным свойствам замкнутого контура - устойчивости и качественных показателей свободного возмущенного движения системы. Возможные методики решения этой задачи рассматриваются в последующих разделах пособия.

Полином $M(p)$ влияет только на качество вынужденных переходных процессов в САУ по каналу внешнего управления и упомянутыми методиками

^{*)} Следует помнить, что пользоваться подобными сокращениями необходимо весьма осторожно. Сокращенная ПФ отражает лишь “вход-выходные” свойства системы только по исследуемому каналу, но ни в коем случае не отражает действительный порядок синтезированной системы, который в любом случае будет определяться равенством (2.11).

не учитывается. Поэтому некоторые аспекты его конструирования следует рассмотреть особо.

Во-первых, при канонической форме полиномов числителя и знаменателя функции (3.19) знаменатель ПФ разомкнутой системы, согласно (3.21), не имеет свободного члена. Следовательно, выбор канонической формы полиномов (3.22), (3.23) в $W_{зам}^{эм}(p)$ обеспечивает системе астатизм не менее первого порядка.

Во-вторых, если требуется обеспечение астатизма второго порядка, то должно дополнительно выполняться условие

$$b_1 = a_1 .$$

В общем случае, для получения заданного критериальной стратегией порядка астатизма V , необходимо при построении $W_{зам}^{эм}(p)$ выполнить параметрические условия

$$\forall i \leq v - 1 \Rightarrow b_i = a_i . \quad (3.28)$$

Таким образом, формируя полином $M^{эм}(p)$ в соответствии с условиями (3.28), можно формировать желаемый порядок астатизма проектируемой САУ. Возможно, также, заданием этого полинома, формировать статические замкнутые системы. Для этого необходимо выбирать неединичный коэффициент $b_0 = 1 - \delta$, где δ - допустимая установившаяся относительная ошибка управления выходной переменной. Причем, по очевидным условиям точности воспроизведения задания $\delta \ll 1$. Тогда замкнутая система будет, в соответствии с (3.19), иметь коэффициент передачи

$$k_{зам} = b_0 = 1 - \delta < 1 , \quad (3.29)$$

т.е., не полностью (с установившейся ошибкой) воспроизводить задающие воздействия ограниченной амплитуды.

Разомкнутая система и УУ при этом, согласно (3.20) и (3.17), будут иметь коэффициенты передачи

$$k_{pas} = \frac{1}{\delta} >> 1, k_{yy} = \frac{1}{\delta \cdot k_{ob}}, \quad (3.30)$$

где k_{ob} - коэффициент передачи ОУ.

Кроме требуемого порядка астатизма, система должна отвечать определенным условиям по перерегулированию [10]. С методикой выбора параметров полинома $M(p)$ для решения этой задачи можно познакомиться в монографии [12, стр.53].

Таким образом, видно, что основной задачей, которую необходимо решить при операторном подходе к синтезу по эталонным характеристикам - это нахождение $W_{зам}^{эм}(p)$. В общем случае, синтезировать эталонную ММ замкнутой системы можно в различных формах: в виде дифференциальных уравнений, передаточных функций или частотных характеристик. Поскольку основные показатели качества замкнутой системы оцениваются по переходному процессу, который является решением ДУ системы, наиболее удобно синтезировать желаемую ММ в виде вход-выходного ДУ, а к ПФ, при необходимости, переходить через преобразование Лапласа. Также возможно получение желаемых графических и аналитических частотных характеристик, от которых легко перейти к операторной форме записи.

Для иллюстрации применения рассмотренной методики ниже рассматривается задача синтеза ЗУ объектом с ПФ (2.5) из примера, приведенного в параграфе 2.2.

3.2.3. Пример операторного синтеза закона управления. Прежде всего необходимо определить структуру эталонной ММ проектируемой системы, т.е. выбрать порядок ХП ее ПФ. Чтобы неоправданно не увеличивать сложность УУ, зададимся значением $n = 2$, что удовлетворяет и условию (3.26), и условию (3.27).

Не владея пока регулярной методикой синтеза эталонных ММ, выберем, однако, пользуясь знанием свойств элементарных звеньев, ПФ второго порядка вида

$$W_c(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (3.31)$$

Формула (3.31) представляет собой передаточную функцию так называемого колебательного звена. Для выполнения заданных в примере технологических требований необходимо выбрать обеспечивающие их T и ξ . Пользуясь известным полуэмпирическим ограничением [10]

$$t_p \leq \lambda \cdot T; \lambda = 3 - 5,$$

и выбрав в связи с низким порядком $\lambda = 4$, получим $T = 1,75$.

Коэффициент колебательности выберем, исходя из того факта, что при значении $\xi = 0,825$ колебательное звено имеет переходный процесс, практически не имеющий перерегулирования.

Таким образом, окончательно получаем

$$W_{зам}^{эм}(p) = \frac{1}{3,06p^2 + 2,89p + 1}, \quad (3.32)$$

т.е. $N^{эм}(p) = 3,06p^2 + 2,89p + 1$ и $M^{эм}(p) = 1$.

Теперь, имея в виду, что в решаемом примере ПФ ОУ имеет вид

$$W_{об}(p) = \frac{2}{p^2 + 0,2p + 1}, \quad (3.33)$$

можно воспользоваться полученной выше формулой (3.25) и синтезировать ПФ УУ в виде реализуемого дробно-рационального выражения

$$W_{yy}^{эм}(p) = \frac{p^2 + 0,2p + 1}{2 \cdot (3,06p^2 + 2,89p)} = \frac{p^2 + 0,2p + 1}{6,12p^2 + 5,78p} = 0,17 \cdot \frac{p^2 + 0,2p + 1}{p \cdot (1,06p + 1)} \quad (3.34)$$

Сравнение (3.34) с (2.6) показывает, что при одинаковой структуре ПФ УУ их числители практически совпадают (задача этого полинома “подавить” естественную динамику ОУ). Однако коэффициенты знаменателей различаются значительно.

Анализ и сравнение переходного процесса на рис. 3.9,б и переходного процесса 2 на рис. 2.7 в синтезированных САУ показывает, что в обоих случаях они удовлетворяют поставленным технологическим требованиям, но во втором случае результат достигнут с помощью регулярной методики. Ее использование позволяет подойти к процедуре синтеза обдуманно, осознанно, решить задачу с меньшими затратами и большим эффектом. В случае необходимости появляется возможность варьирования параметров, определяющих характер протекания процессов в системе, например, показателя колебательности ξ .

Для наглядности можно показать, как этот показатель влияет на динамику системы. На рис. 3.9 представлены графики переходных процессов 1 и 3 для $\xi = 0,75$ и $\xi = 0,9$ соответственно. Из него видно, что при уменьшении величины ξ увеличивается перерегулирование, но уменьшается время переходного процесса ($t_p = 6$ с) и наоборот, при увеличении ξ перерегулирование уменьшается, но увеличивается время регулирования ($t_p = 8,25$ с).

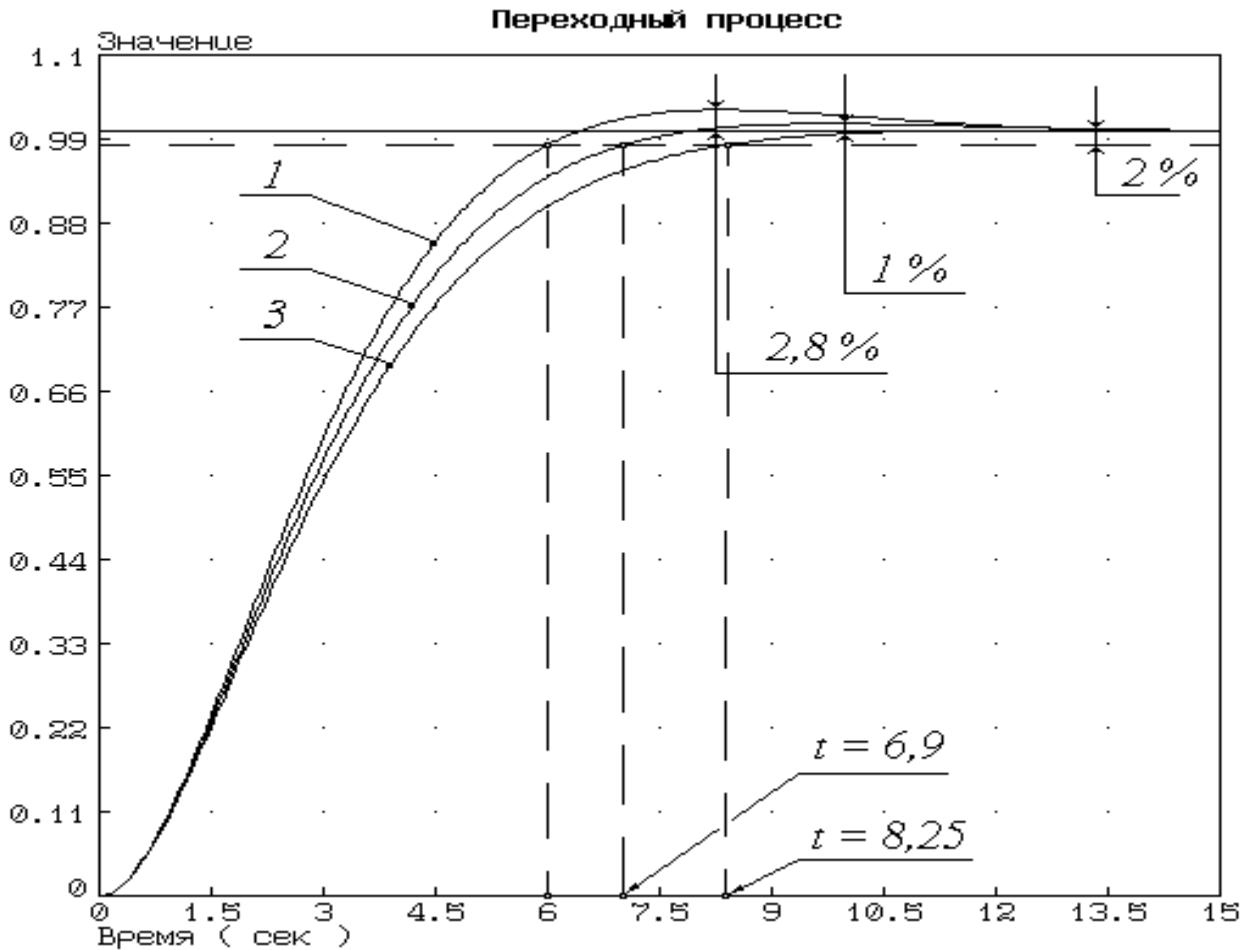


Рис. 3.9. Переходные процессы в САУ

В результате, ни тот ни другой вариант не удовлетворяет поставленным технологическим требованиям, но может оказаться приемлемым при других показателях качества в критериальной стратегии синтеза. Кроме того, их рассмотрение позволяет создать общую картину поведения системы в случае изменения исходных данных, что дает проектировщику возможность планирования результатов. Для нового варианта можно легко получить ПФ УУ синтезируемой системы по алгоритму, изложенному выше, например, для $\xi = 0,75$ и $\xi = 0,9$

желаемые передаточные функции управляющего устройства имеют вид $W_{\mathcal{H}c}^{yy}(p) = \frac{p^2 + 0,2p + 1}{6,12p^2 + 5,25p}$ и

$$W_{\mathcal{H}c}^{yy}(p) = \frac{p^2 + 0,2p + 1}{6,12p^2 + 6,3p} \text{ соответственно.}$$

Сравнение примеров настоящего параграфа и 2.2 позволяет сделать несколько важных выводов.

Во-первых, синтез автоматических систем любым регулярным методом (в частности, методом желаемых передаточных функций) гораздо эффективнее, чем нерегулярными, так как позволяет добиться любого достижимого результата с необходимой точностью при значительном уменьшении всех видов затрат.

Во-вторых, использование методологии эталонных ММ позволяет существенно расширить диапазон результатов синтеза, так как благодаря этому, появ-

ляется возможность направленного формирования как структуры, так и необходимых динамических свойств проектируемой системы.

3.3. Методы прямого преобразования дифференциальных уравнений

3.3.1 Метод отождествления высших производных. В инженерной практике используются методы синтеза ЗУ, ориентированные на дифференциальную форму описания. Распространение получил подход, который в постановке Л.М. Бойчука [38] будем называть методом отождествления высших производных (ОВП). Он позволяет проектировать как линейные, так и нелинейные системы управления, а также прост в использовании, и его можно эффективно применять в задачах синтеза на инженерном уровне. Поэтому в данном пособии он рассматривается достаточно подробно.

В соответствии с принятой в [38] постановкой задачи считается, что ММ объекта управления задается вход-выходным ДУ такого вида, при котором оно разрешается относительно высшей производной,

$$y_{o \delta}^{(n)} + \Phi_y^{o \delta} \left(\left\{ y_{o \delta}^{(i)} \right\} \right) = \Phi_u^{o \delta} \left(\left\{ u^{(i)} \right\} \right) + \Phi_v^{o \delta} \left(\left\{ v^{(i)} \right\} \right); \quad i = \overline{1, (n-1)}, \quad (3.35)$$

где (i) - символы производных переменных; $\{\cdot\}$ - их множества; $\Phi^{\delta o}(\cdot)$ - аддитивные, возможно, нелинейные дифференциальные операторы.

Рассматриваемая методика синтеза предполагает, что проектировщик имеет возможность каким-либо образом построить желаемые ДУ проектируемой системы. Будем считать, что желаемое уравнение проектируемой системы выбрано таким образом, чтобы его структура была аналогична по форме структуре ММ объекта (3.35). Тогда оно должно иметь вид

$$y_c^{(n)} + \Phi_y^c \left(\left\{ y_c^{(i)} \right\} \right) = \Phi_z^c \left(\left\{ z^{(i)} \right\} \right) + \Phi_v^c \left(\left\{ v^{(i)} \right\} \right). \quad (3.36)$$

где $\Phi^c(\cdot)$ - операторы ММ системы, структура которых считается заданной.

Тогда, приравнивая (отождествляя) высшие производные в уравнениях (3.35) и (3.36), можно получить выражение для необходимого ЗУ в следующей форме

$$\begin{aligned}\Phi_u^{o\delta}\left(\left\{u^{(i)}\right\}\right) + &= \Phi_z^c\left(\left\{z^{(i)}\right\}\right) + \left[\Phi_y^{o\delta}\left(\left\{y_{o\delta}^{(i)}\right\}\right) - \Phi_y^c\left(\left\{y_c^{(i)}\right\}\right)\right] + \\ &+ \left[\Phi_v^c\left(\left\{v^{(i)}\right\}\right) - \Phi_v^{o\delta}\left(\left\{v^{(i)}\right\}\right)\right].\end{aligned}\quad (3.37)$$

В системе с объектом, ММ которого имеет вид (3.35), заданный в неявной форме закон управления (3.37) обеспечит желаемые свойства, определяемые уравнением (3.36). Необходимость формирования ЗУ в виде (3.37) проверяется его подстановкой в (3.35). Достаточность - обеспечивается некоторыми дополнительными свойствами оператора $\Phi_u^{o\delta}(u)$.

Имея в виду, что в построенной системе (см. рис. 1.3) $y_{o\delta} \equiv y_c$, т.е. выходные переменные объекта являются одновременно и выходными переменными системы, а также, полагая оператор $\Phi_u^{o\delta}$ обратимым, можно получить выражение, непосредственно задающее закон формирования управляющего воздействие на входе объекта

$$\begin{aligned}u &= (\Phi_u^{o\delta})^{-1} \left\{ \Phi_z^c(z) + \left[\Phi_y^{o\delta}(y) - \Phi_y^c(y) \right] + \left[\Phi_v^c(v) - \Phi_v^{o\delta}(v) \right] \right\} = \\ &= (\Phi_u^{o\delta})^{-1} \left[\Phi_z^c(z) + \Phi_y^{pe\delta}(y) + \Phi_v^{pe\delta}(v) \right].\end{aligned}\quad (3.38)$$

В (3.38) обозначения множеств опущены для лаконичности записи.

Таким образом, синтезированное ЗУ оказывается функцией цели управления, выходной переменной и действующего измеряемого возмущения. Непосредственная подстановка (3.38) в (3.35), как и для формы (3.37), дает выражение (3.36), т.е. уравнение желаемой системы. Это подтверждает правомерность (в смысле математической необходимости) полученного результата. Его достаточность определяется обязательным условием взаимной однозначности $\Phi_u^{o\delta}$.

Практически важным и наиболее распространенным на практике является частный случай уравнения (3.35), когда дифференциальные операторы $\Phi(\bullet)$ содержат только линейные составляющие. В этом случае и ММ системы чаще всего задается в классе линейных операторов. Кроме того, желаемыми линейными операторами в (3.36) можно ограничиться и при синтезе управления нелинейным объектом. Это приведет, в соответствии со структурой (3.38), к появлению в ЗУ

нелинейных составляющих, которые скомпенсируют нелинейность динамики ОУ и обеспечат линейность поведения САУ в целом.

В полностью линейном варианте уравнения управляемого объекта и проектируемой системы принимают в операторной форме следующий вид:

$$\left(p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot p^i \right) \cdot y(p) = \left(\sum_{i=0}^r b_i \cdot p^i \right) \cdot u(p) + \left(\sum_{i=0}^q e_i \cdot p^i \right) \cdot v(p); \quad (3.39)$$

$$\left(p^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot p^i \right) \cdot y(p) = \left(\sum_{i=0}^s d_i \cdot p^i \right) \cdot z(p) + \left(\sum_{i=0}^q f_i \cdot p^i \right) \cdot v(p), \quad (3.40)$$

где a_i, b_i, e_i - коэффициенты в операторах левой и правой частей ММ объекта управления при y, u, v соответственно для приведенной формы записи характеристического полинома; c_i, d_i, f_i - аналогичные коэффициенты в уравнении системы (d принадлежит оператору воздействия задания Z); r, n, q и s, n, q - порядки соответствующих операторов.

Тогда выражение для закона управления задается выражением

$$\begin{aligned} u(p) &= \left(\sum_{i=0}^r b_i \cdot p^i \right)^{-1} \left\{ \left(\sum_{i=0}^s d_i \cdot p^i \right) \cdot z(p) + \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot p^i - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot p^i \right] \cdot y(p) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=0}^q f_i \cdot p^i - \sum_{i=0}^q e_i \cdot p^i \right] \cdot v(p) \right\} = \left(\sum_{i=0}^r b_i \cdot p^i \right)^{-1} \left\{ \left(\sum_{i=0}^s d_i \cdot p^i \right) \cdot z(p) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot p^i \right) \cdot y(p) + \left(\sum_{i=0}^q g_i \cdot p^i \right) \cdot v(p) \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Отличительными особенностями рассмотренной методики являются несколько существенных моментов:

во-первых, результатом синтеза является ЗУ, замыкающий объект по выходным переменным, и, соответственно, замкнутая система управления;

во-вторых, при наличии в ММ ОУ измеряемых возмущений в результате синтеза получается система, теоретически к ним инвариантная или квазинвариантная (т.е., в общем случае, результат синтеза дает комбинированную систему регулирования);

в-третьих, соответствующим выбором эталонного уравнения системы можно в результате синтеза получить систему, обладающую, теоретически,

сколь угодно высоким порядком астатизма.

Перечисленные особенности являются достоинствами данного метода. Однако для него характерны также серьезные недостатки:

во-первых, результат синтеза - ЗУ - содержит высшие производные выходной переменой, в общем случае, вплоть до $(n - 1)$ -й, что делает его физически нереализуемым, а приближенная реализация с использованием динамических наблюдателей значительно увеличивает сложность системы;

во-вторых, дифференциальные операторы, обеспечивающие инвариантность системы к возмущению, также, обычно, физически нереализуемы и возможно построение лишь квазинвариантной системы;

в-третьих, астатизм, гарантированный видом эталонного ДУ, является, фактически, псевдоастатизмом, т.к. наличие неконтролируемых возмущений, неадекватность математической модели объекта, ошибка в реализации параметров настройки ЗУ приводят к потере системой астатических свойств и появлению неустранимой ошибки регулирования;

в-четвертых, еще одним существенным недостатком данного метода синтеза является его "отстраненность" от методики выбора эталонных математических моделей системы, что, в большинстве случаев, неоправданно усложняется закон управления.

По структуре результата, полученного в примере, видно, что если в желаемом уравнении можно выбрать $\gamma_1 = a_1$, закон управления упростится. Это показывает, что при синтезе желаемой ММ необходимо иметь возможность выбора структуры и параметров модели из некоторой допустимой области, так как это дает проектировщику шанс структурного упрощения ЗУ.

3.3.2 Пример синтеза ЗУ методом отождествления высших производных. Для иллюстрации возможностей изложенного подхода рассмотрим пример синтеза ЗУ инерционным объектом второго порядка, который описывается уравнением

$$y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_{01} \cdot y^{(1)} \cdot y = k_u \cdot u. \quad (3.42)$$

В соответствии с изложенными выше принципами формирования желаемых свойств проектируемой системы зададимся ее эталонной ММ в виде дифференциального уравнения второго порядка

$$y^{(2)} + \gamma_1 y^{(1)} + \gamma_0 y = \gamma_0 z. \quad (3.43)$$

Структура и параметры этого уравнения должны гарантировать заданные свойства САУ. Условие равенства коэффициентов обеспечивает в установившемся режиме $y = z$, а надлежащий выбор γ_0, γ_1 - требуемое качество (быстро-

действие, колебательность, перерегулирование).

Для уравнений (3.42), (3.43) высшей производной является $y^{(2)}$. Сопоставляя эти выражения с (3.35), (3.36), можно принять обозначения вида

$$\Phi_y^{\ddot{+}}(y) = a_1 y^{(1)} + a_{01} \cdot y^{(1)} \cdot y; \Phi_y^c(y) = \gamma_1 \cdot y^{(1)} + \gamma_0 y.$$

Тогда, используя (3.38), можно получить выражение, описывающее математическую структуру управляющего воздействия

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{k_u} \cdot (\gamma_0 z + a_1 y^{(1)} + a_{01} \cdot y^{(1)} \cdot y - \gamma_1 y^{(1)} - \gamma_0 y) = \\ &= \frac{\gamma_0}{k_u} \cdot \varepsilon + \frac{a_1 - \gamma_1}{k_u} \cdot y^{(1)} + \frac{a_{01}}{k_u} \cdot y^{(1)} \cdot y. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для реализации полученного ЗУ составляется схема формирования ММ САУ по структуре, аналогичная изображенной на рис. 2.6. В результате она приобретает вид, изображенный на рис. 3.10.

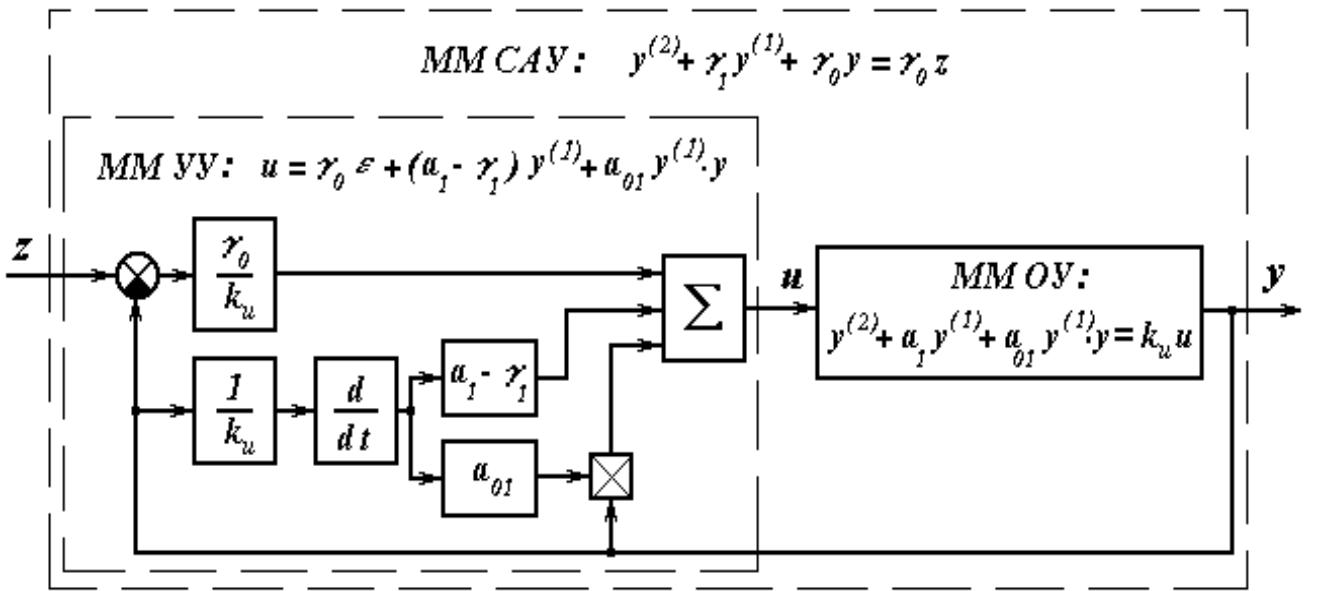


Рис. 3.10. Структура формирования синтезированных математических моделей ЗУ и САУ

3.3.3. Метод отождествления дифференциальных операторов. Более совершенным по сравнению с методом ОВП является метод отождествления дифференциальных операторов (ОДО), предложенный в работе [27]. Он основан

на более общем подходе, нежели отождествление высших производных, и ориентирован на подход, при котором дифференциальные уравнения объекта и системы содержат структурно и численно подобные дифференциальные составляющие. Математическая структура этих дифференциальных операторов может быть, в общем случае, и нелинейной.

В соответствии с принятой в [27] постановкой задачи считается, что ММ объекта управления задается вход-выходным ДУ такого вида, при котором оно разрешается относительно некоторого дифференциального оператора высшего (для данного выражения) уровня сложности,**

$$\Phi_{y\delta}^{o\delta}(y^{(j)}) = \Phi_u^{o\delta}(u) + \Phi_v^{o\delta}(v) - \Phi_{yH}^{o\delta}(y); \quad j = \overline{(r+1), n}, \quad (3.45)$$

где $\Phi_{y\delta}^{o\delta}(\cdot)$, $\Phi_{yH}^{o\delta}(\cdot)$ - дифференциальные операторы высокой и низкой сложности соответственно; r - максимальный порядок производной, не входящей в оператор высшей сложности.

Рассматриваемая методика синтеза предполагает, что проектировщик имеет возможность каким-либо образом построить желаемые ДУ проектируемой системы так, чтобы их структура была аналогична по форме структуре ММ объекта (3.45). Тогда оно должно иметь вид

$$\Phi_{y\delta}^c(y^{(j)}) = \Phi_z^c(z) + \Phi_v^c(v) - \Phi_{yH}^c(y); \quad i = \overline{(r+1), n}, \quad (3.46)$$

где $\Phi_{y\delta}^c(y^{(j)}) = \Phi_{y\delta}^{o\delta}(y^{(j)})$, а желаемые динамические свойства обеспечиваются операторами правой части.

Приравнивая (отождествляя) дифференциальные операторы высшей сложности в уравнениях (3.45) и (3.46), можно получить выражение для ЗУ в виде, аналогичном (2.22)

$$\Phi_u^{o\delta}(u) = \Phi_z^c(z) + \Phi_v^{o\delta}(v) - \Phi_v^c(v) + \Phi_{yH}^c(y) - \Phi_{yH}^{o\delta}(y). \quad (3.47)$$

Полагая, как и выше, оператор $\Phi_u^{o\delta}$ обратимым, можно получить выражение, непосредственно задающее закон формирования управляющего воздействия

** Под “уровнем сложности”, в данном случае, понимается оценка, порождаемая сопоставлением сложности технической реализации различных математических преобразований при построении устройства управления.

на входе объекта, но, в отличие от результата (2.23), включающее дифференциальные операторы от y невысокой (в определенном выше смысле) сложности реализации,

$$\begin{aligned} u &= (\Phi_u^{o\delta})^{-1} \left\{ \Phi_z^c(z) + \left[\Phi_{y_H}^{o\delta}(y) - \Phi_{y_H}^c(y) \right] + \left[\Phi_v^c(v) - \Phi_v^{o\delta}(v) \right] \right\} = \\ &= (\Phi_u^{o\delta})^{-1} \left[\Phi_z^c(z) + \Phi_{y_H}^{pe_2}(y) + \Phi_v^{pe_2}(v) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

При синтезе закона управления методом ОДО в ЗУ, в общем случае, входят производные выходного сигнала до r включительно, т.е. из ЗУ исключаются все производные более высокого порядка, входящие отождествляемые операторы высшей сложности.

3.3.4. Пример синтеза ЗУ методом отождествления дифференциальных операторов. Рассмотрим простой пример, который ограничен рамками линейных ММ лишь по той причине, что в данном пособии разрабатывается методика синтеза исключительно линейных моделей. Пусть объект управления описывается уравнением

$$5,6 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 14,0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3,8 \cdot \frac{dy}{dt} = 0,08 \cdot u. \quad (3.49)$$

Пусть технологические требования к системе автоматического управления заданы следующими показателями качества:

- время регулирования не более 18 секунд при 3-процентной трубке регулирования;
- перерегулирование не более 5 процентов.

Желаемое уравнение системы, сконструированное таким образом, чтобы показатели качества его решения отвечали заданной критериальной стратегии, имеет вид

$$a_3^c \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2^c \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1^c \cdot \frac{dy}{dt} + y = z, \quad (3.50)$$

где коэффициенты a_i заданы некоторой областью, причем при номинальных значениях $a_3^c = 3,2$; $a_1^c = 4,42$, коэффициент a_2^c может без потери технологи-

ческого качества варьироваться в диапазоне $a_2^c \in [1,7; 10]$.

Для наглядности на рис. 3.11 показаны графики переходных процессов в системе при граничных значениях a_2^c .

Для удобства исследования преобразуем уравнение (3.50) к безразмерному аргументу с помощью замены $t = 1,474 \cdot \tau$. Тогда оно примет вид

$$A_3^c \cdot \frac{d^3 y}{d\tau^3} + A_2^c \cdot \frac{d^2 y}{d\tau^2} + A_1^c \cdot \frac{dy}{d\tau} + A_0^c y = z, \quad (3.51)$$

где $A_3^c = A_0^c = 1$; $A_1^c = 3$; $A_2^c \in [0,78; 4,6]$.

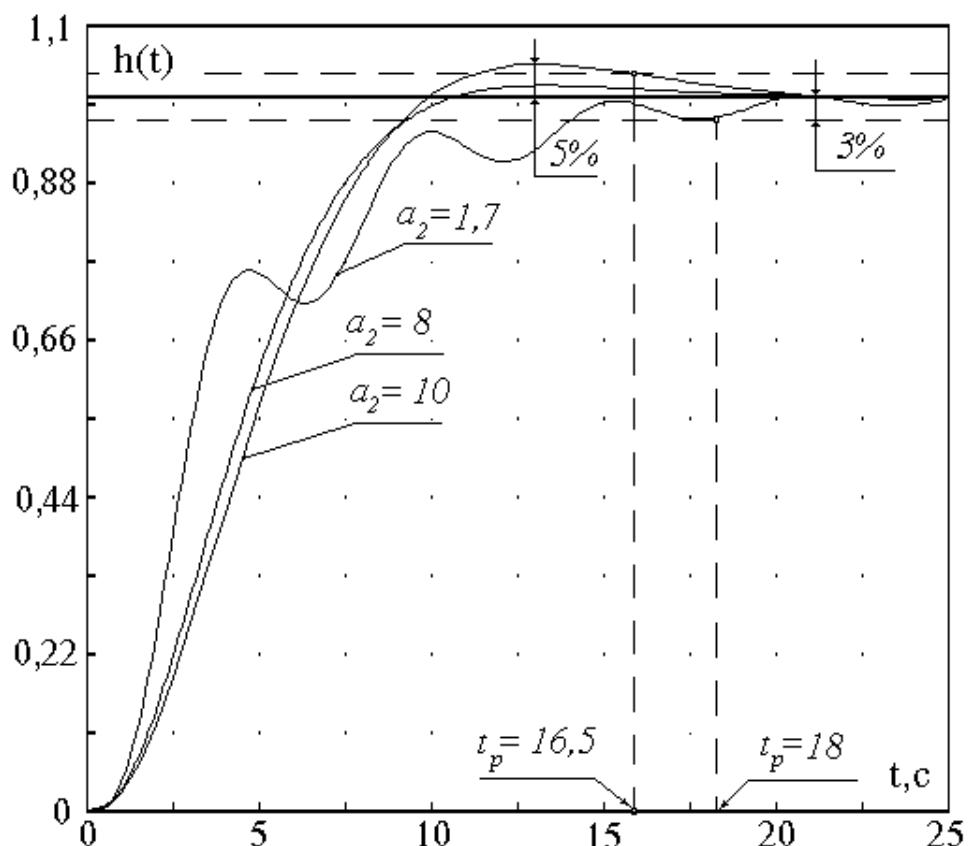


Рис. 3.11. Переходные процессы в САУ

Поскольку сопоставление и взаимная подстановка выражений возможна лишь при идентичности входящих в них переменных, применим аналогичное преобразование к (3.49). В результате будет получено выражение

$$1,75 \cdot \frac{d^3 y}{d\tau^3} + 6,44 \cdot \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2,58 \cdot \frac{dy}{d\tau} = 0,08 \cdot u .$$

В связи с тем, что методика отождествления в любом варианте требует равенства коэффициентов при высших производных, полученное уравнение необходимо преобразовать к следующему виду:

$$\frac{d^3 y}{d\tau^3} + 3,68 \cdot \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 1,47 \cdot \frac{dy}{d\tau} = 0,046 \cdot u . \quad (3.52)$$

Сопоставление уравнений (3.52) и (3.51) показывает, что имеет смысл выбрать $A_2 = 3,68$, так как оно, во-первых, соответствует диапазону значений, допустимому по критериальной стратегии, а, во-вторых, позволяет осуществить отождествление дифференциальных операторов: $y^{(3)} + 3,68y^{(2)}$. Таким образом, желаемое уравнение системы будет иметь вид:

$$\frac{d^3 y}{d\tau^3} + 3,68 \cdot \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 3 \cdot \frac{dy}{d\tau} + y = z , \quad (3.53)$$

Отождествление дифференциальных операторов уравнений (3.52) и (3.53) позволяет получить выражение для синтеза управления

$$0,046 u - 1,47 \frac{dy}{d\tau} = z - y - 3 \frac{dy}{d\tau} .$$

После масштабирования по амплитуде и обратного масштабирования по времени в соответствии с выражением

$$\tau = \frac{t}{1,474} ,$$

закон управления принимает вид:

$$u = 21,88 \cdot \left(\varepsilon - 2,25 \cdot \frac{dy}{dt} \right) . \quad (3.54)$$

Реализация синтезированного закона управления (3.54) позволит получить замкнутую автоматическую систему, которая будет описываться ДУ заданного выше вида (3.50)

$$3,2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 8,0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 4,42 \cdot \frac{dy}{dt} + y = z . \quad (3.55)$$

Из выражения (3.55) видно, что $a_2 = 8,0$, при этом переходный процесс в

системе (см. рис. 3.11) находится между процессами, определяющими границы технологических требований, что дает даже некоторый запас по качеству управления.

Выражение (3.54) представляет собой ЗУ и содержит только производную первого порядка. Если к (3.49) применить метод ОВП с произвольно выбранной желаемой ММ вида (3.50), например,

$$3,2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 6,52 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 4,42 \cdot \frac{dy}{dt} + y = z,$$

то закон управления будет иметь вид

$$u = 21,88 \cdot \left(\varepsilon - 2,25 \cdot \frac{dy}{dt} + 1,477 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right). \quad (3.56)$$

Не нужно доказывать, что (3.56) сложнее чем (3.54), так как в ЗУ включается производная второго порядка. В выражении же (3.54) она отсутствует из-за того, что входит в отождествляемый оператор. Следовательно, если иметь возможность выбора структуры и параметров желаемого уравнения системы, таким образом, чтобы включать в отождествляемый оператор наибольшее количество производных высокой сложности, то можно существенно упростить ЗУ, а, значит, и физическую реализуемость системы в целом.

4. СИНТЕЗ ЭТАЛОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЕКТИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПО ТИПОВЫМ ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССАМ

4.1. Теоретические основы метода

Наибольшее распространение в инженерной практике начального периода развития ТАУ получил метод типовых переходных процессов [1, 12]. Он удобен, нагляден, прост в использовании и не требует сложных математических и аналитических вычислений. Кроме того, по виду желаемого переходного процесса можно достаточно точно определить важнейшие показатели качества будущей системы. При синтезе САУ зачастую бывает достаточно ориентироваться на несколько типов переходных процессов, отличающихся перерегулированием и степенью затухания колебаний. Такой подход не только упрощает решение задачи, но и позволяет табулировать ММ по их количественным характеристикам, ориентируя проектировщика на выбор из ограниченного числа возможных решений.

Типизация переходных процессов основывается на однозначной связи параметров функций времени, являющихся решением ДУ, с характером (действительные, комплексно-сопряженные) и значениями корней его характеристического полинома (ХП). Эта связь хорошо иллюстрируется известной формулой разложения изображения по Лапласу переходного процесса динамического звена на сумму простых дробей [2,40]

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i}. \quad (4.1)$$

где A_i - специальным образом вычисляемые константы разложения; p_i - собственные числа ХП (как вещественные, так и комплексно сопряженные).

Соответственно, переходный процесс представляется выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^r A_i e^{\alpha_i t} + \sum_{i=1}^s 2 A_i e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \psi_i), \quad (4.2)$$

где r - число вещественных корней, s - число пар комплексно-сопряженных

корней; если n - степень характеристического уравнения, то $n = r + 2 \cdot s$.

Таким образом, каждый действительный корень определяет характер затухания соответствующей экспоненты, а действительные и мнимые части комплексно-сопряженных корней - затухающие синусоиды. В работе [1] показано, что если корни ХП связаны между собой каким-либо алгебраическим соотношением, то это соотношение не изменится в любом временном и амплитудном базисе. Поэтому характер распределения корней, заданный в некотором абстрактном базисе, выбранном для ММ проектируемой системы (этот прием называется нормированием), сохранится при переходе в реальную область посредством любых масштабных преобразований.

Нормирование как один из инструментов математического исследования широко применяется на практике. Оно используется во многих методах синтеза [1,12,24] и является составной частью методик, излагаемых в данной работе. В частности, этот прием был использован при решении задачи синтеза в примере, иллюстрирующем материал параграфа 3.2. Поэтому основные закономерности этой процедуры необходимо рассмотреть более подробно.

Возможно нормирование как статических, так и динамических свойств, отражаемых ММ объекта или системы. Нормирование статических свойств сводится к замене выходной переменной y в уравнениях (3.39, 3.40) пропорциональной ей величиной x по формуле

$$y = y_H \cdot x, \quad (4.3)$$

где y_H выбирается из условия равенства коэффициентов при низших производных переменных правой и левой частей уравнений (3.39, 3.40).

Для статических объектов эту процедуру можно свести к делению правой и левой части математической модели на величину коэффициента передачи объекта или системы (т.е. необходимо принять $y_H = k$). В результате такого преобразования нормированная ММ приобретает единичный и безразмерный коэффициент передачи.

Нормирование динамических свойств сводится к выбору характерного для

данного объекта отрезка t_h времени t , который рассматривается как единица измерения этой переменной

$$t = t \cdot \tau \quad (4.4)$$

В результате, ничем качественно не отличаясь от реальной (рис. 4.1a), характеристика нормированной ММ оказывается построенной относительно условного безразмерного времени τ , как это показано на рис. 4.1б для переходного процесса изменения безразмерной переменной x .

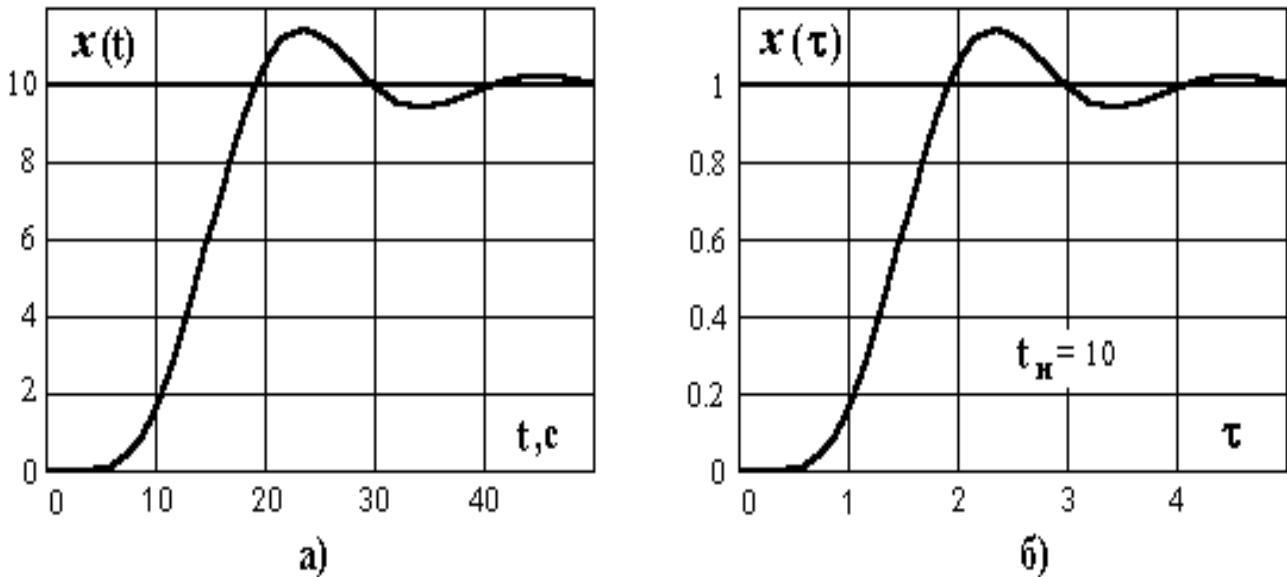


Рис. 4.1. Реальный (а) и нормированный (б) переходные процессы динамического звена

Каждая единица в этом условном времени равна выбранному базовому отрезку t_h . В результате возникает возможность строить на одном графике и качественно исследовать кардинально различные по быстродействию переходные процессы. При этом размер оси абсцисс и, соответственно, условное время решения дифференциального уравнения исчисляются несколькими единицами, что значительно упрощает расчеты и построения, а также повышает точность моделирования.

Основной задачей при динамическом нормировании является удачный выбор базового нормирующего отрезка времени t_h . Свобода его выбора позволяет,

параллельно основной, сформулировать задачу понижения за счет нормирования размерности параметрического пространства исследуемой математической модели.

Для наглядного пояснения процедуры нормирования рассмотрим простой пример. Пусть некоторая динамическая система описывается ДУ звена первого порядка:

$$T \frac{dy}{dt} + y = ku. \quad (4.5)$$

Выберем в качестве нормирующего амплитудного коэффициента $y_H = k$, а в качестве нормирующего отрезка $t_H = T$. Тогда (4.5) примет вид

$$\frac{d(y/k)}{d(t/T)} + \frac{y}{k} = \frac{dx}{d\tau} + x = u,$$

где $\tau = \frac{t}{T}$ - безразмерное время; $x = \frac{y}{k}$ - безразмерная переменная.

Очевидно, что нормированная передаточная функция любой системы описываемой ДУ структуры (4.5) всегда будет иметь вид

$$W_A^n(p) = \frac{1}{p+1}. \quad (4.6)$$

а параметрическое пространство этой структуры - нулевую размерность.

Таким образом, ПФ (4.6) есть нормированная ММ в виде апериодического звена первого порядка с коэффициентом усиления и постоянной времени равными единице независимо от реальной инерционности, физических величин и интенсивности влияния входного воздействия на выходную переменную того процесса, объекта или системы, которую эта модель описывает.

Для ДС произвольного порядка понижение размерности параметрического пространства ММ при ее нормировании удобно производить таким образом, чтобы единичным стал не только свободный член характеристического полинома ДУ (это достигается нормированием по амплитуде выходной переменной), но и коэффициент при высшей производной. Следовательно, нормированный ХП в ММ исследуемой системы должен иметь вид

$$s^n + a_{n-1}^H s^{n-1} + \dots + a_1^H s + 1 \quad (4.7)$$

При этом коэффициенты полинома (4.7) будут иметь значения, соизмеримые с единицей и в рамках исследуемого типа процессов сохранят определенный регулярный порядок возрастания и убывания для полинома любого порядка.

Таким образом, если ММ объекта управления представлена в операторной форме, то можно осуществить нормирование непосредственно характеристического полинома

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_i p^i + \dots + a_1 p + 1 \quad (4.8)$$

по формуле

$$p = p_H \cdot s, \quad (4.9)$$

Тогда связь между коэффициентами полиномов (4.7) и (4.8) с учетом нормирующего равенства (4.9) будет задаваться выражением

$$a_i^H = a_i \cdot p_H^i; i = 1 \dots n-1, \quad (4.10)$$

Аналогично, если имеется дифференциальное уравнение n -ого порядка, приведенное к каноническому виду (коэффициент при y равен единице)

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = k u, \quad (4.11)$$

то нормирование, в соответствии с изложенным выше подходом, осуществляется с помощью замены переменной по формуле (4.4)

$$\frac{a_n}{t_H^n} \cdot \frac{d^n x}{d\left(\frac{t}{t_H}\right)^n} + \dots + \frac{a_i}{t_H^i} \frac{d^i x}{d\left(\frac{t}{t_H}\right)^i} + K + \frac{a_1}{t_H} \frac{dx}{d\left(\frac{t}{t_H}\right)} + x = u$$

и приравнивания $\frac{a_n}{t_H} = 1$. Тогда $t_H = \sqrt[n]{a_n}$ представляет собой нормирующий отрезок реального времени.

В результате нормированное ДУ примет вид

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + a_{n-1}^H \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1^H \frac{dx}{d\tau} + x = u, \quad (4.12)$$

где

$$a_i' = t_h^{-i} \cdot a_i; i = 1..n-1. \quad (4.13)$$

Между нормирующими коэффициентами операторной и дифференциальной форм моделей существует однозначная взаимосвязь вида

$$p_h = t_h^{-1}. \quad (4.14)$$

Преимущество приема нормирования хорошо видно при сравнении выражений (4.7), (4.8) или (4.11), (4.12). Уменьшение количества коэффициентов уравнения на единицу упрощает методику подбора их желаемых значений. Особенно ощутим этот эффект при малых порядках*. Однако главное преимущество нормирования состоит в том, что оно делает исследования математических выражений универсальными.

Таким образом, ясно, что независимо от методики и математических форм решения задачи второго этапа, синтез желаемых ММ необходимо производить в нормированном виде, а затем, в соответствии с количественными и динамическими требованиями к САУ, осуществлять преобразование модели по амплитуде и аргументу. Поэтому после синтеза желаемой ММ в нормированном виде выбирают величины нормирующих коэффициентов, необходимых для возвращения ее в реальную физическую область. При этом все характерные свойства и показатели качества переходного процесса сохраняются, а меняется лишь масштаб их развертывания в физических шкалах измерения переменных и времени. Поэтому, например, время затухания переходного процесса напрямую зависит именно от выбранных масштабных коэффициентов, а не от нормированных значений корней.

Обратное преобразование нормированных результатов в любую реальную физическую область меняет только количественные характеристики структуры и решения ДУ (4.9), качественный же его вид (характер переходных процессов, вызванных одинаковыми воздействиями) остается неизменным. Например, если связь значений корней s_i ХП задана в безразмерном времени выражением

$$s_i = s_{i-1} + \Delta s,$$

то замена s по формуле (4.11) дает выражение

$$p_i = k_h \cdot s_{i-1} + k_h \cdot \Delta s = p_{i-1} + \Delta p.$$

* Так, ДУ третьего порядка можно исследовать на параметрической плоскости, а четвертого - в трехмерном параметрическом пространстве, что не так уж сложно при современных возможностях компьютерной графики.

В связи с таким подходом, в работах [1,12] теоретически исследованы четыре основных типа переходных процессов (ПП):

- апериодический ПП при максимальной степени устойчивости;
- колебательный ПП с критическим затуханием;
- колебательный ПП с минимальным временем регулирования;
- колебательный ПП, соответствующий так называемому “идеальному фильтру”[16].

При выделении этих процессов и использовании их для синтеза желаемых ММ основополагающими являются следующие факторы:

- 1) связь качественных показателей переходного процесса с величиной и законом распределения корней характеристического уравнения системы на комплексной плоскости;
- 2) регулярный характер изменения как расположения корней ХП на комплексной плоскости, так и распределения его коэффициентов с повышением порядка для данного вида процесса.

Методика выбора типа переходного процесса из предложенного набора в соответствии с критериальной стратегией проектирования САУ, а также методика дальнейшего использования синтезированного ХП для конструирования желаемой математической модели системы определяется содержанием последующих параграфов.

4.2. Синтез эталонных динамических характеристик замкнутых систем управления

4.2.1. Синтез апериодических динамических характеристик систем с максимальной степенью устойчивости. Апериодический переходный процесс соответствует такому варианту ХП ДС, когда все его корни представляют собой действительные числа. Поскольку значения корней нормированного ХП дополнительно характеризуются ограничением вида

$$\prod_{i=1}^n s_i = 1, \quad (4.15)$$

то часть из неравных корней обязательно расположена на отрезке $[-1, 0]$ действительной оси корневой плоскости, при этом для устойчивой системы наименьший из них по модулю

$$s_{\max} = \max \{s_i\} : s_{\max} = \eta > -1$$

характеризует степень ее устойчивости η [15, 17]. Естественный максимум η достигается при

$$s_i = s_j = 1 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4.16)$$

поэтому переходные процессы систем с нормированным ХП, отвечающим условию (4.16), называются процессами с максимальной степенью устойчивости (МСУ).

Нетрудно показать, что коэффициенты МСУ-полинома являются коэффициентами бинома Ньютона

$$(s+1)^n = s^n + A_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + A_1 \cdot s + 1. \quad (4.17)$$

Если в общем случае обозначить биномиальные коэффициенты через A_n^k (k -й коэффициент бинома Ньютона n -й степени), то можно предложить достаточно простую и удобную формулу нахождения биномиальных коэффициентов, вытекающую из важнейшего свойства их взаимозависимости. Оно заключается в следующем: сумма двух соседних коэффициентов в разложении $(s+1)^n$ равна

определенному коэффициенту в разложении $(s+1)^{n+1}$, т.е., в общем случае можно записать

$$A_n^k + A_n^{k+1} = A_{n+1}^{k+1}. \quad (4.18)$$

Пользуясь этим свойством, можно, отправляясь от известных коэффициентов $(s+1)^1$, получить путем сложения биномиальные коэффициенты для любого

порядка.

В следующем пункте в табл. 4.1 приведены биномиальные коэффициенты для данного типа переходного процесса A_1, A_2, \dots, A_{n-1} для $n = 1, 2, \dots, 10$. Если необходимо найти коэффициенты для ХП более высокого порядка, то это легко можно сделать, воспользовавшись выражением (4.17). Характер распределения корней для данного

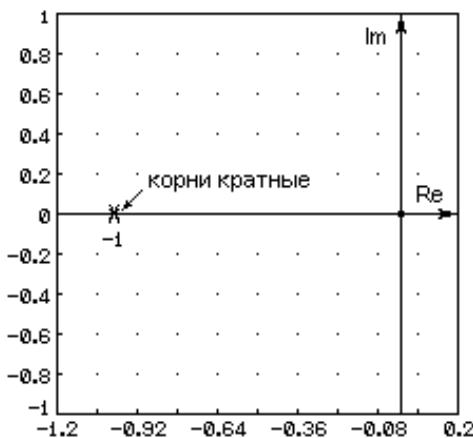


Рис. 4.2 Распределение корней МСУ-типа

типа переходного процесса представлен на рис. 4.2. Если в синтезируемой системе не допускается перерегулирования, то следует выбирать кривые, соответствующие кратным корням (МСУ). Кроме того, так как все корни кратные, то биномиальные коэффициенты могут быть рекомендованы для систем с ПФ, не имеющими нулей.

В цитированных работах [1,12] порядок ХП ограничивался шестым, в пособии же построены переходные процессы МСУ - типа для систем с порядком ХП до десятого (см. рис. 4.3,а), что облегчает проектировщикам использование метода для синтеза систем высокого порядка.

Кроме того, для удобства пользования на рис. 4.3,б показаны увеличенные фрагменты переходных процессов МСУ - типа, позволяющие с высокой точностью оценить время переходного процесса для $n = 1 \div 5$. На рис. 4.3,в даны аналогичные фрагменты точной оценки времени переходного процесса для $n = 6 \div 10$.

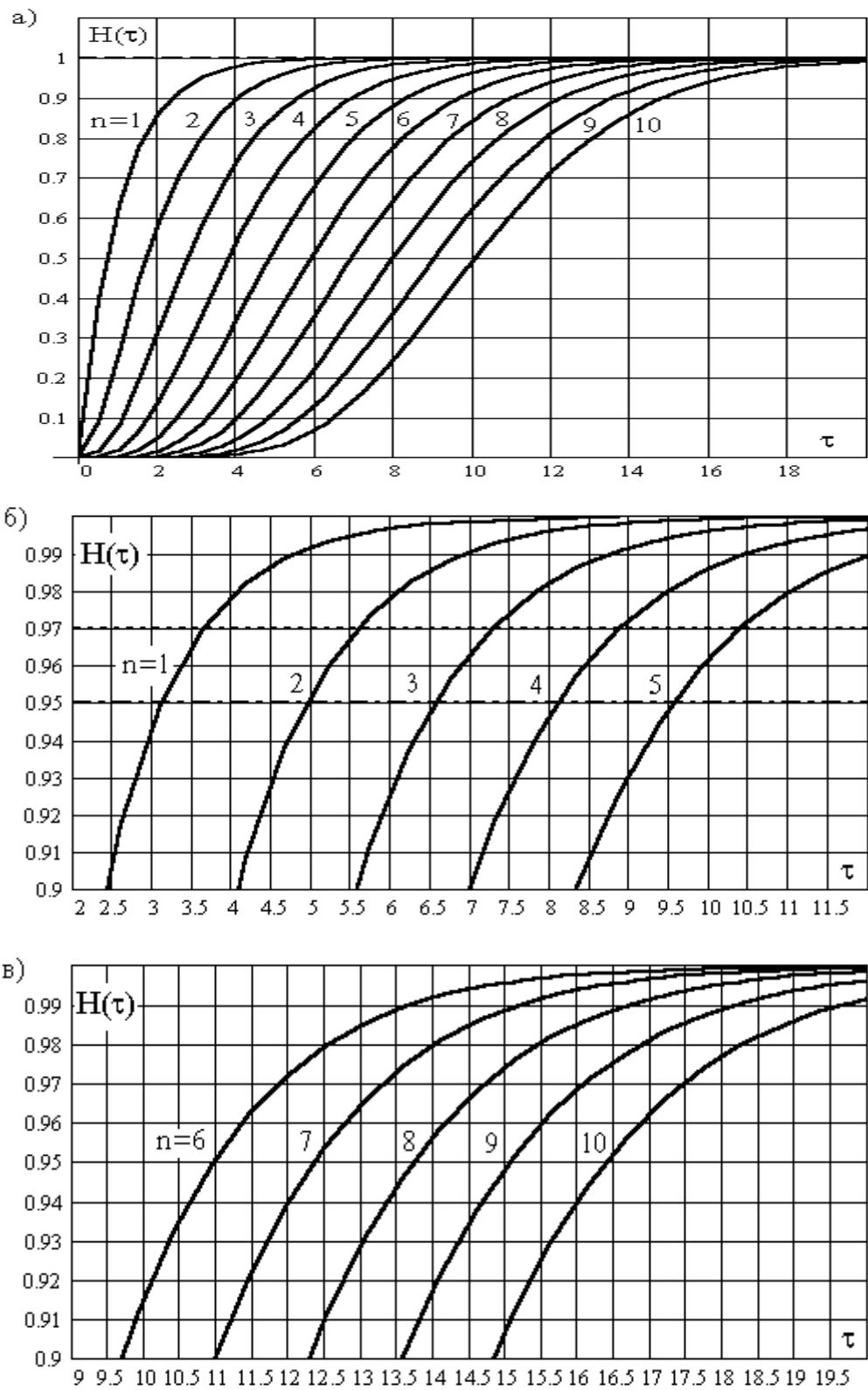


Рис. 4.3. Переходные процессы МСУ–типа

Для сетки графиков выбрана такая разбивка, которая позволяет воспользоваться любой трубкой регулирования из диапазона $\{1, 2, \dots, 10\}$, поскольку эта характеристика затухания ПП может значительно различаться при синтезе в зависимости от технологических требований к качеству управления объектом.

4.2.2. Синтез колебательных динамических характеристик систем

критического затухания. В работе [1] показано, что колебательный переходный процесс с критическим затуханием (КЗ - процесс) можно получить, если задаться кратным распределением комплексно-сопряженных корней, но не раскрыт алгоритм формирования конкретных значений корней и коэффициентов ХП. Для синтеза систем, порядок которых превышает максимальный порядок вариантов, табулированных в табл. 3.1, целесообразно такой алгоритм описать.

Предварительно необходимо напомнить, что для $n = 2$ колебательный переходный процесс реализуется звеном с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (4.19)$$

называемым колебательным звеном. Нормирование (4.19) по амплитуде ($y_H = k$) и абстрактной комплексно-сопряженной переменой $p = 1/T \cdot s$ приводит к выражению

$$W_k(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi \cdot s + 1}. \quad (4.20)$$

Отметим, что величина ξ , которую в ТАУ принято называть коэффициентом колебательности при нормировании, не изменилась. Это подтверждает тезис о том, что характерные свойства ММ (в данном случае степень затухания колебаний переходного процесса) при нормировании сохраняются. Очевидно, что колебательность процессов в рассмотренном звене определяется параметрами знаменателя (ХП)

$$\begin{aligned} H(s) &= s^2 + 2 \cdot \xi \cdot p + 1 = (s - \alpha_H + j\omega_H)(s - \alpha_H - j\omega_H) = \\ &= s^2 + 2 \cdot \alpha_H \cdot p + \alpha_H^2 + \omega_H^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Известно, что проявление колебательных свойств звена соответствует диапазону $\xi < 1$. Это хорошо видно при рассмотрении соотношений (4.21). Поэтому должно выполняться условие

$$\alpha^2 + \omega^2 = 1 \Rightarrow \alpha \leq 1; \omega \leq 1, \quad (4.22)$$

а для нормированного ХП получается, что $\alpha_H = \xi$. В дальнейших выкладках

нижний индекс “н” для обозначения нормированных компонент корня будет опускаться, так как рассматриваются только нормированные ХП.

Итак, согласно условию нормирования (4.22), $\alpha = \xi$ и является оценкой колебательности решения ММ второго порядка. При этом $\omega = \sqrt{1 - \alpha^2}$ задает частоту колебаний в нормированном времени τ .

Представление характеристического многочлена при $n > 2$ зависит от четности или нечетности n его порядка. Если n четное число, то он формируется произведением $n/2$ квадратных трехчленов. При n нечетном произведение $(n-1)/2$ квадратных трехчленов умножается на один двучлен первой степени. Для описания характеристического полинома в общем виде для четной и нечетной степеней можно предложить следующую форму записи

$$N(s) = (s \cdot v + 1) \prod_{i=1}^{(n-v)/2} (s^2 + 2 \cdot \alpha_i \cdot s + \alpha_i^2 + \omega_i^2). \quad (4.23)$$

В (4.23) для удобства введена дискретная переменная $v = (1 + (-1)^{n+1})/2$. В зависимости от четности или нечетности степени ХП она может равняться либо нулю, либо единице.

Каждый квадратный трехчлен образован парой корней и характеризуется затуханием $\xi_i = \alpha_i$ и собственной частотой ω_i . Если данная пара корней комплексная, $\xi < 1$, если - вещественная, то $\xi \geq 1$. Так как в рассмотренной нормированной форме представления ХП любого порядка свободный член всегда равен единице, то для его корней справедливо соотношение

$$\alpha_k^v \prod_{i=1}^{(n-v)/2} (\alpha_i^2 + \omega_i^2) = 1; \quad k = \frac{n-v}{2} + 1. \quad (4.24)$$

Целесообразно для (4.23) назначить такое распределение корней, при котором $\xi_i = 0,7 \div 0,8$ ^{**}. При этом для нечетного n свободный коэффициент двучлена, согласно (4.23), принимается равным 1. Тогда выражение (4.23) с учетом v приобретает следующий вид:

^{**} Такой выбор определяется необходимостью обеспечения наилучшей интенсивности затухания и колебательности переходного процесса в системе [2].

$$N_v(s) = (s \cdot v + 1)(s^2 + 1,5 \cdot s + 1)^{(n-v)/2} \quad (4.25)$$

На рис 3.4,а и б показано распределение корней ХП для четной и нечетной степеней соответственно, построенное по выражению (4.25).

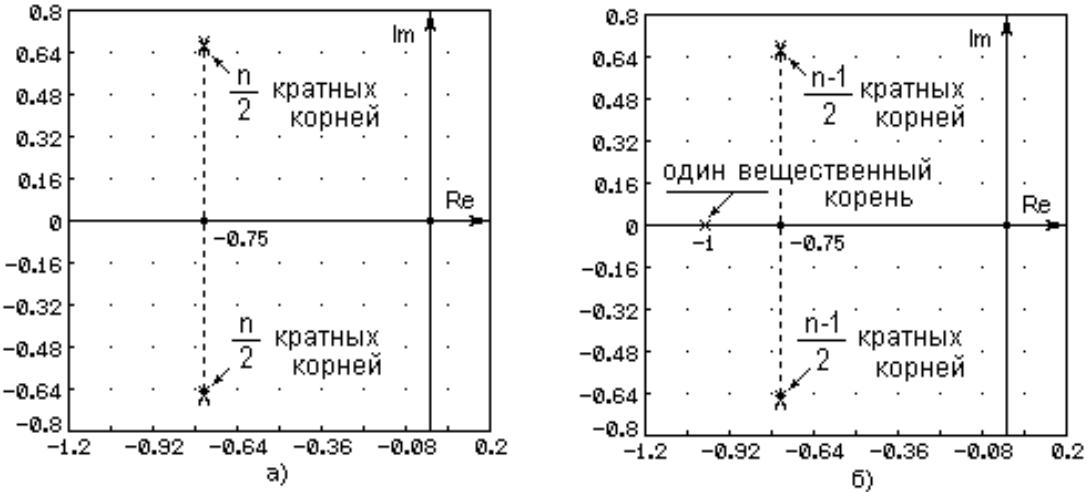


Рис. 4.4. Распределение корней полинома КЗ - типа

По выражению (4.25) можно построить необходимое распределение коэффициентов для ХП любого порядка, а, моделируя соответствующее уравнение, - график переходного процесса КЗ - типа. Кривые, соответствующие данному типу переходного процесса, выбираются в случае, когда допустимо небольшое перерегулирование.

В табл. 4.1 приведены коэффициенты нормированного уравнения A_1, A_2, \dots, A_{n-1} ($n = 1, 2, \dots, 10$) для описываемого типа распределения корней при $\xi = 0,75$. Для КЗ - процесса построены также графики переходных процессов до десятого порядка, приведенные на рис. 4.5а,б,в. На нем, как и на рис. 4.3, представлено по три графика: а) общий вид; б) фрагменты оценки времени переходного процесса для $n = 2 \div 6$; в) фрагменты оценки времени переходного процесса для $n = 7 \div 10$. Аналогично нанесена и сетка, позволяющая легко выбрать трубку регулирования и оценить нормированное время.

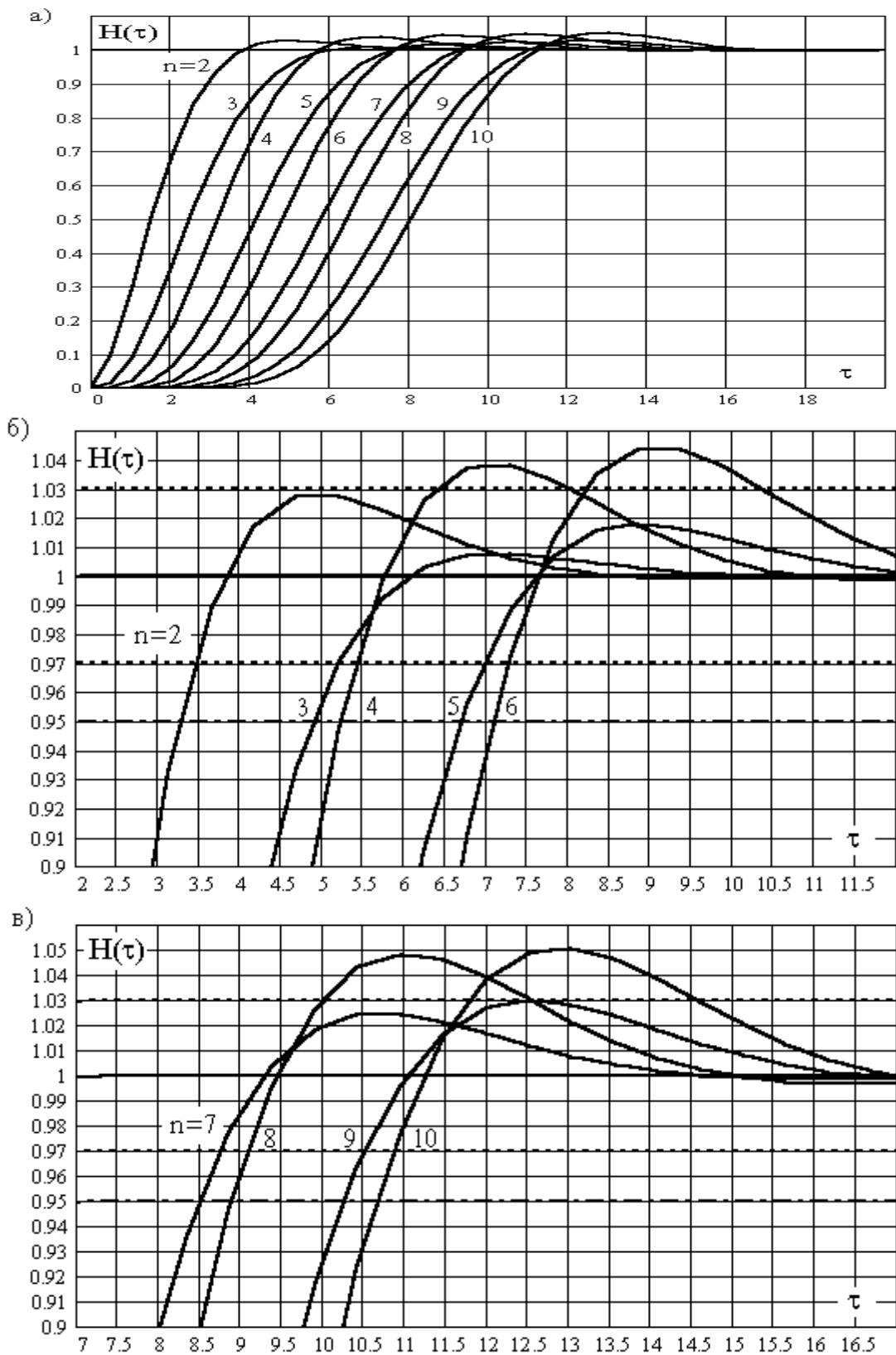


Рис. 4.5. Переходные процессы КЗ – типа

4.2.3. Синтез колебательных динамических характеристик систем минимального времени регулирования. Несколько меньшего, по сравнению с КЗ – типом, относительного времени регулирования можно достичь при некратном

распределении комплексных корней. Все комплексные корни (и один вещественный при n нечетном) располагаются на одинаковом расстоянии α_n от минимой оси. Мнимые части корней образуют арифметическую прогрессию с разностью ω_n и первым членом прогрессии также ω_n . При этом существует некоторое оптимальное отношение $m_n = \alpha_n / \omega_n$, которому соответствует наименьшее безразмерное время регулирования.

Воспользовавшись условием (4.19), можно получить соотношение

$$\alpha_n^{\nu} \prod_{i=1}^{(n-\nu)/2} \left[\alpha_n^2 + (i \cdot \omega_n)^2 \right] = 1. \quad (4.26)$$

Из выражения (4.26) можно выразить α_n

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{(n-\nu)/2} \left[1 + (i/m_n)^2 \right]}}, \quad (4.27)$$

после чего ω_n легко находится из выражения $\omega_n = -\alpha_n / m_n$.

Далее, для нахождения нормированных коэффициентов можно воспользоваться выражением аналогичным (4.23), но адаптированным для данного типа распределения корней

$$N(s) = (s + \alpha)^{\nu} \prod_{i=1}^{(n-\nu)/2} \left(s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + \alpha^2 + (i \cdot \omega)^2 \right) \quad (4.28)$$

После раскрытия скобок находятся искомые нормированные коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_{n-1} ($n = 1, 2, \dots, 10$), которые представлены в табл. 4.1.

На рис 4.6а,б (n - нечетное, четное соответственно) показан характер распределения корней нормированного ХП, при котором обеспечивается минимальное время переходного процесса при небольшом перерегулировании.

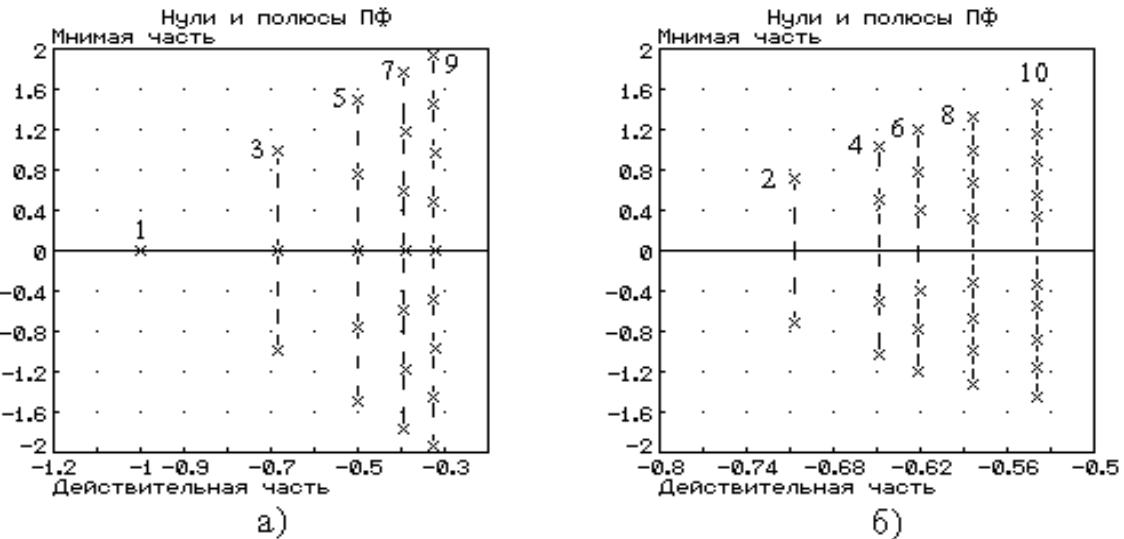


Рис. 4.6. Распределение корней полинома МВР - типа

Пользователям описываемого подхода к синтезу желаемых характеристик следует иметь в виду, что в работах [1, 12] допущены неточности. Некоторые значения нормированных коэффициентов для двух типов переходных процессов (критическое затухание ($n = 6$) и минимальное время регулирования ($n = 5, 6, 7, 8$)) указаны неправильно. Это приводит, при их использовании, к значительным отклонениям характера распределения корней на комплексной плоскости, и, как следствие, - характера протекания переходного процесса. Построенные по приведенным в [1] коэффициентам переходные процессы не соответствуют указанным в том же источнике графикам. Поэтому рекомендуется пользоваться табл. 4.1 настоящего пособия. Тем более, что исследования показали существенное влияние точности расчета нормированных коэффициентов на характер распределения корней ХП. При синтезе ХП необходимо учитывать не менее трех значащих цифр после запятой.

При решении задач синтеза следует иметь в виду, что МВР - тип переходного процесса выбирается в случаях, когда допустимо небольшое перерегулирование и необходимо максимальное быстродействие. На рис. 4.7 *a, б, в* показаны переходные процессы при некратном распределении комплексных корней. Кривые переходных процессов разделены на фрагменты из тех же соображений, что и на рис. 4.3, 4.5.

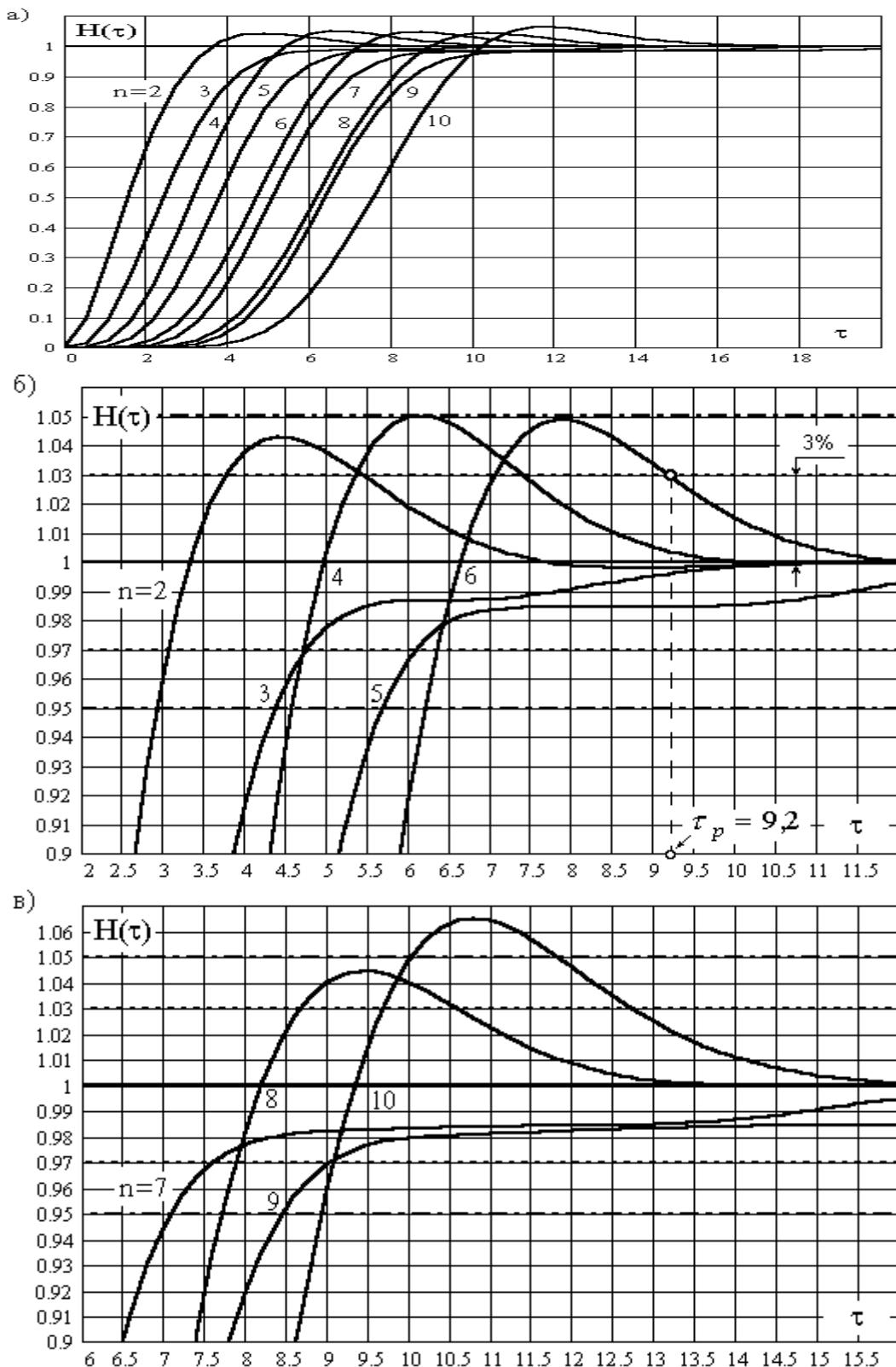


Рис. 4.7. Переходные процессы МВР - типа

4.2.4. Синтез колебательных динамических характеристик систем типа «идеального фильтра». Типовой переходный процесс, значительно более колебательный, чем КЗ и МВР - типов предлагается в работе [12] под названием

идеального фильтра (ИФ). Этот процесс приемлем, если допустимы большие перерегулирования, что достаточно редко встречается в инженерной практике. Поэтому его рассмотрение в пособии осуществляется скорее как неотъемлемая часть существующего подхода [12].

Для ИФ - типа процесса распределение корней ХП на комплексной плоскости осуществляется по окружности единичного радиуса, причем, если провести линии через каждый из корней и начало координат, то комплексная плоскость поделится на сектора. Градусная мера дуги составляет постоянную величину для данной степени полинома и меняется при изменении степени. Количество секторов находится из выражения $2 \cdot n$, градусная мера дуги - по формуле $\frac{360}{2 \cdot n}$

(например, для ХП шестого порядка эта величина составляет 30°). Откуда нетрудно определить вещественные и мнимые части корней ХП любого порядка и, воспользовавшись известным выражением (4.19), найти коэффициенты нормированного ХП.

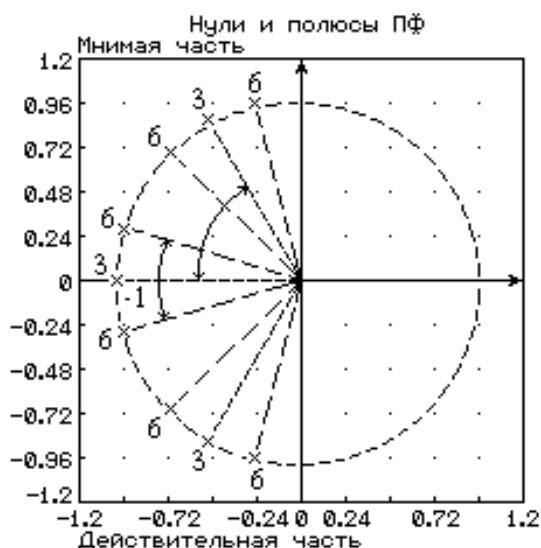


Рис. 4.8. Распределение корней ИФ - типа

рованного ХП.

На рис 4.8, на примере третьего и шестого порядков, показан характер распределения корней нормированного ХП соответствующего ИФ - типу процесса.

Следует отметить, что использование данного типового процесса допускается только в случае, когда в системе возможно наличие большого перерегулирования. В противном случае, рекомендуется использовать процессы МВР, КЗ, МСУ -типа.

Также следует иметь в виду, что для процессов ИФ - типа нецелесообразно рассматривать степень полинома выше шестого, так как при повышении порядка существенно возрастает перерегулирование, что недопустимо в реальных системах.

На рис. 4.9 a, b показаны переходные процессы, соответствующие идеаль-

ному фильтру (рис. 4.9 a - общий вид, рис. 4.9 b - фрагмент). Методика выбора нормированного времени аналогична описанной в пп. 4.2.1, 4.2.2, 2.2.3.

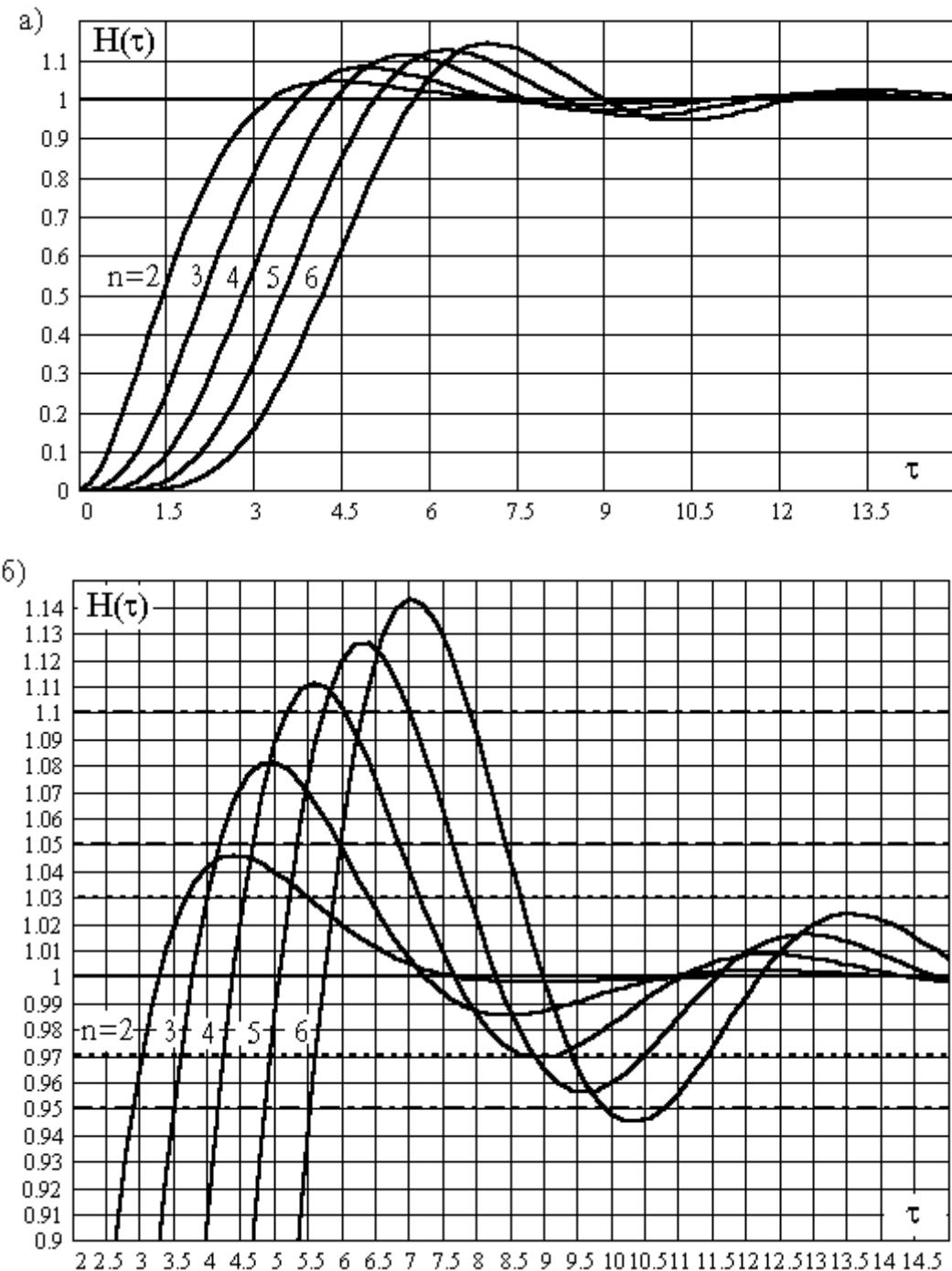


Рис. 4.9. Переходные процессы ИФ - типа

4.3. Синтез эталонных дифференциальных уравнений

по выбранным типовым переходным процессам

4.3.1. Методика синтеза. Методику синтеза желаемых ДУ на основе типовых переходных процессов можно разделить на несколько основных этапов, рассмотренных ниже.

1. Исходя из заданных показателей качества регулирования, необходимо выбрать тип переходного процесса в системе.

2. На основе исследования ММ объекта управления (неизменяемой части системы) выбрать желаемый порядок n ХП замкнутой системы (учитывается также требуемый порядок ее астатизма).

3. Для заданного n и выбранного типа процесса определяются значения коэффициентов нормированного ХП $a_1^H, a_2^H, \dots, a_{n-1}^H$. Для этого можно воспользоваться либо готовыми данными, занесенными в табл. 4.1, если переходный процесс выбран по рис. 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, либо приведенными в пособии аналитическими выражениями (если степень ХП выше десятой).

4. По имеющемуся или построенному графику переходного процесса и заданной трубке регулирования определяется нормированное время затухания переходного процесса τ_p .

5. По заданному в числе критериев качества желаемому времени регулирования t_p и τ_p вычисляется коэффициент нормирования по времени t_H .

6. По формулам (4.8б) или (4.12) значения a_i^H пересчитываются в значения a_i и находится ХП системы в реальном масштабе времени.

7. На последнем этапе синтеза строится переходный процесс в системе, и производится его анализ.

Как отмечалось ранее (пп. 4.2.1 - 4.2.4), на втором этапе синтеза необходимо воспользоваться данными табл. 4.1, где нумерация процессов соответствует, с использованием введенных выше сокращений, следующему порядку:

1 - МСУ - тип; 2 - КЗ - тип; 3 - МВР - тип; 4 - ИФ - тип.

В табл. 4.1 приняты обозначения:

п - порядок характеристического полинома; **тп** - тип процесса.

Таблица 4.1.

		Коэффициенты характеристического полинома												
п	тп	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
		1												
1	2	1	1											
		3												
		4												
		1	2											
2	2	1	1,5	1										
		3	1,414											
		4	1,4											
		1	3	3										
3	2	1	2,5	2,5	1									
		3	2,399	2,058										
		4	2	2										
		1	4	6	4									
4	2	1	3	4,25	3		1							
		3	2,787	3,83	2,592									
		4	2,6	3,4	2,6									
		1	5	10	10	5								
5	2	1	4	7,25	7,25	4								
		3	3,641	5,415	5,278	2,49								
		4	3,24	5,24	5,24	3,24								

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			1	6	15	20	15	6				
6	2	1		4,5	9,75	12,375	9,75	4,5		1		
	3			4,179	8,553	10,27	7,991	3,726				
	4			3,86	7,46	9,13	7,46	3,86				
	1			7	21	35	35	21	7			
7	2	1		5,5	14,25	22,125	22,125	14,25	5,5		1	
	3			4,876	10,155	14,299	11,7	8,117	2,751			
	4											
	1			8	28	56	70	56	28	8		
8	2	1		6	17,5	31,5	38,063	31,5	17,5	6		1
	3			5,522	14,9	24,898	28,518	22,81	12,876	4,672		
	4											
	1			9	36	84	126	126	84	36	9	
9	2	1		7	23,5	49	69,563	69,563	49	23,5	7	
	3			6,093	16,228	29,623	33,558	32,24	18,928	10,865	2,916	
	4											
	1			10	45	120	210	252	210	120	45	10
10	2	1		7,5	27,5	63,75	102,813	120,09	102,813	63,75	27,5	7,5
	3			6,653	22,121	46,712	69,658	76,408	63,219	39,02	17,78	5,4
	4											

4.3.2. Примеры синтеза эталонного ДУ

Пример1. Пусть необходимо синтезировать дифференциальное уравнение третьего порядка, к решению которого предъявляются следующие технологические требования:

- максимальная степень устойчивости (перерегулирования $\sigma = 0$);
- время регулирования $t_p = 82$ с;
- трубка регулирования 1%.

1) Согласно технологических требований, предъявляемых к системе, можно выбирать переходный процесс с максимальной степенью устойчивости

(рис. 4.3 a, δ), соответствующий порядку эталонного ДУ.

2) Выбранной кривой переходного процесса соответствует ХП вида:

$$S^3 + 3 \cdot S^2 + 3 \cdot S + 1,$$

коэффициенты которого выбраны из табл. 4.1.

3) Теперь по рис. 4.7 δ для заданной трубы регулирования (1%) определяется нормированное время регулирования $\tau_p = 8,75$.

4) Далее, зная заданное (желаемое) и нормированное время регулирования, легко определить коэффициент нормирования по времени

$$t_n = \frac{t_p}{\tau_p} = \frac{82}{8,75} = 9,3714.$$

5) После чего пересчитываются значения a_i по формулам (4.11), (4.15).

$$a_1 = t_n \cdot a_1^n = 9,3714 \cdot 3 = 28,1143,$$

$$a_2 = t_n^2 \cdot a_2^n = 9,3714^2 \cdot 3 = 263,4710,$$

$$a_3 = t_n^3 \cdot a_3^n = 9,3714^3 \cdot 1 = 823,0333.$$

Таким образом, эталонное ДУ системы в реальном времени будет иметь вид:

$$823,0333y^{(3)} + 263,4710y^{(2)} + 28,1143y^{(1)} + y.$$

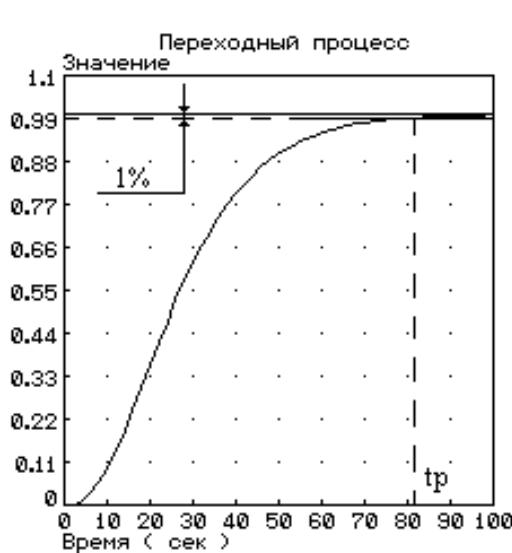


Рис. 4.11. Переходный процесс МСУ - типа

Для проверки правильности преобразований на рис. 4.10 построен переходный процесс эталонной системы. Из него видно, что поставленные технологические требования полностью удовлетворяются, а характер протекания переходного процесса совпадает с типовым для максимальной степени устойчивости (рис. 4.3 δ).

Пример 2. Пусть необходимо синтезировать дифференциальное уравнение шестого порядка, к решению которого предъявляются следующие технологические требования:

- величина перерегулирования переходного процесса не более 5%;
- минимальное время регулирования $t_p = 0,4$ с;
- трубка регулирования 3%.

1) Согласно технологических требований, предъявляемых к системе, можно выбирать переходный процесс с минимальным временем регулирования (рис. 4.7 a, b), соответствующий порядку желаемого ХП.

2) Выбранной кривой переходного процесса соответствует ХП вида:

$$S^6 + 3,726 \cdot S^5 + 7,991 \cdot S^4 + 10,27 \cdot S^3 + 8,553 \cdot S^2 + 4,179 \cdot S + 1,$$

коэффициенты которого выбраны из табл. 4.1.

3) Теперь по рис. 4.7 b для заданной трубы регулирования (3%) определяется нормированное время регулирования $\tau_p = 9,2$.

4) Далее, зная заданное (желаемое) и нормированное время регулирования, легко определить коэффициент нормирования по времени

$$t_r = \frac{t_p}{\tau_p} = \frac{0,4}{9,2} = 0,0435.$$

5) Следующим шагом является пересчет значений a_i по формулам (4.11), (4.15):

$$\begin{aligned} a_1 &= t_h \cdot a_1^H = 0,0435 \cdot 4,179 = 0,182, & a_2 &= t_h^2 \cdot a_2^H = 1,89 \cdot 10^{-3} \cdot 8,553 = 0,016, \\ a_3 &= t_h^3 \cdot a_3^H = 8,23 \cdot 10^{-5} \cdot 10,27 = 8,45 \cdot 10^{-4}, & a_4 &= t_h^4 \cdot a_4^H = 3,58 \cdot 10^{-6} \cdot 7,991 = 2,86 \cdot 10^{-5}, \\ a_5 &= t_h^5 \cdot a_5^H = 1,56 \cdot 10^{-7} \cdot 3,726 = 5,8 \cdot 10^{-7}, & a_6 &= t_h^6 \cdot a_6^H = 6,775 \cdot 10^{-9} \cdot 1 = 6,775 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Таким образом, эталонное ДУ системы в реальном времени будет иметь вид:

$$6,775 \cdot 10^{-9} p^6 + 5,8 \cdot 10^{-7} p^5 + 2,86 \cdot 10^{-5} p^4 + 8,45 \cdot 10^{-4} p^3 + 0,016 p^2 + 0,182 p + 1.$$

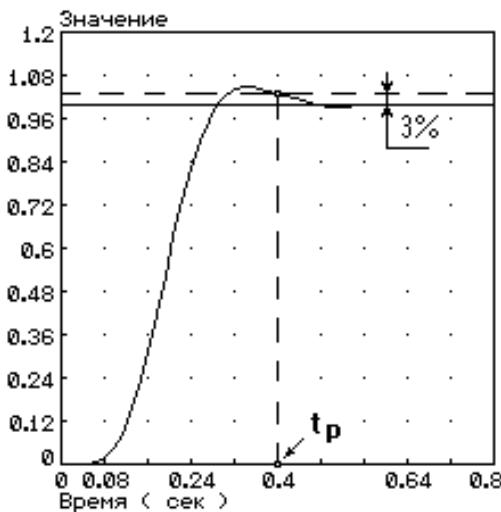


Рис. 4.11. Переходный процесс МВР - типа

Для данного примера также построен переходный процесс (см. рис. 4.11). Из него видно, что система удовлетворяет поставленным технологическим требованиям, и характер протекания переходного процесса полностью совпадает с типовым для минимального времени регулирования (рис. 4.7б).

По результатам построения эталонных ДУ на основе метода типовых переходных процессов можно сказать следующее. При нахождении реальных коэффициентов ХП для синтеза ЗУ и построении переходного

процесса в системе необходимо учитывать не менее пяти значащих цифр после запятой, так как это существенно влияет на точность построения и решения задачи в целом. Такая чувствительность метода к некоторым коэффициентам ХП является его серьезным недостатком и требует дополнительных исследований синтезированного ЗУ на робастность [10].

Предложенные примеры наглядно иллюстрируют не только возможности метода типовых переходных процессов, но и некоторые его недостатки. Например, при синтезе ММ системы не учитываются особенности модели объекта управления, для которого синтезирована САУ. Такой подход естественно усложняет, в общем случае, как структуру ЗУ, так и реализацию системы в целом. Однако метод хорошо разработан и до настоящего времени широко распространен в инженерной практике.

В настоящее время в русле исследуемой методологии появляются и быстро развиваются новые подходы, позволяющие решать задачи синтеза гораздо эффективнее, например, основанные на многовариантном подходе. Метод, базирующийся на исследовании допустимых областей в параметрическом пространстве синтезируемой ММ, рассмотрен далее.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ВОЗМОЖНОСТИ МНОГОВАРИАНТНОГО ПОДХОДА К СИНТЕЗУ ЭТАЛОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

5.1. Методологические аспекты проблемы

5.1.1. Структурно-параметрическая концепция синтеза.

В параграфах 1.1 и 3.3 в достаточно общем виде рассмотрены возможные математические формы представления ММ ОУ и САУ, а в параграфе 2.4 дана предельно обобщенная постановка задачи их синтеза по эталонным (желаемым) динамическим характеристикам. Нетрудно заметить, что при синтезе желаемого ДУ возникает задача выбора как его структуры, так и параметров. При этом очевидно, что для линейного ДУ вида (3.39) структура задается значениями порядков n, s, q дифференциальных операторов над переменными левой и правой частей уравнения, а параметры представляют собой соответственно n - вектор c , s - вектор d , и q - вектор f коэффициентов этих линейных операторов.

Таким образом, на языке теории множеств, задачу синтеза желаемых линейных ДУ вида (3.39) можно предельно абстрактно сформулировать следующим образом. Пусть задано некоторое множество троек

$$\Sigma_3 = \left\{ (n, s, q)_k : \forall n \in [0, N] \Rightarrow s, q \in [0, n]; k \in [0, C_{s,q}^n] \right\}, \quad (5.1)$$

которое рассматривается как совокупность возможных математических структур $\sigma_k = (n, s, q)_k$ вида (3.39). В записи (5.1) под $C_{s,q}^n$ понимается число возможных сочетаний целых $s, q \in [0, n]$ при $n \in [0, N]$, где N - предельный порядок уравнений, описывающих автоматические системы в реальной области техники. Каждая структура σ_k ММ вида (3.39) параметрически характеризуется точкой $\pi \in R^{3N}$, где R^{3N} - пространство вещественных чисел.

Пусть также известен набор возможных функций времени

$$(z(t), v(t)) \in C(0, T), \quad (5.2)$$

где $C(0, T)$ - пространство ограниченных непрерывных функций для рассматри-

ваемого в задаче синтеза отрезка $t \in [0, T]$; $z(t), v(t)$ - векторы задающих (управляющих по отношению к системе) и возмущающих воздействий.

Пусть, наконец, определены требования к качеству функционирования проектируемой системы управления, которые задаются системой функционалов, связанных в задаче проектирования САУ отношениями

$$Q = \{Q_i^o\}, \quad i = \overline{1, n_q}; \quad Q_i^o = Q_i^o(t, y, z, v); \quad \forall i = \overline{1, n_q} \Rightarrow Q_i^o \subseteq Q_i^{don} \quad (5.3)$$

При традиционной постановке задачи для ее решения, на стадии синтеза эталонной ММ, проектировщику необходимо отыскать точку $\pi \in R^{3N}$, задающую уравнение (3.39), решение которого $y(t)$ для входных воздействий $z(t), v(t)$ из класса (5.2) удовлетворяет условиям (5.3).

5.1.2. Концепция многовариантного синтеза. Заметим, что критериальные соотношения типа (5.3) изначально предполагают множественность решения задачи синтеза ММ. Существует множество различных $\sigma_k = (n, s, q)_k, k = \overline{1, K}$, задающих структурно различные варианты решения задачи синтеза закона управления, а также соответствующие им подобласти

$$P_k^n \subseteq R^n; P_k^s \subseteq R^s; P_k^q \subseteq R^q; P_k^n, P_k^s, P_k^q \subseteq R^{3N}; c \in P_k^n; d \in P_k^s; f \in P_k^q$$

параметрического пространства, каждая точка которых задает параметрически различные варианты соответствующей структуры. Разумеется практически значимыми являются точки π_i , координаты которых $(c, d, f)_i$ отличаются друг от друга на величину, превышающую реальную техническую погрешность настройки параметров ЗУ. Однако и при этом множественность решения остается и является качественным признаком постановки задачи.

Таким образом, в рассмотренной в данном пункте трактовке задачи синтеза находится такое подпространство $R^\sigma \subset R^{3N}$ и такая область $P_\sigma \subset R^\sigma$ в этом подпространстве, чтобы каждая его точка удовлетворяла поставленным критериальным ограничениям (5.3). Другими словами, при синтезе возникает задача выбора на множестве Σ_3 такой структуры $\sigma_k = (n, s, q)_k$ и соответствующих ей векторов c, d, f , при подстановке параметров которых в уравнение (3.39) полу-

чится ДУ, решение которого отвечает критериальной стратегии синтеза (5.3) [10].

Таким образом, для окончательного выбора единственного варианта решения задачи синтеза ЗУ наряду с естественными технологическими ограничениями к проектируемой системе нужно предъявить какие-либо дополнительные требования (стоимость, надежность, габариты, сложность и т.п.). Причем эти требования $Q^{\exists} = \{Q_i^{\exists}\}$ должны иметь экстремальный характер

$$J(Q^{\exists}) \rightarrow extr \quad (5.4)$$

Более подробно о возможных вариантах задания требований к качественным показателям функционирования проектируемой системы можно познакомиться в первой части пособия [10]. С конкретными видами функционалов качества и способами критериальной его оценки - в том же пособии и работах [1,2,40], а также в любом учебнике по теории управления.

Таким образом, технологически обусловленная постановка задачи синтеза ЗУ и, соответственно, эталонной характеристики САУ подразумевают два этапа: 1) определение допустимой области в структурно-параметрическом пространстве решений; 2) локализация решения на наилучших в некотором смысле структуре и параметрах динамической характеристики системы.

Однако практически все известные на сегодня методики построения эталонных характеристик изначально ориентированы на единственную ММ в качестве решения с жестко заданными структурой и коэффициентами. Исключение составляют несколько способов задания желаемых ЛАЧХ [14,17]. Однако достаточно однозначной методики выбора конкретного решения из множества возможных не дается. Поэтому конкретный результат синтеза является субъективным.

Таким образом, становится ясно, что основной трудностью решения задачи синтеза САУ на основе традиционных подходов является глубокое противоречие, заключающееся в несоответствии между “ограничительной” критериаль-

ной стратегией их синтеза [10] и “точечным” характером ее решения*) при построении эталонной математической модели САУ [1,12,40]. Поэтому в выборе рационального критерия структурно-параметрической оптимизации, разрешающего сложившееся методологическое противоречие, состоит одна из основных трудностей разработки универсальной процедуры синтеза эталонных ММ автоматических систем.

5.1.3. Критериальная концепция. Другой фундаментальной проблемой синтеза эталонных ММ САУ является выбор оценочных показателей соответствия динамических свойств решения ММ требованиям, обусловленным критериальной стратегией (5.3). Дело в том, что так называемая прямая оценка качества с помощью функционалов, построенных на результатах непосредственного решения системы ДУ для конкретных входных воздействий, весьма затруднительна и не слишком эффективна по двум причинам. Во-первых, решение ДУ высоких порядков с достаточной точностью даже на современной компьютерной базе является весьма ресурсо- и времязатратной задачей. Этот фактор становится решающим и предельно осложняет задачу оценки качества, а также формирования допустимой области при сформулированном выше многовариантном подходе**. Во-вторых, общая оценка качества при векторном характере глобального функционала затруднительна, особенно при большом количестве используемых показателей качества. Наиболее информативный в смысле общей оценки минимаксный критерий [18]

$$J = \min \max \{Q_i\} \quad (5.5)$$

имеет разрывную структуру относительно исследуемых решений и приводит к сложнейшим задачам так называемой “недифференцируемой” оптимизации. Ин-

*) Под “точечностью” решения понимается единственность выбранной структуры и ее параметров

**) Нужно заметить, что приведенный тезис не отрицает возможности решения поставленной задачи прямым моделированием САУ. Во многих случаях, когда косвенная оценка качества невозможна, например, при существенно нелинейных, распределенных моделях и тому подобное, этот путь оказывается единственно возможным. Кроме того, необходимо учитывать бурный прогресс компьютерной техники в плане увеличения быстродействия процессоров, создания параллельно работающих много-процессорных систем и наращивания ресурсов памяти

тегральные же функционалы нивелируют отдельные показатели, что делает неоправданными затраты и усилия по их расчету.

Таким образом, идея косвенной обобщенной оценки качества системы [10] оказывается не такой уж проигрышной. Это тем более относится к линейным системам, для которых давно доказана [1] четкая связь качества переходных процессов с видом, численными значениями и распределением корней ХП их ММ. В связи с этим на стадии изучения проблемы синтеза ЗУ и на инженерном уровне решения соответствующих задач целесообразно подробно исследовать корневые критерии, методы их задания и оценки.

5.1.5. Концепция динамического разделения задачи. Использование корневых критериев при решении поставленной задачи позволяет существенно облегчить процедуру синтеза ЗУ, особенно для систем высоких порядков, так как появляется возможность динамического разделения задачи. Известно, что при операторной форме записи ММ системы ее ХП можно представить как произведение k некоторых полиномов

$$H(p) = \prod_{j=1}^k H_j(p), \quad \sum_{j=1}^k n_j = n, \quad (5.6)$$

где n_j - порядок соответствующего H_j . Естественно, вариантов такого разбиения несколько, и вопрос эффективного разделения синтезируемой модели на последовательно включенные динамические звенья требует отдельного исследования. Однако некоторые основные их типы очевидны. Так, ХП можно разложить на произведение элементарных многочленов 1-го порядка

$$H(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i), \quad (5.7)$$

где p_i - корни ХП степени n [41].

Однако такое “дробление” проектируемого полинома вряд ли целесообразно. Во-первых, это требует раздельного выбора каждого корня, что затрудняет реализацию критериальной стратегии в целом. Во-вторых, при наличии пары комплексно-сопряженных корней удобней декомпозировать ХП на произведение

полиномов 1-го и 2-го порядков

$$H(p) = \prod_{i=1}^{n_k} (p^2 - 2 \cdot \alpha_i \cdot p + \alpha^2 + \omega^2) \cdot \prod_{i=1}^{n_v} (p - \beta_i) \quad (5.8)$$

где α_i, ω_i - вещественные и мнимые части комплексно-сопряженных корней; β_i - вещественные корни; n_k, n_v - число пар комплексно-сопряженных и вещественных корней соответственно. При этом $2 \cdot n_k + n_v = n$.

Наконец, в качестве варианта H_j может быть выбран полином третьего порядка. Этому также можно привести вполне очевидные основания: такой полином содержит, в общем случае, все возможные формы устойчивых корней, а при необходимости легко исследуется на качество решения, так как нормированное распределение трех его корней задается двумя коэффициентами (см. диаграмму Вышнеградского [1]). Дальнейшее повышение порядка отдельно синтезированного полинома вряд ли целесообразно, так как задача синтеза резко усложняется, а реальные случаи потребуют декомпозиции ММ максимум на три-четыре составляющих полинома не выше третьего порядка.

В результате, описанный подход позволяет упростить решение задачи синтеза ДУ высокого порядка, разделив его на более простые этапы. На первом этапе объект декомпозируется на несколько полиномов невысокого порядка (1-3) в зависимости от порядка ХП и характера распределения корней, причем лучше использовать полиномы максимально допустимого третьего порядка. После этого декомпозированные полиномы синтезируются по отдельности с учетом критериальных ограничений. На втором этапе производится композиция полученных полиномов, что приводит к формированию уравнения, свойства которого полностью удовлетворяют ограничениям поставленным на первом этапе.

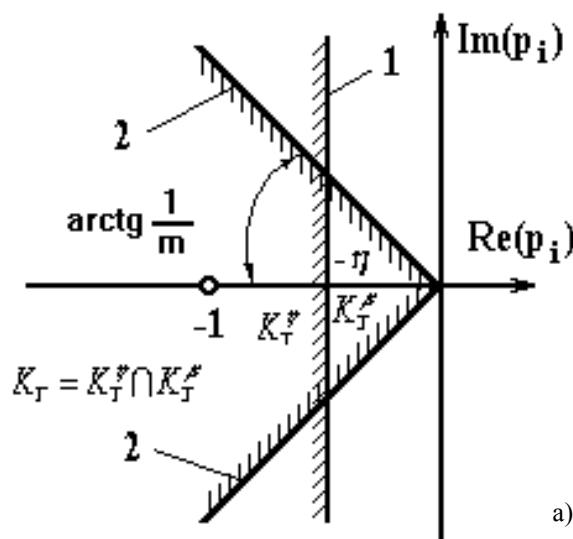
Для решения задачи первого этапа необходимо разработать и обосновать процедуру выбора параметров полиномов до третьего порядка включительно. Исследованию этого вопроса посвящен следующий параграф.

5.2. Технологически и математически допустимые области корневой плоскости характеристического полинома системы

5.2.1. Понятия “технологической” и “математической” допустимости.

Как указывалось в 4.1, характер протекания процессов в объекте, описанном ДУ (4.9), напрямую зависит от расположения корней ХП вида (4.7) или нормированного ХП вида (4.6). В главе 4 изложены методики, обобщающие и несколько расширяющие подход к задаче синтеза ММ с заданными динамическими характеристиками. Однако, как показано в 5.1, все эти методики резко ограничивают возможности проектировщика САУ, так как каждому типу и порядку ПП синтезируемой ММ соответствует жестко заданное распределение корней ХП (см. рис. 4.2, 4.4, 4.6, 4.8). В пункте 5.1.2 декларирован другой подход к задаче, когда ограничительная критериальная стратегия приводит к многовариантности решения.

В частности, при использовании корневых критериев можно ограничить область распределения корней на комплексной плоскости желаемыми рамками и добиться динамических свойств синтезируемой ММ. При этом возникает задача выбора вида такого ограничения. В работах [13, 15] используются подходы, основывающиеся на ограничении допустимой области распределения корней. Ограничения, например, на запас устойчивости или колебательность [15] имеют наглядную графическую интерпретацию. Границные линии 1 и 2 на корневой плоскости делят ее на допустимую (в сторону штриховки) и недопустимую области (см. рис. 5.1, а). Однако попытка отобразить эту технологически ограниченную область в порождающую ее параметрическую, например, в пространство коэффициентов ХП, наталкивается на внешне парадоксальную ситуацию: не все точки выделенной параметрической области отвечают исходным технологическим ограничениям. Это обусловливается тем, что ограничения другого рода, порождаемые математической структурой ХП, создают области, в которые корни не могут попасть, даже находясь внутри технологически допустимой области.



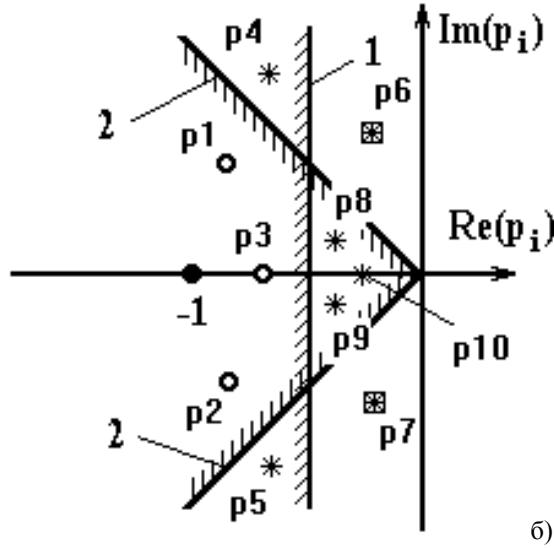


Рис. 5.1. Технологически допустимые области на корневой плоскости

Таким образом, технологически допустимая область может оказаться не вся математически допустимой. В известной литературе [1,2,13,14 и др.] этот факт никак не отражается. Встречаются даже иллюстрации ограничительного корневого подхода, когда параметрические области, в результате, строятся неправильно. Так, например, в работе [40] как технологически допустимая показана область, в которой легко выделить подобласть, совершенно не отвечающую заданным требованиям. Этот факт объясняется попыткой отобразить в параметрическом пространстве математически недопустимую область корневой плоскости.

Поэтому недостаточно найти связь между технологическими ограничениями на корневой плоскости и параметрическим пространством. Необходимо также найти алгоритм построения математически допустимых областей в корневой плоскости, т.е. в графической интерпретации, построить на корневой плоскости граничные линии такой области. Она содержит только то множество корней, которое удовлетворяет математической структуре ХП.

В результате, отображение пересечения технологически K_T и математически K_M допустимых областей корневой плоскости K в параметрическое пространство P должно дать область P_{don} , ограничивающую все корни ХП с технологических позиций:

$$K_{don} = K_T \cap K_M \rightarrow P_{don} \subset P. \quad (5.9)$$

Сама технологически допустимая область может являться пересечением областей K_T^i , выделяемых на основе ограничения частных показателей

$$K_T = \bigcap_i K_T^i. \quad (5.10)$$

Пример такого случая показан на рис. 5.1, а для двух ограничений.

В данном пункте критериальная стратегия корневой оценки качества синтезируемой ММ изложен на абстрактном уровне. Для лучшего понимания сущности проблемы рассмотрим ее составляющие подробнее.

5.2.2. Технологически допустимая область и ее составляющие. Широкое и вполне обоснованное распространение получили два вида технологических ограничения качества управления: степень устойчивости η и степень колебательности μ (см. рис. 5.1 - прямая 1 и ломаная 2 соответственно). При этом во многих источниках, например [13,15], принято последнее ограничение характеризовать декрементом затухания

$$m = \operatorname{Re}(p_i)/\operatorname{Im}(p_i) \Rightarrow \operatorname{Re}(p_i) = m \cdot \operatorname{Im}(p_i). \quad (5.11)$$

Однако для исследования корневой плоскости выражение (5.11) является не совсем удобным. При графической интерпретации (см. рис. 5.1) принято по оси ординат откладывать функцию - для корневой плоскости $\operatorname{Im}(p_i)$. Поэтому колебательность удобнее характеризовать параметром

$$\mu = 1/m \Rightarrow \operatorname{Im}(p_i) = \mu \cdot \operatorname{Re}(p_i). \quad (5.12)$$

Таким образом, наложенные на корни ХП ограничения по степени устойчивости η и степени колебательности μ выделяют на корневой плоскости некоторые области, заданные неравенствами

$$\begin{aligned} K_T^\eta &= \{p_i : \operatorname{Re}(p_i) \leq -\eta\}; & (a) \\ K_T^\mu &= \{p_i : \operatorname{Im}(p_i) \leq \mu \cdot |\operatorname{Re}(p_i)|\}. & (b) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из рисунка 5.1,б хорошо видно, что каждое из ограничений (5.13,а) и (5.13,б) допускает существование корней, не удовлетворяющих другому:

$$\begin{aligned} p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 &\in K_T^\eta; & p_1, p_2, p_3, p_8, p_9, p_{10} &\in K_T^\mu; \\ p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10} &\notin K_T^\eta; & p_4, p_5, p_6, p_7 &\notin K_T^\mu; \\ p_1, p_2, p_3 &\in K_T = K_T^\eta \cap K_T^\mu. \end{aligned}$$

Поэтому очевидно, что в реальных задачах их необходимо использовать в комплексе, т. е. требовать от корней ХП выполнения условия

$$\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow p_i \in K_T = K_T^\eta \cap K_T^\mu. \quad (5.14)$$

В общем случае, при задании q ограничений

$$K_T = (K_T^1, K_T^2, \dots, K_T^q) \quad (5.15)$$

необходимо выполнить условие

$$\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow p_i \in K_T = K_T^1 \cap K_T^2 \cap \dots \cap K_T^q = \bigcap_{i=1}^q K_T^i. \quad (5.16)$$

Таким образом, при решении задачи синтеза по совокупности ограничений гораздо эффективнее и правильнее рассматривать итоговую технологически допустимую область K_T .

5.2.3. Математически допустимая область и ее составляющие. Для исследования сущности влияния математических ограничений на многовариантный подход к задаче синтеза эталонных математических моделей достаточно рассмотреть случай, когда на спектр корней ХП наложено одно из условий, например (5.13,а).

Для лучшего понимания существа проблемы рассмотрим эволюцию форм отображения математи-

ческих ограничений на корневую плоскость с возрастанием порядка ХП. Так, в случае $n = 1$ ограничения по η невозможны, так как в нормированной области задача выбора коэффициента приведенного полинома имеет единственное решение $p_1 = A_0 = 1$. При переходе ММ в реальную временную область в соответствии с методикой (см. пункт 4.1) корень приобретает конкретное значение, зависящее только от масштабного коэффициента, величина которого выбирается, исходя из заданного быстродействия. Следовательно, математически допустимой областью значений корней для этого случая является точка $[-1; j0]$.

При $n = 2$ уже возникает возможность варьирования p_i . Но даже при отсутствии ограничений на p_i со стороны технологии, область их допустимых значений радикально сужается условием $p_1 \cdot p_2 = A_0 = 1$. Несложный анализ этого ограничения показывает, что для устойчивых действительных p_i областью допустимых значений будет вся отрицательная вещественная полуось, а для комплексно-сопряженных - полуокружность единичного радиуса с центром в начале координат, как это показано на рис. 5.2.

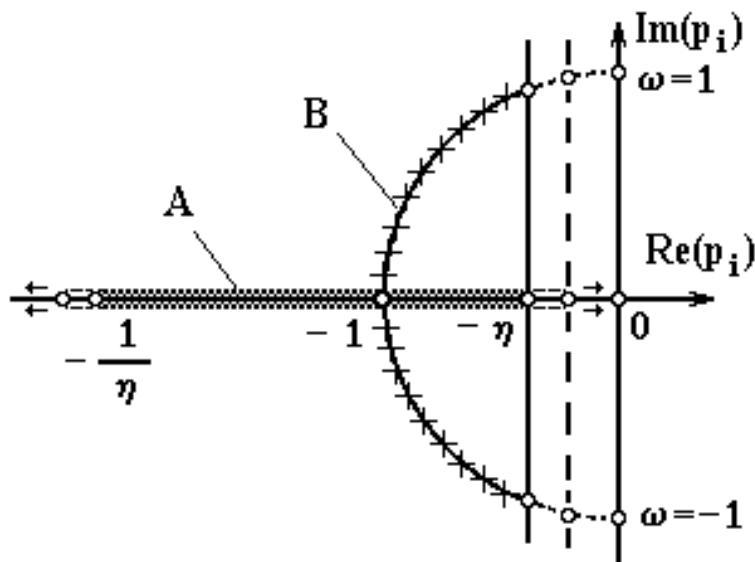


Рис. 5.2. Математически допустимые области
на корневой плоскости (для $n = 2$)

При введении ограничения на величину максимума p_i структура математически допустимой области меняется. Вещественные части корней в этом случае ограничиваются не только справа величиной $-\eta$, но и слева - величиной $-1/\eta$ (см. рис. 5.2). Эта область корневой плоскости описывается системой условий

$$\left. \begin{aligned} -1/\eta &\leq \text{Re}(p_i) \leq -\eta ; \\ p_1 \cdot p_2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

которая для действительных корней $p_1 = \rho_1$; $p_2 = \rho_2$ приобретает вид

$$-1/\eta \leq \rho_2 = 1/\rho_1 \leq -\eta ,$$

а для случая комплексно-сопряженных корней сохраняет форму системы

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \alpha \leq -\eta ; \\ \alpha^2 + \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{1 - \alpha^2} . \end{array} \right\}$$

Здесь $\alpha = \operatorname{Re}(p_i)$, $\omega = \operatorname{Im}(p_i)$, $i = \overline{1,2}$.

Следовательно, задаваясь ограничением η в нормированном уравнении, мы ограничиваем не только наименьший, но и наибольший по модулю его корень. Это условие важно при практической реализации синтезируемой модели в реальной физической системе.

Полное ограничение вида (5.17), насколько известно авторам, не анализировалось и не учитывалось в работах, использующих для синтеза ЗУ корневые критерии качества. Это, как показывает практика, часто приводит к противоречию между задаваемыми критериальными ограничениями и получаемым реальным качеством системы, о чем уже говорилось выше.

Вскрытое свойство спектра нормированного ХП обуславливает целесообразность определения ограничений типа (5.13) как технологических (качество управления процессом) и введения в практику синтеза ММ понятия математических ограничений. Для конкретного случая связи значений корней ХП произвольного порядка n с его коэффициентами, такие ограничения трактуются как отношение, ограничивающее множество значений корней лишь теми, которые удовлетворяют условию теоремы Безу в нормированном варианте

$$K_M^o = \left\{ p_i : \prod_{i=1}^n (-p_i) = 1 \right\}. \quad (5.18)$$

В результате, например, для ограничений вида (5.13a,b) на комплексной плоскости образуются допустимые области, задаваемые условиями

$$K_{don} = K_T \cap K_M^o = K_T^\eta \cap K_T^\mu \cap K_M^o. \quad (5.19)$$

Возможны и другие ограничения. Например, если по каким-либо причинам необходимо фиксировать коэффициент при p^{n-1} на значении a_{n-1}^* , то в систему учитываемых ограничений включается область, удовлетворяющая условию

$$K_M^{n-1} = \left\{ p_i : \sum_{i=1}^n (-p_i) = a_{n-1}^* \right\}. \quad (5.20)$$

Таким образом, в случае связывания распределения корней с коэффициентами ХП и наложения на последние ограничений типа равенств, можно говорить о формировании области

$$K_M = K_M^0 \cap K_M^1 \cap \dots \cap K_M^{n-1}, \quad (5.21)$$

где K_M^i - математически допустимая область, задаваемая формулой коэффициента при p^i ХП, которая соответствует разложению (5.7) по степеням. При этом отсутствие ограничения по k -му коэффициенту означает $K_M^k = K$ - полное корневое пространство. Тогда итоговое ограничение, определяющее множество допустимых значений корней, будет задано отношением

$$K = K_T \cap K_M. \quad (5.22)$$

В контексте введенных понятий рассмотрим построение на корневой плоскости допустимой области

значений корней для ХП третьего порядка.

5.2.5. Исследование математически допустимой корневой области для характеристического полинома третьего порядка. Для выбранного порядка выражение (5.21) приобретает вид

$$\prod_{i=1}^3 (-p_i) = A_0 = 1.$$

Это отношение порождает следующую систему условий

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{\eta^2} \leq \operatorname{Re}(p_i) \leq -\eta; \\ (-p_1) \cdot (-p_2) \cdot (-p_3) = 1. \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

Для характеристического полинома третьего порядка возможны два варианта распределения корней: 1) все вещественные; 2) один вещественный и пара комплексно-сопряженных.

Несложный анализ показывает, что для выполнения (5.23) необходимо выполнение условия

$$-1/\eta^2 \leq p_{2,3} \leq -\eta,$$

т.е. математически допустимые значения вещественных корней задаются на плоскости отрезком отрицательной вещественной полуоси

$$K_M^{OV} = \left\{ p_i : p_i \in \left[-1/\eta^2, -\eta \right] \right\}, \quad (5.24)$$

который изображен на рис 5.3 и обозначен прямой А.

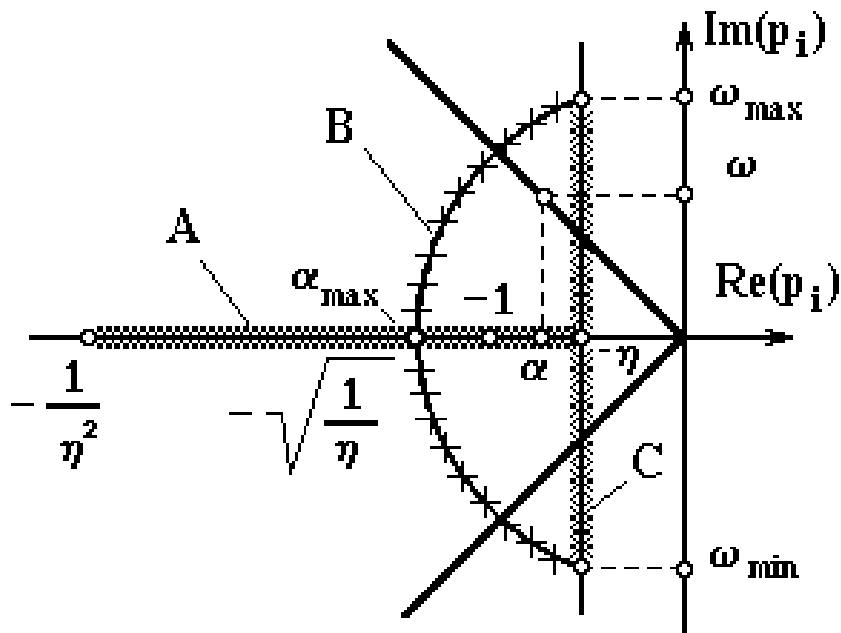


Рис.5.3. Отображение корневых ограничений на комплексной плоскости

Сравнение рис. 5.2 и рис 5.3 показывает, что с увеличением порядка ХП множество значений вещественных корней при одном и том же η расширяется. При этом, чем меньше запас устойчивости η , тем шире область возможных значений вещественных корней ХП:

$$\begin{cases} \eta \rightarrow 0 \Rightarrow 1/\eta^2 \rightarrow \infty; \\ \eta \rightarrow 1 \Rightarrow 1/\eta^2 \rightarrow 1. \end{cases} \quad (5.25)$$

Рассмотрим второй вариант распределения корней. Не нарушая общности рассуждений, положим вещественным корень p_1 . Тогда условия (5.23) преобразуются в систему

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{\eta^2} \leq p_1 \leq -\eta ; \quad (a) \\ -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \leq \alpha \leq -\eta ; \quad (b) \\ (\alpha^2 + \omega^2) = \frac{1}{\eta}, \quad (v) \end{array} \right\}, \quad (5.26)$$

где $\alpha = \operatorname{Re}(p_{2,3})$, $\pm \omega = \operatorname{Im}(p_{2,3})$ - вещественная и мнимая части корней $p_{2,3}$.

Нижнее граничное значение α в выражении (5.26,б) найдено из условия равенства нулю ω в уравнении (5.26,в). Если положить, что α принимает верхнее граничное значение, то, выразив из уравнения (5.26,в) ω и исследовав выражение на экстремум, можно получить общую формулу нахождения предельных значений мнимой части комплексно-сопряженных корней

$$\omega_{\max(\min)} = \pm \left((1 - \eta^3) / \eta \right)^{1/2}. \quad (5.27)$$

Исследуем случай, когда α имеет некоторое произвольное значение, удовлетворяющее условию (5.26,б), но отличное от предельных значений. Тогда, согласно (5.26,в), получим

$$p_1 \cdot \alpha^2 + p_1 \cdot \omega^2 = 1. \quad (5.28)$$

Решение уравнения (5.28) относительно ω дает формулы

$$\omega = \left((1 - p_1 \alpha^2) / p_1 \right)^{1/2}; \quad (5.29)$$

$$\omega_{gran} = \pm \left((1 - \eta \alpha^2) / \eta \right)^{1/2}, \quad (5.30)$$

которые показывают, что вся внутренняя область кривой В и прямой С является математически допустимой. Выражение (5.30) позволяет построить кривую В (см. рис. 5.3), определяющую характер распределения комплексно-сопряженных корней ХП третьего порядка. Из рис. 5.3 видно, кривая представляет собой, как и в случае второго порядка, часть окружности.

Правая граница области распределения корней также строится по выражению (5.29), но при условии, что $\alpha = \eta$, а p_1 имеет значение, удовлетворяющее условию (5.26,а). Тогда (5.29) примет вид

$$\omega = \pm \left(1 - p_1 \eta^2 / p_1 \right)^{1/2}, \quad (5.31)$$

и на корневой плоскости сформируется прямая С (см. рис. 5.3).

Таким образом, при наличии в ХП пары комплексно-сопряженных корней, математически допустимое множество их распределения K_M^{oKC} определяется уже плоской фигурой, ограниченной на рис. 5.3 прямой С и кривой В.

Теперь, чтобы найти ограничение, определяющее математически допустимое множество распределения корней, необходимо задаться отношением

$$K_M^0 = K_M^{oV} \cap K_M^{oKC}. \quad (5.32)$$

В результате, как и в случае второго порядка, можно получить итоговую допустимую область распределения корней K_{don} (см. выражение (5.19)).

Полученные результаты позволяют правильно построить допустимые области распределения корней ХП на комплексной плоскости. Но теперь для их удобного приложения к синтезу желаемых ММ необходимо отобразить корневую плоскость на параметрическую. Этому вопросу посвящен следующий параграф пособия.

5.3. Поисковые области параметрического пространства характеристического полинома

5.3.1. Понятие поисковой области. Ограничение распределения корней ХП на комплексной плоскости влечет за собой ограничение его параметров (коэффициентов) на параметрической плоскости. Такая взаимосвязь традиционно используется во многих методах анализа и синтеза САУ (методы D, RD - разбиения, стандартных коэффициентов, типовых переходных процессов и др.) [10, 12, 19, 42]. Поэтому понятия технологических и математических ограничений на корневой плоскости целесообразно перенести на параметрическое пространство, образуемое коэффициентами ХП.

Ограничения (5.13), отображаясь на параметрическую плоскость, формируют технологически допустимые области P_T^η и P_T^μ , которые образуют общую область технологически допустимых параметров

$$P_T = P_T^\eta \cap P_T^\mu \quad (5.33)$$

Поскольку параметрическая плоскость используется, обычно, для выбора требуемых значений порождающих ее коэффициентов, будем называть итоговую область их допустимых значений *поисковой*.

5.3.2. Построение поисковой области для ХП третьего порядка. Для лучшего понимания всех тонкостей нахождения поисковой области можно показать, как она получается в случае ХП третьего порядка, так как он является максимально допустимым при декомпозиции (см. п. 5.1.4) и имеет лишь два параметра настройки - это нормированные коэффициенты A1, A2 (согласно выражения (3.31)), что позволяет наглядно представить полученные результаты на двухпараметрической плоскости.

На рис 5.4 *a* показаны отображения на параметрическую плоскость технологически допустимых областей корневой, изображенных на рис. 5.1. На рис. 5.4 *б* приведена наложенная на технологически допустимую область параметров ХП математически допустимая область, которая является отображением соответствующего корневого ограничения. В результате на параметрической плоскости формируется совокупная технологически и математически допустимая (поисковая) область, представленная на рис. 5.5.

$$P_{don} = P_T \cap P_M^0 \quad (5.34)$$

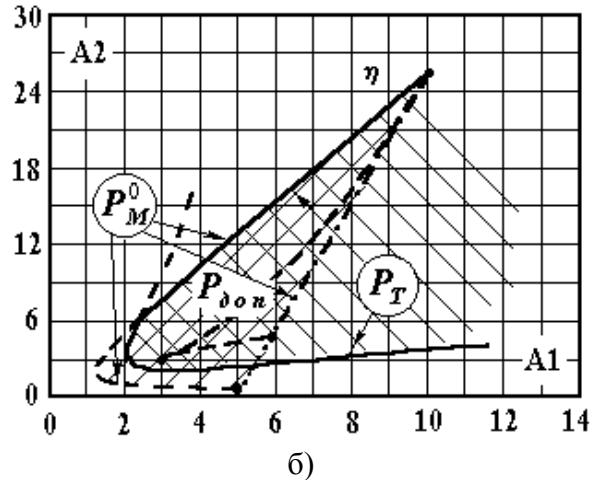
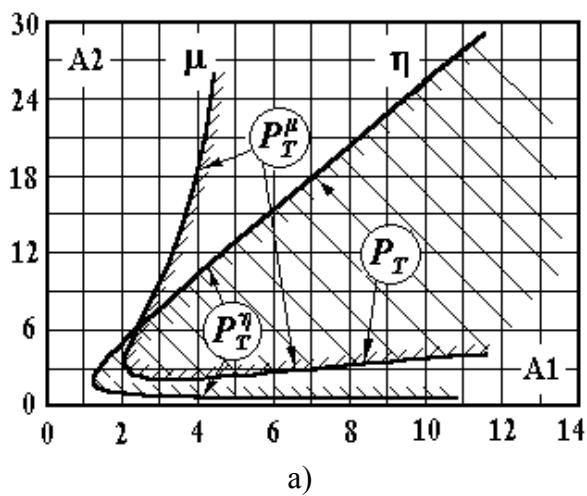


Рис. 5.4. Параметрическая область (общий вид)

Все граничные значения областей P_T^η, P_T^μ, P_M^0 построены по аналитическим выражениям, общий вид которых приведен ниже

$$\begin{cases} A1(\omega) = (\omega^4 + \alpha^4 + 8 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 + \omega^2)^{-1}; \\ A2(\omega) = (1 - 2 \cdot \alpha^3 - 2 \cdot \alpha \cdot \omega^2) \cdot (\alpha^2 + \omega^2)^{-1}, \end{cases} \quad (5.35)$$

но для каждой области характерны свои условия, накладываемые на систему (5.35), определяемые характером распределения корней ХП и критериальными ограничениями. Рассмотрим эти условия подробнее и покажем, каким образом из системы (5.35) можно получить выражения для построения всей границы области P_{don} (см. рис. 5.4б).

При ограничении на степень устойчивости в выражении (5.35) вместо α подставляется значение $-\eta$, в результате на графике рис. 5.4а формируется область P_T^η . При ограничении на колебательность используется значение $\alpha = -\omega/\mu$ и строится граничная кривая, формирующая область P_T^μ . Их пересечением на параметрической плоскости образуется технологически допустимая область P_T . Наложением на нее математически допустимой области P_M^0 можно получить P_{don} , показанную на рис. 5.4б в общем виде. На рис. 5.5 эта область рассмотрена подробнее.

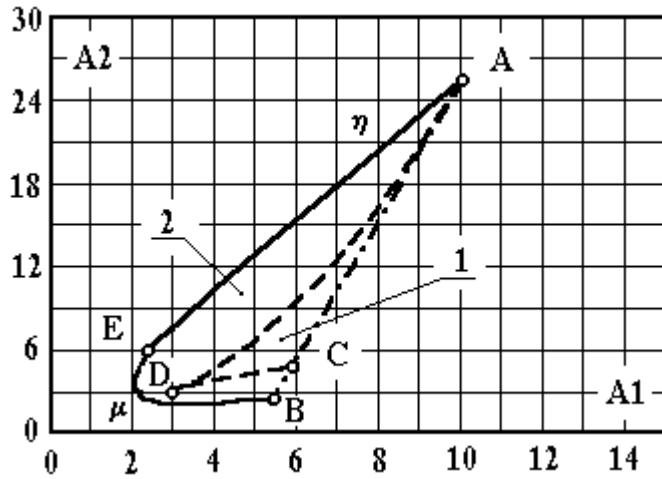


Рис. 5.5. Область допустимых значений параметров.

Из рис. 5.5. видно, что P_{don} состоит из двух подобластей (1- все корни вещественные; 2 - вещественный и пара комплексно-сопряженных корней). Кривая ADC является границей между подобластями 1, 2 и строится по полученным из системы (5.35) выражениям

$$\begin{cases} A1(\alpha) = -(2 \cdot p_1^3 - 1) \cdot p_1^{-2}; \\ A2(\alpha) = (p_1^3 - 2) \cdot p_1^{-1}, \end{cases} \quad (5.36)$$

где $p_2=p_3=-\eta$; p_1 изменяется в пределах, зависящих от критериального ограничения и его диапазона. Кривая AD отображает отрезок $-1 < p_1 < -\eta$, а кривая DC - отрезок $-\sqrt{1/\eta} < p_1 < -1$ отрицательной вещественной полусоси корневой плоскости. Точка D соответствует $p_1 = -1$.

С учетом поставленного критериального ограничения можно получить и другое соотношение между корнями, когда только один корень (например, $p_1 = -\eta$) удовлетворяет поставленному ограничению, а два других являются варьируемыми. Тогда параметрическую границу определяют уравнения

$$\begin{cases} p_3 = -1/\eta \cdot p_2; \\ A2 = -(\eta \cdot p_2 - p_2^{-1} + \eta^2) \cdot \eta^{-1}; \\ A1 = (\eta^2 \cdot p_2 - \eta \cdot p_2^{-1} - 1) \cdot \eta^{-1}, \end{cases} \quad (5.37)$$

Изменению p_2 от η до $\sqrt{1/\eta}$ соответствует прямая AC (см. рис. 5.5). Она ограничивает справа область вещественных корней, удовлетворяющих критериальному ограничению η .

Кривая BC также построена по выражениям, записанным в системе (5.37), при таком же $p_1 = -\eta$, но при условии, что p_2, p_3 комплексно-сопряженные и их вещественные части меняются в пределах $-\sqrt{1/\eta} < \alpha < -\eta$.

Кривая АЕ является частью линии, ограничивающей область P_T^η , кривая ЕВ определяется ограничением P_T^μ , точка Е - это точка пересечения граничных кривых, формирующих области P_T^η, P_T^μ .

Таким образом, граница $P_{\delta o n}$ представляет собой кусочно-непрерывную функцию, предельные значения каждого участка которой определяются точками пересечения граничных линий областей P_T^η, P_T^μ, P_M^0 .

5.3.3. Исследование поисковой области ХП третьего порядка. На рис. 5.6 наглядно проиллюстрировано изменение характера как распределения корней ХП на комплексной плоскости, так и качества соответствующего переходного процесса в зависимости от положения точки на границе или внутри параметрической области. Характер распределения корней ХП влияет на вид переходного процесса (величину перерегулирования, колебательность и т. п.), но не влияет на степень устойчивости, так как на граничной линии она не изменяется.

Таким образом, задаваясь требуемой интенсивностью затухания переходного процесса, можно определить область значений нормированных коэффициентов, внутри которой поставленные требования будут выполняться.

Для подтверждения полученных результатов можно исследовать область на предмет удовлетворения поставленному требованию. Например, из рис. 5.5 видно, что точки 1, 2, 3, 4, 5 находятся внутри искомой области, следовательно, если взять нормированные коэффициенты, соответствующие этим точкам, то на комплексной плоскости распределение корней нормированного ХП не будет выходить за рамки области, представленной на рис. 5.3. Если же коэффициенты A1, A2 взять в точках 6, 7, 8, 9, то один вещественный корень (точки 8, 9) или два комплексно-сопряженных корня (точки 6, 7) выходят в комплексной плоскости за пределы ограничения (см. рис. 5.3) и тем самым нарушают предъявленные к решению требования.

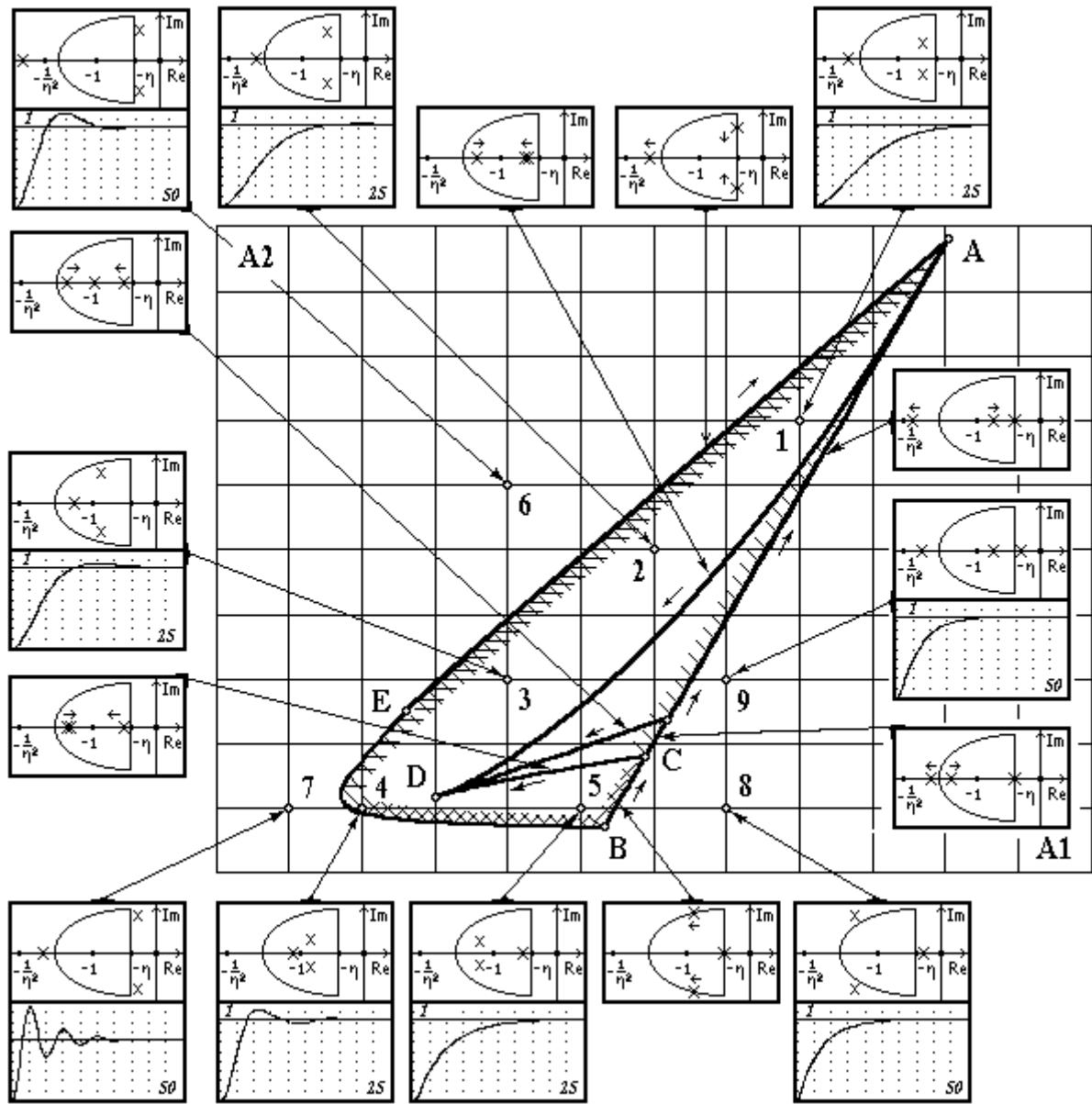


Рис. 5.6. Поисковая параметрическая область для ХП третьего порядка

5.3.5. Примеры использования поисковой области в задаче синтеза.

Пример 1. Пусть проектировщику задан объект управления, ММ которого описывается вход-выходным ДУ

$$y^{(3)} + 2,990545 \cdot y^{(2)} + 2,210497 \cdot y^{(1)} + 0,038493 \cdot y = 0,00009937 \cdot u \quad (5.38)$$

На основе предложенного подхода, необходимо синтезировать эталонную ММ, удовлетворяющую следующим технологическим ограничениям:

- степень устойчивости $\eta = 0,2$;
- колебательность $\mu = 1,25$;
- трубка регулирования не более 1 %;
- коэффициент $a_2^{cistm} = a_2^{oy} = 2,990454$;
- система должна обладать астатизмом первого порядка.

Сначала, согласно методики, изложенной в главе 4, необходимо пронормировать уравнение (5.38), после

чего его левая (характеристическая) часть примет вид

$$y^{(3)} + 8,856794 \cdot y^{(2)} + 19,389596 \cdot y^{(1)} + y,$$

т.е. $A_1^{oy} = 19,389596$; $A_2^{oy} = 8,856794$. Тогда, для обеспечения условия $a_2^{cicst} = a_2^{oy} = 2,990454$ необходимо, чтобы $A_2^{cicst} = A_2^{oy} = 8,856794$.

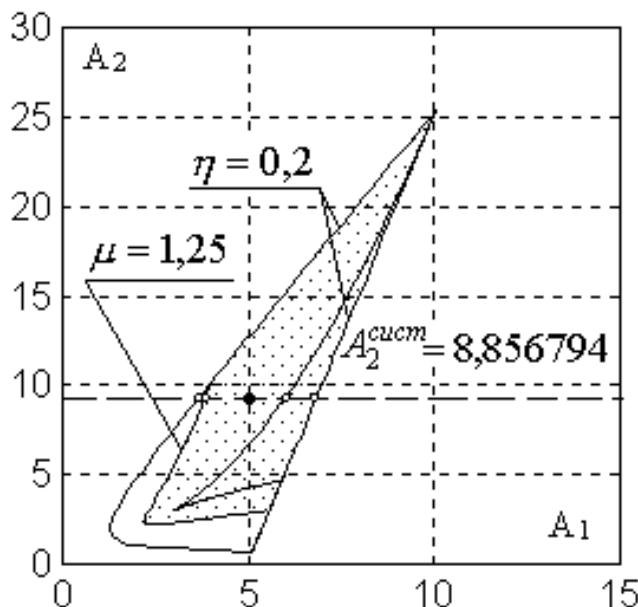


Рис. 5.7. Параметрическая плоскость

Теперь на параметрической плоскости, с учетом ограничений η и μ , строятся поисковые области для коэффициентов A_1, A_2 . Из рис. 5.7 видно, что при фиксации коэффициента A_2 поисковая область сужается и находится в пределах интервала [3,759; 6,731].

Далее из полученной поисковой области выбирается $A_1^{cicst} = 5$ и формируется левая часть эталонного ДУ

который после разнормирования принимает вид

$$y^{(3)} + 8,856794 \cdot y^{(2)} + 5 \cdot y^{(1)} + y,$$

Правая часть эталонного ДУ выбирается, исходя из заданного порядка астатизма системы. Для обеспечения астатизма первого порядка необходимо, чтобы $b_0 = a_0 = 0,03849$. Тогда эталонное ДУ принимает вид

$$y^{(3)} + 2,990454 \cdot y^{(2)} + 0,57 \cdot y^{(1)} + 0,03849y = 0,03849z \quad (5.39)$$

Решение уравнения (5.39) полностью удовлетворяет условиям технологии.

Сравнение (5.38) и (5.39) показывает, что полученная структура эталонной ММ позволяет применить метод ОДО, так как в отождествляемый оператор можно включить производные второго и третьего порядков и упростить ЗУ.

Пример 2. Пусть необходимо синтезировать систему автоматического управления двигателем постоянного тока, имеющим ММ вида:

$$0,00005 \cdot y^{(3)}(t) + 0,04 \cdot y^{(2)}(t) + y(t) = 8 \cdot u(t) \quad (5.40)$$

К системе предъявляются следующие показатели качества:

- время регулирования $t_p = 0,6$ с;

- нормированная интенсивность затухания $\eta = 0,15$;
- колебательность $\mu = 2,1$;
- трубка регулирования не более 10 %;
- переходный процесс в системе без перерегулирования.

Синтез автоматической системы начинается с расчета коэффициента масштаба времени, необходимого для достижения требуемого быстродействия. По известной (по заданию) нормированной интенсивности затухания примерно находится нормированное время регулирования

$$\tau = \frac{3}{\eta} = \frac{3}{0,15} = 20 \text{ с} \quad (5.41)$$

Тогда, воспользовавшись выражением (4.4) и (5.41), получим масштабный коэффициент времени по формуле

$$t_h = \frac{t_p}{\tau} = \frac{0,6}{20} = 0,03. \quad (5.42)$$

Пронормируем ДУ исходного ОУ с помощью полученного масштабного коэффициента, чтобы перевести его в тот же масштаб времени, что и нормированная ЭММ. После масштабирования ММ ОУ примет вид

$$1,852 \cdot y^{(3)}(t) + 44,44 \cdot y^{(2)}(t) + 33,33 \cdot y(t) = 8 \cdot u(t). \quad (5.43)$$

Для сопоставления полученной ММ с ЖММ необходимо привести выражение (5.43) к виду, когда при старшей степени стоит единичный коэффициент. Для этого разделим обе части ДУ на коэффициент 1,852 и получим

$$y^{(3)}(t) + 24 \cdot y^{(2)}(t) + 18 \cdot y(t) = 4,32 \cdot u(t). \quad (5.44)$$

Если полученные нормированные коэффициенты отобразить на параметрическую плоскость, то получим точку А (см. рис. 5.8). Из него видно, что при таких параметрах нормированных коэффициентов, свойства синтезируемой системы будут выходить за обусловленные ограничения η и μ . Для того, чтобы обеспечить

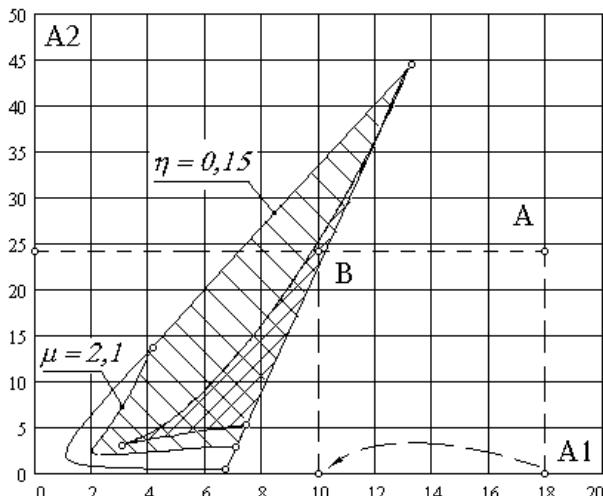


Рис. 5.8. Параметрическая плоскость

коэффициентов A1-A2

необходимые показатели качества, коэффициенты A1 и A2 нужно выбирать таким образом, чтобы точка их отображения попадала внутрь допустимой (заштрихованной) области. Эту процедуру можно произвести по-разному. Например, можно изменить оба коэффициента, а можно один из них оставить без изменения. Из рис. 5.8 видно, что в данном случае коэффициент A2 можно не изменять, а достаточно уменьшить значение A1 с 18 до 10.

Возможность такого выбора позволяет полу-

чить эталонную ММ максимально структурно и параметрически подобную ММ объекта управления, что упрощает реализацию САУ. Докажем это утверждение.

На рис. 5.8 после изменения коэффициентов получим новую точку В, удовлетворяющую требуемым критериальным ограничениям, при этом обеспечивается апериодичность переходного процесса в синтезируемой системе, что также необходимо по заданию.

Тогда нормированная эталонная ММ системы примет вид

$$y^{(3)}(t) + 24 \cdot y^{(2)}(t) + 10 \cdot y^{(1)}(t) = z(t). \quad (5.45)$$

После обратного нормирования уравнения (5.45) коэффициентом t_H получим эталонную ММ искомой системы в реальном масштабе времени

$$0,00005y^{(3)}(t) + 0,04 \cdot y^{(2)}(t) + 0,556 \cdot y^{(1)}(t) + 1,852 = 1,852 \cdot z(t). \quad (5.46)$$

При сравнении выражений (5.40) и (5.46) легко заметить, что коэффициенты при третьей и второй производных выходной переменной совпадают. Тогда для получения ЗУ можно применить метод ОДО, изложенный в пункте 3.3 настоящего пособия. В результате, в управление не будут входить производные выше первого порядка

$$u(t) = 0,2315 \cdot \varepsilon(t) - 0,1945 \cdot y^{(1)}(t). \quad (5.47)$$

Если же при синтезе системы применить метод типовых переходных процессов, изложенный в третьем разделе, при прочих равных условиях, то в управлении появится производная второго порядка, что усложнит реализацию синтезированного закона управления.

Таким образом, анализ результатов рассмотренных примеров показывает, что эталонную ММ нужно и можно синтезировать с учетом ММ ОУ. При таком подходе появляется многовариантность решения задачи синтеза эталонных ММ, которая позволяет получать физически реализуемые ЗУ с минимальной структурной сложностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский А.А. Основы автоматики и технической кибернетики / Красовский А.А., Поступов Г.С. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. - 600 с.
2. Теория автоматического регулирования. Книга 1. / Под ред. В. В. Соловьёвника. - М.: Машиностроение, 1967. - 768 с.
3. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / Бесекерский В.А., Попов Е. П. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. - 768 с.
4. Воронов А.А. Теория автоматического управления: Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления. - М.: Энергия, 1986. - 367 с.
5. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1986. - 616 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 712 с.
7. Гарднер М.Ф. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными: [Пер. с англ.] / Гарднер М.Ф., Дж.Л. Бэрнс. - Изд. 3-е исправл. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. - 551 с.
8. Розенфельд А.С. Переходные процессы и обобщенные функции / Розенфельд А.С., Яхинсон Б.И. - М.: Наука, 1966. - 440 с.
9. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. - М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1979. - 336 с.
10. Нейдорф Р.А. Синтез и оптимизация алгоритмов управления в технических системах: Учеб. пособие. Ч. I. Параметрический синтез типовых законов управления в линейных системах. - Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1994. - 70 с.
11. Нейдорф Р.А. Синтез и оптимизация законов управления в технических системах: Учебное пособие. Ч. II. Дифференциально-операторные методы синтеза законов управления на основе желаемых математических моделей / Нейдорф Р.А., Обухов П.С. - Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1997. - 94 с.
12. Соколов Н.И. Аналитический метод синтеза линеаризованных систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1966. - 328 с.
13. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. - М.: Энергия, 1973. - 440 с.
14. Бесекерский В.А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. - 576 с.
15. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. - Изд. 2-е, перераб. - М.: Энергия, 1972. - 376 с.
16. Современная теория систем управления: [Пер. с англ.] / Под ред. К.Т. Леондеса. - М.: Наука, 1970. - 512 с.
17. Теория автоматического регулирования. Книга 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования. / Под ред. В.В. Соловьёвника. - М.: Машиностроение, 1967. - 682 с.
18. Нейдорф Р.А. Критериальная стратегия структурного синтеза законов управления в технических системах на основе идеологии динамической самоорганизации // Диагностика и управление в технических системах: Межвуз. сб. науч. тр.- Ростов-на-Дону, 1998. - С. 9-21.
19. Нейдорф Р.А. Об одном методе синтеза желаемых дифференциальных уравнений систем автоматического управления // Анализ и проектирование автоматических систем и измерительных приборов, Т.326. - Новочеркасск, 1976. - С. 49-58.
20. Кулебакин В.С. Об определении основных параметров автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. - 1941. - Т.6. - №3. - С. 7-18.
21. Удерман З.Г. Об одном методе определения параметров линейных систем // Автоматика и телемеханика. - 1949. - Т.2. - С. 6-12.
22. Соколов Т.Н. Электромеханические системы автоматического управления. - М.: Госэнергоиздат, 1952. - 342 с.
23. Траксел Джон. Синтез систем автоматического регулирования. - М: Машгиз, 1959. - 360 с.
24. Сегалин В.Г. Об аналитической формулировке задачи синтеза корректирующих устройств в линейных системах // Автоматика и телемеханика. - 1958. - Т.19. - №2. - С. 22-27
25. Яворский В.Н. Проектирование нелинейных следящих систем с тиристорным управлением исполнительным двигателем / Яворский В.Н., Макшанов В.И., Ермолин В.П. - Л.: Энергия, 1978. - 208 с.
26. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. - Таганрог: ТРТУ, М.: Энергоатомиздат, 1994. - 344 с.
27. Обухов П.С. Структурно-параметрическая минимизация законов управления техническими объектами на основе множественного подхода к задаче синтеза // Фундаментальные и прикладные проблемы современ-

ной техники. - Ростов-на-Дону: Изд. Сев.-Кав. науч. центра высш. школы., 1998. - С. 138-147.

28. Нейдорф Р.А. Теоретические основы метода многовариантной базисно-аддендной декомпозиции и его практические применения в задачах структурного синтеза динамических систем управления // Диссерт. д-ра. техн. наук: 05.13.01; 05.13.07. - Новочеркасск, 1988. - Кн. I, II. - 566 с.

29. Нейдорф Р.А. Синергетические аспекты синтеза алгоритмов управления по эталонным математическим моделям // Диагностика и управление в технических системах: Межвуз. сборник научн. тр. - Ростов-на-Дону, 1996. - С. 16-19.

30. Нейдорф Р.А. Синтез желаемых динамических характеристик линейных систем управления по косвенным частотным критериям / Нейдорф Р.А., Обухов П.С. // Диагностика и управление в технических системах: Межвуз. сб. научн. тр. - Ростов-на-Дону, 1995. - С. 142-154.

31. Обухов П.С. Эффективная методика конструирования желаемых дифференциальных уравнений для синтеза систем автоматического управления // Фундаментальные и прикладные проблемы современной техники. - Ростов-на-Дону: Изд. Сев.-Кав. науч. центра высш. школы., 1997. - С. 161-174.

32. Обухов П.С. Об одном подходе к синтезу желаемых математических моделей систем управления // Диагностика и управление в технических системах: Межвуз. сб. науч. тр. - Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 1998. - С. 42-51.

33. Обухов П.С. Об ограничении корневого пространства нормированного характеристического полинома // Управление и диагностика в динамических системах: Вестник ДГТУ. - Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 1999. - С. 82-83.

34. Обухов П.С. Алгоритм построения эталонных математических моделей для синтеза автоматических систем // Проблемы автоматизации и управления производственными системами: Сб. науч. ст. - Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 1999. - С. 72-74.

35. Портрет У. Современные основания общей теории систем: [Пер. с англ.]. - М.: Наука, 1971. - 556 с.

36. Нейдорф Р.А. Теоретико-множественная модель задачи структурного синтеза динамических систем // Диагностика и управление в технических системах: Межвуз сб. науч. тр. - Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1994. - С. 136-148.

37. Нейдорф Р.А. Обобщенное математическое описание алгоритма структурного синтеза сложных систем // Синтез алгоритмов сложных систем: Межвуз. сб. науч. тр., Вып. 9. - Таганрог: 1997. - С. 194-200.

38. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. - М.: Энергия, 1971. - 112 с.

39. Солодовников В. В. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления / Солодовников В. В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. - М.: Машиностроение, 1986. - 440 с.

40. Макаров И.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал) / Макаров И.М. Менский Б.М. - М.: Машиностроение, 1982. - 504 с.

41. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1965. - 432 с.

42. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Нейдорф Рудольф Анатольевич
Иванов Борис Аркадьевич
Обухов Павел Серафимович
Ягубов Зафар Хангусей оглы
Тимошенко Наталья Сергеевна

Под общей редакцией Р.А. Нейдорфа, З.Х. Ягубова

СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Часть 1

Инженерные методы синтеза законов управления в технических системах
по эталонным математическим моделям

Учебное пособие

Редактор Кокшарова А.М.
Лицензия серия ЛР №020827 от 29 сентября 1998
План 2000 г., позиция 46. Подписано в печать 13.12.00 г.
Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9.8. Уч.-изд. л. 8.4. Тираж 250 экз. Заказ № 118.

Ухтинский государственный технический университет.
169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.
Отдел оперативной полиграфии УГТУ.
169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13.