Д.П. Ким

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы

Рекомендовано УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 220400 «Мехатроника и робототехника»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2008

УДК 519.711
ББК 32.965
К 40

Ким Д.П. **Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 328 с. — ISBN 978-5-9221-0937-6.

Учебное пособие содержит задачи по теории многомерных, нелинейных, оптимальных и адаптивных систем автоматического управления. Задачи по каждой теме предваряются необходимыми теоретическими материалами и разбором примеров. Сборник в основном ориентирован на учебник Д.П. Кима «Теория автоматического управления, Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы».

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 220400 «Мехатроника и робототехника».

Учебное издание

КИМ Дмитрий Петрович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МНОГОМЕРНЫЕ, НЕЛИНЕЙНЫЕ, ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Редактор *В.В. Панюхин*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 24.01.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 25,2. Тираж 2000 экз. Заказ № 2992.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-0937-6
9 785922 109376

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0937-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие посвящено задачам теории многомерных, нелинейных, оптимальных и адаптивных систем автоматического управления. Задачи по каждой теме предваряются необходимыми теоретическими материалами и разбором примеров. Сборник в основном ориентирован на учебник [10], и он отличается от ранее изданных учебных пособий [22, 24] назначением и соответствующим подбором задач, а также включением новых разделов.

В главе 1 рассматриваются задачи по преобразованию уравнений управляемых систем в нормальную форму, задачи управляемости и стабилизируемости, наблюдаемости (восстанавливаемости), преобразования в управляемую форму Луенбергера и синтеза алгоритмов модального управления.

Глава 2 посвящена задачам исследования устойчивости и характера переходных процессов методом фазовой плоскости.

В главе 3 представлены задачи, связанные с вычислением коэффициентов гармонической линеаризации, исследованием автоколебаний, вынужденных колебаний и вибрационной линеаризации.

Глава 4 посвящена задачам исследования устойчивости методом функций Ляпунова, глава 5 — задачам исследования абсолютной устойчивости с помощью теоремы Попова и квадратичного критерия.

В главе 6 рассматриваются задачи, связанные с линеаризацией обратной связью по состоянию и по выходу, в главе 7 — задачи по декомпозиции и децентрализации и исследования устойчивости агрегированных систем с помощью векторных функций Ляпунова.

В главах 8 и 9 представлены задачи оптимального управления: в главе 8 — задачи, которые решаются методом множителей Лагранжа, принципом максимума Понтрягина и динамическим программированием, в главе 9 — задачи синтеза систем максимального быстродействия и систем, оптимальных по интегральному квадратичному критерию оптимальности, в том числе оптимальных по обобщенной работе.

Глава 10 посвящена задачам синтеза оптимальных фильтров (фильтров Винера и Калмана–Бьюси) и стохастических оптимальных систем управления при полной и неполной текущей информации, глава 11 — задачам адаптивного управления с эталонной моделью и идентификатором.

Автор выражает глубокую признательность проф. В. М. Лохину за идею написания этого учебного пособия и помощь, а также доценту Н. Д. Дмитриевой и проф. О. А. Тягунову за поддержку и помощь в течение долгих лет совместной работы.

Глава 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. УПРАВЛЯЕМОСТЬ. СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ. НАБЛЮДАЕМОСТЬ. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

1.1. Уравнение системы в нормальной форме

Если уравнения системы разрешены относительно старшей производной, то их всегда можно преобразовать к системе уравнений 1-го порядка. Например, систему

$$\overset{(n)}{y} = F(y, \dot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}, t)$$

можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \end{aligned}$$

где

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \ldots, x_n = \overset{(n-1)}{y}.$$

Аналогичное преобразование можно произвести, когда система описывается несколькими уравнениями. Например, систему

$$\begin{aligned} \dddot{y}_1 &= F_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, t), \\ \ddot{y}_2 &= F_2(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, t), \end{aligned}$$

положив $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = \ddot{y}_1$, $x_4 = y_2$, $x_5 = \dot{y}_2$, можно преобразовать в следующую систему уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t), \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t), \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_4. \end{aligned}$$

В общем случае уравнения управляемой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t),\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t),\\
y_1 &= h_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t),\\
y_2 &= h_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_m &= h_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t)
\end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{1.1а}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \tag{1.1б}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *фазовыми координатами* или *фазовыми переменными*, $\mathbf{x}$ — *фазовым вектором* или *вектором состояний*; $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — *управляющими параметрами* или *управлениями*, $\mathbf{u}$ — *вектором управления*, *управлением или просто входом*; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — *выходными переменными*, $\mathbf{y}$ — *выходным вектором* или просто *выходом*; t — время.

Уравнение, записанное в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, называется *нормальной формой Коши* или *просто нормальной формой*. Множество всех векторов состояний (фазовых векторов) называют *пространством состояний* или *фазовым пространством*. Уравнение (1.1а) называют *уравнением состояния*, а уравнение (1.1б) — *уравнением выхода* или *уравнением наблюдений*.

В этой книге всюду вектор рассматривается как вектор-столбец. Так что имеем: $\mathbf{x} = (x_1\, x_2 \cdots x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1\, u_2 \cdots u_r)^T$, $\mathbf{y} = (y_1\, y_2 \cdots y_m)^T$, где T обозначает операцию транспонирования. Вектор также будем рассматривать как матрицу-столбец.

Преобразование уравнений линейных систем в нормальную форму. В общем случае уравнение одномерной управляемой системы (объекта) имеет вид

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_n y = b_0 \overset{(m)}{u} + b_1 \overset{(m-1)}{u} + \ldots + b_m u \quad (m \leqslant n). \tag{1.2}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $m = 0$ и $0 < m \leqslant n$.

А) $m = 0$. В этом случае, разрешив уравнение (1.2) относительно старшей производной и положив $y = x_1$, $\dot{y} = x_2, \cdots, \overset{(n-1)}{y} = x_n$, получим

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = x_2,\\
\dot{x}_2 = x_3,\\
\dots\dots\dots\dots\\
\dot{x}_{n-1} = x_n,\\
\dot{x}_n = b_0 u - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n,\\
y = x_1,
\end{gathered}$$

или в векторной форме

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\\
y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},
\end{gathered}$$

где

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ b_0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Б) $0 < m \leqslant n$. В этом случае уравнение (1.2) можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 + k_1 u\\
&\dot{x}_2 = x_3 + k_2 u\\
&\ \vdots \qquad \vdots\\
&\dot{x}_{n-1} = x_n + k_{n-1} u\\
&\dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 + k_n u
\end{aligned}\right\}, \tag{1.3а}$$

$$y = x_1 + k_0 u, \tag{1.3б}$$

где

$$k_0 = b_0,\ k_i = b_i - \sum_{j=1}^{i} a_j k_{i-j},\ i = 1,\ 2, \cdots,\ n. \tag{1.3в}$$

В векторной форме эта система принимает вид

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\\
y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + k_0 u.
\end{gathered}$$

Здесь

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Соотношения (1.3в) получены при предположении, что $m = n$. Условие $0 < m < n$ нужно рассматривать как частный случай, когда коэффициенты при старших производных равны нулю.

Пример 1.1. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$y = \frac{0{,}1p + 1}{0{,}01p^3 + 0{,}1p^2 + p + 1}u.$$

Требуется преобразовать это уравнение в нормальную форму.

Решение. Запишем исходное уравнение в обычной форме:

$$0{,}01\dddot{y} + 0{,}1\ddot{y} + \dot{y} + y = 0{,}1\dot{u} + u.$$

Разделим обе части на 0,01. Тогда получим

$$\dddot{y} + 10\ddot{y} + 100\dot{y} + 100y = 10\dot{u} + 100u.$$

В данном случае коэффициенты уравнения равны

$$a_1 = 10,\ a_2 = 100,\ a_3 = 100,\ b_0 = b_1 = 0,\ b_2 = 10,\ b_3 = 100.$$

По формуле (1.3в) найдем коэффициенты k_i ($i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$):

$$k_0 = b_0 = 0,\ k_1 = b_1 - a_1k_0 = 0,\ k_2 = b_2 - (a_1k_1 + a_2k_0) = 10,$$
$$k_3 = b_3 - (a_1k_2 + a_2k_1 + a_3k_0) = 0.$$

В соответствии с формулами (1.3а) и (1.3б) уравнение в нормальной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 10u, \\ \dot{x}_3 &= -10x_3 - 100x_2 - 100x_1, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Задачи

1.1. Записать в нормальной форме уравнения систем, заданных следующими передаточными функциями (y — выход, u — вход):

а) $W_{yu}(p) = \dfrac{10}{p(p^2 + p + 1)}$; б) $W_{yu}(p) = \dfrac{10(p + 1)}{p(p^2 + p + 1)}$;

в) $W_{yu}(p) = \dfrac{20(p+1)}{2p^3+4p^2+8p+6}$; г) $W_{yu}(p) = \dfrac{3p^2+5p+1}{p^3+4p^2+2p+1}$;

д) $W_{yu}(p) = \dfrac{2p+4}{2p^3+4p^2+8p+6}$; е) $W_{yu}(p) = \dfrac{p^3+3p^2+5p+1}{p^3+4p^2+2p+1}$;

ж) $W_{yu}(p) = \dfrac{2p^3+p^2+5p+3}{p^3+4p^2+2p+1}$; з) $W_{yu}(p) = \dfrac{p^3+3p^2+5p+1}{2p^3+p^2+5p+3}$;

и) $W_{yu}(p) = \dfrac{2p^3+3p^2+5p+1}{p^4+2p^3+p^2+5p+3}$; к) $W_{yu}(p) = \dfrac{p^3+3p^2+5p+1}{2p^4+2p^3+4p^2+6p+2}$.

1.2. Преобразовать в нормальную форму следующие уравнения:

а) $\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y} = \ddot{u}+4\dot{u}+u$; б) $2\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y} = \ddot{u}+4\dot{u}+u$;

в) $\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y}+y = 4\dot{u}+u$; г) $4\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y}+y = 4\dot{u}+u$;

д) $\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y} = 2\dddot{u}+\ddot{u}+4\dot{u}+u$; е) $2\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y} = 2\dddot{u}+\ddot{u}+4\dot{u}+u$;

ж) $4\dddot{y}+2\ddot{y}+8y = 8\dddot{u}+4\ddot{u}+16\dot{u}+4u$;

з) $2\dddot{y}+4\dot{y}+6y = 4\dddot{u}+2\dot{u}+8u$;

и) $\overset{(4)}{y}+2\dddot{y}+4\ddot{y}+6y = 8\dddot{u}+4\ddot{u}+16\dot{u}+4u$;

к) $2\overset{(4)}{y}+4\dddot{y}+2\ddot{y}+6y = \dddot{u}+4\ddot{u}+6\dot{u}+4u$.

1.3. Используя обозначения

$$x_1 = y_1,\ x_2 = \dot{y}_1,\ x_3 = \ddot{y}_1,\ x_4 = y_2,\ x_5 = \dot{y}_2, x_6 = \ddot{y}_2,$$

преобразовать в нормальную форму следующие системы уравнений:

а) $\dddot{y}_1 + 2\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + y_1 + \ddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 3y_1 + \dddot{y}_2 + 2\ddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 2y_2 = 0;$

б) $\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 2\ddot{y}_2 + 6\dot{y}_2 + 5y_2 = 0,$
$6\ddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 4\ddot{y}_2 + 6\dot{y}_2 + 3y_2 = 0;$

в) $\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 + 4\ddot{y}_2 + 5\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$4\dot{y}_1 + 2y_1 + \dddot{y}_2 + 5\ddot{y}_2 + 7\dot{y}_2 + y_2 = 0;$

г) $\dddot{y}_1 + 2\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + y_1 + \ddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$4\dot{y}_1 + 2y_1 + \dddot{y}_2 + 5\ddot{y}_2 + 7\dot{y}_2 + y_2 = 0;$

д) $\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + y_1 + 5\dot{y}_2 + 4y_2 = 0,$
$6\ddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 4\ddot{y}_2 + 6\dot{y}_2 + 3y_2 = 0;$

е) $\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + y_1 + 5\dot{y}_2 + 4y_2 = 0,$
$\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 2\ddot{y}_2 + 4y_2 = 0;$

ж) $\dddot{y}_1 + 2\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 3y_1 + \dddot{y}_2 + 2\ddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 2y_2 = 0;$

з) $\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 2\ddot{y}_2 + 6\dot{y}_2 + 5y_2 = 0,$
$\dddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 4\ddot{y}_2 + 6\dot{y}_2 + 3y_2 = 0;$

и) $\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 + \dddot{y}_2 + 5\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$\dddot{y}_1 + 4\dot{y}_1 + 2y_1 + 2\dddot{y}_2 + 5\ddot{y}_2 + 7\dot{y}_2 + 4y_2 = 0;$

к) $\dddot{y}_1 + 2\ddot{y}_1 + y_1 + \dddot{y}_2 + 4\dot{y}_2 + 3y_2 = 0,$
$\dddot{y}_1 + 4\ddot{y}_1 + 2y_1 + 2\dddot{y}_2 + 5\ddot{y}_2 + 7\dot{y}_2 + 4y_2 = 0.$

1.2. Управляемость и стабилизируемость объекта управления

Рассмотрим управляемую систему (объект), которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния, $\mathbf{u}$ — управление (вектор управления).

Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t)\ u_2(t)\ \cdots\ u_r(t))^T$ называется кусочно-непрерывным, если все его компоненты $u_i(t)$ являются кусочно-непрерывными. Кусочно-непрерывные управления называют *допустимыми*.

Определение 1.1. *Управляемая система* (*объект*) (1.4) *называется управляемой или вполне управляемой, если, каковы бы не были точки* $\mathbf{x}^0$ *и* $\mathbf{x}^f$ *в фазовом пространстве* R^n, *существует допустимое управление, определенное на конечном интервале* $[t_0, t_f]$ *и переводящее систему* (1.4) *из начальной точки* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ *в конечную точку* $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$.

Другими словами, если объект вполне управляем, то он может быть переведен допустимым управлением из произвольного начального состояния в любое другое состояние за конечное время.

Управляемость линейных стационарных объектов. Пусть уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{u} \in R^r \tag{1.5}$$

описывает стационарную систему, т. е. матрицы A и B являются постоянными. Матрица

$$\text{У} = [B\ AB\ A^2B \ldots A^{n-1}B], \tag{1.6}$$

столбцы которой представляют собой столбцы матрицы B и произведений матриц AB, A^2B, ..., $A^{n-1}B$, называется *матрицей управляемости*.

Критерий управляемости линейных стационарных систем. *Линейный стационарный объект вполне управляем тогда и только тогда, когда матрица управляемости имеет максимальный ранг, т. е. когда ее ранг равен* n.

Ранг матрицы равен числу независимых строк, числу независимых столбцов и порядку отличного от нуля минора максимальной размерности.

Определение 1.2. *Пару* (A, B) *называют управляемой или вполне управляемой, если ранг матрицы управляемости* (1.6) *равен* n.

Пример 1.2. Определить, при каких значениях параметра α объект, заданный уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + u_2,\\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_1,\\ \dot{x}_3 &= -x_3 + \alpha u_2,\end{aligned}$$

вполне управляем.

Решение. Матрицы A и B в данном случае имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Найдем произведения матриц AB и A^2B:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Для матрицы управляемости имеем

$$У = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Минор, составленный из 1-го, 2-го и 4-го столбцов, имеет вид

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix} = 2\alpha.$$

Он отличен от нуля при $\alpha \neq 0$. При $\alpha = 0$ все элементы последней строки матрицы управляемости обращаются в нуль и ранг матрицы управляемости не может быть больше двух. Поэтому рассматриваемый объект вполне управляем при $\alpha \neq 0$.

Утверждение 1.1. *Одномерная управляемая система, описываемая уравнением*

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n} u \ (0 \leqslant m < n),$$

где не все коэффициенты b_i $(i = 0,\ 1, \cdots,\ m)$ *равны нулю, вполне управляема.*

Инвариатность свойства управляемости к линейным преобразованиям. Свойство управляемости при неособом линейном преобразований не меняется.

Определение 1.3. *Область, состоящую из всех точек пространства состояний, в которые может быть переведена управляемая система допустимым управлением из начала координат за конечное время, называется ее областью управляемости.*

Если управляемая система вполне управляема, то ее область управляемости совпадает со всем пространством. Если ранг матрицы управляемости управляемой системы не равен максимальному значению (т. е. размерности пространства состояний), но больше нуля, то говорят, что управляемая система не вполне управляема или *частично управляема*. Если управляемая система частично управляема, то область управляемости совпадает с подпространством, порождаемым совокупностью независимых столбцов матрицы управляемости. Это подпространство называют *подпространством управляемости*.

Каноническая форма управляемости. Пусть ранг матрицы управляемости линейной стационарной управляемой системы (1.5) равен l $(l \leqslant n)$. Рассмотрим неособое преобразование $x = Tz$, где матрица преобразования имеет вид $T = [T_1\ T_2]$ и строится следующим образом: T_1 является $(n \times l)$-матрицей, и ее столбцами являются l независимых столбцов матрицы управляемости, T_2 является $(n \times (n-l))$-матрицей, и ее столбцы выбираются так, чтобы матрица T была неособой. При таком преобразовании преобразованное уравнение

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{A}\mathbf{z} + \widetilde{B}\mathbf{u},$$

где $\widetilde{A} = T^{-1}AT$, $\widetilde{B} = T^{-1}B$, принимает вид так называемой *канонической формы управляемости*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \mathbf{z}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \widetilde{A}_{11}\mathbf{z}^{(1)} + \widetilde{A}_{12}\mathbf{z}^{(2)} + \widetilde{B}_1\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \widetilde{A}_{22}\mathbf{z}^{(2)} \end{aligned}\right\}. \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{z}^{(1)}$ — l-вектор, $\mathbf{z}^{(2)}$ — $(n-l)$-вектор, $\widetilde{A}_{11}$ — $(l \times l)$-матрица, $\widetilde{A}_{12}$ — $(l \times (n-l))$-матрица, $\widetilde{A}_{22}$ — $((n-l) \times (n-l))$-матрица, $\widetilde{B}_1$ — $(l \times r)$-матрица.

Из структуры уравнений (1.7) видно, что вектор $\mathbf{z}^{(2)}$ неуправляем, т. е. на его изменение управление ни непосредственно, ни через другие фазовые координаты, зависящие от управления, не оказывает никакого влияния. Вектор $\mathbf{z}^{(1)}$ вполне управляем, т. е. его можно изменять нужным образом путем выбора соответствующего управления.

Пример 1.3. Преобразовать уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1, \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - x_4 \end{aligned}$$

в каноническую форму управляемости.

Решение. Матрицы A, B и их произведения AB, A^2B, A^3B имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^3B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Составив из этих матриц матрицу управляемости, получим

$$У = [B\ AB\ A^2B\ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости имеет два независимых столбца, и ее ранг равен двум. Матрицы T_1, T_2 и T выберем следующим образом:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = [T_1\ T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя векторные обозначения $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1\ z_2)^T$ и $\mathbf{z}^{(2)} = (z_3\ z_4)^T$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)}.$$

Стабилизируемость линейных стационарных систем. Одним из важных понятий при рассмотрении задач управления является стабилизируемость. Управляемая система (объект) называется *стабилизируемой*, если существует закон управления, при котором замкнутая система асимптотически устойчива.

Определение 1.4. *Линейный стационарный объект*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{u} \in R^r$$

называется стабилизируемым, если существует закон управления $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, *при котором замкнутая система* $\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x}$ *асимптотически устойчива.*

Критерий стабилизируемости. *Для того чтобы линейная стационарная управляемая система была стабилизируема, необходимо и достаточно, чтобы она была вполне управляема или, если она не вполне управляема, матрица* $\widetilde{A}_{22}$ *в канонической форме управляемости была устойчива.*

Пример 1.4. Исследовать стабилизируемость управляемой системы, которая описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u,$$
$$\dot{x}_2 = x_2,$$
$$\dot{x}_3 = x_1,$$
$$\dot{x}_4 = -x_2 - x_4.$$

Решение. Эта система была рассмотрена в примере 1.3 и, как там было показано, эти уравнения при преобразовании в каноническую форму управляемости принимают вид

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)}.$$

Для того чтобы рассматриваемая система была стабилизируема, согласно критерию стабилизируемости матрица в правой части второго уравнения должна быть устойчивой. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_{1,2} = \pm 1$, т. е. указанная матрица неустойчива и, следовательно, система не стабилизируема.

Задачи

1.4. Исследовать управляемость системы, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

когда элементы матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

принимают следующие значения:

а) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

б) $a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 3,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 8,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

в) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

г) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

д) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 3,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

е) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

ж) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 1,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

з) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

и) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 2,$
$a_{32} = 0,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

к) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 2,$
$a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1.$

1.5. Исследовать управляемость системы, которая описывается уравнениями

$$\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2y_1 + a_3\dot{y}_2 + a_4y_2 = c_1u,$$
$$\ddot{y}_2 + b_1\dot{y}_2 + b_2y_2 + b_3\dot{y}_1 + b_4y_1 = c_2u$$

при следующих значениях параметров:

а) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 3,\ b_4 = 2,$
$c_1 = 0,\ c_2 = 1;$

б) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 3,\ b_4 = 2,$
$c_1 = 0,\ c_2 = 1;$

в) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 3,\ b_4 = 2,$
$c_1 = 0,\ c_2 = 1;$

г) $a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 3,\ b_4 = 2,$
$c_1 = 0,\ c_2 = 1;$

д) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 3,\ b_4 = 2,$
$c_1 = 0,\ c_2 = 1;$

е) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 3,\ b_1 = 4,\ b_2 = 2,\ b_3 = 1,\ b_4 = 5,$
$c_1 = 1,\ c_2 = 0;$

ж) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 3,\ b_1 = 4,\ b_2 = 2,\ b_3 = 1,\ b_4 = 0,$
$c_1 = 1,\ c_2 = 0;$

з) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 3,\ b_1 = 4,\ b_2 = 2,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1,$
$c_1 = 1,\ c_2 = 0;$

и) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 3,\ b_1 = 2,\ b_2 = 5,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0,$
$c_1 = 1,\ c_2 = 0;$

к) $a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 4,\ a_4 = 3,\ b_1 = 2,\ b_2 = 5,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0,$
$c_1 = 1,\ c_2 = 0.$

1.6. Показать, что система управления, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

не вполне управляема и не стабилизируема, когда элементы матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

принимают следующие значения:

а) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

б) $a_{11} = 2,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 3,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 8,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

в) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

г) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

д) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 3,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

е) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

ж) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 1,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

з) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

и) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 2,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

к) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 2,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1.$

1.7. Показать, что система управления, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

не вполне управляема, но стабилизируема, когда элементы матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

принимают следующие значения:

а) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = -4,\ a_{22} = -3,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

б) $a_{11} = -2,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 3,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = -8,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

в) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -3,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 0,$
$a_{32} = 2,\ a_{33} = -5,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

г) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -2,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 0,$
$a_{32} = 3,\ a_{33} = -4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

д) $a_{11} = -1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 3,\ a_{31} = 1,$
$a_{32} = 0,\ a_{33} = -2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

е) $a_{11} = -1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = -3,\ a_{22} = -2,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 1,$
$a_{32} = 3,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

ж) $a_{11} = -1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 1,\ a_{31} = -1,$
$a_{32} = 0,\ a_{33} = -4,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

з) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -4,\ a_{23} = -5,\ a_{31} = 0,$
$a_{32} = 2,\ a_{33} = -3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

и) $a_{11} = -3,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 2,$
$a_{32} = 0,\ a_{33} = -3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

к) $a_{11} = -3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = -4,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 2,$
$a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1.$

1.3. Наблюдаемость и восстанавливаемость

При синтезе систем с обратной связью управления получаются как функции от фазовых координат. В общем случае фазовые координаты не могут быть измерены непосредственно. Доступны измерению (наблюдению) координаты выходного вектора $\mathbf{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_\rho)^T$. Выходные переменные функционально связаны с фазовыми координатами, и для реализации управлений с обратной связью необходимо определить фазовые координаты по измеренным значениям выходных переменных. В связи с этим возникают проблемы наблюдаемости и восстанавливаемости, заключающиеся в установлении возможности определения состояния объекта (фазового вектора) по измеренным значениям выходного вектора на некотором интервале времени.

Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \tag{1.8а}$$

и выходной вектор связан с фазовым вектором соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{1.8б}$$

которое называется *уравнением наблюдения* или *уравнением выхода*.

Управляемая система (1.8) *называется наблюдаемой или вполне наблюдаемой, если существует такое* t_1 ($t < t_1 < \infty$), *что по дан-*

ным измерения выходного вектора $\mathbf{y}(\tau)$ *и управления* $\mathbf{u}(\tau)$ *на интервале* $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ *можно определить состояние* $\mathbf{x}(t)$.

Наблюдаемость, или полная наблюдаемость, означает, что имеется возможность определить фазовый вектор $\mathbf{x}(t)$ по будущим значениям выходного вектора. Однако в задачах управления текущее состояние объекта должно определяться по прошлым значениям выходного вектора, так как по текущим значениям фазового вектора формируется управление с обратной связью. Поэтому более важным с точки зрения управления является понятие восстанавливаемости, определяемое следующим образом [7]:

Определение 1.5. *Управляемая система* (1.8) *называется восстанавливаемой, или вполне восстанавливаемой, если существует такое* t_1 $(-\infty < t_1 < t)$, *что по данным измерения выходного вектора* $\mathbf{y}(\tau)$ *и управления* $\mathbf{u}(\tau)$ *на интервале* $t_1 \leqslant \tau \leqslant t$ *можно определить состояние* $\mathbf{x}(t)$.

Для стационарных систем из полной наблюдаемости следует полная восстанавливаемость и наоборот, поэтому в таких случаях эти понятия можно не различать.

Наблюдаемость линейных стационарных систем. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{u} \in R^r, \tag{1.9a}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \in R^\rho. \tag{1.9b}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathrm{H} = [C^T\ A^TC^T\ \cdots\ (A^T)^{n-1}C^T], \tag{1.10a}$$

которая называется *матрицей наблюдаемости*. Эта матрица состоит из столбцов матрицы C^T и столбцов произведений матриц A^TC^T, $(A^T)^2C^T$, $\cdots$, $(A^T)^{n-1}C^T$ и имеет размерность $(n \times \rho n)$. Наряду с матрицей наблюдаемости рассмотрим транспонированную матрицу наблюдаемости

$$\mathrm{H}^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{1.10б}$$

которая имеет такой же ранг, что и исходная матрица H.

Критерий наблюдаемости. *Управляемая система* (1.9) *вполне наблюдаема* (*восстанавливаема*) *тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости* (1.10a) *или, что то же, ранг транспонированной матрицы* (1.10б) *равен* n.

Задачи

1.8. Показать, что управляемые системы, которые приводятся ниже, не вполне наблюдаемы:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + u,$
$y = x_1;$

б) $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = 2x_2 + 3x_3,$
$y = x_1;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + u,$
$y = x_1;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + u,$
$y = x_1;$

д) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u,$
$y = x_1;$

е) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + u,$
$y = x_1.$

1.9. Показать, что управляемые системы, которые приводятся ниже, вполне наблюдаемы:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + u,$
$y = x_1;$

б) $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = 2x_2 + 3x_3 + u,$
$y = x_1;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + u,$
$y = x_1;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + x_3,$
$\dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + u,$
$y = x_1;$

д) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_2 = x_2 + x_3,$
$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u,$
$y = x_1;$

е) $\dot{x}_1 = x_2 + x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + u,$
$y = x_1.$

1.10. Определить значения параметра α, при которых приводимые ниже управляемые системы не вполне наблюдаемы:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + u,$
$y = x_1;$

б) $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = 2x_2 + 3x_3 + u,$
$y = x_1;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + u,$
$y = x_1;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = -2x_1 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + u,$
$y = x_1;$

д) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2,$
$\dot{x}_2 = x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u,$
$y = x_1;$

е) $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - x_3 + u,$
$y = x_1.$

1.11. Определить значения параметра α, при которых приводимые ниже управляемые системы вполне наблюдаемы:

а) $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_2 + x_4,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + u,$
$y = x_1;$

б) $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha \cdot x_4,$
$\dot{x}_3 = x_2 + x_3,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - 3x_2 - 2x_4 + u,$
$y = x_1;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_3 = x_3 + \alpha \cdot x_4,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + u,$
$y = x_1;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_3 = x_2 + x_4,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + u,$
$y = x_1;$

д) $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_2 + x_4,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + u,$
$y = x_1;$

е) $\dot{x}_1 = x_2 + \alpha \cdot x_3,$
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2,$
$\dot{x}_3 = x_2 + x_4,$
$\dot{x}_4 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + u,$
$y = x_1.$

1.4. Канонические формы уравнения и модальное управление

Ввиду того, что существует множество эквивалентных форм представлений уравнений состояний, можно выбрать из них наиболее удобное для использования в данном конкретном случае. Такие формы уравнений называют *каноническими*. Поскольку возможны множество различных приложений, известны несколько канонических форм. Здесь рассмотрим преобразование уравнений состояний в каноническую форму, называемую управляемой формой Луенбергера.

Уравнение состояния вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{A}\mathbf{z} + \widetilde{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

называется *управляемой формой Луенбергера*. Характеристическое уравнение матрицы $\widetilde{A}$ этого уравнения имеет вид

$$\det(\lambda I - \widetilde{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Коэффициентами характеристического уравнения являются элементы последней строки матрицы $\widetilde{A}$.

Теорема 1.1. *Для того чтобы уравнение состояния*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \mathbf{x} \in R^n, \ u \in R \tag{1.11}$$

неособым преобразованием можно было преобразовать в управляемую форму Луенбергера, необходимо и достаточно, чтобы пара (A, B) *была вполне управляема.*

Теорема 1.2. *Управляемая система* (1.11) *преобразуется в управляемую форму Луенбергера путем преобразования*

$$\mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

где векторная переменная $\mathbf{h}$ *определяется из уравнений*

$$\mathbf{h}^T B = 0, \ \mathbf{h}^T AB = 0, \ \cdots, \ \mathbf{h}^T A^{n-1} B = 1.$$

Пример 1.5. Преобразовать уравнение состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

в управляемую форму Луенбергера.

Решение. Произведения AB, A^2B и матрица управляемости имеют вид

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad У = (B \ AB \ A^2B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $\det У = 1$, пара (A, B) вполне управляема. Следовательно, данное уравнение может быть преобразовано в управляемую форму Луенбергера.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Поэтому элементами последней строки матрицы $\widetilde{A}$ будут $a_1 = -3, a_2 = 3$, $a_3 = -1$, и преобразованное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Модальное управление. Если линейный стационарный объект вполне управляем, то существует такой линейный закон управления, при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны наперед заданным числам. Способ управления, основанный на размещении корней характеристического управления определенным образом, называют *модальным управлением*.

Утверждение 1.2. *Пусть характеристическое уравнение вполне управляемой системы*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad \mathbf{x} \in R^n,\ u \in R,$$

имеет вид

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Для того чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы обладало заданными корнями и имело вид

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

нужно выбрать закон управления вида

$$u = (\widetilde{\mathbf{a}} - \widetilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{z} = (\widetilde{\mathbf{a}} - \widetilde{\mathbf{c}})^T T^{-1} \mathbf{x},$$

где

$$\widetilde{\mathbf{a}} = (a_n\, a_{n-1}\, \cdots\, a_1)^T, \quad \widetilde{\mathbf{c}} = (c_n\, c_{n-1}\, \cdots\, c_1)^T, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

векторная переменная $\mathbf{h}^T$ в последней матрице определяется из уравнений

$$\mathbf{h}^T B = 0,\ \mathbf{h}^T AB = 0,\ \cdots,\ \mathbf{h}^T A^{n-1} B = 1.$$

Пример 1.6. Управляемая система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Определить закон управления, при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3j$, $\lambda_3 = -1$.

Решение. Согласно утверждению 1.2, чтобы найти требуемый закон управления, нужно знать коэффициенты характеристических уравнений управляемой и замкнутой систем, а также обратную матрицу преобразования уравнений управляемой системы в управляемую форму Луенбергера. Характеристическое уравнение управляемой системы имеет вид (см. пример 1.4)

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

а характеристическое уравнение с заданными корнями замкнутой системы — вид

$$(\lambda + 1 - 3j)(\lambda + 1 + 3j)(\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 10 = 0.$$

В принятых выше обозначениях $a_1 = -3$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 12$, $c_3 = 10$ и соответственно $\widetilde{a} = (a_3\ a_2\ a_1)^T = (-1\ \ 3\ \ -3)$ и $\widetilde{c} = (c_3\ c_2\ c_1)^T = (10\ \ 12\ \ 3)$. Чтобы определить матрицу T^{-1}, нужно сначала составить и решить систему уравнений

$$\mathbf{h}^T B = 0, \quad \mathbf{h}^T AB = 0, \quad \mathbf{h}^T A^2 B = 1.$$

Входящие в эти уравнения матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому указанные выше уравнения принимают вид

$$h_2 = 0,\ h_1 + h_2 = 0,\ 2h_1 + h_2 + h_3 = 1.$$

Отсюда для $\mathbf{h}^T$ получаем $\mathbf{h}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Произведения $\mathbf{h}^T A$ и $\mathbf{h}^T A^2$ имеют вид

$$\mathbf{h}^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^T A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для матрицы T^{-1} получаем соотношение

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \mathbf{h}^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а искомый закон управления принимает вид

$$u = (\widetilde{a} - \widetilde{c})^T T^{-1} x = \begin{pmatrix} -11 & -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= -21x_1 - 6x_2 - 26x_3.$$

Задачи

1.12. Определить обратную матрицу T^{-1} преобразования $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$, преобразующего систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

в управляемую форму Луенбергера при следующих значениях элементов матриц A и B:

а) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

б) $a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 3,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 8,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

в) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 6,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 4,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

г) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

д) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 5,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 3,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 2,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

е) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 7,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 3,\ a_{33} = 5,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1;$

ж) $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 1,\ a_{31} = 1,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 4,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

з) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 0,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0;$

и) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 5,\ a_{31} = 2,$ $a_{32} = 0,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0;$

к) $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 2,$ $a_{32} = 2,\ a_{33} = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1.$

1.13. Записать управляемой форме Луенбергера уравнения систем, у которых характеристическое уравнение имеет следующие корни:

а) $-1, -1, -2, -2$; б) $-1, -2, -3, -3$;

в) $-1 + i, -1 - i, -2 + i, -2 + i$, г) $-1 + i, -1 - i, -2, -3$;

д) $-2, -3, -2 + i, -2 - i$; е) $-1, -1, -2, -3$;

ж) $-2, -2, -1, -3$; з) $-3 + i, -3 - i, -1, -2$;

и) $-3 + i; -3 - i; -2, -2$; к) $-2 + 3i, -2 - 3i, -2, -3$.

1.14. Для объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

определить алгоритмы управления, при которых характеристическое уравнение синтезированной системы имеет следующие корни:

а) $-1, -1, -1$; б) $-1, -2, -3$;

в) $-1, -1 + 2i, -1 - 2i$; г) $-3, -2, -2$;

д) $-1, -2 + i, -2 - i$; е) $-2, -2, -1$;

ж) $-2, -2 + 3i, -2 - 3i$; з) $-3, -2 + i, -2 - i$;

и) $-2, -4, -3$; к) $-2, -2 + i, -2 - i$.

Ответы

1.1. а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_2 + 10u,\ y = x_1$;

б) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + 10u,\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_2,\ y = x_1$;

в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + 10u,\ \dot{x}_3 = -2x_3 - 4x_2 - 3x_1 - 10u,$ $y = x_1$;

г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 - 7u,\ \dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - x_1 + 23u,\ y = x_1$;

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + u,\ \dot{x}_3 = -2x_3 - 4x_2 - 3x_1,\ y = x_1$;

е) $\dot{x}_1 = x_2 - u,\ \dot{x}_2 = x_3 + 7u,\ \dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - x_1 - 26u,$ $y = x_1 + u$;

ж) $\dot{x}_1 = x_2 - 7u,\ \dot{x}_2 = x_3 + 29u,\ \dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - x_1 - 101u,$ $y = x_1 + 2u$;

з) $\dot{x}_1 = x_2 + 1{,}25u,\ \dot{x}_2 = x_3 + 0{,}62u,$ $\dot{x}_3 = -0{,}5x_3 - 2{,}5x_2 - 1,5x_1 - 3{,}69u,\ y = x_1 + 0{,}5u$;

и) $\dot{x}_1 = x_2 + 2u,\ \dot{x}_2 = x_3 - u,\ \dot{x}_3 = x_4 + 5u,$ $\dot{x}_4 = -2x_4 - x_3 - 5x_2 - 3x_1 - 18u,\ y = x_1$;

к) $\dot{x}_1 = x_2 + 0{,}5u,\ \dot{x}_2 = x_3 + u,\ \dot{x}_3 = x_4 + 0{,}5u,$ $\dot{x}_4 = -x_4 - 2x_3 - 3x_2 - x_1 - 3{,}5u,\ y = x_1$;

1.2. а) $\dot{x}_1 = x_2 + u,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - u,\ y = x_1;$
б) $\dot{x}_1 = x_2 + 0,5u,\ \dot{x}_2 = x_3 + u,\ \dot{x}_3 = -2u - 2x_3 - x_2,\ y = x_1;$
в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + 4u,\ \dot{x}_3 = 4x_3 - 2x_2 - x_1 - 15u,\ y = x_1;$
г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + u,\ \dot{x}_3 = 0,25u - x_3 - 0,5x_2 - 0,25x_1,$
$y = x_1;$
д) $\dot{x}_1 = x_2 - 7u,\ \dot{x}_2 = x_3 + 28u,\ \dot{x}_3 = -4x_3 - 2x_2 - 97u,$
$y = x_1 + 2u;$
е) $\dot{x}_1 = x_2 - 1,5u,\ \dot{x}_2 = x_3 + 4u,\ \dot{x}_3 = -2x_3 - x_2 - 6u,$
$y = x_1 + u;$
ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + 4u,\ \dot{x}_3 = -0,5x_3 - 2x_1 - 5u,$
$y = x_1 + 2u;$
з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 - 3u,\ \dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_1 - 2u,\ y = x_1 + 2u;$
и) $\dot{x}_1 = x_2 + 8u,\ \dot{x}_2 = x_3 - 12u,\ \dot{x}_3 = x_4 + 8u,$
$\dot{x}_4 = 36u - 2x_4 - 4x_3 - 6x_1,\ y = x_1;$
к) $\dot{x}_1 = x_2 + 0,5u,\ \dot{x}_2 = x_3 + u,\ \dot{x}_3 = x_4 + 0,5u,$
$\dot{x}_4 = -2x_4 - x_3 - 3x_1, y = x_1.$

1.3. а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 - x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 2x_6;$
б) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 2x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 6x_5 - 4x_6;$
в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 - 4x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -2x_1 - 4x_2 - x_4 - 7x_5 - 5x_6;$
г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 - x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -2x_1 - 4x_2 - x_4 - 7x_5 - 5x_6;$
д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 6x_5 - 4x_6;$
е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = 2x_2 + 5x_5 - 2x_6;$
ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 2x_6;$
з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 2x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_6;$
и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_4 - 3x_5 + 5x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -x_2 - x_4 - 2x_5 - 5x_6;$
к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -2x_4 - x_5 + 5x_6,$
$\dot{x}_4 = x_5,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = -x_1 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 - 5x_6.$

1.4. а) вполне управляема, б) вполне управляема, в) не вполне управляема, г) вполне управляема, д) не вполне управляема, е) не вполне управляема, ж) вполне управляема, з) не вполне управляема, и) вполне управляема, к) вполне управляема.

1.5. а) не вполне управляема, б) вполне управляема, в) не вполне управляема, г) вполне управляема, д) вполне управляема, е) вполне управляема, ж) вполне управляема, з) вполне управляема, и) не вполне управляема, к) не вполне управляема,

1.10. а) $\alpha = 0$, $\alpha = 2$; б) $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$; в), г), д) $\alpha = 0$; е) $\alpha = 0$, $\alpha = 3$.

1.11. а) при всех α, кроме $\alpha = 0$ и $\alpha = -2$; б), в), г), д) при всех α, кроме $\alpha = 0$; е) при всех α, кроме $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

1.12. а) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0{,}75 & 0 \\ 4 & 4{,}25 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2{,}667 \\ 10 & 1 & 26{,}333 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}0833 \\ 0 & 0{,}1667 & 0{,}4187 \\ 1 & 1{,}333 & 2{,}75 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}333 \\ 0 & 1 & 1{,}333 \\ 1 & 6 & 7{,}333 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 1 & 1{,}4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}0476 & 0 \\ 0{,}1429 & 0{,}0952 & 0 \\ 0{,}4286 & 0{,}333 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 7 & 9{,}5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1{,}5 \\ 6 & 1 & 5{,}5 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 17 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13. а) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -4x_1 - 12x_2 - 13x_3 - 16x_4 + u$;
б) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -18x_1 - 39x_2 - 29x_3 - 9x_4 + u$;
в) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -10x_1 - 18x_2 - 15x_3 - 6x_4 + u$;
г) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -12x_1 - 22x_2 - 18x_3 - 7x_4 + u$;
д) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -30x_1 - 49x_2 - 31x_3 - 9x_4 + u$;
е) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -6x_1 - 17x_2 - 17x_3 - 7x_4 + u$;
ж) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -12x_1 - 28x_2 - 23x_3 - 8x_4 + u$;
з) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -20x_1 - 42x_2 - 30x_3 - 9x_4 + u$;
и) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -40x_1 - 64x_2 - 38x_3 - 10x_4 + u$;
к) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -78x_1 - 89x_2 - 39x_3 - 9x_4 + u$.

1.14. а) $u = -(8x_1 + 12x_2 + 8x_3)$; б) $u = -(24x_1 + 13x_2 + 11x_3)$;
в) $u = -(16x_1 + 8x_2 + 8x_3)$; г) $u = -(36x_1 + 9x_2 + 12x_3)$;
д) $u = -(20x_1 + 12x_2)$; е) $u = -(18x_1 + 13x_2 + 10x_3)$;
ж) $u = -(54x_1 + 7x_2 + 11x_3)$; з) $u = -(40x_1 + 6x_2 + 12x_3)$;
и) $u = -(60x_1 + x_2 + 14x_3)$; к) $u = -(30x_1 + 9x_2 + 11x_3)$.

Глава 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Практически все системы управления, строго говоря, являются нелинейными, т.е. описываются нелинейными уравнениями. Линейные системы управления являются их линейными моделями, которые получаются путем *обычной линеаризации* — линеаризации, состоящей в разложении нелинейных функций в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных слагаемых. Однако такая линеаризация не всегда возможна. Если нелинейность допускает обычную линеаризацию, то такая нелинейность называется *несущественной*. В противном случае нелинейность называется *существенной*. Существенными нелинейностями, в частности, обладают всякого рода релейные элементы. Даже и в тех случаях, когда обычная линеаризация возможна, часто на конечном этапе исследования может потребоваться рассмотрение исходной нелинейной модели.

2.1. Особенности нелинейных систем. Определение устойчивости. Изображение процессов на фазовой плоскости

Особенности нелинейных систем. Нелинейные системы по сравнению с линейными системами обладают рядом принципиальных особенностей. В частности, такими особенностями являются следующие:

- не выполняется принцип суперпозиции, и исследование нелинейной системы при нескольких воздействиях нельзя сводить к исследованию при одном воздействии;
- устойчивость и характер переходного процесса зависят от величины начального отклонения от положения равновесия;
- при фиксированных внешних воздействиях возможны несколько, а иногда и бесконечное множество положений равновесия;
- возникают свободные установившиеся процессы, которые в линейных системах невозможны (например, автоколебания);

Универсальных аналитических (математических) методов исследования нелинейных систем нет. В процессе развития теории автоматического управления были разработаны различные математические методы анализа и синтеза нелинейных систем, каждый из которых применим для определенного класса систем и задач. Наиболее широко используемыми методами исследования нелинейных систем являются *метод фазовой плоскости*; *метод функций Ляпунова*; *метод гармонической линеаризации* (*метод гармонического баланса*); *методы исследования абсолютной устойчивости* и др.

Любое исследование более или менее сложных нелинейных систем, как правило, заканчивается математическим моделированием. И в этом отношении математическое моделирование является одним из универсальных (неаналитических) методов исследования.

Определение устойчивости. Линейная система называется устойчивой, если общее решение однородного описывающего ее дифференциального уравнения стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности. Очевидно, это определение нельзя распространить на нелинейные системы. Поэтому в общем случае используются другие определения устойчивости. Существует множество различных понятий и определений устойчивости. В этой книге будут рассмотрены наиболее широко используемые понятия устойчивости, основанные на определениях, данных А. М. Ляпуновым.

Пусть система управления описывается уравнениями

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t). \tag{2.1}$$

Допустим, что $\mathbf{y}^*(t) = (y_1^*(t)\ y_2^*(t) \cdots y_n^*(t))^T$ — частное решение уравнения (2.1), которое описывает интересующее нас движение. Это движение и само решение *называют невозмущенным движением* (*траекторией*). Любое другое решение и движение, которое описывается этим решением, называют *возмущенным движением* (*траекторией*).

Принимается, что в фазовом пространстве (пространстве состояний) R^n рассматриваемой системы введена эвклидова метрика (норма), т. е. длина (норма) вектора $\mathbf{y}$ и расстояние между точками $\mathbf{y}^{(1)}$ и $\mathbf{y}^{(2)}$ определяются следующим образом:

$$\|\mathbf{y}\| = |\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \quad |\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2}.$$

Если $\mathbf{y}(t) = (y_1(t)\ y_2(t) \cdots y_m(t))^T$ — какая-либо траектория системы (2.1), то точка в фазовом пространстве, соответствующая этой траектории в текущий момент времени t, называется *изображающей точкой*.

Определение 2.1. *Невозмущенное движение* $\mathbf{y}^*(t)$ *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого положительного* *числа ε найдется такое положительное число δ, что расстояние между изображающими точками невозмущенной и возмущенной траекторий $\mathbf{y}^*(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ в любой момент времени $t \geqslant t_0$ меньше ε, если только расстояние между этими траекториями в начальный момент $t = t_0$ меньше δ, т.е. если выполняется следующее условие:*

$$|\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon, \ \forall t \geqslant t_0, \quad \textit{если} \ |\mathbf{y}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta. \tag{2.2}$$

Число δ, которое определяется по заданному числу ε, в общем случае зависит как от ε, так и от начального момента t_0. В том случае, если можно выбрать число δ, не зависящее от начального момента t_0, говорят, что невозмущенное движение *равномерно устойчиво*.

Определение 2.2. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое положительное число η, что расстояние между изображающими точками невозмущенной и возмущенной траекторий стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности, если только расстояние между этими траекториями в начальный момент меньше η, т.е. выполняется следующее условие:*

$$|\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)| \to 0 \ \textit{при} \ t \to \infty, \ \textit{если} \ |\mathbf{y}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \eta. \tag{2.3}$$

Прежде чем переходить к другим понятиям устойчивости, преобразуем исходное уравнение. Дело в том, что при исследовании устойчивости методом функций Ляпунова уравнения системы управления должны быть записаны в отклонениях, т.е. так, чтобы невозмущенному движению соответствовало нулевое решение.

Введем новые переменные, которые определяются следующим образом: $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$. В новых переменных уравнение (2.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Y}(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*, t) - \dot{\mathbf{y}}^*(t)$. При этом невозмущенному движению системы (2.4) соответствует нулевое решение $\mathbf{x}^*(t) = 0$. Кроме того, нулевое решение (начало координат) является положением равновесия системы (2.4). Действительно, имеем: $\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{Y}(\mathbf{y}^*, t) - \dot{\mathbf{y}}^*(t) = 0$. Таким образом, при таком преобразовании проблема устойчивости невозмущенного движения сводится к проблеме устойчивости положения равновесия. Любое ненулевое решение является возмущенным движением.

Определение 2.3. *Положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2.4) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что в любой момент времени $t \geqslant t_0$ расстояние от изображающей точки возмущенного движения до начала координат $|\mathbf{x}(t)|$ меньше ε,* *если начальное отклонение* $|\mathbf{x}(t_0)|$ *меньше* δ, *т. е. если выполняется следующее условие*:

$$|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon \ \forall t \geqslant t_0, \ \textit{если} \ |\mathbf{x}(t_0)| < \delta.$$

Определение 2.4. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (2.4) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и найдется такое положительное число* η, *что возмущенное движение* $\mathbf{x}(t)$ *стремится к началу координат, если начальное отклонение* $|\mathbf{x}(t_0)|$ *меньше* η, *т. е. выполняется следующее условие*:

$$\mathbf{x}(t) \to 0 \ \textit{при} \ t \to \infty, \ \textit{если} \ |\mathbf{x}(t_0)| < \eta.$$

Приведенным определениям устойчивости можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Устойчивость по Ляпунову означает, что если задана сфера S_ε радиуса ε, *то существует сфера* S_δ *радиуса* δ *такая, что если возмущенное движение начнется внутри сферы* S_δ, *то изображающая точка никогда не достигнет сферы* S_ε, т. е. движение будет происходить внутри этой сферы (рис. 2.1, *а*). Асимптотическая устойчивость означает, что выполняется условие устойчивости по Ляпунову и существует сфера S_η радиуса η *такая, что если возмущенное движение начинается внутри сферы* S_η, то оно стремится к началу координат при стремлении времени к бесконечности (рис. 2.1, *б*).

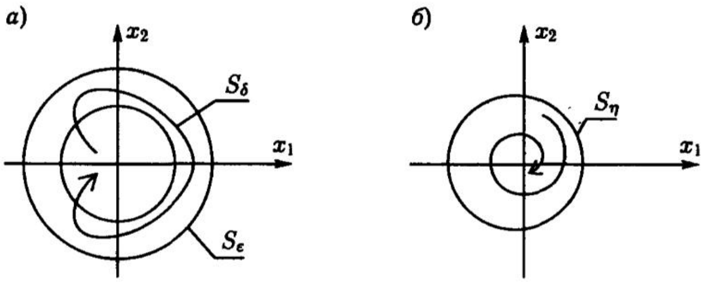


Рис. 2.1.

Если положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво, то множество всех начальных точек $\mathbf{x}^0$, из которых возмущенное движение приходит в начало координат при стремлении времени к бесконечности, называется *областью притяжения* начала координат. Иначе говоря, если точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит области притяжения начала координат, выполняется условие

$$\lim \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ — решение уравнения (2.4) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 (\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0)$.

Определение 2.5. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (2.4) *называется глобально устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и при любых начальных условиях все ее фазовые координаты ограничены при всех* $t \geqslant t_0$.

Это определение устойчивости тесно связано с определением устойчивости по Лагранжу. Система (2.4) называется *устойчивой по Лагранжу*, если все ее решения ограничены на всем интервале $0 \leqslant t < \infty$. Очевидно, положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2.4) будет глобально устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и устойчиво по Лагранжу.

Определение 2.6. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (2.4) *называется асимптотически устойчивым в целом или глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и возмущенное движение стремится в начало координат из любого начального положения.*

Другими словами, положение равновесия называется глобально асимптотически устойчивым, если его область притяжения совпадает со всем фазовым пространством.

Теперь рассмотрим, как соотносится определение устойчивости линейных систем с рассмотренными здесь определениями устойчивости. Если положение равновесия линейной системы устойчиво, то возмущенное движение стремится к положению равновесия из любого начального положения. Так что принятое в теории линейных систем определение устойчивости совпадает с определением глобальной асимптотической устойчивости. В случае линейных систем положение равновесия (система) считается неустойчивым, если не все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости. Однако в общем случае с понятием неустойчивости не так все просто. Поэтому специально остановимся на его определении. При этом, как и выше, сферу радиуса ρ с центром в начале координат обозначим S_ρ.

Определение 2.7. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (2.4) *называется неустойчивым, если существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что для любого числа* $\delta > 0$ *найдется такая точка внутри сферы* S_δ, *что возмущенное движение, начинающееся в этой точке, достигает сферы* S_ε.

Или, другими словами, *положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (2.4) *называется неустойчивым, если существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что не найдется сферы* S_δ, *которая не содержала бы внутри себя точки, начиная с которой возмущенное движение достигает сферы* S_ε.

Это определение является логическим отрицанием определения устойчивости по Ляпунову. Поэтому если положение равновесия не является устойчивым по Ляпунову, то оно неустойчиво.

Положение равновесия линейной системы, неустойчивое в том смысле, как это принято в теории линейных систем, не обязательно будет неустойчивым в выше определенном смысле. Если линейная система неустойчива, но имеет место маргинальная устойчивость (характеристическое уравнение не имеет правых корней, но имеет чисто мнимые корни), то система может быть устойчива по Ляпунову.

Изображение процессов на фазовой плоскости. Если уравнения системы управления представлены в нормальной форме, то ее вектор состояния однозначно определяет состояние системы. Каждому состоянию системы в пространстве состояний соответствует точка. Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется *изображающей точкой*. При изменении состояния изображающая точка описывает траекторию. Эта траектория называется *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется *фазовым портретом*.

Наглядно фазовую траекторию и фазовый портрет можно представить в случае двухмерного фазового пространства. Двухмерное фазовое пространство называется *фазовой плоскостью*.

Фазовая плоскость — это координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка. Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют *методом фазовой плоскости*.

Рассмотрим систему управления второго порядка, которая описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений

$$x_i = x_i(x^0, t), \quad i = 1,\ 2$$

при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = (x_1^0\ x_2^0)^T$ являются параметрическими уравнениями фазовых траекторий. Параметром здесь выступает время. Построив фазовые траектории по этим уравнениям при различных начальных условиях, получим фазовый портрет.

Уравнения (2.5) являются дифференциальными уравнениями фазовых траекторий в параметрической форме. Разделив второе уравнение на первое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)}, \tag{2.6}$$

решение которого непосредственно связывает фазовые координаты. Это уравнение будем называть (непараметрическим) дифференциальным уравнением фазовых траекторий.

Точки, в которых правая часть уравнения (2.6) равна отношению нулей, называются *особыми*. Особые точки являются корнями системы уравнений

$$X_i(x_1, x_2) = 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Как следует из уравнений (2.5), в особых точках фазовая скорость $\dot{\mathbf{x}}$ равна нулю. Следовательно, особые точки являются положениями равновесия. Через особые точки может проходить более одной траектории в то время, как через неособые точки проходит только одна траектория.

Часто при изображении процессов на фазовой плоскости за фазовую координату x_2, которую откладывают по оси ординат, принимают производную $\dot{x}_1$ координаты x_1, откладываемой по оси абсцисс. В этом случае уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{x_2},$$

и фазовые траектории обладают следующими свойствами. В верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, так как $\dot{x}_1 = x_2 > 0$ и x_1 возрастает. В нижней полуплоскости, наоборот, изображающая точка движется справа налево, так как $\dot{x}_1 = x_2 < 0$ и x_1 убывает. На оси абсцисс ($x_2 = 0$) производная $dx_2/dx_1 = \infty$ (за исключением точек равновесия), и поэтому фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом.

По фазовому портрету можно судить о характере переходных процессов. В частности, по фазовой траектории можно построить без особых расчетов качественно временную характеристику — кривую зависимости x_1 от времени, и, наоборот, по временной характеристике можно качественно построить фазовую траекторию.

В качестве примера сначала по фазовой траектории построим временную характеристику, а затем по временной характеристике — фазовую траекторию. Пусть задана фазовая траектория (рис. 2.2 *а*). Отметив на ней характерные точки: начальную точку, точки пересечения

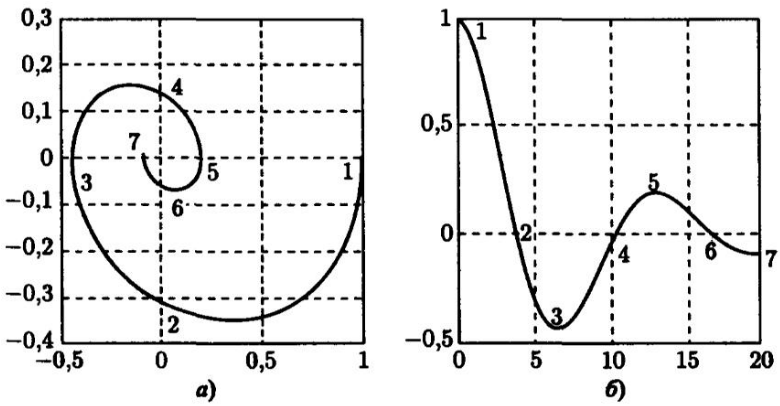
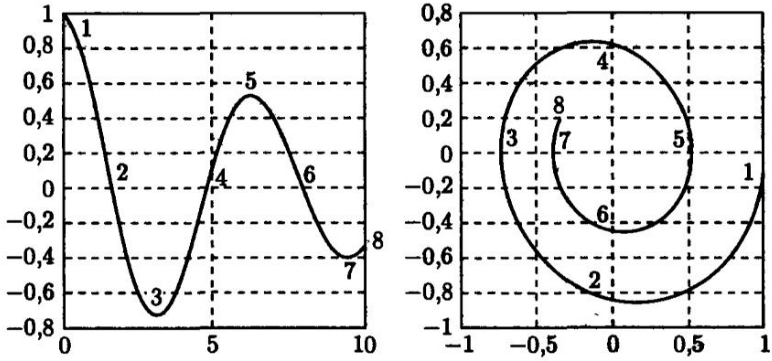


Рис. 2.2.

с осями координат, нанесем соответствующие им точки на временной плоскости и соединим их плавной кривой (рис. 2.2, *б*).



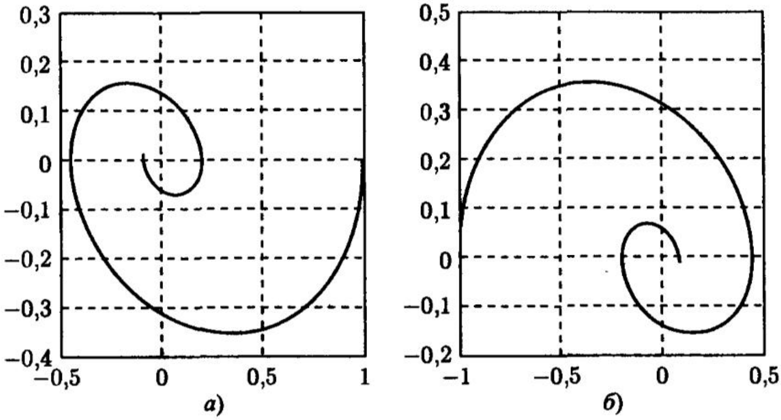
а) *б*)

Рис. 2.3.

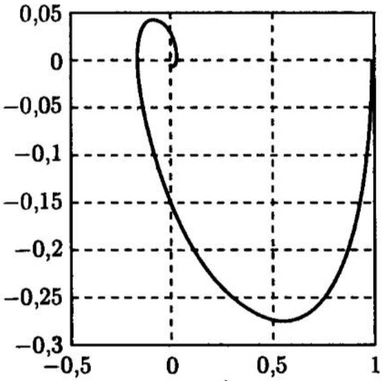
Пусть теперь задана временная характеристика (рис. 2.3, *а*). Отметив на ней характерные точки: начальную точку, точки экстремума и точки пересечения с временной осью, нанесем соответствующие им точки на фазовую плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 2.3, *б*).

Задачи

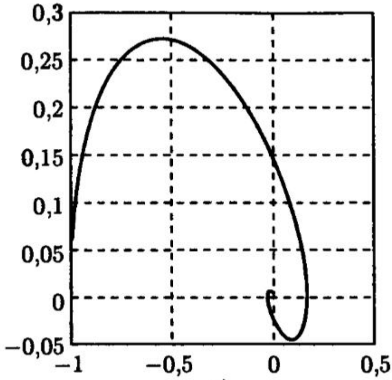
2.1. По фазовым траекториям качественно построить временную характеристику.



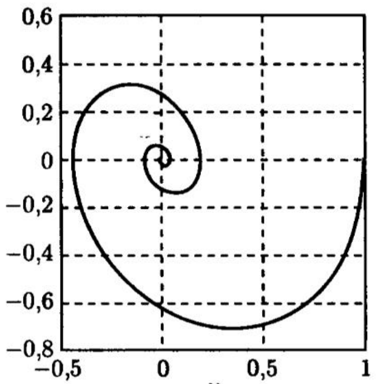
а) *б*)


0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−0,2
−0,25
−0,3
−0,5
0
0,5
1

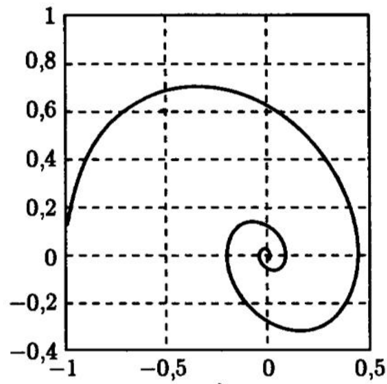
в)


0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
−0,05
−1
−0,5
0
0,5

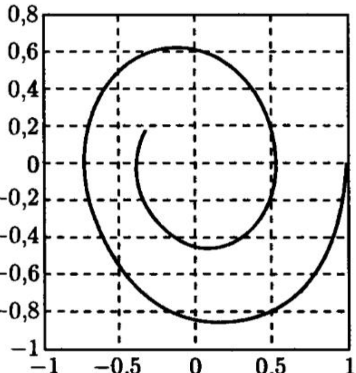
г)


0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−0,5
0
0,5
1

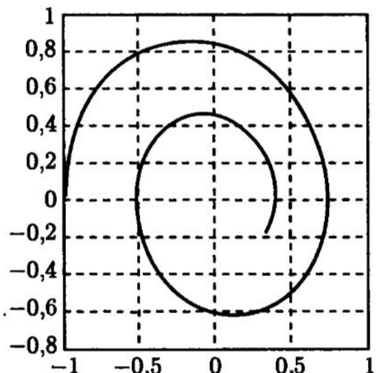
д)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−1
−0,5
0
0,5

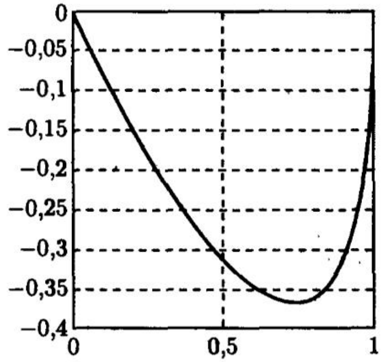
е)


0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
−1
−0,5
0
0,5
1

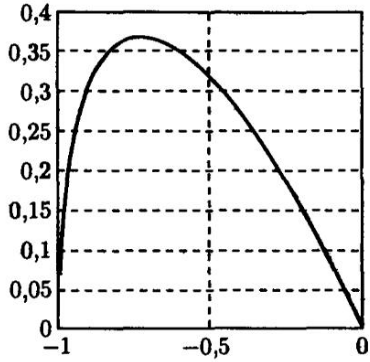
ж)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
−0,5
0
0,5
1

з)

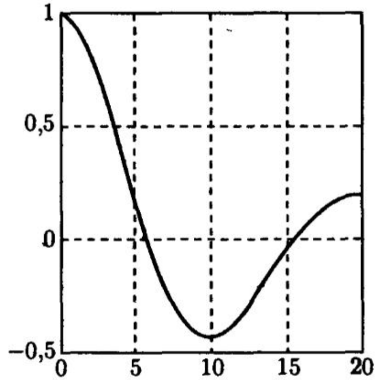


и)

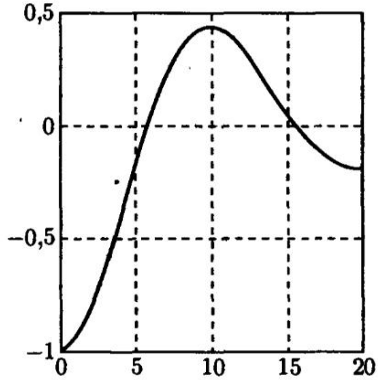


к)

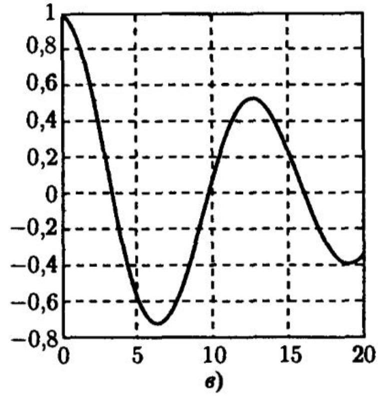
2.2. По временной характеристике качественно постройте фазовую траекторию.



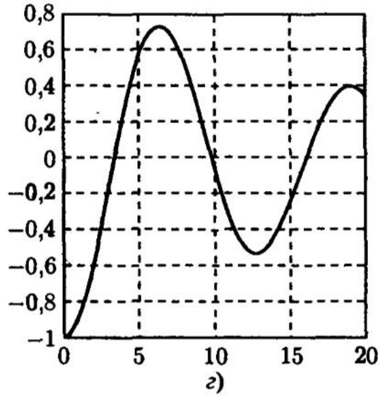
а)



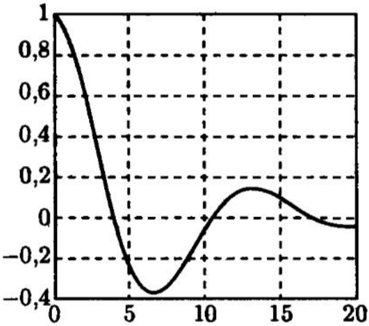
б)



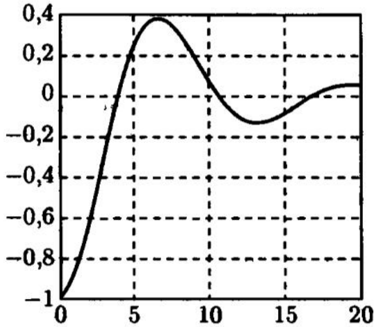
в)



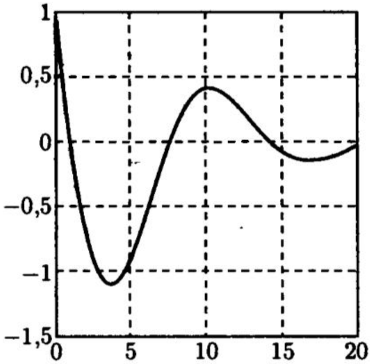
г)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
0
5
10
15
20

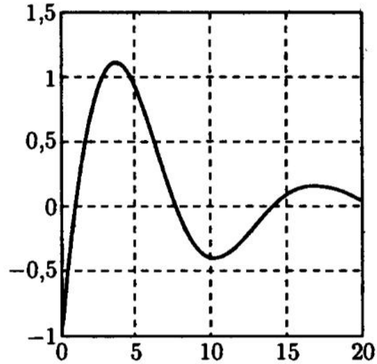
д)


0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
0
5
10
15
20

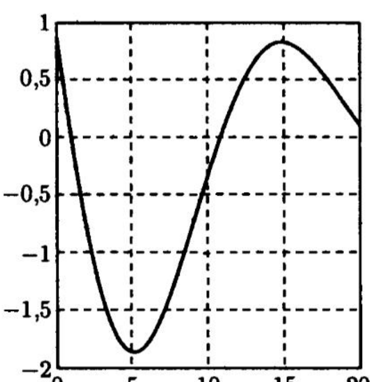
е)


1
0,5
0
−0,5
−1
−1,5
0
5
10
15
20

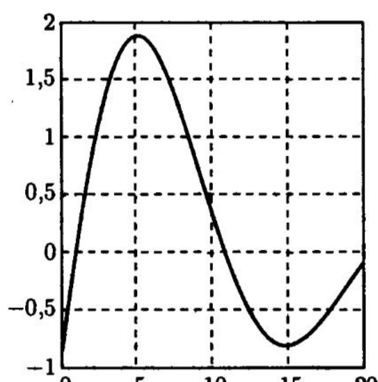
ж)


1,5
1
0,5
0
−0,5
−1
0
5
10
15
20

з)


1
0,5
0
−0,5
−1
−1,5
−2
0
5
10
15
20

и)


2
1,5
1
0,5
0
−0,5
−1
0
5
10
15
20

к)

2.2. Метод фазовой плоскости исследования систем

По фазовому портрету системы можно судить об ее устойчивости и характере переходных процессов. И методом фазовой плоскости исследования систем называют метод, основанный на построении их фазового портрета. Достоинством метода фазовой плоскости является то, что он позволяет наглядно представить всевозможные процессы, происходящие в системе, и что он является точным, а не приближенным, как, например, метод гармонической линеаризации. Его недостатком является то, что он применим только для систем второго порядка.

Процесс анализа нелинейных систем методом фазовой плоскости рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 2.1. Исследовать процессы в нелинейной системе с реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4, *а*).

Решение. Система описывается следующими уравнениями:

$$\ddot{y} = u, \quad e = g_0 - y, \quad u = \begin{cases} 1, & e > \alpha, \\ 0, & |e| \leqslant \alpha, \\ -1, & e < -\alpha. \end{cases}$$

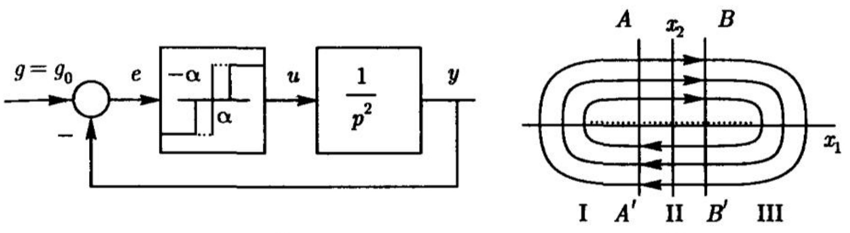
Здесь задающее воздействие является постоянным. Введем новые переменные: $x_1 = e$, $x_2 = \dot{x}_1$. В новых переменных уравнения системы примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -u, \quad u = \begin{cases} 1, & x_1 > \alpha, \\ 0, & |x_1| \leqslant \alpha, \\ -1, & x_1 < -\alpha. \end{cases}$$

Разобьем фазовую плоскость на три области I, II, III прямыми $x_1 = \alpha$ и $x_1 = -\alpha$ (рис. 2.4, *б*). В пределах каждой области $u = \text{const}$. Поэтому, разделив в последних уравнениях второе уравнение на первое и проинтегрировав его, получим $x_2^2 = -2ux_1 + C$.

В области I ($x_1 < -\alpha$) $u = -1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = 2x_1 + C_1$ и определяет семейство парабол, направленных вправо. В области II ($|x_1| \leqslant \alpha$) $u = 0$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = C_2$ и определяет семейство прямых, параллельных оси абсцисс. В области III ($x_1 > \alpha$) $u = 1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = -2x_1 + C_3$ и определяет семейство парабол, направленных влево.

Как видим, уравнения фазовых траекторий во всех трех областях отличаются между собой, и при переходе через границу с одной области на другую происходит переключение с одного вида траекторий на другой. Линии, на которых происходят такие переключения, называются *линиями переключения*.



а) *б)*

Рис. 2.4.

На основе полученных уравнений построен фазовый портрет системы и представлен на рис. 2.4, *б*. Как следует из этого рисунка, при ненулевых начальных условий в системе возникают незатухающие колебания. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий. Положение равновесия (начало координат) неустойчиво, так как если принять $\varepsilon < \alpha$, то какое бы малое положительное число δ не выбрали, возмущенное движение, начинающееся внутри сферы радиуса δ и не на оси абсцисс, всегда достигнет сферы с радиусом ε.

Пример 2.2. Построить фазовый портрет и исследовать систему, представленную на рис. 2.5.

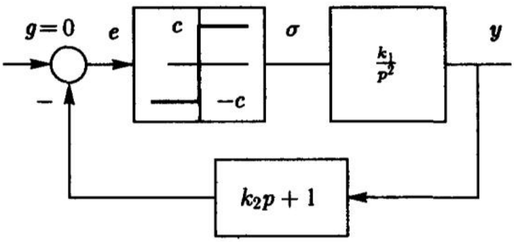


Рис. 2.5.

Решение. Система описывается уравнениями

$$\ddot{y} = k_1\sigma, \quad \sigma = c\,\mathrm{sign}\,e, \quad e = -(k_2\dot{y} + y).$$

Вводя новые переменные $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$, эти уравнения можно преобразовать к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1 c\,\mathrm{sign}(k_2 x_2 + x_1).$$

Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1 c\,\mathrm{sign}(k_2 x_2 + x_1)}{x_2}.$$

Прямая AB на рис. 2.6, которая описывается уравнением $k_2x_2 + x_1 = 0$, или $x_2 = -(1/k_2)x_1$, делит фазовую плоскость на две области: область I

($k_2x_2 + x_1 > 0$) и область II ($k_2x_2 + x_1 < 0$). Последнее уравнение в области I принимает вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1c}{x_2} \text{ или } x_2\,dx_2 = -k_1c\,dx_1,$$

в области II — вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1c}{x_2} \text{ или } x_2\,dx_2 = k_1c\,dx_1.$$

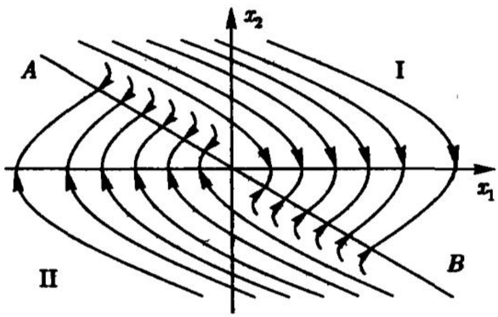


Рис. 2.6.

Решив эти уравнения, получаем следующие уравнения для фазовых траекторий:

$$\text{в области I} \quad x_2^2 = -2k_1cx_1 + C_1,$$
$$\text{в области II} \quad x_2^2 = 2k_1cx_1 + C_2.$$

Эти уравнения являются уравнениями парабол, направленных навстречу друг другу. На основе этих уравнений построен фазовый портрет и представлен на рис. 2.6. Из этого рисунка следует, что если изображающая точка не находится на линии переключения (прямая AB), то она до достижения этой прямой будет двигаться по одной из фазовых траекторий. Как только изображающая точка пересечет линию переключения, она попадает на одну из фазовых траекторий, направленных в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка опять будет двигаться в сторону линии переключения, пока она ее не пересечет. Как только изображающая точка снова пересечет линию переключения, она опять окажется на фазовой траектории, направленной в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка по достижении линии переключения будет двигаться по ней, теоретически совершая колебания с бесконечно малой амплитудой и бесконечно большой частотой. В действительности, так как реле обладает конечной скоростью переключения, частота не будет бесконечно большой, а амплитуда — бесконечио малой.

Таким образом, когда изображающая точка достигнет линии переключения, она теоретически будет скользить по этой линии и двигаться к положению равновесия. Такой процесс называют *скользящим режимом.*

Системы с переменной структурой. Структура системы определяется составом элементов (звеньев) и связью между ними. Изменить структуру системы — это значить изменить состав ее элементов или связи между элементами.

Системой с переменной структурой (СПС) называют систему, в которой структура в процессе ее функционирования изменяется на основе текущей информации для достижения определенной цели — обеспечения устойчивости, улучшения качества и т. п.

Использование принципов построения СПС при синтезе систем управления позволяет достичь устойчивости и приемлемого качества в тех случаях, когда параметры объекта изменяются в широких пределах или отсутствует информация, необходимая для реализации обычных алгоритмов управления с фиксированной структурой, обеспечивающих заданные требования к системе.

Задачи

2.3. Дана система (рис. 2.7), состоящая из линейного звена с передаточной функцией $W_1(p) = 5/p^2$ и нелинейного звена, имеющего характеристику идеального звена (рис. 2.8, *а*) с параметром $c = 2$.

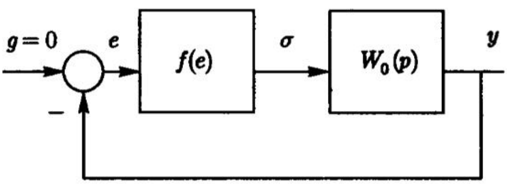


Рис. 2.7

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

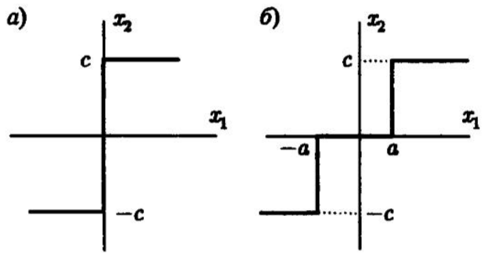


Рис. 2.8

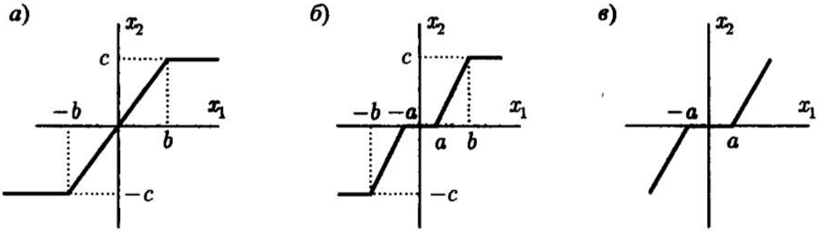


Рис. 2.9

2.4. Дана система (рис. 2.7), состоящая из линейного звена с передаточной функцией $W_1(p) = 5/p^2$ и нелинейного звена, имеющего характеристику релейного звена с зоной нечувствительности (рис. 2.8, *б*) и параметрами $a = 1$ и $c = 2$.

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

2.5. Дана система (рис. 2.7), состоящая из линейного звена с передаточной функцией $W_1(p) = 5/p^2$ и нелинейного звена, имеющего линейную характеристику с насыщением (рис. 2.9, *а*) и параметрами $b = 1$ и $c = 2$.

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

2.6. Дана система (рис. 2.7), состоящая из линейного звена с передаточной функцией $W_1(p) = 5/p^2$ и нелинейного звена, имеющего линейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 2.9, *в*) и параметром $a = 1$.

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

2.7. Дана система (рис. 2.7), состоящая из линейного звена с передаточной функцией $W_1(p) = 5/p^2$ и нелинейного звена, имеющего линейную характеристику с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 2.9, *б*) и параметрами $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

2.8. Дана система (рис. 2.10), состоящая из линейных звеньев с передаточными функциями $W_1(p) = 5/p^2$ и $W_2(p) = 0{,}5p + 1$ и нелинейного звена, имеющего характеристику идеального реле с параметром $c = 2$.

Исследовать: *а*) устойчивость невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$; *б*) характер переходного процесса.

2.9. Дана система (рис. 2.10), состоящая из линейных звеньев с передаточными функциями $W_1(p) = 5/p^2$ и $W_2(p) = 0{,}5p + 1$ и нелинейного звена, имеющего характеристику релейного звена с зоной нечувствительности и параметрами $a = 1$ и $c = 2$.

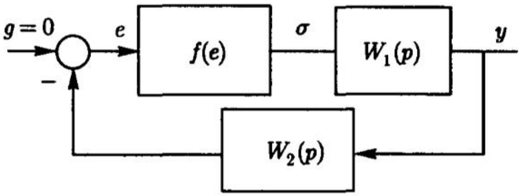


Рис. 2.10

Исследовать: *а*) устойчивость системы на интервале $[-1, 1]$; *б*) характер переходного процесса.

Примечание. Здесь под устойчивостью системы на интервале $[-1, 1]$ понимается такое ее поведение, при котором $\dot{y} = 0$, $y \in [-1,\ 1]$ при $t \to \infty$.

2.10. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 0{,}25, & y \cdot \dot{y} > 0, \\ 4, & y \cdot \dot{y} < 0. \end{cases}$$

2.11. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot \dot{y} > 0, \\ 0{,}25, & y \cdot \dot{y} < 0. \end{cases}$$

2.12. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} - 2y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 5, & y \cdot s > 0, \\ -3, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 0{,}5\, y.$$

2.13. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} - 2y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 5, & y \cdot s < 0, \\ -3, & y \cdot s > 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + y.$$

2.14. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} - 2y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 5, & y \cdot s > 0, \\ -3, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 2y.$$

2.15. Исследовать устойчивость.

$$\ddot{y} - 4y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 6, & y \cdot s > 0, \\ 1, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 2y.$$

2.16. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} - 2y + y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot s > 0, \\ -4, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 0{,}5\,y.$$

2.17. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} - 2y + 4y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 2, & y \cdot s > 0, \\ -2, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 3y.$$

2.18. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} - 2y + y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot s > 0, \\ -4, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 2y.$$

2.19. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} - 8y + y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot s > 0, \\ -4, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 2y.$$

2.20. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} - 2y - 4y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 2, & y > 0, \\ -2, & y < 0. \end{cases}$$

2.21. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} - 2y - 2y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot s > 0, \\ -6, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 0{,}5\,y.$$

2.22. Исследовать (*а*) устойчивость и (*б*) характер переходного процесса системы

$$\ddot{y} - 2y - 2y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 4, & y \cdot s > 0, \\ -6, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 3y.$$

2.23. Исследовать устойчивость системы

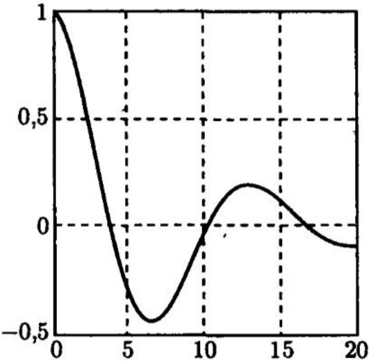
$$\ddot{y} - 2y - 4y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 2, & y \cdot s > 0, \\ -2, & y \cdot s < 0, \end{cases} \quad s = \dot{y} + 3y.$$

2.24. Исследовать устойчивость системы

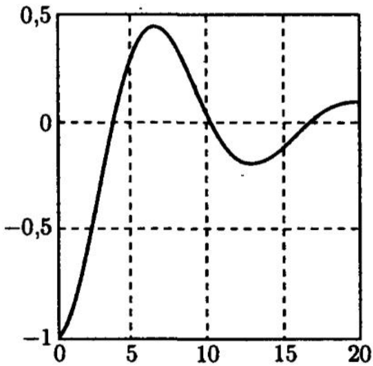
$$\ddot{y} - 2y + 4y = u, \quad u = -\psi \cdot y, \quad \psi = \begin{cases} 2, & y > 0, \\ -2, & y < 0. \end{cases}$$

Ответы

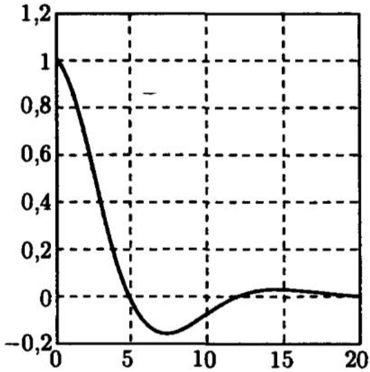
2.1.



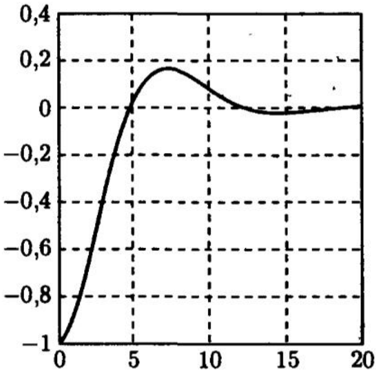
а)



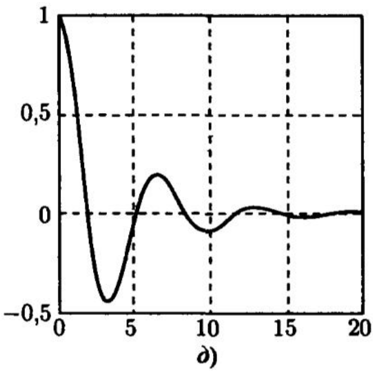
б)



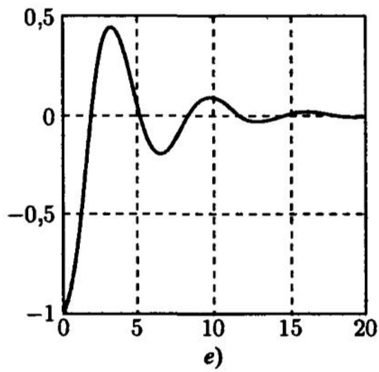
в)



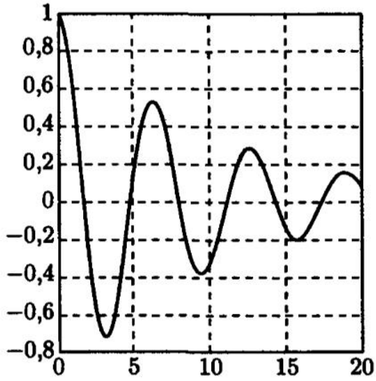
г)



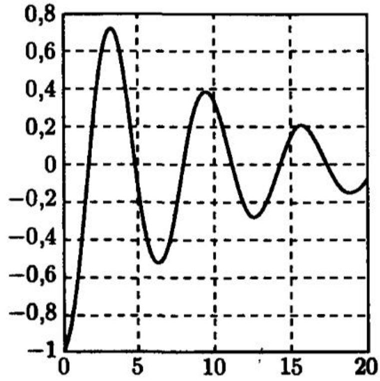
д)



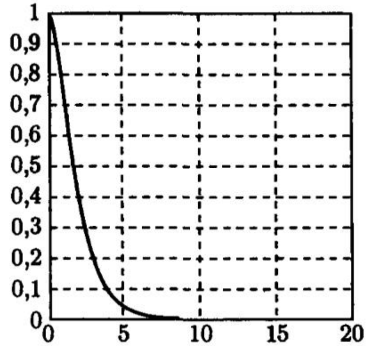
е)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
0
5
10
15
20

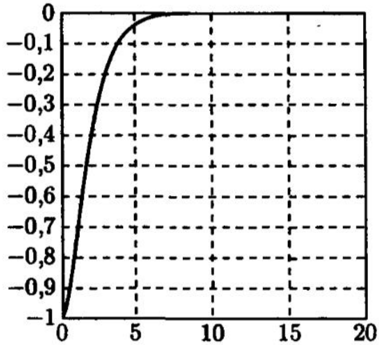
ж)


0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
0
5
10
15
20

з)

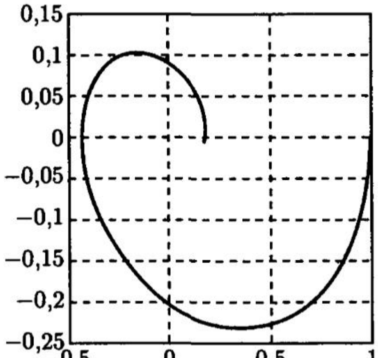

1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
5
10
15
20

и)

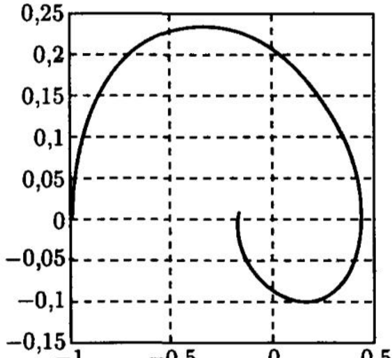

0
−0,1
−0,2
−0,3
−0,4
−0,5
−0,6
−0,7
−0,8
−0,9
−1
0
5
10
15
20

к)

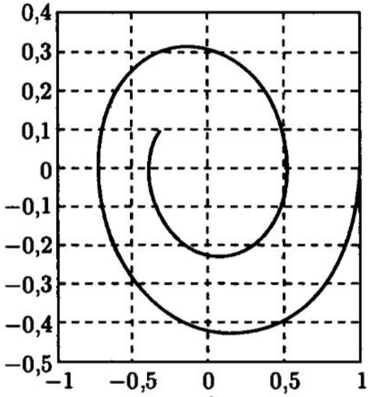
2.2.


0,15
0,1
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−0,2
−0,25
−0,5
0
0,5
1

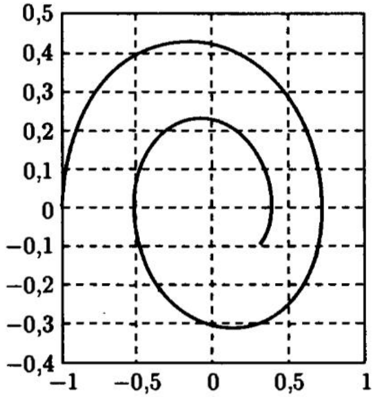
а)


0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−1
−0,5
0
0,5

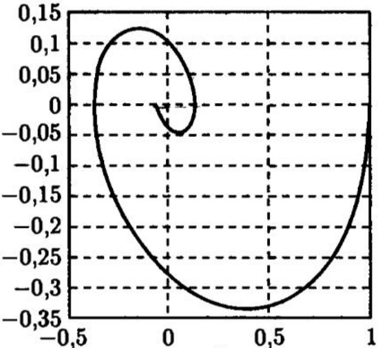
б)


0,4
0,3
0,2
0,1
0
−0,1
−0,2
−0,3
−0,4
−0,5
−1
−0,5
0
0,5
1

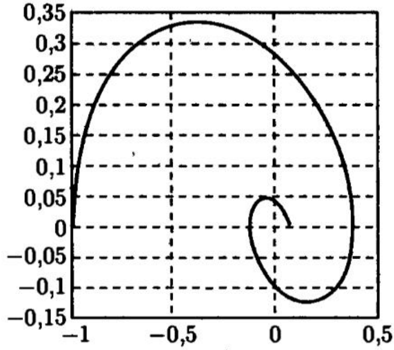
в)


0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
−0,1
−0,2
−0,3
−0,4
−1
−0,5
0
0,5
1

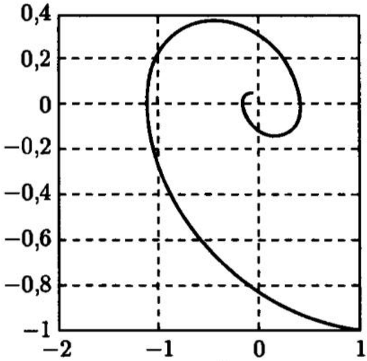
г)


0,15
0,1
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−0,2
−0,25
−0,3
−0,35
−0,5
0
0,5
1

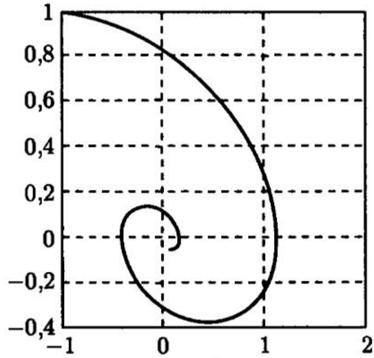
д)


0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−1
−0,5
0
0,5

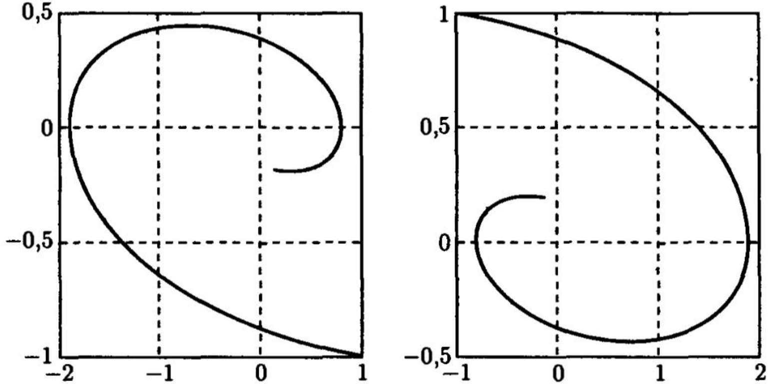
е)


0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1
−2
−1
0
1

ж)


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−1
0
1
2

з)



и) *к*)

2.3. *а*) устойчиво по Ляпунову; *б*) незатухающие колебания. **2.4.** *а*) не устойчиво; *б*) незатухающие колебания. **2.5.** *а*) устойчиво по Ляпунову; *б*) незатухающие колебания. **2.6.** *а*) не устойчиво; *б*) незатухающие колебания. **2.7.** *а*) не устойчиво; *б*) незатухающие колебания. **2.8.** *а*) асимптотически устойчиво; *б*) апериодический (скользящий режим). **2.9.** *а*) асимптотически устойчива на интервале $[-1, 1]$; *б*) колебательный. **2.10.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) колебательный. **2.11.** *а*) не устойчива; *б*) колебательный. **2.12.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) апериодический (скользящий режим). **2.13.** Не устойчива. **2.14.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) колебательный. **2.15.** Не устойчива. **2.16.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) апериодический (скользящий режим). **2.17.** Не устойчива. **2.18.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) колебательный. **2.19.** Не устойчива. **2.20.** Не устойчива. **2.21.** Асимптотически устойчива. **2.22.** *а*) асимптотически устойчива; *б*) колебательный. **2.23.** Не устойчива. **2.24.** Не устойчива.

Глава 3

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации или гармонического баланса первоначально был разработан для исследования периодического режима. Однако в дальнейшем он стал использоваться также для анализа устойчивости и синтеза нелинейных систем.

Основная идея метода состоит в следующем. Управляемые системы (объекты), как правило, обладают свойством фильтра низких частот: при возникновении периодических режимов они не пропускают или пропускают с большим ослаблением вторые и более высокие гармоники. И суть метода гармонической линеаризации состоит в описании нелинейного звена линейным уравнением, которое получается при пренебрежении (отбрасывании) указанных гармоник в разложении нелинейной функции в ряд Фурье.

3.1. Гармоническая линеаризация. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации

Структурную схему замкнутой нелинейной системы, состоящей из нелинейного звена (НЗ) и линейной части (ЛЧ) — линейного звена (рис. 3.1, a), будем называть *типовой структурной схемой нелинейной системы*. Уравнения системы (рис. 3.1, a) при $g = 0$ имеют вид

$$y = W_л(p)\sigma, \quad \sigma = f(e), \quad e = -y \qquad (3.1)$$

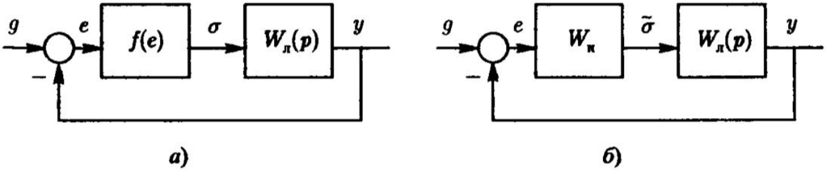


Рис. 3.1.

Допустим, что в системе возникает периодический режим. Тогда нелинейная функция $\sigma(t) = f[e(t)]$ будет периодической функцией времени и ее можно будет разложить в ряд Фурье

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}a_0 + b_1 \sin\omega t + a_1 \cos\omega t + (\ldots), \tag{3.2}$$

где a_0, b_1, a_1 — коэффициенты Фурье; $\omega = 2\pi/T$, T — период, $(\ldots)$ — высшие (вторые и более высокие) гармоники.

Предположим, что линейная часть обладает свойством фильтра низких частот, т. е. выполняется условие

$$|W_л(j\omega)| \ll |W_л(jk\omega)|, \quad \omega = 2\pi/T, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots. \tag{3.3}$$

Проверить это условие, пока не определена частота периодического процесса, нельзя, и его перед началом исследования принимают как гипотезу. Поэтому это условие называют *гипотезой фильтра*.

При условии (3.3) высшие гармоники на выходную величину y линейной части не оказывают существенного влияния. Поэтому при определении y высшими гармониками можно пренебречь и уравнение системы (3.1) при $a_0 = 0$ представить в виде

$$y = W_л(p)\widetilde{\sigma}, \quad \widetilde{\sigma} = \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\omega}p\right]e, \quad e = -y, \tag{3.4}$$

где

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi\, d\psi, \tag{3.5а}$$

$$q'(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\,\cos d\psi \tag{3.5б}$$

или, если $f(e)$ — однозначная нечетная функция, то

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{\pi A}\int\limits_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi\, d\psi, \quad q'(A) = 0. \tag{3.5в}$$

Здесь $\psi = \omega t$.

Система (3.4) при фиксированных амплитуде A и частоте ω является линейной. Переход от исходной системы (3.1) к линеаризованной системе (3.4) называется *гармонической линеаризацией*. Коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ называют *коэффициентами гармонической линеаризации*. Передаточную функцию (см. второе уравнение (3.4))

$$W_н(A,p) = q(A) + \frac{q'(A)}{\omega}p \tag{3.6а}$$

называют *передаточной функцией НЗ* (нелинейного звена) и соответственно выражение

$$W_{\text{н}}(A) = q(A) + jq'(A), \tag{3.6б}$$

которое получается при подстановке в передаточную функцию НЗ $p = j\omega$ — *частотной передаточной функцией НЗ*. В соотношении (3.6б) коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ составляют вещественную и мнимую части частотной передаточной функции НЗ. Поэтому $q(A)$ называют *вещественным*, а $q'(A)$ — *мнимым коэффициентами гармонической линеаризации*.

Нелинейное звено после гармонической линеаризации представляется в виде линейного звена с передаточной функцией (3.6а), и структурная схема гармонически линеаризованной системы принимает вид, представленный на рис. 3.1, *б*.

Гармонически линеаризованные уравнения (3.4) были получены при условии, что постоянное слагаемое в разложении Фурье $a_0 = 0$ и задающее воздействие $g = 0$. При этом колебания на входе нелинейного звена имеют вид $e = A\sin\omega t$, и они являются *симметричными*. Указанные колебания будут симметричными и приведенные выкладки справедливыми, если характеристика нелинейного звена будет симметричной относительно начала координат и установившаяся ошибка будет равна нулю. При постоянном задающем воздействии установившая ошибка будет равна нулю, если система является астатической, т. е. линейная часть содержит интегрирующее звено.

Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации при симметричных колебаниях. Рассмотрим на примерах вычисление коэффициентов гармонической линеаризации для нелинейных звеньев с однозначными и неоднозначными характеристиками.

П р и м е р 3.1. Определить коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена с кусочно-линейной характеристикой с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 3.2, *а*) при симметричных колебаниях.

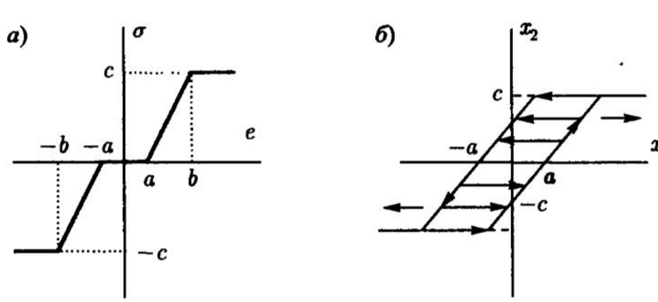


Рис. 3.2.

Решение. Так как характеристика нелинейного звена является однозначной и симметричиой относительно начала координат, то функция $f(e)$ будет нечетной. Поэтому в этом случае согласно формулам (3.5в) мнимый коэффициент гармонической линеаризации $q'(A) = 0$, и необходимо вычислить только вещественный коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$.

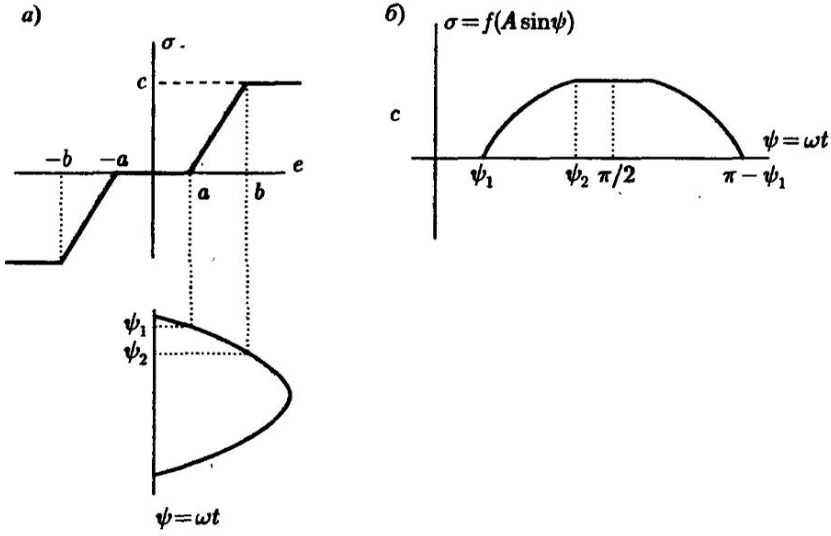


Рис. 3.3.

График выходного сигнала нелинейного звена с такой характеристикой, когда на его вход подается гармонический сигнал $e = A\sin\omega t$, представлен на рис. 3.3. Как следует из этого рисунка, пока входной сигнал НЗ не достигает величины a, или переменная ψ величины ψ_1 ($e = A\sin\psi_1 = a$), выходной сигнал НЗ будет равен нулю. Когда входной сигнал изменяется на интервале $[a, b]$, или переменная ψ — на интервале $[\psi_1, \psi_2]$, где ψ_2 определяется из соотношения $A\sin\psi_2 = b$, на выходе НЗ имеем

$$\sigma = k(A\sin\psi - a).$$

Здесь $k = c/(b-a)$ — тангенс угла наклона характеристики НЗ на интервале $[a, b]$. И, наконец, на интервале $[\psi_2, \pi/2]$ выходной сигнал НЗ принимает постоянное значение с.

График выходного сигнала на интервале $[0, \pi]$ симметричен относительно прямой $\psi = \pi/2$. Поэтому выходной сигнал на интервале $[\pi/2, \pi-\psi_2]$ равен постоянной величине с, на интервале $[\pi-\psi_2, \pi-\psi_1]$ описывается функцией $\sigma = k(A\sin\psi - a)$ и на интервале $[\pi-\psi_1, \pi]$ равен нулю.

Следовательно, вещественный коэффициент гармонической линеаризации определяется следующим образом (см (3.5в)):

$$q(A)=\frac{b_1}{A}=\frac{2}{\pi A}\int\limits_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi=\frac{2}{\pi A}\left[\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} k(A\sin\psi-a)\sin\psi\,d\psi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} c\sin\psi\,d\psi+\int\limits_{\pi-\psi_2}^{\pi-\psi_1} k(A\sin\psi-a)\sin\psi\,d\psi\right].$$

Проинтегрировав это выражение, используя тригонометрическое тождество $\sin^2\psi=(1-\cos 2\psi)/2$, получим

$$q(A)=\frac{2}{\pi A}\left\{k\left[A\left(\frac{1}{2}\psi-\frac{1}{4}\sin 2\psi\right)-a\psi\right]_{\psi_1}^{\psi_2}+\right.$$

$$\left.+c\cos\psi\,\Big|_{\psi_2}^{\pi-\psi_2}+k\left[A\left(\frac{1}{2}\psi-\frac{1}{4}\sin 2\psi\right)-a\psi\right]_{\pi-\psi_2}^{\pi-\psi_1}\right\}.$$

Подставив пределы интегрирования, найдем

$$q(A)=\frac{4k}{\pi}\left[\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\psi_2-\sin 2\psi_1)+a(\cos\psi_2-\cos\psi_1)\right]+\frac{4c}{\pi A}\cos\psi_2.$$

Учитывая соотношения (см. рис. 3.3, *а*)

$$A\sin\psi_1=a,\quad A\sin\psi_2=b,\quad \psi_1=\arcsin\frac{a}{A},\quad \psi_2=\arcsin\frac{b}{A},\quad k=\frac{c}{b-a},$$

окончательно для вещественного коэффициента гармонической линеаризации иелинейного звена с зоной нечувствительности и насыщением, получаем

$$q(A)=\frac{2c}{\pi(b-a)}\left[\arcsin\frac{b}{A}-\arcsin\frac{a}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right].$$

Эта формула справедлива при $A\geqslant b$.

Пример 3.2. Определить коэффициеиты гармонической линеаризации нелинейного звена с кусочно-линейной характеристикой с гистерезисом и насыщением (рис. 3.2, *б*) при симметричных колебаниях.

Решение. Графики входного и выходного сигналов НЗ представлены на рис 3.4. Кривую выходного сигнала НЗ на интервале $[\pi, 2\pi]$ можно получить из той же кривой на интервале $[0, \pi]$ зеркальным отображением относительно оси абсцисс и сдвигом вправо на π. Точно таким же свойством обладают кривые функций синуса и косинуса, на которые умножаются выходной сигнал НЗ при вычислении коэффициентов гармонической линеаризации. Поэтому в данном случае в формулах (3.5а) и (3.5б) значения интегралов на указанных интервалах

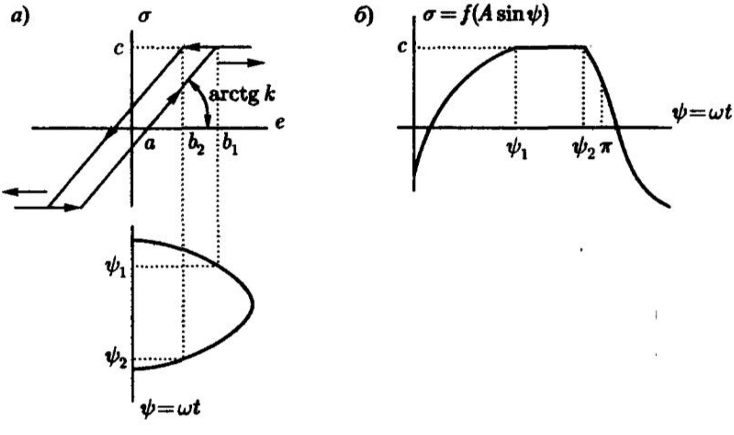


Рис. 3.4.

будут совпадать, и в них интегралы можно удвоить, заменив верхний предел интегрирования 2π на π, т. е. записать эти формулы следующим образом:

$$q(A) = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi, \tag{3.7а}$$

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} f(A\sin\psi)\,\cos d\psi. \tag{3.7б}$$

Выходной сигнал НЗ (рис. 3.4, *б*) на интервале $[0,\psi_1]$ описывается функцией $\sigma = k(A\sin\psi - a)$, на интервале $[\psi_1,\psi_2]$ принимает постоянное значение c и на интервале $[\psi_2,\pi]$ описывается функцией $\sigma = k(A\sin\psi + a)$. Поэтому формулы (3.7) принимают вид

$$q(A) = \frac{2}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} k(A\sin\psi - a)\sin\psi\,d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\sin\psi\,d\psi + \right.$$
$$\left. + \int_{\psi_2}^{\pi} k(A\sin\psi + a)\sin\psi\,d\psi\right], \tag{3.8а}$$

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} k(A\sin\psi - a)\cos\psi\,d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\cos\psi\,d\psi + \right.$$
$$\left. + \int_{\psi_2}^{\pi} k(A\sin\psi + a)\cos\psi\,d\psi\right]. \tag{3.8б}$$

Проинтегрировав (3.8а), получим

$$q(A) = \frac{2}{\pi A}\left[\frac{kA}{2}\left(\psi_1 - \frac{1}{2}\sin 2\psi_1\right) + ka(\cos\psi_1 - 1) - c(\cos\psi_2 - \cos\psi_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{kA}{2}\left(\pi - \psi_2 + \frac{1}{2}\sin 2\psi_2\right) + ka(1 + \cos\psi_2)\right].$$

Учитывая соотношения (см. рис. 3.4, a)

$$c = k(b_1 - a), \quad b_2 = b_1 - 2a, \quad A\sin\psi_1 = b_1, \quad A\sin\psi_2 = b_2,$$
$$\psi_1 = \arcsin\frac{b_1}{A}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin\frac{b_2}{A},$$

последнее выражение можно преобразовать к виду

$$q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b_1}{A} + \arcsin\frac{b_2}{A} + \frac{b_1}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{A}\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{b_2}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{A}\right)^2}\right], \quad A \geqslant b_1.$$

Проинтегрировав (3.8б), получим

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A}\left[k\left(\frac{1}{2}A\sin^2\psi_1 - a\sin\psi_1\right) + c\left(\sin\psi_2 - \sin\psi_1\right) - \right.$$
$$\left. - k\left(\frac{1}{2}A\sin^2\psi_2 + a\sin\psi_2\right)\right].$$

Подставив сюда $c = k(b_1 - a)$, $\sin\psi_1 = b_1/A$ и $\sin\psi_2 = b_2/A$, получим

$$q'(A) = \frac{k(b_2^2 - b_1^2)}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b_1.$$

Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации при несимметричных колебаниях. Колебания на входе нелинейного звена (НЗ) будут несимметричными, если установившаяся ошибка отлична от нуля или характеристика НЗ является несимметричной относительно начала координат. Здесь мы ограничимся случаем, когда характеристики НЗ являются симметричными относительно начала координат и несимметричность колебаний обуславливается только наличием ненулевой установившейся ошибки. При этом принимается, что установившаяся ошибка является постоянной.

В этом случае на входе НЗ (рис. 3.1, a) имеем $e = e^0 + A\sin\omega t$. Отсюда находим

$$\sin\omega t = \frac{1}{A}(e - e^0), \quad \cos\omega t = \frac{1}{\omega}p\sin\omega t = \frac{1}{\omega A}p(e - e^0).$$

На выходе НЗ, после гармонической линеаризации, имеем

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t.$$

Положив $\sigma^0 = a_0/2$ и подставив сюда выражения для синуса и косинуса, получим

$$\widetilde{\sigma} = \sigma^0 + \left[q(A,\ e^0) + q'(A,\ e^0)\frac{p}{\omega}\right](e - e^0),$$

где

$$q = q(A,\ e^0) = \frac{b_1}{A}, \quad q' = q'(A,\ e^0) = \frac{a_1}{A}.$$

Сделав замеиу переменных $\psi = \omega t$ в формулах для коэффициентов Фурье и подставив их в последние выражения, найдем

$$\sigma^0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^0 + A\sin\psi)d\psi, \tag{3.9а}$$

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^0 + A\sin\psi)\sin\psi\, d\psi, \tag{3.9б}$$

$$q'(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(e^0 + A\sin\psi)\ \cos d\psi. \tag{3.9в}$$

Пример 3.3. Определить коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена с кусочно-линейной характеристикой с насыщением (рис. 3.5, *а*) при несимметричных колебаниях.

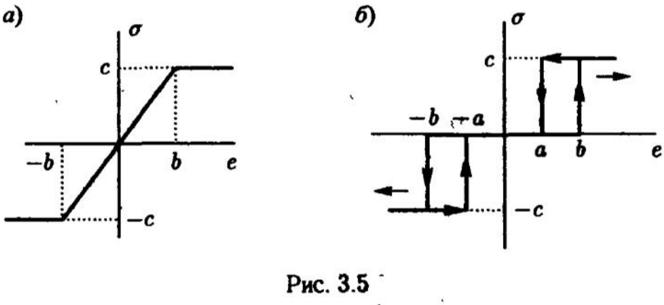


Рис. 3.5

Решение. На рис. 3.6 показаны графики входного и выходного сигналов нелинейного звена. Из этого рнсунка видно, что выходной сигнал иелинейного звена на иитервалах $[0,\ \psi_1]$, $[\psi_2,\ \psi_3]$ и $[\psi_4,\ 2\pi]$ описывается функцией $k(e^0 + A\sin\psi)$, а иа иитервалах $[\psi_1,\ \psi_2]$ и $[\psi_3,\ \psi_4]$ принимает постояиные значения c и $-c$ соответственно. Поэтому фор-

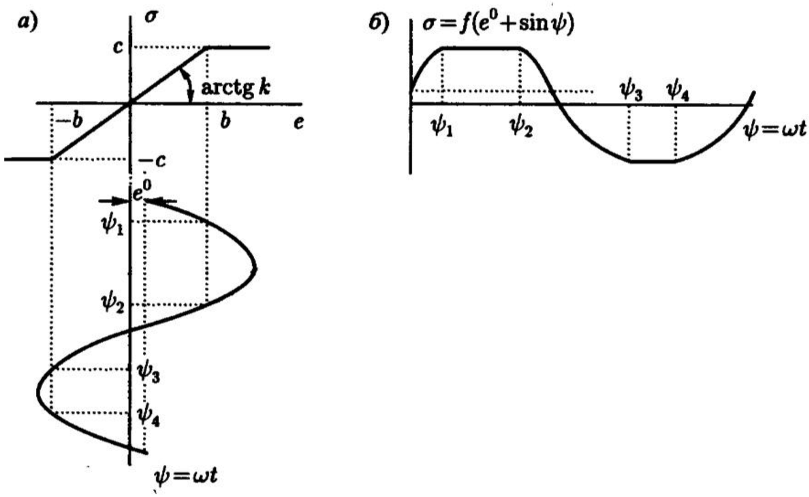


Рис. 3.6

мулы (3.9) для коэффициентов гармонической линеаризации принимают вид

$$\sigma^0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\psi_1} k(e^0 + A\sin\psi)\,d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\,d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + A\sin\psi)\,d\psi - \right.$$

$$\left. - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c\,d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A\sin\psi)\,d\psi\right];$$

$$q = \frac{1}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} k(e^0 + A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\sin\psi\,d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c\sin\psi\,d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi\right];$$

$$q' = \frac{1}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} k(e^0 + A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\sin\psi\cos d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c\cos\psi\,d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi\right].$$

Из рис. 3.6, *а* имеем

$$e^0+A\sin\psi_1=b,\quad e^0+A\sin\psi_2=b,\quad e^0+A\sin\psi_3=-b,\quad e^0+A\sin\psi_4=-b.$$

Отсюда получаем (см. рис. 3.6, *а*)

$$\psi_1=\arcsin\frac{b-e^0}{A},\qquad \psi_2=\pi-\arcsin\frac{b-e^0}{A},$$
$$\psi_3=\pi+\arcsin\frac{b+e^0}{A},\quad \psi_4=2\pi-\arcsin\frac{b+e^0}{A}.$$

Проинтегрировав полученные выше выражения для коэффициентов гармонической линеаризации, с учетом последних выражений получим

$$\sigma^0=\frac{k}{\pi}\left\{A\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+(b+e^0)\arcsin\frac{b+e^0}{A}-(b-e^0)\arcsin\frac{b-e^0}{A}\right\},$$
$$q=\frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b+e^0}{A}+\arcsin\frac{b-e^0}{A}+\frac{b+e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{b-e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right],$$
$$q'=0,\quad A\geqslant b+\left|e^0\right|.$$

Пример 3.4. Определить коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена с релейной характеристикой с зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 3.5, *б*) при несимметричных колебаниях.

Решение. На рис. 3.7 представлены кривые входного и выходного сигналов НЗ. Из рис. 3.7, *б* следует, что выходной сигнал НЗ на интервалах $[0,\ \psi_1]$, $[\psi_2,\ \psi_3]$ и $[\psi_4,\ 2\pi]$ равен нулю, а на интервалах $[\psi_1,\ \psi_2]$ и $[\psi_3,\ \psi_4]$ принимает постоянные значения c и $-c$ соответственно. Поэтому формулы для коэффициентов гармонической линеаризации принимают вид

$$\sigma^0=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}c\,d\psi-\int\limits_{\psi_3}^{\psi_4}c\,d\psi\right);$$
$$q=\frac{1}{\pi A}\left(\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}c\sin\psi\,d\psi-\int\limits_{\psi_3}^{\psi_4}c\sin\psi\,d\psi\right),$$
$$q'=\frac{1}{\pi A}\left(\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}c\cos d\psi-\int\limits_{\psi_3}^{\psi_4}c\cos d\psi\right).$$

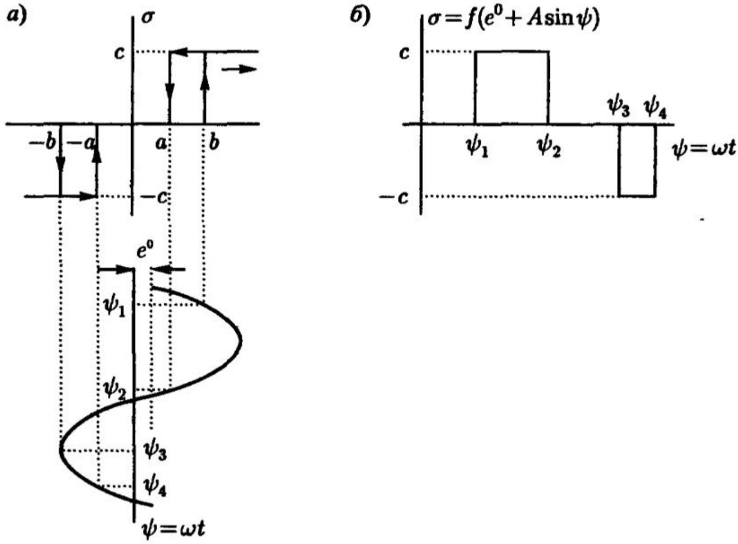


Рис. 3.7

Для пределов интегрирования имеем (см. рис. 3.7, a)

$$\psi_1 = \arcsin\frac{b-e^0}{A}, \qquad \psi_2 = \pi - \arcsin\frac{b-e^0}{A},$$
$$\psi_3 = \pi + \arcsin\frac{b+e^0}{A}, \quad \psi_4 = 2\pi - \arcsin\frac{b+e^0}{A}.$$

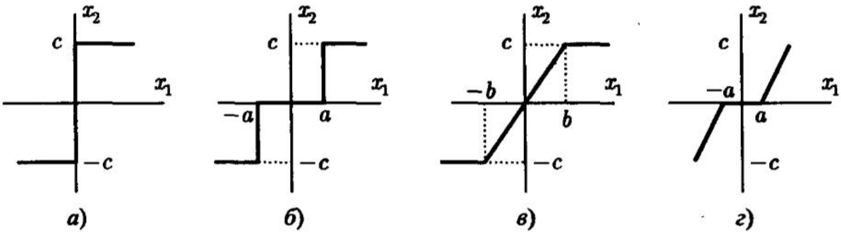
Проинтегрировав полученные выше выражения для коэффициентов гармонической линеаризации, с учетом последних выражений получим

$$\sigma^0 = \frac{c}{2\pi}\left(\arcsin\frac{a+e^0}{A} + \arcsin\frac{b+e^0}{A} - \arcsin\frac{a-e^0}{A} - \arcsin\frac{b-e^0}{A}\right),$$
$$q = \frac{c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1-\left(\frac{a+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a-e^0}{A}\right)^2}\right],$$
$$q' = -\frac{2(b-a)c}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b + |e^0|.$$

Задачи

3.1. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой идеального реле (рис. 3.8, *а*) при симметричных колебаниях.

3.2. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой реле с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) при симметричных колебаниях.



Рнс. 3.8

3.3. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с кусочно-линейной характеристикой с насыщением (рис. 3.8, *в*) при симметричных колебаниях.

3.4. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с кусочно-линейной характеристикой с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *г*) при симметричных колебаниях.

3.5. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 3.9, *а*) при симметричных колебаниях.

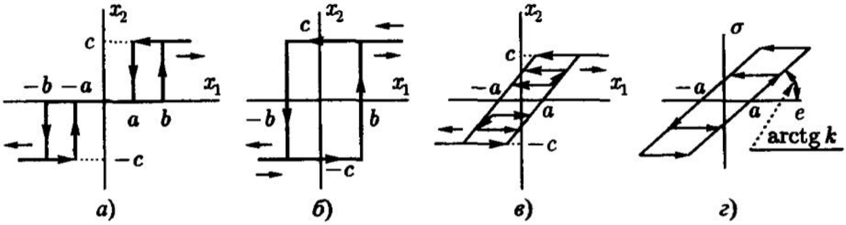


Рис. 3.9

3.6. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой реле с гистерезисом (рис. 3.9, *б*) при симметричных колебаниях.

3.7. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой люфта (рис. 3.9, *г*) при симметричных колебаниях.

3.8. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой идеального реле (рис. 3.8, *а*) при несимметричных колебаниях.

3.9. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой реле с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) при несимметричных колебаниях.

3.10. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой реле с гистерезисом (рис. 3.9, *б*) при несимметричных колебаниях.

3.11. Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена с характеристикой люфта (рис. 3.9, *г*) при несимметричных колебаниях.

3.2. Автоколебания. Исследование симметричных автоколебаний

Орбитальная устойчивость. Пусть $y^*(t)$ и $y(t)$ — невозмущенное и возмущенное движение соответственно. Во второй главе при определении различных понятий устойчивости руководствались тем, как изменяется со временем расстояние $\rho[y^*(t), y(t)] = \left|y^*(t) - y(t)\right|$ между изображающими точками этих движений. Однако если невозмущенное движение является периодическим и оно совершается по замкнутой траектории (например, движение небесных тел), важным является то, как ведет себя изображающая точка возмущенного движения относительно траектории невозмущенного движения, а не относительно его изображающей точки. Поэтому при рассмотрении периодических процессов используется другие понятия устойчивости — орбитальная устойчивость и асимптотическая орбитальная устойчивость.

Введем следующие обозначения: L^* — траектория невозмущенного движения, т. е. $L^* = \{y\colon y = y^*(t), t \geqslant t_0\}$; $\rho(y, L)$ — расстояние от точки y до траектории L, т. е. до ближайшей точки этой траектории.

Определение 3.1. *Невозмущенное движение $y^*(t)$ называется орбитально устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $t \geqslant t_0$ расстояние от изображающей точки возмущенного движения до траектории невозмущенного движения меньше $\varepsilon(\rho(y(t), L^*) < \varepsilon)$, если в начальный момент это расстояние меньше $\delta(\rho(y(t_0), L^*) < \delta)$.*

Определение 3.2. *Невозмущенное движение $y^*(t)$ называется асимптотически орбитально устойчивым, если оно орбитально устойчиво и найдется такое положительное число η, что расстояние от изображающей точки возмущенного движения до траектории невозмущенного движения стремится к нулю $(\rho(y(t), L^*) \to 0)$ при $t \to \infty$, если это расстояние в начальный момент не превышает $\eta(\rho(y(t_0), L^*) < \eta)$.*

Иначе говоря, невозмущенное движение $y^*(t)$ асимптотически орбитально устойчиво, если вокруг его траектории L^* существует окрестность такая, что если возмущенное движение начинается в этой окрестности, то его траектория со временем сольется с траекторией невозмущенного движения L^*.

Из устойчивости по Ляпунову следует орбитальная устойчивость. Из асимптотической устойчивости следует асимптотическая орбитальная устойчивость. Т. е. если невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову, то оно орбитально устойчиво, и если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то оно асимптотически орбитально устойчиво. Обратное не верно: вообще говоря, из орбитальной устойчивости не следует устойчивость по Ляпунову, и из асимптотической орбитальной устойчивости не следует асимптотическая устойчивость.

Более того, если невозмущенное движение является периодическим, то оно не может быть асимптотически устойчивым. Действительно, пусть невозмущенное движение $y^*(t)$ является периодической функцией с периодом T: $y^*(t) = y^*(t+T)$. Рассмотрим возмущенное движение $y(t) = y^*(t+\alpha)$. Это возмущенное движение не стремится к невозмущенному движению, как бы мало ни было расстояние между изображающими точками возмущенного и невозмущенного движений в начальный момент. Каким бы малым не было число η в условии $|y(t_0) - y^*(t_0)| < \eta$, если указанное расстояние отлично от нуля и оно больше некоторого положительного числа ε_0, то в силу периодичности $\sup\limits_{t>t'} |y(t) - y^*(t)| > \varepsilon_0$, как бы велико t' не было. Следовательно, расстояние между изображающими точками не может стремится к нулю.

В теории нелинейных систем важную роль играет понятие автоколебаний, введенное в теорию колебаний А. А. Андроновым.

Определение 3.3. *Автоколебаниями называются асимптотически орбитально устойчивые свободные колебания (периодические движения).*

Автоколебания являются незатухающими колебаниями, которые устанавливаются и поддерживаются в системе за счет собственных источников энергии, причем амплитуды этих колебаний определяются свойствами системы, а не начальными условиями. Системы, в которых возникают автоколебания, называются *автоколебательными системами.*

Автоколебания возможны только в нелинейных системах. Незатухающие свободные колебания возможны в маргинально устойчивых линейных системах. Однако эти колебания не являются автоколебаниями, так как они не удовлетворяют условиям асимптотической орбитальной устойчивости.

Если на выходе какой-либо системы возникают незатухающие колебания, то чтобы проверить, являются ли эти колебания автоколебаниями, можно поступить следующим образом: подать на вход системы возмущающее воздействие, которое приводит к незначительному изменению амплитуды. При этом если после устранения возмущающего воздействия амплитуда колебаний со временем восстанавливается, то эти колебания являются автоколебаниями, в противном случае они не являются автоколебаниями.

При использовании метода гармонической линеаризации, естественно, принимается, что гипотеза фильтра выполняется. Тогда, если в системе возникает периодический процесс, то на выходе линейной части и на входе нелинейного звена он является гармоническим: $e = A\sin\omega t$. Поэтому периодический режим однозначно определяется частотой ω и амплитудой A, и исследование периодического процесса сводится к определению этих параметров.

Основное условие возникновения периодического процесса. В линейной системе (рис. 3.1, *б*) могут возникнуть гармонические колебания, если ее характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни или, что то же, амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку $(-1, 0)$, т. е. если выполняется равенство

$$W_{\text{н}}(A)W_{\text{л}}(j\omega) = -1. \tag{3.10}$$

Это соотношение является уравнением относительно неизвестных параметров: частоты ω и амплитуды A, и определяет *основное условие возникновения периодических процессов* в рассматриваемой системе. Автоколебания в системе возможны, если это уравнение имеет действительные положительные корни.

Аналитический способ исследования автоколебаний. Подставив выражения для передаточных функций и освободившись от дроби, основное условие (3.10) можно представить в виде

$$X(A,\omega) + jY(A,\omega) = 0$$

или

$$X(A,\omega) = 0, \quad Y(A,\omega) = 0. \tag{3.11}$$

Если последняя система уравнений имеет решение A^* и $\omega^*(A^* > 0$, $\omega^* > 0)$, то это значит, что гармонически линеаризованное уравнение имеет решение $e = A^*\sin\omega^* t$, которое описывает периодический процесс. Этот процесс реально можно наблюдать, если указанное решение орбитально устойчиво или асимптотически орбитально устойчиво. Решение $e = A^*\sin\omega^* t$ описывает автоколебания, если оно асимптотически орбитально устойчиво. Таким образом, исследование автоколебаний сводится к решению уравнений (3.11) и определению асимптотической орбитальной устойчивости.

Пусть разомкнутая система (линейная часть) устойчива или маргинально устойчива, т. е. ее характеристическое уравнение, кроме левых корней, имеет корни на мнимой оси. Тогда условие асимптотической орбитальной устойчивости при однозначной характеристике нелинейного звена принимает вид

$$\left.\frac{dq(A)}{dA}\right|_{A=A^*} < 0. \qquad (3.12\text{а})$$

Условие асимптотической орбитальной устойчивости при неоднозначной характеристике нелинейного звена принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^*\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^*\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^*\right] > 0. \qquad (3.12\text{б})$$

Пример 3.5. В типовой структурной схеме (см. рис. 3.1, *а*) нелинейной системы нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (см. рис. 3.8, *б*) с параметрами $a = 0{,}45$ и $c = \pi$, передаточная функция линейной части имеет вид $W_л(p) = 4{,}1/(0,5p+1)^2 p$ и задающее воздействие $g = \text{const}$. Требуется исследовать автоколебания.

Решение. Передаточная функция НЗ имеет вид

$$W_н = q(A) = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} = \frac{4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)^2}.$$

Условие возникновения периодического процесса (3.10) можно записать в виде

$$-0{,}25\omega^3 j - \omega^2 + j\omega + \frac{16{,}4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)^2} = 0$$

или

$$-\omega^2 + \frac{16{,}4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)^2} = 0, \quad -0{,}25\omega^3 + \omega = 0.$$

Второе уравнение имеет положительное решение $\omega = 2$. Подставив это значение частоты, первое уравнение можно преобразовать в биквадратное уравнение

$$A^4 - 4{,}1^2 A^2 + 4{,}1^2 \cdot 0{,}45^2 = 0.$$

Это уравнение имеет следующие два положительных решения: $A_1 \cong 4{,}08$ и $A \cong 0{,}454$. Проверим условие устойчивости (3.12а). Производная

$$\frac{dq(A)}{dA} = \frac{4(0{,}405 - A^2)}{A^3\sqrt{A^2 - 0{,}45^2}}$$

при $A_1 \cong 4{,}08$ принимает отрицательное значение, а при $A \cong 0{,}454$ — положительное значение. Следовательно, колебания с первой амплитудой являются асимптотически орбитально устойчивыми, а со второй амплитудой таковыми не являются. Таким образом, в рассматриваемой системе будут совершаться автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A_1 \cong 4{,}08$.

Графический (частотный) метод исследования автоколебаний. Уравнение (3.10), определяющее условие возникновения периодического процесса, можно решить графически. Для этого представим его следующим образом:

$$W_л(j\omega) = -\frac{1}{W_н(A)}.$$

Строим амплитудно-фазовую характеристику линейной части, т. е. годограф функции $W_л(j\omega)$, и обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена с обратным знаком, т. е. годограф функции $-1/W_н(A)$. Если рассматриваемое уравнение имеет решение, то указанные характеристики пересекаются (рис. 3.10). И в точке пересечения по годографу $W_л(j\omega)$ находим частоту, а по годографу $-1/W_н(A)$ — амплитуду периодического процесса.

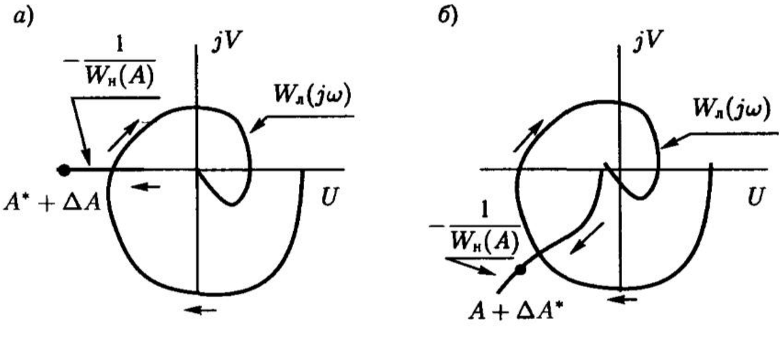


Рис. 3.10

Если линейная часть устойчива или маргинально устойчива, то периодический процесс будет асимптотически орбитально устойчив, если точка на годографе $-1/W_н(A)$, соответствующая амплитуде $A^* + \Delta A$ $(\Delta A > 0)$, находится слева от амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части при движении по ней в сторону возрастания частоты (рис. 3.10).

Рассмотренный графический (частотный) метод был предложен Л. С. Гольдфарбом и называется *методом Гольдфарба.*

Уравнение, определяющее условие возникновения периодического процесса, можно также представить в виде

$$W_л^{-1}(j\omega) = -W_н(A)$$

и при графическом его решении строить обратную амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части и с обратным знаком амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена. По точке пересечения этих характеристик можно определить частоту и амплитуду периодического процесса.

Асимптотическая орбитальная устойчивость определяется точно так же, как и при методе Гольдфарба: *если линейная часть устойчива или маргинально устойчива, то периодический процесс будет асимптотически орбитально устойчив, если точка на годографе* $-W_н(A)$, *соответствующая амплитуде* $A^* + \Delta A$ $(\Delta A > 0)$, *находится слева от обратной амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части при движении по ней в сторону возрастания частоты.*

Исследование несимметричных колебаний. Уравнения системы (рис. 3.11) имеют вид

$$y = W_1(p)W_2(p)\sigma + W_2(p)h, \quad \sigma = f(e), \quad e = g - y.$$

Если положить $W_1(p) = R_1(p)/Q_1(p)$, $W_2(p) = R_2(p)/Q_2(p)$ и $R(p) = R_1(p)R_2(p)$, $Q(p) = Q_1(p)Q_2(p)$, $S(p) = R_2(p)Q_1(p)$, то, исключив переменные y и σ, уравнения системы можно записать следующим образом:

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(p)g - S(p)h.$$

При постоянных внешних воздействиях $pg = 0$, $ph = 0$, и правая часть принимает вид $Q(0)g + S(0)h$:

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(0)g - S(0)h.$$

Если правая часть отлична от нуля, то в системе могут возникнуть несимметричные колебания

$$e = e^0 + e^*, \quad e^* = A\sin\omega t.$$

Произведя гармоническую линеаризацию, на выходе нелинейного звена получим

$$f(e^0 + A\sin\omega t) = \sigma^0 + \left[q(A, e^0) + q'(A, e^0)\frac{p}{\omega}\right]e^*.$$

С учетом этого и предыдущего соотношений уравнение системы можно представить в виде

$$\left[Q(p) + R(p)\left(q(A, e^0) + q'(A, e^0)\frac{p}{\omega}\right)\right]e^* + Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = Q(0)g - S(0)h.$$

Выделив отсюда уравнения для постоянных и переменных составляющих, получим

$$Q(0)e^0 + R(0)\sigma^0 = Q(0)g - S(0)h, \tag{3.13а}$$

$$Q(j\omega) + R(j\omega)\big(q(A, e^0) + jq'(A, e^0)\big) = 0, \tag{3.13б}$$

Пример 3.6. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику с параметром $c = \pi$,

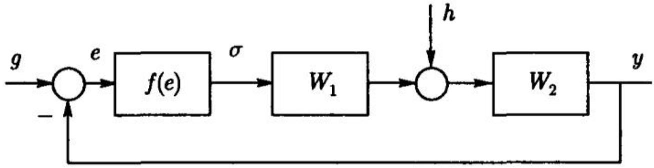


Рис. 3.11

передаточные функции линейных звеньев равны $W_1 = 1/(0{,}5p+1)$ и $W_2 = 1/(0{,}5p+1)p$, внешние воздействия равны $g = 1(t)$ и $h = 0{,}5 \times \times 1(t)$. Требуется исследовать автоколебания.

Решение. В данном случае $R_1(p) = R_2(p) = 1$, $Q_1(p) = 0{,}5p + 1$, $Q_2(p) = (0{,}5p+1)p$, $Q(p) = Q_1(p)Q_2(p) = (0{,}5p+1)^2 p$ и $S(p) = R_2(p)Q_1(p) = 0{,}5p+1$. Коэффициенты гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики при несимметричном колебании имеют вид

$$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi}\arcsin\frac{e^0}{A}, \quad q = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{e^0}{A}\right)^2}, \quad q' = 0, \quad A \geqslant |e^0|.$$

Так как $Q(0) = 0$, $R(0) = 1$ и $S(0) = 1$, то уравнение (3.13а) принимает вид

$$\arcsin\frac{e^0}{A} = -0{,}25 \text{ или } \frac{e^0}{A} = -\sin 0{,}25 \cong -0{,}25.$$

Уравнение (3.13б), после подстановки выражений для коэффициентов гармонической линеаризации и выражений $Q(j\omega) = -0{,}25j\omega^3 - \omega^2 + j\omega$, $R(j\omega) = 1$ и $e^0 = -0{,}25A$, принимает вид

$$-0{,}25j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + \frac{4}{A}\sqrt{1-(0{,}25)^2} = 0$$

или

$$-0{,}25\omega^3 + \omega = 0, \quad -\omega^2 + \frac{4}{A}\sqrt{1-(0{,}25)^2} = 0.$$

Отсюда находим: $\omega = 2$ и $A \cong 0{,}97$. Смещение равно $e^0 = -0{,}25A = -0{,}24$. Проверим асимптотическую орбитальную устойчивость. После исключения e^0 для $q(A)$ имеем $q = 4\sqrt{1-(0{,}25)^2}/A$. Так как $q' = 0$, то можно воспользоваться условием устойчивости (3.12а). Это условие в данном случае выполняется:

$$\left.\frac{dq(A)}{dA}\right|_{A=0{,}97} = -\left.\frac{4\sqrt{1-0{,}25^2}}{A^2}\right|_{A=0{,}97} < 0.$$

Следовательно, в рассматриваемой системе возникнут несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 0{,}97$. Автоколебания смещены на $e^0 = -0{,}24$.

Задачи

3.12. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, a) с высотой $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 5/(p^3 + 2p^2 + p)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.13. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, a) с высотой $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 16/(p^3 + 4p^2 + 4p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.14. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, $б$) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 0{,}5/(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.15. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, $б$) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 0{,}5/(p^3 + 2p^2 + p)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.16. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, $б$) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 0{,}8/(p^3 + 2p^2 + p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.17. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, $б$) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^3 + 2p^2 + p)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.18. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, $б$) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^3 + 4p^2 + 4p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.19. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 3/(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.20. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 8/(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.21. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^3 + 3p^2 + 3p + 1)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

Указание. При решении воспользоваться приближенным выражением $\arcsin(e^0/A) = e^0/A$.

3.22. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 1/(p+1)p$ и $W_2(p) = 5/(p+1)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.23. В нелинейной системе (см. рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5/(p+1)p$ и $W_2(p) = 1/(p+1)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.24. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 4/(p+2)p$ и $W_2(p) = 4/(p+2)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.25. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 2/(p+2)p$ и $W_2(p) = 8/(p+2)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.26. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 2/(p+1)$ и $W_2(p) = 8/(p^2 + 2p + 1)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.27. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8а) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 2/(p+2)$ и $W_2(p) = 8/(p+2)p$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.28. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 2/(p+2)$ и $W_2(p) = 8/(p+2)p$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.29. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p+1)p$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.30. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p+1)p$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.31. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 0{,}1/(p+1)p$ и $W_2(p) = 5/(p+1)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.32. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 1/(p+1)$ и $W_2(p) = 0{,}8/(p+1)p$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.33. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 2/(p+1)$ и $W_2(p) = 4/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.34. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 10/(p+1)$ и $W_2(p) = 4/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

Указание. При решении воспользоваться приближенным выражением $\arcsin(e^0/A) = e^0/A$.

3.35. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 1/(p+2)$ и $W_2(p) = 10/(p+2)p$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.36. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5/(p+2)p$ и $W_2(p) = 2/(p+2)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.37. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5/(p+1)$ и $W_2(p) = 0{,}4/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.38. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 10/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.39. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 10/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 2$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

Указание. При решении воспользоваться приближенным выражением $\arcsin(e^0/A) = e^0/A$.

3.40. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 20/(p+2)$ и $W_2(p) = 1/(p^2+2p)$, внешние воздействия $g = 2$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.41. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 20/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p^2+p)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.42. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 10/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p^2+p)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 1$. Исследовать автоколебания.

3.43. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 10/(p+1)$ и $W_2(p) = 2/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.44. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 20/(p+1)$ и $W_2(p) = 1/(p+1)^2$, внешние воздействия $g = 2$ и $h = 0$. Исследовать автоколебания.

3.45. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет кусочно-линейную характеристику с насыщением (рис. 3.8, *в*) с параметрами $c = \pi$ и $b = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 20/(p^3 + 4p^2 + 4p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.46. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет кусочно-линейную характеристику с насыщением (рис. 3.8, *в*) с параметрами $c = \pi$ и $b = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 40/(p^3 + 6p^2 + 12p + 8)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.47. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет кусочно-линейную характеристику с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 3.2, *а*) с параметрами $a = 0{,}5$, $b = 1$ и $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 20/(p^3 + 4p^2 + 4p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.48. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет кусочно-линейную характеристику с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 3.2, *а*) с параметрами $a = 0{,}5$, $b = 1$ и $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 40/(p^3 + 6p^2 + 12p + 8)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.49. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет характеристику реле с гистерезисом (рис. 3.9, *б*) с высотой $c = \pi$ и шириной $b = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^2 + 2p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.50. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет характеристику реле с гистерезисом (рис. 3.9, *б*) с высотой $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^2 + 4p + 4)p$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.51. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет характеристику реле с гистерезисом (рис. 3.9, *б*) с высотой $c = \pi$ шириной $b = 1$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 10/(p^3 + 6p^2 + 12p + 8)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.52. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, *а*) нелинейное звено имеет характеристику реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 3.9, a) с параметрами $a = 0{,}5$, $b = 1$ и $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 20/(p^3 + 4p^2 + 4p)$ и задающее воздействие $g = 1$. Исследовать автоколебания.

3.53. В типовой структурной схеме нелинейной системы (рис. 3.1, a) нелинейное звено имеет характеристику реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 3.9, a) с параметрами $a = 0{,}5$, $b = 1$ и $c = \pi$, линейная часть имеет передаточную функцию $W_л(p) = 20/(p^3 + 6p^2 + 12p + 8)$ и задающее воздействие $g = 0$. Исследовать автоколебания.

3.3. Вынужденные колебания и вибрационная линеаризация

Пусть к системе (рис. 3.11), которая описывается уравнением

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(p)g - S(p)h,$$

приложены задающее воздействие $g = g(t)$ и возмущение $h = B\sin\omega^* t$. При этом задающее воздействие по сравнению с возмущением изменяется медленно: $g = g(t)$ за период $T = 2\pi/\omega^*$ почти не меняется. Если в системе возникают вынужденные колебания с частотой, равной частоте внешнего колебания, то сигнал на входе нелинейного звена будет иметь вид

$$e = e^0 + e^*, \quad e^* = A\sin(\omega^* t + \varphi),$$

где A и φ — амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний. После гармонической линеаризации, разделяя уравнение для описания медленно и быстро меняющихся составляющих, получим

$$Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = Q(p)g, \tag{3.14а}$$

$$A\left[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)\left(q(A, e^0) + jq'(A, e^0)\right)\right] e^{j\varphi} = -BS(j\omega^*). \tag{3.14б}$$

Вынужденные колебания. Если задающее воздействие равно нулю, то медленно изменяющаяся составляющая будет равна нулю, а колебания будут симметричными. И в этом случае для определения амплитуды и сдвига фазы вынужденных колебаний достаточно рассмотреть только уравнение (3.14б), которое при графическом методе решения удобно представить в виде

$$Z(A) = Be^{-j\varphi},$$

где

$$Z(A) = -\frac{A\left[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)(q + jq')\right]}{S(j\omega^*)}.$$

Здесь коэффициенты гармонической линеаризации определяются по формулам, которые были получены при рассмотрении симметричных автоколебаний. Заметим, что $Z(A)$ является функцией только неизвестной амплитуды, так как частота известна.

При графическом методе определения амплитуды и сдвига фазы на комплексной плоскости строится окружность радиуса B и годограф вектора (комплексной функции) $Z(A)$ (рис. 3.12, *а*). В точке пересечения с окружностью по годографу находится амплитуда. Сдвиг фазы φ равен углу, который образует с осью абсцисс вектор, проведенный из начала координат в точку пересечения.

Годограф $Z(A)$ пересекает окружность, если радиус окружности B превышает некоторое пороговое значение $B_п$ (рис. 3.12, *б*). Если радиус окружности меньше порогового значения, то в системе будут происходить не одночастотные колебания, а сложные движения, включающие в себя и собственные колебаиия системы [21].

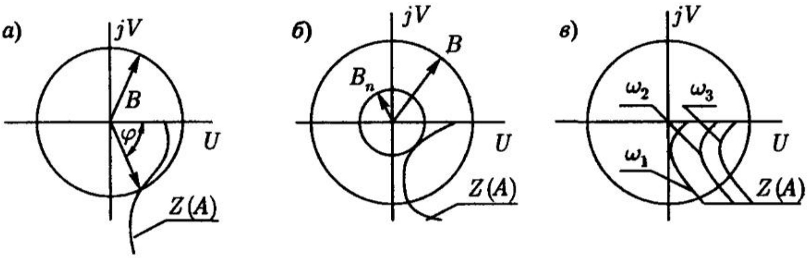


Рис. 3.12

Построив годографы $Z(A)$ при различных значениях частоты внешнего воздействия (рис. 3.12, *в*) и определив пороговые значения, можно на координатной плоскости (ω, B) построить область, в которой существуют одночастотные вынужденные колебания. Эта область называется *областью захвата*.

Пример 3.7. В нелинейной системе (рис. 3.11) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику с параметром $c = \pi/2$, передаточные функции линейных звеньев равны $W_1 = (0{,}01p+1)/(0{,}8p+1)p$ и $W_2 = 1/(0,2p+1)$, внешние воздействия равны $g = 0$ и $h = -B\sin 10t$. Требуется найти пороговое значение амплитуды виешнего воздействия.

Решение. В данном случае $Q(j\omega) = -0{,}16j\omega^{*3} - \omega^{*2} + j\omega^*$, $R(j\omega) = 0{,}01j\omega^* + 1$, $S(j\omega) = -(-0{,}8\omega^{*2} + j\omega^*)$, коэффициенты гармонической линеаризации $q(A) = 4c/\pi A = 2/A$, $q'(A) = 0$, и формула (3.14б) принимает вид

$$A\left[-0{,}16j\omega^{*3} - \omega^{*2} + j\omega^* + (0{,}01j\omega^* + 1)\frac{2}{A}\right] = B(-0,8\omega^{*2} + j\omega^*)e^{-j\varphi}.$$

Подставив сюда $\omega^* = 10$ и $\mathrm{e}^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$, затем выделив вещественную и мнимую части, получим

$$-100A + 2 - 80B\cos\varphi + 10B\sin\varphi = 0,$$
$$-150A + 0{,}2 + 10B\cos\varphi + 80B\sin\varphi = 0.$$

Разрешив эту систему уравнений относительно синуса и косинуса, найдем

$$\cos\varphi = \frac{-A + 0{,}024}{B}, \quad \sin\varphi = \frac{2A - 0{,}0055}{B}.$$

Отсюда, возвысив в квадрат и сложив, получим квадратное уравнение

$$A^2 - 0{,}014A + 0{,}00012 - 0{,}2B^2 = 0.$$

Это уравнение имеет положительный корень, если $B \geqslant 0{,}0188$. Следовательно, пороговое значение амплитуды $B_n = 0{,}0188$.

Вибрационная линеаризация. Если в системе (рис. 3.11) задающее воздействие отлично от нуля и изменяется медленно по сравнению с колебательным процессом, то в этом случае управляемый процесс и вынужденные колебания будут описываться уравнениями (3.14)

$$Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = Q(p)g,$$
$$A\Big[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)\big(q(A, e^0) + jq'(A, e^0)\big)\Big]e^{j\varphi} = -BS(j\omega^*).$$

Здесь σ^0 является функцией амплитуды A и ошибки управляемого процесса e^0: $\sigma^0 = \sigma^0(A, e^0)$.

Для исследования управляемого процесса можно поступить следующим образом: из второго уравнения найти амплитуду A как функцию от e^0 и подставить в первое уравнение. При этом получим

$$Q(p)e^0 + R(p)\Phi(e^0) = Q(p)g, \tag{3.15}$$

где

$$\Phi(e^0) = \sigma^0(A(e^0), e^0).$$

Затем исследовать полученное уравнение, зависящее только от неизвестной ошибки e^0. Независимо от характеристики нелинейного звена функция $\Phi(e^0)$ оказывается гладкой и ее можно линеаризовать в окрестности начала координат:

$$\Phi(e^0) = k_{\text{н}} e^0, \tag{3.16}$$

где $k_{\text{н}} = \left.\dfrac{d\Phi}{de^0}\right|_{e^0=0}$ — коэффициент вибрационной линеаризации.

Для всех однозначных и неоднозначных нелинейных характеристик, симметричных относительно начала координат [4],

$$k_{\text{н}} = \left.\frac{d\Phi(e^0)}{de^0}\right|_{e^0=0} = \left.\frac{\partial\sigma^0}{\partial e^0}\right|_{e^0=0}. \tag{3.17}$$

Из нее следует, что для вычисления коэффициента вибрационной линеаризации нет необходимости вычислять функцию $\Phi(e^0)$.

После подстановки выражения (3.16) в (3.15), получим линейное уравнение

$$\left[Q(p) + k_{\text{н}} R(p)\right] e^0 = Q(p) g.$$

При возникновении колебательного процесса в системе разрывные нелинейные характеристики для медленных процессов становятся гладкими. Процесс, при котором за счет колебания разрывные характеристики нелинейных звеньев становятся гладкими, называют *вибрационным сглаживанием*, а процесс линеаризации, который происходит в результате вибрационного сглаживания, — *вибрационной линеаризацией*.

Вибрационную линеаризацию можно осуществить как вынужденными колебаниями, так и автоколебаниями. В обоих случаях коэффициент вибрационной линеаризации, который определяется по формуле (3.17), зависит от амплитуды колебаний на входе нелинейного звена. Поэтому чтобы вычислить коэффициент $k_{\text{н}}$, нужно знать эту амплитуду. При вибрационной линеаризации вынужденными колебаниями она равна амплитуде внешнего колебания, а при вибрационной линеаризации автоколебаниями — амплитуде симметричных автоколебаний.

Вибрационная линеаризация вынужденными колебаниями. Пусть на вход нелинейного звена системы (рис. 3.13) подается гармонический сигнал $h = B \sin \omega^* t$. При этом частота колебания намного выше полосы пропускания линейного звена с передаточной функцией W_2:

$$\sqrt{q^2(A) + q'^2(A)}\,\left|W_2(j\omega^*)\right| \ll 1.$$

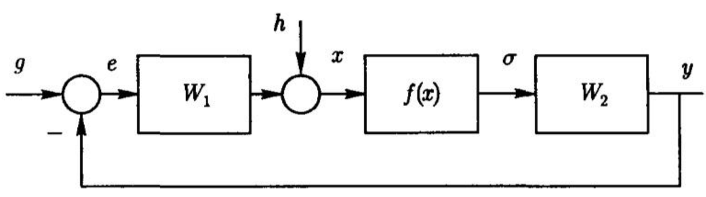


Рис. 3.13

На входе нелинейного звена имеем

$$x = e^0 + e^*, \quad e^* = h = B \sin \omega^* t.$$

Таким образом, в системе на входе нелинейного звена возникают вынужденные колебания с амплитудой, равной амплитуде внешнего колебания ($A = B$), и сдвигом фазы $\varphi = 0$. И в этом случае при вычислении коэффициента вибрационной линеаризации в качестве амплитуды вынужденного колебания подставляется амплитуда внешнего колебания B. Поэтому величину коэффициента вибрационной линеаризации можно изменять за счет выбора этой амплитуды. Однако амплитуду внешнего воздействия нельзя брать произвольной. С одной стороны, она не должна быть слишком большой, чтобы возмущение не оказывало заметного влияния на процесс управления. С другой стороны, амплитуда B должна быть, во всяком случае, не меньше максимального значения сигнала e^0, до которого необходимо обеспечить линейность характеристики.

Вибрационная линеаризация автоколебаниями. Вибрационную линеаризацию можно реализовать, создав вокруг нелинейного звена внутренний автоколебательный контур (рис. 3.14). Передаточные функции W_2 и W_3 выбираются так, чтобы частота автоколебаний была достаточно высокой и автоколебания не пропускались остальными звеньями, находящимися за пределами внутреннего контура, и амплитуда автоколебаний была не меньше максимального значения медленно меняющегося составляющего сигнала e на входе нелинейного звена.

На входе нелинейного звена имеем

$$e = e^0 + e^*, \quad e^* = A \sin \omega t,$$

где e^0 — медленно меняющая составляющая; A, ω — амплитуда и частота автоколебаний. Исследование такой системы производится следующим образом. Рассматривая внутренний контур, определяется амплитуда A симметричных автоколебаний. Затем, используя найденное значение амплитуды, определяется коэффициент вибрационной линеаризации $k_н$, и нелинейное звено заменяется линейным звеном с передаточной функцией, равной $k_н$.

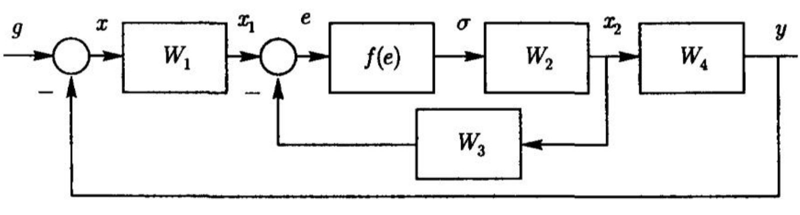


Рис. 3.14

Пример 3.8. Пусть в нелинейной системе (рис. 3.14) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику (см. рис. 3.8, *а*) с параметром $c = \pi$, а линейные звенья имеют передаточные функции вида $W_1 = k_1(1 + 0{,}1p)$, $W_2 = 1/(0{,}1p + 1)p$, $W_3 = k_3/(T_3 p + 1)$, $W_4 = 1/(p + 1)$. Требуется определить параметры k_3 и T_3 такие, при которых на входе нелинейного звена амплитуда автоколебаний $A = 4$ и звено с передаточной функцией W_4 ослабляет амплитуду автоколебаний в 100 раз.

Решение. Так как автоколебания через звено с передаточной функцией W_4 практически не проходят — амплитуда на его выходе в 100 раз меньше, чем на его входе, — при исследовании автоколебаний можно ограничиться рассмотрением только внутреннего контура.

Передаточная функция линейной части этого контура и коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена соответственно имеют вид

$$W = W_2W_3 = k_3/(0{,}1p^2 + p)(T_3p + 1) \text{ и } q = 4c/\pi A = 4/A, \quad q' = 0.$$

Условие возникновения периодического процесса принимает вид

$$-0{,}1T_3j\omega^3 - (0{,}1 + T_3)\omega^2 + j\omega + k_3\frac{4}{A} = 0$$

или

$$-(0{,}1 + T_3)\omega^2 + k_3\frac{4}{A} = 0, \quad -0{,}1T_3\omega^3 + \omega = 0.$$

Отсюда для амплитуды и частоты получаем: $A = 4k_3T_3/(1 + 10T_3)$, $\omega^* = \sqrt{10/T_3}$.

Так как звено с передаточной функцией W_4 ослабляет амплитуду автоколебаний в 100 раз и его амплитудная частотная функция имеет вид $A_4(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2}$, то имеем

$$A_4(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + (10/T_3)}} = 0{,}01 \text{ или } T_3 = 0{,}0001T_3 + 0{,}001.$$

Отсюда находим $T_3 \cong 0{,}001$. Подставив это значение для T_3 в ранее полученное выражение для амплитуды и учитывая, что по условию амплитуда на входе нелинейного звена равна 4, получаем

$$A = 4k_3T_3/(1 + 10T_3) = \frac{4k_3 0{,}001}{1 + 0{,}01} = 4.$$

Из этого соотношения находим $k_3 = 1010$. Таким образом, искомыми параметрами являются $k_3 = 1010$ и $T_3 \cong 0{,}001$.

Теперь убедимся, что в системе действительно возникнут автоколебания. Для этого проверим устойчивость найденного периодического процесса. Так как $q' = 0$, условие устойчивости имеет вид

$$\left.\frac{dq(A)}{dA}\right|_{A=4} = \left.-\frac{4}{A^2}\right|_{A=4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Условие устойчивости выполняется. Следовательно, колебания асимптотически орбитально устойчивы, и в системе возникнут автоколебания.

Пример 3.9. При каких положительных значениях параметра k_1 система, рассмотренная в примере 3.8, будет устойчива. Параметры k_3 и T_3 принимают значения, найденные в указанном примере.

Решение. Так как в системе происходит вибрационная линеаризация автоколебаниями, нелинейное звено заменим линейным (рис. 3.15) и найдем его передаточную функцию, равную $k_н$. Для реле с идеальной характеристикой имеем

$$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e^0}{A} = 2 \arcsin \frac{e^0}{A}.$$

В соответствии с формулой (3.17) $k_н$ находится следующим образом:

$$k_н = \frac{\partial \sigma^0}{\partial e^0} \bigg|_{e^0=0} = 2 \frac{1}{A\sqrt{1-(e^0/A)^2}} \bigg|_{e^0=0} = \frac{2}{A}.$$

Учитывая, что амплитуда симметричных колебаний $A = 4$, получаем $k_н = 0{,}5$.

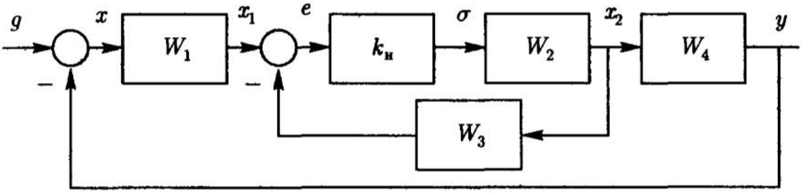


Рис. 3.15

Преобразуем структурную схему вибрационно линеаризованной системы (рис. 3.15) в одноконтурную, заменив внутренний контур звеном с передаточной функцией

$$W_{2,3} = \frac{k_н W_2}{1 + k_н W_2 W_3} = \frac{0{,}5(0{,}001p + 1)}{0{,}0001p^3 + 0{,}101p^2 + p + 505}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W = W_1 W_{2,3} W_4 = \frac{k_1(0{,}00005p^2 + 0{,}0505p + 0{,}5)}{0{,}0001p^4 + 0{,}101p^3 + 1{,}10p^2 + 506p + 505}.$$

Складывая числитель и знаменатель и положив $p = \lambda$, получим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$0{,}0001\lambda^4 + 0{,}101\lambda^3 + (1{,}10 + 0{,}00005k_1\}\lambda^2 + \\ + (506 + 0{,}0505k_1)\lambda + 505 + 0{,}5k_1 = 0.$$

При положительном k_1 необходимое условие устойчивости выполняется. Поэтому по критерию Льенара–Шипара система будет устойчива, если определитель Гурвица 3-го порядка будет положительным:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 > 0.$$

Здесь $a_0 = 0{,}0001$, $a_1 = 0{,}101$, $a_2 = 1{,}10 + 0{,}00005k_1$, $a_3 = 506 + 0{,}0505k_1$, $a_4 = 505 + 0{,}5k_1$. Подставив эти выражения в верхнее неравенство, получим

$$0{,}0025k_1 - 3{,}08 > 0.$$

Отсюда следует, что система будет устойчива при $k_1 > 5200$.

Задачи

3.54. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5$ и $W_2(p) = 2/(p^2 + p)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 10\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.55. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5$ и $W_2(p) = 1/(p^3 + 2p^2 + p)$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 10\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.56. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5$ и $W_2(p) = 1/(p+1)^3$, внешние воздействия $g = 1$ и $h = 10\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.57. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5$ и $W_2(p) = 2/(p^2 + p)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 10\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.58. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5(1 + 0{,}2p)$ и $W_2(p) = 2/(p^3 + 2p^2 + p)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 10\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.59. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = 5(1 + 0{,}2p)$ и $W_2(p) = 2/(p^3 + 2p^2 + p)$, внешние воздействия $g = 0$ и $h = 20\sin t$. Исследовать: *а*) возникнут ли в системе одночастотные вынужденные колебания; *б*) если да, то определить амплитуду вынужденных колебаний на входе нелинейного звена.

3.60. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 1{,}5)/p$ и $W_2(p) = 3/(2p + 1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 0{,}1\sin 30t$; *б*) $h = \sin 30t$; *в*) $h = 10\sin 30t$.

3.61. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 0{,}5)/p$ и $W_2(p) = 2/(2p + 1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 0{,}1\sin 30t$; *б*) $h = \sin 30t$; *в*) $h = 10\sin 30t$.

3.62. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет характеристику идеального реле (рис. 3.8, *а*) с высотой $c = \pi/2$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 3)/p$ и $W_2(p) = 1/(2p + 1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 0{,}1\sin 30t$; *б*) $h = 10\sin 30t$.

3.63. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 3)/p$ и $W_2(p) = 1/(2p + 1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 1{,}2\sin 30t$; *б*) $h = 5\sin 30t$.

3.64. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 1{,}5)/p$ и $W_2(p) = 3/(2p + 1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 1{,}01\sin 30t$; *б*) $h = 1{,}2\sin 30t$; *в*) $h = 5\sin 30t$.

3.65. В нелинейной системе (рис. 3.13) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.8, *б*) с высотой $c = \pi/2$ и зоной нечувствительности $a = 1$, линейные звенья имеют передаточную функцию $W_1(p) = (p + 0{,}5)/p$ и $W_2(p) = 2/(2p+1)^2$, задающее воздействие $g = 1$. Исследовать методом вибрационной линеаризации устойчивость системы при следующих внешних колебаниях: *а*) $h = 1{,}2\sin 30t$; *б*) $h = 5\sin 30t$.

Ответы

3.1. $q(A) = \dfrac{4c}{\pi A}, q'(A) = 0.$

3.2. $q(A) = \dfrac{4c}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{A}\right)^2}, \ q'(A) = 0, \ A \geqslant a.$

3.3. $q(A) = \dfrac{2c}{\pi b}\left[\arcsin\dfrac{b}{A} + \dfrac{b}{A}\sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{A}\right)^2}\right], \ q'(A) = 0, \ A \geqslant b.$

3.4. $q(A) = \dfrac{2k}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{a}{A} - \dfrac{a}{A}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{A}\right)^2}\right], \ q'(A) = 0, \ A \geqslant a.$

3.5. $q(A) = \dfrac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{A}\right)^2}\right], \ q'(A) = -\dfrac{2c(b-a)}{\pi A^2},$
$A \geqslant b.$

3.6. $q(A) = \dfrac{4c}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{A}\right)^2}, \ q'(A) = -\dfrac{4cb}{\pi A^2}, \ A \geqslant b.$

3.7. $q(A) = \dfrac{k}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \dfrac{2a}{A}\right) + 2\left(1 - \dfrac{2a}{A}\right)\sqrt{\dfrac{a}{A}\left(1 - \dfrac{a}{A}\right)}\right],$
$q'(A) = \dfrac{4ka}{\pi A}\left(1 - \dfrac{a}{A}\right), \ A \geqslant a.$

3.8. $\sigma^0 = \dfrac{2c}{\pi}\arcsin\dfrac{e^0}{A}, \ q = \dfrac{4c}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\dfrac{e^0}{A}\right)^2}, \ q' = 0, \ A \geqslant |e^0|.$

3.9. $\sigma^0 = \dfrac{c}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{a+e^0}{A} - \arcsin\dfrac{a-e^0}{A}\right),$

$q = \dfrac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1 - \left(\dfrac{a+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\dfrac{a-e^0}{A}\right)^2}\right], \ q' = 0, \ A \geqslant |e^0|.$

3.10. $\sigma^0 = \frac{c}{\pi}\left(\arcsin\frac{b+e^0}{A} - \arcsin\frac{b-e^0}{A}\right)$,

$$q = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right],\ q' = -\frac{4bc}{\pi A^2},$$

$A \geqslant b + |e^0|$.

3.11. $\sigma^0 = ke^0,\ q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right) + \left(1-\frac{2a}{A}\right)\times\right.$

$$\left.\times\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}\right], q'(A) = -\frac{4ka}{\pi A}\left(1-\frac{a}{A}\right),\ A > a + |e^0|.$$

3.12. Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$ и амплитудой $A = 10$. **3.13.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A = 4$. **3.14.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$ и амплитудой $A = 5$. **3.15.** Автоколебаний нет. **4.16.** Автоколебаний нет. **3.17.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$ и амплитудой $A \cong 20$. **3.18.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 2{,}24$. **3.19.** Автоколебаний нет. **3.20.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$ и амплитудой $A \cong 14{,}93$. **3.21.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$, амплитудой $A = 5$ и смещением $e^0 = 0{,}2$. **3.22.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$ и амплитудой $A = 10$. **3.23.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$ и амплитудой $A = 10$. **3.24.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A = 4$. **3.25.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A = 4$. **3.26.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$ и амплитудой $A = 5$. **3.27.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A = 4$. **3.28.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$, амплитудой $A = 3{,}51$ и смещением $e^0 = -1{,}68$. **3.29.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$ и амплитудой $A = 10$. **3.30.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$, амплитудой $A = 10$ и смещением $e^0 = -1$. **3.31.** Автоколебаний нет. **3.32.** Автоколебаний нет. **3.33.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$ и амплитудой $A \cong 3{,}86$. **3.34.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$, амплитудой $A \cong 5$ и смещением $e^0 = 0{,}2$. **3.35.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$, амплитудой $A \cong 2{,}24$ и смещением $e^0 = 0{,}2$. **3.36.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 2{,}24$. **3.37.** Автоколебаний нет. **3.38.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$ и амплитудой $A = 5$. **3.39.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$, амплитудой $A \cong 5$ и смещением $e^0 = 0{,}2$. **3.40.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$, амплитудой $A \cong 4{,}89$ и смещением $e^0 = -0{,}12$. **3.41.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$, амплитудой $A \cong 40$ и смещением $e^0 = -1$. **3.42.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 1$, амплитудой $A \cong 20$ и смещением $e^0 = -1$. **3.43.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$, амплитудой $A \cong 9{,}94$ и смещением $e^0 = 0{,}19$. **3.44.** Несимметричные автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{3}$, амплитудой $A \cong 9{,}94$ и смещением $e^0 = 0{,}19$. **3.45.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 4{,}97$. **3.46.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 3{,}47$ и амплитудой $A \cong 2{,}43$. **3.47.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 4{,}97$. **3.48.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 3{,}47$ и амплитудой $A \cong 2{,}36$. **3.49.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 4$ и амплитудой $A \cong 2{,}24$. **3.50.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 1{,}55$ и амплитудой $A \cong 4{,}03$. **3.51.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 2{,}15$ и амплитудой $A \cong 1{,}59$. **3.52.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 1{,}91$ и амплитудой $A \cong 5{,}42$. **3.53.** Симметричные автоколебания с частотой $\omega \cong 2{,}99$ и амплитудой $A \cong 1{,}47$. **3.54.** *а*) Да; *б*) $A = 10$. **3.55.** *а*) Да; *б*) А = 10. **3.56.** *а*) Да; *б*) $A = 5$. **3.57.** *а*) Нет. **3.58.** *а*) Нет. **3.59.** *а*) Да; *б*) А = 9,9. **3.60.** *а*) неустойчива; *б*) неустойчива; *в*) устойчива. **3.61.** *а*) устойчива; *б*) устойчива; *в*) устойчива. **3.62.** *а*) неустойчива; *б*) устойчива. **3.63.** *а*) неустойчива; *б*) устойчива. **3.64.** *а*) неустойчива; *б*) устойчива; *в*) устойчива. **3.65.** *а*) устойчива; *б*) устойчива.

Глава 4

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Основы общей теории устойчивости были заложены А. М. Ляпуновым в его книге «Общая задача об устойчивости движения», которая вышла в свет в 1892 г. [16]. В этой книге им был предложен общий метод исследования устойчивости движения, который называется *вторым* или *прямым методом Ляпунова*. Этот метод основан на построении специальной функции, которая получила название *функции Ляпунова*. Прямой метод Ляпунова получил дальнейшее развитие в трудах российских и зарубежных авторов. И метод исследований, основанный на построении функции Ляпунова, включая прямой метод Ляпунова, стали называть *методом функций Ляпунова*.

4.1. Знакопостоянные и знакоопределенные функции

В большинстве случаев функции Ляпунова являются знакоопределенными, а их производные — знакоопределенными или знакопостоянными функциями.

Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x})$, определенную в некоторой области $D \subseteq R^n$, и функцию $V(\mathbf{x}, t)$, определенную на прямом произведении $D \times [0, \infty)$, т. е. при $\mathbf{x} \in D$ и $0 \leqslant t < \infty$. Область D содержит начало координат: $0 \in D$. Функции $V(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x}, t)$ являются непрерывными и обладают непрерывными производными по всем своим аргументам.

Функция $V(\mathbf{x})$ называется *знакоположительной* или *положительно полуопределенной* в области D, если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) \geqslant 0$ всюду на D, и *знакоотрицательной* или *отрицательно полуопределенной* в области D, если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) \leqslant 0$ всюду на D.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *знакоположительной* или *положительно полуопределенной* в области D, если при всех $t \geqslant t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$ $V(0, t) = 0$ и $V(\mathbf{x}, t) \geqslant 0$ всюду на D, и *знакоотрицательной* или *отрицательно полуопределенной* в области D, если при всех $t \geqslant t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$ $V(0, t) = 0$ и $V(\mathbf{x}, t) \leqslant 0$ всюду на D.

Знакоположительные и знакоотрицательные функции в области D называются знакопостоянными функциями области D.

Функция $V(\mathbf{x})$ называется положительно *определенной* в области D, если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) > 0$ всюду на D, кроме точки $x = 0$, и *отрицательно определенной* в области D, если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) < 0$ всюду на D, кроме точки $x = 0$.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *положительно определенной* в области D, если при всех $t \geqslant t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$ $V(0, t) = 0$ и найдется такая положительно определенная в области D функция $V^+(\mathbf{x})$, что при всех $t \geqslant t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$ $V(\mathbf{x}, t) > V^+(\mathbf{x})$ всюду на D, кроме точки $\mathbf{x} = 0$, и *отрицательно определенной* в области D, если $-V(\mathbf{x}, t)$ является положительно определенной в области D.

Положительно определенные и отрицательно определенные функции в области D называются *знакоопределенными функциями* в области D. Очевидно, знакоопределенные функции являются частным случаем знакопостоянных функций.

Функции, которые не являются знакопостоянными функциями в области D, называются *знакопеременными функциями* в области D.

В качестве примера рассмотрим следующие функции:

$$V_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \qquad V_2(\mathbf{x}) = -\left[x_1^2 + (x_2 + x_3)^2\right],$$

$$V_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad V_4(\mathbf{x}) = -\left[x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} + \frac{x_3^2}{1 + x_3^2}\right].$$

Среди этих функций в пространстве R^3 функция $V_1(\mathbf{x})$ является положительно полуопределенной, функция $V_2(\mathbf{x})$ — отрицательно полуопределенной, функция $V_3(\mathbf{x})$ — положительно определенной и функция $V_4(\mathbf{x})$ — отрицательно определенной. Функции $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$ являются знакопостоянными, а функции $V_3(\mathbf{x})$ и $V_4(\mathbf{x})$ — знакоопределенными. В пространстве R^2 функция $V_1(\mathbf{x})$ является положительно определенной, а функция $V_2(\mathbf{x})$ — отрицательно определенной.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно малый верхний предел*, если как бы мало ни было положительное число ε', найдется такое положительное число δ', что $|V(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon'$ при всех $t \geqslant t_0$, если $|\mathbf{x}| < \delta'$.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если как бы велико ни было положительное число E, найдется такое положительное число Δ, что $|V(\mathbf{x}, t)| > \mathrm{E}$ при всех $t \geqslant t_0$, если $|\mathbf{x}| > \Delta$. Иначе говоря, функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если при любых $t \geqslant t_0$ $|V(\mathbf{x}, t)| \to \infty$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Например, функции $V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^3) \sin^2 t$ и $V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) e^{-t}$ являются функциями, допускающими бесконечно малый верхний предел, а функции $V(\mathbf{x}, t) = 10 \sin^2[(x_1^2 + x_2^2) t]$ и $V(\mathbf{x}, t) = 10(x_1^2 + x_2^2) e^t$ таковыми не являются. В пространстве R^3 функция $V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\sin^2 t + 1)$ является функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел, а функции $V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2) \times$

$\times(\sin^2 t + 1)$ и $V(\mathbf{x}, t) = \left[x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2/(1 + x_2^2) + x_3^2/(1 + x_3^2)\right] \times$ $\times(\sin^2 t + 1)$ таковыми не являются.

Если $V(\mathbf{x})$ является знакоопределенной функцией, то существует такое положительное число η, что все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$, где $|c| < \eta$, являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = 0$ поверхностями; если $V(\mathbf{x})$ является знакоопределенной функцией и $|V(\mathbf{x})| \to \infty$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$, то все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ при любом c являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = 0$ поверхностями [3].

Покажем на примере, что не при всех знакоопределенных функциях $V(\mathbf{x})$ все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ при любом c являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = 0$ поверхностями. В качестве примера рассмотрим в пространстве R^2 положительно определенную функцию $V(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1^2}{1 + x_1^2} + \dfrac{x_2^2}{1 + x_1^2}$. В этом случае при $c = r^2$ уравнение поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ принимает вид

$$\frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + \frac{x_2^2}{1 + x_1^2} = r^2 \text{ или } (1 - r^2)x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Это уравнение при $r < 1$ представляет уравнение эллипса

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \left(a^2 = \frac{r^2}{1 - r^2}, \quad b^2 = r^2\right),$$

при $r = 1$ — уравнение прямой $x_2^2 = 1$ или $x_2 = \pm 1$, и при $r > 1$ — уравнение гиперболы

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{d^2} = 1 \quad \left(b^2 = r^2,\ d^2 = \frac{r^2}{r^2 - 1}\right).$$

Таким образом, в данном случае поверхности (кривые) уровня $V(\mathbf{x}) = c$ являются замкнутыми только при $r < 1$ (рис. 4.1).

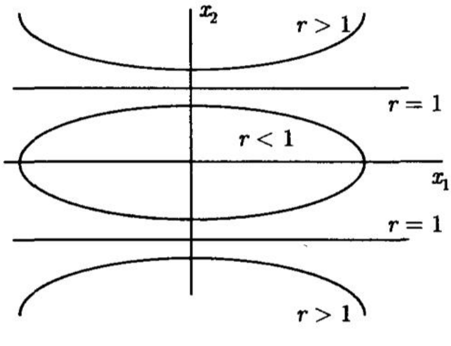


Рис. 4.1

Положительно определенные квадратичные формы. При построении функции Ляпунова широко используются квадратичные формы

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} q_{ik}x_i x_k, \quad q_{ik} = q_{ki}$$

или в матричной форме

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}.$$

Любую квадратичную форму в матричной записи можно представить так, чтобы в ней матрица была симметрической. Поэтому, как правило, всегда предполагается, что матрица, используемая при записи квадратичной формы, является симметрической. Так как симметрические матрицы в методе функций Ляпунова играют важную роль, то кратко остановимся на их свойствах.

Симметрическая матрица Q называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной матрицей*, если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ является положительно (отрицательно) определенной функцией, и *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенной матрицей*, если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ является положительно (отрицательно) полуопределенной функцией.

Симметрическая матрица Q обладает следующими свойствами.

1) все ее собственные значения, т. е. корни $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ее характеристического уравнения $\det(Q - I\lambda) = 0$ являются вещественными числами;

2) если она положительно (отрицательно) определена, то все ее собственные значения являются положительными (отрицательными): $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i < 0$); если она положительно (отрицательно) полуопределена, то все ее собственные значения являются неотрицательными (неположительными): $\lambda_i \geqslant 0$ ($\lambda_i \leqslant 0$);

3) определитель от симметрической матрицы равен произведению ее собственных значений: $\det Q = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Дальше часто будет использоваться одно свойство квадратичной формы. Сформулируем это свойство в виде леммы.

Лемма 4.1. *Квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leqslant \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} \leqslant \lambda_M |\mathbf{x}|^2,$$

где λ_m — минимальное, а λ_M — максимальное собственное значение матрицы Q.

Если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ положительно определена, то она неограниченно возрастает при стремлении точки $\mathbf{x}$ к бесконечности: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} \to \infty$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Рассмотрим условие, при выполнении которого квадратичная форма является положительно определенной функцией, или симметрическая матрица является положительно определенной.

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ была положительно определенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы все определители*

$$\Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \left\|\begin{matrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{matrix}\right\|, \quad \ldots, \quad \det Q$$

были положительны.

Пример 4.1. Дана квадратичная форма

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3, \quad \mathbf{x} \in R^3.$$

Исследовать, является эта форма положительной определенной функцией.

Решение. Если записать данную квадратичную форму в матричной форме, то элементами соответствующей матрицы Q будут $q_{11} = 1$, $q_{12} = q_{21} = 2$, $q_{13} = q_{31} = 0$, $q_{22} = 5$, $q_{23} = q_{32} = -1$, $q_{33} = 3$. Определители

$$\Delta_1 = q_{11} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

все положительны. Следовательно, по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является положительно определенной функцией.

Задачи

4.1. Определить, являются ли положительно определенными, положительно полуопределенными, отрицательно определенными или отрицательно полуопределенными в пространстве R^3 следующие квадратичные формы:

а) $V(x) = x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$; б) $V(x) = x_1^2+x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$;

в) $V(x) = 5x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_2x_3$; г) $V(x) = 5x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$;

д) $V(x) = -4x_1^2-2x_2^2-x_3^2+x_1x_2$; е) $V(x) = -4x_1^2-2x_2^2-x_3^2+4x_3x_2$;

ж) $V(x) = -x_1^2-4x_2^2+4x_1x_2-x_3^2$; з) $V(x) = -x_3^2-4x_2^2+4x_3x_2-x_1^2$;

и) $V(x) = 2x_1^2+9x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3$; к) $V(x) = x_1^2+x_2^2$;

л) $V(x) = -2x_1^2-9x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_3$; м) $V(x) = -x_3^2-x_2^2$.

4.2. Определить, допускают ли бесконечно малый верхний предел следующие функции:

а) $v(x,t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sin t$; б) $v(x,t) = \sin\left(t\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$;

в) $v(x,t) = e^{-t}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; г) $v(x,t) = e^{t}(x_1^2 + x_2^2)$;

д) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)(\sin^2 t + e^{-t})$; $v(x,t) = x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 t + e^{-t}$;

ж) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)\sin^2 t + e^{-t}$; з) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)\sin^2 t + x_1^2 e^{-t}$;

и) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2) + \sin^2 t + x_1^2 e^{-2t}$;

к) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2) + x_2^2\sin^2 t + x_1^2 e^{-2t}$.

4.3. Определить, допускают ли в пространстве R^3 бесконечно большой нижний предел следующие функции:

а) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)e^{t} + (x_1^2 + x_2^2)\sin^2 t$;

б) $v(x,t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\sin^2 t + (x_1^2 + x_2^2)e^{t}$;

в) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)e^{-t} + (x_1^2 + x_2^2)\sin^2 t$;

г) $v(x,t) = (x_1^2 + x_3^2)e^{t} + x_2^2\sin^2 t$;

д) $v(x,t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 e^{t} + x_2^2\sin^2 t$;

е) $v(x,t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 e^{-t} + x_3^2\sin^2 t$;

ж) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)e^{t} + x_3^2 e^{-t} + x_3^2\sin^2 t$;

з) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)e^{-t} + x_3^2 e^{t} + x_1^2\sin^2 t$;

и) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)e^{t} + x_3^2 + x_3^2\sin^2 t$;

к) $v(x,t) = (x_1^2 + x_2^2)e^{-t} + (x_1^2 + x_2^2)e^{t} + x_3^2$.

4.2. Теоремы об устойчивости

Теоремы об устойчивости неавтономных систем. Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}, t). \tag{4.2}$$

Начало координат, т. е. точка $x = 0$, является положением равновесия: $X(0,t) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Правая часть приведенных уравнений зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются *неавтономными системами*.

Решение уравнения (4.1) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ будем обозначать $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$. Следовательно, справедливо равенство $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0$.

Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x}, t)$. Производная этой функции по времени, вычисленная на траекториях системы (4.1), имеет вид

$$\frac{dV(\mathbf{x},t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial x_1} X_i(\mathbf{x},t) + \frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} X(\mathbf{x},t) + \frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial t}.$$

Про эту производную говорят, что она является (полной) *производной по времени функции* $V(\mathbf{x}, t)$ *в силу уравнения (4.1)* или *производной по времени функции* $V(\mathbf{x})$, *вычисленной в силу уравнения (4.1)*.

Теорема 4.1 (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *неавтономной системы* (4.1) *устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция* $V(\mathbf{x}, t)$ *такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы* (4.1) *является отрицательно полуопределенной функцией.*

Функции, которые удовлетворяют теоремам устойчивости или неустойчивости, т. е. по которым можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, называются *функциями Ляпунова*.

Теорема 4.2 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *неавтономной системы* (4.1) *асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x}, t)$, *допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнения* (4.1) *является отрицательно определенной функцией.*

Пример 4.2. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\dot{x}_1 = -e^{-t}x_1 + e^{-2t}x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -2e^{-2t}x_1 - x_2^3.$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2$ $(\alpha > 0)$. Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2e^{-t} + 2x_1x_2e^{-2t} - 4\alpha x_2x_1e^{-2t} - 2\alpha x_2^4.$$

Если положить $\alpha = 1/2$, то производная принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_1^2e^{-t} - x_2^4$$

и становится отрицательно определенной функцией. Следовательно, положение равновесия заданной системы асимптотически устойчиво.

Теорема 4.3 (Теорема об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *неавтономной системы* (4.1) *асимптотически устойчиво в целом* (*глобально асимптотически устойчиво*), *если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x}, t)$, *допускающая бесконечно малый верхний предел и бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Здесь, естественно, предполагается, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ является положительно определенной функцией, ее производная отрицательно определенной функцией на всем фазовом пространстве R^n.

Пример 4.3. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\dot{x}_1 = -(1 + \sin^2 t)x_1 + x_2 - x_1^3, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - e^{-t}x_2^5.$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2$ ($\alpha > 0$). Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = 2x_1[-(1 + \sin^2 t)x_1 + x_2 - x_1^3] + \\ + 2\alpha x_2(-x_1 - x_2 - e^{-t}x_2^5).$$

Если положить $\alpha = 1$, то кандидат на функцию Ляпунова становится положительно определенной функцией, а производная принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2\left[(1 + \sin^2 t)x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + e^{-t}x_2^6\right]$$

и становится отрицательно определенной функцией. Кроме того, эта функция допускает бесконечно большой нижний предел. Следовательно, положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в целом.

Теоремы об устойчивости автономных систем. Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2а}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}). \tag{4.2б}$$

Начало координат, т.е. точка $\mathbf{x} = 0$, является положением равновесия: $X(0) = 0$. Правая часть приведенных уравнений не зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются *автономными системами*.

При исследовании устойчивости автономных систем в качестве функций Ляпунова используются функции $V(\mathbf{x})$, не зависящие явно от времени. Производная по времени функции $V(\mathbf{x})$ в силу уравнений (4.2) определяется следующим образом:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x} X(\mathbf{x}).$$

Теорема 4.4 (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *автономной системы* (4.2) *устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция* $V(\mathbf{x})$ *такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией.*

Пример 4.4. Исследовать устойчивость системы, которая описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2,$$

где α и β — неизвестные параметры. Согласно критерию Сильвестра эта форма будет положительно определенной функцией, если выполняется неравенство $\Delta_2 = \beta - \alpha^2 > 0$. Производная по времени квадратичной формы в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha\dot{x}_1 x_2 + 2x_1\dot{x}_2 + 2\beta x_2\dot{x}_2 = \\ = 2x_1x_2 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_1^2 - 2\beta x_2 x_1.$$

Если принять $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то квадратичная форма будет положительно определенной, а ее производная будет равна нулю, т. е. функция $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова. Следовательно, положение равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пример 4.5. На тело с массой m действует сила F, обладающая следующими свойствами: $F = -f(y)$, $f(0) = 0$, $f(y)y > 0$ при $y \neq 0$.

Движение тела описывается уравнением $m\ddot{y} = F$ или в нормальной форме уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{m} f(x_1).$$

Исследовать устойчивость положения равновесия $x = 0$.

Решение. В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим полную энергию. Кинетическая и потенциальная энергии соответственно имеют вид

$$W = \frac{m\dot{y}^2}{2} = \frac{mx_2^2}{2}, \quad U = -\int\limits_{y^0}^{y} F(y)dy = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(x_1)dx_1.$$

Кандидат на функцию Ляпунова принимает вид

$$V(\mathbf{x}) = W + U = \frac{mx_2^2}{2} + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(x_1)dx_1.$$

Эта функция является положительно определенной. Ее производную по времени в силу уравнения движения

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = mx_2\dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 = -mx_2\frac{1}{m}f(x_1) + f(x_1)x_2 = 0$$

можно рассматривать как отрицательно полуопределенную. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 4.5 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *автономной системы* (4.2) *асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x})$, *что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Так как функция $V(\mathbf{x})$ непрерывна и равна нулю в начале координат, то она допускает бесконечно малый верхний предел. Поэтому эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 4.2.

Пример 4.6. Исследовать устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^3.$$

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся *методом разделения переменных*, предложенным Е. А. Барбашиным [3]. Метод состоит в том, что функция Ляпунова ищется в виде функций, которая сама и ее производная представляют собой сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_i F_i(x_i), \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_i \Phi_i(x_i).$$

В соответствии с этим методом в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимаем функцию

$$V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2).$$

Производная по времени от функции в силу уравнений заданной системы имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dF_1}{dx_1}\dot{x}_1 + \frac{dF_2}{dx_2}\dot{x}_2 = -\frac{dF_1}{dx_1}x_1^3 + \frac{dF_1}{dx_1}2x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 - \frac{dF_2}{dx_2}3x_2^3.$$

И чтобы она представляла сумму функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, разность средних членов справа в последнем соотношении должна быть равна нулю:

$$\frac{dF_1}{dx_1}2x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 = 0 \text{ или } \frac{dF_1}{dx_1}\Big/ x_1 = \frac{dF_2}{dx_2}\Big/ 2x_2.$$

Так как левая часть зависит от x_1, а правая часть от x_2, то последнее равенство возможно, если обе части являются константами и равны, например, единице. Тогда имеем

$$\frac{dF_1}{dx_1} = x_1, \quad \frac{dF_2}{dx_2} = 2x_2.$$

Отсюда, после интегрирования, получаем

$$F_1 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad F_2 = x_2^2, \quad V(x) = F_1(x_1) + F_2(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2.$$

Производная по времени от функции кандидата на функцию Ляпунова имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{dF_1}{dx_1}x_1^3 - \frac{dF_2}{dx_2}3x_2^3 = -(x_1^4 + 6x_2^4).$$

Итак, полученная методом разделения переменных функция является положительно определенной, а ее производная в силу уравнений рассматриваемой системы – отрицательно определенной. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво.

Теорема 4.6. (Обобщенная теорема об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *автономной системы* (4.2) *асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x})$, *что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве* $M \subset D$, *не содержащем целых траекторий* [3].

Целой траекторией (или полутраекторией) системы называется фазовая траектория в пространстве R^n, соответствующая решению уравнения этой системы $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ ($\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$) на всем интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$. Так как при $\mathbf{x}^0 = 0$ решение $\mathbf{x}(0, t) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$, то начало координат $\mathbf{x} = 0$ соответствует целой траектории. Если множество M задается уравнением $\varphi(\mathbf{x}) = 0$: $M = \{\mathbf{x}\colon \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$, $\varphi(\mathbf{x})$ — гладкая (т. е. с непрерывными частными производными по всем своим аргументам) функция, то условие отсутствия в M целых траекторий можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\dot{x}_i = \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}}X(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) \neq 0. \tag{4.3}$$

Это неравенство должно выполнятся на множестве M, т. е. при условии $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

Множество $M = \{\mathbf{x}\colon \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$ представляет собой поверхность, и последнее условие означает, что вектор скорости изображающей точки не лежит на ее касательной плоскости. И, следовательно, если изображающая точка попадает на поверхность (множество M), где производная функции Ляпунова $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, то она сразу же ее покидает и оказывается в области, где $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$.

Пример 4.7. Исследовать устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3.$$

Решение. Воспользуемся методом разделения переменных. Согласно этому методу имеем

$$V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2).$$

Производная по времени от функции в силу уравнений заданной системы имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dF_1}{dx_1}\dot{x}_1 + \frac{dF_2}{dx_2}\dot{x}_2 = \frac{dF_1}{dx_1}x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 - \frac{dF_2}{dx_2}x_2^3.$$

И чтобы она представляла сумму функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dF_1}{dx_1}x_2 - \frac{dF_2}{dx_2}x_1 = 0 \text{ или } \frac{dF_1}{dx_1}\bigg/x_1 = \frac{dF_2}{dx_2}\bigg/x_2.$$

Так как левая часть зависит от x_1, а правая часть от x_2, то последнее равенство возможно, если обе части являются константами и равны, например, единице. Тогда имеем

$$\frac{dF_1}{dx_1} = x_1, \quad \frac{dF_2}{dx_2} = x_2.$$

Отсюда, после интегрирования, получаем

$$F_1 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad F_2 = \frac{1}{2}x_2^2, \quad V(x) = F_1(x_1) + F_2(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Производная по времени от функции кандидата на функцию Ляпунова имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{dF_2}{dx_2}x_2^3 = -x_2^4.$$

Она отрицательно полуопределена и обращается в нуль вне начала координат на множестве, определяемом уравнением $\varphi(\mathbf{x}) = x_2 = 0$. Условие (11.6) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{x}}X(\mathbf{x})\bigg|_{x_2=0} = (0\ 1)X(\mathbf{x})\bigg|_{x_2=0} = (-x_1 - x_2^3)\bigg|_{x_2=0} = -x_1.$$

В этом соотношении правая часть обращается в нуль на прямой $x_2 = 0$ только в начале координат. Следовательно, по обобщенной теореме об асимптотической устойчивости положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво.

Теорема 4.7 (Теорема об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия $x = 0$ автономной системы* (4.2) *асимптотически устойчиво в целом* (*глобально асимптотически устойчиво*), *если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x})$, *допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Так как функция $V(\mathbf{x})$ непрерывна и обращается в нуль в начале координат, то она допускает бесконечно малый верхний придел. Поэтому теорема 4.7 вытекает из теоремы 4.3.

Теорема 4.8 (Теорема Барабашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ автономной системы* (4.2) *асимптотически устойчиво в целом* (*глобально асимптотически устойчиво*), *если существует такая положительно определенная функция* $V(\mathbf{x})$, *допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве M, не содержащих целых траекторий.*

В качестве примера рассмотрим систему из примера 4.7. Было показано, что функцией Ляпунова для этой системы является $V(\mathbf{x}) = x_1^2/2 + x_2^2/2$, которая стремится к бесконечности при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Т.е. эта функция и, как было показано, ее производная удовлетворяют условию теоремы Барбашина–Красовского. Следовательно, положение равновесия рассмотренной в примере 4.7 системы является асимптотически устойчивым в целом.

Исследование устойчивости нелинейных систем по линейному приближению. Проблему исследования нелинейных систем по их линейному приближению впервые поставил и разрешил А. М. Ляпунов.

Не всегда по линейному приближению можно судить об устойчивости исходной нелинейной системы.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2^3.$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2\alpha(x_1^4 + x_2^4),$$

н она является положительно определенной функцией при $\alpha > 0$ и отрицательно определенной функцией при $\alpha < 0$. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ рассматриваемой системы неустойчиво при $\alpha > 0$ и асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$.

Линеаризованная система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Ее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два чисто мнимых корня. Поэтому, как было показано во второй главе, начало координат является особой точкой типа центр, и оно соответствует устойчивому по Ляпунову положению равновесия. Таким образом, в рассматриваемом случае устойчивость линеаризованной системы не имеет ничего общего с устойчивостью исходной нелинейной системы: по линейному приближению нельзя делать какие-либо выводы об устойчивости исходной нелинейной системы как при $\alpha > 0$, так и при $\alpha < 0$.

Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению. Пусть уравнения нелинейной системы представлены в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

нли в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x}), \quad R(0) = 0, \tag{4.4}$$

где

$$\left|R(\mathbf{x})\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} R_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1+\alpha}. \tag{4.5}$$

Здесь α — малое положительное число, c — положительная константа. Условие (4.5) означает, что разложение нелинейного члена $R(\mathbf{x})$ в (4.4) в ряд Тейлора в начале координат начинается с членов, содержащих квадраты или более высокие степени фазовых координат и их произведения.

Теорема 4.9 (Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *нелинейной системы* (4.4) *асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы* $\dot{x} = Ax$ *имеют отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если среди указанных корней имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

Критический случай. Итак, если линеаризованная система устойчива, т. е. все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то и исходная нелинейная система асимптотически устойчива. Если линеаризованная система неустойчива и хотя бы один корень ее характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то и исходная нелинейная система неустойчива. И, наконец, если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет корни на мнимой оси и не имеет корней в правой полуплоскости, т. е. она маргинально устойчива, то говорят, что имеет место *критический случай*. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости исходной нелинейной системы. В примере, который был рассмотрен в начале параграфа, был критический случай.

Пример 4.8. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3\sin y = 0.$$

Решение. Разложение в ряд Тейлора синуса имеет вид $\sin y = y - y^3/3! + \cdots$. Поэтому для линеаризованного уравнения имеем

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0.$$

Линеаризованная модель (асимптотически) устойчива, так как все коэффициенты уравнения положительны, т. е. выполняется необходимое условие устойчивости, а для систем 2-го порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным. Поэтому и исходная нелинейная система асимптотически устойчива.

Пример 4.9. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 3e^y = 3.$$

Решение. Разложение в ряд Тейлора функции e^y имеет вид $e^y = 1 + y + y^2/2! + \ldots$. Поэтому для линеаризованного уравнения имеем

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 5\lambda^{+}4\lambda + 3 = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка положителен:

$$\Delta_2 = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 17.$$

Так как выполняется необходимое условие устойчивости и единственный определитель Гурвица с четным индексом положителен, то по критерию Льенара–Шипара линеаризованная система устойчива. Следовательно, и исходная нелинейная система асимптотически устойчива.

Пример 4.10. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2^3.$$

Решение. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -4x_1.$$

Характеристическое уравнение

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - I\lambda \right| = \lambda^2 + 4 = 0$$

имеет два чисто мнимых корня. Поэтому имеет место критический случай, и по линеаризованной модели нельзя исследовать устойчивость исходной нелинейной системы.

Исследуем устойчивость нелинейной системы методом функций Ляпунова. В качестве кандидата на функцию Ляпуиова примем квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2.$$

Производная по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = 2x_1(2x_2 - 2x_1^3) + 2\alpha x_2(-4x_1 - 3x_2^3).$$

Если принять $\alpha = 1/2$, то получим

$$\dot{V}(x) = -(4x_1^4 + 3x_2^4).$$

Таким образом, выбранная квадратичная форма является положительно определенной, а ее производная по времени в силу заданных уравнений системы отрицательно определенной. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости положение равновесия рассматриваемой системы является асимптотически устойчивым.

Теорема 4.10 (Первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *автономной системы* (4.2) *неустойчиво, если существует функция* $V(\mathbf{x})$ *такая, что ее производная* $\dot{V}(\mathbf{x})$ *в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и в любой малой окрестности* *начала координат найдется точка* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, *в которой функция* $V(\mathbf{x})$ *принимает положительное значение.*

Пример 4.11. Исследовать устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = 0$ следующей системы:

$$\dot{x}_1 = -2x_2 + 3x_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 5x_3 + 3x_2^5,$$
$$\dot{x}_3 = x_2 + x_3^3.$$

Решение. Рассмотрим сначала линейную модель:

$$\dot{x}_1 = -2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 5x_3,$$
$$\dot{x}_3 = x_2.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda^2 + 5) + 2\lambda = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm j\sqrt{7}$. Таким образом, имеет место критический случай, и по линейной модели нельзя судить об устойчивости исходной системы. Поэтому воспользуемся прямым методом Ляпунова.

Будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2).$$

Производная по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1(-2x_2 + 3x_1^3) + \alpha x_2(x_1 - 5x_3 + 3x_2^5) + \beta x_3(x_2 + x_3^3).$$

Положив $\alpha = 2$ и $\beta = 10$, получим

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = 3x_1^4 + 6x_2^6 + 10x_3^4.$$

Согласно теореме 4.10 положение равновесия системы не устойчиво.

Методы построения функций Ляпунова. Общего метода построения функции Ляпунова нет. Разработаны различные методы, которые позволяют находить функции Ляпунова для определенного типа систем. Здесь мы рассмотрим некоторые из них.

1. Энергетический подход. При таком подходе в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимают полную энергию, представляющую сумму потенциальной и кинетической энергий.

2. Метод разделения переменных. Этот метод предложен Е. А. Барбашиным и состоит в следующем. Кандидат на функцию Ляпунова ищут среди функций, которые сами и их производные по времени в силу заданных уравнений системы представляют сумму

функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i), \quad \dot V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_i).$$

3. Метод Лурье–Постникова. А. И. Лурье и В. Н. Постников, рассматривая задачу об устойчивости нелинейной системы, содержащей одну нелинейность $\sigma = f(e)$, использовали в качестве кандидата на функцию Ляпунова сумму из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции, т. е. функцию вида

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} + \int_0^e f(e)de,$$

где в общем случае $e = c^T x$. Более детально этот метод был разработан А. И. Лурье [15]. Он широко используется при рассмотрении задачи об абсолютной устойчивости, о которой речь пойдет в следующей главе.

4. Метод Красовского. Этот метод состоит в том, что при рассмотрении устойчивости автономной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad X(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассматривают квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = X^T B X.$$

Симметрическую матрицу B нужно выбрать так, чтобы сама квадратичная форма была положительно определенной, а ее производная по времени в силу заданного уравнения системы — отрицательно определенной.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot x_1 = x_2, \\ &\dot x_2 = -bx_1 - \varphi(x_2), \quad b > 0, \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Матрицу B выберем диагональной: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$. Тогда кандидат на функцию Ляпунова примет вид

$$V(\mathbf{x}) = b_{11}x_2^2 + b_{22}(-bx_1 - \varphi(x_2))^2.$$

Производная по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot V(\mathbf{x}) &= 2b_{11}x_2\dot x_2 + 2b_{22}(-bx_1 - \varphi(x_2)(-b\dot x_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\dot x_2) = \\ &= 2[bx_1 + \varphi(x_2)](b_{22}b - b_{11})x_2 - 2b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}[bx_1 + \varphi(x_2)]^2. \end{aligned}$$

Положив $b_{11} = b$ и $b_{22} = 1$, получим

$$V(\mathbf{x}) = bx_2^2 + \left[bx_1 + \varphi(x_2)\right]^2,$$
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\left[bx_1 + \varphi(x_2)\right]^2.$$

Как нетрудно убедится, $V(\mathbf{x})$ является положительно определенной функцией и $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Если $\partial\varphi/\partial x_2 > 0$ при $x_2 \neq 0$, то производная $\dot{V}(x)$ является отрицательно полуопределенной и обращается в нуль на многообразии $\sigma(x) = bx_1 + \varphi(x_2) = 0$, т. е. на множестве, определяемом указанным уравнением. Это множество не содержит целых траекторий, так как $\operatorname{grad}\sigma(x)X(x)|_{\sigma(x)=0} = bx_2 \neq 0$ вне начала координат на указанном многообразии. Поэтому по теореме Барбашина–Красовского положение равновесия рассматриваемой системы будет асимптотически устойчиво в целом.

5. Метод Вокера–Кларка (Woker–Klark). Пусть система описывается уравнением

$$\frac{d^n y}{dt^n} + f\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^n}\right) = 0$$

или в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot{x}_n = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова при этом методе рассматривается функция

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где неизвестная функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выбирается так, чтобы производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу заданных уравнений системы была отрицательно полуопределенной.

Исследуем этим методом систему

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = 0, \quad f(0,0) = 0$$

или

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -f(x_1, x_2).$$

В соответствии с методом Вокера–Кларка в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимаем

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)dx_1 + \frac{x_2^2}{2} + F(x_1, x_2).$$

Производная от этой функции по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)\dot{x}_1 + \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1\right)\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2 =$$

$$= -f(x_1, x_2)\int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}f(x_1, x_2).$$

Если положить $F(x_1, x_2) = 0$, то получим

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)dx_1 + \frac{x_2^2}{2}, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -f(x_1, x_2)\int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1.$$

Отсюда следует, что положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом, если выполняется условие

$$x_1 f(x_1, x_2) > 0, \quad f(x_1, x_2)\int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1 > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Задачи

4.4. Исследуйте устойчивость нулевого решения следующих уравнений:

а) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+\sin y = 0$; б) $\dddot{y}+3\ddot{y}+5\dot{y}+3(e^y - 1) = 0$;

в) $\dddot{y}+3\ddot{y}+\dot{y}+5y+\cos y - 1 = 0$; г) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+4y+e^y-\cos y = 0$;

д) $\dddot{y}+2\ddot{y}+2\dot{y}+4y+\sin y-2\cos y+2 = 0$;

е) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+\sin y-y^3 = 0$;

ж) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+7\sin y+y^5 = 0$; з) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+\operatorname{tg} y-y^2 = 0$;

и) $\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+\sin y = 0$; к) $\dddot{y}+2\ddot{y}+2\dot{y}+6 \arcsin y+y^3 = 0$.

4.5. Определить и исследовать устойчивость положений равновесия следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(2 + x_1^2) - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1(2 + x_1^2) - 3x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1+x_1^2) - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1(1+x_1^2) - 5x_2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(3+x_1^2) - 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1(3+x_1^2) - 4x_2. \end{cases}$

4.6. Исследовать устойчивость положения равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$ следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 + 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2^5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2^3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2^7; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\sin x_2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\operatorname{tg} x_2; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\ln(1 - x_2). \end{cases}$

4.7. Показать, что положение равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$ следующих систем асимптотически устойчиво в целом:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2^5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2^7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 3x_1^5, \\ \dot{x}_2 = -2x_1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 - 5x_1^7, \\ \dot{x}_2 = -4x_1. \end{cases}$

4.8. Показать, что положение равновесия системы (рис. 4.2) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = k/(p^2 + ap + b)$ $(k > 0,$ $a > 0,$ $b > 0)$ асимптотически устойчиво в целом при следующих характеристиках нелинейного звена (НЗ): *а*) кусочно-линейная характеристика с насыщением (рис. 4.3, *а*); *б*) кусочно-линейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 4.3, *б*); *в*) кусочно-линейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 4.3, *в*).

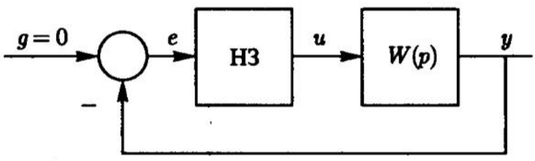


Рис. 4.2

4.9. Показать, что положение равновесия системы (рис. 4.2) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = k/(p^2 + ap)$ $(k > 0,$ $a > 0)$ асимптотически устойчиво в целом при НЗ с кусочно линейной характеристикой с насыщением (рис. 4.3, *а*).

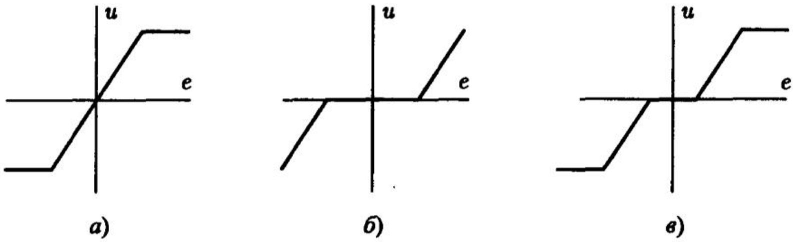


Рис. 4.3

4.10. Показать, что положение равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$ приводимых ниже систем асимптотически устойчиво в целом.

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt[3]{x_2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - \sqrt[3]{x_2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2^3 - \sqrt[3]{x_2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt[3]{x_2(1 + x_2^2)}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - \sqrt[3]{x_2(1 + x_2^2)}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt[3]{x_2} - \operatorname{arctg} x_2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 - 2 \operatorname{arctg} x_2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - \sqrt[3]{x_2} - 2 \operatorname{arctg} x_2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2^3 - 2 \operatorname{arctg} x_2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 - \sqrt[3]{x_2(1 + x_2^2)}. \end{cases}$

4.11. Исследовать устойчивость положения равновесия $(x_1\ x_2\ x_3) = (0\ 0\ 0)$ следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 - x_3^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -3x_2 - 5x_3 - x_3^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + x_3^3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - x_2 + 7x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 4x_3 - 2x_3^3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 + 5x_1^5, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_2^3, \\ \dot{x}_3 = 7x_2 + x_3 + x_3^3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 + 2x_3 + x_3^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3 - 5x_3^5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - x_2 + 4x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -2x_2 - x_3 - 3x_3^3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 9x_1 + x_2 + 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 4x_2 + x_3 + 3x_3^3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 6x_3 - 2x_3^3; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 + 6x_3 + 2x_3^3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -10x_1 + x_2 - 7x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 - x_3^3; \end{cases}$

н) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -11x_1 + x_2 - 7x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 12x_2 + x_3 - 8x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -5x_2 - 9x_3 - x_3^3; \end{cases}$ о) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 11x_1 + x_2 + 7x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 + 3x_3 + 8x_3^3. \end{cases}$

4.12. Исследовать устойчивость положения равновесия $(x_1\ x_2\ x_3) = (0\ 0\ 0)$ следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_3^3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -2x_2 - x_3^3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -2x_2 + 4x_3^3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 7x_2 - 5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 7x_3^3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_2 + 7x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 7x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -3x_2 + 6x_3^3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^5, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 3x_2 - 8x_3^3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 - 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -10x_2 - x_3^3; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -5x_2 + x_3^3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 5x_3^3; \end{cases}$

н) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_2 - 10x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 7x_2 - x_3 - x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 8x_2 - 7x_3^3; \end{cases}$ о) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_2 + 3x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 + 3x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3^3. \end{cases}$

4.13. Прямым методом Ляпунова показать, что положение равновесия ниже следующих систем не устойчиво.

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 4x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 6x_3 - x_3^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 5x_2 - x_3 - 4x_3^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 4x_3 - 2x_3^3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 12x_1 + x_2 + 4x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 6x_2 - 4x_3 - x_3^3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + x_2 - 2x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 5x_2 - 4x_3 - x_3^3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 2x_2 - x_3 - 4x_3^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2 - 9x_1^3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 2x_2 - 5x_3 - 7x_3^3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + 10x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 2x_2 - 4x_3 - x_3^3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - 6x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 5x_3 - 9x_3^3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + 8x_2 + 10x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_2^5, \\ \dot{x}_3 = 3x_2 - 5x_3 - 2x_3^3. \end{cases}$

Ответы

4.1. а) положительно полуопределена; б) положительно полуопределена; в) положительно определена; г) положительно определена; д) отрицательно определена; е) отрицательно определена; ж) отрицательно полуопределена; з) отрицательно полуопределена; и) положительно полуопределена; к) положительно полуопределена;; л) отрицательно полуопределена; м) отрицательно полуопределена.

4.2. а) допускает; б) не допускает; в) допускает; г) не допускает; д) допускает; е) не допускает; ж) не допускает; з) допускает; и) не допускает; к) допускает.

4.3. а) допускает; б) допускает; в) не допускает; г) не допускает; д) допускает; е) не допускает; ж) не допускает; з) не допускает; и) допускает; к) допускает.

4.4. а) устойчиво; б) устойчиво; в) неустойчиво; г) устойчиво; д) неустойчиво; е) устойчиво; ж) неустойчиво; з) устойчиво; и) устойчиво; к) неустойчиво.

4.5. а) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ асимптотически устойчиво; $(x_1, x_2) = (2, -4)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (-2, 4)$ не устойчиво. б) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (2, -4)$ асимптотически устойчиво; $(x_1, x_2) = (-2, 4)$ асимптотически устойчиво. в) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (2, -2)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (-2, 2)$ не устойчиво. г) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (2, -2)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (-2, 2)$ не устойчиво. д) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ асимптотически устойчиво; $(x_1, x_2) = (3, -9)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (-3, 9)$ не устойчиво. е) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не устойчиво; $(x_1, x_2) = (3, -9)$ асимптотически устойчиво; $(x_1, x_2) = (-3, 9)$ асимптотически устойчиво.

4.6. а) асимптотически устойчиво; б) не устойчиво; в) асимптотически устойчиво; г) не устойчиво; д) асимптотически устойчиво; е) не устойчиво; ж) асимптотически устойчиво; з) не устойчиво; и) асимптотически устойчиво; к) асимптотически устойчиво; л) не устойчив; м) асимптотически устойчиво.

4.11. а) асимптотически устойчиво в целом; б) асимптотически устойчиво в целом; в) не устойчиво; г) асимптотически устойчиво в целом; д) не устойчиво; е) не устойчиво; ж) асимптотически устойчиво в целом; з) асимптотически устойчиво в целом; и) не устойчиво; к) асимптотически устойчиво в целом; л) не устойчиво; м) асимптотически устойчиво в целом; н) асимптотически устойчиво в целом; о) не устойчиво.

4.12. а) асимптотически устойчиво в целом; б) не устойчиво; в) асимптотически устойчиво в целом; г) асимптотически устойчиво в целом; д) не устойчиво; е) асимптотически устойчиво в целом; ж) асимптотически устойчиво в целом; з) не устойчиво; и) асимптотически устойчиво в целом; к) асимптотически устойчиво в целом; л) не устойчиво; м) асимптотически устойчиво в целом; н) асимптотически устойчиво в целом; о) не устойчиво.

Глава 5

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим систему с одной нелинейностью (рис. 5.1, *а*). Такую систему всегда можно преобразовать к «стандартному» виду (рис. 5.1, *б*). В нормальной форме такие системы описываются уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-вектор; u, ξ — скалярные переменные, нелинейная функция $f(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) = 0, \quad k_m \leqslant \frac{f(\xi)}{\xi} \leqslant k_M \text{ при } \xi \neq 0. \tag{5.2}$$

Уравнения (5.1) представляют собой уравнения в отклонениях, и на структурной схеме (рис. 5.1) задающее воздействие равно нулю: $\widetilde{g} = 0$ ($g = 0$).

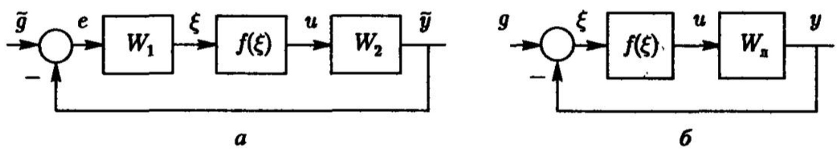


Рис. 5.1.

Определение 5.1. *Система* (5.1), *или ее положение равновесия* $\mathbf{x} = 0$, *называется абсолютно устойчивой в угле (секторе)* $[k_m, k_M]$, *если нулевое решение* $\mathbf{x}(t) = 0$ *системы* (5.1) *асимптотически устойчиво в целом при любой нелинейной функции* $f(\xi)$, *удовлетворяющей условию* (5.2).

Абсолютная устойчивость, как и робастная устойчивость, означает устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, определяемых заданным множеством Ξ нелинейных звеньев. В определении 5.1 в качестве множества Ξ принято множество (5.2), которое обычно рассматривается при изучении абсолютной устойчивости. Естественно множество Ξ может быть задано иначе. Поэтому в общем случае будем говорить об *абсолютной устойчивости на*

множестве (***классе***) Ξ, которое может отличаться от множества, задаваемого соотношением (5.2).

5.1. Система сравнения. Необходимое условие и критерий Попова абсолютной устойчивости

Дальше будем рассматривать структурную схему нелинейной системы, представленную в стандартном виде (рис. 5.1, *б*). Передаточную функцию $W_л$ в операторной форме, если система задана уравнениями (5.1), можно найти следующим образом. Запишем уравнения линейной части в операторной форме:

$$(Ip-A)\mathbf{x}=\mathbf{b}u, \quad \xi=-\mathbf{c}^T\mathbf{x}, \text{ или } \mathbf{x}=(Ip-A)^{-1}\mathbf{b}u, \ \xi=-\mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Отсюда, исключая $\mathbf{x}$ и учитывая $y=-\xi$, получим

$$W_л(p)=\mathbf{c}^T(Ip-A)^{-1}\mathbf{b}.$$

Используя эту передаточную функцию, уравнения (5.1) можно записать (см. также рис. 5.1, *б*) в виде

$$y=W_л(p)u, \quad u=f(\xi), \quad \xi=-y. \tag{5.3}$$

Наряду с нелинейной системой (5.1) или (5.3) рассмотрим линейную систему

$$y=W_л(p)u, \quad u=k\xi, \quad \xi=-y. \tag{5.4}$$

Эту систему при любом $k\in[k_m,k_M]$ называют *системой сравнения* системы (5.3), (5.2). «Нелинейность» $f(\xi)=k\xi$ принадлежит множеству (5.2) при любом $k\in[k_m,k_M]$. Поэтому если система (5.3) абсолютно устойчива в угле $[k_m,k_M]$, то ее система сравнения, т. е. линейная система (5.4), устойчива (асимптотически устойчива в целом) при любом $k\in[k_m,k_M]$. И если система сравнения при каком-либо $k\in[k_m,k_M]$ неустойчива, то система (11.2) не может быть абсолютно устойчивой в угле $[k_m,k_M]$. Будем говорить, что система сравнения *робастно устойчива в угле или на интервале* $[k_m,k_M]$, если она устойчива при любом $k\in[k_m,k_M]$. Из выше изложенного вытекает следующее необходимое условие абсолютной устойчивости.

Необходимое условие абсолютной устойчивости. *Для того чтобы положение равновесия системы* (5.3) *было абсолютно устойчиво в угле* $[k_m,k_M]$, *необходимо, чтобы ее система сравнения была робастно устойчива в угле* $[k_m,k_M]$.

Пример 5.1. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_л=1/(p+1)^3.$$

Исследовать, является ли система (рис. 5.1, *б*) абсолютно устойчивой в угле $[0,10]$.

Решение. Проверим, выполняется ли необходимое условие абсолютной устойчивости. Для этого достаточно проверить устойчивость системы сравнения (5.4) при $k = 10$. Характеристическое уравнение системы сравнения при таком коэффициенте имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 11 = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка отрицателен: $\Delta_2 = 3 \cdot 3 - 11 = -2$. Необходимое условие абсолютной устойчивости не выполняется. Следовательно, нелинейная система не является абсолютно устойчивой.

Проблема абсолютной устойчивости сначала исследовалась прямым методом Ляпунова. Однако с начала шестидесятых годов прошлого века широко стал использоваться частотный метод.

Линейная часть устойчива. Рассмотрим сначала случай, когда линейная часть нелинейной системы (рис. 5.1, *б*) устойчива. Представим ее частотную передаточную функцию в виде

$$W_л(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Критерий Попова. *Для того чтобы положение равновесия системы* (5.3) *с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в угле* $[0, k]$, *достаточно, чтобы существовало такое вещественное число* q, *что при всех* $\omega \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\mathrm{Re}(1 + jq\omega)W_л(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, \tag{5.5а}$$

или

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}. \tag{5.5б}$$

Пример 5.2. Передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_л(p) = \frac{b_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (b_0, a_0, a_1, a_2 > 0).$$

Определить, при каких значениях k система (рис. 5.1, *б*) будет абсолютно устойчива в угле $[0, k]$.

Решение. Частотная передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_л(j\omega) = \frac{b_0}{-a_0\omega^2 + ja_1\omega + a_2}.$$

Отсюда для вещественной и мнимой частей получаем

$$U(\omega) = \frac{b_0(a_2 - a_0\omega^2)}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}, \quad V(\omega) = \frac{-b_0 a_1\omega}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}.$$

Условие (5.5б) принимает вид

$$\frac{b_0(a_2 - a_0\omega^2) + qb_0 a_1\omega^2}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2} + \frac{1}{k} > 0.$$

Если положить $q = a_0/a_1$, то получим

$$U(\omega) = \frac{b_0 a_2}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2} + \frac{1}{k} > 0.$$

Последнее неравенство выполняется при любом $\omega \geqslant 0$ и любом $k > 0$. Поэтому рассматриваемая система абсолютно устойчива в угле $[0, k]$ при любом конечном $k > 0$.

В приведенной выше формулировке теоремы Попова не просматривается частотная сущность. Рассмотрим другую, частотную формулировку теоремы Попова. Для этого введем в рассмотрение следующие частотные функции:

$$U_{\text{м}}(\omega) = U(\omega), \quad V_{\text{м}}(\omega) = \omega V(\omega), \quad W_{\text{м}}(j\omega) = U_{\text{м}}(\omega) + jV_{\text{м}}(\omega).$$

Последняя функция называется *модифицированной частотой передаточной функцией* (линейной части), а ее годограф — *модифицированной амплитудно-фазовой частотной характеристикой*.

Частотная (геометрическая) формулировка критерия Попова. *Для того чтобы положение равновесия системы* (5.3) *с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в угле* $[0, k]$, *достаточно, чтобы можно было провести прямую, проходящую через точку* $(-1/k, j0)$ *и называемую прямой Попова, такую, что модифицированная амплитудно-фазовая частотная характеристика полностью располагается правее этой прямой.*

Модифицированная амплитудно-фазовая частотная характеристика отличается от обычной (не модифицированной) только ординатами.

Линейная часть неустойчива. Пусть линейная часть нелинейной системы (рис. 5.2, a) неустойчива. Преобразуем ее следующим образом. Охватим линейную часть отрицательной обратной связью звеном с передаточной функцией r, а к нелинейному звену подключим параллельно звено также с передаточной функцией r, выход которого подключен к сумматору по отрицательному входу (рис. 5.2, $б$). Преобразованная схема эквивалентна исходной схеме. Действительно, учитывая $g = 0$, на входе линейного звена преобразованной схемы имеем: $u = f(\xi) + ry - ry = f(\xi)$, т. е. тот же сигнал, что и на входе линейного звена исходной схемы.

В преобразованной схеме передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\text{п}} = W_{\text{л}}/(1 + rW_{\text{л}})$, а нелинейность — $f_{\text{п}}(\xi) = f(\xi) - r\xi$ (см. рис. 5.2, $б$). Так как при $\xi \neq 0$ имеем $f_{\text{п}}(\xi)/\xi = f(\xi)/\xi - r$, то неравенство $r \leqslant f(\xi)/\xi \leqslant k$ равносильно неравенству $0 \leqslant f_{\text{п}}(\xi)/\xi \leqslant k - r$. Поэтому положение равновесия исходной системы (рис. 5.2, a) абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если положение равновесия преобразованной системы (рис. 5.2, $б$) абсолютно устойчиво в угле $[0, k - r]$.

Пусть преобразованная линейная часть устойчива, т. е. все полюса передаточной функции $W_{\text{п}}$ имеют отрицательные вещественные части.

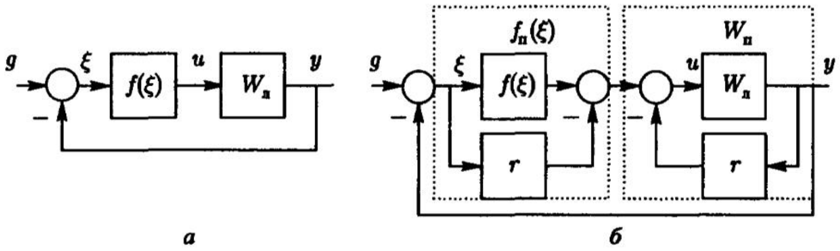


Рис. 5.2.

Тогда по теореме Попова положение равновесия преобразованной системы абсолютно устойчиво в угле $[0, k-r]$, если выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(1+jq\omega)W_п(j\omega)+\frac{1}{k-r}>0,$$

или

$$U_п(\omega)-q\omega V_п(\omega)>-\frac{1}{k-r}, \tag{5.6}$$

где

$$U_п(\omega)=\operatorname{Re}W_п(j\omega) \text{ и } V_п(\omega)=\operatorname{Im}W_п(j\omega).$$

Критерий Попова (линейная часть неустойчива). *Положение равновесия нелинейной системы* (5.3) *с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r,k]$, если все полюса преобразованной передаточной функции $W_п = W_л/(1+rW_л)$ имеют отрицательные вещественные части и существует такое вещественное число q, что при всех $\omega \geqslant 0$ выполняется неравенство* (5.6).

Пример 5.3. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W_л = 10/(p-1)$. Исследовать, является ли система (рис. 5.2, *а*) абсолютно устойчивой в угле $[0{,}2, 200]$.

Решение. Преобразованная передаточная функция имеет вид $W_п = W_л/(1+rW_л) = 10/(p+1)$. Отсюда для частотной передаточной функции, а также вещественной и мнимой частотных функций имеем

$$W_п(j\omega)=\frac{10}{j\omega+1}=\frac{10(1-j\omega)}{\omega^2+1},\quad U_п(\omega)=\frac{10}{\omega^2+1},\quad V_п(\omega)=-\frac{10\omega}{\omega^2+1}.$$

Условие (5.6) принимает вид

$$\frac{10}{\omega^2+1}+q\omega\frac{10\omega}{\omega^2+1}=\frac{10+q10\omega^2}{\omega^2+1}>-\frac{1}{200-0{,}2},$$

и оно выполняется при любых $\omega \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$. Следовательно, рассматриваемая система абсолютно устойчива в угле $[0{,}2, 200]$.

Как и в случае с устойчивой линейной частью, можно сформулировать частотный вариант критерия устойчивости. Для этого введем следующие частотные функции:

$$U_{\text{пм}}(\omega) = U_{\text{п}}(\omega), \quad V_{\text{пм}}(\omega) = \omega V_{\text{п}}(\omega), \quad W_{\text{пм}}(j\omega) = U_{\text{пм}}(\omega) + jV_{\text{пм}}(\omega).$$

Последнюю функцию $W_{\text{пм}}(j\omega)$ будем называть *модифицированной преобразованной частотной передаточной функцией*, а ее годограф при изменении $0 \leqslant \omega < \infty$ — *модифицированной преобразованной амплитудно-фазовой частотной характеристикой*. Используя вещественную и мнимую части функции $W_{\text{пм}}(j\omega)$, условие (5.6) можно записать в виде

$$U_{\text{пм}}(\omega) - qV_{\text{пм}}(\omega) > -\frac{1}{k-r}.$$

В случае неустойчивой линейной части прямая Попова — эта прямая, которая пересекает вещественную ось в точке $-1/(k-r)$ и имеет наклон $-1/q$.

Частотная формулировка критерия Попова (линейная часть неустойчива). *Положение равновесия нелинейной системы* (5.3) *с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле* $[r, k]$, *если можно провести такую прямую Попова, что модифицированная преобразованная частотная характеристика полностью располагается правее этой прямой.*

Задачи

5.1. Определить, будет ли положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) абсолютно устойчиво в угле $[0, 100]$ при следующих передаточных функциях линейной части:

а) $W_л(p) = \dfrac{10}{p^2+4p+1}$; б) $W_л(p) = \dfrac{5}{p^2+4p+3}$;

в) $W_л(p) = \dfrac{10(0{,}1p+1)}{p^2+4p+1}$; г) $W_л(p) = \dfrac{10}{p^2+4p}$;

д) $W_л(p) = \dfrac{10(p+1)}{p^2+4p}$; е) $W_л(p) = \dfrac{3p+2}{p^3+3p^2+3p+1}$;

ж) $W_л(p) = \dfrac{p+4}{p^3+3p^2+3p+1}$; з) $W_л(p) = \dfrac{4}{p^3+3p^2+3p+1}$;

и) $W_л(p) = \dfrac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1}$; к) $W_л(p) = \dfrac{2p+1}{p^3+3p^2+3p-1}$.

5.2. Определить, будет ли положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) абсолютно устойчиво в угле $[2, 100]$ при передаточных функциях линейной части, приведенных в задаче 5.1.

5.3. Покажите, что положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = \dfrac{1}{p^3+3p^2+3p+1}$ абсолютно устойчиво в угле $[0, 4]$ и не является абсолютно устойчивым в угле $[0, 10]$.

5.4. Покажите, что положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = \dfrac{2p+1}{p^3+3p^2+3p-3}$ абсолютно устойчиво в угле $[4, 100]$ и не является абсолютно устойчивым в угле $[2, 100]$.

5.5. Покажите, что положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = \dfrac{1}{p^3+3p^2+3p-1}$ абсолютно устойчиво в угле $[2, 6]$ и не является абсолютно устойчивым в угле $[1, 6]$.

5.6. Покажите, что положение равновесия системы (рис. 5.1, *б*) с передаточной функцией линейной части $W_л(p) = \dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p+1}$ абсолютно устойчиво в угле $[0, 5]$ и не является абсолютно устойчивым в угле $[0, 10]$.

5.2. Квадратичный критерий абсолютной устойчивости

При рассмотрении абсолютной устойчивости класс нелинейных звеньев можно задавать с помощью квадратичной формы. Например, класс нелинейных звеньев, определяемых соотношением

$$f(0) = 0, \quad \alpha \leqslant \frac{f(\xi)}{\xi} \leqslant \beta \ (\alpha < \beta), \tag{5.7а}$$

с помощью квадратичной формы можно определить следующим образом:

$$F(u, \xi) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \geqslant 0, \quad u = f(\xi). \tag{5.7б}$$

Задавая класс нелинейных и нестационарных звеньев с помощью квадратичных форм, В. А. Якубович разработал так называемый квадратичный критерий абсолютной устойчивости [26].

Эрмитова матрица и эрмитова форма. Дальше при рассмотрении квадратичного критерия используются эрмитовы формы. Поэтому здесь вкратце излагаются основные понятия, связанные с этой формой.

Пусть z_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ — комплексные числа и $\overline{z}_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ — комплексно-сопряженные с ними числа. Вектор $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z}_1\, \overline{z}_2 \ldots \overline{z}_n)^T$ является комплексно-сопряженным вектором с вектором $\mathbf{z} = (z_1\, z_2 \ldots \ldots z_n)^T$. Если элементы $H = [h_{ik}]$ являются комплексными числами, то матрица $H^* = [\overline{h}_{ki}]$, которая получается из матрицы $H = [h_{ik}]$ путем транспонирования и замены элементов на комплексно-сопряженные с ними числа, называется *эрмитово сопряженной* с $H = [h_{ik}]$ матрицей. Операция эрмитова сопряжения обладает теми же свойствами, что и операция транспонирования:

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*, \quad (AB)^* = B^* A^*,$$
$$(A^*)^* = A, \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Если к вектору-столбцу $\mathbf{z} = (z_1\, z_2\, \ldots\, z_n)^T$ применить операцию эрмитова сопряжения, то получим вектор-строку $\mathbf{z}^* = (\overline{z}_1\, \overline{z}_2\, \ldots\, \overline{z}_n)$. В частности, если z — скалярное комплексное число, то в результате применения операции эрмитова сопряжения получим комплексно-сопряженное число: $z^* = \overline{z}$.

Матрица $H = [h_{ik}]$ называется *эрмитовой матрицей*, если $H = H^*$, т. е. $h_{ik} = \overline{h}_{ki}$. Так как $h_{ii} = \overline{h}_{ii}$, то диагональные элементы эрмитовой матрицы являются вещественными числами. В частном случае, когда все элементы матрицы являются вещественными, эрмитова матрица является симметрической матрицей.

Квадратичная форма

$$H(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} \overline{z}_i z_k, \tag{5.8}$$

где H — эрмитова матрица ($h_{ik} = \overline{h}_{ki}$), называется *эрмитовой формой*. Переменные z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и элементы матрицы H могут быть вещественными числами. В частном случае, когда и переменные, и элементы матрицы являются вещественными, то эрмитова форма становится вещественной квадратичной формой. Эрмитова форма всегда принимает *вещественное значение*.

Если квадратичная форма (5.8) не является эрмитовой ($h_{ik} \neq \overline{h}_{ki}$), то она может принять комплексные значения. В этом случае на ее основе можно определить эрмитову форму следующим образом:

$$\operatorname{Re} \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} \overline{z}_i z_k.$$

Эрмитову форму, заданную в таком виде, всегда можно преобразовать и представить с помощью эрмитовой матрицы:

$$H_1(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \mathbf{z}^* H_1 \mathbf{z} \quad \left(H_1 = \frac{1}{2}(H + H^*)\right).$$

Для эрмитовой матрицы и эрмитовой формы знакоопределенность и знакопостоянство определяются точно так же, как и для симметрической матрицы и вещественной квадратичной формы. В частности, эрмитова матрица H и эрмитова форма $\mathbf{z}^* H \mathbf{z}$ называются положительно определенными, если $\mathbf{z}^* H \mathbf{z} > 0$ при всех $\mathbf{z} \neq 0$.

Критерий положительной определенности эрмитовой матрицы. *Для того чтобы эрмитова матрица H была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

$$\Delta_1 = h_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \det H > 0.$$

Расширение вещественной квадратичной формы до эрмитовой. Всякая вещественная квадратичная форма

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k$$

может быть расширена до эрмитовой следующим образом:

$$G(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \overline{z}_i z_k = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} z_i^* z_k.$$

По определению эрмитова форма $G(\mathbf{z})$ должна принимать те же значения, что и вещественная квадратичная форма $G(\mathbf{x})$, если z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) принимает вещественные значения: $z_i = x_i$. Например, вещественным квадратичным формам

$$G_1(\mathbf{x}) = x_1 x_2, \quad G_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2, \quad G_3(\mathbf{x}) = x_1(x_2 - 2x_1)$$

соответствуют следующие расширенные до эрмитовых формы:

$$G_1(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \overline{z}_1 z_2, \quad G_2(\mathbf{z}) = |z_1|^2 - \operatorname{Re}\{\overline{z}_1 z_2\} + |z_2|^2,$$
$$G_3(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}\{\overline{z}_1(z_2 - 2z_1)\}.$$

Если заданы два вещественных вектора $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, то вещественные квадратичные формы от этих двух векторов $G(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ определяются как вещественные квадратичные формы от векторного переменного $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix}$. Если заданы два комплексных вектора $\mathbf{z}^{(1)}$ и $\mathbf{z}^{(2)}$, то эрмитовы формы от этих векторных переменных $G(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$ определяются как эрмитовы формы от векторного переменного $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \mathbf{z}^{(2)} \end{bmatrix}$. Аналогично определяются вещественные квадратичные формы и эрмитовы формы от трех и более векторных переменных.

Локальная связь. Минимальная устойчивость. Рассмотрим многомерную систему, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = C\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \boldsymbol{\xi} \in R^m, \quad \mathbf{u} \in R^r, \tag{5.9а}$$

или

$$\mathbf{y} = W_л(p)\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\xi), \quad \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{y}, \tag{5.9б}$$

где $W_л(p) = C(Ip - A)^{-1}B$ — $(m \times r)$-матричная передаточная функция. Система содержит r нелинейностей ($\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$ — r-мерная векторная функция). Переменные $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{u}$ являются векторными функциями времени: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) = \mathbf{u}(t)$.

Пусть задана вещественная квадратичная форма $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$, и множество нелинейных звеньев задается условием

$$F(\boldsymbol{\xi}(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}(t), \mathbf{u}(t)) \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.10}$$

В квадратичной форме $F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u})$ переменные $\boldsymbol{\xi}$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathbf{u}$ рассматриваются как независимые. В частном случае какие-либо переменные в квадратичную форму могут не входить. Тогда соответствующие переменные будем опускать. Соотношение (5.10) называют *локальной связью*.

Определение 5.2. *Если выполняется условие* (5.10), *то говорят, что функции* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *и* $\mathbf{u}(t)$ *удовлетворяет локальной связи с формой* $F(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u})$.

Локальную связь (5.10) также будем записывать в виде

$$F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u}) \geqslant 0 \text{ или } F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})) \geqslant 0.$$

Определение 5.3. *Система* (5.9а) *или* (5.9б) *называется минимально устойчивой в заданном классе нелинейностей (нелинейных звеньев), если она асимптотически устойчива в целом при какой-либо нелинейности* $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$*из указанного класса.*

Рассмотрим локальную связь

$$F(\xi, u) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \geqslant 0$$

в случае одномерной системы, т. е. при $l = m = 1$. Как было показано, эта локальная связь определяет тот же класс нелинейных звеньев, что и соотношение (5.7а). Этому классу нелинейных звеньев принадлежат линейные звенья

$$u = \gamma\xi, \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta.$$

Поэтому если система сравнения

$$y = W_л(p)u, \quad u = \gamma\xi, \quad \xi = -y$$

устойчива при каком-нибудь $\gamma \in [\alpha, \beta]$, то нелинейная система (5.9б) минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, определяемых локальной связью (5.7а).

Нелинейность, при которой будет устанавливаться минимальная устойчивость, будем называть *нелинейностью сравнения*, а саму систему при этой нелинейности — *системой сравнения*.

Квадратичный критерий. Для формулировки квадратичного критерия потребуется следующее преобразование квадратичной формы, определяющей локальную связь:

1) квадратичная форма $F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u})$ расширяется до эрмитовой формы заменой переменных $\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u}$ их изображениями $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(s), \widetilde{\dot{\boldsymbol{\xi}}}(s), U$;

2) производится постановка $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(s) = -W_л(s)U$ и $\widetilde{\dot{\boldsymbol{\xi}}}(s) = -sW_л(s)U$:

$$\widetilde{F}(s, U) = F(-W(s)U, -sW(s)U, U).$$

Таким образом, преобразование квадратичной формы сводится к расширению ее до эрмитовой и последующей замене переменных их изображениями Лапласа, найденными при нулевых начальных условиях. При этом изображение выходной переменной нелиненйного звена $U(s)$ рассматривается как независимая комплексная переменная, и его записывают без аргумента, т. е. в виде U.

Рассмотрим в качестве примера локальную связь (5.7б) в случае одномерной системы. Расширенная до эрмитовой, ее квадратичная форма принимает вид

$$\widetilde{F}(s, U) = F(\widetilde{\xi}(s), U(s)) = \mathrm{Re}\{[\beta\widetilde{\xi}(s) - U]^* [U - \alpha\widetilde{\xi}(s)]\}.$$

Подставив сюда выражение для изображения $\widetilde{\xi}(s)$, которое определяется исходя из заданных уравнений системы при нулевых начальных условиях, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(s, U) &= -\mathrm{Re}\{[\beta W_л(s)U + U]^* [U + \alpha W_л(s)U]\} = \\ &= -\mathrm{Re}\{[\beta W_л(s) + 1]^* [1 + \alpha W_л(s)]\} |U|^2.\end{aligned}$$

К в а д р а т и ч н ы й к р и т е р и й (В. А. Якубович [26]). *Пусть нелинейная система* (5.9а) *или* (5.9б) *минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, заданных локальной связью с формой* $F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u})$, *и матрица* A *не имеет собственных значений на мнимой оси или, что то же, характеристическое уравнение ее линейной части не имеет корней на мнимой оси. Тогда ее положение равновесия абсолютно устойчиво в указанном классе нелинейных звеньев, если эрмитова форма* $\widetilde{F}(j\omega, U)$ *отрицательно определена при* $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$, *т. е. выполнено условие*

$$\widetilde{F}(j\omega, U) < 0 \text{ при } -\infty \leqslant \omega \leqslant \infty \text{ и при любом } U \neq 0. \tag{5.11}$$

При этом имеет место экспоненциальная сходимость (устойчивость), т. е. существуют постоянные $C > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при любом* $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$|x(t)| \leqslant C|x(t_0)|e^{-\varepsilon(t - t_0)}.$$

Условие (5.11) *называется частотным условием.*

Если эрмитову форму $\widetilde{F}(j\omega, U)$ представить в виде

$$\widetilde{F}(j\omega, U) = -U^* H(j\omega) U,$$

то частотное условие равносильно тому, что матрица $H(j\omega)$ является положительно определенной при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$.

Эрмитова матрица $H(j\omega)$ положительно определена при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \leqslant \infty$ в том и только в том случае, если она положительно определена при $\omega = \infty$ и детерминант от нее не обращается в нуль при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \leqslant \infty$:

$$H(j\infty) > 0, \quad \det H(j\omega) \neq 0 \text{ при } -\infty \leqslant \omega \leqslant \infty.$$

Квадратичный критерий можно использовать для исследования глобальной асимптотической устойчивости отдельных нестационарных и нелинейных систем. Для этого нужно задать локальную связь так, чтобы класс нелинейностей, который она определяет, включал данную нелинейность. При этом желательно локальную связь или, что то же, квадратичную форму выбирать так, чтобы класс нелинейностей, который она определяет, был бы как можно менее объемным.

Пример 5.4. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + (2 + \cos t)y = 0.$$

Решение. Представим уравнение системы в виде

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y + u = 0, \quad u = y\cos t$$

или

$$y = -W_л(p)u, \quad W_л(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 2}, \quad u = y\cos t.$$

Здесь входом «нелинейного» звена является y, выходом — u. В качестве локальной связи примем соотношение

$$F(y, u) = y^2 - u^2 = y^2 - y^2\cos^2 t = y^2\sin^2 t \geqslant 0.$$

Эрмитово расширение квадратичной формы этой локальной связи имеет вид

$$\widetilde{F}(s, U) = F(Y(s), U) = Y^*(s)Y(s) - U^*U = |Y(s)|^2 - |U|^2.$$

Подставив сюда выражение для $Y(s)$ и положив $s = j\omega$, для частотного условия получим

$$\widetilde{F}(j\omega, U) = \left(|W_л(j\omega)|^2 - 1\right)|U|^2 < 0.$$

Так как это неравенство должно выполняться при $U \neq 0$, то обе части неравенства можно разделить на $|U|^2$. Квадрат амплитудной частотной функции линейной части имеет вид

$$|W_л(j\omega)|^2 = \frac{1}{(2 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}.$$

Подставив это выражение, частотное условие можно представить в виде

$$1 - (2 - \omega^2)^2 - 16\omega^2 < 0 \text{ или } -3 - 12\omega^2 - \omega^4 < 0.$$

Очевидно, последнее неравенство выполняется при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \leqslant \infty$. Следовательно, положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в целом.

Методы построения квадратичной формы локальной связи. Чтобы воспользоваться квадратичным критерием при исследовании устойчивости каких-либо систем, нужно по заданным уравнениям системы уметь строить локальную связь, т. е. определять класс систем, куда можно было бы включить данную систему. В зависимости от конкретного вида нелинейностей возможны различные способы задания локальной связи [26].

1) Как уже было показано, если нелинейность $u = f(\xi)$ принадлежит к классу, определяемому неравенством $\alpha \leqslant \dfrac{f(\xi)}{\xi} \leqslant \beta$, то локальная связь может быть задана в виде

$$F(\xi, u) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \geqslant 0.$$

Если $\alpha = 0$ и $0 < \beta < \infty$, то эта связь принимает вид

$$F(\xi, u) = u(\beta\xi - u) \geqslant 0 \text{ или } F(\xi, u) = u(\xi - \beta^{-1}u) \geqslant 0.$$

2) Если система содержит две нелинейности вида $u_1 = \xi^2$, $u_2 = \xi^3$ или $u_1 = \xi^3$, $u_2 = \xi^5$, то локальную связь можно задать в виде равенства

$$F(\xi, u) = \xi u_2 - u_1^2 = 0.$$

3) Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i, t)$ ($i = 1, 2$), и $f(\xi_i, t)$ является неубывающей функцией переменной ξ_i при всех $t \geqslant 0$: $f(\xi_i', t) \leqslant f(\xi_i'', t)$ при $\xi_i' < \xi_i''$. В этом случае локальную связь можно задать следующим образом:

$$F(\xi, u) = (\xi_1 - \xi_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0.$$

4) Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i, t)$ ($i = 1, 2$), и функция $f(\xi_i, t)$ удовлетворяет следующему условию: $\alpha \leqslant \leqslant \dfrac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial \xi_i} \leqslant \beta$ при всех $t \geqslant 0$. В этом случае локальная связь может быть задана в виде

$$F(\xi, u) = [\beta(\xi_1 - \xi_2) - (u_1 - u_2)][(u_1 - u_2) - \alpha(\xi_1 - \xi_2)] \geqslant 0.$$

5) Иногда локальная связь может быть задана несколькими соотношениями в виде равенств и неравенств:

$$F_i(\xi, \dot{\xi}, u) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, r; \quad F_k(\xi, \dot{\xi}, u) \geqslant 0,\ k = r+1, r+2, \ldots, p.$$

Такую локальную связь можно преобразовать в локальную связь с одной формой, свернув все квадратичные формы в одну:

$$F(\xi, \dot{\xi}, u) = \sum_{j=1}^{p} \tau_j F_j(\xi, \dot{\xi}, u).$$

Здесь τ_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные постоянные, τ_j $(j = r + 1, r + 2, \ldots, p)$ — произвольные положительные постоянные. Локальная связь

$$F(\xi, \dot{\xi}, u) = \sum_{j=1}^{p} \tau_j F_j(\xi, \dot{\xi}, u) \geqslant 0$$

с одной формой эквивалентна исходной локальной связи с p формами.

6) Если система содержит нелинейность, которая имеет вид

$$u = (a \cos t + b \sin t)\xi,$$

то ее можно представить как систему, содержащую две нелинейности вида

$$u_1 = \xi \cos t, \quad u_2 = \xi \sin t.$$

При этом локальную связь можно определить равенством

$$F = \xi^2 - u_1^2 - u_2^2 = 0.$$

Пример 5.5. Система описывается уравнениями

$$T\dot{e}_1 + e_1 = -k_1 u_1 + k_2 u_2,$$
$$T\dot{e}_2 + e_2 = k_2 u_1 - k_1 u_2,$$
$$u_i = f(e_i, t), \ \ i = 1, \ 2,$$

где T, k_1, k_2 — положительные постоянные, $f(e_i, t)$ — неубывающая по переменной e_i функция, удовлетворяющая при всех $t \geqslant 0$ условию $f(0, t) = 0$, $0 \leqslant \dfrac{f(e_i, t)}{e_i} \leqslant \beta$ при $e_i \neq 0$. Определить значения постоянных T, k_1, k_2, при которых положение равновесия системы асимптотически устойчиво в целом.

Решение. Найдем матричную передаточную функцию линейной части $W = [W_{ik}]$, где $W_{ik} = E_i(s)/U_k(s)$ $(i, \, k = 1, 2)$. Для этого произведем преобразование Лапласа исходных уравнений, описывающих линейную часть, при нулевых начальных условиях:

$$TsE_1(s) + E_1(s) = -k_1 U_1(s) + k_2 U_2(s),$$
$$TsE_2(s) + E_2(s) = k_2 U_1(s) - k_1 U_2(s).$$

Отсюда, положив $U_2(s) = 0$ при определении W_{i1} и $U_1(s) = 0$ при определении W_{i2}, находим

$$W_{11} = \frac{E_1(s)}{U_1(s)} = -\frac{k_1}{Ts + 1}, \quad W_{21} = \frac{E_2(s)}{U_1(s)} = \frac{k_2}{Ts + 1},$$
$$W_{12} = \frac{E_1(s)}{U_2(s)} = \frac{k_2}{Ts + 1}, \quad W_{22} = \frac{E_2(s)}{U_2(s)} = -\frac{k_1}{Ts + 1}.$$

Если использовать обозначение $W_i = \dfrac{k_i}{Ts+1}$, то матричную передаточную функцию можно записать в виде

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 & W_2 \\ W_2 & -W_1 \end{bmatrix}.$$

С помощью передаточных функций уравнение системы в изображениях Лапласа можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1(s) & W_2(s) \\ W_2(s) & -W_1(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

или

$$E_1(s) = -W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s), \tag{5.12а}$$
$$E_2(s) = W_2(s)U_1(s) - W_1(s)U_2(s). \tag{5.12б}$$

Нелинейности удовлетворяют локальной связи

$$F_1 = \left(e_1 - \frac{1}{\beta}u_1\right)u_1 \geqslant 0,$$
$$F_2 = \left(e_2 - \frac{1}{\beta}u_2\right)u_2 \geqslant 0,$$
$$F_3 = (e_1 - e_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0,$$

или

$$F(\mathbf{e}, \mathbf{u}) = \tau_1 F_1 + \tau_2 F_2 + \tau_3 F_3 = \tau_1 \left(e_1 - \frac{1}{\beta}u_1\right)u_1 +$$
$$+ \tau_2 \left(e_2 - \frac{1}{\beta}u_2\right)u_2 + \tau_3 (e_1 - e_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0, \quad \tau_i > 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Здесь $\mathbf{e} = (e_1\ e_2)^T$ и $\mathbf{u} = (u_1\ u_2)^T$. «Нелинейность» $\mathbf{u} = 0$ удовлетворяет локальной связи: $F(\mathbf{e}, 0) = 0$. Примем эту нелинейность в качестве нелинейности сравнения. В этом случае система сравнения принимает вид

$$T\dot{e}_1 + e_1 = 0, \quad T\dot{e}_2 + e_2 = 0$$

и представляет собой две несвязанные между собой линейные системы. Эти системы устойчивы (асимптотически устойчивы в целом). Поэтому рассматриваемая система минимально устойчива.

Так как квадратичные формы F_1 и F_2 похожи, дальше примем $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Эрмитово расширение квадратичной формы $F(e, u)$ имеет вид

$$F(E(s), U) = \mathrm{Re}\left\{ \tau \left(E_1(s) - \frac{1}{\beta}U_1\right)U_1^* + \tau \left(E_2(s) - \frac{1}{\beta}U_2\right)U_2^* + \right.$$
$$\left. + \tau_3 \left[E_1(s) - E_2(s)\right](U_1 - U_2)^* \right\}.$$

Подставив сюда выражения для $E_1(s)$ и $E_2(s)$ из (5.12) и положив $s = j\omega$, получим

$$\widetilde{F}(j\omega, U) = \operatorname{Re}\Big\{\tau\Big[-W_1(j\omega)U_1 + W_2(j\omega)U_2 - \frac{1}{\beta}U_1\Big]U_1^* + \\ + \tau\Big[W_2(j\omega)U_1 - W_2(j\omega)U_2 - \frac{1}{\beta}U_2\Big]U_2^* + \\ \tau_3\big[-W_1(j\omega)U_1 + W_2(j\omega)U_2 - W_2(j\omega)U_1 + W_1(j\omega)U_2\big](U_1 - U_2)^*\Big\}$$

или, после перемножения и приведения подобных членов,

$$\widetilde{F}(j\omega, U) = -\operatorname{Re}\Big\{\Big[(\tau+\tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta}\Big]U_1U_1^* + \\ + \Big[(\tau+\tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta}\Big]U_2U_2^* - \\ - \Big[\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3+\tau)W_2(j\omega)\Big]U_1U_2^* - \\ - \big[\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3+\tau)W_2(j\omega)\big]U_2U_1^*\Big\}.$$

Подставив выражения для передаточных функций, найдем

$$\operatorname{Re}\Big[(\tau+\tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta}\Big] = \frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta} = A,$$

$$\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3+\tau)W_2(j\omega) = \frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3+\tau)k_2](1 - Tj\omega)}{(T\omega)^2+1} = B.$$

Используя эти обозначения, частотное условие можно записать в виде

$$\widetilde{F}(j\omega, U) = -\big(AU_1U_1^* + AU_2U_2^* - \operatorname{Re}\{BU_1U_2^* + BU_2U_1^*\}\big) < 0$$

или

$$\widetilde{F}_1(j\omega, U) = -\operatorname{Re}\big\{U^*H_1(j\omega)U\big\} = -U^*H(j\omega)U,$$

где

$$H_1(j\omega) = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & A \end{bmatrix}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{2}\big[H_1(j\omega) + H_1^*(j\omega)\big], \quad U = (U_1\ U_2)^T.$$

Элементы h_{ik} $(i,\ k = 1,\ 2)$ матрицы H определяются следующим образом:

$$h_{11} = h_{22} = A = \frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta},$$

$$h_{12} = h_{21} = -\frac{1}{2}(B + B^*) = -\frac{\big[\tau_3 k_1 + (\tau_3+\tau)k_2\big]}{(T\omega)^2+1}.$$

Частотное условие будет выполнено, если эрмитова матрица $H(j\omega)$ будет положительно определенной. Согласно критерию положительной определенности эрмитова матрица $H(j\omega)$ будет положительно определенной, если ее главные угловые миноры будут положительны:

$$\Delta_1 = h_{11} = \frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta} > 0,$$

$$\Delta_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \left[\frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta}\right]^2 - \\ - \left[\frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3+\tau)k_2]}{(T\omega)^2+1}\right]^2 > 0.$$

Так как все параметры положительны, первое неравенство выполняется при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$. Чтобы определить, при каких значениях параметров будет выполняться второе неравенство, представим его в виде

$$\left[\frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta}\right]^2 > \left[\frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3+\tau)k_2]}{(T\omega)^2+1}\right]^2.$$

Так как в левой части выражение под квадратом положительно, то последнее неравенство можем записать в виде

$$\frac{(\tau+\tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2+1} + \frac{\tau}{\beta} > \frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3+\tau)k_2]}{(T\omega)^2+1}.$$

Если обе части приведенного неравенства умножить на $(T\omega)^2+1$ и положить $\tau = 1/k_2$ и $\tau_3 = 1/k_1$, то получим

$$\frac{k_1}{k_2} + \frac{\tau}{\beta}\left[(T\omega)^2+1\right] > 1.$$

Это неравенство будет выполнено при $-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$, если оно будет выполнено при $\omega = 0$. А при $\omega = 0$ последнее неравенство будет выполнено, и соответственно рассматриваемая система будет асимптотически устойчива в целом, если $\dfrac{k_1}{k_2} + \dfrac{1}{\beta k_2} > 1$.

Задачи

5.7. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующих систем

$$\text{а) } \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y + u = 0; \quad \text{б) } \ddot{y} + 3\dot{y} + 3y + 2u = 0$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$F(y,u) = y^2 - u^2 \geqslant 0.$$

5.8. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующих систем

$$\text{а) } \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y + 2u = 0; \quad \text{б) } \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y + 3u = 0$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$F(y,u) = y^2 - u^2 \geqslant 0.$$

5.9. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующих систем

$$\text{а) } \dot{y} + 2y + u_1 + 3u_2; \quad \text{б) } \dot{y} + 3y + 2u_1 + 4u_2$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$F(y,u_1,u_2) = yu_2 - u_1^2 = 0.$$

5.10. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующих систем

$$\text{а) } \dot{y} + 2y + u_1 + 3u_2; \quad \text{б) } \dot{y} + 3y + 2u_1 + 4u_2$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$F(y,u_1,u_2) = yu_2 - u_1^2 = 0.$$

5.11. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующей системы

$$\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3u_1 + u_2, \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = u_1 - 3u_2 \end{cases}$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$\begin{aligned} F_1(x_1,u_1) &= (x_1 - u_1)u_1 \geqslant 0, \\ F_2(x_2,u_2) &= (x_2 - u_2)u_2 \geqslant 0, \\ F_3(x,u) &= (x_1 - x_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0. \end{aligned}$$

5.12. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} 3\dot{x}_1 + x_1 = -3u_1 + 2u_2, \\ 3\dot{x}_2 + x_2 = 2u_1 - 3u_2 \end{cases}$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y,t)$, определяемых локальной связью

$$\begin{aligned} F_1(x_1,u_1) &= (x_1 - u_1)u_1 \geqslant 0, \\ F_2(x_2,u_2) &= (x_2 - u_2)u_2 \geqslant 0, \\ F_3(x,u) &= (x_1 - x_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0. \end{aligned}$$

5.13. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2x_1 = -3u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 + 2x_2 = u_1 - 3u_2 \end{cases}$$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y, t)$, определяемых локальной связью

$$F_1(x_1, u_1) = (x_1 - u_1)u_1 \geqslant 0,$$
$$F_2(x_2, u_2) = (x_2 - u_2)u_2 \geqslant 0,$$
$$F_3(x, u) = (x_1 - x_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0.$$

5.14. Показать, что положение равновесия $y(t) \equiv 0$ следующих систем

а) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y + u_1 + u_2$; б) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y + u_1 + 2u_2$;
в) $\ddot{y} + 2{,}5\dot{y} + y + 0{,}5u_1 + 0{,}5u_2$

абсолютно устойчиво в классе нелинейностей $u = f(y, t)$, определяемых локальной связью

$$F(y, u_1, u_2) = y^2 - u_1^2 - u_2^2 = 0.$$

5.15. Показать, что нулевое решение $y(t) = 0$ следующих уравнений:

а) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y + \sin t = 0$; б) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y + 2\sin t = 0$;
в) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y + 0{,}5\cos t = 0$; г) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y + 2\cos t = 0$;
д) $\dot{y} + 2y + y^2 + 3y^3$; е) $\dot{y} + 4y + 2y^2 + 3y^3$;
ж) $\dot{y} + 2y + y^3 + 3y^5$; з) $\dot{y} + 2y + 4y^3 + 2y^5$;
и) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y + 2y\cos t + y\sin t = 0$;
к) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y + y\cos t + 2y\sin t = 0$;
л) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y + y(\cos t + 0{,}5\sin t) = 0$

асимптотически устойчиво в целом.

5.16. Показать, что положение равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$ следующих систем

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = -2x_1\sin^2 t + x_2\sin^2 t, \\ \dot{x}_2 + x_2 = x_1\sin^2 t - 2x_2\sin^2 t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = -2x_1\cos^2 t + x_2\cos^2 t, \\ \dot{x}_2 + x_2 = x_1\cos^2 t - 2x_2\cos^2 t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = -2x_1(1 - e^{-t}) + x_2(1 - e^{-t}), \\ \dot{x}_2 + x_2 = x_1(1 - e^{-t}) - 2x_2(1 - e^{-t}); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3x_1\sin^2 t + x_2\sin^2 t, \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1\sin^2 t - 3x_2\sin^2 t; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3x_1\cos^2 t + 2x_2\cos^2 t, \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = 2x_1\cos^2 t - 3x_2\cos^2 t; \end{cases}$

е) $$\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3x_1(1 - e^{-t}) + x_2(1 - e^{-t}), \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1(1 - e^{-t}) - 3x_2(1 - e^{-t}); \end{cases}$$

ж) $$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = -2x_1(1 - e^{-2t}) + x_2(1 - e^{-2t}), \\ \dot{x}_2 + x_2 = x_1(1 - e^{-2t}) - 2x_2(1 - e^{-2t}); \end{cases}$$

з) $$\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3x_1 \sin^2 3t + x_2 \sin^2 3t, \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 \sin^2 3t - 3x_2 \sin^2 3t; \end{cases}$$

и) $$\begin{cases} 3\dot{x}_1 + x_1 = -2x_1 \sin^2 2t + x_2 \sin^2 2t, \\ 3\dot{x}_2 + x_2 = x_1 \sin^2 2t - 2x_2 \sin^2 2t; \end{cases}$$

к) $$\begin{cases} 3\dot{x}_1 + x_1 = -4x_1 \cos^2 5t + 2x_2 \cos^2 5t, \\ 3\dot{x}_2 + x_2 = 2x_1 \cos^2 5t - 4x_2 \cos^2 5t \end{cases}$$

асимптотически устойчиво в целом.

Ответы

Ответ: **5.1.** а) будет; б) будет; в) будет; г) не будет; д) не будет; е) будет; ж) не будет; з) не будет; и) будет; к) не будет. **5.2.** а) будет; б) будет; в) будет; г) будет; д) будет; е) будет; ж) не будет; з) не будет; и) будет; к) будет.

Глава 6

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ — гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия: $\mathbf{f}(0, 0) = 0$. Здесь $\mathbf{x}$ — вектор состояния, u — управление.

Напомним, что функция называется гладкой в некоторой области, если она сама и ее производная по всем своим аргументам являются непрерывными в этой области.

Самым распространенным методом анализа и синтеза систем в рассматриваемом случае является «обычная» линеаризация — линеаризация, основанная на разложении нелинейной функции в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных членов. Обычная линеаризация заменяет исходную нелинейную модель *приближенной* линейной моделью, и она обладает рядом недостатков. Эти недостатки состоят в следующем.

1) Устойчивость и требуемое качество системы управления, синтезированной на основе обычной линейной модели, гарантируется лишь в малой окрестности заданного режима. При этом размеры этой окрестности не известны. При больших отклонениях требования к качеству системы могут не выполнены. Более того, система может быть неустойчива.

2) Если заданный режим является функцией времени, то линеаризованная модель становится нестационарной, и анализ и синтез систем не намного упрощается.

3) Способы синтеза линейных систем управления, основанные на обычной линеаризации, позволяют получать только линейные законы управления. В то же время известно, что нелинейные законы управления во многих случаях обеспечивают лучшее качество управления.

6.1. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии

При последующем рассмотрении вопросов линеаризации обратной связью потребуются следующие понятия: производные и скобки Ли, диффеоморфизмы, инвалютивность, интегрируемость системы линейно независимых векторов. В этом параграфе будут рассмотрены необходимые сведения, связанные с этими и некоторыми другими понятиями.

Производные и скобки Ли. Пусть $\alpha(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция векторного переменного ($\alpha\colon R^n \to R$) и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — гладкая векторная функция ($\mathbf{f}\colon R^n \to R^n$).

Ниже используется оператор $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}\,\cdots\,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Он равносилен дифференциальному оператору $\dfrac{d}{d\mathbf{x}}$ — оператору дифференцирования по векторному аргументу. При применении этого оператора к скалярной функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ получим вектор-строку

$$\nabla\alpha = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\,\cdots\,\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}\right).$$

А при применении этого оператора к векторной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ получим матрицу

$$\nabla\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Определение 6.1. *Производной Ли скалярной функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ по векторной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется скалярная функция (обозначается $L_f\alpha$), определяемая соотношением*

$$L_f\alpha = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}}\mathbf{f} = \nabla\alpha\,\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}f_i.$$

Старшие производные Ли рекурсивно определяются следующим образом:

$$L_f^k\alpha = L_f(L_f^{k-1}\alpha) = \nabla(L_f^{k-1}\alpha)\mathbf{f}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Нулевая производная Ли функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ *по* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *есть сама функция* $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$:

$$L_f^0\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}).$$

Высшие производные по другой векторной функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *определяются аналогично*:

$$L_g L_f \alpha = L_g(L_f\alpha) = \nabla(L_f\alpha)\mathbf{g}.$$

Пусть задана система уравнениями состояния и выхода

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad y = \alpha(\mathbf{x}).$$

Первая и высшие производные по времени выходной переменной y равны соответственно первой и высшим производным Ли функции $\alpha(\mathbf{x})$ по функции $f(\mathbf{x})$:

$$\dot{y} = \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f\alpha(\mathbf{x}),$$
$$\ddot{y} = \frac{\partial\dot{y}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}[L_f\alpha(\mathbf{x})]\mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f^2\alpha(\mathbf{x}), \quad \ldots .$$

Точно так же, если задана скалярная функция $V(\mathbf{x})$, то ее производная в силу уравнения системы будет равна производной Ли этой функции по $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f V.$$

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ — две гладкие векторные функции: $\mathbf{f}\colon R^n \to R^n$, $\mathbf{g}\colon R^n \to R^n$. Производная Ли от векторной функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ по векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ является векторной функцией и определяется аналогично производной Ли от скалярной функции: $L_f\mathbf{g} = \dfrac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}$.

Скобки Ли функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, к определению которых сейчас переходим, обозначают $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ или $ad_f\mathbf{g}$. Второе обозначение особенно удобно при записи скобок Ли второго и более высокого порядка.

Определение 6.2. *Векторная функция, определяемая соотношением*

$$ad_f\mathbf{g} \equiv [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla\mathbf{g}\,\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}\,\mathbf{g} = L_f\mathbf{g} - L_g\mathbf{f},$$

называется скобками Ли функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *и* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. *Скобки Ли высокого порядка рекурсивно определяются следующим образом*:

$$ad_f^k\mathbf{g} = ad_f(ad_f^{k-1}\mathbf{g}) = [\mathbf{f}, ad_f^{k-1}\mathbf{g}], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Скобки Ли нулевого порядка функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *и* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *равны* $\mathbf{g}(x)$: $ad_f^0\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Пример 6.1. Пусть функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определить скобки Ли первого и второго порядков этих функций.

Решение. Производные функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$ равны

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому скобки Ли первого порядка имеют вид

$$ad_f\mathbf{g} = \nabla\mathbf{g}\,\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Производные скобок Ли по $\mathbf{x}$ равны

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}(ad_f\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и соответственно для скобок Ли второго порядка имеем

$$ad_f^2 g = ad_f(ad_f g) = \nabla(ad_f g)f - \nabla f ad_f g =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Диффеоморфизмы и преобразование нелинейных систем.

Определение 6.3. *Гладкая векторная функция $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})(\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \in R^n)$, определенная в области Ω, называется диффеоморфизмом в области Ω, если существует однозначная обратная функция $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})$, и эта функция является гладкой. Если функции $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})$ определены и являются гладкими на всем пространстве R^n, то $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ называют глобальным диффеоморфизмом.*

Диффеоморфизм может использоваться для преобразования нелинейных систем.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$

и $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ — диффеоморфизм. Так как

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u],$$

то, учитывая, что существует обратное преобразование $\mathbf{\Phi}^{-1}(z)$, получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z})u,$$

где $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \dfrac{\partial\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\Big|_{x=\mathbf{\Phi}^{-1}(z)}$, $\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}) = \dfrac{\partial\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\Big|_{x=\mathbf{\Phi}^{-1}(z)}$.

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x})\ \varphi_2(\mathbf{x})\ \ldots\ \varphi_n(\mathbf{x}))^T$ *гладкая функция, определенная в области* $\Omega \subset R^n$. *Если якобиан* $\dfrac{d\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \left[\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right]$ *является неособым, т.е. не обращается в нуль в точке* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, *то функция* $\Phi(\mathbf{x})$ *является диффеоморфизмом в некоторой окрестности* $O(\mathbf{x}^0)$ *этой точки* $(O(\mathbf{x}^0) \subset \Omega)$.

Пример 6.2. Определить, является ли векторная функция $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ диффеоморфизмом.

Решение. Якобиан имеет вид $\dfrac{d\Phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, и он отличен от нуля при всех $\mathbf{x} \in R^2$. Следовательно, данная функция является глобальным диффеоморфизмом.

Определение 6.4. *Множество линейно независимых векторных функций* $\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_r(\mathbf{x})\}$ *называется инвалютивным, если скобки Ли любых двух функций* $f_i(\mathbf{x})$ *и* $f_j(\mathbf{x})$ *из этого множества (не обязательно разных) равны линейной комбинации функций из этого множества, т.е. существуют функции* $\alpha_{ijk}(\mathbf{x})$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$*такие, что*

$$[f_i(\mathbf{x}), f_j(\mathbf{x})] = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ijk}(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}).$$

Множество линейно независимых постоянных векторов всегда инвалютивно. Действительно, скобки Ли двух постоянных векторов являются нулевыми и они тривиально представляются комбинациями исходных векторов.

Множество, состоящее из одного вектора, является инвалютивным, так как скобки Ли двух одинаковых функций равны нулю: $[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})] = (\nabla\mathbf{f})\mathbf{f} - (\nabla\mathbf{f})\mathbf{f} = 0$.

Определение 6.5. *Множество* r $(r < n)$ *линейно независимых* n*-мерных векторных функций* $\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \ldots f_r(\mathbf{x})\}$ *называется интегрируемым, если существует* $n - r$ *независимых скалярных функций* $\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_{n-r}(\mathbf{x})$, *удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений*

$$\nabla\alpha_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - r;\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Скалярные функции $\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_{n-r}(\mathbf{x})$ независимы в некоторой области D (т.е. при $\mathbf{x} \in D$), если векторы $\nabla\alpha_i(\mathbf{x})$, $(i = 1, 2, \ldots, n - r)$ линейно независимы в этой области. Заметим, при $r = n - 1$ независимость одного единственного вектора $\nabla\alpha_1(\mathbf{x})$означает неравенство этого вектора нулю: $\nabla\alpha_1(\mathbf{x}) \neq 0$.

Теорема 6.2. (Frobenius [29]). *Множество r $(r < n)$ линейно независимых n-мерных векторных функций $\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \dots f_r(\mathbf{x})\}$ интегрируемо в том и только в том случае, если оно инвалютивно.*

Пример 6.3. Задана система дифференциальных уравнений

$$2x_3\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = 0,$$

$$-x_1\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} - 2x_2\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\alpha}{\partial x_3} = 0,$$

где $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ — неизвестная функция. Требуется определить разрешимость этой системы уравнений.

Решение. Эту систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}_1 = 0, \quad \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}_2 = 0,$$

где

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = (2x_3 \ \ -1 \ 0)^T, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = (-x_1 \ \ -2x_2 \ x_3)^T.$$

Чтобы ответить на вопрос, имеет ли данная система уравнений решение, согласно теоремы Фробениуса достаточно проверить инвалютивность множества $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Скобки Ли двух функций этого множества имеют вид

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{d\mathbf{f}_2}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}_1 - \frac{d\mathbf{f}_1}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как легко проверить, скобки Ли каждой пары функций из множества $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ могут представлены как линейные комбинации функций этого множества следующим образом:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = -2\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2,$$
$$[\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1] = -[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = 2\mathbf{f}_1 - 0\mathbf{f}_2,$$
$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1] = [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2] = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2.$$

Таким образом, множество $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ инвалютивно, и следовательно по теореме Фробениуса рассматриваемая система интегрируема.

Задачи

6.1. Определить производные Ли 2-го порядка функции $\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2$ по следующим векторным функциям:

а) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; в) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

г) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}$; д) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$; е) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

ж) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$; з) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$; и) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$;

к) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$.

6.2. Определить скобки Ли следующих векторных функций:

а) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$; г) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

д) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$; е) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; з) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

и) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; к) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.3. Определить скобки Ли 2-го порядка векторных функций, приведенных в задании 6.2.

6.4. Показать, что множество из двух векторов $\{\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ ad_f \mathbf{g}(\mathbf{x})\}$ инвалютивно при следующих функциях $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\text{а) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^2 \\ -x_1^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 + x_3^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3^2 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2^3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3^2 \\ x_2 \\ -x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 - x_2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{з) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ -x_1^2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{и) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_3^2 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{к) } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 + x_2^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Линеаризация обратной связью по состоянию

Функция $u = \Phi(\mathbf{x}, v)$, где u, v — входы (управления), $\mathbf{x}$ — вектор состояния, называется *преобразованием обратной связью*, если она разрешима относительно v. Переход от нелинейной системы к линейной путем преобразования, включающего преобразование обратной связью, называется *линеаризацией обратной связью*.

Лннеаризация обратной связью (ЛОС) является не приближенным, а эквивалентным преобразованием: в результате ЛОС получается система, эквивалентная исходной системе. При ЛОС управление u заменяется новым управлением v. Функция преобразования, кроме нового управления, включает вектор состояния (в частном случае толькс выходную переменную). Поэтому при этом преобразовании объект охватывается обратной связью. Отсюда и название, которое получило это преобразование, — преобразование обратной связью.

Пример 6.4. Задан объект, который описывается уравнением

$$\dot{x} = ax^3 + u, \quad x, u \in R, \quad a > 0.$$

Требуется определить закон управления, при котором замкнутая система была бы асимптотически устойчива в целом.

Решение. Синтез замкнутой системы, основанный на обычной линеаризации, не обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом. Действительно, на основе обычной линейной модели $\dot{x} = u$ получаем закон управления $u = -kx$ $(k > 0)$, при котором линейная модель асимптотически устойчива в целом. Однако при таком законе управления исходная нелинейная система $\dot{x} = \alpha x^3 - kx$ асимптотически устойчива только на интервале $|x| < \sqrt{k/a}$.

Воспользуемся линеаризацией обратной связью

$$u = -ax^3 + v.$$

При этом преобразовании уравнение объекта примет вид $\dot{x} = v$. При таком уравнении единственным разумным линейным законом управления является $v = -kx$ $(k > 0)$. Подставив это выражение для управления в уравнение преобразования, получим

$$u = -ax^3 - kx.$$

Уравнение замкнутой системы имеет вид $\dot{x} = -kx$. Замкнутая система асимптотически устойчива в целом.

Рассмотрим еще один простой пример.

Пример 6.5. Задан объект, который описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + cx_1^3, \quad \dot{x}_2 = u.$$

Требуется определить закон управления, при котором замкнутая система была асимптотически устойчива в целом.

Решение. Воспользуемся преобразованием обратной связью

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + cx_1^3, \quad u = -3cx_1^2(x_2 + cx_1^3) + v.$$

В новых переменных уравнения объекта примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v.$$

Приняв закон управления

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2, \quad k_1, k_2 > 0,$$

для замкнутой системы получим

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2.$$

Замкнутая система асимптотически устойчива в целом. В исходных переменных уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + cx_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = -3cx_1^2 x_2 - 3c^2 x_1^5 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_2 c x_1^3.$$

В примере 6.5 преобразование обратной связью включает, помимо преобразования управления, преобразование фазовых координат. При этом, если в примере 6.4 более или менее понятно, как выбрано преобразование, то в примере 6.5 выбор преобразования не очень понятен.

Кроме того, в общем случае возникает вопрос, существует ли преобразование обратной связью, обеспечивающее линеаризацию той или иной системы. Таким образом, в теоретическом плане при рассмотрении линеаризации обратной связью возникают два основных вопроса:

1) для каких систем линеаризация обратной связью возможна;
2) как найти соответствующее преобразование.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \tag{6.2}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ — гладкие векторные функции. Начало координат при нулевом управлении является положением равновесия: $\mathbf{f}(0) = 0$.

Определение 6.6. *Система* (6.2) *называется линеаризуемой обратной связью по состоянию, если существует диффеоморфизм* $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ *и преобразование обратной связью*

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$$

такие, что уравнение (6.2) *принимает вид*

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}v,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная линеаризованная система имеет специальный вид — форму управления Бруновского (Brunovsky controller form) [29]. *Однако это не нарушает общности, так как любая вполне управляемая линейная стационарная система может быть преобразована к такому виду.*

Составим для системы (6.2) матрицу

$$У = \left[\mathbf{g}\ ad_f\mathbf{g}\ \cdots\ ad_f^{n-1}\mathbf{g}\right]. \tag{6.3}$$

В случае линейной стационарной системы, когда

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

где A и $\mathbf{b}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times 1)$-матрицы, для скобок Ли имеем

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}, \quad ad_f\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\mathbf{g} = -\frac{dA\mathbf{x}}{d\mathbf{x}}\mathbf{b} = -A\mathbf{b},$$

$$ad_f^2\mathbf{g} = ad_f(ad_f\mathbf{g}) = -\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\mathbf{g} = -\frac{dA\mathbf{x}}{d\mathbf{x}}ad_f\mathbf{g} = A^2\mathbf{b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ad_f^{n-1}\mathbf{g} = ad_f(ad_f^{n-2}\mathbf{g}) = (-1)^{n-2}\frac{dA\mathbf{x}}{d\mathbf{x}}ad_f^{n-2}\mathbf{g} = (-1)^{n-1}A^{n-1}\mathbf{b}.$$

Матрица (6.3) принимает вид

$$У = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & -A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & (-1)^{n-1}A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Если отбросить перед четными столбцами матрицы У знак минус, который не влияет на ее ранг, то получим матрицу управляемости для пары $(A, \mathbf{b})$. Поэтому матрицу (6.3) называют *матрицей управляемости* для системы (6.1).

Теорема 6.3. (*Теорема о линеаризации обратной связью по состоянию*). *Нелинейная система* (6.2) *линеаризуема обратной связью по состоянию в некоторой окрестности* Ω *начала координат в том и только в том случае, если в этой окрестности ее матрица управляемости имеет ранг* n, *т.е.* $\det У \neq 0$ *всюду на* Ω (*в начале координат* $\det У$ *может обратиться в нуль*) *и множество* $\left\{\mathbf{g}, ad_f\mathbf{g}, \ldots, ad_f^{n-2}\mathbf{g}\right\}$, *составленное из* $n-1$ *столбцов матрицы управляемости* У, *инвалютивно.*

Правило линеаризации обратной связью (ЛОС) по состоянию можно сформулировать следующим образом::

1) Для заданной системы определить матрицу управляемости $У = \left\{\mathbf{g}\ ad_f\mathbf{g} \cdots ad_f^{n-1}\mathbf{g}\right\}$ и вычислить $\det У$.

2) Если $\det У \neq 0$, то проверить инвалютивность множества векторов, составленного из первых $n-1$ столбца матрицы управляемости, т. е. множества $\left\{\mathbf{g}, ad_f\mathbf{g}, \ldots, ad_f^{n-2}\mathbf{g}\right\}$.

3) Если множество $\left\{\mathbf{g}, ad_f\mathbf{g}, \ldots, ad_f^{n-2}\mathbf{g}\right\}$ инвалютивно, то определить функцию $T_1(\mathbf{x})$ из соотношений

$$\nabla T_1 ad_f^i\mathbf{g} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2; \quad \nabla T_1 ad_f^{n-1}\mathbf{g} \neq 0. \tag{6.4}$$

4) Определить преобразование состояния $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \left[T_1(\mathbf{x})\ T_2(\mathbf{x}) \cdots \cdots T_n(\mathbf{x})\right]^T$, где $T_2 = L_fT_1$, $T_3 = L_f^2T_1$, $\cdots$, $T_n = L_f^{n-1}T_1$, и преобразование управления

$$u = \frac{1}{L_gL_f^{n-1}T_1}(-L_f^nT_1 + v). \tag{6.5}$$

Пример 6.6. Задана система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3^3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3.$$

Требуется произвести линеаризацию обратиой связью по состоянию.

Решение. В данном случае $n = 3$ и функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(x_2\ x_3^3\ x_1 + cx_3^3\right)^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0\ 1\ 0)^T.$$

1) Найдем матрицу управляемости $У = (\mathbf{g}\ ad_f\mathbf{g}\ ad_f^2\mathbf{g})$.

$$ad_f\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\mathbf{g} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_3^2 \\ 1 & 0 & 3cx_3^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_f^2\mathbf{g} = ad_f(ad_f\mathbf{g}) = \frac{d(ad_f\mathbf{g})}{d\mathbf{x}}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}ad_f\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_3^2 \\ 1 & 0 & 3cx_3^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости имеет вид $У = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, и ее детерминант отличен от нуля: $\det У = 1$.

2) Первые два столбца матрицы управляемости являются постоянными, и поэтому образуют инвалютивное множество.

3) Соотношения (6.4) принимают вид

$$\nabla T_1\mathbf{g} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\nabla T_1 ad_f\mathbf{g} = -\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\nabla T_1 ad_f^2\mathbf{g} = -\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial T_1}{\partial x_3} \neq 0.$$

Отсюда следует, что T_1 зависит только от x_3, и в качестве решения этих соотношений примем $T_1 = x_3$.

3) Найдем остальные два компонента преобразования состояния T_2 и T_3:

$$T_2 = L_f T_1 = \nabla T_1 f = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} = x_1 + cx_3^3,$$

$$T_3 = L_f^2 T_1 = L_f T_2 = (1\ 0\ 3cx_3^2)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3^3).$$

Итак, преобразование состояния имеет вид

$$z_1 = T_1(x) = x_3, \quad z_2 = T_2 = x_1 + cx_3^3, \quad z_3 = T_3 = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3^3).$$

Для определения преобразования управления нужно определить $L_g L_f^2 T_1$ и $L_f^3 T_1$:

$$L_g L_f^2 T_1 = L_g T_3 = \nabla T_3 \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 3cx_3^2 & 1 & 6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$L_f^3 T_1 = L_f(L_f^2 T_1) = L_f T_3 = \nabla T_3 \mathbf{f} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3cx_3^2 & 1 & 6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3cx_3^2x_2 + x_3^3 + (6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4)(x_1 + cx_3^3).$$

Подставив эти выражения в (6.5), получим

$$u = -[3cx_3^2x_2 + x_3^3 + (6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4)(x_1 + cx_3^3)] + v.$$

В новых переменных уравнения системы примут вид

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = z_3, \quad \dot z_3 = v.$$

Задачи

6.5. Определить ранг матрицы управляемости следующих управляемых систем:

а) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = x_3, \\ \dot x_3 = -x_1^2 + u; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = x_2 - x_3, \\ \dot x_3 = -x_2^2 + u; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = -x_1 + u, \\ \dot x_3 = -x_3^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + x_3^2, \\ \dot x_2 = u, \\ \dot x_3 = -x_2 + x_3^3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + x_3^2, \\ \dot x_2 = u, \\ \dot x_3 = -x_1^2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + u, \\ \dot x_2 = -x_1 - x_2, \\ \dot x_3 = -x_2^3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = x_2x_3, \\ \dot x_3 = -x_1 - x_2 + u; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = x_3^3, \\ \dot x_3 = -x_1^2 + u; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \dot x_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot x_2 = x_3^3, \\ \dot x_3 = -x_1 - x_2 + u; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 = x_1^2x_3, \\ \dot x_3 = x_1x_2 + x_3u. \end{cases}$

6.6. Заданы управляемые системы

а) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + x_2^3, \\ \dot x_2 = -x_1 - x_2 + x_1^3 + u; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + x_1^3 + u, \\ \dot x_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + u;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3 + u,\\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2,\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^3 + u;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_2^5,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_1 + u;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_2^3,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^3,\\ \dot{x}_3 = -x_2 + u;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3^3,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^3 + u,\\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_1;\end{cases}$

и) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + e^{-x_1} + x_1^2,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 + x_2^3,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_2 + u;\end{cases}$ к) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3^3,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^3 + u,\\ \dot{x}_3 = x_2 + x_1 + x_3;\end{cases}$

л) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_2^3,\\ \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + x_1^3,\\ \dot{x}_4 = -x_4 - x_3 + u;\end{cases}$ м) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^5,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_2^5,\\ \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + x_1x_2,\\ \dot{x}_4 = -x_4 - x_3 + u.\end{cases}$

Показать, что они линеаризуемы обратной связью по состоянию.

6.7. Заданы управляемые системы

а) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^3 + u;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_1^3 + u,\\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^3 + x_2^3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 + x_1x_2,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_1^2 + u;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_3^2 - x_1x_2 + u;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_1x_2,\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + x_1^3,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_1 + u;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3 + x_2^2x_3 + u,\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3^3,\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_2 + x_2x_3;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 + x_2^2x_3 + u,\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2^3 + x_3^5,\\ \dot{x}_3 = x_2 + 2x_3 + x_2^2;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1 + x_3 + x_1^3,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3x_3 + x_2^5 + u,\\ \dot{x}_3 = -2x_3 - x_1 + x_1x_3;\end{cases}$

и) $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1 + x_1x_3 + x_2x_3 + u,\\ \dot{x}_2 = x_3 + x_2^3 + x_2^5,\\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + x_2^2x_3;\end{cases}$ к) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_3 + x_3^2,\\ \dot{x}_2 = 3x_2 + x_2^5 + 2x_1x_3 + u,\\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 2x_3 + x_1^3 + x_1x_3;\end{cases}$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^3 + 2x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1x_2 + x_2^5, \\ \dot{x}_3 = x_4 + x_3^2 + 3x_1x_3 + u, \\ \dot{x}_4 = -x_4 - x_3 + x_3x_4; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_3 = x_4 + x_3x_4 + x_4^2, \\ \dot{x}_4 = 3x_3 + 4x_4 + u. \end{cases}$

Показать, что они не линеаризуемы обратной связью по состоянию.

6.8. Исследовать линеаризуемость обратной связью по состоянию следующих управляемых систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 + u; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ x_2 = 3x_1 + 2x_1x_2 + u; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + x_1x_2 + u; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_1x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 + x_2^3 + x_2^5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1x_2 + 3x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + 2x_3 - x_2x_3 + u; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_2^2x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 + x_1x_3 + u; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 3x_2 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_1^2x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_1 - x_2x_3 + u; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 + x_2^2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2^2 + x_2^3 + u; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + 3x_3 + x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 = 5x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 5x_3 + x_1^5, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + \dot{x}_3 + u. \end{cases}$

6.9. Определить преобразование линеаризации обратной связью по состоянию для следующих управляемых систем:

а) $\dot{x}_1 = x_2 + x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^3 + u;$

б) $\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3;$

в) $\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_2^2 + u;$

г) $\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2;$

д) $\dot{x}_1 = 2x_2 + x_2^3, \quad \dot{x}_2 = 3x_3 + x_1^3, \quad \dot{x}_3 = -x_2 + u;$

е) $\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = 3x_3 + x_2^5, \quad \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 + u;$

ж) $\dot{x}_1 = 3x_2 + x_2^3, \quad \dot{x}_2 = 3x_3 + 2x_1x_2, \quad \dot{x}_3 = -x_2 + u;$

з) $\dot{x}_1 = x_2 + x_3^5, \quad \dot{x}_2 = 2x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = -x_2 - x_1;$

и) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4 + x_1x_2, \quad \dot{x}_4 = u;$

к) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad \dot{x}_4 = x_3 + x_1^3.$

6.3. Линеаризация обратной связью по выходу

Пусть система описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad y = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad y \in R. \qquad (6.6)$$

Рассмотрим задачу слежения за траекторией $y_ж(t)$, которая состоит в определеиии такого закона управлеиия, при котором ошибка слежения $e(t) = y(t) - y_ж(t)$ со временем стремится к нулю : $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а остальные переменные ограничены.

Трудность решеиия данной задачи заключается в том, что переменная y не связана с управлеиием u. Однако может оказаться, что она будет легко разрешимой, если путем преобразования исходной системы удастся получить прямую и простую зависимость между выходом y и входом (управлением) u.

Определение 6.7. *Линеаризацией обратной связью по выходу называется такое преобразование нелинейной системы* (6.6), *включающее преобразование обратной связью, при котором в преобразованной системе связь между выходом y и входом u получается линейной.*

Пример 6.7. Система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3(x_1 + 1), \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 + u, \quad y = x_1.$$

Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_ж(t)$, а остальные переменные ограничены.

Решение. Продифференцируем y столько раз, сколько потребуется для получения прямой зависимости между выходом и входом:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3(x_1 + 1),$$
$$\dddot{y} = \dot{x}_3(x_1 + 1) + x_3\dot{x}_1 = x_1 x_2(x_1 + 1) + (x_1 + 1)u + x_2 x_3.$$

Из последнего соотношения на основе преобразования

$$u = \frac{1}{(x_1 + 1)}\left[-x_1 x_2(x_1 + 1) - x_2 x_3 + v\right]$$

получим $\dddot{y} = v$. Точка $x_1 = -1$ для этого преобразования является особой: оно в этой точке не определено.

Для определения требуемого закона управления воспользуемся методом обратной задачи динамики. Если потребовать, чтобы ошибка слежения $e = y - y_ж$ изменялась в соответствии с уравнением $\dddot{e} + k_1\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_3 e = 0$, то, найдя отсюда $\dddot{y} = y_ж - k_1\ddot{e} - k_2\dot{e} - k_3 e$ и подставив в преобразованное уравнение для выхода, получаем

$v = \dddot{y}_ж - k_1\ddot{e} - k_2\dot{e} - k_3 e$. Подставив это выражение в преобразование для управления, находим искомый закон управления

$$u = \frac{1}{(x_1+1)}\left[-x_1x_2(x_1+1) - x_2x_3 + \dddot{y}_ж - \right.$$
$$\left. - k_1(\ddot{y} - \ddot{y}_ж) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_ж) - k_3(y - y_ж)\right]$$

или, после подстановки выражений для выходной переменной и ее производных,

$$u = -\frac{1}{(x_1+1)}\left[(x_1+1)(x_1x_2 + k_1x_3) + x_2x_3 + k_2x_2 + k_3x_1 - \right.$$
$$\left. - \dddot{y}_ж - k_1\ddot{y}_ж - k_2\dot{y}_ж - k_3y_ж)\right].$$

В данном примере число дифференцирований для получения явной зависимости между выходом и входом равно порядку системы. Возникают дополнительные проблемы, когда это число меньше порядка системы. Рассмотрим пример.

Пример 6.8. Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + (x_2+2)x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1^3 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1^4 + u, \quad y = x_1.$$

Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_ж(t)$, а остальные переменные ограничены.

Решение. Продифференцируем y столько раз, сколько потребуется для получения прямой зависимости между выходом и входом:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + (x_2+2)x_3,$$
$$\ddot{y} = (1+x_3)\dot{x}_2 + (x_2+2)\dot{x}_3 = (1+x_3)(x_1^3+x_3) + (x_2+2)x_1^4 + (x_2+2)u,$$

или

$$\ddot{y} = (1+x_3)(x_1^3+x_3) + (x_2+2)x_1^4 + (x_2+2)u.$$

Из последнего соотношения на основе преобразования

$$u = \frac{1}{x_2+2}\left[-(1+x_3)(x_1^3+x_3) - (x_2+2)x_1^4 + v\right]$$

получим

$$\ddot{y} = v.$$

Как в предыдущем примере, воспользуемся методом обратной задачи динамики. Задав желаемый закон изменения ошибки $e = y - y_ж$ в виде

$$\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2e = 0, \tag{6.7}$$

находим

$$v = \ddot{y}_ж - k_1\dot{e} - k_2e = \ddot{y}_ж - k_1\left[x_2 + (x_2+2)x_3\right] - k_2x_1 + k_1\dot{y}_ж + k_2y_ж.$$

Подставив это выражение в преобразование для управления, получим

$$u = -\frac{1}{x_2+2}\big[(1+x_3)(x_1^3+x_3)+(x_2+2)x_1^4+ \\ + k_1\big[x_2+(x_2+2)x_3\big]+k_2x_1-\ddot{y}_{ж}-k_1\dot{y}_{ж}-k_2y_{ж}\big].$$

При таком управлении ошибка слежения описывается уравнением (6.7). В силу устойчивости этого уравнения ошибка $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Однако пока нельзя делать вывод о том, что полученный алгоритм управления решает поставленную задачу. Это связано со следующим обстоятельством.

Порядок синтезированной системы совпадает с порядком исходной системы и равен трем, так как найденный алгоритм управления не вносит дополнительный порядок. В то же время уравнение ошибки (6.7) имеет второй порядок, и оно описывает часть динамики. Для получения полного описания синтезированной системы необходимо к уравнению (6.7) добавить еще одно уравнение первого порядка, которое описывает так называемую *внутреннюю* (*скрытую*) *динамику*.

Полученный алгоритм управления применим, если внутренняя динамика устойчива. В противном случае координата, характеризующая внутреннюю динамику, и управление могут принимать недопустимо большие значения, что может сопровождаться перегревом двигателей или возникновением сильных вибраций механической части [30].

Относительный порядок. Основным методом получения прямой зависимости между выходом и входом (управлением) является повторное дифференцирование выхода, пока не получится явная зависимость выхода от входа, и последующее преобразование обратной связью. Число дифференцирования выхода, необходимое для получения явной зависимости между выходом и входом, называется *относительной степенью* или *относительным порядком*. Для вполне управляемой системы относительная степень r не превышает порядка системы n: $r \leqslant n$.

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad y = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad y \in R, \tag{6.8}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ — гладкие функции в некоторой области $\Omega \subset R^n$. Продифференцируем выход y по t:

$$\dot{y} = \frac{dh}{d\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{dh}{d\mathbf{x}}\big[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u\big] = L_f h + (L_g h)u.$$

Если $L_g h = 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$, то дифференцируем выход еще раз:

$$\ddot{y} = \frac{d}{d\mathbf{x}}(L_f h)\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\mathbf{x}}(L_f h)(\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f^2 h + (L_g L_f h)u.$$

Если $L_gL_fh = 0$, дифференцирование продолжаем, пока $L_gL_f^{r-1}h \neq 0$. Затем, применяя преобразование обратиой связью

$$u = \frac{1}{L_gL_f^{r-1}h}(-L_f^rh + v),$$

получим линейное уравнение $\overset{(r)}{y} = v$.

Как отмечалось, число r дифференцирования выхода, необходимое для появления управления u, называется относительной степенью (или относительным порядком) системы. Поэтому для системы (6.8) это понятие можно определить следующим образом.

Определение 6.8. *Одномерная система* (6.8) *имеет относительную степень r в области Ω, если для любых $\mathbf{x} \in \Omega$*

$$L_gL_f^ih(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r-2, \tag{6.9а}$$

$$L_gL_f^{r-1}h(\mathbf{x}) \neq 0. \tag{6.9б}$$

Приведенное определение согласуется с интуитивным определением, связанным с числом дифференцирования, и с определением относительной степени (или относительного порядка) лииейной системы как разности между степенями знаменателя и числителя ее передаточной функции.

Внешняя и внутренняя динамика. Если относительная степень r меньше порядка системы n $(r < n)$, линеаризация обратной связью разбивает уравнение системы на уравнеиия внешней и внутренней динамики. При этом внешняя динамика имеет порядок r и характеризуется r независимыми переменными, а внутренняя динамика имеет порядок $n - r$ и характеризуется $n - r$ независимыми переменными.

Обозначим вектор переменных внешней динамики $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, z_2, \ldots, z_r)^T$, а вектор переменных внутренней динамики $\mathbf{z}^{(2)} = (z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_n)^T$. Рассмотрим, как можно выбрать эти векторы.

Согласно теореме 6.1 для того чтобы переменные z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, связанные с исходным вектором состояния $\mathbf{x}$ соотношениями $z_i = \varphi_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, могли служить новыми переменными состояния нужно, чтобы градиенты $\nabla\varphi_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ были линейно независимы, или якобиан был отличен от нуля:

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если система (6.8) имеет относительную степень $r < n$, то она может быть преобразована к нормальной форме вида

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \ \ldots, \ \dot{z}_{r-1} = z_r, \quad \dot{z}_r = a(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) + b(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})u, \quad (6.10а)$$

$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}), \quad y = z_1. \quad (6.10б)$$

Как легко убедиться, уравнения внешней динамики примут вид (6.10а), если в качестве переменных ее состояния принять выход и его производные $y, \dot{y}, \ldots, \overset{(r-1)}{y}$:

$$\begin{gathered} z_1 = y = h(\mathbf{x}) = L_f^0 h(\mathbf{x}), \\ z_2 = \dot{y} = L_f h(\mathbf{x}), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ z_r = \overset{(r-1)}{y} = L_f^{r-1} h(\mathbf{x}). \end{gathered}$$

Градиенты этих преобразований линейно независимы.

Так как система из одного вектора g инвалютивна, то по теореме Фробениуса существуют $n-1$ независимых функций λ_k $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$L_g \lambda_k(\mathbf{x}) = 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.11)$$

Напомним, что скалярные функции λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ независимы, если их градиенты линейно независимы.

Так как функции $z_i = L_f^{i-1} h(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ удовлетворяют этому уравнению (см. (6.9а)), и их градиенты лииейно независимы, то они могут быть использованы как функции λ_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$. Другие $n - r$ функций, удовлетворяющих (6.11), примем за переменные $z_{r+1}, \ldots, z_n$.

После нахождения $(n-r)$ решений уравнения (6.11), для того чтобы использовать их в качестве переменных внутренней динамики, нужно убедиться, что их градиенты линейно независимы между собой и с градиентами остальных переменных, т.е. выполняется неравенство $\det\left(\dfrac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}}\right) = \det\left(\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) \neq 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Если полученное преобразование представить в виде $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, то оно, являясь диффеоморфизмом, преобразует систему (6.8) в нормальную форму вида (6.10) с

$$a(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = L_f^r h(\mathbf{x}) = L_f^r h[\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})], \quad (6.12а)$$

$$b(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) = L_g L_f^{r-1} h[\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})]. \quad (6.12б)$$

Пример 6.9. Система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = h(\mathbf{x}) = x_3.$$

Произвести линеаризацию обратной связью по выходу.

Решение. Так как $\dot{y} = \dot{x}_3 = x_2$, $\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$, то относительная степень $r = 2$. Поэтому в качестве первых двух новых переменных примем выходную переменную и ее производную: $z_1 = y = x_3$, $z_2 = \dot{y} = x_2$. Третью переменную найдем из уравнения

$$L_g \lambda = \nabla \lambda g = \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0.$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяет функция $\lambda = x_1$. Примем эту функцию в качестве третьей переменной: $z_3 = x_1$. Убедимся, что выбранные переменные являются независимыми:

$$\det\left(\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Итак, найденное преобразование имеет вид $\mathbf{z} = (x_3\ x_2\ x_1)^T$, а обратное преобразование – вид $\mathbf{x} = (z_3\ z_2\ z_1)^T$.

В соответствии с формулой (6.12) имеем

$$a(\mathbf{z}) = L_f^2 h = L_f(L_f h) = L_f x_2 = (0\ 1\ 0) f = x_1 x_2 = z_3 z_2,$$
$$b(\mathbf{z}) = L_g L_f h = \nabla x_2 g = (0\ 1\ 0) g = 1.$$

Так как $\dot{z}_3 = \dot{x}_1 = -x_1^2 = -z_3^2$, уравнение в новых переменных в нормальной форме принимает вид (см. (6.10))

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3 z_2 + u, \quad \dot{z}_3 = -z_3^2, \quad y = z_1.$$

Используя преобразование обратной связью $u = -z_3 z_2 + v$, получим

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v, \quad \dot{z}_3 = -z_3^2.$$

Задачи

6.10. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_2 x_3, \quad u = \frac{1}{x_2}\left[-x_2 x_3^2 - x_2(x_2 + x_3) + v\right].$$

6.11. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + x_2^2, \quad \dot{x}_3 = -x_1 x_2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3 + x_2^2, \quad u = x_1 x_2 - 2x_2(x_3 + x_2^2) + v.$$

6.12. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2^2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1 x_3, \quad u = \frac{1}{x_1}[-x_2 x_3 - x_1(x_1 + x_2^2) + v].$$

6.13. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 + x_3 u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1^2 x_3, \quad u = \frac{1}{x_1^2 x_3}(-2x_1 x_2 x_3 - x_1^3 x_2 + v).$$

6.14. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3(x_1 + x_2), \quad \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3(x_1 + x_2),$$
$$u = \frac{1}{x_1 + x_2}\left[(x_1 + x_2)^2 - x_2 x_3 - x_3^2(x_1 + x_2) + v\right].$$

6.15. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2(x_3 + 1), \quad \dot{x}_3 = x_2^2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_2(x_3 + 1), \quad u = \frac{1}{x_2}\left[-x_2^3 - x_2(x_1 + 1)^2 + v\right].$$

6.16. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2(x_3 + 1), \quad \dot{x}_3 = x_1^2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1^2(x_3 + 1), \quad u = \frac{1}{x_1^2}\left[-2x_1x_2(x_3 + 1) - x_1^4 + v\right].$$

6.17. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_1^2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = (x_1 + x_2)x_3,$$
$$u = \frac{1}{x_1 + x_2}\left[-x_2x_3 - (x_1 + x_2)x_3^2 + (x_1 + x_2)x_1^2 + v\right].$$

6.18. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2)x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_2^2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = (x_1^2 + x_2)x_3,$$
$$u = \frac{1}{x_1^2 + x_2}\left[-2x_1x_2x_3 - (x_1^2 + x_2)x_3^2 + (x_1^2 + x_2)x_2^2 + v\right].$$

6.19. Показать, что преобразование линеаризации обратной связью по выходу управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (x_1 + x_2^2)x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + u, \quad y = x_1$$

имеет вид

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = (x_1 + x_2^2)x_3,$$
$$u = \frac{1}{x_1 + x_2^2}\left[-x_2x_3 - 2x_2(x_1 + x_2^2)x_3^2 + (x_1 + x_2^2)(x_1 + x_2) + v\right].$$

6.4. Нуль-динамика и синтез алгоритмов управления

Линеаризация обратной связью по выходу разбивает уравнения нелинейной системы на уравнения внешией и виутренней динамики. При этом внешняя диiамика описывается дифференциальными уравнениями, содержащими управление v, линейно связанное с выходом. Поэтому легко синтезировать управление v так, чтобы y изменялся нужным образом. Однако синтезированный таким образом закон управления представляет интерес, если внутренняя динамика будет устойчива и соответственно ее координаты ограничены.

Внутренняя динамика описывается последними $n - r$ уравнениями в нормальной форме (6.10б): $\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$. В общем случае эти уравнения зависят от внешнего состояния $\mathbf{z}^{(1)}$. Однако, когда управление таково, что выход тождественно равен нулю: $y \equiv 0$, внутренняя динамика не зависит от переменных внешнего состояния.

Определение 6.9. *Нуль-динамикой нелинейной системы называют ее динамику при условии, что выход тождественно равен нулю* ($y \equiv 0$).

Так как при $y \equiv 0$ все производные по времени выхода равны нулю, уравнение нуль-динамики в нормальной форме (6.10) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = 0, \quad \dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(0, \mathbf{z}^{(2)}).$$

Управление, требуемое для поддержания $\mathbf{z}^{(1)} = 0$, получается из соотношения

$$\dot{z}_r = a(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) + b(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})u = 0$$

и имеет вид $u = -\dfrac{a(0, \mathbf{z}^{(2)})}{b(0, \mathbf{z}^{(2)})}$.

Рассмотрение нуль-динамики связано с тем, что в общем случае нуль-динамика описывается более простыми уравнениями, чем внутренняя динамика, и в то же время исследование нуль-динамики позволяет судить об устойчивости внутренней динамики.

В случае стабилизации локальная асимптотическая устойчивость нуль-динамики гарантирует асимптотическую устойчивость внутренней динамики. Для задачи слежения локальная (неглобальная) экспоненциальная устойчивость нуль-динамики гарантирует устойчивость внутренней динамики, если желаемая траектория и ее производная до $(r-1)$-го порядка принимает малые значения.

Нуль-динамика является внутренним свойством нелинейной системы, и ее устойчивость не зависит от выбора закона управления $v = v(\mathbf{z}^{(1)}, y_ж)$ и желаемой траектории.

Если относительная степень нелинейной системы равна ее порядку, то линеаризация обратной связью по выходу полностью линеаризует систему, и нелинейная задача синтеза сводится к линейной. Если же относительная степень меньше порядка системы, то линеаризация обратной связью по выходу только частично линеаризует систему, и пригодность синтезированного на основе линейной модели закона управления зависит от устойчивости внутренней динамики. Изучение внутренней динамики может быть упрощена, если его заменить изучением нуль-динамики.

Задачи

6.20. Определить устойчивость нуль-динамики следующих управляемых систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + u; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + u; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + u; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_3^2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - x_3 + u; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_3^2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 + u; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_3^2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + u; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_3^2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + x_3 + u; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + u; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + 2x_3 + u; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 4x_3 + u. \end{cases}$

6.21. Определить устойчивость нуль-динамики следующих управляемых систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2, \\ \dot{x}_4 = -x_2 - x_4 + u; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2, \\ \dot{x}_4 = -x_1 - x_3 + u; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2 + u, \\ \dot{x}_4 = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2 + u, \\ \dot{x}_4 = -2x_2 - x_3 + 2x_4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2 + u, \\ \dot{x}_4 = -2x_2 - x_4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4^2 + u, \\ \dot{x}_4 = x_2 - x_3 - 2x_4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_2 - 2x_3 - x_4; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_1 - 2x_3 + x_4; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_3 - 2x_4; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_1 + x_3 - 2x_4. \end{cases}$

Ответы

6.1. а) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + 2$; б) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = 4x_2^2$; в) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2^2$; г) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 2$; д) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = 6x_2^4$; е) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = x_1x_2^2 + 4x_2^2$; ж) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2^2$; з) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 4x_2^2$; и) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + 6x_2^4$; к) $L_f^2\alpha(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 6x_2^4$.

6.2. а) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; б) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; в) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; г) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}-x_1^2\\1\end{pmatrix}$; д) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}1\\-2x_2\end{pmatrix}$; е) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\-2x_2\end{pmatrix}$; ж) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; з) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}-x_2\\0\end{pmatrix}$; и) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix}$; к) $ad_f\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\2x_2\end{pmatrix}$.

6.3. а) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; б) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; в) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; г) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; д) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\2x_2^2\end{pmatrix}$; е) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\2x_2^2\end{pmatrix}$; ж) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; з) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}-x_2 + x_2^2\\0\end{pmatrix}$; и) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\x_1 - x_1^2\end{pmatrix}$; к) $ad_f^2\mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\2x_2^2 - 4x_2^3\end{pmatrix}$.

6.5. а) $\operatorname{rang} У = 3$; б) $\operatorname{rang} У = 3$; в) $\operatorname{rang} У = 2$; г) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_3 \neq 0$ и $\operatorname{rang} У = 2$ при $x_3 = 0$; д) $\operatorname{rang} У = 1$; е) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_2 \neq 0$ и $\operatorname{rang} У = 2$ при $x_2 = 0$; ж) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_2 \neq 0$ и $\operatorname{rang} У = 1$ при $x_2 = 0$; з) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_3 \neq 0$ и $\operatorname{rang} У = 1$ при $x_3 = 0$; и) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_3 \neq 0$ и $\operatorname{rang} У = 1$ при $x_3 = 0$; к) $\operatorname{rang} У = 3$ при $x_1x_3 \neq 0$, $\operatorname{rang} У = 0$ при $x_3 = 0$, $\operatorname{rang} У = 1$ при $x_1 = 0$ и $x_3 \neq 0$.

6.8. а) линеаризуема; б) линеаризуема; в) не линеаризуема; е) линеаризуема; ж) не линеаризуема; з) линеаризуема; и) не линеаризуема; к) линеаризуема.

6.9. а) $z_1 = x_1, \quad z_2 = x_1 + x_2^3,$

$$u = \frac{1}{3x_2}[-x_1 - x_2^3 + 3x_2^2(x_1 + x_2 - x_1^3) + v].$$

б) $z_1 = x_2, \quad z_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3,$
$u = -[x_2 - (1 - 3x_2^2)(x_1 + x_2 - x_2^3) + v];$

в) $z_1 = x_1, \quad z_2 = 2x_2 + x_1^3,$
$u = \frac{1}{2}[-3x_1^2(2x_2 + x_1^3) - 2(x_2 + x_2^2) + v];$

г) $z_1 = x_2, \quad z_2 = -x_2 + x_1x_2,$
$u = \frac{1}{x_1 - 1}[-x_2(x_1 + x_1^3) - (x_1 - 1)(x_1x_2 - x_2) + v];$

д) $z_1 = x_1, \quad z_2 = 2x_2 + x_2^3, \quad z_3 = 6x_3 + 9x_2^2x_3 + 2x_1^3 + 3x_2^2x_1^3,$
$u = \frac{1}{6 + 9x_2^2}[-(6x_1^2 + 9x_2^2x_1^2)(2x_2 + x_2^3) - (18x_2x_3 + 6x_2x_1^3)\times$
$\times(3x_3 + x_1^3) + (6 + 9x_2^2)x_2 + v];$

е) $z_1 = x_1, \quad z_2 = 2x_2 + x_1^3, \quad z_3 = 3x_1^2(2x_2 + x_1^3) + 2(3x_3 + x_2^5),$
$u = -\frac{1}{6}[(12x_1x_2 + 15x_1^4)(2x_2 + x_1^3) + (6x_1^2 + 10x_2^4)(3x_3 + x_2^5) -$
$-6(x_1 + x_3) - v];$

ж) $z_1 = x_1, \quad z_2 = 3x_2 + x_2^3, \quad z_3 = 3x_3 + 3x_2^2x_3 + 6x_1x_2 + 6x_1x_2^3,$
$u = \frac{1}{3(1 + x_2^2)}[-6(x_2 + x_2^3)(3x_2 + x_2^3) - 6(x_2x_3 + x_1 + 3x_1x_2^2)\times$
$\times(x_3 + 2x_1x_2) + 3(1 + x_2^2)x_2 + v];$

з) $z_1 = x_1 + x_3, \quad z_2 = x_3^5 - x_1, \quad z_3 = -x_2 - x_3^5 - 5x_3^4(x_1 + x_2),$
$u = \frac{1}{1 + 5x_3^4}[-5x_3^4(x_2 + x_3^5) - 2x_3(1 + 5x_3^4) + 5x_3^3(x_1 + x_2)\times$
$\times(x_3 + 4x_1 + 4x_2) - v];$

и) $z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3, \quad z_4 = x_4 + x_1x_2,$
$u = -(x_2^2 + x_1x_3) + v;$

к) $z_1 = x_2 - x_4, \quad z_2 = x_1^3, \quad z_3 = 3x_1^2x_2, \quad z_4 = 6x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3,$
$u = -\frac{1}{3x_1^2}(6x_2^3 + 18x_1x_2x_3 - v).$

6.20 а) асимптотически устойчива в целом; б) асимптотически устойчива в целом; в) асимптотически устойчива в целом; г) асимптотически устойчива в целом; д) асимптотически устойчива в целом; е) асимптотически устойчива в целом; ж) не устойчива; з) не устойчива; и) не устойчива; к) асимптотически устойчива.

6.21. а) не устойчива; б) не устойчива; в) асимптотически устойчива; г) не устойчива; д) асимптотически устойчива; е) не устойчива; ж) асимптотически устойчива; з) не устойчива; и) асимптотически устойчива; к) ие устойчива.

Глава 7

СИСТЕМЫ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

При рассмотрении систем управления большой размерности широко используется методы, сводящие исследование исходной системы к исследованию более простых моделей. Одними из таких методов являются *метод сравнения* и *метод декомпозиции*.

Метод сравнения состоит в построении и исследовании системы сравнения, которая проще исходной системы. Метод декомпозиции состоит в разбиении исходной системы на несколько подсистем и рассмотрении последних.

7.1. Декомпозиция и децентрализация

Обычно системы большой размерности состоят из нескольких подсистем, или их условно можно разбить на искусственные подсистемы. При этом основным методом исследования систем большой размерности является *метод декомпозиции* — метод, при котором исходная система разбивается на более простые естественные или искусственные подсистемы. Эти подсистемы получаются зависимыми. Далее, путем пренебрежения взаимосвязей получают независимые подсистемы. После этого каждая из подсистем анализируется отдельно и для каждой из них строится регулятор. Затем производится агрегирование — объединение подсистем в одну систему с учетом отброшенных связей — и последующее исследование.

Преобразование Луенбергера. При рассмотрении децентрализации по управлению используется преобразование Луенбергера (Luenberger). Это преобразование позволяет представить уравнения системы в таком виде, при котором каждое уравнение включает не более одной управляющей координаты.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l. \tag{7.1}$$

Заданы l (l — размерность вектора управления) целых чисел n_i ($i = 1, 2, \ldots, l$), сумма которых равна n: $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$. Преобразование

$\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ называется преобразованием Луенбергера, если матрица преобразования T имеет вид

$$T = \left[B^{(1)}\, AB^{(1)} \cdots A^{n_1-1}B^{(1)}\, B^{(2)}\, AB^{(2)} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots A^{n_2-1}B^{(2)} \cdots B^{(l)}\, AB^{(l)} \cdots A^{n_l-1}B^{(l)}\right], \quad (7.2)$$

где $B^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ — i-й столбец матрицы B. При таком преобразовании в преобразованном уравнении

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{A}\mathbf{z} + \widetilde{B}\mathbf{u}, \quad \widetilde{A} = T^{-1}AT, \quad \widetilde{B} = T^{-1}B,$$

матрица $\widetilde{B}$ имеет вид

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} & \mathbf{0}_1 & \cdots & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{b}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0}_l & \mathbf{0}_l & \cdots & \mathbf{b}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ — столбец из нулей размерности n_i.

Пример 7.1. Дана система уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1 + 2u_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 + u_2,$$
$$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 3u_1 + u_2.$$

Произвести преобразование, при котором каждое уравнение содержит не более одной управляющей координаты.

Решение. Воспользуемся преобразованием Луенбергера. В данном случае матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Примем $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$. Тогда имеем

$$AB^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T = \left[B^{(1)}\; AB^{(1)}\; B^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для матриц преобразованного уравнения получаем

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -2 & -3,5 & 2,5 \\ 1 & 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнения в новых переменных в скалярной форме принимают вид

$$\dot{z}_1 = 4z_1 + 7z_2 - 3z_3 + u_1,$$
$$\dot{z}_2 = -2z_1 - 3,5z_2 + 2,5z_3,$$
$$\dot{z}_3 = z_1 + 1,5z_2 - 0,5z_3 + u_2.$$

Децентрализация по входу. Для того чтобы можно было синтезировать локальные регуляторы для каждой подсистемы отдельно, нужно произвести децентрализацию по управлению (входу).

Если декомпозиция не произведена и система описывается уравнением (7.1), то к нему нужно применить преобразование Луенбергера (7.2), представив n в виде суммы l целых чисел $n_k (n = \sum\limits_{k=1}^{l} n_k)$. Затем произвести декомпозицию, включая в подсистему S_i только те уравнения, которые содержат компоненты локального управления этой подсистемы и, быть может, уравнения, не содержащие управление. Последние с точки зрения децентрализации могут быть включены в любую подсистему.

Если система состоит из r подсистем и задается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k\mathbf{x}^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} A_{kj}\mathbf{x}^{(j)} + B_k\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}^{(k)} \in R^{n_k}, \ \mathbf{u} \in R^l, \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

где A_k — $(n_k \times n_k)$-матрица, A_{kj} — $(n_k \times n_j)$-матрица, B_k — $(n_k \times l)$-матрица, то преобразование Луенбергера можно применить каждой подсистеме в отдельности. В этом случае, представив размерность n_k k-й подсистемы в виде суммы l целых чисел n_{ki} $(i = 1, 2, \ldots, l)$, для матрицы T_k преобразования Луенбергера $\mathbf{x}^{(k)} = T_k\mathbf{z}^{(k)}$ получаем (см. (7.2))

$$T_k = \left[B_k^{(1)}\ A_kB_k^{(1)} \ \cdots\ (A_k)^{n_{k1}-1}B_k^{(1)} \ \cdots\ B_k^{(l)}\ A_kB_k^{(l)} \ \cdots\ (A_k)^{(n_{kl}-1)}B_k^{(l)}\right],$$

где $B_k^{(i)}$ — i-й столбец матрицы B_k. После преобразования Луенбергера каждой подсистемы, нужно произвести перегруппировку уравнений так, чтобы в каждую подсистему были включены только те уравнения, которые содержат компоненты локального управления соответствующей подсистемы.

Пример 7.2. Система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^5, \quad \mathbf{u} \in R^2,$$

состоящая из двух подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1\mathbf{x}^{(1)} + A_{12}\mathbf{x}^{(2)} + B_1\mathbf{u},$$
$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_{21}\mathbf{x}^{(1)} + A_2\mathbf{x}^{(2)} + B_2\mathbf{u},$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1\ x_2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_3\ x_4\ x_5)^T$ и

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Требуется произвести децентрализацию.

Решение. Произведем преобразование Луенбергера каждой подсистемы. Так как размерность первой подсистемы совпадает с размерностью вектора управления, то $n_{11} = n_{12} = 1$ и матрица T_1 преобразования Луенбергера $\mathbf{x}^{(1)} = T_1\mathbf{z}^{(1)}$ для нее совпадает с матрицей B_1.

$$T_1 = B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Размерность второй подсистемы равна $n_2 = 3$. Положим $n_{21} = 2$ и $n_{22} = 1$. Тогда матрица T_2 преобразования Луенбергера $\mathbf{x}^{(2)} = T_2\mathbf{z}^{(2)}$ имеет вид

$$T_2 = \left[B_2^{(1)}\ A_2B_2^{(1)}\ B_2^{(2)}\right],$$

где $B_2^{(1)}$ и $B_2^{(2)}$ — первый и второй столбцы матрицы B_2. Так как

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_2B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

то

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 12 & -17 & -8 \\ -3 & 2 & 2 \\ -6 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы преобразованных уравнений

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \widetilde{A}_1\mathbf{z}^{(1)} + \widetilde{A}_{12}\mathbf{z}^{(2)} + \widetilde{B}_1\mathbf{u},$$
$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \widetilde{A}_{21}\mathbf{z}^{(1)} + \widetilde{A}_2\mathbf{z}^{(2)} + \widetilde{B}_2\mathbf{u}$$

имеют вид

$$\widetilde{A}_1 = T_1^{-1}A_1T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{12} = T_1^{-1}A_{12}T_2 = \begin{bmatrix} 12{,}5 & 32{,}25 & 13 \\ 1{,}5 & 2{,}75 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1 = T_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_2 = T_2^{-1}A_2T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5{,}78 & -3{,}44 \\ 1 & 0{,}56 & 0{,}89 \\ 6 & -0{,}22 & -2{,}5 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{21} = T_2^{-1}A_{21}T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}78 \\ 0 & 0{,}44 \\ 0 & 0{,}22 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_2 = T_2^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме уравнения в новых переменных принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -z_1 + 11z_2 + 12{,}5z_3 + 32{,}35z_4 + 13z_5 + u_1,\\
\dot{z}_2 &= -4z_2 + 1{,}5z_3 + 2,75z_4 + 2z_5 + u_2,\\
\dot{z}_3 &= z_1 - 0{,}78z_2 + 5{,}78z_4 - 3{,}44z_5 + u_1,\\
\dot{z}_4 &= 0{,}44z_2 + z_3 + 0{,}56z_4 + 0{,}89z_5,\\
\dot{z}_5 &= 0{,}22z_2 + 6z_3 - 0{,}22z_4 - 2{,}5z_5 + u_2.
\end{aligned}$$

Разобьем полученную систему на две подсистемы S_1 и S_2. В подсистему S_1 включим уравнения, содержащие управление u_1, а в подсистему S_2 — все остальные уравнения. Тогда получим

$$\begin{aligned}
S_1\colon \dot{z}_1 &= -z_1 + 11z_2 + 12{,}5z_3 + 32{,}35z_4 + 13z_5 + u_1,\\
\dot{z}_3 &= z_1 - 0{,}78z_2 + 5{,}78z_4 - 3{,}44z_5 + u_1,\\
S_2\colon \dot{z}_2 &= -4z_2 + 1{,}5z_3 + 2{,}75z_4 + 2z_5 + u_2,\\
\dot{z}_4 &= 0{,}44z_2 + z_3 + 0{,}56z_4 + 0{,}89z_5;\\
\dot{z}_5 &= 0{,}22z_2 + 6z_3 - 0{,}22z_4 - 2{,}56z_5 + u_2.
\end{aligned}$$

Для упорядочения переменных произведем еще одно преобразование:

$$z_1 = \overline{z}_1, \quad z_2 = \overline{z}_3, \quad z_3 = \overline{z}_2, \quad z_4 = \overline{z}_4, \quad z_5 = \overline{z}_5.$$

Тогда уравнения подсистем примут вид

$$\begin{aligned}
S_1\colon \dot{\overline{z}}_1 &= -\overline{z}_1 + 12{,}5\overline{z}_2 + 11\overline{z}_3 + 32{,}35\overline{z}_4 + 13\overline{z}_5 + u_1,\\
\dot{\overline{z}}_2 &= \overline{z}_1 - 0{,}78\overline{z}_3 + 5{,}78\overline{z}_4 - 3{,}44\overline{z}_5 + u_1,\\
S_2\colon \dot{\overline{z}}_3 &= 1{,}5\overline{z}_2 - 4\overline{z}_3 + 2{,}75\overline{z}_4 + 2\overline{z}_5 + u_2,\\
\dot{\overline{z}}_4 &= \overline{z}_2 + 0{,}44\overline{z}_3 + 0{,}56\overline{z}_4 + 0{,}89\overline{z}_5;\\
\dot{\overline{z}}_5 &= 6\overline{z}_2 + 0{,}22\overline{z}_3 - 0{,}22\overline{z}_4 - 2{,}56\overline{z}_5 + u_2.
\end{aligned}$$

Задачи

7.1. Определить матрицу T преобразования Луенбергера, при котором 1-е и 3-е уравнения преобразованной системы содержат управляющие координаты, для следующих систем.

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u_1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_1 + u_2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_1 + u_2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u_1 + u_2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = 3x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_1. \end{cases}$

7.2. Произвести преобразование, при котором каждое уравнение содержит по одной управляющей координате.

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u_1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2 + u_3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_1 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_1 + u_2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u_1 + u_2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_1 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2 + u_3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + u_2 + u_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_1. \end{cases}$

7.3. Произвести декомпозицию на две децентрализованные подсистемы 2-го порядка следующих систем.

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_1 + u_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_3 - x_4 + u_1 + u_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 = -x_2 - x_3 + u_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 = -x_1 - x_4 + u_1 + u_2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_4 = -x_2 - x_3 - x_4 + u_1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -2x_1 - x_4 + u_1 + u_2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_4 + u_1 + u_2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 = -3x_1 - x_3 + u_2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 = -2x_2 - x_3 + u_1 + u_2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 3x_3 + x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_4 = -x_3 + x_4 + u_1. \end{cases}$

7.2. Векторные функции Ляпунова. Устойчивость агрегированной системы

После анализа и синтеза подсистем их объединяют в одну систему с учетом отброшенных взаимосвязей. При этом возникает задача исследования устойчивости объединенной системы. При решении этой задачи используется метод векторной функции Ляпунова. Согласно этому методу на основе векторной функции Ляпунова, которая формируется из функций Ляпунова подсистем, строится система сравнения, с помощью которой исследуется устойчивость агрегированной (объединенной) системы.

Экспоненциальная устойчивость. Теорема Красовского. Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}, t), \quad X(0, t) = 0 \ \ \forall t \geqslant t_0, \quad \mathbf{x} \in R^n. \tag{7.3}$$

Правая часть является гладкой функцией: она непрерывно дифференцируема в области

$$|\mathbf{x}| < \rho, \quad 0 < t < \infty \quad (\rho = \text{const} \text{ или } \rho = \infty).$$

Частные производные $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ удовлетворяют условию

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad (L = \text{const}).$$

Решение уравнения (7.3) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, как обычно, будем обозначать $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$: $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0$).

Определение 7.1. *Положение равновесия, или невозмущенное движение* $\mathbf{x}(t) = 0$ *системы* (7.3) *называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные постоянные* α *и* M *такие, что при* $\left|\mathbf{x}^0\right| < \rho/M$ *возмущенное движение* $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)\right| \leqslant M\left|\mathbf{x}^0\right| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Если это условие выполняется при любых начальных условиях, то положение равновесия системы называется глобально экспоненциально устойчивым или экспоненциально устойчивым в целом.

Линейная стационарная система, если она устойчива, то она экспоненциально устойчива в целом.

Теорема 7.1. (Н. Н. Красовский [13]). *Если положение равновесия системы* (7.3) *экспоненциально устойчиво, то существует функция Ляпунова* $V(\mathbf{x}, t)$ *и положительные постоянные* c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *такие, что выполняются неравенства*

$$c_1\left|\mathbf{x}\right|^2 \leqslant V(\mathbf{x}, t) \leqslant c_2\left|\mathbf{x}\right|^2,$$
$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t) \leqslant -c_3\left|\mathbf{x}\right|^2,$$
$$\left|\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}\right| \leqslant c_4\left|\mathbf{x}\right|.$$

В случае экспоненциально устойчивой линейной стационарной или нестационарной системы существует квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ или $V(\mathbf{x}, t) = x^T B(t)\mathbf{x}$, удовлетворяющая условию теоремы Красовского. В случае экспоненциально устойчивой нелинейной системы соответствующая функция Ляпунова может быть не квадратичной.

Теорема 7.2. *Если положительно определенная квадратичная форма* $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ *является функцией Ляпунова системы* (7.3), *и производная от нее по времени в силу уравнения* (7.3) *принимает* *вид* $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T C\mathbf{x}$, *то в качестве констант* c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *можно принять*

$$c_1 = \lambda_m^B, \quad c_2 = \lambda_M^B, \quad c_3 = \lambda_m^C \text{ и } c_4 = 2\lambda_M^B,$$

где λ_m^B *и* λ_M^B — *минимальное и максимальное собственные значения матрицы* B *и* λ_m^C — *минимальное собственное значение матрицы* C.

Норма матрицы. Пусть A — произвольная прямоугольная $(m \times n)$-матрица и задано преобразование

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{y} \in R^m.$$

В пространствах R^n и R^m определены нормы $\|\mathbf{x}\|$ и $\|\mathbf{y}\|$ соответственно. Норма матрицы A определяется следующим образом [7]:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Здесь $\|A\mathbf{x}\|$ — норма вектора $A\mathbf{x}$ в пространстве R^m.

Норма матрицы A определяется как самой матрицей A, так и теми векторными нормами, которые введены в пространствах R^n и R^m. При изменении норм в этих пространствах изменяется норма матрицы. Если в пространствах R^n и R^m введены эвклидовы нормы: $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\|\mathbf{y}\| = |\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}$, то норму матрицы A будем называть *эвклидовой* и обозначать также $|A|$.

Из определения нормы следует неравенство

$$\|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Для $(m \times n)$-матриц A и B при одном и том же определении векторных норм справедливо неравенство

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

Пусть λ — число. Справедливо равенство

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|.$$

Если определены нормы $(m \times l)$-матрицы A, $(l \times n)$-матрицы B и их произведения AB, то справедливо соотношение

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\, \|B\|.$$

Утверждение 7.1. Эвклидова норма матрицы A равна квадратному корню из максимального собственного значения λ_M произведения матриц $A^T A$:

$$|A| = \sqrt{\lambda_M}.$$

Устойчивость агрегированной системы. Рассмотрим систему, которая после декомпозиции описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = X^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} H_{kj}\mathbf{x}^{(j)} \tag{7.4}$$
$$(X^k(0,t) = 0 \ \ \forall t \geqslant t_0), \ \ k = 1, 2, \ldots, r,$$

где H_{kj} — числовая $(n_k \times n_j)$-матрица. Если пренебречь взаимосвязями, то получим r независимых подсистем S_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$, которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = X^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \quad (X^k(0,t) = 0 \ \ \forall t \geqslant t_0), \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{7.5}$$

Пусть каждая из этих подсистем обладает функцией Ляпунова $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$c_{k1}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2 \leqslant V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \leqslant c_{k2}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2, \tag{7.6а}$$

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \leqslant -c_{k3}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2, \tag{7.6б}$$

$$\left|\frac{\partial V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}\right| \leqslant c_{k4}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|. \tag{7.6в}$$

В (7.6б) $\dot{V}_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$ являются производными по времени в силу уравнений (7.5). Так как эти производные отрицательно определены, подсистемы S_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ асимптотически устойчивы. Кроме того, в силу условия (7.6а) функция $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$ имеет бесконечно большой нижний предел. Поэтому подсистемы S_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ асимптотически устойчивы в целом.

Теорема 7.3. (Bailey F. N.). *Пусть подсистемы* (7.5) *обладают функциями Ляпунова* $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$, *удовлетворяющими соотношениям* (7.6), *и элементы матрицы* $D = (d_{ki})$ $(k, i = 1, 2, \ldots, r)$, *составленные из констант* c_{ki}, *входящих в соотношения* (7.6), *и эвклидовых норм матриц взаимосвязи* H_{ki} *из* (7.4), *имеют вид*

$$d_{ki} = \begin{cases} -\dfrac{c_{k3}}{2c_{k2}}, & k = i, \\[2ex] \dfrac{(c_{k4})^2 \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} \left|H_{kj}\right|^2}{2c_{k3}c_{i1}}, & k \neq i. \end{cases} \tag{7.7}$$

Тогда, если положение равновесия $\mathbf{z} = 0$ *системы*

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in R^r$$

асимптотически устойчиво, то положение равновесия $\mathbf{x} = \{(\mathbf{x}^{(1)})^T(\mathbf{x}^{(2)})^T \cdots (\mathbf{x}^{(r)})^T\}^T = 0$ *агрегированной системы* (7.4) *асимптотически устойчиво.*

Матрица D уравнения системы сравнения обладает специфическим свойством: все ее элементы, расположенные вне ее главной диагонали, являются неотрицательными. Такие матрицы называются M-*матрицами.*

Критерий Севастьянова–Котелянского. *Если* $(n \times n)$-*матрица* $C = (c_{ij})$ *является* M-*матрицей, т. е.* $c_{ij} \geqslant 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n\ i \neq j)$, *то для того чтобы вещественные части всех ее собственных значений были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Delta_k = (-1)^k \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если вещественные части всех собственных значений квадратной матрицы отрицательны, то такая матрица называется *устойчивой*. Поэтому критерий Севастьянова–Котелянского является критерием устойчивости M-матриц. Последние неравенства называют *условием Севастьянова–Котелянского* [5].

Необходимое условие устойчивости M-матриц. *Для того чтобы* M-*матрица* $C = (c_{ij})$ *была устойчива, необходимо, чтобы все ее элементы главной диагонали были отрицательны:* $c_{ii} < 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 7.3. Исследовать устойчивость системы, состоящей из следующих двух подсистем:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -8x_1^{(1)} - 10x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -5x_1^{(1)} - 10x_2^{(1)}; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -(4 + \sin^2 t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(2)} = -2x_1^{(2)} - (2 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}2x_1^{(1)}. \end{cases}$$

Решение. В векторной форме приведенная система уравнений принимает следующий вид:

$$S_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1\mathbf{x}^{(1)} + H_{12}\mathbf{x}^{(2)},$$

$$S_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2\mathbf{x}^{(2)} + H_{21}\mathbf{x}^{(1)}.$$

Здесь

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -(4+\sin^2 t) & -1 \\ -2 & -(2+e^{-t}) \end{bmatrix}, \quad H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если пренебречь взаимосвязями, то получим

$$\overline{S}_1 \colon \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1 \mathbf{x}^{(1)},$$
$$\overline{S}_2 \colon \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2 \mathbf{x}^{(2)},$$

Для подсистемы $\overline{S}_1$ функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V_1 = (\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 \mathbf{x}^{(1)}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 > 0.$$

Производная по времени функции V_1 в силу уравнения подсистемы $\overline{S}_1$ имеет вид

$$\dot{V}_1 = 2(\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = 2(\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 A_1 \mathbf{x}^{(1)} = -(\mathbf{x}^{(1)})^T \overline{C}_1 \mathbf{x}^{(1)},$$

где

$$\overline{C}_1 = -2B_1A_1 = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5\alpha_1 & 10\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем и выразим производную $\dot{V}_1$ с помощью симметричной матрицы:

$$\dot{V}_1 = -(\mathbf{x}^{(1)})^T \overline{C}_1 \mathbf{x}^{(1)} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 + \overline{C}_1^T + \overline{C}_1 - \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)} =$$
$$= -\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 + \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)}.$$

Второе слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как

$$(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)} = [(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)}]^T = -(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T)\mathbf{x}^{(1)}.$$

Поэтому имеем

$$\dot{V}_1 = -(\mathbf{x}^{(1)})^T C_1 \mathbf{x}^{(1)},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2}(\overline{C}_1 + \overline{C}_1^T) = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5\alpha_1 & 10\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 5\alpha_1 \\ 10 & 10\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10+5\alpha_1 \\ 10+5\alpha_1 & 20\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы производная $\dot{V}_1$ была отрицательно определенной, согласно критерию Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 16 & 10+5\alpha_1 \\ 10+5\alpha_1 & 20\alpha_1 \end{vmatrix} = 220\alpha_1 - 100 - 25\alpha_1^2 > 0.$$

Это неравенство будет выполнено, в частности, при $\alpha_1 = 1$. При этом имеем

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица B_1 является диагональной, то ее собственные значения совпадают с диагональными элементами. И, следовательно, ее минимальное и максимальное собственные значения равны единице: $\lambda_m^{B_1} = \lambda_M^{B_1} = 1$.

Найдем собственные значения матрицы C_1. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(C_1 - I\lambda) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & 15 \\ 15 & 20-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36\lambda + 95 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 2{,}9$ и $\lambda_2 = 33{,}1$. Следовательно, минимальное и максимальное собственные значения матрицы C_1 равны $\lambda_m^{C_1} = \lambda_1 = 2{,}9$ и $\lambda_M^{C_1} = \lambda_2 = 33{,}1$.

Таким образом имеем

$$c_{11} = \lambda_m^{B_1} = 1, \quad c_{12} = \lambda_M^{B_1} = 1, \quad c_{13} = \lambda_m^{C_1} = 2{,}9, \quad c_{14} = 2\lambda_M^{B_1} = 2.$$

Для подсистемы $\overline{S}_2$ функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V_2 = (\mathbf{x}^{(2)})^T B_2 \mathbf{x}^{(2)}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 > 0.$$

Производная по времени функции V_2 в силу уравнения подсистемы $\overline{S}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 2(\mathbf{x}^{(2)})^T B_2 \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = 2(\mathbf{x}^{(2)})^T B_2 A_2 \mathbf{x}^{(2)} = \\ &= 2(\mathbf{x}^{(2)})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(4+\sin^2 t) & 1 \\ -2 & -(2+e^{-t}) \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)} = \\ &= -2\Big[(4+\sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + (2\alpha_2 - 1)x_1^{(2)}x_2^{(2)} + (2+e^{-t})\alpha_2(x_2^{(2)})^2\Big]. \end{aligned}$$

Если положить $\alpha_2 = 1/2$, то производная $\dot{V}_2$ принимает вид

$$\dot{V}_2 = -2\left[(4+\sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + \frac{1}{2}(2+e^{-t})(x_2^{(2)})^2\right],$$

и она является отрицательно определенной. При этом матрица B_2 принимает вид $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, и ее минимальное и максимальное собственные значения равны $\lambda_m^{B_2} = 1/2$ и $\lambda_M^{B_2} = 1$. Так как

$$2\left[(4+\sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + \frac{1}{2}(2+e^{-t})(x_2^{(2)})^2\right] \geqslant 2\left[(x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2\right],$$

то

$$\dot{V}_2 \leqslant -2\left|\mathbf{x}^{(2)}\right|^2.$$

Поэтому имеем

$$c_{21} = \lambda_m^{B_2} = 1/2, \quad c_{22} = \lambda_M^{B_2} = 1, \quad c_{23} = 2, \quad c_{24} = 2\lambda_M^{B_2} = 2.$$

Чтобы определить элементы матрицы D системы сравнения, необходимо найти нормы матриц взаимосвязи H_{ij}. Эвклидова норма матрицы H_{ij} равна корню квадратному из максимального собственного значения произведения $\widetilde{H}_{ij} = (H_{ij})^T H_{ij}$. Так как

$$\widetilde{H}_{12} = (H_{12})^T H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 \end{bmatrix}, \quad \lambda_M^{\widetilde{H}_{12}} = 0{,}04;$$

$$\widetilde{H}_{21} = (H_{21})^T H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_M^{\widetilde{H}_{21}} = 0{,}04;.$$

то

$$|H_{12}|^2 = \lambda_M^{\widetilde{H}_{12}} = 0{,}04, \qquad |H_{21}|^2 = \lambda_M^{\widetilde{H}_{21}} = 0{,}04.$$

По формуле (7.7) для элементов матрицы D находим:

$$d_{11} = -\frac{c_{13}}{2c_{12}} = -\frac{2{,}9}{2} = -1{,}45,$$

$$d_{22} = -\frac{c_{23}}{2c_{22}} = -\frac{2}{2} = -1,$$

$$d_{12} = \frac{(c_{14})^2}{2c_{13}c_{21}}\,|H_{12}|^2 = \frac{4}{2{,}9}0{,}04 \cong 0{,}055,$$

$$d_{21} = \frac{(c_{24})^2}{2c_{23}c_{11}}\,|H_{21}|^2\,\frac{4}{4}0{,}04 \cong 0{,}04,$$

Матрица D принимает следующий вид:

$$D = \begin{bmatrix} -1{,}45 & 0{,}055 \\ 0{,}04 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица D является М-матрицей. Проверим выполнение критерия устойчивости.

$$\Delta_1 = (-1)(-1{,}45) = 1{,}45 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1{,}45 & 0{,}11 \\ 0{,}08 & -1 \end{vmatrix} \cong 1{,}44 > 0.$$

Критерий устойчивости выполняется. Следовательно, система сравнения и соответственно агрегированная система устойчивы.

Устойчивость агрегированной системы с нелинейными взаимосвязями. Рассмотрим агрегированную систему, которая описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}), \\ \mathbf{x}^{(k)} \in R^{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, r.\end{gathered} \tag{7.8}$$

Здесь $\mathbf{h}^{(k)}(0, 0, \cdots, 0) = 0$, т. е. начало координат $\mathbf{x} = ((\mathbf{x}^{(1)})^T (\mathbf{x}^{(2)})^T \cdots \cdots (\mathbf{x}^{(r)})^T)^T = 0$ является положением равновесия. В данном случае взаимосвязи между подсистемами описываются нелинейными функциями. Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\left|\mathbf{h}^{(k)}\right| \leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} h_{ki}\left|\mathbf{x}^{(i)}\right|, \quad h_{ki} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{7.9}$$

Если пренебречь взаимосвязями, то получим r независимых подсистем $\overline{S}_k$, которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(k)} \in R^{n_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, r. \tag{7.10}$$

Пусть положение равновесия $\mathbf{x}^{(k)} = 0$ подсистем $\overline{S}_k$ устойчиво. Тогда при любой положительно определенной $(n_k \times n_k)$-матрице C_k существует матрица B_k, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_k^T B_k + B_k A_k = -C_k.$$

Квадратичная форма $V_k(\mathbf{x}^{(k)}) = (\mathbf{x}^{(k)})^T B_k \mathbf{x}^{(k)}$ является функцией Ляпунова для подсистемы $\overline{S}_k$. Она в соответствии с теоремами 7.1 и 7.2 удовлетворяет соотношениям

$$\lambda_m^{B_k}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2 \leqslant V_k(\mathbf{x}^{(k)}) \leqslant \lambda_M^{B_k}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2, \tag{7.11а}$$

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}^{(k)}) \leqslant -\lambda_m^{C_k}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|^2, \tag{7.11б}$$

$$\left|\frac{dV_k(\mathbf{x}^{(k)})}{d\mathbf{x}^{(k)}}\right| \leqslant 2\lambda_M^{B_k}\left|\mathbf{x}^{(k)}\right|, \tag{7.11в}$$

где $\lambda_m^{B_1}$, $\lambda_M^{B_1}$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы B_1, $\lambda_m^{C_k}$ — минимальное собственное значение матрицы C_k.

Теперь рассмотрим теорему, которая позволит определить, как строить систему сравнения для агрегированной системы (7.8) с нелинейными взаимосвязями, удовлетворяющими условию (7.9).

Теорема 7.4. *Пусть квадратичная форма* $V_k(\mathbf{x}^{(k)}) = (\mathbf{x}^{(k)})^T \times \times B_k \mathbf{x}^{(k)}$ *является функцией Ляпунова для подсистемы* (7.10) *и эле-*

менты матрицы $D = (d_{k\,i})$ *имеют вид*

$$d_{ki} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_m^{C_k}}{2\lambda_M^{B_k}}, & k = i, \\ \dfrac{(\lambda_M^{B_k})^2 \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} \left|h_{k\,j}\right|^2}{\lambda_m^{C_K}}, & k \neq i. \end{cases} \tag{7.12}$$

Тогда, если нулевое решение системы

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in R^r$$

устойчиво, то и положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ *агрегированной системы* (7.8) *асимптотически устойчиво в целом.*

Пример 7.4. Исследовать устойчивость системы, состоящей из следующих трех подсистем:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 0{,}05 \sin x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -2x_2^{(1)} + 0,1(e^{-|x_1^{(2)}|} - 1); \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -2x_1^{(2)} + 0{,}05(1 - \cos 2x_1^{(3)}), \\ \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - 4x_2^{(2)} + 0{,}1(e^{-|x_1^{(3)}|} - 1); \end{cases}$$

$$S_3: \begin{cases} \dot{x}_1^{(3)} = x_2^{(3)} + 0{,}1x_2^{(1)} e^{-|x_2^{(1)}|}, \\ \dot{x}_2^{(3)} = -5x_1^{(3)} - 6x_2^{(3)} + 0{,}05 \sin 2x_1^{(1)}. \end{cases}$$

Решение. Запишем приведенные уравнения в векторной форме:

$$S_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{h}^1\big(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}\big),$$
$$S_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{h}^2\big(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(3)}\big),$$
$$S_3: \dot{\mathbf{x}}^{(3)} = A_3\mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{h}^3\big(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\big).$$

Здесь

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}05 \sin x_1^{(2)} \\ 0{,}1\big(e^{-|x_1^{(2)}|} - 1\big) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}05\big(1 - \cos 2x_1^{(3)}\big) \\ 0{,}1\big(e^{-|x_1^{(3)}|} - 1\big) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}1x_2^{(1)} e^{-|x_2^{(1)}|} \\ 0{,}05 \sin 2x_1^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Если не учитывать взаимосвязи, то получим три независимых подсистемы:

$$\overline{S}_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1\mathbf{x}^{(1)},$$
$$\overline{S}_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2\mathbf{x}^{(2)},$$
$$\overline{S}_3: \dot{\mathbf{x}}^{(3)} = A_3\mathbf{x}^{(3)}.$$

Функции Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы $V_k = (\mathbf{x}^{(k)})^T B_k \mathbf{x}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$, где матрица B_k определяется из уравнения Ляпунова

$$A_k^T B_k + B_k A_k = -C_k$$

при условии, что $C_k = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ $(k = 1, 2, 3)$. Определим матрицы B_k $(k = 1, 2, 3)$.

При $k = 1$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -b_{11}^{(1)} & -b_{12}^{(1)} \\ b_{11}^{(1)} - 2b_{21}^{(1)} & b_{12}^{(1)} - 2b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11}^{(1)} & b_{11}^{(1)} - 2b_{12}^{(1)} \\ -b_{21}^{(1)} & b_{21}^{(1)} - 2b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство $b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)}$, это уравнение в скалярной форме можно записать в виде

$$-2b_{11}^{(1)} = -10, \quad b_{11}^{(1)} - 3b_{12}^{(1)} = 0, \quad 2b_{12}^{(1)} - 4b_{22}^{(1)} = -10.$$

Отсюда находим

$$b_{11}^{(1)} = 5, \quad b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)} = 5/3, \quad b_{22}^{(1)} = 10/3 \text{ и } B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5/3 \\ 5/3 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B_1, или корни уравнения

$$\det(B_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5/3 \\ 5/3 & 10/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{25}{3}\lambda + \frac{125}{9} = 0,$$

равны $\lambda_1 \cong 2{,}3$ и $\lambda_2 \cong 6$. Поэтому для минимального и максимального собственных значений матрицы B_1 имеем $\lambda_m^{B_1} = 2{,}3$ и $\lambda_M^{B_1} = 6$.

При $k = 2$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -2b_{11}^{(2)} + b_{21}^{(2)} & -2b_{12}^{(2)} + b_{22}^{(2)} \\ -4b_{21}^{(2)} & -4b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b_{11}^{(2)} + b_{12}^{(2)} & -4b_{12}^{(2)} \\ -2b_{21}^{(2)} + b_{22}^{(2)} & -4b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме это уравнение принимает вид

$$-4b_{11}^{(2)} + 2b_{12}^{(2)} = -10, \quad -6b_{12}^{(2)} + b_{22}^{(2)} = 0, \quad -8b_{22}^{(2)} = -10.$$

Отсюда получаем

$$b_{11}^{(2)} = \frac{125}{48}, \quad b_{12}^{(2)} = b_{21}^{(2)} = \frac{5}{24}, \quad b_{22}^{(2)} = \frac{5}{4} \text{ и } B_2 = \begin{bmatrix} \frac{125}{48} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Составив характеристическое уравнение и решив его, для минимального и максимального собственных значеиий матрицы B_2 получаем $\lambda_m^{B_2} \cong 1{,}23$ и $\lambda_M^{B_2} \cong 2{,}61$.

При $k = 3$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -5b_{21}^{(3)} & -5b_{22}^{(3)} \\ b_{11}^{(3)} - 6b_{21}^{(3)} & b_{12}^{(3)} - 6b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5b_{12}^{(3)} & b_{11}^{(3)} - 6b_{12}^{(3)} \\ -5b_{22}^{(3)} & b_{21}^{(3)} - 6b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме это уравнение принимает вид

$$10b_{12}^{(3)} = -10, \quad -5b_{22}^{(3)} + b_{11}^{(3)} - 6b_{12}^{(3)} = 0, \quad 2b_{12}^{(3)} - 12b_{22}^{(3)} = -10.$$

Отсюда получаем

$$b_{11}^{(3)} = 11, \quad b_{12}^{(3)} = b_{21}^{(3)} = 1, \quad b_{22}^{(3)} = 1 \text{ и } B_3 = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составив характеристическое уравнение и решив его, для минимального и максимального собственных значений матрицы B_3 получаем $\lambda_m^{B_3} \cong 0{,}9$ и $\lambda_M^{B_3} \cong 11$.

Так как матрица $C_i = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, 3)$ является диагональной, то ее собственные значения совпадают с ее диагональными элементами, Поэтому имеем

$$\lambda_m^{C_i} = 10, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Чтобы определить элементы матрицы D, то согласно формуле (7.12) нужно определить постоянные $(h_{kj})^2$ $(k, j = 1, 2, 3, k \neq j)$. Эвклидовы нормы векторных функции $\mathbf{h}^i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{h}^{(1)}\right|^2 &= 0{,}0025(\sin x_1^{(2)})^2 + 0{,}01(e^{-\left|x_1^{(2)}\right|} - 1)^2 \leqslant \\
&\leqslant 0{,}0025(x_1^{(2)})^2 + 0{,}01(x_1^{(2)})^2 \leqslant 0{,}013(x_1^{(2)})^2 \leqslant 0{,}013\left|x^{(2)}\right|^2, \\
\left|\mathbf{h}^{(2)}\right|^2 &= 0{,}0025(1 - \cos 2x_1^{(3)})^2 + 0{,}01(e^{-\left|x_1^{(3)}\right|} - 1)^2 = \\
&= 0{,}0025 \cdot 4\sin^4 x_1^{(3)} + 0{,}01(e^{-\left|x_1^{(3)}\right|} - 1)^2 \leqslant \\
&\leqslant 0.01(x_1^{(3)})^2 + 0{,}01(x_1^{(3)})^2 \leqslant 0{,}02(x_1^{(3)})^2 \leqslant 0{,}02\left|x^{(3)}\right|^2, \\
\left|\mathbf{h}^{(3)}\right|^2 &= 0{,}01(x_2^{(1)})^2 e^{-2\left|x_2^{(1)}\right|} + 0{,}0025(\sin 2x_1^{(1)})^2 \leqslant \\
&\leqslant 0{,}01(x_2^{(1)})^2 + 0{,}01(x_1^{(1)})^2 \leqslant 0{,}01\left|x^{(1)}\right|^2.
\end{aligned}
$$

В соответствии с неравенством Коши–Шварца имеем

$$
\left|\mathbf{h}^{(k)}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{3} h_{ki}\left|x^{(i)}\right|\right)^2 \leqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{3} h_{ki}^2 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{3} \left|x^{(i)}\right|^2.
$$

Поэтому из выше приведенных соотношений находим

$$
h_{12}^2 = 0{,}013, \quad h_{13}^2 = 0, \quad h_{21}^2 = 0, \quad h_{23}^2 = 0{,}02, \quad h_{31}^2 = 0{,}01, \quad h_{32}^2 = 0.
$$

Для удобства выпишем здесь полученные выше собственные значения матриц B_k и C_k $(k = 1,2,3)$: $\lambda_m^{B_1} = 2{,}3$, $\lambda_M^{B_1} = 6$, $\lambda_m^{B_2} \cong 1{,}23$, $\lambda_M^{B_2} \cong 2{,}61$, $\lambda_m^{B_3} \cong 0{,}9$, $\lambda_M^{B_3} \cong 11$, $\lambda_m^{C_i} = 10$, $i = 1,2,3$.

Теперь определим элементы матрицы D по формуле (7.12):

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= -\frac{\lambda_m^{C_1}}{2\lambda_M^{B_1}} = -\frac{10}{2 \cdot 6} = -0{,}84, \\
d_{22} &= -\frac{\lambda_m^{C_2}}{2\lambda_M^{B_2}} = -\frac{10}{2 \cdot 2{,}61} = -1{,}91, \\
d_{33} &= -\frac{\lambda_m^{C_3}}{2\lambda_M^{B_3}} = -\frac{10}{2 \cdot 11} = -0{,}45, \\
d_{12} &= -\frac{2(\lambda_M^{B_1})^2}{\lambda_m^{C_1}\lambda_m^{B_2}}(h_{12}^2 + h_{13}^2) = \frac{2 \cdot 6^2}{10 \cdot 1{,}23}0{,}013 \cong 0{,}076, \\
d_{13} &= -\frac{2(\lambda_M^{B_1})^2}{\lambda_m^{C_1}\lambda_m^{B_3}}(h_{12}^2 + h_{13}^2) = \frac{2 \cdot 6^2}{10 \cdot 0{,}9}0{,}013 \cong 0{,}104, \\
d_{21} &= -\frac{2(\lambda_M^{B_2})^2}{\lambda_m^{C_2}\lambda_m^{B_1}}(h_{21}^2 + h_{23}^2) = \frac{2(2{,}61)^2}{10 \cdot 2{,}3}0{,}02 \cong 0{,}012,
\end{aligned}
$$

$$d_{23} = -\frac{2(\lambda_M^{B_3})^2}{\lambda_m^{C_2}\lambda_m^{B_3}}(h_{21}^2 + h_{23}^2) = \frac{2(2{,}61)^2}{10\cdot 0{,}9}0{,}02 \cong 0{,}03,$$

$$d_{31} = -\frac{2(\lambda_M^{B_3})^2}{\lambda_m^{C_3}\lambda_m^{B_3}}(h_{31}^2 + h_{32}^2) = \frac{2\cdot 11^2}{10\cdot 2{,}3}0{,}01 \cong 0{,}01,$$

$$d_{32} = -\frac{2(\lambda_M^{B_3})^2}{\lambda_m^{C_3}\lambda_m^{B_2}}(h_{31}^2 + h_{32}^2) = \frac{2\cdot 11^2}{10\cdot 1{,}23}0{,}01 \cong 0{,}20.$$

Матрица D имеет вид $D = \begin{bmatrix} -0{,}84 & 0{,}076 & 0{,}104 \\ 0{,}012 & -1{,}91 & 0{,}03 \\ 0{,}01 & 0{,}20 & -0{,}45 \end{bmatrix}$. Она является М-матрицей, и необходимое условие ее устойчивости выполняется. Проверим условие устойчивости Севастьянова–Котеляиского:

$$\Delta_1 = (-1)(-0{,}84) = 0{,}84 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} -0{,}84 & 0{,}076 \\ 0{,}012 & -1{,}91 \end{bmatrix} = 1{,}6 > 0,$$

$$\Delta_3 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}84 & 0{,}076 & 0{,}104 \\ 0{,}012 & -1{,}91 & 0{,}03 \\ 0{,}01 & 0{,}20 & -0{,}45 \end{vmatrix} = 1{,}33 > 0.$$

Условие устойчивости выполняется. Следовательно, система сравнения и агрегированная система устойчивы.

Задачи

7.4. Определить евклидову норму следующих матриц

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

и) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; к) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

7.5. Показать, что следующие системы, состоящие из двух взаимосвязанных подсистем, асимптотически устойчивы.

$$\text{а)} \begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}2x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -2x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} + 0{,}1x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(5+\sin^2 t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 2x_1^{(2)} - (6+e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}1x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(4 + 2e^{-t})x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + \sin^2 t)x_2^{(2)} + 0{,}05x_1^{(1)}. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}5x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -0{,}5x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(2 + \sin^2 t)x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + 2e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}3x_1^{(1)}. \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -10x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}3x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0,2x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(3 + e^{-t})x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (4 + 2\sin^2 t)x_2^{(2)} + 0{,}05x_1^{(1)}. \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} + 0{,}5x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + 0{,}4x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(2 + \sin^2 t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 0{,}5x_1^{(2)} - (3 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}3x_1^{(1)}. \end{cases}$$

е) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}2x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -2x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} + 0{,}1x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(5 + \sin t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 2x_1^{(2)} - (6 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

ж) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}1x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(4 + 2\cos t)x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + \sin^2 t)x_2^{(2)} + 0{,}05x_1^{(1)}. \end{cases}$$

з) $$\begin{cases} S_1: \dot{x}_1^{(1)} = -2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}5x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -0{,}5x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2: \dot{x}_1^{(2)} = -(2 + \sin t)x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + 2\cos^2 t)x_2^{(2)} + 0{,}3x_1^{(1)}. \end{cases}$$

и) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -10x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}3x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(3+\cos 2t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (4 + 2\sin^2 t)x_2^{(2)} + 0{,}05x_1^{(1)}. \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} + 0{,}5x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + 0{,}4x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(2+\sin 2t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}2x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 0{,}5x_1^{(2)} - (3 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}3x_1^{(1)}. \end{cases}$$

7.6. Показать, что следующие системы, состоящие из двух взаимосвязанных нелинейными связями подсистем, асимптотически устойчивы.

а) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}2x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -2x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} + 1 - \cos 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(5+\sin^2 t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}2\left|x_2^{(1)}\right|}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 2x_1^{(2)} - (6 + e^{-t})x_2^{(2)} + 2(\cos 0{,}1x_1^{(1)} - 1). \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + \cos 0{,}2x_1^{(2)} - 1, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(4+2e^{-t})x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} + 0{,}1(1 - \cos x_2^{(1)}), \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + \sin^2 t)x_2^{(2)} + \sin 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 5\sin 0{,}1x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -0{,}5x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 1 - \cos 0{,}5x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(2+\sin^2 t)x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 3(\cos 0{,}1x_2^{(1)} - 1), \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3 + 2e^{-t})x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}3\left|x_1^{(1)}\right|}. \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -10x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 3\left(1 - e^{-0{,}1\left|x_1^{(2)}\right|}\right), \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + \cos 0{,}3x_2^{(2)} - 1; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(3+e^{-t})x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (4 + 2\sin^2 t)x_2^{(2)} + \sin 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} + 5(1-\cos 0{,}1x_1^{(2)}), \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + \sin 0{,}5x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(2+\sin^2 t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}3\left|x_2^{(1)}\right|}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 0{,}5x_1^{(2)} - (3+e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}3x_1^{(1)}. \end{cases}$$

е) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 2\sin 0{,}1x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -2x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} + 1 - \cos 0{,}2x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(5+\sin t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}2\left|x_2^{(1)}\right|}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 2x_1^{(2)} - (6+e^{-t})x_2^{(2)} + 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

ж) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + \cos 0{,}2x_1^{(2)} - 1, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 2\left(1 - e^{-0{,}1\left|x_2^{(2)}\right|}\right); \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(4+2\cos t)x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} + 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3+\sin^2 t)x_2^{(2)} + \sin 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

з) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 5\sin 0{,}1x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -0{,}5x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}5x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(2+\sin t)x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 3(\cos 0{,}1x_2^{(1)} - 1), \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (3+2\cos^2 t)x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}3\left|x_1^{(1)}\right|}. \end{cases}$$

и) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -10x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 0{,}3x_1^{(2)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + \cos 0{,}3x_2^{(2)} - 1; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(3+\cos 2t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 1 - \cos 0{,}1x_2^{(1)}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - (4+2\sin^2 t)x_2^{(2)} + \sin 0{,}1x_1^{(1)}. \end{cases}$$

к) $$\begin{cases} S_1\colon \dot{x}_1^{(1)} = -3x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} + 5(1-\cos 0{,}1x_1^{(2)}), \\ \qquad \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + \sin 0{,}5x_2^{(2)}; \\ S_2\colon \dot{x}_1^{(2)} = -(2+\sin 2t)x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 1 - e^{-0{,}3\left|x_2^{(1)}\right|}, \\ \qquad \dot{x}_2^{(2)} = 0{,}5x_1^{(2)} - (3+e^{-t})x_2^{(2)} + \cos 0{,}3x_1^{(1)} - 1. \end{cases}$$

Ответы

7.1. а) $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ д) $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; е) $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

ж) $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; з) $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; и) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

к) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7.2. а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + u_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3^{+}u_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 + u_3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + u_3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + u_3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3^{+}u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3^{+}u_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + u_3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + u_3. \end{cases}$

7.3. а) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = z_2 + z_4 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 + z_2 + z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = -z_2 - z_4 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = -z_2 + z_3 - z_4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = z_2 + z_4 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 + 2z_2 + 2z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = -2z_2 - 2z_4 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = -3z_2 + z_3 - 2z_4. \end{cases}$

в) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = -2z_2 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 + z_2 + z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = z_2 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = z_3 - z_4. \end{cases}$ г) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = -z_2 - 2z_4 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 + 2z_2 + 3z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = 0,5z_2 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = -1{,}5z_2 + z_3 - 3z_4. \end{cases}$

д) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = -2z_2 - z_4 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 - 2z_2 - 2z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = 2z_2 + z_4 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = z_2 + z_3 + z_4. \end{cases}$ е) $\begin{cases} S_1\colon \dot{z}_1 = z_2 + u_1, \\ \qquad \dot{z}_2 = z_1 - 5z_2 - 7z_4; \\ S_2\colon \dot{z}_3 = 5z_2 + 7z_4 + u_2, \\ \qquad \dot{z}_4 = 4z_2 + 4z_4. \end{cases}$

ж) $$\begin{cases} S_1\colon \dot z_1 = z_2 + z_4 + u_1, \\ \qquad \dot z_2 = z_1 + z_2 + z_4; \\ S_2\colon \dot z_3 = u_2, \\ \qquad \dot z_4 = -z_2 + z_3 - z_4. \end{cases}$$

з) $$\begin{cases} S_1\colon \dot z_1 = 0{,}67z_2 + 2{,}67z_4 + u_1, \\ \qquad \dot z_2 = z_1 + 2{,}67z_2 + 2{,}67z_4; \\ S_2\colon \dot z_3 = -3{,}33z_2 - 4{,}33z_4 + u_2, \\ \qquad \dot z_4 = -1{,}67z_2 + z_3 - 2{,}67z_4. \end{cases}$$

и) $$\begin{cases} S_1\colon \dot z_1 = -4{,}29z_2 - 2{,}57z_4 + u_1, \\ \qquad \dot z_2 = z_1 - 0{,}43z_2 + 0{,}14z_4; \\ S_2\colon \dot z_3 = 1{,}43z_2 + 0{,}86z_4 + u_2, \\ \qquad \dot z_4 = 1{,}71z_2 + z_3 + 0{,}43z_4. \end{cases}$$ к) $$\begin{cases} S_1\colon \dot z_1 = -3z_2 - 3z_4 + u_1, \\ \qquad \dot z_2 = z_1 + 3z_2 + 2z_4; \\ S_2\colon \dot z_3 = u_2, \\ \qquad \dot z_4 = z_2 + z_3 + z_4. \end{cases}$$

7.4. а) 5,96; б) 5,93; в) 5,66; г) 5,67; д) 5,87; е) 9,23; ж) 8,39; з) 8,05; и) 8,09; к) 8,09.

Глава 8

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Существуют различные методы решения задач оптимального управления: методы классического вариациониого исчисления (метод множителей Лагранжа), принцип максимума, динамическое программирование, методы функционального анализа и другие. Здесь будут рассмотрены задачи, при решении которых используются первые три из указанных методов.

8.1. Постановка и классификация задач оптимального управления

Задача синтеза оптимальных систем управления относится к классу задач оптимального управления и формулируется как вариационная задача. При этом, кроме уравнения объекта управления, должны быть заданы ограничения на управление и фазовый вектор, краевые (граничные) условия и критерий оптимальности.

Пусть уравнение объекта задается в нормальной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

или в скалярном виде

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$ — фазовый вектор, $\mathbf{u} = (u_1\ u_2 \cdots\ u_r)^T$ — управление или вектор управления.

На вектор управления и фазовый вектор могут быть наложены ограничения в виде конечных соотношений — равенств и неравенств. Эти ограничения определяют допустимые множества значений, которые могут принимать эти вектора. Поэтому указанные ограничения в общем виде могут быть записаны в виде

$$\mathbf{u}(t) \in U_t, \quad \mathbf{x}(t) \in X_t.$$

Здесь U_t, X_t — некоторые заданные множества, зависящие, вообще говоря, от времени, причем $U_t \subseteq R^r$ и $X_t \subseteq R^n$, т. е. U_r — подмножество r-мерного пространства, X_t — подмножество n-мерного пространства.

Первое соотношение называется *ограничением на управление*, второе соотношение — *ограничением на фазовый вектор* или *фазовым ограничением*. Выше ограничения на управление и фазовый вектор представлены отдельно, т. е. они разделены. Однако они могут быть и не разделены. Поэтому в общем случае эти ограничения записываются в виде

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)) \in V_t, \quad V_t \subseteq R^{n+r}.$$

Краевые (граничные) условия — ограничения на фазовый вектор в начальный t_0 и конечный t_f моменты времени — также могут быть представлены в виде включения

$$\mathbf{x}(t_0) \in X_0, \quad \mathbf{x}(t_f) \in X_f,$$

когда эти ограничения разделены, и в виде

$$(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) \in V_0,$$

если они не разделены. Вектор $\mathbf{x}(t_0)$ называют *левым*, а вектор $\mathbf{x}(t_f)$ — *правым концом траектории.*

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается в виде функционала

$$J = J[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f); \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)].$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: *при заданных уравнении объекта, ограничениях на управление и фазовый вектор, краевых условиях и критерии оптимальности определить такие программное управление* $\mathbf{u}^*(t)$ (*или управление с обратной связью* $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t), t)$) *и фазовую траекторию* $\mathbf{x}^*(t)$, *при которых критерий оптимальности принимает минимальное (или максимальное) значение.*

Для определенности примем, что функционал J минимизируется. Задачу максимизации введением нового критерия $J_{\text{н}} = -J$ всегда можно свести к задаче минимизации. Управления $\mathbf{u}^*(t)$ и $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t), t)$ называются *оптимальными управлениями*, траектория $\mathbf{x}^*(t)$ — *оптимальной траекторией*.

Рассмотрим примеры постановки задач оптимального управления.

1. Задачи оптимального управления летательным аппаратом (ЛА). Запишем упрощенное уравнение движения ЛА в вертикальной плоскости следующим образом (см. рис. 8.1):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

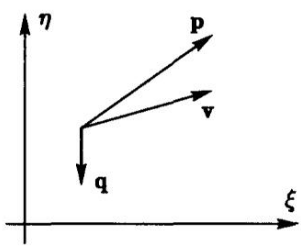


Рис. 8.1

где $m = m_f + m_p(t)$ — масса ЛА; $m_p(t)$ — «реактивная» масса; $v = (\dot{\xi} \ \dot{\eta})^T$ — скорость ЛА; $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2)^T$ — реактивная сила;

$\mathbf{q} = (q_1\ q_2)^T$ — равнодействующая всех остальных сил (силы тяжести, силы сопротивления воздуха и др.).

Реактивная сила имеет вид $\mathbf{p} = \dot{m}\mathbf{w}$, $|\mathbf{w}| = \text{const}$, где $\mathbf{w} = (w_1\ w_2)^T$ — относительная скорость отделяющихся частиц, $|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$, $|\dot{m}| = |\dot{m}_p|$ — секундный расход реактивной массы.

В проекциях на горизонтальную ξ и вертикальную η оси неподвижной системы координат уравнение ЛА принимает вид

$$m\ddot{\xi} = p_1 + q_2; \quad m\ddot{\eta} = p_2 + q_2.$$

Введя обозначения

$$\begin{gathered} x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\xi}, \quad x_4 = \dot{\eta}, \quad u_1 = p_1/m, \quad u_2 = p_2/m, \\ \overline{q}_1 = q_1/m, \quad \overline{q}_2 = q_2/m, \end{gathered} \tag{8.1}$$

последние уравнения можно записать в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = u_1 + \overline{q}_1, \quad \dot{x}_4 = u_2 + \overline{q}_2$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \overline{\mathbf{q}}. \tag{8.2а}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{q}_1 \\ \overline{q}_1 \end{pmatrix}. \tag{8.2б}$$

Отношение реактивной силы к массе ЛА принимается за управление. Траектория ЛА не должна пересекать земную поверхность. Поэтому должно выполнятся ограничение на фазовый вектор $x_2 \geqslant 0$, которое на решение многих ниже рассматриваемых задач не влияет.

Теперь рассмотрим различные постановки задачи, связанные с ЛА.

Пример 8.1. Сформулируйте *задачу 1* вывода ЛА из заданной точки $\mathbf{x}^0$ в заданную точку $\mathbf{x}^f$ фазового пространства за минимальное время при условии $|p| \leqslant p_m$.

Решение. Уравнения объекта имеют вид (8.2), ограничение на управление —

$$|\mathbf{u}| \leqslant u_m; u_m = p_m/m,$$

краевые условия —

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$$

и критерий оптимальности

$$J = t_f - t_0,$$

где t_0 — начальный момент (будем его считать фиксированным, т. е. заданным); t_f — конечный момент — момент достижения ЛА точки $\mathbf{x}^f$, который заранее не известен, т. е. является не фиксированным.

Требуется определить управление, при котором критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Заметим: так как $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, ограничение на управление можно представить также в виде $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$.

Пример 8.2. Сформулировать *задачу 2* перевода ЛА на максимальную дальность.

Решение. В данном случае важно учесть конечность реактивной массы, так как дальность полета зависит прежде всего от количества реактивной массы (топлива). В силу того, что

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{p}|/m = \left(|\dot{m}|\,|\mathbf{w}|\right)/m,$$

конечность топлива накладывает на управление следующее ограничение:

$$\int_{t_0}^{t_f} |\mathbf{u}| dt = B_1, \quad B_1 = |\mathbf{w}| \ln(m_0/m_f).$$

Здесь $m_0 = m(t_0)$ и $m_f = m(t_f)$. Ограничение такого типа называется *изопериметрическим*. Конечный момент t_f определяется из условия $x_2(t_f) = 0$ (высота равна нулю), дальность равна $x_1(t_f) - x_1(t_0)$. Так как $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, то последнее ограничение можно заменить на более удобное

$$\int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt = C,$$

где C — положительная константа.

Задача перевода ЛА на максимальную дальность формулируется следующим образом: при заданном уравнении объекта (8.2), фазовом ограничении $x_2 \geqslant 0$, ограничении на управление —

$$\int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt = C,$$

краевых условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad x_2(t_f) = 0$$

и критерии оптимальности

$$J = -\left[x_1(t_f) - x^0\right]$$

определить управление, при котором заданный критерий принимает минимальное значение.

Здесь фазовое ограничение для облегчения решения можно исключить. При этом задача будет иметь дополнительное нереализуемое решение, которое легко будет распознать.

Сделаем ряд общих замечаний. Естественно, реактивная масса всегда ограничена, но тем не менее это ограничение не учитывалось при формулировке задачи 1. Принималось, что топлива достаточно для достижения поставленной в этой задаче цели.

При формулировке задачи 2 принималось несущественным и не учитывалось ограничение на величину управления, хотя оно всегда имеет место. В то же время в задаче 1 его нельзя не учитывать, так как это привело к нереализуемому оптимальному управлению $\mathbf{u}^*(t)$: при $u_m \to \infty$ максимальное значение $\left|\mathbf{u}^*(t)\right|$ стремилось бы к бесконечности, а критерий оптимальности $J \to 0$. Точно так же нельзя не учитывать ограничение на топливо при формулировке задачи 2, так как в противном случае, как это ясно из физических соображений, существует бесчисленное множество управлений, при которых $J = -\infty$.

2. Задачи оптимального управления двигателем. Уравнение двигателя постоянного тока можно записать в виде

$$I\ddot{\varphi} = i_{я}k_{\Phi}\Phi - M_{c},$$

где I — момент инерции вращающейся части двигателя, φ — угол поворота вала двигателя, $i_{я}$ — ток в якорной цепи, k_{Φ} — конструктивная постоянная, Φ — магнитный поток, M_{c} — момент сопротивления. Используя обозначения

$$b = k_{\Phi}\Phi/I, \quad x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad u = i_{я}, \quad u_{c} = M_{c}/I,$$

приведенное выше уравнение двигателя можно записать в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu - u_{c}$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + \widetilde{\mathbf{q}}, \tag{8.3а}$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \widetilde{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_c \end{pmatrix}. \tag{8.3б}$$

Здесь для получения простой модели объекта за управление принимается ток в якорной цепи.

Пример 8.3. Сформулировать *задачу 3* поворота вала двигателя на заданный угол с последующей остановкой за время T при минимальном расходе энергии.

Решение. Энергия пропорциональна интегралу от квадрата управления (силы тока). Так как постоянный множитель перед функционалом не влияет на решение вариационной задачи, за критерий оптимальности примем интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt,$$

где t_0, t_f — фиксированы и $t_f - t_0 = T$. Ограничение на управление не накладывается: оно косвенно учитывается выбранным критерием оптимальности.

Задачу 3 можно сформулировать следующим образом: при уравнении объекта (8.3), краевых условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$$

определить управление, при котором приведенный выше критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Классификация задач оптимального управления. Задачи оптимального управления классифицируют по виду ограничений на управление и фазовые координаты, по краевым условиям и критерию оптимальности.

1. По виду ограничения задачи оптимального управления различают:

а) классического типа, когда ограничения задаются в виде равенств

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

б) неклассического типа, когда среди ограничений имеются ограничения в виде неравенств

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

К классическому типу относятся также задачи с ограничениями вида

$$\int_{t_0}^{t_f} f_{n+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Такие ограничения называют *изопериметрическими ограничениями*, а вариационные задачи с такими ограничениями — *изопериметрическими задачами*.

Введением дополнительных переменных от изопериметрических ограничений всегда можно избавиться. Достаточно вместо изопериметрических ограничений в условие задачи ввести следующие уравнения и краевые условия:

$$\dot{x}_{n+j} = f_{n+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad x_{n+j}(t_0) = 0, \quad x_{n+j}(t_f) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Формально задачи неклассического типа введением дополнительных переменных можно преобразовать к задачам классического типа. Действительно, приведенные выше ограничения в виде неравенства можно заменить ограничениями вида

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + u_{r+k}^2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Задачи оптимального управления неклассического типа могут иметь ограничения вида

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} f_{n+s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \leqslant C_s, \quad s = 1, 2, \ldots, p.$$

Введением дополнительных переменных эти ограничения могут быть заменены соотношениями

$$\dot{x}_{n+s} = f_{n+s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad x_{n+s}(t_0) = 0, \quad x_{n+s}(t_f) \leqslant C_s, \quad s = 1, 2, \ldots, p.$$

Как не трудно заметить, при преобразовании изопериметрических ограничений вводимые дополнительные переменные представляют собой фазовые координаты, а при преобразовании неизопериметрических ограничений вводимые перемеиные играют роль дополнительных координат векторного управления.

2. По виду краевых условий различают задачи:

а) с фиксированными (закрепленными) концами, когда каждое из множеств X_0 и X_f состоит из одной точки (все фазовые координаты в начальный и конечный моменты заданы, т. е. фиксированы);

б) с подвижным правым концом (X_f состоит более чем из одной точки), с подвижным левым концом (X_0 состоит более чем из одной точки), с подвижными концами (оба конца подвижны);

3. По времени начала и окончания процесса различают задачи:

а) с фиксированным временем, когда начальный t_0 и конечный t_f моменты фиксированы;

б) с нефиксированным временем, когда хотя бы один из моментов времени t_0 или t_f не фиксирован.

4. По критерию оптимальности различают:

а) задачу Больца: критерий оптимальности имеет вид

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt;$$

б) задача Лагранжа: критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt;$$

в) задача Майера: критерий оптимальности имеет вид

$$J = g_0\big[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f\big].$$

Задача Майера в частном случае, когда функционал имеет вид $J = g_0\big[\mathbf{x}(t_f), t_f\big]$, т.е. зависит только от конечного состояния и, быть может, от конечного момента времени, называется *задачей терминального управления*; когда имеет вид $J = (t_f - t_0)$ — задачей *максимального быстродействия*.

Задачи Больца, Лагранжа и Майера эквивалентны в том смысле, что путем преобразования переменных каждую из задач можно преобразовать в любую другую задачу.

В рассмотренных примерах задача 1 является задачей Майера, неклассического типа, закрепленными концами и нефиксированным временем; задача 2 — задачей Майера, классического типа, закрепленным левым и подвижным правым концом и нефиксированным временем; задача 3 — задачей Лагранжа, классического типа, закреплёнными концами и фиксированным временем.

Задачи

8.1. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода летательного аппарата (ЛА) из начала координат на заданную высоту h за минимальное время при ограничении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$.

8.2. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода летательного аппарата (ЛА) на заданную высоту h за минимальное время при ограничении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$ и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) на высоте h_0 по направлению оси ζ со скоростью v. В момент запуска $x_1 = x_1^0$.

8.3. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода ЛА из начала координат в заданную точку $\left(x_1^f, x_2^f\right)$ «геометрического» пространства (ζ, η) при минимальном расходе топлива и ограничении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$.

8.4. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода ЛА в заданную точку $\left(x_1^f, x_2^f\right)$ «геометрического» пространства (ζ, η) при минимальном расходе топлива и ограничении на управлеине $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$ и при условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) под углом $\pi/2$ к направлению оси ζ со скоростью v, в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

8.5. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода ЛА из начала координат на максимальную высоту при ограиичении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$ и заданной реактивной массе.

8.6. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу вывода ЛА на максимальную высоту при заданной реактивной массе и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) под углом $\pi/2$ к направлению оси ζ со скоростью v, в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

8.7. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу перевода ЛА на максимальную дальность при заданной реактивной массе и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) под углом $\pi/4$ к направлению оси ζ со скоростью v, в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

8.8. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу перевода ЛА на максимальную дальность при заданной реактивной массе и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) по направлению оси ζ со скоростью v, в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

8.9. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу перевода летательного аппарата (ЛА) на заданную дальность d за минимальное время при ограничении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$ и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) на высоте h по направлению оси ζ со скоростью v. В момент запуска $x_1 = x_1^0$.

8.10. Сформулировать (записать краевые условия и критерий оптимальности) задачу перевода летательного аппарата (ЛА) на заданную дальность d за минимальное время при ограничении на управление $\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leqslant u_m^2$ и условии, что запуск ЛА производится из другого ЛА, летящего в вертикальной плоскости (ζ, η) на высоте h под углом $\pi/4$ направлению оси ζ со скоростью v в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

8.11. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на заданный угол α без остановки за время T при минимальном расходе энергии.

8.12. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на заданный угол α с последующей остановкой за время T при минимальном расходе энергии.

8.13. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на заданный угол α с последующей остановкой за минимальное время при максимальном токе $i_я = u_m$.

8.14. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на заданный угол α без остановки за минимальное время при максимальном токе $i_я = u_m$.

8.15. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на максимальный угол без остановки за время T при максимальном токе $i_я = u_m$.

8.16. Записать ограничения, краевые условия и критерий оптимальности в задаче поворота вала двигателя на максимальный угол с последующей остановкой за время T при максимальном токе $i_я = u_m$.

8.2. Метод множителей Лагранжа (методы классического вариационного исчисления)

Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем. Если концы закреплены и время фиксировано, то задачу оптимального управления классического типа можно сформулировать как следующую задачу Лагранжа классического вариационного исчисления:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.4а}$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l; \tag{8.4б}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.4в}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \to \min. \tag{8.4г}$$

Предполагается, что функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ $(k = 1, 2, l)$ являются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам, управление $\mathbf{u}(t)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций, а траектории $\mathbf{x}(t)$ — классу кусочно-гладких функций.

Функция $\mathbf{u}(t)$ называется *кусочно-непрерывной* на интервале $[t_0, t_f]$, если она (т. е. каждая его координата) непрерывна всюду на интервале $[t_0, t_f]$, за исключением конечного числа точек, где она имеет разрыв первого рода (существуют конечные пределы слева и справа). Функция $\mathbf{x}(t)$ называется *кусочно-гладкой* на интервале $[t_0, t_f]$, если на $[t_0, t_f]$ она сама непрерывна, а ее производная кусочно-непрерывна.

Управление $\mathbf{u}(t)$ из класса кусочно-непрерывных функций называют *допустимым управлением*, а траекторию $\mathbf{x}(t)$ из класса кусочно-гладких *функций — допустимой траекторией*. Пару $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ называют *допустимой*, если допустимыми являются $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$. В каждой конкретной задаче на допустимые управления и траектории могут быть наложены дополнительные ограничения. Поэтому при рассмотрении определенного класса задач эти понятия могут уточняться.

Функция

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k$$

называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*, ψ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и λ_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ — множители Лагранжа.

Уравнения

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.5а}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, r \tag{8.5б}$$

называются *уравнением Эйлера–Лагранжа*. Уравнения (8.5б) представляют собой условие экстремума гамильтониана при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_j]$, и их называют *условием стационарности*.

Правило множителей Лагранжа закрепленными концами и фиксированным временем. *Если допустимая пара* $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ *является решением задачи оптимального управления* (8.4), *то найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа, что эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа* (8.5).

В соответствии с этим правилом, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию, надо решить совместно уравнения (8.4а), (8.4б) и (8.5) при краевых условиях (8.4в).

Если оптимальное управление $u(t)$ имеет разрыв первого рода в каких-либо точках, то оно само и соответствующая ему траектория $x(t)$ должны удовлетворять указанным выше уравнениям лишь в точках непрерывности управления. В точках разрыва управления, которые называются *угловыми*, должны выполняться условия

$$\psi^- = \psi^+, \quad H^- = H^+,$$

где индексы «-» и «+» обозначают левый и правый пределы соответствующих функций.

Эти условия называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана*.

Множители Лагранжа определяются с точностью до постоянного множителя. Действительно, они входят в уравнения Эйлера–Лагранжа линейно и однородно, и эти уравнения не изменятся, если все множители умножить на одно и то же постоянное число. Поэтому в случае, когда $\psi_0 \neq 0$ (этот случай называют *неособым*), не нарушая общности, будем принимать $\psi_0 = -1$. Дальше, если особо не оговаривается, будет подразумеваться, что имеет место неособый случай.

Как отмечалось, уравнения Эйлер–Лагранжа является необходимым условием, т. е. любое решение задачи оптимального управления (8.4) является экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа, но не любая экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, является решением задачи (8.4). Но если решение задачи существует и экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, единственна, то, очевидно, эта экстремаль и будет решением.

Пример 8.4. Решить задачу поворота вала двигателя на угол 1 радиан с последующей остановкой за 10 сек при минимальном расходе энергии без учета момента сопротивления ($u_c = 0$). Эта задача математически формулируется следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$x_1(10) = 1, \quad x_2(10) = 0; \quad J = \int_0^{10} u^2 dt \to \min.$$

Решение. Ясно, что задача имеет физический смысл, т. е. имеет место неособый случай. Поэтому, как условились, полагаем $\psi_0 = -1$. Составим гамильтониан:

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} - 2u + \psi_2 = 0.$$

Эта система имеет решение

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}.$$

Подставив полученное выражение для управления в уравнения объекта и решив их, получим

$$x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3, \quad x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4.$$

Из краевых условий имеем:

$$x_2(0) = C_3 = 0, \quad x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(10) = -25C_1 + 5C_2 = 0,$$

$$x_1(10) = -\frac{250}{3}C_1 + 25C_2 = 1.$$

Отсюда находим $C_1 = 3/125$, $C_2 = 3/25$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Оптимальное управление и оптимальная траектория имеют вид

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{125}t + \frac{3}{25}\right), \quad x_1^*(t) = \frac{1}{100}\left(-\frac{1}{5}t^3 + 3t^2\right),$$

$$x_2^*(t) = \frac{3}{50}\left(-\frac{1}{10}t^2 + t\right).$$

Если требуется, чтобы после поворота вала двигателя на угол 1 радиан, он не вращался, нужно положить $u = 0$ при $t \geqslant 10$.

Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с подвижными концами. Задача оптимального управления классического типа с подвижными концами и фиксированным временем формулируется следующим образом:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.6а}$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l; \tag{8.6б}$$

$$g_j\left[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f\right] = 0, \quad j = 1, \ldots, q < 2n; \tag{8.6в}$$

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \to \min. \tag{8.6г}$$

Граничные условия (8.6в) предполагаются независимыми, функции $g_j\big[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f\big]$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам. На остальные функции накладываются такие же требования, как и в случае задачи с закрепленными концами.

Эта задача отличается от рассмотренной выше задачи тем, что изменяются краевые условия и критерий оптимальности может иметь любой из указанных при классификации видов, т. е. в этом случае задача оптимального управления может быть вариационной задачей Лагранжа, Больца и Майера. Когда концы закреплены и время фиксировано, задача оптимального управления может быть только задачей Лагранжа.

Дифференциальные уравнения объекта и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют порядок n. Поэтому при их решении будем иметь $2n$ постоянных интегрирования. При закрепленных концах граничные условия представляют собой $2n$ соотношений, которые позволяют определить все постоянные интегрирования. Однако при подвижных концах траектории граничных условий не достаточно, чтобы можно было их определить. Недостающие соотношения доставляют *условия трансверсальности*, которые имеют следующий вид:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \quad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.7а}$$

$$H\big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}, \quad H\big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}. \tag{8.7б}$$

Здесь

$$G = \sum_{i=0}^{q} \nu_i g_i,$$

где $\nu_i (i = 0, 1, \ldots, q)$ — постоянные неопределенные множители, при этом $\nu_0 = \psi_0$ (ψ_0 — множитель Лагранжа, который входит в гамильтониан). Функция G называется *терминантом* [1].

Отдельные координаты граничных точек могут быть фиксированы. Соотношения, определяющие эти координаты, в выражение для терминанта G не включаются, и так как при определении необходимых условий они не варьируются, в условия трансверсальности не нужно включать соотношения, содержащие частные производные по этим координатам. В частности, если начальная точка закреплена, т. е. заданы все координаты точки $\mathbf{x}(t_0)$, то в условии (8.7а) все первые соотношения с частными производными по $x_i(t_0)$ должны быть исключены; если время фиксировано, то отпадают условия (8.7б).

Правило множителей Лагранжа с подвижными концами. *Если допустимая пара* $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ *является решением задачи оптимального управления* (8.6), *то найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа, что эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа* (8.5) *и условиям трансверсальности* (8.7).

Если управление терпит разрыв, то решение $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ должно удовлетворять уравнениям Эйлера–Лагранжа в точках непрерывности управления. В угловых точках (в точках разрыва управления) должны выполнятся условия Вейерштрасса–Эрдмана.

Чтобы получить решение задачи (8.6), нужно решить уравнения (8.6а), (8.6б) совместно с уравнениями Эйлера–Лагранжа (8.5) при краевых условиях (8.6в) и условиях трансверсальности (8.7).

Пример 8.5. Решить задачу поворота вала двигателя на угол 1 радиан без последующей остановки за 10 сек при минимальном расходе энергии без учета момента сопротивления ($u_c = 0$):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$x_1(10) = 1, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min.$$

Решение. Эта задача отличается от задачи, рассмотренной в примере 8.4, только краевым условием на правом конце траектории. Как было получено, гамильтониан и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} - 2u + \psi_2 = 0;$$

решением уравнений Эйлера–Лагранжа является

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}.$$

В данном случае $G = 0$, и нефиксированной является только координата $x_2(10)$. Поэтому условие трансверсальности принимают вид

$$\psi_2(10) = \frac{\partial G}{\partial x_2(10)} = 0.$$

Исходя из этого условия находим $\psi_2(10) = -C_1 10 + C_2 = 0$, или $C_2 = 10C_1$. Соответственно для управления получаем $u = C_1(10-t)/2$. Подставив это выражение в уравнение объекта и проинтегрировав, получим

$$x_2 = \frac{C_1}{4}(20t - t^2) + C_3, \quad x_1 = \frac{C_1}{4}\left(10t^2 - \frac{t^3}{3}\right) + C_3 t + C_4.$$

Учитывая краевые условия

$$x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(0) = C_3 = 0, \quad x_1(10) = \frac{500}{3}C_1 = 1,$$

находим

$$u^*(t) = 0{,}003(10-t), \; x_1^*(t) = 0{,}0005(30t^2 - t^3), \; x_2^*(t) = 0{,}0015(20t - t^2).$$

Пример 8.6. Определить оптимальное управление в следующей задаче максимального быстродействия:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad \int_0^{t_f} u^2 dt = b,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_f) = d, \quad x_2(t_f) = 0, \quad J = t_f \to \min.$$

Решение. Преобразуем изопериметрическое ограничение:

$$\dot{x}_3 = u^2, \quad x_3(0) = 0, \quad x_3(t_f) = b.$$

В данном случае имеем $g_0 = t_f$ и $G = \nu_0 g_0 = -t_f$. И так как граничные точки траектории закреплены и начальный момент задан (фиксирован), то условия трансверсальности принимают вид

$$H\Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1.$$

Гамильтониан и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \; \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \; \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \; \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 + 2\psi_3 u = 0.$$

Из последних уравнений имеем

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad \psi_3 = C_3, \quad u = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3},$$

или

$$u = \widetilde{C}_1 t - \widetilde{C}_2, \quad \widetilde{C}_1 = \frac{C_1}{2C_3}, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{C_2}{2C_3}.$$

Подставив последнее выражение для управления в уравнение объекта и в дополнительное уравнение, получим

$$x_2 = \frac{1}{2}\widetilde{C}_1 t^2 - \widetilde{C}_2 t + C_4, \quad x_1 = \frac{1}{6}\widetilde{C}_1 t^3 - \frac{1}{2}\widetilde{C}_2 t^2 + C_4 t + C_5,$$
$$x_3 = \frac{1}{3}\widetilde{C}_1^2 t^3 - \widetilde{C}_1\widetilde{C}_2 t^2 + \widetilde{C}_2^2 t + C_6.$$

Из граничных условий имеем

$$x_1(0) = C_5 = 0, \quad x_2(0) = C_4 = 0, \quad x_3(0) = C_6 = 0;$$
$$x_1(t_f) = \frac{1}{6}\widetilde{C}_1 t_f^3 - \frac{1}{2}\widetilde{C}_2 t_f^2 = d, \quad x_2(t_f) = \frac{1}{2}\widetilde{C}_1 t_f^2 - \widetilde{C}_2 t_f = 0,$$
$$x_3(t_f) = \frac{1}{3}\widetilde{C}_1^2 t_f^3 - \widetilde{C}_1\widetilde{C}_2 t_f^2 + \widetilde{C}_2^2 t_f = b.$$

Отсюда находим $\widetilde{C}_1 = -\frac{b}{d}$, $\widetilde{C}_2 = -\sqrt[3]{\frac{3b^2}{2d}}$, $t_f = \sqrt[3]{\frac{12d^2}{b}}$. Оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \widetilde{C}_1 t - \widetilde{C}_2 = -\frac{b}{d}t + \sqrt[3]{\frac{3b^2}{2d}}.$$

Здесь, как и в примерах 8.4 и 8.5, из физических соображений предполагается, что решение задачи существует. Поэтому единственное управление, удовлетворяющее правилу множителей Лагранжа, будет оптимальным. В данном примере условия трансверсальности при нахождении оптимального управления не использовались. Они потребовались бы, если нужно было бы определить множители Лагранжа.

Задачи

8.17. Записать уравнения Эйлера–Лагранжа и условия трансверсальности при условии, что объект описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = u_1, \quad \dot{x}_4 = u_2;$$

ограничения на управление, краевые условия и критерий оптимальности имеют следующий вид:

а) $$\int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2)dt = A \ (A = \text{const}), \quad x(0) = 0, \quad x_4 = (t_f) = 0,$$
$$J = -x_2(t_f);$$

б) $\int\limits_0^{t_f}(u_1^2+u_2^2)dt = A\ (A=\text{const}),\quad x_1(0)=0,\quad x_2(0)=h,$

$x_3^2(0)+x_4^2(0)=v^2,\quad x_4(t_f)=0,\quad J=-x_2(t_f);$

в) $\int\limits_0^{t_f}(u_1^2+u_2^2)dt = A\ (A=\text{const}),\quad x(0)=0,\quad x_2(t_f)=0,$

$J=-x_1(t_f);$

г) $\int\limits_0^{t_f}(u_1^2+u_2^2)dt = A\ (A=\text{const}),\quad x_1(0)=0,\quad x_2(0)=h,$

$x_3^2(0)+x_4^2(0)=v^2,\quad x_2(t_f)=0,\quad J=-x_1(t_f);$

д) $u_1^2+u_2^2\leqslant u_m^2,\quad x(0)=0,\quad x(t_f)=x^f,\quad J=t_f;$

е) $u_1^2+u_2^2\leqslant u_m^2,\quad x_1(0)=0,\quad x_2(0)=h,\quad x_3^2(0)+x_4^2(0)=v^2,$
$x(t_f)=x^f,\quad J=t_f;$

ж) $x(0)=0,\quad x_1(t_f)=x_1^f,\quad x_2(t_f)=x_2^f,\quad J=\int\limits_0^{t_f}(u_1^2+u_2^2)dt;$

з) $x_1(0)=0,\quad x_2(0)=h,\quad x_3^2(0)+x_4^2(0)=v^2,\quad x_1(t_f)=x_1^f,$

$x_2(t_f)=x_2^f,\quad J=\int\limits_0^{t_f}(u_1^2+u_2^2)dt;$

и) $u_1^2+u_2^2\leqslant u_m^2,\quad x(0)=0,\quad x_1(t_f)=x_1^f,\quad x_2(t_f)=x_2^f,$
$J=-\left[x_3^2(t_f)+x_4^2(t_f)\right];$

к) $u_1^2+u_2^2\leqslant u_m^2,\quad x_1(0)=0,\quad x_2(0)=h,\quad x_3^2(0)+x_4^2(0)=v^2,$
$x_1(t_f)=x_1^f,\quad x_2(t_f)=x_2^f,\quad J=-[x_3^2(t_f)+x_4^2(t_f)].$

Примечание. $x^0=\left(x_1^0\ x_2^0\ x_3^0\ x_4^0\right)^T$, $x^f=\left(x_1^f\ x_2^f\ x_3^0\ x_4^f\right)^T$, v, h, u_m — const; t_f — var.

8.18. Определить оптимальное программное управление $u^*(t)$ и оптимальную траекторию $x^*(t)$ в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=u,\quad x(0)=0,\quad x_1(10)=10,\quad x_2(10)=0,$

$$J=\int\limits_0^{10}u^2dt\to\min;$$

б) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = 0, \quad x_1(10) = 10, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

в) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = 0, \quad x_2(10) = 10, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

г) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad x(0) = 0, \quad x_1(10) = 10, \quad x_2(10) = 0,$

$J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

д) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad x(0) = 0, \quad x_1(10) = 10,$

$J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

е) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad x(0) = 0, \quad x_2(10) = 10,$

$J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(10) = 10,$

$x_2(10) = 0, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

з) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 5, \quad x_1(10) = 10,$

$x_2(0) = 0, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

и) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(10) = 10,$

$x_2(10) = 0, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min;$

к) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 5, \quad x_1(10) = 10,$

$x_2(10) = 0, \quad J = \int\limits_0^{10} u^2 dt \to \min.$

8.3. Принцип максимума Понтрягина

Во многих прикладных задачах на управление накладывается ограничение типа неравенства. Часто оптимальное управление в таких задачах имеет разрыв. Метод множителей Лагранжа не позволяет определить число и местоположения точек разрыва, и поэтому в этих случаях он не эффективен. Такие задачи легче решаются с помощью принципа максимума Понтрягина.

Задача с закрепленными концами и фиксированным временем. При отсутствии фазового ограничения задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем в общем виде можно сформулировать как следующую задачу Лагранжа:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.8а}$$

$$\mathbf{u} \in U \subseteq R^r \tag{8.8б}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.8в}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \to \min(\inf). \tag{8.8г}$$

Функции f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ непрерывны по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_r$, t и непрерывно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$, t. Эта задача отличается от задачи оптимального управления классического типа тем, что ограничение задается на управление в виде включения $\mathbf{u} \in U$, где U — допустимое множество значений управления. Кроме того, здесь не требуется гладкость (непрерывная дифференцируемость) функций f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ по u.

В данной задаче *допустимыми управлениями* считаются управления $u(t)$, принадлежащие к классу кусочно-непрерывных функций и принимающие значения из допустимого множества U. Фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ называется *допустимой*, если она является кусочно-гладкой. При допустимом управлении фазовая траектория задачи (8.8) является кусочно-гладкой: координаты $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны всюду на интервале $[t_0, t_f]$, их производные могут иметь разрывы 1-го рода в точках разрыва управления. Пара $(\widetilde{\mathbf{u}}(t), \widetilde{\mathbf{x}}(t))$ называется *допустимой* для задачи (8.8), если $\widetilde{\mathbf{u}}(t)$ и $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ являются допустимыми управлением и траекторией и $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ при $\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}}(t)$ удовлетворяет уравнениям объекта и краевым условиям этой задачи.

Рассмотрим функцию

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i, \tag{8.9}$$

которую также называют *функцией Гамильтона или гамильтонианом*. Но она отличается от одноименной функции классического вариационного исчисления тем, что в них не входит ограничение на управление, имеющее в данном случае вид включения $u \in U$. В конкретных задачах ограничение на управление может быть задано в виде неравенства или равенства. Гамильтониан (8.9), который не включает ограничение на управление, в отличие от гамильтониана, включающего ограничение на управление, называют также *функцией Понтрягина*.

Уравнения

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8.10а}$$

называются *сопряженной системой*.

Принцип максимума при закрепленных концах и фиксированном времени. *Для того чтобы допустимая для задачи* (8.8) *пара* $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ *была ее решением, необходимо, чтобы существовали такие не обращающиеся одновременно в нуль константа* $\psi_0^* \leqslant 0$ *и решение* $\psi^* = (\psi_1^*, \ldots, \psi_n^*)^T$ *сопряженной системы* (8.10а) *при* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ *и* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, *что при любом* $t \in [t_0, t_f]$, *кроме точек разрыва* $\mathbf{u}^*(t)$, *функция* $\widetilde{H}(\mathbf{u}) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t)$ *при* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ *достигает максимума, т.е. выполняется соотношение*

$$\max_{u \in U} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\psi}^*, t). \tag{8.10б}$$

Задача с подвижными концами и нефиксированным временем. Рассмотрим задачу Больца

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^r; \tag{8.11а}$$

$$g_j[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q < 2n; \tag{8.11б}$$

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \to \min. \tag{8.11в}$$

Принцип максимума при подвижных концах и нефиксированном времени. *Для того чтобы допустимая для задачи* (8.11) *пара* $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ *была ее решением, необходимо*:

1) *существование таких не обращающиеся одновременно в нуль константы* $\psi_0^* \leqslant 0$ *и решения* $\boldsymbol{\psi}^* = (\psi_1^*, \ldots, \psi_n^*)^T$ *сопряженной системы* (8.10а) *при* $\mathbf{x} = x^*(t)$ *и* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, *что при любом* $t \in [t_0, t_f]$, *кроме точек разрыва* $\mathbf{u}^*(t)$, *функция* $\widetilde{H}(\mathbf{u}) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t)$ *при* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ *достигает максимума, т.е. выполняется соотношение* (8.10б);

2) *выполнение условия трансверсальности* (8.7)

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \quad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$H\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}, \quad H\Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}.$$

Рассмотрим, какова связь между принципом максимума и методом множителей Лагранжа. Как отмечалось, функция Понтрягина отличается от гамильтониана, рассматриваемого в методе множителей Лагранжа, тем, что в нее не включено ограничение на управление. Сопряженные уравнения (8.10а) совпадают с уравнениями Эйлера–Лагранжа (8.5а), если отсутствует фазовое ограничение: функция φ_k, определяющая ограничение на управление н фазовые координаты, не зависит от фазовых координат. Но они не включают условия стационарности гамильтониана (уравнения (8.5б)). Их заменяет условие максимума (8.10б). Если ограничение на управление задается в виде равенств, то, используя метод неопределенных множителей Лагранжа нахождения экстремума функции, из (8.10б) получим недостающие уравнения Эйлера–Лагранжа.

Пример 8.7. Определить оптимальное управление в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad |u| \leqslant a,$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(10) = 0, \quad J = -x_1(10) \to \min.$$

Решение. Запишем функцию Понтрягина н сопряженные уравнения.

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$
$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Терминант и условия трансверсальности имеют вид

$$G = \nu_0 g_0 = -x_1(10), \quad \psi_1(T) = \frac{\partial G}{\partial x_1(10)} = -1.$$

Решив сопряженные уравнения и учитывая условня трансверсальности, находим

$$\psi_1 = -1, \quad \psi_2 = C_2 - t.$$

В условии $\max\limits_{|u| \leqslant a} H = \psi_1 x_2 + \max\limits_{|u| \leqslant a} \psi_2 u$ максимум достигается, когда управление принимает граничные значения и его знак совпадает со знаком функции ψ_2, т.е. при $u = a \operatorname{sign} \psi_2$. Так как знак линейной функции может измениться только один раз, то оптимальным может быть управление

$$u = \begin{cases} a, & 0 \leqslant t < t_1, \\ -a, & t_1 \leqslant t \leqslant 10, \end{cases} \quad \text{или } u = \begin{cases} -a, & 0 \leqslant t < t_1, \\ a, & t_1 \leqslant t \leqslant 10, \end{cases}$$

где t_1 — момент изменения знака функции ψ_2. В частности, если $t_1 = 10$, то это значит, что функция ψ_2 на интервале $[0, 10]$ не меняет знак и управление не переключается. Выбор из двух управлений можно сделать исходя из того, какое из этих управлений обеспечивает выполнение граничных условий. Но в данном примере этот выбор можно сделать на основании физических соображений. По условию задачи нужно повернуть вал двигателя на максимальный угол и остановить за заданное время. Поэтому оптимальным может быть только первое из двух приведенных управлений. Остается определить только момент t_1 переключения управления.

Проинтегрируем уравнения объекта при первом управлении с учетом начальных условий:

$$x_2 = \begin{cases} at, & 0 \leqslant t < t_1, \\ C_2 - at, & t_1 \leqslant t \leqslant 10. \end{cases}$$

Используя непрерывность $x_2(t)$, т. е. равенство $at_1 = C_2 - at_1$, находим $C_2 = 2at_1$. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$x_2 = \begin{cases} at, & 0 \leqslant t < t_1, \\ a(2t_1 - t), & t_1 \leqslant t \leqslant 10. \end{cases}$$

Из краевого условия на правом конце траектории имеем: $x_2(10) = a(2t_1 - 10) = 0$. Откуда для момента переключения находим $t_1 = 5$. Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} a, & 0 \leqslant t < 5, \\ -a, & 5 \leqslant t \leqslant 10. \end{cases}$$

Задача максимального быстродействия. Теорема об n интервалах. Рассмотрим задачу максимального быстродействия, когда объект является линейным:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.12а}$$

$$\alpha_j \leqslant u_j \leqslant \beta_j, \quad \alpha_j < 0, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r; \tag{8.12б}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{8.12в}$$

$$J = t_f - t_0 \to \min. \tag{8.12г}$$

Эта задача называется *линейной задачей максимального быстродействия*. В векторной форме уравнения объекта принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}.$$

Предполагается, что эти уравнения являются уравнениями в отклонениях, и поэтому конечное состояние, в которое нужно перевести объект, есть начало координат ($\mathbf{x}(t_f) = 0$).

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi^T (A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j \right),$$

где $\psi^T = (\psi_1\ \psi_2 \cdots\ \psi_n)$ подчиняется сопряженному уравнению

$$\dot{\psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление определяется из условия

$$\max_{u\in U} H = \sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k + \max_{u\in U}\sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{j=1}^{r}b_{ij}u_j,$$

или

$$\max_{u\in U}\sum_{j=1}^{r}u_j\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\psi_i = \sum_{j=1}^{r}\max_{u\in U}\left(u_j\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\psi_i\right),$$

где

$$U = \left\{\mathbf{u}\colon \alpha_j \leqslant u_j \leqslant \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, r\right\}.$$

Если выполняется так называемое условие нормальности (см. ниже), то сумма $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i$ обращается в нуль только в изолированных точках. В этом случае из последнего тождества следует, что координаты u_j^* $(j = 1, \ldots, r)$ оптимального управления $u^*(t)$ кусочно-постоянны и принимают крайние значения α_j или β_j:

$$u_j^* = \begin{cases} \alpha_j, & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i < 0, \\ \beta_j, & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i > 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, r\,.$$

В частном случае, когда $\beta_j = -\alpha_j$, имеем

$$u_j^* = \beta_j \operatorname{sign}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Для линейных задач максимального быстродействия при выполнении так называемого условия нормальности принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Для определения этого понятия введем в рассмотрение $(n\times n)$-матрицы

$$N[j] = [B^j (AB)^j \cdots (A^{n-1}B)^j],$$

где $B^j, (AB)^j, \ldots, (A^{n-1}B)^j$ — j-е столбцы матриц $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ соответственно.

Условие нормальности. *Говорят, что для объекта* $\dot{x} = Ax + Bu$ *выполнено условие нормальности или условие общности положения, если матрицы* $N[j]$ *не вырождены*: $\det N[j] \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Очевидно, в случае скалярного управления условие нормальности совпадает с условием управляемости. Объект, для которой выполнено условие нормальности, называют *нормальным объектом* или *нормальной управляемой системой*.

Пример 8.8. Определить, выполнено ли условие нормальности для объекта

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1 + u_2.$$

Решение. В данном примере имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $N[j]$ имеют вид

$$N[1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и обе они не вырождены. Следовательно, условие нормальности выполняется.

Необходимое и достаточное условие оптимальности. *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным, то для того чтобы пара* $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ *была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла принципу максимума.*

В оптимальном по быстродействию управлении линейным объектом функции $u_j^*(t)$ принимают только граничные значения при любых собственных значениях матрицы A, если объект является нормальным. В общем случае эти функции имеют произвольное число переключений — точек перехода из одного граничного значения на другое. В частном случае справедлива следующая теорема.

Теорема об n интервалах. *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным и характеристическое уравнение*

$$\det(A - Is) = 0$$

имеет только действительные корни, то компоненты оптимального управления $u_j^*(t) (j = 1, 2, \ldots, r)$ *кусочно-постоянны, принимают только граничные значения и имеют не более* n *интервалов постоянства, или не более* $n - 1$ *переключений.*

Задачи

8.19. Определить оптимальное программное управление $u^*(t)$ и оптимальную траекторию $x^*(t)$ в следующих задачах максимального быстродействия:

а) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u, \ \ |u| \leqslant 1, \ \ x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10, \ \ x_2(t_f) = 0,$
$J = t_f \to \min.$

б) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u, \ \ |u| \leqslant 1, x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10, \ \ J = t_f \to \min.$

в) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u, \ \ |u| \leqslant 1, \ \ x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10, \ \ x_2(t_f) = 5,$
$J = t_f \to \min.$

г) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u, \ \ |u| \leqslant 1, \ \ x_1(0) = 0, \ \ x_2(0) = 5, \ \ x_1(t_f) = 10,$
$x_2(t_f) = 0, \ \ J = t_f \to \min.$

д) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u, \ \ |u| \leqslant 1, \ \ x_1(0) = 5, \ \ x_2(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10,$
$x_2(t_f) = 0, \ \ J = t_f \to \min.$

е) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - 1, \ \ |u| \leqslant 2, \ \ x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10, \ \ x_2(t_f) = 0,$
$J = t_f \to \min.$

ж) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - 1, \ \ |u| \leqslant 2, \ \ x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10,$
$J = t_f \to \min.$

з) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - 1, \ \ |u| \leqslant 2, \ \ x(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10, \ \ x_2(t_f) = 5,$
$J = t_f \to \min.$

и) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - 1, \ \ |u| \leqslant 2, \ \ x_1(0) = 0, \ \ x_2(0) = 5, \ \ x_1(t_f) = 10,$
$x_2(t_f) = 0, \ \ J = t_f \to \min.$

к) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - 1, \ \ |u| \leqslant 2, \ \ x_1(0) = 5, \ \ x_2(0) = 0, \ \ x_1(t_f) = 10,$
$x_2(t_f) = 0, \ \ J = t_f \to \min.$

8.4. Метод динамического программирования

Основу динамического программирования как метода оптимизации составляют: 1) принцип оптимальности; 2) инвариантное погружение, т. е. включение исходной задачи в семейство аналогичных задач; 3) функциональное уравнение, получаемое на основе принципа оптимальности и инвариантного погружения.

Инвариантное погружение и функциональное уравнение. Основная идея метода динамического программирования заключается в следующем. Вместо того чтобы решать исходную задачу, ее включают в некоторое семейство задач оптимизации (инвариантное погружение). При этом может оказаться, что между отдельными задачами существуют простые соотношения, и среди задач семейства найдется такая, которая легко решается. Тогда, используя решение последней и соотношение, связывающее отдельные задачи семейства, т. е. функциональное уравнение, получают решение исходной задачи.

Принцип оптимальности. *Оптимальная стратегия* (*поведение*) *обладает тем свойством, что, каковы бы ни были* *начальное состояние и решения на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решений на начальном этапе.*

В задачах оптимального управления оптимальность определяется функционалом (критерием оптимальности) $J(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t))$, состояние — фазовым вектором $\mathbf{x}(t)$, стратегия — это управление $\mathbf{u}(t)$ на всем интервале $[t_0, t_f]$, решение — это выбор конкретного управления.

Для задачи оптимального управления справедлив принцип оптимальности, если она обладает марковским свойством. По определению, задача оптимального управления обладает *марковским свойством*, если после выбора управления на начальном интервале $[t_0, t']$, каково бы оно не было, вклад на величину критерия $J(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t))$ на конечном интервале $[t', t_f]$ оказывают влияние выбор управления на этом интервале и значение фазового вектора в конце начального интервала, т. е. $\mathbf{x}(t')$.

Чтобы сформулировать принцип оптимальности применительно к задачам оптимального управления, рассмотрим задачу

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u}(t) \in U_t; \tag{8.13а}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) \in X_f; \tag{8.13б}$$

$$J = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt \to \min. \tag{8.13в}$$

Условимся управление $\mathbf{u}(t)$ на интервале $[a, b]$ обозначать $\mathbf{u}[a, b]$: $\mathbf{u}[a, b] = (\mathbf{u}(t),\ a \leqslant t \leqslant b)$. Если интервал слева или справа является открытым, то соответственно слева или справа будем писать круглую скобку: $\mathbf{u}(a, b] = (\mathbf{u}(t),\ a < t \leqslant b)$и $\mathbf{u}[a, b) = (\mathbf{u}(t),\ a \leqslant t < b)$.

Для задачи (8.13) справедлив принцип оптимальности, и он может быть сформулирован следующим образом: *для оптимальности допустимой для задачи* (8.13) *пары* $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ *необходимо, чтобы при любом* $t' \in [t_0, t_f]$ *управление* $\mathbf{u}^*[t', t_f]$ *было оптимальным относительно состояния* $\mathbf{x}^*(t')$, *в котором окажется объект в момент* t' *при выборе на начальном отрезке времени* $[t_0, t')$ *управления* $\mathbf{u}^*[t_0, t')$.

Функции и уравнения Беллмана. Уравнение

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right] = 0, \tag{8.14а}$$

или

$$\min_{u(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = -\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{8.14б}$$

называется *уравнением Беллмана*. Здесь $S(\mathbf{x}(t), t)$ — функция Беллмана, и она определяется следующим образом:

$$S(x(t), t) = \min_{\substack{u \in U \\ t \leqslant \tau \leqslant t_f}} \left[g_0(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} f_0(x, u, \tau) d\tau \right].$$

Сформулируем основной результат: *Если функция Беллмана дифференцируема, то для того, чтобы допустимая пара* $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ *для задачи* (8.13) *была ее решением, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Беллмана* (8.14) *при граничном условии*

$$S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f). \tag{8.15}$$

Если минимум в левой части уравнения (8.14б) *достигается во внутренних точках множества* U_t, *то его можно записать в виде*

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{8.16а}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{8.16б}$$

Уравнения (8.16б) выражают необходимое условие минимума левой части (8.14б) и заменяют опущенную в уравнении (8.16а) операцию минимизации по управлению.

Если правые части уравнений объекта и подынтегральное выражение в критерии оптимальности, т. е. функции f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, явно не зависят от времени, и конечный момент не фиксирован, то функция Беллмана не зависит явно от времени и $\partial S / \partial t = 0$.

Оптимальное управление методом динамического программирования находится следующим образом:

1) из уравнений (8.16б) определяется управление как функция от S: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$;
2) подставив $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$ в уравнение (8.16а) и решив его при краевом условии (8.15), находится функция Беллмана;
3) подставив найденную функцию Беллмана в выражение $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$, получают оптимальное управление как функцию фазовых координат.

Пример 8.9. Определить оптимальное управление с обратной связью в следующей задаче:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0; \quad J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt.$$

Здесь x_1^0 и x_2^0 — заданные числа, момент t_f не фиксирован.

Решение. Воспользуемся методом динамического программирования и выпишем уравнения (8.16):

$$x_1^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2}u = 0, \quad 2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0.$$

Из второго уравнения находим $u = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2}$. Подставим это выражение в первое уравнение:

$$x_1^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 = 0.$$

Нужно решить это уравнение при граничном условии $S(x(t_f)) = 0$. Будем искать решение в виде квадратичной формы

$$S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_{22},$$

которая в силу краевых условий удовлетворяет указанному граничному условию. Подставив это выражение в уравнение Беллмана, получим

$$x_1^2 - \frac{1}{4}(2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0,$$

или

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + (2a_{12} - a_{22}^2)x_2^2 = 0.$$

Последнее равенство будет выполняться тождественно, если

$$1 - a_{12}^2 = 0, \quad 2a_{11} - 2a_{12}a_{22} = 0, \quad 2a_{12} - a_{22}^2 = 0.$$

Эта система имеет следующие решения:

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad a_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Так как, по определению, функция Беллмана имеет вид

$$S(x(t)) = \min_{\substack{u(t)\\ t \leqslant \tau \leqslant t_f}} \int_t^{t_f} (x_1^2 + u^2)d\tau,$$

то $S > 0$ при всех $t < t_f$. Поэтому квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению Беллмана, будет функцией Беллмана, если она является положительно определенной. Критерию Сильвестра положительной определенности квадратичной формы удовлетворяет решение $a_{12} = 1$, $a_{22} = \sqrt{2}$, $a_{11} = \sqrt{2}$. Поэтому функция Беллмана и оптимальное управление имеют вид

$$S = \sqrt{2}\,x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{2}\,x_2^2, \quad u^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}\,x_2).$$

Методы классического вариационного исчисления и принцип максимума, как правило, позволяют находить оптимальное управление как функцию времени. В то же время, как следует из рассмотренного примера, метод динамического программирования позволяет находить оптимальное управление с обратной связью. Недостатком метода динамического программирования при решении задач оптимального управления является то, что он исходную задачу сводит к решению нелинейного уравнения в частных производных.

Уравнение Беллмана как необходимое условие оптнмальности получено при предположении, что функция Беллмана является гладкой (непрерывно дифференцируемой). Однако это допущение не вытекает из условия задачи оптимального управления и часто не выполняется. Поэтому применительно к задачам оптимального управления метод динамического программированвя требует обоснования. В тех случаях, когда нет обоснования, он может быть использован как эвристический прием. При определенных условиях метод динамического программирования дает достаточное условие оптимальности.

Достаточное условие оптимальности. *Пусть* $S(x,t)$ — *гладкое решение уравнения Беллмана* (8.14а) *при граничном условии* (8.15), *и управление* $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$, *найденное из условия*

$$f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}^*,t)+\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}^*,t)+\frac{\partial S}{\partial t}=\min_{u\in U}\Big(f_0+\frac{dS}{dt}\Big),$$

порождает единственную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, *удовлетворяющую уравнениям* (8.13а) *и краевым условиям* (8.13б), *вдоль которой функция* $\mathbf{u}^*(t)=\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*(t),t)$ *кусочно-непрерывна. Тогда функция* $\mathbf{u}^*(x,t)$ *является оптимальным управлением задачи* (8.13).

Задачи

8.20. Определить оптимальный закон управления (управление с обратной связью) в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ x(0)=x^0,\ \ J=\displaystyle\int_0^\infty (u^2+4x_1^2)dt;$

б) $\dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ x(0)=x^0,\ \ J=\displaystyle\int_0^\infty (u^2+4x_1^2+5x_2^2)dt;$

в) $\dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u,\ \ x(0)=x^0,\ \ J=\displaystyle\int_0^\infty (u^2+x_1^2+2x_2^2)dt;$

г) $\dot{x}_1=x_2,\ \ \dot{x}_2=u-x_2,\ \ x(0)=x^0,\ \ J=\displaystyle\int_0^\infty (u^2+16x_1^2)dt;$

д) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + x_1^2 + x_2^2)dt;$

е) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2)dt;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_1 - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + 3x_1^2 + x_2^2)dt;$

з) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_1 - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + 8x_1^2 + 4x_2^2)dt;$

и) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_1 - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + 15x_1^2 + 2x_2^2)dt;$

к) $\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = u - x_1 - x_2, \ \ x(0) = x^0, \ \ J = \int\limits_0^\infty (u^2 + 3x_2^2)dt.$

Ответы

8.1. $\mathbf{x}(t_0) = 0, \ x_2(t_f) = h, \ J = t_f.$

8.2. $x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = h_0, \ x_3(t_0) = v, \ x_4(t_0) = 0, \ x_2(t_f) = h,$
$J = t_f.$

8.3. $\mathbf{x}(t_0) = 0, \ x_1(t_f) = x_1^f, \ x_2(t_f) = x_2^f, \ J = \int\limits_{t_0}^{t_f} \left(u_1^2 + u_2^2\right)dt.$

8.4. $x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = h_0, \ x_3(t_0) = v/2, \ x_4(t_0) = v/2, \ x_1(t_f) = x_1^f,$
$x_2(t_f) = x_2^f, \ J = \int\limits_{t_0}^{t_f} \left(u_1^2 + u_2^2\right)dt.$

8.5. $\mathbf{x}(t_0) = 0, \ x_4(t_f) = 0, \ J = -x_2(t_f).$

8.6. $x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = x_2^0, \ x_3(t_0) = v/2, x_4(t_0) = v/2, \ x_4(t_f) = 0,$
$J = -x_2(t_f).$

8.7. $x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = x_2^0, \ x_3(t_0) = v/2, \ x_4(t_0) = v/2, \ x_2(t_f) = 0,$
$J = -x_1(t_f).$

8.8. $x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = x_2^0, \ x_3(t_0) = v, \ x_4(t_0) = 0, \ x_2(t_f) = 0,$
$J = -x_1(t_f).$

8.9. $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = h,\ x_3(t_0) = v,\ x_4(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = d,$
$x_2(t_f) = 0,\ J = t_f.$

8.10. $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ x_3(t_0) = v/2,\ x_4(t_0) = v/2,\ x_1(t_f) = d,$
$x_2(t_f) = 0,\ J = t_f.$

8.11. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ x_1(T) = \alpha,\ J = \int\limits_0^T u^2 dt.$

8.12. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ x_1(T) = \alpha,\ x_2(T) = 0,\ J = \int\limits_0^T u^2 dt.$

8.13. $|u| \leqslant u_m,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ x_1(t_f) = \alpha,\ x_2(t_f) = 0,\ J = t_f.$

8.14. $|u| \leqslant u_m,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ x_1(t_f) = \alpha,\ J = t_f.$

8.15. $|u| \leqslant u_m,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ J = -x_1(T).$

8.16. $|u| \leqslant u_m,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0},\ x_2(T) = 0,\ J = -x_1(T).$

8.17. а) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2,\ \dot\psi_5 = 0;\ \psi_3 + 2\psi_5 u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\psi_5 u_2 = 0;\ \psi_1(t_f) = 0,\ \psi_2(t_f) = 1,\ \psi_3(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \psi_5(u_1^2 + u_2^2))\big|_{t=t_f} = 0.$

б) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2,\ \dot\psi_5 = 0;\ \psi_3 + 2\psi_5 u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\psi_5 u_2 = 0;\ \psi_3(0) = -2\nu x_3(0),\ \psi_4(0) = -2\nu x_4(0),$
$\psi_1(t_f) = 0,\ \psi_2(t_f) = 1,\ \psi_3(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \psi_5(u_1^2 + u_2^2))\big|_{t=t_f} = 0.$

в) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2,\ \dot\psi_5 = 0;\ \psi_3 + 2\psi_5 u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\psi_5 u_2 = 0;\ \psi_1(t_f) = 1,\ \psi_3(t_f) = 0,\ \psi_4(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \psi_5(u_1^2 + u_2^2))\big|_{t=t_f} = 0.$

г) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2,\ \dot\psi_5 = 0;\ \psi_3 + 2\psi_5 u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\psi_5 u_2 = 0;\ \psi_3(0) = -2\nu x_3(0),\ \psi_4(0) = -2\nu x_4(0),$
$\psi_1(t_f) = 1,\ \psi_3(t_f) = 0,\ \psi_4(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \psi_5(u_1^2 + u_2^2))\big|_{t=t_f} = 0.$

д) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 + 2\lambda u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\lambda u_2 = 0;\ 2\lambda u_3 = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_m^2))\big|_{t=t_f} = 1.$

е) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 + 2\lambda u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\lambda u_2 = 0;\ 2\lambda u_3 = 0,\ \psi_3(0) = -2\nu x_3(0),\ \psi_4(0) = -2\nu x_4(0),$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_m^2))\big|_{t=t_f} = 1.$

ж) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1, \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 - 2u_1 = 0,$
$\psi_4 - 2u_2 = 0;\ \psi_3(t_f) = 0, \psi_4(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 - (u_1^2 + u_2^2))\,\big|_{t=t_f} = 0.$

з) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 - 2u_1 = 0,$
$\psi_4 - 2u_2 = 0;\ \psi_3(0) = -2\lambda x_3(0),\ \psi_4(0) = -2\lambda x_4(0),$
$\psi_3(t_f) = 0,\ \psi_4(t_f) = 0,$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 - (u_1^2 + u_2^2))\,\big|_{t=t_f} = 0.$

и) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 + 2\lambda u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\lambda u_2 = 0;\ 2\lambda u_3 = 0,\ \psi_3(t_f) = 2x_3(t_f),\ \psi_4(t_f) = 2x_4(t_f),$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_m^2))\,\big|_{t=t_f} = 0.$

к) $\dot\psi_1 = 0,\ \dot\psi_2 = 0,\ \dot\psi_3 = -\psi_1,\ \dot\psi_4 = -\psi_2;\ \psi_3 + 2\lambda u_1 = 0,$
$\psi_4 + 2\lambda u_2 = 0;\ 2\lambda u_3 = 0,\ \psi_3(0) = -2\nu x_3(0),$
$\psi_4(0) = -2\nu x_4(0),\ \psi_3(t_f) = 2x_3(t_f), \psi_4(t_f) = 2x_4(t_f),$
$H = (\psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_m^2))\,\big|_{t=t_f} = 0.$

8.18. а) $u^*(t) = 0{,}6 - 0{,}12t,\ x_1^*(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}02t^3,\ x_2^*(t) = 0{,}6t - 0{,}06t^2;$

б) $u^*(t) = 0{,}3 - 0{,}03t,\ x_1^*(t) = 0{,}15t^2 - 0{,}005t^3,$
$x_2^*(t) = 0{,}3t - 0{,}015t^2;$

в) $u^*(t) = 0{,}1,\ x_1^*(t) = 0{,}5t^2,\ x_2^*(t) = t;$

г) $u^*(t) = \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{25}t,\ x_1^*(t) = \dfrac{3}{10}t^2 - \dfrac{1}{50}t^3,\ x_2^*(t) = \dfrac{3}{5}t - \dfrac{3}{50}t^2;$

д) $u^*(t) = \dfrac{9}{5} - \dfrac{3}{50}t,\ x_1^*(t) = \dfrac{2}{5}t^2 - \dfrac{3}{100}t^3,\ x_2^*(t) = \dfrac{4}{5}t - \dfrac{9}{100}t^2;$

е) $u^*(t) = 2,\ x_1^*(t) = 0{,}5t^2,\ x_2^*(t) = t;$

ж) $u^*(t) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{50}t,\ x_1^*(t) = \dfrac{3}{20}t^2 - \dfrac{1}{100}t^3 + 5,$
$x_2^*(t) = \dfrac{3}{10}t - \dfrac{3}{100}t^2;$

з) $u^*(t) = \dfrac{9}{50}t - \dfrac{7}{5},\ x_1^*(t) = 5t - \dfrac{7}{10}t^2 + \dfrac{3}{100}t^3,$
$x_2^*(t) = 5 - \dfrac{7}{5}t + \dfrac{9}{100}t^2;$

и) $u^*(t) = \dfrac{13}{10} - \dfrac{3}{50}t,\ x_1^*(t) = 5 + \dfrac{3}{20}t^2 - \dfrac{1}{100}t^3,$
$x_2^*(t) = \dfrac{3}{10}t - \dfrac{3}{100}t^2;$

к) $u^*(t) = \frac{9}{50}t - \frac{2}{5}$, $x_1^*(t) = 5t - \frac{7}{10}t^2 + \frac{3}{100}t^3$,

$x_2^*(t) = 5 - \frac{7}{5}t + \frac{9}{100}t^2$.

8.19. а) $u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \sqrt{10/3}, \\ -1, & \sqrt{10/3} < t \leqslant \sqrt{40/3}, \end{cases}$

$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{10/3}, \\ \sqrt{40/3} - t, & \sqrt{10/3} \leqslant t \leqslant \sqrt{40/3}, \end{cases}$

$x_1^*(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{10/3}, \\ \sqrt{40/3}\,t - t^2/2 + 10/3, & \sqrt{10/3} \leqslant t \leqslant \sqrt{40/3}; \end{cases}$

б) $u^*(t) = 1$, $x_2^*(t) = t$, $x_1^*(t) = \frac{t^2}{2}$;

в) $u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 2{,}25, \\ -1, & 2{,}25 < t \leqslant 4{,}49, \end{cases}$

$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 2{,}25, \\ 9{,}49 - t, & 2{,}25 \leqslant t \leqslant 4{,}49, \end{cases}$

$x_1^*(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant 2{,}25, \\ 9{,}49t - t^2/2 - 22{,}55, & 2{,}25 \leqslant t \leqslant 4{,}49; \end{cases}$

г) $u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 6{,}58, \\ -1, & 6{,}58 < t \leqslant 8{,}16, \end{cases}$

$x_2^*(t) = \begin{cases} 5 - t, & 0 \leqslant t \leqslant 6{,}58, \\ t - 8{,}16, & 6{,}58 \leqslant t \leqslant 8{,}16, \end{cases}$

$x_1^*(t) = \begin{cases} 5t - t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant 6{,}58, \\ t^2/2 - 8{,}16t + 43{,}29, & 6{,}58 \leqslant t \leqslant 8{,}16; \end{cases}$

д) $u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \sqrt{10}/2, \\ -1, & \sqrt{10}/2 < t \leqslant \sqrt{10}, \end{cases}$

$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{10}/2, \\ \sqrt{10} - t, & \sqrt{10}/2 \leqslant t \leqslant \sqrt{10}, \end{cases}$

$x_1^*(t) = \begin{cases} t^2/2 + 5, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{10}/2, \\ \sqrt{10}\,t - t^2/2 + 5, & \sqrt{10}/2 \leqslant t \leqslant \sqrt{10}; \end{cases}$

е) $u^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < \sqrt{5/3}, \\ -2, & \sqrt{5/3} < t \leqslant \sqrt{80/3}, \end{cases}$

$x_2^*(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{5/3}, \\ 26{,}67 - t, & \sqrt{5/3} \leqslant t \leqslant \sqrt{80/3}, \end{cases}$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} 3t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{5/3}\,, \\ 26{,}67t - t^2/2 + 3{,}33, & \sqrt{5/3} \leqslant t \leqslant \sqrt{80/3}\,; \end{cases}$$

ж) $u^*(t) = 2,\ x_2^*(t) = t,\ x_1^*(t) = \dfrac{t^2}{2},\ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{20}\,;$

з) $$u^*(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t < 0{,}65, \\ 2, & 0{,}65 < t \leqslant 7{,}58, \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -3t, & 0 \leqslant t \leqslant 0{,}65, \\ t - 2{,}58, & 0{,}65 \leqslant t \leqslant 7{,}58, \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} -3t^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant 0{,}65, \\ t^2/2 - 2{,}58t + 0{,}83, & 0{,}65 \leqslant t \leqslant 7{,}58; \end{cases}$$

и) $$u^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < 0{,}81, \\ -2, & 0{,}81 < t \leqslant 2{,}75, \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t + 5, & 0 \leqslant t \leqslant 0{,}81, \\ 8{,}25 - 3t, & 0{,}81 \leqslant t \leqslant 2{,}75, \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} t^2/2 + 5t, & 0 \leqslant t \leqslant 0{,}81, \\ 8{,}25t - 3t^2/2 - 1{,}34, & 0{,}81 \leqslant t \leqslant 2{,}75; \end{cases}$$

к) $$u^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < \sqrt{15/2}\,, \\ -2, & \sqrt{15/2} < t \leqslant \sqrt{40/3}\,, \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{15/2}\,, \\ 3(\sqrt{40/3} - t), & \sqrt{15/2} \leqslant t \leqslant \sqrt{40/3}\,. \end{cases}$$

8.20. а) $u^*(x) = -2(x_1 + x_2)$; б) $u^*(x) = -(2x_1 + 3x_2)$;
в) $u^*(x) = -(x_1 + 2x_2)$; г) $u^*(x) = -(4x_1 + 2x_2)$;
д) $u^*(x) = -(x_1 + x_2)$; е) $u^*(x) = -2(x_1 + x_2)$;
ж) $u^*(x) = -(x_1 + x_2)$; з) $u^*(x) = -2(x_1 + x_2)$;
и) $u^*(x) = -(3x_1 + 2x_2)$; к) $u^*(x) = -x_2$.

Глава 9

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Наблюдатели

Для реализации управления с обратной связью необходимо иметь оценку текущих значений фазового вектора. Устройства, обеспечивающие получение указанной оценки по измерениям (наблюдениям) управления $\mathbf{u}(\tau)$ и выходного вектора $\mathbf{y}(\tau)$ на интервале $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, называют *наблюдателями*. В частности, устройство, описываемое уравнением

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = F\widehat{\mathbf{x}} + K\mathbf{y} + H\mathbf{u},$$

называется наблюдателем полного порядка для управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{9.1}$$

если при $\widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ выполняется равенство $\widehat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ при всех $\mathbf{u}(t)$, $t \geqslant t_0$.

Наблюдатель полного порядка. Наблюдатель указанного выше типа называется *наблюдателем полного порядка*, так как оценка $\widehat{\mathbf{x}}$ имеет такую же размерность, что и вектор состояния $\mathbf{x}$.

Теорема 9.1. *Наблюдатель полного порядка для управляемой системы* (9.1) *имеет вид*

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}), \tag{9.2}$$

где K — произвольная матрица, которая может быть функцией времени и которая называется матрицей коэффициентов усиления.

Устойчивость наблюдателя (9.2) зависит от матрицы $A - KC$. Уравнение для ошибки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - KC)\mathbf{e}.$$

Отсюда следует, что ошибка $\mathbf{e}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ независимо от начальной ошибки тогда и только тогда, когда наблюдатель является асимптотически устойчивым. Поэтому при выборе матрицы коэффициентов усиления K необходимо прежде всего позаботиться о том, чтобы наблюдатель был асимптотически устойчивым. Но от матрицы $A - KC$ и соответственно матрицы K зависит еще и качество наблюдателя. Устойчивость и качество наблюдателя зависит от расположения корней его характеристического уравнения, т. е. собственных значений матрицы $A - KC$ на комплексной плоскости. Собственные значения матрицы $A - KC$ могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости путем выбора матрицы коэффициентов усиления в том и только в том случае, если исходная система, т. е. пара (A, C), вполне наблюдаема. Если система частично наблюдаема, можно найти постоянную матрицу K, при которой наблюдатель асимптотически устойчив, в том и только в том случае, если система обнаруживаема.

В случае стационарного наблюдателя ошибка $e(t)$ тем быстрее сходится к нулю, чем больше значения элементов матрицы K. Однако с увеличением коэффициентов усиления наблюдатель становится чувствительным к шумам измерения. Поэтому оптимальная матрица K может быть определена только с учетом реальных помех.

Наблюдатели пониженного порядка. Рассмотрим систему (9.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ — n-вектор, $\mathbf{y}$ — ρ-вектор, причем $n > \rho$, A, B, C — постоянные матрицы соответствующей размерности. Пусть матрица C имеет максимальный ранг, т. е. равен ρ. Тогда уравнение наблюдения дает ρ независимых линейных уравнений для неизвестного вектора состояния $\mathbf{x}(t)$. Чтобы определить $\mathbf{x}(t)$, необходимо получить дополнительно $n - \rho$ уравнений для координат этого вектора. Наблюдатель, построенный на таком принципе, называется *наблюдателем пониженного порядка*.

Теорема 9.2. *Наблюдатель пониженного порядка для управляемой системы* (9.1) *имеет вид*

$$\widehat{\mathbf{x}} = L_2 q + (L_1 + L_2 K)\mathbf{y}, \tag{9.3а}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (C'AL_2 - KCAL_2)\mathbf{q} + (C'AL_2K + CAL_1 - KCAL_1 - {} \\ - KCAL_2K)y + (C'B - KCB)u, \quad q(t_0) = C'x(t_0) - Ky(t_0), \tag{9.3б}$$

где K — произвольная матрица, матрица C' такова, что матрица $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$ является невырожденной (неособой), L_1 и L_2 — $(n \times \rho)$- и $[n \times (n - \rho)]$-матрицы соответственно и определяются из соотношения $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = [L_1\ L_2]$.

Наблюдатель пониженного порядка (9.3) называют *наблюдателем Луенбергера*.

Пример 9.1. Построить наблюдатели полного и пониженного порядков для управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1.$$

Решение. В данном случае имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель полного порядка принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\widehat{x}}_1 \\ \dot{\widehat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (y - \widehat{x}_1),$$

или в скалярной форме

$$\widehat{x}_1 = \widehat{x}_2 + k_1(y - \widehat{x}_1), \quad \dot{\widehat{x}}_2 = u + k_2(y - \widehat{x}_1).$$

Для построения наблюдателя пониженного порядка необходимо определить матрицы C', L_1, L_2. Матрица C' должна быть такой, чтобы квадратная матрица $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$ была невырожденной. В остальном она может быть произвольной. Условию невырожденности указанной выше квадратной матрицы удовлетворяет матрица $C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому имеем

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix},$$

откуда $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Подставив выражения для A, B, C, C', L_1 и L_2 в (9.3), получим

$$\dot{q} = -kq - k^2 + u, \quad \widehat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} y.$$

Напомним, что матрица K, или в случае наблюдателя пониженного порядка в данном примере скалярная величина k, выбирается из условия устойчивости и требований к качеству наблюдателя.

Задачи

9.1. Синтезировать наблюдатель Луенбергера для следующих управляемых систем (см. в конце задания указание):

а) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3,\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2,\\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2,\\ \dot{x}_3 &= 2x_2 + 3x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_2 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$ г) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$

д) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2,\\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_3 + u;\\ y &= x_1;\end{aligned}$ е) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$

ж) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + 2\cdot x_3,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2,\\ \dot{x}_3 &= 2x_2 + 3x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$ з) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + \alpha\cdot x_3,\\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_2 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$

и) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$ к) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2,\\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_3 + u,\\ y &= x_1;\end{aligned}$

л) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 + u,\\ y &= x_1.\end{aligned}$

Указание. Для упрощения расчетов элементы матрицы коэффициентов усиления K примите равным единице, а матрицу C'выберите такой, чтобы матрица $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$ была единичной.

9.2. Определить матрицу коэффициентов усиления наблюдателя полного порядка, при котором корни характеристического уравнения дифференциального уравнения ошибки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}$ были равны $-3 \pm j2$

и -3, для следующих управляемых систем:

а) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 5x_2 + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$

д) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 3x_3 + 3u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$ е) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 2u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$

ж) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 3x_3 + 2u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$ з) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$

и) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - 5x_3 + u, \\ y &= x_1; \end{aligned}$ к) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 2x_2 + u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$

9.2. Метод фазовой плоскости синтеза оптимальной по быстродействию системы

Пусть задана вполне управляемая линейная стационарная система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad |u| \leqslant 1, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R,$$

все корни характеристического уравнения которого действительны. Заметим, что ограничения более общего вида $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, введением нового переменного $v = 2u - (\alpha + \beta)/(\alpha - \beta)$ всегда приводится к приведенному выше виду $|u| \leqslant 1$. Рассмотрим задачу синтеза оптимального по быстродействию регулятора, обеспечивающего перевод системы из произвольной начальной точки в начало координат.

Так как управление скалярное, условие нормальности совпадает с условием управляемости, поэтому выполняются все условия теоремы об n интервалах. В соответствии с этой теоремой оптимальное управление, имея не более n интервалов постоянства, принимает только крайние значения: -1 или 1. Если представить его как функцию фазовых координат $u^* = u^*(\mathbf{x})$, то ясно, что все фазовое пространство разбивается на два подпространства: подпространство, в котором $u^* = -1$, и подпространство, в котором $u^* = 1$. Гиперповерхность (при $n = 2$ — кривая, при $n = 3$ — поверхность), которая делит фазовое пространство на указанные подпространства, называют *гиперповерхностью* (*кривой, поверхностью*) *переключения*. Если записать уравнение гиперповерхности $\sigma(\mathbf{x}) = 0$, то, как известно, $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ по одну сторону от гиперповерхиости и $\sigma(\mathbf{x}) < 0$ по другую. Всегда (при необходимости умножением на -1) можно выбрать функцию $\sigma(\mathbf{x})$ так, чтобы она была отрицательна в подпространстве, где $u^* = -1$, и положительна в подпространстве, где $u^* = 1$. Тогда, очевидно, оптимальным управлением будет $u^* = \operatorname{sign}\sigma(\mathbf{x})$. Поэтому нахождение оптимального управления с обратной связью сводится к определению функции $\sigma(x)$, которая называется *функцией переключения*.

При $n = 2$ для нахождения функции переключения можно воспользоваться методом фазовой плоскости. На фазовой плоскости строятся семейства фазовых траекторий, соответствующих управлениям $u^* = -1$ и $u^* = 1$. Оптимальная траектория представляет собой часть траектории или соединение частей двух траекторий из построенных семейств. В силу граничного условия на правом конце траектории $\mathbf{x}(t_f) = 0$ она должна оканчиваться в начале координат. Используя эти свойства оптимальных траекторий, нетрудно определить кривую переключения. Проиллюстрируем изложенное на простейшем примере.

Пример 9.2. Определить оптимальный по быстродействию закон управления двигателем, описываемым уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет кратный нулевой корень. Выполняются все условия теоремы об n интервалах. Оптимальное управление может принимать значения -1 или 1. Найдем соответствующие им фазовые траектории. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u}{x_2}, \text{ или } x_2 dx_2 = u dx_1.$$

Проинтегрировав последнее уравнение при $u = -1$ и $u = 1$, соответственно находим

$$\frac{1}{2}x_2^2 = -x_1 + C_1, \quad \frac{1}{2}x_2^2 = x_1 + C_2.$$

На рис. 9.1, *а* представлены оба семейства траекторий. Оптимальная траектория должна состоять из участка траектории одного семейства, проходящей через начальную точку, и участка траектории другого семейства, проходящей через начало координат. Из сказанного следует, что переключение должно происходить на полутраекториях АО и ОВ (рис. 9.1, *а*). Если вначале изображающая точка движется по траектории, соответствующей $u^* = -1$, то переключение должно произойти на полутраектории BO, которая описывается уравнением

$$x_2^2 - 2x_1 = 0.$$

И если вначале изображающая точка движется по траектории, соответствующей $u^* = 1$, то переключение должно произойти на полутраектории OA, которая описывается уравнением

$$x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Фазовый портрет оптимальной системы представлен на рис. 9.1, *б*. Уравнение линии переключения AOB, основываясь на уравнениях полутраекторий $A0$ и OB, можно записать так:

$$\sigma(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} x_2 = 0.$$

Функция $\sigma(x)$ отрицательна справа от линии переключения, где $u^* = -1$, и положительна слева, где $u^* = 1$. Поэтому имеем

$$u^* = \operatorname{sign} \sigma(\mathbf{x}) = -\operatorname{sign}[(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} x_2].$$

Заметим, что кривая AOB может быть описана уравнением

$$\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) = 0.$$

Однако знак функции $\widetilde{\sigma}(\mathbf{x})$ слева и справа от кривой AOB меняется при переходе с верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость. Поэтому эта функция не может быть функцией переключения.

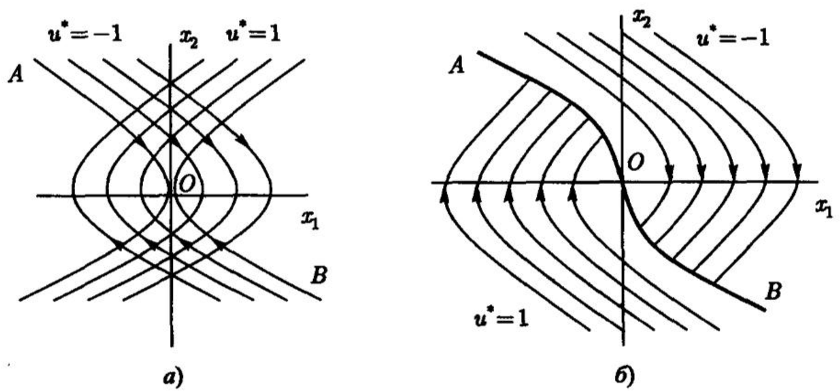


Рис. 9.1.

Как следует из фазового портрета, переходный процесс оптимальной системы является апериодическим. Однако из-за неидеальности переключающего устройства, неточности математической модели объекта и других возмущений реальный переходный процесс может оказаться колебательным.

Задачи

9.3. Определить оптимальное управление с обратной связью $u^*(\mathbf{x})$ в задаче максимального быстродействия при условиях, что в начальный момент $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^0$ — произвольный вектор), в конечный момент $\mathbf{x}(t_f) = 0$ и объект описывается следующими уравнениями:

а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u - 1,\ |u| \leqslant 2;$

б) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 2u - 1,\ |u| \leqslant 1;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 4u - 2,\ |u| \leqslant 1;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 2u - 2,\ |u| \leqslant 2;$

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 4u - 4,\ |u| \leqslant 2;$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + u,\ |u| \leqslant 1;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2u,\ |u| \leqslant 1;$

з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 4u,\ |u| \leqslant 1;$

и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2u,\ |u| \leqslant 2;$

к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -4x_2 + 4u,\ |u| \leqslant 2.$

9.4. Определить оптимальное управление с обратной связью $u^*(x)$ в задаче максимального быстродействия при условиях, что в начальный момент $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^0$ — произвольный вектор), в конечный момент $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ и объект описывается следующими уравнениями:

а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u - 1,\ -1{,}5 \leqslant u \leqslant 2{,}5;$

б) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 2u - 1,\ -1 \leqslant u \leqslant 2;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 4u - 2,\ -1 \leqslant u \leqslant 2;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 2u - 2,\ -1 \leqslant u \leqslant 2;$

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 4u - 4,\ -2 \leqslant u \leqslant 4;$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + u + 0{,}5, -2 \leqslant u \leqslant 1;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2u + 2,\ -3 \leqslant u \leqslant 1;$

з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 4u + 4,\ -4 \leqslant u \leqslant 2;$

и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2u + 2,\ -3 \leqslant u \leqslant 1;$

к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -4x_2 + 4u + 2,\ -2 \leqslant u \leqslant 1.$

9.3. Синтез оптимальных по интегральному квадратичному критерию систем управления

Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \tag{9.4а}$$

и критерий оптимальности имеет вид

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R(t)\mathbf{u}(t)]dt. \tag{9.4б}$$

Здесь $\mathbf{h}(t)$ — известная функция времени, F — положительно полуопределенная матрица, $Q(t)$, $R(t)$ — положительно определенные матрицы ($\mathbf{x}^T F\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} > 0$ и $\mathbf{x}^T R\mathbf{x} > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq 0$ и $t \in [t_0, t_f]$), функции $A(t)$, $B(t)$, $\mathbf{h}(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ являются непрерывными на интервале $[t_0, t_f]$, начальный и конечный моменты времени t_0 и t_f фиксированы.

Требуется найти управление с обратной связью, при котором при произвольном начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ критерий оптимальности принимает минимальное значение. Эту задачу называют *задачей синтеза нестационарного линейного регулятора состояния*.

Теорема 9.3. *Решение задачи* (9.4) *синтеза оптимального нестационарного линейного регулятора существует, единственно и оптимальное управление имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -\left(R^{-1}B^T K\mathbf{x} + \frac{1}{2}R^{-1}B^T\mathbf{p}\right), \tag{9.5а}$$

где симметрическая $(n \times n)$*-матрица* K *и* n*-вектор* $\mathbf{p}$ *определяются из уравнений*

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q, \tag{9.5б}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = KBR^{-1}B^T\mathbf{p} - A^T\mathbf{p} - 2K\mathbf{h} \tag{9.5в}$$

при граничных условиях

$$K(t_f) = F, \quad \mathbf{p}(t_f) = 0; \tag{9.5г}$$

для любого $t \in [t_0, t_f]$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{x}^T(t)K(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) + q(t) =$$

$$= \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int\limits_{t}^{t_f} [\mathbf{x}^{*T}(t)Q(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R(t)\mathbf{u}^*(t)]dt,$$

где $q(t)$ — скалярная функция, которая определяется из уравнения

$$\dot{q} = \frac{1}{4}\mathbf{p}^T BR^{-1}B^T\mathbf{p} - \mathbf{p}^T\mathbf{h}, \quad q(t_f) = 0.$$

Теорема 9.3а. *При $\mathbf{h}(t) = 0$ оптимальное управление имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T K\mathbf{x}, \tag{9.6а}$$

где симметрическая $(n \times n)$-матрица K определяется из уравнения

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q, \quad K(t_f) = F; \tag{9.6б}$$

для любого $t \in [t_0, t_f]$ справедливо равенство

$$\mathbf{x}^T(t)K(t)\mathbf{x}(t) =$$

$$= \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int\limits_t^{t_f} [\mathbf{x}^{*T}(t)Q(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R(t)\mathbf{u}^*(t)]dt. \tag{9.6в}$$

Уравнение (9.5б) называют *матричным уравнением Риккати*.

Решение матричного уравнения Риккати. Матричное уравнение Риккати является нелинейным. Его можно решить на аналоговой или цифровой машине в обратном времени начиная с момента t_f. При этом вводится новая переменная (обратное время) $\tau = t_f - t$ и уравнение(9.5б) и граничное условие (9.5г) преобразуются к виду

$$\dot{\widetilde{K}} = \widetilde{K}\widetilde{A} + \widetilde{A}^T\widetilde{K} - \widetilde{K}\widetilde{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{B}^T\widetilde{K} + \widetilde{Q}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t_f - t_0, \quad \widetilde{K}(0) = F,$$

где

$$\widetilde{K}(\tau) = K(t_f - \tau), \quad \widetilde{A}(\tau) = A(t_f - \tau), \; \cdots .$$

Синтез оптимальной по интегральному квадратичному критерию стационарной линейной системы управления. Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{9.7а}$$

и критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int\limits_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)]dt. \tag{9.7б}$$

Здесь Q и R — положительно определенные матрицы, все матрицы A, B, Q и R являются постоянными, объект стабилизируем. Требуется найти оптимальное управление с обратной связью, переводящее систему из произвольной начальной точки $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ в конечную точку $\mathbf{x}(\infty) = 0$ и обеспечивающее минимум функционалу (9.7б). Эту задачу называют *задачей синтеза стационарного линейного регулятора состояния*.

Теорема 9.4. *Задача* (9.7) *имеет решение тогда и только тогда, когда объект* (9.7а) *стабилизируем, и оптимальное управление имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T\overline{K}\mathbf{x},$$

где $\overline{K}$ *— постоянная положительно определенная симметрическая* $(n \times n)$*-матрица, определяемая из уравнения*

$$-\overline{K}A - A^T\overline{K} + \overline{K}BR^{-1}B^T\overline{K} - Q = 0,$$

называемого алгебраическим уравнением Риккати; для любого $t \geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{x}^T(t)\overline{K}\mathbf{x}(t) = \int\limits_t^\infty [\mathbf{x}^T(\tau)Q\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{*T}(\tau)R\mathbf{u}^*(\tau)]d\tau,$$

где слева стоит функция Ляпунова. Подставив управление в уравнение объекта, получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BR^{-1}B^T\overline{K})\mathbf{x}.$$

Функция Беллмана является функцией Ляпунова для этой системы управления.

Метод решения алгебраического уравнения Риккати. Алгебраическое уравнение Риккати является нелинейным, и в общем случае аналитически решить его не удается. Решение этого уравнения совпадает с установившимся решением дифференциального матричного уравнения Риккати. Поэтому один из возможных способов его решения основан на нахождении установившегося решения матричного уравнения Риккати, записанного в обратном времени, при начальном условии $\widetilde{K}(0) = F$, где F — произвольная положительно полуопределенная симметричная матрица.

Пример 9.3. Определить оптимальное управление с обратной связью в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad J = \int\limits_0^\infty (x_1^2 + qx_2^2 + ru^2)dt \to \min, \quad q \geqslant 0, \quad r > 0.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}.$$

Поэтому оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{r}(k_{21}x_1 + k_{22}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$-\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix} + \frac{1}{r}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

или равносильной ему системы

$$\frac{k_{12}^2}{r} - 1 = 0, \quad -k_{11} + \frac{k_{12}k_{22}}{r} = 0, \quad -2k_{12} + \frac{k_{22}^2}{r} - q = 0.$$

Эта система имеет решения

$$k_{12} = \pm\sqrt{r}, \quad k_{22} = \pm\sqrt{r(q + 2k_{12})}, \quad k_{11} = \frac{k_{12}k_{22}}{r}.$$

Критерию Сильвестра положительной определенности матрицы $\overline{K}$ удовлетворяет решение

$$k_{12} = k_{21} = \sqrt{r}, \quad k_{22} = \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})}, \quad k_{11} = \sqrt{q + 2\sqrt{r}}\,.$$

Оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{r}\left(\sqrt{r}\,x_1 + \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})}\,x_2\right).$$

Пример 9.4. Определить, при каких значениях параметра α задача оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_2, \quad J = \int\limits_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \to \min$$

имеет решение.

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Поэтому оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -(k_{11}x_1 + k_{12}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ \ 0) \times$$
$$\times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

или системы

$$-2k_{11} + k_{11}^2 - 1 = 0, \quad -2\alpha k_{12} + k_{11}k_{12} = 0, \quad -2k_{22} + k_{12}^2 - 1 = 0.$$

Последние уравнения имеют решения

$$k_{11} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad k_{12} = k_{21} = 0, \quad k_{22} = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Критерий Сильвестра положительной определенности матрицы $\overline{K}$ будет выполнен, если $k_{11} > 0$ и $k_{22} > 0$. Второе неравенство будет выполнено и задача будет иметь решение, если $\alpha < 0$. При $\alpha > 0$ задача не имеет решения. Это обусловлено тем, при этих значениях параметра объект не стабилизуем.

Синтез оптимального линейного регулятора выхода. Пусть задана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

и критерий оптимальности

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{y}^T\widetilde{Q}\mathbf{y} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})dt.$$

Здесь $\mathbf{h}$ — известная функция времени, F — положительно полуопределенная матрица, $\widetilde{Q}$ и R — положительно определенные матрицы, зависящие в общем случае от времени. Матрицы A, B, C, $\widetilde{Q}$, R как функции от времени предполагаются непрерывными на интервале $[t_0, t_f]$. Требуется определить управление с обратной связью, при котором критерий оптимальности при произвольной фиксированной начальной точке принимает минимальное значение.

Эту задачу называют *задачей синтеза оптимального линейного регулятора выхода*, причем если объект или критерий нестационарен (хотя бы одна из матриц A, B, C, $\widetilde{Q}$, R зависит от времени) или t_f кончен, — *нестационарной* и, если объект и критерий стационарны и $t_f = \infty$, — *стационарной задачей синтеза линейного регулятора выхода*.

Задача синтеза оптимального линейного регулятора выхода отличается от рассмотренной задачи синтеза оптимального регулятора состояния только тем, что в критерий оптимальности вместо вектора состояния входит выходной вектор и условие задачи дополняется уравнением наблюдения.

Подставив выражение для выходного вектора в критерий оптимальности, получим

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T C^T \widetilde{Q} C\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})dt.$$

Таким образом, задача синтеза оптимального линейного регулятора выхода свелась к рассмотренной задаче синтеза оптимального линейного регулятора состояния. Отличие состоит в том, что здесь роль матрицы Q играет произведение $C^T\widetilde{Q}C$. При этом может оказаться, что, хотя матрица $\widetilde{Q}$ является положительно определенной, произведение этим свойством не обладает: оно может быть положительно полуопределенным. Произведение $C^T\widetilde{Q}C$ будет положительно определенным, если $\mathbf{y} = 0$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{x} = 0$.

Пример 9.5. Определить оптимальный закон управления в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \quad J = \int_0^\infty (y^2 + u^2)dt \to \min.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q} = 1, \quad R = 1,$$

$$Q = C^T\widetilde{Q}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому для оптимального закона управления получаем

$$u^* = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(k_{21}x_1 + k_{22}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

или равносильной ему системы

$$k_{12}^2 - 1 = 0, \quad -k_{11} + k_{12}k_{22} = 0, \quad -2k_{12} + k_{22}^2 = 0.$$

Эта система имеет решения

$$k_{12} = k_{21} = 1, \quad k_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad k_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Критерию Сильвестра положительной определенности матрицы $\overline{K}$ удовлетворяет решение

$$k_{12} = k_{21} = 1, \quad k_{22} = \sqrt{2}, \quad k_{11} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -(x_1 + \sqrt{2}\,x_2).$$

Синтез оптимальной системы по критерию обобщенной работы. При решении задач синтеза оптимальных систем управления по интегральному квадратичному критерию сталкиваемся с необходимостью решать нелинейные дифференциальные уравнения Риккати в случае нестационарной задачи и нелинейные алгебраические уравнения Риккати в случае стационарной задачи. А. А. Красовский предложил критерий оптимальности, который он назвал критерием (функционалом) обобщенной работы, при котором удается избавиться от необходимости решать нелинейные уравнения. Суть метода синтеза оптимальной системы по критерию обобщенной работы состоит в том, что интегральный квадратичный критерий выбирают так, чтобы уравнение Беллмана получилось линейным.

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной линейной системы, когда уравнения управляемой системы и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{9.8а}$$

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u} + \widetilde{\mathbf{u}}^T R\widetilde{\mathbf{u}})dt, \tag{9.8б}$$

где F — постоянная положительно полуопределенная матрица, Q — положительно полуопределенная, R — положительно определенная матрицы, которые могут зависеть от времени.

Теорема 9.5. *В задаче* (9.8) *при условии, что объект устойчив и в критерии оптимальности* (9.8б)

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T K\mathbf{x},$$

1) *оптимальный закон управления имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T K\mathbf{x},$$

где положительно определенная симметрическая матрица K определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\dot{K} = -KA - A^T K - Q, \quad K(t_f) = F, \tag{9.9а}$$

если она является нестационарной;

2) *оптимальный закон управления имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T K\mathbf{x},$$

где положительно определенная симметрическая матрица K определяется из линейного алгебраического уравнения

$$KA + A^T K + Q = 0, \tag{9.9б}$$

если она является стационарной (все матрицы являются постоянными и $t_f = \infty$).

Уравнение (9.9б) является уравнением Ляпунова, и оно имеет решение, если среди собственных значений матрицы A нет пары собственных значений, сумма которых равна нулю.

Если объект устойчив (все собственные значения матрицы A имеют отрицательную вещественную часть) и матрица Q положительно определена, то уравнение (9.9б) имеет единственное решение, которое является положительно определенной матрицей.

Когда объект неустойчив, уравнение (9.9б) может не иметь решений или иметь решения, при которых синтезированная система будет неустойчива.

Пример 9.6. Определить оптимальный закон управления по критерию обобщенной работы при условии, что уравнения объекта и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u, \quad J = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \tilde{u}^2)dt.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(k_{21}x_1 + k_{22}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

или системы

$$-k_{12} - k_{21} + 1 = 0, \quad k_{11} - k_{12} - k_{22} = 0,$$
$$k_{21} - k_{22} + k_{11} - k_{21} + 1 = 0, \quad k_{12} = k_{21}.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{2}, \quad k_{22} = 1, \quad k_{11} = \frac{3}{2}.$$

Это решение удовлетворяет критерию Сильвестра. Оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right).$$

Задачи

9.5. Определить управление с обратной связью (выражение для $u^*(\mathbf{x})$ и дифференциальные уравнения для элементов матрицы K) в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x} = (2e^{-t} - 1)x + u,\ x(0) = x^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x^2 + 2u^2)dt) \to \min\limits_u;$

б) $\dot{x} = (1 + \sin^2 t)x + 2u,\ x(0) = x^0,\ J = \int\limits_0^{10} (2x^2 + 4u^2)dt) \to \min\limits_u;$

в) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 2u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + 2x_2^2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + 2u^2)dt) \to \min\limits_u;$

и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 2u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{10} (x_1^2 + 4u^2)dt) \to \min\limits_u;$

к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 4u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = \int\limits_0^{10} (2x_1^2 + x_2^2 + 2u^2)dt) \to \min_u .$$

9.6. Определить управление с обратной связью в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt) \to \min\limits_u;$

б) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + 2u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = \int\limits_0^{\infty} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4u^2)dt) \to \min_u;$$

в) $\dot{x}_1 = 2x_2,\ \dot{x}_2 = -4x_2 + 4u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{\infty} (2x_1^2 + x_2^2 + 4u^2)dt) \to \min\limits_u;$

г) $\dot{x}_1 = 2x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 2u, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{\infty} (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2u^2)dt) \to$

$\to \min\limits_u;$

д) $\dot{x}_1 = 2x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 2u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = \int\limits_0^{\infty} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2u^2)dt) \to \min_u;$$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + 4u^2)dt) \to$

$\to \min\limits_u;$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 4x_2 + 4u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ J = \int\limits_0^{\infty} (3x_1^2 + 3x_2^2 + u^2)dt) \to$

$\to \min\limits_u;$

з) $\dot{x}_1=2x_2,\ \dot{x}_2=-4x_1-4x_2+8u,\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0,$

$$J=\int_0^\infty \left(4x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2+4u^2\right)dt) \to \min_u;$$

и) $\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-5x_1-4x_2+u,\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0,$

$$J=\int_0^\infty \left(3x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2+u^2\right)dt) \to \min_u;$$

к) $\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-5x_1+2x_2+3u,\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0,$

$$J=\int_0^\infty \left(2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2u^2\right)dt) \to \min_u.$$

9.7. Определить управление с обратной связью $u^*=u(y,\dot{y})$ в следующих задачах оптимально управления:

а) $y=\dfrac{2}{p^2+p}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,\ J=\displaystyle\int_0^\infty \left(y^2+2\dot{y}^2+u^2\right)dt) \to \min_u;$

б) $y=\dfrac{2}{p^2+2p}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,\ J=\displaystyle\int_0^\infty \left(y^2+2\dot{y}^2+u^2\right)dt) \to \min_u;$

в) $y=\dfrac{4}{p^2+4p}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,\ J=\displaystyle\int_0^\infty \left(2y^2+2\dot{y}^2+2y\dot{y}+2u^2\right)dt) \to$

$\to \min\limits_u;$

г) $y=\dfrac{2}{p^2+2p+1}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,$

$$J=\int_0^\infty \left(2y^2+2\dot{y}^2+2y\dot{y}+u^2\right)dt) \to \min_u;$$

д) $y=\dfrac{2}{p^2+4p+3}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,\ J=\displaystyle\int_0^\infty \left(4y^2+2\dot{y}^2+u^2\right)dt) \to \min_u;$

е) $y=\dfrac{4}{p^2+6p+6}u,\ y(0)=y^0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}^0,$

$$J=\int_0^\infty \left(4y^2+2\dot{y}^2+2y\dot{y}+2u^2\right)dt) \to \min_u;$$

ж) $y=\dfrac{4}{p^2+4p+5}u,\ y(0)=y^0,\ \dot y(0)=\dot y^0,\ J=\int\limits_0^\infty \left(y^2+4\dot y^2+4u^2)dt\right) \to \min\limits_u;$

з) $y=\dfrac{1}{p^2+2p+5}u,\ y(0)=y^0,\ \dot y(0)=\dot y^0,\ J=\int\limits_0^\infty \left(4y^2+\dot y^2+2y\dot y+u^2)dt\right) \to$

$\to \min\limits_u;$

и) $y=\dfrac{1}{p^2+6p+10}u,\ y(0)=y^0,\ \dot y(0)=\dot y^0,$

$$J=\int\limits_0^\infty \left(y^2+4\dot y^2+4y\dot y+u^2)dt\right) \to \min\limits_u;$$

к) $y=\dfrac{2}{p^2+6p+13}u,\ y(0)=y^0,\ \dot y(0)=\dot y^0,$

$$J=\int\limits_0^\infty \left(y^2+\dot y^2+2y\dot y+2u^2)dt\right) \to \min\limits_u.$$

9.8. Определить управление с обратной связью, переводящее объект из произвольного начального положения $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0$ в начало координат, в следующих задачах оптимального управления с критерием обобщенной работы:

а) $\dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = x_3,\ \dot x_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u,$

$$J=\int\limits_0^\infty \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u^2+\widetilde{u}^2\right)dt \to \min\limits_u;$$

б) $\dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = x_3,\ \dot x_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u,$

$$J=\int\limits_0^\infty 2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u^2+\widetilde{u}^2\right)dt \to \min\limits_u;$$

в) $\dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = x_3,\ \dot x_3 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + u,$

$$J=\int\limits_0^\infty 4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u^2+\widetilde{u}^2\right)dt \to \min\limits_u;$$

г) $\dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = x_3,\ \dot x_3 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + u,$

$$J=\int\limits_0^\infty 2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u^2+\widetilde{u}^2\right)dt \to \min\limits_u;$$

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 4x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u;$$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 4x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty 6\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u;$$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u;$$

з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty 8\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u;$$

и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty \left(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u;$$

к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + u,$

$$J = \int\limits_0^\infty \left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + u^2 + \widetilde{u}^2\right)dt \to \min_u.$$

Ответы

9.1. а) $\dot{q}_1 = -q_1 - q_2 - 2y,\ \dot{q}_2 = 2q_2 + 2y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

б) $\dot{q}_1 = q_1 - q_2,\ \dot{q}_2 = q_1 + 2q_2 + 3y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

в) $\dot{q}_1 = 2q_1 + q_2 + 3y,\ \dot{q}_2 = q_1 + y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

г) $\dot{q}_1 = q_2 + y,\ \dot{q}_2 = -2q_1 - q_2 - 3y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

д) $\dot{q}_1 = q_2 + y,\ \dot{q}_2 = -q_1 - 2q_2 - 3y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

е) $\dot{q}_1 = q_1 - q_2,\ \dot{q}_2 = -3q_1 - 2q_2 - 5y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_8 = q_2 + y;$

ж) $\dot{q}_1 = q_1 - 2q_2 - y,\ \dot{q}_2 = q_1 + q_2 + 2y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

з) $\dot{q}_1 = 2q_1 + q_2 + 3y,\ \dot{q}_2 = q_1 + y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

и) $\dot{q}_1 = -q_1 + q_2,\ \dot{q}_2 = -2q_1 - q_2 - 3y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

к) $\dot{q}_1 = q_2 + y,\ \dot{q}_2 = -q_1 - 2q_2 - 3y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

л) $\dot{q}_1 = q_1 + 2q_2,\ \dot{q}_2 = -2q_1 - 2q_2 - 4y + u,\ \dot{\hat{x}}_1 = y,\ \dot{\hat{x}}_2 = q_1 + y,\ \dot{\hat{x}}_3 = q_2 + y;$

9.2. а) $K=\begin{pmatrix}8 & 22 & 8\end{pmatrix}^T$; б) $K=\begin{pmatrix}4 & 7 & -14\end{pmatrix}^T$; в) $K=\begin{pmatrix}8 & 21 & -1\end{pmatrix}^T$; г) $K=\begin{pmatrix}9 & 26 & -8\end{pmatrix}^T$; д) $K=\begin{pmatrix}6 & 13 & -2\end{pmatrix}^T$; е) $K=\begin{pmatrix}8 & 21 & -3\end{pmatrix}^T$; ж) $K=\begin{pmatrix}6 & 11 & -6\end{pmatrix}^T$; з) $K=\begin{pmatrix}8 & 21 & -2\end{pmatrix}^T$; и) $K=\begin{pmatrix}4 & 8 & -14\end{pmatrix}^T$; к) $K=\begin{pmatrix}9 & 29 & 17\end{pmatrix}^T$.

9.3. а) $u^*(x)=-2\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+2x_1)+4x_1\right]$;
б) $u^*(x)=-\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+2x_1)+4x_1\right]$;
в) $u^*(x)=-\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+4x_1)+8x_1\right]$;
г) $u^*(x)=-2\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+4x_1)+8x_1\right]$;
д) $u^*(x)=-2\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+8x_1)+16x_1\right]$;
е) $u^*(x)=-\operatorname{sign}\left(x_1+x_2+\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
ж) $u^*(x)=-\operatorname{sign}\left(x_1+x_2+2\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}5x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
з) $u^*(x)=-\operatorname{sign}\left(x_1+0{,}5x_2+\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}5x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
и) $u^*(x)=-2\operatorname{sign}\left(x_1+0{,}5x_2+\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}5x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
к) $u^*(x)=-2\operatorname{sign}\left(x_1+0{,}25x_2+0{,}5\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}5x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$.

9.4. а) $u^*(x)=0{,}5-2\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)(x_2^2+x_1)+4x_1\right]$;
б) $u^*(x)=0{,}5-1{,}5\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)x_2^2+6x_1\right]$;
в) $u^*(x)=0{,}5-1{,}5\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)x_2^2+12x_1\right]$;
г) $u^*(x)=0{,}5-1{,}5\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)x_2^2+6x_1\right]$;
д) $u^*(x)=1-3\operatorname{sign}\left[\operatorname{sign}(x_2)x_2^2+24x_1\right]$;
е) $u^*(x)=-0{,}5-1{,}5\operatorname{sign}\Big(x_1+x_2+1{,}5\operatorname{sign}(x_2)\times$
$\times\ln\left|1+\dfrac{2}{3}x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\Big)$;
ж) $u^*(x)=-1-2\operatorname{sign}\left(x_1+x_2+4\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}25x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
з) $u^*(x)=-1-3\operatorname{sign}\left(x_1+0{,}5x_2+3\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+\dfrac{1}{6}x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
и) $u^*(x)=-1-2\operatorname{sign}\left(x_1+0{,}5x_2+\operatorname{sign}(x_2)\ln\left|1+0{,}5x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\right)$;
к) $u^*(x)=-0{,}5-1{,}5\operatorname{sign}\Big(x_1+0{,}25x_2+\dfrac{3}{8}\operatorname{sign}(x_2)\times$
$\times\ln\left|1+\dfrac{2}{3}x_2\operatorname{sign}(x_2)\right|\Big)$.

9.5. а) $u^*(x)=-0{,}5kx,\ \dot k=-2(2e^{-t}-1)k+0{,}5k^2-1,\ k(10)=0$;
б) $u^*(x)=-0{,}5kx,\ \dot k=-2(1+\sin^2 t)k+k^2-2,\ k(10)=0$;
в) $u^*(\mathbf{x})=-(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot k_{11}=k_{12}^2-1,\ \dot k_{12}=-k_{11}+k_{12}k_{22},$
$\dot k_{22}=-2k_{12}+k_{22}^2-1,\ \mathbf{k}(0)=\mathbf{0}$;

г) $u^*(\mathbf{x}) = -2(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = 4k_{12}^2 - 2$,
$\dot{k}_{12} = -k_{11} + 4k_{12}k_{22} - 1$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 4k_{22}^2 - 1$, $\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$;

д) $u^*(\mathbf{x}) = -(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = k_{12}^2 - 1$,
$\dot{k}_{12} = -k_{11} + k_{12} + k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 2k_{22} + k_{22}^2$, $\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$;

е) $u^*(\mathbf{x}) = -(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = k_{12}^2 - 1$,
$\dot{k}_{12} = -k_{11} + 2k_{12} + k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 4k_{22} + k_{22}^2 - 2$,
$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$;

ж) $u^*(\mathbf{x}) = -(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = 2k_{12} + k_{12}^2 - 1$,
$\dot{k}_{12} = k_{22} - k_{11} + k_{12} + k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 2k_{22} + k_{22}^2$,
$\mathbf{k}(0\_) = \mathbf{0}$;

з) $u^*(\mathbf{x}) = -0{,}5(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = 4k_{12} + 0{,}5k_{12}^2 - 1$,
$\dot{k}_{12} = 2k_{22} - k_{11} + k_{12} + 0{,}5k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 2k_{22} + 0{,}5k_{22}^2 - 1$,
$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$;

и) $u^*(\mathbf{x}) = -0{,}5(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = 2k_{12} + k_{12}^2 - 1$,
$\dot{k}_{12} = k_{22} - k_{11} + 2k_{12} + k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 4k_{22} + k_{22}^2$,
$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$;

к) $u^*(\mathbf{x}) = -2(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$, $\dot{k}_{11} = 4k_{12} + 8k_{12}^2 - 2$,
$\dot{k}_{12} = 2k_{22} - k_{11} + 2k_{12} + 8k_{12}k_{22}$, $\dot{k}_{22} = -2k_{12} + 4k_{22} + 8k_{22}^2 - 1$,
$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$.

9.6. а) $u^*(\mathbf{x}) = -(x_1 + 0{,}65x_2)$; б) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}12x_1 + 0{,}17x_2)$;
в) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}71x_1 + 0{,}4x_2)$; г) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}41x_1 + 0{,}94x_2)$;
д) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}62x_1 + 0{,}8x_2)$; е) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}12x_1 + 0{,}17x_2)$;
ж) $u^*(\mathbf{x}) = -(1{,}32x_1 + 1{,}16x_2)$; з) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}62x_1 + 0{,}52x_2)$;
и) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}29x_1 + 0{,}42x_2)$; к) $u^*(\mathbf{x}) = -(0{,}27x_1 + 0{,}62x_2)$.

9.7. а) $u^* = -(y + 1{,}3\dot{y})$; б) $u^* = -(y + \dot{y})$;
в) $u^* = -(y + 0{,}58\dot{y})$; г) $u^* = -(y + \dot{y})$;
д) $u^* = -(y + 0{,}64\dot{y})$; е) $u^* = -(0{,}56y + 0{,}38\dot{y})$;
ж) $u^* = -(0{,}096y + 0{,}42\dot{y})$; з) $u^* = -(0{,}39y + 0{,}4\dot{y})$;
и) $u^* = -(0{,}05y + 0{,}33\dot{y})$; к) $u^* = -(0{,}019y + 0{,}045\dot{y})$.

9.8. а) $\widetilde{u} = -(0{,}5x_1 + 1{,}3x_2 + 0{,}6x_3)$; б) $\widetilde{u} = -(x_1 + 2{,}6x_2 + 1{,}2x_3)$;
в) $\widetilde{u} = -(x_1 + 6x_2 + 4x_3)$; г) $\widetilde{u} = -(0{,}5x_1 + 3x_2 + 2x_3)$;
д) $\widetilde{u} = -(1{,}5x_1 + 2{,}86x_2 + 1{,}09x_3)$; е) $\widetilde{u} = -(3x_1 + 5{,}72x_2 + 2{,}18x_3)$;
ж) $\widetilde{u} = -(2x_1 + 2{,}8x_2 + 2{,}4x_3)$; з) $\widetilde{u} = -(4x_1 + 5{,}6x_2 + 4{,}8x_3)$;
и) $\widetilde{u} = -(1{,}5x_1 + 2{,}13x_2 + 0{,}88x_3)$; к) $\widetilde{u} = -(0{,}5x_1 + 1{,}13x_2 + 0{,}88x_3)$.

Глава 10

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Во многих случаях, например при управлении различными технологическими процессами, летательными аппаратами и другими объектами, на процесс управления существенные влияния оказывают случайные факторы, и важно их учитывать. И в данной главе будут рассмотрены задачи по синтезу оптимальных систем управления при случайных возмущающих воздействиях (случайных возмущениях).

10.1. Некоторые типы случайных процессов. Формирующий фильтр

Стационарный случайный процесс. Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным* (*слабо стационарным*, *стационарным в широком смысле*), если его математическое ожидание не зависит от времени и корреляционная функция зависит от одной переменной: 1) $m_x = \text{const}$; 2) $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$.

Стационарные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит от одного параметра: $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_2 - t_1) = K_{xy}(\tau)$.

Стационарные процессы, помимо законов распределения и моментов, характеризуются еще спектральной плотностью. *Спектральной плотностью* стационарного случайного процесса $X(t)$ называется двустороннее преобразование Фурье от его корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Корреляционная функция выражается с помощью спектральной плотности обратным преобразованием Фурье.

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Аналогично определяется взаимная спектральная плотность двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$K_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Если на вход устойчивой линейной стационарной системы подается стационарный случайный процесс, то на ее выходе в установившемся режиме устанавливается стационарный случайный процесс. Спектральная плотность $S_y(\omega)$ выходного сигнала связана со спектральной плотностью $S_x(\omega)$ входного сигнала соотношением

$$S_y(\omega) = \left|W(j\omega)\right|^2 S_x(\omega), \tag{10.1}$$

где $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция системы.

Корреляционная функция выходного сигнала имеет вид

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|W(j\omega\right|^2 S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Так как дисперсия $D_y = K_y(0)$, из последнего соотношения находим

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|W(j\omega\right|^2 S_x(\omega) d\omega.$$

Процессы с независимыми и ортогональными приращениями. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины

$$X(t_0), \quad X(t_1) - X(t_0), \quad \ldots, \quad X(t_n) - X(t_{n-1})$$

при любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (из области определения случайного процесса) взаимно независимы [19]. Если эти величины только не коррелированны, процесс $X(t)$ называется процессом с *некоррелированными* или *ортогональными приращениями*.

Процесс с независимыми приращениями полностью определяется распределением $X(t_0)$ и распределением приращений $X(t) - X(s)$ для произвольных t и s. Если распределение $X(t) - X(s)$ зависит от $t - s$, то процесс $X(t)$ называется процессом со *стационарными приращениями*. Если $X(t) - X(s)$ имеет нормальное распределение, то $X(t)$ называется *процессом с независимыми нормальными приращениями*. Векторный процесс с нулевым средним значением и независимыми нормальными приращениями называют *винеровским процессом*.

Белый шум. Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется *белым шумом*, если его спектральная плотность постояниа: $S_x(\omega) = G$ ($G = \text{const}$). Постоянная G называется *интенсивностью* белого шума. Если исходить из определения спектральиой плотности, то спектральная плотность будет постоянна, когда корреляционная функция имеет вид $K(\tau) = G\delta(\tau)$. Здесь $\delta(\tau)$ — функция Дирака (дельта-функция).

Более общее определение белого шума основано на виде корреляционной функции. А именно, случайный процесс $X(t)$ называется *белым шумом*, если его корреляционная функция имеет вид $K_x(t, \tau) = G(t)\delta(t - \tau)$. Белый шум называется *стационарным*, если его интенсивность является постоянной.

Процесс $V(t)$ является белым шумом, если процесс $X(t)$, связанный с $V(t)$ уравнением

$$\dot{X}(t) = Q(t)V(t),$$

где $Q(t)$ — детерминированная функция (матрица), является процессом с ортогональными приращениями. Если $X(t)$ является винеровским процессом, то белый шум $V(t)$ называется *нормальным* (*гауссовым*) *белым шумом*.

Формирующий фильтр. *Формирующим фильтром* называется звено, формирующее из белого шума случайный процесс с заданной спектральной плотностью.

Если на вход устойчивой линейной стационарной системы (фильтра) с передаточной функцией $W_\Phi(s)$ подается белый шум $V(t)$ с единичной интенсивностью

$$K_v(\tau) = \delta(\tau), \quad S_v(\omega) = 1,$$

то в установившемся режиме выходной сигнал $X(t)$ будет стационарным, и его спектральная плотность связана со спектральной плотностью входного сигнала соотношением

$$S_x(\omega) = \left|W_\Phi(j\omega)\right|^2 S_v(\omega) = \left|W_\Phi(j\omega)\right|^2.$$

Отсюда следует: чтобы сформировать стационарный случайный процесс с заданной спектральной плотностью $S_x(\omega)$, которую можно представить в виде

$$S_x(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega) = \left|\psi(j\omega)\right|^2, \tag{10.2}$$

где все полюса функции $\psi(s)$ расположены в левой полуплоскости, достаточно принять передаточную функцию фильтра $W_\Phi(s)$, равной $\psi(s)$: $W_\Phi(s) = \psi(s)$. Как увидим дальше, важно, чтобы не только полюса, но и нули функции $\psi(s)$ располагались в левой полуплоскости. Представление функции $S_x(\omega)$ в виде (10.2) называется ее *факторизацией*.

Факторизация спектральной функции. Пусть спектральная плотность $S_x(\omega)$ представляет дробно-рациональную функцию:

$$S_x(\omega) = \frac{\mathrm{H}(\omega)}{G(\omega)},$$

где $H(\omega)$, $G(\omega)$ — полиномы от ω, дисперсия конечна:

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega < \infty.$$

Пусть полиномы $H(\omega)$ и $G(\omega)$ имеют вид

$$H(\omega) = \beta_0 \omega^{2m} + \beta_1 \omega^{2(m-1)} + \cdots + \beta_m,$$
$$G(\omega) = \alpha_0 \omega^{2n} + \alpha_1 \omega^{2(n-1)} + \cdots + \alpha_n.$$

Разложим их на элементарные множители и представим $S_x(\omega)$ в виде

$$S_x(\omega) = \frac{\sqrt{\beta_0}\, H_+ \cdot \sqrt{\beta_0}\, H_-}{\sqrt{\alpha_0}\, G_+ \cdot \sqrt{\alpha_0}\, G_-} = \frac{(j)^m \sqrt{\beta_0}\, H_+ \cdot (-j)^m \sqrt{\beta_0}\, H_-}{(j)^n \sqrt{\alpha_0}\, G_+ \cdot (-j)^n \sqrt{\alpha_0}\, G_-},$$

где H_+, G_+ — произведения элементарных множителей, соответствующих корням уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенных в верхней полуплоскости; H_-, G_- — произведения элементарных множителей, соответствующих корням уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенных в нижней полуплоскости.

Если положить

$$P(j\omega) = (j)^m \sqrt{\beta_0}\, H_+, \quad Q(j\omega) = (j)^n \sqrt{\alpha_0}\, G_+,$$

то имеют место следующие равенства:

$$P(-j\omega) = (-j)^m \sqrt{\beta_0}\, H_-, \quad Q(-j\omega) = (-j)^n \sqrt{\alpha_0}\, G_-.$$

Поэтому

$$S_x(\omega) = \frac{P(j\omega)P(-j\omega)}{Q(j\omega)Q(-j\omega)} = \left| \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2.$$

Отсюда для передаточной функции формирующего звена получаем $W_\text{ф}(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$.

Заметим, что корням уравнеиий $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенным в верхней полуплоскости на плоскости корней ω, на плоскости $s = j\omega$ соответствуют левые корни. Поэтому в соответствии с построением полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ все нули и полюса передаточной функции формирующего фильтра располагаются в левой полуплоскости.

Пример 10.1. Определить передаточную функцию формирующего фильтра для стационарного случайного процесса со спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}, \quad (b > 0).$$

Решение. В данном случае нулями спектральной плотности являются $\omega_1 = jb$, $\omega_2 = -jb$; полюсами — $\omega_1 = j$, $\omega_2 = -j$, $\omega_3 = j$, $\omega_4 = -j$. Поэтому имеем

$$H_+ = \omega - jb, \qquad P(j\omega) = j(\omega - jb) = j\omega + b;$$
$$G_+ = (\omega - j)^2, \quad Q(j\omega) = j^2(\omega - j)^2 = (j\omega + 1)^2.$$

Передаточная функция формирующего фильтра $W(s) = \dfrac{s+b}{(s+1)^2}$.

Задачи

10.1. Определить передаточную функцию формирователя, предназначенного для получения из белого шума с единичной интенсивностью случайного процесса со следующими спектральными плотностями:

а) $S(\omega) = \dfrac{(\omega^4 + 4{,}25\omega^2 + 1)}{(\omega^4 + 10\omega^2 + 9)(\omega^4 + 25{,}04\omega^2 + 1)}$;

б) $S(\omega) = \dfrac{(\omega^4 + 10\omega^2 + 9)}{(\omega^4 + 16{,}25\omega^2 + 4)(\omega^4 + 29\omega^2 + 100)}$;

в) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 16{,}25\omega^2 + 4}{(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)(\omega^4 + 1{,}36\omega^2 + 0{,}36)}$;

г) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 1{,}36\omega^2 + 0{,}36}{(\omega^4 + 4{,}25\omega^2 + 1)(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}$;

д) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 9{,}25\omega^2 + 2{,}25)}{(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)(\omega^4 + 17\omega^2 + 16)}$;

е) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 17\omega^2 + 16}{(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)(\omega^4 + 4{,}25\omega^2 + 1)}$;

ж) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 4{,}25\omega^2 + 1}{(\omega^4 + 10\omega^2 + 9)(\omega^4 + 26\omega^2 + 25)}$;

з) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 26\omega^2 + 25}{(\omega^4 + 4{,}25\omega^2 + 1)(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}$;

и) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}{(\omega^4 + 1{,}25\omega^2 + 0{,}25)(\omega^4 + 16{,}25\omega^2 + 4)}$;

к) $S(\omega) = \dfrac{\omega^4 + 16{,}25\omega^2 + 4}{(\omega^4 + 26\omega^2 + 25)(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}$;

10.2. На вход линейной системы подается стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$. Определить спектральную плотность и построить формирующий фильтр выходного сигнала указанной системы в установившемся режиме при следующих ее передаточных функциях и значениях параметров α и β:

а) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$, $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 5$;

б) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 4$;

в) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$;

г) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+4}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$;

д) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$, $\alpha = 1$, $\beta = 8$;

е) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+9}$, $\alpha = 5$, $\beta = 0{,}4$;

ж) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}$, $\alpha = 4, \beta = 0{,}5$;

з) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$, $\alpha = 3$, $\beta = 1{,}5$;

и) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+8}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$;

к) $W(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+5}$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

10.2. Фильтры Винера и Калмана–Бьюси

Для управления с обратной связью необходимо прежде всего получить оценку фазовых координат, которые входят в закон управления. В системах управления, подверженных случайным воздействиям, получение такой оценки связано с решением задачи фильтрации. Рассмотрим сначала ставшую классической теорию оптимальной фильтрации Н. Винера.

Фильтр Винера. Постановка винеровской задачи оптимальной фильтрации. Винеровская задача оптимальной фильтрации формулируется следующим образом. Пусть случайный процесс $X(t) = S(t) + N(t)$ наблюдается на интервале $(-\infty, t]$, $S(t)$ и $N(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные процессы, $S(t)$ — полезный сигнал, $N(t)$ — помеха. Известны корреляционная функция наблюдаемого (входного) сигнала $K_x(\tau)$ и взаимная корреляционная функция входного и полезного сигналов $K_{xs}(\tau)$. Требуется определить линейную систему, выдающую на выходе оценку $\widehat{S}(t)$, оптимальную в смысле минимума среднеквадратической ошибки или, что то же, минимума дисперсии:

$$J = M[\widetilde{E}^2] \to \min .$$

Здесь $\widetilde{E} = E(t) - M[E(t)]$, $E(t) = S(t) - \widehat{S}(t)$ — ошибка оценки. Линейная система, которая получается в результате решения этой задачи, называется ***фильтром Винера, или оптимальным фильтром Винера***.

Передаточная функция оптимального фильтра (фильтра Винера) имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{W_{\Phi}(j\omega)} \left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_{\Phi}(-j\omega)} \right]_+, \tag{10.3}$$

где $W_{\Phi}(j\omega)$ — частотная передаточная функция формирующего фильтра входного сигнала $X(t) = S(t) + N(t)$, $S_{xs}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность входного и полезного сигналов, $[\cdots]_+$ — выражение, которое получается, если в разложении на простые дроби дробно-рациональной функции, заключенной в квадратных скобках, исключить те слагаемые, полюса которых расположены в нижней полуплоскости на комплексной плоскости ω, или в правой полуплоскости на комплексной плоскости $s = j\omega$.

Пример 10.2. Принимаемый сигнал $X(t)$ представляет сумму полезного сигнала S(t) и помехи $N(t)$: $X(t) = S(t) + N(t)$. Корреляционные функции полезного сигнала и помехи имеют вид $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ и $K_n(\tau) = N_0\delta(\tau)$, полезный сигнал и шум не коррелированы. Определить передаточную функцию фильтра Винера.

Решение. В соответствии с формулой (10.3) для определения искомой передаточной функции необходимо знать передаточную функцию формирующего фильтра принимаемого (входного) сигнала $W_{\Phi}(s)$ и взаимную спектральную плотность входного и полезного сигналов $S_{xs}(\omega)$. Так как полезный сигнал и помеха не коррелированы, имеем

$$K_x(\tau) = K_s(\tau) + K_n(\tau), \quad S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega).$$

Спектральные плотности полезного сигнала и помехи имеют вид

$$S_s(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad S_n(\omega) = N_0.$$

Подставив эти выражения в приведенную выше формулу для $S_x(\omega)$, получим

$$S_x(\omega) = \frac{N_0(\beta^2 + \omega^2)}{\alpha^2 + \omega^2}, \text{ или } S_x(\omega) = \left| \frac{\sqrt{N_0}\,(\beta + j\omega)}{\alpha + j\omega} \right|^2,$$

где $\beta^2 = \dfrac{2\sigma^2\alpha}{N_0} + \alpha^2$. Из последнего соотношения находим

$$W_\Phi(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0}\,(\beta + j\omega)}{\alpha + j\omega}.$$

Найдем взаимную корреляционную функцию входного и полезного сигналов:

$$K_{xs}(\tau) = M[\widetilde{X}(t)\widetilde{S}(t+\tau)] = M[(\widetilde{S}(t) + \widetilde{N}(t))\widetilde{S}(t+\tau)] = K_s(\tau).$$

Отсюда следует: $S_{xs}(\omega) = S_s(\omega) = \sigma^2 \dfrac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$.

Теперь найдем выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле для оптимального фильтра (10.3):

$$\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2(\alpha - j\omega)}{(\omega^2 + \alpha^2)\sqrt{N_0}\,(\beta - j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{(j\omega + \alpha)\sqrt{N_0}\,(\beta - j\omega)}.$$

Далее, разложив правую часть методом неопределенных коэффициентов на элементарные дроби, находим

$$\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{\sqrt{N_0}\,(\alpha + \beta)}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\beta - j\omega}\right).$$

Отбросив вторую элементарную дробь, полюс которой расположен в нижней полуплоскости на плоскости ω, получим

$$\left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)}\right]_+ = \frac{2\alpha\sigma^2}{\sqrt{N_0}\,(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Подставив это выражение в выражение для передаточной функции формирующего фильтра в (10.3), найдем искомую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \text{ где } T = \frac{1}{\beta}, \quad k = \frac{2\alpha\sigma^2}{N_{0\beta}}.$$

Фильтры Калмана–Бьюси. При получении фильтра Винера предполагалось, что оценка получается на основе наблюдения на бесконечном отрезке времени, что является ограничительным условием применительно к задачам управления. Фильтр Калмана–Бьюси позволяет получать оценку фазовых координат на основе наблюдения выхода системы на конечном интервале времени $[t_0, t]$.

Оптимальная фильтрация при белых шумах. Постановка задачи. Дана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{10.4а}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_\text{н}(t), \tag{10.4б}$$

где A, B, C в общем случае являются функциями времени, $\mathbf{x}^0$ — случайная величина и $\mathbf{V}_0(t)$, $\mathbf{V}_{\text{н}}(t)$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[\mathbf{x}^0] = \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T = P_0;$$
$$M\{\mathbf{V}_0(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t-t');$$
$$M\{\mathbf{V}_{\text{н}}(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_{\text{н}}(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = R_0(t)\delta(t-t');$$
$$M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = S_0(t)\delta(t-t');$$

Q_0, P_0 — положительно полуопределенные матрицы, R_0 — положительно определенная матрица, случайная величина $\mathbf{x}^0$ не коррелирована с шумами $\mathbf{V}_0(t)$ и $\mathbf{V}_{\text{н}}(t)$. Требуется на основе наблюдения выхода $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t)]$ определить несмещенную линейную оценку $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))] \to \min_{\widehat{\mathbf{x}}(t)}. \tag{10.4в}$$

Оценка $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ называется *несмещенной*, если $M[\widehat{x}(t)] = M[x(t)]$.

Условие положительной определенности матрицы R_0 — матрицы интенсивности шума наблюдения — означает, что ни одна компонента выхода $\mathbf{y}(t)$ не измеряется точно. И в этом случае задача оценивания называется *несингулярной* (*невырожденной*). Таким образом, задача (10.4) является несингулярной задачей оптимального оценивания (фильтрации).

Уравнение (10.4а) называют *уравнением объекта*, уравнение (10.4б) — *уравнением наблюдения*. Шум $\mathbf{V}_0(t)$ называют *шумом объекта*, шум $\mathbf{V}_{\text{н}}(t)$ — *шумом наблюдения*.

Теорема 10.1. *Если шумы объекта и наблюдения не коррелированы ($S_0(t) \equiv 0$), то оценка $\widehat{x}(t)$ является несмещенной и оптимальной, если она находится из уравнения*

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}), \quad \widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0 \tag{10.5а}$$

с матрицей коэффициентов усиления

$$K^0 = PC^TR_0^{-1} \quad , \tag{10.5б}$$

где P определяется из уравнения

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0. \tag{10.5в}$$

Матрица P является дисперсионной матрицей ошибки $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)$: $P = M[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)]$; уравнение (10.5в), *которому она удовлетворяет, называется дисперсионным уравнением.*

Теорема 10.2. *Если шумы объекта и наблюдения коррелированы ($S_0(t) \neq 0$), то оценка $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ является несмещенной и оп-*

тимальной, если она находится из уравнения (10.5а) *с матрицей коэффициентов усиления*

$$K^0 = (PC^T + S_0)R_0^{-1}, \tag{10.6а}$$

где дисперсионная матрица P определяется из уравнения

$$\dot{P} = (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - \\ - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - S_0R_0^{-1}S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \tag{10.6б}$$

Несингулярная задача оптимальной фильтрации (10.4) при некоррелированных шумах впервые была решена Р. Калманом и Р. Бьюси. Поэтому фильтры (10.5) и (10.6), а также другие фильтры, которые будут рассмотрены в этом параграфе, называют *фильтрами* (*наблюдателями*) *Калмана–Бьюси*.

Пример 10.3. Определить оптимальную оценку постоянной величины x по наблюдениям за $y = x + V_н(t)$, где $V_н(t)$ — белый шум с интенсивностью r_0; $M[x] = m$, $M[(x - m)^2] = p_0$.

Решение. В данном случае уравнение объекта имеет вид $\dot{x} = 0$ и поэтому

$$A = 0, \quad B = 0, \quad Q_0 = 0.$$

Фильтр Калмана–Бьюси описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}} = k^0(y - \hat{x}), \quad \hat{x}(t_0) = m,$$

где $k^0 = p/r_0$; p определяется из уравнения

$$\dot{p} = -p^2/r, \quad p(t_0) = p_0.$$

Последнее уравнение имеет решение $p = p_0r_0/(r_0 + p_0t)$. Поэтому для коэффициента усиления получаем $k^0 = p_0/(r_0 + p_0t)$.

Оптимальная фильтрация при цветном шуме объекта. Рассмотрим задачу линейного оптимального оценивания при условии, что шум объекта не является белым. Небелый шум называют *цветным шумом*.

Постановка задачи. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1\mathbf{x}^{(1)} + B_1\mathbf{u} + \mathbf{x}^{(2)}; \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}; \tag{10.7а}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2\mathbf{x}^{(2)} + \widetilde{\mathbf{V}}_0; \quad \mathbf{x}^{(2)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(2)}; \tag{10.7б}$$

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{V}_н. \tag{10.7в}$$

где $\mathbf{x}_0^{(1)}$ и $\mathbf{x}_0^{(2)}$ — случайные величины и $\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)$, $\mathbf{V}_{\text{н}}(t)$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[\mathbf{x}_0^{(1)}] = \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)}, \quad M[(\mathbf{x}_0^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)})(\mathbf{x}_0^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)})^T] = P_{01};$$
$$M[\mathbf{x}_0^{(2)}] = \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)}, \quad M[(\mathbf{x}_0^{(2)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)})(\mathbf{x}_0^{(2)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)})^T = P_{02};$$
$$M[\widetilde{\mathbf{V}}_0] = 0, \quad M[\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)\widetilde{\mathbf{V}}_0^T(t')] = \widetilde{Q}_0(t)\delta(t-t');$$
$$M[\mathbf{V}_{\text{н}}] = 0, \quad M[\mathbf{V}_{\text{н}}(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = R_0(t)\delta(t-t');$$
$$M[\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = 0;$$

$\widetilde{Q}_0$, P_0 — положительно полуопределенные матрицы, R_0 — положительно определенная матрица, случайные величины $\mathbf{x}_0^{(1)}$ и $\mathbf{x}_0^{(2)}$ не коррелированы с шумами $\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)$ и $\mathbf{V}_{\text{н}}(t)$. Требуется иа основе наблюдения выхода $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t)]$ определить несмещенную линейную оценку $\widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}^{(1)}(t) - \widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t))^T(\mathbf{x}^{(1)}(t) - \widehat{\mathbf{x}}^{(1)})] \to \min_{\widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t)} . \qquad (10.7г)$$

Здесь (10.7а) является уравнением объекта, в котором $\mathbf{x}^{(2)}$ — цветной шум объекта; (10.7б) — уравнение формирователя, формирующего из белого шума $\widetilde{\mathbf{V}}_0$ шум объекта $\mathbf{x}^{(2)}$, (10.7в) — уравнение наблюдения.

Преобразуем данную задачу в рассмотренную выше задачу фильтрации с белыми шумами. С этой целью введем следующие перемеиные и матрицы:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}^{(1)}\\ \mathbf{x}^{(2)}\end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_0^{(1)}\\ \mathbf{x}_0^{(2)}\end{pmatrix}, \ \overline{\mathbf{x}}^0 = \begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}_0^{(1)}\\ \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)}\end{pmatrix}, \ A = \begin{bmatrix}A_1 & I\\ 0 & A_2\end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix}P_{10} & 0\\ 0 & P_{20}\end{bmatrix}, \quad Q_0 = G\widetilde{Q}G^T.$$

Используя их, сформулированную выше задачу можно переформулировать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0;$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_{\text{н}}(t),$$
$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))] \to \min_{\widehat{x}x(t)},$$

где $\mathbf{V}_0(t) = G\widetilde{\mathbf{V}}_0$, фазовый вектор в начальный момент и шумы не коррелированы между собой и имеют следующие вероятностные характеристики:

$$M[\mathbf{x}^0] = \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0;$$
$$M\{\mathbf{V}_0] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t');$$
$$M\{\mathbf{V}_{\text{н}}] = 0, \quad M[\mathbf{V}_{\text{н}}(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t');$$

Переформулированная задача является задачей оптимального оценивания с некоррелированными между собой белыми шумами объекта и наблюдения. Поэтому согласно теореме 10.1 для оптимальной оценки имеем

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}), \quad \widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0,$$
$$K^0 = PC^T R_0^{-1},$$
$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0.$$

Пример 10.4. Пусть уравнения объекта и наблюдения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(t_0) = x_1^0;$$
$$y = x_1 + V_{\text{н}},$$

где x_2 — стационарный случайный процесс (шум объекта) с характеристиками

$$M[x_2] = 0, \quad K_{x_2}(\tau) = M[x_2(t)x_2(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|};$$

начальное значение x_1^0 и шум наблюдения не коррелированы ни между собой, ни с шумом объекта и имеют следующие характеристики:

$$M[x_1^0] = 0, \quad M[(x_1^0)^2] = p_0, \quad M[V_{\text{н}}] = 0, \quad M[V_{\text{н}}(t)V_{\text{н}}(t+\tau)] = r_0^\delta(\tau).$$

Требуется определить оптимальную оценку.

Решение. Спектральная функция шума объекта может быть вычислена путем двухстороннего преобразования Фурье и представлена в виде

$$S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{|1 + j\omega|^2}.$$

Отсюда для передаточной функции формирователя получаем

$$W_{\Phi}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Уравнение формирователя имеет вид

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \widetilde{V}_0,$$

где $\widetilde{V}_0$ — белый шум с нулевым средним и единичной интенсивностью: $\widetilde{Q}_0 = 1$.

В данном случае

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{20} = K_{x_2}(0) = \frac{1}{2},$$

$$R_0 = r_0, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = G\widetilde{Q}_0 G^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Фильтр Калмана–Бьюси описывается уравнениями

$$\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + k_1(y - \widehat{x}_1), \quad \widehat{x}_1(t_0) = 0;$$
$$\dot{\widehat{x}}_2 = -\widehat{x}_2 + k_2(y - \widehat{x}_1), \quad \widehat{x}_2(t_0) = 0,$$

где

$$k_1 = \frac{p_{11}}{r_0}, \quad k_2 = \frac{p_{21}}{r_0}.$$

Дисперсионное уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} -$$
$$- \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

или в скалярной форме

$$\dot{p}_{11} = 2p_{21} - \frac{1}{r_0} p_{11}^2, \quad \dot{p}_{21} = p_{22} - p_{21} - \frac{1}{r_0} p_{21},$$
$$\dot{p}_{22} = -2p_{22} - p_{22}^2 + 1.$$

При записи скалярных уравнений учтена симметричность дисперсионной матрицы ($p_{12} = p_{21}$). Начальные условия имеют вид

$$p_{11}(t_0) = p_0, \quad p_{21}(t_0) = 0, \quad p_{22}(t_0) = 1/2.$$

Оптимальная фильтрация при цветном шуме наблюдения. Рассмотрим задачу линейного оптимального оценивания при условии, что шум объекта является белым, шум наблюдения цветным.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{10.8а}$$

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \widetilde{C}\mathbf{x} + \mathbf{z}, \tag{10.8б}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z} + \widetilde{\mathbf{V}}_{\text{н}}, \tag{10.8в}$$

где $\mathbf{x}^0$ — случайная величина и $\mathbf{V}_0$, $\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[\mathbf{x}^0] = \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T = P_0;$$
$$M[\mathbf{V}_0] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t-t');$$
$$M[\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}] = 0, \quad M[\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}(t)\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}^T(t')] = \widetilde{R}_0(t)\delta(t-t');$$
$$M[\mathbf{V}_0(t)\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}^T(t')] = \widetilde{S}(t)\delta(t-t');$$

Q_0, P_0 — положительно полуопределенные матрицы, $\widetilde{R}_0$ — положительно определенная матрица, случайная величина $\mathbf{x}^0$ не коррелирована с шумами $\mathbf{V}_0(t)$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}(t)$. Требуется на основе наблюдения выхода $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t)]$ определить несмещенную оценку $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}(t)$, обеспечивающую минимум среднему квадрату ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))] \to \min_{\widehat{x}(t)}. \tag{10.8г}$$

Здесь (10.8а) является уравнением объекта, (10.8б) — уравнением наблюдения, в котором $\mathbf{z}$ — цветной шум наблюдения, (10.8в) — уравнение формирователя, формирующего из белого шума $\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}$ шум наблюдения.

И данная задача преобразуется в задачу фильтрации с белыми шумами. Из уравнений (10.8а)–(10.8в) находим

$$\dot{\widetilde{\mathbf{y}}} = \dot{\widetilde{C}}\mathbf{x} + \widetilde{\mathrm{C}}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{z}} = (\dot{\widetilde{C}} + \widetilde{C}A)\mathbf{x} + \widetilde{C}B\mathbf{u} + D\mathbf{z} + \widetilde{C}\mathbf{V}_0 + \widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}.$$

Введем новый вектор наблюдения

$$\mathbf{y} = \dot{\widetilde{\mathbf{y}}} - \widetilde{C}B\mathbf{u} - D\widetilde{\mathbf{y}}. \tag{10.9а}$$

После подстановки сюда выражений для $\dot{\widetilde{y}}$ и $\widetilde{y}$, получим

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_\text{н},$$

где

$$\mathrm{C} = \dot{\widetilde{\mathrm{C}}} + \widetilde{\mathrm{C}}A - D\widetilde{\mathrm{C}}, \quad V_\text{н} = \widetilde{C}V_0 + \widetilde{V}_\text{н}. \tag{10.9б}$$

В преобразованном уравнении наблюдения шум $V_\text{н}$ является белым, и его интенсивность R_0 и интенсивность взаимной корреляционной функции его и шума объекта S_0 определяются следующим образом:

$$R_0 = \widetilde{C}Q_0\widetilde{C}^T + \widetilde{S}^T\widetilde{C}^T + \widetilde{C}\widetilde{S} + \widetilde{R}_0, \quad S_0 = Q_0\widetilde{C}^T + \widetilde{S}. \tag{10.9в}$$

Из последнего равенства следует, что шум объекта $\mathbf{V}_0$ и шум $\mathbf{V}_\text{н}$ преобразованного уравнения наблюдения будут коррелированы, хотя шум объекта $\mathbf{V}_0$ и шум $\widetilde{\mathbf{V}}_\text{н}$ на входе формирователя не коррелированы ($\widetilde{S} = 0$).

Итак, если матрица R_0 положительно определена, то оптимальный фильтр согласно теореме 10.2 описывается уравнениями

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}); \quad \widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0; \tag{10.10а}$$

$$K^0 = (PC^T + S_0)R_0^{-1}, \tag{10.10б}$$

$$\dot{P} = (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - \\ - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - S_0R_0^{-1}S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \tag{10.10в}$$

Новый вектор наблюдения определяется соотношением (10.9а). В него входит производная $\dot{\widetilde{\mathbf{y}}}$, что делает необходимым дифференцирование наблюдаемой переменной, но что является нежелательным. Возможен другой способ получения оптимальной оценки, исключающий необходимость дифференцирования.

Введем вектор $\widetilde{\mathbf{x}}$, определяемый соотношением

$$\widehat{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{x}} + K^0\widetilde{\mathbf{y}}. \tag{10.11а}$$

Продифференцируем это равенство по времени и, подставив в него выражения для $\dot{\widehat{\mathbf{x}}}$ и $\mathbf{y}$, получим

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = (A - K^0C)\widehat{\mathbf{x}} + (B - K^0\widetilde{C}B)\mathbf{u} - (\dot{K}^0 + K^0D)\widetilde{\mathbf{y}},$$

или, подставив выражение для $\widehat{x}$,

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = (A - K^0C)\widetilde{\mathbf{x}} + (B - K^0\widetilde{C}B)\mathbf{u} + \\ + [(A - K^0C)K^0 - \dot{K}^0 - K^0D]\widetilde{\mathbf{y}}, \quad \widetilde{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0 - K^0(t_0)\widetilde{\mathbf{y}}(t_0). \tag{10.11б}$$

В последнее уравнение производная $\dot{\widetilde{\mathbf{y}}}$ не входит. Из него определяется $\widetilde{\mathbf{x}}$, а затем из (10.11а) находится искомая оценка.

Пример 10.5. Объект и наблюдение описываются уравнениями

$$\dot{x} = 0, \quad \widetilde{y} = x + z; \quad Mx(0) = 0, \quad M[x^2(0)] = p_0.$$

Шум наблюдения z является стационарным случайным процессом с характеристиками

$$M[z] = 0, \quad M[z(t)z(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}.$$

Решение. Уравнение формирователя имеет вид (см. пример 10.4)

$$\dot{z} = -z + \widetilde{V}_{\text{н}}, \quad M[\widetilde{V}_{\text{н}}] = 0, \quad M[\widetilde{V}_{\text{н}}(t)\widetilde{V}_{\text{н}}(t')] = \delta(t - t').$$

В данном случае

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \widetilde{C} = 1, \quad Q_0 = 0, \quad D = -1, \quad \widetilde{R}_0 = 1, \quad \widetilde{S} = 0.$$

Поэтому из (10.9б) и (10.9в) получаем

$$C = 1, \quad R_0 = 1, \quad S_0 = 0.$$

Из (10.11) находим

$$\dot{\widetilde{x}} = -k^0\widetilde{x} + (-k^{0^2} - \dot{k}^0 + k^0)\widetilde{y}; \quad \widetilde{x}(0) = -k^0\widetilde{y}(0);$$
$$\widehat{x} = \widetilde{x} + k^0\widetilde{y}.$$

Так как $S_0 = 0$, то k^0 и p определяются согласно теореме 10.1 по формулам (10.5б) и (10.5в):

$$k^0 = p, \quad \dot{p} = -p^2, \quad p(0) = p_0.$$

Как легко проверить,

$$p = \frac{p_0}{1 + p_0 t}, \quad k^0 = \frac{p_0}{1 + p_0 t}.$$

Вырожденная задача оптимального оценивания. Задача оптимального оценивания называется *вырожденной* или *сингулярной*, если матрица интенсивности шума наблюдения является вырожденной (не является положительно определенной). Вырожденные задачи возникают, когда часть компонент выходного вектора измеряется точно или когда шум наблюдения является цветным и матрица интенсивности преобразованного шума наблюдения является вырожденной. Если задача оценивания является вырожденной, то приведенные выше оптимальные фильтры использовать нельзя. Если шумы являются цветными, то согласно описанным выше процедурам исходная задача может быть преобразована в задачу с белыми шумами. Поэтому ограничимся рассмотрением только сингулярной задачи с белыми шумами.

Сингулярную задачу оптимального оценивания можно сформулировать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{10.12а}$$
$$\mathbf{y}^{(1)} = C_1\mathbf{x} + \mathbf{V}_{\text{н}}, \tag{10.12б}$$
$$\mathbf{y}^{(2)} = C_2\mathbf{x}, \tag{10.12в}$$
$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))] \to \min_{\widehat{\mathbf{x}}(t)}, \tag{10.12г}$$

где фазовый вектор в начальный момент $\mathbf{x}^0$ не коррелирован с шумами объекта $\mathbf{V}_0$ и наблюдения $\mathbf{V}_{\text{н}}$, и они имеют следующие вероятностные характеристики:

$$M[\mathbf{x}^0] = \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T = P_0;$$
$$M[\mathbf{V}_0] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t');$$
$$M\{\mathbf{V}_{\text{н}}] = 0, \quad M[\mathbf{V}_{\text{н}}(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t');$$
$$M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_{\text{н}}^T(t')] = S_0(t)\delta(t - t').$$

Здесь, как обычно, принимается, что P_0, Q_0 — положительно полуопределенные матрицы, R_0 — положительно определенная матрица. Эта задача отличается от несингулярной задачи оценивания тем, что в ней уравнение наблюдения представлено двумя уравнениями: (10.12б) — уравнение, определяющие неточно измеряемые выходные переменные, (10.12в) — уравнение, определяющие точно измеряемые выходные переменные.

Оптимальная оценка определяется следующим образом::

$$\widehat{\mathbf{x}} = L_1\mathbf{y}^{(2)} + L_2\widehat{\mathbf{q}}, \tag{10.13а}$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{q}}} = \widetilde{A}\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{u}} + K^0(\widetilde{\mathbf{y}} - \widetilde{C}\widehat{\mathbf{q}}), \quad \widehat{\mathbf{q}}(t_0) = C_2'\overline{\mathbf{x}}^0, \tag{10.13б}$$

$$K^0 = (\widetilde{P}\widetilde{C}^T + \widetilde{S}_0)\widetilde{R}_0^{-1}, \tag{10.13в}$$

$$\dot{\widetilde{P}} = (\widetilde{A} - \widetilde{S}_0\widetilde{R}_0^{-1}\widetilde{C})\widetilde{P} + \widetilde{P}(\widetilde{A} - \widetilde{S}_0\widetilde{R}_0^{-1}\widetilde{C})^T - \\ - \widetilde{P}\widetilde{C}^T\widetilde{R}_0^{-1}\widetilde{C}\widetilde{P} + \widetilde{Q}_0 - \widetilde{S}_0\widetilde{R}_0^{-1}\widetilde{S}_0^T, \quad \widetilde{P}(t_0) = C_2'P_0C_2'^T. \tag{10.13г}$$

Здесь приняты следующие обозначения: L_1 и L_2 определяются из соотношения

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2' \end{pmatrix}^{-1},$$

где матрица C_2' выбирается так, чтобы $(n \times n)$-матрица справа в последнем соотношении была не вырождена;

$$\widetilde{A} = (\dot{C}_2' + C_2'A)L_2, \quad \widetilde{\mathbf{u}} = (\dot{C}_2' + C_2'A)L_1\mathbf{y}^{(2)} + C_2'B\mathbf{u}, \tag{10.14а}$$

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{y}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{y}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_2 \end{pmatrix}, \tag{10.14б}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{y}^{(1)} - C_1L_1\mathbf{y}^{(2)}, \quad \widetilde{\mathbf{y}}^{(2)} = \dot{\mathbf{y}}^{(2)} - (\dot{C}_2 + C_2A)L_1\mathbf{y}^{(2)} - C_2B\mathbf{u}; \tag{10.15а}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1L_2, \quad \widetilde{C}_2 = (\dot{C}_2 + C_2A)L_2; \tag{10.15б}$$

вероятностные характеристики преобразованных шумов:

$$\widetilde{Q}_0 = C_2'Q_0C_2'^T, \quad \widetilde{R}_0 = \begin{pmatrix} R_0 & S_0^TC_2^T \\ C_2S_0 & C_2Q_0C_2^T \end{pmatrix}, \quad \widetilde{S}_0 = \begin{pmatrix} C_2'S_0 & C_2'Q_0C_2^T \end{pmatrix}. \tag{10.15в}$$

Следует иметь в виду, что не всегда рассмотренный подход позволяет решить поставленную задачу. Очевидно, он не позволяет получить оптимальную оценку, если матрица $\widetilde{R}_0$ интенсивности преобразованного шума наблюдения является вырожденной.

Пример 10.6. Объект и наблюдение описываются уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + V_{02},$$
$$y_1 = x_1 + V_{\text{н}}, \quad y_2 = x_2.$$

Фазовые координаты в начальный момент не коррелированы с шумами объекта и наблюдения, и они имеют следующие вероятностные характеристики:

$$Mx_i(0) = 0, \quad M[x_i^2(0)] = p_{0i}, \quad i = 1, 2; \quad M[x_1(0)x_2(0)] = 0;$$
$$M[V_{02}(t)] = 0, \quad M[V_{02}(t)V_{02}(t')] = q_{22}\delta(t - t');$$
$$M[V_{\text{н}}(t)] = 0, \quad M[V_{\text{н}}(t)V_{\text{н}}(t')] = r_{11}\delta(t - t'); \quad M[V_{02}(t)V_{\text{н}}(t')] = 0.$$

Требуется определить оптимальную оценку.

Решение. Задача является сингулярной. В данном случае имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$y^{(1)} = y_1, \quad y^{(2)} = y_2;$$
$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad R_0 = r_{11}, \quad S_0 = 0; \quad \overline{x}^0 = 0, \quad P_0 = \begin{pmatrix} p_{01} & 0 \\ 0 & p_{02} \end{pmatrix}.$$

Примем $C_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $q = C_2'x = x_1$. Из равенства

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix}$$

получаем $L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Из формул (10.14) и (10.15) находим

$$\widetilde{A} = 0, \quad \widetilde{u} = y_2, \quad \widetilde{y}^{(1)} = y_1, \quad \widetilde{C}_1 = 1, \quad \widetilde{y}^{(2)} = \dot{y}_2 - u, \quad \widetilde{C}_2 = 0,$$
$$\widetilde{y} = \begin{pmatrix} \widetilde{y}^{(1)} \\ \widetilde{y}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_2 - u \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{Q}_0 = 0, \quad \widetilde{R}_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{S}_0 = 0.$$

Из (10.13) имеем

$$\dot{\widehat{\mathbf{q}}} = y_2 + k_1^0(y_1 - \widehat{q}) + k_2^0(\dot{y}_2 - u), \quad \widehat{q}(0) = 0,$$

$$k_1^0 = \frac{\widetilde{p}}{r_{11}}, \quad k_2^0 = 0, \quad \dot{\widetilde{p}} = \frac{\widetilde{p}^2}{r_{11}}, \quad \widetilde{p}(0) = p_{10}.$$

Для искомой оценки из (10.13а) получаем $\widehat{x}_1 = \widehat{\mathbf{q}}, \quad \widehat{x}_2 = y_2.$

Задачи

10.3. Принимаемый сигнал $X(t)$представляет сумму полезного сигнала $S(t)$ и помехи $N(t)$:

$$X(t) = S(t) + N(t).$$

Их корреляционные функции соответственно имеют вид

$$K_s(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}, \quad K_n(\tau) = be^{-a|\tau|}.$$

Полезный сигнал и шум не коррелированы. Определить передаточную функцию фильтра Винера при следующих значениях параметров α, β, a и b:

а) $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ a = 1,\ b = 1$; б) $\alpha = 4,\ \beta = 2,\ a = 2,\ b = 1$;
в) $\alpha = 4,\ \beta = 4,\ a = 1,\ b = 1$; г) $\alpha = 6,\ \beta = 4,\ a = 1,\ b = 1$;
д) $\alpha = 4,\ \beta = 1,\ a = 1,\ b = 1$; е) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ a = 2,\ b = 1$;
ж) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ a = 6,\ b = 2$; з) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ a = 4,\ b = 4$;
и) $\alpha = 6,\ \beta = 1,\ a = 2,\ b = 4$; к) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ a = 4,\ b = 1$.

10.4. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + bu + V_{20}, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,$$
$$y = x_1 + V_{\text{н}}.$$

Шумы объекта V_{20} и наблюдения $V_{\text{н}}$ являются белыми с интенсивностями q и r соответственно, и они не коррелированы.

Определить на основе наблюдения выхода y на интервале $[0, t]$ несмещенную оптимальную оценку при следующих значениях параметров a_1, a_2, b, q и r:

а) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ b = 2,\ q = 1,\ r = 1$;
б) $a_1 = -4,\ a_2 = 2,\ b = 1,\ q = 2,\ r = 1$;
в) $a_1 = 0,\ a_2 = -4,\ b = 4,\ q = 2,\ r = 2$;
г) $a_1 = -1,\ a_2 = -4,\ b = 2,\ q = 4,\ r = 2$;
д) $a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ b = 2,\ q = 4,\ r = 1$;
е) $a_1 = -2,\ a_2 = 2,\ b = 8,\ q = 2,\ r = 4$;
ж) $a_1 = -2,\ a_2 = -4,\ b = 8,\ q = 2,\ r = 4$;
з) $a_1 = -4,\ a_2 = 4,\ b = 4,\ q = 1,\ r = 2$;
и) $a_1 = -5,\ a_2 = -4,\ b = 4,\ q = 1,\ r = 2$;
к) $a_1 = -5,\ a_2 = 2,\ b = 1,\ q = 1,\ r = 1$.

10.5. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = a_1x_2 + bu, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,$$
$$y = x_1 + V_{\text{н}},$$

где x_2, $V_н$ — шумы объекта и наблюдения. Шум объекта x_2 подчиняется уравнению

$$\dot{x}_2 = a_2 x_2 + c\widetilde{V}_{20}.$$

Здесь $V_н$ и $\widetilde{V}_{20}$ являются белыми шумами с интенснвностями r и $\widetilde{q} = 1$ соответственно, и онн не коррелнрованы.

Определить на основе наблюдения выхода y на интервале $[0, t]$ несмещенную оптимальную оценку при следующнх значениях параметров a_1, a_2, b, r и c:

а) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ b = 1,\ r = 1,\ c = 2;$
б) $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ b = 2,\ r = 1,\ c = 2;$
в) $a_1 = 2,\ a_2 = -2,\ b = 2,\ r = 2,\ c = 1;$
г) $a_1 = 4,\ a_2 = -2,\ b = 1,\ r = 2,\ c = 1;$
д) $a_1 = 4,\ a_2 = -4,\ b = 1,\ r = 4,\ c = 2;$
е) $a_1 = 2,\ a_2 = -4,\ b = 4,\ r = 4,\ c = 2;$
ж) $a_1 = 2,\ a_2 = -3,\ b = 4,\ r = 4,\ c = 3;$
з) $a_1 = 5,\ a_2 = -3,\ b = 3,\ r = 2,\ c = 3;$
и) $a_1 = 5,\ a_2 = -4,\ b = 3,\ r = 2,\ c = 5;$
к) $a_1 = 3,\ a_2 = -4,\ b = 4,\ r = 2,\ c = 5.$

10.6. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = ax_2 + bu, x_1(0) = 0,$$

$$y = x_1 + V_н,$$

где x_2 и $V_н$ — шумы объекта и наблюдения соответственно, и они не коррелированы. Шум объекта x_2 является стационарным случайным процессом с корреляционной функцией $K(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$ и математическим ожиданием в начальный момент $M\{x_2(0)\} = 0$, а шум наблюдения $V_н$ — белым с интенсивностью r.

Определить на основе наблюдения выхода y на интервале $[0, t]$ несмещенную оптимальную оценку при следующих значениях параметров:

а) $a = 1,\ b = 2,\ \beta = 4,\ \alpha = 1,\ r = 1;$
б) $a = 2,\ b = 1,\ \beta = 4,\ \alpha = 1,\ r = 1;$
в) $a = 2,\ b = 1,\ \beta = 1,\ \alpha = 2,\ r = 2;$
г) $a = 4,\ b = 2,\ \beta = 1,\ \alpha = 2,\ r = 2;$
д) $a = 4,\ b = 2,\ \beta = 2,\ \alpha = 4,\ r = 4;$
е) $a = 2,\ b = 3,\ \beta = 2,\ \alpha = 4,\ r = 4;$
ж) $a = 2,\ b = 3,\ \beta = 1,\ \alpha = 3,\ r = 4;$
з) $a = 5,\ b = 4,\ \beta = 1,\ \alpha = 3,\ r = 2;$

и) $a = 5,\ b = 4,\ \beta = 3,\ \alpha = 4,\ r = 2;$

к) $a = 3,\ b = 5,\ \beta = 3,\ \alpha = 4,\ r = 2.$

10.7. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u + V_{20},$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \widetilde{y} = x_1 + z,$$

где V_{20} и z — шумы объекта и наблюдения соответственно. Шум объекта V_{20} является белым с интенсивностью q, шум наблюдения z — цветным и подчиняется уравнению

$$\dot{z} = dz + 2\widetilde{V}_{\text{н}}.$$

Здесь $\widetilde{V}_{\text{н}}$ — белый шум с единичной интенсивностью, шумы V_{20} и $\widetilde{V}_{\text{н}}$ не коррелированы.

Определить несмещенную оптимальную оценку фазового вектора, принимая за наблюдаемый выход

$$y = \dot{\widetilde{y}} - \widetilde{C}Bu - d\widetilde{y} \quad (\widetilde{C} = [1\ \ 0], \quad B = [0\ \ 1]^T)$$

при следующих значениях параметров a_1, a_2, d и q:

а) $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ d = -1,\ q = 1;$

б) $a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ d = -1,\ q = 1;$

в) $a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ d = -2,\ q = 2;$

г) $a_1 = -1,\ a_2 = -2,\ d = -2,\ q = 2;$

д) $a_1 = -2,\ a_2 = -2,\ d = -4,\ q = 2;$

е) $a_1 = -2,\ a_2 = -4,\ d = -2,\ q = 2;$

ж) $a_1 = -2,\ a_2 = -3,\ d = -2,\ q = 1;$

з) $a_1 = -5,\ a_2 = -3,\ d = -1,\ q = 1;$

и) $a_1 = -3,\ a_2 = -4,\ d = -4,\ q = 3;$

к) $a_1 = -5,\ a_2 = -4,\ d = -1,\ q = 3.$

10.8. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + bu + V_{20},$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \widetilde{y} = x_1 + z,$$

где V_{20} и z — шумы объекта и наблюдения соответственно, и они не коррелированы. Шум объекта V_{2o} является белым с интенсивностью q, шум наблюдения z — цветным с корреляционной функцией $K_z(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}/\alpha$.

Определить несмещенную оптимальную оценку фазового вектора, принимая за наблюдаемый выход

$$y = \dot{\widetilde{y}} - \widetilde{C}Bu - d\widetilde{y} \quad (\widetilde{C} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0 & b\end{bmatrix}^T)$$

при следующих значениях параметров a_1, a_2, α, b и q:

а) $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ \alpha = -1,\ b = 2,\ q = 2;$
б) $a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ b = 2,\ \alpha = -1,\ q = 2;$
в) $a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ \alpha = -2,\ b = 4,\ q = 1;$
г) $a_1 = -1,\ a_2 = -2,\ \alpha = -2,\ b = 4,\ q = 1;$
д) $a_1 = -2,\ a_2 = -2,\ \alpha = -4,\ b = 3,\ q = 1;$
е) $a_1 = -2,\ a_2 = -4,\ \alpha = -2,\ b = 3,\ q = 1;$
ж) $a_1 = -2,\ a_2 = -3,\ \alpha = -2,\ b = 5,\ q = 3;$
з) $a_1 = -5,\ a_2 = -3,\ \alpha = -1,\ b = 5,\ q = 3;$
и) $a_1 = -3,\ a_2 = -4,\ \alpha = 4,\ b = 2,\ q = 4;$
к) $a_1 = -5,\ a_2 = -4,\ \alpha = -1,\ b = 2,\ q = 4.$

10.9. Дана управляемая система

$$\dot{x}_1 = x_2 + V_{10}, \quad \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + bu,$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,$$
$$y_1 = x_2 + V_{\text{н}}, \quad y_2 = x_1,$$

где V_{10} и $V_{\text{н}}$ — белые шумы объекта и наблюдения с интенсивностью q_1 и соответственно, и онн не коррелированы; y_1, y_2 — выходные (наблюдаемые) переменные. Определить несмещенную оптимальную оценку фазового вектора прн следующих значениях параметров a_1, a_2, b, q_1 и r:

а) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b = 1,\ q_1 = 1,\ r = 2;$
б) $a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ b = 1,\ q_1 = 2,\ r = 2;$
в) $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ b = 2,\ q_1 = 2,\ r = 4;$
г) $a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ b = 2,\ q_1 = 4,\ r = 4;$
д) $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ b = 3,\ q_1 = 4,\ r = 2;$
е) $a_1 = 4,\ a_2 = 5,\ b = 3,\ q_1 = 2,\ r = 2;$
ж) $a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ b = 5,\ q_1 = 2,\ r = 1;$
з) $a_1 = 5,\ a_2 = 3,\ b = 5,\ q_1 = 1,\ r = 4;$
и) $a_1 = 5,\ a_2 = 4,\ b = 4,\ q_1 = 4,\ r = 1;$
к) $a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ b = 4,\ q_1 = 2,\ r = 2.$

10.3. Стохастические оптимальные системы

Для строго детерминированных систем управления не имеет значения, какое управление — программное или с обратной связью — используется, так как знание управления и начального состояния позволяет однозначно определять состояние системы в любой момент времени. Наблюдение за текущим состоянием системы не дает новой информации. В стохастических системах управления, т. е. в системах, подверженных случайным воздействиям, по известным управлению и начальному состоянию предсказать ход протекания процесса невозможно. И возможности качественного управления такими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путем измерения (наблюдения) и обработки выходными (наблюдаемыми) переменными. Поэтому стохастические системы управления должны быть замкнутыми.

При рассмотрении детерминированных систем управления также основное внимание уделяется замкнутым системам, так как практически все системы управления подвержены случайным или неслучайным, но заранее не прогнозируемым, воздействиям. Т. е. строго детерминированных систем управления не бывает. Однако при анализе и синтезе рассматриваются детерминированные модели в виду их простоты по сравнению со стохастическими моделями, когда случайные воздействия не оказывают существенных влияннй.

Стохастическое оптимальное управление при полной информации. Уравнение объекта имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_0(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

где $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина, $\mathbf{V}_0(t)$ — гауссов белый шум, $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{V}_0(t)$ не коррелированы; белый шум имеет следующие характеристики:

$$M[\mathbf{V}_0(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t').$$

Пусть требуется определить управленне с обратной связью, доставляющее минимум критерню оптимальности.

$$J = M\left[g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt\right].$$

Такое управление называется *стохастическим оптимальным управлением*.

Итак, рассматривается задача стохастического оптимального управления, в которой шум объекта является гауссовым белым шумом и входит в уравнение аддитивно; ограничение на правый конец траектории отсутствует, фазовый вектор наблюдается полностью и без помех. В этой задаче $\mathbf{x}(t)$ является марковскнм процессом (так как случайное воздействие является белым шумом), и вся информация, которая может быть использована при определении характеристикн будущего состояния, содержится в $\mathbf{x}(t)$. Поэтому оптимальное управленне должно быть функцией только от текущего состояния и, быть может, текущего времени.

Управление $\mathbf{u} = (\mathbf{x}(t), t)$ считается допустимым, если функция $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{x}(t), t)$ кусочно-непрерывна. Кроме того, предполагается, что при допустимом управлении уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$$

при каждом фиксированном $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ имеет единственное решение на интервале $[t_0, t_f]$. Функции $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $Q_0(t)$ предполагаются непрерывными.

Стохастическая оптимальная линейная система при полной информации о состоянии. Пусть уравнение объекта и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{10.16а}$$

$$J = M\left[\mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f}\left[\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)\right]dt\right]. \tag{10.16б}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ — гауссов белый шум, $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина; $\mathbf{V}_0$ и x^0 не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$M\mathbf{x}^0 = \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M\left[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T\right] = P_0;$$
$$M\left[\mathbf{V}_0(t)\right] = 0, \quad M\left[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')\right] = Q_0(t)\delta(t - t');$$

матрицы A, B, Q и R, вообще говоря, являются функциями времени, R — положительно определенная матрица, Q, P_0, Q_0 — положительно полуопределенные матрицы, объект стабилизнруем. Требуется найти оптимальное управление объекта с обратной связью, обеспечивающее минимум заданному критерию оптимальности, при условии, что фазовый вектор доступен точному измерению.

Теорема 10.3. *Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта* (10.16а) *при критерии оптимальности* (10.16б) *имеет вид*

$$\mathbf{u} = -R^{-1}B^TK\mathbf{x}, \tag{10.17а}$$

где K — симметрическая матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK \tag{10.17б}$$

при граничном условии

$$K(t_f) = F. \tag{10.17в}$$

Оптимальный закон управления (10.17) совпадает с оптимальным законом управления в детерминированном случае. Таким образом, случайное воздействие на объект и случайное начальное условие не влияют на оптимальный закон управления, если имеется полная информация о фазовом векторе.

Стохастическое оптимальное управление при неполной информации о состоянии. Принцип разделения. Постановка задачи. Пусть уравнения объекта и наблюдения и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{10.18а}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_\text{н}; \tag{10.18б}$$

$$J = M\left[\mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\left[\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)\right]dt\right]. \tag{10.18в}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_\text{н}$ — гауссовы белые шумы, $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина; $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_\text{н}$ и $\mathbf{x}^0$ не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$M\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T = P_0;$$
$$M[\mathbf{V}_0(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t');$$
$$M[\mathbf{V}_\text{н}(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_\text{н}(t)\mathbf{V}_\text{н}^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t');$$

матрицы A, B, Q и R, вообще говоря, являются функциями времени, R, R_0 — положительно определенные матрицы, Q, P_0, Q_0 — положительно полуопределенные матрицы. Требуется найти управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\left\{\mathbf{y}(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t\right\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_f,$$

при котором критерий оптимальности (10.18а) принимает минимальное значение.

Эта задача отличается от задачи стохастического оптимального управления с полной информацией тем, что в данном случае управление формируется на основе информации, получаемой путем обработки измеряемой с помехой выходной переменной.

Теорема 10.4. *Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта* (10.18а), (10.18б) *при критерии оптимальности* (10.18в) *имеет вид*

$$\mathbf{u} = -R^{-1}B^TK\widehat{\mathbf{x}}, \tag{10.19а}$$

где K — симметрическая матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q \tag{10.19б}$$

при граничном условии

$$K(t_f) = F, \tag{10.19в}$$

$\widehat{\mathbf{x}}$ — *оптимальная оценка, получаемая фильтром Калмана-Бьюси*

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}), \quad \widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0; \tag{10.20а}$$

$$K^0 = PC^T R_0^{-1}, \tag{10.20б}$$

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0. \tag{10.20в}$$

Оптимальный закон управления (10.19) совпадает с оптимальным законом управления в детерминированном случае и стохастическим оптимальным управлением при полной информации лишь с тем отличием, что в законе управления (10.19а) используется не сам фазовый вектор, а его оценка, которая определяется фильтром Калмана–Бьюси. Таким образом, при неполной информации стохастически оптимальный регулятор состоит из оптимального фильтра (фильтра Калмана–Бьюси) и детерминированного оптимального регулятора. Этот результат известен как *принцип разделения*, или *принцип стохастической эквивалентности*. В соответствии с этим принципом задача синтеза стохастической оптимальной системы управления при неполной информации сводится к двум задачам: задаче синтеза фильтра Калмана–Бьюси и задаче синтеза детерминированной оптимальной системы. Если шумы и начальное состояние подчиняются нормальному закону распределения, то в результате такого синтеза получим стохастическую оптимальную систему, в противном случае (шумы и начальное состояние подчиняются другим законам) можем только гарантировать, что полученная таким путем система будет оптимальной в классе линейных систем.

Задачи

10.10. Определить стохастическое оптимальное управление при полной информации в следующих задачах управления:

а) $\dot{x} = (2e^{-t} - 1)x + 2u + V_O, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (2x^2 + 2u^2)dt\right] \to \min_u;$$

б) $\dot{x} = (1 + \sin^2 t)x + u + V_O, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (2x^2 + 2u^2)dt\right] \to \min_u;$$

в) $\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = 2u + V_{2O}, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + u^2)dt\right] \to \min_u;$$

г) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 4u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4u^2)dt\right] \to \min_u;$$

д) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + 4u^2)dt\right] \to \min_u;$$

е) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (2x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt\right] \to \min_u;$$

ж) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 2u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt\right] \to \min_u;$$

з) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 2u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + 4u^2)dt\right] \to \min_u;$$

и) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (x_1^2 + 2x_2^2 + 2u^2)dt\right] \to \min_u;$$

к) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2u + V_{2O},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{10} (2x_1^2 + 4x_2^2 + u^2)dt\right] \to \min_u.$$

10.11. Определить стохастическое оптимальное управление $u^* = u(y, \dot{y})$ при условии, что на объект воздействует помеха — гауссов белый шум V_{2O}, выходная переменная y и ее производная могут быть измерены без ошибок, в следующих задачах оптимального управления:

а) $y = \dfrac{2}{p^2 + p}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^{\infty} (y^2 + 2\dot{y}^2 + 2u^2)dt\right] \to \min_u;$$

б) $y = \dfrac{2}{p^2 + 2p}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(y^2 + 2\dot{y}^2 + 2u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

в) $y = \dfrac{4}{p^2 + 4p}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(2y^2 + 2\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

г) $y = \dfrac{2}{p^2 + 2p + 1}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(2y^2 + 2\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 4u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

д) $y = \dfrac{4}{p^2 + 4p + 3}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(4y^2 + 2\dot{y}^2 + 2u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

е) $y = \dfrac{4}{p^2 + 6p + 6}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(2y^2 + 2\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

ж) $y = \dfrac{2}{p^2 + 4p + 5}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(y^2 + 4\dot{y}^2 + 2u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

з) $y = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 5}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(4y^2 + \dot{y}^2 + 2y\dot{y} + u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

и) $y = \dfrac{1}{p^2 + 6p + 10}(u + V_{2O}),\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty \left(y^2 + 4\dot{y}^2 + 4y\dot{y} + 4u^2\right)dt\right] \to \min_u;$$

к) $y = \dfrac{2}{p^2+6p+13}(u+V_{2O}),\ y(0)=y^0,\ \dot y(0)=\dot y^0,$

$$J = M\left[\int_0^\infty (y^2+\dot y^2+2y\dot y+2u^2)dt\right] \to \min_u .$$

10.12. Дана управляемая система

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + bu + V_{2O},$$

$$x_1(0)=0, \quad x_2(0)=0, \quad y = x_1 + V_{\text{н}}.$$

Шумы объекта V_{2O} и наблюдения $V_{\text{н}}$ являются белыми с интенсивностями q и r соответственно, и они не коррелированы.

Определить на основе наблюдения выхода y на интервале $[0,t]$ стохастическое оптимальное управление, минимизирующее критерий оптимальности

$$J = M\left[\int_0^\infty (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{12}x_1x_2 + \widetilde{r}u^2)dt\right]$$

при следующих значениях параметров a_1, a_2, b, q, r, q_{11}, q_{22}, q_{12} и $\widetilde{r}$:

а) $a_1=0,\ a_2=2,\ b=2,\ q=1,\ r=1,\ q_{11}=1,\ q_{22}=1,\ q_{12}=1,\ \widetilde{r}=1;$

б) $a_1=-4,\ a_2=2,\ b=1,\ q=2,\ r=1;\ q_{11}=2,\ q_{22}=1,\ q_{12}=1,\ \widetilde{r}=1;$

в) $a_1=0,\ a_2=-4,\ b=4,\ q=2,\ r=2,\ q_{11}=2,\ q_{22}=2,\ q_{12}=0,\ \widetilde{r}=2;$

г) $a_1=-1,\ a_2=-4,\ b=2,\ q=4,\ r=2,\ q_{11}=4,\ q_{22}=2,\ q_{12}=0,\ \widetilde{r}=2;$

д) $a_1=-2,\ a_2=-1,\ b=2,\ q=4,\ r=1,\ q_{11}=4,\ q_{22}=4,\ q_{12}=2,\ \widetilde{r}=4;$

е) $a_1=-2,\ a_2=2,\ b=8,\ q=2,\ r=4,\ q_{11}=1,\ q_{22}=2,\ q_{12}=0,\ \widetilde{r}=4;$

ж) $a_1=-2,\ a_2=-4,\ b=8,\ q=2,\ r=4,\ q_{11}=4,\ q_{22}=1,\ q_{12}=1,\ \widetilde{r}=2;$

з) $a_1=-4,\ a_2=4,\ b=4,\ q=1,\ r=2,\ q_{11}=1,\ q_{22}=4,\ q_{12}=0,\ \widetilde{r}=2;$

н) $a_1=-5,\ a_2=-4,\ b=4,\ q=1,\ r=2,\ q_{11}=3,\ q_{22}=4,\ q_{12}=3,\ \widetilde{r}=4;$

к) $a_1=-5,\ a_2=2,\ b=1,\ q=1,\ r=1,\ q_{11}=5,\ q_{22}=3,\ q_{12}=5,\ \widetilde{r}=4.$

Ответы

10.1. а) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+2{,}5s+1}{s^4+9{,}2s^3+24{,}8s^2+19{,}6s+3};$

б) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+4s+3}{s^4+11{,}5s^3+43{,}5s^2+59s+20};$

в) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+4{,}5s+2}{s^4+4{,}6s^3+7{,}4s^2+5s+1{,}2};$

г) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+1{,}6s+0{,}6}{s^4+7{,}5s^3+19{,}5s^2+20s+6};$

д) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+3{,}5s+1{,}5}{s^4+8s^3+21s^2+22s+8}$;

е) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+5s+4}{s^4+7{,}5s^3+19{,}5s^2+20s+6}$;

ж) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+2{,}5s+1}{s^4+10s^3+32s^2+38s+15}$;

з) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+2{,}5s+1}{s^4+10s^3+32s^2+38s+15}$;

и) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+5s+6}{s^4+6s^3+9{,}25s^2+5{,}25s+1}$;

к) $W_\Phi(s) = \dfrac{s^2+4{,}5s+2}{s^4+11s^3+41s^2+61s+30}$.

10.2. а) $S(\omega) = \dfrac{4}{\omega^6-0{,}84\omega^4+0{,}84\omega^2+0{,}16}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{2}{s^3+1{,}4s^2+1{,}4s+0{,}4}$;

б) $S(\omega) = \dfrac{4}{\omega^6+2{,}25\omega^4+1{,}5\omega^2+0{,}25}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{2}{s^3+2{,}5s^2+2s+0{,}5}$;

в) $S(\omega) = \dfrac{16}{\omega^6+21\omega^4+84\omega^2+64}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{4}{s^3+7s^2+14s+8}$;

г) $S(\omega) = \dfrac{4}{\omega^6+64}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{2}{s^3+6s^2+12s+8}$;

д) $S(\omega) = \dfrac{16}{\omega^6+14\omega^4+49\omega^2+36}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{4}{s^3+6s^2+11s+6}$;

е) $S(\omega) = \dfrac{4}{\omega^6+43\omega^4+531\omega^2+2025}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{2}{s^3+11s^2+39s+45}$;

ж) $S(\omega) = \dfrac{4}{\omega^6+26\omega^4+169\omega^2+144}$,

$W_\Phi(s) = \dfrac{2}{s^3+8s^2+19s+12}$;

з) $S(\omega)=\dfrac{9}{\omega^6+22\omega^4+153\omega^2+324}$,

$W_\Phi(s)=\dfrac{3}{s^3+8s^2+21s+18}$;

и) $S(\omega)=\dfrac{4}{\omega^6+24\omega^4+144\omega^2+256}$,

$W_\Phi(s)=\dfrac{2}{s^3+8s^2+20s+16}$;

к) $S(\omega)=\dfrac{4}{\omega^6+27\omega^4+51\omega^2+25}$,

$W_\Phi(s)=\dfrac{2}{s^3+7s^2+11s+5}$.

10.3. а) $W(s)=0{,}414\dfrac{s+1}{0{,}707s+1}$; б) $W(s)=0{,}581\dfrac{0{,}5s+1}{0{,}395s+1}$;

в) $W(s)=0{,}639\dfrac{s+1}{0{,}729s+1}$; г) $W(s)=0{,}575\dfrac{s+1}{0{,}646s+1}$;

д) $W(s)=0{,}333\dfrac{s+1}{0{,}5s+1}$; е) $W(s)=0{,}586\dfrac{0{,}5s+1}{0{,}707s+1}$;

ж) $W(s)=0{,}576\dfrac{0{,}167s+1}{0{,}52s+1}$; з) $W(s)=0{,}362\dfrac{0{,}25s+1}{0{,}729s+1}$;

и) $W(s)=0{,}136\dfrac{0{,}5s+1}{0{,}212s+1}$; к) $W(s)=0{,}667\dfrac{0{,}25s+1}{0{,}5s+1}$.

10.4. а) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+p_{11}(y-\hat{x}_1)$, $\dot{\hat{x}}_2=2\hat{x}_2+2u+p_{12}(y-\hat{x}_1)$,

$\dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=2p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=4p_{22}-p_{12}^2+1$;

б) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+p_{11}(y-\hat{x}_1)$, $\dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_1+2\hat{x}_2+u+p_{12}(y-\hat{x}_1)$,

$\dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{11}+2p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12}$,

$\dot{p}_{22}=-8p_{12}+4p_{22}-p_{12}^2+2$;

в) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1)$, $\dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_2+4u+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1)$,

$\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{12}+p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$,

$\dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+2$;

г) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1)$, $\dot{\hat{x}}_2=\hat{x}_1+\hat{x}_2+u+p_{12}(y-\hat{x}_1)$,

$\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$,

$\dot{p}_{22}=-2p_{12}-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+4$;

д) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+p_{11}(y-\hat{x}_1)$, $\dot{\hat{x}}_2=-2\hat{x}_1-\hat{x}_2+2u+p_{12}(y-\hat{x}_1)$,

$\dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-2p_{11}-p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12}$,

$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-2p_{22}-p_{12}^2+4$;

е) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1+2\widehat{x}_2+8u+0{,}25p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-2p_{11}+2p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-4p_{12}+4p_{22}-0{,}25p_{12}^2+2$;

ж) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-4\widehat{x}_2+8u+0{,}25p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-2p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-4p_{12}-8p_{22}-0{,}25p_{12}^2+2$;

з) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-4\widehat{x}_1+4\widehat{x}_2+4u+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{11}+4p_{12}+p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-8p_{12}+8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+1$;

и) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-5\widehat{x}_1-4\widehat{x}_2+4u+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-5p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-10p_{12}-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+1$;

к) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-5\widehat{x}_1+2\widehat{x}_2+u+p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-5p_{11}+2p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-10p_{12}+4p_{22}-p_{12}^2+1$.

10.5 а) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+u+p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-\widehat{x}_2+p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-2p_{22}-p_{12}^2+4$, $\mathbf{p}(0)=\mathbf{0}$;

б) $\dot{\widehat{x}}_1=2\widehat{x}_2+2u+p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-\widehat{x}_2+p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=4p_{12}-p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-p_{12}+2p_{22}-p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-2p_{22}-p_{12}^2+4$, $\mathbf{p}(0)=\mathbf{0}$;

в) $\dot{\widehat{x}}_1=2\widehat{x}_2+2u+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-2p_{12}+2p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-4p_{22}-0{,}5p_{12}^2+1$, $\mathbf{p}(0)=\mathbf{0}$;

г) $\dot{\widehat{x}}_1=4\widehat{x}_2+u+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=8p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-2p_{12}+4p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-4p_{22}-0{,}5p_{12}^2+1$, $\mathbf{p}(0)=\mathbf{0}$;

д) $\dot{\widehat{x}}_1=4\widehat{x}_2+u+0{,}25p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-4\widehat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=8p_{12}-0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{12}+$ $+4p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}25p_{12}^2+4$, $\mathbf{p}(0)=\mathbf{0}$;

е) $\dot{\hat{x}}_1=2\hat{x}_2+4u+0{,}25p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}25p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-4p_{12}+$
$+2p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}25p_{12}^2+4,\ \mathbf{p}(0)=\mathbf{0};$

ж) $\dot{\hat{x}}_1=2\hat{x}_2+4u+0{,}25p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-3\hat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}25p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-3p_{12}+$
$+2p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-6p_{22}-0{,}25p_{12}^2+9,\ \mathbf{p}(0)=\mathbf{0};$

з) $\dot{\hat{x}}_1=5\hat{x}_2+3u+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-3\hat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=10p_{12}-0{,}5p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-3p_{12}+$
$+5p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-6p_{22}-0{,}5p_{12}^2+9,\ \mathbf{p}(0)=\mathbf{0};$

и) $\dot{\hat{x}}_1=5\hat{x}_2+3u+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=10p_{12}-0{,}5p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-4p_{12}+$
$+5p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+25,\ \mathbf{p}(0)=\mathbf{0};$

к) $\dot{\hat{x}}_1=3\hat{x}_2+4u+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=6p_{12}-0{,}5p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-4p_{12}+$
$+3p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+25,\ \mathbf{p}(0)=\mathbf{0}.$

10.6. а) $\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+2u+p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-\hat{x}_2+p_{12}(y-\hat{x}_1),\ \hat{x}_1(0)=0,$
$\hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-p_{12}+p_{22}-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{22}=-2p_{22}-p_{12}^2+8,\ p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=4;$

б) $\dot{\hat{x}}_1=2\hat{x}_2+u+p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-\hat{x}_2+p_{12}(y-\hat{x}_1),\ \hat{x}_1(0)=0,$
$\hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=4p_{12}-p_{11}^2,\ \dot{p}_{12}=-p_{12}+2p_{22}-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{22}=-2p_{22}-p_{12}^2+8,\ p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=4;$

в) $\dot{\hat{x}}_1=2\hat{x}_2+u+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-2\hat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}5p_{11}^2,$
$\dot{p}_{12}=-2p_{12}+2p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-4p_{22}-0{,}5p_{12}^2+4,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=1;$

г) $\dot{\hat{x}}_1=4\hat{x}_2+2u+0{,}5p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-2\hat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=8p_{12}-0{,}5p_{11}^2,$
$\dot{p}_{12}=-2p_{12}+4p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-4p_{22}-0{,}5p_{12}^2+4,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=1;$

д) $\dot{\hat{x}}_1=4\hat{x}_2+2u+0{,}25p_{11}(y-\hat{x}_1),\ \dot{\hat{x}}_2=-4\hat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\hat{x}_1),$
$\hat{x}_1(0)=0,\ \hat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=8p_{12}-0{,}25p_{11}^2,$
$\dot{p}_{12}=-4p_{12}+4p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12},\ \dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}25p_{12}^2+16,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=2;$

е) $\dot{\widehat{x}}_1=2\widehat{x}_2+3u+0{,}25p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-4\widehat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{12}+2p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}25p_{12}^2+16$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=2$;

ж) $\dot{\widehat{x}}_1=2\widehat{x}_2+3u+0{,}25p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-3\widehat{x}_2+0{,}25p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=4p_{12}-0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-3p_{12}+2p_{22}-0{,}25p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-6p_{22}-0{,}25p_{12}^2+6$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=1$;

з) $\dot{\widehat{x}}_1=5\widehat{x}_2+4u+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-3\widehat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=10p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-3p_{12}+5p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-6p_{22}-0{,}5p_{12}^2+6$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=1$;

и) $\dot{\widehat{x}}_1=5\widehat{x}_2+4u+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-4\widehat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=10p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{12}+5p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+24$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=3$;

к) $\dot{\widehat{x}}_1=3\widehat{x}_2+5u+0{,}5p_{11}(y-\widehat{x}_1)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-4\widehat{x}_2+0{,}5p_{12}(y-\widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=6p_{12}-0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12}=-4p_{12}+3p_{22}-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{22}=-8p_{22}-0{,}5p_{12}^2+24$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=3$.

10.7. а) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2+u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{12}=-p_{11}-p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$, $\dot{p}_{22}=-2p_{12}-2p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+1$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=0$;

б) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2+u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$, $\widehat{x}_1(0)=0$, $\widehat{x}_2(0)=0$, $\dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$, $\dot{p}_{12}=-2p_{11}-p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$, $\dot{p}_{22}=-4p_{12}-2p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+1$, $p_{11}(0)=p_{12}(0)=0$, $p_{22}(0)=0$;

в) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(0{,}5p_{11}+0{,}25p_{12})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2+u+(0{,}5p_{12}+0{,}25p_{22})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-p_{11}^2-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12}=-2p_{11}-p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-p_{11}p_{12}-0{,}5p_{11}p_{22}-0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-2p_{22}-0{,}25p_{22}^2-p_{12}^2-p_{12}p_{22}+2,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0;$

г) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(0{,}5p_{11}+0{,}25p_{12})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2=-\widehat{x}_1-2\widehat{x}_2+u+(0{,}5p_{12}+0{,}25p_{22})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-p_{11}^2-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12}=-p_{11}-2p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-p_{11}p_{12}-0{,}5p_{11}p_{22}-0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22}=-2p_{12}-4p_{22}-0{,}25p_{22}^2-p_{12}^2-p_{12}p_{22}+2,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0;$

д) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(p_{11}+0{,}25p_{12})(y-4\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-2\widehat{x}_2+u+(p_{12}+0{,}25p_{22})(y-4\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-4p_{11}^2-2p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12}=-2p_{11}-2p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-4p_{11}p_{12}-p_{11}p_{22}-p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-4p_{22}-0{,}25p_{22}^2-4p_{12}^2-2p_{12}p_{22}+2,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0;$

е) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(0{,}5p_{11}+0{,}25p_{12})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-4\widehat{x}_2+u+(0{,}5p_{12}+0{,}25p_{22})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-p_{11}^2-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12}=-2p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-p_{11}p_{12}-0{,}5p_{11}p_{22}-0{,}25p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-8p_{22}-0{,}25p_{22}^2-p_{12}^2-p_{12}p_{22}+2,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0;$

ж) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(0{,}5p_{11}+0{,}25p_{12})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-3\widehat{x}_2+u+(0{,}5p_{12}+0{,}25p_{22})(y-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-p_{11}^2-p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12}=-2p_{11}-3p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-p_{11}p_{12}-0{,}5p_{11}p_{22}-0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-6p_{22}-0{,}25p_{22}^2-p_{12}^2-p_{12}p_{22}+1,$
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0;$

з) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\dot{\widehat{x}}_2=-5\widehat{x}_1-3\widehat{x}_2+u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{12}=-5p_{11}-3p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$,
$\dot{p}_{22}=-10p_{12}-6p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+1$,
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0$;

и) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+(p_{11}+0{,}25p_{12})(y-4\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\dot{\widehat{x}}_2=-3\widehat{x}_1-4\widehat{x}_2+u+(p_{12}+0{,}25p_{22})(y-4\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-4p_{11}^2-2p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{12}=-3p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}25p_{12}p_{22}-4p_{11}p_{12}-p_{11}p_{22}-p_{12}^2$,
$\dot{p}_{22}=-6p_{12}-8p_{22}-0{,}25p_{22}^2-4p_{12}^2-2p_{12}p_{22}+3$,
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0$;

к) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\dot{\widehat{x}}_2=-5\widehat{x}_1-4\widehat{x}_2+u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{12}=-5p_{11}-4p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$,
$\dot{p}_{22}=-10p_{12}-8p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+3$,
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0$.

10.8. а) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\dot{\widehat{x}}_2=-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2+2u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{12}=-p_{11}-p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$,
$\dot{p}_{22}=-2p_{12}-2p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+2$,
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0$;

б) $\dot{\widehat{x}}_1=\widehat{x}_2+0{,}25(p_{11}+p_{12})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\dot{\widehat{x}}_2=-2\widehat{x}_1-\widehat{x}_2+2u+0{,}25(p_{12}+p_{22})(y-\widehat{x}_1-\widehat{x}_2)$,
$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12}-0{,}25p_{12}^2-0{,}25p_{11}^2-0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{12}=-2p_{11}-p_{12}+p_{22}-0{,}25(p_{12}p_{22}+p_{11}p_{12}+p_{11}p_{22}+p_{12}^2)$,
$\dot{p}_{22}=-4p_{12}-2p_{22}-0{,}25p_{22}^2-0{,}25p_{12}^2-0{,}5p_{12}p_{22}+2$,
$p_{11}(0)=p_{12}(0)=0,\ p_{22}(0)=0$;

в) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (0{,}5p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 + 4u + (0{,}5p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - p_{11}^2 - p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12} = -2p_{11} - p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - p_{11}p_{12} - 0{,}5p_{11}p_{22} - 0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 2p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - p_{12}^2 - p_{12}p_{22} + 1,$
$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

г) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (0{,}5p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2 = -\widehat{x}_1 - 2\widehat{x}_2 + 4u + (0{,}5p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - p_{11}^2 - p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12} = -p_{11} - 2p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - p_{11}p_{12} - 0{,}5p_{11}p_{22} - 0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22} = -2p_{12} - 4p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - p_{12}^2 - p_{12}p_{22} + 1,$
$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

д) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 4\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - 2\widehat{x}_2 + 3u + (p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 4\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - 4p_{11}^2 - 2p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12} = -2p_{11} - 2p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - 4p_{11}p_{12} - p_{11}p_{22} - p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 4p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - 4p_{12}^2 - 2p_{12}p_{22} + 1,$
$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

е) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (0{,}5p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - 4\widehat{x}_2 + 3u + (0{,}5p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - p_{11}^2 - p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12} = -2p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - p_{11}p_{12} - 0{,}5p_{11}p_{22} - 0{,}25p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 8p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - p_{12}^2 - p_{12}p_{22} + 1,$
$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

ж) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (0{,}5p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - 3\widehat{x}_2 + 5u + (0{,}5p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$
$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - p_{11}^2 - p_{11}p_{12},$
$\dot{p}_{12} = -2p_{11} - 3p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - p_{11}p_{12} - 0{,}5p_{11}p_{22} - 0{,}5p_{12}^2,$
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 6p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - p_{12}^2 - p_{12}p_{22} + 3,$
$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

з) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}25(p_{11} + p_{12})(y - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\dot{\widehat{x}}_2 = -5\widehat{x}_1 - 3\widehat{x}_2 + 5u + 0{,}25(p_{12} + p_{22})(y - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - 0{,}25p_{11}^2 - 0{,}5p_{11}p_{12},$

$\dot{p}_{12}=-5p_{11} - 3p_{12} + p_{22} - 0{,}25(p_{12}p_{22} + p_{11}p_{12} + p_{11}p_{22} + p_{12}^2),$

$\dot{p}_{22} = -10p_{12} - 6p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - 0{,}25p_{12}^2 - 0{,}5p_{12}p_{22} + 3,$

$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

и) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + (p_{11} + 0{,}25p_{12})(y - 4\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\dot{\widehat{x}}_2 = -3\widehat{x}_1 - 4\widehat{x}_2 + 2u + (p_{12} + 0{,}25p_{22})(y - 4\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\widehat{x}_1(0) = 0,\ \widehat{x}_2(0) = 0,\ \dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - 4p_{11}^2 - 2p_{11}p_{12},$

$\dot{p}_{12} = -3p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{12}p_{22} - 4p_{11}p_{12} - p_{11}p_{22} - p_{12}^2,$

$\dot{p}_{22} = -6p_{12} - 8p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - 4p_{12}^2 - 2p_{12}p_{22} + 4,$

$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0;$

к) $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}25(p_{11} + p_{12})(y - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\dot{\widehat{x}}_2 = -5\widehat{x}_1 - 4\widehat{x}_2 + 2u + 0{,}25(p_{12} + p_{22})(y - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2),$

$\widehat{x}_1(0)=0,\ \widehat{x}_2(0)=0,\ \dot{p}_{11}=2p_{12} - 0{,}25p_{12}^2 - 0{,}25p_{11}^2 - 0{,}5p_{11}p_{12},$

$\dot{p}_{12}=-5p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}25(p_{12}p_{22} + p_{11}p_{12} + p_{11}p_{22} + p_{12}^2),$

$\dot{p}_{22} = -10p_{12} - 8p_{22} - 0{,}25p_{22}^2 - 0{,}25p_{12}^2 - 0{,}5p_{12}p_{22} + 4,$

$p_{11}(0) = p_{12}(0) = 0,\ p_{22}(0) = 0.$

10.9. а) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=2\widehat{q}+y_2+u+0{,}5\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=4\widetilde{p}-1{,}5\widetilde{p}^2;$

б) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=2\widehat{q}+2y_2+u+0{,}5\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}5\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=4\widetilde{p}-\widetilde{p}^2;$

в) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=4\widehat{q}+2y_2+2u+0{,}25\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}5\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=8\widetilde{p}-0{,}75\widetilde{p}^2;$

г) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=4\widehat{q}+3y_2+2u+0{,}25\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}25\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=8\widetilde{p}-0{,}5\widetilde{p}^2;$

д) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=5\widehat{q}+3y_2+3u+0{,}5\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}25\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=10\widetilde{p}-0{,}75\widetilde{p}^2;$

е) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$

$\dot{\widehat{q}}=5\widehat{q}+4y_2+3u+0{,}5\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}5\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=10\widetilde{p}-\widetilde{p}^2;$

ж) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$
$\dot{\widehat{q}}=3\widehat{q}+4y_2+5u+\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}5\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=6\widetilde{p}-0{,}75\widetilde{p}^2;$

з) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$
$\dot{\widehat{q}}=3\widehat{q}+5y_2+5u+0{,}25\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=6\widetilde{p}-1{,}25\widetilde{p}^2;$

и) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$
$\dot{\widehat{q}}=4\widehat{q}+5y_2+4u+\widetilde{p}(y_1-\widehat{q})+0{,}25\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=8\widetilde{p}-1{,}25\widetilde{p}^2;$

к) $\dot{\widehat{x}}_1=y_2,\ \dot{\widehat{x}}_2=\widehat{q},$
$\dot{\widehat{q}}=4\widehat{q}+6y_2+4u+0{,}5p(y_1-\widehat{q})+0{,}5\widetilde{p}(\dot{y}_2-\widehat{q}),\ \dot{\widetilde{p}}=8\widetilde{p}-\widetilde{p}^2.$

10.10. а) $u^*=-kx,\ \dot{k}=-2(2e^{-t}-1)k+2k^2-2,\ k(10)=0;$

б) $u^*=-0{,}5kx,\ \dot{k}=-2(1+\sin^2 t)k+0{,}5k^2-2,\ k(10)=0;$

в) $u^*=-2(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=4k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=-k_{11}+4k_{12}k_{22}-1,\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+4k_{22}^2-1,\ \mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

г) $u^*=-(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=4k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=-k_{11}+4k_{12}k_{22}-1,\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+4k_{22}^2-1,\ \mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

д) $u^*=-0{,}5(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=-k_{11}+k_{12}+k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+2k_{22}+k_{22}^2,\ \mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

е) $u^*=-(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=k_{12}^2-2,$
$\dot{k}_{12}=-k_{11}+2k_{12}+k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+4k_{22}+k_{22}^2-1,$
$\mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

ж) $u^*=-2(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=2k_{12}+4k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=k_{22}-k_{11}+k_{12}+4k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+2k_{22}+4k_{22}^2-1,$
$\mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

з) $u^*=-0{,}5(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=4k_{12}+k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=2k_{22}-k_{11}+k_{12}+k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+2k_{22}+k_{22}^2-1,$
$\mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

и) $u^*=-0{,}5(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=2k_{12}+0{,}5k_{12}^2-1,$
$\dot{k}_{12}=k_{22}-k_{11}+2k_{12}+0{,}5k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+4k_{22}+0{,}5k_{22}^2-2,$
$\mathbf{k}(0)=\mathbf{0};$

к) $u^*=-2(k_{12}x_1+k_{22}x_2),\ \dot{k}_{11}=4k_{12}+4k_{12}^2-2,$
$\dot{k}_{12}=2k_{22}-k_{11}+2k_{12}+4k_{12}k_{22},\ \dot{k}_{22}=-2k_{12}+4k_{22}+4k_{22}^2-4,$
$\mathbf{k}(0)=\mathbf{0}.$

10.11. а) $u^* = -(0{,}707y + 0{,}9\dot{y})$; б) $u^* = -(0{,}707y + 0{,}645\dot{y})$;
в) $u^* = -(0{,}354y + 0{,}231\dot{y})$; г) $u^* = -0{,}732(y + \dot{y})$;
д) $u^* = -(0{,}425y + 0{,}278\dot{y})$; е) $u^* = -(0{,}14y + 0{,}157\dot{y})$;
ж) $u^* = -(0{,}098y + 0{,}469\dot{y})$; з) $u^* = -(0{,}385y + 0{,}402\dot{y})$;
и) $u^* = -(0{,}05y + 0{,}339\dot{y})$; к) $u^* = -(0{,}038y + 0{,}088\dot{y})$.

10.12. а) $u^* = -(0{,}5\widehat{x}_1 + 1{,}72\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = 2\widehat{x}_2 + 2u + p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = 2p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = 4p_{22} - p_{12}^2 + 1$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

б) $u^* = -(0{,}243\widehat{x}_1 + 4{,}34\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -4\widehat{x}_1 + 2\widehat{x}_2 + u + p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -4p_{11} + 2p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -8p_{12} + 4p_{22} - p_{12}^2 + 2$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

в) $u^* = -(0{,}5\widehat{x}_1 + 0{,}291\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}5p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -4\widehat{x}_2 + 4u + 0{,}5p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -4p_{12} + p_{22} - 0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -8p_{22} - 0{,}5p_{12}^2 + 2$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

г) $u^* = -(\widehat{x}_1 + 0{,}449\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}5p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + u + p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -2p_{12} - 8p_{22} - 0{,}5p_{12}^2 + 4$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

д) $u^* = -(0{,}828\widehat{x}_1 + 1{,}58\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 + 2u + p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$,
$\widehat{x}_2(0) = 0$, $\dot{p}_{11} = 2p_{12} - p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -2p_{11} - p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 2p_{22} - p_{12}^2 + 4$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

е) $u^* = -(0{,}155\widehat{x}_1 + 0{,}525\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}25p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 + 2\widehat{x}_2 + 8u + 0{,}25p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -2p_{11} + 2p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} + 4p_{22} - 0{,}25p_{12}^2 + 2$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

ж) $u^* = -(0{,}297\widehat{x}_1 + 0{,}131\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}25p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -2\widehat{x}_1 - 4\widehat{x}_2 + 8u + 0{,}25p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}25p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -2p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}25p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -4p_{12} - 8p_{22} - 0{,}25p_{12}^2 + 2$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

з) $u^* = -(0{,}112\widehat{x}_1 + 1{,}38\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}5p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -4\widehat{x}_1 + 4\widehat{x}_2 + 4u + 0{,}5p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -4p_{11} + 4p_{12} + p_{22} - 0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -8p_{12} + 8p_{22} - 0{,}5p_{12}^2 + 1$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

и) $u^* = -(0{,}271\widehat{x}_1 + 0{,}461\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + 0{,}5p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -5\widehat{x}_1 - 4\widehat{x}_2 + 4u + 0{,}5p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - 0{,}5p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -5p_{11} - 4p_{12} + p_{22} - 0{,}5p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -10p_{12} - 8p_{22} - 0{,}5p_{12}^2 + 1$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;

к) $u^* = -(0{,}494\widehat{x}_1 + 16{,}94\widehat{x}_2)$, $\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{x}_2 + p_{11}(y - \widehat{x}_1)$,
$\dot{\widehat{x}}_2 = -5\widehat{x}_1 + 2\widehat{x}_2 + u + p_{12}(y - \widehat{x}_1)$, $\widehat{x}_1(0) = 0$, $\widehat{x}_2(0) = 0$,
$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - p_{11}^2$, $\dot{p}_{12} = -5p_{11} + 2p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12}$,
$\dot{p}_{22} = -10p_{12} + 4p_{22} - p_{12}^2 + 1$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$.

Глава 11

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Система управления называется *адаптивной*, если в ней текущая информация, помимо выработки управляющего воздействия, используется также для изменения алгоритма управления. В обычных (неадаптивных) системах управления текущая информация используется только для формирования управляющего воздействия. Адаптивную систему, если структура алгоритма не изменяется, а изменяются только его параметры, называют *самонастраивающейся системой* (СНС), а если изменяется структура — *самоорганизующейся системой*.

Адаптивные системы управления включают объект, регулятор и адаптор. Объект и регулятор, вырабатывающий управляющее воздействие на объект, образуют *основной контур*. Регулятор содержит варьируемые параметры. Адаптор на основе обработки доступной ему информации вырабатывает управляющее воздействие, производящее подстройку варьируемых параметров регулятора. Регулятор совместно с адаптором образуют *адаптивный регулятор*. Адаптивная система управления имеет иерархическую структуру: она имеет два уровня. Основной контур образует первый (низший) уровень, а контур, содержащий адаптор и называемый *контуром адаптации*, — второй уровень. В общем случае возможны три и больше уровней. В частности, если для синтеза адаптора в завершенном виде априорной информации недостаточно и какие-либо его параметры должны уточняться в процессе функционирования системы, потребуется третий контур — контур адаптации адаптора.

Адаптор выполняет двоякую функцию: изучение объекта и настройку регулятора. По способу изучения объекта адаптивные системы делятся на поисковые и беспоисковые. Адаптивная система управления называется *поисковой*, если в нее для изучения объекта подаются специальные (поисковые) сигналы, и *беспоисковой*, если в систему никаких поисковых сигналов для изучения объекта не подается. Беспоисковые адаптивные системы управления по способу получения информации для подстройки параметров регулятора делятся на *адаптивные системы управления или самонастраивающиеся системы* (СНС) с *эталонной моделью* и *идентификатором*. Адаптивные системы управления с эталонной моделью (рис. 11.1) содер-

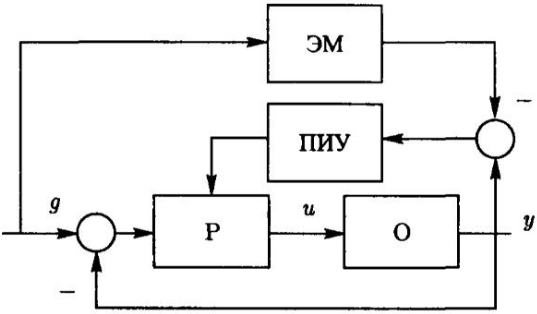


Рис. 11.1

жат динамическую модель системы, обладающую требуемым качеством и называемую *эталонной моделью*. Адаптивная система управления с эталонной моделью (ЭМ), кроме основного контура, содержащего регулятор (Р) и объект (О), включает контур с ЭМ и преобразовательно-исполнительным устройством (ПИУ). Эталонная модель вырабатывает желаемый (эталонный) выходной сигнал. *Преобразовательно-исполнительное устройство* (его также называют механизмом адаптации) обрабатывает разностный сигнал (разность между фактическим и эталонным сигналами) и производит подстройку параметров регулятора. Выбор эталонной модели является частью процесса синтеза адаптивной системы управления. Эталонная модель должна удовлетворять двум требованиям: с одной стороны, она должна отражать все требования к качеству синтезируемой системы, с другой стороны, эталонная реакция должна быть достижима для основного контура. Последнее требование накладывает ограничения на структуру эталонной модели, определяемой предполагаемой структурой основного контура.

Регулятор должен обладать идеальной следящей способностью. Другими словами, закон (алгоритм) управления должен быть таким, что существуют такие значения его параметров, называемые *идеальными*, при которых передаточная функция основного контура относительно задающего воздействия и выхода равна передаточной функции эталонной модели. Принцип работы адаптивной системы с ЭМ состоит в том, чтобы адаптор должен обеспечить сходимость к нулю ошибку слежения — разность между выходными сигналами основного контура и эталонной модели.

Адаптивные системы управления с идентификатором в контуре адаптации содержат идентификатор И (рис. 11.2), который служит для идентификации (определения) неизвестных параметров объекта на основе изучения входного и выходного сигналов объекта. Полученная идентификатором информация затем используется для определения нужных значений параметров регулятора и их подстройки.

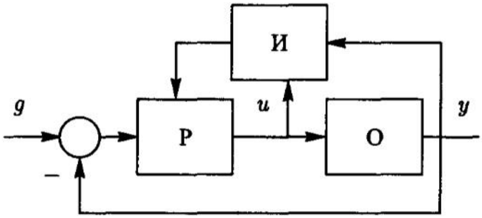


Рис. 11.2

Процедуру построения алгоритмов адаптивного управления условно можно разбить на следующие три этапа:

1) определение закона (алгоритма) управления, включающего варьируемые параметры;
2) определение алгоритма адаптации, обеспечивающего нужную настройку варьируемых параметров регулятора;
3) исследование синтезированной адаптивной системы управления.

Адаптивные системы управления являются нелинейными, и поэтому основным методом исследования является метод функций Ляпунова. Более того, этот метод используется уже в процессе синтеза. Многие алгоритмы адаптивного управления были получены исходя из того, что некоторая выбранная функция является функцией Ляпунова для синтезируемой системы.

Заметим, что при исследовании систем управления методом функции Ляпунова уравнения системы должны быть записаны в «отклонениях» — в переменных, при которых положению равновесия соответствует начало координат. Поэтому если уравнения системы представлены в других переменных, то эти уравнения нужно предварительно преобразовать, чтобы можно было использовать этот метод.

11.1. Алгоритмы адаптивного управления с ЭМ

Задачу синтеза адаптивной системы управления с ЭМ содержательно можно сформулировать следующим образом. Заданы уравнения объекта и эталонной модели. Требуется синтезировать алгоритм адаптивного управления, т. е. алгоритм управления (основного контура) и алгоритм адаптации, при которых система глобально устойчива и ошибка слежения — разность между выходными сигналами основного контура и эталонной модели — сходится к нулю при стремлении времени в бесконечность.

Здесь предполагается, что эталонная модель задана, хотя она должна быть определена исходя из заданных требований к синтезируемой системе управления. Это связано с тем, что определение эталонной модели по заданным требованиям к системе управления является обычной задачей управления и не связано спецификой адаптивного управления.

Параметрическая сходимость. При адаптивном управлении с ЭМ основное целевое условие — это обеспечение сходимости к нулю ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$. Если параметры регулятора принимают идеальные значения, то, естественно, это условие будет выполнено. Однако из сходимости к нулю ошибки слежения не следует параметрическая сходимость — сходимость варьируемых параметров к идеальным значениям.

Параметрическая сходимость зависит от структуры («сложности») задающего воздействия. Если задающее воздействие простое, например константа, то по окончании процесса адаптации варьируемые параметры в зависимости от начальных условий могут принять различные значения. Однако когда задающее воздействие $g(t)$ обладает таким свойством, что выполняется так называемое *условие постоянного возбуждения*, то сходимость к нулю ошибки слежения влечет за собой параметрическую сходимость.

Определение 11.1. *Условие постоянного возбуждения n-векторного сигнала $\mathbf{v}(t)$ выполняется, если существуют положительные константы T и α такие, что при любом $t > 0$*

$$\int_t^{t+T} \mathbf{v}(\tau)\mathbf{v}^T(\tau) \geqslant \alpha I_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Адаптивное управление по состоянию линейным объектом. Постановка задачи. Пусть линейный объект описывается уравнением

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_n y = u, \tag{11.1}$$

где y — выход, u — управление, a_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ — неизвестные параметры; знак a_0 известен. Эталонная модель задается уравнением

$$\overset{(n)}{\underset{m}{y}} + \alpha_1 \overset{(n-1)}{\underset{m}{y}} + \dots + \alpha_n y_m = \beta_0 g(t). \tag{11.2}$$

Здесь y_m — выход эталонной модели, α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ и β_0 — известные положительные постоянные, $g(t)$ — задающее воздействие. Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором система глобально устойчива и ошибка слежения

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Ниже при записи решения используется $(n \times 1)$-матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \tag{11.3}$$

и $(n \times n)$-матрица P, которая является решением уравнения Ляпунова

$$PA + A^T P = -Q,$$

где Q — положительно определенная матрица, A — $(n \times n)$-матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \tag{11.4}$$

в которой элементами последней строки являются коэффициенты уравнения эталонной модели.

Утверждение 11.1. *Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ* (11.2) *линейным объектом* (11.1), *обеспечивающим глобальную устойчивость и сходимость ошибки* $e(t) = y(t) - y_m(t)$ *к нулю при* $t \to \infty$, *является*

$$u = \widehat{k}_0 g(t) + \widehat{k}_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + \widehat{k}_n y = \widehat{\mathbf{k}}^T \mathbf{v}, \tag{11.5а}$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{k}}} = -\operatorname{sign}(a_0)\Gamma \mathbf{v} B^T P \mathbf{x}, \tag{11.5б}$$

где $\widehat{\mathbf{k}} = (\widehat{k}_0\ \widehat{k}_1\ \cdots\ \widehat{k}_n)^T$ — $(n+1)$-*вектор варьируемых параметров регулятора*, $\mathbf{v} = (g\ \overset{(n-1)}{y}\ \overset{(n-2)}{y}\ \cdots\ y)^T$ — $(n+1)$-*вектор сигналов*, Γ-*произвольная положительно определенная* $(n+1) \times (n+1)$-*матрица*, $\mathbf{x} = (e\ \dot{e}\ \cdots\ \overset{(n-1)}{e})^T$-*вектор состояния*.

Если в качестве Q принимается матрица $qI_n (q > 0, I_n$ — единичная матрица n-го порядка), то, не нарушая общности, можно при записи уравнения Ляпунова принять $q = 1$, т. е. рассмотреть уравнение

$$PA + A^T P = -I_n,$$

а значение q учесть при выборе матрицы Γ.

Уравнение синтезируемой системы (11.1), (11.5а) совпадает с уравнением эталонной модели, когда

$$\widehat{k}_0 = k_0^* = a_0\beta_0, \quad \widehat{k}_i = k_i^* = a_i - a_0\alpha_i. \tag{11.6}$$

Коэффициенты k_i^* $(i = 0, 1, \ldots, n)$ по определению являются идеальными. И если для каких-либо коэффициентов алгоритма управления (11.5а) априорная информация позволяет вычислить их идеальные значения, то, естественно, нет необходимости для их определения использовать алгоритм адаптации (11.5б).

Пример 11.1. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + a_2 y = u,$$

где a_2—неизвестный параметр; уравнение эталонной модели имеет вид

$$\ddot{y}_m + 2\dot{y}_m + y_m = g(t).$$

Определить алгоритм адаптивного управления, обеспечивающего ограниченность всех переменных и сходимость ошибки $e = y - y_m$ к нулю при $t \to \infty$.

Решение. В данном случае $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$, матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнеиие Ляпунова

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

после перемножения матриц принимает вид

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - 2p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - 2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} - 2p_{21} & p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение, учитывая равенство $p_{12} = p_{21}$, можно записать в виде системы

$$-2p_{12} = -1,$$
$$p_{11} - 2p_{12} - p_{22} = 0,$$
$$2p_{12} - 4p_{22} = -1.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{22} = \frac{1}{2}, \quad p_{11} = \frac{3}{2}.$$

Поэтому матрица P имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как известны коэффициенты $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, то по формуле (11.6) находим

$$\widehat{k}_0 = k_0^* = 1, \quad \widehat{k}_1 = k_1^* = 3 - 2 = 1.$$

В данном случае $v = (g\, \dot{y}\, y)^T$ и $x = (e\, \dot{e})^T$ $(e = y - y_m)$. Приняв $\Gamma = \gamma I_3$, по формуле с (11.5б) получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{\widehat{k}}_0 \\ \dot{\widehat{k}}_1 \\ \dot{\widehat{k}}_2 \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} g \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix} (0 \quad 1) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma(e + \dot{e})}{2} \begin{pmatrix} g \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix}.$$

Отсюда и в соответствии с соотношением (11.5а) для адаптивного алгоритма управления находим

$$u = g + \dot{y} + \widehat{k}_2 y, \quad \dot{\widehat{k}}_2 = -\frac{1}{2}\gamma(e + \dot{e})y.$$

Адаптивное управление по выходу линейным объектом с единичным относительным порядком. Выше был рассмотрен случай, когда в уравнение объекта не входили производные управления или, что то же, когда относительный порядок передаточной функции объекта был равен ее порядку, и все фазовые координаты были доступны измерению. Однако обычно не все фазовые координаты доступны измерению. И чтобы получить их, нужно дифференцировать выходную переменную, что не желательно из-за помех, которые при этом возникают.

Ниже рассматривается адаптивное управление по выходу, т. е. такое управление, при котором в алгоритмах управления и адаптации используются только входной и выходной сигналы объекта и сигналы, получаемые путем их фильтрации.

Постановка задачи. Пусть задан объект с передаточной функцией

$$W_0(p) = k_0 \frac{P_0(p)}{R_0(p)} = k_0 \frac{p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \tag{11.7}$$

и выбрана эталонная модель с передаточной функцией

$$W_m(p) = k_m \frac{P_m(p)}{R_m(p)} = k_m \frac{p^{n-1} + \beta_1 p^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n}; \tag{11.8}$$

k_0, b_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ — неизвестные параметры объекта, знак k_0 известен; $P_m(p)$, $R_m p)$ — устойчивые полиномы, и передаточная функция $W_m(p)$ является строго вещественно-положительной, т. е. она устойчива и $\operatorname{Re} W(j\omega) > 0$ при все $\omega \geqslant 0$.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором система глобально устойчива и ошибка $e(t) = y(t) - y_m(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. При этом в алгоритмах управления и адаптации должны быть использованы только доступные измерению сигналы (задающее воздействие, входной и выходной сигналы объекта) и сигналы, которые получаются путем их фильтрации, т. е. сигналы на выходе фильтров, на вход которых подаются указанные сигналы. Принимается, что уравнения фильтров в нормальной форме Коши имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}} = E\mathbf{v} + Fu, \tag{11.9а}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = E\mathbf{z} + Fy. \tag{11.9б}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1\ v_2\ \dots\ v_{n-1})^T$ — $(n-1)$-вектор переменных, получаемых путем фильтрации входного сигнала (управления) объекта;

$\mathbf{z} = (z_1,\ z_2\ \ldots\ z_{n-1})^T$ — $(n-1)$-вектор переменных, получаемых путем фильтрации выходного сигнала объекта; E — $(n-1)\times(n-1)$-матрица, F — $(n-1)\times 1$ — матрица, и они имеют следующий вид:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_{n-1} & -\beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь в последней строке матрицы E стоят коэффициенты полинома числителя передаточной функции эталонной модели.

Утверждение 11.2. *Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ* (11.8) *линейным объектом* (11.7), *обеспечивающим глобальную устойчивость и сходимость ошибки* $e(t) = y(t) - y_m(t)$ *к нулю при* $t \to \infty$, *является*

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{k}_v^T\mathbf{v} + \mathbf{k}_z^T\mathbf{z} + k_y y + k_g g, \\ \dot{\mathbf{k}}_v &= -\operatorname{sign}(k_0)\gamma\mathbf{v}e, \\ \dot{\mathbf{k}}_z &= -\operatorname{sign}(k_0)\gamma\,\mathbf{z}e, \\ \dot{k}_y &= -\operatorname{sign}(k_0)\gamma y e, \\ \dot{k}_g &= -\operatorname{sign}(k_0)\gamma g e, \end{aligned}$$

где $\mathbf{k}_v = (k_{v1}\ k_{v2}\ \ldots\ k_{vn-1})^T$ *и* $\mathbf{k}_z = (k_{z1}\ k_{z2}\ \ldots\ k_{zn-1})^T$ *— векторы варьируемых параметров регулятора,* k_y *и* k_g *— скалярные варьируемые параметры регулятора;* $\mathbf{v} = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n-1})^T$ *и* $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2\ \ldots\ \ldots\ z_{n-1})^T$ *— выходы фильтров* (11.9а) *и* (11.9б) *соответственно.*

Пример 11.2. Пусть объект и эталонная модель задаются передаточными функциями

$$W_0 = k_0\frac{p+b_1}{p^2+a_1p+a_2}, \quad W_m = k_m\frac{p+1}{p^2+3p+2},$$

где k_0, b_1, a_1, a_2 — неизвестные параметры, известен знак k_0: $k_0 > 0$. Требуется определить алгоритм адаптивного управления, обеспечивающего глобальную устойчивость системы и сходимость к нулю разности между выходами системы и эталонной модели.

Решение. Передаточная функция эталонной модели является строго вещественно-положительной, так как она устойчива, и вещественная часть частотной передаточной функции при любой частоте $\omega \geqslant 0$ положительна:

$$\operatorname{Re} W_m(j\omega) = k_m\frac{2(1+\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} > 0.$$

В данном случае $n = 2$, $\beta_1 = 1$, и уравнения фильтров (11.9) принимают вид
$$\dot{v} = -v + u, \quad \dot{z} = -z + y.$$

Из утверждения 11.2 для адаптивного алгоритма управления получаем
$$u = k_v v + k_z z + k_y y + k_g g,$$
$$\dot{k}_v = -\gamma v e, \quad \dot{k}_z = -\gamma z e, \quad \dot{k}_y = -\gamma y e, \quad \dot{k}_g = \gamma g e.$$

Задачи

11.1. Объект описывается уравнением
$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$
где a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью (ЭМ) при условии, что ЭМ задается следующими уравнениями:

а) $\dddot{y}_m + 3\ddot{y}_m + 3\dot{y}_m + y_m = g(t)$;

б) $\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 12\dot{y}_m + 8y_m = 8g(t)$;

в) $\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 11\dot{y}_m + 6y_m = 2g(t)$;

г) $\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 7\dot{y}_m + 3y_m = 3g(t)$;

д) $\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 8\dot{y}_m + 4y_m = 4g(t)$;

е) $\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 16\dot{y}_m + 12y_m = 12g(t)$;

ж) $\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 15\dot{y}_m + 9y_m = 9g(t)$;

з) $\dddot{y}_m + 8\ddot{y}_m + 21\dot{y}_m + 18y_m = 18g(t)$;

и) $\dddot{y}_m + 8\ddot{y}_m + 27\dot{y}_m + 27y_m = 27g(t)$;

к) $\dddot{y}_m + 9\ddot{y}_m + 24\dot{y}_m + 16y_m = 16g(t)$.

11.2. Объект описывается уравнением
$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + a_3 y = u,$$
где a_3 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид
$$\dddot{y}_m + 3\ddot{y}_m + 3\dot{y}_m + y_m = g(t).$$

11.3. Объект описывается уравнением
$$2\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_3 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 12\dot{y}_m + 8y_m = 2g(t).$$

11.4. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + a_2\dot{y} + 2y = u,$$

где a_2 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 11\dot{y}_m + 6y_m = 3g(t).$$

11.5. Объект описывается уравнением

$$4\dddot{y} + 2\ddot{y} + a_2\dot{y} + 6y = u,$$

где a_2 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 7\dot{y}_m + 3y_m = 3g(t).$$

11.6. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = u,$$

где a_1 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 8\dot{y}_m + 4y_m = 2g(t).$$

11.7. Объект описывается уравнением

$$2\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = u,$$

где a_1 — неизвестный параметр. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 16\dot{y}_m + 12y_m = 6g(t).$$

11.8. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = u,$$

где a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 15\dot{y}_m + 9y_m = 4,5g(t).$$

11.9. Объект описывается уравнением

$$4\dddot{y} + 2\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 8\ddot{y}_m + 21\dot{y}_m + 18y_m = 9g(t).$$

11.10. Объект описывается уравнением

$$2\dddot{y} + 4\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 9\ddot{y}_m + 27\dot{y}_m + 27y_m = 13,5g(t).$$

11.11. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 9\ddot{y}_m + 24\dot{y}_m + 16y_m = 8g(t).$$

11.12. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + y = u,$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 3\ddot{y}_m + 3\dot{y}_m + y_m = g(t).$$

11.13. Объект описывается уравнением

$$2\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + 2y = u,$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 12\dot{y}_m + 8y_m = 2g(t).$$

11.14. Объект описывается уравнением

$$4\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + 4y = u,$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 6\ddot{y}_m + 11\dot{y}_m + 6y_m = 2g(t).$$

11.15. Объект описывается уравнением

$$4\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 5\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 7\dot{y}_m + 3y_m = 1,5g(t).$$

11.16. Объект описывается уравнением

$$2\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 6\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 5\ddot{y}_m + 8\dot{y}_m + 4y_m = g(t).$$

11.17. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 3\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 16\dot{y}_m + 12y_m = 4g(t).$$

11.18. Объект описывается уравнением

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + 4\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 7\ddot{y}_m + 15\dot{y}_m + 9y_m = 3g(t).$$

11.19. Объект описывается уравнением

$$2\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 8\ddot{y}_m + 21\dot{y}_m + 18y_m = 5g(t).$$

11.20. Объект описывается уравнением

$$4\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u,$$

где a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры. Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что уравнение эталонной модели имеет вид

$$\dddot{y}_m + 8\ddot{y}_m + 27\dot{y}_m + 27y_m = 9g(t).$$

11.21. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 2\frac{p^2 + 2p + b_2}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_2 — неизвестный параметр.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 4\frac{p^2 + 2p + 0,5}{p^3 + 4p^2 + 2p + 1}.$$

11.22. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 2\frac{p^2 + b_1 p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_1 — неизвестный параметр.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измереиию вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 4\frac{p^2 + 2p + 0,5}{p^3 + 4p^2 + 2p + 1}.$$

11.23. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 4\frac{p^2 + 3p + b_2}{p^3 + p^2 + 2p + a_3},$$

где b_2, a_3 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 2\frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}.$$

11.24. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 4\frac{p^2 + b_1 p + 2}{p^3 + p^2 + 2p + a_3},$$

где b_1, a_3 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 2\frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}.$$

11.25. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 4\frac{p^2 + 3p + b_2}{p^3 + p^2 + a_2 p + 2},$$

где b_2, a_2 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 2\frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}.$$

11.26. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 4\frac{p^2 + b_1 p + 2}{p^3 + p^2 + a_2 p + 2},$$

где b_1, a_2 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная фуикция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 2\frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}.$$

11.27. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 2\frac{p^2 + b_1 p + b_2}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_1, b_2 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная фуикция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 6\frac{p^2 + 2,5p + 2}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}.$$

11.28. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 2\frac{p^2 + b_1 p + b_2}{p^3 + 3p^2 + 2p + a_3},$$

где b_1, b_2, a_3 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 3\frac{p^2+2,5p+2}{p^3+3p^2+4p+1}.$$

11.29. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 2\frac{p^2+b_1p+b_2}{p^3+3p^2+a_2p+2},$$

где b_1, b_2, a_2 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 2\frac{p^2+2,5p+2}{p^3+3p^2+4p+1}.$$

11.30. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = 4\frac{p^2+b_1p+b_2}{p^3+3p^2+a_2p+a_3},$$

где b_1, b_2, a_2, a_3 — неизвестные параметры.

Определить адаптивный алгоритм управления с эталонной моделью при условии, что доступны измерению вход u и выход y объекта, и передаточная функция эталонной модели имеет вид

$$W_m = 4\frac{p^2+2,5p+2}{p^3+3p^2+4p+1}.$$

11.2. Адаптивное управление с идентификатором

При синтезе адаптивных систем управления с идентификатором алгоритм управления основного контура строится так же, как и в случае, когда параметры объекта известны. Но в данном случае алгоритм управления и соответственно параметры построенного на его основе регулятора зависят от неизвестных параметров объекта. И чтобы подстроить параметры регулятора, нужно определить значения неизвестных параметров объекта в процессе функционирования системы управления. Для этой цели и предназначен *идентификатор*.

Идентификация и модель для получения оценки. *Идентификацией системы* называется построение (получение) ее математической модели путем обработки ее входных и выходных сигналов в процессе эксперимента. Эксперимент может быть *активным*, т. е. проводится специально для решения задачи идентификации, или *пассивным*: идентификация осуществляется в процессе нормального функционирования системы. Если структура системы определена или задана, то задача идентификации сводится к определению (идентификации) ее параметров. Идентификация, которую выполняет идентификатор, состоит в получении оценки неизвестных параметров объекта в реальном времени и в процессе нормального функционирования адаптивной системы управления. И поэтому ее называют *адаптивной идентификацией*. Сложность адаптивной идентификации заключается в том, что она происходит одновременно с процессами адаптации (подстройки параметров регулятора) и управления и необходимостью в этих условиях обеспечить работоспособность и прежде всего устойчивость системы управления.

Модель для получения оценки. Сущность оценки параметров — это выделение информации о параметрах из доступных данных, получаемых путем измерения. Для получения оценки используется модель для получения оценки, или *идентификационная модель*, которая связывает возможные данные с неизвестными параметрами. Довольно общей идентификационной моделью является линейная параметрическая форма

$$\mathbf{y} = W(t)\mathbf{a}, \tag{11.10}$$

где $\mathbf{y}$ — выходной вектор, $\mathbf{a}$ — вектор неизвестных параметров, $W(t)$ — матричная функция, которая называется *сигнальной матрицей*. Выходной вектор и сигнальная матрица должны быть известны из данных, получаемых путем измерения сигналов системы.

В каждый момент времени идентификационная модель (11.10) представляет собой линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров. Если даны измерения $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ на некотором интервале времени, то имеем бесконечное число уравнений вида (11.10). Если даны значения $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ в l дискретных точках, то имеем систему из l уравнений. Получение оценки неизвестных параметров сводится к решению этих избыточных уравнений для r неизвестных параметров. Для возможности получения оценки для r параметров необходимо иметь, по меньшей мере, r уравнений. Однако, чтобы получить хорошую оценку параметров при присутствии шумов и ошибки в модели желательно иметь данные в больших точках.

При определении оценки в реальном масштабе времени уравнения решаются рекурретно, так как данные об $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ обновляются с течением времени. Быстрота и точность оценки зависят от двух факторов: *идентификационной* модели и метода решения.

Модель (11.10) является достаточно общей. Любая линейная система может быть представлена в такой форме после надлежащего преобразования. Преобразование сводится к пропусканию измеряемых сигналов через фильтры, на выходе которых получаем преобразованные сигналы.

Идентификационная модель линейного объекта. В общем случае линейный одномерный объект может быть задан

уравнением
$$A(p)y = B(p)u, \tag{11.11}$$
где
$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n, \quad B(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_n.$$
Разделив обе части на операторный полином
$$A_0(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$
уравнение (11.11) можно преобразовать к виду
$$y = \frac{A_0(p) - A(p)}{A_0(p)} y + \frac{B(p)}{A_0(p)} u.$$
Здесь
$$A_0(p) - A(p) = (\alpha_1 - a_1)p^{n-1} + (\alpha_2 - a_2)p^{n-2} + \ldots + \alpha_n - a_n.$$
Введем новые переменные: $\widetilde{y}_i = \dfrac{p^{i-1}}{A_0(p)} y$, $\widetilde{u}_i = \dfrac{p^{i-1}}{A_0(p)} u$, $i = 1, 2, , \ldots, n$.
Уравнение (11.11) примет вид оценочной модели (11.10), если положить
$$W(t) = [\widetilde{y}_n \ \cdots \ \widetilde{y}_1 \ \widetilde{u}_n \ \cdots \ \widetilde{u}_1],$$
$$\mathbf{a} = (\alpha_1 - a_1 \ \cdots \ \alpha_n - a_n \ b_1 \ \cdots \ b_n)^T.$$

Здесь $A_0(p)$ является собственным оператором фильтров. В нормальной форме уравнения фильтров можно записать в виде
$$\dot{\widetilde{\mathbf{y}}} = A\widetilde{\mathbf{y}} + By, \quad \dot{\widetilde{\mathbf{u}}} = A\widetilde{\mathbf{u}} + Bu,$$
где $\widetilde{\mathbf{y}} = (\widetilde{y}_1 \ldots \widetilde{y}_n)^T$, $\widetilde{\mathbf{u}} = (\widetilde{u}_1 \ldots u_n)^T$, матрицы A и B определяются соотношениями (11.4) и (11.3) соответственно.

Градиентный идентификатор. Пусть $\widehat{\mathbf{a}}(t)$ является оценкой в момент t вектора неизвестных параметров $\mathbf{a}$ в (11.10). Оценка выхода
$$\widehat{\mathbf{y}}(t) = W(t)\widehat{\mathbf{a}}(t), \tag{11.12}$$
которая получается при постановке в (11.10) вместо $\mathbf{a}$ его оценки, называется *прогнозируемым выходом*, а разность
$$e_n(t) = \widehat{\mathbf{y}}(t) - y(t) \tag{11.13}$$
— *прогнозируемой ошибкой*. Очевидно, прогнозируемая ошибка есть не что иное, как *невязка* — термин, который был определен при рассмотрении фильтра Калмана–Бьюси. Подставив в (11.13) выражения для $y(t)$ из (11.10) и $\widehat{\mathbf{y}}(t)$ из (11.12), получим
$$e_n(t) = W(t)\widehat{\mathbf{a}}(t) - W(t)\mathbf{a}(t). \tag{11.14}$$

Рассмотрим алгоритм для получения оценки (*алгоритм идентификации*), использующий невязку,

$$\dot{\widehat{\mathbf{a}}} = -\gamma W^T e_n. \qquad (11.15)$$

Здесь γ — положительная константа. Алгоритм (11.15) является градиентным: при этом алгоритме невязка уменьшается путем изменения оценок параметров, двигаясь в пространстве параметров в обратном направлении градиенту квадрата невязки e_n^2 по вектору параметров $\widehat{\mathbf{a}}$.

Градиентный идентификатор, т. е. идентификатор, использующий градиентный алгоритм идентификации, устойчив по Ляпунову, и параметрическая ошибка при этом идентификаторе убывает. Однако будет ли она стремится к нулю, зависит от сигнальной матрицы $W(t)$, которая, в свою очередь, зависит от внешних воздействий.

Коэффициент γ в (11.15) оказывает сильное влияние на характер сходимости алгоритма оценивания. В случае одного параметра чем больше γ, тем скорость сходимости больше. В случае многих параметров связь между γ и скоростью сходимости не такая простая. На некотором малом интервале увеличение оценочного коэффициента усиления может привести к увеличению скорости сходимости, но вне указанного интервала дальнейшее увеличение этого коэффициеита может привести к колебаниям и более медленной сходимости.

Кроме влияния на скорость сходимости, выбор γ оказывает также влияние на способность идентификатора следить за изменяющимися параметрами и противостоять возмущениям.

Свойство робастности. Чтобы идентификатор имел практическое значение, он должен обладать робастностью (грубостью), т. е. он должен выдавать удовлетворительную оценку при изменении параметров, при наличии шума измерения и других возмущений.

Качество градиентного идентификатора зависит от нескольких факторов, главными из которых являются:

— уровень постоянного возбуждения матрицы сигналов $W(t)$;
— скорости изменения параметров и уровня непараметрической неопределенности;
— величины оценочного коэффициента усиления γ.

Уровень постоянного возбуждения $W(t)$ определяется задачей управления. Постоянное возбуждение существенно для робастности идентификатора. Если сигнал постоянно не возбуждается, параметры не будут сходиться точному значению даже при отсутствии непараметрической неопределенности. При наличии непараметрической неопределенности идентификатор может стать неустойчивым. Может оказаться, что нужно добавлять некоторое возмущающее воздействие к управлению, чтобы получить качественную оценку параметров.

Если оцениваемые параметры изменяются, то чем быстрее происходят эти изменения, тем больше непараметрические неопределенности влияют на качество оценки параметров. Очевидно, чем быстрее изменяются параметры, тем труднее получить точную оценку. Кроме того, чем выше уровень шума и больше неучтенных возмущений и динамики, тем идентификатор функционирует хуже.

Пример 11.3. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{2p^2 + b_2 p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_2 — неизвестный параметр. Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестного параметра при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 4p + 3.$$

Решение. В данном случае $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 3$, и уравнения фильтров принимают вид

$$\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1, \quad \dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3, \quad \dot{\widetilde{y}}_3 = -3\widetilde{y}_1 - 4\widetilde{y}_2 - 4\widetilde{y}_3 + y,$$
$$\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2, \quad \dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3, \quad \dot{\widetilde{u}}_3 = -3\widetilde{u}_1 - 4\widetilde{u}_2 - 4\widetilde{u}_3 + u.$$

Так как $\alpha_1 - a_1 = 4 - 3 = 1$, $\alpha_2 - a_2 = 4 - 2 = 2$, $\alpha_3 - a_3 = 3 - 2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_3 = 1$, то для оценки вектора параметров имеем

$$W(t) = (\widetilde{y}_3, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_1, \widetilde{u}_3, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_1), \quad \widehat{\mathbf{a}} = (1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; \widehat{b}_2 \;\; 1)^T.$$

Оценка выходной переменной и градиентный алгоритм идентификации принимают вид

$$\widehat{y} = W(t)\widehat{\mathbf{a}} = \widetilde{y}_3 + 2\widetilde{y}_2 + \widetilde{y}_1 + 2\widetilde{u}_3 + \widehat{b}_2\widetilde{u}_2 + \widetilde{u}_1,$$
$$\dot{\widehat{b}}_2 = -\gamma\widetilde{u}_2(\widehat{y} - y).$$

МНК-идентификатор. Для получения оценки параметров широкое применение находит метод наименьших квадратов. При этом методе оценка получается путем минимизации *интегральной прогнозируемой ошибки* (*невязки*)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left|y(\tau) - W(\tau)\widehat{a}(\tau)\right|^2 d\tau. \tag{11.16}$$

Алгоритм идентификации, получаемый методом наименьших квадратов, будем называть *МНК-алгоритмом* или *МНК-алгоритмом* идентификации, идентификатор, построенный на основе такого алгоритма, — *МНК-идентификатором*.

Интегральная невязка (11.16) учитывает все измерения, которые производятся до текущего момента. Поэтому оценки, получаемые методом наименьших квадратов, имеют то преимущество, что они меньше зависят от шумов измерения, так как в процессе измереиия и интегрирования они сглаживаются. МНК-алгоритмы хорошо противостоят не только шумам измерения, но и другим возмущающим воздействиям.

Утверждение 11.3. *МНК-алгоритм идентификации имеет вид*

$$\dot{\widehat{\mathbf{a}}}(t) = -P(t)W^T(t)e_n(t), \tag{11.17а}$$

где $e_n(t)$ — *прогнозируемая ошибка (невязка),* $P(t)$ — *матрица коэффициентов усиления, которая определяется из уравнения*

$$\dot{P}(t) = -P(t)W^T(t)W(t)P(t). \tag{11.17б}$$

Алгоритм (11.17) *обеспечивает параметрическую сходимость* ($\widetilde{\mathbf{a}}(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$), *если выполняется условие постоянного возбуждения сигнала.*

При выборе начальных значений $\widetilde{\mathbf{a}}(0)$ и $P(0) = p_0 I$ следует иметь в виду, что малая ошибка в $\widetilde{\mathbf{a}}(0)$ приводит к малым ошибкам в течение всего процесса оценивания. Кроме того, чем больше p_0, тем меньше ошибка. Поэтому p_0 нужно выбирать настолько большим, насколько позволяет чувствительность к шумам.

МНК-идентификатор с экспоненциальной потерей памяти. До сих пор предполагалось, что неизвестные параметры вовсе не изменяются или изменяются очень медленно: за время адаптации практически не меняются. Однако, если эти параметры в действительности, хотя и медленно, изменяются, старые данные при оценке текущих значений неизвестных параметров обесцениваются, так как они отражают старые значения параметров. Поэтому представляется разумным, чтобы старые данные оказывали меньшее влияние на оценку, чем новые данные. Эти соображения привели к методу наименьших квадратов, при котором вклад старых данных на значение оценки экспоненциально убывает. Экспоненциальное «забывание» достигается за счет того, что в этом случае в качестве минимизируемого функционала принимается интеграл

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau)d\tau\right)\left|y(s) - W(s)\widehat{\mathbf{a}}(t)\right|^2 ds, \tag{11.18}$$

где $\lambda(\tau) \geqslant 0$ — переменный *коэффициент потери памяти.* Алгоритм идентификации, получаемый путем минимизации функционала (11.18), будем называть *МНК-алгоритмом идентификации с экспоненциальной потерей памяти*, а идентификатор, построенный на основе такого алгоритма — *МНК-идентификатором с экспоненциальной потерей памяти.*

Утверждение 11.4. *МНК-алгоритм идентификации с экспоненциальной потерей памяти имеет вид*

$$\dot{\widehat{\mathbf{a}}}(t) = -P(t)W^T(t)e_n(t), \tag{11.19а}$$

$$\dot{P}(t) = \lambda(t)P(t) - P(t)W^T(t)W(t)P(t), \tag{11.19б}$$

и он обеспечивает параметрическую сходимость ($\widehat{\mathbf{a}}(t) \to \mathbf{a}(t)$ *при* $t \to \infty$), *если выполняется условие постоянного возбуждения.*

Выбор коэффициента потери памяти. При выборе коэффициента потери памяти нужно проявлять осторожность. Если коэффициент потери памяти выбрать равным нулю (обычный МНК-идентификатор), то в этом случае невозможно слежение за изменяющимися параметрами и при наличии постоянного возбуждения. Если коэффициент потери памяти выбрать постоянным, то это может привести к резкому росту коэффициентов усиления и при отсутствии постоянного возбуждения возникновению сильных колебаний оцениваемых параметров. Так как сигнал может иметь различный уровень возбуждения, то желательно иметь подстраиваемый коэффициент потери памяти. Значеине нормы матрицы коэффициентов усиления зависит от уровня возбуждения матрицы сигналов. Поэтому, естественно, коэффициент потери памяти связать с величиной $\|P(t)\|$. Одним из возможных алгоритмов изменения коэффициента потери памяти в зависимости от $\|P(t)\|$ определяется соотношением

$$\lambda(t) = \lambda_0\left(1 - \frac{\|P(t)\|}{k_0}\right),$$

где λ_0 — константа, определяющая максимальный коэффициент потери памяти, k_0 — константа, определяющая максимальное значение нормы матрицы коэффициентов усиления и удовлетворяющая неравенству $k_0 \geqslant \|P(0)\|$.

При малом $\|P(t)\|$ коэффициент потери памяти приблизительно равен λ_0, и с ростом $\|P(t)\|$ коэффициент потери памяти убывает, обращаясь в нуль, когда $\|P(t)\|$ принимает максимальное значение. Большое значение λ_0 означает большую скорость забывания и лучшее отслеживания изменяющихся параметров. Однако чем больше λ_0, тем больше колебания параметров. Поэтому при выборе λ_0 приходится исходить из противоположных требований — хорошее отслеживание изменяющихся параметров и низкий уровень их колебаний.

Константа k_0 должна быть больше $\|P(0)\|$. При этом норма матрицы $P(t)$ не превышает k_0 независимо от уровня постоянного возбуждения. Это связано с тем, что когда норма $\|P(t)\|$ становится равной k_0, коэффициент потери памяти становится равным нулю и матрица $P(t)$ начинает убывать.

Константа k_0 влияет на скорость обновления данных и на колебания оцениваемых параметров из-за возмущения так же, как и константа λ_0.

Поэтому выбор k_0 приходится производить при таких же противоречивых требованиях, что и при выборе λ_0.

Пример 11.4. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_3}{p^3 + 3p^2 + 2p + a_3},$$

где b_3, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 4p + 3,$$

определить:

а) МНК — алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК — алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 1$.

Решение. В данном случае $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 3$, и уравнения фильтров принимают вид

$$\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1, \quad \dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3, \quad \dot{\widetilde{y}}_3 = -3\widetilde{y}_1 - 4\widetilde{y}_2 - 4\widetilde{y}_3 + y,$$
$$\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2, \quad \dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3, \quad \dot{\widetilde{u}}_3 = -3\widetilde{u}_1 - 4\widetilde{u}_2 - 4\widetilde{u}_3 + u.$$

Так как $\alpha_1 - a_1 = 4 - 3 = 1$, $\alpha_2 - a_2 = 4 - 2 = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, то для оценки вектора параметров имеем

$$\widehat{\mathbf{a}} = (1 \ \ 2 \ \widehat{a}_3 \ 0 \ 0 \ \widehat{b}_3)^T.$$

Оценка выходной переменной и МНК-алгоритм идентификации принимают вид

$$\widehat{y} = W(t)\widehat{\mathbf{a}} = \widetilde{y}_1 + 2\widetilde{y}_2 + \widehat{a}_3\widetilde{y}_1 + \widehat{b}_1\widetilde{u}_1,$$
$$\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y), \quad \dot{\widehat{b}}_3 = -k_6(\widehat{y} - y),$$

где k_3, k_4 — элементы третьей и четвертой строк матрицы-столбца $K = P(t)W(t)^T$ (см. (11.17а) и (11.19а)), i — строка которой имеет вид

$$k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1 \quad (i = 1, \ldots, 6).$$

Уравнения (11.17б) и (11.19б) можно записать виде

$$\dot{P}(t) = -KK^T, \quad \dot{P}(t) = \lambda(t)P(t) - KK^T.$$

В скалярной форме эти уравнения принимают вид

$$\text{а) } \dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6); \quad \text{б) } \dot{p}_{ij} = p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6).$$

Здесь система уравнений а) относится к МНК-алгоритму идентификации, а система уравнений б) к МНК-алгоритму идентификации с экспоненциальной потерей памяти.

Задачи

11.31. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{2p^2 + 2p + b_3}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_3 — неизвестный параметр.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестного параметра при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

11.32. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{2p^2 + b_2 p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_2 — неизвестный параметр.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестного параметра при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

11.33. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{4p^2 + 3p + b_3}{p^3 + p^2 + 2p + a_3},$$

где b_3, a_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 6p^2 + 12p + 2.$$

11.34. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{2p^2 + b_2 p + 2}{p^3 + p^2 + 2p + a_3},$$

где b_2, a_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 6p^2 + 12p + 2.$$

11.35. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{3p^2 + 3p + b_3}{p^3 + p^2 + a_2 p + 2},$$

где b_3, a_2 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 2.$$

11.36. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{2p^2 + b_2 p + 2}{p^3 + p^2 + a_2 p + 2},$$

где b_2, a_2 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 2.$$

11.37. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{3p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2},$$

где b_2, b_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 3p + 2.$$

11.38. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + 3p^2 + 2p + a_3},$$

где b_2, b_3, a_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 3p + 2.$$

11.39. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{4p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + 3p^2 + a_2 p + 2},$$

где b_2, b_3, a_2 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 4p + 3.$$

11.40. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_1 p^2 + b_2 p + 3}{p^3 + 3p^2 + a_2 p + 1},$$

где b_1, b_2, a_2 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 4p + 3.$$

11.41. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3},$$

где a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 5p^2 + 4p + 2.$$

11.42. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_1p^2 + b_2p + b_3}{p^3 + 4p^2 + 3p + a_3},$$

где b_1, b_2, b_3, a_3 — неизвестные параметры.

Определить градиентный алгоритм идентификации неизвестных параметров при условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 5p^2 + 4p + 2.$$

11.43. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{10}{p^3 + a_1p^2 + 3p + 2},$$

где a_1 — неизвестный параметр.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 1$.

11.44. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{10}{p^3 + 3p^2 + a_2p + 2},$$

где a_2 — неизвестный параметр.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 2,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра с экспоненциальной потерей памяти с коэффициеитом потери памяти $\lambda = 1{,}5$.

11.45. Задаи объект передаточной фуикцией

$$W_O = \frac{10}{p^3 + 3p^2 + 2p + a_3},$$

где a_3 — неизвестный параметр.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 2,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестного параметра с экспоненциальиой потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 2$.

11.46. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_3}{p^3 + a_1p^2 + 3p + 2},$$

где b_3, a_1 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 3,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 2{,}5$.

11.47. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_3}{p^3 + 3p^2 + a_2p + 2},$$

где b_3, a_2 — неизвестные параметры.

При условии, что собствеиный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + 1,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 3$.

11.48. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_3}{p^3 + 3p^2 + 2p + a_3},$$

где b_3, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 2,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 1$.

11.49. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{5}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1},$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 6p^2 + 12p + 8,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 1{,}5$.

11.50. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{5}{p^3 + a_1 p^2 + 2p + a_3},$$

где a_1, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 6p^2 + 12p + 4,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 2$.

11.51. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + a_2 p + a_3},$$

где a_2, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + 1,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 2{,}5$.

11.52. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{5}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

где a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 2p + 2,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 3$.

11.53. Задан объект передаточной функцией

$$W_O = \frac{b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3},$$

где b_3, a_1, a_2, a_3 — неизвестные параметры.

При условии, что собственный оператор фильтров имеет вид

$$A_0(p) = p^3 + 4p^2 + 3p + 2,$$

определить:

а) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров;

б) МНК-алгоритм идентификации неизвестных параметров с экспоненциальной потерей памяти с коэффициентом потери памяти $\lambda = 4$.

Ответы

11.1. а) $u = g(t) + \hat{k}_1\ddot{y} + \hat{k}_2\dot{y} + \hat{k}_3 y,$

$$\dot{\hat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_3 = -qy[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$$

б) $u = 8g(t) + \hat{k}_1\ddot{y} + \hat{k}_2\dot{y} + \hat{k}_3 y,$

$$\dot{\hat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_3 = -qy[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$$

в) $u = 2g(t) + \hat{k}_1\ddot{y} + \hat{k}_2\dot{y} + \hat{k}_3 y,$

$$\dot{\hat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$$

$$\dot{\hat{k}}_3 = -qy[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$$

г) $u = 3g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

д) $u = 4g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

е) $u = 12g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

ж) $u = 9g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

з) $u = 18g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

и) $u = 27g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)];$

к) $u = 16g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}031(y - y_m) + 0{,}075(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}064(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}031(y - y_m) + 0{,}075(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}064(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}031(y - y_m) + 0{,}075(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}064(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.2. $u = g(t) - \ddot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.3. $u = 4g(t) - 8\ddot{y} - 18\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.4. $u = 3g(t) - 3\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} - 4y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.5. $u = 12g(t) - 18\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} - 6y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.6. $u = 2g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 6\dot{y} + 2y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.7. $u = 12g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 30\dot{y} - 18y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.8. $u = 4{,}5g(t) - 5\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.9. $u = 36g(t) - 30\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.10. $u = 27g(t) - 14\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.11. $u = 8g(t) - 5\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3 y,$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}031(y - y_m) + 0{,}075(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}064(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}031(y - y_m) + 0{,}075(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}064(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.12. $u = g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y},$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}5(y - y_m) + 0{,}813(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}438(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.13. $u = 4g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} - 14y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}063(y - y_m) + 0{,}145(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}107(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.14. $u = 8g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} - 20y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}083(y - y_m) + 0{,}150(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}108(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.15. $u = 6g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 23\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}167(y - y_m) + 0{,}255(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}151(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.16. $u = 2g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 10\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}125(y - y_m) + 0{,}212(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}142(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.17. $u = 4g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 13\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}042(y - y_m) + 0{,}115(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}088(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.18. $u = 3g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} - 11\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}056(y - y_m) + 0{,}112(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}087(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.19. $u = 10g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}028(y - y_m) + 0{,}099(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}075(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.20. $u = 36g(t) + \widehat{k}_1\ddot{y} + \widehat{k}_2\dot{y} + \widehat{k}_3y,$

$\dot{\widehat{k}}_1 = -q\ddot{y}[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_2 = -q\dot{y}[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)],$

$\dot{\widehat{k}}_3 = -qy[0{,}019(y - y_m) + 0{,}090(\dot{y} - \dot{y}_m) + 0{,}066(\ddot{y} - \ddot{y}_m)].$

11.21. $u = k_{v1}v_1 + 0{,}75z_1 + z_2 - 0{,}5y + 2g,\ \dot{v}_1 = v_2,$

$\dot{v}_2 = -0{,}5v_1 - 2v_2 + u,\ \dot{z}_1 = z_2,$

$\dot{z}_2 = -0{,}5z_1 - 2z_2 + y,\ \dot{k}_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m).$

11.22. $u = -0{,}5v_1 + k_{v2}v_2 + 0{,}75z_1 + z_2 - 0{,}5y + 2g,\ \dot{v}_1 = v_2,$

$\dot{v}_2 = -0{,}5v_1 - 2v_2 + u,\ \dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = -0{,}5z_1 - 2z_2 + y,$

$\dot{k}_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m).$

11.23. $u = k_{v1}v_1 - v_2 + k_{z1}z_1 + 0{,}5z_2 - 0{,}5y + 0{,}5g,$
$\dot v_1 = v_2,\ \dot v_2 = -v_1 - 2v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,$
$\dot z_2 = -z_1 - 2z_2 + y,\ \dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{z1} = -\gamma z_1(y - y_m).$

11.24. $u = -v_1 + k_{v2}v_2 + k_{z1}z_1 + 0{,}5z_2 - 0{,}5y + 0{,}5g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -v_1 - 2v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -z_1 - 2z_2 + y,$
$\dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m),\ \dot k_{z1} = -\gamma z_1(y - y_m).$

11.25. $u = k_{v1}v_1 - v_2 + 0{,}5z_1 + k_{z2}z_2 - 0{,}5y + 0{,}5g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -v_1 - 2v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -z_1 - 2z_2 + y,$
$\dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{z2} = -\gamma z_2(y - y_m).$

11.26. $u = -v_1 + k_{v2}v_2 + 0{,}5z_1 + k_{z2}z_2 - 0{,}5y + 0{,}5g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -v_1 - 2v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -z_1 - 2z_2 + y,$
$\dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m),\ \dot k_{z2} = -\gamma z_2(y - y_m).$

11.27. $u = k_{v1}v_1 + k_{v2}v_2 + 0{,}5z_1 - z_2 + 3g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -2v_1 - 2{,}5v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -2z_1 - 2{,}5z_2 + y,$
$\dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m).$

11.28. $u = k_{v1}v_1 + k_{v2}v_2 + k_{z1}z_1 - z_2 + 1{,}5g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -2v_1 - 2{,}5v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2, \dot z_2 = -2z_1 - 2{,}5z_2 + y,$
$\dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m),\ \dot k_{z1} = -\gamma z_1(y - y_m).$

11.29. $u = k_{v1}v_1 + k_{v2}v_2 + z_1 + k_{z2}z_2 + g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -2v_1 - 2{,}5v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -2z_1 - 2{,}5z_2 + y,$
$\dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m),\ \dot k_{z2} = -\gamma z_2(y - y_m).$

11.30. $u = k_{v1}v_1 + k_{v2}v_2 + k_{z1}z_1 + k_{z2}z_2 + g,\ \dot v_1 = v_2,$
$\dot v_2 = -2v_1 - 2{,}5v_2 + u,\ \dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = -2z_1 - 2{,}5z_2 + y,$
$\dot k_{v1} = -\gamma v_1(y - y_m),\ \dot k_{v2} = -\gamma v_2(y - y_m),$
$\dot k_{z1} = -\gamma z_1(y - y_m),\ \dot k_{z2} = -\gamma z_2(y - y_m).$

11.31. $\dot{\tilde y}_1 = \tilde y_1,\ \dot{\tilde y}_2 = \tilde y_3,\ \dot{\tilde y}_3 = -\tilde y_1 - 3\tilde y_2 - 3\tilde y_3 + y,\ \dot{\tilde u}_1 = \tilde u_2,$
$\dot{\tilde u}_2 = \tilde u_3,\ \dot{\tilde u}_3 = -\tilde u_1 - 3\tilde u_2 - 3\tilde u_3 + u,$
$\hat y = \tilde y_2 - \tilde y_1 + \tilde u_3 + 2\tilde u_2 + \hat b_3\tilde u_1,\ \dot{\hat b}_3 = -\gamma\tilde u_1(\hat y - y).$

11.32. $\dot{\tilde y}_1 = \tilde y_1,\ \dot{\tilde y}_2 = \tilde y_3,\ \dot{\tilde y}_3 = -\tilde y_1 - 3\tilde y_2 - 3\tilde y_3 + y,$
$\dot{\tilde u}_1 = \tilde u_2,\ \dot{\tilde u}_2 = \tilde u_3,\ \dot{\tilde u}_3 = -\tilde u_1 - 3\tilde u_2 - 3\tilde u_3 + u,$
$\hat y = \tilde y_2 - \tilde y_1 + 2\tilde u_3 + \hat b_2\tilde u_2 + \tilde u_1,\ \dot{\hat b}_2 = -\gamma\tilde u_2(\hat y - y).$

11.33. $\dot{\tilde y}_1 = \tilde y_1,\ \dot{\tilde y}_2 = \tilde y_3,\ \dot{\tilde y}_3 = -2\tilde y_1 - 12\tilde y_2 - 6\tilde y_3 + y,$
$\dot{\tilde u}_1 = \tilde u_2,\ \dot{\tilde u}_2 = \tilde u_3,\ \dot{\tilde u}_3 = -2\tilde u_1 - 12\tilde u_2 - 6\tilde u_3 + u,$
$\hat y = 5\tilde y_3 + 10\tilde y_2 + (2 - \hat a_3)\tilde y_1 + 4\tilde u_3 + 3\tilde u_2 + \hat b_3\tilde u_1,$
$\dot{\hat a}_3 = \gamma\tilde y_1(\hat y - y),\ \dot{\hat b}_3 = -\gamma\tilde u_1(\hat y - y).$

11.34. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 12\tilde{y}_2 - 6\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 12\tilde{u}_2 - 6\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = 5\tilde{y}_3 + 10\tilde{y}_2 + (2 - \hat{a}_3)\tilde{y}_1 + 2\tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_1,$
$\dot{\hat{a}}_3 = \gamma\tilde{y}_1(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y).$

11.35. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 2\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = \tilde{y}_3 + (3 - \hat{a}_2)\tilde{y}_2 + 3\tilde{u}_3 + 3\tilde{u}_2 + \hat{b}_3\tilde{u}_1,$
$\dot{\hat{a}}_2 = \gamma\tilde{y}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_3 = -\gamma\tilde{u}_1(\hat{y} - y).$

11.36. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1, \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 2\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = \tilde{y}_3 + (3 - \hat{a}_2)\tilde{y}_2 + 2\tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_1,$
$\dot{\hat{a}}_2 = \gamma\tilde{y}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y).$

11.37. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 4\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 4\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = \tilde{y}_3 + \tilde{y}_2 + 3\tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + \hat{b}_3\tilde{u}_1,$
$\dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_3 = -\gamma\tilde{u}_1(\hat{y} - y).$

11.38. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 4\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 4\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = \tilde{y}_3 + \tilde{y}_2 + (2 - \hat{a}_3)\tilde{y}_1 + \tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + \hat{b}_3\tilde{u}_1,\ \dot{\hat{a}}_3 = \gamma\tilde{y}_1(\hat{y} - y),$
$\dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_3 = -\gamma\tilde{u}_1(\hat{y} - y).$

11.39. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -3\tilde{y}_1 - 4\tilde{y}_2 - 3\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -3\tilde{u}_1 - 4\tilde{u}_2 - 3\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = (4 - \hat{a}_2)\tilde{y}_2 + \tilde{y}_1 + 4\tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + \hat{b}_3\tilde{u}_1,\ \dot{\hat{a}}_2 = \gamma\tilde{y}_2(\hat{y} - y),$
$\dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_3 = -\gamma\tilde{u}_1(\hat{y} - y).$

11.40. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -3\tilde{y}_1 - 4\tilde{y}_2 - 3\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -3\tilde{u}_1 - 4\tilde{u}_2 - 3\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = (4 - \hat{a}_2)\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_1 + \hat{b}_1\tilde{u}_3 + \hat{b}_2\tilde{u}_2 + 3\tilde{u}_1,\ \dot{\hat{a}}_2 = \gamma\tilde{y}_2(\hat{y} - y),$
$\dot{\hat{b}}_1 = -\gamma\tilde{u}_3(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\hat{y} - y).$

11.41. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 4\tilde{y}_2 - 5\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 4\tilde{u}_2 - 5\tilde{u}_3 + u,$
$\hat{y} = (5 - \hat{a}_1)\tilde{y}_3 + (4 - \hat{a}_2)\tilde{y}_2 + (2 - \hat{a}_3)\tilde{y}_1 + \tilde{u}_3 + 2\tilde{u}_2 + \tilde{u}_1,$
$\dot{\hat{a}}_1 = \gamma\tilde{y}_3(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{a}}_2 = \gamma\tilde{y}_2(\hat{y} - y),\ \dot{\hat{a}}_3 = \gamma\tilde{y}_1(\hat{y} - y).$

11.42. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 4\tilde{y}_2 - 5\tilde{y}_3 + y,\ \dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,$
$\dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,\ \dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 4\tilde{u}_2 - 5\tilde{u}_3 + u,$
$\widehat{y} = \tilde{y}_3 + \tilde{y}_2 + (2 - \widehat{a}_3)\tilde{y}_1 + \ddot{b}_1\tilde{u}_3 + \widehat{b}_2\tilde{u}_2 + \widehat{b}_3\tilde{u}_1,\ \dot{\widehat{a}}_3 = \gamma\tilde{y}_1(\widehat{y} - y),$
$\dot{\widehat{b}}_1 = -\gamma\tilde{u}_3(\widehat{y} - y),\ \dot{\widehat{b}}_2 = -\gamma\tilde{u}_2(\widehat{y} - y),\ \dot{\widehat{b}}_3 = -\gamma\tilde{u}_1(\widehat{y} - y).$

11.43. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 3\tilde{y}_3 + y,$
$\dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3, \dot{\tilde{u}}_3 = -\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 3\tilde{u}_3 + u,$
$\widehat{y} = (3 - \widehat{a}_1)\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1 + 10\tilde{u}_1,\ \dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y),$
$k_i = p_{i1}\tilde{y}_3 + p_{i2}\tilde{y}_2 + p_{i3}\tilde{y}_1 + p_{i4}\tilde{u}_3 + p_{i5}\tilde{u}_2 + p_{i6}\tilde{u}_1\ (i = 1, \ldots, 6),$
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j\ (i, j = 1, \ldots, 6);$
б) $\dot{p}_{ij} = p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6).$

11.44. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 3\tilde{y}_3 + y,\ \dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,$
$\dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 3\tilde{u}_3 + u,\ \widehat{y} = (3 - \widehat{a}_2)\tilde{y}_2 + 10\tilde{u}_1,$
$\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y),\ k_i = p_{i1}\tilde{y}_3 + p_{i2}\tilde{y}_2 + p_{i3}\tilde{y}_1 + p_{i4}\tilde{u}_3 + p_{i5}\tilde{u}_2 + p_{i6}\tilde{u}_1$
$(i = 1, \ldots, 6),$
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6);$
б) $\dot{p}_{ij} = 1{,}5p_{ij} - k_i k_j\ (i, j = 1, \ldots, 6).$

11.45. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_3 + y,\ \dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,$
$\dot{\tilde{u}}_3 = -2\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 2\tilde{u}_3 + u,\ \widehat{y} = -\tilde{y}_3 + \tilde{y}_2 + (2 - \widehat{a}_3)\tilde{y}_1 + 10\tilde{u}_1,$
$\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y),\ k_i = p_{i1}\tilde{y}_3 + p_{i2}\tilde{y}_2 + p_{i3}\tilde{y}_1 + p_{i4}\tilde{u}_3 + p_{i5}\tilde{u}_2 + p_{i6}\tilde{u}_1$
$(i = 1, \ldots, 6),$
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6);$
б) $\dot{p}_{ij} = 2p_{ij} - k_i k_j\ (i, j = 1, \ldots, 4)\ (i, j = 1, \ldots, 6).$

11.46. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -3\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_3 + y,\ \dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,$
$\dot{\tilde{u}}_3 = -\tilde{u}_1 - 3\tilde{u}_2 - 2\tilde{u}_3 + u,\ \widehat{y} = (2 - \widehat{a}_1)\tilde{y}_3 + \tilde{y}_1 + \widehat{b}_3\tilde{u}_1,$
$\dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y),\ \dot{\widehat{b}}_3 = -k_6(\widehat{y} - y),$
$k_i = p_{i1}\tilde{y}_3 + p_{i2}\tilde{y}_2 + p_{i3}\tilde{y}_1 + p_{i4}\tilde{u}_3 + p_{i5}\tilde{u}_2 + p_{i6}\tilde{u}_1\ (i = 1, \ldots, 6),$
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j\ (i, j = 1, \ldots, 6);$
б) $\dot{p}_{ij} = 2{,}5p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6).$

11.47. $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_1,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_3,\ \dot{\tilde{y}}_3 = -\tilde{y}_1 - 2\tilde{y}_2 - 3\tilde{y}_3 + y,\ \dot{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_2,\ \dot{\tilde{u}}_2 = \tilde{u}_3,$
$\dot{\tilde{u}}_3 = -\tilde{u}_1 - 2\tilde{u}_2 - 3\tilde{u}_3 + u,\ \widehat{y} = (2 - \widehat{a}_2)\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 + \widehat{b}_3\tilde{u}_1,$
$\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y),\ \dot{\widehat{b}}_3 = -k_6(\widehat{y} - y),$
$k_i = p_{i1}\tilde{y}_3 + p_{i2}\tilde{y}_2 + p_{i3}\tilde{y}_1 + p_{i4}\tilde{u}_3 + p_{i5}\tilde{u}_2 + p_{i6}\tilde{u}_1\ (i = 1, \ldots, 6),$
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6);$
б) $\dot{p}_{ij} = 3p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6).$

11.48. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -2\widetilde{y}_1 - 3\widetilde{y}_2 - 2\widetilde{y}_3 + y$, $\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$, $\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$,
$\dot{\widetilde{u}}_3 = -2\widetilde{u}_1 - 3\widetilde{u}_2 - 2\widetilde{u}_3 + u$, $\widehat{y} = -\widetilde{y}_3 + \widetilde{y}_2 + (2 - \widehat{a}_3)\widetilde{y}_1 + \widehat{b}_3\widetilde{u}_1$,
$\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y)$, $\dot{\widehat{b}}_3 = -k_6(\widehat{y} - y)$,
$k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$ $(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6)$.

11.49. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -8\widetilde{y}_1 - 12\widetilde{y}_2 - 6\widetilde{y}_3 + y$,
$\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$, $\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$, $\dot{\widetilde{u}}_3 = -8\widetilde{u}_1 - 12\widetilde{u}_2 - 6\widetilde{u}_3 + u$,
$\widehat{y} = (6 - \widehat{a}_1)\widetilde{y}_3 + (12 - \widehat{a}_2)\widetilde{y}_2 + 7\widetilde{y}_1 + 5\widetilde{u}_1$, $\dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y)$,
$\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y)$, $k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$
$(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = 1{,}5p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6)$.

11.50. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -4\widetilde{y}_1 - 12\widetilde{y}_2 - 6\widetilde{y}_3 + y$, $\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$,
$\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$, $\dot{\widetilde{u}}_3 = -4\widetilde{u}_1 - 12\widetilde{u}_2 - 6\widetilde{u}_3 + u$,
$\widehat{y} = (6 - \widehat{a}_1)\widetilde{y}_3 + 10\widetilde{y}_2 + (4 - \widehat{a}_3)\widetilde{y}_1 + 5\widetilde{u}_1$, $\dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y)$,
$\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y)$, $k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$
$(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = 2p_{ij} - k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6)$.

11.51. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -\widetilde{y}_1 - 2\widetilde{y}_2 - 3\widetilde{y}_3 + y$, $\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$,
$\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$, $\dot{\widetilde{u}}_3 = -\widetilde{u}_1 - 2\widetilde{u}_2 - 3\widetilde{u}_3 + u$,
$\widehat{y} = \widetilde{y}_3 + (2 - \widehat{a}_2)\widetilde{y}_2 + (1 - \widehat{a}_3)\widetilde{y}_1 + 5\widetilde{u}_1$, $\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y)$,
$\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y)$, $k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$
$(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = 2{,}5p_{ij} - k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$.

11.52. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -2\widetilde{y}_1 - 2\widetilde{y}_2 - 4\widetilde{y}_3 + y$, $\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$,
$\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$, $\dot{\widetilde{u}}_3 = -2\widetilde{u}_1 - 2\widetilde{u}_2 - 4\widetilde{u}_3 + u$,
$\widehat{y} = (4 - \widehat{a}_1)\widetilde{y}_3 + (2 - \widehat{a}_2)\widetilde{y}_2 + (2 - \widehat{a}_3)\widetilde{y}_1 + 5\widetilde{u}_1$,
$\dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y)$, $\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y)$, $\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y)$,
$k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$ $(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = 3p_{ij} - k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$.

11.53. $\dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{y}_1$, $\dot{\widetilde{y}}_2 = \widetilde{y}_3$, $\dot{\widetilde{y}}_3 = -2\widetilde{y}_1 - 3\widetilde{y}_2 - 4\widetilde{y}_3 + y$, $\dot{\widetilde{u}}_1 = \widetilde{u}_2$,
$\dot{\widetilde{u}}_2 = \widetilde{u}_3$, $\dot{\widetilde{u}}_3 = -2\widetilde{u}_1 - 3\widetilde{u}_2 - 4\widetilde{u}_3 + u$,
$\widehat{y} = (4 - \widehat{a}_1)\widetilde{y}_3 + (3 - \widehat{a}_2)\widetilde{y}_2 + (2 - \widehat{a}_3)\widetilde{y}_1 + \widehat{b}_3\widetilde{u}_1$, $\dot{\widehat{a}}_1 = k_1(\widehat{y} - y)$,
$\dot{\widehat{a}}_2 = k_2(\widehat{y} - y)$, $\dot{\widehat{a}}_3 = k_3(\widehat{y} - y)$, $\dot{\widehat{b}}_3 = -k_6(\widehat{y} - y)$,
$k_i = p_{i1}\widetilde{y}_3 + p_{i2}\widetilde{y}_2 + p_{i3}\widetilde{y}_1 + p_{i4}\widetilde{u}_3 + p_{i5}\widetilde{u}_2 + p_{i6}\widetilde{u}_1$ $(i = 1, \ldots, 6)$,
а) $\dot{p}_{ij} = -k_i k_j (i, j = 1, \ldots, 6)$;
б) $\dot{p}_{ij} = 4p_{ij} - k_i k_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$.

Приложения

П.1. Векторное дифференцирование

Ниже в определелениях используется символ $\overset{\text{def}}{=}$, который обозначает «равно по определению».

1) Производная вектора $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$ по скаляру t.

$$\frac{dx}{dt} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad \frac{dx^T}{dt} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{dx}{dt}\right)^T.$$

2) Производная скалярной функции $s = s(x)$ по вектору $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$.

$$\frac{ds}{dx} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

3) Производная векторной функции $f(x)$ $\left(f = \left(f_1\ \cdots\ f_n\right)^T\right)$ по вектору $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$.

$$\frac{df}{dx} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}.$$

Используя приведенные определения и обычные правила дифферепцирования, можно получить следующие правила векторного дифферепцирования.

1^0. Производиая скалярного произведения по скаляру t.

$$\frac{d(x^T y)}{dt} = \frac{dx^T}{dt} y + x^T \frac{dy}{dt} = y^T \frac{dx}{dt} + x^T \frac{dy}{dt}.$$

Если $y = x$, то имеем

$$\frac{d(x^T x)}{dt} = 2\frac{dx^T}{dt} x = 2x^T \frac{dx}{dt}.$$

Вывод:

$$\frac{d(x^Ty)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{dt}y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{dy_i}{dt} =$$
$$= \frac{dx^T}{dt}y + x^T\frac{dy}{dt} = y^T\frac{dx}{dt} + x^T\frac{dy}{dt}.$$

2^0. Производная произведения матрицы и вектора по скаляру t.

$$\frac{d(Ax)}{dt} = \frac{dA}{dt}x + A\frac{dx}{dt},$$

где A — $(m \times n)$-матрица, зависящая от t.

Вывод:

$$\frac{d(Ax)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{da_{1j}}{dt}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{da_{2j}}{dt}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{da_{nj}}{dt}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}\frac{dx_j}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}\frac{dx_j}{dt} \end{bmatrix} = \frac{dA}{dt}x + A\frac{dx}{dt}.$$

3^0. Производная скалярного произведения по вектору $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$.

$$\frac{d(y^Tz)}{dx} = z^T\frac{dy}{dx} + y^T\frac{dz}{dx}.$$

Если $y = z$, то имеем

$$\frac{d(y^Ty)}{dx} = 2y^T\frac{dy}{dx}.$$

Вывод:

$$\frac{d(y^Tz)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{i=1}^{n} y_i z_i\right] =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial z_i}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_n}z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial z_i}{\partial x_n}\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial y^T}{\partial x_1}z + y^T\frac{\partial z}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial y^T}{\partial x_n}z + y^T\frac{\partial z}{\partial x_n}\right] = \frac{dy^T}{dx}z + y^T\frac{dz}{dx}.$$

4^0. Производная квадратичной формы по вектору $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$.

$$\frac{d}{dx}(x^TQx) = 2x^TQ,$$

где Q — симметрическая $(n \times n)$-матрица, не зависящая от x.

Вывод:

$$\frac{d}{dx}(x^TQx) = \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j \ \cdots \ \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j\right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial x_1} \ \cdots \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial x_n}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} q_{1j}x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i q_{i1} \ \cdots \ \sum_{j=1}^{n} q_{nj}x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i q_{in}\right] =$$

$$= \left[2\sum_{i=1}^{n} x_i q_{i1} \ \cdots \ 2\sum_{i=1}^{n} x_i q_{in}\right] = 2x^TQ.$$

5^0. Производная сложной векторной функции по скаляру t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}, \quad y = y(x(t)).$$

Вывод:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dt} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}.$$

П.2. Коэффициенты гармонической линеаризации

Таблица П.1. Коэффициенты гармонической линеаризации НЗ с однозначной характеристикой

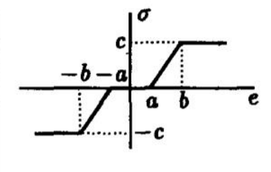
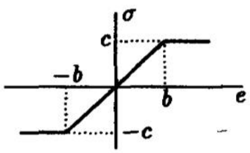
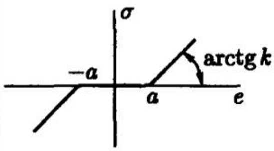
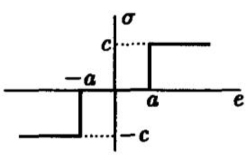
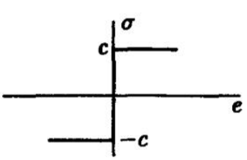
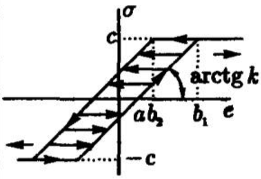
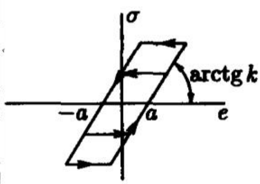
№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A) = \frac{2c}{\pi(b-a)}\left[\arcsin\frac{b}{A} - \arcsin\frac{a}{A} + \frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right], \quad A \geqslant b$
2		$q(A) = \frac{2c}{\pi b}\left[\arcsin\frac{b}{A} + \frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right],$ $A \geqslant b.$
3		$q(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],$ $A \geqslant a.$
4		$q(A) = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geqslant a.$
5		$q(A) = \frac{4c}{\pi A}.$

Таблица П.2. Коэффициенты гармонической линеаризации для НЗ с неоднозначной характеристикой

<table>
<tr><th>№</th><th>Нелинейные характеристики</th><th>Коэффициенты гармонической линеаризации</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>

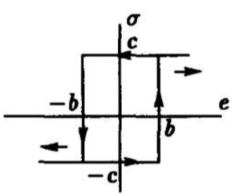
$$q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b_1}{A} + \arcsin\frac{b_2}{A} + \frac{b_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_1}{A}\right)^2} + \frac{b_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_2}{A}\right)^2}\right],$$

$$q'(A) = \frac{k(b_2^2 - b_1^2)}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b_1.$$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>

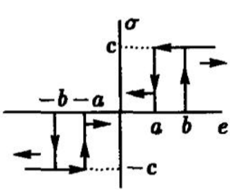
$$q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2a}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2a}{A}\right)\sqrt{\frac{a}{A}\left(1 - \frac{a}{A}\right)}\right],$$

$$q'(A) = \frac{4ka}{\pi A}\left(1 - \frac{a}{A}\right), \quad A \geqslant a.$$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2},$$

$$q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b.$$

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

$$q'(A) = -\frac{2c(b-a)}{\pi A^2}$$

</td></tr>
</table>

Таблица П.3. Коэффициенты гармонической линеаризации для НЗ с однозначной характеристикой при несимметричных колебаниях

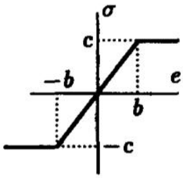
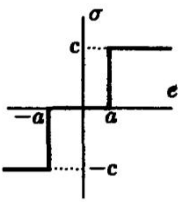
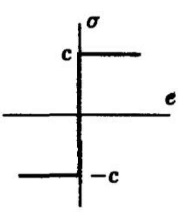
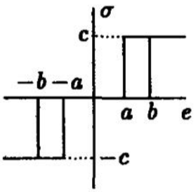
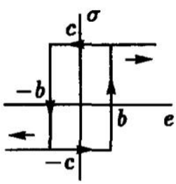
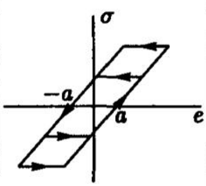
№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$\sigma^0 = \frac{k}{\pi}\left\{A\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right] + (b+e^0)\arcsin\frac{b+e^0}{A} - (b-e^0)\arcsin\frac{b-e^0}{A}\right\}$, $q = \frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b+e^0}{A} + \arcsin\frac{b-e^0}{A} + \frac{b+e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \frac{b-e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q' = 0, \quad A \geqslant b + \lvert e^0\rvert$.
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi}\left(\arcsin\frac{a+e^0}{A} - \arcsin\frac{a-e^0}{A}\right)$, $q = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q' = 0, \quad A \geqslant \lvert e^0\rvert$.
3		$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi}\arcsin\frac{e^0}{A}$, $q = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{e^0}{A}\right)^2}$, $q' = 0, \quad A \geqslant \lvert e^0\rvert$.

Таблица П.4. Коэффициенты гармонической линеаризации для НЗ с неоднозначной характеристикой при несимметричных колебаниях

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$\sigma^0 = \frac{c}{2\pi}\left(\arcsin\frac{a+e^0}{A}+\arcsin\frac{b+e^0}{A}-\arcsin\frac{a-e^0}{A}-\arcsin\frac{b-e^0}{A}\right),$ $q = \frac{c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a+e^0}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a-e^0}{A}\right)^2}\right],$ $q' = -\frac{2(b-a)c}{\pi A^2},\quad A \geqslant b+\lvert e^0\rvert.$
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi}\left(\arcsin\frac{b+e^0}{A}-\arcsin\frac{b-e^0}{A}\right),$ $q = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right],$ $q' = -\frac{4bc}{\pi A^2},\quad A \geqslant b+\lvert e^0\rvert.$
3		$\sigma^0 = ke^0,$ $q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right)+\left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}\right],$ $q'(A) = -\frac{4ka}{\pi A}\left(1-\frac{a}{A}\right),\quad A > a+\lvert e^0\rvert.$

Список литературы

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
2. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления. — СПб: Наука, 1999. — 466 с.
3. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 223 с.
4. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966. — 992 с.
5. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985. — 351 с.
6. *Воронов А. А., Ким Д. П., Лохин В. М. и др.* Теория автоматического управления. Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1986. — 504 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 548 с.
8. *Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А. и др.* Теория систем с переменной структурой. — М.: Наука, 1970. — 592 с.
9. *Квакернак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
10. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М.: Физматлит, 2007. — 440 с.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
12. *Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 271 с.
13. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматлит, 1959.
14. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
15. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — 216 с.
16. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
17. *Макаров И. М., Дмитриева Н. Д., Ким Д. П. и др.* Основы автоматизации управления производством. — М.: Высшая школа: 1983. — 504 с.

18. *Нетушил А. В., Гольдфарб Л. С., Александровский И. М. и др.* Теория автоматического управления. Ч. 2. — М.: Высшая школа, 1972. — 430 с.

19. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 321 с.

20. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматлит, 1961. — 391 с.

21. *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1979. — 255 с.

22. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под редакцией В. А. Бесекрского. — М: Физматлит, 1969. — 587 с.

23. Справочник по теории автоматического управления/Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

24. *Топчеев Ю. И., Цыпляков А. П.* Задачник по теории автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1977. — 592 с.

25. *Уткин В. И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. — М.: Наука, 1974. — 272 с.

26. *Якубович В. А., Барабанов А. Т., Катковник В. Я. и др.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — 447 с.

27. *Bailey F. N.* The Aplication of Lyapunov Second Method to Interconnected Systems // SIAM Journal of Control, 1966, N. 3. P. 443–462.

28. *Bellman R.* Vector Lyapunov Functions // SIAM Journal of Control, 1962, N. 1. P. 32–34.

29. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design. Prentice Hall Europe, 1995. 396 p.

30. *Slotine J. J. E., Li W.* Applied Nonlinear Control. Prentice Hall International Editions, 1991.