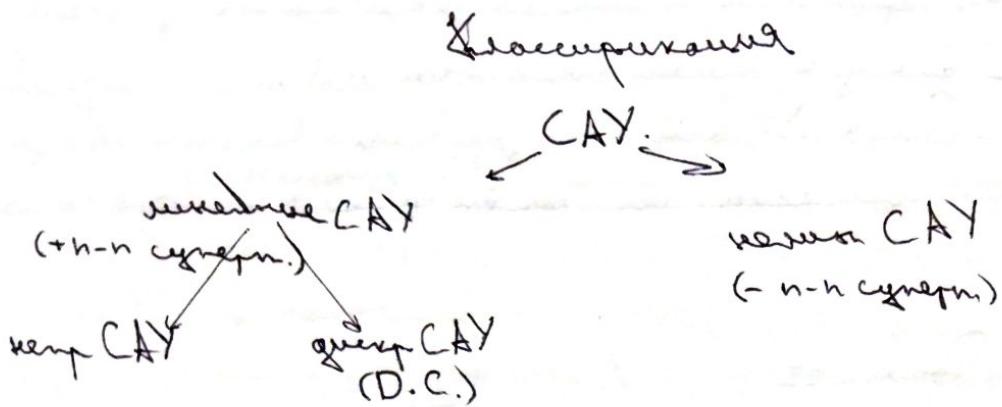


II. Синтез

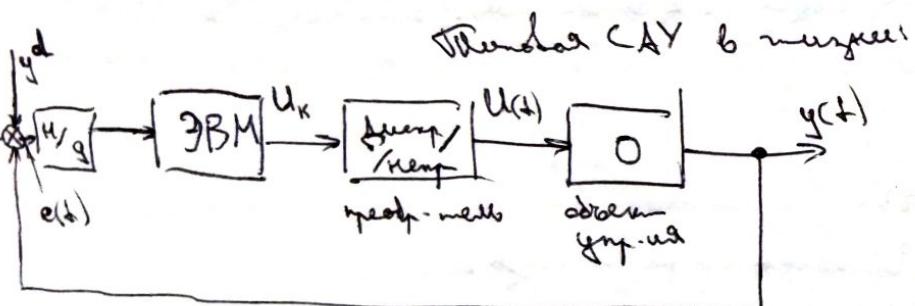
05.02.18.
Конспект

Двухфазные генераторы синх-ва



D.C.-запись между - группировкой (макс, общая погреш.)

Наш интерес DСинтез - подстановка $U_k, U_k, Z_k, k=0, 1, 2, \dots$



3BM - управляемый в единицах времени

y^d - заданное значение выхода $y(t)$

O - адрес-группа (нум. строк)

$H/g = A_{H, \Pi}$

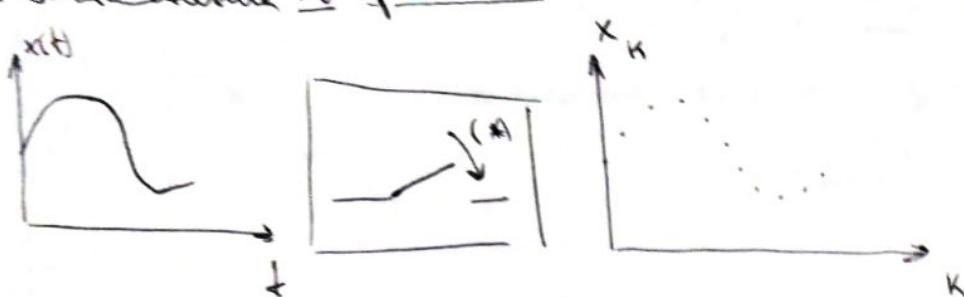
$A/H = U, A\Pi$

U_k - управляемая под-нр. Принимает группу значений U_0, U_1, U_2, \dots
+21-3-подстановка

За счет чего зажигают лампочку (\square) и зажигают генератор ($3BM$),
но это не избранный способ

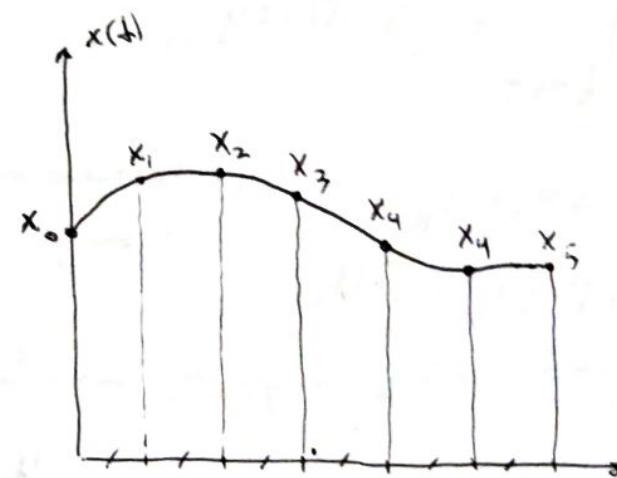
Slon-davne (AkkT)-debae għix luu:

1. Slon-davne \rightarrow ġeneru

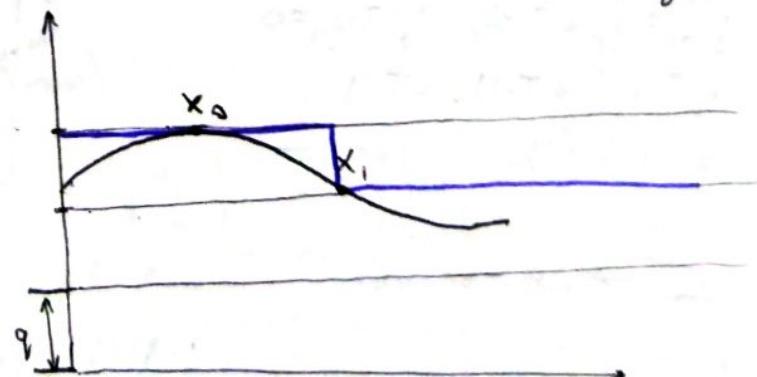


*-kien żgħixx idha u tħalli jaġid minn-hu b'minni T
T - kien ħażżeex

$$x_K = x(t) \Big|_{t=kT}$$



2. Differenzjalix \rightarrow ġraf - ġieha - ġieha tħalli jaġid minn-hu b'minni



06.02.18

перемеса

хомог. диф. уравнение \Leftrightarrow лог-лог:

$Q(p)y(t) = P(p)U(t) \rightarrow$ сдвиги вдоль оси времени

Пример

$$y_s + q_s = U_s$$

$$\dot{y}_s = \frac{dy_s}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

$$\int \Delta t = T = \text{const}$$

$$y(t) \rightarrow y_K$$

$$y(t+T) \underset{t=kT}{=} y((k+1)T) = y_{K+1}$$

$$\frac{y_{K+1} - y_K}{T} + y_K = U_K$$

$$y_{K+1} + (T-1)y_K = T \cdot U_K$$

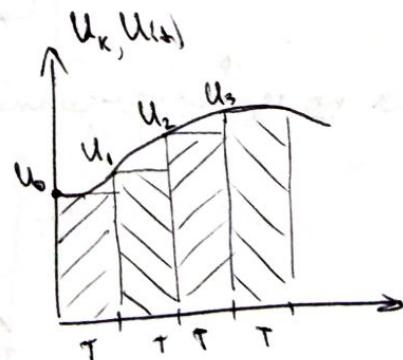
$$y(t) = U(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{p} U(t)$$

$$y_{K+1} = y_K + T \cdot U_K, \quad y_0 = 0$$

$$y_0 = y_{-1} + T \cdot U_0 = T \cdot U_0$$

$$y_k = y_0 + T U_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$



\Leftrightarrow линейное уравнение

$$\begin{aligned} \text{Линейное уравнение:} \\ y(t) &\rightarrow y_K \\ \dot{y}(t) &\rightarrow \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \underset{t=kT}{=} \dot{y}(kT+T) = \dot{y}_{K+1} \approx \frac{y_{K+2} - y_{K+1}}{T} \\ U(t) &\rightarrow U_K \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{d \dot{y}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{y}(t+\Delta t) - \dot{y}(t)}{\Delta t} \approx \frac{y_{K+2} - 2y_{K+1} + y_K}{T^2} \\ \ddot{y}(t) &= \frac{y_{K+3} - 3y_{K+2} + 3y_{K+1} - y_K}{T^3} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

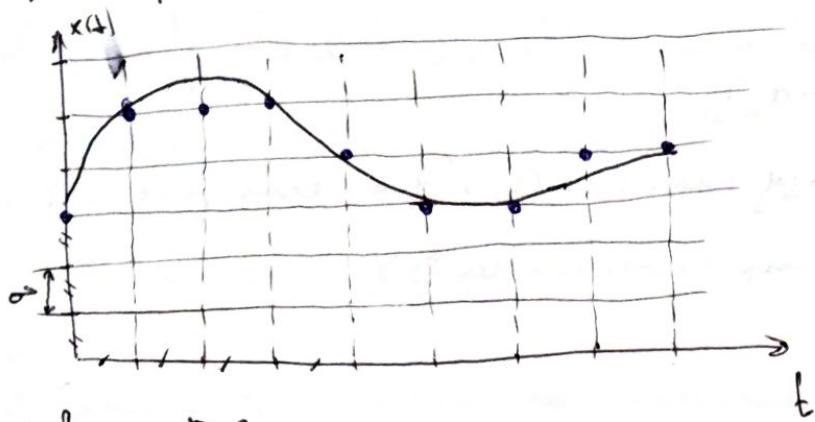
$y_{K+1} = y_K + T U_{K+1}$ - уравнение с запаздыванием

KUM I 1.1, f.3
массо-баланс
анализ

06.02.18.

ОГ

3) Дискретизированное и не линейное:



1) лин. сплайн
2) квадратичные подмешки
и лин. 20 членов
б) задача перевода
АКГЛ. 93.

Задача D.C.:

- 1) лин. сплайн (первообраз.)
- 2) квадратичные (но упрощено)
- 3) кубические (но упр. и л.)

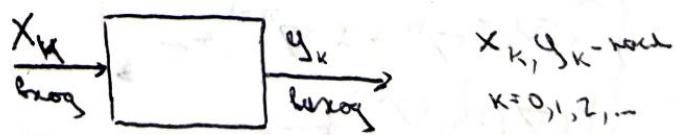
Замечание: задача не линейно-линейна определена;
уравнение - лин. определена;
переводная - линейна.

В системах с постоянными коэффициентами, y -вектор \rightarrow уравнение \Rightarrow y -переводная
Сигналы: квадратичные полиномы

Мат. модель D.C.

1. Равномерное управление и лин. (квад.-линейн.)

Т-период управляемый



$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = b_0 u_{k+n-1} + \dots + b_{n-1} u_{k+1} + b_n u_k \quad (1)$$

При одинаковых управляющих воздействиях u в n разах находит выходы и начальные условия

 a_i, b_i - параметры; начальные условия квадратичные(1) дает систему лин. уравнений $\frac{y_{k+n}}{y_{k+n-1}, \dots, y_{k+1}, y_k}$ с линейной зависимостью u_{k+n} + неизвестный u .

$$(2) \quad u_{-1} = u_{-2} = u_{-n+1} = 0$$

 $y_{0,1}, y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-n+1}$ - известныи.e. выходы начальных состояний, начиная с u_0, u_1, u_k

Задача 2. Решение уравнения (1) выражается
 $y_1 = b_1 u_0 - a_1 y_0 - \dots - a_n y_{n+1}$
 $y_2 = b_1 u_1 + b_2 u_0 - a_1 y_1 - \dots - a_n y_{n+2}$
 \dots
 $y_k = b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} - a_1 y_{k-1} - \dots - a_n y_{k-n}$

т.е. можно выразить коэффициенты, зная (1) и (2). Это и есть решение (1).

Замечание: подобное выражение — есть форма записи Д.У.

2. Операторное описание Д.У.

Операторы на-п таблиц

$$\Delta: \Delta x_k = x_{k+1} \text{ — сдвиг вправо на один шаг}$$

$$\Delta^2: \Delta^2 x_k = \Delta \Delta x_k = \Delta x_{k+1} = x_{k+2}$$

$$\Delta^n: \Delta^n x_k = x_{k+n}$$

$$\Delta^{-1}: \Delta^{-1} x_k = x_{k-1}$$

$$\Delta^{-2}: \Delta^{-2} x_k = x_{k-2}$$

$$\Delta^{-n}: \Delta^{-n} x_k = x_{k-n}$$

Применение операторов Δ и Δ^{-n} супротив (уменьшает значение):

$$\Delta^n y_k + a_1 \Delta^{n-1} y_k + \dots + a_n y_k = b_1 \Delta^{n-1} u_k + \dots + b_n u_k$$

$$(\Delta^n + a_1 \Delta^{n-1} + \dots + a_n) y_k = (b_1 \Delta^{n-1} + \dots + b_n) u_k$$

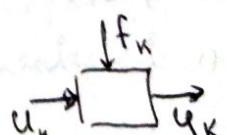
$$(3) Q(\Delta) y_k = P(\Delta) u_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{левый оператор} \\ \text{правый оператор} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\Delta) = \Delta^n + a_1 \Delta^{n-1} + \dots \\ P(\Delta) = b_1 \Delta^{n-1} + \dots \end{array} \right.$$

$Q(\Delta)$ — левый оператор симметрический, содержит коэффициенты (3)

$P(\Delta)$ — правый оператор

Если б вспомогательные уравнения, то $Q(\Delta) y_k = P(\Delta) u_k + P_i(\Delta) f_k$



but $Q(\lambda) = 0 : \{\lambda_i\}_{i=1,n}$ - no normal D.C.

- II - $P(\lambda) = 0 : \{\lambda_i\}_{i=1,n-1}$ - no regular D.C.

Максимальное значение λ называется λ_{\max} а λ_{\min} из (3) :

$$y_k = \frac{P(\nabla)}{Q(\nabla)} u_k$$

$$W(\nabla) = \frac{P(\nabla)}{Q(\nabla)} \text{ - не рег. on-p D.C.}$$

Нормальный D.C. - симм., ком. определит однородное разложение гр-ии

$$Q(\nabla) y_k = 0 \quad (4) \quad + (2), \text{коэффиц.}$$

2a. Аналитическое решение гр-ии (3) $+ (2)$

если можно написать $y_k = y_k^* + y_k^{**}$

y_k^{**} - ~~бесконечное~~ конечное, несущее на боях u_k при 0 н.у.

y_k^* - реш. гр-ии (4) при н.у. (2). Тогда будем $y_k^* = C\lambda^k$

Завершение: $\nabla C\lambda^k = C\lambda^{k+1} = C\lambda\lambda^k = \lambda C\lambda^k$

λ - коэффиц. в общем выражении $\lambda_i = a_i + jb_i$

$$\nabla^n \lambda^k = \lambda^n \lambda^k, \text{ поэтому } Q(\nabla) C\lambda^k = \underbrace{Q(\lambda) C\lambda^k}_\text{аналог гр-ии} = 0 \Rightarrow \text{тако} \underbrace{Q(\lambda) = 0}_\text{характ. гр-ии}$$

Нормальное выражение $\{\lambda_i\}$

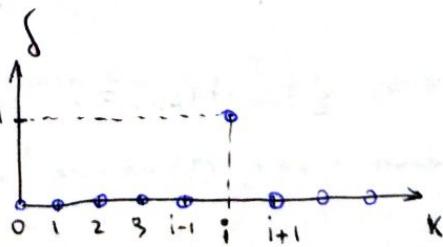
Тогда $y_k^* = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k$ (i - показатель из н.у. (2))

Если 0 н.у., то $c_i = 0$

$y_k^{**}?$

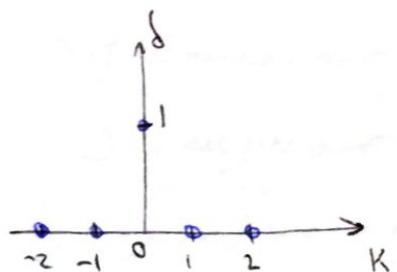
Возможны 2 вида $\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$

И $\delta_{0,k} = \delta_k$ обозначает то же



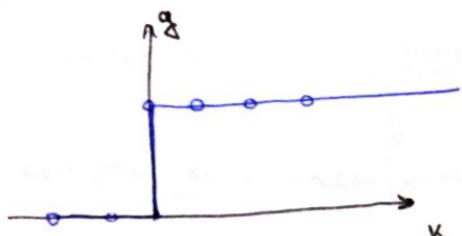
8.2.18 решение

Установлено



$$g_k = \sum_{l=-\infty}^k \delta_l = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

то генератор единиц



$$g_k = I(t) \Big|_{t=kT}$$

но $I(t)$ -это Технадзя

Понятие δ_k -единица г-ти Технадзя

$$I(t) = \int \delta(t) dt$$

$\delta(t)$ -это Дирекса (эг единице)

δ_k -единица г-ти Дирекса

Также Δx_k можно сдл: $x_k = \sum_{i=0}^k x_i \cdot \delta_{i,k}$ но генер. г-ти.

Также выражение $y_k^{**} = \sum_{i=0}^k x_i g_{i,k}$, где $g_{i,k}$ -коэф. ил/в бывшей
 К на един. баг в касом i (н.е. г-ти
 на $\delta_{i,k}$)

Итака even инцидента (если не забыть о ∂u)

$\Rightarrow g_{i,k} = g_{0,k-i}$, где $g_{0,k} = g_k$ - Габат единичная г-ти единиц, т.е. генер.
 единиц при ∂u . а генер. г-ти Дирекса на баге (δ_k),
 но если $g_k = g_k^{**}$ | ∂u .

По определению: $g_0 = \dots = g_{-n+1} = 0$ (см. н.у. (2))

По определению (1)+Н.у. (2) можно выраж. (коэф. перенесены влево):

$$g_1 = b_1, \delta_0 = b_1$$

$$g_2 = -a_1 b_1 + b_2 \delta_0 = -a_1 b_1 + b_2$$

$$g_k = b_k \delta_0 - a_{k-1} g_{k-1} - \dots - a_{k-1} g_1 \quad (b_i, a_i |_{i>k} = 0), \text{ тогда же выраж. с ограничением } K$$

$$\text{Значит: } ! \quad y^* = \sum_{i=0}^k x_i g_{i,k} = \sum_{i=0}^k x_i g_{k-k-i} = \sum_{i=0}^k g_{k-i} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} x_i$$

Число решений ур-я (1) для производного бояга
 $x_k \in \mathbb{Q}$

$$w_k = y_k^* \Big|_{x_k = h_k = 1_k} = , 1_k - \text{дискретное поле}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} \cdot 1_k = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} , \text{напомним, } w_k - \text{переходная мат-ть, } p-\text{мат симметрии}$$

на дискретном поле

Замечание: $y_k^* = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} x_i$ - дискретный аналог аморфы стержни

$$\text{Число решений: } y_k = y_k^* + y_k^{**} = \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k}_{\text{дискретный аналог Дюамеля}} + \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} x_i$$

k -такое же число решений

Установлено дискретных решений

1. Установлено по н.у. = /ассимптотическая устойчивость

D.C. устанавливается по н.у., если $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k^* = 0$, т.е. с течением времени исчезают колебания и система ведет себя при производном бояге $u_k = 0$)

$$\log x_k \approx u_k$$

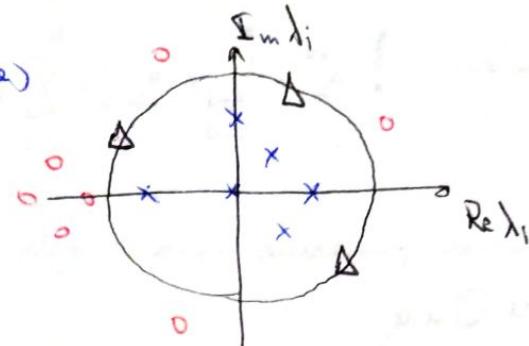
Замечание, что $y_k^* = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k$ стремится к нулю, если $|A_i| < 1$, т.е. λ_i -периодичные корни ур-я $Q(\lambda) = 0$: $\lambda_{i,i+1} = \lambda_i + \beta_{i,j}$

Т.е. эволюция D.C. бывает либо по н.у. H.u.D., когда корни ур-я имеют вещественные окружности

x -устойчивые (короткие) корни (выпирание)

0 -нейтральные,ющие, блуждающие

Δ -корни на границе нейтральности устойчивости



Система неустойчива, если $\lim_{K \rightarrow \infty} y_K^* = \pm \infty$

Система на границе устойч. $\lim_{K \rightarrow \infty} y_K^* = \text{const} < \infty$ (найдено $\omega_{\text{крит}}$), $= 1$)

12.02.18.

лекция

2. Устойчивость D.C. по логарифму

D.C. устойчива по логарифму, если при ограничении векторов модулем (т.е. $|U_k| < a \cdot k$) выходная n -ая компонента ограничена

Н.д.Д.: 1. Устойчива по K.Y.

2. Равн. реальность, т.е. $\max \text{модул. вектора} < \max \text{модул. вектора}$,
т.е. максимальный вектор-функция от времени постоянен

$y_k = U_{k-1}$ - для y реальна

$y_k = U_k$ - система для y реальная (упрощенная система)

$y_k = U_{k+1}$ - для y креативна - порядок n -и промежуточн.

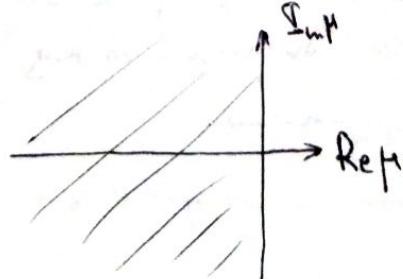
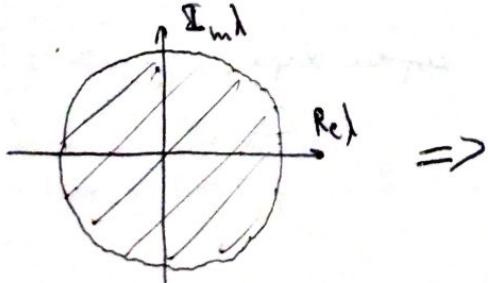
Некрещенные критерии
устойчивости

Корни характеристического уравнения не сдвигаются, если корни критерия

Критерий Nyquist показывает, что если характеристическое уравнение имеет корни в правой полуплоскости, то оно неустойчиво.

$$X.Y.: Q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

заменим $\lambda = \frac{1+i\mu}{1-\mu} \Rightarrow$ преобразует аргумент в левую полуплоскость



(9)

$$Q(\mu) = a_0 \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^n + a_1 \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{n-1} + \dots + a_n = \frac{C_0 \mu^n + C_1 \mu^{n-1} + \dots + C_n}{(1-\mu)^n} = 0 \quad (2)$$

имеет корни $\mu = 1$

если корни (2) лежат в левой полуплоскости, то корни (1) лежат вправо от окружности $\kappa = 1$ и (2) можно применить критерии Бурбаки, Расса, Некрасова-Чебышева, Бицадзе и т.д.

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 \\ C_0 & C_2 & C_4 \\ 0 & C_1 & C_3 \\ 0 & C_0 & C_2 \end{vmatrix} \dots$$

Многомерная D.C.

U_k - содержит n входов

y_k - l выходов

$$\text{т.е. } U_k = [U_{1k}, U_{2k}, \dots, U_{nk}]^T$$

нечётные индексы

можно сгруппировать в вектор: $U(t) = [U_1(t), \dots, U_n(t)]$

$$y_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{lk}]^T$$

$\boxed{x_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]}$ - многомерный вектор состояний - наименование состояния системы Σ (агрегат)

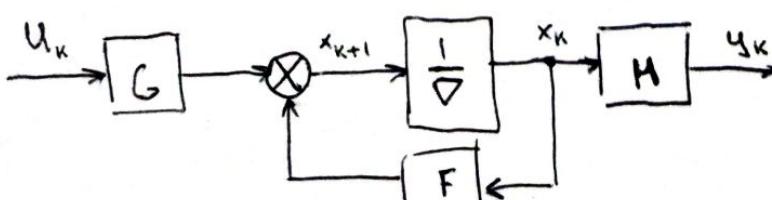
Тогда $\boxed{\begin{cases} x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot u_k \\ y_k = H \cdot x_k \end{cases}}$ - многомерное описание системы Σ (агрегат)

Это однородное (многомерное) дифференциальное уравнение n -го порядка в нормальной форме
 x_0 - начальное состояние Σ

$F_{[n \times n]}$ - содержимое матрица /н-яя элементы состояния Σ

$G_{[n \times m]}$ - m -яя коэффициенты (коэффициенты)

$H_{[l \times n]}$ - n -яя подизвестные состояния



Kum § 7.1, 7.2

10

Для сим. I при начальных U_k, Y_k можно пойти по иной методике

$[X_k, H, F, G]$

$$\text{Решение II: } Y_k = \underbrace{H \cdot F^k \cdot X_0}_{*} + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{H \cdot F^k \cdot G \cdot U_i}_{**} \quad (\text{III})$$

III - генерическое выражение Коши

$H \cdot F^k \cdot X_0 = Y^*$ - логическая схема, общее решение описано в III

$$\begin{cases} X_{k+1} = F \cdot X_k \\ Y_k = H \cdot X_k, X_0 \end{cases}$$

$$Y^{**} = \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{H \cdot F^k \cdot G \cdot U_i}_{\text{-расщепленное выражение}} \quad \text{-расщепленное выражение для H.H.Y. } (X_0 = 0)$$

Установим (*):

$$Y_0^* = H \cdot X_0 = H E X_0 = H F^0 X_0$$

$$Y_1^* = H X_1 = H F X_0$$

$$Y_k^* = H F^k X_0$$

$$\text{Установим III: } Y_0 = H X_0$$

$$Y_1 = H X_1 = (F X_0 + G U_0) H$$

$$Y_2 = H X_2 = H F X_1 + H G U_0 = H F^2 X_0 + H F G U_0 + H G U_0$$

$$Y_k = H F^k X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} H F^k G U_i$$

D.C. в решении сим-ах, учитывая, что $Y_k^* = H F^k X_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ при $H X_0$ получим

$$\Rightarrow F \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{нужно проверить})$$

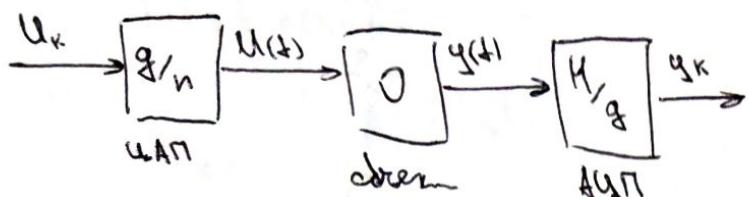
это условие выполнено, если собственные числа матрицы F лежат в единицу единицу, т.е. корни характеристического уравнения $Q(\lambda) = \det[\lambda E - F] = 0 \quad : |\lambda, \{F\}| < 1$

Таким образом получаем окончательное выражение

Дискретная модель непрерывного движения

Однако на практике применяются непрерывные схемы (т.е. такие схемы
имеющие г.ч.з.д.и.и. (однако это звено упрощено), а также - дискретные (имеют это ЭВМ))

Чтобы получить единое мат. описание, будем звать схему непрерывного звука

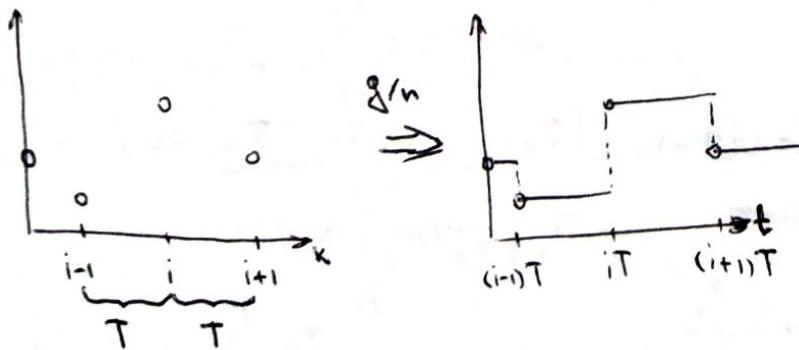


Изменение отсчета в непрерывных схемах?

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x_0$$

UAP (0/H):

И фиксатор (экспоненциатор кубического порядка) - фиксирует значение звука u_k на весь шаг T (в итоге получается кубично-квадратичная форма)



$$u(t) = u_k \Big|_{kT \leq t < (k+1)T}$$

$$AUП (H/g): y_k = y(t) \Big|_{t=kT} \text{ см. суп } ②$$

$$\text{Выражение для } x(t): x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

составлено с учетом б. ч.
матем. баланса

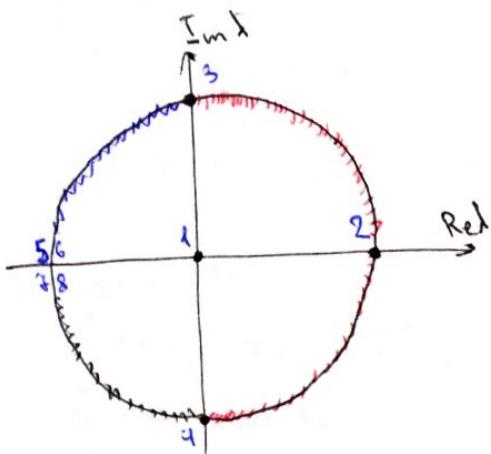
Рассмотрим зону в синусоидальной волне, т.е. $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

$$x_{k+1} = e^{AT} \cdot x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} \cdot B \cdot U(\tau) d\tau$$

$$\text{Важное значение максимума } U(\tau) = \text{const} = U_k \Rightarrow x_{k+1} = e^{AT} x_k + \int_0^T e^{A\tau} d\tau B U_k$$

13.02.18
использовано

Д.с. устойчива, если $|A| < 1$



$$\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}$$

$$\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$



$$1. \lambda = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{1} = -1$$

$$2. \lambda = 1 \Rightarrow \mu = 0$$

$$3. \lambda = j \Rightarrow \mu = j$$

$$4. \lambda = -j \Rightarrow \mu = -j$$

$$5. \Im \mu = +\infty j = ja \Big|_{a \rightarrow \infty} \Rightarrow \lambda = \frac{1+ja}{1-ja} \Big|_{a \rightarrow \infty} = -1 \quad (\text{Re } \mu \text{ есть} = -1; \Im \mu = 0)$$

$$6. \mu = -aj \Big|_{a \rightarrow \infty} \Rightarrow \lambda = -1$$

$$7. \mu = a \Big|_{a \rightarrow \infty}$$

$$8. \mu = -a \Big|_{a \rightarrow \infty}$$

Пример 9, § 12

$$W_{\text{перед}}(z) = \frac{z+0,1}{0,1z^2+1,1z+0,2}, \text{ где } z = \sigma$$

$$W_{\text{затем}}(z) = \frac{W^*}{1+W^*} \text{ при } k=0 \text{ о.} \Rightarrow W_{\text{затем}}(z) = \frac{z+0,1}{0,1z^2+2,1z+0,3}$$

$$Q(\lambda) = 0,1\lambda^2 + 2,1z + 0,3 = 0$$

Применение критерия Мур-Хорса: $\lambda = \frac{\mu+1}{1-\mu}$;

$$Q(\mu) = 0,1 \left(\frac{\mu+1}{1-\mu} \right)^2 + 2,1 \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) + 0,3 = 0$$

(13)

$$0,1(1+2\mu+\mu^2) + 2,1 - 2,1\mu^2 + 0,3 - 0,6\mu + 0,3\mu^2 = 0$$

$$\frac{-17\mu^2 - 4\mu + 25}{(\mu-1)^2} = 0 \quad \text{некоректн., т.к. есть нульевые корни}$$

$$U(t) = U_k \begin{cases} & -\mathcal{U}_k A \Pi \\ kT \leq t < (k+1)T \end{cases}$$

$$U_k = U(t) \Big|_{t=kT} \quad -A U_k \Pi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ (\Delta) \quad y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_0 = kT \\ t = (k+1)T \end{cases}$$

$$(*) \quad x_{k+1} = e^{AT} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B u(\tau) d\tau$$

нормальная форма

$$= \text{const} = U_k = U(t) \Big|_{kT \leq t < (k+1)T}$$

$$\text{Упр. } (*) : x_{k+1} = e^{AT} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T} e^{-\tau A} d\tau \cdot B u_k$$

использование формулы, что написано выше

$$\Rightarrow e^{AT(k+1)} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau = e^{AT(k+1)} (-A)^{-1} e^{-A\tau} \Big|_{kT}^{(k+1)T} = e^{AT(k+1)} \cdot A^{-1} \cdot (-e^{-AT(k+1)} + e^{-AT})$$

$$= A^{-1} (e^{AT} - I) = \int_0^T e^{AT} d\tau$$

$$\text{Упрощ. } (*) : \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = e^{AT} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{AT} d\tau B u_k \\ y = C x_k \end{array} \right.$$

Общая лин. д.с. в простр. состояний:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ y_k = H x_k \\ F = e^{AT} \\ G = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\ H = C \end{array} \right\}$$

Для каждого непрерывного момента (1)

$$(1) F = e^{AT} = E + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \frac{(AT)^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!}$$

$$(2) G = \int_0^T e^{At} dt B = A^{-1} (e^{AT} - E) B = A^{-1} (E + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \dots - E) B = (E + \frac{AT}{2!} + \frac{(AT)^2}{3!} + \dots) TB = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{(i+1)!} TB$$

Ча примени \exists і можна написати через модель керування

1. Постановка систем $I_a \cup I_b$ на ЗВМ
 2. Розглядаючи $I_a \cup I_b$ можна зберігти складніше
 3. Але необхідно зробити f_i . Існування цього $\max(T \ll 1, \text{тоді } (AT)^2 \approx 0)$, тоді $F \approx E + AT$
- і. е. спрощення використання в розглядаючи $I_a \cup I_b$ можна уникнути \Rightarrow
 $G \approx TB$ при $T \rightarrow \infty$ (зменшуючи T збільшуємо складність моделі)
 $H = C$

$$\begin{cases} x_{k+1} = (E + AT)x_k + TBu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

Завдання: зробити змінні параметрів (змінні параметрів θ^0 погріха)

Z-предобразування (предобразування Лапласа)
 в експонента

$$I x_k - \text{реальні}$$

19.02.18

Логарифмічне зображення Лапласа ($X(s)$), обернене предобразування Лапласа
 Відповідне предобразування Лапласа (L-предобразування):

$x(t)$ - сигнал

$X(s)$ - зображення

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = L[x(t)] \quad , s - \text{коєфіцієнт}$$

Деяние преобразование Лапласа (D -пр-вие):

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} = D[x(kT)]$$

$$\int e^{st} = z, z - \text{коэффициент}$$

$$e^{-skT} = (e^{sT})^{-k} = z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = z [x_k] \quad (*)$$

преобразование Лапласа (z -пр-вие)

действие пр-вия Лапласа (\mathcal{L})

$$\mathcal{L}[x_k] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz, \quad \begin{array}{l} \text{с-коэффиц., обобщающим действие} \\ \text{все склонные моржи (branch)} \end{array}$$

$\mathcal{L}[(*)]$ - это можно рассмотреть какложение в ряд Лапласа и все коэффициенты x_k

Частичка z -преобразования.

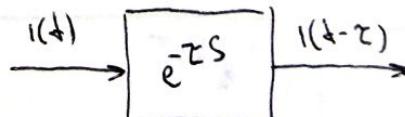
1. Декомпозиция:

$$z [ax_k + by_k] = aX(z) + bY(z)$$

2. Пр-вие сдвигов:

$$z [\nabla^m x_k] = z [x_{k-m}] = z^{-m} X(z)$$

Примеры: зеркальное зондирование
 $z = \text{const}$



$$z = T, e^{sT} = z, \text{ тогда } \xrightarrow{(d)} z^{-1} \xrightarrow{i(t-T)}$$

$$z [\nabla^m x_n] = z [x_{n+m}] = z^{-m} X(z) - x_0 z^{-m} - x_1 z^{-m-1} - \dots - x_{m-1} z$$

3. Предельное значение:

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z); x_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) X(z)]$$

4. z -преобр-вие суммы динамик:

$$z \left[\sum_{l=0}^k x_{k-l} y_l \right] \stackrel{k+l=k}{=} \sum_{l=0}^k x_k y_{k-l} = X(z) Y(z) = z [x_k * y_k]$$

5. Σ нормы:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k = X(z) \Big|_{z=1}$$

6. Члены L-изп и Z-изп.

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n - \text{коэффициенты изп} \Rightarrow Q(\lambda) = 0 \quad (n-\text{члены } Q(\lambda))$$

$$\text{Мономы } X(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - \lambda_i} ; C_i = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}$$

$$\text{Мономы } X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i z}{z - e^{x_i T}} , \text{ где } X(z) = Z(X_k) = Z[X(t)] \Big|_{t=kT} = Z \left[L^{-1}[X(s)] \right] \Big|_{t=kT} = Z[X(s)]$$

$$= Z[X(s)]$$

$$X(s) \leftrightarrow x(t) \leftrightarrow X_k \leftrightarrow X(z)$$

$$X(z) = Z[X(s)]$$

7. Модель преобразований из сечения в преобразование

$X(t)$	X_k	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	δ_k	1	1
$t(t)$	t_k	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$
$\sin \beta t$	$\sin \beta kT$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \sin(\beta) + 1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

Z-ядро и D.C.A.Y

1. Равновесное разностное ур-ие: $Q(\Delta)Y_k = P(\Delta)U_k$ с применением Z-яр.:
всегда линейно(1) и однородно(2):

$$Q(z)Y(z) = P(z)U(z)$$

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} = W(\Delta) \Big|_{\Delta=z}$$

$$\text{(Δ)} Y(z) = W(z)U(z)$$

↑
однородн. ур-ие



$Y(z)$ - изображение y_k , реальное на U_k

$$\text{и.е. } y_k^{**} = z^{-1}[W(z)U(z)]$$

частное решение однородного разностного ур-я при D.H.y.

2. Применение Z-яр к D.C. в коротких образах (Кашин)

$$\begin{cases} X_{k+1} = Fx_k + Gu_k & x_k, u_k, y_k - линейные погрешности \\ y_k = Hx_k & F, G, H - матрицы \end{cases}$$

$z[\cdot]$

Это значит, что это не всегда применимо Z-яр

$$\left\{ \begin{array}{l} z(X(z) - x_0) = F X(z) + G U(z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(z) = H X(z) \end{array} \right.$$

и.е. D.H.y:

$$Y(z) = H(zE - F)^{-1} GU(z)$$

$$W(z) = H(zE - F)^{-1} G = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

и.е. не всегда

$$Y(z) = W(z)U(z)$$

$$y_k^{**} = z^{-1}[W(z)z[U_k]]$$

3. Решение:

$$q_k^{**} = \sum_{i=0}^k q_{k-i} u_i$$

q_k - левое (минимум) кол-во

$Z \Sigma \cdot J$:

$$Y(z) = G(z) U(z)$$

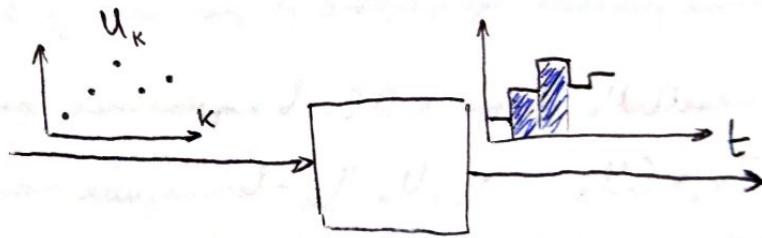
Схема с Δ : т.е. q_k - оценка переходного п-вия

(однократные переходные сигналы)
однократные сигналы в в в.

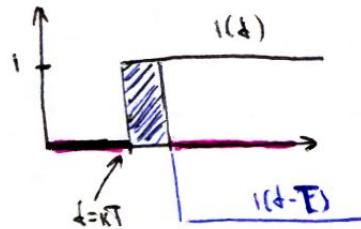
1) Рисаное левого п-вия:

$$U(t) = u_k \int_{kT \leq t < (k+1)T} =$$

Левое п-вие п-вия:



$$= u_k [i(t) - i(t-T)]$$



$$\text{Применение преобр Лапласа: } U(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right] U_k = \frac{1-e^{-sT}}{s} U_k$$

$$\Phi(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \quad \text{- переходная п-я рисаного левого п-вия}$$

20.12.18.

примеры

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz$$

$$X(z) \rightarrow x_k$$

разложение в ряд Лорана

By Лорана симметрии

Метод деления

Пример: $X(z) = \frac{z}{z-1}$ - члены $x_k, k=0..5$, нахождение коэффициентов

Полное выражение

$$\begin{array}{c} \frac{z}{z-1} \\ \hline \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^0} + \frac{1}{z^1} + \frac{1}{z^2} \dots \end{array} \quad \text{и коэффициенты}$$

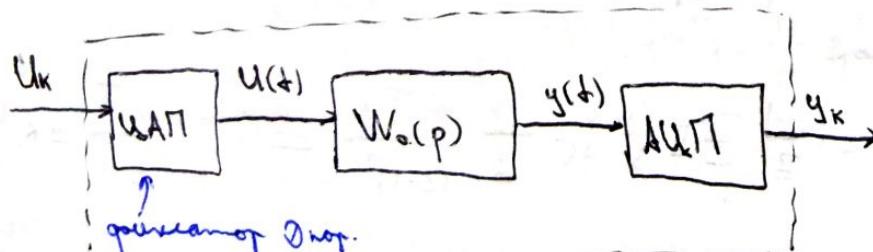
$$\begin{array}{c} x_0 \\ \hline \frac{1}{1-z^{-1}} \\ \hline \frac{z^{-1}}{z^{-1}-z^{-2}} \\ \hline z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

ХИМ 1 курс

З.1, З.2

рассмотрение -
исследование членов
записи - все20.12.18
лекция

2)

 $W_o(p)$ - обратим линейный

AUAP - нелинейное преобразование

$$\Phi(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} - \text{УАП}$$

$$\Phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p}$$

 $W(z) - ?$

$$\Rightarrow W(z) = \mathbb{Z} [\Phi(p) \cdot W_o(p)] = \mathbb{Z} [\Phi(s) \cdot W_o(s)] = \mathbb{Z} \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{W_o(s)}{s} \right] =$$

Бесконечн.: $h(t) = \left[\left[\frac{W(s)}{s} \right] \right]$ - бесконечная последовательность - \rightarrow зеркальная симметрия

(20)

$$\frac{W_o(s)}{s} = L[h(t)]$$

$$Z[X(s)] = Z[x_k]$$

$$x_k = x(t) \Big|_{t=kT}$$

$$x(t) = L[X(s)]$$

загадка номера L? - коррекция

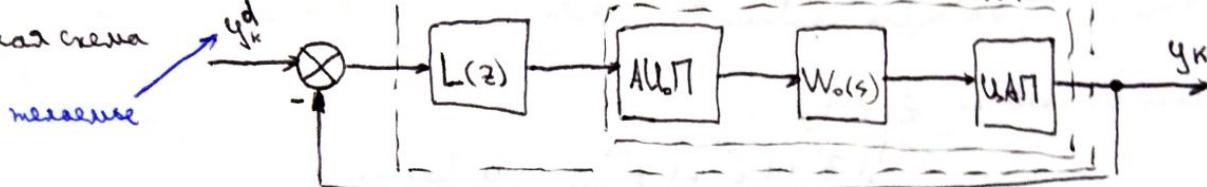
$$Z[\Phi(s) W_o(s)] = Z[L[h(t) - h(t-T)]] = Z[h(t) - h(t-T)] \Big|_{kT=t} =$$

$$= Z[h_k - \nabla^{-1} h_k] = Z[(1 - \nabla^{-1}) h_k] = (1 - z^{-1}) Z[h_k] = \frac{z-1}{z} H(z)$$

$\boxed{H(z) = Z[h_k]} - z\text{-ная характеристика накопления } h_k (\text{п.в. на } U_k = 1_k)$

$$\boxed{H(z) = Z[h_k] = Z[h(t)] \Big|_{t=kT}}$$

3) Интегратор с временным запаздыванием



$L(z)$ - з-ная характеристика (ЭВМ)

$W_o(s)$ - аддитив; $AU_1\Pi$ - прескалер

$W(z)$ - передаточная характеристика звена

$K(z) = L(z) \cdot W(z)$ - П.Ф. замкнутой системы

$$G(z) = \frac{K(z)}{1+K(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} - \text{П.Ф. замкнутой системы}$$

Примечание

$$W_o(s) = \frac{k_1}{s} - \text{интегратор}$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{W_o(s)}{s}\right] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{k_1}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z} \frac{k_1 T z}{(z-1)^2} \stackrel{\text{коррекция}}{=} \frac{k_1 T}{z-1} = k_1 T \frac{1}{z-1}$$

$$\boxed{L(z) = k_2 (\Pi - \text{передат.})}$$

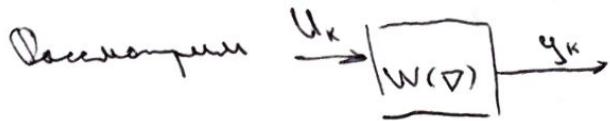
$$G(z) = \frac{k_1 k_2 T \left(\frac{1}{z-1}\right)}{1 + k_1 k_2 T \left(\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{k_1 k_2 T}{z-1 + k_1 k_2 T}$$

$$\boxed{K = k_1 k_2 \Rightarrow G(z) = \frac{KT}{z-1+KT}}$$

Если $0 < KT < 2$, то интегратор с временным запаздыванием (корни знаменателя $|z| < 1$)

прескалер
с запаздыванием

Частотные характеристики



$\sigma = 0$ -р сглажн.

(*) $Q(\sigma)Y_k = P(\sigma)U_k$ - разложение фильтра в ряд Фурье

$\int U_k = A e^{j\omega k T}$ - абсолютная гармоника

$$A e^{j\omega k T} = \left. A e^{j\omega t} \right|_{t=kT} = (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

М.к. синусоидальная, но выход (указывается y_k^{∞}) будет гармоническим неизделимым сдвигом фазы φ и сглажн. в форме:

$$y_k^{\infty} = B e^{j(\omega k T + \varphi)}$$

Напомним U_k и y_k б. (*):

$$Q(\sigma)B e^{j(\omega k T + \varphi)} = P(\sigma)A e^{j\omega k T} \quad \text{- это частотные коэффициенты}$$

Как работает ∇ : $\nabla e^{j\omega k T} = e^{j\omega(k+1)T} = e^{j\omega T} \cdot e^{j\omega k T}$

$$Q(e^{j\omega T})B e^{j(\omega k T + \varphi)} = P(e^{j\omega T})A e^{j\omega k T}$$

$$\frac{B e^{j(\omega k T + \varphi)}}{A e^{j\omega k T}} = \frac{P(e^{j\omega T})}{Q(e^{j\omega T})} = W(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = W(e^{j\omega T}) = \frac{B}{A} e^{j\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(e^{j\omega T}) = \frac{B}{A} e^{j\omega T}$$

$|W(e^{j\omega T})| = \frac{B}{A}$, м.к. амплитуда ≥ 0 - о.з. о.м. ω гармоническое изменение фазы выхода

$$W(e^{j\omega T}) - A \Phi \Psi \Phi \text{ фаза} \quad \text{а.з.}$$

$$\Psi(\omega) = \arg |W(e^{j\omega T})| - \Phi \Psi \Phi, \text{ ее гармон.-ФЧХ}$$

26.02.18.

лекция

$$\varphi(\omega) = \arg W(e^{j\omega T}) - \Phi \Psi \Phi$$

$$\frac{B}{A}(\omega) = |W(e^{j\omega T})| - A \Psi \Phi$$

$$W(e^{j\omega T}) = w(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} - A \Psi \Phi$$

Возможні: б. ми можемо $W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega}$

н.с.: $s = j\omega$ - лінія пр-х умов на $\omega \in [0; +\infty)$

Д.С.: $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ - періодичні пр-х умов на ω

$$\Rightarrow W(e^{j\omega T}) - \text{періодичні пр-х умов на } 2\pi = \omega_n T \rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{T}$$

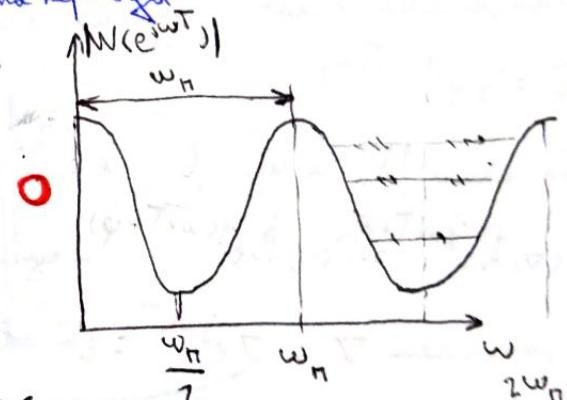
2-ма періодичні

м.е. б. Д.С. $\varphi(0) = \varphi(\omega_n) = \varphi(2\omega_n) \dots$

$$|W(e^{j\omega T})| = |W(e^{j\omega T + \omega_n})| = |W(e^{j\omega T + 2\omega_n})|$$

задовільний діапазон частот $0 \leq \omega_n \leq \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{T}$

$\omega \in [0; \frac{\omega_n}{2}]$ - задовільний діапазон ум D.C.

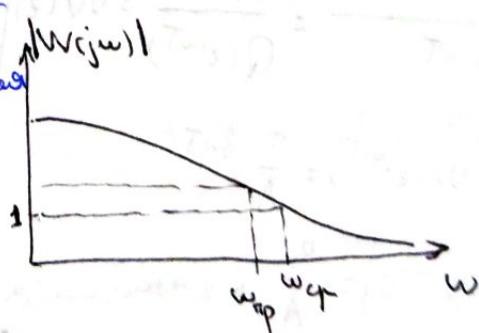


При цьому реальну н.с. єдині ФНЧ, а DC не єдині ФНЧ.

DC можуть бути ФНЧ в залежності від діапазону

н.с. розташуванням її-місця біля ї-тим пропускання (зрізу)

Розподіл гармонік залежить (б. ми можемо діаграми - періодичні): $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$



$\bar{\omega}$ - определене у ТЗ

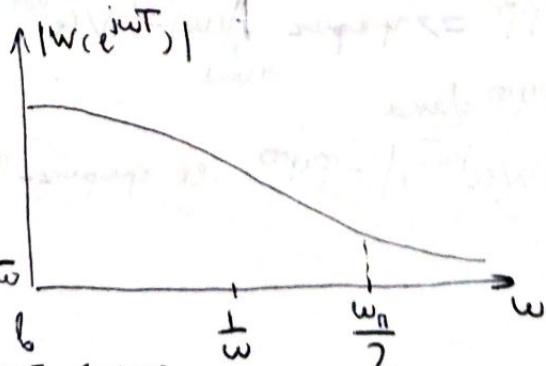
$$]T-\text{місце} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T} > \bar{\omega}$$

Також можна мати: $\bar{\omega} < \frac{\pi}{T}$

виглядає: АЧХ та ФНХ D.C. сполучені

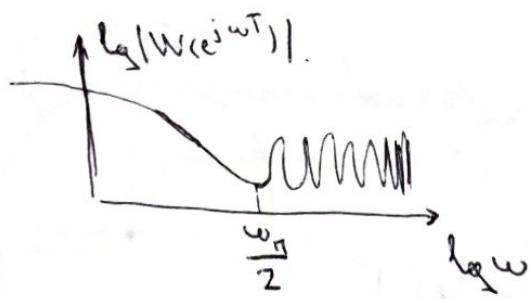
б. гармонік $[0; \frac{\pi}{T}]$. Частота $\bar{\omega}$ має б.

задовільним зображення в широкій сфері.



(23)

об лог максиме



Оптимальное управление дискретным сигналом.

D.C. наз. оптимальной, если переходный процесс в ней захватывается за конечное число шагов.

h_k -п-оее синтез при k на б-ре; h_k -переходное ф-ние:

$$(1) \quad h_k = h_n = h_\infty \quad \forall k \geq n, \quad n - конечное число$$

Замечание! Это наз. оптимальностью по переходному процессу. D.C. омн-а, если оптимальна ет переход. ф-ния

$$h_k = \sum_{i=0}^k g_i, \quad g_k - решает к-л \delta_k$$

Н.е. (1) лин-я, если $g_k = g_n = 0 \quad \forall k \geq n$

$$\text{д.в.к. } W(z) = \mathbb{E}[g_k z^{-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} = \sum_{k=0}^n g_k z^{-k} \quad (2)$$

(другой вид): $W(z) = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{a_0 z^n + \dots + a_n} \quad (m \leq n) \quad (3)$

При решении \bullet б-рея логика (3) приводит к (2), если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$:

$$W(z) = \frac{b_0 z^{m-n}}{a_0} + \frac{b_1}{a_0} z^{m-n-1} + \dots + \frac{b_m}{a_0} z^{-n} \quad (4)$$

Н.е. если (3) лин-я, то оптимальна и перех. ф-ня захватится за конечное число шагов, если лин-я функция (4).

Другими словами зап-р-ие: $a_0 \neq 0$, т.е. $\lambda_j = 0 \quad j=1 \dots n$, т.е. не корен характерист. ур-ия равен 0.

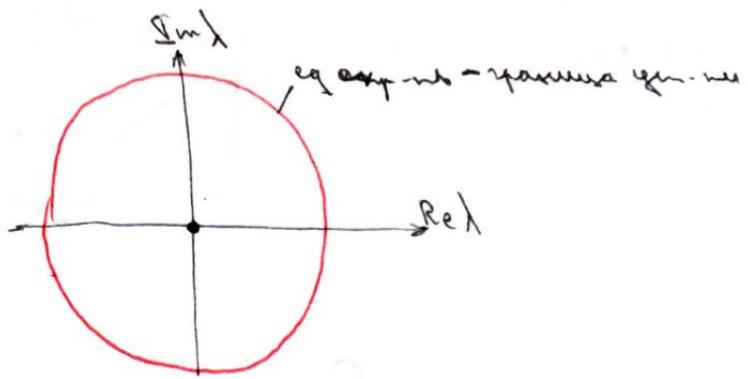
(*) $(0, j0)$ - максимальное управление
на прямой управлении

Минимум управлений $y = \min(-\log|\lambda_i|)$

$\lambda_i = 0 \Rightarrow y = +\infty$ - максимум управлений

$\lambda_i = 1 \Rightarrow y = 0$ - прямое управление

$\lambda_i = 10 \Rightarrow y = -1$ ($y < 0$) \Rightarrow регулятор.



Расширенные системы в пространстве состояний:

Базисное управление (регулятор):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_k = -K \hat{x}_k \quad \text{управление на основе состояния} \\ \hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + G U_k + L (y_k - H \hat{x}_k) \end{array} \right. , \hat{x}_0$$

управление заданное

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ y_k = H x_k \end{array} \right. , x_0$$

управление заданное

\hat{x}_k - текущее состояние

G - у-ча бкода; H - у-ча вкода

F - сдвиг у-ча

L, K - у-ча касательных коэффиц. (К-коэф управ)

[- заданные]

Если норма у-ча (F, H) - ненулевое касательное и

норма у-ча (F, G) - ненулевое управление, то $\underbrace{(*) + (**)}_{\text{минимум}}$ управление

единственное и непрерывное управление в-ва управляемого объекта, т.е.:

$$\det \underbrace{[\lambda E - F + LH]}_{\text{т.е. касательное}} = 0 \quad \text{и} \quad \det \underbrace{[\lambda E - F + GK]}_{\text{т.е. ненулевое управление}} = 0$$

М.к D.C. симметрическая, если $\lambda_i = 0 \Rightarrow$

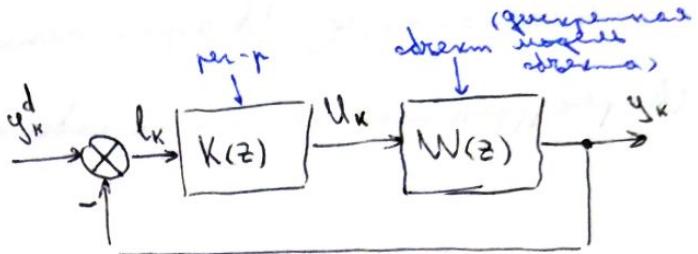
$$\left\{ \begin{array}{l} \det [-F + LH] = 0 \\ \det [-F + GK] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{однозначно заданы } L \text{ и } K$$

Системы наследственных регистров в D.C.

Рекурсивная запись и методы
записи.

Фундаментальная идея наследственных рег-р:

$$e_k = y_k^d - y_k$$



Задача - определить $K(z)$, удовлетворяющее
условию, удобное, показанное схема, при записи и при

Фундаментальная идея

1. П-рег-р $U_k = K_n e_k$; $K(z) = K_n$ ~ коэффициент пропорциональности
условия K_n уменьшает единицу, т.к. перед пр-р., можно привести к нулю
и уменьшить коэф-нт

2. ПИР-рег-р (пропорционально-разностный) (аналог ПД)

$$U_k = (K_n + K_p (1 - \Delta^{-1})) e_k$$

$$K(z) = K_n + K_p \frac{z-1}{z}$$

$$U_k = K_n e_k + K_p (e_k - e_{k-1}) = (K_n + K_p) e_k - K_p e_{k-1}$$

условия K_p уменьшают коэф-нт, уменьшая t_{nn}

3. ПИС-рег-р (проп.-интегрирующий) (аналог ПИУ-р-ра)

$$U_k = \left(K_n + K_c \frac{1}{1 - \Delta^{-1}} \right) e_k$$

$$K(z) = K_n + K_c \frac{z}{z-1}$$

- добавление интегратора ($\frac{z}{z-1}$) - уменьшает порядок динамики

- уменьшение K_c уменьшает t_{nn} , но может привести к неуст и уменьшению коэф-нта

4. ПСР (аналог ПЧД)

$$U_k = \left(K_n + K_c \frac{1}{1 - \Delta^{-1}} + K_p (1 - \Delta^{-1}) \right) e_k = \underbrace{K_n e_k + K_p (e_k - e_{k-1})}_{\text{Рекурсивная форма записи линейные операторы и их многочлены}} + K_p \sum_{j=0}^K e_j$$

Рекурсивная форма записи линейные операторы и их многочлены

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = U_{n-1} + A_1 e_n + A_2 e_{n-1} + A_3 e_{n-2} \\ A_1 = K_n + K_c + K_p \\ A_2 = (-K_n) - (2K_p) \\ A_3 = K_p \end{array} \right.$$

Но бывает, что U ограничено, т.е. есть колебание (а не бесконечное колебание)

(Δ) перепрограммировать формулу не получаем.

27.02.18

практика

$$W = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

transfer function

$$W = tf([b_0, b_1, \dots, b_m], [a_0, a_1, \dots, a_n])$$

$$P(s) = b_0 s^m + \dots + b_m$$

$$Q(s) = a_0 s^n + \dots + a_n$$

$$2a \quad [A \ B \ C \ D] = tf2ss([b_0, \dots, b_m], [a_0, \dots, a_n])$$

2б ^{для устойчивости}

$$H = \text{ctrb}(W);$$

2б

$$G = \text{obsv}(W); \text{ надежность}$$

$$rH = \text{rank}(H); \text{ ранг } H-\text{матрицы}$$

$$rG = \text{rank}(G);$$

3. Поляра устойчивости

$$\text{Характеристическое уравнение } Q(\lambda) = 0$$

$$3a \quad \text{poles} = \text{roots}([a_0, \dots, a_n])$$

3б Nyquist(W) построение вектора

$$3б \quad W_n(s) \underset{\text{надежно}}{\text{вектор}} Q(j\omega), \text{ то } |W_n(s)| \Big|_{s=j\omega} = \frac{|Q(j\omega)|}{1} \Rightarrow W_n = tf([a_0, \dots, a_n], [1])$$

(make figure!); непрерывное изображение

Nyquist(W_n)

непрерывное изображение

$$4. \text{ Дискрим-перегарн} \text{ sp-узв } W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$\text{Общая б-сп-ле система} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$\text{step}(W)$ - неупорядоченное раз-реш

Характеристич. ун. Число собственных полей - максимум

$$\text{мин. кратн. } \eta = \min(-\operatorname{Re}(\text{poles}))$$

$$\text{макс. кратн. } \mu = \max\left(\left|\frac{\operatorname{Im}(\lambda_i)}{\operatorname{Re}(\lambda_i)}\right|\right)$$

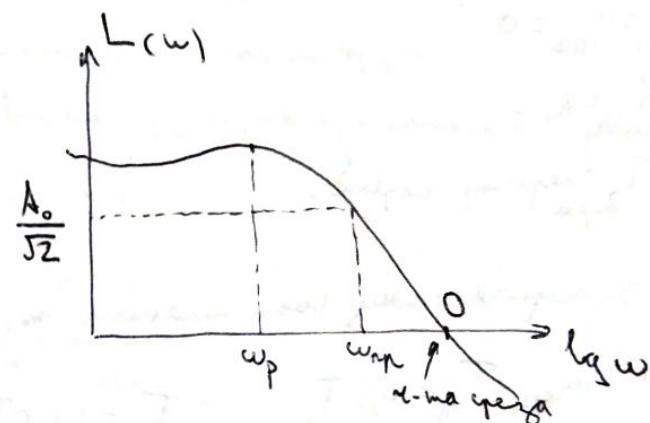
% - кратн. максимум

% $\eta = \dots$

bode(W) - спектр МЧХ и НЧХ

$$\frac{A_{\max}}{A(0)} = R - \text{переключение ун.}$$

$$A(\omega_{\text{перекл}}) = \frac{A(0)}{\sqrt{2}}$$



27.02.18.

Лекция

Задачи по ПИД (PID)-регуляторам

Метод Задера-Шварца (для-кастиков)

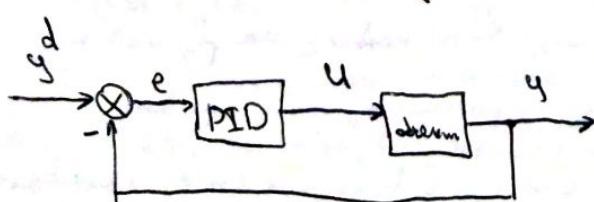
$$U(t) = K_n e + K_d \dot{e} + K_u \int_0^t e dt$$

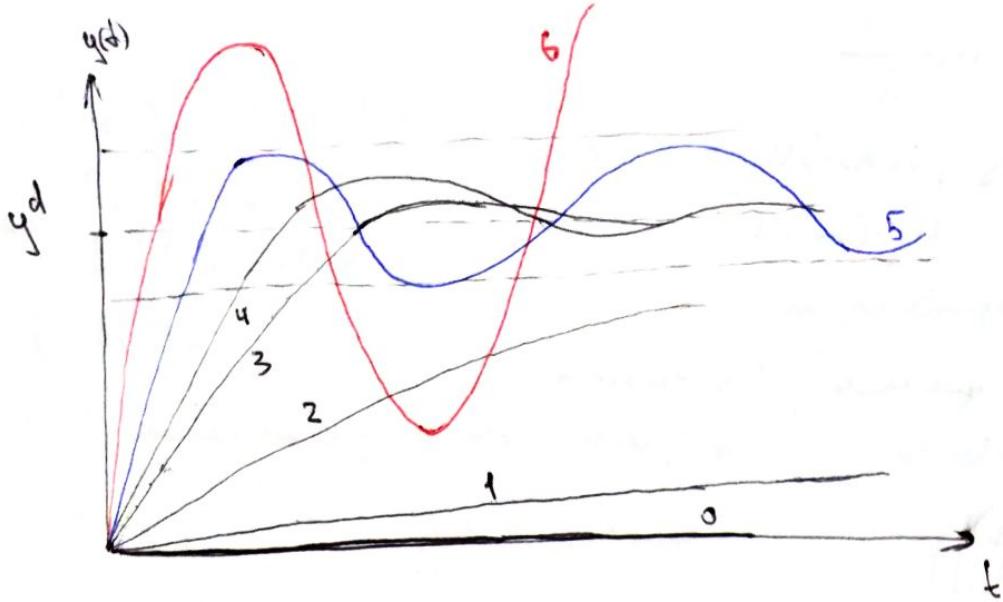
$$U_k = K_n e_k + K_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T} + K_u \sum_{k=0}^n e_k T$$

$$\frac{K_d}{T} = K_p ; K_u T = K_c$$

Метод 1. Чисто-интегрирующий $K_n = 0, K_d = 0, K_u = 0$

2. Чисто-дифференцирующий K_n - это максимум, но в т.ч. неизвестен, поэтому





$$1. K_{n1} < K_{n2} < K_{n3} < K_{n4} < K_{n5} < K_{n6}$$

наст

$$K_n = K_{n1} = 0$$

$$2. K_n = K_{n5}$$

T - период колеб.

3. По экспериментальному соотношению определим конст. переходного

$$K_n = K_{n5} \text{ при } T_u = 0,5 T_{\text{пер}} ; T_D = 0,125 T_{\text{пер}}$$

$$U(t) = U_k \left(e + \frac{1}{T_u} \int_0^t e dt + T_D \dot{e} \right)$$

Число: быстро затухающий колеб. процесс

Замечание: 3 группы эксперим. соотношения

$$(K_n = 0,5 K_{nr} ; T_u = 1,5 T_r ; T_D = 0,167 T_r)$$

Число: медленный переходный процесс

Замечание: можно судить на основе выражения 2-х параметров (T_r, K_{nr}), т.е. это одна характеристика может оценка ошибок этого параметра без знания другого (изолировано)

Замечание: м.к. модель чисто экспериментальная, но после этого 3-и необходимо уточнить параметры

После из-3-и - это параметры моделирующие экспериментальные параметры

Зад: из-3-и оценки при некотором числе с оценкой входов (т.е. коэффициенты не фиксированны в определении)

Решение задачи
буга.

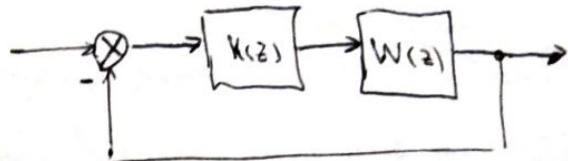
Несколько вопросов (о-в замечаний упр-ий)

$K(z) - ?$

$\boxed{W_3^d(z)}$ - неизвестная ПФ здравия

$$\text{тогда } K(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{W_3^d(z)}{1-W_3^d(z)} \quad (*)$$

- но ① $K(z)$ - гд. пол. здравия
② $W_3(z)$ - гд. пол. здравия (зубов)



1. Конструкция, если имеем $K(z) <$ сию здрав $K(z)$

2. Но, если $W(z)$ не содержит нуля или полюса вне единицы круга

Так. если $W(z)$ содержит нули или полюса вне единицы круга, то при разделении всех параметров $W(z)$ эти нули и полюса могут не совпадать:

$$W_p(z) = K(z) \overset{(*)}{\overbrace{W(z)}} = \underbrace{\frac{1}{W(z)} \cdot \frac{W_3^d(z)}{1-W_3^d(z)}}_{\text{это разложение}} \cdot \underbrace{W(z)}_{\text{один}}$$

Пример: $\frac{z+2}{z+2,00001}$ не совпадают

Когда нули и полюса могут не совпадать.

Рассмотрим случаи и здрав ПФ здравия на 2-х зданиях

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P_f(z) P_h(z)}{Q_f(z) Q_h(z)} \quad (**)$$

f - нули и полюса

h - нули и полюса

подставим (**), в (**)

$$K(z) = \frac{Q_f(z) Q_h(z)}{P_f(z) P_h(z)} \cdot \frac{W_3^d(z)}{1-W_3^d(z)}$$

Чтобы $K(z)$ не содержала нулей $P_h(z)$ и $Q_h(z)$, нужно чтобы $W_3^d(z)$ содержала нули $P_h(z)$, а $1-W_3^d(z)$ содержала полюс $Q_h(z)$

Раздел III. Нелинейные модели.

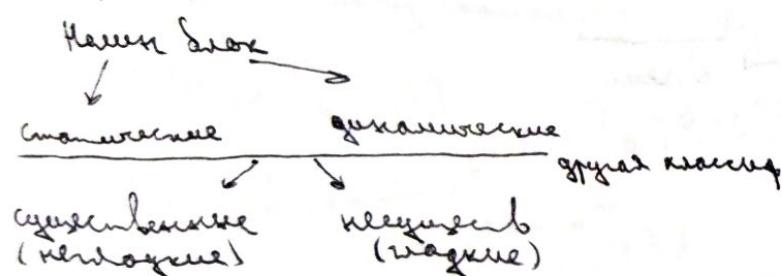
Нелинейные нейронные системы.

Все CT - нейронные (и другие), т.е. описываемые системами
НС - это линеаризованные модели Нейронов

Если нелинейность допускаем только линеаризацию (то Модели), то
она неизученная. Иное - изученная.

Задача: найти для нелинейных нейронов такое более упрощенное
уравнение, которое описывает нелинейную систему.

НС: нелинейные звенья и специальные блоки, описывающие какую-то некую функцию
и операторы.



Сам блок описывается алгебраическими и производственными уравнениями
уравнением вида: $x_2 = f(x_1)$

Дополнит. звено описывается диф. ур. 1-го порядка или второго порядка
 $(*) \quad g(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) = f(x_1, \dot{x}_1) \quad$ - порядок до z_{m-n} степени реальное

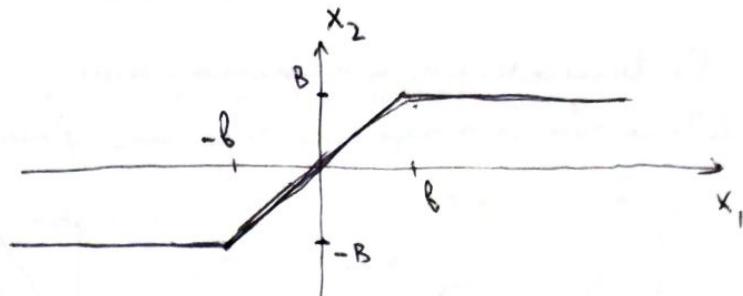
В некотором смысле результат (*) приводит к ур.: $x_2 = h(x_1, \operatorname{sign} \dot{x}_1)$

Здесь $f(\dots), g(\dots), h(\dots)$ - нелинейные функции

Многие касающиеся
знако.

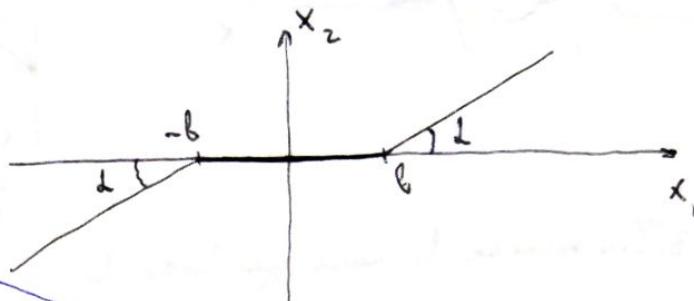
1) Зона с касанием

$$x_2 = \begin{cases} Kx_1, & |x_1| \leq b; K = \operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{b} \\ B, & x_1 > b \\ -B, & x_1 < -b \end{cases}$$



2) Зона неравенств

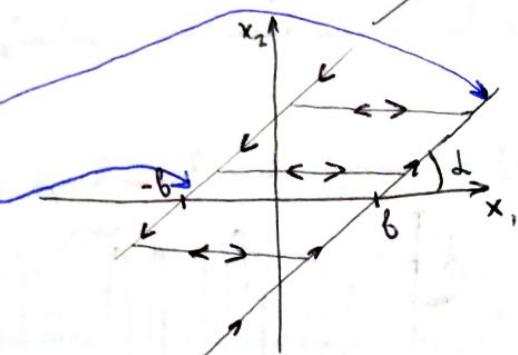
$$x_2 = \begin{cases} K_1(x_1 - b); & x_1 > b \\ 0, & |x_1| \leq b, K = \operatorname{tg} \alpha \\ K(x_1 + b), & x_1 < -b \end{cases}$$



3) Двигун

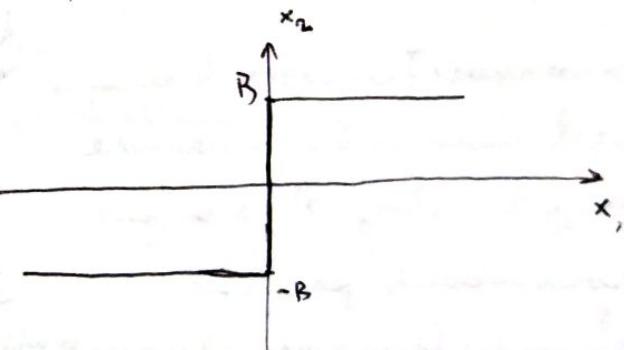
$$x_2 = \begin{cases} K(x_1 - b), & x_1 > 0 \\ K(x_1 + b), & x_1 < 0 \end{cases}$$

$$x_2 = K(K_1 - b \operatorname{sign} x)$$

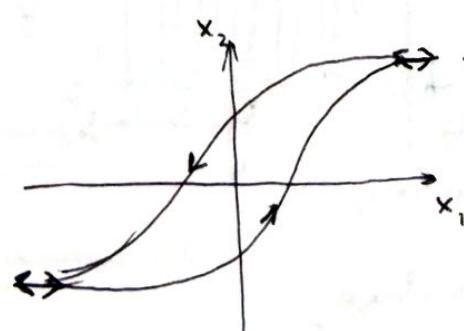


4) Угловое движущееся колесо

$$x_2 = \begin{cases} B, & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 = 0 \\ -B, & x_1 < 0 \end{cases}$$

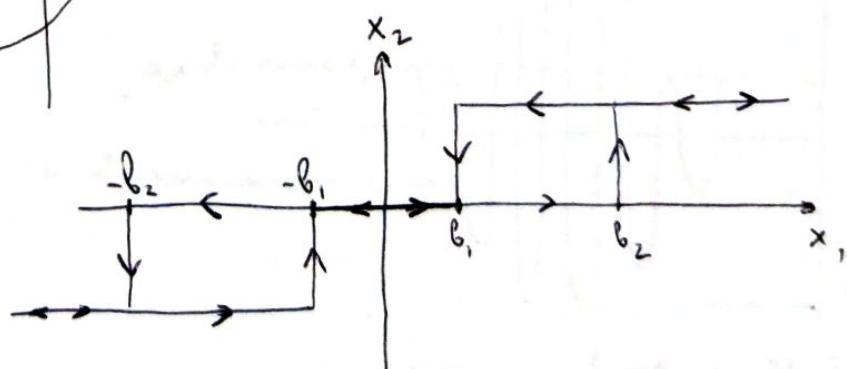


5) Трапеция



6) Синусоиды.

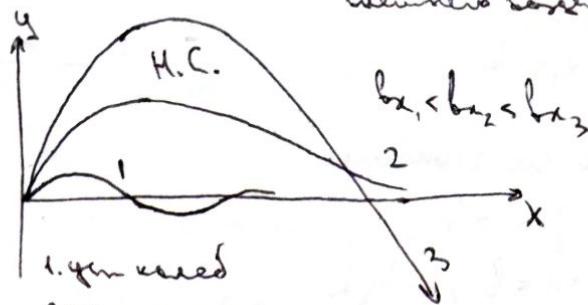
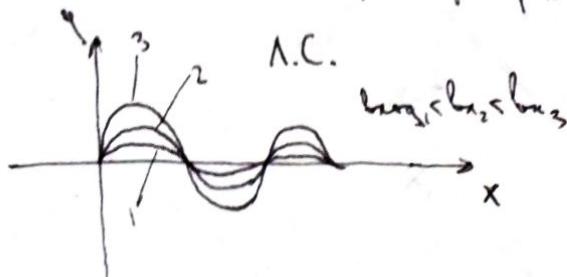
Непрерывное движущееся колесо
с зонами неравенств



Геодинамика Н.С. (в задачах на Н.С.)

1. Неизменяется в н. суперпозиции.

2. Задачи в задачах на Н.С. предполагают что землетрясение и движение земной коры (исследование) неизменны

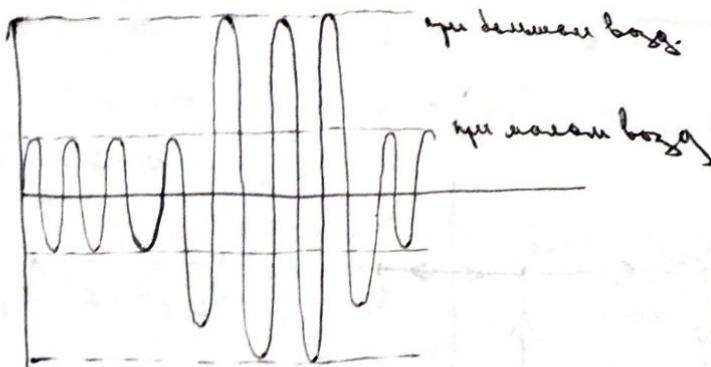
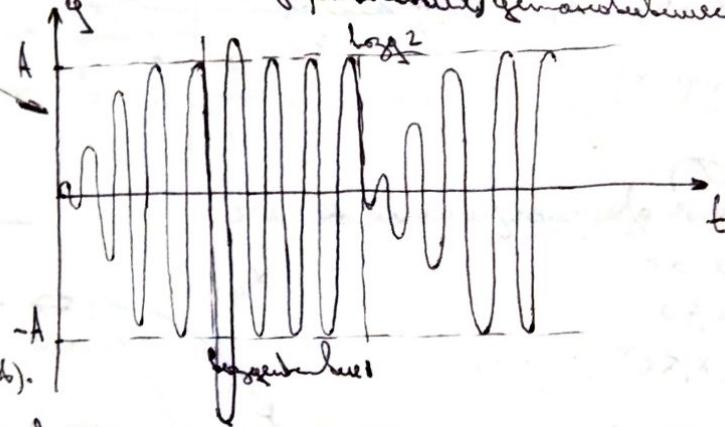


3. При расчете волновых полей неизменен (в задачах на Н.С.).

Изменяется начальное состояние.

4. Многоволновое дифракция (при отсутствии ограничений) генерирующее процесс.

Задачи: I типичен, в которых в задаче неизменены параметры землетрясения и движение земной коры (имеет $b_1 \rightarrow b_2$) и есть многоволновое развитие процесса.



5. Н.С.: генерирует волну

Н.С.: I генерирует в максимум при ∞ массе движущихся в верхнем слое (исключительное)

$\text{II} - \text{III}$ в максимум при конечных изменениях, возникающих в земном слое не генерирует её работу

Задачи: все Н.С. генерируют в максимум.

6. Генерирует волну неизменяя генератор Н.С. Генерируя волну при определенных условиях

Задачи: неизменяя волны неизменяя генератор.

Основные динамические модели

и.с.

(изучение них и новых форм их функций на основе которых новые модели разрабатываются)

Если уравнение разрешимо относительно производных, то мы можем представить в форме Коши, т.е. в явной форме: $\dot{x} = G(x, \dot{x}, \dots, \dot{x}^{(n)})$ (1)

G -линейр-функция; $G = [G_1, \dots, G_m]^T$

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T$$

Разрешим относительно производных:

$$\dot{x} = F(x, \dot{x}, \dots, \dot{x}^{(n-1)}) \quad (2)$$

(1) \rightarrow (2) не всегда возможн.

Дополним (2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Это нормальная форма Коши

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$ - простые координаты (переменные), производные (линейр) со временем

$u = [u_1, \dots, u_m]^T$ - лин-р. управление

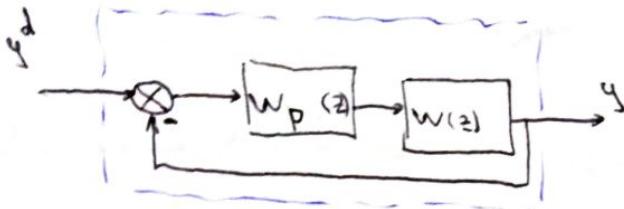
$y = [y_1, \dots, y_l]^T$ - л-р. выхода

$f = [f_1, \dots, f_n]^T$ - л-р. оп-ия уравнений состояния

$h = [h_1, \dots, h_p]^T$ - л-р. оп-ия выхода

Модели $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$ называются ИС

Явная форма: $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$ - линейн. модель ИС



Пример: $W(z) = \frac{1}{z+3}$, $r=1$ $P_B=1; P_H=1$
 n_x - степень числителя X $Q_B=1; Q_H=z+3$

Одн DC \Rightarrow характеристика (W_3) $G(z) = z^{n_G}$

$$W = \frac{P_B P_H}{Q_B Q_H} ; W_p = \frac{Q_B L}{P_B M (z-1)^r} \quad - \text{разложение}$$

Конечно сигнальный \Rightarrow задача + степень знаменателя

$$W_3 = \frac{P_H L}{P_H L + Q_H M (z-1)^r} = \frac{K}{G = z^{n_G}}$$

$$\underbrace{n_L+1+n_H+1}_{\text{ко-фактор}} \geq n_G + 1 \quad - \text{где } n_L \text{ и } n_H \text{ - степень числителя и знаменателя}$$

Приравняем: $n_{Q_B} + n_L \leq n_{P_B} + n_H + r$ - для решения задачи

$$n_G = n_{Q_H} + n_M + r$$

Приравняем:

$$\begin{cases} n_L + 1 + n_H \geq n_G \\ n_{Q_B} + n_L \leq n_{P_B} + n_H + r \\ n_G = n_{Q_H} + n_M + r \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{проверка, неравенство } n_L \text{ и } n_H \text{ мин.} \\ \text{Для } n_X = 0, n_L = 1 \\ \Downarrow \\ M = m_0 \end{array}$$

$$L = l_0 z + l_1$$

$$z^2 + 0z + 0 = l_0 z + l_1 + m_0 (z-1)(z+3)$$

Несколько решений.

$$\begin{cases} m_0 = 1 \\ l_0 = -2 \\ l_1 = 3 \end{cases}$$

$$W_p(z) = \frac{-2z^3}{z-1} \quad \text{если в открытом } W(z) \text{ подавить разложим } W_p(z), \text{ то}$$

коэффициенты будут вычислены лучше

Контроль
9.1-9.5 (2-я)

Задачи

1. Определение DC (характеристика здания)
2. Решение
3. Вычисление
4. минимизация
5. Синтез алгоритма
6. Загораждение

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

дифференц. ур.

$$\begin{cases} \text{линейные по Математике} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = kx \\ y = Cx \end{cases} \text{ общ. л.с.}, A, C - \text{const} \end{cases}$$

Упрощение:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

- упр. л.с. \Rightarrow линейное преобразование $u \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases}$$

линейная зависимость (функция) по управлению

f, g, h - линейные функции

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- лин. упр. лин. (линейные по Математике)

Общая запись:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, t) \\ y &= h(x, u, w, t) \end{aligned}$$

, w - р-ма, t - время

Полные координаты и
полное описание

Чтобы исследовать систему представление приведено к л.с.

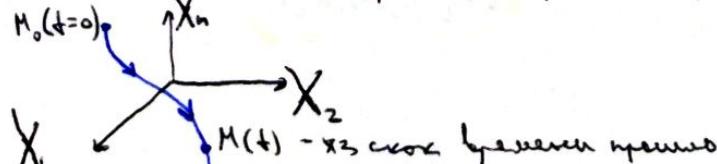
Придано координаты X :

В первом n -м порядке - n -первое прило.

В первом дифференциале - полная система

Изодромий - линия - линия пр-ва, содержащая различные состояния системы в едином начальном времени

При движении системы через один изодромий неизменяется и оставляется полное представление. PT если некое представление о ходе траектории, кроме его времени неизменяется.



Ессе бар-бе негең жаңы координаттардың аныкшасы $x_i = X_i - X_{i_{\text{баз}}}$,
 $X_{i_{\text{баз}}} -$ сабак шартынан жетекшілікке жетекшілік

Монда жиңіл деңгелдердің көзінде көрсетіледі және түрлі тәсілдермен
 Залежаның б. Н. б. суроға жиңіл деңгелде ортасын мөндеуден б. негең,
 а. б. суроға жиңіл - шартын б. Н.

Решение - сабак деңгелдерінде көрсетілген негеңдең көзіндең

Решение көрсетілгендең көзіндең
 (1) $\dot{x} = f(x)$, $x = [x_1, x_2]^T$, Н.И. $x^0 = x(t_0) = [x_1^0, x_2^0]^T$

Монда: $x(t)$ - интегралдаудың көрсетілгендең (*), үрділ деңгелдең $\frac{x}{t} = x(x^0, t)$, $t \in [t_0, +\infty)$

Монда обидеги деңгелдең көрсетілгендең $x(x^0, t)$

Ф.Пи-ниң обидеги деңгелдең көрсетілгендең көрсетілгендең $x(x^0, t)$

уравнения $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ (1) - деңгелдең көрсетілгендең көрсетілгендең
 (перенос-трансформация)

Решение (1.2) на (1.1): $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ - көрсетілгендең деңгелдең көрсетілгендең

$x = f(x)$ - деңгелдең

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ - деңгелдең

12.03.18
жариялауда

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ - деңгелдең

Решение (1.2) көздең көрсетілгендең ($\dot{x} = 0$), егер $f(x) = 0$ (2)

Решение (2) көздең көрсетілгендең $x_1 \neq 0$ жағынан. Б. О.Т. деңгелдең $x_1 = 0$ жағынан
 көрсетілгендең көрсетілгендең көрсетілгендең

Б. О.Т. деңгелдең көрсетілгендең

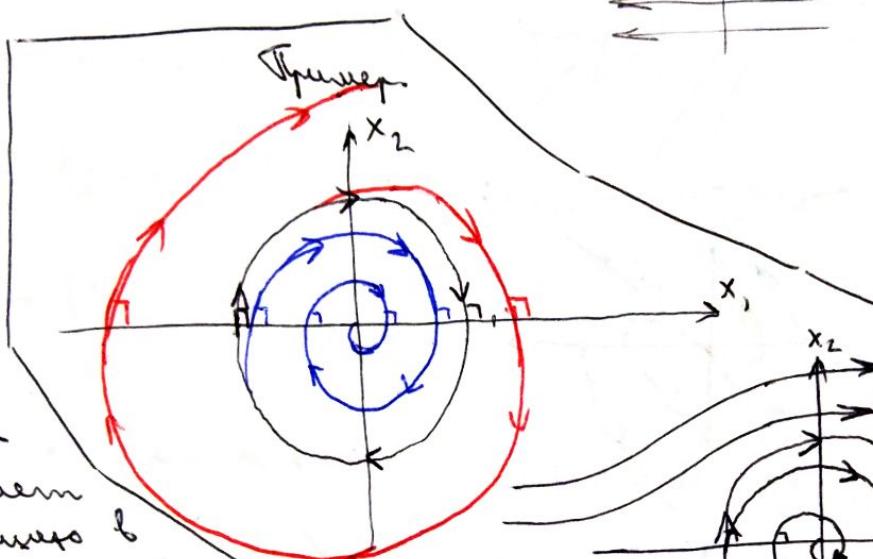
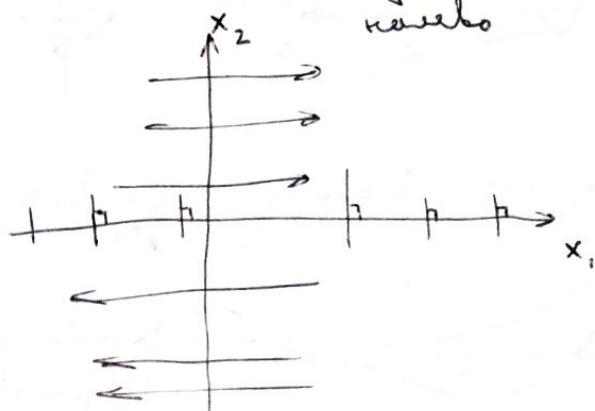
Через көрсетілгендең көрсетілгендең көрсетілгендең көрсетілгендең

Часто көрсетілгендең: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$. Монда жиңіл деңгелдең көрсетілгендең

1) В первом случае: $x_2 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 > 0 \Rightarrow x_1$ -координаты \Rightarrow линии траекторий направлены вправо

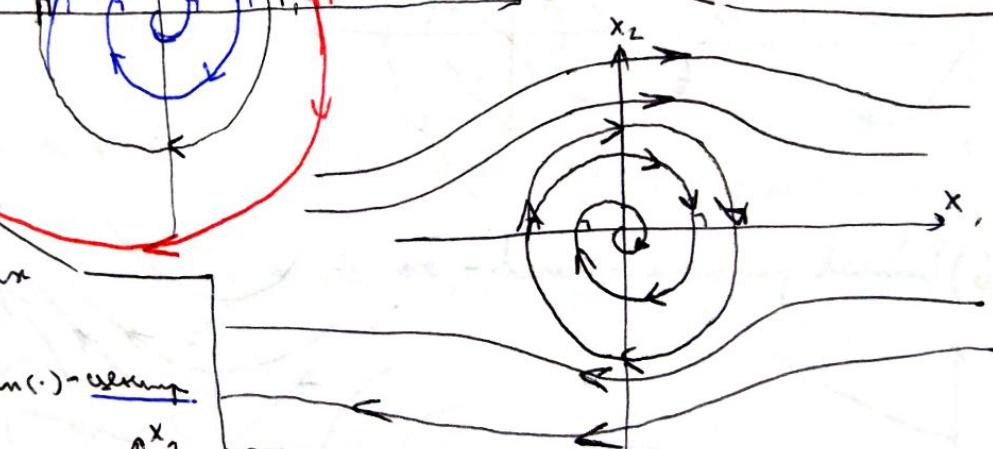
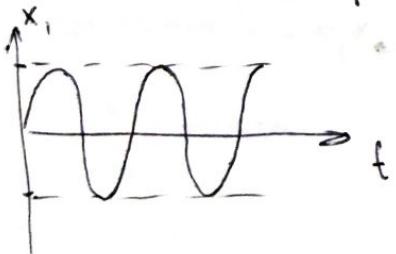
2) В втором случае: $x_2 < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0 \Rightarrow x_1$ -координаты \Rightarrow линии траекторий направлены влево

3) Если обе оси постоянны ($\dot{x}_1 = 0$) $\Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \text{const}$



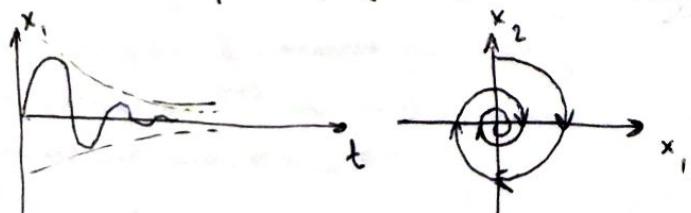
Если начальные
условия донесены
до центра симметрии в
одном из состояний
массы, то можно ожидать
перехода в кривую LC!

1) Чисто гармоническое колебание \Rightarrow минус (-) - стационар.



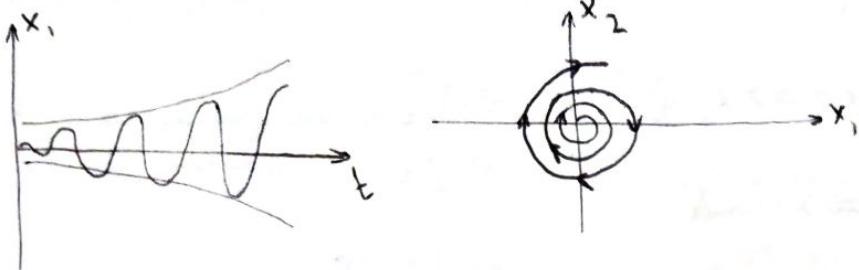
если пренебречь -затуханием \Rightarrow
переход к стационарному состоянию
и остановке. Равнение хар. массы

2) Чисто гармоническое колебание: минус плюс (+) - генерирующий процесс

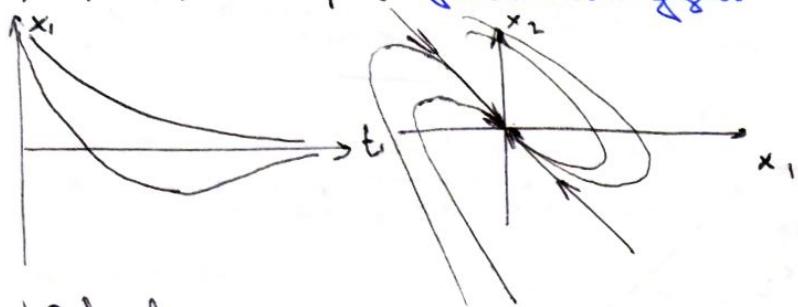


если не учитывать затухание в начальный момент

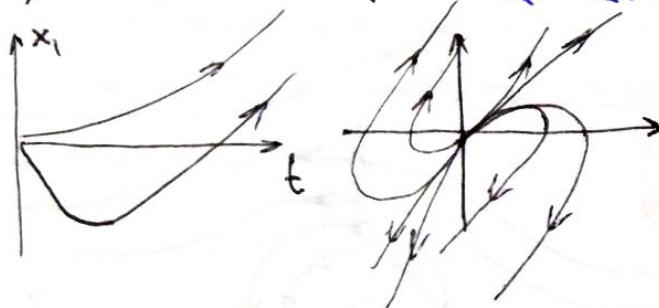
3) Краине сонг с ровом зерткем - көзгөн үзүүлэлт:



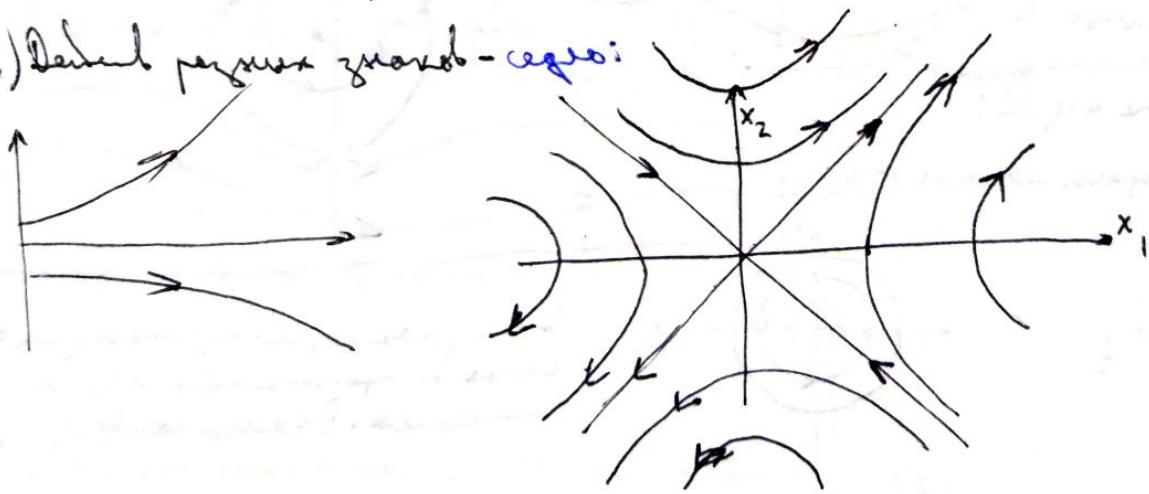
4) Көрм-жерд сонгус - жадалыктай үзүүлэлт:



5) Дедел салын көрм-көзгөн үзүүлэлт:



6) Дедел рукус залад-сегүү:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1-x_1^2) - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (\dot{x} = f(x)) \quad \text{Узарсанчар}$$

Орбор мөнч (x=0) : $\begin{cases} 0 = -x_1(1-x_1^2) - 2x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

В окрестности (\cdot) $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ (стационарное) решение линейно:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{oc}} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{oc}} x_2 \quad \left. \right\}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{oc}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{oc}} x_1$$

Это **линейное** неоднородное

Линейное л. с. в окрестности $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

это **линейное**

Детали для матрицы X.Y.: $\det[\lambda E - A] = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, 2 = \pm i - \text{круп}$$

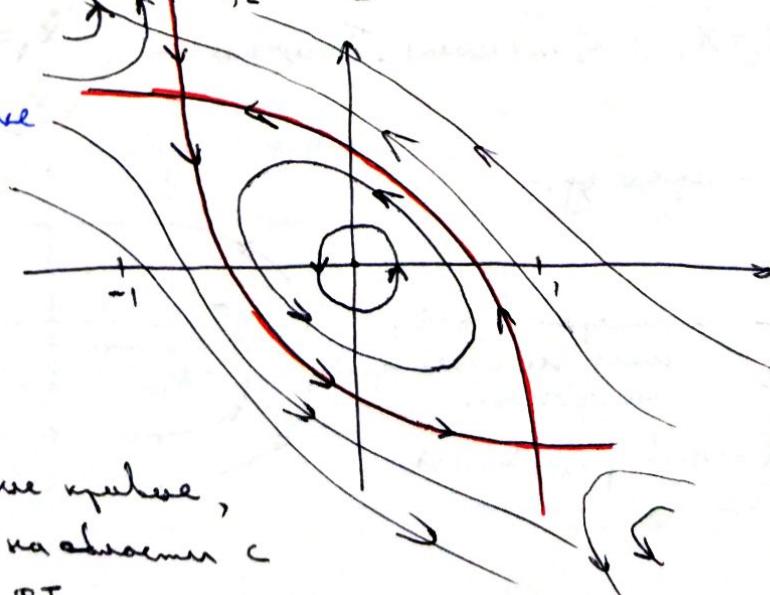
2) Основные решения $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

известный φ -вектор наше умножаем на изображение

$$X.Y.: \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} - \text{корни четных порядков (двойки)}$$

Задачи в форме
линейного
однородного
уравнения



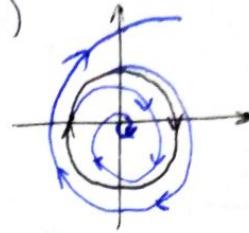
Сепарантами - линии, проходящие РП-ы на линии с параллельными наклонами РП

Преодолеть или - замкнуть РП

Если изнутри и снаружи проктора стоят к пред. лицам, то он(и она) уединяется и совершают самоиздание



У генераторов П.Ч. следнее ФТ изображен на новой системе коорд: вращающимся кольцами в плоскости (В реальной сист. не \exists)



Движущаяся система координат - это ФТ (Новая новая коорд. движущиеся меняются к нему)

Движущиеся - седло (-) и приводные точки, к которым присоединяется ФТ

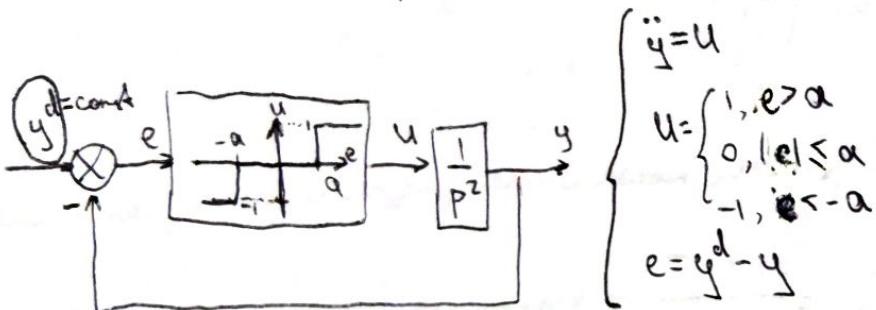
Вынуждающие седло (-) и максимум - разделяют Ф.П. по направлению к коэффициентам размножения ФТ.

Вынуждающие - коренное значение частоты приводов в системе

13.03.18

Часть 2

Нарисовано правильный портрет:



1. линия $e = x_1$; $\dot{x}_2 = \ddot{x}$, (из условия). Понимаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = y^d - \ddot{x} \end{cases}$$

- первая ур.

$$\frac{\dot{x}_2}{x_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\ddot{x}}{x_2} \quad \begin{matrix} \text{- вторая ур.} \\ \text{иначе все приводы} \\ \text{на оптимум} \end{matrix}$$

$$x_2 dx_2 = -\ddot{x} dx_1, \quad \begin{matrix} U - \text{const.}, \text{привод const} \\ \text{и вращает одновременно} \end{matrix}$$

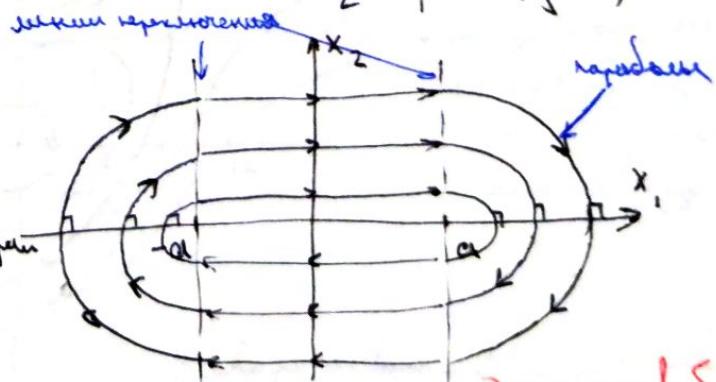
$$\frac{x_2^2}{2} = -\ddot{x} x_1 + C$$

1. $\ddot{x} = 0$ ($x_1 \leq a$) $\Rightarrow \frac{x_2^2}{2} = C \Rightarrow x_2 = C$, - седло приводов. При этом понимаем, что $x_2 = \dot{x}_1$

2. $U = 1$ ($x_1 > a$) $\Rightarrow \frac{x_2^2}{2} = -x_1 + C$ - седло приводов. Видно что

3. $U = -1$ ($x_1 < -a$) $\Rightarrow \frac{x_2^2}{2} = x_1 + C$ - седло приводов. Видно что

4. Остальная область: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 1 \leq x_1 \leq a \end{cases}$ - корень нуля-седло себе Ф.Т.



Контроль
2.3-2.24

(4)

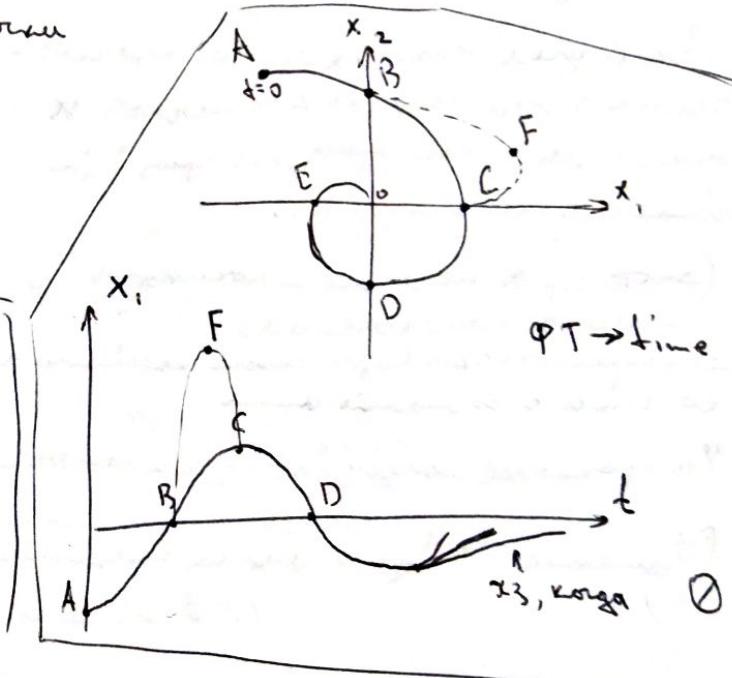
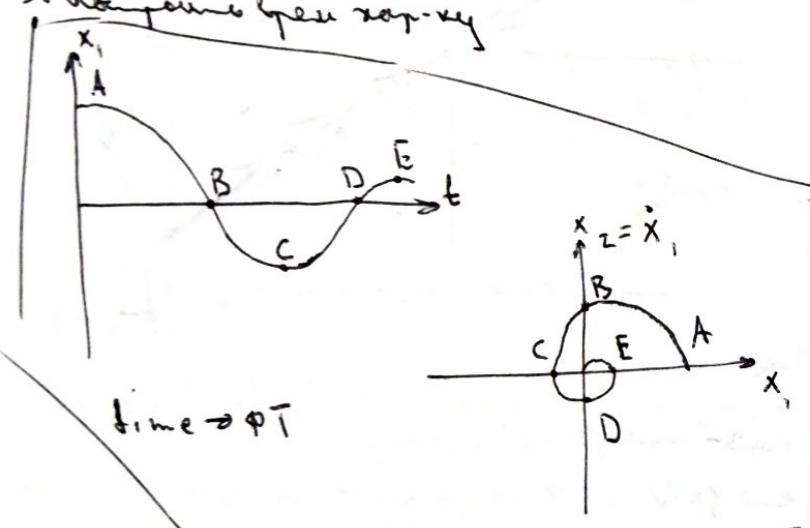
Доказательство
последовательно.

Метод Ф.Н. - это один из способов исследование устойчивости на основе одного коэффициента

- + Численное представление линейных процессов в СЧ
- + Это один из способов устойчивости
- Применение метода к СЧ π^{10} порядка (реже)

На практике можно выделить следующие последовательные шаги (и наоборот).

1. Определение на практике характеристических модов
2. Нахождение коэффициентов (λ) на временных диagramах
3. Выявление типа устойчивости



Метод устойчивости по устойчивости КС с нормо-инвариантными переменными
он называется примесью (имитацией). (см. уравнение стабильности ст. 41)
Изменяется коэффициенты коэффициентов изменения процессов

Использование КС со устойчивыми решениями.

$$\ddot{y} = K_1 u; u = c \cdot \text{sign}(e); e = \dot{y}^d - z = -(K_2 \dot{y} + y)$$

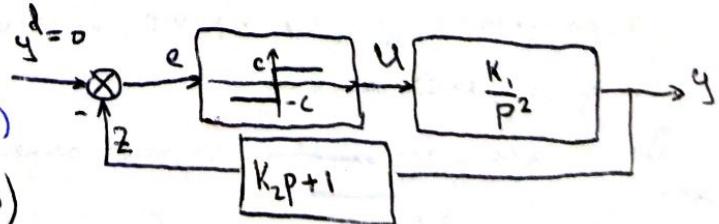
$$x_1 = y; x_2 = \dot{y},$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 = \ddot{y} = K_1 u = K_1 c \cdot \text{sign}(e) = -K_1 c \cdot \text{sign}(K_2 x_2 + x_1)$$

$$\text{Уравн.: } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -K_1 c \cdot \text{sign}(K_2 x_2 + x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{некоторое } \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-K_1 c \cdot \text{sign}(K_2 x_2 + x_1)}{x_2}$$

$$\begin{cases} \text{sign}(K_2 x_2 + x_1) = 1, & K_2 x_2 + x_1 > 0 \\ \dots & = -1, \dots < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{если } K_2 x_2 + x_1 = 0 - \text{то есть неподвижность (ст. 41 на 20 сл.)}$$



$$x_2 = \left(-\frac{1}{K_2}\right)x_1$$

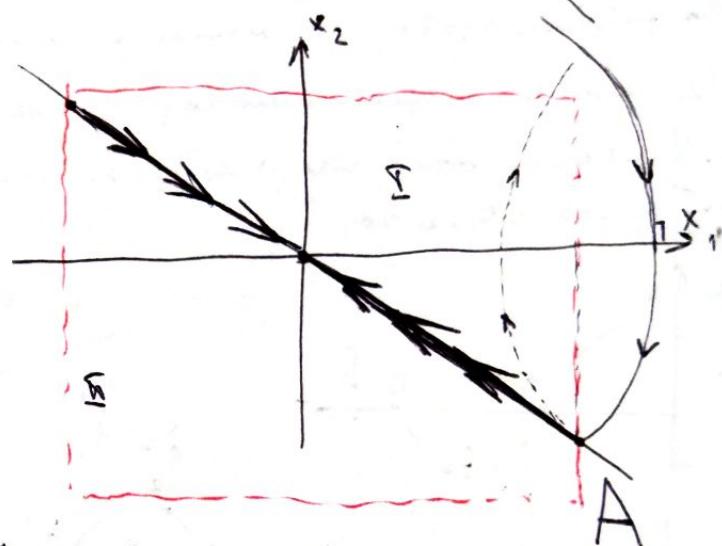
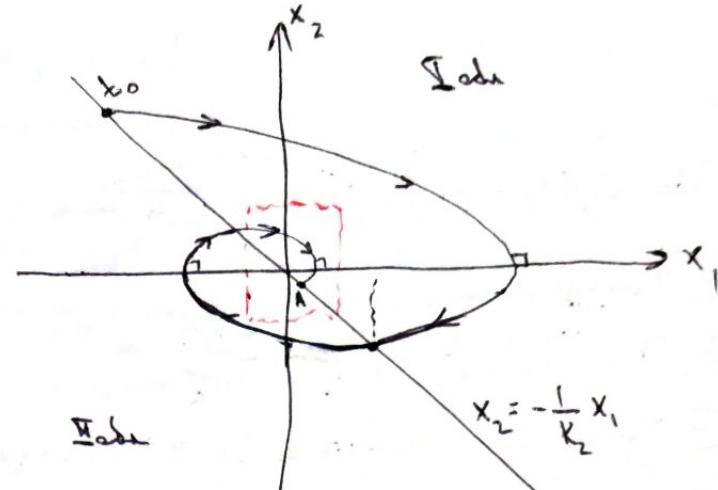
$$\Sigma: K_2 x_2 + x_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{K_1}{x_2}$$

$$x_2 dx_2 = -K_1 x_1 dx_1$$

$$x_2^2 = 2K_1 x_1 + C_1$$

$$\Sigma: K_2 x_2 + x_1 \leq 0 \quad \text{средида неравн}$$

$$x_2^2 = 2K_1 x_1 + C_1$$



Если при начальных значениях $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ вдоль траектории x_2 уменьшается, то траектория симметрична относительно оси $x_2 = -\frac{1}{K_2} x_1$.

(~~если при начальных значениях $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ вдоль траектории x_2 уменьшается, то траектория симметрична относительно оси $x_2 = -\frac{1}{K_2} x_1$~~)
 \Rightarrow неприводимое движение вдоль оси x_2 с $x_2 < 0$ и $x_1 < 0$ не имеет смысла

За пределом коэффициентов K_1 и K_2 наступает дробление

Поведение РТ есть явное неприводимое движение

19.03.18.
лекция

Многие виды дробления

Задача: Исследовать движение в полях неприводимых членов

1. если, но Н.С. нет в полях
2. нет, но Н.С. есть в полях

3. какое либо из них, но об Н.С. нет в полях

Задача: "предел автомата"

Предел автомата - это предел, т.е. определенное значение, которое имеет система

Рассмотрим $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, C - параметр, характеризующий общий вид V . При $C \rightarrow 0$, то V стремится к некоторому концу.

Предположим, что г.т. имеет ограниченную область на плоскости $C \times \text{математ.}$
 \Rightarrow г.т. имеет в ней края.

Если бы г.т. симметрична, то это было бы.

Изометрически это означает, что есть г.т.
 производная $\frac{dV}{dt}$ г.т. однозначна

Тогда в форме Кано: $\dot{x} = f(x)$ (1)

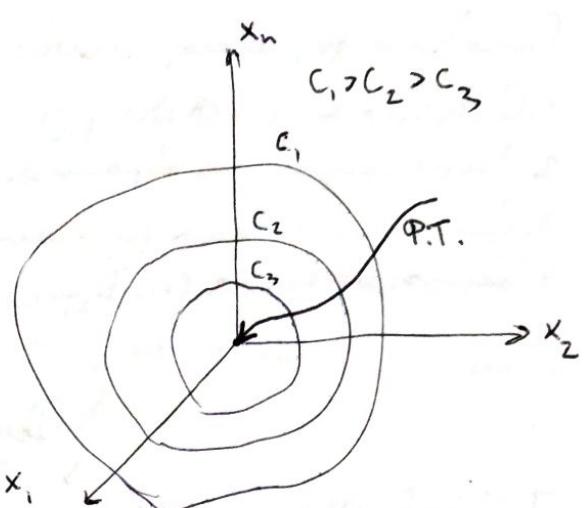
$V(x)$ - закономерность г.т.

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} =$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \text{ есть г.т. } \dot{x} = f(x)$$



$V(x)$ - закономерность

$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ - закономер. и график закон

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ есть г.т.}$$

и.е. это значит, что есть г.т. $V(x)$ симметрична в \emptyset

тогда $V(x)$ наз. **однозначный закон**

однозначный
однозначный закон

Система (1) однозначный, если можно утверждать максимум законопредetermined
 функции V , некая производная которой определяется на основе г.т. сим (1)
 тоже законом и производным законом

Замечание: некоторое значение $V(x)$ можно находить для этого и над не симметрическими кривыми, если можно над ними утверждать

Замечание: можно утверждать если над ними можно утверждать однозначный закон

Теория линейных систем

(методы и способы) линейных систем:

1. Однородная (на базисе)
2. Линейно-однородные способы решения (методы исключения)
3. Гаусс-овский (максимумов)
4. Гаусс-овский (на базисе)

{ Линейные методы.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - б-п-переменные
 $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ - б-п-переменные
 $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ - б-п-п-л
 $g = [g_1, g_2, \dots, g_k]^T$ - б-п-п-л
 $y = [y_1, \dots, y_l]^T$ - б-п-переменные

Методы линейных систем:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$A_{n \times n} = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}; B_{n \times m} = \frac{\partial f}{\partial u}; C_{l \times n} = \frac{\partial g}{\partial x}; D_{l \times m} = \frac{\partial g}{\partial u}$

и-ва Гаусса
Гаусса
($\det(A)$)

{ линейно-однородные способы
решения.

Рассмотрим $\overset{(n)}{\dot{x}} = f(\overset{(n)}{x}, \overset{(n-1)}{x}, \dots, \overset{(1)}{x}, u) - D.y$. $n=2$ решаем

Дополнительное условие стартовых значений:

Если это чисто л. задача для 1. вида

то можно применить преобразование вида

$$(3) u = \frac{1}{b(x)} \left(-a(x) - \sum_{i=1}^n k_i x_i \right)$$

$$(2), \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = a(x) + b(x)u \end{cases}$$

находится начальными
условиями (уравнениями)
из уравнения

Несущее (3) и (2):

$$(1) \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_n \\ x_n = -\sum_{i=1}^n k_i x_i \end{cases}$$

Последнее выражение нелинейное, так как в нем (2) неявно входит в уравнение (3) неявно.

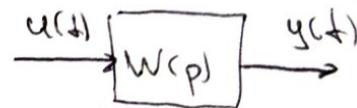
Зад. 1. Или (2) можно представить в виде

Зад. 2. (2) г.д. гладкая (однократная), т.к. в ней можно определить $a(x)$ и $b(x)$.
Можно использовать такие же методы $a(x)$ и $b(x)$.

Зад. 3. Решение вида $x(t)$ можно записать в виде

Линейные величины
в А.С.

$U(t)$ - нест. процесс, Φ - это времена, для которых
внешний фактор времени не зависит.



Линейные величины

Несущее вероятн.: $\begin{cases} p(x_i) = \lim_{\Delta x} \frac{P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)}{\Delta x} \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \end{cases}$

У непрерывных процессов не-несущее вероятн. зависит от времени $p(x,t)$

У стационарных процессов $p(x,t) = p(x)$ - он времени не зависит.

Для непрерывных величин X значение $p(x)$ является полным описанием, но для нест. процессов необходимо знать зависимость его промежутка, т.е. временные и генетические линии

Мат. ожидание: $m = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \tilde{x}$, \tilde{x} - ср. значение

Задача: $\exists \varphi(x)$ - нестационарн. ф-ция непрерывных величин X
 $\Rightarrow m_{\varphi} = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx$

Задача: найти среднее значение процессов $m_x = \text{const}$, где времена - $m_x = m_x(t)$ - это время бремени

Задача: для **эргодического процесса**: $m_x = \tilde{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$ - среднее по времени

Если $m_x = 0$, то в.в. X называется **ненулевым**

\Rightarrow в.в. процесс $\rightarrow x(t) = m_x(t) + x^0(t)$

в.в. ненулевое

Дисперсия случайной величины - среднее значение квадрата её отклонения от мат. ожидания.

$$D_x = M[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = M[(x^0)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^0)^2 p(x) dx$$

Для стационарного и эргодического в.в. процесса

$$D_x = [x^0(t)]^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x^0(t)]^2 dt$$

$\sigma_x = \sqrt{D_x}$ - **среднеквадратичное отклонение**

20.03.18.

практика

Пример к §3: $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 = f_1(x)$
 $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2^2 = f_2(x)$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Проверка устойчивости в.в. в.в. $(*)$ $x = (0; 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, A \Big|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 2 & -2x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

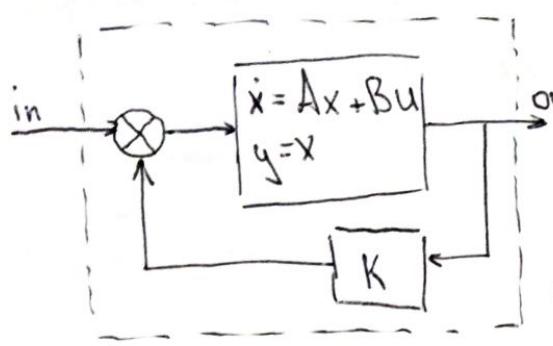
Расчет A: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

Xap. яз.: $\det[\lambda E - A] = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2} \text{ корни имеют разного знака} \Rightarrow \text{НС неуст., НС неуст в.в. в.в. в.в. } (*) (0; 0)$$

Конспект 4.12-13
(с упр. решения)

Изображение



$$m\text{-иза } C=E, m.k. y=x$$

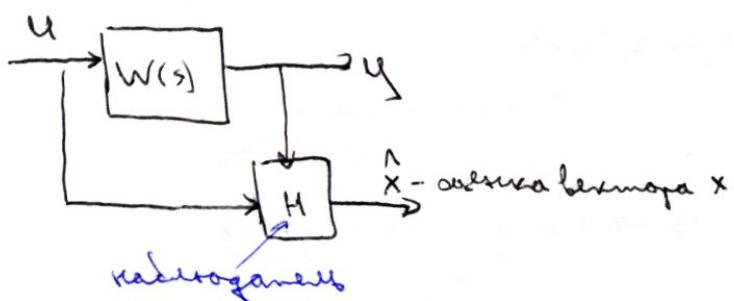
Xap. y_p qua bess. wneus. det[λE - A + BK] = 0
 $\lambda P_c = [\lambda_1^d, \lambda_2^d, \dots, \lambda_n^d]$ - набор мажущих корней
 xap. ур-ия

$$K = \text{acker}(A, B, P_c)$$

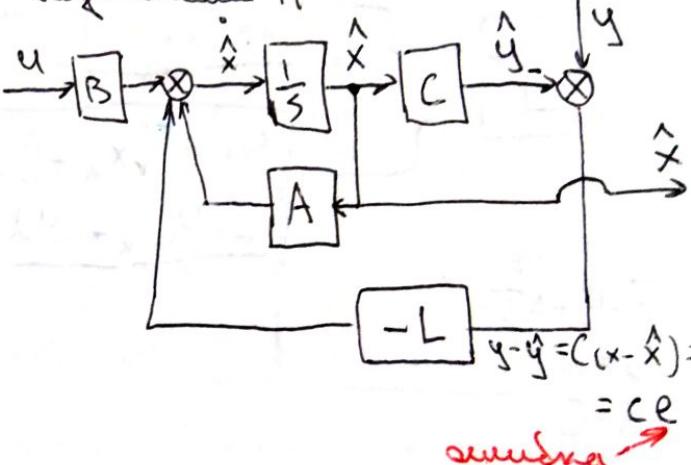
$$K = \text{place}(A, B, P_c)$$

} - no фиксированной амплитуде

Диаграмма.



Помеха H



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{x} = \hat{A}\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \end{cases}$$

$$\dot{e} = (A - LC)\hat{e}, e - \text{нарахована ошибка}$$

Xap. y_p: det[λE - A + LC] = 0 acker помехи зно, а нам надо L.

$$\lambda P_o = [\lambda_1^d, \dots, \lambda_n^d]$$

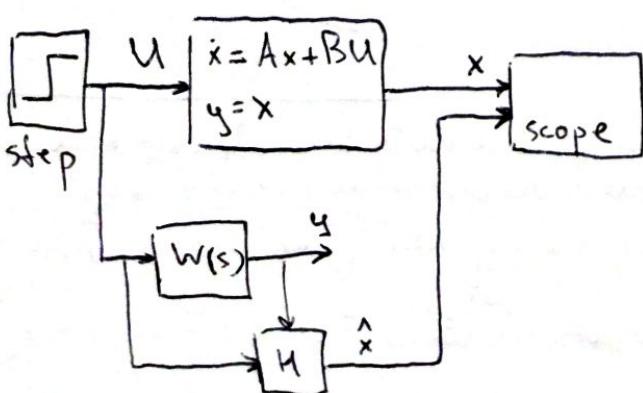
observation

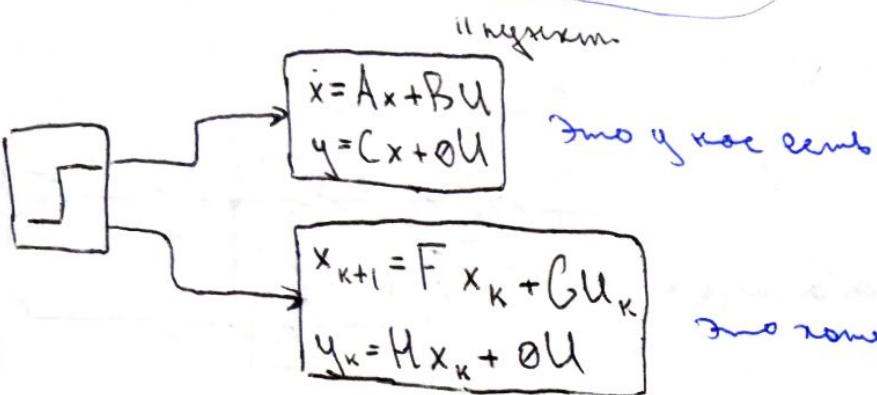
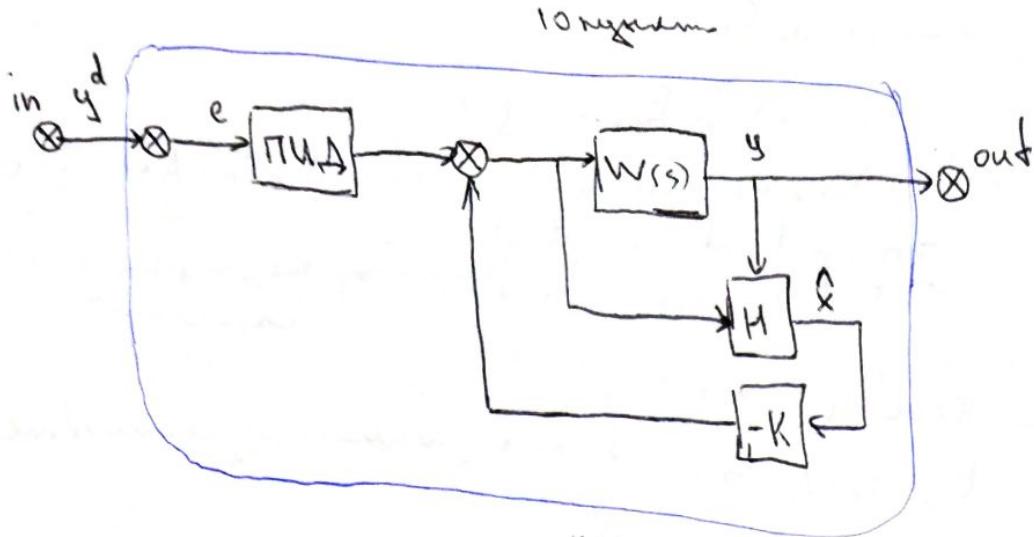
L?

того же x_p: det[(λE - A + LC)⁻¹] = det[λE - A⁻¹ + C⁻¹L] = 0

$$L = \text{acker}(A', C', P_o)$$

9 изображ.





$$F = E + AT$$

$$G = BT$$

$$H = C$$

20.03.18

лекция

Вероятностное определение суммы для нелинейного линейного звена с непрерывным изменения спектрального процесса.

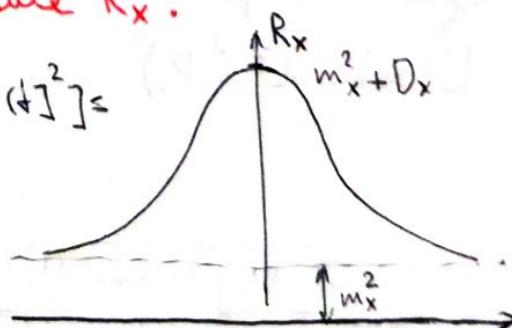
$$R_x(\tau) = M \sum x(t)$$

Программа (+ примеры): $R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$, м.е. в момент времени t : x зависит от $x(t-\tau)$, м.е. R_x характеризует момент $x(t+\tau)$ в функции от $x(t)$. Чем меньше значение, тем больше R_x .

Замечание при $\tau = 0$: $R_{x^0}(0) = M \sum x^0(t) \cdot x^0(t) = M \sum [x^0(t)]^2 = D_{x^0} = D_x$

при $\tau \rightarrow \infty$: $R_x(\infty) = m_x^2$

$$R_x(\infty) = 0$$



Спектральное moments характеризует гауссова соотношения спектрального процесса. Распределение спектра звуковых частот по спектру.

$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ - интеграл Фурье от корр. ф-ции, м.к. $R_x(\tau)$ - чётная, м.е. $S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$, потому $e^{-j\omega\tau} = \cos \omega \tau + i \sin \omega \tau$

(49)

$$\text{Одноч. сп.-вн: } R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$S_x(\omega)$ -
норм
спектр

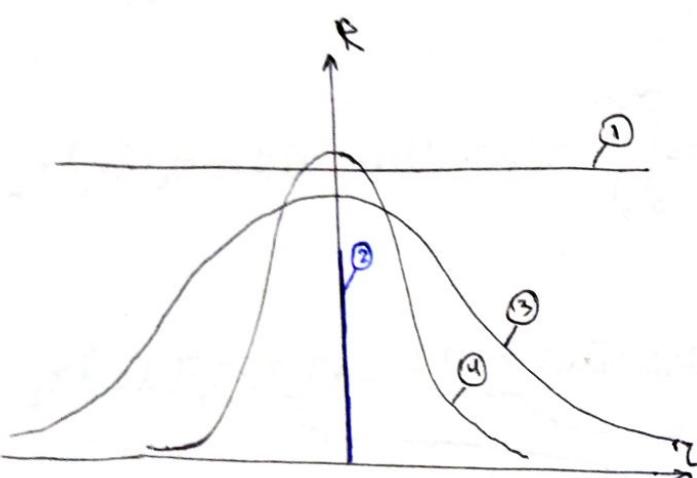
① Генератор. норм. биений

$$x=a=\text{const}$$

$$R_x = a^2$$

$$S_x = 2\pi a^2 \delta(\omega)$$

δ -функция/п-функция Дирака

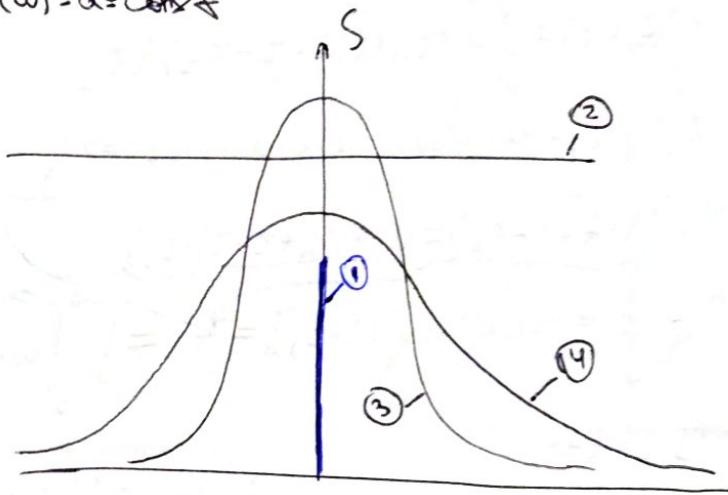


② $x(t)$ - неоднородный гармонический процесс (для него неизвестны начальное значение $x(0)$ и начальная фаза)

Начальная фаза неизвестна

$$R_x(\tau) = a\delta(\tau), a=\text{const}$$

$$S_x(\omega) = a = \text{const}$$



Замечание: б ② $S_x(\omega) = \text{const}$ при $(-\infty, \infty)$ - неизвестное значение a спектра \Rightarrow
 \Rightarrow неизвестное значение $R = \int S_x(\omega) d\omega = \infty$, т.е. бесконечная энергия имеет бесконечную, а
значит, превышающую \mathbb{F} .

Замечание: значение генерации бессмыс.

26.03.18
лекция

Сигналные переменные в АС



I) $u(t)$ - чистая сигн. без з-е. И.к. линейное $W(p)$, то $y(t)$ - чистая чистая з-е.

II) аддитивные з-е:

$$\begin{aligned} u(t) &= m_u(t) + U^\circ(t) & |U^\circ(t)| \\ y(t) &= m_y(t) + Y^\circ(t) & |Y^\circ(t)| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{- чистые з-е} \\ \text{- аддитивные з-е} \end{array} \right\}$$

III) А.С. содержит n -е суперпозиции.

$\Rightarrow m_y(t) - \text{п-з-е на } m_u(t)$

IV) $m_y(t) - \text{п-з-е на } U^\circ$

И.к. чистые з-е бессмыс - невозможно, то $m_y(t) = W(p) \cdot m_u(t)$

(50)

Для этого предположим m_y, m_u -const $\Rightarrow m_y = W(0)m_u$

непр. когер. (непр. он-т, т.е. все
коэффициенты $u(z=0)$)

II) Для случая независимости $y(t)$ и $U(t)$:

$y^o(t)$ и.д. задано через корреляционную ф-ю: $R_{y^o}(t)$ (ибо $t/2$ симметрическое)

$$R_{y^o}(t) = M[y^o(t)y^o(t+\tau)]$$

и.к. $y^o(t) = \int_0^\infty w(\tau)U(t-\tau)d\tau$, - некоторое распределение, т.е. $w(t) = [W(p)|_{p=t}]$

$$y^o(t+\tau) = \int_0^\infty w(\tau_2)U(t+\tau-\tau_2)d\tau_2$$

τ, τ_1, τ_2 - независимые переменные $\Rightarrow y^o(t)y^o(t+\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\tau_1)w(\tau_2)U(t-\tau_1)U(t+\tau-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

$$\text{т.о. } U(t+\tau-\tau_2) = U(t-\tau_1+\tau+\tau_1-\tau_2)$$

$$R_{y^o}(t) = M[y^o(t)y^o(t+\tau)] = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\tau_1)w(\tau_2)M[U(t-\tau_1)U(t-\tau_1+\tau+\tau_1-\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2$$

$$\] t = t-\tau_1$$

$$\] \tau = \tau + \tau_1 - \tau_1, \text{ и.к. } R_{y^o}(t) = M[U(t)U(t+\tau)], \text{ т.о.}$$

$$R_{y^o}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\tau_1)w(\tau_2)R_{y^o}(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad \Theta$$

$$\] Z(t) = \int_0^\infty w(\tau)R_{y^o}(\tau + t)d\tau,$$

$$\Theta \int_0^\infty w(\tau_2)Z(t-\tau_2)d\tau_2 = R_{y^o}(t)$$

Т.е. корреляционная ф-я для биения имеет вид распределения в координатах времени и фазы.

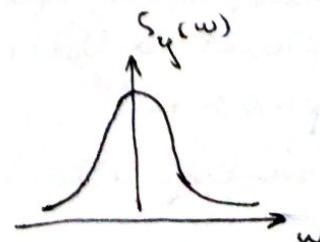
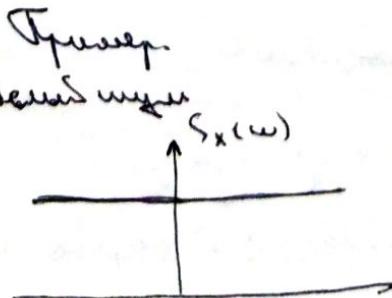
Чтобы вывести ее в другую форму: $R_{y^o}(t) = W(p)W(-p)R_U(t)$

$$\text{и.к. } S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau, \text{ т.о. } S_{y^o}(\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)S_u(\omega)$$

$$S_{y^o}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{y^o}(\omega) = A(\omega) S_u(\omega) \quad (\text{макс. пропуск способности})$$

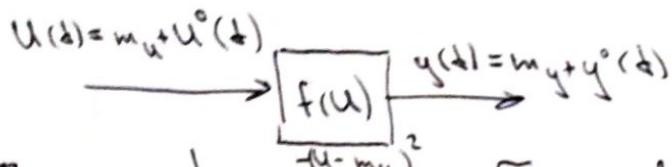
$$W(p) = \frac{K}{T_p + 1}; S_u(\omega) = S_x = \text{const} \quad - \text{делаем вывод}$$

$$S_{y^o}(\omega) = \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right|^2 S_x = \frac{K^2 S_x}{1 + T^2 \omega^2}$$



Зависимость выходного звука от изменения входных параметров

Сигнальные сигналы x/z
шумовые сигналы (Н3).

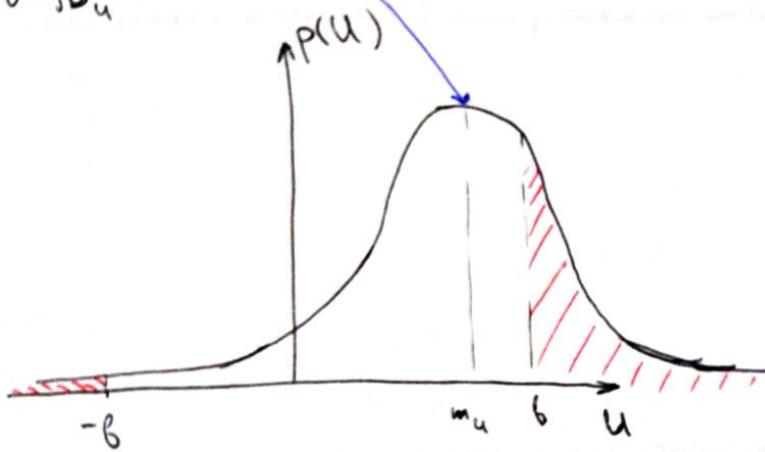


$p(u) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma^2}}$

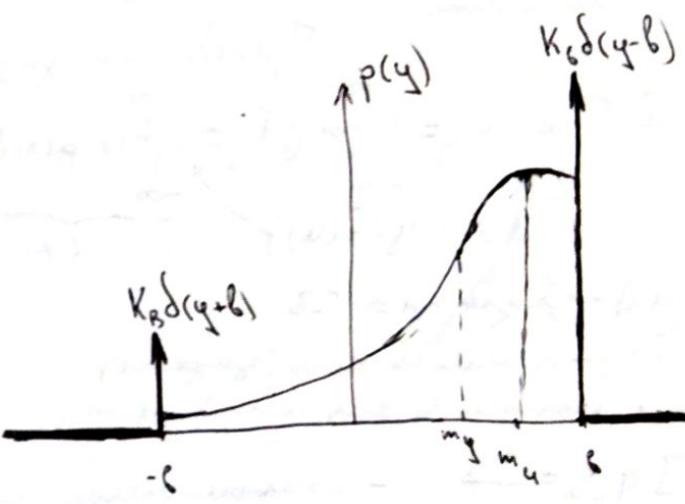
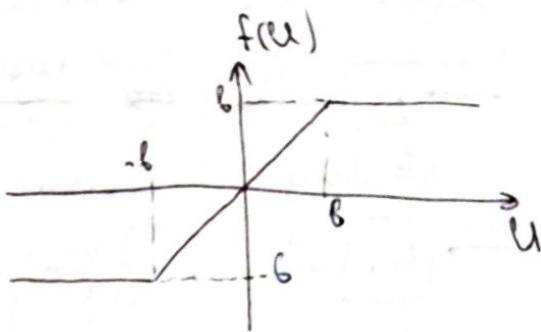
нормальный

$\sigma = \sqrt{D_u}$

- Гауссово распределение (нормальное) нахождение



$f(u)$:



1. Для всех $|U| \leq b : y = U \Rightarrow p(y)|_{|y| \leq b} = p(u)$

2. Для всех $U > b : y = b$

$$P(y=b) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) du = K_b$$

3. Для всех $U < -b : y = -b$

$$P(y=-b) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) du = K_{-b}$$

4. $P(|y| > b) = 0$

При $m_u > b : m_y < b$

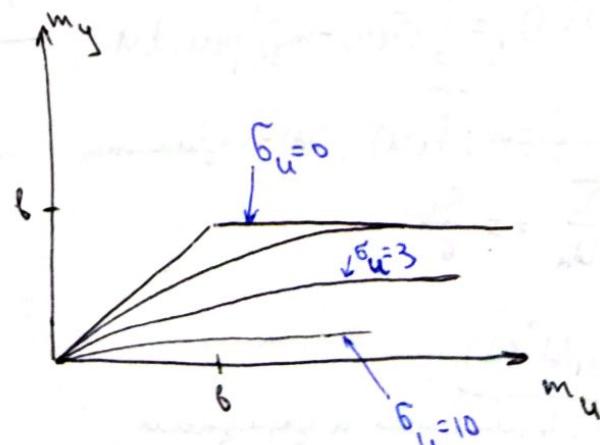
При $m_u < -b : m_y > -b$

При $m_u = 0 : m_y = 0$

и. динамический диапазон

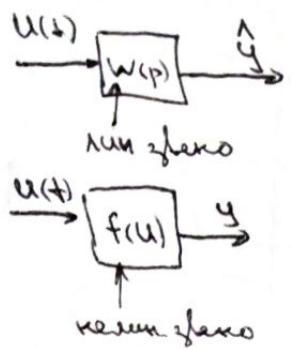
При увеличении σ_u шумовой сигнал становится сильнее.

т.е. наше выражение соответствует условию третьему критерию качества Н3 для генераторов (при m_x).



§ Стационарное значение - замена н.з. начальными, задаваемыми
изображающим по реалиям на заданного ему времени.

Задача стат. исп. - найти стационарное звено $W(p)$:



$$Y_{\text{ст}} (\hat{y} \sim y), \text{ где } \hat{y} = m_y + q^{\circ}(t);$$

$$\text{Частное } (\hat{y} + y):$$

$$\begin{aligned} 1) \quad m_y &= m_y \\ 2) \quad D_y &= D_y \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Преобразование другими методами (использование начальных)

$$\text{I. М.к. } m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du$$

(м.к. $y = f(u)$)

(*)

$p(u)$ - заданная СВ

$f(u)$ - неизвестное (задано)

и.э. можно записать и найти m_y

I $q_{co} = \frac{m_y}{m_u}$ - коэффициент стационарного изображения

$$\text{II. м.к. } D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p(y) dy$$

$$\text{м.к. } y = f(u); D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (f(u) - m_y)^2 p(u) du$$

m_y уже найден; $f(u), p(u)$ - известны

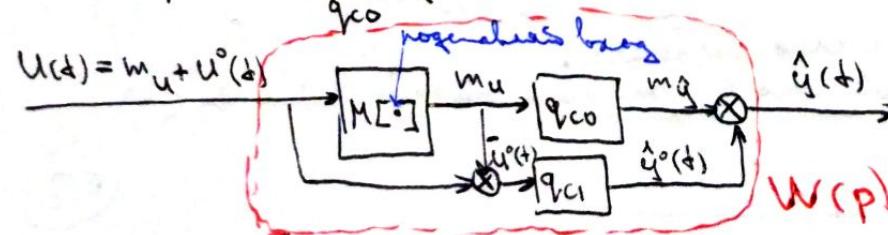
$$\begin{cases} q_{ci} = \pm \sqrt{\frac{D_y}{D_u}} = \pm \frac{D_y}{D_u} \\ q^{\circ}(t) = q_{ci} u^{\circ}(t) \end{cases}$$

изображение будущего и прошлого

$$D_{y^0} = q_{ci}^2 D_{u^0} \Rightarrow \frac{D_y}{D_{u^0}} D_{u^0} = D_{y^0} - \text{использование второго основного правила}$$

анонима q_{ci}

$$\text{I } m_y = q_{co} m_u \quad \text{или} \quad \frac{m_y}{m_u} m_u = m_y \quad \text{- первое уравн.}$$



q_{co} и q_{ci} - коэффициенты стационарного изображения, определяемые выражением $y = f(u)$ и $p(u)$.

Задача 1) Найти реальн. А.С. нормализованной СВ.

б) на практике при задании изображения в $p(u)$: q_{co} и q_{ci} считаются независимыми

б) стационар. - принципиально приведены методы (использование каскадов)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

27.03.18
примеч

Найдите оптимальное управление

$$x(0) = x^0; \quad x(t_f) = x^f$$

первонач

$$J = \int_0^{t_f} f_0(u, x, t) dt$$

задача
оптимизации

+ ограничения на переменные

$$H = -f_0 + \lambda^T f$$

п. вид Гамильтонова

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 5, \quad x_1(t_f) = -5 \\ \dot{x}_2 = u & x_2(0), \quad x_2(t_f) - \text{не заданы} \end{cases}, \quad t_f = 10$$

$$J = \int_0^{t_f} U^2 dt \rightarrow \min$$

некоторые условия \Rightarrow точки A и B в кн. это заданы

Найдите $U(t) = ?$, $x^{\text{окн}}(t)$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad H = -U^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad - \text{условие начального момента}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \dot{\lambda}_i \quad - \text{уравнение состояния}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \dot{x}_i \quad - \text{уравнение}$$

изменения

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2U + \lambda_2 = 0 \Rightarrow U = \frac{\lambda_2}{2}; \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 = \dot{\lambda}_1 \Rightarrow \lambda_1(t) = C_1,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 = \dot{\lambda}_2 \Rightarrow \lambda_2 = -C_1 t + C_2, \quad U = \frac{-C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}$$

Если характеризует
максимумом, оптималь-
ное управление - это то же
единственное

Конспект
8.13-8.19
беспрек

в Гамильтоновском виде:

Если есть первое же
уравнение Эйлера-Лагранжа,
то это решение задано
однозначно

$$\dot{x}_2 = -\frac{c_1}{2}t + \frac{c_2}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{c_1}{4}t^2 + \frac{c_2}{2}t + c_3$$

$$x_1 = -\frac{c_1}{12}t^3 + \frac{c_2}{4}t^2 + c_3t + c_4$$

При t_f задано и нам нужно определить, но если $x_2(0)$ не задано \Rightarrow
 $\lambda_2(0) = 0$

если $x_2(t_f)$ не задано $\Rightarrow \lambda_2(t_f) = 0$ - условие неподвижности

$$\Rightarrow \lambda_2(0) = 0 = c_2$$

$$\lambda_2(10) = 0 = -c_1 \cdot 10 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x_1(0) = 5 = c_3$$

$$x_1(10) = 5 = c_3 \cdot 10 + 5 \Rightarrow c_3 = -1$$

$$U_{\text{min}} = 0$$

$$x_1^{\text{max}} = -t + 5$$

$$x_2^{\text{max}} = x_1 = -1 - \text{сроков}$$

$$\begin{aligned} J &= t_f \rightarrow \min && -\text{минимизируем время} \\ x_2(0) &= 0 && \left. \begin{array}{l} \text{- задано начальное значение} \\ \text{- задано конечное значение} \end{array} \right\} \\ |U| &\leq 1 && -\text{загрузка машины} \end{aligned}$$

$$J = t_f = \int_0^{t_f} 1 dt$$

Решаем $J = -x_2(t_f) \rightarrow \min$ - это задана величина конечной скорости

$$J = - \int_0^{t_f} \dot{x}_2(t) dt = - \int_0^{t_f} f_2(t) dt = x_2(0)$$

$$H = -f_0 + \lambda_1 f = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 U$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0, \text{ но неизвестно } |U| \leq 1$$

нужно
 $U^{\text{opt}} = \arg \left(\max_{|U| \leq 1} H \right)$

максимум Лагранжа

$$\max_U H = \max_U (-1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 U) = \underbrace{-1 + \lambda_1 x_2}_{\text{он мин}} + \max_U (\lambda_2 U)$$

$$\lambda_2 U \rightarrow \max, \text{ если } U = \text{sign} \lambda_2$$

Решаем:

$$-\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = C_1$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -C_1 t + C_2$$

$$\lambda_2 \text{ zvanovann na } t \in [0, t_f] \Rightarrow U = \begin{cases} u_{\max} - 1 & u_{\max} \\ u_{\min} & \end{cases}$$

$$x_2 = \pm 1$$

$$x_2 = \pm t + C_3, \text{ m.k. } x_2(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{t^2}{2} + C_4$$

$$x_1(0) = 5 = C_4$$

$$x_1(t_f) = \pm \frac{t_f^2}{2} + 5 = -5$$

$$\pm \frac{t_f^2}{2} = -20 \Rightarrow U = -1$$

m.k. $t_f^2 = -20$ ne geliegt innerhalb t_f
 $\Rightarrow t_f = \sqrt{-20}$

$$U_{(+)^{\text{opt}}} = -1$$

$$x_1^{(\text{opt})}(t) = -\frac{t^2}{2} + 5$$

$$x_2^{(\text{opt})}(t) = -t$$

