

Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления:  
Учеб. пособ.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 616 с.

Рассматриваются основные разделы классической и современной теории автоматического управления: операторно-частотный подход, метод пространства состояний, оптимизация программ и законов управления с обратной связью, идентификация и адаптация. Теоретические постановки представлены в тесной связи с практическими проблемами. Изложение ведется концентрически, с постоянным возрастанием уровня сложности, что обеспечивает его доступность для читателей с различным уровнем подготовки. Включение ряда оригинальных результатов делает книгу интересной и для специалистов.

Для студентов вузов и специалистов в области теории автоматического управления.

Табл. 12. Ил. 150. Библиогр. 121 назв.

Рецепенты:  
академик А. А. Воронов,  
кафедра автоматики и процессов управления Ленинградского электротехнического института

Скорено  
1991 г.

21482-87  
ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВЕТ  
ГРНЦ РАН, Наук.-техн.  
Библиотека

1502000000 — 178  
053(02)-86 154-86

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1986

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Список обозначений . . . . .	8
Гла́ва 1. Основные понятия . . . . .	9
§ 1. Цели и принципы управления . . . . .	9
§ 2. Сведения о технических средствах . . . . .	11
§ 3. Примеры систем автоматического управления . . . . .	15
§ 4. Проектирование и теория . . . . .	17
Гла́ва 2. Операторный метод анализа линейных систем . . . . .	19
§ 1. Описание элементов . . . . .	19
§ 2. Описание систем . . . . .	27
§ 3. Устойчивость . . . . .	40
§ 4. Установившаяся реакция и частотная характеристика . . . . .	47
§ 5. Анализ типовых структур . . . . .	52
Гла́ва 3. Построение законов управления . . . . .	70
§ 1. Программа, обратная связь, стабилизация . . . . .	70
§ 2. Основные законы управления. Инвариантность . . . . .	82
§ 3. Метод динамической компенсации . . . . .	90
§ 4. Выбор желаемой передаточной функции по типовым воздействиям . . . . .	96
§ 5. Логарифмические частотные характеристики . . . . .	108
§ 6. Реализация закона управления . . . . .	121
§ 7. Синтез обратных связей в электромеханической следящей системе . . . . .	126
Гла́ва 4. Управление при случайных воздействиях . . . . .	140
§ 1. Случайные воздействия и реакция на них . . . . .	140
§ 2. Оптимальный выбор передаточных функций . . . . .	152
§ 3. Грубоść и коэффициенты чувствительности показателей качества . . . . .	160
§ 4. Управление неустойчивыми и неминимально-фазовыми объектами . . . . .	176
§ 5. Регулирование угловой скорости вала гидравлической турбины . . . . .	184
Гла́ва 5. Введение в нелинейную теорию . . . . .	196
§ 1. Необходимость нелинейной теории и ее возможности . . . . .	196
§ 2. Равновесные состояния и устойчивость . . . . .	205
§ 3. Автоколебания. Гармонический баланс и гармоническая линеаризация . . . . .	217
§ 4. Реакция нелинейной системы на внешние воздействия . . . . .	230
§ 5. О выборе законов управления с учетом нелинейных факторов . . . . .	244
Гла́ва 6. Метод пространства состояний в линейной теории . . . . .	250
§ 1. Описание в нормальной форме . . . . .	250
§ 2. Анализ системы . . . . .	256

## ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 3. Управляемость и наблюдаемость . . . . .	268
4. Размещение собственных чисел и стабилизация . . . . .	274
5. Оптимизация стабилизирующей обратной связи . . . . .	284
6. Управление при наличии случайных возмущений . . . . .	292
7. Управление при неполных и неточных измерениях . . . . .	299
§ 8. Системы с переменными параметрами . . . . .	304
<b>Г л а в а 7. Линейные дискретные системы и импульсное управление</b>	<b>316</b>
§ 1. Свойства дискретных систем . . . . .	316
§ 2. Управление с обратной связью . . . . .	320
§ 3. Импульсное управление непрерывными объектами . . . . .	328
§ 4. Операторный метод . . . . .	342
<b>Г л а в а 8. Анализ нелинейных систем</b>	<b>359</b>
§ 1. Описание системы. Равновесные состояния . . . . .	359
§ 2. Построение функций Ляпунова и критерий устойчивости . . . . .	366
§ 3. Элементы теории возмущений и зависимость от малого параметра . . . . .	376
§ 4. Периодические решения. Автоколебания и вынужденные колебания . . . . .	386
<b>Г л а в а 9. Оптимизация программ управления</b>	<b>407</b>
§ 1. Формулировка задачи . . . . .	407
§ 2. Условия оптимальности. Принцип максимума . . . . .	411
§ 3. Задачи оптимизации со свободным правым концом траектории . . . . .	424
§ 4. Линейно-квадратичные задачи . . . . .	435
§ 5. Оптимизация по быстродействию . . . . .	445
§ 6. Дискретные системы . . . . .	457
§ 7. Понятие о численных методах оптимизации . . . . .	461
§ 8. Численная оптимизация непрерывных систем . . . . .	471
<b>Г л а в а 10. Синтез оптимальных обратных связей</b>	<b>481</b>
§ 1. Динамическое программирование . . . . .	481
§ 2. Субоптимальные обратные связи . . . . .	490
§ 3. Управление при недетерминированных внешних возмущениях . . . . .	509
§ 4. Управление с обратной связью по неточным измерениям . . . . .	517
<b>Г л а в а 11. Методы идентификации и адаптивное управление</b>	<b>532</b>
§ 1. Идентификация объектов управления . . . . .	532
§ 2. Адаптивное управление статическим объектом . . . . .	549
§ 3. Адаптивное управление динамическими объектами. Самонастройка . . . . .	569
§ 4. Заключение . . . . .	581
<b>Приложение 1. Сведения о преобразованиях Лапласа</b>	<b>583</b>
<b>Приложение 2. Сведения из теории матриц</b>	<b>587</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>604</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>610</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является учебным пособием по курсу теории автоматического управления. Этот курс включен в учебные планы различных инженерных специальностей и в настоящее время является одним из важнейших элементов общетехнического образования. С другой стороны, для некоторых специальностей он является профилирующим, определяющим квалификацию инженера. Курс входит в систему университетского образования на механико-математических и иногда — на экономических факультетах.

Разнообразие интересов слушателей и их подготовки делает особо сложной проблему создания приемлемого учебного пособия. Поэтому в книге принята концентрическая система изложения.

Первый концентр (главы 1—5) посвящен описанию основных задач автоматического управления и использованию для их решения классических операторно-частотных методов. Изложение ведется детально и сопровождается большим количеством примеров. Особое внимание уделяется постановке технических задач и проблеме реализации законов управления. Математической базой глав 2 и 3 является алгебра многочленов и теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но все необходимые сведения приводятся по ходу изложения, а кроме того, в Приложении 1 дана краткая сводка формул операционного исчисления. Для понимания главы 4 дополнительное требуется наличие минимальных сведений из теории вероятностей. Глава 5 посвящена анализу основных явлений, связанных с наличием нелинейных элементов.

В целом первый концентр ориентирован на программы курсов общетехнического назначения, хотя порядок представления материала несколько отличается от традиционного. При необходимости он может быть сокращен за счет изъятия гл. 4 (и частично гл. 5), где используются вероятностные представления. Однако включение в любой курс начальной части гл. 5 представляется обязательным. Текст, данный лепитом, приведен лишь в качестве справочной информации.

Второй концентр (главы 6 и 7) содержит методику анализа и синтеза линейных систем, основанную на первичном описании в пространстве состояний. Стиль изложения становится более сжатым. Предполагается умение пользоваться аппаратом теории матриц. Хотя сводка всех используемых результатов этой теории дана

в Приложении 2, опыт преподавания показывает, что активное владение матричным аппаратом требует получения предварительных навыков.

В настоящее время принято, что материал первого и второго концентров должен включаться в общие курсы, читаемые студентам технических вузов, для которых теория автоматического управления является профилирующим предметом.

Наконец, третий концент (главы 8–11) включает ряд специальных курсов (анализ нелинейных систем в пространстве состояний, оптимизация программы управления на основе принципа максимума и вычислительных методов, синтез оптимальных и приближенно оптимальных законов управления (обратной связи), введение в методы идентификации и адаптивного управления). В рамках третьего концентра предполагается наличие более высокой общей математической культуры, хотя прикладные аспекты остаются в центре внимания. В основном третий концент ориентирован на подготовку инженеров-математиков и инженеров-физиков, но может быть в сокращенном виде использован и для чисто технических специальностей. Материал спецкурсов может быть также полезен для подготовки к экзаменам кандидатского минимума по специальностям «теория автоматического управления» и «технические системы управления». В нем, в частности, содержатся доказательства ряда математических утверждений, приведенных в общем курсе.

Однако взаимосвязь между всеми частями курса проявляется не только и не столько в этом.

Без освоения технического аспекта изучение теории автоматического управления недопустимо и может привести лишь к полной беспомощности в постановке и решении практических проблем даже при хороших формально-математических знаниях. Поэтому содержательная постановочная сторона дела подчеркивается в течение всего курса. Хотя изложение ведется по возможности строго в математическом смысле этого слова, акцент делается на соответствии формальных моделей практической реальности. Формулировки и доказательства необходимых математических фактов даются экономно, без претензий на наибольшую общность.

Предлагаемый курс, конечно, не является курсом лекций. Используя его для формирования лекционного материала, каждый преподаватель должен сделать выборку, соответствующую конкретной задаче и возможностям общего плана обучения. Цель автора состояла лишь в том, чтобы предоставить достаточный материал для такой выборки. При этом учитывалось, что значительная часть преподавателей (а они также рассматриваются в качестве предлагаемых читателей!) получила подготовку в тот период, когда современная теория управления еще не сформировалась. Поэтому в книге осуществляется «плавный переход» от классического частотного подхода к более новым подходам.

Определенная часть содержания книги оригинальна не только в методическом отношении. Поэтому можно надеяться, что знакомство с ней представит интерес и для специалистов. Вместе с тем книга отнюдь не претендует на всесторонний охват проблематики теории автоматического управления, да это и невозможно при современном масштабе исследований.

Книга базируется на собственном педагогическом и исследовательском опыте автора, но прежде всего отражает традиции, сложившиеся на физико-механическом факультете Ленинградского политехнического института. Они были заложены такими замечательными учеными, как А. И. Лурье и А. М. Кац, светлой памяти которых автор посвящает эту книгу. Традиции А. И. Лурье и А. М. Каца продолжались в лекциях Ю. В. Долголенко, Р. А. Полузектова, И. Б. Челпанова, В. Я. Катковника. Содержание лекций менялось вместе с развитием теории, однако неизменной оставалась общая тенденция — сочетание инженерной направленности с обновляющимся математическим аппаратом.

Написание этой книги было выполнением долга автора перед учителями и перед выне работающими товарищами и учениками, которым автор неизменно признателен за поддержку и советы.

Особо следует упомянуть А. А. Воронова, который многие годы оказывал влияние на автора и как руководитель первых научных исследований, и как создатель прекрасных книг по теории управления, и, наконец, как благожелательный и требовательный рецензент этого курса. Замечания А. А. Воронова вместе с замечаниями коллектива кафедры «Автоматика и процессы управления» Ленинградского электротехнического института, возглавляемой В. Б. Яковлевым, были исключительно полезными и способствовали существенному улучшению окончательного варианта рукописи.

Автор глубоко благодарен всем непосредственно помогавшим в работе над рукописью: Т. В. Варядченко, Е. Ю. Коломиец, Н. В. Солониной, И. Л. Дороту, М. Г. Захарову, О. Ю. Кульчицкому, В. К. Подгайскому, Б. Л. Розету и, прежде всего, Т. Н. Первозванской и Ал. А. Первозванскому. Весьма полезным было и внимательное прочтение рукописи А. С. Позняком.

Следует все же заранее признаться, что несмотря на длительную и напряженную работу данный курс отнюдь не совершенен. В тексте наверняка имеются незамеченные неточности и даже ошибки. Автор заранее признателен всем читателям, которые не сочтут за труд прислать свои поправки в издательство или непосредственно в Ленинградский политехнический институт.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначения величин и функций сохраняются только в пределах каждой главы. При ссылках приведены сокращенные обозначения: П.— пример, Т.— теорема. Нумерация формул, теорем и примеров двойная (сначала номер параграфа в данной главе, затем номер внутри параграфа), самостоятельная в каждой главе. При ссылках на другую главу указывается ее номер.

■ — конец доказательства теоремы или ее формулировки (если доказательство не приводится)

□ — конец примера

$A \Rightarrow B$  — из  $A$  следует  $B$

$A \Leftrightarrow B$  —  $A$  эквивалентно  $B$  (тогда и только тогда, когда)

$A/B$  —  $A$  при условии, что верно  $B$

$\triangleq$  — равно по определению

$D$  — оператор дифференцирования  $(Dx(t) \triangleq \frac{d}{dt}x(t))$

$\xi$  — оператор сдвига на  $k$  акт ( $\xi x[k] \triangleq x[k+1]$ )

$\mathcal{L}\{\cdot\}$  — оператор преобразования Лапласа (см. приложение I)

$\mathcal{Z}\{\cdot\}$  — оператор  $\mathcal{Z}$ -преобразования (см. приложение I)

$h(t)$  — весовая функция

$H(D)$  — передаточная функция

$\mathbf{1}(t)$  — функция Хевисайда

$\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака

$r$  — индекс разомкнутого контура

$z$  — индекс замкнутого контура

$f$  — индекс обратной связи

$P(A)$  — вероятность события  $A$

$M(x)$  — символ математического ожидания случайной величины  $x$

$D(x)$  — символ дисперсии случайной величины  $x$

$o(\mu)$  — величина меньшего порядка, чем  $\mu$  ( $\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{o(\mu)}{\mu} = 0$ )

$O(\mu)$  — величина порядка  $\mu$  ( $0 < \lim_{\mu \rightarrow 0} |O(\mu)/\mu| \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} |O(\mu)/\mu| < \infty$ )

$\nabla$  — градиент

$\deg \alpha(p)$  — степень полинома  $\alpha(p)$

Обозначения, относящиеся к матрицам, описаны в Приложении II.

## ГЛАВА 1

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

#### § 1. Цели и принципы управления

Управление состоит в том, чтобы, оказывая на какой-либо объект воздействие, изменять протекающие в нем процессы для достижения определенной цели. Управление является автоматическим, если оно осуществляется без вмешательства человека с помощью специальных технических устройств. Разработка общих принципов создания этих устройств и является основной задачей теории автоматического управления. Теория должна давать единую базу для решения задач управления объектами различной физической, химической или биологической природы. Перечислим некоторые типичные классы технических задач.

а. *Управление движением механических объектов.* Управляемыми являются процессы изменения некоторых координат и скоростей, а управляющими воздействиями являются внешние силы\*. Цель управления обычно формулируется через задание желаемых значений координат и скоростей в определенные моменты времени или на определенных участках траектории.

б. *Управление электротехническими (или электронными) объектами,* где управляемыми являются процессы изменения напряжений, токов, мощностей, а управляющими воздействиями являются внешние электродвижущие силы (ЭДС) или токи от внешних источников, или сопротивления, емкости, индуктивности элементов с варьируемыми характеристиками. Целью управления может быть, например, обеспечение постоянства напряжения между различными узлами системы или достижение максимальной мощности, выделяемой на определенном элементе.

в. *Управление теплотехническими объектами.* Управляемыми являются процессы изменения температур в различных точках объекта, а воздействие осуществляется путем подвода тепловой энергии. Цель управления может состоять в желании поддерживать некоторое распределение температур или не допускать превышения температурой некоторого предельного уровня.

\* Координаты, скорости и силы могут пониматься в обобщенном смысле теоретической механики.

г. Управление химической или биологической технологией. Здесь управляемым является как изменение температур, так и изменение концентраций различных веществ. Управляющими воздействиями являются изменения подхода энергии (топлива, освещения) или вещества, а целью — обеспечение желаемого количества выходного продукта (желаемой продуктивности) или (и) постоянства его качественных физико-химических характеристик.

Эти проблемы зачастую переплетаются, поскольку объекты современной техники, как, например, системы энергообеспечения, являются сложными системами, в которых взаимодействуют и механические, и электромагнитные, и термодинамические, и химические процессы. Однако, несмотря на разнообразие технических проблем, существуют общие подходы, общие принципы создания систем управления.

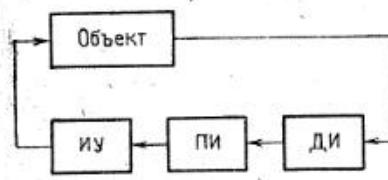


Рис. 1.1

управляемых процессов (или других процессов в объекте, связанных с управляемыми). Этот блок называют измерительным или блоком датчиков информации (ДИ)\*). В ходе функционирования этого блока выдаются *информационные сигналы*. Эти сигналы поступают во 2-й блок, блок преобразования и хранения информации (ПИ), где на их основе, а также на основе заранее заложенных сведений (априорной информации) вырабатываются *сигналы управления*. Правило (алгоритм) преобразования информационных сигналов в сигналы управления называется *законом управления*. Сигнал управления показывает, каким должно быть управляющее воздействие в текущий момент времени. Чтобы выработать это воздействие, превратить сигнал в механическое усилие или поток тепла, или поток вещества, требуется еще один блок — исполнительное устройство (ИУ).

Как видно из рис. 1.1, совокупность перечисленных блоков образует замкнутый контур, охватывающий объект управления. Поэтому систему, где присутствуют все эти блоки, часто называют *замкнутой системой*, или *системой управления с обратной связью* от управляемых процессов к управляющим воздействиям. Иногда, однако, используются и более простые *разомкнутые системы*, где отсутствуют датчики информации, а функции преобразователя информации сводятся лишь к хранению и выдаче выработанной про-

\*). Иногда употребляются и другие термины: блок чувствительных элементов, блок сенсоров.

грамммы управления с требуемыми в каждый момент времени значениями сигнала управления.

Таким образом, в системе управления можно выделить *информационную* часть, осуществляющую получение, хранение, обработку и выдачу информации, и *энергетическую (силовую)* часть, служащую для преобразования информации (сигнала управления) в управляющее воздействие на объект.

## § 2. Сведения о технических средствах

Описанные функциональные блоки реализуются с помощью различных *технических средств автоматики*. Детальное изучение их конструкций служит предметом специального курса. Однако понимание задач общей теории автоматического управления невозможно без четкого представления об основных особенностях этих средств, тем более что в настоящее время намечается тенденция к их унификации. В них в качестве информации выступают электрические сигналы, причем информация содержится либо в текущих значениях напряжения (сигналы аналогового типа), либо в виде кодированных последовательностей импульсов (сигналы цифрового или кодированного типа).

В соответствии с этим датчики информации являются преобразователями значений различных физических процессов в электрические сигналы, преобразование и хранение информации осуществляется с помощью электронных вычислительных устройств аналогового или цифрового типа, исполнительные устройства управляются опять-таки с помощью электрических сигналов, поступающих из блока ПИ.

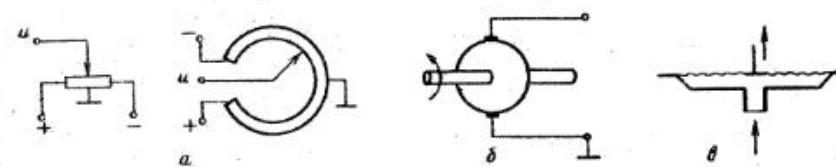


Рис. 1.2

Приведем некоторые примеры датчиков [1.1].

**a. Датчик относительного перемещения (измерительный потенциометр)** (рис. 1.2, а). Напряжение  $u$ , снимаемое движком потенциометра, пропорционально перемещению движка относительно средней точки. Если связать движок с одним из тел, а корпус с другим, то получим датчик их относительного поступательного перемещения. С помощью кругового потенциометра аналогичным образом можно получить электрический сигнал, пропорциональный относительному углу поворота.

**б. Датчик угловой скорости (тахогенератор)** (рис. 1.2, б). Э. д. с., вырабатываемая генератором постоянного тока с независимым возбуждением или постоянными магнитами, пропорциональна угловой скорости вращения ротора. Если ротор генератора связан с вращающимся телом, то генератор является датчиком угловой скорости тела.

**в. Датчик давления (измерительная мембрана).** Прогиб мембранны (рис. 1.2, в) пропорционален давлению газа, действующему на ее поверхность. Таким образом, мембрана является преобразователем «давление-перемещение». Однако перемещение, как уже указывалось, можно преобразовать в напряжение электрического сигнала.

**г. Датчик температуры (термопара).** Действие этого датчика основано на свойстве разнородных проводников или полупроводников образовывать в паре (спае) электродвижущую силу, зависящую от температуры спая.

Перечень датчиков можно было бы продолжать практически неограниченно, поскольку разработаны и непрерывно разрабатываются устройства для измерения различного рода процессов, основанные в свою очередь на различных физических принципах и имеющие разную сложность, стоимость, габариты. При этом в зависимости от диапазона возможного изменения одной и той же физической величины могут применяться совершенно несходные устройства, например, для измерения перемещений порядка  $10^{-2}$  м — уже упомянутые потенциометры, а при порядке более  $10^2$  м — радиолокационные дальномеры, используемые, в частности, в системах управления полетом.

В дальнейшем будем называть датчик *идеальным*, если вырабатываемый им сигнал пропорционален измеряемой величине. Существенно, что все реальные датчики являются в той или иной степени *неидеальными*. В частности, всегда возможны малые ошибки, проявляющиеся в виде добавочных, «паразитных», сигналов. Более того, пропорциональность заведомо сохраняется только в определенном диапазоне изменения, зависящем от конструкции датчика (это очевидно даже из представленной выше схемы измерительного потенциометра). Наконец пропорциональность может нарушаться при быстрых изменениях измеряемого процесса — в силу *инерционности* датчика. Например, спай термопары обычно защищается покрытием (чехлом). Это покрытие не может прогреться (или охладиться) мгновенно при резком изменении измеряемой температуры газовой среды, так что тепловая инерция покрытия искажает показания датчика. В дальнейшем будет продемонстрировано, насколько неизбежная неидеальность датчиков информации влияет на эффективность систем управления.

Кратко остановимся на средствах преобразования и хранения информации, т. е. технической реализации блока ПИ. Наиболее мощным средством являются управляющие цифровые электронные

вычислительные машины (ЭВМ). Общие принципы действия ЭВМ хорошо известны (см., например, [1.7]). Подчеркнем лишь, что использование ЭВМ в качестве блока системы автоматического управления влечет за собой определенные особенности ввода и вывода информации. В отличие от неавтоматических (человеко-машинных) систем информация не должна представляться в визуальной форме \*), например, в виде распечатки на бумажной ленте или графика на графопостроителе. Как правило, ввод текущей информации, поступающей от ДИ, осуществляется следующим образом: аналоговые электрические сигналы масштабируются с помощью усилителей к требуемому диапазону, далее преобразуются с помощью устройств «аналог — цифра» (АЦП) в кодированную последовательность импульсов, вводимую в память ЭВМ. Результат переработки информации по заложенным в ЭВМ программам в виде цифрового кода поступает на преобразователь «цифра — аналог» (ЦАП), на выходе которого возникает аналоговый сигнал соответствующего напряжения.

Для дальнейшего существенно, что цифровая ЭВМ фактически оперирует не с непрерывно поступающей информацией, а с периодической выборкой, иначе говоря, с последовательностями измеряемых величин. Отметим также, что при преобразованиях в АЦП возможны дополнительные ошибки, связанные с округлением, хотя они, как правило, малы по сравнению с ошибками датчиков.

В настоящее время использование цифровых ЭВМ ограничено достаточно сложными и дорогостоящими системами управления, в частности, системами управления крупными судами и летательными аппаратами, хотя общая тенденция технического развития свидетельствует о возможности их все большего распространения.

Широко применяются аналоговые вычислительные устройства, представляющие собой схемы, включающие электронные усилители и *RC*-цепи. Основная идея построения таких схем проста. С помощью делителей или усилителей возможно осуществить операцию умножения входного напряжения на постоянный коэффициент, с помощью емкостных элементов возможно осуществлять операцию интегрирования данных, поскольку напряжение на емкости пропорционально интегралу от протекающего тока. Сочетание таких элементов позволяет создавать устройства, практически мгновенно производящие алгебраические и интегральные преобразования поступающих сигналов. Эти устройства иногда полностью разрабатываются специально для реализации требуемого закона управления, а иногда строятся на базе стандартных так называемых операционных усилителей, входящих в состав *аналоговых вычислительных машин* (АВМ)\*\*). Аналоговые вычислители проще и пока дешевле

\*). Это, конечно, не исключено и, более того, даже необходимо в ходе наладки системы.

\*\*). Принципы функционирования АВМ тесно связаны с теорией управления и кратко излагаются ниже (гл. 2).

цифровых. Хотя возможности преобразования и в особенности хранения информации в них ограничены, их, как правило, достаточно для реализации наиболее часто используемых законов управления.

Кратко остановимся на средствах реализации блока исполнительных устройств. Из ПИ в него поступает сигнал управления. Это электрический сигнал с низким уровнем мощности. Поэтому ИУ должно реализовать две функции: во-первых, повысить уровень мощности, быть *усилителем мощности*, а во-вторых, преобразовать электрический ток в управляющее воздействие требуемого типа, например, механическое усилие или расход вещества.

Наиболее распространенным ИУ являются электрические двигатели (см., например, [1.4]), на которые управляющий сигнал подается через усилители мощности (УМ) (электронные, магнитные, электромашинные). Простейший электродвигатель — электромагнит, якорь которого перемещается в поле, создаваемом током в обмотке (рис. 1.3). Во вращающихся электродвигателях момент, действующий на ротор двигателя, создается за счет взаимодействия токов в обмотках, уложенных на роторе и статоре. В частности,

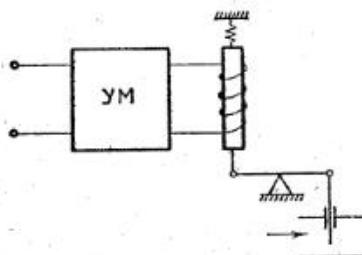


Рис. 1.3

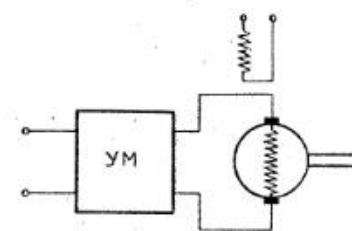


Рис. 1.4

в двигателе постоянного тока с независимым возбуждением, используемом во многих системах управления, ток в роторную (якорную) обмотку подается от усилителя мощности, а ток в обмотку статора подается от внешнего источника постоянного напряжения (рис. 1.4). Всякий электродвигатель является, по существу, преобразователем «электрический ток — механическое усилие» и поэтому может быть непосредственно использован в качестве ИУ в системах управления движением механических объектов. Вместе с тем он может быть применен и в других системах. Если, например, кинематически связать двигатель с заслонкой (вентилем), изменение положения которого меняет расход вещества, поступающего к объекту (рис. 1.3), то создается ИУ для управления расходом с помощью электрического сигнала. Таким же способом может управляться подача тепловой энергии, если вентиль дозирует подачу топлива.

Наряду с электродвигателями в системах управления используются и иные, в особенности гидравлические и пневматические. Для

них входным управляющим сигналом является перемещение заслонки, открывающей или закрывающей доступ рабочего тела (сжатой жидкости или газа) к движущемуся поршню \*). Управляющий сигнал такого рода может поступать либо непосредственно от датчика (см. выше, пример измерительной мембранны), либо быть результатом преобразования электрического сигнала с помощью двигателя, перемещающего заслонку. Для дальнейшего теоретического изложения важно понимать, что несмотря на разнообразие возможных технических реализаций любые ИУ обладают следующими принципиальными особенностями:

- 1) они используют энергию от внешних источников (блоки питания электрических усилителей, напорные установки гидравлических двигателей и т. д.);

- 2) возможный уровень управляющего воздействия ограничен конструкцией ИУ.

Таким образом, мы кратко обрисовали типовую техническую базу реализации основных функциональных блоков систем автоматического управления (САУ).

### § 3. Примеры систем автоматического управления

Дадим схематическое описание двух типичных САУ.

**Пример 1. Электромеханическая следящая система (ЭСС) [1.3, 1.6].** Объектом управления является вращающийся вал (рис. 1.5), нагруженный внешним моментом. Целью управления является обеспечение поворота вала на угол, близкий к углу поворота задающей оси, который может меняться заранее непредвиденным образом. При этом не допускается, чтобы на возможность поворота задающей оси существенно влияло наличие момента, противодействующего повороту вала (в противном случае можно было бы просто связать задающую ось с валом кинематической связью).

Для решения задачи управления строится автоматическая система с обратной связью. Электродвигатель передает на вал через редуктор управляющее воздействие — вращающий момент. Угол поворота вала измеряется с помощью датчика, вырабатывающего пропорциональное ему напряжение. Другой датчик \*\*) вырабатывает напряжение,

\*.) Несколько более подробное описание гидравлического двигателя (сервомотора) дано в гл. 4 § 5.

\*\*) Зачастую используется только один датчик, непосредственно вырабатывающий напряжение, пропорциональное разности углов поворота вала и задающей оси (относительному углу поворота).

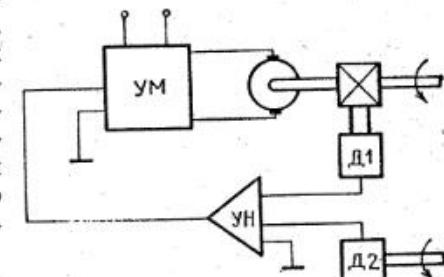


Рис. 1.5

пропорциональное углу поворота задающей оси. Разность между этими напряжениями характеризует ошибку управления, т. е. несоответствие между углами поворота вала и задающей оси. Она усиливается по уровню и подается через усилитель мощности на исполнительный двигатель. Функционирование системы построено на простом принципе управления с обратной связью по ошибке: если ошибка положительна (угол поворота оси больше угла поворота вала), то к валу прикладывается момент, ускоряющий его вращение в необходимую сторону, и вал начинает «догонять» задающую ось; если ошибка отрицательна, то к валу прикладывается момент противоположного знака, и вал тормозится.

В описанной простейшей схеме функции вычислительного устройства сводятся к вычитанию сигналов двух датчиков и умножению разности на постоянный коэффициент — коэффициент усиления усилителя напряжения. Как мы убедимся в дальнейшем (гл. 3, § 7), для обеспечения высокого качества управления (малости ошибки) приходится усложнять эти функции, однако, как правило, закон управления остается таким, что он легко реализуется с помощью простых аналоговых ВУ. □

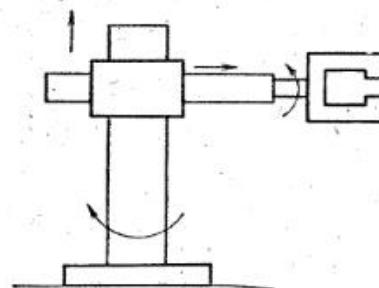


Рис. 1.6

рабочей зоны. На рис. 1.6 схематически представлена одна из возможных компоновок механизма, обеспечивающая перемещение внутри цилиндрической рабочей зоны. С помощью двигателей можно поворачивать вертикальную колонну, поднимать или опускать каретку с балкой — «рукой робота», выдвигать или вдвигать «руку», осуществлять поворот схватов.

В отличие от предшествующего примера здесь мы сталкиваемся с задачей управления сложным пространственным движением, причем это движение должно определяться перемещением (поступательным или вращательным) звеньев механизма относительно друг друга и неподвижного основания. Отсюда вытекает необходимость и целесообразность более сложной (и в принципиальном, и в техническом отношении) системы управления, использующей в качестве блока ПИ управляющую цифровую ЭВМ. Общую схему функционирования системы можно описать следующим образом. От оптических датчиков (системы «технического зрения робота») поступает информация о координатах и ориентации детали, которая

должна быть взята схватом робота. В памяти ЭВМ хранится информация об исходной пространственной ориентации звеньев манипуляционного механизма, а также его динамических свойствах и расположении возможных препятствий внутри рабочей зоны. С учетом этой информации по специальной программе в ЭВМ вычисляются требуемые перемещения и углы поворота по различным степеням подвижности механизма. Результаты вычислений с помощью ЦАП преобразуются в аналоговые электрические сигналы, передаваемые в блоки управления звеньями. Каждый из этих блоков может работать по той же схеме, что и описанная выше электромеханическая следящая система. Различие заключается лишь в том, что сигнал на требуемое изменение положения поступает не от датчика положения задающей оси, а от управляющей ЭВМ\*).

Описанная общая схема разнообразным образом варьируется при создании реальных промышленных роботов и может служить прототипом любых достаточно сложных САУ, где центральное вычислительное устройство осуществляет «командные» функции по отношению к более простым, локальным системам. □

#### § 4. Проектирование и теория

Наметим основные задачи, возникающие при проектировании систем автоматического управления.

а. Формулировка технического задания, в котором должно быть указано, какими процессами требуется управлять, каковы цели управления и в каких условиях должно осуществляться управление.

б. Выяснение возможностей воздействия на управляемые процессы и прогноз внешних возмущений.

в. Оценка требуемой мощности исполнительных устройств, выбор типа ИУ и источников питания.

г. Оценка возможностей получения текущей информации и выбор датчиков.

д. Построение законов управления (правил преобразования информации).

е. Выбор типа преобразователя информации.

ж. Программирование или схемная реализация блока ПИ, реализующего законы управления.

з. Компоновка системы в целом.

Подчеркнем, что в настоящее время проектирование самих технических средств все реже входит в непосредственный круг обязанностей инженера-проектировщика САУ. Обычно он ориентируется на серийно выпускаемые промышленностью блоки. Главная же его работа состоит в обеспечении взаимосвязи технических средств и в подчинении системы общим целям.

\* ) ЭСС, осуществляющие управление поступательно движущимися звеньями, отличается лишь кинематическими связями.

При этом совершенно особую роль играет задача построения законов управления, которая и является основной проблемой общей теории автоматического управления, изучаемой в данном курсе. Причина такого особого внимания заключается не только в важности задачи, но и в существовании общего пути ее решения. Этот путь заключается в использовании математического описания, *математической модели* как самого объекта, так и функциональных блоков системы управления, позволяющих прогнозировать поведение объекта, возможность достижения поставленных целей при различных внешних условиях. Более того, поскольку самые разнообразные реальные процессы могут быть описаны в рамках одних и тех же математических структур (алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений), общая теория может оперировать не с конкретными техническими описаниями, а с классами математических моделей. Это обстоятельство придает теории внешний облик математической дисциплины. Однако по своему содержанию и направленности теория автоматического управления — техническая наука.

Техническое содержание проявляется при выборе типа изучаемых общих математических моделей, но главным образом — при приложении и трактовке математических результатов.

Во-первых, при построении системы управления конкретным объектом необходимо исходить именно из его модели, которая хотя и выбирается как частный вариант общей модели, но, как правило, обладает специфическими особенностями.

Во-вторых, любая модель лишь приближенно отражает свойства реального объекта, позволяет лишь приближенно прогнозировать его реакцию на воздействия. Следовательно, важно проверять любые законы управления, формально получаемые с помощью модели, на то, не приведут ли такие даже малые неточности к существенному изменению управляемых процессов.

В-третьих, чисто математическое исследование может привести к результату, что не существует никакого закона управления, при котором удовлетворяются заданные технические условия. Инженер должен, однако, помнить, что этот вывод относителен: ведь расчет проводился при уже выбранном комплексе датчиков и исполнительных устройств. Изменение этого комплекса (использование новых датчиков и ИУ) может привести и к изменению полученных выводов.

Короче говоря, при технических приложениях исходными являются не уравнения, а реальный объект и реально используемые технические средства. Это обстоятельство неоднократно будет подчеркиваться в предстоящем курсе. Изучающий его должен обращать внимание не только на математические утверждения, но и на особенности их конкретного приложения. Примеры таких приложений не менее важны, чем теоремы!

## ГЛАВА 2

### ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### § 1. Описание элементов

**1.1. Уравнения элементов.** Объекты и системы управления состоят из элементов, имеющих различную природу. Описание каждого элемента обычно дается на языке соответствующей научной дисциплины (механики, электротехники, химической кинетики и т. д.). Для анализа их взаимодействия удобно перейти к единообразному, стандартному описанию. В инженерной практике наибольшее распространение получил следующий способ:

а) каждый реальный элемент рассматривается как устройство, *звено* системы, в котором осуществляется преобразование одного процесса, называемого *входным воздействием*, в другой, называемый *выходной реакцией*, или просто *преобразование «вход-выход»*;

б) взаимодействие между звеньями задается путем описания связей между их входами и выходами, определяющих *структур* системы.

Приступим к изучению свойств отдельных звеньев.

Универсальным языком теоретического естествознания, служащим для математического моделирования взаимосвязей процессов в природе и технике, является язык уравнений — алгебраических и, в особенности, дифференциальных. Введем *основное предположение*: для описания преобразования «вход-выход», осуществляемого любым звеном, может быть использовано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_0 y = \beta_m \frac{d^m v}{dt^m} + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}} + \dots + \beta_0 v, \quad (1.1)$$

где  $\alpha_0, \dots, \alpha_n; \beta_0, \dots, \beta_m$  — постоянные величины, *параметры* звена,  $n$  и  $m$  — целые числа,  $n \geq 0, m \geq 0$ , а для обозначения входа и выхода (независимо от их природы) применены символы  $v = v(t)$  и  $y = y(t)$ . Число  $n$  называется *порядком* уравнения (1.1) (порядком звена) \*).

\*). Запись (1.1) предполагает существование соответствующих производных функций  $v(t), y(t)$  в обычном или обобщенном (см. ниже) смысле.

Уравнение (1.1) удобно записывать в сокращенной, операторной форме [2.5].

Введем оператор дифференцирования  $D$ , обладающий тем свойством, что умножение на  $D$  эквивалентно дифференцированию по времени, т. е. для любой функции  $f(t)$ :

$$Df \triangleq \frac{df}{dt}.$$

Повторное умножение эквивалентно повторному дифференцированию

$$D(Df) \triangleq D^2f \triangleq \frac{d^2f}{dt^2},$$

и вообще для любого целого  $k \geq 0$

$$D^k f \triangleq \frac{d^k f}{dt^k}.$$

С использованием операторных обозначений уравнение (1.1) записывается в виде

$$\alpha_n D^n y + \alpha_{n-1} D^{n-1} y + \dots + \alpha_0 y = \beta_m D^m v + \beta_{m-1} D^{m-1} v + \dots + \beta_0 v \quad (1.2)$$

или, еще короче,

$$\alpha(D)y = \beta(D)v, \quad (1.3)$$

где введены многочлены от оператора дифференцирования

$$\alpha(D) \triangleq \alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \dots + \alpha_0, \quad (1.4)$$

$$\beta(D) \triangleq \beta_m D^m + \beta_{m-1} D^{m-1} + \dots + \beta_0.$$

Рассмотрим ряд простых примеров приведения описания различных физических элементов к стандартному.

**Пример 1.1.** Напряжение на входе усилителя (рис. 2.1) обычно обозначают  $u_{\text{вх}}(t)$ , напряжение на выходе —  $u_{\text{вых}}(t)$ , а связь между ними задают в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = k u_{\text{вх}}(t). \quad (1.5)$$

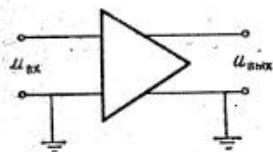


Рис. 2.1

В стандартных обозначениях полагаем

$$v(t) \triangleq u_{\text{вх}}(t), \quad y(t) \triangleq u_{\text{вых}}(t),$$

так что

$$y(t) = kv(t). \quad (1.6)$$

Это частный случай уравнения (1.1) при  $m = n = 0$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = k$ .  $\square$

**Пример 1.2.** Уравнение вращающегося вала обычно записывают в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = m(t), \quad (1.7)$$

где  $\omega(t)$  — угловая скорость,  $m(t)$  — момент действующих сил,  $J$  — момент инерции. Это уравнение определяет связь входного воздействия  $m(t)$  с выходом  $\omega(t)$ .

Полагая

$$v(t) \triangleq m(t), \quad y(t) \triangleq \omega(t), \quad J = \alpha_1,$$

можем переписать (1.7) в виде

$$\alpha_1 Dy(t) = v(t), \quad (1.8)$$

что соответствует (1.1) при  $n = 1$ ,  $m = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 1$ .

Если считать входным воздействием движущий момент  $m_d(t)$ , а момент сопротивления считать пропорциональным  $\omega(t)$ , то уравнение

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega(t) = m_d(t) \quad (1.9)$$

опишет связь «вход-выход» в форме (1.1) при  $v(t) = m_d(t)$ ,  $n = 1$ ,  $m = 0$ ,  $\alpha_1 = J$ ,  $\alpha_0 = b$ ,  $\beta_0 = 1$ .  $\square$

**Пример 1.3.** Рассмотрим традиционную модель теории колебаний: груз массы  $m$  связан с основанием с помощью пружины жесткости  $c$  и демпфера, создающего вязкое трение и характеризуемого коэффициентом  $b$  (рис. 2.2). Пусть входным воздействием является сила  $F(t)$ , приложенная к грузу, а выходом будем считать его перемещение  $y(t)$  относительно положения, в котором пружина не деформирована. Тогда уравнение движения, записываемое в традиционной форме, имеет вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy(t) = F(t), \quad (10.4)$$

а стандартная запись вида (1.2)

$$(\alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)y(t) = v(t) \quad (1.11)$$

получится, если положить

$$v(t) = F(t), \quad \alpha_0 = c, \quad \alpha_1 = b, \quad \alpha_2 = m,$$

причем  $n = 2$ ,  $m = 0$ ,  $\beta_0 = 1$ .

В рамках той же модели можно описать и другую ситуацию: пусть сила отсутствует, а входным воздействием является кинематическое перемещение основания, которое сразу обозначим  $v(t)$ . Тогда уравнение движения

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} (y - v) + c(y - v) = 0 \quad (1.12)$$

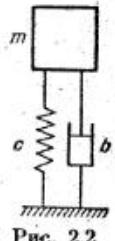


Рис. 2.2

переписывается в операторном виде (1.1)

$$(\alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) y(t) = (\beta_1 D + \beta_0) v(t), \quad (1.13)$$

где кроме ранее введенных обозначений параметров введены также  $\beta_0 = c$ ,  $\beta_1 = b$ .  $\square$

**1.2. Передаточные функции.** Наряду с операторной записью дифференциального уравнения (1.1) в виде (1.3) будем широко использовать еще более компактную:

$$y(t) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)} v(t) = H(D) v(t), \quad (1.14)$$

где  $H(D)$  называется *операторной передаточной функцией* (п. ф.) или *оператором звена*. Формально  $H(D)$  можно рассматривать как дробно-рациональную функцию от оператора  $D$ , отношение двух многочленов от  $D$ :

$$H(D) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)}, \quad (1.15)$$

которые условимся выписывать, не производя возможных сокращений. Запись (1.14) является лишь символической и не дает решения дифференциального уравнения (1.3) относительно выходной переменной  $y(t)$ , поскольку не определено, какой смысл имеет деление на операторный многочлен  $\alpha(D)$ .

Выяснить этот смысл помогают правила операционного исчисления, основанного на использовании преобразования Лапласа \*). Напомним, что преобразованием по Лапласу функции  $f(t)$  (ее  $\mathcal{L}$ -образом) называется функция  $F(p)$  комплексной переменной  $p$ , вычисляемая как интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \triangleq \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (1.16)$$

По заданной  $F(p)$  может быть однозначно восстановлена функция  $f(t)$ , называемая в этом случае оригиналом  $F(p)$  (прообразом), если  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Использование преобразования Лапласа для изучения дифференциальных уравнений основывается на простом утверждении:

$$\mathcal{L}\{Df(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} = pF(p), \quad (1.17)$$

если  $f(0) = 0$ . Из него сразу следует, что

$$\mathcal{L}\{D^k f(t)\} = p^k \mathcal{L}\{f(t)\} = p^k F(p), \quad k \geq 0, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}\{A(D)f(t)\} = A(p) \mathcal{L}\{f(t)\} = A(p)F(p) \quad (1.19)$$

для любого операторного многочлена степени  $k$ , если равны нулю значения  $f(t)$  и ее производных вплоть до  $(k-1)$ -й \*\*).

\* ) Далее предполагается, что читатель знаком с операционным исчислением. В противном случае можно получить необходимый минимум сведений из Приложения 1.

\*\*) Соответствующие формулы для ненулевых значений более громоздки и даны в Приложении 1.

Применяя правило (1.19) к уравнению (1.3), получим

$$\alpha(p) Y(p) = \beta(p) V(p), \quad (1.20)$$

где

$$Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}, \quad V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\};$$

при этом предполагается, что равны нулю  $y(0)$ ,  $v(0)$  и начальные значения производных  $y(t)$ ,  $v(t)$  вплоть до  $(n-1)$ -й и  $(m-1)$ -й соответственно. Подчеркнем, что  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  — обычные, а не операторные многочлены, функции комплексной переменной  $p$ . Поэтому операция деления на  $\alpha(p)$  имеет обычный смысл, так что

$$Y(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} V(p). \quad (1.21)$$

Учитывая определение (1.15), приходим к основной формуле

$$Y(p) = H(p) V(p). \quad (1.22)$$

**Вывод:**  $\mathcal{L}$ -образы входа и выхода при нулевых начальных условиях связаны между собой коэффициентом, зависящим от переменной  $p$ . Этот коэффициент называется *комплексной передаточной функцией* (п. ф.) преобразования «вход-выход» и находится заменой оператора дифференцирования  $D$  в операторной п. ф.  $H(D)$  на комплексную переменную  $p$ .

**1.3. Весовые функции.** Вторым замечательным свойством преобразования Лапласа является следующее утверждение (теорема о свертке):

$$H(p) V(p) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t h(\tau) v(t-\tau) d\tau \right\}, \quad (1.23)$$

где функция  $h(t)$ ,  $t \geq 0$ , является оригиналом п. ф.  $H(p)$ . Если  $h(t)$  вычислена, то из (1.22), (1.23) и однозначности восстановления оригинала  $y(t)$  по ее  $\mathcal{L}$ -образу  $Y(p)$  следует

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) v(t-\tau) d\tau. \quad (1.24)$$

Функция  $h(t)$  называется *весовой функцией* преобразования «вход-выход», поскольку с ее помощью взвешиваются значения входной переменной в «прошлом», в моменты  $t-\tau$ , для того чтобы, суммируясь, сформировать значение выхода в текущий момент  $t$ . Формула (1.24) дает явное выражение связи входного воздействия с выходной реакцией, которая формально записывалась в виде

$$y(t) = H(D) v(t).$$

Иначе говоря, (1.24) расшифровывает смысл умножения функции  $v(t)$  на дробно-рациональную функцию  $H(D)$  от оператора дифференцирования  $D$  (при принятом выше соглашении о нулевых начальных значениях!). С помощью (1.24) несложно рассчитать реакцию на любое заданное входное воздействие.

Особо выделим случай, когда вход изменяется от нулевого начального значения скачком на 1:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Такую разрывную функцию принято называть *функцией единичного скачка* (функцией Хевисайда) и обозначать  $\pi(t)$ .

Таблица 1.1

№	Наименование	Уравнение	Передаточная функция
1	Идеальный усилитель	$y(t) = kv(t)$	$\frac{k}{1}$
2	Интегратор	$Dy(t) = v(t)$	$\frac{1}{p}$
3	Апериодическое звено	$(TD + 1)y(t) = v(t), T > 0$	$\frac{1}{Tp + 1}$
4	Колебательное звено	$(T^2D^2 + 2\xi TD + 1)y(t) = v(t), T > 0, 0 \leq \xi < 1$	$\frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$

№	Весовая функция $h(t), t \geq 0$	Переходная функция $\pi(t), t \geq 0$	Явная связь «вход-выход»
1	$k\delta(t)$	$k\pi(t)$	$y(t) = kv(t)$
2	$\pi(t)$	$t$	$y(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$
3	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} v(t - \tau) d\tau$
4	$\frac{1}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{t}{T}} \times$ $\times \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t$	$1 - e^{-\frac{t}{T}} \left[ \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + y(t) = \frac{1}{T \sqrt{1-\xi^2}} \times$ $\times \left[ \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right] - \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \tau \times$ $\times v(t - \tau) d\tau \right]$	

Реакция звена на воздействие (1.25) называется его *переходной функцией  $\pi(t)$* . В силу (1.24) она является интегралом от весовой функции

$$\pi(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad (1.26)$$

так что

$$D\pi(t) = h(t). \quad (1.27)$$

и

$$H(p) \triangleq \mathcal{L}\{\pi(t)\} = \frac{1}{p} H(p). \quad (1.28)$$

Подведем итоги: звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)v(t),$$

может быть также описано путем задания одной из четырех характеристик:

$H(D) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)}$  — операторная передаточная функция (п. ф.),

$H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$  — комплексная п. ф. \*),

$h(t)$  — весовая функция,

$\pi(t)$  — переходная функция,

любая из которых полностью характеризует функционирование звена как преобразования «вход-выход» при нулевых начальных условиях.

**1.4. Типовые звенья.** В табл. 1.1 приведены характеристики для ряда звеньев, которые принято считать типовыми и для которых имеются специальные традиционные наименования.

Происхождение наименований ясно из вида весовой функции и явного выражения связи «вход-выход», записанного согласно (1.24) (слово «апериодическое» эквивалентно слову «неколебательное»). Нуждается в комментарии лишь описание простейшего звена — идеального усилителя. Во-первых, этот термин используется при любых  $k$ , а не обязательно при  $k > 1$ , как следовало бы по прямому смыслу слова «усилитель». Во-вторых, соответствующая весовая функция не является обычной, она именуется *дельта-функцией Дирака*, или короче,  $\delta$ -функцией и относится к классу так называемых обобщенных функций. Строгая теория таких функций сложна, но упрощенно можно представить  $\delta$ -функцию как предел при  $\Delta \rightarrow 0$  прямоугольного импульса (рис. 2.3) шириной  $\Delta$  и высотой  $1/\Delta$ . Поэтому ее часто называют еще и *идеальным импульсом*.

Согласно общей формуле (1.24) для идеального усилителя при  $k = 1$  имеем

$$y(t) = \int_0^t \delta(\tau) v(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.29)$$

\* Зачастую эпитеты «операторная» или «комплексная» в дальнейшем будут опускаться, если из вида формулы ясно, о какой п. ф. идет речь.

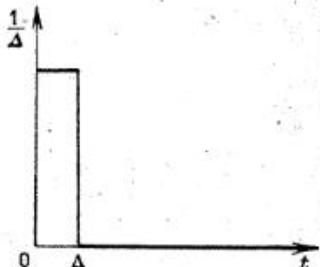


Рис. 2.3

С другой стороны, такой «усилитель» просто осуществляет тождественное преобразование входа в выход

$$y(t) = v(t).$$

Следовательно, верна формула

$$v(t) = \int_0^t \delta(t-\tau) v(\tau) d\tau, \quad (1.30)$$

которую можно рассматривать как строгое определение  $\delta$ -функции. Можно запомнить, что  $\delta$ -функция есть весовая функция тождественного преобразования \*).

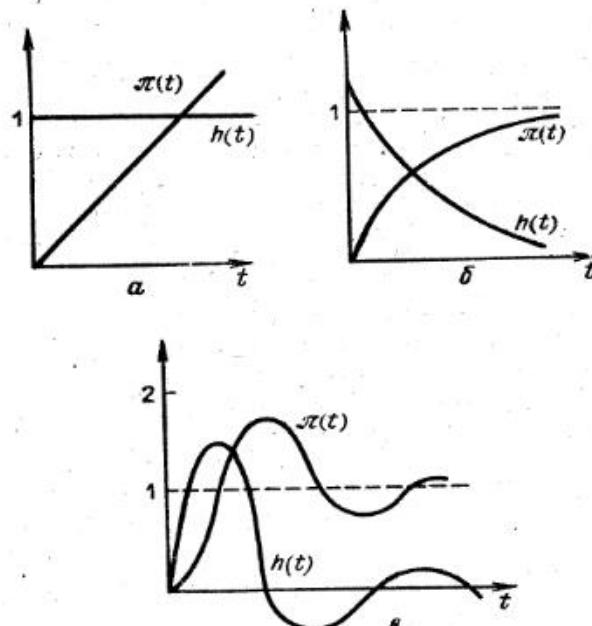


Рис. 2.4

Вычисление остальных весовых и передаточных функций с помощью таблицы, данной в Приложении 1, является полезным упражнением. Типичные графики даны на рис. 2.4, а, б, в.

\* ) Математически нестрогим является рассмотрение исходного уравнения (1.1) без дополнительных оговорок, если  $v(t)$  не является  $m$  раз дифференцируемой функцией. Формальных неприятностей можно избежать, если считать, что фигурирующие в (1.1) производные должны пониматься как обобщенные в смысле теории обобщенных функций (детальное обсуждение этих проблем применительно к рассматриваемым задачам дано в [2.4]).

## § 2. Описание систем

**2.1. Структура и структурная схема.** Перейдем к описанию систем, состоящих из взаимосвязанных звеньев. Для единства вход каждого  $i$ -го звена будем обозначать  $v_i(t)$ , выход  $y_i(t)$  и считать, что для него задано описание в виде дифференциального уравнения

$$\alpha_i(D) y_i(t) = \beta_i(D) v_i(t) \quad (2.1)$$

или в виде формального операторного соотношения

$$y_i(t) = H_i(D) v_i(t), \quad (2.2)$$

где

$$H_i(D) = \frac{\beta_i(D)}{\alpha_i(D)}.$$

Взаимодействие между звеньями будем характеризовать соответствием между их входами и выходами. Вход одного звена может совпадать с выходом другого, например

$$v_2(t) = y_1(t),$$

или являться суммой (разностью) выходов нескольких других звеньев, а также внешних для системы в целом входных воздействий, например

$$v_4(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) + \bar{v}_4(t),$$

где  $\bar{v}_4(t)$  обозначает внешнее воздействие, приложенное к 4-му звену. В общем случае для  $i$ -го звена

$$v_i(t) = \sum_j \gamma_{ij} y_j(t) + \bar{v}_i(t), \quad (2.3)$$

где  $\gamma_{ij}$  — числа, равные 0, если связь входа  $i$ -го звена с выходом  $j$ -го отсутствует, равные 1, если связь положительна, и  $-1$ , если она отрицательна.

Уравнения звеньев (2.1) и уравнения связей (2.3) дают полное описание системы.

Если «плотность» связей не слишком велика (мало число ненулевых  $\gamma_{ij}$ ), то удобно использовать наглядное описание с помощью структурных схем \*). На схеме каждое звено изображается прямоугольником, входное воздействие — стрелкой, направленной в него, выходное — стрелкой, направленной от него (рис. 2.5, а). Внутри прямоугольника ставят либо номер звена (если хотят отобразить только структуру связей), либо соответствующую ему п. ф. (если желательно дать полное описание). Операция суммирования изображается кружком, причем при отрицательной связи около стрелки, изображающей вычитаемое, ставится знак минус (рис. 2.5, б).

\* ) Читатели, знакомые с теорией графов, легко узнают в структурных схемах вариант стандартного языка этой теории.

Если одно и то же воздействие прилагается к разным звеньям, то изображающая его стрелка может разветвляться (рис. 2.5, в). Следует отчетливо сознавать, что любая структурная схема, как бы запутана она ни была, отражает простейшие алгебраические связи типа (2.3).

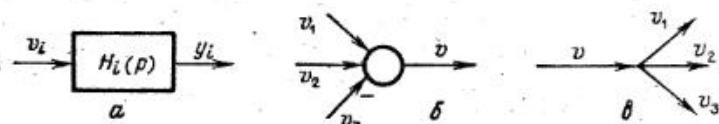


Рис. 2.5

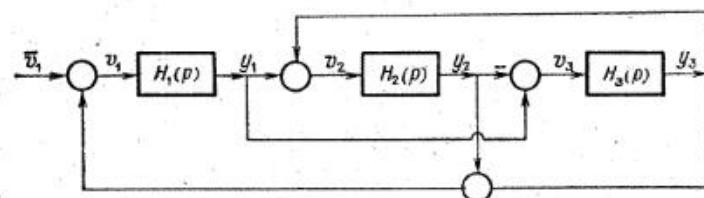


Рис. 2.6

**Пример 2.1.** Структурная схема, представленная на рис. 2.6, эквивалентна следующим уравнениям структурных связей:

$$v_1 = y_2 + y_3 + \bar{v}_1, \quad v_2 = y_1 + y_3, \quad v_3 = y_1 - y_2. \quad (2.4)$$

**Пример 2.2.** Дадим формализованное структурное описание системы, состоящей из усилителя, двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и вала нагрузки, связанного с ротором двигателя через редуктор. В традиционном для электромеханики виде система изображена на рис. 2.7. Ее можно рассматривать как

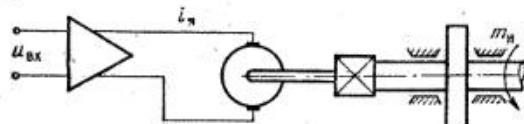


Рис. 2.7

состоящую из пяти физических элементов, один из которых имеет «электрическую» природу (усилитель), два — «механическую» (редуктор и вал нагрузки), а один — смешанную «электромеханическую» (двигатель). Впрочем, в нем также можно выделить электрическую часть (цепь питания, включающую обмотку ротора и называемую также цепью якоря) и механическую (ротор как вращающееся тело).

Между элементами имеются взаимосвязи:

а) выходное напряжение усилителя является напряжением питания двигателя  $u_d(t)$ , а выходное сопротивление усилителя включено последовательно с сопротивлением обмотки ротора;

б) ток цепи якоря  $i_a(t)$  вызывает движущий момент  $m_d(t)$  электромагнитных сил, приложенных к ротору;

в) при вращении ротора в магнитном поле в его обмотке наводится электродвижущая сила  $e_c(t)$  (противо-ЭДС);

г) через редуктор передается момент  $m_{дн}$  на вал нагрузки и обратно — момент противодействия  $m_{пп}$ .

Запишем первоначально уравнения отдельных элементов, используя традиционные физические обозначения и обычную идеализацию.

Уравнение усилителя, связывающее входное и выходное напряжение:

$$u_{вых} = k_y u_{вх}. \quad (2.5)$$

Уравнение цепи якоря (с учетом индуктивности цепи и противо-ЭДС):

$$L_n D i_a + R_n i_a = u_d - e_c, \quad (2.6)$$

при этом в  $R_n$  включено выходное сопротивление усилителя.

Уравнение движения ротора (без учета механического сопротивления):

$$J_d D \omega_d = m_d - m_{пп}, \quad \omega_d = D \varphi_d, \quad (2.7)$$

где  $\varphi_d$  — угол поворота ротора двигателя,  $m_{пп}$  — момент противодействия.

Уравнение вала нагрузки:

$$J_n D \omega = m_{дн} - m_{в}, \quad D \varphi = \omega \quad (2.8)$$

( $\varphi$  — угол поворота вала,  $\omega$  — его угловая скорость,  $m_{дн}$  — движущий момент на валу).

Уравнение редуктора: запишем в двух вариантах:

а) для абсолютно жесткого редуктора

$$\Phi = \frac{1}{r} \varphi_d, \quad m_{дн} = r m_{пп}, \quad (2.9)$$

где  $r$  — коэффициент редукции;

б) для редуктора, обладающего конечной жесткостью  $c^*$ ,

$$m_{дн} = c \left( \frac{1}{r} \varphi_d - \varphi \right), \quad m_{пп} = \frac{1}{r} m_{дн}. \quad (2.10)$$

Кроме того, с учетом указанных физических взаимодействий имеем

$$u_d = u_{вых}, \quad (2.11)$$

$$e_c = c_e \omega_d, \quad (2.12)$$

$$m_d = c_m i_a, \quad (2.13)$$

\* Жесткость приведена к выходной ступени,

где  $c_e$ ,  $c_m$  — константы (при постоянном токе в обмотке возбуждения, создающей магнитное поле).

Структурная схема, соответствующая соотношениям (2.5) — (2.8) и (2.10) — (2.13), представлена на рис. 2.8, а.

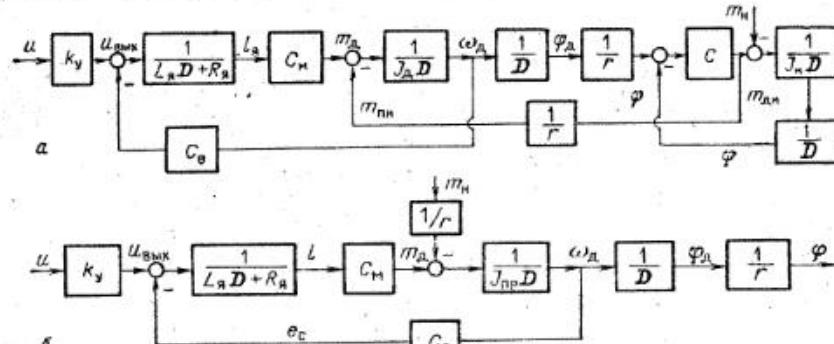


Рис. 2.8

Если же принято описание редуктора как абсолютно жесткого, т. е. используются соотношения (2.9) вместо (2.10), то невозможно непосредственное составление структурной схемы. Предварительно из уравнений (2.7) — (2.9) следует исключить неизвестные  $m_{nh}$ ,  $m_{dn}$ , записав уравнение движения ротора, редуктора и вала как одного физического элемента — механической системы с одной степенью свободы

$$J_{np}D\omega = rm_d - m_n, \quad D\varphi = \omega, \quad \varphi = \frac{1}{r}\Phi_d, \quad (2.14)$$

где  $J_{np} = r^2J_d^2 + J_n$  — приведенный момент инерции. Структурная схема, соответствующая (2.5), (2.6), (2.11) — (2.14), показана на рис. 2.8, б.  $\square$

Существенно отметить, что представленные на структурной схеме звенья не обязательно сопоставляются с каким-либо одним физическим элементом: один элемент может быть представлен многими звеньями, а часть звеньев отражает физические взаимодействия между элементами, отличающиеся от структурных связей между звеньями.

*Структурная схема — это отражение математического описания системы, лишь частично сохраняющее «следы» исходного разделения на физические элементы.*

Описание и структурная схема могут быть различными для одной и той же системы.

**2.2. Соотношения «вход-выход».** При изучении систем зачастую представляет интерес только знание связи между внешними входами и выходами звеньев. Эти связи проще всего устанавливаются,

если от исходных уравнений (2.1), (2.3) перейти к алгебраическим уравнениям, связывающим  $\mathcal{L}$ -образы переменных. При нулевых начальных условиях получаем:

$$\alpha_i(p)Y_i(p) = \beta_i(p)V_i(p), \quad (2.15)$$

$$V_i(p) = \sum_j \gamma_{ij}Y_j(p) + \bar{V}_j(p). \quad (2.16)$$

Это система линейных алгебраических уравнений, с помощью которой можно любую неизвестную  $Y_i(p)$  выразить через  $\mathcal{L}$ -образы внешних входов  $\bar{V}_j(p)$ .

Продемонстрируем сначала процедуру исключения на примере.

**Пример 2.3.** Вернемся к системе, описанной в П.2.2, и попытаемся найти явную зависимость угла поворота вала  $\varphi(t)$  от внешних входов  $U_{ex}(t)$ ,  $m_n(t)$ . Перепишем уравнения в  $\mathcal{L}$ -образах (используя для них соответствующие «большие» буквы и для простоты опуская аргумент  $p$ ). Получаем из (2.6), (2.12), (2.7)

$$(L_n p + R_n)I_n = k_y U_{ex} - c_e p \Phi_d, \quad (2.17)$$

а из (2.7), (2.8), (2.13)

$$J_d p^2 \Phi_d = c_m I_n - \frac{1}{r} c \left( \frac{1}{r} \Phi_d - \Phi \right), \quad (2.18)$$

$$J_n p^2 \Phi = c \left( \frac{1}{r} \Phi_d - \Phi \right) - M_n. \quad (2.19)$$

Исключая сначала  $I_n$  с помощью (2.17), приходим к системе двух уравнений относительно  $\Phi_d$ ,  $\Phi$ :

$$J_d p^2 \Phi_d = \frac{c_n}{L_n p + R_n} [k_y U_{ex} - c_e p \Phi_d] - \frac{1}{r} c \left( \frac{1}{r} \Phi_d - \Phi \right), \quad (2.20)$$

$$J_n p^2 \Phi = c \left( \frac{1}{r} \Phi_d - \Phi \right) - M_n,$$

откуда находим окончательное выражение в виде

$$\Phi = H_{u\Phi}(p)U_{ex} + H_{m\Phi}(p)M_n, \quad (2.21)$$

где введены п. ф.  $H_{u\Phi}(p)$ ,  $H_{m\Phi}(p)$  от внешних входов  $U_{ex}$ ,  $M_n$  к выходу  $\Phi$ . Пропуская выкладки, приведем для них формулы в виде

$$H_{u\Phi}(p) = \frac{k_c}{p [T_{m1} p (T_0^2 p^2 + 1) (T_0 p + 1) + T_{m2} (T_0 p + 1) + T_0^2 p^2 + 1]}, \quad (2.22)$$

$$H_{m\Phi}(p) = \frac{-k_m [(T_0^2 b p^2 + 1)(T_0 p + 1) + T_0^2 T_{m2}^{-1} p]}{p [T_{m1} p (T_0^2 p^2 + 1) (T_0 p + 1) + T_{m2} p (T_0 p + 1) + T_0^2 p^2 + 1]}, \quad (2.23)$$

где введены обозначения

$$T_{M1} = \frac{J_R R_a}{c_e c_m r^2}, \quad T_{M2} = \frac{J_R R_a}{c_e c_m r^2}, \quad T_a = \frac{L_a}{R_a}, \quad T_0^2 = \frac{J_R}{c},$$

$$k_M = \frac{R_a}{c_e c_m r^2}, \quad k_c = \frac{k_y}{r c_e}, \quad b = \frac{T_{M1}}{T_{M2}}.$$

Если пренебречь неустойчивостью кинематической передачи ( $c \rightarrow \infty$ ,  $T_a \rightarrow 0$ ), то придет к упрощенным выражениям:

$$H_{u\varphi}(p) = \frac{k_c}{p[T_{M1}(T_a p + 1) + 1]}, \quad H_{m\varphi}(p) = \frac{-k_M(T_a p + 1)}{p[T_{M1}(T_a p + 1) + 1]}, \quad (2.24)$$

где  $T_M = T_{M1} + T_{M2}$ .

Если, более того, пренебречь самоиндукцией якорной цепи ( $L_a \rightarrow 0$ ), то получим передаточную функцию совсем простого вида

$$H_{u\varphi}(p) = \frac{k_c}{p(T_M p + 1)}, \quad H_{m\varphi}(p) = -\frac{k_M}{p(T_M p + 1)}. \quad (2.25)$$

Отметим также, что формуле (2.21) соответствует простая структурная схема, представленная на рис. 2.9.  $\square$

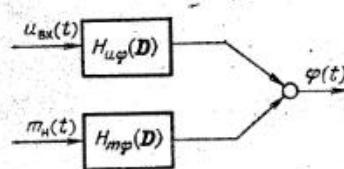


Рис. 2.9

В примере мы не переходим от «естественных» обозначений входов и выходов к единообразным. Для более сложных систем это следует сделать, а для исключения неизвестных использовать стандартные формулы, вытекающие из правила Крамера для решения систем алгебраических уравнений.

Запишем их в общем виде. Пусть общее число звеньев равно  $N$ . Подставив  $V_i$  из (2.16) в (2.15), получим систему  $N$  уравнений

$$\alpha_i(p) Y_i = \beta_i(p) \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} Y_j + \beta_i(p) \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.26)$$

или

$$\sum_{i=1}^N L_{ij}(p) Y_i = \beta_i(p) \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.27)$$

где введены обозначения

$$L_{ij}(p) = \begin{cases} \alpha_i(p) - \beta_i(p) \gamma_{ii}, & i = j, \\ -\beta_i(p) \gamma_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.28)$$

Применяя к (2.27) правило Крамера, находим:

$$Y_i(p) = \frac{\sum_{j=1}^N M_{ij}(p) \beta_j(p) \bar{V}_j(p)}{\Delta(p)}, \quad (2.29)$$

где  $\Delta(p)$  — определитель системы \*),

$$\Delta(p) = \det \begin{Bmatrix} L_{11}(p), & L_{12}(p), & \dots, & L_{1N}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{N1}(p), & L_{N2}(p), & \dots, & L_{NN}(p) \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

а  $M_{ij}(p)$  — алгебраическое дополнение  $j$ -го элемента  $i$ -го столбца.  
Пусть

$$H_{ij}(p) \triangleq \frac{1}{\Delta(p)} M_{ij}(p) \beta_j(p); \quad (2.31)$$

тогда (2.29) запишется в виде

$$Y_i(p) = \sum_{j=1}^N H_{ij}(p) \bar{V}_j(p). \quad (2.32)$$

Функции  $H_{ij}(p)$  естественно называть п. ф. от  $j$ -го внешнего входа к  $i$ -му выходу. От (2.32) с использованием теоремы о свертке можно перейти к явному соотношению

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t h_{ij}(\tau) v_j(t-\tau) d\tau, \quad (2.33)$$

где  $h_{ij}(\tau)$  — весовые функции, соответствующие  $H_{ij}(p)$ . Формула (2.33) выражает *принцип суперпозиции* (наложения): реакция линейной системы по любому выходу является суммой реакций на каждое из внешних воздействий по отдельности. В П.2.3 мы убедились, в частности, что изменение угла поворота вала является суммой изменений (реакций), вызванных двумя внешними воздействиями — входным напряжением и моментом нагрузки \*\*). Все п. ф.  $H_{ij}(p)$  являются дробно-рациональными функциями, отношениями двух многочленов, причем многочлен в знаменателе  $\Delta(p)$  — один и тот же для всех  $H_{ij}(p)$ . Его принято называть *характеристическим многочленом системы*. Подчеркнем, что знаменатели являются одинаковыми и совпадают с  $\Delta(p)$ , только если при вычислении всех  $H_{ij}(p)$  не производилось *сокращение общих сомножителей* в числителе и знаменателе.

В ряде практических случаев представляет интерес только один из выходов или какая-либо одна комбинация выходов (сумма, разность), рассматриваемая как *внешний выход системы*  $\bar{y}(t)$ . Очевидно,

\* ) Всюду далее предполагается, что  $\Delta(p)$  не равен тождественно нулю.

\*\*) В качестве упражнения полезно получить формулу (2.21) общим методом.

видно, что для  $\mathcal{L}$ -образа общего выхода можно записать соотношение вида

$$\bar{Y}(p) = \sum_{j=1}^N H_j(p) \bar{V}_j(p), \quad (2.34)$$

где  $H_j(p)$  — п. ф. преобразование от каждого внешнего входа к внешнему выходу. Также очевидно, что все  $H_j(p)$  имеют одинаковый знаменатель, совпадающий с характеристическим многочленом, если не произошло сокращение.

Обозначим через  $\bar{\beta}_j(p)$  числители  $H_j(p)$ . Тогда (2.34) перепишется в виде:

$$\Delta(p) \bar{Y}(p) = \sum_j \bar{\beta}_j(p) \bar{V}_j(p). \quad (2.35)$$

От этого соотношения, связывающего  $\mathcal{L}$ -образы, естественно переходит к дифференциальному уравнению в операторной форме <sup>\*)</sup>

$$\Delta(D) \bar{y}(t) = \sum_j \bar{\beta}_j(D) v_j(t). \quad (2.36)$$

Приведем простой, но поучительный пример, демонстрирующий особенности такого перехода от исходного описания к одному дифференциальному уравнению.

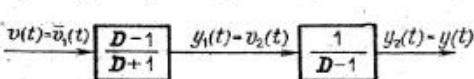


Рис. 2.40

состоящая из двух звеньев, описываемых уравнениями

$$(D+1)y_1(t) = (D-1)v_1(t), \quad (D-1)y_2(t) = v_2(t), \quad (2.37)$$

а связь между ними задана условием

$$v_2(t) = y_1(t). \quad (2.38)$$

Будем считать  $v_1(t)$  внешним входом системы,  $v_1 = \bar{v}$ , а  $y_2(t) = \bar{y}$  — внешним выходом. Переходя к  $\mathcal{L}$ -образам и последовательно исключая «внутренние» переменные, получим

$$\bar{Y}(p) = Y_2(p) = \frac{1}{p-1} V_2(p) = \frac{1}{p-1} Y_1(p) = \frac{p-1}{(p-1)(p+1)} V_1(p),$$

так что

$$\bar{Y}(p) = \frac{1}{p+1} \bar{V}(p).$$

Казалось бы, что можно теперь записать и дифференциальное уравнение

$$(D+1)\bar{y}(t) = \bar{v}(t), \quad (2.39)$$

<sup>\*)</sup> Обоснование дано в [2.5].

однако это неверно! В ходе выкладок было произведено сокращение сомножителя  $(p-1)$ , и знаменатель п. ф. «внешний вход — внешний выход» не совпадает с характеристическим многочленом, который равен

$$\Delta(p) = (p-1)(p+1).$$

Правильное уравнение, составленное согласно общему правилу (2.36), имеет вид

$$(D^2 - 1)y(t) = (D - 1)v(t). \quad (2.40)$$

Оно 2-го, а не 1-го порядка, и, как мы далее убедимся, его решение при *ненулевых* начальных условиях резко отличается от решения уравнения (2.39).  $\square$

**2.3. Структурные представления.** Для системы с одним внешним входом и одним внешним выходом описанная выше процедура может быть интерпретирована как способ «свертывания» сложной системы в одно звено с эквивалентными свойствами. Интересна и обратная процедура — переход от описания одного звена в виде

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)v(t), \quad (2.41)$$

где  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$  — произвольные многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно, к эквивалентной системе, состоящей только из простых типовых звеньев.

**Теорема 2.1.** Если выполнено условие строгой реализуемости

$$n \geq m, \quad (2.42)$$

то звено, описываемое уравнением (2.41), эквивалентно системе, состоящей только из звеньев типа идеальных усилителей и интеграторов и имеющей внешний вход  $v$  и внешний выход  $y$ .

**Доказательство.** Перепишем (2.41) в виде

$$\alpha_n D^n y + \alpha_{n-1} D^{n-1} y + \dots + \alpha_0 y = \beta_n D^n v + \beta_{n-1} D^{n-1} v + \dots + \beta_0 v, \quad (2.43)$$

где  $\beta_k = 0$  при  $k = n-m+1, \dots, n$ , если  $m < n$ . Без ограничения общности можно всегда считать  $\alpha_n = 1$  (в противном случае на этот коэффициент можно предварительно разделить обе части уравнения).

Рассмотрим теперь систему  $n$  уравнений

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_2 + b_1 v, \\ Dx_2 &= x_3 + b_2 v, \\ &\vdots \\ Dx_{n-1} &= x_n + b_{n-1} v, \\ Dx_n &= -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \dots - \alpha_{n-2} x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n + b_n v \end{aligned} \quad (2.44)$$

и покажем, что если  $x_1, \dots, x_n$  являются решениями этой системы, то

$$y = x_1 + \beta_n v \quad (2.45)$$

совпадает с решением уравнения (2.43), при соответствующем подборе коэффициентов  $b_1, \dots, b_n$ .

коэффициентов  $b_1, \dots, b_n$  и начальных условий. Из (2.44) имеем последовательно:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_n v, \\ x_2 &= Dx_1 - b_1 v = Dy - (b_1 v + \beta_n Dv), \\ x_3 &= Dx_2 - b_2 v = D^2y - (b_2 v + b_1 Dv + \beta_n D^2v), \\ &\dots \\ x_n &= Dx_{n-1} - b_{n-1} v = \dots = D^{n-1}y - (b_{n-1} v + \dots + b_1 D^{n-2}v + \beta_n D^{n-1}v). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Подставив эти значения в последнее уравнение системы (2.46), получим

$$\begin{aligned} D^n y - (b_{n-1} D + \dots + b_1 D^{n-1} + \beta_n D^n)v &= -\alpha_0 y - \alpha_1 Dy - \dots - \alpha_{n-1} D^{n-1}y + \\ &+ \alpha_0 \beta_n v + \alpha_1 (b_1 + \beta_n D)v + \dots + \alpha_{n-1} (b_{n-1} + \dots + b_1 D^{n-2} + \beta_n D^{n-1})v. \end{aligned}$$

Очевидно, что оно совпадает с выражением (2.43), если коэффициенты  $b_1, \dots, b_n$

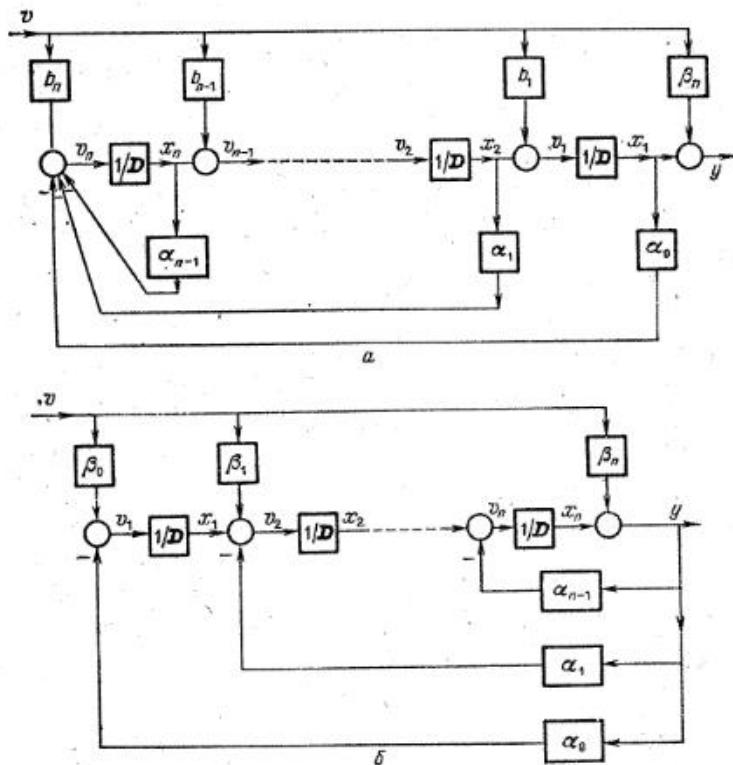


Рис. 2.11

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n, \\ \alpha_{n-1} b_1 + b_2 &= \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \beta_n, \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + b_n &= \beta_0 - \alpha_0 \beta_n, \end{aligned} \quad (2.47)$$

из которой все они легко вычисляются последовательно. Если начальные значения  $y, v$  и их производных нулевые, то в силу (2.46) и начальные значения переменных  $x_1, \dots, x_n$  также нулевые. В противном случае они могут быть вычислены по явным формулам (2.46). Таким образом, доказана возможность рассматривать вместо исходного описания звена эквивалентное ему описание (2.44), (2.45). Однако последнее может быть представлено в виде

$$Dx_k = v_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.48)$$

где новые переменные  $v_k$  подчиняются условиям

$$\begin{aligned} v_k &= x_{k+1} + b_k v, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ v_n &= -\alpha_0 x_1 - \dots - \alpha_{n-1} x_n + b_n v, \\ y &= x_1 + \beta_n v. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Теперь уравнение (2.43) можно трактовать как уравнения  $n$  одинаковых идеальных интегрирующих звеньев с входами  $v_k$  и выходами  $x_k$ , а (2.49) — как уравнения связей, частично осуществляемых через идеальные усилители. Таким образом, доказательство завершено. Структурная схема системы представлена на рис. 2.11, а, где использованы коэффициенты  $b_1, \dots, b_n$ , вычисляемые по уравнениям (2.47). ■

Подчеркнем также, что это представление не единственно возможное. В частности, на рис. 2.11, б представлена структурная схема, состоящая только из интеграторов и усилителей, которая также эквивалентна исходному описанию (2.41). Проверка этого утверждения может быть полезным упражнением по методу исключения.

#### 2.4. Электронная модель (аналоговый интегратор).

Рассмотрим блок, состоящий из электронного усилителя, резисторов и конденсаторов, электрическая схема которого представлена на рис. 2.12. Выясним связь между напряжениями  $u_1, u_2, \dots, u_n$  и напряжением  $u_b$  на выходе усилителя. Для этого составим уравнения цепей в силу законов Кирхгофа — Ома. В операторной записи они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_h} (u_k - u_b) &= i_k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \left( \frac{1}{R_0} + C_0 D \right) (u - u_b) &= i_b, \quad i_b = i_0 + i_1 + \dots + i_n = \frac{1}{R_b} u_b, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где через  $R_b$  обозначено входное сопротивление усилителя. Кроме того, примем, что

$$u = -k_y u_b, \quad (2.51)$$

где  $k_y$  — коэффициент усиления усилителя,  $k_y > 0$ .

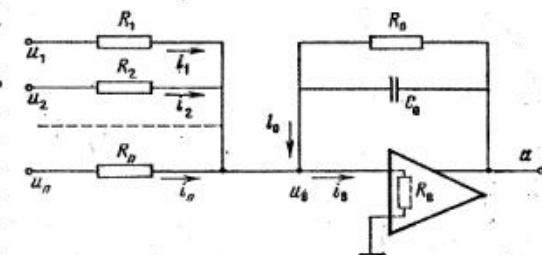


Рис. 2.12

После исключения «внутренних» переменных  $i_0, \dots, i_n, u_b$  получим

$$\left[ \frac{1}{R_0} + C_0 D + \frac{1}{k_y} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_b} + C_0 D \right) \right] u = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} u_k. \quad (2.52)$$

Предположим далее, что коэффициент  $k_y$  очень велик и можно пренебречь \*) слагаемыми порядка  $k_y^{-1}$ . Тогда (2.52) переписываеться в простом виде:

$$\left( \frac{1}{R_0} + C_0 D \right) u = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} u_k. \quad (2.53)$$

Таким образом, данный электронный блок может быть рассмотрен как система, преобразующая входы  $u_1, u_2, \dots, u_n$  в выход  $u$  согласно уравнению (2.53). Выделим частные случаи этого преобразования.

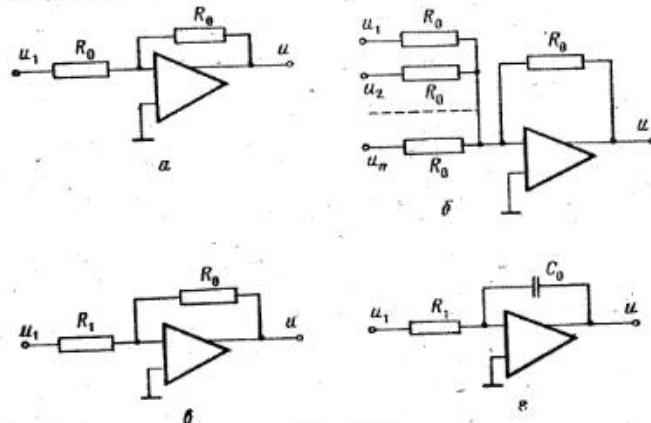


Рис. 2.13

а. Пусть  $n = 1$  (один вход),  $C_0 = 0$ ,  $R_1 = R_0$  (рис. 2.13, а). Тогда

$$u = -u_1$$

(операция инвертирования, изменения знака).

б. Пусть  $C_0 = 0$ ,  $R_k = R_0$ ,  $k = 1, \dots, n$  (рис. 2.13, б). Тогда

$$u = - \sum_{k=1}^n u_k$$

(суммирование с инвертированием).

в. Пусть  $n = 1$ ,  $C_0 = 0$ ,  $R_1 \neq R_0$  (рис. 2.13, в). Тогда

$$u = -k_1 u_1, \quad k_1 = R_0 R_1^{-1} > 0$$

(умножение на постоянный коэффициент и инвертирование).

\*) Обоснование такого пренебрежения дается ниже (§ 5 и гл. 3).

г. Пусть  $n = 1$ ,  $R_0^{-1} = 0$  (рис. 2.13, г). Тогда

$$u = -\frac{1}{T D} u_1, \quad T = C_0 R_1 > 0$$

(операция интегрирования с умножением и инвертированием).

Таким образом, если имеются усилители с очень большим коэффициентом усиления, называемые *операционными*, то можно создать блоки, производящие ряд простых типовых операций \*\*). Вспомнив теперь Т.2.1, приходим к важному практическому выводу: любому звену со строго реализуемой п. ф. можно сопоставить устройство, состоящее из описанных выше блоков, у которого входное напряжение связано с выходным так же, как связаны между собой вход и выход звена. Это устройство называют *электронной моделью* или *электронным аналоговым интегратором* \*\*). Существенно, что структурным схемам, представленным на рис. 2.11, а, б, можно непосредственно сопоставить схему электрических соединений блоков. В частности, блок-схема электронной модели, соответствующая структурной схеме (рис. 2.11, б), представлена на рис. 2.14. При этом принято  $n = 3$  и предполагается, что  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ,

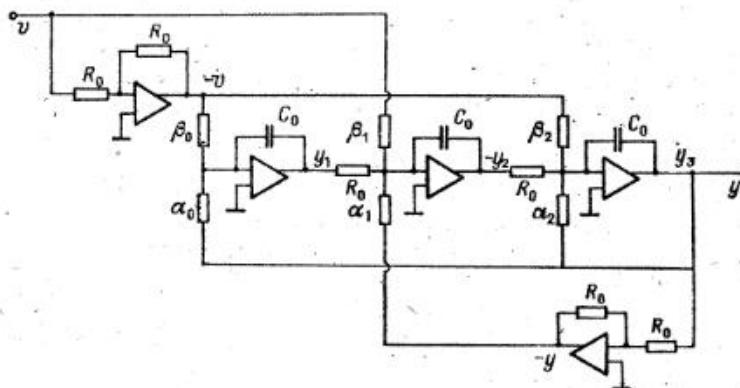


Рис. 2.14

$\beta_1, \beta_2$  положительны,  $\beta_3 = 0$ , а величины  $R_0, C_0$  (в соответствующих единицах измерения) равны единице. В модели используется всего  $n + 2 = 5$  усилителей, причем три входят в блоки, выполняющие одновременно функции сумматоров и интеграторов, а два — в блоки-инверторы.

\*) Операционные усилители с  $k_y = 10^5 \div 10^6$  выпускаются промышленностью серийно.

\*\*) Электронная модель является основной частью (процессором) аналоговых вычислительных машин (АВМ). Более детальные сведения об электронном моделировании даны, например, в [2.2].

В заключение сделаем два замечания.

**Замечание 1.** Электронные модели могут использоваться для исследовательских целей, в частности, для анализа процессов, происходящих в системах автоматического управления. При этом (а) собирается из стандартных блоков схема, соответствующая имеющемуся математическому описанию САУ \*), (б) от внешних источников (генераторов) вводятся электрические сигналы, пропорциональные внешним воздействиям, (в) производится запись (осциллографирование) выходных напряжений, пропорциональных изучаемым процессам. С другой стороны, электронные модели можно применять и в качестве блоков преобразования информации в самих САУ. При этом на входы подаются сигналы от датчиков информации, а с выходов снимаются управляющие сигналы. Тем самым имеется способ технической реализации любых законов управления, для которых связь информационных и управляющих сигналов определена с помощью линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Это будет учитываться в следующей главе, где мы изучим возможности законов управления этого типа.

**Замечание 2.** В соответствии с Т.2.1 класс звеньев, которые могут моделироваться с помощью описанных выше устройств, ограничен формальным условием *строгой реализуемости* (степень числителя п. ф. не превосходит степени знаменателя). Это обстоятельство оправдывает введенный термин.

### § 3. Устойчивость

**3.1. Устойчивость звена по входу.** Наличие описания свойств звеньев и систем с помощью дифференциальных уравнений позволяет сделать ряд качественных выводов об особенностях их поведения.

Наиболее важной характеристикой является свойство *устойчивости*.

**Определение 1.** Звено называется *устойчивым по входу* (осуществляющим устойчивое преобразование «вход-выход»), если при любом ограниченном входном воздействии  $v(t)$  и нулевых начальных условиях выходная реакция  $y(t)$  является ограниченной при любом конечном  $t \geq 0$  и при  $t \rightarrow \infty$ , и называется *неустойчивым по входу* в противном случае.

Об устойчивости по входу можно судить по свойствам весовой функции  $h(t)$ .

**Теорема 3.1.** Для того чтобы звено, описываемое уравнением

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)v(t), \quad (3.1)$$

\*) При моделировании сложных систем можно пользоваться исходным описанием (2.1), (2.3), объединяя модели звеньев с помощью блоков, соответствующих уравнениям связей.

было устойчивым по входу, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Согласно основной формуле (1.24) имеем

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) v(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Пусть  $v(t)$  — произвольная ограниченная функция, т. е. такая, что

$$|v(t)| \leq c_v < \infty, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

где  $c_v$  — некоторая константа. Тогда

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |h(\tau)| |v(t-\tau)| d\tau \leq c_v \int_0^t |h(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq c_v \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отсюда следует достаточность условия (3.2) для ограниченности выхода  $y(t)$ .

Для доказательства необходимости покажем, что найдется такая ограниченная функция  $v(t)$ , что при нарушении (3.2)  $|y(t)|$  может стать сколь угодно большим числом. Примем  $v(t)$  такой, что

$$v(T-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq T, \\ c_v \operatorname{sign} h(\tau), & \tau < T, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $T$  — большое положительное число, а символ  $\operatorname{sign}$ , читаемый «знак», введен для обозначения функции, удовлетворяющей тождеству  $x \operatorname{sign} x = |x|$ . При воздействии (3.6) имеем

$$|y(T)| = c_v \left| \int_0^T h(\tau) \operatorname{sign} h(\tau) d\tau \right| = c_v \int_0^T |h(\tau)| d\tau. \quad (3.7)$$

Если условие (3.2) нарушено, то правая часть (3.7), а следовательно и  $|y(T)|$ , при достаточно большом  $T$  может оказаться больше любого наперед заданного числа. ■

Если пользоваться Т.3.1 непосредственно, то для проверки устойчивости придется вычислять весовую функцию, а затем проверять выполнение условия (3.2).

Оказывается, что имеется прекрасная возможность обойти обе эти операции.

**Теорема 3.2.** Для выполнения условия (3.2) необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$$

была ограничена по модулю при любых значениях комплексной переменной  $p$  с неотрицательной вещественной частью.

**Доказательство.** Необходимость вытекает из определения весовой функции как оригинала для  $H(p)$ , т. е.

$$H(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt, \quad (3.8)$$

и оценки

$$|H(p)| \leq \int_0^\infty |e^{-pt}| |h(t)| dt = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} p t} |h(t)| dt \leq \int_0^\infty |h(t)| dt. \quad (3.9)$$

При этом использовано свойство экспоненциальной функции

$$|e^{-pt}| = |e^{-(\operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p)t}| = e^{-\operatorname{Re} p t} \leq 1, \quad \operatorname{Re} p \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

при стандартных обозначениях вещественной ( $\operatorname{Re} p$ ) и мнимой ( $\operatorname{Im} p$ ) части комплексного числа.

Доказательство достаточности требует более детального анализа свойств  $H(p)$  как дробно-рациональной функции и выяснения общего вида функции  $h(t)$ . Обозначим  $\lambda_v$ ,  $v = 1, \dots, n$ , корни многочлена  $\alpha(p)$ . Для простоты предположим, что все они различны. Тогда хорошо известно (см., например, [2.7]), что функция  $H(p)$  представима в виде

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} = \bar{\beta}(p) + \sum_{v=1}^n \frac{c_v}{p - \lambda_v}, \quad c_v = \text{const}, \quad (3.11)$$

где  $\bar{\beta}(p) = 0$ , если  $n > m$ , в противном случае  $\bar{\beta}(p)$  — многочлен степени  $m - n$  (частное от деления  $\beta(p)$  на  $\alpha(p)$ ).

Ограничность  $H(p)$  при  $\operatorname{Re} p \geq 0$  эквивалентна требованию, чтобы

- а)  $\bar{\beta}(p) = \text{const}$ , т. е. степень  $\beta(p)$  была не выше степени  $\alpha(p)$ ;
- б)  $\operatorname{Re} \lambda_v < 0$ .

Но тогда (см. таблицу  $\mathcal{L}$ -образов в Приложении 1)

$$h(t) = \bar{\beta}\delta(t) + \sum_{v=1}^n c_v e^{\lambda_v t} \quad (3.12)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^t |h(\tau)| d\tau &\leq |\bar{\beta}| \int_0^t \delta(\tau) d\tau + \sum_{v=1}^n |c_v| \int_0^t e^{\operatorname{Re} \lambda_v \tau} d\tau = \\ &= |\bar{\beta}| + \sum_{v=1}^n |c_v| (\operatorname{Re} \lambda_v)^{-1} (e^{\operatorname{Re} \lambda_v t} - 1), \end{aligned}$$

так что

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau \leq |\bar{\beta}| + \sum_{v=1}^n |\operatorname{Re} \lambda_v|^{-1} |c_v| < \infty. \quad (3.13)$$

В случае, когда имеются кратные полюсы, результат сохраняет силу, хотя выкладки и более громоздки. ■

Как следствие Т.3.2 можно сформулировать простой окончательный результат.

**Критерий устойчивости по входу.** Устойчивость по входу имеет место, если выполнены два условия:

а) степень многочлена  $\alpha(p)$  в знаменателе п. ф.  $H(p)$  не меньше степени многочлена  $\beta(p)$  в ее числителе (условие строгой реализуемости передаточной функции);

б) многочлен  $\alpha(p)$  (характеристический многочлен звена) не имеет других корней, кроме корней с отрицательными вещественными частями (условие устойчивости характеристического многочлена).

В качестве приложения посмотрим, являются ли устойчивыми типовые звенья, описанные в табл. 1.1. Условие строгой реализуемости выполнено во всех случаях. Остается проверить корни  $\alpha(p)$ .

1. Идеальный усилитель:  $\alpha(p) = 1$ , и корней нет.

2. Интегратор:  $\alpha(p) = p$ , и один вещественный корень  $\lambda_1 = 0$ .

3. Апериодическое звено:  $\alpha(p) = Tp + 1$ , и один вещественный корень  $\lambda_1 = -T^{-1} < 0$  при  $T > 0$ .

4. Колебательное звено:  $\alpha(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ , и имеются два комплексно-сопряженных корня  $\lambda_{1,2} = T^{-1}(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})$ , причем вещественная часть отрицательна ( $1 > \xi > 0$ ,  $T > 0$ ).

Таким образом, все эти звенья являются устойчивыми по входу за исключением интегратора.

Последнее ясно и из вида его переходной функции, которая неограниченно растет, хотя является реакцией на ограниченное воздействие  $1(t)$ .

**3.2. Алгебраические критерии устойчивости.** Акцентируем теперь внимание на обстоятельство, что проверка условия устойчивости характеристического многочлена не требует вычисления всех его корней, а лишь выяснения того, расположены ли они только в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ .

Нельзя ли установить этот факт, не находя корней?

Ответ на этот вопрос положительный: еще с прошлого века известно много эффективных методов проверки устойчивости многочленов \*).

Прежде всего установим простое необходимое условие:

**Теорема 3.3 (критерий Стодолы).** Если многочлен  $\alpha(p)$  с  $\alpha_n > 0$  устойчив, то все его коэффициенты положительны.

**Доказательство.** Используем разложение многочлена  $\alpha(p)$  на простейшие вещественные двучлены и трехчлены. Каждому вещественному корню  $\lambda_v$  соответствует двучлен  $p - \lambda_v$ , каждой паре комплексно-сопряженных корней  $\delta_v \pm i\gamma_v$  — трехчлен  $(p - \delta_v)^2 + \gamma_v^2$ . Если все  $\lambda_v < 0$ ,  $\delta_v < 0$ , то ко-

\*). Алгебраическая проблема проверки условий устойчивости многочленов была впервые поставлена Maxwellом и привлекла внимание многих крупных математиков. Детальное и простое изложение этой проблемы содержится в книге [2.6].

коэффициенты во всех двучленах и трехчленах положительны, а следовательно, положительны и коэффициенты в многочлене  $\alpha(p)$ , являющиеся их произведением. ■

### Пример 3.1. Многочлен

$$\alpha(p) = p^4 + 2p^3 + p + 1$$

заведомо неустойчив, поскольку коэффициент  $\alpha_2$  при  $p^2$  равен нулю. □

Выполнение условия Стодолы, к сожалению, не гарантирует устойчивости многочлена при любом  $n$ , хотя нетрудно проверить, что оно достаточно при  $n=1$  и  $n=2$ . При больших  $n$  приходится использовать более сложные процедуры. По-видимому, наиболее удобен для применения вычислительной техники рекуррентный алгоритм Рауса. Приведем его описание в готовой форме (доказательство см., например, в [2.1, 2.6]) \*). Процесс сводится к последовательному пересчету коэффициентов многочлена, и для его описания удобно пользоваться символом алгола «:=», означающим «поменять равным».

**Алгоритм Рауса.** Пусть заданы положительные коэффициенты

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n.$$

Тогда, начиная с  $j=1$  до  $j=n-1$  \*\*),

$$1) \quad \rho_j := \alpha_{j-1} \alpha_j^{-1}. \quad (3.14)$$

2) Если  $\rho_j \leq 0$ , то многочлен неустойчив.

3) Если  $\rho_j > 0$ , то перейти к следующему шагу и, начиная с  $k=1$ ,

$$\alpha_{2k+j-1} := \alpha_{2k+j-1} - \rho_j \alpha_{2k+j}, \quad \alpha_l := 0, \quad l > n. \quad (3.15)$$

Если все  $\rho_j > 0$ ,  $j=1, \dots, n-1$ , то многочлен устойчив.

**Пример 3.2.** Пусть исследуемый многочлен имеет вид

$$\alpha(p) = p^5 + 5p^4 + 9p^3 + 10p^2 + 6p + 2.$$

Тогда таблица вычислений по итерациям имеет вид \*\*\*)

$j$	0	1	2	3	4
$\alpha_0$	2	2	2	2	
$\alpha_1$	6	6	6	6	
$\alpha_2$	10	7	7	7	
$\alpha_3$	9	9	5	5	
$\alpha_4$	5	14/3	14/3	49/15	
$\alpha_5$	1	1	1	1	
$\rho_j$		1/3	6/7	7/5	49/15

Следовательно, многочлен устойчив. □

\* ) В [2.1, 2.6] принята обратная нумерация коэффициентов многочлена (коэффициент при старшей степени обозначается  $\alpha_0$ ) и т. д.

\*\*) Здесь  $j$  — номер шага алгоритма.

\*\*\*) В начальном столбце выписаны исходные значения коэффициентов, в дальнейшем — значения, вычисленные согласно (3.15).

Для многочленов 3-й и 4-й степени алгоритм Рауса нетрудно реализовать и в «буквенной форме».

Из приводимых таблиц для  $n=3$

$j$	1	2
$\alpha_0$	$\alpha_0$	
$\alpha_1$	$\alpha_1$	
$\alpha_2$	$\alpha_2 - \alpha_0 \alpha_1^{-1} \alpha_3$	
$\alpha_3$	$\alpha_3$	
$\rho_j$	$\alpha_3 \alpha_1^{-1}$	$\alpha_1^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^{-1}$

и для  $n=4$

$j$	1	2	3
$\alpha_0$	$\alpha_0$	$\alpha_0$	
$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	
$\alpha_2$	$\alpha_2 - \alpha_0 \alpha_1^{-1} \alpha_3$	$\alpha_2 - \alpha_0 \alpha_1^{-1} \alpha_3$	
$\alpha_3$	$\alpha_3$	$\alpha_3 - \alpha_1^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^{-1} \alpha_4$	
$\alpha_4$	$\alpha_4$	$\alpha_4$	
$\rho_j$	$\alpha_0 \alpha_1^{-1}$	$\alpha_1^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^{-1}$	$(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^2 \alpha_1^{-1} (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \alpha_4)^{-1}$

вытекает, что кроме положительности коэффициентов для устойчивости многочленов требуется выполнение условий:

$$n=3: \alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3, \quad (3.16)$$

$$n=4: \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > \alpha_0 \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \alpha_4. \quad (3.17)$$

Условия (3.16), (3.17) являются частными случаями ограничений, налагаемых на коэффициенты характеристического многочлена для обеспечения его устойчивости, которые обычно именуют условиями Рауса — Гурвица (общий вид условий приведен в Приложении 2, п. 6).

**3.3. Устойчивость по начальным условиям.** Основная формула (3.3) была выведена в § 1 в результате решения дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях.

При произвольных начальных условиях вид решения изменяется. Из теории дифференциальных уравнений известно, что его можно

записать как сумму решения  $y_0(t)$  однородного уравнения

$$\alpha(D)y = 0 \quad (3.18)$$

и любого частного решения неоднородного уравнения

$$\alpha(D)y = \beta(D)v. \quad (3.19)$$

Решение  $y_0(t)$  представимо в виде \*):

$$y_0(t) = \sum_{v=1}^n c_v e^{\lambda_v t}, \quad (3.20)$$

где  $\lambda_v$  — корни характеристического многочлена  $\alpha(p)$ , а  $c_v$  — либо константы (если все корни различны), либо многочлены от  $t$ , имеющие степень ниже кратности корня. Если в качестве частного решения взять решение, соответствующее нулевым начальным условиям, т. е. решение (3.3), то общее решение (3.19) приобретает вид

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^t h(\tau) v(t-\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Таким образом, наличие ненулевых начальных условий приводит к появлению фактора, искажающего характер связи (3.3) между входом и выходом.

**Определение 2.** Звено называется *устойчивым по начальным условиям* \*\*), если вызываемый ими эффект  $y_0(t)$  исчезает при  $t \rightarrow \infty$ .

Из формулы (3.20) сразу вытекает следующий результат.

**Критерий устойчивости по начальным условиям:** *устойчивость по начальным условиям имеет место, если характеристический многочлен не имеет других корней, кроме корней с отрицательной вещественной частью, т. е.  $\alpha(p)$  является устойчивым.*

Действительно, в этом случае любое слагаемое в (3.20) убывает со временем, поскольку убывающий экспоненциальный множитель «подавляет» возможный рост любого многочлена от  $t$ .

Приведенный критерий устойчивости по начальным условиям совпадает с условием (б) устойчивости по входу, так что при выполнении обоих условий (а) и (б) можно употреблять более краткий термин — *устойчивое звено*. Соответствующую п. ф.  $H(p)$  также называют *устойчивой п. ф.*

**3.4. Устойчивость системы.** В соответствии с принципом суперпозиции (§ 2) реакция по любому выходу системы равна сумме реакций на каждое из внешних воздействий. В соответствии с этим естественно считать, что система осуществляет устойчивое преобра-

зование «вход-выход», если устойчивы преобразования от каждого внешнего входа к каждому внешнему выходу. Из Т.2.2 и принципа суперпозиции сразу следует, что это свойство имеет место, если

- а) строго реализуемы все соответствующие п. ф.,
- б) характеристический многочлен системы  $\Delta(p)$  устойчив.

Перейдем к анализу влияния начальных условий. По аналогии со случаем одного звена следует считать систему устойчивой по начальным условиям, если при любых начальных условиях и отсутствии внешних воздействий процессы  $y_k(t)$  на всех выходах стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Однако при отсутствии воздействий для всех выходов справедливы одинаковые однородные уравнения

$$\Delta(D)y_k(t) = 0.$$

Отсюда сразу следует, что *система устойчива по начальным условиям, если устойчив ее характеристический многочлен*. В силу сказанного при выполнении указанных выше условий (а), (б) система устойчива в смысле обоих определений.

#### § 4. Установившаяся реакция и частотная характеристика

**4.1. Вычисление выходной реакции.** Если входное воздействие  $v(t)$  является известной функцией времени, то выходная реакция звена, определяемая уравнением

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)v(t), \quad (4.1)$$

при нулевых начальных условиях может быть вычислена любым из следующих способов:

а) путем численного интегрирования уравнения по известным алгоритмам вычислительной математики с использованием цифровой ЭВМ;

б) с использованием АВМ (интегратора);

в) с помощью операционного исчисления, когда первоначально находится  $\mathcal{L}$ -образ входа  $V(p)$ , а затем вычисляется оригинал  $\mathcal{L}$ -образа выхода  $Y(p)$ , равного

$$Y(p) = H(p)V(p), \quad (4.2)$$

где

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}; \quad (4.3)$$

г) с использованием того же операционного исчисления, но по формуле

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) v(t-\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

причем предварительно находится весовая функция  $h(t)$  как ори-

\* С выводом можно познакомиться и по Приложению 1.

\*\*) О связи этого определения с более общим понятием асимптотической устойчивости равновесного состояния по Ляпунову см. в гл. 8.

гинал п. ф.  $H(p)$ , поскольку

$$H(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt. \quad (4.5)$$

Все эти способы достаточно трудоемки, причем численное интегрирование малоэффективно при больших  $t$  из-за накопления ошибок \*).

Однако для некоторых видов воздействий, т. е. некоторых функций  $v(t)$ , удается указать очень простые способы вычислений выходной реакции именно при больших  $t$ .

**Определение.** Назовем *установившейся реакцией на заданное воздействие*  $v(t)$ ,  $t \geq 0$ , такую функцию  $y_\infty(t)$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_\infty(t) - y(t)| = 0, \quad (4.6)$$

где  $y(t)$  — решение (4.1) при нулевых начальных условиях для любого  $t > 0$ .

**4.2. Установившаяся реакция на гармоническое воздействие.** Пусть воздействие является гармонической функцией времени, т. е.

$$v(t) = a_v \cos \omega t, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

где  $a_v$  — амплитуда,  $\omega$  — частота воздействия.

**Теорема 4.1.** Если звено является устойчивым, то установившаяся реакция на гармоническое воздействие является гармонической функцией той же частоты с амплитудой

$$a_y = |H(i\omega)| a_v \quad (4.8)$$

и относительным сдвигом фазы

$$\psi = \arg H(i\omega). \quad (4.9)$$

**Доказательство.** Найдем сначала реакцию на комплекснозначную функцию

$$v(t) = a_v e^{i\omega t}, \quad t > 0, \quad (4.10)$$

называемую комплексной гармоникой. Согласно (4.3) имеем

$$y(t) = a_v \int_0^t h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = a_v e^{i\omega t} \int_0^t h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Если выполнено условие устойчивости

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty,$$

\* ) Аналоговым интеграторам также свойственно накопление ошибок из-за так называемого дрейфа пуль усилителей (подробнее см., например в [2.2]).

то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^\infty h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = H(i\omega), \quad (4.11)$$

причем последнее следует из (4.4). Теперь очевидно, что функция

$$y_\infty(t) = H(i\omega) a_v e^{i\omega t} = H(i\omega) v(t) \quad (4.12)$$

удовлетворяет условию (4.5) и является установившейся реакцией на комплексную гармонику (4.10).

Выделим в  $v(t)$  и  $y_\infty(t)$  вещественную и мнимую части:

$$v(t) = a_v \cos \omega t + i a_v \sin \omega t,$$

$$y_\infty(t) = |H(i\omega)| a_v \cos (\omega t + \psi) + i |H(i\omega)| a_v \sin (\omega t + \psi).$$

В силу линейности преобразования (4.3) реакция на вещественную часть воздействия,  $a_v \cos \omega t$ , и мнимую,  $a_v \sin \omega t$ , является суммой реакций на каждую из них в отдельности. Отсюда вытекает результат, даваемый формулами (4.7) — (4.9), а также его «дубль»: установившаяся реакция на воздействие

$$v(t) = a_v \sin \omega t \quad (4.13)$$

равна

$$y_\infty(t) = |H(i\omega)| a_v \sin (\omega t + \psi), \quad (4.14)$$

и вообще, если

$$v(t) = a_v \cos (\omega t + \varphi), \quad (4.15)$$

где  $\varphi$  — произвольная фаза гармонического воздействия, то

$$y_\infty(t) = |H(i\omega)| a_v \cos (\omega t + \varphi + \psi). \blacksquare \quad (4.16)$$

Для демонстрации эффективности приема, содержащегося в Т.4.1, приведем иллюстративный пример.

**Пример 4.1.** Пусть

$$H(p) = \frac{2p+1}{p^3 + 2p^2 + p + 1},$$

а  $v(t) = 3 \cos 2t$ .

Условия устойчивости выполнены (проверьте с помощью неравенства Гурвица!), поэтому можно применять формулы (4.7) — (4.9). Имеем  $a_v = 3$ ,  $\omega = 2$ , а следовательно,

$$y_\infty(t) = \frac{|4i+1|}{|-8i-8+2i+1|} 3 \cos(2t + \psi) = \frac{3}{\sqrt{5}} \cos(2t + \psi),$$

где

$$\psi = \arg \frac{1+4i}{-7-6i} = \pi + \arctg \frac{22}{31}. \blacksquare$$

Из теоремы 4.1 ясна особая роль комплекснозначной функции  $H(i\omega)$ , называемой *комплексной частотной характеристикой*. Значения этой функции находятся при любом вещественном  $\omega$  как значения п. ф.  $H(p)$  при чисто мнимом  $p = i\omega$ :

$$H(i\omega) = H(p)|_{p=i\omega}. \quad (4.17)$$

Эта функция вводится не только для устойчивых п. ф., но и для любых, причем, если знаменатель  $H(p)$  имеет корни на мнимой оси  $\lambda_v = i\beta_v$ , то  $H(i\omega)$  может обращаться в бесконечность при значениях  $\omega = \beta_v$ .

При фиксированном  $\omega$  функция  $H(i\omega)$  является комплексным числом, изображаемым точкой на комплексной плоскости. Кривую, являющуюся геометрическим местом этих точек, соответствующих значениям  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , называют *годографом частотной характеристики* (или *амплитудно-фазовой характеристикой*). Поскольку всякое комплексное число можно задать двумя вещественными (модулем и аргументом или вещественной и мнимой частью), то комплексной частотной характеристике можно сопоставить либо пару функций

$$A(\omega) = |H(i\omega)|, \quad \psi(\omega) = \arg H(i\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad (4.18)$$

называемых *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) и *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ), либо пару функций

$$R(\omega) = \operatorname{Re} H(i\omega), \quad I(\omega) = \operatorname{Im} H(i\omega), \quad (4.19)$$

называемых *вещественной* и *мнимой частотными характеристиками* (ВЧХ и МЧХ).

Если известны АЧХ и ФЧХ, то согласно Т.4.1 для определения амплитуды и фазы установившейся реакции на гармоническое воздействие можно воспользоваться следующим приемом.

**Правило 1.** Амплитуда реакции равна амплитуде воздействия, умноженной на значения АЧХ на частоте воздействия. Сдвиг по фазе реакции относительно воздействия равен значению ФЧХ на частоте воздействия.

Другие возможности использования частотных характеристик раскроются в дальнейшем. Здесь же будет рассмотрена еще одна задача об оценке установившейся реакции.

**4.3. Установившаяся реакция на полиномиальное воздействие.** Назовем полиномиальным воздействие, представимое при  $t > 0$  в виде многочлена (полинома) от  $t$ :

$$v(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N, \quad t > 0. \quad (4.20)$$

**Теорема 4.2.** Установившаяся реакция устойчивого звена на полиномиальное воздействие (4.20) также является полиномиальной функцией (многочленом), представимой в виде

$$y_\infty(t) = c_0 v(t) + c_1 Dv(t) + \dots + c_N D^N v(t), \quad (4.21)$$

где

$$c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k H(p)}{dp^k} \right|_{p=0}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4.22)$$

Доказательство аналогично доказательству Т.4.1.

Согласно (4.3) получаем

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) v(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \sum_{k=0}^N \frac{(-\tau)^k}{k!} D^k v(t) d\tau = \sum_{k=0}^N \mu_k(t) \frac{(-1)^k}{k!} D^k v(t), \quad (4.23)$$

где

$$\mu_k(t) \triangleq \int_0^t \tau^k h(\tau) d\tau, \quad (4.24)$$

причем использовано разложение функции  $v(t-\tau)$  в ряд Тейлора по степеням  $\tau$  и учтено, что этот ряд имеет конечное число слагаемых, поскольку  $v(t)$  — многочлен.

С помощью (3.12) можно убедиться в существовании для устойчивой весовой функции пределов

$$\mu_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_k(t) = \int_0^\infty \tau^k h(\tau) d\tau, \quad (4.25)$$

обычно называемых *моментами весовой функции*. Отсюда сразу следует, что

$$y_\infty(t) = \sum_{k=0}^N \mu_k \frac{(-1)^k}{k!} D^k v(t). \quad (4.26)$$

Это выражение совпадает с (4.21), (4.22), поскольку

$$\left. \frac{d^k H(p)}{dp^k} \right|_{p=0} = \int_0^\infty h(\tau) \frac{d^k}{dp^k} (e^{-p\tau}) \Big|_{p=0} d\tau = (-1)^k \int_0^\infty h(\tau) \tau^k d\tau = (-1)^k \mu_k. \blacksquare$$

Выделим особо два простых частных случая Т.4.2.

**Правило 2.** Если воздействие является постоянным при  $t > 0$ \*,

$$v(t) = a_0, \quad t > 0, \quad (4.27)$$

то установившаяся реакция устойчивого звена также постоянна и равна

$$y_\infty(t) = H(0) a_0. \quad (4.28)$$

Она совпадает с воздействием, если

$$H(0) = 1. \quad (4.29)$$

**Правило 3.** Если воздействие изменяется с постоянной скоростью

$$v(t) = a_0 + a_1 t, \quad t > 0, \quad (4.30)$$

то установившаяся реакция устойчивого звена также меняется с постоянной скоростью

$$y_\infty(t) = H(p) \Big|_{p=0} (a_0 + a_1 t) + \left. \frac{dH}{dp} \right|_{p=0} a_1. \quad (4.31)$$

Если выполнено условие (4.29), то  $y_\infty(t) - v(t) = \text{const}$ .

Приведем иллюстративный пример.

\*). Поскольку все предшествующие результаты получены в предположении пульсовых начальных значений, то (4.27) означает, что  $v(t)$  — скачок на величину  $a_0$ .

**Пример 4.2.** Пусть  $H(p)$  такая же, как в п. 4.1, а  $v(t) = 4 + 2t$ . Тогда, учитывая, что

$$H(0) = 1, \quad \frac{dH}{dp} \Big|_{p=0} = 1,$$

получаем

$$y_\infty(t) = 6 + 2t = v(t) + 2. \square$$

Простота правил вычисления установившейся реакции на типовые (гармонические и полиномиальные) воздействия определяет их широкое использование при исследовании систем управления, в чем мы также убедимся в дальнейшем.

**4.4. Реакция системы на внешние воздействия.** Все сказанное относилось к изучению реакции одиночного звена на его входное воздействие. Однако, в силу принципа суперпозиции, реакция любого выхода  $y_k(t)$  на совокупность любых внешних входных воздействий  $\bar{v}_i(t)$  является суммой реакций на каждое из них. Поэтому все приведенные выше правила применимы и к анализу системы. Следует лишь сначала использовать в них п. ф.  $H_k(p)$  от каждого входа к изучаемому выходу для изучения реакции на каждый вход по отдельности, а затем просуммировать результаты. Если же система имеет только один внешний вход и только один внешний выход, то все правила применимы непосредственно.

## § 5. Анализ типовых структур

Среди возможных структур связи между звенями особо часто возникают некоторые простые структуры, которые будем называть *типовыми*. Все системы с типовой структурой имеют один внешний вход  $\bar{v}$  и один внешний выход  $\bar{y}$ , так что преобразование «вход-выход» может быть охарактеризовано одной п. ф.  $H(p)$ . Для каждой структуры дадим ответ на следующие три вопроса: (а) как найти п. ф. системы  $H(p)$ , (б) как найти частотную характеристику системы  $H(i\omega)$ , (в) как построить характеристический многочлен системы  $\alpha(p)$  и как можно судить об устойчивости системы по свойствам п. ф. или частотных характеристик звеньев.

Для простоты записи ограничимся системами, состоящими из двух звеньев, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} \alpha_1(D)y_1(t) &= \beta_1(D)v_1(t), \\ \alpha_2(D)y_2(t) &= \beta_2(D)v_2(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

хотя результаты легко обобщаются на случай большего числа звеньев. После преобразования по Лапласу (при нулевых начальных условиях) уравнения (5.1) дают

$$\alpha_k(p)Y_k(p) = \beta_k(p)V_k(p), \quad k = 1, 2, \quad (5.2)$$

или

$$Y_k(p) = H_k(p)V_k(p), \quad H_k(p) = \frac{\beta_k(p)}{\alpha_k(p)}, \quad k = 1, 2,$$

где  $H_k(p)$  — п. ф. звеньев.

По определению (см. § 4), формулы

$$\begin{aligned} A_k(\omega) &= |H_k(i\omega)|, \quad \Psi_k(\omega) = \arg H_k(i\omega), \\ R_k(\omega) &= \operatorname{Re} H_k(i\omega), \quad I_k(\omega) = \operatorname{Im} H_k(i\omega), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

дают выражения для АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ каждого из звеньев.

**5.1. Последовательное и параллельное соединения звеньев.** Структурная схема системы, называемой *последовательным соединением* звеньев, приведена на рис. 2.15. В силу связи имеем

$$Y_1(p) = \bar{V}_2(p),$$

Рис. 2.15

так что уравнения (5.2) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1(p)Y_1(p) &= \beta_1(p)Y_1(p), \\ -\beta_2(p)Y_1(p) + \alpha_2(p)Y_2(p) &= 0. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен системы равен

$$\Delta(p) = \det \begin{vmatrix} \alpha_1(p) & 0 \\ -\beta_2(p) & \alpha_2(p) \end{vmatrix} = \alpha_1(p)\alpha_2(p). \quad (5.3)$$

Для нахождения п. ф. системы выразим  $\bar{Y}(p)$  через  $\bar{V}(p)$ . Имеем  $\bar{Y}(p) = \bar{Y}_2(p) = H_2(p)V_2(p) = H_2(p)Y_1(p) = H_2(p)H_1(p)V_1(p) = H_2(p)H_1(p)\bar{V}(p)$ ,

так что

$$H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{\beta_1(p)\beta_2(p)}{\alpha_1(p)\alpha_2(p)}. \quad (5.4)$$

Свойства частотной характеристики следуют из формул

$$\begin{aligned} H(i\omega) &\triangleq A(\omega)e^{i\Psi(\omega)} = H_1(i\omega)H_2(i\omega) = A_1(\omega)e^{i\Psi_1(\omega)}A_2(\omega)e^{i\Psi_2(\omega)} = \\ &= A_1(\omega)A_2(\omega)e^{i[\Psi_1(\omega)+\Psi_2(\omega)]}, \end{aligned}$$

откуда

$$A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega), \quad \Psi(\omega) = \Psi_1(\omega) + \Psi_2(\omega). \quad (5.5)$$

Приведенные формулы позволяют сделать следующий общий вывод.

**Вывод 1.** Для последовательного соединения (а) п. ф. системы равна произведению п. ф. звеньев, (б) АЧХ системы равна произведению АЧХ звеньев, (в) ФЧХ системы равна сумме ФЧХ звеньев. Соединение устойчиво, если устойчивы звенья. Допустимо также, чтобы п. ф. одного из звеньев не была строго реализуемой, лишь бы строго реализуемой была п. ф. соединения. В противном случае система неустойчива.

Последнее утверждение прямо следует из условий устойчивости (§ 3) и того простого факта, что корни  $\alpha(p)$  являются корнями либо  $\alpha_1(p)$ , либо  $\alpha_2(p)$ .

Рассмотрим далее систему, называемую *параллельным соединением* звеньев, структурная схема которой дана на рис. 2.16. Согласно схеме имеем:

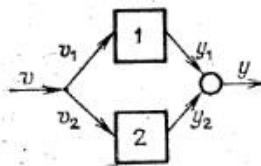


Рис. 2.16

Уравнения звеньев переписываются в виде

$$\begin{aligned}\alpha_1(p) Y_1(p) &= \beta_1(p) \bar{V}(p), \\ \alpha_2(p) Y_2(p) &= \beta_2(p) \bar{V}(p),\end{aligned}$$

откуда

$$\Delta(p) = \alpha_1(p) \alpha_2(p).$$

Поскольку  $\bar{Y}(p) = \bar{Y}_1(p) + \bar{Y}_2(p) = [H_1(p) + H_2(p)] \bar{V}(p)$ , то

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) = \frac{\alpha_2(p) \beta_1(p) + \alpha_1(p) \beta_2(p)}{\alpha_1(p) \alpha_2(p)}. \quad (5.6)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}H(i\omega) &= H_1(i\omega) + H_2(i\omega) = R_1(\omega) + iI_1(\omega) + R_2(\omega) + iI_2(\omega) = \\ &= [R_1(\omega) + R_2(\omega)] + i[I_1(\omega) + I_2(\omega)],\end{aligned}$$

так что

$$R(\omega) = R_1(\omega) + R_2(\omega), \quad I(\omega) = I_1(\omega) + I_2(\omega). \quad (5.7)$$

Можно зафиксировать итоги анализа.

**Вывод 2.** Для параллельного соединения (а) п. ф. равна сумме п. ф. звеньев, (б) ВЧХ (и МЧХ) равны суммам ВЧХ (и МЧХ) звеньев. Соединение устойчиво, если и только если устойчивы звенья.

Приведенные результаты элементарны, но полезны при изучении сложных систем, поскольку позволяют «свернуть» группу последовательно или параллельно связанных звеньев в одно с легко определяемыми характеристиками. При использовании этих результатов возможны, однако, грубые ошибки.

**Предупреждение 1.** Термины «последовательное» и «параллельное» соединения, а также операторное описание характеристик элементов широко используются в теории электрических и механических цепей. Однако там они имеют другой смысл\*).

**Контрпример.** Рассмотрим электрическую цепь из трех последовательно (в смысле теории цепей) соединенных элементов — активного, индуктивного и емкостного. Связь входного воздействия

\*). С точки зрения общей теории графов различие заключается в том, что теория цепей использует неориентированные графы, а теория управления — ориентированные.

(напряжения) с выходом (током) дается уравнением

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

или, в операторной записи,

$$u(t) = \left( R + LD + \frac{1}{CD} \right) i(t).$$

П. ф. соединения, называемая *операторным сопротивлением цепи*, равна

$$H(D) = R + LD + \frac{1}{CD}$$

и является не произведением, а суммой операторных сопротивлений

$$R, LD, \frac{1}{CD}$$

последовательно соединенных элементов. □

Здесь нет противоречия с Правилом 1, поскольку в нем термин «последовательное соединение» использован в другом смысле.

Рассмотрим также систему, блок-схема которой дана на рис. 2.7. С физической точки зрения она представляет собой последовательное соединение усилителя, двигателя, редуктора и вала. Однако составленные согласно правилам теории управления структурные схемы (рис. 2.8) отнюдь не являются схемами последовательного соединения. Рассматривая физическую «последовательную» схему, всегда следует помнить о возможном обратном воздействии одного элемента на воздействие от другого, что не предусмотрено формальным определением последовательной связи между звеньями, характеризуемыми *однонаправленным преобразованием «вход-выход»*.

**Предупреждение 2.** При вычислении п. ф. системы по формулам (5.4), (5.6) возможно сокращение общих множителей в числителе и знаменателе. После такого сокращения знаменатель п. ф. уже не будет совпадать с характеристическим многочленом. Это, в частности, было видно из П.2.4, где фактически рассматривалось последовательное соединение двух звеньев. Знаменатель п. ф. соединения был равен  $p+1$  и устойчив, а характеристический многочлен равен  $(p+1)(p-1)$ , а следовательно, неустойчив.

Таким образом, при суждении об устойчивости по знаменателю п. ф. следует проверить, не произошло ли сокращения сомножителей.

В дополнение укажем, что в некоторых случаях полезной является процедура, обратная «свертыванию» последовательных и параллельных соединений. Пусть звено задано п. ф.  $H(p)$ . Тогда любое представление этой п. ф. в виде суммы  $H_1(p) + H_2(p)$  или произведения  $H_1(p)H_2(p)$  может быть интерпретировано как разбиение звена на два, параллельно или последовательно соединенных. В ча-

стности, представление (3.11) свидетельствует о возможности представления звена в виде параллельного соединения звеньев. Если  $H(p)$  — строго реализуема, а знаменатель не имеет кратных корней, то разложение на простейшие дроби дает

$$H(p) = \beta_0 + \sum_{v=1}^n \frac{c_v}{p - \lambda_v} s \quad \beta_0 = \text{const.} \quad (5.8)$$

Такую же п. ф. имеет система с  $n$  звенями, описываемыми уравнениями 1-го порядка

$$(\mathbf{D} - \lambda_v) y_v = c_v v_v, \quad v = 1, \dots, n, \quad (5.9)$$

и одним усилительным звеном

$$y_0 = \beta_0 v_0, \quad (5.9')$$

если эти звенья соединены параллельно, т. е.

$$v_v = \bar{v}, \quad v = 0, 1, \dots, n,$$

$$\bar{y} = \sum_{v=1}^n y_v + y_0, \quad (5.10)$$

где  $\bar{v}$  — внешний вход, а  $\bar{y}$  — внешний выход.

Величины  $\lambda_v$ ,  $c_v$ , вообще говоря, комплексные числа, так что переменные  $y_v(t)$  — комплекснозначные функции времени. Поэтому разбиение на звенья 1-го порядка удобно лишь в случае, когда все  $\lambda_v$ ,  $c_v$  вещественны. Более того, если все  $\lambda_v < 0$ , то

$$H(p) = \beta_0 + \sum_{v=1}^n \frac{k_v}{T_v p + 1}, \quad T_v = -\frac{1}{\lambda_v} > 0, \quad k_v = -\frac{c_v}{\lambda_v}. \quad (5.11)$$

Отсюда сразу следует возможность представления такого звена структурной схемой, показанной на рис. 2.17, которая включает только идеальные усилители и апериодические звенья. Нетрудно убедиться (и это будет полезным упражнением!), что такой схеме

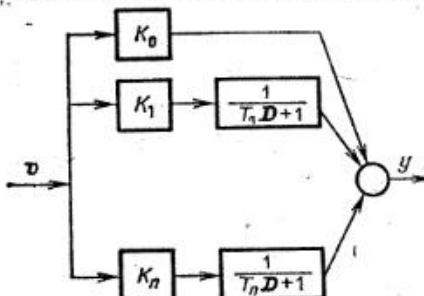


Рис. 2.17

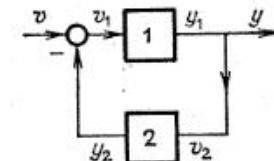


Рис. 2.18

можно сопоставить электронную модель, включающую не более, чем  $n + 2$  операционных усилителя.

**5.2. Соединение с отрицательной обратной связью.** Структурная схема представлена на рис. 2.18. Звено 1 именуется стоящим в

прямой цепи, звено 2 — стоящим в обратной связи. Согласно схеме имеем:

$$v_1 = \bar{v} - y_2, \quad v_2 = y_1, \quad \bar{y} = y_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(p) &= Y_1(p) = H_1(p) V_1(p) = H_1(p) [\bar{V}(p) - Y_2(p)] = \\ &= H_1(p) \bar{V}(p) - H_1(p) H_2(p) V_2(p) = H_1(p) \bar{V}(p) - H_1(p) H_2(p) Y(p), \end{aligned}$$

откуда следует формула для п. ф. соединения

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)}. \quad (5.12)$$

Введем обозначение

$$H_p(p) = H_1(p) H_2(p).$$

П. ф.  $H_p(p)$  обычно называют п. ф. разомкнутого контура, и соответственно  $H_p(i\omega)$  — частотной характеристикой разомкнутого контура. Из формулы

$$H(i\omega) = \frac{H_1(i\omega)}{1 + H_1(i\omega) H_2(i\omega)} = \frac{H_1(i\omega)}{1 + H_p(i\omega)}$$

сразу следует простой качественный результат.

**Вывод 3.** Частотная характеристика соединения с отрицательной обратной связью принимает значения, близкие

(a) к частотной характеристике  $H_1(i\omega)$  звена в прямой цепи, если  $\omega$  таково, что  $|H_p(i\omega)| \ll 1$ .

(b) к обратной частотной характеристике  $H_2^{-1}(i\omega)$ , если  $|H_p(i\omega)| \gg 1$ .

Точный расчет  $H(i\omega)$ ,  $H_p(i\omega)$  по  $H_1(i\omega)$ ,  $H_2(i\omega)$  требует ненесложных операций с комплексными числами, однако приведенный результат полезен тем, что при расчете  $H(i\omega)$  на сетке значений  $\omega$  он позволяет правильно выбрать шаг сетки и диапазон частот, где этот расчет необходим \*).

Напомним, что вычисление  $H(i\omega)$  важно при нахождении установившейся реакции системы на гармонический вход (см. § 4).

Перейдем к изучению проблемы устойчивости системы. Из уравнений звеньев элементов и связей получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1(p) Y_1(p) + \beta_1(p) Y_2(p) &= \beta_1(p) \bar{V}(p), \\ -\beta_2(p) Y_1(p) + \alpha_2(p) Y_2(p) &= 0. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен

$$\Delta(p) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(p) & \beta_1(p) \\ -\beta_2(p) & \alpha_2(p) \end{pmatrix} = \alpha_1(p) \alpha_2(p) + \beta_1(p) \beta_2(p). \quad (5.13)$$

\* См. также гл. 3, § 5.

Из вида этого многочлена непосредственно неясно, следует ли из устойчивости соединенных звеньев устойчивость системы и, наоборот, из неустойчивости хотя бы одного звена — неустойчивость системы в целом. Требуется более тонкий анализ, которому в основном и посвящен данный параграф. Прежде всего установим следующий важный факт.

**Теорема 5.1.** Пусть соединенные звенья устойчивы. Пусть п.ф. их последовательного соединения

$$H_p(p) = H_1(p)H_2(p), \quad (5.14)$$

называемая также п.ф. разомкнутого контура, является правильной дробью, а соответствующая частотная характеристика  $H_p(i\omega)$  ни при каких  $\omega$ ,  $0 \leq \omega < \infty$ , не является вещественным числом, меньшим либо равным  $-1$ . Тогда характеристический многочлен  $\Delta(p)$  устойчив.

**Доказательство.** Обозначим

$$Q_p(p) \triangleq \alpha_1(p)\alpha_2(p), \quad P_p(p) \triangleq \beta_1(p)\beta_2(p); \quad (5.15)$$

тогда, согласно (5.13), характеристический многочлен системы

$$\Delta(p) = Q_p(p) + P_p(p),$$

причем по условию  $Q_p(p)$  — устойчив и \*)

$$\deg Q_p(p) > \deg P_p(p).$$

Введем вспомогательный многочлен

$$\Delta(p, k) \triangleq Q_p(p) + kP_p(p),$$

зависящий от параметра  $k$ . Очевидно, что

$$\Delta(p, 1) = \Delta(p), \quad \Delta(p, 0) = Q_p(p).$$

Как известно \*\*), корни  $\lambda_v(k)$  многочлена  $\Delta(p, k)$  непрерывно зависят от вещественного параметра  $k$ . При  $k = 0$  они лежат в левой полуплоскости. При увеличении  $k$  корни  $\lambda_v(k)$  перемещаются по непрерывным кривым (корневым годографам) и не могут выйти из левой полуплоскости иначе, чем через минимую ось (рис. 2.19). Прохождение через минимую ось какого-нибудь корня означает, что  $\lambda_v = i\omega$ , где  $\omega$  — вещественно и при этом

$$\Delta(i\omega, k) = 0. \quad (5.16)$$

Таким образом, если ни при каких  $\omega$  и ни при каких  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ , условие (5.16) не выполняется, то корни остаются слева, так что  $\Delta(p) = \Delta(p, 1)$  является устойчивым.

Вместе с тем (5.16) эквивалентно

$$Q_p(i\omega) + kP_p(i\omega) = 0$$

или

$$-\frac{1}{k} = H_p(i\omega) = \operatorname{Re} H_p(i\omega) + i\operatorname{Im} H_p(i\omega),$$

\*) Символ  $\deg$  означает «степень».

\*\*) См. также § 3 гл. 4.

откуда

$$\operatorname{Im} H_p(i\omega) = 0, \quad \operatorname{Re} H_p(i\omega) = -\frac{1}{k} \leq -1,$$

что противоречит условию теоремы \*). ■

Аналогичным образом рассматривается и следующий интересный случай.

**Теорема 5.1'.** Если

$$Q_p(p) = p\tilde{Q}_p(p),$$

где  $\tilde{Q}_p(p)$  — устойчивый многочлен, выполнены условия Т.5.1 при всех  $\omega > 0$ , а кроме того,

$$pH_p(p)|_{p=0} = \frac{P_p(0)}{\tilde{Q}_p(0)} \triangleq k_p > 0,$$

то характеристический многочлен  $\Delta(p)$  устойчив.

**Доказательство** можно провести аналогично доказательству Т.5.1, заметив лишь предварительно, что при малых  $k > 0$  выполнение условия  $k_p > 0$  обеспечивает переход нулевого корня  $\lambda_1 = 0$  многочлена  $\Delta(p, 0) = \tilde{Q}_p(p)$  в левую полуплоскость (рис. 2.20). Действительно, при малых  $k$  многочлен

$$p\tilde{Q}_p(p) + kP_p(p) = 0$$

имеет корень  $\lambda_1$  порядка величины  $k$ , а следовательно, выполнено условие

$$\lambda_1[\tilde{Q}_p(0) + O(k)] + k[P_p(0) + O(k)] = 0,$$

так что

$$\lambda_1 = -k \frac{P_p(0)}{\tilde{Q}_p(0)} + o(k) = -kk_p + o(k),$$

т. е.  $\lambda_1$  становится отрицательным при малом увеличении  $k$  от 0. Далее, при росте  $k$  вплоть до  $k = 1$ ,  $\lambda_1(k)$ , равно как и остальные корни, уже не может выйти из левой полуплоскости в силу доказанного в Т.5.1. ■

Результатам Т.5.1, Т.5.1' обычно дается следующая геометрическая интерпретация.

**Правило 1.** Если годограф частотной характеристики  $H_p(i\omega)$  не пересекает вещественной полусоси  $(-\infty; -1]$ , а кроме того,

$$H_p(i\omega) \rightarrow 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty, \quad (5.17)$$

то характеристический многочлен системы, образованной соединением устойчивых звеньев с отрицательной обратной связью, устойчив. То же верно, если знаменатель п.ф. одного из звеньев имеет

\*) Функция  $\operatorname{Re} H_p(i\omega)$  является четной функцией  $\omega$ , поэтому в условии Т.5.1 указаны только неотрицательные  $\omega$ .

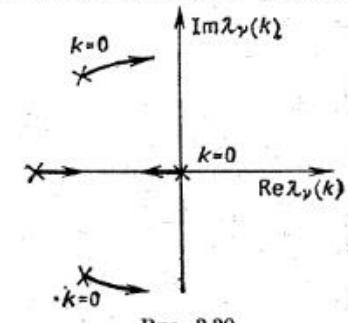


Рис. 2.20

нулевой корень, а остальные устойчивы, и, кроме того, при малых  $\omega$

$$H_p(i\omega) \sim \frac{k_p}{i\omega}, \quad k_p > 0. \quad (5.18)$$

(Условие (5.17) эквивалентно требованию того, что  $H_p(p)$  — правильная дробь.)

Примеры требуемого по правилу 1 поведения годографов показаны на рис. 2.21 а, б.

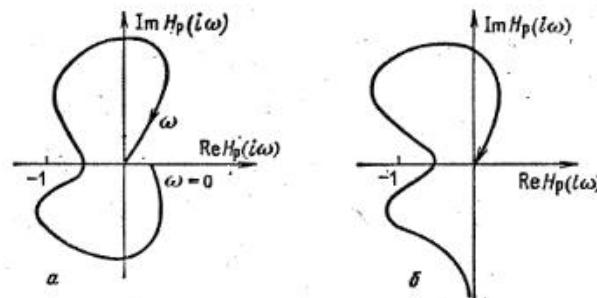


Рис. 2.21

Приведем также конкретную задачу.

**Пример 5.1.** Рассмотрим вопрос об устойчивости электромеханической следящей системы (ЭСС). Качественное описание системы было дано в гл. 1 (рис. 1.5). Напомним, что простейшая ЭСС состоит из следующих физических элементов: (а) задающей оси, угол поворота которой обозначим  $\varphi^d(t)$ ; (б) вала нагрузки, угол поворота которого обозначим  $\varphi(t)$ ; (в) датчика рассогласования, вырабатываемого электрический сигнал  $u_e(t)$ , который будем описывать уравнением

$$u_e(t) = k_e \varepsilon(t), \quad k_e > 0, \quad (5.19)$$

где  $\varepsilon(t) = \varphi^d(t) - \varphi(t)$  — рассогласование между углами поворота задающей оси и вала; (г) усилителя, вырабатывающего электрический сигнал управления, который будем описывать соотношением

$$u(t) = k u_e(t), \quad k > 0, \quad (5.20)$$

и, наконец, (д) исполнительного устройства, включающего усилитель мощности, двигатель и редуктор, через который движущий момент передается на вал. Входное напряжение усилителя мощности и является сигналом управления

$$u_{ax}(t) = u(t). \quad (5.21)$$

Кроме того, напомним, что в П.2.2 и П.2.3 было приведено исследование блока, состоящего из элементов «усилитель мощности», «двигатель», «редуктор», «вал». Его математическое описание в целом дается формулой (2.21), которую можно написать в

операторном виде:

$$\varphi(t) = H_{u\varphi}(D) u_{ax}(t) + H_{m\varphi}(D) m_{ax}(t), \quad (5.22)$$

где  $m_{ax}(t)$  — момент внешней нагрузки на вал. Совокупность соотношений (5.19) — (5.22) может быть представлена структурной схемой (рис. 2.22), где не учтено лишь внешнее возмущение  $m_{ax}(t)$ , не играющее роли при исследовании устойчивости.

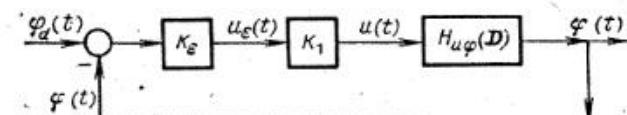


Рис. 2.22

Связь между внешним входом  $\varphi^d(t)$  и общим выходом  $\varphi(t)$  представлена соединением звеньев, которое можно привести к стандартной структуре с отрицательной обратной связью, если положить

$$H_1(p) = k_e k_u H_{u\varphi}(p), \quad H_2(p) = 1.$$

Примем первоначально упрощенную формулу (2.24) для п. ф. силового блока

$$H_{u\varphi}(p) = \frac{k_c}{p(T_m T_o p^2 + T_m p + 1)}, \quad k_c > 0, \quad T_m > 0, \quad T_o > 0.$$

Тогда

$$H_p(p) = H_1(p) = \frac{k_p}{p(T_m T_o p^2 + T_m p + 1)}, \quad k_p \triangleq k_e k_u k_c > 0.$$

В данном случае

$$Q_p(p) = p Q(p), \quad Q(p) = T_m T_o p^2 + T_m p + 1, \quad P_p(p) = k_p$$

и можно использовать Т.5.1'.

Условие  $k_p > 0$  выполнено,  $Q_p(p)$  — устойчив. Остается проверить поведение частотной характеристики  $H_p(i\omega)$ .

Имеем

$$\begin{aligned} H_p(i\omega) &= \frac{k_p}{i\omega(1 - T_m T_o \omega^2 + iT_m \omega)} = \\ &= -\frac{k_p}{\omega} \frac{1}{(1 - T_m T_o \omega^2) + (T_m \omega)^2} [T_m \omega + i(1 - T_m T_o \omega^2)], \end{aligned}$$

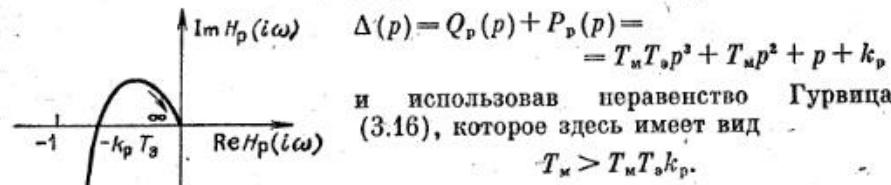
откуда следует, что годограф пересекает вещественную ось только при

$$\omega = (\sqrt{T_m T_o})^{-1},$$

причем в точке пересечения (рис. 2.23)

$$\operatorname{Re} H_p(i\omega) = -k_p T_s.$$

Тем самым доказано, что характеристический многочлен системы устойчив, если  $k_p < T_s^{-1}$ . Подчеркнем, что для данной несложной системы тот же результат проще получить, непосредственно записав этот многочлен в виде



Отметим, что если положить  $T_s = 0$ , т. е. использовать еще более простое описание (2.25) п. ф. силового блока

$$H_{u\Phi}(p) = \frac{k_0}{p(T_m p + 1)}.$$

Рис. 2.23

полученное в пренебрежении самоиндукцией якорной цепи двигателя, то был бы сделан неверный вывод: ЭСС устойчива при любом значении коэффициента  $k_p$ . Иначе говоря, пренебрежение малыми постоянными временем опасно при исследовании устойчивости. Однако, используя первый вариант описания, т. е. формулу (2.24), мы также упростили задачу по сравнению с более полным описанием, даваемым формулой (2.23). Анализ вопроса о том, когда это упрощение допустимо, отложен до следующей главы.  $\square$

Теоремы 5.1, 5.1' дают достаточные условия устойчивости системы с отрицательной обратной связью, если, согласно исходному определению, выполнено еще и условие строгой реализуемости п. ф. соединений

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)} = \frac{\beta_1(p) \alpha_2(p)}{\alpha_1(p) \alpha_2(p) + \beta_1(p) \beta_2(p)}.$$

Поскольку в теоремах уже требовалось, чтобы

$$\deg \{\alpha_1 \alpha_2\} > \deg \{\beta_1 \beta_2\},$$

то строгая реализуемость имеет место, если

$$\deg \alpha_1 \geq \deg \beta_1,$$

т. е. звено, стоящее в прямой цепи, строго реализуемо, а это заранее предполагалось.

**5.3. Обобщенный критерий Найквиста.** Возникает вопрос, являются ли условия теорем 5.1, 5.1' необходимыми, т. е. обязательно ли при их нарушении система окажется неустойчивой?

В частности, особо существенно, может ли система быть устойчивой, если характеристические многочлены звеньев имеют корни в правой полуплоскости и заведомо неустойчивы?

Оказывается, что это возможно.

**Теорема 5.2 (обобщенный критерий Найквиста)\*.** Пусть выполнены условия:

- а)  $H_p(p)$  — правильная;
- б) многочлены  $P_p(p)$ ,  $Q_p(p)$  не имеют совпадающих корней в правой полуплоскости (несовпадающие корни назовем нулями и полюсами  $H_p(p)$ );
- в) число полюсов  $H_p(p)$  в правой полуплоскости задано и равно  $q^- \geq 0$ .

Тогда для устойчивости системы звеньев, соединенных отрицательной обратной связью, необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  точка  $H_p(i\omega)$  на комплексной плоскости совершила ровно  $q^-$  полуоборотов вокруг критической точки с координатами  $(-1, 0)$ , или, что же самое, годограф  $H_p(i\omega)$  ровно  $q^-/2$  раз охватывал критическую точку.

Не приводя пока достаточно громоздкого доказательства, дадим пояснения и примеры.

**Случай 1.**  $Q_p(p)$  — устойчив (оба звена устойчивы).

В этом случае критерий Найквиста сводится к требованию: годограф  $H_p(i\omega)$  не должен охватывать критическую точку.

При этом возможны две ситуации (рис. 2.24, а, б).

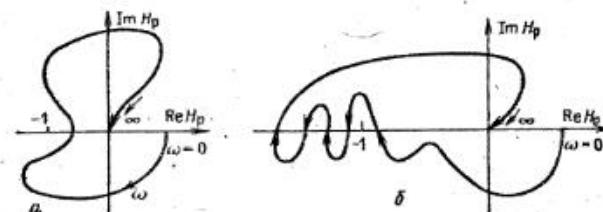


Рис. 2.24

1а. Годограф не пересекает вещественную ось или пересекает ее правее критической точки.

1б. Годограф столько же раз пересекает вещественную полусось  $(-\infty, -1)$  снизу вверх, сколько и сверху вниз \*\*).

Ситуация 1а соответствует условиям Т.5.1, однако устойчивость имеет место и в ситуации 1б.

**Случай 2.**  $H_p(p)$  не имеет полюсов на мнимой оси, но есть  $q^- > 0$  полюсов справа. В этом случае годограф должен охватывать критическую точку, делая  $q^-$  полуоборотов. Например, при  $q^- = 1$

\* Критерий был сформулирован в 1932 г. Найквистом применительно к задачам радиотехники для частного случая  $q^- = 0$ .

\*\*) Все диаграммы построены в предположении  $H_p(0) > 0$  или  $H_p(0) < 0$  (при наличии нулевого корня).

диаграммы на рис. 2.24, а, б соответствуют неустойчивой системе, а диаграмма на рис. 2.25 — устойчивой.

**Случай 3.**  $H_p(p)$  имеет один нулевой полюс, а остальные корни — слева.

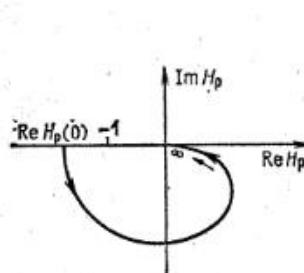


Рис. 2.25

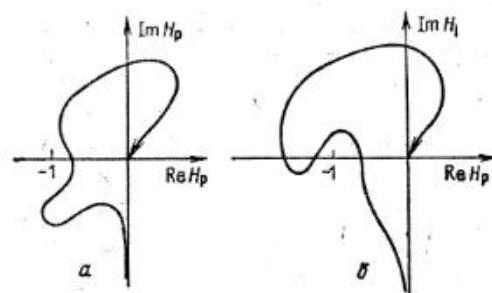


Рис. 2.26

В этом случае годограф рассчитывается с исключением точки  $\omega = 0$ , и ситуации За, Зб, представленные на рис. 2.26, а, б, соответствуют устойчивой системе. Первая из них рассматривалась в Т.5.1'.

**Случай 4.**  $H_p(p)$  имеет  $q_+$  нулевых полюсов,  $2q_v$  чисто мнимых полюсов  $\pm i\omega_v$ , кратности  $q_v$  каждый и  $q^-$  полюсов справа.

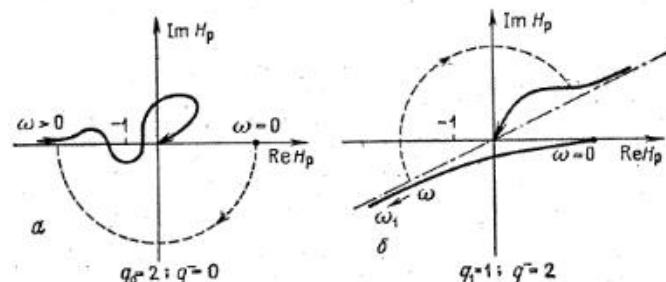


Рис. 2.27

В этом общем случае следует учесть отсутствие непрерывности годографа  $H_p(i\omega)$  при  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_v$  и применить следующую формальную процедуру его построения:

а) построить годограф вне точек разрыва с ветвями, уходящими в  $\infty$  при приближении к этим точкам;

б) дополнить годограф до непрерывной кривой частями окружности большого радиуса (много больше 1), связывающими ветви.

При этом начальная точка обязательно располагается на вещественной оси, разрыв при  $\omega = 0$  заполняют дугой с поворотом на  $-q_-\frac{\pi}{2}$ , разрыв при  $\omega_v$  заполняют дугой с поворотом на  $-q_v\pi$ .

**Правило 2 (геометрическая интерпретация обобщенного критерия Найквиста).** Если годограф  $H_p(i\omega)$  (с учетом указанной процедуры дополнения) пересекает вещественную полусось левее критической точки, но так, что разность между числом пересечений сверху вниз и снизу вверх равна  $q^-/2$ , то система устойчива\*). В противном случае устойчивость отсутствует.

Пример диаграммы, из которой следует устойчивость системы, дан на рис. 2.27, а. Из диаграммы на рис. 2.27, б следует неустойчивость.

Дадим теперь доказательство Т.5.2. Доказательство основывается на применении теории функций комплексной переменной, утверждающей справедливость так называемого принципа аргумента \*\*):

$$\delta \operatorname{Arg} \Phi(p) = 2\pi(n_r - p_r), \quad (5.23)$$

где  $\delta \operatorname{Arg}$  обозначено изменение аргумента функции  $\Phi(p)$  при изменении  $p$  по замкнутому контуру,  $\Phi(p)$  предполагается дробно-рациональной, а  $n_r$ ,  $p_r$  — число нулей и полюсов  $\Phi(p)$ , лежащих внутри  $\Gamma$ . Примем  $\Phi(p)$  в виде

$$\Phi(p) = 1 + H_p(p) = 1 + \frac{P_p(p)}{Q_p(p)} = \frac{Q_p(p) + P_p(p)}{Q_p(p)}. \quad (5.24)$$

Построим контур  $\Gamma$ , показанный на рис. 2.28. Он состоит из полуокружности большого радиуса  $R$ , отрезков на мнимой оси и полуокружностей малого радиуса  $r$ , охватывающих справа начало координат и точки  $\pm i\omega_v$ , соответствующие полюсам  $H_p(p)$  на мнимой оси.

Изменение аргумента  $\Phi(p)$  на  $\Gamma$  равно сумме изменений аргумента на указанных частях, причем на полуокружности  $R$  (при достаточно больших  $R$ )  $\Phi(p) \sim 1$  в силу условия (а) теоремы, так что аргумент равен нулю, как и его изменение, а на полуокружностях малого радиуса изменение аргумента равно  $\pi q_v$ , где  $q_v$  — кратность полюса  $+i\omega_v$  (и  $-i\omega_v$ ), если  $\omega_v \neq 0$ , и равно  $\pi q_0$ , если нулевой полюс имеет кратность  $q_0$ .

С другой стороны, при условиях (б), (в) принцип аргумента устанавливает эквивалентность требования устойчивости характеристического многочлена

$$\Delta(p) = Q_p(p) + P_p(p)$$

и равенства

$$\delta \operatorname{Arg} \Phi(p) = -2\pi q^-, \quad (5.25)$$

поскольку  $n_r = 0$ ,  $p_r = q^-$ , если при достаточно малых  $r$ ,  $R^{-1}$  контур охватывает всю правую полуплоскость.

С учетом данных оценок (5.25) эквивалентно переписывается в виде

$$\delta \operatorname{Arg} \Phi(i\omega) + \pi q_0 + 2 \sum_v \pi q_v = -2\pi q^-, \quad (5.26)$$

причем  $\delta \operatorname{Arg}$  означает изменение аргумента при изменении  $\omega$  от  $R$  до  $-R$ , за вычетом малых участков размера  $2r$ , где  $H_p(i\omega)$  претерпевает разрывы.

\*.) Если годограф начинается на  $[-\infty, -1]$ , то это считается за 1/2 пересечения.

\*\*) См., например, [2.3, с. 298].

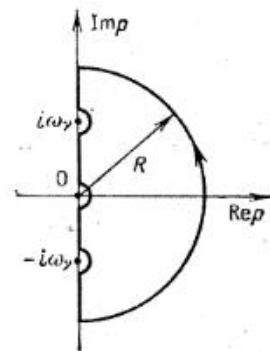


Рис. 2.28

Изменяя направление прохождения на противоположное (от  $-R$  к  $R$ ) и учитывая, что

$$\text{Arg } \Phi(i\omega) = -\text{Arg } \Phi(-i\omega), \quad \omega \neq q_v, \quad (5.27)$$

приходим к результату

$$\frac{1}{\pi} \delta' \text{Arg} [1 + H_p(i\omega)] - \frac{1}{2} q_0 - \sum_v q_v = q^-, \quad (5.28)$$

где символ  $\delta' \text{Arg}$  означает изменение аргумента при пробегании  $\omega$  «почти» от нуля ( $\rho$ ) до «почти» бесконечности ( $R$ ), а остальные слагаемые отражают вклад изменений на разрывах.

Выражение слева совпадает с числом полуоборотов годографа функции  $1 + H_p(i\omega)$  вокруг начала координат, или, что то же самое, годографа  $H_p(i\omega)$  вокруг критической точки  $(-1, 0)$  (с учетом указанных выше дополнений на разрывах). Тем самым (5.28) доказывает, что условия теоремы гарантируют устойчивость многочлена  $\Delta(p)$ . Строгая реализуемость п. ф. соединения следует из условия (a) и предположения о строгой реализуемости п. ф. звеньев. ■

**Замечание.** Утверждение Т.5.2 сохраняет силу и в том случае, когда условие (a) заменено более слабым условием строгой реализуемости  $H_p(p)$ . Для обоснования достаточно рассмотреть ситуацию, где  $\deg P_p(p) = \deg Q_p(p) = n$ . При этом возможны два случая:

- (a)  $\deg \{P_p + Q_p\} = n$ ,
- (b)  $\deg \{P_p + Q_p\} < n$ .

В случае (a) на полуокружности достаточно большого радиуса функция  $\Phi(p)$  ведет себя как константа, а следовательно, изменение ее аргумента равно нулю, что позволяет перенести на этот случай ранее приведенное доказательство. Случай (b) является вырожденным (при сложении многочленов взаимно уничтожаются старшие степени). Очевидно, что при этом изменение аргумента происходит, и формула (5.28) не верна, а следовательно, кажется неверным утверждение критерия Найквиста. Однако это не так: нетрудно убедиться, что при условии (b) п. ф. системы с обратной связью не является строго реализуемой, а следовательно, согласно определению, система неустойчива, о чем и будет свидетельствовать невыполнение равенства (5.28).

**5.4. Приближение дифференцирующие устройства.** В качестве полезного примера изучения структур с обратной связью проведем анализ некоторых устройств, построенных на базе операционных усилителей и приближенно осуществляющих операцию дифференцирования. Пусть  $u_1(t)$  — напряжение на входе устройства,  $u(t)$  — на выходе. Идеальное дифференцирование имеет место, если

$$u(t) = D u_1(t). \quad (5.29)$$

Подчеркнем, что п. ф. дифференцирующего преобразователя не является строго реализуемой. Поэтому ранее предполагавшиеся схемы (см. § 2) не пригодны для создания идеально дифференцирующих устройств. Рассмотрим вновь блок, состоящий из операционного усилителя и  $RC$ -цепей (рис. 2.29, a), где  $Y_1(D)$  — операторная проводимость прямой цепи,  $Y_0(D)$  — операторная проводимость цепи в обратной связи (операторная проводимость обратна операторному сопротивлению),  $Y_u(D)$  — входная проводимость усилителя. Тогда уравнения цепей запишутся в виде

$$Y_1(D)(u_1 - u_u) + Y_0(D)(u - u_u) = Y_u u_u. \quad (5.30)$$

Учтем далее, что усилитель не является идеальным, а обладает инерционностью, и примем для него описание в виде

$$u = -\frac{k_y}{\alpha_y(D)} u_u, \quad (5.31)$$

где  $\alpha_y(D)$  — многочлен такой, что  $\alpha_y(0) = 1$ . Свойства реальных операционных усилителей можно хорошо воспроизвести, считая

$$\alpha_y(D) = (\tau D + 1)^2.$$

При этом амплитудно-частотная характеристика усилителя равна

$$A_y(\omega) = \frac{k_y}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad (5.32)$$

и быстро убывает при  $\omega > \tau^{-1}$  (диапазон

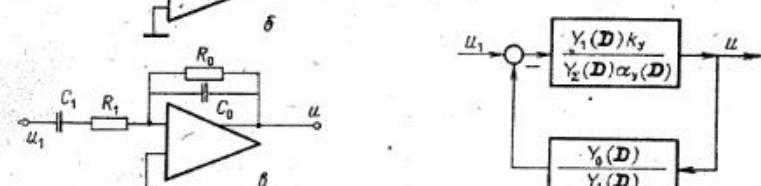


Рис. 2.29

Рис. 2.30

частот от  $\omega = 0$  до  $\omega = \tau^{-1}$  часто называют полосой пропускания усилителя). Для реальных усилителей  $k_y$  имеет порядок  $10^6 \div 10^7$ ,  $\tau^{-1}$  — порядок  $10^3$  1/с. Исключая промежуточную переменную  $u_u$ , запишем

$$u = -H(D) u_1,$$

где

$$H(D) = \frac{k_y \frac{Y_1(D)}{Y_\Sigma(D)} \frac{1}{\alpha_y(D)}}{1 + k_y \frac{Y_0(D)}{Y_\Sigma(D)} \frac{1}{\alpha_y(D)}} = \frac{H_1(D)}{1 + H_1(D) H_2(D)} = \frac{H_1(D)}{1 + H_p(D)}, \quad (5.33)$$

$$Y_\Sigma(D) \triangleq Y_0(D) + Y_1(D) + Y_u, \quad H_1 \triangleq k_y \frac{Y_1}{Y_\Sigma \alpha_y}, \quad H_2 \triangleq \frac{Y_0}{Y_1 \alpha_y}.$$

Передаточной функции  $H(D)$  можно сопоставить структурную схему соединения с обратной связью (рис. 2.30), осуществляющую то же самое преобразование «инвертированный вход  $-u_1$  — выход  $u$ ». Еще раз подчеркнем, что структурная схема соединения с обратной связью не отражает непосредственно свойства элементов электрического соединения с цепью обратной связи: п. ф.  $H_2$  звена в обратной связи структурной схемы зависит и от проводимости

5\*

$Y_0$  цепи в обратной связи усилителя и от проводимости прямой цепи.

Напомним теперь ранее полученный вывод 3. Из него сразу следует, что частотная характеристика соединения  $H(i\omega)$  близка к обратной частотной характеристике звена в обратной связи

$$H(i\omega) \cong H_2^{-1}(i\omega) = \frac{Y_1(i\omega)}{Y_0(i\omega)} \quad (5.34)$$

на всех частотах, где

$$|H_p(i\omega)| = k_y \left| \frac{Y_0(i\omega)}{Y_\Sigma(i\omega) \alpha_y(i\omega)} \right| \gg 1. \quad (5.35)$$

В частности, если  $Y_1 = 1/R_1$ ,  $Y_0 = 1/R_0$  (в прямой и обратной цепи усилителя стоят резисторы с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_0$ ), то

$$H(i\omega) \approx \frac{R_0}{R_1}.$$

Если же  $Y_1 = 1/R_1$ ,  $Y_0 = C_0 D$  (вместо резистора в обратной цепи стоит конденсатор емкости  $C_0$ ), то

$$H(i\omega) \approx \frac{1}{R_1 C_0 i\omega}.$$

Иначе говоря, эти устройства имеют частотные характеристики идеального усилителя и интегратора, однако такие свойства имеют место только в диапазоне частот, ограниченном условием (5.35). Даже при очень большом  $k_y$  наличие убывающего множителя  $|\alpha_y(i\omega)|^{-1}$  ограничит диапазон частот входных сигналов, для которых верны ранее полученные результаты (§ 2) о свойствах схем с операционными усилителями.

Рассмотрим далее другой важный частный случай, когда в прямой цепи стоит конденсатор емкости  $C_1$ , а в обратной — резистор сопротивления  $R_0$  (рис. 2.29, б). При этом

$$Y_1(D) = C_1 D, \quad Y_0 = 1/R_0$$

и

$$H(i\omega) \cong C_1 R_0 i\omega,$$

т. е. частотная характеристика близка к характеристике идеального дифференцирующего звена

$$H(D) = C_1 R_0 D$$

в диапазоне частот, ограниченном условием

$$k_y \left| \frac{1/R_0}{1/R_0 + C_1 \omega + Y_0} \right| \frac{1}{|\alpha_y(i\omega)|} \gg 1.$$

Казалось бы, с увеличением  $k_y$  можно добиться хорошего качества дифференцирования с помощью такой простой схемы, и эта рекомендация зачастую фигурирует даже в учебниках. Однако на са-

мом деле она не верна. Дело в том, что при больших  $k_y$  схема теряет устойчивость! Имеем

$$H_p(D) = k_y \frac{Y_1(D)}{Y_\Sigma(D) \alpha_y(D)} = k_y \frac{1}{1 + R_0 C_1 D + Y_0 R_0} \frac{1}{(\tau D + 1)^2}$$

и характеристический многочлен системы имеет вид

$$\Delta(p) = (\tau p + 1)^2 (1 + Tp) + k_y = \tau^2 T p^3 + \tau(2T + \tau)p^2 + (T + 2\tau)p + k_y,$$

где принято обозначение  $T = R_0 C_1$  и для упрощения записи считается, что  $Y_0 R_0 \ll 1$  (входная проводимость мала) и  $k_y \gg 1$ . Из критерия Гурвица (§ 3) сразу следует, что система устойчива, только если

$$k_y \leq \frac{(T + 2\tau)(2T + \tau)}{\tau T},$$

т. е. при неограниченном увеличении  $k_y$  устойчивость заведомо теряется. В силу этого обстоятельства описанная простая схема практически не используется. Вместо нее применяют несколько модифицированную схему (рис. 2.29, в). При этом

$$Y_1(D) = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 D}} = \frac{T_1 D}{1 + T_1 D} \frac{1}{R_1}, \quad Y_0(D) = \frac{1}{R_0} + C_0 D = \frac{1}{R_0} (1 + T_0 D),$$

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_0 = R_0 C_0,$$

и в силу (5.34)

$$H(i\omega) \cong T_1 \omega \frac{1}{(1 + T_0 i\omega)(1 + T_1 i\omega)} \cong T_1 \omega$$

при  $T_0 \omega \ll 1$ ,  $T_1 \omega \ll 1$  и выполнении общего условия (5.35). Таким образом, схема вновь имеет частотную характеристику, близкую к характеристике идеального дифференцирующего звена. Вместе с тем нетрудно убедиться, что постоянные  $T_0$ ,  $T_1$  всегда можно выбрать так, чтобы сохранялась устойчивость и при неограниченно больших  $k_y$ . Действительно, примем  $T_1 = T_0 = \tau$ ,  $R_0 Y_0 \ll 1$ ; тогда

$$H_p(D) = k_y \frac{1 + T_0 D}{1 + R_0 Y_0 + T_0 D + \frac{T D}{1 + T_1 D}} \frac{1}{(\tau D + 1)^2} = k_y \frac{1}{(1 + \tau D)^2 + TD},$$

Характеристический многочлен системы равен

$$\Delta(p) = (\tau p + 1)^2 [\tau^2 p^2 + (2\tau + T)p + 1 + k_y]$$

и заведомо устойчив при любых  $k_y$ . Докажите то же самое с помощью Т.5.1, построив годограф  $H_p(i\omega)$ . Докажите также устойчивость схем, использованных для реализации операций идеального усиления и интегрирования.

## ГЛАВА 3

### ПОСТРОЕНИЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

#### § 1. Программа, обратная связь, стабилизация

**1.1. Цель управления. Идеальные программы.** Качественный смысл любой задачи теории управления всегда один и тот же — необходимо так выбрать управляющее воздействие, чтобы объект «вел себя» желательным образом. Однако для осуществления конкретного выбора из множества возможностей такого расплывчатого определения цели недостаточно.

Попытаемся его конкретизировать. Пусть  $y(t)$  означает процесс изменения управляемого выхода объекта. Тогда можно сформулировать две основные задачи:

- 1) обеспечить близость выхода  $y(t)$  к желаемому постоянному значению  $y^d$  (*задача регулирования*);
- 2) обеспечить близость выхода  $y(t)$  к желаемому процессу  $y^d(t)$  (*задача слежения*).

Очевидно, что задача регулирования является частным случаем задачи слежения, и в дальнейшем будем ориентироваться на более общую ситуацию.

Обозначим

$$e(t) = y^d(t) - y(t). \quad (1.1)$$

Близость  $y(t)$  и  $y^d(t)$  равносильна малости величины ошибки слежения  $e(t)^*$ . Поставленная задача будет решена идеально, если управление удается выбрать так, чтобы

$$e(t) = 0 \quad (1.2)$$

в любой момент  $t > 0$  работы объекта.

Систему управления, обладающую таким свойством, часто называют *инвариантной*.

Приступим к изучению возможностей достижения этой цели, считая, что объект управления описан с помощью линейного дифференциального уравнения

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)u(t) + \beta_w(D)w(t), \quad (1.3)$$

\* ) Иногда будут использоваться и частный термин — ошибка регулирования и более общий — ошибка управления.

где  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $w(t)$  — возмущение, а  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$ ,  $\beta_w(D)$  — многочлены от оператора дифференцирования  $D$  с постоянными коэффициентами.

Запишем (1.3) в виде

$$\alpha(D)[y^d(t) - e(t)] = \beta(D)u(t) + \beta_w(D)w(t),$$

или

$$\alpha(D)e(t) = -\beta(D)u(t) + \alpha(D)y^d(t) - \beta_w(D)w(t). \quad (1.4)$$

Примем предположения:

а) начальные значения  $e(t)$  и ее производных вплоть до  $(n-1)$ -й равны нулю ( $n$  — степень  $\alpha$ );

б) многочлены  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$ ,  $\beta_w(D)$  известны точно, равно как и значения функций  $w(t)$ ,  $y^d(t)$ ,  $t \geq 0$ .

При этих предположениях управляющее воздействие  $u(t)$ , обеспечивающее инвариантность, находим несложным образом. Действительно, вычислим  $u(t)$  как решение уравнения

$$\beta(D)u(t) = \alpha(D)y^d(t) - \beta_w(D)w(t). \quad (1.5)$$

Тогда при использовании такого  $u(t)$  в качестве заданной программы управления ошибка окажется совпадающей с решением однородного уравнения

$$\alpha(D)e(t) = 0 \quad (1.6)$$

при нулевых начальных условиях, а следовательно,  $e(t) = 0$ ,  $t > 0$ . Особенно прост случай, когда  $\beta(D) = \beta_0 = \text{const}$ . Здесь программа, обеспечивающая инвариантность, дается явной формулой:

$$u(t) = \beta_0^{-1} [\alpha(D)y^d(t) - \beta_w(D)w(t)]. \quad (1.7)$$

**Пример 1.1.** Объект задан уравнением

$$(TD + 1)y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

и требуется осуществить безошибочное слежение при  $t > 0$  выхода за процессом

$$y^d(t) = C_1 t \mathbf{1}(t), \quad C_1 = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Тогда по формуле (1.7) имеем

$$u(t) = (TD + 1)y^d(t) = C_1(T + t)\mathbf{1}(t), \quad t \geq 0. \quad \square$$

В случае  $\beta(D) \neq \text{const}$  для решения уравнения (1.5) удобно воспользоваться преобразованием Лапласа. Предположим дополнительно, что начальные значения  $y^d(t)$ ,  $w(t)$  и производных соответствующего порядка равны нулю, хотя возможно их скачкообразное изменение при  $t = +0$ . Тогда из (1.5) следует, что

$$U(p) = \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} Y^d(p) - \frac{\beta_w(p)}{\beta(p)} W(p), \quad (1.8)$$

где использованы большие буквы для обозначения  $\mathcal{L}$ -образов функций. Вычисление программы, обеспечивающей инвариантность, сводится к нахождению оригинала по заданному  $\mathcal{L}$ -образу.  $\square$

**Пример 1.2.** Требуется обеспечить сохранение начального равновесия  $y(0) = 0$ ,  $Dy(0) = 0$  для объекта, описываемого уравнением

$$[T^2 D^2 + 2\xi T D + 1]y(t) = (D + 1)u(t) + w(t),$$

несмотря на наличие возмущения  $w(t) = 1(t)$ . Поскольку требование эквивалентно  $y^d(t) = 0$ , то

$$U(p) = -\frac{1}{p+1} W(p) = -\frac{1}{(p+1)p},$$

откуда

$$u(t) = -(1 - e^{-t}) \mathbf{1}(t).$$

Если же требуется обеспечить переход к новому значению выхода,  $y^d(t) = 1(t)$ , то согласно (1.8)

$$U(p) = \frac{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}{p+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \frac{1}{p} = T^2 \left(1 + \frac{2\xi T^{-1} - 1}{p+1}\right),$$

так что

$$u(t) = T^2 [\delta(t) + (2\xi T^{-1} - 1)e^{-t} \mathbf{1}(t)].$$

Таким образом, для скачкообразного изменения выхода потребовалось импульсное неограниченное управляющее воздействие. Это ясно и из физических соображений: невозможно мгновенно изменить выход инерционного объекта с помощью ограниченной силы.  $\square$

Сделаем общее заключение.

**Вывод 1.** При принятых предположениях возможно построить программу управления, обеспечивающую выполнение условия инвариантности (1.2), однако нельзя гарантировать, что это управление окажется ограниченным.

Как правило, импульсное управляющее воздействие неосуществимо. Если функции  $y^d(t)$ ,  $w(t)$  таковы, что их  $\mathcal{L}$ -образы  $Y^d(p)$ ,  $W(p)$  являются дробно-рациональными функциями, нетрудно установить условие, при котором инвариантность достижима без использования импульсов. Действительно, в этом случае  $U(p)$ , вычисляемая по формуле (1.8), также окажется дробно-рациональной. Если степень ее знаменателя превосходит степень числителя, то оригинал  $u(t)$  не содержит импульсных функций \*).

В противном случае приходится отказаться от инвариантности либо, что почти то же самое, отказаться от исходного задания желаемого процесса  $y^d(t)$ , заменив его более «гладким».

**Пример 1.3.** Рассмотрим тот же объект, что и в П.1.1. Нетрудно видеть, что при  $y^d(t) = C_0 \mathbf{1}(t)$  для обеспечения инвариантности

требуется импульсное управление. Смягчим задание, принимая (рис. 3.1), что

$$y^d(t) = \begin{cases} C_0(t/t_1) \mathbf{1}(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ C_0, & t > t_1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Тогда, согласно формуле (1.5), можно вычислить управление

$$u(t) = (TD + 1)y^d(t) = \begin{cases} C_0 \frac{1}{t_1} (T + t) \mathbf{1}(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ C_0, & t > t_1. \end{cases} \quad (1.10)$$

При  $t_1 > 0$  управление оказывается ограниченной функцией. «Ужесточение» задания путем уменьшения  $t_1$  приводит к росту необходимого управления, причем при  $t_1 \rightarrow 0$  управление стремится к описанному выше импульсному. Поскольку найденное при  $t_1 > 0$  управление (1.10) обеспечивает идеальное следование «смягченному» заданию (1.9), то оно же по отношению к исходному скачкообразному заданию приводит к ошибке

$$e(t) = \begin{cases} C_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right), & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases}$$

(1.11)

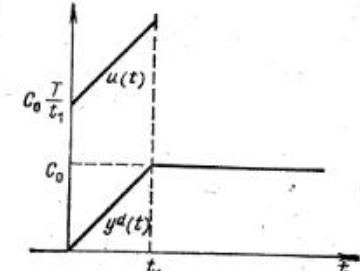


Рис. 3.1

исчезающей только при  $t \geq t_1$ .

Отметим, что если заранее задана граница  $\bar{u}$  возможного уровня управления

$$|u(t)| \leq \bar{u}, \quad t > 0,$$

то и управление (1.10) может оказаться неприемлемым. Очевидно, что для его допустимости должно быть выполнено условие

$$|C_0| \left(1 + \frac{T}{t_1}\right) \leq \bar{u}.$$

Можно попытаться «смягчить» задание, все более увеличивая  $t_1$ , но при  $|C_0| > \bar{u}$  желаемый процесс вида (1.9) окажется вообще неосуществимым \*).

**1.2. Влияние неточности математической модели.** Важно понять, что даже следование идеально рассчитанной программе может не дать эффективного решения реальных задач управления. Дело в том, что при расчете мы опираемся на математическую модель объекта, предполагая точно известными передаточные функции, возмущения и желаемый процесс изменения выхода. В действи-

\*.) Общие методы построения программ управления при наличии ограничений излагаются в гл. 9.

\*) См. аналогичный результат в § 3, гл. 2.

тельности же все эти факторы известны неточно. При расчете мы вынуждены опираться лишь на их оценки. Любая же погрешность, несоответствие оценки и реальных значений могут привести к неприятным последствиям.

**Пример 1.4.** Пусть объект описывается уравнением

$$(D - 1)y = u(t) + w(t). \quad (1.12)$$

Пусть требуется сохранить начальное состояние,  $y(0) = 0$ , а возмущение равно  $w(t) = C1(t)$ . Тогда, очевидно, следует принять  $u(t) = -w(t)$  с обеспечением инвариантности. Однако, если вместо константы  $C$  известна лишь ее неточная оценка  $\hat{C}$ , то и расчет можно провести только на базе этой оценки, приняв

$$u(t) = -\hat{C}1(t).$$

Но при этом выход начнет изменяться согласно уравнению

$$(D - 1)y(t) = (-\hat{C} + C)1(t),$$

откуда

$$y(t) = (C - \hat{C})[e^t - 1]1(t). \quad (1.13)$$

Даже при малой погрешности  $C - \hat{C}$  отклонение от желаемого состояния становится с ростом  $t$  сколь угодно большим.  $\square$

Особенность приведенного примера состояла в том, что объект не являлся устойчивым.

Почти очевидным является следующее заключение.

**Вывод 2.** Программное управление непосредственно не применимо к неустойчивым объектам, если время работы длительно.

Действительно, пусть начальные условия хотя бы незначительно отличаются от расчетных, принятых за нулевые, тогда, в силу неустойчивости, ошибка с течением времени сколь угодно отойдет от желаемого нулевого значения. Если же начальные условия заданы точно, но неточно известно возмущение, то рассчитанная по его оценке программа не полностью компенсирует реальное возмущение, а даже малый остаток может сколь угодно «раскачать» неустойчивый объект.

**1.3. Стабилизация с помощью обратной связи.** Учтем теперь, что для формирования управляющего воздействия возможно использовать не только априорную информацию, заключающуюся в математической модели, но и текущую, получаемую в ходе работы управляемого объекта от измерительных устройств. Как уже указывалось в гл. 1, использование текущей информации может позволить преодолеть неприятности, связанные с неточностью априорной.

Продемонстрируем прежде всего, что на основе измерений выхода объекта  $y(t)$ , как правило, можно выработать такое управляющее воздействие (обратную связь по выходу), чтобы замкнутая

система, замкнутая обратной связью, оказалась устойчивой, даже если сам объект неустойчив.

Начнем с наглядного случая, когда уравнение объекта имеет вид

$$\alpha(D)y(t) = \beta_0 u(t) + \beta_w(D)w(t), \quad (1.14)$$

т. е.  $\beta(D) = \beta_0 = \text{const}$ . Выберем  $u(t)$  в виде

$$u(t) = u_f(t) + u_o(t). \quad (1.15)$$

Первая компонента  $u_f(t)$  есть *сигнал обратной связи*\*, вырабатываемый на основе текущих измерений выхода  $y(t)$ , а вторая задается любым другим образом, но не зависит от  $y(t)$ .

Пусть

$$u_f(t) = -k(D)y(t), \quad (1.16)$$

где  $k(D)$  есть многочлен от оператора дифференцирования

$$k(D) = k_0 + k_1 D + \dots + k_r D^r, \quad (1.17)$$

т. е. подразумевается, что при выработке управления либо, кроме  $y(t)$ , измеряются и производные выхода вплоть до  $r$ -й, либо дифференцирование  $y(t)$  производится в вычислительном устройстве (рис. 3.2).

Подставив (1.15), (1.16) в уравнение объекта (1.14), получим

$$[\alpha(D) + \beta_0 K(D)]y(t) =$$

$$= \beta_0 u_o(t) + \beta_w(D)w(t). \quad (1.18)$$

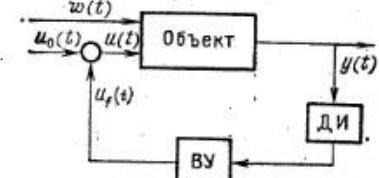


Рис. 3.2

**Вывод 3.** Введение обратной связи по выходу и его производным позволяет изменять характеристический многочлен системы: вместо исходного  $\alpha(p)$  получаем

$$\Delta(p) \triangleq \alpha(p) + \beta_0 k(p). \quad (1.19)$$

Пусть  $\Delta^d(p)$  — произвольный устойчивый многочлен. Тогда при выборе

$$k(D) = \frac{1}{\beta_0} [\Delta^d(D) - \alpha(D)] \quad (1.20)$$

система, замкнутая обратной связью, окажется устойчивой. Более того, в принципе возможна не только стабилизация, но и произвольный выбор характеристического многочлена замкнутой системы, а следовательно, и произвольное расположение его корней, т. е. обеспечение произвольной степени устойчивости.

**Пример 1.5.** Пусть объект описывается уравнением

$$(TD^3 + D^2)y = u, \quad T > 0.$$

\* ) Индекс  $f$  соответствует первой букве английского слова feedback, означающего «обратная связь».

Объект не является устойчивым. Его характеристический многочлен

$$\alpha(p) = Tp^3 + p^2$$

имеет корни  $p_1 = -1/T$ ,  $p_2 = p_3 = 0$ . Введем обратную связь

$$u = -k_0y - k_1\mathbf{D}y - k_2\mathbf{D}^2y.$$

Тогда выход будет изменяться согласно уравнению

$$[T\mathbf{D}^3 + (1 + k_2)\mathbf{D}^2 + k_1\mathbf{D} + k_0]y = 0.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$Tp^3 + (1 + k_2)p^2 + k_1p + k_0 = 0.$$

Выберем коэффициенты усиления  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  так, чтобы все его корни были одинаковы и равны

$$p_1 = p_2 = p_3 = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau > 0,$$

т. е. чтобы характеристическое уравнение имело вид

$$\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^3 = p^3 + 3 \cdot \frac{1}{\tau} p^2 + 3 \cdot \frac{1}{\tau^2} p + \frac{1}{\tau^3} = 0.$$

Очевидно, это достигается, если принять

$$k_0 = \frac{T}{\tau^3}, \quad k_1 = \frac{3T}{\tau^2}, \quad k_2 = \frac{3T}{\tau} - 1.$$

Изменяя величину  $\tau$ , можно добиваться различной скорости затухания эффекта от инициальных начальных условий.  $\square$

Отметим теперь следующие важные обстоятельства:

а) всегда можно считать, что  $\alpha(p)$  имеет вид

$$\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_0,$$

т. е. считать, что  $\alpha_n = 1$  (в противном случае можно предварительно разделить обе части уравнения (1.14) на коэффициент при старшей производной).

Пусть желаемый устойчивый многочлен  $\Delta^d(p)$  имеет вид

$$\Delta^d(p) = p^n + \Delta_{n-1}^d p^{n-1} + \dots + \Delta_0^d.$$

Выбором  $n$  коэффициентов  $\Delta_0^d, \dots, \Delta_{n-1}^d$  можно задать любое расположение  $n$  корней. Тогда, согласно (1.20),  $k(p)$  является многочленом  $(n-1)$ -й степени

$$k(p) = k_0 + k_1p + \dots + k_{n-1}p^{n-1}, \quad (1.21)$$

где

$$k_i = \frac{\Delta_i^d - \alpha_i}{\beta_0}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.22)$$

**Вывод 4.** Для обеспечения произвольного расположения  $n$  корней характеристического уравнения замкнутой системы достаточно вводить обратную связь по выходу и его производным вплоть до  $(n-1)$ -й (именно так было сделано в Примере 1.5).

б) Попытаемся потребовать, чтобы желаемый многочлен  $\Delta^d(p)$  имел степень ниже  $n$ , т. е. ниже порядка дифференциального уравнения объекта. Формально это возможно, хотя из (1.20) ясно, что для этого как раз потребуется обратная связь по  $n$ -й производной, с коэффициентом  $k_n = -1/\beta_0$ . Пусть, однако, величина  $\beta_0$  известна не совсем точно, т. е. при расчете мы располагаем ее оценкой

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 + \delta\beta_0$$

со сколь угодно малой погрешностью. Тогда, выбрав  $k_n = -1/\hat{\beta}_0$ , получаем, что действительный характеристический многочлен замкнутой системы

$$\Delta(p) = \alpha(p) + \beta_0 k(p) = \left(1 - \frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0}\right) p^n + \dots$$

имеет все-таки степень  $n$ . Более того, в зависимости от знака погрешности (который неизвестен!) коэффициент при  $p^n$  может менять знак, и система в действительности может оказаться неустойчивой (см. критерий Стодолы, § 3 гл. 2).

**Вывод 5.** Недопустимо требовать, чтобы замыкание обратной связи приводило к уменьшению порядка системы.

Подчеркнем также, что собственно для решения задачи стабилизации нет необходимости во введении всех производных, вплоть до  $(n-1)$ -й.

В частности, в П.1.5 можно взять  $u = -k_0y - k_1\mathbf{D}y$ , выбрав  $k_0$ ,  $k_1$  любым образом, лишь бы было выполнено условие Рауса — Гурвица  $k_1 > k_0 T$ ,  $k_0 > 0$ ,  $k_1 > 0$ , обеспечивающее устойчивость системы, замкнутой этой обратной связью.

**4.4. Общий алгоритм стабилизации.** Переайдем к рассмотрению общей ситуации, когда  $\beta(\mathbf{D})$  является произвольным многочленом степени не выше  $n$  (п. ф. «управление — выход» строго реализуема).

При этом и закон управления примем в более общей, чем (1.16), форме: предположим, что сигнал обратной связи строится, как решение дифференциального уравнения

$$l(\mathbf{D})u(t) = -k(\mathbf{D})y(t), \quad (1.23)$$

где  $l(\mathbf{D})$  — произвольный многочлен, отличный от нуля.

Ранее рассмотренный закон управления по выходу и его производным является частным случаем (1.23) при  $l(\mathbf{D}) = 1$ . Введение многочлена  $l(\mathbf{D})$  создает новые возможности. Примером закона бо-

лее общего вида, чем (1.16), является так называемый *пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления* или, кратко, *ПИД-закон*, когда

$$u_f(t) = -k_1 y(t) - k_2 \frac{dy}{dt} - k_0 \int y dt,$$

поскольку это соотношение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$Du(t) = -(k_0 + k_1 D + k_2 D^2)y(t), \quad (1.24)$$

записываемому в виде (1.23) при  $l(D) = D$ .

Уравнение объекта (1.3) и уравнение обратной связи образуют систему

$$\begin{aligned} \alpha(D)y(t) &= \beta(D)[u_i(t) + u_n(t)] + \beta_w(D)w(t), \\ l(D)u_i(t) &= -k(D)y(t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Исключив из нее  $u_i(t)$ , получим уравнение

$$[\alpha(D)l(D) + \beta(D)k(D)]y(t) = l(D)[\beta(D)u_n(t) + \beta_w(D)w(t)]. \quad (1.26)$$

Таким образом, характеристический многочлен замкнутой системы принял вид

$$\Delta(p) = \alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p). \quad (1.27)$$

**Теорема 1.1.** Пусть многочлены  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  являются взаимно простыми. Тогда многочлены  $k(p)$ ,  $l(p)$ , определяющие вид обратной связи (1.23), могут быть выбраны так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы  $\Delta(p)$  имел произвольные, наперед заданные коэффициенты, т. е. произвольное расположение корней.

**Доказательство** элементарно следует из известного алгебраического факта [3.5]: по заданным взаимно простым  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  можно найти многочлены  $\bar{k}(p)$ ,  $\bar{l}(p)$  такие, что

$$\alpha(p)\bar{l}(p) + \beta(p)\bar{k}(p) \equiv 1. \quad (1.27')$$

Пусть  $\Delta^d(p)$  — желаемый характеристический многочлен замкнутой системы. Умножив (1.27') на  $\Delta^d(p)$ , получим

$$\alpha(p)\bar{l}(p)\Delta^d(p) + \beta(p)\bar{k}(p)\Delta^d(p) \equiv \Delta^d(p).$$

Следовательно, можно добиться результата

$$\Delta(p) \triangleq \alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) \equiv \Delta^d(p), \quad (1.28)$$

положив

$$l(p) = \bar{l}(p)\Delta^d(p), \quad k(p) = \bar{k}(p)\Delta^d(p).$$

Практически нет необходимости в промежуточном вычислении  $\bar{k}(p)$ ,  $\bar{l}(p)$ . Достаточно просто задать  $k(p)$ ,  $l(p)$  в виде многочленов с неопределенными коэффициентами, подобрав их затем из тождества (1.28).

Многочлены  $k(p)$ ,  $l(p)$  можно найти и с помощью алгоритма Евклида, обычно используемого для доказательства указанного алгебраического утверждения.

Пусть для определенности  $\deg \alpha \geq \deg \beta$ . Разделим  $\alpha(p)$  на  $\beta(p)$  с остатком  $\alpha_1(p)$ , т. е. представим

$$\alpha(p) = \beta(p)x_1(p) + \alpha_1(p),$$

где  $\alpha_1(p)$  имеет степень ниже, чем  $\alpha(p)$  и  $\beta(p)$ . Тогда

$$\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) = \alpha_1(p)l(p) + \beta(p)k_1(p),$$

где  $k_1(p) \triangleq k(p) + x_1(p)l(p)$ . Далее разделим  $\beta(p)$  на  $\alpha_1(p)$ , представив  $\beta(p) = \alpha_1(p)y_1(p) + \beta_1(p)$ ,

где  $\beta_1(p)$  имеет степень ниже, чем  $\beta(p)$  и  $\alpha_1(p)$ . Тогда

$$\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) = \alpha_1(p)l_1(p) + \beta_1(p)k_1(p),$$

где  $l_1(p) = l(p) + y_1(p)k_1(p)$ . Последовательно производя эту процедуру, придем к тому, что либо  $\alpha_s(p)$ , либо  $\beta_s(p)$  станет константой. Пусть для определенности  $\alpha_s(p) = \alpha_s = \text{const}$  и получено, что

$$\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) = \alpha_s l_s(p) + \beta_s k_s(p).$$

Тогда, положив

$$l_s = \frac{1}{\alpha_s} \Delta^d(p), \quad k_s(p) = 0,$$

можно «обратным ходом» найти  $l(p)$ ,  $k(p)$ . ■

**Пример 1.6.** Пусть

$$\alpha(p) = p^2 + 2, \quad \beta(p) = p.$$

Потребуем, чтобы

$$\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) \equiv (p+1)^3 \triangleq \Delta^d(p). \quad (1.28')$$

Положим  $l(p) = l_0$ ,  $k(p) = k_0 + k_1 p$  и выберем коэффициенты  $l_0$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  так, чтобы удовлетворялось тождество

$$(p^2 + 2)l_0 + p(k_0 + k_1 p) = p^2 + 2p + 1.$$

Отсюда  $l_0 + k_1 = 1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $2l_0 = 1$  или  $k_0 = 2$ ,  $k_1 = \frac{1}{2}$ ,  $l_0 = \frac{1}{2}$ . Тем самым закон управления приобретает вид

$$\frac{1}{2}u(t) = -2y(t) - \frac{1}{2}Dy(t),$$

т. е. является ПД-законом.

Получим решение с помощью алгоритма Евклида. Имеем

$$\alpha(p) = p^2 + 2 = p \cdot p + 2 = \beta(p) \cdot p + 2,$$

и тождество (1.28') эквивалентно преобразуется к виду

$$2l(p) + \beta(p)[k(p) + pl(p)] = (p+1)^3.$$

Оно удовлетворяется, если

$$l(p) = \frac{1}{2}\Delta^d(p) = \frac{1}{2}(p^2 + 2p + 1), \quad k(p) = -pl(p).$$

Тем самым

$$H_f(D) = -\frac{D^3 + 2D + 1}{D^2 + 2D + 1}D,$$

и мы находим другой закон управления \*)

$$(D^2 + 2D + 1)u(t) = -(D^2 + 2D + 1)Dy(t),$$

обеспечивающий то же самое расположение корней характеристического многочлена замкнутой системы.  $\square$

Из Т.1.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие.** Пусть многочлены  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  являются взаимно простыми или имеют в качестве наибольшего общего делителя устойчивый многочлен. Тогда можно выбрать обратную связь вида (1.23), обеспечивающую устойчивость замкнутой системы при неустойчивом объекте. В противном случае стабилизация невозможна.

**Доказательство.** Представим  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  в виде

$$\alpha(p) = \alpha_0(p)\bar{\alpha}(p), \quad \beta(p) = \alpha_0(p)\bar{\beta}(p),$$

где  $\alpha_0(p)$  — наибольший общий делитель, так что  $\bar{\alpha}(p)$ ,  $\bar{\beta}(p)$  взаимно просты. Тогда характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$\Delta(p) = \alpha_0(p)[\bar{\alpha}(p)l(p) + \bar{\beta}(p)k(p)].$$

Выражение в квадратных скобках, согласно Т.1.1, может быть сделано любым, а следовательно, устойчивым многочленом  $\bar{\Delta}^d(p)$ , т. е.

$$\Delta(p) = \alpha_0(p)\bar{\Delta}^d(p).$$

Если  $\alpha_0(p)$  устойчив, то и  $\Delta(p)$  устойчив. Из неустойчивости  $\alpha_0(p)$  следует неустойчивость  $\Delta(p)$ , причем выбор  $k(p)$ ,  $l(p)$ , очевидно, не может изменить этого факта. ■

Сделаем некоторые замечания к полученному теоретическому результату.

При взаимной простоте  $\alpha(p)$  и  $\beta(p)$  теоретически можно добиться того, чтобы  $\Delta(p) = \bar{\Delta}^d(p)$ , где  $\bar{\Delta}^d(p)$  имеет произвольную степень, в частности, равную нулю (согласно (1.27')).

Однако из вида тождества (1.2) ясно, что это, вообще говоря, возможно только за счет точного обращения в нуль коэффициентов при старших степенях  $p$ . Вместе с тем, как уже показывалось в более простой ситуации, любая неточность в задании параметров объекта при расчете коэффициентов обратной связи может привести к неточному обращению в нуль старших коэффициентов характеристического многочлена замкнутой системы, а следовательно, чревато потерей устойчивости. Не останавливаясь на доказательстве, укажем, что сокращения старших коэффициентов не произойдет, если принять  $\deg \bar{\Delta}^d(p) = n + m - 1$ , где  $n$  — степень  $\alpha(p)$ , а  $m$  — степень  $\beta(p)$ . При этом многочлены  $l(p)$  и  $k(p)$  можно разыскывать как многочлены степени  $m - 1$  и  $n - 1$  соответственно.

Сформулируем в качестве итога алгоритмы стабилизации объекта, заданного уравнением (1.3).

\*) Сокращение числителя и знаменателя  $H$ , здесь недопустимо. Оно приведет к системе с другим характеристическим многочленом.

1. Найти наибольший общий делитель  $\alpha_0(p)$  многочленов  $\alpha(p)$  и  $\beta(p)$ . Если такой неустойчив, то стабилизация невозможна. Если  $\alpha_0(p)$  устойчив, то выделить взаимно простые многочлены

$$\bar{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{\alpha_0(p)}, \quad \bar{\beta}(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha_0(p)}.$$

Пусть

$$\deg(\bar{\alpha}) = \bar{n}, \quad \deg(\bar{\beta}) = \bar{m}, \quad \bar{\alpha}(p) = p^{\bar{n}} + \dots$$

2. Выбрать  $\bar{n} + \bar{m} - 1$  чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{n}+\bar{m}-1}$  с отрицательными вещественными частями и составить многочлен

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^d(p) &= (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_{\bar{n}+\bar{m}-1}) = \\ &= p^{\bar{n}+\bar{m}-1} + \bar{\Delta}_{\bar{n}+\bar{m}-2} p^{\bar{n}+\bar{m}-2} + \dots + \bar{\Delta}_0. \end{aligned}$$

3. Из тождества

$$\bar{\alpha}(p)l(p) + \bar{\beta}(p)k(p) = \bar{\Delta}^d(p)$$

найти  $\bar{n} + \bar{m}$  линейных уравнений относительно  $\bar{n} + \bar{m}$  неизвестных коэффициентов многочленов

$$\bar{k}(p) = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 p + \dots + \bar{k}_{n-1} p^{\bar{n}-1},$$

$$\bar{l}(p) = \bar{l}_0 + \bar{l}_1 p + \dots + \bar{l}_{m-1} p^{\bar{m}-1}.$$

4. Найти решение этих уравнений.

5. Записать многочлены

$$k(p) = \alpha_0(p)\bar{k}(p), \quad l(p) = \alpha_0(p)\bar{l}(p).$$

6. Записать стабилизирующий закон управления в виде дифференциального уравнения

$$l(D)u(t) = -k(D)y(t).$$

Следует, конечно, понимать, что последнее уравнение однозначно определяет закон изменения  $u(t)$ , только если заданы начальные условия, т. е.  $m - 1$  начальных значений  $u(t)$  и его производных. Однако задание этих значений не влияет на сам факт обеспечения устойчивости замкнутой системы. Подчеркнем также, что все описанные в данном параграфе законы управления не являются строго реализуемыми, если  $m < n$ , поскольку п. ф. преобразования  $-y(t) \rightarrow u(t)$  имеет вид

$$H_1(D) = \frac{k(D)}{l(D)},$$

а многочлены выбирались из условия

$$\deg k = n - 1, \quad \deg l = m - 1.$$

Нетрудно, однако, убедиться, что если повысить степень желаемого характеристического многочлена  $\bar{\Delta}^d(p)$  до  $2n - 1$ , то тех же

результатов можно добиться, выбирая  $l(p)$  многочленом степени  $n - 1$  с заведомым обеспечением реализуемости \*).

**Пример 1.7.** Пусть, как и в примере 1.5,

$$\alpha(p) = p^2 + 2, \quad \beta(p) = p,$$

т. е.  $n = 2, m = 1$ . Положим

$$\Delta^d(p) = p^3 + \Delta_2^d p^2 + \Delta_1^d p + \Delta_0^d,$$

выбрав коэффициенты произвольным образом, лишь бы этот многочлен был устойчив, т. е.  $\Delta_1^d \Delta_2^d > \Delta_0^d$ . Найдем далее коэффициенты многочленов

$$k(p) = k_0 + k_1 p, \quad l(p) = l_0 + l_1 p$$

степени  $n - 1 = 1$ , так чтобы

$$\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) = \Delta^d(p),$$

т. е.

$$(p^2 + 2)(l_0 + l_1 p) + p(k_0 + k_1 p) = \Delta^d(p).$$

Для этого достаточно взять

$$l_0 = \frac{1}{2} \Delta_0^d, \quad l_1 = 1, \quad k_0 = \Delta_1^d - 2, \quad k_1 = \Delta_2^d - \frac{1}{2} \Delta_0^d. \quad \square$$

В заключение отметим, что если объект представим в виде последовательного соединения однородных звеньев, то с помощью обратной связи может быть стабилизировано любое звено, если, конечно, возможно измерение его выхода и допустимо введение управляющего воздействия на его вход.

## § 2. Основные законы управления. Инвариантность

**2.1. Комбинирование управления по программе и обратной связи по выходу.** Из предшествующего ясно, что использование обратной связи по выходу снимает основное препятствие к применению программного управления. Действительно, пусть объект описывается уравнением

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)u(t) + \beta_w(D)w(t). \quad (2.1)$$

Выберем управление  $u(t)$  в виде суммы

$$u(t) = u_f(t) + u_o(t), \quad (2.2)$$

где  $u_f(t)$  строится как обратная связь, согласно уравнению

$$l(D)u_f(t) = -k(D)y(t), \quad (2.3)$$

а  $u_o(t)$  задается согласно некоторой программе во времени.

\* Другой подход к решению проблемы реализуемости будет описан в § 7.

Исключая переменную  $u_f(t)$ , получим

$$\Delta(D)y(t) = l(D)\beta(D)[u_o(t) + \beta_w(D)w(t)], \quad (2.4)$$

где

$$\Delta(D) = \alpha(D)l(D) + \beta(D)k(D). \quad (2.5)$$

Таким образом, после замыкания обратной связью объект «преобразился», изменил свои динамические свойства. Формально эти изменения эквивалентны замене операторных многочленов:  $\alpha(D)$  на  $\Delta(D)$ ,  $\beta(D)$  на  $l(D)\beta(D)$ ,  $\beta_w(D)$  на  $l(D)\beta_w(D)$ . К «преобразованному» объекту программное управление уже применимо, если обратная связь выбрана так, чтобы он был устойчив. В частности, если функции  $w(t)$ ,  $y^d(t)$  известны точно, то программа  $u_o(t)$ , рассчитанная из уравнения

$$\Delta(D)y^d(t) = l(D)u_o(t) + l(D)\beta_w(D)w(t), \quad (2.6)$$

гарантирует инвариантность  $e(t) = 0$ ,  $t > 0$ , если начальные условия были нулевыми. Более того, программа, найденная по данным, мало отличающимся от истинных, приведет к малым ошибкам  $e(t)$ .

**Пример 2.1.** Вернемся к простейшей задаче, описанной в П.1.4. Пусть вновь объект задан уравнением

$$(D - 1)y(t) = u(t) + w(t),$$

а величина  $C$  скачка возмущения  $w(t) = C1(t)$  известна неточно. Как было показано в П.1.4, использование программы, рассчитанной по оценке  $\hat{C}$ , приводит к сколь угодно большому уходу от желаемого значения  $y^d(t) = 0$ . Введем теперь управление в виде (2.2), положив  $u_f(t) = -2y(t)$ . Тогда выход будет меняться согласно уравнению

$$(D + 1)y(t) = u_o(t) + w(t).$$

Ориентируясь на оценку возмущения, примем  $u_o(t) = -\hat{C}1(t)$ .

Легко видеть, что после этого

$$y(t) = (C - \hat{C})(1 - e^{-t}),$$

т. е. отклонение от желаемого значения окажется малым при малой погрешности оценки.  $\square$

**2.2. Управление по возмущению.** Зачастую вид возмущающих воздействий заранее известен очень плохо или даже совсем неизвестен, однако имеется возможность их непосредственного измерения в ходе работы системы управления. Такие измерения обычно удается эффективно использовать. Обратимся вновь к (2.1) и попытаемся строить управление  $u(t)$  не заранее, а как выход звена, описываемого уравнением

$$\beta(D)u(t) = -\beta_w(D)w(t). \quad (2.7)$$

Если  $\deg \beta \geq \deg \beta_w$ , то это возможно, например, с помощью аналогового вычислителя (рис. 3.3). Так построенное управление осущ-

ществляет текущую компенсацию действия возмущений на объект. Если желательно сохранить нулевое начальное состояние  $y^d(t) = 0$ , то, очевидно, введение управления по возмущению согласно (2.7) позволяет этого добиться.

Имеются, однако, две неприятности. Первая из них уже знакома: если объект неустойчив, то малейшая неточность компенсации может со временем неограниченно далеко увести выход от желаемого значения. Способ преодоления этой неприятности также известен. Если дополнительно ввести стабилизирующую обратную связь, то выход объекта подчинится уравнению (2.4).

При выборе  $u_0(t)$  как решения уравнения (2.7) с ограниченной погрешностью он останется ограниченным. Вторая неприятность менее заметна. Если многочлен  $\beta(p)$  имеет «плохие» корни, то при начальных значениях  $u(t)$  (или соответствующих производных), не равных нулю, решение уравнения (2.7) содержит неограниченно возрастающую компоненту. Эта «паразитная» компонента удовлетворяет однородному уравнению  $\beta(D)u(t) = 0$ , а потому не влияет на выход  $y(t)$ . Однако неограниченный рост самого управляющего воздействия сам по себе, как правило, недопустим.

**Вывод.** Управление по возмущению не применимо, если числитель  $\beta$  передаточной функции объекта  $H_{uy}$  имеет корни в правой полуплоскости \*).

Если многочлен  $\beta$  устойчив, то управление по возмущению (при необходимости — в сочетании со стабилизирующей обратной связью) является эффективным и часто используется на практике.

**2.3. Управление с обратной связью по ошибке.** Наиболее важным законом управления является управление с обратной связью по ошибке. Пусть от измерительного устройства поступает сигнал, равный или пропорциональный ошибке

$$\varepsilon(t) = y^d(t) - y(t). \quad (2.8)$$

С использованием вычислительного устройства его можно преобразовать в сигнал управления, подчиняющийся уравнению

$$l(D)u(t) = k(D)\varepsilon(t) \quad (2.9)$$

или

$$u(t) = H_f(D)\varepsilon(t). \quad (2.10)$$

Очевидно, что этот сигнал можно рассматривать как суперпозицию двух компонент:

$$u_1(t) = H_f(D)y^d(t) \quad (2.11)$$

и

$$u_2(t) = -H_f(D)y(t). \quad (2.12)$$

\* Случай корней на мнимой оси требует специального рассмотрения.

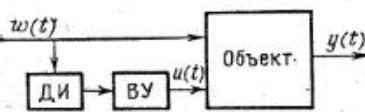


Рис. 3.3

При выборе  $u_0(t)$  как решения уравнения (2.7) с ограниченной погрешностью он останется ограниченным. Вторая неприятность менее заметна. Если многочлен  $\beta(p)$  имеет «плохие» корни, то при начальных значениях  $u(t)$  (или соответствующих производных), не равных нулю, решение уравнения (2.7) содержит неограниченно возрастающую компоненту. Эта «паразитная» компонента удовлетворяет однородному уравнению  $\beta(D)u(t) = 0$ , а потому не влияет на выход  $y(t)$ . Однако неограниченный рост самого управляющего воздействия сам по себе, как правило, недопустим.

**Вывод.** Управление по возмущению не применимо, если числитель  $\beta$  передаточной функции объекта  $H_{uy}$  имеет корни в правой полуплоскости \*).

Если многочлен  $\beta$  устойчив, то управление по возмущению (при необходимости — в сочетании со стабилизирующей обратной связью) является эффективным и часто используется на практике.

**2.3. Управление с обратной связью по ошибке.** Наиболее важным законом управления является управление с обратной связью по ошибке. Пусть от измерительного устройства поступает сигнал, равный или пропорциональный ошибке

$$\varepsilon(t) = y^d(t) - y(t). \quad (2.8)$$

С использованием вычислительного устройства его можно преобразовать в сигнал управления, подчиняющийся уравнению

$$l(D)u(t) = k(D)\varepsilon(t) \quad (2.9)$$

или

$$u(t) = H_f(D)\varepsilon(t). \quad (2.10)$$

Очевидно, что этот сигнал можно рассматривать как суперпозицию двух компонент:

$$u_1(t) = H_f(D)y^d(t) \quad (2.11)$$

и

$$u_2(t) = -H_f(D)y(t). \quad (2.12)$$

\* Случай корней на мнимой оси требует специального рассмотрения.

Вторая компонента является уже изученным сигналом обратной связи по выходу объекта и может быть использована для стабилизации. Первая же компонента содержит информацию о желаемом изменении выхода  $y^d(t)$ . Если таковое заранее неизвестно, то эта информация совершенно необходима для обеспечения малости ошибки.

Выясним, как ведет себя ошибка  $\varepsilon(t)$  при использовании закона (2.9). Из (2.1), (2.8), (2.9) следует, что  $\varepsilon(t)$  подчиняется уравнению

$$\Delta(D)\varepsilon(t) = l(D)\alpha(D)y^d(t) - l(D)\beta_w(D)w(t); \quad (2.13)$$

или, в краткой записи,

$$\varepsilon(t) = [1 - H_s(D)]s(t), \quad (2.14)$$

где введены обозначения

$$H_s(D) \triangleq 1 - \frac{l(D)\alpha(D)}{\Delta(D)} = \frac{\beta(D)k(D)}{\alpha(D)l(D) + \beta(D)k(D)} = \frac{H_p(D)}{1 + H_p(D)}, \quad (2.15)$$

$$H_p(D) \triangleq \frac{\beta(D)k(D)}{\alpha(D)l(D)} = H_{wy}(D)H_\varphi(D), \quad (2.16)$$

$$s(t) \triangleq y^d(t) - H_{wy}(D)w(t), \quad (2.17)$$

$$H_{wy}(D) \triangleq \frac{\beta_w(D)}{\alpha(D)}. \quad (2.18)$$

Эти обозначения являются стандартными. Функцию  $H_p(D)$  принято называть п. ф. передачи по разомкнутому контуру (р. п. ф.), функцию  $H_s(D)$  — п. ф. передачи по замкнутому контуру (з. п. ф.). Происхождение названий ясно из структурной схемы (рис. 3.4) и соответствуют описанию соединений с обратной связью в гл. 2.

Функцию  $s(t)$  обычно именуют приведенным сигналом или отрабатываемым воздействием.

Запись в виде (2.14) будет постоянно использоваться в дальнейшем.

Проиллюстрируем введенные термины на знакомом примере.

**Пример 2.2.** Рассмотрим электромеханическую следящую систему, формальное описание простейшего варианта которой было дано в П.5.1 гл. 2. Заменим теперь соотношения (5.19), (5.20) из гл. 2, описывающие работу датчика и усилителя, на одно, более общее

$$u(t) = H_f(D)\varepsilon(t),$$

где  $H_f(D)$  — некоторая п. ф., определяющая вид закона управления, а  $\varepsilon(t)$  — ошибка управления, равная в данном случае разности угла поворота задающей оси  $\varphi^d(t)$  и угла поворота вала  $\varphi(t)$ .

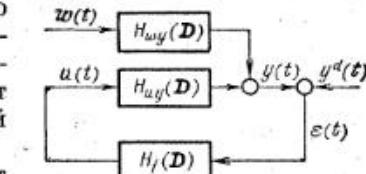


Рис. 3.4

Структурная схема такой системы представлена на рис. 3.5. Выходной здесь является переменная  $\varphi(t)$ , так что, согласно (2.5), п. ф. разомкнутого контура

$$H_p(\mathbf{D}) = H_{\text{up}}(\mathbf{D})H_t(\mathbf{D}),$$

п. ф. замкнутого контура, согласно (2.17),

$$H_3(\mathbf{D}) = \frac{H_{w\Phi}(\mathbf{D}) H_f(\mathbf{D})}{1 + H_{w\Phi}(\mathbf{D}) H_f(\mathbf{D})},$$

а сигнал определяется формулой

$$s(t) = \Phi^d(t) - H_{\text{reg}}(\mathbf{D})m_{\text{B}}(t), \quad \square$$

Из (2.14) в частности следует, что с помощью закона управления (2.9) невозможно добиться инвариантности, т. е. выполнения условия  $e(t) = 0$ ,  $t > 0$ , для любого сигнала  $s(t)$ .

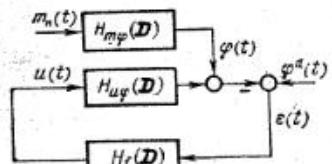


Рис. 3.5

Действительно, для этого требуется, чтобы

$$1 - H_3(D) = 0, \quad (2.19)$$

но в силу (2.15) такое условие эквивалентно

$$1 = H_3(\mathbf{P}) \equiv 0, \quad (2.19)$$

но в силу (2.15) такое условие эквивалентно

$$\alpha(\mathbf{D})l(\mathbf{D}) = 0,$$

что не может иметь места, так как многочлены  $\alpha$ ,  $l$  отличны от нуля.

В дальнейшем мы детально изучим, насколько возможно приблизиться к идеалу с использованием управления (2.9), но предварительно рассмотрим более общий класс законов управления.

**2.4. Управление с внутренней обратной связью.** Допустим, что имеется возможность измерять не только ошибку  $\varepsilon(t)$ , но и непосредственно отслеживаемый процесс  $y^d(t)$ . Поскольку  $\varepsilon(t) = y^d(t) - y(t)$ , это предположение эквивалентно предположению о возможности независимого измерения любой пары  $y(t)$  и  $y^d(t)$  или  $\varepsilon(t)$  и  $y(t)$ . Тогда возникает и возможность строить законы управления в виде, например,

$$u(t) = -H_t(\mathbf{D})y(t) + H_4(\mathbf{D})y^d(t). \quad (2.20)$$

Сравним его с (2.10). Видно, что (2.10) — это частный случай (2.20), когда  $H_d(D) = H_1(D)$ . Таким образом, получение новых измерений позволяет обеспечить большую свободу выбора законов управления. На практике чаще всего используется комбинация измерений ошибки и выхода

$$u(t) = H_{\varepsilon}(\mathbf{D})e(t) - H_y(\mathbf{D})y(t), \quad (2.21)$$

эквивалентная (2.20), если

$$H_t(\mathbf{D}) = H_s(\mathbf{D}) + H_u(\mathbf{D}), \quad H_d(\mathbf{D}) = H_s(\mathbf{D}).$$

Соответствующая (2.21) структурная схема дана на рис. 3.6. Она содержит *внутренний контур* обратной связи, охватывающий объект.

Для того чтобы проще понять смысл введения этого контура, положим  $w(t) = 0$ . Тогда различие между структурами, представленными на рис. 3.4 и 3.6, сводится только к одному: по отношению к компоненте управляющего воздействия, пропорциональной ошибке, п. ф. объекта  $H_{uy}(\mathbf{D})$  заменяется на п. ф. соединения с обратной связью

$$[1 + H_{yy}(\mathbf{D})H_{uu}(\mathbf{D})]^{-1}H_{uu}(\mathbf{D}). \quad (2.22)$$

В частности, введение внутренней обратной связи позволяет предварительно стабилизировать объект, а затем уже использовать управление с обратной связью по ошибке для того, чтобы приближать его выход к желаемому  $y^d(t)$ . Рис. 3.6

**2.5. Комбинированное управление и инвариантность.** Наиболее общая ситуация возникает, когда имеется возможность измерять независимо и выход  $y(t)$ , и отслеживаемый процесс  $u^d(t)$ , и воз-

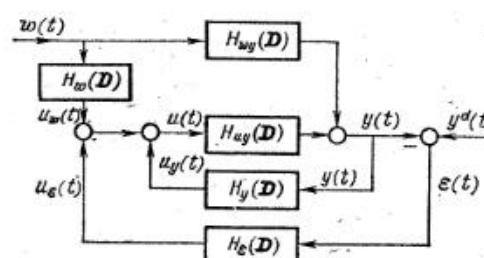


FIG. 3.7

говорилось, остаются те же возможности. Структурная схема, соответствующая их использованию, дана на рис. 3.7. В ней по сравнению с рис. 3.6, кроме внутренней обратной связи, присутствует еще звено с п. ф.  $H_w(D)$ , обрабатывающее результаты измерения возмущений. С помощью этой дополнительной операции можно в принципе полностью или частично компенсировать действие возмущений, о чем уже говорилось в § 1.

Выясним предельные возможности комбинированного управления.

Подставляя (2.23) в уравнение объекта (2.6), нетрудно получить следующее выражение для ошибки

$$\varepsilon(t) = \frac{1 + H_{uy}(D)[H_f(D) - H_d(D)]}{1 + H_p(D)} y^d(t) - \frac{H_{wy}(D) + H_{uy}(D)H_w(D)}{1 + H_p(D)} w(t). \quad (2.24)$$

Теперь оказывается осуществимой простая идея достижения инвариантности:

- а) выбрать  $H_f(D)$  так, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы;
- б) выбрать  $H_d(D)$  так, чтобы обратить в нуль 1-е слагаемое; тогда

$$H_d(D) = H_f(D) + H_{uy}^{-1}(D); \quad (2.25)$$

в) выбрать  $H_w(D)$  так, чтобы полностью компенсировать возмущение, т. е. принять

$$H_w(D) = -H_{uy}^{-1}(D)H_{wy}(D). \quad (2.26)$$

Действительно, полученная система окажется устойчивой и инвариантной, а потому слабо чувствительной к неточности задания начальных условий и параметров.

**Пример 2.2.** Пусть объект описывается уравнением

$$(D - a)y(t) = bu(t), \quad y(0) = 0,$$

где  $a, b$  — положительные константы. Пусть требуется, чтобы управляемый процесс  $y(t)$  принял значение  $y^d(t) = 1(t)$ . Объект неустойчив. Введем стабилизирующую обратную связь, обеспечивая желаемый вид характеристического многочлена:

$$\Delta(D) = \Delta^d(D) = D + a.$$

Из условия (2.3), где следует принять

$$\alpha(D) = D - a, \quad \beta(D) = b,$$

находим

$$k(D) = 2ab^{-1}, \quad l(D) = 1.$$

«Идеальный» закон управления (2.23), (2.25) приобретает вид

$$u(t) = b^{-1}(D + a)\varepsilon(t) + b^{-1}(D - a)y(t).$$

Подставляя его в уравнение объекта, получаем  $(D + a)\varepsilon(t) = 0$ , т. е. при нулевом начальном условии действительно имеем  $\varepsilon(t) = 0$  при  $t > 0$ , причем малые отличия  $\varepsilon(0)$  от нуля приводят лишь к затухающим отклонениям. Управление, конечно, содержит импульсную компоненту: ведь вновь требуется мгновенно изменить выход инерционного объекта (см. § 1).

В дополнение предположим, что в расчете вместо истинного значения коэффициента  $b$  использована его оценка  $\hat{b} = (1 + \mu)b$ ,

где  $|\mu| \ll 1$ , так что делается попытка применить закон управления  $u(t) = \hat{b}^{-1}(D + a)\varepsilon(t) + \hat{b}^{-1}(D - a)y(t)$ . Подстановка в уравнение объекта дает

$$[D + a + \mu(D - a)]\varepsilon(t) = \mu(D - a)y^d(t).$$

Нетрудно теперь подсчитать, что

$$\varepsilon(t) = \mu[2e^{-(1-2\mu)a t} - 1 + O(\mu)], \quad t > 0,$$

т. е. отклонение от нуля имеет порядок неточности в задании параметров и ограничено при любых  $t$ .  $\square$

Конечно, важно понимать, что инвариантность \*) является лишь идеалом: любые неточности в знании параметров объекта приводят к отклонению от нее.

Особо чувствительными являются инвариантные законы управления к ошибкам измерительных устройств, называемыми также *помехами* или *шумами*.

Учтем теперь этот фактор, считая, что в законе управления (2.23) могут использоваться лишь приближенные значения  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{y}^d(t)$ ,  $\tilde{w}(t)$ , отличающиеся от истинных значений

$$\tilde{y}(t) = y(t) + N_y(t), \quad \tilde{y}^d(t) = y^d(t) + N_d(t),$$

$$\tilde{w}(t) = w(t) + N_w(t), \quad (2.27)$$

где  $N_y(t)$ ,  $N_d(t)$ ,  $N_w(t)$  — помехи в соответствующих измерительных устройствах.

Подставляя выражение управления, искаженного помехами,

$$u(t) = -H_f(D)\tilde{y}(t) + H_d(D)\tilde{y}^d(t) + H_w(D)\tilde{w}(t) \quad (2.28)$$

в уравнение объекта и производя необходимые выкладки, найдем, что наряду со слагаемыми, указанными в формуле (2.24), ошибка управления будет содержать добавочную компоненту, порожденную наличием помех:

$$\varepsilon_N(t) = -\frac{H_{uy}(D)}{1 + H_p(D)} [-H_f(D)N_y(t) + H_d(D)N_d(t) + H_w(D)N_w(t)]. \quad (2.29)$$

Она ни в коей мере не исчезает, если применяется инвариантный закон с п. ф., задаваемыми (2.25), (2.26). Более того, в этом случае нетрудно подсчитать, что

$$\varepsilon_N(t) = \frac{H_p(D)}{1 + H_p(D)} N_y(t) - N_d(t) + \frac{H_{wy}(D)}{1 + H_p(D)} N_w(t), \quad (2.30)$$

т. е. наличие обратной связи не отражается на уровне помех  $N_d(t)$ .

\*) Идея инвариантности была выдвинута в 1938 г. Г. В. Щипановым, но применительно к управлению с обратной связью по ошибке, где в действительности она не осуществима. Тем не менее дальнейшие исследования позволили выявить в ней рациональное зерно.

Если помехи велики, то «инвариантное» управление оказывается практически неприемлемым. Вместе с тем это отнюдь не компрометирует саму идею комбинированного управления, которое опять-таки широко используется, но с выбором определяющих ее п. ф., вообще говоря, отличным от «идеальных» (2.25), (2.26).

### § 3. Метод динамической компенсации

Поставим перед собой задачу выбора (синтеза) закона управления с обратной связью, опирающегося на измерение ошибки управления.

**3.1. Влияние помех.** За ранее учтем, что измерения производятся с помехами, т. е. управление может строиться только в виде

$$u(t) = H_f(D)\tilde{e}(t), \quad (3.1)$$

где

$$\tilde{e}(t) = e(t) + N_e(t) = y^d(t) - y(t) + N_e(t), \quad (3.2)$$

а  $N_e(t)$  — заранее неизвестная функция, отражающая зависимость помех от времени.

Равным образом заранее неизвестна и функция  $y^d(t)$ , описывающая отслеживаемый процесс.

Используя уравнение объекта

$$y(t) = H_{uy}(D)u(t) + H_{wy}(D)w(t), \quad (3.3)$$

в которое также входит неизвестная функция  $w(t)$ , описывающая воамущения, запишем зависимость  $e(t)$  от всех указанных неизвестных объектов.

Стандартные выкладки приводят к формуле

$$e(t) = [1 - H_s(D)]s(t) + H_s(D)N_e(t), \quad (3.4)$$

где использованы ранее введенные обозначения для п. ф. замкнутого контура  $H_s(D)$  и сигнала  $s(t)$ :

$$H_s(D) = [1 + H_p(D)]^{-1}H_p(D), \quad H_p(D) = H_{uy}(D)H_f(D), \quad (3.5)$$

$$s(t) = y^d(t) - H_{wy}(D)w(t). \quad (3.6)$$

Формула (3.4) отличается от (2.14) лишь учетом влияния помех. Выбор п. ф. обратной связи  $H_f(D)$  определяет только вид з. и. ф.  $H_s(D)$ , в то же время ошибка зависит и от неизвестных функций  $s(t)$ ,  $N_e(t)$  (сигнала и помехи). Поэтому затруднительно сформулировать задачу выбора  $H_f(D)$ , исходя только из требования малости ошибки.

**3.2. Динамическая компенсация.** Простейший подход к выбору обратной связи заключается в том, чтобы предъявить требования к самой  $H_s(D)$ , например, потребовать, чтобы

$$H_s(D) \equiv H_s^d(D), \quad (3.7)$$

где  $H_s^d(D)$  — некоторая «образцовая» п. ф.

Если это удается сделать путем выбора  $H_f(D)$ , то замкнутая система будет реагировать на любые сигналы так же, как образцовая.

Оставим пока в стороне вопрос о том, каким должен быть образец. За ранее ясно лишь одно — он должен быть устойчивым, т. е. если

$$H_s^d(D) = \frac{\beta^d(D)}{\alpha^d(D)}, \quad (3.8)$$

то многочлен  $\alpha^d(D)$  должен иметь корни только в левой полуплоскости, и  $\alpha^d(D) \neq \beta^d(D)$ .

Из (3.5) следует, что для выполнения тождества (3.7) требуется выбрать п. ф. обратной связи в виде

$$H_f(D) = H_f^d(D) \triangleq H_{uy}^{-1}(D) \frac{H_s^d(D)}{1 - H_s^d(D)}. \quad (3.9)$$

Такой способ синтеза обычно называют *методом динамической компенсации*, поскольку в  $H_f^d(D)$  входит сомножитель в виде функции, обратной п. ф. преобразования «управление — выход объекта». Тем самым формально осуществляется компенсация динамических характеристик объекта.

**Пример 3.1.** Пусть объект описывается уравнением

$$(TD + 1)y(t) = hu(t),$$

так что

$$H_{uy}(D) = \frac{h}{TD + 1}, \quad h > 0, \quad T > 0.$$

Пусть «образцовая» п. ф. задана в виде

$$H_s^d(D) = \frac{k}{D + k}, \quad k > 0.$$

Согласно (3.9), следует выбрать

$$H_f(D) = \frac{TD + 1}{h} \frac{k}{D + k - k} = \frac{k}{h} T \left(1 + \frac{1}{TD}\right).$$

Закон управления имеет вид ПИ-закона:

$$u(t) = \frac{k}{h} T \left[ e(t) + \frac{1}{TD} e(t) \right]. \quad \square$$

**3.3. Ограничения на применимость.** За внешней простотой метода компенсации скрываются довольно тонкие проблемы.

Продемонстрируем их сначала на простейшем примере.

**Пример 3.2.** Пусть условия те же, что и в П.3.1, за исключением того, что  $T$  заменено на  $-T$ , т. е. объект неустойчив. Формула закона управления (с точностью до знака) остается той же

самой, и его использование, казалось бы, стабилизирует систему. Однако это не так.

Запишем уравнения системы в целом:

$$(-TD + 1)y(t) = hu(t), \quad Du(t) = \frac{k}{h}(-TD + 1)[y^d(t) - y(t)].$$

Отсюда, исключая  $u(t)$ , получим

$$D(-TD + 1)y(t) = k(-TD + 1)[y^d(t) - y(t)]$$

или  $(-TD + 1)(D + k)y(t) = k(-TD + 1)y^d(t).$

Характеристический многочлен замкнутой системы оказался равным

$$\Delta(D) = (-TD + 1)(D + k)$$

и неустойчив при  $T > 0$ , хотя знаменатель образцовой п. ф. являлся устойчивым.  $\square$

В примере выявилось, что при использовании метода компенсации характеристический многочлен замкнутой системы не совпадает со знаменателем  $H_s^d(p)$ . В этом нетрудно убедиться и в общем случае.

Действительно, в силу (3.9)

$$H_f(D) = \frac{\alpha(D)}{\beta(D)} \frac{\beta^d(D)}{\alpha^d(D) - \beta^d(D)}, \quad (3.10)$$

если через  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$  по-прежнему обозначать знаменатель и числитель  $H_{uy}(D)$ .

В соответствии с обозначениями, принятыми в § 1,

$$H_f(D) = \frac{k(D)}{l(D)}, \quad (3.11)$$

так что метод компенсации сводится к специальному выбору чисителя и знаменателя п. ф. обратной связи

$$k(D) = \alpha(D)\beta^d(D), \quad l(D) = \beta(D)[\alpha^d(D) - \beta^d(D)]. \quad (3.12)$$

Ранее было найдено общее выражение (1.27), для характеристического многочлена системы, замкнутой обратной связью с п. ф. (3.11),

$$\Delta(p) = \alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p). \quad (3.13)$$

Подставляя в него (3.12), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \alpha(p)\beta(p)[\alpha^d(p) - \beta^d(p)] + \beta(p)\alpha(p)\beta^d(p) = \\ &= \alpha(p)\beta(p)\alpha^d(p). \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Вывод 1.** Характеристический многочлен системы с обратной связью, найденной по методу компенсации, содержит кроме знаменателя образцовой п. ф. еще и сомножители, совпадающие с числителем и знаменателем объекта. Поэтому метод компенсации непосредственно применим только при устойчивости этих многочленов. В противном случае замкнутая система неустойчива.

**3.4. Использование внутренней обратной связи.** Область применения метода компенсации можно расширить, если дополнительно к измерениям ошибки  $\varepsilon(t)$  мы располагаем измерениями самого выхода  $y(t)$  или отслеживаемого процесса  $y^d(t)$ .

Действительно, в этом случае можно предварительно стабилизировать неустойчивый объект с помощью внутренней обратной связи (см. рис. 3.6), а затем уже применять метод компенсации.

**Пример 3.3.** Вновь обратимся к задаче управления простейшим неустойчивым объектом

$$(-TD + 1)y(t) = u(t), \quad T > 0.$$

Представим управление в виде

$$u(t) = u_y(t) + u_\varepsilon(t),$$

где первое слагаемое используем для стабилизации.

Очевидно, что достаточно, например, выбрать  $u_y(t) = 2y(t)$ . Тогда с учетом этой обратной связи получим

$$\begin{aligned} &(-TD + 1)y(t) = 2y(t) + u_\varepsilon(t) \\ \text{или } &(TD + 1)y(t) = -u_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Если желаемая п. ф.  $H_s^d(D)$  имеет вид

$$H_s^d(D) = \frac{k}{D + k},$$

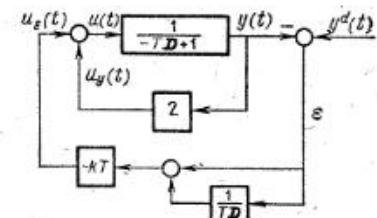


Рис. 3.8

то можно применить метод компенсации для выбора обратной связи по ошибке. Аналогично П.3.1 получаем

$$u_\varepsilon(t) = -kT \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{TD} \varepsilon(t) \right].$$

Общая структурная схема представлена на рис. 3.8.  $\square$

Процедура построения закона управления неустойчивым объектом ясна из примера, однако и в ней есть «подводные камни», которые необходимо выявить в ходе общего анализа.

Пусть

$$u(t) = u_y(t) + u_\varepsilon(t), \quad (3.15)$$

причем

$$u_y(t) = H_y(D)y(t) = -\frac{k_y(D)}{l_y(D)}y(t). \quad (3.16)$$

Подставив (3.15), (3.16) в уравнение объекта (3.3), найдем, что  $[\alpha(D)l_y(D) + \beta(D)k_y(D)]y(t) = l_y(D)[\beta(D)u_y(t) + \beta_\varepsilon(D)u_\varepsilon(t)]$ .

Таким образом, введение внутренней обратной связи оказалось

эквивалентным изменению динамических характеристик объекта, замене

$$\begin{aligned}\alpha(D) &\text{ на } \alpha(D)l_v(D) + \beta(D)k_v(D), \\ \beta(D) &\text{ на } l_v(D)\beta(D), \\ \beta_v(D) &\text{ на } l_v(D)\beta_v(D).\end{aligned}$$

Как было показано в § 1, всегда (при предполагаемой несократимости  $\alpha$  и  $\beta$ ) возможно так выбрать  $l_v$ ,  $k_v$ , чтобы многочлен

$$\alpha(p)l_v(p) + \beta(p)k_v(p) \quad (3.17)$$

оказался устойчивым. Именно такая процедура была проделана в П.3.3.

Заметим, однако, что она не может «вылечить» неустойчивый числитель, поскольку числитель  $l_v(D)\beta(D)$  п. ф. объекта, замкнутого внутренним контуром, содержит множитель  $\beta(D)$ . Более того, вообще говоря, при произвольной процедуре стабилизации многочлена (3.17) не гарантировано, что  $l_v(p)$  не окажется неустойчивым многочленом. Иначе говоря, «излечивая» от неустойчивости знаменатель, можно создать неустойчивость числителя, и вновь метод компенсации окажется неприменимым.

Во избежание подобной неприятности рассмотрим специальную процедуру стабилизации, при которой числитель п. ф. остается неизменным.

Пусть, в отличие от (3.15), принято

$$u(t) = H_0(D)[u_1(t) + u_2(t)], \quad (3.18)$$

где

$$u_1(t) = H_1(D)y(t), \quad u_2(t) = H_2(D)\varepsilon(t). \quad (3.19)$$

Это соответствует структурной схеме, представленной на рис. 3.9, где внутренняя обратная связь охватывает не только объект, но и последовательно включенное с ним звено с п. ф.  $H_0(D)$ .

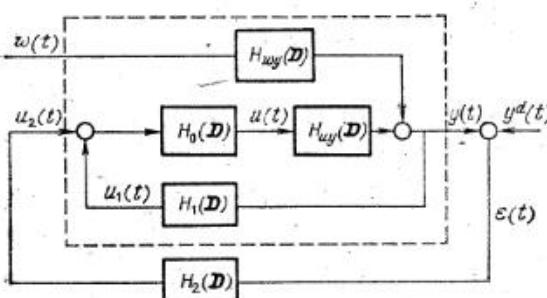


Рис. 3.9

Подставляя (3.18) в уравнение объекта (3.3) и исключая неизвестную  $u_2(t)$ , получим

$$y(t) = H_{wy}^{(2)}(D)u_2(t) + H_{wy}(D)w(t), \quad (3.20)$$

где

$$H_{wy}^{(2)}(D) = \frac{H_0(D)H_{wy}(D)}{1 + H_{wy}(D)H_0(D)H_1(D)}, \quad H_{wy}^{(2)} = \frac{H_{wy}(D)}{1 + H_{wy}(D)H_0(D)H_1(D)}.$$

Представим введенные п. ф. в виде отношений соответствующих многочленов

$$H_0(D) = \frac{k_0(D)}{l_0(D)}, \quad H_1(D) = -\frac{k_1(D)}{l_1(D)}. \quad (3.21)$$

Тогда

$$H_{wy}^{(2)}(D) = \frac{\beta(D)k_0(D)l_1(D)}{\alpha(D)l_0(D)l_1(D) + \beta(D)k_0(D)k_1(D)}. \quad (3.22)$$

Потребуем, чтобы

$$l_1(D) = k_0(D), \quad (3.23)$$

$$\alpha(D)l_0(D) + \beta(D)k_1(D) = k_0(D)\alpha_2(D), \quad (3.24)$$

причем  $k_0$ ,  $\alpha_2$  — произвольные устойчивые многочлены. В силу Т.1.1 при взаимно простых  $\alpha$ ,  $\beta$  всегда могут быть найдены  $l_0$ ,  $k_1$  такие, что тождество (3.24) будет выполнено. Но при выполнении условий (3.23), (3.24) п. ф.  $H_{wy}^{(2)}(D)$  приобретает вид

$$H_{wy}^{(2)}(D) = \frac{\beta(D)}{\alpha_2(D)}. \quad (3.25)$$

Таким образом, удается так преобразовать объект, что численно новой п. ф. совпадет с исходным, а знаменатель станет устойчивым многочленом \*).

**3. Общий алгоритм.** Подводя итоги, сформулируем алгоритм синтеза закона управления произвольным объектом с п. ф.  $H_{wy}(D) = \beta(D)/\alpha(D)$ , где  $\beta$  — устойчивый многочлен.

1. Задать образцовую устойчивую п. ф. замкнутого контура

$$H_b^d(D) = \frac{\beta^d(D)}{\alpha^d(D)}.$$

2. Если  $\alpha$  — устойчивый многочлен, то принять закон управления в виде

$$u(t) = \frac{\alpha(D)\beta^d(D)}{\beta(D)[\alpha^d(D) - \beta^d(D)]}\varepsilon(t). \quad (3.26)$$

3. Если  $\alpha$  неустойчив, то принять

$$u(t) = \frac{k_0(D)}{l_0(D)} \left[ \frac{\alpha_2(D)\beta^d(D)}{\beta(D)[\alpha^d(D) - \beta^d(D)]}\varepsilon(t) - \frac{k_1(D)}{k_0(D)}y(t) \right], \quad (3.27)$$

где  $k_0$ ,  $\alpha_2$  — произвольные устойчивые многочлены, а  $k_1$ ,  $l_0$  удовлетворяют тождеству \*\*)  $\alpha l_0 + \beta k_1 = k_0 \alpha_2$ . И в том и в другом случае

\*.) Можно проверить, что сокращаемые в (3.25) многочлены  $k_0$ ,  $l_1$  войдут сомножителями в характеристический многочлен замкнутой системы. Однако в силу их устойчивости, никаких неприятностей не произойдет (см. также гл. 6, § 4).

\*\*) Во избежание сокращения старших степеней, вызывающего негрубость закона управления, требуется согласовать степень произвольного многочлена  $k_0 \alpha_2$  со степенями  $\alpha$ ,  $\beta$  (см. § 1).

введение управления обеспечивает выполнение тождества

$$H_s(D) \equiv H_s^d(D), \quad (3.28)$$

хотя характеристические многочлены замкнутой системы различны: в первом случае имеем

$$\Delta(p) = \alpha(p)\beta(p)\alpha^d(p), \quad (3.29)$$

а во втором случае

$$\Delta(p) = k_0^2(p)\alpha_2(p)\beta(p)\alpha^d(p). \quad (3.30)$$

Если  $\beta(p)$  — неустойчивый многочлен, то алгоритм неприменим.

Несколько изменим задачу. Представим  $\beta(p)$  в виде произведения

$$\beta(p) = \beta_+(p)\beta_-(p), \quad (3.31)$$

где в  $\beta_+(p)$  соберем все простейшие сомножители вида  $p - \lambda_v$ , отвечающие корням  $\lambda_v$  с отрицательной вещественной частью.

Можно доказать, что класс образцовых п. ф.  $H_s^d(D)$ , для которых возможно добиться выполнения тождества (3.28) при обеспечении устойчивости системы в целом, ограничен п. ф. вида

$$H_s^d(D) = \beta_-(D) \tilde{H}(D), \quad (3.32)$$

где  $\tilde{H}(D)$  — произвольная п. ф. с устойчивыми числителем и знаменателем. В законах управления (3.26), (3.27) следует при этом заменить  $\beta(D)$  на  $\beta_+(D)$ . Подробнее этот вопрос изучается в гл. 4, § 4.

#### § 4. Выбор желаемой передаточной функции по типовым воздействиям

**4.1. Типовые воздействия и точность.** Любая разумная формулировка проблемы выбора желаемой образцовой п. ф. связана с введением гипотез о возможных сигналах и помехах и требуемой точности.

В инженерной практике чаще всего исходят из следующих предположений и требований:

а) замкнутая система должна быть устойчивой;

б) если сигнал имеет вид

$$s(t) = a_0 + a_1 t \quad (4.1)$$

и

$$|a_1| \leq \bar{a}_1, \quad (4.2)$$

то установившаяся ошибка его отработки  $e_\infty(t)$  должна удовлетворять условию

$$|e_\infty(t)| \leq \bar{\varepsilon}_0, \quad (4.3)$$

где  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{\varepsilon}_0$  — заданные константы (предельная скорость изменения сигнала, предельная допустимая ошибка отработки сигнала);

в) если отрабатываемое воздействие имеет вид

$$s(t) = a_s \cos \omega t \quad (4.4)$$

$$a_s \leq \bar{a}_s \quad (4.5)$$

при любых  $\omega$  из данной области  $\Omega_s$ , то установившаяся ошибка его отработки должна быть ограничена

$$|e_\infty| \leq \bar{\varepsilon}_s, \quad (4.6)$$

где  $\bar{a}_s$  — заданная предельная амплитуда воздействия,  $\Omega_s$  — область возможных значений частоты воздействия, а  $\bar{\varepsilon}_s$  — заданная предельная допустимая ошибка;

г) если помеха имеет вид

$$N_s(t) = a_N \cos \omega t, \quad a_N \leq \bar{a}_N, \quad (4.7)$$

при любых  $\omega$  из заданной области  $\Omega_N$ , то вызванная ее наличием установившаяся ошибка должна быть ограничена

$$|e_\infty| \leq \bar{\varepsilon}_N, \quad \omega \in \Omega_N, \quad (4.8)$$

где  $\bar{a}_N$  — предельная амплитуда помехи,  $\omega$  — ее возможная частота из области  $\Omega_N$ , а  $\bar{\varepsilon}_N$  — заданная величина.

Совокупность условий (б) — (г) обычно называют *требованиями к качеству системы*.

Напомним, что в силу (3.4) преобразование «сигнал — ошибка» определяется п. ф.  $1 - H_s(D)$ , а преобразование «помеха — ошибка» — п. ф.  $H_s(D)$ . Обе эти п. ф. по требованию (а) должны быть устойчивыми, а потому к ним применимы простые формулы § 4 гл. 2 по расчету установившейся реакции любого устойчивого звена на гармоническое и полиномиальное воздействие.

Рассмотрим первоначально требование (б). С учетом правила 3 (§ 4 гл. 2) имеем, что установившаяся ошибка, вызванная воздействием (4.1), равна

$$e_\infty = [1 - H_s(0)](a_0 + a_1 t) + \frac{d}{dp} [1 - H_s(p)] \Big|_{p=0} a_1. \quad (4.9)$$

Ошибка может быть ограниченной при  $a_1 \neq 0$ , только если выполнено условие *астатизма*:

$$H_s(0) = 1. \quad (4.10)$$

$$H_s = H_p(1 + H_p)^{-1},$$

так что для выполнения (4.10) должно быть

$$H_p^{-1}(0) = 0,$$

но это возможно, только если *п. п. ф. имеет нулевой полюс*. Если он

простой, то можно записать представление

$$H_p(p) = \frac{k_p}{p} \tilde{H}_p(p), \quad \tilde{H}_p(0) = 1, \quad k_p = \text{const.} \quad (4.11)$$

При этом

$$\frac{d}{dp} [1 - H_s(p)]|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left[ \frac{p}{p + k_p \tilde{H}_p(p)} \right]|_{p=0} = k_p^{-1}$$

и

$$\varepsilon_\infty = a_1 k_p^{-1} = \text{const.}$$

Таким образом, для выполнения требования б) можно принять желаемую р. п. ф. в виде (4.11), причем коэффициент  $k_p$  должен удовлетворять условию

$$k_p \geq \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} \triangleq \delta_0^{-1} \quad (4.12)$$

(величину  $\delta_0^{-1}$  часто называют *добротностью системы*).

Обратимся теперь к требованию в), которое ограничивает допустимую ошибку при отработке гармонического воздействия. В силу Правила 1 (§ 4 гл. 2) имеем, что установившаяся ошибка также является гармонической функцией с амплитудой  $a_s = |1 - H_s(i\omega)|a_s$ . Следовательно, для удовлетворения требования а) желаемая п. ф. замкнутого контура должна подчиняться ограничению

$$|1 - H_s(i\omega)| \leq \bar{\varepsilon}_s a_s^{-1} \triangleq \delta_s \quad (4.13)$$

при всех  $\omega \in \Omega_s$ , которое эквивалентно ограничению на р. п. ф., записываемому в виде

$$|1 + H_p(i\omega)| \geq \delta_s^{-1}, \quad \omega \in \Omega_s \quad (4.14)$$

Требование г) также легко трансформируется в ограничение на выбор  $H_s(p)$ .

По формуле (3.4) преобразование «помеха—ошибка управления» определяется самой п. ф.  $H_s(p)$ . Таким образом, имеем

$$|H_s(i\omega)| \leq \frac{\bar{\varepsilon}_N}{a_N} \triangleq \delta_N \quad (4.15)$$

при всех  $\omega \in \Omega_N$ , или

$$|1 + H_p(i\omega)| \geq \delta_N^{-1}, \quad \omega \in \Omega_N. \quad (4.16)$$

**4.2. Принцип фильтрации.** Учитывая, что при достаточно высоких требованиях к точности, типичных при проектировании реальных систем, величины  $\delta_s$ ,  $\delta_N$  являются малыми, условия (4.14),

(4.16) можно заменить на более простые ограничения\*)

$$|H_p(i\omega)| \geq \delta_s^{-1}, \quad \omega \in \Omega_s, \quad (4.17)$$

$$|H_p(i\omega)| \leq \delta_N, \quad \omega \in \Omega_N. \quad (4.18)$$

Ограничения (4.17), (4.18) отражают противоречивые тенденции, если области допустимых значений частот отрабатываемого воздействия и помехи,  $\Omega_s$  и  $\Omega_N$ , перекрываются: в силу (4.17) амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы должна принимать большие значения, а в силу (4.18) — малые.

Наиболее часто в инженерной области  $\Omega_s$ ,  $\Omega_N$  задаются следующим образом:  $\Omega_s$  включает *низкие частоты*, удовлетворяющие ограничению  $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}_s$ , а область  $\Omega_N$  включает *вы-*

*сокие частоты*  $\omega \geq \bar{\omega}_N$ , причем границы диапазонов удовлетворяют требованию  $\omega_N > \bar{\omega}_s$ , обеспечивающему *неперекрывание*  $\bar{\Omega}_s$  и  $\bar{\Omega}_N$  (рис. 3.10). Если потребовать, чтобы  $\bar{\varepsilon}_s = 0$ ;  $\bar{\varepsilon}_N = 0$ , то условия (4.13), (4.15) приведут к необходимости выбирать

$$H_s(i\omega) = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}_s, \quad (4.19)$$

$$H_s(i\omega) = 0, \quad \omega \geq \bar{\omega}_N, \quad (4.20)$$

иначе говоря, замкнутая система должна идеально пропускать гармоники низких частот (до  $\bar{\omega}_s$ ) и идеально подавлять гармоники высоких частот (выше  $\bar{\omega}_N$ ). При малых, но отличных от нуля  $\bar{\varepsilon}_s$ ,  $\bar{\varepsilon}_N$ , допускаются отклонения от этой идеальной характеристики. Очевидно, что не существует дробно-рациональной функции  $H_s(p)$ , обладающей свойствами идеального фильтра (вещественная и мнимая части  $H_s(i\omega)$  могут принимать постоянное значение только в конечном числе точек). Тем не менее полезно понимать, что «*хорошая* замкнутая система должна быть, как правило, близка по своим свойствам к идеальному низкочастотному фильтру».

Теперь необходимо выяснить, как построить устойчивую дробно-рациональную функцию  $H_s(p)$ , удовлетворяющую предъявляемым требованиям.

\*) Очевидно, что

$$|H_p| \geq \delta_s^{-1} \Leftrightarrow |H_p|^2 + 2|H_p| \cos \psi + 1 \geq \delta_s^{-2} - 2\delta_s^{-1} + 1$$

при любых  $\delta_s$  и  $\psi$ . Если  $\psi = \text{Arg } H_p$ , то последнее переписывается в виде:

$$(1 + |H_p| \cos \psi)^2 + |H_p|^2 \sin^2 \psi = |1 + H_p|^2 \geq \delta_s^{-2} (1 - \delta_s)^2.$$

Таким образом, из (4.17) следует выполнение (4.14) с точностью до малой величины  $\delta_s$ . Аналогично, из (4.18) следует выполнение (4.16) с точностью до  $\delta_N$ .

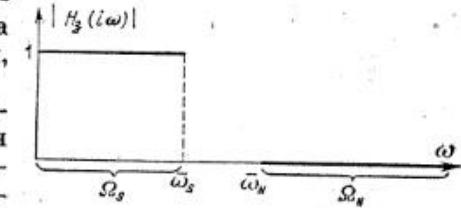


Рис. 3.10

На практике используются два способа.

Первый из них основан на выборе  $H_s(p)$  из семейства функций, обеспечивающих частотную характеристику типа низкочастотного фильтра.

**4.3. Фильтры Баттервортта.** Опишем подробнее способ построения и использования низкочастотных фильтров Баттервортта. Примем

$$|H_s(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \triangleq \Phi_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (4.21)$$

$n = 1, 2, \dots$ ;  $\omega_0$  — положительная константа.

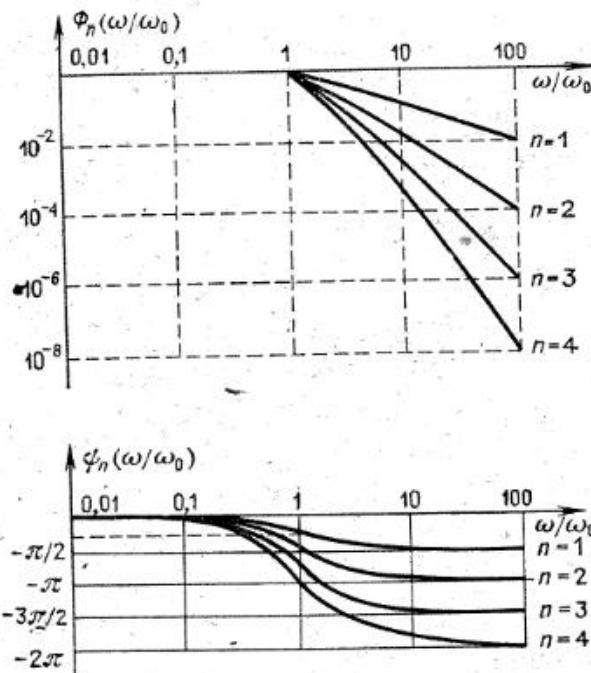


Рис. 3.11

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$  амплитудно-частотная характеристика  $|H_s(i\omega)|$  стремится к идеальной низкочастотной

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0, \end{cases}$$

т. е. величина  $\omega_0$ , обычно называемая *характерной частотой фильтра*, при  $n \rightarrow \infty$  определяет границу полосы пропускания.

При конечных  $n$  характеристика фильтра отклоняется от идеала, однако эти отклонения невелики, что видно из рис. 3.11,

где в логарифмическом масштабе представлены графики  $\Phi_n(\omega/\omega_0)$  при  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Построим далее устойчивую  $H_s(p)$  такую, чтобы для нее выполнялось условие (4.21).

Предварительно установим одно полезное алгебраическое положение.

**Лемма (о факторизации).** Пусть многочлен  $\Delta_{2n}(p)$  степени  $2n$  содержит только четные степени  $p$ :

$$\Delta_{2n}(p) = p^{2n} + \alpha_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + \alpha_0.$$

Тогда он представим в виде

$$\Delta_{2n}(p) = \Delta_n(p)\Delta_n(-p). \quad (4.22)$$

Если  $\Delta_{2n}(p)$  не имеет корней на мнимой оси, то  $\Delta_n(p)$  может быть единственным образом выбрано в виде устойчивого многочлена.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_v$  — некоторый корень  $\Delta_{2n}(p)$ . Тогда и  $-\lambda_v$  является его корнем, поскольку

$$\Delta_{2n}(p) = \Delta_{2n}(-p).$$

Запишем разложение  $\Delta_{2n}(p)$  на простейшие двучлены

$$\Delta_{2n}(p) = \prod_{v=1}^{2n} (p - \lambda_v) = \prod_v' (p - \lambda_v) \prod_v' (p + \lambda_v),$$

где произведено разбиение двучленов на группы, содержащие по  $n$  сомножителей и соответствующие корням, отличающимся по знаку.

Обозначая

$$\Delta_n(p) = (-1)^{n/2} \prod_v' (p - \lambda_v),$$

убеждаемся в справедливости представления

$$\begin{aligned} \Delta_n(p)\Delta_n(-p) &= (-1)^n \prod_v' (p - \lambda_v) \prod_v' (-p - \lambda_v) = \\ &= \prod_v' (p - \lambda_v) \prod_v' (p + \lambda_v) = \Delta_{2n}(p). \end{aligned}$$

Разбиение на группы неединственно. Однако, если корней на мнимой оси нет, то каждому корню  $\lambda_v$ , лежащему в левой полуплоскости, соответствует корень  $-\lambda_v$ , лежащий справа от мнимой оси. Собрав в первую группу только двучлены, соответствующие «хорошим» корням, получаем устойчивый  $\Delta_n(p)$ . ■

Теперь можно приступить к выполнению основной задачи. Запишем тождество:

$$\Phi_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{1 + (-1)^n (p/\omega_0)^{2n}} \Big|_{p=i\omega} \triangleq \frac{1}{\Delta_{2n}(p)} \Big|_{p=i\omega} \quad (4.23)$$

и найдем корни знаменателя, т. е. корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  уравнения

$$\Delta_{2n}(p) = \frac{p^{2n}}{\omega_0^{2n}} + (-1)^n = 0. \quad (4.24)$$

Очевидно, что все корни располагаются на окружности радиуса  $\omega_0$ .

на равных расстояниях друг от друга и имеют аргументы

$$\frac{2v+1}{2n}\pi \text{ при } n \text{ четном,}$$

$$\frac{v}{n}\pi \text{ при } n \text{ нечетном, где } v = 0, 1, \dots, 2n-1$$

(см. рис. 3.12).

Согласно лемме о факторизации можно записать представление

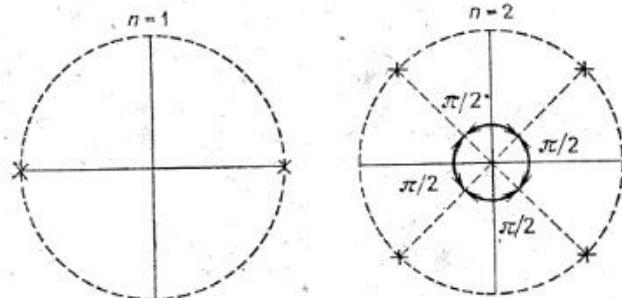


Рис. 3.12

(4.22), причем для рассматриваемого многочлена  $\Delta_{2n}(p)$  устойчивый многочлен  $\Delta_n(p)$  имеет вид

$$\Delta_n(p) = (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{v=1}^{\frac{n}{2}} \left[ \frac{p}{\omega_0} - e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2v-1}{2n}\pi\right)} \right] = (-1)^{\frac{n}{2}} \chi_n\left(\frac{p}{\omega_0}\right). \quad (4.25)$$

Многочлены  $\chi_n(s)$  называются *многочленами Баттервортса*. В силу симметрии корней они вещественны и табулированы для малых  $n$  [3.3] (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

$n$	$\chi_n(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1, 41s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2,61s^3 + 3,41s^2 + 2,61s + 1$
5	$s^5 + 3,24s^4 + 5,24s^3 + 5,24s^2 + 3,24s + 1$

Нетрудно найти и общее выражение для коэффициента при 1-й степени  $s$  в многочлене с любым  $n$ :  $\alpha_1(n) = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}$ .

Таким образом, мы нашли семейство устойчивых передаточных функций вида

$$H_3(p) = \frac{1}{\chi_n(p/\omega_0)}, \quad |H_3(i\omega)| = \Phi_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (4.26)$$

имеющих амплитудно-частотную характеристику, близкую к идеальной низкочастотной (и быстро стремящуюся к ней при  $n \rightarrow \infty$ ), причем граница, вплоть до которой АЧХ близка к единице, почти совпадает с величиной  $\omega_0$ . К сожалению, с ростом  $n$  растут фазовые искажения (рис. 3.11), и на частоте  $\omega_0$  аргумент  $\psi_n$  частотной характеристики может существенно отличаться от нуля. В то же время близость к идеальному выполнению условия (4.19) требует и малости изменений аргумента вплоть до заданной частоты  $\omega_0$ . Поэтому необходимо подбирать параметры  $n, \omega_0$  так, чтобы удовлетворить конкретным требованиям.

**4.4. Выполнение требований к точности.** Отметим, что условие астатизма (4.10) выполняется при любых параметрах, поскольку  $\chi_n(0) = 1$ . Условие (4.12) сводится к ограничению

$$\frac{\omega_0}{\alpha_1(n)} \geq \frac{1}{\delta_0}, \quad (4.27)$$

так как

$$H_p^{-1} = H_3^{-1} - 1 = \chi_n\left(\frac{p}{\omega_0}\right) - 1 \Rightarrow k_p = \alpha_1(n) \omega_0^{-1}.$$

Условие (4.15) можно записать в виде

$$|H_3'(i\omega)|^2 \leq \delta_N^2, \quad \omega \geq \bar{\omega}_N,$$

или, в силу (4.21), (4.26),

$$\frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \leq \delta_N^2, \quad \omega \geq \bar{\omega}_N.$$

Учитывая малость  $\delta_N$ , заменим последнее условие на более простое

$$\omega_0 \leq \delta_N^{\frac{1}{n}} \bar{\omega}_N. \quad (4.28)$$

Несколько сложнее удовлетворить ограничению (4.13). Запишем его в виде

$$\left| 1 - \frac{1}{\chi_n(i\omega/\omega_0)} \right|^2 \leq \delta_s^2, \quad \omega \leq \bar{\omega}_s$$

или

$$\frac{|\chi_n(i\omega/\omega_0) - 1|^2}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \leq \delta_s^2.$$

Напомним, что

$$\chi_n(s) - 1 = s[\alpha_{n-1}(n)s^{n-1} + \alpha_{n-2}(n)s^{n-2} + \dots + \alpha_1(n)],$$

перепишем это неравенство в виде

$$\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \alpha_1^2(n) \left|1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\alpha_2(n)}{\alpha_1(n)} + \dots + \left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{n-1} \frac{\alpha_{n-1}(n)}{\alpha_1(n)}\right|^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \leq \delta_s^2, \quad \omega \leq \bar{\omega}_s.$$

Если  $\omega_0 \gg \bar{\omega}_s$ , то его можно загубить, записав

$$\left(\frac{\omega_0}{\bar{\omega}_s}\right)^2 \alpha_1^2(n) \leq \delta_s^2,$$

т. е.

$$\omega_0 \geq \frac{\bar{\omega}_s}{\delta_s} \alpha_1(n). \quad (4.29)$$

Объединяя полученные условия, приходим к следующему правилу.

**Правило 1.** Для выбора желаемой передаточной функции замкнутой системы  $H_a^d(p)$  из семейства фильтров Баттервортса (4.26) следует выбрать параметры  $\omega_0$ ,  $n$  так, чтобы выполнялись условия

$$\left| \sin \frac{\pi}{2n} \right| \omega_0 \geq \max \left\{ \frac{\bar{a}_1}{\bar{e}_0}, \frac{\bar{\omega}_s \bar{a}_s}{\bar{e}_s} \right\}, \quad \omega_0 \leq \bar{\omega}_N \left( \frac{\bar{e}_N}{\bar{a}_N} \right)^{1/n}, \quad (4.30)$$

где величины  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{\omega}_s$ ,  $\bar{a}_s$ ,  $\bar{\omega}_N$ ,  $\bar{a}_N$  характеризуют допустимые по техническим условиям воздействия, а параметры  $\bar{e}_0$ ,  $\bar{e}_s$  определяют требуемую точность.

В целях упрощения реализации рекомендуется выбирать наименьшие  $\omega_0$ ,  $n$ , удовлетворяющие (4.30). Ввиду приближенного характера оценок рекомендуется также проверить выполнение исходных условий для выбранного фильтра.

**Пример 4.1.** Пусть предельные скорости изменения отрабатываемых воздействий равны  $a_1 = 5$  1/с,  $\omega_0 a_s \leq \bar{a}_1$ , а требуемые точности отработки  $e_0 = e_s = 0,05$ . Тогда необходимо выбрать значение  $\omega_0 \geq 100/\sin(\pi/2n)$ .

Пусть  $\bar{e}_s = 0,05$ ;  $\bar{\omega}_N = 300$  1/с;  $\bar{a}_N = 0,1$ . При этом требуется, чтобы  $\omega_0 \leq 300(1/2^n)$ . Очевидно, что условия удовлетворяются при  $n = 1$ , т. е. можно принять

$$H_a^d(D) = \frac{1}{1 + (D/100)} \Rightarrow H_p^d(D) = \frac{100}{D}.$$

Выясним, какова предельная амплитуда помехи, при которой вообще возможно удовлетворить ограничениям и подобрать подходящий фильтр.

Примем наименьшее возможное значение  $\omega_0 = 100/\sin(\pi/2n)$ . Тогда

$$\frac{\bar{e}_N}{\bar{a}_N} \leq \left( \frac{\omega_0}{\bar{\omega}_N} \right)^n = \left( 3 \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{-n} \triangleq \bar{\delta}_N(n).$$

Значения величины  $\bar{\delta}_N$  указаны в табл. 4.2.

Меньшее  $\bar{\delta}_N$  обеспечивается при  $n = n_0 = 2$  (при  $n > 3$  величины  $\bar{\delta}_N(n)$  заведомо возрастают).

При этом условие  $e_N \leq \bar{e}_N = 0,05$  обеспечивается, если

$$a_N \leq \bar{a}_N = \frac{0,05 \cdot 9}{2} = 0,225.$$

Рекомендуемая п. ф. имеет вид

$$H_a^d(D) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} D + \frac{1}{\omega_0^2} D^2} = \frac{1}{1 + 10^{-2} D + \frac{1}{2} 10^{-4} D^2}.$$

Невозможность удовлетворить ограничениям при произвольном уровне  $a_N$  — характерное следствие противоречивости требований к отработке воздействия и подавлению помехи.  $\square$

Таблица 4.2

$n$	1	2	3
$\bar{\delta}_N(n)$	1/3	2/9	8/27

Таблица 4.3

$n$	1	2	3	4	5
$\tau(n)$	3	2,5	6	7	8
$\delta_m(n)$	0	0,05	0,09	0,12	0,3

**4.5. Учет требований к переходной функции.** Наряду с описанными выше исходными условиями, на практике могут выдвигаться и иные требования к желательному поведению замкнутой системы. В частности, зачастую вводятся требования к характеру переходной функции, т. е. реакции замкнутой системы на единичное скачкообразное воздействие  $s(t) = 1(t)$ . Поскольку выполнено требование астатизма, то в установившемся режиме ошибка отработки такого воздействия стремится к нулю, т. е.  $y(t) \rightarrow 1$ . Однако практически существенными могут быть времена  $t_n$  практического приближения (с точностью 0,05) к установившемуся значению и величина  $\delta_m = \max y(t) - 1$ , обычно называемая *перерегулированием*. Переходные функции фильтров Баттервортса для  $n = 1, 2, 3, 4$  показаны на рис. 3.13. Приближенные значения величины  $\tau(n) = \omega_0 t_n(n)$ ,  $\delta_m(n)$  даны в табл. 4.3.

Уровень перерегулирования несколько растет с ростом  $n$ , но, как правило, является практически удовлетворительным вплоть до

$n = 5$ , а более сложные фильтры обычно использовать нецелесообразно.

Время переходного процесса наименьшее при  $n = 2$

$$t_u(n) = \frac{2.5}{\omega_0}. \quad (4.31)$$

Если в дополнительных технических условиях указано предельное допустимое время  $t_u$ , то возникает дополнительное ограничение на выбор параметров

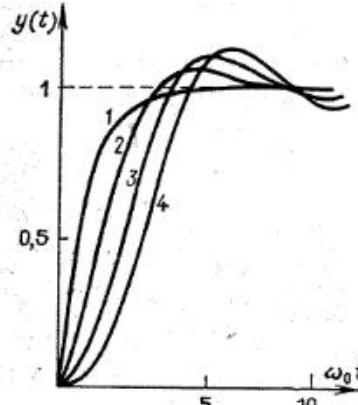


Рис. 3.13

$$\omega_0 \geq \frac{\tau(n)}{t_u}. \quad (4.32)$$

Это неравенство следует ввести в Правило 1.

**Пример 4.2.** Пусть в дополнение к требованиям, указанным в П. 4.1, следует обеспечить, чтобы время установления не превосходило 0,05 с. Тогда  $\omega_0 \geq 20\tau(n)$ .

Очевидно, что ранее принятые значения  $\omega_0 = 100$ ,  $n = 1$  удовлетворяют этому условию, т. е. новое ограничение оказывается несущественным.  $\square$

**4.6. Астатические системы с большим коэффициентом усиления.** Выше была указана полностью алгоритмизированная методика построения «образцовой» п. ф. из класса фильтров Баттервортса. Однако подавление помех, конечно, можно улучшить, если расширить класс «образцов».

Очевидно, что среди п. ф. вида

$$H_s(D) = \frac{\tilde{\beta}\left(\frac{1}{\omega_0} D\right)}{\tilde{\alpha}\left(\frac{1}{\omega_0} D\right)}, \quad (4.33)$$

где  $\tilde{\beta}(s)$ ,  $\tilde{\alpha}(s)$  — устойчивые многочлены степени  $m$  и  $n$ , п. ф. фильтра Баттервортса является лишь частным случаем, в котором

$$\tilde{\beta}(s) \equiv 1, \quad \alpha(s) \equiv \chi_n(s). \quad (4.34)$$

Пользуясь теми же приемами, что и выше, можно дать правило выбора параметров и для п. ф. общего вида (4.33).

Приведем его без детального вывода, приняв обозначения

$$\tilde{\alpha}(s) = s^n + \tilde{\alpha}_{n-1}s^{n-1} + \dots + 1, \quad (4.35)$$

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\beta}_m s^m + \tilde{\beta}_{m-1} s^{m-1} + \dots + 1, \quad n > m \geq 0,$$

причем сразу учтена необходимость выполнения условия астатизма, т. е.  $H_s^u(0) = 1$ .

**Правило 4.2. а)** Условие (4.11) обеспечивается, если

$$\frac{\omega_0}{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1} \geq \frac{1}{\delta_0}. \quad (4.36)$$

б) Для достаточно точной отработки сигнала требуется, чтобы

$$\omega_0 \geq \frac{\bar{\omega}_s}{\delta_s} \left[ \sum_{v=1}^{n-1} (\tilde{\alpha}_v - \tilde{\beta}_v)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_0 > \bar{\omega}_s. \quad (4.37)$$

в) Условие подавления помех требует, чтобы

$$\omega_0 \leq \left( \frac{\delta_N}{\tilde{\beta}_m} \right)^{\frac{1}{n-m}} \bar{\omega}_N, \quad \omega_0 < \bar{\omega}_N. \quad (4.38)$$

Условия (4.37), (4.38) получены как следствие довольно грубых оценок, которые могут служить только для ориентировочного выбора параметров  $\{\tilde{\alpha}_v, \tilde{\beta}_v\}$ . После такого выбора следует проверить выполнение условий (4.17), (4.18), т. е. условий

$$\left| \frac{\tilde{\alpha}\left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right) - \tilde{\beta}\left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\tilde{\alpha}\left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right| \leq \delta_s, \quad \omega \leq \bar{\omega}_s, \quad (4.39)$$

$$\left| \frac{\tilde{\beta}\left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\tilde{\alpha}\left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right| \leq \delta_N, \quad \omega \geq \bar{\omega}_N. \quad (4.40)$$

Подчеркнем еще раз, что эти условия могут быть несовместимы при слишком жестких требованиях (малых  $\delta_s$ ,  $\delta_N$  или близких  $\bar{\omega}_s$ ,  $\bar{\omega}_N$ ). Поэтому, как уже указывалось в примерах, можно считать некоторые условия нефиксированными, например, считать, что не задано  $\bar{\omega}_N$  (или  $\omega_N$ ), а разыскивается минимальное  $\delta_N$  (или  $\bar{\omega}_N$ ), при котором условия (4.36), (4.39), (4.40) остаются совместными.

Мы еще будем возвращаться к рассмотрению этой проблемы, однако заранее укажем, что она сложна с вычислительной точки зрения \*). Поэтому получение простых рекомендаций по выбору желаемых п. ф. является существенным делом. Далее, в § 5, будет изложен другой эффективный прием выбора. Однако предварительно укажем на общую особенность п. ф. вида (4.33).

Пусть п. ф. объекта  $H_{uy}(D)$  имеет устойчивые числитель и знаменатель. Тогда после выбора  $H_s^d(D)$  метод компенсации позволяет сразу получить выражение п. ф.  $H_f(D)$  закона управления в виде

$$H_f(D) = H_{uy}^{-1}(D) H_p^d(D), \text{ где } H_p^d(D) = \frac{\beta^d(D)}{\alpha^d(D) - \beta^d(D)}. \quad (4.41)$$

\*) При фиксированных степенях многочленов условия (4.39), (4.40) являются неравенствами 2-й степени относительно неизвестных коэффициентов, которые должны выполняться при всех допустимых значениях параметра  $\omega$ . С точки зрения вычислительной математики это — задача нелинейного параметрического программирования (см. гл. 9, § 7). При нефиксированных степенях эта задача носит переборный характер.

Если  $\alpha^d(D) \equiv \tilde{\alpha}\left(\frac{1}{\omega_0}D\right)$ ,  $\beta^d(D) \equiv \tilde{\beta}\left(\frac{1}{\omega_0}D\right)$ , где многочлены  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  определены согласно (4.35), то

$$H_p^d(D) = \frac{k_p}{D} \frac{\tilde{\beta}\left(\frac{D}{\omega_0}\right)}{\gamma\left(\frac{D}{\omega_0}\right)}, \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} k_p &\triangleq \frac{\omega_0}{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1}, \quad \gamma(s) \triangleq 1 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{n-1} s^n, \\ \gamma_i &\triangleq \frac{\tilde{\alpha}_{i+1} - \tilde{\beta}_{i+1}}{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Характерной особенностью (4.42) является наличие интегрирующего множителя  $1/D$ , а также наличие *большого коэффициента*  $\omega_0(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1)^{-1}$ , поскольку в силу (4.36) эта величина должна быть не меньше  $\delta_0^{-1}$ , где  $\delta_0$  мало.

Таким образом, желаемая п. ф. разомкнутого контура должна включать интегратор (в силу требования астатизма!) и усилитель с большим коэффициентом усиления. Это не означает, конечно, что п. ф. закона управления должна обладать теми же свойствами.

Если, например, справедливо представление

$$H_{uy}(D) = \frac{h_0}{D} \tilde{H}_{uy}(D), \quad \tilde{H}_{uy}(0) = 1, \quad (4.44)$$

т. е. п. ф. объекта имеет нулевой полюс, то

$$H_f(D) = \frac{k_p}{h_0} \tilde{H}_{uy}(D) \frac{\tilde{\beta}\left(\frac{1}{\omega_0}D\right)}{\gamma\left(\frac{1}{\omega_0}D\right)} \quad (4.45)$$

и не включает интегратор, причем *статический коэффициент усиления*  $k_{f_0}$  равен  $k_{f_0} \triangleq H_f(0) = k_p/h_0$ . Его величина зависит не только от требований к точности, но и от свойств самого объекта.

Выбор  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  может определяться не только требованиями качества, но и условиями реализации закона управления, о чем также будет детально сказано ниже, в § 6.

## § 5. Логарифмические частотные характеристики

Опишем широко используемую на практике схему построения желаемых передаточных функций, основанную на использовании логарифмических частотных характеристик.

### 5.1. Свойства ЛАХ и ЛФХ.

**Определение.** *Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой* (ЛАХ), соответствующей передаточной функции  $H(p)$ , называется функция

$$L(\theta) = 20 \lg |H(i\omega)|, \quad (5.1)$$

определенная при любых вещественных значениях  $\theta = \lg \omega$ . *Наклоном* ЛАХ именуется функция  $dL/d\theta$ . Принято измерять значения ЛАХ в децибелах (дБ), а значения наклона ЛАХ — в децибелах на декаду (дБ/дек).

*Логарифмической фазочастотной характеристикой* (ЛФХ) именуется функция

$$\psi(\theta) = \operatorname{Arg} H(i\omega), \quad (5.2)$$

определенная как функция  $\theta = -\lg \omega$ .

Графики  $L(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$ , с точностью до выбора масштабов совпадающие с графиками обычных АЧХ и ФЧХ, принято именовать *диаграммами Боде*. Функции  $H(p)^*$ .

Пример 5.1. Пусть  $H(p) = kp^n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тогда  $H(i\omega) =$

$$= k(i\omega)^n = k\omega^n e^{\frac{i\pi n}{2}}, \text{ так что}$$

$$20 \lg |H(i\omega)| = 20 \lg k + 20n \lg \omega,$$

$$L(\theta) = 20 \lg k + 20n\theta; \quad (5.3)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 20n, \quad \psi(\theta) = \frac{\pi}{2} n. \quad (5.4)$$

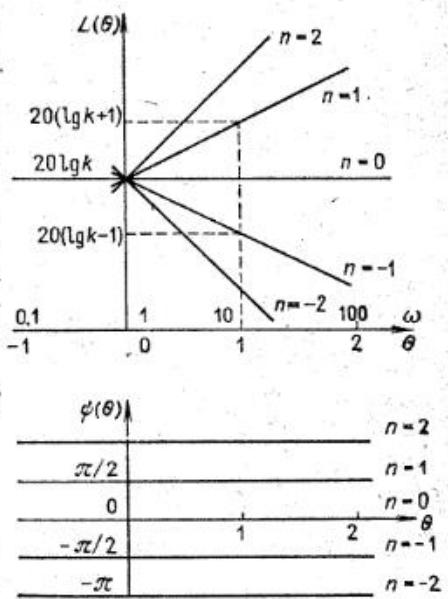


Рис. 3.14

Диаграммы Боде для функций вида  $kp^n$  представлены на рис. 3.14.  $L(\theta)$  — прямые, наклон которых равен  $20n$  дБ/дек, а  $\psi(\theta)$  — прямые, параллельные оси абсцисс.  $\square$

**Теорема 5.1 (теорема Боде).** Пусть  $H(p)$  дробно-рациональная функция, не имеющая нулей и полюсов в правой полуплоскости. Тогда значения  $L(\theta)$  и  $\psi(\theta)$  связаны между собой формулой

$$\psi(\theta) = \frac{1}{20\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{du} \mu(u - \theta) du = \frac{\pi}{40} \frac{dL}{d\theta} + \frac{1}{20\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dL}{du} - \frac{dL}{d\theta} \right) \mu(u - \theta) du,$$

где

$$\mu(s) = \frac{1}{M} \ln \operatorname{cth} \frac{s}{2M}, \quad M = \lg e.$$

Функция  $\psi(\theta)$  определена и непрерывна при любых вещественных  $\theta$  за исключением точек вида  $\lg \omega_k$ , где  $\pm i\omega_k$  — нули (или полюсы)  $H(p)$  на мнимой оси.

\*). Принято использовать десятичные логарифмы. При разметке оси абсцисс принято указывать значение  $\omega$ , а не  $\theta$ .

**Доказательство** [3.2] основывается на теореме Коши [2.3]:

$$\oint F(p) dp = 0, \quad (5.6)$$

если внутри контура интегрирования  $F(p)$  — аналитическая функция. Пусть

$$F(p) = \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p - i\omega_1} - \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p + i\omega_1}, \quad \Phi_1 = \operatorname{Re} \Phi(i\omega_1),$$

где  $\Phi(p)$  — произвольная функция, аналитическая внутри правой полуплоскости и на мнимой оси за исключением особенностей в точках  $\pm i\omega_k$ ,  $\omega_k \neq \omega_1$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , причем выполнены условия

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{\Phi(p)}{p} = 0, \quad \lim_{|p \mp i\omega_k| \rightarrow 0} (p \mp i\omega_k) \Phi(p) = 0.$$

$|\operatorname{Arg} p| < \frac{\pi}{2}$        $|\operatorname{Arg}(p \mp i\omega_k)| < \frac{\pi}{2}$

$$(5.7)$$

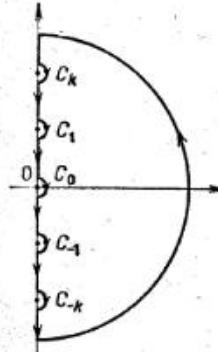


Рис. 3.15

Используем контур интегрирования, состоящий из полуокружности бесконечно большого радиуса в правой полуплоскости и мнимой оси (с обходом указанных точек по малым полуокружностям  $C_k$ ) (рис. 3.15). Используя (5.6), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(p) - \Phi_1] \left[ \frac{1}{p - i\omega_1} - \frac{1}{p + i\omega_1} \right] t d\omega +$$

$$+ \sum_k \int_{C_k} [\Phi(p) - \Phi_1] \left[ \frac{1}{p - i\omega_k} - \frac{1}{p + i\omega_k} \right] dp = 0, \quad (5.8)$$

где штрих над интегралом означает, что участки мнимой оси вблизи точек  $\pm i\omega_k$  исключены.

Представим  $\Phi(p)$  в виде ряда в окрестности точки  $i\omega_1$ :

$$\Phi(p) = \Phi(i\omega_1) + a_1(p - i\omega_1) + o(p), \quad p = |p - i\omega_1|, \quad a_1 = \text{const}$$

или

$$\frac{\Phi(p) - \operatorname{Re} \Phi(i\omega_1)}{p - i\omega_1} = -\frac{i \operatorname{Im} \Phi(i\omega_1)}{p - i\omega_1} + a_1 + o(p),$$

так что

$$\int_{C_1} \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p - i\omega_1} dp = -\pi \operatorname{Im} \Phi(i\omega_1) - a_1 \pi p + p o(p) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} -\pi \operatorname{Im} \Phi(i\omega_1).$$

То же предельное значение будет иметь интеграл

$$\int_{C_{-1}} \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p + i\omega_1} dp,$$

если дополнительно предположить, что  $\operatorname{Re} \Phi(i\omega)$  — четная, а  $\operatorname{Im} \Phi(i\omega)$  — нечетная функции. Очевидно также, что

$$\int_{C_1} \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p + i\omega_1} dp = \int_{C_{-1}} \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p - i\omega_1} dp = 0,$$

поскольку интегрируемые функции аналитичны в окрестностях точек  $-i\omega_1$  и  $i\omega_1$  соответственно.

Остается оценить интегралы вида

$$\int_{C_k} \frac{\Phi(p) - \Phi_1}{p^2 + \omega_1^2} 2i\omega_1 dp, \quad k = \pm 2, \pm 3, \dots$$

В силу предположения (5.7) о характере особенностей в точках  $\pm i\omega_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , эти интегралы пропорциональны длинам полуокружностей и стремятся к нулю вместе с их радиусами. С учетом всех построенных оценок из (5.8) следует

$$\frac{\omega_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(i\omega) - \operatorname{Re} \Phi(i\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega = \operatorname{Im} \Phi(i\omega_1)$$

для любого  $i\omega_1$ , не совпадающего с полюсами  $\Phi(p)$ . В силу четности  $\operatorname{Re} \Phi$  и нечетности  $\operatorname{Im} \Phi$  это соотношение можно переписать в виде

$$\operatorname{Im} \Phi(i\omega_1) = \frac{2\omega_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \Phi(i\omega) - \operatorname{Re} \Phi(i\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega. \quad (5.9)$$

Положим далее

$$\Phi(p) = \ln H(p) \Rightarrow \Phi(i\omega) = \ln H(i\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \Phi(i\omega) = \ln |H(i\omega)|, \quad \operatorname{Im} \Phi(i\omega) = \operatorname{Arg} H(i\omega).$$

Если  $H(p)$  — передаточная функция, то соответствующая фазо-частотная характеристика определяется через амплитудно-частотную:

$$\operatorname{Arg} H(i\omega_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |H(i\omega)| - \ln |H(i\omega_1)|}{(\omega/\omega_1)^2 - 1} \frac{d\omega}{\omega_1}. \quad (5.10)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\operatorname{Arg} H(i\omega_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\omega} \left[ \ln \frac{|H(i\omega)|}{|H(i\omega_1)|} \right] \frac{1}{2} \ln \frac{\omega + \omega_1}{\omega - \omega_1} d\omega.$$

Теперь остается перейти к переменной интегрирования  $u = \lg \omega$ , положив также  $\theta = \lg \omega_1$ , для того чтобы получить желаемую формулу (5.5).

Необходимо однако проверить, что принятые в условиях теоремы предположения о свойствах  $H(p)$  соответствуют гипотезам о свойствах функции  $\Phi(p) = \ln H(p)$ , использованным в ходе доказательства.

Согласно теореме  $H(p)$  представима в виде

$$H(p) = k \frac{\prod_v (p - \lambda'_v)}{\prod_v (p - \lambda_v)},$$

где  $\lambda_v$ ,  $\lambda'_v$  — корни числителя и знаменателя. Тогда

$$\Phi(p) = \ln k + \sum_v \ln (p - \lambda'_v) - \sum_v \ln (p - \lambda_v).$$

Выполнение первого из условий (5.7) очевидно. Если  $\lambda_v, \lambda_v'$  лежат в левой полуплоскости, то соответствующие слагаемые аналитичны вне ее. Если  $\lambda_v$  (или  $\lambda_v'$ ) лежат на мнимой оси, то  $\Phi(p)$  имеет в этой же точке особенности, но независимо от кратности  $\lambda_v$  (или  $\lambda_v'$ ) условия (5.7) в ней выполнены. Тем самым все требовавшиеся при доказательстве свойства  $\Phi(p)$  действительно имеют место. ■

Формулировка (а тем более доказательство) теоремы Боде достаточно громоздка. Однако из нее можно сделать важные и простые выводы.

**Вывод 1.** Для передаточных функций, удовлетворяющих условиям теоремы, по графику ЛАХ можно восстановить график фазочастотной характеристики. Таким образом, такие п. ф. однозначно восстанавливаются по графику ЛАХ.

**Вывод 2.** Значение ЛФХ в произвольной точке  $\theta$ , не являющейся точкой разрыва, в основном определяется значением наклона ЛАХ в той же точке, и эту основную часть дает слагаемое

$$\tilde{\psi}(\theta) = \frac{\pi}{40} \frac{dL}{d\theta} \text{ в (5.5).}$$

Вывод 2 следует из того, что функция  $\mu(s)$ , фигурирующая во втором, интегральном, слагаемом в (5.5), близка по свойствам к  $b_-(s)$  — она почти целиком сосредоточена в окрестности нуля (рис. 3.16). Поэтому влияние значений наклона в соседних точках (в пределах одной декады) существенно только при резких изменениях наклона.

Пусть функция

$$H(p) = b_-(p) \tilde{H}(p), \quad (5.11)$$

где  $\tilde{H}(p)$  удовлетворяет условиям теоремы, а многочлен  $b_-(p)$  имеет

все корни в правой полуплоскости. Рассмотрим наряду с ней функцию

$$H_1(p) = b_1(-p) \tilde{H}(p), \quad (5.12)$$

не имеющую нулей и полюсов справа. Очевидно, что

$$|H(i\omega)| = |H_1(i\omega)|,$$

а

$$\operatorname{Arg} H(i\omega) = \operatorname{Arg} H_1(i\omega) + \operatorname{Arg} \frac{b_-(i\omega)}{b_1(-i\omega)}.$$

При одинаковых АЧХ функции  $H(p)$  и  $H_1(p)$  имеют различные ФЧХ. Нетрудно убедиться (используя разложение  $b_-(p)$  на

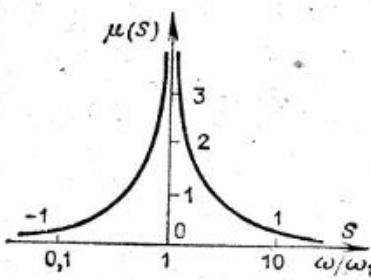


Рис. 3.16

простейшие двучлены), что при  $\omega > 0$

$$\operatorname{Arg} \frac{b_-(i\omega)}{b_1(-i\omega)} < 0 \Rightarrow \operatorname{Arg} H(i\omega) < \operatorname{Arg} H_1(i\omega). \quad (5.13)$$

Теперь можно сформулировать результат.

**Вывод 3.** Передаточные функции, не имеющие нулей и полюсов в правой полуплоскости, определяют меньшее отставание по фазе по сравнению с любой п. ф., имеющей ту же АЧХ, но часть нулей справа.

Наличие этого свойства привело к появлению следующего термина.

**Определение.** Передаточная функция называется **минимально-фазовой** (МФ), если она не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости, и **неминимально-фазовой** (НМФ) — в противном случае.

Заметим, что термин несколько неудачен, поскольку график ФЧХ минимальнофазовой п. ф. лежит выше графика ФЧХ соответствующей (имеющей ту же АЧХ) неминимально-фазовой.

**Пример 5.2.** Пусть

$$H_1(p) = Tp + 1, \quad T > 0.$$

Тогда

$$|H_1(i\omega)| = \sqrt{T^2\omega^2 + 1}, \quad \operatorname{Arg} H_1(i\omega) = \operatorname{Arctg} \omega T.$$

Если

$$H(p) = -Tp + 1 = \frac{-Tp + 1}{+Tp + 1} H_1(p),$$

то

$$|H(i\omega)| = |H_1(i\omega)|, \quad \operatorname{Arg} H(i\omega) = -\operatorname{Arctg} \omega T = \\ = \operatorname{Arg} H_1(i\omega) - 2\operatorname{Arctg} \omega T.$$

Графики ЛАХ и ЛФХ для  $H_1(p)$  представлены на рис. 3.17. Приближенный график ЛФХ, вычисленный только по 1-му слагаемому в (5.5), также представлен на рис. 3.17 и действительно близок к истинному. Важно отметить, что вдали от точки  $\omega = 1/T$  ( $\theta = \lg 1/T$ ) ЛАХ асимптотически близка к прямым. Низкочастотная асимптота имеет нулевой наклон, а высокочастотная — наклон +20 дБ/дек. Соответственно и ЛФХ слева стремится к 0, а справа — к  $+\infty$ . □

**5.2. Построение асимптотических ЛАХ и ЛФХ.** Рассмотрим произвольную минимально-фазовую п. ф. с вещественными нулями и полюсами. Она представлена в виде

$$H(p) = kp^n \frac{\prod_v (T'_v p + 1)}{\prod_v (T_v p + 1)}, \quad (5.14)$$

где  $T'_v, T_v$  — положительные постоянные времени.

8 А. А. Первозванский

Для определенности будем считать также  $k > 0$ .  
Тогда соответствующие ЛАХ и ЛФХ даются формулами

$$L(\theta) = 20 \lg k + 20n\theta + \sum_v 20 \lg |1 + (\omega T'_v)^2|^{1/2} - \\ - \sum_v 20 \lg |1 + (\omega T_v)^2|^{1/2}, \quad (5.15)$$

$$\psi(\theta) = n \frac{\pi}{2} + \sum_v \operatorname{Arctg} \omega T'_v - \sum_v \operatorname{Arctg} \omega T_v, \quad \theta = \lg \omega, \quad (5.16)$$

вытекающими из результатов, полученных в П.5.1 и П.5.2.

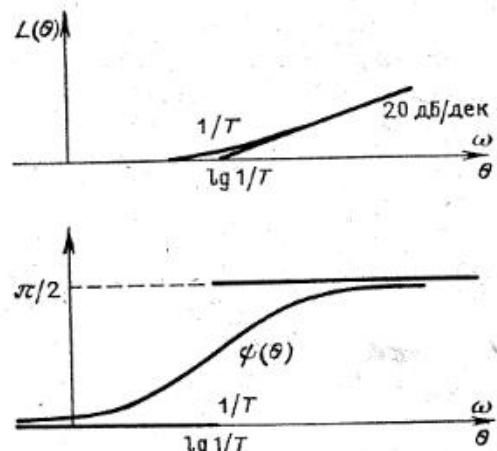


Рис. 3.17

Явные зависимости  $L(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$  достаточно сложны. Поэтому целесообразно использовать свойство, отмеченное в П.5.2, а именно, близость кривой

$$L(\theta) = \pm 20 \lg |1 + (\omega T)^2|^{1/2} \quad (5.17)$$

к ломаной, составленной из низкочастотной и высокочастотной асимптот, пересекающихся в точке  $\omega = 1/T$ , называемой *сопрягающей частотой*. Введем теперь новое понятие.

**Определение.** Асимптотической ЛАХ, соответствующей  $H(p)$  вида (5.14), называется кусочно линейная функция, получающаяся из (5.15) путем замены выражений типа  $l(\theta)$  на асимптотические ломаные вида

$$L^{\text{ac}}(\theta) = \begin{cases} 0, & \omega \leqslant \frac{1}{T}, \\ \pm 20 \lg \omega T, & \omega \geqslant \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Асимптотическая ЛФХ есть кусочно постоянная функция, получаемая заменой в (5.16)

$$\operatorname{Arctg} \omega T \rightarrow \begin{cases} 0, & \omega \leqslant \frac{1}{T}, \\ \frac{\pi}{2}, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Замечательным свойством асимптотических ЛАХ и ЛФХ является возможность их построения по заданной передаточной функции вида (5.14) без каких-либо вычислений.

**Правило 1.** Для того чтобы построить асимптотическую ЛАХ, следует сделать следующее.

1. Построить низкочастотную асимптоту

$$L_{\text{нч}}(\theta) = 20 \lg k + 20n\theta. \quad (5.20)$$

2. Упорядочить все постоянные времени по возрастанию.

3. Положить

$$L^{\text{ac}}(\theta) = L_{\text{нч}}(\theta)$$

вплоть до наименьшей сопрягающей частоты, соответствующей наибольшей постоянной времени.

4. Если указанная постоянная вида  $T'_v$  входит в числитель п. ф., то, начиная с сопрягающей частоты, провести прямую с наклоном на 20 дБ/дек больше, чем у ранее построенной части графика  $L^{\text{ac}}(\theta)$ , если же сопрягающая частота определяется постоянной времени вида  $T_v$  ( входящей в знаменатель), то провести прямую с наклоном на 20 дБ/дек меньше.

5. Положить  $L^{\text{ac}}(\theta)$  совпадающей с построенной прямой на отрезке, вплоть до следующей по величине сопрягающей частоты, соответствующей меньшей постоянной времени, после чего повторить процедуру в п. 4,5 вплоть до исчерпания списка всех постоянных времени.

Для построения асимптотической ЛФХ достаточно использовать формулу

$$\psi^{\text{ac}}(\theta) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{20} \frac{dL^{\text{ac}}}{d\theta} \quad (5.21)$$

и учесть, что каждый излом  $L^{\text{ac}}(\theta)$  дает разрыв в  $\psi^{\text{ac}}(\theta)$ .

**Пример 5.3.** Пусть

$$H(p) = \frac{k}{p} \frac{(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad T_1 > T_2 > T_3 > T_4, \quad k > 0.$$

Следуя правилу, строим (рис. 3.18) низкочастотную амплитуду с наклоном  $-20$  дБ/дек вплоть до частоты  $1/T_1$ , далее (непрерывно!) продолжаем ее под наклоном  $-40$  дБ/дек (постоянная  $T_2$  — в знаменателе!) вплоть до частоты  $1/T_2$ . Далее проводим участок под наклоном  $-40 + 20 = -20$  (  $T_2$  — в числите!) до частоты  $1/T_3$ , а затем участки с наклоном  $-40$  дБ/дек и  $-60$  дБ/дек ( $T_3$  и  $T_4$  — в знаменателе).

После построения  $L^{\text{as}}(\theta)$  асимптотическая ЛФХ строится немедленно: каждому участку  $L^{\text{as}}(\theta)$  с наклоном  $n$  20 дБ/дек соответствует участок ЛФХ с уровнем  $n \frac{\pi}{2}$ .

Для сравнения на том же графике даны точные ЛАХ и ЛФХ.  $\square$

При наличии современной вычислительной техники преимущества асимптотических ЛАХ и ЛФХ кажутся несущественными: несложная программа выдает с ЭВМ графики ЛАХ и ЛФХ, построенные с точностью, превышающей практические требования. Однако этот упрощенный способ построения частотных характеристик продолжает успешно использоваться на практике не только в силу склонности инженерного мышления к установившимся традициям, но и благодаря тем достоинствам, которые имеют асимптотические ЛАХ в решении следующей важной задачи:

дан график амплитудно-частотной характеристики, требуется найти минимально-фазовую передаточную функцию, АЧХ которой близка к заданной.

Однако это возможно, достаточно аппроксимировать заданную кривую (построенную в логарифмическом масштабе!) ломаной, участки которой имеют наклон, кратный 20 дБ/дек и по сопрягающим частотам восстановить вид и параметры  $H(p)$ . От числа участков линейности аппроксимирующей ломаной зависит и сложность получаемой  $H(p)$  и точность приближения ее частотной характеристики к исходной, заданной, причем следует отметить, что инженерная практика отдает предпочтение простоте, а не высокой точности.

**5.3. Построение желаемых п.ф. по заданным требованиям к устойчивости при типовых воздействиях.** Преобразуем требования, сформулированные в начале § 4, в ограничения на свойства ЛАХ разомкнутого контура. Условия (4.10), (4.11) на отработку линейно растущего воздействия сводятся к ограничению на поведение  $H_p(i\omega)$  при низких частотах, близких  $\omega = 0$ :

$$H_p(i\omega) \sim \frac{k_p}{i\omega} \Rightarrow L_p(0) = 20 \lg k_p - 20\theta. \quad (5.22)$$

Иначе говоря, низкочастотная асимптота  $L_p(\theta)$  должна иметь наклон  $-20$  дБ/дек, причем в силу (4.12) ее уровень определяется условием

$$20 \lg k_p \geq -20 \lg \delta_0. \quad (5.23)$$

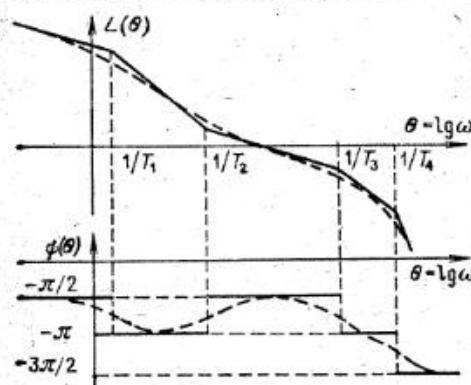


Рис. 3.18

найти минимально-фазовую передаточную функцию, АЧХ которой близка к заданной.

Однако это возможно, достаточно аппроксимировать заданную кривую (построенную в логарифмическом масштабе!) ломаной, участки которой имеют наклон, кратный 20 дБ/дек и по сопрягающим частотам восстановить вид и параметры  $H(p)$ . От числа участков линейности аппроксимирующей ломаной зависит и сложность получаемой  $H(p)$  и точность приближения ее частотной характеристики к исходной, заданной, причем следует отметить, что инженерная практика отдает предпочтение простоте, а не высокой точности.

**5.3. Построение желаемых п.ф. по заданным требованиям к устойчивости при типовых воздействиях.** Преобразуем требования, сформулированные в начале § 4, в ограничения на свойства ЛАХ разомкнутого контура. Условия (4.10), (4.11) на отработку линейно растущего воздействия сводятся к ограничению на поведение  $H_p(i\omega)$  при низких частотах, близких  $\omega = 0$ :

$$H_p(i\omega) \sim \frac{k_p}{i\omega} \Rightarrow L_p(0) = 20 \lg k_p - 20\theta. \quad (5.22)$$

Иначе говоря, низкочастотная асимптота  $L_p(\theta)$  должна иметь наклон  $-20$  дБ/дек, причем в силу (4.12) ее уровень определяется условием

$$20 \lg k_p \geq -20 \lg \delta_0. \quad (5.23)$$

Условия (4.17), (4.18) принимают вид

$$L_p(\omega) \geq -20 \lg \delta_0, \quad \omega \leq \bar{\omega}, \quad (5.24)$$

$$L_p(\omega) \leq 20 \lg \delta_N, \quad \omega \geq \bar{\omega}_N. \quad (5.25)$$

Первое из них задает ограничение на поведение в области низких частот, второе — в высокочастотной области.

Оказывается, что поведение  $L_p(\omega)$  в промежуточной зоне  $\bar{\omega}_s \leq \omega \leq \bar{\omega}_N$  не может быть произвольным, а определяется требованием устойчивости замкнутой системы! Для установления этого факта придется обратиться к критерию Найквиста, причем использовать геометрическую интерпретацию этого критерия в виде Правила 2 (§ 5 гл. 2), предварительно переписав его на языке ЛАХ.

**Правило 2'.** Для проверки устойчивости  $H_s(p)$  следует построить ЛАХ и ЛФХ разомкнутого контура  $L_p(\theta)$ ,  $\Phi_p(\theta)$ . Если в области, где  $L_p(\omega) \geq 0$ , разность между числом пересечений ЛФХ уровней  $-\pi(1+2k)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , снизу вверх и сверху вниз равно половине числа полюсов  $H_p(p)$  в правой полуплоскости, то  $H_s(p)$  устойчива.

Доказательство эквивалентности Правил 2 (§ 5, гл. 2) и 2' сводится к наблюдению, что в точках пересечения луча  $(-1, -\infty)$  годографом  $H_p(i\omega)$  (см. Правило 2) должно быть  $|H_p(i\omega)| \geq 1$ ,  $\text{Arg } H_p(i\omega) = -\pi(1+2k)$ ,

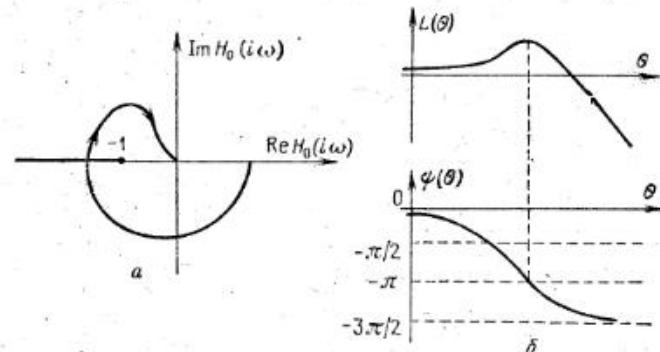


Рис. 3.19

а кроме того, пересечение годографом этого луча снизу вверх происходит при уменьшении аргумента, а следовательно, при движении по ЛФХ сверху вниз (см. рис. 3.19, а и б, соответствующие одной и той же передаточной функции). ■

Предположим далее, что  $H_s(p)$  является минимально-фазовой. Тогда, в силу теоремы Боде, наклон ЛАХ полностью определяет вид ЛФХ. Если, более того, наклон ЛАХ меняется мало, то, как было показано выше, значение ЛФХ в какой-либо точке определяется наклоном ЛАХ в той же точке  $\Phi(\theta) \cong \frac{\pi}{2} \frac{dL}{20 \text{dB}}$ , а следовательно, условия устойчивости  $H_s(p)$  определяются наклоном ЛАХ разомкнутого

контура в зоне, где  $L_p(\omega) \geq 0$  (и возможно, в ее небольшой окрестности).

Предположим, что эта зона есть область частот таких, что  $0 \leq \omega \leq \omega_{cp}$ ,  $L_p(\omega_{cp}) = 0$ , где  $\omega_{cp}$  обычно называют *частотой среза*. Тогда можно сформулировать простое, хотя и несколько нестрогое утверждение: если  $H_p(p)$  минимально-фазова, то для устойчивости п. ф. замкнутого контура  $H_s(p)$  достаточно выполнения условий

$$\frac{dL_p}{d\theta} > -40 \text{ дБ/дек при } \omega \rightarrow 0 \quad (\theta \rightarrow -\infty), \quad (5.26)$$

$$\frac{dL_p}{d\theta} > -40 \text{ дБ/дек в окрестности } \omega = \omega_{cp}. \quad (5.27)$$

Действительно, в этом случае ЛФХ выше уровня  $-\pi$  при малых частотах и вблизи частоты среза и число пересечений критических уровней сверху вниз и снизу вверх равно (рис. 3.20), так что разность чисел переходов двух типов равна нулю. В то же время, по определению, равно нулю и число полюсов в правой полуплоскости для минимально-фазовой  $H_p(p)$ .

Напомним, что при выборе желаемой передаточной функции условие (5.26) выполнено, если выполнено условие астатизма (5.22).

Ограничение же (5.27) дает новую информацию о требуемом поведении частотной характеристики разомкнутой системы.

Действительно, при малых  $\delta_s$ ,  $\delta_N$ , т. е. достаточно высоких требованиях к точности, должно быть

$$L_p^d(\omega) > 0 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}_s,$$

$$L_p^d(\omega) < 0 \text{ при } \omega \geq \bar{\omega}_N,$$

так что  $\bar{\omega}_s < \omega_{cp} < \bar{\omega}_N$ , и условие (5.27) определяет допустимый наклон ЛАХ при переходе от низкочастотной зоны, где для обеспечения высокой точности отработки необходим большой коэффициент усиления, к высокочастотной, где для подавления помех необходим малый коэффициент.

Итак, все требования, которые были сформулированы в начале § 4, сведены к ограничениям на допустимое поведение ЛАХ разомкнутого контура (см. диаграмму на рис. 3.21, где заштрихованы границы зон, в которые не может заходить ЛАХ).

Остается подобрать передаточную функцию  $H_p^d(p)$  разомкнутого контура, для которой эти ограничения выполнены. Для этого и полезны асимптотические ЛАХ!

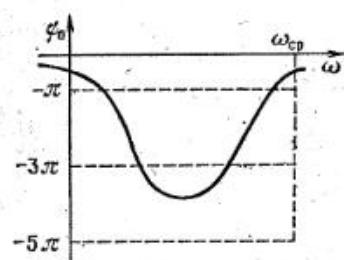


Рис. 3.20

Выбор, очевидно, неоднозначен и не всегда возможен. Однако при его осуществимости целесообразно стремиться к большей простоте, т. е. меньшему коэффициенту усиления и меньшим степеням числителя и знаменателя. В зависимости от соотношения параметров можно использовать различные аппроксимирующие ломанные с наклоном участков, кратным 20 дБ/дек, стремясь проводить их не выше границ «запретной зоны». Существенно лишь, что вблизи частоты среза недопустимо использовать участок с наклоном  $-40 \text{ дБ/дек}$ , т. е. по самой границе, поскольку это нарушит условие (5.27). Поэтому в окрестности частоты среза допустимо проведение участка аппроксимирующей асимптотической ЛАХ только с наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$ , причем длительность этого участка должна быть не менее декады \*).

**5.4. Типовые допустимые п. ф.** Приведем в готовом виде сводку допустимых передаточных функций разомкнутого контура (проверка их пригодности по схеме, описанной ниже, является полезным упражнением).

1. Пусть

$$\frac{1}{\delta_N \bar{\omega}_N} \leq \delta_0 \leq \frac{\delta_s}{\bar{\omega}_s};$$

тогда п. ф.

$$H_p^d(D) = \frac{1}{\delta_0 D} \quad (5.28)$$

удовлетворяет всем ограничениям. При тех же условиях допустима, но требует меньших усилий на частотах  $\omega \geq \omega_s$  и обеспечивает лучшее подавление помех п. ф. вида

$$H_p^d(D) = \frac{k_p}{D} \frac{T_2 D + 1}{(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)}, \quad (5.29)$$

где

$$k_p = \frac{1}{\delta_0}, \quad T_1 = \frac{\delta_s}{\delta_0 \bar{\omega}_s^2}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{\chi \delta_s}}{\bar{\omega}_s}, \quad T_3 \approx 0,1 T_2, \quad (5.30)$$

а параметр  $\chi$ , характеризующий расположение частоты среза,  $\omega_{cp} = \chi \frac{1}{T_2}$ , может выбираться в пределах  $2 \div 4$ .

\* ) Это условие прежде всего связано с тем, чтобы влияние соседних участков, возможно, с большим наклоном не привело бы к уменьшению фазы ниже критического уровня  $-\pi$  или ниже требуемого запаса по фазе (см. также § 6).

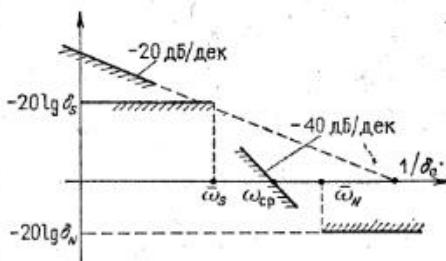


Рис. 3.21

2. Пусть

$$\delta_0 \leq \frac{\delta_s}{\omega_s}, \text{ причем } \delta_0 < \frac{1}{\delta_N \omega_N}. \quad (5.31)$$

Тогда допустима п. ф. вида (5.29), если исходные требования удовлетворяют добавочному условию

$$\delta_N \geq \frac{10\omega_s^2}{\delta_s \omega_N^2}, \quad (5.32)$$

т. е. требования по подавлению помехи не являются слишком жесткими. В противном случае, но при условии

$$\omega_N > \chi \frac{1}{T_3}, \quad \delta_N > \frac{1}{\chi^3} \quad (5.33)$$

можно использовать функцию

$$H_p^d(D) = \frac{k_p}{D} \frac{T_2 D + 1}{(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)(T_4 D + 1)} \quad (5.34)$$

с теми же параметрами, но при

$$T_4 = \frac{1}{\chi} T_3. \quad (5.35)$$

Все записанные выше формулы прямо вытекают из вида аппроксимирующих ЛАХ, представленных на рис. 3.22. Рассмотрим несколько детальнее ситуацию, представленную на рис. 3.22, *в*.

На каждом участке линейности  $L_p(\theta)$  совпадает с одной из прямых (относительно переменной  $\theta = \lg \omega$ ) вида  $20L_i$ , причем

$$L_0 = \lg \frac{1}{\delta_0 \omega}, \quad L_1 = \lg \frac{c_1}{\omega}, \quad L_2 = \lg \frac{c_2}{\omega}, \quad L_3 = \lg \frac{c_3}{\omega^2},$$

где константы  $c_i$  и границы участков  $\omega_i = 1/T_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , определяются из следующих условий:

а) условия непрерывности

$$L_0(\omega_1) = L_1(\omega_1), \quad L_1(\omega_2) = L_2(\omega_2), \quad L_2(\omega_3) = L_3(\omega_3),$$

б) условия на длительность участка вблизи частоты среза  $\omega_{cp}$ :

$$L_2(\omega_{cp}) = 0, \quad \omega_{cp} = \chi \omega_2, \quad \omega_3 = 10\omega_2,$$

в) условия по точности

$$L_1(\bar{\omega}_s) = \lg \frac{1}{\delta_s}, \quad L_3(\bar{\omega}_N) \leq \lg \delta_N.$$

После этого получение (5.30), (5.31) связано с простыми алгебраическими выкладками.

Не более сложны и ситуации, когда  $\delta_0 > \delta_s/\omega_s$ , где расположение «запретных зон» такое, как показано на рис. 3.21.

Очевидно, что все результаты носят лишь приближенный характер — в той мере, в какой это свойственно методу ЛАХ, — однако они просты и практически эффективны.

Подчеркнем вместе с тем, что все указанные типовые  $H_p^d(D)$  относятся к классу п. ф., описываемому формулами (4.42), (4.43).

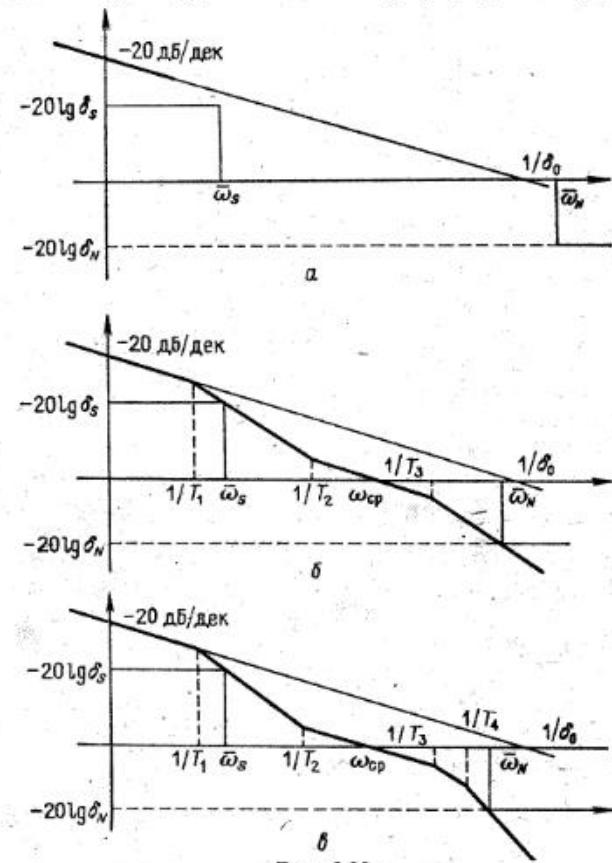


Рис. 3.22

(4.35). Нетрудно проследить и связь между рекомендациями по выбору их параметров и условиями (4.36)–(4.38). Отметим также, что (5.28) соответствует фильтру Баттервортса при  $n=1$ ,  $\omega_0 = \delta_0^{-1}$ .

## § 6. Реализация закона управления

**6.1. Формула и реализация.** Предшествующее изложение в данной главе было, по существу, посвящено одной проблеме: как выбрать закон управления в виде линейного динамического преобразования, задаваемого передаточной функцией  $H_p(D)$ .

Пусть для определенности речь идет о законе управления с обратной связью вида

$$u(t) = H_f(D) \varepsilon(t), \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon(t)$  — ошибка управления, а  $H_f(D)$  — дробно-рациональная п. ф. вида

$$H_f(D) = \frac{k(D)}{l(D)}. \quad (6.2)$$

Уже указывалось, что для фактического получения функции  $u(t)$  (сигнал управления) требуется решать дифференциальное уравнение

$$l(D)u(t) = k(D)\varepsilon(t), \quad (6.3)$$

причем значения правой части не известны заранее, а поступают от измерителя (датчика ошибки) в ходе работы системы.

Реализация закона управления состоит в построении вычислительного устройства (ВУ), осуществляющего такую операцию преобразования постепенно поступающих данных.

Принципы построения аналоговых вычислительных устройств (ВУ) типа электронных моделей, с помощью которых возможна реализация закона управления вида (6.3), были описаны в гл. 2, § 2. Вместе с тем задача проектирования, а тем более создания необходимого ВУ не исчерпывается этими принципами, а является специальной технической проблемой, которой посвящены многие руководства.

Здесь целесообразно остановиться только на одном принципиально важном ее аспекте.

Давая конструктору задание на разработку ВУ для системы управления, инженер-расчетчик обязан выдать не только желаемый закон управления — уравнения типа (6.3), но и требуемую точность его воспроизведения, допуск на возможные погрешности, отличия в свойствах преобразования сигналов в реальном ВУ от требуемого закона.

Дело в том, что ни одно реальное устройство не может быть точным аналогом, поскольку реальная физическая система не может быть точно описана какой-либо конкретной математической моделью. Мы были вынуждены считаться с этим фактом при описании объекта управления. В не меньшей степени он важен и при реализации закона управления. В конечном счете нас всегда интересует, как будет вести себя реальный объект под действием реализованного устройства управления. При этом в равной мере следует учитывать возможные отличия идеальных расчетных закономерностей от реальности в обеих частях системы.

Поскольку пока нам известны лишь некоторые методы линейной теории, то и при сравнении модели с реальностью мы вынуждены ограничиться только такой гипотезой: реальная система также может

быть описана линейными уравнениями вида

$$\begin{aligned} a^r(D)y(t) &= \beta^r(D)u(t) + \beta_w^r(D)w(t), \\ l^r(D)u(t) &= k^r(D)\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = y^d(t) - y(t), \end{aligned} \quad (6.4)$$

но со свойствами, отличающимися от принятых при расчете. В действительности эти различия могут быть велики или малы, но необходимым условием является требование *грубости*: при малых отличиях характеристик реальной системы от принятых при расчете ее поведение не должно существенно изменяться \*).

С понятием грубости мы уже сталкивались в § 1. Более того, без качественного представления о необходимости обеспечения грубости вообще невозможно давать какие-либо разумные рекомендации по построению законов управления.

**6.2. Уточнение рекомендаций. Качество управления и точность модели.** Напомним, что требования к поведению системы, определяющие выбор закона управления согласно § 4, сводились к следующему.

1. Система должна быть устойчивой, а частотная характеристика п. ф. замкнутого контура должна удовлетворять ограничениям

$$|1 - H_s(i\omega)| \leq \delta_s, \quad \omega \in \Omega_s, \quad (6.5)$$

$$|H_s(i\omega)| \leq \delta_N, \quad \omega \in \Omega_N, \quad (6.6)$$

а кроме того, возможно, условиям

$$H_s(0) = 1, \quad \left. \frac{dH_s}{dp} \right|_{p=0} \geq \frac{1}{\delta_0}. \quad (6.7)$$

Все указанные условия учитывались при расчете, и выбирался такой закон управления, чтобы они удовлетворились. Иначе говоря, находились такие  $k(p)$ ,  $l(p)$ , что

1) многочлен

$$\Delta(p) = \alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) \quad (6.8)$$

являлся устойчивым;

2) п. ф.

$$H_s(p) = \frac{\beta(p)k(p)}{\alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p)} \quad (6.9)$$

удовлетворяла условиям (6.6), (6.7).

Вопрос лишь в том, окажутся ли выполненными те же требования, если заменить многочлены  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $l$  на их реальные значения.

Наглядный ответ на этот вопрос легко может быть получен с помощью метода ЛАХ.

Из критерия Найквиста следует, что любые изменения  $L_p(\omega)$  и  $\psi_p(\omega)$ , такие, что остается выполненным условие  $\psi_p(\omega) > -\pi$  при

\* ) Более строгое определение дано в гл. 4, § 3, см. также [3.6].

всех  $\omega$ , где  $L_p(\omega) > 0$ , т. е.  $\omega < \omega_{cp}$ , не приводят к нарушению устойчивости замкнутой системы.

**Вывод 1.** Если отличия расчетной модели от реальности сводятся к малым изменениям коэффициента усиления или постоянных времени таких, что

$$\frac{1}{T_i} \leq \omega_{cp}, \quad (6.10)$$

то условия устойчивости не нарушаются. Более того, устойчивость не нарушается, если эти различия приводят к появлению малых постоянных времени таких, что

$$\frac{1}{T_i} \gg \omega_{cp}. \quad (6.11)$$

Чем больше введенный при расчете запас устойчивости, тем большие погрешности допустимы.

В рамках метода ЛАХ в качестве меры запаса устойчивости используют либо запас устойчивости по фазе (аргументу), т. е. величину  $\Delta\phi \triangleq \pi + \psi_p(\omega_{cp})$ , либо запас устойчивости по амплитуде (модулю), т. е. величину  $\Delta L = -L_p(\omega)$ , где  $\omega$  таково, что  $\psi(\omega) = -\pi$  (рис. 3.23). Смысл введения этих величин ясен из критерия Найквиста.

Рис. 3.23

В качестве меры запаса устойчивости можно принять и степень устойчивости замкнутой системы, указывающую, насколько должны изменяться корни характеристического уравнения, чтобы хоть один из них перешел в правую полуплоскость. Такая мера особенно важна в ситуациях, характерных для применения динамической компенсации, когда п. ф.  $H_p(p)$  не полностью определяет вид характеристического многочлена.

Далее учтем, что для минимально-фазовых систем  $L_p(\omega)$  полностью определяет  $H_p(p)$ , а следовательно, и  $H_s(p)$ .

**Вывод 2.** Малые изменения в коэффициенте усиления или постоянных времени типа (6.10) могут привести лишь к малым нарушениям ограничений (6.5), (6.7). Появление малых постоянных времени типа (6.11) заведомо не изменяет выполнения условий (6.5), (6.7), определяемых видом  $L_p(\omega)$  в низкочастотной области, и может лишь улучшать условия (6.8) подавления высокочастотных помех.

Принципиально важным является следующее положение.

**Вывод 3.** Чем более жесткими являются требования (6.5), (6.7) по качеству отработки сигнала, тем более точным должно быть соответствие расчетной модели и реальности.

Под увеличением «жесткости требований» понимается как уменьшение «допуска»  $\delta$ , так и расширение области  $\Omega_s$ , т. е. увеличение предельной частоты  $\omega$ , допустимых сигналов. Оба эти фактора приводят к увеличению требуемой частоты среза  $\omega_{cp}$ , а тем самым — к расширению множества существенных постоянных времени, удовлетворяющих (6.10), в задании которых допустимы лишь малые неточности.

Полученному выводу можно придать и негативную форму.

**Вывод 4.** В теории систем управления с обратной связью недопустимо утверждать, что та или иная модель точно или приближенно описывает реальную систему, не указывая при этом, для какой цели используется модель, каково требуемое качество управления.

Позитивные практические следствия также очевидны: при реализации рассчитанных законов управления можно не заботиться о точности воспроизведения частотных характеристик далеко за частотой среза. В частности, вместо любого желаемого закона управления  $H_f^d(D)$  можно использовать закон вида

$$H_f^p(D) = H_f^d(D) \frac{\prod_i (T'_i D + 1)}{\prod_i (T_i D + 1)},$$

если постоянные  $T_i, T'_i$  являются малыми в смысле (6.11). Это обстоятельство существенно облегчает создание аналоговых ВУ, обеспечивающих формирование законов управления.

Действительно, вводя добавочные малые постоянные времени, можно преобразовать желаемую п. ф. закона управления в строго реализуемую\*. Вместе с тем, как было доказано в § 2 гл. 2, строго реализуемой п. ф. можно сопоставить структурную схему, содержащую только звенья типа идеальных усилителей и интеграторов, а таковые с желаемой точностью могут быть реализованы с помощью стандартных элементов — операционных усилителей.

Напомним, что с помощью тех же блоков может быть воспроизведена (с точностью до малой постоянной времени) и операция дифференцирования, не являющаяся «строго реализуемой» в формальном смысле. Однако при наличии высокочастотных помех целесообразно избегать непосредственного использования дифференцирующих устройств: при дифференцировании амплитуда увеличи-

\* Пример дан в § 7.

вается пропорционально частоте, и сигнал, искаженный помехой, может выйти за пределы зоны линейности последующего преобразования, полностью искажая его предполагаемые при расчете свойства. Подробнее о неприятностях, связанных с этим эффектом, будет сказано в гл. 5, поскольку проблема не может быть освещена в рамках линейной теории.

**6.3. Об использовании цифровых ВУ.** Кратко остановимся также на проблеме реализации законов управления с помощью дискретных, цифровых ВУ. Выработка сигнала управления согласно (6.3) требует решения дифференциального уравнения, но, как известно, существуют стандартные методы вычислительной математики, позволяющие производить численное интегрирование дифференциальных уравнений с высокой точностью.

Более того, существуют и соответствующие стандартные программы для цифровых ЭВМ. Если в качестве ВУ в системе управления используется такая ЭВМ, то в принципе возможно применять и почти любую стандартную программу для выработки сигнала управления, лишь бы она удовлетворяла следующим условиям.

1. Ввод данных о правой части, т. е. процессе  $\varepsilon(t)$ , должен производиться по мере поступления информации от измерительных устройств, вводимой в ЭВМ через специальные устройства ввода.

2. Выдача данных о значении решения  $u(t)$  должна производиться лишь с малым запаздыванием относительно ввода информации о значении ошибки  $\varepsilon(t)$  в тот же момент времени, причем данные должны преобразовываться в сигнал (с помощью специального устройства вывода), подлежащий дальнейшему усилению по мощности.

Необходимость этих условий почти очевидна, хотя на самом деле проблема не столь проста. Ее специфика будет систематически продемонстрирована в гл. 7. Здесь лишь стоит заранее заметить, что требования к точности численного интегрирования и быстроте его осуществления (величина запаздывания в выдаче данных) опять-таки не носят абсолютного характера, а определяются тем, насколько отклонения от желаемого закона мешают выполнению заданных требований по устойчивости и качеству системы в целом.

## § 7. Синтез обратных связей в электромеханической следящей системе

**7.1. Описание и технические условия.** В качестве развернутого примера к материалу, изложенному в § 4—6, рассмотрим задачу о выборе законов управления в электромеханической следящей системе (ЭСС). Принцип действия ЭСС был изложен в гл. 1, § 3; в гл. 2, § 2 приведены различные формы математического описания силового блока системы, включающего усилитель мощности, двигатель, редуктор и собственно объект управления — выходной инерционный вал, угол поворота которого  $\varphi(t)$  должен отслеживать угол

поворота  $\varphi^d(t)$  задающей оси. Наконец, в данной главе (П.2.1) была приведена общая структурная схема ЭСС при произвольном линейном законе управления с обратной связью по результату измерения ошибки  $\varepsilon(t) = \varphi^d(t) - \varphi(t)$ , задаваемому п. ф.  $H_d(D)$ . Здесь же будет рассмотрена задача рационального выбора  $H_d(D)$  при дополнительном усложняющем предположении, что результат измерения ошибки искажен наличием помехи  $N(t)$ . Структурная схема ЭСС, данная на рис. 3.24, учитывает этот фактор.

Передаточные функции  $H_{u\varphi}(D)$ ,  $H_{m\varphi}(D)$  могут быть записаны в виде (см. формулы (2.22), (2.23) в гл. 2)

$$H_{u\varphi}(D) = \frac{k_c}{D\alpha_0(D)}, \quad H_{m\varphi}(D) = -\frac{k_m\beta_0(D)}{D\alpha_0(D)}, \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0(D) &= T_{m1}D(T_sD + 1)(T_0^2D^2 + 1) + T_{m2}D(T_sD + 1) + T_0^2D^2 + 1, \\ \beta_0(D) &= (T_0^2bD^2 + 1)(T_sD + 1) + T_0^2T_{m2}^{-1}D, \end{aligned} \quad (7.1')$$

или, в пренебрежении нежесткостью кинематической передачи (при  $T_s = 0$ ),

$$\alpha_0(D) = T_mD(T_sD + 1) + 1, \quad \beta_0(D) = T_sD + 1, \quad T_m = T_{m1} + T_{m2}. \quad (7.1'')$$

Смысл констант был указан в § 2 гл. 2. Подчеркнем лишь, что, по определению,  $\alpha_0(0) = 1$ ,  $\beta_0(0) = 1$ , и многочлен  $\alpha_0$  устойчив.

Опишем сначала типичные технические условия, которыми определяется выбор п. ф. обратной связи  $H_d(D)$ , т. е. п. ф. преобразования результата измерения  $\varepsilon(t) + N(t)$  в управляющее напряжение  $u(t)$ :

- а) предельный постоянный момент нагрузки равен  $\bar{m}_n$  (нм);
- б) предельная угловая скорость задающей оси (или вала нагрузки) равна  $\omega_d$  (1/с);
- в) предельное угловое ускорение равно  $\bar{\beta}$  (1/с<sup>2</sup>), а также задана предельная допустимая ошибка отработки  $\varepsilon$ .

Предположим также, что задана нижняя граница полосы частот гармонических помех  $\omega_n$ . Амплитуда таковых неизвестна, но желательно иметь относительную величину установившейся ошибки  $\delta_N = a_N^{-1}\varepsilon_{N\infty}$ , вызванной наличием помех (см. § 4), возможно более малой при любых  $\omega \geq \omega_n$ .

**7.2. Выбор желаемой п. ф.** Первая фаза расчета состоит в определении желаемой п. ф. по типовым воздействиям. В техниче-

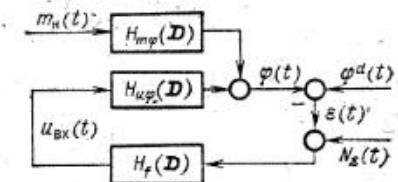


Рис. 3.24

ских условиях воздействия описаны не полностью. Поэтому введем дополнительное предположение о том, что расчет должен производиться для двух режимов:

1) установившийся режим отработки вращения задающей оси с постоянной скоростью с преодолением постоянного момента нагрузки;

2) установившийся режим отработки колебаний угла поворота задающей оси с постоянной амплитудой и частотой.

Выясним, каково поведение приведенного сигнала

$$s(t) = \varphi^d(t) - H_{mp}(\mathbf{D}) m_a(t) \quad (7.2)$$

в расчетных режимах:

В режиме 1)

$$\varphi^d(t) = \omega_d t, \quad m_a(t) = m_a,$$

где  $\omega_d, m_a$  — постоянны. Поэтому при достаточно больших  $t$

$$s(t) = \omega_d t + k_m m_a t = a_1 t, \quad a_1 \triangleq \omega_d + k_m m_a,$$

что следует из вида п. ф.  $H_{mp}$ , указанного выше. Таким образом, приведенный сигнал в этом режиме меняется с постоянной скоростью, не превышающей

$$\bar{a}_1 = \bar{\omega}_d + k_m m_a > \bar{\omega}_d. \quad (7.3)$$

В режиме 2)

$$s(t) = \varphi^d(t) = a_d \cos \omega t,$$

где  $a_d, \omega$  — постоянны, но неизвестны. Задано только, что

$$|D\varphi^d(t)| \leq \bar{\omega}_d, \quad |D^2\varphi^d(t)| \leq \bar{\beta},$$

но отсюда следует, что

$$a_d \omega \leq \bar{\omega}_d, \quad a_d \omega^2 \leq \bar{\beta}, \quad (7.4)$$

и тем самым определяется ограничение на предельную частоту изменения сигнала  $\bar{\omega}_s = \frac{\bar{\beta}}{\omega_d}$ , а также ограничения на амплитуду сигнала, которые (в отличие от описанного в § 4) зависят от частоты.

Заменим их более простым  $a_d \leq \bar{a}_1 \triangleq \frac{\bar{\omega}_d}{\omega_s}$  при всех частотах  $\omega \leq \bar{\omega}_s$  \*),

для того чтобы непосредственно воспользоваться рекомендациями, данными в § 4, 5. Потребуем также, чтобы в обоих режимах предельная допустимая ошибка не превосходила заданной величины  $\varepsilon$ , т. е. примем

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon}_s = \bar{\varepsilon}, \quad (7.5)$$

где  $\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_s$  — введенные в § 4 обозначения для предельных ошибок при отработке линейно растущего и гармонического сигналов. Вы-

\*). Нетрудно убедиться, что это упрощение не обязательно. Все результаты сохранят свою силу и при ограничениях (7.4).

берем первоначально  $H_p^d(\mathbf{D})$  из семейства фильтров Баттерворта (4.26), используя условие (4.30), которому должны удовлетворять значения параметров. С учетом (7.3), (7.5) оно приводится к виду

$$\left( \bar{\varepsilon} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{-1} \bar{a}_1 \leq \bar{\omega}_0 \leq \bar{\omega}_N \delta_N^n, \quad (7.6)$$

где  $n$  — порядок, а  $\bar{\omega}_0$  — характерная частота фильтра, значение  $\delta_N$  не задано. Оно окажется наименьшим, если выбрать порядок  $n$  так, чтобы минимизировать величину

$$\left( \frac{\bar{a}_1}{\bar{\omega}_N \bar{\varepsilon} \sin \frac{\pi}{2n}} \right)^n, \quad (7.7)$$

а  $\bar{\omega}_0$  принять равной

$$\bar{a}_1 \left( \bar{\varepsilon} \sin \frac{\pi}{2n_0} \right)^{-1}, \quad (7.8)$$

где  $n_0$  — порядок  $n$ , при котором минимальна (7.7).

Перейдем далее к другому способу выбора желаемой п. ф. — методу ЛАХ. При этом также воспользуемся готовыми рекомендациями, данными в § 5.

Простейшая п. ф. вида (5.28)

$$H_p^d(p) = \frac{1}{\delta_0 p}, \quad \delta_0 = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{a}_1}, \quad (7.9)$$

пригодна, если выполнено условие

$$\delta_0 \leq \frac{\bar{\delta}_s}{\bar{\omega}_s} \Leftrightarrow \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{a}_1} \leq \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\bar{\omega}_s},$$

которое заведомо верно в данном случае, если  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_s$ . Однако предельный относительный уровень подавления помех  $\delta_N$  при этом ограничен величиной

$$\delta_N \geq \frac{1}{\bar{\omega}_N \delta_0} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{\omega}_N \bar{\varepsilon}}. \quad (7.10)$$

Для уменьшения этого уровня попытаемся использовать п. ф. более сложного вида (5.29) с параметрами (5.30):

$$H_p^d(p) = \frac{k_p}{p} \frac{T_2 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (7.11)$$

$$k_p = \frac{1}{\delta_0} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{\varepsilon}}, \quad T_1 = \frac{\delta_s}{\delta_0 \bar{\omega}_s^2} = k_p \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{a}_s \bar{\omega}_s^2} = k_p \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\beta}},$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{\chi}{\bar{\omega}_s}} V \bar{\delta}_s = V \bar{\delta}_s \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{a}_s \bar{\omega}_s^2}} = V \sqrt{\frac{\chi \bar{\varepsilon}}{\bar{\beta}}},$$

$$T_3 = 0,1 T_2, \quad \chi \in [2; 4]. \quad (7.12)$$

Таким образом, выбор коэффициента усиления  $k_p$  определяется заданной предельной угловой скоростью, а отношение  $T_1/k_p$  определяется предельным угловым ускорением.

Обеспечиваемое при таком выборе подавление помех оценивается по формуле (5.32)

$$\delta_N = \bar{\delta}_N = \frac{10\bar{\omega}_s^2}{\delta_s \bar{\omega}_N^2} = \frac{10\bar{\beta}}{\varepsilon \bar{\omega}_N^2}. \quad (7.13)$$

Сравнение различных вариантов  $H_p^d(p)$  возможно только при задании конкретных числовых данных.

**Пример 7.1.** Примем  $\bar{\omega}_s = 4 \text{ 1/c}$ ;  $k_N m_u = 1 \text{ 1/c}$ ;  $\bar{\beta} = 20 \text{ 1/c}^2$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  $\bar{\omega}_N = 300 \text{ 1/c}$ . Тогда  $\bar{\alpha}_1 = 5 \text{ 1/c}$ , и можно воспользоваться результатами расчетов фильтра Баттервортса из П.4.1, где были указаны те же значения  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{\omega}_N$ . В этом примере было установлено, что  $n_0 = 2$ ,  $\omega_0 = \sqrt{2} \cdot 100$ , так что желаемая п. ф. замкнутого контура рекомендуется в виде

$$H_s^d(D) = \frac{1}{1 + \frac{D}{100} + \frac{1}{2} \left( \frac{D}{100} \right)^2},$$

а следовательно,

$$H_p^d(D) = \frac{100}{D} \cdot \frac{1}{0,01D + 1}.$$

При этом  $\bar{\delta}_N = 2/9 \approx 0,22$ . В то же время фильтр 1-го порядка дает худшую величину 0,33, так что простейшая рекомендация метода ЛАХ менее эффективна (уже указывалось, что формула (5.25) приводит к фильтру с  $n = 1$ ,  $\omega_0 = 1/\bar{\delta}_0$ ). С другой стороны, более сложная п. ф., рассчитанная по формуле (7.11) (при  $\chi^2 = 10$ ),

$$H_p^d(p) = \frac{100}{p} \cdot \frac{(0,09p + 1)}{(0,25p + 1)(0,009p + 1)},$$

обеспечивает лучшее подавление помех, чем лучший фильтр Баттервортса! Действительно, при данных параметрах

$$\bar{\delta}_N = \frac{10 \cdot 20}{0,05 \cdot (300)^2} = \frac{4}{90} \approx 0,04.$$

На рис. 3.25 приведены асимптотические ЛАХ, соответствующие двум рассматривавшимся вариантам  $H_p^d(p)$ . Из него видно, что вариант (7.11) обеспечивает меньший коэффициент усиления за пределами заданной полосы пропускания  $\omega \leq \omega_0$ .  $\square$

Даже без числовых прикоснов ясно, что вариант, предлагаемый по методу ЛАХ, более гибок, так как имеет больше параметров для подбора аппроксимирующей функции, чем фильтр Баттервортса.

Дополнительно укажем, что исходные требования к качеству следящей системы могут задаваться и в иной, отличной от приведенной выше, форме.

**7.3. Дополнительные условия и формулировки.** Часто задают дополнительные требования к переходной функции. Их анализ применительно к фильтрам Баттервортса был дан в § 4. Для метода ЛАХ ситуация несколько сложнее.

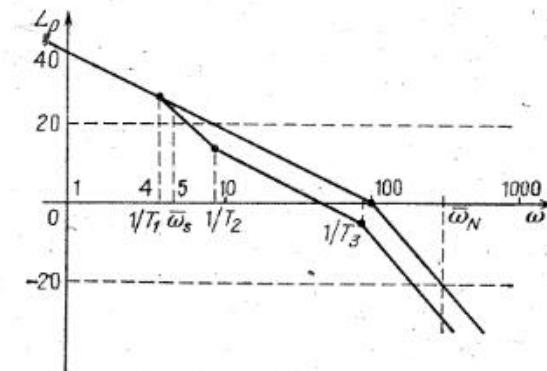


Рис. 3.25

Аналитическая структура связи между характеристиками типа «время  $t_n$  затухания» и «перерегулирование» с параметрами желаемой п. ф.  $H_p^d(p)$ , например вида (7.11), достаточно громоздка, хотя оценка этих характеристик путем прямого счета при заданных числовых значениях параметров производится несложно.

Анализ численных расчетов \*) показывает, что при рекомендуемом соотношении параметров  $T_3 = 10T_2$ ,  $\omega_{cp} = \chi \frac{1}{T_2}$ ,  $\chi \in [2, 4]$ , перерегулирование не превышает 30%, а время затухания ограничено величиной

$$\frac{10}{\omega_{cp}} = \frac{10}{\chi} T_2 \leq 7 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{\beta}}}. \quad (7.14)$$

**Правило.** При наличии дополнительных требований на время затухания вида  $t_n \leq \bar{t}_n$  надлежит провести анализ исходного задания. Если

$$7 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{\beta}}} \leq \bar{t}_n, \quad (7.15)$$

то дополнительное требование несущественно. В противном случае можно применить ранее рекомендованную схему расчета, заменив исходное задание  $\bar{\beta}$  по допустимому ускорению на большую величину  $50\varepsilon/T_2^2$ .

\*) Детальное описание результатов расчета можно найти, например, в [3.1].

Стоит также отметить, что популярность метода ЛАХ в инженерных кругах настолько велика, что зачастую исходное задание формулируется непосредственно в виде ограничений на поведение ЛАХ, например:

- наклон низкочастотной асимптоты равен  $-20$  дБ/дек,
- добротность не ниже  $k$ ,
- частота среза равна  $\omega_{cp}$ ,
- запас по фазе на частоте среза не ниже  $\Delta\phi$ ,
- уровень  $L_p(\omega)$  за частотой  $\omega_N$  не выше  $20 \lg \delta_N$ .

Ясно, что по этим требованиям также легко устанавливаются параметры желаемой п. ф. вида (7.11).

Напомним, что из теоремы Боде следует: при достаточной длительности участка асимптотической ЛАХ с наклоном  $-20$  дБ/дек в окрестности частоты среза  $\omega_{ac}(\omega_{cp}) = -\pi/2$ , а следовательно, запас по фазе близок к  $\pi/2$ , что, как правило, считается практически удовлетворительным (обычно допускается снижение запаса до  $\pi/4$ ).

Таким образом, этап синтеза обратной связи, на котором по заданным техническим условиям выбирается желаемая передаточная функция, рассмотрен с достаточной полнотой.

**7.4. Выбор п. ф. обратной связи.** Второй этап состоит в построении п. ф. обратной связи  $H_f(D)$ . Общая схема была дана в § 4, 6. Здесь важно выявить лишь некоторые специфические детали.

Поскольку во всех вариантах  $H_p^d(D)$  представима в виде

$$H_p^d(D) = \frac{k_p \beta_n^d(D)}{D \alpha_0^d(D)}, \quad \alpha_0^d(0) = 1, \quad \beta_0^d(0) = 1, \quad (7.16)$$

а п. ф. объекта  $H_{uf}(D)$  дается формулой (7.1), то для обеспечения тождества

$$H_{uf}(D) H_f(D) \equiv H_p^d(D) \quad (7.17)$$

следует принять

$$H_f(D) = k_f \frac{\alpha_0(D) \beta_n^d(D)}{\alpha_0^d(D)}, \quad k_f \triangleq \frac{k_p}{k_c}. \quad (7.18)$$

Такая п. ф. строго реализуема, если

$$\deg \beta_n^d + \deg \alpha_0 \leq \deg \alpha_0^d. \quad (7.19)$$

В противном случае придется воспользоваться приемом регуляризации, описанным в § 6, т. е. введением малых постоянных времени, не искажающих поведения частотной характеристики в полосе существенных частот, определяемой частотой среза  $\omega_{cp}$ . Вновь обратим внимание на то, что само понятие «малости» зависит от требований к качеству системы, поскольку именно они определяют частоту среза.

Для дальнейшего удобно иметь явное представление для корней многочлена  $\alpha_0(p)$ , определяющего динамическое описание объекта.

Согласно (7.1') этот многочлен имеет 4-ю степень, и корни можно оценить лишь приближенно. Используем практический приемлемую гипотезу, что

$$T_0 \ll T_3, \quad \mu_0 \triangleq T_3/T_m \ll 1.$$

Тогда можно убедиться прямым перемножением, что справедливо представление

$$\alpha_0(p) = (Tp + 1)(\mu_0 Tp + 1) \left\{ \mu_0^3 a^2 b^2 T^2 \left[ p + \frac{2}{Tb^2(1+b)} \right]^2 + 1 \right\}, \quad (7.20)$$

где  $T = T_m + O(\mu_0)$ ,  $a = T_0 T_3^{-1}$ , откуда явно вычисляются корни с точностью до величины  $\mu_0$ .

Будем ориентироваться на условия, приводящие к целесообразности выбора  $H_p^d(D)$  в виде (7.11). Тогда следует считать малыми все постоянные времени, существенно меньшие постоянной  $T_3$ , такой, что  $T_3^{-1}$  лежит за частотой среза в конце участка асимптотической ЛАХ, имеющей наклон  $-20$  дБ/дек (рис. 3.22, б).

Если  $\mu_0 T \ll T_3$ , то можно принять  $\alpha_0(p) = T_m p + 1$  (физически это означает пренебрежение индуктивностью якорной цепи и нежесткостью кинематики), и

$$H_f(D) = k_f \frac{(T_m D + 1)(T_2 D + 1)}{(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)}. \quad (7.21)$$

Если  $\mu_0 T$  не удовлетворяет условию малости, но

$$ab\mu_0 T \ll T_3, \quad (7.22)$$

то можно принять

$$\alpha_0(p) = (Tp + 1)(\mu_0 Tp + 1) \quad (7.23)$$

(это равносильно пренебрежению нежесткостью). Тогда

$$H_f(D) = k_f \frac{(T D + 1)(\mu_0 T D + 1)(T_2 D + 1)}{(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)(T_4 D + 1)}, \quad (7.24)$$

где малая постоянная  $T_4 \ll T_3$  введена для обеспечения реализуемости.

Если же оба указанных фактора существенны, то приходится принимать  $H_f(D)$  в виде

$$H_f(D) = k_f \frac{\alpha_0(D)(T_2 D + 1)}{(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)(T_4 D + 1)(T_5 D + 1)(T_6 D + 1)}, \quad (7.25)$$

где обеспечение реализуемости достигается введением еще двух малых постоянных  $T_5$ ,  $T_6$ , поскольку  $\deg \alpha_0 = 4$ .

**Пример 7.2.** Примем  $\mu_0 = 0,1$ ;  $a = 0,5$ ;  $b = 0,5$ ;  $k_c = 0,1$   $1/(B \cdot c)$ ;  $T_m = 0,5$  с. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_0(p) = & \frac{1}{6} p [(0,025p)^2 + 1] (0,05p + 1) + \frac{1}{3} p (0,05p + 1) + \\ & + (0,025p)^2 + 1 \end{aligned}$$

или, в соответствии с приближенным разложением (7.20),  
 $\alpha_0(p) = (0,5p + 1)(0,05p + 1)[0,025^2(p + 11)^2 + 1]$ .

По данным П.7.1

$$H_p^d(D) = \frac{100}{D} \frac{0,09D + 1}{(0,25D + 1)(0,09D + 1)},$$

причем желаемая частота среза равна  $\omega_{sp} \approx 35 \text{ 1/c} \approx 6 \text{ Гц}$ .

Требования к качеству являются достаточно жесткими, условие (7.23) не выполняется. Поэтому требуется использование обратной связи, построенной по полной формуле (7.25).

Предположим далее, что путем улучшения конструкции редуктора удается существенно повысить жесткость кинематической связи, так что  $T_s = 0,001 \text{ с}$  (это соответствует частоте свободных колебаний вала нагрузки относительно ротора, равной  $1000 \text{ 1/c}$  или  $160 \text{ Гц}$ ). Предположим также, что с помощью других приемов (о которых будет сказано чуть ниже!) удается уменьшить механическую  $T_m$  и электрическую  $T_a$  постоянные времени до уровня  $T'_m = 0,5 T_m = 0,95 \text{ с}$ ;  $T'_a = 0,05 T_a = 0,0025 \text{ с}$ . Тогда п. ф. закона управления в обратной связи может быть построена в виде

$$H_i(D) = 10^3 \frac{(0,09D + 1)(0,25D + 1)}{(0,25D + 1)(0,009D + 1)} = 10^3 \frac{0,09D + 1}{0,009D + 1}. \quad (7.26)$$

Реализация такого закона управления существенно проще.  $\square$

**7.5. Внутренние обратные связи.** Упомянутые приемы уменьшения постоянных времени в сущности уже известны — это введение внутренней обратной связи.

Действительно, если есть возможность измерения выхода или какой-либо другой переменной, с ним связанный, то внутренняя обратная связь позволяет изменить динамические характеристики охватываемого ею блока.

Опишем конкретный способ построения такой связи, считая для упрощения, что нежесткостью кинематической связи можно сразу пренебречь.

Пусть с помощью тахогенератора измеряется угловая скорость двигателя, отличающаяся от угловой скорости вала нагрузки коэффициентом редукции  $r$ , т. е. вырабатывается электрическое напряжение

$$u_{tr}(t) = k_{tr}\omega_{da}(t) = k_{tr}r\omega(t) = k_{tr}rD\Phi(t). \quad (7.27)$$

П. ф. преобразования «управляющее напряжение  $u_{ax} \rightarrow$  угловая скорость вала  $\omega$ » в силу (7.1) при  $T_s = 0$  равна

$$H_{u\omega}(D) = \frac{k_c}{T_m D(T_s D + 1) + 1} \simeq \frac{k_c}{(T_m D + 1)(T_s D + 1)}. \quad (7.28)$$

Примем  $u_{ax}(t) = u_f(t) + u_\omega(t)$ , где  $u_f(t)$  — сигнал обратной связи по ошибке, а  $u_\omega(t)$  формируется на основе измерений угловой

скорости согласно уравнению

$$l_\omega(D) u_\omega(t) = -k_\omega(D) \omega(t). \quad (7.29)$$

Подберем п. ф. внутренней обратной связи

$$H_{u_f}(D) \triangleq \frac{k_{u_f}(D)}{l_{u_f}(D)}$$

так, чтобы п. ф. блока, замкнутого этой связью (рис. 3.26, б), т. е.

$$H_{u_f\omega}(D) = \frac{H_{u_f}(D) H_{u\omega}(D)}{1 + H_{u_f}(D) H_{u\omega}(D)}, \quad (7.30)$$

совпадала с желаемой

$$H_{u_f\omega}^d(D) = \frac{k'_c}{T'_m D(T'_s D + 1) + 1} \simeq \frac{k'_c}{(T'_m D + 1)(T'_s D + 1)}. \quad (7.31)$$

Очевидно, что это возможно, если принять

$$H_{u_f}(D) = \frac{k'_c}{k_c} \frac{(T_m D + 1)(T_s D + 1)}{(T'_m D + 1)(T'_s D + 1) - k'_c}, \quad 0 < k'_c < 1. \quad (7.32)$$

Тем самым введением реализуемой обратной связи удается добиться желаемого изменения постоянных времени  $T_m$ ,  $T_s$  на  $T'_m$ ,  $T'_s$ . Хотя при этом изменяется и коэффициент усиления ( $k_c \rightarrow k'_c$ ), это изменение легко компенсируется за счет коэффициента усиления в  $H_i(D)$ .

**Пример 7.3.** Для данных П.7.2 построим обратную связь по скорости в соответствии с формулой (7.32). Примем  $k'_c = k_c = 0,1$ . Тогда

$$H_{u_f}(D) = \frac{(0,5D + 1)(0,05D + 1)}{(0,25D + 1)(0,0025D + 1) - 0,1}$$

а

$$H_{u_f\omega}^d(D) = \frac{0,1}{(0,25D + 1)(0,0025D + 1)}.$$

При этом ранее найденная формула (7.26) для  $H_i(D)$  сохраняет силу.  $\square$

Еще более эффективно введение двух внутренних обратных связей — и по угловой скорости, и по току якоря.

Построим управляющее напряжение в виде

$$u_{ax}(t) = u_f(t) + u_\omega(t) + u_i(t), \quad (7.33)$$

где  $u_\omega(t)$  формируется, как и ранее, на основе измерений угловой скорости  $\omega(t)$ , а  $u_i(t)$  — на основе измерений тока  $i(t)$ . Оказывается, что теперь желаемая п. ф. блока, охваченного этими двумя обратными связями, может быть приведена к форме (7.31), если принять

$$u_\omega(t) = -k_\omega \omega(t), \quad u_i(t) = -k_i i(t) \quad (7.34)$$

и соответствующим образом подобрать постоянные коэффициенты  $k_i$ ,  $k_e$ . Для такого выбора придется «влезть внутрь» объекта, вспоминая приведенные в § 2 гл. 2 уравнение (2.6) якорной цепи и со-

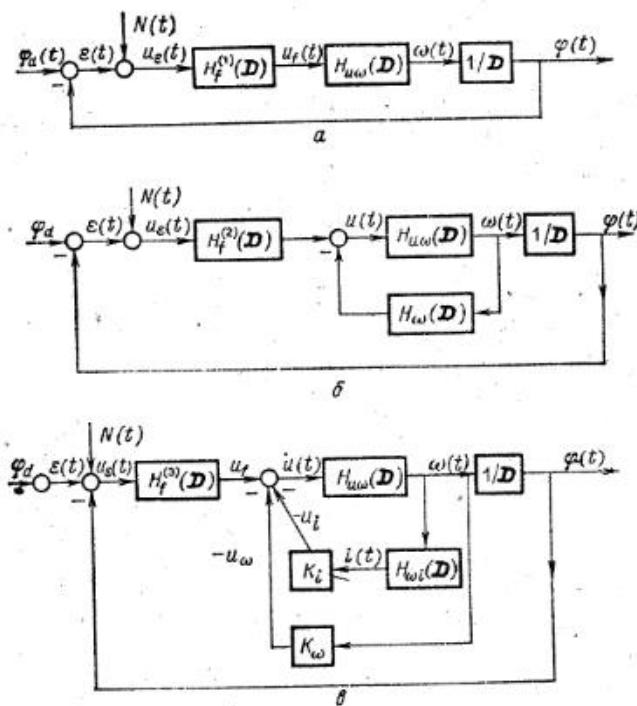


Рис. 3.26

отношения связей (2.5), (2.9), (2.11), (2.12). С их помощью можно записать, что

$$(L_a D + R_a) i_a + c_e r \omega = k_y u_{ax}. \quad (7.35)$$

При наличии обратных связей (7.33), (7.34) получим

$$(L_a D + R_a + k_i k_y) i_a + \left( c_e + \frac{k_i k_y}{r} \right) r \omega = k_y u_f. \quad (7.36)$$

Структура уравнений (7.35), (7.36) совпадает, изменились лишь коэффициенты

$$R_a \rightarrow R_a + k_i k_y, \quad c_e \rightarrow c_e + \frac{k_i k_y}{r} \quad (7.37)$$

(жесткая обратная связь по току эквивалентна повышению сопротивления якорной цепи, жесткая обратная связь по скорости — повышению противоЭДС).

Следовательно, структура передаточной функции  $H_{u,f}(p)$  совпадает с  $H_{u,u}(p)$  в отсутствии внутренних обратных связей, а коэффициент усиления и постоянные времени, зависящие от  $R_a$ ,  $c_e$  (см. обозначения к формуле (2.22) гл. 2), изменятся:

$$k_c \rightarrow k'_c = k_c \frac{c_e}{c_e + \frac{k_i k_y}{r}}, \quad T_m \rightarrow T'_m = T_m \frac{c_e}{c_e + \frac{k_i k_y}{r}}, \quad (7.38)$$

$$T_a \rightarrow T'_a = T_a \frac{R_a}{R_a + k_i k_y}.$$

**Пример 7.4.** Вновь вернемся к данным, использовавшимся в предшествующих примерах. В отличие от П.7.3 введем внутреннюю обратную связь по скорости и току якоря согласно (7.33), (7.34). Примем

$$\frac{k_i k_y}{r c_e} = k_w k_c = 1, \quad \frac{k_i k_y}{R_a} = 19;$$

тогда, согласно (7.38), имеем  $T'_m = \frac{1}{2} T_m$ ,  $T'_a = \frac{1}{20} T_a$ ,  $k'_c = \frac{1}{2} k_c$ . Тем самым достигается желаемое, согласно П.7.2, уменьшение постоянных времени до несущественного уровня, и п. ф. обратной связи по ошибке может быть взята в простом виде

$$H_f(D) = 2 \cdot 10^3 \frac{0,09D + 1}{0,009D + 1}$$

(различие с (7.27) состоит только в коэффициенте усиления, и оно необходимо для компенсации снижения  $k_c$ ).

Суммируем результаты, полученные во всех примерах.

При одних и тех же исходных данных и требованиях к качеству построены три варианта динамических структур следящей системы (рис. 3.26).

Соответствующие п. ф. равны \*)

$$H_f^{(1)}(D) = 10^3 \frac{(0,09D + 1)(0,5D + 1)(0,05D + 1)}{(0,25D + 1)(0,09D + 1)(0,0009D + 1)},$$

$$H_f^{(2)}(D) = 10^3 \frac{0,09D + 1}{0,009D + 1}, \quad H_\omega(D) = \frac{(0,5D + 1)(0,05D + 1)}{(0,28D + 1)(0,0025D + 1)},$$

$$H_f^{(3)}(D) = 2 \cdot 10^3 \frac{0,09D + 1}{0,009D + 1}, \quad k_i = 19R_a k_y^{-1}, \quad k_\omega = 10.$$

**7.6. Синтез и проектирование ЭСС.** Уже в гл. 1 было указано, что проблема проектирования систем автоматического управления шире и многообразнее, чем проблема выбора, синтеза законов управления. Здесь на примере ЭСС попытаемся уяснить взаимосвязь различных аспектов общей проблемы.

\*) Во всех вариантах считалось, что  $T_0 \ll T_a$ , поэтому  $H_f^{(1)}(D)$  определено согласно (7.24).

Прежде всего отметим, что при синтезе предполагались уже известными характеристиками датчика рассогласования и силового блока. В действительности при проектировании ЭСС необходимо пачинать с выбора этих элементов и определения их характеристик. Однако сам этот выбор должен подчиняться тем же конечным целям, что и выбор закона управления. Любой реальный двигатель в состоянии отдавать лишь ограниченную мощность, но требуемая мощность зависит от режима движения вала и внешней нагрузки на него.

Обычно при проектировании ЭСС [1.3, 1.6] первоначально исходят из двух простых гипотез:

а) в дальнейшем будет обеспечена высокая точность слежения, а следовательно, движение вала будет повторять движение задающей оси;

б) основная часть мощности затрачивается на преодоление внешнего нагрузочного момента на валу.

В силу этого потребная мощность должна удовлетворять условию

$$P_n \geq k_3 \bar{m}_n \bar{\omega}_d, \quad (7.39)$$

где  $\bar{m}_n$  — предельный момент нагрузки,  $\bar{\omega}_d$  — предельная угловая скорость задающей оси, а следовательно (в силу гипотезы а) и вала. Коэффициент  $k_3$  — коэффициент запаса по мощности, введение которого должно обеспечить некоторый избыток мощности, необходимый для преодоления других компонент нагрузки. Главными из них являются инерционные нагрузки и механическое сопротивление (трение) в кинематической передаче от двигателя к валу (в редукторе). Однако до выбора двигателя весьма сложно оценить ни тот, ни другой фактор, поскольку, во-первых, инерционность силового блока в целом зависит и от инерционности самого двигателя и редуктора, а во-вторых, необходимый коэффициент редукции зависит от диапазона угловых скоростей двигателей. При прочих равных условиях из множества доступных двигателей естественно выбрать тот, который, удовлетворяя по мощности неравенству (7.39), имеет наибольший допустимый движущий момент, минимальный момент инерции, хотя иногда решающую роль играют такие факторы, как вес, габариты, стоимость и пригодность к работе в окружающей среде.

Если двигатель выбран, то для него (по техническим данным) становятся известными  $\bar{m}_{dp}$  — допустимый движущий момент,  $J_d$  — момент инерции ротора,  $\bar{\omega}_{dp}$  — допустимая угловая скорость. Последнее позволяет рассчитать требуемый коэффициент кинематической передачи (коэффициент редукции)

$$r = \frac{\bar{\omega}_{dp}}{\bar{\omega}_d},$$

причем, как правило,  $r \gg 1$ . Величины  $r$  и  $\bar{m}_{dp}$  — исходные данные для выбора или проектирования кинематической передачи, что составляет специальную техническую проблему. В силу формулы из П.2.3 (гл. 2) жесткость передачи определяет постоянную времени  $T_0$ . Если передача недостаточно жесткая, то  $T_0$  сравнима с постоянными  $T_{m1}$ ,  $T_{m2}$ ,  $T_n$ , и описанная в примерах схема выбора закона управления неприменима. Если условие  $T_0 \gg T_m$  выполнено, то от коэффициента редукции зависит вклад инерции ротора двигателя в приведенный момент инерции всего механизма «ротор — редуктор — вал», а тем самым — в механическую постоянную времени  $T_m$ .

Согласно (2.14), имеем\*

$$J_{np} = J_n + r^2 J_d.$$

Именно величина  $J_{np}$  определяет момент инерционной нагрузки на валу, который для предельного допустимого режима равен  $\bar{\beta} J_{np}$ , где  $\bar{\beta}$  — предельное ус-

\*) На самом деле требуется учесть и инерционность самого редуктора, что при предварительных оценках делают, увеличивая  $J_d$  на коэффициент порядка 1,25 [1.6].

корение. Таким образом, только после предварительного выбора двигателя и редуктора можно проверить, достаточно ли развиваемый двигателем момент, т. е. выполнено ли условие

$$r \bar{m}_{dp} \geq \bar{m}_n + m_c + J_{np} \bar{\beta}, \quad (7.40)$$

где  $m_c$  — момент сил сопротивления в передаче, приведенный к валу. Если это условие не выполнено, приходится пересмотреть весь расчет, выбирая двигатель большей мощности или меньшей инерционности. Подчеркнем, что отнюдь не при любом соотношении  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\omega}_d$  вообще возможен такой выбор, хотя конструкторы двигателей прилагают постоянные усилия к снижению их инерционности\*). Напомним, что отношение  $\bar{\beta}/\bar{\omega}_d$  определяет и предельную частоту изменения сигнала, диапазон рабочих частот ЭСС. Не останавливаясь на проблеме выбора усилителя мощности, отметим лишь, что к. п. д. исполнительных двигателей обычно является низким и выходная мощность усилителя должна быть существенно выше полезной мощности двигателя. Зачастую существенной является и не учитывавшаяся выше инерционность усилителя.

Перейдем к проблеме выбора датчика рассогласования. Основные требования здесь связаны с уровнем помех и диапазоном работы. Выше уже указывалось, что помехи (погрешности датчиков) в значительной мере определяют допустимую точность ЭСС, однако все рассмотрение велось в предположении высокочастотного характера помех. Вместе с тем из основной формулы (3.4) следует, что при наличии помех в рабочем диапазоне частот, где  $H_3(i\omega) \approx 1$ , в ошибку управления непосредственно входит слагаемое, величина которого близка к самой помехе, т. е. система не может подавлять низкочастотные помехи, в том числе постоянные (статические) или медленно меняющиеся (дрейфы). Поэтому при выборе датчика прежде всего ориентируются на уровень статической помехи (погрешности), задаваясь соответствующим допуском\*\*).

Таким образом, те элементы ЭСС, которые считались уже выбранными до начала работы по синтезу закона управления, на самом деле в значительной мере уже предопределяют возможности системы. Более того, в результате синтеза (см. 7.5) был построен ряд вариантов законов управления, являющихся формально равносильными. Однако их реализация может требовать различных технических средств. Так, например, для варианта 1 необходимо реализовать преобразование, задаваемое достаточно громоздкой п. ф.  $H_1^{(1)}(D)$ . Для этой цели можно использовать устройство на базе операционных усилителей типа представленного на рис. 2.14.

Последний вариант требует простой п. ф. преобразования сигнала ошибки  $H_1^{(3)}(D)$ , зато необходимо ввести в систему датчики тока и угловой скорости, которые, вообще говоря, также обладают погрешностями. Выбор того или иного варианта при проектировании должен вестись с учетом этих и многих других факторов, определяемых только конкретными возможностями скомпактнических решений.

Все вышесказанное может послужить лишь в качестве введения в проблему проектирования ЭСС, которую, конечно, необходимо изучать по специальным руководствам (см., например, [1.6]), и в данном курсе преследует единственную цель: на конкретном примере продемонстрировать ту роль, которую играет теория управления в этой общей проблеме.

\*) В курсе из соображений технической простоты внимание уделялось только двигателям постоянного тока, хотя в высокочастотных ЭСС большее применение нашли менее инерционные двухфазные асинхронные двигатели с полым ротором [1.3].

\*\*) Роль второго фактора — ограничности диапазона датчика рассогласования — не может быть объяснена в рамках линейной теории, и мы вернемся к нему в гл. 5.

## ГЛАВА 4

## УПРАВЛЕНИЕ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## § 1. Случайные воздействия и реакция на них

**1.1. Природа случайных воздействий и их характеристики.** Правила выбора законов управления, изложенные в гл. 3, базировались на основной гипотезе: сигналы и помехи являются гармоническими или полиномиальными функциями времени (см. § 4). Во многих реальных ситуациях эта гипотеза заведомо неприемлема.

Например, при движении самолета в атмосфере возникают аэродинамические силы, зависящие от скоростей воздушных потоков, а эти скорости изменяются не по гармоническому закону, а случайно, хаотически.

Хаотическими являются и помехи, возникающие в электронных измерительных устройствах и усилителях. Такой характер процессов определяется их внутренней физической природой, и не учитывать эту природу при расчете систем управления столь же нерационально, сколь нерационально не учитывать динамические свойства объекта.

Задачи анализа и синтеза систем управления при наличии случайных воздействий имеют свою специфику как с точки зрения применяемого математического аппарата, так и с точки зрения интерпретации формальных результатов при их применении. Предварительно приведем необходимый минимум сведений из теории случайных процессов \*).

*Случайный процесс*  $x(t)$  есть семейство случайных величин, зависящих от времени  $t$  как от параметра. Если зафиксировать одно из возможных значений (*реализацию*) каждой из случайных величин, то получим некоторую неслучайную, детерминированную функцию времени, реализацию случайного процесса. Таким образом,  $x(t)$  можно рассматривать и как множество (*ансамбль реализаций*), для которого определены общие вероятностные характеристики.

Простейшими из них являются *математическое ожидание*  $m_x(t)$ , *дисперсия*  $d_x(t)$  и *корреляционная функция*  $R_x(t, \tau)$ .

\*). Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей (вероятность, случайная величина, функция распределения, математическое ожидание и т. п.) хотя бы в элементарном изложении.

Математическое ожидание случайного процесса при каждом  $t$  совпадает с математическим ожиданием соответствующей случайной величины:

$$m_x(t) \triangleq M\{x(t)\}. \quad (1.1)$$

Дисперсия случайного процесса определяется аналогично:

$$d_x(t) \triangleq M\{|x(t) - m_x(t)|^2\}. \quad (1.2)$$

Если  $m_x(t) = 0$ , то процесс называется *центрированным*, и

$$d_x(t) = M\{x^2(t)\}. \quad (1.3)$$

Корреляционная функция при любых  $t$  и  $\tau$  совпадает с взаимной корреляцией двух случайных величин  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$ , так что

$$R_x(t, \tau) \triangleq M\{|x(t) - m_x(t)| |x(t + \tau) - m_x(t + \tau)|\}. \quad (1.4)$$

Если  $m_x(t) = m_x$ ,  $R_x(t, \tau) = R_x(\tau)$ , т. е. не зависят от  $t$ , то процесс называется *стационарным* в широком смысле.

Очевидно, что для такого процесса

$$d_x(t) = d_x = R_x(0). \quad (1.5)$$

Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty, \quad (1.6)$$

то существует фурье-преобразование корреляционной функции

$$S_x(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.7)$$

Функция  $S_x(\omega)$  называется *спектральной плотностью* процесса  $x(t)$ . Если она известна, то, в силу свойств фурье-преобразования, можно вычислить  $R_x(\tau)$  по формуле

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (1.8)$$

Из (1.5), (1.8) следует, что

$$d_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (1.9)$$

Можно также убедиться, что

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \leq d_x, \quad S_x(\omega) = S_x(-\omega) \geq 0. \quad (1.10)$$

Если для случайного процесса  $x(t)$  заданы только его математическое ожидание и корреляционная функция, то говорят, что он *описан в смысле корреляционной теории*.

**1.2. Линейные преобразования случайных процессов.** Процесс

$$y(t) = h(t)v(t) + h_0(t), \quad (1.11)$$

где  $h(t)$ ,  $h_0(t)$  — детерминированные функции, является случайным процессом, если процесс  $v(t)$  случаен. Согласно определению имеем

$$\begin{aligned} m_y(t) &= h(t)m_v(t) + h_0(t), \\ R_y(t, \tau) &= h(t)h(\tau)R_v(t, \tau). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Более интересным видом линейного преобразования случайного процесса является интегральное преобразование\*)

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau. \quad (1.13)$$

При этом, если  $v(t)$  — стационарный процесс, то

$$m_y(t) = \int_0^t h(\tau)M\{v(t-\tau)\}d\tau = m_v \int_0^t h(\tau)d\tau; \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} R_y(t, \tau) &\triangleq M\left[\left[\int_0^t h(\tau_1)v(t-\tau_1)d\tau_1 - m_y(t)\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_0^{t+\tau} h(\tau_2)v(t+\tau-\tau_2)d\tau_2 - m_y(t+\tau)\right]\right] = \\ &= \int_0^t \int_0^{t+\tau} h(\tau_1)h(\tau_2)M\{[v(t-\tau_1)-m_v][v(t+\tau-\tau_2)-m_v]\}d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^t \int_0^{t+\tau} h(\tau_1)h(\tau_2)R_v(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.15) \end{aligned}$$

Таким образом, если рассматривать  $v(t)$  как ансамбль возможных реализаций входа линейного звена с весовой функцией  $h(\tau)$ , то формулы (1.14), (1.15) позволяют дать описание процесса  $y(t)$  в смысле корреляционной теории по такому же описанию входа.

При стационарном  $v(t)$  выход  $y(t)$ , вообще говоря, нестационарен. Однако справедливо следующее утверждение, играющее в дальнейшем основную роль.

\*) Если подынтегральное выражение интегрируемо (в смысле Римана) на любой реализации, то интеграл от случайного процесса понимается как ансамбль интегралов от реализаций. Однако может быть дано и более общее определение интеграла от случайного процесса (см., например, [4.8]), приемлемое и при неинтегрируемых реализациях. Известно, что для существования интеграла (1.13), понимаемого как предел в среднеквадратичном римановом смысле, необходимо и достаточно существования (в смысле Римана) интегралов в правых частях (1.14), (1.15).

**Теорема 1.1.** Пусть  $v(t)$  является стационарным случальным процессом и

$$\int_0^\infty |h(\tau)|d\tau \leq c < \infty. \quad (1.16)$$

Тогда процесс  $y(t)$ , определяемый преобразованием (1.13), таков, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_y(t, \tau) = R_y(\tau), \quad (1.17)$$

называемый корреляционной функцией установившейся реакции. Спектральная плотность, соответствующая  $R_y(\tau)$  в силу (1.7), дается формулой

$$S_y(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_v(\omega), \quad (1.18)$$

где  $S_v(\omega)$  — спектральная плотность  $v(t)$ , а  $H(i\omega)$  — частотная характеристика преобразования

$$H(i\omega) \triangleq \int_0^\infty h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

**Доказательство.** Используя (1.10), (1.14), убеждаемся, что  $R_y(t, \tau)$  ограничена при любых  $t, \tau$ :

$$\begin{aligned} |R_y(t, \tau)| &\leq \int_0^t \int_0^{t+\tau} |h(\tau_1)||h(\tau_2)||R_v(\tau+\tau_1-\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2 \leq \\ &\leq d_v \int_0^t |h(\tau_1)|d\tau_1 \int_0^{t+\tau} |h(\tau_2)|d\tau_2 \leq d_v c^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |h(\tau_1)||h(\tau_2)||R_v(\tau+\tau_1-\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2 < d_v c^2,$$

откуда вытекает существование предела (1.17):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_y(t, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)R_v(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \triangleq R_y(\tau).$$

Справедливость (1.18) следует из непосредственных выкладок:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty R_y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-i\omega\tau} \times \\ &\quad \times h(\tau_1)h(\tau_2)R_v(\tau+\tau_1-\tau_2) = \\ &= \int_0^\infty h(\tau_1)e^{i\omega\tau_1}d\tau_1 \int_0^\infty h(\tau_2)e^{-i\omega\tau_2}d\tau_2 \int_{-\infty}^\infty R_v(\tau+\tau_1-\tau_2)e^{-i\omega(\tau+\tau_1-\tau_2)}d\tau = \\ &= H(i\omega)H(i\omega)S_v(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_v(\omega). \blacksquare \end{aligned}$$

Формула (1.18) исключительно проста. Она и внешне и по существу\*) сходна с формулой связи между амплитудами входного гармонического воздействия и установившейся реакции на него:

$$a_y^2 = |H(i\omega_0)|^2 a_v^2,$$

где  $\omega_0$  — частота воздействия.

Учтем также, что в силу (1.9)

$$d_y = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega. \quad (1.19)$$

**Пример 1.1.** Рассмотрим случайный процесс  $v(t)$ , построенный следующим образом: он является кусочно постоянным, причем значения  $A_i$  на каждом  $i$ -м интервале постоянства являются случайными, взаимно независимыми величинами, имеющими одинаковую плотность распределения  $p_A(a)$ ,  $M\{A_i\} = 0$ . Длительность  $\theta_i$  интервалов постоянства — также случайные, независимые между собой

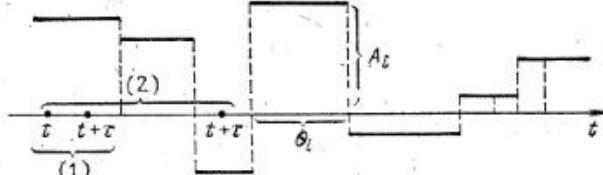


Рис. 4.1

и независимые от всех  $A_i$  неотрицательные величины, распределенные одинаково с плотностью

$$p_\theta(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (1.20)$$

Реализации  $v(t)$  имеют вид, показанный на рис. 4.1. «Прыжки» совершаются через случайные интервалы и имеют случайную величину, что объясняет зачастую используемое название для  $v(t)$  — процесс типа «кенгуру». Можно установить, что рассматриваемый процесс является стационарным, причем

$$R_v(\tau) = d_v e^{-\lambda|\tau|}, \quad (1.21)$$

где

$$d_v = d_A \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p_A(a) da. \quad (1.22)$$

\*) Доказано (см., например, [4.8]), что стационарный случайный процесс представим в виде суперпозиции гармонических процессов.

Действительно, пусть  $t_i$  и  $t + \tau$  — два произвольных различных момента времени. Возможны ситуации: (1) оба момента принадлежат одному и тому же интервалу постоянства (для определенности —  $i$ -му); (2) они относятся к различным интервалам (рис. 4.1).

Пусть  $p_1$  — вероятность 1-й ситуации, а  $1 - p_1$  — вероятность 2-й. Тогда

$$M\{v(t)v(t+\tau)\} = M\{A_i^2\} p_1 + M\{A_i A_j\} (1 - p_1) = M\{A_i^2\} p_1 = d_A p_1, \quad (1.23)$$

поскольку значения  $A_i$ ,  $A_j$ , относящиеся к любым различным интервалам, некоррелированы. Остается оценить  $p_1$ , иначе говоря, условную вероятность того, что если  $t_i \leq t < t_i + \theta_i$ , где  $t_i$  — начало  $i$ -го интервала постоянства, а  $\theta_i$  — его длительность, то  $t_i \leq t + \tau < t_i + \theta_i$ . По определению условной вероятности имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{t_i \leq t + \tau < t_i + \theta_i / t_i \leq t < t_i + \theta_i\} = \\ &= \frac{P\{t_i \leq t + \tau < t_i + \theta_i, t_i \leq t < t_i + \theta_i\}}{P\{t_i \leq t < t_i + \theta_i\}}, \end{aligned}$$

где в числителе указана вероятность одновременного выполнения обоих неравенств. Пусть  $\tau \geq 0$ . Тогда

$$p_1 = \frac{P\{\theta_i > t + \tau - t_i\}}{P\{\theta_i > t - t_i\}} = \frac{\int_{t+\tau-t_i}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{t-t_i}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = e^{-\lambda \tau}.$$

Аналогично при  $\tau < 0$  получим, что  $p_1 = e^{\lambda \tau}$ . Объединяя оба результата, запишем, что при любых  $\tau$

$$p_1 = e^{-\lambda|\tau|}. \quad (1.24)$$

Подстановка (1.24) в (1.23) доказывает (1.21).

Вычисляя по формуле (1.7), найдем выражение спектральной плотности

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= d_v \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} e^{-\lambda|\tau|} d\tau = d_v \left( \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} e^{-\lambda\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega\tau} e^{\lambda\tau} d\tau \right) = \\ &= d_v \left( \frac{1}{i\omega + \lambda} + \frac{1}{-i\omega + \lambda} \right) = \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} d_v. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу (1.20)

$$M\{\theta_i\} = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, спектральная плотность определяется только дисперсией значений уровней  $A_i$  и математическим ожиданием длительности интервалов постоянства  $\theta_i$ .

Пусть  $v(t)$  является входным воздействием на систему с оператором  $H(D) = \frac{k}{TD + 1}$ . Тогда с помощью (1.18) можно найти

спектральную плотность установившейся реакции

$$S_y(\omega) = \frac{k^2}{T^2\omega^2 + 1} \frac{2\lambda d_v}{\omega^2 + \lambda^2},$$

а далее вычислить дисперсию

$$d_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{T^2\omega^2 + 1} \frac{2\lambda d_v}{\omega^2 + \lambda^2} d\omega. \quad \square$$

**1.3. Вычисление дисперсий при дробно-рациональных спектральных плотностях.** В приведенном примере спектральная плотность оказывалась дробно-рациональной функцией  $\omega^2$ . Если ограничиться только классом входных воздействий  $v(t)$ , имеющих дробно-рациональную (по  $\omega^2$ ) спектральную плотность \*), т. е.

$$S_v = S_v(\omega^2) = \frac{P_v(\omega^2)}{Q_v(\omega^2)},$$

где  $P_v, Q_v$  — многочлены, то можно существенно упростить решение задач анализа и синтеза линейных систем.

**Лемма (о факторизации спектральной плотности).** Если  $S_v$  — дробно-рациональна и  $d_v < \infty$ , то возможно представление:

$$S_v(\omega^2) = \frac{B_v(p) B_v(-p)}{A_v(p) A_v(-p)} \Big|_{p=i\omega}, \quad (1.25)$$

где  $A_v(p)$  — устойчивый многочлен, а  $B_v(p)$  кроме корней в левой полуплоскости может иметь только корни на мнимой оси.

Доказательство сводится к применению леммы о факторизации многочленов (§ 4 гл. 3) к многочленам  $P_v(-p^2), Q_v(-p^2)$ . Отметим лишь, что из ограниченности дисперсии  $v(t)$ ,

$$d_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega^2) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} S_v(-p^2) dp \quad (1.26)$$

следует, что  $S_v(-p^2)$  не имеет полюсов на мнимой оси, так что  $Q_v(-p^2)$  не имеет корней на мнимой оси. ■

**Пример 1.2.** Пусть

$$S_v(\omega^2) = \frac{4\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 4} = \frac{P_v(\omega^2)}{Q_v(\omega^2)}.$$

Тогда  $P_v(-p^2) = -4p^2 = (2p)(-2p) \Rightarrow B_v(p) = 2p$ , и  $Q_v(-p^2) = p^4 - 3p^2 + 4 = (p^2 - 1)(p^2 - 4) = (p+1)(p+2)(-p+1)(-p+2) \Rightarrow A_v(p) = (p+1)(p+2)$ . □

\*) Практически это предположение не является ограничительным. Обычно выражение спектральной плотности является результатом аппроксимации оценок, получаемых по экспериментальным данным (см., например, [4.8, 4.10]) на этом классе функций.

В силу (1.18) спектральная плотность установившейся реакции равна

$$S_y(\omega^2) = H(p) H(-p) \Big|_{p=i\omega} S_v(\omega^2) = \frac{B(p) B(-p)}{A(p) A(-p)} \Big|_{p=i\omega},$$

где  $B(p) = \beta(p) B_v(p)$ ,  $A(p) = \alpha(p) A_v(p)$ , причем учтено, что  $H(p) \triangleq \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$ . Ввиду устойчивости системы,  $\alpha(p)$  — устойчивый многочлен, так что  $A(p)$  также устойчив. Таким образом, справедливо представление

$$\begin{aligned} d_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega^2) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} S_y(-p^2) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{B(p) B(-p)}{A(p) A(-p)} dp. \quad (1.27) \end{aligned}$$

Это представление позволяет указать простой способ вычисления  $d_y$ . Предполагая, что  $A(p)$  не имеет кратных корней, можно записать

$$d_y = \sum_v \frac{B(p_v) B(-p_v)}{\frac{dA(p)}{dp} \Big|_{p=p_v} A(-p_v)}, \quad (1.28)$$

где  $p_v$  — корни  $A(p)$ , а суммирование ведется по всем корням.

Доказательство формулы (1.28) основывается на теории функций комплексной переменной. Отметим первоначально, что  $\deg A(p) > \deg B(p)$ , поскольку  $\deg \alpha(p) \geq \deg \beta(p)$  в силу устойчивости системы, а  $\deg A_v(p) \geq \deg B_v(p)$  в силу ограниченности интеграла (1.26). Таким образом, на полуокружности бесконечно большого радиуса, охватывающей левую полуплоскость, подынтегральное выражение убывает не медленнее, чем  $|p|^{-2}$ , а следовательно (см., например, [2.3]),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{B(p) B(-p)}{A(p) A(-p)} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B(p) B(-p)}{A(p) A(-p)} dp,$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему левую полуплоскость. Значение такого интеграла равно сумме вычетов подынтегрального выражения во всех полюсах, лежащих внутри этого контура, что и приводит к (1.28). ■

**Пример 1.3.** Пусть  $H(p) = \frac{p}{p+3}$ ,  $S_v(\omega^2) = \frac{4\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 4}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= p+3, \quad \beta(p) = p, \quad A_v(p) = (p+1)(p+2), \quad B_v(p) = 2p, \\ A(p) &= (p+3)(p+1)(p+2), \quad B(p) = 2p^2, \end{aligned}$$

$$p_1 = -3, \quad p_2 = -1, \quad p_3 = -2, \quad d_y = \frac{27}{20} + \frac{1}{12} - \frac{16}{15} = \frac{11}{30}. \quad \square$$

Для малых степеней  $n$  многочленов  $A(p)$  интегралы вида (1.27) табулированы в виде функций непосредственно от коэффициентов  $10^*$

$A(p)$ ,  $B(p)$ . Приведем формулы, удобные при расчете простых примеров.

Пусть

$$\begin{aligned} A(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0, \\ B(p) &= b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Тогда значения интегралов вида (1.27) таковы:

$$\begin{aligned} \frac{b_0^2 (2a_0 a_1)^{-1}}{(b_1^2 a_0 + b_0^2 a_2)(2a_0 a_1 a_2)^{-1}} &\quad \text{при } n = 1, \\ \frac{(b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} &\quad \text{при } n = 2, \\ \frac{(b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} &\quad \text{при } n = 3. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Указанные формулы прямо вытекают из (1.28)\*).

**Пример 1.4.** Вычислим в явной форме дисперсию установившейся реакции, интегральное представление для которой дано в П.4.1:

$$\frac{d_y}{2\lambda d_v k^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp}{(-T^2 p^2 + 1)(-p^2 + \lambda^2)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(p) &= (Tp + 1)(p + \lambda) = Tp^2 + (T\lambda + 1)p + \lambda, \\ B(p) &= 1. \end{aligned}$$

Имеем  $n = 2$ ,  $a_2 = T$ ,  $a_1 = T\lambda + 1$ ,  $a_0 = \lambda$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_0 = 1$ , так что

$$\frac{d_y}{2\lambda d_v k^2} = \frac{1}{2a_0 a_1} \Rightarrow d_y = \frac{k^2 d_v}{T\lambda + 1}. \quad \square$$

В дополнение рассмотрим ситуацию, когда выход является суммой реакций на взаимно некоррелированные случайные воздействия, т. е.

$$y(t) = \sum_l y^{(l)}(t) = \sum_l \int_0^t h^{(l)}(\tau) v^{(l)}(t-\tau) d\tau, \quad (1.30)$$

где  $M\{v^{(l)}(t)v^{(k)}(t+\tau)\} = 0$ ,  $l \neq k$ , при любых  $t$ ,  $\tau$ . Из взаимной некоррелированности воздействий вытекает взаимная некоррелированность величин  $y^{(l)}(t)$  при любых  $t$ , а тогда

$$R_y(t, \tau) = \sum_l R_y^{(l)}(t, \tau), \quad (1.31)$$

\*) При  $n > 3$  для вычисления интегралов типа (1.27) можно использовать рекуррентную процедуру типа алгоритма Раяса, описанную, например, в [4.5, с. 152].

и для установившейся реакции имеем

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \sum_l S_y^{(l)}(\omega) = \sum_l |H^{(l)}(i\omega)|^2 S_v^{(l)}(\omega), \\ d_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l |H^{(l)}(i\omega)|^2 S_v^{(l)}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (1.32)$$

**1.4. Распределение вероятностей. Нормальные процессы.** Корреляционное описание случайного процесса является весьма бедным. Одну и ту же корреляционную функцию могут иметь процессы с совершенно различными реализациями.

**Пример 1.5.** Рассмотрим случайный процесс, задаваемый формулой

$$x(t) = a \cos(\Omega t + \Phi), \quad (1.33)$$

где  $a$  — детерминированная величина, а  $\Omega$  и  $\Phi$  — случайны. Каждая реализация  $x(t)$  является гармонической функцией с некоторым фиксированным значением  $\Omega$  и  $\Phi$  из множества возможных реализаций этих величин.

Вычислим некоторые характеристики  $x(t)$ , предполагая, что  $\Omega$  и  $\Phi$  независимы и плотности их распределения равны  $p_\Omega(v)$ ,  $p_\Phi(\varphi)$ , причем

$$p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1.34)$$

В каждый момент  $t$  значение  $x(t)$  является функцией случайных величин  $\Omega$  и  $\Phi$ , так что по определению

$$m_x(t) =$$

$$\begin{aligned} &= M_{\Omega, \Phi}\{a \cos(\Omega t + \Phi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^{2\pi} a \cos(vt + \varphi) p_\Omega(v) p_\Phi(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_\Omega(v) dv \int_0^{2\pi} \cos(vt + \varphi) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $x(t)$  — центрированный процесс. Найдем далее корреляционную функцию

$$R_x(t, \tau) \triangleq M\{x(t)x(t+\tau)\} =$$

$$\begin{aligned} &= M_{\Omega, \Phi}\{a \cos(\Omega t + \Phi) a \cos(\Omega(t+\tau) + \Phi)\} = \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_\Omega(v) dv \int_0^{2\pi} \cos(vt + \varphi) \cos(v(t+\tau) + \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_\Omega(v) \cos vt dv \triangleq R_x(t). \quad (1.35) \end{aligned}$$

Следовательно,  $x(t)$  стационарен (в широком смысле). Вид его корреляционной функции зависит от распределения частоты  $\Omega$ . Пусть, например,

$$p_{\Omega}(v) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + v^2}, \quad \lambda > 0. \quad (1.36)$$

Тогда подстановка (1.36) в (1.35) дает

$$R_x(\tau) = \frac{a^2}{2} e^{-\lambda|\tau|} = d_x e^{-\lambda|\tau|}, \quad d_x = \frac{a^2}{2}. \quad (1.37)$$

Убеждаемся, что корреляционная функция имеет точно такой же вид, как и для процесса типа «кенгуру», описанного в П.1.1, хотя форма их реализаций не имеет ничего общего.  $\square$

Поскольку случайный процесс есть семейство случайных величин, то для более полного описания процесса можно использовать совместное распределение значений процесса, относящихся к разным моментам времени.

К сожалению, даже если задано такое многомерное распределение для входного процесса  $v(t)$ , подвергающегося линейному преобразованию (1.13), то вычисление соответствующего распределения выхода  $y(t)$  затруднительно.

Единственным исключением является ситуация, когда входной процесс — нормальный, т. е. совокупность его значений  $v(t_1), \dots, v(t_n)$  в любые моменты времени  $t_1, \dots, t_n$  совместно распределена по нормальному (гауссову) закону. Можно доказать (см., например, [4.8]), что и выходной процесс  $y(t)$  также оказывается нормальным.

В пределах данной главы мы будем интересоваться только одномерными распределениями выходных процессов, т. е. распределениями величин  $y(t)$  для любого  $t$ . Если  $y(t)$  — нормальный процесс, то плотность одномерного нормального распределения дается формулой

$$p_{y(t)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_y(t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2d_y(t)}[y - m_y(t)]^2\right\}. \quad (1.38)$$

Таким образом, вычислив математическое ожидание и дисперсию выхода, мы устанавливаем и одномерный закон распределения\*). В частности, если  $m_y(t) = 0$ ,  $d_y(t) = d_y$ , то

$$p_{y(t)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_y}} \exp\left\{-\frac{1}{2d_y} y^2\right\}$$

и также не зависит от времени  $t$ .

Тем самым можно ответить на основной вопрос анализа систем управления: какова вероятность того, что в любой момент времени работы системы в установившемся режиме выходной процесс не

\*). Для задания любого конечномерного распределения нормального процесса достаточно иметь его корреляционное описание [4.8].

выйдет за пределы допустимого диапазона, например, за пределы отрезка  $[-\delta, \delta]$ . Обозначим ее  $p_{\delta}$ . Тогда, если известно, что входной процесс  $v(t)$  является нормальным и центрированным с заданной спектральной плотностью  $S_v$ , то установившаяся реакция также нормальна и центрирована с дисперсией  $d_y$ , вычисляемой согласно (1.19), а тем самым

$$p_{\delta} \triangleq \int_{-\delta}^{\delta} p_{y(t)}(y) dy = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi d_y}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2d_y}\right\} dy = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_y}\right), \quad (1.39)$$

где  $\sigma_y \triangleq \sqrt{d_y}$  и использовано обозначение для интеграла вероятностей

$$\Phi(x) \triangleq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (1.40)$$

Если  $\delta = 3\sigma_y$ , то

$$p_{\delta} = \Phi(3) > 0,99, \quad 1 - p_{\delta} < 0,01. \quad (1.41)$$

Конечно, это справедливо только для нормального процесса. Если же распределение иное или вообще неизвестно, то мы можем лишь дать оценку вероятности выхода из допуска по известным математическому ожиданию и дисперсии. Эта оценка следует из классической теоремы Чебышева:

$$P\{|y(t) - m_y| \geq \delta\} \leq \frac{d_y}{\delta^2} = \left(\frac{\sigma_y}{\delta}\right)^2. \quad (1.42)$$

В частности, при  $\delta = 3\sigma_y$  и  $m_y = 0$  имеем

$$1 - p_{\delta} \triangleq P\{|y(t)| > \delta\} \leq \frac{1}{9}. \quad (1.43)$$

Оценку (1.42) можно уточнить. Если, например, известно, что кривая плотности распределения симметрична и «одногорб», то [4.4, с. 207]

$$1 - p_{\delta} \leq \frac{4}{9} \left(\frac{\sigma_y}{\delta}\right)^2. \quad (1.44)$$

Тогда при  $\delta = 3\sigma_y$  имеем:

$$1 - p_{\delta} < 0,05. \quad (1.45)$$

На практике зачастую отождествляют величину  $3\sigma_y$  — утроенное среднеквадратичное отклонение — с величиной возможного «размаха колебаний» процесса\*), хотя, конечно, это не вполне верно: зная математическое ожидание и дисперсию, мы можем дать лишь вероятностную оценку возможного «размаха» и невыхода его из допуска.

\*). Такой подход иногда называют правилом  $3\sigma$ .

## § 2. Оптимальный выбор передаточных функций

**2.1. Минимизация дисперсии ошибки.** Рассмотрим систему с обратной связью по ошибке управления, измеряемой с помехами.

Согласно формуле (3.4) из гл. 3 имеем, что ошибка является результатом линейного преобразования сигнала  $s(t)$  и помехи  $N_e(t)$ , задаваемого операторным соотношением

$$e(t) = [1 - H_s(D)]s(t) + H_s(D)N_e(t), \quad (2.1)$$

или в явной форме, при нулевых начальных условиях,

$$e(t) = \int_0^t h_{se}(\tau) s(t-\tau) d\tau + \int_0^t h_{Ne}(\tau) N_e(t-\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

где  $h_{se}$ ,  $h_{Ne}$  — весовые функции, соответствующие п. ф.

$$H_{se}(p) \triangleq 1 - H_s(p), \quad H_{Ne}(p) \triangleq H_s(p).$$

Предположим, что сигнал и помеха являются стационарными центрированными взаимно независимыми случайными процессами со спектральными плотностями  $S_s(\omega)$ ,  $S_N(\omega)$  и ограниченными дисперсиями.

Если система является устойчивой, то в установившемся режиме ошибка  $e(t)$  является стационарным процессом и ее дисперсия  $d_e$ дается формулой типа (1.32):

$$d_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{|1 - H_s(i\omega)|^2 S_s(\omega) + |H_s(i\omega)|^2 S_N(\omega)\} d\omega. \quad (2.3)$$

Дисперсию ошибки можно считать хорошей мерой точности системы управления, работающей при случайных воздействиях. В частности, чем меньше дисперсия, тем меньше и гарантированный допуск, из которого не может выйти ошибка с требуемой малой вероятностью.

Поэтому естественно попытаться выбрать п. ф. замкнутого контура так, чтобы дисперсия ошибки была минимальной. Оказывается, что эта задача имеет эффективное решение, если спектральные плотности сигнала и помехи являются дробно-рациональными функциями  $\omega^2$ , а следовательно, допускающими факторизацию:

$$S_s(\omega^2) = \frac{B_s(p) B_s(-p)}{A_s(p) A_s(-p)} \Big|_{p=i\omega}; \quad S_N(\omega^2) = \frac{B_N(p) B_N(-p)}{A_N(p) A_N(-p)} \Big|_{p=i\omega}. \quad (2.4)$$

В силу (2.3) дисперсия ошибки  $d_e$  зависит от задания п. ф.  $H_s(p)$ . Представим эту зависимость символически в виде:

$$d_e = J\{H_s(p)\}. \quad (2.5)$$

**Теорема 2.1 \*).** Пусть многочлен

$$\Delta(p) = B_s(p) B_s(-p) A_N(p) A_N(-p) + B_N(p) B_N(-p) A_s(p) A_s(-p) \quad (2.6)$$

не имеет корней на минимой оси. Тогда, каковы бы ни были устойчивые  $H_s(p)$ , имеет место неравенство

$$J\{H_s(p)\} \geq J\{H_s^*(p)\}, \quad (2.7)$$

где  $H_s^*(p)$  вычисляется согласно алгоритму:

1) произвести факторизацию многочлена  $\Delta(p)$ , представив его в виде

$$\Delta(p) = \Delta_+(p) \Delta_+(-p), \quad (2.8)$$

где  $\Delta_+(p)$  является устойчивым;

2) произвести сепарацию функции

$$Z(p) \triangleq \frac{B_s(p) B_s(-p) A_N(-p)}{A_s(p) \Delta_+(-p)}, \quad (2.9)$$

представив ее в виде

$$Z(p) = Z_+(p) + Z_-(p), \quad (2.10)$$

где  $Z_+(p)$  имеет полюсы только в левой полуплоскости, а  $Z_-(p)$  не имеет таковых;

3) записать  $H_s^*(p)$  в виде

$$H_s^*(p) = \frac{A_s(p) A_N(p)}{\Delta_+(p)} Z_+(p). \quad (2.11)$$

Доказательство вновь базируется на теории функций [2.3]. Представим произвольную  $H_s(p)$  в виде

$$H_s(p) = H_s^*(p) + \eta(p), \quad (2.12)$$

где  $\eta(p)$  также обязана быть устойчивой. Рассмотрим подынтегральное выражение в  $J\{H_s(p)\}$ , обозначив его  $G\{H_s(p)\}$ , так что

$$J\{H_s(p)\} \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} G\{H_s(p)\} dp. \quad (2.13)$$

\* ) Автором теоремы 2.1 и содержащегося в ней алгоритма построения оптимальной п. ф. является Н. Винер, которому принадлежит заслуга введения вероятностного подхода в теорию управления. Доказательство, данное Н. Винером, основывается на построении интегрального уравнения Винера — Хопфа относительно весовой функции. Приведенное доказательство более просто, однако сам алгоритм весьма громоздок. Существует много способов его упрощения. В частности, в [4.2] предлагается использовать для получения решения лишь тот факт, что все полюсы  $H_s^*(p)$  совпадают с «хорошими» корнями  $\Delta(p)$ . При знании этих корней остается найти лишь коэффициенты числителя  $H_s^*(p)$ , от которых минимизируемая дисперсия зависит как квадратичная функция.

Непосредственные выкладки дают:

$$G\{H_s(p)\} = G\{H_s^*(p)\} + G_1\{\eta(p)\} + \eta(p)R(-p) + \eta(-p)R(p), \quad (2.14)$$

где

$$G_1\{\eta\} \triangleq \eta(p)\eta(-p)[S_s(-p^2) + S_N(-p^2)],$$

$$R(p) \triangleq H_s^*(p) \frac{\Delta_+(p)\Delta_+(-p)}{A_s(p)A_N(p)A_s(-p)A_N(-p)} - \frac{B_s(p)B_s(-p)}{A_s(p)A_s(-p)}.$$

С учетом (2.9)–(2.11) получаем:

$$\begin{aligned} R(p) &= \frac{\Delta_+(-p)}{A_s(-p)A_N(-p)} \left[ H_s^*(p) \frac{\Delta_+(p)}{A_s(p)A_N(p)} - Z(p) \right] = \\ &= -\frac{\Delta_+(-p)}{A_s(-p)A_N(-p)} Z_-(p). \end{aligned}$$

Следовательно,  $R(p)$  не имеет полюсов в левой полуплоскости. Поэтому

$$\oint \eta(p)R(-p)dp = 0, \quad \oint \eta(-p)R(p)dp = 0, \quad (2.15)$$

если в первом случае интегрирование ведется по контуру, охватывающему правую полуплоскость, а во втором — по контуру, охватывающему левую полуплоскость. Нетрудно проверить, что  $R(p)$ , а следовательно  $\eta(-p)R(p)$ , убывает на полуокружности большого радиуса  $p$  не медленнее, чем  $p^{-2}$ , и из (2.15) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(p)R(-p)dp = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(-p)R(p)dp = 0. \quad (2.16)$$

Тогда в силу (2.13), (2.14), (2.16) имеем

$$\begin{aligned} J\{H_s(p)\} &= J\{H_s^*(p)\} + J_1\{\eta\}, \\ J_1\{\eta\} &\triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\eta)dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(p)\eta(-p)[S_s(-p^2) + S_N(-p^2)]dp, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и, поскольку  $J_1\{\eta\} \geq 0$ , устанавливаем (2.7). ■

Приведем простейший пример приложения Т.2.1.

**Пример 2.1.** Пусть

$$S_s(\omega^2) = \frac{2\lambda_s}{\omega^2 + \lambda_s^2} d_s, \quad S_N(\omega^2) = \frac{2\lambda_N}{\omega^2 + \lambda_N^2} d_N.$$

Тогда

$$S_s(-p^2) = \frac{2\lambda_s d_s}{-p^2 + \lambda_s^2} = \frac{\sqrt{2\lambda_s d_s}}{p + \lambda_s} \frac{\sqrt{2\lambda_s d_s}}{-p + \lambda_s},$$

так что  $B_s(p) = \sqrt{2\lambda_s d_s}$ ,  $A_s(p) = p + \lambda_s$ , и, аналогично,

$$B_N(p) = \sqrt{2\lambda_N d_N}, \quad A_N(p) = p + \lambda_N.$$

Составим согласно (2.6)

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= 2\lambda_s d_s (-p^2 + \lambda_N^2) + 2\lambda_N d_N (-p^2 + \lambda_s^2) = \\ &= -2(\lambda_s d_s + \lambda_N d_N) p^2 + 2\lambda_s \lambda_N (\lambda_N d_s + \lambda_s d_N). \end{aligned}$$

Тогда в результате факторизации получаем

$$\Delta_+(p) = a(p + \lambda), \quad a > 0, \quad \lambda > 0,$$

где  $a^2 \triangleq 2(\lambda_s d_s + \lambda_N d_N)$ ,  $\lambda^2 a^2 \triangleq 2\lambda_s \lambda_N (\lambda_N d_s + \lambda_s d_N)$ . Сепарации подлежит функция

$$Z(p) = \frac{2\lambda_s d_s (-p + \lambda_N)}{(p + \lambda_s) a (-p + \lambda)}.$$

Разлагая ее на простые дроби, получим

$$Z(p) = \frac{2\lambda_s d_s}{a} \left[ \frac{\lambda_s + \lambda_N}{\lambda_s + \lambda} \frac{1}{p + \lambda_s} + \frac{\lambda_N - \lambda}{\lambda_s + \lambda} \frac{1}{-p + \lambda} \right].$$

По определению 1-е слагаемое есть  $Z_+(p)$ , 2-е —  $Z_-(p)$ . Таким образом, можно записать согласно (2.11), что

$$\begin{aligned} H_s^*(p) &= \frac{(p + \lambda_s)(p + \lambda_N)}{a(p + \lambda)} \frac{2\lambda_s d_s}{a} \frac{\lambda_s + \lambda_N}{\lambda_s + \lambda} \frac{1}{p + \lambda_s} = b \frac{p + \lambda_N}{p + \lambda}, \\ b &\triangleq \frac{2\lambda_s d_s}{a^2} \frac{\lambda_s + \lambda_N}{\lambda_s + \lambda}. \end{aligned}$$

Вычислим минимальное значение дисперсии установившейся ошибки:

$$\begin{aligned} d_e^* &= J\{H^*(p)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{|(1-b)p + \lambda - b\lambda_N|^2}{|(p + \lambda)(p + \lambda_s)|^2} 2\lambda_s d_s + \frac{b^2 2\lambda_N d_N}{|(p + \lambda)|^2} \right\} \Big|_{p=i\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Это стандартный интеграл типа (1.27).

Используя формулы (1.29), находим, что

$$d_e^* = \frac{(1-b)^2 \lambda \lambda_s + (\lambda - b\lambda_N)^2}{\lambda(\lambda + \lambda_s)} d_s + \frac{b^2 \lambda_N}{\lambda} d_N. \quad \square$$

**2.2. Оптимальный закон управления.** Если числитель и знаменатель п.ф. объекта являются устойчивыми, то метод динамической компенсации дает простой способ построения п.ф. закона управления:

$$H_f(D) = H_{uf}^{-1}(D) \frac{H_s^d(D)}{1 - H_s^d(D)} \quad (2.18)$$

по заданной желаемой п.ф. замкнутого контура. Естественно было

бы принять

$$H_a^d(D) = H_a^*(D), \quad (2.19)$$

где  $H_a^*(D)$  — п. ф., обеспечивающая минимальное значение дисперсии установившейся ошибки.

Однако здесь возможны неприятности, связанные с поведением управляющего воздействия.

Из уравнений

$$\begin{aligned} e &= [1 - H_a(D)]s(t) + H_e(D)N(t), \\ u &= H_f(D)[e(t) + N(t)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

следует, что

$$u(t) = H_f(D)[1 - H_a(D)][s(t) + N(t)] = H_{uy}^{-1}(D)H_a(D)[s(t) + N(t)], \quad (2.21)$$

где учтены стандартные обозначения

$$H_a(D) \triangleq H_p(D)[1 + H_p(D)]^{-1}, \quad H_p(D) \triangleq H_{uy}(D)H_f(D).$$

В силу (2.21) дисперсия управления в установившемся режиме равна

$$d_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(i\omega)|^2 |H_{uy}(i\omega)|^{-2} [S_s(\omega) + S_N(\omega)] d\omega. \quad (2.22)$$

Для того чтобы дисперсия управления была ограниченной, необходимо убывание подынтегрального выражения при  $\omega^2 \rightarrow \infty$ , а это не гарантировано при выборе  $H_a(D)$  согласно (2.19).

**Пример 2.2.** Пусть сигнал и помеха имеют характеристики, указанные в П.2.1. Там же была найдена соответствующая оптимальная п. ф.  $H_a^*(D)$

$$H_a^*(D) = b \frac{D + \lambda_N}{D + \lambda}.$$

Пусть объект задан простейшим уравнением:

$$(TD + 1)y(t) = u(t).$$

Согласно (2.18), (2.19) получаем

$$H_f(D) = \frac{b}{1-b} \frac{(TD+1)(D+\lambda_N)}{D + \frac{1}{1-b}(\lambda - b\lambda_N)}.$$

Эта п. ф. не является строго реализуемой, и, что более существенно, дисперсия  $u(t)$  оказывается неограниченной, поскольку порядок числителя и знаменателя в (2.22) оказывается в этом случае одинаковым.  $\square$

**Вывод:** возможны ситуации, когда использование оптимальной п. ф.  $H_a^*(D)$  оказывается неприемлемым, поскольку оно приводит к неограниченной дисперсии управления.

Во избежание этого следует изменить постановку задачи выбора п. ф. Потребуем, чтобы желаемая  $H_a^d(D)$  доставляла минимум установленной дисперсии ошибки

$$d_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{|1 - H_a(i\omega)|^2 S_s(\omega) + |H_a(i\omega)|^2 S_N(\omega)\} d\omega \quad (2.23)$$

при дополнительном условии, что дисперсия управления не превышает заданного уровня

$$d_u \leq \delta_u^2. \quad (2.24)$$

«Правило Зб» позволяет утверждать, что при  $\delta_u = \frac{1}{3} \bar{u}$  выполнение условия (2.24) гарантирует невыход управляющего воздействия на пределы допуска  $\pm \bar{u}$  с вероятностью выше 0,99 в любой момент работы в установившемся режиме, если сигнал и помеха распределены нормально.

Для решения задачи на условный минимум используем известный из анализа метод множителей Лагранжа, но в несколько измененной форме.

Составим выражение

$$\mathcal{L}(\theta) = (1 - \theta)d_e + \theta d_u, \quad (2.25)$$

где  $\theta$  — неотрицательный множитель,  $0 \leq \theta \leq 1$ . Очевидно, что  $\mathcal{L}(0) = d_e$ ,  $\mathcal{L}(1) = d_u$ , а при любом промежуточном значении  $\theta$  выражение (2.25) является «взвешенной» суммой  $d_e$  и  $d_u$ .

Справедливо следующее утверждение\*).

**Лемма.** Существует такое  $\theta^*$ , что решение задачи минимизации величины  $\mathcal{L}(\theta^*)$  путем выбора  $H_a$  эквивалентно решению задачи минимизации  $d_e$  при ограничении (2.24) на величину  $d_u$ . При этом  $\theta^*$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \text{либо } \theta^* &= 0, \quad d_e^* < \delta_u^2, \\ \text{либо } \theta^* &> 0 \quad \text{и} \quad d_e^* = \delta_u^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $d_e^*$  есть значение  $d_e$  при  $H_a = H_a^*$ . ■

Выпишем подробнее выражение  $\mathcal{L}(\theta)$  с учетом (2.22), (2.23):

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{|1 - H_a(i\omega)|^2 \tilde{S}_s(\omega^2) + |H_a(i\omega)|^2 \tilde{S}_N(\omega^2)\} d\omega, \quad (2.27)$$

\* Доказательство можно найти, например, в [4.7, с. 546]. Если  $\theta \neq 1$ , то величину  $\rho = \theta(1 - \theta)^{-1}$  можно рассматривать как обычный множитель Лагранжа (см. также гл. 9, § 1).

где

$$\begin{aligned}\tilde{S}_s(\omega^2) &\triangleq (1-\theta) S_s(\omega^2), \\ \tilde{S}_N(\omega^2) &\triangleq (1-\theta) S_N(\omega^2) + \theta |H_{uy}(i\omega)|^{-2} [S_s(\omega^2) + S_N(\omega^2)].\end{aligned}\quad (2.28)$$

Таким образом, формально  $\mathcal{L}(\theta)$  связано с выбираемым  $H_s$ , точно таким же образом, что и  $d_s$ , с той лишь разницей, что выражения  $S_s(\omega^2)$ ,  $S_N(\omega^2)$  заменены на  $\tilde{S}_s(\omega^2)$ ,  $\tilde{S}_N(\omega^2)$ .

Поэтому для оптимального выбора  $H_s$  можно применить алгоритм, описанный в Т.2.1, если в нем заменить многочлены  $A_s$ ,  $A_N$ ,  $B_s$ ,  $B_N$  на соответствующие многочлены  $\tilde{A}_s$ ,  $\tilde{A}_N$ ,  $\tilde{B}_s$ ,  $\tilde{B}_N$ , получаемые в результате факторизации  $\tilde{S}_s$ ,  $\tilde{S}_N$ \*). При этом значение параметра  $\theta$  не фиксируется, т. е. выбор производится для произвольного  $\theta$ , который затем определяется из условия (2.26).

Изложим модифицированный алгоритм непосредственно в ходе решения простейшего иллюстративного примера.

**Пример 2.3.** Пусть

$$S_s(\omega^2) = \frac{2\lambda_s}{\omega^2 + \lambda_s^2} d_s, \quad S_N(\omega^2) = 0$$

и

$$H_{uy}(p) = \frac{1}{Tp + 1} s$$

т. е. сохранены условия П.2.2, но помеха отсутствует. Решим задачу минимизации  $d_s$  при ограничении (2.24) на  $d_u$ . Согласно (2.28) имеем

$$\tilde{S}_s(\omega^2) = (1-\theta) S_s(\omega^2) = \frac{\sqrt{2(1-\theta)\lambda_s d_s}}{p + \lambda_s} - \frac{\sqrt{2(1-\theta)\lambda_s d_s}}{-p + \lambda_s} \Big|_{p=i\omega},$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_N(\omega^2) &= \theta |H_{uy}(i\omega)|^{-2} S_s(\omega^2) = \\ &= \frac{\sqrt{2\theta\lambda_s d_s}(Tp + 1)}{p + \lambda_s} \frac{\sqrt{2\theta\lambda_s d_s}(-Tp + 1)}{-p + \lambda_s} \Big|_{p=i\omega}.\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\tilde{B}_s(p) &= \sqrt{2(1-\theta)\lambda_s d_s}, \quad \tilde{A}_s(p) = p + \lambda_s, \\ \tilde{B}_N(p) &= \sqrt{2\theta\lambda_s d_s}(Tp + 1), \quad \tilde{A}_N(p) = p + \lambda_s = \tilde{A}_s(p).\end{aligned}$$

Составим по аналогии с (2.6) многочлен

$$\tilde{\Delta}(p) = \tilde{B}_s(p)\tilde{B}_s(-p)\tilde{A}_N(p)\tilde{A}_N(-p) + \tilde{B}_N(p)\tilde{B}_N(-p)\tilde{A}_s(p)\tilde{A}_s(-p), \quad (2.29)$$

\*) Имеются некоторые трудности в обосновании применимости алгоритма, поскольку нет гарантии убывания  $\tilde{S}_N(\omega)$  на бесконечности. Это свойство постулировалось для  $S_N(\omega)$  и косвенно использовалось при доказательстве Т.2.1 при исследовании поведения  $R(p)$ . Однако доказательство можно изменить, учитывая, что на самом деле необходимо лишь гарантировать подходящее поведение на бесконечности произведения  $\eta(-p)R(p)$ .

принимающий в данном случае вид

$$\tilde{\Delta}(p) = (p + \lambda_s)(-p + \lambda_s)2\lambda_s d_s[(1-\theta) + \theta(-T^2 p^2 + 1)];$$

произведем его факторизацию:

$$\tilde{\Delta}(p) = \tilde{\Delta}_+(p)\tilde{\Delta}_-(-p),$$

где

$$\tilde{\Delta}_+(p) = \sqrt{2\lambda_s d_s}(p + \lambda_s)(T\sqrt{\theta}p + 1).$$

По аналогии с (2.9) определим

$$\tilde{Z}(p) = \frac{\tilde{B}_s(p)\tilde{B}_s(-p)\tilde{A}_N(-p)}{A_s(p)\tilde{\Delta}_+(-p)}, \quad (2.30)$$

так что в данном случае

$$\tilde{Z}(p) = \frac{(1-\theta)\sqrt{2\lambda_s d_s}}{(p + \lambda_s)(-T\sqrt{\theta}p + 1)}.$$

В результате сепарации получаем:

$$\tilde{Z}_+(p) = \frac{(1-\theta)\sqrt{2\lambda_s d_s}}{(T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1)} \frac{1}{p + \lambda_s},$$

откуда находим выражение

$$\tilde{H}_s^*(p) = \frac{\tilde{A}_s(p)\tilde{A}_N(p)}{\tilde{\Delta}_+(p)} \tilde{Z}_+(p), \quad (2.31)$$

или

$$\tilde{H}_s^*(p) = \frac{1-\theta}{T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1} \frac{1}{T\sqrt{\theta}p + 1}.$$

Для определения  $\theta$  по условию (2.26) необходимо предварительно вычислить значение дисперсии управления  $d_u$ , соответствующее, согласно формуле (2.22),  $H_s(p) = \tilde{H}_s^*(p)$ .

Имеем для данной задачи

$$d_u = C_u \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{Tp + 1}{(T\sqrt{\theta}p + 1)(p + \lambda_s)} \right|^2 \Big|_{p=i\omega} d\omega,$$

где

$$C_u \triangleq \frac{(1-\theta)^2}{(T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1)^2} \cdot 2\lambda_s d_s = \text{const.}$$

Интеграл имеет стандартный вид (2.13) при  $n = 2$ . Воспользовавшись соответствующим выражением, найдем

$$d_u = d_s \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) \triangleq \frac{(1-\theta)^2(T\lambda_s + \sqrt{\theta})}{T\sqrt{\theta}(T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1)^2}.$$

Теперь предстоит определить  $\theta = \theta^*$  из (2.26). Очевидно, что 1-й вариант невозможен, поскольку при  $\theta = \theta^* = 0$  имеем  $d_u^* = d_s\varphi(0) = \infty$ , что было выяснено еще в П.2.4. Во 2-м варианте  $\theta^*$  находится как положительный корень уравнения  $d_s\varphi(\theta) = \delta_u^2$ . Найти его точно даже в данной простейшей задаче не удается. Ориентировочный вид функции  $\varphi(\theta)$  показан на рис. 4.2. Штриховая кривая асимптотически близка к  $\varphi(\theta)$  при малых  $\theta$ . Ясно, что при достаточно больших значениях  $\delta_u^2 d_s^{-1} \lambda_s^{-1} T^{-1}$  необходимый корень  $\theta^*$  мал и близок к величине, соответствующей абсциссе точки пересечения асимптоты с заданным уровнем:

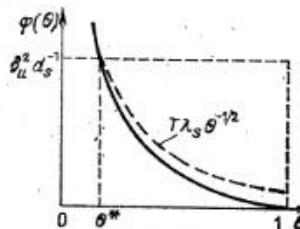


Рис. 4.2

$$\theta^* \cong (d_s \delta_u^{-2} \lambda_s T)^{1/2} \ll 1.$$

Подставляя его в  $\tilde{H}_s^*(p)$ , получим приближенное выражение для оптимальной п.ф.:

$$H_s^*(p) = \frac{1}{T \sqrt{\theta^*} p + 1}.$$

Это п.ф. типа фильтра Баттервортса 1-го порядка с  $\omega_0 = (T\sqrt{\theta^*})^{-1}$ , т. е. с большой полосой пропускания. Последнее понятно из качественных соображений, поскольку помехи не учитывались, а ограничения на уровень управления принимались «слабыми» (допускалось большое  $\delta_u$ ).

Ниже будет показано, что при аналогичных условиях п.ф. типа фильтров Баттервортса всегда дают результат, близкий к оптимальному, независимо от поведения спектральной плотности сигнала.

### § 3. Грубость и коэффициенты чувствительности показателей качества

**3.1. Основные понятия. Чувствительность корней.** Еще раз вернемся к проблеме, поставленной в § 6 гл. 3: если свойства системы окажутся отличающимися от тех, которые предполагались в ходе расчета, то как будет вести себя реальная замкнутая система?

Здесь мы произведем систематический анализ этой проблемы, считая отклонения этих свойств малыми. Ясно, что возникновение существенных отличий в поведении даже при сколь угодно малых изменениях свойств делают метод расчета практически непригодным.

Поведение системы оценивалось различными величинами, *показателями качества*, и целесообразно изменение поведения характеризовать именно через изменения этих величин. Любые малые изменения свойств системы сведем для простоты к появлению отличий в ее описании, пропорциональных малому числовому параметру  $\mu > 0$ .

В связи с этим введем следующие формальные понятия.

**Определение.** Показатель  $J$  называется *грубым* по параметру  $\mu$ , если он непрерывно зависит от  $\mu$  в точке  $\mu = 0$ , т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J(\mu) = J(0). \quad (3.1)$$

Если зависимость  $J(\mu)$  дифференцируема при  $\mu = 0$ , то показатель  $J$  груб по  $\mu$ , а величина

$$J'(0) \triangleq \left. \frac{dJ}{d\mu} \right|_{\mu=0} \quad (3.2)$$

называется его *коэффициентом чувствительности*.

Если  $J'(0) = 0$ , то показатель называется *нечувствительным, инвариантным «в малом»*.

Разъясним эти понятия для ряда важных показателей.

Предварительно приведем без доказательства один классический результат из анализа.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\Delta(p, \mu)$  — многочлен от  $p$ , коэффициенты которого являются аналитическими\*) функциями  $\mu$  в окрестности  $\mu = 0$ . Тогда, если  $\lambda_v$  — простой корень многочлена  $\Delta(p, 0)$ , то существует корень  $\lambda_v(\mu)$  многочлена  $\Delta(p, \mu)$ , аналитический по  $\mu$  и такой, что  $\lambda_v(0) = \lambda_v$ .

$$k_v \triangleq \left. \frac{d\lambda_v}{d\mu} \right|_{\mu=0} = - \left( \frac{\partial \Delta(p, \mu)}{\partial p} \right)^{-1} \left. \frac{\partial \Delta(p, \mu)}{\partial \mu} \right|_{p=\lambda_v}. \quad (3.3)$$

Если же  $\lambda_v$  — корень кратности  $r$ , то существует  $r$  корней  $\lambda_v(\mu)$  многочлена  $\Delta(p, \mu)$ , вообще говоря, различных, но таких, что  $\lambda_v(0) = \lambda_v$ . Функции  $\lambda_v(\mu)$  не аналитичны по  $\mu$ , но любая из них аналитична по параметру  $\mu_1 \triangleq |\mu^{1/r}|$ ,  $m \leq r$ .

Пусть многочлен  $\Delta(p, \mu)$  является характеристическим многочленом системы. Значения его корней являются важными показателями качества. Из леммы следует, что если

$$\deg \Delta(p, \mu) = \deg \Delta(p, 0), \quad (3.4)$$

т. е. число корней этих многочленов совпадает, то все корни  $\lambda_v(\mu)$  многочлена  $\Delta(p, \mu)$  грубы по  $\mu$ , но коэффициенты чувствительности могут быть определены только для простых корней и даются формулой (3.3).

**Пример 3.1.** Пусть  $\Delta(p, \mu) = p^2 + 2\mu p - 1$ . Многочлен  $\Delta(p, 0)$  имеет два простых корня,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Их коэффициенты чувствительности, в силу (3.3), равны

$$k_1 = -(2p + 2\mu)^{-1} 2p \Big|_{p=1} = -1, \quad k_2 = -1.$$

\*) Здесь и далее в этом параграфе аналитичность означает существование разложения в ряд Тейлора. Основной результат леммы — непосредственное следствие теоремы о неявной функции.

Если же  $\Delta(p, \mu) = p^2 + \mu$ , то  $\Delta(p, 0)$  имеет двукратный корень  $\lambda_1 = 0$ , которому, очевидно, соответствуют два различных корня  $\Delta(p, \mu)$ :

$$\lambda_1(\mu) = i\sqrt{\mu}, \quad \lambda_2(\mu) = -i\sqrt{\mu},$$

причем оба недифференцируемы по  $\mu$  при  $\mu = 0$ , так что коэффициенты чувствительности не определены.  $\square$

**3.2. Сингулярный случай и системы с большим коэффициентом усиления.** Для приложений особо интересен случай, в дальнейшем называемый *сингулярным*, когда условие (3.4) не выполнено, т. е. при  $\mu = 0$  обращаются в нуль  $r \geq 0$  старших коэффициентов многочлена  $\Delta(p, \mu)$ . В этом случае нет даже гарантии грубости всех корней  $\lambda_v(\mu)$ .

**Пример 3.2.** Если  $\Delta(p, \mu) = \mu p^2 + (1 + \mu)p + 1$ , то  $\lambda_1 = -\mu^{-1}$ ,  $\lambda_2(\mu) = -1$ , и первый из корней не имеет предела при  $\mu \rightarrow 0$ .  $\square$

Важную информацию о сингулярном случае дает следующее утверждение.

**Лемма 3.2.** Пусть

$$\Delta(p, \mu) = \mu A(p) + B(p), \quad (3.5)$$

где

$$A(p) \triangleq a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0,$$

$$B(p) \triangleq b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0, \quad r \triangleq n - m > 0.$$

Тогда, при достаточно малых  $\mu > 0$ , т. к. корней  $\Delta(p, \mu)$  близки к т. к. корням  $B(p)$ , а остальные  $r$  корней имеют асимптотическое представление вида

$$\lambda_v(\mu) = \mu_1^{-1} [s_v + O(\mu_1)], \quad (3.6)$$

где  $\mu_1 \triangleq \mu^{1/r} > 0$ , а  $s_v$  — корни уравнения

$$a_n s^r + b_m = 0. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Первая часть утверждения прямо следует из леммы 3.1. Для доказательства второй введем замену переменных  $p = \mu_1^{-1} s$ . Тогда нетрудно получить представление:

$$\begin{aligned} \Delta_1(s, \mu_1) \triangleq \mu_1^m \Delta(p, \mu) &= a_n s^n + \mu_1 a_{n-1} s^{n-1} + \dots \\ &\dots + \mu_1^n a_0 + b_m s^m + \mu_1 b_{m-1} s^{m-1} + \dots + \mu_1^m b_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Многочлен  $\Delta_1(s, \mu_1)$  аналитичен по  $\mu_1$ , причем

$$\Delta_1(s, 0) = s^m (a_n s^r + b_m),$$

так что  $\Delta_1(s, 0)$  имеет  $r$  корней  $s_v$ . Согласно лемме 3.1, многочлен  $\Delta_1(s, \mu_1)$  при достаточно малых  $\mu_1$  имеет  $r$  близких корней

$$s_v(\mu_1) = s_v + O(\mu_1), \quad v = 1, \dots, r.$$

Теперь из (3.8) сразу следует, что при достаточно малых  $\mu > 0$  ( $\mu_1 > 0$ ) многочлен  $\Delta(p, \mu)$  имеет  $r$  корней вида (3.6).  $\blacksquare$

Прямыми следствием лемм является следующий результат.

**Теорема 3.1.** Пусть характеристический многочлен  $\Delta(p, \mu)$  аналитически зависит от параметра  $\mu$  в окрестности  $\mu = 0$  и устойчив при  $\mu = 0$ . Тогда, если в этой окрестности выполнено условие (3.4), то  $\Delta(p, \mu)$  также является устойчивым при малых  $\mu > 0$ .

Пусть  $\delta(\mu)$  — степень устойчивости  $\Delta(p, \mu)$ , т. е.

$$\delta(\mu) \triangleq \min_v \{-\operatorname{Re} \lambda_v(\mu)\}; \quad (3.9)$$

тогда при выполнении указанных условий степень устойчивости — грубый показатель свойств системы. Если, более того, существует единственный корень  $\lambda_1$  многочлена  $\Delta(p, 0)$  такой, что  $\operatorname{Re} \lambda_1 = -\delta(0)$ , то может быть определен коэффициент чувствительности этого показателя:

$$k_\delta \triangleq \frac{\partial \delta(\mu)}{\partial \mu} \Bigg|_{\mu=0} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \Delta(p, \mu)}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \Delta(p, \mu)}{\partial p} \right)^{-1} \Bigg|_{\substack{p=\lambda_1 \\ \mu=0}} \right\}. \quad (3.10)$$

Если же условие (3.4) не выполнено, но  $\Delta(p, \mu)$  удовлетворяет условиям леммы 3.2, то сохранение устойчивости при малых отклонениях от нуля гарантировано только при  $r = 1$ ,  $a_n b_m^{-1} > 0$ , а при  $r \geq 2$  многочлен  $\Delta(p, \mu)$  неустойчив.

**Доказательство.** Справедливость (3.10) следует из определения (3.9) и формулы (3.5). Последнее утверждение вытекает из асимптотического представления (3.6).

Можно считать, что  $a_n b_m^{-1} > 0$  (в противном случае неустойчивость следует из критерия Стодолы). В силу (3.6) имеются корни вида:

$$\lambda_v(\mu) = \left| \frac{b_m}{a_n \mu} \right|^{1/r} \left[ \exp \left\{ i \frac{\pi (2v-1)}{r} \right\} + O(\mu^{1/r}) \right], \quad v = 1, \dots, r, \quad (3.11)$$

равномерно расположенные на окружности большого радиуса порядка  $|\mu^{-1/r}|$ . При  $r = 1$  имеется только один такой корень, расположенный в левой полуплоскости. При  $r = 2$  два корня близки к минимум оси, и требуется дополнительный анализ знака величин меньшего порядка малости, для того чтобы выяснить, не являются ли они «плохими». При  $r > 2$  заведомо имеется хотя бы один «плохой» корень с положительной вещественной частью.  $\blacksquare$

Практически существенным является вывод: малые сингулярные возмущения, вызывающие изменение степени характеристического многочлена более, чем на 1, могут вызвать катастрофические последствия: из устойчивой система превратится в неустойчивую с очень быстрым уходом от состояния равновесия.

В качестве важного приложения рассмотрим систему с обратной связью, описываемую уравнениями

$$a(\mathbf{D})y = \beta(\mathbf{D})u, \quad l(\mathbf{D})u = -k(\mathbf{D})y, \quad (3.12)$$

и примем, что

$$k(\mathbf{D}) = \frac{1}{\mu} k_0(\mathbf{D}), \quad k_0(0) = 1, \quad \mu \ll 1, \quad (3.13)$$

т. е. будем считать сигнал обратной связи пропорциональным большому коэффициенту усиления  $\mu^{-1}$ . Характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$\Delta(p, \mu) = \alpha(p)l(p) + \frac{1}{\mu}\beta(p)k_0(p).$$

При  $\mu \neq 0$  его корни совпадают с корнями многочлена типа (3.5),  
 $\mu\alpha(p)l(p) + \beta(p)k_0(p)$ .

Если

$$\deg\{\alpha(p)l(p)\} - \deg\{\beta(p)k_0(p)\} = r > 0,$$

то при увеличении коэффициента усиления (уменьшении  $\mu$ ) часть корней приближается к корням  $\beta(p)$ ,  $k_0(p)$ , т. е. к корням знаменателя п. ф.  $H_p(p)$ , но остальные  $r$  корней будут стремиться по модулю к бесконечности, и при  $r > 2$  система заведомо потеряет устойчивость.

Не следует, однако, думать, что любые сингулярные возмущения приводят к катастрофе. Это ясно, например, из следующего почти очевидного утверждения.

**Лемма 3.3.** Пусть справедливо представление

$$\Delta(p, \mu) = \Delta_0(p, \mu)\rho(\mu p), \quad (3.14)$$

где  $\rho(s)$  — многочлен такой, что  $\rho(0) = 1$ , а  $\Delta_0(p, \mu)$  — многочлен от  $p$ , аналитический по  $\mu$ , и при любых достаточных малых  $\mu$

$$\deg \Delta_0(p, \mu) = \deg \Delta_0(p, 0).$$

Тогда при  $\mu \rightarrow 0$  часть корней  $\Delta(p, \mu)$  приближается к корням  $\Delta_0(p, 0)$ , а остальные — к корням вида  $\mu^{-1}s_n$ , где  $s_n$  — корни  $\rho(s)$ .

Если  $\Delta_0(p, 0)$ ,  $\rho(s)$  — устойчивые многочлены, то при достаточно малых  $\mu > 0$  многочлен  $\Delta(p, \mu)$  устойчив. ■

Рассмотрим вновь систему с обратной связью типа (3.9). Пусть  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  — устойчивые многочлены, а для выбора обратной связи применен метод компенсации, в силу которого

$$\frac{k(p)}{l(p)} = \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} \frac{\beta^d(p)}{\alpha^d(p) - \beta^d(p)}, \quad (3.15)$$

где  $\alpha^d(p)$ ,  $\beta^d(p)$  — заданные многочлены, причем  $\alpha^d(p)$  устойчив.

Примем  $\beta^d(p) = 1$ ,  $\alpha^d(p) = \rho(\mu p)$ , где  $\rho(s)$  — многочлен, описанный в условиях леммы 3.3. Запишем также  $\rho(s) \triangleq 1 + s\rho_0(s)$ . Тогда

$$\frac{k(p)}{l(p)} = \frac{1}{\mu} \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} \frac{1}{p\rho_0(\mu p)}. \quad (3.16)$$

Таким образом, при малых  $\mu$  вновь предлагается введение обратной связи с большим коэффициентом усиления. Однако в этом случае характеристический многочлен замкнутой системы равен

$$\Delta(p, \mu) = \alpha(p)\beta(p)\rho(\mu p). \quad (3.17)$$

и устойчив при сколь угодно малых  $\mu$ , т. е. при сколь угодно больших коэффициентах усиления.

Напомним, что именно такая схема предлагалась в гл. 3, § 4, где было рекомендовано выбирать п. ф. замкнутого контура в виде

$$H_s^d(p) = \frac{1}{\chi_n(p/\omega_0)}, \quad (3.18)$$

где  $\chi_n(s)$  — устойчивые многочлены Баттервортта, а  $\omega_0$  — «большая» величина, определяющая полосу пропускания фильтра.

**3.3. Чувствительность частотных характеристик и интегральных показателей.** Очевидно, что если

$$H(p, \mu) = \frac{P(p, \mu)}{Q(p, \mu)}, \quad (3.19)$$

где  $P$ ,  $Q$  — многочлены от  $p$ , аналитичные (при фиксированном  $p$ ) по  $\mu$  вблизи  $\mu = 0$ , причем  $Q(p, 0) \neq 0$ , то и  $H(p, \mu)$  при этом значении  $p$  аналитична по  $\mu$ . Коэффициент чувствительности находится прямым дифференцированием по параметру:

$$\begin{aligned} k(p) \triangleq \frac{\partial H(p, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} &= \left[ \frac{\partial P}{\partial \mu} Q - \frac{\partial Q}{\partial \mu} P \right] Q^{-2} \Big|_{\mu=0} = \\ &= H(p, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [\ln H(p, \mu)] \Big|_{\mu=0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отсюда почти сразу следует простое утверждение.

**Теорема 3.2.** Пусть  $H(p, \mu)$  — передаточная функция устойчивого при всех  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$ , преобразования. Тогда при любом  $\omega$  определен коэффициент чувствительности частотной характеристики

$$k(i\omega) = H(i\omega, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [\ln H(i\omega, \mu)] \Big|_{\mu=0}. \quad (3.21)$$

Если  $H_p(p, \mu)$  — п. ф. разомкнутого контура, то коэффициент чувствительности частотной характеристики замкнутого контура

$$\frac{\partial H_p(i\omega, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = -H_p^2(i\omega, 0) \frac{\partial}{\partial \mu} [H_p^{-1}(i\omega, \mu)] \Big|_{\mu=0} \quad (3.22)$$

и определен при любых  $\omega$ , если  $H_p(p, \mu)$  устойчива в некоторой окрестности  $\mu = 0$ .

Доказательство элементарно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_p}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} &= H_p \frac{\partial}{\partial \mu} [\ln H_p] \Big|_{\mu=0} = H_p \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \frac{1}{1 + H_p^{-1}} \Big|_{\mu=0} = \\ &= -H_p \frac{1}{1 + H_p^{-1}} \frac{\partial}{\partial \mu} H_p^{-1} \Big|_{\mu=0}. \end{aligned} \quad ■$$

Перепишем (3.22) в виде

$$\frac{\partial H_p(i\omega)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{(1 + H_p(i\omega))^2} \Big|_{\mu=0} \frac{\partial H_p(i\omega)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}. \quad (3.23)$$

**Вывод.** На всех частотах, где  $|H_p(i\omega)| \gg 1$ , частотная характеристика замкнутого контура слабо зависит от изменения параметров в разомкнутом контуре.

Перейдем далее к исследованию влияния параметров на интегральные показатели качества, использовавшиеся в § 2.

**Лемма 3.4.** Пусть  $\Phi(p, \mu)$  — дробно-рациональная функция  $p$ , коэффициенты числителя и знаменателя которой аналитически зависят от параметра  $\mu$ . Пусть  $\Phi(p, \mu)$  устойчива и строго реализуема при всех  $\mu$  из малой окрестности  $\mu = 0$ . Тогда показатель  $J(\mu)$ , представимый в виде

$$J(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p, \mu) \Phi(-p, \mu) dp, \quad (3.24)$$

является грубым по  $\mu$  и существует его коэффициент чувствительности.

Если при всех достаточно малых  $\mu > 0$  существует интеграл

$$k_J(\mu) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \mu} [\Phi(p, \mu) \Phi(-p, \mu)] dp, \quad (3.25)$$

то коэффициент чувствительности равен  $k_J(0)$ .

Доказательство опирается на возможность представления  $J(\mu)$  в виде отношения полиномиальных функций по коэффициентам числителя и знаменателя  $\Phi(p, \mu)$  (см. § 1, а также [4.5]), откуда следует, что  $J(\mu)$  — отношение двух аналитических по  $\mu$  функций. Более того, знаменатель не обращается в нуль при  $\mu = 0$ . Поэтому  $J(\mu)$  дифференцируем по  $\mu$  при  $\mu = 0$ . Второе утверждение тривиально. ■

Получим ряд полезных следствий из леммы 3.4.

**3.4. Требование астатизма и синтез желаемой передаточной функции.** В § 2 не предполагалось, что в допустимое множество сигналов входят полиномиальные, в частности, изменяющиеся как линейные функции времени. А если такие сигналы возможны? Из гл. 3 известно, что в этом случае для обеспечения ограниченности ошибки необходимо наложить на желаемую п. ф. замкнутого контура  $H_a^d(p)$  требование астатизма. Более того, следует добиваться того, чтобы соответствующая  $H_p^d(p)$  не только содержала нулевой полюс, но и имела достаточно большой коэффициент усиления (см. гл. 3). В то же время  $H_a^d(p)$ , получаемая при синтезе по интегральным показателям, не обязательно удовлетворяет этим требованиям. Может быть, принятые постановки задачи синтеза надо радикально изменить, чтобы учесть требования на их отработку уже при синтезе?

Ответ на поставленный вопрос отрицателен. Докажем это, используя следующую схему.

Пусть на основе какой-либо из постановок задач синтеза по интегральным показателям построена желаемая п. ф. замкнутого контура  $H_a^d(p)$  и соответствующая ей п. ф. разомкнутого контура  $H_p^d(p)$ . Пусть

$$H_p^d(0) \triangleq k_0 < \infty, \quad (3.26)$$

т. е. условие астатизма не выполнено.

Тогда для обеспечения желаемого поведения попытаемся использовать иную п. ф. вида

$$H_p^d(p, \mu) = \frac{k_d}{p} \frac{(p + \mu a)^2}{(p + \mu^2 a^2)} \cdot \frac{1}{k_0} H_p^d(p), \quad (3.27)$$

где  $a = \sqrt{\frac{k_d}{k_0}}$ , а  $\mu$  — малый положительный параметр. Очевидно, что при  $\mu \neq 0$  построенная п. ф. ведет себя необходимым образом при малых  $p$

$$H_p^d(p, \mu) \sim \frac{k_d}{p}.$$

Вместе с тем

$$H_p^d(p, 0) = H_p^d(p).$$

Таким образом, остается проверить грубость показателей качества по параметру  $\mu$ .

Поскольку все показатели имели одинаковую структуру вида

$$J_1 \{H_a(p)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - H_a(p)][1 - H_a(-p)] \varphi_1(p) \varphi_1(-p) \Big|_{p=i\omega} d\omega, \quad (3.28)$$

либо вида

$$J_2 \{H_a(p)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H_a(p) H_a(-p) \varphi_2(p) \varphi_2(-p) \Big|_{p=i\omega} d\omega, \quad (3.29)$$

где  $\varphi_1(p)$ ,  $\varphi_2(p)$  устойчивы, то достаточно исследовать функции

$$J_1(\mu) \triangleq J_1 \{H_p^d(p, \mu)\}, \quad J_2(\mu) \triangleq J_2 \{H_p^d(p, \mu)\},$$

применив лемму 3.4. Однако предварительно следует выяснить, не нарушается ли при  $\mu \neq 0$  устойчивость преобразования.

Пусть  $P_p(p)$ ,  $Q_p(p)$  — многочлены в числителе и знаменателе исходной п. ф.  $H_p^d(p)$ . Тогда знаменатель  $H_a^d(p, \mu)$  представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta^d(p, \mu) &= Q_p(p)p(p + \mu^2) + P_p(p)(p + \mu a)^2 = \\ &= p^2[Q_p(p) + P_p(p)] + \mu[2apP_p(p) + \mu(pQ_p(p) + a^2P_p(p))]. \end{aligned}$$

Многочлен  $\Delta(p, 0)$  не является устойчивым (имеется двукратный нулевой корень). Поэтому теорема 3.1 также непосредственно неприменима,

Однако, используя лемму 3.1, можно доказать, что нулевому корню  $\Delta^d(p, 0)$  соответствуют два корня  $\Delta^d(p, \mu)$  в левой полуплоскости, имеющие вид

$$\beta_{1,2}\mu[1 + O(\sqrt{\mu})]. \quad (3.30)$$

где  $\beta_1, \beta_2$  удовлетворяют квадратному уравнению

$$(1 + k_0)\beta^2 + 2ak_0\beta + a^2k_0 = 0$$

и при  $k_0 > 0$  имеют отрицательные вещественные части. Тем самым устойчивость при достаточно малых  $\mu > 0$  доказана. ■

Эвристически этот результат ясен с самого начала, поскольку при малых  $\mu$  введение корректирующего сомножителя существенно искажает ЛАХ разомкнутой системы только на малых частотах (порядка  $\mu$ ) и слабо влияет на поведение ЛАХ вблизи частоты среза, определяющее условие устойчивости по критерию Найквиста.

Можно теперь формально доказать грубость показателей типа (3.28), (3.29) по отношению к низкочастотным искажениям и, более того, установить, что коэффициент чувствительности, вычисляемый согласно формулам типа (3.25), равен нулю.

**Вывод:** при синтезе желаемой п. ф. по интегральным показателям качества можно не учитывать требования, связанные с установившейся точностью при отработке линейно растущих воздействий, поскольку после синтеза эти требования могут быть учтены путем введения коррекции, сколь угодно мало искажающей значения интегральных показателей.

**3.5. Влияние точности задания закона управления на дисперсию ошибки.** Проведенный в 3.4 анализ обосновал возможность изменения п. ф. разомкнутого контура, если таковое влияет на поведение частотной характеристики только на очень низких частотах, порядка  $\mu$ . В гл. 3 с помощью ДАХ было качественно исследовано влияние высокочастотных искажений на поведение замкнутой системы. Теперь возможно провести строгий асимптотический анализ чувствительности показателей качества к такого рода возмущениям.

Пусть  $H_p(p, \mu)$  зависит от малого параметра  $\mu > 0$  следующим образом:

$$H_p(p, \mu) = H_p(p, 0) \frac{1}{\rho(\mu p)^s} \quad (3.31)$$

где  $\rho(0) = 1$ .

На частотах  $\omega \ll \frac{1}{\mu}$  наличие многочлена  $\rho(\mu p)$  «почти» не меняет частотную характеристику, поэтому  $\rho(\mu p)$  можно трактовать как модель высокочастотных искажений.

Формальное исследование может быть осуществлено по той же схеме, что и в 3.4.

Во-первых, несколько модифицируя лемму 3.3, устанавливаем, что соответствующая (3.31) п. ф. замкнутого контура  $H_s(p, \mu)$  устойчива при всех достаточно малых  $\mu$ , если  $\rho(s)$  — устойчивый многочлен,

а  $H_s(p, 0)$  — устойчивая п. ф., представимая в виде правильной дроби. Более того, останется в силе утверждения леммы 3.3 о поведении корней, если под  $\Delta_s(p, 0)$  подразумевать знаменатель  $H_s(p, 0)$ . Во-вторых, если ограничены значения показателей (3.28), (3.29) при  $H_s(p) = H_s(p, 0)$ , то как следствие леммы 3.4 устанавливаем грубость этих показателей.

**Вывод.** Если закон управления с обратной связью обеспечивает выполнение условий устойчивости замкнутой системы и требований к значениям показателей качества, то искажения в п. ф. закона управления, равносильные искажениям в п. ф. разомкнутого контура типа (3.31), не могут привести при малых  $\mu$  к нарушению устойчивости или существенным изменениям показателей качества. При этом важно лишь выполнить добавочное условие:  $H_s(p, 0)$  должно быть правильной дробью. □

**3.6. Асимптотическая форма оптимального закона управления.** При рассмотрении П.2.3 оказалось, что при слабых ограничениях на дисперсию управляющего воздействия и отсутствии помех оптимальная п. ф. замкнутого контура приобретает простой вид. Этот факт верен в общем случае.

**Теорема 3.3.** Пусть

$$S_s(\omega^2) = \left. \frac{B_s(p) B_s(-p)}{A_s(p) A_s(-p)} \right|_{p=i\omega}, \quad S_N(\omega^2) \equiv 0, \quad (3.32)$$

причем  $A_s(p)$  — устойчивый многочлен

$$\deg A_s(p) - \deg B_s(p) \triangleq r_s > 0. \quad (3.33)$$

Пусть установившаяся дисперсия управляющего воздействия ограничена

$$d_u \leq \delta_{us}^2 \quad (3.34)$$

причем  $\delta_u$  — большая, но конечная величина.

Пусть п. ф. объекта  $H_{uy}(p)$  задана в форме

$$H_{uy}(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)},$$

где устойчивые многочлены  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$  имеют вид

$$\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_0, \quad (3.35)$$

$$\beta(p) = \beta_m p^m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \dots + \beta_0,$$

$$r \triangleq n - m > 0, \quad r < r_s.$$

Тогда использование закона управления с п. ф. \*)

$$H_f(p) = \frac{1}{\chi_r(p/\omega_0) - 1} \frac{\alpha(p)}{\beta(p)}, \quad (3.36)$$

\*) Здесь и ниже  $\chi_r(s)$  — многочлены Баттервортса (см. гл. 3, § 4).

обеспечивающего

$$H_u(p) = \frac{1}{\chi_r(p/\omega_0)}, \quad (3.37)$$

вместо оптимального закона, определяемого Т.2.1, приводит к повышению дисперсии ошибки на величину, стремящуюся к нулю при  $\delta_u \rightarrow \infty$  (способ оценки параметра  $\omega_0$  указывается в ходе доказательства) \*).

Доказательство достаточно сложно. Наметим лишь его основные этапы:

а) составляется многочлен  $\tilde{\Delta}(p)$  в виде (2.39);

б) в предположении, что величина  $\theta$  мала, оцениваются корни  $\tilde{\Delta}(p)$  с использованием леммы 3.2;

в) производится факторизация  $\tilde{\Delta}(p)$  с учетом того, что «хорошие» его корни совпадают при малых  $\theta$  с корнями многочлена Баттервортта  $\chi_r(p/\omega_0)$  при  $\omega_0 = \left| \beta_m^{1/r} \theta^{-\frac{1}{2r}} \right|$ , также с корнями многочленов  $B_s(p)$ ,  $A_s(p)$ ,  $B(p)$ ; таким путем устанавливается асимптотическое (при малых  $\theta$ ) представление

$$\tilde{\Delta}_+(p) \approx B_s(p) A_s(p) \chi_r(p/\omega_0) \beta(p);$$

г) сепарация функции  $\tilde{Z}(p)$ , задаваемой в виде (2.40), производится с той же точностью, с учетом того, что

$$\tilde{Z}(p) \approx \frac{B_s(p)}{A_s(p) \chi_r(-p/\omega_0)},$$

а следовательно, поскольку  $\chi_r(0) = 1$ ,

$$\tilde{Z}_+(p) \approx \frac{B_s(p)}{A_s(p)};$$

д) с использованием полученных асимптотических представлений согласно (2.41) находится

$$\tilde{H}_u^+(p) \approx \frac{1}{\chi_r(p/\omega_0)},$$

е) формула (3.36) следует из метода динамической компенсации, если в качестве желаемой п. ф. замкнутого контура принято приближенное выражение  $H_u^+$ ;

ж) величина  $\omega_0$  находится из условия

$$d_u(\omega_0) = \delta_u^2, \quad (3.38)$$

где

$$d_u(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2r}} \left| \frac{\alpha(i\omega)}{\beta(i\omega)} \right|^2 S_u(\omega^2) d\omega;$$

з) дается оценка  $\omega_0$  в зависимости от  $\delta_u$  и показывается, что  $\omega_0 \rightarrow \infty$  при  $\delta_u \rightarrow \infty$ , а следовательно  $\theta \rightarrow 0$ , после чего производится оценка допущенных погрешностей. ■

\*). При  $S_u = a^2 |H_{uy}|^2$  можно найти, что  $\omega_0 = 2r \sin \frac{\pi}{2r} \delta_u^{2r-2}$ .

**3.7. Белый шум и высокочастотные искажения.** Пусть спектральная плотность стационарного случайного процесса  $v(t)$  дробно-рациональна. Тогда, в силу леммы о факторизации (§ 1), ее можно представить в виде

$$S_v(\omega^2) = \frac{B_v(p) B_v(-p)}{A_v(p) A_v(-p)} \Big|_{p=i\omega} = |H_v(i\omega)|^2, \quad (3.39)$$

где

$$H_v(p) \triangleq \frac{B_v(p)}{A_v(p)}. \quad (3.40)$$

Функцию  $H_v(p)$  можно интерпретировать как п. ф. устойчивого линейного звена, описываемого уравнением

$$A_v(D) v(t) = B_v(D) w_0(t). \quad (3.41)$$

При этом из формального сопоставления (3.39) и общей формулы линейного преобразования

$$S_v(\omega^2) = |H_v(i\omega)|^2 S_{w_0}(\omega^2) \quad (3.42)$$

следует, что процесс  $w_0(t)$  должен иметь спектральную плотность

$$S_{w_0}(\omega^2) = 1. \quad (3.43)$$

**Определение.** Случайный процесс, имеющий постоянную спектральную плотность на всех частотах, называется *белым шумом* \*). Постоянное значение спектральной плотности именуют *интенсивностью белого шума*. Линейное звено, установившееся реакция которого на белый шум единичной интенсивности имеет заданную спектральную плотность, называется *формирующим фильтром*.

Понятие белого шума кажется очень простым и широко используется в прикладной теории случайных процессов, однако с ним связан ряд принципиальных трудностей. Прежде всего из формулы

$$d_{w_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0}(\omega^2) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$$

следует, что дисперсия белого шума неограничена. Вместе с тем соотношение (3.42) было выведено в § 1, исходя из предположения ограниченности дисперсии входного воздействия.

Корреляционная функция белого шума, формально вычисляемая по формуле (1.8):

$$R_{w_0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_0} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (3.44)$$

\*). По аналогии с белым светом, спектр которого имеет равномерную интенсивность на всех частотах из видимого диапазона.

не определена в обычном смысле и является обобщенной б-функцией ([4.3], с. 425), заданной на  $(-\infty, \infty)$ . Обращение с таким сложным математическим объектом требует осторожности.

Для более четкого понимания попытаемся прийти к понятию белого шума иным путем. Рассмотрим случайный процесс  $\bar{w}(t)$  с конечной дисперсией и дробно-рациональной спектральной плотностью  $S_{\bar{w}}(\omega^2)$ ,  $S_{\bar{w}}(0) = 1$ . Сопоставим ему процесс

$$w_{\mu}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \bar{w}(t/\mu), \quad (3.45)$$

отличающийся от  $\bar{w}(t)$  масштабным преобразованием, задаваемым малым параметром  $\mu > 0$ . Связем его корреляционную функцию  $R_{w\mu}(\tau)$  и спектральную плотность  $S_{w\mu}(\omega^2)$  с корреляционной функцией  $R_w(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_w(\omega^2)$  исходного процесса:

$$\begin{aligned} R_{w\mu}(\tau) &= M \left\{ \frac{1}{\mu} w\left(\frac{t}{\mu}\right) w\left(\frac{t+\tau}{\mu}\right) \right\} = \frac{1}{\mu} R_{\bar{w}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right), \\ S_{w\mu}(\omega^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{w\mu}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} R_{\bar{w}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{w}}(\tau_1) e^{-i\omega\mu\tau_1} d\tau_1 = S_{\bar{w}}(\mu^2\omega^2). \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} S_{w\mu}(\omega^2) = \lim_{\mu \rightarrow 0} S_{\bar{w}}(\mu^2\omega^2) = S_{\bar{w}}(0) = 1.$$

Таким образом, белый шум  $w_0(t)$  можно рассматривать как формальный предел процесса  $w_{\mu}(t)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Очевидно, что

$$d_{w\mu} \triangleq R_{w\mu}(0) = \frac{1}{\mu} \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{} \infty,$$

а вместе с тем \*)

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} R_{w\mu}(\tau) = 0 \text{ при } \tau \neq 0,$$

иначе говоря, взаимная корреляция между значениями белого шума в любые различные моменты времени отсутствует. Наглядное представление о характере предельного перехода можно получить из модели, описанной в П.1.1 (процесс  $v(t)$  типа «кенгуру»). Его спектральная плотность равна

$$S_v(\omega^2) = \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} d_v = \frac{1}{1 + (\lambda^{-1}\omega)^2} \frac{2d_v}{\lambda}.$$

\*) Последнее следует из того, что  $R_w(\tau)$ , соответствующая дробно-рациональной  $S_w(\omega^2)$ , убывает при  $|\tau| \rightarrow \infty$  не медленнее, чем экспонента.

Если положить  $\lambda = \mu^{-1}$  и приближать  $\mu$  к нулю, но так, чтобы  $2d_v\mu = 1$ , то  $S_v(\omega^2)$  приближается к единице, т. е.  $v(t)$  приближается, по свойствам к белому шуму. Напомним вместе с тем, что  $v(t)$  является кусочно постоянным процессом с ожидаемой длительностью интервалов постоянства, равной  $\lambda^{-1} = \mu$  и дисперсией  $d_v = 1/2\mu^{-1}$ . Таким образом, приближение  $\mu$  к нулю означает приближение к нулю интервалов постоянства и возрастание дисперсии «прыжков».

В дальнейшем рассмотрение понятия «белый шум» будет использоваться только в связи с получением таких результатов, которые справедливы для воздействия типа допредельного процесса  $w_{\mu}(t)$ , если предельный переход корректно осуществить уже в самом результате. В частности, формула

$$S_y(\omega^2) = |H(i\omega)|^2 S_{w\mu}(\omega^2)$$

справедлива для установившейся реакции линейного звена, на вход которого действует допредельный процесс  $w_{\mu}(t)$ . Переходя уже в ней к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , строго получим (3.42). Аналогично выведем формулу для взаимной корреляции между входом и выходом линейного звена, первоначально считая, что входным воздействием является допредельный процесс  $w_{\mu}(t)$ :

$$\begin{aligned} R_{yw\mu}(t) &\triangleq M \{y(t) w_{\mu}(t)\} = M \left\{ \int_0^t h(\tau) w_{\mu}(t-\tau) d\tau w_{\mu}(t) \right\} = \\ &= \int_0^t h(\tau) R_{w\mu}(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \frac{1}{\mu} R_{\bar{w}}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = \\ &= \int_0^{t\mu^{-1}} h(\mu\tau_1) R_{\bar{w}}(\tau_1) d\tau_1. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} R_{yw_0}(t) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} R_{yw\mu}(t) = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{t\mu^{-1}} h(\mu\tau_1) R_{\bar{w}}(\tau_1) d\tau_1 = h(0) \int_0^{\infty} R_{\bar{w}}(\tau_1) d\tau_1 = h(0) \frac{1}{2}, \quad (3.48) \end{aligned}$$

поскольку

$$S_{\bar{w}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{w}}(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_{\bar{w}}(\tau) d\tau$$

и было принято, что  $S_{\bar{w}}(0) = 1$ .

Реальный процесс не может иметь неограниченной дисперсии. В приложениях представление о внешнем воздействии как белом шуме используется в тех случаях, когда в действительности спектральная плотность входа близка к постоянной лишь в ограниченном,

но достаточно большом диапазоне частот. Возникает вопрос о том, какова погрешность такой замены при вычислении дисперсии выхода? С этой целью следует провести анализ зависимости

$$J(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_{w\mu}(\omega^2) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_w(\mu^2\omega^2) d\omega \quad (3.49)$$

с учетом того, что  $J(\mu)$  дает значение дисперсии при воздействии, спектральная плотность которого существенно отличается от 1 при частотах порядка  $\mu^{-1}$ .

Лемма 3.4 указывает, что  $J(\mu)$  непрерывна по  $\mu$  в окрестности нуля, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

Пусть  $r$  — разность степеней знаменателя и числителя  $H(p)$ . Тогда можно показать, что при  $r=1$

$$J(\mu) = J(0) + O(\mu), \quad (3.50)$$

а при  $r \geq 2$

$$J(\mu) = J(0) + O(\mu^2), \quad (3.51)$$

причем в этом случае

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} = \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 \omega^2 d\omega, \quad (3.52)$$

где

$$\alpha \triangleq \left. \frac{dS_w}{d\omega^2} \right|_{\omega=0}.$$

**Пример 3.3.** Пусть  $H(p) = \frac{k}{Tp+1}$ , а

$$S_w(\mu^2\omega^2) = \frac{1}{1+\mu^2\omega^2} = \frac{1}{1+\mu p} \cdot \frac{1}{1-\mu p} \Big|_{p=i\omega};$$

тогда непосредственное вычисление дает:

$$J(\mu) = \frac{k^2}{T+\mu} \simeq \frac{k^2}{T} \left(1 - \frac{\mu}{T}\right) = J(0) \left(1 - \frac{\mu}{T}\right).$$

Таким образом, относительная погрешность пропорциональна отношению постоянной времени  $\mu$  формирующего фильтра к постоянной времени  $T$  звена. Если же  $H(p) = \frac{k}{(Tp+1)^2}$ , то

$$J(\mu) \simeq \frac{k^2}{4T} \left(1 - \frac{\mu^2}{T^2}\right) = J(0) \left(1 - \frac{\mu^2}{T^2}\right),$$

т. е. при более крутом фронте падения частотной характеристики звена порядок погрешности убывает, но зависит от соотношения тех же величин.  $\square$

Аналогичные рассуждения позволяют ответить и на другой практический важный вопрос: если в высокочастотной области допущена неточность в описании спектральной плотности воздействия, какова окажется погрешность в оценке дисперсии? Действительно, если учитываемую при расчете спектральную плотность обозначить  $S_0(\omega^2)$ , то истинную, отличающуюся от нее на частотах порядка  $\mu^{-1}$ , можно представить в виде

$$S(\omega^2) = S_0(\omega^2) S_1(\mu^2\omega^2),$$

где  $S_1(0)=1$ . Очевидно, что оценка погрешности сводится к анализу зависимости

$$J(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_0(\omega^2) S_1(\mu^2\omega^2) d\omega$$

и проводится по той же схеме, что и выше, с заменой  $|H(i\omega)|^2$  на  $|H(i\omega)|^2 S_0(\omega^2)$ .

В технической литературе часто встречается утверждение о возможности изменять представление спектральной плотности воздействий в высокочастотной области с целью упрощения процедуры синтеза желаемой п. ф. Эта рекомендация действительно полезна, но надо иметь в виду, что «высокочастотность» — понятие относительное: искажения могут носить высокочастотный характер относительно полосы пропускания объекта, но оказаться низкочастотными относительно системы, замкнутой обратной связью с большим коэффициентом усиления. Следовательно, требуемая детальность описания спектра при синтезе, вообще говоря, зависит от свойств синтезированной системы, что является своеобразным парадоксом.

**Вывод:** после построения оптимальной п. ф. целесообразно проверить адекватность исходного описания внешних воздействий.

**3.8. Заключение.** Подчеркнем, что установление свойства грубости какого-либо показателя или даже обнаружение того, что равен нулю коэффициент чувствительности этого показателя, совершенно недостаточно для того, чтобы говорить о малости его изменений при изменениях параметра на конечную величину.

Например, если

$$I(\mu) = I(0) + \mu^2,$$

то показатель груб, его коэффициент чувствительности равен нулю, а с ростом  $\mu$  он быстро изменяется.

**Вывод:** формальное исследование чувствительности не может заменить конкретного анализа влияния конечных изменений свойств системы, который может быть проведен только путем прямой проверки условий устойчивости и вычисления соответствующих изменений показателей качества. С другой стороны, анализ чувствительности необходим, поскольку позволяет отбросить некоторые непригодные варианты законов управления.

#### § 4. Управление неустойчивыми и неминимально-фазовыми объектами

**4.1. Допустимые п. ф. замкнутого контура.** Метод динамической компенсации позволяет выбрать закон управления с обратной связью, основанной на измерении ошибки, таким, что п. ф. замкнутого контура  $H_s(D)$  принимает произвольный желаемый вид  $H_s^d(D)$ . Однако, как было показано в § 3 гл. 3, такой выбор гарантирует устойчивость замкнутой системы, только если объект является устойчивым и минимально-фазовым, т. е. в п. ф. объекта

$$H_{uy}(D) = \frac{\beta(D)}{\alpha(D)} \quad (4.1)$$

многочлены  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$  являются устойчивыми. Поэтому приходится налагать ограничения на класс возможных  $H_s^d(D)$ . Для того чтобы выяснить, как могут повлиять эти ограничения на качество системы управления, напомним прежде всего основные формулы

$$e(t) = [1 - H_s(D)] s(t) + H_s(D) N(t), \quad (4.2)$$

$$u(t) = H_{uy}^{-1}(D) H_s(D) [s(t) + N(t)], \quad (4.3)$$

определяющие характер связи внешних воздействий (сигнала и помехи) с ошибкой и управляющим воздействием.

Поскольку все рассматривавшиеся показатели качества определялись через свойства процессов  $e(t)$  и  $u(t)$ , то любые ограничения на вид  $H_s(D)$  могут повлиять на значения этих показателей только через три п. ф.:

$$H_{se}(D) \triangleq 1 - H_s(D), \quad H_{Ne}(D) \triangleq H_s(D), \quad H_{su}(D) \triangleq H_{uy}^{-1}(D) H_s(D). \quad (4.4)$$

Выразим их непосредственно через многочлены  $k(D)$ ,  $l(D)$ , определяющие п. ф. закона управления

$$H_f(D) = \frac{k(D)}{l(D)}, \quad (4.5)$$

и многочлены  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$ , входящие в п. ф. объекта (4.1). Имеем

$$H_{Ne}(D) = H_s(D) = \frac{H_{uy}(D) H_f(D)}{1 + H_{uy}(D) H_f(D)} = \frac{\beta(D) k(D)}{\Delta(D)}, \quad (4.6)$$

$$H_{se}(D) = 1 - H_s(D) = \frac{\alpha(D) l(D)}{\Delta(D)}, \quad (4.7)$$

$$H_{su}(D) = H_{uy}^{-1}(D) H_s(D) = \frac{\alpha(D) k(D)}{\Delta(D)}, \quad (4.8)$$

где

$$\Delta(p) \triangleq \alpha(p) l(p) + \beta(p) k(p) \quad (4.9)$$

— характеристический многочлен системы.

Отметим также, что три указанные п. ф. линейно выражаются через две дробно-рациональные функции<sup>\*</sup>)

$$H_1(D) \triangleq \frac{k(D)}{\Delta(D)}, \quad H_2(D) \triangleq \frac{l(D)}{\Delta(D)}, \quad (4.10)$$

а именно, имеем

$$H_s(D) = H_{Ne}(D) = \beta(D) H_1(D), \quad H_{se}(D) = \alpha(D) H_2(D), \\ H_{su}(D) = \alpha(D) H_1(D). \quad (4.10')$$

Поскольку многочлены  $\alpha(D)$ ,  $\beta(D)$  заданы, то тем самым все показатели качества могут быть выражены только через две выбираемые функции  $H_1$ ,  $H_2$ . Очевидно, что их нельзя выбирать независимо, так как в силу (4.9), (4.10) они должны удовлетворять тождеству

$$\alpha(D) H_2(D) + \beta(D) H_1(D) = 1. \quad (4.11)$$

Если же  $H_1(D)$ ,  $H_2(D)$  выбраны, то п. ф. закона управления находится немедленно:

$$H_f(D) = \frac{H_1(D)}{H_2(D)}. \quad (4.12)$$

Оказывается, что дело всегда можно свести к выбору только одной определяющей функции. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** Выбор функций  $H_1(D)$ ,  $H_2(D)$ , удовлетворяющих тождеству (4.11) и определяющих в силу (4.12) стабилизирующую обратную связь, ограничен функциями, представимыми в виде

$$H_1(D) = H_1^0(D) - \alpha(D) \Psi(D); \quad H_2(D) = H_2^0(D) + \beta(D) \Psi(D), \quad (4.13)$$

где  $\Psi(D)$  — произвольно выбираемая дробно-рациональная с устойчивым знаменателем, а  $H_1^0(D)$ ,  $H_2^0(D)$  — любая фиксированная пара устойчивых п. ф., также удовлетворяющих (4.11).

**Доказательство.** Всегда можно записать, что

$$H_1 = H_1^0 + \delta H_1, \quad H_2 = H_2^0 + \delta H_2, \quad (4.14)$$

<sup>\*</sup>) Этот прием изложен в соответствии с [4.11].

где  $\delta H_1, \delta H_2$  произвольны \*). Однако для выполнения тождества (4.11) необходимо ограничить произвол условием  $\alpha\delta H_2 + \beta\delta H_1 = 0$ , т. е.

$$\delta H_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \delta H_1.$$

Это условие выполняется, только если

$$\delta H_2 = \beta\Psi, \quad \delta H_1 = -\alpha\Psi, \quad (4.15)$$

где  $\Psi$  — какая-либо дробно-рациональная функция. Запишем ее в виде  $\Psi = P/Q$ . Остается показать, что для формирования стабилизирующей обратной связи необходима устойчивость многочлена  $Q$ .

Пусть  $H_1^0 \triangleq \frac{k^0}{\Delta^0}$ ,  $H_2^0 = \frac{l^0}{\Delta^0}$ , где по условию многочлены  $k^0, l^0, \Delta^0$  должны быть связаны тождеством

$$\Delta^0 = \beta l^0 + \alpha k^0,$$

причем  $\Delta^0$  устойчив. Тогда, согласно (4.12), (4.14), (4.15), имеем

$$H_s = \frac{H_1}{H_2} = \frac{H_1^0 + \delta H_1}{H_2^0 + \delta H_2} = \frac{k^0/\Delta^0 - \alpha P/Q}{l^0/\Delta^0 + \beta P/Q} = \frac{k^0 Q - \alpha P \Delta^0}{l^0 Q + \beta P \Delta^0} \triangleq \frac{k}{l}.$$

Подставляя найденные  $k, l$  в формулу (4.9), убеждаемся, что

$$\Delta = \alpha(l^0 Q + \beta P \Delta^0) + \beta(k^0 Q - \alpha P \Delta^0) = \alpha l^0 Q + \beta k^0 Q = \Delta^0 Q,$$

а следовательно, для устойчивости  $\Delta$  необходима устойчивость  $Q$ . ■

**Следствие. 1.** Если многочлен  $\alpha$  устойчив, то, не уменьшая общности, выбор  $H_s$  можно ограничить заданием

$$H_s = \beta_- \Psi, \quad (4.16)$$

где  $\beta_-$  — совокупность «плохих» сомножителей в  $\beta$ . **2.** Если же устойчив многочлен  $\beta$ , то выбор можно ограничить условием

$$H_s = 1 - \alpha_- \Psi, \quad (4.17)$$

где  $\alpha_-$  — совокупность «плохих» сомножителей в  $\alpha$ . В обоих случаях  $\Psi$  — произвольная функция с устойчивым знаменателем.

**Доказательство.** В случае 1 можно удовлетворить (4.11), положив

$$H_1^0 = 0, \quad H_2^0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда общий вид функций  $H_1, H_2$  таков:

$$H_1 = -\alpha\Psi, \quad H_2 = \frac{1}{\alpha}(1 + \alpha\beta\Psi).$$

Соответственно

$$H_s = -\alpha\beta\Psi, \quad 1 - H_s = 1 + \alpha\beta\Psi.$$

Положив  $\widetilde{\Psi} = -\alpha\beta_+ \Psi$ , получаем

$$H_s = \beta_- \widetilde{\Psi}, \quad 1 - H_s = 1 - \beta_- \widetilde{\Psi}.$$

Поскольку  $x, \beta_+$  устойчивы, то  $\widetilde{\Psi}$  удовлетворяет тем же условиям, что и исходная  $\Psi$ , а следовательно, можно опустить знак «~».

Аналогично рассматривается случай 2. ■

\* Аргументы функций здесь и далее для краткости опущены.

**4.2. Оптимизация на множестве допустимых п. ф.** Рассмотрим далее задачу оптимального выбора закона управления: минимизировать дисперсию ошибки

$$d_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |H_{se}(i\omega)|^2 \bar{S}_s(\omega^2) + |H_{Ne}(i\omega)|^2 S_N(\omega^2) \} d\omega$$

при ограничении

$$d_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{su}(i\omega)|^2 [S_s(\omega^2) + S_N(\omega^2)] d\omega \leq \delta_u^2.$$

Учитывая (4.10'), (4.13), можно выразить показатели через выбранную функцию  $\Psi$ :

$$d_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \frac{H_2^0}{\beta} + \Psi \right|^2 |\alpha\beta|^2 S_s(\omega^2) + \left| \frac{H_1^0}{\alpha} - \Psi \right|^2 |\alpha\beta|^2 S_N(\omega^2) \right\} d\omega,$$

$$d_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H_1^0}{\alpha} - \Psi \right|^2 |\alpha|^4 [S_s(\omega^2) + S_N(\omega^2)] d\omega.$$

Согласно лемме 2.1 перейдем к задаче безусловной минимизации величины

$$\mathcal{L}(\theta) = (1 - \theta)d_e + \theta d_u$$

с выбором согласующего параметра  $\theta = \theta^*$  по условию (2.26).  $\mathcal{L}(\theta)$  представима в виде

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \frac{H_2^0}{\beta} + \Psi \right|^2 \bar{S}_s(\omega^2) + \left| \frac{H_1^0}{\beta} - \Psi \right|^2 \bar{S}_N(\omega^2) \right\} d\omega, \quad (4.18)$$

где введены очевидные обозначения. Задача минимизации  $\mathcal{L}(\theta)$  в основном аналогична рассмотренной в теореме 2.1 и может быть решена с помощью сходного алгоритма, использующего операции факторизации и сепарации.

Для экономии места приведем алгоритм без обоснования (оно аналогично Т.2.1\*) и только для случая, когда объект является устойчивым (случай 1 в следствии).

1. Построить функции

$$\bar{S}_s(\omega^2) = (1 - \theta) S_s(\omega^2) \triangleq \left| \frac{\widetilde{B}_s(i\omega)}{\widetilde{A}_s(i\omega)} \right|^2, \quad (4.19)$$

$$\bar{S}_N(\omega^2) = (1 - \theta) S_N(\omega^2) + \theta \left| \frac{\alpha(i\omega)}{\beta(i\omega)} \right|^2 [S_s(\omega^2) + S_N(\omega^2)] \triangleq \left| \frac{\widetilde{B}_N(i\omega)}{\widetilde{A}_N(i\omega)} \right|^2.$$

\*) При обосновании возникают определенные и непростые проблемы, если функции  $\bar{S}_s, \bar{S}_N$  не убывают при  $\omega^2 \rightarrow \infty$ .

2. С помощью факторизации получить представление

$$\tilde{S}_s(-p^2) + \tilde{S}_N(-p^2) = \frac{\tilde{\Delta}_+(p)\tilde{\Delta}_+(-p)}{\tilde{A}_s(p)\tilde{A}_s(-p)\tilde{A}_N(p)\tilde{A}_N(-p)}. \quad (4.20)$$

3. Произвести сепарацию функции

$$\tilde{Z}(p) = \frac{\beta_-(-p)\tilde{B}_s(p)\tilde{B}_s(-p)\tilde{A}_N(-p)}{\beta_-(p)\tilde{\Delta}_+(-p)\tilde{A}_s(p)} = \tilde{Z}_+(p) + \tilde{Z}_-(p), \quad (4.21)$$

выделяя в  $\tilde{Z}_+(p)$  все простые дроби с «хорошими» полюсами.

4. Приняв

$$H^*(p) = \frac{\beta_-(p)}{\beta_-(-p)} \frac{\tilde{A}_s(p)\tilde{A}_N(p)}{\tilde{\Delta}_+(p)} \tilde{Z}_+(p), \quad (4.22)$$

доопределить входящий в это выражение параметр  $\theta$  согласно условию (2.26).

Если явные ограничения на управление отсутствуют ( $\delta_u \rightarrow \infty$ ), то можно положить  $\theta = 0$ .

**Пример 4.1.** Примем спектральную плотность сигнала в виде

$$S_s(\omega^2) = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} C_s^2, \quad C_s = \text{const.}$$

Предположим также, что помехи отсутствуют,  $S_N = 0$  и нет ограничений на дисперсию управления. Объект является неминимально-фазовым, но устойчивым:

$$H_{uy}(p) = \frac{-p+1}{p^2+3p+1},$$

так что  $\beta_-(p) = -p+1$ .

Будем действовать согласно правилу, приняв  $\theta = 0$ :

1.  $\tilde{S}_s(-p^2) = S_s(-p^2)$ ,  $B_s(p) = C_s(p+1)$ ,  $A_s(p) = (p+2)(p+3)$ ,  $S_N(-p^2) = S_N(-p^2) = 0$ ,  $B_N(p) = 0$ ,  $A_N(p) = 1$ .

2.  $\tilde{\Delta}_+(p) = C_s(p+1) = B_s(p)$ .

3.  $\tilde{Z}(p) = \frac{(p+1) \cdot C_s(p+1)}{(-p+1)(p+2)(p+3)}$ ,  $\tilde{Z}_+(p) = C_s \left[ \frac{1/3}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right] = -C_s \frac{2/3p+1}{(p+2)(p+3)}$ .

4.  $H_s^*(p) = -\frac{(-p+1)(2/3p+1)}{(p+1)^2}$ .

Вычислим соответствующее этой п. ф. значение дисперсии ошибки

$$D_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - H_s^*(p)|_{p=i\omega}^2 S_s(\omega^2) d\omega = \\ = \frac{C_s^2}{2\pi} \int_{+\infty}^{\infty} \left| \frac{1/3p^2 + 5/3p + 2}{(p+1)(p+2)(p+3)} \right|^2_{p=i\omega} d\omega.$$

Это стандартный интеграл типа (1.27) при  $n = 3$ . Используя его выражение через коэффициенты многочленов, получаем  $D_e^* = 0,076C_s^2$ .  $\square$

Ясно вместе с тем, что это значение практически недостижимо, поскольку при найденной  $H_s^*(p)$  дисперсия управления оказывается неограниченной. Пример 4.1 приведен лишь для того, чтобы продемонстрировать общий вывод.

**Вывод:** даже при отсутствии ограничений на управление и идеальной точности измерения ошибка неминимально-фазовая объекта не позволяет достичь инвариантности.

Более содержательный пример дан в следующем § 5.

Здесь же кратко остановимся на возможностях, возникающих в том случае, когда наряду с измерениями ошибки имеются измерения выхода  $y(t)$ . С помощью внутренней обратной связи по  $y(t)$  неустойчивый объект может быть стабилизирован, хотя неминимально-фазовость неустранима. Поэтому при  $\beta(p)$  устойчивом,  $\alpha(p)$  неустойчивом допустима следующая процедура.

1. Выбрать произвольную стабилизирующую внутреннюю обратную связь.

2. Найти в соответствии с правилами § 2 оптимальную п. ф.  $H_s^*(D)$ , не учитывая каких-либо ограничений на ее структуру.

3. Применить метод компенсации для формирования внешней обратной связи (обратной связи по ошибке).

Если ограничения на управление отсутствуют или заранее фиксировано значение согласующего параметра  $\theta$  в минимизируемом выражении  $\mathcal{L}_e$ , то минимальный уровень  $\mathcal{L}_e$  не зависит от выбора внутренней обратной связи (см., например, [4.11]).

Если же явно задано ограничение  $D_u \leq \delta_u^2$  с фиксированным  $\delta_u$ , то проблема существенно усложняется, поскольку корень уравнения  $D_u = \delta_u^2$  может зависеть от вида внутренней связи, а следовательно, от нее может зависеть и достижимая точность.

## § 5. Регулирование угловой скорости вала гидравлической турбины

Задача регулирования гидравлической турбины была одной из первых технических проблем, исследованных с помощью методов теории автоматического управления многими авторами, начиная с А. Стодолы, и до сих пор представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. На ее примере продемонстрируем ряд особенностей применения общих методов к конкретным проблемам.

**5.1. Описание системы. Линеаризация.** Принцип действия объекта управления можно понять из схематического рис. 4.3. Плотина 3 создает перепад уровня воды между верхним 1 и нижним 2 бье-

фами. Поток воды подводится к турбине по закрытому каналу (водоводу) 4 и через спиральную камеру. Набегая на лопасти рабочего колеса 5, поток создает движущий момент, приложенный к вращающемуся валу 8. Вал турбины жестко связан с ротором синхронного гидрогенератора 7, вырабатывающего электроэнергию, отдаваемую в электроэнергосистему. Управление потоком осуществляется с помощью направляющего аппарата 6, выполняющего как функции заслонки, вентиля, так и чисто гидродинамические задачи изменения поля скоростей потока. Лопатки направляющего аппарата могут поворачиваться, в большей или меньшей мере открывая доступ воды к турбине, причем поворот осуществляется гидравлическим двигателем (сервомотором).

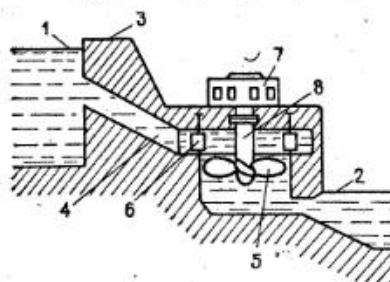


Рис. 4.3

Опишем динамические свойства гидротурбины как объекта управления. В качестве управляющего воздействия будем рассматривать поворот лопаток направляющего аппарата или его открытие  $\alpha(t)$ , а управляемым процессом считать угловую скорость вала  $\omega(t)$ .

Уравнение движения вала турбины (вместе с ротором генератора) можно записать в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_d - m_c, \quad (5.1)$$

где  $J$  — момент инерции,  $m_d$  — движущий момент,  $m_c$  — момент сопротивления. Движущий момент определяется соотношением

$$m_d(t) = k_n \frac{P_d(t)}{\omega(t)},$$

где  $P_d(t)$  — мощность потока воды, затрачиваемая на вращение турбины, а  $k_n$  — коэффициент полезного действия. В свою очередь, в силу законов гидравлики

$$P_d(t) = h(t)Q(t), \quad m_d = k_n \frac{hQ}{\omega}, \quad (5.2)$$

где  $h(t)$  — перепад давления на турбине, а  $Q(t)$  — расход воды через турбину, связанный с  $h(t)$  и открытием направляющего аппарата следующим образом:

$$Q(t) = C\alpha(t)\sqrt{h(t)}, \quad C = \text{const.} \quad (5.3)$$

Для оценки перепада давления введем гипотезу несжимаемости жидкости\*) и воспользуемся уравнением Ньютона для столба жидкости,

\*) По поводу учета сжимаемости см., например, [4.1, т. 2, с. 18]. Соотношение (5.3) иногда заменяют более точной экспериментальной характеристикой турбины.

заключенного в водоводе. Пусть  $M$  — масса столба,  $v(t)$  — скорость потока. Тогда, не принимая во внимание сил сопротивления, можно записать

$$\frac{d}{dt}(Mv(t)) = F(\bar{p} - p_1(t)), \quad (5.4)$$

где  $F$  — площадь сечения,  $\bar{p}$  — постоянное давление на верхнем конце водовода, а  $p_1(t)$  — давление перед направляющим аппаратом. Пусть  $\rho$  — плотность воды,  $L$  — длина водовода; тогда

$$M = FL\rho, \quad Q(t) = Fv(t).$$

Кроме того, учтем, что по определению

$$h(t) = p_1(t) - \underline{p}, \quad (5.5)$$

где  $\underline{p}$  — постоянное давление за турбиной. С учетом введенных обозначений исходное уравнение перепишется в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{F}{L\rho}(\bar{p} - \underline{p} - h). \quad (5.6)$$

Система соотношений (5.2), (5.3), (5.6) определяет связь движущего момента  $m_d$  с открытием  $\alpha$  и угловой скоростью  $\omega$ . Момент сопротивления  $m_c$  создается как за счет механического сопротивления, так и, главным образом, за счет электромагнитных сил, противодействующих вращению ротора. Эти силы зависят от электрической нагрузки  $P_a$  на сеть и частоты тока в сети, пропорциональной угловой скорости ротора. Будем считать, что известна зависимость

$$m_c = m_c(P_a, \omega), \quad (5.7)$$

вообще говоря, нелинейная. Нелинейны и приведенные выше соотношения для движущего момента.

Для того чтобы применить линейную теорию, выдвинем гипотезу: все процессы в объекте происходят в малой окрестности некоторого равновесного режима, в котором все введенные выше величины принимают постоянные значения

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0, & Q(t) &= Q_0, & h(t) &= h_0, & m_d(t) &= m_{d0}, \\ m_c(t) &= m_{c0}, & P_a(t) &= P_{a0}, \end{aligned}$$

причем выполнены условия

$$m_{d0} - m_{c0} = 0, \quad \bar{p} - \underline{p} - h_0 = 0, \quad m_{d0} = k_n \frac{h_0 Q_0}{\omega_0}, \quad (5.8)$$

$$Q_0 = c\sqrt{h_0}\alpha_0, \quad m_{c0} = m_c(P_{a0}, \omega_0),$$

а  $\omega_0$  соответствует желаемому значению угловой скорости.

Введем также относительные переменные

$$y = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \eta = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad q = \frac{Q - Q_0}{Q_0}, \quad \mu_c = \frac{m_c - m_{c0}}{m_{c0}},$$

$$\mu_d = \frac{m_d - m_{d0}}{m_{d0}}, \quad u = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}, \quad w = \frac{P_n - P_{n0}}{P_{n0}}.$$

В силу принятой гипотезы все относительные переменные принимают малые (по сравнению с 1) значения, а их квадраты, произведения и более высокие степени являются еще меньшими величинами. Поэтому представляется возможной линеаризация всех ранее приведенных нелинейных функций. Для линеаризации, во-первых, выразим все исходные переменные через соответствующие относительные, во-вторых, разложим все нелинейные функции в ряд Тейлора, удерживая только слагаемые 1-го порядка. Из (5.2) получаем линеаризованное соотношение путем следующих преобразований:

$$m_{d0}(1 + \mu_d) = k_n \frac{h_0(1 + \eta) Q_0(1 + q)}{\omega_0(1 + y)} \cong k_n \frac{h_0 Q_0}{\omega_0} (1 + \eta + q - y),$$

или, с учетом (5.8)\*),

$$\mu_d = \eta + q - y. \quad (5.9)$$

Аналогично из (5.3) имеем

$$Q_0(1 + q) = C\alpha_0(1 + u) \sqrt{h_0(1 + \eta)} \cong C\alpha_0 \sqrt{h_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \eta + u \right),$$

так что, вновь учитывая (5.8),

$$q = \frac{1}{2} \eta + u. \quad (5.10)$$

Наконец линеаризуем (5.7):

$$\begin{aligned} m_c(P_n, \omega) &= m_c [P_{n0}(1 + w), \omega_0(1 + y)] \cong \\ &\cong m_{c0}(P_{n0}, \omega_0) + \left( \frac{\partial m_c}{\partial P_n} \right)_0 P_{n0} w + \left( \frac{\partial m_c}{\partial \omega} \right)_0 \omega_0 y, \end{aligned}$$

откуда

$$\mu_c = h_{cw} \omega + h_{cy} y, \quad (5.11)$$

где

$$h_{cw} = \left( \frac{\partial m_c}{\partial P_n} \right)_0 \frac{P_{n0}}{m_{c0}}, \quad h_{cy} = \left( \frac{\partial m_c}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\omega_0}{m_{c0}}.$$

\*) Далее знак приближенного равенства всюду заменяем на точное, принимая за основу линеаризованные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения (5.1), (5.6) также выражим через относительные переменные

$$J \frac{\omega_0}{m_{d0}} \frac{dy}{dt} = \mu_d - \mu_c, \quad (5.12)$$

$$\frac{L\rho Q_0}{h_0 F} \frac{dq}{dt} = -\eta. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.9), (5.11) в (5.12) и вводя обозначения\*!:

$$T = \frac{J\omega_0}{m_{d0}(1 + h_{cy})}, \quad k_u = \frac{1}{1 + h_{cy}}, \quad k_w = \frac{h_{cw}}{1 + h_{cy}}, \quad T_w = \frac{L\rho Q_0}{h_0 F},$$

получим систему уравнений объекта в виде

$$(TD + 1)y = k_u(\eta + q) - k_w w, \quad T_w Dq = -\eta, \quad q = \frac{1}{2}\eta + u, \quad (5.14)$$

где использован оператор дифференцирования  $D$ .

После исключения промежуточных неизвестных  $q$ ,  $\eta$  можно записать одно уравнение в стандартной операторной форме

$$y(t) = H_{uy}(\mathbf{D})u(t) + H_{wy}(\mathbf{D})w(t), \quad (5.15)$$

где введены п. ф. объекта по управлению

$$H_{uy}(\mathbf{D}) = k_u \frac{1 - T_w \mathbf{D}}{(1 + TD)\left(1 + \frac{1}{2}T_w \mathbf{D}\right)}, \quad (5.16)$$

и по возмущению

$$H_{wy}(\mathbf{D}) = -\frac{k_w}{1 + TD}. \quad (5.17)$$

Очевидно, что объект является неминимально-фазовым.

5.2. Синтез закона управления. Поставим теперь задачу синтеза закона управления, предполагая первоначально, что

а) доступен сигнал  $y(t)$ , т. е. датчик дает неискаженную помехами информацию о текущих значениях угловой скорости  $\omega(t)$  или ее отклонений от равновесного значения  $\omega_0$ ;

б) возможно формирование любой линейной обратной связи вида  $u(t) = -H_f(\mathbf{D})y(t)$ ;

в) возмущение  $w(t)$  (изменение нагрузки) является стационарным случайным процессом с заданной спектральной плотностью  $S_w(\omega^2)$ .

Поясним смысл последнего предположения. Электрическая нагрузка на агрегат является суммой нагрузок, создаваемых многими потребителями электроэнергии. Некоординируемые между собой включения или отключения различных потребителей определяют

\*) Величины  $T$ ,  $T_w$  обычно называют постоянными временем турбины и водовода,

хаотический характер изменения суммарной нагрузки. Возможность ее рассмотрения как случайного процесса подтверждена многими специальными исследованиями\*) (см., например, [4.6]). Естественно также ввести дополнительное предположение, что процесс изменения нагрузки является процессом типа «кенгуру», описанным в § 4, где каждый скачок соответствует подключению или отключению какого-либо потребителя, а длительности интервалов между скачками взаимно независимы. Поэтому примем, что

$$S_w(\omega^2) = \frac{2\lambda_w}{\omega^2 + \lambda_w^2} d_{w\epsilon} \quad (5.18)$$

где  $\lambda_w^{-1} \triangleq \tau$  имеет смысл математического ожидания времени между скачками нагрузки.

Поскольку желаемым значением управляемой переменной  $y(t)$  является  $y^* = 0$  (напомним, что желательно поддерживать исходное равновесное значение угловой скорости вала несмотря на наличие возмущений), то из общей формулы (см. § 2 гл. 3)

$$s(t) = y^* - H_{wy}(D) w(t) = -H_{wy}(D) w(t) \quad (5.19)$$

и правила линейного преобразования стационарных случайных процессов следует выражение спектральной плотности сигнала

$$S_s(\omega^2) = |H_{wy}(i\omega)|^2 S_w(\omega^2). \quad (5.20)$$

Кроме того, по предположению

$$S_N(\omega^2) = 0. \quad (5.21)$$

Напомним также, что объект является неминимально-фазовым. Поэтому следует применить методику, описанную в § 4. Если ограничения на управление отсутствуют, то в основном правиле можно положить  $\theta = 0$ . Опуская стандартные выкладки, приведем лишь окончательный результат — вид оптимальной п. ф. замкнутого контура:

$$H_s^*(p) = \frac{1 - T_w p}{1 + T_w p} (\gamma_1 p + \gamma_0), \quad (5.22)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\tau T}{\tau - T} \left[ \frac{\tau - T_w}{\tau + T_w} - \frac{T - T_w}{T + T_w} \right],$$

$$\gamma_0 = \frac{\tau T}{\tau - T} \left[ \frac{\tau - T_w}{T(\tau + T_w)} - \frac{T - T_w}{\tau(T + T_w)} \right].$$

\*) На самом деле проблема значительно сложнее, поскольку в реальных электроэнергетических системах существует большое количество агрегатов, и нагрузка перераспределяется между ними. Сам процесс изменения нагрузки помимо случайной составляющей имеет и прогнозируемую (суточные и сезонные циклы).

Соответствующее выражение для п. ф. закона управления можно записать в форме

$$H_f(p) = \frac{(1 + T_w p) \left( 1 + \frac{1}{2} T_w p \right) (\gamma_1 p + \gamma_0)}{k_u [\gamma_1 T_w p^2 + (T_w \gamma_0 - \gamma_1 + T_w) p + 1 - \gamma_0]}. \quad (5.23)$$

Произведем анализ этого результата. Отметим сначала, что при  $\tau/T \rightarrow \infty, \tau/T_w \rightarrow \infty$  получаем

$$\gamma_1 \rightarrow \frac{2TT_w}{T + T_w}, \quad \gamma_0 \rightarrow 1,$$

так что

$$H_s^*(p) \rightarrow \frac{1 - T_w p}{1 + T_w p} (\gamma_1 p + 1), \quad H_s^*(0) \rightarrow 1.$$

Таким образом, желаемая п. ф. при очень редких переключениях нагрузки близка к астатической, что естественно, поскольку астатизм — средство борьбы с постоянными возмущениями. Нетрудно найти асимптотическое выражение

$$d_e = \frac{1}{\tau} \frac{4k_w^2 T_w^5}{T^2 (T + T_w)^2} d_w + o\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (5.24)$$

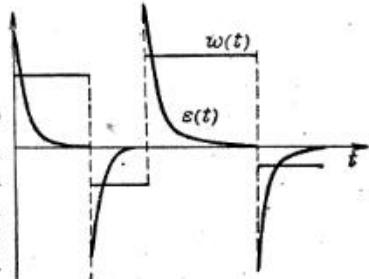


Рис. 4.4

Таким образом, при редких переключениях оптимальная система управления успевает хорошо отработать каждый скачок нагрузки и почти все время система работает с почти нулевой ошибкой (рис. 4.4). Тем не менее полученное решение неприемлемо ни с теоретической, ни с практической точки зрения. Во-первых,  $H_s^*(p)$ , даваемая (5.22), не является строго реализуемой, а потому неустойчива с точки зрения основного определения. Во-вторых, что более существенно, ее реализация требует неограниченных управляющих воздействий. Действительно, по стандартной формуле имеем

$$u(t) = H_{wy}^{-1}(D) H_s(D) \cdot s(t) = -H_{wy}^{-1}(D) H_s(D) H_{wy}(D) w(t). \quad (5.25)$$

Если принять  $H_s(D) = H_s^*(D)$ , то

$$u(t) = \frac{k_w}{k_u} \frac{1 + TD}{1 + T_w D} (\gamma_1 D + \gamma_0) w(t). \quad (5.26)$$

Таким образом, п. ф. преобразования  $w(t) \rightarrow u(t)$  также не является строго реализуемой, и при скачках нагрузки в управлении возникает импульсная компонента. Установившаяся дисперсия  $u(t)$

оказывается неограниченной. Как было указано в § 3, можно избавиться от этой неприятности, введя в п. ф. закона управления (5.26) «регуляризующий» множитель вида  $\rho^{-1}(\mu p)$ , где  $\mu$  — малая положительная величина (см. (3.31)), т. е. добавить малые постоянные времени, делающие п. ф. строго реализуемой. При этом дисперсия ошибки изменится мало, а дисперсия управления станет ограниченной. Однако она имеет порядок  $\mu^{-1}$ , т. е. является хотя и конечной, но большой. Большой окажется и скорость изменения управления.

**5.3. Синтез с учетом ограничений.** Величина управляющего воздействия — открытия направляющего аппарата — не превосходит единицы. Более того, скорость поворота лопастей направляющего аппарата не может быть большой как в силу сложности создания соответствующего двигателя\*), так и в силу физических особенностей самого объекта. Интуитивно ясно, что попытка резко «задвинуть заслонку» на пути набегающего потока жидкости вызовет его торможение, а следовательно, повышение давления перед «заслонкой». Это повышение, обычно называемое *гидравлическим ударом*, может быть настолько большим, что вызовет поломку либо самой «заслонки», т. е. направляющего аппарата, либо стенок камеры, из которой к нему подходит вода.

Таким образом, грамотная постановка задачи выбора оптимального закона управления должна включать ограничения на  $u(t)$ ,  $\dot{u}(t) = Du(t)$  и изменение давления  $\eta(t)$ .

Из (5.14) можно найти, что

$$\eta(t) = - \frac{T_w}{1 + \frac{1}{2} T_w D} Du(t), \quad (5.27)$$

т. е. изменение давления связано со скоростью управления  $\dot{u}(t)$  инерционным звеном. Ограничив  $\dot{u}(t)$ , мы заранее ограничим и более «плавный» процесс  $\eta(t)$ . Поэтому для упрощения задачи учтем только ограничения на  $\dot{u}(t)$ .

Ввиду случайного характера изменения возмущения (нагрузки), выход объекта меняется случайным образом, а следовательно, случайно и изменение управляющего воздействия, построенного на основе измерений выхода. Поэтому при принятой гипотезе о характере изменения нагрузки возможно дать лишь вероятностные гарантии того, что

$$|\dot{u}(t)| \leq \bar{v}, \quad (5.28)$$

где  $\bar{v}$  — заданный допуск. Воспользовавшись правилом «3б», это ограничение можно свести к ограничению на дисперсию  $\dot{u}(t)$ :

$$d_{\dot{u}} \leq \left( \frac{1}{3} \bar{v} \right)^2 \triangleq \delta_{\bar{v}}^2. \quad (5.29)$$

\*). Для закрытия направляющего аппарата за одну секунду в больших современных гидротурбинах потребовалась бы мощность порядка 1000 кВт,

Запишем выражение  $d_{\dot{u}}$  через п. ф. замкнутого контура  $H_s(p)$  в виде стандартного интеграла

$$d_{\dot{u}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_s(i\omega)|^2 |H_{uy}(i\omega)|^{-2} S_s(\omega^2) d\omega, \quad (5.30)$$

где введена  $H_{uy}(p)$  — п. ф. преобразования  $\dot{u}(t) \rightarrow y(t)$ , которую можно представить в виде

$$H_{uy}(p) = \frac{k_u}{p} \frac{(1 - T_w p)}{(1 + T_w p)(1 + 1/2T_w p)}. \quad (5.31)$$

Согласно общей методике, составим «компромиссное» выражение

$$\mathcal{L}_\theta = (1 - \theta) d_e + \theta d_{\dot{u}},$$

где  $0 < \theta \leq 1$ , выберем в дальнейшем так, чтобы выполнялось (5.29). Это выражение можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |1 - H_s(i\omega)|^2 \tilde{S}_s(\omega^2) + |H_s(i\omega)|^2 \tilde{S}_N(\omega^2) \} d\omega, \quad (5.32)$$

где

$$\tilde{S}_s(\omega^2) = (1 - \theta) S_s(\omega^2), \quad \tilde{S}_N(\omega^2) = \theta |H_{uy}(i\omega)| S_s(\omega^2).$$

При минимизации следует учесть, что выбор  $H_s(p)$  ограничен классом функций вида

$$H_s(p) = \beta_-(p) \Psi(p),$$

где  $\beta_-(p)$  — «плохой»омножитель в п. ф. объекта. В данной задаче  $\beta_-(p) = 1 - T_w p$ .

Вновь, не повторяя выкладок, проводимых согласно основному правилу из § 4, приведем результат:

$$H_s^*(p) = \frac{(1 - T_w p)(\bar{\gamma}_1 p + \bar{\gamma}_0)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (5.33)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  — положительные постоянные, определяемые из фактоизационного тождества

$$1 - T_w^2 p^2 - \frac{\theta}{(1 - \theta) k_u} p^2 (1 - T_w^2 p^2) \left( 1 - \frac{1}{4} T_w^2 p^2 \right) = \\ = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(-T_1 p + 1)(-T_2 p + 1)(-T_3 p + 1),$$

а  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_0$  находятся в ходе процедуры сепарации и

$$\bar{\gamma}_1 = A_1 + A_2, \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{A_1}{\tau} + \frac{A_2}{T},$$

где

$$A_1 = \frac{1 - T_w/T}{(1 + T_1/T)(1 + T_2/T)(1 + T_3/T)\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)^*},$$

$$A_2 = \frac{1 - T_w/\tau}{(1 + T_1/\tau)(1 + T_2/\tau)(1 + T_3/\tau)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau}\right)}.$$

Для вычисления согласующей константы  $\theta = \theta^*$  следует решить уравнение \*)

$$d_u^* = \delta_v^2, \quad (5.34)$$

причем левая часть является функцией  $\theta$ , заданной неявно с помощью (5.30), (5.31), (5.33) и формул, определяющих связь параметров  $H_s^*(p)$  с  $\theta$ . Такое уравнение разрешимо численными методами при конкретно заданных значениях исходных параметров объекта, спектральной плотности нагрузки и допуска  $\bar{v}$ . Однако для понимания смысла результата полезно получить хотя бы приближенное решение, но в явной форме.

Предположим заранее, что

$$\lambda T \ll 1, \quad \lambda T_w \ll 1, \quad (5.35)$$

где

$$\lambda \triangleq \sqrt{\frac{(1 - \theta^*) k_u}{\theta^*}} > 0.$$

Тогда можно дать приближенные оценки констант, входящих в  $H_s^*(p)$ ,

$$T_1 \approx \frac{1}{\lambda}, \quad T_2 \approx T, \quad T_3 \approx \frac{T_w}{2}.$$

Дополнительно предположим, что

$$\tau \gg \frac{1}{\lambda}, \quad (5.36)$$

т. е. ожидаемое время между скачками нагрузки является очень большим по сравнению с постоянной времени объекта. Тогда  $\gamma_0 \approx 1$ ,  $\gamma_1 \approx T$ .

При таких предположениях

$$H_s^*(p) \sim \frac{1 - T_w p}{(1 + 1/\lambda p)\left(1 + \frac{T_w}{2} p\right)}. \quad (5.37)$$

\*) В силу правила (2.26) возможен и случай, когда  $\theta = 0$ ,  $d_u^* < \delta_v^2$ , но в данной задаче эти два соотношения заведомо несовместны: из  $\theta = 0$  следует  $d_u^* \rightarrow \infty$ .

Именно выражение в правой части и примем за желаемую п. ф. замкнутого контура  $H_s^d(p)$  при соответствующем подборе единственного оставшегося не определенным параметра  $\lambda$ .

Подстановка в (5.30) функции

$$H_s(i\omega) = H_s^d(i\omega)$$

приводит после вычисления стандартного интеграла к явной записи уравнения (5.34):

$$\frac{\lambda^2 d_w k_v^2}{(1 + \lambda\tau) k_u^2} = \delta_v^2$$

или, при учете (5.36),

$$\lambda = \frac{k_u^2}{k_w^2} \frac{\delta_v^2}{d_w} \tau. \quad (5.38)$$

Отметим, что гипотеза (5.36) означает

$$\lambda\tau = \frac{k_u^2}{k_w^2} \frac{\delta_v^2}{d_w} \tau^2 \gg 1.$$

Иначе говоря, предшествующие упрощения верны только в том случае, когда

$$\tau \gg \frac{\sqrt{d_w}}{\delta_v} \cdot \frac{k_w}{k_u} = \frac{3 \sqrt{d_w}}{\bar{v}} \cdot \frac{k_w}{k_u}, \quad (5.39)$$

т. е. при сравнительно малой интенсивности колебаний нагрузки или широком допуске на предельную скорость изменения управляющего воздействия.

Теперь желаемая п. ф. замкнутого контура полностью определена, а тем самым по методу компенсации можно найти и п. ф. закона управления

$$H_I(D) = \frac{1}{H_{uy}(D)} \frac{H_s^*(D)}{1 - H_s^*(D)} = \frac{1 + TD}{D} \frac{\lambda}{k_u}, \quad (5.40)$$

где при вычислениях вновь использовано упрощающее предположение, что  $\lambda T_w \ll 1$ .

**5.4. Техническая реализация.** При построении закона управления в виде (5.40) мы исходили из предположения, что доступен сигнал  $y(t)$ , безошибочно отражающий текущее значение угловой скорости, и возможно изменение открытия направляющего аппарата в соответствии с требуемым законом. Техническая реализация должна быть такой, чтобы эти предположения выполнялись хотя бы приближенно.

Для создания высокоточного датчика изменения угловой скорости возможно, например, применение следующей идеи\*). С валом турбины непосредственно связывается ротор специального измерительного синхронного генератора с постоянными магнитами. Частота напряжения, вырабатываемого этим генератором, соответствует угловой скорости ротора. Это напряжение подается на резонансный контур, выполненный из высокостабильных элементов, причем настройка контура производится так, что желаемой частоте (желаемой скорости вращения  $\omega_0$ ) соответствует точка на склоне резонансного пика частотной характеристики (рис. 4.5).

Даже малые изменения частоты приводят к существенным изменениям амплитуды тока в контуре. После выпрямления и сглаживания получается электрический сигнал  $u_e$ , с достаточно высокой точностью пропорциональный отклонению угловой скорости от желаемой, или, что то же самое, пропорциональной относительной переменной  $y$ . Примем, что

$$u_e = -k_e y. \quad (5.41)$$

Сигнал  $u_e$  подвергается преобразованию в аналоговом вычислительном устройстве (ВУ). На выходе ВУ получим вновь маломощный сигнал с напряжением  $u_b(t)$ . Однако требуется с помощью этого сигнала управлять открытием направляющего аппарата, преодолевая очень большие усилия. Практически необходимо усиление мощности обеспечивается за счет гидравлического двигателя, который сам по себе является системой с обратной связью. Кратко опишем его действие, поскольку такие системы широко применяются и в других областях техники, например, при управлении самолетами, судами, манипуляторами.

Собственно гидромотор представляет собой цилиндр с движущимся в нем поршнем (рис. 4.6, а). Если жидкость под высоким давлением  $p_n$  подведена в одну полость, а другая связана со сливным баком (давление  $p_0 \ll p_n$ ), то к поршню прикладывается сила  $F_n(p_n - p_0)$  ( $F_n$  — площадь поршня). Для изменения направления движущей силы производится переключение подвода с помощью золотникового распределителя (рис. 4.6, б). При смещении иглы золотника относительно его корпуса открываются окна, через которые полости цилиндра связываются либо с магистралью высокого давления, либо со сливом. Расход жидкости пропорционален открытию этих окон  $\sigma$ . Поскольку рабочая жидкость (масло) практически

\*). Здесь и далее описание технической реализации в основном следует принципам построения электрогидравлического регулятора скорости турбин Ленинградского металлического завода. Использование цифровых датчиков и микро-ЭВМ открывает и иные возможности.

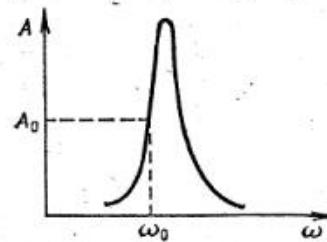


Рис. 4.5

имеет небольшую вязкость, то она должна свободить себе место, сдвинув поршень как раз настолько, чтобы увеличить объем полости на объем втекающей жидкости. Таким образом, скорость смещения поршня пропорциональна расходу масла, а следовательно, открытию окон. Шток сервомотора связан с лопастями направляющего аппарата жесткой кинематической передачей. Поэтому можно считать, что

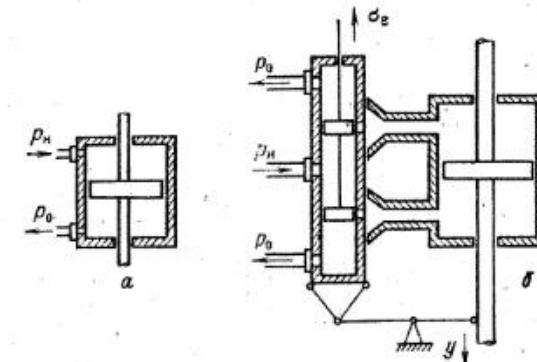


Рис. 4.6

относительное смещение штока совпадает с относительным открытием направляющего аппарата, и записать формулу

$$\frac{du}{dt} = k_\sigma \sigma, \quad (5.42)$$

где  $k_\sigma$  — коэффициент, определяемый конструкцией (прежде всего перепадом давления  $p_n - p_0$ )\*).

Если (рис. 4.6) корпус золотника связан со штоком гидромотора рычажной передачей, то

$$\sigma = \sigma_e - ry, \quad (5.43)$$

где  $\sigma_e$  — абсолютное перемещение иглы, отсчитываемое от неподвижного основания, а  $r$  — отношение плеч рычага. Подставляя (5.43) в (5.42) и переходя к операторной записи, получим

$$u = \frac{1/r}{T_s D + 1} \sigma_e, \quad T_s = \frac{1}{k_\sigma r}. \quad (5.44)$$

На перемещение иглы золотника необходимо затрачивать лишь малые усилия. Поэтому перемещение может быть осуществлено с помощью относительно маломощной и почти безынерционной системы, состоящей из электронного усилителя мощности с коэффициентом усиления по напряжению  $k_u$  и электромагнита, причем на вход усилителя можно непосредственно подать сигнал  $u_b(t)$  от ВУ,

\*). На самом деле  $k_\sigma$  зависит и от внешней нагрузки, в том числе инерционной, но при больших силах, создаваемых перепадом, можно считать  $k_\sigma = \text{const}$ .

считая  $\sigma_e = k_u u_{\text{в}}$ . Остается выяснить лишь вид преобразования, которое должно осуществлять ВУ.

Передаточная функция преобразования измеряемого процесса  $-y(t)$  в управляющее воздействие  $u(t)$ , т. е. п. ф. тракта датчик — ВУ — исполнительное устройство, имеет вид:

$$k_e H_{\text{ВУ}}(D) \frac{k_u^{1/r}}{T_s D + 1},$$

где  $H_{\text{ВУ}}(D)$  — п. ф. ВУ.

Вместе с тем п. ф. всего преобразования, как было установлено выше, является оптимальной, если она дается формулой (5.40). Для обеспечения оптимальности достаточно выбрать  $H_{\text{ВУ}}(D)$  равным

$$H_{\text{ВУ}}(D) = \frac{r}{k_u k_B} (T_s D + 1) \frac{1 + TD}{D} \frac{\lambda}{k_u}, \quad (5.45)$$

или

$$H_{\text{ВУ}}(D) = k_0 u + k_D Du + k_I \frac{1}{D} u, \quad (5.46)$$

где

$$k_0 = (T_s + T) k_I, \quad k_D = T_s T k_I, \quad k_I = r \lambda / (k_u k_s k_u)^{-1}.$$

Построение аналогового ВУ, реализующего этот стандартный ПИД-закон управления, не вызывает практических затруднений.

**5.5. Выводы.** Оценим значение дисперсии ошибки регулирования, достигаемое при использовании этого закона.

Вновь вычислим стандартный интеграл

$$d_e^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - H_a^*(i\omega)|^2 S_s(\omega^2) d\omega,$$

находим (при предположениях (5.36)), что

$$d_e^* \cong \frac{k_w^2 d_w}{\lambda^2} = \frac{k_w^2}{k_u^2} \frac{k_w^2 d_w^2}{\delta_v^2 \tau^2}. \quad (5.47)$$

Таким образом, достижимая точность регулирования определяется а) ожидаемой интенсивностью изменений нагрузки  $\bar{V}d_w$ , б) ожидаемой частотой  $1/\tau$  скачков нагрузки, в) статическими характеристиками объекта  $k_u$ ,  $k_w$ , г) допуском на возможную скорость управления.

Остановимся подробнее на последнем факторе.

Как уже указывалось, скорость управления ограничена в силу двух обстоятельств: во-первых, конструктивно, а во-вторых, из-за возможности гидравлического удара. Согласно (5.42) предельная скорость штока сервомотора равна  $k_e \sigma$ , где  $\sigma$  — полное открытие окон золотника, а  $k_e$  зависит от многих обстоятельств и в частности — от перепада давления масла, создаваемого напорной установкой. Поэтому, в конечном счете, конструктивные ограничения на

скорость управления определяются мощностью напорной установки, а значит, предельным расходом масла через окна, умноженным на перепад давления («напор»).

**Вывод 1.** Достижимая точность регулирования зависит от энергетических характеристик исполнительного устройства.

Рассмотрим теперь второе обстоятельство.

При упрощающих предположениях (5.36) нетрудно оценить, что

$$\sqrt{d_e} \approx T_w \sqrt{d_w}, \quad (5.48)$$

где  $d_e$  — дисперсия относительных колебаний давления.

Если требованиями к прочности конструкции направляющего аппарата и камеры ограничена предельная величина  $\bar{\eta}$  колебаний, то соответственно ограничена и  $d_e$ , а следовательно, задан и допуск  $\delta_e$  на среднеквадратичное изменение скорости управления

$$\delta_e = \frac{u_0}{h_0 T_w} \cdot \frac{\bar{\eta}}{3} \quad (5.49)$$

(если, конечно, использовано «правило З»). Если этот допуск жестче, чем конструктивный, т. е.

$$\frac{u_0}{h_0 T_w} < k_e \bar{\sigma}, \quad (5.50)$$

то именно он должен приниматься во внимание при расчете и входить в формулу для достижимой точности.

**Вывод 2.** Достижимая точность регулирования может зависеть от прочностных характеристик конструкции самого объекта.

В заключение отметим, что описанная в данном параграфе методика типична для технических приложений теории управления. Характерной является процедура постепенного уточнения постановки задачи оптимизации закона управления с выявлением новых существенных факторов. Она отражает и обычный диалог между специалистом, более «сведущим» в формально-математических вопросах, и специалистом, лучше понимающим технические аспекты, но способным воспринимать только конечные результаты расчетов. В то же время конкретный полученный результат — закон управления (5.45), — конечно, не следует рассматривать как окончательную рекомендацию к проектированию регуляторов гидротурбин, именно потому, что многие, очень важные особенности технической реализации при его построении не были учтены.

## ГЛАВА 5

### ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ТЕОРИЮ

#### § 1. Необходимость нелинейной теории и ее возможности

**1.1. Нелинейные эффекты.** Проведя аккуратный анализ поведения объекта управления и рассчитав необходимые законы управления на основе линейной теории, инженер может столкнуться с неожиданными неприятностями при реализации системы на основе проведенных расчетов. Свойства «собранной» системы или ее экспериментального макета, построенного на реальных элементах, могут качественно существенно отличаться от расчетных.

Предполагалось, что система является устойчивой, а на самом деле наблюдаются незатухающие колебания. Предполагалось, что система будет с малой ошибкой отслеживать задающее воздействие, а на самом деле ошибка оказывается значительно большей или даже неограниченно возрастает (объект слежения «теряется из виду»). Предполагалось, что переходный процесс занимает короткое время, а в действительности он оказывается существенно более затянутым.

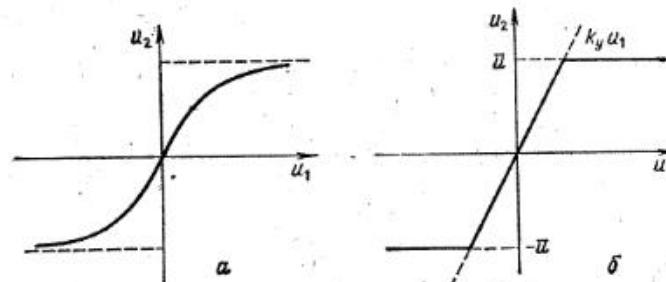


Рис. 5.1

Система проектировалась как астатическая, а в ней наблюдается установившаяся ошибка. Причина всех этих неприятностей — не соответствие свойств реальных элементов их линейной модели, принятой при расчете. Приведем примеры.

1. Все «линейные» усилители на самом деле имеют ограниченную зону, где зависимость между входным, усиливаемым воздействием и выходом сходна с линейной. За пределами этой зоны на-

блюдается насыщение: выход  $u_2(t)$  остается ограниченным, несмотря на рост входа  $u_1(t)$ . Типичная зависимость представлена на рис. 5.1, а или, в идеализированном виде, на рис. 5.1, б. Хотя ограниченность управляющих воздействий в определенной мере учитывалась и при линейном расчете, но это касалось лишь установленных режимов, а при отработке начального рассогласования нелинейность типа насыщения может играть существенную роль.

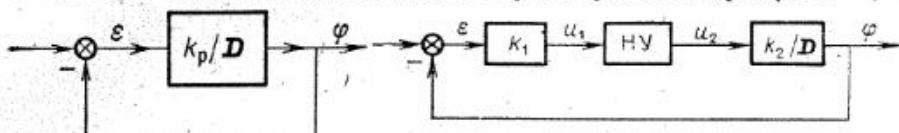


Рис. 5.2

Рис. 5.3

**Пример 1.1.** Следящая система рассчитана по линейной теории с заданной добротностью  $k_p$ . Электрические и механические постоянные малы или достаточно хорошо компенсированы корректирующими целями. Таким образом, предполагаемое поведение должно описываться моделью, представленной на рис. 5.2. Однако в действительности усилитель имеет ограниченную зону линейности. Для того чтобы просто разобраться в последствиях, представим характеристику усилителя идеализированно в виде кусочно линейной зависимости (рис. 5.1, б).

Пусть начальное рассогласование равно  $e_0$ . Согласно линейной модели  $e(t) = e_0 e^{-k_p t}$ , однако с учетом нелинейности (см. рис. 5.3, где выделен нелинейный усилитель НУ) результат будет другим. Пусть  $k_1 k_y e_0 > \bar{u}$ . Тогда начальное напряжение на выходе усилителя будет равно не  $k_1 k_y e_0$ , а  $\bar{u}$ . Угол отработки под действием постоянного напряжения начнет расти по линейному закону  $\phi(t) = k_2 \bar{u} t$ , и так будет продолжаться, пока рассогласование не уменьшится настолько, что усилитель войдет в линейную зону (рис. 5.4), т. е. вплоть до момента  $t_1$ , когда  $k_1 k_y (e_0 - k_2 \bar{u} t_1) = \bar{u}$ . Только затем все пойдет согласно линейной теории и ошибка начнет уменьшаться по экспоненте  $e(t) = \frac{\bar{u}}{k_1 k_y} e^{-k_p(t-t_1)}$ , где  $k_p$  — расчетная добротность, равная произведению коэффициентов усиления звеньев  $k_1 k_y k_2$ .

Из рис. 5.4 видно, что время практического затухания (вхождения в 5%-зону) из-за насыщения резко выросло и абсолютно не соответствует «линейному прогнозу»  $3/k_p$  при достаточно большом начальном рассогласовании. □

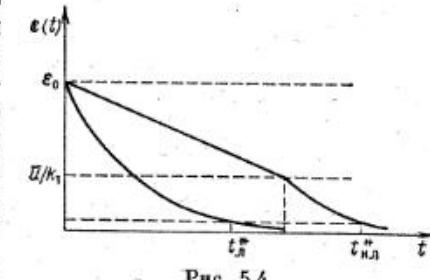


Рис. 5.4

2. Почти все «линейные» датчики рассогласования на самом деле имеют зону нечувствительности, т. е. при малых измеряемых ошибках в выходной сигнал просто отсутствует (рис. 5.5, а). Поэтому установившаяся ошибка может быть любой в пределах зоны  $|e| \leq \Delta$ , а отработка при этом происходит не будет, поскольку отсутствует сигнал ошибки. Более того, датчики имеют и ограниченную зону линейности (например, потенциометрические преобразователи «угол — напряжение» имеют характеристику, близкую к показанной на рис. 5.5, б). Для индукционных электромеханических

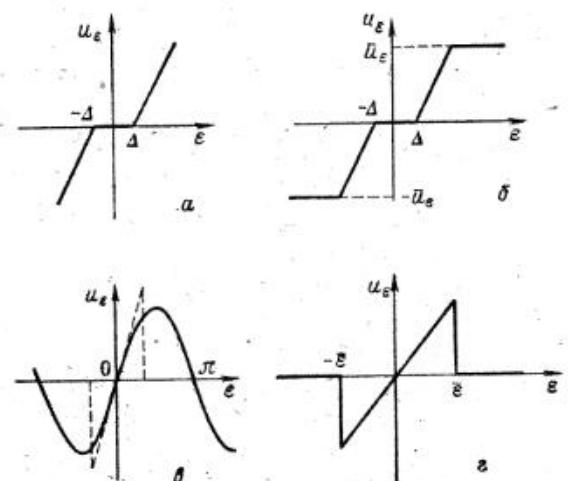


Рис. 5.5

преобразователей (вращающиеся трансформаторы, сельсины) характерна зависимость  $u_e = k \sin e$ , лишь при малых  $e$  близкая к линейной (рис. 5.5, в). При этом ошибка может быть равна любому числу полуборотов, а сигнал — отсутствовать; ошибка может нарастать, а сигнал — убывать. Для многих оптических датчиков характерно исчезновение выходного напряжения при больших ошибках (рис. 5.5, г). И без детального анализа ясно, что такие свойства датчиков могут приводить либо к возникновению больших установившихся ошибок (из-за «ложных» нулей сигнала), либо вообще к потере возможности слежения.

3. На работу почти любых кинематических передач оказывает влияние сухое трение (при малых усилиях — нет перемещений), а также неидеальность соединений (зазоры, люфты). Ведущая ось поворачивается, а ведомая — нет, пока зазор в передаче не будет выбран. Ясно, что между их углами поворота нет линейной зависимости. В дальнейшем мы убедимся, что эта нелинейность может оказаться «ответственной» за возникновение неугасающих колебаний в системе, которая согласно линейному расчету должна была

быть устойчивой. Таким образом, реальные элементы, характеристики которых считались при расчете линейными, в действительности обладают существенно нелинейными свойствами. Их влиянием можно объяснить многие неприятности в системе, «правильно рассчитанной» по линейной теории.

1.2. Релейные системы и достоинства нелинейных законов. В автоматике издавна применяются переключательные (пороговые) элементы. Их функциональное назначение — изменять скачком выходную величину в момент, когда входная переходит (убывает или возрастает) некоторый уровень, порог. Характеристика связи «вход — выход», соответствующая этому назначению, представлена на рис. 5.6 ( $u_{1\text{п}}$  — пороговое значение входа,  $u_2, \bar{u}_2$  — различные постоянные значения выхода). Реально переключатели выполняются как электромеханические (электромагнитные реле), электронные или пневматические устройства, характеристики которых могут несколько отличаться от идеальной функции переключения.

В электромагнитном реле, например, переключения связаны с движением механического элемента (якоря реле) под действием сил, создаваемых током в обмотке управления (рис. 5.7). Перемещаясь, якорь замыкает выходную цепь либо на источник с напряжением  $u_2$ , либо на источник с напряжением  $\bar{u}_2$ . Очевидно, что переключе-

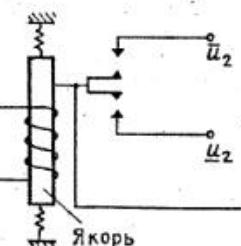


Рис. 5.7

ние происходит не мгновенно при переходе входного воздействия  $u_1$  через порог  $u_{1\text{п}} = 0$ . Время переключения зависит от инерционности элементов и создаваемых сил. Однако конструкцию можно выполнить так, что это время не превосходит сотых долей секунды, а следовательно, управляемые от реле  $u_2$  более инерционные звенья практически не изменят своего состояния за время переключения. Тем более предположение о мгновенном, скачкообразном изменении оказывается справедливым для электронных, в частности, полупроводниковых переключателей, в которых время переключения может быть на несколько порядков меньше.

Релейные элементы просты и вместе с тем могут быть эффективно использованы в системах управления.

**Пример 1.2.** Введем в следящую систему вместо усилителя с линейной зоной релейный усилитель РУ с симметричной характеристикой (рис. 5.8, а). В пренебрежении инерционностью динамика процесса может быть описана с помощью структурной схемы (рис. 5.8, б). При начальной ошибке рассогласования  $e_0 > 0$ , какова бы она ни была по уровню, реле обеспечивает подачу на двигатель

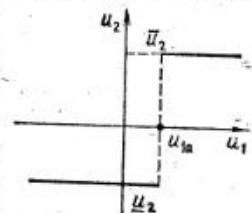


Рис. 5.8

постоянного напряжения  $\bar{u}$ , а при  $e_0 < 0$  — напряжения  $-\bar{u}$ . При этом процесс отработки начального рассогласования идет по линейному закону (рис. 5.8, б)  $e(t) = e_0 - k_2 \bar{u} t$  и заканчивается за конечное время  $t_p^* = \frac{e_0}{k_2 \bar{u}}$ . Это время меньше, чем при использовании усилителя с зоной линейности, ограниченной величинами  $\pm \bar{u}_2$ .  $\square$

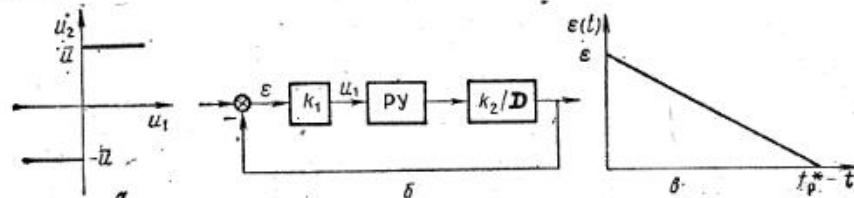


Рис. 5.8

Из примера ясно, что с помощью релейных элементов можно формировать законы управления в некотором смысле даже более эффективные, чем «линейные» с ограниченной зоной действия. Это обстоятельство плюс техническая простота обеспечивают широкую распространенность *релейных систем управления*. Вместе с тем переключательная функциональная зависимость

(рис. 5.6) не только не является линейной, но даже не непрерывна. Для линейной теории просто нет явной «зоны применимости», если проектант системы ориентируется на использование реле. Напомним также, что любые преобразователи «аналог — код», служащие для ввода информации в управляющую ЭВМ, имеют характеристику типа композиции переключательных (рис. 5.9), где «ступенька» равна «цене» низшего разряда. При грубой дискретизации (малой разрядности ЭВМ) это обстоятельство может оказаться существенным, тем более что оно проявляется в процессе «внутримашинного» преобразования информации. Потери точности при округлении и тем более переполнение разрядной сетки — типично нелинейные эффекты.

**1.3. Необходимость нелинейной теории.** Недостаточность линейной теории теперь очевидна: получаемые с ее помощью законы управления не могут быть точно реализованы, и заранее не ясно, не являются ли другие, существенно нелинейные законы более эффективными. Кроме того, важно и то, что линейные модели самого объекта управления приемлемо отражают его поведение лишь в малой зоне изменения переменных. Они сами, как правило, строятся на основе приближенной линеаризации физических законов (см. § 5 гл. 4). В рамках линейной теории неоднократно обращают

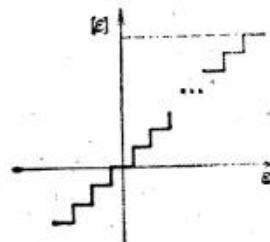


Рис. 5.9

лось внимание на важность учета даже малых отличий модели от реальности. Вместе с тем изучалось лишь влияние таких отличий, при котором описание поведения оставалось линейным. Ответом на вопрос о влиянии *нелинейных возмущений*, мы пока не располагаем.

Итак, приведены существенные доводы в пользу нелинейной теории. К сожалению, возможности ее заведомо *ограничены*. Действительно, если линейная теория опирается на модели в виде линейных дифференциальных уравнений, из которых легко находится явное представление управляемого процесса в зависимости от произвольных входных воздействий, то нелинейная теория должна опираться на нелинейные уравнения. А для таковых, как правило, не существует способов получения подобных явных представлений. При анализе поведения для конкретных начальных условий и заданных воздействий можно воспользоваться эффективными процедурами численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [52]). Однако, и это уже неоднократно подчеркивалось, при решении задач управления, как правило, необходимо считаться с неполнотой исходных сведений об указанных факторах.

Следовательно, основное внимание важно уделить таким подходам, при которых можно получить хотя бы качественное представление о поведении систем, описываемых нелинейными соотношениями, при широком диапазоне начальных условий и возможных воздействий.

Общая нелинейная теория управления достаточно сложна. Более полное знакомство с нею мы отложим до гл. 8—11. Здесь же ограничимся описанием основных подходов и полезных для практического использования результатов в рамках простейших нелинейных моделей. Наша первая и основная задача — понять причины возникновения различных нелинейных эффектов, о которых говорилось в начале параграфа, и выяснить, нельзя ли устранить не приятности, возникающие в силу нелинейных свойств элементов, при формировании самих законов управления.

**1.4. Системы с одним нелинейным элементом.** Обратим внимание на то, что рассмотренные выше элементы систем управления (усилители, датчики) имели характеристику связи «вход-выход» в виде безынерционного, статического нелинейного преобразования. Если обобщенно обозначить вход через  $\sigma(t)$ , а выход — через  $v(t)$ , то значение выхода определялось значением входа в тот же момент времени

$$v(t) = f[\sigma(t)], \quad (1.1)$$

где  $f[\sigma]$  — та или иная функция (характеристика элемента). Ограничимся исследованием систем, где имеется только один нелинейный безынерционный элемент, а все остальные звенья системы могут быть описаны линейными, возможно, динамическими соотношениями.

ниями. Это позволит выявить основные нелинейные эффекты, за которые «несет ответственность» выделенный элемент.

Формальное описание систем с одним нелинейным элементом удобно дать с помощью структурной схемы, представленной на рис. 5.10, а, где  $z(t)$  — внешнее воздействие,  $y(t)$  — выход системы,

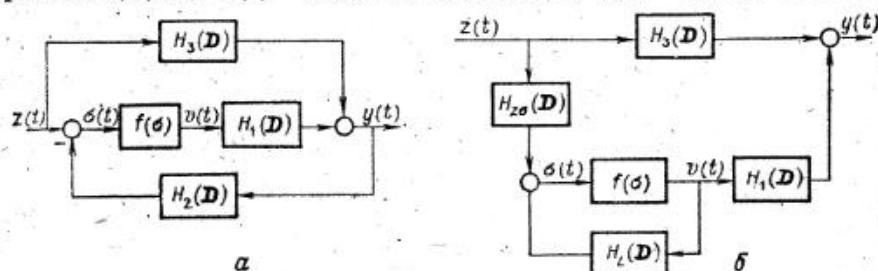


Рис. 5.10

$H_1(D)$ ,  $H_2(D)$ ,  $H_3(D)$  — передаточные функции, характеризующие линейные звенья системы. Структурной схеме соответствуют уравнения в операторной форме

$$y(t) = H_1(D)v(t) + H_3(D)z(t), \quad (1.2)$$

$$v(t) = f[\sigma(t)]. \quad (1.3)$$

Если обозначить

$$H_L(D) = \frac{B_1(D)}{A_1(D)}, \quad H_2(D) = \frac{B_2(D)}{A_2(D)}, \quad H_3(D) = \frac{B_3(D)}{A_1(D)}, \quad (1.4)$$

где  $A_1(D)$ ,  $B_1(D)$ ,  $A_2(D)$ ,  $B_2(D)$ ,  $B_3(D)$  — многочлены от оператора дифференцирования, то тем же соотношениям (1.2) можно придать форму линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A_1(D)y(t) - B_1(D)v(t) &= B_3(D)z(t), \\ A_2(D)\sigma(t) + B_2(D)y(t) &= A_2(D)z(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

относительно неизвестных функций  $y(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $v(t)$ , дополнительная нелинейная связь между которыми дается с помощью (1.3). С другой стороны, исключив  $y(t)$  из уравнений (1.5), придем к соотношению

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)v(t) = B_3(D)z(t), \quad (1.6)$$

где

$$A_L(D) \triangleq A_1(D)A_2(D), \quad B_L(D) = B_1(D)B_2(D),$$

$$B_3(D) = [A_1(D)A_2(D) - B_2(D)B_3(D)]. \quad (1.7)$$

Такое исключение равносильно преобразованию исходной структурной схемы к новому, иногда более удобному виду, представленному на рис. 5.10, б, где введены обозначения

$$H_L(D) = \frac{B_L(D)}{A_L(D)}, \quad H_{z\sigma}(D) = \frac{B_3(D)}{A_L(D)}. \quad (1.8)$$

Приведем пример приведения описания системы с обратной связью к стандартной форме.

Пример 1.3. В § 5 гл. 4 подробно рассматривалась задача синтеза закона стабилизации угловой скорости гидравлической турбины. Общая структурная схема построенной системы воспроизведена на рис. 5.11, где п. ф.  $H_{w\eta}$ ,  $H_{w\eta}$  характеризуют свойства объекта, а  $H_f(D)$  — свойства обратной связи.

Обратную связь предлагалось построить как последовательное соединение чувствительного элемента, описываемого уравнением

$$u_e(t) = k_e \sigma(t) = -k_e y(t), \quad (1.9)$$

ПИД-преобразователя с уравнением

$$u_b(t) = \left( k_0 + k_D D + k_I \frac{1}{D} \right) u_e(t) \quad (1.10)$$

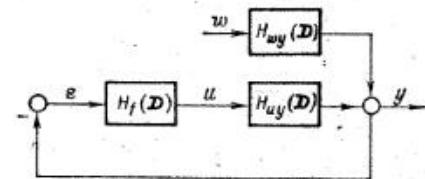


Рис. 5.11

и гидравлического сервомеханизма, движение штока которого определяет управляющее воздействие (открытие направляющего аппарата). Сервомеханизм также описывался линейным уравнением

$$(T_s D + 1)u = \frac{1}{r}\sigma_{e1}, \quad (1.11)$$

где  $\sigma_e$  (смещение иглы золотника) равно

$$\sigma_e = k_e u_b. \quad (1.12)$$

Во всем описании поставим под сомнение только уравнение сервомеханизма (1.11). Напомним, что подача жидкости в цилиндр механизма осуществляется с помощью золотникового распределителя;

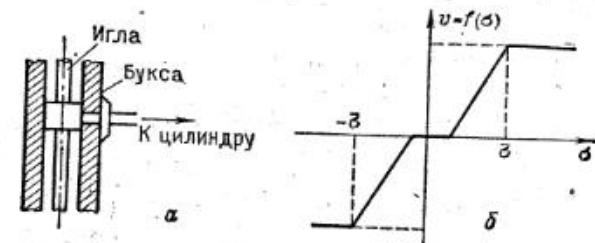


Рис. 5.12

своими поясками игла золотника открывает или закрывает окна в его корпусе (рис. 5.12, а), через которые пропускается жидкость. При выводе уравнения (1.11) предполагалось, что открытие окон, которое здесь обозначим  $v$ , пропорционально относительному смещению  $\sigma$  иглы и корпуса. Однако это неточно отражает существование

дела: при малых смещениях окно, размер которого меньше ширины пояска, остается закрытым, а при больших смещениях окно открывается полностью, и увеличение смещения перестает влиять на скорость подачи жидкости в цилиндр. Зависимость открытия окон от относительного смещения может быть описана нелинейной функцией, график которой дан на рис. 5.12, б. С учетом этого обстоятельства следует отказаться от уравнения (1.11), заменив его соотношениями

$$Du = k_e v \quad (1.13)$$

(пропорциональность скорости движения штока открытию окна),

$$\sigma = \sigma_e - ru \quad (1.14)$$

(относительное смещение иглы  $\sigma$  определяется абсолютным  $\sigma_e$ , за вычетом перемещения корпуса золотника, связанного со штоком кинематической передачей с коэффициентом  $r$ ), и, наконец, нелинейным уравнением

$$v = f(\sigma). \quad (1.15)$$

Выпишем все линейные соотношения, сразу изъяв часть промежуточных неизвестных. Согласно структурной схеме имеем

$$y = H_{uy}(D)u + H_{wy}(D)w. \quad (1.16)$$

Далее из (1.9), (1.10), (1.12) следует, что

$$\sigma_e = -k_b k_e \left( k_0 + k_D D + k_I \frac{1}{D} \right) y, \quad (1.17)$$

а кроме того,

$$\sigma = \sigma_e - ru, \quad u = \frac{k_\sigma}{D} v. \quad (1.18)$$

Окончательно исключая  $\sigma_e$ ,  $u$ , получим полное описание линейной части системы

$$y = H_{uy}(D) \frac{k_\sigma}{D} v(t) + H_{wy}(D) w(t), \quad (1.19)$$

$$\sigma(t) = - \left[ k_b k_e \left( k_0 + k_D D + k_I \frac{1}{D} \right) + \frac{r}{H_{uy}(D)} \right] y + r \frac{H_{wy}(D)}{H_{uy}(D)} w(t), \quad (1.20)$$

которое и переходит в (1.2) после очевидных переобозначений:  
 $z(t) = r \frac{H_{wy}(D)}{H_{uy}(D)} w(t)$ ,  $H_1(D) = H_{uy}(D) \frac{k_\sigma}{D}$ ;  $H_2(D) = k_b k_e \left( k_0 + k_D D + k_I \frac{1}{D} \right) + \frac{r}{H_{uy}(D)}$ ,  $H_3(D) = \frac{1}{r} H_{wy}(D)$ .  $\square$

## § 2. Равновесные состояния и устойчивость

**2.1. Равновесные состояния.** Первоначальная проблема, которая интересует нас при исследовании систем управления с обратной связью, это проблема устойчивости. Любая система регулирования должна быть организована так, чтобы при снятии возмущений ее выход стремился к желаемому значению, а при ограниченных возмущениях — оставался в ограниченной зоне вблизи него. В системах слежения эти требования остаются в силе, хотя вместо непосредственного выхода объекта они предъявляются к ошибке слежения. Запишем уравнения системы, ориентируясь на структурную схему рис. 5.10, б:

$$\sigma(t) + H_L(D)v(t) = H_{\sigma\sigma}(D)z(t), \quad (2.1)$$

$$v(t) = f[\sigma(t)], \quad (2.2)$$

$$y(t) = H_1(D)v(t) + H_2(D)z(t). \quad (2.3)$$

Последнее уравнение является линейным и отделяется от взаимосвязанных уравнений (2.1), (2.2), исследованию решений которых мы и уделим основное внимание.

Первоначально предположим, что внешнее воздействие отсутствует. Тогда поведение решений полностью определяется свойствами п. ф.  $H_L(D) \triangleq \frac{B_L(D)^*}{A_L(D)}$ , которую обычно называют *п. ф. линейной части системы*, и свойствами функции  $f(\sigma)$ , *характеристики нелинейного элемента*. Прежде всего выясним, какие имеются постоянные решения  $\sigma(t) = \hat{\sigma} = \text{const}$ ,  $v(t) = \hat{v} = \text{const}$ . Будем говорить, что эти решения, если они существуют, определяют *состояния равновесия* системы

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)v(t) = 0, \quad v(t) = f[\sigma(t)]. \quad (2.4)$$

Величины  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{v}$  должны удовлетворять соотношениям

$$A_L(0)\hat{\sigma} + B_L(0)\hat{v} = 0, \quad \hat{v} = f(\hat{\sigma}). \quad (2.5)$$

Если функция  $f(\sigma)$  линейна,

$$f(\sigma) = k\sigma, \quad (2.6)$$

то (2.5) имеет единственное решение

$$\hat{\sigma} = 0, \quad \hat{v} = 0. \quad (2.7)$$

Нелинейное же описание может допускать и другие постоянные решения, что сразу видно из графической схемы, представленной на рис. 5.13, где решениям соответствуют точки пересечения характеристики нелинейного элемента и прямой

$$v = -\frac{A_L(0)}{B_L(0)}\sigma.$$

\*) Многочлены  $A_L(D)$ ,  $B_L(D)$  далее считаем взаимно простыми.

Этот результат очень важен практически. Действительно, если функция  $f(\sigma)$  является гладкой и имеет отчетливо выраженную «линейную зону» (рис. 5.14), то кажется возможным заменить  $f(\sigma)$  линеаризованным описанием

$$f(\sigma) \cong \frac{df}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} \sigma, \quad (2.8)$$

т. е. принять формулу (2.6) с  $k = \frac{df}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0}$ . На этой гипотезе, в сущности, строится вся линейная теория управления: система обычно

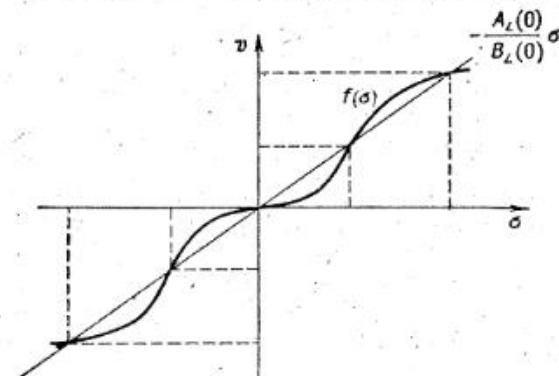


Рис. 5.13

строится так, чтобы единственное состояние равновесия соответствовало нулевой ошибке управления, т. е. было бы желаемым состоянием.

**Вывод:** *нелинейность характеристики даже одного элемента системы может привести к возникновению в ней равновесных состояний, не совпадающих с желаемым («ложных нулей»).*

Пусть, однако, эта неприятность отсутствует, т. е. статический коэффициент усиления линейной части системы

$$H_L(0) = \frac{B_L(0)}{A_L(0)}$$

выбран так, что система (2.5) имеет единственное решение. Для определенности будем считать, что  $f(0) = 0$ , а следовательно, это решение — нулевое (2.7).

**2.2. Устойчивость. Критерий Попова.** Предположим теперь, что начальное состояние системы не совпадает с нулевым, равновесным.

Спрашивается, придет ли система к нему с течением времени, т. е. будет ли она устойчивой по начальным условиям?\*) Опять-таки

\*) Строгая формулировка понятия устойчивости дана в гл. 8.

кажется возможным для «гладкой» нелинейности (рис. 5.14) при малых начальных отклонениях в пределах линейной зоны считать и дальнейшее поведение близким к поведению линейной, а следовательно, использовать известные критерии. Однако это заключение, вообще говоря, неверно: устойчивость не гарантирует монотонности процесса  $\sigma(t)$ , начинающегося в «линейной» зоне, в ходе этого процесса можно «вылететь» из этой зоны, и свойства системы перестанут отвечать предположению (2.8). Более того, как мы уже видели на примерах, линейная зона может вообще отсутствовать, и указанный простейший подход теряет смысл. К счастью, теория нелинейных дифференциальных уравнений располагает следующим замечательным результатом [5.10].

**Теорема 2.1 (критерий В. М. Попова).** *Пусть все полюсы п. ф. линейной части системы  $H_L(p)$  лежат в левой полуплоскости. Пусть характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условиям*

$$f(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq \bar{k} < \infty, \quad \sigma \neq 0. \quad (2.9)$$

*Пусть можно найти такое вещественное число  $q$ , что при всех  $\omega$ ,  $0 \leq \omega < \infty$ , выполнено частотное неравенство*

$$\operatorname{Re}[1 + qi\omega H_L(i\omega)] + \frac{1}{\bar{k}} > 0. \quad (2.10)$$

*Тогда при любых ограниченных начальных отклонениях от нулевого равновесного состояния функция  $\sigma(t)$  останется ограниченной при  $t > 0$  и*

$$\sigma(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Говорят, что при этом имеет место *устойчивость нулевого равновесного состояния в целом*.\* ■

Доказательство справедливости критерия отложим до гл. 8. Здесь же ограничимся лишь пояснением смысла условий и конкретных способов их проверки. Условия (2.9) геометрически означают (рис. 5.15), что график функции  $f(\sigma)$  должен лежать в секторе, ограниченном осью абсцисс и прямой  $\bar{k}\sigma$ . Его часто называют *условием принадлежности сектору  $[0, \bar{k}]$* . Подчеркнем, что условие (2.9) никак не ограничивает конкретного вида функции  $f(\sigma)$ .

\*) Утверждение Т.2.1 и последующих в этом параграфе относится только к устойчивости системы, определяемой уравнениями (2.4). При этом не учитывается соотношение (2.3), связывающее выход системы  $y(t)$  с выходом нелинейности  $v(t)$ . Очевидно, однако, что из устойчивости в целом (2.4) следует устойчивость всей системы (2.1) — (2.3), если  $H_1(D)$  — устойчивая п. ф.

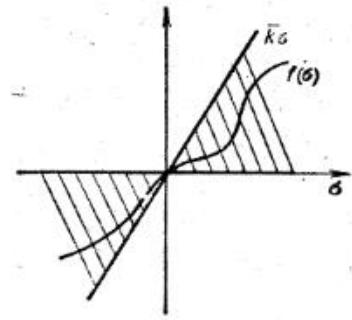


Рис. 5.15

Частотному условию (2.10) также можно дать простую геометрическую интерпретацию. Обозначим

$$R_L(\omega) = \operatorname{Re} H_L(i\omega), \quad I_L(\omega) = \operatorname{Im} H_L(i\omega).$$

Тогда (2.10) преобразуется к виду

$$R_L(\omega) - q\omega I_L(\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (2.12)$$

Введем также обозначения

$$\tilde{I}_L(\omega) \triangleq \omega I_L(\omega), \quad \tilde{H}_L(i\omega) \triangleq R_L(\omega) + i\tilde{I}_L(\omega). \quad (2.13)$$

Функцию  $\tilde{H}_L(i\omega)$  называют *модифицированной частотной характеристикой линейной части* системы. С учетом этих обозначений (2.12) можно записать так:

$$\operatorname{Re} \tilde{H}_L(i\omega) + \frac{1}{k} > q \operatorname{Im} \tilde{H}_L(i\omega). \quad (2.14)$$

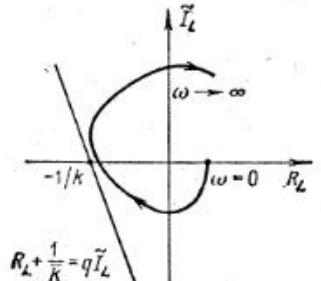


Рис. 5.16

проходящей через точку  $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$  и имеющей коэффициент наклона  $1/q$  (рис. 5.16).

**Правило.** Для того чтобы проверить выполнение критерия В. М. Попова, следует

а) построить годограф модифицированной частотной характеристики  $\tilde{H}_L(i\omega)$ ;

б) попытаться провести прямую, проходящую через точку  $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$  и лежащую слева от годографа.

Если это удается, то критерий удовлетворяется, а следовательно, положение равновесия устойчиво в целом.

Применение критерия В. М. Попова не сложнее применения критерия Найквиста, с которым он имеет много общего. Однако следует подчеркнуть, что критерий В. М. Попова лишь *достаточное условие устойчивости*: он может не выполняться, и тем не менее устойчивость в целом имеет место.

При интерпретации критерия возможны два подхода:

а) предполагается, что исследуется система с явно заданной характеристикой  $f(\sigma)$  нелинейного звена, которую можно заключить в сектор  $[0, \bar{k}]$ , подобрав значение  $\bar{k}$ .

б) предполагается, что изучается сразу целый *класс систем*, различающихся по виду нелинейности, но так, что все они удовлетворяют одному и тому же условию, например, условию принадлежности заданному сектору.

В последнем случае говорят, что критерий определяет *абсолютную устойчивость* указанного класса.

Рассмотрение с позиций абсолютной устойчивости соответствует тому, что нелинейность считается возмущающим фактором, заранее не вполне известным, но все-таки лежащим в пределах, задаваемых условиями (2.9). Подчеркнем теперь, что к классу систем, удовлетворяющих (2.9), относятся и *линейные системы*, для которых

$$f(\sigma) = k\sigma, \quad (2.16)$$

если

$$0 \leq k \leq \bar{k}. \quad (2.17)$$

Поэтому простым *необходимым условием абсолютной устойчивости* является требование устойчивости всех линейных систем вида (2.1), (2.2), (2.16), т. е. расположение в левой полуплоскости всех корней уравнения

$$A_L(p) + kB_L(p) = 0$$

при любых  $k$ ,  $0 \leq k \leq \bar{k}$ . В частности, при  $k = 0$  это уравнение принимает вид

$$A_L(p) = 0,$$

т. е. его корни совпадают с корнями знаменателя  $H_L(p)$ . Далее по критерию Найквиста следует, что годограф  $H_L(i\omega)$  не должен пересекать луча  $(-\infty, -\frac{1}{k}]$  на вещественной оси (см. § 5 гл. 2). Иными словами,

$$R_L(\omega) = \operatorname{Re} H_L(i\omega) > -\frac{1}{k} \quad (2.18)$$

при всех  $\omega$ , для которых

$$I_L(\omega) = \operatorname{Im} H_L(i\omega) = 0. \quad (2.19)$$

Последнее условие эквивалентно

$$I_L(\omega) = \omega I_L(\omega) = 0, \quad (2.20)$$

если  $\omega \neq 0$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** Необходимым условием \*) *абсолютной устойчивости* систем, в которых линейная часть характеризуется п. ф.  $H_L(D)$ , а нелинейный элемент — функцией  $f(\sigma)$ , такой, что

$$0 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq \bar{k}, \quad \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

\*) В истории изучения проблемы значительную роль сыграло предположение (так называемая гипотеза Айзermana) о том, что указанное необходимое условие является и достаточным. Однако были найдены опровергающие примеры.

является устойчивость  $H_L(D)$ , а также требование, чтобы годограф  $H_L(i\omega)$  не пересекал луча  $(-\infty, -\frac{1}{k})$  на вещественной оси, или же требование, чтобы годограф модифицированной частотной характеристики  $H_L(i\omega)$  не пересекал того же луча за исключением, возможно, значения  $\omega = 0$ . ■

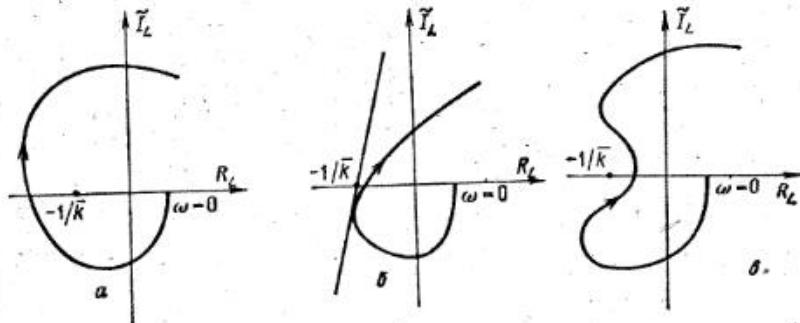


Рис. 5.17

Таким образом, построив годограф  $H_L(i\omega)$ , мы можем столкнуться с тремя ситуациями:

- годограф  $H_L(i\omega)$  пересекает луч  $(-\infty, -\frac{1}{k}]$  (рис. 5.17, а);
- годограф  $H_L(i\omega)$  не пересекает луча, и можно провести через точку  $(-\frac{1}{k}, 0)$  прямую, лежащую левее годографа (рис. 5.17, б);
- пересечения луча нет, но провести указанную прямую невозможно (рис. 5.17, в).

В случае а) абсолютной устойчивости заведомо нет, в случае б) она заведомо имеет место, в случае в) мы не можем сделать никакого заключения.

К сожалению, для систем высокого порядка последняя ситуация является скорее правилом, чем исключением, и теория нелинейных систем не может до настоящего времени построить условия, которые были бы и необходимыми, и достаточными для обеспечения абсолютной устойчивости в классе систем с произвольными нелинейностями из сектора  $[0, k]$ . Тем более отсутствуют условия, выполнение которых гарантировало бы устойчивость в целом для нелинейности определенного вида, а нарушение — свидетельствовало о неустойчивости.

Поскольку обычно о нелинейности доступна более богатая информация, чем принадлежность ее сектору, то имеется возможность сузить класс допустимых нелинейных возмущений, но уменьшить разрыв между необходимыми и достаточными условиями. Наиболее

интересным для приложений является следующий результат этого типа [5.14].

**Теорема 2.3 (критерий Чо-Нарендрры).** Пусть нелинейная характеристика является монотонной, точнее, выполнены условия

$$f(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{f(\sigma_1) - f(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq \bar{k} \text{ при произвольных } \sigma_1 > \sigma_2. \quad (2.21)$$

Тогда устойчивость в целом положения равновесия гарантирована, если найдется прямая, проходящая через точку  $(-\frac{1}{k}, 0)$  и лежащая левее годографа  $H_L(i\omega)$ . ■

Таким образом, критерий Чо-Нарендрры рекомендует то же построение, что и критерий В. М. Попова, но относительно обычной (а не модифицированной!) частотной характеристики. Это и проще, и налагает менее жесткие требования на свойства линейной части системы (в «обмен» на более жесткое требование к свойствам нелинейности!).

**2.3. Дополнения.** Прежде чем переходить к примерам, сделаем несколько практически полезных дополнений.

А. Пусть вместо условий (2.9) или (2.21) нелинейная функция удовлетворяет неравенствам

$$k_1 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq k_2, \quad \sigma \neq 0 \quad (2.22)$$

или

$$k_1 \leq \frac{f(\sigma_1) - f(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq k_2, \quad \sigma_1 > \sigma_2. \quad (2.23)$$

Тогда сохраняют силу утверждения Т.2.1 и Т.2.3, в которых, однако, следует заменить  $k$  на  $k_2 - k_1$ , а  $H_L(p)$  на

$$H_{L1}(D) = H_L(D)[1 + k_1 H_L(D)]^{-1}. \quad (2.24)$$

Справедливость дополнения следует из того, что из нелинейности  $f(\sigma)$  можно выделить линейную часть, представив

$$f(\sigma) = f_1(\sigma) - k_1 \sigma.$$

Тогда условия (2.22), (2.23) записываются относительно новой нелинейности  $f_1(\sigma)$  в виде

$$0 \leq \frac{f_1(\sigma)}{\sigma} \leq k_2 - k_1 \triangleq \bar{k},$$

или

$$0 \leq \frac{f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq k_2 - k_1 \triangleq \bar{k},$$

т. е. приобретают вид, указанный в теоремах, но при этом изменяется и линейная часть. То, что ее п. ф. дается (2.24), проверяется простыми выкладками.

Б. Результат Т.2.1 верен не только для непрерывных  $f(\sigma)$ , но и для нелинейных функций с конечными разрывами (рис. 5.18, а). График функции должен быть дополнен вертикальными отрезками, дополняющими разрывы. Разрыв может приходиться и на точку  $\sigma = 0$  (рис. 5.18, б), как это имеет место для идеального реле. Тогда

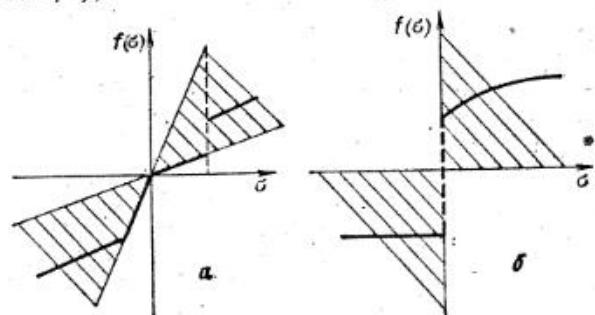


Рис. 5.18

в условии (2.10) следует положить  $k = \infty$  (одним из лучей, ограничивающих сектор, становится ось ординат); более существенно, что в этом случае нет «настоящего» равновесного состояния: ведь при  $\sigma = 0$  выход реле не определен. Формальный анализ указывает на существование равновесного скользящего режима, при котором происходит бесконечно частое переключение реле с одного выхода на другой. Если же учесть малую реальную инерционность реле, то такие переключения неосуществимы, и на деле имеются высокочастотные колебания вблизи положения равновесия. Однако при достаточно инерционной линейной части, описываемой п. ф.  $H_1(D)$  (см. рис. 5.10), эти колебания не проявляются на выходе системы, и равновесный скользящий режим не отличим по выходу от «настоящего» (несколько подробнее об этом — ниже, в § 3, а также в гл. 8).

В. По условию Т.2.1 линейная часть должна быть устойчивой, если нелинейная характеристика «зажата» в секторе  $[0, \bar{k}]$ . Если  $H_L(p)$  имеет корни знаменателя, лежащие справа, то абсолютной устойчивости заведомо нет. Если же все корни слева, за исключением одного нулевого, то критерий Попова сохраняет силу при небольшой модификации. Перед тем как формулировать результат, обратим внимание на то, что при наличии нулевого полюса условия равновесия (2.5) принимают вид

$$\hat{v} = 0, \quad \hat{v} = f(\sigma),$$

т. е. положениями равновесия являются любые точки, в которых характеристика проходит через ось абсцисс. В частности, может быть целый отрезок, состоящий из равновесных точек (рис. 5.19).

**Теорема 2.4** (критерий Гелига [5.4]). Пусть все корни знаменателя  $H_L(p)$  лежат слева, за исключением одного, равного нулю,

причем

$$\lim_{p \rightarrow 0} p H_L(p) > 0. \quad (2.25)$$

Пусть

$$f(\sigma) = 0 \quad \text{при } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \quad (2.26)$$

а вне этого отрезка лежит внутри секторов, заштрихованных на рис. 5.19, т. е.

$$0 < f(\sigma) \leq \bar{k}(\sigma - \sigma_2), \quad \sigma > \sigma_2, \\ \bar{k}(\sigma - \sigma_1) \leq f(\sigma) < 0, \quad \sigma < \sigma_1, \quad (2.27)$$

причем

$$\int_0^\infty [\bar{k}\sigma - \varphi(\sigma)] d\sigma = \infty, \quad \int_{-\infty}^0 [\varphi(\sigma) - \bar{k}\sigma] d\sigma = \infty. \quad (2.28)$$

Тогда если найдется  $q \geq 0$  такое, что  $-q^{-1}$  не является полюсом  $H_L(p)$ , и выполнено условие

$$\operatorname{Re}[(1 + qj\omega) H_L(i\omega)] + \frac{1}{k} \geq 0, \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad (2.29)$$

то при любых ограниченных начальных условиях процессы в системе останутся ограниченными, и  $\sigma(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к одной из точек отрезка покоя

$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$   
(выполнены условия поточечной устойчивости отрезка). ■

Частотное условие (2.29) совпадает с условием (2.10) основной теоремы 2.1 и имеет ту же геометрическую интерпретацию с точностью до того, что допускается проведение прямой, проходящей через  $(-\frac{1}{k}, 0)$  и касающейся годографа  $H_L(i\omega)$ .

Однако наклон прямой не должен быть отрицательным. Кроме того, условия (2.27) не допускают, чтобы  $f(\sigma)$  касалась оси абсцисс вне отрезка покоя, а (2.28) равносильно требованию «неплотного прилегания»  $f(\sigma)$  к лучам.

**2.4. Примеры.** Случай нулевого полюса является практически наиболее интересным. Приведем два примера.

**Пример 2.1.** Пусть объект является телом ( $m = 1$ ), движущимся в среде с вязким трением ( $b = 1$ ) вдоль оси  $y$  под действием силы  $u(t)$ . Тогда

$$D^2y + Dy = u. \quad (2.30)$$

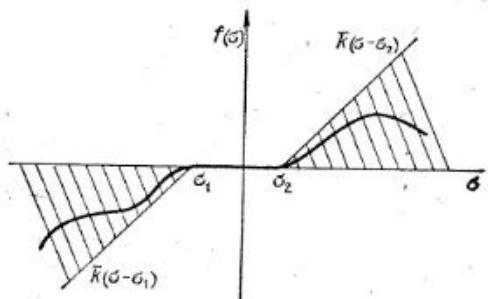


Рис. 5.19

Управляющее воздействие  $u$  осуществлено в виде обратной связи по положению и скорости, однако датчик, измеряющий комбинацию

$$\sigma = -y - \alpha Dy, \quad \alpha > 0, \quad (2.31)$$

не идеален и имеет зону нечувствительности, а усилитель, усили-



Рис. 5.20

вающий сигнал датчика  $u_d$ , имеет ограниченную зону линейности. Характеристики датчика и усилителя представлены на рис. 5.20, а и б. Из них следует, что преобразование  $\sigma \rightarrow u$  можно описать одной нелинейной зависимостью (рис. 5.20, в).

Из структурной схемы (рис. 5.21) устанавливаем, что

$$H_L(p) = \frac{1 + \alpha p}{p(p + 1)}.$$

Рис. 5.21

Поскольку  $H_L$  имеет нулевой полюс, следует применять Т.2.4. Проверяем условия теоремы. Нелинейная характеристика подчиняется условиям (2.27), (2.28) при  $k = k_y$ .

Проверим частотное условие (2.29). Имеем

$$R_L = -\frac{1 - \alpha}{1 + \omega^2}, \quad I_L = -\frac{1 + \alpha\omega^2}{\omega(1 + \omega^2)}.$$

Запишем частотное условие в виде

$$R_L - q\omega I_L + \frac{1}{k} \geq 0 \Rightarrow -(1 - \alpha) + q(1 + \alpha\omega^2) + \frac{1}{k_y}(1 + \omega^2) \geq 0.$$

Слева в неравенстве стоит двучлен от  $\omega^2$ . Поэтому оно справедливо при всех  $\omega \geq 0$ , если и только если неотрицательны оба коэффициента двучлена, т. е.

$$-(1 - \alpha) + q + \frac{1}{k_y} \geq 0 \Rightarrow q \geq (1 - \alpha) - \frac{1}{k_y},$$

$$q\alpha + \frac{1}{k_y} \geq 0 \Rightarrow \alpha q \geq -\frac{1}{k_y}.$$

Величину  $q \geq 0$ , удовлетворяющую этим условиям, можно подобрать при любых  $k_y > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ . Тем самым выполнены все условия Т.2.4, и отрезок  $[-\sigma_1, \sigma_1]$  является поточечно устойчивым в целом, т. е. при любых начальных отклонениях установится режим, в котором  $\sigma(t) = \sigma_\infty$ ,  $|\sigma_\infty| \leq \sigma_1$ . В силу (2.31) и  $y(t) \rightarrow y_\infty = -\sigma_\infty$ . Иначе говоря, управляющее воздействие обеспечивает стабилизацию в окрестности точки  $y = 0$  с точностью до  $|\sigma_1|$ . За погрешность «несет ответственность» зона нечувствительности датчика. Мы обошлись без построения годографа  $H_L(i\omega)$ , использовав простые выкладки. Тот же результат, конечно, можно получить и геометрически. Годограф

$$\widetilde{H}_L(i\omega) = R_L + i\omega I_L = -\frac{(1 - \alpha) + i(1 + \alpha\omega^2)}{1 + \omega^2}$$

целиком лежит в третьем квадранте (рис. 5.22), и легко провести прямую, оставляющую его справа. Дополнительно отметим, что если усилитель является релейным, суждение об устойчивости не изменится (достаточно положить  $k_y \rightarrow \infty$ ).  $\square$

**Пример 2.2.** Исследуем поведение следящей системы, в которой датчик рассогласования имеет нелинейную характеристику, а остальные элементы можно описывать линейными соотношениями. При предварительном расчете по линейной теории введение корректирующих цепей обеспечило приведение п. ф. разомкнутого контура к виду

$$H_p(p) = \frac{k_p(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad T_1 > T_2 > T_3 > 0, \quad k_p > 0,$$

с известными (§ 5 гл. 3) хорошими свойствами. Выясним, не нарушаются ли эти свойства нелинейностью датчика. Представим структурную схему в виде, показанном на рис. 5.23, где  $\sigma$  — сигнал ошибки, а  $u = f(\sigma)$  — выход датчика.

Для определенности будем предполагать, что характеристика та же, что и на рис. 5.20, в, но  $k_y = 1$ . Таким образом, при  $\sigma_1 = 0$ ,  $u \rightarrow \infty$  (отсутствие зоны нечувствительности и насыщения) мы возвращаемся к линейной модели.

Проверим условия устойчивости согласно Т.2.4. Имеем

$$H_L(p) = H_p(p); \quad k = 1,$$

так что частотное условие (2.19) можно записать в виде

$$R_L(\omega) - q\omega I_L(\omega) + 1 \geq 0, \quad \omega \geq 0,$$

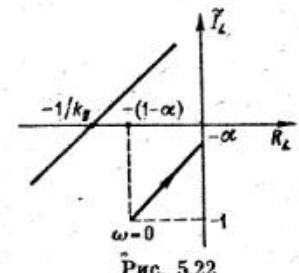


Рис. 5.22

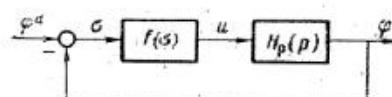


Рис. 5.23

или

$$\frac{1}{\omega} I_1(\omega) + qR_1(\omega) + \frac{1}{k_p} \geq 0, \quad \omega \geq 0, \quad (2.32)$$

где  $R_1, I_1$  — вещественная и мнимая части функции

$$H_1(i\omega) \triangleq \frac{T_2 i\omega + 1}{(T_1 i\omega + 1)(T_3 i\omega + 1)}.$$

Проведем необходимые выкладки. Имеем

$$R_1 = \frac{1 + \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 - T_1 T_3)}{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)};$$

$$\frac{1}{\omega} I_1 = -\frac{(T_1 + T_3 - T_2) + \omega^2 T_1 T_2 T_3}{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)}.$$

Условие Т.2.4 сводится к выбору  $q \geq 0$ , обеспечивающего неотрицательность квадратного трехчлена

$$\frac{1}{k_p} T_1^2 T_3^2 z^2 + \left[ \frac{1}{k_p} (T_1^2 + T_3^2) - T_1 T_2 T_3 + q(T_1 T_2 + T_2 T_3 - T_1 T_3) \right] z + \\ + q - (T_1 + T_3 - T_2) + \frac{1}{k_p} \geq 0, \quad z \triangleq \omega^2 \geq 0.$$

Это всегда возможно, если выполнено условие

$$T_1 > T_2 > T_3,$$

а  $k_p$  — любое, поскольку при достаточно больших  $q$  коэффициенты трехчлена будут положительны, а следовательно, трехчлен не может быть отрицательным при  $z \geq 0$ . Таким образом, и нелинейная теория подтверждает, что большие начальные рассогласования будут уменьшаться, однако гарантируется не стремление ошибки к нулю, а лишь достижение погрешности, не превышающей размеров зоны нечувствительности датчика рассогласования.

Стоит подчеркнуть, что вывод о возможности неограниченно увеличивать коэффициент обратной связи верен только для принятой модели линейной части системы. Достаточно учесть малую постоянную времени  $T_4 < T_3$ , и возникнут ограничения на  $k_p$ . Интересно, что условию (2.32) можно дать специальную геометрическую интерпретацию. Если ввести условную частотную характеристику

$$\tilde{H}_1(\omega) = \frac{1}{\omega} I_1(\omega) + iR_1(\omega)$$

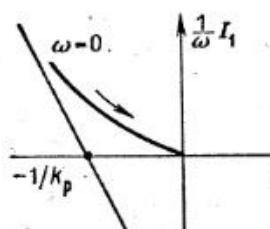


Рис. 5.24

стационарную. Для этого введем условную частотную характеристику

и построить ее годограф, то (2.32) означает возможность провести прямую с неположительным коэффициентом ( $-q$ ) через точку  $(-1/k_p, 0)$  так, чтобы годограф не заходил левее ее (рис. 5.24).

В качестве самостоятельного упражнения предлагается использовать эту интерпретацию для исследования системы с дополнительной малой постоянной времени  $T_4$ .  $\square$

### § 3. Автоколебания. Гармонический баланс и гармоническая линеаризация

**3.1. Автоколебания.** Линейная система, при отсутствии внешних воздействий описываемая уравнением

$$\Delta(D)y = 0, \quad (3.1)$$

где  $\Delta(D)$  — многочлен от оператора дифференцирования  $D$ , может иметь колебательное решение типа

$$y(t) = a \cos \omega_0 t \quad (3.2)$$

только в том случае, если  $i\omega_0$  является корнем характеристического уравнения, т. е.

$$\Delta(i\omega_0) = 0. \quad (3.3)$$

Это решение *не грубое*: стоит немного изменить параметры, и чисто мнимый корень приобретает вещественную часть, так что решение (3.2) превратится либо в затухающее колебание, либо в расходящееся.

В нелинейных системах возможна и другая ситуация: в них могут существовать *грубые* колебательные решения даже при отсутствии внешних воздействий.

Реальные процессы, соответствующие этим решениям, принято называть *автоколебаниями*, поскольку они определяются внутренними, собственными свойствами системы.

Если система управления организуется так, что нулевое значение ошибки управления совпадает с положением равновесия, то наличие автоколебаний должно рассматриваться как нежелательное, паразитное явление. Однако если размах колебаний, т. е. наибольшее отклонение ошибки от положения равновесия, невелико, лежит в пределах допуска, то автоколебательный режим столь же приемлем, как и равновесный.

Отсюда вытекает практическая важность изучения возможности возникновения автоколебаний и оценки их размаха\*).

Подчеркнем сразу, что выполнение условий устойчивости в целом, конечно, гарантирует отсутствие автоколебаний, но при проектировании системы управления на базе реальных элементов они не всегда удовлетворяются. Выполнение же условий устойчивости

\*). Другой аспект проблемы — полезность автоколебаний для ряда целей управления — обсуждается в гл. 10, § 2.

«в малом», полученных на основе модели, линеаризованной в окрестности положения равновесия,— недостаточная гарантия отсутствия автоколебаний. Напротив, в системах, устойчивых «в малом», может наблюдаться особо неприятный режим так называемого «жесткого возбуждения», когда система некоторое время работает стабильно, а затем под влиянием одиночного внешнего импульса почти мгновенно переходит в режим больших колебаний, самовозбуждается.

**3.2. Гармоническая линеаризация.** Проблема существования автоколебаний и оценки их размаха является крайне сложной и не имеющей математически строгого решения в общем случае.

Мы ограничимся здесь лишь описанием простейшего подхода, метода гармонического баланса (гармонической линеаризации)\*), не претендующего на строгость, но обычно дающего разумные приближенные результаты\*\*).

Рассмотрим вновь описание системы с одним нелинейным элементом в виде

$$\sigma(t) + H_L(D)v(t) = 0, \quad (3.4)$$

$$v(t) = f[\sigma(t)]. \quad (3.5)$$

Будем искать колебательное решение в виде гармонической функции

$$\sigma(t) = a \cos \omega t \quad (3.6)$$

и попытаемся подобрать величины  $a$  (амплитуду) и  $\omega$  (частоту) так, чтобы уравнения (3.4), (3.5) удовлетворились тождественно. Имеем

$$v(t) = f[\sigma(t)] = f[a \cos \omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \cos k\omega t, \quad (3.7)$$

где  $v_k$  — коэффициенты ряда Фурье, вычисленные по известным формулам

$$v_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(a \cos \omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) d\psi, \quad (3.8)$$

$$v_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(a \cos \omega t) \cos k\omega t dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos k\psi d\psi, \quad k \geq 1, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

\*) Для простейших систем 2-го порядка метод был предложен в 20-е годы ван-дер-Полем. Его обобщение дано в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [58]. В теории управления метод введен Л. Г. Гольдфарбом [5.5], который придал ему современную форму (в зарубежной литературе гармоническая линеаризация называется методом описывающих функций).

\*\*) Дополнительное освещение проблемы автоколебаний дано в гл. 8.

Подчеркнем, что коэффициенты  $v_k$  зависят только от вида нелинейной функции  $f(\sigma)$  и амплитуды  $a$ . Учтем только одно слагаемое в разложении (3.7), принимая

$$v(t) = v_1 \cos \omega t. \quad (3.9)$$

Тогда линейное уравнение (3.4) удовлетворится, если выбрать  $a$  и  $\omega$  так, что

$$v_1 I_L(\omega) = 0, \quad (3.10)$$

$$a + v_1 R_L(\omega) = 0. \quad (3.11)$$

Действительно, подставляя (3.6) и (3.9) в уравнение (3.4), получим  $a \cos \omega t + v_1 H_L(D) \cos \omega t = a \cos \omega t + v_1 [R_L(\omega) \cos \omega t - I_L(\omega) \sin \omega t]$  в силу известных правил линейной теории, но (3.4) тождественно равно нулю, если выполнены условия (3.10), (3.11). Эти условия можно записать в виде одного комплексного соотношения

$$1 + q_1(a) H_L(i\omega) = 0, \quad (3.12)$$

где

$$q_1(a) \triangleq \frac{1}{a} v_1(a). \quad (3.13)$$

Соотношение (3.12) назовем основным уравнением гармонического баланса, а функцию  $q_1(a)$  — коэффициентом гармонической линеаризации. Смысл этих названий прост. Приняв  $\sigma(t) = a \cos \omega t$ ,  $v(t) = v_1 \cos \omega t$ , мы удовлетворили соотношению  $v = f(\sigma)$ , отбросив все слагаемые ряда Фурье кроме одного, а следовательно, приравняли, сбалансировали только гармоники вида  $\cos \omega t$  слева и справа. С другой стороны, этот же прием эквивалентен предположению, что

$$v(t) = \frac{v_1}{a} a \cos \omega t = \frac{v_1}{a} \sigma(t) = q_1(a) \sigma(t), \quad (3.14)$$

т. е. выход и вход нелинейного элемента связаны коэффициентом  $q_1(a)$ . Замена нелинейного элемента линейным, коэффициент усиления которого зависит от амплитуды входа, естественным образом именуется гармонической линеаризацией нелинейности. Прием гармонического баланса эквивалентен гармонической линеаризации, если этот коэффициент принят согласно (3.13), т. е.

$$q_1(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (3.15)$$

Подставляя  $v = q_1(a)\sigma$  в исходное уравнение (3.4), получаем

$$[1 + q_1(a) H_L(D)]\sigma(t) = 0. \quad (3.16)$$

Тогда основное соотношение гармонического баланса (3.12) может интерпретироваться как условие типа (3.3) наличия чисто мнимого корня у характеристического уравнения гармонической линеаризованной системы.

Вновь подчеркнем, что коэффициент гармонической линеаризации зависит от амплитуды  $a$ , которая заранее неизвестна, и в этом принципиальное отличие (3.16) от обычного линейного уравнения.

Приведем еще одну интересную трактовку гармонической линеаризации. Обычная линеаризация гладких функций (линеаризация по Тейлору) может дать хорошее приближение к функции в окрестности точки равновесия (см. рис. 5.14). Если же изучаются колебания, то естественно найти линейное приближение  $f(\sigma) \approx k\sigma$ , выбирая  $k$  из условия наилучшего приближения в среднем по всем значениям, пробегаемым  $\sigma(t)$  в процессе колебаний. Минимизируем среднеквадратичное отклонение

$$J \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T \{f[\sigma(t)] - k\sigma(t)\}^2 dt$$

путем выбора  $k$ . Поскольку

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T f^2[\sigma(t)] dt - \frac{2k}{T} \int_0^T f[\sigma(t)] \sigma(t) dt + \frac{k^2}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt,$$

то из условия экстремума  $\frac{dJ}{dk} = 0$  следует, что наилучшее значение  $k$  равно

$$k^* = \frac{1}{\int_0^T \sigma^2(t) dt} \int_0^T f[\sigma(t)] \sigma(t) dt. \quad (3.17)$$

Если колебания совершаются по гармоническому закону, то

$$k^* = \frac{2}{Ta^2} \int_0^T f[a \cos \omega t] a \cos \omega t dt = q_1(a).$$

Таким образом, замена нелинейной функции на гармонически линеаризованную дает наилучшее приближение в среднем.

Для того чтобы найти  $q_1(a)$  в явной форме, необходимо вычислить интеграл (3.15). Это проделано для многих нелинейных функций  $f(\sigma)$ , используемых при описании реальных элементов. Некоторые результаты даны в табл. 3.1. Отметим также, что если

$$f(\sigma) = c_1 f^{(1)}(\sigma) + c_2 f^{(2)}(\sigma), \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

то  $q_1(a) = c_1 q_1^{(1)}(a) + c_2 q_1^{(2)}(a)$ , где  $q_1^{(1)}(a)$ ,  $q_1^{(2)}(a)$  — коэффициенты, соответствующие  $f^{(1)}(\sigma)$ ,  $f^{(2)}(\sigma)$ .

При известной функции  $q_1(a)$  нахождение величин  $a$ ,  $\omega$ , удовлетворяющих условиям (3.10), (3.11) или эквивалентному условию

Таблица 3.1

	$f(\sigma)$	$q_1(a)$
1	$f(\sigma) = \sigma^3$	$q_1(a) = \frac{3}{4} a^2$
2	$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma \pm \delta, &  \sigma  \geq \delta \\ 0, &  \sigma  \leq \delta \end{cases}$	$q_1(a) = \begin{cases} 0, & a \leq \delta \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{a} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{a^2}} \right], & a \geq \delta \end{cases}$
3	$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0 \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases}$	$q_1(a) = \frac{4}{\pi a}$
4	$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geq 1 \\ \sigma, &  \sigma  \leq 1 \\ -1, & \sigma \leq -1 \end{cases}$	$q_1(a) = \begin{cases} 1, &  a  \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right], & a > 1 \end{cases}$
5	$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geq \delta \\ 0, &  \sigma  \leq \delta \\ -1, & \sigma \leq -\delta \end{cases}$	$q_1(a) = \begin{cases} 0, & a \leq \delta \\ \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{a^2}}, & a \geq \delta \end{cases}$

(3.12), удобно произвести с помощью той или иной графоаналитической схемы.

Вариант 1.

а) Построить график  $I_L(\omega)$  и найти  $\omega = \omega^* > 0$ , при котором этот график проходит через ось абсцисс (рис. 5.25, а). Значение  $\omega^*$  задает частоту (и период  $T = \frac{2\pi}{\omega^*}$ ) искомого решения.

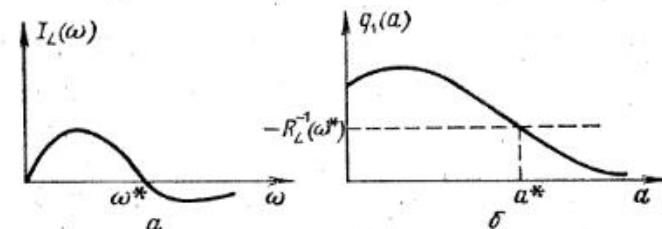


Рис. 5.25

б) Построить график  $q_1(a)$  (рис. 5.25, б) и найти точку пересечения этого графика с прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на уровне  $-R_L^{-1}(\omega^*)$ . Значение  $a^*$  задает амплитуду искомого решения, а следовательно, решение в целом  $\sigma(t) = a^* \cos \omega^* t$ .

## Вариант 2 (диаграмма Гольдфарба).

а) Построить годограф  $H_L(i\omega)$ , разметив точки на кривой соответствующими значениями  $\omega$ .

б) На вещественной оси расположить годограф функции  $-q_1^{-1}(a)$ , т. е. вычислить значения этой функции для различных  $a$ , изменения  $a$  от 0 до  $\infty$ , и сопоставить каждому значению соответствующую точку на прямой (рис. 5.26).

в) Значение параметров обоих годографов в точке пересечения дает искомые значения  $\omega^*$ ,  $a^*$ .

## Вариант 3 (диаграмма Айзермана).

а) Построить годограф  $H_L^{-1}(\omega)$ .

б) Построить годограф  $-q_1(a)$ .

в) Найти значение параметров в точке пересечения (рис. 5.27).

Все указанные варианты являются следствиями представления условий в эквивалентных формах

$$I_L(\omega) = 0, \quad q_1(a) = -R_L^{-1}(\omega) \Leftrightarrow H_L(i\omega) = -q_1^{-1}(a) \Leftrightarrow H_L^{-1}(\omega) = -q_1(a). \quad (3.18)$$

Конечно, можно избежать графических построений, применив любой аналитический или численный способ. Подчеркнем лишь, что

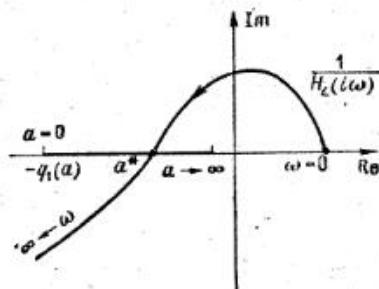


Рис. 5.26

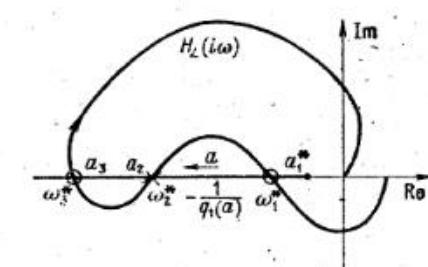


Рис. 5.27

значений  $(\omega^*, a^*)$ , удовлетворяющих (3.18), может быть не одно, а несколько, каждому из которых могут соответствовать различные периодические решения исходного уравнения (см. диаграмму Гольдфарба на рис. 5.28, где выделяются три точки пересечения годографов). Равным образом может оказаться, что нет ни одного значения  $a$  и  $\omega$ , удовлетворяющего (3.12), а следовательно, метод не позволяет выделить ни одного периодического решения.

Однако если пересечение (а не касание!) действительно имеется при каких-либо заданных параметрах системы, то оно будет иметь

место и при малых их изменениях, т. е. факт наличия колебательного режима действительно является «грубым».

## 3.3. Примеры. Приведем примеры использования метода.

Пример 3.1. Рассмотрим следующую систему, где линейная часть задается п. ф.

$$H_L(D) = \frac{k_L}{D(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)}, \quad T_1 > T_2, \quad k_L > 0,$$

а нелинейный элемент (усилитель) имеет характеристику идеального реле

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ -1, & \sigma < 0. \end{cases}$$

Коэффициент гармонической линеаризации для такой нелинейности (см. табл. 3.1)  $q_1(a) = \frac{4}{\pi a}$ . Условие  $H_L^{-1}(i\omega) = -q_1(a)$  принимает здесь вид

$$-\frac{1}{k_L} [\omega^2 (T_1 + T_2) - i\omega (1 - T_1 T_2 \omega^2)] = -\frac{4}{\pi a}$$

и удовлетворяется при

$$\omega = \omega^* = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad a = a^* = \frac{4}{\pi} \frac{k_L}{T_1^{-1} + T_2^{-1}},$$

так что метод дает периодическое решение вида

$$\sigma(t) = \frac{4}{\pi} \frac{k_L}{T_1^{-1} + T_2^{-1}} \cos \frac{t}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

Тот же самый результат можно получить и из геометрического построения в виде диаграммы Гольдфарба (рис. 5.29). Подчеркнем, что годограф функции  $-q_1^{-1}(a) = -\frac{\pi}{4} a$  при  $0 \leq a < \infty$  занимает всю отрицательную вещественную полусось. Вместе с тем из диаграммы следует и общий вывод: если в системе имеется релейный усилитель, то метод укажет на наличие периодических решений во всех случаях, когда годограф частотной характеристики линейной части пересекает эту полусось хотя бы один раз. Нетрудно убедиться, что в этих случаях нарушен критерий В. М. Попова устойчивости равновесного скользящего режима  $\sigma = \sigma_0 = 0$ .  $\square$

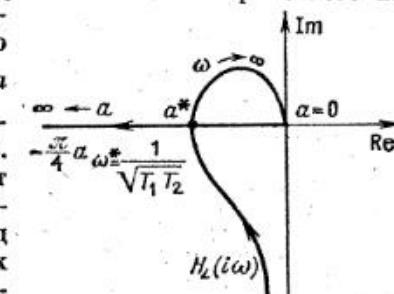


Рис. 5.29

**Пример 3.2.** Рассмотрим вновь релейную следящую систему, но будем считать, что

$$H_L(D) = \frac{k_L(T_2 D + 1)}{D(T_1 D + 1)(T_3 D + 1)(T_4 D + 1)}, \quad T_1 > T_2 > T_3 > T_4, \quad k_L > 0.$$

Как указывалось в П.2.1, при  $T_4 = 0$  система устойчива. Однако при малом  $T_4 \neq 0$  годограф  $H_L(i\omega)$  пересекает отрицательную вещественную полусоси. Несложные выкладки показывают, что в этом случае возможны автоколебания с частотой

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{T_4}} \left[ \sqrt{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}} + O\left(\frac{T_4}{T_1}\right) \right]$$

и амплитудой

$$a^* = \frac{4}{\pi} \frac{T_2}{T_1 T_3} \frac{1}{(\omega^*)^2} + O\left(\frac{T_4^2}{T_1^2}\right).$$

Однако автоколебания высокочастотны и имеют малую амплитуду, что делает систему практически работоспособной при малых  $T_4$ .

Заменим теперь идеальный релейный элемент на релейный элемент с зоной нечувствительности (в табл. 3.1 его характеристика указана под номером 5). Поскольку  $0 \leq q_1(a) \leq \frac{2}{\pi\delta}$ , то годограф  $-q_1^{-1}(a)$  располагается лишь на части отрицательной полусоси, левее точки  $-\frac{\pi\delta}{2}$ . Поэтому пересечение годографом  $H_L(i\omega)$  отрицательной полусоси в любой точке еще не свидетельствует о наличии периодических решений. Пусть  $I_L(\omega^*) = 0$ , но  $R_L(\omega^*) > -\frac{\pi\delta}{2}$ ; тогда уравнение (3.18) не имеет решений (рис. 5.30). Отсюда можно сделать практический

**Вывод:** введение зоны нечувствительности позволяет избежать возникновения автоколебаний в системах с релейными усилителями.

Введем теперь вместо реле элемент с ограниченной зоной линейности (номер 4 в табл. 3.1). Поскольку  $0 < q_1(a) \leq 1$ , то те же построения (рис. 5.31) приводят нас к выводу: *периодическое решение возникает, если годограф  $H_L(i\omega)$  пересекает часть отрица-*

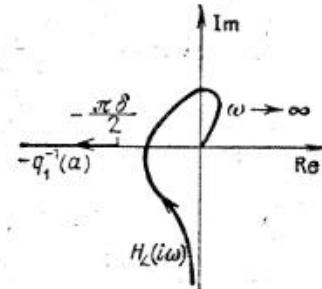


Рис. 5.30

тельной полусоси левее точки  $(-1, 0)$ , т. е. нарушено достаточное условие устойчивости в целом положения равновесия  $\sigma = 0$ .

Подчеркнем, что возможна ситуация, представленная на рис. 5.32, когда расчет по линейной теории указывает на устойчивость системы (годограф не охватывает точку  $(-1, 0)$ ), а в действительности — возможны автоколебания. Здесь мы как раз сталкиваемся с «коварной» ситуацией «жесткого возбуждения» автоколебаний, упомянутой в начале параграфа. □

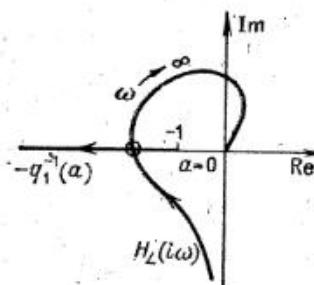


Рис. 5.31

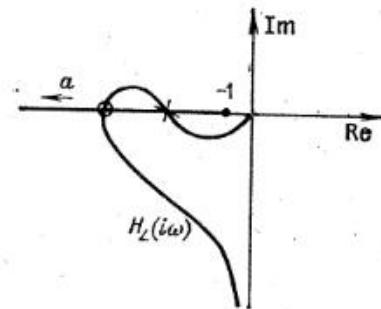


Рис. 5.32

**Пример 3.3.** Используем более точную модель следящей системы, учитывающую нежесткость кинематической передачи (редуктора) и наличие люфта. Описание линейной модели было дано в § 2 гл. 2. Сохраним в силе основные соотношения (2.5) — (2.14), за исключением описания момента взаимодействия между валом двигателя и валом нагрузки через редуктор. В § 2 гл. 2 принималась гипотеза о линейной упругой связи. Тогда на нагрузку действует момент  $m_{\text{дн}} \Delta c \left( \frac{1}{r} \varphi_d - \varphi \right)$ , а реакция нагрузки равна  $-\frac{1}{r} m_{\text{дн}}$ , где  $c$  — жесткость редуктора,  $r$  — коэффициент передачи.

Обозначим через  $\sigma$  относительный угол,  $\sigma = \frac{1}{r} \varphi_d - \varphi$ . При отсутствии зазора (люфта)  $m_{\text{дн}}$  пропорционально  $\sigma$ : угол  $\sigma$  совпадает с углом скручивания  $v$  эквивалентной «пружины». При наличии зазора  $2\delta$  (приведенного к выходному звену редуктора) имеем нелинейную связь

$$v = f(\sigma) = \begin{cases} \sigma - \delta, & \sigma > \delta, \\ 0, & |\sigma| \leq \delta, \\ \sigma + \delta, & \sigma < -\delta. \end{cases}$$

Способ построения этой связи ясен из условного чертежа на рис. 5.33, а (вид «сбоку») и 5.33, б (вид в направлении оси вращения). (Реально обычно используется не «вильчатая», а зубчатая

передача, и существен зазор между неидеально жесткими зубьями ведущего и ведомого колес выходной ступени редуктора [1.5].)

Нелинейная связь описывается стандартной функцией типа «зона нечувствительности» \*). Используя гармоническую линеаризацию, приходим к выражению

$$m_d = cq_1(a) \sigma = cq_1(a) \left( \frac{1}{r} \Phi_{dv} - \varphi \right),$$

где  $q_1(a)$  находится из табл. 3.1 (номер 2). Формально уравнения гармонически линеаризованной системы совпадают с уравнениями линейной модели, построенной без учета люфта, с точностью до замены постоянной жесткости  $c$  на жесткость  $cq_1(a)$ , зависящую от амплитуды. Используя этот факт и формулу (2.22) гл. 2, можно записать п. ф. силового блока в целом:

$$H_{uf}(p_1, q_1) =$$

$$= \frac{k_c}{p \left[ T_{M1} p \left( \frac{T_0^2 p^2}{q_1^2(a)} + 1 \right) (T_0 p + 1) + T_{M2} p (T_0 p + 1) + \frac{T_0^2 p^2}{q_1^2(a)} + 1 \right]}.$$

которая теперь также зависит от  $a$ . Пусть датчик рассогласования, усилитель и цепи последовательной коррекции описаны линейно и заданы п. ф.  $H_{eu}(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ .

Схема в целом показана на рис. 5.34. Отметим, что мы не произвели стандартной процедуры выделения п. ф. линейной части системы. Для оценки

частоты  $\omega^*$  и амплитуды  $a^*$  возможных автоколебаний используем тот факт, что при  $a = a^*$  характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы должно иметь корень  $i\omega^*$ .

Запишем характеристическое уравнение в виде

$$k_c B(p) + A(p) \left\{ p [T_M p (T_0 p + 1) + 1] + \right. \\ \left. + \frac{T_0^2 p^3}{q_1^2(a)} [T_{M1} p (T_0 p + 1) + 1] \right\} = 0, \quad T_M = T_{M1} + T_{M2}.$$

\*) Иногда для описания люфта используют модель «гистерезисного» типа [5.5], но при этом способе приходится сталкиваться со сложным понятием неоднозначной нелинейной функции.

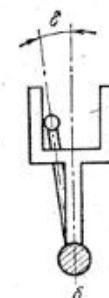


Рис. 5.33

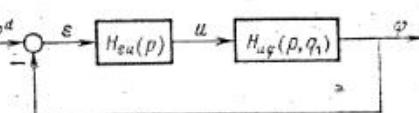


Рис. 5.34

Исключив  $q_1^2(a)$ , получаем представление

$$q_1^2 = - \frac{1}{H_{pk}(p) + 1} \varphi(p),$$

где

$$H_{pk}(p) \triangleq \frac{k_c H_{eu}(p)}{p [T_M p (T_0 p + 1) + 1]}$$

— п. ф. разомкнутого контура, найденная в предположении идеальности кинематической связи (при отсутствии податливости и люфта), а

$$\varphi(p) \triangleq T_0^2 p^2 \frac{T_{M1} p (T_0 p + 1) + 1}{T_M p (T_0 p + 1) + 1}.$$

Искомая частота  $\omega^*$  должна удовлетворять условию

$$\operatorname{Im} \frac{\varphi(i\omega^*)}{H_{pk}(i\omega^*) + 1} = 0.$$

Предполагая, что

$$(\omega^*)^2 \gg \frac{1}{T_{M1} T_0},$$

получаем

$$\varphi(i\omega^*) \approx - (\omega^*)^2 T_0^2 \frac{T_{M1}}{T_M},$$

так что условие для определения частоты можно записать в виде

$$\operatorname{Im} H_{pk}(i\omega^*) = 0.$$

**Вывод:** наличие люфта может приводить к возникновению автоколебаний \*), но эти колебания высокочастотны, и их частота близка к частоте, где ФЧХ разомкнутого контура, рассчитанная без учета неидеальности кинематической передачи, проходит через уровень  $-n$ .

Амплитуда колебаний вала нагрузки относительно вала двигателя легко вычисляется с помощью соотношения

$$q_1(a) = T_0 \omega^* \sqrt{\frac{T_{M1}}{T_M}} \frac{1}{\sqrt{H_{pk}(i\omega^*) + 1}} \triangleq c^*$$

как абсцисса, на которой гармонический коэффициент линеаризации достигает уровня  $c^*$ . □

**3.4. Дополнения.** А. Метод гармонического баланса и эквивалентный ему прием гармонической линеаризации является достаточно грубо приближенным методом. В его оправдание обычно вы-

\*) Выше не учитывался постоянный момент нагрузки, который может компенсировать люфт.

двигается тезис [5.1] о том, что учет высших гармоник в разложении (3.7) не дает существенных изменений в форме решения  $\sigma(t)$ , если линейная часть системы обладает свойствами фильтра низких частот, т. е.

$$|H_L(i\omega^*)| \ll |H_L(i\omega^*)|, \quad k > 1. \quad (3.19)$$

Эта гипотеза действительно разумна, но нуждается в проверке после вычисления частоты  $\omega^*$  по схеме гармонического баланса. Стоит отметить, что процесс  $v(t)$  на выходе нелинейности заведомо не гармонический и его форму можно уточнить, используя, например, несколько слагаемых ряда (3.7), подставив в него  $a = a^*$ ,  $\omega = \omega^*$  (так называемая процедура «улучшенного 1-го приближения»).

Б. При переходе от разложения (3.7) к гармоническому приближению (3.9) отбрасывались не только высшие гармоники, но и нулевое слагаемое ряда

$$v_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(a \cos \omega t) dt. \quad (3.20)$$

Это разумно только в тех случаях, когда  $f(\sigma)$  является нечетной функцией (тогда  $v_0 = 0$ ) либо когда

$$|H_L(0)| \ll |H_L(i\omega^*)|.$$

Поскольку последнее условие редко соблюдается, то при наличии нелинейной характеристики, не обладающей свойством нечетности, основной вариант метода гармонического баланса можно заменить на улучшенный, учитывающий при поиске решения возможную несимметрию колебаний. При этом решение ищется в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 + a \cos \omega t, \quad (3.21)$$

где  $\sigma_0$  — постоянное смещение, а в разложении в ряд Фурье функции

$$v(t) = f[\sigma_0 + a \cos \omega t]$$

учитывается два слагаемых, т. е. принимается

$$v(t) = v_0 + v_1 \cos \omega t, \quad (3.22)$$

где

$$v_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\sigma_0 + a \cos \psi] d\psi, \quad (3.23)$$

$$v_1 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f[\sigma_0 + a \cos \psi] \cos \psi d\psi. \quad (3.24)$$

Коэффициенты  $v_0$  и  $v_1 = \frac{1}{a} v_1$  являются функциями от параметров  $\sigma_0$ ,  $a$  и могут быть вычислены в явной форме для типовых нелинейных характеристик (см., например, [5.1]).

Подстановка (3.21), (3.22) в уравнение линейной части (3.4) показывает, что оно тождественно удовлетворяется, если выполнены условия

$$\sigma_0 + H_L(0)v_0(a, \sigma_0) = 0, \quad (3.25)$$

$$1 + q_1(a, \sigma_0)H_L(i\omega) = 0. \quad (3.26)$$

Решение уравнений (3.25), (3.26) дает значения неизвестных параметров  $\sigma_0^*$ ,  $a^*$ ,  $\omega^*$ , характеризующих (в принятом приближении) возможный периодический режим.

В. Колебательное решение разыскивалось выше как некоторое частное решение дифференциальных уравнений. Такое решение будет соответствовать установившемуся автоколебательному режиму только в том случае, если оно является *устойчивым*. Интуитивный смысл этого понятия, а строгое определение мы отложим до гл. 8, тем более что не существует строгих критериев устойчивости периодических решений, приближенно находимых по методу гармонического баланса. Приведем лишь правдоподобные рассуждения, дающие простой критерий, выполнение которого, как правило, необходимо. Напомним, что при  $a = a^*$  характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$A_L(p) + B_L(p)q_1(a) = 0 \quad (3.27)$$

имеет чисто мнимый корень  $i\omega^*$  (годограф  $H_L(i\omega)$  при  $\omega = \omega^*$  проходит через точку на вещественной оси с координатой  $-q_1^{-1}(a^*)$ ). Увеличим амплитуду,  $a = a^* + \delta a$ ,  $\delta a > 0$ . Если при этом все корни станут «хорошими» (лежат в левой полуплоскости), то это свидетельствует о том, что движение с увеличенной амплитудой начнет затухать. Примем  $a = a^* + \delta a$ ,  $\delta a < 0$ . Если при этом хотя бы один корень станет «плохим», то движение с уменьшенной амплитудой будет раскачиваться, пока амплитуда не приблизится к  $a^*$ . Отсюда можно сделать следующий вывод.

**Критерий устойчивости в методе гармонического баланса.** Если зависимость  $q_1(a)$  в окрестности решения  $a = a^*$  такова, что при росте  $a$  корни уравнения (3.27) оказываются в левой полуплоскости, а при уменьшении  $a$  чисто мнимые корни  $\pm i\omega^*$  приобретают положительную вещественную часть, то  $a^*$  задает амплитуду устойчивого периодического решения.

Этому критерию можно придать простую геометрическую интерпретацию с помощью диаграммы Гольдфарба, если вспомнить еще и геометрическую интерпретацию критерия Найквиста.

**Правило.** Сдвигнемся по годографу функции  $-q_1^{-1}(a)$  по вещественной оси, увеличивая  $a$  от значения  $a = a^*$ . Если новая точка не будет охватываться годографом  $H_L(i\omega)$ , то  $a^*$  соответствует устойчивому решению, а в противном случае — неустойчивому.

Применение правила можно проследить на всех приведенных выше диаграммах, где устойчивые режимы выделены кружком, а неустойчивые — крестом.

#### § 4. Реакция нелинейной системы на внешние воздействия

##### 4.1. Постановка задачи. Обратимся к уравнениям

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)v(t) = B_z(D)z(t), \quad (4.1)$$

$$v(t) = f[\sigma(t)], \quad (4.2)$$

описывающим изменение процессов на входе,  $\sigma(t)$ , и выходе,  $v(t)$ , нелинейного элемента под действием возмущения  $z(t)$ .

Из теории нелинейных дифференциальных уравнений [5.7, гл. 5] известно, что выполнение критериев устойчивости в целом (по начальным условиям) обеспечивает устойчивость по отношению к внешним возмущениям, точнее, из ограниченности  $\tilde{z}(t)$ , где

$$\tilde{z}(t) \triangleq B_z(D)z(t), \quad (4.3)$$

следует ограниченность  $\sigma(t)$  и  $v(t)$ . Более того, доказано, что, если  $\tilde{z}(t)$  является периодической функцией, то уравнения (4.1), (4.2) имеют единственное устойчивое периодическое решение того же периода [5.12], а если  $\tilde{z}(t)$  — ограниченная реализация стационарного случайного процесса, то ей соответствует единственное решение, также являющееся реализацией стационарного случайного процесса [5.3]. Иначе говоря, и по отношению к внешним воздействиям устойчивые в целом нелинейные системы обладают свойствами, в основном сходными со свойствами устойчивых линейных систем.

Конечно, это сходство неполное. В частности, гармоническому внешнему воздействию необязательно соответствует гармоническая установившаяся реакция, поскольку нелинейность порождает высшие гармоники. Тем не менее, если линейная часть их хорошо подавляет, то можно с успехом использовать при расчете установившейся реакции метод гармонической линеаризации.

**4.2. Гармоническая линеаризация.** Заменим нелинейную связь (4.2) на гармонически линеаризованную

$$v(t) = q_1(a)\sigma(t), \quad (4.4)$$

где  $a$  — пока неизвестная амплитуда колебаний на входе нелинейного элемента, и подставим это соотношение в (4.1). Имеем

$$[A_L(D) + q_1(a)B_L(D)]\sigma(t) = B_z(D)z(t), \quad (4.5)$$

или

$$\sigma(t) = H(D, q_1)z(t), \quad (4.6)$$

где

$$H(D, q_1) \triangleq \frac{B_z(D)}{A_L(D) + q_1(a)B_L(D)}$$

— оператор, зависящий от параметра  $q_1$ .

Если

$$z(t) = a_z \cos \omega t, \quad (4.7)$$

то уравнение (4.6) имеет частное решение

$$\sigma(t) = a \cos(\omega t + \psi), \quad (4.8)$$

где

$$a = |H(i\omega, q_1)|a_z, \quad \psi = \text{Arg } H(i\omega, q_1). \quad (4.9)$$

Формулы (4.9) те же, что в линейной теории, однако имеется принципиальное различие: поскольку параметр  $q_1$  сам зависит от амплитуды  $a$ , то (4.9) не дает решения в явной форме, а лишь дает *уравнение* для определения неизвестной амплитуды, которое должно быть решено тем или другим способом. Подчеркнем, что в отличие от расчета автоколебаний здесь  $\omega$  — заданная величина, частота воздействия.

Классическая графоаналитическая процедура вычисления решения представлена на рисунке 5.35.

Первоначально строится график функции

$$\Phi(q_1) \triangleq |H(i\omega, q_1)|a_z$$

( $\omega$  и  $a_z$  — заданные параметры воздействия!). Затем ось ординат рассматривается как ось, на которой откладываются возможные значения  $a$ , и строится график  $q_1(a)$ , соответствующий заданной нелинейной характеристике  $f(\sigma)$ . Ордината точки пересечения дает желаемое значение амплитуды колебаний на входе нелинейности. Приведем иллюстративный пример.

**Пример 4.1.** Пусть

$$A_L(D) = TD + 1, \quad B_L(D) = 1, \quad B_z(D) = 1,$$

$$f(\sigma) = \text{sign } \sigma, \quad z(t) = a_z \cos \omega t.$$

Тогда уравнение (4.9) приобретает вид

$$a = \frac{1}{|Ti\omega + 1 + q_1|} a_{z_0}$$

причем

$$q_1 = q_1(a) = \frac{4}{\pi a}.$$

Графоаналитическая процедура показана на рис. 5.36, однако в

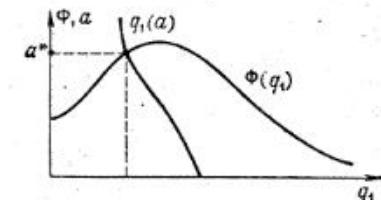


Рис. 5.35

данном случае можно получить и решение в явной форме:

$$a = \frac{4}{\pi(1+T^2\omega^2)} \left\{ 1 + \sqrt{1 + (1+T^2\omega^2) \left[ \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 a_z^2 - 1 \right]} \right\}.$$

Оно определено при условии, что

$$a_z \geq \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{T^2\omega^2}{1+T^2\omega^2}}.$$

В противном случае метод не дает вещественного решения для амплитуды (на диаграмме отсутствует пересечение кривых). Это не

означает, конечно, что колебания отсутствуют — недостаточно эффективен лишь сам метод, ввиду недостаточной фильтрации высших гармоник линейной частью, имеющей медленно падающую амплитудно-частотную характеристику \*).

Процедура решения может быть обобщена на тот случай, когда  $z(t)$  (или  $\tilde{z}(t)$ ) содержит постоянную составляющую:

$$z(t) = z_0 + a_z \cos \omega t. \quad (4.10)$$

Рис. 5.36

При этом предполагается, что \*\*)

$$\sigma(t) = \sigma_0 + a \cos(\omega t + \psi), \quad (4.11)$$

$$v(t) = v_0 + v_z \cos(\omega t + \psi) = v_0 + q_1[\sigma(t) - \sigma_0], \quad (4.12)$$

где  $q_1 = \frac{v_z}{a}$ , причем  $v_0$  и  $q_1$  являются функциями от параметров  $\sigma_0$ ,  $a$ .

Подставляя (4.10) в линейное уравнение (4.1), получаем

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)\{v_0 + q_1[\sigma(t) - \sigma_0]\} = B_z(D)[z_0 + a_z \cos \omega t].$$

Отсюда находим частное решение вида (4.11), где  $\sigma_0$ ,  $a$ ,  $\psi$  должны удовлетворять условиям

$$A_L(0)\sigma_0 + B_L(0)v_0 = B_z(0)z_0, \quad (4.13)$$

$$a = |H(i\omega, q_1)|a_z, \quad (4.14)$$

$$\psi = \text{Arg } H(i\omega, q_1). \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13), (4.14) взаимосвязаны, поскольку

$$v_0 = v_0(\sigma_0, a); \quad q_1 = q_1(\sigma_0, a).$$

\* ) Определенные гарантии эффективности метода можно дать, если  $\deg A_L(p) = \deg B_L(p) \geq 2$  [5.1] (см. также гл. 8, п. 4.5).

\*\*) То же предположение целесообразно ввести для уточнения метода, если характеристика нелинейности не является нечетной функцией.

Например, для идеального реле, где

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ -1, & \sigma < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

имеем

$$v_0 = \begin{cases} 1, & \sigma_0 > a, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sigma_0}{a}, & |\sigma_0| \leq a, \\ -1, & \sigma_0 < -a, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$q_1 = \begin{cases} \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_0}{a}\right)^2}, & |\sigma_0| \leq a \\ 0, & |\sigma_0| > a. \end{cases} \quad \square$$

**Пример 4.2.** Рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 5.37. Ее можно трактовать как модель следящей системы, служащей для отработки воздействия  $z_1(t)$ , при

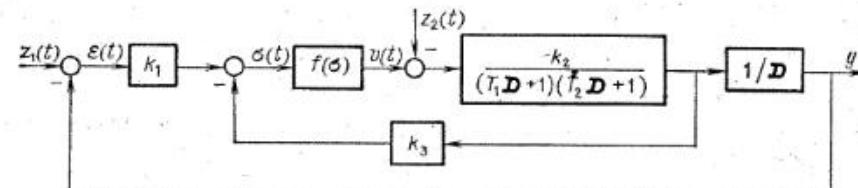


Рис. 5.37

наличии дополнительного возмущения  $z_2(t)$ . Пусть  $z_1(t) = ct$ ,  $z_2(t) = a_z \cos \omega_t$ . Запишем уравнения системы

$$y(t) = \frac{k_2}{D(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)} [-z_2(t) + v(t)],$$

$$\sigma(t) = -k_3 D y(t) + k_1 [z_1(t) - y(t)], \quad v(t) = f[\sigma(t)].$$

После исключения  $y(t)$  можно переписать их в стандартной форме

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)v(t) = \tilde{z}(t), \quad (4.18)$$

где

$$A_L(D) = D(T_1 D + 1)(T_2 D + 1), \quad B_L(D) = k_2(k_1 + k_3 D),$$

$$\tilde{z}(t) = k_1 A_L(D) z_1(t) + B_L(D) z_2(t).$$

Заметим, что  $\tilde{z}(t)$  уже не содержит линейно растущего слагаемого, поэтому прием гармонической линеаризации непосредственно применим.

Уравнения (4.13), (4.14) принимают форму:

$$k_1 k_2 v_0 = k_1 c \Rightarrow v_0 = \frac{1}{k_2} c, \quad (4.19)$$

$$a = \left| \frac{B_L(i\omega)}{A_L(i\omega) + q_1 B_L(i\omega)} \right| a_z. \quad (4.20)$$

Предположим далее, что нелинейность является идеальным реле. Тогда, используя вид функции  $v_0$ , даваемый (4.17), и предполагая, что  $|\sigma_0| < a$ , получим

$$\sigma_0 = a \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{c}{k_2}\right). \quad (4.21)$$

Отметим также, что постоянная составляющая в ошибке  $\varepsilon_0$  связана с  $\sigma_0$  и  $v_0$  соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k_1} [\sigma_0 + k_2 k_3 v_0] = \frac{1}{k_1} [\sigma_0 + k_3 c] \quad (4.22)$$

и также зависит от амплитуды гармонической компоненты. Формула (4.17) для  $q_1$  с учетом (4.21) принимает вид

$$q_1 = \frac{4}{\pi a} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{c}{k_2}\right) \triangleq \frac{\alpha}{a}. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) в (4.20) и производя простые преобразования, получаем явную формулу:

$$a = -\alpha R_L + a_z |H_L| \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 I_L^2}{a_z^2 |H_L|^2}}, \quad (4.24)$$

где введены обозначения

$$H_L = H_L(i\omega) = \frac{B_L(i\omega)}{A_L(i\omega)}, \quad R_L = \operatorname{Re} H_L(i\omega),$$

$$I_L = \operatorname{Im} H_L(i\omega), \quad \alpha = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{c}{k_2}\right).$$

При большой частоте  $\omega$  можно получить приближенное выражение:

$$a \approx \frac{k_2 k_3}{T_1 T_2 \omega^2} (a_z - \alpha). \quad (4.25)$$

Постоянная составляющая ошибки после этого легко находится по формулам (4.21), (4.22), а амплитуда ошибки  $a_0$  рассчитывается по формуле

$$a_0 = \frac{a}{k_1} \left| 1 + \frac{k_2 k_3 \frac{\alpha}{a}}{(T_1 i\omega + 1)(T_2 i\omega + 1)} \right|. \quad (4.26)$$

Ясно, насколько наличие нелинейности «перемешивает» влияние двух внешних воздействий на компоненты ошибки.  $\square$

**4.3. Метод медленно меняющихся амплитуд.** Метод гармонической линеаризации позволяет составить качественное представление о характере реакции на гармоническое возмущение и для систем, не являющихся устойчивыми в целом. Однако поведение решений здесь может быть очень сложным. Некоторые важные ситуации можно исследовать, введя гипотезу о том, что решение представимо в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + a(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)], \quad (4.27)$$

где  $\sigma_0$ ,  $a$ ,  $\psi$  — уже не постоянные, а медленно изменяющиеся величины, притом настолько медленно, что их изменением за период  $2\pi/\omega_0$  можно пренебречь. При таком предположении можно сохранить представление для переменной  $v(t)$  на выходе нелинейного элемента в виде (4.12), но  $v_0$ ,  $q_1$  окажутся функциями от медленно меняющихся  $\sigma_0(t)$ ,  $a(t)$ .

Подставляя эти связи в уравнение (4.1), описывающее линейную часть системы, получим

$$A_L(D)\{\sigma_0(t) + a(t) \cos(\omega_0 t + \psi)\} + B_L(D)\{v_0 + q_1 a(t) \cos(\omega_0 t + \psi)\} = B_z(D)\{z_0(t) + a_z \cos \omega_0 t\} \quad (4.28)$$

(считаем дополнительно, что  $z_0(t)$  также является не постоянной, но заданным образом медленно меняющейся функцией). Для того чтобы добиться тождественного удовлетворения уравнения, приравниванием сначала медленные слагаемые:

$$A_L(D)\sigma_0(t) + B_L(D)v_0[\sigma_0(t), a(t)] = B_z(D)z_0(t). \quad (4.29)$$

Для остальных слагаемых должно быть:

$$A_L(D)\{a(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))\} + B_L(D)\{q_1[\sigma_0(t), a(t)] \times \\ \times a(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))\} = B_z(D)\{a_z(t) \cos \omega_0 t\},$$

Далее учтем медленность изменения  $a(t)$ ,  $\sigma_0(t)$  и связанного с ними  $q_1(t) = q_1[\sigma_0(t), a(t)]$ .

Поскольку

$$D\{a(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))\} = \dot{a} \cos(\omega_0 t + \psi) - \\ - a \sin(\omega_0 t + \psi) \dot{\psi} - \omega_0 a \sin(\omega_0 t + \psi),$$

то в силу малости отношений  $\left| \frac{\dot{a}}{\omega_0 a} \right|, \left| \frac{\dot{\psi}}{\omega_0} \right|$  пренебрежем при вычислении производных всеми слагаемыми, кроме последнего. Иначе говоря, дифференцирование будем производить так, как будто медленно меняющиеся переменные являются постоянными. Такое допущение немедленно приводит к результату типа (4.9):

$$a(t) = |H(i\omega, q_1(t))|a_z, \quad q_1(t) = q_1[\sigma_0(t), a(t)], \quad (4.30)$$

с той разницей, что теперь эти соотношения связывают для любого  $t$  медленно изменяющиеся переменные  $a(t)$  и  $\sigma_0(t)$ .

Если из (4.30) выразить  $a(t)$  через  $\sigma_0(t)$  и подставить результат в (4.29), то получим уравнение, содержащее только неизвестную функцию  $\sigma_0(t)$ :

$$A_L(D)\sigma_0(t) + B_L(D)F[\sigma_0(t)] = B_z(D)z_0(t), \quad (4.31)$$

где  $F[\sigma_0]$ , обычно называемая *функцией смещения* [5.11], строится в результате подстановки в  $v_0(\sigma_0, a)$  найденной из (4.30) зависимости  $a = a^*(\sigma_0)$ . Уравнение (4.31) имеет точно такую же структуру, как исходные соотношения (4.1), (4.2), с той разницей, что функция  $f(\sigma)$  заменилась на новую (также, вообще говоря, нелинейную) функцию  $F(\sigma_0)$ . Из прямой части изъято колебательное слагаемое, но его амплитуда и частота входят как параметры в описание  $F(\sigma_0)$ . Основной особенностью функции является ее гладкость. Даже для разрывной в нуле нелинейности  $f(\sigma)$  соответствующая функция имеет ограниченную производную в нуле. Покажем это на примере идеального реле. Имеем в общем случае

$$S(a) \triangleq \frac{dF}{d\sigma_0} \Big|_{\sigma_0=0} = \frac{d}{d\sigma_0} \{v_0[\sigma_0, a^*(\sigma_0)]\} \Big|_{\sigma_0=0} = \frac{\partial v_0}{\partial \sigma_0} \Big|_{\sigma_0=0} + \frac{\partial v_0}{\partial a^*} \frac{\partial a^*}{\partial \sigma_0} \Big|_{\sigma_0=0}.$$

Согласно (4.17) для реле

$$\frac{\partial v_0}{\partial \sigma_0} \Big|_{\sigma_0=0} = \frac{2}{\pi a}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial a^*} \Big|_{\sigma_0=0} = 0,$$

так что

$$S(a) = \frac{2}{\pi a} \quad (4.32)$$

и ограничена при  $a \neq 0$ . Нетрудно убедиться, что для любой нечетной и почти всюду дифференцируемой  $f(\sigma)$  имеет место равенство

$$S(a) = \frac{\partial v_0}{\partial \sigma_0} \Big|_{\sigma_0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\sigma} [a \cos \psi] d\psi = q_1(a) + \frac{1}{2} a \frac{dq_1}{da}, \quad (4.33)$$

что делает понятным обычное наименование величины  $S(a)$  как *средней крутизны характеристики нелинейного элемента*.

Линеаризовав (4.31) по Тейлору, приходим к уравнению

$$[A_L(D) + S(a)B_L(D)]\sigma_0(t) = B_z(D)z_0(t); \quad (4.34)$$

оказывается, что это уравнение дает хорошее описание для многих интересных нелинейных проблем.

**Пример 4.3 (вibrationный усилитель).** Во многих системах управления и, в частности, в электромеханических следящих системах [1.3] релейный усилитель используется в так называемом vibrationном режиме. Рассмотрим структурную схему (рис. 5.38), соответствующую такому способу.

Воздействие  $z_2(t)$ , вводимое на вход усилителя, является гармоническим:

$$z_2(t) = a_2 \cos \omega_0 t,$$

а  $z_1(t)$  медленно изменяется по сравнению с  $z_2(t)$ . Отработка

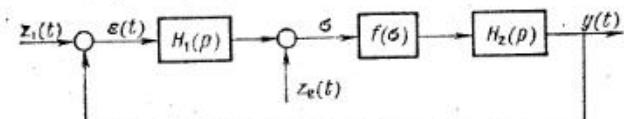


Рис. 5.38

медленного воздействия приближенно описывается линейным соотношением

$$y(t) = \frac{S(a) H_1(D) H_2(D)}{1 + S(a) H_1(D) H_2(D)} z_1(t),$$

причем наличием в  $y(t)$  гармонической компоненты можно пренебречь, если  $H_2(D)$  такова, что коэффициент усиления на частоте  $\omega_0$  мал. При этом условии гармоническое воздействие почти не проходит по обратной связи, так что амплитуда  $a$  на входе реле совпадает с амплитудой  $a_2$ . При фиксированном  $a_2$  качество работы системы близко к качеству работы при использовании линейного усилителя с коэффициентом усиления  $S = \frac{4}{\pi a_2}$ . Вместе с тем имеется возможность и перестройки этого коэффициента путем изменения амплитуды внешнего воздействия.  $\square$

**4.4. Медленная потеря устойчивости.** Нетрудно убедиться, что, если исходная система удовлетворяет условиям Т.2.3, то линейная система (4.34) для медленно меняющихся составляющих также устойчива. В противном случае это не гарантировано, и может возникнуть опасное явление, называемое *медленной потерей устойчивости под действием скрытых колебаний* [5.11]. Для его описания предположим, что  $f(\sigma)$  является ограниченной функцией с достаточно большой «почти линейной» зоной и невозрастающей производной (рис. 5.14).

Из формулы (4.33) тогда следует, что

$$k = \frac{df}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} \geq S(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0. \quad (4.35)$$

Предположим, что первоначальный расчет выполнен по линейной теории, и параметры системы выбраны так, что уравнение

$$A_L(p) + kB_L(p) = 0 \quad (4.36)$$

имеет только «хорошие» корни.

Пусть на вход элемента с характеристикой  $f(\sigma)$  проникают высокочастотные внешние возмущения (помехи)  $z_1(t)$  (вновь можно обратиться к структурной схеме на рис. 5.38, хотя здесь рассматривается иная ситуация). Если оставаться в рамках линейного расчета, то влиянием таких возмущений на выход можно пренебречь при достаточной инерционности объекта, представленного п. ф.  $H_L(p)$ .

Однако наличие нелинейности приводит к необходимости учесть влияние высокочастотных помех на отработку медленного воздействия. При использовании приближенного уравнения (4.34) получаем, что эта отработка устойчива, только если «хорошими» являются корни уравнения \*)

$$A_L(p) + S(a_z)B_L(p) = 0, \quad (4.37)$$

но  $S(a_z)$  убывает с ростом  $a_z$ .

**Вывод:** если передаточная функция линейной части системы имеет полюс в правой полуплоскости, существенно меньший по модулю, чем частота внешнего возмущения, то это возмущение при достаточно большой амплитуде может вызвать медленную потерю устойчивости.

На техническом жаргоне иногда говорят, что помехи «забивают» канал управления с ограниченной зоной линейности, а снижение среднего коэффициента усиления не позволяет обратной связи стабилизировать собственно неустойчивый объект. «Коварство» этого явления состоит именно в том, что на выходе объекта сама высокочастотная компонента почти незаметна. Неустойчивость «в малом» по медленной составляющей может проявиться и как неограниченный рост  $\sigma_0(t)$ , и как переход в режим медленных автоколебаний (для оценки последних можно вновь применить прием гармонической линеаризации, но применительно к уравнению (4.31) при  $z_0 = \text{const}$ ). Процесс изменения  $\sigma(t)$  в целом будет в этом случае представлен суперпозицией колебаний с частотой воздействия и низкочастотных колебаний, частота которых зависит от внутренних свойств системы. Амплитуда колебаний с частотой воздействия также медленно изменяется.

Практически весьма интересно, что сходные явления могут возникать и при отсутствии каких-либо внешних воздействий.

Рассмотрим систему (4.1) при  $z(t) = 0$ .

$$A_L(D)\sigma(t) + B_L(D)f[\sigma(t)] = 0. \quad (4.38)$$

В § 3 колебательное решение этой системы разыскивалось в форме гармонических колебаний. Однако возможны значительно более

\*) По смыслу дела следует интересоваться только корнями (4.37), существенно меньшими по модулю, чем частота воздействия  $\omega_0$ , ибо в противном случае нарушается предположение о медленности соответствующей неустойчивой моды.

сложные колебательные режимы, не являющиеся даже периодическими. В частности, можно попытаться разыскивать решение в виде (4.27) и применять описанную выше обобщенную схему гармонического баланса. Не повторяя всех рассуждений, сформулируем процедуру в окончательном виде.

а) Найти частоту  $\omega_0$  как наибольший корень уравнения

$$\operatorname{Im} H_L(i\omega_0) = 0, \quad \omega > 0. \quad (4.39)$$

б) Найти связь  $a^*(\omega_0)$  между амплитудой  $a(t)$  и смещением  $\sigma_0(t)$  в силу уравнения

$$1 + q_1[\sigma_0(t), a(t)] \operatorname{Re} H_L(i\omega_0) = 0. \quad (4.40)$$

в) Найти функцию смещения

$$F(\sigma_0) = v_0[\sigma_0, a] |_{a=a^*(\sigma_0)}. \quad (4.41)$$

г) Составить уравнение для смещения

$$A_L(D)\sigma_0(t) + B_L(D)F[\sigma_0(t)] = 0. \quad (4.42)$$

д) Найти  $\omega_m$  как наименьший корень уравнения (4.39). Если  $\omega_m \ll \omega_0$ , то продолжить процедуру.

е) Представить  $\sigma_0(t)$  в виде

$$\sigma_0(t) = a_m \cos \omega_m t \quad (4.43)$$

и найти функцию

$$q_{1M}(a_m) \triangleq \frac{1}{\pi a_m} \int_0^{2\pi} F[a_m \cos \psi] \cos \psi d\psi. \quad (4.44)$$

ж) Вычислить  $a_m$  как корень уравнения

$$1 + q_{1M}(a_m) \operatorname{Re} H_L(i\omega_m) = 0. \quad (4.45)$$

з) Представить окончательный результат в виде

$$\sigma(t) = a_m \cos \omega_m t + a^*[a_m \cos \omega_m t] \cos \omega_m t. \quad (4.46)$$

Не приводя конкретного примера применения этой процедуры, укажем лишь, что она, в частности, может быть эффективной, если  $H_L(p)$  имеет комплексные полосы с малой вещественной частью, что характерно для задач управления механическими системами, включающими слабодемпфированные колебательные звенья.

**4.5. Статистическая линеаризация.** Обобщением метода гармонической линеаризации, используемым при исследовании реакции нелинейной системы на внешнее воздействие  $z(t)$ , представляющее собой реализацию стационарного случайного процесса, является метод статистической линеаризации [5.6], [5.9], [5.13].

Решение системы (4.1), соответствующее такому  $z(t)$ , разыскивается также в виде реализации стационарных случайных процессов  $\sigma(t)$ ,  $v(t)$ , а нелинейная связь (4.2) заменяется ее линейным приближением, наилучшим в смысле минимума среднеквадратичного уклонения. Иначе говоря, принимается

$$\sigma(t) = m_\sigma + \sigma^0(t), \quad (4.47)$$

$$v(t) = m_v + v^0(t) = m_v + h_1 \sigma^0(t), \quad (4.48)$$

где  $m_\sigma$ ,  $m_v$  — постоянные величины,  $\sigma^0(t)$ ,  $v^0(t)$  — центрированные составляющие, причем  $m_v$  и  $h_1$  выбираются так, чтобы была минимальной величина

$$M\{(f[m_\sigma + \sigma^0(t)] - [m_v + h_1 \sigma^0(t)])^2\}.$$

Это достигается, если

$$m_v = M\{f[m_\sigma + \sigma^0(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f[m_\sigma + \xi] p_\sigma(\xi) d\xi, \quad (4.49)$$

$$h_1 = \frac{1}{M\{(\sigma^0(t))^2\}} M\{f[m_\sigma + \sigma^0(t)] \sigma^0(t)\} = \frac{1}{d_\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f[m_\sigma + \xi] p_\sigma(\xi) d\xi, \quad (4.50)$$

где  $p_\sigma(\xi)$  — плотность распределения процесса  $\sigma^0(t)$ , а  $d_\sigma$  — его дисперсия.

Таким образом, величины  $m_v$  и  $h_1$  оказываются зависимыми от заранее неизвестных параметров  $m_\sigma$ ,  $d_\sigma$ , а также, вообще говоря, от неизвестной формы закона распределения.

Простейший вариант метода статистической линеаризации связан с введением [5.13] дополнительной гипотезы о нормальности процесса  $\sigma^0(t)$ , т. е. с введением предположения, что

$$p_\sigma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2d_\sigma}}. \quad (4.51)$$

После вычисления интегралов (4.49), (4.50) для любой конкретной функции  $f(\sigma)$  можно найти соответствующие зависимости (таблицы можно найти в [5.6], [5.9] и др.)  $m_v = m_v(m_\sigma, d_\sigma)$ ,  $h_1 = h_1(m_\sigma, d_\sigma)$ . В частности, для идеального реле \*) имеем

$$m_v = 2\Phi\left(\frac{m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right), \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{d_\sigma}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{m_\sigma^2}{2d_\sigma}}, \quad (4.52)$$

\*) Здесь, как и ранее в гл. 4,  $\Phi(\xi)$  — интеграл вероятностей.

а для элемента с ограниченной зоной линейности

$$m_v = (1 + m_\sigma) \Phi\left(\frac{1 + m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right) - (1 - m_\sigma) \Phi\left(\frac{1 - m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right) + \\ + \frac{\sqrt{d_\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{(1+m_\sigma)^2}{2d_\sigma}} - e^{-\frac{(1-m_\sigma)^2}{2d_\sigma}} \right], \quad (4.53)$$

$$h_1 = \Phi\left[\frac{1 + m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right] + \Phi\left[\frac{1 - m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right].$$

Отметим, что гипотеза (4.51) не единственная возможная, хотя и естественная, если воздействие  $z(t)$  является нормальным. Если же распределение  $z(t)$  отлично от нормального, то может оказаться целесообразным использовать иные предположения. Рассмотрим, в частности, случай, когда

$$z^0(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.54)$$

где  $a_1$ ,  $\omega$  — детерминированные величины, а  $\varphi$  — случайная константа, равномерно распределенная в интервале  $[0, 2\pi]$ . Каждая реализация такого процесса является детерминированной гармонической функцией. Поэтому разумно предположить, что и реализации  $\sigma^0(t)$  близки к гармоническим с одной и той же амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ , отличаясь лишь случайным сдвигом по фазе. Нетрудно показать, что плотность вероятности значений  $\sigma^0(t)$  в любой момент  $t$  равна

$$p_\sigma(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a} (a^2 - \xi^2)^{-1/2}, & |\xi| \leq a, \\ 0, & |\xi| > a, \end{cases} \quad (4.55)$$

причем  $d_\sigma = \frac{1}{2} a^2$ .

Подставив (4.55) в (4.49), (4.50), получим

$$m_v = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(m_\sigma + \xi) (a^2 - \xi^2)^{-1/2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(m_\sigma + a \cos \psi) d\psi,$$

$$h_1 = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a \xi f(m_\sigma + \xi) (a^2 - \xi^2)^{-1/2} d\xi = \frac{2}{\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(m_\sigma + a \cos \psi) \cos \psi d\psi.$$

Сравнивая значения интегралов в правых частях с выражениями для среднего значения и коэффициентов гармонической линеаризации, полученными в § 3, убеждаемся в их тождественном совпадении (с точностью до замены обозначения  $m_\sigma$  на  $\sigma_0$ ). Таким образом, гармоническую линеаризацию можно трактовать как частный случай статистической при гипотезе (4.55). Качественный характер поведения функций  $m_v(m_\sigma, d_\sigma)$ ,  $h_1(m_\sigma, d_\sigma)$  слабо зависит от гипотезы о

распределении. В частности, для любой ограниченной функции с неубывающей производной имеет место свойство, аналогичное (4.35):

$$\frac{df}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} \geq \frac{\partial m_v}{\partial m_\sigma} \Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{d\xi} p_\sigma(\xi) d\xi \triangleq S(\sqrt{d_\sigma}) \xrightarrow{d_\sigma \rightarrow \infty} 0. \quad (4.56)$$

Основная процедура метода статистической линеаризации также близка к процедуре метода гармонической линеаризации и заключается в следующем.

а) Составить уравнение для средних составляющих

$$A_L(0)m_\sigma + B_L(0)m_v = B_z(0)m_z. \quad (4.57)$$

б) Составить линеаризованное уравнение для центрированных составляющих

$$[A_L(D) + h_1(m_\sigma, d_\sigma)B_L(D)]\sigma^0 = B_z(D)z^0. \quad (4.58)$$

в) Предполагая известной спектральную плотность  $S_z(\omega)$  внешнего воздействия  $z^0$ , вычислить  $d_\sigma$ :

$$d_\sigma = d_\sigma(h_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{B_z(i\omega)}{A_L(i\omega) + h_1 B_L(i\omega)} \right|^2 S_z(\omega) d\omega, \quad (4.59)$$

рассматривая при этом  $h_1$  как параметр.

г) Найти решение системы уравнений

$$m_v(m_\sigma, d_\sigma) = \frac{B_z(0)m_z - A_L(0)m_\sigma}{B_L(0)} s \quad (4.60)$$

$$d_\sigma [h_1(m_\sigma, d_\sigma)] = d_\sigma. \quad (4.61)$$

**Пример 4.4.** Рассмотрим простейшее уравнение

$$(TD + 1)\sigma(t) + kv(t) = kz(t), \quad v(t) = \text{sign } \sigma(t).$$

Тогда для средних составляющих имеем

$$m_\sigma + km_v = km_z,$$

а для центрированных

$$\sigma^0(t) = \frac{k}{TD + 1 + kh_1} z^0(t).$$

Предполагая, что  $S_z(\omega) = 1$ , получаем

$$d_\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 d\omega}{T^2 \omega^2 + (1 + kh_1)^2} = \frac{k}{2T \left( \frac{1}{k} + h_1 \right)}.$$

Используя формулы (4.52), приходим к системе уравнений

$$2k\Phi\left(\frac{m_\sigma}{\sqrt{d_\sigma}}\right) = km_z - m_{\sigma_1} - \frac{k}{2T \left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{d_\sigma}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{m_\sigma^2}{2d_\sigma}} \right]} = d_\sigma.$$

Результаты решения этих трансцендентных уравнений при  $m_z = 1, 5$ ,  $k = 1$  для различных значений параметра  $\gamma = 1/(2T)$  представлены на рис. 5.39. □

При воздействии стационарного случайного процесса на системы, не обладающие устойчивостью в целом, возможны весьма сложные режимы, теория которых недостаточно разработана. Формальное применение метода статистической линеаризации может, например, выявить несколько решений с различными значениями диспер-

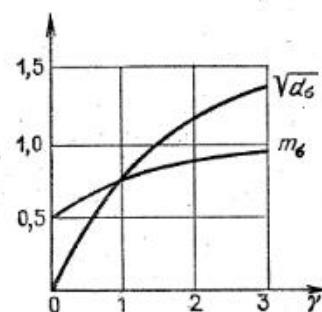


Рис. 5.39

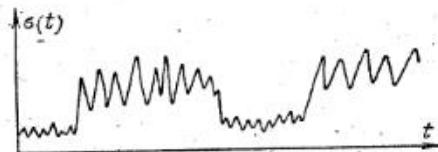


Рис. 5.40

сии  $d_\sigma$ . Прямые вычисления на ЭВМ показывают, что наличие таких решений свидетельствует о возможности реализаций, характер которых представлен на рис. 5.40 (средняя «мощность» колебаний остается на отрезках случайной длительности близкой к одному из найденных значений дисперсии), однако даже правдоподобного доказательства справедливости этого предположения в общем случае нет.

Случайные возмущения, основная «мощность» которых сосредоточена в области высоких частот, могут вызывать точно такие же явления, что и гармонические высокочастотные возмущения, в частности, медленную потерю устойчивости. С детальным описанием различных модификаций метода статистической линеаризации, позволяющих анализировать подобные процессы, можно познакомиться по книге [5.9].

В заключение приведенного краткого обзора методов приближенного исследования колебательных процессов в нелинейных системах подчеркнем, что их главным достоинством является возможность получения наглядных качественных представлений.

При расчете режимов в конкретных системах с полностью заданным описанием в настоящее время эффективнее использовать процедуры численного интегрирования на ЭВМ. Однако и в такой си-

туации ориентировочные представления о характере решения, даваемые методами типа гармонической или статистической линеаризации, исключительно важны, поскольку без них трудно правильно выбрать шаг сетки по времени и даже сам метод численного интегрирования.

### § 5. О выборе законов управления с учетом нелинейных факторов

**5.1. Постановка задачи.** В предшествующем изложении мы явно или неявно считали, что закон управления с обратной связью выбран на основе линейной теории, и изучали лишь те «неприятности», которые могут возникнуть в силу нелинейности элементов, с помощью которых реализуются «линейные рекомендации». Конечно, естественнее было бы подходить иначе: предварительно выявить возможные нелинейности и выбирать закон управления с их учетом так, чтобы цель управления обеспечивалась наилучшим образом. Четкая постановка этой очень трудной задачи дана ниже, в гл. 9 и 10, причем заранее можно сказать, что универсальных рецептов ее решения не существует.

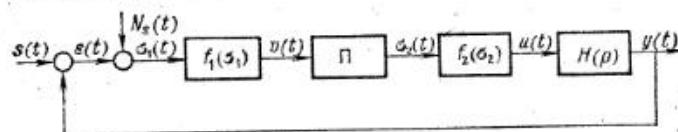


Рис. 5.41

Здесь же мы ограничимся некоторыми замечаниями и примерами.

Предположим, что целью управления является обеспечение малости ошибки  $\varepsilon(t)$  (рис. 5.41). Заранее известно, что нелинейными являются либо характеристика датчика рассогласования  $f_1(\sigma_1)$ , либо характеристика  $f_2(\sigma_2)$  усилителя в силовом блоке, оказывающем управляющее воздействие на объект. В первом случае невозможно использовать для формирования закона управления непосредственно сигнал ошибки — доступен лишь выход датчика  $v(t)$ . Во втором — невозможно произвольно задавать сигнал управления, поскольку формируется лишь вход  $\sigma_2(t)$  нелинейного усилителя. Выбору подлежат преобразующие свойства  $v \rightarrow \sigma_2$  блока  $\Pi$ . Поскольку известны способы формирования эффективных законов управления при отсутствии нелинейностей, то естественна первая и практически основная тенденция — при выборе преобразователей обеспечить близость поведения системы к линейной с желаемыми свойствами, определяемыми п. ф.  $H_p^*(p)$  от ошибки  $\varepsilon(t)$  к выходу  $y(t)$ . Обеспечить точное совпадение поведений линейной и нелинейной системы, как правило, невозмож-

но; однако цель выбора состоит в том, чтобы сделать различия возможно менее существенными. При этом можно использовать несколько простых приемов.

**5.2. Последовательная линейная компенсация.** Закон преобразования в блоке  $\Pi$  выбирается линейным, задаваемым п. ф.  $H_1(p)$ .

Структурные схемы с таким блоком, при различных возможных расположениях нелинейного элемента (мы пока умеем анализировать только системы с одной нелинейностью!) представлены на

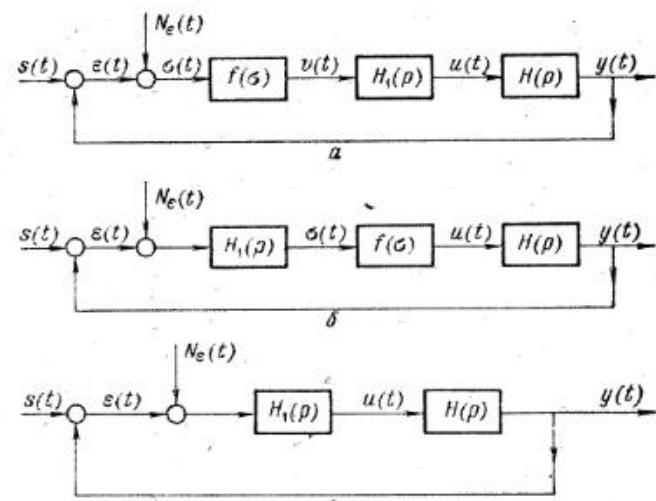


Рис. 5.42

рис. 5.42, а, б. В обоих случаях уравнения системы представимы в стандартной форме, причем

$$H_L(p) = H_1(p)H(p). \quad (5.1)$$

Пусть нелинейная характеристика удовлетворяет требованиям, сформулированным в одной из теорем 2.1, 2.3 либо 2.4. Тогда  $H_1(p)$  может быть выбрано так, чтобы  $H_L(p)$  удовлетворяло соответствующему частотному условию, если  $H(p)$  удовлетворяет условиям применимости метода компенсации (гл. 3, § 3). При этом по крайней мере гарантируется устойчивость в целом нелинейной системы. Рассмотрим также прием [5.9, § 2.5], связанный с методом статистической линеаризации. Пусть  $s(t)$ ,  $N(t)$  — некоррелированные случайные процессы с дробно-рациональными спектральными плотностями  $S_s(\omega^2)$ ,  $S_N(\omega^2)$ . Используя метод, описанный в § 2 гл. 4, можно найти п. ф.  $H_p^*(p)$  такую, что достигается минимум дисперсии ошибки в линейной системе, представленной на рис. 5.42, в, при

ограничений на дисперсию управления

$$d_u \leq \delta_{us}^2, \quad u(t) = H^{-1}(D) y(t).$$

Попытаемся приблизить поведение нелинейной системы, представленной на рис. 5.42, б, к этой оптимальной линейной. Функцию  $f(\sigma)$  будем считать плавкой. В пределах точности метода статистической линеаризации нелинейная система будет иметь ту же дисперсию ошибки, что и оптимальная линейная, если

$$H_1(p) h_1(d_\sigma) H(p) = H_s^*(p) [1 - H_s^*(p)]^{-1}, \quad (5.2)$$

где  $h_1(d_\sigma)$  — коэффициент статистической линеаризации нелинейности  $f(\sigma)$ , а  $d_\sigma$  — дисперсия процесса на ее входе. В том же приближении

$$d_u = h_1^2(d_\sigma) d_\sigma. \quad (5.3)$$

Если ограничение достигается, т. е.  $d_u = \delta_{us}^2$ , то для определения  $d_\sigma$  имеем уравнение

$$\sqrt{d_\sigma} h_1(d_\sigma) = \delta_{us}. \quad (5.4)$$

Пусть его решение  $d_\sigma^*$  существует, тогда  $H_1(p)$  определяется формулой компенсации:

$$H_1(p) = H_s^*(p) [1 - H_s^*(p)]^{-1} [h_1(d_\sigma^*) H(p)]^{-1}. \quad (5.5)$$

Однако решение может не существовать, если нелинейная функция ограничена,  $|f(\sigma)| \leq \bar{u}$ . Действительно, в этом случае при любом входном процессе  $\sigma(t)$ ,  $d_u \leq \bar{u}^2$ , и назначение  $\delta_u > \bar{u}$  заведомо недопустимо. Более того, можно доказать справедливость оценки  $h_1 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi d_\sigma}} \bar{u}$ , откуда следует, что недопустимо  $\delta_u > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{u}$ .

Поэтому ограниченность нелинейности, т. е. возможного уровня управляющего воздействия, приводят к сужению класса линейных систем, приближение к которым возможно. Для гарантии разрешимости при не слишком больших  $d_\sigma^*$  обычно принимают

$$\delta_u = 0,7\bar{u} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{u}. \quad (5.6)$$

В случае нелинейности типа идеального реле дисперсия управления (выхода реле) фиксирована,  $d_u = 1$ , что и следует учесть при решении линейной задачи. Передаточная функция  $H_1(p)$  определяется формулой

$$H_1(p) = H_s^*(p) [1 - H_s^*(p)]^{-1} H^{-1}(p) \quad (5.7)$$

с точностью до постоянного множителя, от которого зависит лишь дисперсия сигнала  $\sigma(t)$  на входе реле, но не дисперсия ошибки.

**Пример 5.1.** Пусть нелинейная система имеет вид, представленный на рис. 5.42, б, причем задано, что

$$S_s(\omega^2) = \frac{2\lambda_s}{\omega^2 + \lambda_s^2} d_{ss}, \quad S_N(\omega^2) = 0, \quad H(p) = \frac{1}{Tp + 1}$$

а нелинейность  $f(\sigma)$  — идеальное реле. Найдем оптимальную п. ф. замкнутого контура по критерию минимума дисперсии ошибки с ограничением на дисперсию управления,  $d_u = 1$ . Воспользовавшись результатами гл. 4 (П.2.3), имеем

$$H_s^*(p) = \frac{1 - \theta}{T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1} \frac{1}{T\sqrt{\theta}p + 1},$$

где согласующий параметр  $\theta$  находится из условия

$$d_u = \frac{(1 - \theta)^2 (T\lambda_s + \sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta} (T\sqrt{\theta}\lambda_s + 1)^3} d_s = 1.$$

Если  $d_s \lambda_s T \ll 1$ , то  $\sqrt{\theta} \approx d_s \lambda_s T$ , и можно принять, что

$$H_s^*(p) = \frac{1}{T^2 \lambda_s d_s p + 1} \Rightarrow H_1(p) = \frac{Tp + 1}{p} k_1,$$

где  $k_1$  произвольно.  $\square$

**5.3. Нелинейная компенсация.** Этот простой прием сводится к следующему. Пусть характеристика нелинейного элемента  $f(\sigma)$  такова, что  $f(0) = 0$ , и монотонно возрастает при  $|\sigma| \leq \bar{u}$ . Тогда, введя последовательно с этим элементом другой, также нелинейный, но имеющий обратную характеристику, мы добиваемся линейности преобразования в целом на этом отрезке.

**Пример 5.2.** Пусть датчик имеет характеристику, аппроксимируемую при  $|\sigma_1| \leq \bar{\sigma}_1$  функцией  $f_1(\sigma_1) = k\sigma_1^3$ . Тогда можно преобразовать выходной сигнал  $v(t)$  датчика с помощью нелинейного компенсатора, задаваемого уравнением

$$v_1 = \varphi(v) = v^{1/3}.$$

Очевидно, что  $v_1 = k^{1/3} \sigma_1$ , т. е. нелинейность компенсирована. Естественно, что последовательная компенсация невозможна на участках, где функция постоянна или начинает падать. Лучшее, чего можно добиться этим способом, — это расширить зону линейности в пределах монотонного изменения. Нельзя избавиться таким способом ни от зоны нечувствительности, ни от ограничений.

**5.4. Вибрационное «глаживание» зоны нечувствительности.** Для ликвидации эффектов, связанных с наличием зоны нечувствительности в датчике рассогласования, можно применить прием, близкий к уже описанному в П.4.3. Введем на вход датчика (рис. 5.43) дополн-

нительный высокочастотный (по сравнению с отрабатываемым воздействием) сигнал. Выходной сигнал датчика пронесет через фильтр, не искажающий частотную характеристику в рабочей полосе частот, но подавляющий высокочастотные компоненты. Тогда по

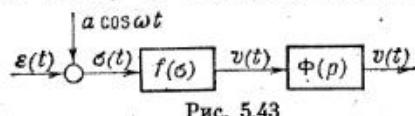


Рис. 5.43

отношению к медленному отрабатываемому сигналу преобразующие свойства датчика характеризуются функцией  $v_0[\varepsilon(t), a]$ , поскольку  $\varepsilon(t)$  совпадает с медленной компонентой в  $\sigma(t)$ . Если амплитуда  $a$  больше полуширины  $\Delta$  зоны нечувствительности, то  $v_0$  как функция  $\varepsilon(t)$  не имеет такой зоны.

В частности, если

$$f(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| < \Delta, \\ \sigma \pm \Delta, & |\sigma| \geq \Delta, \end{cases}$$

то

$$v_0(\varepsilon_0, a) = \frac{1}{\pi} [a \sin \psi_1 + (\varepsilon - \Delta) \psi_1 - a \sin \psi_2 + (\varepsilon + \Delta) (\pi - \psi_2)], \quad (5.8)$$

$a \cos \psi_1 = \Delta - \varepsilon$ ,  $a \cos \psi_2 = -(\Delta + \varepsilon)$ ,  $|\Delta - \varepsilon| < a$ ,  $|\Delta + \varepsilon| < a$ ,

$$\left. \frac{\partial v_0}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{2}{\pi} \arccos \Delta a^{-1} \simeq 1 - \frac{2}{\pi} \Delta a^{-1}.$$

Сглаженная характеристика  $v_0(\varepsilon, a)$  монотонна по  $\varepsilon$ , и к ней может быть применена процедура последовательной нелинейной компенсации.

**5.5. Нелинейные обратные связи.** Все описанные приемы служили одной цели — по возможности уменьшить влияние нелинейных факторов на поведение системы в целом. Однако этот путь не является единственно целесообразным. В ряде ситуаций следует специально вводить нелинейные элементы в систему для того, чтобы придать ей свойства, которых никакая линейная не имеет.

В § 1 приводился пример, свидетельствующий о том, что релейное управление может иметь преимущество с точки зрения быстродействия. В гл. 9 будет доказано, что этот пример иллюстрирует общее правило, в силу которого оптимальные по быстродействию законы управления имеют релейный характер.

Здесь же мы на элементарном примере осветим другое достоинство некоторых нелинейных систем — возможность обеспечивать управление с малыми ошибками при очень плохой информации о параметрах объекта.

**Пример 5.3.** Пусть объект линеен и описывается уравнением 1-го порядка

$$(\mathbf{D} - h)y = u. \quad (5.9)$$

Объект неустойчив ( $h > 0$ ), но значение  $h$  неизвестно. Если выбрана линейная обратная связь  $u = -ky$ , то система будет устойчивой,

только если  $k > h$ . Создать линейную обратную связь с неограниченно большим коэффициентом усиления невозможно; поэтому найдется  $h$ , при котором замкнутая система окажется неустойчивой. Попытаемся использовать нелинейную связь  $u = -ky^3$ ,  $k > 0$ .

Замкнутая система описывается нелинейным уравнением

$$Dy = hy - ky^3$$

и, очевидно, имеет три положения равновесия  $0, \pm \sqrt{\frac{h}{k}}$ . Положение равновесия  $y_0 = 0$  неустойчиво в малом, однако два других — устойчивы. Действительно, введем переменную  $V = y^3$ . Тогда, умножая (5.9) на  $y$ , получим

$$yDy = y^2(h - ky^3)$$

или

$$\frac{1}{2} DV = V(h - kV),$$

так что

$$DV < 0 \text{ при } V > \frac{h}{k}, \text{ т. е. } |y| > \sqrt[3]{\frac{h}{k}},$$

$$DV > 0 \text{ при } V < \frac{h}{k}, \text{ т. е. } |y| < \sqrt[3]{\frac{h}{k}}.$$

Таким образом, при любых отклонениях от нуля и любых  $h$  выход системы стремится к одному из положений равновесия  $\pm \sqrt[3]{h/k}$ . Пример иллюстрирует ту идею, что с помощью нелинейных обратных связей можно добиться стабилизации системы, хотя, как правило, без гарантии, что установившийся режим точно совпадает с желаемым.  $\square$

Более полное освещение проблемы использования нелинейных законов управления в условиях большой неопределенности дано в гл. 10, 11.

ГЛАВА 6  
МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ  
В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Описание в нормальной форме

**1.1. Основная модель.** В данной главе мы возвращаемся к линейной теории, однако за основу возьмем другой подход, открывающий принципиально новые возможности анализа систем и синтеза законов управления.

В гл. 2 была выдвинута гипотеза о том, что описание системы может быть дано путем задания дифференциальных уравнений звеньев и алгебраических соотношений, выражающих связи между звеньями. Описанные в дальнейшем методы (гл. 2–4) можно назвать *операторно-структурными*, поскольку первичное описание давалось на языке операторов звеньев и структуры связей. Здесь же в качестве первичной математической модели примем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}v_k, \quad i = 1, \dots, n, \\ y_l &= \sum_{i=1}^n c_{li}x_i, \quad l = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (1.1)$$

называемую *описанием в нормальной форме* или *описанием в пространстве состояний*.

Последнее название связано с тем, что при  $v_k = 0$  достаточно задать начальное значение переменных  $x_i(t)$  для того, чтобы определить их значения, а следовательно, и значения выхода в любой последующий момент, т. е. задание  $x_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , полностью определяет состояние системы  $x_i(t)$ ,  $t > t_0$ .

В модели (1.1) имеется  $n$  взаимосвязанных дифференциальных уравнений 1-го порядка, в правую часть которых входят  $m$  различных внешних воздействий  $v_k$ , а также  $s$  алгебраических соотношений, связывающих  $s$  выходных (управляемых) процессов  $y_l$  с переменными состояния  $x_i$ , число которых ( $n$ ) совпадает с числом уравнений. Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ik}$ ,  $c_{li}$  называются *параметрами модели*.

Уравнения (1.1) удобно представить в матричной форме\*):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv, \quad y = Cx, \quad (1.2)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор (матрица-столбец) переменных состояния,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  — вектор входных воздействий,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$  — вектор выходов,

$$A = \{a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n\},$$

$$B = \{b_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m\},$$

$$C = \{c_{li}, \quad l = 1, 2, \dots, s; \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

— матрицы параметров. Вся информация о свойствах объекта содержится теперь в числовых таблицах-матрицах параметров. При анализе объектов и синтезе законов управления можно будет опираться на стандартные правила преобразования этих таблиц.

Сопоставим (1.1), (1.2) с операторным описанием звеньев и систем, введенным в гл. 2.

**1.2. Описание звена в нормальной форме.** В § 1 гл. 2 было принято, что любое звено системы может быть задано с помощью одного дифференциального уравнения, которое в операторной записи имеет вид

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)v(t), \quad (1.3)$$

где

$$\alpha(D) = D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \dots + \alpha_0;$$

$$\beta(D) = \beta_m D^m + \beta_{m-1} D^{m-1} + \dots + \beta_0.$$

Это уравнение полностью определяет изменение выхода  $y(t)$ , если задано входное воздействие  $v(t)$ , а также начальные значения  $y(t)$  и его производных вплоть до  $(n-1)$ -й.

**Теорема 1.1.** Если  $m < n$ , то решение  $y(t)$  уравнения (1.3) совпадает с решением уравнения в нормальной форме (1.2), если принять \*\*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C = \{1, 0, \dots, 0\}, \quad (1.4)$$

где величины  $b_1, b_2, \dots, b_n$  находятся последовательно из системы

\*) Сводка обозначений и необходимых сведений из теории матриц дана в Приложении 2.

\*\*) Если матрица  $A$  имеет вид (1.4), то говорят, что она задана в форме Фробениуса.

уравнений

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_{n-1}, \\ \alpha_{n-1}b_1 + b_2 &= \beta_{n-2}, \\ \vdots &\quad \vdots \\ \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + \dots + \alpha_{n-1}b_{n-1} + b_n &= \beta_0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а начальные условия согласованы следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= y(0), \quad x_2(0) = Dy(0) - b_1v(0), \dots, \quad x_n(0) = \\ &= D^{n-1}y(0) - b_1D^{n-2}v(0) - \dots - b_{n-1}v(0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Доказательство** фактически содержится в доказательстве Т.2.1, гл. 2. Действительно, там было показано (формула (2.44)), что уравнение (1.3) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} Dx_i &= x_{i+1} + b_i v, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ Dx_n &= -\alpha_0 x_1 - \dots - \alpha_{n-1} x_n + b_n v, \end{aligned} \quad (1.7)$$

причем при  $m < n$   $y = x_1$ .

Раскрывая матричную запись (1.2) в предположении, что матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  имеют вид (1.4), приходим именно к (1.7). Формулы (1.6) также были установлены в гл. 2 (см. (2.46)). ■

**Пример 1.1.** Рассмотрим электрическую цепь как звено, связывающее вход (напряжение)  $v(t) = u(t)$  с выходом (током)  $y(t) = i(t)$  с помощью уравнения

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{CL}\right)y(t) = \frac{1}{L}Dv(t). \quad (1.8)$$

Применяя правило, заключающееся в Т.1.1, дадим описание в нормальной форме. Здесь  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,

$$\alpha_1 = \frac{R}{L}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{CL}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{L}$$

и, согласно (1.5),

$$b_1 = \beta_1 = \frac{1}{L}, \quad \beta_2 = \beta_0 - \alpha_1 b_1 = -\frac{R}{L^2}.$$

Имеем в силу (1.2), (1.4):

$$D \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{R}{L^2} \end{Bmatrix} v, \quad y = x_1,$$

или, в виде системы скалярных уравнений,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \frac{1}{L}v, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{CL}x_1 - \frac{R}{L}x_2 - \frac{R}{L^2}v, \quad y = x_1. \quad (1.9)$$

**Вывод 1.** От операторного описания звена можно перейти к описанию в нормальной форме, используя стандартную процедуру, если п. ф. звена является правильной дробью.

Этот переход по существу содержитя в описании звена с помощью структуры, содержащей только усилители и интеграторы, причем в качестве перемещенных состояния могут быть взяты выходы интеграторов. Структуры этого типа, как было показано в § 2 гл. 2, неединственны. Соответственно с этим неединственно и описание в нормальной форме, которое может быть эквивалентно уравнению (1.3).

В качестве примера другого описания приведем уравнения, следующие из структурной схемы на рис. 2.11, б (при  $n > m$ ):

$$\begin{aligned} Dx_1 &= -\alpha_0 x_n + \beta_0 v, \\ Dx_2 &= x_1 - \alpha_1 x_n + \beta_1 v, \\ &\vdots \\ Dx_{m+1} &= x_m - \alpha_m x_n + \beta_m v, \\ &\vdots \\ Dx_n &= x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n, \quad y = x_n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подчеркнем, что переменные  $x_i$  имеют здесь другой смысл, чем в системе (1.7). Тем не менее и (1.7) и (1.10) эквивалентны (1.3) в том смысле, что они определяют один и тот же выходной процесс  $y(t)$ , если, конечно, прилагается одно и то же входное воздействие и подобраны подходящие начальные условия.

**1.3. Описание системы звеньев.** Покажем далее, как привести к нормальной форме описание системы, состоящей из множества звеньев, заданных операторными уравнениями

$$\alpha_i(D)y_i = \beta_i(D)v_i, \quad (1.11)$$

где  $i$  — индекс (номер) звена,  $v_i$  — его вход,  $y_i$  — выход,  $\alpha_i(D)$ ,  $\beta_i(D)$  — операторные многочлены такие, что

$$\deg \alpha_i > \deg \beta_i.$$

Связи между звеньями зададим, как и в § 2 гл. 2, структурными соотношениями

$$v_i = \sum_j \gamma_{ij} y_j + \bar{v}_i, \quad (1.12)$$

где  $\bar{v}_i$  — внешние входы, а  $\gamma_{ij}$  — величины, равные нулю или  $\pm 1$ .

От каждого из уравнений (1.11) по описанной в Т.1.1 процедуре можно перейти к эквивалентной записи в нормальной форме

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = A^{(i)}x^{(i)} + B^{(i)}v_i, \quad y_i = C^{(i)}x^{(i)}, \quad (1.13)$$

где введен индекс  $i$  для векторов переменных состояния каждого звена и соответствующих матриц.

Используя структурные связи, можно исключить все внутренние входы:

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = A^{(i)}x^{(i)} + B^{(i)} \sum_j \gamma_{ij} C^{(j)}x^{(j)} + B^{(i)}\bar{v}_i. \quad (1.14)$$

Для объединенного вектора состояния всей системы  $\bar{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ , рассматриваемого как матрица-столбец, состоящая из блоков-столбцов  $x^{(i)}$ , система (1.14) переписывается в стандартном виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{v}, \quad y = \bar{C}\bar{x}, \quad (1.15)$$

где  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots)$ ,  $\bar{B} = \text{diag}\{B^{(i)}\}$ ,  $\bar{C} = \text{diag}\{C^{(i)}\}$ ,  $\bar{A} = \text{diag}\{A^{(i)}\} + \bar{B}\Gamma\bar{C}$ .

При этом использованы обозначения для блочно-диагональных матриц (см. Приложение 2, п. 3б), а также введена матрица  $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ , обычно называемая *матрицей инциденций* («соседства») звеньев.

Если управляемыми являются не все выходы звеньев, а лишь некоторые из них или линейные комбинации выходов, то вводится вектор внешних выходов  $\bar{y}$ , связанный с  $y$  алгебраическим соотношением  $\bar{y} = My$ , где  $M$  — матрица с постоянными элементами — коэффициентами влияния каждого звена на каждый общий выход; тогда

$$\bar{y} = M\bar{C}\bar{x} = \bar{C}\bar{x}, \quad \bar{C} \triangleq MC. \quad (1.16)$$

**Вывод 2.** Структурно-операторному описанию системы может быть сопоставлено эквивалентное описание в нормальной форме.

**1.4. Естественный характер описания в нормальной форме.** Вывод 2 важен в теоретическом отношении (мы ничего не теряем, используя описание в нормальной форме, по сравнению с ранее изученным), однако во многих случаях в описанных процедурах преобразования нет необходимости, поскольку нормальная форма является *естественной* для первичного описания реальных объектов управления.

**Пример 1.2.** Вновь рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательных соединений элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Запишем уравнение цепи сразу в переменных состояния, взяв в качестве таковых напряжение на емкости

$$x_1 = u_C \quad (1.17)$$

и поток через индуктивность (потокосцепление)

$$x_2 = \Psi. \quad (1.18)$$

Тогда из уравнений теории цепей

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_s - \frac{d\Psi}{dt} + Ri + u_C = u_s, \quad \Psi = Li \quad (1.19)$$

следует нормальное описание ( $v = u$ ,  $y = i$ )

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{LC} x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - \frac{R}{L} x_2 + v_s, \quad y = \frac{1}{L} x_2. \quad (1.20)$$

Оно не совпадает с (1.9), где переменные были выбраны в силу формальной процедуры Т.1.1, но, очевидно, приводит к той же операторной связи «вход-выход» (1.8).  $\square$

**Пример 1.3.** Электромеханическая система (усилитель — двигатель — редуктор — вал нагрузки) была описана в § 2 гл. 2 (П.2.2), причем первичным было описание именно с помощью дифференциальных уравнений 1-го порядка и алгебраических связей. Рекомендуется проверить самостоятельно, что при введении переменных  $x = (x_1, \dots, x_5)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ , где  $x_1 = i_a$ ,  $x_2 = \varphi_d$ ,  $x_3 = \omega_d$ ,  $x_4 = \varphi$ ,  $x_5 = \omega$ ,  $v_1 = u_{ex}$ ,  $v_2 = m_a$ , эти уравнения могут быть записаны в виде (1.2), причем

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_d}{L_d} & 0 & -\frac{C_e}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_M}{J_d} & -\frac{c}{r^2 J_d} & \frac{c}{r J_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c}{r J_d} & 0 & -\frac{c}{J_d} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J_d \end{pmatrix}.$$

В качестве выходов системы могут рассматриваться либо только  $y_1 = x_4 = \varphi$ , либо также  $y_2 = x_5 = \omega$ ,  $y_3 = x_1 = i_a$  (при построении «внутренних» обратных связей по угловой скорости и току, как в § 7, гл. 3), либо их комбинация  $y_4 = x_4 - \frac{1}{r} x_2 = \varphi - \frac{1}{r} \varphi_d$ , имеющая смысл упругой деформации выходной ступени редуктора, также представляющей интерес при построении «внутренней» обратной связи, улучшающей динамическое свойство системы. Таким образом, можно записать в матричном виде

$$y = Cx,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Напомним теперь, что в аналитической механике (см., например, [6.1]) доказана возможность представления описания механической системы с помощью системы дифференциальных уравнений, включающей только 1-е производные фазовых переменных (обобщенных координат и обобщенных скоростей, или обобщенных коор-

динат и импульсов). В линейном случае этим уравнениям можно придать вид (1.2), считая фазовые переменные переменными состояния системы  $x(t)$ \*). Аналогичным образом в «естественных» переменных типа «токи через индуктивные элементы и заряды на емкостях» или «потокосцепления и напряжения на емкостях» сразу строится описание электрических цепей в нормальной форме, как это было сделано выше в простейшем примере. То же касается и смешанных электромеханических систем, где в основу могут быть положены уравнения Лагранжа — Максвелла, элементарно приводимые к стандартному виду. Наконец, уравнения химической кинетики (в том числе и кинетические уравнения теоретической биохимии и биофизики (см., например, [6.8])) обычно естественно имеют вид связей скоростей изменения концентраций (производных от фазовых переменных) с их текущими значениями (самими фазовыми переменными). При линеаризации этих связей вновь можно получить уравнения (1.1) или (1.2). Мы не будем описывать конкретных процедур «стандартизации» описания различных реальных процессов, поскольку они проще осуществимы в каждом конкретном случае. Отметим лишь, что уравнение (1.2) можно обобщить, записывая

$$y = Cx + C_v v, \quad (1.21)$$

где  $C_v$  — постоянная матрица.

Это эквивалентно предположению, что входные воздействия могут оказывать воздействие на выход безынерционно, через статическое преобразование, коэффициентами которого и являются элементы матрицы  $C_v$ .

Доказательство того, что в таком виде представимо описание системы, состоящей из любых строго реализуемых звеньев, по существу содержится в доказательстве Т.2.1 гл. 2.

## § 2. Анализ систем

Изучение свойств линейных систем, описываемых уравнениями

$$Dx(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad x(0) = x^{(0)}, \quad y(t) = Cx(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

где  $A, B, C$  — постоянные матрицы, можно вести различными способами.

**2.1. Применение операционного исчисления.** Введем обозначения

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}, \quad Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\} \quad (2.2)$$

для  $\mathcal{L}$ -образов соответствующих матриц. Учтем при этом, что  $\mathcal{L}$ -образ матрицы есть матрица, составленная из  $\mathcal{L}$ -образов ее скалярных компонент. Поэтому для матриц справедливы те же формулы операционного исчисления, что и для скалярных величин.

\*) Термин «вектор фазовых переменных» часто используется применительно к вектору  $x(t)$  в (1.2) независимо от природы переменных.

В частности, имеем

$$\mathcal{L}\{Dx(t)\} = pX(p) - x(0). \quad (2.3)$$

Тогда из (2.1) получаем алгебраические уравнения

$$pX(p) - x^{(0)} = AX(p) + BV(p); \quad Y(p) = CX(p), \quad (2.4)$$

откуда

$$X(p) = \Phi(p)x^{(0)} + \Phi(p)BV(p), \quad Y(p) = C\Phi(p)x^{(0)} + C\Phi(p)BV(p), \quad (2.5)$$

где \*)  $\Phi(p) \triangleq (pI_n - A)^{-1}$ . При  $x^{(0)} = 0$  получаем

$$X(p) = H_{vx}(p)V(p), \quad Y(p) = H_{vy}(p)V(p), \quad (2.6)$$

причем введены обозначения для матричных п. ф.

$$H_{vx}(p) = \Phi(p)B, \quad H_{vy}(p) = C\Phi(p)B. \quad (2.7)$$

Очевидно, что формулы типа (2.6), (2.7) можно получить непосредственно из (2.1), если рассматривать оператор  $D$  как число. Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= [DI_n - A]^{-1}Bv(t) \Rightarrow x(t) = H_{vx}(D)v(t), \\ y(t) &= C[DI_n - A]^{-1}Bv(t) \Rightarrow y(t) = H_{vy}(D)v(t), \end{aligned} \quad (2.6')$$

где  $H_{vx}(D)$ ,  $H_{vy}(D)$  — операторные матричные п. ф., отличающиеся от введенных выше комплексных лишь аргументом.

Используются и матричные структурные схемы с обобщенным изображением связей и матричными п. ф.

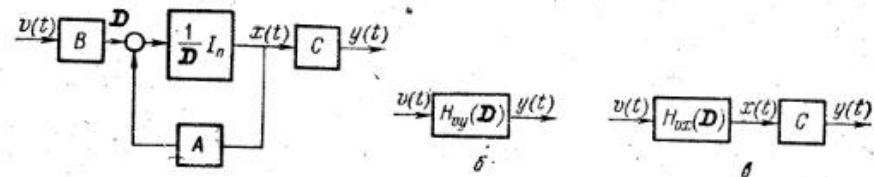


Рис. 6.1

Так, непосредственно по уравнению (2.1) составляется структурная схема, представленная на рис. 6.1, а. Та же система может быть представлена и в виде, показанном на рис. 6.1, б или 6.1, в. Схема на рис. 6.1, а содержит  $n$  интеграторов (в блоке с п. ф.  $\frac{1}{D}I_n$ ) и удобна для построения аналоговых ВУ, позволяющих вычислить  $x(t)$ ,  $y(t)$  по заданным  $v(t)$ . Она является матричным обобщением схем на рис. 2.11, которые были пригодны только для звена со скалярными входом и выходом.

Уравнение (2.6') дают лишь формальное выражение  $x(t)$ ,  $y(t)$  через вход  $v(t)$ . В них не видно влияние начальных условий. Явное

\*) Здесь и далее  $I_n$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ , где  $n$  — размерность  $x$ , называемая также размерностью системы (2.2).

представление можно получить, применяя к (2.5) теорему о свертке. Имеем:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t)x^{(0)} + \int_0^t h_{vx}(\tau)v(t-\tau)d\tau, \\ y(t) &= C\varphi(t)x^{(0)} + \int_0^t h_{vy}(\tau)v(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $h_{vx}(t)$ ,  $h_{vy}(t)$ ,  $t \geq 0$  — матричные весовые функции, являющиеся оригиналами  $H_{vx}(p)$ ,  $H_{vy}(p)$  соответственно;  $\varphi(t)$  — оригинал  $\Phi(p)$ .

Вычисление оригиналов для матриц сводится к вычислению оригиналов для каждой компоненты в отдельности.

Обратим внимание на то, что все компоненты  $\Phi(p)$ , а следовательно,  $H_{vx}(p)$ ,  $H_{vy}(p)$  являются дробно-рациональными функциями  $p$ . Действительно,

$$\Phi(p) = (pI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\alpha(p)} (pI_n - A)^{\text{II}}, \quad (2.9)$$

где через  $\alpha(p)$  обозначен определитель матрицы  $pI_n - A$ , а индекс «II» использован для обозначения присоединенной матрицы. Определитель  $pI_n - A$  является многочленом степени  $n$ , а присоединенная матрица имеет своими компонентами алгебраические дополнения элементов той же матрицы, которые также являются многочленами степени ниже  $n$ . Поэтому все компоненты  $\Phi(p)$  являются правильными дробями с одинаковым знаменателем  $\alpha(p)$ , называемым *характеристическим многочленом матрицы A*, или *характеристическим многочленом системы* (2.1).

При  $n = 1$  имеем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p - A},$$

так что

$$\varphi(t) = e^{At}. \quad (2.10)$$

Это же обозначение сохранится при произвольном  $n > 1$ , хотя  $\varphi(t)$  оказывается уже матрицей и называется *матричной экспонентой*.

Из указанных выше свойств компонент  $\Phi_{ij}(p)$  матрицы  $\Phi(p)$  следует, что любая компонента ее оригинала

$$\Phi_{ij}(t) = \sum_{v=1}^n c_{ijv} e^{\lambda_v t}, \quad (2.11)$$

где  $\lambda_v$  — корни  $\alpha(p)$  (многочлена, стоящего в знаменателе), а  $c_{ijv}$  — константы, вычисляемые при разложении  $\Phi_{ij}(p)$  на простейшие дроби. При наличии кратных корней  $c_{ijv}$  могут быть многочленами от  $t$  степени, не выше кратности корня.

Напомним, что корни  $\lambda_v$  характеристического многочлена  $\alpha(p)$  называются *собственными числами* (с. ч.) матрицы  $A$ .

Представление (2.11) показывает, что матричная экспонента является матрицей, каждая компонента которой — линейная комбинация скалярных экспонент  $e^{\lambda_v t}$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ . Из (2.7), (2.10) следует, что

$$h_{vx}(t) = e^{At}B, \quad h_{vy}(t) = Ce^{At}B; \quad (2.12)$$

поэтому весовые матрицы вновь имеют своими компонентами линейные комбинации тех же  $e^{\lambda_v t}$ .

С использованием матричной экспоненты перепишем (2.8) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A\tau}Bv(t-\tau)d\tau, \\ y(t) &= Ce^{At}x^0 + \int_0^t Ce^{A\tau}Bv(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из свойств компонент  $\varphi_{ij}(t)$  матричной экспоненты следует, что  $\varphi_{ii}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , если все с. ч.  $\lambda_v$  имеют отрицательные вещественные части. При том же условии устанавливается, что любая компонента весовых функций  $h_{vx}(t)$ ,  $h_{vy}(t)$  абсолютно интегрируема и существуют их моменты, причем доказательство сводится к применению рассуждений, данных в гл. 2, § 3, к каждой из компонент.

Поэтому при условии

$$\operatorname{Re} \lambda_v < 0, \quad v = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

справедливы следующие свойства:

1. Система *устойчива по начальным условиям*, т. е. при  $v(t) = 0$  и конечном  $x^0 \neq 0$  имеет место

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

2. Система *устойчива по выходу*, т. е. из ограниченности воздействий следует ограниченность всех фазовых переменных и всех компонент выхода.

3. Если

$$v(t) = a_v e^{i\omega t}, \quad t > 0, \quad (2.16)$$

то установившаяся реакция  $y_\infty(t)$  дается формулой

$$y_\infty(t) = H_{vy}(i\omega) a_v e^{i\omega t}. \quad (2.17)$$

4. Если

$$v(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k, \quad (2.18)$$

то

$$y_\infty(t) = \sum_{k=0}^N l_k \frac{d^k}{dt^k} v(t), \quad (2.19)$$

где

$$l_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dp^k} H_{yy}(p) |_{p=0}. \quad (2.20)$$

Мы убеждаемся в достоинствах матричных обозначений: все формулы, полученные в гл. 2, сохраняют свой внешний вид, если в них использовать соответствующие матричные п. ф. и матричные частотные характеристики.

Неприятность заключается лишь в том, что построение матричных п. ф. по формулам (2.7), (2.9) требует громоздких аналитических выкладок с полиномиальными матрицами. Поэтому в теории и практике вычислений широко применяется другой подход.

**2.2. Изменение базиса.** Введем в уравнения (2.1) замену переменных

$$x(t) = S\tilde{x}(t), \quad (2.21)$$

где  $S$  — неособая постоянная ( $n \times n$ )-матрица. Тогда уравнения (2.1) примут вид:

$$D\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}v(t), \quad t > 0, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^{(0)}, \quad y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \quad (2.22)$$

где введены обозначения

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \quad \tilde{B} = S^{-1}B, \quad \tilde{C} = CS, \quad (2.23)$$

$$\tilde{x}^{(0)} = S^{-1}x^{(0)}. \quad (2.24)$$

Переход от исходных уравнений (2.1) к (2.22) принято называть *изменением базиса* внутреннего описания, а матрицу  $S$  — матрицей перехода к новому базису.

Подчеркнем, что преобразованные уравнения эквивалентны исходным.

Зная  $\tilde{x}(t)$ , легко найти  $x(t)$ . Более того, матрица  $\tilde{A}$  имеет тот же характеристический многочлен  $\alpha(p)$ , что и матрица  $A$ .

Очевидно и то, что связь «вход-выход» никак не может зависеть от изменения базиса: в (2.22) входят те же функции  $v(t)$ ,  $y(t)$ , что и в (2.1).

Можно и формально проверить тождество \*)

$$\tilde{H}_{yy}(p) \triangleq \tilde{C}(pI_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \equiv C(pI_n - A)^{-1}B \triangleq H_{yy}(p), \quad (2.25)$$

т. е. п. ф. «вход-выход» не изменяется.

\*) Проверка сводится к цепочке тождеств:

$$\begin{aligned} C(pI_n - A)^{-1}B &= CSS^{-1}(pI_n - A)^{-1}SS^{-1}B = CS^{-1}(pI_n - A)^{-1}SB = \\ &\equiv C[S^{-1}(pI_n - A)S]^{-1}B = C(pI_n - S^{-1}AS)^{-1}B = C(pI_n - A)^{-1}B, \end{aligned}$$

где используются лишь свойства операции обращения

$$SS^{-1} = I_n, \quad (A_1 A_2 A_3)^{-1} = A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Вместе с тем новые переменные, т. е. новый базис, можно выбрать так, чтобы уравнения (2.22) имели более простую структуру.

Предположим, что все с. ч.  $\lambda_v$  матрицы  $A$  (а следовательно, и  $\tilde{A}$ ) являются простыми. Из алгебры известно (см. Приложение 2), что тогда

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \Lambda \triangleq \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad (2.26)$$

если столбцами матрицы  $S$  являются собственные векторы, соответствующие с. ч. матрицы  $A$ . Переход к такому базису будем называть *диагонализацией*, а соответствующие переменные  $\tilde{x}_v(t)$  — *основными формами (модами)*.

Уравнения (2.22) в новых переменных приобретают вид:

$$D\tilde{x}_v(t) = \lambda_v \tilde{x}_v(t) + \tilde{B}_v v(t), \quad x_v(0) = \tilde{x}_v^{(0)}, \quad v = 1, \dots, n, \quad (2.27)$$

$$y(t) = \sum_{v=1}^n \tilde{C}_v \tilde{x}_v(t), \quad (2.28)$$

где  $\tilde{B}_v$  — строки матрицы  $\tilde{B}$ , а  $\tilde{C}_v$  — столбцы матрицы  $\tilde{C}$ .

Каждая мода определяется своим уравнением 1-го порядка, которое легко интегрируется:

$$\tilde{x}_v(t) = e^{\lambda_v t} \tilde{x}_v(0) + \int_0^t e^{\lambda_v(t-\tau)} \tilde{B}_v v(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad v = 1, \dots, n. \quad (2.29)$$

(Справедливость (2.29) проверяется прямой подстановкой в уравнение.) Перепишем это решение в матричной форме

$$\tilde{x}(t) = \text{diag}[e^{\lambda_v t}] \tilde{x}(0) + \int_0^t \text{diag}[e^{\lambda_v(t-\tau)}] \tilde{B}v(\tau) d\tau,$$

и, используя обозначения (2.21), (2.23), вернемся к исходным переменным

$$x(t) = S \text{diag}[e^{\lambda_v t}] S^{-1} x(0) + \int_0^t S \text{diag}[e^{\lambda_v(t-\tau)}] S^{-1} B v(t-\tau) d\tau.$$

Сравнивая с (2.13) и учитывая единственность решения уравнения (2.1), убеждаемся в том, что

$$e^{At} = S \text{diag}[e^{\lambda_v t}] S^{-1}. \quad (2.30)$$

Это *спектральное представление* \*) матричной экспоненты будет широко использоваться в дальнейшем.

**2.3. Структурные свойства.** Вернемся к описанию системы в форме (2.27), (2.28) и изучим ее внутреннюю структуру.

\*) О матричной экспоненте и способах вычисления ее значений см. также Приложение 2, п. 5б, где даны и примеры.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда вход и выход скалярны, т. е. система эквивалентна одному звену в смысле § 1 гл. 2.

При этом скалярны и величины  $\tilde{B}_v$ ,  $C_v$ , так что система может быть описана с помощью простой структурной схемы (рис. 6.2).

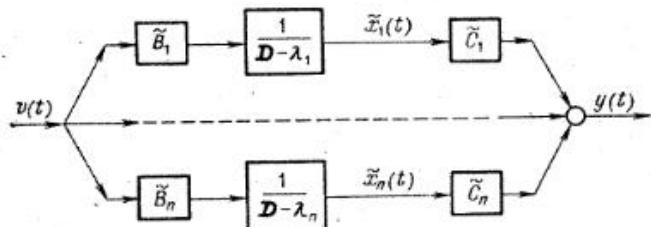


Рис. 6.2

**Определение.** Назовем скалярный вход  $v(t)$  полным, если все величины  $\tilde{B}_v$  не равны нулю, т. е.  $v(t)$  оказывает воздействие на все моды. Назовем скалярный выход  $y(t)$  полным, если все  $\tilde{C}_v \neq 0$ , т. е. в выходе проявляются все моды.

Если хоть одна из величин  $\tilde{B}_v$ ,  $C_v$  равна нулю, то будем говорить, что система содержит «висячие» звенья. В противном случае назовем систему невырожденной.

**Теорема 2.1.** Скалярный вход является полным, если и только если\*)

$$\det\{B \ A \ B \ \dots \ A^{n-1} \ B\} \neq 0. \quad (2.31)$$

Скалярный выход является полным, если и только если

$$\det\{C^T \ A^T \ C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} \ C^T\} \neq 0. \quad (2.32)$$

Система с одним входом и одним выходом невырождена, если одновременно выполнены (2.31), (2.32). Это условие эквивалентно взаимной простоте числителя  $\beta(p)$  и знаменателя  $\alpha(p)$  скалярной п. ф.  $H_{yy}(p)$ .

**Доказательство.** Перепишем (2.31) с учетом (2.23) в виде

$$\det\{S \ B \ S \ A \ S^{-1} \ B \ \dots \ (S \ A \ S^{-1})^{n-1} \ B\} = \det S \times \det\{B \ A \ B \ \dots \ A^{n-1} \ B\},$$

причем использовано, что определитель произведения равен произведению определителей и

$$(S \ A \ S^{-1})^{n-1} = \underbrace{S \ A \ S^{-1} \cdot S \ A \ S^{-1} \ \dots \ S \ A \ S^{-1}}_{n-1 \text{ раз}} = \underbrace{S \ A \ \dots \ A}_{n-1 \text{ раз}} \ S^{-1}.$$

\*) Матрицы в (2.31), (2.32) квадратные и записаны в блочном виде по столбцам (в скалярном случае  $B$ ,  $C^T$  — столбцы, равно как и их произведения на  $A$  или  $A^T$ ). Индекс «т» означает транспонирование. Условия (2.31), (2.32) являются частными случаями условий невырожденности пар матриц  $A$ ,  $B$  и  $A^T$ ,  $C^T$  (см. Приложение 2).

Если  $S$  — диагонализирующая матрица, то

$$A = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_v\}$$

и

$$\det\{\tilde{B} \ \tilde{A} \ \tilde{B} \ \dots \ \tilde{A}^{n-1} \ \tilde{B}\} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \lambda_1 \tilde{B}_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_n & \lambda_n \tilde{B}_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \tilde{B}_n \end{pmatrix} = \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \dots \tilde{B}_n \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку все  $\lambda_v$  различны, то последний определитель, называемый определителем Вандермонда, не равен нулю. Поскольку  $S$  неособа, то  $\det S \neq 0$ . Таким образом, (2.31) эквивалентно требованию  $\tilde{B}_v \neq 0$ ,  $v = 1, \dots, n$ , т. е. требованию полноты входа. Аналогично доказывается эквивалентность (2.32) и требования полноты выхода.

Запишем согласно рис. 6.2 скалярную п. ф.  $H_{yy}(p)$  в виде

$$H_{yy}(p) = \sum_{v=1}^n \frac{\tilde{B}_v \tilde{C}_v}{p - \lambda_v}.$$

Невырожденность системы эквивалентна отличию от нуля всех коэффициентов в разложении  $H_{yy}(p)$  на простейшие дроби. С другой стороны, если представить

$$H_{yy}(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)},$$

то наличие нулевых коэффициентов возможно только, если  $\beta(p)$  и  $\alpha(p)$  имеют общие корни. ■

Проведем такой же структурный анализ многосвязной системы, когда  $v(t)$ ,  $y(t)$  — векторы (матрицы-столбцы).

**Определение.** Назовем вход  $v(t)$  полным, если на каждую моду воздействует хотя бы одна компонента входа. Назовем выход  $y(t)$  полным, если каждая мода проявляется хоть в одной компоненте выхода. Система невырождена, если ее вход и выход полны. В противном случае будем говорить о наличии в системе «висячих» звеньев.

**Теорема 2.2.** Вход является полным, если пара матриц  $A$ ,  $B$  является невырожденной, т. е.)\*

$$\text{rank}\{B \ A \ B \ \dots \ A^{n-1} \ B\} = n. \quad (2.33)$$

Выход является полным, если пара  $A^T$ ,  $C^T$  является невырожденной, т. е.

$$\text{rank}\{C^T \ A^T \ C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} \ C^T\} = n. \quad (2.34)$$

Из невырожденности обеих пар  $A$ ,  $B$  и  $A^T$ ,  $C^T$  следует невырожденность системы.

**Доказательство** можно произвести по аналогии с Т.2.1. ■

\*) В (2.33), (2.34) вновь используется блочная запись, но блоки, вообще говоря, уже не являются столбцами. О понятии ранга матрицы см. Приложение 2, п. 3в.

Можно также указать и требования к матричной п. ф.  $H_{\nu}(p)$ , обеспечивающие невырожденность системы [6.9].

Наиболее полное представление о структуре многосвязной системы дает следующее утверждение.

**Теорема 2.3 (структурная теорема Калмана).** Существует неособая замена координат  $x = S\xi$  такая, что система (2.1) эквивалентно преобразуема к виду

$$\begin{aligned} D\xi_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 + \rho_1 v, \\ D\xi_2 &= a_{22}\xi_2 + a_{24}\xi_4 + \rho_2 v, \\ D\xi_3 &= a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4, \\ D\xi_4 &= a_{44}\xi_4, \\ y &= \sigma_2\xi_2 + \sigma_4\xi_4, \end{aligned} \quad (2.35)$$

причем  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  — подвекторы  $\xi$  такие, что \*)

$$\dim(\xi_1, \xi_2) = v_1, \quad \dim(\xi_2, \xi_4) = v_2,$$

где

$$v_1 = \text{rank } A_v, \quad v_2 = \text{rank } A_w,$$

$$A_v \triangleq [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \quad A_w \triangleq [C^T \ A^TC^T \ \dots \ (A^T)^{n-1}C^T]. \quad (2.36)$$

Пары матриц  $a_{22}, \rho_2$  и  $a_{22}^T, \sigma_2^T$  являются невырожденными, и

$$H_{\nu}(p) \triangleq C(pI_n - A)^{-1}B = \sigma_2(pI_{n-v_2} - a_{22})^{-1}\rho_2. \quad (2.37)$$

Доказательство довольно громоздко, и мы кратко опишем лишь его основную идею. По свойству (2.36) в матрице  $A_v$  можно выделить  $v_1$  линейно независимых столбцов (векторов). Обозначим их  $S_1, \dots, S_{v_1}$ . Добавим к ним еще какие-либо  $n - v_1$  векторов  $S_{v_1+1}, \dots, S_n$  так, чтобы матрица

$$S \triangleq [S_1 \ \dots \ S_{v_1} \ S_{v_1+1} \ \dots \ S_n]$$

оказалась неособой. Используем  $S$  для преобразования базиса. Тогда можно установить, что преобразование согласно (2.23) матрицы  $A, B$  имеют специальную структуру: первые  $v_1$  столбцов  $\tilde{A}$  и все столбцы  $\tilde{B}$  имеют равными нулю последние  $n - v_1$  компонент. Для этого сначала покажем, что любой вектор вида  $AS_k$ ,  $k = 1, \dots, v_1$ , линейно зависит от  $S_1, \dots, S_{v_1}$ .

Действительно, любой  $S_k$ ,  $k = 1, \dots, v_1$ , является по определению столбцом  $A_v$ , а следовательно, имеет вид  $A^j B_i$ , где  $B_i$  — какой-нибудь столбец  $B$ , а степень  $j$  может быть любой от 0 до  $n - 1$ . Тогда

$$AS_k = A^{j+1}B_i.$$

Если  $j < n - 1$ , то  $AS_k$  также является одним из столбцов  $A_v$  и по предположению линейно зависит от  $S_1, \dots, S_{v_1}$ . Если же  $j = n - 1$ , то  $AS_k = A^n B$ , и не является столбцом  $A_v$ . Однако по теореме Гамильтона — Кэли \*\*)

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_0 I, \quad (2.38)$$

\*) Символ  $\dim$  читается как «размерность вектора».

\*\*) См. Приложение II, п. 3д.

где  $\alpha_t$ ,  $t = 0, \dots, n - 1$  — коэффициенты характеристического многочлена матрицы  $A$ . Поэтому

$$AS_k = A^n B_i = -\alpha_{n-1}A^{n-1}B_i - \dots - \alpha_0 B_i,$$

т. е. представим в виде линейной комбинации столбцов  $A_v$ . Таким образом, можно записать, что

$$AS_k = \sum_{l=1}^{v_1} \mu_{kl} S_l, \quad k = 1, \dots, v_1, \quad (2.39)$$

где  $\mu_{kl}$  — скалярные величины. Из определения единичной матрицы следует, что

$$S^{-1} S_l = \delta_{il}, \quad (2.40)$$

где  $\delta_{il}$  —  $l$ -й единичный столбец:

$$\delta_{il} \triangleq (0, \dots, 0, \underset{l}{1}, 0, \dots, 0).$$

Из (2.39), (2.40) вытекает желаемое свойство первых  $v_1$  столбцов  $\tilde{A}_k$  матрицы  $\tilde{A}$ , поскольку

$$\tilde{A}_k = S^{-1} AS_k = \sum_{l=1}^{v_1} \mu_{kl} S_l^{-1} S_l = \sum_{l=1}^{v_1} \mu_{kl} \delta_{il} = \mu_{k1} \delta_{11} = \mu_{k1}.$$

Аналогично устанавливается свойство  $\tilde{B}$ , поскольку столбцы  $\tilde{B}$  совпадают с первыми столбцами  $A_w$ . Тем самым доказано, что при  $v_1 < n$  можно так выбрать базис, что

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{c|cc} \overset{v_1}{\overbrace{\tilde{a}_{11} \ \tilde{a}_{12}}} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \hline 0 & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \end{array} \right]^{n-v_1}, \quad \tilde{B} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n-v_1} \end{array} \right\}^{n-v_1},$$

где ненулевыми могут быть только компоненты блоков  $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{B}$ .

Далее установим невырожденность пары  $\tilde{a}_{11}, \tilde{B}_1$ , т. е. выполнение условия

$$\text{rank} \{ \tilde{B}_1 \ \tilde{a}_{11} \tilde{B}_1 \ \dots \ \tilde{a}_{11}^{n-1} \tilde{B}_1 \} = v_1. \quad (2.41)$$

Поскольку ранг матрицы не меняется при неособом преобразовании, имеем

$$\text{rank} \{ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B \} = v_1,$$

или, с учетом структуры  $\tilde{A}, \tilde{B}$ ,

$$\text{rank} \left\{ \begin{array}{cccc} \tilde{B}_1 & \tilde{a}_{11} \tilde{B}_1 & \dots & \tilde{a}_{11}^{n-1} \tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\} = v_1,$$

откуда

$$\text{rank} \{ \tilde{B}_1 \ \tilde{a}_{11} \tilde{B}_1 \ \dots \ \tilde{a}_{11}^{n-1} \tilde{B}_1 \} = v_1. \quad (2.42)$$

Применив теорему Гамильтона — Кэли к  $(v_1 \times v_1)$ -матрице  $\tilde{a}_{11}$ , легко устанавливаем, что столбцы, входящие в последние  $n - v_1$  блоков в (2.42), линейно зависят от столбцов, входящих в предшествующие, а тем самым их изъятие не меняет ранга. Таким образом, условие (2.41) обосновано, и установлено, что при  $v_1 < n$  имеется возможность выбрать базис так, что в новых координатах  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , где  $\tilde{x}_1$  имеет размерность  $v_1$ , исходная система приобретает вид

$$\begin{aligned} D\tilde{x}_1 &= \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 v, \\ D\tilde{x}_2 &= \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2, \quad y = \tilde{c}_1\tilde{x}_1 + \tilde{c}_2\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

т. е. выделены часть размерности  $v_1$ , по отношению к которой вход  $v(t)$  является полным, и «висячая» часть, на которую он заведомо не действует.

Точно так же можно установить, что при  $v_2 < n$  найдется такой способ выбора базиса, что в новых координатах  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , где размерность  $\tilde{x}_1$  равна  $v_2$ , система приводится к виду

$$\begin{aligned} D\tilde{x}_1 &= \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1v, \\ D\tilde{x}_2 &= \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2v, \quad y = \tilde{c}_1\tilde{x}_1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

причем пара  $\tilde{a}_{11}^T, \tilde{c}_1^T$  является невырожденной. Тем самым выделены часть размерности  $v_2$ , по отношению к которой выход  $y(t)$  является полным, и «висячая» часть, не проявляющаяся в выходе.

Основное утверждение теоремы устанавливается путем последовательного проведения описанных выше преобразований базиса и соответствующей сортировки блоков.

Формула (2.37) сразу следует из обобщенной структурной схемы, представленной на рис. 6.3, а.

Если начальные условия нулевые, то связь «вход-выход» отражается упрощенной структурной схемой рис. 6.3, б. В скалярном изображении она включает число интеграторов, равное порядку невырожденной части системы.

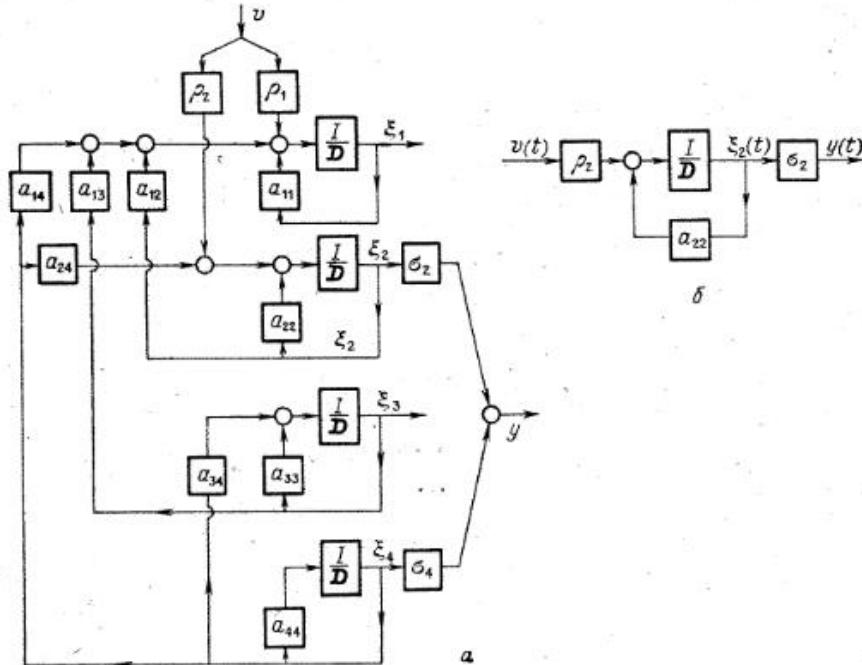


Рис. 6.3

Из структурной теоремы, в частности, следует: (а) нарушение условий полноты входа и (или) выхода приводит к появлению «висячих» частей системы, наличие которых не оказывает влияния на свойства преобразования «вход-выход»; (б) изменение переменных

$\xi_3, \xi_4$  (или любых «естественных» фазовых переменных, являющихся линейными комбинациями) определяется только начальными условиями и не зависит от входных воздействий, инвариантно по отношению к ним; (в) изменение переменных  $\xi_1, \xi_2$  не может быть обнаружено по наблюдениям выхода; (г) невырожденная часть системы при  $v_1 < n$  ( $v_2 < n$ ) имеет порядок  $n_2$ , ниже порядка системы в целом, и свойство (2.37) может иметь место только при сокращении числителя и знаменателя п. ф.  $H_{vy}(p)$ .

Приведем простейшие примеры.

Пример 2.1. Пусть система описана скалярными соотношениями

$$Dx_1 = x_2, \quad Dx_2 = x_1 + v, \quad y = x_1 - x_2.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \{1, -1\}.$$

Устанавливаем, что

$$\det A_v \triangleq \det \{B \ AB\} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\det A_y = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно, выход является неполным. Составляя п. ф., получаем

$$H_{vy}(p) = \frac{1}{p^2 - 1} - \frac{p}{p^2 - 1} = -\frac{1}{p+1},$$

т. е. происходит сокращение числителя и знаменателя. Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получаем

$$D(x_1 - x_2) = -(x_1 - x_2) - v.$$

Таким образом, замена переменных  $\tilde{x}_1 = x_1 - x_2$ ,  $\tilde{x}_2 = x_1$ , приводит к уравнениям

$$D\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_1 - v, \quad D\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1, \quad y = \tilde{x}_1.$$

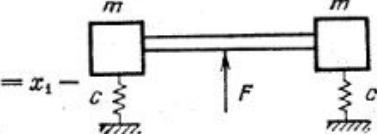
Рис. 6.4

Теперь явно видно, что второе уравнение определяет «висячую» часть: переменная  $\tilde{x}_2$  не влияет на выход.  $\square$

Пример 2.2. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, модель которой представлена на рис. 6.4 (гантель с невесомой жесткой ручкой на двух симметрично установленных упругих опорах, сила  $F$  приложена в центре инерции). Если взять за обобщенные координаты перемещения масс  $q_1, q_2$ , то кинетическая и потенциальная энергии примут вид

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q_1^2 + \frac{1}{2} c q_2^2,$$

где  $m$  — масса,  $c$  — жесткость, а уравнения движения окажутся



симметричными:

$$m\ddot{q}_1 + cq_1 = \frac{1}{2}F, \quad m\ddot{q}_2 + cq_2 = \frac{1}{2}F.$$

Вводя стандартные обозначения

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2, \quad cm^{-1} = \omega_0^2, \quad v = m^{-1}F,$$

перепишем их в виде

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_2, & Dx_3 &= x_4, \\ Dx_2 &= -\omega_0^2 x_1 + \frac{1}{2}v, & Dx_4 &= -\omega_0^2 x_3 + \frac{1}{2}v. \end{aligned}$$

За выход примем перемещения центра

$$y = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3).$$

Представляем читателю формальную проверку выполнения условий (2.31), (2.32) при  $n = 4$ . Здесь же «в лоб» убедимся в их нарушении.

Введение новых переменных

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_3), & \tilde{x}_2 &= \frac{1}{2}(x_2 + x_4), \\ \tilde{x}_3 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3), & \tilde{x}_4 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_4) \end{aligned}$$

позволяет записать уравнение системы в виде

$$\begin{aligned} D\tilde{x}_1 &= x_2, & D\tilde{x}_3 &= \tilde{x}_4, \\ D\tilde{x}_2 &= -\omega_0^2 \tilde{x}_1 + \frac{1}{2}v, & D\tilde{x}_4 &= -\omega_0^2 \tilde{x}_3, & y &= \tilde{x}_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что 2-я группа уравнений соответствует «висячей» части, не возбуждаемой воздействием и не проявляющейся в выходе. Физический смысл ясен: сила, приложенная в центре, не вызывает поворота гантели, а на перемещение центра этот поворот не влияет.  $\square$

### § 3. Управляемость и наблюдаемость

Пусть описание объекта задано в нормальной форме \*):

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad x(0) = x^0, \quad y = Cx, \quad (3.1)$$

причем внешнее воздействие  $v(t)$  является управляющим,  $v(t) = u(t)$ , а неуправляемые возмущения отсутствуют,  $w(t) = 0$ .

\* Начиная с этого параграфа и до конца главы операторные обозначения для производных почти не используются. Для сокращенной записи ставится точка над переменной.

В этой идеализированной постановке удается решить ряд принципиально важных проблем, в которых проявляются основные особенности систем с многими управляемыми процессами [6.2].

**3.1. Проблема управляемости** (ликвидация начального рассогласования). Требуется выбрать программу управления  $u(t)$  так, чтобы в момент  $T > 0$  выполнялось условие

$$x(T) = 0. \quad (3.2)$$

Сложность проблемы состоит именно в том, что число управлений (размерность  $m$  вектора  $u$ ), как правило, меньше числа управляемых процессов (размерности  $n$  вектора  $x$ ).

**Определение.** Если проблема управляемости разрешима (при произвольном ограниченном  $x^0$ ) путем выбора ограниченных управляющих воздействий, то система (3.1) называется  *вполне управляемой*.

**Теорема 3.1.** Система (3.1)  *вполне управляема, если и только если пара матриц  $A, B$  невырождена, т. е.*

$$\text{rank } A_u = n, \quad A_u \triangleq [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Первоначально установим достаточность условия (3.3), непосредственно найдя желаемое управление.

Согласно (2.13) имеем

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau,$$

так что

$$x(T) = 0 \Leftrightarrow \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau = -x^0. \quad (3.4)$$

Примем

$$u(t) = [e^{-At}B]^T l = B^T e^{-At}l, \quad (3.5)$$

где  $l$  пока не определенный, но постоянный  $n$ -вектор. Покажем, что его можно выбрать так, чтобы уравнение (3.4) удовлетворялось тождественно. Подстановка (3.5) в (3.4) дает

$$\int_0^T e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau} d\tau l = -x^0.$$

Таким образом, если возможно решить уравнение

$$Ll = -x^0, \quad L \triangleq \int_0^T e^{A\tau}BB^T e^{-A^T\tau} d\tau \quad (3.6)$$

при произвольном  $x^0$ , то исходная задача решена. Для разрешимости требуется, чтобы  $\det L \neq 0$ . Докажем, что это так, от противного. Если  $\det L = 0$ , то существует  $l_0 \neq 0$  такое, что

$$Ll_0 = 0 \Rightarrow l_0^T Ll_0 = 0 \Rightarrow \int_0^T \varphi_0^T(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau = 0, \quad (3.7)$$

где  $\varphi_0(\tau) \triangleq l_0^T e^{-A\tau} B$ . Условие (3.7) выполняется, только если  $\varphi_0(\tau) = 0$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ . Тождественно равны нулю и производные  $\varphi_0(\tau)$ , так что

$$l_0^T A^k e^{-A\tau} B = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и, в частности, при  $\tau = 0$  имеем

$$l_0^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

или

$$l_0^T \{B A B \dots A^{n-1} B\} = 0 \text{ при } l_0 \neq 0, \quad (3.8)$$

что противоречит условию (3.3), равносильному линейной независимости строк матрицы  $A_u$ .

Перейдем к доказательству необходимости (3.3). Предположим, что это условие не выполнено, т. е.

$$\operatorname{rank} A_u = v_u < n.$$

Тогда найдется  $l' \neq 0$  такое, что

$$l' A_u = 0 \Rightarrow l' B = 0, \quad l' A B = 0, \dots, l' A^{n-1} B = 0. \quad (3.9)$$

Однако по теореме Гамильтона — Кэли

$$l' A^n B = -\alpha_0 l' B - \dots - \alpha_{n-1} l' A^{n-1} B = 0. \quad (3.10)$$

Получая из той же теоремы тождество

$$A^{n+1} B = -\alpha_0 A B - \dots - \alpha_{n-1} A^n B,$$

устанавливаем  $l' A^{n+1} B = 0$  и далее по индукции для любого  $k > n$  также имеем  $l' A^k B = 0$ . Но тогда

$$l' e^{-A\tau} B = l' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} A^k B = 0 \quad (3.11)$$

и из соотношения (3.4) следует, что для достижения цели необходимо выполнение условия  $l' x^0 = 0$ , которое заведомо не выполняется при произвольном  $x^0$ . ■

**Замечание 1.** Если все с. ч. матрицы  $A$  различны, то условие (3.3) обеспечивает полноту входного воздействия  $u(t)$  в смысле § 2, т. е. с помощью управления можно воздействовать на каждую моду. Однако определение полной управляемости не связано с возможностью модального представления (возможностью диагонализации  $A$ ) и теоретически более удобно. Необходимость условия (3.3) сразу следует и из структурной теоремы, ибо при его невыполнении в системе имеется «висячая часть», состояние которой нельзя изменить приложением управляющего воздействия.

**Замечание 2.** Если

$$\operatorname{rank} B = r > 1,$$

то условие полной управляемости (3.3) можно заменить на условие

$$\operatorname{rank} \{B A B \dots A^{n-r} B\} = n. \quad (3.12)$$

В частности, при  $r = n$  (3.12) эквивалентно условию  $\det B \neq 0$ , справедливость которого очевидна: например, задав желаемый

процесс изменения состояния

$$x(t) = x^0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

находим управление

$$u(t) = -\frac{1}{T} B^{-1} [I + (T-t) A] x^0,$$

обеспечивающее этот процесс (ср. со скалярным примером в § 1 гл. 3). Доказательство справедливости (3.12) в общем случае предполагаем читателю.

**Пример 3.1.** Рассмотрим задачу о программном управлении материальной точкой, движущейся вдоль оси  $q$  под действием силы  $f(t)$ . Требуется выбрать  $f(t)$  так, чтобы точка, занимающая в начальный момент положение  $q^0$  и имеющая скорость  $\dot{q}^0$ , через время  $T$  остановилась в заданном положении, которое можно принять за начало отсчета.

Математическая формулировка такова: найти функцию  $f(t)$ ,  $t \in [0, T]$  такую, что удовлетворяется система условий

$$m\ddot{q} = f, \quad q(0) = q^0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^0, \quad q(T) = 0, \quad \dot{q}(T) = 0.$$

Применим теперь способ построения программного управления, использованный при доказательстве теоремы 3.1. Предварительно запишем условия в стандартной форме. Обозначим  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $u = \frac{1}{m} F$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= q^0, & x_2(0) &= \dot{q}^0, \\ \dot{x}_2 &= u, & x_1(T) &= 0, & x_2(T) &= 0. \end{aligned}$$

В матричной записи имеем  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Условие полной управляемости здесь выполнено:

$$A_u = \{B, AB\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A_u = -1 \neq 0.$$

Можно искать  $u(t)$ , подставляя заданные значения матриц  $A$ ,  $B$  в формулы (3.5), (3.6). Однако для понимания сути дела лучше просто повторить для данного частного случая саму схему построения. Интегрируя уравнения движения, получаем

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

$$x_1(t) = x_1(0) + tx_2(0) + \int_0^t (t-\tau) u(\tau) d\tau.$$

Условия  $x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$  требуют, чтобы

$$\begin{aligned} \int_0^T u(\tau) d\tau &= -x_2(0) = -q^0, \\ \int_0^T (T-\tau) u(\tau) d\tau &= -x_1(0) - Tx_2(0) = -q^0 - Tq^0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Разыскиваем  $u(t)$  в виде

$$u(t) = l_1 t + l_2. \quad (3.14)$$

(Читатель может проследить, что это соответствует формуле (3.5), поскольку в данном случае  $e^{-At}B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .) Подстановка (3.14) в (3.13) дает систему двух уравнений для определения  $l_1, l_2$ :

$$l_1 \frac{T^2}{2} + l_2 T = -q^0, \quad l_1 \frac{T^3}{6} + l_2 \frac{T^2}{2} = -q^0 - Tq^0,$$

откуда

$$l_1 = \frac{12}{T^3} \left( q^0 + q^0 \frac{T}{2} \right), \quad l_2 = -\frac{6}{T^3} \left( q^0 + q^0 \frac{2}{3} T \right). \quad \square$$

Отметим далее, что проблема управляемости может быть сформулирована и в более общем виде. Пусть внешние воздействия являются как управляющими  $u(t)$ , так и возмущающими  $w(t)$ :

$$v(t) = (u(t), w(t)).$$

Тогда уравнения (3.1) записутся в виде

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w,$$

где  $B_u, B_w$  — соответствующие блоки матрицы  $B$ . Пусть требуется из произвольного начального состояния  $x^0$  заставить систему в момент  $T$  перейти в произвольное новое состояние  $x^d$ . Нетрудно проверить, что при невырожденности пары матриц  $A, B_u$  задача разрешима, поскольку она сводится к необходимости решить относительно  $u(t)$  уравнение  $x(T) = x^d \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x^d &= e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} [B_u u(\tau) + B_w w(\tau)] d\tau \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^T e^{-A\tau} B_u u(\tau) d\tau = e^{-AT} x^d - x^0 - \int_0^T e^{-A\tau} B_w w(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.15)$$

которое имеет ту же структуру, что и (3.4). При этом (как всегда при построении программного управления) подразумевается, что возмущающие воздействия точно известны, так что правая часть (3.15) является заданным вектором.

Подчеркнем все же, что задача выбора программного управления, обеспечивающего изменение состояния по произвольному заданному закону  $x^d(t)$ , вообще говоря, неразрешима даже при выполнении условия полной управляемости. Очевидна лишь ситуация, когда  $\text{rank } B_u = n$ , и легко найти решение  $u(t)$  системы  $\dot{x}^d = Ax^d + B_u u + B_w w$  при заданных  $x^d(t); w(t)$ .

Программное управление обладает уже известным недостатком — существенной зависимостью результата его применения от точности знания модели. Для изучения вопроса о возможностях построения системы с обратной связью по измерениям выхода объекта принципиальную роль играет следующая проблема.

### 3.2. Проблема наблюдаемости.

**Определение.** Если разрешима задача вычисления  $x(t)$  по точным измерениям выхода  $y(t)$ , входа  $v(t)$  и их производных, то система (3.1) называется *вполне наблюдаемой*.

**Теорема 3.2.** Система (3.1) является вполне наблюдаемой, если и только если пара  $A^t, C^t$  невырождена, т. е.

$$\text{rank } A_y = n, \quad A_y \triangleq [C^t \ A^t C^t \ \dots \ (A^t)^{n-1} C^t]. \quad (3.16)$$

Доказательство достаточности (3.16) сводится к составлению по (3.1) системы уравнений

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t), \quad Dy(t) = CAx(t) + CBv(t), \dots, D^{n-1}y(t) = \\ &= CA^{n-1}x(t) + \sum_{h=0}^{n-2} CA^h BD^{(n-h-2)}v(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

и констатации ее разрешимости относительно  $x(t)$ .

Необходимость доказывается так же, как в Т.3.1. ■

**Замечание 1.** Если возможна диагонализация (3.1), то условие полной наблюдаемости эквивалентно условию полноты выхода  $y(t)$ , и необходимость (3.16) очевидна из структурного представления.

**Замечание 2.** Если ранг  $C$  больше 1, то условие невырожденности может быть упрощено. В частности, если ранг  $C$  равен  $n$ , то

$$x(t) = C^{-1}y(t) \quad (3.18)$$

и определение состояния не требует вычисления производных выхода. Если же ранг равен  $r$ ,  $1 < r < n$ , то  $x(t)$  находится из системы типа (3.17), содержащей только  $n-r$  производных выхода.

**Замечание 3.** Условие полной наблюдаемости является одновременно требованием к свойствам системы (3.1), при которых по заданным начальным значениям выхода  $y(t)$  и его производных вплоть до  $(n-1)$ -й можно установить начальное состояние (поэтому иногда употребляется термин «восстанавливаемость системы», эквивалентный термину «полная наблюдаемость»). Это свойство существенно, если сама система (3.1) строится по исходному описанию в виде уравнения «вход-выход» типа (1.3).

Читатель может проверить самостоятельно, что конструкция, описанная в Т.1.1, всегда удовлетворяет условию полной наблюдаемости (3.16).

#### § 4. Размещение собственных чисел и стабилизация

**4.1. Проблема размещения.** Рассмотрим первоначально чисто алгебраическую задачу, называемую проблемой размещения собственных чисел: заданы  $(n \times n)$ -матрица  $A$  и  $(n \times m)$ -матрица  $B$ ; требуется найти  $(m \times n)$ -матрицу  $K$  такую, что  $(n \times n)$ -матрица

$$\bar{A} = A - BK \quad (4.1)$$

имела бы произвольно заданный набор собственных чисел  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ .

**Теорема 4.1.** Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы размещения собственных чисел является невырожденность пары матриц  $A, B$ , т. е. выполнение условия

$$\text{rank}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} = n. \quad (4.2)$$

**Доказательство.** Необходимость следует из Т.2.3. Используем матрицу  $S$ , фигурирующую в формулировке Т.2.3. Тогда

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad S^{-1}B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где нулевые блоки обязательно возникают при нарушении условия (4.2). Используя правило перемножения блочных матриц, получаем

$$\begin{aligned} S^{-1}\bar{A}S &= S^{-1}AS - S^{-1}BKS = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \tilde{K}_1 & \tilde{B}_1 \tilde{K}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \tilde{B}_1 \tilde{K}_1 & a_{12} - \tilde{B}_1 \tilde{K}_2 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{K} \triangleq [\tilde{K}_1 \tilde{K}_2] \triangleq KS$ . Поскольку собственные числа матрицы  $\bar{A}$  не меняются при неособом преобразовании, а матрица  $S^{-1}\bar{A}S$  оказалась блочно-треугольной, то собственные числа  $\bar{A}$  совпадут с собственными числами матриц  $a_{11} - \tilde{B}_1 \tilde{K}_1$  и  $a_{22}$ . На последние же выбор  $K$  не влияет, а следовательно, они не могут иметь произвольно заданные значения.

Доказательство достаточности условия (4.2) более сложно, и мы полностью проведем его только для случая  $m = 1$ , т. е. случая, когда  $B$  является столбцом ( $n \times 1$ ), а  $K$  — строкой ( $1 \times n$ ). Оно опирается на вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.1** (о преобразовании к форме Фробениуса — Калмана). Если выполнено условие невырожденности, которое при  $m = 1$  сводится к требованию

$$\det\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} \neq 0, \quad (4.3)$$

то  $(n \times n)$ -матрица  $S$  со столбцами  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , строящимися

рекуррентно по формулам

$$\begin{aligned} S_n &= B, \\ S_{n-1} &= AS_n + \alpha_{n-1}B = AB + \alpha_{n-1}B, \\ &\dots \\ S_{k-1} &= AS_k + \alpha_{k-1}B = A^{n-k+1}B + \alpha_{n-1}A^{n-k}B + \dots + \alpha_{k-1}B, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$S_1 = AS_2 + \alpha_1B = A^{n-1}B + \alpha_{n-1}A^{n-2}B + \dots + \alpha_1B$ , где  $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  — коэффициенты характеристического многочлена матрицы  $A$ ,

$$a(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0,$$

является неособой и такой, что

$$A \triangleq S^{-1}AS = \{-\alpha_0 i_n - \alpha_1 i_n + i_1 \dots - \alpha_{n-1} i_n + i_{n-1}\}, \quad (4.5)$$

$$B = S^{-1}B = i_n, \quad (4.6)$$

где через  $i_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , обозначены единичные векторы (столбцы единичной матрицы).

Доказательство леммы. Матрица  $S$  получается из матрицы управляемости  $A_u$  путем перестановки столбцов

$$\{A^{n-1}B \ A^{n-2}B \ \dots \ ABB\}$$

(такая операция может изменить только знак определителя), и добавления к каждому из столбцов предшествующих, умноженных на числа  $\alpha_k$  (такие операции не меняют определителя). Поэтому, если  $\det A_u \neq 0$ , то и  $\det S \neq 0$ , т. е. матрица  $S$  является неособой. По определению обратной матрицы получаем

$$S^{-1}B = S^{-1}S_n = i_n.$$

Вычислим последовательно столбцы матрицы  $S^{-1}AS$  с помощью рекуррентных формул:

$$S^{-1}AS_n = S^{-1}(S_{n-1} - \alpha_{n-1}B) = S^{-1}S_{n-1} - \alpha_{n-1}S^{-1}S_n = i_{n-1} - \alpha_{n-1}i_n,$$

$$S^{-1}AS_{k-1} = S^{-1}(S_{k-1} - \alpha_{k-1}B) = S^{-1}S_{k-1} - \alpha_{k-1}S^{-1}S_n = i_{k-1} - \alpha_{k-1}i_n.$$

Последнее верно вплоть до  $k = 2$ . Для  $k = 1$  используем развернутую форму представления  $S_1$ ; имеем:

$$\begin{aligned} S^{-1}AS_1 &= S^{-1}A(A^{n-1}B + \alpha_{n-1}A^{n-2}B + \dots + \alpha_1B) = \\ &= S^{-1}(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A)B = -S^{-1}\alpha_0B = -\alpha_0i_n, \end{aligned}$$

поскольку по теореме Гамильтона — Кэли

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A = -\alpha_0I.$$

Тем самым лемма доказана. ■

Вернемся к доказательству теоремы.

Используя матрицу  $S$ , построенную в лемме, получаем

$$S^{-1}\bar{A}S = S^{-1}AS - S^{-1}BKS = \bar{A} - BK.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае  $K$  — строка, а следовательно, и  $\bar{K}$  — строка, элементы которой обозначим  $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ . В силу свойств  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  и правил

умножения матриц получаем

$$\begin{aligned} S^{-1}\bar{A}S &= \{-\alpha_0 i_n; -\alpha_1 i_n + i_1; \dots; -\alpha_{n-1} i_n + i_{n-1}\} - i_n \{k_1 k_2 \dots k_n\} = \\ &= \{-(\alpha_0 + k_1) i_n; (\alpha_1 + k_2) i_n + i_1; \dots; -(\alpha_{n-1} + k_n) + i_{n-1}\} = \\ &= \{-\bar{\alpha}_0 i_n; -\bar{\alpha}_1 i_n + i_1; \dots; -\bar{\alpha}_{n-1} + i_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица  $S^{-1}\bar{A}S$  имеет тот же вид, что и  $S^{-1}AS$ , за тем исключением, что коэффициенты характеристического многочлена  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , заменились на новые  $\bar{\alpha}_k = \alpha_k + k_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , которые могут принимать произвольные заданные значения при соответствующем выборе элементов  $k_k$  строки  $K$ . Последние же, в свою очередь, однозначно определяют искомую строку  $K$ . ■

Приведенное доказательство достаточности условия (4.2) конструктивно, т. е. позволяет указать алгоритм решения проблемы размещения собственных чисел при  $m = 1$ .

**Алгоритм 1.** Пусть заданы  $(n \times n)$ -матрица  $A$  и  $(n \times 1)$ -столбец  $B$ . Пусть известны коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , характеристического многочлена  $A$  и требуемые собственные числа  $\bar{\lambda}_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) матрицы  $\bar{A} = A - BK$ . Тогда для нахождения  $K$  следует выполнить следующие операции.

1. Вычислить требуемые коэффициенты характеристического многочлена  $\bar{A}$ , расположив по степеням  $\lambda$  произведение

$$\prod_{v=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_v) = \lambda^n + \bar{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_0.$$

2. Вычислить величины

$$k_{k+1} = \bar{\alpha}_k - \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

и составить из них строку  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ .

3. Построить по формулам (4.4) матрицу  $S$ .

4. Вычислить  $K$ , решив уравнение

$$KS = K.$$

(✓)

**Пример 4.1.** Пусть, как и в П. 1.2,

$$A = \begin{Bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $n = 2$  и требуется найти  $K = \{k_1, k_2\}$  такое, что матрица

$$\bar{A} = A - BK$$

имеет собственные числа  $\bar{\lambda}_1 = -1$ ,  $\bar{\lambda}_2 = -2$ . Характеристический многочлен матрицы  $A$  равен

$$\det \begin{Bmatrix} \lambda + R/L & 1/L \\ -1/C & \lambda \end{Bmatrix} = \lambda(\lambda + R/L) + \frac{1}{LC} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{R}{L}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{LC}.$$

Тогда, действуя по алгоритму, получаем:

$$1. (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \bar{\alpha}_1 = 3, \quad \bar{\alpha}_0 = 2.$$

$$2. \bar{k}_1 = \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = 2 - \frac{1}{LC}, \quad \bar{k}_2 = \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 = 3 - \frac{R}{L}.$$

$$3. S = \{S_1, S_2\},$$

$$S_2 = B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad S_1 = AB + \alpha_1 B = \begin{Bmatrix} -R/L \\ 1/C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R/L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/C \end{Bmatrix}.$$

$$4. KS = K \Leftrightarrow \{k_1, k_2\} \{S_1, S_2\} = \{k_1, k_2\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{C} k_2 = 2 - \frac{1}{LC} \quad k_1 = 3 - R/L$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1 = 3 - R/L \quad k_2 = 2C - \frac{1}{L}. \quad \square$$

Осталось теперь неясным, как решать проблему, когда  $m > 1$ . Естественно, что процедура здесь усложняется и в общем случае имеет достаточно громоздкий характер (см. различные варианты в [6.9]).

Опишем лишь простейшую идею, которая, впрочем, пригодна в большинстве практических возникающих ситуаций. Будем разыскивать желаемую  $(m \times n)$ -матрицу  $K$  в виде

$$K = q\bar{K},$$

где  $q - (m \times 1)$ -столбец, а  $\bar{K} - (1 \times n)$ -строка. Тогда

$$\bar{A} = A - BK = A - \bar{B}\bar{K},$$

где  $\bar{B} = Bq - (n \times 1)$ -столбец. Зададимся каким-либо  $q \neq 0$ , для которого выполнено условие

$$\det \{\bar{B} \ A \bar{B} \dots A^{n-1} \bar{B}\} \neq 0. \quad (4.8)$$

Тогда, используя алгоритм 1 для матриц  $A, \bar{B}$  найдем строку  $\bar{K}$ , обеспечивающую любое заданное расположение собственных чисел, после чего желаемая матрица  $K$  вычисляется по формуле (4.7). Единственное осложнение в этой процедуре заключается в том, как подобрать  $q$ , обеспечивающее условие (4.8) невырожденности пары  $A, \bar{B}$ . Можно, однако, доказать [6.9, § 7.1], что, по крайней мере в случае, когда матрица  $A$  имеет простые собственные числа, такое  $q$  существует и, более того, при почти любом наугад взятом  $q$  условие (4.8) окажется выполненным, если, конечно, выполнено исходное предположение (4.2).

**Пример 4.2.** Пусть

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $n = 3$ ,  $m = 2$ , и

$$\text{rank } A_u = \text{rank} \begin{Bmatrix} 1 & 8 & 1 & 32 \\ 1 & 2 & 2 & 8 & 4 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 16 \end{Bmatrix} = 3,$$

поскольку

$$\det \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Примем  $q = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ; тогда

$$\bar{B} = Bq = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

и нетрудно проверить, что

$$\det \{\bar{B} \quad A\bar{B} \quad A^2\bar{B}\} = \det \begin{Bmatrix} 3 & 9 & 33 \\ 3 & 10 & 36 \\ 1 & 4 & 16 \end{Bmatrix} \neq 0. \quad \square$$

**4.2. Стабилизация.** После столь длительных алгебраических упражнений пора показать их полезность для решения задач управления.

**Теорема 4.2.** Пусть объект описывается основной моделью

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0,$$

причем пара  $A, B$  невырождена. Пусть в любой момент времени  $t \geq 0$  доступен для измерения вектор состояния  $x(t)$ . Тогда может быть построена обратная связь

$$u = -Kx \quad (4.9)$$

такая, что замкнутая система устойчива.

**Доказательство** элементарно: замкнутая система описывается уравнением

$$\dot{x} = \bar{A}x, \quad \bar{A} \triangleq A - BK,$$

а матрица коэффициентов усиления  $K$  может быть выбрана так, чтобы все собственные числа  $\bar{A}$  оказались в левой полуплоскости. ■

**Следствие.** Если система вырождена, но матрица неуправляемой части, выделяемая в силу Т.2.3, является устойчивой, то стабилизирующая систему в целом обратная связь (4.9) также может быть построена.

**Пример 4.3.** Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 4x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= 4x_3 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= -2x_4 + x_5, \\ \dot{x}_5 &= -x_5. \end{aligned}$$

Подсистема, характеризуемая координатами  $x_4$  и  $x_5$ , неуправляема, однако она устойчива. Остальная часть системы задается матрицами

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

которые, как было показано в П.4.2, образуют невырожденную пару.

Подчеркнем, что если принять  $u_1 = 0$ , то не удастся стабилизировать координаты  $x_1$ ,  $x_2$ , а если принять  $u_2 = 0$ , то нестабильным окажется изменение  $x_3$ . Совместным же действием двух компонент управления, как было доказано в П.4.2, систему можно стабилизировать. Рекомендованный в П.4.2 способ эквивалентен тому, чтобы ввести скалярное управление и такое, что  $u_1 = q_1 u$ ,  $u_2 = q_2 u$ , или (при  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1$ ) положить обе компоненты управления одинаковыми. В результате управляемая часть системы приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_3 + 3u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 4x_3 + 3u, \\ \dot{x}_3 &= 4x_3 + u. \end{aligned}$$

После этого можно назначить любое желаемое расположение собственных чисел замкнутой системы в левой полуплоскости, например,  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = -1$  и применить алгоритм 1. Предлагаем проделать это в качестве упражнения. Вместе с тем из структуры рассматриваемой системы ясна возможность и более экономного способа. Действительно, поведение координаты  $x_3$  зависит только от управления  $u_2$ . Примем  $u_2 = -5x_3$ . Тогда система, замкнутая такой обратной связью, приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 4x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - 6x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= -x_3. \end{aligned}$$

В ней выделилась устойчивая неуправляемая часть, задаваемая координатой  $x_3$ . Остается стабилизировать лишь управляемую часть с помощью выбора  $u_1$ . Это возможно, поскольку характеризующая ее пара матриц

$$a_{11} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}, \quad B_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

невырождена:

$$\det \{B_1, a_{11}B_1\} = \det \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \neq 0.$$

Применим алгоритм 1 к этой задаче, задавшись  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = -1$ . Пропуская промежуточные выкладки, запишем результат:

$$K = \{K_1, K_2\} = \{-4; 9\},$$

т. е.  $u_1 = 4x_1 - 9x_2$ . Поскольку  $u_1 \neq u_2$ , то мы заведомо получили решение, отличное от того, которое находится по основной рекомендации.

Таким образом, в случае двух управлений можно добиться одного и того же размещения собственных чисел, используя разные законы управления.  $\square$

**4.3. Оценка состояния.** Переидем теперь к более сложной постановке проблемы стабилизации, отказавшись от предположения о возможности полного измерения всех переменных состояния. Заменим его гипотезой о возможности точного измерения выхода  $y(t) = Cx(t)$  в любой момент  $t \geq 0$ . Уже было показано, что при невырожденности пары  $A^*, C^*$  по измерениям выхода возможно восстановить «внутреннее» состояние, так что, казалось бы, новая постановка сводится к уже изученной. Однако напомним, что излагавшийся в § 3 способ требовал использования «чистых» производных выхода, т. е. операций, не являющихся строго реализуемыми. Более того, реальная точность вычисления  $x(t)$  явно определялась точностью знания матриц  $A$  и  $C$  (процедура имела типично «программный» характер!). Укажем теперь способ определения  $x(t)$ , основанный на идеи обратной связи и лишенный указанных недостатков.

**Теорема 4.3 (о системе асимптотической оценки).** Пусть вектор состояния  $x(t)$  объекта определяется как решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x^0. \quad (4.10)$$

Тогда может быть построено устройство, называемое системой асимптотической оценки, использующее в качестве входных воздействий измеряемый выход объекта

$$y = Cx(t) \quad (4.11)$$

и его вход  $v(t)$  и вырабатывающее оценку  $\hat{x}(t)$  как решение уравнения

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bv(t) + L(y - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0. \quad (4.12)$$

При невырожденности пары  $A^*, C^*$  матрица  $L$  может быть выбрана так, что ошибка оценивания

$$\hat{e}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.13)$$

стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  при любой ограниченной начальной ошибке  $\hat{e}(0)$ .

**Доказательство.** Вычитая (4.12) из (4.10), получим уравнение, определяющее изменение ошибки оценивания

$$\dot{\hat{e}} = (A - LC)\hat{e}. \quad (4.14)$$

Для того чтобы ошибка стремилась к нулю, достаточно выбрать  $L$  так, чтобы матрица  $(A - LC)$  имела «хорошие» собственные числа. Но они совпадают с ч. т. транспонированной матрицы  $A^* - C^*L^*$ . Очевидно, что задача выбора  $L$

(или  $L^*$ ) отличается от уже решенной задачи размещения с. ч. матрицы  $A - BK$  лишь обозначениями, заменой  $A \rightarrow A^*$ ,  $B \rightarrow C^*$ ,  $K \rightarrow L^*$ , и разрешима с помощью уже описанных алгоритмов при невырожденности пары  $A^*, C^*$ . Если пара  $A^*, C^*$  вырождена, но ненаблюдаемая подсистема устойчива, то результат теоремы 4.3 сохраняет силу. При этом иногда говорят, что система является обнаруживаемой (детектируемой). ■

Поясним неформально полученный результат.

При построении системы оценки используются те же матрицы  $A, B, C$ , что и в описании объекта, и вводится то же самое внешнее воздействие  $v(t)$ . Поэтому, если начальные условия  $x^0$  и  $\hat{x}^0$  совпадают, то совпадают и дальнейшие траектории,  $x(t) = \hat{x}(t)$ ,  $t > 0$ , т. е. система оценки работает как модель объекта.

Главное же достоинство системы оценки в том, что она позволяет оценивать изменение состояния объекта и тогда, когда его начальное состояние неизвестно. Именно для этой цели служит последнее слагаемое, вводящее в систему оценки сигнал обратной связи, пропорциональный разности между истинным, непосредственно измеряемым выходом  $y(t)$  и его прогнозом  $\hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t)$ .

Подчеркнем также, что соотношение (4.12) действительно определяет структуру строго реализуемого (с помощью стандартных интеграторов и усилителей) устройства (см. структурную схему на рис. 6.5).

**4.4. Стабилизирующая обратная связь по наблюдениям выхода.** С использованием системы асимптотической оценки можно полностью решить задачу построения строго реализуемой стабилизирующей обратной связи по наблюдениям выхода.

**Теорема 4.4.** Пусть объект, описываемый уравнениями

$$y = Cx, \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \quad (4.15)$$

замкнут обратной связью вида

$$u = -K\hat{x}, \quad (4.16)$$

где  $\hat{x}$  находится с помощью системы асимптотической оценки

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0 \quad (4.17)$$

по измерениям выхода  $y$ . Тогда при невырожденности пар матриц  $A, B$  и  $A^*, C^*$ , возможен выбор коэффициентов усиления  $K$  и  $L$  таких, что замкнутая система является устойчивой.

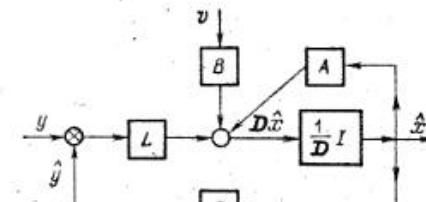


Рис. 6.5

**Доказательство.** Исключив переменные  $u$  и  $y$ , запишем уравнения замкнутой системы в виде

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x}, \quad (4.18)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + LC(x - \hat{x}). \quad (4.19)$$

Динамика системы характеризуется двумя векторными переменными  $x$  и  $\hat{x}$ , имеющими одинаковую размерность. Переидем от этих переменных к переменным

$$\varepsilon = -x, \quad \hat{\varepsilon} = x - \hat{x},$$

характеризующим ошибку управления (отклонение  $x(t)$  от желаемого состояния  $x(t) = 0$ ) и ошибку оценивания. Такое преобразование координат является неособым и не меняет характеристическое уравнение системы. Имеем теперь

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= A\varepsilon - BK(x - \hat{x}) + BKx & \dot{\varepsilon} &= (A - BK)\varepsilon - BK\hat{\varepsilon} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} &= A\hat{\varepsilon} - LC\hat{\varepsilon} & \dot{\hat{\varepsilon}} &= (A - LC)\hat{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

или, в сокращенной записи,

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \end{Bmatrix} = A_c \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon} \end{Bmatrix}.$$

Матрица

$$A_c \triangleq \begin{Bmatrix} A - BK; & -BK \\ 0; & A - LC \end{Bmatrix}, \quad (4.21)$$

характеризующая свойства замкнутой системы, имеет блочно-треугольную структуру. Ее собственные числа совпадают с собственными числами блоков, стоящих на диагонали, т. е. матриц  $A - BK$  и  $A - LC$ . Вместе с тем было показано, что при выполнении условий невырожденности  $K$  и  $L$  могут быть выбраны так, чтобы произвольно разместить собственные числа этих матриц. Тем самым доказана возможность (и указан алгоритм!) стабилизации замкнутой системы в целом. ■

**Следствие.** Если условие невырожденности не выполнено, но «висячие» части модели объекта, выделяемые в силу структурной теоремы, являются устойчивыми, то возможность стабилизации с помощью обратной связи по выходу сохраняется.

**Доказательство** следствия сводится к предварительному преобразованию координат, обеспечивающему явное выделение структуры, и построению обратной связи только по оценкам координат невырожденной части. ■

Структура замкнутой системы, описанной в Т.4.4, наглядно представлена на рис. 6.6. Система асимптотической оценки входит как часть в конструкцию обратной связи от измерений выхода  $y(t)$  к управлению  $u(t)$ , причем обратная связь является динамической, задаваемой не алгебраическим соотношением, а системой дифференциальных уравнений, имеющей тот же порядок, что и порядок уравнений, описывающих объект (если нет вырождения).

Построенная обратная связь может использоваться и в тех случаях, когда требуется стабилизировать не систему в целом, а лишь

какую-либо ее часть, подсистему. Построение такой «внутренней» обратной связи отличается лишь тем, что управляющее воздействие  $u(t)$  разделяется на две части (ср. § 3 гл. 3):

$$u(t) = u_v(t) + u_s(t), \quad (4.22)$$

где  $u_v(t)$  служит для стабилизации, а  $u_s(t)$  — для воздействия через уже стабилизированную подсистему на остальные части системы. Не вводя лишних индексов, сохраним для подсистемы описание со стандартными обозначениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

и будем считать пары  $A, B$  и  $A^*, C^*$  невырожденными. Тогда обратная связь строится согласно уравнениям

$$\begin{aligned} u_v &= -K\hat{x}, \quad \dot{x} = Ax + Bu + \\ &+ L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

и является стабилизирующей при соответствующем выборе  $K$  и  $L$ .

Без обратной связи преобразование «управление — выход» определялось п. ф. вида

$$H(p) = C[pI - A]^{-1}B.$$

Рис. 6.6

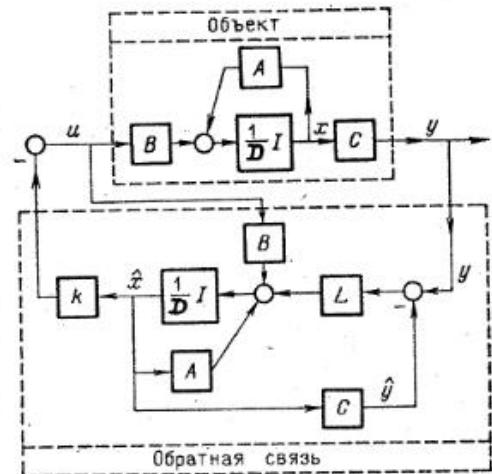
Выясним, какой окажется п. ф. после введения обратной связи. Для этого удобно вновь преобразовать уравнения, введя переменную  $\hat{\varepsilon} = x - \hat{x}$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} y &= Cx, \quad \dot{x} = (A - BK)x + BK\hat{\varepsilon} + Bu, \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Отсюда сразу видно, что

$$H_{u_vy}(p) = C[pI - (A - BK)]^{-1}B. \quad (4.25)$$

Она не зависит от свойств системы оценки (эта система оказывается неуправляемой по отношению к  $u_v$ !) и имеет точно такой же вид, как и в случае, когда возможна организация обратной связи по непосредственным измерениям состояния  $x(t)$ , т. е. при  $u_v = -Kx$ . Это замечательное свойство описанной конструкции обратной связи по выходу и позволяет независимо использовать выбор коэффициентов  $K$  для формирования п. ф. от внешнего управления к выходу, а выбор коэффициентов  $L$  — для уменьшения влияния ошибок оценивания.



Если  $y(t)$ ,  $u(t)$  скалярны, то для формирования стабилизирующей обратной связи можно использовать и простую методику, изложенную в гл. 3, § 1, 3. Предоставляем читателю самостоятельно рассмотреть связь между двумя подходами. Обратите внимание на то, что обратная связь, не меняющая числителя  $p$ . ф., также приводит к вырождению — возникает сокращаемый устойчивый многочлен  $\delta(p) = k_0(p)l_1(p)$ . Если его степень принята равной  $n$ , то построение в § 3 гл. 3 эквивалентно построению обратной связи по формулам (4.23) при стабилизирующем выборе  $L$ , причем  $\delta(p)$  совпадает с характеристическим многочленом матрицы  $A - LC$ .

### § 5. Оптимизация стабилизирующей обратной связи

**5.1. Качество стабилизации и размещение с. ч.** Вернемся к основной постановке задачи стабилизации: дан объект, описываемый матричным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0; \quad (5.1)$$

требуется выбрать обратную связь  $u = -Kx$  так, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (5.2)$$

Решение этой задачи было дано в предшествующем параграфе, поскольку был указан алгоритм, позволяющий (при невырожденности пары  $A, B$ ) выбрать коэффициенты обратной связи  $K$  так, чтобы собственные числа матрицы

$$\bar{A} = A - BK \quad (5.3)$$

размещались в левой полуплоскости. Однако на самом деле было установлено и большее: собственные числа можно размещать где угодно, а следовательно, неограниченно увеличивать и степень устойчивости.

Тем самым выбор обратной связи может обеспечивать не только устойчивость, но и *качество процесса стабилизации* — процесса перехода из начального состояния  $x^0$  в окрестность устойчивого положения равновесия ( $x = 0$ ) замкнутой системы (5.2). В соответствии с формулами (2.8), (2.11) имеем\*

$$x(t) = e^{\bar{A}t}x^0 = \sum_{v=1}^n e^{\bar{\lambda}_v t} \bar{C}_v x^0, \quad (5.4)$$

где  $\bar{\lambda}_v$  — собственные числа матрицы  $\bar{A}$ , а  $\bar{C}_v$  — матрицы, состоящие из постоянных элементов, если все  $\bar{\lambda}_v$  различны.

\* Иные внешние воздействия, кроме управления, использованного для стабилизации, пока не учитываются.

**Теорема 5.1.** Из возможности произвольного выбора  $\bar{\lambda}_v$  следует, что для любого  $T > 0$  и  $\epsilon > 0$  можно обеспечить выполнение условия

$$|x(t)| \leq \epsilon, \quad t \geq T. \quad (5.5)$$

**Доказательство.** Выберем  $\bar{\lambda}_v = -\kappa \alpha_v$ , где  $\alpha_v \geq \delta > 0$ , а  $\kappa$  — большая положительная величина. По способу построения, основанному на разложении элементов матрицы  $[pI - \bar{A}]^{-1}$  на простейшие дроби, все элементы  $\bar{C}_v$  являются дробно-рациональными функциями  $\kappa$  и при больших  $\kappa$  являются величинами, растущими не быстрее, чем  $\kappa^{n-1}$ . Поэтому справедлива оценка

$$|x(t)| \leq c \kappa^{n-1} e^{-\delta \kappa t},$$

где  $c > 0$  — константа, не зависящая от  $\kappa$ . Отсюда сразу следует, что путем увеличения  $\kappa$  можно добиться желаемого результата, поскольку экспоненциальный множитель с ростом  $\kappa$  убывает быстрее, чем растет степенной  $\kappa^{n-1}$ . ■

Таким образом, смешая собственные числа достаточно далеко «вглубь» левой полуплоскости, можно обеспечить сколь угодно быстрое достижение равновесия с любой требуемой точностью. Этот формальный оптимистический результат скрывает, однако, некоторые существенные детали, которые стоит пояснить на простейшем примере.

**Пример 5.1.** Пусть объект описывается двумя скалярными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0.$$

Без управления он неустойчив. Введем обратную связь

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2.$$

Выберем коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$  так, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \quad (5.6)$$

и, более того, обеспечить быстрое приближение к состоянию  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Характеристическое уравнение замкнутой системы таково:

$$\lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0.$$

Потребуем, чтобы его корни были равны  $\bar{\lambda}_1 = -\kappa$ ,  $\bar{\lambda}_2 = -2\kappa$ , что при больших  $\kappa > 0$  должно давать желаемый результат. При этом надо выбрать  $k_1 = 2\kappa^2$ ,  $k_2 = 3\kappa$ , иначе говоря, коэффициенты обратной связи должны быть также большими.

Оценим процесс приближения к желаемому состоянию, найдя  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $u(t)$ . Применяя преобразование Лапласа к системе (5.6), получим:

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = \frac{(3\kappa + p)}{(p + \kappa)(p + 2\kappa)} x_1^0 + \frac{1}{(p + \kappa)(p + 2\kappa)} x_{21}^0$$

$$\mathcal{L}\{x_2(t)\} = -\frac{2\kappa^3}{(p + \kappa)(p + 2\kappa)} x_1^0 + \frac{p}{(p + \kappa)(p + 2\kappa)} x_{21}^0$$

откуда

$$\begin{aligned}x_1(t) &= [2e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}]x_1^0 + \frac{1}{\kappa}[e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}]x_2^0, \\x_2(t) &= 2\kappa[-e^{-\kappa t} + e^{-2\kappa t}]x_1^0 - [e^{-\kappa t} - 2e^{-2\kappa t}]x_2^0.\end{aligned}$$

При больших  $\kappa$  и  $\kappa t$  главные слагаемые имеют вид

$$x_1(t) \approx 2e^{-\kappa t}x_1^0, \quad x_2(t) \approx -2\kappa e^{-\kappa t}x_1^0.$$

Пусть  $x_1^0 = 1$ . Потребуем, чтобы при  $t \geq T = 0,01$

$$|x_1(t)| \leq 0,1, \quad |x_2(t)| \leq 0,1$$

или

$$2e^{-0,01\kappa} \leq 0,1, \quad 2\kappa e^{-0,01\kappa} \leq 0,1.$$

Этого можно добиться, приняв  $\kappa = 10^3$ , поскольку  $2 \times 10^3 \times e^{-10} = 0,09$ . Однако нетрудно оценить, что, прежде чем войти в малый допуск, координата  $x_2(t)$  отклоняется от своего начального значения в 250 раз (в момент, равный  $0,07T$ ), а отклонения от нуля процесса  $u(t)$  достигают величины порядка  $\kappa^2 = 10^6$ .  $\square$

Из приведенного примера можно сделать два вывода:

**Вывод 1.** Тенденция к большому смещению в левую полуплоскость собственных чисел замкнутой системы может приводить к большим «забросам» значений некоторых переменных, прежде чем они входят в желаемый допуск. Качество такого процесса стабилизации нельзя считать приемлемым.

**Вывод 2.** Обеспечение произвольного расположения собственных чисел может потребовать очень большого уровня управляющих воздействий.

В силу первого вывода нельзя считать время практического затухания приемлемой мерой качества процесса стабилизации — важно, чтобы в течение всего процесса отклонения от желаемого состояния были невелики. В силу второго выхода важно учесть ограничения на допустимый уровень управляющих воздействий.

**5.2. Интегральный показатель качества и его минимизация.** Обе указанные тенденции можно формализовать, введя интегральный (энергетический) показатель качества процесса стабилизации в виде

$$J = \sum_{i=1}^n q_i \int_0^\infty x_i^2(t) dt + \sum_{k=1}^m r_k \int_0^\infty u_k^2(t) dt, \quad (5.7)$$

где  $q_i \geq 0$ ,  $r_k > 0$  — заданные коэффициенты. Слагаемые вида  $\int_0^\infty x_i^2 dt$  характеризуют «энергию»  $i$ -й компоненты вектора состояния (норму ее отклонения от нуля), слагаемые  $\int_0^\infty u_k^2 dt$  характеризуют «энер-

гию»  $k$ -й компоненты вектора управления. Коэффициенты  $q_i$  задают относительную важность отклонений по каждой координате (некоторые из них могут быть несущественны и тогда  $q_i = 0$ ), коэффициенты  $r_k$  определяют важность «энергетических затрат» по различным управляющим воздействиям.

Оставим пока в стороне вопрос о том, как в конкретных задачах назначать коэффициенты соизмерения, и попытаемся установить, при какой стабилизирующей обратной связи достигается минимальное значение энергетического показателя. Перепишем его в матричной форме:

$$J = \int_0^\infty x^T Q x dt + \int_0^\infty u^T R u dt, \quad (5.8)$$

где  $Q = \text{diag}\{q_i, i = 1, \dots, n\}$ ,  $R = \text{diag}\{r_k, k = 1, \dots, m\}$ . Поскольку дальнейшее лишь несущественно усложняется, если считать  $Q$  произвольной неотрицательной определенной матрицей, а  $R$  произвольной положительно определенной, то анализ будет проводиться именно в таких предположениях. Сформулированную проблему принято именовать задачей *оптимальной стабилизации*, или *линейно-квадратичной (ЛК) проблемой оптимального управления*.

Замечательной особенностью задачи оптимальной стабилизации является то, что в ней удается указать вид обратной связи, дающей наилучший результат при любых начальных условиях.

**Теорема 5.2.** Пусть существует положительно определенная матрица  $P^*$ , являющаяся решением матричного квадратного уравнения\*)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (5.9)$$

и матрица  $K^*$ , связанная с  $P^*$  соотношением

$$K^* = R^{-1}B^T P^*. \quad (5.10)$$

Тогда при любых начальных условиях  $x^0$  оптимальная стабилизация обеспечивается управлением

$$u = -K^*x, \quad (5.11)$$

причем минимальное значение показателя качества равно

$$J_{\text{opt}} = (x^0)^T P^* x^0. \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Рассмотрим, как изменяется квадратичная форма

$$V(t) = x^T(t) P^* x(t), \quad (5.13)$$

\*) В отечественной литературе принято называть это соотношение уравнением Лурье, поскольку оно впервые было получено в исследовании А. И. Лурье (1951 г.) по теории устойчивости (см. гл. 8), в зарубежной это же соотношение обычно именуется алгебраическим уравнением Риккати (причины возникновения такого названия см. в § 8).

если  $x(t)$  изменяется в силу уравнений (5.1), а  $u(t)$  — произвольно. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T P^* x + x^T P^* \dot{x} = (Ax + Bu)^T P^* x + x^T P^* (Ax + Bu).$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dV}{dt} dt &= V(t) - V(0) = x^T(t)P^*x(t) - (x^0)^T P^* x^0 = \\ &= \int_0^t [x^T(A^T P^* + P^* A)x + 2x^T P^* B u] dt. \end{aligned}$$

При любой стабилизирующей обратной связи

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

так что

$$\int_0^\infty [x^T(A^T P^* + P^* A)x + 2x^T P^* B u] dt = -(x^0)^T P^* x^0,$$

или, с учетом (5.9), (5.10),

$$\int_0^\infty [-x^T Q x + x^T (K^*)^T R K^* x + 2x^T (K^*)^T R u] dt = -(x^0)^T P^* x^0.$$

Добавляя и вычитая слагаемые  $u^T R u$ , получаем

$$-\int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt + \int_0^\infty [u^T R u + x^T (K^*)^T R K^* x + 2x^T (K^*)^T R u] dt = -(x^0)^T P^* x^0.$$

Таким образом, зависимость интегрального показателя (5.8) от произвольного стабилизирующего управления  $u$  представима в виде

$$J = \int_0^\infty (u + K^* x)^T R (u + K^* x) dt + (x^0)^T P^* x^0, \quad (5.14)$$

откуда сразу следует, что минимальное значение достигается при

$$u = -K^* x, \quad (5.15)$$

поскольку  $R$  — положительно определенная матрица.

Доказательство почти завершено. Осталось лишь убедиться в том, что обратная связь вида (5.11) сама является стабилизирующей. Доказательство справедливости этого утверждения, равно как и доказательство следующей теоремы существования, мы отложим до более полного знакомства с теорией устойчивости \*). ■

\*). Доказательство устойчивости (гл. 8) основано на том, что  $P^* > 0$ . Доказательство же следующей Т.5.3, приведенное в Приложении 2, не только устанавливает этот факт, но и дает способ решения уравнения (5.9), использующий идею факторизации. Там же приведено описание итеративной процедуры решения (5.9).

**Теорема 5.3.** Для существования единственного положительно определенного решения матричного квадратного уравнения (5.9) достаточно, чтобы пара  $A, B$  была невырожденной,  $R > 0$  и, кроме того, выполнено одно из двух условий: либо а)  $Q$  положительно определена, либо б)  $Q \geq 0$  и представима в виде  $Q = C^T C$ , причем так, что невырождена пара матриц  $A^*, C^*$ .

Описанная теория сводит задачу оптимальной стабилизации к чисто алгебраической задаче поиска решения матричного квадратного уравнения Лурье. Отметим, что если размерность вектора состояния  $x$  равна  $n$ , то размер искомой матрицы  $P^*$  равен  $n \times n$ . В силу симметрии  $P^*$  число неизвестных элементов равно  $n(n+1)/2$ , для определения которых имеем систему такого же числа скалярных квадратных уравнений. Ясно, что решение этой системы само по себе является сложной вычислительной задачей (см. Приложение 2). Лишь при  $n = 2$  ее можно попытаться решать «в лоб».

**Пример 5.2.** Пусть для системы, описываемой скалярными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

требуется найти стабилизирующую обратную связь

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2,$$

причем такую, что на траекториях замкнутой системы при любых начальных условиях достигается минимум интегрального показателя

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + \rho u^2) dt,$$

где  $\rho$  — положительный параметр. Задачу можно записать в стандартной матричной форме (5.1), (5.8), если обозначить

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \rho.$$

Затем предстоит решить уравнение Лурье (5.9), которое в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \{0, 1\} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

где введены естественные обозначения для элементов искомой симметричной матрицы  $P$ . Перемножив матрицы в левой части уравнения, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12} p_{22} \\ p_{12} p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} p_{12}^2 + 1 & p_{11} - \frac{1}{\rho} p_{12} p_{22} \\ p_{11} - \frac{1}{\rho} p_{12} p_{22} & 2p_{12} - \frac{1}{\rho} p_{22}^2 \end{cases} = 0.$$

Из равенства цулю всех элементов матрицы получаем:

$$p_{22} = \pm \sqrt{2\rho p_{12}}, \quad p_{11} = \frac{1}{\rho} p_{12} p_{22}, \quad p_{12} = \pm \sqrt{\rho}.$$

Искомое решение должно быть положительно определенным, при чем заведомо  $p_{12} > 0$ , что дает правило выбора знаков:

$$p_{12}^* = \rho^{1/2}, \quad p_{22}^* = 2^{1/2}\rho^{3/4}, \quad p_{11}^* = 2^{1/2}\rho^{1/4}.$$

Оптимальные коэффициенты усиления находятся по формуле (5.10):

$$K^* = \{k_1^* k_2^*\} = \frac{1}{\rho} \{0, 1\} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{12}^* & p_{22}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \{p_{12}^* p_{22}^*\} = \{\rho^{-1/2}, 2^{1/2}\rho^{-1/4}\}.$$

Замкнутой системе, описываемой соотношениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\rho^{-1/2}x_1 - 2^{1/2}\rho^{-1/4}x_2,$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2^{1/2}\rho^{-1/4}\lambda + \rho^{-1/2} = 0$$

с корнями  $\lambda_{1,2} = \rho^{-1/4}2^{-1/2}(-1 \pm i)$ , расположеными в левой полуплоскости. Более того, оно соответствует известному расположению Баттервортта \*). С уменьшением параметра  $\rho$  корни удаляются «влюбь» левой полуплоскости, причем с повышением степени устойчивости одновременно растут коэффициенты усиления и, как нетрудно подсчитать, энергия, затрачиваемая на управление.  $\square$

**5.3. Построение критерия. Задание степени устойчивости.** Вид оптимальной обратной связи зависит от выбора коэффициентов матриц  $Q$  и  $R$ , входящих в показатель качества (5.8) и определяющих характер «соизмерения» энергии различных компонент векторов состояния и управления. Проблема сведения различных требований, предъявляемых к системе, в единый показатель качества, имеющий к тому же специальную форму (5.8), не допускает однозначного решения.

На практике обычно используют прием приведения к относительным величинам. Пусть известны величины  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{u}_i$ , превышение которых соответствующими компонентами векторов состояния и управления нежелательно. Тогда рекомендуется составлять критерий

\*) Общее исследование связи между многочленами Баттервортта и оптимальными характеристическими многочленами дано в [3.3].

качества в виде

$$\int_0^\infty \left[ \sum_i \left( \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right)^2 + \sum_k \left( \frac{u_k}{\bar{u}_k} \right)^2 \right] dt, \quad (5.17)$$

т. е. принимать

$$Q = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\bar{x}_i^2} \right\}, \quad R = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\bar{u}_k^2} \right\}.$$

Такой подход, по крайней мере, гарантирует соизмеримость всех компонент, хотя, конечно, нельзя утверждать, что оптимальная стабилизация по указанному критерию действительно гарантирует невыход за ограничения  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{u}_k$ . Отметим также, что распределение собственных чисел матрицы оптимальной замкнутой системы также существенно зависит от выбора  $Q$  и  $R$  (см. гл. 9, § 4). Поэтому, стремясь гарантировать, чтобы распределение было не слишком плохим, зачастую вводят дополнительное требование при поиске оптимальной стабилизирующей обратной связи: она должна обеспечить степень устойчивости замкнутой системы не ниже заданной величины  $\delta$ .

Добиться удовлетворения этого требования несложно. Действительно, решим задачу оптимальной стабилизации, использовав в расчетах вместо матрицы  $A$  матрицу  $A_\delta = A + \delta I$ . Тогда в результате решения уравнения Лурье получим матрицу  $P_\delta$  и коэффициенты усиления  $K_\delta = R^{-1}B^TP_\delta$  такие, что матрица

$$\bar{A} = A_\delta - BK_\delta$$

заведомо устойчива, т. е. все ее собственные числа лежат левее мнимой оси. Но тогда матрица

$$\bar{A} = A - BK_\delta = A_\delta - BK_\delta - \delta I = \bar{A}_\delta - \delta I$$

заведомо имеет все с. ч. левее прямой, сдвинутой относительно мнимой оси на  $\delta$ , поскольку

$$\det[\lambda I - \bar{A}] = \det[\lambda I - \bar{A}_\delta + \delta I] = \det[(\lambda + \delta)I - \bar{A}_\delta].$$

Таким образом, мы доказали справедливость следующего правила.

**Правило.** Для построения оптимальной стабилизирующей обратной связи, обеспечивающей заданную степень устойчивости в замкнутой системе, достаточно найти положительно определенное решение  $P_\delta$  уравнения

$$(A + \delta I)^T P + P(A + \delta I) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (5.18)$$

и принять

$$u = -K_\delta x, \quad K_\delta = R^{-1}B^TP_\delta. \quad (5.19)$$

## § 6. Управление при наличии случайных возмущений

**6.1. Постановка задачи.** До сих пор в рамках метода пространства состояний делался акцент только на решение задачи ликвидации начального рассогласования, различия между начальным состоянием и желаемым. Введение обратной связи позволяет превратить это желаемое состояние в устойчивое положение равновесия. Если нет никаких внешних возмущений, то стабилизированная система сколь угодно близко подойдет к цели. То же самое будет иметь место, если возмущения со временем сами по себе затухают. Однако, как уже указывалось ранее, типичной является ситуация, когда объект управления постоянно находится под действием внешних возмущений.

Наиболее важно изучить влияние заранее непрогнозируемых возмущений, которые можно рассматривать как реализации случайного процесса  $w(t)$ . При этом изменение состояния  $x(t)$  окажется случайным процессом, отклонение которого от желаемого состояния  $x^d = 0$  можно оценивать только вероятностными характеристиками.

Исследование односвязанных систем при наличии стационарных случайных возмущений было проведено в гл. 4 с помощью метода передаточных функций. Здесь же мы продемонстрируем возможность подхода, основанного на непосредственном использовании дифференциальных уравнений.

Примем первоначально следующие предположения.

a) Изменение состояния системы определяется уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw(t) = \bar{A}x + Gw(t), \quad x(0) = x^0, \quad (6.1)$$

где  $\bar{A} = A - BK$  при использовании обратной связи

$$u = -Kx, \quad (6.2)$$

а  $(n \times 1)$ -матрица  $G$  состоит из элементов, отражающих степень влияния возмущения на скорость изменения каждой координаты состояния.

б) Внешнее воздействие  $w(t)$  является белым шумом с единичной интенсивностью, т. е.

$$w(t) = w_0(t), \quad M\{w_0(t)\} = 0, \\ M\{w_0(t)w_0(t+\tau)\} \triangleq R_{w_0}(\tau) = \delta(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (6.3)$$

в) Начальное состояние  $x^0 = (x_i^0, i = 1, \dots, n)$  — центрированный случайный вектор, некоррелированный с возмущением, причем задана  $(n \times n)$ -матрица  $D^0$  с элементами

$$d_{ij}^0 \triangleq M\{x_i^0 x_j^0\}. \quad (6.4)$$

**Замечание.** Решение уравнения (6.1) понимается как линейное преобразование процесса  $w(t)$  и начального состояния  $x^0$  в процесс  $x(t)$ :

$$x(t) = h_0(t)x^0 + \int_0^t h_{wx}(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (6.5)$$

где

$$h_0(t) = e^{\bar{A}t}, \quad h_{wx}(t) = e^{\bar{A}t}G, \quad t \geq 0. \quad (6.6)$$

Если  $w(t)$  — белый шум, то операция интегрирования не может пониматься в классическом смысле [4.8]. Однако все дальнейшие соотношения связаны только с корреляционным описанием  $x(t)$  и допускают строгое обоснование путем перехода от допредельного процесса  $w_\mu(t)$  с интегрируемыми реализациями к белому шуму  $w_0(t)$  по схеме, описанной в гл. 4, § 3.

**6.2. Вычисление матрицы ковариаций.** Первая задача — научиться вычислять моментные характеристики процесса  $x(t)$ . Очевидно, что  $M\{x(t)\} = 0$  в силу центрированности  $w(t)$ ,  $x^0$ . Введем  $(n \times n)$ -матрицу  $D_x(t)$  с элементами

$$d_{ij}(t) \triangleq M\{x_i(t)x_j(t)\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Диагональные элементы  $d_{ii}(t)$  равны дисперсиям каждой координаты  $x_i(t)$  вектора состояния, а внедиагональные равны взаимным корреляциям (ковариациям) различных координат. Матрицу  $D_x(t)$  обычно называют матрицей ковариаций векторного случайного процесса  $x(t)$ .

Поскольку значение  $D_x(0) = D^0$  предполагается заданным, то следует указать способ вычисления  $D_x(t)$  для произвольного  $t > 0$ .

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены предположения а) — в). Тогда справедливо явное выражение

$$D_x(t) = e^{\bar{A}t}D^0e^{\bar{A}^T t} + G \int_0^t e^{\bar{A}\tau}e^{\bar{A}^T \tau} d\tau G^T, \quad (6.8)$$

совпадающее с решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{D}_x = \bar{A}D_x + D_x\bar{A}^T + GG^T, \quad D_x(0) = D^0. \quad (6.9)$$

Если  $\bar{A}$  — устойчивая матрица, то существует предел  $D_x = \text{const}$ ,

$$D_x = \lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = G \int_0^\infty e^{\bar{A}\tau}e^{\bar{A}^T \tau} d\tau G^T, \quad (6.10)$$

матрица ковариаций установившегося процесса, удовлетворяющая матричному алгебраическому уравнению

$$\bar{A}D_x + D_x\bar{A}^T + GG^T = 0. \quad (6.11)$$

**Доказательство.** По определению

$$D_x(t) = M\{x(t)x^T(t)\}.$$

Подставляя в правую часть представление (6.5) и учитывая свойства  $x^0$  и  $w(t)$ ,

доказываем (6.8):

$$\begin{aligned}
 D_x(t) &= h_0(t) M \{x^0(t) x^{0T}(t)\} + \\
 &+ \int_0^t d\tau_1 \int_0^t h_{wx}(\tau_1) h_{wx}^T(\tau_2) M \{w(t-\tau_1) w(t-\tau_2)\} d\tau_2 = \\
 &= h_0(t) D^0 h_0^T(t) + \int_0^t h_{wx}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^t h_{wx}^T(\tau_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 = \\
 &= h_0(t) D^0 h_0^T(t) + \int_0^t h_{wx}(\tau_1) h_{wx}^T(\tau_1) d\tau_1 = \\
 &= e^{-\bar{A}t} D^0 e^{-\bar{A}^T t} + G \int_0^t e^{-\bar{A}\tau} e^{-\bar{A}^T \tau} d\tau G^T.
 \end{aligned}$$

То, что (6.8) дает решение (6.9), доказывается прямой подстановкой. Существование предела (6.9) следует из спектрального представления матричной экспоненты и отрицательности вещественных частей с. ч. матрицы  $\bar{A}$ . Поскольку  $D_x = \text{const}$  и удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.9), то  $D_x$  удовлетворяет и (6.11). ■

Теорема 6.1 указывает удобную процедуру вычисления  $D_x(t)$  и в особенности матрицы ковариаций  $D_x$  установившейся реакции. Матричное уравнение (6.11), в силу симметрии  $D_x$ , эквивалентно  $n(n+1)/2$  линейных алгебраических уравнений относительно такого же количества неизвестных элементов  $d_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  этой матрицы.

**Пример 6.1.** Пусть имеется устойчивая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt{2}x_2 + w_0(t),$$

возмущаемая единичным белым шумом  $w_0(t)$ . В матричной записи имеем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6.11) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$d_{12} = 0, \quad d_{22} - d_{11} - \sqrt{2}d_{12} = 0, \quad 2(-d_{12} - \sqrt{2}d_{22}) + 1 = 0,$$

откуда  $d_{11} = d_{22} = 1/(2\sqrt{2})$ .

Напомним, что в гл. 4 для вычисления дисперсий установившейся реакции указывается путь, связанный с построением п. ф. и вычислением интегралов. В частности, здесь можно было бы найти

$$H_{w_0 x_1}(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

и вычислить  $d_{11}$  по формуле

$$d_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{w_0 x_1}(i\omega)|^2 d\omega,$$

что даст тот же результат. □

**6.3. Оптимизация обратной связи.** Выбор любой линейной стабилизирующей обратной связи вида (6.2) гарантирует ограниченность дисперсий отклонений координат системы от желаемого нулевого значения. Возникает естественный вопрос: как выбрать обратную связь наилучшим образом?

Примем за показатель качества величину

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt, \quad (6.12)$$

где  $Q$  и  $R$  — заданные матрицы весовых коэффициентов, осуществляющих, как и в детерминированной задаче оптимальной стабилизации, соизмерение различных компонент векторов состояния и управления. Прежде всего покажем, что показатель  $J$  имеет смысл, т. е. предел существует и явно выражается через установившуюся ковариационную матрицу  $D_x = \{d_{ij}\}$ . Действительно,

$$M \{x^T(t) Q x(t)\} = M \left\{ \sum_i \sum_j q_{ij} x_i(t) x_j(t) \right\} = \sum_i \sum_j q_{ij} d_{ij}(t),$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{x^T(t) Q x(t)\} dt &= \\
 &= \sum_i \sum_j q_{ij} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d_{ij}(t) dt = \sum_i \sum_j q_{ij} d_{ij} \triangleq \text{tr} \{Q D_x\},
 \end{aligned}$$

где справа использовано обозначение, читаемое «след матрицы  $Q D_x$ » и означающее суммирование всех диагональных элементов матрицы  $Q D_x$ .

Аналогично имеем, в силу (6.2), что

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{u^T(t) R u(t)\} dt &= \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{x^T(t) K^T R K x(t)\} dt = \text{tr} [K^T R K D_x].
 \end{aligned}$$

Таким образом, показатель  $J$  представим в виде

$$J = \text{tr} \{(Q + K^T R K) D_x\}. \quad (6.13)$$

Напомним, что матрица  $D_x$  также зависит от  $K$  в силу уравнения (6.11), которое можно записать в виде

$$(A - BK)D_x + D_x(A - BK)^T + GG^T = 0. \quad (6.14)$$

Таким образом, минимизация  $J$  путем выбора  $K$  эквивалентна минимизации явно заданной функции (6.13) при ограничениях (6.14).

Для решения этой задачи используем косвенный путь, аналогичный тому, который был принят при решении детерминированной задачи оптимальной стабилизации в § 5.

**Теорема 6.2.** Пусть выполнены предположения а) – в) и  $R > 0$ . Тогда оптимальное значение  $K^*$  коэффициентов усиления в стабилизирующей обратной связи (6.2) дается формулой

$$K^* = R^{-1}B^TP^*, \quad (6.15)$$

где  $P^*$  – положительно определенное решение квадратного уравнения

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \quad (6.16)$$

если такое существует.

При этом минимальное значение  $J^*$  показателя качества (6.12) может быть представлено в виде

$$J^* = G^TP^*G. \quad (6.17)$$

Прежде чем доказывать теорему, подчеркнем замечательный характер результата: вид оптимальной линейной обратной связи оказался тем же самым, что и в детерминированной задаче оптимальной стабилизации (Т. 5.1) \*).

**Доказательство.** В силу (6.1)

$$\frac{d}{dt} M\{x^T(t)P^*x(t)\} = M[(\bar{A}x + Gw_0)^TP^*x] + M[x^TP^*(\bar{A}x + Gw_0)],$$

так что

$$\begin{aligned} M\{x^T(t)P^*x(t)\} - M\{x^{0T}P^*x^0\} &= \\ &= \int_0^T M\{x^T(\bar{A}P^* + P^*\bar{A})x\} dt + 2G^TP^* \int_0^T M\{wx\} dt. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Учитывая устойчивость  $\bar{A}$ , имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M\{x^T(t)P^*x(t) - x^{0T}P^*x^0\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{tr}\{P^*[D_x(t) - D_x(0)]\} = 0. \quad (6.19)$$

Используем также формулу (3.48) из гл. 4 для взаимной корреляции выхода и

\*). Имеется, тем не менее, существенное отличие в постановках этих задач. В § 5 разыскивалась наилучшая обратная связь среди любых стабилизирующих обратных связей, здесь же – только среди линейных, вида (6.2). В гл. 10 для аналогичной задачи показано, что при распределении возмущения, отличном от нормального, оптимальная обратная связь может оказаться нелинейной.

белошумного входа:

$$M\{x(t)w_0(t)\} = \frac{1}{2} h_{w_0x}(0) = \frac{1}{2} G, \quad (6.20)$$

где учтено определение (6.6). Таким образом, из (6.18) – (6.20) устанавливаем тождество

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{x^T(\bar{A}^TP^* + P^*\bar{A})x\} dt + G^TP^*G = 0,$$

справедливое при любой устойчивой матрице  $\bar{A} \triangleq A - BK$ . Добавив тождественный нуль к выражению показателя (6.12), приведем его к виду

$$\begin{aligned} J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{x^T[A^TP^* - K^TB^TP^* + P^*A - \\ - P^*BK + Q + K^TRK]x\} dt + G^TP^*G. \end{aligned}$$

Поскольку  $P^*$  и  $K^*$  в силу (6.15), (6.16) связаны соотношением

$$A^TP^* + P^*A + Q = K^*R^*K^*,$$

то дальнейшие выкладки позволяют получить представление

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{x^T(K - K^*)^TR(K - K^*)x\} dt + G^TP^*G.$$

Поскольку при  $K \neq K^*$  первое слагаемое положительно, если  $R > 0$ , и обращается в нуль при  $K = K^*$ , то  $K^*$  доставляет минимум  $J$ , равный  $J^* = G^TP^*G$ . ■

**Пример 6.2.** Пусть объект задан скалярным уравнением

$$\dot{x} = u + w_0(t),$$

т. е.  $n = 1$ ,  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $G = 1$ . Примем  $Q = 1$ ,  $R = \rho^2$ . Тогда уравнение (6.16) является скалярным и имеет решение

$$P^* = \rho \Rightarrow J^* = \rho, \quad K^* = \rho^{-1}.$$

Чем меньше  $\rho$ , тем лучше достижимое значение показателя качества, но и тем выше требуемый коэффициент усиления. Замкнутая система такова:

$$\dot{x} = -\rho^{-1}x + w_0(t),$$

так что

$$H_{w_0x}(p) = \frac{\rho}{\rho p + 1}.$$

С уменьшением  $\rho$  растет полоса пропускания системы, а следовательно, погрешность от замены реального слабокоррелированного возмущения на предельный белый шум (ср., гл. 4, § 3). □

**6.4. Синтез при возмущениях, отличных от белого шума.** Несмотря на замечательную простоту результатов Т. 6.1, Т. 6.2, их практическая значимость кажется сомнительной, поскольку они

основывались на гипотезе б) о «белошумном» характере возмущений. Однако при изучении установившихся режимов в линейной системе эта гипотеза не является особо обременительной. Действительно, корреляционные свойства процессов  $x(t)$ ,  $u(t)$  определяются только видом корреляционной функции (или спектральной плотности) возмущения  $w(t)$ . Вместе с тем, как было показано в гл. 4, § 3, с точки зрения этих характеристик любой стационарный центрированный случайный процесс  $w(t)$  с дробно-рациональной плотностью

$$S_w(\omega^2) = \frac{B_w(p) B_w(-p)}{A_w(p) A_w(-p)} \Big|_{p=i\omega}$$

эквивалентен установившейся реакции формирующего фильтра, задаваемого операторным уравнением

$$A_w(D)w(t) = B_w(D)w_0(t), \quad (6.21)$$

на внешнее белошумное воздействие  $w_0(t)$ . Согласно Т.1.1 уравнению (6.21) можно сопоставить запись в виде

$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w w_0(t), \quad w = C_w x_w,$$

где матрица  $A_w$  имеет форму Фробениуса и задается коэффициентами многочлена  $A_w(D)$ , столбец  $B_w$  определяется коэффициентами многочлена  $B_w(D)$ , а  $C_w = \{1, \dots, 0\}$ . Начальные значения  $x_w(0)$  могут быть взяты произвольными, поскольку, по определению,  $A_w(D)$  — устойчивый многочлен, и мы интересуемся только установившимся режимом.

**Вывод:** если исходное описание объекта дано в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw,$$

где  $w(t)$  — коррелированный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью, то указанное описание может быть заменено эквивалентным (с точки зрения решения задачи управления по критерию (6.12)):

$$\dot{x} = Ax + GC_w x_w + Bu,$$

$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w w_0,$$

где  $w_0(t)$  — процесс типа единичного «белого шума».

Введя блочные матрицы

$$\begin{cases} A & GC_w \\ 0 & A_w \end{cases}, \quad \bar{B} = \begin{cases} B \\ 0 \end{cases}, \quad \bar{G} = \begin{cases} 0 \\ B_w \end{cases}, \quad \tilde{x} = \begin{cases} x \\ x_w \end{cases},$$

приходим к стандартной записи вида (6.2):

$$\dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \bar{B}u + \bar{G}w_0.$$

Перепишем также показатель (6.10) в эквивалентной форме

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{ \tilde{x}^T \bar{Q} \tilde{x} + u^T R u \} dt, \quad (6.22)$$

где

$$\bar{Q} = \begin{cases} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}.$$

Теперь оптимальная обратная связь дается в силу Т.6.2 в виде

$$u = -\bar{K}^* \tilde{x}, \quad \bar{K}^* = \bar{R}^{-1} \bar{B} \bar{P}, \quad (6.23)$$

где  $\bar{P}^*$  — положительно определенное решение \*) расширенного уравнения Лурье

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} - \bar{P} \bar{B} \bar{R}^{-1} \bar{B}^T \bar{P} + \bar{Q} = 0. \quad (6.24)$$

Столп подчеркнуть, что (6.23) предполагает знание координат  $x_w(t)$  формирующего фильтра для определения текущего значения управляющего воздействия  $u(t)$ .

В действительности в реальной ситуации или доступно для измерения само возмущение  $w(t)$ , или вообще имеются измерения только координат системы  $x(t)$ , или даже только одного, или нескольких выходов ее. Координаты же  $x_w$  недоступны, поскольку формирующий фильтр представляет собой лишь математическую конструкцию, введенную для преобразований условий задачи и стандартному виду. Путь преодоления этой неприятности будет указан в следующем параграфе.

## § 7. Управление при неполных и неточных измерениях

**7.1. Оценка при неполных измерениях.** В предшествующем параграфе было дано описание наилучшего (в смысле квадратичного показателя качества) выбора коэффициентов усиления  $K$  обратной связи

$$u(t) = -Kx(t), \quad (7.1)$$

построенной на основе знания в каждый момент времени полного вектора состояния  $x(t)$ .

Как уже указывалось, гипотеза о возможности прямого и точного измерения  $x(t)$  практически мало приемлема. Примем теперь, как и в § 4, более естественное предположение, что измерительные устройства доставляют информацию о значениях только некоторых координат или их линейных комбинаций, т. е. что в каждый момент  $t$  известен вектор измерений

$$y(t) = Cx(t), \quad (7.2)$$

\*) Можно доказать, что для существования этого решения достаточно невырожденности пар  $A$ ,  $B$  и  $A^T$ ,  $C^T$ , если  $Q = C^T C$ .

где  $C$  — заданная матрица. Напомним, что для объекта, работающего без возмущений, по измерениям  $y(t)$  можно восстановить значение  $\hat{x}(t)$  с помощью системы асимптотической оценки:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad (7.3)$$

причем при невырожденности пары  $A^*, C^*$  коэффициенты  $L$  можно выбрать так, чтобы обеспечить быстрое убывание ошибки оценивания  $\hat{e} = \hat{x} - x$ . Естественно попытаться применить ту же систему для оценки координат объекта, изменяющихся под действием случайных возмущений согласно уравнению

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw_0(t), \quad (7.4)$$

где  $w_0(t)$  — белый шум единичной интенсивности, а управление, как и в задаче стабилизации (см. § 4), строить на основе оценок, принимая

$$u = -K\hat{x}. \quad (7.5)$$

Выясним сперва точность оценок. Вычитая (7.3) из (7.4), получаем

$$\dot{\hat{e}} = (A - LC)\hat{e} + Gw_0. \quad (7.6)$$

Введем в рассмотрение матрицу  $\hat{D}(t)$  с элементами

$$\hat{d}_{ij}(t) = M\{\hat{e}_i(t)\hat{e}_j(t)\},$$

которую будем именовать *матрицей ковариаций ошибок оценивания*. Если  $L$  выбрано, так что матрица

$$\hat{A} = A - LC$$

является устойчивой, то, применяя к (7.5) Т.6.1, получим:

$$\hat{D}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{D},$$

где  $\hat{D}$  удовлетворяет уравнению

$$\hat{A}\hat{D} + \hat{D}\hat{A}^* + GG^* = 0. \quad (7.7)$$

Таким образом, в отличие от детерминированной задачи, ошибки оценивания с течением времени не исчезают. Тем более это имеет место, если сами результаты искажены случайными помехами. Рассмотрим детальнее именно эту практически важную ситуацию и покажем, как выбрать коэффициенты  $L$ , чтобы минимизировать дисперсии ошибок.

**7.2 Оценка и управление при наличии помех.** Примем вместо (7.2), что

$$y(t) = Cx(t) + N(t), \quad (7.8)$$

где  $N(t)$  — вектор случайных помех в измерительных устройствах. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.1.** Пусть компоненты  $n_i(t)$  вектора помех  $N(t)$  являются белыми шумами, так что

$$M\{n_i(t)n_k(t-\tau)\} = v_{ik}\delta(\tau), \quad (7.9)$$

причем матрица  $V = \{v_{ik}\}$  является положительно определенной. Пусть возмущение  $w(t)$  также является векторным белым шумом, некоррелированным с  $N(t)$ ,

$$M\{w^\top(t)w^\top(t+\tau)\} \triangleq W\delta(\tau), \quad (7.10)$$

причем  $W$  — заданная неотрицательная постоянная матрица. Пусть пары матриц  $A, G$  и  $A^*, C^*$  невырождены.

Тогда при любых значениях коэффициентов  $L$  в системе оценки (7.3) дисперсии  $\hat{d}_{ii}$  установившихся ошибок оценивания  $\hat{e}_i$  удовлетворяют неравенствам

$$\hat{d}_{ii} \geq \hat{d}_{ii}^* > 0, \quad (7.11)$$

где предельные значения  $\hat{d}_{ii}^*$  являются диагональными элементами матрицы  $\hat{D}^*$ , которая представляет собой единственное положительно определенное решение уравнения

$$AD + DA^* - DC^*V^{-1}CD + GWG^* = 0. \quad (7.12)$$

Значение  $\hat{D} = \hat{D}^*$  достигается при

$$L = L^* = \hat{D}^*CV^{-1}. \blacksquare \quad (7.13)$$

Доказательство этого утверждения приводить не будем. Отметим лишь, что для нахождения оптимальных коэффициентов усиления в устройстве оценивания требуется решить матричное квадратное уравнение (7.12), являющееся уравнением типа Лурье.

Вместе с тем невозможность безошибочного оценивания состояния по измерениям, искаженным помехами, заставляет усомниться в том, что сам способ управления по оценкам (7.5) является эффективным, даже, если оценки оптимальны. К счастью, это не так, и справедлив следующий замечательный результат, обычно называемый *теоремой разделения*.

**Теорема 7.2.** Пусть для формирования линейного закона управления с обратной связью для объекта, описываемого уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw_0(t),$$

доступны только измерения вида

$$y = Cx + N(t),$$

где  $w_0(t), N(t)$  — взаимно некоррелированные стационарные случайные процессы типа белых шумов такие, что

$$M\{w_0(t)w_0^\top(t+\tau)\} = W\delta(\tau), \quad M\{N(t)N^\top(t+\tau)\} = V\delta(\tau).$$

Пусть пары матриц  $A, B$  и  $A^*, C^*$ , невырожденны, а матрица  $V$  — положительно определенная.

Тогда закон управления

$$u = -K^* \hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L^*[y - C\hat{x}] \quad (7.14)$$

доставляет минимум показателю

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{x^*(t) Q x(t) + u^*(t) R u(t)\} dt. \quad (7.15)$$

Матрица коэффициентов усиления в обратной связи  $K^*$  находится в силу формул (5.9), (5.11) (при соответствующих условиях на матрицы  $Q, R$ ), а матрица  $L^*$  коэффициентов в устройстве оценивания — в силу формул (7.12), (7.13), так что оптимальный закон управления представляет собой соединение оптимального устройства оценивания\*) и оптимальной обратной связи по оценкам состояния. ■

Вновь опустим доказательство \*\*). Покажем вместе с тем, что сфера приложения конструктивного результата теоремы разделения может быть существенно расширена.

**7.3. Задача оптимального слежения.** Мы уже убедились, что требование о «белоспунном» характере возмущения  $w(t)$  может быть снято, если ввести искусственную конструкцию «формирующего фильтра» и расширить вектор состояний, дополнив его компонентами вектора состояния фильтра. Та же идея позволяет применить теорему разделения к следующей более общей задаче, обычно называемой задачей оптимального слежения.

Пусть требуется обеспечить близость каких-либо координат объекта или их линейных комбинаций  $\gamma x(t)$ ,  $\gamma = \text{const}$ , к случайному изменяющемуся вектору  $z^d(t)$ , определенному через решения  $x^d(t)$  системы

$$\dot{x}^d = A^d x^d + G^d w_0^d(t), \quad z^d(t) = \gamma^d x^d, \quad (7.16)$$

где  $A^d, G^d, \gamma^d$  — заданные постоянные матрицы, а  $w_0^d(t)$  — процесс типа «белого шума» с единичной интенсивностью.

\*) Такое устройство часто называют фильтром Винера — Калмана. Если часть измерений осуществляется без помех, то структура фильтра может быть упрощена (см., например, [3.3]).

\*\*) Строгое доказательство достаточно сложно [6.4, гл. 6], обычно же при водимые в качестве доказательства относительно простые рассуждения некорректны. Однако в дальнейшем (гл. 10) мы установим аналог теоремы разделения для несколько более простого в математическом отношении описания объекта и, более того, покажем, что при нормально распределенных возмущениях и помехах закон управления типа (7.14) является наилучшим среди любых (даже нелинейных) законов.

Систему (7.16) можно трактовать либо как описание другого объекта, к выходу которого должен приближаться выход управляемого объекта, либо как формальную конструкцию — формирующий фильтр, — с помощью которой описывается процесс  $z^d(t)$ , первоначально заданный своей дробно-рациональной спектральной плотностью.

С учетом целесообразности «сдерживания» затрат на управление показатель качества можно сформировать в виде

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{(z - z^d)^T Q^d (z - z^d) + u^T R u\} dt, \quad (7.17)$$

где первое слагаемое характеризует близость  $z(t)$  и  $z^d(t)$ , а второе — затраты на управление.

Введем обозначения для блочных матриц

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{pmatrix} x \\ x^d \end{pmatrix}, & \tilde{w} &= \begin{pmatrix} w_0 \\ w_0^d \end{pmatrix}, & \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^d \end{pmatrix}, & \tilde{B} &= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{G} &= \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^d \end{pmatrix}, \\ \tilde{\gamma} &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^d \end{pmatrix}, & \tilde{Q} &= \tilde{\gamma}^T Q^d \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (7.14), (7.16) объединяются в одно:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u + \tilde{G}\tilde{w} \quad (7.18)$$

и показатель (7.17) записывается в стандартной форме

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + u^T R u\} dt. \quad (7.19)$$

Предположим, что мы располагаем измерениями

$$y(t) = Cx(t) + N(t), \quad y^d(t) = C^d x^d(t) + N^d(t), \quad (7.20)$$

где  $N(t), N^d(t)$  — помехи, являющиеся взаимно некоррелированными «белыми шумами» с заданными положительно определенными матрицами интенсивностей  $V, V^d$ .

Вновь вводя обозначения

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ y^d \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^d \end{pmatrix}, \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} N \\ N^d \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^d \end{pmatrix},$$

приходим к стандартной форме уравнения «объединенного» измерителя

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{N}(t).$$

Теперь ясно, что для решения задачи оптимального слежения полностью пригодна схема, указанная в теореме разделения, хотя это достигается при увеличении размерности всех фигурирующих в ней матриц.

Кратко остановимся на сопоставлении методов, описанных в данном параграфе и в гл. 4, где рассматривалась близкая по смыслу задача для односвязной системы. Пусть  $z(t)$ ,  $z^d(t)$ ,  $u(t)$  — скалярны,  $Q^d = 1$ ,  $R = \rho$ ; тогда (7.17) эквивалентно

$$J = D\{e(t)\} + \rho D\{u(t)\},$$

где  $e(t) \triangleq z^d(t) - z(t)$  — ошибка слежения. Такой же «составной» показатель рассматривался в § 2 гл. 4.

Однако исходные предположения об описании объекта, возмущений, помех и отслеживаемого процесса были другими. Приведение этого описания к форме, использованной теперь, в принципе возможно, однако важно проконтролировать выполнение формальных условий теоремы 7.2 прежде, чем применять методику синтеза.

Наряду с этим следует иметь в виду, что для многосвязных систем применяются и операторные методы, являющиеся непосредственным матричным обобщением процедур гл. 4 ([4.2, 6.5]), хотя необходимость аналитических выкладок с полиномиальными матрицами делает их приемлемыми лишь для систем малой размерности.

## § 8. Системы с переменными параметрами

**8.1. Описание и анализ.** Методы анализа и синтеза, основанные на использовании представлений в пространстве состояния, имеют несомненное преимущество перед операторными методами в том, что они сравнительно легко распространяются на значительно более широкий класс объектов, а именно, на линейные системы с переменными во времени параметрами. Основная модель принимается в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + G(t)w, \quad (8.1)$$

где  $x$ ,  $u$ ,  $w$  — по-прежнему вектор-функции состояния, управления и возмущения, а  $A$ ,  $B$ ,  $G$  — матрицы соответствующих размерностей, элементы которых, однако, могут изменяться во времени. Эти изменения являются или внутренним свойством системы, или следствием внешних возмущений \*).

Далее мы будем считать законы изменения элементов  $A$ ,  $B$ ,  $G$  заданными функциями на весь отрезок времени работы системы от начального  $t = t_0$  до конечного  $t = t_f$ .

Используя (8.1), можно построить явное выражение для состояния  $x(t)$  в произвольный момент  $t > t_0$  через начальное состояние  $x(t_0)$  и функции  $u(t)$ ,  $w(t)$ .

**Теорема 8.1. Решение системы**

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (8.2)$$

\* ) Основным источником возникновения уравнений типа (8.1) при исследовании реальных систем является линеаризация нелинейных моделей в окрестности нестационарных режимов.

представимо в виде

$$x(t) = \Psi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad (8.3)$$

где матричная функция  $\Psi(t)$ , называемая фундаментальной матрицей, по определению удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A(t)\Psi(t), \quad \Psi(t_0) = I, \quad (8.4)$$

а обратная ей удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}[\Psi^{-1}(t)]^T = -A^T(t)[\Psi^{-1}(t)]^T, \quad \Psi^{-1}(t_0) = I, \quad (8.5)$$

называемому сопряженным к (8.4).

Доказательство справедливости формулы (8.3) можно проверить прямой подстановкой (8.3) в (8.2). Действительно, с учетом (8.4) имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\Psi}(t) \left[ x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right] + \Psi(t)\Psi^{-1}(t)f(t) = \\ &= A(t)\Psi(t) \left[ x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right] + f(t) = A(t)x(t) + f(t). \end{aligned}$$

Начальное условие очевидно удовлетворяется.

Уравнение (8.5) следует из тождества

$$\Psi(t)\Psi^{-1}(t) = I,$$

дифференцируя которое, получаем

$$\frac{d}{dt}[\Psi(t)\Psi^{-1}(t)] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[\Psi(t)\Psi^{-1}(t)] + \Psi(t)\frac{d}{dt}[\Psi^{-1}(t)] = 0,$$

или с учетом (8.4)

$$A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t) + \Psi(t)\frac{d}{dt}\Psi^{-1}(t) = 0 \Rightarrow \Psi^{-1}(t)A(t) = -\frac{d}{dt}\Psi^{-1}(t),$$

что эквивалентно (8.5). ■

Формула (8.3), обычно называемая *формулой Коши*, сводит решение неоднородного уравнения (8.2) к вычислению фундаментальной матрицы  $\Psi(t)$ , т. е. к решению матричного однородного уравнения (8.4) с единичным начальным условием. При переменной  $A(t)$  фундаментальную матрицу лишь в редких случаях удается выразить аналитически через элементарные или специальные табулированные функции с хорошо изученными свойствами.

Как правило, для определения  $\Psi(t)$  по заданной матрице  $A(t)$  и заданному начальному моменту  $t_0$  приходится использовать только процедуры численного интегрирования, что затрудняет качественное исследование решений и, в частности, изучение проблемы устой-

чивости. Поскольку фундаментальная матрица зависит от начального момента  $t_0$ , то зачастую удобно ввести в обозначение второй аргумент, записывая ее в виде  $\Psi(t, t_0)$ .

Вспоминая определение матричной экспоненты, можно убедиться, что при  $A(t) = A = \text{const}$  фундаментальная матрица имеет вид

$$\Psi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad (8.6)$$

т. е. зависит только от разности  $t - t_0$ .

Анализ поведения объекта, описываемого уравнением (8.1) при произвольных управляющих и возмущающих воздействиях, опирается на формулу (8.3). Принимая в ней

$$f(t) \triangleq B(t)u(t) + G(t)w(t),$$

получаем

$$x(t) = \Psi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t h_u(t, \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t h_w(t, \tau)w(\tau)d\tau, \quad (8.7)$$

где обозначено

$$h_u(t, \tau) \triangleq \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)B(\tau), \quad h_w(t, \tau) \triangleq \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)G(\tau). \quad (8.8)$$

Формула (8.7) определяет  $x(t)$ ,  $t > t_0$ , как линейное преобразование совокупности  $x(t_0)$ ,  $u(\tau)$ ,  $w(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, t]$ . Матричные функции  $h_u(t, \tau)$ ,  $h_w(t, \tau)$  обычно именуют *весовыми* (или *переходными*) матрицами преобразования от управления и возмущения к состоянию системы, описываемой уравнением (8.1).

В случае постоянных параметров

$$h_u(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}B, \quad h_w(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}G, \quad (8.9)$$

т. е. имеется зависимость только от разности  $t - \tau$ ).

В этой главе мы ограничимся исследованием систем с переменными параметрами только на конечном отрезке времени  $[t_0, t_f]$ . Тогда при любых ограниченных воздействиях  $x(t)$  ограничено, если абсолютно интегрируемы на  $[t_0, t_f]$  соответствующие весовые функции, для чего достаточно [6.3] ограниченностей элементов матриц  $A$ ,  $B$ ,  $G$ , что и будет предполагаться в дальнейшем.

**8.2. Оптимизация закона управления.** Введем обобщенный «энергетический» показатель качества работы системы (8.1) при детерминированных  $w(t)$ :

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} [x^\top(t)Qx(t) + u^\top(t)Ru(t)]dt + x^\top(t_f)Q_f x(t_f). \quad (8.10)$$

\*) Читатель может заметить терминологическое несоответствие: в § 1 весовые функции для системы с постоянными параметрами определялись иначе (в (8.9) надо заменить  $t - \tau$  на  $t$ ), однако это несоответствие почти общепринято в литературе.

Его интерпретация та же, что для показателя (5.8), введенного ранее для оценки эффективности управления системой с постоянными параметрами при неограниченном времени работы. Особенностью является лишь наличие внеинтегрального слагаемого, подчеркивающее важность уменьшения отклонения от желаемого состояния  $x = 0$  в момент завершения процесса управления.

**Теорема 8.2.** Пусть матрица  $R$  является положительно определенной, а  $w(t) = 0$ . Тогда управление  $u^*(t)$ , при котором достигается минимум показателя (8.10), представимо в виде линейной обратной связи

$$u^*(t) = -K^*(t)x(t) \quad (8.11)$$

по измерениям состояния  $x(t)$  в тот же момент времени. Матрица оптимальных коэффициентов обратной связи  $K^*(t)$  определяется формулой

$$K^*(t) = R^{-1}B^T(t)P^*(t), \quad (8.12)$$

где  $P^*(t)$  — симметричная матрица, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} + A^T(t)P + PA(t) - PB(t)R^{-1}B^T(t)P + Q = 0, \quad (8.13)$$

удовлетворяющая условию

$$P(t_f) = Q_f. \quad (8.14)$$

Минимальное значение показателя (8.10) равно

$$J\{u^*\} = x^\top(t_0)P^*(t_0)x(t_0). \quad (8.15)$$

Доказательство аналогично проведенному в § 5.

Введем функцию

$$V(x, t) = x^\top P^*(t)x, \quad (8.16)$$

где  $P^*(t)$  удовлетворяет (8.13), (8.14). Дифференцируя (8.16), в силу уравнения (8.1) (при  $w = 0$ ) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}P^*x + x^\top P^*\dot{x} + x^\top \dot{P}^*x = \\ &= [A(t)x + B(t)u]^\top Px + x^\top P^*[A(t)x + B(t)u] + x^\top \dot{P}^*x \end{aligned}$$

или, с учетом (8.13),

$$\frac{dV}{dt} = x^\top P^*B(t)R^{-1}B^TP^*x - x^\top Qx + 2u^\top B^TP^*x,$$

откуда

$$\begin{aligned} V(t_f) - V(t_0) &\triangleq x^\top(t_f)P^*(t_f)x(t_f) - x^\top(t_0)P^*(t_0)x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ x^\top [P^*B(t)R^{-1}B^T(t)P^* - Q]x + 2u^\top B^TP^*x \right] dt. \end{aligned}$$

Используя определение показателя качества (8.10) и условие (8.14), можно теперь записать

$$J(u) = x^T(t_0) P^*(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ x^T P^* B(t) R^{-1} B^T(t) P^* x + u^T R u + 2u^T B^T(t) P^* x \right\} dt,$$

или

$$J(u) = x^T(t_0) P^*(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [u + K^*(t) x]^T R [u + K^*(t) x] dt, \quad (8.17)$$

где  $K^*(t) = R^{-1} B^T(t) P^*(t)$ . Из (8.17) сразу следует, что управление (8.12) является минимизирующим среди любых возможных управлений, причем верна формула (8.15) для оптимального значения показателя. ■

Существенным отличием от ранее полученного результата является *нестационарность* оптимальной обратной связи, зависимость коэффициентов усиления от времени, что несколько усложняет ее практическую реализацию.

Более сложным является и вычисление самих коэффициентов усиления, поскольку оно требует интегрирования матричного дифференциального уравнения (8.13), известного под названием *матричного уравнения Риккати*.

Оно нелинейно и эквивалентно системе  $n(n+1)/2$  нелинейных скалярных уравнений относительно соответствующего числа неизвестных элементов матрицы  $P(t)$  (как обычно,  $n$  — размерность вектора состояния  $x$ ). При больших  $n$  задача может не «поместиться» в стандартные программы численного интегрирования. Отметим также, что для использования стандартных программ условие (8.14) следует преобразовать в начальное условие путем простой замены времени  $\theta = t_f - t$ . При этом (8.13), (8.14) приобретают вид

$$\frac{dP(\theta)}{d\theta} = A^T(t_f - \theta) P(\theta) + P(\theta) A(t_f - \theta) - P(\theta) B(t_f - \theta) R^{-1} B^T(t_f - \theta) P(\theta) + Q, \quad P|_{\theta=0} = Q_+, \quad (8.18)$$

где явно подчеркнута зависимость параметров от «обращенного» времени. Если эти параметры постоянны, то можно попытаться разыскивать частное решение (8.18) в виде  $P = P^* = \text{const}$ . Если оно существует, то должно удовлетворять матричному квадратному уравнению

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0, \quad (8.19)$$

которое уже фигурировало в § 5 и именовалось уравнением Лурье. Теперь становится ясным происхождение и другого его наименования

— алгебраическое уравнение Риккати, которое более распространено в литературе \*).

Приведем без доказательства следующий результат [6.3].

**Теорема 8.3.** Пусть существует положительно определенное решение  $P^*$  уравнения (8.19); тогда при любой неотрицательно определенной матрице  $Q_+$ , задающей начальное условие, решение  $P^*(\tau)$  уравнения (8.18) стремится к  $P^*$  при  $\tau \rightarrow \infty$  не медленнее, чем экспоненциально. ■

Подчеркнем, что и для системы с постоянными параметрами коэффициенты усиления в оптимальной обратной связи являются переменными, если качество управления оценивается показателем (8.10) при ограниченном  $t_f$ . Лишь для моментов времени, достаточно удаленных от конечного, оптимальными оказываются постоянные коэффициенты, определяемые, как и в § 5, с помощью постоянной матрицы  $P^*$  — решения уравнения (8.19).

Реальные системы всегда работают ограниченное время, и этот результат, казалось бы, ставит под сомнение эффективность всей подробно разработанной в предшествующих параграфах методики, основанной на гипотезе, что  $T = t_f - t_0 \rightarrow \infty$ .

На самом деле эти сомнения необоснованы. Справедлив следующий результат \*\*) [6.7].

**Теорема 8.4.** Если вместо оптимального, зависящего от времени коэффициента усиления  $K^*(t)$  использовать постоянный, полученный с помощью решения алгебраического уравнения (8.19), то эффективность управления, определяемая показателем (8.10), ухудшится не более, чем на величину

$$\Delta \bar{T} = c_1 e^{-2\kappa T} + c_2 \frac{1}{T} e^{-\kappa T} + O\left(\frac{1}{T^2}\right), \quad (8.20)$$

где  $c_1, c_2$  не зависят от  $T = t_f - t_0$ , а  $\kappa$  — величина, сколь угодно близкая к степени устойчивости замкнутой системы. ■

Из оценки (8.20) ясно, что погрешность, связанная с использованием обратной связи с постоянным коэффициентом усиления, быстро убывает с ростом времени действия управления, и притом тем быстрее, чем выше степень устойчивости замкнутой системы.

**8.3. Метод «замороженных» параметров.** Вернемся вновь к системам с переменными параметрами, однако предположим, что их изменение происходит достаточно медленно, хотя за длительное время работы может оказаться существенным. Пользоваться обратной связью с постоянным коэффициентом усиления, как правило, недопустимо. По здравому смыслу ясно, что если настроить регу-

\*). Я. Ф. Риккати (1676—1754) известен исследованием нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка с квадратичной нелинейностью, обобщением которого является (8.18).

\*\*). Доказательство Т.8.4 и Т.8.5 дано в гл. 7, § 3. Оценка (8.20) справедлива в асимптотическом смысле, т. е. существует такое  $\bar{T}$ , что (8.20) верно при всех конечных  $T \geq \bar{T}$ .

лягор, ориентируясь на начальные значения параметров, то со временем они могут настолько «уползти», что настройка окажется не только не оптимальной, но даже не будет обеспечивать устойчивость. Возникает простая идея: в каждый момент времени выбирать обратную связь заново, ориентируясь на текущее значение параметров, но использовать для выбора те же приемы, что и для систем с постоянными параметрами. Этот подход принято называть методом «замороженных» параметров. Разрешается пользоваться любыми разумными приемами синтеза управления, в частности, частотными методами гл. 3. Однако наиболее ясную форму метод замороженных коэффициентов приобретает, если в каждый момент времени  $t$  настраивать регулятор, исходя из требования минимизации интегрального показателя

$$J_{\infty}\{u\} = \int_t^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt, \quad (8.21)$$

и при этом условно считать, что параметры  $A(t)$ ,  $B(t)$  останутся неизменными, «замороженными», на все время от текущего  $t$  до бесконечности. Тогда коэффициенты регулятора окажутся равными

$$\bar{K}(t) = R^{-1}B^T(t)\bar{P}(t), \quad (8.22)$$

где  $\bar{P}(t)$  — решение алгебраического уравнения:

$$A^T(t)P + PA(t) - PB(t)R^{-1}B^T(t)P + Q = 0. \quad (8.23)$$

Спрашивается, какова эффективность этого простого подхода, насколько ухудшится значение исходного показателя качества (8.10), если вместо оптимального коэффициента усиления  $K^*(t)$ , рассчитываемого с помощью дифференциального уравнения Риккати (8.18), использовать коэффициент  $\bar{K}(t)$ , рассчитанный в каждый момент  $t$  с помощью алгебраического уравнения (8.23)?

Асимптотическую оценку иогрешности дает следующее утверждение, аналогичное Т.8.4.

**Теорема 8.5** [6.7]. Пусть элементы матриц  $A$ ,  $B$  медленно изменяются во времени, т. е.

$$A = A(\mu t), \quad B = B(\mu t), \quad (8.24)$$

где  $\mu > 0$  — малая величина. Пусть длительность работы системы  $T = t_f - t_0$  достаточно велика,  $T = \frac{1}{\mu} T_0$ , так что за время  $T$  матрицы  $A$ ,  $B$  изменяются существенно. Пусть для любого  $t \in [t_0, t_f]$  существует положительно определенное решение  $\bar{P}(t)$  уравнения (8.23). Тогда существует такое  $\bar{\mu} > 0$ , что при любых  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$ , использование обратной связи

$$u(t) = -\bar{K}(t)x(t) \quad (8.25)$$

при

$$\bar{K}(t) = R^{-1}B^T(t)\bar{P}(t) \quad (8.26)$$

ухудшает значение показателя качества (8.10) не более, чем на величину

$$\Delta \bar{J} = \bar{c}_1 e^{2\kappa t} + \bar{c}_2 \mu e^{-\kappa t} + O(\mu^2), \quad (8.27)$$

где  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  не зависят от  $\mu$  и  $\kappa$  — минимальная из величин  $\kappa_0$ ,  $2\kappa$ , причем  $\kappa_0$ ,  $\kappa$ , сколь угодно близки к степеням устойчивости замкнутой системы с параметрами, «замороженными» при  $t = t_0$  и  $t = t_f$ , соответственно. ■

Теорема 8.5 показывает, что метод «замороженных» параметров действительно «почти оптимален», если время работы системы существенно больше времени затухания переходных процессов в замкнутой системе, а скорость изменения параметров настолько мала, что за время затухания они меняются незначительно.

**Пример 8.1.** Рассмотрим одномерный объект

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, T],$$

параметры которого линейно изменяются во времени, так что

$$a = -v(t), \quad b = v(t), \quad v(t) = 1 + \frac{\gamma}{T}t,$$

и приведем анализ влияния скорости  $\gamma$  изменения параметров объекта на эффективность управления, строящегося по методу «замораживания». В качестве показателя примем

$$J = \int_0^T (x^2 + u^2) dt.$$

Тогда, согласно (8.22), имеем

$$\bar{k}(t) = b\bar{p}(t),$$

где  $\bar{p}(t)$  — положительное решение квадратного уравнения

$$2a\bar{p} - b^2\bar{p}^2 + 1 = 0, \quad -v^2\bar{p}^2 - 2v\bar{p} + 1 = 0,$$

так что  $\bar{k}(t) = \bar{k} = \sqrt{2} - 1$ , т. е. метод замороженных параметров в данном случае приводит к постоянному коэффициенту усиления в обратной связи. Оптимальный же коэффициент переменен и находится путем решения уравнения Риккати

$$-\dot{p} = 2ap - b^2p^2 + 1, \quad p(T) = 0, \quad k^*(t) = bp^*(t).$$

Зависимость  $k^*(t)/\bar{k}$ , полученная путем численного интегрирования при различных  $\gamma$ , представлена на рис. 6.7. Ясно, что  $k^*(t)$  близок к постоянному  $\bar{k}$  в течение почти всего периода времени лишь при весьма малых  $\gamma$  и больших  $T$ .

Вместе с тем сравнение значений показателя качества  $J$ , получаемого при использовании  $\bar{k}$  и  $J_{opt}$ , показывает, что проигрыш ничтожен в широком диапазоне  $\gamma$ ,  $T$ . Величина  $(J - J_{opt})J_{opt}^{-1}$  не пре-

вышает 1% при  $T \geq 2$ ,  $-0.3 \leq \gamma \leq 1$ , а также при  $T = 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1^*$ ), что дает хорошую иллюстрацию к оценке (8.27). Заодно можно убедиться, что при  $\gamma = 0$  (постоянных параметрах объекта) использование постоянного  $\bar{k}$  дает относительную погрешность, меньшую  $0.2 \exp(-2.8T)$  (ср. с оценкой в теореме 8.4).  $\square$

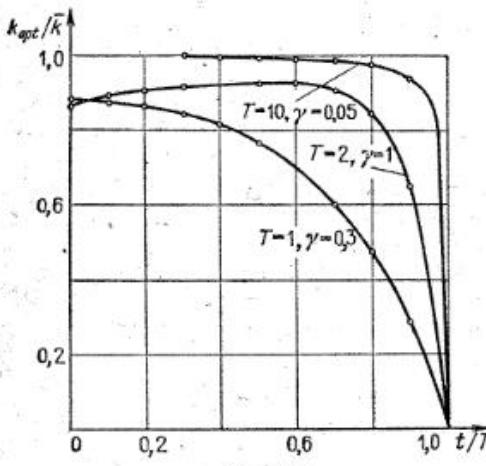


Рис. 6.7

«почти» оптимального коэффициента  $K(t)$  требуется знать только значения параметров в тот же самый момент времени. Поэтому, если информация о будущих изменениях отсутствует или неточна, оптимальная процедура не проходит, а метод «замороженных» параметров остается работоспособным.

На этом факте основывается простейший способ построения «почти» оптимальных регуляторов с автоматической настройкой коэффициентов усиления. Принципиальная схема его показана на рис. 6.8.



Рис. 6.8

В систему, кроме измерителя текущего состояния, вводится измеритель текущих значений параметров объекта. Результаты измерения параметров обрабатываются вычислительным устройством, которое

\*) Вычисления проведены М. Цирульниковым.

либо оперативно, с высоким быстродействием, решает уравнение (8.23), либо использует готовые формулы преобразования значений параметров в значения коэффициентов усиления обратной связи  $\bar{k}(t)$ . В действительности все измерения являются не вполне точными и неполными, дают лишь оценки измеряемых процессов  $\hat{x}(t)$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$ . Поэтому детальное изучение свойств систем с настройкой параметров является важной специальной проблемой теории автоматического управления (см. гл. 11). Тем не менее рис. 6.8 отражает основную идею автоматической настройки (самонастройки).

**8.4. Управление при случайных возмущениях.** Кратко остановимся на проблеме управления системами с переменными параметрами при наличии возмущений ( $w(t) \neq 0$ ).

Если закон изменения возмущения в течение всего времени работы системы  $[t_0, t_f]$  известен, то решение проблемы выбора управления, минимизирующего показатель (8.10), мало отличается от случая  $w(t) = 0$ .

**Теорема 8.6.** *Оптимальное по критерию (8.10) управление системой (8.1) дается формулой*

$$u^*(x, t) = -K^*(t)x(t) - u^{(1)}(t), \quad (8.28)$$

где первое слагаемое (управление с обратной связью) строится в соответствии с Т.8.2, а второе (компенсирующее управление) находится после вычисления решения  $\pi^*(t)$  вспомогательного векторного уравнения

$$\dot{\pi} + (A - BK^*)^T \pi + P^* G w(t) = 0, \quad \pi(t_f) = 0 \quad * \quad (8.29)$$

по формуле

$$u^{(1)}(t) = R^{-1} B^T \pi^*(t). \quad (8.30)$$

Доказательство вполне аналогично доказательству Т.8.2 за тем исключением, что функция  $V(t, x)$  берется в расширенном виде:

$$V(t, x) = x^T P^*(t) x + 2 [\pi^*(t)]^T x. \quad ■ \quad (8.31)$$

Столиц отметить, что наличие полной информации о возмущениях на все будущее время, предполагаемое в Т.8.6, обычно сопровождается и наличием сведений о начальном состоянии. В этом случае допустимо (по крайней мере при устойчивом объекте) пользоваться чисто программным управлением, которое вычисляется по схеме:

а) проинтегрировать уравнение (8.1) при заданных начальных условиях после подстановки в него  $u = u^*(x, t)$ , тем самым найдя оптимальную траекторию  $x^*(t)$ ;

б) вычислить программу как  $u^*[x^*(t), t]$ .

Если же в действительности нет информации о будущих значениях возмущения, а имеется лишь возможность измерения текущих значений, то вновь удобно использовать идею «замороженных» параметров. При этом вместо (8.29) используется алгебраическое

соотношение

$$(A(t) - B(t)\bar{K}(t))^T \pi + \bar{P}(t)G(t)w(t) = 0, \quad (8.32)$$

откуда находится приближенное выражение для компенсирующего слагаемого

$$\bar{u}^{(1)}(t) = -R^{-1}B^T(t)([A(t) - B(t)\bar{K}(t)])^{-1}\bar{P}(t)G(t)w(t) = -\bar{K}_w(t)w(t). \quad (8.33)$$

Принципиальная схема, ранее указанная на рис. 6.8, в этом случае дополняется каналом управления по возмущениям (рис. 6.9), описывающимся на данные измерителя, дающего оценку  $w(t)$ .

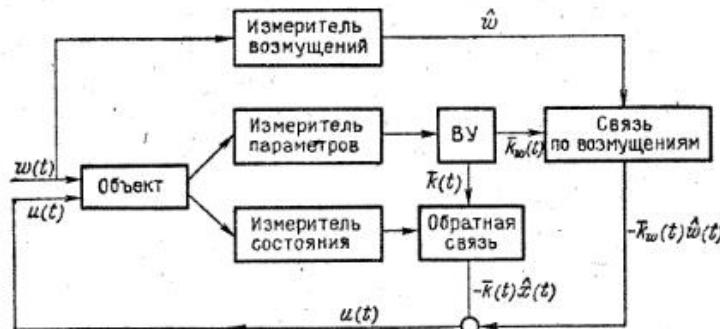


Рис. 6.9

**8.5. Управление по оценкам.** Переходим теперь к краткому изложению задачи управления объектом с переменными параметрами при наличии случайных возмущений  $w(t)$  «белошумного» характера и такого же рода помех  $N(t)$ , искажающих результаты измерения. Как и в § 6, предположим, что с измерителя непосредственно поступает сигнал

$$y(t) = Cx(t) + N(t), \quad (8.34)$$

где  $C$  — заданная (возможно, зависящая от  $t$  матрица). В этом случае необходима предварительная обработка сигнала с помощью фильтра (системы оценки).

Вновь без доказательства приведем утверждение, аналогичное Т.7.2.

**Теорема 8.7.** Пусть для построения закона управления системой (8.1) доступны только измерения (8.34), причем известно, что

$$\begin{aligned} M\{w(t)w^T(t+\tau)\} &= W(t)\delta(\tau), \\ M\{N(t)N^T(t+\tau)\} &= V(t)\delta(\tau), \end{aligned} \quad (8.35)$$

где  $V(t)$  — положительно определена при всех  $t \in [t_0, t_1]$ . Пусть начальное состояние объекта случайно и известно, что

$$M\{x(t_0)\} = m^0, \quad M\{[x(t_0) - m^0][x(t_0) - m^0]^T\} = D^0. \quad (8.36)$$

Тогда закон управления

$$u = -K^*(t)\hat{x}(t), \quad (8.37)$$

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + L^*(t)[y - C\hat{x}], \quad (8.38)$$

$$\hat{x}(t_0) = M\{x(t_0)\} \quad (8.39)$$

доставляет минимум показателю

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_1} M\{x^T Q x + u^T R u\} dt + M\{x^T(t_1) Q_1 x(t_1)\}, \quad (8.40)$$

если  $K^*(t)$  определяется так же, как в Т.8.2, а

$$L^*(t) = D^*(t)C(t)V^{-1}(t), \quad (8.41)$$

где  $D^*(t)$  удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{D} = AD + DA^T - DC^T V^{-1} CD + GWG^T \quad (8.42)$$

с начальным условием

$$D(t_0) = D^0. \blacksquare \quad (8.43)$$

Обобщения на случай коррелированных возмущений и задачу оптимального слежения могут быть проделаны путем расширения пространства состояний так же, как в § 7.

Обратим внимание на то, что уравнение (8.42), определяющее коэффициенты  $L^*(t)$  усиления в фильтре (8.38), вновь является уравнением типа Риккати, однако оно интегрируется от  $t_0$  «вперед», а не «вспять», от  $t_1$ , как (8.13). Поэтому для получения текущего значения  $L^*(t)$ , а следовательно, и текущей оценки  $\hat{x}(t)$  состояния объекта нет необходимости знать изменения параметров на будущее.

Таким образом, при наличии косвенных и неточных измерений сохраняет силу идея построения системы управления, выражаемая рис. 6.9, однако сама оценка получается не непосредственно с измерителя, а после обработки его выхода  $y(t)$  в вычислительном устройстве. Теперь на него приходится возлагать и вычисление  $L^*(t)$  по уравнениям (8.41), (8.42), и вычисление оценки  $\hat{x}(t)$  по уравнению (8.38).

Впрочем, при наличии полной информации о будущих значениях параметров коэффициенты  $L^*(t)$  можно подсчитать заранее и сохранять в памяти вычислителя.

## ГЛАВА 7

### ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

#### § 1. Свойства дискретных систем

**1.1. Основная математическая модель.** В течение почти всего курса использовалось главное предположение: управление строится на основе математической модели, позволяющей с той или иной точностью предсказывать состояние объекта (или какую-либо интересующую нас выходную характеристику) в любой момент времени его работы.

Однако во многих практических ситуациях, в особенности при управлении сложными объектами, это предположение не оправдано.

Заменим его более слабым: при построении управления возможно использовать только предсказание состояния объекта или его выходы в некоторые моменты времени  $t = t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , образующие дискретную последовательность. Состояние объекта в любые промежуточные моменты времени не определено. При этом любая текущая информация, поступающая в течение работы объекта, также может характеризовать его состояние только в те же моменты времени.

Приведем два примера.

**Пример 1.1.** Имеется склад, с которого удовлетворяется спрос на различные продукты. Для пополнения запаса на складе организуются поставки, объем которых управляем.

Особенность задачи заключается в том, что точное время поступления заказанных поставок неизвестно, можно указать лишь определенный интервал времени (например, декаду, месяц), когда они придут. Равным образом непрогнозируемо распределение во времени спроса, т. е. момент времени, когда появится заявка на сохраняемый продукт, и объем заявки, однако суммарное количество за те же интервалы времени достаточно хорошо известно.

Пусть  $x[k]$  — количество продуктов на складе в начале  $k$ -го интервала \*),  $w[k]$  — объем спроса на них в течение этого интервала, а  $u[k]$  — объем заказа на тот же интервал.

\*). При отрицательных значениях  $x[k]$  значение  $|x[k]|$  интерпретируется как дефицит, долг [4.7].

Тогда соотношение

$$x[k+1] = x[k] + u[k] - w[k] \quad (1.1)$$

определяет изменение состояния склада как объекта управления только на дискретном множестве моментов времени  $k = 1, 2, \dots$ , если задано начальное количество продуктов  $x[0] = x^0$ . При этом состояние объекта в любые промежуточные моменты не определено. □

**Пример 1.2.** Рассмотрим задачу диспетчерского управления производством, состоящим из нескольких участков (цехов). Диспетчеру неизвестен ход производства внутри каждого участка в любой момент времени, и он не может управлять самим производством. Его цель заключается в том, чтобы выдавать задания на выпуск конечной и промежуточной продукции в течение определенного интервала времени (смены) и контролировать их выполнение, зная количество продукции, поступающей на склады после смены. При этом известно, что каждое задание должно быть обеспечено сырьем, комплектующими изделиями и промежуточными продуктами в определенных количествах, задаваемых нормативами затрат. Эти количества изымаются со складов в течение смены, равно как со склада конечной продукции изымаются продукты, направляемые внешним потребителям.

Ясно, что задача диспетчерского управления в такой формулировке представляет собой обобщение задачи, описанной в П.1. Ее особенность заключается в том, что необходимо учесть взаимосвязь задания на поставку (выпуск) со спросом на продукты (сырье), используемые при этом выпуске.

Для прогноза результатов управления можно использовать следующую матричную модель [4.7]:

$$x[k+1] = x[k] + u[k] - \alpha u[k] - w[k], \quad (1.2)$$

где  $x[k] = (x_i[k])$  — вектор наличия продуктов и сырья разных видов на складах в моменты  $t_k$ ;  $u[k]$  — поступление за счет производства и поставок извне;  $\alpha$  — матрица с элементами  $\alpha_{ij}$ , равными нормативам затрат продукта (вида сырья, полуфабриката) с номером  $i$  на производство продукта с номером  $j$ ;  $w[k]$  — вектор поставок конечной продукции вовне, удовлетворяющих внешний спрос (часть его компонент заведомо равна нулю).

Управляемым выходом системы может быть как скалярная величина, например, суммарная стоимость выпускаемой продукции или стоимость продукции на складах, так и векторная величина (совокупность показателей). Важно лишь то, что любой из таких показателей определяется наличием продуктов и управляемых факторов \*). □

\*). Более детальное представление о различных моделях управления производством можно получить по книге [4.7].

Приведенные примеры позволяют сформулировать общую дискретную линейную модель в виде:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bv[k], \quad x[0] = x^0, \\ y[k] &= Cx[k] + C_v v[k], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $x[k]$  — вектор фазовых переменных (переменных состояния);  $v[k]$  — вектор входных воздействий;  $y[k]$  — вектор выходных управляемых процессов;  $A, B, C, C_v$  — матрицы параметров.

Если матрицы постоянны, то будем говорить о стационарных моделях (однородных во времени) и пока ограничимся только ими.

**1.2. Анализ дискретной модели.** Уравнения (1.3) сходны с дифференциальными уравнениями, рассматривавшимися в гл. 6, но анализ их значительно проще. Действительно, с помощью (1.3) можно последовательно (рекуррентно) подсчитать состояние и связанный с ним выход в любой момент:

$$\begin{aligned} x[1] &= Ax^0 + Bv[0], \\ x[2] &= A^2x^0 + ABv[0] + Bv[1], \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} x[k] &= A^kx^0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1}Bv[l], \\ y[k] &= CA^kx^0 + \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1}Bv[l] + C_v v[k], \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем все операции сводятся к простому перемножению матриц.

Какие-либо математические изыскания требуются только для исследования асимптотического поведения при больших  $k$ .

**Определение.** Дискретная система называется *устойчивой по начальным условиям*, если

$$x[k] \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

когда  $v[k] = 0$ . Система, в которой из условия

$$|v[k]| \leq c = \text{const} \quad (1.7)$$

следует ограниченность  $|x[k]|$ , называется *устойчивой к внешним возмущениям*. При наличии обоих указанных свойств система, описываемая (1.3), называется *устойчивой*. ■

**Теорема 1.1.** *Дискретная система является устойчивой, если все собственные числа  $\lambda_v$  матрицы  $A$  лежат внутри единичного круга*

$$|\lambda_v| < 1. \quad (1.8)$$

**Доказательство** проведем для случая, когда все собственные числа различны. Введем замену  $x[k] = S\xi[k]$ , где  $S$  — неособая матрица, столбцами которой являются собственные векторы  $A$ , причем  $S^{-1}AS = \text{diag}\{\lambda_v\}$ . Из (1.3) следует

$$\xi[k+1] = S^{-1}AS\xi[k] + \bar{v}[k], \quad \bar{v}[k] \triangleq S^{-1}Bv[k],$$

или в скалярной форме

$$\xi_v[k+1] = \lambda_v \xi_v[k] + \bar{v}_v[k]. \quad (1.9)$$

При  $v[k] = 0$  имеем  $\bar{v}_v[k] = 0$  и

$$\xi_v[k] = (\lambda_v)^k \xi_v[0], \quad (1.10)$$

так что при условии (1.8)  $|\xi_v[k]| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , а следовательно,  $|x[k]| \rightarrow 0$ . С другой стороны, из ограниченности  $v[k]$  следует ограниченность всех  $\bar{v}_v[k]$ ,

$$|\bar{v}_v[k]| \leq \bar{c}_v = \text{const},$$

так что

$$|\xi_v[k+1]| \leq |\lambda_v| |\xi_v[k]| + |\bar{v}_v[k]| \leq |\lambda_v| |\xi_v[k]| + \bar{c}_v,$$

откуда

$$|\xi_v[k]| \leq |\lambda_v|^k |\xi_v[0]| + \bar{c}_v [1 + |\lambda_v| + \dots + |\lambda_v|^{k-1}].$$

Из сходимости геометрической прогрессии вытекает ограниченность  $|\xi_v[k]|$ , а следовательно,  $|x[k]|$ . ■

**1.3. Структурные свойства.** Все структурные свойства, выявленные в § 2 гл. 6 для линейной системы, описываемой дифференциальными уравнениями в нормальной форме, справедливы для дискретных систем, описываемых рекуррентными соотношениями (1.3).

Ведь все эти свойства (полнота входа, полнота выхода, невырожденность или вырожденность системы, выделение «висячих» частей системы) определялись свойствами матриц  $A, B, C$  и устанавливались с помощью перехода к подходящему базису (неособой замены переменных). Точно такие же процедуры можно проделать (оставляем это в качестве упражнения) и для уравнений (1.3)\*.

Свойства полной управляемости и наблюдаемости для дискретных систем имеют место при тех же требованиях к матрицам  $A, B, C$ , что и в непрерывном случае, причем доказательство их достаточности проще.

**Теорема 1.2.** Система, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \\ x[0] &= x^0, \quad y[k] = Cx[k], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $u[k], k = 0, 1, \dots$  — последовательность управляемых воздействий, вполне управляема, если и только если невырождена пара  $A, B$ , и вполне наблюдаема, если и только если невырождена пара  $A^*, C^*$ .

**Доказательство.** По определению, система *вполне управляема*, если существует такое ограниченное управление, что в некоторый момент  $k > 0$  под его действием достигается желаемое состояние  $x[k] = 0$  при произвольном ограниченном  $x^0$ . Примем  $k = n$ . Тогда в соответствии с (1.4)

$$x[n] = A^n x^0 + Bu[n-1] + BAu[n-2] + \dots + BA^{n-1}u[0]. \quad (1.12)$$

Это соотношение можно записать в виде линейного уравнения относительно неизвестных  $u[n-1], u[n-2], \dots, u[0]$

$$Bu[n-1] + ABu[n-2] + \dots + A^{n-1}Bu[0] = x[n] - A^n x^0,$$

\*). Так же как и в гл. 6, эти свойства определены для случая  $C_v = 0$ , т. е. для отсутствия мгновенного воздействия входа на выход.

которое разрешимо при любой правой части, если выполнено условие невырожденности пары  $A, B$ , т. е.

$$\text{rank} \{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} = n.$$

Тем самым устанавливается достаточность этого условия.

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} Cx^0 &= y[0], \\ CAx^0 &= y[1] - CBu[0], \\ &\vdots \\ CA^{n-1}x^0 &= y[n-1] - CA^{n-2}Bu[0] - \dots - CBu[n-2]; \end{aligned} \quad (1.13)$$

находим, что невырожденность пары  $A^*, C^*$  достаточна для решения ее относительно неизвестного  $x^0$  при произвольной правой части, т. е. известных значениях входа и выхода. Вместе с тем знание начального состояния позволяет по рекуррентному соотношению (1.11) определить состояние  $x[k]$  в любой последующий момент, что и решает задачу наблюдения.

Необходимость условий невырожденности вытекает из структурной теоремы. ■

Остановимся на некотором отличии решения задач управляемости и наблюдаемости для дискретных систем от непрерывных. Здесь не гарантируется возможность мгновенного (или почти мгновенного — для любого  $T > 0$ ) достижения цели: требуется некоторое фиксированное число тактов \*), чтобы привести систему в заданное состояние или оценить состояние по наблюдениям (измерениям) входа и выхода.

Формальные же процедуры решения основных задач теории управления для дискретных систем аналогичны соответствующим процедурам гл. 6.

## § 2. Управление с обратной связью

**2.1. Стабилизация и влияние постоянных возмущений.** Будем исходить из основной модели

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, \dots, x[0] = x^0, \quad (2.1)$$

где внешние воздействия являются управлением  $u[k]$  и возмущениями  $w[k]$ . При управлении, задаваемом по программе, система устойчива, если матрица  $A$  имеет с. ч. внутри единичного круга. В противном случае для стабилизации можно использовать обратную связь

$$u[k] = -Kx[k], \quad (2.2)$$

так что

$$x[k+1] = \bar{A}x[k] + Gw[k], \quad (2.3)$$

$$\bar{A} \triangleq A - BK. \quad (2.4)$$

Из результатов § 4 гл. 6 сразу следует вывод.

\*). Оно может быть и меньше  $n$ , если ранг  $B$  (или  $C^*$ ) больше 1.

**Теорема 2.1.** Если пара матриц  $A, B$  является невырожденной, то может быть выбрана матрица  $K$  коэффициентов обратной связи (2.2), так, чтобы замкнутая система (2.3) была устойчивой.

Действительно, при условии невырожденности по известному алгоритму можно выбрать  $K$ , так чтобы с. ч. матрицы  $\bar{A}$  располагались произвольно, в частности, внутри единичного круга.

**Следствие 1.** Пусть  $w[k] = 0$ . Возможен выбор  $K$  так, чтобы процесс перехода в состояние  $x = 0$  заканчивался не более, чем за  $n$  тактов, если  $n$  — размерность вектора  $x$  (говорят, что при таком выборе в системе обеспечена бесконечная степень устойчивости).

**Доказательство.** Выберем  $K$  так, чтобы матрица  $\bar{A}$  имела все с. ч. нулевые. При этом характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^n = 0$ . Тогда по теореме Гамильтона — Кэли  $\bar{A}^n = 0$ , но в силу (2.3) при  $w[k] = 0$  имеем

$$x[n] = \bar{A}^n x^0 \Rightarrow x[n] = 0. \blacksquare$$

**Следствие 2.** Пусть на систему действует постоянное возмущение  $w[k] = w = \text{const}$ . Тогда при выборе обратной связи, обеспечивающей бесконечную степень устойчивости, в системе

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw, \quad u[k] = -Kx[k], \quad (2.5)$$

не более чем за  $n$  тактов устанавливается постоянное значение вектора состояния

$$x_\infty = [I - \bar{A}]^{-1}Gw. \quad (2.6)$$

**Доказательство.** Имеем по рекуррентции

$$x[k] = \bar{A}^k x^0 + [I + \bar{A} + \dots + \bar{A}^{k-1}]Gw,$$

так что при  $k \geq n$

$$x[k] = [I - \bar{A}]^{-1}Gw = x_\infty,$$

поскольку

$$\bar{A}^n = 0 \text{ и } [I - \bar{A}]^{-1} = I + \bar{A} + \dots + \bar{A}^{n-1} + \bar{A}^n + \dots = I + \bar{A} + \dots + \bar{A}^{n-1}. \blacksquare$$

Теми же способами, что и в гл. 6, исследуется ситуация, когда управление может базироваться только на неполных измерениях состояния, представимых в виде

$$y[k] = Cx[k]. \quad (2.7)$$

**Теорема 2.2.** Пусть пары матриц  $A, B$  и  $A^*, C^*$  невырождены. Тогда система

стабилизируется с помощью обратной связи, задаваемой соотношениями

$$u[k] = -\hat{K}x[k],$$

$$\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + Gw[k] + L\{y[k] - C\hat{x}[k]\}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$\hat{x}[0] = \hat{x}^0, \quad (2.8)$$

в которой коэффициенты  $K$  и  $L$  выбираются так, чтобы матрицы

$A - BK$  и  $A - LC$  имели собственные числа внутри единичного круга.

Пусть  $w[k] = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Если все с. ч. указанных матриц нулевые, то

$$x[k] = 0, \quad \hat{x}[k] \triangleq x[k] - \hat{x}[k] = 0 \quad \text{при } k \geq 2n. \quad (2.9)$$

Пусть  $w[k] = w = \text{const}$ ; тогда для установившегося значения  $x[k]$  справедлива формула (2.6), причем при нулевых с. ч. и  $x^0 = 0$  оно достигается не более, чем за  $n$  тактов.

Доказательство производится аналогично § 4 гл. 6 путем перехода к переменным  $v[k] = -x[k]$  и  $\hat{v}[k]$ , после чего сразу следует, что характеристический многочлен системы в целом является произведением многочленов матриц  $A - BK$  и  $A - LC$ . При выборе нулевых с. ч. он равен  $\lambda^{2n}$ , откуда, как и в следствии Т.2.1, вытекает (2.9). Последнее утверждение также легко доказывается. ■

Подчеркнем, что соотношения (2.8) представляют собой рекуррентный алгоритм, который по произвольному  $\hat{x}[0]$  и поступающей информации о значениях выхода и ранее принятых управлениях позволяет подсчитать новое управление. В отличие от простого правила (2.2) соотношения (2.8) требуют для формирования управления знания результатов измерений не в тот же самый момент, а только в предшествующие.

Необходимо также понимать, что если возмущения  $w[k]$  недоступны для прямого измерения, то алгоритм управления (2.8) неосуществим. Его можно упростить, изъяв из (2.8) слагаемое  $Gw[k]$ . Очевидно, что замкнутая система останется устойчивой, но ее реакция на воздействие изменится. В частности, при  $w[k] = w = \text{const}$  установившееся значение вектора состояния будет также постоянным, но примет другое значение. Действительно, предполагая в уравнениях замкнутой системы  $x[k] = x_\infty$ ,  $\hat{x}[k] = \hat{x}_\infty$ ,  $u[k] = u_\infty$ , получим

$$x_\infty = Ax_\infty + Bu_\infty + Gw, \quad u_\infty = -K\hat{x}_\infty,$$

$$\hat{x}_\infty = A\hat{x}_\infty + Bu_\infty + L[Cx_\infty - C\hat{x}_\infty],$$

исключая из которых  $u_\infty$ ,  $\hat{x}_\infty$ , найдем:

$$x_\infty = [I - \bar{A}]^{-1}Gw + [I - \bar{A}]^{-1}BK[I - A + LC]^{-1}Gw. \quad (2.10)$$

Второе слагаемое (ср. с (2.6)) появляется именно в силу того, что при оценке состояния мы не располагаем знанием возмущения.

**2.2. Оптимизация обратной связи при полных измерениях и отсутствии возмущения.** Примем за показатель качества работы системы величину

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T[k]Qx[k] + u^T[k]Ru[k]\}, \quad (2.11)$$

где  $Q$  и  $R$  — заданные матрицы, которые, как и в интегральном показателе (5.10) в гл. 6, позволяют соизмерить отклонения различных компонент состояния от желаемого значения  $x[k] = 0$  и «затраты» на управление.

**Теорема 2.3.** Пусть

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad x[0] = x^0. \quad (2.12)$$

Пусть  $R > 0$  и существует единственное положительно определенное решение  $P \triangleq P_{\text{opt}}$  уравнения

$$P = A^T PA + A^T PB \bar{R}^{-1} B^T PA - Q = 0, \quad \bar{R} \triangleq R + B^T PB. \quad (2.13)$$

Тогда при любых  $x^0$  показатель (2.11) достигает минимального значения, равного  $(x^0)^T P_{\text{opt}} x^0$ , если

$$u[k] = u_{\text{opt}}[k] = -K_{\text{opt}}x[k], \quad (2.14)$$

где

$$K_{\text{opt}} = \bar{R}^{-1} B^T P_{\text{opt}} A. \quad (2.15)$$

**Доказательство\*).** Введем последовательность  $V[k]$  такую, что

$$V[k] = x^T[k] P_{\text{opt}} x[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

При произвольном стабилизирующем управлении  $u[k]$  имеем

$$x[k+1] \rightarrow 0 \Rightarrow V[k] \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Вычислим приращение  $V[k]$  за один такт при изменении  $x[k]$  в силу (2.12). Имеем

$$V[k+1] - V[k] = \{Ax[k] + Bu[k]\}^T P_{\text{opt}} \{Ax[k] + Bu[k]\} - \\ - x^T[k] P_{\text{opt}} x[k], \quad k = 0, 1, \dots$$

Суммируя по всем значениям  $k$  с учетом (2.17), получаем, что при любом стабилизирующем управлении

$$\sum_{k=0}^{\infty} [V[k+1] - V[k]] = -V[0] = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T[k] [A^T P_{\text{opt}} A - P_{\text{opt}}] x[k] + \\ + 2u^T[k] B^T P_{\text{opt}} Ax[k] + u^T[k] B^T P_{\text{opt}} Bu[k]\}.$$

откуда, в силу определения  $V[0]$ ,  $P_{\text{opt}}$ , получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{x^T[k] Qx[k] + u^T[k] Ru[k]\} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \{u[k] + \bar{R}^{-1} B^T P_{\text{opt}} Ax[k]\}^T \bar{R} \{u[k] + \bar{R}^{-1} B^T P_{\text{opt}} Ax[k]\} + (x^0)^T P_{\text{opt}} x^0.$$

Поскольку левая часть совпадает с  $J$ , а правая достигает минимума при  $u[k]$ , вычисляемом в силу (2.14), то результат доказан. ■

**Теорема 2.3** сводит поиск оптимального управления к решению матричного уравнения (2.13) и вычислению по формуле (2.15).

\* Сравните с § 5, гл. 6. Здесь вновь опущено доказательство того, что управление вида (2.14) является стабилизирующим.

Уравнение (2.13) отлично от уравнения типа Лурье, однако для нахождения его решения применимы аналогичные процедуры.

Без доказательства приведем следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** Последовательности  $P^{(t)}$ ,  $K^{(t)}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , строящиеся по рекуррентции

$$P^{(t)} = A^* P^{(t-1)} A - A^* P^{(t-1)} B (\bar{R}^{(t-1)})^{-1} B^* P^{(t-1)} A + Q, \quad P^{(0)} = 0, \quad (2.18)$$

$$K^{(t)} = (\bar{R}^{(t)})^{-1} B^* P^{(t)} A, \quad \bar{R}^{(t)} = R + B^* P^{(t)} B, \quad t = 1, 2, \dots,$$

сходятся к  $P_{\text{opt}}$ ,  $K_{\text{opt}}$ , если пара  $A$ ,  $B$  невырождена,  $R$  положительно определена, а  $Q$  либо положительно определена, либо  $Q = C^* C$ , причем пара  $A^*$ ,  $C^*$  невырождена\*).

Отметим, что условия сходимости являются и условиями существования решения (2.13).

**2.3. Случайные возмущения.** Предельной альтернативой гипотезе о постоянстве возмущений является предположение о том, что возмущения на каждом такте изменяются, и притом непредвидимым образом.

Формализуем это предположение более жестко, считая, что

а) значения  $w[k]$  для каждого  $k$  заранее неизвестны, но являются реализациями случайной величины (скалярной или векторной);

б) для любого  $k$

$$\mathbb{M}\{w[k]\} = 0$$

(в противном случае можно было бы выделить ненулевую постоянную составляющую);

в) для любых  $k$  и  $l$ ,  $k \neq l$

$$\mathbb{M}\{w[k] w^*[l]\} = 0$$

(в противном случае имеется корреляционная связь между значениями в разные моменты, и знание предшествующих значений позволяло бы лучше прогнозировать будущие);

г) известна и постоянна дисперсия  $w[k]$  или (в векторном случае) ковариационная матрица

$$\mathbb{M}\{w[k] w^*[k]\} \triangleq D_w.$$

**Определение.** Последовательность  $w[k]$ , обладающая свойствами а) — г), называется стационарной последовательностью некоррелированных величин, или дискретным «белым шумом».

В отличие от белого шума, рассматривавшегося в теории непрерывных систем, дискретный белый шум — простое и естественное понятие, не требующее для своего определения никаких предель-

\* Указанные условия не являются необходимыми. В частности, не мешает вырожденность, но при устойчивости «висячих частей».

ных переходов. Поэтому и изучение поведения дискретных систем, возмущаемых таким белым шумом, является более простой проблемой.

**Теорема 2.5.** Пусть последовательность  $x[k]$  связана с последовательностью  $w[k]$  соотношением

$$x[k+1] = Ax[k] + Gw[k], \quad x[0] = x^0, \quad (2.19)$$

причем  $w[k]$  — дискретный «белый шум», некоррелированный с  $x^0$ . Тогда  $x[k]$  является случайной последовательностью, ковариационная матрица которой  $D_k \triangleq \mathbb{M}\{x[k] x^*[k]\}$  может быть вычислена рекуррентно:

$$D_{k+1} = AD_k A^* + GD_k G^*, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.20)$$

при заданной матрице  $D_0$ .

Если система (2.19) устойчива, то существует постоянный предел

$$D_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k, \quad (2.21)$$

удовлетворяющий линейному уравнению

$$D = ADA^* + GD_\infty G^*. \quad (2.22)$$

**Доказательство.** В силу определения и (2.19) имеем:

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \mathbb{M}\{x[k+1] x^*[k+1]\} = A \mathbb{M}\{x[k] x^*[k]\} A^* + \\ &+ A \mathbb{M}\{x[k] w^*[k]\} G^* + G \mathbb{M}\{w[k] x^*[k]\} A^* + G \mathbb{M}\{w[k] w^*[k]\} G^* = \\ &= AD_k A^* + GD_k G^* + A \mathbb{M}\{x[k] w^*[k]\} G^* + G \mathbb{M}\{w[k] x^*[k]\} A^*. \end{aligned}$$

Для доказательства (2.20) остается лишь установить некоррелированность  $x[k]$  и  $w[k]$ . Имеем:

$$\begin{aligned} x[k] &= A^k x^0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} G w[l] \Rightarrow \mathbb{M}\{x[k] w^*[k]\} = \\ &= A^k \mathbb{M}\{x^0 w^*[k]\} + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} G \mathbb{M}\{w[l] w^*[k]\} = 0 \end{aligned}$$

в силу предполагавшейся некоррелированности  $w[k]$ . Доказательство сходимости последовательности  $D_k$  к постоянному пределу проведем, предполагая, что собственные числа  $A$  различны. В силу рекуррентции

$$D_k = A^k D_0 (A^*)^k + A^{k-1} G D_k G^* (A^*)^{k-1} + \dots + G D_k G^*, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

По предположению имеется неособая матрица  $S$  такая, что

$$A = S \Lambda S^{-1}, \quad (2.24)$$

где  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_v\}$  и  $|\lambda_v| < 1$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ . Подставляя (2.24) в (2.23), получим

$$D_k = S \Lambda^k q_0 \Lambda^k S^* + S [\Lambda^{k-1} q_1 \Lambda^{k-1} + \dots + q_n] S^*, \quad (2.25)$$

где введем постоянные симметричные матрицы

$$q_0 = S^{-1}D_0(S^T)^{-1}, \quad q \triangleq S^{-1}GD_wG^T(S^T)^{-1} = \{q_{ij}\}. \quad (2.26)$$

Все элементы первого слагаемого стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , а любой элемент  $(i, j)$  матрицы, стоящей в квадратных скобках, можно представить в виде

$$q_{ij} [(\lambda_i \lambda_j)^{k-1} + \dots + 1] \rightarrow \frac{q_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j},$$

что завершает доказательство и вместе с тем дает явную формулу для устанавлившегося решения

$$D_\infty = S \left\{ \frac{q_{ij}}{1 - \lambda_i \lambda_j} \right\} S^T, \quad (2.27)$$

которой можно воспользоваться при вычисленных собственных числах и собственных векторах  $A^*$ . ■

Кратко остановимся на задаче оптимальной стабилизации при случайных возмущениях. Как и в непрерывном случае, можно доказать, что управление, минимизирующее показатель

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N M \{x^T[k] Q x[k] + u^T[k] R u[k]\}, \quad (2.28)$$

на решениях системы, описываемой уравнениями

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, x[0] = x^0, \quad (2.29)$$

не зависит ни от начальных условий, ни от интенсивностей шумов, т. е. матрицы  $D_w$ , а определяется теми же формулами (2.13) — (2.15), что и в соответствующей детерминированной проблеме.

Приведем без доказательства формулу для оптимального значения показателя качества:

$$J_{\min} = \text{tr} \{P_{\text{opt}} G D_w G^T\}, \quad (2.30)$$

где  $P_{\text{opt}}$  — решение (2.13).

В качестве упражнения можно вывести элементарный вариант этой формулы для случая  $R = 0$  и неособой матрицы  $B$  \*\*):

$$J_{\min} = \text{tr} \{Q G D_w G^T\}.$$

Этот результат достигается при  $u_{\text{opt}}[k] = -B^{-1}Ax[k]$ , т. е. на каждом такте управление компенсирует влияние случайных возмущений, пытаясь привести систему в состояние равновесия, от которого она вновь отходит под действием последующих возмущений (заранее непрогнозируемых, а потому и некомпенсируемых), так что в замкнутой системе  $x[k+1] = Gw[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$

\*) Из существования предела (2.21) следует, что он удовлетворяет уравнению (2.22), которое может непосредственно использоваться для вычисления  $D_\infty$ .

\*\*) См. также Приложение 2, п. 2ж.

**2.4. Управление при неполных и неточных наблюдениях.** Приведем без доказательства основной результат \*).

**Теорема 2.6 (теорема разделения).** Пусть управление  $u[l]$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , может строиться только как преобразование результатов измерений, связанных с состоянием  $x[k]$  системы (2.19) формулой

$$y[k] = Cx[k] + N[k], \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \quad (2.31)$$

где последовательность  $\{N[k]\}$  — нормальный белый шум с заданной матрицей ковариацией  $D_N$ , некоррелированный с возмущением  $\{w[k]\}$ , также являющимся нормальным белым шумом. Тогда минимум показателя (2.28) достигается на управлении

$$u[k] = u_{\text{opt}}[k] = -K_{\text{opt}} \hat{x}[k], \quad (2.32)$$

$$\hat{x}[k+1] = \hat{A}\hat{x}[k] + Bu[k] + L_{\text{opt}}(y[k] - C\hat{x}[k]), \quad (2.33)$$

где

$$K_{\text{opt}} = (R + B^T P_{\text{opt}} B)^{-1} B^T P_{\text{opt}} A, \quad L_{\text{opt}} = A\hat{D}_{\text{opt}} C^T [D_w + C\hat{D}_{\text{opt}} C^T]^{-1}, \quad (2.34)$$

а  $P_{\text{opt}}$ ,  $\hat{D}_{\text{opt}}$  являются положительно определенными решениями уравнений

$$P = A^T PA + A^T PB^T (R + B^T PB)^{-1} B^T PA - Q = 0, \quad (2.35)$$

$$D = ADA^T + ADC(D_N + CDC^T)^{-1} C^T DA^T - GD_w G^T = 0 \quad (2.36)$$

существование и единственность которых предполагается. ■

Подчеркнем, что оптимальный закон управления имеет структуру стабилизирующей обратной связи (2.8), где, конечно, отсутствует  $w[k]$ , поскольку такое не измеряется.

Матрицы  $K$  и  $L$  имеют фиксированное значение, зависящее от параметров показателя качества, параметров системы и интенсивностей шумов (возмущений и помех в измерениях). Соотношение (2.33) дает оптимальную оценку состояния по неполным и неточным измерениям. Оно обычно называется управлением фильтра Бьюси — Калмана и аналогично управлению фильтра Винера — Калмана в теории непрерывных систем (см. гл. 6, § 7).

Уравнение (2.36) совпадает по структуре с (2.35) и может быть решено, например, с помощью итеративной процедуры, описанной выше.

Таким образом, мы убедились, что для решения задач, рассмотренных в теории непрерывных систем, можно составить аналоги в теории дискретных систем и получить аналогичные схемы решения. Процедуры решения других проблем, в частности, проблемы оптимального слежения, описанной в § 7 гл. 6, также можно построить по аналогии.

\*) В гл. 10 дано доказательство аналогичного утверждения для конечного времени работы системы (см. также [4.5]) в предположении, что при вычислении управления может использоваться и результат измерения, полученный в тот же момент времени.

### § 3. Импульсное управление непрерывными объектами

**3.1. Описание импульсных систем.** Основным достоинством законов управления, построенных на основе дискретного описания объектов, является простота их реализации с помощью средств вычислительной техники. Действительно, для выработки управления  $u[k+1]$  на очередном такте  $k+1$  согласно, например, формулам (2.32), (2.33) требуется

а) хранить в памяти вычислительного устройства значение оценки состояния  $\hat{x}[k]$ , найденное ранее, и значение управления  $u[k]$ , принятого ранее, на предшествующем такте;

б) ввести в память результат измерения  $y[k]$ , отражающего состояние в момент  $t_k$ ;

в) обработать эти данные по программе, включающей только операции умножения и сложения;

г) выдать результат обработки как требуемое значение нового управления.

Очевидно, что эта процедура прекрасно приспособлена к возможностям универсальной цифровой вычислительной техники.

В то же время законы управления, построенные ранее на основе непрерывного описания (в виде дифференциальных уравнений) сами задавались дифференциальными уравнениями и требовали для своей точной реализации использования средств аналоговой вычислительной техники, в частности, построения специализированных схем на основе операционных усилителей.

Описание с помощью дифференциальных уравнений, как неоднократно подчеркивалось, является естественным следствием использования известных законов природы при математическом моделировании объектов управления. С другой стороны, современная практика создания систем управления характеризуется тенденцией перехода к универсальным процедурам хранения и обработки информации с помощью ЦВМ.

Спрашивается, как найти выход из этой противоречивой ситуации? Можно пойти двумя путями (и оба они практически используются):

а) вести обработку с помощью дискретной техники, используя вместо найденных непрерывных законов их дискретную аппроксимацию по той или иной схеме численного интегрирования;

б) выработать дискретные законы управления, заменив исходное непрерывное описание дискретным.

В обоих случаях возникает вопрос о выборе способа аппроксимации. Мы в основном займемся исследованием возможностей второго пути по той причине, что он является единственным при наличии еще двух осложняющих обстоятельств, также типичных для многих практических ситуаций:

а) на объект можно оказывать воздействие только в течение некоторых интервалов времени его работы;

б) измерения могут производиться только в фиксированные моменты времени.

Очевидно, что при таких обстоятельствах описанные ранее непрерывные законы управления вообще не применимы.

Примем теперь ряд более четких ограничений на класс законов управления, удовлетворяющих поставленным техническим требованиям.

1) Управляющее воздействие полностью определяется заданием последовательности величин (скалярных или векторных)  $u[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$

2) На объект (или промежуточный усилитель мощности) подается воздействие  $u(t)$ , сформированное на основе этой последовательности так, что

$$u(t) = u[k] p_k(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (3.1)$$

где  $p_k(t)$  — заданные функции, характеризующие каждый  $k$ -й управляющий импульс и удовлетворяющие условиям

$$p_k(t) = 0 \quad (3.2)$$

при  $t < t_k$  и  $t \geq t_k + \Delta_k$ ,  $\Delta_k > 0$ .

Эти формальные условия требуют пояснений.

Во-первых, реальный технический объект, работающий в реальном непрерывном времени, изменяет свое состояние только под действием реального же фактора (силы, электрического напряжения и т.п.), изменение которого надо определить в любой момент времени. Следовательно, величинам  $u[k]$  надо сопоставить какую-либо функцию непрерывного времени. Техническое устройство, осуществляющее такое сопоставление, называют *модулятором* (или преобразователем «код — аналог», если величины  $u[k]$  даны в виде числовых кодов).

Во-вторых, если на объект нельзя действовать вне заданных интервалов, то эти интервалы можно совместить с отрезками  $[t_k, t_k + \Delta_k]$ , вне которых согласно (3.1), (3.2) управление равно нулю. В дальнейшем ограничимся только системами, где управляющие импульсы одинаковы по форме, отличаясь только началом приложения

$$p_k(t) = p(t - t_k) \quad (3.3)$$

Функция  $p(t)$  называется *формирующей*. Будем считать, что моменты  $t_k$  образуют периодическую последовательность

$$t_{k+1} = t_k + \tau_0, \quad k = 0, 1, \dots, t_0 = 0, \\ \Delta_k = \Delta_0 \leq \tau_0. \quad (3.4)$$

Величина  $\tau_0$  называется *шагом дискретности*, или *периодом квантования по времени*, или *периодом чередования импульсов*. Величина  $\Delta_0 \tau_0^{-1}$  называется *скважностью импульса*.

Наиболее прост случай, когда

$$p(t) = 1, \quad 0 \leq t < \tau_0. \quad (3.5)$$

Построение функции  $u(t)$  по последовательности  $\{u[k]\}$  сводится при этом (см. рис. 7.1, а) к фиксации значения  $u(t)$  при  $k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0$  на уровне  $u[k]$ .

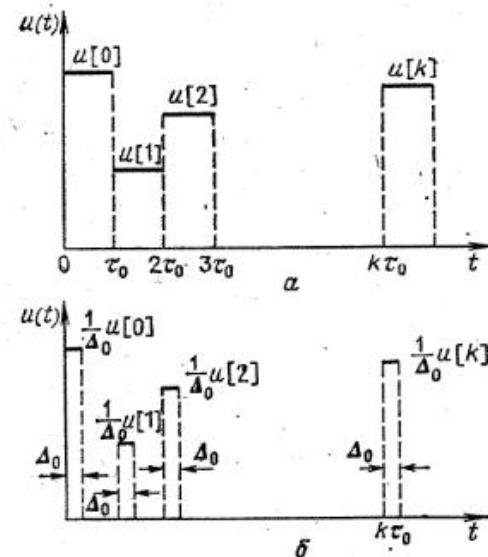


Рис. 7.1

$u[k]$  не могут быть использованы будущие измерения  $y[l]$ ,  $l > k$ . Иногда это условие следует ужесточить, учитывая, что обработка наблюдений требует времени, а следовательно, в  $u[k]$  можно учесть лишь наблюдения, поступившие до момента  $t_k = k\tau_0$ , т. е. значения  $y[l]$ ,  $l < k$ .

**Определение.** Системы, где используются законы управления, удовлетворяющие условиям 1)–4), называются линейными импульсными, если выработка управляющей последовательности  $u[k]$  базируется только на линейных преобразованиях результатов измерений, а сам объект является линейным.

**3.2. Дискретные модели непрерывного объекта.** Исходным для исследования импульсных систем является следующее свойство.

**Теорема 3.1.** Пусть на систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad x(0) = x^0, \quad (3.7)$$

оказывается управляющее воздействие вида (3.1). Тогда значения вектора состояния  $x(t)$  в моменты  $t = t_k = k\tau_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , могут быть вычислены рекуррентно по формуле

$$x[k+1] = A^*x[k] + B^*u[k] + w^*[k], \quad (3.8)$$

где  $x[k] = x(t_k)$ ,

$$A^* = e^{A\tau_0}, \quad B^* = \int_0^{\tau_0} e^{A(\tau_0-\tau)} B p(\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

$$w^*[k] = \int_0^{\tau_0} e^{A(\tau_0-\tau)} G w(\tau + k\tau_0) d\tau.$$

При найденных  $x[k]$  состояние в промежуточные моменты времени  $k\tau_0 + \theta$ ,  $0 \leq \theta < \tau_0$  вычисляется по формуле

$$x(k\tau_0 + \theta) = e^{A\theta} x[k] + \int_0^\theta e^{A(\theta-\tau)} p(\tau) d\tau B u[k] + \int_0^\theta e^{A(\theta-\tau)} G w(\tau + k\tau_0) d\tau. \quad (3.10)$$

**Доказательство.** Пусть задано  $x(t_k)$  — состояние системы в момент  $t_k$ . Тогда при любом управлении значение  $x(t)$  в моменты  $t \geq t_k$  дается формулой (см. гл. 6):

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t-\tau)} [Bu(\tau) + Gw(\tau)] d\tau.$$

В частности, имеем

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} [Bu(\tau) + Gw(\tau)] d\tau.$$

Подставляя значение  $u(\tau)$  из (3.1), получим

$$x[k+1] = e^{A\tau_0} x[k] + \int_0^{\tau_0} e^{A(\tau_0-\tau)} B p(\tau) d\tau u[k] + \int_0^{\tau_0} e^{A(\tau_0-\tau)} G w(\tau + k\tau_0) d\tau,$$

что эквивалентно (3.8), (3.9). ■

Соотношение (3.8) обычно называется точной дискретной моделью непрерывного объекта (3.7) при управлении (3.1). Эпитет «точная» вводится для того, чтобы отличить (3.8) от приближенных описаний, получаемых применением к дифференциальному уравнению объекта тех или иных формул численного интегрирования.

Например, считая  $\tau_0$  малой величиной, а функции  $u(t)$ ,  $w(t)$  мало меняющимися на интервале длительностью  $\tau_0$ , можно принять

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+\tau_0) - x(t)}{\tau_0} \quad (3.11)$$

и

$$u(t) \simeq \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} u(\tau) d\tau, \quad w(t) \simeq \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} w(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Тогда вместо (3.7) имеем приближенное соотношение

$$x(t + \tau_0) \approx x(t) + \tau_0 Ax(t) + B \int_t^{t+\tau_0} u(\tau) d\tau + G \int_t^{t+\tau_0} w(\tau) d\tau,$$

откуда при  $t = k\tau_0$  получим

$$x[k+1] \approx [I + \tau_0 A]x[k] + B \int_0^{\tau_0} p(\tau) dt u[k] + G \int_0^{\tau_0} w(\tau + k\tau_0) d\tau. \quad (3.13)$$

Соотношение

$$x[k+1] = A_{\text{пр}}^* x[k] + B_{\text{пр}}^* u[k] + w_{\text{пр}}^*[k], \quad (3.14)$$

где

$$A_{\text{пр}}^* = I + \tau_0 A, \quad B_{\text{пр}}^* = B \int_0^{\tau_0} p(\tau) d\tau, \quad w_{\text{пр}}^*[k] = G \int_0^{\tau_0} w(\tau + k\tau_0) d\tau,$$

естественно называть *приближенной дискретной моделью*. Оно также позволяет рекуррентно рассчитать, начиная с заданного  $x[0] = x^0$ , значение вектора состояния в любой момент  $k\tau_0$ , однако лишь приближенно. На каждом шаге рекуррентции погрешность имеет порядок  $o(\tau_0)$  и мала, если  $\tau_0$  мало, но за большее количество шагов эти малые погрешности накапливаются и могут существенно исказить представление о ходе процесса.

Достоинством приближенной модели является то, что для вычисления ее параметров нет необходимости вычислять матричную экспоненту  $e^{At}$ . С другой стороны, очевидно, что  $A_{\text{пр}}^*$  получается из  $A^*$  заменой  $e^{A\tau_0}$  на  $I + \tau_0 A$ , а  $B_{\text{пр}}^*$ ,  $w_{\text{пр}}^*$  — заменой  $e^{At}$  на  $I$ , при  $0 \leq t \leq \tau_0$ . Используя большее (но конечно!) число слагаемых в разложении матричной экспоненты (см. Приложение 2)

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots, \quad (3.15)$$

можно получать и другие приближенные модели, более точно отражающие ход непрерывного процесса.

**Пример 3.1.** Рассмотрим поведение объекта, описываемого простейшим скалярным уравнением:

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = x^0,$$

без внешних воздействий. Имеем  $x(t) = e^{\lambda t} x^0$  и

$$x(k\tau_0) \triangleq x[k] = e^{\lambda k \tau_0} x^0 = (e^{\lambda \tau_0})^k x^0.$$

Те же самые значения получаем рекуррентно из соотношения

$$x[k+1] = A^* x[k], \quad x[0] = x^0,$$

где по формуле (3.9)  $A^* = e^{\lambda \tau_0}$ .

Заменим теперь уравнение  $\dot{x} = \lambda x$  приближенным соотношением типа (3.13)

$$x[k+1] = [1 + \tau_0 \lambda] x[k],$$

откуда

$$x[k] = [1 + \tau_0 \lambda]^k x_0.$$

Пусть  $\lambda < 0$ ; тогда  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Равным образом  $x[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , если  $x[k]$  вычислено по точной модели. С другой стороны, считая по приближенной модели, мы получим тот же вывод, если  $\tau_0$  таково, что

$$|1 + \tau_0 \lambda| < 1, \quad \text{т. е. } \tau_0 < \frac{2}{(-\lambda)},$$

но при  $\tau_0 \geq 2/(-\lambda)$  приближенная модель дает качественно неверный результат! Таким образом, представление о «малости»  $\tau_0$  зависит от свойств непрерывного объекта. Приближенная модель иска жает представление о быстрых процессах установления.  $\square$

**3.3. Стабилизация импульсной обратной связью.** Главный смысл Т.3.1, конечно, не в самой возможности рассчитывать состояние и выход системы в дискретные моменты времени по рекуррентным соотношениям — их можно рассчитать и непосредственным интегрированием исходной системы (3.7), — но в том, что возникает возможность использовать все дискретные алгоритмы управления, описанные в § 2!

Изменения в формулах скажутся лишь в том, что вместо  $A$ ,  $B$ ,  $w[k]$  надо подставить соответствующие матрицы  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $w^*[k]$ , найденные при построении точной дискретной модели.

Прежде чем касаться некоторых теоретических проблем, которые могут возникнуть при такой замене, рассмотрим простейший пример.

**Пример 3.2.** Пусть требуется обеспечить стабилизацию объекта, описываемого скалярным уравнением

$$\dot{x} = \lambda x + u(t), \quad \lambda > 0, \quad x(0) = x^0,$$

используя импульсное управление. Пусть задан период  $\tau_0$  и для формирования импульсов может быть использован фиксатор. Точная дискретная модель согласно (3.8), (3.9) имеет вид

$$x[k+1] = e^{\lambda \tau_0} x[k] + b^* u[k], \quad x[0] = x^0,$$

где

$$b^* = \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda \tau_0} - 1].$$

Примем  $u[k] = -Kx[k]$ . Тогда

$$x[k+1] = (e^{\lambda \tau_0} - b^* K) x[k].$$

Следовательно, для того чтобы  $x[k] \rightarrow 0$ , достаточно выбрать  $K$  из условия

$$|e^{\lambda \tau_0} - b^* K| < 1.$$

Если же принять

$$K = \frac{e^{\lambda\tau_0}}{b^*} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda\tau_0}},$$

то при любом  $x^0$  имеем установление за один такт! Но

$$x[k] = 0, \quad k \geq 0 \Rightarrow u[k] = 0, \quad k \geq 0 \Rightarrow x(\tau_0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t \geq \tau_0;$$

тогда в силу исходного уравнения  $x(t) = 0, t \geq \tau_0$ . Таким образом, импульсное управление, состоящее из одного рабочего импульса, привело систему в желаемое состояние  $x = 0$ .

Результат не зависит от  $\tau_0$ . Так что на первый взгляд цели можно добиться сколь угодно быстро. Однако при малых  $\tau_0$  имеем

$$K = O\left(\frac{1}{\tau_0}\right),$$

т. е. *увеличение быстродействия требует и в импульсной системе роста коэффициента усиления.*  $\square$

Напомним теперь общие положения, касающиеся возможности стабилизации для непрерывных и дискретных систем, и сам смысл этих понятий.

Непрерывная система считается устойчивой, если

$$x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

когда  $w(t) = 0$ , и  $x(t)$  ограничено, когда  $w(t)$  ограничено.

Стабилизация на базе использования непрерывных измерений  $x(t)$  заведомо возможна, если пара  $A, B$  невырождена, а при использовании неполных измерений  $y(t) = Cx(t)$  требуется еще невырожденность пары  $A^*, C^*$ .

С другой стороны, вводя импульсную обратную связь и обеспечивая стабильность дискретной системы, мы гарантируем, что

$$x(k\tau_0) = x[k] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

когда  $w^*[k] = 0$ , и  $x[k]$  ограничено, когда  $w^*[k]$  ограничено. Таким образом, стабильность понимается в несколько разных смыслах. Более того, возможность введения стабилизирующей импульсной обратной связи следует из невырожденности пар  $A^*, B^*$  и  $(A^*)^T, C^T$ , где  $A^*, B^*$  связаны с  $A, B$  формулами (3.9). Неясно, следует ли из невырожденности пары  $A, B$  невырожденность  $A^*, B^*$ , иными словами, не теряется ли возможность стабилизации при использовании вместо непрерывной обратной связи лишь импульсной?

Все эти сомнения почти полностью рассеиваются в силу следующих утверждений.

\*) Указанные условия лишились достаточных, поскольку и при вырожденности возможна общая стабилизация системы, если «висячие» ее части сами по себе устойчивы (см. § 4, гл. 6).

**Теорема 3.2.** Пусть объект, описываемый уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) + Gw(t), \quad x(0) = x^0, \quad y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

замкнут импульсной обратной связью, заданной соотношениями

$$u(t) = u[k]p(t - k\tau_0), \quad k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.17)$$

$$u[k] = -Kx[k], \quad (3.18)$$

$$\hat{x}[k+1] = A^*\hat{x}[k] + B^*u[k] + L\{y[k] - C\hat{x}[k]\}, \quad (3.19)$$

где  $y[k] = y(k\tau_0)$  и  $A^*, B^*$  вычислены по (3.9).

а) Пусть  $K$  и  $L$  выбраны так, что матрицы  $A^* - B^*K$  и  $A^* - LC$  имеют собственные числа внутри единичного круга.

Тогда замкнутая система устойчива в том смысле, что

$$w(t) = 0 \Rightarrow x(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

и

$$|w(t)| \leq c_w < \infty \Rightarrow |x(t)| \leq c_x < \infty \quad \text{при любых } t.$$

б) Указанный выбор возможен, если возможно построение непрерывной стабилизирующей обратной связи и выполнены дополнительные условия на величину  $\tau_0$ . При различных с. ч. матрицы  $A$ , равных  $\lambda_v, v = 1, \dots, n$ , эти условия имеют вид

$$p_v \neq 0, \quad \tau_0 \neq 2\pi ki(\lambda_v - \lambda_\mu)^{-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad v \neq \mu, \quad (3.20)$$

где

$$p_v = \int_0^{\tau_0} e^{\lambda_v(\tau_0 - \tau)} p(\tau) d\tau, \quad v = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

**Доказательство.** Указанный выбор  $K$  и  $L$  гарантирует, что последовательности  $x[k], u[k]$  ограничены при ограниченности  $w^*[k]$  (вытекающей из ограниченности  $w(t)$ ) и сходятся к нулю при  $w^*[k] = 0$ . Поскольку  $x[k] = x(k\tau_0)$ , остается установить, как ведет себя функция  $x(t)$  в промежуточные моменты времени  $t \neq k\tau_0$ . Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-k\tau_0)} x(k\tau_0) + \int_{k\tau_0}^t e^{A(t-\tau)} [Bu(\tau) + Gw(\tau)] d\tau = \\ &= e^{A(t-k\tau_0)} x[k] + \int_{k\tau_0}^t e^{A(t-\tau)} p(t-\tau) Bdtu[k] + \\ &\quad + \int_{k\tau_0}^t e^{A(t-\tau)} Gw(\tau) d\tau \quad \text{при } k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Следовательно, значения  $x(t)$  в указанном интервале представляют собой линейную комбинацию ограниченных величин с ограниченными коэффициентами, т. е.  $x(t)$  ограничена. При  $w(t) = 0$  имеем

$$|x(t)| \leq c_1|x[k]| + c_2|u[k]|, \quad k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0,$$

где  $c_1, c_2$  — положительные константы, откуда и следует, что  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

На устойчивость «висячих» частей объекта наличие обратной связи (как непрерывной, так и импульсной) влияния не оказывает. Поэтому можно ограничиться рассмотрением вполне управляемых и наблюдаемых объектов, для которых условием стабилизируемости с помощью непрерывной обратной связи является невырожденность пар  $A, B$  и  $A^*, C^*$ . Стабилизируемость же с помощью импульсной связи требует невырожденности  $A^*, B^*$  и  $(A^*)^*, C^*$ .

Исследуем условия, при которых

$$\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n \Rightarrow \text{rank} [B^* \ A^*B^* \ \dots \ (A^*)^{n-1}B^*] = n,$$

где  $n$  — размерность  $x$

$$A^* = e^{A\tau_0}, \quad B^* = \int_0^{\tau_0} e^{A(\tau_0-\tau)} B p(\tau) d\tau.$$

Пусть  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_v\}$ . Тогда непосредственные вычисления дают:

$$A^* = S \text{diag}\{e^{\lambda_v \tau_0}\} S^{-1}, \quad B^* = S \text{diag}\{p_v\} \bar{b}, \quad \bar{b} = S^{-1}B,$$

где  $p_v$  определены формулой (3.21).

Поскольку  $S$  неособа, то достаточно проверить, что

$$\text{rank} \{ \bar{b} \ \Lambda \bar{b} \ \dots \ \Lambda^{n-1} \bar{b} \} = n \Rightarrow \text{rank} \{ P \bar{b} \ \Lambda^* P \bar{b} \ \dots \ (\Lambda^*)^{n-1} P \bar{b} \} = n,$$

где  $\Lambda^* \triangleq \text{diag}\{e^{\lambda_v \tau_0}\}$ ,  $P \triangleq \text{diag}\{p_v\}$ . При выполнении 1-го условия существует столбец  $q$  такой, что столбец  $q \bar{b}$  имеет все ненулевые элементы (см. § 4 гл. 6). Но тогда выполнено и 2-е, поскольку

$$\det \{ \bar{b}_q \ \Lambda^* \bar{b}_q \ \dots \ (\Lambda^*)^{n-1} \bar{b}_q \} = \prod_{v=1}^n (\bar{b}_q)_v p_v \det \{ I \ \Lambda^*, \dots \ (\Lambda^*)^{n-1} \} \neq 0,$$

если все  $p_v \neq 0$  и все элементы  $\Lambda^*$  различны, т. е. выполнено (3.20).

Аналогично проверяется и то, что невырожденность пары  $A^*, C^*$  влечет невырожденность  $(A^*)^*, C^*$  при выполнении (3.20). ■

**Следствие.** При выборе  $K$  и  $L$  такими, что матрицы  $A^* - B^*K$ ,  $A^* - LC$  имеют только нулевые с. ч., объект, замкнутый импульсной обратной связью (3.16) — (3.18), останавливается через время, не большее  $2\pi\tau_0$ , в состоянии  $x = 0$ , если  $w(t) = 0$ .

При этом говорят, что импульсная система обладает бесконечной степенью устойчивости. (Для доказательства этого следствия достаточно вспомнить следствие к Т.3.2.)

Теорема утверждает, что импульсная обратная связь является эффективным средством стабилизации, не применимым только при неудачном выборе периода  $\tau_0$ .

**Пример 3.3.** Рассмотрим задачу о приведении в равновесие маятника с помощью импульсной обратной связи. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 + u_1$$

так что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Пусть используются прямоугольные импульсы со скважностью  $\Delta_0$ ,

$$p(t) = \frac{1}{\Delta_0}, \quad 0 \leq t < \Delta_0.$$

Тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \tau_0 & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \tau_0 & \cos \omega_0 \tau_0 \end{pmatrix},$$

$$B^* = \frac{1}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} e^{A(\tau_0-\tau)} B d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_0 \omega_0^2} [\cos \omega_0 (\tau_0 - \Delta_0) - \cos \omega_0 \tau_0] \\ -\frac{1}{\Delta_0 \omega_0} [\sin \omega_0 (\tau_0 - \Delta_0) - \sin \omega_0 \tau_0] \end{pmatrix}.$$

Предположим первоначально, что  $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , т. е. управляющие импульсы сдвинуты на период свободных колебаний; тогда  $A^* = I$ , и пара  $A^*, B^*$  вырождена, поскольку

$$\det \{B^* \ A^* B^*\} = \det \{B^* \ B^*\} = 0.$$

Таким образом, при таком периоде чередования импульсов невозможна стабилизация, причем этот вывод не зависит от формы импульса, что можно было бы выявить сразу по нарушению условий (3.20).

Примем теперь  $\tau_0 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ . Тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/\omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, будем для простоты считать импульсы очень узкими и высокими, т. е.  $\Delta_0/\tau_0 \ll 1$ . В этом случае

$$B^* \approx e^{A\tau_0} B = A^* B = \begin{pmatrix} 1/\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\det \{B^* \ A^* B^*\} = \det \begin{pmatrix} 1/\omega_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega_0} \neq 0.$$

Приведение в равновесие осуществляется из любых начальных условий за 2 такта, если принять (при очень малом  $\Delta_0$ !)

$$u(t) = \frac{1}{\Delta_0} u[k], \quad k\tau_0 \leq t < k\tau_0 + \Delta_0, \quad k = 0, 1,$$

$$u[k] = -x_2(k\tau_0).$$

Формальную проверку этого результата предоставляем читателю. Поясним лишь его физический смысл. Управление сводится к двум тормозящим импульсам.

Первый, начальный, импульс затормаживает маятник в начальном положении  $x_1(0) \neq 0$ . После этого и до окончания первого такта управления не прилагается, так что маятник в свободном движении доходит до положения равновесия, что займет  $1/4$  периода его колебаний. В этот момент 2-й импульс снимает накопившуюся скорость.

На рис. 7.2 показана траектория движения на фазовой плоскости. Весь процесс занимает время  $\tau_0 + \Delta_0$ .  $\square$

Таким образом, импульсное управление обладает тем преимуществом, что теоретически позволяет выводить систему точно в равновесное состояние за конечное время. Конечно, это лишь теоретический вывод: ведь для вычисления коэффициентов импульсной обратной связи, степень устойчивости, требуется точно знать параметры объекта, а это невозможно. В действительности собственные числа окажутся отличными от нуля, но при малых неточностях модели этот сдвиг также должен быть мал, а следовательно, время вхождения в достаточно малую окрестность состояния  $x = 0$  останется небольшим.

Поэтому требование выбирать обратную связь из условия обеспечения (с точностью расчета!) бесконечной степени устойчивости является и на практике популярным. Однако, во-первых, в многосвязной системе это требование неоднозначно определяет выбор коэффициентов обратной связи, а, во-вторых, неясно, насколько оно хорошо с точки зрения интегральных показателей качества. Здесь возникают и некоторые принципиальные трудности.

**3.4. Оптимизация по квадратичному критерию.** Рассмотрим показатель

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \{x^\top(t) Q x(t) + u^\top(t) R u(t)\} dt. \quad (3.23)$$

Напомним (см. гл. 6), что минимальное значение этого показателя достигалось на непрерывной обратной связи типа

$$u_{\text{opt}}(t) = -K_{\text{opt}} x(t) \quad (3.24)$$

(при полных изменениях) или типа

$$u_{\text{opt}}(t) = -K_{\text{opt}} \hat{x}(t) \quad (3.25)$$

(при неполных и неточных измерениях). Поэтому лучшей с точки зрения показателя (3.23) импульсной обратной связью окажется

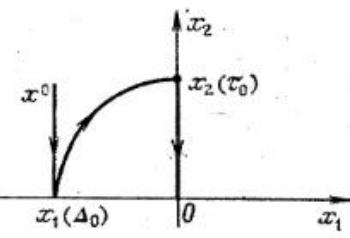


Рис. 7.2

такая, которая лучшим образом аппроксимирует законы типа (3.24), (3.25), а это может быть достигнуто путем уменьшения шага дискретности  $\tau_0$ . Если же шаг дискретности ограничен снизу (в силу невозможности чаще производить измерения или чаще подавать управляющие импульсы), то это ограничение заведомо может лишь ухудшить значение показателя, достижимое на непрерывном управлении.

Для того чтобы найти оптимальную импульсную обратную связь при фиксированном  $\tau_0$ , следует, во-первых, преобразовать выражение показателя  $J$  так, чтобы оно содержало только величины  $x[k]$ ,  $u[k]$ , а во-вторых, решить возникающую задачу оптимизации дискретной системы. Эта процедура в принципе осуществима, поскольку

$$x(k\tau_0) = x[k], \quad u(k\tau_0) = u[k]p(0),$$

а значения  $x(t)$ ,  $u(t)$  в промежуточные моменты времени даются формулами (3.20), (3.24).

Тем не менее преобразования являются очень громоздкими, и мы проведем их только для простейшего примера, из которого, впрочем, будут ясны и общая формальная схема, и определенные качественные особенности.

**Пример 3.4.** Пусть объект описывается скалярным уравнением

$$T_0 \dot{x} = u(t) + w(t), \quad x(0) = x^0, \quad T_0 > 0.$$

Примем сначала  $w(t) = 0$ , а показатель качества — в виде

$$J = \int_0^{(k+1)\tau_0} [x^2 + u^2] dt.$$

Пусть требуется построить оптимальное управление  $u(t)$  по измерениям  $x[k] = x(k\tau_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , ограничиваясь условием

$$u(t) = u[k], \quad k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.26)$$

т. е. используя импульсное управление с фиксатором. Таким образом, выбирать можно только величины  $u[k]$ .

Представим показатель в виде

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau_0}^{(k+1)\tau_0} [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Непосредственным интегрированием находим

$$x(k\tau_0 + 0) = x(k\tau_0) + \frac{1}{T_0} \int_{k\tau_0}^{k\tau_0 + \theta} u(t) dt = x[k] + \frac{\theta}{T_0} u[k], \quad 0 \leq \theta < \tau_0,$$

что, конечно, следует и из общей формулы (3.10). Отсюда

$$\int_{k\tau_0}^{(k+1)\tau_0} [x^2(t) + u^2(t)] dt = \tau_0 \left\{ x^2[k] + bx[k]u[k] + \left(1 + \frac{b^2}{3}\right) u^2[k] \right\},$$

где  $b = \tau_0/T_0$  — безразмерный параметр, и

$$J = \tau_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ x^2[k] + bx[k]u[k] + \left(1 + \frac{b^2}{3}\right) u^2[k] \right\},$$

причем  $x[k+1] = x[k] + bu[k]$ ,  $x[0] = x_0$ .

Тем самым задача сведена к чисто дискретной. В отличие от задачи оптимизации обратной связи, решенной в общем виде (см. § 2), показатель  $J$  содержит слагаемые вида  $x[k]u[k]$ . Однако от них можно избавиться простым преобразованием. Введем новое управление  $\tilde{u}[k]$  так, что  $u[k] = \tilde{u}[k] - \beta x[k]$  и подберем  $\beta$  из условия обращения в нуль коэффициентов при слагаемых  $x[k]\tilde{u}[k]$ . Имеем

$$\begin{aligned} x^2[k] + bx[k]\{\tilde{u}[k] - \beta x[k]\} + \left(1 + \frac{b^2}{3}\right)\{\tilde{u}[k] - \beta x[k]\}^2 &= \\ &= \frac{q}{\tau_0} x^2[k] + \frac{r}{\tau_0} \tilde{u}^2[k], \end{aligned}$$

если

$$\beta = \frac{b}{2(1+b^2/3)}, \quad \frac{q}{\tau_0} = 1 - b\beta + \left(1 + \frac{b^2}{3}\right)\beta^2 = \frac{1+b^2/12}{1+b^2/3}, \quad \frac{r}{\tau_0} = 1 + \frac{b^2}{3}.$$

Теперь получаем стандартную задачу: найти  $\tilde{u}[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , минимизирующие показатель

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{qx^2[k] + r\tilde{u}^2[k]\}$$

при условии

$$x[k+1] = ax[k] + b\tilde{u}[k], \quad k = 0, 1, \dots, x[0] = x_0,$$

где  $a = 1 - b\beta$ . Применяя Т.2.3 и учитывая одномерность (скалярность) изучаемой системы, получаем, что при импульсном управлении

$$J_{\text{опт}} = P_{\text{опт}}(x_0)^2, \quad u_{\text{опт}}[k] = -K_{\text{опт}}x[k], \quad K_{\text{опт}} = \frac{abP_{\text{опт}}}{r + b^2P_{\text{опт}}}, \quad (3.27)$$

где  $P_{\text{опт}}$  — положительное решение квадратного уравнения

$$(1 - a^2)P + \frac{a^2b^2P^2}{r + b^2P} - q = 0.$$

С учетом зависимостей  $q$ ,  $r$ ,  $a$  от  $b$  можно показать, что

$$P_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{qr}}{b} = T_0 \sqrt{1 + \frac{1}{12}b^2}.$$

В то же время нетрудно убедиться, что при непрерывном управлении

$$u_{\text{опт}}^{(t)} = -x(t), \quad J_{\text{опт}} = T_0(x^0)^2.$$

Тем самым оказывается, что с ростом шага дискретности  $\tau_0$  оптимальное значение показателя растет (т. е. ухудшается!), хотя и очень медленно:

$$\frac{J_{\text{опт}}(b)}{J_{\text{опт}}(0)} = \sqrt{1 + \frac{1}{12}b^2} = 1 + \frac{1}{24}b^2 + o(b^2), \quad b = \frac{\tau_0}{T_0}.$$

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда возмущение  $w(t)$  отлично от нуля и является случным процессом типа белого шума с единичной интенсивностью. Показатель качества примем в виде

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{x^2(t) + u^2(t)\} dt$$

и вновь будем разыскивать оптимальное импульсное управление с фиксатором.

Используем представление процесса  $x(t)$  в промежуточные моменты времени:

$$x(k\tau_0 + \theta) = x[k] + \frac{\theta}{T_0}u[k] + w_k^*(\theta), \quad 0 \leq \theta < \tau_0,$$

где

$$w_k^*(\theta) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_0^\theta w(k\tau_0 + \tau) d\tau.$$

Тогда, действуя почти так же, как в детерминированной задаче, можно получить, что

$$J = \frac{1}{\tau_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N M\{qx^2[k] + r\tilde{u}^2[k]\} + \frac{b}{2T_0}, \quad (3.28)$$

причем

$$x[k+1] = ax[k] + b\tilde{u}[k] + w^*[k], \quad k = 0, 1, \dots, x[0] = x_0,$$

где  $w^*[k] = w_k^*(\tau_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , дискретный «белый шум» с дисперсией  $b/T_0$ . При таком преобразовании учитываются соотношения

$$M[w_k^*(\theta)x[k]] = 0, \quad M\{[w_k^*(\tau_0)]^2\} = \frac{\tau_0}{T_0^2} = \frac{b}{T_0},$$

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} M\{[w_k^*(\theta)]^2\} d\theta = \frac{1}{2T_0}b,$$

для доказательства которых требуется аккуратное использование свойств белого шума  $w(t)$ , как процесса с предельно малой корреляцией (см. § 3 гл. 4).

Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $q$  имеют тот же смысл, что и в детерминированной задаче. Поэтому оптимальные значения  $u[k]$  даются той же формулой (3.27). Соответствующее такой обратной связи значение показателя вычисляется по формуле

$$J_{\text{опт}} = J_{\text{опт}}(b) = \frac{P_{\text{опт}}}{T_0} \frac{b}{T_0} + \frac{b}{2T_0}, \quad P_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{qr}}{b} = T_0 \sqrt{1 + \frac{1}{12} b^2}, \quad (3.29)$$

вытекающей из общего соотношения (2.30) для оптимального значения дискретного квадратичного показателя с учетом дополнительного постоянного слагаемого в (3.28).

При непрерывном управлении может достигаться значение того же показателя, равное  $J_{\text{опт}}(0) = 1/T_0$ . Раскрывая выражение (3.29), обнаруживаем, что при наличии случайных возмущений импульсное управление при большом шаге дискретности оказывается существенно менее эффективным, чем непрерывное:

$$\frac{J_{\text{опт}}(b)}{J_{\text{опт}}(0)} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{12}} + \frac{b}{2} = 1 + \frac{1}{2}b + O(b^2), \quad b = \frac{T_0}{T_0}. \quad \square$$

Выявленные особенности на самом деле справедливы и в общем случае: импульсное управление эффективно для обеспечения стабильности системы, но оно хуже справляется с быстро изменяющимися случайными возмущениями. Этому можно дать простое объяснение. Действительно, в интервале между измерениями обратная связь отключается, а управление ведется по программе, определяемой формой импульса. Вместе с тем программное управление неэффективно при наличии непрогнозируемых возмущений и, в особенности, при собственной неустойчивости объекта. Если же шаг дискретности мал, то реакция системы на эти возмущения не успевает развиться.

#### § 4. Операторный метод

**4.1. Операторное описание.** В теории дискретных и импульсных систем широко используется и операторный подход, близкий по смыслу к операторному подходу в теории непрерывных систем \*).

Введем оператор  $\zeta$  сдвига на такт вперед, т. е. для любой последовательности  $\{f[k]\}$  имеем

$$\zeta f[k] \triangleq f[k+1], \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

\* ) Основные результаты здесь принадлежат Я. З. Цыпкину и подробно изложены в [7.3, 7.4]. Принятая в данном параграфе схема несколько отличается от методики Я. З. Цыпкина и опирается на первичное описание в пространстве состояний.

Применение операторного многочлена

$$A(\zeta) = a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_i = \text{const}, \quad (4.2)$$

к последовательности определено правилом:

$$A(\zeta) f(k) \triangleq a_n f[k+n] + a_{n-1} f[k+n-1] + \dots + a_0 f[k]. \quad (4.3)$$

Уравнение

$$x[k+1] = Ax[k] + Bv[k], \quad y[k] = Cx[k] + C_v v[k]. \quad (4.4)$$

в операторной форме записывается следующим образом:

$$\zeta x[k] = Ax[k] + Bv[k], \quad y[k] = Cx[k] + C_v v[k],$$

или

$$[\zeta I - A]x[k] = Bv[k], \quad y[k] = Cx[k] + C_v v[k]. \quad (4.5)$$

Операторная запись удобна для исключения промежуточных неизвестных, при этом с оператором  $\zeta$  можно формально обращаться как с числом. Из (4.5), в частности, следует:

$$x[k] = [\zeta I - A]^{-1} Bv[k], \quad y[k] = \{C[\zeta I - A]^{-1} B + C_v\}v[k] \quad (4.6)$$

или

$$x[k] = H_{vx}^*(\zeta)v[k], \quad y[k] = H_{vy}^*(\zeta)v[k], \quad (4.7)$$

где введены дискретные операторные п. ф. преобразований «вход-состояние», «вход-выход»  $H_{vx}^*(\zeta)$ ,  $H_{vy}^*(\zeta)$ .

Ясно, что введение операторных п. ф. позволяет распространить на дискретные системы все приемы построения и преобразования структурных схем, которые были даны в гл. 2 для непрерывных систем. Дискретные п. ф. являются дробно-рациональными функциями от оператора  $\zeta$ , смысл которых еще не был определен.

Обозначим

$$\alpha(\zeta) = \det \{\zeta I - A\} = \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + a_0.$$

Тогда из (4.6) следует, что

$$\alpha(\zeta)y[k] = \{C[\zeta I - A]^n B + C_v \alpha(\zeta)\}v[k], \quad (4.8)$$

где введена присоединенная к  $\zeta I - A$  матрица, компоненты которой — многочлены  $\zeta$  степени ниже  $n$ , если  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица. Обозначая

$$\beta(\zeta) = C[\zeta I - A]^n B + C_v \alpha(\zeta) = \beta_n \zeta^n + \dots + \beta_0, \quad (4.9)$$

перепишем (4.8) в виде

$$\alpha(\zeta)y[k] = \beta(\zeta)v[k]. \quad (4.10)$$

Поскольку в (4.10) последовательности умножаются только на многочлены от оператора  $\zeta$ , то уравнение (4.10) уже имеет четкий смысл и эквивалентно соотношению

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \dots + a_0y[k] = \\ = \beta_n v[k+n] + \dots + \beta_0 v[k], \quad k = 0, 1, \dots, m \leq n. \quad (4.11)$$

Таким образом, формальная операторная запись

$$y[k] = \frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)} v[k] \quad (4.12)$$

будет далее пониматься как эквивалент связи между последовательностями  $y[k]$  и  $v[k]$ , задаваемой соотношением (4.11). Это соотношение позволяет рекуррентно вычислять значение выхода по заданным значениям входа и значениям самого выхода в предшествующие моменты времени:

$$y[k+n] = -\alpha_{n-1}y[k+n-1] - \dots - \alpha_0y[k] + \\ + \beta_nv[k+m] + \dots + \beta_0v[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.13)$$

Ясно, что для начала рекуррентии надо задать не только  $y[0]$ , но и значения выхода вплоть до  $y[n-1]$ . Эти начальные условия должны быть заданы заранее или вычислены по начальному «внутреннему» состоянию  $x^0$  с помощью исходных уравнений (4.4).

Операторная запись (4.10) или эквивалентные соотношения (4.11)–(4.13) наиболее удобны в случае, когда  $y[k]$  — скалярная последовательность (система имеет один управляемый выход). Именно этот случай мы и рассмотрим подробнее \*). Будем, кроме того, считать, что входное воздействие состоит из двух скалярных компонент — управляющего  $u[k]$  и возмущения  $w[k]$ , так что в скалярной форме (4.10) принимает вид:

$$\alpha(\zeta)y[k] = \beta(\zeta)u[k] + \beta_w(\zeta)w[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.14)$$

что по форме и по существу сходно с описанием непрерывного объекта

$$\alpha(D)y(t) = \beta(D)u(t) + \beta_w(D)w(t), \quad t \geq 0, \quad (4.15)$$

использовавшимся в гл. 3–5. Из этого сходства вытекает и сходство приемов исследования, которые изложим в краткой форме, сопровождая иллюстративными примерами.

**4.2.  $\mathcal{Z}$ -преобразование и весовые последовательности.** Аналогом  $\mathcal{Z}$ -преобразования является *дискретное преобразование Лапласа*, или  $\mathcal{Z}$ -*преобразование* (Приложение 1).

При нулевых начальных условиях связь между  $\mathcal{Z}$ -преобразованиями последовательностей, задаваемая (4.14), находится заменой оператора сдвига  $\zeta$  на комплексную переменную  $z$ :

$$\alpha(z)Y(z) = \beta(z)U(z) + \beta_w(z)W(z), \quad (4.16)$$

где «большими» буквами обозначены  $\mathcal{Z}$ -образы соответствующих последовательностей. Отсюда имеем

$$Y(z) = H_{uy}^*(z)U(z) + H_{wy}^*(z)W(z), \quad (4.17)$$

\* С матричными обобщениями можно познакомиться по книгам [4.2, 4.11].

где

$$H_{uy}^*(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}, \quad H_{wy}^*(z) = \frac{\beta_w(z)}{\alpha(z)}$$

— комплексные дискретные *n. ф.* соответствующих преобразований. По теореме о свертке получаем

$$y[k] = \sum_{l=0}^k h_{uy}[l]u[k-l] + \sum_{l=0}^k h_{wy}[l]w[k-l] = \\ = \sum_{l=0}^k h_{uy}[k-l]u(l) + \sum_{l=0}^k h_{wy}[k-l]w(l), \quad (4.18)$$

где  $h_{uy}[k]$ ,  $h_{wy}[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$  — весовые последовательности такие, что

$$\mathcal{Z}\{h_{uy}[k]\} = H_{uy}(z), \quad \mathcal{Z}\{h_{wy}[k]\} = H_{wy}(z). \quad (4.19)$$

Очевидно, что весовая последовательность  $h_{uy}[k]$  совпадает с реакцией системы на вход вида

$$u[0] = 1, \quad u[k] = 0, \quad k > 0.$$

**Пример 4.1.** Пусть уравнение дано в виде

$$y[k+2] + 0,3y[k+1] + 0,02y[k] = w[k+1] + 0,3w[k].$$

Операторная запись такова:

$$(\zeta^2 + 0,3\zeta + 0,02)y[k] = (\zeta + 0,3)w[k],$$

так что

$$H_{wy}(z) = \frac{z+0,3}{z^2+0,3z+0,02}.$$

Весовая последовательность находится путем обращения  $H_{wy}(z)$ . Записывая разложение на простейшие дроби

$$H_{wy}(z) = \frac{2}{z+0,1} - \frac{1}{z+0,2}$$

и используя таблицу из Приложения 1, получаем

$$h_{wy}[0] = 0, \quad h_{wy}[k] = 2(-0,1)^{k-1} - (-0,2)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Убедитесь также, что исходное уравнение эквивалентно записи в нормальной форме

$$x_1[k+1] = -0,1x_1[k] + w[k], \\ x_2[k+1] = -0,2x_2[k] + w[k], \quad y[k] = 2x_1[k] - x_2[k],$$

и сравните явную связь «вход–выход», следующую из применения к этой системе формулы (1.5) (при  $x^0 = 0$ ,  $v[k] = w[k]$ ) и следующую из формулы (4.18) при вычисленных выше весовых коэффициентах. □

**4.3. Установившаяся реакция на типовые воздействия.** Пусть дискретная система устойчива; тогда ее установившейся реакцией на входное воздействие  $\{v[k]\}$  (управление или возмущение) назовем последовательность  $y_\infty[k]$  такую, что

$$|y_\infty[k] - y[k]| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Так же, как для непрерывных систем, доказывается справедливость следующих результатов:

а) если

$$v[k] = e^{i\theta k}, \quad k \geq 0, \quad (4.20)$$

где  $\theta$  — вещественное число, иногда называемое *дискретной частотой*, то

$$y_\infty[k] = H_{vy}(e^{i\theta}) e^{i\theta k}; \quad (4.21)$$

б) если

$$v[k] = a_0 + a_1 k, \quad k \geq 0, \quad (4.22)$$

где  $a_0, a_1$  — константы, то

$$y_\infty[k] = H_{vy}(z)|_{z=1} (a_0 + a_1 k) + \frac{dH_{vy}(z)}{dz}|_{z=1} a_1. \quad (4.23)$$

Функцию  $H_{vy}(e^{i\theta})$ , рассматриваемую как комплекснозначная функция вещественного параметра  $\theta$ , называют *дискретной частотной характеристикой* преобразования «вход-выход». Очевидно, что она 2π-периодична по  $\theta$ .

**Пример 4.2.** Рассмотрим систему из П.4.1. Она устойчива, поскольку корни характеристического многочлена равны  $-0,1; -0,2$ . Пусть  $w[k] = w = \text{const}$ . Тогда по формуле (4.23) имеем

$$y_\infty[k] = H_{wy}(1)w = \frac{1,3}{1,32}w \approx 0,98w.$$

В качестве упражнения получите тот же результат из представления в нормальной форме, считая, что  $x_{1,\infty}[k], x_{2,\infty}[k]$  — константы.

Рассчитаем установившуюся реакцию на воздействие вида

$$w[k] = (-1)^k = e^{i\pi k}.$$

В соответствии с (4.21) получаем

$$y_\infty[k] = H_{wy}(e^{i\pi}) e^{i\pi k} = H_{wy}(-1)(-1)^k = -\frac{0,7}{0,72}(-1)^k. \quad \square$$

**4.4. Установившаяся реакция на стационарные случайные воздействия.** Пусть  $\{v[k]\}$  — центрированная стационарная случайная последовательность с известной корреляционной последовательностью  $R_v[l]$ :

$$R_v[l] \triangleq M\{v[k]v[k+l]\}. \quad (4.24)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$S_v^*(\theta) \triangleq S_v(e^{i\theta}) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} (e^{i\theta})^{-l} R_v(l), \quad (4.25)$$

которую обычно называют *дискретной спектральной плотностью*. Она, очевидно, 2π-периодична по  $\theta$ . Тот же термин употребляют и по отношению к функции

$$S_v(z) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{-l} R_v(l), \quad (4.25')$$

которая определена только при значениях  $z$  на единичном круге, т. е. при  $z = e^{i\theta}$ , и как функция  $\theta$  совпадает с  $S_v^*(\theta)$ .

Для устойчивой системы справедлива формула

$$S_v(z) = |H_{vy}(z)|^2 S_v^*(\theta) \text{ при } z = e^{i\theta}, \quad (4.26)$$

$S_v(e^{i\theta}) \triangleq S_v^*(\theta)$  — спектральная плотность установившейся реакции. Доказательство аналогично приведенному в § 1 гл. 4 для непрерывной системы.

Поскольку  $S_v^*(\theta)$  и корреляционная последовательность  $R_v[l]$  установившейся реакции по определению связаны соотношением

$$S_v^*(\theta) = S_v(e^{i\theta}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_v[l] e^{i\theta l}, \quad (4.27)$$

то

$$\int_0^{2\pi} S_v^*(\theta) d\theta = 2\pi R_v[0],$$

откуда находим выражение дисперсии установившейся реакции

$$D_v \triangleq M\{y^2[k]\} = R_v[0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_v^*(\theta) d\theta. \quad (4.28)$$

**Пример 4.3.** Пусть  $v[k]$  — дискретный «белый шум», т. е.

$$R_v[0] = D_v, \quad R_v[l] = 0, \quad l \neq 0. \quad (4.29)$$

Тогда по формуле (4.25) получаем

$$S_v^*(\theta) = D_v, \quad (4.30)$$

т. е. спектральная плотность дискретного «белого шума» постоянна. Дисперсия установившейся реакции на это воздействие дается формулой

$$D_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_{vy}(e^{i\theta})|^2 S_v^*(\theta) d\theta = \frac{D_v}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_{vy}(e^{i\theta})|^2 d\theta. \quad (4.31)$$

Для вычисления таких интегралов используют либо численные методы, либо специальные приемы теории функций комплексной переменной. Если вернуться к переменной  $z = e^{i\theta}$ , то (4.31) превратится в контурный интеграл (обход против часовой стрелки единичной

окружности в комплексной плоскости  $z$ )

$$D_v = \frac{D_v}{2\pi i} \oint H_{vy}(z) H_{vy}(z^{-1}) \frac{dz}{z}, \quad (4.32)$$

и, согласно теореме Коши, дело сводится к суммированию вычетов в полюсах подынтегрального выражения, лежащих внутри контура.

Для скалярного уравнения

$$y[k+1] - 0,5y[k] = v[k]$$

имеем

$$H_{vy}(z) = \frac{1}{z - 0,5}$$

и из (4.32) следует, что

$$D_v = \frac{D_v}{2\pi i} \oint \frac{z^{-1} dz}{(z - 0,5)(z^{-1} - 0,5)} = \frac{4}{3} D_v. \quad \square$$

**4.5. Решение задачи стабилизации.** Пусть объект описан операторным уравнением

$$\alpha(\zeta)y[k] = \beta(\zeta)u[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.33)$$

возможно измерение выходной последовательности  $y[k]$  и требуется построить стабилизирующую обратную связь, определяемую уравнением

$$l(\zeta)u[k] = -k(\zeta)y[k], \quad (4.34)$$

где  $l(\zeta)$ ,  $k(\zeta)$  — многочлены от  $\zeta$ . Замкнутая система окажется устойчивой, если характеристический многочлен

$$\Delta(z) = \alpha(z)l(z) + \beta(z)k(z) \quad (4.35)$$

будет иметь все корни внутри единичного круга. Как было показано в § 1 гл. 3, при взаимно простых  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$  всегда можно выбирать  $l(z)$ ,  $k(z)$  так, чтобы корни размещались произвольным образом. Подчеркнем однако, что для дискретных систем особо существенно требование *строгой реализуемости* обратной связи

$$n_f \triangleq \deg l(z) \geq \deg k(z) \triangleq m_f, \quad (4.36)$$

поскольку оно совпадает с требованием *неупреждающего характера* обратной связи.

Действительно, запишем (4.34) подробнее:

$$\begin{aligned} u[k+n_f] + l_{n_f-1}u[k+n_f-1] + \dots + l_0u[k] &= \\ &= -k_{m_f}y[k+m_f] - \dots - k_0y[k], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что при невыполнении условия (4.36) для вычисления значения управления в момент  $n_f$ , потребуется знание выхода в будущем, в момент  $m_f > n_f$ , что невозможно.

Вместе с тем из § 3 известно, что при невырожденности объекта, эквивалентной несократимости  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$ , существует реализу-

емая обратная связь, обеспечивающая произвольное расположение корней характеристического многочлена, если его степень равна  $2n$ . При этом из условия

$$\deg \alpha(z) > \deg \beta(z)$$

(только такой случай и рассматривался в § 3!), следует, что возможен выбор обратной связи, при котором выполнено (4.36). Поэтому использование простых алгоритмов из § 1 гл. 3 также возможно, если разумно задана степень  $\Delta(z)^*$ .

**Пример 4.4.** Уравнение объекта дано в виде

$$y[k+2] + 2y[k+1] + 3y[k] = 3u[k+1],$$

так что  $\alpha(z) = z^2 + 2z + 3$ ,  $\beta(z) = 3z$ ,  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Потребуем, чтобы  $\Delta(z) = z^{2n} = z^4$ , непосредственно подбирая коэффициенты многочленов  $l(z)$ ,  $k(z)$ , определяющих вид обратной связи. Из тождества

$$(z^2 + 2z + 3)(z^2 + l_4z + l_0) + 3z(k_1z + k_0) = z^4$$

получаем  $l_0 = 0$ ,  $l_4 = -2$ ,  $k_0 = 2$ ,  $k_1 = 1/3$ , так что обратная связь задается уравнением

$$(\zeta^2 - 2\zeta)u[k] = -\left(\frac{1}{3}\zeta + 2\right)y[k],$$

или

$$u[k+2] = 2u[k+1] - \frac{1}{3}y[k+1] - 2y[k].$$

Попробуем обеспечить  $\Delta(z) = z^3$ . Это удается при  $l(z) = z$ ,  $k(z) = -\frac{2}{3}z - 1$ , т. е. если

$$u[k+1] = \frac{2}{3}y[k+1] + y[k]. \quad \square$$

**4.6. Отработка сигнала и особенности метода компенсации.** Пусть дискретный объект (4.14) управляем обратной связью

$$u[k] = H_f(\zeta)(e[k] + N_e[k]), \quad (4.37)$$

основывающейся на измерениях ошибки  $e[k]$  слежения за желаемым процессом  $y^d[k]$ ,

$$e[k] = y^d[k] - y[k], \quad (4.38)$$

причем измерения искажены помехами  $N_e[k]$ . Структурная схема замкнутой системы дана на рис. 7.3.

Тогда точно так же, как в гл. 3 (§ 3) можно получить формулу

$$e[k] = [1 - H_s(\zeta)]s[k] - H_s(\zeta)N_e[k], \quad (4.39)$$

\* Нетрудно убедиться, что она может быть и меньше  $2n$  (см. ниже, в примере), если допустить использование текущих измерений.

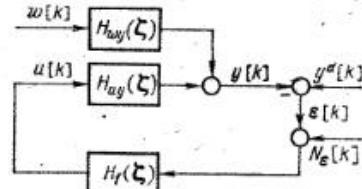


Рис. 7.3

где

$$H_s(\zeta) \triangleq \frac{H_p(\zeta)}{1 + H_p(\zeta)}, \quad H_p(\zeta) \triangleq H_{wy}(\zeta) H_f(\zeta), \\ s[k] \triangleq y^d[k] - H_{wy}(\zeta) w[k].$$

П. ф. замкнутого контура  $H_s(\zeta)$  определяет обе компоненты ошибки — ошибку отработки сигнала  $s[k]$  и ошибку, вызванную наличием помехи  $N_e[k]$ .

Если задана желаемая п. ф.  $H_s^d(\zeta)$ , то по методу компенсации формально может быть найдена п. ф. обратной связи, обеспечивающая тождество

$$H_s(\zeta) \equiv H_s^d(\zeta).$$

Из него получаем полный аналог формулы (3.7) гл. 3

$$H_f(\zeta) = H_{wy}^{-1}(\zeta) \frac{H_s^d(\zeta)}{1 - H_s^d(\zeta)}. \quad (4.40)$$

Повторяя анализ, проведенный в § 3 гл. 3, приходим к аналогичным заключениям о пределах применимости (4.40).

Если потребовать, чтобы

$$H_s^d(\zeta) = \frac{\beta^d(\zeta)}{\alpha^d(\zeta)}, \quad (4.41)$$

где  $\alpha^d(\zeta)$  — многочлен, имеющий корни внутри единичного круга, то выбор обратной связи согласно (4.40) еще не гарантирует устойчивости замкнутой системы, поскольку характеристический многочлен имеет вид (ср. с формулой (3.12) гл. 3)

$$\Delta(z) = \alpha(z)\beta(z)\alpha^d(z). \quad (4.42)$$

Следовательно, метод компенсации непосредственно не применим, если либо числитель  $\beta(z)$ , либо знаменатель  $\alpha(z)$  п. ф. объекта имеют корни, не лежащие внутри единичного круга, т. е. имеют место те же неприятности, связанные с неминимально-фазовостью \*) и неустойчивостью объекта, что и в непрерывном случае.

Дополнительные осложнения связаны с требованием строгой реализуемости обратной связи. Перепишем (4.40) в виде отношения двух многочленов

$$H_f(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)} \frac{\beta^d(\zeta)}{\alpha^d(\zeta) - \beta^d(\zeta)}. \quad (4.43)$$

Если обозначить

$$r = \deg \alpha(\zeta) - \deg \beta(\zeta), \quad r^d = \deg \alpha^d(\zeta) - \deg \beta^d(\zeta),$$

\*) Этот термин в дискретном случае применяется, если числитель п. ф. имеет не все корни внутри единичного круга (в непрерывных задачах — не все корни в левой полуплоскости!).

то для реализуемости необходимо иметь

$$r^d - r \geq 0. \quad (4.44)$$

Условие (4.44) является дополнительным ограничением на выбор желаемой п. ф. замкнутого контура. Его выполнение можно обеспечить, приняв

$$H^d(\zeta) = \frac{\beta^d(\zeta)}{\zeta^r \tilde{\alpha}^d(\zeta)}, \quad (4.45)$$

где  $\tilde{\alpha}^d(\zeta)$ ,  $\beta^d(\zeta)$  имеют одинаковые степени, причем  $\tilde{\alpha}^d(\zeta)$  имеет корни только внутри единичного круга. Выбор п. ф. в виде (4.45) означает, что выход замкнутой системы должен обязательно запаздывать относительно обрабатываемого сигнала на  $r$  тактов \*).

4.7. Выбор оптимальной п. ф. замкнутого контура по условию минимума дисперсии ошибки. Введем предположение о том, что сигнал  $s[k]$  и помеха  $N_e[k]$  являются стационарными центрированными случайными последовательностями, некоррелированными между собой. Тогда, используя формулы (4.26), (4.39), можно найти спектральную плотность установившейся ошибки. Имеем при  $z = e^{i\theta}$ , что

$$S_e(z) = |1 - H_s(z)|^2 S_s(z) + |H_s(z)|^2 S_N(z), \quad (4.46)$$

где  $S_s(z)$ ,  $S_N(z)$  — спектральные плотности  $s[k]$  и  $N_e[k]$  соответственно. Ясно, что для уменьшения первого слагаемого желательно иметь  $H_s(e^{i\theta}) \approx 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , а для уменьшения второго — иметь  $H_s(e^{i\theta}) \approx 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Чтобы разрешить это противоречие, можно попытаться выбрать  $H_s$  такой, чтобы минимизировать дисперсию установившейся ошибки, порожденной обоими факторами.

Поскольку

$$D_E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|1 - H_s(z)|^2 S_s(z) + |H_s(z)|^2 S_N(z)]|_{z=e^{i\theta}} d\theta, \quad (4.47)$$

то приходим к проблеме, аналогичной той, которая рассматривалась в гл. 4, § 2—5. Переходя к переменной интегрирования  $z = e^{i\theta}$ , перепишем (4.47) в виде

$$D_E = \frac{1}{2\pi i} \oint \{ [1 - H_s(z)] [1 - H_s(z^{-1})] S_s(z) + H_s(z) H_s(z^{-1}) S_N(z) \} \frac{dz}{z}. \quad (4.48)$$

Аналитическое решение проблемы минимизации (4.48) можно получить в предположении, что  $S_s(z)$ ,  $S_N(z)$  — дробно-рациональные

\*) Необходимость введения такого запаздывания можно обосновать, рассмотрев, как в § 4 гл. 4, множество всех допустимых п. ф.

функции, представимые в форме

$$S_s(z) = \frac{B_s(z)B_s(z^{-1})}{A_s(z)A_s(z^{-1})}, \quad S_N(z) = \frac{B_N(z)B_N(z^{-1})}{A_N(z)A_N(z^{-1})} \quad (4.49)$$

где  $B_s(z)$ ,  $A_s(z)$ ,  $B_N(z)$ ,  $A_N(z)$  — многочлены, причем  $A_s(z)$ ,  $A_N(z)$  имеют корни только внутри единичного круга.

Приведем результат в виде следующего правила \*) построения оптимальной п. ф., где учтена необходимость ограничить класс п. ф. такими, при которых удовлетворяется условие (4.45), а следовательно, метод компенсации приведет к реализуемой обратной связи.

**Правило.**

1. Произвести факторизацию числителя выражения  $S_s(z) + S_N(z)$ , получив представление

$$\tilde{\Delta}(z)\tilde{\Delta}(z^{-1}) = A_s(z)A_s(z^{-1})B_N(z)B_N(z^{-1}) + A_N(z)A_N(z^{-1})B_s(z)B_s(z^{-1}), \quad (4.50)$$

где  $\tilde{\Delta}(z)$  имеет только «хорошие» корни, т. е. лежащие внутри единичного круга.

2. Произвести сепарацию дробно-рациональной функции

$$\Psi(z) \triangleq z^r \frac{B_s(z)B_s(z^{-1})A_N(z^{-1})}{\tilde{\Delta}(z^{-1})A_s(z)}, \quad (4.51)$$

т. е. выделить из нее дроби, отвечающие «хорошим» полюсам, и обозначить их сумму  $\Psi_+(z)$ .

3. Записать решение в виде

$$H^d(z) = z^{-r} \frac{A_s(z)A_N(z)}{\tilde{\Delta}(z)} \Psi_+(z). \quad (4.52)$$

Если помехи отсутствуют ( $S_N(z) = 0$ ), то

$$\tilde{\Delta}(z) = B_s(z), \quad \Psi(z) = z^r \frac{B_s(z)}{A_s(z)}, \quad H^d(z) = z^{-r} \frac{A_s(z)}{B_s(z)} \Psi_+(z). \quad (4.53)$$

**Пример 4.5.** Требуется найти управление  $u[k]$ , обеспечивающее минимальное значение дисперсии установившейся реакции  $y[k]$  одномерного объекта

$$y[k+1] = ay[k] + u[k-θ] + w[k], \quad θ ≥ 0, \quad |a| < 1,$$

на возмущение  $w[k]$  типа дискретного белого шума,  $S_w(z) = D_w = \text{const}$ . При определении  $u[k]$  считается возможным использовать точные измерения значений  $y[l]$ ,  $l ≤ k$ , или, что то же самое, строить

\*) Доказательство справедливости правила может быть произведено по схеме, аналогичной доказательству Т.2.1 га. 4.

связь в виде

$$u[k] = H_s(\zeta) e[k],$$

где  $e[k] = -y[k]$ ,  $H_s(\zeta)$  — строго реализуемый оператор. В данном случае

$$H_{wy}(\zeta) = \frac{\zeta^{-θ}}{\zeta - a}, \quad H_{wy}(\zeta) = \frac{1}{\zeta - a},$$

причем

$$y^d[k] = 0, \quad s[k] = -H_{wy}(\zeta) w[k], \quad N_t[k] = 0,$$

так что

$$S_s(z) = H_{wy}(z) H_{wy}(z^{-1}) S_w(z) = \frac{D_w}{(z-a)(z^{-1}-a)}, \quad S_N(z) = 0.$$

Поскольку помеха отсутствует, можно воспользоваться простыми формулами (4.53). Имеем

$$B_s(z) = \sqrt{D_w}, \quad \Psi(z) = z^r \frac{\sqrt{D_w}}{z-a}, \quad \Psi_+(z) = a^r \frac{\sqrt{D_w}}{z-a}, \quad H^d(z) = \left(\frac{a}{z}\right)^r.$$

Найдем п. ф. обратной связи по методу компенсации, т. е. по формуле (4.40):

$$H_f(z) = (z-a) z^0 \frac{a^r}{z^r-a^r}.$$

Убеждаемся, что, приняв  $r = θ + 1$ , обеспечим строгую реализуемость, причем

$$H_f(z) = \frac{(z-a) a^θ z^θ}{z^{θ+1} - a^{θ+1}} = \frac{az^θ}{\left(\frac{z}{a}\right)^θ + \left(\frac{z}{a}\right)^{θ-1} + \dots + 1} = \frac{k(z)}{l(z)}.$$

Теперь можно окончательно записать уравнение обратной связи в операторной форме

$$l(\zeta) u[k] = -k(\zeta) y[k]$$

или

$$a^{-θ} u[k+θ] + a^{-(θ-1)} u[k+θ-1] + \dots + u[k] = -ay[k+θ].$$

Сдвинем нумерацию, заменив  $k+θ$  на  $k$ . Тогда

$$u[k] + au[k-1] + \dots + a^θ u[k-θ] = -a^{θ+1} y[k],$$

или

$$u[k] = -a^{θ+1} y[k] - \sum_{l=1}^θ a^l u[k-l].$$

Эта форма записи особо удобна при реализации закона управления, поскольку текущее значение  $u[k]$  вычисляется на основе полученного измерения  $y[k]$  и сохраняемых в памяти значений управления в прошлом (на  $θ$  тактов назад).

Использование такого управления обеспечивает, что  $\varepsilon[k] = [1 - H^d(\xi)]s[k]$ .

Согласно приведенным выше обозначениям, получаем

$$y[k] = [1 - a^{n+1}\xi^{-(\theta+1)}](\xi - a)^{-1}w[k],$$

откуда

$$\xi y[k] = (1 + a\xi^{-1} + \dots + (a\xi^{-1})^\theta)w[k] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y[k+1] = w[k] + aw[k-1] + \dots + a^\theta w[k-\theta].$$

При  $\theta = 0$  имеем простейшие формулы

$$u[k] = -ay[k], \quad y[k+1] = w[k],$$

которые можно сразу установить по исходному уравнению

$$y[k+1] = ay[k] + u[k] + w[k].$$

Поскольку  $w[k]$ ,  $w[k-1]$ ,  $w[k-\theta]$  взаимно некоррелированы и имеют одинаковую дисперсию  $D_w$ , то

$$D_y = D_w + a^2 D_w + \dots + a^{2\theta} D_w = \frac{1 - a^{2(\theta+1)}}{1 - a^2} D_w,$$

где под  $D_y$  подразумевается дисперсия  $y[k]$  в установившемся режиме, причем этот режим заведомо устанавливается при  $k > \theta$ .  $\square$

Приведенный пример показывает, что при отсутствии помех (точные измерения) и  $y^\theta[k] = 0$  легко найти управление, обеспечивающее минимальную дисперсию в установившемся режиме.

В некоторых случаях можно указать еще более простые рецепты построения закона управления. Пусть, например, описание объекта приведено к виду

$$\alpha(\xi)y[k] = \beta(\xi)u[k] + \beta_w(\xi)w[k], \quad (4.54)$$

причем

$$\deg \alpha(\xi) = \deg \beta_w(\xi) = n, \quad \deg \beta(\xi) = n-1, \quad \alpha_n = \beta_{wn} = 1,$$

многочлены  $\beta$ ,  $\beta_w$  устойчивы, а  $\{w[k]\}$  — белый шум. Тогда, выбрав закон управления в реализуемом виде

$$\beta(\xi)u[k] = [\alpha(\xi) - \beta_w(\xi)]y[k], \quad (4.55)$$

приходим к системе, где выход  $y$  определяется уравнением

$$\beta_w(\xi)(-y[k] + w[k]) = 0. \quad (4.56)$$

В силу устойчивости  $\beta_w$  при  $k \rightarrow \infty$  приходим к установившемуся режиму, где на любой реализации

$$-y[k] + w[k] = 0 \Rightarrow D_y = D_w. \quad (4.57)$$

Очевидно, что это значение  $D_y$  минимально, причем устойчивость гарантирует ограниченность дисперсии управления.

**4.8. Построение точной дискретной модели по заданному операторному описанию непрерывной системы.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Пусть связь между управляемым входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$  объекта задана с помощью п. ф.  $H_{uy}(\mathbf{D})$ :

$$y(t) = H_{uy}(\mathbf{D})u(t). \quad (4.58)$$

Пусть  $u(t)$  организовано как импульсное управление, т. е.

$$u(t) = u[k]p(t - k\tau_0), \quad k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0, \quad (4.59)$$

где  $\tau_0$  — заданный период чередования импульсов,  $p(t)$  — заданная форма импульса. Требуется найти оператор  $H_{uy}^*(\xi)$  такой, что

$$y[k] = H_{uy}^*(\xi)u[k], \quad y[k] \triangleq y(k\tau_0), \quad (4.60)$$

т. е. найти п. ф. точной дискретной модели объекта.

Принципиальная схема решения этой задачи известна:

а) перейти от операторного описания (4.58) к нормальной форме согласно правилам § 1 гл. 6;

б) построить точную дискретную модель в нормальной форме согласно правилам § 3 данной главы;

в) найти п. ф. дискретной модели по формуле (4.6), подставив в нее вместо матриц  $A$ ,  $B$  матрицы  $A^*$ ,  $B^*$ , вычисленные в п. б).

Однако эту громоздкую процедуру обычно можно заменить вычислением по следующей простой формуле.

**Правило.** Пусть  $H_{uy}(\mathbf{D})$  — строго реализуемая п. ф., представляемая в виде <sup>\*</sup>\*)

$$H_{uy}(\mathbf{D}) = c_0 + \sum_{v=1}^n c_v \frac{1}{D - \lambda_v}, \quad c_0, c_v — \text{константы}. \quad (4.61)$$

Тогда п. ф. точной дискретной модели дается формулой

$$H_y^*(\xi) = c_0 p(0) + \sum_{v=1}^n c_v \frac{p_v}{\xi - e^{\lambda_v \tau_0}}, \quad (4.62)$$

где

$$p_v = \int_0^{\tau_0} e^{\lambda_v(\tau_0 - \tau)} p(\tau) d\tau.$$

Доказательство справедливости (4.62) сводится к проведению описанной процедуры в общем виде. Согласно (4.61) можно ввести переменные состояния  $x_v$ ,  $v = 1, \dots, n$ , такие, что

$$Dx_v(t) = \lambda_v x_v(t) + u(t), \quad v = 1, \dots, n, \quad (4.63)$$

$$y(t) = \sum_{v=1}^n c_v x_v(t) + c_0 u(t). \quad (4.64)$$

\*) Если полюсы  $H_{uy}$  — кратные, то (4.61) несправедливо. В этом случае необходимый результат можно получить предельным переходом в (4.62), вводя предварительно малое расхождение между полюсами.

Тем самым произведено преобразование к нормальной форме с матрицами  $A = \text{diag}\{\lambda_v, v = 1, \dots, n\}$  и  $B = (1, 1, \dots, 1)$ .

Согласно Т.3.1 имеем:

$$x_v[k+1] = e^{\lambda_v T_0} x_v[k] + \int_0^{T_0} e^{\lambda_v(T_0-t)} p(t) dt u[k] = e^{\lambda_v T_0} x_v[k] + p_v u[k],$$

или, в операторном виде,

$$x_v[k] = \frac{p_v}{\zeta - e^{\lambda_v T_0}} u[k]. \quad (4.65)$$

Поскольку

$$y[k] \triangleq y(kT_0) = \sum_{v=1}^n c_v x_v(kT_0) + c_0 u(kT_0) = \sum_{v=1}^n c_v x_v[k] + c_0 p(0) u[k],$$

то подстановка в это выражение (4.65) доказывает (4.62). ■

**Пример 4.6.** Если связь «управление — выход» дана уравнением

$$D(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)y(t) = u(t)$$

и используется импульсное управляющее воздействие с фиксатором, т. е.  $p(t) = 1$ ,  $0 \leq t < T_0$ , то формула (4.62) позволяет найти уравнение, определяющее связь значений  $u[k]$  со значениями выхода  $y[k] = y(kT_0)$ . Пусть  $T_0 = 1$ . Тогда:

$$a) H_{uy}(D) = \frac{1}{D(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)} = \frac{c_1}{D - \lambda_1} + \frac{c_2}{D - \lambda_2} + \frac{c_3}{D - \lambda_3},$$

где  $\lambda_1 = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{T_1}$ ,  $c_2 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{1}{T_2}$ ,  $c_3 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ ;

$$b) p_1 = 1, p_2 = T_1(1 - e^{-1/T_1}), p_3 = T_2(1 - e^{-1/T_2});$$

$$b) H_{uy}^*(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta - 1} + \frac{c_2 T_1 (1 - e^{-1/T_1})}{\zeta - e^{-1/T_1}} + \frac{c_3 T_2 (1 - e^{-1/T_2})}{\zeta - e^{-1/T_2}} =$$

$= \frac{\beta_2 \zeta^2 + \beta_1 \zeta + \beta_0}{\zeta^3 + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_1 \zeta + \alpha_0}$ , где коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  легко подсчитываются;

$$g) y[k+3] + \alpha_2 y[k+2] + \alpha_1 y[k+1] + \alpha_0 y[k] = \\ = \beta_2 u[k+2] + \beta_1 u[k+1] + \beta_0 u[k]. \quad \square$$

**4.9. Решение задачи слежения с помощью импульсной обратной связи.** Пусть требуется, чтобы выход объекта  $y(t)$  с малой ошибкой  $e(t)$  отслеживал желаемый процесс  $y^d(t)$ .

Допускается построение импульсной обратной связи, основанной на измерениях ошибки  $e(t)$  в моменты времени  $t_k = kT_0$ , искаженных помехами  $N(t)$ . Обозначим  $e[k] \triangleq e(kT_0)$ ,  $N[k] = N(kT_0)$  и попытаемся разыскивать дискретную п. ф.  $H_i(\zeta)$ , определяющую

импульсное управление с обратной связью по ошибке по формуле

$$u[k] = H_i(\zeta)(e[k] + N[k]), \quad (4.66)$$

причем само управляющее воздействие  $u(t)$  формируется по  $u[k]$  согласно (4.59).

Структурная схема такой гибридной системы, включающей непрерывную и дискретную части, представлена на рис. 7.4, где введен символ «ключа», периодически замыкающегося для ввода результата измерения в дискретный преобразователь, а также блок  $M$ , описывающий операцию модуляции, т. е. сопоставления последовательности  $\{u[k]\}$  процесса  $u(t)$  по формуле (4.59).

По определению

$$\begin{aligned} e(t) &= y^d(t) - y(t) = \\ &= y^d(t) - H_{uy}(D)w(t) - H_{uy}(D) \times \\ &\quad \times u(t) \triangleq s(t) - y_u(t), \end{aligned} \quad (4.67)$$

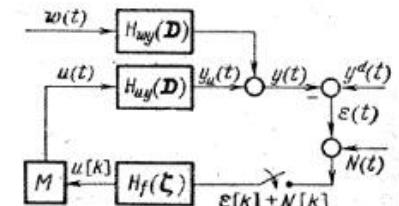


Рис. 7.4

где  $s(t)$  — отрабатываемый сигнал, а  $y_u = H_{uy}(D)u(t)$  — реакция объекта на управляющее воздействие. Имеем также, что

$$\begin{aligned} e[k] &\triangleq e(kT_0) = s(kT_0) - y_u(kT_0) \triangleq s[k] - y_u[k] = \\ &= s[k] - H_{uy}^*(\zeta)u[k], \end{aligned} \quad (4.68)$$

причем п. ф. точной дискретной модели  $H_{uy}^*(\zeta)$  может быть найдена по  $H_{uy}(D)$  с помощью формулы (4.62). Объединяя (4.66), (4.68), приходим к стандартной формуле типа (4.39)

$$e[k] = [1 - H_s(\zeta)]s[k] - H_s(\zeta)N[k],$$

где  $H_s(\zeta) = H_p(\zeta)[1 + H_p(\zeta)]^{-1}$ , но п. ф. разомкнутого контура  $H_p(\zeta)$  определяется через п. ф. точной дискретной модели объекта:

$$H_p(\zeta) = H_{uy}^*(\zeta)H_f(\zeta).$$

Тем самым задача импульсного управления непрерывным объектом формально сведена к задаче управления дискретной системой и далее можно обратиться к алгоритмам, описанным выше в пп. 4—6.

Однако следует иметь в виду обстоятельство, уже отмечавшееся в § 3: формальное сведение является неполным, ввиду различия целей управления непрерывными и дискретными объектами. Действительно, во втором случае достаточно обеспечить малость ошибки только в дискретные моменты  $t_k = kT_0$ , а в первом — требуется обеспечить малость ошибки в любой момент  $t$ !

В дополнение к уже высказанным в конце § 3 качественным соображениям отметим лишь следующий простой факт: если  $s(t) = a_s \sin \omega t$ , то  $s[k] = a_s \sin \omega T_0 k$ , так что в периодической (с перио-

дом  $\tau_0$ ) выборке не проявляются гармоники с частотой, кратной  $\omega_0/2$ , где  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$ . Следовательно, импульсная обратная связь не реагирует на их наличие, и ошибка может оказаться сколь угодно большой, если сколь угодно велики их амплитуды.

**Вывод:** если сигнал представляет собой гармонический процесс, частота которого неизвестна и может принимать любое значение  $\omega$ , из диапазона  $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$ , то период чередования импульсов должен быть меньше, чем  $\pi/\bar{\omega}_*$ .\*).

Отметим в заключение, что на основе гипотезы о гармоническом характере сигналов и помех может быть развит систематический подход к синтезу импульсной обратной связи, аналогичный методу ЛАХ в теории непрерывных систем (см., например, [3.1]).

\*.) При более сложной гипотезе о характере процесса  $s(t)$  (гипотезе ограниченности фурье-спектра) аналогичный вывод следует из классической теоремы Котельникова — Шеннона в теории связи [7.4].

## ГЛАВА 8

### АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### § 1. Описание системы. Равновесные состояния

**1.1. Описание в пространстве состояний.** Основная цель данной главы — анализ особенностей поведения системы управления, вызываемых нелинейным характером связей между переменными, определяющими состояние как самого объекта, так и управляющих устройств.

Будем предполагать, что выбраны координаты  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , значения которых в каждый момент времени  $t$  полностью определяют скорости их изменения  $\dot{x}$  в тот же момент времени

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (1.1)$$

Это позволяет так же, как в гл. 6, назвать вектор  $x(t)$  вектором состояния системы в момент  $t$ . Однако в отличие от гл. 6 допускаем, что вектор-функция  $f(x, t)$  может нелинейно зависеть от состояния  $x$ , и будем интересоваться именно качественными особенностями процессов изменения состояния, связанными с нелинейностью. Соотношение (1.1) в скалярной записи

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n, t), \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет форму системы  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка. Если фиксированы начальные условия

$$x(t^0) = (x_1(t^0), \dots, x_n(t^0)) = x^0, \quad (1.2)$$

то можно пытаться прогнозировать дальнейшее (при  $t > t^0$ ) изменение состояния, интегрируя эту систему. Однако каких-либо общих методов точного интегрирования нелинейных систем не существует. Численное интегрирование на ЭВМ осуществляется только для каждого конкретного задания начальных условий. Более того, не исключено накопление ошибок, связанных с переходом от (1.1) к конечноразностной схеме, используемой в любом методе численного интегрирования. Поэтому для задач анализа систем управления с обратной связью, когда задано лишь множество (обычно бесконечное) возможных начальных условий, особую роль играют методы теории дифференциальных уравнений, с помощью которых

характеризуются качественные особенности решений, соответствующих всем возможным начальным условиям, а иногда и целим классам функций  $f(x, t)$ , если не полностью определен характер этих функций.

**1.2. Равновесные состояния и их устойчивость.** Так же, как в гл. 5, начнем с выявления равновесных состояний\*).

**Определение.** Любое частное решение  $x(t) = \hat{x} = \text{const}$  называется *равновесным состоянием* системы (1.1).

Разыскание равновесного состояния сводится к нахождению постоянного вектора  $\hat{x}$ , удовлетворяющего при всех  $t$  уравнению

$$f(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

В системе может не существовать ни одного равновесного состояния, существовать только одно или множество таковых. Это ясно на примере линейной системы:

$$\dot{x} = A(t)x + r(t). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) является в этом случае линейным алгебраическим уравнением

$$-A(t)x = r(t). \quad (1.5)$$

Оно, как правило, не имеет ни одного постоянного решения. Однако, если  $r(t) = 0$ , то имеется решение  $\hat{x} = 0$ . Если  $A$ ,  $r$  постоянны и  $A$  — неособая матрица, то имеется единственное решение  $\hat{x} = -A^{-1}r$ . Если  $A$  особая матрица, а  $r = 0$ , то имеется множество решений, соответствующих множеству равновесных состояний. В общем случае задача вычисления всех равновесных состояний или даже проверки того, существует ли хоть одно такое, нетривиальна, и для ее решения нет общих конструктивных приемов. Численные методы позволяют с высокой точностью выявить одно или некоторые равновесные состояния, если они, конечно, существуют.

Предположим, однако, что эта задача решена и найдено какое-либо равновесное состояние. Возникает вопрос об его устойчивости. Для линейных систем (гл. 2, 6) вводились специальные определения этого понятия, для простейших нелинейных систем (гл. 5) мы ограничивались полуинтуитивными представлениями.

Теперь можно дать строгие определения понятия устойчивости, следуя схеме, впервые введенной А. М. Ляпуновым в 1892 г.\*\*).

\* ) Связь между задачами, рассматриваемыми в данной главе и гл. 5, подробно описывается в § 2.

\*\*) В настоящее время имеется огромная литература, посвященная математической теории устойчивости. Далее излагаются лишь отдельные фрагменты этой теории, особо важные для решения задач управления. Углубленное изучение требует знакомства со специальными курсами (см., например, [8.3, 8.7]). Наиболее «физичное» описание проблем устойчивости и вообще анализа нелинейных систем дано в классической книге [8.1].

При этом удобно принять исследуемое равновесное состояние за начало отсчета, положив  $\hat{x} = 0$ .

Решение уравнения (1.1) при условии (1.2) обозначим  $x(t, t^0, x^0)$ .

**Определение 1.** Решение  $\hat{x} = 0$  называется *устойчивым (по начальным условиям)*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta(\varepsilon, t^0) > 0$  такое, что

$$|x(t, t^0, x^0)| \leq \varepsilon, \quad t \geq t^0, \quad (1.6)$$

при всех  $x^0$ , удовлетворяющих условию

$$|x^0| < \delta(\varepsilon, t^0). \quad (1.7)$$

В противном случае  $\hat{x}$  *неустойчиво*.

**Определение 2.** Решение  $\hat{x} = 0$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво, а кроме того, для любого  $t^0$  существует такое  $\delta(t^0)$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t^0, x^0)| = 0 \text{ при } |x^0| < \delta(t^0). \quad (1.8)$$

**Определение 3.** Решение  $\hat{x} = 0$  *асимптотически устойчиво по отношению к множеству  $X^0$  начальных условий*, называемому областью притяжения этого решения, если при любых конечных  $t^0$  и  $x^0 \in X^0$  решение  $x(t, t^0, x^0)$  ограничено и выполнено (1.8). Если область притяжения совпадает со всем пространством состояний, то решение  $\hat{x} = 0$  называется *асимптотически устойчивым в целом* (глобально устойчивым).

Проиллюстрируем эти определения применительно к решению  $\hat{x} = 0$  линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.9)$$

где  $A = \text{const}$ . Тогда

$$x(t, t^0, x^0) = e^{At-t^0}x^0. \quad (1.10)$$

Из спектрального представления матричной экспоненты следует, что решение  $x = 0$

а) асимптотически устойчиво в целом, если все с. ч. матрицы  $A$  лежат в левой полуплоскости;

б) неустойчиво, если хотя бы одно с. ч. лежит справа от мнимой оси.

В случаях, когда все с. ч. слева, кроме некоторых, лежащих на мнимой оси (критические случаи), возможна как устойчивость, так и неустойчивость, но при отсутствии кратных с. ч. устойчивость (не асимптотическая!) гарантирована.

\*) Здесь и далее предполагается единственность решения,

**Пример 1.1.** Пусть имеется одно (скалярное) уравнение

$$\dot{x}_1 = 0.$$

При этом матрица  $A$  имеет нулевое с. ч. Тогда  $x_1(t, t^0, x^0) = x^0$ . Очевидно, что решение  $\hat{x} = 0$  устойчиво, но не асимптотически (в определении (1.6), (1.7) можно принять  $\delta = \epsilon$ ).

Пусть теперь имеется система

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

При этом матрица  $A$  имеет двукратное нулевое с. ч. Вновь ясно, что устойчивость имеет место. Однако если система имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

то, хотя матрица  $A$  имеет те же с. ч., равновесие неустойчиво:

$$x_1(t, t^0, x^0) = (t - t^0)x_2^0 + x_1^0, \quad x_2(t, t^0, x^0) = x_2^0,$$

и при любом  $x_2^0 \neq 0$  найдется такое  $t$ , что  $x(t, t^0, x^0)$  «уйдет» от решения  $\hat{x} = 0$  больше, чем на любое заданное постоянное  $\epsilon$ , указанное в определении.  $\square$

Таким образом, введенное ранее в гл. 6 определение устойчивости линейной системы (1.9) по начальным условиям соответствует понятию асимптотической устойчивости в целом ее единственного равновесного состояния  $\hat{x} = 0$ . Обобщая, можно записать:

**Определение 4.** Система (1.1) называется *устойчивой (по начальным условиям)*, если она имеет единственное равновесное состояние, и это состояние асимптотически устойчиво в целом.

Предположим далее, что описание системы дано в виде

$$\dot{x} = f(x, t) + r(t), \quad (1.1)$$

причем  $r(t)$  интерпретируется как внешнее воздействие (возмущение), приложенное к исходной системе, описываемой уравнением (1.1).

**Определение 5.** Система (1.1) называется *устойчивой по отношению к внешним воздействиям*, если она имеет единственное равновесное состояние  $\hat{x} = 0$  и при любых ограниченных  $r(t)$  и нулевом начальном условии решение возмущенной системы (1.1) остается ограниченным при  $t > t^0$ .

Очевидно, что для линейных систем это определение совпадает с приведенным ранее.

Как уже указывалось, устойчивость по отношению к начальным условиям и устойчивость по отношению к внешним воздействиям обычно являются желательными свойствами систем управления.

Однако, если первое из них не удается гарантировать, можно выдвигать и более слабые требования.

**Определение 6.** Система (1.1) называется *сходящейся\** в окрестность  $\hat{X}$  равновесия,  $\hat{x} = 0 \in \hat{X}$ , если при любых конечных  $t^0, x^0$  выполняется условие

$$x(t, t^0, x^0) \in \hat{X}, \quad t \geq t^* \geq t^0, \quad (1.12)$$

причем, если  $x^0 \in \hat{X}$ , то  $t^* = t^0$ .

Иначе говоря, любая траектория изменения состояния не позже чем к моменту  $t^*$  попадет в  $\hat{X}$ , а единожды попав, не выйдет из нее (рис. 8.1).

Конечно, тот факт, что система является сходящейся, полезен практически, только если его можно установить по отношению к множеству  $\hat{X}$  достаточно малого «объема».

Неединственность состояния равновесия типична для многих нелинейных систем, причем в ряде ситуаций практически безразлично, к какому равновесному состоянию придут процессы в системе. (Это, в частности, имеет место при достаточно малой зоне нечувствительности датчиков — см. § 2 гл. 5.)

Поэтому полезное развитие понятия устойчивости дает и следующее определение.

**Определение 7.** Пусть  $\hat{X}$  — множество равновесных состояний системы (1.1). Тогда  $\hat{X}$  называется *поточечно асимптотически устойчивым в целом*, если при любых конечных  $t^0, x^0$  решение  $x(t, t^0, x^0)$  является ограниченным и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t^0, x^0) = \hat{x}, \quad (1.13)$$

где  $\hat{x}$  — какая-либо точка из  $\hat{X}$  (вообще говоря, различная для различных начальных условий (рис. 8.2)).

Еще раз подчеркнем, что все данные определения устойчивости содержат слова «при любых», а поэтому проверка выполнения их условий невозможна путем численного интегрирования.

**1.3. Метод функций Ляпунова.** Принципиальный путь проверки выполнения условий устойчивости был указан А. М. Ляпуновым и известен как *второй метод Ляпунова или метод функций Ляпунова*.

Приведем основной результат в наиболее простой форме \*\*).

\* В многих работах здесь используется термин «диссипативная система» [8.6, 8.7].

\*\*) Теорема 1.1 обычно называется *второй теоремой Ляпунова* с дополнением Барбашина — Красовского, касающимся устойчивости в целом. Под  $\partial V / \partial x$  здесь и далее понимается вектор (матрица-столбец) с элементами  $\partial V / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

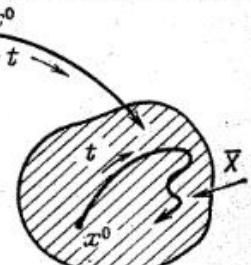


Рис. 8.1

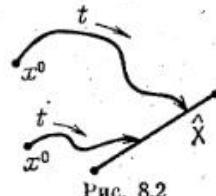


Рис. 8.2

**Теорема 1.1.** Пусть существует дифференцируемая скалярная функция  $V(x)$  переменных состояния системы вида (1.1) с  $f(x, t) = f(x)$ , обладающая при  $|x| \leq h = \text{const}$  следующими свойствами:

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) \leq 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (1.15)$$

Тогда состояние равновесия  $\hat{x} = 0$  является устойчивым (по начальным условиям).

Если условие (1.15) заменить на более жесткое:

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0, \quad x \neq 0, \quad |x| \leq h, \quad (1.16)$$

то имеет место асимптотическая устойчивость.

Если условия (1.14), (1.16) выполнены при любых  $x$ , а кроме того,

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

то  $\hat{x} = 0$  асимптотически устойчиво в целом.

**Доказательство.** Рассмотрим сферу  $|x| = \varepsilon \leq h$  (см. двумерную иллюстрацию на рис. 8.3). По теореме Вейерштрасса непрерывная функция  $V(x)$  достигает минимума  $V(x^*) = \alpha$  в некоторой точке  $x^*$  на сфере, причем в силу (1.14)  $\alpha > 0$ . С учетом непрерывности  $V(x)$  и (1.14) устанавливаем, что существует  $\delta < \varepsilon$  такое, что

$$0 \leq V(x) < \alpha \quad \text{при } |x| < \delta.$$

Рассмотрим произвольное решение системы (1.1), начинающееся из точки  $x(t^0)$ ,  $|x(t^0)| < \delta$ , и докажем, что  $|x(t)| < \varepsilon$  при  $t \geq t^0$ .

Предположим, что это не так, и  $t^1$  — первый момент выхода решения на сферу:

$$|x(t^1)| = \varepsilon.$$

Изучим поведение функции  $V[x]$  на этом решении, т. е. функцию  $v(t) \triangleq V[x(t)]$ . В силу (1.15) эта функция невозрастающая, а следовательно,

$$\alpha > V[x(t^0)] \geq V[x(t^1)] \geq \alpha.$$

Противоречие доказывает, что решение не может выйти из сферы  $|x| \leq \varepsilon$ , т. е. имеет место устойчивость.

При условии (1.16) функция  $v(t)$  монотонно убывает и, будучи ограниченной снизу, стремится к пределу  $v_\infty \geq 0$ . Почти очевидно, что  $v_\infty = 0$ . Действительно, предположим противное:

$$v_\infty > 0 \Rightarrow |x(t)| \geq \beta > 0, \quad t > t^0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} \leq -\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$V[x(t)] \leq V[x(t^0)] - \gamma t, \quad t \geq t^0,$$

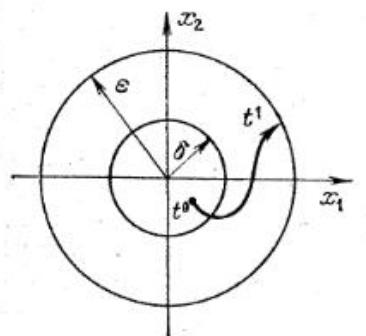


Рис. 8.3

что противоречит положительности функции  $V$ . Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t)] = 0,$$

откуда сразу следует асимптотическая устойчивость

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (1.18)$$

Дополнительное условие (1.17) позволяет установить, что, каково бы ни было  $x(t^0) = x^0$ , найдется такое  $R$ , что

$$V(x) > V(x^0) = v_0 \quad \text{при } |x| \geq R.$$

В силу (1.16)

$$V[x(t)] \leq V[x^0] = v_0 \Rightarrow |x(t)| \leq R,$$

т. е. все решения ограничены.

После этого установление (1.18) производится так же, как и выше. ■

Аналогично можно указать, какими свойствами должна обладать функция Ляпунова, для того чтобы выполнились условия других определений. Приведем, например, следующий результат.

**Теорема 1.2.** Пусть равновесное множество  $\hat{X}$  системы (1.1) ограничено. Пусть на  $\hat{X}$  и в его  $h$ -окрестности определена дифференцируемая функция  $V(x)$ , обладающая свойствами:

$$V(x) > 0 \quad \text{при } x \text{ из } h\text{-окрестности } \hat{X},$$

$$V(x) = 0 \quad \text{при } x \text{ из } \hat{X},$$

$\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$  на любом решении  $x(t, t^0, x^0)$ , пока его значения лежат в окрестности  $\hat{X}$ .

Тогда множество  $\hat{X}$  устойчиво (по начальным условиям). При замене последнего условия на строгое неравенство имеет место асимптотическая устойчивость. При распространении условий на все пространство гарантируется устойчивость в целом \*). ■

Вообще любому осмысленному определению устойчивости можно сопоставить соответствующую теорему ляпуновского типа, причем доказательство таких теорем настолько стандартизовано, что осуществимо даже с помощью логических программ ЭВМ. На самом деле ясно, что само значение функции Ляпунова является некоторым обобщенным расстоянием до множества, устойчивость которого изучается, и обеспечение ее убывания служит гарантией приближения к этому множеству, и, напротив, возможность возрастания хотя бы по некоторой «щели», примыкающей к этому множеству, свидетельствует о неустойчивости \*\*).

Действительно сложные проблемы возникают, когда приходится переходить к построению функций Ляпунова с требуемыми свойствами.

\*.) В [8.6, с. 193] Т.1.2 дана в более гибкой, но и более сложной формулировке.

\*\*) Страгая формулировка соответствующего факта называется теоремой Четаева [8.7, с. 246].

## § 2. Построение функций Ляпунова и критерии устойчивости

**2.1. Квадратичная функция Ляпунова.** Наиболее простым обобщением величины отклонения от нулевого состояния является положительно определенная квадратичная форма от переменных состояния.

Такая мера отклонения от нуля неоднократно использовалась в гл. 5. Поэтому естественно попытаться использовать при исследовании устойчивости состояния равновесия функцию Ляпунова вида

$$V(x) = x^T Px, \quad (2.1)$$

где  $P$  — положительно определенная матрица. Вычислим ее производную в силу уравнений

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.2)$$

Имеем

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x^T P f(x).$$

В силу теоремы 1.1 и определения 4 в § 1, система (2.2) является устойчивой (по начальным условиям), если  $\hat{x} = 0$  — единственное решение уравнения

$$f(x) = 0$$

и для всех  $x \neq 0$  выполнено условие

$$2x^T Pf(x) < 0. \quad (2.3)$$

Отнюдь не при любых  $f(x)$  удается выбрать параметры функции Ляпунова, т. е. элементы положительно определенной матрицы  $P$  так, чтобы (2.3) выполнилось при любых  $x$ .

Выясним первоначально, возможно ли это по крайней мере для линейных систем, где

$$f_0(x) = Ax \quad (2.4)$$

и  $A$  — постоянная неособая матрица, так что  $\hat{x} = 0$  — единственное равновесное состояние.

Условие (2.3) записывается так:

$$2x^T PAx = x^T [A^T P + PA]x < 0, \quad x \neq 0.$$

Оно выполняется, если

$$A^T P + PA = -G, \quad (2.5)$$

где  $G$  — любая положительно определенная матрица. Таким образом, задавшись какой-либо матрицей  $G$ , например

$$G = \alpha I, \quad \alpha > 0,$$

найдя из линейного уравнения (2.5) матрицу  $P$  и установив ее положительную определенность ( $P > 0$ ), мы докажем устойчивость

состояния равновесия  $\hat{x} = 0$  системы

$$\dot{x} = Ax.$$

Этот путь доказательства устойчивости известен под названием **матричного критерия Ляпунова**. Но ведь нам известен другой критерий: для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все с. ч. матрицы  $A$  лежали в левой полуплоскости. Оказывается, что эти два критерия формально эквивалентны.

**Лемма 2.1 (лемма Ляпунова).** Уравнение (2.5) имеет (при  $G > 0$ ) положительно определенное решение тогда и только тогда, когда все с. ч. матрицы  $A$  лежат в левой полуплоскости.

**Доказательство.** Если  $A$  имеет «хорошие» с. ч., то существует матрица

$$J = \int_0^\infty e^{At} Ge^{At} dt$$

(все элементы подынтегрального выражения экспоненциально убывают). Имеем

$$A^T J = \int_0^\infty A^T e^{At} Ge^{At} dt = e^{A^T t} Ge^{At} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{A^T t} Ge^{At} A dt,$$

или

$$A^T J = -G - JA,$$

т. е.  $J$  является решением (2.5). Имеем также

$$G > 0 \Rightarrow J > 0,$$

поскольку

$$(x^0)^T J x^0 = \int_0^\infty (x^0)^T e^{At} Ge^{At} x^0 dt = \int_0^\infty [y(t)]^T Gy(t) dt > 0,$$

$$y(t) \triangleq e^{At} x^0,$$

так как

$$x^0 \neq 0 \Rightarrow y(t) \neq 0 \Rightarrow y^T(t) Gy(t) > 0$$

при любых  $t \geq 0$ .

С другой стороны, существование положительно определенного решения уравнения (2.5), как уже было показано, достаточно для обеспечения устойчивости в целом, но таковая имеет место, только если все с. ч. матрицы  $A$  «хороши». ■

Непосредственно матричный критерий используется редко, но его связь с возможностью построения функции Ляпунова важна, поскольку он может быть использован как промежуточный результат при установлении условий устойчивости нелинейных систем.

**Теорема 2.1 (теорема Ляпунова — Пуанкаре об устойчивости по линейному приближению).** Пусть  $\hat{x} = 0$  — равновесное состояние

системы (2.2) и правая часть представима в виде

$$f(x) = Ax + f_1(x), \quad (2.6)$$

причем

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{|x|} = 0 \quad (2.7)$$

и  $A$  — имеет только «хорошие» с. ч. Тогда  $\hat{x} = 0$  — асимптотически устойчивое состояние равновесия.

**Доказательство.** Построим

$$V(x) = x^T Px,$$

причем в силу леммы можно взять такое  $P > 0$ , что

$$G = -[A^T P + PA] > 0.$$

Вычислим производную  $V$  на решениях системы

$$\dot{x} = Ax + f_1(x).$$

Имеем

$$\dot{V} = 2x^T P[Ax + f_1(x)] = x^T[A^T P + PA]x + 2x^T Pf_1(x) = -x^T Gx + 2x^T Pf_1(x).$$

В силу (2.7) найдется такое  $h > 0$ , что

$$-x^T Gx < 0 \Rightarrow -x^T Gx + 2x^T Pf_1(x) < 0 \text{ при } |x| \leq h,$$

т. е. выполнены условия Т.4.1, обеспечивающие асимптотическую устойчивость. ■

**Теорема 2.1** зачастую трактуется как фундаментальное обоснование приема линеаризации (по Тейлору) «гладких» нелинейностей и тем самым — в качестве «оправдания» использования линейных моделей для приближенного описания реальных систем. Очевидно вместе с тем, что это далеко не достаточное обоснование: «грубым» по отношению к гладким нелинейным возмущениям оказывается лишь «локальное» свойство асимптотической устойчивости. Более сильные результаты можно получить только для нелинейных систем специального типа.

**2.2. Системы с безынерционными нелинейностями.** В рамках теории управления, как уже указывалось в гл. 5, значительный интерес представляет описание систем в виде структур, включающих линейные динамические звенья и нелинейные статические (безынерционные) звенья. На языке пространства состояний такие структуры могут быть описаны с помощью уравнений, введенных А. И. Лурье в книге [8.10], сыгравшей основополагающую роль в развитии теории устойчивости систем управления.

Уравнения в форме Лурье имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (2.8)$$

$$\sigma = Cx, \quad (2.9)$$

$$v = f(\sigma), \quad (2.10)$$

где  $A, B, C$  — постоянные матрицы, а  $f(\sigma)$  — вектор-функция с компонентами  $f_j(\sigma_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , причем  $\sigma_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $\sigma$ . Предполагается, что

$$f(0) = 0, \quad (2.11)$$

а следовательно,  $\hat{x} = 0$ ,  $\hat{v} = 0$ ,  $\hat{\sigma} = 0$  — состояние равновесия системы (2.8) — (2.9).

Первые два уравнения (2.8), (2.9) описывают линейную часть системы, а (2.10) описывают характеристики  $m$  нелинейных элементов (НЭ), входом каждого из которых является скалярная переменная  $\sigma_j(t)$ , а выходом — скалярная же переменная  $v_j(t)$ .

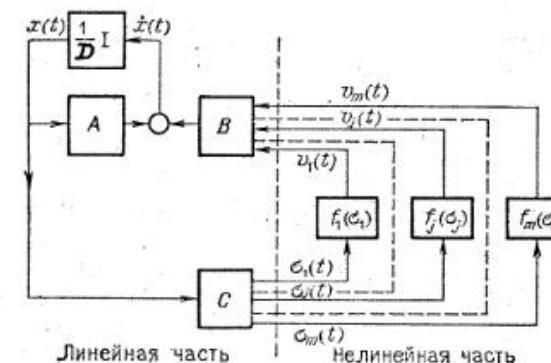


Рис. 8.4

Уравнениям (2.8) — (2.10) можно сопоставить структурную схему, представленную на рис. 8.4. Эту схему можно «свернуть» (рис. 8.5), вводя в рассмотрение операторную матричную п. ф. линейной части системы

$$H_L(D) \triangleq -C(DI - A)^{-1}B \quad (2.12)$$

(от входа  $v$  к выходу —  $\sigma$ ). Введение п. ф. эквивалентно исключению «внутренних» переменных линейной части из уравнений (2.8), (2.9) и записи результата в операторной форме

$$\sigma + H_L(D)v = 0. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.13), (2.10) являются матричным обобщением операторных уравнений (2.4) из гл. 5, где рассматривалась система с одним ( $m = 1$ ) нелинейным элементом.

Операторная запись компактна и удобна. Однако надо иметь в виду, что из-за возможного сокращения элементов числителя и знаменателя п. ф. в ней может быть потеряно описание «висячих» звеньев линейной части системы.

Отметим, что уравнения (2.8), (2.9) с точностью до обозначения переменных совпадают с уравнениями многосвязной линейной

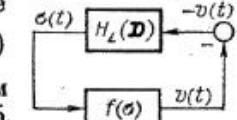


Рис. 8.5

управляемой системы ( $v$  — вход,  $-v$  — выход). Это формальное сходство позволяет сразу указать, используя результаты гл. 6, что несократимость  $H_L(\mathbf{D})$  гарантирована, если пары матриц  $A, B$  и  $A^T, C^T$  являются невырожденными. Можно было бы ограничиться исследованием только таких ситуаций. Вместе с тем очевидно, что наличие линейных «висячих» звеньев, выделяемых с помощью структурной теоремы (§ 2, гл. 6), почти не усложняет исследования устойчивости системы как целого. Действительно, если хотя бы одно такое звено неустойчиво, то неустойчива и система, если же все они устойчивы, то результат определяется поведением вполне связанный части, задаваемой операторным уравнением (2.13) и нелинейным уравнением (2.10). Поэтому в дальнейшем не будет особо оговариваться, что все приводимые результаты об устойчивости системы в форме Лурье справедливы, только если устойчивы все «висячие» звенья или их вовсе нет.

**2.3. Условия устойчивости и оценки процесса установления.** Переходим к выяснению условий устойчивости системы (2.8) — (2.10).

**Теорема 2.2** (о разрешающих уравнениях Лурье). Пусть функции  $f_j(\sigma_j)$  удовлетворяют условиям принадлежности к секторам  $[0, \bar{k}_j]$ ,  $\bar{k}_j > 0$ , т. е.

$$f_j(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{f_j(\sigma_j)}{\sigma_j} \leq \bar{k}_j, \quad \sigma_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Пусть при каких-либо  $Q > 0$ ,  $\tau = \text{diag}\{\tau_j, j = 1, \dots, m\} > 0$  и  $q = -\text{diag}\{q_j, j = 1, \dots, m\} > 0$  найдутся симметричная  $(n \times n)$ -матрица  $P > 0$  и  $(m \times n)$ -матрица  $h$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$A^T P + P A + h^T h + Q = 0, \quad (2.15)$$

$$\gamma^T h = B^T P + \frac{1}{2} [qCA + \tau C], \quad (2.16)$$

тогда

$$\gamma^T \gamma = \tau \bar{K}^{-1} - qCB > 0, \quad K = \text{diag}\{\bar{k}_j\}, \quad C = \{C_j\}. \quad (2.17)$$

Тогда система (2.8) — (2.10) устойчива (по начальным условиям).

**Доказательство.** Покажем, что функция Ляпунова вида

$$V(x) = x^T P x + \sum_{j=1}^m q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j, \quad \sigma_j = C_j x, \quad (2.18)$$

удовлетворяет условиям Т.1:1, обеспечивающим устойчивость в целом равновесного состояния  $\hat{x} = 0$ . Поскольку  $P > 0$ ,  $q > 0$ ,  $f_j(\sigma_j) \geq 0$  при  $\sigma_j \geq 0$ , то  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Очевидно также, что  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Остается доказать отрицательность  $\frac{d}{dt} V(x(t))$ . Имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2x^T P(Ax + Bv) + \sum_{j=1}^m q_j f_j(\sigma_j) \frac{d\sigma_j}{dt} = 2x^T P(Ax + Bv) + \sum_{j=1}^m q_j v_j C_j (Ax + Bv).$$

Прибавляя и вычитая слагаемые

$$\tau_j v_j \left( \sigma_j - \frac{1}{\bar{k}_j} v_j \right), \quad \tau_j > 0, \quad (2.19)$$

приведем это выражение к виду

$$\frac{dV}{dt} = 2x^T P(Ax + Bv) + G(x, v) - \sum_{j=1}^m \tau_j v_j \left( \sigma_j - \frac{1}{\bar{k}_j} v_j \right),$$

где обозначено

$$G(x, v) \triangleq \sum_{j=1}^m \left[ q_j v_j C_j (Ax + Bv) + \tau_j v_j \left( \sigma_j - \frac{1}{\bar{k}_j} v_j \right) \right] = \\ = v^T q C (Ax + Bv) + v^T \tau (Cx - \bar{K}^{-1} v). \quad (2.20)$$

В силу свойств (2.14) нелинейных функций, слагаемые (2.19) неотрицательны для всех  $v_i$ , удовлетворяющих (2.10). Таким образом, если

$$W(x, v) \triangleq 2x^T P(Ax + Bv) + G(x, v) < 0, \quad (2.21)$$

то и

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при любых } x, v \neq 0. \quad (2.22)$$

С другой стороны, в силу (2.15) и (2.20) имеем

$$W(x, v) = -x^T Q x - x^T h^T h + v^T [2B^T P + qCA + \tau C] x + v^T [qCB - \tau \bar{K}^{-1}] v,$$

откуда с использованием (2.16), (2.17), убеждаемся в справедливости представления

$$W(x, v) = -x^T Q x - |hx - \gamma v|^2, \quad (2.23)$$

что и доказывает (2.22). ■

**Дополнение к Т.2.2.** Пусть матрица  $A$  является гурвицевой; тогда утверждение Т.2.2 сохраняет силу, даже если найдется вектор  $q$  с компонентами произвольного знака.

**Доказательство.** Требование  $q > 0$  использовалось при доказательстве Т.2.2 только в связи с обоснованием условия  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Покажем, что оно сохраняет силу и при отказе от этого требования.

Неравенство  $\dot{V} < 0$  было установлено для любых функций  $f_j(\sigma_j)$ , удовлетворяющих условиям (2.14). В частности, оно верно для линейных функций

$$f_j = k_j \sigma_j, \quad 0 \leq k_j \leq \bar{k}_j. \quad (2.24)$$

Докажем, что

$$\bar{A}(K) \triangleq A + BK C, \quad K = \text{diag}\{k_j, j = 1, \dots, m\}$$

гурвицева, если  $A$  гурвицева.

Для линейных  $f_j(\sigma_j)$  имеем

$$V = x^T P x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j k_j \sigma_j^2, \quad \sigma_j = C_j x, \\ \dot{V} = \left( 2x^T P + \sum_j q_j k_j x^T C_j^T C_j \right) \bar{A} x < 0. \quad (2.25)$$

Если  $\bar{A}(k)$  имеет с. ч. на мнимой оси, то линейная система

$$\dot{x} = Ax + BK\sigma = \bar{A}(K)x$$

имеет периодические решения, но тогда невозможно, чтобы  $\dot{V} < 0$  на таком решении, а следовательно,  $\bar{A}(K)$  при любых  $K$ ,  $0 \leq K \leq \bar{K}$ , не может иметь таких с. ч. Вместе с тем  $\bar{A}(0) = A$  имеет с. ч. только в левой полуплоскости. Ввиду непрерывной зависимости с. ч.  $\bar{A}(K)$  от  $K$  они не могут перейти направо, не переходя через мнимую ось, что и доказывает гурвицевость  $\bar{A}(K)$ .

Обозначим

$$P(K) = P + \frac{1}{2} \sum_j q_j k_j C_j^T C_j.$$

В силу (2.25) имеем

$$P(K)\bar{A}^*(K) + \bar{A}(K)P(K) < 0.$$

Согласно лемме Ляпунова  $P(K) > 0$ , поскольку  $\bar{A}(K)$  гурвицева. В частности, имеем

$$P^{(-)} \triangleq P + \frac{1}{2} \sum_j^{(-)} q_j \bar{k}_j C_j^T C_j > 0, \quad (2.26)$$

где суммирование распространено только на те индексы, где  $q_j < 0$ . Теперь легко убедиться, что

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T Px + \sum_j^{(-)} q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j = \\ &= x^T P^{(-)} x - \frac{1}{2} \sum_j^{(-)} q_j \bar{k}_j x^T C_j^T C_j x + \sum_j^{(-)} q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j = \\ &= x^T P^{(-)} x + \sum_j^{(-)} (-q_j) \left( \frac{1}{2} \bar{k}_j \sigma_j^2 - \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j \right) + \sum_j^{(+)} q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j > 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где в последнем слагаемом суммируются только члены, где  $q_j > 0$ .

Подчеркнем, что из гурвицевости  $A$  вытекает, что любая симметричная матрица  $P$ , удовлетворяющая (2.15)–(2.17), окажется положительно определенной. Если  $A$  имеет некоторое число с. ч. справа, то это же число имеет матрица  $\bar{A}(K)$  при любых  $K$ , удовлетворяющих (2.24). ■

Теорема 2.2 сводит проблему абсолютной устойчивости к чисто алгебраической задаче о разрешимости матричного квадратичного уравнения Лурье. Знание самого решения матрицы  $P$  позволяет получить и оценки скорости приближения к равновесному состоянию. Приведем один полезный результат.

**Теорема 2.3.** Пусть найдена матрица  $P$ , удовлетворяющая системе (2.15)–(2.17) при  $Q = \mu I$ ,  $\mu > 0$ . Пусть  $v_-$  — наименьшее с. ч. матрицы  $P^{(-)} = P + \sum_j^{(-)} q_j \bar{k}_j C_j^T C_j$ , а  $v_+$  — наибольшее с. ч. матрицы  $P^{(+)} = P + \sum_j^{(+)} q_j \bar{k}_j C_j^T C_j$ . Тогда для решений системы (2.8)–

(2.10) справедлива оценка

$$|x(t)|^2 \leq c_0 e^{-\delta t}, \quad (2.28)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{v_-} \left[ (x^0)^T P x^0 + \sum_j q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j \right], \quad \delta = \frac{\mu}{v_+}. \quad (2.29)$$

Доказательство. Имеем

$$V(x) = x^T Px + \sum_j^{(+)} q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j + \sum_j^{(-)} q_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j) d\sigma_j. \quad (2.30)$$

Очевидно, что справедливо неравенство

$$x^T Px + \sum_j^{(-)} q_j \frac{\bar{k}_j}{2} \sigma_j^2 \leq V(x) \leq x^T Px + \sum_j^{(+)} q_j \frac{k_j}{2} \sigma_j^2,$$

откуда

$$x^T P^{(-)} x \leq V(x) \leq x^T P^{(+)} x,$$

или

$$v_- |x|^2 \leq V(x) \leq v_+ |x|^2. \quad (2.31)$$

С другой стороны, в ходе доказательства Т.2.2 было установлено, что на решениях  $x = x(t)$  системы (2.8)–(2.10)

$$\frac{dV}{dt} \leq W(x, v) \leq -x^T Q x,$$

так что при  $Q = \mu I$  имеем:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\mu |x|^2.$$

С учетом неравенства (2.31) получаем

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{\mu}{v_+} V \Rightarrow \frac{dV}{V} \leq -\frac{\mu}{v_+} dt \Rightarrow V[x(t)] \leq V[x^0] e^{-\frac{\mu}{v_+} t}.$$

С учетом левого неравенства (2.31) приходим к окончательному результату

$$|x(t)|^2 \leq \frac{1}{v_-} V[x(t)] \leq \frac{1}{v_-} e^{-\frac{\mu}{v_+} t} V[x^0] = c_0 e^{-\delta t}. \blacksquare$$

Дадим простейший пример [8.4, с. 58] использования полученной оценки.

**Пример 2.1.** Рассмотрим систему 2-го порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - v, \quad x_2(0) = 0,$$

$$v = x_1, \quad 0 \leq v \leq \bar{k} = 1, \quad \bar{k} \neq 0;$$

она записывается в матричном виде при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2, \quad m = 1.$$

Уравнение (2.15), (2.16) запишем, считая  $q = 0$ ,  $\tau = 1$ ,  $\gamma^2 = 1/k = 1$ ,

$$\begin{cases} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{cases} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \{h_1 h_2\} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\{h_1 \ h_2\} = \{0 \ -1\} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \{1 \ 0\}.$$

Выпишем положительно определенное решение при  $\mu = 1$ :

$$p_{11} = 1,586, \quad p_{12} = 0,5, \quad p_{22} = 0,586.$$

В данном случае ( $q = 0$ ) имеем  $P = P^{(+)} = P^{(-)}$ , так что достаточно вычислить меньшее  $v_1$  и большее  $v_2$  с. ч. матрицы  $P$ :

$$v_- = v_1 = 0,377, \quad v_+ = v_2 = 1,79.$$

Оценка (2.28) принимает вид

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) \leq 4,2 e^{-t/1,79}.$$

Для сравнения заметим, что для линейных систем  $v = k\sigma$ ,  $0 \leq k \leq 1$ , имеет место оценка того же типа, но в показателе экспоненты стоит 1 вместо  $1/1,79$ .  $\square$

**2.4. Частотный критерий.** Несмотря на желательность непосредственного вычисления матрицы  $P$  для построения оценок, наиболее важной проблемой остается установление самого факта устойчивости, а для этого, как утверждается в Т.2.2, достаточно показать лишь разрешимость уравнения Лурье, а не находить само решение.

Оказывается, что это можно проделать существенно более простым способом, с помощью частотного условия В. М. Попова, вариант которого (для случая одного нелинейного элемента,  $m = 1$ ) уже приводился без доказательства в гл. 5.

**Теорема 2.4 (частотный критерий В. М. Попова).** Пусть матрица  $A$  гурвицева, пара  $A, B$  невырождена, а функции  $f_j(\sigma_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , удовлетворяют условиям (2.14) принадлежности к секторам  $[0, k_j]$ . Тогда:

1) состояние равновесия  $x = 0$ ,  $\sigma = 0$  системы (2.8) – (2.10) асимптотически устойчиво в целом, если существуют такие матрицы  $\tau = \text{diag}\{\tau_j\} > 0$  и  $q = \text{diag}\{q_j\}$ , что при всех  $\omega$ ,  $-\infty \leq \omega \leq \infty$ , выполнено неравенство \*)

$$\pi(\omega) \triangleq \tau \bar{K}^{-1} + \text{Re}[(\tau + i\omega q) H_L(i\omega)] > 0, \quad (2.32)$$

где

$$H_L(p) = -C[pI - A]^{-1}B, \quad \bar{K}^{-1} = \text{diag}\{1/k_j\}.$$

\*) Если  $Z$  – матрица, то  $\text{Re } Z = \frac{1}{2}(Z + Z^{(*)})$ , где  $(*)$  обозначен результат операции транспонирования и замены всех элементов на комплексно сопряженные. При  $m = 1$ , можно положить  $\tau = 1$ , и (2.32) переходит в неравенство (2.10) гл. 5.

2) При некотором  $Q > 0$  и упомянутых  $\tau$ ,  $q$  существует положительно определенное решение уравнений Лурье (2.15), (2.16).

**Доказательство.** Попытаемся найти такие  $P$ ,  $h$ ,  $\gamma$ , что при заданных  $q$ ,  $\tau > 0$ ,  $Q > 0$  для всех  $x$ ,  $v \neq 0$  выполнено тождество

$$W(x, v) + x^T Qx + |hx - \gamma v|^2 = 0, \quad (2.33)$$

где  $W(x, v)$  определено соотношениями (2.20), (2.21), т. е.

$$W(x, v) = 2x^T P(Ax + Bv) \mp v^T [qC(Ax + Bv) + \tau(Cx - K^{-1}v)].$$

Всюду ранее предполагалось, что  $x$ ,  $v$  являются вещественными. Усилим (2.33), потребовав, чтобы для всех комплексных  $x$  и  $v$  выполнялось тождество

$$2\text{Re } x^{(*)} P(Ax + Bv) + \mathcal{G}(x, v) + |hx - \gamma v|^2 = 0, \quad (2.34)$$

где

$$\mathcal{G}(x, v) \triangleq \text{Re } \{v^{(*)} [qC(Ax + Bv) + \tau(Cx - K^{-1}v)] + x^{(*)} Qx\}. \quad (2.35)$$

Лемма Якубовича – Калмана (Приложение 2) указывает, что для выполнения тождества (2.34) необходимо и достаточно выполнение частотного условия:

$$\mathcal{G}[(i\omega I - A)^{-1}Bv, v] \leq 0, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty. \quad (2.36)$$

С учетом определения  $\mathcal{G}(x, v)$  и матричного тождества

$$A(pI - A)^{-1} + I = p(pI - A)^{-1}$$

условие (2.36) преобразуется к виду

$$\text{Re } v^{(*)} \{ \tau \bar{K}^{-1} + [(\tau + i\omega q) H_L(i\omega)] \} v -$$

$$- \text{Re } \{v^{(*)} [(i\omega I - A)^{-1}B]^{(*)} Q [(i\omega I - A)^{-1}B] v\} \geq 0.$$

Очевидно, что оно заведомо выполняется \*), если выполнено частотное неравенство Попова (2.32). Тем самым гарантировано существование  $P$ ,  $h$ ,  $\gamma$  таких, что имеет место (2.33). Однако непросто убедиться, что оно эквивалентно уравнениям Лурье (2.15) – (2.17) (при доказательстве Т.2.2 устанавливалось обратное: в предложении существования решения уравнений Лурье строилось тождество (2.33)). Таким образом, доказано, что неравенство Попова гарантирует разрешимость уравнений Лурье, т. е. п. 2 теоремы, а тогда п. 1 является прямым следствием Т.2.2. ■

Доказательство всех остальных утверждений, приведенных в § 2 гл. 5, и их обобщений на случай  $m > 1$  может быть построено по близким схемам (см. [8.6]).

При этом ключевыми являются два момента:

а) использование условия типа

$$v_j \left( \sigma_j - \frac{1}{k_j} v_j \right) \geq 0$$

или

$$\int_0^{\sigma_j} v_j d\sigma_j \geq 0$$

(локальных или интегральных связей), вытекающих из предполагаемых свойств нелинейностей;

\*) Взяв  $Q = \mu I$ , при достаточно малом  $\mu$  получим, что второе слагаемое меньше первого, которое по условию Попова положительно и отделено от нуля.

б) преобразование требований к квадратичным формам в частотные условия с помощью леммы Якубовича — Калмана.

К сожалению, доказательство самой леммы крайне громоздко, и в Приложении 2 оно приведено только для случая  $m = 1$ .

### § 3. Элементы теории возмущений и зависимость от малого параметра

**3.1. Ограниченные возмущения.** Проблема «грубости» результатов исследования по отношению к точности модельного описания, естественно, важна и для нелинейных систем. Результаты теорем § 2 гл. 5, дающих условие устойчивости для класса систем (условия абсолютной устойчивости) могут трактоваться и как гарантии грубости факта установления устойчивости по отношению к нелинейным возмущениям определенного вида, т. е. к изменениям правых частей уравнений системы.

Вместе с тем возмущения не обязательно укладываются в узкие рамки условий типа «принадлежности к сектору», а следовательно, не обязательно гарантировается, что возмущения не приведут к появлению отклонений от равновесного состояния в установившемся режиме или даже к неограниченному уходу от равновесия.

Приведем лишь следующий простой результат \*).

**Теорема 3.1.** Пусть для системы

$$\dot{x} = Ax + Bf(\sigma), \quad \sigma = Cx, \quad (3.1)$$

выполнен критерий В. М. Попова. Тогда система

$$\dot{x} = Ax + Bv + r(x, t), \quad v = f(\sigma), \quad \sigma = Cx, \quad (3.2)$$

где  $r(x, t)$  ограничено по модулю при всех  $x, t$ , является сходящейся в некоторое ограниченное множество  $\bar{X}$  (является диссипативной).

**Доказательство.** Согласно доказательству, приведенному в § 2, при выполнении критерия Попова существует функция

$$V(x) = x^T Px + q \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad (3.3)$$

такая, что ее производная в силу невозмущенной системы (3.1)  $\dot{V}_{(1)}$  удовлетворяет условию

$$\dot{V}_{(1)} \leq W(x, v),$$

где  $W(x, v)$  — отрицательно определенная квадратичная форма переменных  $x, v$ . Следовательно,

$$W(x, v) \leq -e_1 x^2 - e_2 v^2, \quad e_1, e_2 > 0.$$

\*). Более тонкие утверждения об устойчивости по возмущениям имеются в книге [5.7].

Найдем теперь производную  $V(x)$  в силу уравнений (3.2). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(2)} &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T [Ax + Bv] + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T r(x, t) = \dot{V}_{(1)} + [2Px + qvC^T]^T r(x, t) \leq \\ &\leq -e_1 x^2 - e_2 v^2 + [2Px + qvC^T]^T r(x, t). \end{aligned}$$

Вторая группа слагаемых, в силу ограниченности  $r$  и того, что  $|v| \leq |K\sigma| = |KCx|$ , растет не быстрее, чем линейно по  $x$ . Поэтому найдется такое  $R$ , что при  $|x| \geq R$

$$\dot{V}_{(2)} < -\alpha < 0. \quad (3.4)$$

Поскольку  $V(x) \rightarrow \infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то существует ограниченное  $c_0 > 0$  такое, что из условия

$$V(x) \geq c_0 \quad (3.5)$$

следует  $|x| \geq R$ . В силу (3.4) любая траектория системы входит в множество  $\bar{X}$ , все точки которого удовлетворяют условию

$$V(x) \leq c_0. \quad (3.6)$$

Это множество ограничено. ■

Подчеркнем, что в силу данных в § 1 определений диссипативность системы (3.2) влечет за собой устойчивость системы (3.1) по внешним воздействиям \*).

**3.2. Асимптотический метод.** Установление только факта устойчивости и тем более сходимости в множество с трудно оцениваемыми «размерами» обычно не полностью удовлетворяют исследователя.

Важно полнее изучить возможное влияние конкретных возмущений описания системы, конечно, предполагая их в том или ином смысле малыми. Для этой цели эффективным оказывается *асимптотический метод* (*метод малого параметра*).

Пусть исходная (порождающая) система описывается уравнением

$$\dot{x} = f_0(x, t), \quad (3.7)$$

а влияние возмущений характеризуется малым параметром  $\mu$  ( $\mu > 0$ ), так что возмущенная система задается уравнением

$$\dot{x} = f_\mu(x, t, \mu), \quad (3.8)$$

где

$$f_\mu(x, t, 0) = f_0(x, t). \quad (3.9)$$

Возникает вопрос, насколько близки решения  $x_0(t)$  и  $x(t, \mu)$  уравнений (3.7), (3.8) при одних и тех же начальных условиях

$$x_0(t^0) = x^0, \quad x(t^0, \mu) = x^0.$$

В учебниках по теории дифференциальных уравнений, как правило, приводится следующее утверждение.

**Теорема 3.2 (теорема Пуанкаре).** Если функции  $f_\mu(x, t, \mu)$  непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то при до-

\*). Класс возмущений здесь расширен по сравнению с определением 5 в § 1, где  $r(x, t) = r(t)$  и рассматривалось как внешнее воздействие.

достаточно малом  $\mu$

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + R(t, \mu), \quad (3.10)$$

где  $R(t, \mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$  как величина меньшего порядка, чем  $\mu$ , равномерно по  $t$ , решение (3.10) определено по крайней мере на конечном отрезке  $[t_0, t_0 + T_0]$ .

Если функция  $f_\mu(x, t, \mu)$  аналитична по всем аргументам, то при достаточно малом  $\mu$  решение системы (3.8) можно представить в виде ряда

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t), \quad (3.11)$$

равномерно сходящегося на конечном отрезке  $[t_0, t_0 + T_0]$ . ■

Подстановка представления (3.10) в уравнение (3.8) показывает, что функция  $x_1(t)$ , называемая функцией чувствительности решений по параметру  $\mu$ , удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + f_1(t), \quad x_1(0) = 0, \quad (3.12)$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{x(t)=x_0(t), \mu=0}, \quad f_1(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{x(t)=x_0(t), \mu=0}$$

а  $x_0(t)$  — решение уравнения (3.7), удовлетворяющее заданному начальному условию.

Следует четко представлять, что, вообще говоря, близость выражения  $x_0(t) + \mu x_1(t)$  к решению возмущенной системы даже при малых  $\mu$  гарантирована лишь на конечном интервале времени.

Для исследования влияния параметров на бесконечном интервале приходится применять метод Ляпунова.

Справедлив, в частности, следующий результат [3.6, с. 85] \*).

**Теорема 3.3 (условие параметрической устойчивости «в малом»).** Пусть функция  $f_\mu(x, t, \mu)$  непрерывно дифференцируема по  $x, \mu$  при всех  $t \geq t_0$ . Пусть функции  $A(t), f_1(t)$  в (3.12) ограничены, матрица  $\Phi(t, \tau)$  фундаментальных решений уравнения (3.12) удовлетворяет условию

$$|\Phi(t, \tau)| \leq ce^{-v(t-\tau)}, \quad v > 0, \quad c > 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t,$$

а

$$|f_\mu(x, t, \mu) - f_\mu(x_0(t), t, 0) - [A(t)\xi + \mu f_1(t)]| \leq c_1 |\xi|^{1+v_1} + c_2 \mu^{1+v_1},$$

где  $\xi(t) \triangleq x - x_0(t)$ ,  $v_1 > 0$ ,  $c_1, c_2 > 0$ .

Тогда для любого  $\delta > 0$  можно найти такое  $\mu$ , что

$$|x(t) - x_0(t) - \mu x_1(t)| \leq \delta \mu, \quad t \geq t_0. ■$$

Отметим, в частности, что если исходное уравнение линейно:

$$\dot{x} = (A_0 + \mu A_1)x,$$

\*). В книге [3.6] имеется много других полезных результатов о чувствительности при регулярном вхождении параметров (см. также [8.14]).

где  $A_0, A_1 = \text{const}$ , то для обеспечения параметрической устойчивости в малом достаточно устойчивости матрицы  $A_0$  \*).

То же верно для слабо нелинейной системы

$$\dot{x} = (A_0 + \mu A_1)x + \mu f_1(x),$$

где  $f_1(x)$  — гладкая нелинейная функция, удовлетворяющая условию Липшица.

**3.3. Сингулярные возмущения.** Существенным условием применимости Т.3.2, Т.3.3 является также дифференцируемость правых частей по параметру, по крайней мере, в окрестности  $\mu = 0$ .

Однако это условие нарушается в ситуации, представляющей фундаментальный интерес для теории управления.

**Определение.** Наэзовем, следуя [8.5], систему (3.8) *сингулярно возмущенной*, если при  $\mu \rightarrow 0$  хотя бы одна из компонент вектора  $f_\mu$  не ограничена.

Наиболее изучены сингулярно возмущенные системы, представимые в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= f_y(y, z, \tau), & \frac{dz}{d\tau} &= \frac{1}{\mu} f_z(y, z, \tau); \\ y(0) &= y^0, & z(0) &= z^0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где вектор состояния разбит на два подвектора  $y, z$ , причем при  $\mu \rightarrow 0$  скорость изменения переменных  $z(\tau)$  не ограничена (переменные  $z(\tau)$  называются *быстрыми*). Функции  $f_y, f_z$  при этом предполагаются регулярно (в частности, аналитически) зависящими от  $\mu$ . Конечно, в уравнениях (3.13) при  $\mu > 0$  можно сделать замену независимой переменной, положив  $t = \frac{\tau}{\mu}$ , и прийти к регулярно возмущенной системе

$$\frac{dy}{dt} = \mu f_y(y, z, \mu t), \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y, z, \mu t),$$

к которой применима Т.3.2. Однако приближенное решение, получаемое в виде разложения по степеням  $\mu$ , окажется пригодным лишь на конечном отрезке изменения переменной  $t$ , а следовательно, на малом (порядка  $\mu$ ) отрезке изменения переменной  $\tau$ , что неудовлетворительно. Поэтому следует использовать другие приемы. Вернемся к исходной записи (3.13). Уравнение для быстрых переменных можно переписать и в виде

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = f_z(y, z, \tau). \quad (3.14)$$

Тогда, полагая  $\mu = 0$ , получим

$$f_z(y, z, \tau) = 0. \quad (3.15)$$

\*). Это свойство как свойство грубости устойчивых линейных систем уже описывалось в гл. 4, § 4.

Построенная таким путем порождающая система имеет меньший порядок, чем возмущенная при  $\mu \neq 0$ . Это явление называется *вырождением* \*), а система

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y(y, z, \tau), \quad f_z(y, z, \tau) = 0, \quad y(0) = y^0 \quad (3.16)$$

называется *вырожденной*.

Напомним, что с явлением вырождения мы уже сталкивались в линейной теории: пренебрежение малыми постоянными времени приводило к понижению порядка дифференциального уравнения.

Дальнейшее изложение посвящено обобщению представлений, данных в § 3 гл. 4.

Основные качественные представления просты: при определенных условиях малость  $\mu$  обеспечивает быстрое затухание переходных процессов по переменным  $z$ , «быстрая» подсистема приходит в «квазиравновесное состояние», которое медленно меняется при изменении переменных  $y$  и явно входящего в (3.15) времени  $\tau$ . Если выразить с помощью (3.15)  $z$  через  $y$  и  $\tau$ ,  $z = \varphi(y, \tau)$ , и подставить в первое уравнение (3.16), то получим систему пониженного порядка

$$\frac{dy}{d\tau} = f_y[y, \varphi(y, \tau), \tau]. \quad (3.17)$$

Справивается, когда такая процедура дает разумное приближение к поведению исходной системы? Общий анализ этой проблемы дан в книге [8.5]. Здесь мы приведем лишь основной результат в несколько огрубленной форме.

**Теорема 3.4 (теорема Тихонова — Васильевой).** Пусть при  $\tau \in [0, T]$

а) функции  $f_y, f_z$  дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным;

б) уравнение (3.15), рассматриваемое как уравнение относительно быстрых переменных  $z$  при  $y$  и  $\tau$ , входящих как параметры, имеет изолированный корень  $z = \varphi(y, \tau)$  при всех  $\tau \in [0, T]$  и  $y$  из некоторой замкнутой ограниченной области, причем  $\varphi(y, \tau)$  непрерывна;

в) все собственные числа матрицы

$$A_z(\tau) = \frac{\partial f_z}{\partial z}, \quad (3.18)$$

где производная вычислена на решении  $\bar{y}^0(\tau)$ ,  $\bar{z}^0(\tau) = \varphi(\bar{y}^0(\tau), \tau)$  вырожденной системы (3.16), лежат в левой полуплоскости при всех  $\tau$ ;

\*) Здесь термин «вырождение» имеет, очевидно, другой смысл, чем в теории линейных систем (гл. 6, 7), хотя эти понятия взаимосвязаны ([6.6]).

г) решение  $\bar{z}(t)$ ,  $t = \frac{\tau}{\mu}$  уравнения

$$\frac{dz}{dt} = f_z(y^0, z, 0), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z^0 \quad (3.19)$$

ограничено и стремится при  $t \rightarrow \infty$  к  $\varphi(y^0, 0)$ .

Тогда существует такое  $\bar{\mu}$ , что при  $0 < \mu \leq \bar{\mu}$  справедливы оценки

$$|y(\tau, \mu) - \bar{y}_0(\tau)| \leq c_y \mu, \quad (3.20)$$

$$\left| z(\tau, \mu) - \bar{z}_0(\tau) - \pi_0\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right| \leq c_z \mu, \quad (3.21)$$

где  $c_z, c_y$  — константы, не зависящие от  $\mu$ , а функция  $\pi_0(t)$  — решение уравнения краевого эффекта (пограничного слоя):

$$\frac{d\pi}{dt} = f_z[y^0, \bar{z}^0(0) + \pi, 0], \quad \pi(0) = z^0 - \bar{z}^0(0). \quad (3.22)$$

Поясним смысл условий и результаты теоремы. Условие в) гарантирует асимптотическую устойчивость «в малом» положения равновесия  $z = \varphi(y, \tau)$  уравнения для быстрых переменных, если в нем  $y, \tau$  рассматриваются как «замороженные» параметры. Условие г) требует устойчивости «в большом» по  $z$ , но при параметрах, зафиксированных на их начальных значениях. Тем самым обеспечивается приближение решений возмущенной системы к поверхности, задаваемой уравнением

$$z = \varphi(y, \tau) \Leftrightarrow f_z(z, y, \tau) = 0. \quad (3.23)$$

Это приближение не является «мгновенным», а происходит лишь после затухания краевого эффекта. Доказано [8.5, с. 57], что

$$|\pi(t)| \leq c_1 e^{-\kappa t}, \quad (3.24)$$

где  $c_1, \kappa$  — константы, причем сколь угодно близко к степени устойчивости матрицы  $A_z(0)$ . Поэтому

$$\left| \pi\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right| \leq c_1 e^{-\frac{\kappa \tau}{\mu}},$$

и затухание практически происходит через время порядка  $\mu$ , что и оправдывает название «краевой эффект».

Отметим также, что при повышении требований к гладкости функций  $f_y, f_z$  могут быть построены асимптотические представления, дающие сколь угодно большую точность (при достаточно малых  $\mu$ )

$$x(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left[ \bar{x}_k(\tau) + \pi_k\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Наличие затухающих функций  $\pi_k\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$  отличает разложение (3.25) от регулярного разложения (3.11).

**3.4. Системы с медленно меняющимися параметрами.** Простейшей сферой приложения теории сингулярных возмущений являются задачи, возникающие при исследовании систем с медленно меняющимися параметрами. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dy}{dt} = \mu f_y(y), \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y, z), \quad y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0, \quad (3.26)$$

где  $\mu > 0$  — малый параметр.

Нас интересует поведение системы на большом, но конечном интервале времени  $t \in [0, \frac{T}{\mu}]$ .

Параметр  $\mu$  входит регулярно, и, как уже говорилось, можно было бы применить классическую процедуру поиска решения в виде разложения по степеням  $\mu$ . При этом в нулевом приближении получим

$$y = y^0 = \text{const}, \quad \frac{dz}{dt} = f_z(y^0, z).$$

Однако это приближение непригодно на большом интервале, поскольку переменные  $y$ , изменяющиеся с малой скоростью  $\sim \mu$ , за время  $T/\mu$  могут отойти от своих начальных значений на конечную, не малую величину.

Поэтому целесообразно ввести новую переменную: «медленное время»,  $\tau = \mu t$ , и тогда уравнения (3.26) приобретут вид

$$\frac{dy}{dt} = f_y(y), \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = f_z(y, z), \quad y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0, \quad (3.27)$$

являющийся частным случаем (3.13).

Упрощающей дело особенностью является то, что «медленные» переменные  $y$  могут быть вычислены независимо. Обозначим это решение  $\bar{y}(\tau)$ . Тогда для  $z$  имеем уравнение с медленно изменяющимися параметрами

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = f_z[\bar{y}(\tau), z] \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = f_z[\bar{y}(\mu t), z], \quad z(0) = z^0. \quad (3.28)$$

В соответствии с Т.3.4 можно вычислить приближение к точному решению  $z(\tau, \mu)$  в виде

$$\tilde{z}(\tau, \mu) \triangleq z_0(\tau) + \pi_0\left(\frac{\tau}{\mu}\right), \quad (3.29)$$

и, если выполнены условия теоремы, это приближение окажется отличающимся от точного решения не более, чем на малую величину порядка  $\mu$  на всем отрезке времени  $\tau \in [0, T]$ , т. е.  $t \in [0, \frac{T}{\mu}]$ .

Предположим, что функции  $f_y, f_z$  достаточно гладкие и, более того,

$$f_z(y, z) \triangleq A_z(y)z + f_{zy}(y). \quad (3.30)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае все условия теоремы выполнены, если матрица  $A_z(y)$  имеет все с. ч. в левой полуплоскости при значениях  $y$  на траектории  $\bar{y}(\tau)$ , т. е. линейная система

$$\frac{dz}{d\tau} = \bar{A}_z(\tau)z + \bar{f}_z(\tau), \quad (3.31)$$

где  $\bar{A}_z(\tau) \triangleq A_z[\bar{y}(\tau)]$ ,  $\bar{f}_z(\tau) \triangleq f_{zy}[\bar{y}(\tau)]$ , устойчива при любых «замороженных» коэффициентах  $\bar{A}_z(\tau)$ . «Вырожденная» часть приближенного решения (3.29) дается формулой

$$\bar{z}_0(\tau) = -\bar{A}_z^{-1}(\tau)\bar{f}_z(\tau),$$

а часть типа «краевого эффекта» получается как решение уравнения (3.22), которое в данном случае имеет простейший вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= A_z(y^0)[\bar{z}^0(0) + \pi] + f_{zy}(y^0) = \bar{A}_z(0)\pi, \\ \pi(0) &= z^0 - \bar{z}_0(0), \quad t = \frac{\tau}{\mu}, \end{aligned}$$

т. е. является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Можно выписать теперь явную формулу для приближенного решения (3.29)

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\tau, \mu) &= -\bar{A}_z^{-1}(\tau)\bar{f}_z(\tau) + e^{\bar{A}_z(0)\frac{\tau}{\mu}}[z^0 + \bar{A}_z^{-1}(0)f_z(0)], \\ \tau &\in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Поскольку  $\bar{A}_z(0)$  имеет только «хорошие» с. ч., то краевой эффект быстро затухает и на большей части рассматриваемого интервала приемлемо вырожденное, квазистатическое приближение, при котором

$$z(\tau) \approx A_z[\bar{y}(\tau)]^{-1}f_{zy}[\bar{y}(\tau)].$$

Обратимся теперь к проблеме синтеза управления с обратной связью для системы с медленно изменяющимися параметрами, которая рассматривалась в гл. 6, § 8 и записывалась в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu t)x + B(\mu t)u, \quad x(t_0) = x^0. \quad (3.33)$$

Сравнивались два вида управления с обратной связью.

Минимальное значение показателя

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt + x^T(t_f) Q_f x(t_f) \quad (3.34)$$

обеспечивало управление с обратной связью

$$u = u^* = -k^* x, \quad (3.35)$$

где

$$k^* = R^{-1}B^T P^*, \quad (3.36)$$

а  $P^*$  являлось решением уравнения Риккати

$$-\frac{dP}{dt} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P(t_f) = Q_f. \quad (3.37)$$

Как эффективное приближение рассматривалось управление

$$u = \bar{u} = -\bar{k}x, \quad (3.38)$$

где

$$\bar{k} = \bar{R}^{-1}B^T \bar{P}, \quad (3.39)$$

а  $\bar{P}$  удовлетворяло в каждый момент  $t$  уравнению

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (3.40)$$

Обозначим через  $x^*(t, \mu)$  решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A^*x, \quad x(t_0) = x^0, \quad A^* \triangleq A - Bk^*, \quad (3.41)$$

а через  $\bar{x}(t, \mu)$  — решение аналогичного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}x, \quad x(t_0) = x^0, \quad \bar{A} \triangleq A - B\bar{k}. \quad (3.42)$$

Эти уравнения описывают соответственно систему, замкнутую оптимальной (3.35) или «замороженной» (3.38) обратными связями.

Сравнение требует оценки проигрыша в значении показателя (3.34), вызванного использованием неоптимального управления, т. е. различием между  $x^*$  и  $\bar{x}$ ,  $u^*$  и  $\bar{u}$ . Эта оценка была сформулирована в виде Т.6.5 (гл. 6). Теперь возможно дать ее доказательство, опираясь на теорию сингулярных возмущений.

**Доказательство теоремы 8.5 (гл. 6).** Введем в уравнение Риккати (3.37) переменную  $\tau = \mu(t_f - t)$ . Тогда получаем сингулярно возмущенное уравнение

$$\mu \frac{dP}{d\tau} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P|_{\tau=0} = Q_f, \quad (3.43)$$

где параметры являются функциями медленной переменной  $\tau$ . Замечательно, что уравнение (3.40) оказывается вырожденным по отношению к (3.43) и его решение  $\bar{P}$  зависит только от  $\tau$ ,  $\bar{P} = \bar{P}(\tau)$ . Поэтому сравнение  $P^*$  и  $\bar{P}$  может базироваться на оценке, даваемой Т.3.4\*). Необходимо первоначально проверить выполнение ее условий. Условие а) о дифференцируемости, очевидно, выполняется. Условие б) о наличии изолированного корня выполняется, если пара матриц  $A, B$  невырождена при любых  $\tau$  и  $Q > 0$ , поскольку в этом случае уравнение (3.40) имеет единственное положительно определенное решение. Условие в) эквивалентно требованию устойчивости матрицы  $\bar{A}(\tau)$ , что следует

\*). Далее используется Т.3.4 применительно непосредственно к матричному уравнению, хотя результаты сформулированы в векторном случае. Но, очевидно, они сохраняют силу, поскольку любое матричное уравнение можно расписать по столбцам. Выражение  $\|P\|$  следует понимать как норму вектора, составленного из столбцов  $P$ .

из стабилизирующего характера обратной связи (3.38). Наконец, условие г) выполняется в силу теоремы Калмана (Т.8.3, гл. 6) о сходимости решений уравнения Риккати из произвольной положительно определенной начальной точки. Согласно Т.3.4 решение  $P^*$  уравнения (3.43) представимо в виде

$$P^* = \bar{P}(\tau) + \Pi_0 \left( \frac{\tau}{\mu} \right) + \Delta(\tau, \mu), \quad \tau \in [0, T_0], \quad \mu T_0 = t_f - t_0, \quad (3.44)$$

где  $\Pi_0(t_1)$ ,  $t_1 = \frac{\tau}{\mu}$ , дается уравнением краевого эффекта типа (3.22), а  $\Delta(\tau, \mu)$  — погрешность приближения.

В данной задаче уравнение краевого эффекта принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt_1} &= A^T (\bar{P}(0) + \Pi) + [\bar{P}(0) + \Pi] A - \\ &\quad - [\bar{P}(0) + \Pi] B R^{-1} B^T [\bar{P}(0) + \Pi] + Q, \quad \Pi|_{t_1=0} = Q_f - \bar{P}(0), \end{aligned}$$

где матрицы  $A, B$  представлены своими значениями при  $t_1 = 0$ , т. е. при  $t = t_f$ . С учетом (3.40) это уравнение принимает вид

$$\frac{d\Pi}{dt_1} = \bar{A}^T \Pi + \Pi \bar{A} - \Pi B R^{-1} B^T \Pi, \quad \Pi|_{t_1=0} = Q_f - \bar{P}(0), \quad (3.45)$$

где  $\bar{A}$  определено в силу (3.42) при  $t = t_f$ .

В Т.3.4 дана оценка

$$\|\Delta(\tau, \mu)\| \leq c_1 \mu, \quad (3.46)$$

где  $c_1$  — константа, не зависящая от  $\mu$ .

Кроме того, было указано на справедливость экспоненциальной оценки вида (3.24) для скорости затухания краевого эффекта, так что

$$\|\Pi_0(t_1)\| \leq c_0 e^{-v_1 t_1}, \quad 0 \leq t_1 \leq \frac{T_0}{\mu}, \quad (3.47)$$

где  $v_1$  может быть взято сколь угодно близким к степени устойчивости линеаризованного уравнения краевого эффекта (3.45).

В данном случае линеаризованное уравнение получается путем отбрасывания в (3.45) квадратичных слагаемых. Можно доказать, что степень устойчивости такого матричного уравнения равна удвоенной степени устойчивости векторного уравнения

$$\dot{x} = \bar{A}x,$$

где матрица  $\bar{A}$  зафиксирована при  $t = t_f$ .

Таким образом, мы доказали, что при достаточно малых  $\mu > 0$

$$\|P^*(\tau, \mu) - \bar{P}(\tau)\| \leq c_0 e^{-v_1 \frac{\tau}{\mu}} + c_1 \mu, \quad 0 \leq \tau \leq T_0. \quad (3.48)$$

Поскольку (3.42) также можно записать в сингулярной форме, введя  $\tau_1 = \mu(t - t_0) = T_0 - \tau$ ,

$$\mu \frac{dx}{d\tau_1} = \bar{A}x, \quad x(0) = x^0, \quad \tau_1 \geq 0, \quad (3.49)$$

где  $\bar{A}$  зависит только от медленной переменной  $\tau_1$ , то и для его решения  $\bar{x}(\tau_1, \mu)$  можно записать аналогичную оценку

$$|\bar{x}(\tau_1, \mu)| \leq d_0 e^{-v_0 \frac{\tau_1}{\mu}} + d_1 \mu, \quad 0 \leq \tau_1 \leq T_0, \quad (3.50)$$

где  $d_0, d_1, \gamma_0$  — константы, причем  $\gamma_0$  можно взять сколь угодно близко к степени устойчивости матрицы  $\bar{A}$ , но при значении  $t_1 = 0$ , т. е.  $t = t_0$ .

Теперь для оценки проигрыша в значении показателя используем его представление (8.17) гл. 6, из которого следует, что

$$J(u) = J(u^*) + \int_{t_0}^{t_f} [u + K^*x]^T R [u + K^*x] dt, \quad (3.51)$$

каково бы ни было управление  $u(t)$  и определяемое им изменение состояния  $x(t)$ . В частности, для управления (3.38) получаем

$$\begin{aligned} \Delta J \triangleq J(\bar{u}) - J(u^*) &= \int_{t_0}^{t_f} \bar{x}^T [K^* - \bar{K}]^T R [K^* - \bar{K}] \bar{x} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \bar{x}^T [P^* - \bar{P}] BR^{-1} B^T [P^* - \bar{P}] \bar{x} dt. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Теперь остается произвести оценку правой части (3.52) с учетом неравенств (3.48), (3.50):

$$\begin{aligned} \Delta J &\leq \mu^{-1} \int_0^{T_0} \|\bar{x}(\tau, \mu)\|^2 \|P^*(\tau, \mu) - \bar{P}(\tau)\|^2 \|B(\tau) R^{-1} B^T(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq s\mu^{-1} \int_0^{T_0} (d_0 e^{-\gamma_0(T_0-\tau)\mu^{-1}} + d_1 \mu)^2 (c_0 e^{-\gamma_1 \mu^{-1}} + c_1 \mu)^2 d\tau, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $s \triangleq \max_{\tau \in [0, T_0]} \|B(\tau) R^{-1} B^T(\tau)\|$ . Непосредственное интегрирование в правой части (3.53) приводит теперь к оценке, указанной в Т.8.5.

Доказательство Т.8.4 окажется упрощенным вариантом доказательства, описанного выше, если принять  $T = T_0/\mu$ . ■

Проведенный в ходе доказательства анализ поведения решений уравнения Риккати интересен и сам по себе как пример приложения теории сингулярно возмущенных уравнений к нелинейным задачам (см. также [6.6] и [8.13]).

#### § 4. Периодические решения. Автоколебания и вынужденные колебания

Рассмотрим первоначально системы, описываемые уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (4.1)$$

где в правую часть время  $t$  не входит. Как уже указывалось в гл. 5, уравнения (4.1) могут иметь как постоянные частные решения, так и частные решения колебательного характера, в частности

периодические решения, удовлетворяющие условию

$$x(t+T) = x(t) \quad (4.2)$$

при некотором  $T > 0$ .

Если периодическое решение не исчезает при малых изменениях характеристик системы (является «грубым») и, более того, устойчиво по отношению к малым изменениям начальных условий, то в реальной системе, описываемой математической моделью (4.1), возможно возникновение автоколебаний.

Для разыскания периодических решений используются два принципиально различных подхода.

4.1. Методы типа Пуанкаре. В методах этого типа осуществляется поиск начальных условий  $x(0) = \xi$  таких, чтобы соответствующее этим начальным условиям решение  $x(t, \xi)$  уравнения (4.1) удовлетворяло требованию периодичности (4.2).

Иначе говоря, разыскивается  $n+1$  параметр  $(\xi, T)$ , удовлетворяющий уравнению

$$x(T, \xi) = \xi. \quad (4.3)$$

Как правило, найти в явной форме зависимость  $x(t, \xi)$  невозможно. Численное интегрирование позволяет это сделать с достаточно высокой точностью, но лишь при конкретном задании начальных условий  $\xi$ . В таких ситуациях говорят, что функция задана алгоритмически.

Процедуры поиска решений уравнений при алгоритмическом задании входящих в него функций изучаются в вычислительной математике \*). Здесь же мы ограничимся анализом лишь частных классов систем, где уравнение (4.3) может быть представлено в более явной форме.

а. Линейные системы. Пусть

$$f(x) = Ax, \quad (4.4)$$

где  $A$  — постоянная матрица. Тогда

$$x(t, \xi) = e^{At} \xi, \quad (4.5)$$

и уравнение (4.3) приобретает вид

$$e^{AT} \xi = \xi. \quad (4.6)$$

Это уравнение однородно по  $\xi$ . Для того чтобы оно имело нетривиальное решение  $\xi \neq 0$ , необходимо выполнение условий

$$\det \{I - e^{At}\} = 0 \quad (4.7)$$

при некотором  $T > 0$ .

\*). Некоторое представление об этих методах дано ниже, в гл. 9, § 7, где приведены и ссылки на соответствующую литературу.

Предположим для простоты, что матрица  $A$  приводима к диагональной форме. Тогда (4.7) эквивалентно

$$\prod_v (1 - e^{\lambda_v T}) = 0, \quad (4.8)$$

где  $\lambda_v$  — с. ч. матрицы  $A$ . Очевидно, что (4.8) выполняется, если одно из  $\lambda_v$  лежит на мнимой оси,  $\lambda_v = i\omega_v$ . При этом период равен \*).

$$T = T_v = \frac{2\pi}{\omega_v}, \quad \omega_v \neq 0. \quad (4.9)$$

В качестве искомого начального условия может фигурировать любой вектор  $\xi$ , удовлетворяющий однородному уравнению

$$\{I - e^{AT_v}\} \xi = 0. \quad (4.10)$$

**Вывод:** линейные системы допускают периодические решения, отличные от постоянных, если матрица имеет чисто мнимые с. ч. Эти решения не являются изолированными по начальным условиям (если  $\xi^* \neq 0$  удовлетворяет (4.6), то и  $a\xi^*$  при любом  $a$  удовлетворяет (4.6)).

Свойство периодичности «негрубо» по отношению к изменению параметров, поскольку малые изменения могут привести к смещению с. ч. с мнимой оси. Автоколебания отсутствуют.

б. *Непрерывные кусочно-линейные системы.* В кусочно-линейных системах построение зависимостей  $x(T, \xi)$  может быть осуществлено путем непрерывного «сшивания» решений, описывающих изменение ее состояния в пределах каждой зоны линейности.

Для демонстрации этой процедуры рассмотрим уравнение системы с одним нелинейным элементом

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv, \quad v = f(\sigma), \quad \sigma = Cx, \quad (4.11)$$

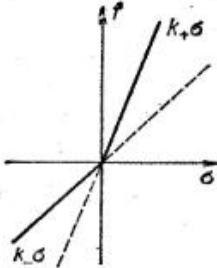


Рис. 8.6

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — постоянные матрицы ( $B$  — столбец,  $C$  — строка). Функцию  $f(\sigma)$  предполагаем кусочно линейной, причем  $f(0) = 0$ . Первоначально примем, что имеется только один «излом» (рис. 8.6)

$$f(\sigma) = \begin{cases} k_+\sigma, & \sigma \geq 0, \\ k_-\sigma, & \sigma \leq 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Пространство состояний разбивается на два подпространства (см. двумерную иллюстрацию на рис. 8.7), в пределах каждого из

\*.) В случае нулевого корня (4.8) удовлетворяется при любом  $T$ , т. е. периодическое решение является постоянным. Эта ситуация уже рассматривалась в § 4.

которых изменение состояния описывается линейным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_+x, \quad A_+ \triangleq A + k_+BC \text{ при } Cx \geq 0, \\ \frac{dx}{dt} &= A_-x, \quad A_- \triangleq A + k_-BC \text{ при } Cx \leq 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Попытаемся искать  $T$ -периодическое частное решение  $x(t, \xi)$ , для которого

$$\begin{aligned} x(0, \xi) &= \xi, \quad \sigma(0, \xi) = C\xi = 0, \quad \sigma(t, \xi) > 0, \quad 0 \leq t < t_1^*, \\ \sigma(t_1^*, \xi) &= Cx(t_1^*, \xi) = 0, \quad \sigma(t, \xi) < 0, \quad t_1^* < t < T. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Иначе говоря (см. рис. 8.7), движение начинается с точки, лежащей на разделяющей гиперплоскости \*),

$$Cx = 0,$$

и внутри периода (в момент  $t_1^*$ ) происходит один переход через нее из (+)-подпространства в (-)-подпространство.

Состояние системы в момент перехода дается формулой

$$x(t_1^*) = e^{A_+ t_1^*} \xi,$$

а условие периодичности требует, чтобы

$$x(T) = e^{A_- (T-t_1^*)} x(t_1^*) = \xi.$$

Таким образом, периодическое решение описанного типа может существовать, если найдутся такие константы  $\xi$ ,  $t_1^*$ ,  $T$ , что

$$e^{A_- (T-t_1^*)} e^{A_+ t_1^*} \xi = \xi, \quad C\xi = 0, \quad Ce^{A_+ t_1^*} \xi = 0. \quad (4.15)$$

Мы вновь пришли к однородной по  $\xi$  системе. Поэтому либо найдется неединственный вектор начальных условий, которому соответствует периодическое решение \*\*), либо решения нет (см. Приложение 2, п. 4б).

Ясно, что общие свойства периодических решений системы (4.13) те же, что и общие свойства периодических решений линейных систем: они не «грубы» и не изолированы. Иначе говоря, им не могут соответствовать реально наблюдаемые автоколебательные режимы.

Рассмотрим, наконец, случай, когда нелинейность имеет два излома (рис. 8.8), причем для простоты выкладок ограничимся

\*) При  $n = 2$  это просто прямая.

\*\*) Требуется после нахождения решения (4.15) дополнительно проверить выполнение гипотезы об одном переходе  $\sigma(t)$  через нуль за период.

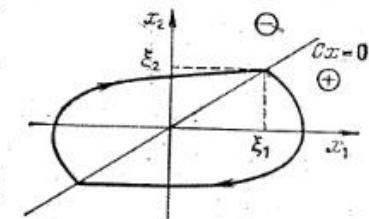


Рис. 8.7

симметричным случаем:

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma - \Delta, & \sigma \geq \Delta, \\ 0, & |\sigma| \leq \Delta, \\ \sigma + \Delta, & \sigma \leq -\Delta \end{cases} \quad (4.16)$$

(нелинейность типа «зоны нечувствительности»). В фазовом пространстве имеются три области линейности (рис. 8.9), разделяемые гиперплоскостями  $Cx = \Delta$ ,  $Cx = -\Delta$ .

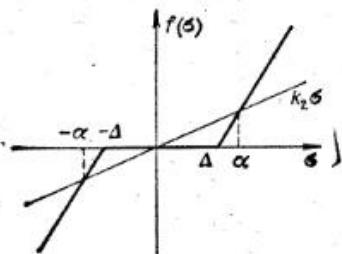


Рис. 8.8

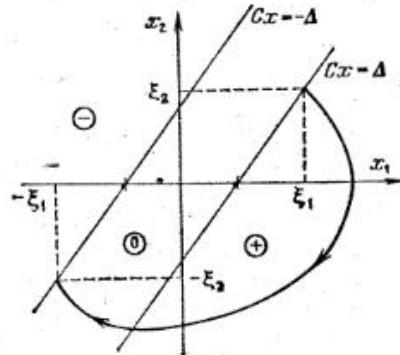


Рис. 8.9

В силу симметрии системы можно попытаться искать симметричные периодические решения такие, что

$$x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t), \quad x(t + T) = x(t). \quad (4.17)$$

Выберем начальный момент так, чтобы (рис. 8.9)

$$x(0, \xi) = \xi, \quad \sigma(0, \xi) = C\xi = \Delta,$$

причем предположим, что

$$\sigma(t, \xi) > \Delta, \quad 0 < t < t^*,$$

а

$$\sigma(t^*, \xi) = \Delta,$$

т. е.  $t^*$  — момент выхода в «зону нечувствительности», и  $|\sigma(t, \xi)| < \Delta$ ,  $t^* < t < \frac{T}{2}$ , а  $\sigma\left(\frac{T}{2}, \xi\right) = -\Delta$ . В силу принятых предположений можно явно выписать зависимость решения от начальных условий  $\xi$  и параметров  $t^*$ ,  $T$ . При  $0 \leq t \leq t^*$  имеем

$$\dot{x} = Ax + BCx - B\Delta;$$

$$x(0) = \xi \Rightarrow x(t, \xi) = e^{A_1 t} \xi + A_1^{-1} (I - e^{A_1 t}) B\Delta, \quad A_1 \triangleq A + BC,$$

а при  $t^* \leq t \leq \frac{T}{2}$  используем другое линейное описание:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t^*) = x(t^*, \xi) \Rightarrow x(t) = e^{A(t-t^*)} [e^{A_1 t^*} \xi + A_1^{-1} (I - e^{A_1 t^*}) B\Delta].$$

Для нахождения  $\xi$ ,  $t^*$ ,  $T$  получаем систему уравнений:

$$C\xi = \Delta, \quad Ce^{A_1 t^*} \xi = -CA_1^{-1} (I - e^{A_1 t^*}) B\Delta + \Delta, \\ e^{A\left(\frac{T}{2}-t^*\right)} e^{A_1 t^*} \xi + \xi = -e^{A\left(\frac{T}{2}-t^*\right)} A_1^{-1} (I - e^{A_1 t^*}) B\Delta.$$

Из последнего уравнения можно найти вектор  $\xi$ . Подстановка результата в первые два скалярных уравнения дает два трансцендентных уравнения, из которых можно найти неизвестные параметры  $t^*$ ,  $T$ . Хотя доведение выкладок до конца в явном виде невозможно, ясно основное: при фиксированных  $t^*$ ,  $T$  вектор  $\xi$  определяется единственным образом, корни трансцендентных уравнений, как правило, изолированы и непрерывно зависят от параметров системы. Следовательно, здесь возможны автоколебания.

**в. Системы с разрывными кусочно-линейными нелинейностями.** Вновь рассмотрим систему вида (4.11), однако допустим, что функция  $f(\sigma)$  не является непрерывной, но каждому участку непрерывности  $f(\sigma)$  вновь соответствует линейное описание системы в целом, и можно вновь попытаться строить зависимость  $x(t, \xi)$  путем «сплавления» решений из условия непрерывности.

Опишем соответствующую процедуру для идеальной релейной характеристики

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ -1, & \sigma < 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

При  $\sigma = 0$  значение  $f(\sigma)$  не определено. Однако, если  $\sigma(t)$  обращается в нуль лишь конечное число раз за период, то эта неопределенность несущественна.

Опять-таки пространство состояний разбито на два подпространства (рис. 8.7), в каждом из которых справедливо линейное описание:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B, & \text{если } \sigma = Cx > 0, \\ \dot{x} &= Ax - B, & \text{если } \sigma = Cx < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Попытаемся искать симметричное периодическое решение. Примем начальное состояние  $\xi$  таким, что

$$\sigma(0) = C\xi = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\sigma}(0) = C\dot{x} = C(A\xi + B) > 0. \quad (4.20)$$

Тогда имеется отрезок времени, в течение которого  $\sigma(t) > 0$  и справедливо первое из уравнений (4.19). Потребуем, чтобы в конце

этого отрезка, при  $t = T/2$ , выполнялось условие

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = -\xi. \quad (4.21)$$

Интегрируя первое уравнение (4.19), приводим (4.21) к виду

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = e^{AT/2}\xi - A^{-1}(I - e^{AT/2})B = -\xi, \quad (4.22)$$

откуда \*)

$$\xi = A^{-1}[I + M]^{-1}[I - M]B, \quad M \triangleq e^{AT/2}. \quad (4.23)$$

Условие (4.20) дает уравнение для определения  $T$  (уравнение периодов)

$$CA^{-1}[I + M]^{-1}[I - M]B = 0. \quad (4.24)$$

Если матрица  $A$  приводима к диагональной, то это уравнение не трудно преобразовать к виду [8.10]:

$$\sum_{v=1}^n \frac{\gamma_v \rho_v}{\lambda_v} \operatorname{th} \frac{\lambda_v T}{4} = 0, \quad (4.24')$$

где  $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_v\} = S^{-1}AS$ ,  $\gamma = \{\gamma_v\} = CS$ ,  $\rho = \{\rho_v\} = S^{-1}B$ .

Опять-таки существенно, что уравнение периодов, как правило, может иметь только конечное число основных \*\*) корней  $T_*$ , непрерывно зависящих от параметров. Каждому такому корню в силу (4.23) однозначно сопоставляются начальные условия  $\xi^*$ , а по  $\xi^*$  находится соответствующее периодическое решение

$$x^*(t) = e^{At}\xi^* - A^{-1}(I - e^{At})B, \quad 0 \leq t \leq \frac{T_*}{2}, \quad (4.25)$$

причем в силу симметрии

$$x^*\left(t + \frac{T_*}{2}\right) = -x^*(t). \quad (4.26)$$

**Вывод:** для ряда нелинейных систем основное уравнение (4.3)

$$x(T, \xi) = \xi$$

может иметь единственное решение или конечный набор решений ( $\xi^*$ ,  $T_*$ ), каждому из которых соответствует периодическое решение исходной системы (4.1) с начальными условиями  $x(0) = \xi^*$  и периодом  $T_*$ , причем эти решения сохраняются при малых изменениях параметров системы.

\*) Здесь в дальнейших выкладках используется перестановочность функций от одной и той же матрицы  $A$ . Предполагается также неособенность обратимых матриц.

\*\*) Корень типа  $NT_*$ , где  $N$  — целое число,  $N > 1$ , определяет то же решение, что и корень  $T_*$ .

**4.2. Устойчивость.** Наличие периодических решений свидетельствует о возможности возникновения автоколебаний, если эти решения устойчивы. В общем случае вопрос об устойчивости сводится к изучению поведения решений, для которых начальные условия отличаются от вычисленного  $\xi^*$ .

Обозначим

$$\zeta(t) = x(t) - x^*(t). \quad (4.27)$$

Тогда для  $\zeta(t)$  получаем уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt} = f[\zeta + x^*(t)] - f[x^*(t)]. \quad (4.28)$$

Устойчивость решения  $x^*(t)$  исходной системы (4.1) эквивалентна устойчивости состояния равновесия  $\zeta = 0$  системы (4.28). Однако применение общих методов теории устойчивости затруднительно, в особенности при наличии разрывных правых частей.

Поэтому, следуя [8.10, с. 170]\*), опишем только сравнительно простую процедуру исследования устойчивости «в малом» периодических режимов в системах (4.11) с релейной нелинейностью (4.18).

Рассмотрим некоторое периодическое решение  $x^*(t)$ , задаваемое формулами (4.25), (4.26), где  $T_*$  — корень уравнения (4.24), а  $\xi^*$  вычисляется по формуле (4.23) (для простоты в дальнейшем индекс решения опустим).

Наряду с ним рассмотрим другое, не обязательно периодическое решение  $x(t)$  системы (4.11), (4.18) и изучим последовательность  $x(t_k) = x[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , его значений в моменты переключения  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , т. е. в моменты, когда

$$\sigma(t_k) = Cx(t_k) = 0. \quad (4.29)$$

Пусть нумерация выбрана так, что

$$\begin{aligned} \sigma(t) &> 0 & \text{при } t \in (t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \sigma(t) &< 0 & \text{при } t \in (t_{2k+1}, t_{2k+2}), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

В пределах каждого из интервалов состояние системы изменяется в соответствии с линейными уравнениями, и можно записать

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x[k] - (-1)^k A^{-1}(I - e^{A(t-t_k)})B, \quad (4.30)$$

так что

$$\begin{aligned} x[k+1] &= e^{A_{[k]}}x[k] - (-1)^k A^{-1}(I - e^{A_{[k]}})B, \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

\*) Более подробные сведения об особенностях построения периодических режимов в кусочно-линейных системах и исследовании их устойчивости даны в [8.11].

где  $\tau[k] \triangleq t_{k+1} - t_k$ . С другой стороны, из условий (4.29) имеем

$$Cx[k] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.32)$$

что дает дополнительные соотношения для определения моментов  $t_k$ , а, следовательно, длительностей  $\tau[k]$  интервалов между переключениями.

Уравнения (4.31), (4.32) являются нелинейными рекуррентными соотношениями, позволяющими по заданным начальным условиям вычислить последовательность  $\{x[k], \tau[k]\}$ . По предположению при  $t_0 = 0, x[0] = \xi$  эти уравнения имеют решение

$$\tau[k] = \frac{T}{2}, \quad x[k] = (-1)^k \xi. \quad (4.33)$$

Введем в рассмотрение последовательность отклонений от этого решения

$$\theta[k] \triangleq (-1)^k \left( \tau_k - \frac{T}{2} \right), \quad \zeta[k] = x[k] - (-1)^k \xi \quad (4.34)$$

и запишем для нее рекуррентные соотношения, линеаризуя (4.31), (4.32) в окрестности периодического решения (4.33).

В результате линеаризации (4.31) получаем

$$\zeta[k+1] = e^{\lambda T/2} \zeta[k] + e^{\lambda T/2} [A\xi + B] \theta[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.35)$$

причем из (4.32) следует, что

$$C\zeta[k] = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

а следовательно,

$$Ce^{\lambda T/2} \zeta[k] + Ce^{\lambda T/2} [A\xi + B] \theta[k] = 0, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (4.36)$$

и можно исключить  $\theta[k]$  из (4.35), (4.36), получая линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для последовательности  $\{\zeta[k]\}$  в виде

$$\zeta[k+1] = a\zeta[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.37)$$

где

$$a = M \left[ I - \frac{(A\xi + B) cM}{cM (A\xi + B)} \right], \quad M \triangleq e^{\lambda T/2}.$$

С учетом (4.23) это выражение можно переписать в виде

$$a = M \left[ I - \frac{(I + M)^{-1} MB CM}{CM (I + M)^{-1} MB} \right]. \quad (4.38)$$

По аналогии с теоремой Липунова — Пуанкаре для непрерывных систем (§ 2) можно доказать, что асимптотическая устойчивость линеаризованной системы (4.37), т. е. расположение всех с. ч. матрицы  $a$  внутри единичного круга, влечет за собой асимптотическую устойчивость («в малом!») нелинейных рекуррентных соотношений, так что  $\zeta[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

В свою очередь почти очевидно, что это свойство влечет за собой асимптотическое приближение траектории, описываемой в пространстве состояний процессом  $x(t)$ , к замкнутой траектории (циклу), описываемому исследуемым периодическим решением. В этом случае говорят об асимптотической орбитальной устойчивости цикла, а сам цикл называют устойчивым предельным циклом [8.7, с. 295]\*). Только решение, соответствующее асимптотически орбитально устойчивому предельному циклу, и может реализоваться как наблюдаемый автоколебательный режим.

**4.3. Методы типа Галеркина.** Переидем теперь к рассмотрению второго подхода к разысканию периодических решений. В методах типа Галеркина частное периодическое решение разыскивается в виде линейной комбинации заданных функций времени. Коэффициенты в этой комбинации подбираются так, чтобы наиболее точно удовлетворялось исходное уравнение (4.1).

Рассмотрим подробнее особенности метода применительно к системам с одним нелинейным элементом, описываемым уравнениями (4.11).

Зададим  $\sigma(t)$  приближенно в виде

$$\sigma(t) \simeq \tilde{\sigma}^{(N)}(t) = \sum_{k=-N}^{N^1} \tilde{\sigma}_k e^{ik\omega t}, \quad (4.39)$$

где  $\tilde{\sigma}_k$  — пока неизвестные (вообще говоря, комплексные) коэффициенты. Неизвестным является и параметр  $\omega$ . Представление (4.39) задает  $\sigma(t)$  как периодическую с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  функцию, и коэффициенты  $\tilde{\sigma}_k$  можно (хотя и не обязательно!) рассматривать как приближенные коэффициенты отрезка ряда Фурье искомой функции  $\sigma(t)$ .

Функцию  $v(t)$  также будем разыскивать в виде линейной комбинации

$$v(t) \simeq \tilde{v}^N(t) = \sum_{k=-N}^{N^1} \tilde{v}_k e^{ik\omega t}. \quad (4.40)$$

Выберем коэффициенты  $\tilde{v}_k, \tilde{\sigma}_k$  так, чтобы минимизировать среднеквадратичную (за период  $T$ ) погрешность в удовлетворении уравнения

$$v(t) = f(\sigma(t)),$$

если в него подставлены представления (4.39), (4.40).

\*). Асимптотическая орбитальная устойчивость не означает асимптотической устойчивости самого периодического решения: траектории могут сближаться, но между решениями может наблюдаться сдвиг по времени («набег фазы»). Известно, однако [8.1, 8.7], что асимптотическая орбитальная устойчивость обеспечивает устойчивость по Липунову самого решения («набег фазы» ограничен).

Нетрудно убедиться, что минимум

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\tilde{v}^N(t) - f[\tilde{\sigma}^N(t)]]^2 dt$$

достигается, если

$$\tilde{v}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f[\tilde{\sigma}^N(t)] e^{-ik\omega t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.41)$$

т. е.  $\tilde{v}_k$  являются коэффициентами ряда Фурье  $T$ -периодической функции  $f[\tilde{\sigma}^N(t)]$ .

При заданной в виде (4.40) периодической функции  $v(t)$  линейная часть системы также будет иметь периодическое решение, если, конечно, величины  $ik\omega$ ,  $k = 0, \dots, N$ , не являются с. ч. матрицы  $A$  (отсутствует резонанс). Каждая гармоника проходит через линейную часть независимо, и можно сразу записать, что

$$\tilde{\sigma}_k = -H_L(ik\omega)\tilde{v}_k, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.42)$$

где  $H_L(i\omega) = -c[i\omega I - A]^{-1}B$  — частотная характеристика линейной части.

При заданной нелинейной характеристике  $f(\sigma)$  можно вычислить по формулам (4.41) зависимости

$$\tilde{v}_k = v_k(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_{\pm 1}, \dots, \tilde{\sigma}_{\pm N}), \quad (4.43)$$

подстановка которых в (4.42) дает систему уравнений для определения неизвестных  $\tilde{\sigma}_k$ . Кроме того, в силу независимости от времени характеристик системы (4.11) начало отсчета может быть выбрано произвольно. Если взять

$$\tilde{\sigma}_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k > 0, \quad \tilde{\sigma}_k = \alpha_k - i\beta_k, \quad k < 0,$$

где  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  вещественны, то одна из величин  $\alpha_k$  или  $\beta_k$  может быть принята равной нулю за счет указанного произвола. Таким образом, имеется  $2N$  вещественных неизвестных вида  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ , а также неизвестная  $\omega$ , для определения которых есть  $2N+1$  уравнение (4.42), (4.43). Доказать, что решение этой нелинейной системы существует, затруднительно. Вычислительная процедура также не может быть простой. Найти в явном виде зависимости (4.43) удается лишь в редких случаях (например, для полиноминальных нелинейностей), так что обычно их приходится считать алгоритмически заданными (при каждом конкретном численном значении набора  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  определенные интегралы (4.41), конечно, могут быть вычислены).

Таким образом, в вычислительном отношении задача поиска решения с помощью описанного метода типа Галеркина относится к тому же «классу сложности», что и задачи, возникающие при применении методов типа Пуанкаре.

Разница заключается лишь в том, что в первом случае число неизвестных определяется принятым числом слагаемых в представлении (4.39), а во втором — жестко задается размерностью системы. Если аппроксимация (4.39) при небольшом  $N$  (существенно меньшем размерности) является удачной, то методы типа Галеркина могут иметь практическое преимущество. Очевидно, что метод гармонического баланса является частным вариантом (при  $N=1$ ) описанной процедуры, и ее естественно назвать *обобщенным методом гармонического баланса*.

Напомним (гл. 5), что обычный ( $N=1$ ) метод гармонического баланса был применен не только для разыскания автоколебаний, но и для приближенной оценки установившейся реакции на внешние периодические воздействия, т. е. оценки вынужденных колебаний. Не приводя соответствующих выкладок, укажем, что оба описанных выше подхода полностью применимы и к решению этой проблемы. Все различие заключается лишь в том, что период  $T$  окажется заданным, что существенно облегчает задачу, но возникает новая неизвестная — сдвиг по фазе между воздействием и решением. Иначе говоря, в методах «шивания», применяемых к кусочно-линейным задачам, нельзя произвольно выбирать момент перехода из одной области линейности в другую — это добавочная неизвестная, а в обобщенном методе гармонического баланса нельзя произвольно выбирать одну из констант  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ . В остальном же процедуры остаются сходными.

**4.4. Метод интегральных уравнений [8.11].** В заключение кратко остановимся на важном как в теоретическом, так и в прикладном отношении подходе к разысканию периодических решений, как бы синтезирующем оба ранее описанных.

Рассмотрим вновь систему в форме Лурье:

$$\dot{x} = Ax + Bv + Gw, \quad v = f(\sigma), \quad \sigma = Cx. \quad (4.44)$$

Если рассматривается задача о вынужденных колебаниях, то  $w = w(t)$  — заданная  $T$ -периодическая функция. Если рассматривается задача об автоколебаниях, то можно положить  $w = 0$  и считать период  $T$  дополнительной неизвестной. Размерность  $m$  векторов  $v$  и  $\sigma$  будем пока считать произвольной (система имеет  $m$  нелинейных элементов).

Разыскивается  $T$ -периодическое решение

$$x(t+T) = x(t), \quad \sigma(t+T) = \sigma(t), \quad v(t+T) = v(t). \quad (4.45)$$

Построим интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $\sigma(t)$ .

В силу уравнений линейной части системы имеем

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [\mathbf{Bv}(\tau) + \mathbf{Gw}(\tau)] d\tau. \quad (4.46)$$

По условию периодичности

$$\mathbf{x}(T) = e^{AT} \mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} [\mathbf{Bv}(\tau) + \mathbf{Gw}(\tau)] d\tau,$$

откуда

$$\mathbf{x}(0) = [I - e^{AT}]^{-1} \int_0^T e^{A(T-\tau)} [\mathbf{Bv}(\tau) + \mathbf{Gw}(\tau)] d\tau, \quad (4.47)$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} [I - e^{AT}]^{-1} \int_0^T e^{A(T-\tau)} [\mathbf{Bv}(\tau) + \mathbf{Gw}(\tau)] d\tau + \\ &\quad + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [\mathbf{Bv}(\tau) + \mathbf{Gw}(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Поскольку  $\mathbf{v}(\tau) = f(\sigma(\tau)) = f(Cx(\tau))$ , то (4.48) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной  $T$ -периодической вектор-функции  $\mathbf{x}(t)$ . Его можно записать и в более компактной форме:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathcal{H}_{vx}(t-\tau) f[Cx(\tau)] d\tau + w_x(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.49)$$

где  $\mathcal{H}_{vx}(0)$  — матричная  $T$ -периодическая весовая функция, имеющая вид

$$\mathcal{H}_{vx}(0) = e^{At} [I - e^{AT}]^{-1} B, \quad 0 \leq \theta < T, \quad (4.50)$$

а смысл обозначения  $w_x(t)$  очевиден. Действительно, из (4.48) следует, что ядро преобразования примет вид

$$\mathcal{H}_{vx}(t-\tau) = \begin{cases} e^{At} [I - e^{AT}]^{-1} e^{A(T-\tau)} B + e^{A(t-\tau)} B, & 0 \leq \tau \leq t, \\ e^{At} [I - e^{AT}]^{-1} e^{A(T-\tau)} B, & t < \tau \leq T, \end{cases}$$

или

$$\mathcal{H}_{vx}(t-\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)} [I - e^{AT}]^{-1} B, & 0 \leq \tau \leq t, \\ e^{A(t-\tau+T)} [I - e^{AT}]^{-1} B, & t < \tau \leq T, \end{cases}$$

откуда и вытекает возможность представления (4.49), (4.50).

Из (4.49) сразу следует и уравнение, содержащее только процесс  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathcal{H}(t-\tau) f[\sigma(\tau)] d\tau + w_\sigma(t), \quad (4.51)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(0) &= Ce^{At} [I - e^{AT}]^{-1} B, \quad 0 \leq \theta < T, \\ w_\sigma(t) &= Cw_x(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.52)$$

В задачах об автоколебаниях ( $Cw(t) = 0 \Rightarrow w_\sigma(t) = 0$ ) весовая функция  $\mathcal{H}(0)$  содержит всю необходимую информацию о свойствах линейной части системы\*). Она является периодической по  $\theta$ , причем может иметь разрывы непрерывности на концах периода.

Интегральное уравнение (4.51) в некоторых случаях дает возможность сразу решить задачу.

**Пример 4.1.** Пусть система включает только один нелинейный элемент, характеристика которого  $f(\sigma)$  имеет вид (4.18). Пусть разыскивается симметричный автоколебательный режим с одним переключением на периоде. Тогда

$$f[\sigma(\tau)] = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < \frac{T}{2}, \\ -1, & \frac{T}{2} < \tau < T, \end{cases} \quad w_\sigma(t) = 0$$

и

$$\sigma(t) = \int_0^{T/2} \mathcal{H}(t-\tau) d\tau - \int_{T/2}^T \mathcal{H}(t-\tau) d\tau.$$

При  $t \in [0, \frac{T}{2}]$  используем (4.52), причем учтем периодичность  $\mathcal{H}(0)$ :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t \mathcal{H}(t-\tau) d\tau + \int_t^{T/2} \mathcal{H}(T+t-\tau) d\tau - \int_{T/2}^T \mathcal{H}(T+t-\tau) d\tau = \\ &= C \left[ \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau + \int_t^{T/2} e^{A(T+t-\tau)} d\tau - \int_{T/2}^T e^{A(T+t-\tau)} d\tau \right] [I - e^{AT}]^{-1} B = \\ &= CA^{-1} \left[ e^{AT} - I + 2e^{At} - 2e^{A\left(\frac{T}{2}+t\right)} \right] [I - e^{AT}]^{-1} B. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma(0) = 0$ , имеем

$$CA^{-1} [I - 2e^{AT/2} + e^{AT}] [I - e^{AT}]^{-1} B = 0,$$

или

$$CA^{-1} [I - M] [1 + M]^{-1} B = 0, \quad M \triangleq e^{AT/2},$$

что совпадает с уравнением периодов (4.24), полученным выше.

Если же  $w_\sigma(t) \neq 0$  и является заданной  $T$ -периодической функцией  $w_\sigma\left(t + \frac{T}{2}\right) = -w_\sigma(t)$ , то решение находится столь же просто.

\*). В [8.11] эта функция называется импульсно-частотной характеристикой (ИЧХ), поскольку она может быть найдена как установившаяся реакция линейной части на  $T$ -периодическую последовательность  $\delta$ -импульсов.

Возьмем за начало отсчета неизвестных момент  $\varphi$ , когда  $\sigma(t) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(t) > 0$ . Тогда, разыскивая симметричный режим с одним переключением внутри периода в момент  $T/2$ , получим

$$\sigma(t) = \int_0^{T/2} \mathcal{H}(t-\tau) d\tau - \int_{T/2}^T \mathcal{H}(t-\tau) d\tau + w_\sigma(t+\varphi),$$

или

$$\sigma(t) = CA^{-1}[I - M][I + M]^{-1}B + w_\sigma(t+\varphi),$$

причем  $\varphi$  определится из условия

$$0 = CA^{-1}[I - M][I + M]^{-1}B + w_\sigma(\varphi). \square$$

**4.5. Оценки точности.** В общем случае интегральное уравнение (4.51) может служить как исходный объект для применения специальных итеративных вычислительных процедур [8.9], а также для получения оценок точности приближений, получаемых по методам галеркинского типа, и прежде всего, для качественного понимания их возможностей.

При этом особую роль играет следующее замечательное свойство периодической весовой функции: возможность ее выражения через частотную характеристику линейной части системы в виде

$$\mathcal{H}(\theta) = -\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_L(i k \omega) e^{i k \omega \theta}, \quad 0 < \theta < T, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.53)$$

Для доказательства справедливости разложения (4.53) достаточно представить  $\mathcal{H}(\theta)$  в виде ряда Фурье

$$\mathcal{H}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{i k \omega \theta}, \quad 0 < \theta < T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{H}(\theta) e^{-i k \omega \theta} d\theta = \frac{1}{T} C \int_0^T e^{A\theta} e^{-i k \omega \theta} d\theta [I - e^{AT}]^{-1} B = \\ &= \frac{C}{T} [A - i k \omega I]^{-1} [e^{(A-i k \omega I)T} - I] [I - e^{AT}]^{-1} B = \\ &= \frac{1}{T} C [i k \omega I - A]^{-1} B = -\frac{1}{T} H_L(i k \omega). \end{aligned}$$

Из (4.51), (4.53) очевидно, что высшие гармоники в  $v(t) = f(\sigma(t))$ , преобразуясь в  $\sigma(t)$ , ослабляются пропорционально значениям частотной характеристики на частотах  $k\omega$ ,  $k > 1$ , а это дает качественное обоснование метода гармонического баланса.

Интегральное уравнение (4.51), (4.53) позволяет получить и строгие оценки эффективности приближений.

Кратко опишем основную идею применительно к задаче о вынужденных колебаниях.

$T$ -периодическое решение системы (4.44), если оно существует, представимо в виде

$$\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k e^{i k \omega t}.$$

Обозначим

$$\sigma^N(t) = \sum_{k=-N}^N \sigma_k e^{i k \omega t}$$

и

$$\Delta\sigma(t) = \sigma(t) - \sigma^N(t).$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (4.51), (4.53) эквивалентно системе двух уравнений

$$\sigma^N(t) = \int_0^T \mathcal{H}^N(t-\tau) f[\sigma^N(\tau) + \Delta\sigma(\tau)] d\tau + w_\sigma^N(t), \quad (4.52')$$

$$\Delta\sigma(t) = \int_0^T \Delta\mathcal{H}(t-\tau) f[\sigma^N(\tau) + \Delta\sigma(\tau)] d\tau + \Delta w_\sigma(t), \quad (4.53')$$

где

$$\mathcal{H}^N(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{N+1} H_L(i k \omega) e^{i k \omega \theta},$$

$$\Delta\mathcal{H}(\theta) = \mathcal{H}(\theta) - \mathcal{H}^N(\theta),$$

$w_\sigma^N(t)$  также содержит лишь первые  $2N+1$  слагаемых ряда Фурье функции  $w_\sigma(t)$ , а  $\Delta w_\sigma(t)$  — высшие гармоники. Действительно, структура функции  $\mathcal{H}^N(\theta)$  такова, что в результате вычисления интеграла в правой части (4.52') все высшие гармоники (с номерами больше  $N$ ) в функции  $f[\sigma^N(\tau) + \Delta\sigma(\tau)]$  исчезают. Из тех же соображений очевидно, что приближенное решение  $\tilde{\sigma}^N(t)$ , находимое по описанной выше схеме метода Галеркина, точно удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\sigma}^N(t) = \int_0^T \mathcal{H}^N(t-\tau) f[\tilde{\sigma}^N(\tau)] d\tau + w_\sigma^N(t). \quad (4.54)$$

Отличие этого решения от точного решения  $\sigma(t)$  исходной задачи можно записать в виде

$$\Delta(t) \triangleq \sigma(t) - \tilde{\sigma}^N(t) = \Delta^N \sigma(t) + \Delta\sigma(t),$$

где первое слагаемое возникает в силу неточности вычисления амплитуд первых  $N$  гармоник и смещения, а второе — в силу наличия высших гармоник, вообще не принимавшихся во внимание при построении решения по методу Галеркина.

Из предшествующего следует, что

$$\Delta^N \sigma(t) = \int_0^T \mathcal{H}^N(t-\tau) \{f[\tilde{\sigma}^N(\tau) + \Delta(\tau)] - f[\tilde{\sigma}^N(\tau)]\} d\tau, \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma(t) &= \int_0^T \Delta \mathcal{H}(t-\tau) \{f[\tilde{\sigma}^N(\tau) + \Delta(\tau)] - f[\tilde{\sigma}^N(\tau)]\} d\tau + \\ &\quad + \int_0^T \Delta \mathcal{H}(t-\tau) f[\tilde{\sigma}^N(\tau)] d\tau + \Delta w_\sigma(t). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Если функция  $f(\sigma)$  скалярна и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(\sigma^{(1)}) - f(\sigma^{(2)})| \leq L|\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}|, \quad L = \text{const}, \quad (4.57)$$

то можно получить следующую оценку погрешности

$$\max_{t \in [0, T]} \Delta(t) \leq \frac{1}{1 - Lc(T)} \gamma, \quad (4.58)$$

где

$$\gamma = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^T \Delta \mathcal{H}(t-\tau) f[\tilde{\sigma}^N(\tau)] d\tau + \Delta w_\sigma(t) \right|,$$

a\*)

$$c(T) = \int_0^T |\mathcal{H}(\tau)| d\tau \leq \sqrt{T \int_0^T \mathcal{H}^2(\tau) d\tau} = \sqrt{\sum_k |H_L(i k \omega)|^2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.59)$$

К сожалению, оценка (4.58) пригодна, только если  $1 > Lc(T)$ , т. е., грубо говоря, в том случае, когда коэффициент усиления разомкнутого контура на частоте воздействия мал. Более сильные (но и более трудоемкие) оценки для конкретных нелинейностей и  $N = 1$  (метод гармонического баланса) даны в [8.11, гл. 5].

Исследование интегральных уравнений позволяет получить и условия существования периодических решений. Как правило, они являются следствием анализа сходимости итеративных процедур решения, представляющих самостоятельный интерес.

Приведем в несколько упрощенной форме следующий результат [8.11].

**Теорема 4.1.** Пусть выполнено условие  $Lc < 1$ , где константы  $L$ ,  $c$  определены в (4.57), (4.59). Тогда существует решение уравнения (4.51), являющееся пределом последовательности  $\sigma^{(l)}(t)$ , получаемой, начиная с произвольного начального приближения  $\sigma^{(0)}(t)$  по схеме

$$\begin{aligned} \sigma^{(l+1)}(t) &= \int_0^T \mathcal{H}(t-\tau) f[\sigma^{(l)}(\tau)] d\tau + w_\sigma(t), \\ l &= 0, 1, \dots, 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.60)$$

\* Далее используется неравенство Коши — Буняковского и равенство Парсеваля для коэффициентов ряда Фурье.

Доказательство. Имеем

$$\sigma^{(l+1)}(t) - \sigma^{(l)}(t) = \int_0^T \mathcal{H}(t-\tau) \{f[\sigma^{(l)}(\tau)] - f[\sigma^{(l-1)}(\tau)]\} d\tau, \quad (4.61)$$

$l = 1, 2, \dots,$

или

$$\Delta^{(l)} \triangleq \max_t |\sigma^{(l+1)}(t) - \sigma^{(l)}(t)| \leq$$

$$\leq \int_0^T \max_t |\mathcal{H}(t-\tau)| L |\sigma^{(l)}(\tau) - \sigma^{(l-1)}(\tau)| d\tau \leq L c \Delta^{(l-1)}. \quad (4.62)$$

Используя признак равномерной сходимости Вейерштрасса, убеждаемся, что при  $Lc < 1$  равномерно сходится ряд

$$\sigma^0(t) + \sum_{l=0}^{\infty} [\sigma^{(l+1)}(t) - \sigma^{(l)}(t)],$$

или, что то же самое, равномерно сходится последовательность  $\{\sigma^{(l)}(t)\}$ . Предел  $\sigma^*(t)$ , очевидно, удовлетворяет интегральному уравнению (4.51) и является искомым периодическим решением. ■

Результат Т.4.1 без особых затруднений переносится на случай системы с многими нелинейностями вида (2.8) — (2.10).

Предполагая, что функции  $f_j(\sigma_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , удовлетворяют условию Липшица

$$|f_j(\sigma_j^{(1)}) - f_j(\sigma_j^{(2)})| \leq L_j |\sigma_j^{(1)} - \sigma_j^{(2)}|, \quad (4.63)$$

и производя в (4.61) покомпонентную оценку, получим

$$\Delta_g^{(l)} \leq \sum_{j=1}^m L_j c_{gj}(T) \Delta_j^{(l-1)}, \quad (4.64)$$

где

$$c_{gj}(T) = \int_0^T |\mathcal{H}_{gj}(\tau)| d\tau \leq \sqrt{\sum_k |\mathcal{H}_{gj}(ik\omega)|^2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.65)$$

и через  $\mathcal{H}_{gj}$  обозначены элементы матричной частотной характеристики  $H_L$ , а

$$\Delta_j^{(l)} \triangleq \max_{t \in [0, T]} |\sigma_j^{(l+1)}(t) - \sigma_j^{(l)}(t)|.$$

Вводя в рассмотрение матрицу  $R(T) \triangleq \{L_j c_{gj}(T)\}$  и вектор  $\Delta^{(l)} = (\Delta_j^{(l)})_x$  можно записать (4.64) в виде  $\Delta^{(l)} \leq R(T) \Delta^{(l-1)}$ .

Если все с. ч. матрицы  $R(T)$  лежат внутри единичного круга, то гарантируется равномерная сходимость последовательных приближений к пределу, являющемуся решением интегрального уравнения. Этот результат с помощью более тонких методов теории операторных уравнений был усилен в [8.8].

26\*

**Теорема 4.2.** Пусть

$$|f_i(\sigma_i)| \leq L_i |\sigma_i|, \quad (4.66)$$

$$\tilde{c}_{gj}(T) = \max_{k=0, \pm 1, \dots} |\mathcal{H}_{gj}(ik\omega)|, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.67)$$

Тогда решение уравнения (4.31) существует, если все с. ч. матрицы

$$\bar{R}(T) = \{L_j \tilde{c}_{gj}(T)\} \quad (4.68)$$

лежат внутри единичного круга. ■

Интересно, что условия Т.4.2 гарантируют как существование решения уравнений (4.42), (4.43) обобщенного метода гармонического баланса при любом  $N$ , так и сходимость (по равномерной норме) приближенных решений, получаемых по этому методу, к точному решению по мере увеличения числа  $N$  слагаемых в представлении (4.39).

**4.6. Обобщенные автоколебания.** С практической точки зрения зачастую безразлично, существует ли в системе периодический автоколебательный режим или же имеются колебания, не являющиеся периодическими.

В работе [8.12] было введено обобщенное представление об автоколебательных режимах.

**Определение.** Решение  $x(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $v(t)$  системы (4.11) при  $w(t) = 0$ ,  $m = 1$  называется *обобщенно автоколебательным* ( $(-\alpha, \beta)$ -автоколебательным по  $\sigma$ ), если выполнены следующие условия:

- а)  $|x(t)| \leq \text{const}$ ;
- б) число изменений знака функции  $\sigma(t)$  бесконечно на  $t \in [0, \infty)$ ;
- в) число выходов  $\sigma(t)$  за пределы заданного интервала  $[-\alpha, \beta]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , бесконечно на  $t \in [0, \infty)$ .

Интуитивно ясно, что если система неустойчива в малом, но диссипативна, в ней должны возникать обобщенно автоколебательные режимы.

На самом деле справедлив следующий строгий результат [8.12], вновь даваемый в упрощенной форме.

**Теорема 4.3.** Пусть  $A$  не имеет с. ч. на мнимой оси, функция  $f(\sigma)$  удовлетворяет условию Липшица и дифференцируема в нуле. Пусть существует единственное равновесное состояние  $x = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $v = 0$ . Тогда решение системы (4.11) при почти любых начальных условиях\*) является  $(-\alpha, \beta)$ -автоколебательным, если выполнены следующие условия:

- 1) при  $|\sigma| \geq \bar{\sigma}$  график  $f(\sigma)$  лежит в секторе абсолютной устойчивости;
- 2) при  $-\alpha \leq \sigma \leq \beta$  график  $f(\sigma)$  лежит в секторе абсолютной неустойчивости. ■

\*) За исключением множества нулевой меры.

Поясним используемые в теореме термины.

Пусть на некотором отрезке  $[\sigma_1, \sigma_2]$

$$k_1 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq k_2, \quad \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad 0 \leq k_1 < k_2 < \infty. \quad (4.69)$$

Тогда говорят, что функция  $f(\sigma)$  лежит в секторе  $[k_1, k_2]$ .

Пусть при некотором  $k \in [k_1, k_2]$  линейная система (4.11) с  $f(\sigma) = k\sigma$  является устойчивой, а кроме того, выполнено частотное неравенство Попова, которое для сектора, не обязательно примыкающего к оси абсцисс, имеет вид

$$\frac{1}{k_2 - k_1} + \operatorname{Re} \left\{ (1 + i\omega q) \frac{H_L(i\omega)}{1 + k_1 H_L(i\omega)} \right\} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \quad (4.70)$$

Тогда говорят, что на отрезке  $[\sigma_1, \sigma_2]$  функция  $f(\sigma)$  лежит в секторе абсолютной устойчивости. Если же условие Попова выполнено, но при некотором  $k \in [k_1, k_2]$  система с  $f(\sigma) = k\sigma$  неустойчива, то говорят о том, что на этом отрезке  $f(\sigma)$  лежит в секторе абсолютной неустойчивости.

Заметим также, что условие (1) теоремы гарантирует диссипативность системы и может быть заменено любым другим условием диссипативности.

В качестве приложения рассмотрим следующую проблему.

Пусть линейный неустойчивый объект с дробно-рациональной строго реализуемой п. ф.  $H_L(p)$  замкнут безынерционной нелинейной отрицательной обратной связью, имеющей характеристику типа зоны нечувствительности

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma - \Delta, & \sigma > \Delta, \\ 0, & |\sigma| \leq \Delta, \\ \sigma + \Delta, & \sigma < -\Delta. \end{cases} \quad (4.71)$$

Пусть замкнутая система была рассчитана как устойчивая по линейной теории (без учета зоны нечувствительности). Покажем, что тем не менее в такой системе обязательно возникают автоколебания (по крайней мере в указанном выше обобщенном смысле). Запишем уравнение системы в операторной форме

$$\sigma + H_L(D)f(\sigma) = 0. \quad (4.72)$$

Его можно переписать и в виде

$$\sigma + H_L(D)\sigma - H_L(D)f_1(\sigma) = 0, \quad (4.73)$$

где

$$f_1(\sigma) = -f(\sigma) + \sigma = \begin{cases} \Delta, & \sigma \geq \Delta, \\ \sigma, & |\sigma| \leq \Delta, \\ -\Delta, & \sigma \leq -\Delta, \end{cases} \quad (4.74)$$

или в виде

$$\sigma + H_{L1}(D)f_1(\sigma) = 0, \quad H_{L1}(D) = -\frac{H_L(D)}{1+H_L(D)}. \quad (4.75)$$

Поскольку  $f_1(\sigma) = 0$  при  $\Delta = 0$ , то  $H_{L1}(D)$  соответствует п. ф. замкнутой системы, рассчитанной при  $\Delta = 0$ , и по предположению устойчива. Поскольку  $f_1(\sigma)$  ограничена, то нелинейная система (4.73) (и эквивалентная ей (4.72)) диссипативна: ограниченное воздействие не может вывести устойчивую линейную систему из ограниченной области.

С другой стороны, при  $|\sigma| \leq \Delta$  функция  $f(\sigma)$  заведомо лежит в секторе абсолютной неустойчивости.

При использовании Т.4.3 можно дать простую оценку размаха колебаний  $\sigma(t)$ . В силу (4.74), (4.75) при достаточно больших  $t$

$$|\sigma(t)| \leq \Delta \int_0^\infty |h_{L1}(\tau)| d\tau,$$

где  $h_{L1}(\tau)$  — весовая функция, соответствующая  $H_{L1}(p)$ . Согласно теореме размах колебаний превышает  $\Delta$ . Последнюю оценку можно уточнить, давая лучшую оценку границы отрезка, в пределах которого  $f(\sigma)$  лежит в секторе абсолютной неустойчивости. Например, положив в (4.70)  $k_1 = 0$ ,  $q = 0$ , можно записать условия Попова в виде

$$\min_{\omega} \operatorname{Re} H_L(i\omega) > -\frac{1}{k_2}.$$

Тогда в качестве границы сектора (см. рис. 8.9), а следовательно, оценки снизу величины размаха можно принять  $\alpha = \Delta/(1-k_2)$ . Напомним лишь, что Т.4.3 применима только в том случае, когда в системе нет равновесных состояний, отличных от  $\sigma = 0$ , т. е. уравнение

$$\sigma + H_L(0)f(\sigma) = 0$$

имеет единственное решение, иначе говоря,

$$-\frac{1}{H_L(0)} \geq 1.$$

## ГЛАВА 9

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ

#### § 1. Формулировка задачи

**1.1. Общая задача.** В этой главе будет систематически рассматриваться проблема оптимизации управления, т. е. задача выбора такого закона управления, который, удовлетворяя четко заданной системе ограничений, обеспечивает при своей реализации наилучшее (оптимальное) значение того или иного показателя качества работы управляемой системы.

При исследовании линейных систем уже рассматривалась одна из возможных постановок проблемы оптимизации. Были изучены возможности построения законов управления системой, описываемой уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

обеспечивающих достижение минимального значения показателя качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + x^T R u] dt + x^T(t_f) Q_f x(t_f), \quad (1.2)$$

который интерпретировался как мера отклонения от заданного состояния  $x^*(t) = 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ , с учетом «энергетических затрат» на управление.

Предложенная процедура позволила (при определенных предположениях о параметрах задачи) построить как программу управления  $u_{\text{opt}}(t)$ , дающую решение при каких-либо заданных начальных условиях

$$x(t_0) = x^0, \quad (1.3)$$

так и закон управления с обратной связью по измерениям вектора состояния

$$u_{\text{opt}}(x, t) = -K(t)x(t), \quad (1.4)$$

обеспечивающий тот же результат при любых начальных условиях. Более того, в рамках линейной теории были даны обобщения задачи для ситуаций неполных и неточных наблюдений и наличия случайных возмущений.

В данной главе будут изучаться только детерминированные задачи построения оптимальных программ управления. Однако мы попытаемся описать подходы к решению проблемы оптимизации для значительно более широкого (по сравнению с гл. 6, 7) класса моделей систем, различных показателей качества и существенных ограничений.

Итак, пусть

1) система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (1.5)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор переменных состояний,  $u$  —  $m$ -вектор управляемых воздействий,  $f$  —  $n$ -вектор-функция, предполагаемая непрерывной и непрерывно дифференцируемой по всем переменным;

2) требуется обеспечить экстремум (максимум или минимум) показателя качества, называемого также критериальным функционалом

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} g_0(x, u, t) dt + G_0[x(t_0), x(t_f)], \quad (1.6)$$

значение которого определяется как непосредственно видом выбранного управления  $u(t)$ , так и изменением состояния  $x(t)$  в силу уравнений (1.5) при начальном значении  $x(t_0)$ ;

3) при выборе управления требуется также соблюдение выполнения условий

$$\int_{t_0}^{t_f} g_i(x, u, t) dt + G_i[x(t_0), x(t_f)] \begin{cases} = 0, & i = 1, \dots, r_1, \\ \leq 0, & i = r_1 + 1, \dots, r; \end{cases} \quad (1.7)$$

скалярные функции  $g_i$ ,  $G_i$ ,  $i = 0, \dots, r$ , фигурирующие в (1.6), (1.7), предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми;

4) управление может быть произвольной кусочно-непрерывной функцией  $t$ , однако его значения в любой момент  $t \in [t_0, t_f]$  не должны выходить за пределы области  $U$ , множества в  $m$ -мерном пространстве, которое, как правило, также задается набором уравнений или неравенств;

5) моменты начала  $t_0$  и конца  $t_f$  оптимизируемого процесса могут быть заранее фиксированными либо также подлежать выбору с целью улучшения значения функционала (1.6).

Сформулированную проблему принято называть *общей задачей математической теории оптимального управления*. Фактически же ее решение, если его удается построить, определяет только программу управления в условиях полной информации. Лишь в некоторых ситуациях оказывается возможным и осуществление оптимального синтеза управления с обратной связью по переменным состояния (точный смысл этого понятия будет указан ниже).

Очевидно, что описанная проблема включает в себя, как частный случай, линейно-квадратичную задачу оптимизации (1.1) — (1.3). Желательность обобщения с прикладной точки зрения очевидна. Нами уже обсуждалась важность учета нелинейных эффектов в описании объекта управления и в особенности ограничений на выбор управления — ограничений как по «полней энергии», так и по «уровню» в любой момент времени работы.

**1.2. Приведение частных задач к общему виду.** Остановимся на одном классе задач оптимального управления, который принято называть *задачами об оптимальном быстродействии*.

Пусть зафиксированы начальный момент  $t_0$  и состояние в этот момент, т. е. условие

$$x(t_0) = x^0, \quad (1.8)$$

где  $x^0$  — заданный числовой вектор. Требуется выбрать управление так, чтобы преобразовать состояние в заданное, т. е. выполнить условие

$$x(t_f) = x'. \quad (1.9)$$

Эта проблема изучалась в линейной теории (§ 3 гл. 6), причем было показано, что при невырожденности пары матриц  $A$ ,  $B$  такое управление может быть найдено и, более того, цель может достигаться за сколь угодно короткий отрезок времени. Однако с уменьшением  $t_f - t_0$  или с увеличением  $|x^0 - x'|$  уровень требуемого управляемого воздействия возрастал. Осталось неясным, как выбрать какое-либо управление, приводящее к цели и удовлетворяющее заданным ограничениям по уровню, и как добиться цели при ограниченном управлении за минимально короткий отрезок времени. В этом и заключается задача оптимального быстродействия. Запишем ее формально: найти  $u(t)$  такое, что для системы (1.5) в заданный момент  $t_0$  и произвольный  $t_f$  выполнены условия (1.8), (1.9), причем

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (1.10)$$

а  $t_f - t_0$  достигает минимального значения.

Покажем что задача оптимального быстродействия является частным случаем общей проблемы. Действительно, примем в (1.6)  $g_0 = 1$ ,  $G_0 = 0$ . Тогда

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0. \quad (1.11)$$

Условия (1.8), (1.9) дают  $2n$  уравнений

$$x_j(t_0) - x_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

$$x_j(t_f) - x_j' = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

являющихся частными случаями условий типа (1.7) ( $r = 2n$ ), при отсутствии интегральных слагаемых.

Задача оптимального быстродействия допускает различные, также имеющие прикладное значение модификации. Например, достаточно достичь желаемого состояния  $x^d$  с некоторой точностью, задаваемой условием

$$[x(t_f) - x^d]^T Q_a [x(t_f) - x^d] \leq \delta, \quad (1.14)$$

где  $Q_a$  — неотрицательно определенная матрица коэффициентов соизмерения отклонений по различным координатам, а  $\delta$  — заданное число, или же независимыми условиями по каким-либо (не обязательно всем) координатам типа

$$(x_j - x_j^d)^2 \leq \delta_j. \quad (1.15)$$

Очевидно, что это тоже частные случаи условий типа (1.7), но в виде неравенств.

Зачастую паряду с ограничениями на «текущий уровень» управления типа (1.10) или вместо них целесообразно ограничить «энергию» управления условием

$$\int_{t_0}^{t_f} u^T R u \, dt \leq \bar{J}_u, \quad (1.16)$$

где  $R$  — «соизмеряющая» матрица, или, покомпонентно, условиями типа

$$\int_{t_0}^{t_f} u_i^2 \, dt \leq \bar{J}_i. \quad (1.17)$$

Вновь имеем дело с частными вариантами условий (1.7), но с интегральными слагаемыми.

Как мы убедимся в дальнейшем, задачи о преобразовании из исходного состояния в желаемое (даже с заданной погрешностью) могут не иметь решения. Поэтому их зачастую заменяют близкими по содержательному смыслу, но формально существенно другими постановками типа достижения цели с минимальной погрешностью за фиксированное время, являющееся практически приемлемым.

При этом  $t_0$ ,  $t_f$  заданы, равно как  $x(t_0)$ , минимизируемый функционал берется, например, в виде

$$J = [x(t_f) - x^d]^T Q_f [x(t_f) - x^d], \quad (1.18)$$

а явных ограничений на значения  $x(t_f)$  не налагается. Такие задачи называются *задачами оптимизации со свободным правым концом траектории* и в определенном смысле являются наиболее простыми.

Во всех предшествующих классах задач начальные условия при выборе программы считались фиксированными. Однако это не обязательно. В ряде ситуаций начальные условия по некоторым координатам могут быть предварительно, к моменту начала работы, вы-

бранны, «выставлены» желаемым образом. Иногда возможность выбора определяется тем, что на самом деле некоторые координаты вводятся искусственно, при уже знакомых нам процедурах формального расширения пространства состояний.

Для понимания существа дела важна следующая ситуация. Напомним, что в рамках сформулированной проблемы управления выбираются среди кусочно-непрерывных функций, поэтому в оптимальном управлении допустимы разрывы непрерывности, скачки. Вместе с тем в приложениях могут возникать ситуации, когда скорость изменения управляющего воздействия должна быть ограничена и управления со скачками окажутся недопустимыми.

Для того чтобы «вложить» требования ограниченности скорости в описанную общую схему, и используется идея расширения пространства. Пусть для определенности ограничена по модулю скорость изменения компоненты  $u_1(t)$  управляющего воздействия

$$|\dot{u}_1(t)| \leq \bar{v}_1, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (1.19)$$

Тогда само управление объявляется новой переменной состояния

$$x_{n+1}(t) = u_1(t),$$

а вместо  $u_1(t)$  выбирается программа изменения скорости

$$v(t) = \dot{u}_1(t),$$

связанная с переменной  $x_{n+1}(t)$  очевидным уравнением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (1.20)$$

Это уравнение может быть добавлено к исходным, образуя вместе с ними систему типа (1.5), но относительно расширенного вектора.

Существенно, что начальное условие по переменной  $x_{n+1}(t)$ , т. е. начальное значение исходного управления  $u_1(t)$ , может быть выбрано произвольно.

Таким образом, мы убедились, что общая постановка проблемы оптимального управления включает в себя, как частные случаи, многие практически интересные классы задач, конкретные примеры которых будут приведены ниже. К сожалению, не существует каких-либо работоспособных алгоритмов получения точного решения общей проблемы оптимального управления. Однако описанная постановка полезна тем, что в ее рамках можно установить определенные свойства, которыми должно обладать решение, — *условия оптимальности*.

## § 2. Условия оптимальности. Принцип максимума

**2.1. Задачи с конечным числом неизвестных.** Для того чтобы выяснить свойства решений общей проблемы, описываемой в § 1, предварительно напомним ряд простых фактов, относящихся к анализу функций конечного числа переменных, которые в определенной мере уже использовались в предшествующем изложении.

**Определение.** Функция  $F_0(y)$  достигает максимума в допустимой области  $Y_0$  изменения переменной  $y$ , если существует такое значение этой переменной  $y^* \in Y_0$ , что

$$F_0(y) \leq F_0(y^*) \quad (2.1)$$

для всех  $y \in Y_0$ . Соответственно, функция  $F_0(y)$  достигает минимума в  $Y_0$ , если существует такое  $y^*$ , что

$$F_0(y) \geq F_0(y^*) \quad (2.2)$$

для всех  $y \in Y_0$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $y^*$  — внутренняя точка области  $Y_0$  и функция  $F_0(y)$  векторной переменной  $y = (y_1, \dots, y_n)$  дифференцируема в точке  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ . Тогда для того, чтобы  $y^*$  доставляла экстремум (максимум или минимум) функции  $F_0(y)$  в области  $Y_0$ , необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial F_0}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = y^* \quad (2.3)$$

или, в скалярной форме,

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial F_0}{\partial y_n} = 0 \quad (2.3')$$

при  $y_1 = y_1^*, \dots, y_n = y_n^*$ .

Напомним, что доказательство теоремы основывается на том факте, что при малом изменении какого-либо аргумента, например, приращении  $y_1$  значения  $y_1^* + \varepsilon$ , не выводящем за пределы  $Y_0$ , поведение функции  $F_0(y)$  описывается соотношением

$$F_0(y) = F_0(y^*) + \varepsilon \frac{\partial F_0}{\partial y_1} + o(\varepsilon). \quad (2.4)$$

Выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым и придавая ему произвольный знак, всегда можно добиться того, чтобы условия (2.1) или (2.2) были нарушены, если не выполнено (2.3). ■

Указанное в теореме свойство « $y^*$  — внутренняя точка  $Y_0$ », т. е. «существует малая окрестность  $y^*$ , целиком лежащая в  $Y_0$ », весьма важно. Если  $y^*$  лежит на границе  $Y_0$ , то (2.3) не является необходимым условием. Например, пусть допустимыми являются только значения  $y \geq 0$ , а точка  $y^*$  такова, что какая-либо компонента, например,  $y_1^* = 0$ . Тогда в ней может достигаться максимум, даже если

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_1} < 0, \quad (2.5)$$

что также прямо следует из (2.4), поскольку в этой формуле можно выбирать только  $\varepsilon \geq 0$  (значение  $y_1 = y_1^* + \varepsilon = \varepsilon$  недопустимо

при  $\varepsilon < 0$ ). Как правило, допустимая область  $Y_0$  явно задается с помощью системы условий, уравнений или неравенств, которым должны удовлетворять значения  $y$ . Кратко записывают так\*):

$$Y_0 = \{y / F_i(y) = 0, i = 1, \dots, r_1, F_i(y) \leq 0, i = r_1 + 1, \dots, r\}. \quad (2.6)$$

Для установления условий оптимальности при этом обычно используют метод множителей Лагранжа. Напомним соответствующий результат для случая, когда в числе условий имеются только уравнения.

**Теорема 2.2.** Составим лагранжиан

$$\mathcal{L}_0(y, \lambda) = \lambda_0 F_0(y) + \lambda_1 F_1(y) + \dots + \lambda_r F_r(y), \quad (2.7)$$

где  $\lambda_0, \dots, \lambda_r$  — некоторые скалярные величины. Для того чтобы в допустимой точке  $y^*$  достигался экстремум (максимум или минимум) функции  $F_0(y)$  в области

$$Y_0 = \{y / F_i(y) = 0, i = 1, \dots, r\}, \quad (2.8)$$

необходимо, чтобы существовали  $\lambda_i^*$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $\lambda_0^* \geq 0$ , не равные одновременно нулю и такие, чтобы они совместно с  $y^*$  удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ F_i(y^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При этом предполагается, что функции  $F_i(y)$ ,  $i = 0, \dots, r$ , дифференцируемы в точке  $y^*$ . Если, кроме того, выполнено условие регулярности

$$\text{rank} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y_j}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, n \right\} = r \quad (2.10)$$

при  $y = y^*$ , то заведомо существуют такие  $\lambda_i^*$ , причем  $\lambda_0^* \neq 0$ .

Мы не будем приводить доказательство. Отметим лишь, что обычно предполагается выполнение условия регулярности (2.10), поэтому сразу принимают  $\lambda_0 = 1$  (условия (2.9) однородны по  $\lambda$  и фактически определяют лишь отношение компонент вектора  $\lambda = (\lambda_i)$  к какой-либо одной, не равной нулю). Лагранжиан при этом принимает вид

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = F_0(y) + \sum_{i=1}^r \lambda_i F_i(y). \quad (2.11)$$

Первая группа уравнений (2.9) обычно трактуется как требование безусловного экстремума лагранжиана по переменным  $y$  при зна-

\* Символ «/» здесь и далее читается так: «удовлетворяющих условиям» или «при выполнении условий».

чениях  $\lambda$  как свободных параметрах, а вторая — как добавочные уравнения, с помощью которых разыскиваются подходящие значения этих параметров. ■

Приведенная теорема дает строгое описание *необходимых условий оптимальности*, получаемых при использовании вспомогательной функции — лагранжиана.

Однако зачастую метод Лагранжа применяют в более «вольной» форме, восходящей к гипотезе, выдвинутой еще самим Лагранжем в 1797 г.: «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к исходной функции те, которые должны обращаться в нуль, умноженные на неопределенные множители, а затем искать максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимыми; полученные уравнения будут служить совместно с уравнениями связи для определения всех неизвестных»\*).

Гипотеза Лагранжа верна не всегда, в чем убеждает следующий простой пример.

**Контрпример.** Данна задача

$$\min y_1 / y_1^2 + y_2^2$$

Единственной допустимой точкой является  $y^* = (0, 0)$ , следовательно, в ней и достигается минимум. Вместе с тем, составляя лагранжиан согласно гипотезе, имеем

$$\mathcal{L} = y_1 + \lambda_1(y_1^2 + y_2^2).$$

Условия минимума дают

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 1 + 2\lambda_1 y_1 = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = 2\lambda_1 y_2 = 0,$$

однако первое условие несовместно с уравнением связи.

Очевидно, что в точке  $(0, 0)$  нарушено условие регулярности (2.10) и справедлива лишь более общая схема построения необходимых условий, указанная в Т.2.2. Составим

$$\mathcal{L}_0 = \lambda_0 y_1 + \lambda_1(y_1^2 + y_2^2).$$

Тогда условия

$$\lambda_0 + 2\lambda_1 y_1 = 0, \quad 2\lambda_1 y_2 = 0, \quad y_1^2 + y_2^2 = 0$$

совместны при  $y_1 = 0, y_2 = 0, \lambda_0 = 0$  и произвольном  $\lambda_1$ . □

\* Цит. по книге [9.1].

Гипотеза Лагранжа, дополненная введением неотрицательного множителя  $\lambda_i$  при минимизируемой функции, обычно приводит к правильным результатам или по крайней мере позволяет «угадать» правильный подход к задачам на условный экстремум, хотя, конечно, не заменяет строгих формулировок и доказательств.

Покажем сначала, как использовать эту гипотезу для составления необходимых условий при наличии ограничений в форме неравенств, для определенности в задаче

$$\min \{F_0(y)/F_i(y) = 0, i = 1, \dots, r, F_i(y) \leq 0, i = r_1 + 1, \dots, r\}. \quad (2.12)$$

Превратим первоначально неравенства в уравнения введением новых неизвестных  $v_i, i = r_1 + 1, \dots, r$ . Очевидно, что условия

$$F_i(y) + v_i^2 = 0, \quad i = r_1 + 1, \dots, r, \quad (2.13)$$

эквивалентны исходным неравенствам. Составим расширенный лагранжиан

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_0 &= \lambda_0 F_0(y) + \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i F_i(y) + \sum_{i=r_1+1}^r \lambda_i [F_i(y) + v_i^2] = \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(y) + \sum_{i=r_1+1}^r \lambda_i v_i^2 \triangleq \bar{\mathcal{L}}_0 + \sum_{i=r_1+1}^r \lambda_i v_i^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\mathcal{L}}_0 = \sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(y).$$

Минимум  $\bar{\mathcal{L}}_0$  по  $y$  достигается при условиях

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_0}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_0}{\partial y_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_0}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

а минимизация по  $v_i$  требует, чтобы

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_0}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i v_i = 0, \quad i = r_1 + 1, \dots, r; \quad (2.15)$$

при этом минимум достигается только, если

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = r_1 + 1, \dots, r. \quad (2.16)$$

Условия (2.15) означают, что в точке минимума либо  $\lambda_i = 0$ , либо  $v_i = 0$ , т. е. в силу (2.13)

$$\lambda_i F_i(y) = 0. \quad (2.17)$$

Эти условия обычно называют *условиями дополняющей нежесткости* (если какое-либо неравенство выполняется в точке минимума  $y^*$  нежестко, т. е. точка  $y^*$  не лежит на поверхности, определен-

ной условием (2.13), то соответствующий множитель должен быть жестко равен нулю и наоборот).

Строгий результат может быть сформулирован в следующем виде\*).

**Теорема 2.3.** Для того чтобы в допустимой точке  $y^*$  достигался минимум функции  $F_0(y)$  в области  $\bar{Y}_0$ , задаваемой соотношением (2.6), необходимо, чтобы существовали величины  $\lambda_i = \lambda_i^*$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $\lambda_0^* \geq 0$ , не равные одновременно нулю и такие, чтобы они совместно с  $y = y^*$  удовлетворяли системе условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \lambda_i F_i(y) = 0, \quad i = r+1, \dots, r, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(y)$$

а функции  $F_i(y)$ ,  $i = 0, \dots, r$ , предполагаются непрерывно дифференцируемыми в  $y^*$ . Если, кроме того, в точке  $y^*$  выполнено условие регулярности типа (2.10), где учитываются индексы  $i = 1, \dots, r$ , кроме таких, для которых

$$F_i(y^*) < 0,$$

то указанный набор множителей  $\lambda_0, \dots, \lambda_r$  существует, причем  $\lambda_0^* \neq 0$ , так что лагранжиан может записываться с  $\lambda_0 = 1$ . ■

Отметим, что для одного, довольно широкого класса задач условия теоремы 2.3 оказываются не только необходимыми, но и достаточными.

Напомним известные из анализа понятия.

**Определение.** Функция  $F(y)$  называется выпуклой, если для любых двух значений ее аргумента  $y^{(1)}, y^{(2)}$  выполнено условие

$$F[(1-\theta)y^{(1)} + \theta y^{(2)}] \leq (1-\theta)F(y^{(1)}) + \theta F(y^{(2)}),$$

где  $\theta$  — скалярный параметр, принимающий произвольные значения на отрезке  $[0, 1]$ .

Если выпуклая функция дифференцируема в точке  $y^{(1)}$ , то

$$F(y) \geq F(y^{(1)}) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=y^{(1)}} (y - y^{(1)}).$$

Если она дважды дифференцируема, то матрица вторых производных  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$  является неотрицательно определенной.

Свойство выпуклости в случае скалярного  $y$  хорошо иллюстрируется (рис. 9.1): график выпуклой функции лежит не выше хор-

\*). Этот результат обычно называется условиями Куна — Таккера.

ды, стягивающей любые две точки, и не ниже касательной, проведенной через любую точку. Очевидно, что линейная и неотрицательно определенная квадратичная формы являются выпуклыми функциями.

**Определение.** Множество  $Y$  является выпуклым, если оно содержит отрезок, соединяющий любые две свои точки, или формально: если  $y^{(1)} \in Y$ ,  $y^{(2)} \in Y$ , то  $(1-\theta)y^{(1)} + \theta y^{(2)} \in Y$ ,  $\theta \in [0, 1]$ .

С помощью этих определений нетрудно показать, что выпукло множество, точки которого удовлетворяют условию  $F(y) \leq 0$ , если  $F(y)$  — выпуклая функция, или же набору условий  $F_i(y) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , если все  $F_i(y)$  — выпуклые функции.

Выпукло и множество (гиперплоскость), определяемое уравнениями  $F_i(y) = 0$ , если  $F_i(y)$  — линейные функции.

Теперь можно сформулировать интересующий нас факт.

**Дополнение к теореме 2.3.** Если в задаче (2.12) функция  $F_0(y)$  является выпуклой, равно как и функции  $F_i(y)$ ,  $i = r+1, \dots, r$ , а функции  $F_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, r_1$ , являются линейными\*, то условия теоремы 2.3 оказываются достаточными для того, чтобы в точке  $y^*$  достигался минимум.

Достоинство лагранжева подхода к решению задач на условный экстремум особенно ярко проявляются в случае, когда функции, входящие в формулировку задачи, оказываются сепарабельными, т. е.

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(y_j), \quad i = 0, 1, \dots, r$$

(каждое слагаемое зависит только от «своего» аргумента). В этом случае лагранжиан также оказывается сепарабельной функцией

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(y) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \sum_{j=1}^n f_{ij}(y_j) = \sum_{j=1}^n \mathcal{L}_j,$$

где

$$\mathcal{L}_j = \sum_{i=0}^r \lambda_i f_{ij}(y_j).$$

При фиксированных множителях минимизация  $\mathcal{L}_0$  по векторному аргументу  $y$  распадается (декомпозируется) на  $n$  независимых задач минимизации функций  $\mathcal{L}_j$  по скалярному аргументу  $y_j$ . Такая особенность окажется чрезвычайно эффективной и при исследовании общей задачи оптимального управления, сформулированной в § 1.

\*). При указанных свойствах задача (2.12) называется задачей выпуклого программирования.

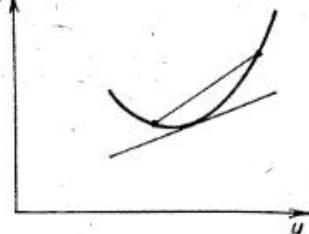


Рис. 9.1

**2.2. Принцип максимума как необходимое условие оптимальности.** Для определенности мы будем иметь в виду поиск управления, обеспечивающего минимум критериального функционала (1.6).

Значение минимизируемого выражения зависит от вида функций  $u(t)$ ,  $x(t)$  на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq t_f$ , т. е. в отличие от ранее рассмотренных ситуаций определяется не конечным набором чисел (вектором), а бесконечным числом значений функций в различных точках отрезка. Эти значения связаны рядом условий.

Первую группу условий образуют уравнения объекта (1.5), которые должны быть выполнены в любой момент времени,  $t \in [t_0, t_f]$ , т. е. фактически здесь имеется бесконечное число ограничений. Вторую группу образует конечное число соотношений (1.7) и, наконец, третью группу — ограничения (1.10) на выбор значений  $u(t)$  в каждый момент времени и условие, что  $u(t)$  должна быть кусочно-непрерывной функцией.

Таким образом, здесь вновь возникает задача на условный экстремум, но относительно бесконечного числа переменных с бесконечным числом ограничений. Тем не менее попытаемся применить для получения необходимых условий оптимальности тот же общий принцип Лагранжа, что и в конечномерном случае.

Построим лагранжиан

$$\mathcal{L} \triangleq \sum_{i=0}^r \lambda_i \left\{ \int_{t_0}^{t_f} g_i(x, u, t) dt + G_i[x(t_0), x(t_f)] \right\} + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [\dot{x} - f(x, u, t)] dt. \quad (2.19)$$

Здесь  $r$  условий (1.7) учтены с постоянными скалярными множителями  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , а уравнения объекта, задающие условия для всех  $t \in [t_0, t_f]$ , учтены с помощью функциональных множителей — непрерывной вектор-функции  $\lambda(t)$ . При этом конечная сумма добавляемых слагаемых превратилась в интегральную. Ограничения на значения  $u(t)$  типа (1.10) в лагранжиан не введены, и поэтому его минимизация должна вестись в пределах, допускаемых этими ограничениями.

Минимум разыскивается по переменным  $x(t)$ ,  $u(t)$ , а также по  $t_0$  и  $t_f$ , если такие моменты не фиксированы. При этом на значения  $x(t)$ ,  $t_0$ ,  $t_f$  ограничений нет.

Преобразуем предварительно последнее слагаемое в (2.19). Чтобы избавиться от явно входящего  $\dot{x}$ , проинтегрируем по частям:

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt = \lambda^T(t_f) x(t_f) - \lambda^T(t_0) x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T x dt.$$

\*

С учетом этого лагранжиан переписывается в виде

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_f} [-H(x, u, \lambda, t) - \dot{\lambda}^T x] dt + \sum_{i=0}^r \lambda_i G_i[x(t_0), x(t_f)] + \lambda^T(t_f) x(t_f) - \lambda^T(t_0) x(t_0), \quad (2.20)$$

где введено обозначение функции

$$H(x, u, \lambda, t) \triangleq \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] - \sum_{i=0}^r \lambda_i g_i[x(t), u(t), t], \quad (2.21)$$

обычно называемой гамильтонианом.

Используем далее следующее почти очевидное, хотя и не строго формулируемое утверждение: если функция  $y^*(t)$  доставляет минимум функционалу

$$J\{y\} = \int_{t_0}^{t_f} \varphi[y(t), t] dt + \Phi[y(t_0), y(t_f)], \quad (2.22)$$

то ее значения почти в каждый момент  $t \in [t_0, t_f]$  доставляют минимум подынтегральному выражению, а краевые значения  $y^*(t_0)$ ,  $y^*(t_f)$  доставляют минимум внеинтегральному слагаемому.

Выражение (2.20) имеет такую же структуру, что и (2.22), если под  $y(t)$  понимать совокупность  $x(t)$ ,  $u(t)$ . Пусть  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $t_0^*$ ,  $t_f^*$  доставляют минимум  $\mathcal{L}$ . Поскольку значения  $x(t)$  ограничений нет, то

$$\frac{\partial}{\partial x} [H + \dot{\lambda}^T x] = 0$$

при  $x = x^*(t)$ ,  $u = u^*(t)$ , или

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t)} \Big|_{u=u^*(t)} \quad (2.23)$$

почти в каждый момент  $t \in [t_0^*, t_f^*]$ . Условие (2.23) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для определения функциональных множителей  $\lambda(t)$ .

Из условия минимума внеинтегральных слагаемых имеем

$$\lambda(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \sum_{i=0}^r \lambda_i G_{i0} \quad (2.24)$$

$$\lambda(t_f) = -\frac{\partial}{\partial x(t_f)} \sum_{i=0}^r \lambda_i G_{if} \quad (2.25)$$

если  $x(t_0^*) = x^*(t_0^*)$ ,  $x(t_f^*) = x^*(t_f^*)$ . Соотношения (2.24), (2.25)

можно рассматривать как граничные (краевые) условия к уравнению (2.23).

От значений  $u(t)$  явно зависит только подынтегральное выражение, а в нем — только гамильтониан. Поэтому должно выполняться условие

$$-H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)] = \min_{u \in U} \{-H[x^*(t), u, \lambda(t), t]\},$$

или, что то же самое,

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t] = \max_{u \in U} H[x^*(t), u, \lambda(t), t] \quad (2.26)$$

почти в каждый момент  $t \in [t_0^*, t_f^*]$ .

Наконец, если  $t_0, t_f$  — свободные (выбираемые) величины, то для оптимальности их значений  $t_0^*, t_f^*$  необходимо

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_f} = 0 \quad (2.27)$$

при значениях  $u^*(t_0^*), x^*(t_0^*), u^*(t_f^*), x^*(t_f^*)$ . Условия (2.27) можно преобразовать к более удобной форме

$$\begin{aligned} H[x^*(t_0^*), u^*(t_0^*), \lambda^*(t_0^*), t_0^*] &= 0, \\ H[x^*(t_f^*), u^*(t_f^*), \lambda^*(t_f^*), t_f^*] &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Действительно, из представления (2.20) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_0} &= H[x(t_0), u(t_0), \lambda(t_0), t_0] + \dot{\lambda}^\top(t_0)x(t_0) + \\ &+ \sum_{i=0}^r \lambda_i \left[ \frac{\partial G_i}{\partial x}(t_0) \right]^\top \dot{x}(t_0) - \dot{\lambda}^\top(t_0)x(t_0) - \lambda^\top(t_0)\dot{x}(t_0) = \\ &= H[x(t_0), u(t_0), \lambda(t_0), t_0], \end{aligned}$$

причем использовано условие (2.24), справедливое на оптимальной траектории. Аналогично доказывается, что на оптимуме

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_f} = -H[x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f].$$

Проведенные рассуждения и аналогия с Т.2.3 делают правдоподобным следующий результат.

**Теорема 2.4 (принцип максимума Понтрягина)\*).** Для того чтобы допустимые  $u^*(t), x^*(t), t_0^*, t_f^*$  составляли решение общей задачи оптимального управления, необходимо, чтобы существовали множители Лагранжа

$$\lambda_i^*, \quad i = 0, \dots, r \quad (\lambda_0^* \geq 0), \quad \lambda^*(t), \quad t \in [t_0^*, t_f^*],$$

\* Принцип максимума был предложен в 1956 г. Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе (первоначально только для задачи об оптимальном быстродействии) [9.3].

не равные одновременно нулю и такие, что при

$$\lambda = \lambda_i^*, \quad i = 0, \dots, r, \quad \lambda(t) = \lambda^*(t), \quad x(t) = x^*(t), \quad u(t) = u^*(t),$$

$$t_0 = t_0^*, \quad t_f = t_f^*$$

выполнены условия:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (2.29)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.30)$$

при почти всех  $t \in [t_0, t_f]$ :

$$2) \int_{t_0}^{t_f} g_i(x, u, t) dt + G_i[x(t_0), x(t_f)] \begin{cases} = 0, & i = 1, \dots, r_1, \\ \leqslant 0, & i = r_1 + 1, \dots, r; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$3) \quad \lambda(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \sum_{i=0}^r \lambda_i G_i[x(t_0), x(t_i)], \quad (2.32)$$

$$\lambda(t_f) = -\frac{\partial}{\partial x(t_f)} \sum_{i=0}^r \lambda_i G_i[x(t_0), x(t_i)]; \quad (2.33)$$

$$4) \quad H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = 0 \quad (2.34)$$

при  $t = t_0$  и  $t = t_f$ :

$$5) \quad \lambda_i \left( \int_{t_0}^{t_f} g_i(x, u, t) dt + G_i[x(t_0), x(t_f)] \right) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.35)$$

причем

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = r_1 + 1, \dots, r; \quad (2.36)$$

$$6) \quad H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = \max_{u \in U} H[x(t), u, \lambda(t), t] \quad (2.37)$$

для почти всех  $t \in [t_0, t_f]$ , причем, если  $u(t) = u^*(t)$  на некотором отрезке времени принимает значения во внутренних точках  $U$ , то на этом отрезке

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (2.38)$$

Если  $t_0$  и (или)  $t_f$  фиксированы, то соответствующее условие (2.34) отпадает.

Если  $x(t_0)$  фиксировано, то отпадает условие (2.32), а если фиксировано  $x(t_f)$ , то отпадает (2.33). ■

Все формулировки в теореме являются прямым следствием гипотезы Лагранжа. Возможно, нуждается в пояснении запись уравнения (2.29).

В действительности оно совпадает с исходным уравнением объекта

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

но записано с учетом тождества

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} = \frac{\partial}{\partial \lambda(t)} [\lambda^T(t) f(x, u, t)] = f(x, u, t), \quad (2.39)$$

что позволило придать системе уравнений (2.29) симметричную, так называемую гамильтонову форму, аналогичную уравнениям аналитической механики.

В качестве дополнительного комментария укажем, что если  $G_0 = 0$ , то условия (2.32), (2.33) называются условиями *трансверсальности* и геометрически выражают тот факт, что краевые значения вектор-функции  $\lambda(t)$  являются линейными комбинациями векторов нормалей к поверхностям  $G_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , в начальной и конечной точках траектории.

Строгое доказательство общего принципа максимума основывается на использовании понятий функционального анализа и топологии (см., например, [9.1]) и приводиться не будет. Вместе с тем для понимания самого «механизма» построения необходимых условий оптимальности существенно знакомство с доказательством, приводимым в следующем параграфе для задач, где отсутствуют ограничения типа (2.31).

**3. Достаточность принципа максимума в выпуклых задачах.** Здесь же мы покажем, что использование свойства выпуклости так же, как в конечномерном случае, позволяет доказать достаточность гипотезы Лагранжа и вытекающего из нее принципа максимума как условия оптимальности \*).

**Теорема 2.5 [6.3].** Если  $u^*(t)$  является управлением, удовлетворяющим условиям принципа максимума ( $\lambda_0 = 1$ ) в задаче минимизации функционала

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} [g_{x_0}(x) + g_{u_0}(u)] dt + G_0[x(t_f)] \quad (2.40)$$

при условии

$$\dot{x} = A(t)x + f_u(u, t), \quad x(t_0) = x^*, \quad u(t) \in U, \quad (2.41)$$

где функции  $g_{x_0}$ ,  $G_0$  являются выпуклыми,  $t_0$ ,  $t_f$ , фиксированы, то  $u^*(t)$  оптимально.

**Доказательство.** Введем вспомогательную переменную  $x_0(t)$  такую, что

$$\dot{x}_0 = g_{x_0}(x) + g_{u_0}(u), \quad x_0(t_0) = 0. \quad (2.42)$$

Тогда

$$J\{u\} = x_0(t_f) + G_0[\bar{x}(t_f)].$$

\* Свойство выпуклости играет важную роль и при строгом доказательстве общего принципа максимума.

Пусть  $\tilde{x}^*(t) = (x_0^*, x^*)$  — решение уравнений (2.41), (2.42), соответствующее управлению  $u^*(t)$ , а  $\tilde{x}(t) = (x_0, x)$  — решение, соответствующее произвольному допустимому управлению.

Докажем первоначально неравенство

$$-x_0^*(t_f) + \lambda^{*T}(t_f)x^*(t_f) \geq -x_0(t_f) + \lambda^{*T}(t_f)x(t_f), \quad (2.43)$$

где  $\lambda^*(t_f)$  — множители, фигурирующие в условиях принципа максимума. При этом используем тот же прием, что и при непосредственном решении линейно-квадратичной задачи (§ 8 гл. 6). Введем функцию

$$W(t) = -x_0(t) + \lambda^{*T}(t)x(t)$$

и вычислим ее производную в силу уравнений (2.41), (2.42). Имеем

$$\dot{W} = -\dot{x}_0 + \lambda^{*T}\dot{x} + \lambda^{*T}\dot{x} = -g_{x_0} - g_{u_0} + \lambda^{*T}(Ax + f_u) + \lambda^{*T}\dot{x},$$

откуда

$$W(t_f) - W(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} [-g_{x_0} - g_{u_0} + \lambda^{*T}(Ax + f_u) + \lambda^{*T}\dot{x}] dt. \quad (2.44)$$

Используем далее условия принципа максимума. В данной задаче определение гамильтониана (2.21) принимает вид

$$H = -[g_{x_0}(x) + g_{u_0}(u)] + \lambda^T(t)[A(t)x + f_u(u, t)],$$

и из условия (2.37) максимума  $H$  по  $u$  следует, что

$$-g_{u_0}(u^*(t)) + \lambda^{*T}(t)f_u(u^*(t), t) \geq -g_{u_0}(u) + \lambda^{*T}(t)f_u(u, t) \quad (2.45)$$

для любого  $u \in U$  и почти всех  $t \in [t_0, t_f]$ . Множители  $\lambda^*(t)$  удовлетворяют уравнению

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = \frac{\partial g_{x_0}}{\partial x} \Big|_{x=x^*} - A^T(t)\lambda.$$

С использованием этого уравнения получаем из (2.44) тождество

$$-x_0^*(t_f) + \lambda^{*T}(t_f)x^*(t_f) - \lambda^{*T}(t_0)x^0 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left( \frac{\partial g_{x_0}}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=x^*} x - g_{x_0}(x) - g_{u_0}(u) + \lambda^{*T}f_u(u, t) \right\} dt. \quad (2.46)$$

Записывая это тождество для  $u = u^*$ ,  $x = x^*$  и вычитая из результата само (2.46), находим, что

$$[-x_0^*(t_f) + \lambda^{*T}(t_f)x^*(t_f)] - [-x_0(t_f) + \lambda^{*T}(t_f)x(t_f)] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [(-g_{u_0}(u^*) + \lambda^{*T}f_u(u^*, t)) - (-g_{u_0}(u) + \lambda^{*T}f_u(u, t))] +$$

$$+ \left[ g_{x_0}(x) - g_{x_0}(x^*) + \left( \frac{\partial g_{x_0}}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=x^*} (x^* - x) \right] dt \geq 0,$$

поскольку под интегралом первая группа слагаемых неотрицательна в силу (2.45) для почти всех  $t$ , а вторая неотрицательна в силу выпуклости  $g_{x_0}(x)$ .

(см. определение в п. 2.1). Тем самым неравенство (2.43) доказано. Теперь остается использовать граничное условие для множителей

$$\lambda^*(t_f) = -\frac{\partial G_0}{\partial x} \Big|_{x=x^*(t_f)}. \quad (2.47)$$

Из (2.43), (2.47) получаем

$$x_0^*(t_f) + G_0[x^*(t_f)] \leq x_0(t_f) + G_0[x(t_f)] + \\ + G_0[x^*(t_f)] - G_0[x(t_f)] - \left( \frac{\partial G_0}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=x^*(t_f)} [x^*(t_f) - x(t_f)].$$

Однако последняя группа слагаемых неотрицательна в силу выпуклости  $G_0(x)$ , так что окончательно получаем

$$J(u^*) \triangleq x_0^*(t_f) + G_0[x^*(t_f)] \leq x_0(t_f) + G_0[x(t_f)] \triangleq J(u),$$

что и доказывает оптимальность  $u^*$ . ■

Точно так же доказывается достаточность принципа максимума для задач, в которых отсутствует слагаемое  $G_0[x(t_f)]$  в функционале, однако требуется, чтобы в конечный момент выполнялись условия

$$G_i[x(t_i)] \begin{cases} = 0, & i = 1, \dots, r_1, \\ \leq 0, & i = r_1 + 1, \dots, r, \end{cases} \quad (2.48)$$

где  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, r_1$  — линейные функции, а  $G_i$ ,  $i = r_1 + 1, \dots, r$  — выпуклые, т. е. множество, в которое должна в конечный момент войти траектория, является выпуклым (см. п. 2.1).

Неравенство (2.43) остается в силе, а при установлении окончательного результата придется вместо (2.47) использовать граничные условия (2.33) и условия дополняющей нежесткости (2.35), (2.36).

### § 3. Задачи оптимизации со свободным правым концом траектории

Рассмотрим класс задач оптимального управления, формулируемых в виде: найти кусочно-непрерывную функцию  $u(t)$ , минимизирующую функционал

$$J(u) = G_0[x(t_f)] \quad (3.1)$$

при условиях, что

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad x(t_0) = x^0 \quad (3.2)$$

и

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (3.3)$$

Здесь начальный и конечный моменты  $t_0$ ,  $t_f$  заданы, фиксированы начальные условия, а значения  $x(t_f)$  на правом конце могут свободно выбираться.

**3.1. Линейные задачи.** Начнем рассмотрение с простейшего примера.

**Пример 3.1.** Пусть объект описывается скалярным уравнением

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x^0,$$

и требуется выбрать управляющее воздействие  $u(t)$  так, чтобы достигалось минимальное значение координаты  $x(t_f)$  в заданный момент  $t_f > 0$ , причем

$$|u(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

Решим задачу «в лоб», выразив явно минимизируемую координату через управление

$$J \triangleq x(t_f) = e^{t_f} x^0 + \int_0^{t_f} e^{t_f - \tau} u(\tau) d\tau.$$

Управление в каждый момент должно доставлять минимум подынтегральному выражению, но

$$e^{t_f - \tau} > 0, \quad 0 \leq \tau \leq t_f,$$

следовательно, оптимальным является постоянное управление

$$u(t) = -1, \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

что, впрочем, очевидно и по здравому смыслу. □

Тот же «лобовой» подход позволяет получать решение и в более общем случае.

**Теорема 3.1.** Значения управления  $u^*(t)$ , минимизирующего функционал

$$J = C_0^T x(t_f) \quad (3.4)$$

при условиях\*)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + W(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (3.5)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (3.6)$$

почти в любой момент  $t$  обеспечивают максимум линейной функции

$$\pi^*(t)u^*(t) = \max \{ \pi^*(t)u / u \in U \}, \quad (3.7)$$

где вектор-функция  $\pi(t)$  определяется формулой

$$\pi(t) = B^T(t)\lambda(t) \quad (3.8)$$

через решение уравнения

$$\dot{\lambda} = -A^T\lambda \quad (3.9)$$

с граничным условием

$$\lambda(t_f) = -C_0. \quad (3.10)$$

\*) Обозначения соответствуют § 8 гл. 6.

**Доказательство.** Используем формулу для общего решения векторного уравнения (3.5), полученнную в § 8 гл. 6:

$$x(t) = \Psi(t)x^0 + \int_{t_0}^t \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)[B(\tau)u(\tau) + W(\tau)]d\tau, \quad (3.11)$$

где  $\Psi(t)$  — фундаментальная матрица системы (3.5), а  $\Psi^{-1}(t)$  — обратная к ней, определимые уравнениями

$$\frac{d}{dt}\Psi = A\Psi, \quad \Psi(t_0) = I, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}[\Psi^{-1}]^T = -A^T(\Psi^{-1})^T, \quad \Psi^{-1}(t_0) = I. \quad (3.13)$$

В силу (3.11) имеем

$$C_0^T x(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} C_0^T \Psi(t_f) \Psi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \\ + (\text{слагаемые, не зависящие от управления}). \quad (3.14)$$

Докажем эквивалентность формул

$$\pi^T(t) = -C_0^T \Psi(t_f) \Psi^{-1}(t) B(t)$$

и

$$\pi^T(t) = \lambda^*(t) B(t),$$

т. е. докажем тождество

$$\lambda(t) = -[\Psi^{-1}(t)]^T \Psi^T(t_f) C_0. \quad (3.15)$$

Умножая (3.13) справа на постоянный вектор  $-\Psi^T(t_f) C_0$ , получаем

$$\frac{d}{dt}[-[\Psi^{-1}]^T \Psi^T(t_f) C_0] = -A^T[-[\Psi^{-1}]^T \Psi^T(t_f) C_0], \quad (3.16)$$

а следовательно,  $\lambda(t)$ , определяемое формулой (3.15), удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.9). Очевидно, удовлетворяется и граничное условие

$$\lambda(t_f) = -[\Psi^{-1}(t_f)]^T \Psi^T(t_f) C_0 = -C_0.$$

Минимизируемое выражение в (3.14) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_f} (-\pi^T(t)) u(t) dt,$$

откуда следует требование минимизации подынтегрального выражения почти в каждый момент времени, эквивалентное желаемому результату. ■

Подчеркнем теперь, что Т.3.1 эквивалентна утверждению в форме принципа максимума.

**Теорема 3.2.** Для того чтобы  $u^*(t)$  являлось решением задачи (3.4)–(3.5), необходимо и достаточно, чтобы его значения почти в каждый момент  $t \in [t_0, t_f]$  удовлетворяли принципу максимума

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t] = \max_{u \in U} H[x^*(t), u, \lambda^*(t), t], \quad (3.17)$$

где

$$H = \lambda^{*\top}(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t) + W(t)], \quad (3.18)$$

а  $\lambda(t) = \lambda^*(t)$  удовлетворяет условиям

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = -C_0. \quad (3.19)$$

Действительно, условия (3.19) эквивалентны (3.9), (3.10), а слагаемое в гамильтониане (3.18), явно зависящее от  $u$ , совпадает с выражением, максимизируемым в (3.7). ■

**3.2. Свойства оптимальной программы.** Теорема 3.1 указывает четкое правило построения оптимальной программы управления. Для этого следует:

- 1) проинтегрировать систему (3.9) с условием (3.10);
- 2) вычислить функцию  $\pi(t)$  по формуле (3.8);
- 3) решить для каждого момента  $t$  задачу конечномерной максимизации (3.7).

Первая фаза может быть проделана либо аналитически (при  $A = \text{const}$ ), либо с помощью программ численного интегрирования (интегрирование должно вестись в обращенном времени  $\tau = t_f - t$ !).

Третья фаза, к сожалению, не проста. К проблеме вычисления решения конечномерных задач на условный экстремум мы еще обратимся ниже (§ 7). Здесь же интересно проанализировать простейший случай, когда множество  $U$  допустимых значений управления задается покомпонентными ограничениями

$$\underline{u}_k \leq u_k \leq \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.20)$$

где  $\underline{u}_k$ ,  $\bar{u}_k$  — заданные числа — нижние и верхние границы.

Перепишем (3.7) с учетом этого явного задания

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^m \pi_k(t) u_k / \underline{u}_k \leq u_k \leq \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, m \right\}, \quad (3.21)$$

где  $\pi_k(t)$  — компоненты вектора  $\pi(t)$ . Задача (3.21) распадается на  $m$  независимых

$$\max \{\pi_k(t) u_k / \underline{u}_k \leq u_k \leq \bar{u}_k\}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.22)$$

решение которых очевидно:

$$u_k^*(t) = \begin{cases} \bar{u}_k & \text{при тех } t, \text{ где } \pi_k(t) > 0, \\ \underline{u}_k & \text{при тех } t, \text{ где } \pi_k(t) < 0, \\ \text{произвольно в пределах допуска, если } \pi_k(t) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

**Следствие к Т.3.2.** Управление линейной системой (3.5), оптимальное по линейному критерию (3.4) при ограничениях (3.20), может быть построено как кусочно-постоянная функция. Каждая компонента такого управления принимает только одно из двух граничных значений.

Если функции  $\lambda_v(t)$ , называемые *функциями переключения*, обращаются в нуль только в конечном числе точек, то эти точки являются моментами переключения. Подобное управление часто называют управлением *релейного типа*. Для запоминания программы управления релейного типа достаточно хранить только граничные значения и моменты переключения. Пример такой программы приводился еще в § 1 гл. 3.

В дополнение остановимся на частном случае, когда матрицы  $A, B$  в (3.5) постоянны. В этом случае можно записать явное выражение для функции переключения

$$\pi(t) = B^T \lambda(t) = -B^T e^{A^T(t_f-t)} C_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (3.24)$$

Вводя обращенное время  $\tau = t_f - t$ , получаем

$$\pi^*(\tau) = -C_0^T e^{A\tau} B, \quad 0 \leq \tau \leq t_f - t_0.$$

Продолжив функцию  $\pi^*(\tau)$  на всю полуось  $\tau \geq 0$  и применив к ней преобразование Лапласа, найдем, что

$$\mathcal{L}\{-\pi^*(\tau)\} = C_0^T [pI - A]^{-1} B, \quad (3.25)$$

т. е. получаем передаточную функцию (векторную) от управления  $u(t)$  к выходу  $y(t) \triangleq C_0 x(t)$ .

Очевидно, что любая компонента  $\lambda_v(t)$  обращается в нуль на конечном отрезке только в конечном числе точек, за исключением тривиальной ситуации, когда она тождественно равна нулю при тождественном обращении в нуль соответствующей компоненты п. ф. (3.25).

Интересную оценку числа переключений в оптимальной программе управления стационарным объектом дает следующая

**Теорема 3.3 (теорема Фельдбаума).** Пусть  $(n \times n)$ -матрица  $A$  имеет только вещественные собственные числа. Тогда число переключений любой компоненты оптимальной программы не превосходит  $n - 1$ .

Доказательство проведем для случая некратных корней. Функция переключения, соответствующая любой компоненте управления, представима в виде

$$\pi^{(n)}(t) = \sum_{v=1}^n d_v e^{-\lambda_v t},$$

где  $d_v$  — вещественные компоненты. При  $n = 1$  она, очевидно, не меняет знака при любом  $t$ . Далее можно действовать по индукции. Пусть утверждение справедливо при  $n = l$ , т. е. функция

$$\pi^{(l)}(t) = \sum_{v=1}^l d_v e^{-\lambda_v t}$$

обращается в нуль не более  $(l - 1)$  раз, каковы бы ни были вещественные константы  $d_v$  и  $\lambda_v$ .

Составим функцию при  $n = l + 1$ :

$$\pi^{(l+1)}(t) = \sum_{v=1}^{l+1} d_v e^{-\lambda_v t}.$$

Умножим  $\pi^{(l+1)}(t)$  на  $e^{\lambda_{l+1} t} > 0$ , что не меняет чередование ее знаков, и про-дифференцируем произведение

$$\frac{d}{dt} [\pi^{(l+1)}(t) e^{\lambda_{l+1} t}] = \sum_{v=1}^l d_v (\lambda_{l+1} - \lambda_v) e^{(\lambda_{l+1} - \lambda_v)t}.$$

Это выражение вновь является линейной комбинацией  $l$  экспонент с вещественными показателями и по индуктивному предположению обращается в нуль не более чем  $(l - 1)$  раз. Однако из анализа известно, что нули функции и ее производной чередуются, а поэтому функция  $\pi^{(l+1)} e^{\lambda_{l+1} t}$  имеет не более  $l$  нулей. То же справедливо и для  $\pi^{(l+1)}(t)$ , что и доказывает результат. ■

**3.3. Оценка приращения функционала.** Задача оптимизации линейной системы по линейному критерию типа (3.4)÷(3.6) весьма редко возникают в приложениях непосредственно. Однако они играют важную роль как вспомогательные при решении более сложных задач.

Вернемся к исследованию нелинейной проблемы (3.1)÷(3.3) и докажем сначала полезное вспомогательное утверждение, основанное на хорошо известном нам приеме линеаризации.

**Лемма 3.1 (лемма Розонэра о приращении функционала) [9.19].** Пусть  $\bar{u}(t)$  — какое-либо допустимое управление, а  $u_\Delta(t)$  — любое другое допустимое управление, мало отличающееся от него в том смысле, что

$$\Delta u(t) = u_\Delta(t) - \bar{u}(t)$$

подчинено ограничению

$$(t_f - t_0) \int_{t_0}^{t_f} |\Delta u|^2 dt \leq \epsilon^2, \quad (3.26)$$

где  $\epsilon$  — заданная малая величина. Пусть  $\bar{x}(t)$  — решение уравнения (3.2) при  $u(t) = \bar{u}(t)$ , а  $x_\Delta(t)$  — при  $u(t) = u_\Delta(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta J &\triangleq J\{u_\Delta\} - J\{\bar{u}\} \triangleq G_0[x_\Delta(t_f)] - G_0[\bar{x}(t_f)] = \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \{H[\bar{x}(t), u_\Delta(t), \bar{\lambda}(t), t] - H[\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t), t]\} dt + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $\bar{\lambda}(t)$  вычисляется путем решения уравнения

$$\dot{\lambda} = -\bar{A}^T(t)\lambda, \quad \lambda(t_f) = -\bar{C}_0, \quad (3.28)$$

$$\bar{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}, \quad \bar{C}_0 = \frac{\partial G_0}{\partial x(t_f)} \Big|_{x(t_f)=\bar{x}(t_f)}, \quad (3.29)$$

а  $H(x, u, \lambda, t) \triangleq \lambda^T(t) f(x, u, t)$ . При этом предполагается, что  $f(x, u, t)$ ,  $G_0(x)$  дважды дифференцируемы по своим аргументам.

**Доказательство.** Обозначим  $\Delta x(t) = x_\Delta(t) - \bar{x}(t)$ . Тогда

$$\Delta \dot{x} = f(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u, t) - f(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad \Delta x(t_0) = 0, \quad (3.30)$$

или, в интегральной форме,

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t [f(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u, \tau) - f(\bar{x}, \bar{u}, \tau)] d\tau.$$

Запишем условие Липшица

$$|f(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u, \tau) - f(\bar{x}, \bar{u}, \tau)| \leq l_1 |\Delta x| + l_2 |\Delta u|,$$

где  $l_1, l_2$  — некоторые константы. Далее имеем

$$|\Delta x(t)| \leq l_1 \int_{t_0}^t |\Delta x(\tau)| d\tau + l_2 \int_{t_0}^t |\Delta u(\tau)| d\tau.$$

Используя лемму Гронвулла — Беллмана \*), получаем

$$|\Delta x(t)| \leq k \int_{t_0}^t |\Delta u(\tau)| d\tau \leq k \int_{t_0}^{t_f} |\Delta u(\tau)| d\tau, \quad k = \text{const.}$$

Учтем неравенство

$$\left( \int_{t_0}^{t_f} |\Delta u| dt \right)^2 \leq (t_f - t_0) \int_{t_0}^{t_f} |\Delta u|^2 dt \leq \varepsilon^2 \quad (3.31)$$

(при ограничении (3.26)). Имеем теперь

$$|\Delta x(t)| \leq k\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (3.32)$$

Введем далее процесс  $\delta x(t)$ , подчиняющийся линейному уравнению в вариациях

$$\delta \dot{x} = \bar{A}(t) \delta x + \bar{B}(t) \Delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad (3.33)$$

где  $\bar{A}(t)$  дано формулой (3.29), а

$$\bar{B}(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \quad (3.34)$$

Оценим разность

$$\xi(t) = \Delta x(t) - \delta x(t). \quad (3.35)$$

Разлагая правую часть (3.30) по формуле Тейлора с остаточным членом, получим

$$\Delta \dot{x} = \bar{A}(t) \Delta x + \bar{B}(t) \Delta u + r[\Delta x(t), \Delta u(t), t], \quad (3.36)$$

\*). Если  $u(t), v(t) \geq 0, c > 0$ , то [8.3]

$$u(t) \leq c + \int_0^t uv d\tau, \quad t \geq 0 \Rightarrow u(t) \leq c \exp \left( \int_0^t v d\tau \right), \quad t \geq 0.$$

где функция  $r$  зависит только от компонент векторов  $\Delta x, \Delta u$  во 2-й степени и их производных. Вычитая из (3.36) уравнение в вариациях, находим

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \bar{\Psi}(t) \bar{\Psi}^{-1}(t) r[\Delta x(t), \Delta u(t), t] dt,$$

где  $\bar{\Psi}(t)$  — фундаментальная матрица, вычисляемая согласно (3.12) при  $A = \bar{A}(t)$ . Теперь с использованием оценок (3.31), (3.32) нетрудно убедиться, что

$$|\xi(t)| \leq c\varepsilon^2, \quad \text{где } c = \text{const.}$$

Таким образом, линейное уравнение (3.33) с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  дает правильное описание изменения состояния, вызванное изменением управления на  $\Delta u(t)$ :

$$\Delta x(t) = \delta x(t) + O(\varepsilon^2). \quad (3.37)$$

Разложим теперь в ряд Тейлора и критериальную функцию

$$\begin{aligned} G_0[x_\Delta(t_f)] &= G_0[\bar{x}(t_f)] + \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f)} \Delta x(t_f) + \\ &\quad + O(|\Delta x(t_f)|^2) = G_0[\bar{x}(t_f)] + \bar{C}_0^T \delta x(t_f) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

$$\Delta J = \bar{C}_0^T \delta x(t_f) + O(\varepsilon^2), \quad (3.38)$$

где вариация траектории на правом конце определяется линейным уравнением (3.33).

Далее, повторяя начальную часть доказательства Т.3.1, устанавливаем, что

$$\bar{C}_0^T \delta x(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} [-\bar{\lambda}^T(t) \bar{B}(t) \Delta u(t)] dt.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} [H(\bar{x}, u_\Delta, \bar{\lambda}, t) - H(\bar{x}, u, \bar{\lambda}, t)] dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u} \Delta u + r_H(\Delta u) \right\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\bar{\lambda}^T(t) \bar{B}(t) \Delta u(t) + r_H(\Delta u)] dt = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}^T(t) \bar{B}(t) \Delta u(t) dt + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

поскольку остаточный член  $r_H(\Delta u)$  содержит только слагаемые 2-го порядка относительно  $\Delta u$ . Подстановка полученных соотношений в (3.38) завершает доказательство леммы. ■

**3.4. Доказательство принципа максимума.** Формула (3.27), дающая оценку изменения функционала при малых по норме изменениях управления, широко используется при построении методов приближенной оптимизации, о чем — ниже.

Вместе с тем с ее помощью легко получить прямое доказательство принципа максимума для задач типа (3.1) — (3.3), не использующее гипотезу Лагранжа.

**Теорема 3.4.** При условиях леммы (3.1) для оптимальности управления  $u^*(t)$  и определяемого им в силу (3.2) процесса  $x^*(t)$  необходимо, чтобы существовала функция  $\lambda^*(t)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\lambda} = -A^*(t)\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}} \quad (3.39)$$

при краевом условии

$$\lambda(t_f) = -C_0^* = -\frac{\partial G_0(x)}{\partial x}\Big|_{x(t_f)=x^*(t_f)} \quad (3.40)$$

причем

$$H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t] = \max_{u \in U} H[x^*(t), u, \lambda^*(t), t] \quad (3.41)$$

при почти всех  $t \in [t_0, t_f]$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 3.1 имеем:

$$J\{u_\Delta\} - J\{u^*\} = - \int_{t_0}^{t_f} \Delta H dt + O(\varepsilon^2), \quad (3.42)$$

где

$$\Delta H \triangleq H[x^*(t), u_\Delta(t), \lambda^*(t), t] - H[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t],$$

причем предполагается, что

$$\Delta u(t) = u_\Delta(t) - u^*(t)$$

подчиняется условию (3.26) или вытекающему из него условию (3.31):

$$\int_{t_0}^{t_f} |\Delta u| dt \leq \varepsilon. \quad (3.43)$$

Управление  $u^*(t)$  оптимально, если

$$J\{u_\Delta\} \geq J\{u^*\}, \quad (3.44)$$

каково бы ни было допустимое  $u_\Delta(t)$ . В частности, необходимо, чтобы (3.42) выполнялось для любых малых в смысле (3.43) отклонений  $u_\Delta(t)$  от  $u^*(t)$ . Но тогда из (3.42) ясна необходимость условия

$$\int_{t_0}^{t_f} \Delta H dt \leq 0, \quad (3.45)$$

ибо в противном случае при достаточно малых в

$$J\{u_\Delta\} - J\{u^*\} < 0,$$

что противоречит определению оптимальности (3.44).

Рассмотрим теперь специальный класс отклонений, называемых *игольчатыми* или *импульсными вариациями*.

Пусть

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} u, & t \in [\tau, \tau + \varepsilon_0], \\ u^*(t), & t \notin [\tau, \tau + \varepsilon_0], \end{cases} \quad (3.46)$$

где  $u$  — произвольная (векторная) константа с ограниченными компонентами, такая, что  $u \in U$ ,  $\tau$  — произвольный момент  $\tau \in [t_0, t_f - \varepsilon_0]$ , а  $\varepsilon_0$  — малая положительная величина. Вид игольчатой вариации ясен из рис. 9.2, где представлена одна из компонент управления  $u_k^*(t)$ , подозреваемого на оптимальность.

Обозначим  $\Delta u(t) \triangleq u_\Delta(t) - u^*(t)$ .

Тогда в силу ограниченностей  $u$  получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} |\Delta u(t)| dt = \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon_0} |\Delta u(t)| dt \leq \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon_0} |u| dt \leq c_0 \varepsilon_0,$$

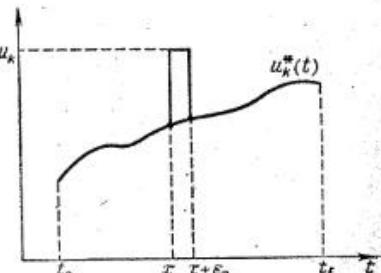


Рис. 9.2

где  $c_0$  — некоторая константа. Приняв  $\varepsilon_0 = \varepsilon/c_0$  убеждаемся в выполнении условия (3.43) для игольчатой вариации.

Для такой вариации необходимое условие (3.45) записывается в виде

$$\int_{\tau}^{\tau + \varepsilon_0} (H(x^*, u, \lambda^*, t) - H(x^*, u^*, \lambda^*, t)) dt \leq 0. \quad (3.47)$$

Отсюда следует, что

$$H[x^*, u, \lambda^*, t] \leq H[x^*, u^*, \lambda^*, t] \quad (3.48)$$

при почти любом  $t \in [t_0, t_f]$ . Действительно, если это не так, т. е.

$$H[x^*, u, \lambda^*, t] - H[x^*, u^*, \lambda^*, t] > 0 \quad (3.49)$$

в некоторый момент  $t$ , являющийся точкой непрерывности  $u^*(t)$ , то эта точка может быть помещена в интервал  $[\tau, \tau + \varepsilon_0]$ , на котором всюду будет выполнено (3.49), а следовательно, (3.47) невозможно.

Вместе с тем условие (3.48) эквивалентно доказываемому принципу максимума (3.41) ввиду произвольности выбора  $u$  из  $U$ . ■

Приведенное доказательство по существу охватывает и несколько более общий класс задач, когда вместо критериальной функции (3.1) требуется минимизировать

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} g_0(x, u, t) dt + G_0[x(t_f)]. \quad (3.50)$$

Используем прием расширения пространства состояний, введя новую переменную  $x_0(t)$  такую, что

$$\dot{x}_0 = g_0(x, u, t), \quad x_0(t_0) = 0 \quad (3.51)$$

(переменную  $x_0(t)$  можно интерпретировать как значение накопленных вплоть до момента  $t$  текущих затрат, полное значение которых (3.50) требуется минимизировать).

Обозначим  $\tilde{x}(t) = (x_0(t), x(t))$ . Тогда

$$J\{u\} = x_0(t_f) + G_0[x(t_f)] \triangleq \tilde{G}_0[\tilde{x}(t_f)], \quad (3.52)$$

а уравнение (3.51) вместе с исходным описанием (3.2) дает

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u, t), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \quad (3.53)$$

где  $\tilde{f} = (g_0, f)$ ,  $\tilde{x}^0 = (0, x^0)$ . С точностью до обозначений задача теперь соответствует условиям Т.3.4. Для нее справедливо условие типа (3.41)

$$\tilde{H}[\tilde{x}^*, u^*, \lambda^*, t] = \max_{u \in U} \tilde{H}[\tilde{x}^*, u, \lambda^*, t], \quad (3.54)$$

где

$$\tilde{H} = \tilde{\lambda}^T \tilde{f} = \lambda_0(t) g_0(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t), \quad (3.55)$$

а  $\tilde{\lambda}^* \triangleq (\lambda_0^*, \lambda^*)$  — решение уравнения типа (3.39)

$$\dot{\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}^*, \tilde{u}=\tilde{u}^*}, \quad \tilde{\lambda}(t_f) = -\frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}(t_f)}. \quad (3.56)$$

Записанные условия, однако, можно упростить, вернувшись к исходному описанию. Действительно, из (3.56) следует

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_0} = 0 \Rightarrow \lambda_0(t) = \text{const},$$

но  $\lambda_0(t_f) = -\frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial \tilde{x}_0} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}(t_f)} = -1 \Rightarrow \lambda_0(t) = -1$ . С учетом найденного значения  $\lambda_0(t)$  можно записать

$$H = -g_0(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t), \quad (3.57)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^*, u=u^*}, \quad \lambda(t_f) = -\frac{\partial G_0}{\partial x} \Big|_{x=x(t_f)}, \quad (3.58)$$

причем знак «~» над  $H$  можно теперь опустить.

Очевидно, что формулировка принципа максимума для задач с функционалом (3.50) совпадает с формулировкой, даваемой Т.3.4 в исходных обозначениях, за исключением замены выражения гамильтониана на (3.57)\*).

Попытаемся теперь осознать, что дает необходимое условие в форме принципа максимума для непосредственной практической цели — построения оптимальной программы.

Обычно рекомендуется следующая процедура:

1. Записать уравнения системы, ограничения и критериальной функции в стандартной форме (3.2), (3.3), (3.50).

2. Составить выражение гамильтониана

$$H = -g_0(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t). \quad (3.59)$$

\*.) Можно получить тот же результат и из общего принципа максимума, изложенного в § 2, как частный случай, дополнительно высказав гипотезу, что константа  $\lambda_0^*$ , фигурирующая в общей формулировке, не равна нулю.

3. Найти для каждого  $t$ ,  $x$  и  $\lambda$ , рассматриваемых как векторные параметры, величину

$$\hat{u}(x, \lambda, t),$$

при которой достигается максимум  $H$  по явно входящему  $u$  в пределах допустимой области  $U$ .

4. Составить уравнение

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

положив в его правой части

$$u = \hat{u}(x, \lambda, t).$$

5. Решить краевую задачу относительно переменных  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$  для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \Big|_{u=\hat{u}(x, \lambda, t)}, \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{u=\hat{u}(x, \lambda, t)}, \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned}$$

с условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = -\frac{\partial G_0}{\partial x(t_f)}.$$

6. Если  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$  — решение краевой задачи, то программа

$$u^*(t) = \hat{u}(x^*(t), \lambda^*(t), t),$$

очевидно, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Описанная процедура не является законченным алгоритмом построения оптимальной программы управления. Во-первых, решение на этапе 5 может быть не единственным, а следовательно, возможно множество управлений, удовлетворяющих необходимым условиям, но не обязательно оптимальных. Во-вторых, что практически наиболее существенно, решение задач, возникающих на этапах 3 и 5, является с вычислительной точки зрения крайне сложным. Тем не менее для некоторых видов задач процедура осуществима.

## § 4. Линейно-квадратичные задачи

4.1. Условия оптимальности. Вернемся вновь к задаче оптимизации линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad x(0) = x^0 \quad (4.1)$$

по критерию минимума квадратичного функционала

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f). \quad (4.2)$$

Эта задача была ранее детально изучена с помощью специальных приемов. Вместе с тем она является частным случаем задач оптимального управления со свободным правым концом траектории и, более того, частным случаем линейно-выпуклых задач, для которых принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности. Выясним, что здесь дает процедура, основанная на использовании принципа максимума. Критерий имеет стандартную форму (3.50), где

$$g_0(x, u, t) = \frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u], \quad G_0[x(t_f)] = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f). \quad (4.3)$$

Запишем гамильтониан согласно (3.59)

$$H = -\frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T [Ax + Bu]. \quad (4.4)$$

Если  $R$  — положительно определенная матрица, то  $H$  достигает максимума по явно входящему  $u$  в единственной экстремальной точке, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -Ru + B^T \lambda = 0. \quad (4.5)$$

(Напомним, что явных ограничений на значения  $u(t)$  не поставлено, и задача максимизации гамильтониана здесь является задачей на безусловный экстремум.) Из (4.5) получаем

$$\hat{u}(x, \lambda, t) = R^{-1} B^T \lambda. \quad (4.6)$$

Составим теперь уравнение для множителей  $\lambda(t)$ :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = Qx - A^T \lambda. \quad (4.7)$$

Границное условие дает

$$\lambda(t_f) = -\frac{\partial G_0}{\partial x(t_f)} = -Q_f x(t_f). \quad (4.8)$$

Таким образом, в отличие от задач оптимизации по линейному критерию, уравнение для множителей не может быть проинтегрировано независимо.

Требуется решать краевую задачу

$$\dot{x} = Ax + Bu \Big|_{u=\hat{u}} = Ax + BR^{-1}B^T \lambda, \quad \dot{\lambda} = Qx - A^T \lambda \quad (4.9)$$

с условиями

$$x(0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = -Q_f x(t_f). \quad (4.10)$$

Хотя эта задача линейна, стандартные процедуры численного интегрирования, ориентированные на решение дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, здесь не проходят. Одна из принципиальных возможностей заключается в следующем.

Введем  $2n$ -вектор  $z = (x, \lambda)$  и  $(2n \times 2n)$ -матрицу  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Тогда система (4.9) сокращенно запишется в виде

$$\dot{z} = \mathcal{A}z. \quad (4.12)$$

Предположим, что построена фундаментальная матрица  $\theta(t, t_0)$ , т. е. решение матричного уравнения

$$\dot{\theta} = \mathcal{A}\theta, \quad \theta(t_0, t_0) = I. \quad (4.13)$$

Тогда

$$z(t) = \theta(t, t_0) z(t_0),$$

или

$$x(t) = \theta_{11}(t, t_0)x(t_0) + \theta_{12}(t, t_0)\lambda(t_0), \quad (4.14)$$

$$\lambda(t) = \theta_{21}(t, t_0)x(t_0) + \theta_{22}(t, t_0)\lambda(t_0), \quad (4.15)$$

где  $\theta_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots (n \times n)$ -блоки матрицы  $\theta(t, t_0)$ :

$$\theta(t, t_0) = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix}.$$

Из краевых условий следует, что

$$\theta_{21}(t_f, t_0)x^0 + \theta_{22}(t_f, t_0)\lambda(t_0) = -Q_f[\theta_{11}(t_f, t_0)x^0 + \theta_{12}(t_f, t_0)\lambda(t_0)],$$

откуда

$$\lambda(t_0) = -[\theta_{22}(t_f, t_0) + Q_f \theta_{12}(t_f, t_0)]^{-1} [\theta_{21}(t_f, t_0) + Q_f \theta_{11}(t_f, t_0)]x^0. \quad (4.16)$$

Тем самым находятся неизвестные начальные значения множителей, а следовательно, и определяются в силу (4.14), (4.15) искомые функции  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$ , являющиеся решениями краевой задачи. Основная трудность на этом пути связана с вычислением  $(2n \times 2n)$ -матрицы  $\theta(t, t_0)$ , что требует  $2n$ -кратного решения системы уравнений порядка  $2n$  с заданными (в виде единичных векторов) начальными значениями. Хотя известны и другие способы непосредственного вычисления решений краевой задачи (4.9), (4.10), остановимся на косвенном подходе.

**4.2. Уравнение Риккетти.** Попытаемся удовлетворить (4.9), (4.10) с помощью подстановки

$$\lambda(t) = -P(t)x(t), \quad (4.17)$$

где  $P(t)$  — некоторая симметричная  $(n \times n)$ -матрица. Подстановка дает

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P x,$$

$$-P\dot{x} - Px = Qx - A^T P x, \quad P(t_f)x(t_f) = Q_f x(t_f).$$

Исключая  $\dot{x}$ , получаем

$$-PAx + PBR^{-1}B^T P x - Px = Qx + A^T P x.$$

Это уравнение удовлетворяется тождественно, если выполнено соотношение

$$-P = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad (4.18)$$

причем из граничного условия следует, что

$$P(t_f) = Q_f. \quad (4.19)$$

Если найдена матрица  $P$ , удовлетворяющая (4.18), (4.19), то

$$\hat{u}(x, \lambda, t) = -R^{-1}B^T P x, \quad (4.20)$$

т. е. найдена зависимость оптимального управления от переменных состояния, удовлетворяющая принципу максимума. Это прекрасный результат, но... он уже был получен ранее в § 8 гл. 6 прямым путем: уравнение (4.18) является известным уравнением Риккати, а формула (4.20) дает известное представление оптимального управления в виде обратной связи по переменным состояния.

Таким образом, мы вышли на знакомый путь, хотя теперь нам предоставляется возможность выбирать между двумя подходами: либо решать линейную задачу относительно  $2n$  неизвестных, либо решать задачи с начальными условиями для нелинейной системы с  $\frac{n(n+1)}{2}$  неизвестными элементами матрицы  $P(t)$ . Хотя вычислительный опыт здесь недостаточен, представляется, что во многих случаях «линейный» путь проще, особенно если параметры постоянны, и можно использовать аналитические представления для фундаментальной матрицы.

Подчеркнем также, что формула (4.16) пригодна для произвольного начального момента  $t_0$ , а следовательно, она определяет ту же связь между переменными состояния  $x(t)$  и множителями  $\lambda(t)$ , что и формула (4.17). Отсюда устанавливается представление решения уравнения Риккати через фундаментальную матрицу

$$P(t) = [\theta_{22}(t_f, t) + Q, \theta_{12}(t_f, t)]^{-1} [\theta_{21}(t_f, t) + Q, \theta_{11}(t_f, t)], \quad (4.21)$$

а следовательно, и возможность вычисления оптимальных коэффициентов усиления

$$K(t) = R^{-1}B^T(t)P(t) \quad (4.22)$$

путем интегрирования линейной системы.

Дискуссия о сравнительных достоинствах различных способов вычисления матрицы  $P(t)$ , конечно, может относиться только к задачам большой размерности. Однако для иллюстрации стоит рассмотреть простейший скалярный ( $n = 1$ ) пример.

**Пример 4.1.** Пусть объект описывается скалярным уравнением

$$T_0 \dot{x} + x = k_0 u, \quad x(t_0) = x^0, \quad k_0 > 0, \quad T_0 > 0,$$

а критерий оптимальности задан в виде

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^2 + ru^2) dt + \frac{1}{2} q x^2(t_f) \rightarrow \min_x, \quad r > 0, \quad q > 0.$$

Задачу можно интерпретировать как задачу выбора закона изменения движущего момента с целью изменения угловой скорости от начальной  $x^0$  к конечной, принятой за начало отсчета, с минимизацией «штрафа» за отклонение вдоль всей траектории и особенно в конце ее, а также «энергетических затрат» на управление.

Уравнения (4.9) здесь имеют вид

$$\dot{x} = -\frac{1}{T_0} x + \frac{k_0^2}{T_0^2 r} \lambda, \quad \dot{\lambda} = x + \frac{1}{T_0} \lambda,$$

а граничные условия

$$x(t_0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = -qx(t_f).$$

Фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{11} & \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{21} & \dot{\theta}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{T_0} & \frac{k_0^2}{T_0^2 r} \\ 1 & \frac{1}{T_0} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{Bmatrix},$$

где в данном случае  $\theta_{ik}$  — скалярные функции, удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta_{11}(t_0) = \theta_{22}(t_0) = 1, \quad \theta_{12}(t_0) = \theta_{21}(t_0) = 0.$$

Интегрируя уравнения для элементов 1-го столбца

$$\dot{\theta}_{11} = -\frac{1}{T_0} \theta_{11} + \frac{k_0^2}{T_0^2 r} \theta_{21}, \quad \dot{\theta}_{21} = \theta_{11} + \frac{1}{T_0} \theta_{21},$$

получаем

$$\theta_{11}(t, t_0) = \frac{\gamma - \frac{1}{T_0}}{2\gamma} e^{\gamma(t-t_0)} + \frac{\gamma + \frac{1}{T_0}}{2\gamma} e^{-\gamma(t-t_0)},$$

$$\theta_{21}(t, t_0) = \frac{1}{2\gamma} [e^{\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma(t-t_0)}],$$

где

$$\gamma = \frac{1}{T_0} \sqrt{1 + \frac{k_0^2}{r}}.$$

Аналогично находим \*)

$$\theta_{12}(t, t_0) = \frac{k_0^2}{2T_0^2 r \gamma} [e^{\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma(t-t_0)}],$$

$$\theta_{22}(t, t_0) = \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{T_0} e^{\gamma(t-t_0)} + \frac{\gamma - \frac{1}{T_0}}{2\gamma} e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Выражение оптимального коэффициента усиления находится теперь по формулам (4.21), (4.22), которые в данном случае приобретают вид

$$k(t) = \frac{1}{r} \frac{k_0}{T_0} \frac{\theta_{21}(t_f, t) + q\theta_{11}(t_f, t)}{\theta_{22}(t_f, t) + q\theta_{12}(t_f, t)}.$$

Выпишем это выражение подробнее для случая  $q = 0$ :

$$k(t) = \frac{k_0}{r(1 + \gamma T_0)} \frac{1 - e^{-2\gamma(t_f - t)}}{1 + \frac{\gamma T_0 - 1}{\gamma T_0 + 1} e^{-2\gamma(t_f - t)}}.$$

Очевидно, что с точностью до «краевого эффекта» коэффициент близок к постоянному

$$k = \frac{k_0}{r(1 + \gamma T_0)}.$$

Существенные различия имеют место только вблизи конца траектории при временах порядка  $t_f - t < \frac{3}{2\gamma}$ .

**4.3. Учет дополнительных ограничений.** Применение принципа максимума особо эффективно, когда в задаче (4.1), (4.2) требуется учесть дополнительные ограничения.

Пусть, в частности, требуется, чтобы в конечный момент состояния совпадало с заданным,  $x'$ . Тогда уравнения (4.9) сохранят свою силу, но условия на конечные значения множителей отсутствуют, и вместо (4.10) имеем

$$x(t_0) = x^*, \quad x(t_f) = x'. \quad (4.23)$$

Вновь требуется решать краевую задачу. Не приводя общей формулы, остановимся на содержательном примере.

**Пример 4.2. Управление полетом космического аппарата с реактивным двигателем [9.7].** Содержательный смысл задачи таков: требуется доставить с помощью космического аппарата в заданную точку пространства наибольший полезный груз. Масса аппарата

\*) Наличие в элементах фундаментальной матрицы растущих (неустойчивых) слагаемых является главным осложнением при их построении путем численного интегрирования.

$m(t)$  переменна:

$$\dot{m} = -q, \quad m(t_0) = m^* \quad (4.24)$$

и определяется интенсивностью расхода  $q$  через двигатель, создающий реактивную тягу (забором вещества из внешней среды пре-небрегаем). Величина  $F$  реактивной тяги связана с интенсивностью расхода и мощностью реактивной струи  $N$  соотношением

$$F = \sqrt{2qN}. \quad (4.25)$$

Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор центра масс аппарата в инерциаль-ной системе координат,  $\mathbf{F}$  — вектор тяги,  $\mathbf{F}_e$  — вектор внешних сил \*). Запишем уравнение движения центра масс

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e,$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_e, \quad (4.26)$$

где  $\mathbf{a}$  — реактивное ускорение, а  $\mathbf{a}_e$  — ускорение, создаваемое внешними силами. Если такие определяются только гравитационным полем, то  $\mathbf{a}_e$  не зависит от массы  $m$ , что мы и предположим в дальнейшем.

Преобразуем уравнение (4.24). В силу соотношения (4.25)

$$q = \frac{F^2}{2N} = \frac{m^2 |\mathbf{a}|^2}{2N},$$

так что

$$\dot{m} = -\frac{m^2 |\mathbf{a}|^2}{2N} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{m} \right) = \frac{|\mathbf{a}|^2}{2N}. \quad (4.27)$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{m(t_f)} - \frac{1}{m(t_0)} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{|\mathbf{a}|^2}{2N} dt. \quad (4.28)$$

Масса аппарата есть сумма масс носителя, топлива и полезного груза. Если в конечный момент  $t_f$  допускается использовать все топливо (или вплоть до некоторого заданного запаса), то масса полезного груза, который можно доставить к моменту  $t_f$ , определяется конечной массой аппарата  $m(t_f)$  за вычетом фиксированной величины. Поэтому максимизация массы доставляемого полезного груза эквивалентна максимизации  $m(t_f)$ , а последняя в силу (4.28) эквивалентна минимизации функционала

$$J\{\mathbf{a}, N\} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{|\mathbf{a}|^2}{2N} dt. \quad (4.29)$$

\*) Здесь используются векторы в смысле теоретической механики; они обозначены жирным шрифтом.

Будем считать, что заданы положение  $r'$  конечной точки и скорость  $v'$  аппарата в конечный момент. Кроме того, заданы начальные значения  $r(t_0)$ ,  $v(t_0)$ . Текущие значения радиуса-вектора центра масс и его скорости подчиняются уравнениям

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = a + a_e, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (4.30)$$

Предполагается возможность управления путем изменения реактивного ускорения  $a(t)$  и мощности реактивной струи  $N(t)$ , причем на значения  $a(t)$  явных ограничений не налагается, а  $N(t)$  ограничено сверху:

$$N(t) \leq \bar{N}. \quad (4.31)$$

Из вида функционала (4.29) ясно, что независимо от программы изменения ускорения оптимальным является поддержание мощности  $N(t)$  на предельном уровне  $\bar{N}$ . Поэтому далее можно интересоваться только программой изменения ускорения  $a$ , минимизирующей

$$J\{a\} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |a|^2 dt. \quad (4.32)$$

В целях упрощения предположим, что  $a_e$  постоянно (по величине и направлению). Введем в рассмотрение произвольно направленные ортогональные координатные оси  $x, y, z$  и снабдим соответствующими индексами проекции всех векторов на эти оси. Тогда функционал примет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) dt,$$

а уравнения движения запишутся в координатной форме

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x, & \dot{r}_y &= v_y, & \dot{r}_z &= v_z, \\ \dot{v}_x &= a_x + a_{ex}, & \dot{v}_y &= a_y + a_{ey}, & \dot{v}_z &= a_z + a_{ez}, \end{aligned}$$

причем фиксированы начальные и конечные значения всех переменных состояния  $r_x, v_x, r_y, v_y, r_z, v_z$ . Поскольку функционал сепарабелен, т. е. является суммой функционалов от каждой компоненты ускорения по отдельности, а условия также покомпонентно независимы, то оптимизацию можно вести для каждого координатного направления независимо. Опуская индекс координаты, запишем

$$J\{a\} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt$$

при условиях

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = a + a_e, \quad r(t_0) = r^0, \quad v(t_0) = v^0, \quad r(t_f) = r', \quad v(t_f) = v',$$

где заданы константы  $r^0, r', v^0, v'$ .

Мы пришли к двумерной линейно-квадратичной задаче с фиксированными краевыми значениями. Применим принцип максимума. Гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} a^2(t) + \lambda_r(t)v(t) + \lambda_v(t)(a(t) + a_e).$$

Требование безусловного максимума по управлению дает для оптимального управления выражение

$$a^*(t) = \hat{a} = \lambda_v(t).$$

Множители  $\lambda_r(t), \lambda_v(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = 0, \quad \dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_{r_0}$$

так что

$$\lambda_r = c_r, \quad \lambda_v = -c_r t + c_v,$$

где  $c_r, c_v$  — константы, и  $a^*(t) = -c_r t + c_v$ . Константы определяются по заданным краевым условиям по переменным состояния.

Действительно, при  $a = a^*$  имеем

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = -c_r t + c_v + a_e,$$

откуда

$$v(t) = v^0 + (c_v + a_e)(t - t_0) - \frac{c_r}{2}(t - t_0)^2,$$

$$r(t) = r^0 + v^0(t - t_0) + \frac{c_v + a_e}{2}(t - t_0)^2 - \frac{c_r}{6}(t - t_0)^3,$$

и константы  $c_r, c_v$  находятся из системы двух линейных уравнений

$$c_v T - c_r \frac{T^2}{2} = \Delta v - a_e T,$$

$$c_v \frac{T^2}{2} + c_r \frac{T^3}{6} = \Delta r - v^0 T - a_e \frac{T^2}{2},$$

где  $\Delta r = r' - r^0$ ,  $\Delta v = v' - v^0$ ,  $T = t_f - t_0$  — заданные величины.

Приведем конечный результат для случая

$$a_e = 0, \quad \Delta v = 0, \quad v^0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

Здесь

$$a^*(t) = \frac{6\Delta r}{T^2} \left(1 - 2 \frac{t}{T}\right), \quad J\{a^*\} = \frac{6(\Delta r)^2}{T^3}.$$

Таким образом, устанавливаем, что оптимальный закон изменения управления является линейным по времени, причем коэффициенты линейно зависят от требуемых изменений положения и скоп-

рости. Решение поставленной задачи завершено, однако стоит вернуться к ее содержательному смыслу и уточнить постановку.

Значение конечной массы при оптимальном управлении равно

$$m^*(t_f) = \left[ \frac{1}{N} J\{\mathbf{a}^*\} + m^{-1}(t_0) \right]^{-1}$$

и не может быть сделано больше этой величины ни при каком другом управлении. Однако по смыслу задачи

$$m(t_f) \geq \hat{m}, \quad (4.33)$$

где  $\hat{m}$  — суммарная масса носителя и резерва топлива. Масса доставляемого полезного груза равна  $m(t_f) - \hat{m}$  и не может быть отрицательной. Поскольку  $J\{\mathbf{a}^*\}$  в конечном счете зависит только от исходных параметров требуемого маневра  $\Delta r$ ,  $\Delta v$ ,  $T$ , то получаем неявное ограничение

$$J\{\mathbf{a}^*\} \leq \left( \frac{1}{\hat{m}} - \frac{1}{m^*(t_f)} \right) \hat{N} \quad (4.34)$$

на параметры возможного маневра.

В случае  $a_e = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $v^0 = 0$ ,  $\Delta v = 0$  это ограничение определяет шар, радиус которого увеличивается со временем как  $T^{3/2}$ .

Если конечное значение скорости не фиксировано, то достигнутая область пространства расширяется. Это можно показать, пересмотрев решение краевой задачи. В силу условий трансверсальности должно быть  $\lambda_v(t_f) = 0$ . Используя это условие вместо  $v(t_f) = v'$ , можно найти другие значения констант  $c_r$ ,  $c_v$  и подсчитать новое значение  $J\{\mathbf{a}^*\}$ .  $\square$

Интересно рассмотреть, как влияет на характер решения задачи явное ограничение на возможные значения управления. Примем их в простейшей форме ограничений снизу и сверху на каждую компоненту управления. Кроме того, предположим, что в функционале (4.2)

$$R = \text{diag}\{r_k, k = 1, \dots, m\}, \quad r_k > 0.$$

Задача максимизации гамильтониана (4.4)

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} \left[ x^T Q x + \sum_{k=1}^m r_k u_k^2 \right] + \lambda^T A x + \lambda^T B u \right\} \quad (4.35)$$

при условиях

$$\underline{u}_k \leq u_k \leq \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

распадается на  $m$  одномерных задач

$$\max \left\{ -r_k u_k^2 + \pi_k u_k / \underline{u}_k \leq u_k \leq \bar{u}_k \right\},$$

где  $\pi_k$  — компоненты вектора

$$\pi = B^T \lambda. \quad (4.36)$$

Решение любой из таких задач имеет вид

$$\hat{u}_k(\lambda) = \varphi_k(\pi_k) = \begin{cases} \underline{u}_k, & \text{если } \frac{\pi_k}{2r_k} > \bar{u}_k, \\ \frac{\pi_k}{2r_k}, & \text{если } \underline{u}_k \leq \frac{\pi_k}{2r_k} \leq \bar{u}_k, \\ \bar{u}_k, & \text{если } \frac{\pi_k}{2r_k} < \underline{u}_k. \end{cases} \quad (4.37)$$

Таким образом, решение является кусочно-линейной функцией от  $\pi_k(t)$ , а следовательно, множителей Лагранжа  $\lambda(t)$ .

Для вычисления  $\lambda(t)$  в соответствии с основной процедурой следует теперь решить нелинейную краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \sum_{k=1}^m B_k \varphi_k(\pi_k), \\ \dot{\lambda} &= Qx - A^T \lambda, \quad \pi = (\pi_k) = B^T \lambda \end{aligned} \quad (4.38)$$

с соответствующими граничными условиями. Явного выражения для решения дать невозможно\*). Отметим, что при  $r_k \rightarrow 0$  нелинейности типа «насыщения» стремятся к релейным, причем при  $r_k = 0$ ,  $\pi_k \neq 0$  компоненты оптимального управления принимают только граничные значения, как и в задачах (§ 2) оптимизации по лиценному критерию.

## § 5. Оптимизация по быстродействию

**5.1. Формулировка принципа максимума.** Задача об оптимальном быстродействии была сформулирована в § 1 как вариант общей проблемы оптимального управления: требуется выбрать кусочно-непрерывное управление  $u(t)$  со значениями в заданном  $U$  так, чтобы система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (5.1)$$

за минимальное время перешла из заданного состояния  $x(t_0) = x^0$  в заданное же состояние  $x(t_f) = x^f$ . Момент  $t_0$  фиксирован, момент  $t_f$ , естественно, свободен.

Сформулируем принцип максимума в задаче о быстродействии как частный случай теоремы 2.4.

**Теорема 5.1.** Для того чтобы допустимые  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $t_f^*$  доставляли решение задачи о быстродействии, необходимо существование множителей Лагранжа  $\lambda^*(t)$ , не равных одновременно нулю и таких, что при  $\lambda(t) = \lambda^*(t)$ ,  $u(t) = u^*(t)$ ,  $x(t) = x^*(t)$ ,  $t_f = t_f^*$  выполняются условия:

\* ) О возможностях приближенного решения см. гл. 10, § 2.

1. При почти всех  $t \in [t_0, t_f]$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_f) = x^f, \quad (5.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (5.3)$$

2.  $\mathcal{H}[x(t), u(t), \lambda(t), t] = \max_{u \in U} \mathcal{H}[x(t), u, \lambda(t), t]. \quad (5.4)$

3.  $\mathcal{H}[x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f] \geq 0, \quad (5.5)$   
здесь

$$\mathcal{H} \triangleq \lambda^r(t) f[x(t), u(t), t]. \quad (5.6)$$

Доказательство. По сравнению с общей задачей здесь следует положить

$$G_0 = 0, \quad g_0 = 1, \quad g_i = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (5.7)$$

поскольку функционал представим в виде

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad (5.8)$$

а интегральные ограничения отсутствуют. Записывая гамильтониан по формуле (2.21), имеем

$$H = \lambda^r(t) f[x(t), u(t), t] - \lambda_0, \quad (5.9)$$

или, с учетом обозначения (5.6),

$$H = \mathcal{H} - \lambda_0.$$

Поскольку  $\lambda_0 = \text{const}$ , то условие (5.4) эквивалентно условию (2.37) максимизации  $H$ , а в силу  $\lambda_0 \geq 0$  граничное условие (2.34)

$$H|_{t=t_f} = 0$$

переходит в неравенство (5.5).

Условия трансверсальности (2.32), (2.33) опущены ввиду фиксированности обоих концов траекторий. Для функции  $\mathcal{H}$ , определяемой (5.6), сохраним наименование «гамильтониан». ■

Если пытаться применять принцип максимума как базу для конструирования оптимальных или по крайней мере подозрительных на оптимальность управлений, то вновь основные трудности возникают на двух этапах:

1) найти функцию  $\hat{u}(x, \lambda, t)$ , доставляющие максимум  $\mathcal{H}(x, u, \lambda, t)$  по явно входящему  $u$  при  $x, \lambda, t$ , рассматриваемых как параметры;

2) решить краевую задачу для системы

$$\dot{x} = f[x, \hat{u}(x, \lambda, t), t], \quad x(t_0) = x^0, \quad (5.10)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Big|_{u=\hat{u}(x, \lambda, t)} \lambda, \quad x(t_f) = x^f. \quad (5.11)$$

Преодолеть эти трудности в общем случае невозможно, однако удается построить ряд содержательных примеров непосредственного

использования описанной процедуры. Кроме того, принцип максимума может быть использован и по своему «исходному назначению» как необходимое условие оптимальности, с помощью которого можно проверить решения, находимые каким-либо другим путем.

Опишем сначала решение задачи о быстродействии для одномерной (скалярной) системы, поясняющее смысл конструкции принципа максимума.

Это решение тривиально. Действительно, для того чтобы предельно уменьшить время перехода в новое состояние, требуется предельно увеличить (по модулю) в каждый момент времени скорость перехода ( $f(x, u)$ ) в желаемое состояние  $x(t_f) = 0$ . Если начальное значение  $x^0 < 0$ , то требуется обеспечить  $\max \{f(x, u)/u \in U\}$ ; если же  $x^0 > 0$ , то  $\max \{-f(x, u)/u \in U\}$ . Принцип максимума рекомендует находить управление путем решения задачи

$$\max \{\lambda f(x, u)/u \in U\}. \quad (5.12)$$

Очевидно, что обе рекомендации эквивалентны, если принять

$$\lambda = \begin{cases} 1, & x^0 < 0, \\ -1, & x^0 > 0, \end{cases}$$

Ясен и смысл принципа максимума в многомерном случае. Опять-таки требуется максимизировать скорость перехода. Однако скорости по разным компонентам вектора состояния зависят от управления по-разному, поэтому требуется в качестве общего критерия соизмерить различные компоненты вектора скорости  $f_i(x, u)$ . Гамильтониан (5.6) представляет собой такую «средневзвешенную» скорость, причем «весами» служат множители Лагранжа.

Основная рекомендация принципа максимума сводится к максимизации «средневзвешенной» скорости движения к цели, причем, что весьма существенно, указывается связь между «весами», задаваемая уравнениями для множителей. К сожалению, связь задана неявно, поскольку эти уравнения не могут быть проинтегрированы независимо.

**5.2. Линейные системы.** Опишем более подробно особенности многомерных задач для стационарных линейных систем, задаваемых уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.13)$$

где принятые стандартные обозначения. Гамильтониан принимает форму

$$\mathcal{H} = \lambda^r(Ax + Bu), \quad (5.14)$$

а система (5.3)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -A^r \lambda. \quad (5.15)$$

Задача (5.4) эквивалентна

$$\max \{\pi^r(t) u / u \in U\}, \quad (5.16)$$

где  $\pi(t) = B^r \lambda(t)$ .

Таким образом, управления выражаются через множители  $\lambda(t)$  точно так же, как в задаче оптимизации по линейному критерию (ср. (5.16) и (3.7)). Более того, совпадают и уравнения для множителей, которые не содержат ни  $x(t)$ , ни  $u(t)$ . Поэтому верны общие утверждения о свойствах оптимального управления, высказанные в § 3 (релейный характер управления, теорема о числе переключений). Однако имеется и фундаментальное различие: моменты переключения нельзя найти столь простым образом. Действительно, в задаче о быстродействии отсутствует информация о граничных значениях  $\lambda(t)$ . Можно выписать решение (5.15) в виде

$$\lambda(t) = e^{-At} \lambda(t_0), \quad (5.17)$$

но значение  $\lambda(t_0)$  неизвестно, а тем самым неизвестны и  $\lambda(t)$ , и функция переключения  $\pi(t)$ , и сами моменты переключения. Решение задачи (5.16) определяет управление, претендующее на оптимальность, с точностью до  $n$  параметров, компонент вектора  $\lambda(t_0) = C$ . Обозначим его  $\hat{u}(C, t)$ . Чтобы найти  $C$ , требуется подставить это решение в (5.13):

$$\dot{x} = Ax + B\hat{u}(C, t) \quad (5.18)$$

и проинтегрировать (5.18) при заданных начальных условиях  $x(0) = x^0$ . Решение опять-таки определено с точностью до  $C$ :  $x(t) = x^*(C, t)$ . Условие

$$x^*(C, t') = x' \quad (5.19)$$

дает требуемую систему  $n$  уравнений для нахождения  $n$  неизвестных  $C$  и неизвестного времени  $t_1$  (напомним, что фактически существует  $n-1$  неизвестная компонента  $C$ ). К сожалению, выписать уравнения (5.19) в явной форме, как правило, затруднительно. Более того, как уже указывалось, нет гарантии разрешимости этих уравнений, поскольку, вообще говоря, нет гарантии существования какого-либо управления, удовлетворяющего ограничениям и обеспечивающего требуемый переход.

Нетрудно доказать лишь следующий простой факт.

**Теорема 5.2.** Пусть матрицы  $A, B$  постоянны,  $A$  устойчива, пара  $A, B$  невырождена. Тогда существует управление, переводящее систему (5.13) из произвольного начального состояния в нулевое и удовлетворяющее ограничению  $u(t) \in U$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , если нулевое значение управления допустимо и принадлежит внутренности  $U$ .

Доказательство элементарно и основывается на двух известных фактах:

а) если положить

$$u(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

то по любому  $\delta > 0$  найдется такой момент  $t_1$ , что

$$|x(t_1)| \leq \delta,$$

поскольку объект устойчив;

б) из любого состояния  $x(t_1)$  вполне управляемая система может быть переведена в нуль с помощью управления  $\tilde{u}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_f$ , не обязательно допустимого, но такого, что

$$|\tilde{u}(t)| \leq c|x(t_1)| \leq c\delta, \quad c = \text{const.}$$

Это следует из установленной в § 3 гл. 6 линейной зависимости программы управления от начальных условий.

Теперь очевидно, что можно задать такое  $\delta$ , что  $\tilde{u}(t)$  при любых  $t \in [t_1, t_f]$  не будет выходить из  $U$ .

Таким образом, если начальное состояние далеко от положения равновесия,  $x = 0$ , то достаточно на некоторое время предоставить устойчивую систему «самой себе», и отклонение уменьшится настолько, что из него можно перейти точно в равновесие за заданное конечное время  $t_f - t_1$  с помощью ограниченного управления. Конечно, такая последовательность действий не является оптимальной (напомним, что оптимальное управление сразу выходит на границу допустимой области!), однако важна сама гарантия возможности построить допустимое, а следовательно, и оптимальное управление \*). ■

Подчеркнем также, что доказанное утверждение верно только применительно к переходу устойчивой системы в состояние равновесия, но не в любое другое состояние  $x^d$  (замена  $\xi = x - x^d$  переводит желаемое состояние в начало координат, но одновременно возникает постоянное слагаемое  $Ax^d$  в уравнении объекта).

**5.3. Управление движением.** Переходим к рассмотрению примеров, связанных с управлением движением механических объектов.

**Пример 5.1. Достигжение заданной скорости.** Рассмотрим материальную точку, движущуюся по прямой под действием управляемой силы  $f(t)$ . Скорость  $v(t)$  изменяется в силу уравнения

$$mv = f(t), \quad t \geq 0, \quad v(0) = v^0. \quad (5.20)$$

Требуется обеспечить достижение заданной скорости  $v^f > v^0$  за минимальное время при условии, что сила ограничена:

$$|f(t)| \leq \bar{f}, \quad t \geq 0. \quad (5.21)$$

Решение очевидно: сила должна все время принимать наибольшее значение  $\bar{f}$ , причем развивается ускорение  $m^{-1}\bar{f}$ .

Усложним задачу, считая, что масса является переменной, и будем интерпретировать дальнейшее как поиск оптимальной программы управления реактивным ускорением для летательного аппарата, движимого реактивной тягой (см. пример 4.2). Пусть мощность двигателя  $N$  поддерживается постоянной, движение осуществляется по прямой; тогда уравнение изменения массы

$$\dot{m} = -q \quad (5.22)$$

может быть преобразовано к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{2N}{m} \right) = a^2. \quad (5.23)$$

\*.) Доказательство того, что из существования допустимого управления следует существование оптимального, несложно (см., например, [6.3]).

Введем теперь обозначения

$$x_1(t) = v(t), \quad x_2(t) = \frac{2N}{m(t)}; \quad (5.24)$$

тогда уравнения изменения состояния приобретут особо простую форму [9.13]

$$\dot{x}_1 = a, \quad \dot{x}_2 = a^2 \quad (5.25)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= v^0, \quad x_2(0) = \frac{2N}{m^0}, \\ x_1(t_f) &= v^f, \quad x_2(t_f) = \frac{2N}{m^f}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Используя принцип максимума, составим гамильтониан

$$\mathcal{H} = \lambda_1 a + \lambda_2 a^2.$$

Из уравнений для множителей

$$\lambda_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = 0$$

следует, что

$$\lambda_1(t) = c_1 = \text{const}, \quad \lambda_2(t) = c_2 = \text{const}.$$

Выразим управление через константы  $c_1, c_2$ . Требуется выбрать  $a(t)$  так, чтобы в любой момент достигался

$$\max \{c_1 a + c_2 a^2 / |a| \leq \bar{a}\}. \quad (5.27)$$

Результат зависит от знака коэффициента  $c_2$ , определяющего знак второй производной максимизируемой функции.

Из необходимого условия безусловного экстремума имеем

$$a^*(t) = -\frac{c_1}{2c_2} = \text{const},$$

но это значение доставляет максимум только при  $c_2 < 0$ . Более того, оно может лежать вне допустимой области, так что при  $c_2 < 0$  решение задачи имеет вид

$$a^*(t) = \begin{cases} \bar{a}, & -\frac{c_1}{2c_2} > \bar{a}, \\ -\frac{c_1}{2c_2}, & \left| \frac{c_1}{2c_2} \right| \leq \bar{a}, \\ -\bar{a}, & -\frac{c_1}{2c_2} < -\bar{a}. \end{cases}$$

В случае  $c_2 = 0$  минимизируемая функция линейна и

$$a^*(t) = \begin{cases} \bar{a}, & c_1 > 0, \\ -\bar{a}, & c_1 < 0. \end{cases}$$

В случае  $c_2 > 0$  вновь нет точки безусловного максимума и решение достигается только на границах:

$$a^*(t) = \begin{cases} \bar{a}, & c_1 > 0, \\ -\bar{a}, & c_1 < 0. \end{cases}$$

Во всех описанных ситуациях  $a^* = \text{const}$  и  $|a^*| \leq \bar{a}$ .

В силу уравнений (5.25)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = a^* \Rightarrow x_2(t) = a^* x_1(t) + c^*,$$

где  $c^*$  — константа интегрирования. Эту константу, а также константу  $a^*$  надлежит определить из краевых условий. Имеем

$$\begin{aligned} x_2^0 &= a^* x_1^0 + c^*, \quad x_2^f = a^* x_1^f + c^* \Rightarrow \\ \Rightarrow a^* &= \frac{x_2^0 - x_2^f}{x_1^0 - x_1^f} = \frac{(m^f)^{-1} - (m^0)^{-1}}{v^f - v^0} 2N \triangleq \alpha. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Казалось бы, задача решена: так же, как при управлении точкой с постоянной массой, следует все время двигаться с постоянным ускорением. Правда, здесь оно, вообще говоря, не является предельно возможным,  $a^* \neq \bar{a}$ , а зависит от заданных начальных и конечных значений скорости и массы: требование сохранить достаточно большую массу не позволяет увеличивать ускорение до предела. Однако решение является неполным: если  $\alpha > \bar{a}$ , то значение  $a^*$  является недопустимым. Но ведь только с помощью этого значения удалось удовлетворить граничным условиям! Мы пришли и противоречию: при некоторых соотношениях граничных условий нет управлений, удовлетворяющих принципу максимума и вместе с тем позволяющих достичь заданного состояния. На самом деле это противоречие только кажущееся: при разборе вариантов различных возможных значений лагранжевых множителей был пропущен существенный случай  $c_2 > 0, c_1 = 0$ . Максимизируемая функция является симметричной параболой (рис. 9.3), и принцип максимума выделяет какое-либо из решений

$$a^*(t) = \bar{a} \text{ или } a^*(t) = -\bar{a}.$$

Оба варианта удовлетворяют необходимым условиям. Ясно лишь, что в этом случае оптимальное управление удовлетворяет условию

$$|a^*(t)| = \bar{a} = \text{const}, \quad (5.29)$$

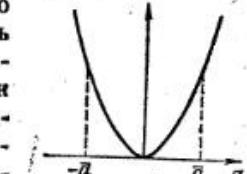


Рис. 9.3

но возможны переключения знака управления. С помощью таких переключений и удается удовлетворить граничным условиям, когда это невозможно при использовании постоянного ускорения. Остается выяснить, каким должен быть закон переключения, но оказывается, что он в определенной степени безразличен. Действительно, при  $|a^*(t)| = \bar{a}$  имеем

$$\dot{x}_2 = \bar{a} \Rightarrow x_2^f - x_2^0 = \bar{a} t, \Rightarrow t = \frac{x_2^f - x_2^0}{\bar{a}}$$

так что время перехода определяется лишь квадратом управления и не зависит от его знака. Минимальное значение времени достигается при любых законах переключения, обеспечивающих переход в заданное состояние.

Теперь можно подвести итог: если заданное состояние таково, что  $\alpha \leq \bar{a}$ , то  $a_{opt}(t) = \alpha = \text{const}$ ; если же  $\alpha > \bar{a}$ , то оптимальное управление не единствено и ограничивается условием  $|a_{opt}(t)| = \bar{a}$  и требованием перехода в заданное состояние. Все ситуации хорошо иллюстрируются на фазовой плоскости (рис. 9.4). Поскольку масса может только убывать, а связанная с ней переменная  $x_2$  — только возрастать, то представляют интерес только начальные точки, расположенные ниже конечных.

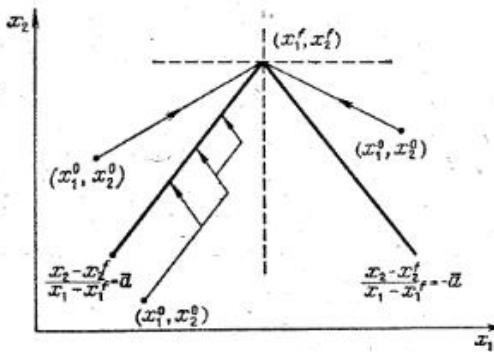


Рис. 9.4

Из точек, лежащих вне сектора, ограниченного прямыми

$$\frac{x_2 - x_2^f}{x_1 - x_1^f} = \pm \bar{a}, \quad (5.30)$$

оптимальный переход осуществляется с постоянным ускорением, а из точек внутри сектора — с ускорением, меняющимся по знаку, но сохраняющим предельное по модулю значение. Все траектории этого типа эквивалентны. Время перехода из точек, имеющих одну и ту же ординату (одинаковую начальную массу), одинаково, если они лежат внутри сектора. В противном случае оно тем больше, чем больше заданное различие в исходной и конечной скоростях.  $\square$

**Пример 5.2. Управление скоростью («навигационная задача Церемело»).** Пусть точка движется в среде, имеющей заданную переносную скорость  $v_0$ . Имеется возможность управления собственной (относительной) скоростью  $u$ , модуль которой ограничен. Требуется найти программу управления  $u$ , обеспечивающую минимальное време-

мя перехода из одной точки в другую. Для простоты рассмотрим движение в плоскости, где введена неподвижная система координат  $(x_1, x_2)$  (рис. 9.5).

Будем считать также, что вектор скорости  $v_0$  имеет постоянное направление, совпадающее с направлением оси  $x_1$ , и, более того, постоянен по величине, которую можно принять за единицу. Тогда изменение во времени координат движущейся точки («пловца, переплывающего реку») определяется уравнениями

$$\dot{x}_1 = 1 + u \cos \varphi, \quad \dot{x}_2 = u \sin \varphi, \quad (5.31)$$

где через  $u$  обозначена величина скорости, а через  $\varphi$  — угол, составляемый ею с осью  $x_1$ . Поскольку заранее очевидно, что величина скорости должна быть предельно возможной,  $u = \bar{u}$ , то остается единственное управление — угол  $\varphi(t)$ .

Действуем по стандартной схеме:

$$\mathcal{H} = \lambda_1(1 + \bar{u} \cos \varphi) + \lambda_2 \bar{u} \sin \varphi,$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = \text{const}.$$

Учитывая, что на управление не наложено явных ограничений, запишем необходимое условие максимума  $\mathcal{H}$  по  $\varphi$ :

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\varphi} = 0 \Rightarrow -\lambda_1 \sin \varphi^* + \lambda_2 \cos \varphi^* = 0,$$

т. е.

$$\tan \varphi^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{const}.$$

Таким образом, скорость должна быть постоянной по направлению, а движение — происходить по прямой, соединяющей начальную и конечную точки. Однако следует учесть одно обстоятельство: в силу уравнений изменения состояния наклон прямой ограничен, если  $\bar{u} < 1$ :

$$\left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| = \left| \frac{\bar{u} \sin \varphi^*}{1 + \bar{u} \cos \varphi^*} \right| \leq \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - \bar{u}^2}},$$

т. е. если собственная скорость «пловца» меньше по величине скорости «течения», то он может переплыть только в точку на «другом берегу», лежащую в пределах (см. рис. 9.5) заштрихованной зоны достижимости

$$x_1^f > x_1^0 + \frac{x_2^f - x_2^0}{\bar{u}} \sqrt{1 - \bar{u}^2} \quad (x_2^f > x_2^0)$$

(река «сносит пловца»).

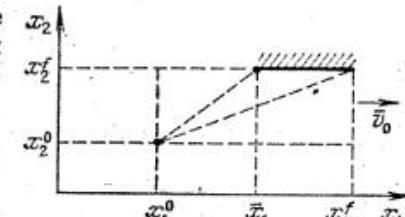


Рис. 9.5

Предположим теперь, что координата  $x'_1$  не задана (требуется только «переплыть реку», попав в любую точку «противоположного берега»). Тогда в силу принципа максимума

$$\lambda_1(t_f) = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = 0$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \infty \Rightarrow \varphi^* = \frac{\pi}{2}, \quad (5.32)$$

т. е. «пловец» должен направляться прямо в цель, поперек течения.

Конечно, полученные результаты почти очевидны. Более заслуживает названия «навигационная задача» следующая постановка: пусть направление переносной скорости по-прежнему постоянно, но ее величина зависит от координаты  $x_2$ , и задан профиль скорости  $v_0(x_2) > 0$ .

Уравнения движения приобретают вид

$$\dot{x}_1 = v_0(x_2) + \bar{u} \cos \varphi, \quad \dot{x}_2 = \bar{u} \sin \varphi, \quad (5.33)$$

а из принципа максимума следует, как и ранее, что

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \text{const}, \quad (5.34)$$

но множитель  $\lambda_2$  уже не постоянен, а подчиняется уравнению

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{dv_0(x_2)}{dx_2}. \quad (5.35)$$

Если значение  $x'_1$  не фиксировано, то вновь получаем тривиальное решение

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \varphi^* = \frac{\pi}{2},$$

при котором точка придет к цели с несложно вычисляемым значением  $x'_1$ . Если же  $x'_1$  заранее задано и  $x'_1 \neq x_1^*$ , то  $\lambda_1 \neq 0$ , и можно сразу положить  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ , поскольку управление определяется только отношением множителей.

Исключим время  $t$  из уравнений, записав

$$\frac{d\lambda}{dx_2} = \frac{-\frac{d}{dx_2} v_0(x_2)}{\bar{u} \sin \varphi}, \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{v_0(x_2) + \bar{u} \cos \varphi}{\bar{u} \sin \varphi}.$$

Первое из этих уравнений эквивалентно

$$-\bar{u} \sin \varphi d\lambda = dv_0,$$

а из условия экстремума (5.34) следует

$$d\lambda = \frac{d\varphi^*}{\cos^2 \varphi^*} s$$

так что

$$-\frac{\sin \varphi^*}{\cos^2 \varphi^*} d\varphi^* = \frac{1}{\bar{u}} dv_0.$$

Интегрируя это соотношение, получаем явную зависимость оптимального управления от координаты  $x_2$ :

$$-\cos^{-1} \varphi^* = \frac{1}{\bar{u}} v_0(x_2) + c^* \Rightarrow \cos \varphi^* = \left[ \frac{1}{\bar{u}} v_0(x_2) + c^* \right]^{-1}, \quad (5.36)$$

где константа  $c^*$  определится по граничным условиям.  $\square$

**Пример 5.3.** Управление силой для скорейшего торможения в заданном положении. Вернемся к задаче, рассмотренной в начале примера 5.1, о движении точки постоянной массы под действием ограниченной управляющей силы, однако введем дополнительное условие: торможение должно быть осуществлено в заданной точке  $x' = 0$ . Задача при этом существенно усложняется. Для ее исследования используем принцип максимума. Запишем уравнения в стандартной форме.

Обозначим  $x_1 = x$ ,  $x_2 = v$ . Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad m\dot{x}_2 = u. \quad (5.37)$$

Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \lambda_1 x_2 + \frac{1}{m} \lambda_2 u,$$

а изменение множителей  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  задается уравнениями

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1.$$

Из условия максимума гамильтониана получаем

$$u^* = \begin{cases} \bar{u}, & \lambda_2 > 0, \\ -\bar{u}, & \lambda_2 < 0, \end{cases} \quad (5.38)$$

и  $u^*$  принимает произвольное допустимое значение при  $\lambda_2 = 0$ .

Для нахождения программы управления требуется найти закон изменения  $\lambda_2(t)$ .

Система для множителей дает

$$\lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = -c_1 t + c_2,$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  — неопределенные константы.

Поскольку  $\lambda_2(t)$  — линейная функция, то она может изменять знак не более одного раза (частный случай теоремы Фельдбаума из § 3, при  $n = 2$ ).

Таким образом, с помощью принципа максимума установлены два факта: во-первых, оптимальное управление может принимать только значения  $\pm \bar{u}$ , а во-вторых, переключение с одного значения на другое возможно только один раз, каковы бы ни были начальное

положение  $x_1^0$  и начальная скорость  $x_2^0$ . Остается выяснить, каким должен быть начальный знак управляющей силы и момент переключения.

Для того чтобы получить решение при произвольных начальных условиях, используем анализ траекторий на фазовой плоскости  $x_1, x_2$  (рис. 9.6). Траектории подчиняются уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \pm \frac{\bar{u}}{mx_2} \Rightarrow \frac{1}{2} x_2^2 + c^* = \pm \frac{\bar{u}}{m} x_1, \quad (5.39)$$

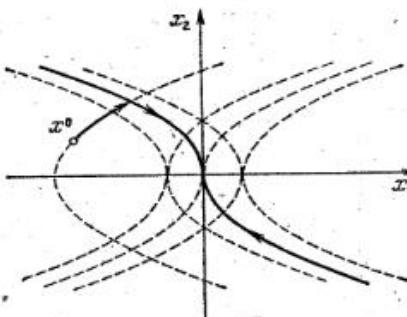


Рис. 9.6

точнее, поскольку заранее знак неизвестен, можно сказать только, что любая траектория должна быть «шпига» не более чем из двух частей, каждая из которых является участком параболы вида (5.39) с тем или иным знаком. Константа  $c^*$  зависит от начальных условий.

Однако имеются только две траектории, две полу параболы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_2^2 &= -\frac{\bar{u}}{m} x_1, \quad x_2 > 0, \\ \frac{1}{2} x_2^2 &= \frac{\bar{u}}{m} x_1, \quad x_2 < 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

по которым точка может подойти к желаемому состоянию — началу координат. В силу правила о числе переключений любая оптимальная траектория либо представляет собой одну из этих полу парабол, т. е. движение осуществляется без переключений, либо включает одну из них в качестве второго участка траекторий, который должен быть непрерывно спит с какой-либо другой траекторией вида (5.40), соответствующей управлению другого знака и проходящей через заданную начальную точку с координатами  $x_1^0, x_2^0$ . Естественно, что оптимальное движение без переключений возможно только, если величины  $x_1^0, x_2^0$  удовлетворяют одному из условий (5.40). Оптимальные траектории, типичные для любого другого начального состояния, состоят из двух участков парабол (см. рис. 9.6).

Проведенный анализ фактически позволил установить, каким должно быть управление при любом состоянии, любых значениях положения и скорости: для всех состояний, изображаемых на фазовой плоскости точками, лежащими левее финальных траекторий, управление равно  $\bar{u}$ , а для состояний, изображаемых точками справа, равно  $-\bar{u}$ . Переключение происходит только при выходе на финальные траектории (5.40).

Можно дать и аналитическое выражение оптимального закона управления как функции состояния

$$u = -\bar{u} \operatorname{sign} \left[ x_1 + \frac{m}{2\bar{u}} x_2^2 \operatorname{sign} x_2 \right], \quad (5.41)$$

справедливое всюду, кроме финальных траекторий.

В исходных обозначениях имеем

$$\dot{u} = -\bar{u} \operatorname{sign} \left[ x + \frac{m}{2\bar{u}} v^2 \operatorname{sign} v \right], \quad (5.42)$$

т. е. оптимальное по быстродействию управление является нелинейной функцией от положения и скорости и может быть реализовано в виде обратной связи при наличии таких измерений.  $\square$

## § 6. Дискретные системы

**6.1. Формулировка задачи оптимизации.** Управляемый объект называется *дискретным* (по времени), если его описание дано рекуррентным соотношением

$$x[k+1] = F(x[k], u[k], k), \quad x[0] = x^0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.1)$$

где  $x[k]$  — вектор состояния в момент  $k$ ,  $u[k]$  — вектор управлений, а  $F(\cdot)$  — вообще говоря, нелинейная вектор-функция своих аргументов. Уравнение (6.1) можно ассоциировать с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \geq 0, \quad (6.2)$$

если ввести последовательность моментов времени  $t_k, k = 0, 1, \dots$ , определить

$$x[k] = x(t_k), \quad u[k] = u(t_k)$$

и считать моменты  $t_k$  настолько близкими, что допустима приближенная замена

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}. \quad (6.3)$$

Тогда из (6.2) следует

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + (t_{k+1} - t_k) f[x(t_k), u(t_k), t_k],$$

что приводит к (6.1) при

$$F(x[k], u[k], k) \triangleq x[k] + (t_{k+1} - t_k) f[x[k], u[k], t_k]. \quad (6.4)$$

Впрочем, как уже указывалось в гл. 7, дискретное описание может быть и исходным, содержательно естественным.

Соотношение (6.1) позволяет по заданному начальному условию  $x[0]$  и последовательности управляющих воздействий  $\{u[k]\}$  определить состояние в любой последующий момент.

Поставим задачу нахождения такой последовательности  $\{u^*[k], k = 0, \dots, k_f - 1\}$ , которая доставляет минимум функции

$$J\{u\} = \sum_{k=0}^{k_f-1} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]) \quad (6.5)$$

при условии, что

$$u[k] \in U_k, \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad (6.6)$$

где  $U_k$  — заданные множества допустимых значений управления в каждый момент  $k$ , а также при условиях связи между переменными, задаваемых соотношениями (6.1).

Критерий (6.5) также является очевидным дискретным аналогом интегрального критерия (1.6). Вместе с тем подчеркнем, что поставленная задача оптимизации является задачей минимизации функции (6.5) конечного числа переменных при ограничениях (6.1), (6.6), т. е. относится к классу задач, рассмотренных в п. 2.1. Введем в рассмотрение вектор  $y$ , включающий все неизвестные:  $y = (u[k], k = 0, 1, \dots, k_f - 1, x[k], k = 1, \dots, k_f)$ . Можно обозначить

$$F_0(y) \triangleq \sum_{k=0}^{k_f-1} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]), \quad (6.7)$$

$$F_k(y) \triangleq x[k+1] - F(x[k], u[x], k), \quad k = 1, 2, \dots, k_f - 1. \quad (6.8)$$

Зададим также в явной форме ограничения (6.6) с помощью системы неравенств (вообще говоря, векторных)

$$\varphi_k(y) \triangleq \varphi(u[k], k) \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots, k_f - 1. \quad (6.9)$$

Тогда исходная задача перепишется в виде

$$\min \{F_0(y)/F_k(y) = 0, k = 1, \dots, k_f - 1, \varphi_k(y) \leq 0, k = 0, 1, \dots, k_f - 1\}, \quad (6.10)$$

что по существу совпадает с (2.12).

Составим лагранжиан задачи

$$\mathcal{L}_0 = \lambda_0 F_0(y) + \sum_{k=1}^{k_f-1} \lambda^*[k] F_k(y) + \sum_{k=0}^{k_f-1} \mu^*[k] \varphi_k(y),$$

где для удобства через  $\mu[k]$  обозначены лагранжиевы множители, соответствующие ограничениям (6.9). Далее используем необходимые условия оптимальности, фигурирующие в Т.2.3. С учетом различия в обозначениях эти условия формулируются так: необходимо, чтобы существовали множители  $\lambda_0, \lambda[k], \mu[k]$ , не равные

одновременно нулю и такие, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x[k]} = 0, \quad k = 1, \dots, k_f, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u[k]} = 0, \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad (6.12)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \mu[k] \geq 0, \quad \mu^*[k] \varphi_k(y) = 0, \quad (6.13)$$

если  $y = (u[k], x[k])$  удовлетворяет ограничениям задачи (6.10).

Специфика задачи проявляется в структуре связей. Перепишем лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \lambda_0 G_0(x[k_f]) + \sum_{k=0}^{k_f-1} \{\lambda_0 g_0(x[k], u[k], k) + \\ &+ \lambda^*[k] x[k+1] - \lambda^*[k] F(x[k], u[k], k) + \mu^*[k] \varphi(u[k], k)\} = \\ &= \lambda_0 G_0(x[k_f]) + \sum_{k=0}^{k_f-1} \{\lambda^*[k] x[k+1] - \\ &- H_{0k}(x[k], u[k], \lambda[k], k, \lambda_0) + \mu^*[k] \varphi(u[k], k)\}, \end{aligned}$$

где

$$H_{0k} \triangleq \lambda^*[k] F(x[k], u[k], k) - \lambda_0 g_0(x[k], u[k], k). \quad (6.14)$$

Тогда (6.11) принимает вид

$$\lambda[k-1] = \frac{\partial}{\partial x[k]} H_{0k}, \quad \lambda[k_f-1] = -\lambda_0 \frac{\partial}{\partial x[k_f]} G_0. \quad (6.15)$$

Очевидна аналогия этих условий с системой, определяющей лагранжиевы множители в принципе максимума.

Условия (6.12), (6.13) дают

$$\frac{\partial}{\partial u[k]} \{H_{0k} - \mu^*[k] \varphi(u[k], k)\} = 0, \quad (6.16)$$

$$\mu[k] \geq 0, \quad \mu^*[k] \varphi(u[k], k) = 0. \quad (6.17)$$

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 6.1.** Пусть функции  $F(x, u, k)$ ,  $\varphi(x, u, k)$ ,  $g_0(x, u, k)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$ ,  $u$ , а  $G_0(x)$  непрерывно дифференцируема по  $x$ . Для того чтобы на допустимой условиями (6.9) последовательности управлений  $\{u^*[k], k = 0, \dots, k_f - 1\}$  и соответствующей ей в силу (6.1) траектории  $\{x^*[k], k = 1, \dots, k_f\}$  достигалась минимум функции (6.5), необходимо, чтобы существовали величины  $\lambda[k] = \lambda^*[k], k = 1, \dots, k_f - 1, \lambda_0^* \geq 0$ , не равные одновременно нулю и такие, чтобы они удовлетворяли уравнениям (6.15). Кроме того, необходимо, чтобы существовали величины  $\mu[k] = \mu^*[k], k = 0, 1, \dots, k_f - 1$ , такие, чтобы они совместно с  $u[k] = u^*[k]$  удовлетворяли при каждом  $k$  условиям (6.16), (6.17).

**6.2. Дискретный принцип максимума.** Приведенная Т.6.1 является аналогом принципа максимума в теории непрерывных систем, однако аналогия не полна. Действительно, выражение

$$H_{ok} - \mu^*[k] \varphi(u[k], k)$$

можно рассматривать как «классический» лагранжиан в задаче

$$\max \{H_{ok}/u[k] \in U_k\}, \quad (6.18)$$

если множество  $U_k$  задано условиями (6.9). Однако возможность использования такого лагранжиана (без множителя перед функционалом) не обоснована, поскольку требуется дополнительная проверка условий регулярности типа (2.10). Поэтому и эквивалентность условий (6.16), (6.17) выбору  $u^*[k]$  из решения задач на максимум гамильтониана  $H_{ok}$ , вообще говоря, не имеет места.

Утверждение, вполне аналогичное «непрерывному» принципу максимума, удается сформулировать только для более частных классов задач.

**Теорема 6.2 (дискретный принцип максимума).** Пусть  $g_0(x, u, k) = 0$ ,  $G_0(x)$  непрерывно дифференцируема по  $x$ ,  $F(x, u, k)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  при любом  $u \in U$  и линейна по  $u$ . Тогда для того, чтобы последовательности  $\{u^*[k]\}$ ,  $\{x^*[k]\}$ , допустимые в силу (6.1), (6.6), доставляли минимум  $G_0(x[k])$ , необходимо, чтобы существовали такие  $\lambda[k] = \lambda^*[k]$ ,  $k = 0, \dots, k_f - 1$ , что при  $u[k] = u^*[k]$ ,  $x[k] = x^*[k]$  удовлетворяются уравнения

$$\lambda[k-1] = \frac{\partial H_k}{\partial x[k]}, \quad k = 1, \dots, k_f - 2, \quad \lambda[k_f - 1] = -\frac{\partial G_0}{\partial x[k_f]}, \quad (6.19)$$

где

$$H_k \triangleq \lambda^T[k] F(x[k], u[k], k). \quad (6.20)$$

При этом

$$H_k(x^*[k], u^*[k], \lambda^*[k], k) = \max_{u \in U_k} H_k(x^*[k], u, \lambda^*[k], k). \quad (6.21)$$

Если же  $F(x, u)$  нелинейна по  $u$ , но дифференцируема, а  $U_k$  — выпуклые множества, то вместо (6.21) можно записать, что на  $u^*[k]$  достигается

$$\max_{u \in U_k} \left\{ \frac{\partial H_k}{\partial u}(x^*[k], u, \lambda^*[k]) \right\}^T u. \blacksquare \quad (6.22)$$

Доказательство Т.6.2 и некоторых ее обобщений можно найти в [9.2], [9.5]. Возможные приложения аналогичны приложениям обычного принципа максимума, хотя указанные условия несколько сужают их круг.

Подчеркнем в заключение, что из дополнения к Т.2.3 следует: для задач, где целевая функция (6.6) выпукла по  $x[k]$ ,  $u[k]$ , уравнения (6.2) линейны, а множества  $U_k$  выпуклы, дискретный принцип максимума является и необходимым, и достаточным условием оптимальности.

## § 7. Понятие о численных методах оптимизации

**7.1. Конечномерная параметризация.** Построение точных решений в задачах управления возможно лишь в немногих ситуациях. Основным подходом к решению реальных задач является приближенная численная оптимизация.

Проблеме организации вычислительных методов посвящена огромная литература, и достаточно полное знакомство с ними требует изучения самостоятельных курсов \*).

Здесь мы ограничимся лишь некоторыми общими понятиями и основными конкретными рекомендациями. Прежде всего подчеркнем, что любая проблема оптимизации есть проблема выбора из допустимого множества вариантов того, для которого оптимизируемый показатель достигает наилучшего значения. Если допустимое множество конечно, то в принципе возможна оптимизация путем полного перебора по схеме:

- а) перенумеровать все варианты  $\{u^s\}$ ,  $s = 1, \dots, S$ ;
- б) последовательно для каждого  $s$ , начиная с  $s = 1$ , вычислить  $J(u^s)$ ;
- в) сравнить это значение с лучшим из предшествующих («рекордом»);
- г) отбросить вариант, если он дает значение хуже «рекорда», а в противном случае запомнить его как новый «рекордный», после чего перейти к следующему.

Полный перебор требует времени, равного произведению числа вариантов на время вычисления показателя. Напомним, что в задаче оптимизации программы управления вычисление одного значения показателя  $J(u_s)$  требует интегрирования системы дифференциальных уравнений, что само по себе связано с большими затратами. Более того, лишь в немногих задачах мы сталкиваемся с конечным множеством вариантов. Как правило, в исходной постановке выбор осуществляется на бесконечном множестве функций.

Основной выход заключается в использовании тех или иных представлений о непрерывности, т. е. того свойства, что мало отличающимся между собой вариантам управлений соответствуют мало отличающиеся значения показателя. Возможен простейший подход: отрезок работы  $[t_0, t_f]$  (если таковой фиксирован и конечен!) разделяется на конечное число  $k$ , отрезков (шагов сетки), на каждом шаге допускается конечное число  $l$  вариантов значений. Далее предполагается, что значение на любой из допустимых функций мало отличается от значения на какой-либо из описанного конечного набора кусочно-постоянных функций. Общее число  $S$  таковых в наборе, очевидно, равно  $l^k$ . Показательный рост числа вариантов

\* ) В качестве пособий можно рекомендовать, например, книги [9.18], [9.21]. Начальные сведения можно почерпнуть из [9.17].

с ростом числа шагов делает простейшую процедуру полного перебора, как правило, неприемлемой.

Второй, практически более используемый подход заключается в конечномерной параметризации множества допустимых управлений. В основной форме он сводится к замене поиска на множестве всех допустимых функций поиском на множестве кусочно-постоянных функций, различающихся их значениями  $u[k]$ ,  $k = 0, \dots, k_f - 1$ , на каждом шаге сетки. Показатель качества при этом становится функцией конечного числа  $k$ , переменных (если  $u(t)$  скалярно). Существенно, однако, что она задана не в явной аналитической форме, а лишь алгоритмически (можно рассчитать значение показателя при любом конкретном значении набора  $\{u[k]\}$ ). Наряду с указанной основной формой используется также параметризация путем сужения до множества функций вида

$$u(t) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t), \quad (7.1)$$

где  $\varphi_k(t)$  — заранее заданные функции, например, многочлены, а выбору подлежат значения коэффициентов  $c_k$  в представлении (7.1), т. е. опять-таки показатель оказывается функцией конечного числа неизвестных  $c_k$ . Исходные ограничения типа

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (7.2)$$

переходят в ограничения на введенные неизвестные. При этом основной способ параметризации имеет то преимущество, что ограничения типа (7.2) естественно переходят в ограничения

$$u[k] \in U, \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad (7.3)$$

на каждую переменную в отдельности.

**7.2. Локальные методы поиска безусловного экстремума.** Пусть параметризация каким-то образом проведена. Спрашивается теперь, как решать возникшую задачу поиска экстремума функции многих переменных? Обозначим их для унификации как вектор  $y$  размерности  $N$ , а зависимость от них показателя — через  $F(y)$ . Ясно, что «школьный» способ: найти экстремум, решая систему  $N$  уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7.4)$$

явно не проходит, поскольку а) неизвестна аналитическая зависимость для производных  $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ ; б) решать численно систему большого числа нелинейных уравнений почти так же сложно, как решать задачу оптимизации; в) даже если решение найдено, остается неизвестным, обеспечивает ли оно именно минимум, а не другую экстремальную точку, и если минимум, то обязательно ли глобальный, на всем множестве возможных значений  $y$ . Наконец, остаются трудно-

сти, связанные с наличием ограничений: искать переменные  $y, \lambda$ , удовлетворяющие системе необходимых условий, указанных в Т.2.2, еще сложнее, чем решать уравнения (7.4), соответствующие задаче на безусловный экстремум.

Поэтому основными способами решения задач минимизации (или максимизации) функций многих переменных являются итеративные (последовательные) процедуры *локальной оптимизации*. Эти процедуры основываются на следующей схеме:

- задать начальное приближение  $y^{(0)}$ ;
- вычислить  $F(y^0)$ ;
- оценить поведение  $F(y)$  в малой окрестности  $y^0$ ;
- выбрать  $y^{(1)}$  как лучшее из значений в этой окрестности и перейти к б), если  $F(y^1)$  лучше  $F(y^0)$ , или остановить поиск в противном случае.

Схема локального поиска напоминает схему перебора, однако в ней, во-первых, заранее не фиксировано множество вариантов, а во-вторых, остановка происходит при достижении локального экстремума. Естественно, что эффективность локального поиска резко зависит от выбора удачного начального приближения как в смысле требуемого числа шагов, так и в том, что различный выбор может привести к различным локальным экстремумам, не каждый из которых, вообще говоря, является глобальным.

Существует множество способов реализации пп. в) и г) общей схемы.

В наиболее распространенных способах оценка локального поведения осуществляется путем построения линейной аппроксимации: считается, что

$$F(y) \approx F(y^0) + (c^0)^*(y - y^0), \quad (7.5)$$

где  $c^0$  — вектор коэффициентов, который можно принять равным градиенту  $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=y^0}$ , если таковой вычислим непосредственно. В противном случае обычно используется оценка типа разностной

$$c_j^0 = \left. \frac{\partial F}{\partial y_j} \right|_{y=y^0} = \frac{F(y_1^0, \dots, y_j^0 + \Delta, \dots, y_N^0) - F(y^0)}{\Delta} \quad (7.6)$$

при достаточно малых  $\Delta$ .

После этого лучшей считается точка  $y^{(1)}$ , в которой достигается максимум (минимум) линейной аппроксимации в пределах окрестности  $y^0$ . Если эта окрестность — шар радиуса  $\theta^0 / |c^0|$ , то, очевидно,

$$y^{(1)} - y^{(0)} = \pm \theta^0 c^0,$$

где «+» соответствует максимуму, а «-» — минимуму.

Если  $c^0$  совпадает с градиентом (или его оценкой), то

$$y^{(1)} = y^{(0)} \pm \theta^0 \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=y^0}. \quad (7.7)$$

Формулой (7.7), повторяемой на каждом шаге, характеризуются методы градиентного типа. Очевидно, что последовательная процедура останавливается только в той точке, где точно или приближенно удовлетворяются требования безусловного экстремума. Число потребных для этого итераций, вообще говоря, не ограничено\*). Поэтому, как правило, вместо условия остановки, указанного в основной схеме, используется условие (при минимизации!)

$$F(y^{(s+1)}) - F(y^{(s)}) \leq \varepsilon_F, \quad (7.8)$$

где  $\varepsilon_F$  — заданная точность по критериальному показателю.

Более эффективными могут быть методы, основанные на квадратичной локальной аппроксимации (ニュтоновского типа). Не останавливаясь на них детально, укажем, что вместо (7.7) они приводят к формуле

$$y^{(1)} = y^{(0)} - \theta^0 \hat{B}^0 \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} \Big|_{y=y^0}, \quad (7.9)$$

где  $\hat{B}^0$  дает ту или иную оценку матрицы, обратной к матрице вторых производных в точке  $y^0$ .

**7.3. Задачи математического программирования.** При наличии ограничений процедуры (7.7) или (7.9) непосредственно не годятся. Остановимся на основных их модификациях, учитывающих ограничения. Пусть задача представлена в виде общей задачи нелинейного программирования (НП)

$$\min \{F_0(y)/F_i(y) = 0, i = 1, \dots, r_i, F_i(y) \leq 0, i = r_i + 1, \dots, r\}. \quad (7.10)$$

Логически наиболее простой процедурой решения является схема проектирования градиента. Пусть  $y^{(0)} \in Y$ , где  $Y$  — допустимое множество. Тогда (7.7) модифицируется следующим образом:

$$y^{(1)} = \Pi_Y \left\{ y^{(0)} \pm \theta^0 \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial y} \Big|_{y=y^0} \right\}, \quad (7.11)$$

где оператор  $\Pi_Y$  определяет проектирование на  $Y$ , т. е.

$$\Pi_Y \{y\} = \begin{cases} y, & \text{если } y \in Y, \\ x^*, & \text{если } y \notin Y, \end{cases} \quad (7.12)$$

где  $x^*$  — решение вспомогательной задачи

$$\min \{ \|y - x\| / x \in Y \}, \quad (7.13)$$

т. е.  $x^*$  — ближайшая к заданному  $y$  точка в множестве  $Y$ .

Ввиду сложности вспомогательной задачи процедура проектирования градиента имеет преимущественно теоретическое значение, за исключением простейшего случая, когда ограничения в (7.10)

\* Условия сходимости приведены в гл. 11, § 2.

являются покомпонентными

$$Y = \{y / y_j \leq \bar{y}_j, j = 1, \dots, N\}. \quad (7.14)$$

Проектирование на такой параллелепипед производится элементарно: значение компоненты, вышедшей за пределы допуска, заменяется на ближайшее допустимое, так что (7.11) имеет вид

$$y_j^{(1)} = \begin{cases} \underline{y}_j, & \bar{y}_j < \underline{y}_j, \\ \bar{y}_j^{(0)}, & \underline{y}_j \leq \bar{y}_j^{(0)} \leq \bar{y}_j, \\ \bar{y}_j, & \bar{y}_j > \bar{y}_j, \end{cases} \quad (7.15)$$

где

$$\bar{y}_j^{(0)} = y_j^{(0)} \pm \theta^0 \frac{\partial \hat{F}}{\partial y_j} \Big|_{y=y^0}.$$

В других случаях часто используют различные варианты метода штрафных коэффициентов: например, задача (7.10) заменяется на задачу безусловной минимизации функции

$$F_0(y) + \sum_{i=1}^{r_1} k_i F_i^2(y) + \sum_{i=r_1+1}^r k_i (F_i(y) + v_i)^2, \quad (7.16)$$

где  $k_i$  — «штрафные» коэффициенты, а  $v_i$  — вспомогательные переменные, служащие для преобразования неравенств в равенства.

Очевидно, что при достаточно больших  $k_i$  решения (7.10) и (7.16) должны быть близки.

Второй общий подход связан с линеаризацией зависимостей, входящих в (7.10). Дело в том, что в случае, когда функции  $F_i(y)$ ,  $i = 0, \dots, r$ , являются линейными

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j - b_i \quad (7.17)$$

с явно заданными числовыми коэффициентами  $a_{ij}$ ,  $b_i$ , задача (7.10) является задачей линейного программирования (ЛП), для которой разработаны специальные алгоритмы и программы, входящие в математическое обеспечение всех ВЦ. Здесь нет необходимости описывать какие-либо из этих алгоритмов, которым посвящены многие учебные пособия (см., например, [9.7], [9.9], [9.14], [9.18]).

Подчеркнем лишь, что высокая эффективность стандартных программ делает возможным использовать решение задач ЛП в качестве промежуточных процедур в итеративных схемах решения нелинейных задач.

Пусть  $y^{(0)}$  — начальное приближение. Пусть в окрестности  $y^{(0)}$  произведена линеаризация всех функций  $F_i(y)$ :

$$F_i(y) \cong F_i(y^0) + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \Big|_{y=y^0} (y - y^0), \quad i = 0, \dots, r,$$

так что можно приближенно записать

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 y_j - b_{i0}^0, \quad (7.18)$$

где

$$a_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right|_{y=y^0}, \quad b_{i0}^0 = -F_i(y^0) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right|_{y=y^0}^T y^0$$

— величины, подсчитываемые при заданном  $y^0$ . С точностью до приближения (7.18) задача (7.10) становится задачей ЛП. В нее, однако, следует ввести дополнительные ограничения, обеспечивающие невыход за пределы окрестности  $y^0$ , в пределах которой приемлемо линейное приближение (7.18).

Окрестность можно задать линейными же ограничениями

$$-\Delta_j^0 \leq y_j - y_j^0 \leq \Delta_j^0, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.19)$$

(размер окрестности может меняться от шага к шагу).

Таким образом, следующее приближение  $y^{(1)}$  может быть найдено как решение задачи ЛП вида

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^N a_{0j}^0 y_j \middle| \sum_{i=1}^N a_{ij}^0 y_j = b_{i0}^0, \quad i = 1, \dots, r_1; \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 y_j \leq b_{i0}^0, \right. \\ \left. i = r_1 + 1, \dots, r; \quad -\Delta_j^0 \leq y_j - y_j^0 \leq \Delta_j^0, \quad j = 1, \dots, N \right\}. \quad (7.20)$$

Отметим, что типовые пакеты программ ЛП имеют модификации, специально ориентированные на наличие двусторонних ограничений типа (7.19).

**7.4. Оптимизация дискретных систем.** Вернемся теперь к основной проблематике — оптимизации программ управления.

Начнем с рассмотрения дискретных по времени систем. Пусть, как и в § 6, требуется найти последовательность  $\{u[k], k = 0, \dots, k_f - 1\}$ , доставляющую минимум функции \*)

$$J(u) = G_0(x[k_f]) \quad (7.21)$$

при условиях, что

$$x[k+1] = F(x[k], u[k], k), \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad x[0] = x^0 \quad (7.22)$$

и

$$u[k] \in U_k \quad (7.23)$$

Здесь  $x[k]$  —  $n$ -вектор,  $u[k]$  —  $m$ -вектор. Ясно, что задача (7.21) — (7.23) является задачей на условный экстремум типа (7.10), но имеющей специальную структуру ограничений. Общее число выбираемых переменных равно  $k_f(n+m)$  и для любой реальной зада-

\*) Сумму, фигурирующую в функционале (6.5), можно учесть и в записи (7.21), (7.22), если расширить пространство состояний.

чи очень велико. Поэтому непосредственно применять к такой задаче общие процедуры НП малоэффективно. Остановимся на возможностях использования особенностей структуры ограничений в рамках схемы последовательной линеаризации, где на каждом этапе приходится решать задачу ЛП, данные для которой находятся путем линеаризации в окрестности очередного приближения. Для простоты будем считать, что множества  $U_k$  заданы линейными соотношениями.

Пусть принято некоторое начальное приближение для управления  $\{u^0[k]\}$ . Соответствующее начальное приближение  $\{x^0[k]\}$  для изменения состояния находится путем рекуррентии по формуле (7.22). Тем самым определяется и начальное значение критериальной функции

$$J(u^0) = G[x^0(k_f)]. \quad (7.24)$$

Далее произведем линеаризацию уравнений (7.22) в окрестности  $\{u^0[k], x^0[k]\}$ . Тогда

$$\delta x[k] \triangleq x[k] - x^0[k], \quad \delta u[k] \triangleq u[k] - u^0[k]$$

будут связаны уравнением в вариациях

$$\delta x[k+1] = A^0[k] \delta x[k] + B^0[k] \delta u[k], \quad \delta x[0] = 0, \quad (7.25)$$

$$A^0[k] \triangleq \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x^0 \\ u=u^0}}, \quad B^0[k] \triangleq \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\substack{x=x^0 \\ u=u^0}}.$$

Линеаризуя также критериальную функцию, имеем

$$J(u) \approx G[x^0(k_f)] + (c^0[k])^T \delta x[k_f], \quad (7.26)$$

$$c^0[k] = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\substack{x=x^0 \\ u=u^0}}.$$

Тем самым задача поиска лучшего следующего приближения в малой окрестности типа (7.20) приобретает здесь следующий вид: найти  $u^{(1)}[k] = u^0[k] + \delta u[k]$ , доставляющее минимум линейной функции

$$\delta J^0 \triangleq (c^0)^T \delta x[k_f] \quad (7.27)$$

при условиях (7.25), а также требованиях, что

$$u^0[k] + \delta u[k] \in U_k, \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad (7.28)$$

и покомпонентно ограничены вариации управления

$$\underline{\Delta}^0 \leq \delta u[k] \leq \bar{\Delta}^0, \quad k = 0, \dots, k_f - 1, \quad (7.29)$$

где  $\underline{\Delta}^0, \bar{\Delta}^0$  — векторы, задающие размер отклонений, допустимых для обеспечения точности линеаризации. По общей логике следовало бы добавить и ограничения на размах  $\delta x[k]$ , но нетрудно убедиться, что диапазон изменений переменных состояния остается ограниченным (при конечном  $k_f$ ), если ограничены  $\delta u[k]$ , и выбором  $\underline{\Delta}^0, \bar{\Delta}^0$

можно добиться достаточной точности аппроксимации, даваемой уравнением в вариациях.

Задача (7.27), (7.25), (7.28), (7.29) является задачей ЛП, число переменных в которой совпадает с числом переменных в исходной нелинейной задаче. Однако ее можно упростить, исключив переменные  $\delta x[k]$  и явно выразив (7.27) только через вариации управлений. Несложно показать, что

$$\delta J = - \sum_{k=0}^{k_f-1} (\lambda^*[k])^T B^0[k] \delta u[k], \quad (7.30)$$

где  $\lambda^*[k]$  определяются рекуррентией «вспять»:

$$\lambda^*[k-1] = (A^0[k])^T \lambda^*[k], \quad \lambda^*[k_f-1] = -c^0. \quad (7.31)$$

Действительно, итерируя уравнения в вариациях, получаем

$$\begin{aligned} \delta x[k] &= B^0[k-1] \delta u[k-1] + A^0[k-1] B^0[k-2] \delta u[k-2] + \dots \\ &\quad \dots + A^0[k-1] \dots A^0[0] B^0[0] \delta u[0]. \end{aligned} \quad (7.32)$$

С другой стороны, из (7.31) следует

$$\begin{aligned} \lambda^*[k-1] &= -c^0, \quad \lambda^*[k_f-1] = -(A^0[k_f-1])^T c^0, \dots \\ \lambda^*[0] &= -(A^0[k_f-1] \dots A^0[0])^T c^0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Очевидно, что подстановка (7.32) в (7.27) и (7.33) в (7.30) дает одинаковые выражения.

Поскольку (7.30) дает представление функции (7.27) в виде линейной комбинации вариаций управления в каждый момент  $k$ , то мы приходим к замечательно простому результату: исходная задача ЛП большой размерности распадается на ряд независимых задач оценки наилучшего изменения управления для каждого  $k$ :

$$\max [(\pi^0[k])^T \delta u[k] / u^0[k] + \delta u[k] \in U, \quad \underline{\Delta}^0 \leq \delta u[k] \leq \bar{\Delta}^0], \quad (7.34)$$

где

$$\pi^0[k] \triangleq (B^0[k])^T \lambda^*[k]. \quad (7.35)$$

Если множество  $U_k$  также определяется покомпонентными ограничениями или  $u[k]$  — скаляр, то (7.34) решается в явном виде. Конечно, очевидна связь между проведенным построением и результатами § 3, касающимися оптимизации линейных непрерывных систем по линейному показателю, а также очевидно, что (7.34) локально выражает дискретный принцип максимума.

Подводя итоги, сформулируем алгоритм последовательной линеаризации применительно к рассмотренной задаче оптимального управления дискретной системой:

- выбрать начальное допустимое приближение для управления  $\{u^0[k], k = 0, \dots, k_f - 1\}$ ;
- вычислить начальную траекторию с помощью (7.22) при  $u[k] = u^0[k]$ ;

в) вычислить матрицы

$$A^0[k] = \frac{\partial F}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x^0[k] \\ u=u^0[k]}}, \quad B^0[k] = \frac{\partial F}{\partial u} \Bigg|_{\substack{x=x^0[k] \\ u=u^0[k]}}, \quad c^0 = \frac{\partial G_0}{\partial x} \Bigg|_{x=x^0[k_f]},$$

- найти последовательности  $\lambda^*[k], \pi^*[k]$  согласно (7.31), (7.35);
- решить для каждого  $k$  задачи ЛП (7.34), найдя  $\delta u^0[k]$ ;
- если

$$\sum_k (\pi^0[k])^T \delta u^0[k] \leq \varepsilon, \quad (7.36)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность, то принять  $u^0[k]$  в качестве приближенно оптимального управления; в противном случае повторить процедуру, приняв

$$u^1[k] = u^0[k] + \delta u^0[k].$$

Правило остановки может быть изменено: при выполнении (7.36) можно повторить процедуру, приняв уменьшенные значения размеров зоны  $\underline{\Delta}^0, \bar{\Delta}^0$  и уменьшив  $\varepsilon$ .

7.5. Задачи с ограничениями на траекторию. Рассмотрим теперь более широкий класс задач, где на траекторию наложены ограничения

$$G_i(x[k_f]) \begin{cases} = 0, & i = 1, \dots, r_1, \\ \leqslant 0, & i = r_1 + 1, \dots, r. \end{cases} \quad (7.37)$$

Вновь примем схему последовательной линеаризации, однако теперь придется провести оценку приращений всех функций  $G_i$ . В частности повторяя выкладки, проведенные применительно к  $G_0(x)$ , получим

$$G_i(x[k_f]) \cong G_i(x^0[k_f]) - \sum_{k=0}^{k_f-1} (\pi_i^0[k])^T \delta u[k], \quad (7.38)$$

где

$$\pi_i^0[k] \triangleq (B^0[k])^T \lambda_i^*[k], \quad (7.39)$$

а векторы  $\lambda_i^*[k]$  определяются рекуррентно:

$$\lambda_i^*[k-1] = (A^0[k])^T \lambda_i^*[k], \quad \lambda_i^*[k_f-1] = -c_i^0, \quad (7.40)$$

т. е. согласно уравнению (7.31), но при других граничных условиях

$$c_i^0 \triangleq \frac{\partial G_i}{\partial x} \Bigg|_{x=x^0[k_f]}. \quad (7.41)$$

Задача ЛП для вычисления лучшего допустимого приращения с учетом дополнительных ограничений принимает вид: найти  $\delta u^0[k]$ , доставляющее максимум

$$\sum_{k=0}^{k_f-1} (\pi^0[k])^T \delta u[k] \quad (7.42)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=0}^{k_f-1} (\pi_i^0[k])^\top \delta u[k] \begin{cases} = G_i(x^0[k_f]), & t = 1, \dots, r_1, \\ \geq G_i(x^0[k_f]), & t = r_1 + 1, \dots, r, \end{cases} \quad (7.43)$$

$$u^0[k] + \delta u[k] \in U, \quad \underline{\Delta}^0 \leq \delta u[k] \leq \bar{\Delta}^0, \quad k = 0, \dots, k_f - 1. \quad (7.44)$$

Видим, что наличие ограничений на правом конце траектории существенно усложняет задачу: здесь уже невозможна декомпозиция на независимые задачи определения каждого из  $\delta u^0[k]$ .

Поскольку сложность решения задачи ЛП определяется главным образом числом связывающих ограничений (7.43), то можно использовать различные приемы, позволяющие уменьшить это число или вовсе избавиться от них. Наиболее известной является процедура Данцига — Вулфа (см., например, [9.8], [9.14]), основанная на введении (7.43) в критерий с помощью множителей Лагранжа и специальной методике последовательного вычисления этих множителей. Широко используется также введение ограничений непосредственно в исходную критериальную функцию со штрафными коэффициентами.

Наряду с общими методами понижения размерности, рекомендуемыми теорией ЛП, можно учитывать следующее обстоятельство: если для какого-либо  $i$ ,  $i = r_1 + 1, \dots, r$ , имеет место

$$G_i(x^0[k_f]) < 0,$$

то почти наверняка ограничение с этим индексом в (7.43) можно отбросить, поскольку малые изменения его не нарушают. Проверку этого можно провести после решения (7.42)  $\div$  (7.44) или по предварительной оценке: если просто подсчитать для каждого  $k$

$$\gamma_i[k] = \min \{(\pi_i[k])^\top \delta u[k] / u^0[k] + \delta u[k] \in U, \underline{\Delta}^0 \leq \delta u[k] \leq \bar{\Delta}^0\}, \quad (7.45)$$

то ограничение можно отбросить при условии, что

$$G_i[x^0[k]] - \sum_k \gamma_i[k] \leq 0. \quad (7.46)$$

Современные пакеты программ ЛП позволяют решать в разумное время задачи с десятками тысяч переменных и тысячами ограничений, так что реальные проблемы связаны в основном с организацией ввода и вывода данных, поскольку процедура требует многократного решения сходных по структуре задач ЛП.

Необходимо, однако, иметь в виду одно существенное обстоятельство: метод последовательной линеаризации в описанной форме начинает работу только с такого приближения  $u^0[k]$ , при котором правый конец соответствующей траектории  $x^0[k_f]$  удовлетворяет ограничениям (7.37). По крайней мере, требуется такая точность их выполнения, чтобы погрешность не превышала возможностей

достижения границ на допустимом множестве вариаций, определяемом условиями (7.44). В противном случае в качестве предварительной фазы следует решить задачу минимизации суммы штрафов за нарушение ограничений (7.37) и, только добившись точного или приближенного их выполнения, переходить к основной фазе.

## § 8. Численная оптимизация непрерывных систем

**8.1. Особенности процедуры последовательной линеаризации.** Если поставлена задача поиска оптимальной программы управления непрерывной (по времени) системой, то естественным представляется простейший путь: перейти к дискретной задаче, как это делалось в начале § 6, а затем использовать метод оптимизации дискретных систем, описанный в § 7. Однако существенные преимущества имеет использование процедуры последовательной линеаризации в процессе поиска непосредственно в исходном множестве кусочно-непрерывных функций.

Запишем решаемую задачу в общей форме § 1, но без интегральных слагаемых в функционале и ограничениях, которые всегда можно учесть предварительным расширением пространства состояний, и фиксируя для простоты начальные условия.

Итак, требуется найти  $u(t)$ , доставляющее минимум

$$J(u) = G_0[x(t_f)] \quad (8.1)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (8.2)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (8.3)$$

$$G_i[x(t_f)] \begin{cases} = 0, & t = 1, \dots, r_1, \\ \leq 0, & t = r_1 + 1, \dots, r, \end{cases} \quad (8.4)$$

Моменты  $t_0, t_f$  считаем пока фиксированными.

Предположим, что известны управление  $u^0(t)$  и соответствующий ему процесс изменения состояний  $x^0(t)$ , при которых выполнены все условия.

Построим схему локального улучшения начального приближения. Запишем уравнение в вариациях

$$\delta \dot{x} = A(t) \delta x + B(t) \delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad (8.5)$$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x^0(t) \\ u=u^0(t)}}, \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Bigg|_{\substack{x=x^0(t) \\ u=u^0(t)}}$$

и определим приращения функций

$$\delta G_i = (C_i^0)^\top \delta x(t_f), \quad i = 0, \dots, r, \quad C_i^0 = \frac{\partial G_i}{\partial x} \Bigg|_{x=x^0(t_f)}. \quad (8.6)$$

Как и при доказательстве Т.3.1, можно получить представления

$$\delta G_i = - \int_{t_0}^{t_f} (\pi_i^0(t))^T \delta u(t) dt, \\ t = 0, \dots, r, \quad \pi_i^0(t) = (B^0(t))^T \lambda_i^0(t), \quad (8.7)$$

где  $\lambda_i^0(t)$  удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\dot{\lambda} = -[A^0(t)]^T \lambda, \quad (8.8)$$

но при различных граничных условиях

$$\lambda_i(t_f) = -C_i^0. \quad (8.9)$$

Для оценки улучшающей поправки  $\delta u^0(t)$  получаем задачу

$$\max \int_{t_0}^{t_f} (\pi_i^0(t))^T \delta u(t) dt \quad (8.10)$$

при условиях

$$\int_{t_0}^{t_f} (\pi_i^0(t))^T \delta u(t) dt \begin{cases} = b_{i1} & i = 1, \dots, r_1, \\ \geq b_{i2} & i = r_1 + 1, \dots, r, \end{cases} \quad (8.11)$$

$$u^0(t) + \delta u(t) \in U, \quad \underline{\Delta}^0 \leq \delta u(t) \leq \bar{\Delta}^0, \quad (8.12)$$

где

$$b_i = G_i[x^0(t_f)].$$

Если ограничений (8.11) нет, то задача сводится к простейшей задаче управления линейной системой по линейному критерию (§ 3): она распадается на решение независимых задач максимизации  $(\pi_i^0(t))^T \delta u(t)$  при ограничениях (8.12) для каждого момента  $t$ , причем часто можно найти решение в явной форме.

В противном случае мы имеем дело с бесконечномерной задачей ЛП, для которой нет прямой схемы решения. Поэтому приходится использовать ее конечномерную параметризацию, считая  $\delta u(t)$  кусочно постоянной функцией, принимающей значения  $u[k]$  на каждом  $k$ -м участке постоянства:

$$\delta u(t) = u_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, \dots \quad (8.13)$$

После этого мы получаем задачу ЛП типа (7.42)÷(7.44). Казалось бы, мы пришли к первоначальной идеи замены непрерывной задачи на дискретную. Однако это не совсем так.

Во-первых, изменился способ вычисления коэффициентов  $\pi_i^0[k]$ . Теперь они должны находиться по формулам

$$\pi_i^0[k] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \pi_i^0(t) dt.$$

Во-вторых, что значительно более существенно, новое приближение для траектории  $x^{(1)}(t)$  вычисляется не с помощью рекуррентного соотношения (6.1), (6.4), а с помощью исходного дифференциального уравнения (8.2). Подставляя в него построенную функцию

$$u(t) = u^{(1)}(t) \triangleq u^{(0)}(t) + \delta u^{(0)}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (8.14)$$

получаем точное значение критериальной функции, достигаемое при управлении  $u^{(1)}(t)$ . Может, конечно, возникнуть естественное возражение: ведь ни уравнение (8.2), ни уравнение (8.8) для множителей в общем случае нельзя проинтегрировать точно, применимы только схемы численного интегрирования, в которых вновь используется дискретизация по времени! Такое возражение разумно, однако оно в основном снимается тем, что численное интегрирование уравнений (8.2) и в особенности (8.8) можно вести с другим, существенно более малым шагом, чем тот, который был принят при параметризации управлений. Действительно, выбор шага при оценке  $\delta u(t)$  лимитировался возможностями решения задачи ЛП (уменьшение его увеличивает число переменных). В то же время численное интегрирование таких жестких условий не ставит, а кроме того, можно использовать и ряд специальных схем численного интегрирования, отличных от простейшей процедуры перехода к рекуррентным соотношениям (6.1), (6.4).

Если же численное интегрирование вести с тем же шагом  $t_{k+1} - t_k$ , что и в (8.13), то, конечно, новая процедура совпадает с простейшей. Вычислительный опыт (см., например, [9.21]) позволяет решительно высказаться против простейшей схемы.

Наконец, стоит отметить, что «происхождение» конечномерной задачи ЛП (7.42)÷(7.44) от непрерывной (8.10)÷(8.11) вносит в нее существенную особенность: чем меньше шаг сетки  $t_{k+1} - t_k$ , тем ближе становятся векторы  $\pi_i^0[k]$  для соседних значений индекса  $k$ .

Поскольку наиболее распространенный алгоритм решения задач ЛП (симплекс-метод) включает в себя операцию обращения матриц, составленных из векторов  $\pi_i^0[k]$ , то эти матрицы могут оказаться близки к особым, что приводит к накоплению ошибок. Поэтому может оказаться необходимым использовать либо специализированные алгоритмы типа двойственного симплекс-метода [9.22, с. 437], либо вносить изменения в сам стандартный симплекс-метод [6.6, с. 65].

**8.2. Другие постановки задач оптимального управления.** Кратко остановимся на модификациях метода последовательной линеаризации при некоторых отличиях постановки от основной (8.1), (8.4).

**A. Наличие управляемых параметров.** Пусть наряду с управлением  $u(t)$ , для которых возможно изменение за время работы системы (в пределах допусков), имеется еще возможность выбора

некоторых параметров, постоянных величин,  $\alpha = \text{const}$  (также в пределах некоторого допуска  $\alpha \in \mathcal{A}$ ). Схема последовательной линеаризации в принципе работоспособна и здесь, но при вычислении вариаций функционалов  $G_i[x(t_i)]$ , вызванных вариациями параметров  $\delta\alpha$ , в них добавляются слагаемые  $(a_i^0)^T \delta\alpha$ , где коэффициенты  $a_i^0$ , называемые *коэффициентами чувствительности функционалов по параметрам*, могут быть вычислены различным образом.

Например, можно считать, что  $\delta\alpha$  — частный случай вариации  $\delta u(t)$  при  $\delta u(t) = \text{const}$ , и воспользоваться правилом, аналогичным (8.7)  $\div$  (8.9). Тогда

$$a_i^0 = \int_{t_0}^{t_f} (\beta^0(t))^T \lambda_i^0(t) dt, \quad (8.15)$$

где  $\lambda_i^0(t)$  вычисляются, как и ранее, в силу (8.8), (8.9), а

$$\beta^0(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left|_{\begin{array}{l} x=x^0(t) \\ \alpha=\alpha^0 \\ u=u^0(t) \end{array}} \right. \quad (8.16)$$

*Б. Нефиксированное время окончания.* Поскольку  $t_f$  здесь является управляемым параметром, то задача в принципе относится к тому же классу, что и предшествующие. Это особенно ясно, если предварительно произвести замену времени, введя  $\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0}$ . Тогда (8.2) перейдет в уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = (t_f - t_0) f[x, u, t_0 + (t_f - t_0) \tau], \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (8.17)$$

а условия окажутся заданными на концах фиксированного отрезка  $[0, 1]$ :

$$x|_{\tau=0} = x^0, \quad G_i(x|_{\tau=1}) = 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (8.18)$$

*В. Ограничения на переменные состояния.* В основной постановке ограничения вводились только на конце траектории. Однако во многих практических задачах требуется ограничить возможные изменения состояния в промежуточные моменты времени.

Если этих моментов конечное число, то в основную процедуру вводятся лишь незначительные изменения. Действительно, пусть вместо (8.4) фигурируют ограничения

$$G_i(x(t_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (8.19)$$

где моменты  $t_i$  не обязательно совпадают с  $t_i$ . В задачу оценки улучшающей поправки  $\delta u^0(t)$  войдут ограничения на возможные вариации функций  $G_i[x(t_i)]$ , которые запишутся в том же виде

(8.11) с заменой  $t_i$  на  $t_i$  и с учетом того, что при вычислении множителей граничные условия (8.9) устанавливаются при  $t = t_i$ .

Сложнее ситуация, когда ограничения на переменные состояния требуется выполнять на отрезке  $[t_0, t_f]$  или на некотором его интервале. При этом, как правило, приходится идти простейшим путем: расставить на интервале конечное число точек  $t_i$  и перейти к заданию ограничений в виде (8.19). Можно учесть, что при наличии ограничений в форме неравенств вместо фиксированной на все итерации сетки точек  $t_i$  стоит расставлять эти точки только на тех интервалах, где текущее приближение выходит за ограничение, и в небольшой их окрестности, где возможен такой выход при малом варьировании управления.

*Г. Минимаксный критерий.* В предшествующем рассмотрении неявно предполагалось, что все фигурирующие в формулах производные действительно существуют. Это предположение существенно для того, чтобы можно было построить линейные зависимости вариаций показателей  $G_i[x(t_i)]$  от малых изменений управлений. Однако для ряда популярных способов оценки качества такое построение невозможно. Начнем с простейшего случая. Пусть требуется минимизировать показатель вида

$$G_0[x(t_i)] = \max_j [q_j | x_j(t_i)|], \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.20)$$

т. е. обеспечить минимум наибольшего из покоординатных отклонений (с учетом весов  $q_j > 0$ ) от нуля. Функция  $G_0(x)$  недифференцируема. Ее приращение в силу малых изменений управления нельзя записать в виде (8.7).

Вместе с тем почти очевидна эквивалентность задач

$$\min_u \left\{ \max_j [q_j | x_j(t_i)|], \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

и

$$\min_u \left\{ z / q_j x_j(t_i) - z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \right. \\ \left. - q_j x_j(t_i) - z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \right\}, \quad (8.21)$$

где  $z$  — новая скалярная переменная. Теперь показатель линеен по  $z$ , но появились новые ограничения стандартного типа.

Попытаемся применить тот же прием при решении задач, где критерий не имеет стандартной формы, а представим в виде

$$J\{u\} = \max_{t \in [t_0, t_f]} \Phi_0(x, t), \quad (8.22)$$

или

$$J\{u\} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi[x(t_f, \alpha)], \quad (8.23)$$

где параметр  $\alpha$  входит и в описание объекта.

К задачам типа (8.22) относятся задачи выбора управления с целью обеспечить наименьшее отклонение некоторого скалярного

выхода системы  $y(t) = \psi[x(t)]$  от заданной функции  $y^d(t)$  в течение всего времени работы системы. Тогда

$$\varphi_0(x, t) = |\psi[x(t)] - y^d(t)|. \quad (8.24)$$

Это так называемые задачи о *наименьшем уклонении*, весьма важные для приложений.

Используем эквивалентность

$$\min_u \max_t \varphi_0(x, t) \Leftrightarrow \min_u \{z / \varphi_0(x, t) - z \leq 0, t \in [t_0, t_f]\} \quad (8.25)$$

или в случае (8.24), когда сама функция  $\varphi_0(x, t)$  недифференцируема, перейдем к задаче

$$\min_u \{z / \psi[x(t)] - y^d(t) - z \leq 0, -\psi[x(t)] + y^d(t) - z \leq 0\} \quad (8.26)$$

с «гладкими» ограничениями (если  $\psi$  дифференцируема) на переменные состояния. Далее можно применить приемы, описанные в п. В.

**Пример 8.1.** Рассмотрим простейшую линейную систему, описанную скалярным уравнением

$$\ddot{y} = -f(t) + u(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (8.27)$$

Требуется выбрать управляющее воздействие  $u(t)$  так, чтобы минимизировать

$$J\{u\} = \max_t |y(t)|, \quad (8.28)$$

причем  $u(t)$  ограничено:  $|u(t)| \leq 1$ , а  $f(t)$  — заданная функция времени. Подобная задача впервые возникла в связи с проблемой оптимизации защиты механического агрегата от ударных воздействий [9.10]. В такой интерпретации  $f(t)$  имеет смысл заданного ускорения основания,  $y(t)$  — перемещение агрегата относительно основания, а  $u(t)$  пропорционально усилию, передаваемому на агрегат защитным устройством, помещенным между ним и основанием. Оптимизация обеспечивает минимальные габариты («свободный ход») защитного устройства.

Если

$$|f(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

то существует тривиальное решение

$$u^*(t) = f(t), \quad y(t) = 0, \quad J\{u^*\} = 0,$$

т. е. управление полностью компенсирует возмущение.

Нетрудно показать, что при

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \quad f_0 \geq 1,$$

оптимальным является управление простого вида \*) (рис. 9.7)

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq f_0 t_1, \\ 0, & t > f_0 t_1, \end{cases} \quad J\{u^*\} = f_0 t_1^2 \frac{f_0 - 1}{2}.$$

При более сложных знакопеременных воздействиях дать точное решение затруднительно. Вместе с тем применима общая методика, описанная выше, и к тому же в простейшей форме, в силу линейности объекта [9.16].

Запишем задачу в виде:

$$\min_u \left\{ z / y(t) \leq z_1 - y(t) \leq z_2, y(t) = \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau - y_f(t), |u(t)| \leq 1, t \in [0, T] \right\}, \quad (8.29)$$

где уравнение движения явно проинтегрировано и обозначено

$$y_f(t) = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Эта задача сама по себе является задачей ЛП, и нет необходимости в последовательной линеаризации, а также введении дополнительных ограничений на изменение управления, обеспечивающих эффективность линейного приближения. Более того, интегрирование уравнений произведено точно. Далее можно перейти к сеточной аппроксимации. Управление разыскивается как кусочно-постоянная функция, определяемая значениями  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Выполнение первой группы неравенств для всех  $t \in [0, T]$  заменяется требованием их выполнения на более частой сетке с числом узлов  $LN$ ,  $L > 1$ . Тем самым приходим к конечномерной задаче ЛП вида

$$\min_u \left\{ z / z - \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j \geq b_i, z + \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j \geq -b_i, i = 1, \dots, LN, |u_j| \leq 1, j = 1, \dots, N \right\}, \quad (8.30)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$  очевидным образом вычисляются. Задачи вида (8.29) успешно решались таким путем с помощью стандартной программы ППП ЛП АСУ при весьма сложных воздействиях

\*) На самом деле здесь оптимальное управление не единственно при  $t > f_0 t_1$ .

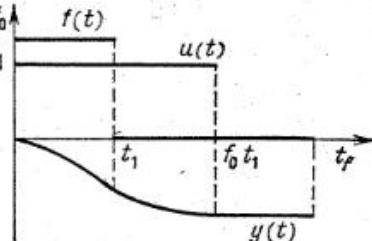


Рис. 9.7

$f(t)$ , представляющих собой суперпозицию слабо затухающих гармоник с резко различными частотами. Основные вычислительные проблемы связаны с выбором шага дискретизации. Практически рекомендуется постепенное увеличение шага с контролем изменения соответствующего значения размаха отклонений шага  $|y(t)|^*$ ). Если эти значения перестают существенно меняться, то дробление шага прекращается.

Другая возможность формирования правила остановки, указанная в [9.16], заключается в использовании теории двойственности задач ЛП, позволяющей дать оценку снизу для оптимального значения функционала. Достаточное сближение этой оценки с величиной найденного размаха отклонений и является сигналом остановки счета. □

Задачи с критерием типа (8.23) также формально могут быть сведены к задачам вида

$$\min_{w(t)} \{z / \varphi[x(t_i, \alpha)] - z \leq 0 \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Здесь вновь имеется континuum ограничений. Если  $\alpha$  — скаляр, а множество  $\mathcal{A}$  является отрезком, то ситуация не отличается от только что рассмотренной: можно использовать фиксированную или меняющуюся сетку значений  $\alpha$  на отрезке, требуя выполнения ограничений только в точках сетки. Для векторного параметра этот прием также реализуем, но необходимое число точек на сетке может оказаться слишком обременительным.

К классу минимаксных относятся и задачи [9.12], в которых требуется выбрать управление, минимизирующее наибольшее значение  $G_0[x(t_i)]$ , достигаемое на множестве всех допустимых функций  $w(t)$ , входящих в описание объекта:

$$\dot{x} = f[x, u, w(t)].$$

Здесь  $w(t)$  обычно интерпретируется как возмущение, действующее на объект, о котором известно только то, что оно является кусочно-непрерывным и принимает значения из некоторой ограниченной области  $W$ . Задачи такого рода являются наиболее сложными в вычислительном отношении. Конечно, и здесь возможно сужение допустимого множества до конечного множества вариантов  $W_0$ , а тем самым переход к задаче

$$\min_{w(t)} \{z / \varphi[x(t_f, w(t))] - z \leq 0, w(t) \in W_0\},$$

т. е. задаче с конечным числом ограничений, но требования к до-

\*). Расчет этой величины ведется параллельно по вычисленному на каждом приближении виду закона управления с помощью точной формулы.

стачоно «плотной» аппроксимации исходного множества приводят к большому разрастанию их числа \*).

8.3. Выводы. Подведем итоги проведенного краткого и далеко не полного обзора численных методов.

А. Имеются достаточно эффективные методы, в частности, метод последовательной линеаризации (дополняемый иногда методом штрафных функций для получения почти допустимого решения), которые позволяют последовательно улучшать «угаданные» начальные приближения в очень широком классе задач.

Б. Основные методы носят локальный характер, используют локальную аппроксимацию критериальных функций и уравнений изменения состояния, поэтому в лучшем случае с их помощью можно получать локально оптимальные решения, которые лучше «соседних» в пределах допустимых малых вариаций. Вопрос о сходимости последовательных итераций недостаточно хорошо изучен, хотя практические вычисления, как правило, дают разумные результаты.

В. До применения локального метода рекомендуется провести предварительную оптимизацию путем полного перебора хотя бы на очень грубой сетке вариантов управлений (описанная в начале параграфа схема). Локальные улучшения стоит начинать только с отобранного варианта. После остановки последовательных приближений (отсутствует или мало изменение функционала на множестве малых допустимых вариаций) целесообразно провести «зондирование» с помощью почти «игольчатых» вариаций, распространяемых на всю область  $U$  допустимых значений, но имеющих достаточно малую ширину для сохранения линейной зависимости приращений функционала от их уровня.

Эффективным является и повторение процедуры последовательного улучшения, если имеется вариант управления, сильно отличающийся от принятого за начальный в первом «запуске» процедуры, но дающий не слишком плохое значение функционала.

Самое главное заключается в том, что реальное применение численных методов требует четкого понимания существа задачи и особенностей вычислительных процедур. Успех определяется: а) правильным выбором набора исходных вариантов; б) разумным выбором сеток для удовлетворения ограничений и в особенности процедур численного интегрирования; в) правильным назначением параметров  $\Delta, \bar{\Delta}$ , задающих зону линейности. Эта «разумность и правильность» достигается не автоматически, а путем накопления опыта решения реальных задач.

Все описанные методы относились к так называемым прямым методам численной оптимизации, не использующим непосредственно аналитического аппарата принципа максимума. Однако существует и большое число численных схем, где за основу берется не

\*) Математические аспекты см. в [9.9].

решение исходной задачи, а поиск набора  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $\lambda^*(t)$ , удовлетворяющего совокупности необходимых условий оптимальности.

Вычислительная практика показывает, что эти схемы приемлемы только тогда, когда удается аналитически найти выражение  $\hat{u}[x(t), \lambda(t)]$ , доставляющее максимум гамильтониана при произвольных  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$ . После этого требуется «лишь» решить краевую задачу для системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{u=\hat{u}}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{u=\hat{u}}$$

с соответствующими граничными условиями. Фактически здесь вновь возникают тонкие вычислительные проблемы. Удовлетворительное их решение имеется для случаев, когда правые части уравнений являются достаточно «гладкими» функциями  $x$ ,  $\lambda$ . Возможно, наиболее эффективная схема изложена в работе [9.20].

В заключение следует подчеркнуть, что весь проведенный обзор касался только методов оптимизации программы управления. Проблема синтеза оптимального управления с обратной связью на порядок сложнее, и ей посвящена следующая глава.

## ГЛАВА 10

### СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

#### § 1. Динамическое программирование

**1.1. Формулировка задачи.** Хотя ряд задач построения оптимальных обратных связей уже был рассмотрен выше (оптимизация линейной системы по квадратичному критерию в гл. 6, оптимизация по быстродействию в п. 5.3 гл. 9), но общая формулировка проблемы дана не была. Попытаемся дать ее, начиная с наиболее простой постановки.

Пусть управляемый объект описывается рекуррентным соотношением

$$x[k+1] = F(x[k], u[k], k), \\ k = 0, 1, \dots, k_f - 1, x[0] = x^0, \quad (1.1)$$

где, как и ранее,  $x[k]$  — вектор состояния в момент  $k$ ,  $u[k]$  — вектор управлений, а  $F(\cdot)$  — известная вектор-функция своих аргументов.

Требуется, как и в § 6 гл. 9, выбрать последовательность  $\{u^*[k], k = 0, 1, \dots, k_f - 1\}$ , которая доставляет минимум целевой функции

$$J\{u\} = \sum_{k=0}^{k_f-1} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]), \quad (1.2)$$

причем минимизация производится на множестве значений  $u[k]$ , подчиненных ограничениям  $u[k] \in U_k$ , и значений  $x[k]$ , связанных с  $u[k]$  соотношением (1.1).

Последовательность  $\{u^*[k]\}$  была названа *оптимальной по критерию (1.2) программой управления* объектом (1.1). Очевидно, что оптимальная программа может быть построена только, если дано полное описание объекта. В частности, требуется знание начального состояния, вектора  $x^0$ .

**Гипотеза 1.** Пусть в момент проектирования системы управления неизвестно состояние, начиная с которого будет работать управляемый объект, однако в любой момент работы возможно получение текущей информации о состоянии в виде наблюдений:

$$y[k] = \Phi(x[k], k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

Соотношения (1.3) формально описывают работу датчиков информации (ДИ). Обозначим  $y^{(\tau)}$  всю совокупность данных, полученных от ДИ к моменту  $\tau \geq 0$ :

$$y^{(\tau)} = (y[0], y[1], \dots, y[\tau]). \quad (1.4)$$

**Определение.** Если существуют функции

$$u^*(y^{(\tau)}, \tau), \quad \tau = 0, 1, \dots, k_f - 1, \quad (1.5)$$

такие, что значение функционала (1.2), вычисленное на траекториях системы (1.1) после подстановки

$$u[k] = u^*(y^{(k)}, k), \quad k = 0, \dots, k_f - 1,$$

совпадает с его значением  $J(u^*)$  при оптимальной программе управления для любых  $x^0$ , то функции (1.5) определяют оптимальный закон управления с обратной связью. Построение таких функций называется синтезом оптимальной обратной связи. Вектор  $y^{(\tau)}$  часто называют вектором полной текущей информации, так что в результате синтеза управление строится как функция от полной текущей информации.

Существование оптимальной обратной связи в смысле приведенного определения отнюдь не гарантировано. Первоначально мы укажем принципиальную процедуру построения оптимальной обратной связи при дополнительном упрощающем предположении.

**Гипотеза 2.** По сигналу  $y[k]$  однозначно определяется состояние объекта  $x[k]$  в тот же момент  $k$ .

Очевидно, что в рамках гипотезы 2 наличие наблюдений  $y^{(\tau)}$  эквивалентно знанию состояния объекта во все моменты времени  $k \leq \tau$ . Однако вектор состояния  $x[\tau]$  потому так и называется (см. гл. 6), что его значение полностью определяет все будущее (при  $k > \tau$ ) поведение объекта при любых заданных воздействиях, т. е. для знания будущего поведения достаточно задать  $x[\tau]$ , а информация о всех предшествующих значениях вектора состояния  $x[k]$ ,  $k < \tau$ , оказывается излишней\*). Поэтому при выполнении гипотезы 2 без ограничения общности можно разыскивать оптимальную обратную связь как функцию текущего состояния

$$u[k] = u^*(x[k], k). \quad (1.6)$$

**1.2. Уравнения динамического программирования.** Для поиска оптимальной обратной связи вместо исходной задачи (1.1), (1.2) рассмотрим последовательность задач

$$\min \left\{ \sum_{k=\tau}^{k_f-1} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]) \right\} \triangleq \mathcal{B}(x, \tau), \quad (1.7)$$

\*). Это свойство иногда называют марковским, по имени великого математика А. А. Маркова (1856 – 1922). Обобщенная вероятностная формулировка марковости дается ниже.

где минимизация производится при условиях, что

$$x[k+1] = F(x[k], u[k], k), \quad x[\tau] = x, \quad k \geq \tau. \quad (1.8)$$

При этом  $x$  — произвольный, фиксированный как параметр вектор, и при  $\tau > 0$  выбору подлежит лишь часть управляющей последовательности

$$u[k] \in U_k, \quad \tau \leq k \leq k_f - 1. \quad (1.9)$$

Функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$  можно интерпретировать как минимальные затраты на работу системы, если она начинается в произвольный момент  $\tau$  из произвольного состояния  $x$ . По определению

$$\mathcal{B}(x, k_f) \equiv G_0(x), \quad (1.10)$$

а по смыслу исходной задачи

$$J(u^*) = \mathcal{B}(x^0, 0), \quad (1.11)$$

если  $u^*$  — оптимальное управление. Таким образом, в последовательности  $\mathcal{B}(x, \tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, k_f$ , известна последняя функция  $\mathcal{B}(x, k_f)$ , а требуется найти значение начальной функции  $\mathcal{B}(x, 0)$  при  $x = x^0$ .

Нетрудно установить рекуррентное соотношение, связывающее между собой функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$ . Запишем согласно определению (1.7), (1.8).

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, \tau) = \min_{\substack{u[k] \in U_k \\ k=\tau, \dots, k_f-1}} & \left\{ g_0(x, u[\tau], \tau) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=\tau+1}^{k_f-1} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]) \right\}. \end{aligned}$$

Будем осуществлять минимизацию в два приема: сначала минимизируем по всем значениям управления в «будущем», при  $k \geq \tau + 1$ , зафиксировав значение  $u[\tau] = u$ , а затем результат минимизируем по  $u$ . Учтем при этом, что первое слагаемое зависит только от  $u$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, \tau) = \min_{u \in U_\tau} & \left\{ g_0(x, u, \tau) + \right. \\ & \left. + \min_{\substack{u[k] \in U_k \\ k=\tau+1, \dots, k_f-1}} \left[ \sum_{k=\tau+1}^{k_f} g_0(x[k], u[k], k) + G_0(x[k_f]) \right] \right\}. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Обратим теперь внимание, что 2-е слагаемое в фигурной скобке соответствует определению (1.7), но с индексом  $\tau + 1$  и, что особенно важно, с измененным значением 1-го аргумента, поскольку  $x[\tau + 1]$  не произвольно, а в силу (1.8)

$$x[\tau + 1] = F(x, u, \tau), \quad (1.13)$$

т. е. зависит от значения управления  $u[\tau] = u$ .

В результате получаем искомое рекуррентное соотношение

$$\mathcal{B}(x, \tau) = \min_{u \in U_\tau} \{g_0(x, u, \tau) + \mathcal{B}[F(x, u, \tau), \tau + 1]\}, \quad (1.14)$$

$$0 \leq \tau \leq k_f - 1.$$

Соотношение (1.14) принято называть *уравнением динамического программирования* \*). В принципе оно позволяет, начиная с заданной в силу (1.10) функции  $\mathcal{B}(x, k_f)$ , рассчитать всю последовательность функций  $\mathcal{B}(x, \tau)$  вплоть до  $\mathcal{B}(x, 0)$ , дающей оптимальное значение критерия (1.2) при произвольном начальном условии  $x[0] = x$ . Более того, очевидно, что если функция  $u^*(x, \tau)$  доставляет минимум выражению

$$g_0(x, u, \tau) + \mathcal{B}[F(x, u, \tau), \tau + 1], \quad (1.15)$$

где  $x$  рассматривается как параметр, то она может интерпретироваться как оптимальный закон управления с обратной связью по измерениям текущего (в момент  $k = \tau$ ) состояния объекта, поскольку характеризует оптимальный выбор управления при произвольном текущем состоянии.

Таким образом, динамическое программирование кажется идеальным математическим аппаратом для прямого решения проблемы синтеза законов управления с обратной связью.

Однако при реальном применении динамического программирования возникают существенные трудности. Это, во-первых, вычислительные проблемы [10.2] — для реализации схемы необходимо вычислять и хранить в памяти функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$ , где размерность вектора  $x$  совпадает с порядком дифференциального уравнения объекта, а во-вторых, имеются и принципиальные проблемы, связанные с тем, что не при любых значениях  $x$  может существовать минимум (1.15). Отметим, что логика, приводящая к рекуррентному соотношению (1.14), сохраняет силу и в том случае, когда наложены любые ограничения как на конечные, так и на промежуточные значения переменных состояния  $x(t)$  или совместные ограничения на значения управления и состояния типа

$$G_i(x[k], u[k]) \begin{cases} = 0, \\ \leq 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

\* ) В ряде случаев исходный функционал можно представить в виде, несколько отличающемся от (1.2):

$$J(u) = \sum_{k=0}^{k_f-1} g(x[k+1], u[k], k). \quad (1.2')$$

Тогда уравнение динамического программирования можно построить по почти такой же логической схеме, но оно будет иметь форму

$$\mathcal{B}(x, \tau) = \min_{u \in U} \{g[F(x, u, \tau), u, \tau] + \mathcal{B}[F(x, u, \tau), \tau + 1]\}. \quad (1.14')$$

При этом кажется необходимым лишь ввести добавочные ограничения на область возможных значений параметра  $x$  в (1.14) и область поиска оптимизирующих значений  $u[k]$ . На самом деле требуется дополнительно вводить ограничения, гарантирующие существование решений во всех задачах минимизации выражений (1.15). Не касаясь детально этих тонких проблем, рассмотрим элементарный

**Пример 1.1.** Рассмотрим в весьма идеализированном виде следующую практическую задачу. Имеется стадо, на содержание которого приходится нести определенные затраты. Эти затраты компенсируются за счет продажи части поголовья. Требуется найти правило управления поголовьем, при котором суммарные затраты (за вычетом получаемого дохода) были бы минимальными.

Пусть  $x[k]$  — количество голов скота на начало года  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_f$ ;  $u[k]$  — количество продаваемых голов скота в году  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_f - 1$ . На эти величины наложено естественное ограничение \*)  $0 \leq u[k] \leq x[k]$ ,  $k = 0, \dots, k_f - 1$ .

Поголовье меняется от года к году в соответствии с соотношением  $x[k+1] = \beta(x[k] - u[k])$ ,  $k = 0, \dots, k_f$ , где  $\beta > 1$  интерпретируется как коэффициент естественного прироста за год поголовья, оставшегося после очередной продажи, совершающейся по условию, сразу после очередного учета. Требуется минимизировать

$$J = \sum_{k=0}^{k_f-1} \{h(x[k] - u[k]) - cu[k]\},$$

где  $h$  — затраты на содержание одного животного в течение года, а  $c$  — цена его при продаже в начале года,  $c > h > 0$ .

Рекуррентное соотношение (1.14) принимает здесь вид

$$\mathcal{B}(x, \tau) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (c + h)u + \mathcal{B}[\beta(x - u), \tau + 1]\},$$

$$\tau = 0, \dots, k_f - 1,$$

причем  $\mathcal{B}(x, k_f) = 0$ . Попытаемся строить последовательно функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$ . Имеем

$$\mathcal{B}(x, k_f - 1) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (c + h)u\} = -cx,$$

причем  $u^*(x, k_f - 1) = x$ , иначе говоря, на последний год сохранять поголовье нецелесообразно, поскольку от него уже нельзя получить доход (последняя продажа возможна только в самом начале года!).

Далее, при  $\tau = k_f - 2$  имеем

$$\mathcal{B}(x, k_f - 2) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (c + h)u - c\beta(x - u)\},$$

\*) Целочисленностью величин  $x(k)$ ,  $u(k)$  здесь и далее пренебрегаем.

причем учтен вид  $\mathcal{B}(x, k_f - 1)$ . Теперь результат минимизации зависит от знака при  $u$ :

$$u = 0, \text{ если } \beta > 1 + \frac{h}{c},$$

$$u = x, \text{ если } \beta < 1 + \frac{h}{c}.$$

Иначе говоря, целесообразно сохранить все поголовье, если коэффициент прироста достаточно велик, а в противном случае избавиться от него заранее.

Предположим, что параметры соответствуют первому варианту (например,  $\beta = 1,2$ ,  $h = 0, 1$  с). Тогда

$$\mathcal{B}(x, k_f - 1) = -(c\beta - h)x,$$

т. е. мы имеем линейную функцию с отрицательным коэффициентом (затраты не превышают дохода).

Очевидно, что рассмотрение дальнейших этапов дает тот же результат:

$$u^*(x, \tau) = 0, \quad \tau \leq k_f - 2,$$

т. е. при заданном соотношении между параметрами оптимально сохранение поголовья вплоть до последнего года. При этом оно нарастает по показательному закону

$$x[k] = \beta^k x[0], \quad k = 0, \dots, k_f - 1,$$

растут и совокупные затраты на содержание

$$h \sum_{k=0}^{k_f-1} \beta^k x[0],$$

но они с избытком покрываются за счет дохода, получаемого от продажи перед последним годом:

$$c\beta^{k_f-1} x[0].$$

Всюду ранее неявно предполагалось, что все функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$  определены только при  $x \geq 0$ . Чтобы подчеркнуть важность этого обстоятельства, немного изменим формулировку задачи, добавив условие, что в конечный момент  $k = k_f$  необходимо сохранить поголовье на уровне не ниже заданного  $\bar{x}$ .

В этом случае условие

$$\mathcal{B}(x, k_f) = 0$$

задано только при  $x \geq \bar{x}$ , а при  $x < \bar{x}$  функция  $\mathcal{B}(x, k_f)$  не определена. Далее ясно, что допустимы не произвольные начальные условия на каждом этапе, а лишь такие, при которых возможно выполнение конечного ограничения: в момент  $k_f - 1$   $x[k_f - 1]$  должно быть не менее чем  $\beta^{-1}\bar{x}$ , при произвольном  $\tau$   $x[\tau]$  — не менее чем

$\beta^{t-k_f}\bar{x}$ , ибо в противном случае даже при отсутствии продаж поголовье не вырастет до заданного уровня. Эти ограничения необходимо учитывать при минимизации.

В частности, в момент  $k_f - 1$  должно быть

$$u^*(x, k_f - 1) = x - \frac{\bar{x}}{\beta}, \quad x \geq \frac{\bar{x}}{\beta}.$$

Вид функций  $\mathcal{B}(x, \tau)$  показан на рис. 10.1. □

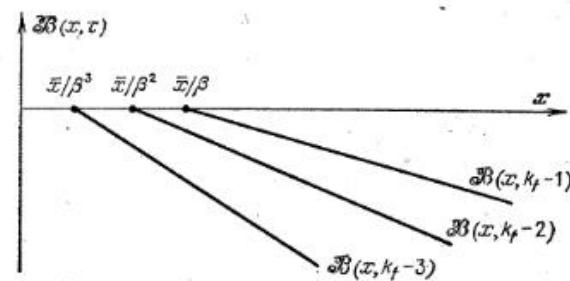


Рис. 10.1

**1.3. Непрерывные системы.** Основная идея динамического программирования переносится и на непрерывные по времени системы. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J\{u\} = \int_{t_0}^{t_f} g_0[x(t), u(t), t] dt + G_0[x(t_f)] \quad (1.17)$$

на траекториях системы

$$\dot{x} = f[x, u, t], \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U,$$

которая уже изучалась в § 3 гл. 9 с помощью принципа максимума. Введем функцию

$$\mathcal{B}(x, \tau) = \min \left\{ \int_{\tau}^{t_f} g_0[x(t), u(t), t] dt + G_0[x(t_f)] \right\}, \quad t_f \geq \tau \geq t_0, \quad (1.18)$$

где минимизация производится при условиях

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t], \quad t \geq \tau, \quad x(\tau) = x, \quad u(t) \in U. \quad (1.19)$$

По определению имеем

$$\mathcal{B}(x, t_f) = G_0(x), \quad (1.20)$$

т. е. значения функции  $\mathcal{B}(x, \tau)$  при  $\tau = t_f$ , заданы.

Попытаемся построить уравнение, которое определяло бы значения  $\mathcal{B}(x, \tau)$  в предшествующие моменты времени, имея в виду,

что оптимальное значение критерия равно

$$J\{u^*\} = \mathcal{B}(x^0, t_0). \quad (1.21)$$

Рассмотрим два момента времени,  $\tau$  и  $\tau + \Delta$ ,  $\Delta > 0$ . Тогда, в частности повторяя выкладки, проведенные в дискретном случае, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, \tau) &= \min_{\substack{u(t) \in U \\ t \in [\tau, \tau + \Delta]}} \left\{ \int_{\tau}^{\tau + \Delta} g_0[x(t), u(t), t] dt + \right. \\ &\quad \left. + \min_{\substack{u(t) \in U \\ t \in [\tau + \Delta, t_f]}} \left\{ \int_{\tau + \Delta}^{t_f} g_0[x(t), u(t), t] dt + G_0[x(t_f)] \right\} \right\} = \\ &= \min_{\substack{u(t) \in U \\ t \in [\tau, \tau + \Delta]}} \left\{ \int_{\tau}^{\tau + \Delta} g_0[x(t), u(t), t] dt + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{B}\left[ x + \int_{\tau}^{\tau + \Delta} f[x(t), u(t), t] dt, \tau + \Delta \right] \right\}. \quad (1.22) \end{aligned}$$

Здесь вновь используется возможность сначала провести выбор управления, начиная с момента  $\tau + \Delta$ , до конца, а затем осуществить минимизацию по значениям управления в пределах отрезка  $[\tau, \tau + \Delta]$ .

Предполагая, как обычно, что а)  $f[x, u, t]$  и  $g_0[x, u, t]$  непрерывны по всем своим аргументам, б) допустимые траектории  $x(t)$  непрерывны по  $t$ , в) допустимые управлениа  $u(t)$  кусочно-непрерывны по  $t$ , причем отрезок  $[\tau, \tau + \Delta]$  не включает точек разрыва, можно записать, что

$$\Delta x(\tau) \triangleq \int_{\tau}^{\tau + \Delta} f[x(t), u(t), t] dt = f[x(\tau), u(\tau), \tau] \Delta + o(\Delta) \quad (1.23)$$

$$\text{и} \quad \int_{\tau}^{\tau + \Delta} g_0[x(t), u(t), t] dt = g_0[x(\tau), u(\tau), \tau] \Delta + o(\Delta), \quad (1.24)$$

причем  $x(\tau) = x$ . Предположим дополнительно, что функция  $\mathcal{B}(x, \tau)$  дифференцируема, и используем формальное разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[x + \Delta x(\tau), \tau + \Delta] &= \mathcal{B}(x, \tau) + \frac{\partial \mathcal{B}(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathcal{B}(x, \tau)}{\partial x} \right)^T \Delta x(\tau) + o(\Delta). \quad (1.25) \end{aligned}$$

Подставив (1.23), (1.24), (1.25) в (1.22), получим

$$-\frac{\partial \mathcal{B}(x, \tau)}{\partial \tau} = \min_{\substack{u(t) \in U \\ t \in [\tau, \tau + \Delta]}} \left\{ g_0[x, u(\tau), \tau] + \left( \frac{\partial \mathcal{B}(x, \tau)}{\partial x} \right)^T f[x, u(\tau), \tau] + \frac{o(\Delta)}{\Delta} \right\}.$$

Теперь перейдем к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$  и установим справедливость при почти любых  $\tau$  уравнения

$$-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \tau} = \min_{u(\tau) \in U} \left\{ g_0[x, u(\tau), \tau] + \left( \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \right)^T f[x, u(\tau), \tau] \right\}, \quad (1.26)$$

определенного с учетом граничного условия (1.20) функцию  $\mathcal{B}(x, \tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_f$ .

Уравнение (1.26) принято называть *уравнением Беллмана* или *уравнением Беллмана — Гамильтона — Якоби* (в силу аналогии со сходным уравнением Гамильтона — Якоби в аналитической механике [6.1]).

Так же, как и в дискретном случае, важно понимать, что функция  $u^*(x, t)$ , минимизирующая выражение

$$g_0(x, u, t) + \left( \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) \quad (1.27)$$

по явно входящему  $u$  в пределах допустимой области  $U$  при фиксированных  $x$  и  $t$ , определяет оптимальный закон управления с обратной связью по измерениям текущего состояния  $x = x(t)$ .

Однако для нахождения  $u^*(x, t)$  требуется знать функцию  $\mathcal{B}(x, t)$  или по крайней мере ее градиент  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}$ .

Введем обозначение

$$H\left(x, -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, u, t\right) = -g_0(x, u, t) - \left( \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \right)^T f(x, u, t). \quad (1.28)$$

Тогда, рассматривая компоненты  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}$  как дополнительные параметры, можно найти функцию  $u^*\left(x, \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, t\right)$ , доставляющую минимум выражению (1.27) или, что то же самое,

$$\max_{u \in U} H\left(x, -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, u, t\right). \quad (1.29)$$

По существу, это же условие фигурировало в принципе максимума, с той разницей, что вместо  $-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}$  в гамильтониан  $H$  входил вектор лагранжевых множителей  $\lambda$ . Динамическое программирование не дает непосредственно условий для нахождения значений этого вектора на оптимальной траектории. Для его нахождения, а следовательно, вычисления оптимального управления приходится решать нелинейное дифференциальное уравнение в частных про-

изводных, получаемое после подстановки в (1.26) функции  $u^*$ :

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = H \left[ x, -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, u^* \left( x, \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, t \right), t \right]. \quad (1.30)$$

Лишь в исключительных случаях удается найти решение (1.30) в аналитической форме. В частности, можно угадать, что в линейно-квадратичной задаче функция  $\mathcal{B}(x, t)$  совпадает с функцией  $V(x, t)$ , использованной при доказательстве Т.8.2 из гл. 6 (проверку этого факта предоставляем читателю), однако мы уже и так располагаем двумя подходами к решению этой проблемы.

Численное интегрирование уравнения (1.30) также сталкивается с трудно преодолеваемыми препятствиями даже при  $n = 2$ , где  $n$  — размерность  $x$ . Имеются и теоретические осложнения [10.2]: дело в том, что почти во всех задачах оптимизации, где оптимальное управление принимает значение на границе области  $U$ , функция  $\mathcal{B}(x, t)$  не является всюду дифференцируемой по  $x$ , а это предположение было сделано при выводе уравнения (1.26). К счастью, более тонкие исследования [9.4] позволяют частично преодолеть указанную неприменимость: на самом деле оказывается достаточным, чтобы уравнение (1.26) или (1.30) было определено при почти всех значениях  $x$ , где  $\mathcal{B}(x, t)$  дифференцируема, за исключением кусочно-гладких многообразий размерности, меньшей, чем  $n$ , например, многообразий, задаваемых одним или несколькими уравнениями

$$\psi_i(x) = 0,$$

где  $\psi_i(x)$  — непрерывно дифференцируемые функции.

Выполнение уравнения (1.26) почти всюду может служить необходимым и достаточным условием оптимальности, если, конечно, удается угадать функцию  $\mathcal{B}(x, t)$ .

## § 2. Субоптимальные обратные связи

**2.1. Субоптимальность и теория возмущений.** Метод динамического программирования указывает лишь принципиальный путь решения проблемы синтеза, как правило, алгоритмически нереализуемый.

В данном параграфе будут кратко описаны некоторые идеи практического построения законов управления с обратной связью, использование которых, вообще говоря, не гарантирует точного достижения оптимального значения целевой функции, но обеспечивает близкое значение. Такие законы обычно именуют *приближенно оптимальными* или *субоптимальными*. Прежде чем переходить к их построению, укажем на еще один, теоретически возможный способ осуществления оптимальной обратной связи.

**Определение.** Назовем обратную связь *заданной алгоритмически*, если указано правило, алгоритм, с помощью которого по любой заданной текущей информации  $u'$  можно вычислить значение управления  $u$ , задаваемое в любой момент  $t$ .

Если выполнена гипотеза 2 из § 1, т. е. прямо или косвенно можно получить полную и точную информацию о состоянии объекта в момент  $t$ , то алгоритмическое задание оптимальной обратной

связи состоит в указании правила решения задачи (1.7)–(1.9) (для дискретной системы) или (1.18), (1.19) (для непрерывной системы). Решение должно производиться при именно том значении  $x$ , которое к этому моменту получено от датчиков. В этом состоит главное отличие от динамического программирования, где  $x$  задавалось произвольным (осуществлялся поиск оптимального управления для любых возможных состояний!). «Плата» за такой подход очевидна: если в методе динамического программирования все вычисления можно было произвести заранее, при проектировании системы, и «заложить» в нее уже готовые функции  $u^*(x, t)$ , то здесь требуется решать задачи оптимизации в ходе работы системы, по мере поступления текущей информации \*). Причем необходимо осуществлять решение быстро, поскольку иначе требуемое оптимальное решение станет известным позже того момента, когда его следует использовать. Поэтому идея алгоритмического задания практически неприменима для осуществления оптимальной обратной связи. Однако она может быть с успехом использована для субоптимизации. Основной прием заключается в том, чтобы упростить задачи, которые требуется решать в ходе работы системы, до такой степени, чтобы вычислительное устройство могло успеть вовремя рассчитать значение сигнала управления.

Конечно, разумное упрощение не всегда возможно. Как правило, оно оказывается успешным, если исходная задача обладает такими специфическими особенностями, что упрощенная задача имеет близко к ней описание. Как мы уже убеждались (гл. 6, 8), математической базой для оценки возможности упрощения задач является теория возмущений. В рамках этой теории близость между исходной (*возмущенной*) задачей и упрощенной (*порождающей*) формально отражается введением малого числового параметра  $\mu$  таким образом, что при  $\mu = 0$  описание возмущенной задачи совпадает с описанием порождающей.

С помощью теории возмущений в ряде случаев удается построить оценки эффективности субоптимальных управлений, т. е. определить потерю в значении целевого функционала, если вместо оптимального управления используется субоптимальное \*\*).

**2.2. Слабодинамичные дискретные объекты и оптимизация на коротком интервале.** Предположим, что управляемый объект обладает следующим свойством: его состояние в момент  $k+1$  слабо зависит от состояния в предшествующий момент  $k$ , а в основном определяется значением управляющего воздействия  $u[k]$ . При этом влияние управления  $u[k]$  быстро «забывается» системой. Гипотеза слабой динамичности достаточно хорошо отражает особенности импульсных систем управления устойчивыми непрерывными объ-

\* ) Зачастую применяют английский термин «on-line» — оптимизация.

\*\*) Систематическое изложение метода возмущений в задачах оптимизации дано в [6.6]. Там же можно найти асимптотические оценки эффективности ряда субоптимальных управлений, описанных далее в этом параграфе.

ектами, если интервалы между импульсами настолько велики, что за время от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  переходные процессы почти затухают. Если гипотеза выполняется, то можно сделать естественный вывод: при выборе управления  $u[\tau]$  в каждый текущий момент  $\tau$  допустимо учитывать его влияние только на короткий отрезок времени в будущем, примыкающий к этому моменту. В самом простом варианте допустимо учитывать влияние только на один такт вперед.

Следовательно, при алгоритмическом задании обратной связи на каждом такте вместо задач (1.7)–(1.9) придется решать лишь «укороченные» задачи вида

$$\min \left\{ \sum_{k=\tau}^{\tau+l-1} g_0(x[k], u[k], k) / x[k+1] = F(x[k], u[k], k), \right. \\ \left. x(\tau) = x, u[k] \in U_k \right\}, \quad (2.1)$$

где  $l$  – «глубина» учитываемой памяти. Существенно, что хотя в (2.1) минимизация ведется по всем переменным  $u[\tau], u[\tau+1], \dots, u[\tau+l-1]$ , использовать в текущий момент  $\tau$  требуется только первую компоненту решения  $u^*[\tau]$ . После приложения соответствующего управляющего воздействия к объекту от датчиков информации поступит значение состояния в следующий момент  $\tau+1$ , и решение новой «укороченной» задачи можно будет повторить на сдвинутом интервале \*).

Приведем пример использования этой идеи в задаче, где имеются и ограничения на переменные состояния.

**Пример 2.1** [6.6]. Рассмотрим линейный дискретный объект с одним (скалярным) управляющим воздействием, описываемый уравнением

$$x[k+1] = Ax[k] + bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

скалярные же возмущения  $w[k]$  заданы. Матрица  $A$  размерности  $n \times n$  мала по норме, что соответствует гипотезе слабой динамичности. Требуется построить закон управления с обратной связью по измерениям состояния, минимизирующий целевую функцию

$$\sum_{k=0}^{k_f-1} (c^T x[k+1] + du[k]), \quad c = \text{const}, \quad d = \text{const}, \quad (2.3)$$

причем необходимо обеспечить выполнение ограничений

$$x[k+1] \leq \bar{x}, \quad k = 0, 1, \dots, k_f - 1. \quad (2.4)$$

Такая постановка приемлема для приближенного описания задач оптимального управления некоторыми технологическими процессами.

\*). Очевидно, что если  $\tau + l \geq k_f$ , то в (2.1) надо учитывать и «концевое» слагаемое  $G_0(x[k_f])$  целевой функции.

ми [6.6]; при этом условие (2.4) интерпретируется как необходимость невыхода состояния объекта за «опасную» границу  $\bar{x}$ .

Для алгоритмического задания оптимальной обратной связи требуется в каждый момент  $\tau$  решить задачу вида

$$\min \sum_{k=\tau}^{k_f-1} (c^T x[k+1] + du[k]) \quad (2.5)$$

при условиях (2.2), (2.4) с учетом того, что известна величина  $x[\tau]$ , полученная от ДИ.

Все эти задачи являются задачами линейного программирования и в принципе разрешимы с помощью стандартных программ. Однако время вычислений существенно зависит от числа переменных и ограничений, а при больших  $k_f$  оно заведомо велико.

Для упрощения учтем предположение о слабой динамичности и будем принимать во внимание влияние управления  $u[\tau]$  только на состояние  $x[\tau+1]$  в ближайший момент. Тогда вместо (2.5), (2.2), (2.4) можно иметь дело с задачами малой размерности:

$$\min \{c^T(Ax[\tau] + bu[\tau] + Gw[\tau]) + du[\tau]\} \quad (2.6)$$

с ограничением

$$Ax[\tau] + bu[\tau] + Gw[\tau] \leq \bar{x}. \quad (2.7)$$

Более того, решение можно выписать в явном виде. Примем для определенности, что

$$b = (b_i) \geq 0, \quad c^T b + d < 0. \quad (2.8)$$

Тогда оптимальное значение управления  $u^*[\tau]$  должно быть наибольшим из таких  $u[\tau]$ , при которых выполняются все ограничения

$$b_i u[\tau] \leq \bar{x}_i - a_i x[\tau] - g_i w[\tau], \quad (2.9)$$

где  $a_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $A$ ,  $g_i$  –  $i$ -й элемент столбца  $G$ . Таким образом,

$$u^*[\tau] = \min_i \left\{ \frac{1}{b_i} (\bar{x}_i - a_i x[\tau] - g_i w[\tau]) \right\}, \quad (2.10)$$

где учитываются только индексы  $i$ , для которых  $b_i > 0$ .

Формула (2.10) в явном виде выражает нелинейный закон управления с обратной связью.

Дополнительно заметим, что при построении закона нетрудно формально учесть явные ограничения на управление, однако при наличии ограничений снизу, например, вида

$$u[\tau] \geq -1 \quad (2.11)$$

может оказаться, что решения не существуют: ограничения (2.7) и (2.11) окажутся несогласуемыми. Иначе говоря, управление не сможет справиться с большими возмущениями, и возможен выход за «опасную» границу, однако это естественное свойство задачи.

Теоретический анализ эффективности закона (2.10) проведен в [6.6, § 2.9], причем установлено, что при достаточно слабой динамичности (2.10) в действительности позволяет достичь строго оптимального значения функции цели. Этот результат является следствием особенностей задач ЛП. В общем случае применение гипотезы слабой динамичности, конечно, приводит лишь к субоптимальным обратным связям, причем оценка эффективности обычно затруднительна. Тем не менее практически значимость вытекающего из гипотезы приема «укорачивания» задач очевидна.

Действие закона управления у «опасной» границы иллюстрируется графиками на рис. 10.2, где использована следующая числовая модель:

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 0.1(x_1[k] + 2x_2[k]) + u[k], \quad x_1[0] = 0, \\x_2[k+1] &= -0.05x_2[k] + u[k] + (-1)^k, \quad x_2[0] = 0, \\x_1 &= 1, \quad \bar{x}_2 = 1.\end{aligned}$$

При этом

$$u[k] = \min\{1 - 0.1x_1[k] - 0.2x_2[k], 1 + 0.05x_2[k] - (-1)^k\}. \quad (2.12)$$

Видно, что управление заставляет переменные «прижиматься» то к одной, то к другой «опасной», но выгодной по критерию границе, с которой они «сбиваются» периодическим возмущением. В системе быстро устанавливается периодический режим.  $\square$

**2.3. Гипотеза слабой управляемости.** Эту гипотезу можно формализовать и непосредственно на языке непрерывных систем. Она соответствует описанию в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x, t) + \mu f_1(x, u, t), \\x(t_0) &= x^0, \quad t \in [t_0, t_f],\end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\mu$  — вновь малый параметр, так что возможно лишь малое влияние управления на скорость изменения состояния системы [6.6], [10.8].

Такая постановка разумна в задачах управления движением механических объектов, когда управляющие силы существенно слабее естественных, например, при управлении спуском космического аппарата в верхних слоях атмосферы.

Порождающая система неуправляема, ее движение  $\tilde{x}(t)$  определено соотношениями

$$\dot{x} = f_0(x, t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (2.14)$$

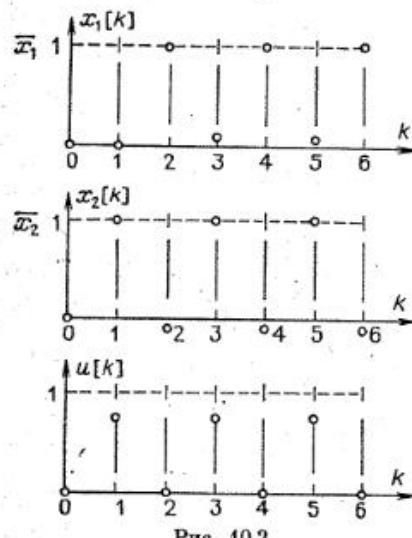


Рис. 10.2

Истинное движение в силу исходного уравнения должно быть близко к нему. Попытаемся воспользоваться этим отличием для того, чтобы обеспечить минимизацию показателя  $G_0[x(t_f)]$  с помощью выбора управления  $u(t) \in U$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , где  $U$  — заданное ограниченное множество.

Проведем несколько нестрогие рассуждения. Поскольку функция

$$z(t) \triangleq \mu f_1[x(t), u(t), t]$$

мала при любом выборе управления, то ее влияние на изменение траектории также мало и может быть оценено с помощью уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x} = A(t) \delta x + z, \quad A(t) = \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t)}.$$

Мало и вызванное ею изменение показателя:

$$\delta G_0[x(t_f)] \cong (C_0(t))^\top \delta x(t_f), \quad C_0 = \frac{\partial G_0}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t_f)}.$$

Используя известную схему (см. § 3 гл. 9), можно явно выразить это изменение через  $z(t)$ :

$$\delta G_0 \approx - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^\top(t) z(t) dt,$$

где  $\lambda(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\lambda} = -A^\top(t)\lambda, \quad \lambda(t_f) = -C_0. \quad (2.15)$$

Теперь вновь вернемся к исходным обозначениям

$$\delta G_0 \cong -\mu \int_{t_0}^{t_f} \lambda^\top(t) f_1[x(t), u(t), t] dt.$$

Таким образом, мы получаем возможность найти оптимальное управление для каждого момента времени, решая задачу

$$\max \{\lambda^\top(t) f_1[x(t), u(t), t] / u(t) \in U\}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим в дополнение задачу с фиксированным на правом конце условием

$$G_1[x(t_f)] = 0 \quad (2.17)$$

и свободным выбором момента  $t_f$ . Предположим, что на порождающей траектории это условие выполняется, т. е.  $G_1[\tilde{x}(\tilde{t}_f)] = 0$ , так что может быть найдено  $\tilde{t}_f$ . Поскольку время  $t_f$  не фиксировано, то  $\mu$  — поправка в скоростях приводит к  $\mu$  — поправке во времени, так что можно принять

$$t_f = \tilde{t}_f + \mu t_1 + o(\mu).$$

В силу этого можно оценить изменение состояния в конечный момент через  $t_1$ :

$$\delta x(t_1) \approx \delta x(\tilde{t}_1) + f_0(\tilde{x}(t_1), \tilde{t}_1) \mu t_1$$

и оценить изменение функционала

$$\delta G_0 \cong \left( \frac{\partial G_0}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=\tilde{x}(t_1)} \delta x(t_1) \approx C_0^T \{ \delta x(\tilde{t}_1) + f_0[\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1] \mu t_1 \}. \quad (2.18)$$

Кроме того, имеем

$$\delta G_1 \cong \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} \right)^T \Big|_{x=\tilde{x}(t_1)} \delta x(t_1) \approx C_1^T \{ \delta x(\tilde{t}_1) + f_0[\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1] \mu t_1 \} = 0, \quad (2.19)$$

поскольку ограничение (2.17) должно быть выполнено. Исключая из (2.19)  $t_1$  и подставляя в (2.18), получаем формулу для приращения показателя

$$\delta G_0 \approx \tilde{C}_0^T \delta x(\tilde{t}_1),$$

где

$$\tilde{C}_0 \triangleq C_0 - \frac{C_0^T \tilde{f}_0}{C_1^T \tilde{f}_0} c_1, \quad \tilde{f}_0 \triangleq f_0[\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1] \text{ при } C_1^T \tilde{f}_0 \neq 0,$$

или, окончательно,

$$\delta G_0 \approx - \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \tilde{\lambda}^T(t) z(t) dt,$$

где  $\tilde{\lambda}(t)$  удовлетворяет условиям

$$\dot{\lambda} = -A^T(t)\lambda, \quad \lambda(\tilde{t}_1) = -\tilde{C}_0. \quad (2.20)$$

Тем самым выбор управления свелся к необходимости в каждый момент времени решать задачу

$$\max \{ \tilde{\lambda}^T(t) j_1[x(t), u(t), t] / u(t) \in U \}, \quad (2.21)$$

которая отличается от (2.16) только изменением множителей.

Конечно, все сказанное представляет собой лишь соображения «на пальцах». Строгая оценка близости получаемого решения к оптимальному достаточно сложна. Вместе с тем нетрудно заметить, что вся описанная процедура почти «копирует» 1-ю итерацию в методе последовательной линеаризации.

**Пример 2.2. Задача о полете на максимальную дальность [10.7].** Рассматривается движение центра масс летательного аппарата в плоскости  $x, y$ :

$$\dot{x} = X, \quad \dot{y} = Y - g,$$

где  $x(t)$  — горизонтальная, а  $y(t)$  — вертикальная координата центра,  $X, Y$  — компоненты ускорения, создаваемого аэродинамическими силами,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Предположим, что движение совершается в сильно разреженной атмосфере при небольших скоростях, так что аэродинамические силы во время всего полета малы по сравнению с силой тяжести. Отбрасывая их, легко найдем порождающее движение — движение точки в поле силы тяжести:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(0), & \tilde{x}(t) &= \dot{x}(0)t + x(0), \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= \dot{y}(0) - gt, & \tilde{y}(t) &= y(0) + \dot{y}(0)t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Требуется теперь выяснить закон изменения аэродинамических сил, обеспечивающий наибольшее приращение дальности полета до точки с заданной высотой, т. е. максимизировать  $x(t_1)$  при ограничении  $y(t_1) = y'$  и свободном выборе  $t_1$ .

Чтобы подробнее проиллюстрировать общую методику и выделить характерный малый параметр, запишем уравнения движения в стандартной форме, и притом в безразмерных величинах. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3, & \frac{dx_2}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -\mu \rho v^2 [c_x(u) x_3 + c_y(u) x_4], \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -1 + \mu \rho v^2 [c_y(u) x_3 - c_x(u) x_4], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{v_0}{\rho_0} t, & x_1 &= \frac{x}{v_0^2} g, & x_2 &= \frac{y}{v_0^2} g, & x_3 &= \frac{1}{v_0} \dot{x}, \\ x_4 &= \frac{1}{v_0} \dot{y}, & v^2 &= x_3^2 + x_4^2, \end{aligned}$$

$v_0$  — начальная скорость,  $\rho$  — плотность атмосферы (заданная функция высоты, т. е.  $x_2$ ), отнесенная к начальной  $\rho_0$ ,  $c_x(u)$ ,  $c_y(u)$  — коэффициенты сопротивления и подъемной силы, которые являются заданными ограниченными функциями управления — угла атаки  $u$ . Безразмерная величина

$$\mu = \frac{\rho_0 v_0^2 S}{2mg}$$

предполагается существенно меньшей единицы ( $S$  — характеристическая площадь аппарата, по отношению к которой заданы аэродинамические коэффициенты  $c_x$ ,  $c_y$ ).

Поскольку диапазон изменения всех переменных  $x_i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , в основном определен порождающим движением, то при малом  $\mu$  нетрудно убедиться в малости возмущений как функций времени при всех  $\tau$ .

Примем для простоты

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = \cos \theta_0, \quad x_4(0) = \sin \theta_0,$$

где  $\theta_0$  — начальный угол наклона траектории (угол между вектором скорости и горизонтальной осью). На конце траектории потребуем, чтобы  $x_2(\tau_f) = 0$ , а  $x_1(\tau_f)$  было максимальным или, что то же самое,  $G_0[x(\tau_f)] = -x_1(\tau_f)$  было минимальным. Порождающее движение в безразмерных координатах описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tau \cos \theta_0, & \ddot{x}_2 &= \tau \sin \theta_0 - \tau^2/2, \\ \dot{x}_3 &= \cos \theta_0, & \ddot{x}_4 &= \sin \theta_0 - \tau; \end{aligned}$$

отсюда  $\tilde{\tau}_f = 2 \sin \theta_0$ .

Подчеркнем, что удовлетворение граничного условия заведомо возможно только при  $\theta_0 > 0$ , а поскольку метод возмущений предполагает малость изменения времени процесса, имеющего порядок  $\mu$ , по сравнению с невозмущенным значением, то, вообще говоря,  $2 \sin \theta_0 \gg \mu$ .

Для оценки влияния возмущения вычислим множители  $\tilde{\lambda}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , в силу уравнений (2.20), которые принимают вид

$$\dot{\tilde{\lambda}}_1 = 0, \quad \dot{\tilde{\lambda}}_2 = 0, \quad \dot{\tilde{\lambda}}_3 = -\tilde{\lambda}_1, \quad \dot{\tilde{\lambda}}_4 = -\tilde{\lambda}_2$$

с граничными условиями

$$\tilde{\lambda}_1(\tilde{\tau}_f) = 1, \quad \tilde{\lambda}_2(\tilde{\tau}_f) = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}, \quad \tilde{\lambda}_3(\tilde{\tau}_f) = 0, \quad \tilde{\lambda}_4(\tilde{\tau}_f) = 0.$$

При вычислении граничных условий учтено, что

$$C_0 \triangleq \left. \left( \frac{\partial G_0}{\partial x} \right) \right|_{x=x(\tilde{\tau}_f)} = (-1, 0, 0, 0),$$

$$\tilde{f}_0 = (x_3, x_4, 0, -1) \Big|_{x=\tilde{x}(\tilde{\tau}_f)} = (\cos \theta_0, -\cos \theta_0, 0, -1),$$

$$C_1 \triangleq \left. \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} \right) \right|_{x=x(\tilde{\tau}_f)} = \left. \frac{\partial x_2}{\partial x} \right|_{x=x(\tilde{\tau}_f)} = (0, 1, 0, 0).$$

После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\tau) &= 1, & \tilde{\lambda}_2(\tau) &= \operatorname{ctg} \theta_0, \\ \tilde{\lambda}_3(\tau) &= -(\tau - \tilde{\tau}_f), & \tilde{\lambda}_4(\tau) &= -\operatorname{ctg} \theta_0(\tau - \tilde{\tau}_f). \end{aligned}$$

Теперь в соответствии с (2.21), (2.22) следует искать приближенно оптимальное управление, максимизируя выражение

$$\begin{aligned} -\tilde{\lambda}_3[c_x(u)x_3 + c_y(u)x_4] + \tilde{\lambda}_4[c_y(u)x_3 - c_x(u)x_4] &= \\ = (\tau - \tilde{\tau}_f) \{ [c_x(u)x_3 + c_y(u)x_4] - \operatorname{ctg} \theta_0 [c_y(u)x_3 - c_x(u)x_4] \} & \end{aligned}$$

или, поскольку  $\tau \leq \tilde{\tau}_f$ , минимизируя

$$c_x(u)[x_3 + \operatorname{ctg} \theta_0 x_4] - c_y(u)[\operatorname{ctg} \theta_0 x_3 - x_4]. \quad (2.23)$$

Последнее эквивалентно минимизации функции

$$\bar{c}(u) \triangleq c_x(u) - \operatorname{ctg}(\theta + \theta_0) c_y(u), \quad (2.24)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_4}{x_3}, \quad (2.25)$$

так что  $\theta$  — угол наклона траектории в текущий момент времени.

Физический смысл (2.24) ясен: для увеличения дальности полета требуется иметь и меньший коэффициент сопротивления, и большую подъемную силу, а компромисс между этими противоречивыми требованиями достигается при минимизации  $\bar{c}(u)$ .

Если задаться какой-либо аналитической аппроксимацией аэродинамических характеристик, то оптимальное значение угла атаки  $u^*$  можно выразить явной формулой. Пусть, например [10.7],

$$c_x(u) = 1 - \cos 2u_0 \cos 2u, \quad c_y(u) = k \sin 2u_0 \sin 2u, \quad (2.26)$$

где  $u_0, k$  — константы. Тогда нетрудно убедиться, что

$$u^* = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k \operatorname{tg} 2u_0}{\operatorname{tg}(\theta + \theta_0)}, \quad (2.27)$$

если  $u_0 \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$ .

Подчеркнем, что оптимальное управление найдено как функция угла наклона траектории, который может быть измерен в каждый момент времени с помощью соответствующего датчика, причем для вычисления  $u^*(\tau)$  следует знать как текущее значение  $\theta(\tau)$ , так и начальное  $\theta_0$ .

Приведенные в [10.7] результаты расчетов показывают, что закон управления, найденный с помощью теории возмущений, почти точно совпадает с оптимальным до  $\mu = 0.1$  и отличается не более чем на 10% при  $\mu \leq 0.5$ .  $\square$

**2.4. Гипотеза слабой нелинейности.** Одна из самых популярных гипотез, упрощающих построение управления, состоит в предположении о том, что описание объекта близко к линейному

$$\dot{x} = Ax + Bu + \mu f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (2.28)$$

Если оптимизация ведется по линейному или квадратичному показателю, то при малых  $\mu$  могут быть получены простые результаты.

Остановимся подробнее на случае \*), когда

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt + x^T(t_f) Q_f x(t_f). \quad (2.29)$$

При  $\mu = 0$  имеем дело со стандартной линейно-квадратичной задачей с известным решением

$$\ddot{x}(t) = -R^{-1}B^T \tilde{P}(t) \tilde{x}(t) = -\tilde{K}(t) \tilde{x}(t),$$

где  $\tilde{x}(t)$  удовлетворяет порождающему уравнению

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad \tilde{x}^0 = x^0,$$

а  $\tilde{P}(t)$  — решение уравнения Риккати

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P(t_f) = Q.$$

Естественно искать следующее приближение, минимизируя функционал на траекториях линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu + \tilde{z}(t), \quad (2.30)$$

где

$$\tilde{z}(t) = \mu f[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t]$$

— известная функция времени.

Решение такой задачи также известно (см. § 8 гл. 6). Напомним его структуру. Согласно формулам (8.28)–(8.30) из гл. 6 имеем

$$u^*(x^{(1)}, t) = -K^*(t)x^{(1)}(t) - u^{(1)}(t), \quad (2.31)$$

где  $x^{(1)}(t)$  — решение системы (2.30),  $K^*(t)$  определяется только свойствами невозмущенной системы, т. е.  $K^*(t) = \tilde{K}(t)$ , а  $u^{(1)}(t)$  дается формулой

$$u^{(1)}(t) = R^{-1}B^T \pi^{(1)}(t), \quad (2.32)$$

причем для вычисления  $\pi^{(1)}(t)$  требуется решить дифференциальное уравнение

$$\dot{\pi} + (A - B\tilde{K})^T \pi + \tilde{P}\tilde{z}(t) = 0, \quad \pi(t_f) = 0. \quad (2.33)$$

Поправка к нулевому приближению имеет порядок  $\mu$  и, как можно при определенных дополнительных условиях строго доказать [6.6], обеспечивает приближение к оптимальной траектории и оптимальному значению функционала с точностью до  $O(\mu^2)$  на конечном отрезке  $[t_0, t_f]$ . Однако при введении поправки закон управления (2.31) уже не имеет формы закона управления с обратной связью. Сама поправка  $u^{(1)}(t)$  в текущий момент  $t$  определяется (в силу (2.32), (2.33)) значениями возмущения, вычисленного на порождающей траектории для будущих моментов из  $[t, t_f]$ .

\*) Вариант оптимизации по линейному функционалу хорошо иллюстрируется П.2.2, где объект был не только слабо управляем, но и слабо нелинейен.

Иначе говоря, вычислить поправку можно только при наличии полной информации о начальных условиях и возможных изменениях параметров.

Применим теперь еще один полуэвристический прием.

Предположим, что матрицы параметров  $A, B$  постоянны или мало меняются, а  $t_f - t_0$  достаточно велико (в смысле § 8 гл. 6); тогда применима схема «замороженных» параметров, в силу которой  $P(t)$  и  $\pi^*(t)$  находятся из алгебраических уравнений

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (A - B\tilde{K})^T \pi + \tilde{P}\tilde{z} = 0. \quad (2.34)$$

Дополнительная гипотеза приводит к формуле

$$u = -R^{-1}B^T [\tilde{P}x^{(1)} - [(A - B\tilde{K})^T]^{-1}P\mu f(x^{(0)}, -\tilde{K}x^{(0)}, t)]. \quad (2.35)$$

Остается сделать еще один шаг в направлении упрощения и учесть, что отклонения истинной траектории от  $x^{(0)}$  имеют порядок  $\mu$ , а отклонения от  $x^{(1)}$  — порядок  $\mu^2$ . Поэтому с точностью до  $\mu^2$  можно перейти от (2.35) к закону управления

$$u = -\tilde{K}x + \mu K^{(1)}f(x, -\tilde{K}x, t), \quad (2.36)$$

где

$$K^{(1)} \triangleq R^{-1}B^T \{(A - B\tilde{K})^T\}^{-1}\tilde{P}. \quad (2.37)$$

Закон (2.36) уже имеет форму нелинейного закона управления с обратной связью по текущим измерениям переменных состояния. Строгий асимптотический анализ его эффективности при больших  $t_f - t_0$  не проведен, однако ясно по крайней мере, что при постоянных  $A, B$  устойчивость в «малом» положения равновесия автономной системы, управляемой по закону (2.36), гарантирована.

**Пример 2.3.** Пусть материальная точка движется в среде со слабым нелинейным сопротивлением. Ее скорость  $v$  меняется в соответствии с уравнением

$$\dot{v} = -\mu v^2 \operatorname{sign} v + u, \quad v(0) = v^0,$$

где  $u$  — управляемая часть ускорения.

Требуется выбрать закон управления, обеспечивающий процесс торможения на отрезке  $t \in [0, T]$ , оптимальный по критерию

$$\int_0^T (q^2 v^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$$

Составим приближенное решение согласно (2.36). В данном случае  $P$  — скаляр, удовлетворяющий уравнению Риккати при  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $R = 1$ , так что  $\tilde{P} = q$ ,  $\tilde{K} = \tilde{P} = q$ ,  $K^{(1)} = -1$ , и окончательно имеем

$$u = -qv + \mu v^2 \operatorname{sign} v.$$

При использовании такого управления изменение скорости подчиняется линейному уравнению

$$\dot{v} + qv = 0.$$

Таким образом, субоптимальное управление эквивалентно введению линейного сопротивления и компенсации нелинейного.

В таблице показана зависимость относительной потери по функционалу

$$\delta_J = \frac{J_{\text{пр}} - J_{\text{опт}}}{J_{\text{опт}}}$$

связанной с применением такого управления по сравнению с оптимальным\*):

$\mu$	0,1	0,3	0,5	1,0	$a = 1, T = 10$
$\delta_J$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	

Ясно, что точность приближенного закона вполне приемлема вплоть до отнюдь не малого  $\mu = 1$ .  $\square$

**2.5. Гипотеза о малости отклонений от программы.** Эта гипотеза близка по смыслу к гипотезе слабой нелинейности, но ей может быть придана более универсальная форма.

Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.38)$$

с «гладкой» нелинейностью.

Пусть известно, что начальные условия могут выбираться только из малой окрестности некоторой точки  $\bar{x}^0$ .

Тогда возможна следующая схема:

а) рассчитать оптимальную программную траекторию, исходящую из точки  $\bar{x}^0$ ;

б) постулировать, что малость начальных отклонений гарантирует малость отклонений при всех  $t \in [t_0, t_f]$ ;

в) линеаризовать в окрестности программной траектории уравнения объекта и преобразовать функционал с сохранением слагаемых 2-го порядка малости относительно  $\delta x(t)$ ,  $\delta u(t)$ .

Если исходный функционал был квадратичным, а на управление не налагалось явных ограничений, то соответствующая задача окажется стандартной линейно-квадратичной задачей относительно неизвестных  $\delta x(t)$ ,  $\delta u(t)$ , для которой можно найти решение в виде

$$\delta u(t) = -K(t)\delta x(t). \quad (2.39)$$

Эту формулу можно рассматривать как выражение обратной связи

\* Рассчет здесь и в П.2.4 проводился А. А. Сухановым, причем для поиска оптимального управления использовался метод решения краевой задачи принципа максимума, описанный им в [9.20].

по отклонениям от программы. Поскольку сама программа зависит от начального условия  $x^0$ , то и  $K(t)$  также зависит от  $x^0$ .

Несмотря на самое широкое распространение, описанная схема не имеет строгого обоснования даже в асимптотическом смысле. Можно лишь подозревать, что если управление (2.39) имеет стабилизирующий характер, т. е. обеспечивает сближение возмущенной и порождающей траекторий, то метод применим. Напомним, что в этом и состоит эвристическое существо применения линейно-квадратичного подхода к решению реально нелинейных задач. Гладкость нелинейностей и отсутствие явных ограничений на управление или фазовые координаты являются здесь обязательным условием.

Вместе с тем представляет большой практический интерес следующий частный случай. Пусть система линейна, функционал квадратичен, но на управление (для простоты, скалярное) наложено ограничение.

Требуется решить задачу

$$\min \left\{ \int_0^T [x^T Q x + u^2] dt / \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x^0, |u(t)| \leq u_0 \right\}.$$

Как было указано в § 3 гл. 9, явного выражения оптимального управления получить не удается. Пусть, однако, допустимы лишь малые начальные отклонения от желаемого состояния  $\bar{x}(0) = 0$ . Обозначим их  $\mu \bar{x}^0$  и введем новые переменные, полагая  $x(t) = \mu \bar{x}(t)$ ,  $u(t) = \mu \bar{u}(t)$ , считая тем самым, что малы и отклонения от нуля по всей траектории. В новых переменных задача принимает почти такой же вид:

$$\min \left\{ \mu^2 \int_0^T [\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + \bar{u}^2] dt / \dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B \bar{u}, \bar{x}(0) = \bar{x}^0, |\bar{u}(t)| \leq \frac{u_0}{\mu} \right\}.$$

Очевидно вместе с тем, что при малых  $\mu$  ограниченностью управления можно пренебречь и решать стандартную ЛК-задачу, получая при  $\mu = 0$   $\bar{u}(t) = -K_{\text{опт}} \bar{x}(t)$ . Иначе говоря, показано, что линейное приближение является решением порождающей задачи. Следующее приближение позволит учесть ограничение

$$\bar{u}^{(1)}(t) = \begin{cases} \mu^{-1} u_0, & K_{\text{опт}} \bar{x}(t) > \mu^{-1} u_0, \\ -K_{\text{опт}} \bar{x}(t), & |K_{\text{опт}} \bar{x}(t)| \leq \mu^{-1} u_0, \\ -\mu^{-1} u_0, & K_{\text{опт}} \bar{x}(t) < \mu^{-1} u_0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем закон управления в виде *усеченного линейного закона*

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & K_{\text{опт}} x(t) > u_0, \\ -K_{\text{опт}} x(t), & |K_{\text{опт}} x(t)| \leq u_0, \\ -u_0, & K_{\text{опт}} x(t) < u_0. \end{cases}$$

который можно рассматривать как разумное приближение к оптимальному закону управления. Хотя опять-таки асимптотические оценки отсутствуют, эффективность приближения несомненна, о чем, в частности, свидетельствует следующий пример.

**Пример 2.4.** Рассмотрим задачу

$$\min \left\{ \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt / x_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = 0, |u(t)| \leq u_0 \right\}.$$

Для этой задачи было найдено оптимальное значение функционала численным методом с высокой точностью и значение, соответствующее приближенному закону управления. Относительная погрешность  $\delta_J$ , указана в таблице (расчет велся при  $T = 15,55$ )

$x_1^0/u_0$	1	10	15	20	30	50	100	1000
$\delta_J$	0	$7 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0,17	$9 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0

Результаты демонстрируют поразительную эффективность, и притом не только при малых отклонениях — почти во всем диапазоне начальных условий погрешность практически несущественна.  $\square$

**2.6. Гипотеза о разных скоростях изменения переменных состояния.** Эта гипотеза формализуется в виде следующего описания объекта (см. § 3 гл. 8):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(z)x + B(z)u + \mu f_x(x, z, u), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{z} &= \mu f_z(z, x, u), \quad z(0) = z^0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $\mu$  — малый параметр. При  $\mu = 0$  имеем порождающее решение

$$\tilde{z}(t) = z^0 = \text{const}, \quad \tilde{x} = A(z^0)\tilde{z} + B(z^0)u, \quad x(0) = x^0,$$

Решив задачу оптимизации, например, по квадратичному критерию для линейной порождающей системы, получаем для нее управление в виде обратной связи

$$\tilde{u}(t) = -K(t, z^0)\tilde{x}(t).$$

После этого в качестве управления для исходной системы кажется приемлемым взять закон

$$u(t) = -K[t, z(t)]x(t), \quad (2.41)$$

где вместо постоянного параметра  $z^0$  введен наблюдаемый медленно меняющийся процесс  $z(t)$ , а вместо решения порождающей системы  $\tilde{x}(t)$  — наблюдаемое состояние.

Конечно, этот результат относится к числу наиболее рискованных эвристик. Для того чтобы продемонстрировать возникающие

здесь опасности, приведем результаты строгого асимптотического анализа для более частного класса задач.

**2.7. Гипотеза квазистатичности для непрерывных систем.** Рассмотрим задачу управления системой

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x^0, \quad (2.42)$$

где управление выбирается с целью минимизации показателя

$$J\{u\} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} g_0(x, u) dt. \quad (2.43)$$

Если интерпретировать  $g_0(x, u)$  как интенсивность текущих затрат, то показатель (2.43) определяет среднее значение затрат за время работы системы.

Сначала проведем «правдоподобные» рассуждения.

Предположим, что при любом постоянном управлении  $u(t) = \tilde{u} = \text{const}$  с допустимыми значениями в объекте устанавливается стационарный режим  $\tilde{x} = \text{const}$ , удовлетворяющий статической связи

$$f(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Будем также считать, что время практического установления  $\tilde{t}$  много меньше времени, на котором оценивается работа системы, т. е.

$$\frac{\tilde{t}}{t_f - t_0} = \mu \ll 1.$$

Перейдем в (2.42), (2.43) к безразмерному времени

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0}.$$

Тогда получим

$$\mu \frac{dx}{d\tau} = \tilde{t}f(x, u), \quad J\{u\} = \int_0^1 g_0[x(\tau), u(\tau)] d\tau. \quad (2.45)$$

В качестве разумного приближения можно принять  $\mu = 0$ , т. е. решать задачу минимизации

$$J\{u\} = \int_0^1 g_0(\tilde{x}, \tilde{u}) dt$$

при статической связи (2.44), что эквивалентно решению задачи

$$\min_{u \in U} \{g_0(\tilde{x}, \tilde{u}) / f_0(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0\}. \quad (2.46)$$

Если  $\tilde{u}(\tilde{x})$  есть значение  $u$ , доставляющее в (2.46) минимум при  $\tilde{x}$ , рассматриваемом как параметр, то, опять-таки предполагая близость истинной траектории  $x(t)$  к  $\tilde{x}$  в течение почти всего времени

работы системы, можно принять  $u = \tilde{u}(x)$  в качестве закона управления, претендующего на близость к оптимальному.

Эти типичные для предшествующего изложения «правдоподобные» рассуждения можно в некоторых ситуациях строго обосновать\*).

**Теорема 2.1** [10.3]. Пусть  $g_0(x, u)$  выпукла по  $x$  и  $u$  и удовлетворяет условию Липшица на любых ограниченных множествах. Пусть система описывается линейным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f_0, \quad (2.47)$$

где  $A, B, f_0$  постоянны, причем  $A$  гурвицева. Пусть  $\tilde{u}, \tilde{x}$  — решение статической задачи

$$\min \{g_0(x, u)/Ax + Bu + f_0 = 0, u \in U\}. \quad (2.48)$$

Тогда на любом кусочно-непрерывном управлении  $u(t)$  со значениями из выпуклого ограниченного множества  $U$ , удовлетворяющем условию

$$\frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} u(t) dt = \tilde{u}, \quad (2.49)$$

и, в частности, на постоянном управлении  $u(t) = \tilde{u}$  значение функционала (2.43) отличается от оптимального не более чем на  $O(\mu)$ . ■

Теорема показывает, что для линейно-выпуклых задач переход к статике дает управление, обеспечивающее почти оптимальное значение показателя «средних затрат» на большом отрезке времени.

Казалось бы, имеется прочное обоснование для описанной общей эвристики. Однако, вообще говоря, недопустимо переносить по аналогии частные результаты на общую ситуацию. Убедимся в этом на простом контрпримере.

**Контрпример.** Пусть объект описывается скалярным управлением

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = x^0,$$

и требуется минимизировать

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt$$

при  $T \gg 1$ . Допустимыми являются управление, принимающие только одно из двух значений  $\pm 1$ .

Если исходить из статического приближения, то управление должно обеспечивать

$$\min \{x^2 / -x + u = 0, u = \pm 1\}.$$

\* ) Дальнейшие теоремы 2.1—2.3 установлены В. Г. Гайцгори.

Очевидно, что оба допустимых значения равносильны и дают при больших  $T$  одно и то же значение функционала

$$J_{ct} \cong 1.$$

Однако заметим, что одно из условий Т.2.1 не выполнено: множество  $U$  допустимых значений управления не является выпуклым.

Попробуем использовать другое управление  $u(t) = (-1)^k, k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta, k = 0, 1, \dots$ , т. е. кусочно-постоянное управление, периодически переключаемое с одного допустимого значения на другое.

При применении такого управления в системе быстро устанавливается периодический режим. Ясно, что с уменьшением  $\Delta$  размах колебаний  $x(t)$  уменьшается (инерционный объект слабо реагирует на высокочастотное воздействие).

Нетрудно подсчитать, что  $J(u) \sim \Delta$  и  $J(u) \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Таким образом, оптимальным является вовсе не постоянное управление, а управление в скользящем режиме при сколь угодно частых переключениях с одного допустимого значения на другое. □

Ситуацию, описанную в контрпримере, обобщает следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены условия Т.2.1, за исключением того, что множество  $U$  состоит из конечного числа допустимых точек  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Пусть  $\text{conv}[u_1, \dots, u_N]$  — выпуклая оболочка  $U$ , т. е. множество, состоящее из любых точек, представимых в виде

$$u = \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i, \quad (2.50)$$

где  $\lambda_i$  — произвольные неотрицательные числа такие, что

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1. \quad (2.51)$$

Пусть  $\tilde{u}$  — решение задачи

$$\min \{g_0(x, u)/Ax + Bu + f_0 = 0, u \in \text{conv}[u_1, \dots, u_N]\}. \quad (2.52)$$

Тогда асимптотически (при  $t_f - t_0 \rightarrow \infty$ ) оптимальным в задаче (2.43), (2.47) является скользящий режим управления, при котором для любого конечного  $\Delta > 0$  обеспечивается условие

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta u(t) dt = \tilde{u}. \quad ■$$

Невыпукłość задачи часто приводит к тому, что оптимальным установившимся режимом является не режим  $x = \text{const}$ ,  $u = \text{const}$ , а периодический или даже более сложные режимы.

**Теорема 2.3.** Пусть разыскивается управление  $u(t)$  со значениями в ограниченном  $U$ , минимизирующее показатель (2.43) на

траекториях системы

$$\dot{x} = Ax + f(u), \quad \dot{x}(0) = x^0.$$

Пусть  $g_0(x, u)$  удовлетворяет условиям Липшица на ограниченных множествах. Тогда асимптотически оптимальным (с точностью до  $O\left(\frac{1}{t_f - t_0}\right)$  по значению показателя) является периодическое управление

$$u(t) = u(t + T_0), \quad u(t) = \tilde{u}(t), \quad t \in [0, T_0], \quad (2.53)$$

если и только если  $T_0$  и  $\tilde{u}(t)$  являются решением задачи периодической оптимизации

$$\min \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T g_0(x, u) dt / \dot{x} = Ax + f(u), u(t) \in U, x(0) = x(T) \right\}. \blacksquare \quad (2.54)$$

Отметим, что в задаче периодической оптимизации начальное значение  $x(t)$  не фиксировано, а выбирается из условия периодичности.

Конечно, частными случаями решения задачи (2.54) являются и постоянный и скользящий режимы, но возможно и отнюдь не редко, что оптимальным является непостоянное периодическое  $u(t)$  с конечным периодом.

**Пример 2.5.** Пусть минимизируемый показатель качества имеет вид

$$J\{u\} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [\alpha - q^2 y^2 + u^2] dt, \quad (2.55)$$

а  $y(t)$  задается уравнением

$$\ddot{y} + 2n_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u, \quad n_0 \ll \omega_0,$$

т. е.  $y(t)$  является выходом осциллятора с малым демпфированием.

При статическом управлении минимум функционала достигается, если принять  $\tilde{u} = 0$ ,  $\tilde{y} = 0$  (предполагаем, что  $q < \omega_0^2$ ). При этом  $J(\tilde{u}) = \alpha$ . Вместе с тем ясно из вида подынтегрального выражения в  $J\{u\}$ , что функционал будет улучшаться, если будет увеличиваться средняя мощность управляемого процесса.

Если использовать управление вида

$$u(t) = a \cos \omega_0 t,$$

т. е. заставить объект работать в резонансном режиме, то можно добиться больших колебаний на выходе с амплитудой  $\frac{a}{2n_0\omega_0}$  и средней мощностью  $\frac{a^2}{8n_0^2\omega_0^2}$ . Значение функционала (при  $t_f \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ ) легко

вычисляется:

$$J\{u\} = \alpha + \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{q^2}{4n_0^2\omega_0^2} \right).$$

При малом демпфировании получаем улучшение по сравнению со статическим управлением, причем улучшение ограничено только допустимым диапазоном управления.  $\square$

Несмотря на упрощенный характер исходной постановки в примере 2.5, она отражает важную особенность управления многими технологическими процессами, где текущие затраты невыпуклым образом зависят от выходной переменной, а частотная характеристика преобразования «управление — выход» немонотонна, имеет резонансный характер.

В таких случаях выгодно не стабилизировать объект, а заставить его работать в резонансном режиме. Этого можно добиться и периодическим программным управлением и с помощью обратной связи, переводящей объект в режим автоколебаний (в П.2.5 можно, например, взять  $u = ky^2\dot{y}$ ,  $k > 0$ ).

В заключение подчеркнем, что к правильному результату в примере мы вновь пришли из «правдоподобных» эвристических соображений, однако эта эвристика основывалась на более четком понимании особенностей задачи (с формальным рассмотрением проблемы оптимальных периодических управлений можно познакомиться, например, по работе [10.10], хотя результаты можно получить и самостоятельно, используя общую методику принципа максимума).

### § 3. Управление при недетерминированных внешних возмущениях

**3.1. Оптимизация по ожидаемому и гарантированному результату.** Сохранив в основном постановку задачи управления дискретной системой, принятую в § 1, внесем в нее один новый элемент. Будем считать, что описание объекта дано в виде \*)

$$x[k+1] = F_k(x[k], u[k], w[k]), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

где  $\{w[k]\}$  — априори неизвестная последовательность, которую можно трактовать как внешнее возмущение. Иначе говоря, в описание вносится элемент неопределенности. Даже если фиксированы начальные условия, мы не можем точно предсказать, какой окажется реакция объекта на управляющее воздействие  $\{u[k]\}$ . Пусть показатель качества принят в виде

$$J = \sum_{k=0}^{k_f-1} g_k(x[k+1], u[k]). \quad (3.2)$$

\*) В отличие от § 1, явная зависимость от времени  $k$  функций многих аргументов здесь для удобства отображается индексом.

Очевидно, что нельзя предсказать точно и каким окажется показатель качества, если принято то или иное управление: его значение зависит и от неуправляемого воздействия. Символически запишем

$$J = J\{u, w\}, \quad (3.3)$$

где под  $u$ ,  $w$  подразумеваются совокупности всех значений  $u[k]$ ,  $w[k]$  соответственно. Постановка задачи оптимального выбора управления из условия минимума (или максимума) показателя  $J$ , вообще говоря бессмысленна: управление, наилучшее при одном возмущении, может быть плохим при другом. Фактически мы сталкиваемся с наличием множества показателей качества управления, различных при различных  $w$ . Для четкой постановки задачи оптимизации следует на базе этого множества построить один, сводный показатель. Наиболее часто используются два варианта построения. В первом варианте предполагается заданным множество  $W$ , которому могут принадлежать возмущения  $w$ . Пусть, для определенности, желательно при любых  $w$  выбрать  $u$  так, чтобы  $J\{u, w\}$  принимал наименьшее значение. Тогда при фиксированном  $u$  значение показателя не может быть хуже, чем

$$J_s\{u\} \triangleq \sup_w [J\{u, w\} / w \in W]. \quad (3.4)$$

Иначе говоря,  $J_s\{u\}$  показывает, каково гарантированное значение исходного показателя при заданном  $u$  и любых возможных  $w$ . Поэтому, если в качестве сводного показателя при постановке задачи оптимального выбора управления принимается целевая функция  $J_s\{u\}$ , то говорят об *оптимизации гарантированного результата*.

Во втором варианте дополнительно предполагается, что на  $w$  задана вероятностная мера, или, что то же самое, предполагается, что  $w$  является совокупностью случайных величин  $w[k]$  с реализациями из  $W$ , и известно их совместное распределение вероятностей  $\mathcal{P}_w$ .

Тогда в качестве сводного показателя можно использовать функцию

$$J_e\{u\} = M_w[J\{u, w\}], \quad (3.5)$$

где  $M_w$  означает операцию вычисления математического ожидания. Управление  $u$ , доставляющее наилучшее (минимальное) значение  $J_e\{u\}$ , называют *оптимальным по ожидаемому результату*, или *оптимальным в среднем*.

Подчеркнем, что нельзя указать никаких формальных правил отбора того или иного сводного показателя\*) в конкретной задаче — это дело интуиции постановщика задачи. Вместе с тем очевидно, что невозможно использовать показатель (3.5), если отсутствует априорная информация о вероятностных характеристиках возмущений.

\*) Существует и ряд других способов формирования сводного показателя (см. например, [4.7, гл. 3]).

Дальнейшее рассмотрение проведем в рамках дополнительной гипотезы о *непрогнозируемости* значений  $w[k]$  в различные моменты  $k$ . Если  $w[k]$  — случайные величины, то свойство непрогнозируемости совпадает со свойством независимости этих случайных величин в совокупности\*). Обозначим  $\mathcal{P}_k$  функцию распределения  $w[k]$ ; тогда

$$\mathcal{P}_w = \prod_k \mathcal{P}_k. \quad (3.6)$$

Если для  $w[k]$  задана функция распределения  $\mathcal{P}_k$ , то будем использовать краткое обозначение  $w[k] \in \mathcal{P}_k$ . Если  $w[k]$  не случайны, то непрогнозируемость означает, что знание конкретных значений, которые приняли возмущения  $k < \tau$ , не дает никакой дополнительной информации о возможных значениях  $w[k]$  при  $k \geq \tau$ . Пусть  $W_k$  — множество возможных значений  $w[k]$ . Тогда множество  $W$  возможных значений всей совокупности  $\{w[k]\}$  есть произведение  $W_k$ .

Примем, как и в § 2, предположение, что в любой момент  $\tau$  от датчиков информации поступает значение вектора  $x[\tau]$ . Строго говоря, этот вектор может быть назван вектором состояния объекта, только если выполнена гипотеза о непрогнозируемости возмущений. В противном случае знание предшествующих значений  $x[k]$ ,  $k < \tau$ , могло бы улучшить прогноз будущих значений возмущений, а следовательно, и поведения объекта. Часто говорят, что из непрогнозируемости следует *марковость* описания объекта (см. § 4).

Таким образом, класс возможных законов управления с обратной связью может быть ограничен функциями  $u_k(x[k])$  со значениями из заданных множеств  $U_k$ . Оптимальным законом управления назовем такую функцию  $u_k^*(x[k])$ , для которой соответствующий сводный показатель достигает наилучшего (минимального) значения при любых начальных состояниях  $x[0]$ . Подчеркнем, что это значение, вообще говоря, лучше, чем достижимое при любой возможной программе управления, т. е. заранее (без использования текущей информации) построенной последовательности  $\{u[k]\}$ , даже если известно  $x[0]$ . Это достоинство обратной связи при управлении в условиях неполной определенности подчеркивалось в течение всего курса.

**3.2. Уравнения динамического программирования.** Для построения оптимальных законов управления с обратной связью в принципе возможно использовать метод динамического программирования, детерминистский вариант которого был описан в § 1.

По аналогии введем в рассмотрение функции двух типов:

$$A. \mathcal{B}_\tau(x) \triangleq \min_u [\varphi_g^\tau(x, u[k], k \geq \tau) / u[k] \in U_k, k \geq \tau], \quad (3.7)$$

$$B. \mathcal{B}_\tau(x) \triangleq \min_u [\varphi_e^\tau(x, u[k], k \geq \tau) / u[k] \in U_k, k \geq \tau], \quad (3.8)$$

\*) Часто используется также термин «дискретный белый шум».

где

$$\varphi_g^{\tau} = \sup_w \left\{ \sum_{k=\tau}^{k_f-1} g_k(x[k+1], u[k]) / w[k] \in W_k, \quad k \geq \tau \right\}, \quad (3.9)$$

$$\varphi_e^{\tau} = M_w \left\{ \sum_{k=\tau}^{k_f-1} g_k(x[k+1], u[k]) / w[k] \in \mathcal{P}_k(w), \quad k \geq \tau \right\}. \quad (3.10)$$

В обоих вариантах предполагаем, что величины  $x[k]$  вычислены в силу (3.1), начиная с  $x[\tau] = x$ , где  $x$  — произвольный параметр.

В точности повторяя рассуждения из § 1, можно прийти к рекуррентным соотношениям:

$$A. \quad \mathcal{B}_{\tau}(x) = \min_{u \in U_{\tau}} \sup_{w \in W_{\tau}} \{g_{\tau}[F_{\tau}(x, u, w), u] + \mathcal{B}_{\tau+1}[F_{\tau}(x, u, w)]\}, \quad (3.11)$$

$$B. \quad \mathcal{B}_{\tau}(x) = \min_{u \in U_{\tau}} M_w \{g_{\tau}[F_{\tau}(x, u, w), u] + \mathcal{B}_{\tau+1}[F_{\tau}(x, u, w)]\}. \quad (3.12)$$

Оба уравнения одинаковы по структуре и отличаются лишь заменой операции вычисления верхней грани по множеству возможных значений возмущения (в текущий момент  $\tau$ ) на операцию усреднения по этому множеству с учетом заданной функции распределения.

В обоих вариантах можно принять одинаковое граничное условие

$$\mathcal{B}_{k_f}(x) = 0, \quad (3.13)$$

отталкиваясь от которого, производится рекуррентный пересчет.

Находимое на каждом шаге рекуррентции оптимизирующее управление  $u_{\tau}^*$  зависит от произвольно заданного на уровне  $x$  состояния в момент  $\tau$ , а следовательно, решение может рассматриваться как оптимальный закон управления с обратной связью по состоянию, которое, как предполагалось, точно измеряется:

$$u_{\tau}^* = u_{\tau}^*(x) = u_{\tau}^*(x[\tau]). \quad (3.14)$$

Задачи, в которых рекуррентная процедура осуществима в аналитической форме, можно пересчитать по пальцам. Приведем классический содержательный

**Пример 3.1.** Управление запасом при неопределенном спросе \*). Пусть скалярная величина  $x[k]$  обозначает запас продукта на складе в начале такта  $k$ ,  $w[k]$  — объем спроса,  $u[k]$  — объем поставок на такте  $k$ . Тогда

$$x[k+1] = x[k] + u[k] - w[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

\*). С углубленным анализом этой проблемы можно познакомиться, например, по книге [4.6, гл. 4].

Предполагаем, что спрос является неотрицательной случайной величиной с известным распределением вероятностей, а объем поставок — управляющее воздействие, причем по смыслу  $u[k] \geq 0$ .

При случайному спросе, вообще говоря, нельзя гарантировать, что  $x[k] \geq 0$ . Условимся, что при  $x[k] > 0$  величина  $x[k]$  имеет смысл количества продукта на складе, а при  $x[k] < 0$  величина  $-x[k]$  имеет смысл долга, который со временем следует погасить. Затраты, связанные с работой склада, определяются оплатой поставок, затратами на хранение и штрафами за задержку в удовлетворении спроса. Примем, что затраты за один такт равны

$$g_k(x[k+1], u[k]) = \lambda u[k] + \begin{cases} h x[k+1], & x[k+1] \geq 0, \\ -v x[k+1], & x[k+1] \leq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

где  $\lambda, h, v$  — заданные положительные коэффициенты, имеющие очевидный смысл.

Требуется минимизировать суммарные (за время  $[0, k_f]$ ) ожидаемые затраты путем выбора закона управления с обратной связью по измерениям запаса.

Принятые предположения позволяют записать для данной задачи соотношение (3.12) в виде

$$\mathcal{B}_{\tau}(x) = \min_{u \geq 0} \{\lambda u + J_{\tau}(y) + M_{w[\tau]} \mathcal{B}_{\tau+1}(y - w[\tau])\},$$

где  $y \triangleq x + u$ ,

$$\begin{aligned} J_{\tau}(y) &\triangleq M_{w[\tau]} \{h \max(x[\tau+1], 0) + v \max(-x[\tau+1], 0)\} = \\ &= M_{w[\tau]} \{h \max(y - w[\tau], 0) + v \max(-y + w[\tau], 0)\} = \\ &= h \int_0^y (y - w) d\mathcal{P}_{w[\tau]}(w) \mathbf{1}(y) + v \int_y^{\infty} (w - y) d\mathcal{P}_{w[\tau]}(w). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что  $J_{\tau}(y)$  являются выпуклыми функциями.

Для последнего такта имеем

$$\mathcal{B}_{k_f-1}(x) = \min_{u \geq 0} \{\lambda u + J_{k_f-1}(y)\} = \min_{u \geq x} \{\lambda u + J_{k_f-1}(y)\} = \lambda x. \quad (3.17)$$

Минимизируемое выражение является выпуклой функцией и достигает минимума либо на границе ( $y = x$ ), либо внутри допустимой области в точке  $y_{k_f-1}^*$ , удовлетворяющей условию

$$J'_{k_f-1}(y_{k_f-1}^*) = -\lambda, \quad y_{k_f-1}^* > x,$$

где приведена операция дифференцирования \*).

\*). Если функция распределения является дифференцируемой, то  $J_{\tau}(y)$  также дифференцируемы.

Таким образом, оптимальное управление на последнем такте дается формулой.

$$u^*[k_f - 1] = \begin{cases} 0, & x[k_f - 1] \geq y_{k_f - 1}^*, \\ -x[k_f - 1] + y_{k_f - 1}^*, & x[k_f - 1] \leq y_{k_f - 1}^*, \end{cases} \quad (3.18)$$

причем

$$\mathcal{B}_{k_f - 1}(x) = \begin{cases} J_{k_f - 1}(x), & x \geq y_{k_f - 1}^*, \\ -\lambda x + \lambda y_{k_f - 1}^* + J_{k_f - 1}(y_{k_f - 1}^*), & x \leq y_{k_f - 1}^*. \end{cases} \quad (3.19)$$

Функция  $\mathcal{B}_{k_f - 1}(x)$  непрерывна и выпукла на всей оси  $x$ .

По индукции можно показать, что все функции  $\mathcal{B}_\tau(x)$ ,  $\tau \leq k_f - 1$ , обладают теми же свойствами.

Действительно, обозначим

$$G_\tau(y) = J_\tau(y) + M_{w[\tau]} \mathcal{B}_{\tau+1}(y - w[\tau]) = J_\tau(y) + \int_0^\infty \mathcal{B}_{\tau+1}(y - w) dP_{w[\tau]}(w). \quad (3.20)$$

Функция  $G_\tau(y)$  является выпуклой, как сумма (интегральная) выпуклых функций.

Поскольку

$$\mathcal{B}_\tau(x) = -\lambda x + \min_{y \geq x} \{\lambda y + G_\tau(y)\},$$

то, повторяя проведенные при  $\tau = k_f - 1$  рассуждения, приходим к установлению выпуклости  $\mathcal{B}_\tau(x)$  по  $x$ , что доказывает справедливость индуктивного предположения.

При этом выявляется и структура оптимального управления на любом такте:

$$u^*[\tau] = \begin{cases} 0, & x[\tau] \geq y_{\tau+1}^*, \\ -x[\tau] + y_{\tau+1}^*, & x[\tau] \leq y_{\tau+1}^*, \end{cases} \quad (3.21)$$

где  $y_{\tau+1}^*$  — корень уравнения

$$G'_\tau(y) = -\lambda.$$

Полученный результат содержательно интерпретируется следующим образом: для каждого момента  $\tau$  существует фиксированный уровень  $y_{\tau+1}^*$ , зависящий только от априорных данных  $\lambda, h, v, P_{w[M]}$ , такой, что если запас на складе выше  $y_{\tau+1}^*$ , то продукт поставляться не должен; в противном случае поставка должна быть такой, чтобы дополнить имеющийся запас до уровня  $y_{\tau+1}^*$ .  $\square$

Вместе с тем закон управления (3.21) является законом типа отрицательной обратной связи по состоянию, представимым кусочно-линейной функцией (рис. 10.3)

$$u^*[\tau] = -f(x[\tau])$$

(обратная связь линейна в пределах допустимой области  $u[\tau] \geq 0$ ).  $\square$

**3.3. Линейно-квадратичная задача.** Рассмотрим далее проблему оптимального управления линейной дискретной системой общего вида

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + w[k], \quad x[0] = x^0, \quad (3.22)$$

где  $x[k]$  — вектор состояния,  $u[k]$  — вектор управлений,  $w[k]$  — вектор возмущений,  $A, B$  — заданные матрицы (возможно, зависящие от  $k$ ). Пусть показатель качества задан в виде (3.2), где

$$g_k(x[k+1], u[k]) = x^T[k+1]Qx[k+1] + u^T[k]Ru[k], \quad (3.23)$$

причем  $Q \geq 0, R > 0$  — заданные матрицы, также, возможно, зависящие от  $k$ .

Предполагаем, что на выбор  $u[k]$  явных ограничений не наложено, а  $w[k]$  является последовательностью взаимно независимых центрированных случайных векторов с известными дисперсионными матрицами  $D_{w[k]}$ .

Уравнение (3.12) может быть записано в виде

$$\mathcal{B}_\tau(x) = \min_u [(Ax + Bu)^T Q (Ax + Bu) + u^T Ru + M_{w[\tau]} \{w^T[\tau] Q w[\tau]\} + M_{w[\tau]} \{\mathcal{B}_{\tau+1}(Ax + Bu + w[\tau])\}]. \quad (3.24)$$

Используем матричное представление

$$M_{w[\tau]} \{w^T[\tau] Q w[\tau]\} = \text{tr} \{D_{w[\tau]} Q\} \triangleq \mu_\tau,$$

и учтем, что это слагаемое не зависит от  $x, u$ .

Для последнего такта имеем

$$\mathcal{B}_{k_f - 1}(x) = \min_u [(Ax + Bu)^T Q (Ax + Bu) + u^T Ru] + \mu_{k_f - 1}.$$

Минимум достигается при

$$u = u^*[k_f - 1] = -K^*[k_f - 1]x,$$

где

$$K^*[k_f - 1] = (B^T Q B + R)^{-1} B^T Q A,$$

так что

$$\mathcal{B}_{k_f - 1}(x) = x^T P[k_f - 1] x + \mu_{k_f - 1},$$

где

$$P[k_f - 1] = (A^*[k_f - 1])^T Q A^*[k_f - 1] + (K^*[k_f - 1])^T R K^*[k_f - 1],$$

$$A^*[k_f - 1] \triangleq A - B K^*[k_f - 1].$$

По аналогии можно предположить, что для любого  $k$

$$\mathcal{B}_k(x) = x^T P[k] x + \pi[k], \quad (3.25)$$

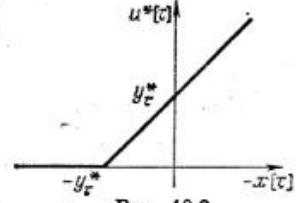


Рис. 10.3

где матрицы  $P[k]$  и скаляры  $\pi[k]$  должны быть соответствующим образом подобраны. Это предположение легко проверить с помощью (3.24). Если оно верно для  $k = \tau + 1$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\tau(x) = \min_u & \{(Ax + Bu)^T(Q + P[\tau + 1])(Ax + Bu) + u^T Ru\} + \\ & + \mu_\tau + \text{tr}\{D_{w[\tau]}P[\tau + 1]\} + \pi[\tau + 1], \quad (3.26) \end{aligned}$$

так что минимум достигается при

$$u = u^*[\tau] = -K^*[\tau]x, \quad (3.27)$$

где

$$K^*[\tau] = [B^T(Q + P[\tau + 1])B + R]^{-1}B^T(Q + P[\tau + 1])A, \quad (3.28)$$

и, как и предполагалось, верно (3.25) при  $k = \tau$ , причем

$$P[\tau] = (A^*[\tau])^T(Q + P[\tau + 1])A^*[\tau] + (K^*[\tau])^T R K^*[\tau],$$

$$A^*[\tau] \triangleq A - BK^*[\tau], \quad (3.29)$$

$$\pi[\tau] = \pi[\tau + 1] + \text{tr}\{D_{w[\tau]}(Q + P[\tau + 1])\}. \quad (3.30)$$

Таким образом, установлено, что

а) оптимальным является линейный закон управления (3.27) с обратной связью по измерениям текущего состояния  $x = x[\tau]$ ;

б) коэффициенты усиления  $K^*[\tau]$  могут быть вычислены по априорным данным с помощью рекуррентных соотношений (3.28), (3.29), в которых можно принять  $P[k_0] = 0$ ,  $\pi[k_0] = 0$ ;

в) значения  $P[\tau]$ ,  $K^*[\tau]$  не зависят от характеристик возмущения;

г) наличие случайных, непрогнозируемых возмущений проявляется лишь в ухудшении оптимального значения функционала на величину  $\pi[0]$ , определяемую только дисперсионными матрицами, независимо от формы закона распределения.

Это практически важные выводы. Стоит отметить, что они могут быть получены и более простым путем, как это делалось в гл. 7 для стационарной дискретной задачи или в гл. 6, § 8, для непрерывного аналога нестационарной.

Вместе с тем следует подчеркнуть их эвристическую ценность. Поскольку закон управления (3.27) оказался тем же самым, что и в соответствующей детерминированной ЛК-задаче, то можно попытаться строить субоптимальные управлениа и для вероятностных задач другого типа (не являющихся линейно-квадратичными!), принимая за основу закон управления с обратной связью, найденный опять-таки в детерминированной задаче. Для ряда проблем (см., например, [6.6]) этот прием оказывается исключительно удачным, по крайней мере, если случайные возмущения ограничены и имеют малую дисперсию.

#### § 4. Управление с обратной связью по неточным измерениям

**4.1. Оценка состояния.** Откажемся от гипотезы о том, что в каждый момент может быть получена точная информация о состоянии объекта, и будем далее считать, что результаты измерения искажены случайными помехами. Пусть описание объекта дано рекуррентными соотношениями

$$x[k+1] = F_k(x[k], u[k]) + w[k], \quad x[0] = x^0, \quad (4.1)$$

где  $\{w[k]\}$  — последовательность взаимно независимых случайных (векторных) величин, дискретный белый шум,  $F_k(\cdot)$  — известные функции \*). Пусть результаты измерения связаны с состоянием объекта уравнениями

$$y[k] = \Phi_k(x[k]) + N[k], \quad (4.2)$$

где  $\Phi_k(\cdot)$  — известные функции, а  $\{N[k]\}$  — последовательность случайных величин, независимых в совокупности и не зависящих от возмущений  $w[k]$ .

Дополнительно предполагается, что заданы функции распределения возмущений  $\mathcal{P}_{w[k]}$ , помех  $\mathcal{P}_{N[k]}$  и начального состояния  $\mathcal{P}_{x[0]}$  (начальное состояние считается случайным и независимым от  $\{w[k]\}$ ,  $\{N[k]\}$ ).

Выбор управления  $u[\tau]$  в любой момент  $\tau$  может строиться только на основе априорной информации и результатов измерений, полученных к этому моменту:

$$y^{(\tau)} = \{y[0], y[1], \dots, y[\tau]\},$$

так что любой закон управления с обратной связью должен представлять собой уравнение вида

$$u[\tau] = u_\tau(y^{(\tau)}), \quad \tau = 0, 1, \dots, \quad (4.3)$$

где  $u_\tau(\cdot)$  — некоторые функции.

Оставив пока в стороне вопрос о том, как выбрать эти функции наилучшим образом, займемся вспомогательной проблемой *наилучшей оценки состояния* системы (4.1), замкнутой обратной связью типа (4.3), по результатам измерений (4.2).

С этой целью попытаемся найти выражения для условных распределений вектора состояния  $x[\tau]$  после получения набора результатов измерений  $y^{(\tau)}$ ,  $\mathcal{P}_{x^{(\tau)}}(x/y^{(\tau)})$  или соответствующих условных плотностей  $p_{x^{(\tau)}}(x/y^{(\tau)})$ . Для сокращения записи примем

\*) Описание объекта несколько упрощено по сравнению с § 3. В более полном и общем виде материал, излагаемый в этом параграфе, можно найти в книге [10.1].

обозначения\*)

$$p_{x[\tau]}(x/y^{(\tau)}) \triangleq p(x[\tau]/y^{(\tau)}) \triangleq p_x, \quad p_{x[0]}(x) \triangleq p(x[0]). \quad (4.4)$$

**Теорема 4.1.** Условные плотности вероятности состояния системы (4.1)–(4.3) подчиняются рекуррентному соотношению

$$p_{\tau+1} = \frac{\int p_{\tau} h(x[\tau], x[\tau+1]) dx[\tau]}{\int \int p_{\tau} h(x[\tau], x[\tau+1]) dx[\tau] dx[\tau+1]}, \quad \tau = 0, 1, \dots, \quad (4.5)$$

а

$$h(x[\tau], x[\tau+1]) = p_{w[\tau]}(x[\tau+1] - F_{\tau}(x[\tau], u[\tau])) \times \\ \times p_{N[\tau+1]}(y[\tau+1] - \Phi_{\tau+1}(x[\tau+1])), \quad (4.6)$$

а

$$p_0 = \frac{p(x[0]) p_{N[0]}(y[0] - \Phi_0(x[0]))}{\int p(x[0]) p_{N[0]}(y[0] - \Phi_0(x[0])) dx[0]}. \quad (4.7)$$

**Доказательство.** Напомним некоторые формулы теории вероятностей, необходимые для оперирования с условными плотностями (см., например, [48]). Пусть  $a, b, c$  — три взаимосвязанных случайных величины. Обозначим плотность их совместного распределения  $p(a, b, c)$ , распределения  $a$  и  $b$  при фиксированном  $c$  через  $p(a, b/c)$ , распределения  $a$  при фиксированных  $b$  и  $c$  через  $p(a/b, c)$  и т. д.

Тогда нам понадобятся три формулы:

$$p(a, b/c) = p(b/c) p(a/b, c) \quad (4.8)$$

(формула следует из определения условной вероятности),

$$p(a/c) = \int p(b/c) p(a/b, c) db \quad (4.9)$$

(формула получается путем интегрирования (4.8) по всем возможным значениям  $b$ ),

$$p(a/b) = \frac{p(a) p(b/a)}{\int p(a) p(b/a) da}. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) называется *формулой Байеса* и вытекает из тождества

$$p(a/b)p(b) = p(b/a)p(a) = p(a, b). \quad (4.11)$$

Очевидным обобщением (4.10) является следующая формула:

$$p(a/b, c) = \frac{p(a/c) p(b/a, c)}{\int p(a/c) p(b/a, c) da}. \quad (4.12)$$

С помощью приведенных формул построим рекуррентное соотношение для плотностей  $p(x[\tau]/y^{(\tau)})$ .

Пусть задана  $p(x[\tau]/y^{(\tau)})$ . Из уравнения объекта (4.1) следует, что

$$p(x[\tau+1]/x[\tau], u[\tau]) = p_{w[\tau]}(x[\tau+1] - F_{\tau}(x[\tau], u[\tau])), \quad (4.13)$$

\*) При использовании сокращенных обозначений не следует забывать, что  $x[\tau]$  как аргумент плотности распределения уже не является случайной величиной.

поскольку при фиксированных  $x[\tau]$ ,  $u[\tau]$  величина  $x[\tau+1]$  отличается от  $w[\tau]$  только фиксированным смещением, что приводит к сдвигу аргумента плотности распределения на величину этого смещения. В силу аналогичного соображения получаем из уравнения (4.2), что

$$p(y[\tau+1]/x[\tau+1]) = p_{N[\tau+1]}(y[\tau+1] - \Phi_{\tau+1}(x[\tau+1])). \quad (4.14)$$

Положим в формуле (4.8)

$$a = x[\tau+1], \quad b = y[\tau+1], \quad c = y^{(\tau)}.$$

Тогда

$$p(x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)}) = p(y[\tau+1]/y^{(\tau)}) p(x[\tau+1]/y^{(\tau)}). \quad (4.15)$$

Аналогично имеем

$$p(x[\tau], x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)}) = p(x[\tau]/y^{(\tau)}) \times \\ \times p(x[\tau+1]/x[\tau], y^{(\tau)}) p(y[\tau+1]/x[\tau], x[\tau+1], y^{(\tau)}). \quad (4.16)$$

Учтем далее, что  $u[\tau]$  предполагается функцией от измерений  $y^{(\tau)}$ , и из фиксации  $y^{(\tau)}$  следует фиксация  $u[\tau]$ . Поэтому с использованием (4.13) найдем

$$p(x[\tau+1]/x[\tau], y^{(\tau)}) = p_{w[\tau]}(x[\tau+1] - F_{\tau}(x[\tau], u[\tau])).$$

Равным образом замечаем, что в силу (4.14)

$$p(y[\tau+1]/x[\tau], x[\tau+1], y^{(\tau)}) = p(y[\tau+1]/x[\tau+1]) = \\ = p_{N[\tau+1]}(y[\tau+1] - \Phi_{\tau+1}(x[\tau+1])).$$

Тем самым правая часть (4.16) задана. Интегрируя по переменной  $x[\tau]$ , находим

$$p(x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)}) = \int p(x[\tau], x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)}) dx[\tau], \quad (4.17)$$

а с другой стороны, в силу (4.15)

$$p_{\tau+1} \triangleq p(x[\tau+1]/y^{(\tau+1)}) = \\ = \frac{p(x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)})}{p(y[\tau+1]/y^{(\tau)})} = \frac{p(x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)})}{\int p(x[\tau+1], y[\tau+1]/y^{(\tau)}) dx[\tau+1]}. \quad (4.18)$$

Подставляя в (4.18) выражения (4.17), (4.16), приходим к основной рекуррентной формуле. Начальная плотность  $p_0 = p(x[0]/y[0])$  также находится с помощью формулы Байеса с учетом заданной априорной плотности  $p(x[0])$ . ■

В качестве наилучшей оценки состояния  $x[\tau]$  по результатам измерений  $y^{(\tau)}$  естественно принять наиболее вероятное значение  $x[\tau]$ , т. е. величину, доставляющую максимум по  $x$  условной плотности  $p_x$  при фиксированном  $y^{(\tau)}$ . К сожалению, вычисление такой оценки в общем случае сталкивается с практически непреодолимыми трудностями, ибо в ходе рекуррентного пересчета  $p_x$  требуется проводить интегрирование по  $2n$ -мерной области, причем сохраняя свободными  $k_m$  параметров ( $n$  — размерность  $x$ ,  $m$  — размерность  $y$ ).

**4.2. Фильтр Бьюси — Калмана.** В предположении, что система является линейной, а все случайные факторы имеют нормальное (гауссово) распределение, процедуру построения наилучших оценок состояния удается существенно упростить.

Рассмотрим систему

$$x[k+1] = A[k]x[k] + B[k]u[k] + w[k], \quad x[0] = x^0, \quad (4.19)$$

$$y[k] = C[k]x[k] + N[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.20)$$

где  $A[k]$ ,  $B[k]$ ,  $C[k]$  — заданные матрицы, векторы  $x^0$ ,  $w[k]$ ,  $N[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , случайны и взаимно независимы, а их плотности распределения в силу гипотезы нормальности имеют вид

$$p_{x^0}(x) = c_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_0)^T D_0^{-1} (x - m_0) \right\},$$

$$p_{w[k]}(w) = c_w \exp \left\{ -\frac{1}{2} w^T D_w^{-1} w \right\},$$

$$p_{N[k]}(N) = c_N \exp \left\{ -\frac{1}{2} N^T D_N^{-1} N \right\}.$$

Матрицы  $D_0$ ,  $D_w$ ,  $D_N$  являются матрицами ковариаций соответствующих векторов, причем  $w[k]$ ,  $N[k]$  для простоты предполагаются центрированными, а  $x^0$  имеет математическое ожидание  $m_0$ . Константы  $c_0$ ,  $c_w$ ,  $c_N$  известным образом выражаются через  $D_0$ ,  $D_w$ ,  $D_N$  в силу условий нормировки.

**Теорема 4.2.** Распределение вектора состояния  $x[\tau]$  линейной системы (4.19) при условии, что фиксированы результаты наблюдений  $y^{(\tau)} = [y[0], \dots, y[\tau]]$ , является нормальным, если нормально априорное распределение начальных условий  $x^0$ , а последовательности  $\{w[k]\}$ ,  $\{N[k]\}$  являются нормальными взаимно независимыми белыми шумами.

Наилучшая оценка  $\hat{x}[\tau]$  вектора состояния, совпадающая с его условным математическим ожиданием, может быть вычислена рекуррентно, по мере получения наблюдений, согласно формуле фильтра Бьюси — Калмана

$$\begin{aligned} \hat{x}[\tau+1] &= A[\tau]\hat{x}[\tau] + B[\tau]u[\tau] + \\ &+ L[\tau](y[\tau+1] - C[\tau+1](A[\tau]\hat{x}[\tau] + B[\tau]u[\tau])), \quad \tau = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\hat{x}[0] = D^{-1}[0](D_0^{-1}m_0 + C^T[0]D_N^{-1}y[0]), \quad (4.22)$$

$$L[\tau] = D[\tau+1]C^T[\tau+1]D_N^{-1}, \quad \tau = 0, 1, \dots,$$

а  $D[\tau]$ ,  $\tau = 0, 1, \dots$  — ковариационная матрица ошибок оценивания  $\hat{e}[\tau]$ ,  $\hat{e}[\tau] \triangleq x[\tau] - \hat{x}[\tau]$ , может быть вычислена по априорным данным с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} D^{-1}[\tau+1] &= (A[\tau]D[\tau]A^T[\tau] + D_w)^{-1} + C^T[\tau+1]D_N^{-1}C[\tau+1], \\ &\tau = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$D^{-1}[0] = D_0^{-1} + C^T[0]D_N^{-1}C[0].$$

**Доказательство.** Введем сокращенные обозначения для условных плотностей

$$p_\tau \triangleq p(x[\tau]/y^{(\tau)}), \quad p_{\tau+1/\tau} \triangleq p(x[\tau+1]/y^{(\tau)})$$

и докажем, что они являются нормальными.

Доказательство проведем по индукции. Пусть  $p_\tau$  нормально. Тогда справедливо представление

$$p_\tau = c[\tau] \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x[\tau] - m[\tau])^T D^{-1}[\tau] (x[\tau] - m[\tau]) \right\}, \quad (4.24)$$

где  $m[\tau]$ ,  $D[\tau]$  имеют смысл условных математического ожидания и ковариационной матрицы вектора  $x[\tau]$ , а  $c[\tau]$  — нормировочная константа, зависящая только от  $D[\tau]$ .

Тогда  $x[\tau+1]$  в силу (4.19) является линейной комбинацией нормально распределенных векторов и также нормален, а следовательно, справедливо представление

$$\begin{aligned} p_{\tau+1/\tau} &= c_{\tau+1/\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x[\tau+1] - m[\tau+1/\tau])^T D^{-1}[\tau+1/\tau] \times \right. \\ &\quad \left. \times (x[\tau+1] - m[\tau+1/\tau]) \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $m[\tau+1/\tau]$ ,  $D[\tau+1/\tau]$  имеют смысл условных математического ожидания и ковариационной матрицы вектора  $x[\tau+1]$  при фиксации  $y^{(\tau)}$ .

Поскольку, как и ранее, предполагается, что управление  $u[\tau]$  фиксировано при заданной последовательности наблюдений  $y^{(\tau)}$ , то

$$m[\tau+1/\tau] = A[\tau]m[\tau] + B[\tau]u[\tau], \quad (4.26)$$

а для ковариационных матриц имеет место связь

$$D[\tau+1/\tau] = A[\tau]D[\tau]A^T[\tau] + D_w, \quad (4.27)$$

устанавливаемая точно так же, как это делалось в гл. 7, § 2, для ковариаций безусловных распределений.

Вычислим далее  $p_{\tau+1}$  с помощью формулы Байеса (4.12):

$$\begin{aligned} p_{\tau+1} &\triangleq p(x[\tau+1]/y[\tau+1], y^{(\tau)}) = \\ &= \frac{p(x[\tau+1]/y^{(\tau)}) p(y[\tau+1]/x[\tau+1], y^{(\tau)})}{\int p(x[\tau+1]/y^{(\tau)}) p(y[\tau+1]/x[\tau+1], y^{(\tau)}) dx[\tau+1]}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Согласно (4.20), имеем

$$y[\tau+1] = C[\tau+1]x[\tau+1] + N[\tau+1],$$

так что при фиксированном  $x[\tau+1]$  вектор  $y[\tau+1]$  распределен нормально с математическим ожиданием  $C[\tau+1]x[\tau+1]$  и ковариацией, совпадающей с ковариацией помехи, т. е.

$$\begin{aligned} p(y[\tau+1]/x[\tau+1]) &= \\ &= c_N \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y[\tau+1] - C[\tau+1]x[\tau+1])^T D_N^{-1} (y[\tau+1] - C[\tau+1]x[\tau+1]) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая (4.25), (4.28), можем записать

$$\begin{aligned} p_{\tau+1} &= c \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((x[\tau+1] - m[\tau+1/\tau])^T D^{-1}[\tau+1/\tau] \times \right. \\ &\quad \times (x[\tau+1] - m[\tau+1/\tau]) + (y[\tau+1] - \right. \\ &\quad \left. \left. - C[\tau+1]x[\tau+1])^T D_N^{-1} (y[\tau+1] - C[\tau+1]x[\tau+1]) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где в  $c$  отнесены все сомножители, заведомо не зависящие от  $x[\tau+1]$  (в том числе, знаменатель представления (4.28)).

Выражение в квадратных скобках равно

$$\begin{aligned} & x^T[\tau+1] \left( D^{-1}[\tau+1/\tau] + C^T[\tau+1] D_N^{-1} C[\tau+1] \right) x[\tau+1] - \\ & - 2x^T[\tau+1] \left( D^{-1}[\tau+1/\tau] m[\tau+1/\tau] + C^T[\tau+1] D_N^{-1} y[\tau+1] \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

с точностью до слагаемых, не зависящих от  $x[\tau+1]$ , а следовательно, с точностью до слагаемых того же типа представимо в виде

$$(x[\tau+1] - m[\tau+1])^T D^{-1}[\tau+1] (x[\tau+1] - m[\tau+1]), \quad (4.31)$$

если выбрать  $m[\tau+1]$ ,  $D[\tau+1]$  из условий тождественного совпадения слагаемых 1-го и 2-го порядка по  $x[\tau+1]$  в (4.30) и (4.31), т. е. принять

$$D^{-1}[\tau+1] m[\tau+1] = D^{-1}[\tau+1/\tau] m[\tau+1/\tau] + C^T[\tau+1] D_N^{-1} y[\tau+1], \quad (4.32)$$

$$D^{-1}[\tau+1] = D^{-1}[\tau+1/\tau] + C^T[\tau+1] D_N^{-1} C[\tau+1]. \quad (4.33)$$

Тем самым доказано, что из нормальности  $p_\tau$  следует нормальность  $p_{\tau+1}$ , причем найдены выражения для  $m[\tau+1]$ ,  $D[\tau+1]$ , имеющих смысл условных математического ожидания и ковариации вектора  $x[\tau+1]$  при фиксированных наблюдениях  $y^{(\tau+1)}$ . Для завершения индукции остается доказать нормальность  $p_0 \triangleq p(x[0]/y[0])$ .

Поскольку

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{p(x[0]) p(y[0]/x[0])}{p(y[0])} = \\ &= c[0] \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x[0] - m_0)^T D_0^{-1} (x[0] - m_0) + \right. \\ &\quad \left. + (y[0] - C[0] x[0])^T D_N^{-1} (y[0] - C[0] x[0]) \right\}, \end{aligned}$$

то можно повторить те же преобразования, что и в (4.29), установив и факт нормальности, и формулы:

$$D^{-1}[0] m[0] = D_0^{-1} m_0 + C^T[0] D_N^{-1} y[0], \quad (4.34)$$

$$D^{-1}[0] = D_0^{-1} + C^T[0] D_N^{-1} C[0], \quad (4.35)$$

задающие условные математическое ожидание и ковариацию начального состояния после получения исходного наблюдения  $y[0]$ . Отметим, что (4.34), (4.35) можно рассматривать как частный случай (4.32), (4.33) при  $\tau = -1$ , если формально положить

$$m[0/-1] = m_0, \quad D[0/-1] = D_0.$$

Таким образом, индуктивное предположение доказано, причем получены рекуррентные соотношения для пересчета условных математических ожиданий и ковариаций.

Поскольку плотность нормального распределения  $p_\tau$  достигает максимума в точке  $m[\tau]$ , вектор  $m[\tau]$  является наиболее вероятным значением вектора состояния  $x[\tau]$  после получения наблюдений  $y^{(\tau)}$ , т. е.  $m[\tau]$  является наилучшей оценкой  $\hat{x}[\tau]$  вектора  $x[\tau]$  в смысле данного выше определения.

Остается вывести соотношения (4.21)–(4.23).

Ошибка оценивания  $e[\tau] = x[\tau] - m[\tau]$  является центрированным случайным вектором с матрицей ковариаций  $D[\tau]$ . Из (4.27), (4.33) находим, что

$$D^{-1}[\tau+1] = (A[\tau] D[\tau] A^T[\tau] + D_w)^{-1} + C^T[\tau+1] D_N^{-1} C[\tau+1],$$

а это соотношение совпадает с (4.23).

С другой стороны, из (4.32), (4.33) следует

$$\begin{aligned} m[\tau+1] &= \\ &= D[\tau+1] \left[ (D^{-1}[\tau+1] - C^T[\tau+1] D_N^{-1} C[\tau+1]) m[\tau+1/\tau] + \right. \\ &\quad \left. + C^T[\tau+1] D_N^{-1} y[\tau+1] \right] = m[\tau+1/\tau] + D[\tau+1] C^T[\tau+1] D_N^{-1} (y[\tau+1] - \\ &\quad - m[\tau+1/\tau]), \end{aligned}$$

что приводит к (4.21), (4.22) с учетом (4.26) и определения  $\hat{x}[\tau] = m[\tau]$ . ■

**Замечание 1.** Условное математическое ожидание  $m[\tau]$  является и наилучшей оценкой вектора  $x[\tau]$  в смысле метода наименьших квадратов (МНК). Точнее, если  $Q$  — произвольная положительно определенная матрица, то вектор  $\xi = \xi^*$ , доставляющий минимум функции

$$J_\tau(\xi) \triangleq M \{(x[\tau] - \xi)^T Q (x[\tau] - \xi)/y^{(r)}\},$$

совпадает с  $m[\tau]$ . Действительно, функция  $J_\tau(\xi)$  имеет единственный минимум при  $\xi = \xi^*$ , удовлетворяющем условию экстремума  $\nabla_\xi J_\tau(\xi)|_{\xi=\xi^*} = 0 \Rightarrow Q M \{(x[\tau] - \xi^*)/y^{(r)}\} = 0 \Rightarrow \xi^* = M \{x[\tau]/y^{(r)}\} \triangleq m[\tau]$ .

**Замечание 2.** Если оценка вектора  $x[\tau]$  должна строиться по совокупности предшествующих наблюдений  $y^{(\tau-1)}$ , то наилучшей (в обоих указанных выше смыслах) является оценка  $\hat{x}[\tau]$ , совпадающая с условным математическим ожиданием  $m[\tau/\tau-1]$ . Из (4.26), (4.27), (4.32), (4.33) следует рекуррентное соотношение типа фильтра Бьюси — Калмана, но имеющее несколько другой вид:

$$\hat{x}[\tau+1] = A[\tau] \hat{x}[\tau] + B[\tau] u[\tau] + L[\tau] (y[\tau] - C[\tau] \hat{x}[\tau]), \quad (4.36)$$

где

$$\tilde{L}[\tau] = A[\tau] D[\tau] C^T[\tau] D_N^{-1}, \quad \hat{x}[0] = m_0.$$

Если матрицы  $A$ ,  $C$  постоянны и существует единственное положительно определенное решение уравнения

$$D^{-1} = (ADA^T + D_w)^{-1} + C^T D_N^{-1} C, \quad (4.37)$$

равное  $D_\infty$ , то [3.3]

$$D[\tau] \rightarrow D_\infty, \quad L[\tau] \rightarrow L_\infty = D_\infty C^T D_N^{-1}, \quad \tilde{L}[\tau] \rightarrow \tilde{L}_\infty = AD_\infty C^T D_N^{-1}.$$

Отсюда можно вывести формулы для стационарного фильтра Бьюси — Калмана, приведенные в гл. 7, § 2. Отметим лишь, что матрица ковариаций оценки  $\hat{x}[\tau]$  есть  $D[\tau+1/\tau]$  и ее установившееся

значение связано с  $D_\infty$  соотношениями

$$\tilde{D}_\infty \triangleq \lim_{\tau \rightarrow \infty} D[\tau + 1/\tau] = AD_\infty A^T + D_w = [D_\infty^{-1} + C^T D_N^{-1} C]^{-1}. \quad (4.38)$$

Если  $D_\infty$  удовлетворяет (4.37), то  $\tilde{D}_\infty$  удовлетворяет уравнению

$$\tilde{D} = A(\tilde{D}^{-1} + C^T D_N^{-1} C)^{-1} A^T + D_w, \quad (4.39)$$

которое преобразуется к виду (2.36), указанному в гл. 7, если воспользоваться несложным проверяемым матричным тождеством

$$(\tilde{D}^{-1} + C^T D_N^{-1} C)^{-1} = \tilde{D} - \tilde{D} C^T (D_N + C^T \tilde{D} C)^{-1} C \tilde{D}. \quad (4.40)$$

**4.3. Оптимальные обратные связи.** Вернемся к основной проблеме — построению оптимального управления с обратной связью, т. е. к выбору наилучших функций  $u_\tau(y^{(\tau)})$ .

Пусть исходный показатель качества задан в виде

$$J = \sum_{k=0}^{h_f-1} g_k(x[k+1], u[k]) = \sum_{k=0}^{h_f-1} g_k[F_k(x[k], u[k]) + w[k], u[k]]. \quad (4.41)$$

Ожидаемый результат при применении любого управления  $u[k] = u_k(y^{(k)})$  можно оценить величиной

$$J_e(y^{(h_f-1)}) \triangleq \sum_{k=0}^{h_f-1} M\{g_k[F_k(x[k], u[k]) + w[k], u[k]]/y^{(k)}\} = \\ = \sum_{k=0}^{h_f-1} \int \int g_k[F_k(x[k], u[k]) + w[k], u[k]] p_{x(k)}(x/y^{(k)}) \times \\ \times p_{w(k)}(w) dx dw. \quad (4.42)$$

Подчеркнем, что оценка ведется с учетом полученных к каждому моменту наблюдений и используются плотности и математические ожидания.

В соответствии с общей логикой динамического программирования введем функции  $\mathcal{B}_\tau(y^{(\tau)})$ , определяемые как минимальные значения ожидаемого результата, полученного на интервале  $[\tau, k_f]$  с учетом того, что к началу этого интервала уже известен набор результатов измерений. Действуя по той же схеме, что и в §§ 2, 3, нетрудно построить рекуррентное соотношение

$$\mathcal{B}_\tau(y^{(\tau)}) = \min_{u[\tau]} M\{g_\tau[F_\tau(x[\tau], u[\tau]) + w[\tau], u[\tau]] + \\ + \mathcal{B}_{\tau+1}(y^{(\tau+1)})/y^{(\tau)}\}, \quad \tau = 0, \dots, k_f - 1, \quad (4.43)$$

$$\mathcal{B}_{k_f} = 0.$$

С вычислительной точки зрения это соотношение практически бесполезно, ибо требует вычисления и хранения функций  $\mathcal{B}_\tau$ , аргумент

которых достигает размерности  $mk_f$ . Однако для линейно-гауссовых (ЛГ) проблем с его помощью легко получить важный качественный вывод.

**Теорема 4.3.** В предположениях Т.4.2 функции  $\mathcal{B}_\tau$ , а следовательно, и оптимальные управление  $u^*(\tau)$  зависят от  $y^{(\tau)}$  лишь косвенно, через оценки  $x[\tau]^*$ , т. е.

$$\mathcal{B}_\tau(y^{(\tau)}) = \mathcal{B}_\tau(\hat{x}[\tau]), \quad u^*(\tau) = U^*(\hat{x}[\tau]). \quad (4.44)$$

Доказательство очевидно, поскольку  $y^{(\tau)}$  входят в (4.43) только через условные распределения  $P_{x[\tau]}(x, y^{(\tau)})$ , но таковые, по Т.4.2, являются нормальными и полностью задаются своими средними  $m[\tau] = \hat{x}[\tau]$  и дисперсионными матрицами  $D[\tau]$ . Последние же не зависят от результатов измерений и определяются по априорным данным. ■

Общая структура оптимальной системы управления представлена на рис. 10.4. Она состоит из линейной части, включающей объект, измеритель и фильтр Бьюси — Калмана, а также безынерционного нелинейного преобразователя, вырабатывающего сигнал управления на основе оценок  $m[\tau]$ .

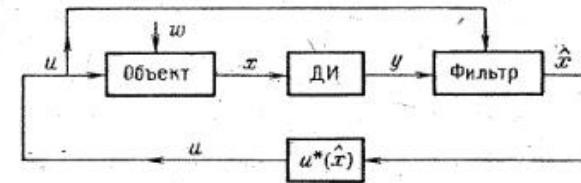


Рис. 10.4

**4.4. Теорема разделения.** В общем случае (при произвольном показателе качества) характеристика безынерционного преобразователя зависит от характеристик случайных факторов. Однако стоит выделить важную ситуацию, когда эта зависимость отсутствует.

**Теорема 4.4 (теорема разделения).** Пусть показатель качества (4.31) является квадратичным

$$g_k(x[k+1], u[k]) = x^T[k+1]Qx[k+1] + u^T[k]Ru[k], \quad (4.45)$$

где  $Q, R$  — заданные симметричные матрицы  $Q \geq 0, R > 0$ , а левые ограничения на  $u[k]$  отсутствуют.

Пусть описание объекта и измерителя удовлетворяет условиям Т.4.2 \*\*). Тогда оптимальное преобразование оценок  $m[\tau]$  в сигнал управления  $u[\tau]$  не зависит от характеристик измерителя и совпа-

\*) Величины с такими свойствами принято называть достаточными статистиками.

\*\*) Задачу оптимального управления, удовлетворяющую условиям Т.4.4, принято называть линейно-квадратично-гауссовой задачей или, сокращенно, ЛКГ-задачей.

дает с оптимальным преобразованием вектора состояния  $x[\tau]$  в  $u[\tau]$ , получаемым при наличии непосредственных точных данных о состоянии.

**Доказательство.** При выполнении условий Т.4.2 соотношение (4.43) можно записать в виде

$$\mathcal{B}_\tau(\hat{x}[\tau]) = \min_u [\bar{g}_\tau(u, \hat{x}[\tau]) + \mathcal{B}_{\tau+1}(u, \hat{x}[\tau])], \quad (4.46)$$

где

$$\bar{g}_\tau = M_{x[\tau]} \{M_{w[\tau]} g_\tau(Ax[\tau] + Bu + w[\tau], u[\tau])/\hat{x}[\tau]\}, \quad (4.47)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_{\tau+1} = M_{N[\tau]} M_{x[\tau]} \{M_{w[\tau]} \mathcal{B}_{\tau+1}(\hat{x}[\tau+1])/\hat{x}[\tau]\}, \quad (4.48)$$

причем в силу (4.19)  $\div$  (4.21) \*

$$\begin{aligned} \hat{x}[\tau+1] &= \hat{A}\hat{x}[\tau] + Bu + \\ &\quad + L[\tau]c[A(x[\tau] - \hat{x}[\tau]) + w[\tau]] + L[\tau]N[\tau+1]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Выпишем подробнее выражение  $\bar{g}_\tau$  с учетом (4.35):

$$\begin{aligned} \bar{g}_\tau &= M_{x[\tau]} \{(Ax[\tau] + Bu)^T Q (Ax[\tau] + Bu)/\hat{x}[\tau]\} + M_{w[\tau]} \{w^T[\tau] Q w[\tau]\} + u^T R u = \\ &= (Ax[\tau] + Bu)^T Q (Ax[\tau] + Bu) + u^T R u + \text{tr}\{D[\tau] A^T Q A + D_w Q\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Сопоставим это выражение с входящим в (3.24) выражением ожидаемых «затрат» за тakt  $\tau$  при точных измерениях  $x[\tau]$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}_\tau(u, x[\tau]) &= \\ &= M_{w[\tau]} \{(Ax[\tau] + Bu + w[\tau])^T Q (Ax[\tau] + Bu + w[\tau]) + u^T R u\} = \\ &= (Ax[\tau] + Bu)^T Q (Ax[\tau] + Bu) + u^T R u + \text{tr}\{D_w Q\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Они совпадают с точностью до замены  $x[\tau]$  на его оценку  $\hat{x}[\tau]$  и появления дополнительного слагаемого, определяемого дисперсионной матрицей  $D[\tau]$ .

Поэтому по аналогии с (3.25) будем разыскивать функцию  $\mathcal{B}_k(\hat{x}[k])$  в виде

$$\mathcal{B}_k(\hat{x}[k]) = \hat{x}^T[k] P[k] \hat{x}[k] + \bar{\pi}[k], \quad (4.52)$$

причем

$$\mathcal{B}_k(\hat{x}[k]) = 0, \quad \bar{\pi}[k] = 0.$$

Если (4.52) верно при  $k = \tau + 1$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau(\hat{x}[\tau]) &= \min_u [\bar{g}_\tau + M \{ \hat{x}^T[\tau+1] P[\tau+1] \hat{x}[\tau+1]/\hat{x}[\tau] \}] + \bar{\pi}[\tau+1]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

С учетом (4.49) имеем

$$\begin{aligned} M \{ \hat{x}^T[\tau+1] P[\tau+1] \hat{x}[\tau+1]/\hat{x}[\tau] \} &= \\ &= (Ax[\tau] + Bu)^T P[\tau+1] (Ax[\tau] + Bu) + \text{tr}\{D_e[\tau] P[\tau+1]\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где  $D_e[\tau]$  — дисперсионная матрица вектора ошибки прогноза

$$\begin{aligned} e[\tau] &\triangleq \hat{x}[\tau+1] - (Ax[\tau] + Bu) = \\ &= L[\tau] C A (x[\tau] - \hat{x}[\tau]) + L[\tau] C W[\tau] + L[\tau] N[\tau+1], \end{aligned}$$

\*). Здесь и далее зависимость матриц  $A, B, C$  от  $\tau$  для краткости опущена.

состоящего из трех центрированных взаимно независимых слагаемых, так что  $M\{e[\tau]\} = 0$ ,  $D_e[\tau] = M\{e[\tau]e^T[\tau]\} =$

$$= L[\tau] C [AD[\tau] A^T + D_w] C^T L^T[\tau] + L^T[\tau] D_N L[\tau], \quad (4.55)$$

Подстановка в (4.53) представлений (4.50), (4.54) дает

$$\mathcal{B}_\tau(\hat{x}[\tau]) = \min_u [(Ax[\tau] + Bu)^T (Q + P[\tau+1]) (Ax[\tau] + Bu) + u^T R u] + \bar{\pi}[\tau], \quad (4.56)$$

где

$$\bar{\pi}[\tau] = \bar{\pi}[\tau+1] + \text{tr}\{D_w Q\} + \text{tr}\{D_e[\tau] P[\tau+1]\}. \quad (4.57)$$

Поскольку (4.56) совпадает с (3.26) с точностью до замены  $x[\tau]$  на  $\hat{x}[\tau]$ , то устанавливаем справедливость индуктивного предположения, а вместе с ним и справедливость формулы

$$u^*[\tau] = -K^*[\tau] \hat{x}[\tau],$$

где  $K^*[\tau]$  дается (3.27), (3.28).

Основное утверждение теоремы доказано. Кроме того, (4.57) показывает, что наличие ошибок измерения приводит к дополнительному ухудшению функционала на величину  $\sum_\tau \text{tr}\{D_e[\tau] P[\tau+1]\}$ . ■

Таким образом, мы, наконец, строго установили справедливость основного утверждения линейной теории, которое без доказательства приводилось в гл. 6 и 7.

Правда, доказательство дано лишь для дискретных систем во избежание формальных сложностей, связанных с понятием белого шума \*).

**4.5. Эвристика.** При решении нелинейных задач приходится прибегать к эвристическим приемам построения обратных связей, в лучшем случае претендующих лишь на субоптимальность. Основная идея проста и содержит два этапа: (а) нахождение субоптимальных оценок состояния, (б) использование субоптимальных алгоритмов управления, описанных в § 2, 3, где вместо точных значений переменных состояния вводятся полученные на этапе (а) оценки.

Иначе говоря, основная идея состоит в перенесении факта, доказанного в теореме разделения для ЛКГ-задач, на общую ситуацию. Важно, однако, понимать, что теорема разделения в общем случае неверна. Даже если оба этапа выполнены оптимально, то полученная в результате их композиции обратная связь, как правило, неоптимальна. Поэтому, вообще говоря, нет и смысла в борьбе за оптимальность оценивания, если эта оценка используется в контуре обратной связи.

Опишем одну из практически полезных эвристических процедур, ориентируясь на непрерывное описание объекта

$$\dot{x} = f(x, u, w(t)) \quad (4.58)$$

и измерителя

$$y = \Phi(x) + N(t). \quad (4.59)$$

\*) Строгое доказательство для систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, можно найти в [6.4].

Возмущение  $w(t)$  будем считать состоящим из двух компонент:

$$w(t) = w_m(t) + w_b(t), \quad (4.60)$$

причем  $w_m(t)$  — медленно меняющаяся компонента, которая становится известной в каждый момент времени с помощью дополнительного датчика, а  $w_b(t)$  — непосредственно не наблюдаемая быстро меняющаяся компонента. Пусть исходный показатель качества задан в виде

$$J = \int_0^T [g_1(x) + g_2(u)] dt. \quad (4.61)$$

Управление строится как обратная связь по измерениям  $y$  и  $w_m$ . Выделим в управлении также медленную,  $u_m(t)$ , и быструю,  $u_b(t)$ , компоненты:

$$u(t) = u_m(t) + u_b(t), \quad (4.62)$$

причем наложим на выбор медленной ограничение

$$f(x_m, u_m, w_m) = 0, \quad (4.63)$$

где  $x_m$  — медленная компонента в таком же представлении состояния:

$$x(t) = x_m(t) + x_b(t), \quad |\dot{x}_m| \ll |\dot{x}_b|. \quad (4.64)$$

В силу уравнений объекта имеет место связь

$$\dot{x}_m + \dot{x}_b = f(x_m + x_b, u_m + u_b, w_m + w_b).$$

При выборе управления заменим ее на линеаризованную. С учетом (4.63), (4.64), получим

$$\dot{x}_b = A_m x_b + B_m u_b + G_m w_b, \quad (4.65)$$

где

$$A_m = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B_m = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad G_m = \frac{\partial f}{\partial w}$$

(здесь и далее все производные вычислены при  $x = x_m$ ,  $u = u_m$ ,  $w = w_m$  и использованы упрощенные обозначения для матриц производных). Произведем также упрощение показателя (4.61), разлагая функции  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  в ряд Тейлора в окрестности  $x = x_m$ ,  $u = u_m$  с удержанием слагаемых 2-го порядка:

$$\begin{aligned} J \simeq & \int_0^T [g_1(x_m) + g_2(u_m)] dt + \int_0^T \left[ \frac{\partial g_1}{\partial x} x_b + \frac{\partial g_2}{\partial u} u_b \right] dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T [x_b^T Q_m x_b + u_b^T R_m u_b] dt, \quad (4.66) \end{aligned}$$

где

$$Q_m = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}, \quad R_m = \frac{\partial^2 g_2}{\partial u^2}.$$

Подчиним выбор  $x_m$ ,  $u_m$  требованию минимума первого слагаемого с учетом ограничения (4.63). Это эквивалентно выбору  $u_m(t)$  из решения в каждый момент  $t$  задачи

$$\min \{g_1(x_m) + g_2(u_m)/f[x_m, u_m, w_m(t)] = 0\}. \quad (4.67)$$

Тем самым  $x_m(t)$ ,  $u_m(t)$  могут быть найдены в каждый момент  $t$ , а вместе с ними вычислены матрицы  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $G_m$ ,  $Q_m$ ,  $R_m$  и матрицы  $\Phi(x_m)$ ,  $C_m$  в линеаризованном описании измерителя

$$y \cong \Phi(x_m) + C_m x_b + N(t), \quad C_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4.68)$$

Предположим далее, что  $w_b(t)$ ,  $N(t)$  — центрированные случайные процессы с заданными спектральными свойствами. Тогда возникает возможность построить линейную обратную связь, обеспечивающую минимум математического ожидания 3-го слагаемого в (4.66), причем математическое ожидание 2-го слагаемого обратится в нуль в силу центрированности  $x_b$ ,  $u_b$ . Во избежание необходимости использовать значения указанных матриц в будущем придется ограничиться приближением, даваемым методом замороженных параметров (гл. 6, § 8). Если считать  $w_b(t)$ ,  $N(t)$  белыми шумами, то линейная обратная связь примет вид

$$u_b = -K_m \hat{x}_b,$$

$$\hat{x}_b = A_m \hat{x}_b + B_m u_b + L_m (y_b - C_m \hat{x}_b), \quad (4.69)$$

$$y_b = y - \Phi(x_m),$$

где матрицы  $K_m$ ,  $L_m$  строятся с помощью решения матричных квадратных уравнений типа Лурье — Рикката по известным в каждый момент матрицам  $A_m$ ,  $B_m$ , ... Если же  $w_b(t)$  имеет дробно-рациональную спектральную плотность, то та же схема требует использования формирующего фильтра. Описанная эвристическая процедура в разных модификациях широко используется на практике. Ее структурная схема в обобщенной форме представлена на рис. 10.5.



Рис. 10.5

Схема включает два уровня управления: «быстрый уровень», обеспечивающий стабилизацию объекта и борьбу с быстрыми возмущениями и помехами, и «медленный уровень», обеспечивающий оптимизацию режима, относительно которого ведется стабилизация \*).

Сделаем три дополнительных замечания, касающиеся практической реализации схемы.

(а) В силу предполагаемой медленности изменения  $w_m(t)$  решение задачи (4.57) может производиться только в те моменты, когда обнаружилось существенное изменение  $w_m(t)$  по сравнению с его значением, принятым в предшествующем решении. При этом зачастую можно упростить пересчет «уставок»  $x_m$ ,  $u_m$ , используя приемы теории возмущений для статических задач оптимизации [6.6, гл. 1, 2] \*\*). В соответствии с этим лишь в отдельные моменты времени должен вестись пересчет параметров  $\Theta_m \triangleq \{A_m, B_m, K_m, L_m\}$  в законе управления с обратной связью по «быстрым переменным».

(б) При технической реализации расчет уставок и параметров по достаточно сложным алгоритмам обычно ведется с помощью управляющей ЭВМ, а выработанные ею сигналы передаются на микро-ЭВМ или аналоговые вычислители, вырабатывающие сигналы управления непрерывно.

При использовании аналоговых вычислителей приходится предусмотреть наличие усилителей с управляемыми от ЭВМ верхнего уровня коэффициентами. Такие вычислители обычно называют регуляторами с автоматической настройкой (*самонастройкой*) параметров \*\*\*).

Зачастую оказываются работоспособными и более простые системы, где параметры регулятора выбираются фиксированными по априорным данным и не меняются в ходе работы системы, хотя изменение самих «уставок» ведется. Следует учесть, что если помехи в измерениях еще более высокочастотны, чем «быстрая» компонента возмущений, приведенная к выходу объекта (отрабатываемый сигнал), то целесообразно применение простых схем расчета, описанных в гл. 3. Иначе говоря, для подавления помех используются произвольные фильтры с малыми постоянными времени, лишь бы они затрагивали только диапазон частот, характерный для помех.

(в) В описанной процедуре не учитывались явные ограничения на допустимый уровень управляющих воздействий типа  $u(t) \in U$ , где  $U$  — заданное множество. При наличии таких ограничений приходится принимать решение о разделении допустимой области на «зоны действия» быстрой и медленной компонент управления.

Вместо условия

$$u_m(t) + u_b(t) \in U$$

ставится условие

$$u_m(t) \in \bar{U} \subset U, \quad (4.70)$$

где  $\bar{U}$  «вписывается» в  $U$  так, чтобы даже при выходе  $u_m(t)$  на границу  $U$  при решении задач (4.67) с добавленным ограничением (4.70) суммарное управление не выходило из  $U$ . Поскольку значение  $u_b(t)$  случайно, то можно требовать лишь малой вероятности выхода. Однако заранее неизвестны даже вероятностные характеристики  $u_b(t)$ . Поэтому задаются лишь априорными оценками дисперсий компонент  $u_b(t)$  и сужают исходную допустимую область, пользуясь правилом «Зо» \*).

Подчеркнем, что описанная выше процедура построения закона управления является чисто эвристической. Какие-либо оценки эффективности такого закона по сравнению с оптимальным отсутствуют, так что было бы неправильным именовать его даже приближенно оптимальным. Вместе с тем эта и подобные эвристические процедуры широко используются. Зачастую, например, можно считать известными начальное состояние и некоторую компоненту возмущения. Тогда первоначально строится программа управления и соответствующая программная траектория из условия минимума (4.61) при ограничении (4.58), где в  $w(t)$  учитывается только известная компонента. После этого производится линеаризация задачи в окрестности программной траектории (в функционале учитываются слагаемые 2-го порядка) и решается задача синтеза дополнительной обратной связи по оценкам отклонений от программы. При наличии явных ограничений на управление вновь возникают описанные выше проблемы сужения допустимой области при построении программы.

\* ) Несколько более полные рекомендации можно дать лишь для конкретных задач (см., например, в [4.7] описание сходной процедуры для задач управления запасами).

\*) Медленные компоненты  $u_m$ ,  $x_m$  в технической литературе часто называют уставками для «быстрого» регулятора.

\*\*) См. также ниже, гл. 11, § 2.

\*\*\*) См., также гл. 11, § 3.

## ГЛАВА II

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
И АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

## § 1. Идентификация объектов управления

**1.1. Существо проблемы.** Исходным пунктом при построении законов управления всегда является математическая модель объекта, позволяющая с той или иной полнотой предсказывать изменение состояния объекта приложении к нему управляющих воздействий. Выше предполагалось, что такая модель заранее построена на основе теоретического исследования объекта с использованием известных физических закономерностей. Однако зачастую, приступая к расчету системы, инженер-исследователь вынужден считаться с тем обстоятельством, что указанные закономерности отсутствуют или по крайней мере в них входят заранее неизвестные параметры (массы, жесткости, коэффициенты теплообмена и т. п.). Вместе с тем сам объект, подлежащий управлению, уже создан и функционирует, причем возможны получение информации о протекающих в нем процессах и иногда даже организация специальных воздействий на объект с целью изменения этих процессов.

Таким образом, имеются наблюдения (экспериментальные данные). Требуется на их основе построить или уточнить математическую модель объекта — такова общая постановка проблемы идентификации.

В столь общем виде задача, как правило, не имеет эффективного решения, и ее целесообразно рассматривать в более простой форме: на основе априорных сведений о природе объекта задана его математическая модель, однако в модель входит набор параметров, значения которых заранее неизвестны и подлежат оценке. В такой суженной формулировке проблема идентификации сводится к проблеме оценивания параметров по экспериментальным данным, систематически изучавшимся в естествознании и математике со времен К. Ф. Гаусса, задолго до появления теории автоматического управления. При этом наиболее важные результаты были получены в рамках математической статистики (см., например, [4.3, 11.10]), где учитывалось, что результаты наблюдения искажаются случайными погрешностями. Развитие теории управления дало новый стимул исследованиям, расширив круг моделей, представляющих

практический интерес. В настоящее время имеется огромная литература, специально посвященная проблеме идентификации (обзоры см., например в [11.12, 11.19, 11.20]). В рамках данного курса мы ограничимся кратким описанием основных подходов и некоторыми примерами.

**1.2. Идентификация статических объектов.** Начнем с простой гипотезы: пусть заранее известно, что состояние объекта  $x[k]$  определяется линейным уравнением

$$x[k+1] = Bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где  $\{w[k]\}$  — внешнее возмущение, а  $\{u[k]\}$  — управляющее воздействие.

Предположим, что матрица  $G$  задана, но матрица  $B$  известна не полностью, а задана с точностью до линейно входящих параметров  $\theta$ , т. е. заданы лишь  $B_0, B_1$  такие, что

$$B = B_0 + B_1\theta. \quad (1.2)$$

Равным образом будем считать, что  $w[k] = \text{const}$ , но известны лишь величины  $w_0, w_1$  такие, что

$$w[k] = w_0 + w_1k. \quad (1.3)$$

Требуется найти значение  $\theta$  параметров, используя данные о наблюдениях выхода

$$y[k] = Cx[k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Матрицу  $C$  также считаем заданной. В силу исходных сведений наблюдения должны быть связаны соотношениями

$$y[k] = \varphi_0[k] + \varphi_1[k]\theta, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0[k] &= CB_0u[k-1] + CGw_0, \\ \varphi_1[k] &= CB_1u[k-1] + CGw_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Предположим сначала, что мы не используем управляющих воздействий,  $u[k] = 0$  (такой эксперимент назовем *пассивным*). Тогда  $\varphi_0[k] = \varphi_0$ ,  $\varphi_1[k] = \varphi$  и все наблюдения окажутся одинаковыми,  $y[k] = y$ . Для определения параметров  $\theta$  имеется только одно уравнение

$$\varphi\theta = y - \varphi_0. \quad (1.7)$$

Это линейное алгебраическое уравнение имеет единственное решение  $\hat{\theta} = \theta$ , только если

$$\text{rank } \varphi = n_\theta, \quad (1.8)$$

где  $n_\theta$  — размерность вектора неизвестных параметров  $\theta$ . В противном случае произвольно взятое решение уравнения (1.7) может оказаться не совпадающим с истинным значением параметров, опре-

деляющих поведение объекта. В частности, если  $y$  — скаляр, а  $\theta$  — двумерный вектор, то из одного скалярного уравнения (1.7) невозможно однозначно определить два неизвестных параметра.

Введение управляющих воздействий (*организация активного эксперимента*) создает новые возможности. Получаемые наблюдения окажутся различными, и для оценки можно использовать решение системы

$$\Phi[k]\theta = y[k] - \Phi_0[k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Если при каком-либо числе наблюдений  $t$  окажется, что

$$\text{rank } \Phi[t] = n_\theta, \quad \Phi[t] = \begin{Bmatrix} \Phi^{[1]} \\ \vdots \\ \Phi^{[t]} \end{Bmatrix}, \quad (1.10)$$

то решение найдется однозначно и эксперимент окажется корректно поставленным. Из сказанного ясна особенность активного эксперимента: в нем возможно «раскачать» объект так, чтобы в измерениях независимо проявлялось влияние всех параметров.

Впрочем, из формул (1.6) видно, что тот же результат может быть достигнут и в пассивном эксперименте, если возмущение *переменно* и его компонента  $w[k]$  такова, что условие (1.10) выполнено. В этом случае говорят, что возмущение *достаточно разнообразно* для достижения цели идентификационного эксперимента.

**Пример 1.1.** Пусть

$$y[k+1] = x[k+1] = Bu[k] + Gw, \quad (1.11)$$

где  $w, G$  постоянны и известны. Размерность векторов  $u, y$  совпадает, так что  $B$  —  $(n \times n)$ -квадратная матрица. Предположим, что все ее элементы не заданы. Очевидно, что пассивный эксперимент бесполезен. Однако активный эксперимент легко организовать по следующему плану. Зададим  $u[0] = i_1, u[1] = i_2, \dots, u[n-1] = i_n$ , где  $i_j, j = 1, \dots, n$  — единичные векторы. Иначе говоря, на каждом такте будем использовать только одну из компонент управляющего воздействия. Тогда

$$y[1] - Gw = Bi_1 = B_1, \dots, y[n] - Gw = B_n, \quad (1.12)$$

где  $B_i$  — столбцы матрицы  $B$ . Тем самым по наблюдениям за  $n$  тактам находятся все элементы матрицы  $B$ . Если  $G, w$  неизвестны, то одного пассивного эксперимента достаточно для того, чтобы предварительно найти вектор  $Gw$ , после чего перейти к определению матрицы  $B$ . Однако очевидно, что найти по отдельности элементы  $G$  и  $w$  невозможно.  $\square$

Заметим теперь, что простота описанных выше результатов связана не с гипотезой о линейности самого объекта (линейности связи между воздействиями и состоянием, а также выходом), а с гипотезой о линейной зависимости выхода от оцениваемых параметров, явно выражаемой уравнением (1.5).

Предположим, например, что объект нелинейен:

$$x[k+1] = F(u[k], w[k], \theta), \quad (1.13)$$

но параметры  $\theta$  входят в правую часть линейно:

$$F(u[k], w[k], \theta) = F_0(u[k], w[k]) + F_1(u[k], w[k])\theta. \quad (1.14)$$

Если измеритель линеен и подчиняется (1.4) с известным  $C$ , то для оценки параметров вновь располагаем линейными соотношениями (1.5), с той лишь разницей, что

$$\begin{aligned} \Phi_0[k] &= CF_0(u[k-1], w[k-1]), \\ \Phi[k] &= CF_1(u[k-1], w[k-1]), \quad k = 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.15)$$

и все предшествующие результаты сохраняют силу.

Более сложна ситуация, когда связь выхода с неизвестными параметрами нелинейна:

$$y[k] = \varphi_k(\theta), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.16)$$

где  $\varphi_k$  — известные функции от искомого аргумента. Такое, в частности, будет иметь место и для линейного объекта (1.1), если элементы матрицы  $B$  нелинейно зависят от  $\theta$ . Теперь мы вынуждены для получения оценки  $\theta$  решать систему уравнений (1.16), а это, как правило, возможно только численными методами, причем не существует простых способов установления единственности решения и, более того, гарантии нахождения всех решений в случае неединственности. Поэтому в дальнейшем будем в основном рассматривать только модели с линейной зависимостью выхода от параметров и ограничимся лишь иллюстративным примером решения нелинейной задачи.

**Пример 1.2.** Пусть объект задан скалярным уравнением

$$y[k+1] = b_1 u[k] + b_2 u^2[k],$$

где коэффициенты  $b_1, b_2$  зависят от одного неизвестного параметра  $\theta$ :

$$b_1 = 1 - \theta^2, \quad b_2 = \theta.$$

Используя воздействие  $u[0] = 1$  и получив наблюдение  $y[1] = 1$ , приходим к условию

$$1 = 1 - \theta^2 + \theta,$$

откуда возникают два варианта оценок:

$$\hat{\theta}^{(1)} = 0, \quad \hat{\theta}^{(2)} = 1.$$

Примем гипотезу, что  $\theta = 0$ . Тогда модель полностью детерминируется и при любых  $k$  должно быть

$$y[k+1] = u[k].$$

Для проверки гипотезы проведем еще один, контрольный эксперимент, приняв  $\theta[1] = 2$ . В результате измерения получим  $y[2] = 4$ , что не согласуется с гипотезой  $\theta = 0$ , но согласуется с альтернативным вариантом  $\theta = 1$ , который и дает правильную оценку.  $\square$

Из примера можно сделать два простых вывода: а) при наличии конечного множества решений уравнений (1.16) можно провести испытания различных гипотез об оценках на контрольных экспериментах; б) увеличение числа наблюдений, т. е. числа уравнений (1.16), принимаемых во внимание при расчете оценок, может исключить неоднозначность, хотя это и не является правилом.

**1.3. Роль факторов неопределенности.** Выше мы исходили из гипотезы, что модель, связывающая наблюдения с неизвестными параметрами, детерминирована (см. (1.5) или (1.16)), т. е. из предположения, что как только найдены значения параметров, результаты всех дальнейших наблюдений точно предсказуемы. Однако для построения законов управления могут быть эффективно использованы и недетерминированные модели. Следовательно, целесообразно расширить класс математических моделей до соотношений типа

$$y[k] = \varphi_k(\theta, v[k]), \quad (1.17)$$

где  $\{v[k]\}$  — недетерминированная последовательность. Соотношения (1.17) отражают два типа факторов: во-первых, на объект могут действовать непрогнозируемые внешние возмущения  $\{w[k]\}$ , а во-вторых, результаты наблюдений могут быть искажены непрогнозируемыми помехами.

Действительно, рассмотрим модель статического объекта, задаваемую соотношениями (1.1), (1.3), (1.4), однако предположим, что  $w_0$  не постоянно, а является непрогнозируемой последовательностью  $\{w_0[k]\}$ . Тогда (1.5) перепишется в виде

$$y[k] = \varphi[k]\theta + \varphi_0[k] + v[k],$$

где  $v[k] = CGw_0[k]$ .

Напротив, если мы сохраним гипотезу (1.3) о поведении возмущений, но вместо (1.4) примем

$$y[k] = Cx[k] + N[k],$$

где  $N[k]$  интерпретируется как непрогнозируемые помехи в измерениях, то

$$y[k] = \varphi[k]\theta + \varphi_0[k] + v[k], \quad v[k] = N[k]. \quad (1.18)$$

В обеих описанных ситуациях приходим к однотипным линейным недетерминированным зависимостям выхода от параметров  $\theta$ , подлежащих оценке. Поэтому в дальнейшем будем именовать последовательности  $\{v[k]\}$  *помехами* независимо от их происхождения.

В отличие от (1.5), наличие связей (1.18), вообще говоря, не дает возможности точно определить истинные величины  $\theta$ . Если

нет никакой априорной информации о помехах, то наблюдения не дадут никакой информации о значении параметров. Наиболее часто используется гипотеза о том, что помехи *случайны*, точнее, являются дискретным белым шумом с ограниченной постоянной матрицей ковариаций  $D_v$ .

**Теорема 1.1** (о методе наименьших квадратов). Пусть оценка  $\hat{\theta}[t]$  разыскивается по наблюдениям  $\{y[k], k = 1, \dots, t\}$  как значение  $\hat{\theta}$ , удовлетворяющее условию метода наименьших квадратов (МНК), т. е. доставляющее минимум функции

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{k=1}^t |\varphi[k]\hat{\theta} + \varphi_0[k] - y[k]|^2, \quad (1.19)$$

где  $\varphi[k], \varphi_0[k]; y[k]$  заданы.

Пусть выполнено условие (1.10). Тогда

$$\hat{\theta}[t] = \mathcal{A}_t^{-1} b_t, \quad (1.20)$$

где обозначено

$$\mathcal{A}_t = \sum_{k=1}^t \varphi^T[k] \varphi[k] = (\Phi[t])^T \Phi[t], \quad b_t = (\Phi[t])^T \bar{Y}[t], \quad (1.21)$$

$$\bar{Y}[t] = (y[k] - \varphi_0[k], \quad k = 1, 2, \dots, t).$$

Если  $\{v[k]\}$  является центрированной случайной последовательностью, то оценка  $\hat{\theta}[t]$  несмещена, т. е.

$$M\{\hat{\theta}[t] - \theta\} = 0. \quad (1.22)$$

Если  $\{v[k]\}$  — дискретный белый шум с ограниченной матрицей ковариаций  $D_v$  и существует положительно определенный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathcal{A}_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varphi^T[k] \varphi[k] \triangleq \bar{\mathcal{A}} > 0, \quad (1.23)$$

то оценка  $\hat{\theta}[t]$  состоятельна, т. е.

$$D[t] \triangleq D\{\hat{\theta}[t] - \theta\} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

**Доказательство.** Матрица  $\mathcal{A}_t$  симметрична. Составим квадратичную форму

$$z^T \mathcal{A}_t z = z^T (\Phi[t])^T \Phi[t] z = \zeta^T \zeta = |\zeta|^2 \geq 0,$$

где  $z$  — произвольный вектор, а  $\zeta = \Phi[t]z$ . Квадратичная форма обращается в нуль только при  $\zeta = 0$ , но в силу (1.10) это влечет за собой  $z = 0$ . Следовательно, матрица  $\mathcal{A}_t$  является положительно определенной,  $\mathcal{A}_t > 0$ . Функция  $J$  представима в виде

$$J = |\Phi[t]\hat{\theta} - \bar{Y}[t]|^2 = \hat{\theta}^T \mathcal{A}_t \hat{\theta} - 2(\bar{Y}[t])^T \Phi[t] \hat{\theta} + |\bar{Y}[t]|^2$$

и достигает минимума при выполнении условия

$$\mathcal{A}_t \hat{\theta} = (\Phi[t])^T \bar{Y}[t],$$

откуда непосредственно следует (1.20).

Перепишем (1.18) в векторном виде:

$$\bar{Y}[t] = \Phi[t]\hat{\theta} + v[t],$$

где  $v[t] = (v[k], k = 1, \dots, t)$ .

При  $\hat{\theta} = 0$  это соотношение удовлетворяется тождественно, так что

$$|\Phi[t]\hat{\theta} - \bar{Y}[t] + v[t]|^2 = 0,$$

откуда

$$0 = \mathcal{A}_t^{-1}(\Phi[t])^T(\bar{Y}[t] - v[t])$$

и

$$e_{\theta}[t] \triangleq \hat{\theta}[t] - 0 = \mathcal{A}_t^{-1}(\Phi[t])^T v[t].$$

Несмешенность оценки очевидна.

Вычислим ковариационную матрицу ошибок оценивания

$$D[t] \triangleq M[e_{\theta}[t] e_{\theta}^T[t]] = \mathcal{A}_t^{-1}(\Phi[t])^T D_v[t] \Phi[t] \mathcal{A}_t^{-1}.$$

Далее, для простоты ограничимся случаем скалярных  $v[k]$ , и  $D[v[k]] = d_v = \text{const}$ . Тогда

$$D_v[t] = d_v I[t],$$

где  $I[t]$  — единичная матрица, размерность которой равна числу наблюдений, а следовательно,

$$D[t] = d_v \mathcal{A}_t^{-1}(\Phi[t])^T \Phi[t] \mathcal{A}_t^{-1} = d_v \mathcal{A}_t^{-1}. \quad (1.25)$$

Переходя к пределу в уравнении

$$\frac{1}{t} \mathcal{A}_t D[t] = \frac{1}{t} d_v I[t],$$

убеждаемся, что при выполнении условия (1.23) имеет место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D[t] = 0. \blacksquare$$

Если априорная информация о помехах более полная и включает сведения о функции распределения помех, то целесообразно воспользоваться оценками метода максимального правдоподобия (ММП). Если помехи независимы и распределены по нормальному закону с заданной матрицей  $D_v$ , то оценки ММП близки по структуре к оценкам МНК (см., например, [11.10])

$$\hat{\theta}[t] = \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \tilde{b}_t, \quad (1.26)$$

где

$$\tilde{\mathcal{A}}_t = \sum_{k=1}^t \Phi^T[k] D_v^{-1} \Phi[k], \quad \tilde{b}_t = \sum_{k=1}^t \Phi^T[k] D_v^{-1} (y[k] - \varphi_0[k]),$$

т. е. различие проявляется в множителе  $D_v^{-1}$ . Можно доказать, что оценки  $\hat{\theta}[t]$  несмешенны и состоятельны.

Если матрица  $D_v$  заранее неизвестна, то метод максимального правдоподобия позволяет получить как ее оценку  $\hat{D}_v^t$ , так и оценку

самых параметров из системы уравнений

$$\hat{D}_v^t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t (y[k] - \varphi_0[k] - \varphi[k]\hat{\theta}[t])(y[k] - \varphi_0[k] - \varphi[k]\hat{\theta}[t])^T, \quad (1.27)$$

$$\hat{\theta}[t] = \left\{ \sum_{k=1}^t \varphi^T[k] (\hat{D}_v^t)^{-1} \varphi[k] \right\}^{-1} \sum_{k=1}^t \varphi^T[k] (\hat{D}_v^t)^{-1} (y[k] - \varphi_0[k]).$$

Поясним смысл оценивания по ММП в рамках общей нелинейной задачи. Обозначим для краткости  $y^{(t)}$  полный вектор всех полученных наблюдений,  $v^{(t)}$  — вектор помех в этих наблюдениях и предположим, что

$$y^{(t)} = \Phi^{(t)}(\theta) + v^{(t)}, \quad (1.28)$$

где  $\Phi^{(t)}$  — заданная вектор-функция оцениваемых параметров. Естественно в качестве оценки взять наиболее вероятное значение параметров, найденное при выполнении (1.28), т. е. как значение  $\hat{\theta}$ , доставляющее максимум условной плотности вероятности  $p(\hat{\theta}/y^{(t)})$ , но

$$p(\hat{\theta}/y^{(t)}) = \frac{p(y^{(t)}/\hat{\theta}) p_{\theta}(\hat{\theta})}{p(y^{(t)})}. \quad (1.29)$$

Если  $p_{\theta}(\hat{\theta})$  не задано (нет априорной информации о возможных значениях параметров), то приходится ограничиться максимизацией функции правдоподобия

$$p(y^{(t)}/\hat{\theta}) = p_v[y^{(t)} - \Phi^{(t)}(\hat{\theta})],$$

где  $p_v[\cdot]$  — заданная плотность вероятности вектора  $v^{(t)}$ . В предположении нормальности  $v^{(t)}$  это эквивалентно выбору оценок из условия максимума

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} [y^{(t)} - \Phi^{(t)}(\hat{\theta})]^T D_{v^{(t)}}^{-1} [y^{(t)} - \Phi^{(t)}(\hat{\theta})] \right\}$$

или, что то же самое, минимума функции

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}) &= [y^{(t)} - \Phi^{(t)}(\hat{\theta})]^T D_{v^{(t)}}^{-1} [y^{(t)} - \Phi^{(t)}(\hat{\theta})] = \\ &= \sum_{k=1}^t [y[k] - \Phi_k(\hat{\theta})]^T D_v^{-1} [y[k] - \Phi_k(\hat{\theta})], \end{aligned} \quad (1.30)$$

где учтена независимость помех в последовательных наблюдениях. Если модель линейна,

$$\Phi_k(\theta) = \Phi[k]\theta,$$

то минимизирующее значение находится в явном виде и дается формулой (1.26). Система (1.27) соответствует необходимым условиям максимума функции правдоподобия, если  $D_v$  также рассматривается как ее аргумент. Для нелинейной модели получение оценок ММП возможно лишь численными методами. При этом следует учесть, что, как правило, некоторая априорная информация о возможных значениях параметров имеется. В частности, можно указать множество  $\Theta_0$ , в котором заведомо должны находиться значения параметров. Тогда поиск минимума  $J$  следует производить в пределах  $\Theta_0$ . Оценки ММП совпадут при этом с наиболее вероятными значениями параметров, если их априорное распределение равномерно на  $\Theta_0$ .

Дополним сказанное замечанием, что зачастую гипотеза о нормальности помех \*) или даже гипотеза о их случайном характере неприемлема, и все, что мы можем предположить, сводится к указанию ограниченной области  $N$ , в которой могут находиться значения помех. Тогда в качестве оценки одинаково пригодны любые значения  $\hat{\theta}$ , удовлетворяющие условиям

$$y[k] = \Phi_k(\hat{\theta}) + v[k], \quad y[k] \in N, \quad k = 1, \dots, t; \quad \hat{\theta} \in \Theta_0. \quad (1.31)$$

Если модель линейна, а множества  $N$ ,  $\Theta_0$  заданы линейными неравенствами, то для нахождения допустимого значения  $\hat{\theta}$  можно воспользоваться эффективными методами линейного программирования.

Приведем численный пример, иллюстрирующий описанные способы идентификации.

**Пример 1.3.** Модель системы, результаты наблюдения одного выхода которой  $y[k]$  зависят от неизвестных значений двух параметров  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , дана в виде

$$y[k] = \varphi_{11}[k]\theta_1 + \varphi_{12}[k]\theta_2 + v[k], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $v[k]$  — непрогнозируемая последовательность, трактуемая как помехи в измерителе.

Результаты измерений и данные о коэффициентах  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$  даны в таблице

$k$	$\varphi_{11}$	$\varphi_{12}$	$y$
1	1,0	0,3	1,70
2	2,0	0,5	2,95
3	1,5	0,8	3,11
4	0,5	1,3	3,12
5	1,2	0,4	1,92

В паспортных данных измерительного устройства указана его погрешность  $\pm 0,15$ . Обычно ошибки предполагаются случайными, нормально распределенными, и погрешность рассматривается в смысле правила «Зо», т. е. размах погрешности предполагается равным  $3\sigma_v$ , так что здесь  $\sigma_v = 0,05$ .

Применим МНК для оценивания (в скалярном случае оценки МНК и ММП совпадают).

Построим матрицы

$$\mathcal{A}_t = \sum_{k=1}^5 \begin{Bmatrix} \varphi_{11}^2[k] & \varphi_{11}[k]\varphi_{12}[k] \\ \varphi_{11}[k]\varphi_{12}[k] & \varphi_{12}^2[k] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8,94 & 3,63 \\ 3,63 & 2,83 \end{Bmatrix},$$

$$b_t = \sum_{k=1}^5 \begin{Bmatrix} \varphi_{11}[k]y[k] \\ \varphi_{12}[k]y[k] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16,129 \\ 9,297 \end{Bmatrix},$$

\*) С построением оценок при иных гипотезах о функции распределения можно познакомиться, например, в [11.17, 11.19].

откуда согласно (1.20) получаем

$$\hat{\theta}_1 = 0,982, \quad \hat{\theta}_2 = 2,026.$$

Подсчитаем дисперсии ошибок оценивания, используя (1.25):

$$D[\hat{\theta}_1 - \theta_1^*] = \sigma_v^2 \cdot 0,233, \quad D[\hat{\theta}_2 - \theta_2^*] = \sigma_v^2 \cdot 0,738.$$

Применяя вновь правило «Зо», приходим к оценкам диапазонов, в которых могут находиться истинные значения параметров \*):

$$0,91 \leq \theta_1 \leq 1,05, \quad 1,90 \leq \theta_2 \leq 2,15.$$

Откажемся далее от гипотезы о случайном характере ошибок измерений, считая просто, что они могут принимать любые значения в диапазоне  $\pm 0,15$ . Тогда в соответствии с (1.31) в качестве оценок можно принять любые значения  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ , удовлетворяющие системе неравенств

$$-0,15 \leq y[k] - \varphi_{11}[k]\hat{\theta}_1 - \varphi_{12}[k]\hat{\theta}_2 \leq 0,15, \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

Каждое из таких неравенств выделяет полосу на плоскости  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ .

Пересечение всех полос является допустимой областью. На рис. 11.1 эта процедура наглядно представлена (границы полос перенумерованы, а область выделена жирной линией). Диапазоны возможного изменения параметров оцениваются неравенствами

$$0,86 \leq \theta_1 \leq 1,08,$$

$$1,87 \leq \theta_2 \leq 2,18,$$

причем для их получения достаточно было бы расположать только измерениями  $k = 2, k = 4$ . Конечно, такая наглядность достижима только в случае двух оцениваемых параметров, причем при работе с ЭВМ удобно использовать графический дисплей.  $\square$

Подчеркнем важность условия (1.10). Оно определяло возможность идентификации как при детерминированной, так и при стохастической постановке. Более того, на точность оценивания влияет

\*) Более тонкие методы построения доверительных интервалов для параметров даются в учебниках математической статистики (см., например, [11.10, гл. 7]).

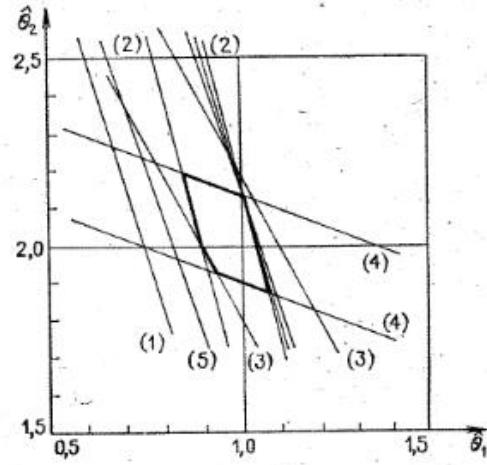


Рис. 11.1

обусловленность матрицы  $\mathcal{A}_t$ . Известно [11.10], что

$$|\det \mathcal{A}_t|^2 = \sum_i \delta_{hi}^2$$

где  $\delta_h$  — определители всех миноров  $\Phi^{(t)}$  размера  $n_0 \times n_0$ . Поэтому, даже если условие (1.10) выполнено, т. е. найдется  $\delta_h^2 > 0$ , но величины  $\delta_h^2$  малы, ошибки оценивания окажутся большими. Отсюда вытекает, что целью планирования активного эксперимента должно быть прежде всего обеспечение возможно большей ортогональности векторов-строк матрицы  $\Phi^{(t)*}$ .

При выделении области допустимости также очевидна важность ортогональности полос, выделяемых при каждом измерении.

С другой стороны, ясно, что чем больше абсолютная величина элементов  $\Phi^{(t)}$ , тем выше уровень сигнала относительно уровня помех, а следовательно, меньше погрешность оценивания. Поэтому основным ограничителем точности практически является допустимый уровень активных воздействий на объект, возможный по условиям его эксплуатации.

**1.4. Идентификация динамических объектов.** Рассмотрим сначала общую динамическую нелинейную модель

$$x[k+1] = F_k(x[k], u[k], w[k], \theta), \quad k = 0, 1, \dots, x[0] = x^0. \quad (1.32)$$

Если предположить возможность полного и точного наблюдения как состояния  $x[k]$ , так и возмущений  $w[k]$ , то проблема идентификации динамического объекта окажется ничем не отличающейся от ранее рассмотренной. Действительно, положив  $x[k] = y[k]$ ,  $\Phi_k(\theta) = -F_{k-1}(x[k-1], u[k-1], w[k-1], \theta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , приходим к соотношениям вида (1.16).

Если же возмущения  $\{w[k]\}$  содержат непрогнозируемую компоненту  $\{v[k]\}$ , то получаем модель вида (1.17).

Новые проблемы возникают только в связи с отсутствием полных и точных измерений.

Остановимся подробнее на задаче *идентификации линейной системы*. Пусть справедлива гипотеза, что объект описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, \dots, x[0] = x^0, \\ y[k] &= Cx[k] + N[k], \end{aligned} \quad (1.33)$$

где матрицы  $A, B, C, G$  постоянны, но могут зависеть от неизвестных параметров  $\theta$ . Неопределенность может содержаться и в  $x^0$ . Воздействие  $\{u[k]\}$  будем предполагать управляемым или по крайней мере известным. Возмущение  $\{w[k]\}$  и ошибки измерений  $\{N[k]\}$  считаем независимыми «белыми шумами». Требуется дать оценку параметров на основе наблюдений.

\*) См., например, [11.15, 11.25].

Прежде всего отметим некоторые почти очевидные факты, вытекающие из структурной теоремы (гл. 6):

- а) невозможна оценка тех параметров, которые не входят в описание наблюдаемой части системы;
- б) если  $x^0 = 0$ , то невозможна оценка параметров, которые входят в «висячие» части системы.

Для простоты будем считать, что  $u[k], y[k]$  скалярны, а  $\{w[k]\} = 0$ . Из гл. 7 известно, что в предположении полной управляемости и наблюдаемости можно свести описание связи «вход-выход» к операторному уравнению

$$y[k] = H(\zeta)u[k] + N[k], \quad (1.34)$$

где  $H(\zeta) = C[\zeta I - A]^{-1}B$  — скалярный оператор преобразования, являющийся дробно-рациональной функцией от оператора  $\zeta$  сдвига на такт,

$$H(\zeta) = \beta(\zeta)/\alpha(\zeta).$$

Любая наблюдаемая последовательность  $\{y[k]\}$  несет в себе информацию только о коэффициентах ( $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ ) многочленов  $\alpha(\zeta)$ ,  $\beta(\zeta)$ , и значения неизвестных параметров можно пытаться извлечь только из этих коэффициентов. Поэтому обычно процедуру идентификации разделяют на два этапа: во-первых, получают оценки  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$ , а затем находят  $\hat{\theta}$  как решение уравнений

$$\alpha_i(\hat{\theta}) = \hat{\alpha}_i, \quad \beta_i(\hat{\theta}) = \hat{\beta}_i,$$

хотя такая процедура и не всегда рациональна, если число  $n_0$  неизвестных параметров мало.

Для построения оценок  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  удобно переписать уравнение (1.34) в виде явной зависимости каждого очередного измерения от предшествующих измерений и воздействий.

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0 = \\ &= \zeta^n [1 + \alpha_{n-1}\zeta^{-1} + \dots + \alpha_0\zeta^{-n}] \triangleq \zeta^n [1 + \tilde{\alpha}(\zeta^{-1})], \\ \beta(\zeta) &= \beta_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \beta_0 = \zeta^n [\beta_{n-1}\zeta^{-1} + \dots + \beta_0\zeta^{-(n-1)}] = \zeta^n \tilde{\beta}(\zeta^{-1}), \end{aligned}$$

откуда

$$y[k] = -\tilde{\alpha}(\zeta^{-1})y[k] + \tilde{\beta}(\zeta^{-1})u[k] + [1 + \tilde{\alpha}(\zeta^{-1})]N[k], \quad (1.35)$$

или, в явной форме,

$$\begin{aligned} y[k] &= -\alpha_{n-1}y[k-1] - \dots - \alpha_0y[k-n] + \beta_{n-1}u[k-1] + \dots \\ &\quad + \beta_0u[k-n] + N[k] + \alpha_{n-1}N[k-1] + \dots + \alpha_0N[k-n]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Формально соотношения (1.36) можно переписать в виде, аналогичном (1.18),

$$y[k] = \varphi[k]\theta + v[k], \quad (1.37)$$

если ввести вектор  $\theta$  неизвестных параметров

$$\theta = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0; \beta_{n-1}, \dots, \beta_0) \quad (1.38)$$

и обозначить

$$y[k] = \{-y[k-1], \dots, -y[k-n], u[k-1], \dots, u[k-n]\}, \quad (1.39)$$

а также

$$v[k] = N[k] + \alpha_{n-1}N[k-1] + \dots + \alpha_0N[k-n]. \quad (1.40)$$

Матрица-строка  $\varphi[k]$  состоит из известных (измеряемых) величин, а  $v[k]$  представляет собой эквивалентную помеху.

После этого можно применять МНК для получения оценок параметров  $\theta$ . Однако имеется существенное отличие от ранее рассматривавшейся задачи: во-первых, последовательные значения  $v[k]$  взаимно коррелированы, во-вторых, их взаимная корреляция зависит от неизвестных параметров  $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ , в-третьих,  $\varphi[k]$  коррелирована с  $v[k]$ .

Формальное применение МНК может привести к плохим оценкам.

Поясним смысл возникающих неприятностей. Предположим, что воздействие  $\{u[k]\}$  является стационарной случайной последовательностью, а объект устойчив. Пусть наблюдения производятся в установившемся режиме, когда  $\{y[k]\}$  также можно считать стационарной последовательностью. Получаемые в результате применения МНК оценки  $\hat{\theta}[t]$  удовлетворяют условию минимума по  $\hat{\theta}$  величины

$$\sum_{k=1}^t |y[k] - \varphi[k]\hat{\theta}|^2. \quad (1.41)$$

Можно предполагать эргодичность, т. е. что среднее (по времени) значение квадрата ошибки, найденное по одной реализации, совпадает с его математическим ожиданием \*):

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t |y[k] - \varphi[k]\hat{\theta}|^2 = M\{|y[k] - \varphi[k]\hat{\theta}|^2\}. \quad (1.42)$$

Пусть  $\hat{\theta}^*$  — оценки МНК, получаемые по неограниченно возрастающей стационарной последовательности наблюдений. Тогда они должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M\{|y[k] - \varphi[k]\hat{\theta}|^2\} \Big|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}^*} = 0,$$

или

$$M\{(y[k] - \varphi[k]\hat{\theta}^*)\varphi'[k]\} = 0. \quad (1.43)$$

Поскольку получаемые наблюдения  $y[k]$  порождены функциониро-

\*). Правая часть (1.42) не зависит от  $k$  в силу предполагавшейся стационарности последовательностей  $\{y[k]\}, \{u[k]\}$ , а следовательно,  $\{\varphi[k]\}$ .

ванием объекта при некотором неизвестном, но фиксированном  $\theta$ , то

$$y[k] = \varphi[k]\theta + v[k].$$

Подставляя это соотношение в (1.43), получаем

$$M\{\varphi[k](\theta - \hat{\theta}^*)\varphi'[k]\} + M\{v[k]\varphi'[k]\} = 0 \quad (1.44)$$

и убеждаемся, что оно не удовлетворяется при  $\theta^* = \theta$ , если имеется корреляция между  $v[k]$  и  $\varphi[k]$ , отмеченная выше. Таким образом, «лобовое» применение МНК не может привести к совпадению оценки с истинным значением параметров, даже если число учитываемых наблюдений неограниченно возрастает. Кроме того, условие (1.43) дает единственное решение, соответствующее минимуму, только если выполнено условие идентифицируемости

$$M\{\varphi[k]\varphi'[k]\} > 0,$$

которое трудно проверить заранее, поскольку  $\varphi[k]$  зависит от неизвестных параметров.

Для преодоления неприятностей используются различные приемы. Один из них состоит в применении ММП с оценкой матрицы ковариаций всей последовательности  $\{v[k], k = 1, \dots, t\}$ , т. е. по существу с оценкой корреляционной функции эквивалентной помехи. Функционал ММП при этом окажется неквадратичной функцией параметров, и вычислительная процедура его минимизации резко усложняется \*).

Остановимся подробнее лишь на более простом приеме, обычно именуемом *корреляционным анализом* и в различных вариантах используемом на практике. Примем вновь гипотезу о случайности и стационарности последовательности  $\{u[k], y[k]\}$  и вычислим на основе измерений  $\{u[k], y[k]\}$  величины

$$R_{yu}^t(\tau, l) = \frac{1}{t-\tau+1} \sum_{k=\tau}^t y[k-l]u[k-\tau], \quad (1.45)$$

$$R_{uu}^t(\tau, l) = \frac{1}{t-\tau+1} \sum_{k=\tau}^t u[k-l]u[k-\tau]$$

для различных значений  $\tau = 1, 2, \dots, 2n$  и  $l = 0, 1, \dots, n$ . Если умножить (1.36) на  $u[k-\tau]$  и произвести усреднение результатов, то получим соотношения

$$R_{yu}^t(\tau, 0) = -\alpha_{n-1}R_{yu}^t(\tau, 1) - \dots - \alpha_0R_{yu}^t(\tau, n) - \beta_{n-1}R_{uu}^t(\tau, 1) + \dots \\ \dots + \beta_0R_{uu}^t(\tau, n) + R_{Nu}^t(\tau, 0) + \dots + \alpha_0R_{Nu}^t(\tau, n), \quad (1.46)$$

\*). Детальное исследование дано в [11.21].

где дополнительно обозначено

$$R_{Nu}^t(\tau, l) = \frac{1}{t-\tau+1} \sum_{k=\tau}^t N[k-l] u[k-\tau].$$

При больших  $t$  воспользуемся гипотезой эргодичности. Тогда

$$R_{Nu}^t(\tau, l) \approx R_{Nu}[\tau - l], \quad (1.47)$$

где справа стоит соответствующая корреляционная функция. Но  $\{u[k]\}$  и  $\{N[k]\}$  некоррелированы, и  $R_{Nu} = 0$ , так что

$$R_{Nu}^t(\tau, l) \approx 0.$$

Следовательно, мы приходим к системе  $2n$  линейных уравнений

$$R_{yu}^t(\tau, 0) = \Phi_\alpha^t(\tau) \alpha + \Phi_\beta^t(\tau) \beta, \quad \tau = 1, \dots, 2n, \quad (1.48)$$

где

$$\Phi_\alpha^t(\tau) = \{-R_{yu}^t(\tau, 1), \dots, -R_{yu}^t(\tau, n)\}, \quad \alpha = \{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0\}$$

$$\Phi_\beta^t(\tau) = \{R_{uu}^t(\tau, 1), \dots, R_{uu}^t(\tau, n)\}, \quad \beta = \{\beta_{n-1}, \dots, \beta_0\}$$

Система (1.48) может служить для вычисления оценок непосредственно или же к ней может быть применен МНК, если увеличить число значений  $\tau$  и формально считать, что величины

$$R_{Nu}^t(\tau, 0) + \dots + \alpha_0 R_{Nu}^t(\tau, n)$$

не равны точно нулю, но слабо зависят от различных  $\tau$ \*).

**1.5. Оценка весовых функций и частотных характеристик.** Если входное воздействие  $\{u[k]\}$  на линейный динамический объект может быть выбрано, т. е. осуществим активный эксперимент, то зачастую используют воздействия типа *одиночного импульса*, или *скакка* на постоянную величину, или *гармонических функций* с различными частотами. Иначе говоря, ставят эксперименты по определению *весовой* (импульсной) функции преобразования «вход-выход», или его *переходной* функции, или его *частотной характеристики*. Знание любой из этих характеристик полностью определяет оператор  $H(\zeta)$ , т. е. детерминированную часть модели (1.34).

Предположим сначала, что помехи отсутствуют,

$$y[k] = H(\zeta) u[k], \quad (1.49)$$

а начальные условия — нулевые. Положим  $u[0] = 1$ ,  $u[k] = 0$ ,  $k \geq 1$  (воздействие типа единичного импульса). Тогда

$$y[k] = h[k], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.50)$$

\*). Здесь также возможны вычислительные трудности, связанные с плохой обусловленностью обращаемых матриц. О. Ю. Кульчицким показано, что метод работает только при условии  $\operatorname{Re} H(e^{i\omega}) > 0$ ,  $\omega \geq 0$ ,  $H(\zeta) \triangleq \frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)}$ .

где  $\{h[k]\}$  — весовая функция (для дискретной системы — последовательность). Формально по величинам  $h[k]$  (и притом используя не более  $2n$  таких величин) можно восстановить значения коэффициентов многочленов  $\alpha(\zeta)$ ,  $\beta(\zeta)$  в операторе  $H(\zeta)$ . Однако поведение весовой функции в основном определяется модами, соответствующими наибольшим по модулю собственным числам. Если система устойчива (в противном случае трудно исключить эффект малых отклонений начальных условий от нуля), то  $\{h[k]\}$  определяется наиболее медленно затухающими модами, а быстро затухающие оказываются почти незаметными на фоне неизбежных помех. Поэтому практически идентификация путем определения весовой функции используется только для простых объектов 1-го или 2-го порядка при заведомо низком уровне помех. То же относится и к определению переходной функции, которая совпадает с выходом, если  $u[k] = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$

В наибольшей степени на практике распространен способ активной идентификации линейных динамических объектов, основанный на оценке частотных характеристик. При этом активное воздействие выбирается в виде гармонической (или полигармонической) функции времени. Если объект устойчив \*), то значения его выхода приближаются с течением времени к гармонической (или полигармонической) функции, вообще говоря,искаженной помехами. Определение амплитуд и фаз гармоник в выходном процессе эквивалентно определению значений комплексной частотной характеристики (ЧХ) объекта на частотах этих гармоник. Очевидно, что по  $n$  значениям ЧХ в принципе восстановима значения параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , а следовательно, п. ф. в целом. Если же объект является и минимально фазовым, то достаточно знать только значения амплитуд гармоник, поскольку в этом случае АЧХ полностью определяет п. ф. (но, как минимум, потребуется  $2n$  амплитуд).

Описанная идея осуществима в множестве конкретных вариантов. Приведем краткое описание процедуры *параллельного эксперимента* с предварительной обработкой по методу *синхронного детектирования*.

Активное воздействие (тест-сигнал) берется в виде

$$u[k] = \sum_{l=1}^L (a_l \cos k\theta_l + b_l \sin k\theta_l), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.51)$$

где  $L \geq n$ , а  $a_l$ ,  $b_l$ ,  $\theta_l$  — заданные величины. Измерения дают значения (см. § 4 гл. 7)

$$y[k] = \sum_{l=1}^L \operatorname{Re} \left\{ H(e^{i\theta_l}) (a_l - ib_l) e^{ik\theta_l} \right\} + e[k] + N[k],$$

\*). Если объект неустойчив, но его можно стабилизировать с помощью обратной связи с известными параметрами, то принципиально подход не меняется, за тем исключением, что по частотной характеристике замкнутой системы приходится строить частотную характеристику объекта.

где  $e[k]$  — отличие реакции объекта от установившейся, так что  $e[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Обозначим  $R_l = \operatorname{Re} H(e^{i\theta_l})$ ,  $I_l = \operatorname{Im} H(e^{i\theta_l})$ . Тогда

$$y[k] = \sum_{l=1}^L [c_l \cos k\theta_l + s_l \sin k\theta_l] + e[k] + N[k], \quad k = 1, \dots, t, \quad (1.52)$$

$$c_l \triangleq R_l a_l + I_l b_l, \quad s_l \triangleq R_l b_l - I_l a_l. \quad (1.53)$$

Теперь требуется найти амплитуды гармоник  $c_l$ ,  $s_l$ , имея их смесь, искаженную наличием побочных процессов  $e[k]$  и  $N[k]$ , т. е. затухающего переходного процесса и помех в измерениях. Это классическая проблема вычислительной математики\*). Простейший способ ее решения таков: при достаточно большом числе  $t$  измерений оценки  $\hat{c}_l[t]$ ,  $\hat{s}_l[t]$  указанных амплитуд даются формулами

$$\hat{c}_l[t] = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t y[k] \cos k\theta_l, \quad \hat{s}_l[t] = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t y[k] \sin k\theta_l. \quad (1.54)$$

Такое построение принято именовать *обобщенным Фурье-преобразованием*, а в технике — методом *синхронного детектирования*. По оценкам  $\hat{c}_l$ ,  $\hat{s}_l$  далее строятся оценки

$$\hat{R}_l = (a_l^2 + b_l^2)^{-1} (\hat{c}_l a_l + \hat{s}_l b_l), \quad \hat{I}_l = (a_l^2 + b_l^2)^{-1} (\hat{c}_l b_l - \hat{s}_l a_l)$$

значений вещественной и мнимой ЧХ на «частотах»  $\theta_l$ .

Согласно определению  $H(\zeta)$  имеем

$$\beta(e^{i\theta_l}) = H(e^{i\theta_l}) \alpha(e^{i\theta_l}), \quad l = 1, \dots, L,$$

или

$$\beta(e^{i\theta_l}) = (\hat{R}_l + i\hat{I}_l + v_l) \alpha(e^{i\theta_l}), \quad l = 1, \dots, L, \quad (1.55)$$

где  $v_l$  — ошибки в оценке значений ЧХ на соответствующих частотах. Если бы ошибки отсутствовали, то, взяв  $L = n$ , мы бы получили систему  $2n$  вещественных линейных уравнений относительно коэффициентов  $\{\alpha_l, \beta_l\}$  многочленов  $\alpha(\zeta)$ ,  $\beta(\zeta)$ . В простейшем случае можно применить МНК, находя оценки параметров из условия минимума

$$\sum_{l=1}^L |\beta(e^{i\theta_l}) - (\hat{R}_l + i\hat{I}_l) \alpha(e^{i\theta_l})|^2.$$

Делать какие-либо строгие суждения об эффективности описанной процедуры затруднительно, поскольку даже при  $N[k]$  типа «белого шума» ошибки  $v_l$  зависят, кроме того, от входа в уравнения (1.55) неаддитивно. Ясно, однако, что как влияние помех, так и сложность вычислений сильно зависит от выбора «частот»  $\theta_l$  воздействий.

Поскольку  $H(e^{i\theta})$  2л-периодична по  $\theta$ , то  $0 < \theta_l \leq 2\pi$ . Если отсутствует априорная информация о свойствах ЧХ, то рекомендуется выбирать логарифмически равномерную шкалу пробных частот \*\*).

$$\lg \theta_l = \frac{l}{L} \lg 2\pi, \quad l = 1, \dots, L.$$

\*). Обзор основных приемов содержится в [4.10]. Отметим также, что оценивание по формулам (1.54) тесно связано с применением МНК к системе (1.52).

\*\*). В частности, такой выбор позволяет построить экономный рекуррентный алгоритм вычисления оценок (1.54), называемый «быстрым преобразованием Фурье (БПФ)» [5.2, гл. 4].

Если же заранее подозревается наличие резких изменений ЧХ в некоторых частотных диапазонах, то естественно «уплотнить» в них сетку частот.

Метод частотных характеристик очевидным образом переносим и на идентификацию непрерывных объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Можно также показать [11.25], что использование гармонических тест-сигналов в определенном смысле наиболее выгодно, если ограничена энергия воздействия.

## § 2. Адаптивное управление статическим объектом

**2.1. Рекуррентные процедуры оптимизации и экстремальное регулирование.** Перейдем к рассмотрению *адаптивных* алгоритмов управления, отличающихся тем, что априорная неопределенность описания объекта преодолевается в ходе работы системы. Напомним первоначально уже знакомую (гл. 9, § 7) задачу численного анализа: задана функция  $J(u)$  вектора  $u$ , требуется вычислить значение  $u^*$ , доставляющее ее минимум. Простейшая вычислительная схема (градиентный метод) заключается в построении последовательности  $\{u^{(t)}\}$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , такой, что  $u^{(0)}$  берется произвольно, а

$$u^{(t+1)} = u^{(t)} - \gamma_t \nabla^{(t)}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

В качестве векторов  $\nabla^{(t)}$  выбирается либо градиент функции  $J(u)$  в точке  $u^{(t)}$ ,  $\nabla J(u^{(t)})$ , либо какой-либо близкий вектор, рассматриваемый как оценка градиента. Скалярная последовательность  $\gamma_t$  выбирается так, чтобы обеспечить сходимость  $u^{(t)}$  к  $u^*$  при  $t \rightarrow \infty$  \*). Далее рассмотрим проблему управления статическим объектом: пусть состояние объекта  $x[k+1]$  в момент  $k+1$  определяется заданием управления  $u[k]$ :

$$x[k+1] = f(u[k]), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Требуется выбрать  $\{u[k]\}$  так, чтобы обеспечить минимум либо показателя

$$J_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x[k+1], u[k]) \quad (2.3)$$

(*оптимальность в установленшемся режиме*), либо показателя

$$\bar{J} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} g(x[k+1], u[k]) \quad (2.4)$$

(*оптимальность в среднем по времени*).

Построим функцию

$$J(u) \triangleq g(f(u), u), \quad (2.5)$$

далее считая ее дифференцируемой. Очевидно, что если  $u^*$  доставляет минимум  $J(u)$ , то, приняв управление постоянным и равным

$$u[k] = u^*, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

\*) Точные рекомендации даны ниже.

мы обеспечим минимизацию как (2.3), так и (2.4). Более того, если последовательность управлений любая, но

$$u[k] \rightarrow u^* \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

то она все равно является оптимальной в смысле (2.3) и (2.4). Отсюда естественно возникает основная идея так называемого *экстремального регулирования*\*): представить градиентную процедуру минимизации (2.1) как процесс, разворачивающийся в реальном времени, т. е. вычислить в каждый новый момент  $k+1$  управляющее воздействие по формуле

$$u[k+1] = u[k] - \gamma_k \nabla^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Этот подход практически бесполезен, если вид функции  $J(u)$  известен заранее, а следовательно, заранее может быть вычислено значение  $u^*$  и использована простейшая оптимальная программа (2.6). Однако он обладает замечательным достоинством: *закон управления (2.7) можно использовать и тогда, когда вид функции  $J(u)$  в целом заранее неизвестен*. Действительно, для его применения достаточно только иметь в каждый момент времени оценку градиента при текущем значении управляющего воздействия, а ее можно получить по измерениям (наблюдениям) за объектом в ходе его работы.

**2.2. Оценки градиента и основные алгоритмы управления.** Выделим некоторые возможные ситуации, начиная с простейшей.

a) *Значения вектора градиента наблюдаются непосредственно в каждый момент  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots$* . Реализуемая точная градиентная процедура

$$u[k+1] = u[k] - \gamma_k y[k], \quad y[k] = \nabla J(u[k]). \quad (2.8)$$

b) *Непосредственно наблюдается текущее значение показателя,  $y[k] = J(u[k])$ .* Реализуемая процедура с оценкой компонент градиента. Если размерность  $u = (u_j)$  равна  $m$ , то для оценки  $m$  частных производных в точке  $u = u^{(t)}$  можно взять простейшие разностные аппроксимации\*\*):

$$\nabla_j^{(t)} \triangleq \frac{\partial J}{\partial u_j} \Big|_{u=u^{(t)}} = \frac{J(u^{(t)} + \delta i_j) - J(u^{(t)})}{\delta}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.9)$$

где  $i_j$  —  $j$ -й единичный вектор, а  $\delta$  — малая скалярная величина (величина пробного шага). Однако для вычисления (2.9) необходимо, кроме значения  $J(u^{(t)})$ , иметь  $m$  наблюдений значения показателя в соседних точках  $u^{(t)} + \delta i_j$ . Поэтому процесс экстремального регулирования строится как циклический, в котором рабочие шаги че-

\*). Идея экстремального регулирования была предложена почти одновременно В. В. Казакевичем в СССР и Ч. С. Дрейпером в США для одномерных задач и обобщена А. А. Фельдбаумом на многомерные. Обзор различных практических вариантов ее реализации дан, например, в [5.9, 11.13].

\*\*). Общая схема построения оценок градиента дана в [11.5].

редуируются с пробными, тестовыми. Его можно описать формулами

$$\begin{aligned} u[k] &= u^{(t)}, \quad k = (m+1)t, \quad t = 0, 1, \dots, \\ u[k] &= u^{(t)} + \delta i_j, \quad k = (m+1)t + j, \quad j = 1, \dots, m, \\ u^{(t+1)} &= u^{(t)} - \gamma_t \nabla^{(t)}, \quad t = 0, 1, \dots, \\ \nabla^{(t)} &= (\nabla_j^{(t)}, \quad j = 1, \dots, m), \\ \nabla_j^{(t)} &= \delta^{-1}(y[k] - y[t]), \quad y[k] = J(u[k]), \quad k = (m+1)t + j. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что такой процесс представляет собой сочетание управления с обратной связью по измерениям и плана эксперимента, где результаты измерений используются только для идентификации значений градиентов. Поскольку оценка градиента равносильна построению линейной аппроксимации функции  $J(u)$  в малой окрестности текущей рабочей точки  $u^{(t)}$ , то и план (программа) идентификационного эксперимента строится так же, как при идентификации линейного объекта (ср. П.1.1).

Чем меньше  $\delta$ , тем теоретически ближе оценка типа (2.9) к точному значению, однако тем более начинают сказываться погрешности вычисления разности близких величин.

в) *Значения вектора градиента наблюдаются с погрешностями:*

$$y[k] = \nabla J(u[k]) + N[k]. \quad (2.11)$$

Если погрешности  $N[k]$  случайны, то кажется целесообразным использовать осреднение по нескольким измерениям и вновь построить процесс управления циклически, оставляя на каждом цикле (длиностью  $l$  шагов) управление постоянным:

$$\begin{aligned} u[k] &= u^{(t)}, \quad k = lt, \quad t = 0, 1, \dots, \\ u^{(t+1)} &= u^{(t)} - \gamma_t \nabla^{(t)}, \\ \nabla^{(t)} &= \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} y[t+k] = \nabla J(u^{(t)}) + \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} N(t+k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если  $\{N[k]\}$  — белый шум, то с увеличением  $l$  в силу закона больших чисел влияние погрешностей уменьшается. Однако замедляется и процесс управления, причем неясно, на сколько тактов следует «застревать» на месте для улучшения идентификации. Очевидно лишь, что вдали от экстремума, где величина градиента велика, роль погрешностей не слишком существенна (уровень сигнала значительно выше уровня помехи). Поэтому в начале процесса можно брать  $l$  малым, а затем увеличивать. Но есть и более интересная идея: производить усреднение в ходе самого рабочего движения, постепенно замедляя его за счет уменьшения коэффициента  $\gamma_t$ . Оказывается, что последовательность  $u[k]$ , построенная в силу простейшего алгоритма:

$$u[k+1] = u[k] - \gamma_k y[k], \quad y[k] = \nabla J(u[k]) + N[k], \quad (2.13)$$

несмотря на возможно большие ошибки в оценке градиента на каждом шаге, может сходиться к значению  $u^*$ , если  $\gamma_t$  сделать постепенно убывающим и стремящимся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ ). При этом процедуру (2.13) обычно называют *алгоритмом Роббинса — Монро* [11.28].

г) *Наблюдаются текущие значения показателя с погрешностями:*

$$y[k] = J(\hat{u}[k]) = J(u[k]) + N[k]. \quad (2.14)$$

Задача оценки градиента равносильна построению линейной аппроксимации  $J(u)$  в малой окрестности текущей рабочей точки по зашумленным наблюдениям. Здесь вновь можно построить план идентификационного эксперимента, используя малые пробные шаги и производя оценку  $m$  необходимых величин частных производных по результатам наблюдений, например, с помощью МНК, если число наблюдений (и пробных шагов) существенно больше числа оцениваемых величин. Можно и попытаться использовать минимальное количество наблюдений, бера грубые оценки по приращениям и строя алгоритм по схеме (2.10), но с постепенным уменьшением величины шага  $\gamma_t$ , как и в алгоритме Роббинса — Монро. Это, однако, не вполне эффективно из-за наличия очевидной зависимости случайных ошибок в оценках компонент градиента. Поэтому идут на удвоение длительности цикла пробных шагов и построение оценок типа

$$\nabla_j^{(t)} = \frac{\partial \hat{J}}{\partial u_j} \Big|_{u=u^{(t)}} = \frac{\hat{J}(u^{(t)} + \delta_t i_j) - \hat{J}(u^{(t)} - \delta_t i_j)}{2\delta_t} = \\ = (2\delta_t)^{-1} (y[k+m] - y[k]), \quad (2.15)$$

так что алгоритм управления принимает вид

$$\begin{aligned} u[k] &= u^{(t)} + \delta_t i_j, \quad k = (2m+1)t+j, \quad j = 1, \dots, m, \\ u[k] &= u^{(t)} - \delta_t i_j, \quad k = (2m+1)t+m+j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.16) \\ u^{(t+1)} &= u^{(t)} - \gamma_t \nabla^{(t)}. \end{aligned}$$

В этой процедуре, называемой *алгоритмом Кибера — Вольфовича* [11.26], величины  $\delta_t$  также иногда берутся постепенно убывающими, хотя и медленнее  $\gamma_t$ .

д) Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда измеряется *состояние объекта*

$$y[k] = x[k], \quad x[k+1] = f(u[k]),$$

а вид функции  $g(x, u)$ , определяющей значение показателя в зависимости от состояния и управления, известен. Естественно, что

\*) Поскольку сама последовательность  $u[k]$  является случайной, то и сходимость должна пониматься в вероятностном смысле (точная формулировка ниже, в Т.2.1).

можно использовать уже описанную схему, поскольку

$$J(u[k]) = g(x[k+1], u[k]) = g(y[k+1], u[k]),$$

и по измерениям непосредственно вычисляется текущее значение показателя качества, по которому далее можно строить оценку градиента. Однако иногда эффективнее использовать имеющуюся информацию. Действительно,

$$\nabla J(u) = \nabla_u g + \nabla_x g \cdot \nabla_u f. \quad (2.17)$$

Поэтому для оценки  $\nabla J(u[k])$  достаточно оценить матрицу  $\nabla_u f(u[k])$ , называемую матрицей *коэффициентов чувствительности выхода* к изменениям управления. Если выход скалярен, то эта матрица оказывается столбцом и ее оценка осуществима по  $m$  пробным изменениям входа так же, как это делалось выше при непосредственных измерениях функционала. Очевидно, что преимущества этого подхода будут особенно явными, если объект линеен, а следовательно, коэффициенты чувствительности не зависят от управлений, и оценка градиента показателя сводится к оценке конечного числа неизвестных параметров (см. ниже, п. 2.6).

**2.3. Условия применимости экстремального регулирования.** Приведем сначала сводку теоретических результатов, касающихся влияния погрешностей в оценке градиента на процесс поиска экстремума. Обозначим

$$r^{(t)} = \nabla J(u^{(t)}) - \nabla^{(t)}$$

и опишем, как ведет себя последовательность  $\{u^{(t)}\}$ , строящаяся в силу (2.1), при различных свойствах функции  $J(u)$  и погрешности  $r^{(t)}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $J(u)$  непрерывно дифференцируема, кроме того, для любых  $u, v$  выполнены условия:

$$1) \quad J(u+v) \leq J(u) + \nabla J(u)v + \frac{l}{2}|v|^2, \quad l > 0 \quad (2.18)$$

(условие сильной выпуклости с константой  $l$ );

$$2) \quad |\nabla J(u+v) - \nabla J(u)| \leq L|v|, \quad L > 0 \quad (2.19)$$

(условие Липшица с константой  $L$  для  $\nabla J$ ).

Пусть минимум  $J(u)$  достигается при  $u = u^*$ . Тогда

а) если  $|r^{(t)}| \leq \epsilon$ ,  $\gamma_t = \gamma$ , то найдется  $\bar{\gamma} > 0$  такое, что

$$|u^{(t)} - u^*| \leq \rho(\epsilon) + q^t |u^{(0)} - u^*| \quad (2.20)$$

при  $0 < \gamma < \bar{\gamma}$ , причем

$$0 \leq q < 1, \quad \rho(\epsilon) = O(\epsilon);$$

б) если  $r^{(t)}$  — случайные взаимно независимые величины,

$$\mathbb{M}r^{(t)} = 0, \quad \mathbb{M}|r^{(t)}|^2 \leq D,$$

то найдется  $\bar{\gamma} > 0$  такое, что

$$\mathbb{M}\{J(u^{(t)}) - J(u^*)\} \leq \rho(\gamma) + q^t \mathbb{M}\{J(u^{(0)}) - J(u^*)\} \quad (2.21)$$

при  $0 < \gamma_t = \gamma < \bar{\gamma}$ , причем

$$0 \leq q < 1, \quad \rho(\gamma) = O(\gamma);$$

с) если выполнены условия (б), но  $\gamma_t$  переменны и

$$\gamma_t \rightarrow 0, \quad \sum_{k=0}^t \gamma_k \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

то

$$\mathbb{M}|u^{(t)} - u^*|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty; \quad (2.23)$$

если при этом

$$\gamma_t = \frac{\bar{\gamma}}{t+1}, \quad \bar{\gamma} > \frac{1}{2L}, \quad (2.24)$$

то

$$\mathbb{M}J(u^{(t)}) - J(u^*) \leq c_0 \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right), \quad (2.25)$$

где  $c_0 \triangleq \frac{LD\bar{\gamma}^2}{2(2L\bar{\gamma} - 1)}$ ;

д) если помехи произвольны, но

$$|r^{(t)}|^2 \leq \alpha |\nabla J(u^{(t)})|^2, \quad (2.26)$$

то при  $\alpha < 1$  существует  $\bar{\gamma} > 0$  такое, что

$$|u^{(t)} - u^*| \leq q^t |u^{(0)} - u^*|, \quad q < 1$$

при  $0 < \gamma < \bar{\gamma}$ ;

е) если  $r^{(t)}$  случайны и независимы, но

$$\mathbb{M}|r^{(t)}|^2 \leq \alpha |\nabla J(u^{(t)})|^2, \quad (2.27)$$

то при любом  $\alpha$  существует  $\bar{\gamma} > 0$  такое, что

$$\mathbb{M}|u^{(t)} - u^*|^2 \leq cq^t, \quad q < 1, \quad c = \text{const}$$

при  $0 < \gamma < \bar{\gamma}$ .  $\square$

**Доказательство.** Т.2.1 приводится в [9.18, с. 97–99]. Поясним лишь смысл результатов:

а) при произвольных ограниченных погрешностях (в частности, постоянных) процедура приводит в ограниченную зону вблизи минимума «размером» порядка величины погрешности;

б) при наличии случайных погрешностей выбор постоянного  $\gamma$  также не позволяет точно прийти к минимуму;

с) при убывающих  $\gamma_t$  и случайных погрешностях имеется сходимость в среднем, причем ожидаемое значение минимизируемой функции убывает не медленнее, чем  $O(1/t)$  \*);

\*). Элементарное объяснение смысла требований к  $\gamma_t$  дано в [9.17]. Большое количество примеров приведено в [5.9]. Там же были получены результаты типа Т.2.1 для квадратичных  $J(u)$ .

д) при ограниченных искажениях направления градиента сохраняется сходимость к минимуму при  $\gamma_t = \text{const}$ ;

е) относительные случайные погрешности в оценке градиента не ухудшают условий сходимости. ■

Вернемся вновь к описанным выше законам экстремального регулирования, предполагая выполненные условия (2.18), (2.19). В алгоритме (2.10) градиент вычисляется с систематической погрешностью порядка  $\delta$ , случайные погрешности отсутствуют. Поэтому, принимая  $\gamma_t = \gamma = \text{const}$ , например,  $\gamma = L^{-1}$ , обеспечим сходимость последовательности  $u^{(t)}$  в окрестность порядка  $\delta$ . Более того, и любые  $u[k]$ , возникающие при пробных шагах, будут при достаточно больших  $k$  отличаться от  $u^*$  на величины порядка  $\delta$ . Если модифицировать (2.10), считая  $\delta$  зависящим от  $t$  и убывающим, то при отсутствии ошибок вычислений и наблюдений закон управления окажется оптимальным, т. е.  $u[k] \rightarrow u^*$ .

Процедура Роббинса — Монро (2.13) действует при наличии случайных ошибок в оценке градиента. Если коэффициенты  $\gamma_k$  убывают, подчиняясь условиям (2.22), то обеспечена сходимость в среднеквадратичном, но асимптотическая скорость приближения очень медленная. Стоит, однако, подчеркнуть, что она определяется особенностями закона больших чисел, обеспечивающего здесь «полное осреднение» влияния погрешностей. Алгоритмы типа (2.12) с циклическим осреднением не могут иметь лучшего асимптотического поведения [5.9], хотя, как правило, более эффективны на начальных шагах. Отметим также, что на практике предпочтительно повысить скорость сходимости, не снижая  $\gamma_t$  ниже определенного порога, хотя при этом гарантируется лишь сходимость в окрестность.

Наконец, остановимся на процедуре Кифера — Вольфовича. Здесь возникают и систематические погрешности, и случайные. Убывание  $\gamma_t$  согласно (2.22) обеспечивает осреднение случайных погрешностей, а убывание  $\delta_t$  — систематических. Поскольку в силу (2.15) случайная компонента погрешности равна

$$2\delta_t^{-1}(N[k+m] - N[k]),$$

то ее дисперсия имеет порядок  $\delta_t^{-2}$  и неограниченно возрастает при  $\delta_t \rightarrow 0$ . Поэтому Т.2.1 здесь непосредственно неприменима. Дополнительный анализ показывает [9.18], что, беря, например,  $\delta_t = O(\sqrt{\gamma_t}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , можно обеспечить сходимость в среднеквадратичном. Практически принимают  $\delta_t$  малым, но отличным от нуля, смиряясь с потерями из-за пробных шагов.

Подведем итоги анализа.

**Вывод.** Законы экстремального регулирования базируются на общих принципах построения систем с обратной связью по наблюдениям. Они приводят к оптимальным или субоптимальным решениям, даже если априорная информация о свойствах объекта и процесса наблюдения очень ограничена (необходима лишь ин-

формация о выполнении условий типа указанных в Т.2.1). Приято говорить, что применение этих законов обеспечивает большую адаптивность системы, т. е. сохранение хорошего качества при плохой априорной информированности. Вместе с тем выводы об оптимальности или субоптимальности экстремального регулирования верны лишь для показателей, характеризующих установившиеся режимы или поведение в среднем за длительный отрезок времени, требующийся для установления процесса. Обеспечение эффективной работы при наличии помех в измерениях возможно лишь за счет еще большего замедления переходных процессов. Поскольку сама модель (2.2) дискретного статического объекта практически приемлема для описания устойчивых объектов, действующих в реальном времени (гл. 10, § 2), а длительность такта (интервала между моментами изменения управления) должна быть достаточной для установления реакции, то ясна основная область практического приложения экстремального регулирования — это устойчивые объекты, функционирующие в течение длительного времени в одних и тех же условиях.

О других возможностях — ниже, в § 3.

**2.4. Управление с использованием оценок параметров.** Разовьем идею, намеченнную в конце п. 2.2. Предположим, что неопределенность в описании объекта сводится к заданию конечного числа параметров, вектора  $\theta$ , т. е.

$$x[k+1] = f(u[k], \theta), \quad (2.28)$$

причем вид функции  $f$  известен, равно как известен и вид функции  $g(x, u)$ , определяющей показатели качества (2.3) или (2.4).

Естественным представляется идентификационный подход: на основе наблюдений найти оценки параметров, а с помощью оценок вычислять управление, оптимизирующее показатель качества. Этот подход в принципе допускает три варианта реализации.

1. Затратить начальные  $T_0$  тактов для вычисления оценок, выбирая при этом управляющее воздействие только как тест-сигнал, обеспечивающий условия идентифицируемости. Полученную оценку  $\hat{\theta}$  использовать для вычисления минимума оценочного показателя

$$\hat{J}(u) = g(f(u, \hat{\theta}), u).$$

Если оценка  $\hat{\theta}$  совпадает с истинным значением  $\theta^*$ , то минимизирующее значение  $\hat{u}$  совпадает с оптимальным  $u^*$  и при  $k > T_0$  может быть использована простейшая постоянная программа (2.6).

2. Исходя из произвольного начального управления  $u[0]$  и априорной оценки  $\hat{\theta}[0]$ , осуществлять на каждом такте уточнение этой оценки с помощью поступающих наблюдений, причем, если оценка на такте  $k$  равна  $\hat{\theta}[k]$ , то

$$u[k] = \operatorname{argmin} \hat{J}_k(u), \quad \hat{J}_k(u) = g(f(u, \hat{\theta}[k]), u). \quad (2.29)$$

Если оценка окажется точной хотя бы асимптотически,  $\hat{\theta}[k] \rightarrow \theta$  при  $k \rightarrow \infty$ , то такая управляющая последовательность будет оптимальной в смысле (2.3), (2.4).

3. Учесть, что  $\nabla_{\hat{J}}(u)$  является оценкой градиента  $J(u)$ , и использовать один из алгоритмов экстремального регулирования

$$u[k+1] = u[k] - \gamma_k \nabla_{\hat{J}}(u[k]) \quad (2.30)$$

с тем или иным выбором  $\gamma_k$ . При этом по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\nabla_{\hat{J}}(u[k]) = \nabla_u g + \nabla_x g \nabla_u f(u, \hat{\theta}[k])|_{u=u(k)}. \quad (2.31)$$

Алгоритм (2.30) может сходиться к  $u^*$ , даже если оценки  $\hat{\theta}[k]$  не сходятся к  $\theta$ . Существенно лишь, чтобы функция  $J(u)$  и погрешности

$$r^{(k)} = \nabla_u J(u[k]) - \nabla_{\hat{J}}(u[k]) \quad (2.32)$$

удовлетворяли условиям Т.2.1.

Реализация подхода 1 наиболее очевидна и сводится к раздельному применению процедур идентификации, описанных в § 1, и решению обычной задачи на минимум функции конечного числа переменных. Однако ясно и то, что область применения подхода 1 ограничена ситуацией, когда наблюдения не зашумлены или помехи очень слабы. При реализации подхода 2 возникают две практические трудности: требуется каждый раз пересчитывать оценку после поступления новых данных (например, повторять процедуру МНК с увеличивающимся числом наблюдений), а кроме того, каждый раз заново решать оптимизационную задачу. Подход 3 сталкивается с тем же первым препятствием, но избегает второго, хотя сходимость экстремального регулирования может быть медленной. Достоинством алгоритмов типа (2.30) является отсутствие явных требований к выполнению условий идентифицируемости. Алгоритмы же типа (2.29), как правило, не реализуются в чистом виде: к «рабочему» воздействию, вычисляемому согласно (2.29), приходится добавлять тест-сигнал для обеспечения идентифицируемости. Вместе с тем предпочтение той или иной схемы практически определяется как возможностями вычислительной техники, так и допустимым отклонением от оптимальности.

**2.5. Рекуррентное оценивание параметров.** В двух наиболее важных из описанных схем возникает проблема пересчета оценок параметров при появлении новых наблюдений. Упрощению процедуры переоценки посвящено множество исследований (см., например, [11.9, 11.25]). Осветим лишь некоторые основные факты, ограничиваясь ситуацией, когда каждое наблюдение — скаляр  $y[k]$ , линейно связанный с оцениваемыми параметрами:

$$y[k] = \varphi[k]\theta + \varphi_0[k] + v[k], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.33)$$

причем  $\{v[k]\}$  — дискретный белый шум.

Назовем *рекуррентной* процедуру оценивания, если она представима в виде

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + L_k(y[k+1] - \hat{y}[k+1]), \quad (2.34)$$

где  $y[k]$  — наблюдение на такте  $k$ , а  $\hat{y}[k]$  — прогноз его значения на основе ранее полученной оценки, так что

$$\hat{y}[k+1] = \varphi[k+1]\hat{\theta}[k] + \varphi_0[k+1]. \quad (2.35)$$

Соотношение (2.34) выражает принцип обратной связи по ошибке прогноза. Вектор  $L_k$  — вектор коэффициентов усиления.

С другой стороны, процедуры типа (2.34) отражают идею экстремального регулирования. Действительно, введем вспомогательный, идентификационный показатель

$$J_{id}(\hat{\theta}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \frac{1}{2} |y[k] - \varphi[k]\hat{\theta} - \varphi_0[k] - v[k]|^2, \quad (2.36)$$

имеющий в силу (2.33) минимум, равный нулю, при  $\hat{\theta} = \theta^*$ .

Разворачивая во времени процедуру минимизации, получим

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] - \gamma_k \nabla J_{id}(\hat{\theta}[k]). \quad (2.37)$$

Возьмем в качестве оценки градиента вектор

$$\begin{aligned} \nabla^{(k)} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \frac{1}{2} |y[k+1] - \varphi[k+1]\hat{\theta} - \varphi_0[k+1]|^2 \Big|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}[k]} = \\ &= -\varphi^*[k+1](y[k+1] - \hat{y}[k+1]). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Очевидно, что (2.37) совпадает с (2.34), если

$$L_k = -\gamma_k \varphi^*[k]. \quad (2.39)$$

Вопрос о точности оценки (2.38), а следовательно, о выборе  $\gamma_k$ , обеспечивающем сходимость процедуры, проще всего обсудить в рамках Т.2.1, предполагая, что каждая из последовательностей  $\{\varphi[k]\}$ ,  $\{\varphi_0[k]\}$ ,  $\{v[k]\}$  является эргодической последовательностью независимых центрированных случайных величин, распределенных по одинаковому, хотя и неизвестному закону с ограниченными ковариациями \*\*), причем  $\{v[k]\}$  независима от  $\{\varphi[k]\}$ ,  $\{\varphi_0[k]\}$ . Тогда

$$J_{id}(\hat{\theta}) = M \left\{ \frac{1}{2} |y[k+1] - \varphi[k+1]\hat{\theta} - \varphi_0[k+1] - v[k+1]|^2 \right\} \quad (2.40)$$

\*) При случайных  $v[k]$  значение (2.36), вообще говоря, случайно, но для любой реализации минимум достигается при одном и том же значении  $\hat{\theta}$ , совпадающем с истинным значением параметров.

\*\*) При такой постановке задачу принято называть *задачей стохастической аппроксимации*. На самом деле нет необходимости считать входные (наблюдаемые) воздействия случайными. Здесь это сделано лишь для удобства использования общих результатов Т.2.1. Отказавшись от гипотезы случайности, можно провести доказательство непосредственно и несколько ослабить требования к последовательности  $\{\varphi[k]\}$ .

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\theta} J_{id} &= M [\varphi^T[k+1](y[k+1] - \varphi[k+1]\hat{\theta} - \varphi_0[k+1] - v[k+1])] = \\ &= -M \{\varphi^T[k+1]\varphi[k+1]\} (\hat{\theta} - \theta). \end{aligned}$$

В то же время

$$\nabla^{(k)} = -\varphi^T[k+1]\varphi[k+1](\hat{\theta}[k] - \theta) + \varphi^T[k+1]v[k+1].$$

Поэтому погрешность в оценке градиента равна

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= \nabla J_{id}(\hat{\theta}[k]) - \nabla^{(k)} = \{\varphi^T[k+1]\varphi[k+1] - \\ &- M\varphi^T[k+1]\varphi[k+1]\}(\hat{\theta}[k] - \theta) - \varphi^T[k+1]v[k+1]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Если помехи в измерениях отсутствуют,  $v[k] = 0$ , то имеется лишь относительная случайная погрешность и в силу Т.2.1 может быть обеспечена сходимость к истинному значению  $\theta$  при  $\gamma_k = \gamma > 0$ .

Если же помехи есть, то для обеспечения сходимости рекуррентной процедуры приходится замедлять процесс, требуя, чтобы  $\gamma_k$  убывали, удовлетворяя условиям (2.22).

Подчеркнем, что утверждения Т.2.1 справедливы только при выполнении (2.18), что в данной задаче эквивалентно требованию

$$\mathcal{A} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varphi^T[k+1]\varphi[k+1] = M \{\varphi^T[k+1]\varphi[k+1]\} > 0, \quad (2.42)$$

совпадающему с условием (1.23) сходимости МНК.

Кратко остановимся на более конкретных рекомендациях по выбору  $\gamma_k$  в (2.37). Если помехи отсутствуют, то выбирается либо

$$\gamma_k = \bar{\gamma} = \frac{1}{L+t}, \quad (2.43)$$

где константы  $L$ ,  $L$  удовлетворяют условиям  $\mathcal{A} - U \geq 0$ ,  $\mathcal{A} - LI \leq 0$ , либо

$$\gamma_k = [\mu + |\varphi[k+1]|^2]^{-1}, \quad \mu > 0. \quad (2.44)$$

Последнее приводит к классическому *методу Качмажа*, первоначально разработанному для решения конечных систем линейных уравнений, но столь же естественно приспособленному и для решения бесконечной системы

$$y[k] = \varphi[k]\hat{\theta} + \varphi_0[k], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

если она, как и в данной задаче, имеет единственное решение  $\hat{\theta} = 0$ .

Если помехи ограничены величиной  $\bar{\epsilon}$ , то вновь можно принять (2.43) со сходимостью со скоростью геометрической прогрессии в область порядка  $\bar{\epsilon}L^{1/2}t^{-1}$ , если  $|v[k]| \leq \bar{\epsilon}$  [9.18]. Эффективны также различные модификации метода Качмажа с введением зоны нечувствительности [4.11], например,

$$\gamma_k = \begin{cases} [\mu + |\varphi[k+1]|^2], & \text{если } |y[k+1] - \hat{y}[k+1]| > \bar{\epsilon}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.46)$$

что может интерпретироваться как процедура поиска точки  $\hat{\theta}$ , удовлетворяющей бесконечной системе неравенств

$$|y[k] - \phi[k]\hat{\theta} - \phi_0[k]| \leq \bar{e}. \quad (2.47)$$

Напомним, что истинное значение  $\theta$  заведомо является такой точкой, причем размер зоны неопределенности, т. е. расстояние от  $\theta$  до произвольной точки, удовлетворяющей (2.47), вновь определяется показателем обусловленности  $L\bar{L}^{-1}$ . Однаковый характер имеют и оценки скорости сходимости в зону.

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда помехи случайны и имеют ограниченную дисперсию  $d_v$ . В погрешности  $r^{(k)}$  при этом имеется как несущественная случайная относительная компонента, так и существенная, абсолютная

$$\Delta r^{(k)} = \phi^r[k+1]v[k+1],$$

причем

$$M|\Delta r^{(k)}|^2 \leq Ld_v. \quad (2.48)$$

Здесь вновь можно использовать рекомендации (2.43), (2.44) для обеспечения сходимости в зону, размер которой слу́чайен, но имеет среднеквадратичное значение уже указанного порядка. С другой стороны, для обеспечения сходимости к  $\theta$  (в среднеквадратичном) приходится осуществлять замедление поиска, требуя для  $\gamma_k$  выполнения условий (2.22). Это можно вновь делать различными способами:

a) по программе

$$\gamma_k = [\mu + k]^{-1}\bar{\gamma}, \quad \mu > 0, \quad \bar{\gamma} > 0; \quad (2.49)$$

b) с нормировкой типа Качмажа

$$\gamma_k = [\mu + |\phi[k+1]|^2]^{-1}\bar{\gamma}_k, \quad \mu > 0, \quad (2.50)$$

причем  $\bar{\gamma}_k$  удовлетворяет (2.22);

v) с нормировкой типа Гудвина [11.25]

$$\gamma_k = \left( \mu + \sum_{l=1}^{k+1} |\phi[l]|^2 \right)^{-1}\bar{\gamma}, \quad \mu > 0, \quad \bar{\gamma} > 0; \quad (2.51)$$

г) с локально оптимальным выбором  $\gamma_k$ , где выполняется (2.50), но

$$\bar{\gamma}_k = 1 + \bar{d}_v(\phi[k+1]\bar{D}[k]\phi^r[k+1])^{-1}, \quad \bar{d}_v > 0, \quad (2.52)$$

матрица  $\bar{D}[k]$  вычисляется рекуррентно:

$$\begin{aligned} \bar{D}[k] = & (I - \gamma_{k-1}\phi^r[k]\phi[k])\bar{D}[k-1](I - \gamma_{k-1}\phi^r[k]\phi[k]) + \\ & + \gamma_{k-1}^2\bar{d}_v\phi^r[k]\phi[k], \end{aligned} \quad (2.53)$$

начиная с некоторого  $\bar{D}_0 > 0$ .

Во всех вариантах и вводится только во избежание деления на нуль. Остановимся несколько подробнее на способе (г). Его название связано с тем, что такой выбор  $\gamma_k$  доставляет минимум

$$M\{|\theta_k(\gamma) - \theta|^2\}, \quad (2.54)$$

где

$$\theta_k(\gamma) \triangleq \bar{\theta}[k] + \gamma\phi^r[k](y[k+1] - \hat{y}[k+1]), \quad (2.55)$$

иначе говоря, осуществляется выбор из условия наискорейшего спуска (в среднеквадратичном) к  $\theta$  по выбранному направлению.

Если известна дисперсия помехи  $d_v$ , то принимается  $\bar{d}_v = d_v$ . Если задана ковариационная матрица  $D_0$  априорной оценки  $\hat{\theta}[0]$  и принято  $\bar{D}[0] = D_0$ , то  $\bar{D}[k]$  является матрицей ковариаций текущих оценок. Вместе с тем при  $d_v = 0$  алгоритм (г) автоматически переходит в классический алгоритм Качмажа, в котором  $\gamma_k$  выбирается из условия

$$|\theta_k(\gamma) - \theta|^2 \rightarrow \min. \quad (2.56)$$

Его преимущества особо проявляются при сравнительно низком уровне помех. Алгоритм достаточно быстро приводит в малую окрестность  $\theta$ , после чего происходит медленное уточнение оценки\*. Асимптотическое же поведение при любом из приведенных способов имеет в силу Т.2.1 один и тот же порядок  $t^{-1}$ . Впрочем, ту же скорость сходимости (см. Т.1.1) имеют и оценки, получаемые нерекуррентно, с помощью МНК или ММП.

Рассмотрим еще одну возможность. Примем в (2.37), (2.38) вместо скалярного коэффициента  $\gamma_k$  матричный  $\Gamma_k$ , т. е. используем процедуру

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + \Gamma_k\phi^r[k+1](y[k+1] - \hat{y}[k+1]). \quad (2.57)$$

Выберем  $\Gamma_k$  из условия минимума

$$M\{|\theta_k(\Gamma) - \theta|^2\}, \quad (2.58)$$

где  $\theta_k(\cdot)$  определено, как и в (2.55).

Можно убедиться в том, что

$$\Gamma_k = (\phi[k+1]D[k]\phi^r[k+1] + d_v)^{-1}D[k] \triangleq \rho_k D[k], \quad (2.59)$$

а  $D[k]$  имеет смысл матрицы ковариаций текущих оценок и может быть вычислена рекуррентно:

$$D[k] = D[k-1] - \rho_{k-1}D[k-1]\phi^r[k]\phi[k]D[k-1]. \quad (2.60)$$

**Замечание.** Придадим исходной задаче несколько иную форму. Введем дискретную динамическую систему тривиального вида

$$\theta[k+1] = \theta[k], \quad \theta[0] = \theta, \quad (2.61)$$

\* Детальный анализ был проведен М. Г. Захаровым.

составленной которой  $\theta[k]$  наблюдается с получением текущих измерений

$$\bar{y}[k] = \varphi[k]\theta[k] + v[k]. \quad (2.62)$$

Очевидно, что исходная задача оценки параметров  $\theta$  эквивалентна задаче оценивания текущего состояния системы (2.61) по наблюдениям (2.62), если принять  $\bar{y}[k] = y[k] - \varphi[k]$ . Вместе с тем в гл. 10, § 4, было получено оптимальное решение этой задачи в виде фильтра Бьюси — Калмана. Сравнивая результаты, нетрудно убедиться в полном (с точностью до обозначений) совпадении только что построенной процедуры с рекуррентным уравнением этого фильтра. С другой стороны, выход фильтра совпадает с оценкой ММП (при нормальности помех), т. е. фильтр дает рекуррентную процедуру построения таких оценок\*).

Асимптотическое поведение оценок во всех алгоритмах, как уже указывалось, имеет один и тот же порядок  $t^{-1}$ , определяемый особенностями закона больших чисел. Вместе с тем при том же порядке величин асимптотическую точность можно улучшить, если имеется априорная информация о законе распределения помех [11.19].

В частности, если помехи представляют собой смесь нормальных процессов с резко разными дисперсиями, причем доля помехи с большой дисперсией мала, то целесообразно использовать так называемые *робастные алгоритмы*, отличающиеся тем, что

$$\gamma_k = 0, \text{ если } |y[k+1] - \hat{y}[k+1]| \geq \bar{v}.$$

Введение порога  $\bar{v}$  позволяет отсеивать редкие, но сильные выбросы, отклонения наблюдений от прогноза, почти заведомо порождаемые большими помехами\*\*). Если принять  $\bar{v} \sim |\varphi[k+1]|$ , то отсекаются наблюдения с низким уровнем сигнала, что, как показывает практика вычислений, почти всегда необходимо.

Важно также отчетливо представлять, что все методы градиентного типа (со скалярным  $\gamma_k$ ) малоэффективны при плохой обусловленности матрицы  $\mathcal{A}$  (малом  $LL^{-1}$ ). Преимущество в этом отношении имеет алгоритм (2.57), по крайней мере при малых дисперсиях случайных погрешностей и грубых априорных оценках. В равной мере использование рекуррентных форм симплекс-метода предпочтительнее (2.46) при малых  $\varepsilon$ . Практически на выбор метода влияют, конечно, и сведения о возможностях вычислительных устройств.

С другой стороны, обусловленность улучшается за счет планирования идентификационного эксперимента, но, как мы убедимся ниже, это может вступить в противоречие с основной целью управления.

\*). Если априорные сведения о дисперсии помех и ковариации начальной оценки отсутствуют, то используют МНК в обычной форме для обработки некоторой начальной серии наблюдений, а затем применяют рекуррентию (2.57) — (2.60) для обработки остальных наблюдений.

\*\*). По поводу теории робастных оценок наиболее полные сведения даются в [11.17] (см. также обзор [11.19д]).

**2.6. Объект, линейный по управлению и по параметрам.** Опишем несколько подробнее особенности различных вариантов экстремального регулирования применительно к задаче управления линейным статическим объектом, описываемым соотношением

$$x[k+1] = Bu[k] + Gw[k], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $x$  —  $n$ -вектор состояния,  $u$  —  $n_u$ -вектор управления,  $w$  —  $n_w$ -вектор возмущения.

Цель управления состоит в приближении выхода

$$y[k] = Cx[k] \quad (2.63)$$

к желаемому  $y^d[k]$ , т. е. в уменьшении ошибки управления

$$\varepsilon[k] = y^d[k] - y[k]. \quad (2.64)$$

Сопоставим с этой целью показатели вида

$$J_\infty = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} |\varepsilon[k]|^2 \quad (2.65)$$

или

$$\bar{J} = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \frac{1}{2} |\varepsilon[k]|^2. \quad (2.66)$$

Если последовательность  $\{u[k]\}$  выбрана так, что значение показателя (2.65) равно нулю, то гарантируется равенство нулю ошибки в установившемся режиме. Равенство же нулю показателя (2.66), вообще говоря, может иметь место и при наличии редких отклонений от нуля\*). Пусть  $w[k] = w = \text{const}$  и  $y^d[k] = y^d = \text{const}$ . Заменяя исходную цель задачей минимизации (2.65) или (2.64), приходим к постановке, описанной в п. 2.1 при

$$J(u) = \frac{1}{2} |y^d - Cx|^2 = \frac{1}{2} |y^d - CBu - CGw|^2. \quad (2.67)$$

Оптимизационная постановка конкретизирует задачу выбора управления и для ситуаций, когда объект не является полностью управляемым, т. е. не существует такого  $u[k] = u^*$ , чтобы  $\varepsilon[k] = 0$  при любом  $y^d$ , иначе говоря, не имеет решения система

$$\beta u = s, \quad s \triangleq y^d - CGw, \quad \beta \triangleq CB, \quad (2.68)$$

а следовательно, показатели (2.65), (2.66) не могут достигать нулевого значения.

Рассмотрим последовательно ряд возможных ситуаций, считая выполненным условие

$$\text{rank } \beta = m, \quad m \triangleq \dim u. \quad (2.69)$$

\*). Равенство (2.66) нулю в анализе именуется сходимостью последовательности  $\{\varepsilon[k]\}$  к нулю в смысле Чезаро и, вообще говоря, не влечет за собой стремления к нулю элементов последовательности.

а) *Известны*  $\beta$ ,  $s$ . Тогда, полагая

$$u[k] = u^* = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T s, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.70)$$

сразу достигаем минимума  $J(u)$ , при котором

$$\varepsilon[k] = \varepsilon^* = [I - \beta(\beta^T \beta)^{-1} \beta]s. \quad (2.71)$$

В случае полной управляемости  $\varepsilon^* = 0$ , и при  $\dim y = m$

$$u[k] = u^* = \beta^{-1}s. \quad (2.72)$$

б) *Известно*  $\beta$ , но неизвестно  $s$ . Тогда, полагая  $u[0]$  произвольным и измеряя ошибку  $\varepsilon[1]$ , находим, что закон управления с обратной связью по ошибке

$$u[k+1] = u[k] + K[k]\varepsilon[k+1], \quad \varepsilon[k+1] = s - \beta u[k] \quad (2.73)$$

приводит к минимуму за один такт, если выбрать

$$K[k] = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T = \text{const}. \quad (2.74)$$

в) *Неизвестны ни*  $s$ , *ни*  $\beta$ . Пусть имеет место полная управляемость. Тогда при использовании закона (2.73) получим процесс, сходящийся к  $u^*$ , если матрица коэффициентов усиления удовлетворяет условию

$$\alpha \triangleq \|I - K\beta\| < 1. \quad (2.75)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} u[k+1] - u^* &= u[k] - u^* + K(s - \beta u[k]) = \\ &= (I - K\beta)(u[k] - u^*) - K(s - \beta u^*), \end{aligned} \quad (2.76)$$

так что при условиях (2.72), (2.75)

$$|u[k+1] - u^*| < \alpha |u[k] - u^*|$$

и имеется экспоненциальная сходимость:

$$|u[k] - u^*| < \alpha^k |u[0] - u^*|. \quad (2.77)$$

Для того чтобы удовлетворить (2.75), необходимо иметь некоторую информацию о  $\beta$ . Более того, при отсутствии полной управляемости последнее слагаемое в (2.76) не равно нулю, и даже выполнение (2.75) не обеспечивает сходимость  $u[k]$  к  $u^*$ .

Обратимся к алгоритмам экстремального регулирования. Отметим прежде всего, что

$$\nabla J(u) = \beta^T(s - \beta u). \quad (2.78)$$

Вектор  $\theta$  неизвестных параметров, входящих в выражение градиента, состоит из столбцов  $\beta$ , матрицы  $\beta$  и вектора  $s$ . Попытаемся применить алгоритм (2.16) с оценкой компонент градиента по формуле (2.15). Однако, в отличие от (2.14), предположим, что изменяется, и притом точно, ошибка управления. Тогда, поскольку

$J(u[k]) = \varepsilon^2[k]$ , имеем

$$\nabla_j^{(t)} = (2\delta_t)^{-1} [|\varepsilon[t(2m+1)+j]|^2 - |\varepsilon[t(2m+1)+m+j]|^2], \quad (2.79)$$

или

$$\begin{aligned} \nabla_j^{(t)} &= (2\delta_t)^{-1} [(s - \beta u[t(2m+1)+j])^2 - (s - \beta u[t(2m+1)+m+j])^2] = \\ &= (2\delta_t)^{-1} [(s - \beta u^{(t)}) - \beta \delta_t i_j]^2 - (s - \beta u^{(t)} + \beta \delta_t i_j)^2 = \\ &= -i_j^T \beta^T (s - \beta u^{(t)})^T. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Убеждаемся, что  $\nabla_j^{(t)}$  точно совпадает с  $j$ -й компонентой градиента, даваемой формулой (2.78) при  $u = u^{(t)}$ , при любом  $\delta_t > 0$ . Поэтому алгоритм (2.16) при  $\gamma_t = \gamma = \text{const}$ ,  $0 < \gamma < 2L^{-1}$ , где  $L$  — наибольшее с. ч. матрицы  $\beta^T \beta$ , обеспечит сходимость к минимуму последовательности  $\{u^{(t)}\}$ . Если же принять  $\delta_t \rightarrow 0$ , то  $u[k] \rightarrow u^*$  для любых  $k$  (исчезают потери на пробных шагах). Однако можно поступить и проще, обеспечивая сходимость точно за  $m+2$  такта. Действительно, в силу алгоритма имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon[1] &= s - \beta u[0], \quad \varepsilon[k] = s - \beta(u[0] + \delta_0 i_j) = \varepsilon[1] - \delta_0 \beta i_j, \\ j &= k-1 = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\beta_j \triangleq \beta i_j = \delta_0^{-1} (\varepsilon[1] - \varepsilon[k]), \quad j = k-1 = 1, \dots, m, \quad s = \varepsilon[1] + \beta u[0]. \quad (2.81)$$

Таким образом, по  $(m+1)$ -му наблюдению вычислим все  $m$  столбцов  $\beta$ , матрицы  $\beta$  и вектор  $s$ . После этого можно на всех дальнейших тактах использовать управление  $u[k] = u^*$ , вычисленное согласно (2.70).

Фактически оказался использованным простейший идентификационный подход с получением точной оценки всех параметров за конечное число начальных тактов.

Несколько иная идея применена в [11.4д]: пробные шаги совмещаются с рабочими, а параметры определяются в результате обработки по МНК текущих наблюдений. Пусть  $u[k]$ ,  $k = 0, \dots, m$ , — какие-либо произвольные векторы рабочих шагов. Тогда наблюдение дает линейные связи

$$\varepsilon[k+2] - \varepsilon[k+1] = \beta(u[k+1] - u[k]), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.82)$$

Находя на каждом такте  $k$  оценки  $\hat{\beta}[k]$  из условия минимума

$$\sum_{l=0}^k |\varepsilon[l+2] - \varepsilon[l+1] - \beta(u[l+1] - u[l])|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.83)$$

приходим за  $m+1$  такт к истинным значениям, если выполнены очевидные условия невырожденности. Можно доказать, что они выполняются при почти любом  $u[0]$ , если далее  $u[k]$  строятся согласно (2.73) при

$$K[k] = [\beta^T[k] \hat{\beta}[k]]^{-1} \hat{\beta}[k]. \quad (2.84)$$

Поскольку  $\beta[m+1] = \beta^*$ , то  $u[m+1] = u^*$  и  $\varepsilon[m+2] = \varepsilon^*$ . Пересчет МНК оценок разумно вести в рекуррентной форме

$$\begin{aligned}\hat{\beta}[k+1] &= \hat{\beta}[k] + |\Delta u_k|^{-2} (\Delta \varepsilon_k - \hat{\beta}[k] \Delta u_k) \Delta u_k^\top, \\ \Delta u_k &\triangleq u[k+1] - u[k], \quad \Delta \varepsilon_k \triangleq \varepsilon[k+2] - \varepsilon[k+1].\end{aligned}\quad (2.85)$$

**2.7. Управление при случайных помехах \*).** Пусть наблюдаются величины

$$\tilde{\varepsilon}[k] = \varepsilon[k] + N[k], \quad (2.86)$$

где  $\{N[k]\}$  — «белый шум». Очевидно, применим алгоритм Кибера — Вольфовича (2.15), (2.16) при  $\hat{J}(u) = \tilde{\varepsilon}^2$ . Сходимость управлений обеспечивается за счет убывания  $\gamma_t$ ,  $\delta_t$ . Практически более интересен идентификационный подход. Простейший вариант состоит в циклической процедуре, где в каждом цикле  $t+1$  торт затрачивается на пробные шаги, а  $(t+2)$ -й — на рабочий шаг. В цикле  $t$  из уравнений типа (2.81), где  $\varepsilon[k]$  заменено на  $\tilde{\varepsilon}[k]$ , находятся векторы  $s^{(t)}$ ,  $\beta^{(t)}$ , отличающиеся от  $s^*$ ,  $\beta^*$  в силу случайных ошибок.

Если в качестве текущей оценки брать результат усреднения этих векторов по всем предшествующим циклам, то оценки сойдутся (в среднеквадратичном) к  $s^*$ ,  $\beta^*$ . При вычислении рабочих шагов согласно (2.70) с заменой  $s$ ,  $\beta$  на  $s^{(t)}$ ,  $\beta^{(t)}$  последовательность  $u^{(t)}$  также сойдется к  $u^*$ .

Очевидно, что усреднение можно проводить рекуррентно:

$$\hat{\beta}^{(t+1)} = \frac{t}{t+1} \hat{\beta}^{(t)} + \frac{1}{t+1} \hat{\beta}^{(t)}, \quad \hat{s}^{(t+1)} = \frac{t}{t+1} s^{(t)} + \frac{1}{t+1} \hat{s}^{(t)}, \quad (2.87)$$

Для упрощения вычислений обратим внимание на то, что с ростом  $t$  оценки и соответствующие им управления сближаются. Поэтому при достаточно больших  $t$  в формуле

$$u^{(t+1)} = [(\hat{\beta}^{(t+1)})^\top \hat{\beta}^{(t+1)}]^{-1} (\hat{\beta}^{(t+1)})^\top \hat{s}^{(t+1)}$$

можно учесть малость изменения матриц и попытаться выразить  $u^{(t+1)}$  через предшествующее значение  $u^{(t)}$ . Если в ходе выкладок формально отбрасывать слагаемые порядка меньшего, чем  $t^{-1}$ , то получим рекуррентную процедуру

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{(t+1)} &= \hat{\beta}^{(t)} + \frac{1}{t} \beta^{(t)}, \quad s^{(t+1)} = \hat{s}^{(t)} + \frac{1}{t} s^{(t)}, \\ u^{(t+1)} &= u^{(t)} + \frac{1}{t} \hat{P}^{(t)} [\hat{\beta}^{(t)} \tilde{\varepsilon}^{(t)} + \beta^{(t)} \tilde{\varepsilon}^{(t)}], \quad \tilde{\varepsilon}^{(t)} = \hat{\beta}^{(t)} u^{(t)} - s^{(t)}, \\ \hat{P}^{(t+1)} &= \hat{P}^{(t)} - \frac{1}{t} \hat{P}^{(t)} [(\beta^{(t)})^\top \hat{\beta}^{(t)} + (\hat{\beta}^{(t)})^\top \beta^{(t)}] \hat{P}^{(t)},\end{aligned}\quad (2.88)$$

где  $\hat{P}^{(0)} = [(\hat{\beta}^{(0)})^\top \beta^{(0)}]^{-1}$ .

\*). Имеется ряд интересных исследований [4.11, 11.3, 11.11] по алгоритмам, учитывающим ограниченные помехи, но результаты применимы только при полной управляемости.

Процедура (2.88) может интерпретироваться как реализация двух контуров обратной связи: основной контур реализует обратную связь по наблюдаемой ошибке управления  $\varepsilon^{(t)}$  с поправкой по прогнозу этой ошибки  $\tilde{\varepsilon}^{(t)}$ , а в дополнительном контуре осуществляется идентификация параметров и пересчет матриц коэффициентов усиления  $t^{-1} \hat{P}^{(t)} \beta^{(t)}$ ,  $t^{-1} \hat{P}^{(t)} \hat{\beta}^{(t)}$ , необходимых для работы основного контура. Вместе с тем алгоритм имеет все особенности алгоритма экстремального регулирования с введением убывающего коэффициента  $\gamma_t \sim t^{-1}$  для усреднения случайных помех.

Очевидно, что аналогичному преобразованию может быть подвергнут и алгоритм (2.73), (2.84), (2.85), где идентификация производится без пробных шагов. При его циклической реализации в конце каждого цикла находятся текущие величины  $\beta^{(t)}$ , которые далее подлежат усреднению.

Возможно, что более эффективной в вычислительном отношении является нециклическая реализация, т. е. алгоритм с основной обратной связью вида  $u[k+1] = \hat{u}[k] + K[k] \tilde{\varepsilon}[k+1]$  и  $K[k]$ , рассчитываемым согласно (2.84), где  $\hat{\beta}[k]$  — текущие МНК оценки. Однако условия сходимости здесь не изучены.

**2.8. Переменные внешние воздействия.** Кратко рассмотрим ситуацию, когда внешние воздействия изменяются по времени, т. е.  $s[k] \triangleq y^d[k] - CGw[k-1] \neq s = \text{const}$ .

При этом наиболее важны три варианта.

a) *Воздействие известно заранее с точностью до константы  $\bar{s}$ .* Тогда применимы описанные алгоритмы с очевидной модификацией: из обрабатываемых наблюдений вычитается известная часть, а оценке подлежит лишь константа и матрица  $\beta$ .

b) *Воздействие заранее неизвестно, но его изменение ограничено.* Тогда применимы те же алгоритмы, но вносится дополнительная ошибка в силу отличия получаемой постоянной оценки от действительного меняющегося воздействия.

c) *Воздействие заранее неизвестно, но непосредственно наблюдается и, более того, является полиномиальным степени  $r$ .*

Тогда оно представимо как решение однородного уравнения

$$\zeta^r s[k] = 0,$$

где  $\zeta$  — оператор сдвига на торт при неизвестных начальных условиях, а следовательно, за  $r$  тактов может быть восстановлено по наблюдениям, если таковые точны, или восстановлено асимптотически точно, если наблюдения запущены.

Описанные алгоритмы сохраняют силу, если оценка воздействия ведется независимо (по его наблюдениям), а при оценивании матрицы  $\beta$  по формулам типа (2.81) учитывается изменение воздействия по его оценкам \*).

\*) Детальнее — в [11.6].

Сделаем также важное замечание, относящееся к постановке задачи. Неопределенность в описании объекта лишь в редких ситуациях можно задать с помощью набора постоянных параметров. Обычно при постановке задачи управления неявно подразумевается, что параметры, формально принятые постоянными, на самом деле медленно изменяются, дрейфуют. Приведенные алгоритмы идентификационного типа работоспособны лишь, если они обеспечивают сходимость за время, когда дрейфом параметров можно пренебречь. Алгоритмы с  $\gamma \rightarrow 0$  в их теоретической форме неприложимы, поскольку приводят к асимптотическому обнулению коэффициентов усиления. Обычно прибегают к их циклическому применению, через определенный период восстанавливая  $\gamma$ , до исходного значения.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий скорее постановку задачи, чем методы ее решения.

**Пример 2.1.** Адаптивное управление формой поверхности астрономического зеркала. Поверхность фокусирующего астрономического зеркала должна представлять собой сферический сегмент. Традиционная оптическая технология добивается этого путем тщательной обработки поверхности и большой жесткости его конструкции. Однако повышение требований к точности (в особенности в больших телескопах) приводит к тому, что недопустимыми оказываются и малые деформации, вызванные различными некомпенсируемыми внешними механическими и тепловыми воздействиями. Эти воздействия приводят к искажению идеальной формы, даже если таковая получена при первоначальной обработке. За последние годы выдвинут (см., например, [11.1]) новый принцип: искажения поверхности должны компенсироваться в ходе работы оптического инструмента путем приложения управляемых усилий к зеркалу.

Пусть  $u[k]$  — вектор, компоненты которого равны управляемым силам, приложенным в момент  $k$  к разным точкам конструкции, а  $y[k]$  — вектор наблюдаемых смещений поверхности зеркала относительно идеальной в различных контрольных точках, число которых может быть существенно большим числа усилий. Тогда  $y[k+1] = \beta u[k] + y_w[k+1]$ , где  $\beta$  — матрица коэффициентов влияния (податливостей), а  $y_w[k+1]$  — смещение, вызванное внешними факторами. При этом учитывается, что ввиду естественной диссипации за тakt между очередными изменениями воздействий реакция устанавливается и определяется лишь упругими свойствами конструкции. Требуется выбрать  $u[k]$  так, чтобы смещения отсутствовали, т. е.  $y^d[k+1] = 0$ ,  $s[k] = -y_w[k]$ . Ввиду отсутствия полной управляемости (число входов меньше числа выходов) удовлетворимся показателем типа  $|e[k]|^2$  или  $|y[k]|^2$ , т. е. суммой квадратов отклонения по всем контрольным точкам. За тakt  $y_w[k]$  меняется несущественно, и его можно считать постоянным, хотя и неизвестным. Если матрица податливостей  $\beta$  предварительно рассчитана, то применим простейший закон с обратной связью (2.73), (2.74), приводящий за один тakt к оптимальному заданию управляемых сил.

Однако точный расчет  $\beta$  ввиду сложности конструкции невозможен, поэтому мы располагаем лишь априорной оценкой  $\hat{\beta}^0$ . Можно попытаться сохранить закон (2.73), введя в него  $K = [(\hat{\beta}^0)^T \hat{\beta}^0]^{-1} (\hat{\beta}^0)^T$ . Тогда, если выполнено (2.75), т. е. точность оценки  $\hat{\beta}^0$  велика, то процедура сойдется, причем чем лучше точность, тем быстрее. Быстродействие существенно, поскольку процесс должен сойтись быстрее, чем существенно изменится  $y_w[k]$ . Дополнительные трудности связаны с плохой обусловленностью матрицы  $(\hat{\beta}^0)^T \hat{\beta}^0$ , что повышает уровень установленных ошибок, как видно из (2.76). Основной практический прием состоит в том, чтобы улучшить обусловленность за счет выбора точек приложения управляющих сил, хотя трудности и сохраняются. При высокой точности измерений предпочтительнее подход экстремального регулирования с оценкой  $\beta$ ,  $s$  по пробным воздействиям. При низкой точности, даже если погрешности измерений случайны, действие системы неэффективно из-за слишком малого быстродействия (хотя асимптотически имеет место сходимость, но за длительное время изменяются оцениваемые возмущения).  $\square$

### § 3. Адаптивное управление динамическими объектами. Самонастройка

**3.1. Основные принципы.** Динамичность объекта существенно усложняет проблему управления в условиях малой априорной информации. Идея непосредственного поиска текущего управляющего воздействия по оценке вызываемого им изменения показателя качества здесь сталкивается с большими трудностями, поскольку эффект от управления, прилагаемого в данный момент, сильно искается влиянием ранее приложенных к объекту воздействий и начальных условий. Поэтому наибольший интерес представляет несколько иной подход, называемый принципом автоматической настройки (самонастройки) параметров закона управления. Предположим, что задан закон управления с обратной связью по совокупности наблюдений  $y^{(k)}$  в виде

$$u[k] = \mathcal{U}(y^{(k)}, u^{(k-1)}, \theta_u), \quad (3.1)$$

где функция  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot, \cdot)$  известна, но заранее не определен конечномерный вектор параметров  $\theta_u$ . Таким образом, задача выбора текущего управляющего воздействия заменяется задачей выбора (настройки) параметров  $\theta_u$ .

Определение. Закон управления называется самонастраивающимся по отношению к (3.1), если он имеет вид

$$u[k] = \mathcal{U}(y^{(k)}, u^{(k-1)}, \theta_u[k]), \quad (3.2)$$

где  $\theta_u[k]$  изменяется (настраивается) в зависимости от полученных наблюдений и, возможно, ранее принятых управлений.

Соотношения типа

$$\theta_u[k] = \mathcal{F}(y^{(k)}, u^{(k-1)}) \quad (3.3)$$

называются алгоритмами самонастройки.

Конечно, если подставить (3.3) в (3.2), то вновь получим некоторую зависимость  $u[t]$  только от  $y^{(t)}$ ,  $u^{(t-1)}$ , т. е. некоторый общий закон управления с обратной связью. Однако выделение двух контуров (рис. 11.2), основного контура обратной связи, задаваемого (3.2), и контура самонастройки, задаваемого (3.3), стимулирует эвристические соображения, способствующие изобретению новых способов борьбы с неопределенностью (ср. § 4 гл. 10).

Выделим два основных пути построения самонастраивающихся законов, которые условно назовем прямым и косвенным (идентификационным).

Пусть задан какой-либо показатель качества работы системы, замкнутой обратной связью (3.1). Если свойства объекта полностью известны, то показатель можно вычислить при каждом значении параметров  $\theta_u$ , и он окажется некоторой функцией  $J(\theta_u)$  этих параметров. Более того, в принципе можно найти значение  $\theta_u^*$ , оптимизирующее этот показатель (минимизирующее  $J(\theta_u)$ ).

Предположим далее, что ни  $J(\theta_u)$ , ни тем более  $\theta_u^*$  неизвестны, однако по наблюдениям и априорной информации в любой момент  $k$  можно построить оценку  $\nabla^{(k)}$  градиента функции  $J(\theta_u)$  в точке  $\theta_u[k]$ . Тогда, начиная с некоторого  $\theta_u[0]$ , последовательность  $\theta_u[k]$  вычисляется по формуле градиентного типа

$$\theta_u[k+1] = \theta_u[k] - \gamma_k \nabla^{(k)}, \quad (3.4)$$

задающей тот или иной алгоритм самонастройки. При подходящем выборе  $\gamma_k$  последовательность  $\theta_u[k]$  сходится к  $\theta_u^*$ . Однако даже в этом случае нельзя, вообще говоря, утверждать, что соотношения (3.2), (3.4) доставляют показателю качества значение  $J(\theta_u^*)$ , поскольку в ходе процесса настройки система функционировала при неоптимальных значениях параметров. Как и в задачах управления статическим объектом, можно рассчитывать на достижение оптимального или субоптимального результата, только если показатель качества имеет вид (2.3) или (2.4), т. е. характеризует установившийся режим или поведение системы в среднем за длительное время.

Очевидно и сходство алгоритма (3.4) с процедурой (2.7) экстремального регулирования статического объекта. Действительно, ал-

горитм (3.4) также задает управляющие воздействия  $\theta_u[k]$ , но это управления верхнего уровня, влияющие на объект косвенно, через основную обратную связь.

Теперь должен быть ясен и второй, идентификационный путь. Если неопределенность в описании объекта может быть сведена к незнанию конечного числа параметров, вектора  $\theta$ , то возникают все алгоритмические возможности, описанные в п. 2.4, но примененные к поиску управления верхнего уровня  $\{\theta_u[k]\}$  при фиксированной структуре (3.2) основной обратной связи. Конечно, исследование их эффективности значительно сложнее, поскольку, кроме динамики процесса настройки, приходится учитывать динамику основного контура \*).

Контур самонастройки, как правило, выполняется медленно действующим: скорость изменения параметров делается малой по сравнению со скоростью процессов в основном контуре. Поэтому обычно применим простой прием «замораживания параметров» (см. гл. 6, § 8), в силу которого динамика основного контура может исследоваться так, как будто закон управления сохраняет текущие значения настраиваемых параметров до полного установления переходных процессов. Однако в некоторых простых ситуациях возможно построение самонастройки, скорость которой немала или уменьшается постепенно. Примеры этого даются ниже.

**3.2. Стабилизация линейного объекта.** Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$\alpha[\zeta]y[k] = \beta[\zeta]u[k], \quad (3.5)$$

где  $y$ ,  $u$  — скалярные выход и управление,  $\alpha(\zeta)$ ,  $\beta(\zeta)$  — многочлены от оператора сдвига на такт,

$$\alpha(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0, \quad \beta(\zeta) = \beta_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \beta_0.$$

Будем предполагать, что хотя параметры  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  неизвестны, но  $\beta_{n-1} \neq 0$ , многочлен  $\beta(\zeta)$  устойчив (имеет корни внутри единичного круга) и многочлены  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$  не имеют общих корней. Построение стабилизирующей обратной связи при известных параметрах — элементарная задача, по существу рассмотренная еще в гл. 3.

Достаточно взять закон управления в виде

$$l(\zeta)u[k] = -k(\zeta)y[k], \quad (3.6)$$

причем подобрать многочлены  $l(z)$ ,  $k(z)$  так, чтобы было выполнено тождество

$$\alpha(z)l(z) + \beta(z)k(z) = \Delta^d(z),$$

где  $\Delta^d(z)$  — желаемый устойчивый многочлен, который и окажется характеристическим многочленом замкнутой системы. В частности, если

$$\Delta^d(z) = z^n\beta(z), \quad (3.7)$$

\* ) Общий подход, базирующийся на развитии метода функций Ляпунова, изложен в [11.7].

то можно удовлетворить тождеству, приняв

$$l(z) = \beta(z), \quad k(z) = z^n - \alpha(z) = -[\alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0]. \quad (3.8)$$

При принятых предположениях замкнутая система окажется устойчивой, а закон управления реализуемым.

В явной форме его можно записать так:

$$\begin{aligned} u[k] = & \frac{1}{\beta_{n-1}} (\alpha_{n-1}y[k] + \dots + \alpha_0y[k-n+1] - \\ & - \beta_{n-2}u[k-1] - \dots - \beta_0u[k-n-1]). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если же ввести матрицы  $\Phi_u[k]$  (строка) и  $\theta_u$  (столбец) по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_u[k] = & \{y[k], \dots, y[k-n+1], u[k-1], \dots, u[k-n+1]\}, \\ \theta_u = & \beta_{n-1}^{-1} (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, -\beta_{n-2}, \dots, -\beta_0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

то запись принимает вид

$$u[k] = \Phi_u[k] \theta_u. \quad (3.9')$$

Если истинные значения параметров объекта неизвестны, то попытаемся согласно общей схеме заменить (3.9') на закон управления с самонастройкой:

$$u[k] = \Phi_u[k] \theta_u[k], \quad (3.11)$$

где  $\{\theta_u[k]\}$  — последовательность настраиваемых коэффициентов.

Заметим предварительно, что уравнение объекта (3.5) можно также переписать в рекуррентной форме

$$\begin{aligned} y[k+1] = & \beta_{n-1}u[k] - (\alpha_{n-1}y[k] + \dots + \alpha_0y[k-n+1] - \\ & - \beta_{n-2}u[k-1] - \dots - \beta_0u[k-n-1]) = \beta_{n-1}u[k] - \Phi_u[k] \theta_u, \end{aligned}$$

где указаны истинные значения параметров. Таким образом, при любом управлении имеет место соотношение

$$y[k+1] = \beta_{n-1}u[k] - \Phi_u[k] \theta_u, \quad (3.12)$$

а на управлении вида (3.11) получаем

$$y[k+1] = \beta_{n-1}\Phi_u[k](\theta_u[k] - \theta), \quad (3.13)$$

причем это верно только при  $k \geq n$ , поскольку само управление (3.11) может быть использовано лишь после получения измерений на начальных  $n$  тактах.

Остается главное — предложить эффективный алгоритм самонастройки. На первый взгляд алгоритмы типа (3.4) неприменимы, поскольку в них фигурирует оценка градиента минимизируемого показателя качества, а задача стабилизации не носит оптимизационного характера. Однако можно искусственно построить показа-

тель, например, вида

$$J = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} y^2[k]. \quad (3.14)$$

Пусть удаётся найти управление, в силу которого  $J$  принимает минимальное значение, равное нулю, тогда гарантируется асимптотическая устойчивость, если на любом такте  $y[k]$ ,  $u[k]$  ограничены.

В качестве текущей оценки  $\nabla^{(k)}$  градиента  $J$  можно взять вектор

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_u[k]} \left( \frac{1}{2} y^2[k+1] \right) = & y[k+1] \frac{\partial}{\partial \theta_u[k]} y[k+1] = \\ = & y[k+1] \beta_{n-1}^* \Phi_u^T[k]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В эту оценку входит лишь один неизвестный параметр  $\beta_{n-1}$ , но поскольку важно лишь направление вектора, то достаточно знать знак  $\beta_{n-1}$ . Считая  $\beta_{n-1} > 0$ , запишем стандартную процедуру (3.4) в виде

$$\theta_u[k+1] = \theta_u[k] - \gamma_k y[k+1] \Phi_u^T[k]. \quad (3.16)$$

**Теорема 3.1 \*).** Пусть  $\beta(z)$  — устойчивый многочлен; тогда при выборе

$$\gamma_k = \bar{\gamma} [\mu + |\varphi[k+1]|^2]^{-1}, \quad \mu > 0, \quad 0 < \beta_{n-1} \bar{\gamma} \leq 2, \quad (3.17)$$

имеет место ограниченность  $\{y[k]\}$ ,  $\{u[k]\}$  и  $y[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . ■

Отметим, что для построения эффективного алгоритма необходима некоторая априорная информация о коэффициенте  $\beta_{n-1}$ . Этого недостатка лишены идентификационные алгоритмы.

Введем в рассмотрение вектор параметров  $\theta$ :

$$\theta = (\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0) \quad (3.18)$$

и перепишем тот же закон управления (3.9) в виде

$$\bar{\varphi}[k] \theta = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\bar{\varphi}[k] = \{-y[k], \dots, -y[k-n+1], u[k], \dots, u[k-n+1]\}. \quad (3.20)$$

Тогда в соответствии с общей схемой при неизвестном  $\theta$  можно применить закон управления

$$\bar{\varphi}[k] \hat{\theta}[k] = 0, \quad (3.21)$$

где оценки параметров  $\hat{\theta}[k]$  строятся согласно некоторому идентификационному алгоритму.

\*). Доказательство Т.3.1, а также Т.3.2 можно найти в [11.22]. Выбор  $\gamma_k$  соответствует алгоритму Качмакжа (см. также [11.3]).

Закон управления (3.21) задан в неявной форме. Явно он переписывается в виде

$$u[k] = \frac{1}{\hat{\beta}_{n-1}[k]} (\hat{\alpha}_{n-1}[k]y[k] + \dots - \hat{\beta}_0[k]u[k-n+1]) \quad (3.22)$$

и почти аналогичен построенному ранее (3.11). Поскольку необходимо делить на  $\hat{\beta}_{n-1}[k]$ , то в идентификационные алгоритмы следует ввести небольшое изменение, противодействующее появлению в ходе его работы нулевых оценок этой,  $(n+1)$ -й компоненты вектора  $\hat{\theta}[k]$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $\beta(z)$  устойчив, используется закон управления (3.21) и алгоритм идентификации вида

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + \Gamma_k \varphi^*[k+1](y[k+1] - \varphi[k+1]\hat{\theta}[k]). \quad (3.23)$$

Тогда  $\{y[k]\}$ ,  $\{u[k]\}$  ограничены и

$$y[k] \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

если используется одно из следующих правил выбора  $\Gamma_k$ :

$$a) \quad \Gamma_{k-1} = \frac{a_k D[k-1]}{1 + a_k \bar{\varphi}[k] D[k-1] \bar{\varphi}^*[k]}, \quad (3.24)$$

где

$$D[k] = [I - (1 + a_k \bar{\varphi}[k] D[k-1] \bar{\varphi}^*[k])^{-1} \times \\ \times D[k-1] \bar{\varphi}^*[k] \bar{\varphi}[k]] D[k-1], \quad (3.25)$$

$$D[0] > 0;$$

$$b) \quad \Gamma_{k-1} = \gamma_{k-1} I, \quad \gamma_{k-1} = a_k [\mu + \bar{\varphi}[k] \bar{\varphi}^*[k]]^{-1}, \quad \mu > 0, \quad (3.26)$$

причем  $a_k = 1$ , если  $\hat{\theta}_{n+1}[k+1] = 0$ . В противном случае  $0 < a_k < 1$ . ■

Оба правила совпадают с описанными в § 2 с точностью до коэффициента  $a_k$ , роль которого ясна из сказанного выше. Подчеркнем, что сходимость оценок  $\hat{\theta}[k]$  к  $\theta$  не гарантируется, поскольку нельзя гарантировать выполнение условия идентифицируемости для последовательности  $\varphi[k]$ . Приведенные результаты почти без изменений распространяются на случай, когда система имеет несколько выходов, но число управлений равно числу выходов [11.22].

**3.3. Управление при наличии случайных возмущений.** Рассмотрим объект, задаваемый операторным уравнением

$$y[k] = H_{uy}(\xi)u[k] + H_{wy}(\xi)w[k], \quad (3.27)$$

где

$$H_{uy}(\xi) = \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}, \quad H_{wy}(\xi) = \frac{\beta_w(\xi)}{\alpha(\xi)},$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_w$  — многочлены от оператора  $\xi$ .

Будем считать, что  $\{w[k]\}$  — белый шум (если  $w[k]$  — последовательность с дробно-рациональной спектральной плотностью, то также можно использовать запись (3.27) после предварительного построения формирующего фильтра).

В качестве показателя используем

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k M\{y^2[l]\}. \quad (3.28)$$

При известных параметрах объекта задача построения оптимальной обратной связи может быть решена многими способами (гл. 7). Ограничимся особо простым случаем, когда

$$\deg \alpha(z) = \deg \beta(z) + 1 = \deg \beta_w(z) = n, \quad \alpha_n = \beta_{w,n} = 1, \quad (3.29)$$

а многочлены  $\beta$ ,  $\beta_w$  устойчивы. Тогда, как показано в гл. 4, формула (4.55), оптимальный линейный закон управления имеет вид (3.6) при  $l(z) = \beta(z)$ ,  $k(z) = \beta_w(z) - \alpha(z)$ , а следовательно, может быть записан в векторной форме

$$\bar{\varphi}[k] \theta_u = 0, \quad (3.30)$$

где  $\bar{\varphi}[k]$  — строка, определяемая согласно (3.20), а  $\theta_u$  — столбец коэффициентов, которые вычисляются непосредственно, если известны истинные значения параметров объектов. В противном случае можно прибегнуть к самонастройке.

Вновь используем тот факт, что при условиях (3.29) справедливо рекуррентное представление

$$y[k+1] = -\alpha_{n-1}y[k] - \dots - \alpha_0y[k-n+1] + \\ + \beta_{n-1}u[k] + \dots + \beta_0u[k-n+1] + v[k], \quad k > n, \quad (3.31)$$

где  $v[k] \triangleq \zeta^{-(n-1)}\beta_w(\zeta)w[k]$  и является случайным непосредственно наблюдаемым процессом.

При обозначениях (3.18), (3.20) имеем

$$y[k+1] = \bar{\varphi}[k] \theta + v[k]. \quad (3.31')$$

Располагая в момент  $k$  оценкой параметров  $\hat{\theta}[k]$ , выберем управление из условия обращения в нуль прогноза

$$\hat{\varphi}[k+1] = \bar{\varphi}[k] \hat{\theta}[k] = 0, \quad (3.32)$$

а переоценку параметров произведем пропорционально ошибке прогноза

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + \Gamma_k \varphi^*[k](y[k+1] - \hat{y}[k+1]), \quad (3.33)$$

где  $\Gamma_k$  выберем согласно одной из известных схем § 2.

Опять-таки важно понимать, что любой выбор может гарантировать сходимость оценок только при выполнении условий идентифицируемости, а таковая не обеспечена, поскольку последовательность

$\Phi[k]$  выбирается в ходе алгоритма. Тем не менее при определенных дополнительных условиях описанная процедура теоретически эффективна.

**Теорема 3.3\*).** Пусть многочлены  $\beta(z)$ ,  $\beta_w(z)$  устойчивы, а

$$\Gamma_k = \gamma_k I, \quad \gamma_k = \bar{\gamma} a_k \left( \mu + \sum_{l=0}^k \Phi[l] \varphi^T[l] \right)^{-1}, \quad \mu > 0, \quad \bar{\gamma} > 0. \quad (3.34)$$

Тогда при любых начальных условиях применение алгоритма (3.33), (3.34) обеспечивает то же значение функционала (3.28), что и оптимальное управление, построенное на основе известных значений параметров, если выполнено дополнительное условие

$$\operatorname{Re} \{z^{-n} \beta_w(z)|_{z=e^{i\omega}}\} > \frac{\bar{\gamma}}{2}. \quad (3.35)$$

Коэффициент  $a_k$  выбирается так же, как в Т.3.2. ■

Хотя формально в условиях Т.3.3 отсутствует требование устойчивости объекта, но вычислительный эксперимент демонстрирует практическую непригодность метода при большом удалении корней  $\alpha(z)$  от единичного круга (или при высоком уровне помех): система в процессе настройки успевает столь раскачаться, что за-ведомо выходит из области, где справедлива линейная модель.

**3.4. Задача слежения. Эталонные модели.** В рассматривавшихся выше задачах предполагалось, что желательным состоянием системы является состояние  $y[k] = 0$ . Очевидно, что все рассуждения останутся неизменными, если требуется обеспечить близость выхода к любому заранее заданному состоянию  $y^d = \text{const}$  или ограниченному процессу  $y^d[k]$ . Несколько сложнее ситуация, когда  $y^d[k]$  — заранее неизвестный, но наблюдаемый процесс.

Будем считать, что неизменные возмущения и помехи отсутствуют. Даже если параметры известны, то идеальный закон управления, вытекающий из тождества

$$y^d[k] = y[k] = -\tilde{\alpha}(\xi^{-1})y[k] + \tilde{\beta}(\xi^{-1})u[k], \quad (3.36)$$

переализуем, ибо он эквивалентен соотношению

$$u[k-1] = \beta_{n-1}^{-1} \{y^d[k] + \alpha_{n-1}y[k-1] + \dots\}, \quad (3.37)$$

где управление выражается через будущее (предполагаем, что выполнено условие (3.29)). Поэтому при отсутствии дополнительной информации об  $y^d[k]$  лучшее, чего можно добиться, это обеспечить

$$y[k] = y^d[k-1] = y^d[k] - (y^d[k] - y^d[k-1]), \quad (3.38)$$

заранее соглашаясь на погрешность, равную приращению желаемого процесса за один такт. При этом закон управления принимает

\* Доказательство дано в [11.23], а в [11.24] приведен анализ той же процедуры, но при выборе  $\Gamma_k$  по несколько модифицированной схеме МНК.

вид

$$u[k-1] = \frac{1}{\beta_{n-1}} \{y^d[k-1] + \alpha_{n-1}y[k-1] + \dots\}. \quad (3.39)$$

Обобщая эту идею, потребуем, чтобы

$$y[k] = H^d(\xi) y^d[k], \quad H^d(\xi) = \frac{\beta^d(\xi)}{\alpha^d(\xi)}, \quad (3.40)$$

где  $\alpha^d$ ,  $\beta^d$  — многочлены, причем  $\alpha^d$  устойчив.

Разделив на старшее слагаемое в  $\alpha^d$ , запишем

$$H^d(\xi) = \frac{\tilde{\beta}^d(\xi^{-1})}{1 + \tilde{\alpha}^d(\xi^{-1})}.$$

Тогда желаемая связь примет вид

$$y[k] = -\tilde{\alpha}^d(\xi^{-1})y[k] + \tilde{\beta}^d(\xi^{-1})y^d[k], \quad (3.41)$$

а обеспечивающий ее закон управления дается уравнением

$$\tilde{\beta}(\xi^{-1})u[k] = (\tilde{\alpha}(\xi^{-1}) - \tilde{\alpha}^d(\xi^{-1}))y[k] + \tilde{\beta}^d(\xi^{-1})y^d[k]. \quad (3.42)$$

Он реализуем, если  $H^d(\xi)$  — правильная дробь.

Попытаемся обеспечить тот же результат в условиях неопределенности, хотя бы в установившемся режиме.

Пусть

$$e[k] \triangleq y[k] - H^d(\xi) y^d[k], \quad (3.43)$$

так что

$$[1 + \tilde{\alpha}^d(\xi^{-1})]e[k] = [1 + \tilde{\alpha}^d(\xi^{-1})]y[k] - \tilde{\beta}^d(\xi^{-1})y^d[k] \triangleq \delta_k. \quad (3.44)$$

Ввиду устойчивости  $\alpha^d$  из  $\delta_k \rightarrow 0$  следует, что  $e[k] \rightarrow 0$ . Таким образом, для того чтобы (3.41) выполнялось в установившемся режиме, достаточно добиться

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k^2 = 0. \quad (3.45)$$

Эта задача аналогична рассмотренной в п. 3.2 и может быть решена с помощью почти тех же алгоритмов, если  $y[k]$ ,  $y^d[k]$  наблюдаются без помех.

В частности, справедливо утверждение.

**Теорема 3.4.** Пусть многочлены  $\beta(z)$ ,  $\alpha^d(z)$  устойчивы и используется закон управления

$$u[k] = \tilde{\Phi}[k] \theta_u[k], \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}[k] = & \\ & = [\tilde{\beta}^d(\xi^{-1})y^d[k], y[k], \dots, y[k-n], u[k-1], \dots, u[k-n+1]], \end{aligned}$$

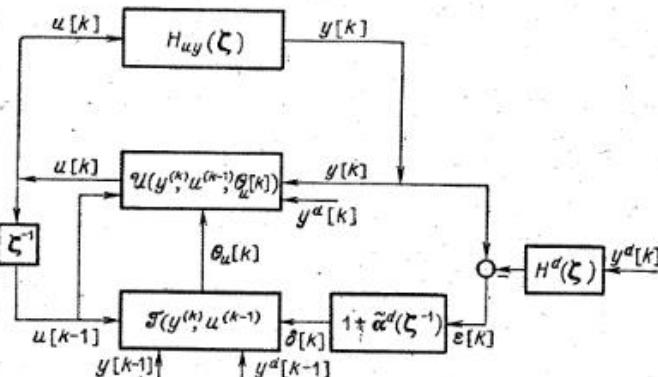
а коэффициенты закона управления пересчитываются по формуле

$$\theta_u[k+1] = \theta_u[k] - \gamma_k \Phi[k] \delta[k+1] \quad (3.47)$$

$$\gamma_k = \bar{\gamma} [\varepsilon + |\tilde{\Phi}[k]|^2]^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < \beta_{n-1} \bar{\gamma} \leq 2.$$

Тогда из ограниченности  $\{y^d[k]\}$  следует ограниченность  $\{u[k]\}$ ,  $\{y[k]\}$  и  $\delta[k] \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ \*).

Отметим, что описанному алгоритму можно дать структурную интерпретацию (рис. 11.3), где явно выделено устройство с передаточной функцией  $H^d(\zeta)$ , называемое *эталонной моделью*. Основной контур управления организуется по наблюдениям выхода (с использованием ранее принятых управлений) и наблюдениям отслеживаемого воздействия. Внешний (нижний) контур обеспечивает самонастройку закона управления\*\*). Естественно, что при реализации алгоритма с помощью управляющей ЭВМ в таком структурном выделении нет необходимости.



Закон управления естественно считать *адаптивным*, если адаптивна система, где он используется.

С другой стороны, определению такого рода соответствуют любые из описанных в предшествующих главах оптимальных или субоптимальных законов управления. Что же является специфической особенностью методов, изучавшихся именно в этой главе и представляющих собственно теорию адаптивного управления? Специфика заключается в том, что они позволяют строить законы, обеспечивающие адаптивность (и иногда даже идеальную), используя существенно меньший объем априорной информации, чем это требуется при применении других методов. При этом успех достигается за счет введения в алгоритм управления тех или иных процедур *обучения*, уточнения первоначальной модели объекта. Поэтому многие специалисты считают возможным называть адаптивными только такие законы управления, которые наряду с обеспечением адаптивности приводят и к сужению области неопределенности. Однако важна не терминология, а существо дела. Следует понимать, что применять обучение отнюдь не всегда целесообразно. Предположим, что неопределенность конкретизируется заданием не слишком широкого множества  $\Theta_0$ , которому могут принадлежать параметры объекта  $\theta$  в зависимости от заранее неизвестных условий работы. При этом чаще всего используется более простой подход: алгоритмы управления выбираются, исходя из гипотезы о том, что, например, заданы какие-либо априорные оценки  $\hat{\theta}$  параметров объекта, в действительности не совпадающие с истинными  $\theta$ . Однако алгоритм, построенный с заменой  $\theta$  на  $\hat{\theta}$ , оказывается адаптивным (в смысле исходного определения) без какого-либо дополнительного обучения. Эта ситуация особенно часто возникает, если показатель качества имеет асимптотический характер, и по существу требуется лишь обеспечить устойчивость замкнутой системы. Отметим, что инвариантность таких показателей по отношению к весьма широкой области  $\Theta_0$  может достигаться и с помощью алгоритмов управления с обратной связью, не использующих обучение (см., например, [11.4], [11.14], где строятся специальные нелинейные алгоритмы на основе идеи большого коэффициента усиления).

На практике априорная неопределенность обычно заключается в том, что поведение определено с точностью не до постоянных параметров, а до медленно меняющихся в ходе работы, и притом в широком диапазоне. Даже если начальные значения заданы, то рассчитанные по ним алгоритмы приходится перестраивать на основе текущей информации. Таковая может включать даже текущие значения параметров, тем не менее настройка алгоритмов оказывается целесообразной (см. гл. 6, § 8, и гл. 10, § 4).

Остановимся еще на одном формальном аспекте. Всегда можно расширить пространство состояний, включив в него неопределенные параметры (см. § 1). Вспомогательная задача обучения, идентификация параметров сводится при этом к оценке состояния по

наблюдениям, а задача оптимального управления в условиях неопределенности сводится к задаче синтеза закона управления в расширенной системе. Если эта задача решена, а оптимальное значение функционала не зависит от начального состояния, то получим идеально адаптивную систему. К сожалению, как подчеркивалось в гл. 10, общие эффективные алгоритмы отсутствуют, особенно для нелинейных систем. Вместе с тем, даже если объект описан линейными соотношениями в исходном пространстве состояний, то в расширенном он окажется нелинейным, если неопределенные параметры (как это было в рассмотренных в данном параграфе задачах) входят как сомножители. Поэтому имеется тесная связь между эвристическими приемами решения нелинейных задач оптимального управления при неполных измерениях (гл. 10, § 4) и методами адаптивного управления, изложенным в данном параграфе.

В частности, идентификационные алгоритмы могут интерпретироваться как алгоритмы оценки состояния типа фильтров Бьюси — Калмана со специальным способом выбора коэффициентов усиления.

#### § 4. Заключение

В этом, последнем параграфе последней главы целесообразно привести некоторые суждения, относящиеся не только к ней, но и к курсу в целом. Действительно, проблема борьбы с априорной неопределенностью и использование с этой целью управления, основанного на текущей информации, — общая тема курса.

Мы убедились, что построение оптимального синтеза сталкивается с принципиальными трудностями. Все известные, строго установленные результаты касаются лишь узкого класса объектов (в основном статические или линейные динамические) при специально выбранных показателях качества. В то же время инженерная практика «поставляет» проблемы, не соответствующие ни одной из строгих формулировок.

В отличие от математика, инженер не имеет права отказаться от решения задачи управления на том основании, что для нее отсутствуют теоретические «заготовки» или она не поддается строго обоснованному решению; он обязан «выдать» конкретную рекомендацию. При этом инженер должен четко сознавать, что любое математическое описание объекта в определенной мере условно. Его прогнозирующая сила зависит от той ситуации, в которой будет работать объект, а она заведомо не в полной мере известна. Все «теоремные» утверждения начинаются словами — «пусть выполнены условия», однако инженер-разработчик системы не может быть уверен, что в стоящей перед ним конкретной задаче эти условия выполнены. Как правило, приходится полагаться лишь на интуицию, вбирающую в себя опыт работы со сходными по своей природе объектами.

Напомним также выводы частотного метода: *необходимая полнота математического описания объекта зависит от используемого закона управления*. Чем быстрее изменяется управление, тем более подробным должно быть динамическое описание, тем выше должен быть порядок уравнений, описывающих объект.

Точно так же и нелинейный анализ показывает: *чем более широк диапазон уровней управляющих воздействий, тем детальнее должно быть математическое описание*. Элементы системы, для которых приемлема линейная модель при малых уровнях воздействий, должны описываться нелинейными соотношениями при высоких уровнях.

Неоднократно указывалось и то, что критерии оптимальности, как правило, носят условный характер: инженер должен придумать тот или иной сводный показатель качества работы системы, ориентируясь как на интуитивное представление о том, «что такое хорошо, и что такое плохо», так и на известный ему набор образцов типичных формулировок. При этом весьма распространенной является ситуация, когда превалирующим оказывается второй аспект: выбирается не тот показатель, который наиболее соответствует смыслу дела, а тот, который входит в условия строго доказанных математических утверждений, например, стандартный интегральный квадратичный показатель.

Зачастую забывают и об указанной выше «обратной связи»: *найденное в результате «строгой оптимизации» управление может оказаться таким, что для него теряет смысл исходное математическое описание объекта, включенное в условие оптимизационной задачи*.

Сказанное ни в коей мере не означает, что оптимизационный подход не имеет практической ценности: каждое полученное и формально обоснованное решение дает определенные образцы, рекомендации, которые можно испытать при создании систем управления конкретными объектами. Однако при этом, во-первых, не следует считать, что закон управления, построенный на базе того или иного «строгого доказанного» результата, действительно будет хорошо работать на практике, а с другой стороны, не следует считать, что закон управления, для которого нет «строгого обоснования», не должен практически применяться.

Сама теория управления, как техническая наука, не должна исключать из рассмотрения те рекомендации «изобретательского» характера, которые не обоснованы как «оптимальные» по какому-либо четко сформулированному единому критерию. Окончательные оценки инженерной работы по созданию систем управления можно поставить только на основании достаточно длительной эксплуатации системы в реальных условиях. Такая оценка редкодается по какому-либо одному сводному критерию: она включает множество показателей, каждый из которых по-своему характеризует систему.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### СВЕДЕНИЯ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛАПЛАСА \*)

**1. Определение и свойства  $\mathcal{L}$ -преобразования.** Любой кусочно непрерывной функции  $f(t)$ , возрастающей при  $t \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $e^{ct}$ ,  $c = \text{const}$ , может быть поставлено в соответствие ее преобразование Лапласа ( $\mathcal{L}$ -образ):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p).$$

$\mathcal{L}$ -образ является функцией комплексной переменной  $p$ , определенной при любых  $p$  таких, что  $\operatorname{Re} p > c$ . Если  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , то она однозначно определяема (с точностью до значений в точках разрыва) по своему  $\mathcal{L}$ -образу:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

Явные способы вычисления оригинала по  $\mathcal{L}$ -образу указаны в п. 3.

Основные свойства, легко проверяемые по определению:

а)  $\mathcal{L}$ -образ линейной комбинации функций  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ ,  $c_1, c_2$  — константы, равен линейной комбинации  $\mathcal{L}$ -образов:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\};$$

б)  $\mathcal{L}$ -образ 1-й производной  $Df(t)$  равен

$$\mathcal{L}\{Df(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

$\mathcal{L}$ -образ  $r$ -й производной  $D^r f(t)$ ,  $r \geq 1$ , равен

$$\mathcal{L}\{D^r f(t)\} = p^r \mathcal{L}\{f(t)\} - p^{r-1} f(0) - p^{r-2} Df(0) - \dots - D^{r-1} f(0);$$

в)  $\mathcal{L}$ -образ интеграла равен

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = p^{-1} \mathcal{L}\{f(t)\};$$

\*) Доказательства и полные таблицы см., например, в [П.3, П.5].

г)  $\mathcal{L}$ -образ свертки двух функций равен произведению  $\mathcal{L}$ -образов этих функций:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

2. Таблица типовых функций и их  $\mathcal{L}$ -образов (все функции предполагаются равными нулю при  $t < 0$ )

	$f(t)$	$F(p)$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$1/p$
3	$t^n$	$n!/p^{(n+1)}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
5	$e^{\lambda t} t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
8	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
9	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$

3. Нахождение оригиналов по  $\mathcal{L}$ -образам (обратное преобразование). Общая формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

где путь интегрирования в комплексной плоскости  $p$  выбирается правее всех особых точек (в частности, полюсов)  $\mathcal{L}$ -образа  $F(p)$ . Если  $F(p)$  является дробно-рациональной функцией, то она представима в виде

$$F(p) = \sum_{\mu=0}^r \bar{c}_\mu p^\mu + \sum_v \sum_{\mu=1}^{k_v} c_{\mu v} (p - \lambda_v)^{-\mu},$$

где  $\lambda_v$  — полюс  $F(p)$  кратности  $k_v$ ,  $r$  — разность степеней числителя

и знаменателя,  $\bar{c}_\mu$ ,  $c_{\mu v}$  — константы. Тогда

$$f(t) = \sum_{\mu=0}^r \bar{c}_\mu \delta^\mu(t) + \sum_v e^{\lambda_v t} \sum_{\mu=1}^{k_v} c_{\mu v} \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!},$$

где  $\delta^\mu(t)$  — обобщенная производная  $\mu$ -го порядка  $\delta$ -функции.

4. Применение  $\mathcal{L}$ -преобразования для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение уравнения

$$\alpha(D)y(t) = D^n y(t) + \alpha_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + \alpha_0 y(t) = f(t)$$

при начальных условиях

$$y(0) = y^{(0)}, \quad Dy(0) = y^{(1)}, \quad \dots, \quad D^{n-1} y(0) = y^{(n-1)}$$

дается в виде

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(t) y^{(j)} + \int_0^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$\mathcal{L}\{\varphi_j(t)\} \triangleq \Phi_j(p) = \frac{p^{n-j-1} + \alpha_{n-1} p^{n-j-2} + \dots + \alpha_{j+1}}{\alpha(p)}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

так что  $\varphi_j(t)$  определяются путем обращения дробно-рациональных функций с одинаковым знаменателем. Функции  $\varphi_j(t)$  удовлетворяют условиям

$$\alpha(D)\varphi_j(t) = 0, \quad D^k \varphi_j(0) = \delta_{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

5. Определение и свойства  $\mathcal{L}$ -преобразования. Любой последовательности  $\{f[k], k = 0, 1, \dots\}$ , возрастающей при  $k \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $c^k$ ,  $c = \text{const}$ , сопоставимо ее  $\mathcal{L}$ -преобразование:

$$\mathcal{L}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f[k] \triangleq F(z).$$

$\mathcal{L}$ -образ является функцией комплексной переменной  $z$ , определенной при любых  $z$  таких, что  $|z| > c^*$ ). Если ввести замену  $z = e^{pt_0}$ ,

\*) В теории вероятностей используется производящая функция последовательности (также введенная Лапласом), отличающаяся от  $\mathcal{L}$ -преобразования лишь заменой  $z$  на  $z^{-1}$ .

где  $\tau_0 > 0$ , то  $\mathcal{Z}$ -образ становится функцией переменной  $p$ :

$$\mathcal{Z}\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp\tau_0} f[k] \triangleq F^*(p).$$

Функцию  $F^*(p)$  именуют также *дискретным преобразованием Лапласа*. Если последовательности  $\{f[k]\}$  сопоставить функцию  $f(t) = f[k]\delta[t - k\tau_0], \quad k\tau_0 \leq t < (k+1)\tau_0$ , то

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pk\tau_0} f[k] = F^*(p).$$

Основные свойства  $\mathcal{Z}$ -преобразования:

a) Если  $f[k] = c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k]$ ,  $c_1, c_2 = \text{const}$ , то

$$\mathcal{Z}\{f[k]\} = c_1 \mathcal{Z}\{f_1[k]\} + c_2 \mathcal{Z}\{f_2[k]\}.$$

b)  $\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = z[\mathcal{Z}\{f[k]\} - f[0]]$ ,

$$\mathcal{Z}\{f[k+m]\} = z^m \mathcal{Z}\{f[k]\} - z^m f[0] - \dots - z f[m-1], \quad m \geq 1.$$

c)  $\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{f[k]\}$ .

d)  $\mathcal{Z}\left\{\sum_{l=0}^k f_1[l] f_2[k-l]\right\} = \mathcal{Z}\{f_1[k]\} \mathcal{Z}\{f_2[k]\}$ .

#### 6. Таблица $\mathcal{Z}$ -образов типовых последовательностей

$f[k]$	$\mathcal{Z}\{f[k]\}$	$f[k]$	$\mathcal{Z}\{f[k]\}$
$\delta_{jk}$	$z^{-j}$	$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
1	$\frac{z}{z-1}$	$k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$

(все элементы последовательностей при  $k < 0$  равны нулю).

7. Нахождение оригиналов по  $\mathcal{Z}$ -образам. Общая формула обращения имеет вид

$$f[k] = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^k \frac{dz}{z},$$

где интегрирование ведется по контуру в плоскости  $z$ , охватывающему все особенности  $F(z)$ .

Если  $F(z)$  — дробно-рациональная функция такая, что

$$z^{-1} F(z) = \sum_{v=1}^n c_v \frac{1}{z - \lambda_v}, \quad c_v = \text{const},$$

то

$$f[k] = \sum_{v=1}^n c_v \lambda_v^k.$$

8. Применение  $\mathcal{Z}$ -преобразования для вычисления рекуррентно заданных последовательностей. Если задано, что

$$\alpha(\zeta) y[k] \triangleq y[k+n] + \alpha_{n-1} y[k+n-1] + \dots + \alpha_0 y[k] = 0,$$

причем известны  $y[0], \dots, y[n-1]$ , то

$$y[k] = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j[k] y[j],$$

где

$$\mathcal{Z}\{\varphi_j[k]\} = z \frac{z^{n-j-1} + \alpha_{n-1} z^{n-j-2} + \dots + \alpha_{j+1}}{\alpha(z)} \triangleq z \Phi_j(z),$$

$$j = 0, \dots, n-1,$$

так что  $\varphi_j[k]$  могут быть найдены по формуле обращения дробно-рациональных функций. Применение  $\mathcal{Z}$ -преобразования для неоднородных соотношений при нулевых начальных условиях описано в § 4 гл. 7.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

#### СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ \*)

1. Определение и обозначения. Матрицей называется прямоугольная таблица, элементами которой являются числа или функции, например,

$$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} t & e^t \\ 0 & t^2 \end{Bmatrix}.$$

Размер матрицы характеризуется числом строк и числом столбцов таблицы. Краткая запись « $A$  —  $(m \times n)$ -матрица» означает, что  $A$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Если  $m = n$ , то матрица называется *квадратной*. Если  $m = n = 1$ , т. е. матрица имеет только один элемент, то она называется *скаляром*. Если матрица состоит только из одной строки (или столбца), то она называется *матрицей-строкой* (или *матрицей-столбцом*). Матрицу-столбец будем также называть *вектором*.

Каждый элемент матрицы характеризуется своим местом в таблице, т. е. номером строки  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и номером столбца  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и обозначается двойным индексом  $(i, j)$ .

\*) Доказательства всех фактов, приводимых в пп. 1—6, можно найти в любом учебнике по теории матриц, например, [П.1, П.2].

Как правило, матрицы обозначаются большими буквами, а элементы — соответствующими малыми. Обозначение

$$A = \{a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

читается: матрица  $A$  состоит из элементов  $a_{ij}$  и имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Если размер несуществен, то пишут сокращенно

$$A = \{a_{ij}\}.$$

Матрица-строка может быть обозначена так:

$$c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \{c_j, j = 1, \dots, n\},$$

а для матрицы-столбца может быть использована и запись в строку, но в круглых скобках:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m) = (b_i, i = 1, \dots, m).$$

Если дана матрица  $A$  общего вида, то она может рассматриваться как совокупность своих строк  $a_i, i = 1, \dots, m$ , или столбцов  $A_j, j = 1, \dots, n$ , и записываться в виде

$$A = (a_i, i = 1, \dots, m) = \{A_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Квадратная матрица  $\Lambda$ , у которой все элементы равны нулю, кроме элементов, стоящих на диагонали, называется *диагональной*, и для нее используются обозначения

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{diag}\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\},$$

например,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}\{1, 2, 3\}.$$

Диагональная матрица, на диагонали которой стоят только единицы, называется *единичной* и имеет специальное обозначение

$$I = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}.$$

Если хотят указать, что размерность единичной матрицы равна  $n$ , то ее обозначают  $I_n$ . Единичную матрицу можно рассматривать как совокупность единичных векторов (столбцов)

$$I_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{i_j, j = 1, \dots, n\},$$

где

$$i_j = (0, \dots, 1_j, \dots, 0).$$

Матрицу, состоящую только из нулей, обозначают просто 0.

**2. Сложение, умножение, возведение в степень, транспонирование, след.** Матрицы можно преобразовывать по определенным правилам.

а) Если  $A$  и  $B$  — матрицы одинакового размера, то их сумма есть матрица, элементы которой являются суммами элементов слагаемых, стоящих на тех же местах:

$$C = A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\},$$

например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) Если  $\lambda$  — скаляр (число, функция), то

$$\lambda A = \{\lambda a_{ij}\},$$

например,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}.$$

в) Если  $C$  — строка, а  $B$  — столбец с тем же числом элементов  $n$ , то произведение  $CB$  является скаляром (скаларным произведением):

$$CB = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n.$$

г) Если  $C$  —  $(m_1 \times n_1)$ -матрица, а  $B$  —  $(m_2 \times n_2)$ -матрица и  $n_1 = m_2$  (число столбцов  $C$  совпадает с числом строк  $B$ ), то может быть найдено произведение этих матриц:

$$D = CB = \{d_{lk}, l = 1, \dots, m_1, k = 1, \dots, n_2\},$$

причем

$$d_{lk} = C_l B_k = \sum_{j=1}^{n_1} c_{lj} b_{jk},$$

где  $C_l$  —  $l$ -я строка  $C$ , а  $B_k$  —  $k$ -й столбец  $B$ , например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если  $n_1 \neq m_2$ , то умножение невозможно.

Вообще говоря,

$$BC \neq CB.$$

Если же имеет место равенство, то матрицы  $B$  и  $C$  называются *перестановочными*. Перестановочными могут быть только квадратные матрицы. Приведем также важные частные случаи общего правила умножения.

г) 1) Если  $\Lambda$  — диагональная матрица, а  $B$  — квадратная того же размера, то

$$\Lambda B = (\lambda_i b_i),$$

где  $b_i$  — строки матрицы  $B$ , например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$B\Lambda = \{\lambda_i B_i\},$$

где  $B_j$  — столбцы  $B$ , например,

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 7 & 3 \cdot 8 \end{pmatrix}.$$

г) 2) Умножение матрицы на единичную сохраняет ее неизменной:

$$IB = BI = B.$$

г) 3) Умножение строки на матрицу дает в результате строку:

$$CB = \{CB_1, CB_2, \dots, CB_n\},$$

если  $C$  — строка, а  $B_i$  — столбцы  $B$ ;

умножение матрицы на столбец дает столбец:

$$Ab = (a_1 b, \dots, a_n b),$$

если  $b$  — столбец, а  $a_i$  — строки  $A$ . В частности, если  $i_j$  —  $j$ -й единичный вектор, то

$$Ai_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) = (a_{1j}, \dots, a_{jj}, \dots, a_{nj}) = A_j,$$

т. е. выделяется  $j$ -й столбец матрицы.

д) Операции сложения и умножения матриц, как и скалярных величин, обладают *сочетательным* и *распределительным* свойством, т. е.

$$(AB)C = A(BC), \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

В силу этого для квадратных матриц определена операция *возведения в целую положительную степень*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}$$

и любому скалярному многочлену

$$f(x) = x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_0, \quad k > 0,$$

может быть сопоставлен многочлен от матрицы

$$f(A) = A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \dots + \alpha_0 I.$$

Два многочлена от одной и той же матрицы перестановочны:

$$h(A)g(A) = g(A)h(A).$$

е) Для любой матрицы определена операция *транспонирования*, включающаяся в перестановке элементов таким образом, что эле-

менты  $i$ -го столбца исходной матрицы становятся элементами  $i$ -й строки транспонированной, т. е. если  $A = \{a_{ij}\}$ , то транспонированная, обозначаемая  $A^t$ , такова:

$$A^t = \{a_{ji}\}.$$

Если  $A = A^t$ , то  $A$  называется *симметричной* (относительно диагонали), в частности, диагональная матрица симметрична.

Справедливо правило *транспонирования произведений*

$$(AB)^t = B^t A^t,$$

распространяемое на любое число сомножителей: при транспонировании произведения сомножители переставляются в обратном порядке, после чего каждый из них транспонируется, например,

$$(ABC)^t = C^t B^t A^t.$$

ж) Следом квадратной  $(n \times n)$ -матрицы  $A$  называется сумма ее диагональных элементов. Используется обозначение

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Если  $C$  —  $(m \times n)$ -матрица,  $B$  —  $(n \times m)$ -матрица, то

$$\text{tr} \{CB\} = \text{tr} \{BC\}.$$

**3. Обращение. Блочные матрицы. Ранг. Собственные числа и векторы.** а) Для каждой квадратной матрицы  $A$  может быть вычислено по известным правилам число, называемое определителем, которое будет обозначаться  $\det A$ . Если  $\det A \neq 0$ , то матрица называется *неособой* и существует матрица  $A^{-1}$ , называемая *обратной* к  $A$  и удовлетворяющая тождеству  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ .

Обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^n,$$

где  $A_{11}, A_{22}$  — квадратные, называемые *блочно-треугольной*. Для нее которой  $[a_{ik}^n]$  являются алгебраические дополнения элементов  $a_{ik}$  в определителе  $A$ , например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^n \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}^*$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Справедливо тождество  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ , распространяемое на любое число сомножителей, если каждый из них является неособой матрицей.

\*) Используется также обозначение  $\text{adj } A$ .

б) Любая матрица может быть произвольным образом разбита на прямоугольные блоки, каждый из которых является матрицей, называемой также подматрицей относительно исходной. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \{2, 1\}, \quad A_{22} = \{5\}.$$

Матрица, в которой выделены квадратные блоки  $A_i$ , расположенные по диагонали, а все остальные элементы равны нулю, называется *блочно-диагональной* и обозначается  $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}\{A_1, A_2\}, \quad \text{где } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \{5\}.$$

Матрица, обратная к блочно-диагональной, сама блочно-диагональна, причем

$$\det \text{diag}\{A_1, \dots, A_k\} = \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_k,$$

$$[\text{diag}\{A_1, \dots, A_k\}]^{-1} = \text{diag}\{A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}\}.$$

*Блочная матрица* вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где  $A_{11}, A_{22}$  — квадратные, называется *блочно-треугольной*. Для нее верно, что

$$\det A = \det A_{11} \det A_{22}.$$

Справедливо также правило (*лемма Шура*):

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = \\ = \det A_{22} \det (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}).$$

Матрицы могут перемножаться поблочно, причем, если

$$C = \{C_{ij}\}, \quad B = \{B_{ij}\},$$

то

$$D = CB = \{D_{ik}\} = \left\{ \sum_j C_{ij} B_{jk} \right\},$$

т. е. применяется то же правило, что и при поэлементном перемножении (с соблюдением ограничений по размерам перемножаемых блоков!).

в) *Рангом матрицы*  $A$  называется число, равное наибольшему из порядков отличных от нуля миноров, или, что то же самое, наибольшему числу строк (столбцов) неособой квадратной подматрицы, которую можно выделить в  $A$ . Принято обозначение  $\text{rang } A$ .

г) *Характеристическим многочленом* квадратной  $(n \times n)$ -матрицы  $A$  называется многочлен степени  $n$ , равный

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Его корни  $\lambda_v, v = 1, \dots, n$ , называются *характеристическими* или *собственными числами* (с. ч.) матрицы.

д) *Теорема Гамильтона — Кэли*: если  $\Delta(\lambda)$  — характеристический многочлен матрицы  $A$ , то

$$\Delta(A) = 0.$$

е) Решение однородного уравнения

$$Ax = \lambda_v x \Leftrightarrow (\lambda_v I - A)x = 0,$$

где  $x$  — столбец с неизвестными элементами, называется *собственным вектором*  $A$ , соответствующим с. ч.  $\lambda_v$ , и обозначается  $S_v$ . Собственный вектор определен с точностью до постоянного множителя.

Если все с. ч. различны, то матрица  $S$ , составленная из столбцов  $S_v, v = 1, \dots, n$ , является *неособой*. Она удовлетворяет тождеству

$$AS = SA \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = SAS^{-1},$$

где  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_v\}$ .

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6,$$

Собственные числа равны  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$ . Собственные векторы равны  $S_1 = (1, 2), S_2 = (-2, 1)$ , так что

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнено тождество

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4. *Линейные алгебраические уравнения*. а) Если  $A$  — неособая матрица, а  $b, x$  — векторы, то уравнение

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеет решение

$$x = A^{-1}b.$$

Решение матричного уравнения

$$AX = B,$$

где  $B$  — заданная матрица, а  $X$  — неизвестная матрица того же размера, представима в виде

$$X = A^{-1}B.$$

б) Если  $A$  — прямоугольная  $(m \times n)$ -матрица, то однородное уравнение

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n A_j x_j = 0$$

относительно вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$  имеет решение  $x \neq 0$ , если  $n > m$ . Если  $n \leq m$ , то решение  $x \neq 0$  существует, если и только если равны нулю определители всех квадратных  $(n \times n)$ -блоков  $A$ .

Если столбцы  $A$ , матрицы  $A$  рассматриваются как  $m$ -векторы, то те же утверждения трактуются так: при  $n > m$  столбцы заведомо линейно зависимы; при  $n \leq m$  столбцы  $A$ , линейно зависимы, если  $\text{rank } A < n$ .

Неоднородное уравнение

$$Ax = b$$

имеет решение относительно  $n$ -вектора  $x$  при произвольном  $m$ -векторе  $b \neq 0$ , если и только если

$$\text{rank } A = m.$$

в) Уравнение относительно матрицы  $X$  вида

$$AX + XB = C,$$

где  $A, B$  — квадратные матрицы, имеет решение при любой квадратной матрице  $C$ , если и только если

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0,$$

где  $\lambda_i$  — с. ч.  $A$ , а  $\mu_j$  — с. ч.  $B$ .

Если  $B = A^*$ , то с. ч.  $B$  совпадают с с. ч.  $A$  и указанное условие заведомо выполняется, когда все они лежат в одной полуплоскости.

5. Дифференцирование, интегрирование, линейные дифференциальные уравнения, матричная экспонента. а) Если элементы матрицы зависят от скалярного аргумента  $t$ , то

$$\frac{d}{dt} A \triangleq \left\{ \frac{da_{ij}}{dt} \right\}, \quad \int A dt \triangleq \left\{ \int a_{ij} dt \right\}.$$

Матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi = A\Phi,$$

где  $A = \{a_{ij}\}$  — заданная квадратная матрица, а  $\Phi = \{\varphi_{ik}\}$  — искомая, эквивалентно системе уравнений относительно столбцов  $\Phi_k$  матрицы  $\Phi$ :

$$\frac{d}{dt} \Phi_k = A\Phi_k \Leftrightarrow \frac{d\varphi_{ik}}{dt} = \sum_j a_{ij} \varphi_{jk},$$

б) Если  $A = \text{const}$ , то решение уравнения с начальным условием  $\Phi(0) = I$  определяет неособую матрицу  $e^{At}$ , называемую *матричной экспонентой*. Укажем ряд способов вычисления матричной экспоненты.

б1) Вычисление по определению. Элементы  $k$ -го столбца матрицы  $e^{At}$ , обозначаемые  $\varphi_{ik}(t)$ , удовлетворяют системе уравнений с начальными условиями  $\varphi_{ik}(0) = 1$ ,  $\dot{\varphi}_{ik}(0) = 0$ ,  $i \neq k$ . Эта система решается произвольным образом, например, сведением к одному уравнению.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \varphi_{21}, \quad \varphi_{11}(0) = 1, \quad \frac{d\varphi_{12}}{dt} = \varphi_{22}, \quad \varphi_{12}(0) = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{21}}{dt} = -\omega^2 \varphi_{11}, \quad \varphi_{21}(0), \quad \frac{d\varphi_{22}}{dt} = -\omega^2 \varphi_{12}, \quad \varphi_{22}(0) = 1,$$

откуда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad \square$$

б2) Вычисление с помощью  $\mathcal{L}$ -преобразования. Имеем

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(pI - A)^{-1}\}.$$

Пример. Пусть  $A$  та же, что в б1. Тогда

$$(pI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix}.$$

Используя таблицу  $\mathcal{L}$ -образов элементов (приложение 1), имеем

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + \omega^2}\right\} = \cos \omega t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right\} = \sin \omega t,$$

откуда вновь следует результат примера из б1.  $\square$

б3) Вычисление с помощью диагонализирующего преобразования. Если с. ч.  $\lambda_v$  различны и найдены соответствующие им собственные векторы  $S_v$ , то  $e^{At}$  вычислима по формуле

$$e^{At} = S \text{diag} [e^{\lambda_v t}] S^{-1}.$$

**Пример.** Рассмотрим матрицу  $A$  из примера в п. 3. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -6, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-t} + 4e^{-6t} & 2e^{-t} - 2e^{-6t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-6t} & 4e^{-t} - e^{-6t} \end{pmatrix}. \quad \square$$

64) *Вычисление с помощью степенного ряда.* Матричная экспонента представима в виде ряда

$$e^{At} = I + At + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots$$

При вычислении ее значения для конкретного  $t$  с помощью ЭВМ можно рекомендовать алгоритм, вытекающий из следующего тождества:

$$e^{At} = \left( \frac{At}{e^{2N}} \right)^{2N},$$

где  $N$  — произвольное целое число. Оно всегда может быть взято настолько большим, что приближение

$$e^{At} \cong \left[ I + \frac{At}{2^N} + \dots + \frac{1}{k!} A^k \left( \frac{t}{2^N} \right)^k \right]^{2N}$$

(при фиксированном  $k \geq 1$ ) окажется удовлетворительным.

Вычисления сводятся к простому алгоритму. При  $k=1$  имеем:

1. Вычислить  $\Phi(0) = I + At/2^N$ .
2. Для  $l = 1, \dots, N$  вычислить последовательно  $\Phi(l) = \Phi^2(l-1)$ .
3. Положить  $e^{At} = \Phi(N)$ .

**Пример.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \frac{\pi}{4}, \quad N = 10.$$

Тогда

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 7,669 \cdot 10^{-4} \\ -7,669 \cdot 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}, \dots, \Phi(10) = \begin{pmatrix} 0,7073 & 0,7073 \\ 0,7073 & 0,7073 \end{pmatrix}.$$

Значение, получаемое из примера в б1 при  $\omega = 1$ ,  $t = \pi/4$ , таково:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ 0,7071 & 0,7071 \end{pmatrix}$$

и совпадает с  $\Phi(10)$  с точностью до 4-го знака.  $\square$

Имеются формулы, позволяющие указать величины  $k$ ,  $N$ , обеспечивающие вычисление с наперед заданной точностью и притом с наименьшим числом операций.

*Общие рекомендации:* при использовании выкладок «вручную» удобен способ б2; при получении с помощью ЭВМ зависимостей в

«формульном» виде удобен способ б3; при организации вычислений на ЭВМ для конкретной сетки значений  $t$  удобнее способ б4.

**Замечание.** Способ б4 может быть положен в основу численного интегрирования нелинейных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x^0.$$

Выбирается шаг  $\tau$  по времени и последовательно определяются  $x(k\tau) \triangleq x[k]$ :

$$x[k+1] = x[k] + A_k^{-1} (e^{A_k \tau} - I) f_k,$$

где  $A_k \triangleq \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x[k]}$ ,  $f_k \triangleq f(x)|_{x=x[k]}$ .

Матричная экспонента  $e^{A_k \tau}$  при этом вычисляется по способу б4 \*).

6. Квадратичные и эрмитовы формы. Положительно определенные матрицы. Устойчивые (турвицевы) матрицы. а) Если  $Q$  — симметричная матрица с вещественными элементами, то  $G(x) = x^T Q x$  называется *квадратичной формой относительно вектора*  $x$ .

Если  $G(x) > 0$  при  $x \neq 0$ , то форма (и матрица  $Q$ ) называется *положительно определенной*. Если  $G(x) \geq 0$ , то форма (и матрица  $Q$ ) называется *неотрицательно определенной*. Соответственно используют краткие обозначения  $Q > 0$  и  $Q \geq 0$ . По критерию Сильвестра ( $n \times n$ )-матрица  $Q > 0$ , если и только если положительны все определители диагональных блоков

$$\Delta_k = \det \{q_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

б) Матрица  $A$  называется *устойчивой (турвицовой)*, если все ч. лежат в левой полуплоскости.

Если известны коэффициенты характеристического многочлена

$$\alpha(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0,$$

то по критерию Гурвица устойчивость  $A$  эквивалентна положительности главных миноров ( $n \times n$ )-матрицы  $H$ :

$$H \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_n & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-2k-1} & \alpha_{n-2k} & \alpha_{n-2k+1} & \alpha_{n-2k+2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_i \triangleq 0, \quad i < 0, \quad \alpha_n \triangleq 1.$$

в) Если  $Q$  — матрица с комплексными элементами и  $Q = Q^{(*)}$ , где  $(*)$  означает одновременное выполнение операций транспонирования и замены элементов на комплексно сопряженные, то она назы-

\*). Подробности можно найти в [П.6].

вается эрмитовой. Соответственно, для любого комплексного вектора  $z$  вводится эрмитова форма  $G(z) = z^{(*)}Qz$ , если  $Q$  эрмитова.

Если  $Q$  вещественна и  $z = x + iy$ , где  $x, y$  вещественны, то

$$G(z) = G(x) + G(y).$$

Если  $Q > 0$ , то  $G(z) > 0$  при  $|z| \neq 0$ . Если  $z$  — вектор, состоящий из подвекторов  $z_1, z_2$ , и  $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix}$  эрмитова, то

$$G(z) \triangleq z_1^{(*)}Q_{11}z_1 + 2\operatorname{Re} z_1^{(*)}Q_{12}z_2 + z_2^{(*)}Q_{22}z_2.$$

**7. Лемма Якубовича — Калмана.** Пусть пара  $A, B$  невырождена,  $\Phi(p) \triangleq [pI - A]^{-1}$ . Пусть  $G(x, v)$  — эрмитова форма от вектора  $(x, v)$ . Если

$$G[\Phi(i\omega)Bv, v] \leq 0 \quad (1)$$

для всех  $v$  и  $\omega$ , то существуют  $P = P^{(*)}$ ,  $h$ ,  $\gamma$  такие, что справедливо тождество

$$2\operatorname{Re} x^{(*)}P(Ax + Bv) + G(x, v) = -|hx - \gamma v|^2, \quad (2)$$

причем, если  $A, B$  и коэффициенты формы  $G$  вещественны, то  $P, h$  и  $\gamma$  можно выбрать вещественными и  $P = P^*$ .

Если выполнено строгое частотное условие

$$G[\Phi(i\omega)Bv, v] < 0 \quad (1')$$

для всех  $\omega \in [-\infty, \infty]$  и  $v \neq 0$ , то существует  $P = P^{(*)}$  такое, что

$$2\operatorname{Re} x^{(*)}P(Ax + Bv) + G(x, v) < 0 \quad (2')$$

для всех  $x, v$ , лишь бы  $|x| + |v| \neq 0$ .

Если  $G(0, v) = v^{(*)}q_{22}v < 0$  при всех скалярных  $v \neq 0$ , то

$$\det\{pI - (A - BK)\} = (-q_{22})^{-1/2}g(p), \quad K \triangleq (-q_{22})^{-1/2}h,$$

где  $g(p)$  может быть сделан устойчивым многочленом за счет выбора  $h$ .

**Доказательство** дается для случая гурвицевой  $A$  и скалярного  $v$ , т. е.  $B = b$  — столбец. По определению  $G(0, v) = q_{22}|v|^2$ ,  $q_{22} \triangleq Q_{22}$  — скалярная константа. Из (1) следует, что  $q_{22} \leq 0$ . Положив  $\gamma = (-q_{22})^{1/2}$ , удовлетворим (2) при  $x = 0$  и любых  $v$ . Выберем  $h$  как решение уравнения

$$G[\Phi(i\omega)bv, v] = -|h\Phi(i\omega)b - \gamma|^2|v|^2. \quad (3)$$

Далее будет показано, что такое  $h$  существует. Если это так, (2) удовлетворяется при  $x = \Phi(i\omega)bv$  и любых  $v$ . При известном  $h$  определим  $P$  из уравнения

$$PA + A^{(*)}P = -Q_{11} - h^{(*)}h, \quad (4)$$

которое имеет решение в силу гурвицевости  $A$  (п.4в). При таком выборе  $P$

\* ) Если  $v \in R^m$ , где  $m > 1$ , то дополнительно к (1) достаточно потребовать, чтобы  $G(0, v) < 0$ ,  $v \neq 0$ .

тождество (2) выполняется при  $v = 0$  и любых  $x$ , поскольку (4) эквивалентно

$$2\operatorname{Re} x^{(*)}PAx = -x^{(*)}Q_{11}x - x^{(*)}h^{(*)}hx.$$

Остается доказать, что сделанный выбор  $\gamma, h, P$  позволяет удовлетворить (2) при любых других  $x, v$ . Установим два вспомогательных положения.

**Лемма А.** Пусть  $a(p) \triangleq p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$ , где  $a_i$  — комплексные числа. Пусть  $\bar{a}_i$  — числа, им сопряженные, и обозначено

$$a^v(p) = (-p)^n + \bar{a}_{n-1}(-p)^{n-1} + \dots + \bar{a}_0.$$

Тогда

1. Корни  $a^v(p)$  расположены симметрично относительно мнимой оси с корнями  $a(p)$ .

$$2. a^v(i\omega) = \overline{a(i\omega)}.$$

3. Если  $a(i\omega) = \overline{a(i\omega)}$ , то  $a^v(p) = a(p)$ .

4. Если  $\chi(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ , где  $b, a$  — многочлены, и  $\operatorname{Re} \chi(i\omega) = 0$ , то

$$\chi(p) = -\frac{b^V(p)}{a^V(p)}.$$

5. Если  $a(p) = a^v(p)$  и  $\operatorname{Re} a(i\omega) \geq 0$ , то справедливо представление (обобщенная факторизация)

$$a(p) = \tilde{a}(p)\tilde{a}^v(p),$$

где  $\tilde{a}(p)$  — многочлен.

**Доказательство леммы А**, за исключением последнего результата, элементарно и требует лишь учета того, что если многочлены совпадают на мнимой оси, то они совпадают и на всей комплексной плоскости.

Докажем последний результат. В силу  $a(p) = a^v(p)$  все корни  $a(p)$  с точностью до кратности расположены симметрично относительно мнимой оси. Поэтому все корни, не лежащие на мнимой оси, можно разбить на две симметричные группы. Если же у  $a$  есть чисто мнимый корень  $i\omega_0$ , то он должен быть четной кратности, так как в противном случае  $a(i\omega) = a^v(i\omega) = \overline{a(i\omega)} = \operatorname{Re} a(i\omega)$  менял бы знак при переходе через  $i\omega_0$ . Таким образом, чисто мнимые корни тоже разбиваются на две симметричные группы. Если  $a(i\omega) = \operatorname{Re} a(i\omega) > 0 \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$ , то чисто мнимых корней нет и многочлены  $\tilde{a}(p), \tilde{a}^v(p)$  также не имеют чисто мнимых корней. ■

**Лемма Б.** Пусть  $F(x, v)$  — эрмитова форма такая, что  $F(x, 0) = 0, F[\Phi(i\omega)bv, v] = 0$  при всех  $\omega$ . Тогда  $F(x, v) = 0$ .

**Доказательство леммы Б.** Учтем, что  $\Phi(i\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Тогда  $F(0, v) = 0$ , т. е. справедливо представление

$$F(x, v) = \operatorname{Re} v^{(*)}f^*x,$$

где  $f$  — некоторый вектор. Положим

$$\chi(p) \triangleq v_0^{(*)}f^{(*)}\Phi(p)bv_0,$$

где  $v_0$  — произвольное фиксированное число. Имеем, по условию,

$$\operatorname{Re} \chi(i\omega) = \operatorname{Re} v_0^{(*)}f^{(*)}\Phi(i\omega)bv_0 = F(\Phi(i\omega)bv_0, v_0) = 0.$$

Из леммы А следует, что полюсы  $\chi(p)$  должны быть расположены симметрично относительно мнимой оси. Однако, по определению,  $\chi(p)$  — дробно-рациональная функция, полюсами которой могут быть только с. ч. устойчивой мат-

рицы  $A$ . Следовательно,  $\chi(p)$  вообще не имеет полюсов, т. е. является многочленом. Но  $\chi(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ , что возможно только, если  $\chi(p) = 0$ , т. е.  $f^{(*)}\Phi(p)b = 0 \Leftrightarrow f^{(*)}[pI - A]^{-1}b = 0 \Rightarrow f^*e^{At}b = 0, \quad t \geq 0,$

что в предположении невырожденности  $A$ ,  $b$  эквивалентно  $f = 0$ , а тогда и  $F(x, v) = 0$ . ■

Из леммы Б следует, что тождество (2) удовлетворяется при любых  $x, v$ , поскольку оно эквивалентно

$$F(x, v) \triangleq G(x, v) + 2 \operatorname{Re} x^{(*)}P(Ax + v) + \|hx - \gamma v\|^2 = 0.$$

Остается доказать, что возможен выбор  $h$  согласно (3).

Пусть  $\alpha(p)$  — характеристический многочлен  $A$ . Умножим (3) на  $-|\alpha(i\omega)|^2$ . Тогда

$$-|\alpha(i\omega)|^2 G[(i\omega I - A)^{-1}bv, v] = +|\alpha(i\omega)|^2 |h(i\omega I - A)^{-1}b - \gamma|^2 |v|^2. \quad (5)$$

Сократив на  $|v|^2$ , получим слева многочлен от  $i\omega$  с заданными коэффициентами, который можно обозначить  $P(i\omega)$ . Его можно однозначно распространить на комплексную плоскость  $p$ . Очевидно, что  $P(p) = P^\dagger(p)$ , поскольку  $P(i\omega)$  веществен при всех  $\omega$  и  $P(i\omega) = \operatorname{Re} P(i\omega) = \overline{P(i\omega)}$ , а следовательно, применим результат 3 леммы А. Далее, из результата 5 леммы А следует возможность факторизации:  $P(p) = g(p)g^\dagger(p)$  с устойчивым  $g(p)$ . Теперь очевидно, что (5) удовлетворится, если выбрать  $h$  так, чтобы

$$g(p) = -[h(pI - A)^{-1}b - \gamma]\alpha(p). \quad (6)$$

Это тождество можно переписать в виде

$$h(pI - A)^n b \triangleq h(C_{n-1}p^{n-1} + \dots + C_0) = -g(p) + \gamma\alpha(p). \quad (6')$$

Многочлен справа имеет степень не выше  $n - 1$ . Действительно,

$$P(p) = -\alpha(p)\alpha^\dagger(p)q_{22} + (\text{многочлен степени } 2n - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(p) = \gamma p^n + \dots \Rightarrow -g(p) + \gamma\alpha(p) = a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0.$$

Коэффициенты  $a_0, \dots, a_{n-1}$  известны, и тождество (6') удовлетворяется, если найти  $h$  из решения системы

$$hC_i = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Векторы  $C_i$  линейно независимы, если пара  $A, b$  невырождена, так что система разрешима и тем самым доказательство того, что (1)  $\Rightarrow$  (2), завершено.

Докажем, что  $\det(pI - A - (-q_{22})^{-1/2}bh) = (-q_{22})^{-1/2}g(p)$ , т. е. что

$$\det(pI - A - \gamma^{-1}bh) = \gamma^{-1}g(p).$$

Действительно, используя (6) и лемму Шура (п. 3б), получим

$$\begin{aligned} \det(pI - A - \gamma^{-1}Bh) &= \det(pI - A)(1 - \gamma^{-1}h(pI - A)^{-1}B) = \\ &= \gamma^{-1}\alpha(p)(1 - h(pI - A)^{-1}B) = \gamma^{-1}g(p). \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что (1)  $\Rightarrow$  (2).

Очевидно, справедливо и обратное (2)  $\Rightarrow$  (1).

Для доказательства того, что (1')  $\Rightarrow$  (2'), перепишем (1') в виде

$$G[\Phi(i\omega) bv, v] = -v^{(*)}\Pi(i\omega)v,$$

где  $\Pi(i\omega)$  непрерывна и  $\Pi(i\omega) > 0$ , так что

$$\Pi(i\omega) \geq \Pi_0 > 0, \quad \Pi_0 = \text{const.}$$

Введем также

$$G_1(x, v) = G(x, v) + \epsilon(|x|^2 + |v|^2), \quad \epsilon > 0. \quad (7)$$

Тогда

$$G_1[\Phi(i\omega) bv, v] \leq -v^{(*)}\Pi_0 v + \epsilon(\bar{c} + 1)|v|^2 \leq 0,$$

где  $\bar{c}$  — константа такая, что при всех  $\omega$

$$|\Phi(i\omega)b|^2 \leq \bar{c}.$$

В силу доказанного выше существует  $P = P^{(*)}$ , удовлетворяющая при всех  $x, v$  неравенству

$$2\operatorname{Re} x^{(*)}P(Ax + bv) + G_1(x, v) \leq 0,$$

которое согласно (7) влечет за собой (2'). ■

**Следствие \*). Уравнения**

$$A^T P + PA - K^T R K + Q = 0, \quad RK = B^T P \quad (8)$$

имеют единственное положительно определенное решение  $P$  и соответствующее ему  $K$  такое, что  $A - BK$  — устойчивая матрица, если  $R > 0$ , пара  $A, B$  невырождена и выполнено одно из двух условий:  $Q > 0$ , либо  $Q = C^T C$ , причем пара  $A^T, C^T$  невырождена.

**Доказательство.** Существование симметричной  $P$  и  $K$ , удовлетворяющих (8), эквивалентно существованию  $P = P^T$  и  $K$ , для которых выполнено тождество

$$2\operatorname{Re} x^{(*)}(-P)(Ax + Bv) - (x^{(*)}Qx + v^{(*)}Rv) = -(v + Kx)^{(*)}R(v + Kx)$$

для любых комплексных  $x, v$ . По лемме Якубовича — Калмана для этого достаточно, чтобы

$$G[\Phi(i\omega) Bv, v] \leq 0, \quad G(x, v) \triangleq -(x^{(*)}Qx + v^{(*)}Rv).$$

Поскольку  $R > 0$ , то это условие заведомо выполнено. Более того, выполнено и строгое условие (1'), причем  $G(0, v) = -v^*Rv < 0$ , так что из леммы также следует, что имеется единственное решение  $P = P^T$ ,  $K$ , для которого  $\bar{A} = A - BK$  устойчива.

Поскольку система (8) эквивалентна

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} = -K^T R K - Q \triangleq -\bar{Q}, \quad K = R^{-1}B^T P, \quad (9)$$

то при  $Q > 0$  имеем  $\bar{Q} > 0$ , и положительная определенность решения  $P$  следует из леммы Ляпунова (гл. 8, § 2). Несколько модифицируя доказательство этой леммы, можно убедиться, что  $P > 0$  и при условии невырожденности пары  $A^T, C^T$ . ■

**8. Алгоритм факторизации для решения матричного квадратного уравнения (8).** Пусть  $B = b$  — столбец,  $R = r > 0$  — скаляр и (8) записывается в виде

$$A^T P + PA - \rho K^T K + Q = 0, \quad K = r^{-1}B^T P. \quad (10)$$

Пусть существует решение  $P_0, K_0$ . Обозначим

$$H_p(p) \triangleq K_0 \Phi(p) b, \quad \Phi(p) \triangleq [pI - A]^{-1}.$$

\*). Следствие эквивалентно Т.5.2 из гл. 6 и пропущенному при доказательстве Т.5.1 утверждению.

Тогда для произвольного  $p$  верно тождество

$$\begin{aligned} P_0(A - pI) + (A + pI)^T P_0 - \rho K_0^T K_0 + Q = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -P_0 \Phi^{-1}(p) - [\Phi^{-1}(-p)]^T P_0 - \rho K_0^T K_0 + Q = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -B^T \Phi^T(-p) P_0 B - B^T P_0 \Phi(p) B - \\ - \rho B^T \Phi^T(-p) K_0^T \Phi(p) B + B^T \Phi^T(-p) Q \Phi(p) B = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [1 + H_p(-p)][1 + H_p(p)] = L(p), \end{aligned}$$

где

$$L(p) \triangleq 1 + \rho^{-1} B^T \Phi^T(-p) Q \Phi(p) B.$$

Производя факторизацию  $L(p)$ , запишем

$$L(p) = \frac{l(p) l(-p)}{\alpha(p) \alpha(-p)}, \quad (11)$$

где  $l(p)$  — устойчивый многочлен. Если представление (11) возможно, то

$$H_P(p) = \frac{l(p) - \alpha(p)}{\alpha(p)},$$

а вектор  $K_0$  находится из тождества

$$K_0[pI - A]^{-1} b \alpha(p) = l(p) - \alpha(p), \quad (12)$$

после чего матрица  $P > 0$  определится из решения линейного уравнения.

Алгоритм обоснован в условиях следствия (п. 7). Обобщение на случай произвольного  $B$  дано в [4.11].

**Пример.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$L(p) = 1 + \frac{1}{\rho p^4} \{0 \ 1\} \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{\rho p^4} = \frac{\rho p^4 + 1}{\rho p^4}.$$

Имеем  $\alpha(p) = p^2$ ,  $l(p) = \rho^{-1/2} \chi_2(pp^{1/4})$ , где  $\chi_2(s)$  — многочлен Баттервортса,  $\chi_2(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$ . Тождество (12) принимает вид

$$\{k_1 \ k_2\} \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \rho^{-1/4} p + \rho^{-1/2},$$

откуда

$$k_1 = \rho^{-1/2}, \quad k_2 = \sqrt{2} \rho^{-1/4},$$

что совпадает с решением, полученным «в лоб» в П.5.2 гл. 6.  $\square$

9. Итеративный алгоритм для решения матричного квадратичного уравнения (8). Уравнение (8) эквивалентно системе (9).

Зададимся каким-либо  $K^{(0)}$  таким, что  $\bar{A}^{(0)} \triangleq A - BK^{(0)}$  гурвицева. Тогда последовательные приближения строятся по правилу:

$$\begin{aligned} [\bar{A}^{(t)}]^T P^{(t)} + P^{(t)} \bar{A}^{(t)} &= -[K^{(t)}]^T R K^{(t)} - Q, \\ K^{(t+1)} &= R^{-1} B^T P^{(t)}, \quad \bar{A}^{(t+1)} = A - BK^{(t+1)}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

причем на каждой итерации решается линейное матричное уравнение.

Сходимость алгоритма обеспечена в условиях следствия из п. 7, причем

$$P^{(t)} - P^{(t-1)} > 0,$$

и все матрицы  $\bar{A}(t)$  устойчивы. Доказательство см., например, в [П. 7, П. 8].

Начальное приближение (стабилизирующие коэффициенты усиления) может быть найдено либо по алгоритмам, указанным в гл. 6, либо с помощью следующего приема.

Пусть  $\beta > 0$  таково, что  $\beta > -\operatorname{Re}\lambda_v$ , где  $\lambda_v$  — с. ч.  $A$ ; тогда  $-(A + \beta I)^*$  устойчива и матрица  $\bar{P}$ , удовлетворяющая уравнению

$$-(A + \beta I)\bar{P} - \bar{P}(A + \beta I)^* + 2BR^{-1}B^* = 0,$$

является положительно определенной. Найдя  $\bar{P}$ , примем  $K^0 = R^{-1}B^T\bar{P}^{-1}$ . Устойчивость  $\bar{A}^0 = A - BK^0$  следует из леммы Ляпунова, поскольку при таком выборе  $K^0$  справедливо тождество

$$\bar{A}^0 \bar{P} + \bar{P}(\bar{A}^0)^* + 2\beta \bar{P} = 0.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ<sup>\*)</sup>

### К ГЛАВЕ 1

- 1.1. Автоматизация производства и промышленная электроника/Под ред. А. И. Берга, В. А. Трапезникова. Т. I.—М.: Советская энциклопедия, 1962.—424 с.
- 1.2. Белянин В. Н. Промышленные роботы.—М.: Машиностроение, 1957.—398 с.
- 1.3. Бесекерский В. А., Орлов В. П., Полонская Л. В., Федоров С. М. Проектирование следящих систем малой мощности.—Л.: Судпромгиз, 1958.—508 с.
- 1.4. Брускин Д. Э., Зорохович А. Е., Хвостов В. С. Электрические машины и микромашины.—М.: Высшая школа, 1971.—432 с.
- 1.5. Бурдаев С. Ф., Первозванский А. А. Динамический расчет электромеханических следящих приводов промышленных роботов.—Л.: ЛПИ, 1982.—72 с.
- 1.6. Основы проектирования следящих систем/Под ред. Н. А. Лакоты.—М.: Машиностроение, 1978.—391 с.
- 1.7. Страганов Р. П. Управляющие машины и их применение.—М.: Высшая школа, 1978.—264 с.

### К ГЛАВЕ 2

- 2.1. Воропов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.—М.: Наука, 1979.—336 с.
- 2.2. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического управления.—М.: Физматгиз, 1963.—510 с.
- 2.3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.—Изд. 4-е.—М.: Наука, 1978.—415 с.
- 2.4. Палю де Ла Барьер Р. Курс теории автоматического управления.—М.: Машиностроение, 1973.—397 с.
- 2.5. Понтиягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—Изд. 5-е.—М.: Наука, 1982.—331 с.
- 2.6. Постников М. М. Устойчивые многочлены.—М.: Наука, 1981.—175 с.
- 2.7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. I.—Изд. 15-е.—М.: Гостехиздат, 1954.—472 с.

### К ГЛАВЕ 3

- 3.1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования.—М.: Наука, 1966.—992.
- 3.2. Заде Л., Дезоэр Ч. Теория линейных систем.—М.: Наука, 1970.—703 с.

<sup>\*)</sup> Приведенный список является списком использованных источников, а не рекомендуемой литературы, и тем более не претендует на полное отражение даже основных работ по затронутым темам.

- 3.3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.—М.: Мир, 1977.—650 с.
- 3.4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II.—Изд. 5-е.—М.: Гостехиздат, 1955.—595 с.
- 3.5. Окунев Л. Я. Высшая алгебра.—М.: Учпедгиз, 1958.—335 с.
- 3.6. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления.—М.: Наука, 1981.—464 с.

### К ГЛАВЕ 4

- 4.1. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Т. 2.—М.; Л.: Энергия, 1966.—371 с.
- 4.2. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления.—М.: Наука, 1966.—416 с.
- 4.3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1968.—496 с.
- 4.4. Крамер Г. Математические методы статистики.—М.: ИЛ, 1948.—631 с.
- 4.5. Остром К. Введение в стохастическую теорию управления.—М.: Мир, 1973.—321 с.
- 4.6. Первозванский А. А. О качестве регулирования частоты в энергосистемах.—Известия АН СССР, ОТИ, 1957, № 1.
- 4.7. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством.—М.: Наука, 1975.—617 с.
- 4.8. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.—М.: Физматгиз, 1962.—559 с.
- 4.9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.—Изд. 2-е.—М.: Наука, 1968.
- 4.10. Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей.—М.: Физматгиз, 1965.
- 4.11. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами.—М.: Наука, 1981.—448 с.
- 4.12. Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления.—М.: Машиностроение, 1964.

### К ГЛАВЕ 5

- 5.1. Айзerman M. A., Смирнов И. М. О применении методов малого параметра для исследования периодических режимов в системах, не содержащих малого параметра.—В кн.: Памяти А. А. Андронова.—М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 77—92.
- 5.2. Бахвалов Н. С. Численные методы.—М.: Наука, 1975.—632 с.
- 5.3. Браверман Э. М., Пятницкий Е. С. Прохождение случайного сигнала через абсолютно устойчивые системы.—Автоматика и телемеханика, 1971, т. 32, № 2.
- 5.4. Гелиг А. Х. Об устойчивости движения систем с неединственным положением равновесия.—ДАН СССР, 1962, т. 147, № 3, с. 526—528.
- 5.5. Гольдфарб Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования.—Автоматика и телемеханика, 1947, т. 8, № 5, с. 347—383.
- 5.6. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем.—М.: Физматгиз, 1962.—332 с.
- 5.7. Красовский Н. Н.—Некоторые задачи теории устойчивости движения.—М.: Физматгиз, 1959.—212 с.
- 5.8. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.—Киев: АН УССР, 1937.—363 с.
- 5.9. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах.—М.: Физматгиз, 1962.—352 с.
- 5.10. Попов В. М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования.—Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 8, с. 961—979.

- 5.11. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.—М.: Физматгиз, 1960.—792 с.
- 5.12. Якубович В. А. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем.—В кн.: Труды III Международного конгресса ИФАК.—М.: Наука, 1971.
- 5.13. Booton R. C. Jr. Nonlinear control systems with random inputs.—IRE Trans., 1954, CT-1, p. 9—17.
- 5.14. Cho Y.-S., Narendra K. S. An off-axis circle criterion for the stability of feedback systems with a monotonic non-linearity.—IEEE Tr. on AC, 1968, Aug., p. 413—416.

## К ГЛАВЕ 6

- 6.1. Айзerman M. A. Классическая механика.—М.: Наука, 1974.—367 с.
- 6.2. Калман Р., Фалб П., Арбіб М. Очерки по математической теории систем.—М.: Мир, 1971.—400 с.
- 6.3. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.—М.: Наука, 1972.—576 с.
- 6.4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.—М.: Наука, 1974.—696 с.
- 6.5. Ларин В. М., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью.—Киев: Наукова думка, 1971.—137 с.
- 6.6. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация.—М.: Наука, 1979.—342 с.
- 6.7. Первозванский А. А. О методе замороженных коэффициентов при синтезе линейных регуляторов.—ДАН СССР, 1983, т. 268, № 5, с. 1075—1078.
- 6.8. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике.—М.: Наука, 1975.—344 с.
- 6.9. Kailath T. Linear systems.—New York: Prentice Hall, 1980.—682 р.  
См. также [3.2, 3.3, 4.2, 4.5, 4.11].

## К ГЛАВЕ 7

- 7.1. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и их реализация.—М.: Сов. радио, 1973.—152 с.
- 7.2. Медиц Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.—М.: Энергия, 1973.—440 с.
- 7.3. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем.—М.: Физматгиз, 1958.—724 с.
- 7.4. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.—М.: Наука, 1977.
- 7.5. Фомин В. Н. Методы управления линейными дискретными объектами.—Л.: Изд. ЛГУ, 1985.—336 с.  
См. также [3.3, 4.2, 4.5, 4.11, 4.12].

## К ГЛАВЕ 8

- 8.1. Андровов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.—М.: Физматгиз, 1959.—915 с.
- 8.2. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова.—М.: Наука, 1970.—240 с.
- 8.3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.—М.: ИЛ, 1954.—216 с.
- 8.4. Баркин А. И. Оценки качества нелинейных систем регулирования.—М.: Наука, 1982.—256 с.
- 8.5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973.—272 с.
- 8.6. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.—М.: Наука, 1978.

- 8.7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.—472 с.
- 8.8. Красносельский А. М. Частотные признаки в задаче о вынужденных периодических колебаниях в методе гармонического баланса.—В кн.: VIII Всес. совещание по проблемам управления: Тезисы докладов. Ки. I.—М.: ИПУ, 1980, с. 21—23.
- 8.9. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. Приближение решения операторных уравнений.—М.: Наука, 1969.
- 8.10. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.—М.; Л.: Гостехиздат, 1951.—216 с.
- 8.11. Розенвассер Е. И. Колебания нелинейных систем: метод интегральных уравнений.—М.: Наука, 1969.—576 с.
- 8.12. Якубович В. А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью.—Сиб. мат. журнал, 1973, т. XIV, № 5, с. 1100—1129.
- 8.13. Saksena V. R., O'Balley J., Kokotovic P. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976—1983. Automatica, v. 20, № 3, 1984, p. 273—293.
- 8.14. Siljak D. Nonlinear systems.—New York: J. Wiley, 1969.—618 р.  
См. также литературу к гл. 5.

## К ГЛАВЕ 9

- 9.1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—430 с.
- 9.2. Аркин В. И., Евстигнеев И. В. Вероятностные модели управления и экономической динамики.—М.: Наука, 1979.—176 с.
- 9.3. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов.—ДАН СССР, 1956, т. 110, № 1, с. 7—10.
- 9.4. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1966.—308 с.
- 9.5. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.
- 9.6. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем.—Минск: БГУ, 1973.—248 с.
- 9.7. Гродзowski Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой.—М.: Наука, 1956.—680 с.
- 9.8. Даниэл Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения.—М.: Прогресс, 1966.—600 с.
- 9.9. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс.—М.: Наука, 1972.—368 с.
- 9.10. Колдовский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами.—М.: Наука, 1976.—320 с.
- 9.11. Красовский Н. Н. Теория управления движением.—М.: Наука, 1968.
- 9.12. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности.—М.: Наука, 1977.—392 с.
- 9.13. Лейтман Д. Введение в теорию оптимального управления.—М.: Наука, 1968.—192 с.
- 9.14. Лэддон Л. Оптимизация больших систем.—М.: Наука, 1975.—432 с.
- 9.15. Монсеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.—М.: Наука, 1971.—424 с.
- 9.16. Первозванский А. А. О минимуме максимального отклонения управляемой линейной системы.—Известия АН СССР, Механика, 1965, № 2.
- 9.17. Первозванский А. А. Поиск.—М.: Наука, 1970.—264 с.
- 9.18. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.—М.: Наука, 1983.—384 с.
- 9.19. Розенэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем.—Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10—12.
- 9.20. Суханов А. А. Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач.—ЖВМ и МФ, 1983, № 1, с. 228—231.

- 9.21. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.—М.: Наука, 1978.—488 с.  
См. также [3.3, 6.3].

## К ГЛАВЕ 10

- 10.1. Аоки М. Оптимизация стохастических систем.—М.: Наука, 1971.  
Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.—М.: Наука, 1964.—457 с.  
10.3. Гайцгори В. Г., Первозванский А. А. Асимптотические свойства управлений, оптимальных в среднем.—В кн.: Математические методы оптимального управления и обработки данных.—Рязань: РРТИ, 1983.  
10.4. Колесов Г. Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях.—М.: Наука, 1984.—256 с.  
10.5. Рей У. Методы управления технологическими процессами.—М.: Мир, 1983.—368 с.  
10.6. Флеминг У., Ришель Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.—М.: Мир, 1978.—322 с.  
10.7. Черноуско Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром.—Прикладная математика и механика, 1968, т. 32, вып. 1, с. 15—26.  
10.8. Черноуско Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. И. Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980.—384 с.  
10.9. Черноуско Ф. Л., Колмаковский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях.—М.: Наука, 1978.—352 с.  
10.10. Gilbert E. Optimal periodic control.—SIAM J. on Control and Opt., 1977, v. 15, № 5.  
См. также [3.3, 6.6, 7.2, 9.2, 9.12, 9.18].

## К ГЛАВЕ 11

- 11.1. Адаптивная оптика/Под ред. Э. А. Ветриченко.—М.: Мир, 1980.—456 с.  
Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией.—М.: Наука, 1964.—360 с.  
11.3. Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления.—М.: Наука, 1981.—216 с.  
11.4. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой.—М.: Наука, 1967.—336 с.  
11.4d. Захаров М. Г., Кульчицкий О. Ю., Первозванский А. А. Экономный алгоритм адаптивного управления многомерным статическим объектом.—Автоматика и телемеханика, № 9, 1982, с. 70—76.  
11.5. Катковник В. Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации.—М.: Наука, 1976.—488 с.  
11.6. Катковник В. Я., Хейсин В. Е. Динамическая стохастическая аппроксимация полиномиальных дрейфов.—Автоматика и телемеханика, 1979, № 5, с. 89—98.  
11.7. Кульчицкий О. Ю. Алгоритмы типа стохастической аппроксимации в контуре адаптации дискретной стохастической линейной динамической модели.—Автоматика и телемеханика, 1983, № 9 (ч. I); 1984, № 3 (ч. II).  
11.8. Кухтенко В. И. Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик.—М.: Машиностроение, 1970.—232 с.  
11.9. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление.—М.: Наука, 1966.—176 с.  
11.10. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории наблюдений.—М.: Физматгиз, 1962.—352 с.  
11.11. Любинский Б. С., Фрадков А. Л. Адаптивное управление пелинейными статическими объектами с неявно заданной характеристикой.—Автоматика и телемеханика, 1983, № 4, с. 126—136.  
11.12. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей процессов производства.—М.: Энергия, 1975.—376 с.

- 11.13. Растрогин Л. А. Системы экстремального управления.—М.: Наука, 1974.—632 с.  
11.14. Уткин В. М. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.—М.: Наука, 1981.—368 с.  
11.15. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента.—М.: Наука, 1971.—312 с.  
11.16. Фельдбаум А. А. Теория дуального управления, I—IV.—Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 9, 11; 1961, т. 22, № 1, 3.  
11.17. Хубер Д. П. Робастность в статистике.—М.: Мир, 1984.—304 с.  
11.18. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах.—М.: Наука, 1968.—399 с.  
11.19. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации.—М.: Наука, 1984.—323 с.  
11.19д. Цыпкин Я. З., Позняк А. С. Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности.—В кн.: Итоги науки и техники, сер. «Техническая кибернетика».—М.: ВИНИТИ, 1983, т. 16, с. 3—70.  
11.20. Эйхофф П. Основы идентификации систем управления.—М.: Мир, 1975.—682 с.  
11.21. Åström K. J., Söderström T. Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of an ARMA Model.—IEEE Trans., 1974, v. AC-19, No. 6, p. 763—773.  
11.22. Goodwin G. C., Ramadge P. J., Caines P. E. Discrete-Time Multivariable Adaptive Control.—IEEE Trans., 1980, v. AC-25, No. 3, p. 449—456.  
11.23. Goodwin G. C., Sin K. S., Saluja K. K. Stochastic Adaptive Control and Prediction.—The general delay-coloured noise case.—IEEE Trans. on AC, 1980, v. AC-25, No. 5, p. 946—950.  
11.24. Goodwin G. C., Sin K. S. Stochastic Adaptive Control using modified least squares algorithm.—Automatica, 1982, v. 18, No. 3, p. 313—321.  
11.25. Goodwin G. C., Payne R. L. Dynamic system identification experiment design and data analysis.—Newcastle: Univ. of Newcastle, 1977.  
11.26. Kiefer J., Wolfowitz J. Stochastic estimation of the maximum of a regression function.—Ann. Math. Stat., 1952, v. 23, No. 3, p. 462—466.  
11.27. Landau L. D. A survey of model reference adaptive techniques.—Theory and Applications.—Automatica, 1974, v. 10, p. 353—379.  
11.28. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method.—Ann. Math. Stat., 1951, v. 22, No. 3, p. 400—407.  
11.29. Ljung L., Söderström T. Theory and practice of recursive identification.—Cambr., Mass.: MIT Press, 1983.—529 p.  
11.30. Adaptive control.—IEEE Proc. on A. C., 1976, v. 64, No. 8, p. 3—142.  
См. также [4.3, 4.5, 5.9, 7.2, 9.17, 9.18].

## К ПРИЛОЖЕНИЮ

- П.1. Беллман Р. Введение в теорию матриц.—М.: Наука, 1969.—367 с.  
П.2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Гостехиздат, 1953.—492 с.  
П.3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.—М.: Высшая школа, 1966.—405 с.  
П.4. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления/Под ред. Р. А. Нелепина.—М.: Наука, 1975.—448 с.  
П.5. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики.—М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.—432 с.  
П.6. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем.—М.: Наука, 1979.—208 с.  
П.7. Kleinman D. L. On an iterative technique for Riccati equation computation.—IEEE Trans on AC, 1968, v. 13, No. 1, p. 114—115.  
П.8. Man F. T., Smith H. W. Design of linear regulators optimal for time multiplied performance indices.—IEEE Trans on AC, 1969, v. 14, No. 5.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**АВМ** 13, 122, 192, 328, 531  
Автоколебания 217 и д. 387  
— обобщенные 404

**Аддитивность** 556, 579  
**Айзermann'a гипотеза** 209

— диаграмма 222, 223

**Алгоритм** 10, 95  
— адаптивный 549  
— Евклида 78  
— Кифера — Вольфовича 552  
— Рауса 44

— Робинсона — Монро 552  
— самонастройки 570  
— синтез законов управления 95

— стабилизации 77 и д. 80

**Амплитуда** реакции 50

**Анализ корреляционный** 545

**Ансамбль реализаций** 140

**Аппроксимация стохастическая** 558

**Астатизм** 97, 166

**АЦП** 13

**Базис внутреннего описания** 260

**Баланс гармонический** 219

**Баттерворт многочлен** 102, 165, 290

**Бельмана уравнение** 489

**Блок измерительный** (датчиков информации, ДИ) 10

— преобразования и хранения информации (ПИ) 10, 12, 14

**Боде диаграмма** 109

**Быстродействие оптимальное** 409

**Бьюси — Калмана фильтр** 327, 519, 562

**Вандермонда определитель** 263

**Вариация игольчатая (импульсная)** 432

**Вектор полной текущей информации** 482

— собственные 593

**Величина случайная** 140

**Винера теорема** 152

**Воздействие входное** 19

— изменяющееся с постоянной скоростью 51

— отрабатываемое 85

— полиномиальное 50

— постоянное 51

— случайное 140 и д.

**Возмущение достаточно разнообразное** 534

— нелинейное 201

— сингулярное 379

— случайное 292 и д.

**Восстановливаемость** 273

**Вход полный векторный** 263

— скалярный 262

— выражение 380

**Выход внешний** 33

**Выход полный векторный** 263  
— скалярный 262

**Вычислитель аналоговый** см. АВМ

**Гамильттона — Кэли** теорема 261, 593

**Гамильтониан** 419

**Гелига критерий** 213

**Гидротурбина** 181 и д.

**Гипотеза Айзermann'a** 209

— квазистатичности для непрерывных систем 505

— Лагранжа 414

— малости отклонений от программы 502

— слабой динамичности 491

— нелинейности 499

— управляемости 494

**Годограф частотной характеристики** 50

— модифицированный 210

**Гольдфарба** диаграмма 222, 223, 229

**Граф** 27

— геометризованный 54

— ориентированный 54

**Грубость** 123

**Гурвица критерий** 597

— неравенство 45, 62

**Гурвицева матрица** 371, 507

**Датчик** 10

— давления 12

— идеальный 12

— неидеальный 12

— относительного перемещения 11

— рассогласования 139

— температуры 12

— угловой скорости 12

**Двигатель гидравлический** 14

— пневматический 14

**Дельта-функция** 25

**Детектирование синхронное** 547, 548

**Децибел** 109

**Диагонализация** 261

**Диаграмма Айзermann'a** 222

— Боде 109

— Гольдфарба 222, 229

**Динамичность** 569

— слабая 491

**Дискретизация** грубая 200

**Дисперсия** 141

— ошибки 168, 194

**Добротность** системы 98

**Достижение заданной скорости, оптимизация** 449

**Дуальность** 579

**Евклида алгоритм** 78

**Задача выпуклого программирования** 417

— линейного программирования 465

— линейно-квадратическая 515

— линейно-квадратично-гауссова 523

— математического программирования

464

— о наименьшем уклонении 476

— о полете на максимальную дальность

496

— об оптимальном быстродействии 409

— общая математической теории оптимального управления 408

— оптимального слежения 302

— оптимальной стабилизации 287

— оптимизация со свободным правым концом траектории 410, 424 и д.

— регулирования 70

— слежения 70

— стохастической аппроксимации 558

— Пермало навигационная 453

**Зазор** см. Люфт

**Закон распределения нормальный (гауссов)** 150

— управления 10

— адаптивный 579

— оптимальный 155

— пропорционально-дифференциальный 78

— пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-закон) 78

— реализация 121 и д.

— самонастраивающийся 569

— синтез в ЭСС 137

**Запас устойчивости по амплитуде (модулю)** 124

— по фазе (аргументу) 124

**Звено апериодическое** 24, 25, 43

— безынерционное 368

— «висящее» 262, 267, 363

— колебательное 43

— неустойчивое по входу 40

— типовое 24, 25

— устойчивое по входу 40

— по начальным условиям 46

**Золотник** 192, 203

**Зона нечувствительности** 198, 226

**Идентификация объектов управления,** 532, 571  
— динамических 542

— линейных 542

— статических 542

**Изменение базиса внутреннего описания** 260

**Измерение неполное и неточное** 299, 517 и д.

**Импульс** 25

— одиночный 546

**Инвариантность** 87—90

**Инерционность** датчика 12

**Интегратор** 24, 39, 43

**Интегрирование** в смысле Римана 142

— численное 359

**Интенсивность белого шума** 171

**Калмана теорема структурная** 264

**Качество** 97

— процесса стабилизации 284

**Качмажа метод** 559

**Кифера — Вольфовича алгоритм** 552

**Ковариация** 293

**Компенсация динамическая** 91 и д.

**Компенсация линейная последовательная** 245

— нелинейная 247

**Контур внутренний обратной связи** 87

**Коэффициент гармонической линеаризации** 249

— усиления большой 108

— статический 108

— чувствительности показателя качества 161

— функционала по параметру 474

**Критерий оптимальности квадратичный** 338

— минимаксный 475

— устойчивости гармонического баланса

229

— Гелига 213

— Гурвица 597

— Ляпунова матричный 367

— Найквиста обобщенный 63, 65, 124, 229

— по входу 43

— по начальным условиям 46

— Попова В. М. 207, 376

— достаточность 298

— Стололы 43

— Ко-Нарендры 211

**Кругизна средняя характеристики нелинейного элемента** 236

**Куна — Таккера условия** 416

**Лагранжа гипотеза** 414

— множители 413

**Лагранжиан** 413

**Лапласа преобразование** 22, 583

— дискретное 344, 586

— обратное 584

**Лемма Ляпунова** 367

— о факторизации 101

— спектральная плотность 146

— о преобразовании к форме Фробениуса — Калмана 274

— Розонэра о приращении функционала 429

— Шура 592

— Икубовича — Калмана 376, 593

**Линеаризация** 183, 200, 368, 471

**Гармоническая** 219, 230

— статистическая 230, 245

**Линейность кусочной** 197

**Лурье уравнение** 287, 299, 308, 370

**ЛФХ** 109

— асимптотическая 115

**Люфт** 198, 225

**Ляпунова лемма** 367

— функция 364 и д.

**Ляпунова — Пуанкаре теорема об устойчивости** по первому приближению 303

**Марковость описания объекта** 482, 511

**Математическое ожидание** 149

**Матрица блочная** 592

— блочно-диагональная 592

— блочно-треугольная 592

— в форме Фробениуса 251

— весовая (переводная) 306

— гурвицева (устойчивая) 371, 597

— диагональная 588

— инцидентный звеньев 234

— квадратная 587

— ковариантный векторного случайного

процесса 293

— ошибок оценивания 300

- Матрица неособая 591, 593  
 — неотрицательно-определенная 597  
 — обратная 591  
 — положительно-определенная 597  
 — присоединенная (связанная) 591  
 — симметричная 591  
 — транспонированная 591  
 — фундаментальная 305  
 — эрмитова 598  
**Матрица-столбец** 587  
**Матрица-строка** 587  
**Машинка вычислительная аналоговая** см. АВМ  
 — цифровая см. ЭВМ  
**Маятник**, приведение в равновесие 336  
**Мембрana измерительная** 12  
**Метод асимптотический малого параметра** 377  
 — Галеркина 395  
 — гармонического баланса 397  
 — градиентный 464  
 — динамического программирования 484  
 — динамической компенсации 91  
 — «замороженных» параметров 309, 571  
 — интегральных уравнений 397  
 — Качмажка 559  
 — компенсации 350  
 — Ляпунова второй (метод функций Ляпунова) 363  
 — максимума правдоподобия (ММП) 538, 545, 562  
 — медленно меняющихся амплитуд 235  
 — множителей Лагранжа 157, 413  
 — наименьших квадратов (МНК) 523, 537, 544, 562  
 — ньютоновский 464  
 — операторно-структурный 250  
 — операторный в теории дискретных и импульсных систем 342 и д.  
 — пространства состояний в линейной теории 250  
 — Пуанкаре 387  
 — статистической линеаризации 238  
 — штрафных коэффициентов 465  
**Многочлен Баттерворта** 102, 165, 290  
 — характеристический 33, 258, 593  
 — устойчивый 47  
**Множество выпуклое** 417  
 — состояний равновесия, поточно асимптотически устойчивое в целом 363  
**Множители Лагранжа** 413  
**Мода** 261  
**Модель дискретная линейная** 316  
 — приближенная 332  
 — точная непрерывного объекта 231  
 — математическая 18, 532 и д.  
 — недетерминированная 536  
 — электронная 39  
 — эталонная 578  
**Модулятор** 329
- Набег фазы** 395  
**Наблюдаемость** 273  
**Найквиста критерий** 125, 229  
 — обобщенный 63, 65, 124, 229  
**Наклон ЛАХ** 109  
**Настройка автоматическая** 569  
**Нелинейность** 196 и д.  
**Нелинейность безынерционная** 201, 368  
 — разрывная кусочно линейная 31  
 — слабая 499  
**Неравенство Гурвица** 45, 62  
**Нестационарность оптимальной обратной связи** 308

- Нормировка типа Гудвина** 560  
 — — Качмажка 560
- Область притяжения решения** 361  
**Обучение** 580  
**Объект дискретный** 457  
 — — слабодинамичный 491  
 — — линейный по управлению и по параметрам 563  
 — — неустойчивый и неминимально-фазовый 176 и д.  
**Ограничность управления** 72  
**Оператор дифференцирования** 20  
 — звено 22  
**Описание в нормальной форме** 250, 251, 254  
**Определитель Вандермонда** 263  
**Оптимальность в среднем** 510, 549  
**Оптимизация** 417 и д., 482  
 — локальная 463  
 — — градиентного типа 464  
 — — пьютоновского типа 464  
 — по быстродействию 445  
 — по гарантированному результату 510  
 — по квадратичному критерию 338  
 — приближенная численная 461  
 — стабилизирующей обратной связи 284  
 — численная непрерывных систем 471 и д.  
**Оценивание** 532  
**Оценка наилучшего состояния системы** 517  
**Ошибка слежения** 70
- Параметры «замороженные»** 310, 571  
 — модели в методе пространства состояний 250  
**ПД-закон** 79  
**Переменные «быстрые»** 379  
 — — «медленные» 382  
 — состояния 250  
 — фазовые 256  
**Перерегулирование** 105  
**Период квантования** по времени (переводов импульсов) 329  
**ПИД-закон** 78, 194  
**Плотность спектральная** 141  
 — — дискретная 347  
 — — дробно-рациональная 148  
**Погрешности датчиков** 139  
**Поломатрица** 592  
**Показатель качества** 160  
 — — грубый 161  
 — — интегральный (энергетический) 286  
 — — нечувствительный, инвариантный «в малом» 161  
 — — сводный 510  
**Помехи** 89, 90, 139, 140 и д., 536  
 — в измерительных устройствах 301  
**Понтрягина принцип максимума** 420  
**Попова В. М. критерий** 207, 208  
**Порядок управления** звена 19  
**Последовательность дискретная** 317  
**Постоянная времени** 113, 185  
**Потенциометр измерительный** 11  
**Потеря устойчивости** медленная 237  
**Правило 30** 151  
**Представление спектральное матричной экспоненты** 261  
**Преобразование «вход-выход»** 19  
 — — Лапласа 22, 71, 583, 586  
 — — дискретное 344  
 — — обратное 584  
 — — случайных процессов линейное 141

- Преобразование Фурье** 141  
 — — быстрое 548  
 — — синхронное 548  
**Преобразователь «аналог — код»** 200  
 — «аналог — цифра» (АЦП) 13  
 — дифференцирующий 66  
 — «инфра — аналог» 13  
**Принцип автоматической настройки** 569  
 — максимума дискретный 460  
 — — достаточность в выпуклых задачах 422  
 — — необходимость 418  
 — — Понтрягина 420  
 — — суперпозиции 33  
**Проблема линейно-квадратичная оптимального управления** 287  
 — — оценивания 532  
 — — размещения собственных чисел 274  
**Проводимость операторная** 66  
 — — в цепи обратной связи 66  
**Программа управления** 10—11, 71  
**Программирование** выпуклое 417  
 — динамическое 484, 511  
 — линейное 405  
 — математическое 464  
**Пространство состояний** 251  
**Процедура см. Алгоритм**  
 — — оценивания рекуррентная 558  
**Процесс случайный** 140  
 — — нормальный 150, 240  
 — — стационарный 141, 239  
 — — типа «кенгуру» 144  
**Пуанкаре теорема** 377
- Равновесие** 205  
**Размещение собственных чисел** 274  
**Ранг матрицы** 593  
**Распределение вероятностей** 149  
 — — гауссово 150  
**Расы алгоритм** 44  
**Реакция звена** 29, 48, 52  
 — — системы 231, 259, 341  
 — — установившаяся 259, 346  
**Реализация случайной величины** 140  
**Реализуемость** строгая передаточной функции 43, 348  
**Регулирование** 70  
 — — угловой скорости вала турбины 181 и д.  
 — — экстремальное 550, 555  
**Режим скользящий** 212, 507  
**Реле** 199, 212  
**Риккати уравнение алгебраическое** 287, 309  
 — — матричное 308, 384, 438  
**Решение неустойчивое по начальным условиям** 361  
 — — обобщенное автоколебательное 404  
 — — периодическое 386 и д.  
 — — устойчивое асимптотически 361  
 — — — по начальным условиям 361  
**Роббинса — Монро алгоритм** 552  
**Робот промышленный** 16  
**Розенброка лемма о приращении функционала** 429  
**Ряд Фурье** 398
- Самонастройка** 531, 569  
**Свертывание** системы в одно звено 35  
**Свойства структурные** дискретной линейной системы 319  
**Связь обратная** 11
- Связь обратная в дискретной системе** 320  
 — — — внутренняя 86, 93  
 — — — в электромашинной следящей системе 134  
 — — заданная алгоритмически 491  
 — — импульсная 333  
 — — нелинейная 248  
 — — оптимальная 481  
 — — отрицательная 57  
 — — — и его производным 75  
 — — — по ошибке управления 152  
**«Сглаживание»** волны нечувствительности вибрационное 247  
**Сдвиг по фазе** реакции относительно воздействия 50  
**Сервомеханизм** 193, 203  
**Сигнал информационный** 10  
 — — приведенный 85  
 — — управления 10  
**Симплекс-метод** 473  
**Сингулярность** 162, 379  
**Синтез закона управления** 95, 137 и д.  
 — — оптимальный обратной связи 482  
**Система автоматического управления** (САУ) 15  
 — аддитивная 579  
 — асимптотической оценки 280  
 — астатическая 97, 106  
 — — с большим коэффициентом усиления 106  
 — вполне наблюдаемая 273, 319  
 — управляемая 269  
 — вырожденная 380  
 — грубая 123  
 — — дискретная 316 и д.  
 — — — устойчивая и внешним возмущением 318  
 — — — по начальным условиям 318  
 — замкнутая (с обратной связью) 10 (см. также Связь обратная)  
 — импульсная 328  
 — линейная 230  
 — инвариантная 70  
 — линейная 19 и д., 387  
 — многосвязная 263  
 — нелинейная 196 и д., 359 и д.  
 — непрерывная кусочно линейная 389  
 — разомкнутая 10  
 — релейная 200  
 — с медленно меняющимися параметрами 309, 382  
 — с переменными параметрами 304  
 — с типовой структурой 52 и д.  
 — сингулярно возмущенная 379  
 — сходящаяся в окрестность равновесия (диссиликтивная) 363  
 — устойчивая по отношению к внешним воздействиям 362  
 — — по начальным условиям 47, 362  
 — — электромеханическая 28, 255  
 — — следящая (ЭСС) 15, 60, 85, 128 и д., 137  
**Скаляр** 587  
**Синхронность импульса** 329  
**Слежение** 70  
 — — оптимальное 402  
**Соединение звеньев** параллельное 54  
 — — последовательное 53  
**Сопротивление цепи** операторное 55, 66  
**Состояние равновесия** 205, 360  
**Средства автоматики** технические 11  
**Стабилизация** 74 и д., 278, 280  
 — — импульсной обратной связью 333  
 — — линейного объекта 571  
 — — оптимальная 287  
**Статистика достаточная** 525  
**Степень устойчивости** 163, 291

- Степень устойчивости бесконечная 336  
 Стололы критерий устойчивости 43  
 Структура системы управления 19  
 — типовая 52 и д.  
 Схема структурная 27, 30
- Тахогенератор 12  
 Теорема Винера 152  
 — Гамильтона — Кали 264, 593  
 — Калмана структурная 285  
 — Ляпунова — Пуанкаре об устойчивости по линейной приближению 368  
 — о методе наименьших квадратов 537  
 — о разрешающих уравнениях Лурье 370  
 — о свертке 23  
 — о системе асимптотической оценки 280  
 — Пуанкаре 377  
 — разделение 301, 327, 525  
 — Тихонова — Васильевой 380  
 — Фельдбайма 28  
 — Чебышева 151  
 — Четаева 365  
 Теория возмущений 376 и д.  
 — матриц, сирваковые сведения 587  
 — нелинейная 196 и д.  
 Термопара 12  
 Тест-сигнал 547  
 Торможение скорейшее в заданном положении 455  
 Точка с переменной массой 449  
 Точность регулирования 194  
 Транспонирование матрицы 590  
 Трение сухое 198
- Удар гидравлический 188  
 Управление адаптивное статическим объектом 548  
 — динамическим объектом 569  
 — формой поверхности астрономического зеркала 568  
 — в скользящем режиме 507  
 — движением механических объектов 9, 449 и д.  
 — запасом при неопределенном спросе 512  
 — импульсное непрерывными объектами 328 и д. 338, 342  
 — комбинированное 87  
 — оптимальное по гарантированному результату 510  
 — по ожидаемому результату (оптимальное в среднем) 510  
 — по возмущению 83  
 — по оценкам 314  
 — полетом реактивного космического аппарата 440  
 — при случайных возмущениях 140 и д. 292, 509, 566, 574  
 — релейного типа 428  
 — с обратной связью внутренней 86, 93  
 — — — по ошибке 16, 84  
 — субоптимальное (приближенно оптимальное) 490  
 — теплотехническими объектами 9  
 — химической и биологической технологией 10  
 — электротехническими или электронными объектами 9  
 Управляемость 269  
 — полная для дискретной системы 319  
 — слабая 494  
 Уравнение Беллмана (Беллмана — Гамильтона — Якоби) 489

- Уравнение гармонического баланса 219  
 — динамического программирования 484, 511  
 — Лурье 287, 299, 308  
 — Риккати алгебраическое 287, 309  
 — — матричное 308, 438  
 Уравнения в форме Лурье 368  
 Усилитель 20  
 — вибрационный 236  
 — идеальный 24, 43  
 — мощности (УМ) 14  
 — операционный 13, 39, 66, 125  
 — релейный 223  
 — электромеханический 28  
 Условие астатизма 97  
 — Липшица 506, 553  
 — принадлежности сектору  $[0, k]$  207  
 — причинности 330  
 — строгой реализуемости передаточной функции 43  
 — устойчивости абсолютной достаточное 208  
 — — необходимое 209  
 — — характеристического многочлена 43  
 Условия дополняющей неустойчивости 415  
 — Куна — Танкера 416  
 — Руза — Гурвица 45  
 Устойчивость 40, 361  
 — абсолютная 209  
 — асимптотическая 381  
 — — в целом 381  
 — — многочленом 43  
 — нулевого равновесного состояния в целом 207  
 — по входу 40, 258  
 — по начальным условиям 45, 206, 259, 361, 362  
 — по отношению к внешним воздействиям 362  
 Устройство вычислительное аналоговое см. АВМ  
 — цифровое см. ЭВМ  
 — дифференцирующее 125  
 — исполнительное (ИУ) 10, 14
- Факторизация 101  
 — спектральной плотности 146  
 Фельдбайма теорема 428  
 Фиксатор 230  
 Фильтр Баттервортса 49, 129, 131  
 — — низкочастотный 100  
 — Бьюси — Калмана 327, 519, 562  
 — Винера — Калмана 302  
 — идеальный низкочастотный 99  
 — формирующий 171  
 Форма квадратная 597  
 — операторная дифференциального уравнения 20  
 — положительно-определенная 597  
 Формула Коши 305  
 Функция весовая импульсная 546  
 — — матричная 258  
 — — преобразования «ход-выход» 23  
 — — выпуклая 416  
 — — единичного скачка (функция Хевисайда) 24  
 — — корреляционная 141  
 — — установившейся реакции 143  
 — Ляпунова 364 и д.  
 — — квадратичная 367  
 — передаточная допустимая замкнутого контура 176  
 — — комплексная 23  
 — — — дискретная 345  
 — — — линейной части системы 205

- Функция передаточная минимально-фазовая 113  
 — — неминимально-фазовая 113  
 — — операторная 22  
 — — — дискретная 343  
 — — — матричная 257  
 — — передачи по замкнутому контуру 85  
 — — — по разомкнутому контуру 85  
 — — — разомкнутого контура 57  
 — — типовая 119 и д.  
 — — устойчивая 46  
 — — переключения 428  
 — — переходная 24, 546  
 — — фильтра Баттервортса 105  
 — — формирующая 329  
 — — преобразование корреляционной функции 141  
 — — быстрое 548  
 — — синхронное 548
- ЭВМ 13, 16, 116, 126, 192, 200, 243, 328, 359, 365, 531, 541, 597  
 Эвристика 527  
 Эксперимент активный 534  
 — параллельный 547  
 Экспонента матричная 258, 595  
 Электродвигатель 14  
 Элемент нелинейный 201  
 — переключательный (пороговый) 199  
 Эффект краевой 381
- Икубовича — Калмана лемма 376, 598
- Шаг дискретности 324  
 Шум 89  
 — белый 171  
 — — дискретный 324, 347  
 — — нормальный 327  
 Шура лемма 592

*Анатолий Аркадьевич Первозванский*

**КУРС ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор *А. С. Позняк*  
Художественный редактор *Г. М. Коровина*  
Технический редактор *Е. В. Морозова*  
Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 10.03.86. Подписано к печати 28.10.86.  
Т-19644. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 3. Гарнитура  
обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 38,5. Усл.  
кр.-отт. 38,5. Уч.-изд. л. 40,16. Тираж 12 200 экз. Заказ  
№ 105. Цена 1 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»  
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25