Chương 3

Lê Văn Luyện
email: lvluyen@yahoo.com

TOÁN RỜI RẠC

www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/trr

Chương 3

QUAN HỆ

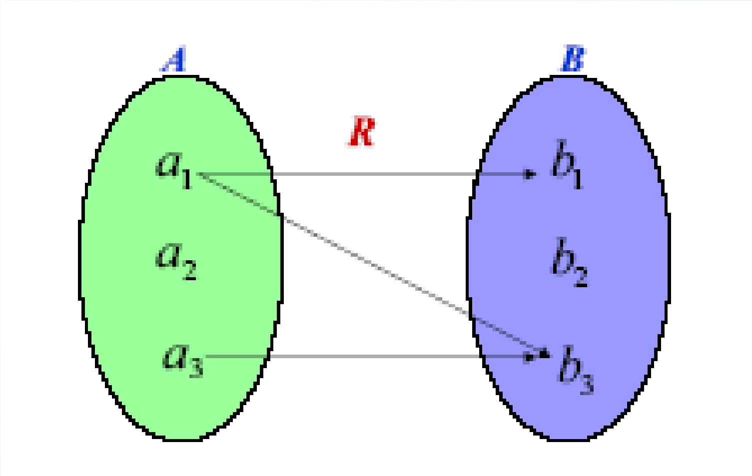
I. Quan hệ

1. Định nghĩa và tính chất
2. Biểu diễn quan hệ
3. Quan hệ tương đương. Đồng dư
4. Quan hệ thứ tự, biểu đồ Hass

1. Định nghĩa

Một *quan hệ hai ngôi* từ tập A đến tập B là tập con của tích Đề các $R \subseteq A \times B$. Chúng ta sẽ viết $a\ R\ b$ thay cho $(a, b) \in R$.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A

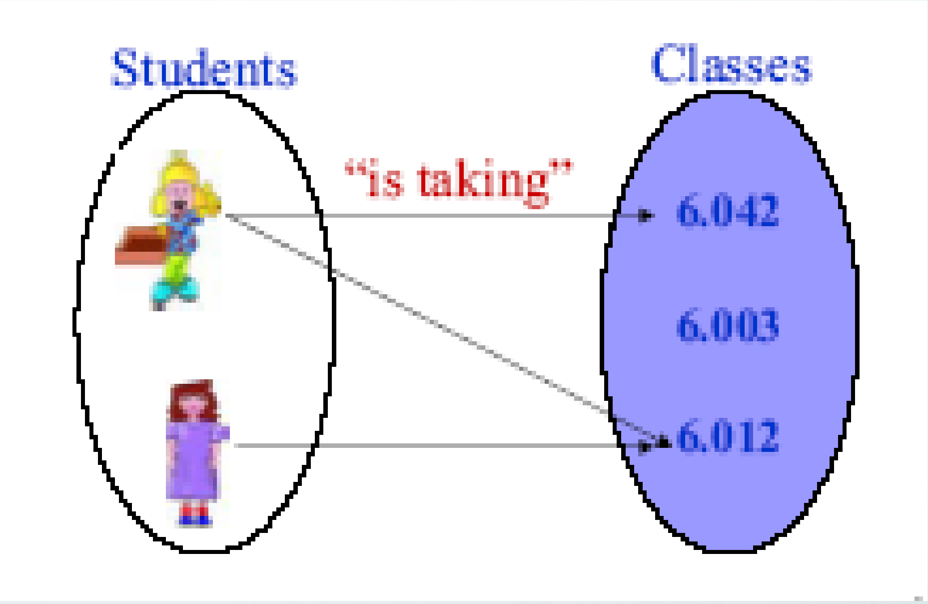


$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

1. Định nghĩa

Ví dụ. ***A* = tập sinh viên; *B* = các lớp học.**

$R = \{(a, b) \mid$ sinh viên a học lớp $b\}$



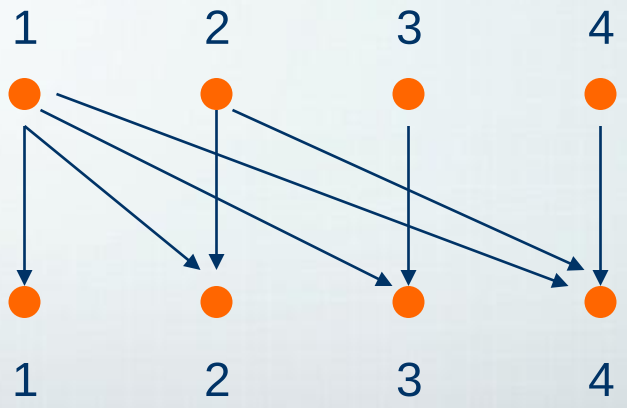
1. Định nghĩa

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là ***phản xạ*** nếu:

$$\forall a \in A,\ a\ R\ a$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

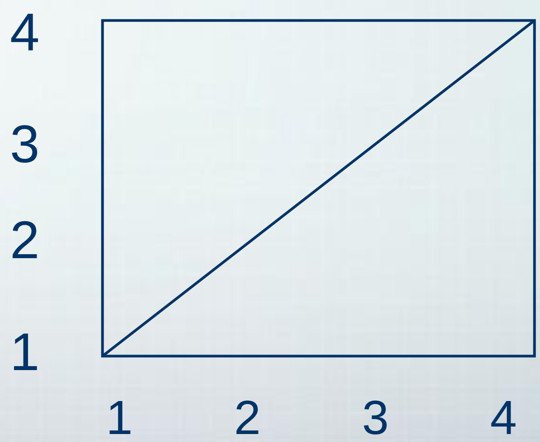
- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R_1$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$

- Quan hệ $\leq$ trên Z phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in Z$
- Quan hệ $>$ trên Z không phản xạ vì $1 \not> 1$

- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên Z^+ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó .

Chú ý. Quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a);\ a \in A\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là ***đối xứng*** nếu:

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \rightarrow (b\ R\ a)$$

Quan hệ R được gọi là ***phản xứng*** nếu

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ a) \rightarrow (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ $\leq$ trên **Z** không đối xứng.

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$$

2. Các tính chất của Quan hệ

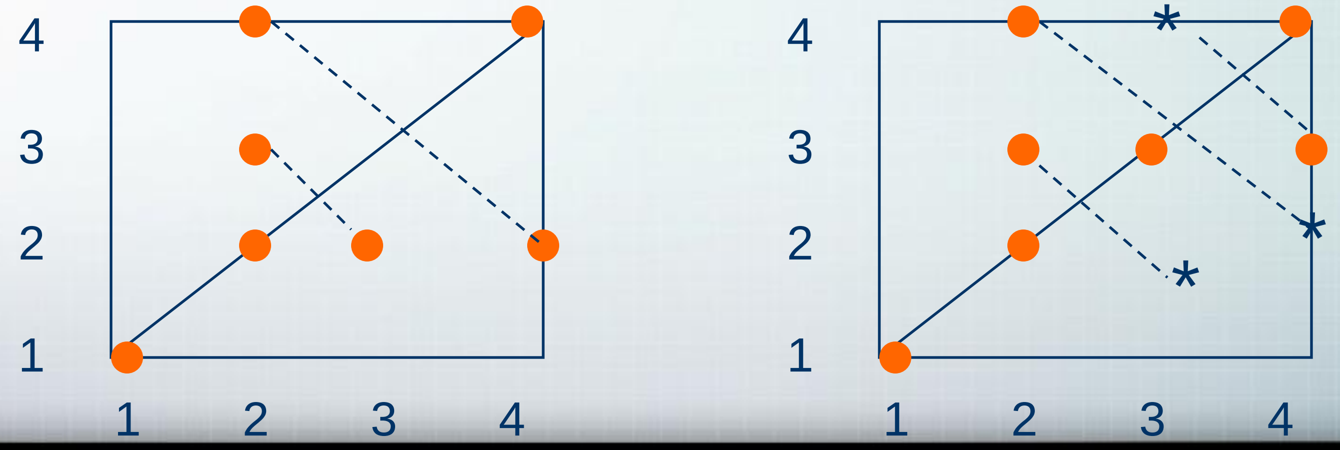
- Quan hệ" | " ("ước số") trên $\boldsymbol{Z}^{+}$. không đối xứng

Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b)$$

Chú ý. Quan hệ *R* trên *A* là đối xứng nếu nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của $A \times A$.

Quan hệ *R* là phản xứng nếu chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của $A \times A$.



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ *R* trên *A* có tính ***bắc cầu*** *(truyền)* nếu

$$\forall a, b, c \in A, (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c) \to (a\ R\ c)$$

Ví dụ.

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Quan hệ ≤ và "|" trên *Z* có tính bắc cầu

$$(a \le b) \wedge (b \le c) \to (a \le c)$$

$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \to (a \mid c)$$

3. Biểu diễn Quan hệ

Giới thiệu

Ma trận

Biểu diễn Quan hệ

Định nghĩa

Cho R là quan hệ từ $A = \{1,2,3,4\}$ đến $B = \{u,v,w\}$:

$$R = \{(1,u),(1,v),(2,w),(3,w),(4,u)\}.$$

Khi đó R có thể biểu diễn như sau

$$\begin{array}{c|ccc} & u & v & w \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm.

Đây là ma trận cấp 4×3 biểu diễn cho quan hệ R

Biểu diễn Quan hệ

Định nghĩa. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của R là ma trận cấp $m \times n$ $M_R = [m_{ij}]$ xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

Ví dụ. Nếu R là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$ sao cho $a\ R\ b$ nếu $a > b$. Khi đó ma trận biểu diễn của R là

	1	2
1	**0**	**0**
2	**1**	**0**
3	**1**	**1**

Biểu diễn Quan hệ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi matrận

$$\mathbf{M}_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

Khi đó R gồm các cặp:

$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

Biểu diễn Quan hệ

- Cho *R* là quan hệ trên tập *A*, khi đó M_R là *ma trận vuông.*
- *R* là *phản xạ* nếu tất cả các phần tử trên *đường chéo* của M_R đều bằng1: m_{ii} = 1 với mọi *i*

	u	v	w
u	1	1	0
v	0	1	1
w	0	0	1

Biểu diễn Quan hệ

R* là đối xứng nếu M_R là *đối xứng

$$m_{ij} = m_{ji} \qquad \text{for all } i, j$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	1
w	1	1	0

Biểu diễn Quan hệ

R là *phản xứng* nếu M_R thỏa:

$$m_{ij} = 0 \text{ or } m_{ji} = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	0
w	0	1	1

3. Quan hệ tương đương

Giới thiệu

Quan hệ tương đương

Biểu diễn số nguyên

Lớp tương đương

Định nghĩa

Ví dụ.

Cho S = {sinh viên của lớp}, gọi

R = {(a,b): a có cùng họ với b}

Hỏi

***R* phản xạ?** Yes

***R* đối xứng?** Yes

***R* bắc cầu?** Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

3. Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là ***tương đương*** nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu :

Ví dụ. Quan hệ R trên các chuỗi ký tự xác định bởi aRb nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên **R** sao cho aRb nếu $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương

3. Quan hệ tương đương

Cho a và b là hai số nguyên. A được gọi là ước của b hay b chia hết cho nếu tồn tại số nguyên k sao ***a = kb***

Ví dụ. Cho m là số nguyên dương **và** *R* quan hệ trên **Z** sao cho *aRb* nếu $a – b$ chia hết *m*, khi đó *R* là quan hệ tương đương.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho *a*, *b*, *c* sao cho $a – b$ và $b – c$ chia hết cho *m*, khi đó $a – c = a – b + b – c$ cũng chia hết cho *m*. Suy ra *R* có tính chất bắc cầu.
- Quan hệ này được gọi là ***đồng dư modulo m*** và chúng ta viết

$$a \equiv b \pmod{m}$$

thay vì *aRb*

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. ***Lớp tương đương chứa a*** được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A \mid b\, R\, a\}$$

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots \}$$

Tương tự

$$[1]_8 = \{a \mid a \text{ chia 8 dư 1}\}$$
$$= \{ \ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots \}$$

Lớp tương đương

Chú ý. Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Tổng quát, chúng ta có

Định lý. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A và a, $b \in A$, Khi đó

(i) $a\ R\ b$ nếu $[a]_R = [b]_R$

(ii) $[a]_R \neq [b]_R$ nếu $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

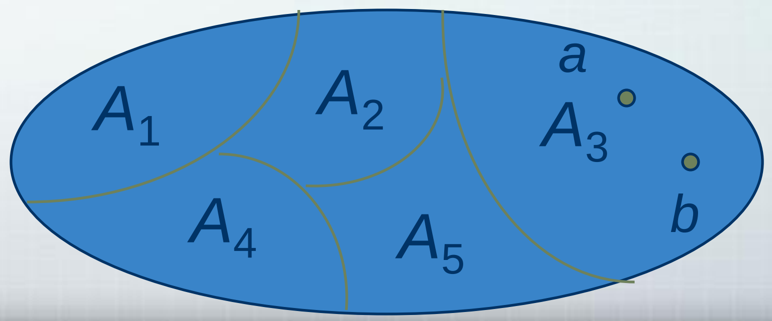
Chú ý. Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân họach trên A, nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Lớp tương đương

Chú ý. Cho $\{A_1, A_2, \ldots\}$ là phân họach A thành các tập con không rỗng, rời nhau . Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy với mỗi $a, b \in A$, ta đặt $a\ R\ b$ nếu có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.

Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ nếu $a \in A_i$



Ví dụ. Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của **Z** thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \ldots$$

$$[1]_m = [m+1]_m = [2m+1]_m = \ldots$$

……………………………………

$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \ldots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là ***số nguyên modulo m***

.Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi $\mathbf{Z}_m$

$$\mathbf{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}$$

4. Quan hệ thứ tự. Biểu đồ Hasse

Giới thiệu

Thứ tự từ điển

Biểu đồ Hasse

Phần tử tối tiểu, tối đại

Chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất

Sắp xếp topo

Định nghĩa

Ví dụ. Cho *R* là quan hệ trên tập số thực:

$$a\ R\ b \ \text{ nếu } \ a \le b$$

Hỏi:

- *R* phản xạ không? Có
- *R* đối xứng không? Không
- *R* phản xứng không? Có
- *R* bắc cầu không? Có

Định nghĩa

Định nghĩa. Quan hệ *R* trên tập *A* là ***quan hệ thứ tự*** *(thứ tự)* nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi $\prec$

Cặp $(A, \prec)$ được gọi là *tập sắp thứ tự* hay *poset*

Phản xạ: $a \prec a$

Phản xứng: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \rightarrow (a = b)$

Bắc cầu: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \rightarrow (a \prec c)$

Định nghĩa

Ví dụ. Quan hệ ước số " | "trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là $(\mathbf{Z}^+, |)$ là poset

Phản xạ?

Có, $x \mid x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu?

Có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid c$ nghĩa là $c = jb$.
Khi đó $c = j(ka) = jka$: $a \mid c$

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.
Khi đó $a = jka$
Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

Ví dụ. (**Z**, |) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

3|-3, và -3|3,

nhưng $3 \neq -3$.

$(P(S), \subseteq)$, ở đây P(S) là tập hợp các con của S, là một poset?

Có, là poset.

Phản xạ?

Có, $A \subseteq A$, $\forall A \in P(S)$

Bắc cầu?

Có

$A \subseteq B$, $B \subseteq C$. Suy ra $A \subseteq C$?

Phản xứng?

Có

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Suy ra $A = B$?

Định nghĩa

Định nghĩa. Các phần tử *a và b* của poset $(S, \prec)$ gọi là *so sánh được nếu* $a \prec b$ hay $b \prec a$.

Trái lại thì ta nói *a* và *b* *không so sánh được*.

Cho $(S, \prec)$, nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là *tập sắp thứ tự toàn phần.*

Ta cũng nói rằng $\prec$ là *thứ tự toàn phần hay thứ tư tuyến tính* trên *S*

Ví dụ

Ví dụ. Quan hệ “$\leq$ ” trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Ví dụ. Quan hệ ước số “ | ”trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

Thứ tự tự điển

Ví dụ. Trên tập các chuỗi bit có độ dài n ta có thể định nghĩa thứ tự như sau:

$$a_1a_2\ldots a_n \le b_1b_2\ldots b_n$$

nếu $a_i \le b_i$, $\forall\, i$.

Với thứ tự này thì các chuỗi 0110 và 1000 là không so sánh được với nhau. Chúng ta không thể nói chuỗi nào lớn hơn.

Trong tin học chúng ta thường sử dụng thứ tự toàn phần trên các chuỗi bit .

Đó là thứ tự tự điển.

Thứ tự tự điển

Cho $(A, \leq)$ và $(B, \leq')$ là hai tập sắp thứ tự toàn phần. Ta định nghĩa thứ tự $\prec$ trên $A \times B$ như sau :

$$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \text{ nếu}$$
$$a_1 < a_2 \text{ hay } (a_1 = a_2 \text{ và } b_1 <' b_2)$$

Dễ dàng thấy rằng đây là thứ tự toàn phần trên $A \times B$. Ta gọi nó là **thứ tự tự điển** .

Chú ý rằng nếu A và B được sắp tốt bởi $\leq$ và $\leq'$,tương ứng thì $A \times B$ cũng được sắp tốt bởi thứ tự $\prec$

Chúng ta cũng có thể mở rộng định nghĩa trên cho tích Descartess của hữu hạn tập sắp thứ tự toàn phần.

Thứ tự tự điển

Cho Σ là một tập hữu hạn (ta gọi là bảng chữ cái).

Tập hợp các chuỗi trên Σ, ký hiệu là Σ^* , xác định bởi

- $\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là chuỗi rỗng.
- Nếu $x \in \Sigma$, và $w \in \Sigma^*$, thì $wx \in \Sigma^*$, trong đó wx là kết nối *w* với *x*.

Ví dụ. Chẳng hạn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Thế thì

$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$

Thứ tự tự điển

Giả sử $\leq$ là thứ tự toàn phần trên Σ, khi đó ta có thể định nghĩa thứ tự toàn phần $\prec$ trên Σ^* như sau.

Cho $s = a_1 a_2 \ldots a_m$ và $t = b_1 b_2 \ldots b_n$ là hai chuỗi trên Σ^*

Khi đó $s \prec t$ nếu

- Hoặc $a_i = b_i$ **đối với** $1 \leq i \leq m$ *,tức là*

  $t = a_1 a_2 \ldots a_m b_{m+1} b_{m+2} \ldots b_n$
- Hoặc tồn tại $k < m$ **sao cho**
  - ✓ $a_i = b_i$ **với** $1 \leq i \leq k$ *và*
  - ✓ $a_{k+1} < b_{k+1}$, nghĩa là

$$s = a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_m$$
$$t = a_1 a_2 \ldots a_k b_{k+1} b_{k+2} \ldots b_n$$

Thứ tự tự điển

- Chúng ta có thể kiểm tra là thứ tự toàn phần trên Σ* Ta gọi nó là ***thứ tự từ điển trên*** Σ*

Ví dụ. Nếu Σ là bảng chữ cái tiếng Anh với thứ tự: a < b < … < z,thì thứ tự nói trên là thứ tự thông thường giữa các từ trong Từ điển.

Ví dụ

✓ *discreet* ≺ *discrete*

d i s c r e e t

d i s c r e t e

e ≺ *t*

✓ *discreet* ≺ *discreetness*

d i s c r e e t

d i s c r e e t n e s s

Thứ tự tự điển

Ví dụ. Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ với $0 < 1$, thì $\prec$ là thứ tự toàn phần trên tập tất cả các chuỗi bit Σ^* .

Ta có

- ✓ $0110 \prec 10$
- ✓ $0110 \prec 01100$

Biểu đồ Hasse

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ *Hasse*

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa. Phần tử b trong poset $(S, \prec)$ được gọi là *phần tử trội* của phần tử a trong S nếu $a \prec b$

Chúng ta cũng nói rằng a là ***được trội bởi*** b. Phần tử b được gọi là ***trội trực tiếp của*** a nếu b là trội của a, và không tồn tại trội c sao cho

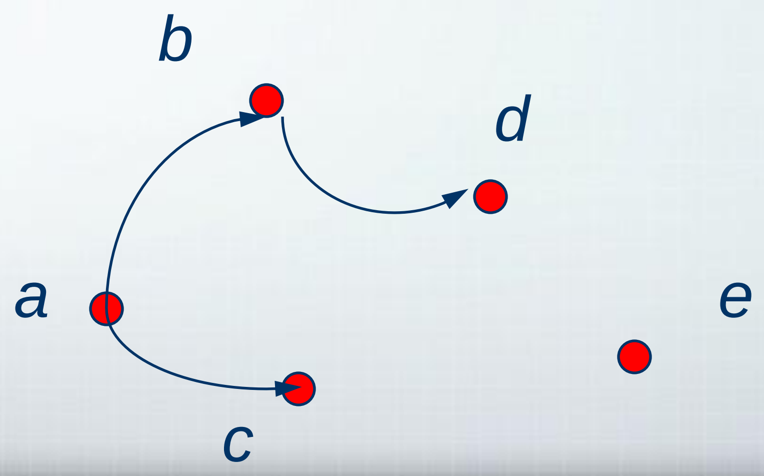
$$a \prec c \prec b, \quad a \neq c \neq b$$

Biểu đồ Hasse

- Ta định nghĩa *Biểu đồ Hasse* của poset (S, $\prec$) là đồ thị:

✓Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng .

✓ Nếu *b* là trội trực tiếp của *a* thì vẽ một cung đi từ *a* đến *b* .



$$a \prec b \prec d, \quad a \prec c$$

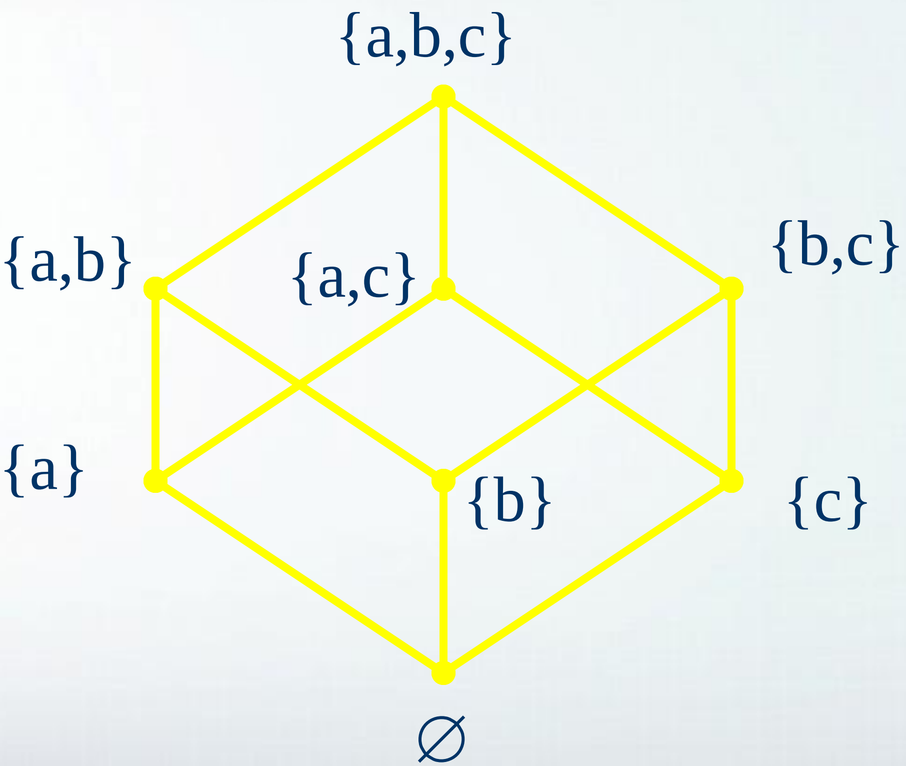
Biểu đồ Hasse

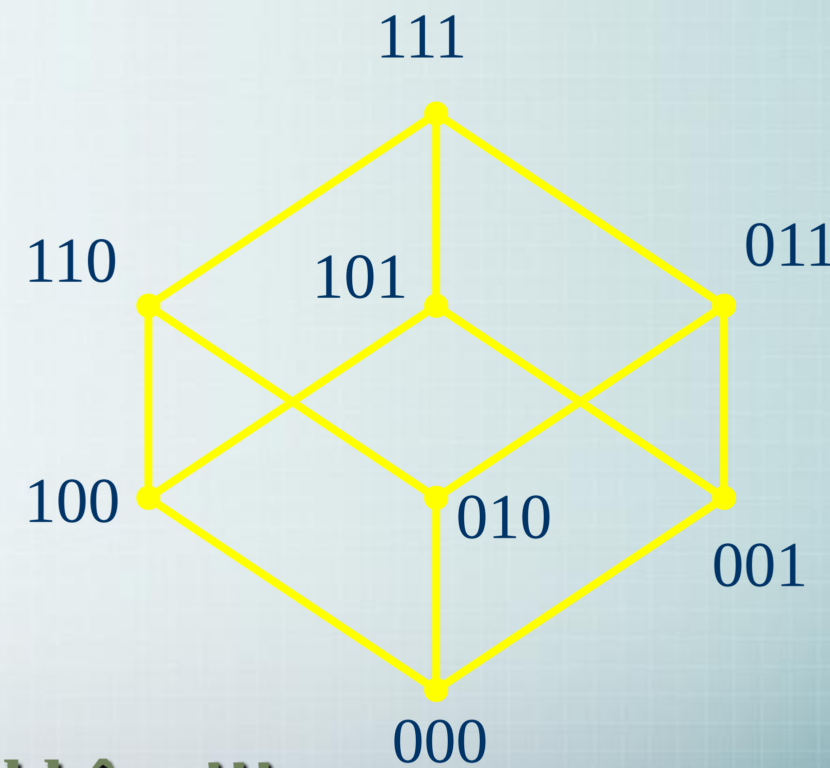
Ví dụ. Biểu đồ Hasse của poset ({1,2,3,4}, ≤) có thể vẽ như sau

Chú ý . Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

Ví dụ. Biểu đồ Hasse của P({a,b,c})

và biểu đồ Hasse của các chuỗi bit độ dài 3 với thứ tự tự điển



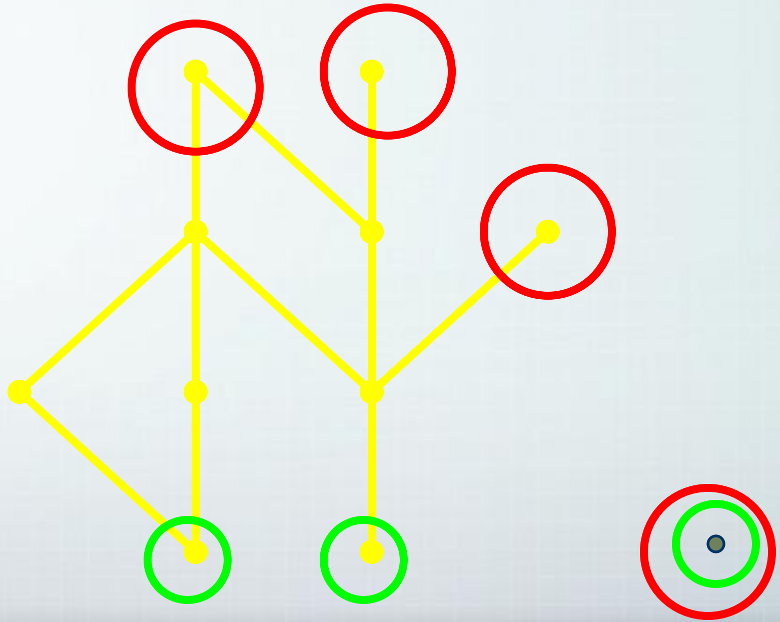


Giống nhau không!!!

Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

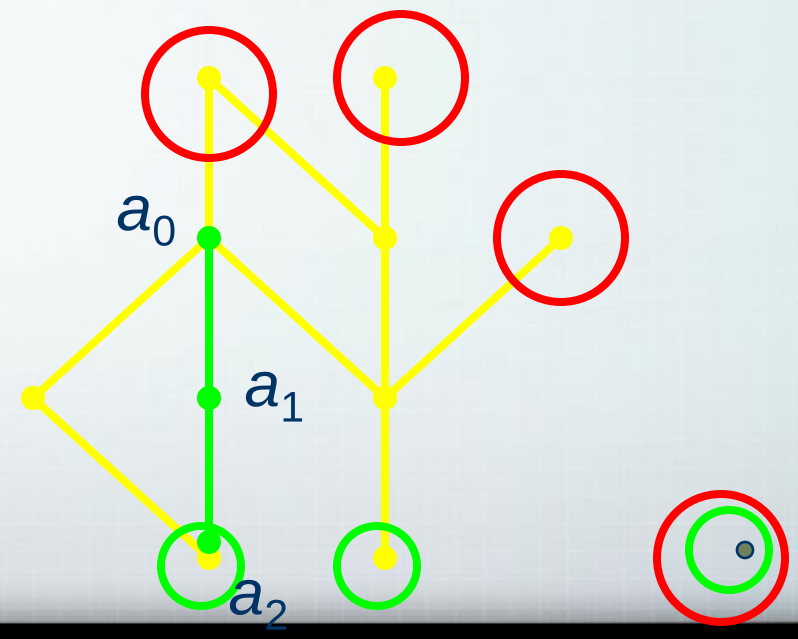
Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây:

- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là ***tối đại.***
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là ***tối tiểu.***
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



Chú ý. **Trong một poset S *hữu hạn*, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.**

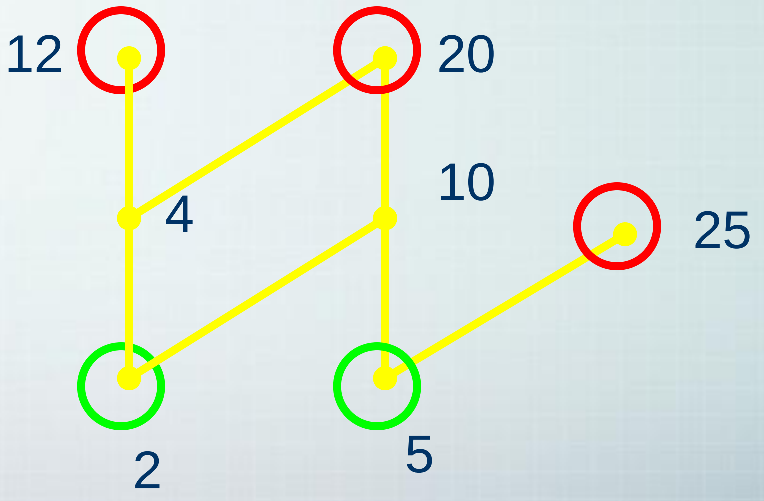
- ✓ Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điêm bất kỳ $a_0 \in S$.
  Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại $a_1 \prec a_0$,
  tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu .
- ✓Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.



Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |) ?

Giải. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu

Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



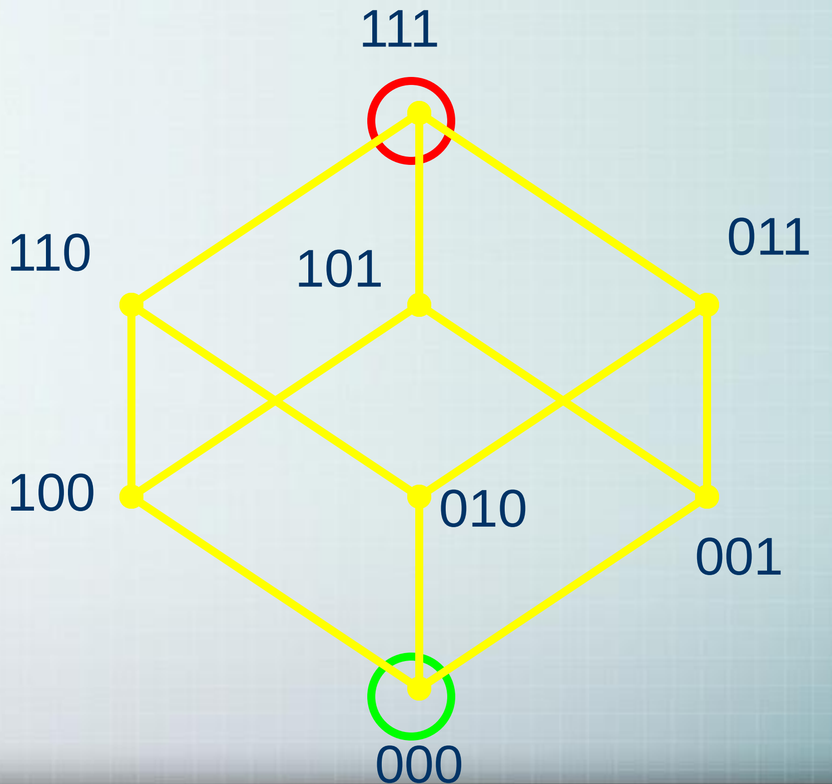
Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset các chuỗi bit độ dài 3?

Giải. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 111 là phần tử tối đại duy nhất và 000 là phần tử tối tiểu duy nhất.

111 là *phần tử lớn nhất* và 000 là *phần tử nhỏ nhất* theo nghĩa:

$$000 \prec abc \prec 111$$

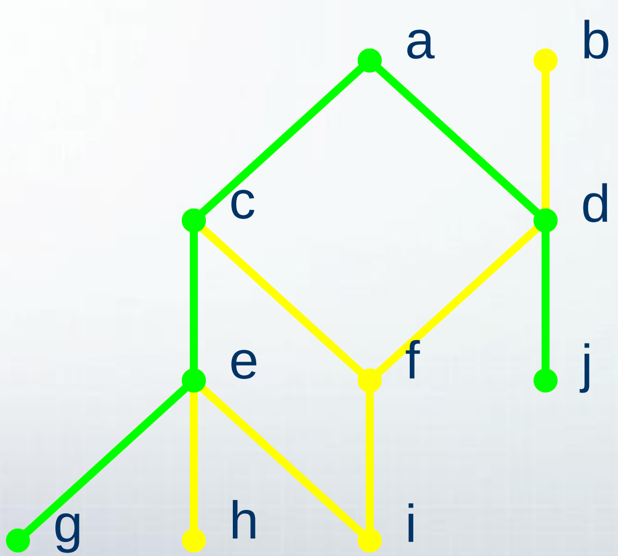
với mọi chuỗi *abc*



Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho (S, $\prec$) là poset và $A \subseteq S$. Phần tử *chặn trên* của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall a \in A, a \prec x$.

Phần tử *chặn dưới* của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall a \in A, x \prec a$



Ví dụ. Phần tử chặn trên của $\{g,j\}$ là a.

Tại sao không phải là b?

Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho (S, $\prec$) là poset và $A \subseteq S$. ***Chặn trên nhỏ nhất*** của A là phần tử chặn trên x của A sao cho mọi chặn trên *y của A*, ta đều có $y \succ x$

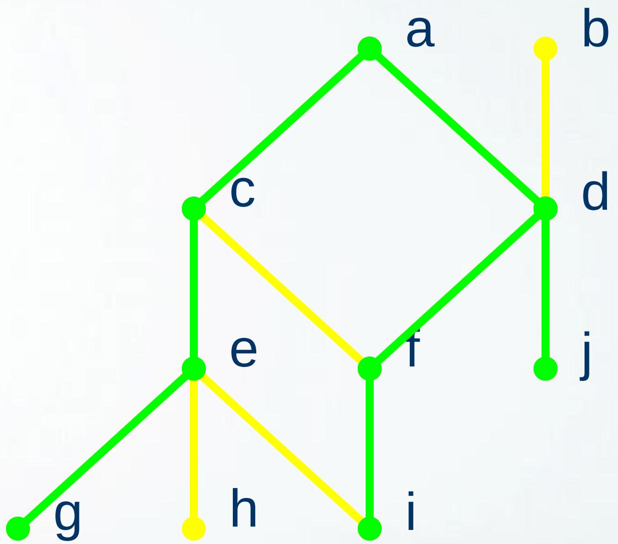
Chặn dưới lớn nhất của A là phần tử chặn dưới x của A sao cho mọi chặn dưới y của A, ta có
$y \prec x$

Chặn trên nhỏ nhất của : supA
Chặn dưới lớn nhất: infA

Chặn trên, chặn dưới

Ví dụ Chặn trên nhỏ nhất của {*i*,*j*} là *d*

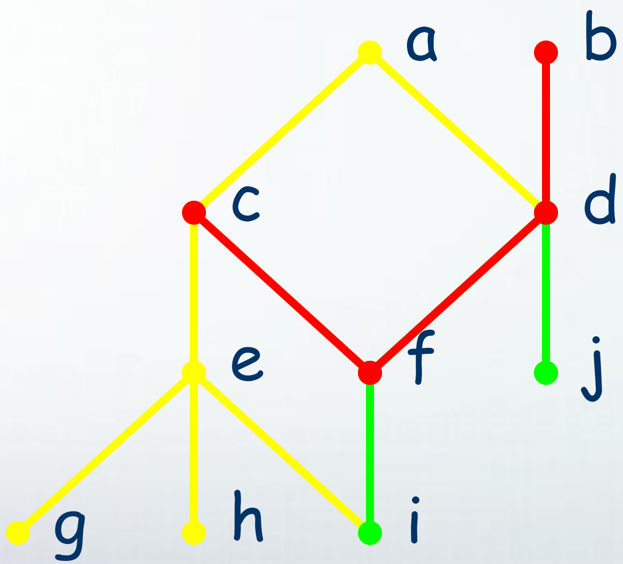
Ví dụ. Chặn dưới chung lớn nhất của {*g*,*j*} là gì?



Chặn trên, chặn dưới

Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ đựơc ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ đựoc ký hiệu bởi $a \wedge b$

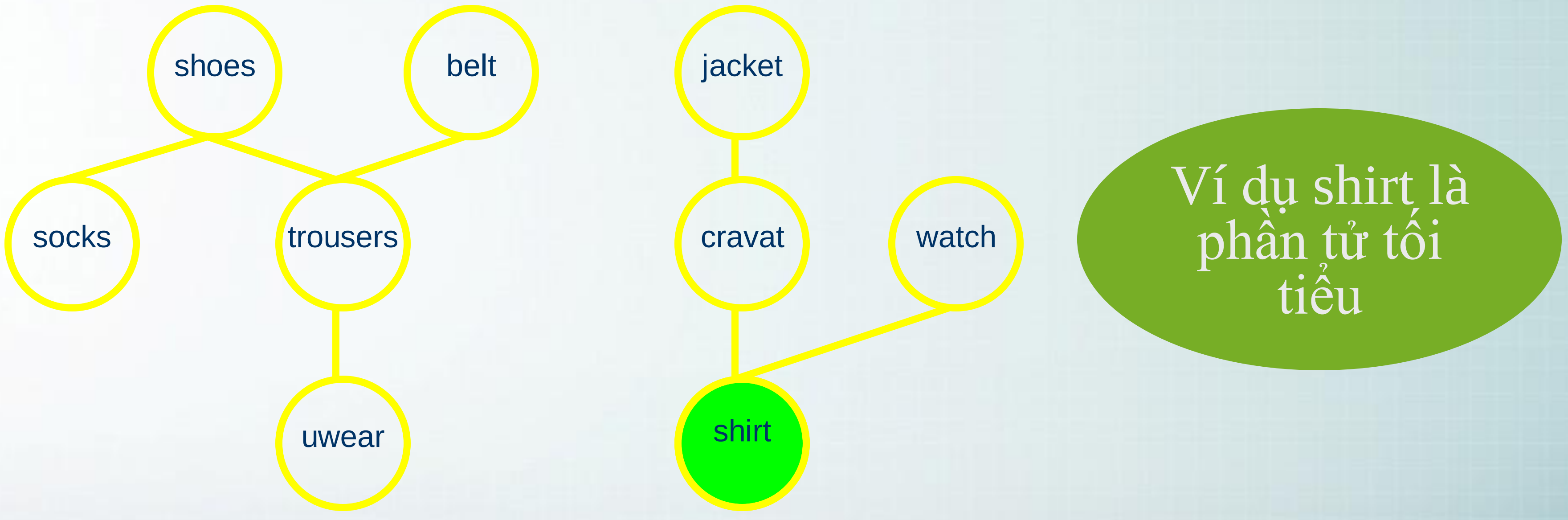


Ví dụ. $i \vee j = d$

Ví dụ. $b \wedge c = f$

Sắp xếp topo

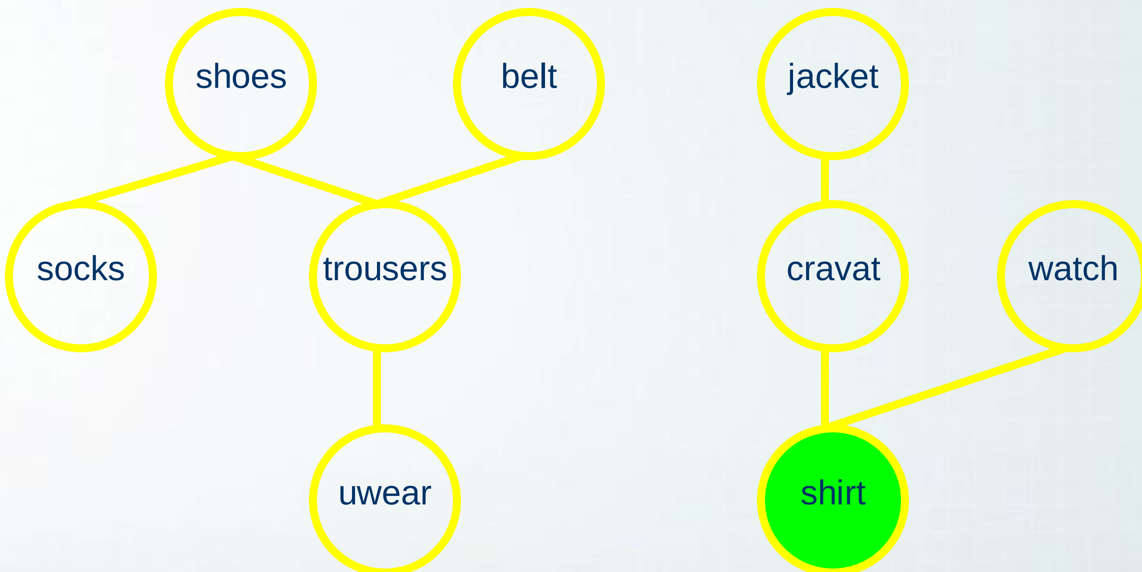
Chú ý. Mỗi poset hữu hạn đều có phần tử tối tiểu a_1.



- ✓ Sau khi loại bỏ phần tử a_1 thì tập còn lại vẫn là poset

Sắp xếp topo

- Gọi a_2 là phần tử tối tiểu của poset mới.



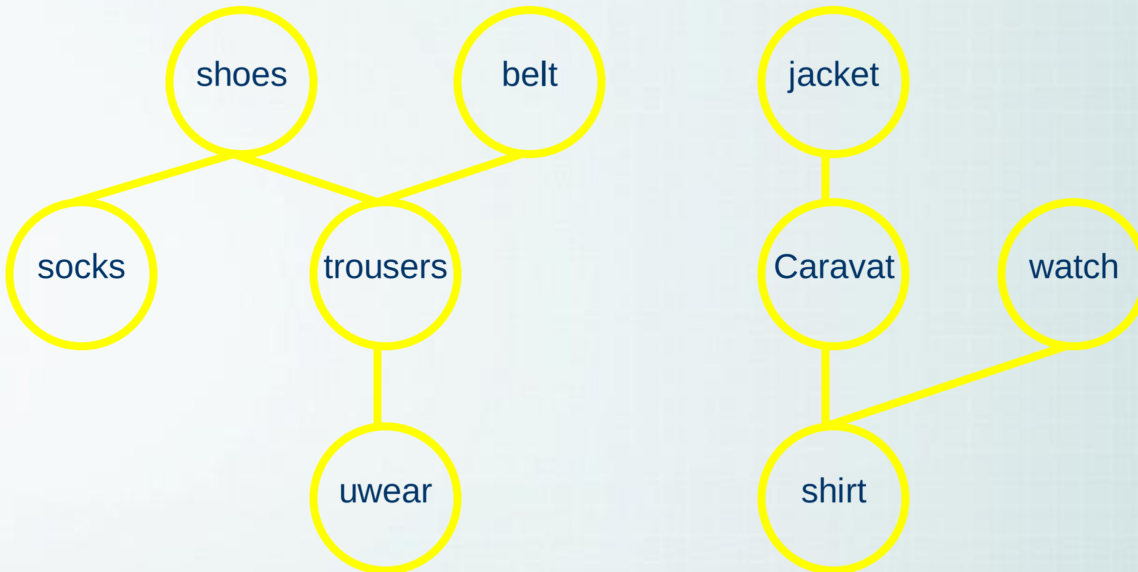
underwear phần tử tối tiểu mới

- Không có chặn trên của a_1 và a_2

Tiếp tục quá trình này cho đến khi không còn phần tử nào nữa

Và cuối cùng chúng ta sẽ có 1 sự sắp xếp

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$



Gọi là sắp xếp topo