# Chương 3. Quan hệ

**3.1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp và các tính chất. Biểu diễn quan hệ hai ngôi.**

**3.2. Quan hệ tương đương. Lớp tương đương. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương.**

**3.3. Quan hệ thứ tự. Thứ tự toàn phần và bán phần. Biểu đồ Hasse. Phần tử min và max. Các phần tử tối tiểu và tối đại.**

# Quan hệ hai ngôi

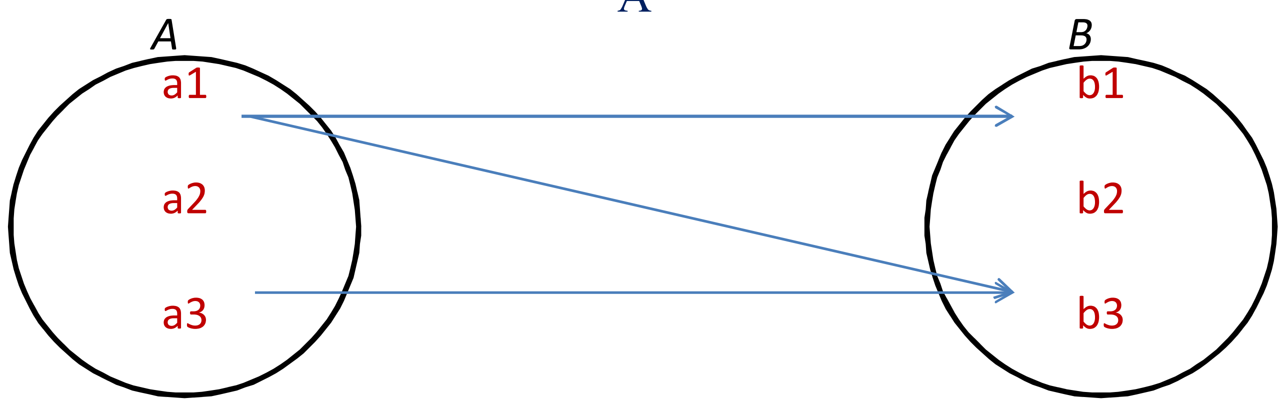
**1. Định nghĩa:** Cho hai tập A, B. Ta gọi tập R là một quan hệ hai ngôi từ *A* đến *B* nếu $R \subseteq A \times B$.

Nếu $(a, b) \in R$ thì ta nói a có quan hệ R với b và ký hiệu a R b; ngược lại nếu $(a, b) \notin R$ thì ta kí hiệu $a \overline{R} b$.

Khi A = B, ta gọi R là một quan hệ hai ngôi trên A.

**Ví dụ:**

Ā




$$R = \{ (a1, b1), (a1, b3), (a3, b3) \}$$

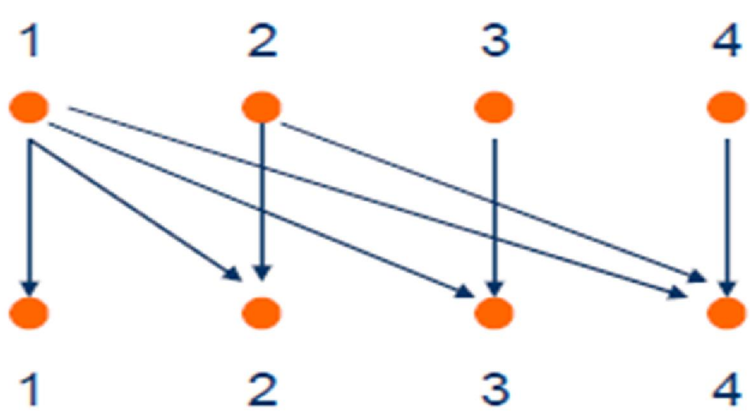
# Quan hệ hai ngôi

## 1. Định nghĩa.

**Ví dụ:** Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R là một quan hệ (hai ngôi) trên A và $R = \{(a, b) \in A \mid a$ là ước của $b\}$.

Khi đó

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$



# Quan hệ hai ngôi

## 2. Các tính chất của quan hệ.

**Định nghĩa:** Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(a) Ta nói quan hệ $R$ có ***tính phản xạ*** nếu và chỉ nếu

$$a\,R\,a\,,\ \ \forall a \in A.$$

**Ví dụ:** Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
không phản xạ vì $(3, 3) \notin R1$

$R2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$
phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R2$

# Quan hệ hai ngôi

## 2. Các tính chất của quan hệ

**Ví dụ:**

- Quan hệ $\leq$ trên $Z$ phản xạ vì $a \leq a, \forall a \in Z$.
- Quan hệ > trên $Z$ không phản xạ vì 1 không lớn hơn 1.
- Quan hệ " | " ("ước số") trên $Z^+$ là phản xạ vì mọi số nguyên dương *a* là ước của chính nó.

# Quan hệ hai ngôi

## 2. Các tính chất của quan hệ.

**Định nghĩa:** Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(b) Ta nói quan hệ *R* có ***tính đối xứng*** nếu và chỉ nếu

$$a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a\,,\quad \forall a, b \in A.$$

(c) Ta nói quan hệ *R* có ***tính phản xứng*** nếu và chỉ nếu

$$(a\,R\,b \wedge b\,R\,a) \Rightarrow a = b\,,\quad \forall\, a, b \in A.$$

**Ví dụ:**

- Quan hệ $R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng.

- Quan hệ $\leq$ trên **Z** không đối xứng, tuy nhiên nó phản xứng vì $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$.

- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên $Z^+$ không đối xứng, tuy nhiên nó có tính phản xứng vì $(a \mid b) \wedge (b \mid a) \Rightarrow (a = b)$.

# Quan hệ hai ngôi

## 2. Các tính chất của quan hệ

**Định nghĩa:** Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(d) Ta nói quan hệ *R* có ***tính bắc cầu (truyền)*** nếu và chỉ nếu

$$(a\ R\ b \ \wedge\ b\ R\ c) \Rightarrow a\ R\ c\ ,\ \forall a,b,c \in A.$$

**Ví dụ:**

- Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

- Quan hệ ≤ và "|"trên *Z* có tính bắc cầu vì

$$(a \le b) \wedge (b \le c) \Rightarrow (a \le c)$$
$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$$

# Quan hệ hai ngôi

## 3. Biểu diễn quan hệ

**Định nghĩa.**

Cho $R$ là quan hệ từ $A = \{1,2,3,4\}$ đến $B = \{u,v,w\}$, $R = \{(1,u),(1,v),(2,w),(3,w),(4,u)\}$.

Khi đó $R$ có thể biễu diễn như sau

| | u | v | w |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm.

Đây là ma trận cấp 4×3 biễu diễn cho quan hệ $R$

# Quan hệ hai ngôi

## 3. Biểu diễn Quan hệ

**Định nghĩa.** Cho $R$ là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của $R$ là ma trận $M_R = [m_{ij}]_{mxn}$ xác định bởi:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

**Ví dụ:** Cho $R$ là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$: $a\ R\ b \Leftrightarrow a > b$. Khi đó ma trận biểu diễn của $R$ là:

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 |

# Quan hệ hai ngôi

## 3. Biểu diễn quan hệ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

**Ví dụ:** Cho $R$ là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi ma trận

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \mathbf{M}_R = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

Khi đó $R$ gồm các cặp:$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$.