TOÁN RỜI RẠC

(Discrete Mathematics)

Chương 3

Quan hệ (Relations)

1. Một số khái niệm và định nghĩa

1.1 <u>Quan hệ 2 ngôi (Binary relations)</u>

- Cho 2 tập A, B bất kỳ
- Quan hệ 2 ngôi R giữa 2 tập hợp A và B là một tập con của $A \times B$

  <u>Ví dụ 1.1</u>: $A=\{a_1,a_2\}$ và $B=\{x,y,z\}$

  $\mathbf{R_1=\{(a_2,y),(a_1,x),(a_1,z)\}}$

A	B
a_2	y
a_1	x
a_1	z

  $\mathbf{R_2=\{(a_1,y),(a_2,z)\}}$

A	B
a_1	y
a_2	z

  là 2 quan hệ giữa A và B
- Một quan hệ giữa A và A gọi là một quan hệ trên A
- Kí hiệu: aRb nói rằng $(a,b) \in R$ (một bộ của R)

1. Một số khái niệm và định nghĩa

Ví dụ 1.2 Cho:

A=Quận-huyện = {Dĩ An, Bến Cát, Quận 1,Quận 3, Tân Bình}

B=Tỉnh-TP = {TPHCM, Bình Dương}

Xét quan hệ R ≡ "***Thuộc tỉnh_TP***" giữa A và B.

Ta có: (Dĩ An, Bình Dương) ∈ R

(Tân Bình, TPHCM) ∈ R

(Quận 1, Bình Dương) ∉ R

….

1. Một số khái niệm cơ bản

Quan có thể trình bày ở dạng bảng:

Quận-Huyện	Tỉnh-TP
Quận 1	TPHCM
Quận 3	TPHCM
Tân Bình	TPHCM
Bến Cát	Bình Dương
Dĩ An	Bình Dương

1. Một số khái niệm cơ bản

Ví dụ 1.3: Cho: A={các sinh viên} = {sv1, sv2, sv3, sv4}

và B={các môn học} = {TRR, LTM1, PPS, Triết}

Xét quan hệ R ≡" Đăng ký môn học" được định nghĩa:

$\forall x \in A \forall y \in B$, xRy ⇔ "x có đăng ký môn học y"

- Nếu sv2 đăng ký môn PPS thì (sv2, PPSố) $\in$ R
- Nếu sv1 đăng ký môn TRR thì: (sv1,toán RR) $\in$ R
- Nếu sv1 không đăng ký môn Triết, thì: (sv1,Triết) $\notin$ R
- ,…

1. Một số khái niệm cơ bản

Ví dụ 1.4: Trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$, xét quan hệ:

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a - b \text{ chia hết cho } 5$$

$$\Leftrightarrow a \text{ và } b \text{ có cùng số dư khi chia cho } 5$$

$$\Leftrightarrow a \equiv b \pmod 5.$$

(Hay $R = \{(-1,4), (3,8), (2,7), \ldots\}$)

✍ *Tổng quát:* Trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$, cho trước số $n>1$. Quan hệ:

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a - b \text{ chia hết cho } n$$

$$\Leftrightarrow a \text{ và } b \text{ có cùng số dư khi chia cho } n$$

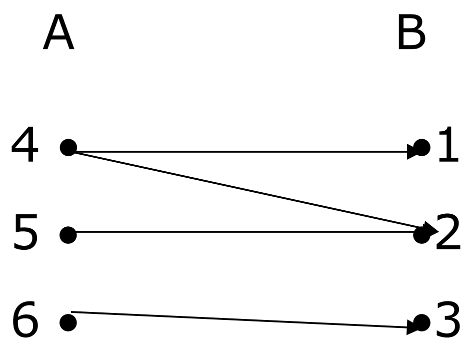
$$\Leftrightarrow a \equiv b \pmod n.$$

gọi là quan hệ đồng dư modulo n.

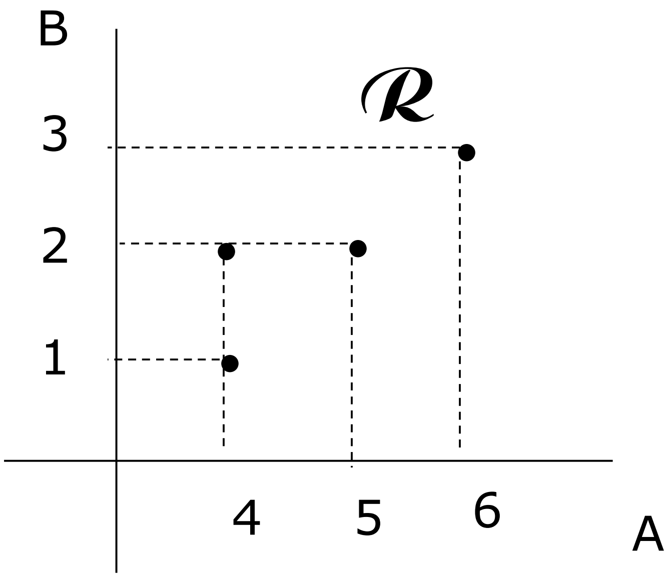
1. Một số khái niệm cơ bản

Biểu diễn quan hệ 2 ngôi bằng đồ thị:

<u>Ví dụ 1.5</u>: Cho A={4,5,6},B={1,2,3} và R={(4,1), (4,2), (5,2), (6,3)}. Có thể biểu diễn R bằng đồ thị:



Hoặc



1. Một số khái niệm cơ bản

<u>**Biểu diễn quan hệ 2 ngôi bằng ma trận**</u>:

Cho 2 tập hữu hạn A, B và R là một quan hệ giữa A và B. Có thể biểu diễn R bằng ma trận zero-one M như sau:

Với mỗi $\boldsymbol{i \in A}$ ***và*** $\boldsymbol{j \in B}$

Nếu $\boldsymbol{(i,j) \in R}$ ***thì*** $\boldsymbol{m_{ij} = 1}$

Nếu $\boldsymbol{(i,j) \notin R}$ ***thì*** $\boldsymbol{m_{ij} = 0}$

<u>*Ví dụ 1.6*</u>: Ma trận biểu diễn cho quan hệ trong ví dụ trên

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Một số khái niệm cơ bản (tt)

<u>1.2. Quan hệ n ngôi:</u>

Một quan hệ n ngôi R trên các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một tập con $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gọi là các miền của R.

<u>Ví dụ 1.7</u>: Cho A_1=các chuyến tàu = {S1, S2, S3, LH2}

A_2=Các ga = {NT, DN, TH,BD}

A_3= Giờ ={0,1,2,…23}

A_4=Phút ={0,1,2,…59}

Xét quan hệ:

LịchTàu={(x,y,z,t)/tàu x có đến (dừng) tại ga y lúc z giờ t phút}

Một số khái niệm cơ bản (tt)

- **LịchTàu** là quan hệ 4 ngôi
- Nếu tàu S1 đến và dừng tại ga NT lúc 13h30, thì:

  (S1, NT,13,30) ∈ **LịchTàu**
- Nếu tàu S3 đến và dừng tại ga DN lúc 4h40 thì

  (S3,DN,4,40) ∈ **LịchTàu**
- Nếu tàu S1 không dừng tại ga TH 18h30 thì

  (S1,TH,18,30)∉ **LịchTàu**
- Nếu tàu S1 đến ga Tuy hòa lúc 17h45 thì :

  (S1,TH,17,45) ∈ **LịchTàu**

Một số khái niệm cơ bản (tt)

✓ Trực quan, có thể xem quan hệ **LịchTàu** như bảng

Mỗi dòng là một bộ của R

ChuyenTau	**Ga**	**Giờ**	**Phút**
S1	NT	13	30
S3	DN	4	40
S1	TH	17	45
LH2	BD	4	0

Một số khái niệm

<u>Ví dụ 1.8</u>: Trên các tập Sinh_Vien = {sv1, sv2, sv3}, Môn_học = {trr, csdl, mmt}, Điểm = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}. Xét quan hệ "Kết_quả":

(s,c,m)∈ Kết_quả ⇔ sinh viên s có kết quả môn c là m điểm.

Sinh_Viên	Môn_học	Điểm
sv1	csdl	8
sv2	csdl	5
sv1	mmt	3
sv3	trr	9

Kết_quả là quan hệ 3 ngôi

Một số khái niệm

- Tập $K=\{A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{im}\} \subset \{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ gọi là khoá của quan hệ R nếu với mỗi giá trị $(k_{i1}, k_{i2},.., k_{im}) \in A_{i1} \times A_{i2} \times \ldots \times A_{im}$ chỉ có tối đa một bộ có dạng $(\ldots, k_{i1}, \ldots, k_{im}, \ldots.) \in R$

2. Một số phép toán quan hệ

<u>2.1 Phép chọn (selection)</u>: Cho C là một điều kiện, phép chọn $\sigma_C(R)$ là phép lấy ra các bộ từ R thoả điều kiện C

<u>Ví dụ 2.1:</u>

Ket_Qua

Sinh_Viên	Môn_học	Điểm
sv1	csdl	8
sv2	csdl	5
sv1	mmt	3
sv3	trr	9

$$\sigma_{Mon="csdl"}(Ket\_qua)$$

Sinh_Viên	Môn_học	Điểm
sv1	csdl	8
sv2	csdl	5

2. Một số phép toán quan hệ

Ví dụ 2.2

Lịch_Tàu

ChuyếnTàu	Ga	Giờ	Phút
S1	NT	13	30
S3	DN	4	40
S1	TH	17	45
LH2	TH	4	0

$$\sigma_{Gio>12 \wedge Ga="TH"}(Lich\_Tau)$$

ChuyếnTàu	Ga	Giờ	Phút
LH2	TH	4	0

2. Một số phép toán quan hệ

2.2.Phép chiếu (Projection):

- Cho trước các tập A_1, A_2, …, A_n. Ánh xạ chiếu lên các thành phần thứ i_1,i_2, …, i_m ($m \le n$) được định nghĩa:

$$\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_m}$$
$$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) \mapsto (a_{i_1} \times a_{i_2} \times \ldots \times a_{im})$$

- Khi đó, với R là một quan hệ trên A_1, A_2, …, A_n, thì :

$$\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(R)$$

Gọi là quan hệ chiếu

2. Một số phép toán quan hệ

<u>Ví dụ 2.3</u>: Xét quan hệ trong ví dụ 1.7. Nếu chỉ muốn biết thông tin về chuyến tàu và các ga đến (không cần quan tâm đến thời điểm), ta xét quan hệ chiếu:

$$\pi_{ChuyenTau,Ga}(R)$$

LichTau

Chuyentau	Ga	Giờ	Phút
S1	NT	13	30
S3	DN	4	40
S1	TH	17	45
LH2	BD	4	0

$$\pi_{Chuyen\_tau,Ga}(R)$$

ChuyenTau	Ga
S1	NT
S3	SG
S1	TH
LH2	BD

3. Một số tính chất của quan hệ

Một quan hệ R trên A có thể có các tính chất sau đây:

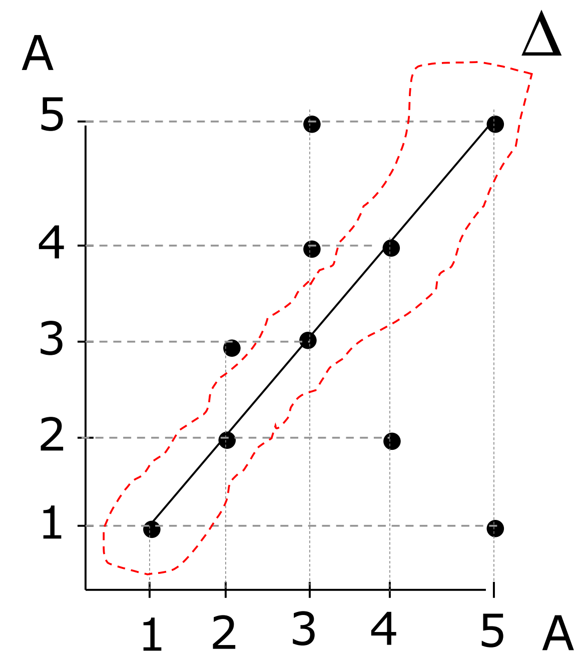
a) **<u>Tính phản xạ (reflexivity)</u>:**

R phản xạ (reflexive relation)⇔ ∀a∈ A, aRa

<u>Ví dụ 3.1</u>: Cho A={1,2,3,4,5},và quan hệ R trên A:

R={(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(3,5),(4,2) ,(4,4), (5,1), (5,5)}

⇒R có tính phản xạ.



3. Một số tính chất của quan hệ (tt)

Ví dụ 3.2: Cho A = {1,2,3,4} và quan hệ R trên A:

R_2= {(1,1),(2,1), (3,1), (3,2), (4,4), {3,3)}

Ta thấy $\exists 2 \in A$ như $(2,2) \notin R_2$ nên R_2 không có tính phản xạ.

Ví dụ 3.2: Cho A={Người}, xét quan hệ R trên A được định nghĩa: $\forall x,y \in A$, $xRy \Leftrightarrow$ "x quen biết với y"

Ta có: "$\forall x \in A$, x quen biết với x" (hiển nhiên)

Hay $\forall x \in A$, xRx nên R có tính phản xạ.

Ví dụ 3.4: Quan hệ "≤" trên $\mathbb{R}$ có tính phản xạ. Vì:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$$

3. Một số tính chất của quan hệ

b) Tính đối xứng (Symmetry):

R đối xứng (*symmetric relation*)

$\Leftrightarrow \forall a,b \in A,\ aRb \Rightarrow bRa$

Ví dụ 3.5: A={1,2,3}, xét quan hệ trên A

$R_3 = \{(1,1), (3,2), (1,3), (3,1), (2,3)\}$ là quan hệ đối xứng

$R_4 = \{(2,1), (1,2), (3,2), (1,3), (3,1), (3,3)\}$ là quan hệ không đối xứng

3. Một số tính chất của quan hệ

Ví dụ 3.6: Cho tập A={Con người}, Xét quan hệ R ≡ "Quen biết" được định nghĩa như sau:

$\forall x,y \in A$, $xRy \Leftrightarrow$ "x quen biết với y"

Quan hệ này có tính phản xạ, và đối xứng

Ví dụ 3.7: Xét quan hệ R:"Láng giềng" trên tập T={các tỉnh-Thành phố} được định nghĩa:

$\forall x,y \in T$, $xRy \Leftrightarrow$ "x có phần ranh giới chung với y"

Quan hệ "Láng giềng" cũng có tính đối xứng.

Ví dụ 3.8:Quan hệ "=" trên tập A bất kỳ quan hệ có tính đối xứng

Ví dụ 3.9: Quan hệ "≤" trên $\mathbb{R}$ không có tính đối xứng.

3. Một số tính chất của quan hệ

c) Tính phản xứng (Antisymmetry):

R phản xứng (Antisymmetric relation)

$\Leftrightarrow \forall a,b \in A, (aRb) \wedge (bRa) \Rightarrow a=b$

<u>Ví dụ 3.10</u>: Quan hệ "≤" trên tập số thực R, có tính phản xứng.

Vì: $\forall x,y \in R, (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

<u>Ví dụ 3.11</u>: Cho tập A={1,2,3,4} và quan hệ R trên A là:

$R_1=\{(1,1),(2,3),(2,2),(4,3),(4,4)\}$

R_1 không có tính phản xạ, nhưng có tính phản xứng.

$R_2=\{(1,1),(3,3),(4,4)\}$: Đối xứng, phản xứng

3. Một số tính chất của quan hệ

d) Tính bắc cầu (Transitive):

R có tính bắt cầu $\Leftrightarrow$ $\forall$x,y$\in$ A (xRy $\wedge$ yRz) $\Rightarrow$ xRz

<u>Ví dụ 3.12</u>:

Các quan hệ "=", " $\leq$" trên $\mathbb{R}$ là các quan hệ có tính bắt cầu

Quan hệ "$\neq$" trên $\mathbb{R}$ không có tính bắt cầu?

Quan hệ "//" trên L là quan hệ có tính bắt cầu.

Quan hệ " $\perp$" trên L là quan hệ không có tính bắt cầu.

Quan hệ đồng dư modulo n trên Z là quan hệ có tính bắt cầu.

3. Một số tính chất của quan hệ (tt)

<u>Ví dụ 3.13</u>: Xét quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$.

$\forall a,b\in \mathbb{Z}$, $a\equiv b(\text{mod } n)$ $\Leftrightarrow$ a-b chia hết cho n.

- Ta có: $\forall a\in \mathbb{Z}$, $a-a = 0$ chia hết cho n. Hay $\forall$ $a\in \mathbb{Z}$, $a\equiv a(\text{mod } n)$
  Vậy *≡(mod n) có tính phản xạ*.
- $\forall a,b\in \mathbb{Z}$, $a\equiv b(\text{mod } n)$ $\Leftrightarrow$ a-b chia hết cho n
  $\Rightarrow a-b=kn$ với $k\in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow b-a=-kn$
  $\Rightarrow$b-a chia hết cho n $\Rightarrow$ $b\equiv a(\text{mod } n)$

Vậy *≡(mod n) có tính đối xứng*

- $\forall a,b,c\in \mathbb{Z}$, $a\equiv b(\text{mod } n)$ và $b\equiv c(\text{mod } n)$
  $\Leftrightarrow$ $a - b = k_1n$ và $b-c = k_2n$ với k_1, $k2\in \mathbb{Z}$
  $\Rightarrow$ $a-c = (a-b)+(b-c)=(k_1+k_2)n$ hay a-c chia hết cho n.

Hay $a\equiv c(\text{mod } n)$. vậy *≡(mod n) có tính bắt cầu*

3. Một số tính chất của quan hệ

Ví dụ 3.14: A={Các tỉnh/Thành phố}

R: "Láng giềng" (xem ví dụ trước)

R: có tính phản xạ, đối xứng, nhưng không có tính phản xứng, và không có tính bắt cầu.

Ví dụ 3.15: A={Người}; R:"Quen biết" (xem ví dụ trước)

R: Không có tính bắt cầu

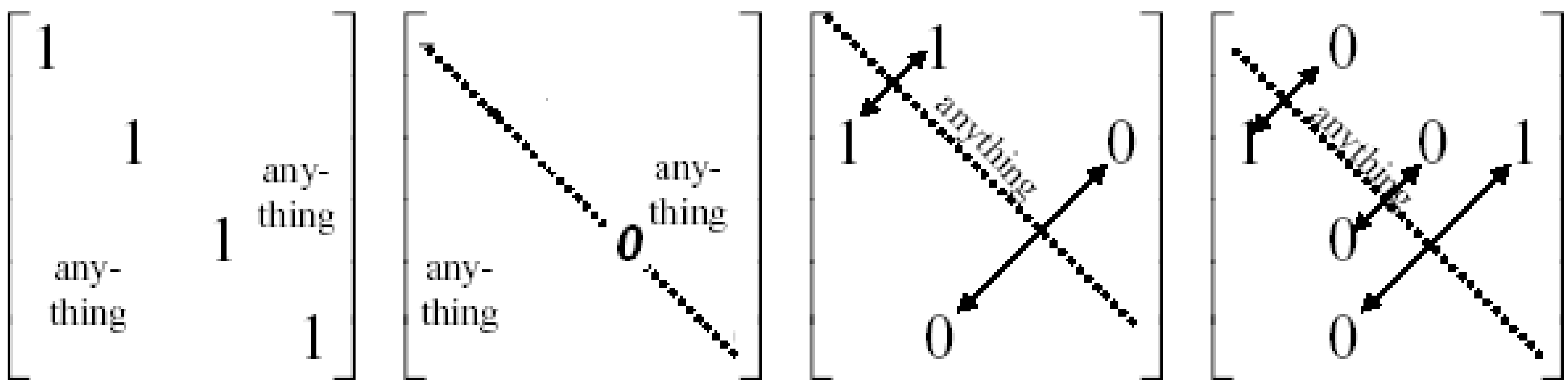
Ví dụ 3.16: A={người}, Xét quan hệ R:"Anh em" được định nghĩa:

$\forall x,y \in A$, $xRy \Leftrightarrow$ x có cùng cha mẹ với y

R: có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Một số tính chất của quan hệ

- Nhận biết quan hệ có tính phản xạ, phản xứng, đối xứng qua ma trận biểu diễn quan hệ:



Reflexive	not reflexive:	Symmetric	Antisymmetric:

4. Quan hệ tương đương

<u>Định nghĩa 4.1:</u> Quan hệ R trên tập hợp A gọi là quan hệ tương đương nếu thỏa các tính chất: Phản xạ, đối xứng và bắc cầu

<u>Ví dụ 4.1</u>: Xét quan hệ R trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa: $\forall m,n \in \mathbb{Z}$, mRn $\Leftrightarrow$ "m cùng tính chất chẵn lẻ với n"

Ta có:

- $\forall m \in \mathbb{Z}$, m cùng tính chẵn lẻ với chính nó. Vậy R phản xạ.
- $\forall m,n \in \mathbb{Z}$, mRn $\Leftrightarrow$"m cùng tính chẳn lẻ với n" $\Rightarrow$ "n cùng tính chẳn lẻ với m" $\Rightarrow$ nRm. Vậy R đối xứng.
- $\forall m,n,k \in \mathbb{Z}$

  mRn $\Leftrightarrow$"m cùng tính chẳn lẻ với n" $\Rightarrow$ m-n=2r (k$\in \mathbb{Z}$)

4. Quan hệ tương đương (tt)

- nRk ⇔"n cùng tính chẳn lẻ với k" ⇒ n-k=2t ($t \in \mathbb{Z}$)

  ⇒ m-k = (m-n)+(n-k)=2(r+t) ⇒ "m và k vùng tính chẵn lẻ"

  ⇒ mRk. Có tính bắt cầu .

Kết luận: R phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên R là quan hệ tương đương trên Z.

__Ví dụ 4.2__: Quan hệ R trên tập **S** gồm các chuỗi kí tự được định nghĩa: $\forall s_1, s_2 \in$ **S**, $s_1 R s_2 \Leftrightarrow len(s_1)=len(s_2)$.

là quan hệ tương đương.

4. Quan hệ tương đương

Ví dụ 4.3: A={Con người}, Quan hệ R trên A là "Quen biết" không phải là quan hệ tương đương. Vì không có tính bắt cầu.

Ví dụ 4.4: Quan hệ "song song" trên tập $\mathcal{L}$ các đường thẳng trong mặt phẳng là quan hệ tương đương.

C/m:

$\forall L \in \mathcal{L}$, L//L (hiển nhiên). Vậy R phản xạ

$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, $L_1 \mathcal{R} L_2 \Leftrightarrow L_1 // L_2 \Rightarrow L_2 // L_1$ hay $L_2 \mathcal{R} L_1$. Vậy R đối xứng

$\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, $(L1//L2) \wedge (L_2//L_3) \Rightarrow L_1//L_3$. Vậy R bắt cầu.

Kết luận: "Song song" là quan hệ tương đương trên $\mathcal{L}$

4. Quan hệ tương đương

Ví dụ 4.5: Quan hệ | trên Z^+ không là quan hệ tương đương vì không có tính đối xứng.

Ví dụ 4.6:Quan hệ đồng dư modulo n trên tập số nguyên $\mathbf{Z}$ là quan hệ tương đương.

Chứng minh?

4. Quan hệ tương đương (tt)

Định nghĩa 4.2(lớp tương đương): Cho R là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$, lớp tương đương chứa x là tập con của A gồm những phần tử có quan hệ R với x.

Nói cách khác: Lớp tương đương chứa x là tập con của A được định nghĩa: $[x]_R = \{y \in A / yRx\}$

Ví dụ 4.7: Trên $\mathbb{Z}$ định nghĩa quan hệ R: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $aRb \Leftrightarrow$ "a cùng tính chẵn lẻ với b"

R: là quan hệ tương đương (xem ví dụ trước)

Lớp tương đương chứa 2 là: [2]={Các số chẵn}

= {…-4, -2, 0, 2, 4,…}

Lớp tương đương chứa 1 là: [1] ={Các số lẻ}= {…-5, -3, -1, 1, 3,5,…}

4. Quan hệ tương đương (tt)

<u>Ví dụ 4.8</u>: Quan hệ $\equiv$(mod 4) trên $\mathbb{Z}$

Có 4 lớp tương đương $\mathbb{Z}_4=\{[0],[1],[2],[3]\}$

$[0]=\{n\in\mathbb{Z}/$ n chia hết cho $4\}=\{\ldots..-8,-4,0,4,8,\ldots\}=\{4k/k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]=\{n\in\mathbb{Z}/$ n chia cho 4 dư $1\}=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}=\{4k+1/k\in\mathbb{Z}\}$

$[2]=\{n\in\mathbb{Z}/$ n chia cho 4 dư $2\}=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}=\{4k+2/k\in\mathbb{Z}\}$

$[3]=\{n\in\mathbb{Z}/$ n chia cho 4 dư $3\}=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}=\{4k+3/k\in\mathbb{Z}\}$

Tổng quát: Quan hệ $\equiv$(mod n) trên $\mathbb{Z}$ có n lớp tương đương.

$$\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$$

4. Quan hệ tương đương (tt)

Định lý 4.1: Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Ta có:

i) $\forall x \in A,\ x \in [x]$

ii) $\forall x,y \in A,\ xRy \Leftrightarrow [x]=[y]$

iii) $\forall x,y \in A,\ [x] \cap [y] \neq \varnothing \Rightarrow [x]=[y]$

C/m?:

i) R phản xạ nên $\forall x \in A$, $xRx \Rightarrow x \in [x]$ (theo định nghĩa)

ii) mà R đối xứng nên $xRy \Rightarrow yRx \Rightarrow y \in [x]$

Lớp tương đương và các phân hoạch

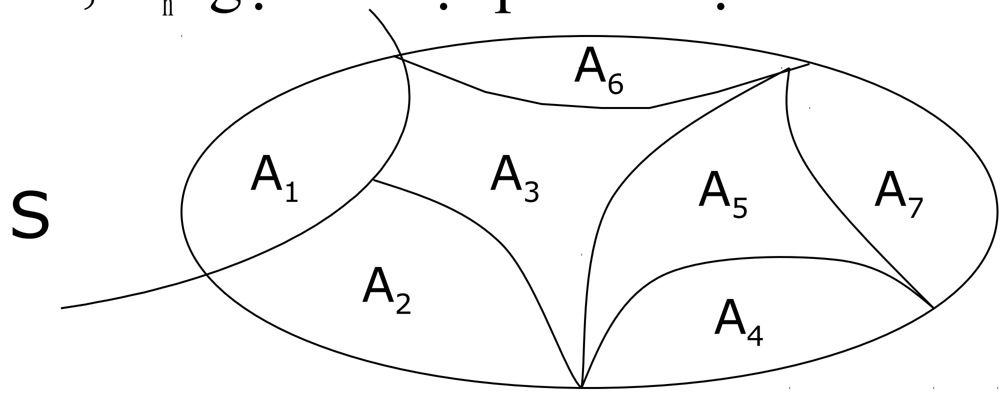
Định nghĩa 4.3: Cho tập hợp S và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập con của S thỏa các tính chất:

$A_i \neq \varnothing \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$

$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

Thì $A_1, A_2, \ldots, A_n$: gọi là một phân hoạch của S



Một phân hoạch
Của S thành 7
Tập con

Lớp tương đương và các phân hoạch

Ví dụ 4.8: Cho $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{0\}$.

Ta có: $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ và $C\neq\emptyset$

$A\cap B=\emptyset$; $A\cap C=\emptyset$; $B\cap C=\emptyset$

$A\cup B\cup C=S$

Vậy A, B, C là một phân hoạch của S

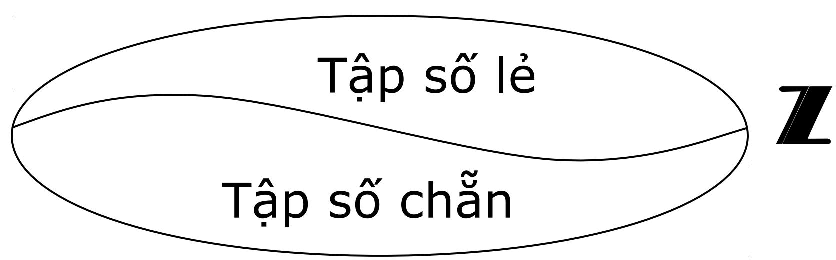
Lớp tương đương và các phân hoạch (tt)

Định lý 4.2: Cho R là một quan hệ tương đương trên A. Khi đó các lớp tương đương của R sẽ tạo nên một phân hoạch của A. Ngược lại, nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một phân hoạch của A thì tồn tại quan hệ tương đương R sao cho $\{A_i\}$ là tập các lớp tương đương của R.

Ví dụ 4.9: Quan hệ "cùng tính chẵn lẻ" trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$ (xem ví dụ trước) phân hoạch $\mathbb{Z}$ thành 2 lớp tương đương:

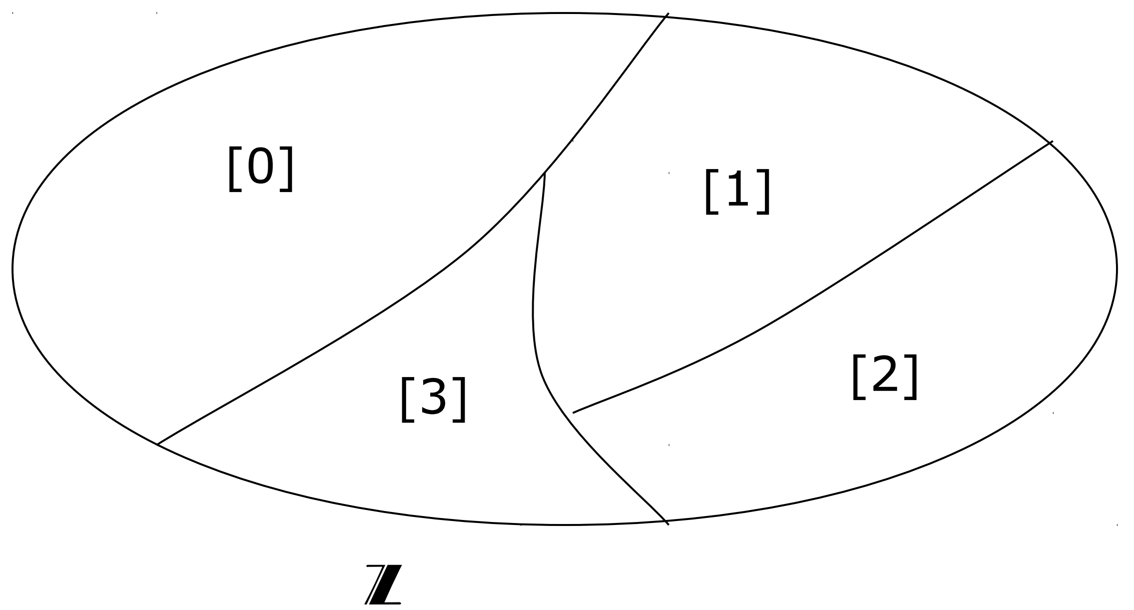
$[1]=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$

$[2]=\{\ldots,-4,-2,-0,2,4,6,\ldots\}$



Lớp tương đương và các phân hoạch (tt)

Ví dụ 4.9: Trên $\mathbb{Z}$, tập các lớp tương đương của quan hệ đồng dư modulo 4: $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}$.



Phân hoạch

<u>Ví dụ 4.10</u>: Cho tập $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ và các tập con của A: $E_1=\{a_1, a_3\}$, $E_2=\{a_2,a_4, a_5\}$, $E_3=\{ a_6\}$. Hãy tìm một quan hệ tương đương trên A nhận E1, E2, E3 làm các lớp tương đương?

Giải:

Ta có: $\{E_1, E_2, E_3\}$là một phân hoạch của A. Theo định lý 4.2, tồn tại quan một hệ tương đương trên A nhận E_1, E_2, E_3 làm các lớp tương đương.

Gọi R là quan hệ tương đương cần tìm.

Do R có tính phản xạ nên R có dạng:

$$R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\} \cup X$$

E_1 là một lớp tương đương của R nên R phải có chứa các cặp: (a_1,a_3), (a_3,a_1)

E_2 là một lớp tương đương của R, nên R phải có chứa các cặp: (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)

Vậy R cần tìm có thể là: $R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\}$

$$\cup \{(a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)\}$$

5. Quan hệ thứ tự:

Định nghĩa 5.1: Quan hệ R trên tập A gọi là quan hệ thứ tự khi và chỉ khi R có tính Phản xạ, phản xứng và bắt cầu.

Ghi chú: Thường kí hiệu quan hệ thứ tự bởi $<$ và $(A,<)$ gọi là tập có thứ tự.

Ví dụ 5.1: Cho tập $A=\{a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, Xét các quan hệ:

$R_1=\{(a_1, a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_5,a_5),(a_6,a_6),(a_7,a_7), (a_1,a_3), (a_3, a_5), (a_1,a_5), (a_5,a_7), (a_3,a_7), (a_1,a_7)\}$

$R_2=\{(a_1, a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_5,a_5),(a_6,a_6),(a_7,a_7), (a_1,a_4), (a_4, a_6), (a_1,a_3), (a_4,a_1), (a_3,a_7), (a_1,a_7)\}$

R_1 có phải là một quan hệ thứ tự trên A?

R_2 có phải là một quan hệ thứ tự trên A?

Quan hệ thứ tự (tiếp theo)

- Ta thấy:

  $\forall a \in A$, aR_1a. nên R_1 phản xạ

  $\forall a,b \in A$, $aR_1b \Rightarrow a=b$ nên R_1 phản xứng

  $\forall a,b,c \in A$, $aR_1b \wedge bR_1c \Rightarrow aR_1c$ nên R_1 bắc cầu

  Vậy R_1 là một quan hệ thứ tự trên A
- R_2 không phải là quan hệ thứ tự vì không phản xứng

<u>*Ví dụ 5.2*</u>: Quan hệ $\leq$ (so sánh nhỏ hơn hay bằng thông thường trên $\mathbb{R}$) trên tập số thực $\mathbb{R}$ là một quan hệ thứ tự. Tập ($\mathbf{R}$, $\leq$) là tập có thứ tự.

Quan hệ thứ tự (tiếp theo)

<u>Ví dụ 5.3</u>:Trên tập $\mathcal{P}$(E)={các tập con của E}, xét quan hệ R:

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$$

R là quan hệ thứ tự trên $\mathcal{P}$ (E). (c/m?)

c/m:

$\forall A \in P(E)$, $A \subset A \Rightarrow A \mathcal{R} A$. Vậy R phản xạ

$\forall A,B \in P(E)$, $A \subset B \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$. Vậy R phản ứng

$\forall A,B,C \in P(E)$, $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$. Vậy R bắt cầu

KL: $\subset$ là một thứ tự trên trên P(E) , (P(E), $\subset$) là tập có thứ tự

Quan hệ thứ tự (tiếp theo)

Ví dụ 5.4: Trên tập số nguyên dương ($\mathbb{Z}^+$), xét quan hệ chia hết như sau:

$\forall a,b \in \mathbb{Z}^+$, $a|b \Leftrightarrow$ b chia hết cho a

Chứng minh | là một thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$?

Giải:

$\forall a \in \mathbb{Z}^+$, $a|a$ (hiển nhiên). Vậy | có tính phản xạ

??????????

Quan hệ thứ tự (tiếp theo)

Định nghĩa 5.2: Cho tập có thứ tự (A,<) và x,y ∈ A.

i) Nếu x<y thì y được gọi là một trội của x (hay x được trội bởi y)

ii) y được gọi là một trực tiếp của x nếu y là một trội của x, hơn nữa không tồn tại z∈ A, z ≠x và z ≠y sao cho x<z và z<y.

Ví dụ 5.5: Cho tập có thứ tự ($\mathbb{Z}$,≤). Ta có:

5 là một trội của 3 (3 ≤ 5) nhưng không phải là trội trực tiếp của 3 vì có 4 là trội của 3 (3≤4) và 5 lại là trội của 4 (4≤5)

Ví dụ 5.6: Cho tập $A=\{a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, Xét quan hệ:

$R=\{(a_1, a_1), (a_2,a_2), a(a_3,a_3),a(a_4,a_4),a(a_5,a_5),a(a_6,a_6),(a_7,a_7), (a_1,a_3), (a_3, a_5),(a_1,a_5), (a_5,a_7), (a_3,a_7), (a_1,a_7)\}$

Quan hệ thứ tự (tiếp theo)

Ta thấy R là một quan hệ thứ tự trên A.

a_3 là một trội của a_1.(Hơn nữa a_3 là trội trực tiếp của a_1)

a_5 cũng là một trội của a_1 nhưng không là trội trực tiếp

Ví dụ 5.7: Cho $U_6=\{a\in \mathbb{Z}^+/a|6\}=\{1,2,3,6\}$, R là quan hệ trên U_6 được định nghĩa: $\forall a,b\in U_6$, $aRb \Leftrightarrow a|b$

Ta có: 2 và 3 là các trội trực tiếp của 1

6 là trội trực tiếp của 2 và 3

6 là trội của 1 nhưng không phải là trội trực tiếp của 1.

Thứ tự toàn phần

- **<u>Định nghĩa 5.3</u>**: Một thứ tự trên A gọi là toàn phần nếu mọi phần tử của A đều có thể so sánh được. Nghĩa là:

$$\forall x,y \in A \text{ thì } x \prec y \text{ hay } y \prec x.$$

<u>Ví dụ 5.8</u>: Quan hệ $\leq$ trên R là một thứ tự toàn phần, vì:

$$\forall x,y \in R, (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

<u>Ví dụ 5.9</u>: Quan hệ | trên $\mathbb{Z}^+$ là một thứ tự trên $\mathbb{Z}$ nhưng không phải là thứ tự tòan phần vì 5 và 7 (chẳng hạn) không thể so sánh được ($5 \nmid 7$) và ($7 \nmid 5$)

Biểu đồ Hasse của tập có thứ tự

- Ta đã biết cách biểu diễn một quan hệ trên tập A hữu hạn bằng đồ thị.
- Đối với đồ thị ứng với một thứ tự < trên tập A hữu hạn:
  - Mọi đỉnh đều có khuyên
  - Nếu ngầm hiểu các khuyên và các cung bắc cầu là luôn có, ta có thể đơn giản bằng cách không vẽ các cung này. Khi đó ta được biểu đồ Hasse.
- Ví dụ: Đồ thị biểu diễn của $(\{1,2,4,6,8,12\},|)$?

Cách vẽ biểu đồ Hasse

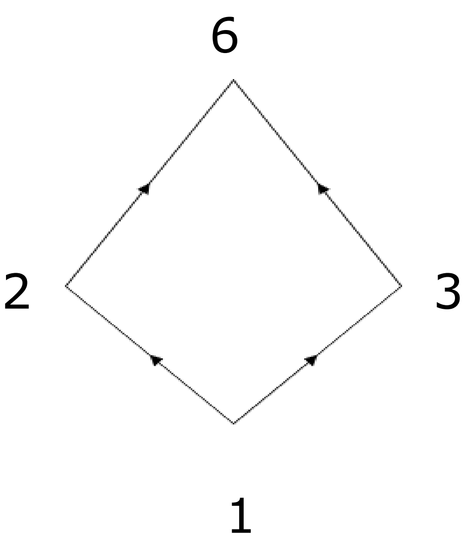
Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự (A,<) bao gồm:

- Tập các điểm trong mặt phẳng, mỗi điểm tương ứng là một phần tử trong A.

- Một cung có hướng từ x đến y nếu y là một trội trực tiếp của x.

Ví dụ 5.10: Biểu đồ Hasse của

$(\{1,2,3,6\},|)$



✍ *Đồ thị biểu diễn của một quan hệ thứ tự sau khi bỏ đi các khuyên và các cầu ta được biểu đồ Hasse*

Biểu đồ Hasse (tt)

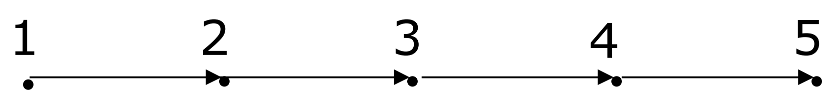
Ví dụ 4.6:

a) Vẽ biểu đồ Hasse cho tập có thứ tự (A,|) với A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}?

b) Vẽ biểu đồ Hasse cho tập có thứ tự (P(E),⊂) với E={1,2,3}?

✍ *Biểu đồ Hasse của tập thứ tự toàn phần là một dây chuyền.*

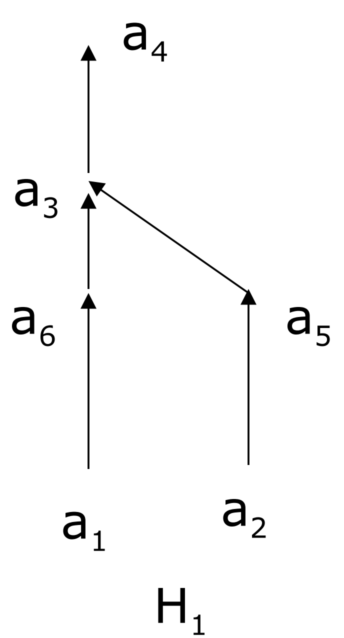
Ví dụ 4.7: Biểu đồ Hasse của ({1,2,3,4,5}, ≤)



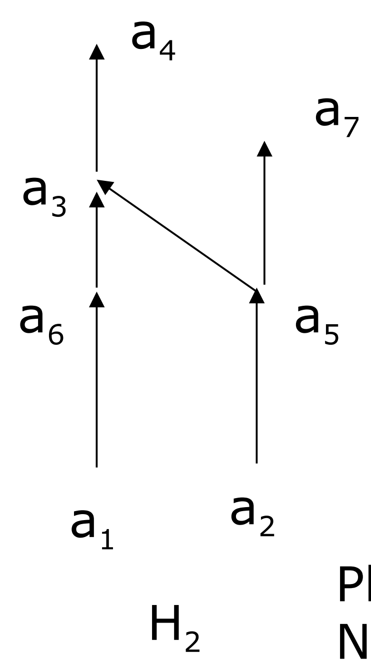
Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

Định nghĩa 5.4: Cho tập có thứ tự (A,<), và m∈ A. m được gọi là phần tử lớn nhất khi và chỉ khi m là trội của tất cả các phần tử khác trong A.

Ví dụ 4.8: Tập có thứ tự cho bởi biểu đồ Hasse:



Phần tử lớn nhất?
Nhỏ nhất?

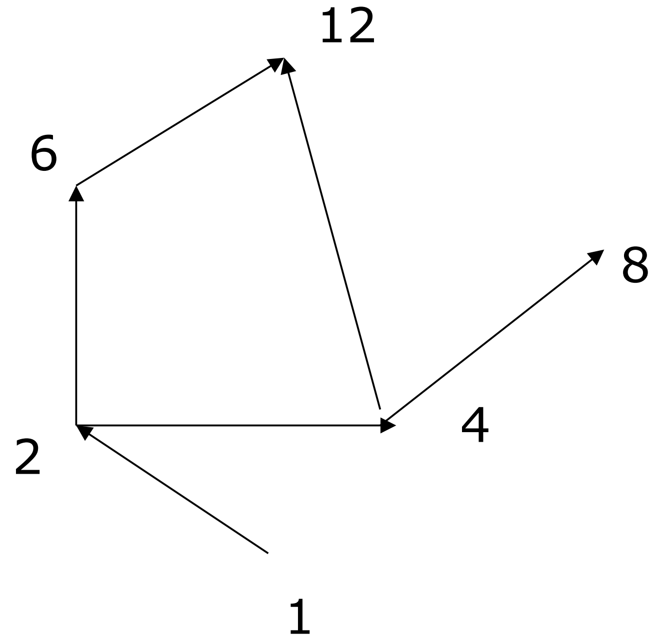


Phần tử lớn nhất?
Nhỏ nhất?

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất

Định nghĩa 5.5. Cho tập có thứ tự (A,<). n∈A gọi là phần tử nhỏ nhất nếu n được trội bởi tất cả các phần tử khác trong A

Ví dụ 4.9: Cho tập có thứ tự ({1,2,4,6,8,12},|). Biểu đồ Hasse như sau:



Phần tử tối đại? Tối tiểu? lớn nhất? Nhỏ nhất?

Phần tử tối tiểu và tối đại

Định nghĩa 5.6: Cho tập có thứ tự (A,<)

i) $m \in A$ gọi là phần tử tối đại nếu không có bất kỳ trội thực sự nào khác của m.

ii) $n \in A$ gọi là phần tử tối tiểu nếu n không là trội của bất kỳ phần tử nào khác

Ví dụ: Trong ví dụ 4.8, Hình 1 có 1 phần tử cực đại là a_4 và 2 phần tử cực tiểu là a_1 và a_2

Trong ví dụ 4.8, Hình 2 có 2 phần tử cực đại là a_4 và a_7, 2 phần tử cực tiểu là a_1 và a_2

Trong ví dụ 4.9, tập A có 2 phần tử cực đại là 8 và 12 và 1 phần tử cực tiểu là 1

Phần tử tối tiểu và tối đại

Định lý 5.1: Cho tập có thứ tự (A,<)

i) Phần tử lớn nhất của A (nếu có) là phần tử tối đại duy nhất Suy ra cũng là phần tử lớn nhất duy nhất.

ii) Phần tử nhỏ nhất của A (nếu có) là phần tử tối tiểu duy nhất Suy ra cũng là phần tử nhỏ nhất duy nhất.

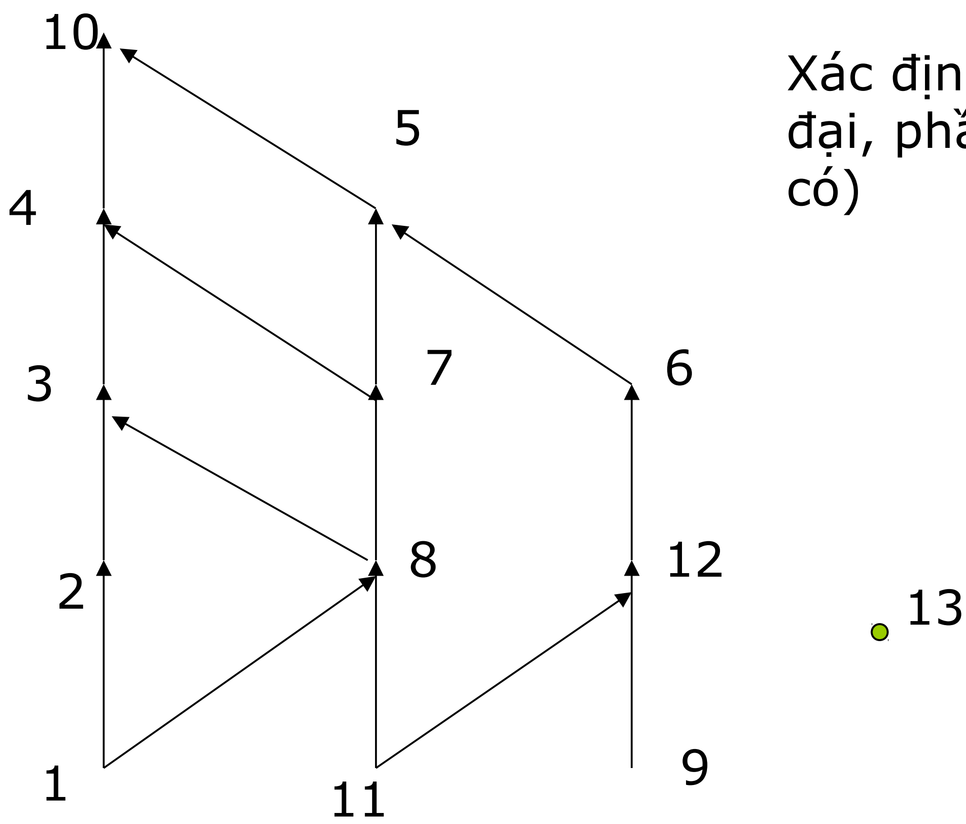
Ví dụ 5.11: Vẽ biểu đồ Hasse cho tập thứ tự (A,R) với:

$A=\{a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, $R=\{(a_1, a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3), (a_4,a_4), (a_5,a_5), (a_6,a_6), (a_7,a_7), (a_1,a_3), (a_3, a_5), (a_1,a_5), (a_5,a_7), (a_3,a_7), (a_1,a_7)\}$

Xác định các phần tử cực đại, cực tiểu của A? Có tồn tại phần tử lớn nhất, nhỏ nhất hay không?

Phần tử tối tiểu và tối đại

- Cho tập thứ tự ứng với với biểu đồ Hasse đây:



Xác định các phần tử tối tiểu và tối đại, phần tử lớn nhất/nhỏ nhất (nếu có)

Bài tập

1) Cho tập A={2,4,6} và B={a,b,c,d}

a) Có bao nhiêu quan hệ khác nhau có thể có giữa A và B?
b) Có bao nhiêu quan hệ có chứa cặp (2,b)?
c) Có bao nhiêi quan hệ không chứa cặp (1,a) và (3,b)?

d) Có bào nhiêu quan hệ có đúng 5 cặp (a,b) với $a \in A$ và $b \in B$?

Bài tập

2) Đối với từng quan hệ trên tập {1,2,3,4} được cho dưới đây, quan hệ nào có tính:phản xạ, đối xứng, bắc cầu:

a) {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}

b) {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

c) {(2,4), (4,2)}

d) {(1,2), (2,3), (3,4)}

c) {(1,1), (2,2),(3,3), (4,4)}

e) {(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)}

Bài tập

3). Xác định quan hệ R trên Z là phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu hay không. Trong đó, $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu:

a) $x \neq y$

b) $x.y \geq 1$

c) $x=y+1$ hay $x=y-1$

d) $x \equiv y \pmod 7$

e) $x.y>0$

f) $x=y^2$

Bài tập

4) Cho tập A={1,2,3,4,5,6,7} và quan hệ trên A:

R={(6,1),(6,5),(1,4) , (3,2),(5,3), (3,7),(4,3)}.

a) Biểu diễn quan hệ đã cho bằng đồ thị và ma trận.

b) Hãy bổ sung tối thiểu các bộ vào R để R trở thành quan hệ thứ tự trên A, từ đó xác định phần tử cực tiểu, cực đại và phần tử nhỏ và phần tử lớn nhất của A (nếu có).

5) Cho tập A={a1,a2,a3,a4,a5}. Xét quan hệ trên A:

R={(a1,a2), (a3,a2), (a4,a5)}

a) Biễu diễn quan hệ đã cho bằng đồ thị và ma trận.
b) Hãy bổ sung số lượng tối thiểu các bộ vào R để R là trở thành một quan hệ tương đương trên A? Từ đó xác định các lớp tương đương.