www.thuvien247.net

ĐỖ ĐỨC GIÁO

Hướng dẫn giải bài tập TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

www.thuvien247.net

ĐỖ ĐỨC GIÁO

Hướng dẫn giải bài tập
TOÁN RỜI RẠC

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

www.thuvien247.net

Công ty Cổ phần sách Đại học - Dạy nghề – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

04 – 2009/CXB/453 – 2117/GD Mã số : 7K678y9 – DAI

www.thuvien247.net

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay ở nước ta có một số tài liệu viết và dịch về Toán rời rạc dưới dạng lý thuyết, còn tài liệu về Bài tập toán rời rạc hầu như rất ít (nếu không muốn nói là chưa có).

Để nâng cao chất lượng giảng dạy và học tập môn Toán rời rạc, chúng tôi biên soạn cuốn "Hướng dẫn giải bài tập Toán rời rạc", trước mắt chỉ gồm: Ngôn ngữ, Đồ thị và Lôgic. Mỗi chương của cuốn sách được mở đầu bằng phần Tóm tắt lý thuyết, sau đó là Bài tập giải mẫu và Bài tập tự giải.

Cuốn "Hướng dẫn giải bài tập Toán rời rạc" giúp người học thông qua làm bài tập hiểu được lý thuyết thấu đáo hơn, rèn kuyện tư duy khoa học, kỹ năng tính toán và khả năng vận dụng toán học vào giải quyết vấn đề, kích thích niềm say mê học tập và từ đó nâng cao kỹ năng thực hành, tư duy sáng tạo khi học các môn học cơ sở và chuyên ngành Công nghệ thông tin tiếp theo. Cuốn sách này cũng rất bổ ích cho việc ôn thi tuyển sinh sau đại học ngành Công nghệ thông tin được tổ chức hàng năm ở Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tác giả chân thành cảm ơn Hội đồng Khoa học Tự nhiên (Bộ Khoa học và Công nghệ) đã tài trợ đề tài NCCB mã số 22 (2004 – 2005) của tác giả. Cuốn Hướng dẫn giải bài tập Toán rời rạc là một trong những sản phẩm của đề tài NCCB nói trên.

Tác giả chân thành cảm ơn Trường Đại học Công nghệ – ĐHQG Hà Nội (cơ quan chủ đề tài) và các bạn đồng nghiệp, đặc biệt là GS.TS. Đặng Huy Ruận (Trường ĐHKHTN); PGS.TS. Hồ Sỹ Đàm, TS. Nguyễn Tuệ, TS. Nguyễn Việt Hà (Trường ĐHCN); PGS.TS. Vũ Đức Thi và TSKH. Phạm Trần Nhu (Viện CNTT Quốc gia) đã đọc bản thảo và động viên tác giả trong thời gian biên soạn cuốn sách này.

Do thời gian dành cho việc biên soạn không nhiều và lần đầu tiên sách được viết dưới dạng bài tập, nên khó tránh khỏi những sai sót về hình thức cũng như về nội dung. Vì vậy, tác giả mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng tốt hơn. Mọi sự góp ý xin gửi về: Công ty Cổ phần Sách Đại học và Dạy nghề: 25 Hàn Thuyên – Hà Nội.

TÁC GIẢ

www.thuvien247.net

MỤC LỤC

www.thuvien247.net

Phần 2. ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

www.thuvien247.net

Phần 3. LÔGIC VÀ ỨNG DỤNG

www.thuvien247.net

PHẦN 1

NGÔN NGỮ HÌNH THỨC, VĂN PHẠM VÀ ÔTÔMAT

Chương 1

VĂN PHẠM VÀ NGÔN NGỮ SINH CỦA VĂN PHẠM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ngôn ngữ hình thức

- Giả sử Σ là một tập không rỗng và hữu hạn các phần tử. Σ gọi là bảng chữ cái của ngôn ngữ. Xâu ω trên bảng chữ cái Σ là một dãy các phần tử của Σ đứng liền nhau: $\omega = x_1x_2...x_n$, với $x_i \in \Sigma$. Ta quy ước xâu rỗng là xâu không có phần tử nào và ký hiệu là λ. Độ dài của xâu ω ký hiệu là $l(\omega)$ ($l(\omega)$:= số ký tự có mặt trong xâu ω). Σ^* := tất cả các xâu (kể cả xâu rỗng) được tạo thành từ các phần tử của Σ. $\Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$ = tất cả các xâu (không kể xâu rỗng) được tạo thành từ các phần tử của Σ.
- Mỗi tập $L \subseteq \Sigma^*$ gọi là một ngôn ngữ hình thức (còn gọi là ngôn ngữ) trên bảng chữ cái Σ. Bản thân ký hiệu tập rỗng $\varnothing$ và tập gồm một xâu rỗng $\{\lambda\}$ cũng là ngôn ngữ trên bảng chữ cái Σ. Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ thì theo định nghĩa : $\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, ...\}$ = tập tất cả các xâu được tạo thành từ các phần tử 0, 1 đứng liền nhau có độ dài bằng 0, 1, 2, ...
- Từ các ngôn ngữ cho trước, ta nhận được các ngôn ngữ mới trên bảng chữ cái đó bằng cách áp dụng các phép toán hợp ($\cup$), nhân ghép (.) và phép lặp (*). Chẳng hạn, từ ngôn ngữ $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ta có các ngôn ngữ mới $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$, L^*, $L^+ \subseteq \Sigma^*$, trong đó:

  $L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1$ hoặc $\omega \in L_2\}$;

  $L_1.L_2 = \{\omega_1\omega_2 \mid \omega_1 \in L_1$ và $\omega_2 \in L_2\}$;

  $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 ... \cup L^n \cup ...$, ở đây $L^0 = \{\lambda\}$, $L^n = L^{n-1}.L$;

  $L^+ = L \cup L.L \cup L.L.L ... = L^* \setminus \{\lambda\}$.

www.thuvien247.net

- Một vấn đề được đặt ra: Cho $L \subseteq \Sigma^*$ và $\omega \in \Sigma^*$, làm thế nào để biết được $\omega \in L$ hay $\omega \notin L$? Đây là vấn đề biểu diễn ngôn ngữ có liên quan tới văn phạm.

2. Văn phạm và ngôn ngữ sinh của văn phạm

Định nghĩa văn phạm

Văn phạm là bộ 4: $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, ở đây:

- $\Sigma \neq \varnothing$, hữu hạn các phần tử (gọi là các phần tử kết thúc), Σ là từ điển cơ bản (hay còn gọi là từ điển kết thúc);
- $\Delta \neq \varnothing$, hữu hạn các phần tử (gọi là các phần tử không kết thúc), Δ là từ điển hỗ trợ (hay còn gọi là từ điển không kết thúc) ($\Sigma \cap \Delta = \varnothing$);
- $I \in \Delta$ gọi là ký hiệu ban đầu;
- $R = \{\alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in V^*\Delta V^*, \beta \in V^*\}$ gọi là tập các quy tắc của văn phạm ($V = \Sigma \cup \Delta$ gọi là từ điển đầy đủ của văn phạm).

Định nghĩa ngôn ngữ sinh của văn phạm

Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ và $\omega \in \Sigma^*$. Ta nói xâu ω có dẫn xuất đầy đủ trong G (ký hiệu $D(\omega)$) khi và chỉ khi $D(\omega) = (\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- $\omega_i \in V^*$ $(i = 0, 1, ..., n)$;
- $\omega_0 = I \in \Delta$, $\omega_n = \omega \in \Sigma^*$;
- $\omega_{i-1} \models \omega_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$, có nghĩa là ω_i nhận được từ ω_{i-1} bằng cách áp dụng một quy tắc nào đó trong R.

Trong trường hợp này, ta nói xâu ω được văn phạm G sinh ra, hay xâu ω có dẫn xuất đầy đủ trong G và ký hiệu là $I \underset{G}{\models\!\!-} \omega$ hay $I \models\!\!- \omega$.

L(G) là ký hiệu tập ngôn ngữ sinh của G và được định nghĩa:

$$L(G) := \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \text{ và } I \models\!\!- \omega\}.$$

3. Phân loại văn phạm của Chomsky

Trong phân loại văn phạm, Chomsky gọi văn phạm định nghĩa như trên là văn phạm cấu trúc câu (còn gọi là văn phạm ngữ cấu).

Văn phạm loại 0: Văn phạm cấu trúc câu (VPCTC) G là văn phạm mà R có dạng: $R = \{\alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in V^*\Delta V^*, \beta \in V^*\}$.

Văn phạm loại 1: Văn phạm cảm ngữ cảnh (VPCNC) G là văn phạm mà R có dạng: $R = \{\alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in V^+, \beta \in V^* \text{ và } l(\alpha) \leq l(\beta)\}$.

Văn phạm loại 2: Văn phạm phi ngữ cảnh (VPPNC) G là văn phạm mà R có dạng: $R = \{A \rightarrow \theta \mid A \in \Delta, \theta \in V^*\}$.

Văn phạm loại 3: Văn phạm chính quy (VPCQ) G là văn phạm mà R có dạng: $R = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$.

www.thuvien247.net

Chú ý 1: Nếu trong định nghĩa VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với $R = \{A \to aB, A \to a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$ mà ta thêm vào R quy tắc $A \to \lambda$, tức là R có dạng $R = \{A \to aB, A \to a, A \to \lambda \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma, \lambda$ là xâu rỗng$\}$ thì văn phạm G được gọi là VPCQ suy rộng. Như vậy, VPCQ cũng là VPCQ suy rộng và ngôn ngữ của chúng chỉ sai khác nhau một xâu rỗng.

Chú ý 2:

- Văn phạm được phân loại có tên là gì thì ngôn ngữ sinh của nó cũng có tên như vậy.
- Ngôn ngữ văn phạm chính quy viết tắt là NNCQ; ngôn ngữ văn phạm phi ngữ cảnh viết tắt là NNPNC; ngôn ngữ văn phạm cảm ngữ cảnh viết tắt là NNCNC; ngôn ngữ văn phạm cấu trúc câu viết tắt là NNCTC. Ta có bao hàm thức sau:

$$\text{NNCQ} \subset \text{NNPNC} \subset \text{NNCNC} \subset \text{NNCTC}.$$

4. Một số thuật toán thường gặp trên lớp các văn phạm

a) Thuật toán tương đương

Hai văn phạm G và G' tương đương (ký hiệu $G \approx G'$) khi và chỉ khi $L(G) = L(G')$.

Bài toán: input $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$;

output $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G$.

Bước 1: $\Delta' := \Delta \cup \overline{\Sigma}$, với $\overline{\Sigma} = \{\bar{a} \mid a \in \Sigma\}$.

Bước 2: $R' := \widehat{R} \cup \overline{R}$, với $\widehat{R}$ = tập tất cả các quy tắc nhận được từ các quy tắc của R, bằng cách thay ký tự $a \in \Sigma$ bởi ký tự đối ngẫu $\bar{a} \in \overline{\Sigma}$ và $\overline{R} = \{\bar{a} \to a \mid a \in \Sigma\}$.

Với G' xây dựng như trên thì $G' \approx G$.

b) Thuật toán hợp các ngôn ngữ sinh của văn phạm

Bài toán: input $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ $(i = 1, 2, ..., n)$;

output $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ có $L(G) = \bigcup_{i=1}^{n} L(G_i)$.

Bước 1: $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

Bước 2: $\Delta = \{I\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$.

Bước 3: $R = \{I \to I_1, ..., I \to I_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} R_i$.

Với G xây dựng như trên thì $L(G) = \bigcup_{i=1}^{n} L(G_i)$.

www.thuvien247.net

c) Thuật toán nhân ghép ngôn ngữ văn phạm

Bài toán: input $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ $(i = 1, 2, ..., n)$;

output $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ có $L(G) = \prod_{i=1}^{n} L(G_i) = L(G_1).L(G_2)...L(G_n)$.

Bước 1: $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

Bước 2: $\Delta = \{I\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$.

Bước 3: $R = \{I \to I_1 I_2 ... I_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} R_i$.

Với G xây dựng như trên thì

$$L(G) = \prod_{i=1}^{n} L(G_i) = \{\omega_1\omega_2 ... \omega_n \mid \omega_i \in L(G_i), i = 1, ..., n\}.$$

Chú ý:

- Trong mục 1 ta đã dùng phép toán hợp ($\cup$), phép nhân ghép (.) và phép lặp (*) để tạo ra ngôn ngữ mới từ các ngôn ngữ đã cho.
- Trong mục 4 ta chỉ cần hai thuật toán hợp và nhân ghép các văn phạm cũng tạo ra ngôn ngữ mới, vì phép lặp là sự kết hợp hai phép toán hợp và nhân ghép mà thôi.

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với tập quy tắc

$$R = \{I \xrightarrow{1} IA_1a_1, I \xrightarrow{2} IA_2a_2, I \xrightarrow{3} b, a_1A_1 \xrightarrow{4} A_1a_1, a_1A_2 \xrightarrow{5} A_2a_1,$$
$$a_2A_1 \xrightarrow{6} A_1a_2, a_2A_2 \xrightarrow{7} A_2a_2, bA_1 \xrightarrow{8} a_1b, bA_2 \xrightarrow{9} a_2b\}.$$

- Viết đầy đủ G theo định nghĩa.
- G là văn phạm loại gì theo phân loại của Chomsky?
- Tìm ngôn ngữ sinh của G.

Giải

- $\Sigma = \{a_1, a_2, b\}$; $\Delta = \{I, A_1, A_2\}$; $I \in \Delta$ là ký hiệu ban đầu, còn tập quy tắc R cho như trên.
- G là VPCTC (không phải là VPPNC và VPCQ).
- $L(G) = \{\omega b\omega \mid \omega \in \{a_1, a_2\}^*\}$. Chẳng hạn, với $\omega = a_2a_1$ thì $\omega b\omega = a_2a_1ba_2a_1$ có dẫn xuất đầy đủ trong G là $D(a_2a_1ba_2a_1) = (I, {}_1IA_1a_1, {}_2IA_2a_2A_1a_1, {}_3bA_2a_2A_1a_1, {}_9a_2ba_2A_1a_1, {}_6a_2bA_1a_2a_1, {}_8a_2a_1ba_2a_1)$

www.thuvien247.net

và với $a_1a_2 = \omega$ thì $\omega b\omega = a_1a_2ba_1a_2$ có dẫn xuất đầy đủ $D(a_1a_2ba_1a_2) =$ $(I, {}_2IA_2a_2, {}_1IA_1a_1A_2a_2, {}_3bA_1a_1A_2a_2, {}_8a_1ba_1A_2a_2, {}_5a_1bA_2a_1a_2, {}_9a_1a_2ba_1a_2)$.

2. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với tập quy tắc

$$R = \{I \xrightarrow{1} aIa, I \xrightarrow{2} bIb, I \xrightarrow{3} cIc, I \xrightarrow{4} dId, I \xrightarrow{5} aa, I \xrightarrow{6} bb, I \xrightarrow{7} cc, I \xrightarrow{8} dd\}.$$

Tìm ngôn ngữ sinh của G.

Giải. $L(G) = \{\omega\hat{\omega} \mid \omega \in \{a, b, c, d\}^+\}$, ở đây $\hat{\omega}$ là ảnh gương của ω. Giả sử $\omega = x_1x_2 \ldots x_n$, khi đó ảnh gương của ω là $\hat{\omega} = x_n \ldots x_2x_1$. Ta chỉ ra xâu $\omega\hat{\omega} = x_1x_2\ldots x_nx_n\ldots x_2x_1$ có dẫn xuất đầy đủ trong G:

$$D(\omega\hat{\omega}) = (I, \underset{1,2,3,4}{x_1Ix_1}, \ldots, \underset{1,2,3,4}{x_1x_2\ldots x_{n-1}I_{n-1}\ldots x_2x_1}, \underset{5,6,7,8}{x_1x_2\ldots x_{n-1}x_nx_nx_{n-1}\ldots x_2x_1} = \omega\hat{\omega}).$$

3. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với tập quy tắc

$$R = \{I \to aIa, I \to bIb, I \to cIc, I \to dId, I \to x\}.$$

Tìm NNPNC của văn phạm đã cho.

Giải. $L(G) = \{\omega x\hat{\omega} \mid \omega \in \{a, b, c, d\}^*, \hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$. Chứng minh dẫn xuất đầy đủ của $\omega x\hat{\omega}$ tương tự như bài tập 2 ở trên.

4. Cho VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với:

$\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; $\Delta = \{I, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ và

$R = \{I \to a_1A_1, A_1 \to a_2A_2, \ldots, A_{n-2} \to a_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1} \to a_n \mid n \geq 2\}$.

Tìm ngôn ngữ sinh của văn phạm trên.

Giải. $L(G) = \{\omega = a_1a_2 \ldots a_n\}$. Thật vậy, dẫn xuất đầy đủ của xâu ω là:

$$D(\omega) = (I, a_1A_1, a_1a_2A_2, \ldots, a_1a_2 \ldots a_{n-1}A_{n-1}, a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n = \omega).$$

5. Cho VPPNC G với tập quy tắc

$$R = \{I \to aI, I \to aB, B \to bB, B \to bbD, D \to cD, D \to ccc\}.$$

Tìm ngôn ngữ sinh của nó.

Giải. $L(G) = \{a^nb^mc^k \mid n \geq 1, m \geq 2, k \geq 3\}$. Dẫn xuất đầy đủ của $a^nb^mc^k$ là:

$D(a^nb^mc^k) = (I, aI, a^2I, \ldots a^nB, a^nbB, \ldots, a^nb^{m-2}B, a^nb^mD, a^nb^mcD, \ldots,$ $a^nb^mc^{k-3}D, a^nb^mc^k)$.

6. Xây dựng VPCNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho:

$L(G) = \{n^2 \mid n = 1, 2, \ldots\}$;

$\Sigma = \{\,|\,\}$; $\Delta = \{I, A, B, C, D, E, F\} \mid I \in \Delta$ là ký tự ban đầu;

$R = \{I \to ABBDF\}$	(1)	$BD \to DCB$	(2)	$BC \to CB$	(3)
$D \to AAE$	(4)	$EC \to AE$	(5)	$EB \to BE$	(6)
$EF \to BBDF$	(7)	$DF \to \,|$	(8)	$B \to \,|$	(9)
$A \to \,|$	(10)	$I \to \,|$	(11)\}		

là văn phạm sinh ra ngôn ngữ $L(G) = \{n^2 \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

www.thuvien247.net

Giải

- $n = 1$, $1^2 = 1 = |$: dẫn xuất của 1^2 là $D(1^2) = (I, {}_{11}| = 1 = 1^2)$.
- $n = 2$, $2^2 = 4 = ||||$: $D(2^2) = (I, {}_1ABBDF, {}_8ABB|, {}_{10}|BB|, {}_9||B|, {}_9|||| = |^4 = 2^2)$.
- $n = 3$, $3^2 = 9 = |^9$:

  $D(3^2) = (I, {}_1ABBDF, {}_2ABDCBF, {}_2ADCBCBF, {}_4AAECBCBF,$
  ${}_3AAECCBBF, {}_5AAAECBBF, {}_5AAAAEBBF, {}_6A^4BEBF,$
  ${}_6A^4BBEF, A^4BBBBDF, {}_8A^4B^4|, {}_{10}|^4B^4|, {}_9|^4|^4| = |^9)$.
- Một cách tổng quát, với $\omega = \underbrace{|\ldots|}_{n^2} = |^{n^2}$ ta có dẫn xuất đầy đủ là

$$D(n^2) = (I, ABBDF, \ldots A^{(n-1)}B^{2(n-1)}DF, A^{(n-1)^2}B^{2(n-1)}|, A^{(n-1)^2}|^{2(n-1)}|,$$
$$|^{(n-1)^2}|^{2(n-1)}| = |^{(n-1)^2+2(n-1)+1} = |^{n^2}).$$

7. Cho ngôn ngữ $L = \{ab(xyz)^n ba, ab^m a \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ trên bảng chữ cái $\Sigma = \{a, b, x, y, z\}$. Xây dựng VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải. $\Sigma = \{a, b, x, y, z\}$; $\Delta = \{I, A_1, A_2, A_3, A_4, B\}$;

$$R = \{I \to aA_1, A_1 \to bA_2, A_2 \to xA_3, A_3 \to yA_4, A_4 \to zA_2,$$
$$A_2 \to bA_5, A_5 \to a, I \to aB, B \to bB, B \to a\}.$$

Ta chỉ ra với R như trên thì $L(G) = \{ab(xyz)^n ba, ab^m a \mid n, m \geq 0\}$ với dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega_1 = ab(xyz)^n ba$ và xâu $\omega_2 = ab^m a$ là: $D(\omega_1) = (I, aA_1, abA_2, abxA_3, abxyA_4, abxyzA_2, \ldots, ab(xyz)^n A_2, ab(xyz)^n bA_5, ab(xyz)^n ba)$ và $D(\omega_2) = (I, aB, abB, \ldots, ab^m B, ab^m a)$.

8. Cho ngôn ngữ $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.

Giải. $R = \{I \xrightarrow{1} 0I1, I \xrightarrow{2} \lambda\}$. Rõ ràng $L(G) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, vì với $n = 0$ thì $\omega = \lambda$. Dẫn xuất đầy đủ của $\omega = \lambda$ là $D(\lambda) = (I, \lambda)$. Với $n > 0$ thì dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega = 0^n 1^n = \underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{11\ldots1}_{n}$ là

$$D(0^n 1^n) = (I, {}_1 0I1, {}_1 0^2I1^2, \ldots, {}_1 0^nI1^n, {}_2 0^n 1^n).$$

9. Cho $L = \{\omega + \hat{\omega} \mid \omega \in \{0,1\}^*, \hat{\omega}$ là ảnh gương của xâu $\omega\}$. Xây dựng VPPNC đầy đủ theo định nghĩa $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải. $\Sigma = \{0, 1, +\}$; $\Delta = \{I\}$; $R = \{I \xrightarrow{1} 0I0, I \xrightarrow{2} 1I1, I \xrightarrow{3} +\}$.

Ta chỉ ra $L(G) = \{\omega + \hat{\omega} \mid \omega \in \{0,1\}^*$ và $\hat{\omega}$ là ảnh gương của xâu $\omega\}$. Trường hợp $\omega = \lambda$ thì xâu $\omega + \hat{\omega} = +$. Dẫn xuất đầy đủ của xâu này là $D(+) = (I, {}_3+)$. Cho $\omega = x_1x_2\ldots x_n$ và $\hat{\omega} = x_n\ldots x_2x_1$, khi đó xâu $\omega + \hat{\omega}$ có dẫn xuất đầy đủ là $D(\omega + \hat{\omega}) = (I, {}_{1,2}x_1Ix_1, {}_{1,2}x_1x_2Ix_2x_1, \ldots, {}_{1,2}x_1x_2\ldots x_nIx_n\ldots x_2x_1, {}_3\omega + \hat{\omega})$, ở đây $x_i \in \{0, 1\}$, nếu $x_i = 0$ thì chọn quy tắc 1, còn $x_i = 1$ thì chọn quy tắc 2 trong tập quy tắc R ở trên.

www.thuvien247.net

10. Cho ngôn ngữ $L = \{\omega\hat{\omega}, a^{2n}, b^m c \mid \omega \in \{a, b, c\}^*$, $\hat{\omega}$ là ảnh gương của ω, $n \geq 1$, $m \geq 0\}$ trên bảng $\Sigma = \{a, b, c\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ đầy đủ theo định nghĩa sao cho $L(G) = L$.

Giải. $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{I, I_1, I_2, I_3\}$ và

$$R = \left\{ I \xrightarrow{1} I_1,\ I \xrightarrow{2} I_2,\ I \xrightarrow{3} I_3,\ I_1 \xrightarrow{4} aI_1a,\ I_1 \xrightarrow{5} bI_1b,\ I_1 \xrightarrow{6} cI_1c,\ I_1 \xrightarrow{7} \lambda,\right.$$

$$\left. I_2 \xrightarrow{8} aI_2a,\ I_2 \xrightarrow{9} aa,\ I_3 \xrightarrow{10} bI_3,\ I_3 \xrightarrow{11} c \right\}.$$

Với R như vậy thì $L(G) = L$ đã cho. Thật vậy, trước hết chỉ ra dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega\hat{\omega}$ với $\omega \in \{a, b, c\}^*$.

– Trường hợp $\omega = \lambda$ thì $\omega\hat{\omega} = \lambda$ và dẫn xuất đầy đủ của λ là

$$D(\lambda) = (I, {}_1I_1, {}_7\lambda).$$

– Trường hợp $\omega \neq \lambda$ và $\omega = x_1x_2 \ldots x_n$ ($x_i \in \{a, b, c\}$) thì dẫn xuất đầy đủ của $\omega\hat{\omega} = x_1x_2 \ldots x_nx_n \ldots x_2x_1$ là

$$D(\omega\hat{\omega}) = (I, {}_1I_1, {}_{4,5,6}x_1I_1x_1, \ldots, {}_{4,5,6}x_1x_2 \ldots x_{n-1}Ix_{n-1} \ldots x_2x_1, {}_7x_1 \ldots x_nx_n \ldots x_1 = \omega\hat{\omega}).$$

Dẫn xuất đầy đủ của xâu $a^{2n} = aa \ldots a$ (2n lần a) là

$$D(a^{2n}) = (I, {}_2I_2, {}_8aI_2a, \ldots, {}_8a^{n-1}I_2a^{n-1}, {}_9a^{2n}).$$

Dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega = b^m c$ là

$$D(b^m c) = (I, {}_3I_3, {}_{10}bI_3, {}_{10}b^2I_3, \ldots, {}_{10}b^mI_3, {}_{11}b^mc).$$

11. Cho ngôn ngữ $L = \{a^nb^nc^m \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ trên bảng $\Sigma = \{a, b, c\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{a^nb^nc^m \mid n, m \geq 1\}$.

Giải. $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ R = \{I \xrightarrow{1} AB,\ A \xrightarrow{2} aAb,\ A \xrightarrow{3} ab,\ B \xrightarrow{4} cB,\ B \xrightarrow{5} c\}.$$

Với R như trên thì $L(G) = \{a^nb^nc^m \mid n, m \geq 1\}$ vì dẫn xuất đầy đủ của xâu $a^nb^nc^m$ là $D(a^nb^mc^m) = (I, {}_1AB, {}_2aAbB, {}_2a^2Ab^2B, \ldots, {}_2a^{n-1}Ab^{n-1}B, {}_3a^nb^nB, {}_4a^nb^ncB, \ldots, {}_4a^nb^nc^{m-1}B, {}_5a^nb^nc^m)$.

12. Cho ngôn ngữ $L = \{\omega c\hat{\omega}\omega'\hat{\omega}' \mid \omega \in \{a,b\}^*$, $\hat{\omega}$ là ảnh gương của ω và $\hat{\omega}'$ là ảnh gương của ω' trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải. $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với

$R = \{\{I \xrightarrow{1} AB,\ A \xrightarrow{2} aAa,\ A \xrightarrow{3} bAb,\ A \xrightarrow{4} c,\ B \xrightarrow{5} 0B0,\ B \xrightarrow{6} 1B1,\ B \xrightarrow{7} \lambda\}$ có $L(G) = L$.

www.thuvien247.net

– Trường hợp xâu $\omega = \omega' = \lambda$ thì $\omega c\hat{\omega}\omega'\hat{\omega}' = c$ có dẫn xuất đầy đủ là

$$D(c) = (I, {}_1AB, {}_4cB, {}_7c).$$

– Trường hợp $\omega \neq \lambda$ và $\omega = x_1x_2...x_n$ $(x_i \in \{a,b\})$ còn $\omega' = \lambda$ thì xâu $\omega c\hat{\omega}\omega'\hat{\omega}' = x_1x_2...x_ncx_n...x_2x_1$ có dẫn xuất đầy đủ là

$$D(\omega c\hat{\omega}) = (I, {}_1AB, {}_{2,3}x_1Ax_1, ..., {}_{2,3}x_1x_2...x_nAx_n...x_2x_1, {}_4\omega c\hat{\omega}).$$

– Trường hợp $\omega = \lambda$, $\omega' \neq \lambda$ với $\omega' = y_1y_2...y_m$ thì xâu $\omega c\hat{\omega}\omega'\hat{\omega}' = cy_1y_2...y_my_m...y_2y_1$ $(y_i \in \{0,1\})$ có dẫn xuất đầy đủ là

$$D(c\omega'\hat{\omega}') = I, {}_1AB, {}_4cB, {}_{5,6}cy_1By_1, ..., {}_{5,6}cy_1...y_mBy_m...y_1, {}_7cy_1...y_my_m...y_1$$
$$= c\omega'\hat{\omega}.$$

13. Cho ngôn ngữ $L = \{(11)^n0 \mid n \geq 0\}$ trên bảng $\Sigma = \{0,1\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải. VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ có $R = \{I \xrightarrow{1} 11I, I \xrightarrow{2} 0\}$ thỏa mãn

$$L(G) = \{(11)^n0 \mid n \geq 0\}.$$

Thật vậy:

– Trường hợp $n = 0$ xâu $(11)^00 = \lambda0 = 0$, dẫn xuất đầy đủ của 0 là

$$D(0) = (I, {}_20);$$

– Trường hợp $n \neq 0$, dẫn xuất đầy đủ của $(11)^n0$ là

$$D((11)^n0) = (I, {}_111I, ..., {}_1(11)^nI, {}_2(11)^n0).$$

14. Cho ngôn ngữ $L = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ trên bảng $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Xây dựng VPCTC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$.

Giải. VPCTC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ có tập quy tắc

$$R = \{I \to 0IAB, I \to \lambda, BA \to AB, 0A \to 01, 1A \to 11, 1B \to 12, 2B \to 22\},$$

với $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $\Delta = \{I, A, B\}$ sinh ra tập ngôn ngữ $L(G) = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$.

Chứng minh dành cho bạn đọc như là một bài tập tự luyện.

15. Cho ngôn ngữ $L = \{a^{2n}b^{2n}cd^{2m+1}ccd^{2m+1}c^l \mid n \geq 0, m \geq 0, l \geq 2\}$ trên bảng $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải

$$R = \{I \xrightarrow{1} AcBC, A \xrightarrow{2} aaAbb, A \xrightarrow{3} \lambda, B \xrightarrow{4} ddBdd, B \xrightarrow{5} dccd, C \xrightarrow{6} cC, C \xrightarrow{7} cc\}.$$

Để chứng minh $L(G) = L$, ta chỉ ra dẫn xuất đầy đủ của xâu

$$\omega = a^{2n}b^{2n}cd^{2m+1}ccd^{2m+1}c^l$$

là $D(\omega) = (I, {}_1AcBC; {}_2aaAbbcBC, ..., {}_2(aa)^nA(bb)^ncBC, {}_3a^{2n}b^{2n}cBC, {}_4a^{2n}b^{2n}cddBddC, ..., {}_4a^{2n}b^{2n}c(dd)^m B(dd)^mC, {}_5a^{2n}b^{2n}cd^{2m+1}ccd^{2m+1}C, {}_{6,...,6,7}a^{2n}b^{2n}cd^{2m+1}ccd^{2m+1}c^l = \omega).$

www.thuvien247.net

16. Cho hai văn phạm $G_1 = <\Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1>$ và $G_2 = <\Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2>$, với

$$R_1 = \{I_1 \xrightarrow{1} aI_1,\ I_1 \xrightarrow{2} a\}$$

và $R_2 = \{I_2 \xrightarrow{3} xA_1,\ A_1 \xrightarrow{4} xA_1,\ A_1 \xrightarrow{5} yA_2,\ A_2 \xrightarrow{6} yA_2,\ A_2 \xrightarrow{7} y\}$ tương ứng.

a) Viết đầy đủ G_1, G_2 theo định nghĩa và tìm $L(G_1)$, $L(G_2)$.

b) Xây dựng $G'_i = <\Sigma_i, \Delta'_i, I_i, R'_i> \approx G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ $(i = 1, 2)$.

c) Xây dựng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho:

- $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$;
- $L(G) = L(G_1).L(G_2) \cup L(G_2).L(G_1) \cup L(G_1) \cup L(G_2)$.

Giải. a) $G_1 = <\Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1>$ có $\Sigma_1 = \{a\}$, $\Delta_1 = \{I_1\}$, $I_1 \in \Delta_1$ là ký tự ban đầu, còn $R_1 = \{I_1 \xrightarrow{1} aI_1,\ I_1 \xrightarrow{2} a\}$; $G_2 = <\Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2>$ có $\Sigma_2 = \{x, y\}$, $\Delta_2 = \{I_2, A_1, A_2\}$, $I_2 \in \Delta_2$ là ký tự ban đầu, còn

$$R_2 = \{I_2 \xrightarrow{3} xA_1,\ A_1 \xrightarrow{4} xA_1,\ A_1 \xrightarrow{5} yA_2,\ A_2 \xrightarrow{6} yA_2,\ A_2 \xrightarrow{7} y\}.$$

Ta có $L(G_1) = \{a^n \mid n \geq 1\}$ vì dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega = a^n$ là

$$D_1(a^n) = (I_1,\ {}_1aI_1,\ {}_1a^2I_1, \ldots, {}_1a^{n-1}I_1,\ {}_2a^n)$$

và ta cũng có $L(G_2) = \{x^m y^k \mid m \geq 1, k \geq 2\}$ vì dẫn xuất đầy đủ của xâu $\omega = xyy$ $(m = 1, k = 2)$ là $D_2(xyy) = (I_2, {}_3xA_1, {}_5xyA_2, {}_7xyy)$, còn dẫn xuất đầy đủ của $x^m y^k$ là

$$D_2(x^m y^k) = (I_2, {}_3xA_1, {}_4x^2A_1, \ldots, {}_4x^mA_1, {}_5x^m yA_2, {}_6x^m y^2A_2, \ldots, {}_6x^m y^{k-1}A_2, {}_7x^m y^k).$$

b) $G'_1 = <\Sigma_1, \Delta'_1, I_1, R'_1> \approx G_1$ có dạng $\Sigma_1 = \{a\}$, $\Delta'_1 = \Delta_1 \cup \overline{\Sigma}_1 = \{I_1, \overline{a}\}$, $R'_1 = \hat{R}_1 \cup \overline{R}_1 = \{I_1 \to \overline{a}I_1,\ I_1 \to \overline{a},\ \overline{a} \to a\}$. Dễ dàng kiểm tra lại:

$L(G'_1) = \{a^n \mid n \geq 1\}$ hay $G'_1 \approx G_1$.

$G'_2 = <\Sigma_2, \Delta'_2, I_2, R'_2> \approx G_2 = <\Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2>$ có $\Sigma'_2 = \{x, y\}$;

$\Delta'_2 = \Delta_2 \cup \overline{\Sigma}_2 = \{I_2, A_1, A_2, \overline{x}, \overline{y}\}$ và $R'_2 = \hat{R}_2 \cup \overline{R}_2$

$= \{I_2 \to \overline{x}A_1,\ A_1 \to \overline{x}A_1,\ A_1 \to \overline{y}A_2,\ A_2 \to \overline{y}A_2,\ A_2 \to \overline{y},\ \overline{x} \to x,\ \overline{y} \to y\}$

$= \{I_2 \to \overline{x}A_1,\ A_1 \to \overline{x}A_1,\ A_1 \to \overline{y}A_2,\ A_2 \to \overline{y}A_2,\ A_2 \to \overline{y},\ \overline{x} \to x,\ \overline{y} \to y\}$.

Dễ dàng nhận thấy $L(G'_2) = L(G_2) = \{x^m y^k \mid m \geq 1, k \geq 2\}$, hay $G'_2 \approx G_2$.

c) • $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$ có văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với:

$\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, x, y\}$;

$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{I\} = \{I, I_1, I_2, A_1, A_2\}$, với I là ký tự ban đầu của G;

www.thuvien247.net

$R := \{I \to I_1, I \to I_2\} \cup R_1 \cup R_2 = \{I \xrightarrow{8} I_1, I \xrightarrow{9} I_2, I_1 \xrightarrow{1} aI_1, I_1 \xrightarrow{2} a,$

$I_2 \xrightarrow{3} xA_1, A_1 \xrightarrow{4} xA_1, A_1 \xrightarrow{5} yA_2, A_2 \xrightarrow{6} yA_2, A_2 \xrightarrow{7} y\}.$

Với G như vậy ta chỉ ra

$$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = \{a^n, x^m y^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 2\}.$$

Thật vậy, dẫn xuất đầy đủ của a^n là $D(a^n) = (I, {}_8 I_1, aI_1, ..., {}_1 a^{n-1}I_1, {}_2a^n)$ và của x^ny^k là $D(x^my^k) = (I, {}_9I_2, {}_3xA_1, {}_4x^2A_1, ..., {}_n x^nA_1, {}_5x^nyA_2, {}_6x^ny^2A_2, ..., {}_6x^ny^{k-1}A_2, {}_7x^ny^k)$.

• $L(G) = L(G_1).L(G_2) \cup L(G_2).L(G_1) \cup L(G_1) \cup L(G_2)$ có văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $\Sigma = \{a, x, y\}$, $\Delta = \{I, I_1, I_2, A_1, A_2\}$ và

$R = \{I \to I_1I_2, I \to I_2I_1, I \to I_1, I \to I_2\} \cup R_1 \cup R_2 = \{I \xrightarrow{8} I_1I_2, I \xrightarrow{9} I_2I_1, I \xrightarrow{10} I_1,$

$I \xrightarrow{11} I_2, I_1 \xrightarrow{1} aI_1, I_1 \xrightarrow{2} a, I_2 \xrightarrow{3} xA_1, A_1 \xrightarrow{4} xA_1, A_1 \xrightarrow{5} yA_2, A_2 \xrightarrow{6} yA_2, A_2 \xrightarrow{7} y\}.$

Với G như vậy ta có

$$L(G) = L(G_1).L(G_2) \cup L(G_2).L(G_1) \cup L(G_1) \cup L(G_2)$$
$$= \{a^nx^my^k, x^my^ka^n, a^n, x^my^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 2\}.$$

Thật vậy, ta có các dẫn xuất đầy đủ đối với từng xâu trong ngôn ngữ L(G) là:

$D(a^nx^my^k) = (I, {}_8I_1I_2, {}_1aI_1I_2, ..., {}_1a^{n-1}I_1I_2, {}_2a^nI_2, {}_3a^nxA_1, {}_4a^nx^2A_1, ...,$
${}_4a^nx^mA_1, {}_5a^nx^myA_2, {}_6a^nx^my^2A_2, ..., {}_6a^nx^my^{k-1}A_2, {}_7a^nx^my^k);$

$D(x^my^ka^n) = (I, {}_9I_2I_1, {}_3xA_1I_1, {}_4x^2A_1I_2, ..., {}_4x^mA_1I_1, {}_5x^myA_2I_1, {}_6x^my^2A_2I_1,$
$..., {}_6x^my^{k-1}A_2I_1, {}_7x^my^kI_1, {}_1x^my^kaI_1, ..., {}_1x^my^ka^{n-1}I_1, {}_2x^my^ka^n).$

17. Cho các văn phạm $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ $(i = 1, 2, 3)$ với:

$R_1 = \{I_1 \xrightarrow{1} aI_1b, I_1 \xrightarrow{2} ab\};$

$R_2 = \{I_2 \xrightarrow{3} aI_2a, I_2 \xrightarrow{4} bI_2b, I_2 \xrightarrow{5} aa, I_2 \xrightarrow{6} bb\};$

$R_3 = \{I_3 \xrightarrow{7} ABDE, A \xrightarrow{8} aA, A \xrightarrow{9} a, B \xrightarrow{10} bbB, B \xrightarrow{11} b, D \xrightarrow{12} aD,$

$D \xrightarrow{13} a, E \xrightarrow{14} bbE, E \xrightarrow{15} bb\}$

a) Viết đầy đủ G_i theo định nghĩa và tìm $L(G_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

b) Xây dựng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \cup L(G_3)$.

c) Xây dựng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L(G_1).L(G_2).L(G_3)$.

d) Xây dựng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho

$$L(G) = L(G_1).L(G_2).L(G_3) \cup L(G_2).L(G_1).L(G_3) \cup L(G_1).L(G_2) \cup L(G_3).$$

www.thuvien247.net

e) Xây dựng $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, ở đây G được xây dựng trong câu d.

Giải

a) $\Sigma_1 = \{a, b\}$, $\Delta_1 = \{I_1\}$ và R_1 cho ở trên tạo nên $G_1 = <\Sigma_1, \Delta_1, I_1, R_1>$;

$\Sigma_2 = \{a, b\}$, $\Delta_2 = \{I_2\}$ và R_2 cho ở trên tạo nên $G_2 = <\Sigma_2, \Delta_2, I_2, R_2>$;

$\Sigma_3 = \{a, b\}$, $\Delta_3 = \{I_3, A, B, C, E\}$ và R_3 cho ở trên tạo nên

$$G_3 = <\Sigma_3, \Delta_3, I_3, R_3>.$$

Ta có: $L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$;

$L(G_2) = \{\omega\hat{\omega} \mid \omega \in \{a,b\}^+$, $\hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$;

$L(G_3) = \{a^n(bb)^m ba^k(bb)^l \mid n \geq 1, m \geq 0, k \geq 1, l \geq 1\}$.

Đối với $L(G_1)$ và $L(G_2)$ bạn đọc tự chứng minh, ở đây chỉ chứng minh đối với $L(G_3)$. Dẫn xuất đầy đủ của xâu ω = ababb (ứng với n = 1, m = 0, k = 1, l = 1) là $D_3(ababb) = (I_3, {}_7ABDE, {}_9aBDE, {}_{11}abDE, {}_{13}abaE, {}_{15}ababb)$.

Trường hợp tổng quát, dẫn xuất đầy đủ của $\omega = a^n(bb)^m ba^k(bb)^l$ là

$D(\omega) = (I_3, {}_7ABDE, {}_8aABDE, \ldots, {}_8a^{n-1}ABDE, {}_9a^nBDE, {}_{10}a^nbbBDE, \ldots,$
${}_{10}a^n(bb)^mBDE, {}_{11}a^n(bb)^mbDE, {}_{12}a^n(bb)^mbaDE, \ldots, {}_{12}a^n(bb)^mba^{k-1}DE,$
${}_{13}a^n(bb)^mba^kE, \quad {}_{14}a^n(bb)^mba^k(bb)E, \ldots, \quad {}_{14}a^n(bb)^mba^k(bb)^{l-1}E,$
${}_{15}a^n(bb)^mba^k(bb)^l)$.

b) $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ mà $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \cup L(G_3)$ có tập quy tắc

$R = \{I \to I_1, I \to I_2, I \to I_3\} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (bạn đọc tự chứng minh).

c) $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ mà $L(G) = L(G_1).L(G_2).L(G_3)$ có tập quy tắc

$R = \{I \to I_1I_2I_3\} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (bạn đọc tự chứng minh).

d) $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ mà

$L(G) = L(G_1).L(G_2).L(G_3) \cup L(G_2).L(G_1).L(G_3) \cup L(G_1).L(G_2) \cup L(G_3)$

có tập quy tắc $R = \{I \to I_1I_2I_3, I \to I_2I_1I_3, I \to I_1I_2, I \to I_3\} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (bạn đọc tự chứng minh).

e) $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ (xây dựng trong d) có

$$R' = \hat{R} \cup \bar{R} = \{I \to I_1I_2I_3, I \to I_2I_1I_3, I \to I_1I_2, I \to I_3\} \cup \hat{R}_1 \cup \hat{R}_2 \cup \hat{R}_3$$

$$= \{I \to I_1I_2I_3, I \to I_2I_1I_3, I \to I_1I_2, I \to I_3, I_1 \to \bar{a}I_1\bar{b}, I_1 \to \bar{a}\bar{b},$$

$$I_2 \to \bar{a}I_2\bar{a}, I_2 \to \bar{b}I_2\bar{b}, I_2 \to \bar{a}\bar{a}, I_2 \to \bar{b}\bar{b}, I_3 \to ABDE,$$

$$A \to \bar{a}A, A \to \bar{a}, B \to \bar{b}\bar{b}B, B \to \bar{b}, D \to \bar{a}D, D \to \bar{a},$$

$$E \to \bar{b}\bar{b}E, E \to \bar{b}\bar{b}, \bar{a} \to a, \bar{b} \to b\}$$

(bạn đọc tự chứng minh sự tương đương giữa G và G').

www.thuvien247.net

Từ bài tập 18 đến 25 dưới đây, việc chứng minh dành cho bạn đọc.

18. Cho $\Sigma = \{0,1\}$. Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \Sigma^*$ và $L(G) = \Sigma^+$.

Giải. $\Sigma = \{0,1\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to 0I, I \to 1I, I \to \lambda\}$ đối với $L(G) = \Sigma^*$.

$\Sigma = \{0,1\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to 0I, I \to 1I, I \to 0, I \to 1\}$ đối với $L(G) = \Sigma^+$.

19. Xây dựng VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{\omega \mid \omega \in \{0,1\}^+$ và $l(\omega) = 2n + 1, n \geq 0\}$ ($l(\omega)$ là độ dài của xâu ω).

Giải

$\Sigma = \{0,1\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to 0A, I \to 1A, A \to 0I, A \to 1I, I \to 0, I \to 1\}$.

20. Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho

$L(G) = \{\omega \mid \omega \in \{0,1\}^*$ và $l(\omega) = 2n, n \geq 0\}$.

Giải

$\Sigma = \{0,1\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to 0A, I \to 1A, A \to 0I, A \to 1I, I \to \lambda\}$.

21. Xây dựng VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

Giải. Với mỗi n ta ký hiệu $n := \underbrace{||...|}_{n} = |^n$.

$$\Sigma = \{\,|\,\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to |I, I \to |\}.$$

22. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{a^{n+1}b^{n+2} \mid n \geq 0\}$.

Giải. $\Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to aIb, I \to ab^2\}$.

23. Cho $L = \{a^n b^n a^m \mid n, m \geq 1\}$. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{a^n b^n a^m \mid n, m \geq 1\}$.

Giải

$\Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I, A, B\}, R = \{I \to AB, A \to aAb, A \to ab, B \to aB, B \to a\}$.

24. Cho $L = \{\omega \mid \omega \in \{0,1\}^+$ & $l_0(\omega) = l_1(\omega)\}$, ở đây $l_0(\omega) = l_1(\omega)$ có nghĩa là xâu ω có số số 0 bằng số số 1. Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Giải. $\Sigma = \{0, 1\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to II, I \to 0I1, I \to 1I0, I \to 01, I \to 10\}$.

25. Xây dựng VPCNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

Giải

$\Sigma = \{a, b, c\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to aIAc, I \to abc, cA \to Ac, bA \to bb\}$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

26. Cho VPCTC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{I \to BCI, BCB \to D, BC \to bc, DC \to a, cI \to c, I \to a\}$.

Chỉ ra dẫn xuất đầy đủ của xâu $(bc)^n a^m$ ($n \geq 1$, $m \geq 2$) trong văn phạm trên.

www.thuvien247.net

27. Tìm ngôn ngữ sinh của VPCQ G = <Σ, Δ, I, R> có

$$\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to a_1, I \to a_2, ..., I \to a_n\}.$$

28. Tìm ngôn ngữ sinh của VPCQ G = <Σ, Δ, I, R> có

$$\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to a_iI, I \to a_i \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

29. Tìm ngôn ngữ sinh của VPCQ suy rộng G = <Σ, Δ, I, R> có

$$\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \Delta = \{I\}, R = \{I \to a_iI, I \to \lambda \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

30. Tìm ngôn ngữ sinh của VPCQ suy rộng G = <Σ, Δ, I, R> có

$$\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to a_iA, A \to a_iI, I \to \lambda \mid i = 1, 2, ..., n\}.$$

31. Tìm ngôn ngữ sinh của VPCQ suy rộng G = <Σ, Δ, I, R> có

$$\Sigma = \{a, b\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to aI, I \to aA, A \to bA, A \to b\}.$$

32. Ta ký hiệu số tự nhiên $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ bởi $n := \underbrace{|| ... |}_{n}$. Cho văn phạm G = <Σ, Δ, I, R> với tập quy tắc $R = \{I \to |I|, I \to |\}$. Viết đầy đủ G theo định nghĩa và tìm L(G).

33. Cho ngôn ngữ $L = \{a^{n+1}b^{n+2}c^m \mid n, m \geq 1\}$ trên $\Sigma = \{a, b, c\}$. Xây dựng văn phạm G sao cho $L(G) = \{a^{n+1}b^{n+2}c^m \mid n, m \geq 1\}$.

34. Cho ngôn ngữ $L = \{a^nb^na^m \mid n \geq 1, m \geq 4\}$ trên $\Sigma = \{a, b\}$. Xây dựng văn phạm G sao cho $L(G) = \{a^nb^na^m \mid n \geq 1, m \geq 4\}$.

35. Cho ngôn ngữ $L = \{a^{2m}b^na^n \mid m, n \geq 1\}$ trên $\Sigma = \{a, b\}$. Xây dựng văn phạm G sao cho $L(G) = \{a^{2m}b^na^n \mid n, m \geq 1\}$.

36. Cho ngôn ngữ $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$ trên $\Sigma = \{a, b\}$. Xây dựng văn phạm G sao cho $L(G) = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$.

37. Cho văn phạm G = <Σ, Δ, I, R> với $R = \{I \to ABC, AB \to iADj, Dij \to jDi, DiC \to BiC, iB \to Bi, AB \to \lambda, C \to \lambda \mid i, j \in \{a, b\}\}$. Văn phạm trên là văn phạm gì và tìm L(G).

38. Cho văn phạm G với $R = \{I \to ABC, A \to aAa, A \to bAb, A \to c, B \to 0B0, B \to 1B1, B \to 2B2, B \to 00, B \to 11, B \to 22, C \to xyC, C \to z, C \to \lambda\}$. Tìm L(G).

39. Cho văn phạm G với $R = \{I \to ABCD, A \to aAa, A \to a, B \to bBb, B \to aBa, B \to dBd, B \to aa, B \to bb, B \to dd, C \to 0C0, C \to 1C1, C \to 2C2, C \to 3C3, C \to \lambda\}$. Tìm L(G).

40. Cho ngôn ngữ $L = \{a^{2n}cb^{2n}d^{2m+1}ccd^{2m+1} \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ trên $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Xây dựng văn phạm G sao L(G) = L.

41. Cho ngôn ngữ $L_1 = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{\omega\hat{\omega} \mid \omega \in \{0, 1\}^*$, $\hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$, $L_3 = \{a^mb^ma^k \mid m \geq 1, k \geq 1\}$.

a) Xây dựng văn phạm $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ sao cho $L(G_i) = L_i$ (i = 1, 2, 3).

www.thuvien247.net

b) Xây dựng văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho
$L(G) = L(G_1).L(G_2).L(G_3) \cup L(G_3).L(G_2).L(G_1) \cup L(G_1) \cup L(G_2) \cup L(G_3)$.

c) Xây dựng $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G$ (trong câu b).

42. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to ABD, A \to aA, A \to bB, B \to cB, B \to cD, D \to dD, D \to d\}$. Tìm L(G).

43. Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to aSBC, I \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bD \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$. Chỉ ra rằng $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

44. Xây dựng VPPNC sinh ra ngôn ngữ $L = \{a^i b^{2i} a^{3i} \mid i \geq 1\}$.

45. Xây dựng văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho:

a) L(G) = tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và không chứa số 1 nào.

b) L(G) = tập tất cả các xâu nhị phân tạo bởi một số số 1 và tiếp theo là một số lẻ các số 0.

c) L(G) = tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và một số chẵn các số 1.

d) L(G) = tập tất cả các xâu chứa số các số 0 và số các số 1 bằng nhau.

e) L(G) = tập tất cả các xâu chứa số các số không và số các số 1 không bằng nhau.

46. Cho VPCQ tuyến tính trái $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{A \to aB, A \to a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$ (G còn gọi là VPCQ trái)

và văn phạm G' với

$R' = \{A \to Ba, A \to a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$ (G' còn gọi là VPCQ phải).

Chứng minh rằng $L(G') = \widehat{L(G)}$ là ảnh gương của ngôn ngữ L(G).

47. Cho VPPNC tuyến tính trái $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{A \to \omega B, A \to \omega \mid A, B \in \Delta, \omega \in \Sigma^+\}$.

Xây dựng VPCQ G' sao cho L(G') = L(G). Nói cách khác, ngôn ngữ L(G) là NNCQ.

48. Cho các văn phạm sau đây:

a) G_1 với $R_1 = \{I \to 000000000A, A \to 0A, A \to \lambda\}$;

b) G_2 với $R_2 = \{I \to AI, I \to ABI, I \to A, AB \to BA, BA \to AB, A \to 0, B \to 1\}$;

c) G_3 với $R_3 = \{I \to ABI, AB \to BA, BA \to AB, A \to 0, B \to 1, I \to \lambda\}$;

d) G_4 với $R_4 = \{I \to ABI, AB \to BA, BA \to AB, A \to 0, B \to 1, I \to C,$
$I \to D, C \to AC, C \to A, D \to BD, D \to B\}$.

Tìm $L(G_i)$ $(i = \overline{1,4})$ và mô tả ngôn ngữ $L(G_i)$ bằng lời.

www.thuvien247.net

49. Cho văn phạm sinh $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với:

$R = \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in V^*\Delta V^*, \beta \in V^*\}$; $L(G) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^*$ và $I \mid\!\underset{G}{\text{—}}\, \omega\}$.

Nếu trong văn phạm trên mà ta định nghĩa

$$L(G) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \text{ và } \omega \mid\!\underset{G}{\text{—}}\, I\}$$

thì G gọi là văn phạm đoán nhận.

Như vậy, văn phạm sinh hay văn phạm đoán nhận đều có chung Σ, Δ, I, chỉ khác nhau ở chỗ nếu $\alpha \to \beta$ là quy tắc thuộc văn phạm này thì $\beta \to \alpha$ là quy tắc thuộc văn phạm kia. Hai văn phạm như vậy được gọi là đối ngẫu nhau.

a) Cho các văn phạm sinh

$R_1 = \{I \to aIb, I \to \lambda\}$ và $R_2 = \{I \to \lambda, I \to 0I1, I \to II\}$.

Tìm văn phạm đoán nhận đối ngẫu với hai văn phạm trên.

b) Chứng minh rằng, nếu $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ là một văn phạm (sinh hay đoán nhận) và $G' = <\Sigma, \Delta, I, R'>$ là văn phạm đối ngẫu với nó thì $L(G) = L(G')$.

www.thuvien247.net

Chương 2

NGÔN NGỮ CHÍNH QUY, BIỂU THỨC CHÍNH QUY VÀ VĂN PHẠM CHÍNH QUY SUY RỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ngôn ngữ chính quy và biểu thức chính quy trên Σ

Ký hiệu Σ^* chỉ tập tất cả các xâu (kể cả xâu rỗng λ) được thành lập từ các phần tử của Σ. Ký hiệu Σ^+ chỉ tập tất cả các xâu (không kể xâu rỗng λ) được thành lập từ các phần tử của Σ. Như vậy $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$.

Định nghĩa 1 *(Phép hợp, nhân ghép và lặp)*

Trên lớp các ngôn ngữ Σ^* ta định nghĩa các phép toán:

a) Phép hợp ngôn ngữ ($\cup$): Cho $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, khi đó

$$L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \text{ hoặc } \omega \in L_2\} \subseteq \Sigma^*.$$

b) Phép nhân ghép ngôn ngữ (.): Cho $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, phép nhân ghép L_1 với L_2 ký hiệu là $L_1.L_2$ và được định nghĩa

$$L_1.L_2 = \{\omega_1\omega_2 \mid \omega_1 \in L_1 \text{ và } \omega_2 \in L_2\} \subseteq \Sigma^*.$$

c) Phép lặp ngôn ngữ (còn gọi là phép đóng Kleene): Cho $L \subseteq \Sigma^*$:

- Phép lặp (*) của L là ngôn ngữ L^* và được định nghĩa

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \ldots,$$

ở đây $L^0 = \{\lambda\}$ và $L^n = L^{n-1}.L$.

- Phép lặp (+) của L cũng là một ngôn ngữ trên Σ và định nghĩa

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n \text{ hay } L^+ = L^* \setminus \{\lambda\}.$$

Ngôn ngữ chính quy trên Σ ký hiệu là L_{NNCQ} được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2 *(Ngôn ngữ chính quy)*

- Ký hiệu tập rỗng $\varnothing$ là tập chứa một xâu rỗng $\{\lambda\}$ và tập $\{a\}$ ($a \in \Sigma$) được gọi là một NNCQ trên bảng Σ.
- Giả sử A, B là hai NNCQ trên bảng Σ, khi đó $A \cup B$, $A.B$ và A^* cũng gọi là NNCQ trên Σ.

www.thuvien247.net

Từ định nghĩa 2 ta có kết quả sau đây:

Định lý 1. Mọi NNCQ trên bảng Σ đều nhận được từ các ngôn ngữ hữu hạn, bằng cách áp dụng một số lần các phép toán hợp, phép toán nhân ghép và phép toán lặp (*).

Để biểu diễn NNCQ trên bảng Σ, người ta dùng khái niệm biểu thức chính quy (BTCQ) và được định nghĩa như sau:

***Định nghĩa 3** (Biểu thức chính quy).* Ký hiệu $\varnothing$ là một BTCQ, nó biểu diễn tập rỗng (tập không chứa xâu nào); ký hiệu λ là một BTCQ, nó biểu diễn tập $\{\lambda\}$ và ký hiệu a ($a \in \Sigma$) là một BTCQ, nó biểu diễn tập gồm một phần tử $\{a\}$.

Giả sử (A), (B) là hai BTCQ, nó biểu diễn NNCQ A và B tương ứng, khi đó các ký hiệu: $(A \cup B)$, $(A.B)$ và $(A)^*$ cũng là BTCQ, nó biểu diễn các NNCQ $A \cup B$, $A.B$ và A^* tương ứng trên Σ.

Định lý 2. Mỗi ngôn ngữ trên Σ là NNCQ khi và chỉ khi ngôn ngữ đó được biểu diễn bởi BTCQ trên Σ.

2. Quan hệ giữa ngôn ngữ chính quy và ngôn ngữ chính quy suy rộng trên bảng Σ

Văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ là VPCQ suy rộng khi và chỉ khi nó có tập quy tắc $R = \{A \to aB, A \to a, A \to \lambda \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$.

Ngôn ngữ do VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sinh ra gọi là NNCQ suy rộng. Ký hiệu L_{VPCQSR} là lớp NNCQ suy rộng do VPCQ suy rộng sinh ra. Ký hiệu L_{VPCQ} là lớp NNCQ do VPCQ sinh ra. Từ định nghĩa ta có:

Định lý 3. $L_{VPCQ} = L_{VPCQSR} \setminus \{\lambda\}$.

Định lý 4. Ngôn ngữ $L \subseteq \Sigma^*$ là NNCQ khi và chỉ khi có tồn tại VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = L$.

Một cách hình thức, ký hiệu L_{BTCQ} là lớp ngôn ngữ được cho bởi BTCQ. Ta có mối quan hệ sau

$$L_{BTCQ} = L_{NNCQ} = L_{VPCQSR} = L_{VPCQ} \cup \{\lambda\}.$$

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho hai ngôn ngữ $L_1 = \{\lambda, ab, ac, bbca\}$ và $L_2 = \{a, ab, ca, aabac\}$ trên bảng $\Sigma = \{a, b, c\}$.

a) Tìm $L_1 \cup L_2$.

b) Tìm $L_1.L_2$.

c) Cho $L \subseteq \Sigma^*$, phần bù của L ta ký hiệu là $C_L := \Sigma^* \setminus L$. Hãy phát biểu các tính chất của phép toán hợp ($\cup$), phép toán nhân ghép (.) và phép lấy phần bù (C_L) của ngôn ngữ L.

www.thuvien247.net

Giải

a) $L_1 \cup L_2 = \{\lambda, ab, ac, bbca\} \cup \{a, ab, ca, aabac\}$
$= \{\lambda, ab, ac, bbca, a, ca, aabac\}.$

b) $L_1.L_2 = \{\lambda, ab, ac, bbca\}.\{a, ab, ca, aabac\}$
$= \{a, ab, ca, aabac, aba, abab, abca, abaabac, aca, acab,$
$acca, acaabac, bbcaa, bbcaab, bbcaca, bbcaaabac\}.$

c) • Tính chất đối với phép toán hợp ngôn ngữ: Giả sử $L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$, khi đó:

$$L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1;$$
$$(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3;$$
$$L \cup \varnothing = \varnothing \cup L = L;$$
$$L \subseteq \Sigma^* \text{ thì } L \cup \Sigma^* = \Sigma^*;$$
$$|L_1 \cup L_2| = |L_1| + |L_2| - |L_1 \cap L_2|$$

(phép giao ngôn ngữ ($\cap$) định nghĩa như phép giao trong lý thuyết tập hợp).

• Tính chất đối với phép nhân ghép ngôn ngữ: Giả sử $L_1, L_2, L \subseteq \Sigma^*$, khi đó:

$$L_1.L_2 \neq L_2.L_1;$$
$$(L_1.L_2)L_3 = L_1(L_2.L_3) = L_1.L_2.L_3;$$
$$L.\varnothing = \varnothing.L = \varnothing;$$
$$L.\{\lambda\} = \{\lambda\}.L = L;$$
$$|L_1.L_2| = |L_1|.|L_2|.$$

Giả sử $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$; $C_\Sigma\{\lambda\} = \Sigma^+$; $C_\Sigma\Sigma^+ = \{\lambda\}$; $C_\Sigma\varnothing = \Sigma^*$, khi đó

$$L_1 \cap L_2 = C_\Sigma(C_\Sigma L_1 \cup C_\Sigma L_2) \text{ (hệ thức De Morgan).}$$

2. Phép ảnh gương của một xâu $\omega \in \Sigma^*$ là $\hat{\omega} \in \Sigma^*$ với $\hat{\omega}$ là ω nhưng viết theo thứ tự ngược lại. Ảnh gương của một ngôn ngữ $L \subseteq \Sigma^*$ là hợp các ảnh gương của mỗi xâu trong L.

a) Cho $L = \{\lambda, abcd, aaaaa, bbac\}$. Tìm ảnh gương của ngôn ngữ L.

b) Phát biểu các tính chất của ảnh gương của một ngôn ngữ.

Giải

a) $\hat{L} = \{\hat{\lambda}, \widehat{abcd}, \widehat{aaaaa}, \widehat{bbac}\} = \{\lambda, dcba, aaaaa, cabb\}.$

b) Tính chất của ảnh gương: Giả sử $L \subseteq \Sigma^*$, khi đó: $\hat{\hat{L}} = L$, $\hat{\lambda} = \lambda$, $\widehat{\varnothing} = \varnothing$ và $a^n = \widehat{a^n}$ với mọi $a \in \Sigma$.

www.thuvien247.net

3. Cho $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ với $L = \{a, bc\}$.

a) Tìm L^* và L^+.

b) Phát biểu tính chất của phép lặp (*).

Giải

a) $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \{\lambda\} \cup L \cup LL \cup \ldots$

$= \{\lambda\} \cup \{a, bc\} \cup \{a, bc\}\{a, bc\} \cup \{a, bc\}\{a, bc\}\{a, bc\} \cup \ldots$

$= \{\lambda, a, bc\} \cup \{aa, bca, abc, bcbc\} \cup \{aaa, bcaa, abca, aabc, bcabc, abcbc\} \cup \ldots$

$= \{\lambda, a, bc, aa, bca, abc, bcbc, aaa, bcaa, abca, aabc, bcabc, abcbc, \ldots\}$.

$L^+ = L^* - \{\lambda\}$

$= \{a, bc, aa, bca, abc, bcbc, aaa, bcaa, abca, aabc, bcabc, abcbc, \ldots\}$.

b) Tính chất của phép lặp (*) đối với $L \subseteq \Sigma^*$:

$(L^*)^* = L^*$;

$\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$;

$\varnothing^* = \{\lambda\} \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing \cup \ldots = \{\lambda\}$;

$\varnothing^+ = \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing \cup \ldots = \varnothing$.

4. Cho $A = \{0, 11\}$ và $B = \{1, 10, 110\} \subseteq \Sigma^*$ với $\Sigma = \{0,1\}$.

a) Tìm AB và BA.

b) Định nghĩa $A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ theo phương pháp đệ quy.

Giải

a) $AB = \{0, 11\}\{1, 10, 110\} = \{01, 010, 0110, 111, 1110, 11110\}$;

$BA = \{1, 10, 110\}\{0, 11\} = \{10, 111, 100, 1011, 1100, 11011\}$.

b) $n = 0$: $A^0 = \{\lambda\}$;

$n = 1 : A^1 = A^0A^1 = \{\lambda\} A = \{\lambda\}\{0, 11\} = \{0, 11\}$;

$n = 2 : A^2 = A^1A = \{0, 11\}\{0, 11\} = \{00, 011, 110, 1111\}$;

$n = 3 : A^3 = A^2A = \{00, 011, 110, 1111\}\{0,11\}$

$= \{000, 0011, 0110, 01111, 1100, 11011, 11110, 111111\}\ldots$

5. Cho $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$ và $C = \{11\}$ trên $\Sigma = \{0, 1\}$. Tìm A^*, B^*, C^*.

Giải

$A^* = \{\lambda\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots = \{\lambda\} \cup \{0\} \cup \{0\}\{0\} \cup \ldots$

$= \{\lambda, 0, 0^2, 0^3, \ldots\} = \{0^n \mid n \geq 0\}$.

$B^* = \{0, 1\}^* = \Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$.

$C^* = \{11\}^* = \{1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} = \{\lambda, 1^{2n} \mid n \geq 1\}$.

www.thuvien247.net

6. Cho A = {0, 11}, B = {00, 01} trên Σ = {0, 1}. Tìm các tập sau:

a) AB; b) BA; c) A^2; d) B^3.

Giải

a) AB = {0, 11} {00, 11} = {000, 1100, 011, 1111}.

b) BA = {00, 11} {0, 11} = {000, 110, 0011, 1111}.

c) A^2 = {0, 11} {0, 11} = {00, 110, 011, 1111}.

d) B^3 = {00, 01} {00, 01} {00, 01} = {0000, 0100, 0001, 0101} {00, 01}
= {000000, 010000, 000100, 010100, 000001, 010001, 000101, 010101}.

7. Tìm tất cả các tập A và B của các xâu sao cho

AB = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}.

Giải

- A = {1, 101} và B = {0, 11, 000} vì
  AB = {1, 101}{0, 11, 000} = {10, 111, 1000, 1010, 10111, 101000};
- A = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000} và B = {λ} vì
  AB = Aλ = A = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000};
- A = {λ, 10} và B = {10, 111, 1000} vì
  AB = λB = B = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000};

hoặc A = {λ} và B = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000} vì
AB = {λ, 10} {10, 111, 1000} = {10, 111, 1000, 1010, 10111, 101000}.

8. Mô tả bằng lời các xâu được cho bởi các BTCQ sau:

a) 1*0; b) 1*00*; c) 111 ∪ 001;

d) (1 ∪ 00)*; e) (00*1)*; f) (0 ∪ 1)(0 ∪ 1)*00;

g) 00*1; h) (0 ∪ 1)(0 ∪ 1)(0 ∪ 1)*0000*;

i) 0*1* ∪ 1*0*; k) 11(111)*(00)*.

Giải

a) Tập các xâu gồm bất kỳ số số 1 được tiếp theo sau bởi một số 0.

b) Tập các xâu gồm bất kỳ số số 1 được tiếp theo bởi nhiều hơn một số 0.

c) Tập các xâu gồm ba số 1, hoặc xâu gồm hai số 0 được tiếp theo là số 1.

d) Tập các xâu gồm một số tùy ý các số 1, hoặc tùy ý các cặp 00, hoặc một số mỗi loại ở một hàng.

e) Tập các xâu λ, hoặc xâu kết thúc bằng một số 1 và có một hoặc nhiều hơn các số 0 đứng trước số 1.

f) Tập các xâu chiều dài ít nhất là 3 và tận cùng bằng 00.

g) Tập các xâu có một hoặc nhiều hơn số 0 được tiếp theo bởi số 1.

h) Tập các xâu có hai hoặc nhiều hơn ký tự trong bảng chữ cái được tiếp theo bởi ba hoặc nhiều hơn các số 0.

www.thuvien247.net

i) Tập các xâu hoặc không có số 1 nào đứng trước một số 0, hoặc không có số 0 nào đứng trước một số 1.

k) Tập các xâu chứa một xâu các số 1 sao cho số số 1 bằng 2 (modun 3) được tiếp theo bởi một số chẵn các số 0 (Chú ý: Số số 1 bằng 2 (modun 3) có nghĩa là: số số 1 trừ đi 2 chia hết cho 3).

9. Cho các BTCQ trên $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$10^*, (10)^*, 0 \cup 01, 0(0 \cup 1)^* \text{ và } 00(0 \cup 1)^* 11.$$

Hãy tìm các NNCQ trên Σ được biểu diễn bởi các BTCQ đã cho.

Giải

10^* biểu diễn NNCQ $\{10^n \mid n \geq 0\}$;

$(10)^*$ biểu diễn NNCQ $\{(10)^n \mid n \geq 0\}$;

$0 \cup 01$ biểu diễn NNCQ $\{0, 01\}$;

$0(0 \cup 1)^*$ biểu diễn NNCQ $\{0\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$;

$00(0 \cup 1)^*11$ biểu diễn NNCQ $\{00\omega 11 \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

10. Cho các BTCQ trên $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$1^*0, 1^*00^*, 111 \cup 001, (0 \cup 1)(0 \cup 1)^*00.$$

Hãy tìm các NNCQ của các BTCQ đã cho.

Giải

1^*0 tương ứng với NNCQ $\{1^n0 \mid n \geq 0\}$.

1^*00^* tương ứng với NNCQ $\{1^n00^m \mid n, m \geq 0\}$.

$111 \cup 001$ tương ứng với NNCQ $\{111, 001\}$.

$(0 \cup 1)(0 \cup 1)^*00$ tương ứng với NNCQ $\{0\omega 00, 1\omega 00 \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$.

11. Dùng các BTCQ biểu diễn các tập sau:

a) Tập các xâu có một hoặc nhiều hơn một số 0 được tiếp sau bởi số 1.

b) Tập các xâu có hai hoặc nhiều hơn ký hiệu trong $\Sigma = \{0, 1\}$ và tiếp sau bởi ba hoặc nhiều hơn số 0.

c) Tập các xâu không có số 1 nào, hoặc nhiều hơn một số 1 đứng trước một số chẵn các số 0.

d) Tập mọi xâu 0 và 1 có số 1 ở đầu và không có hai số 0 đứng liền nhau.

e) Tập mọi xâu trên $\Sigma = \{0, 1\}$ không chứa hai số 0 liên tiếp.

f) Tập mọi xâu trên $\Sigma = \{0, 1\}$ được kết thúc bởi 011.

i) Tập mọi xâu gồm một số số 0, tiếp đến gồm một số số 1, rồi đến một số số 2, trong đó 0, 1, 2 đều có mặt.

Giải

a) $00^*1, 0^*01$.   b) $(0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^* 0000^*$.

www.thuvien247.net

c) $0^* \cup 111^* (00)^*$.
d) $(1 \cup 10)^*$.
e) $(0 \cup \lambda) (1 \cup 10)^*$.
f) $(0 \cup 1)^* 011$.
i) $00^*11^* 22^*$.

12. Từ các BTCQ chỉ ra trong bài tập 11, hãy chỉ ra NNCQ của các BTCQ tương ứng đó.

Giải

a) NNCQ của các BTCQ trong câu a là:

00^*1 có NNCQ là $\{00^n1 \mid n \geq 0\}$;

0^*01 có NNCQ là $\{0^n01 \mid n \geq 0\}$.

b) BTCQ: $(0 \cup 1) (0 \cup 1) (0 \cup 1)^* 0000^*$ có NNCQ là

$L = \{00\omega0^n, 01\omega0^n, 11\omega0^n, 10\omega0^n \mid \omega \in \Sigma^* \ \& \ n \geq 3\}$.

c) BTCQ: $0^* \cup 111^*(00)^*$ có NNCQ là

$\{0^n, 111^m(00)^k \mid n, m, k \geq 0\}$.

d) BTCQ: $(1 \cup 10)^*$ có NNCQ là

$(1, 10)^* = \{\lambda\} \cup \{1, 10\} \cup \{1, 10\}\{1,10\} \cup ...$

$= \{\lambda, 1, 10, 11, 101, 110, 1010, ...\}$

(gồm tất cả các xâu có số 1 đứng đầu và không có hai số 0 đứng liền nhau).

e) BTCQ: $(0 \cup \lambda) (1 \cup 10)^*$ có NNCQ là

$\{0, 01, 010, 011, 0101, 0110, 01010, ...\}$

(gồm tất cả các xâu trên $\Sigma = \{0, 1\}$ không có hai số 0 đứng liền nhau).

f) NNCQ là $L = \{\omega011 \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$.

i) NNCQ là $L = \{0^n1^m2^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1\}$.

13. Cho VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{I \to 1A, I \to 0, I \to \lambda, A \to 0B, B \to 1B, B \to 1\}$.

a) Tìm L(G).

b) Tìm BTCQ của L(G) trên $\Sigma = \{0, 1\}$.

Giải

a) $L(G) = \{0, \lambda, 101^n \mid n \geq 1\}$.

b) BTCQ của NNCQ suy rộng L(G) có dạng: $0 \cup \lambda \cup 1011^*$.

14. Cho VPCQ suy rộng $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ với:

a) $R_1 = \{I_1 \to 0A, I_1 \to 1B, A \to 0, B \to 0\}$;

b) $R_2 = \{I_2 \to 1B, I_2 \to 0, A \to 1A, A \to 0B, A \to 1, A \to 0, B \to 1\}$.

Tìm $L(G_i)$ $(i = 1, 2)$. Chỉ ra các BTCQ của nó.

Giải

a) $L(G_1) = \{00, 10\}$; $00 \cup 10$ là BTCQ của $L(G_1)$.

b) $L(G_2) = \{11, 0\}$; $11 \cup 0$ là BTCQ của $L(G_2)$.

www.thuvien247.net

15. Cho VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{I, A, B\}$ và $R = \{I \xrightarrow{1} aI, I \xrightarrow{2} bA, A \xrightarrow{3} aA, A \xrightarrow{4} \lambda, I \xrightarrow{5} cB, B \xrightarrow{6} a, B \xrightarrow{7} b\}$.

a) Tìm L(G).

b) Xác định BTCQ của L(G).

Giải

a) $L(G) = \{a^nba^m, a^nca, a^ncb \mid n \geq 0, m \geq 0\}$. Dẫn xuất đầy đủ của $\omega_1 = a^nba^m$, $\omega_2 = a^nca$, $\omega_3 = a^ncb$ là:

$D(\omega_1) = (I, {}_1aI, ..., {}_1a^nI, {}_2a^nbA, {}_3a^nbaA, ..., {}_3a^nba^mA, {}_4a^nba^m)$;

$D(\omega_2) = (I, {}_1aI, ..., {}_1a^nI, {}_5a^ncB, {}_6a^nca)$;

$D(\omega_3) = (I, {}_1aI, ..., {}_1a^nI, {}_5a^ncB, {}_7a^ncb)$.

b) BTCQ của L(G) là: $a^*ba^* \cup a^*ca \cup a^*cb$.

16. Cho VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \xrightarrow{1} aA_1, A_1 \xrightarrow{2} bA_2, A_2 \xrightarrow{3} aA_2, A_2 \xrightarrow{4} b, I \xrightarrow{5} aB_1, B_1 \xrightarrow{6} bB_2,$$
$$B_2 \xrightarrow{7} aB_3, B_3 \xrightarrow{8} bB_3, B_3 \xrightarrow{9} a\}.$$

a) Tìm L(G).

b) Xác định BTCQ của L(G).

Giải

a) $L(G) = \{aba^nb, abab^ma \mid n, m \geq 0\}$. Dẫn cuất đầy đủ của $\omega_1 = aba^nb$, $\omega_2 = abab^ma$ là:

$D(\omega_1) = (I, {}_1 aA_1, {}_2 abA_2, {}_3 abaA_2, ..., {}_3 aba^nA_2, {}_4 aba^nb)$;

$D(\omega_2) = (I, {}_5 aB_1, {}_6 abB_2, {}_7 abaB_3, {}_8 ababB_3, ..., {}_8 abab^mB_3, {}_9 abab^ma)$.

b) BTCQ của L(G) là $aba^*b \cup abab^*a$.

17. Cho các BTCQ:

a) $abba^*b \cup abaa^*b \cup abbb$;

b) $00(111)^*00 \cup 1(00)^*1 \cup 01^* \cup 11 \cup \lambda$.

Xây dựng VPCQ suy rộng sinh ra NNCQ được biểu diễn bởi các BTCQ a và b đã cho.

Giải

a) NNCQ ứng với BTCQ: $abba^*b \cup abaa^*b \cup abbb$ là

$$L = \{abba^nb, abaa^mb, abbb \mid n, m \geq 0\}$$

và VPCQ suy rộng sinh ra NNCQ trên có tập quy tắc sinh R có dạng:

$$R = \{I \to aA_1, A_1 \to bA_2, A_2 \to bA_3, A_3 \to aA_3, A_3 \to b, I \to aB_1,$$
$$B_1 \to bB_2, B_2 \to aB_3, B_3 \to aB_3, B_3 \to b, I \to aD_1, D_1 \to bD_2,$$
$$D_2 \to bD_3, D_3 \to b\}.$$

www.thuvien247.net

Các xâu trong NNCQ L ứng với các BTCQ trên đều có dẫn xuất đầy đủ là rõ ràng (bạn đọc tự kiểm tra).

b) NNCQ ứng với BTCQ: $00(111)^*00 \cup 1(00)^*1 \cup 01^* \cup 11 \cup \lambda$ là $L = \{00(111)^n00,\ 1(00)^m1,\ 01^k,\ 11,\ \lambda \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0\}$.

VPCQ suy rộng G sinh ra NNCQ trên có tập quy tắc sinh

$R = \{I \to 0A_1, A_1 \to 0A_2, A_2 \to 1A_3, A_3 \to 1A_4, A_4 \to 1A_2, A_2 \to 0A_5,$
$A_5 \to 0, I \to 1B_1, B_1 \to 0B_2, B_2 \to 0B_1, B_1 \to 1, I \to 0D_1,$
$D_1 \to 1D_1, D_1 \to \lambda, I \to 1E, E \to 1, I \to \lambda\}$.

Việc chỉ ra các dẫn xuất đầy đủ của các xâu trong L dành cho bạn đọc.

18. Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, sao cho L(G) = tập các xâu bất kỳ bắt đầu bởi số 0 trên $\Sigma = \{0, 1\}$. Tìm BTCQ của L(G).

Giải

$\Sigma = \{0, 1\}, \Delta = \{I, A\}, R = \{I \to 0A, A \to 0A, A \to 1A, A \to \lambda\}$;

$L(G) = \{0\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

BTCQ của L(G) là $0(0 \cup 1)^*$.

19. Cho ngôn ngữ $L = \{\lambda, 1\omega1, 0 \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$. Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho L(G) = L và tìm BTCQ của L.

Giải

$\Sigma = \{0, 1\}; \Delta = \{I, A\}$;

$R = \{I \to 1A, I \to \lambda, A \to 0A, A \to 1A, A \to \lambda, I \to 0\}$.

BTCQ của L là $\lambda \cup 1\ (0 \cup 1)^*1 \cup 0$.

20. Cho ngôn ngữ $L = \{\lambda, 0^n1\omega, 1^m0\omega, 1\omega \mid \omega \in \{0,1\}^*$ và $n, m \geq 1\}$. Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho L(G) = L và chỉ ra BTCQ của L.

Giải

$\Sigma = \{0, 1\}; \Delta = \{I, A, B, D\}$;

$R = \{I \to \lambda, I \to 0A, A \to 0A, A \to 1B, B \to 0B, B \to 1B, B \to \lambda,$
$I \to 1D, D \to 1D, D \to 0C, C \to 0C, C \to 1C, C \to \lambda, I \to 1E,$
$E \to 0E, E \to 1E, E \to \lambda\}$.

BTCQ của L là

$\lambda \cup 00^*1\ (0 \cup 1)^* \cup 11^*0\ (0 \cup 1)^* \cup 1(0 \cup 1)^*$.

21. 1. Viết BTCQ của các tập sau:

a) Tập các xâu có một hoặc nhiều hơn số 0, được tiếp theo bởi một số 1.

b) Tập các xâu có hai hoặc nhiều hơn ký hiệu, được tiếp sau bởi ba hoặc nhiều hơn số 0.

www.thuvien247.net

c) Tập các xâu chứa một xâu các số 1, sao cho số các số 1 bằng (2 modun 3), được tiếp theo bởi một số chẵn các số 0.

2. Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các xâu được mô tả trong a, b, c ở câu 1.

Giải

1.a) 00^*1; b) $(0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^* 0000^*$; c) $11(111)^*(00)^*$.

2.a) $R = \{I \to 0A, A \to 0A, A \to 1\}$.

b) $R = \{I \to 0A_1, A_1 \to 0A_2, A_2 \to 0A_2, A_2 \to 1A_2, A_2 \to 0A_3,$
$A_3 \to 0A_4, A_4 \to 0A_4, A_4 \to 0, I \to 0A_5, A_5 \to 1A_6, A_6 \to 0A_6,$
$A_6 \to 1A_6, A_6 \to 0A_7, A_7 \to 0A_8, A_8 \to 0A_8, A_8 \to 0, I \to 1A_9,$
$A_9 \to 1A_{10}, A_{10} \to 0A_{10}, A_{10} \to 1A_{10}, A_{10} \to 0A_{11},$
$A_{11} \to 0A_{12}, A_{12} \to 0A_{12}, A_{12} \to 0, I \to 1A_{13}, A_{13} \to 0A_{14},$
$A_{14} \to 0A_{14}, A_{14} \to 1A_{14}, A_{14} \to 0A_{15}, A_{15} \to 0A_{16},$
$A_{16} \to 0A_{16}, A_{16} \to 0\}$.

Bạn đọc tự kiểm tra lại

$$L(G) = \{00\omega0^n, 01\omega0^n, 11\omega0^n, 10\omega0^n \mid \omega \in \{0, 1\}^* \ \&\ n \geq 3\}$$

có BTCQ mô tả trong b ở câu 1.

c) $R = \{I \to 1B_1, B_1 \to 1B_2, B_2 \to 1B_3, B_3 \to 1B_4, B_4 \to 1B_2,$
$B_2 \to 0B_5, B_5 \to 0B_2, B_2 \to \lambda\}$.

Bạn đọc tự kiểm tra lại

$L(G) = \{11(111)^n(00)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ có BTCQ trong c ở câu 1.

22. Chứng minh rằng, nếu A là một NNCQ thì ảnh gương của A là $\widehat{A}$ cũng là NNCQ.

Chứng minh. Dùng quy nạp trên cơ sở định nghĩa BTCQ.

23. Cho BTCQ: $01^* \cup 00^*1 \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)^*00$.

a) Viết NNCQ được cho bởi BTCQ trên.

b) Xây dựng VPCQ suy rộng sinh ra NNCQ trên.

Giải

a) $L = \{01^n, 00^m1, 0\omega00, 1\omega00 \mid \omega \in \{0,1\} \ \&\ n, m \geq 0\}$.

b) $G = \langle\Sigma, \Delta, I, R\rangle$ có $R = \{I \to 0A, A \to 1A, A \to \lambda, I \to 0B, B \to 0B,$
$B \to 1, I \to 0C, C \to 0C, C \to 1C, C \to 0D, D \to 0, I \to 1F,$
$F \to 0F, F \to 1F, F \to 0K, K \to 0\}$.

24. Cho ngôn ngữ $L = \{01^n0\omega, 2(33)^m2\omega, 10^k1^h0^l\omega \mid \omega \in \{0,1\}^*, n \geq 0,$ $m \geq 0, k \geq 0, h \geq 1, l \geq 2\}$.

www.thuvien247.net

a) Viết BTCQ của L.

b) Xây dựng VPCQ suy rộng sinh ra L.

Giải

a) $01^*0(0 \cup 1)^* \cup 2(33)^*2(0 \cup 1)^* \cup \ 10^*11^*000^*(0 \cup 1)^*$.

b) $R = \{I \to 0A, A \to 1A, A \to 0B, B \to 0B, B \to 1B, B \to \lambda, I \to 2D,$
$D \to 3F, F \to 3D, D \to 2B, I \to 1E, E \to 0E, E \to 1K,$
$K \to 1K, K \to 0H_1, H_1 \to 0H_2, H_2 \to 0H_2, H_2 \to 1H_2, H_2 \to \lambda\}$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

25. Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các ngôn ngữ trong bài tập 8, 9 và 10.

26. Xây dựng VPCQ suy rộng sinh ra các NNCQ tương ứng với các BTCQ trong bài tập 12.

27. Xâu $\omega = 1011$ có thuộc các NNCQ ứng với các BTCQ dưới đây không?

a) 10^*1^*; b) $0^*(10 \cup 11)^*$;
c) $1(01)^*1^*$; d) $1^*01(0 \cup 1)$;
e) $10^*(11)^*$; f) $1(00)^*(11)^*$;
g) $(10)^*1011$; h) $(1 \cup 00)(0100)1^*$.

28. Cho $A \subseteq \Sigma^*$, với Σ là bảng các chữ cái. Các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào không đúng?

a) $A \subseteq A^2$; b) Nếu $A = A^2$ thì $\lambda \in A$;
c) $A\{\lambda\} = A$; d) $(A^*)^* = A^*$;
e) $A^*A = A^*$; f) $|A^n| = |A|^n$.

29. Cho các BTCQ từ a đến h trong bài tập 27.

a) Tìm các NNCQ tương ứng với các BTCQ đó.

b) Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các NNCQ trong câu a.

30. Cho các NNCQ:

a) $L_1 = \{0^n1^m01, 011, \lambda \mid n \geq 0, m \geq 1\}$;

b) $L_2 = \{11(00)^n110, 0(1111)^m0, 0^k \mid n, m, k \geq 0\}$.

Hãy xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các ngôn ngữ L_1 và L_2. Chỉ ra các BTCQ của các NNCQ trên.

31. Cho các VPCQ:

G_1 với $R_1 = \{I_1 \to aA, A \to aA, A \to bA, A \to b\}$;
G_2 với $R_2 = \{I \to bB_1, B_1 \to aB_2, B_2 \to bB_1, B_1 \to b\}$.

a) Tìm $L(G_1)$ và $L(G_2)$.

www.thuvien247.net

b) Tìm BTCQ của $L(G_1)$ và $L(G_2)$.

c) Tìm VPCQ G sao cho $L(G) = L(G_1)L(G_2)$.

d) Chỉ ra BTCQ của L(G) trong câu c.

32. Xây dựng các VPCQ (VPCQ suy rộng) $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ sinh ra ngôn ngữ trên $\Sigma = \{0, 1\}$ được cho dưới đây:

a) $L(G) = \Sigma^*$; b) $L(G) = \Sigma^+$.

33. Tìm các BTCQ biểu diễn ngôn ngữ trên {0, 1} sau:

a) Tập mọi xâu, trong đó mọi cặp số 0 liên tiếp đều xuất hiện trước mọi cặp số 1 liên tiếp.

b) Tập mọi xâu chứa nhiều nhất một cặp số 0 liên tiếp và nhiều nhất một cặp số 1 liên tiếp.

34. Mô tả bằng lời các ngôn ngữ được biểu diễn bởi các BTCQ sau:

a) $(11 \cup 0)^* (00 \cup 1)^*$;

b) $(1 \cup 01 \cup 001)^*(0 \cup 00)$;

c) $(00 \cup 11 \cup (01 \cup 10) (00 \cup 11)^*(01 \cup 10))^*$.

Hãy chỉ ra VPCQ suy rộng sinh ra các ngôn ngữ trong các câu a, b và c tương ứng.

35. Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các NNCQ được mô tả dưới đây:

a) Tập các xâu gồm bất kỳ số số 1, tiếp theo là số 0.

b) Tập các xâu gồm bất kỳ số số 1, tiếp theo là các xâu bất kỳ trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}$ và sau đó là một hoặc nhiều hơn các số 0.

c) Tập các xâu bắt đầu bởi 1, tiếp theo là một số bất kỳ số 0.

d) Tập các xâu bắt đầu bởi số 0 và kết thúc bởi số 1 trên $\Sigma = \{0, 1\}$.

36. Chứng minh rằng, một ngôn ngữ L được cho bởi BTCQ khi và chỉ khi ngôn ngữ L được sinh bởi VPCQ suy rộng.

37. Chứng minh rằng, nếu r, s, t là các BTCQ biểu diễn các NNCQ R, S và T tương ứng thì ta có các đẳng thức sau (trong đó r = s có nghĩa là R = S):

$r \cup s = s \cup r$;	$r \cup r = r$;
$r \cup (s \cup t) = (r \cup s) \cup t$;	$r(st) = (rs)t$;
$r(s \cup t) = rs \cup rt$;	$(r \cup s)t = rt \cup rt$;
$r\lambda = \lambda r = r$;	$\varnothing r = r\varnothing = \varnothing$;
$r \cup \varnothing = r$;	$\varnothing^* = \lambda$;
$(\lambda \cup r)^* = r^*$;	$r \cup r^* = r^*$;
$(r^*)^* = r^*$;	$(r^*s^*)^* = (r \cup s)^*$.

www.thuvien247.net

38. Chứng tỏ các BTCQ sau đây biểu diễn cùng một ngôn ngữ:

a) $(aa)^*$; b) $(aa)^* \cup \varnothing a$;

c) $(aa \cup aaaa)^*$; d) $(aa)^*(aa)^*$.

39. Cho các BTCQ:

a) $10 \cup (0 \cup 11)0^*1$;

b) $01(((10)^* \cup 111)^* \cup 0)^*1$;

c) $((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* \cup ((0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$.

Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các ngôn ngữ được biểu diễn bởi các BTCQ đã cho.

40. VPPNC có dạng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với

$$R = \{A \to Ba, A \to a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$$

gọi là VPCQ trái.

Người ta gọi VPCQ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, ở đây

$$R = \{A \to aB, A \to a \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$$

là VPCQ phải.

Chứng minh rằng:

a) Nếu L là NNCQ thì tồn tại VPCQ phải $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho

$$L(G) = L \setminus \{\lambda\}.$$

b) Nếu G là VPCQ phải thì L(G) là một NNCQ.

41. Ngôn ngữ L là NNCQ khi và chỉ khi có một VPCQ phải G sao cho

$$L(G) = L \setminus \{\lambda\}.$$

42. Chứng minh mọi NNCQ đều là NNPNC. Mệnh đề đảo lại là không đúng, cho ví dụ.

43. VPCQ phải $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ và VPCQ trái $G' = <\Sigma', \Delta', I', R'>$ được gọi là các VPCQ đối ngẫu khi và chỉ khi quy tắc $A \to Ba \in R$ thì quy tắc $A \to aB \in R'$ và quy tắc $A \to a \in R$ thì quy tắc $A \to a \in R'$.

Chứng minh rằng, nếu G và G' là hai VPCQ đối ngẫu thì

$$L(G') = \widehat{L(G)}, \text{ ở đây } \hat{L} \text{ là ảnh gương của L.}$$

44. Chứng minh rằng, phép ảnh gương là đóng đối với NNCQ.

45. VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ được gọi là văn phạm tuyến tính phải (VPTTP) nếu nó có tập quy tắc

$$R = \{A \to \omega B, A \to \omega \mid A, B \in \Delta, \omega \in \Sigma^+\}.$$

Trường hợp $R = \{A \to B\omega, A \to \omega \mid A, B \in \Delta, \omega \in \Sigma^+\}$ thì G gọi là văn phạm tuyến tính trái (VPTTT). Từ đó ta nói VPCQ trái (phải) là VPTTT (VPTTP) khi $l(\omega) = 1$. Chứng minh rằng:

a) Nếu G là VPTTP thì L(G) là một NNCQ.

b) Nếu G là VPTTT thì L(G) là một NNCQ.

www.thuvien247.net

Chương 3

ÔTÔMAT HỮU HẠN TRẠNG THÁI ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ CHÍNH QUY SUY RỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một trong những ứng dụng quan trọng của ôtômat là sự đoán nhận ngôn ngữ của nó. Sự đoán nhận ngôn ngữ của ôtômat hữu hạn trạng thái (gọi tắt là ôtômat) và ôtômat đẩy xuống được trình bày trong Chương 3 và Chương 4 đóng vai trò quan trọng trong việc thiết kế và xây dựng các giải thuật phân tích cú pháp trong ngôn ngữ lập trình.

1. Định nghĩa ôtômat

Ôtômat là bộ 5 thành phần: $M = <\Sigma, Q, F, q_o, \sigma>$, trong đó: Σ – tập hữu hạn khác rỗng các ký hiệu vào; Q – tập hữu hạn khác rỗng các trạng thái; $F \subseteq Q$ là tập trạng thái kết thúc; $q_0 \in Q$ gọi là trạng thái ban đầu; $\sigma: Q \times \Sigma^* \to Q$ (trong trường hợp này M gọi là ôtômat đơn định); $\sigma: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ (trong trường hợp này M gọi là ôtômat không đơn định).

2. Phương pháp biểu diễn ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_o, \sigma>$

a) Phương pháp lập bảng chuyển

Nếu M có $\Sigma = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $Q = \{q_o, q_1, q_2, ..., q_{m-1}\}$ ($m \geq 1$) thì M có thể cho dưới dạng bảng chuyển:

Q \ Σ	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n
q_o						
q_1						
...						
q_i				$\sigma(q_i, x_j)$		
...						
q_{m-1}						

$i = 0, 1, ..., m-1$; $j = 1, 2, ..., n$; $q_o \in Q$ là trạng thái ban đầu; $F \subseteq Q$ là tập trạng thái kết thúc. Nếu $\forall(i, j)$ mà $\sigma(q_i, x_j) \in Q$ thì M là đơn định, ngược lại có $\exists(i, j)$ để $\sigma(q_i, x_j) \subseteq Q$ thì M là không đơn định.

www.thuvien247.net

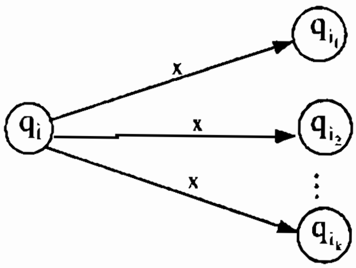
b) Phương pháp đồ thị chuyển

Nếu M có $\Sigma = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $Q = \{q_o, q_1, ..., q_{m-1}\}$ $(m \geq 1)$ thì M có thể cho dưới dạng đồ thị chuyển theo các nguyên tắc sau đây:

- Mỗi trạng thái $q \in Q$ đặt tương ứng với một đỉnh, đỉnh là một vòng tròn gán nhãn q: (q)
- Nếu $q_o \in Q$ là trạng thái ban đầu thì đỉnh có dạng : $\rightarrow$ (q_o)
- Nếu $q \in Q$ mà $q \in F$ thì đỉnh của q là trạng thái kết thúc có dạng: ((q))
- Nếu $\sigma(q_i, x) = q_j \in Q$ với $i \neq j$ thì trong đồ thị chuyển của M từ đỉnh q_i đến q_j có một cung gán nhãn x: $(q_i) \xrightarrow{x} (q_j)$.

Đặc biệt, nếu $i = j$ thì từ đỉnh q_i đến đỉnh q_i có một khuyên gán nhãn x: (q_i)

- Nếu $\sigma(q_i, x) = \{q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k}\} \subseteq Q$ thì từ đỉnh q_i đến k đỉnh $q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k}$ có k cung cung gán nhãn x và trong đồ thị chuyển của M có dạng:



Chú ý: Ta đã biết, đối với văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, cho văn phạm thực chất là cho tập quy tắc sinh R. Vì từ R ta khôi phục lại Σ, Δ và I của văn phạm. Tương tự, đối với ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_o, \sigma>$, cho M thực chất là cho hàm chuyển σ. Vì từ σ ta khôi phục lại các thành phần khác Σ, Q, F và q_o. Như vậy, cho M dưới dạng bảng chuyển hay dưới dạng đồ thị chuyển đều là cho hàm chuyển σ dưới dạng bảng chuyển hay đồ thị chuyển.

3. Định nghĩa ngôn ngữ đoán nhận của ôtômat

Cho $M = <\Sigma, Q, F, q_o, \sigma>$ và $\omega \in \Sigma^*$ là một xâu trên Σ. Nếu khi M đọc hết xâu ω bắt đầu từ trạng thái ban đầu, nó đưa về một trạng thái $\sigma(q_o, \omega) = q \in F$ hoặc $\sigma(q_o, \omega) = \{q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k}\} \subseteq Q$ với $\sigma(q_o, \omega) \cap F = \{q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k}\} \cap F \neq \emptyset$ thì ta nói M đoán nhận xâu vào ω. M đoán nhận xâu vào $\omega \in \Sigma^*$ theo hai cách:

$L(M) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \;\&\; \sigma(q_o, \omega) \in F\}$ đối với M đơn định;

$L(M) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \;\&\; \sigma(q_o, \omega) \cap F \neq \emptyset\}$ đối với M không đơn định.

www.thuvien247.net

4. Sự tương đương giữa ôtômat đơn định và không đơn định

Ta nói ôtômat M là tương đương với ôtômat M' (ký hiệu $M \approx M'$) khi và chỉ khi $L(M) = L(M')$.

Định lý 5. Lớp ngôn ngữ đoán nhận của ôtômat đơn định trùng với lớp ngôn ngữ đoán nhận của ôtômat không đơn định trên bảng ký tự Σ.

Cơ sở để chứng minh Định lý 5 là thuật toán sau:

Thuật toán:

Input $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ không đơn định;

output $M' = <\Sigma', Q', F', s_0, \sigma'>$ đơn định và $M \approx M'$, M' được xây dựng theo các bước dưới đây:

Bước 1: $\Sigma' := \Sigma$ của M.

Bước 2: $Q' := 2^Q$, ở đây 2^Q = tập tất cả các tập con của Q hay

$2^Q = \{u_0, u_1, u_2, ..., u_{2^{|Q|}-1} \mid u_i \subseteq Q\ (i = 0, 1, ..., 2^{|Q|} - 1)\}$

và $s_0 = u_0 = \{q_0\}$ (q_0 là trạng thái ban đầu của M).

Bước 3: $F' := \{u \mid u \subseteq Q \ \&\ u \cap F \neq \varnothing\}$.

Bước 4: $\sigma': Q' \times \Sigma^* \rightarrow Q'$ được xác định: với mọi $u \in Q'$ và mọi $x \in \Sigma$ ta định nghĩa: $\sigma'(u, x) = \bigcup_{q \in U} \sigma(q, x)$.

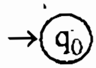
Với M' xây dựng như trên thì M' là ôtômat đơn định và $M' \approx M$.

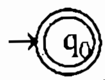
Chú ý: Về mặt phương diện cấu trúc và thiết kế chương trình dịch thì ôtômat không đơn định phức tạp hơn rất nhiều so với ôtômat đơn định. Vì lý do người ta luôn luôn biến đổi ôtômat không đơn định về ôtômat đơn định tương đương với nó bằng cách áp dụng thuật toán trên.

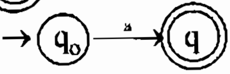
5. Thuật toán Thompson

Thuật toán này thực chất là chỉ ra các ôtômat đoán nhận ngôn ngữ theo các bước định nghĩa NNCQ trên bảng ký hiệu Σ.

Nội dung gồm các bước sau:

a) NNCQ $\varnothing$ được đoán nhận bởi M :  ($L(M) = \varnothing$).

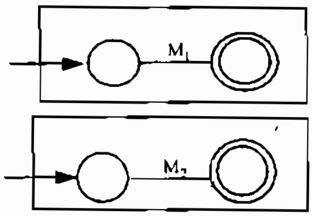
b) NNCQ $\{\lambda\}$ được đoán nhận bởi M :  ($L(M) = \{\lambda\}$).

c) NNCQ $\{a\}$ ($a \in \Sigma$) được đoán nhận bởi M: 

($L(M) = \{a\}$).

Giả sử $A, B \subseteq \Sigma^*$ là hai NNCQ được đoán nhận tương ứng bởi hai ôtômat:

www.thuvien247.net

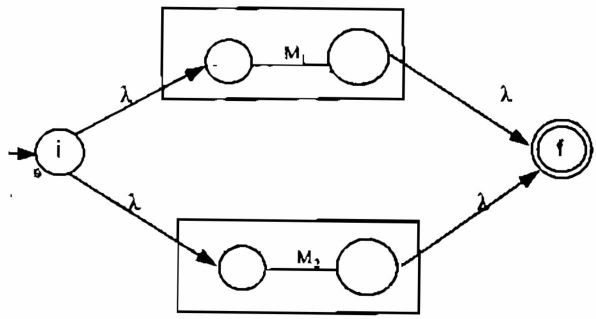
M_1 : 

$(L(M_1) = A)$

M_2 : $(L(M_2) = B)$

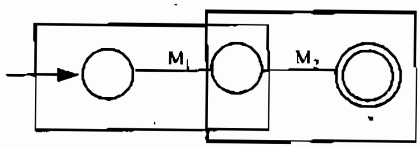
Khi đó ta có:

d) $A \cup B$ được đoán nhận bởi ôtômat M có dạng

M: 

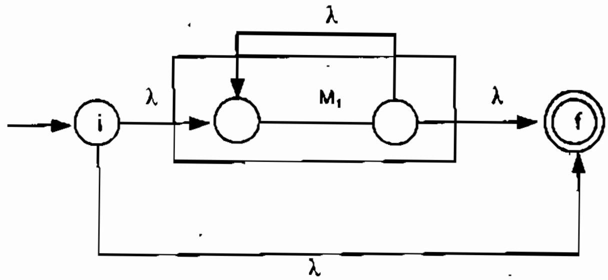
$(L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) = A \cup B)$

e) AB được đoán nhận bởi ôtômat M có dạng

M : 

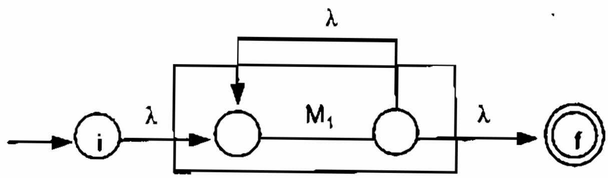
$(L(M) = L(M_1)L(M_2))$.

f) A* được đoán nhận bởi ôtômat M có dạng

M: 

$(L(M) = A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n)$

g) A^+ được đoán nhận bởi ôtômat M có dạng

M: 

$(L(M) = A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n)$

www.thuvien247.net

6. Quan hệ giữa ngôn ngữ chính quy, ôtômat và văn phạm chính quy suy rộng

Định lý 6 (Định lý Kleene). Tập A là NNCQ trên bảng ký tự Σ khi và chỉ khi nó được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn trạng thái $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ sao cho $L(M) = A$.

Định lý 7. a) Đối với VPCQ suy rộng bất kỳ $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, bao giờ cũng xây dựng được ôtômat hữu hạn trạng thái $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ sao cho $L(M) = L(G)$.

b) Đối với ôtômat hữu hạn trạng thái $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$, bao giờ cũng xây dựng được VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(M) = L(G)$.

Chú ý: Mối quan hệ tương hỗ giữa lớp BTCQ (L_{BTCQ}), lớp NNCQ (L_{NNCQ}), lớp ngôn ngữ sinh bởi VPCQ (L_{VPCQ}), lớp ngôn ngữ sinh bởi VPCQ suy rộng (L_{VPCQSR}) và lớp ngôn ngữ đoán nhận bởi ôtômat M (L_{OTM}) được cho bởi biểu thức sau

$$L_{BTCQ} = L_{NNCQ} = L_{OTM} = L_{VPCQSR} = L_{VPCQ} \cup \{\lambda\}.$$

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ dưới dạnh bảng chuyển

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\varnothing$

q_0 – trạng thái ban đầu; $F = \{q_2, q_0\}$.

a) Đưa M về dạng đồ thị chuyển.

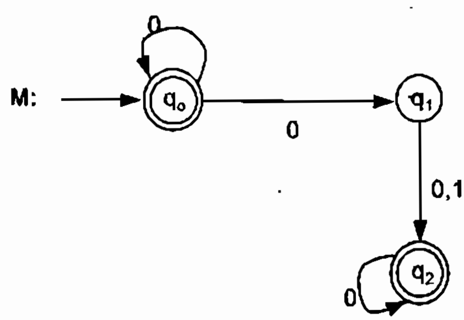
b) Tìm L(M).

c) Tìm BTCQ của L(M).

d) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho $L(G) = L(M)$.

Giải

a)



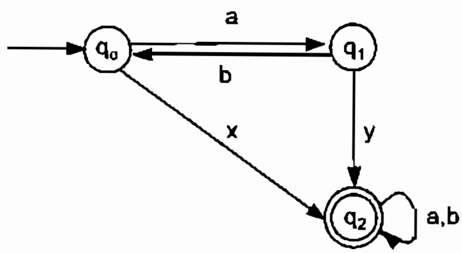
www.thuvien247.net

b) $L(M) = \{\lambda, 0^n, 0^m10^k \mid n \geq 2, m \geq 1, k \geq 0\}$.

c) BTCQ của L(M) là $\lambda \cup 000^* \cup 00^*10^*$.

d) $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với $R = \{I \to \lambda, I \to 0I, I \to 0B, B \to 0B, B \to 1C, C \to 0C, C \to \lambda\}$.

2. Cho $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ dưới dạng đồ thị chuyển



a) Tìm L(M).

b) Tìm BTCQ của L(M).

c) Xây dựng VPCQ G sao cho L(G) = L(M).

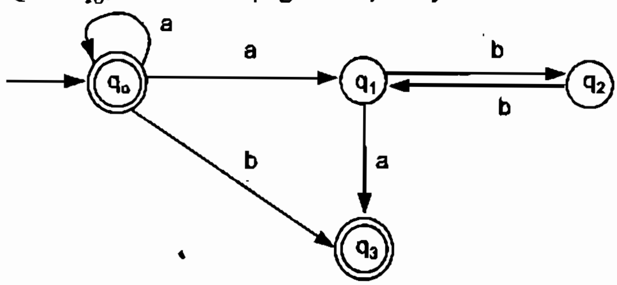
Giải

a) $L(M) = \{(ab)^n x\omega, (ab)^m ay\omega \mid \omega \in \{a, b\}^*, n \geq 0, m \geq 0\}$.

b) BTCQ của L(M) là $(ab)^*x(a \cup b)^* \cup (ab)^*ay(a \cup b)^*$.

c) $R = \{I \to aA, A \to bI, I \to xB, B \to aB, B \to bB, B \to \lambda, I \to aD, D \to bI, I \to aF, F \to yP, P \to aP, P \to bP, P \to \lambda\}$.

3. Cho $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ dưới dạng đồ thị chuyển



a) Viết M đầy đủ theo định nghĩa và M là đơn định hay không đơn định?

b) Tìm L(M).

c) Đưa M về dạng bảng chuyển.

d) Tìm BTCQ của L(M).

e) Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ để L(G) = L(M).

Giải. a) M là không đơn định vì $\sigma(q_0, a) = \{q_0, q_1\} \subseteq Q$. M dưới dạng đầy đủ là: $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, q_0 là trạng thái ban đầu, $F = \{q_o, q_3\}$ là tập trạng thái kết thúc. Còn hàm chuyển σ cho dưới dạng đồ thị chuyển ở trên hoặc cho dưới dạng bảng chuyển ở câu c.

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

b) $L(M) = \{\lambda, a^n a(bb)^k a, a^m b \mid n \geq 0, k \geq 0, m \geq 0\}$. Ta chỉ ra các xâu $\omega_1 = aa$, $\omega_2 = b$ (ứng với $n = 1$, $k = 0$, $m = 0$) được M đoán nhận: $\sigma(q_0, \omega_1) = \sigma(q_0, aa) = \sigma(q_1, a) \cup \sigma(q_0, a) = \{q_3\} \cup \{q_0, q_1\} = \{q_0, q_1, q_3\}$. Do $\sigma(q_0, \omega_1) \cap F \neq 0$ nên $\omega_1 \in L(M)$; $\sigma(q_0, \omega_2) = \sigma(q_0, b) = \{q_3\} \in F$ nên $\omega_2 \in L(M)$.

Bạn đọc tự chứng minh cho các trường hợp còn lại.

c)

Q \ Σ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_3	$\varnothing$	$\varnothing$

q_o – trạng thái ban đầu; $F = \{q_o, q_3\}$.

d) $a^*a(bc)^*a \cup a^*b \cup \lambda$.

e) $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{I \to aA, A \to aA, A \to bB, B \to bA, A \to a, I \to aI, I \to b, I \to \lambda\}$.

Dễ dàng chỉ ra $L(G) = L(M)$.

4. Cho $L = \{ab(cdcd)^n ba, x^m aba, b(xy)^k xb \mid n \geq 0, m \geq 1, k \geq 0\}$.

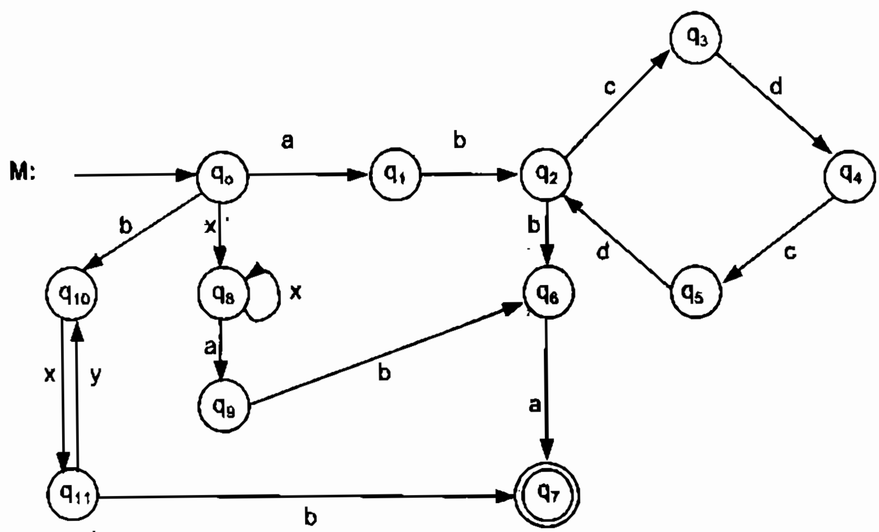
a) Xây dựng ôtômat đơn định sao cho $L(M) = L$.

b) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho $L(G) = L$.

c) Chỉ ra BTCQ của L.

Giải

a)



www.thuvien247.net

Rõ ràng

$$L(M) = L = \{ab(cdcd)^n ba,\ x^m aba,\ b(xy)^k\, xb \mid n \geq 0,\ m \geq 1,\ k \geq 0\}.$$

Chẳng hạn, cho $n = k = 0$, $m = 1$ ta có:

$\omega_1 = abba$, $\omega_2 = xaba$, $\omega_3 = bxb$;

$\sigma(q_0, \omega_1) = \sigma(q_0, abba) = \sigma(q_1, bba) = \sigma(q_2, ba) = \sigma(q_6, a) = q_7 \in F$;

$\sigma(q_0, \omega_2) = \sigma(q_0, xaba) = \sigma(q_8, aba) = \sigma(q_9, ba) = \sigma(q_6, a) = q_7 \in F$;

$\sigma(q_0, \omega_3) = \sigma(q_{10}, xb) = \sigma(q_{11}, b) = q_7 \in F$.

Bạn đọc tự chứng minh cho các trường hợp còn lại.

b) VPCQ G có

$R = \{I \to aA_1, A_1 \to bA_2, A_2 \to cA_3, A_3 \to dA_4, A_4 \to cA_5, A_5 \to dA_2,$
$A_2 \to bA_6, A_6 \to a, I \to xB_1, B_1 \to xB_1, B_1 \to aB_2, B_2 \to bB_3,$
$B_3 \to a, I \to bF_1, F_1 \to xF_2, F_2 \to yF_1, F_1 \to xF_3, F_3 \to b\}$.

Rõ ràng $L(G) = L(M) = L$. Chẳng hạn, dẫn xuất đầy đủ của 3 xâu đặc biệt $\omega_1 = abba$, $\omega_2 = xaba$, $\omega_3 = bxb$ là:

$D(abba) = (I, aA_1, abA_2, abbA_6, abba)$;

$D(xaba) = (I, xB_1, xaB_2, xabB_3, xaba)$;

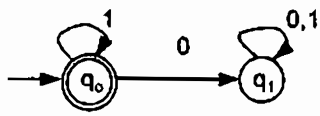
$D(bxb) = (I, bF_1, bxF_3, bxb)$.

Bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại.

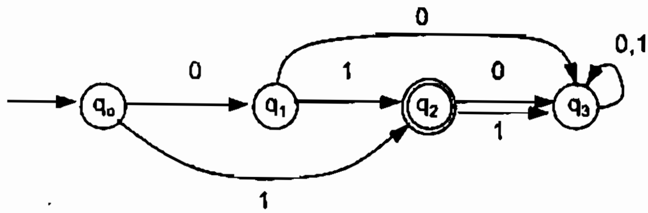
c) $ab(cdcd)^*ba \cup x^*xaba \cup b(xy)^*xb$ là BTCQ của L.

5. Cho ôtômat

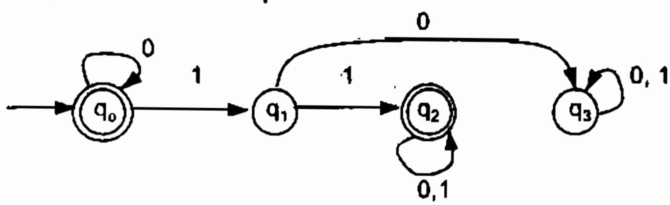
M_1 :



M_2:



M_3:



a) Tìm $L(M_i)$ và tìm BTCQ của $L(M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

b) Đưa M_1, M_2, M_3 về dạng bảng chuyển.

c) Xây dựng các văn phạm chính quy G_i sao cho $L(G_i) = L(M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

www.thuvien247.net

d) Xây dựng ôtômat M theo thuật toán Thompson cho các trường hợp sau:

- $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) \cup L(M_3)$. Tìm BTCQ của L(M);
- $L(M) = L(M_1).L(M_2)$. Tìm BTCQ của L(M);
- $L(M) = L(M_2)^*$. Tìm BTCQ của L(M).

Giải

a) $L(M_1) = \{1^n \mid n \geq 0\}$ có BTCQ là 1^*;

$L(M_2) = \{01, 1\}$ có BTCQ là $01 \cup 1$;

$L(M_3) = \{\lambda, 0^m, 0^k11\omega \mid m \geq 0, k \geq 0, \omega \in \{0, 1\}^*\}$ có BTCQ là

$$\lambda \cup 0^* \cup 0^*11(0 \cup 1)^*.$$

Bạn đọc tự chứng minh.

b) • Bảng chuyển của M_1 là

Q \ Σ	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_1

Trạng thái ban đầu q_0 và cũng là trạng thái kết thúc.

- Bảng chuyển của M_2 là

Q \ Σ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_2
q_2	q_3	q_3
q_3	q_3	q_3

Trạng thái ban đầu q_0, trạng thái kết thúc $F = \{q_2\}$.

- Bảng chuyển của M_3 là

Q \ Σ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3

Trạng thái ban đầu q_0, trạng thái kết thúc $F = \{q_0, q_3\}$.

c) G_1 có $R_1 = \{I_1 \to 1I_1, I_1 \to \lambda\}$.

G_2 có $R_2 = \{I_2 \to 0A, A \to 1, I_2 \to 1\}$.

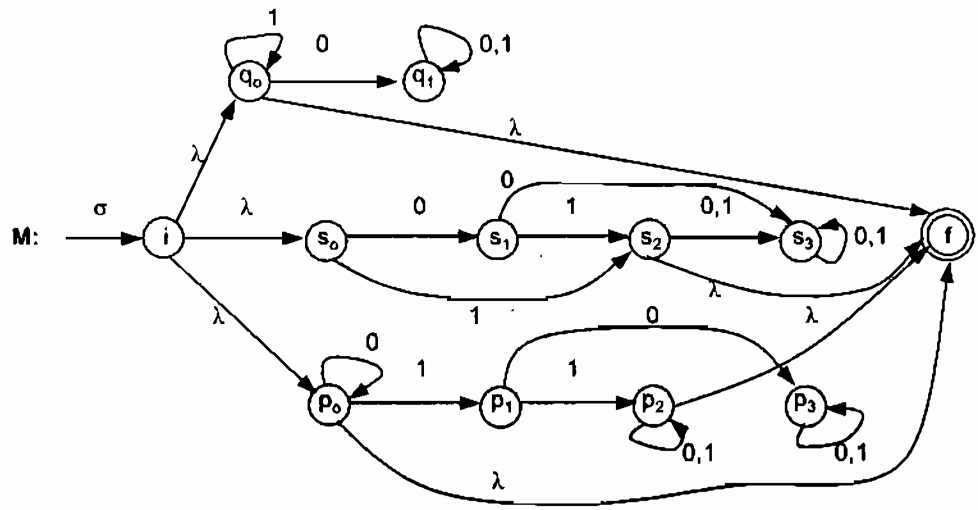
www.thuvien247.net

G_3 có $R_3 = \{I_3 \to 0I_3,\ I_3 \to \lambda,\ I_3 \to 1B_1,\ B_1 \to 1B_2,\ B_2 \to 0B_2,$
$B_2 \to 1B_2,\ B_2 \to \lambda\}$.

Bạn đọc tự chứng minh: $L(G_i) = L(M_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

d) • Xây dựng M: $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) \cup L(M_3)$
$= \{1^n, 01, 1, \lambda, 0^m, 0^k11\omega \mid n, m, k \geq 0\ \&\ \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

Theo Thompson ta có:



Xét với n = m = k = 1 ta có: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 01$, $\omega_3 = 1$, $\omega_4 = 0$, $\omega_5 = 011$ và trạng thái ban đầu i đến trạng thái kết thúc f, xâu được đoán nhận bao giờ cũng có ký tự đầu và ký tự cuối là λ:

$$\sigma(i, \lambda\omega_1\lambda) = \sigma(i, \lambda 1\lambda) = \sigma(q_0, 1\lambda) \cup \sigma(s_o, 1\lambda) \cup \sigma(p_0, 1\lambda)$$
$$= \sigma(q_0, \lambda) \cup \sigma(s_2, \lambda) \cup \sigma(P_1, \lambda) = \{f\} \cup \{f\} = \{f\}.$$

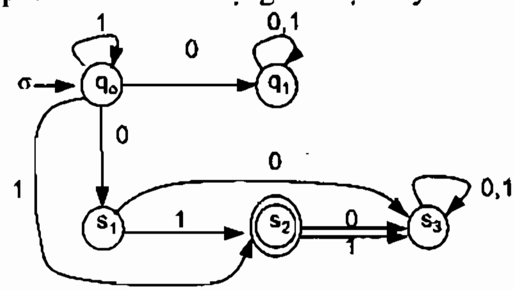
Vì $\sigma(i, \lambda\omega_1\lambda) \cap F \neq \varnothing$ nên M đoán nhận xâu ω_1 hay $\omega_1 \in L(M)$. Hoàn toàn tương tự chỉ ra $\omega_i \in L(M)$ $(i = 2, 3, 4, 5)$.

Bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại. BTCQ trong trường hợp này là: $1^* \cup 01 \cup 1 \cup 0^* \cup 0^*11(0 \cup 1)^*$.

• Xây dựng M:

$$L(M) = L(M_1).L(M_2) = \{1^n \mid n \geq 0\}\ \{01, 1\} = \{1^n01, 1^n1 \mid n \geq 0\}.$$

Theo Thompson có M dưới dạng đồ thị chuyển là



www.thuvien247.net

Dễ dàng chỉ ra $L(M) = L(M_1).L(M_2) = \{1^n01,\ 1^n1 \mid n \geq 0\}$.

Chẳng hạn, với $n = 0$ thì $\omega_1 = 01$, $\omega_2 = 1$ ta có:

$\sigma(q_0, 01) = \sigma(q_1, 1) \cup \sigma(s_1, 1) = \{q_1, s_2\}$ và $\sigma(q_0, 01) \cap F \neq \varnothing$ nên $\omega_1 = 01 \in L(M)$.

$\sigma(q_0, 1) = \{q_0, s_2\}$ và $\sigma(q_0, 1) \cap F \neq \varnothing$ nên $\omega_2 = 1 \in L(M)$.

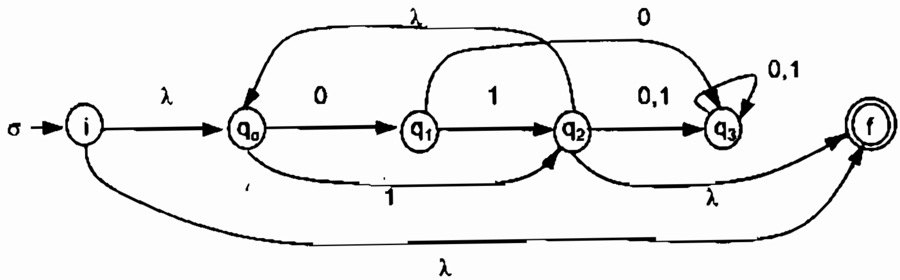
Bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại.

BTCQ trong trường hợp này là $1^*\,01 \cup 11^*$.

- Xây dựng M sao cho

$$L(M) = L(M_2)^* = \{01, 1\}^* = \{\lambda, 01, 1, 0101, 011, 101, 11, \ldots\}.$$

Theo Thompson M có dạng



Chú ý: Xâu mà M đoán nhận có dạng ký tự đầu tiên là λ, ký tự cuối cùng là λ và ở giữa là ngôn ngữ lặp có λ. Chẳng hạn:

$\sigma(i, \lambda) = f$, vậy $\lambda \in L(M)$;

$\sigma(i, \lambda 01\lambda) = \sigma(q_0, 01\lambda) = \sigma(q_1, 1\lambda) = \sigma(q_2, \lambda) = f$ vậy $01 \in L(M)$;

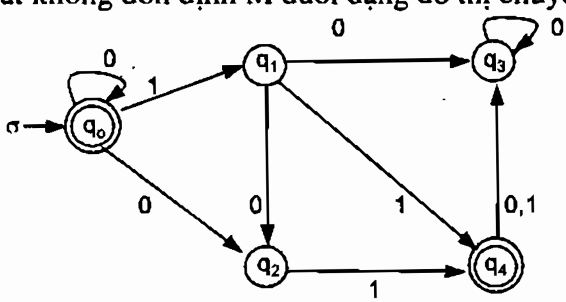
$\sigma(i, \lambda 01\lambda01\lambda) = \sigma(q_0, 01\lambda01\lambda) = \sigma(q_1, 1\lambda01\lambda) = \sigma(q_2, \lambda01\lambda)$

$= \sigma(q_0, 01\lambda) = \sigma(q_1, 1\lambda) = \sigma(q_2, \lambda) = \{f\} \cup \{q_0\} = \{q_0, f\}$,

vậy $0101 \in L(M)$.

Bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại. BTCQ trong trường hợp này là $(01 \cup 1)^*$.

6. Cho ôtômat không đơn định M dưới dạng đồ thị chuyển



a) Đưa M về dạng bảng chuyển.

b) Tìm L(M).

c) Tìm BTCQ của L(M).

d) Xây dựng ôtômat M_1 sao cho $L(M_1) = (L(M))^*$.

www.thuvien247.net

Giải. a) Dạng bảng chuyển của M là

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_4\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_4\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

q_o – trạng thái ban đầu; $F = \{q_o, q_4\}$.

b) $L(M) = \{0^n, 0^n101, 0^n11, 0^m1 \mid n \geq 0, m \geq 1\}$.

Trường hợp $n = 0$, $m = 1$ có $\omega_1 = 101$, $\omega_2 = 11$, $\omega_3 = 01$, $\omega_4 = \{\lambda\}$.

Vì $\sigma(q_0, \omega_1) = \sigma(q_0, 101) = \sigma(q_1, 01) = \sigma(q_3, 1) \cup \sigma(q_2, 1) = \{q_4\}$;

$\sigma(q_0, \omega_2) = \sigma(q_0, 11) = \sigma(q_1, 1) = \{q_4\}$;

$\sigma(q_0, \omega_3) = \sigma(q_0, 01) = \sigma(q_0, 1) \cup \sigma(q_2, 1) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$;

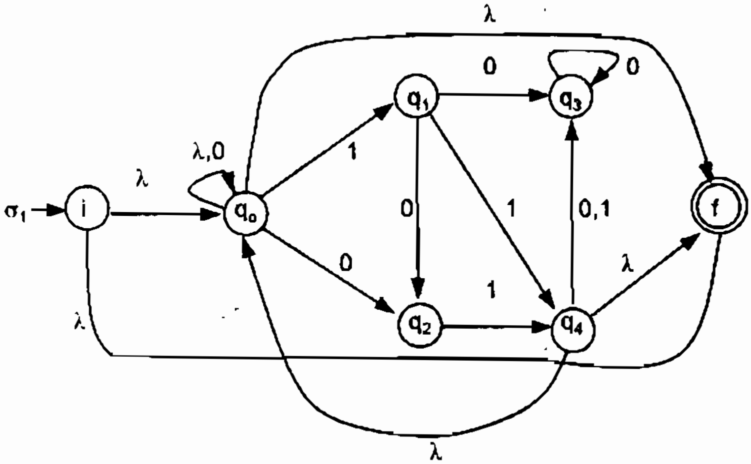
$\sigma(q_0, \omega_4) = \sigma(q_0, \lambda) = \{q_0\}$

và $\sigma(q_0, \omega_i) \cap F \neq \varnothing$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ nên các xâu $\omega_i \in L(M)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại.

c) BTCQ của L(M) là $0^* \cup 0^*101 \cup 0^*11 \cup 0^*01$.

d) Ôtômat M_1 mà $L(M_1) = (L(M))^*$ có dạng:



Bạn đọc tự chứng minh

$$L(M_1) = (L(M))^* = \{0^n, 0^n101, 0^n11, 0^m1 \mid n \geq 0, m \geq 1\}^*$$
$$= \{\lambda, 0^n, 0^n101, 0^n11, 0^m1, \ldots\}.$$

Chẳng hạn, $\sigma(i, \lambda) = f$ nên $\lambda \in L(M_1)$;

$\sigma(i, \lambda 0^n \lambda) = \sigma(q_0, 0^n\lambda) = \sigma(q_0, 0^{n-1}\lambda) = \sigma(q_0, \lambda) \cup \sigma(q_2, \lambda) = f$ nên $0^n \in L(M_1)$.

www.thuvien247.net

7. Cho các BTCQ:

a) $1^*0011(0 \cup 1)^*001$;

b) $0 \cup 11 \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^*11$.

1. Chỉ ra NNCQ của các BTCQ đã cho.

2. Xây dựng VPCQ suy rộng G_a và G_b sao cho $L(G_a)$ = NNCQ trong a và $L(G_b)$ = NNCQ trong b.

3. Xây dựng G sao cho $L(G) = L(G_a)L(G_b) \cup L(G_b)L(G_a)L(G_a)$.

4. Xây dựng ôtômat M_a, M_b sao cho $L(M_a) = L(G_a)$ và $L(M_b) = L(G_b)$.

5. Xây dựng M theo thuật toán Thompson sao cho $L(M) = L(M_a)L(M_b)$.

Giải

1. $NNCQ_a = \{1^n0011\omega001 \mid n \geq 0, \omega \in \{0, 1\}^*\}$ và

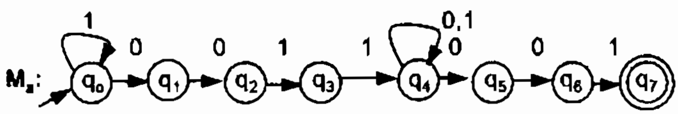
$NNCQ_b = \{0, 11, 00\omega11, 01\omega11, 10\omega11, 11\omega11 \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

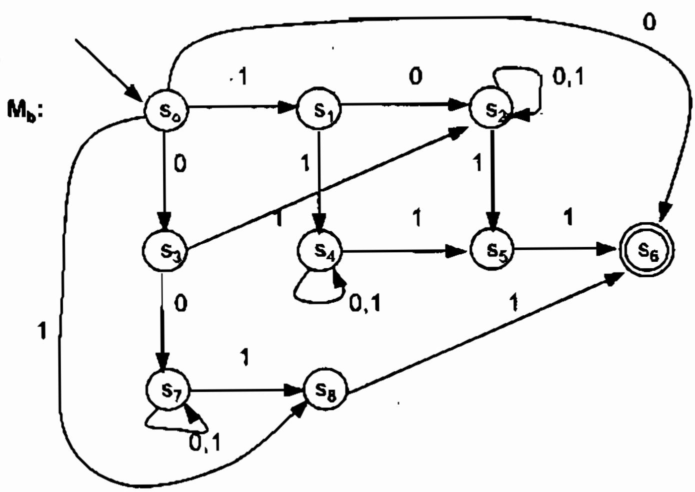
2. $R_a = \{I_a \to 1I_a, I_a \to 0A_1, A_1 \to 0A_2, A_2 \to 1A_3, A_3 \to 1A_4,$
$A_4 \to 0A_4, A_4 \to 1A_4, A_4 \to 0A_5, A_5 \to 0A_6, A_6 \to 1\}$;

$R_b = \{I_b \to 0, I_b \to 1A, A \to 1, I_b \to 0B_1, B_1 \to 0B_2, B_2 \to 0B_2,$
$B_2 \to 1B_2, B_2 \to 1B_3, B_3 \to 1, I_b \to 0C_1, C_1 \to 1C_2,$
$C_2 \to 0C_2, C_2 \to 1C_2, C_2 \to 1C_3, C_3 \to 1, I_b \to 1D_1,$
$D_1 \to 0D_2, D_2 \to 0D_2, D_2 \to 1D_2, D_2 \to 1D_3, D_3 \to 1,$
$I_b \to 1F_1, F_1 \to 1F_2, F_2 \to 0F_2, F_2 \to 1F_2, F_2 \to 1F_3, F_3 \to 1\}$.

3. $R = \{I \to I_aI_b, I \to I_bI_aI_a\} \cup R_a \cup R_b$.

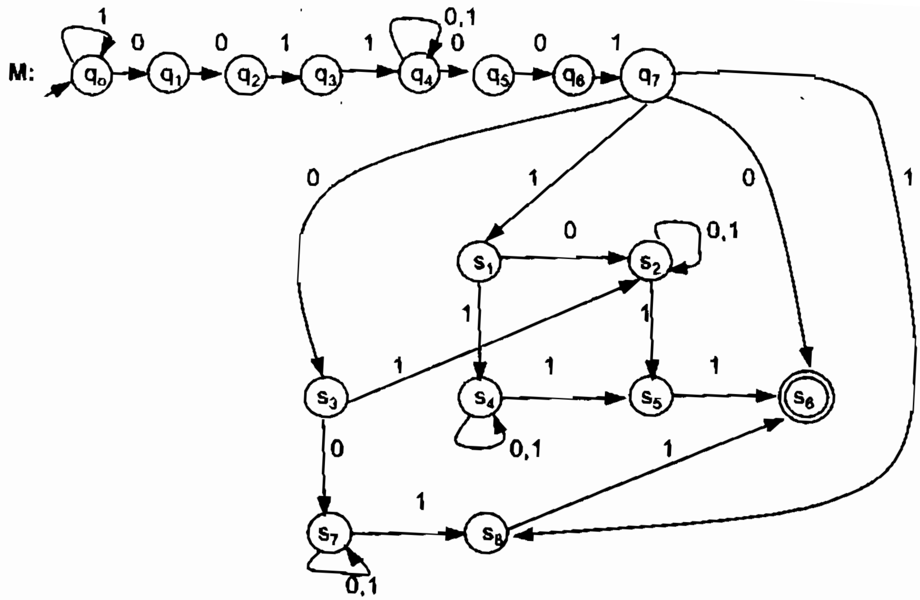
4.





www.thuvien247.net

5.



Có $L(M) = L(M_a).L(M_b)$

$= \{1^n0011\omega0010,\ 1^n0011\omega00111,\ 1^n0011\omega00100\omega11,$
$1^n0011\omega00101\omega11,\ 1^n0011\omega00110\omega11,\ 1^n0011\omega00111\omega11 \mid$
$n \geq 0,\ \omega \in \{0, 1\}^*\}.$

8. Cho BTCQ: $0(11)^*0 \cup 00^*10 \cup 10^* \cup \lambda$.

a) Tìm NNCQ của BTCQ trên.

b) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho L(G) có BTCQ ở trên.

c) Xây dựng ôtômat M sao cho L(M) = L(G).

Giải

a) $L = \{0(11)^n0,\ 0^m10,\ 10^k,\ \lambda \mid n \geq 0,\ m \geq 1,\ k \geq 0\}$.

b) G thỏa mãn L(G) = L có tập quy tắc chính quy là

$R = \{\ I \to 0A_1,\ A_1 \to 1A_2,\ A_2 \to 1A_1,\ A_1 \to 0,\ I \to 0B_1,\ B_1 \to 0B_1,$
$B_1 \to 1B_2,\ B_2 \to 0,\ I \to 1D_1,\ D_1 \to 0D_1,\ D_1 \to \lambda,\ I \to \lambda\}.$

Ta chứng minh $L(G) = \{0(11)^n0,\ 0^m10,\ 10^k, \lambda \mid n \geq 0,\ m \geq 1,\ k \geq 0\}$:

$D(0(11)^n0) = (I,\ 0A_1,\ 01A_2,\ 011A_1,\ ...,\ 0(11)^nA_1,\ 0(11)^n0);$

$D(0^m10) = (I,\ 0B_1,\ 00B_1,\ ...,\ 0^mB_1,\ 0^m1B_2,\ 0^m10);$

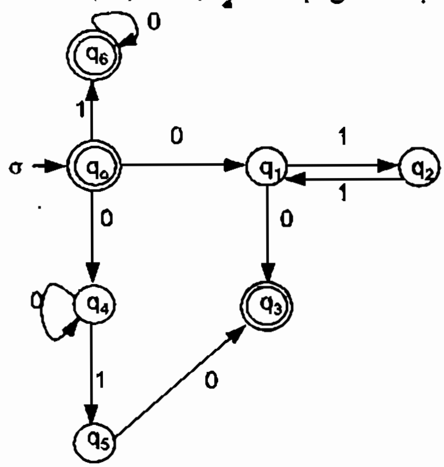
$D(10^k) = (I,\ 1D_1,\ 10D_1,\ ...,\ 10^kD_1,\ 10^k);$

$D(\lambda) = (I, \lambda)$

là các dẫn xuất đầy đủ của các xâu trong L(G).

www.thuvien247.net

c) Ôtômat M mà L(M) = L(G) có dạng đồ thị chuyển như sau



Chẳng hạn, ta chỉ ra

$\sigma(q_0, 0(11)^n0) = \sigma(q_4, (11)^n0) \cup \sigma(q_1, (11)^n0)$

$= \sigma(q_2, 1(11)^{n-1}0) = \sigma(q_1, (11)^{n-1}0) = ... = \sigma(q_1, 0) = q_3 \in F;$

$\sigma(q_0, 0^m10) \quad = \sigma(q_1, 0^{m-1}10) \cup \sigma(q_4, 0^{m-1}10) = ... = \sigma(q_4, 10)$

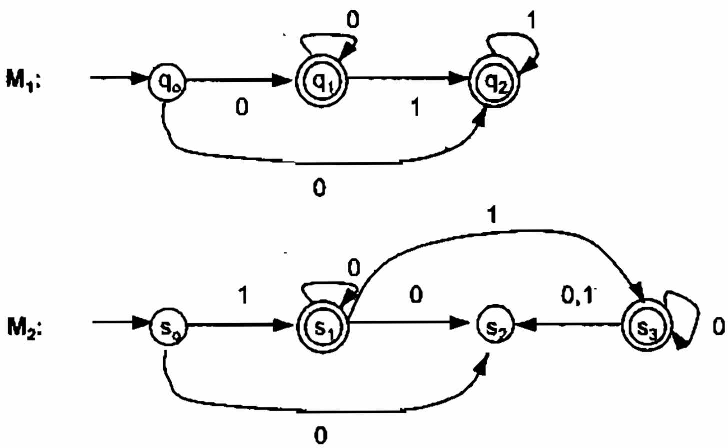
$= \sigma(q_5, 0) = q_3 \in F;$

$\sigma(q_0, 10^k) = \sigma(q_6, 0^k) = ... = \sigma(q_6, 0) = q_6 \in F;$

$\sigma(q_0, \lambda) = q_0 \in F.$

Đó là điều cần chỉ ra.

9. Cho hai ôtômat



a) Tìm $L(M_i)$ (i = 1, 2) và chỉ ra BTCQ của $L(M_i)$ (i = 1, 2).

b) Xây dựng ôtômat đơn định $M'_1 \approx M_1$.

c) Dùng thuật toán Thompson xây dựng ôtômat M thỏa mãn các trường hợp sau:

www.thuvien247.net

- $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$;
- $L(M) = L(M_1)L(M_2)$;
- $L(M) = (L(M_1))^*$.

Giải

a) $L(M_1) = \{0^n, 0^n1^m, 01^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 0\}$;

$L(M_2) = \{10^h, 10^h10^l \mid h \geq 0, l \geq 0\}$ (Bạn đọc tự chứng minh).

BTCQ của $L(M_1)$ là $00^* \cup 00^*1^*1 \cup 01^*$.

BTCQ của $L(M_2)$ là $10^* \cup 10^*10^*$.

b) Để cho tiện xây dựng M'_1 ta đưa M_1 về dạng bảng chuyển:

M_1:

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	∅
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	∅	$\{q_2\}$

q_0 – trạng ban đầu; $F_1 = \{q_1, q_2\}$ – tập trạng thái kết thúc.

Xây dựng M'_1 đơn định và tương đương với M_1:

$M'_1 = <\Sigma, Q', F', s_0, \sigma'>$;

$\Sigma = \{0, 1\}$;

$Q' = \{U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7\}$,

$s_0 = U_0 = \{q_0\}, U_1 = \{q_1\}, U_2 = \{q_2\}, U_3 = \{q_0, q_1\}, U_4 = \{q_0, q_2\}$,

$U_5 = \{q_1, q_2\}, U_6 = \{q_0, q_1, q_2\}, U_7 = \varnothing$;

$F' = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$.

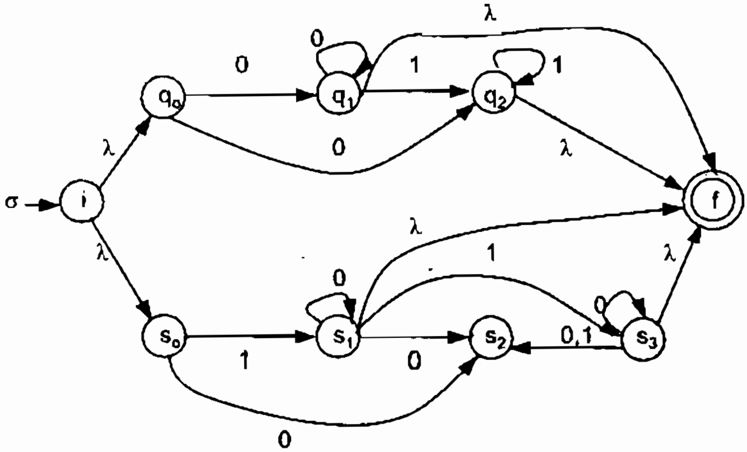
σ' cho dưới dạng bảng chuyển

Q \ Σ	0	1
U_0	U_5	U_7
U_1	U_1	U_2
U_2	U_7	U_2
U_3	U_5	U_2
U_4	U_5	U_2
U_5	U_1	U_2
U_6	U_5	U_2
U_7	U_7	U_7

$U_0 = s_0$ – trạng thái ban đầu; $F' = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$ – tập trạng thái kết thúc.

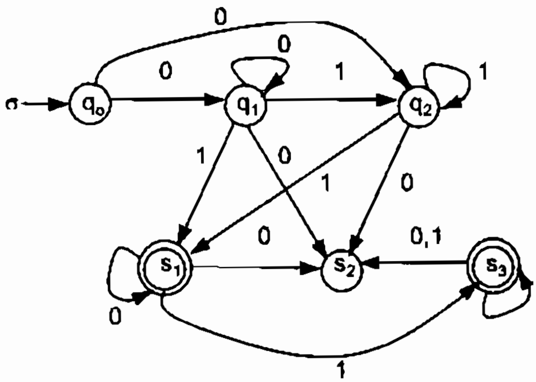
www.thuvien247.net

c) • Xây dựng M : $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$ có dạng đồ thị chuyển là



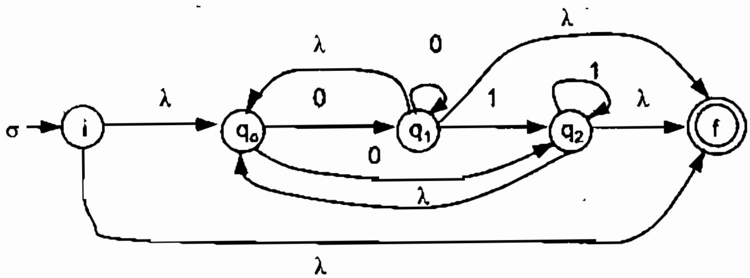
Ta có $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) = \{0^n, 0^n1^m, 01^k, 10^h, 10^h10^l \mid n, h, k, l \geq 0, m \geq 1\}$ (Bạn đọc tự chứng minh).

- Xây dựng M: $L(M) = L(M_1)L(M_2)$ có dạng đồ thị chuyển là



Ta có $L(M) = \{0^n10^h, 0^n10^h10^l, 0^n1^m10^h, 0^n1^m10^h10^l, 01^k10^h10^l, 01^k10^h10^l \mid n, k, h, l \geq 0, m \geq 1\}$ (Bạn đọc tự chứng minh).

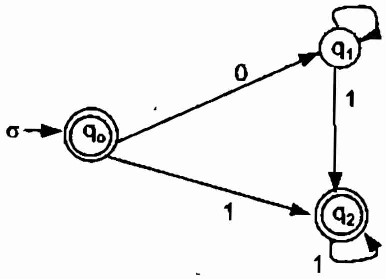
- Xây dựng M: $L(M) = (L(M_1))^* = \{0^n, 0^n1^m, 01^k\}^* = \{\lambda, 0^n, 0^n1^m, 01^k, \ldots\}$ có dạng đồ thị chuyển là



Bạn đọc tự chứng minh.

www.thuvien247.net

10. Cho ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$



a) Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R\}$ sao cho $L(G) = L(M)$.

b) Tìm BTCQ của $L(M) = L(G)$.

Giải

a) $R = \{I \to 0A, A \to 0A, A \to 1B, B \to 1B, B \to \lambda, I \to 1I, I \to 1, I \to \lambda\}$.

b) Ta có $L(M) = L(G) = \{\lambda, 0^n1^m, 1^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1\}$ và BTCQ của $L(M)$ có dạng $\lambda \cup 00^*11^* \cup 11^*$.

Bạn đọc tự kiểm tra kết quả trên.

11. Cho ôtômat không đơn định $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ dưới dạng bảng chuyển

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_0, q_2\}$
q_3	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$

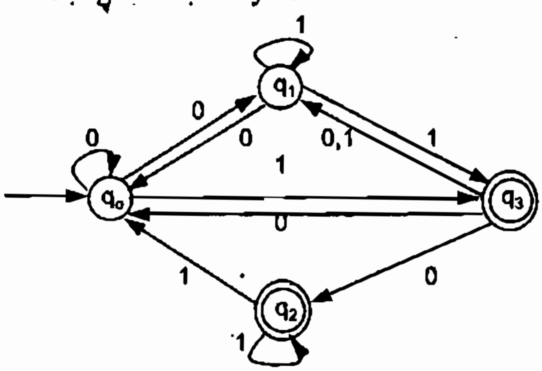
q_0 – trạng thái ban đầu, $F = \{q_2, q_3\}$ – tập trạng thái kết thúc.

a) Đưa M về dạng đồ thị chuyển.

b) Xây dựng ôtômat đơn định $M' = <\Sigma, Q', F', s_0, \sigma'> \approx M$ cho ở trên.

Giải

a) M cho dưới dạng đồ thị chuyển



www.thuvien247.net

b) $M' = <\Sigma, Q', F', s_0, \sigma'>$ có $\Sigma = \{0, 1\}$;

$Q' = 2^Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}\}$,

với $s_0 = \{q_0))$, $s_1 = \{q_1\}$, $s_2 = \{q_2\}$, $s_3 = \{q_3\}$. $s_4 = \{q_0, q_1\}$, $s_5 = \{q_0, q_2\}$,
$s_6 = \{q_0, q_3\}$, $s_7 = \{q_1, q_2\}$, $s_8 = \{q_1, q_3\}$, $s_9 = \{q_2, q_3\}$, $s_{10} = \{q_0, q_1, q_2\}$,
$s_{11} = \{q_0, q_1, q_3\}$, $s_{12} = \{q_0, q_2, q_3\}$, $s_{13} = \{q_1, q_2, q_3\}$,
$s_{14} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $s_{15} = \varnothing$.

$F = \{s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$ và σ' dưới dạng bảng chuyển

Q' \ Σ	0	1
s_0	s_4	s_3
s_1	s_0	s_8
s_2	s_{15}	s_5
s_3	s_{10}	s_1
s_4	s_4	s_8
s_5	s_4	s_{12}
s_6	s_{10}	s_8
s_7	s_0	s_{14}
s_8	s_{10}	s_8
s_9	s_{10}	s_{10}
s_{10}	s_4	s_{14}
s_{11}	s_{10}	s_8
s_{12}	s_{10}	s_{14}
s_{13}	s_{10}	s_{14}
s_{14}	s_{10}	s_{14}
s_{15}	s_{15}	s_{15}

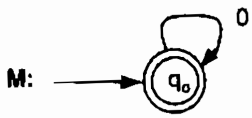
12. Tìm các ôtômat đoán nhận ngôn ngữ có các BTCQ sau:

$$0^*, 0^*1, 10^*, (01)^*1, (101)^*0(11)^*1;$$

$$100^* \cup 01(01)^* \cup 01(01)^*1(0 \cup 1)^*10^*.$$

Giải

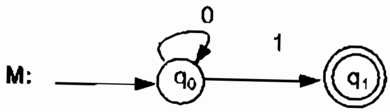
- 0^* là BTCQ của $L = \{0^n \mid n \geq 0\}$.



có $L(M) = L$.

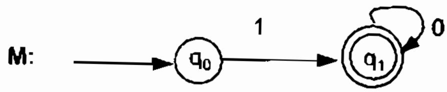
www.thuvien247.net

- 0^*1 là BTCQ của $L = \{0^n1 \mid n \geq 0\}$

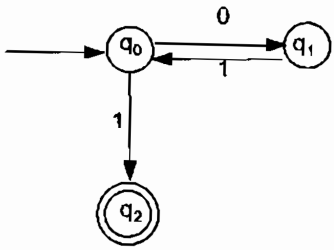


có L(M) = L.

- 10^* là BTCQ của $L = \{10^n \mid n \geq 0\}$



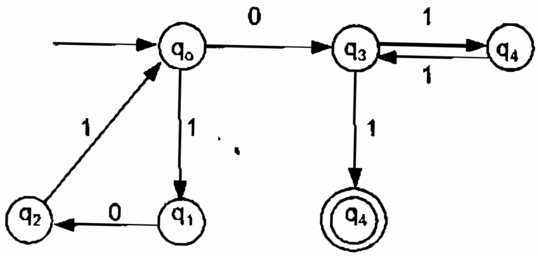
- $(01)^*1$ là BTCQ của $L = \{(01)^n1 \mid n \geq 0\}$



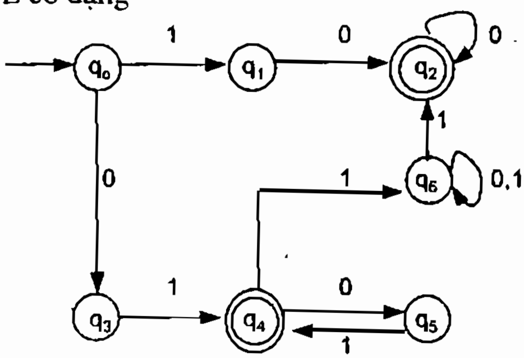
- $(101)^*0(11)^*1$ là BTCQ của ngôn ngữ

  $L = \{(101)^n\, 0(11)^m1 \mid n, m \geq 0\}$.

  Ôtômat M đoán nhận L có dạng



- BTCQ: $100^* \cup 01(01)^* \cup 01(01)^*1(0 \cup 1)^*10^*$ có NNCQ là $L = \{100^n, 01(01)^m, 01(01)^k1\omega10^l \mid n, m, k, l \geq 0\ \&\ \omega \in \{0, 1\}^*\}$. Ôtômat M đoán nhận L có dạng



www.thuvien247.net

13. Cho VPCQ suy rộng $G_i = <\Sigma_i, \Delta_i, I_i, R_i>$ (i = 1, 2, 3), với :

$R_1 = \{I_1 \to aI_1, I_1 \to b, I_1 \to \lambda\}$;

$R_2 = \{I_2 \to aA_1, A_1 \to bA_2, A_2 \to bA_1, A_1 \to a, I_2 \to \lambda\}$;

$R_3 = \{I_3 \to bB_1, B_1 \to aB_2, B_2 \to bB_3, B_3 \to cB_1, B_1 \to b, I_3 \to \lambda\}$.

a) Tìm $L(G_i)$ (i = 1, 2, 3) và tìm BTCQ của $L(G_i)$ (i = 1, 2, 3).

b) Xây dựng các ôtômat $M_i = <\Sigma_i, Q_i, F_i, q_{i_0}, \sigma_i>$ (i = 1, 2, 3) sao cho $L(M_i) = L(G_i)$.

c) Xây dựng văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho

$$L(G) = L(G_1) \cup L(G_1)L(G_2) \cup L(G_3).$$

Tìm BTCQ của L(G).

d) Xây dựng ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ sao cho L(M) = L(G) (trong câu c) theo thuật toán Thompson.

e) Xây dựng M sao cho $L(M) = L(M_3)^*$ theo thuật toán Thompson.

Giải

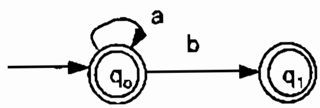
a) $L(G_1) = \{a^n b, a^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ có BTCQ là $a^*b \cup a^*$.

$L(G_2) = \{a(bb)^k a, \lambda \mid k \geq 0\}$ có BTCQ là $a(bb)^*a \cup \lambda$.

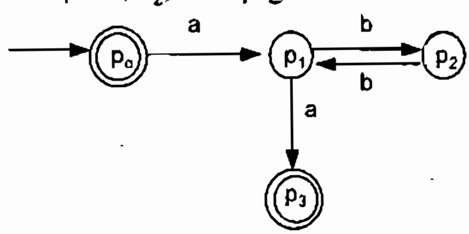
$L(G_3) = \{b(abc)^l b, \lambda \mid l \geq 0\}$ có BTCQ là $b(abc)^*b \cup \lambda$.

Bạn đọc tự chứng minh.

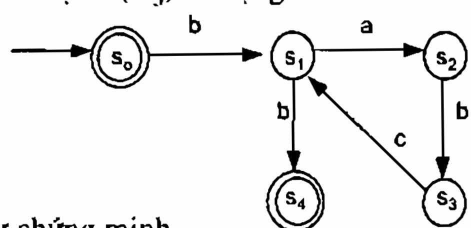
b) • M_1 đoán nhận $L(G_1)$ có dạng



• M_2 đoán nhận $L(G_2)$ có dạng



• M_3 đoán nhận $L(G_3)$ có dạng



Bạn đọc tự chứng minh.

www.thuvien247.net

c) $R = \{I \to I_1, I \to I_3, I \to I_1I_2\} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

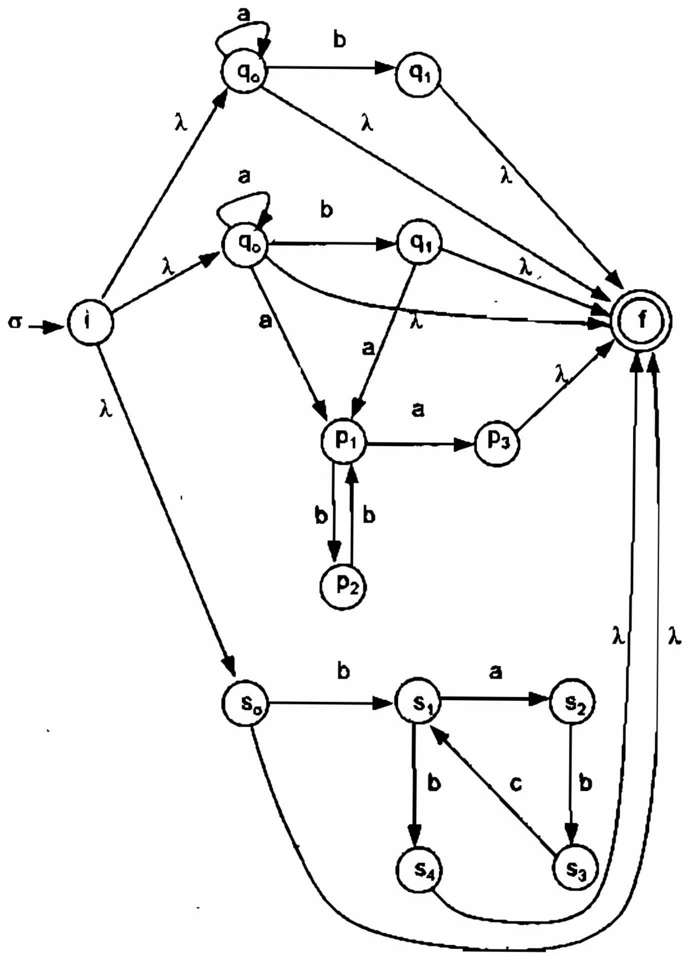
Bạn đọc tự chứng minh với R như trên ta có

$L(G) = \{a^nb, a^m, b(abc)^lb, a^nba(bb)^ka, a^ma(bb)^ka, \lambda \mid n, m, l, k \geq 0\}$.

BTCQ của L(G) là

$a^*b \cup a^* \cup b(abc)^*b \cup a^*ba(bb)^*a \cup a^*a(bb)^*a \cup \lambda$.

d) Ôtômat M đoán nhận L(G) trong câu c có dạng



Ta chỉ ra

$L(M) = \{a^nb, a^m, b(abc)^lb, a^nba(bb)^ka, a^ma(bb)^ka, \lambda \mid n, m, l, k \geq 0\}$.

Với trường hợp đơn giản nhất ứng với $n = m = l = k = 0$, ta có các xâu $\omega_1 = \lambda$, $\omega_2 = b$, $\omega_3 = a$, $\omega_4 = bb$, $\omega_5 = baa$, $\omega_6 = aa$:

$\sigma(i, \omega_1) = \sigma(i, \lambda) = \sigma(i, \lambda\lambda) = \sigma(q_o, \lambda) = f$;

$\sigma(i, \omega_2) = \sigma(i, \lambda\omega_2\lambda) = \sigma(q_0, b\lambda) = \sigma(q_1, \lambda) = f$;

$\sigma(i, \omega_3) = \sigma(i, \lambda a\lambda) = \sigma(q_0, a\lambda) = \sigma(q_0, \lambda) = f$;

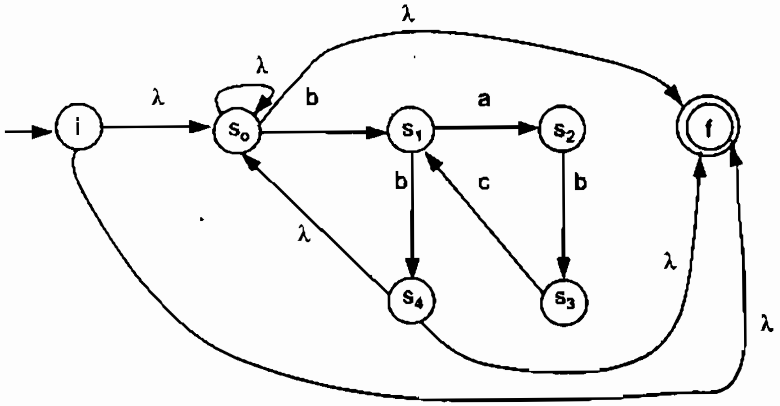
www.thuvien247.net

$\sigma(i, \omega_4) = \sigma(i, \lambda bb\lambda) = \sigma(s_0, bb\lambda) = \sigma(s_1, b\lambda) = \sigma(s_4, \lambda) = f;$

$\sigma(i, \omega_6) = \sigma(i, \lambda aa\lambda) = \sigma(q_0, aa\lambda) = \sigma(p_1, a\lambda) = \sigma(p_3, \lambda) = f.$

Bạn đọc tự chứng minh cho các trường hợp còn lại.

e) M: $L(M) = L(M_3)^* = \{b(abc)^l b, \lambda\}^* = \{\lambda, b(abc)^l b, b(abc)^l b\ b(abc)^l b, ...\}$ có dạng



Ở đây ta chỉ ra M đoán nhận xâu $\omega_1 = b(abc)b$, $\omega_2 = babcbbabcb$:

$\sigma(i, \omega_1) = \sigma(i, \lambda\omega_1\lambda) = \sigma(i, \lambda babcb\lambda) = \sigma(s_0, babcb\lambda)$

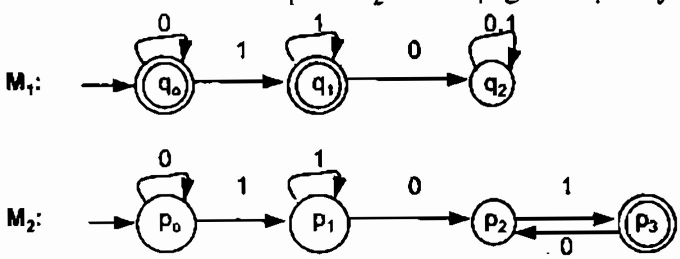
$= \sigma(s_1, abcb\lambda) = \sigma(s_2, bcb\lambda) = \sigma(s_3, cb\lambda) = \sigma(s_1, b\lambda) = \sigma(s_4, \lambda) = f;$

$\sigma(i, \omega_2) = \sigma(i, \lambda\omega_1\lambda\omega_1\lambda) = \sigma(i, \lambda babcb\lambda babcb\lambda) = \sigma(s_0, babcb\lambda babcb\lambda)$

$= ... = \sigma(s_1, abcb\lambda) = \sigma(s_2, bcb\lambda) = \sigma(s_3, cb\lambda) = \sigma(s_1, b\lambda) = \sigma(s_4, \lambda) = f.$

Bạn đọc tự chứng minh cho các trường hợp còn lại.

14. Cho hai ôtômat M_1 và M_2 dưới dạng đồ thị chuyển:



a) Tìm $L(M_1)$, $L(M_2)$ và các BTCQ của $L(M_1)$ và $L(M_2)$.

b) Xây dựng các VPCQ suy rộng G_1 và G_2 sao cho $L(G_1) = L(M_1)$ và $L(G_2) = L(M_2)$.

c) Xây dựng văn phạm G sao cho $L(G) = (L(G_1) \cup L(G_2))L(G_1)$.

Giải

a) $L(M_1) = \{0^n, 0^m1^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 1\}$. BTCQ của $L(M_1)$ là $0^* \cup 0^*11^*$.

www.thuvien247.net

$L(M_2) = \{0^h11^l0(10)^p1 \mid h \geq 0, l \geq 0, p \geq 0\}$. BTCQ của $L(M_2)$ là $0^*11^*0(10)^*1$.

b) G_1 với $L(G_1) = L(M_1)$ có tập quy tắc

$$R_1 = \{I_1 \to 0I_1, I_1 \to \lambda, I_1 \to 1I_1, I_1 \to 1\}.$$

G_2 với $L(G_2) = L(M_2)$ có tập quy tắc

$$R_2 = \{I_2 \to 0I_2, I_2 \to 1A_1, A_1 \to 1A_1, A_1 \to 0A_2, A_2 \to 1A_3, A_3 \to 0A_2, A_2 \to 1\}.$$

Bạn đọc tự chứng minh $L(G_i) = L(M_i)$ ($i = 1, 2$).

c) Ta có $(L(G_1) \cup L(G_2))L(G_1) = L(G_1)L(G_1) \cup L(G_2)L(G_1)$. Vậy văn phạm G mà $L(G) = L(G_1)L(G_1) \cup L(G_2)L(G_1)$ có tập quy tắc

$$R = \{I \to I_1I_1, I \to I_2I_1\} \cup R_1 \cup R_2.$$

Khi đó ta có $L(G) = L(G_1)L(G_1) \cup L(G_2)L(G_1)$.

15. Cho $L = \{\omega 00\omega, \omega 11\omega, \omega 01^n0\omega \mid n \geq 0, \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

a) Viết BTCQ của L.

b) Xây dựng ôtômat M sao cho $L(M) = L$.

c) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho $L(G) = L(M) = L$.

d) Xây dựng ôtômat M' theo thuật toán Thompson cho các trường hợp:

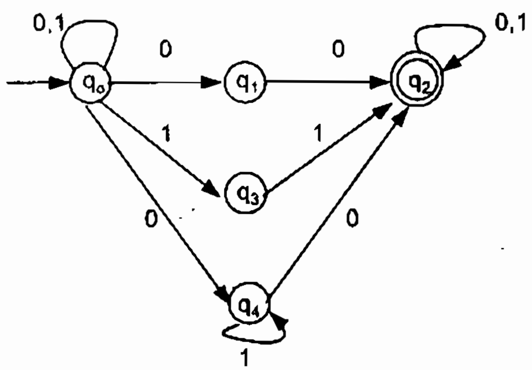
- $L(M') = L(M)L(M)$; (1)
- $L(M') = L(M)^*$. (2)

Giải

a) BTCQ của L là

$$(0\cup 1)^*\,00(0\cup 1)^* \cup (0 \cup 1)^*11(0 \cup 1)^* \cup (0 \cup 1)^*01^*0(0 \cup 1)^*.$$

b) M(L(M) = L) có dạng đồ thị sau



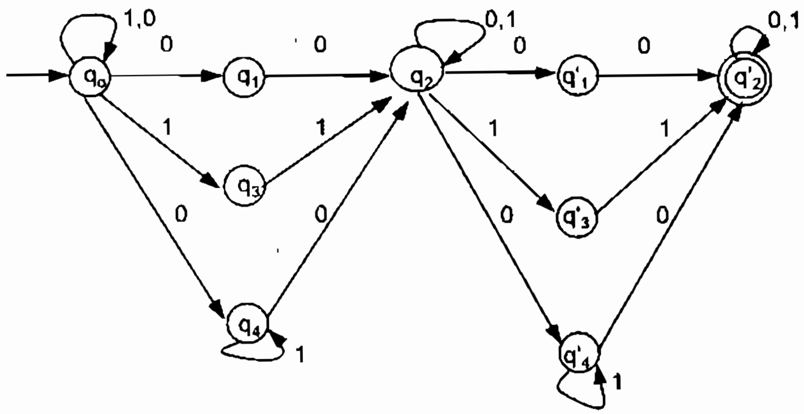
Bạn đọc tự chứng minh $L(M) = L$.

c) G có $R = \{I \to 0I, I \to 1I, I \to 1A_1, A_1 \to 1A_2, A_2 \to 0A_2, A_2 \to 1A_2, A_2 \to \lambda, I \to 0B_1, B_1 \to 0B_2, B_2 \to 1B_2, B_2 \to 0B_2, B_2 \to \lambda, I \to 0C_1, C_1 \to 1C_1, C_1 \to 0C_2, C_2 \to 0C_2, C_2 \to 1C_2, C_2 \to \lambda\}$.

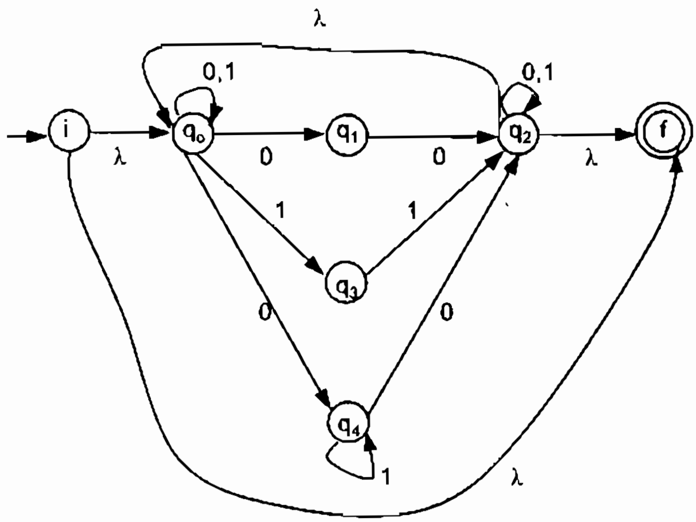
www.thuvien247.net

Bạn đọc tự chỉ ra L(M) = L(G).

d) • L(M') = L(M)L(M):



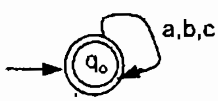
• L(M') = L(M)*:



Bạn đọc tự kiểm tra các kết quả trong câu d.

16. Cho $\Sigma^* = \{a, b, c\}^*$. Xây dựng ôtômat M, VPCQ suy rộng G sao cho L(M) = L(G) = $\{\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$ và chỉ ra BTCQ của Σ^*.

Giải. M thỏa mãn L(M) = $\{\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$ có dạng



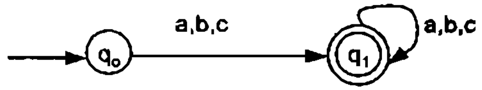
G thỏa mãn L(G) = $\{\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$ có R = $\{I \to aI, I \to bI, I \to cI, I \to \lambda\}$.

BTCQ của Σ^* là $(a \cup b \cup c)^*$.

www.thuvien247.net

17. Cho $\Sigma^+ = \{a, b, c\}^+$. Xây dựng ôtômat M, VPCQ G sao cho $L(M) = L(G) = \Sigma^+$ và tìm BTCQ của nó.

Giải. M thỏa mãn $L(M) = \Sigma^+ = \{a, b, c\}^+ = \{a, b, c\}^* \setminus \{\lambda\}$ có dạng



và G thỏa mãn $L(G) = \Sigma^+$ có tập quy tắc

$$R = \{I \to aI, I \to bI, I \to cI, I \to a, I \to b, I \to c\}.$$

BTCQ của Σ^+ là $(a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c)^*$.

18. Cho: $L_1 = \{\omega \mid \omega \in \{a, b, c\}^* \ \& \ l(\omega) = 2n + 1, n \geq 0\}$;

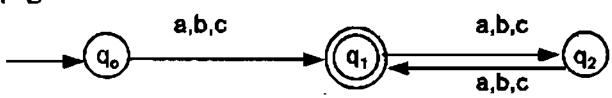
$L_2 = \{\omega \mid \omega \in \{a, b, c\}^* \ \& \ l(\omega) = 2n, n \geq 0\}$;

$L_3 = \{\omega \mid \omega \in \{a, b, c\}^* \ \& \ l(\omega) = 2n, n \geq 1\}$.

Xây dựng các ôtômat M_i, các VPCQ suy rộng G_i sao cho $L(M_i) = L(G_i) = L_i$ $(i = 1, 2, 3)$ và viết các BTCQ tương ứng.

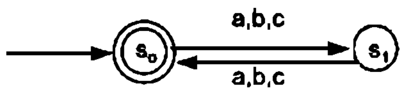
Giải

- M_1 có dạng :



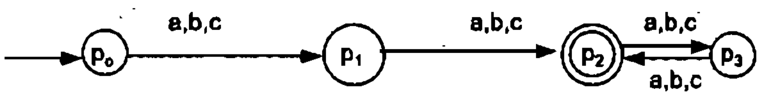
G_1 có $R_1 = \{I_1 \to aA, I_1 \to bA, I_1 \to cA, A \to aI_1, A \to bI_1, A \to cI_1,$
$I_1 \to a, I_1 \to b, I_1 \to c\}$.

- M_2 có dạng



G_2 có $R_2 = \{I_2 \to aA, I_2 \to bA, I_2 \to cA, A \to aI_2, A \to bI_2, A \to cI_2, I_2 \to \lambda\}$.

- M_3 có dạng



G_3 có $R_3 = |I_3 \to aA, I_3 \to bA, I_3 \to cA, A \to aB, A \to bB, A \to cB,$
$B \to aA, B \to bA, B \to cA, A \to a, A \to b, A \to c\}$.

BTCQ của $L(M_1) = L(G_1)$ là $(a \cup b \cup c)((a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c))^*$.

BTCQ của $L(M_2) = L(G_2)$ là $((a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c))^*$.

BTCQ của $L(M_3) = L(G_3)$ là

$$(a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c)((a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c))^*.$$

www.thuvien247.net

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

19. Cho ôtômat M dưới dạng bảng chuyển

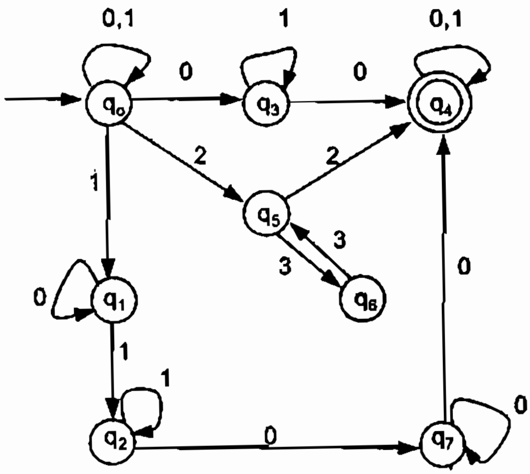
Q \ Σ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_1	q_3
q_3	q_1	q_2

a) Đưa M về dạng đồ thị chuyển.

b) Tìm ngôn ngữ đoán nhận L(M) của M.

c) Cho hai xâu ω_1 = 11101000 và ω_2 = 111010001. M có đoán nhận ω_1 và ω_2 không, vì sao?

20. Cho ôtômat M dưới dạng đồ thị chuyển



a) Tìm L(M).

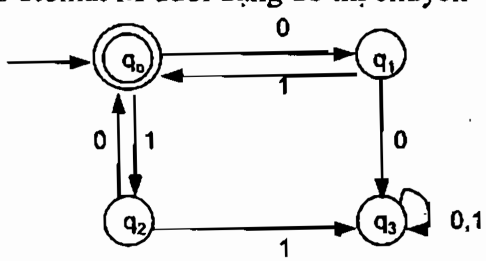
b) Tìm BTCQ của L(M).

c) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho L(G) = L(M).

d) Xây dựng ôtômat M' và M" theo thuật toán Thompson sao cho

L(M') = L(M).L(M) và L(M") = L(M)*.

21. Cho ôtômat M dưới dạng đồ thị chuyển



www.thuvien247.net

a) Chứng tỏ rằng ôtômat M đoán nhận tập các xâu $\omega \in \{0, 1\}^*$, ở đây xâu ω có số các số 0 bằng số các số 1. Tìm L(M).
b) Xây dựng VPCQ suy rộng G sao cho L(G) = L(M) và tìm BTCQ của L(M).

22. a) Xây dựng ôtômat đơn định M_1 đoán nhận các xâu trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}$, trong đó số số 0 và số số 1 là các số chẵn.
b) Xây dựng ôtômat không đơn định M_2 đoán nhận các xâu trên $\Sigma = \{0,1\}$, trong đó mỗi xâu hoặc chứa hai số 0 liền nhau, hoặc chứa hai số 1 liền nhau.
c) Xây dựng ôtômat M sao cho $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
d) Xây dựng ôtômat M sao cho $L(M) = L(M_1)L(M_2)$.
e) Xây dựng ôtômat M sao cho $L(M) = L(M_1)L(M_2) \cup L(M_1) \cup L(M_2)$.

23. Cho các BTCQ: 00, $(0 \cup 1)^*$, $(0 \cup 1)^*00(0 \cup 1)^*$, $(110)^*$, $(0 \cup 1)^*011$, $0^*1^*2^*$, $00^*11^*22^*$.
a) Hãy xác định các NNCQ tương ứng của các BTCQ đã cho.
b) Xây dựng các VPCQ suy rộng (các ôtômat) tương ứng sinh (đoán nhận) các ngôn ngữ có các BTCQ đã cho.

24. Xây dựng các ôtômat đoán nhận các ngôn ngữ mà các xâu của nó được cho theo mô tả sau:
a) Tập các xâu trên {0, 1} có chứa một số chẵn số 0 và một số lẻ số 1;
b) Tập các xâu trong Σ^* có độ dài chia hết cho 3;
c) Tập các xâu trên {0, 1} không chứa xâu con nào là 101;
d) Tập mọi xâu trên {0, 1} được kết thúc bởi 00;
e) Tập mọi xâu chứa ba số 0 liên tiếp.

25. Cho M_1, M_2 là các ôtômat không đơn định dưới dạng bảng chuyển:

M_1 :

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

q_0 – trạng thái ban đầu;
$F = \{q_3\}$ – tập trạng thái kết thúc.

M_2:

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_0\}$
q_3	$\varnothing$	$\{q_0\}$

q_0 – trạng thái ban đầu;
$F = \{q_1, q_3\}$ – tập trạng thái kết thúc.

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Xây dựng các ôtômat đơn định M'_1, M'_2 sao cho

$$L(M'_1) = L(M_1) \text{ và } L(M'_2) = L(M_2).$$

26. Lập các BTCQ tương ứng với các ngôn ngữ được cho trong bài tập 22.

27. Xây dựng các ôtômat đoán nhận các ngôn ngữ của các BTCQ sau:

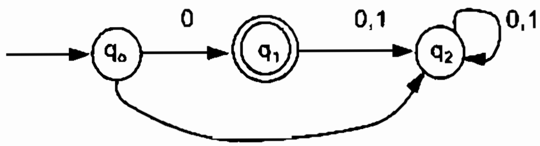
a) $10 \cup (0 \cup 11)0^*1$;

b) $01[((10)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1$;

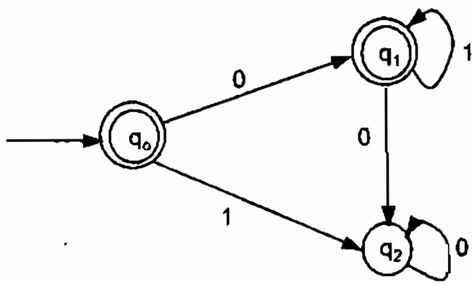
c) $((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* \cup ((0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$.

28. Xây dựng văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G)$ được đoán nhận bởi ôtômat sau:

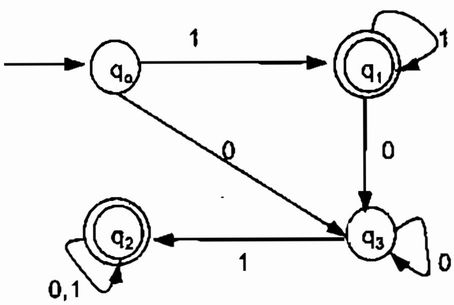
a)



b)



c)



29. Xây dựng ôtômat hữu hạn đoán nhận ngôn ngữ trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}$ dưới đây:

a) $L = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$;

b) $L = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^*$ & ω có chẵn số 0 và lẻ số 1$\}$;

c) $L = \{\omega 00 \mid \omega \in \Sigma^*\}$;

www.thuvien247.net

d) $L = \{11\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$;

e) $L = \{01\omega10 \mid \omega \in \Sigma^*\}$;

f) $L = \{\omega_1 000\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}^*\}$;

i) $L = \{0^n 1^m 0^k (010)^h 0 \mid n \geq 0, m \geq 1, k \geq 0, h \geq 0\}$.

30. Cho VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ có các tập quy tắc:

a) $R = \{I \to 0A, A \to 0I, I \to 1A, A \to 1I, I \to \lambda\}$;

b) $R = \{I \to 0B, I \to 1B, B \to 0I, B \to 1I, B \to \lambda\}$;

c) $R = \{I \to 0I, I \to 1I, I \to \lambda\}$;

d) $R = \{I \to 0I, I \to 1I, I \to 0, I \to 1\}$;

e) $R = \{I \to aI, I \to bI, I \to cI, I \to a, I \to b, I \to c\}$.

Hãy tìm ngôn ngữ sinh L(G) của các trường hợp R cho ở trên và viết các BTCQ tương ứng.

31. Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các ngôn ngữ dưới đây trên bảng $\Sigma = \{0, 1\}$:

a) $L_1 = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \;\&\; l(\omega) = 2n + 1 \; (n = 0, 1, ...)\}$;

b) $L_2 = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \;\&\; l(\omega) = 2n \; (n = 0, 1, ...)\}$;

c) $L_3 = \{0^{n+1} 1^{n+2} \mid n \geq 1\}$.

32. Xây dựng BTCQ của các ngôn ngữ cho trong bài tập 29 và 31.

33. Xây dựng các ôtômat đoán nhận các ngôn ngữ cho trong bài tập 30.

34. Xây dựng các ôtômat (các VPCQ suy rộng) đoán nhận (sinh ra) các NNCQ sau:

a) Tập các xâu trên {0, 1} có chứa một số chẵn số 0 liên tiếp, sau đó là một số lẻ số 1 liên tiếp;

b) Tập các xâu trong Σ^* có độ dài chia hết cho 2.

c) Tập các xâu trên {0, 1} không chứa xâu con nào dạng 101.

35. Xây dựng ôtômat đơn định đoán nhận các xâu trên $\Sigma = \{0, 1\}$ thỏa mãn các trường hợp sau:

a) Tập các xâu trên {0, 1}, trong đó có một cặp 0 cách nhau bởi một xâu con có độ dài 4 nào đó;

b) Tập các xâu kết thúc bởi 00;

c) Tập các xâu chứa ba số 0 liên tiếp;

d) Tập các xâu mà ký hiệu thứ ba kể từ nút phải là 1;

e) Tập các xâu mà bất cứ xâu nào có độ dài bằng 5 đều chứa ít nhất hai số 0.

www.thuvien247.net

36. Lập các ôtômat đơn định tương đương với các ôtômat không đơn định cho dưới dạng bảng sau:

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

q_0 – trạng thái ban đầu; $F = \{q_3\}$.

Q \ Σ	0	1
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_0\}$
q_3	$\varnothing$	$\{q_0\}$

q_0 – trạng thái ban đầu; $F = \{q_1, q_3\}$.

37. Xây dựng các ôtômat (các VPCQ suy rộng) đoán nhận (sinh ra) các ngôn ngữ được biểu diễn bởi các BTCQ sau:

a) $0^*(10)^*$;

b) $(01 \cup 111)^*10^*(0 \cup 1)$;

c) $(001 \cup (11)^*)^*$;

d) $(0 \cup 1)(0 \cup 1)^* \cup (0 \cup 1)\ (0 \cup 1)(0 \cup 1)^*$.

38. Xây dựng ôtômat đơn định M sao cho ngôn ngữ đoán nhận của M gồm các xâu $\in \{0, 1\}^*$, mà các xâu này có chứa một số chẵn số 0 và một số chẵn số 1.

39. Xây dựng ôtômat không đơn định M đoán nhận ngôn ngữ trên $\Sigma = \{0, 1\}$ gồm các xâu có chứa hai số 0 liên tiếp, hoặc có chứa hai số 1 liên tiếp liền nhau.

40. Ta nói ôtômat đơn định $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ là không xuất phát lại, nếu nó không tồn tại cặp $(q, a) \in Q \times \Sigma$ sao cho $\sigma(q, a) = q_0$, với q_0 là trạng thái ban đầu của M. Hãy chỉ ra một giải thuật cho phép từ ôtômat đơn định M đã cho, xây dựng được ôtômat đơn định không xuất phát lại M' sao cho $L(M') = L(M)$.

41. Chứng minh rằng, nếu $L \subseteq \Sigma^*$ là một NNCQ thì $\Sigma^* \setminus L$ cũng là một NNCQ.

www.thuvien247.net

42. Chứng minh rằng, nếu $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ là hai NNCQ thì $L_1 \cap L_2$, L_1L_2, $L_1 \cup L_2$ và L_1^* cũng là NNCQ.

43. a) Chứng minh rằng mọi tập con hữu hạn của Σ^* đều là NNCQ trên Σ.

b) Chứng minh rằng một tập L sinh bởi VPCQ suy rộng G khi và chỉ khi có tồn tại một ôtômat hữu hạn M sao cho L(M) = L(G) = L.

44. Chứng minh rằng một ngôn ngữ L được biểu diễn bởi một BTCQ khi và chỉ khi L được đoán nhận bởi ôtômat nào đó.

45. a) Chứng minh $\varnothing$ và λ là các NNCQ, tức là có tồn tại các ôtômat đoán nhận nó.

b) Chứng minh rằng với mỗi xâu $\omega \in \Sigma^*$ thì $\{\omega\}$ là NNCQ, tức có ôtômat đoán nhận nó.

46. Xây dựng các ôtômat đoán nhận NNCQ trong các bài tập 23 và 24 (Chương 2).

47. Xây dựng các ôtômat đoán nhận các BTCQ:

a) $0^*(10)^*$;

b) $(01 \cup 111)^*10^*(0 \cup 1)$;

c) $(001 \cup (11)^*)^*$.

48. Xây dựng ôtômat đoán nhận tập các xâu có một số chẵn các ký hiệu và không chứa tập con 101.

49. Cho ngôn ngữ $L = \{\omega 00\omega, \omega 11\omega, \omega(01)\omega \mid n \geq 1, \omega \in \{0, 1\}^*\}$.

a) Chỉ ra L là NNCQ trên bảng chữ cái {0, 1}.

b) Viết BTCQ của L.

c) Xây dựng VPCQ suy rộng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho L(G) = L.

d) Xây dựng ôtômat $M = <\Sigma, Q, F, q_0, \sigma>$ sao cho L(M) = L.

e) Chứng minh $\Sigma^* \setminus L$ là NNCQ.

50. Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các NNCQ được cho trong bài tập 29.

51. Xây dựng các ôtômat đoán nhận tập các xâu nhị phân là:

a) Tập các xâu xuất phát với không nhiều hơn ba số 0 liên tiếp và chứa ít nhất hai số 1 liên tiếp.

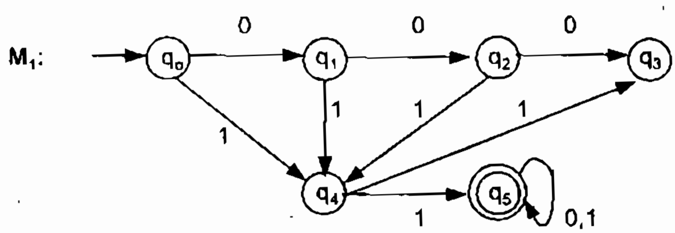
b) Tập tất cả các xâu có một số chẵn ký hiệu 0, 1 và không chứa các xâu con dạng 101.

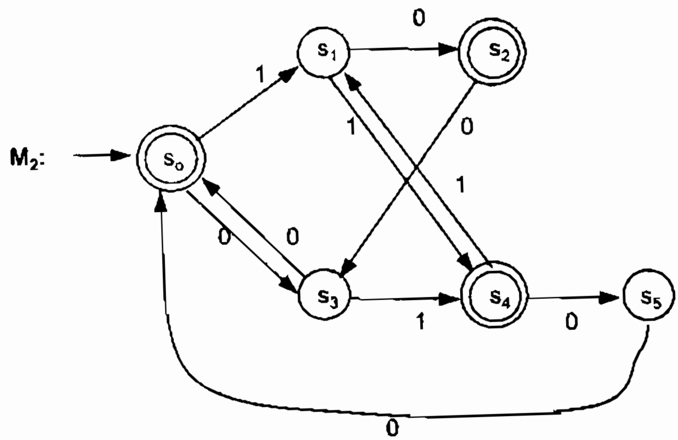
c) Tìm các BTCQ của các NNCQ được mô tả trong câu a và b ở trên.

d) Xây dựng các VPCQ suy rộng sinh ra các NNCQ được mô tả trong câu a và b ở trên.

www.thuvien247.net

52. Cho các ôtômat hữu hạn M_1, M_2 sau:





a) Tìm $L(M_1)$ và $L(M_2)$.

b) Viết BTCQ của $L(M_1)$ và $L(M_2)$.

c) Xây dựng các VPCQ suy rộng G_1, G_2 sao cho

$$L(G_1) = L(M_1) \text{ và } L(G_2) = L(M_2).$$

d) Mô tả bằng lời các ngôn ngữ $L(M_1)$ và $L(M_2)$.

e) Dùng thuật toán Thompson xây dựng M sao cho

$$L(M) = (L(M_1)\,L(M_2) \cup L(M_2)L(M_1))^*.$$

www.thuvien247.net

Chương 4

ÔTÔMAT ĐẨY XUỐNG ĐOÁN NHẬN NGÔN NGỮ PHI NGỮ CẢNH VÀ THUẬT TOÁN PHÂN TÍCH CÚ PHÁP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. VĂN PHẠM PHI NGỮ CẢNH VÀ CÂY DẪN XUẤT ĐẦY ĐỦ (CÂY CÚ PHÁP) CỦA NÓ

1. Quy ước

Trong văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ ta quy ước:

- Mỗi ký hiệu trong Σ là ký tự viết thường a, b, c, ... (có thể cả chỉ số nữa).
- Mỗi ký hiệu trong Δ là ký tự viết hoa A, B, C, ... (có thể cả chỉ số nữa).
- Ký tự X, Y, Z (có thể cả chỉ số nữa) chỉ ký tự $\in V = \Sigma \cup \Delta$. Hay X, Y, Z có thể là ký tự kết thúc trong Σ, cũng có thể là ký tự không kết thúc trong Δ.
- Mỗi ký tự viết thường ω, u, v, w, x, y, z (có thể cả chỉ số nữa) dùng để chỉ các xâu trong Σ^*.
- Các ký hiệu θ, α, β, γ dùng để chỉ các xâu trong V^*. Nói cách khác θ, α, β, γ là các xâu gồm toàn ký tự $\in \Sigma$, hoặc gồm toàn ký tự $\in \Delta$, hoặc gồm các ký tự $\in \Sigma$ và ký tự $\in \Delta$, hoặc là xâu rỗng λ.

2. Định nghĩa văn phạm phi ngữ cảnh

Văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ là VPPNC khi và chỉ khi có tập quy tắc

$$R = \{A \to \theta \mid A \in \Delta, \theta \in V^*\}.$$

3. Định nghĩa cây dẫn xuất đầy đủ (hay cây cú pháp) của xâu $\omega \in \Sigma^*$ trong VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$

Giả sử $\omega \in L(G)$, tức ω có dẫn xuất đầy đủ trong G hay $I \underset{G}{\models} \omega$.

Cây dẫn xuất đầy đủ (hay cây cú pháp) của ω được xác định theo các nguyên tắc sau:

- Đỉnh gốc của cây được gán nhãn I: I
- Đỉnh trong của cây được gán nhãn $A \in \Delta$: A
- Đỉnh ngoài (lá) của cây được gán nhãn $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$: $\boxed{a}$

www.thuvien247.net

- Nếu đỉnh n được gán nhãn A, các đỉnh con của đỉnh n là $n_1, n_2, ..., n_k$ được gán nhãn tương ứng là $X_1, X_2, ..., X_k$ thì quy tắc

$$A \rightarrow X_1X_2...X_k \in R$$

(R là tập các quy tắc sinh của VPPNC cho ở trên).

- Nếu đọc lần lượt các nhãn ở lá của cây từ trái sang phải thì xâu nhận được phải là xâu ω. Ta gọi cây con của một cây dẫn xuất đầy đủ là A– cây nếu A là đỉnh trong của cây dẫn xuất đầy đủ đó (A– cây không nhất thiết nhãn A phải là I).

3. Văn phạm phi ngữ cảnh nhập nhằng

$G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ là VPPNC, nếu có tồn tại xâu $\omega \in L(G)$ mà đối với ω có tồn tại hai cây cú pháp khác nhau trở lên, thì ta nói G là VPPNC nhập nhằng.

§2. VĂN PHẠM PHI NGỮ CẢNH CHUẨN

1. Định nghĩa văn phạm phi ngữ cảnh chuẩn

VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ được gọi là VPPNC chuẩn khi và chỉ khi tập quy tắc R có dạng

$$R = \{A \rightarrow BC, A \rightarrow a \mid A, B, C \in \Delta, a \in \Sigma\}.$$

2. Thuật toán xây dựng văn phạm phi ngữ cảnh chuẩn

Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, xây dựng VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c>$ sao cho $L(G_c) = L(G)$ (hay $G_c \approx G$).

Bước 1: Xây dựng văn phạm $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G = <\Sigma, \Delta, I, R>$:

- $\Delta' := \Delta \cup \bar{\Sigma}$, ở đây $\bar{\Sigma} = \{\bar{a} \mid a \in \Sigma\}$, $\bar{\Sigma}$ là tập tất cả các phần tử đối ngẫu $\bar{a}$ của $a \in \Sigma$ và $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \varnothing$.
- $R' := \hat{R} \cup \bar{R}$, ở đây $\bar{R} = \{\bar{a} \rightarrow a \mid a \in \Sigma\}$ và $\hat{R}$ nhận được từ R bằng cách trong các quy tắc của R, quy tắc nào có chứa $a \in \Sigma$ thì thay bởi $\bar{a} \in \bar{\Sigma}$. R' luôn luôn có dạng:

  $R' = \{A \rightarrow BC, A \rightarrow B_1B_2...B_k, A \rightarrow \bar{a}, \bar{a} \rightarrow a \mid A, B, C, B_1, B_2, ..., B_k, \bar{a} \in \Delta', a \in \Sigma, k \geq 3\}$.

Bước 2: Xây dựng VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c> \approx G' = <\Sigma, \Delta', I, R'>$:

- Σ, I như trong G.
- $\Delta_c := \Delta' \cup \{F_1, F_2, ..., F_{k-2}\}$.
- R_c := tập các quy tắc nhận được từ các quy tắc trong R' của bước 1 bằng cách: quy tắc nào là quy tắc chuẩn thì kết nạp

www.thuvien247.net

vào R_c, quy tắc nào không chuẩn thì thay nó bởi một tập quy tắc chuẩn khác tương đương với nó về ngôn ngữ sinh và kết nạp vào R_c:

$$R_c = \{A \to BC, A \to B_1F_1, F_1 \to B_2F_2, ..., F_{k-2} \to B_{k-1}B_k, A \to a, \overline{a} \to a \mid A, B, C, B_1, B_2, ..., B_k, F_1, F_2, ..., F_{k-2} \in \Delta_c, a \in \Sigma\}.$$

Thuật toán cho ta G_c là VPPNC chuẩn tương đương với VPPNC cho trước G.

§3. DẠNG BIÊN DỊCH BNF (BACKUS – NAUR FORM)

1. Quy ước của dạng biên dịch BNF

- Các ký tự viết hoa dùng để chỉ các ký tự không kết thúc, cũng có thể thay bằng một xâu đặt trong cặp dấu < >.
- Các ký tự viết thường dùng để chỉ các ký tự kết thúc, đôi khi các ký tự này được đặt trong dấu nháy kép " ".
- Ký hiệu → hoặc := là ký hiệu chỉ phạm trù cú pháp ở vế trái được giải thích bởi vế phải.
- Ký hiệu | chỉ sự lựa chọn.
- Ký hiệu lựa chọn [A] nghĩa là A | λ .
- Ký hiệu lặp {A} nghĩa là λ | A | AA | AAA | ...

2. Dạng biên dịch BNF của văn phạm phi ngữ cảnh

Ngôn ngữ lập trình có cú pháp của VPPNC. Tập quy tắc sinh của VPPNC và VPCQ đều có các quy tắc vế trái là một ký tự đơn không kết thúc. Thay vì liệt kê tất cả các quy tắc mà vế trái có cùng một ký tự đơn, ta có thể gộp tất cả các xâu ở vế phải thành một mệnh đề ngăn cách giữa chúng là một vạch đứng. Đồng thời thay ký hiệu → bởi ký hiệu :=. Các ký tự không kết thúc đưa vào cặp dấu < >. Chẳng hạn, đối với tập quy tắc $R = \{A \to Aa, A \to a, A \to AB \mid A, B \in \Delta, a \in \Sigma\}$ ta viết nó dưới dạng biên dịch là <A> := <A> a | a | <A><B>. Dạng biên dịch thực chất là một biểu diễn khác của VPPNC. Điều này chứng tỏ VPPNC có thể chọn làm mô hình các văn phạm của các ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ lập trình. Dạng BNF dùng để diễn tả cú pháp của ngôn ngữ lập trình cấp cao như ALGOL, PASCAL, ... là một biến tướng của VPPNC.

Ví dụ 1: Dạng biên dịch BNF của văn phạm cho tập con trong tiếng Anh là:

<câu> := <danh ngữ> <động ngữ>

<danh ngữ> := <quán từ> <tính từ> <danh từ> | <quán từ> <danh từ>

<động từ> := <động từ> <trạng từ> | <động từ>

<quán từ> := a | the

www.thuvien247.net

<tính từ> := large | hungry
<danh từ> := rabbit | mathematician
<động từ> := eats | hops
<trạng từ> := quickly | wildly.

Ví dụ 2. Trong ngôn ngữ tự nhiên, các từ trong móc nhọn như <câu>, <chủ ngữ>, <vị ngữ>, ... là các phạm trù cú pháp, nó cho ta vai trò của các bộ phận hợp thành một câu.

Dạng biên dịch BNF của câu, hay một câu được sinh ra qua các bước triển khai dần dần các phạm trù cú pháp theo các quy tắc cú pháp như sau:

<câu> := <chủ ngữ> <vị ngữ>
<chủ ngữ> := <danh ngữ>
<danh ngữ> := <danh từ> <tính từ>
<vị ngữ> := <động từ> <bổ ngữ>
<bổ ngữ> := <danh ngữ>
<danh từ> := bò | cỏ
<tính từ> := vàng | non
<động từ> := gặm.

Các quy tắc trên thuộc dạng quy tắc của VPPNC.

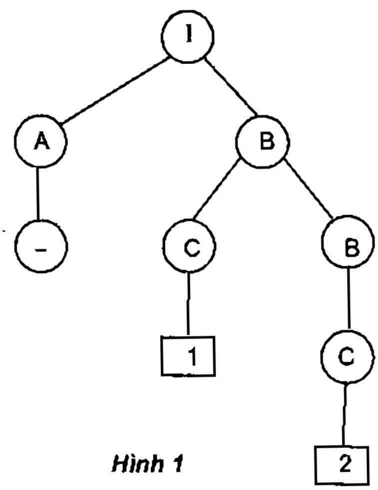
Ví dụ 3. Một số nguyên có dấu là một số nguyên không âm được đặt ở trước nó một dấu cộng hoặc một dấu trừ.

Dạng biên dịch của định nghĩa trên là:

<số nguyên có dấu> := <dấu> <số nguyên>
<dấu> := + | –
<số nguyên> := <chữ số> | <chữ số> <số nguyên>
<chữ số> := 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.

Văn phạm G = <Σ, Δ, I, R> biểu diễn định nghĩa số nguyên có dấu trong ví dụ 3 với dạng biên dịch trên có tập quy tắc sinh là:

R = {số nguyên có dấu → dấu ⌴ số nguyên;
dấu → +;
dấu → –;
số nguyên → chữ số;
số nguyên → chữ số ⌴ số nguyên;
chữ số → 0;
chữ số → 1;
chữ số → 2;
....
chữ số → 9} (xem R trong bài tập 8).



Hình 1

www.thuvien247.net

với $\Sigma = \{+, -, 1, 2, ..., 9\}$; $\Delta = \{I, A, B, C\}$, ở đây I = số nguyên có dấu, A = dấu, B = số nguyên, C = chữ số.

Hình 1 trong ví dụ 3 là cây cú pháp của xâu $\omega = -12$.

Chú ý: Dạng biên dịch của VPPNC do John Backus và Peter Naur đưa ra để mô tả ngôn ngữ lập trình ALGOL. Vì vậy dạng biên dịch trên còn gọi là dạng BNF (Backus – Naur Form).

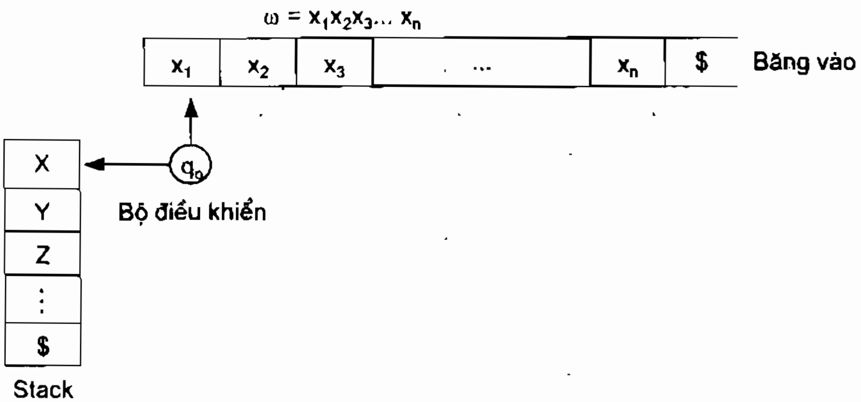
§4. ÔTÔMAT ĐẨY XUỐNG VÀ NGÔN NGỮ ĐOÁN NHẬN CỦA NÓ

1. Mô hình tổng quát của ôtômat đẩy xuống (Pushdown Automata)

Ôtômat đẩy xuống gồm:

- Một băng vào được chia thành nhiều ô, mỗi ô chứa một ký tự của Σ và băng vào có độ dài vô hạn.
- Một bộ phận điều khiển gồm hữu hạn trạng thái.
- Một ngăn xếp (bộ nhớ Pushdown) hay còn gọi là stack.
- Một đầu đọc luôn luôn nhìn vào băng vào, nó có khả năng đọc, xóa các ký tự trên băng lần lượt từ trái sang phải. Ngoài ra còn một đầu đọc luôn luôn nhìn vào ô trên cùng của stack.

Stack được tổ chức theo nguyên tắc ký tự vào sau thì ra trước, giống như ổ nạp đạn. Khi đưa ký hiệu vào stack thì ký hiệu đó nằm ở trên cùng của stack, nó đẩy ký hiệu trên cùng trước đó xuống dưới một ô. Khi ký hiệu trên cùng của stack được lấy ra thì ký hiệu dưới nó lại nhô lên vị trí ô trên cùng. Stack chứa các ký hiệu trong từ điển $V = \Sigma \cup \Delta$ hay stack chứa xâu $\in V^*$ và khi stack rỗng thì có nghĩa ký hiệu đáy ngăn xếp \$ ở vị trí ô trên cùng. Kích thước của stack là không giới hạn. Từ mô hình ôtômat hữu hạn trạng thái và ôtômat đẩy xuống ta có thể nói rằng: ôtômat đẩy xuống = ôtômat hữu hạn + stack và bộ nhớ của nó là rất lớn so với bộ nhớ của ôtômat hữu hạn. Mô hình của PA có dạng:



Bây giờ ta định nghĩa chính xác Pushdown Automata (PA) như sau

www.thuvien247.net

2. Định nghĩa PA

PA = <Σ, Γ, Q, F, q_0, $, σ> là bộ gồm:

- Σ – tập không rỗng hữu hạn các ký tự vào ;
- Γ – tập không rỗng hữu hạn các ký tự của stack, trong đó ký hiệu $ ∈ Γ gọi là ký hiệu đáy ngăn xếp (khi $ nằm ở ô trên cùng của stack, có nghĩa là stack rỗng) và Γ chứa các ký tự thuộc $V = \Sigma \cup \Delta$ trong VPPNC ;
- Q – tập hữu hạn không rỗng các trạng thái, trong đó $q_0 \in Q$ là trạng thái ban đầu của PA ;
- $F \subseteq Q$ – tập các trạng thái kết thúc của PA;
- $ – ký hiệu đọc hết xâu và cũng là ký hiệu đáy stack ;
- $\sigma : \Gamma^* \times Q \times (\Sigma \cup \lambda) \to 2^{\Gamma^* \times Q}$ (PA không đơn định),

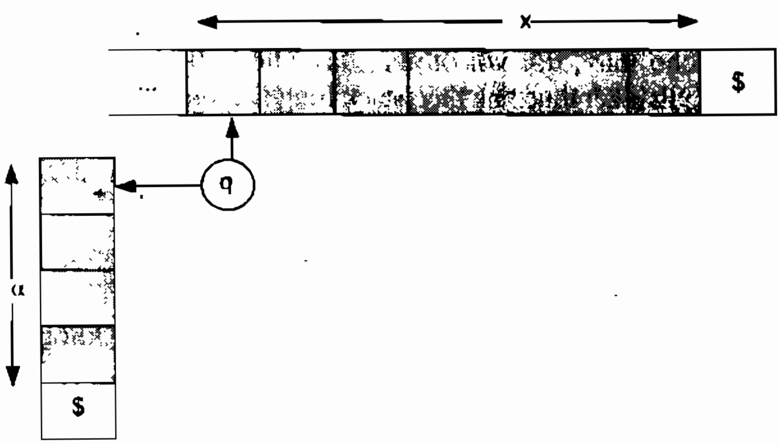
  $\sigma : \Gamma^* \times Q \times (\Sigma \cup \lambda) \to \Gamma^* \times Q$ (PA đơn định).

3. Ngôn ngữ đoán nhận của PA

Hình trạng tức thời của PA phụ thuộc ba yếu tố:

- Xâu vào x chưa được đọc đến (với quy ước : ký hiệu bên trái của x là ký hiệu chuẩn bị đọc và sẽ được đọc tiếp) ;
- Trạng thái $q \in Q$;
- Xâu $\alpha \in \Gamma^*$ với quy ước: ký hiệu bên trái (bên phải) của α là ký hiệu đáy stack (là ký hiệu trên cùng stack).

Hình trạng tức thời có thể mô tả bằng mô hình sau:



Để cho tiện biến đổi, ta ký hiệu hình trạng tức thời của PA là bộ ba (α, q, x):

- Hình trạng ban đầu của PA có dạng ($, q_0, ω$). Tại hình trạng ban đầu PA có stack rỗng, PA ở trạng thái ban đầu q_0 và trên băng vào đặt xâu ω$.

www.thuvien247.net

- Hình trạng kết thúc có hai loại:
  - Hình trạng kết thúc theo tập trạng thái kết thúc: $(\alpha, q, \$)$ (stack chứa α, trạng thái $q \in F$ và xâu ω đã đọc xong);
  - Hình trạng kết thúc theo stack rỗng: $(\$, q, \$)$ (stack rỗng, trạng thái $q \in Q$, trên băng vào đọc hết xâu ω).
- Quá trình biến đổi từ hình trạng ban đầu $(\$, q_0, \omega\$)$ đến hình trạng kết thúc theo tập trạng thái kết thúc $(\alpha, q, \$)$ $(q \in F)$ hoặc theo stack rỗng $(\$, q, \$)$ $(q \in Q)$ ta ký hiệu tương ứng là

$$(\$, q_0, \omega\$) \vdash\!\!\!— (\alpha, q, \$)\ (q \in F)$$

hoặc $(\$, q_0, \omega\$) \vdash\!\!\!— (\$, q, \$)\ (q \in Q)$.

Ngôn ngữ mà PA đoán nhận theo tập trạng thái kết thúc ta ký hiệu là L(PA), còn ký hiệu $\mathscr{L}$(PA) là ngôn ngữ PA đoán nhận theo stack rỗng và được định nghĩa như sau:

Định nghĩa

$$\mathscr{L}(PA) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \ \&\ (\$, q_0, \omega\$) \vdash\!\!\!— (\$, q, \$)\ \&\ q \in Q\};$$

$$L(PA) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \ \&\ (\$, q_0, \omega\$) \vdash\!\!\!— (\alpha, q, \$)\ \&\ q \in F\}.$$

4. Kết quả chính

Định lý 8. Đối với VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ không chứa λ, bao giờ cũng tồn tại VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c>$ tương đương với nó.

Định lý 9. L(PA) = $\mathscr{L}$(PA) đối với mỗi ôtômat đẩy xuống PA.

Từ định lý trên cho thấy, đối với ôtômat đẩy xuống thì sự đoán nhận ngôn ngữ theo tập trạng thái kết thúc hay theo stack rỗng là tương đương nhau.

Định lý 10. Lớp ngôn ngữ được đoán nhận bởi ôtômat đẩy xuống không đơn định rộng hơn thực sự so với lớp ngôn ngữ được đoán nhận bởi ôtômat đẩy xuống đơn định.

Định lý 11. Văn phạm phi ngữ cảnh $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với tập quy tắc $R = \{I \to aIb, I \to \lambda \mid a, b \in \Sigma, I \in \Delta\}$ có $L(G) = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$ được đoán nhận bởi ôtômat đẩy xuống PA với $L(PA) = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$, nhưng không có một ôtômat hữu hạn trạng thái nào đoán nhận nó.

Từ định lý trên cho thấy, lớp NNPNC thực sự rộng hơn lớp NNCQ do VPCQ sinh ra. Cụ thể $L(G) = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$ là NNPNC, nhưng không phải là NNCQ.

Định lý 12

a) Đối với mỗi ngôn ngữ phi ngữ cảnh L, bao giờ cũng tồn tại một ôtômat đẩy xuống PA sao cho L = L(PA).

www.thuvien247.net

b) Đối với mỗi ôtômat đẩy xuống PA, bao giờ cũng tồn tại ngôn ngữ phi ngữ cảnh L sao cho L(PA) = L.

§5. THUẬT TOÁN PHÂN TÍCH CÚ PHÁP TRÊN LỚP NGÔN NGỮ PHI NGỮ CẢNH

Dưới đây chỉ đề cập hai thuật toán phân tích cú pháp.

1. Thuật toán phân tích Top-down (phân tích từ gốc xuống lá hay từ trên xuống dưới)

input: VPPNC không đệ quy trái $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ và xâu $\omega = a_1a_2...a_n \in \Sigma^*$.

output: Đưa ra cây cú pháp của ω nếu $\omega \in L(G)$. Ngược lại báo lỗi ($\omega \notin L(G)$).

Bước 1: Gốc của cây cú pháp là I và con trỏ chỉ vào ký tự a_1 của xâu ω.

Bước 2: Giả sử X là ký tự đỉnh hiện tại và con trỏ đang trỏ vào ký tự hiện tại x của xâu ω (đỉnh hiện tại là đỉnh sẽ được xây dựng tiếp theo).

1) Nếu $X \in \Delta$ thì chọn quy tắc có vế trái là X trong R, chẳng hạn đó là quy tắc $X \to \theta$ (nếu có nhiều quy tắc với vế trái là X thì đánh số các quy tắc đó).

a) Nếu $\theta = \lambda$ thì đỉnh tiếp theo là đỉnh bên phải của X.

b) Nếu $\theta \neq \lambda$ và $\theta = X_1X_2...X_k$ thì đỉnh tiếp theo là X_1.

2) Nếu $X \in \Sigma$ và X = a thì so sánh a với ký tự hiện tại x của ω:

a) Nếu X = a = x thì đỉnh tiếp theo là đỉnh bên phải của X và con trỏ dịch sang phải một ký tự.

b) Nếu $X = a \neq x$ thì quay về 1 của bước 2 để chọn lại quy tắc khác trong R có vế trái là X (hiện tượng quay lui của thuật toán Top – down).

Thủ tục trên sau một số hữu hạn bước sẽ dừng lại và xảy ra hai khả năng:

- Xây dựng được cây cú pháp của xâu ω ($\omega \in L(G)$). Trong trường hợp này ta nói xâu ω có cú pháp phi ngữ cảnh;
- Không xây dựng được cây cú pháp của ω thì báo lỗi ($\omega \notin L(G)$). Trong trường hợp này ta nói xâu ω không có cú pháp phi ngữ cảnh.

Chú ý 1: Thuật toán Top – down có độ phức tạp C^n, nhưng nó là cơ sở để xây dựng thuật toán phân tích tất định.

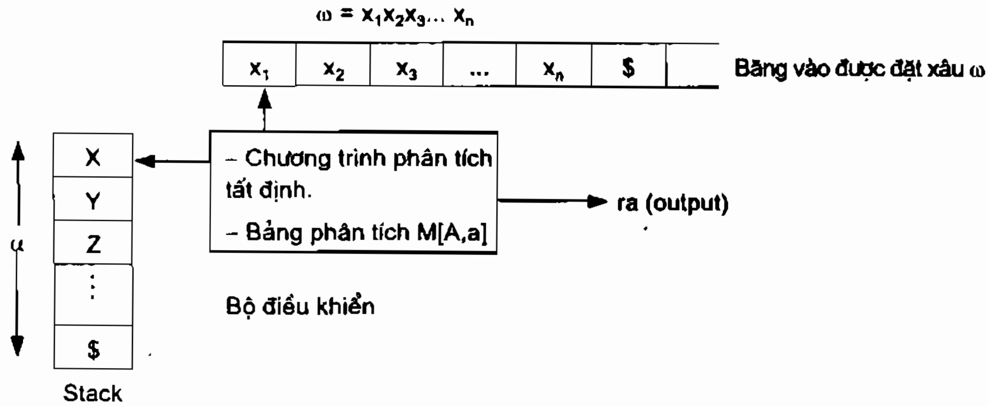
Dưới đây đưa ra thuật toán phân tích tất định với độ phức tạp tuyến tính đối với độ dài của xâu vào. Tất nhiên, tính hiệu quả này của thuật toán phải trả giá là nó chỉ làm việc được đối với lớp con các VPPNC không đệ quy trái và không nhập nhằng. Văn phạm $G = \{\Sigma, \Delta, I, R\}$ là đệ quy trái nếu trong tập quy tắc R có quy tắc dạng $A \to A\alpha$, $A \in \Delta$, còn $\alpha \in (\Sigma \cup \Delta)^+$.

Chú ý 2: Trên lớp VPPNC không đệ quy trái và không nhập nhằng cho phép xây dựng bộ phân tích tất định (có thể nhìn trước k ký tự nằm bên phải (bên trái) so với ký tự hiện tại trên xâu vào).

www.thuvien247.net

2. Thuật toán phân tích tất định

- Cơ sở của thuật toán dựa trên phân tích Top–down và ôtômat đẩy xuống.
- Mô hình tổng quát của thuật toán có dạng



Gồm:

– Một băng vào chứa xâu phân tích $\omega = x_1x_2 \ldots x_n$ với ký tự hết xâu \$.

– Một stack (ngăn xếp, danh sách đẩy xuống) chứa xâu $\alpha \in V^* = (\Sigma \cup \Delta)^*$ với ký hiệu đáy ngăn xếp là \$.

– Bộ điều khiển gồm: chương trình phân tích tất định và bảng phân tích M[A, a] là mảng hai chiều với $A \in \Delta$, $a \in \Sigma$.

– Một output: in kết quả cây cú pháp.

– Hai đầu đọc: một đầu đọc luôn luôn nhìn vào ô trên cùng của stack và một đầu đọc nhìn vào băng làm việc, nó có thể đứng yên hoặc dịch sang phải một ô mỗi lần đọc sang một ký hiệu.

Thuật toán phân tích tất định

Bài toán:

input: VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ không đệ quy trái, không nhập nhằng và xâu $\omega \in \Sigma^*$.

output: Đưa ra bảng phân tích tất định và cây phân tích tất định (cây cú pháp) của xâu ω ($\omega \in L(G)$), ngược lại báo lỗi ($\omega \notin L(G)$).

Bước 1: Tại thời điểm ban đầu đưa xâu \$I vào stack ($I \in \Delta$ là ký hiệu ban đầu của văn phạm G nằm ở ô trên cùng của stack, còn \$ là ký hiệu đáy stack). Đặt xâu ω\$ lên băng làm việc và đầu đọc nhìn vào ký tự bên trái của xâu ω. Ký hiệu trên băng vào mà đầu đọc nhìn vào gọi là ký hiệu hiện tại.

Bước 2: Giả sử tại thời điểm hiện tại, ô trên cùng của stack chứa ký hiệu X, còn ký tự hiện tại trên băng làm việc là x.

Với X có hai khả năng xảy ra:

www.thuvien247.net

1) $X \in \Delta$: Trong trường hợp này bộ phân tích xét vị trí M[A, a] của bảng phân tích có hai khả năng:

• Trong R có quy tắc với vế trái là X, chẳng hạn quy tắc $X \to UVW$. Lấy X ra khỏi stack và đưa xâu WVU vào stack (U nằm trên cùng của stack), bộ phân tích in quy tắc $X \to UVW$ ra ngoài;

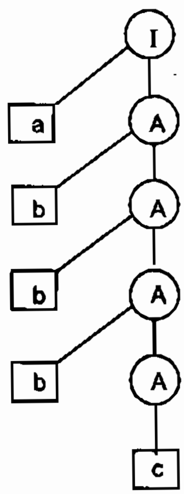
• Trong R không có quy tắc nào với vế trái là X thì báo lỗi.

2) $X \in \Sigma$, chẳng hạn $X = a \in \Sigma$: Trong trường hợp này bộ phân tích so sánh a với ký tự hiện tại x trên băng làm việc:

- Nếu $X = a = x = \$$, bộ phân tích dừng và phân tích xong;
- Nếu $X = a = x \neq \$$, bộ phân tích lấy X ra khỏi stack và dịch đầu đọc sang phải một ô ;
- Nếu $X = a \neq x$, bộ phân tích báo lỗi.

Bước 3: Các thủ tục trên, sau một số hữu hạn bước dẫn tới khả năng stack rỗng (ở trên cùng chứa \$) và trên băng làm việc ký tự hiện tại là \$ (đọc hết xâu). Trong trường hợp này, bộ phân tích in chương trình phân tích và cây phân tích (cây cú pháp) của xâu ω ($\omega \in L(G)$). Ngược lại thì báo lỗi ($\omega \notin L(G)$).

Ví dụ: Cho VPPNC không đệ quy trái, không nhập nhằng $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$, với $R = \{I \xrightarrow{1} aA,\ A \xrightarrow{2} bA,\ A \xrightarrow{3} c\}$ và xâu $\omega = abbbc \in \{a, b, c\}^*$. Hỏi $\omega \in L(G)$? Áp dụng thuật toán phân tích tất định ta nhận được kết quả dưới dạng bảng sau:

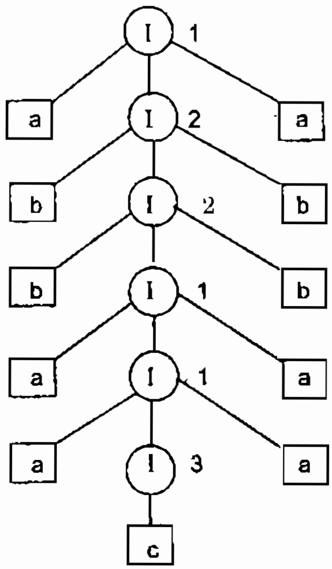
Stack	**Input**	**Output**	
		Quy tắc	**Cây cú pháp**
\$I	abbbc\$		
\$Aa	abbbc\$	$I \to aA$	
\$A	bbbc\$		
\$Ab	bbbc\$	$A \to bA$	
\$A	bbc\$		
\$Ab	bbc\$	$A \to bA$	
\$A	bc\$		
\$Ab	bc\$	$A \to bA$	
\$A	c\$		
\$c	c\$	$A \to c$	
\$	\$		$\omega \in L(G)$

www.thuvien247.net

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho VPPNC G với tập quy tắc R = $\{I \xrightarrow{1} aIa,\ I \xrightarrow{2} bIb,\ I \xrightarrow{3} c\}$ và xâu ω = abbaacaabba $\in \Sigma^*$. Xây dựng cây cú pháp của xâu ω (theo định nghĩa).

Giải



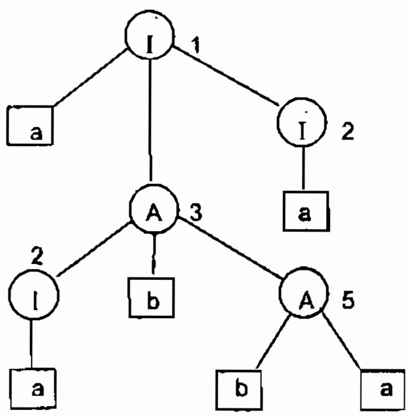
là cây cú pháp của ω = abbaacaabba hay $\omega \in L(G)$.

2. Cho VPPNC G = <Σ, Δ, I, R>, với

R = $\{I \xrightarrow{1} aAI,\ I \xrightarrow{2} a,\ A \xrightarrow{3} IbA,\ A \xrightarrow{4} II, A \xrightarrow{5} ba\}$ và xâu ω = aabbaa $\in \{a, b\}^*$.

Tìm cây dẫn xuất đầy đủ hay cây cú pháp của xâu ω (theo định nghĩa). Chỉ ra một A– cây của cây cú pháp đối với xâu ω đó.

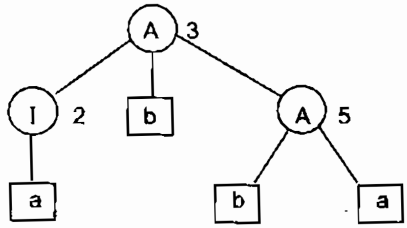
Giải



là cây dẫn xuất đầy đủ của ω = aabbaa $\in L(G)$.

www.thuvien247.net

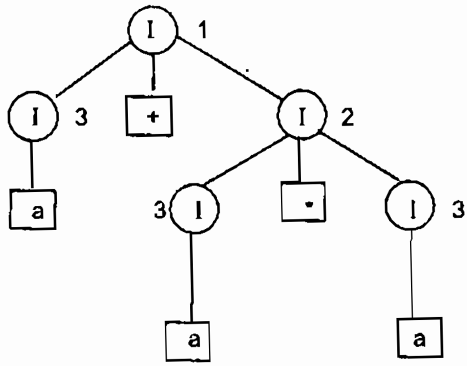
Chú ý: Trong cây dẫn xuất đầy đủ trên, chẳng hạn dưới đây là một cây con



và là A – cây của cây dẫn xuất đầy đủ trên.

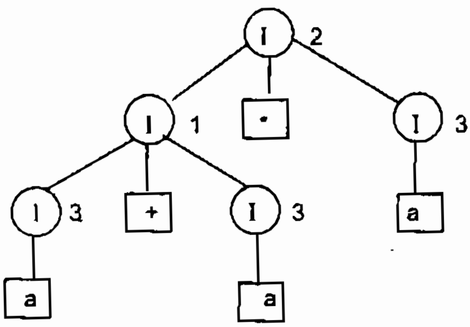
3. Cho VPPNC G = <Σ, Δ, I, R>, với $R = \{I \xrightarrow{1} I+I,\ I \xrightarrow{2} I*I,\ I \xrightarrow{3} a\}$ và xâu ω = a + a*a. Chỉ ra ω ∈ L(G) và G là VPPNC nhập nhằng.

Giải. Cây cú pháp của ω = a + a * a có dạng



Chứng tỏ ω = a + a * a ∈ L(G).

Mặt khác xâu ω = a + a * a còn có một cây cú pháp khác là



Chứng tỏ G là VPPNC nhập nhằng (do cùng một xâu có hai cây dẫn xuất đầy đủ khác nhau).

4. Cho văn phạm G = <Σ, Δ, I, R>, với $R = \{I \xrightarrow{1} 0I,\ I \xrightarrow{2} I0,\ I \xrightarrow{3} 0\}$.

a) Tìm L(G).

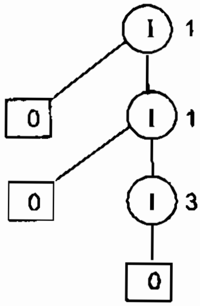
b) Chỉ ra G là VPPNC nhập nhằng và đệ quy trái.

www.thuvien247.net

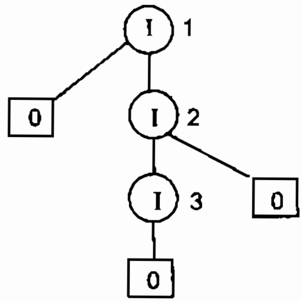
Giải

a) $L(G) = \{0^n \mid n \geq 1\}$.

b) Lấy $\omega = 000 \in L(G)$. Xây dựng hai cây dẫn xuất đầy đủ của ω như sau:



và



Chứng tỏ xâu $\omega = 000 \in L(G)$ được phân tích bằng hai cây cú pháp khác nhau. Vậy G là nhập nhằng và G cũng là văn phạm đệ quy trái do có quy tắc $I \to I0 \in R$.

5. Xây dựng cây cú pháp của xâu ω = "the hungry rabbit eats quickly" (con thỏ đói ăn nhanh) của dạng chuẩn BNF (cho trong ví dụ 1, §3)

Giải. Dạng chuẩn BNF trong ví dụ 1 chính là VPPNC:

$G = <\Sigma, \Delta, I, R>$;

Σ = {the, hungry, rabbit, eats, quickly, a, large, mathematician, hops, wildly};

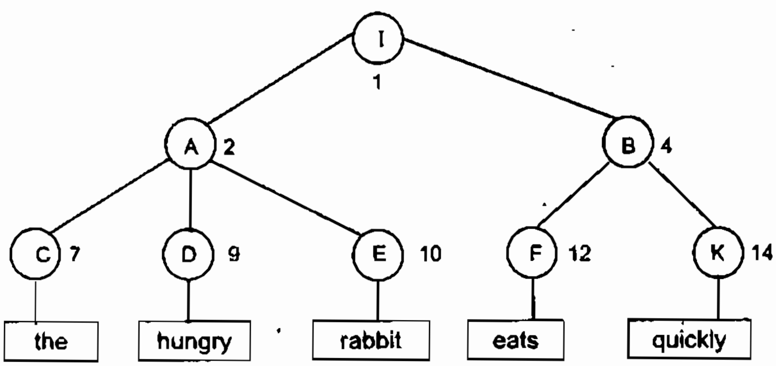
$\Delta = \{I, A, B, C, D, E, F, K\}$;

$R = \{ I \xrightarrow{1} AB,\ A \xrightarrow{2} CDE,\ A \xrightarrow{3} CE,\ B \xrightarrow{4} FK,\ B \xrightarrow{5} F,\ C \xrightarrow{6} a,\ C \xrightarrow{7} \text{the},$

$D \xrightarrow{8} \text{large},\ D \xrightarrow{9} \text{hungry},\ E \xrightarrow{10} \text{rabbit},\ E \xrightarrow{11} \text{mathematician},\ F \xrightarrow{12} \text{eats},$

$F \xrightarrow{13} \text{hops},\ K \xrightarrow{14} \text{quickly},\ K \xrightarrow{15} \text{wildly}\}$.

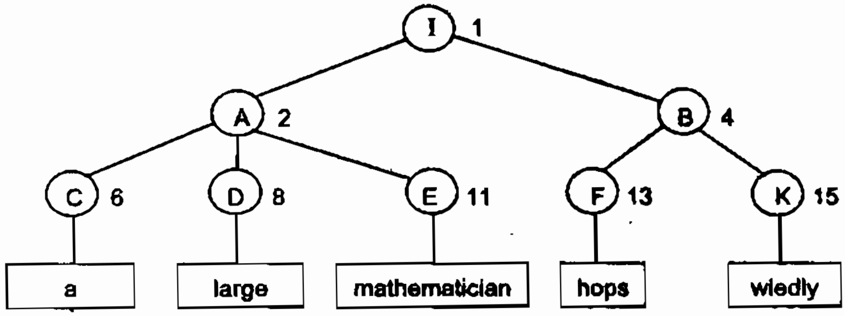
Dẫn xuất đầy đủ của xâu ω là $D(\omega)$ = (I, $_1$AB, $_2$CDEB, $_7$the DEB, $_9$the hungryEB, $_{10}$the hungry rabbit B, $_4$the hungry rabbit FK, $_{12}$the hungry rabbit eats K, $_{14}$the hungry rabbit eats quickly). Vậy cây cú pháp có dạng



www.thuvien247.net

6. Xây dựng cây cú pháp của xâu ω = "a large mathematician hops wildly" của dạng chuyển BNF trong bài tập 5.

Giải. Dẫn xuất đầy đủ của ω là D(ω) = (I, $_1$AB, $_2$CDEB, $_6$aDEB, $_8$a large EB, $_{11}$a lorge mathematician B, $_4$a large mathematician FK, $_{13}$a large mathematician hops K, $_{15}$a large mathematician hops wildly). Cây cú pháp có dạng



7. Xây dựng cây cú pháp của xâu ω = "bò vàng gặm cỏ non" của dạng chuẩn BNF cho trong ví dụ 2, §3.

Giải. Dạng chuẩn BNF trong ví dụ 2 §3 tương ứng với VPPNC G = <Σ, Δ, I, R> với:

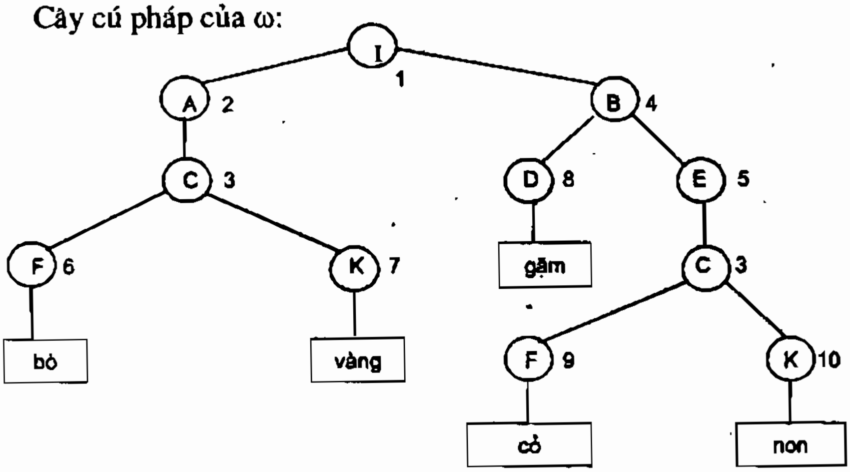
Σ = {bò, vàng, gặm, cỏ, non}; Δ = {I, A, B, C, D, E, F, K};

$$R = \{I \xrightarrow{1} AB,\ A \xrightarrow{2} C,\ C \xrightarrow{3} FK,\ B \xrightarrow{4} DE,\ E \xrightarrow{5} C,\ F \xrightarrow{6} \text{bò},$$
$$K \xrightarrow{7} \text{vàng},\ D \xrightarrow{8} \text{gặm},\ F \xrightarrow{9} \text{cỏ},\ K \xrightarrow{10} \text{non}\}.$$

Dẫn xuất đầy đủ của xâu ω là:

D(ω) = (I, $_1$AB, $_2$CB, $_3$C $\to$ FKB, $_6$bò KB, $_7$bò vàng B, $_4$bò vàng DE, $_8$bò vàng gặm E, $_5$bò vàng gặm C, $_3$bò vàng gặm FK, $_9$bò vàng gặm cỏ K, $_{10}$ bò vàng gặm cỏ non).

Cây cú pháp của ω:



www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

8. Viết dạng BNF sinh ra các số nguyên có dấu trong biểu diễn thập phân, ở đây số nguyên có dấu là một số nguyên không âm được đặt ở trước một dấu + hoặc một dấu –. Áp dụng tìm cây cú pháp của xâu $\omega = +987$.

Giải. Dạng BNF sinh ra các số nguyên có dấu trong biểu diễn thập phân là:

<Số nguyên có dấu> := <dấu> <số nguyên>

<dấu> := + | –

<số nguyên> := <chữ số> | <chữ số> <số nguyên>

<chữ số> := 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.

VPPNC $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ có dạng BNF là:

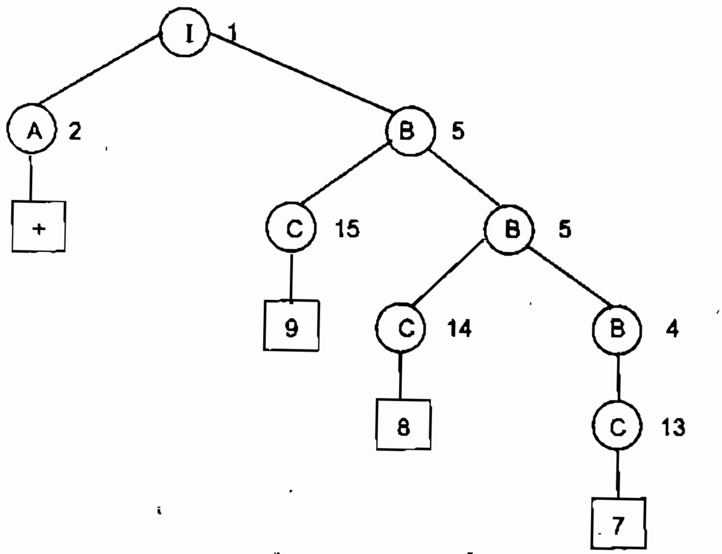
$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$\Delta = \{I, A, B, C\}$;

$R = \{I \xrightarrow{1} AB,\ A \xrightarrow{2} +,\ A \xrightarrow{3} -,\ B \xrightarrow{4} C,\ B \xrightarrow{5} CB,\ C \xrightarrow{6} 0,\ C \xrightarrow{7} 1,$

$C \xrightarrow{8} 2,\ C \xrightarrow{9} 3, C \xrightarrow{10} 4,\ C \xrightarrow{11} 5,\ C \xrightarrow{12} 6,\ C \xrightarrow{13} 7,\ C \xrightarrow{14} 8,\ C \xrightarrow{15} 9\}$.

Cây cú pháp của $\omega = +987$ là



9. Dạng BNF dùng để định nghĩa biểu thức số học được cho như sau:

<biểu thức> := <biểu thức> + <biểu thức>

<biểu thức> := <biểu thức> * <biểu thức>

<biểu thức> := (<biểu thức>)

<biểu thức> := a | b | c

a) Tìm VPPNC $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ có dạng BNF ở trên.

b) Xây dựng cây cú pháp của xâu $\omega = a * (b + c) + a$.

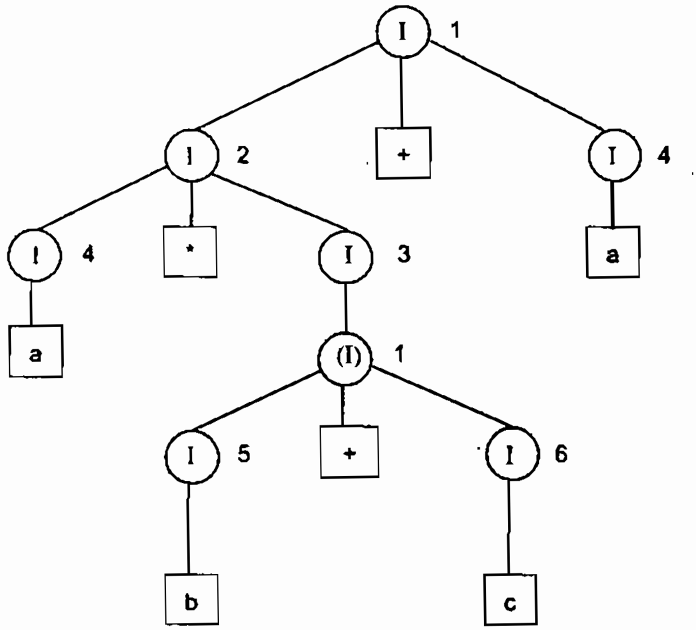
www.thuvien247.net

Giải

a) $\Sigma = \{a, b, c, +, *, (,)\}$; $\Delta = \{I\}$;

$R = \{I \xrightarrow{1} I + I,\ I \xrightarrow{2} I * I,\ I \xrightarrow{3} (I),\ I \xrightarrow{4} a,\ I \xrightarrow{5} b,\ I \xrightarrow{6} c\}$.

b) Cây cú pháp của $\omega = a * (b + c) + a$ có dạng



10. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$R = \{I \to bA,\ A \to bAA,\ A \to aI,\ A \to a,\ B \to aBB,\ B \to bI,\ B \to b\}$.

Xây dựng VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c> \approx G$.

Giải

$G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G$ có

$R' = \{I \to \bar{b}A,\ A \to \bar{b}AA,\ A \to \bar{a}I,\ A \to \bar{a},\ B \to \bar{a}BB,\ B \to \bar{b}I,$

$B \to \bar{b},\ \bar{a} \to a,\ \bar{b} \to b\}$.

$G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c>$ có

$R_c = \{I \to \bar{b}A,\ A \to \bar{b}F_1,\ F_1 \to AA,\ A \to \bar{a}I,\ A \to a,\ B \to \bar{a}F_2,\ F_2 \to BB,$

$B \to \bar{b}I,\ B \to b,\ \bar{a} \to a,\ \bar{b} \to b\}$.

Bạn đọc tự kiểm tra lại $G_c \approx G$.

11. Cho G với $R = \{I \to aAB,\ I \to BA,\ A \to BBB,\ A \to a,\ B \to AI,\ B \to b\}$. Xây dựng $G_c \approx G$.

Giải. $G' \approx G$ có

$R' = \{I \to \bar{a}AB,\ I \to BA,\ A \to BBB,\ A \to \bar{a},\ B \to AI,\ B \to \bar{b},\ \bar{b} \to b,\ \bar{a} \to a\}$.

www.thuvien247.net

$G_c \approx G'$ có

$$R_c = \{I \to \bar{a}F_1,\ F_1 \to AB,\ I \to BA,\ A \to BF_2,\ F_2 \to BB,\ A \to a,\ B \to AI,\ B \to b,\ \bar{b} \to b,\ \bar{a} \to a\}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra $G_c \approx G$.

12. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \to ABC,\ A \to abcD,\ D \to d,\ B \to aabb,\ C \to dca\}.$$

Xây dựng VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c> \approx G$.

Giải. $G' \approx G$ có

$$R' = \{I \to ABC,\ A \to \bar{a}\bar{b}\bar{c}D,\ D \to \bar{d},\ B \to \bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b},\ C \to \bar{d}\bar{c}\bar{a},\ \bar{a} \to a,\ \bar{b} \to b,\ \bar{c} \to c,\ \bar{d} \to d\}.$$

Xây dựng $G_c \approx G'$ với

$$R_c = \{I \to AF_1,\ F_1 \to BC,\ A \to \bar{a}F_2,\ F_2 \to \bar{b}F_3, F_3 \to \bar{c}D,\ D \to d, B \to \bar{a}F_4,\ F_4 \to \bar{a}F_5,\ F_5 \to \bar{b}\bar{b},\ C \to \bar{d}F_6,\ F_6 \to \bar{c}\bar{a},\ \bar{a} \to a,\ \bar{b} \to b,\ \bar{c} \to c,\ \bar{d} \to d\}.$$

Bạn đọc tự chứng minh $G' \approx G \approx G_c$.

13. VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với tập quy tắc

$$R = \{A \to \omega B,\ A \to \omega' \mid A, B \in \Delta,\ \omega, \omega' \in \Sigma^+\}$$

được gọi là VPPNC tuyến tính phải.

a) Chứng minh có tồn tại một VPCQ $G' = <\Sigma, \Delta', I, R'> \approx G$.

b) Xây dựng VPPNC chuẩn $G_c = <\Sigma, \Delta_c, I, R_c> \approx G$.

Giải. a) Trong $R = \{A \to \omega B,\ A \to \omega' \mid A, B \in \Delta;\ \omega, \omega' \in \Sigma^+\}$ ta giả sử $\omega = a_1a_2a_3...a_n$ và $\omega' = b_1b_2...b_m$ (n, m > 1) (vì n = 1 là hiển nhiên). Thay $A \to a_1a_2...\ a_nB$ bởi các quy tắc tương đương:

$$A \to a_1B_1,\ B_1 \to a_2B_2,\ ...,\ B_{n-2} \to a_{n-1}B_{n-1} \text{ và } B_{n-1} \to a_nB$$

và thay $A \to b_1b_2b_3...b_m$ bởi các quy tắc tương đương:

$$A \to b_1C_1,\ C_1 \to b_2C_2,\ ...,\ C_{m-2} \to b_{m-1}C_{m-1},\ C_{m-1} \to b_m$$

ta được R' gồm các quy tắc của VPCQ, hay G' với R' như trên là VPCQ và $G' \approx G$. Đó là điều phải chứng minh.

b) VPPNC $G_c \approx G$ có R_c gồm các quy tắc chuẩn sau:

$$R_c = \{A \to \bar{a}_1B_1,\ B_1 \to \bar{a}_2B_2,\ ...,\ B_{n-1} \to \bar{a}_nB,\ A \to \bar{b}_1C_1,\ C_1 \to \bar{b}_2C_2, ...,\ C_{m-2} \to \bar{b}_{m-1}C_{m-1}, C_{m-1} \to \bar{b}_m, \bar{a}_i \to a_i,\ \bar{b}_j \to b_j \mid A, B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B, C_1, C_2, ..., C_{m-2},\ \bar{a}_i,\ \bar{b}_j \in \Delta_c,\ \text{với } i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}.$$

www.thuvien247.net

14. Cho VPPNC

$G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to Aa, I \to b, A \to Ac, A \to Id, A \to e\}$.

G là văn phạm đệ quy trái vì có quy tắc $A \to Ac$. Hãy xây dựng VPPNC không đệ quy trái $G' \approx G$.

Giải. Thay các quy tắc $A \to Ac/Id/e$ bởi $A \to bdA'/eA'$ và $A' \to cA'/adA'/\lambda$ tương đương về mặt ngôn ngữ. Vậy $G' \approx G$ có

$R' = \{I \to Aa, I \to b, A \to bdA', A \to eA', A' \to cA', A' \to adA', A' \to \lambda\}$ không đệ quy trái.

15. VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to 0I0, I \to 1I1, I \to x\}$ có $L(G) = \{\omega x\hat{\omega} / \omega \in \{0,1\}^* \,\&\, \hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$ là ngôn ngữ phi ngữ cảnh. Xây dựng ôtômat đẩy xuống (Push down Automata) đơn định:

$$M = <\Sigma, \Gamma, Q, F, q_0, \$, \sigma>,$$

sao cho $\mathscr{L}(M) = L(G)$ (đoán nhận theo stack rỗng).

Giải. $\Sigma = \{0, 1, x\}$, $\Gamma = \{I, 0, 1, x\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \varnothing$, \$ ký hiệu đáy stack và là ký hiệu đọc hết xâu, $\sigma: \Gamma^* \times Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \Gamma^* \times Q$ làm việc theo nguyên tắc:

– Tại thời điểm ban đầu stack rỗng, xâu $\omega x \overline{\omega}\$$ đặt lên băng làm việc, trạng thái là q_0;

– Nếu q_0 gặp ký tự vào $a \in \{0, 1\}$ thì đưa a vào stack, trạng thái vẫn là q_0 và dịch đầu đọc sang phải một ô;

– Nếu q_0 gặp ký tự vào là x thì q_0 chuyển sang trạng thái q_1 và dịch đầu đọc sang phải một ô;

– Nếu q_1 gặp ký hiệu vào $a \in \{0, 1\}$ thì so sánh a với ký tự trên cùng của stack:

+ Trường hợp a = ký tự trên cùng của stack thì đưa ký tự trên cùng của stack ra ngoài, dịch đầu đọc sang phải một ô và trạng thái vẫn là q_1.

+ Trường hợp a ≠ ký tự trên cùng của stack thì M không đoán nhận xâu vào $\omega x\hat{\omega}$.

Ôtômat đẩy xuống M chỉ đoán nhận xâu $\omega x\hat{\omega}$ khi và chỉ khi đầu đọc chỉ vào ký hiệu đọc hết xâu \$ trên băng làm việc và stack rỗng, tức là ký tự đáy stack \$ ở ô trên cùng của nó.

Chẳng hạn, xét xâu $\omega x\hat{\omega} = 001110x011100 \in L(G)$ cho ở trên:

$$\sigma(\$, q_0, 001110x011100\$) =$$
$$\sigma(\$, 0, q_0, 01110x011100\$) =$$
$$\sigma(\$, 00, q_0, 1110x011100\$) =$$
$$\sigma(\$, 001, q_0, 110x011100\$) =$$
$$\sigma(\$, 0011, q_0, 10x011100\$) =$$

www.thuvien247.net

$\sigma(\$, 00111, q_0, 0x011100\$) =$

$\sigma(\$, 001110, q_0, x011100\$) =$

$\sigma(\$, 001110, q_1, 011100\$) =$

$\sigma(\$, 00111, q_1, 11100\$) =$

$\sigma(\$, 0011, q_1, 1100\$) =$

$\sigma(\$, 001, q_1, 100\$) =$

$\sigma(\$, 00, q_1, 00\$) =$

$\sigma(\$, 0, q_1, 0\$) =$

$\sigma(\$, q_1, \$).$

Chứng tỏ xâu 001110c011100 $\in \mathscr{L}(M)$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\mathscr{L}(M) = L(G)$.

Bạn đọc có thể kiểm chứng rằng các xâu: 010110x011100 $\notin \mathscr{L}(M)$;

010110x01110 $\notin \mathscr{L}(M)$.

16. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$\Sigma = \{0, 1\};\ \Delta = \{I\};\ R = \{I \to 0I0,\ I \to 1I1,\ I \to \lambda\}.$$

Xây dựng ôtômat đẩy xuống không đơn định

$M = <\Sigma, Q, \Gamma, F, q_o, \$, \sigma>$ sao cho $\mathscr{L}(M) = L(G)$ (theo stack rỗng).

Giải. $L(G) = \{\omega\hat{\omega} \mid \omega \in \{0, 1\}^*$, $\hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$. Bạn đọc tự chứng minh kết quả trên. Ta xây dựng M với $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_o, q_1\}$, q_o là trạng thái ban đầu, $\Gamma = \{I, 0, 1, \$\}$, \$ ký hiệu đọc hết xâu và cũng là ký hiệu đáy ngăn xếp, $F = \varnothing$ (do M đoán nhận theo stack rỗng), còn hàm chuyển σ: $\Gamma^* \times Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^{\Gamma^*} \times Q$ phải làm việc theo các bước cụ thể sau:

1. $\sigma(\$, q_o, 0) = \{(\$0, q_o)\}$;
2. $\sigma(\$, q_o, 1) = \{(\$1, q_o)\}$;
3. $\sigma(\$0, q_o, 0) = \{(\$00, q_o), (\$, q_1)\}$;
4. $\sigma(\$1, q_o, 0) = \{(\$10, q_o)\}$;
5. $\sigma(\$0, q_o, 1) = \{(\$01, q_o)\}$;
6. $\sigma(\$1, q_o, 1) = \{(\$11, q_o), (\$, q_1)\}$;
7. $\sigma(\$0, q_1, 0) = \{(\$, q_1)\}$;
8. $\sigma(\$1, q_1, 1) = \{(\$, q_1)\}$;
9. $\sigma(\$, q_o, \$) = \{(\$, q_1)\}$;
10. $\sigma(\$, q_1, \$) = \{(\$, q_1)\}$.

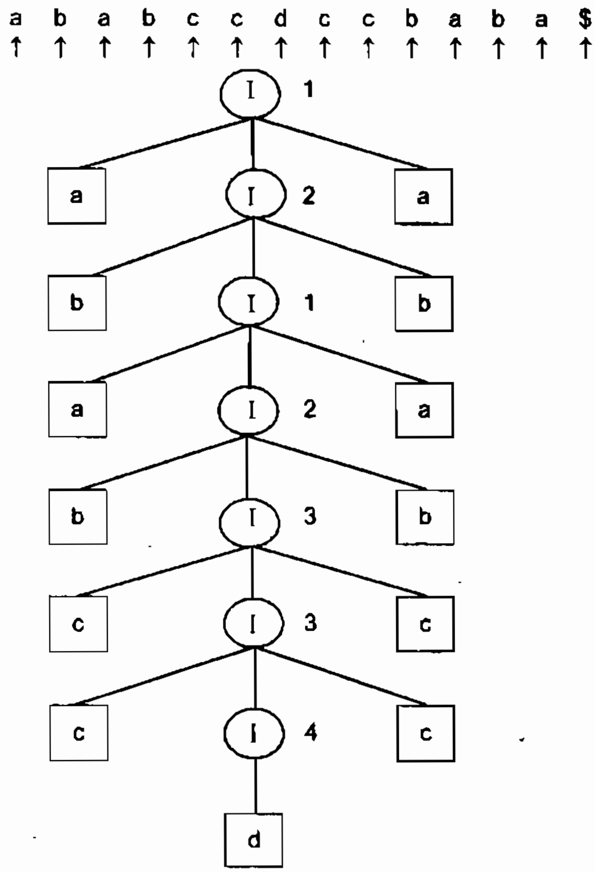
www.thuvien247.net

Chú ý : Từ bước 1 đến bước 6 cho phép M nhớ các ký hiệu đã đọc và đưa vào stack, trong đó bước 3 và bước 6 cho phép M chọn giữa hai bước hình trạng và nó chọn bước 2 khi đọc xong ω trên băng làm việc để chuyển sang bước so sánh các phần tử trên cùng của stack với phần xâu còn lại trên băng làm việc nhờ các quy tắc 7 và 8. Quy tắc 9 cho phép M thừa nhận xâu rỗng λ. Quy tắc 10 cho phép M thừa nhận ngôn ngữ $\mathscr{L}$(G) theo stack rỗng.

Bạn đọc có thể kiểm tra xâu ω = 01000010 ∈ $\mathscr{L}$(M).

17. Áp dụng thuật toán phân tích Top – down để chỉ ra xâu ω = ababccdccbaba ∈ L(G), ở đây G = <Σ, Δ, I, R> là VPPNC với R = $\{I \xrightarrow[1]{} aIa,\ I \xrightarrow[2]{} bIb,\ I \xrightarrow[3]{} cIc,\ I \xrightarrow[4]{} d \mid I \in \Delta,\ a, b, c, d \in \Sigma\}$.

Giải. Trước hết ta có L(G) = $\{\omega d \hat{\omega} \mid \omega \in \{a, b, c\}^*,\ \hat{\omega}$ là ảnh của $\omega\}$. Xâu ω = ababccdccbaba ∈ L(G) vì theo thuật toán phân tích Top–down ta có cây cú pháp:



Cây trên là cây cú pháp của xâu ω = ababccdccbaba nên ω ∈ L(G).

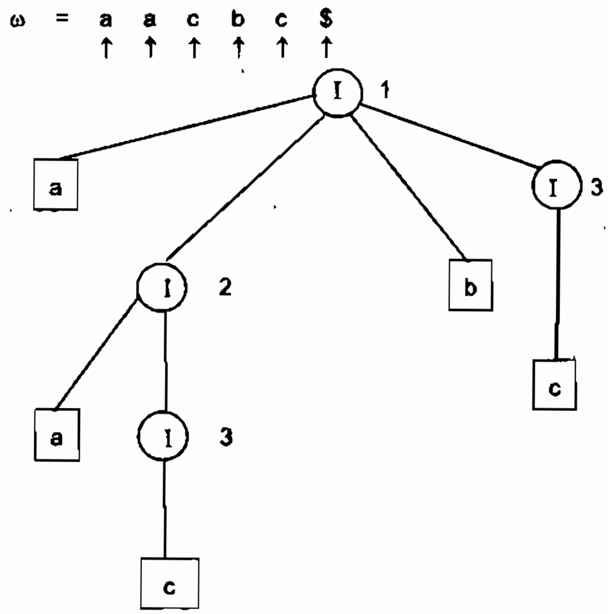
www.thuvien247.net

18. Cho VPPNC G = <Σ, Δ, I, R> với

R = $\{I \xrightarrow{1} aIbI,\ I \xrightarrow{2} aI,\ I \xrightarrow{3} c \mid I \in \Delta;\ a, b, c \in \Sigma\}$ và xâu ω = aacbc.

Dùng thuật toán Top–down kiểm tra xâu ω ∈ L(G)?

Giải



Cây trên là cây cú pháp của ω. Vậy ω = aacbc ∈ L(G).

Chú ý: Khi áp dụng thuật toán Top – down đối với VPPNC ta cần giả thiết văn phạm không đệ quy trái. Để xóa đệ quy trái, trong trường hợp quy tắc của VPPNC có dạng: $A \to A\alpha \mid \beta$, với β không bắt đầu bằng A ta thay tập quy tắc trên bởi tập quy tắc tương đương không có đệ quy trái có dạng:

$$A \to \beta A',\ A' \to \alpha A',\ A' \to \lambda.$$

19. Cho VPPNC G = <Σ, Δ, I, R> với

$$R = \{ I \xrightarrow{1} 0I0, I \xrightarrow{2} 1I1, I \xrightarrow{3} 00, I \xrightarrow{4} 11 \}$$

a) Tìm L(G).

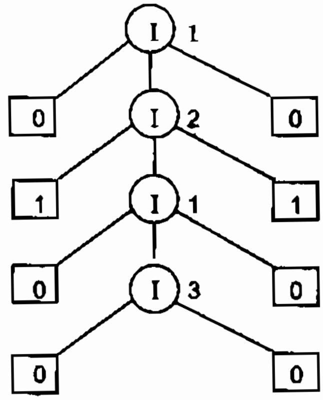
b) Dùng thuật toán phân tích tất định để chỉ ra xâu ω = 01000010 ∈ L(G).

Giải

a) L(G) = $\{\omega\hat{\omega} \mid \omega \in \{0, 1\}^+$ & $\hat{\omega}$ là ảnh gương của $\omega\}$. Bạn đọc tự chứng minh kết quả trên.

b) Văn phạm G không đệ quy trái và không nhập nhằng nên xâu ω = 01000010 có cây cú pháp trong bảng phân tích tất định sau:

www.thuvien247.net

Stack	Input	Output	
		Quy tắc	Cây cú pháp
$I	01000010$		
$0I0	01000010$		
$0I	1000010$	I → 0I0	
$01I1	1000010$		
$01I	000010$	I → 1I1	
$010I0	000010$		
$010I	00010$	I → 0I0	
$01000	00010$		
$0100	0010$	I → 00	
$010	010$		
$01	10$		
$0	0$		ω = 01000010 ∈ L(G)
$	$		

20. Chứng minh rằng, nếu L = L(M) (M đoán nhận L(M) theo tập trạng thái kết thúc) thì tồn tại một ôtômat đẩy xuống M' sao cho L(M) = $\mathscr{L}$(M') (M' đoán nhận $\mathscr{L}$(M') theo stack rống) (Bài giải này là một phần chứng minh Định lý 9, §4).

Giải. Giả sử M = <Σ, Q, Γ, F, q_o, \$, σ> có L(M) = L. Xây dựng M' = <Σ, Q', Γ', F', s_o, \$', σ'>, ở đây Q' = Q ∪ {q_o, s_o}, Γ' = Γ ∪ {\$}, F' = ∅ và hàm chuyển σ' định nghĩa như sau:

1) σ'(\$', s_o, λ) = {(\$'\$, q_o)}.

2) Với mọi q ∈ Q, a ∈ {λ} ∪ Σ và z ∈ Γ, ta có σ'(z, q, a) bao gồm tất cả các phần tử của σ(z, q, a).

3) Với mọi q ∈ F và z ∈ Γ ∪ {\$'}, ta có σ'(z, q, λ) bao gồm {(λ, q_e)}.

4) Với mọi z ∈ Γ ∪ {\$'}, ta có σ'(z, q_e, λ) bao gồm {(λ, q_e)}.

Ở đây: Quy tắc 1 đảm bảo để M' có hình trạng ban đầu của nó là {(\$\$', q_o)}, với \$ nằm dưới \$' trong stack. Quy tắc 2 đảm bảo để M' bắt trước mọi bước chuyển của M. Quy tắc 3 và 4 cho phép mỗi khi M chuyển về trạng thái thuộc F thì M' chuyển sang trạng thái q_e và sau đó xoá hết các phần tử trong stack để M' thừa nhận xâu vào ω ∈ L(M) (theo stack rỗng) hoặc tiếp tục bắt trước M nếu M còn tiếp tục làm việc.

www.thuvien247.net

Giả sử $\omega \in L(M)$, ta có $(\$, q_0, \omega) \vdash_{M} (\gamma, q)$ với $\gamma \in \Gamma^*$ và $q \in F$. Theo cách làm việc của M' trong quy tắc 1, ta có $(\$', s_0, \omega) \vdash_{M'} (\$'\$, q_0, \omega)$. Do quy tắc 2 ta có $(\$'\$, q_0, \omega) \vdash_{M} (\$\gamma, q)$ với $q \in F$. Do quy tắc 3 và 4, M' tiếp tục làm việc và cho kết quả $(\$'\gamma, q) \vdash_{M'} q_e$.

Tóm lại, ta có $(\$', s_0, \omega) \vdash_{M'} (\$', q_e)$, tức là M' đoán nhận xâu $\omega \in L(M)$ theo stack rỗng.

21. Cho VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{ I \xrightarrow{1} aAA, A \xrightarrow{2} aI, A \xrightarrow{3} bI, A \xrightarrow{4} a \mid A, I \in \Delta; a, b \in \Sigma\}.$$

Xây dựng ôtômat đẩy xuống $M = <\Sigma, Q, \Gamma, F, q_0, \$, \sigma>$ sao cho $\mathcal{L}(M) = L(G)$ (theo stack rỗng) (Áp dụng Định lý 12, §4).

Giải

$\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q\}$, $\Gamma = \{A, I, a, b\}$, $F = \varnothing$, $q_0 = q$ và σ làm việc như sau:

1) $\sigma(I, q, \lambda) = \{(AAa, q)\}$;

2) $\sigma(A, q, \lambda) = \{(Ia, q), (Ib, q), (a, q)\}$;

3) $\sigma(a, q, a) = \{(\$, q)\}$;

4) $\sigma(b, q, b) = \{(\$, q)\}$.

Chẳng hạn, chỉ ra xâu ω = abaaaa $\in$ L(G) và ω = abaaaa $\in \mathcal{L}(M)$. Thật vậy: $D(\omega) = (I, {}_1\, aAA, {}_3\, abIa, {}_1\, abaAAA, {}_4\, abaaAA, {}_4\, abaaaA, {}_4\, abaaaa)$. Vậy $\omega \in L(G)$. Ta chỉ ra $\omega \in \mathcal{L}(M)$ như sau:

$$\begin{aligned}(\$I, q, abaaaa\$)_1 &= (\$AAa, q, abaaaa\$)_3 = (\$AA, q, baaaa\$)_2\\ &= (\$AIb, q, baaaa\$)_4 = (\$AI, q, aaaa\$)_1 = (\$AAAa, q, aaaa\$)_3\\ &= (\$AAA, q, aaa\$)_2 = (\$AAa, q, aaa\$)_3 = (\$AA, q, aa\$)_2\\ &= (\$Aa, q, aa)_3 = (\$A, q, a)_2 = (\$a, q, a)_3 = (\$, q).\end{aligned}$$

Vậy $\omega \in \mathcal{L}(M)$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

22. a) Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \to Ab, A \to Ca, B \to Ba, B \to Cb, B \to b, C \to Cb, C \to b\}.$$

Xâu ω = cbab $\in$ L(G)?

b) Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to \lambda, I \to aIb\}$. Tìm ngôn ngữ sinh của hai văn phạm trong a và b.

www.thuvien247.net

c) Trong hai văn phạm trên, văn phạm nào là VPCQ? Văn phạm nào là VPPNC nhưng không phải là VPCQ? Vì sao?

d) Viết văn phạm đoán nhận và tương đương với các văn phạm sinh ra trong a và b.

23. Một câu trong tiếng Việt có thể sinh ra qua các bước khai triển dần dần các phạm trù cú pháp theo quy tắc cú pháp như sau:

<câu> → <chủ ngữ> <vị ngữ>

<chủ ngữ> → <danh ngữ>

<danh ngữ> → <danh ngữ> <tính từ>

<vị ngữ> → <động từ> <bổ ngữ>

<bố ngữ> → <danh ngữ>

<danh từ> → bò | cỏ | ngựa | cừu

<tính từ> → vàng | xanh | đen | trắng | non

<động từ> → gặm | đá.

a) Tìm dạng chuẩn BNF của các quy tắc cú pháp đã cho.

b) Xây dựng VPPNC có dạng biên dịch trong câu a.

c) Xây dựng cây cú pháp của xâu ω_1 = "bò đen gặm cỏ xanh" và xâu ω_2 = "cừu vàng gặm cỏ non" và xâu ω_3 = "ngựa đen đá cừu".

24. Sử dụng dạng BNF trong bài tập 8 tìm cây cú pháp của xâu

$$\omega_1 = -789,\ \omega_2 = +123456.$$

25. Sử dụng dạng BNF trong bài tập 9 tìm cây cú pháp của xâu

$\omega_1 = a * (b * c + a) * b$, $\omega_2 = a + b + c + a$ và $\omega_3 = a * b * c * b$.

26. Định nghĩa một biểu thức số học như sau:

<biểu thức> := <biểu thức> + <biểu thức> | <biểu thức> * <biểu thức> | (<biểu thức>) | xy.

a) Viết định nghĩa biểu thức số học trên dưới dạng VPPNC.

b) Xây dựng cây cú pháp của biểu thức (xy + xy) * xy + xy * xy.

27. a) Xây dựng VPCTC sinh ra tất cả các số thập phân có dấu gồm: một dấu +; hoặc dấu –; một phần nguyên không âm và phần thập phân; hoặc là một xâu rỗng; hoặc là một dấu phẩy thập phân, tiếp theo là một số nguyên, trong đó các số không ban đầu trong số nguyên đó là được phép.

b) Viết dạng BNF của văn phạm đó.

c) Xây dựng cây cú pháp cho –31,4 trong văn phạm đó.

28. a) Xây dựng một VPCTC cho tập tất cả các phân số dạng a/b, trong đó a là một số nguyên có dấu trong ký hiệu thập phân và b là một số nguyên dương.

a) Xây dựng dạng BNF của văn phạm đó.

b) Xây dựng cây dẫn xuất của +311/17 trong văn phạm đó.

www.thuvien247.net

29. Cho văn phạm $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \to aB/bA,\ A \to a/aI/bAA,\ B \to b/bI/aBB\}.$$

a) Tìm cây dẫn xuất bên trái nhất, bên phải nhất; cây dẫn xuất của G.

b) Văn phạm trên có nhập nhằng không?

30. Chỉ ra văn phạm dưới đây là nhập nhằng:

$G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $R = \{I \to \text{if } b \text{ then } I \text{ else } I,\ I \to \text{if } b \text{ then } I,\ I \to a\}$,

ở đây: $I \in \Delta$, các ký hiệu a, b, if, then, else $\in \Sigma$.

31. Cấu trúc danh sách (list structure) được định nghĩa như sau:

1) λ (rỗng) là một cấu trúc danh sách;

2) $a \in \Sigma$ là một cấu trúc danh sách;

3) Nếu $a_1, a_2, ..., a_k$ là một cấu trúc danh sách, với $k \geq 1$ thì $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là cấu trúc danh sách.

a) Xây dựng văn phạm G sinh ra cấu trúc danh sách.

b) Xây dựng cây cú pháp của $\omega = (((a, a), \lambda, (a)), a)$.

32. a) Chuyển văn phạm G có

$$R = \{I \to A, I \to a, A \to AB, B \to b / I, A, B \in \Delta; a, b \in \Sigma\}$$

về văn phạm tương đương không còn ký hiệu vô ích.

b) Cho $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \to AB, A \to AA, A \to \lambda, B \to bB, B \to \lambda\}.$$

Xây dựng $G' \approx G$, trong đó G' không còn λ– quy tắc.

c) Cho $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với

$$R = \{I \to I + A,\ I \to A,\ A \to A*B,\ A \to B,\ B \to a\}.$$

Xây dựng $G' \approx G$ mà trong G' không còn quy tắc đơn.

d) Cho một VPPNC có ký hiệu vô ích, có quy tắc đơn và λ– quy tắc. Áp dụng các thuật toán đã học trong cuốn *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004 (cùng tác giả) để xây dựng văn phạm tương đương với văn phạm không còn ký hiệu thừa, không còn quy tắc đơn và λ– quy tắc.

33. Cho văn phạm $R_1 = \{I \to Aa, I \to b, A \to Ac, A \to Id, A \to e\}$. Xây dựng văn phạm tương đương với văn phạm trên nhưng không còn quy tắc đệ quy trái $A \to Ac$.

34. Cho $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ với $\Sigma = \{a, +, *\}$, $\Delta = \{I, T, F\}$,

$R = \{I \to T + I, I \to T, T \to F * T, T \to F, F \to a\}$ là văn phạm không đệ quy trái và xâu $\omega_1 = a * a * a * a$ và $\omega_2 = a * a * a$. Dùng thuật toán Top–down tìm cây cú pháp của xâu ω_1 và ω_2.

www.thuvien247.net

35. Dùng thuật toán phân tích từ dưới lên (Bottom – Up) (xem *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004, tr.328) để vẽ cây cú pháp đối với xâu ω = ababa trong VPPNC với R = {I → AB, A → ab, B → aba}.

36. Dùng thuật toán phân tích tất định để xây dựng các cây cú pháp tương ứng với các xâu:

a) ω = xxxxxz trong văn phạm với R = {I → B, B → xB, B → z}.

b) ω = xyyyz trong văn phạm với R = {I → xA, A → z, A → yA} là văn phạm không đệ quy trái và không nhập nhằng.

37. Cho VPPNC G = <Σ, Δ, I, R> với R = {I → x, I → Ix}.

a) Tìm L(G).

b) Chỉ ra G là nhập nhằng và đệ quy trái.

c) Xây dựng VPPNC G' ≈ G mà G' không nhập nhằng và không đệ quy trái.

d) Xây dựng cây cú pháp theo thuật toán phân tích tất định đối với xâu $\omega = x^n$ $(n \geq 1)$ trong G'.

38. Cho ôtômat đẩy xuống $M = <\Sigma, Q, \Gamma, F, q_o, \$, \sigma>$ với $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_o, q_1\}$, $\Gamma = \{X\}$, $F = \varnothing$, q_o là trạng thái ban đầu, \$ là ký hiệu đáy stack và cũng là ký hiệu đọc hết xâu, hàm chuyển σ cho như sau:

1) $\sigma(\$, q_o, 0) = \{(X, q_o)\}$;
2) $\sigma(X, q_o, 0) = \{(XX, q_o)\}$;
3) $\sigma(X, q_o, 1) = \{(\$, q_1)\}$;
4) $\sigma(X, q_1, 1) = \{(\$, q_1)\}$;
5) $\sigma(X, q_1, \$) = \{(\$, q_1)\}$;
6) $\sigma(\$, q_1, \$) = \{(\$, q_1)\}$.

Xây dựng VPPNC G = <Σ, Δ, I, R> sao cho $L(G) = \mathscr{L}(M)$ theo stack rỗng (Áp dụng Định lý 12, §4).

39. Chứng minh rằng $L = \mathscr{L}(M)$ với ôtômat nào đó (theo stack rỗng) thì tồn tại M' sao cho L(M') = L (theo tập trạng thái kết thúc). Cho ví dụ minh họa. (Áp dụng một phần Định lý 9, §4).

40. Nếu $L = \mathscr{L}(M)$ với ôtômat đẩy xuống M thì tồn tại VPPNC G sao cho $L(G) = L = \mathscr{L}(M)$. (Áp dụng Định lý 12, §4).

41. a) Xây dựng các VPPNC G_i (i = 1, 2, 3) sinh ra các ngôn ngữ:

$L_1 = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$;
$L_2 = \{a^i c b^j \mid i \geq j \geq 0\}$;
$L_3 = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$.

www.thuvien247.net

b) Xây dựng ôtômat đẩy xuống đoán nhận các ngôn ngữ L_i ($i = 1, 2, 3$).

c) Xây dựng ôtômat đẩy xuống đoán nhận các xâu trên $\{a, b\}$ có số số a gấp đôi số số b.

d) Xây dựng ôtômat đẩy xuống tương đương với VPPNC G có

$$R = \{I \rightarrow +II \,/\, *II \,/\, a\}$$

e) Xây dựng VPPNC $G = <\Sigma, \Delta, I, R>$ sao cho $L(G) = \mathcal{L}(M)$, ở đây M được cho như sau: $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_o, q_1\}$, $\Gamma = \{X\}$, q_o trạng thái ban đầu, $F = \varnothing$, \$ ký tự đáy ngăn xếp và đọc hết xâu, còn hàm chuyển σ xác định như sau:

1) $\sigma(\$, q_o, 0) = \{(\$X, q_o)\}$

2) $\sigma(X, q_o, 0) = \{(XX, q_o)\}$

3) $\sigma(X, q_o, 1) = \{(\$, q_1)\}$

4) $\sigma(X, q_1, 1) = \{(\$, q_1)\}$

5) $\sigma(X, q_1, \$) = \{(\$, q_1)\}$

6) $\sigma(\$, q_1, \$) = \{(\$, q_1)\}$

(Áp dụng Định lý 12, §4).

www.thuvien247.net

PHẦN 2
ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Chương 5
ĐỒ THỊ – CÁC DẠNG ĐỒ THỊ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đồ thị

- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm tập các đỉnh $X \neq \varnothing$ và tập $U \subseteq X \times X$ là tập gồm các cặp sắp thứ tự hoặc không sắp thứ tự các đỉnh trong X. Ta ký hiệu đồ thị bởi G = <X, U>.
- Nếu G = <X, U> có tập các cạnh $U = \{(a, b) \mid a, b \in X\}$ là các cặp đỉnh sắp thứ tự (không sắp thứ tự) thì đồ thị G = <X, U> gọi là đồ thị có hướng (đồ thị vô hướng).
- Cạnh $u = (a, b) \in U$ trong đồ thị vô hướng G = <X, U> là một đoạn thẳng, hay một đoạn cong nối hai đỉnh a, b với nhau và không đi qua bất kỳ đỉnh thứ ba nào trong đồ thị.
- Cung $u = (a, b) \in U$ trong đồ thị có hướng G = <X, U> là một đoạn thẳng có hướng hay một đoạn cong có hướng đi từ đỉnh a đến đỉnh b và không đi qua bất kỳ đỉnh thứ ba nào trong đồ thị. Trong trường hợp này, a gọi là đỉnh đầu còn b là đỉnh cuối của cung u = (a, b).
- Nếu cạnh (cung) $u = (a, b) \in U$ trong đồ thị vô hướng (có hướng) G = <X, U> mà a = b thì ta nói tại đỉnh a có một khuyên vô hướng (có hướng) trong đồ thị G = <X, U>.

2. Các dạng đồ thị

a) Đơn đồ thị, đơn đồ thị có hướng, đa đồ thị, đa đồ thị có hướng và giả đồ thị

Cho đồ thị vô hướng G = <X, U>:

www.thuvien247.net

- Ta nói G là đồ thị đơn (hay đơn đồ thị) khi và chỉ khi đồ thị G không có khuyên, và bất kỳ hai đỉnh phân biệt nào cũng được nối với nhau bởi không quá một cạnh.
- Ta nói G là đa đồ thị khi và chỉ khi đồ thị G không có khuyên và trong G có tồn tại một cặp đỉnh phân biệt được nối với nhau bởi nhiều hơn một cạnh.
- Ta nói G là giả đồ thị khi và chỉ khi đồ thị G là đa đồ thị có khuyên. Giả đồ thị là một đồ thị vô hướng tổng quát nhất.

Chú ý: Cặp đỉnh được nối với nhau bởi nhiều hơn một cạnh hoặc nhiều hơn một cung (cùng chiều) được gọi là cạnh bội (cung bội).

Cho đồ thị có hướng $G = <X, U>$:

- Ta nói G là đơn đồ thị có hướng khi và chỉ khi trong G đối với mỗi cặp đỉnh khác nhau có không quá một cung nối với nhau và có thể có khuyên.
- Ta nói G là đa đồ thị có hướng khi và chỉ khi trong G có một cặp đỉnh khác nhau được nối với nhau bởi nhiều hơn 1 cung (cùng chiều) và có thể có khuyên.

b) Đồ thị đầy đủ và đồ thị k – đầy đủ

- Đồ thị $G = <X, U>$ là đầy đủ chỉ khi mỗi cặp đỉnh khác nhau có đúng một cạnh (một cung) nối với nhau. Đồ thị đầy đủ n đỉnh ký hiệu là K_n $(n \geq 1)$.
- Đồ thị $G = <X, U>$ là k – đầy đủ khi và chỉ khi mỗi đỉnh có đúng k cạnh (k cung có chiều tùy ý) nối với nhau. Đôi khi đồ thị k – đầy đủ người ta còn gọi là đồ thị k – chính quy.

c) Đồ thị phân đôi và đồ thị phân đôi đầy đủ

- Đồ thị đơn $G = <X, U>$ là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi $X \neq \varnothing$, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ và với mỗi cạnh $u = (a, b) \in U$ ta luôn có đỉnh $a \in X_1$ còn $b \in X_2$ hoặc ngược lại. Đồ thị phân đôi ký hiệu là $G = <X_1 \cup X_2, U>$.
- Đồ thị phân đôi $G = <X_1 \cup X_2, U>$ được gọi là đồ thị phân đôi đầy đủ khi và chỉ khi với mỗi cặp đỉnh $a \in X_1$ và $b \in X_2$ ta luôn có $(a, b) \in U$. Đôi khi đồ thị phân đôi đầy đủ $G = <X_1 \cup X_2, U>$ với $|X_1| = n$, $|X_2| = m$ được ký hiệu là $K_{n,m}$.

d) Đồ thị bù

Đồ thị bù của đồ thị đơn $G = <X, U>$ ta định nghĩa là đồ thị $\overline{G} = <X, \overline{U}>$, ở đây $\overline{U} = \{u = (a, b) \mid a, b \in X \& (a, b) \notin U\}$.

3. Biểu diễn đồ thị

a) Phương pháp hình học

Đồ thị $G = <X, U>$ có thể biểu diễn dưới dạng hình học như sau:

www.thuvien247.net

- Mỗi đỉnh $x \in X$ đặt tương ứng với một điểm trên mặt phẳng (trong không gian), điểm đó gọi là một đỉnh và được gán nhãn x. Nếu $|X| = n$ thì trong mặt phẳng (trong không gian) có n đỉnh.
- Nếu $u = (x, y) \in U$ thì từ đỉnh x đến đỉnh y có một cạnh u (có một cung u) nối với nhau.
- Nếu $u = (x, x) \in U$ thì tại đỉnh x có một khuyên.
- Nếu $u = (x, y) \notin U$ thì giữa đỉnh x và y không có cạnh nối (cung nối) với nhau.

b) Phương pháp ma trận kề

Đồ thị $G = <X, U>$ với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $(n \geq 1)$ có thể biểu diễn dưới dạng ma trận vuông cấp n, ký hiệu là $M_G^{n.n}$ và được định nghĩa như sau:

$M_G^{n.n} = \left[\sigma_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$, ở đây

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} k, & \text{nếu cặp đỉnh } (x_i, x_j) \text{ có k cạnh} \\ & \text{(k cung cùng hướng) nối với nhau;} \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Nếu G là đồ thị đơn thì ma trận $M_G^{n.n}$ là ma trận lôgic.

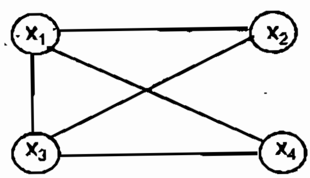
Chú ý: Khi một đồ thị G có tập các đỉnh $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ thì ma trận kề $M_G^{n.n} = \left[\sigma_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ quy ước được cho theo thứ tự các đỉnh $x_1, x_2, ..., x_n$.

c) Phương pháp danh sách kề

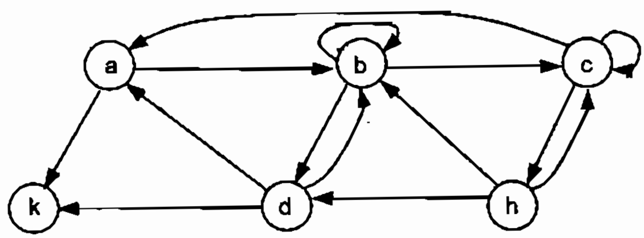
Nếu đồ thị $G = <X, U>$ không có cạnh bội thì việc biểu diễn bằng phương pháp danh sách kề dưới đây thuận lợi hơn nhiều so với phương pháp ma trận kề.

Danh sách kề của đồ thị đơn G_1 được lập trong bảng 1. Danh sách kề của đồ thị có hướng G_2 được lập trong bảng 2. Ở đây G_1, G_2 cho dưới dạng hình học:

G_1:



G_2:



www.thuvien247.net

Khi đó G_1 được biểu diễn dưới dạng bảng 1, còn G_2 dưới dạng bảng 2.

Bảng 1

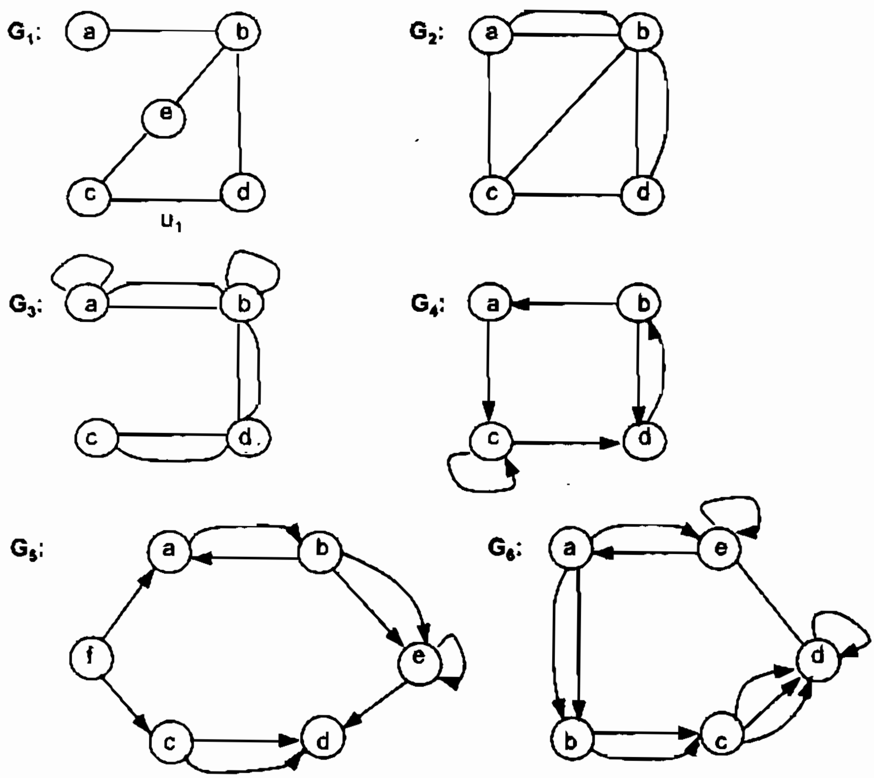
Danh sách kề của G_1	
Đỉnh	**Đỉnh kề**
x_1	x_2, x_3, x_4
x_2	x_1, x_3
x_3	x_1, x_2, x_4
x_4	x_1, x_3

Bảng 2

Danh sách kề của G_2	
Đỉnh đầu	**Đỉnh cuối**
a	b, k
b	b, c, d
c	c, a, h
d	a, b, k
h	b, c, d
k	

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho các đồ thị có hướng và vô hướng G_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) sau;



www.thuvien247.net

a) Trong các đồ thị trên, hãy chỉ ra đồ thị nào là đơn đồ thị? Đơn đồ thị có hướng? Đa đồ thị? Giả đồ thị? Đa đồ thị có hướng?

b) Trong các đồ thị vô hướng đã cho không là đơn đồ thị, hãy tìm tập các cạnh mà nếu bỏ đi chúng sẽ nhận được đồ thị đơn.

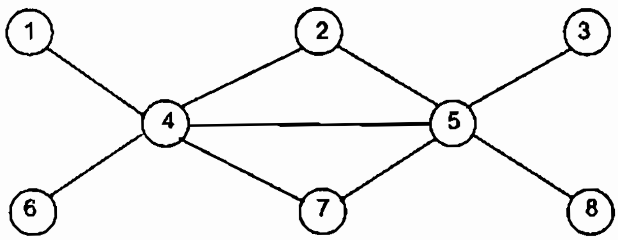
Giải

a) G_1 là đồ thị đơn, G_4 là đồ thị đơn có hướng, G_2 là đa đồ thị, G_3 là giả đồ thị, G_5 là đa đồ thị có hướng và G_6 là đồ thị hỗn tạp mà ta không quan tâm.

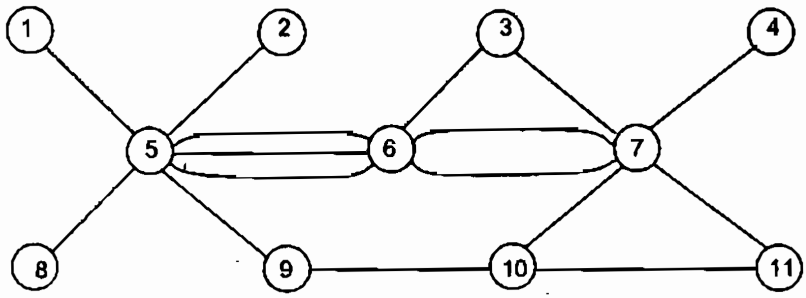
b) G_2 và G_3 là các đồ thị không đơn. Trong G_2 bỏ đi cạnh (a, b) và cạnh (b, d); trong G_3 bỏ đi các khuyên (a, a), (b, b) và bỏ đi các cạnh (a, b), (b, d), (d, c) ta sẽ nhận được hai đồ thị đơn mới.

2. Cho các mạng máy tính có dạng đồ thị H_1, H_2 và H_3. Mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, cạnh nối hai đỉnh là đường truyền thông giữa hai trung tâm máy tính ở hai đỉnh đó.

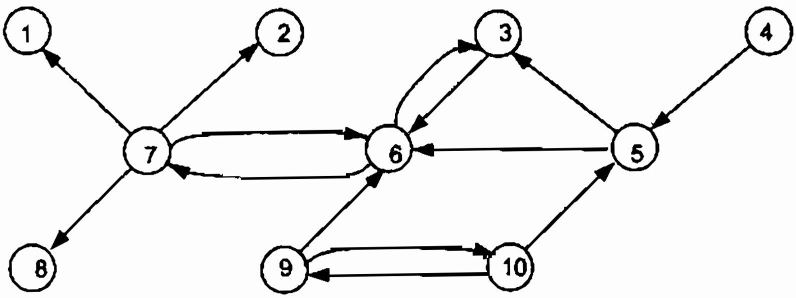
H_1:



H_2:



H_3:



www.thuvien247.net

Ba mạng máy tính trên thuộc dạng đồ thị có tên là gì? Ý nghĩa của mỗi mạng đó?

Giải

– H_1 là mạng máy tính đơn kênh, vì đồ thị của mạng H_1 là đồ thị đơn.

– H_2 là mạng máy tính đa kênh (trung tâm máy tính **5** và **6** được nối với nhau bởi ba đường truyền thông). H_2 là đa đồ thị.

– H_3 là mạng máy tính với đường truyền thông một chiều. H_3 là đơn đồ thị có hướng.

3. Hãy biểu diễn đồ thị $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ trong bài tập 1 và đồ thị H_1, H_2, H_3 trong bài tập 2 dưới dạng ma trận kề. Có nhận xét gì về các ma trận này?

Hãy biểu diễn đồ thị G_1, G_4 và đồ thị ở H_1, H_3 dưới dạng danh sách kề.

Giải

$$M_{G_1}^{5,5} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad M_{G_2}^{4,4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$M_{G_3}^{4,4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad M_{G_4}^{4,4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$M_{G_5}^{6,6} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad M_{H_1}^{8,8} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

www.thuvien247.net

$$M_{H_2}^{11.11} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$M_{H_3}^{10.10} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nhận xét: Ma trận của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng. Ma trận của đồ thị có hướng không có tính chất trên.

Danh sách kề của G_1:

Đỉnh	**Đỉnh kề**
a	b
b	a, e, d
c	e, d
d	b, c
e	c, b

www.thuvien247.net

Danh sách kề của G_4:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
a	c
b	a, d
c	c, d
d	b

Danh sách kề của H_1:

Đỉnh	Đỉnh kề
1	4
2	4, 5
3	5
4	1, 2, 5, 6, 7
5	2, 3, 4, 7, 8
6	4
7	4, 5
8	5

Danh sách kề của H_3:

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	
2	
3	6
4	5
5	3, 6
6	3, 7
7	1, 2, 6, 8
8	
9	6, 10
10	5, 9

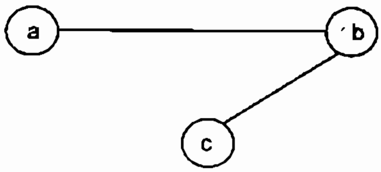
4. Hãy vẽ các đồ thị có các ma trận kề sau:

a) $M_G^{3,3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$; b) $M_{G'}^{4,4} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

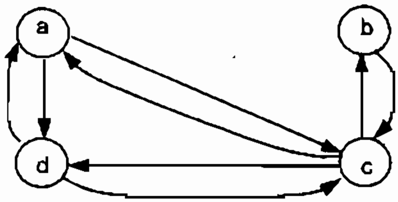
www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Giải

a) G là đồ thị đơn có dạng



b) G' là đồ thị đơn có hướng

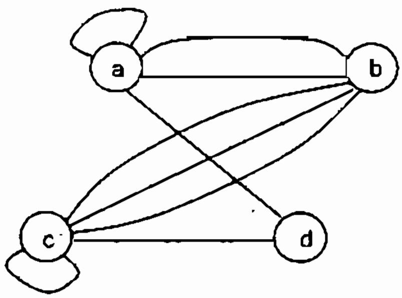


5. Vẽ đa đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi các ma trận sau:

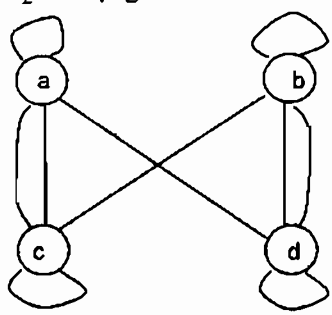
$$M_{G_1}^{4,4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{và} \quad M_{G_2}^{4,4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Và tên các đồ thị trên là gì?

Giải. G_1 có dạng $\qquad$ G_2 có dạng



;



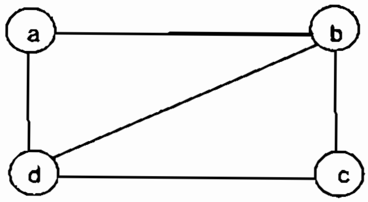
G_1 và G_2 đều là giả đồ thị.

6. Cho ví dụ minh họa về tính đúng đắn của mệnh đề: Mọi ma trận vuông lôgic đối xứng và có các số 0 trên đường chéo chính đều là ma trận kề của một đồ thị đơn.

Giải. Dễ dàng khẳng định mệnh đề trên là đúng dựa vào định nghĩa đồ thị đơn là đồ thị vô hướng, không có khuyên và mọi cặp đỉnh khác nhau đều có không quá một cạnh nối với nhau.

www.thuvien247.net

Xét đồ thị đơn G = <X, U> có dạng hình học sau

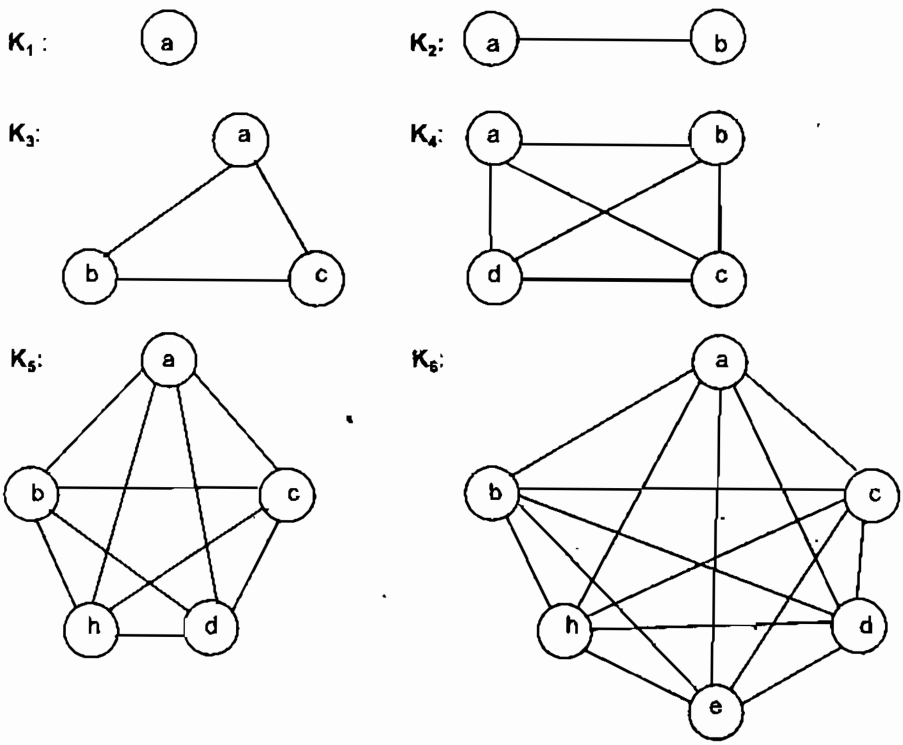


Ma trận kề của nó có dạng

$$M_G^{4,4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Đây là ma trận vuông lôgic đối xứng, có các số 0 trên đường chéo chính.

7. Cho các đồ thị đầy đủ K_n (n chỉ số đỉnh) với $1 \le n \le 6$:



Theo định nghĩa thì K_n $(n \ge 1)$ là đồ thị $(n - 1)$ đầy đủ.

a) Hãy biểu diễn K_n bằng danh sách kề và ma trận kề (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...).

www.thuvien247.net

b) Tìm số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n.

Giải. a)

K_1	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	

K_2	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b
b	a

K_3	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c
b	a, c
c	a, b

K_4	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c, d
b	a, c, d
c	b, a, d
d	a, c, b

K_5	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c, d, h
b	a, c, d, h
c	a, b, d, h
d	a, b, c, h
h	a, b, c, d

K_6	
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c, d, e, h
b	a, c, d, e, h
c	a, b, d, e, h
d	a, b, c, e, h
e	a, b, c, d, h
h	a, b, c, d, e

...

$$M_{K_1}^{1.1} = \begin{array}{c} \\ a \end{array}\begin{array}{c} a \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array};\qquad M_{K_2}^{2.2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};\qquad M_{K_3}^{3.3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$M_{K_4}^{4.4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};\qquad M_{K_5}^{5.5} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & h \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ h \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$M_{K_6}^{6.6} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & h \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ h \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\ldots;\qquad M_{K_n}^{n.n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

là ma trận vuông cấp n, các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0, các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

www.thuvien247.net

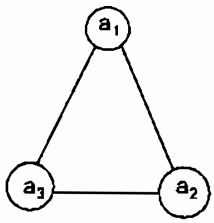
b) Số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n là $\dfrac{n(n-1)}{2}$ $(n \geq 1)$.

Kết quả này suy ra từ ma trận $M_{K_n}^{n,n}$ có n hàng, mỗi hàng có $n - 1$ số 1, mà số cạnh là số số 1 chia 2.

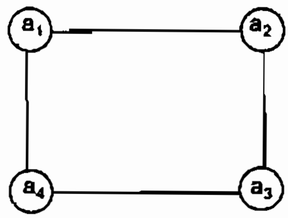
Hoặc có thể chứng minh bằng quy nạp theo $n \geq 1$.

8. Đồ thị chu trình C_n ($n \geq 3$)

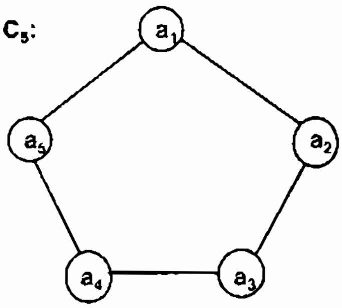
C_3:



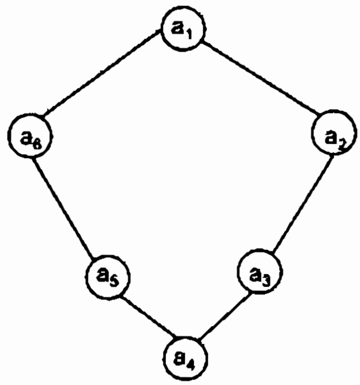
C_4:



C_5:

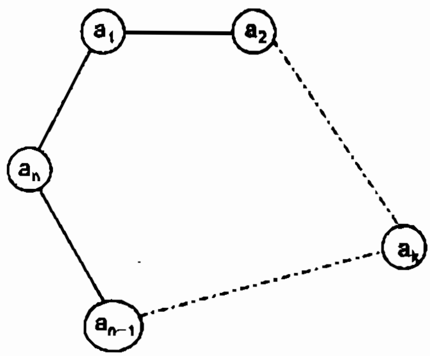


C_6:



...

C_n:



a) C_n có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh.

b) Chỉ ra C_3 không phải là đồ thị phân đôi, còn C_6 là đồ thị phân đôi.

c) Với giá trị nào của n thì C_n là đồ thị phân đôi?

Giải

a) C_n có n đỉnh và n cạnh.

www.thuvien247.net

b) C_3 không phải là đồ thị phân đôi, vì nếu nó là đồ thị phân đôi thì $X = X_1 \cup X_2$ với $X_1 = \{a_1\}$, $X_2 = \{a_2, a_3\}$ là tập chứa 2 đỉnh nên bao giờ cũng có một cạnh của C_3 được nối bởi 2 đỉnh đó.

Còn C_6 là đồ thị phân đôi vì $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = X_1 \cup X_2$ với $X_1 = \{a_1, a_3, a_5\}$, $X_2 = \{a_2, a_4, a_6\}$ và mỗi cạnh trong C_6 bao giờ cũng có một đỉnh $\in X_1$, đỉnh còn lại $\in X_2$.

c) C_n là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi $n = 2k$ $(k = 2, 3, 4, ...)$.

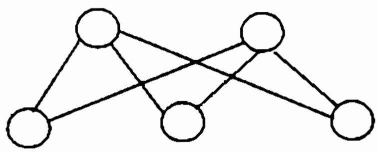
Giả sử tập các đỉnh $X = \{a_1, a_2, ..., a_{2k}\}$. Chia $X = X_1 \cup X_2$ với $X_1 = \{a_1, a_3, ..., a_{2k-1}\}$, $X_2 = \{a_2, a_4, ..., a_{2k}\}$.

Rõ ràng $U = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{2k-1}, a_{2k})\}$ gồm các cạnh $u = (a, b)$ với $a \in X_1$ thì $b \in X_2$.

9. Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{n,m}$ có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh? Vẽ đồ thị $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$, $K_{4,6}$ để minh họa điều đó.

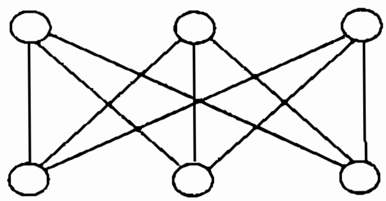
Giải. Đồ thị $K_{n,m}$ theo định nghĩa có $n + m$ đỉnh và nm cạnh.

$K_{2,3} =$



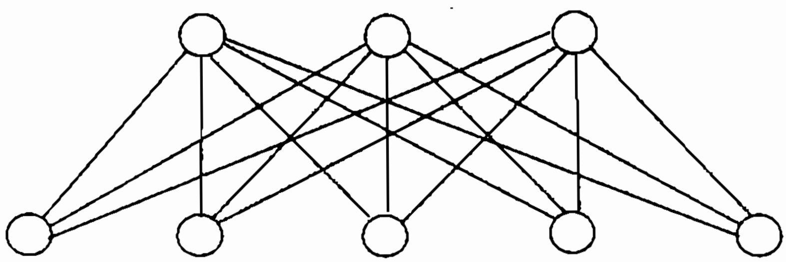
có 2.3 = 6 cạnh với 5 đỉnh.

$K_{3,3} =$



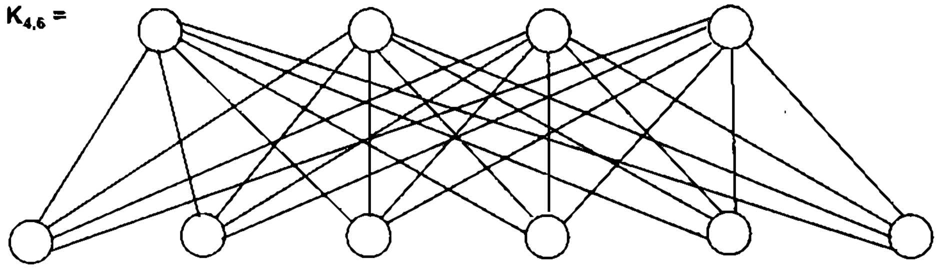
có 3.3 = 9 cạnh với 6 đỉnh.

$K_{3,5} =$



có 3.5 = 15 cạnh với 8 đỉnh.

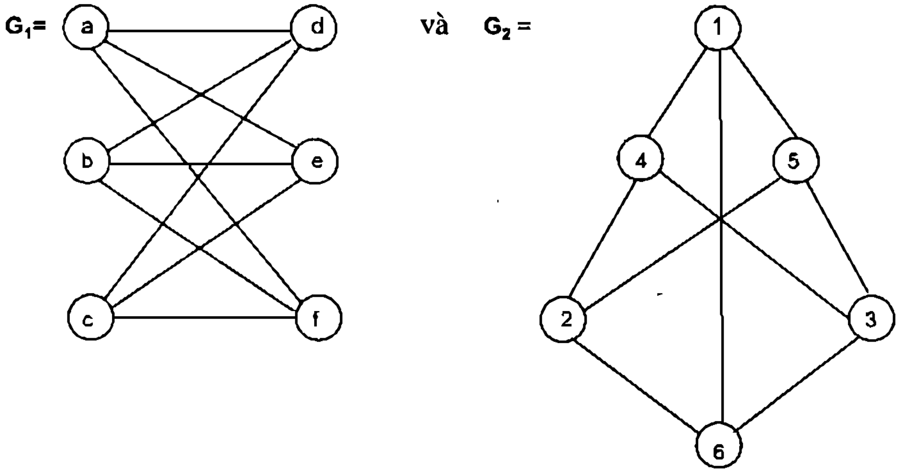
www.thuvien247.net



có 4.6 = 24 cạnh với 10 đỉnh.

10. *Các đồ thị đơn $G_1 = <X_1, U_1>$ và $G_2 = <X_2, U_2>$ là đẳng cấu nếu tồn tại tương ứng 1 – 1 f giữa các đỉnh của hai đồ thị sao cho a, b $\in X_1$ là liền kề trong G_1 khi và chỉ khi f(a), f(b) $\in X_2$ là liền kề trong G_2.*

Cho hai đồ thị đơn $G_1 = <X_1, U_1>$, $G_2 = <X_2, U_2>$ có dạng hình học:



Chỉ ra rằng G_1 và G_2 là đẳng cấu và cũng là hai đồ thị phân đôi đầy đủ.

Giải

- G_1 và G_2 đẳng cấu vì có tồn tại song ánh f: $X_1 \to X_2$, ở đây

  X_1 = {a, b, c, d, e, f} và X_2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và

  f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 4, f(e) = 5 và f(f) = 6, đồng thời:

  U_1 = {(a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f)} và

  U_2 = {(1, 4), (1, 5), (1,6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

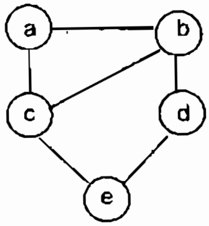
  = {(f(a), f(d)), (f(a), f(e)), (f(a), f(f)), (f(b), f(d)), (f(b), f(e)), (f(b), f(f)), (f(c), f(d)), (f(c), f(e)), (f(c), f(f))}.

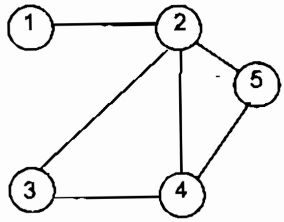
- $G_1 = <X_1, U_1> = <\{a, b, c\} \cup \{d, e, f\}, U_1>$;

$G_2 = <X_2, U_2> = <\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}, U_2>$ đều là đồ thị phân đôi đầy đủ.

www.thuvien247.net

11. Vì sao hai đồ thị dưới đây là không đẳng cấu?

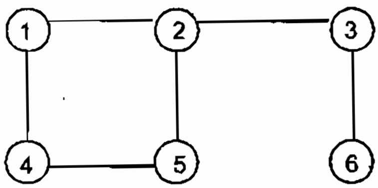
G_1 = 

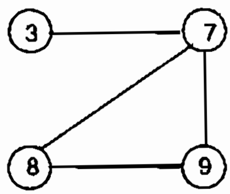
và G_2 = 

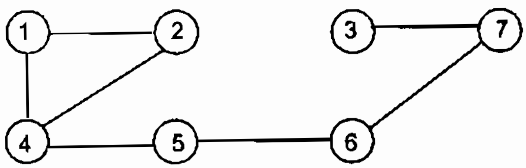
Giải. Theo định nghĩa, hai đồ thị là đẳng cấu thì hai đồ thị đó là bất biến về số cạnh, số đỉnh, và số bậc của mỗi đỉnh. Tuy nhiên, G_1 và G_2 không đẳng cấu vì số đỉnh, số cạnh thì bất biến, nhưng bậc của đỉnh là thay đổi. Chẳng hạn, trong G_1 bậc của đỉnh tối đa là 3, nhưng trong G_2 có đỉnh bậc 4; hay trong G_2 các đỉnh 1 là bậc 1, nhưng trong G_1 không có đỉnh nào bậc 1.

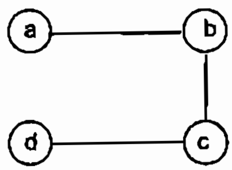
12. *Hợp của hai đồ thị đơn $G_1 = <X_1, U_1>$ và $G_2 = <X_2, U_2>$ là một đồ thị đơn $G = <X, U>$ với $X = X_1 \cup X_2$ và $U = U_1 \cup U_2$, ký hiệu $G = G_1 \cup G_2$.*

Cho G_1, G_2, G_3 và G_4 dưới dạng hình học:

G_1 = 

G_3: 

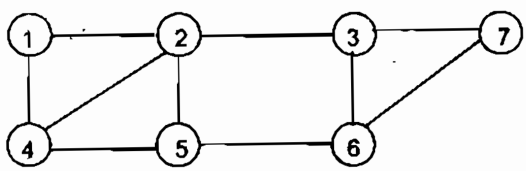
G_2 = 

G_4: 

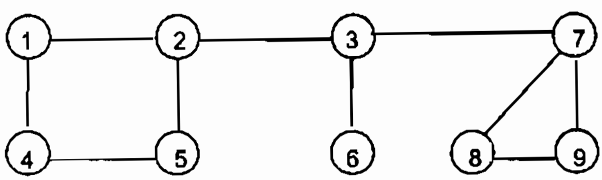
Hãy tìm các đồ thị $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cup G_3$, $G_2 \cup G_3$ và $G_1 \cup G_4$.

Giải

$G_1 \cup G_2$ =

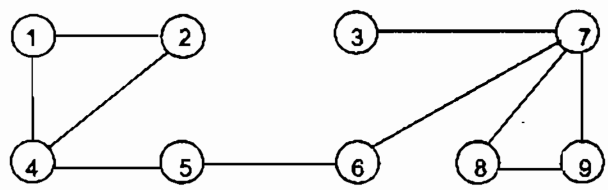


$G_1 \cup G_3$ =

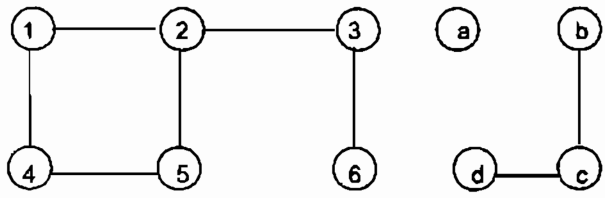


www.thuvien247.net

$G_2 \cup G_3$ =



$G_1 \cup G_4$ =

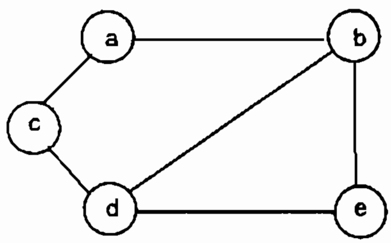


13. Nếu đồ thị đơn G = <X, U> có |X| = n đỉnh và |U| = m cạnh thì đồ thị bù $\overline{G} = <X, \overline{U}>$ có bao nhiêu cạnh?

Giải. Dễ dàng thấy đồ thị $G \cup \overline{G}$ là đồ thị đầy đủ có |X| = n đỉnh và $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh (xem bài tập 7).

Vậy $\overline{G}$ có $\dfrac{n(n-1)}{2} - m$ cạnh, hay $\left|\overline{U}\right| = \dfrac{n(n-1)}{2} - m$.

14. Cho đồ thị đơn G = <X, U> có dạng

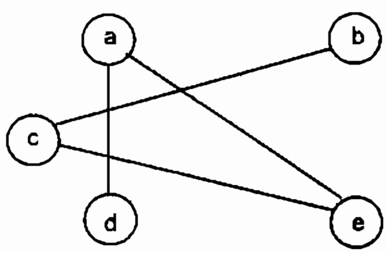


a) Chỉ ra $G \cup \overline{G}$ là đồ thị đầy đủ.

b) Tìm số cạnh của $\overline{G}$ theo công thức $\dfrac{n(n-1)}{2} - m$ trong bài 13.

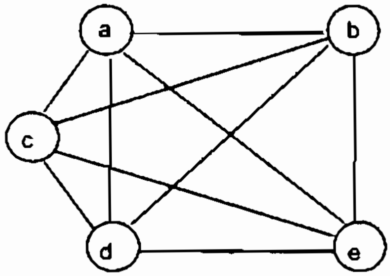
Giải

a) $\overline{G} = <X, \overline{U}> = <\{a, b, c, d, e\}, \{(c, e), (c, b), (a, d), (a, e)\}> =$



www.thuvien247.net

Khi đó ta có $G \cup \overline{G}$ có dạng:



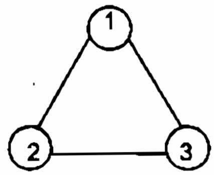
là đồ thị đơn đầy đủ K_5.

b) Số cạnh của $\overline{G} = <X, \overline{U}>$ là $\left|\overline{U}\right| = 4$ vì theo công thức trong bài 13 do G có $n = |X| = 5$, $m = |U| = 6$ nên $\dfrac{5(5-1)}{2} - 6 = 4 = \left|\overline{U}\right|$.

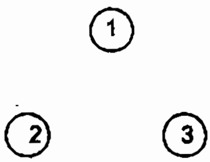
15. Hãy vẽ các đồ thị bù của K_n, C_n $(3 \le n \le 4)$

Giải

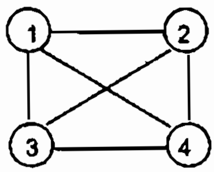
- $K_3 = <\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}> =$



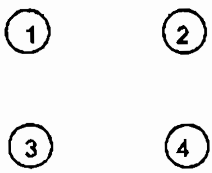
$\overline{K_3} = <\{1, 2, 3\}, \varnothing> =$



- $K_4 = <\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3), (2, 4)\}> =$

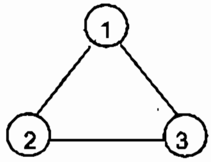


$\overline{K_4} = <\{1, 2, 3, 4\}, \varnothing> =$

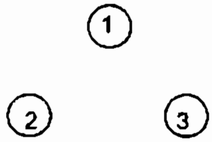


www.thuvien247.net

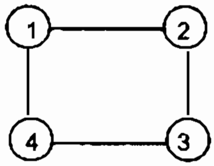
- $C_3 = <\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}> =$



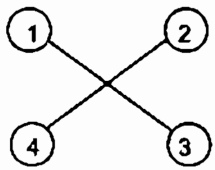
$\overline{C_3} = <\{1, 2, 3\}, \varnothing> =$



- $C_4 = <\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}> =$



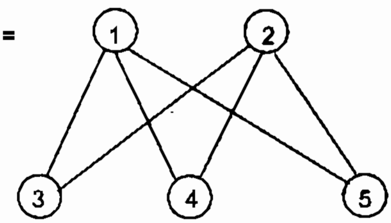
$\overline{C_4} = <\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 3), (2, 4)\} =$



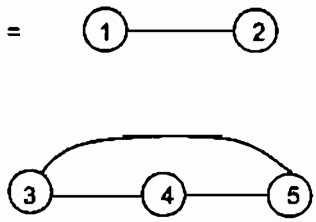
16. Vẽ đồ thị bù của đồ thị $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$ trong bài tập 9.

Giải

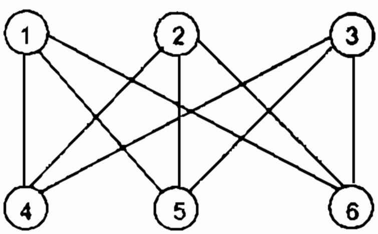
$K_{2,3} =$



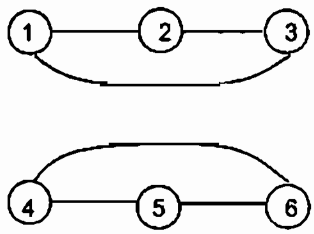
có $\overline{K_{2,3}} =$



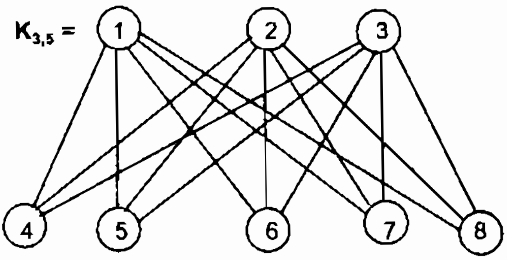
$K_{3,3} =$

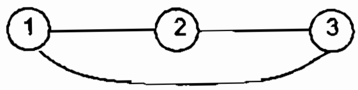


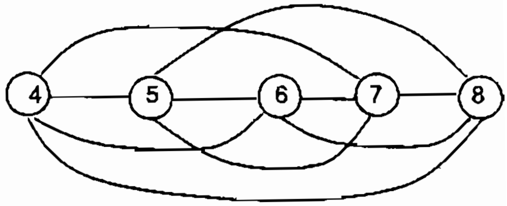
có $\overline{K_{3,3}} =$



www.thuvien247.net

$K_{3,5}$ = 

có $\overline{K}_{3,5}$ = 



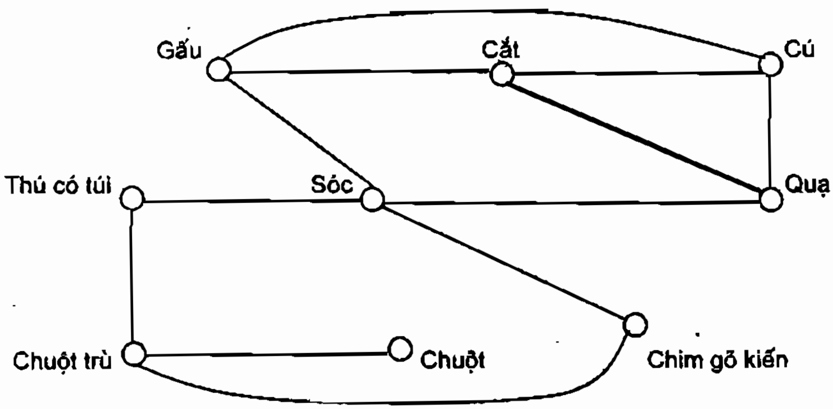
17. Chỉ ra rằng có thể sắp xếp các đỉnh trong đồ thị phân đôi, với số đỉnh không nhỏ hơn 1, sao cho ma trận kề của nó có dạng $\begin{bmatrix} O_1 & B_2 \\ B_1 & O_2 \end{bmatrix}$, ở đây O_1 và O_2 là hai ma trận không (ma trận mà mọi phần tử đều bằng 0), còn B_1, B_2 là hai ma trận khác không.

Giải. Giả sử G = $<X_1 \cup X_2, U>$ là đồ thị phân đôi với $X_1 = \{x_1, ..., x_k\}$, $X_2 = \{y_1, ..., y_l\}$. Ma trận kề của G cho theo thứ tự các đỉnh $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l$ sẽ cho ta ma trận dạng trên.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

18. *Đồ thị "lấn tổ" là một mô hình đồ thị biểu hiện sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái nào đó. Mỗi loài vật được biểu diễn bởi một đỉnh. Mỗi cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bởi hai đỉnh này là cạnh tranh với nhau (tức là chúng cùng chung nguồn thức ăn).*

Cho đồ thị "lấn tổ" trong hệ sinh thái. Trong đồ thị ta thấy: Gấu và Sóc cạnh tranh; Cú và Quạ cạnh tranh nhau; Gấu và Quạ không cạnh tranh nhau...



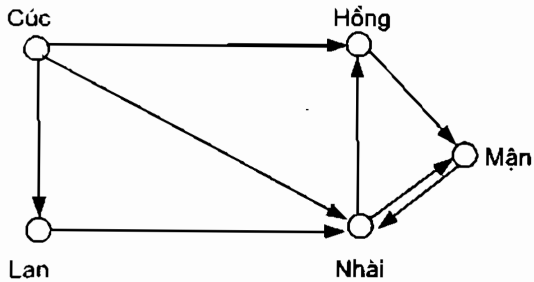
www.thuvien247.net

Hãy xác định các loài thú cạnh tranh với Chuột trù và các loài thú không cạnh tranh với Chuột trù.

19. Hãy xây dựng đồ thị "lấn tổ" cho sáu loài chim được đánh số tên gọi qua thứ tự 1, 2, 3, 4, 5 và 6, trong đó: loài 1 cạnh tranh với loài 2 và 3; loài 2 cạnh tranh với loài 4; loài 4 cạnh tranh với 5; loài 6 cạnh tranh với loài 1.

20. *Đồ thị ảnh hưởng: Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của một số người khác. Đồ thị có hướng có thể dùng để biểu thị bài toán này. Đồ thị có hướng như vậy được gọi là đồ thị ảnh hưởng.*

Ví dụ: Cho đồ thị có hướng như hình dưới



Cúc có ảnh hưởng tới Hồng, Lan và Nhài... Không ai có ảnh hưởng đến Cúc cả. Nhài và Mận có ảnh hưởng tới nhau.

Hãy xây dựng đồ thị ảnh hưởng của các thành viên lãnh đạo trong một trường đại học nếu biết: Hiệu trưởng có ảnh hưởng lên ba Hiệu phó và phòng Tổ chức cán bộ; Hiệu phó phụ trách đào tạo có ảnh hưởng lên phòng Đào tạo và phòng Đào tạo sau đại học; Hiệu phó phụ trách nghiên cứu khoa học có ảnh hưởng tới phòng Đào tạo sau đại học; Hiệu phó phụ trách cơ sở vật chất có ảnh hưởng tới phòng Hành chính quản trị; phòng Tài vụ không ảnh hưởng tới ai và cũng không có ai có thể ảnh hưởng tới phòng Tài vụ, còn phòng Tổ chức cán bộ có thể ảnh hưởng tới Hiệu trưởng.

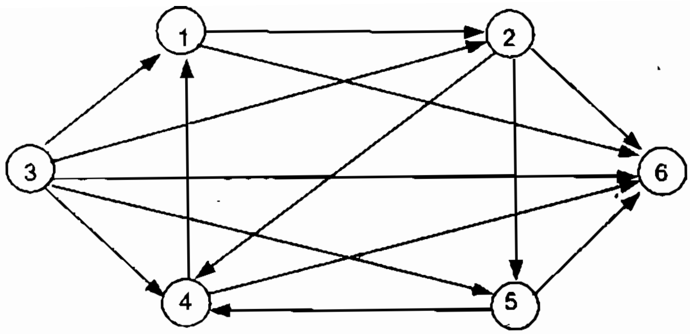
21. Hãy mô tả đồ thị dùng để biểu thị quan hệ giữa người với người trong một nhóm người nào đó được định nghĩa như sau:

Một người có thể thích, có thể không thích, hoặc trung lập với người khác.

22. *Mô hình đồ thị thi đấu vòng tròn: Một cuộc thi đấu thể thao, trong đó mỗi đội đấu với một đội khác đúng một lần được gọi là thi đấu vòng tròn. Cuộc thi đấu vòng tròn có thể biểu diễn bởi một đồ thị có hướng và mỗi đội tương ứng với một đỉnh. Một cạnh đi từ đỉnh a đến đỉnh b (theo hướng từ a sang b) nếu đội a thắng đội b. Trường hợp đội a hòa đội b thì giữa đỉnh a và đỉnh b không có cung nối với nhau.*

Ví dụ: Cho đồ thị như hình dưới mà mỗi đỉnh là một đội bóng:

www.thuvien247.net



Đội 3 thắng tất cả các đội. Đội 6 thua tất cả các đội. Đội 1 thắng đội 2 và 6, hoà với đội 5, nhưng thua các đội 3 và 4.

Trong trận đấu vòng tròn ở bảng A gồm các đội bóng Thể công (TC), Công an Hà Nội (CAHN), Sông lam Nghệ An (SLNA) và Công an Thành phố Hồ Chí Minh (CATPHCM) diễn ra theo kết quả sau:

TC thắng CAHN, hòa SLNA và thua CATPHCM,

CAHN thắng CATPHCM, nhưng thua TC và SLNA.

CATPHCM thắng SLNA và TC, ngưng thua CAHN.

Hãy dùng đồ thị có hướng để biểu diễn kết quả thi đấu của bốn đội trên.

23. *Các chương trình máy tính có thể thực hiện nhanh hơn bằng cách thi hành đồng thời các câu lệnh nào đó, nhưng với điều kiện là không được thực hiện một câu lệnh đòi hỏi kết quả của các câu lệnh khác chưa được thực hiện.*

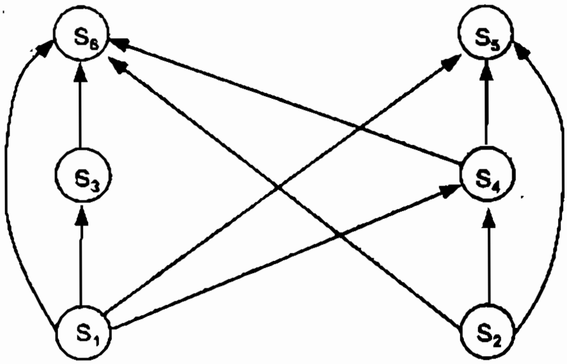
Sự phụ thuộc giữa các câu lệnh vào các câu lệnh trước có thể biểu diễn bằng đồ thị có hướng theo nguyên tắc sau: Mỗi câu lệnh đặt tương ứng với một đỉnh. Nếu có một cung đi từ đỉnh a sang đỉnh b thì câu lệnh ở đỉnh b không thể thực hiện được trước khi câu lệnh ở đỉnh a thực hiện. Đồ thị này người ta gọi là đồ thị có ưu tiên trước sau.

Ví dụ: Cho chương trình máy tính S và đồ thị có ưu tiên trước sau của S dưới dạng sau đây:

$$\textit{Chương trình S:}\quad \begin{cases} s_1 : a := 0 \\ s_2 : b := 1 \\ s_3 : c := a + 1 \\ s_4 : d := b + a \\ s_5 : e := d + 1 \\ s_6 := e := c + d \end{cases}$$

www.thuvien247.net

Đồ thị của S:



s_5 không thể thực hiện được nếu chưa thực hiện s_1, s_2 và s_4. Cũng như vậy s_6 chưa thể thực hiện được nếu chưa thực hiện s_1, s_2, s_3 và s_4.

Xây dựng đồ thị có ưu tiên trước sau cho chương trình S bao gồm các câu lệnh dạng sau:

s_1 : x := 0

s_2 : x := x + 1

s_3 : y := 2

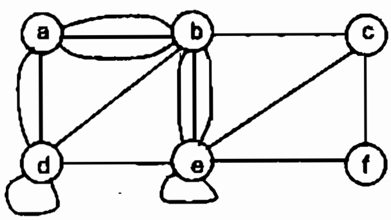
s_4 : z := y

s_5 : x := x + 2

s_6 : y := x + z

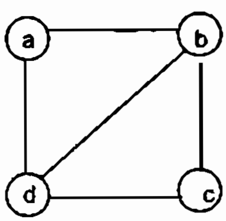
s_7 : z := 4.

24. Dùng ma trận kề để biểu diễn giả đồ thị sau

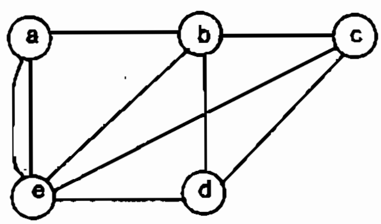


25. Cho các đồ thị sau:

$G_1 = <X_1, U_1>$:

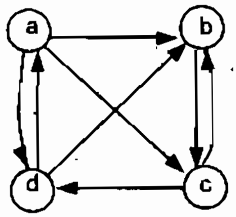


$G_2 = <X_2, U_2>$:

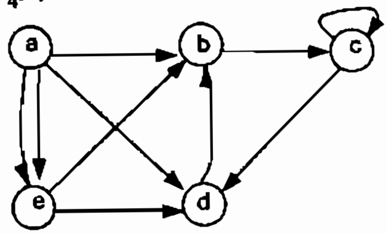


www.thuvien247.net

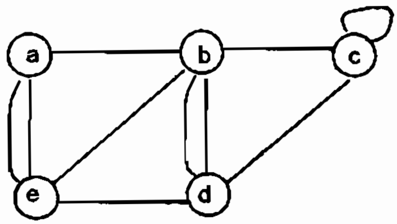
$G_3 = \langle X_3, U_3 \rangle$:



$G_4 = \langle X_4, U_4 \rangle$:



$G_5 = \langle X_5, U_5 \rangle$:



a) Gọi tên của từng đồ thị.
b) Biểu diễn các đồ thị trên bằng ma trận kề.
c) Biểu diễn các đồ thị không có cạnh bội bằng danh sách kề.

26. Cho các ma trận kề:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vẽ đồ thị được biểu diễn bởi các ma trận kề đó.

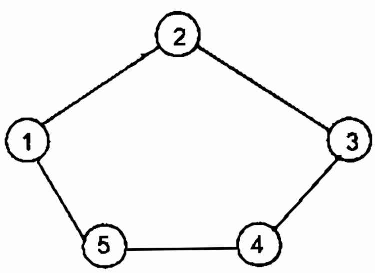
27. Có phải mọi ma trận vuông lôgic đối xứng, có các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0 là đồ thị đơn không?

28. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng (trên một cột) của một ma trận kề đối với đồ thị vô hướng? Có hướng?

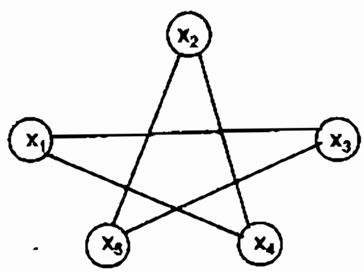
29. Tìm ma trận kề của các đồ thị K_n, C_n và $K_{m,n}$.

30. Cho các đồ thị dưới đây và chỉ ra những đồ thị nào là đẳng cấu với nhau?

G_1:

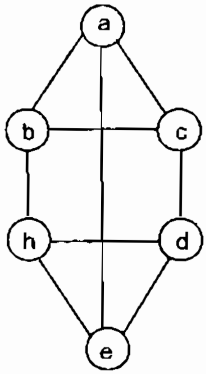


G_2:

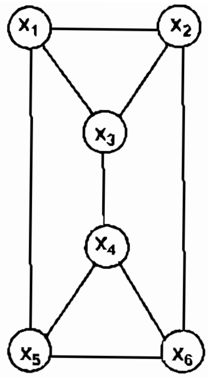


www.thuvien247.net

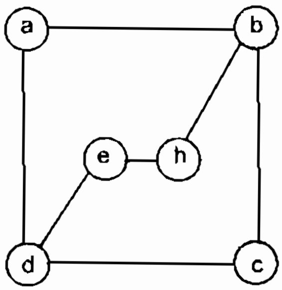
G_3:



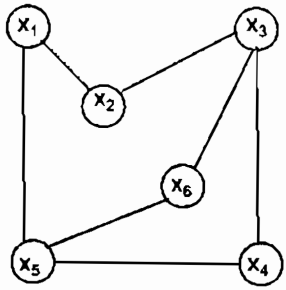
G_4:



G_5:



và G_6:



31. Chứng minh phép đẳng cấu của các đồ thị đơn là một quan hệ tương đương.

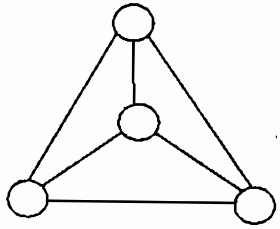
32. Các đồ thị đơn với các ma trận dưới đây có đẳng cấu không?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

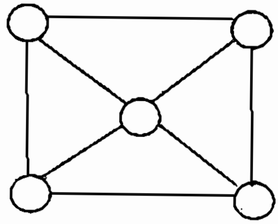
33. Giả sử G_1 và G_2 là các đồ thị đơn đẳng cấu. Chỉ ra rằng các đồ thị $\overline{G_1}$ và $\overline{G_2}$ cũng là đẳng cấu.

34. Hãy tìm các đồ thị bù của các đồ thị K_n, C_n, $K_{m,n}$.

35. Các đồ thị bánh xe W_n ($n \geq 3$):

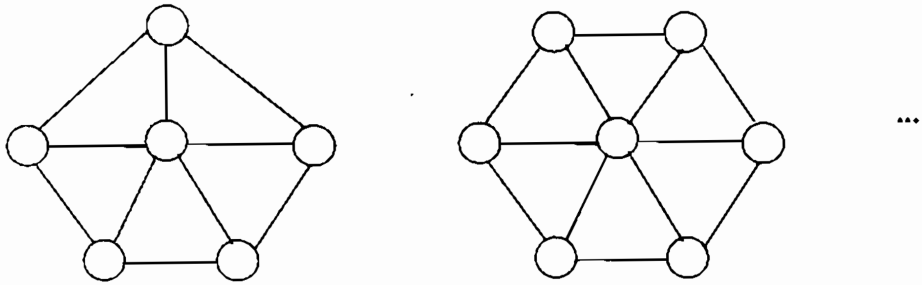


W_3



W_4

www.thuvien247.net



W_5 W_6

nhận được từ đồ thị chu trình C_n ($n \geq 3$) bằng cách bổ sung vào một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n.

a) Tìm ma trận kề của W_n.

b) Tìm đồ thị bù của đồ thị W_n.

c) Gọi tên đồ thị $W_n \cup \overline{W_n}$.

36. Hãy trình bày cách tìm ma trận kề của đồ thị bù $\overline{G}$ từ ma trận kề của ma trận G, ở đây G là đơn đồ thị.

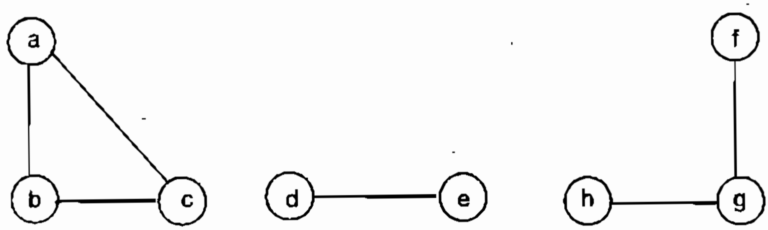
37. Đồ thị đầy đủ m – phân $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ có các đỉnh được phân thành m tập con, trong đó mỗi tập có $n_1, n_2, ..., n_m$ phần tử và các đỉnh được nối với nhau khi và chỉ khi chúng thuộc các tập con khác nhau.

a) Vẽ đồ thị sau: $K_{1,2,3}$; $K_{2,2,2}$; $K_{1,2,2,3}$.

b) Đồ thị $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

38. Cho G = <X, U> là đơn đồ thị. Đồ thị con sinh bởi tập con Y của X là đồ thị <Y, F>, trong đó F chứa các cạnh của U khi và chỉ khi cả hai đầu mút của nó đều thuộc Y.

Cho đồ thị G = <X, U> có ba thành phần liên thông:



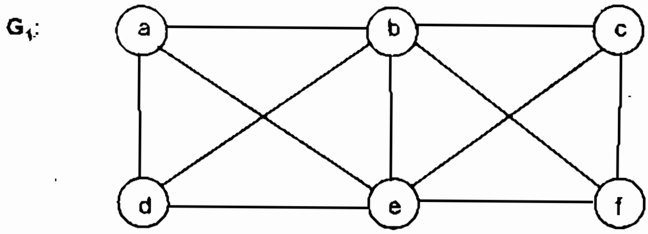
G_1 G_2 G_3

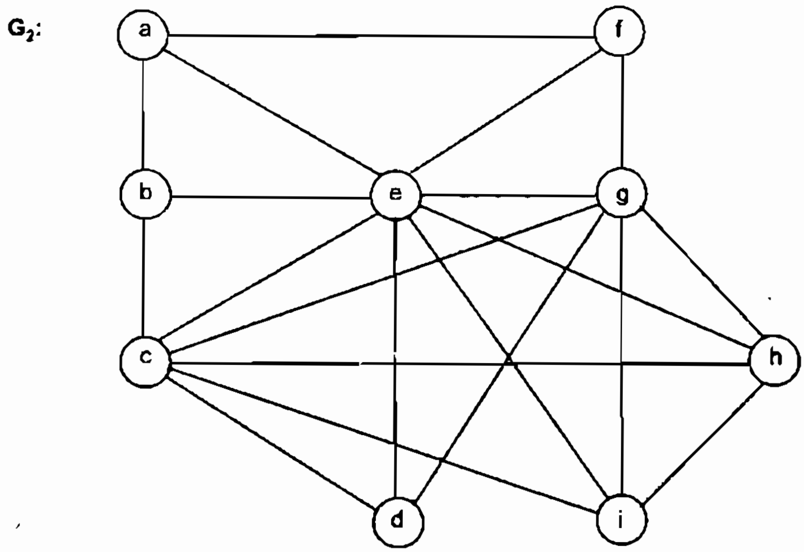
Hãy tìm đồ thị con sinh bởi tập $Y \subseteq X$ trong các trường hợp sau:

$Y = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, e, f\}$ và $Y = \{a, c, f, g, h\}$

39. Clic trong một đơn đồ thị vô hướng là một đồ thị con đầy đủ không nằm trong bất kỳ đồ thị con đầy đủ nào rộng hơn nó. Trong các đồ thị dưới đây, tìm tất cả các clic của nó:

www.thuvien247.net





40. Đồ thị đơn có thể dùng để xác định số nhỏ nhất các quân hậu có thể khống chế toàn bàn cờ. Giả sử bàn cờ cỡ $n \times n$ có n^2 ô vuông. Một đơn đồ thị có n^2 đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một ô vuông, hai đỉnh được nối với nhau nếu con hậu đứng ở ô được biểu diễn bằng một đỉnh có thể khống chế được ô biểu diễn bằng đỉnh kia.

Hãy xây dựng đơn đồ thị biểu diễn bàn cờ $n \times n$ với các cạnh biểu thị sự khống chế của quân hậu cho các trường hợp sau:

a) $n = 3$; b) $n = 4$.

41. Tập các đỉnh trong một đồ thị được gọi là độc lập nếu không có hai đỉnh nào được nối với nhau. Số độc lập của một đồ thị là số cực đại các đỉnh của tập độc lập ứng với đồ thị đó. Tìm số độc lập của các đồ thị cho dưới đây:

a) K_n; b) C_n; c) $K_{m,n}$;

42. Chứng minh rằng, trong một đồ thị với n ($n \geq 2$) đỉnh có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

43. Chỉ ra rằng với một số tự nhiên n ($n > 2$) luôn luôn tồn tại đồ thị n đỉnh mà ba đỉnh bất kỳ của đồ thị đều không cùng bậc.

www.thuvien247.net

44. Trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có ít nhất $kn + 1$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $(k - 1)n + 1$ luôn tồn tại đồ thị con $G' = \langle X', U' \rangle$ đầy đủ gồm $k + 1$ đỉnh.

45. Hai thôn A và B ở cạnh nhau. Mỗi gia đình ở thôn A quen với ít nhất một gia đình ở thôn B; đồng thời bất kỳ hai gia đình y_1, y_2 ở thôn A, hai gia đình bất kỳ z_1, z_2 ở thôn B cũng thỏa mãn điều kiện:

    Nếu gia đình y_1 quen với gia đình z_1, gia đình y_2 quen với gia đình z_2 thì trong hai cặp gia đình (y_1, z_2) và (y_2, z_1) có ít nhất một cặp gia đình quen nhau. Chứng minh rằng trong thôn B có ít nhất một gia đình quen với tất cả các gia đình thuộc thôn A.

www.thuvien247.net

Chương 6

MỘT SỐ THUẬT NGỮ QUAN TRỌNG VÀ CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN CỦA NÓ TRONG ĐỒ THỊ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bậc của đồ thị và một số tính chất của nó

a) Đối với đồ thị vô hướng

Cho đồ thị vô hướng G = <X, U> và $x \in X$ là một đỉnh nào đó của đồ thị. Bậc của đỉnh x ta ký hiệu là m(x) và được định nghĩa m(x):= số các cạnh liên quan tới đỉnh x. Bậc của đồ thị G = <X, U> ta ký hiệu là $m(G) := \sum_{x \in X} m(x)$.

b) Đối với đồ thị có hướng

Cho đồ thị có hướng G = <X, U> và $x \in X$ là một đỉnh nào đó của đồ thị.

Bậc vào của x ký hiệu $m^+(x)$:= số cung đi vào x.

Bậc ra của x ký hiệu $m^-(x)$:= số cung ra khỏi x.

Bậc của x ký hiệu $m(x) := m^+(x) + m^-(x)$.

Bậc của đồ thị G = <X, U> ký hiệu

$$m(G) := \sum_{x \in X} m^+(x) + \sum_{x \in X} m^-(x) = \sum_{x \in X}\left(m^+(x) + m^-(x)\right) = \sum_{x \in X} m(x).$$

Chú ý: – Bậc của đỉnh có 1 khuyên được tính là 2.

– Nếu bậc của đỉnh bằng 0 thì đỉnh đó là đỉnh cô lập.

– Nếu bậc của đỉnh là 1 thì đỉnh đó là đỉnh treo.

Định lý 1 *(Định lý bắt tay).* Cho G = <X, U> là một đồ thị bất kỳ (có hướng hoặc vô hướng). Khi đó ta luôn có bậc của G bằng hai lần số cạnh (số cung) của nó: $m(G) = 2|U|$.

Hệ quả 1: Đối với đồ thị có hướng G = <X, U> ta luôn có

$$\sum_{x \in X} m^+(x) = \sum_{x \in X} m^-(x) = |U|.$$

Định lý 2. Trong một đồ thị bất kỳ (có hướng hoặc vô hướng) G = <X, U>, số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị G = <X, U> luôn luôn là một số chẵn.

www.thuvien247.net

2. Đường và chu trình trong đồ thị và tính chất của nó

a) Định nghĩa đường và chu trình

Cho G = <X, U> là đồ thị bất kỳ với: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,

$U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$.

- Một đường đi trong đồ thị G = <X, U> là một dãy các ký hiệu đỉnh và cạnh (cung) xen kẽ nhau: $x_{i_1}u_{i_1}x_{i_2}u_{i_2}...x_{i_j}u_{i_j}x_{i_{j+1}}...x_{i_k}u_{i_k}x_{i_{k+1}}$ (*), ở đây ký hiệu x_{i_j} là ký hiệu đỉnh, còn u_{i_j} là ký hiệu cạnh, hai đỉnh kề nhau là x_{i_j} và $x_{i_{j+1}}$ (j = 1, 2, ..., k).
- Đường (*) là đường đi từ đỉnh x_{i_1} (đỉnh xuất phát) đến đỉnh $x_{i_{k+1}}$ (đỉnh kết thúc) và độ dài của đường đi từ x_{i_1} đến $x_{i_{k+1}}$ ta ký hiệu là $l(x_{i_1}, x_{i_{k+1}})$:= số các cạnh (các cung) có mặt trong đường đi đó.
- Đường (*) được gọi là đường đơn (sơ cấp) khi các cạnh (các đỉnh) trong đường xuất hiện đúng một lần.
- Chu trình trong đồ thị là một đường đi đóng, tức là đường đi có đỉnh xuất phát và đỉnh kết thúc trùng nhau.
- Chu trình được gọi là chu trình đơn nếu trong chu trình đó mỗi cạnh (mỗi cung) xuất hiện đúng một lần. Nói cách khác, chu trình đơn là một đường đơn đóng.
- Chu trình được gọi là chu trình sơ cấp nếu trong chu trình đó mỗi đỉnh xuất hiện đúng một lần (trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau).
- Độ dài của chu trình bằng số cạnh (số cung) có mặt trong chu trình đó.

b) Các tính chất chính liên quan tới đường và chu trình trong đồ thị

Cho G = <X, U> với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là đồ thị bất kỳ có hướng hoặc không có hướng. $M_G^{n.n} = [\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1n}}$ là ma trận kề của G.

***Định lý 3** (Đếm số các đường khác nhau có độ dài k giữa các đỉnh)*

Số các đường đi khác nhau độ dài k từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j trong đồ thị G bằng giá trị phần tử ở hàng i cột j là a_{ij} trong ma trận

$$M_G^K = \underbrace{M_G^{n.n}.M_G^{n.n}...M_G^{n.n}}_{\text{k lần}} = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1n}}.$$

Từ Định lý 3 ta có hai hệ quả dưới đây:

Hệ quả 1. Nếu phần tử ở hàng i, cột j trong ma trận M_G^K khác không, nhưng trước đó các phần tử hàng i cột j trong các ma trận $M_G^1, M_G^2, ..., M_G^{k-1}$ đều bằng không, thì từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j trong đồ thị G = <X, U> có đường đi ngắn nhất độ dài k.

www.thuvien247.net

Hệ quả 2. Đồ thị G = <X, U> có |X| = n đỉnh là liên thông khi và chỉ khi mọi phần tử không nằm trên đường chéo chính trong ma trận tổng

$$M_G^+ = M_G^1 + M_G^2 + \ldots + M_G^{n-1}$$

đều khác không (Khái niệm đồ thị liên thông xem ở mục 3 dưới đây).

Định lý 4. Nếu đồ thị vô hướng G = <X, U> có |X| = n ≥ 3 và với mọi x ∈ X bậc m(x) ≥ 2 thì trong đồ thị có tồn tại chu trình sơ cấp.

Định lý 5. Nếu trong đồ thị vô hướng G = <X, U> có |X| = n ≥ 4 và với mọi x ∈ X mà bậc m(x) ≥ 3 thì trong đồ thị tồn tại chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.

3. Đồ thị con, đồ thị bộ phận, đồ thị liên thông, thành phần liên thông và tính chất của nó

a) Đồ thị con, đồ thị bộ phận, đồ thị liên thông và thành phần liên thông

Đôi khi để giải quyết một bài toán ta chỉ cần một phần của đồ thị. Ví dụ, chúng ta chỉ quan tâm tới một phần của mạng máy tính lớn. Khi đó ta có thể lờ đi phần mạng máy tính mà các đường điện thoại không kết nối với các trung tâm máy tính thuộc phần mạng mà ta đang quan tâm.

Phần mạng ta quan tâm đó chính là đồ thị con của đồ thị tương ứng với mạng máy tính lớn.

- *Đồ thị con của đồ thị G = <X, U>*: Nếu trong G bỏ đi một số đỉnh và bỏ đi các cạnh liên quan tới các đỉnh đó ta được đồ thị G' = <X', U'> gọi là đồ thị con của đồ thị G = <X, U>, ở đây X' ⊆ X và U' ⊆ U.
- *Đồ thị bộ phận của đồ thị G = <X, U>*: Trong G = <X, U> nếu ta bỏ đi một số cạnh và giữ nguyên các đỉnh thì đồ thị nhận được G' = <X, U'> (U' ⊆ U) gọi là đồ thị bộ phận của đồ thị G.
- *Đồ thị liên thông:* Cho G = <X, U> là một đồ thị vô hướng bất kỳ và x, y ∈ X là hai đỉnh nào đó. Ta nói cặp đỉnh khác nhau x, y là liên thông khi và chỉ khi giữa x và y có một đường đi trong đồ thị G. Đồ thị G = <X, U> là đồ thị liên thông nếu mọi cặp đỉnh khác nhau của nó đều liên thông.

  Cho G = <X, U> là đồ thị có hướng. Đồ thị có hướng G = <X, U> được gọi là liên thông mạnh nếu với mọi cặp đỉnh khác nhau x, y ∈ X bao giờ cũng có một đường từ x đến y và từ y đến x. Nếu trong đồ thị có hướng mà ta không quan tâm tới hướng đi của các cung thì đồ thị đó gọi là đồ thị nền của đồ thị có hướng. Đồ thị nền là đồ thị vô hướng. Đồ thị có hướng G = <X, U> là đồ thị liên thông yếu nếu đồ thị nền của nó là đồ thị liên thông.

www.thuvien247.net

- *Thành phần liên thông:* Cho n đồ thị liên thông $G_i = <X_i, U_i>$ $(i = 1, 2, ..., n)$ sao cho $X_i \cap X_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Đặt $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ và $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Khi đó ta nói đồ thị $G = <X, U>$ có n thành phần liên thông là $G_1, G_2, ..., G_n$.

b) Các tính chất liên quan tới tính liên thông của đồ thị

Định lý 6. Đơn đồ thị liên thông $G = <X, U>$ là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi nó không chứa chu trình có độ dài lẻ.

Định lý 7. Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị đơn liên thông luôn luôn có đường đi đơn.

Định lý 8. Nếu đồ thị đơn có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh bậc lẻ này phải liên thông.

Định lý 9. Nếu $G = <X, U>$ với $|X| = n \geq 2$ là đồ thị đơn và tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn n thì đồ thị $G = <X, U>$ là đồ thị liên thông.

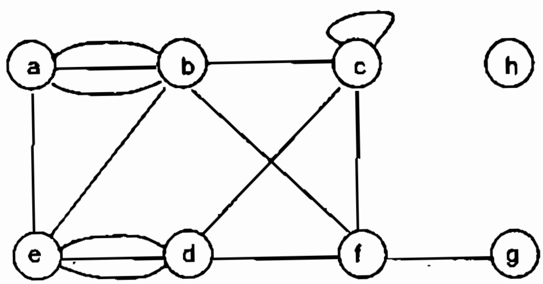
Định lý 10. Điều kiện cần và đủ để đồ thị $G = <X, U>$ liên thông là đồ thị $G = <X, U>$ có đúng một thành phần liên thông.

Định lý 11. Giả sử $G = <X, U>$ có $|X| = n$ đỉnh, $|U| = m$ cạnh và k thành phần liên thông. Khi đó ta có bất đẳng thức: $m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$.

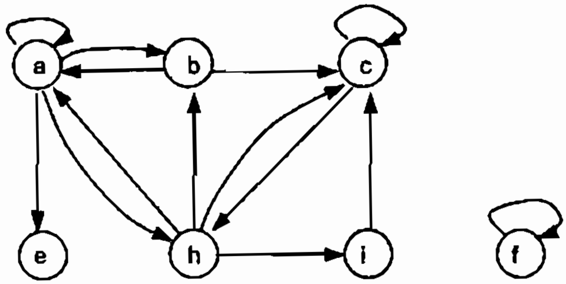
B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho đồ thị vô hướng G_1 và đồ thị có hướng G_2 dưới đây:

G_1 =



G_2 =



www.thuvien247.net

Tìm bậc của đồ thị G_1, G_2 và kiểm tra lại tính đúng đắn của Định lý 1 và 2. Chỉ ra đỉnh cô lập và đỉnh treo của các đồ thị trên, đồng thời kiểm tra bậc vào có bằng bậc ra trong G_2 không.

Giải

- $m(G_1) = m(a) + m(b) + m(c) + m(e) + m(d) + m(f) + m(g) + m(h)$
$= 4 + 6 + 5 + 5 + 5 + 4 + 1 + 0 = 30.$
- $m(G_2) = m(a) + m(b) + m(c) + m(e) + m(h) + m(i) + m(f) = 28.$

Vì $m(a) = m^+(a) + m^-(a) = 3 + 4 = 7;$

$m(b) = m^+(b) + m^-(b) = 2 + 2 = 4;$

$m(c) = m^+(x) + m^-(c) = 4 + 2 = 6;$

$m(e) = m^+(e) + m^-(e) = 1+ 0 = 1;$

$m(h) = m^+(h) + m^-(h) = 2 + 4 = 6;$

$m(i) = m^+(i) +m^-(i) = 1 + 1 = 2;$

$m(f) = m^+(f) + m^-(f) = 1 + 1 = 2.$

Theo Định lý 1, 2 thì G_1 có 30 : 2 = 15 cạnh và có 4 đỉnh bậc lẻ, còn G_2 có 28 : 2 = 14 cung và 2 đỉnh bậc lẻ.

Trong G_1 có h là đỉnh cô lập, còn g là đỉnh treo. Trong G_2 có f là đỉnh cô lập, còn e là đỉnh treo.

$$m^+(G_2) = m^+(a) + m^+(b) + m^+(c) + m^+(e) + m^+(h) + m^+(i) + m^+(f)$$
$$= 3 + 2 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 = 14.$$
$$m^-(G_2) = m^-(a) + m^-(b) + m^-(c) + m^-(e) + m^-(h) + m^-(i) + m^-(f)$$
$$= 4 + 2 + 2 + 0 + 4 + 1 + 1 = 14.$$

Vậy $m^+(G_2) = m^-(G_2)$ (Hệ quả của Định lý 1).

2. a) Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 6?

b) Có thể tồn tại đồ thị đơn 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 5 không?

c) Chỉ ra đồ thị có 5 đỉnh với các bậc 3, 3, 3, 3, 2 là tồn tại.

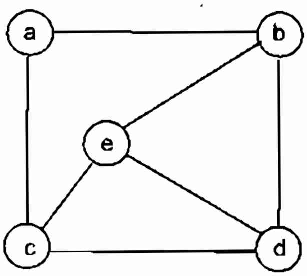
Giải

a) Bậc của đồ thị G = <X, U> là 10.6 = 60. Mà m(G) = 2|U| nên 60 = 2|U|, hay |U| = 30 cạnh.

b) Nếu tồn tại đồ thị đơn 15 đỉnh, với bậc mỗi đỉnh là 5 thì bậc của đồ thị là 15.5 = 75. Vô lý vì theo Định lý 1 thì bậc của đồ thị bao giờ cũng là số chẵn. Vậy không tồn tại đồ thị như vậy.

www.thuvien247.net

c) Giả sử đồ thị G = <X, U> có X = {a, b, c, d, e}, với m(a) = m(b) = m(c) = m(d) = 3, còn m(e) = 2. Khi đó m(G) = 14 = 2.7. Vậy |U| = 7. Đồ thị là tồn tại. Ví dụ G có dạng

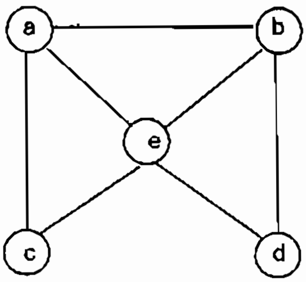


3. a) Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc là 4, 3, 3, 2, 2. Tìm số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

b) Tìm số đỉnh của một đồ thị chính quy bậc 4 có 10 cạnh. Vẽ đồ thị đó.

Giải

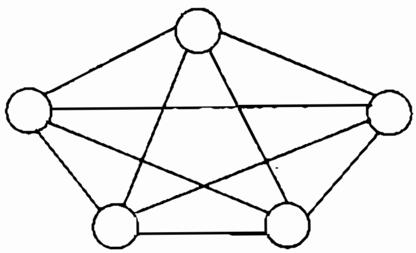
a) Từ công thức m(G) = 2|U| ta có m(G) = 14 và |U| = 7. G có dạng:



b) G = <X, U>, theo giả thiết ta có

m(G) = 4.|X| = 2|U| = 2.10 = 20. Vậy |X| = 5 đỉnh.

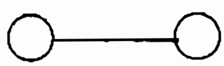
Đồ thị G = <X, U> có dạng:



4. Tìm số cạnh, số đỉnh, bậc của đồ thị K_n, C_n, W_n, $K_{m,n}$ và với m, n như thế nào thì 4 đồ thị trên là chính quy?

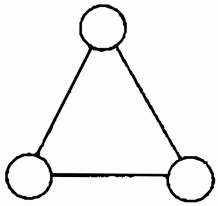
Giải

- K_n là đồ thị đầy đủ có n đỉnh:

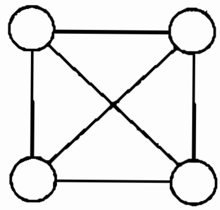
K_1 :  K_2: 

www.thuvien247.net

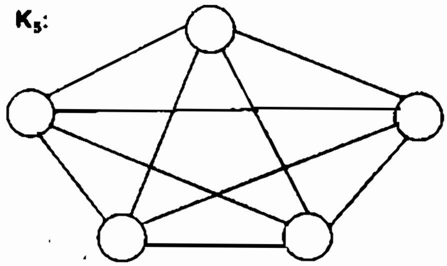
K_3:



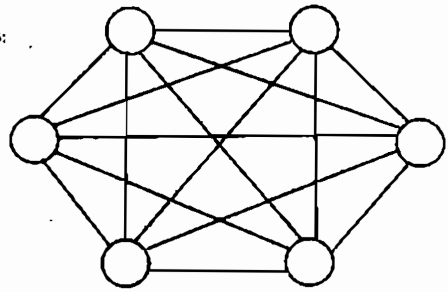
K_4:



K_5:



K_6:

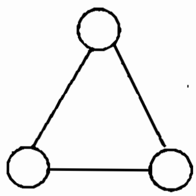


...

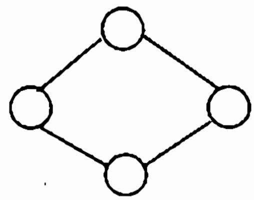
K_n có n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc n − 1. Vậy $m(K_n) = n(n-1) = 2|U|$. K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh. Với $n \geq 2$ thì K_n là đồ thị (n − 1) chính quy.

- C_n theo định nghĩa có dạng:

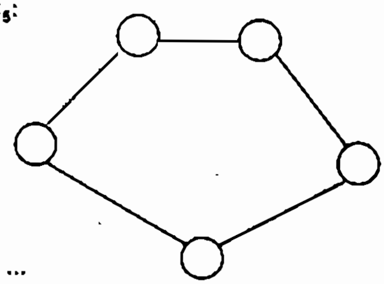
C_3:



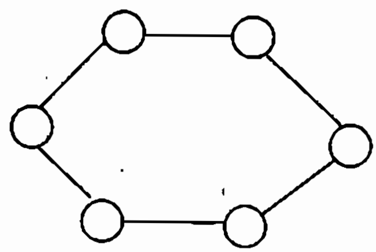
C_4:



C_5:



C_6:



...

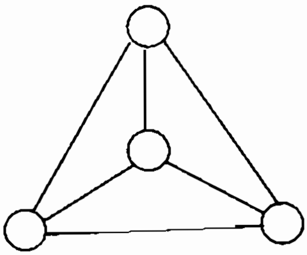
C_n ($n \geq 3$) là đồ thị chu trình có n đỉnh, n cạnh, có bậc mỗi đỉnh đều là 2 và bậc $m(C_n) = 2n$.

C_n ($n \geq 3$) là đồ thị 2 – chính quy.

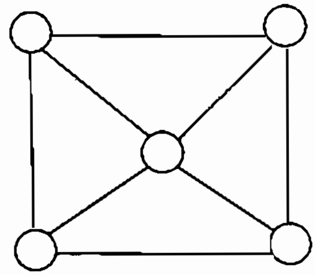
- W_n theo định nghĩa có dạng:

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

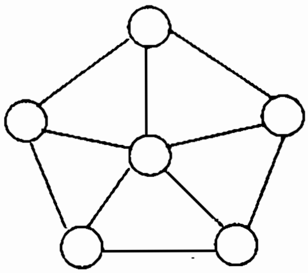
W_3:



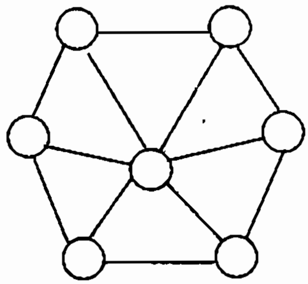
W_4:



W_5:



W_6:

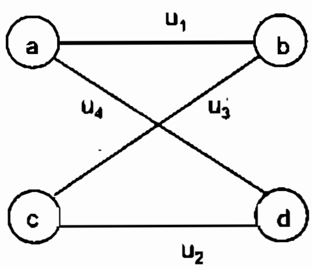


...

W_n ($n \geq 3$) là đồ thị nhận được từ đồ thị chu trình C_n bằng cách thêm vào tâm của C_n một đỉnh mới có nối với tất cả các đỉnh của C_n. W_n có $n + 1$ đỉnh, $2n$ cạnh, có n đỉnh bậc ba, 1 đỉnh bậc n và có $m(W_n) = 3n + n = 4n$. W_3 là đồ thị 3– chính quy. Mọi $n > 3$ đều không là đồ thị chính quy.

- $K_{m,n}$ là đồ thị phân đôi đầy đủ. Nó là đồ thị k– chính quy nếu $m = n = k$. Số đỉnh của $K_{m,n}$ là $m + n$, số cạnh là m.n. Bậc $m(K_{m,n}) = 2mn$.

5. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



a) Xây dựng ma trận kề của đồ thị trên.

b) Kiểm tra tính đúng đắn của các Định lý 4, 6, 7, 9, 10, 11 đối với đồ thị trên.

c) Tìm số các đường đi độ dài 1, 2, 3 và 4 từ đỉnh a đến đỉnh c trong đồ thị trên theo Định lý 3.

www.thuvien247.net

Giải. a)

$$M_G^{4.4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

- Đồ thị có đầy đủ các giả thiết trong Định lý 4, nên có chu trình sơ cấp là $au_1bu_3cu_2du_4a$.
- Đối với Định lý 6 cũng đúng. Nó là đơn đồ thị liên thông không có chu trình độ dài lẻ nên đồ thị trên là phân đôi.
- Đối với Định lý 7, đồ thị trên cũng thỏa mãn các điều kiện nên bất kỳ cặp đỉnh nào cũng có đường đi đơn.
- Đối với Định lý 9, đồ thị trên cũng thỏa mãn Định lý 9.
- Đối với Định lý 10, đồ thị trên là liên thông vì nó chỉ có một thành phần liên thông.
- Đối với Định lý 11, đồ thị G = <X, U> có

  $|X| = 4$, $|U| = 4$ và một thành phần liên thông. Rõ ràng

$$|U| = 4 \le \frac{1}{2}(|X| - 1)\,|X| = \frac{1}{2}.3.4 = 6.$$

c) • Số đường đi độ dài 1 từ a đến c chính là phần tử hàng 1 cột 3 trong ma trận trên. Vì phần tử đó bằng 0 nên không có đường độ dài 1 đi từ a đến c.

- Số đường đi từ a đến c độ dài 2 chính là phần tử ở hàng 1 cột 3 của ma trận

$$M_G^{4.4}.M_G^{4.4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array},$$

  mà phần tử này là 2 nên đường đi từ a đến c độ dài 2 là hai đường : au_4du_2c và au_1bu_3c.

- Số đường đi từ a đến c độ dài 3 chính là phần tử hàng 1, cột 3 trong ma trận

www.thuvien247.net

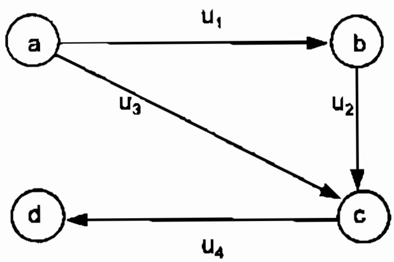
$$M_G^{4.4}.M_G^{4.4}.M_G^{4.4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

mà phần tử này là 0 nên không có đường đi độ dài 3 từ a đến c trong đồ thị.

- Vì $M_G^{4.4}.M_G^{4.4}.M_G^{4.4}.M_G^{4.4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$

  nên số đường đi độ dài 4 từ a đến c là 8 đường: $au_1bu_1au_1bu_3c$, $au_4du_4au_4du_2c$, $au_1bu_3cu_3bu_3c$, $au_4du_2cu_2du_2c$, $au_1bu_3cu_2du_2c$...

6. Cho đồ thị có hướng G = <X, U> dưới dạng



a) Tìm ma trận kề của G.

b) Tìm số đường đi độ dài 3 từ a đến d.

c) Chứng minh đồ thị đơn có hướng G không có chu trình bằng cách chỉ ra có một số tự nhiên k để với mọi m ≥ k ta luôn có $M_G^K = [0]$.

Giải

a) $$M_G^{4.4} = M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

www.thuvien247.net

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \text{b)} \qquad M_G^3 = M.M.M = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Có một đường đi từ a đến d độ dài 3 là $au_1bu_2cu_4d$.

c)

$$M_G^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0].$$

Vậy k = 4 thì với mọi $m \geq 4$ ta luôn có $M_G^m = [0]$. Vậy G không có chu trình.

7. Chứng minh rằng, nếu đồ thị đơn G = <X, U> mà $\forall x \in X$ ($|X| \geq 2$) ta luôn có $m(x) \geq \frac{|X|}{2}$ thì G = <X, U> là liên thông.

Giải. Lấy x, y $\in$ X khác nhau tùy ý, ta luôn có $m(x) + m(y) \geq |X| = n$. Áp dụng Định lý 9 ta có hai đỉnh x, y là liên thông. Do x, y là hai đỉnh tùy ý liên thông, nên đồ thị G = <X, U> liên thông.

8. Một thôn có ít nhất 4 gia đình. Mỗi gia đình thân với ít nhất 3 gia đình khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn gia đình làm nhà quanh một cái hồ để mỗi gia đình sống giữa hai gia đình mà họ thân.

Giải. Lấy các điểm trên mặt phẳng tương ứng với các gia đình trong thôn. Hai điểm x, y được nối bởi một cạnh khi và chỉ khi hai điểm x, y tương ứng với hai gia đình thân nhau. Đồ thị nhận được G = <X, U> mô tả các quan hệ thân nhau của các gia đình trong thôn.

Vì mỗi gia đình thân với ít nhất là 3 gia đình khác, nên $\forall x \in X$ ta luôn có $m(x) \geq 3$. Theo cách xây dựng thì G = <X, U> là đồ thị đơn, đồng thời bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 3, với $|X| = n \geq 4$ nên trong G = <X, U> có tồn tại chu trình sơ cấp (độ dài chẵn) theo Định lý 5. Dựa vào đồ thị G = <X, U> ta có thể sắp xếp một số chẵn các gia đình làm nhà xung quanh một cái hồ để mỗi gia đình được sống giữa hai gia đình thân với họ.

9. Trong một cuộc họp, có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu trong hai đại biểu này có đúng một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn có thể sắp xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi đại biểu ngồi giữa hai người mà họ quen nhau.

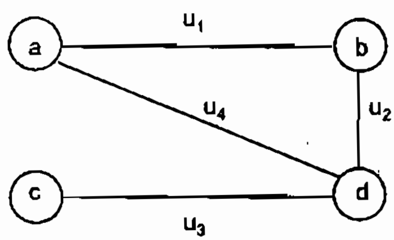
www.thuvien247.net

Giải. Lấy các điểm trên mặt phẳng tương ứng với các đại biểu đến họp (mỗi đại biểu tương ứng một đỉnh trong đồ thị). Hai đỉnh x, y được nối với nhau bởi một cạnh khi và chỉ khi hai đại biểu tương ứng với đỉnh x, y là quen nhau. Đồ thị G = <X, U> được thành lập như trên sẽ mô tả toàn bộ mối quen biết trong các đại biểu dự họp. Rõ ràng G = <X, U> là đồ thị đơn có $|X| \geq 2$.

Với đồ thị trên thì hai đại biểu không quen nhau sẽ tương ứng với 2 đỉnh không kề nhau. Vì mỗi đại biểu này lại có một số lẻ người quen đến họp nên trong đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ và 2 đỉnh này không kề nhau. Nhưng theo Định lý 8 thì hai đỉnh a, b (tương ứng với hai đại biểu không quen nhau) là 2 đỉnh liên thông. Hay giữa a, b có một đường đi và ta có thể sắp xếp các đại biểu ngồi giữa 2 đại biểu không quen nhau (tương ứng với 2 điểm a, b) để các đại biểu này ngồi giữa hai đại biểu quen biết.

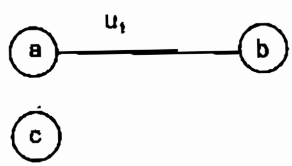
10. Trong đồ thị G = <X, U> nếu bỏ đỉnh $x \in X$ cùng với các cạnh liên quan tới đỉnh x mà số thành phần liên thông trong G tăng lên thì ta nói đỉnh x là đỉnh rẽ nhánh. Còn trong G nếu bỏ cạnh $u \in U$ mà số thành phần liên thông của G tăng lên thì cạnh u được gọi là cạnh cầu.

Đồ thị G có dạng



Tìm cạnh cầu và đỉnh rẽ nhánh trong G.

Giải. Cạnh cầu của G là $u_3 = (c, d)$ vì nếu bỏ đi u_3 G có 2 thành phần liên thông. Đỉnh rẽ nhánh là đỉnh d, vì nếu bỏ đỉnh d và các cạnh liên quan đến d ta được đồ thị có hai thành phần liên thông là :

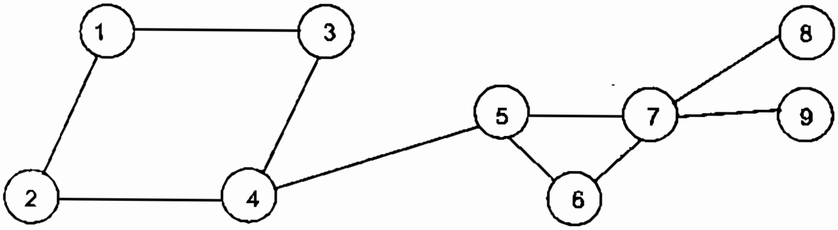


11. Đường truyền thông trong mạng máy tính sẽ được cung cấp đường dự phòng nếu có sự cố làm cho không thể gửi một thông báo nào đi được.

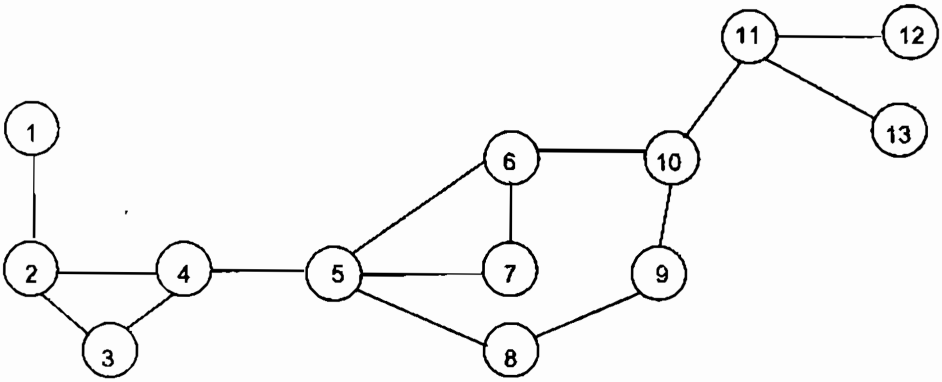
a) Với các mạng H_1 và H_2 dưới đây, hãy xác định các đường đi cần phải được dự phòng.

b) Trong mạng H_1 và H_2, đỉnh nào là đỉnh rẽ nhánh.

www.thuvien247.net



H_1



H_2

Giải. Trong H_2 đường (1, 2), (4, 5), (10, 11), (11,12), (11, 13) là các đường dự phòng (Vì chúng là các cạnh cầu định nghĩa trong bài tập 10).

b) Trong hình 1 đỉnh rẽ nhánh là 4, 5 và 7. Trong H_2 đỉnh rẽ nhánh là 2, 4, 5, 10 và 11.

12. Cho đồ thị đơn $G = \langle X, U \rangle$ với $|X| = n$, $|U| = m$. Chỉ ra rằng nếu $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ thì $G = \langle X, U \rangle$ là đồ thị liên thông.

Giải. Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ không liên thông. Khi đó số thành phần liên thông của G là $k > 1$ (theo Định lý 10). Theo Định lý 11 và theo giả thiết ta có:

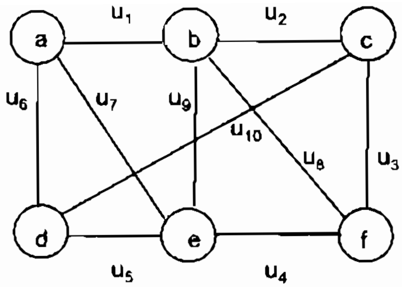
$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) < m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Bất đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi $k = 1$, hay $G = \langle X, U \rangle$ là liên thông.

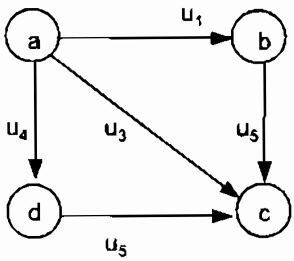
13. a) Hãy giải thích cách dùng Định lý 3 (đếm đường đi giữa các đỉnh) để tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y trong đồ thị $G = \langle X, U \rangle$.

b) Dùng Định lý 3 tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa đỉnh a và đỉnh f trong đồ thị sau:

www.thuvien247.net



c) Dùng Định lý 3 tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh c và từ b đến d trong đồ thị có hướng sau:



và đồng thời cũng chỉ ra đồ thị trên không có chu trình.

Giải

a) Giả sử G = <X, U> có $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một đồ thị bất kỳ có hướng hoặc không có hướng. Ma trận kề của G là ma trận vuông cấp n, ta ký hiệu là $M_G^{n.n} := M = \left[\sigma_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$. Lập ma trận tích $M^k = M.M ... M$ (k lần) $= [m_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, ở đây m_{ij} là phần tử ở hàng i cột j của M^k và m_{ij} = số đường đi độ dài k từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j trong đồ thị G = <X, U>. Đây là các đường đi ngắn nhất từ x_i đến x_j với độ dài k khi và chỉ khi phần tử $m_{ij} \neq 0$ trong ma trận M^k, nhưng phần tử ở hàng i cột j trong các ma trận M^h (với h = 1, 2, ..., k − 1) đều bằng 0 (Hệ quả 1).

b) Với G đã cho thì $M_G^{6.6} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = M$

Từ M ta khẳng định không có đường đi độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh f trong đồ thị G (vì phần tử hàng 1, cột 6 là 0). Ta tính tiếp $M^2 = M.M$:

www.thuvien247.net

$$M^2 = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ b & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ c & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ d & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ e & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ f & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Phần tử hàng 1, cột 6 trong M^2 là 2. Chứng tỏ có 2 đường đi ngắn nhất độ dài 2 từ đỉnh a đến đỉnh f là au_1bu_8f và au_7eu_4f và cũng là đường ngắn nhất đi từ a đến f.

c) Ma trận của G có dạng:

$$M_G^{4.4} = M = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Phần tử hàng 1, cột 3 trong ma trận G có giá trị 1 nên có 1 đường đi độ dài 1 từ đỉnh a đến đỉnh c là đường au_3c. Đây cũng là đường ngắn nhất đi từ a đến c.

Vì phần tử hàng 2, cột 4 có giá trị 0 nên từ đỉnh b đến đỉnh d không có đường độ dài 1.

Xét $$M^2 = M.M = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Trong M^2 thì phần tử hàng 2, cột 4 vẫn bằng 0 nên từ b đến d không có đường độ dài 2. Ta xét tiếp M^3:

$$M^3 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

www.thuvien247.net

Phần tử hàng 2, cột 4 vẫn bằng 0.

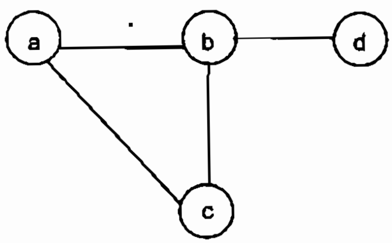
Xét tiếp
$$M^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = [0]$$

Dừng lại và khẳng định từ đỉnh b đến đỉnh f không có đường đi nào, đồng thời cũng tồn tại một số e = 4 để với mọi $m \geq e = 4$ ta có $M^m = [0]$ nên trong đồ thị G không có chu trình.

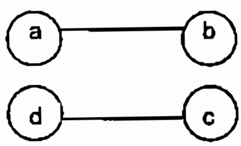
14. a) Hãy giải thích định ký 3 (đếm đường đi giữa các đỉnh) dùng để kiểm tra một đồ thị có liên thông hay không.

b) Áp dụng Định lý 3 để kiểm tra hai đồ thị dưới đây có liên thông hay không:

G_1 có dạng:



G_2 có dạng:



Giải

a) Giả sử G = <X, U> với X = $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một đồ thị có hướng hoặc không có hướng nào đó. $M_G^{n.n} = [\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ là ma trận kề của G và ký hiệu là M. Lập ma trận tích (k lần M) $M^k = \underbrace{M.M...M}_{k \text{ lần}} = [m_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ $(1 \leq k \leq n-1)$.

Khi đó đồ thị G = <X, U> là đồ thị liên thông khi và chỉ khi mọi phần tử (không nằm trên đường chéo chính của ma trận tổng $M^+ := M + M^2 + ... + M^{n-1}$ đều là các phần tử dương khác 0 (Hệ quả 2).

b) Đối với G_1 ta có:

www.thuvien247.net

$$M_{G_1}^{4.4} := M_1 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array};$$

$$M_1^2 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 2 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 3 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 2 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}; \quad M_1^3 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 2 & 4 & 3 & 1 \\ b & 4 & 2 & 4 & 3 \\ c & 3 & 4 & 2 & 1 \\ d & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array};$$

$$M_1^+ = M_1 + M_1^2 + M_1^3 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 3 & 5 & 3 & 1 \\ b & 5 & 3 & 4 & 3 \\ c & 3 & 4 & 3 & 2 \\ d & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

Vậy G_1 liên thông.

Đối với G_2 ta có:

$$M_{G_2}^{4.4} := M_2 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array};$$

$$M_2^2 = M_2.M_2 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array};$$

$$M_2^3 = M_2^2.M_2 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array};$$

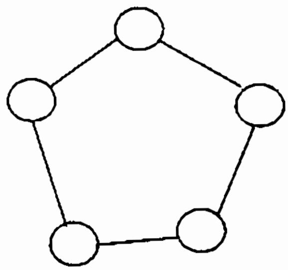
www.thuvien247.net

$$M_2^+ = M_2 + M_2^2 + M_2^3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

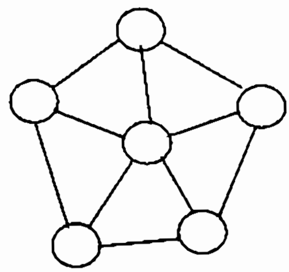
Vậy G_2 không liên thông.

15. Cho đồ thị chu trình C_n và đồ thị bánh xe W_n với n = 5.

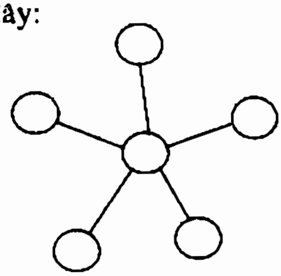
C_5:



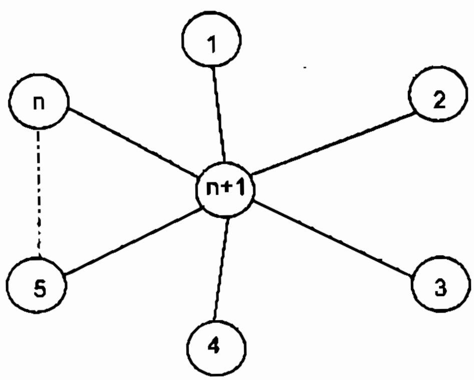
và W_5:



Trong đồ thị W_5 nếu ta bỏ đi các cạnh của C_5 ta được đồ thị cấu trúc hình sao 5 cạnh, 6 đỉnh dưới đây:



Một cách tổng quát, trong đồ thị W_n $(n \geq 3)$ nếu ta bỏ đi các cạnh của đồ thị C_n $(n \geq 3)$ thì ra được đồ thị cấu trúc hình sao có n cạnh và n + 1 đỉnh dưới đây:



ta ký hiệu đồ thị cấu trúc hình sao n đỉnh là S_n $(n \geq 3)$.

www.thuvien247.net

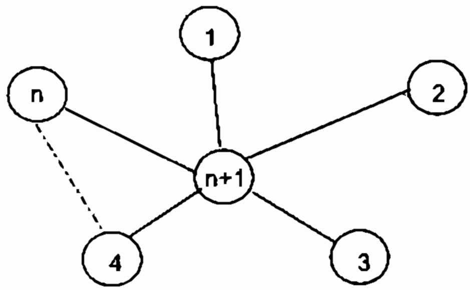
a) Hãy trình bày ứng dụng của các đồ thị S_n, C_n và W_n (với n = 5) trong việc xây dựng các mạng cục bộ.

b) Chỉ ra đồ thị S_n ($n \geq 3$) là đồ thị phân đôi đầy đủ.

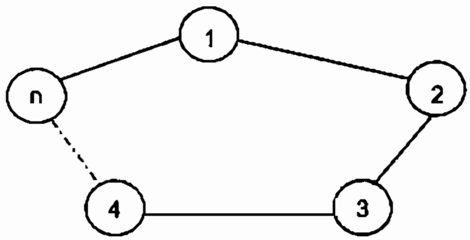
Giải

a) Các máy tính đặt trong một tòa nhà gồm các máy tính loại vừa, các máy tính cá nhân cùng với các thiết bị ngoại vi như máy in, máy vẽ, ... nối với nhau bằng một mạng cục bộ (mạng LAN).

- Mô hình mạng cục bộ như trên có thể dùng cấu trúc hình sao S_n, trong đó tất cả các thiết bị được nối với thiết bị điều khiển trung tâm ở đỉnh n + 1:

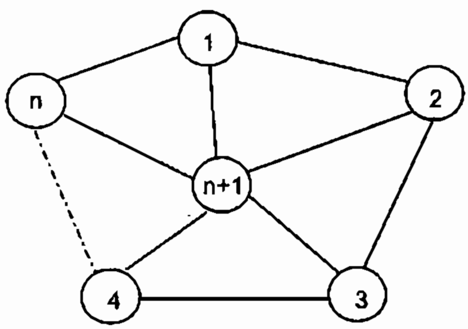


- Mạng cục bộ cũng có thể có cấu trúc đồ thị chu trình, trong đó mỗi thiết bị nối với đúng 2 thiết bị khác. Mạng cục bộ có thể dùng đồ thị chu trình C_n.



Các thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác được truyền đi theo vòng tròn cho tới khi đến nơi nhận.

- Mô hình mạng cục bộ cũng có thể có cấu trúc đồ thị bánh xe W_n:



www.thuvien247.net

Các thông báo có thể truyền vòng quanh theo vòng tròn, cũng có thể truyền qua thiết bị trung tâm n + 1.

b) Đồ thị S_n ($n \geq 3$) là đồ thị phân đôi đầy đủ vì nó có $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ và $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Ở đây $X = X_1 \cup X_2$, ($X_1 \cap X_2 = \varnothing$) với $X_1 = \{x_{n+1}\}$, $X_2 = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và với mỗi $u_i \in U$ ($i = \overline{1, n}$) đều có chung một đỉnh là x_{n+1}, còn đỉnh kia là x_i ($i = \overline{1, n}$). Hoặc có thể suy từ Định lý 6, vì S_n là đơn đồ thị liên thông không chứa chu trình độ dài lẻ.

16. Giả sử G = <X, U> có |X| = n đỉnh. Nếu có đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b thì cũng có đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b với độ dài $\leq n - 1$.

Giải. Giả sử có đường đi từ a đến b. Ta chọn đường có độ dài bé nhất đi từ a đến b là $a = x_1x_2 ... x_k = b$ có độ dài $k - 1$. Giả sử ngược lại $k - 1 > n - 1$ thì trong đường trên sẽ có 2 đỉnh $x_i = x_j$ ($i < j$) (do $k > n$). Khi đó ta có $a = x_1x_2...x_ix_{j+1} ... x_k = b$ cũng là đường đi từ a đến b có độ dài bé hơn đường đi đã chọn ở trên. Mâu thuẫn này nói lên bài toán trên là đúng, tức là có tồn tại đường đi từ a đến b có độ dài $\leq n - 1$.

17. Chứng minh khẳng định sau: Giả sử G có n đỉnh, khi đó tồn tại đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b khi và chỉ khi tồn tại đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b độ dài $\leq n - 1$.

Giải. Suy từ bài tập 16 ở trên. Còn điều ngược lại là hiển nhiên.

18. Cho đồ thị G = <X, U> với |X| = n đỉnh và a, b $\in$ X. Có hay không đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G.

Giải. Theo Định lý 3 và bài tập 17 ở trên thì chỉ cần lập ma trận tổng:
$T = M^1 + M^2 + ... + M^{n-1} = [\sigma_{ij}]$.

Khi đó tồn tại đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j khi và chỉ khi phần tử $\sigma_{ij} > 0$.

19. Một lớp học có 40 sinh viên về nghỉ hè. Biết mỗi sinh viên có ít nhất 20 địa chỉ của 20 sinh viên khác, và nếu sinh viên này có địa chỉ của sinh viên kia thì sinh viên kia cũng có địa chỉ của sinh viên này. Chứng minh bất kỳ hai sinh viên nào cũng có thể nhắn tin cho nhau.

Giải. Lập đồ thị G = <X, U> tương ứng với bài toán trên như sau:

– Mỗi sinh viên tương ứng với một đỉnh, X có 40 đỉnh.

– Hai đỉnh x, y $\in$ X được nối với nhau bởi một cạnh nếu sinh viên ứng với đỉnh x và sinh viên ứng với đỉnh y có biết địa chỉ của nhau (hay hai sinh viên có thể nhắn tin cho nhau). U là tập các cạnh như vậy.

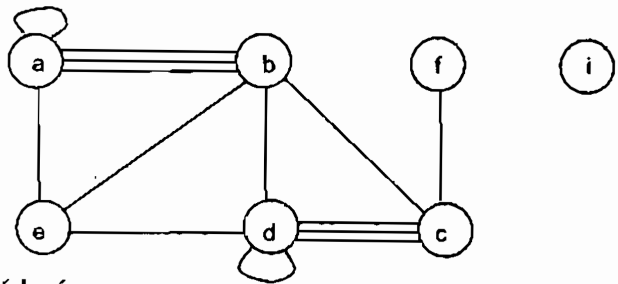
Rõ ràng với mọi $x \in X$ có bậc $m(x) \geq 20 = \dfrac{|X|}{2}$ nên theo Định lý 9 thì đồ thị G = <X, Y> liên thông. Do đó hai đỉnh x, y bất kỳ đều liên thông với nhau, hay giữa đỉnh x và y có đường đi đến nhau. Chứng tỏ hai sinh viên bất kỳ đều có thể nhắn tin cho nhau.

www.thuvien247.net

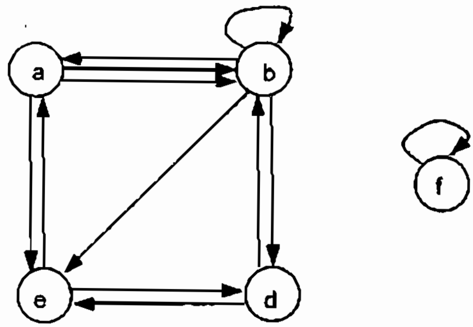
C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

20. Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 6.

21. Cho các đồ thị vô hướng



và có hướng



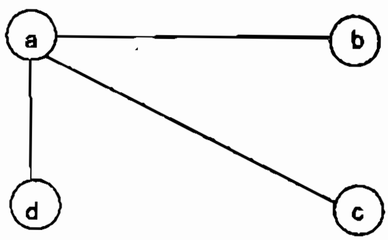
a) Hãy xác định bậc của các đồ thị.

b) Chỉ ra các đỉnh cô lập và đỉnh treo của các đồ thị.

c) Kiểm tra xem bậc của đồ thị có bằng 2 lần số cạnh hay không.

22. Trong một cuộc liên hoan, mọi người đều bắt tay nhau. Hãy chỉ ra rằng tổng số lượt người được bắt tay là một số chẵn (giả sử rằng không ai tự bắt tay mình).

23. Cho đồ thị như hình dưới



Hãy vẽ tất cả các đồ thị con của đồ thị trên.

24. Có tồn tại đồ thị đơn có 5 đỉnh với số bậc các đỉnh được cho trong các trường hợp sau đây không?

a) 3, 3, 3, 3, 2; b) 1, 2, 3, 4, 5.

www.thuvien247.net

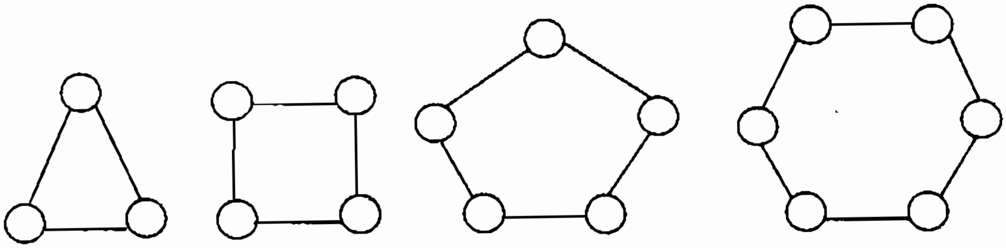
25. Có thể tồn tại một đồ thị đơn có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 3 hay không?

26. Cho ma trận kề

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hãy vẽ đồ thị được biểu diễn bằng ma trận kề trên.

27. Chu trình c_n ($n \geq 3$) là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và n cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n)$ và (v_n, v_1). Các chu trình C_n ($n = 3, 4, 5, 6$) là

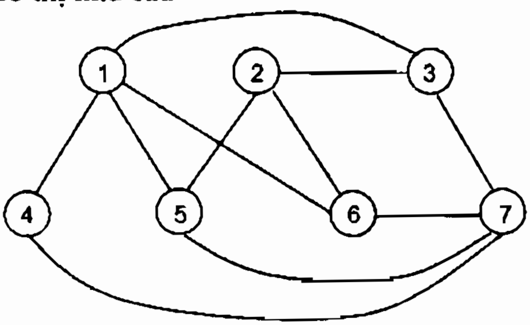


C_3 C_4 C_5 C_6

a) Có bao nhiêu đồ thị con, đồ thị bộ phận đối với đồ thị C_n ($n = 3, 4, 5, 6$)?

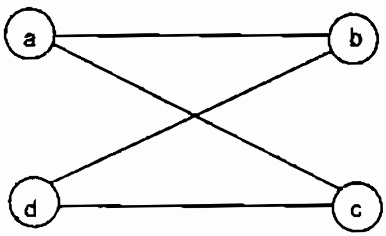
b) Chứng minh bậc của C_n được tính theo công thức $m(C_n) = 2n$ ($n \geq 3$).

28. Cho đồ thị như sau



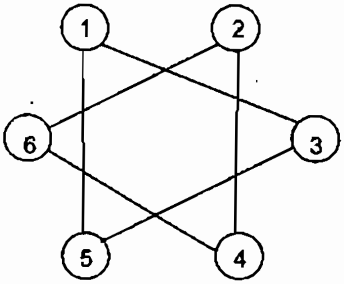
Hãy chỉ ra nó là đồ thị phân đôi.

29. a) Có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ đỉnh a đến đỉnh d trong đồ thị sau:

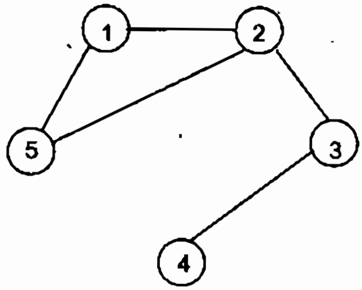


www.thuvien247.net

b) Cho hai đồ thị sau:

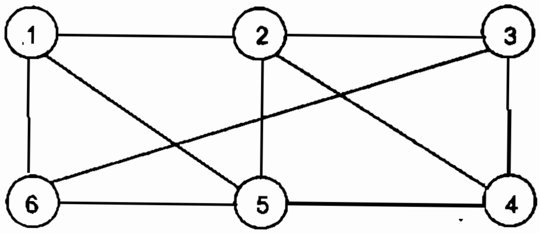


và



Đồ thị nào liên thông, đồ thị nào không liên thông?

c) Cho đồ thị như hình vẽ sau

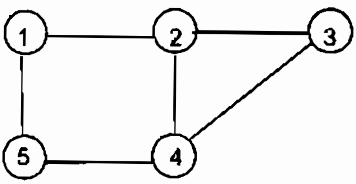


Tìm số đường đi giữa hai đỉnh 3, 6 có độ dài:

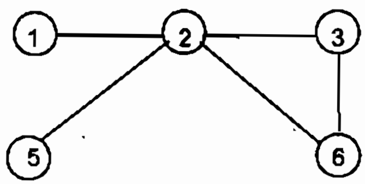
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6 và f) 7.

30. Hợp của hai đồ thị đơn $G_1 = <X_1, U_1>$ và $G_2 = <X_2, U_2>$ là một đồ thị đơn $G = <X, U>$ với $X = X_1 \cup X_2$ và $U = U_1 \cup U_2$, ta ký hiệu hợp của G_1 và G_2 là $G = G_1 \cup G_2$.

Cho hai đồ thị như hình sau:



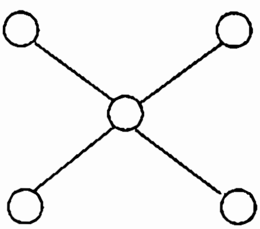
và

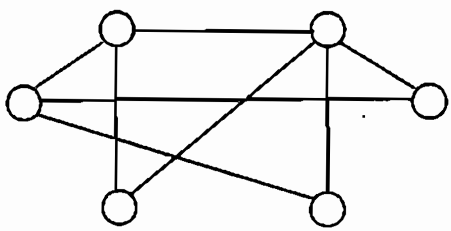


Tìm đồ thị hợp của hai đồ thị trên.

31. a) Với giá trị nào của n thì K_n và C_n là phân đôi?

b) Cho hai đồ thị sau:





Đồ thị nào phân đôi, đồ thị nào không phân đôi?

www.thuvien247.net

32. Chứng minh rằng giữa hai đỉnh khác nhau bất kỳ trong một đồ thị vô hướng liên thông luôn luôn có đường đi đơn.

33. Đồ thị bù $\overline{G}$ của đồ thị G có cùng số đỉnh như G. Hai đỉnh là kề nhau trong $\overline{G}$ khi và chỉ khi nó không kề nhau trong G.

a) Tìm $\overline{K_n}$ và $\overline{C_n}$.

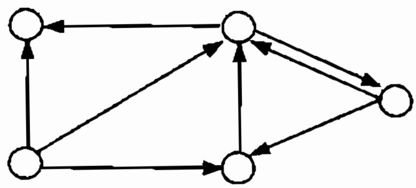
b) Nếu đồ thị đơn G có n đỉnh và m cạnh, khi đó $\overline{G}$ có bao nhiêu cạnh?

c) Chứng minh rằng nếu G là đồ thị đơn có n đỉnh thì $G \cup \overline{G} = K_n$.

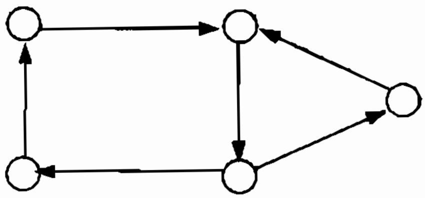
34. Nghịch đảo của đồ thị có hướng G = <X, U> được ký hiệu là G^{-1} là đồ thị có hướng được xác định như sau: G^{-1} = <X, V> trong đó $(x, y) \in V$ khi và chỉ khi $(y, x) \in U$.

a) Chứng minh $(G^{-1})^{-1} = G$.

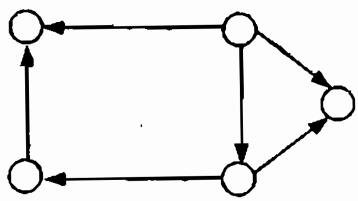
b) Hãy vẽ đồ thị nghịch đảo của đồ thị sau



35. Cho hai đồ thị có hướng sau:



và



Đồ thị nào là liên thông mạnh? Đồ thị nào là liên thông yếu?

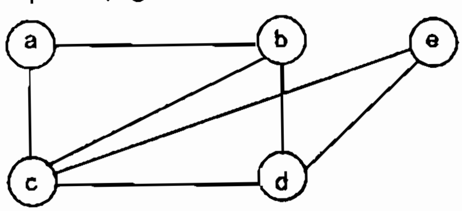
36. Nếu đồ thị đơn G có n đỉnh, m cạnh thì đồ thị $\overline{G}$ có bao nhiêu cạnh?

37. Chứng minh rằng, nếu G là đồ thị đơn phân đôi có n đỉnh, m cạnh thì

$$m \le \frac{n^2}{4}.$$

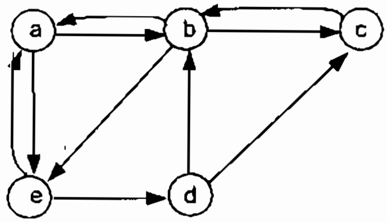
38. Mô tả thuật toán dùng để xác định một đồ thị có là đồ thị phân đôi hay không.

39. Cho đồ thị G_1 có dạng:



www.thuvien247.net

và G_2 có dạng:



a) Biểu diễn đồ thị G_1 và G_2 dưới dạng ma trận kề.

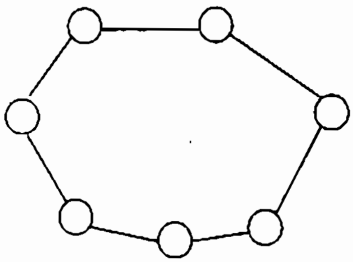
b) Biểu diễn đồ thị G_1 và G_2 dưới dạng bảng kề.

c) Tìm $m(G_1)$, $m(G_2)$ và kiểm tra tính đúng đắn của các Định lý 1 và 2 trong Chương 6.

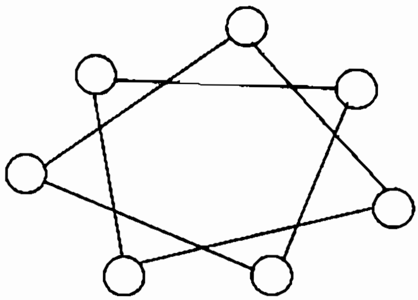
40. Vẽ các đồ thị được biểu diễn bởi các ma trận kề sau đây:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

41. a) Đồ thị

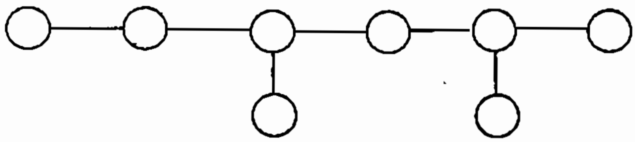


và đồ thị

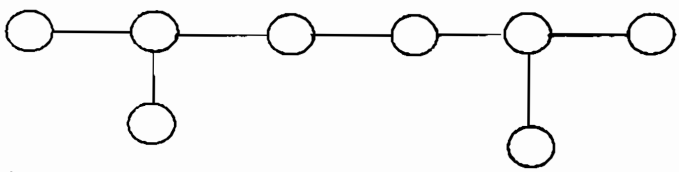


có đẳng cấu không.

b) Đồ thị



và đồ thị



có đẳng cấu không?

www.thuvien247.net

42. Chứng minh rằng phép đẳng cấu của các đồ thị là một quan hệ tương đương.

43. Các đồ thị đơn với các ma trận kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

44. Hãy mở rộng định nghĩa đẳng cấu của một đơn đồ thị cho các đồ thị vô hướng có khuyên và có cạnh bội. Cho ví dụ minh họa.

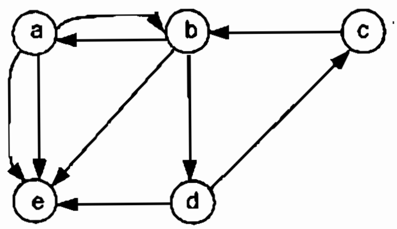
45. Tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh khác nhau trong đồ thị K_4 nếu n là:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

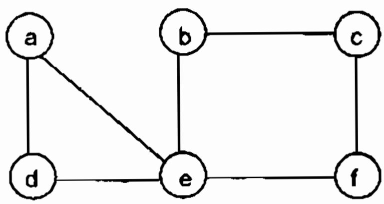
46. Hãy tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh không kề nhau tùy ý trong đồ thị $K_{3,3}$ với giá trị n cho ở bài tập 45.

47. a) Chỉ ra trong một đồ thị đơn luôn luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ đến một đỉnh bậc lẻ khác.

b) Cho hai đồ thị: G_1 có dạng

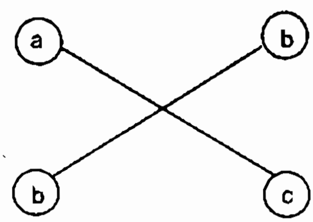


và G_2 có dạng:



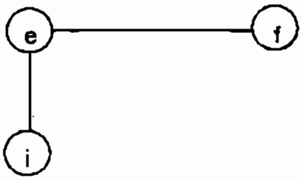
Tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh c trong G_1 và G_2 bằng cách áp dụng Định lý 3 (đếm đường đi).

c) Cho hai đồ thị: G_1 có dạng



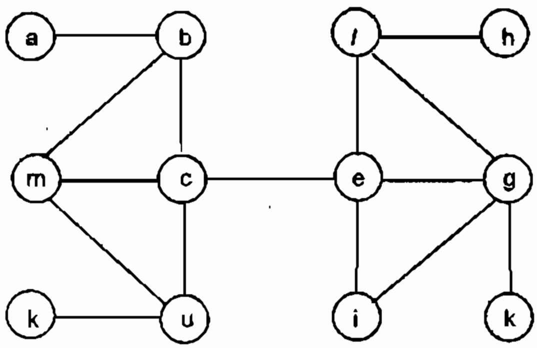
www.thuvien247.net

và G_2 có dạng:



Dùng Định lý 3 (đếm đường đi) để chỉ ra G_2 liên thông nhưng G_1 không liên thông.

48. Cho đồ thị



Tìm đỉnh rẽ nhánh và cạnh cầu trong đồ thị trên.

49. Chỉ ra rằng một đơn đồ thị với ít nhất hai đỉnh sẽ có ít nhất hai đỉnh không là đỉnh rẽ nhánh.

50. Chỉ ra rằng, nếu đơn đồ thị G có k thành phần liên thông và các thành phần liên thông này có tương ứng $n_1, n_2, ..., n_k$ đỉnh, khi đó số cạnh của G không vượt quá $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$.

51. Chứng minh rằng đỉnh $x \in X$ trong đơn đồ thị liên thông $G = \langle X, U \rangle$ là đỉnh rẽ nhánh khi và chỉ khi có tồn tại hai đỉnh $y, z \in X$ khác x sao cho mọi đường đi nối y và z đều đi qua đỉnh x.

52. Chứng minh rằng cạnh $u \in U$ trong đồ thị đơn $G = \langle X, U \rangle$ là cạnh cầu khi và chỉ khi nó không thuộc bất kỳ chu trình đơn nào trong $G = \langle X, U \rangle$.

53. Cho ω_1 và ω_2 là hai đường đi đơn giữa đỉnh x và đỉnh y trong đơn đồ thị G không chứa cùng một tập các cạnh, chỉ ra rằng có một chu trình đơn trong G.

54. Cho đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ với $|X| = n$ đỉnh và $|U| = m$ cạnh. Gọi K và k là bậc lớn nhất và bậc nhỏ nhất của các đỉnh trong G. Chứng minh rằng

$$k \le \frac{2m}{n} \le K.$$

www.thuvien247.net

55. Chứng minh rằng, nếu G là đồ thị đơn n đỉnh thì khi đó $(G \cup \overline{G}) = K_n$.

56. Chứng minh trong một lớp học có tùy ý số sinh viên mà mỗi người có một số lẻ bạn thân trong lớp, luôn luôn là một số chẵn.

57. Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn để mỗi người ngồi giữa hai người mà họ quen.

58. Một quần đảo có n đảo $(n \geq 2)$ và hai đảo bất kỳ đều có số đầu mối đường ngầm đi tới một trong các hòn đảo này đều không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng từ một hòn đảo tùy ý ta có thể đi đến một hòn đảo bất kỳ khác bằng đường ngầm.

59. Chứng minh rằng trong một đồ thị G mà bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn một nửa tổng số đỉnh thì G là liên thông.

60. Chứng minh trong một đơn đồ thị G có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh bậc lẻ này phải liên thông.

61. Tại mỗi đỉnh của đồ thị liên thông ta viết một số thực sao cho số viết tại mỗi đỉnh bằng trung bình cộng của các số viết tại mỗi đỉnh kề với đỉnh này. Chứng minh rằng tất cả các số được viết đều bằng nhau.

62. Dùng phương pháp đồ thị thể hiện việc bố trí lịch cho các lớp CNTT với 7 môn thi trong 7 ngày. Yêu cầu phải bố trí lịch thi sao cho hai môn thi của cùng một thầy giáo không được rơi vào hai ngày liên tiếp nhau. Biết rằng không có thầy giáo nào có nhiều hơn 4 môn thi.

63. Khoảng cách giữa hai đỉnh phân biệt x_i, x_j của một đơn đồ thị liên thông là độ dài (số các cạnh) của đường đi ngắn nhất giữa x_i và x_j. Bán kính của đồ thị là số nhỏ nhất đối với tất cả các đỉnh x của khoảng cách cực đại từ x tới các đỉnh khác. Đường kính của đồ thị là khoảng cách cực đại giữa hai đỉnh phân biệt.

a) Hãy tìm bán kính và đường kính của các đồ thị K_6, C_6, $K_{4,5}$.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường kính của đơn đồ thị $G = <X, U>$ ít nhất bằng 4, khi đó đường kính của đồ thị bù $\overline{G}$ không lớn hơn 2.

64. Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông, phân đôi không đẳng cấu với 4 đỉnh?

65. Giả sử một đơn đồ thị có 2m đỉnh lẻ. Chứng tỏ rằng mọi chu trình chứa tất cả các cạnh của đồ thị sẽ chứa ít nhất m cạnh hơn một lần.

www.thuvien247.net

Chương 7

ĐƯỜNG (CHU TRÌNH) EULER VÀ HAMILTON – BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường và chu trình Euler

a) Đường Euler

Giả sử G = <X, U> là một đồ thị có hướng hoặc không có hướng bất kỳ. Một đường đơn trong G gọi là đường Euler khi và chỉ khi đường đơn đó đi qua tất cả các cạnh (các cung) trong G và mỗi cạnh (mỗi cung) xuất hiện đúng một lần.

b) Chu trình Euler

Đường Euler đóng (tức là đường mà đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau) được gọi là chu trình Euler.

Đồ thị G có chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler. Đồ thị G có đường Euler (không có chu trình Euler) được gọi là đồ thị nửa Euler.

2. Đường và chu trình Hamilton

a) Đường Hamilton

Đường sơ cấp trong đồ thị G = <X, U> bất kỳ có hướng hoặc không có hướng là đường Hamilton khi và chỉ khi đường sơ cấp đó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G và mỗi đỉnh đúng một lần.

b) Chu trình Hamilton

Đường Hamilton đóng (tức là đường mà đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau) được gọi là chu trình Hamilton.

Đồ thị G có chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton. Đồ thị G có đường Hamilton (nhưng không là chu trình Hamilton) được gọi là đồ thị nửa Hamilton.

3. Một số tính chất của đường (chu trình) Euler và Hamilton

Đối với đường và chu trình Euler:

Định lý 1

a) Đồ thị vô hướng G = <X, U> có chu trình Euler khi và chỉ khi đồ thị G liên thông và mỗi đỉnh $x \in X$ đều có bậc chẵn, $m(x) = 2k$ ($k = 1, 2, \ldots$).

www.thuvien247.net

b) Đồ thị có hướng G = <X, U> có chu trình Euler khi và chỉ khi đồ thị G liên thông yếu và bậc vào, bậc ra của mỗi đỉnh đều bằng nhau.

Định lý 2

a) Đồ thị vô hướng G = <X, U> có đường Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi đồ thị G liên thông và số đỉnh bậc lẻ của G là hai.

b) Đồ thị có hướng G = <X, U> có đường Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi đồ thị G liên thông yếu và mọi đỉnh trong G đều có bậc vào, bậc ra như nhau (trừ hai đỉnh một đỉnh có bậc vào lớn hơn bậc ra 1 đơn vị, còn đỉnh kia có bậc ra lớn hơn bậc vào 1 đơn vị).

Chú ý:

- Nếu đa đồ thị có hai đỉnh bậc lẻ thì khi tìm đường Euler cần xuất phát từ một trong hai đỉnh bậc lẻ đó và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ kia.
- Thuật toán trên hoàn toàn có thể mở rộng tìm chu trình Euler đối với đa đồ thị có hướng.
- Nếu có một đỉnh duy nhất x với số cung ra lớn hơn số cung vào là 1 thì khi tìm đường Euler của G ta phải xuất phát từ đỉnh này.

Đối với chu trình Hamilton và đường Hamilton:

Định lý 3. Giả sử G = <X, U> là đơn đồ thị liên thông có $|X| = n \geq 3$ đỉnh. Khi đó đồ thị G có chu trình Hamilton nếu bậc $m(x) \geq \frac{n}{2}$ với mọi $x \in X$.

Định lý 4. Giả sử G = <X, U> là đồ thị có hướng liên thông mạnh với $|X| = n$ đỉnh. Nếu $m^{+}(x) \geq \frac{n}{2}$ và $m^{-}(x) \geq \frac{n}{2}$ với mọi $x \in X$ thì đồ thị G có chu trình Hamilton.

Định lý 5. Nếu đồ thị vô hướng G = <X, U> liên thông với $|X| = n \geq 3$ đỉnh và với mỗi $x \in X$ luôn có $m(x) = 2$ thì đồ thị G có chu trình Hamilton.

Định lý 6. Đồ thị vô hướng G = <X, U> có chu trình Hamilton khi và chỉ khi G có đồ thị bộ phận liên thông và mọi đỉnh $x \in X$ của đồ thị bộ phận đều có $m(x) = 2$.

Định lý 7. Đối với đồ thị có hướng đầy đủ luôn tồn tại đường Hamilton.

Định lý 8

a) Mọi đồ thị đầy đủ vô hướng với ít nhất 2 đỉnh đều có đường Hamilton.

b) Mọi đồ thị đầy đủ vô hướng với ít nhất 3 đỉnh đều có chu trình Hamilton.

4. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị

Trong thực tiễn ứng dụng, bài toán đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị liên thông có một ý nghĩa quan trọng, chẳng hạn: bài toán lập lịch thi công các công đoạn trong một công trình thi công lớn, bài toán lựa chọn đường truyền tin với chi phí truyền tin nhỏ nhất trong mạng, bài toán

www.thuvien247.net

chọn một hành trình tiết kiệm nhất trên một mạng giao thông đường bộ... Hiện nay có nhiều phương pháp để giải quyết các bài toán như vậy dựa trên cơ sở của lý thuyết đồ thị. Ở đây chỉ trình bày hai thuật toán: một thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị không trọng số và thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị có trọng số không âm với độ phức tạp $O(n^2)$ (Thuật toán Dijkstra làm việc hữu hiệu hơn rất nhiều so với thuật toán Ford – Bellman cũng như thuật toán Floyd với độ phức tạp $O(n^3)$ mà độc giả có thể tìm thấy các thuật toán này trong tài liệu tham khảo).

a) Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị không trọng số

Cho đồ thị không trọng số G = <X, U>. Đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong G là đường đi ngắn nhất nếu số cạnh (số cung) trong đường này là ít nhất.

Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b gồm 2 bước sau đây:

Bước 1: Ghi chỉ số ở các đỉnh bằng quy nạp theo số bước

- Đỉnh a ghi nhãn 0: $A(0) = \{a\}$.
- Giả sử đã ghi nhãn tới bước thứ i: A(0), A(1), ..., A(i). Khi đó tập nhãn thứ i + 1 xác định như sau: $A(i + 1) = \{x/x \in X \ \&\ x \notin A(k)$ $(0 \le k \le i)\ \&\ \exists y \in A(i)\ \&$ y có cạnh (cung) tới $x\}$, ở đây bước 1 chỉ dừng lại khi đã xác định được tập A(m) các đỉnh, trong đó có đỉnh b được gán nhãn m (do đồ thị hữu hạn).

Bước 2. Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b. Bước này xuất phát từ đỉnh b đi ngược về đỉnh a theo các nguyên tắc sau:

- Tìm tất cả các cạnh (cung) tới b được gán nhãn m – 1, tức $A(m - 1) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}\}$. Với mỗi $x \in A(m - 1)$ tìm tất cả các đỉnh có cạnh (cung) tới x được ghi nhãn m – 2. Thủ tục này sau một số bước sẽ gặp đỉnh có nhãn 0, đó chính là đỉnh a.
- Tất cả các đường xác định được trong bước 1 và 2 là các đường đi ngắn nhất từ a đến b có độ dài m.

b) Thuật toán Dijktra trong đồ thị có trọng số không âm

- Đồ thị G = <X, U> được gọi là đồ thị có trọng số khi và chỉ khi mỗi cạnh (cung) $u \in U$ đều được gán một số thực l(u), l(u) gọi là trọng số của cạnh (cung) u. Trọng số của đồ thị G ta ký hiệu là $l(G) := \sum_{u \in U} l(u)$. Nếu $l(u) \ge 0$ với mọi $u \in U$ thì ta nói đồ thị G là đồ thị có trọng số không âm.

www.thuvien247.net

Giả sử $a = x_1u_1x_2u_2...x_ku_kx_{k+1} = b$ là đường đi từ a đến b trong đồ thị có trọng số G. Độ dài đường đi trên là $l(a, b) := \sum_{i=1}^{k} l(u_i)$ và gọi là trọng số của đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b. Ký hiệu D(a, b) là tập tất cả các đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị có trọng số G. Đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b là đường thỏa mãn

$$l(a, b) = \min\{l(\omega)/\omega \in D(a, b)\}$$

- Ý tưởng của thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G. Lần lượt gán (và thay đổi) tại mỗi đỉnh i giá trị v(i) như sau : Nếu có (i, j) mà i đã được gán và j chưa được gán hoặc j đã được gán nhưng v(i) < v(j) thì gán (hoặc thay đổi lại) v(j) = v(i) + l(i, j). Khi nào không gán hoặc không thay đổi được nữa thì dừng lại.

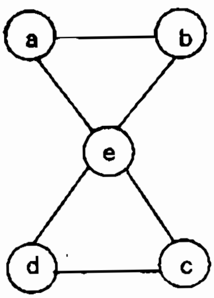
Định lý 9. Thuật toán Dijktra tìm được đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đơn đồ thị liên thông có trọng số dương với độ phức tạp thời gian cỡ $O(n^2)$.

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

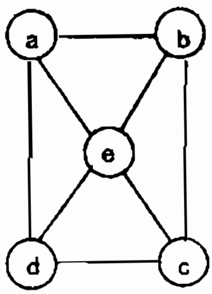
1. a) Xây dựng chu trình Euler dưới dạng giả mã đối với đồ thị vô hướng liên thông với các đỉnh bậc chẵn.

b) Cho các đồ thị sau:

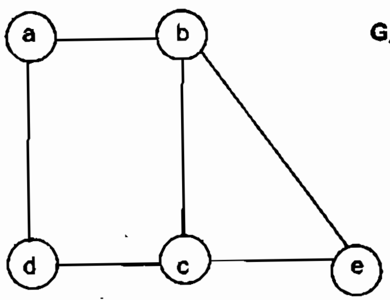
G_1:



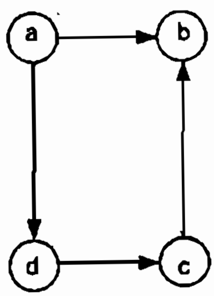
G_2:



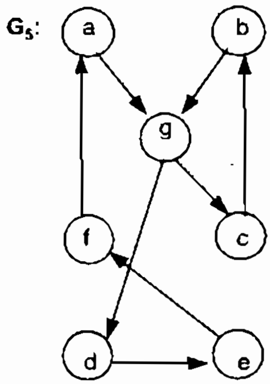
G_3:

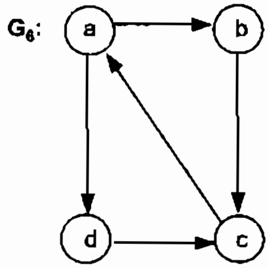


G_4:



www.thuvien247.net





Kiểm tra xem đồ thị nào có chu trình và đường Euler, vì sao? Nếu có hãy chỉ ra.

Giải

a) *Thuật toán:* Xây dựng chu trình Euler.

Procedure Euler (G: đồ thị vô hướng liên thông với các đỉnh đều bậc chẵn);

Chu trình := chu trình trong G bắt đầu tại một đỉnh được chọn tùy ý và các cạnh được thêm vào để xây dựng đường đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh xuất phát ban đầu;

H := G với các cạnh của G sau khi bỏ đi chu trình;

While H còn các cạnh

Begin

Chu trình con := chu trình trong H bắt đầu tại đỉnh trong H cũng là đỉnh đầu mút của một cạnh thuộc chu trình;

H := H với các cạnh của chu trình con và tất cả các đỉnh cô lập bị loại;

Chu trình := chu trình với chu trình con được chèn vào tại một đỉnh thích hợp;

end {chu trình là chu trình Euler}

b)

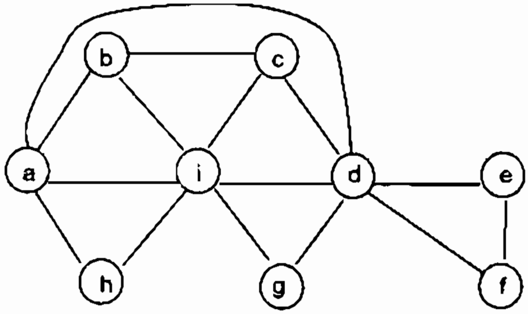
- G_1 có chu trình Euler vì mọi đỉnh có bậc chẵn và đồ thị liên thông. Chu trình Euler: a b e c d e a.
- G_2 liên thông, có 4 đỉnh bậc lẻ nên không có chu trình Euler và cũng không có đường Euler.
- G_3 liên thông, có đường Euler, không có chu trình Euler (do có 2 đỉnh bậc lẻ a, b). Đường Euler là: b e c d a b c.
- G_4 liên thông yếu, không có chu trình và cũng không có đường Euler do có tồn tại đỉnh a, b có bậc vào khác bậc ra.
- G_5 liên thông yếu, mọi đỉnh đều có bậc vào bằng bậc ra nên có chu trình Euler là: a g c b g d e f a.

www.thuvien247.net

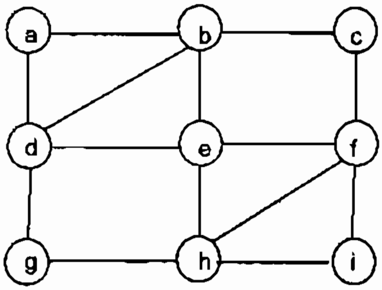
- G_6 liên thông yếu, hai đỉnh a, c có $m^-(a) - m^+(a) = m^+(c) - m^-(c) = 1$ nên có đường Euler là: a d c a b c.

2. Cho các đồ thị

G_1:



G_2:



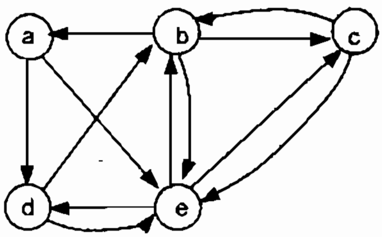
Các đồ thị trên, đồ thị nào là đồ thị Euler? Đồ thị nào là đồ thị nửa Euler?

Giải. G_1 là đồ thị nửa Euler vì không có chu trình Euler nhưng có đường Euler: b a h i g d f e d a i d c b i c.

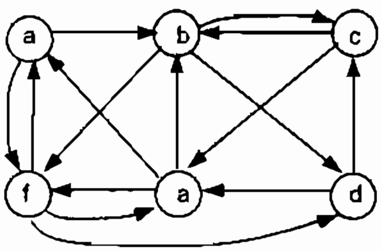
G_2 là đồ thị Euler vì có chu trình Euler là: a b c f i h f e h g d e b d a.

3. Dựa vào thuật toán tìm chu trình Euler trong câu a bài tập 1 và chú ý với hướng đi của các cạnh trong hai đồ thị dưới đây:

G_1:



G_2:



www.thuvien247.net

Hãy kiểm tra xem đồ thị nào là đồ thị Euler? Đồ thị nào là đồ thị nửa Euler?

Giải

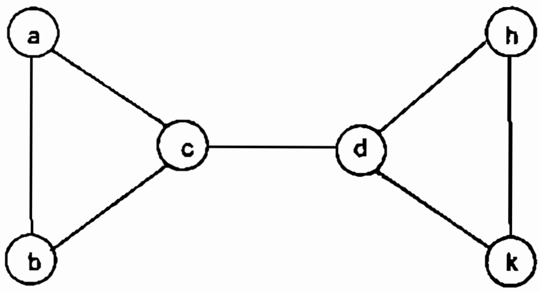
- G_1 liên thông yếu, các đỉnh b, c, d đều có bậc vào bằng bậc ra, còn hai đỉnh a và e có $m^-(a) - m^+(a) = m^+(e) - m^-(e) = 1$ nên G_1 có đường Euler là: a d e c e b c b e d b a e. Vậy G_1 là nửa Euler.
- G_2 liên thông yếu, tất cả các đỉnh đều có bậc vào bằng bậc ra nên có chu trình Euler là: a b c b d c e b f a f e f d e a. Vậy G_2 là đồ thị Euler.

4. Khi nào có thể sơn vạch phân đôi các đường phố Hà Nội mà không cần đi qua một đường phố quá một lần?

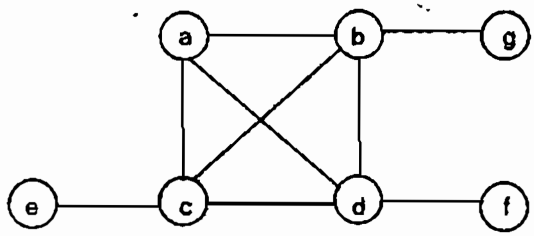
Giải. Thứ nhất là các đường phố của Hà Nội đều là đường 2 chiều, đồng thời khi đồ thị với các đỉnh là các điểm mà tại đó các phố giao nhau, còn các cạnh là các phố có đường đi Euler.

5. Cho các đồ thị:

G_1:



G_2:



G_1, G_2 có đường và chu trình Hamilton không? Nếu có thì vẽ đường và chu trình Hamilton đó, nếu không giải thích vì sao?

Giải

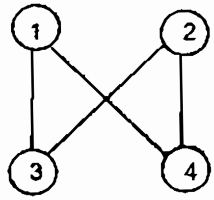
- G_1 có đường Hamilton: a b c d h k. Không có chu trình Hamilton vì nếu tồn tại chu trình thì chu trình đó phải qua đỉnh c hoặc đỉnh d hai lần (trái với định nghĩa chu trình Hamilton).
- G_2 không có chu trình Hamilton vì nếu có thì chu trình đi tới e hoặc tới g hoặc tới f đều không quay lại được nữa. G_2 cũng không có đường Hamilton vì nếu chu trình đó di qua tất cả các đỉnh thì các đỉnh c, d, b tối thiểu đi qua hai lần, trái với định nghĩa đường đi Hamilton.

www.thuvien247.net

6. Với giá trị nào của m và n thì đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{n,m}$ có chu trình Hamilton?

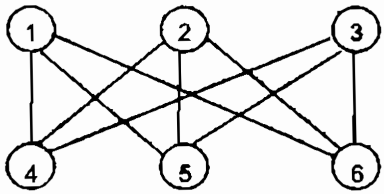
Giải. Theo định nghĩa $K_{n,m}$, khi $n = m \geq 2$ thì đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{n,m}$ có chu trình Hamilton.

- $n = m = 2$:



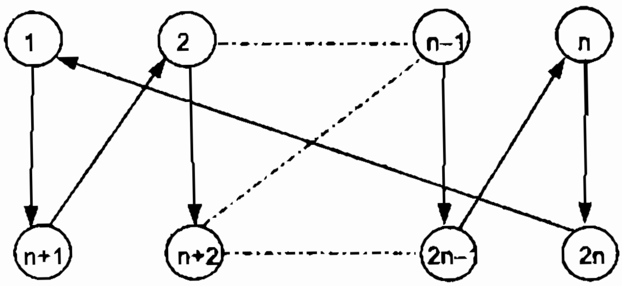
có chu trình Hamilton là: 1 3 2 4 1.

- $n = m = 3$:

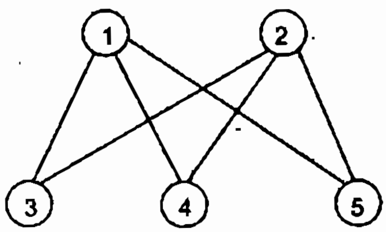


có chu trình Hamilton là: 1 4 2 5 3 6 1.

- Dùng phương pháp quy nạp sẽ chứng minh được đồ thị $K_{n,m}$ $(n \geq 2)$ có chu trình Hamilton (xem hình dưới theo chiều mũi tên) với $n = m$.



- Nếu $n \neq m$, chẳng hạn $n = 2$, $m = 3$ ta có $K_{2,3}$ là



không có chu trình Hamilton.

www.thuvien247.net

- Với $n = m = 1$ thì $K_{1,1}$ là

không có chu trình Hamilton.

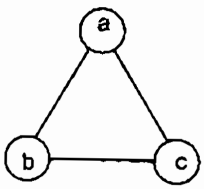
7. Chứng minh rằng đồ thị phân đôi với số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton.

Giải. Giả sử $G = <X_1 \cup X_2, U>$ là đồ thị phân đôi với lẻ các đỉnh. Giả sử ngược lại, trong G có chu trình Hamilton. Chu trình đó phải có dạng $a_1b_2a_2b_2... a_kb_ka_1$, ở đây $a_i \in X_1$, $b_i \in X_2$ ($i = 1, 2, ..., k$). Vì chu trình Hamilton qua mỗi đỉnh đúng một lần trừ đỉnh a_1. Rõ ràng $|X| = |X_1 \cup X_2| = 2k$ là một số chẵn. Vì vậy đồ thị phân đôi với số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton.

8. Đồ thị đầy đủ n đỉnh ký hiệu là K_n ($n \geq 1$). Chứng minh rằng đồ thị K_n ($n \geq 3$) có chu trình Hamilton (Định lý 8 phần b).

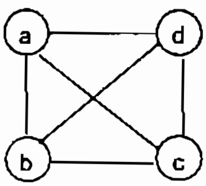
Giải

- Xét K_3:



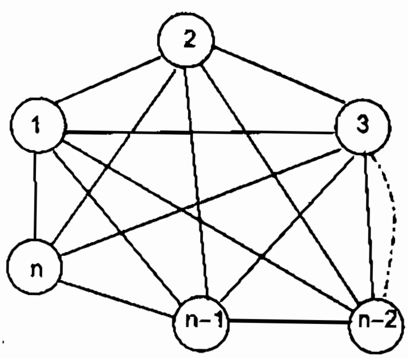
có chu trình Hamilton là: a b c a.

- Xét K_4:



có chu trình Hamilton là: a b c d a.

- Một cách tổng quát, đối với K_n ($n \geq 3$):



www.thuvien247.net

Ta có thể xây dựng chu trình Hamilton trong K_n xuất phát từ một đỉnh bất kỳ nào đó. Chu trình như thế có thể xây dựng bằng cách ghé thăm các đỉnh theo một thứ tự tùy chọn, sao cho đường đi bắt đầu từ một đỉnh và kết thúc tại một đỉnh đó, mỗi đỉnh được ghé thăm đúng một lần, chẳng hạn đó là chu trình Hamilton sau:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad (n-2) \quad (n-1) \quad n \quad 1.$$

Chú ý: Bài tập này có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n ($n \geq 3$).

9. Với giá trị nào của n thì các đồ thị sau:

a) K_n (đồ thị đầy đủ n đỉnh);

b) W_n (đồ thị bánh xe);

c) C_n (đồ thị chu trình)

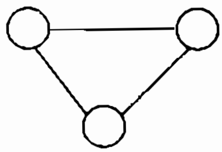
có đường Euler, nhưng không có chu trình Euler.

Giải

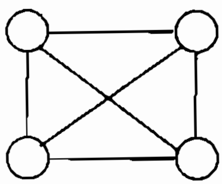
a) K_1:

K_2:

K_3:



K_4:



...

Với K_n chỉ có K_2 ($n = 2$) là có đường Euler, nhưng không có chu trình Euler. K_3 có chu trình Euler nhưng không có đường Euler. K_4 không có đường Euler và không có chu trình Euler. Một cách tổng quát:

– K_{2k+1}($k \geq 2$) có chu trình Euler nhưng không có đường Euler (do Định lý 1, 2 và trong K_{2n+1} ($n \geq 2$) mọi đỉnh đều có bậc 2n).

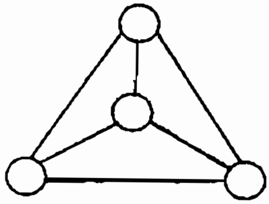
– K_{2k} ($k \geq 2$) không có chu trình Euler và cũng không có đường Euler (do Định lý 1, 2 và trong K_{2k} ($k \geq 2$) mỗi đỉnh đều có bậc lẻ là $2k - 1$).

Tóm lại K_n thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $n = 2$.

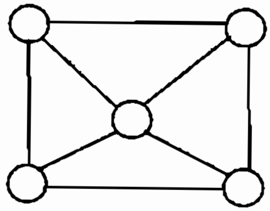
www.thuvien247.net

b) W_n $(n \geq 3)$:

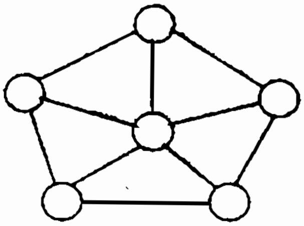
W_3:



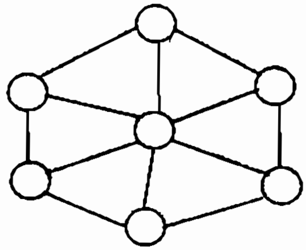
W_4:



W_5:



W_6:



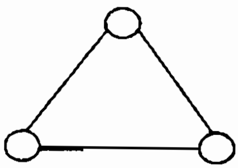
...

Rõ ràng W_3, W_4, W_5, W_6 không thỏa mãn bài toán. Xét W_{2k} có 2k+1 đỉnh, trong đó 2k đỉnh có cùng bậc là 3 và một đỉnh (ở tâm) có bậc chẵn 2k. W_{2k} không thỏa mãn bài toán (*).

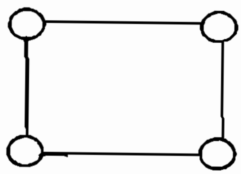
W_{2k+1} có 2k+2 đỉnh, trong đó có một đỉnh (ở tâm) có bậc lẻ 2k+1 và 2k+1 đỉnh còn lại bậc 3. Tóm lại W_{2k+1} có 2k+1 đỉnh đều có bậc lẻ nên W_{2k+1} không thỏa mãn bài toán (**). Từ (*) và (**) ta kết luận W_n $(n \geq 3)$ không thỏa mãn bài toán.

c) C_n $(n \geq 3)$:

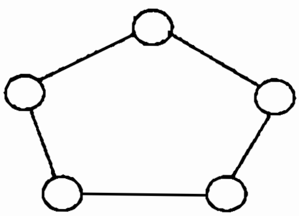
C_3:



C_4:

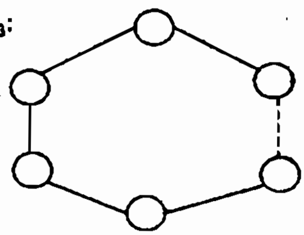


C_5:



...

$C_{n\geq 3}$:

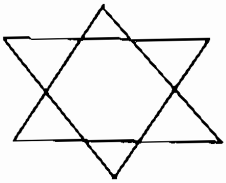


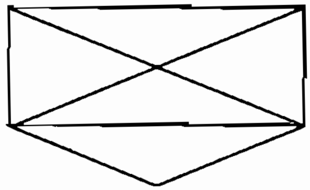
đều có tất cả các đỉnh đều có bậc 2 và C_n liên thông nên có chu trình Euler nhưng không có đường Euler.

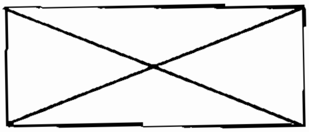
Tóm lại, đồ thị C_n $(n \geq 3)$ cũng không thỏa mãn bài toán.

10. Có thể vẽ bức tranh bằng một nét liền, không nâng bút khỏi giấy vẽ đối với 3 hình vẽ dưới đây được hay không và giải thích vì sao:

www.thuvien247.net

a) 

b) 

c) 

Giải

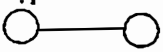
a) Được: Vì bức tranh là một đồ thị liên thông có bậc tất cả các đỉnh đều chẵn nên tồn tại chu trình Euler (phần a, Định lý 1).

b) Được: Vì bức tranh là một đồ thị liên thông có đúng hai đỉnh bậc lẻ, các đỉnh còn lại có bậc chẵn nên tồn tại đường đi Euler trong đồ thị đó (phần a, Định lý 2).

c) Không: Vì bức tranh là một đồ thị liên thông có số đỉnh bậc lẻ không phải là 2 đỉnh mà là 4 đỉnh. Theo Định lý 2 phần a thì không tồn tại đường Euler, hay không thể vẽ bức tranh bằng một nét liền.

11. Chứng minh rằng đồ thị vô hướng đầy đủ $G = <X, U>$ có $|X| = n \geq 2$ đều tồn tại đường Hamilton (Định lý 8, phần a).

Giải. Quy nạp theo số đỉnh n của G.

$n = 2$: G:  là hiển nhiên.

Giả sử đúng với n, tức là $G = <X, U>$ với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ có đường Hamilton là $x_1x_2...x_n$.

Xét đồ thị $G' = <X', U'>$, ở đây: $X' = X \cup \{x_{n+1}\}$,

$$U' = U \cup \{(x_{n+1}, x_1), ... (x_{n+1}, x_n)\}$$

là đồ thị có n + 1 đỉnh $X' = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ và các cạnh là các cạnh trong G thêm n cạnh mới được tạo ra từ các cạnh nối đỉnh mới x_{n+1} với các đỉnh cũ trong G. Rõ ràng G' là đồ thị vô hướng đầy đủ, có n + 1 đỉnh. Trong G' có đường Hamilton là $x_1x_2...x_nx_{n+1}$.

12. Cho $G = <X, U>$ là đồ thị liên thông. Nếu các đỉnh của đường đơn dài nhất tạo thành đồ thị con $G' = <X', U'>$ có chu trình Hamilton thì G cũng có chu trình Hamilton.

Giải. Chỉ cần chỉ ra đồ thị con của đồ thị G có cùng chung số đỉnh thì chu trình Hamilton của G chính là chu trình Hamilton của đồ thị con.

Giả sử ngược lại, có một đỉnh $x \in X$ nhưng $x \notin X'$. Vì G liên thông nên với $y \in X'$ sẽ có đường đi từ x đến y trong đồ thị G:

$$y = x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_k = x \ (x_i \in X\ (i = \overline{0, k}\,)).$$

www.thuvien247.net

Ta có $y \in X'$, $x \notin X'$. Do đó sẽ có x_i là đỉnh đầu tiên của đường không thuộc X' ($y = x_0, x_1, ..., x_{i-1}$ đều thuộc X').

Xét đường trong G bằng cách lấy chu trình Hamilton của G' bỏ đi một cạnh kề với x_{i-1} và thêm vào cạnh (x_{i-1}, x_i), thì đường này có độ dài là $|X'|$, trong khi đó độ dài của đường đơn trong G chỉ có độ dài $|X'| - 1$. Điều này trái với giả thiết của bài toán đã cho. Vậy $X = X'$, đó là điều phải chứng minh.

13. Chứng minh Định lý 6: Đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ có chu trình Hamilton khi và chỉ khi đồ thị G có đồ thị bộ phận $G' = \langle X, U' \rangle$ liên thông và mọi đỉnh $x \in X$ đều có bậc $m(x) = 2$.

Giải. Điều kiện cần: Giả sử G có chu trình Hamilton. Chính chu trình Hamilton này là đồ thị bộ phận G' liên thông và có bậc mỗi đỉnh đều bằng 2.

Điều kiện đủ: Giả sử $G = \langle X, U \rangle$ có đồ thị bộ phận $G' = \langle X, U' \rangle$ ($U' \subseteq U$) có chu trình Hamilton. Khi đó chu trình này cũng là chu trình Hamilton của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$.

14. Nhà vua mời 2n ($n \geq 2$) kỵ mã đến dự tiệc. Mỗi kỵ mã quen ít nhất n kỵ mã đến dự tiệc. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các kỵ mã ngồi xung quanh một bàn tròn, sao cho mỗi người ngồi giữa hai người mà mình quen biết.

Giải. Bài toán này sẽ giải bằng cách áp dụng Định lý 3.

Muốn vậy, đưa bài toán về đồ thị vô hướng $G = \langle X, U \rangle$ mô tả toàn bộ quan hệ của các kỵ mã về dự tiệc:

Tập đỉnh X gồm 2n điểm trên mặt phẳng, sao cho không có 3 điểm nào nằm trên một đường thẳng. Mỗi điểm là một đỉnh của G được gán tên một kỵ mã.

Tập cạnh U được xác lập theo nguyên tắc sau: Hai đỉnh khác nhau $x, y \in X$ được nối bởi một cạnh khi và chỉ khi hai kỵ mã tương ứng với hai đỉnh đó là quen nhau. Đồ thị G thành lập như trên có tính chất mỗi $x \in X$ đều có $m(x) \geq n$, nên theo Định lý 3 thì đồ thị G có chu trình Hamilton. Giả sử chu trình Hamilton đó là $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_i\ x_{i+1}\ x_{i+2} \ldots x_{2n-1}\ x_{2n}\ x_1$. Ta xếp 2n kỵ mã ngồi theo thứ tự các đỉnh xuất hiện trong chu trình Hamilton trên sẽ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

15. Đồ thị có hướng đầy đủ đôi khi còn gọi là đồ thị đấu loại, tức là đồ thị có thể dùng để biểu diễn hai trận đấu giữa hai đội mà chỉ có hai khả năng xảy ra là hoặc thắng hoặc thua mà không có hòa.

Bài toán: Có 5 đội bóng chuyền thi đấu với nhau để tranh giải Cúp quốc gia. Biết rằng hai đội chỉ đấu với nhau đúng một trận và mỗi đội phải đấu với 4 đội khác mà không có trận hòa. Chứng minh rằng, căn cứ vào kết quả thi đấu có thể xếp các đội đứng theo một hàng dọc để đội đứng sau thắng đội đứng ngay trước đội đó.

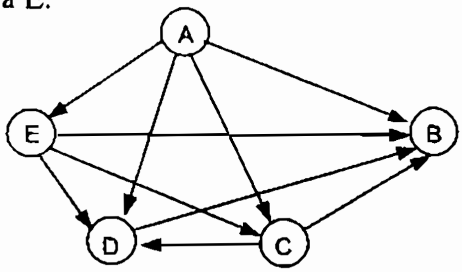
www.thuvien247.net

Giải. Đưa bài toán về đồ thị G = <X, U> theo các nguyên tắc sau:

- Mỗi đội A, B, C, D, E đặt tương ứng với một đỉnh, ta ghi luôn mỗi đỉnh bằng chính tên của đội tương ứng: X = {A, B, C, D, E}.
- Hai đội đã thi đấu với nhau ta dùng một cung hướng từ đỉnh có tên đội thắng về đỉnh có tên đội thua.

Đồ thị được thiết lập là đồ thị đầy đủ có hướng với 5 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 4 (bậc vào + bậc ra).

Đồ thị dưới đây là đồ thị có hướng đầy đủ, nó mô tả kết quả thi đấu của đội A, B, C, D và E:



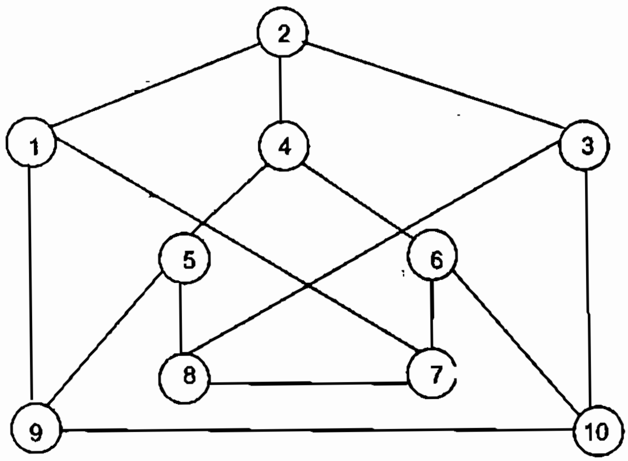
Theo Định lý 7 thì có tồn tại đường Hamilton có hướng là A → E → C → D → B. Căn cứ vào đường Hamilton này ta sắp hàng dọc theo thứ tự đáp ứng yêu cầu của bài toán là B, D, C, E, A.

16. Một nước có 10 thành phố. Hãy thiết lập một mạng cầu hàng không sao cho:

a) Mỗi thành phố có cầu hàng không nối trực tiếp với đúng ba thành phố khác.

b) Từ mỗi thành phố có cầu hàng không đi tới một thành phố tùy ý sao cho trên đường hành trình tới đích có thể đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đi qua đúng một lần.

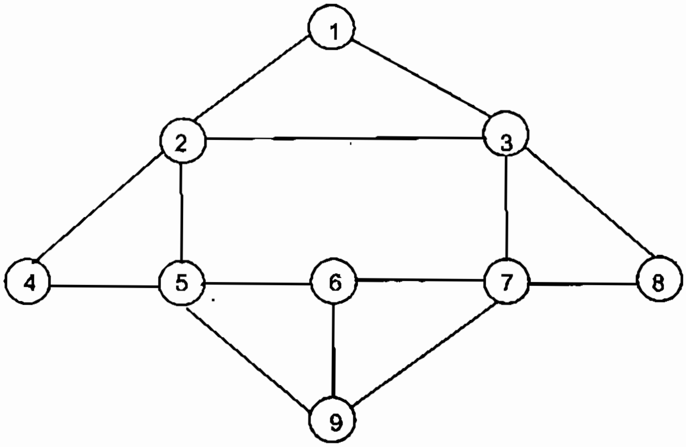
Giải. Đồ thị biểu diễn bài toán trên là đồ thị 10 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 3 và có đường đi Hamilton sau:



www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Cuộc hành trình từ thành phố 1 đến 9 thành phố khác bằng hàng không mà mỗi thành phố qua đúng một lần là: 1, 9, 10, 3, 2, 4, 6, 7, 8, 5.

17. Bản đồ thành phố mà người đưa thư cần phải đi qua là đồ thị sau:

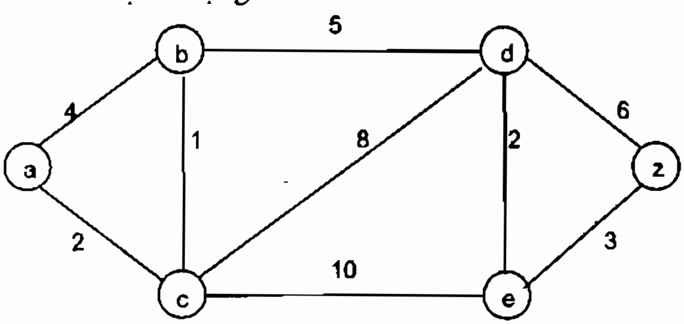


Người đưa thư xuất phát từ đỉnh 6 đi qua tất cả các thành phố (cạnh) để đưa thư rồi lại quay về nơi xuất phát. Hãy chỉ ra đường đi ngắn nhất của người đưa thư với giả thiết độ dài của mỗi cạnh là như nhau.

Giải. Bản đồ thành phố như trên là một đồ thị liên thông có đúng hai đỉnh 6 và 9 là có bậc 3, các đỉnh còn lại đều có bậc chẵn nên theo Định lý 2 phần a sẽ có đường đi Euler là: 6, 9, 5, 4, 2, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 2, 3, 7, 9. Vậy để quay về nơi xuất phát người đưa thư phải đi qua cạnh (9, 6) hai lần và đó là đường đi ngắn nhất của người đưa thư.

18. a) Viết thuật toán Dijkstra dưới dạng giả mã.

b) Dùng thuật toán Dijkstra hãy tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh a và b của đồ thị có trọng số sau:



(*)

Giải

a) Thuật toán Dijkstra dưới dạng giả mã:

Procedure Dijkstra (G = <X, U> : đồ thị liên thông có trọng số không âm)

{G có các đỉnh $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ và trọng số $l(x_i, x_j) = \infty$ nếu $(x_i, x_j) \notin U$ trong G};

www.thuvien247.net

for i := 1 to n

$\sigma(v_i) := \infty$

$\sigma(a) := 0$

$S := \varnothing$

{ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhãn của a bằng 0, còn các đỉnh khác bằng ∞, tập $S = \varnothing$}

While $b \notin S$

Begin

u := đỉnh không thuộc S có nhãn σ(u) nhỏ nhất

$S := S \cup \{u\}$

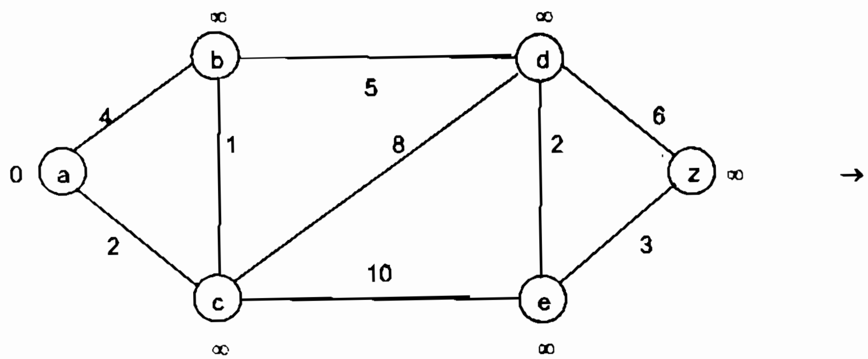
for tất cả các đỉnh x không thuộc S

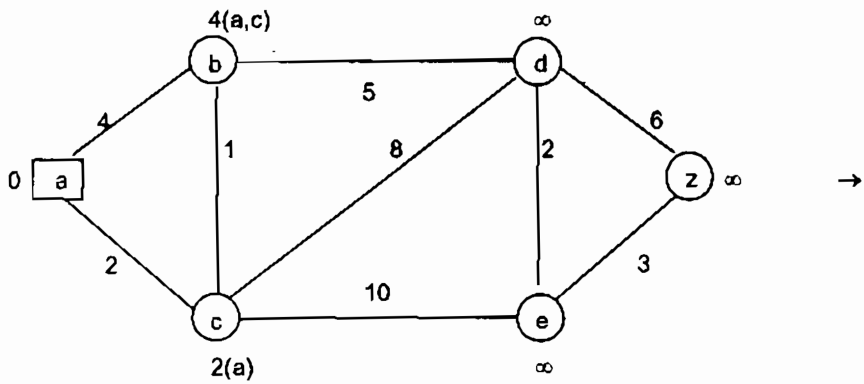
if $\sigma(u) + l(u, x) < \sigma(x)$ then $\sigma(x) := \sigma(u) + l(u, x)$

{thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất và sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S}

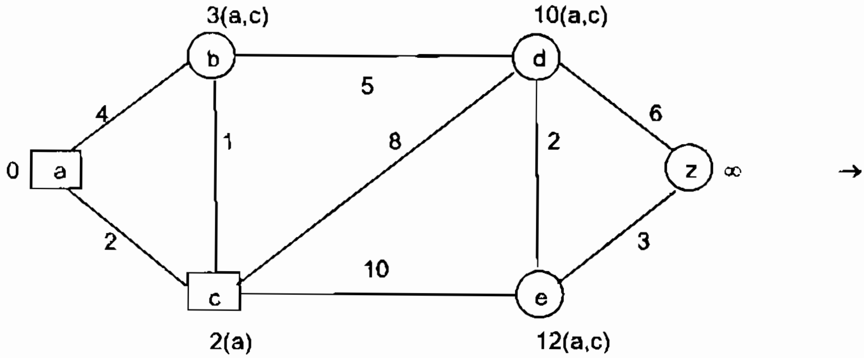
end {l(a, b) = độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới b}

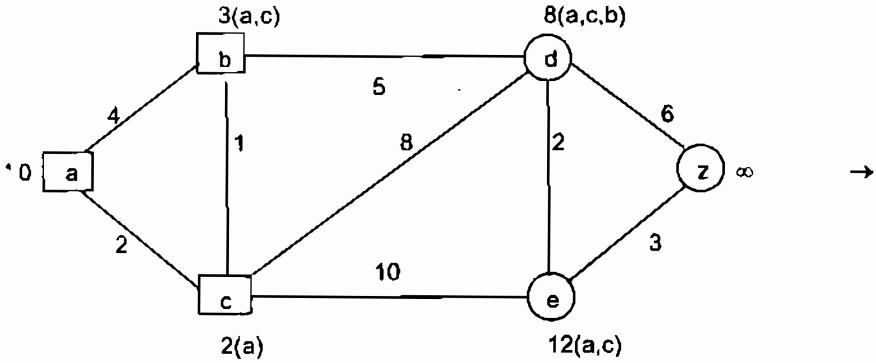
b)

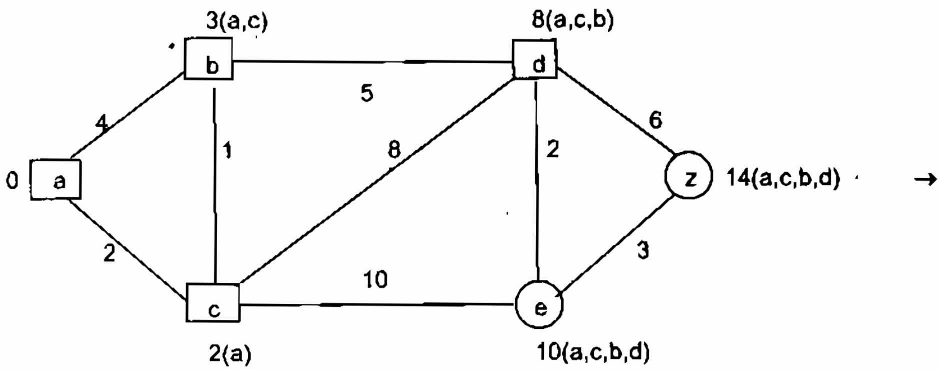


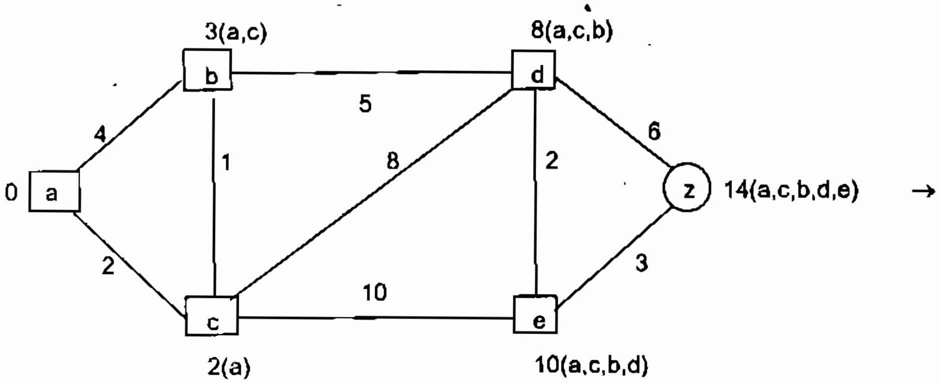


www.thuvien247.net

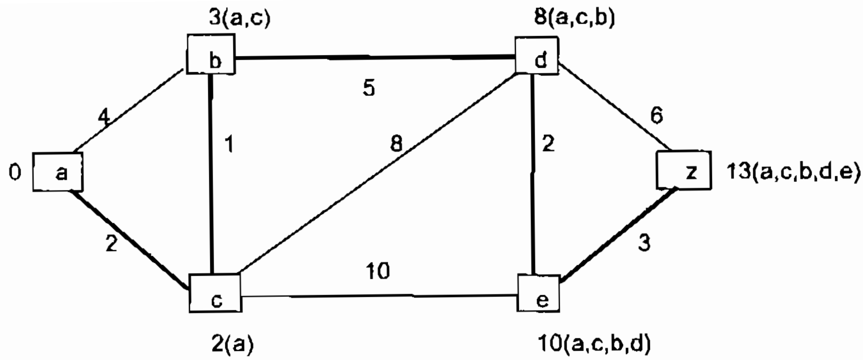






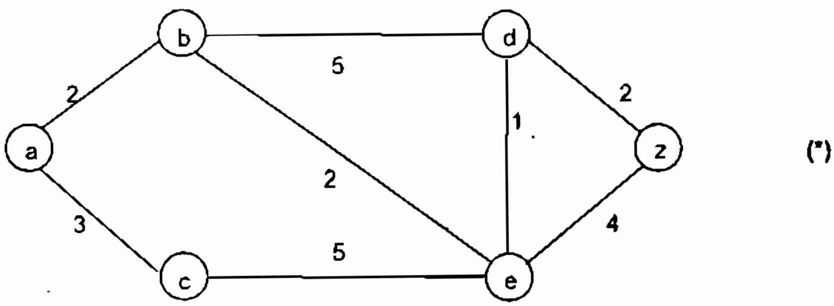


www.thuvien247.net



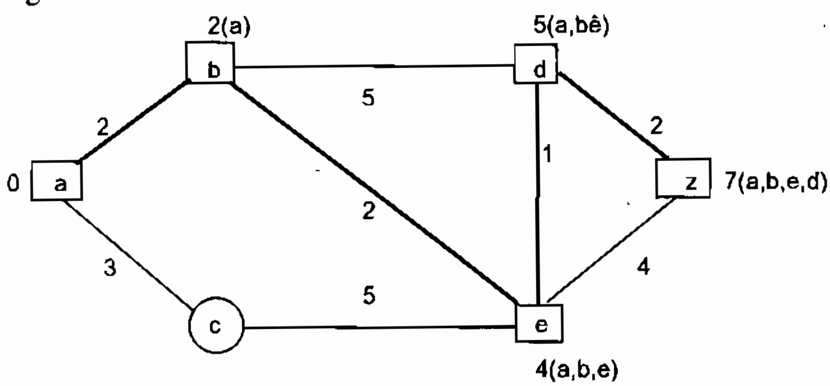
Vậy đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị (*) là l(a, z) = 13 (đường in đậm nét).

19. Cũng như bài tập 18 với đồ thị sau:



Giải

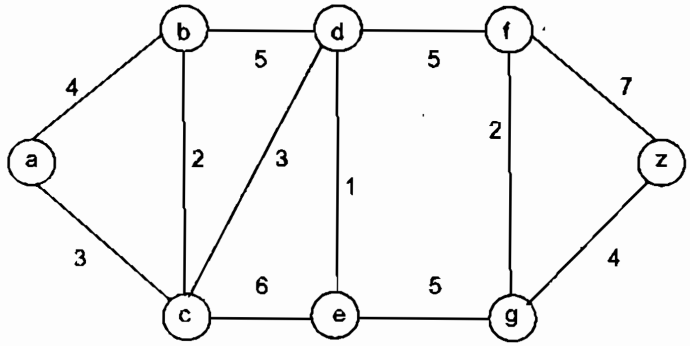
Tiến hành thủ tục như bài 18 đối với đồ thị (*) ta thu được đồ thị cuối cùng là



Vậy đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z là l(a, z) = 7 (đường in đậm).

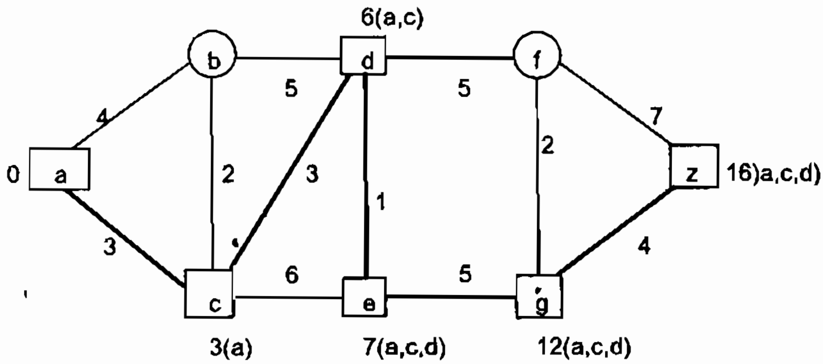
www.thuvien247.net

20. Cũng như bài 18 với đồ thị sau:



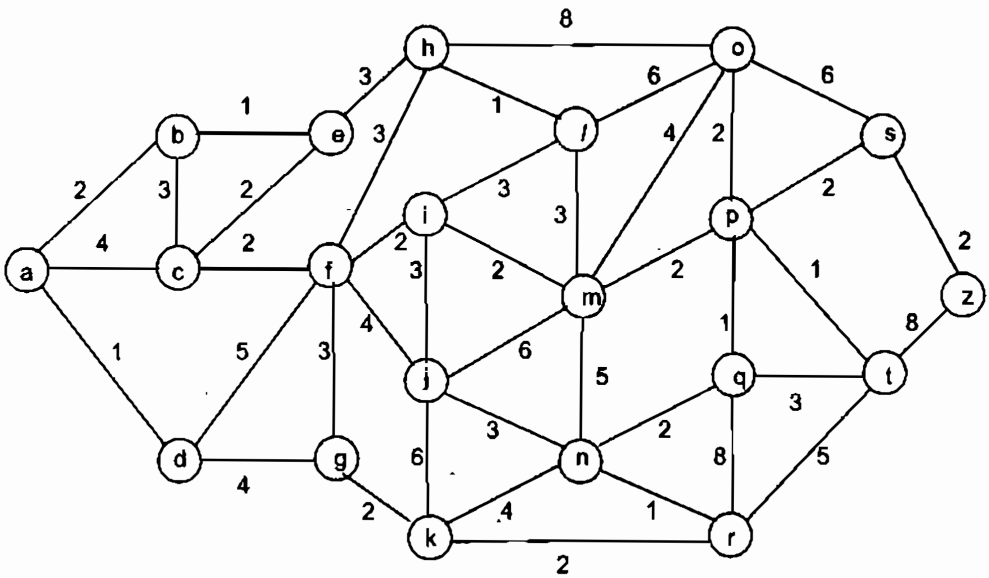
(**)

Giải. Tiến hành thủ tục như bài tập 18 đối với đồ thị (**) ta thu được đồ thị cuối cùng là



Vậy đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị (**) là l(a, z) = 16 (đường in đậm).

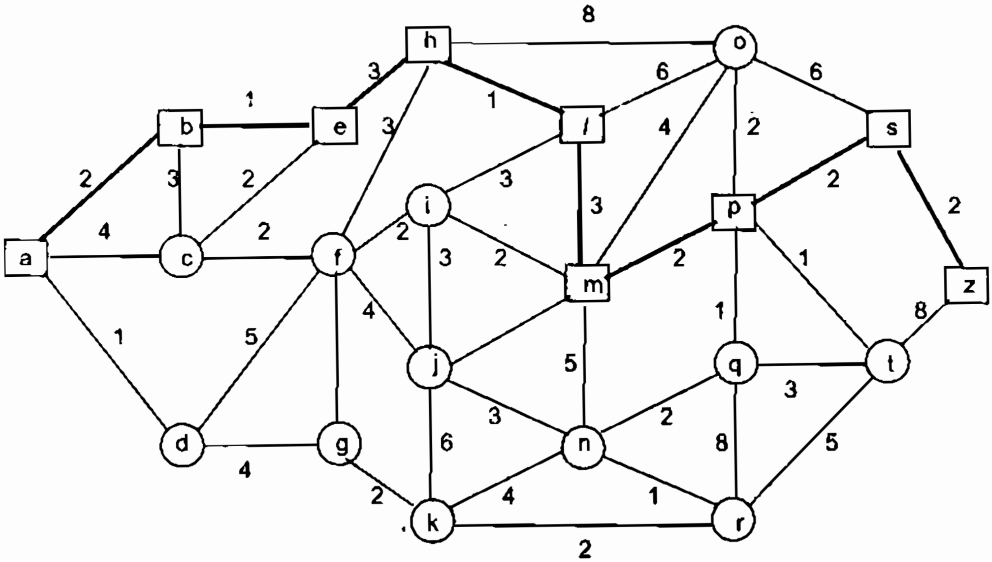
21. Cũng như bài 18 đối với đồ thị sau:



www.thuvien247.net

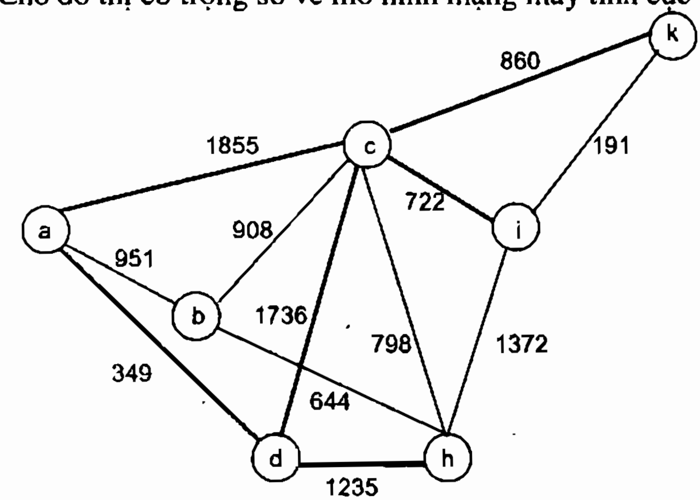
Giải

Tiến hành thủ tục như đối với bài 18 ta thu được đồ thị cuối cùng có dạng



Vậy đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trong đồ thị trên là l(a, z) = 16 (đường in đậm nét).

22. Cho đồ thị có trọng số về mô hình mạng máy tính cục bộ sau:



Ở đây mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, trọng số của cạnh là độ dài (tính ra m) giữa hai trung tâm máy tính tương ứng. Tìm đường đi ngắn nhất từ:

a) Trung tâm máy tính (k) đến trung tâm máy tính (d)

b) Trung tâm máy tính (i) đến trung tâm máy tính (a)

c) Trung tâm máy tính (h) đến trung tâm máy tính (a)

d) Trung tâm máy tính (b) đến trung tâm máy tính (i)

www.thuvien247.net

Giải. Đường đi ngắn nhất từ:

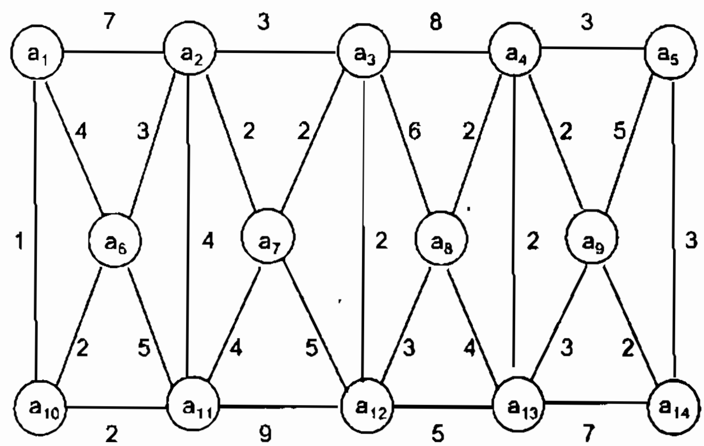
a) Trung tâm máy tính ⓚ đến trung tâm máy tính ⓓ là đường đi qua k, c, d với độ dài 1596.

b) Trung tâm máy tính ⓘ đến trung tâm máy tính ⓐ là đường đi qua i, c, a với độ dài 2577.

c) Trung tâm máy tính ⓗ đến trung tâm máy tính ⓐ là đường đi qua h, d, a với độ dài 1584.

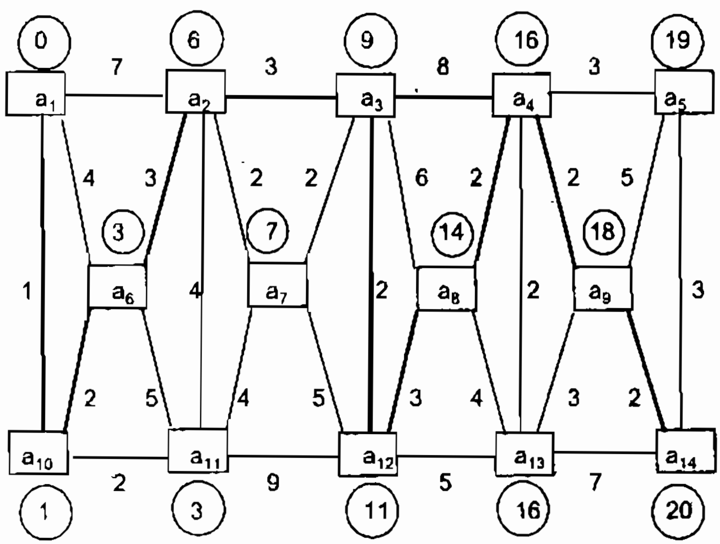
d) Trung tâm máy tính ⓑ đến trung tâm máy tính ⓘ là đường đi qua b, c, i với độ dài 1577.

23. Cho đồ thị có trọng số sau:



Tìm đường đi ngắn nhất từ a_1 đến a_{14}.

Giải. Áp dụng thuật toán Dijkstra cho đồ thị trên ta có đồ thị cuối cùng có dạng:



www.thuvien247.net

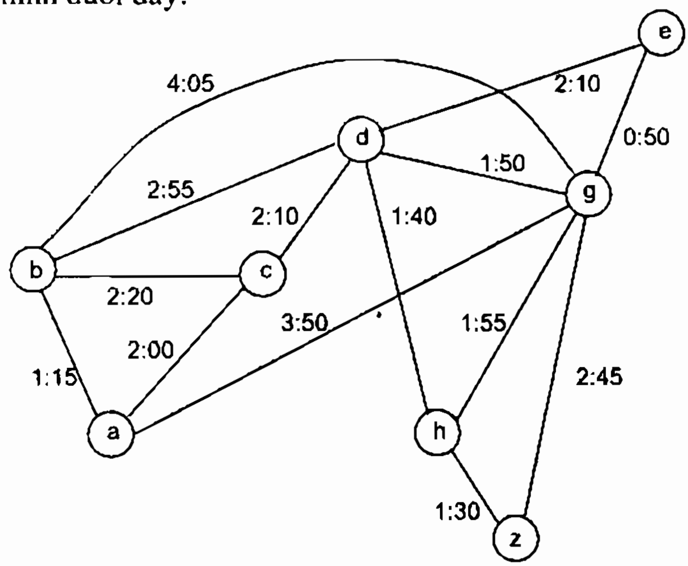
Từ a_1 đến a_{14} có hai đường đi có cùng độ dài bé nhất là:

- Đường 1: $a_1, a_{10}, a_6, a_2, a_3, a_{12}, a_8, a_4, a_9, a_{14}$ có độ dài 20 và
- Đường 2: $a_1, a_{10}, a_{11}, a_7, a_3, a_{12}, a_8, a_4, a_9, a_{14}$ có độ dài 20.

24. Cho đồ thị có trọng số dùng để lập mô hình hệ thống hàng không, ở đây mỗi một đỉnh là một thủ đô của một quốc gia nào đó. Cạnh nối giữa hai đỉnh là đường bay giữa hai thủ đô của hai quốc gia tương ứng. Trọng số của cạnh là thời gian bay (hoặc giá cước bay) giữa hai thủ đô của hai nước. Hãy tìm đường bay có giờ bay ít nhất đi từ:

- Thủ đô g đến thủ đô a;
- Thủ đô e đến thủ đô b;
- Thủ đô x đến thủ đô c;
- Thủ đô a đến thủ đô z

trong mô hình dưới đây:



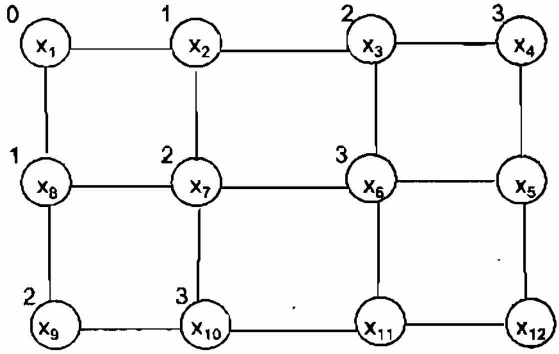
Giải

Áp dụng thuật toán Dijkstra ta có:

- Từ thủ đô g đến thủ đô a thời gian bay ngắn nhất là bay trực tiếp chỉ cần thời gian 3 giờ 50 phút.
- Từ thủ đô e đến thủ đô b thời gian bay ngắn nhất là bay qua thủ đô g chỉ cần thời gian 4 giờ 55 phút.
- Từ thủ đô z đến thủ đô c thời gian bay ngắn nhất là bay qua thủ đô h và thủ đô d chỉ cần thời gian 5 giờ 20 phút.
- Từ thủ đô a đến thủ đô z thời gian bay ngắn nhất là bay qua thủ đô g chỉ cần thời gian 6 giờ 35 phút.

www.thuvien247.net

25. Cho đồ thị vô hướng không trọng số



Áp dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai cặp đỉnh dưới đây:

a) Từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_4;

b) Từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_{10}.

Giải

a) *Bước 1:* Gán nhãn các đỉnh, bắt đầu từ đỉnh xuất phát x_1 đến đỉnh kết thúc x_4: $A(0) = \{x_1\}$, $A(1) = \{x_2, x_8\}$, $A(2) = \{x_3, x_7, x_9\}$, $A(3) = \{x_4, x_6, x_{10}\}$, dừng lại vì đỉnh $x_4 \in A(3)$.

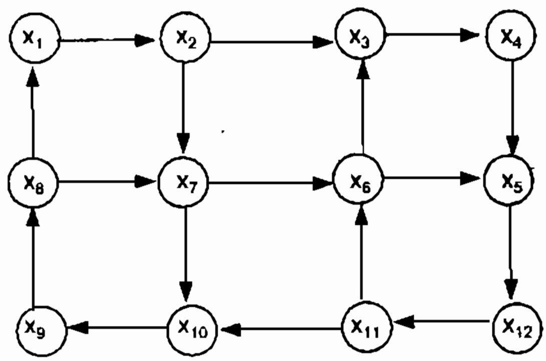
Bước 2: Xác định đường đi ngắn nhất độ dài 3 đi từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_4: chỉ có duy nhất một đường độ dài 3 từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_4 là: $x_1x_2x_3x_4$.

b) *Bước 1:* $A(0) = \{x_1\}$, $A(1) = \{x_2, x_8\}$, $A(2) = \{x_3, x_7, x_9\}$, $A(3) = \{x_4, x_6, x_{10}\}$, dừng lại vì đỉnh $x_{10} \in A(3)$.

Bước 2: Có 3 đường đi ngắn nhất độ dài 3 đi từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_{10} là:

$x_1x_2x_7x_{10}$, $x_1x_8x_9x_{10}$ và $x_1x_8x_7x_{10}$.

26. Cho đồ thị có hướng không trọng số



Áp dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất đối với hai trường hợp sau:

a) Từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_5;

b) Từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_7.

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Giải

a) *Bước 1:* $A(0) = \{x_1\}$, $A(1) = \{x_2\}$, $A(2) = \{x_3, x_7\}$, $A(3) = \{x_4, x_6, x_{10}\}$, $A(4) = \{x_5, x_{10}\}$, dừng lại vì đỉnh $x_5 \in A(4)$.

Bước 2: Đường đi ngắn nhất độ dài 4 đi từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_5 là:

$$x_1x_2x_3x_4x_5 \text{ và } x_1x_2x_7x_6x_5.$$

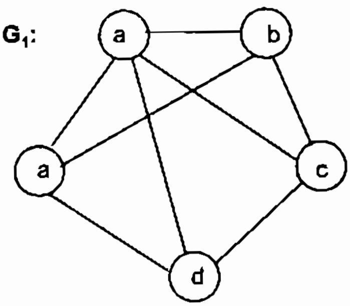
b) Theo câu a thì đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_7 có độ dài bằng 2 (vì $x_7 \in A(2)$), đó là đường đi: $x_1x_2x_7$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

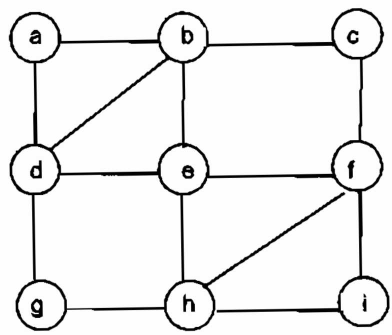
27. a) Viết thuật toán tìm đường đi Euler dưới dạng giả mã đối với đồ thị vô hướng liên thông có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

b) Hãy kiểm tra xem các đồ thị cho dưới đây có đường (chu trình Euler) không, nếu có hãy xây dựng đường (chu trình) Euler đó:

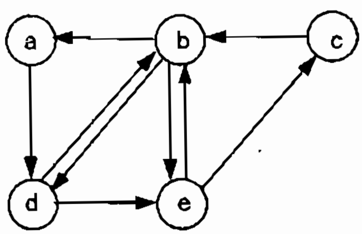
a) G_1:



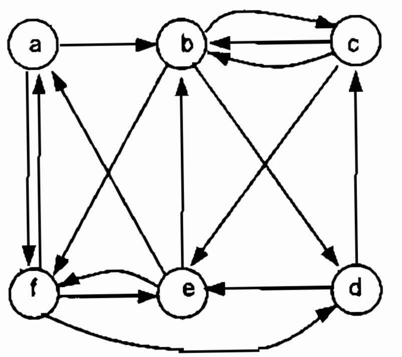
b) G_2:



c) G_3:



d) G_4:



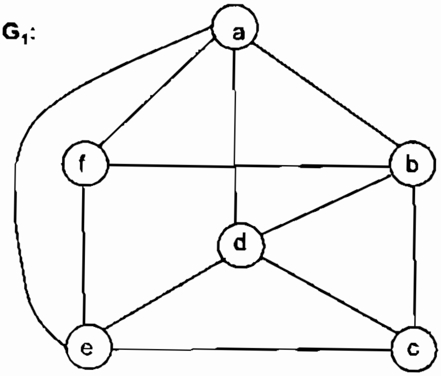
28. Trong số các đồ thị của bài tập 27.b, hãy cho biết đồ thị nào là đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler, đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton?

29. a) Xây dựng thuật toán tìm đường đi Euler trong đồ thị có hướng.

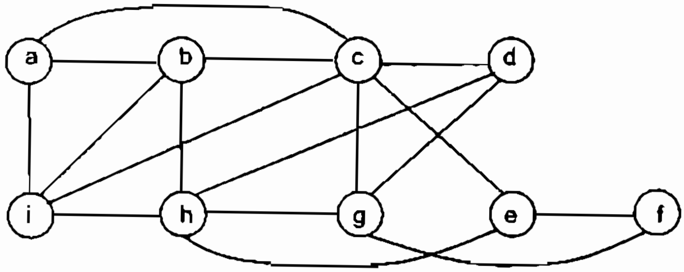
b) Trong các đồ thị sau đây, đồ thị nào có đường Euler, nếu có hãy xây dựng đường Euler đó?

www.thuvien247.net

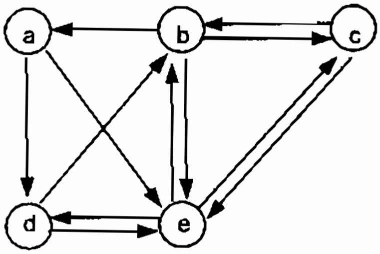
G_1:



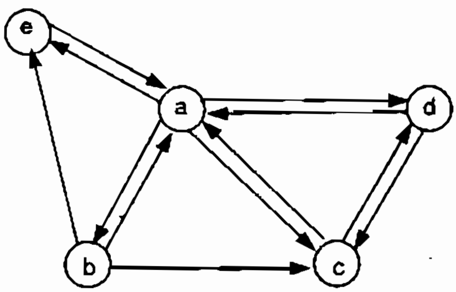
G_2:



G_3:



G_4:



30. Cho quan hệ $R \subseteq A \times A$ (ở đây $A = \{a, b, c, d\}$) có dạng ma trận lôgic

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

www.thuvien247.net

a) Từ ma trận hãy viết R dưới dạng liệt kê.

b) Đưa quan hệ R về dạng đồ thị. Đồ thị của quan hệ R có đường Euler không? Nếu có hãy vẽ đường Euler đó.

31. Cho A = {1, 2, 3, 4, 5} và R $\subseteq$ A × A, ở đây:

R = {(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 1), (1, 4), (1, 5), (5, 1), (5, 2), (2, 5), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)}.

a) Biểu diễn R dưới dạng ma trận lôgic.

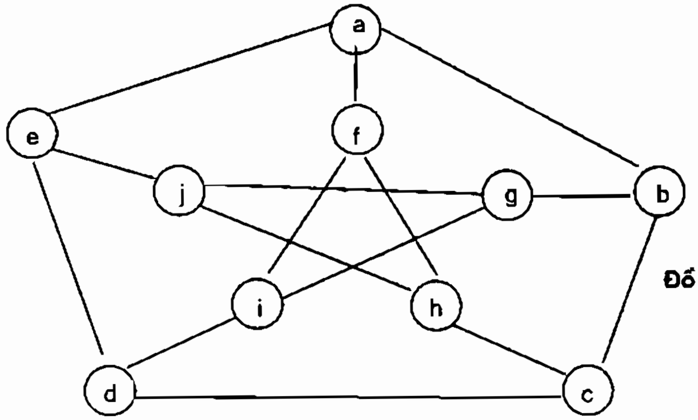
b) Xây dựng đồ thị có hướng của quan hệ R. Đồ thị này có chu trình Euler không? Nếu có hãy vẽ chu trình đó.

c) Tìm đồ thị $\overline{G}$ của đồ thị G, ở đây G là đồ thị của quan hệ R được xây dựng trong câu b. Từ đó tìm quan hệ $\overline{R}$ của $\overline{G}$. Trong $\overline{G}$ có tồn tại chu trình Euler không? Vì sao?

32. Với giá trị nào của n thì các đồ thị sau có đường đi Hamilton?

a) K_n.   b) C_n.   c) W_n.

33. Chỉ ra rằng đồ thị Petersen dưới đây không có chu trình Hamilton, nhưng đồ thị con nhận được bằng cách xoá một đỉnh x và tất cả các đỉnh liền kề với x sẽ có chu trình Hamilton:



Đồ thị Petersen

34. Thuật toán Fleury xây dựng chu trình Euler bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của một đa đồ thị liên thông và tạo chu trình bằng cách chọn lần lượt các cạnh. Mỗi lần một cạnh được chọn và được xoá đi. Các cạnh được chọn liên tiếp sao cho mỗi cạnh bắt đầu tại nơi mà cạnh liền trước kết thúc và chỉ chọn cạnh cầu nếu không còn cạnh nào khác để chọn.

a) Biểu diễn thuật toán Fleury dưới dạng giả mã.

b) Chứng minh rằng thuật toán Fleury luôn tạo ra chu trình Euler.

c) Hãy đưa ra một dạng biến thể của thuật toán Fleury để xây dựng đường Euler.

35. Trong một đợt thi đấu bóng bàn có n (n ≥ 2) đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ gặp một đấu thủ khác đúng một lần. Trong thi đấu bóng bàn chỉ có

www.thuvien247.net

một khả năng thắng hoặc thua. Chứng minh rằng, sau đợt thi đấu có thể xếp tất cả các đấu thủ đứng thành một hàng dọc để người đứng sau thắng người đứng ngay trước mình.

36. Giả sử G = <X, U> có đường đi cực đại $x_0x_1x_2 \ldots x_l$. Nếu $m(x_0) + m(x_l) \geq l + 1$ thì đồ thị G' với tập đỉnh $X' = \{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_l\}$ có chu trình Hamilton.

37. Giả sử đồ thị G liên thông. Nếu các đỉnh của đường đơn cực đại tạo thành đồ thị con có chu trình Hamilton thì G cũng có chu trình Hamilton.

38. Trong đồ thị liên thông G = <X, U> có n đỉnh.

a) Nếu với mọi đỉnh $a, b \in X$ mà $m(a) + m(b) \geq n - 1$ thì G có đường Hamilton.

b) Nếu với mọi $a, b \in X$ mà $m(a) + m(b) \geq n$ thì G có chu trình Hamilton.

39. Áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất:

a) Từ đỉnh a đến đỉnh d trong bài tập giải mẫu số 18.

b) Từ đỉnh b đến đỉnh z trong bài tập giải mẫu số 20.

c) Từ đỉnh d đến đỉnh z trong bài tập giải mẫu số 21.

d) Từ đỉnh a_{10} đến đỉnh a_{14} trong bài tập giải mẫu số 23.

e) Từ đỉnh b đến đỉnh z trong bài tập giải mẫu số 24.

40. a) Cho đồ thị vô hướng không trọng số như bài tập giải mẫu số 26. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_9 đến đỉnh x_4.

b) Cho đồ thị có hướng không trọng số như bài tập giải mẫu số 25. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_{12} đến đỉnh x_2.

41. Chứng minh rằng:

a) Mọi đồ thị đấu loại là nửa Hamilton.

b) Mọi đồ thị đấu loại liên thông mạnh là Hamilton.

www.thuvien247.net

Chương 8

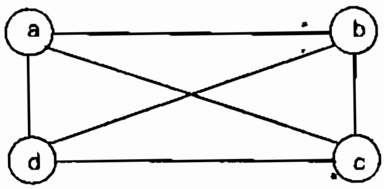
ĐỒ THỊ PHẲNG – SẮC SỐ CỦA ĐỒ THỊ VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU BẢN ĐỒ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

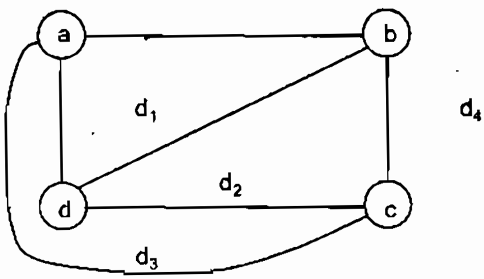
§1. ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ

1. Các khái niệm và các định nghĩa liên quan tới đồ thị phẳng

- Đồ thị vô hướng G = <X, U> gọi là đồ thị phẳng khi và chỉ khi G có thể vẽ được trên một mặt phẳng, sao cho các cạnh của nó chỉ cắt nhau ở đỉnh mà thôi. Hình vẽ đó của G gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị G và ký hiệu là G_P.
- Biểu diễn phẳng của G tạo ra trên mặt phẳng các diện hữu hạn mà mỗi diện là một miền của mặt phẳng được giới hạn bởi các cạnh của đồ thị G (gọi là biên), sao cho hai điểm bất kỳ của miền này đều có thể nối bằng một nét liền mà không gặp một đỉnh hoặc một cạnh nào ở bên trong. *Ví dụ:* G = <X, U> có dạng



là một đồ thị phẳng, vì nó có biểu diễn phẳng G_P có dạng:



được tạo nên bởi 4 diện: d_1, d_2, d_3 là 3 diện hữu hạn, còn d_4 là diện vô hạn. Diện vô hạn là phần mặt phẳng còn lại sau khi đã loại bỏ tất cả cả các diện hữu hạn của đồ thị G_p.

www.thuvien247.net

- Hai diện trong biểu diễn phẳng của một đồ thị được gọi là kề nhau nếu biên của chúng có ít nhất một cạnh chung. Hai diện chỉ tiếp xúc tại một điểm không gọi là hai diện kề nhau.
- Một cách tổng quát, nếu G là một đồ thị phẳng thì biểu diễn phẳng của G ta ký hiệu là G_p chia mặt phẳng thành r miền $d_1, d_2, \ldots, d_r$, trong đó r – 1 miền hữu hạn $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}$, còn một miền vô hạn là d_r. Ta ký hiệu $m(d_i)$ là bậc của diện d_i với định nghĩa $m(d_i)$:= số các cạnh của G tạo nên diện d_i. Bậc của biểu diễn phẳng G_p là $m(G_p) := \sum_{i=1}^{r} m(d_i)$, ở đây r là số diện được tạo ra trong biểu diễn phẳng G_p của G.
- Chu số của đồ thị G = <X, U> với $|X| = n$ đỉnh, $|U| = m$ cạnh và p thành phần liên thông ký hiệu là $C(G) := m - n + p$. Chu số của đồ thị liên quan tới nhiều tính chất trong lý thuyết đồ thị, trong đó có liên quan tới số diện trong biểu diễn phẳng của đồ thị.
- Đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là không phẳng. Nếu mọi đồ thị G = <X, U> chứa K_5 hoặc $K_{3,3}$ như là đồ thị con của nó đều là đồ thị không phẳng.
- Nếu một đồ thị là phẳng, mọi đồ thị nhận được từ đồ thị này bằng cách bỏ đi cạnh (a, b) và thêm vào đỉnh mới c cùng hai cạnh mới (c, a) và (c, b) đều là đồ thị phẳng. Phép toán trên gọi là phép phân chia sơ cấp.

  Hai đồ thị $G_1 = <X_1, U_1>$ và $G_2 = <X_2, U_2>$ được gọi là hai đồ thị đồng phôi nếu chúng nhận được từ cùng một đồ thị G = <X, U> bằng một dãy các phép toán phân chia sơ cấp.

2. Các tính chất có liên quan tới đồ thị phẳng

Định lý 1. Số diện hữu hạn trong biểu diễn phẳng của đồ thị G = <X, U> luôn luôn bằng chu số của đồ thị G.

Định lý 2 (công thức Euler). Nếu G = <X, U> là đồ thị phẳng, liên thông, có $|X| = n$ đỉnh, $|U| = m$ cạnh thì biểu diễn phẳng G_p có số diện $r = m - n + 2$.

Định lý 3 (Kuratowski). Đồ thị G = <X, U> là không phẳng khi và chỉ khi G = <X, U> chứa một đồ thị con đồng phôi với đồ thị đầy đủ K_5 hoặc với đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$.

Hệ quả 1. Trong một đơn đồ thị phẳng liên thông G = <X, U> luôn có một đỉnh $x \in X$ với bậc $m(x) \le 5$.

Hệ quả 2. Nếu G = <X, U> là đơn đồ thị phẳng và liên thông thì ta có:

$$m(G_p) = \sum_{i=1}^{r} m(d_i) = 2\,|U|.$$

www.thuvien247.net

Hệ quả 3. Nếu G = <X, U> là đồ thị đơn, phẳng và liên thông với $|X| = n$ $(n \geq 3)$ đỉnh, $|U| = m$ cạnh thì $m \leq 3n - 6$.

Hệ quả 4. Nếu G = <X, U> là đồ thị đơn, phẳng và liên thông với $|X| = n$ $(n \geq 3)$ đỉnh $|U| = m$ cạnh và không có chu trình độ dài 3 thì $m \leq 2n - 4$.

§2. SẮC SỐ CỦA ĐỒ THỊ VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU BẢN ĐỒ

1. Các khái niệm liên quan tới bài toán tô màu bản đồ

a) Sắc số của đồ thị G = <X, U> là số màu tối thiểu dùng để tô màu các đỉnh sao cho hai đỉnh kề nhau phải tô bằng hai màu khác nhau. Sắc số của đồ thị G ký hiệu là s(G).

Nếu trong đồ thị G = <X, U> không tô màu theo đỉnh mà tô màu theo cạnh thì bài toán sắc số trở thành bài toán sắc lớp được định nghĩa như sau: Sắc lớp của G (ký hiệu $s_l(G)$) là số màu tối thiểu dùng để tô màu các cạnh sao cho hai cạnh liền kề được tô bằng hai màu khác nhau.

b) Bài toán tô màu bản đồ dẫn đến nhiều kết quả lý thú trong lý thuyết đồ thị, chẳng hạn bài toán 4 màu.

Bài toán tô màu bản đồ phát biểu như sau: Sắc số của bản đồ là số màu tối thiểu để tô một bản đồ sao cho hai miền có biên giới chung phải được tô bằng hai màu khác nhau.

Bài toán tô màu bản đồ (BĐ) có liên quan tới bài toán tô màu đồ thị phẳng. Vì thế để tô màu bản đồ ta chuyển một bản đồ về một đồ thị phẳng mà ta gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ (BĐ*) theo các nguyên tắc sau:

- Mỗi miền của bản đồ đặt tương ứng với một đỉnh.
- Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu hai miền tương ứng với hai đỉnh đó có biên giới chung.
- Hai miền chung nhau biên giới chỉ bởi một điểm không được coi là hai miền có chung biên giới.

Chú ý: Trong đồ thị đối ngẫu của bản đồ các đỉnh được tô màu gì thì vùng tương ứng với đỉnh đó được tô màu ấy.

2. Các kết quả chính liên quan tới sắc số

Định lý 4 (Konig). Đồ thị G = <X, U> có s(G) = 2 khi và chỉ khi G = <X, U> không có chu trình độ dài lẻ.

Định lý 5. $s(K_n) = |X| = n$.

Định lý 6

$$s(C_n) = \begin{cases} 3, \text{ nếu } n = 2k + 1 & (k \geq 1) \\ 2, \text{ nếu } n = 2k & (k \geq 2) \end{cases},$$

C_n là đồ thị chu trình n đỉnh.

www.thuvien247.net

Định lý 7. Giả sử G = <X, U> là đồ thị vô hướng có |X| = n đỉnh. Khi đó số ổn định trong của G là $\alpha(G)$ và sắc số s(G) thỏa mãn bất đẳng thức $\alpha(G).s(G) \geq n$.

Định lý 8. Nếu mỗi đỉnh $x \in X$ của G = <X, U> có bậc $m(x) \leq k$ thì $s(G) \leq k + 1$.

Định lý 9. Nếu G = <X, U> có |X| = n đỉnh thì ta có các bất đẳng thức: $s(\overline{G}).s(G) \geq n$.

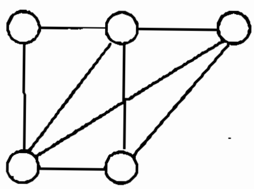
Định lý 10 (Định lý 4 màu). Mọi đồ thị phẳng G = <X, U> đều có sắc số $s(G) \leq 4$.

Hệ quả 5. Số màu tối thiểu để tô màu bản đồ là không vượt quá 4.

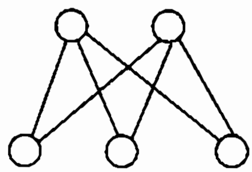
B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Cho các đồ thị sau:

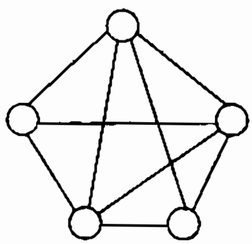
G_1:



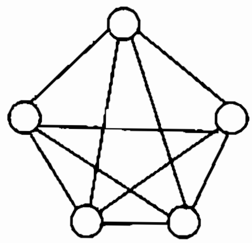
G_2:



G_3:



G_4:



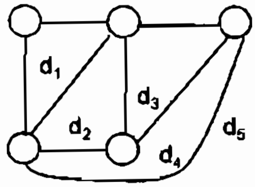
a) Trong các đồ thị G_i (i = 1, 2, 3, 4) hãy vẽ biểu diễn phẳng của nó. Nếu có biểu diễn phẳng hãy tìm bậc $m(G_p)$ của biểu diễn phẳng đó, đồng thời kiểm tra lại tính đúng đắn của các Định lý 1, 2 và các Hệ quả 1, 2 và 3 đối với các đồ thị trên.

b) Nếu không có biểu diễn phẳng thì hãy chỉ ra đồ thị đó là không phẳng bằng cách áp dụng các hệ quả đã biết.

Giải. a)

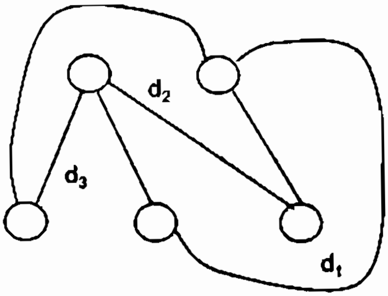
- G_1 có biểu diễn phẳng là G_{1p} và G_{1p} chia mặt phẳng thành 5 miền hay 5 diện d_1, d_2, d_3, d_4 (hữu hạn) và d_5 (diện vô hạn). Bậc của mỗi diện là $m(d_1) = m(d_2) = m(d_3) = m(d_4) = 3$ và $m(d_5) = 4$. Vậy $m(G_{1p}) = 16 = 2.8 = 2|U|$ (Hệ quả 2).

www.thuvien247.net



Chu số của G_1 là $C(G_1) = m - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4 = r - 1$ (thỏa mãn Định lý 1, 2).

- G_2 có biểu diễn phẳng G_{2p} là



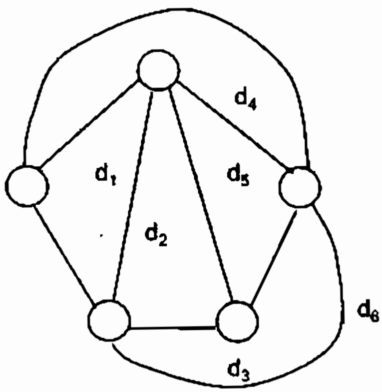
và chia mặt phẳng thành 3 diện: Hai diện d_1, d_2 là hữu hạn còn diện d_3 là vô hạn.

$m(d_1) = 4$, $m(d_2) = 4$ và $m(d_3) = 4$;

$m(G_{2p}) = 12 = 2.6 = 2|U|$ (Hệ quả 2).

Chu số $C(G_{2p}) = m - n + k = 6 - 5 + 1 = 2 = r - 1$ (thỏa mãn Định lý 1, 2).

- G_3 có biểu diễn phẳng G_{3p} là



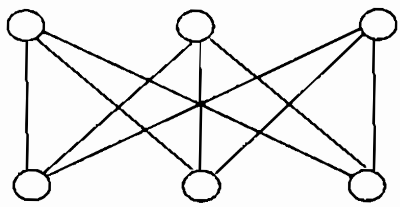
và chia mặt phẳng thành 6 diện là d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 (diện hữu hạn), còn d_6 diện vô hạn với $m(d_1) = m(d_2) = m(d_3) = m(d_4) = m(d_5) = 3$ và $m(d_6) = 3$. Ta lại có $m(G_{3p}) = 18 = 2.|U|$ (Hệ quả 2) và chu số $C(G_3) = m - n + k = 9 - 5 + 1 = 5 = r - 1$ (thỏa mãn Định lý 1 và 2).

www.thuvien247.net

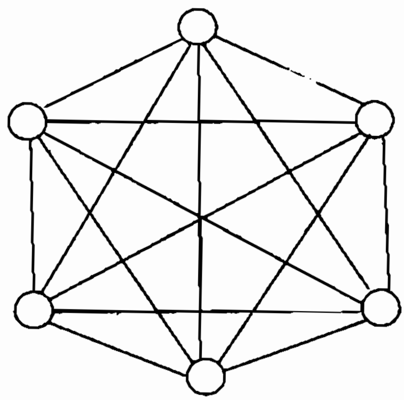
- G_4 không vẽ được biểu diễn phẳng theo đúng định nghĩa.
  Ta chỉ ra G_4 (chính là đồ thị đầy đủ K_5) không phải là đồ thị phẳng. Vì theo Hệ quả 3, G_4 là đơn đồ thị liên thông có $|X| = 5$ đỉnh, $|U| = 10$ cạnh. Nếu G_4 là phẳng thì theo Hệ quả 3 phải thỏa mãn bất đẳng thức $m \le 3n - 6 \Leftrightarrow 10 \le 3.5 - 6 \Leftrightarrow 10 \le 9$ vô lý. Vậy G_4 không phải là đồ thị phẳng.

2. Chứng minh hai đồ thị $K_{3,3}$ và K_6 dưới đây là không phẳng:

$K_{3,3}$:



K_6:



(chú ý $K_{3,3}$ là bài toán 3 nhà 3 giếng).

Giải

- Đối với $K_{3,3}$: Đồ thị cho ở trên là đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$, không có biểu diễn phẳng. Ta chỉ ra $K_{3,3}$ không phẳng bằng cách sử dụng Hệ quả 4. K_{33} có $|X| = 6$ đỉnh, $|U| = 9$ cạnh và K_{33} là đơn, liên thông và không có chu trình độ dài lẻ nên theo Hệ quả 4 nếu K_{33} là đồ thị phẳng thì ta có bất đẳng thức: $m \le 2n - 4 \Leftrightarrow 9 \le 2.6 - 4 = 8$ vô lý. Chứng tỏ $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng.
- Đối với K_6: Chứng minh đồ thị K_6 là không phẳng bằng cách áp dụng Hệ quả 3. Giả sử K_6 là phẳng, theo Hệ quả 3 thì $m \le 3n - 6 \Leftrightarrow 15 \le 3.6 - 6 \Leftrightarrow 15 \le 12$ vô lý. Vậy K_6 là không phẳng.

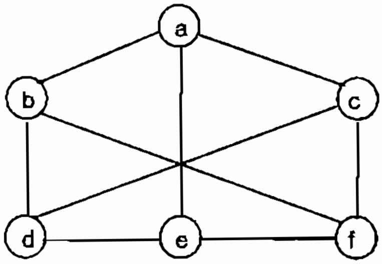
3. Cho đồ thị $G = \langle X, U\rangle$ là đơn đồ thị liên thông và phẳng có $|X| = 20$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Tìm số diện r trong biểu diễn phẳng G_p của G.

www.thuvien247.net

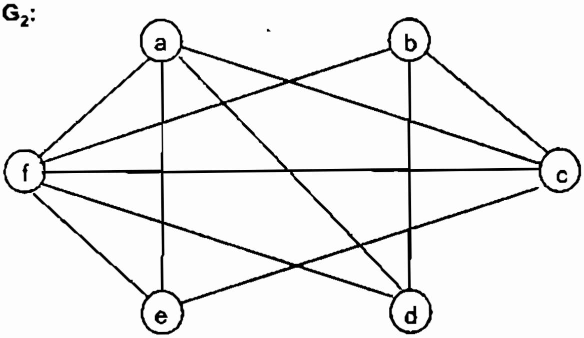
Giải. Theo Định lý 2 (công thức Euler) ta có r = m − n + 2, ở đây m = |U|, n = |X| = 20 còn r là số diện được tạo ra trong biểu diễn phẳng G_p. Do bậc mỗi đỉnh bằng 3 nên theo Định lý 1 (Định lý bắt tay) Chương 6 ta có m(G) = 2|U| = 2m = 20.3 = 60. Vậy m = 30 cạnh. Từ đó r = 30 − 20 + 2 = 12.

4. Cho hai đồ thị sau:

G_1:



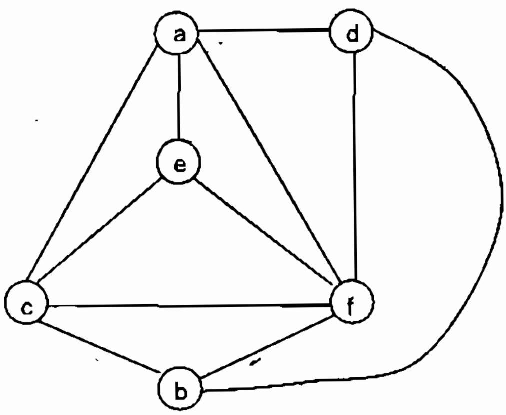
G_2:



Hai đồ thị trên có là đồ thị phẳng không, vì sao?

Giải

- G_1 là đồ thị không phẳng. Vì nếu nó phẳng thì G_1 thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 4 nên ta có $m \le 2n - 4 \Leftrightarrow 9 \le 2.6 - 4 \Leftrightarrow 9 \le 8$ vô lý. Vậy G_1 là không phẳng.
- G_2 là đồ thị phẳng, vì G_2 có biểu diễn phẳng là đồ thị có dạng



www.thuvien247.net

5. Chứng minh rằng nếu G = <X, U> là đồ thị đơn, phẳng, liên thông có m cạnh, n đỉnh ($n \geq 3$) và không có chu trình độ dài 3 thì ta luôn có bất đẳng thức $m \leq 2n - 4$ (Hệ quả 4).

Giải. Vì đơn đồ thị liên thông và phẳng nên biểu diễn phẳng G_p của nó chia mặt phẳng thành r diện $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}, d_r$, trong đó $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}$ là $r - 1$ diện hữu hạn còn dr là diện vô hạn.

Do G = <X, U> là đơn, phẳng, liên thông và không có chu trình độ dài 3 nên $m(d_i) \geq 4$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) và theo Hệ quả 2 ta có $m(G_P) = \sum_{i=1}^{r} d_i = 2|U| = 2m \geq 4r$ hay $\frac{2m}{4} = \frac{m}{2} \geq r$. Theo công thức Euler (Định lý 2) ta có $\frac{m}{2} \geq r = m - n + 2$ hay $m \leq 2n - 4$ là điều cần chứng minh.

6. Giả sử đồ thị phẳng liên thông G = <X, U> có $|X| = 6$ đỉnh, mỗi đỉnh $x \in X$ có bậc $m(x) = 4$. Biểu diễn phẳng của đồ thị trên chia mặt phẳng thành bao nhiêu diện?

Giải. $m(G) = 6.4 = 24 = 2.12 = 2|U|$. Vậy G có 12 cạnh.

Theo công thức Euler thì $r = m - n + 2 = 12 - 6 + 2 = 8$. Hay G_P chia mặt phẳng thành 8 diện.

7. Giả sử đồ thị G = <X, U> là phẳng và liên thông có 30 cạnh. Nếu biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng thành 20 diện, thì đồ thị này có bao nhiêu đỉnh?

Giải. Từ công thức Euler $r = m - n + 2$. Ta có $20 = 30 - n + 2$. Hay số đỉnh $n = 12$.

8. Cho G = <X, U> là đồ thị đơn, phẳng, liên thông có $|X| = n$ ($n \geq 4$) đỉnh, $|U| = m$ cạnh và không có chu trình độ dài 4 hoặc ít hơn. Chứng minh bất đẳng thức $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ nếu $n \geq 4$.

Giải. Giả sử biểu diễn phẳng G_p của G chia mặt phẳng thành r diện $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}, d_r$, trong đó d_r là diện vô hạn. Theo giả thiết của đầu bài thì $m(d_i) \geq 5$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). Theo Hệ quả 2 ta có $m(G_p) = \sum_{i=1}^{n} m(d_i) = 2|U| \geq 5r$, hay $2m \geq 5r = 5(m - n + 2) \Leftrightarrow 2m \geq 5m - 5n + 10 \Leftrightarrow 5n - 10 \geq 3m \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ là điều phải chứng minh.

www.thuvien247.net

9. Chứng minh Định lý 2 (công thức Euler). Nếu đa đồ thị phẳng liên thông $G = <X, U>$ có $|X| = n$ đỉnh, $|U| = m$ cạnh thì biểu diễn phẳng G_p có số diện $r = m - n + 2$.

Giải. Vì số diện là r, trong đó có một diện vô hạn nên số diện hữu hạn là $r - 1$ = chu số của $G = m - n + 1$ (Định lý 1). Hay $r = m - n + 2$ (công thức Euler).

10. Chứng minh Hệ quả 1: Trong một đơn đồ thị phẳng liên thông $G = <X, U>$ ta luôn luôn có một đỉnh $x \in X$ với bậc $m(x) \le 5$.

Giải. Vì $G = <X, U>$ là đơn, phẳng, liên thông nên biểu diễn phẳng G_p có r diện $d_1, d_2, \ldots, d_{r-1}, d_r$ thỏa mãn:

$$m(G_p) = \sum_{i=1}^{r} m(d_i) = 2|U| = 2m \ge 3r$$

hay $$r \le \frac{2m}{3}. \quad (1)$$

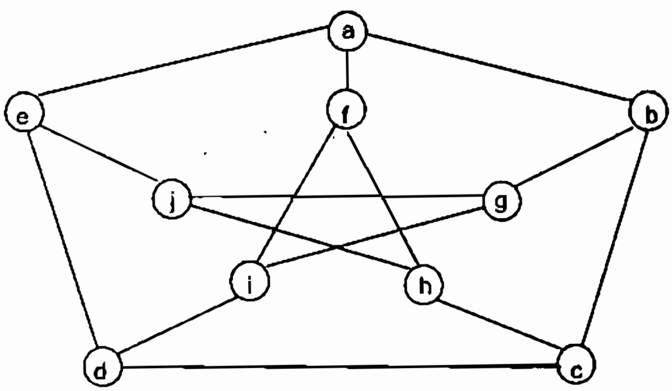
Ta giả sử ngược lại, nếu trong $G = <X, U>$, mọi $x \in X$ đều có $m(x) \ge 6$ thì $2|U| = 2m \ge 6n$, hay $n \le \frac{m}{3}$. (2)

Từ công thức Euler và (1) suy ra

$$r = m - n + 2 \le \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \le 3n - 6 \text{ (Hệ quả 3)} \Leftrightarrow \frac{m+6}{3} \le n \quad (3)$$

Từ (3) và (2) ta lại có $\frac{m+6}{3} \le \frac{m}{3} \Leftrightarrow m + 6 \le m \Leftrightarrow 6 \le 0$ vô lý. Đó là điều phải chứng minh, hay có tồn tại $x \in X$ để $m(x) \le 5$.

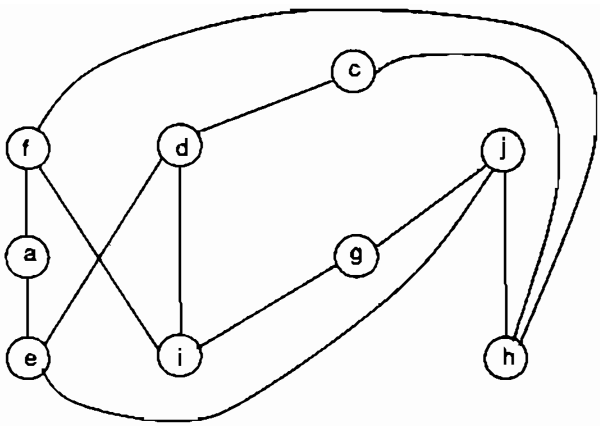
11. Đồ thị Petersen $G = <X, U>$ cho dưới đây có là đồ thị phẳng không?



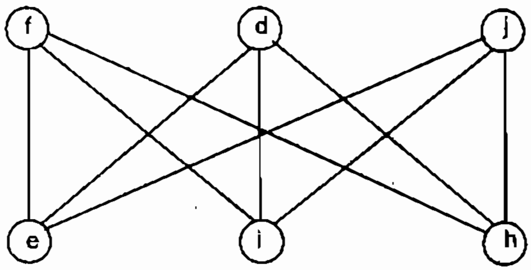
Giải. Trong đồ thị G bỏ đỉnh b và ba cạnh liền kề với nó là các cạnh (b, a), (b, g), (b, c) ta được đồ thị G' có dạng

www.thuvien247.net

G':



$K_{3,3}$:



ở đây G' đồng phôi với $K_{3,3}$ có các tập đỉnh $X_1 = \{f, d, j\}$, $X_2 = \{e, i, h\}$. Vì nó nhận được bằng một dãy các phân chia sơ cấp: Xóa cạnh (d, h) và thêm cạnh (c, h) và (c, d); xóa cạnh (e, f) và thêm cạnh (a, e) và (a, f); xóa cạnh (i, j) và thêm cạnh (g, i) và cạnh (g, j). Theo Định lý 3 thì đồ thị Petersen G là không phẳng.

12. Giả sử đồ thị phẳng G = <X, U> có k thành phần liên thông, |X| = n đỉnh, |U| = m cạnh và biểu diễn phẳng G_p của G chia mặt phẳng thành r diện. Tìm công thức liên hệ giữa r và m, n, k.

Giải. Giả sử $G_i = \langle X_i, U_i \rangle$ là thành phần liên thông thứ i trong đồ thị G = <X, U> (i = 1, 2, ..., k) với $|X_i| = n_i$, $|U_i| = m_i$, ở đây

$$X = \bigcup_{i=1}^{K} X_i, \quad U = \bigcup_{i=1}^{K} U_i. \text{ Đặt } |X| = \sum_{i=1}^{K} n_i = n$$

và $$|U| = \sum_{i=1}^{K} |U_i| = \sum_{i=1}^{K} m_i = m.$$

Do G = <X, U> là phẳng nên các thành phần liên thông G_i (i = 1, 2, ..., k) cũng phẳng. G_{ip} là biểu diễn phẳng của G_i chia mặt phẳng thành r_i diện (i = 1, 2, ..., k). Theo Định lý 1 thì

$$r_i - 1 = m_i - n_i + 1 \ (i = 1, 2, ..., k) \text{ (Công thức Euler).}$$

www.thuvien247.net

Từ công thức này có biểu diễn phẳng của $G = <X, U>$, ở đây $|X| = n$, $|U| = m$, k thành phần liên thông chia mặt phẳng thành r diện được tính theo công thức

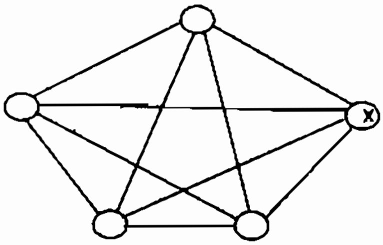
$$r = \sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{i=1}^{k} n_i + k + 1 = m - n + k + 1$$

hay $\quad r = m - n + k + 1.$

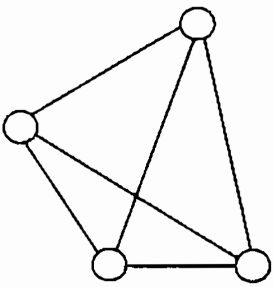
13. Cho ba đồ thị không phẳng K_5, K_6 và $K_{3,3}$. Đồ thị nào trong các đồ thị trên có tính chất: Bỏ một đỉnh bất kỳ và bỏ các cạnh liền kề với nó sẽ tạo ra một đồ thị phẳng?

Giải

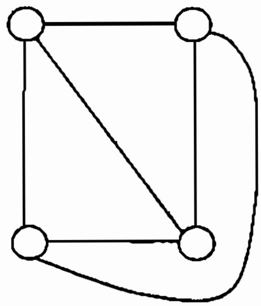
- Xét K_5:



bỏ đỉnh x và 4 cạnh liền kề ta được đồ thị phẳng có dạng

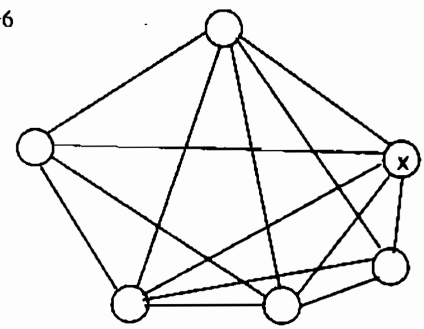


với biểu diễn phẳng là



Vậy K_5 có tính chất trên.

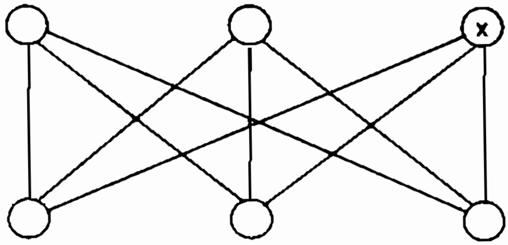
- Xét K_6



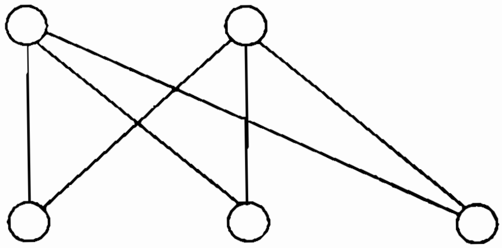
bỏ đỉnh x và các cạnh liền kề ta được đồ thị K_5 mà K_5 là không phẳng.

www.thuvien247.net

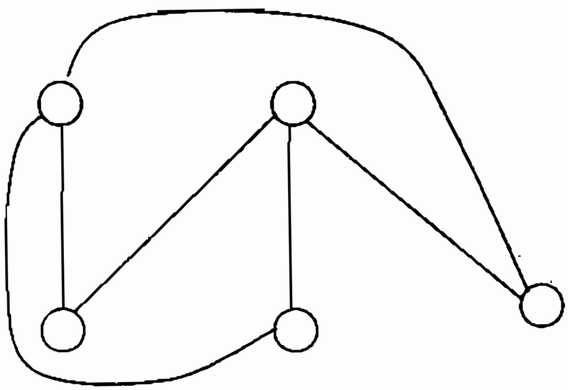
- Xét $K_{3,3}$



bỏ x và các cạnh liền kề được đồ thị phẳng



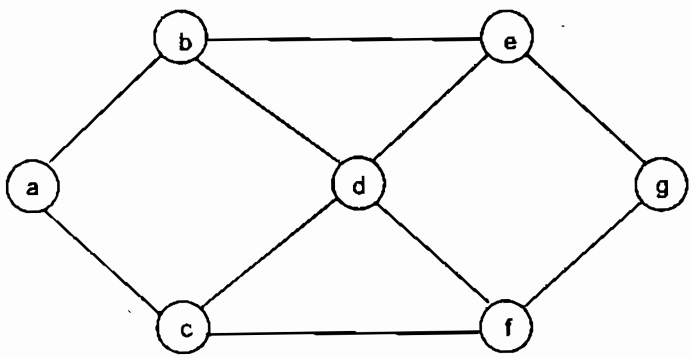
Vì nó có biểu diễn phẳng là



Vậy $K_{3,3}$ có tính chất trên.

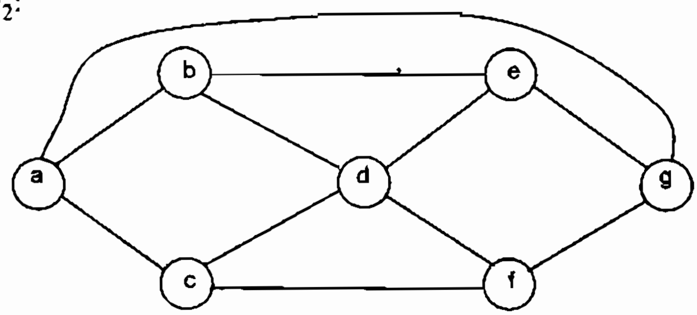
14. Cho hai đồ thị G_1 và G_2 dưới đây:

G_1:



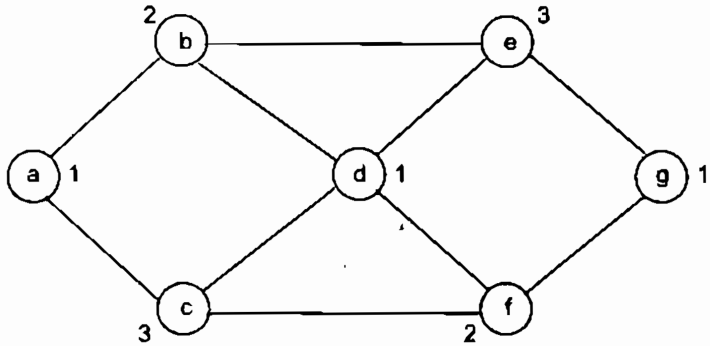
www.thuvien247.net

và G_2:

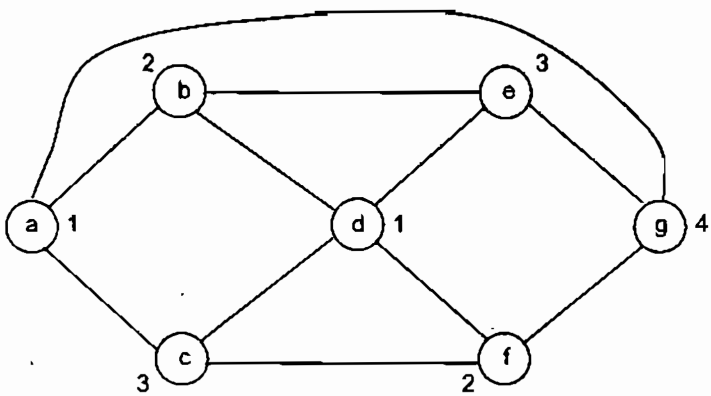


Tìm $s(G_1)$ và $s(G_2)$.

Giải. $s(G_1) = 3$ với cách tô 3 màu 1, 2, 3 dưới đây:



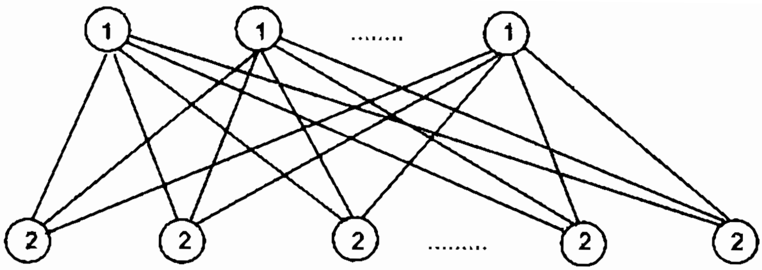
$s(G_2) = 4$ với cách tô 4 màu 1, 2, 3, 4 dưới đây:



15. Tìm $s(K_{n,m})$.

Giải. $K_{n,m}$ là đồ thị phân đôi đầy đủ $<X_1 \cup X_2, U>$ với $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ và với mỗi $x \in X_1$ và mỗi $y \in X_2$ ta luôn có cạnh $(x, y) \in U$, ở đây $|X_1| = n$ và $|X_2| = m$. Ta tô màu theo nguyên tắc: tất cả các đỉnh trong X_1 tô màu 1, còn tất cả các đỉnh trong X_2 tô màu 2 ta có $s(K_{n,m}) = 2$ (xem cách tô hình dưới).

www.thuvien247.net

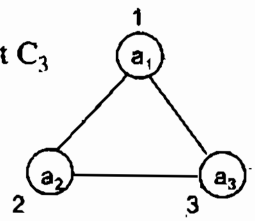


16. Chứng minh (Định lý 6) $\quad (C_n) = \begin{cases} 2, \text{ nếu } n = 2k \\ 3, \text{ nếu } n = 2k+1 \end{cases}$,

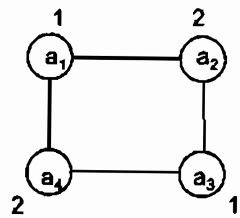
ở đây C_n là đồ thị chu trình với $n \geq 3$.

Giải

- Trước hết xét C_3



và C_4:



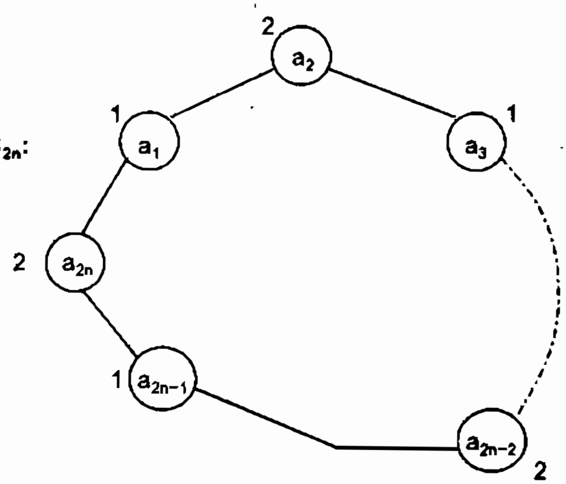
Trong C_3 tô màu 1 cho a_1, màu 1 không thể tô cho a_2 và a_3 nên tô đỉnh a_2 màu 2. Dĩ nhiên đỉnh a_3 không thể tô màu 1 hoặc màu 2 nên a_3 tô màu 3. Vậy $s(C_3) = 3$.

Trong C_4 tô màu 1 cho đỉnh a_1 và đỉnh a_3, các đỉnh a_2, a_4 không thể tô màu 1 mà phải tô màu 2. Vậy $s(C_4) = 2$.

- Xét C_{2n} và C_{2n+1}

C_{2n} có số đỉnh là 2n: $a_1, a_2, ..., a_{2n-1}, a_{2n}$ cho dưới dạng:

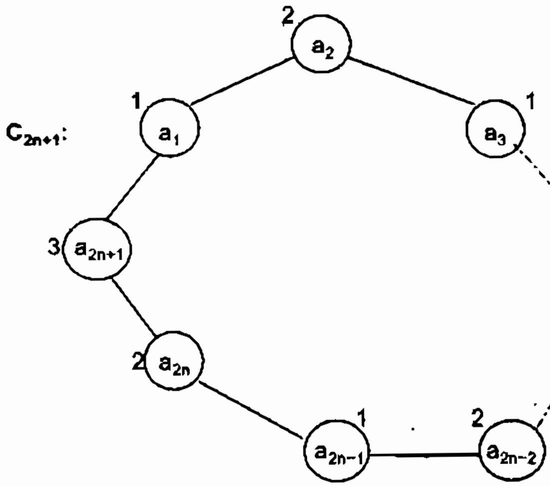
C_{2n}:



www.thuvien247.net

Các đỉnh $a_1, a_3, ..., a_{2n-1}$ tô màu 1, các đỉnh chỉ số chẵn còn lại tô màu 2. Vậy $s(C_{2n}) = 2$.

• C_{2n+1} có dạng:



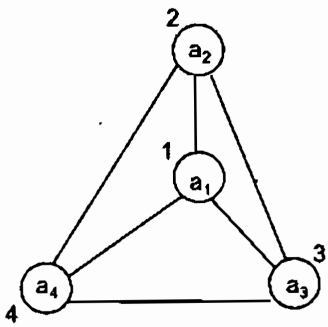
Các đỉnh $a_1, a_3, ..., a_{2n-1}$ tô màu 1; các đỉnh $a_2, a_4, ..., a_{2n}$ tô màu 2; các đỉnh còn lại a_{2n+1} không thể tô màu 1 hoặc màu 2 mà phải tô màu 3, hay $s(C_{2n+1}) = 3$.

Tóm lại $s(C_n) = \begin{cases} 2, \text{ nếu } n = 2k \text{ với } k = 2, 3, ... \\ 3, \text{ nếu } n = 2k + 1 \text{ với } k = 1, 2, 3, ... \end{cases}$

17. Tìm $s(W_n)$, ở đây W_n là đồ thị bánh xe với n + 1 đỉnh ($n \geq 3$).

Giải

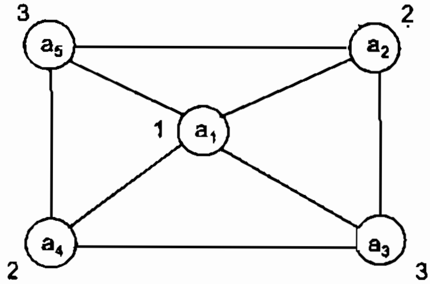
• W_3



Đỉnh a_1 tô màu 1; đỉnh a_2, a_3, a_4 không thể tô màu 1 do các đỉnh này liền kề với đỉnh a_1 nên đỉnh a_2 tô màu 2. Các đỉnh a_3, a_4 không thể tô màu 1 hoặc 2 nên a_3 phải tô màu 3. Do đó a_4 phải tô màu 4, hay $s(W_3) = 4$.

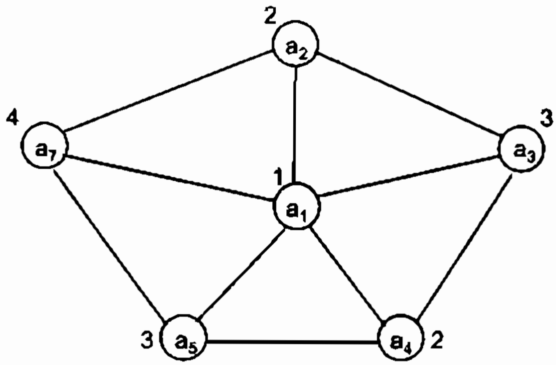
www.thuvien247.net

- W_4:



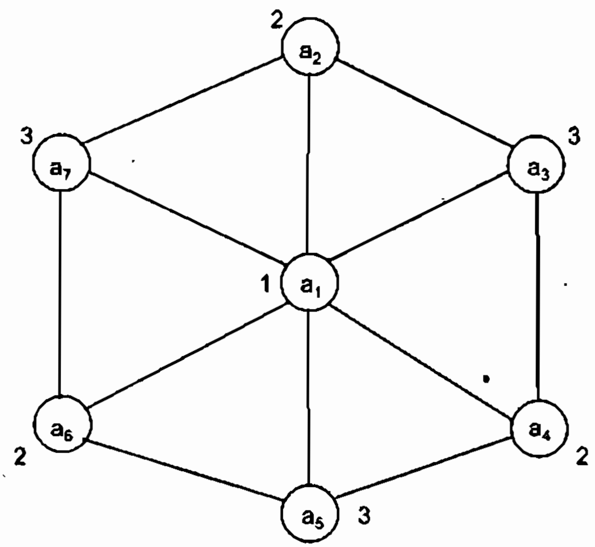
Đỉnh a_1 tô màu 1: a_2 phải tô màu 2; a_3 phải tô màu 3; a_4 tô màu 2 và a_5 phải tô màu 3. Vậy $s(W_4) = 3$

- W_5



Đỉnh a_1 tô màu 1; đỉnh a_2 và a_4 tô màu 2; đỉnh a_3 và đỉnh a_5 tô màu 3; đỉnh a_6 tô màu 4. Vậy $s(W_5) = 4$.

- W_6:



www.thuvien247.net

Với cách tô màu W_6 bởi 3 màu 1, 2, 3 như trên ta có $s(W_6) = 3$.

Dễ dàng chỉ ra được: $s(W_{2n}) = 3$, ở đây $n \geq 2$;

$s(W_{2n+1}) = 4$, ở đây $n \geq 1$.

18. Thuật toán sau đây có thể dùng để tô màu đồ thị đơn: Cho đơn đồ thị $G = <X, U>$, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ có n đỉnh. Có thể tô màu đồ thị bởi các bước sau:

Bước 1: Liệt kê các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần, chẳng hạn ta có

$$m(x_1) \geq m(x_2) \geq ... \geq m(x_n).$$

Gán màu 1 cho đỉnh x_1 và cho đỉnh tiếp theo trong danh sách mà không liền kề với đỉnh x_1. Thủ tục gán màu 1 cho các đỉnh dừng lại khi không còn đỉnh vào có thể gán màu 1 được nữa.

Bước 2: Thủ tục gán màu 2 cho các đỉnh chưa được gán màu 1 trong danh sách tương tự như thủ tục gán màu 1.

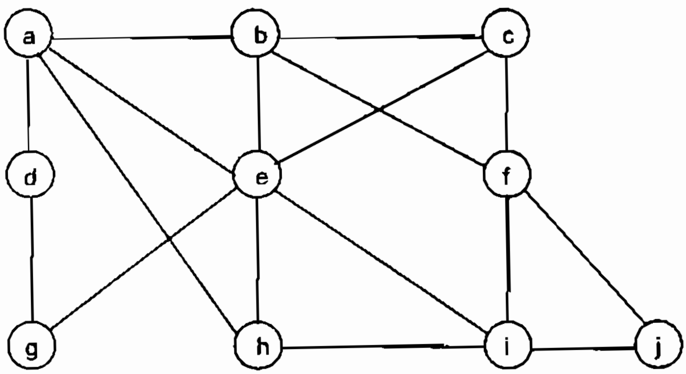
...

Do đồ thị hữu hạn nên thuật toán trên dừng lại sau một số hữu hạn bước và tất cả các đỉnh đều được gán màu.

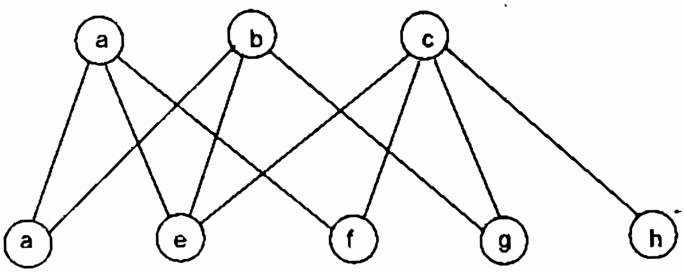
Áp dụng

Cho các đồ thị đơn sau:

G_1:



G_2:



Dùng thuật toán trên, tìm $s(G_1)$ và $s(G_2)$.

www.thuvien247.net

Giải

- Với G_1:

Gán màu 1 cho đỉnh e (có m(e) = 6), cho đỉnh d và đỉnh f.

Gán màu 2 cho đỉnh a (có m(a) = 4), cho đỉnh i, đỉnh c và g.

Gán màu 3 cho đỉnh b (có m(b) = 4), cho đỉnh h và đỉnh j.

Tất cả các đỉnh đều được gán với $s(G_1) = 3$.

- Với G_2:

Gán màu 1 cho các đỉnh b, c và a.

Gán màu 2 cho các đỉnh còn lại e, d, f, g và h $s(G_2) = 2$.

19. Hãy lập lịch thi trong một trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.

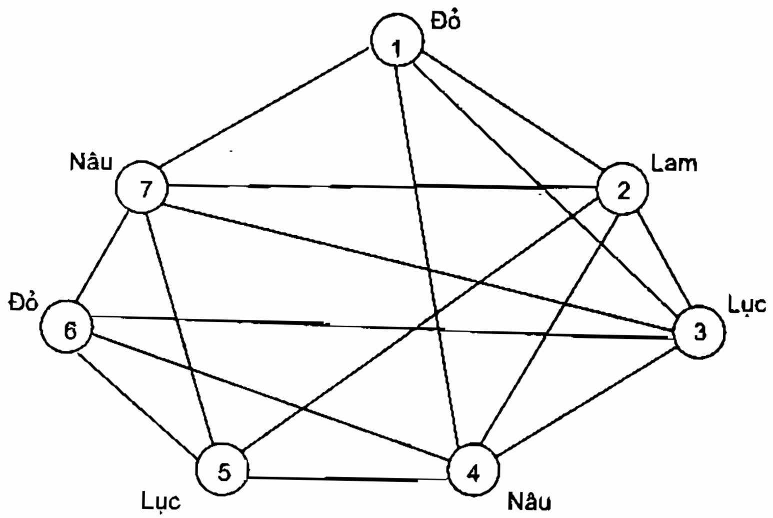
Giải. Có thể giải bài toán này bằng mô hình đồ thị, với mỗi đỉnh là một môn thi, có một cạnh giữa 2 đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả 2 môn tương ứng với 2 đỉnh đó. Thời gian thi mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy, việc lập lịch thi theo yêu cầu trên là việc tô màu đồ thị trên.

Áp dụng: Ta có 7 môn thi cần xếp lịch thi. Giả sử các môn được đánh số từ 1 đến 7 (đồ thị có 7 đỉnh) và các cặp môn thi sau có chung sinh viên (tương ứng với các cạnh của đồ thị): 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 7, 6 và 7.

Đồ thị dưới đây biểu diễn 7 môn thi là 7 đỉnh, và 14 cặp môn thi là 14 cạnh: $G = \langle X, U \rangle$ với $|X| = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$U = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5), (2,7), (3,4), (3,7), (4,5), (4,6), (5,7), (6,7)\}$$

G:



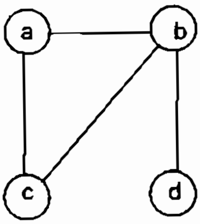
www.thuvien247.net

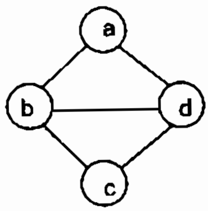
s(G) = 4 với cách tô như sau: đỉnh 1 và 6 tô màu đỏ; đỉnh 4 và 7 tô màu nâu; đỉnh 3 và 5 tô màu lục; đỉnh 2 tô màu lam.

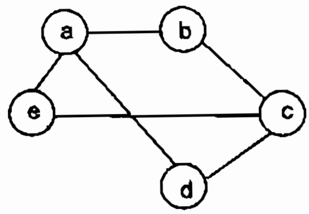
Vì có 4 màu nên lịch thi chia làm 4 đợt theo bảng dưới đây:

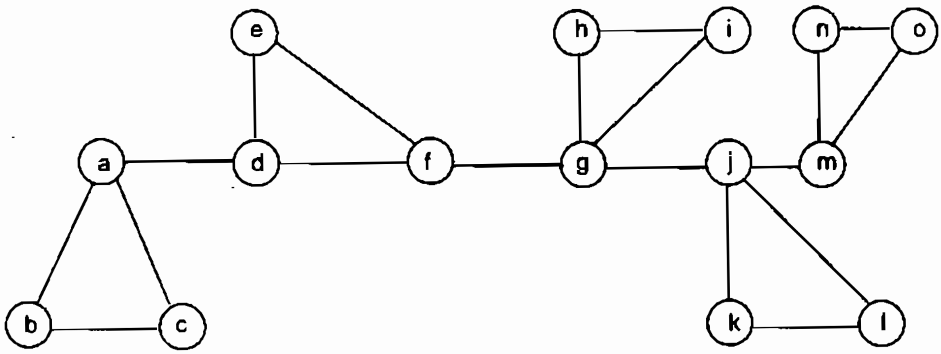
Đợt thi	Môn thi
I	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7

20. Cho các đồ thị:

G_1: 

; G_2: 

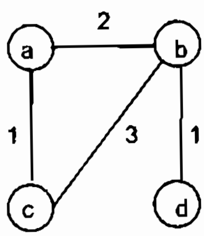
; G_3: 

G_4: 

Tìm sắc lớp của các đồ thị trên.

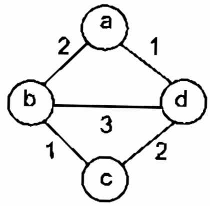
Giải

- $s_1(G_1)$ = 3 màu được tô như sau: cạnh (a, c) và (b, d) tô màu 1; cạnh (a, b) tô màu 2; cạnh (b, c) tô màu 3 (hình dưới).

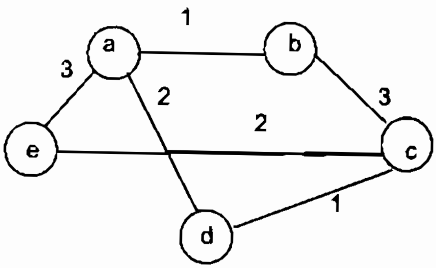


www.thuvien247.net

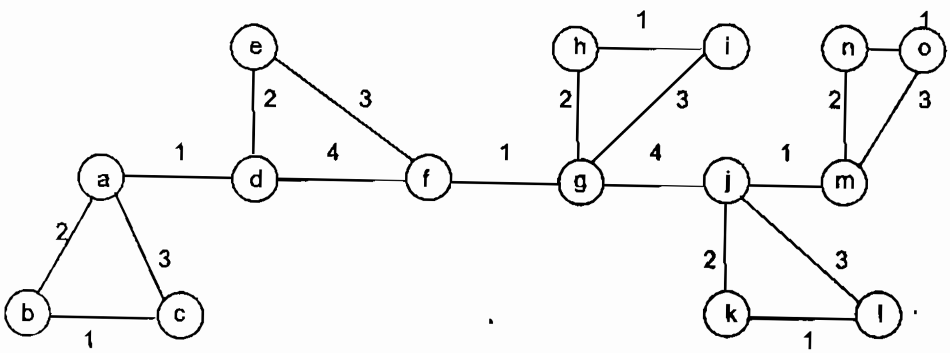
- $s_l(G_2) = 3$ màu được tô như sau: cạnh (a, d) và (b, c) tô màu 1; cạnh (b, a) và (c, d) tô màu 2; cạnh (b, d) tô màu 3 (hình dưới).



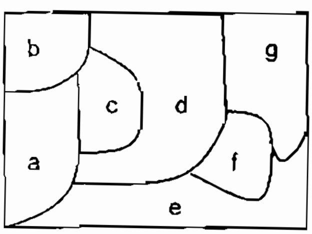
- $s_l(G_3) = 3$ màu được tô như sau: cạnh (a, b) và (d, c) tô màu 1; cạnh (a, d) và (e, c) tô màu 2; cạnh (a, e) và (b, c) tô màu 3 (hình dưới).



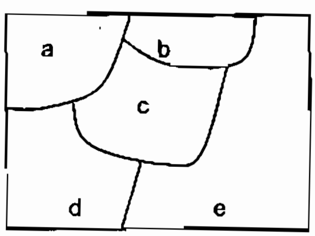
- $se(G_4) = 4$ màu được tô như hình sau:



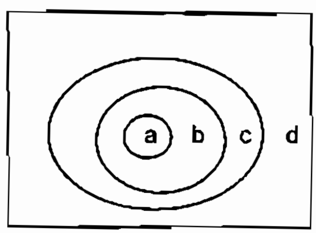
21. Cho các bản đồ sau:



BĐ1



BĐ2



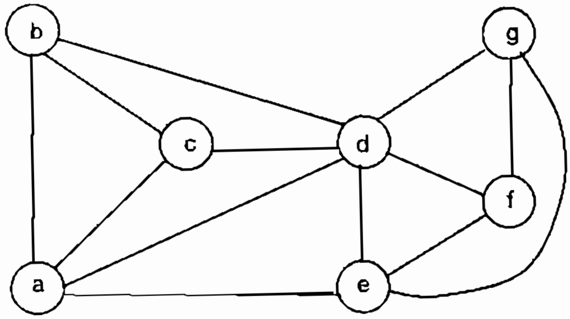
BĐ3

Tìm s(BĐ1) (i = 1, 2, 3).

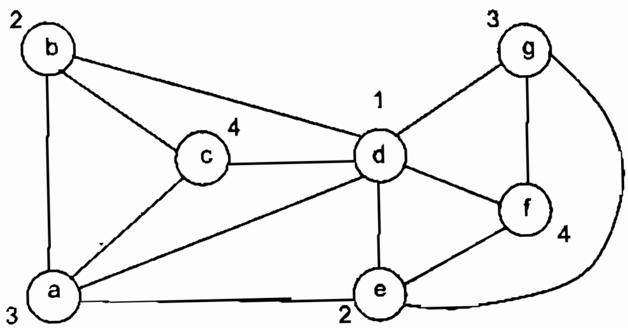
www.thuvien247.net

Giải. Bản đồ 1 (BĐ1) có đồ thị đối ngẫu là

BĐ1*:



s(BĐ1*) = 4. BĐ1* được tô 4 màu 1, 2, 3, 4 như sau: màu 1 tô đỉnh d; màu 2 tô đỉnh e và b; màu 3 tô đỉnh a và g; Màu 4 tô đỉnh c và f (xem hình).

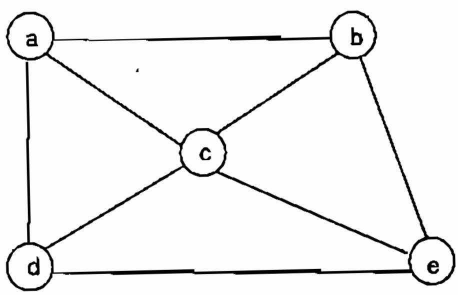


Vậy s(BĐ1) = 4. BĐ1 được tô 4 màu các vùng theo bảng tô sau:

Màu	Vùng
1	d
2	b, e
3	a, g
4	c, f

- Bản đồ 2 (BĐ2) có đồ thị đối ngẫu là:

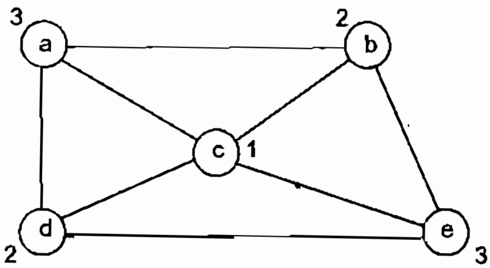
BĐ2*:



www.thuvien247.net

Với s(BĐ2*) = 3 màu. Màu 1, 2, 3 tô như sau: màu 1 tô đỉnh c; màu 2 tô đỉnh b, d; màu 3 tô đỉnh a, e

s(BĐ2) = 3 (xem hình vẽ).

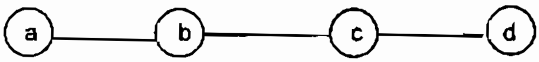


Bản đồ 2 được tô bằng màu 1, màu 2 và màu 3 theo bảng dưới đây:

Màu	Vùng
1	c
2	b, d
3	a, e

- BĐ3 có đồ thị đối ngẫu là

BĐ3*:



s(BĐ3*) = 2: màu 1 tô đỉnh a và c; màu 2 tô đỉnh b và d.
Vậy s(BĐ3) = 2 được tô bằng 2 màu theo bảng dưới đây:

Màu	Vùng
1	a, c
2	b, d

22. Hãy chỉ ra một đồ thị G = <X, U> sao cho:

a) $s(G) + s(\overline{G}) = |X| + 1$;

b) $s(G) . s(\overline{G}) = |X|$ (dấu = xảy ra trong Định lý 9).

Giải. Xét đồ thị đầy đủ n đỉnh K_n.

Ta có $s(K_n) = n$ (theo Định lý 5)

Mặt khác đồ thị bù $\overline{K_n}$, theo định nghĩa chỉ gồm n đỉnh mà không có cạnh nào, nên $s(\overline{K_n}) = 1$.

$$s(K_n) + s(\overline{K_n}) = n + 1 = |X| + 1.$$

$s(K_n).s(\overline{K_n}) = n.1 = n = |X|$. Đó là điều cần chứng minh.

www.thuvien247.net

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

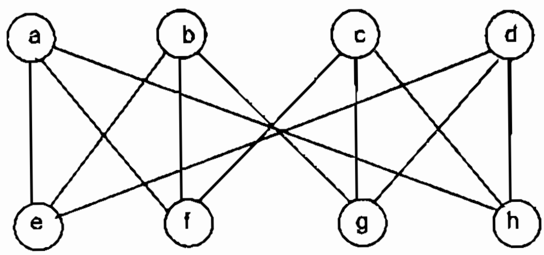
23. Cho đồ thị phẳng liên thông có 6 đỉnh. Trong đó 2 đỉnh bậc 5 và 4 đỉnh bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu diện? Hãy tìm bậc của biểu diễn phẳng đó.
24. Cho đồ thị phẳng liên thông có 20 cạnh. Biết biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành 15 diện. Hỏi đồ thị có bao nhiều đỉnh?
25. Giả sử G = <X, U> là đơn đồ thị phẳng và liên thông có |X| = n đỉnh, |U| = m cạnh và không có chu trình độ dài 7 trở xuống. Chứng minh rằng $m \le \frac{4}{3}n - \frac{8}{3}$.
26. Dùng công thức Euler (Định lý 2) để chứng minh đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$ và đồ thị đầy đủ K_5 là các đồ thị không phẳng.
27. Tìm r theo công thức Euler (Định lý 2) của các đồ thị sau đây:

    a) Đồ thị chu trình C_n ($n \ge 3$);

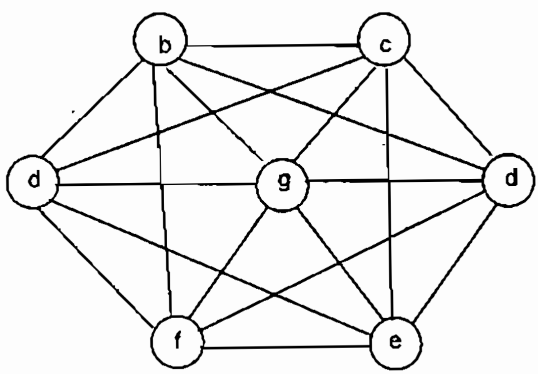
    b) Đồ thị bánh xe W_n ($n \ge 3$).

    e) Đồ thị hình sao tạo ra từ đồ thị bánh xe bằng cách bỏ đi các cạnh của đồ thị chu trình C_n.
28. Dùng Định lý 3 (Kuratowski) xác định xem các đồ thị dưới đây, đồ thị nào là không phẳng:

G_1:



G_2:

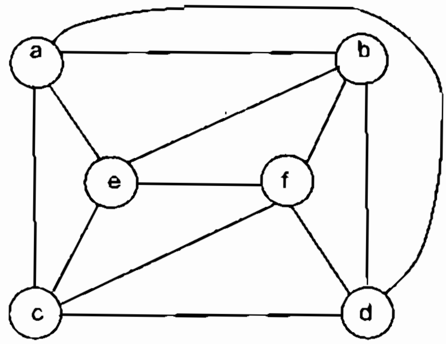


29. Chỉ ra rằng, nếu G là đơn đồ thị với ít nhất 11 đỉnh, khi đó hoặc G hoặc $\overline{G}$ là không phẳng.

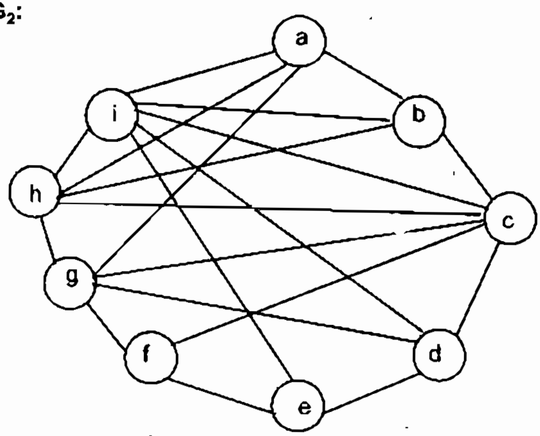
www.thuvien247.net

30. Tìm sắc số của các đồ thị dưới đây:

G$_1$:



G$_2$:



31. Chứng minh rằng một đơn đồ thị có chu trình và có một số lẻ các đỉnh không thể tô bằng 2 màu.

32. Hãy tìm số màu cạnh của các đồ thị trong bài tập 29.

33. Hãy lập lịch thi các môn Toán 1, Toán 2, Toán 3, Toán 4, Tin 1, Tin 2, Tin 3 và Tin 4 với số ít nhất các đợt thi, nếu không có sinh viên nào thi cả 2 môn Toán 1 và Tin 4, Toán 2 và Tin 4, Toán 4 và Tin 1, Toán 4 và Tin 2, Toán 1 và Toán 2, Toán 1 và Toán 3, Toán 3 và Toán 4, nhưng có sinh viên thi trong mọi tổ hợp khác của các môn.

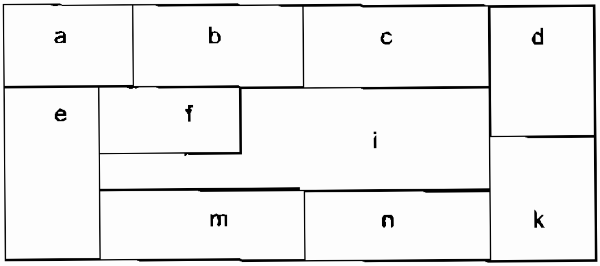
34. Các tần số cho điện thoại di động được phân chia theo vùng. Mỗi vùng được phân một tập các tần số để các máy ở vùng đó sử dụng. Một tần số như nhau không thể dùng trong các vùng ở đó xảy ra hiện tượng giao thoa ánh sáng. Hãy giải thích cách dùng tô bộ k màu để phân k tần số cho mỗi vùng điện thoại di động.

35. Áp dụng thuật toán ở bài tập 18 để tìm sắc số của các đồ thị cho trong bài tập 28.

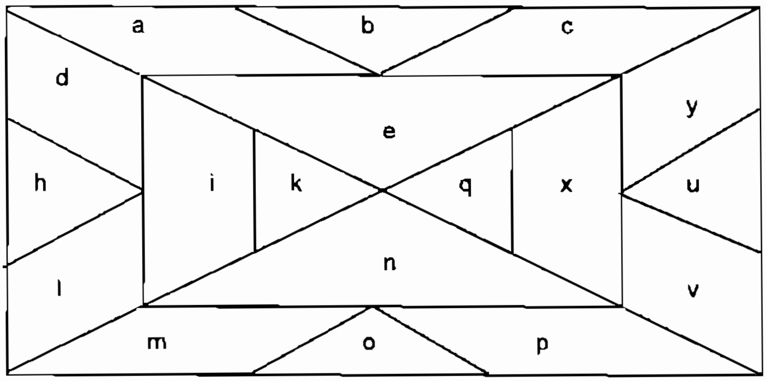
36. Chứng minh Định lý 8: Nếu mỗi đỉnh $x \in X$ của $G = <X, U>$ có bậc $m(x) \le k$ thì $s(G) \le k + 1$.

www.thuvien247.net

37. Cho các bản đồ sau:



BĐ1



BĐ2

a) Tìm đồ thị đối ngẫu của BĐ1 và BĐ2.

b) Tìm sắc số của các bản đồ trên thông qua tìm sắc số của các đồ thị đối ngẫu của chúng.

www.thuvien247.net

Chương 9

CÂY VÀ ỨNG DỤNG CỦA CÂY

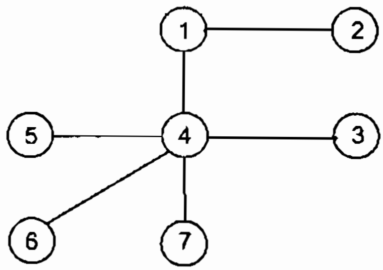
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC VÍ DỤ VỀ CÂY

1. Cây

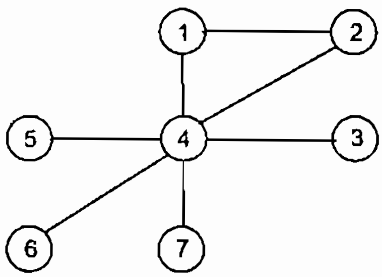
Cây là một đồ thị đơn, liên thông và không có chu trình.

- $G_1 = <X_1, U_1>$:



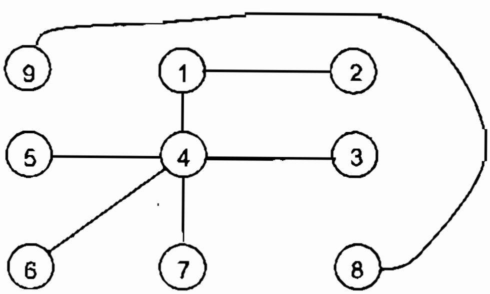
là một cây, vì G_1 là đồ thị đơn, liên thông không có chu trình.

- $G_2 = <X_2, U_2>$:



không phải là một cây, vì G_2 có chu trình mặc dù liên thông và đơn.

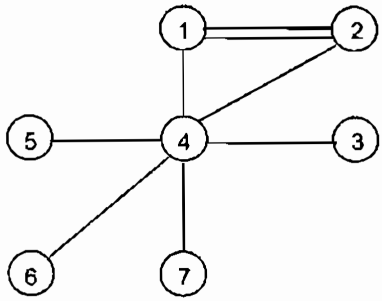
- $G_3 = <X_3, U_3>$:



www.thuvien247.net

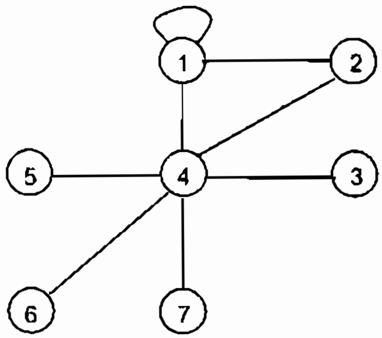
không phải là một cây, vì không liên thông mặc dù là đơn và không có chu trình.

- $G = \langle X_4, U_4 \rangle$:



không phải là cây, vì nó không phải là đồ thị đơn mà là đa đồ thị.

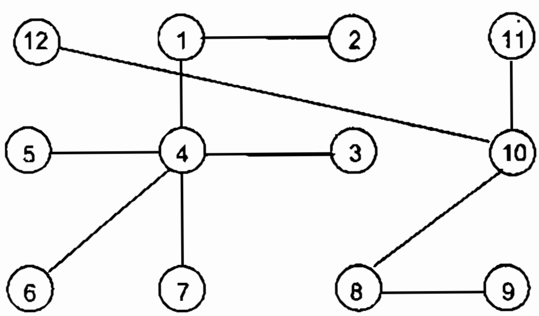
- $G_5 = \langle X_5, U_5 \rangle$:



cũng không phải là cây, vì nó có khuyên nên không phải là đồ thị đơn.

2. Rừng cây

Một đồ thị vô hướng gồm k thành phần liên thông mà mỗi thành phần liên thông là một cây được gọi là rừng cây. Đồ thị $G = \langle X, U \rangle$ có hai thành phần liên thông dưới đây là một rừng:

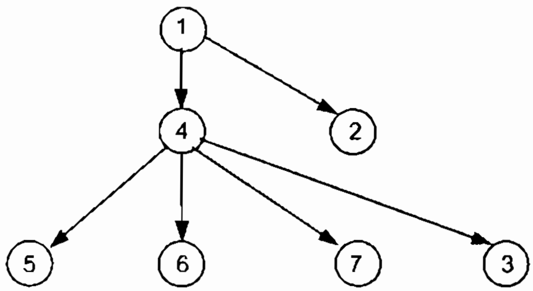


www.thuvien247.net

3. Cây có gốc

Trong một cây, nếu ta lấy một đỉnh nào đó làm gốc thì ta có thể gán cho mỗi cạnh của cây một hướng đi từ gốc ra (do Định lý 7, Chương 6). Cây như thế gọi là cây có gốc. Cây có gốc là một đồ thị có hướng mà gốc là một đỉnh không có bậc vào, còn lá là đỉnh không có bậc ra. Thường cây có gốc có đỉnh gốc nằm phía trên còn các lá nằm phía dưới. Đỉnh của cây có gốc không phải là gốc cũng không phải là lá gọi là đỉnh trong. Nếu trong cây có gốc ta lấy một đỉnh trong làm gốc thì cây đó gọi là cây con có gốc của cây có gốc ban đầu. Đôi khi trong cây có gốc có thể bỏ hướng mũi tên đi từ gốc đến các lá, vì khi chọn gốc tức là hướng của các cạnh đã được xác định.

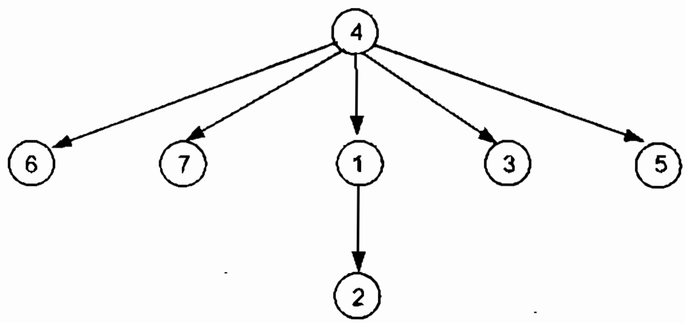
Cho cây $G_1 = <X_1, U_1>$, nếu ta chọn đỉnh 1 làm gốc thì cây có gốc có dạng:



Hình 1

với gốc là đỉnh 1, các lá là các đỉnh 2, 3, 5, 6, 7, còn đỉnh trong là đỉnh 4.

Còn nếu ta chọn 4 làm đỉnh gốc thì ta nhận được cây có gốc là cây có dạng:



với đỉnh gốc là 4, các lá là 6, 7, 2, 3 và 5, còn 1 là đỉnh trong.

4. Cây m – phân, cây m – phân đầy đủ và cây nhị phân

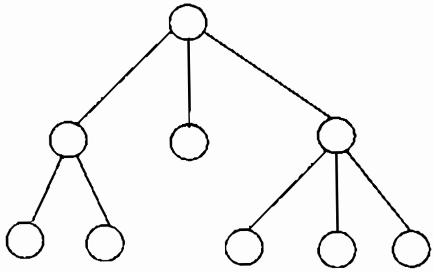
Cây có gốc được gọi là cây m – phân nếu tất cả các đỉnh của cây có không quá m con.

Cây m – phân đầy đủ là cây m – phân với mọi đỉnh trong (kể cả gốc) có đúng m con.

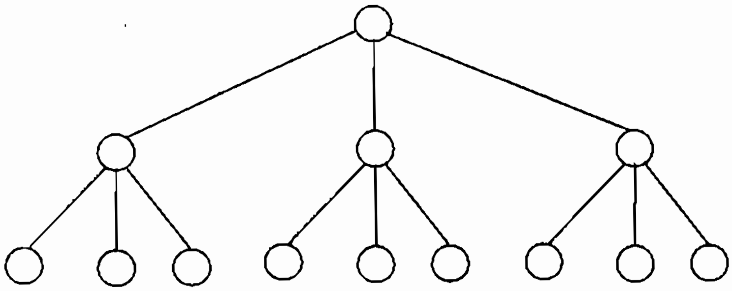
Cây m – phân với m = 2 gọi là cây nhị phân.

www.thuvien247.net

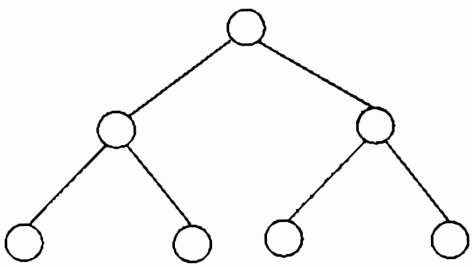
Chẳng hạn cây H_1 là cây 3 – phân, H_2 là cây 3 phân đầy đủ, còn H_3 là cây nhị phân, ở đây H_1, H_2, H_3 có dạng:



H_1



H_2



H_3

§2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

1. Đối với cây là một đồ thị đơn liên thông không có chu trình

Định lý 1. Giả sử G = <X, U> là đồ thị vô hướng n đỉnh (n > 1), khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương nhau:

1. G = <X, U> là một cây.
2. G = <X, U> có n – 1 cạnh và không có chu trình.
3. G = <X, U> liên thông và có n – 1 cạnh.
4. G = <X, U> không có chu trình, nhưng nếu thêm vào một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau thì xuất hiện duy nhất một chu trình.

www.thuvien247.net

5. Hai đỉnh bất kỳ của G = <X, U> được nối với nhau bởi một đường đi đơn.

6. Nếu trong G = <X, U> bỏ đi một cạnh tùy ý thì đồ thị nhận được sẽ không liên thông.

Định lý 2. Một cây có ít nhất 2 đỉnh treo.

2. Đối với cây m – phân và m – phân đầy đủ

Định lý 3. Đối cây m – phân đầy đủ với:

1) i đỉnh trong sẽ có tất cả n = m.i + 1 đỉnh.

2) n đỉnh sẽ có $i = \dfrac{n-1}{3}$ đỉnh trong và $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ đỉnh ngoài (lá).

3) i đỉnh trong sẽ có n = m.i + 1 đỉnh và $l = (m-1)i + 1$ lá.

4) Có $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ đỉnh và $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.

Định lý 4

1) Có nhiều nhất h lá trong cây m – phân với độ cao h.

2) Nếu cây m – phân có độ cao h và có l lá thì $h \geq [\log_m l]$.

3) Nếu cây m – phân đầy đủ cân đối thì $h = [\log_m l]$.

Chú ý: [x] là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng x.

Chiều cao h của cây là mức cao nhất trong cây, hay là độ dài của đường đi lớn nhất từ gốc đến lá của cây.

3. Đối với cây nhị phân đầy đủ

Định lý 5. Nếu cây nhị phân đầy đủ có n đỉnh thì chiều cao h của nó được tính theo công thức $h = \log_2(n+1) - 1$.

§3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA CÂY

Nghiên cứu ba bài toán bằng mô hình cây:

Bài toán 1. Các phần tử trong một danh sách được lưu trữ như thế nào để có thể dễ dàng định vị được chúng?

Bài toán 2. Hãy xác định dãy các quyết định để tìm đối tượng có tính chất x trong tập hợp các đối tượng nào đó.

Bài toán 3. Cần phải mã hóa tập các chữ cái bằng các dãy nhị phân như thế nào để có hiệu quả sử dụng tốt nhất?

1. Cây tìm kiếm nhị phân đối với bài toán 1

Tìm kiếm một phần tử trong một danh sách là công việc thường gặp trong Tin học. Để giải quyết nó cần một thuật toán tìm kiếm có hiệu quả. Đó

www.thuvien247.net

là cây tìm kiếm nhị phân. Cây tìm kiếm nhị phân là một cây nhị phân, trong đó mỗi con của một đỉnh hoặc là con bên phải hoặc là con bên trái, và mỗi đỉnh được gán một khóa sao cho với mỗi khóa chỉ xác định được một phần tử và khóa của đỉnh lớn hơn khóa của các đỉnh cây con bên trái và nhỏ hơn khóa của các đỉnh ở cây con bên phải của nó.

Thủ tục đệ quy sau đây cho phép tạo lập cây tìm kiếm nhị phân cho một danh sách các phần tử:

- Bắt đầu với cây có đúng 1 đỉnh là đỉnh gốc: Phần tử đầu tìm trong danh sách là khóa của đỉnh này.
- Để thêm một phần tử mới (đỉnh mới) ta so sánh nó với khóa của các đỉnh đã có trên cây bắt đầu từ gốc và đi sang trái nếu phần tử nhỏ hơn khóa của đỉnh tương ứng, hoặc đi sang phải nếu phần tử này lớn hơn khóa của đỉnh tương ứng.
- Nếu cây nhị phân tìm kiếm được xây dựng mà không phải là cây nhị phân đầy đủ thì có thể thêm các đỉnh mới không nhãn để tạo ra cây nhị phân đầy đủ (mỗi khóa đều có 2 con), điều này giúp cho việc định vị hoặc thêm vào phần tử mới như là khóa của đỉnh mà không phải thêm vào một đỉnh mới.

Như vậy, cây tìm kiếm nhị phân dùng để định vị các phần tử dựa trên một loạt các so sánh, trong đó mỗi so sánh cho biết có định vị được phần tử đó hay chưa, hoặc sẽ đi theo cây con bên phải hay bên trái.

2. Cây quyết định đối với bài toán 2

Cây có gốc có thể dùng để mô hình các bài toán trong đó có một dãy các quyết định dẫn đến tìm lời giải của bài toán. Cụ thể cây có gốc, trong đó mỗi đỉnh trong ứng với một quyết định và mỗi cây con tại các đỉnh này ứng với một kết cục có thể của quyết định được gọi là cây quyết định. Những lời giải có thể của bài toán tương ứng với các đường đi tới các lá của cây có gốc. Chúng ta sẽ đề cập thuật toán sắp xếp bằng cây quyết định trong §4 sau này.

3. Các mã tiền tố đối với bài toán 3

a) Bài toán mã hóa các chữ cái tiếng Anh bằng các dãy nhị phân

Xâu nhị phân độ dài 5 có thể dùng để mã hóa một chữ cái tiếng Anh. Vì có tất cả 32 xâu nhị phân khác nhau độ dài 5, trong khi đó số chữ cái tiếng Anh chỉ có 26. Mã hóa tuân thủ theo các nguyên tắc sau:

- Các chữ cái xuất hiện thường xuyên hơn sẽ được mã hóa bằng các xâu nhị phân ngắn, các xâu nhị phân dài hơn dùng để mã các chữ cái xuất hiện ít hơn.
- Khi các chữ được mã bằng số bit thay đổi cần phải có cách xác định xem các bit ứng với mỗi chữ bắt đầu và kết thúc ở đâu.

www.thuvien247.net

Chẳng hạn, nếu chữ e được mã bằng 0, chữ a được mã bằng 1 và chữ t được mã bằng 01, khi đó xâu nhị phân 0101 có thể tương ứng với eat, eaea hoặc tt.

- Để đảm bảo không có xâu nhị phân nào ứng với hơn một dãy chữ cái, xâu nhị phân ứng với một chữ không bao giờ xuất hiện như là phần đầu của xâu nhị phân ứng với chữ khác.

Mã có các tính chất như trên được gọi là mã tiền tố. Ví dụ: mã e bằng 0, mã a bằng 10, còn mã t bằng 11 là mã tiền tố. Xâu 10110 là mã của từ ate. Để giải mã ta thấy số 1 đầu tiên không biểu diễn một từ nào, nhưng 10 lại biểu diễn từ a (nó không phải là phần đầu của xâu nhị phân biểu diễn chữ khác). Sau đó số 1 tiếp theo không biểu diễn một chữ, nhưng 11 là biểu diễn chữ t và số 0 cuối cùng biểu diễn chữ e.

b) Cây nhị phân dùng biểu diễn mã tiền tố

Nguyên tắc xây dựng cây nhị phân biểu diễn mã tiền tố:

- Lá của cây nhị phân được gán nhãn là một ký tự.
- Các cạnh của cây nhị phân được gán nhãn sao cho cạnh dẫn tới con bên trái được gán nhãn 0, còn cạnh dẫn tới con bên phải được gán nhãn 1.
- Xâu nhị phân mã hóa một chữ là dãy các nhãn của các cạnh thuộc đường đi duy nhất từ gốc tới lá có nhãn của chữ cái đó.
- Khi giải mã thì dùng chính cây nhị phân này để giải mã dãy nhị phân mà nó biểu diễn.

Như vậy, ta có thể xây dựng mã tiền tố bằng một cây nhị phân bất kỳ có cạnh trái của mỗi đỉnh được gán nhãn 0, còn cạnh phải được gán nhãn 1. Dĩ nhiên cây nhị phân này phải tuân thủ các nguyên tắc trong mục a.

§4. CÁC PHƯƠNG PHÁP DUYỆT CÂY

Cây có gốc được sắp thứ tự dùng để lưu trữ thông tin. Chúng ta cần có các thủ tục "Viếng thăm" các đỉnh của cây để truy nhập dữ liệu. Cây có gốc và được sắp thứ tự còn sử dụng để biểu diễn các biểu thức khác nhau, như biểu thức số học chứa các số, các biến và các phép toán. Nó không những dùng để biểu diễn các biểu thức số học mà nó còn rất hữu ích trong việc tính giá trị của các biểu thức này.

1. Hệ địa chỉ phổ dụng

Thủ tục duyệt tất cả các đỉnh của cây có gốc và được sắp thứ tự đều dựa trên việc sắp thứ tự các đỉnh con theo thứ tự từ trái sang phải.

Để làm được việc này, trước tiên cần phải gán nhãn cho tất cả các đỉnh bằng phương pháp truy hồi sau đây:

- Gán nhãn cho gốc bởi số 0, sau đó k đỉnh con của nó (ở mức 1) từ trái sang phải được gán nhãn 1, 2, ..., k.

www.thuvien247.net

- Với mọi đỉnh v ở mức n có nhãn là A thì k đỉnh con của nó từ trái sang phải được gán nhãn A1, A2, ..., Ak_v.
- Theo thủ tục trên thì đỉnh v ở mức n ≥ 1 có nhãn $x_1x_2... x_n$, trong đó đường đi duy nhất từ gốc tới v sẽ đi qua đỉnh x ở mức 1, đỉnh x_2 ở mức 2, ..., và đỉnh x_n ở mức n.

Cách gán nhãn như trên được gọi là hệ địa chỉ phổ dụng của một cây có gốc và được sắp. Ta có thể sắp tất cả các đỉnh của cây theo thứ tự từ điển của các nhãn trong hệ địa chỉ phổ dụng.

Đỉnh có nhãn $x_1x_2... x_n$ là nhỏ hơn đỉnh có nhãn $y_1y_2 ... y_m$ khi và chỉ khi $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{i-1} = y_{i-1}$ và $x_i < y_i$ với $0 \le i \le n$.

2. Thuật toán duyệt cây

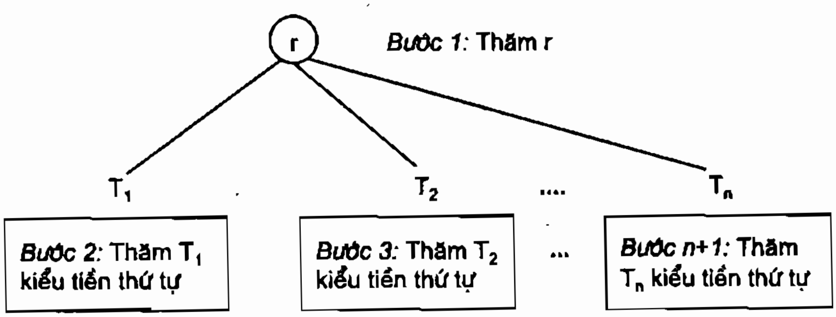
Các thuật toán sau đây thường xuyên được sử dụng:

- Thuật toán duyệt tiền thứ tự.
- Thuật toán duyệt trung thứ tự.
- Thuật toán duyệt hậu thứ tự.

a) Thuật toán duyệt tiền thứ tự

- Giả sử T là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc là r.
- Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt tiền thứ tự của T.
- Nếu tại r còn có các cây con T_1, t_2, ..., T_n theo thứ tự từ trái sang phải. Duyệt tiền thứ tự sẽ đến thăm r đầu tiên. Tiếp tục duyệt T_1 theo kiểu tiền thứ tự, sau đó duyệt T_2 theo kiểu tiền thứ tự, ... Cuối cùng đến T_n được duyệt theo kiểm tiền thứ tự.

Thủ tục trên mô tả dưới dạng cây sau:



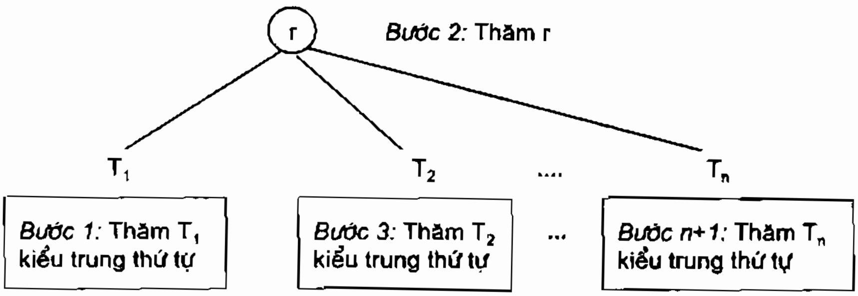
b) Thuật toán duyệt trung thứ tự

- Giả sử T là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc là r.
- Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt trung thứ tự của T.
- Nếu tại đỉnh r còn có các cây con T_1, T_2, ..., T_n theo thứ tự từ trái sang phải. Duyệt trung thứ tự sẽ bắt đầu bằng việc duyệt T_1 theo

www.thuvien247.net

kiểu trung thứ tự, sau đó viếng thăm r. Tiếp tục duyệt T_2 theo kiểu trung thứ tự, ... cuối cùng duyệt T_n theo kiểu trung thứ tự.

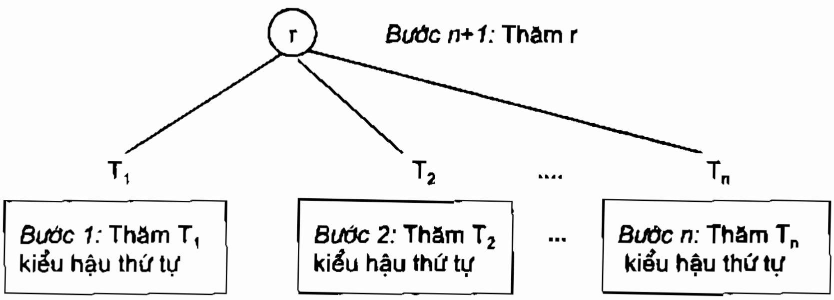
Thủ tục trên mô tả dưới dạng cây sau:



c) Thuật toán duyệt hậu thứ tự

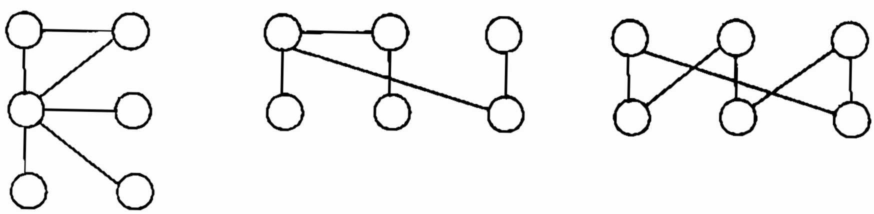
- Giả sử T là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc là r.
- Nếu T chỉ có r thì r là cách duyệt hậu thứ tự của T.
- Nếu không phải thì r còn có các cây con $T_1, T_2, ..., T_n$ theo thứ tự từ trái sang phải. Duyệt hậu thứ tự sẽ bắt đầu bằng duyệt T_1 theo kiểu hậu thứ tự, sau đó duyệt T_2 theo kiểu hậu thứ tự và tiếp tục cho đến khi T_n được duyệt theo kiểu hậu thứ tự, cuối cùng kết thúc bằng việc viếng thăm đỉnh gốc r của T.

Thủ tục trên mô tả dưới dạng cây:



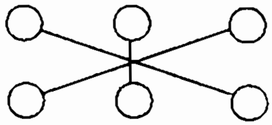
B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Đồ thị nào trong các đồ thị dưới đây là cây?

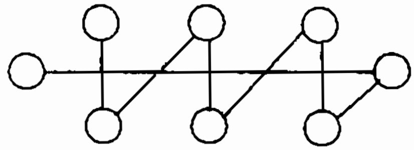


G_1 G_2 G_3

www.thuvien247.net



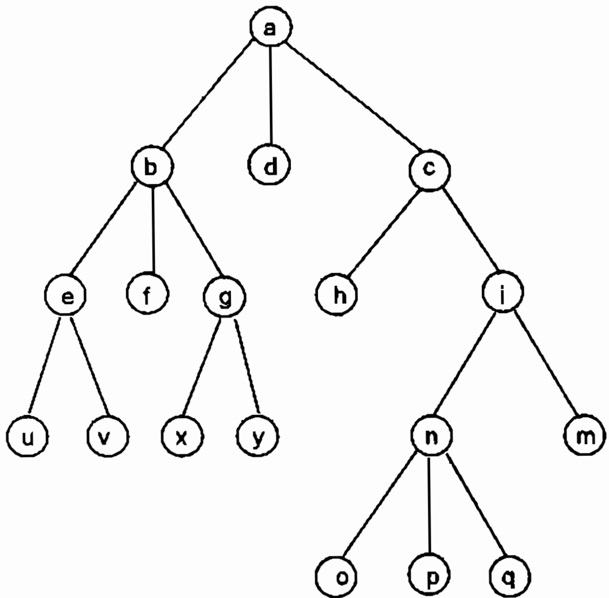
G_4



G_5

Giải. G_2 và G_5 là cây vì mỗi đồ thị là đơn, liên thông và không có chu trình. G_1 và G_3 không phải là cây vì có chu trình. G_4 cũng không phải là cây vì không liên thông.

2. Cho cây có gốc G = <X, U>;



Trong cây trên:

a) Đỉnh nào là đỉnh gốc?

b) Đỉnh nào là đỉnh trong?

c) Đỉnh nào là lá?

d) Đỉnh nào là đỉnh con của gốc a?

e) Đỉnh nào là đỉnh cha của đỉnh e?

f) Đỉnh nào là đỉnh anh, em của đỉnh g?

i) Chiều cao của G bằng bao nhiêu?

j) Mức nhỏ nhất (lớn nhất) của G bằng bao nhiêu và gồm những đỉnh nào?

k) Cây G được gọi là cây 3 – phân có đúng không? Vì sao?

l) Muốn nhận được cây nhị phân đầy đủ (cây nhị phân cân đối) từ cây G = <X, U> ở trên cần phải bỏ đi những đỉnh nào? Và chiều cao của cây nhị phân đầy đủ, nhị phân cân đối là bao nhiêu?

m) Chỉ ra các cây con của đỉnh a.

www.thuvien247.net

Giải

a) Đỉnh gốc của G là đỉnh a.

b) Các đỉnh trong của G là các đỉnh b, c, e, g, i và n.

c) Các đỉnh lá của G là các đỉnh u, v, f, x, y, d, h, o, p, q và m.

d) Đỉnh con của gốc a là các đỉnh b, d và c.

e) Đỉnh cha của đỉnh e là đỉnh b.

f) Đỉnh anh em của đỉnh g là các đỉnh e, f.

i) Chiều cao của G là mức lớn nhất hay là độ dài lớn nhất của đường đi từ gốc đến lá. Chiều cao của cây G là h = 4.

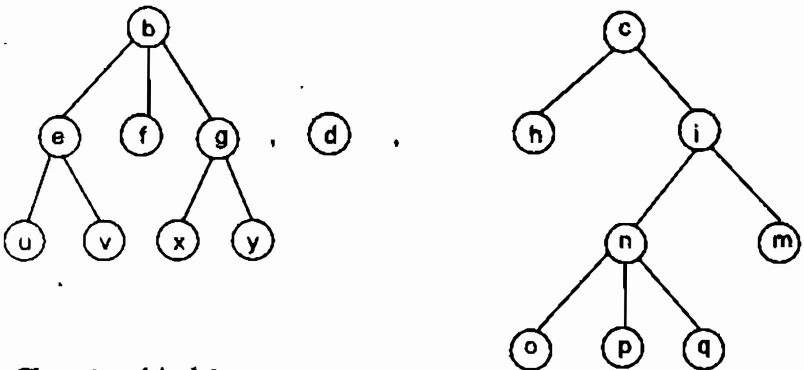
j) Mức nhỏ nhất của G là o ứng với đỉnh gốc a. Mức lớn nhất của G là 4 gồm các đỉnh o, p và q.

k) Đúng: G là cây có gốc 3 – phân vì mỗi đỉnh trong (kể cả gốc) đều có bậc không quá ba.

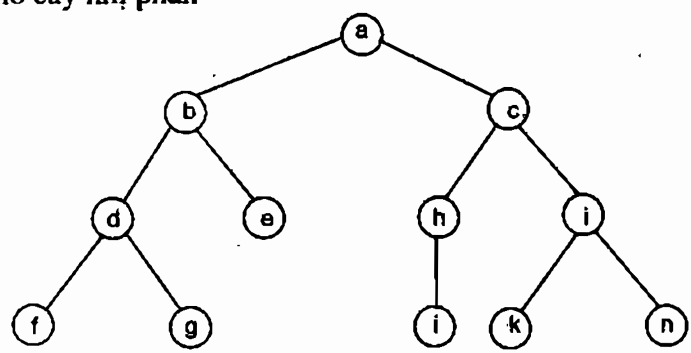
l) Muốn nhận được cây nhị phân đầy đủ chỉ cần bỏ đi các đỉnh f, d, p.

Còn muốn nhận được cây nhị phân cân đối từ G ta phải bỏ đi các đỉnh u, v, f, x, y, d, o, n, p, q, m và các cạnh liền kề với nó. Chiều cao của cây nhị phân đầy đủ là 4, còn chiều cao của cây nhị phân cân đối là 2.

m) Các cây con của đỉnh a là các cặp có đỉnh gốc là b, d và c



3. Cho cây nhị phân



a) Hãy xác định con bên trái và con bên phải của c.

b) Hãy vẽ cây con bên trái và cây con bên phải của c.

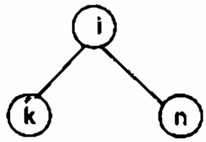
www.thuvien247.net

Giải

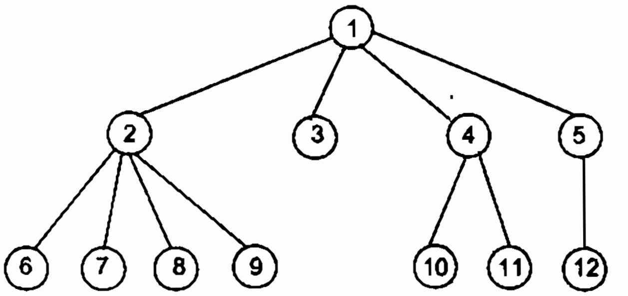
a) Đối với c thì con bên trái là h, con bên phải là i.

b) Cây con bên trái của c là cây

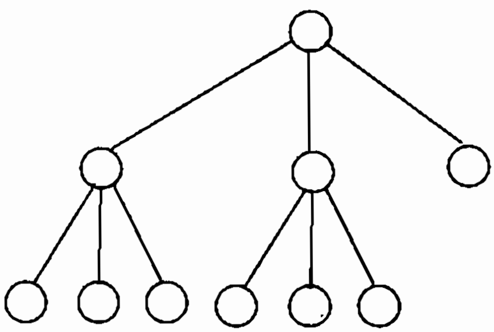
và cây con bên phải của c là



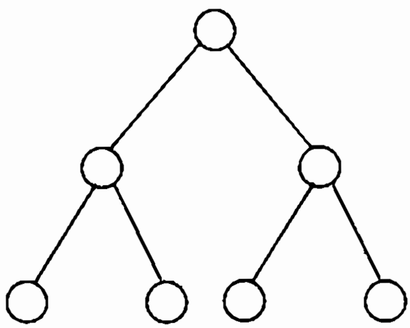
4. Cho các cây có gốc G_1, G_2 và G_3 dưới đây



G_1



G_2



G_3

a) Gọi tên G_1, G_2 và G_3.

b) Tìm mức của mỗi đỉnh trong G_1.

Giải. G_1 là cây tứ phân (vì mỗi đỉnh trong có bậc ≤ 4), G_2 là tam phân đầy đủ (vì các đỉnh trong đều có bậc 3) và G_3 là cây nhị phân cân đối (vì nó là cây nhị phân đầy đủ và tất cả các lá đều nằm trên mức cao nhất).

5. Cây với 1000 đỉnh có bao nhiêu cạnh.

Giải. Theo Định lý 1 (phần 2) thì cây có n đỉnh sẽ có n − 1 cạnh và không có chu trình. Vậy cây 1000 đỉnh có 999 cạnh.

www.thuvien247.net

6. Cây ngũ phân đầy đủ G với 1000 đỉnh trong. Hỏi G có bao nhiêu đỉnh?

Giải. Theo Định lý 3 (phần 1) số đỉnh của cây là n được tính theo công thức: $n = mi + 1 = 5.1000 + 1 = 5001$ đỉnh.

7. Cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trong có bao nhiêu cạnh? Tìm chiều cao của cây.

Giải. Theo Định lý 3 (phần 1) (áp dụng cho cây nhị phân đầy đủ) thì

$$n = 2i + 1 = 2.1000 + 1 = 2001 \text{ đỉnh.}$$

Theo Định lý 1 (phần 2) thì số cạnh của cây cho ở trên là

$$2001 - 1 = 2000 \text{ cạnh.}$$

Theo Định lý 5 thì chiều cao của cây là

$$h = \log_2(n + 1) - 1 = \log_2(2002) - 1.$$

8. Cây tam phân đầy đủ với 100 đỉnh có bao nhiêu lá?

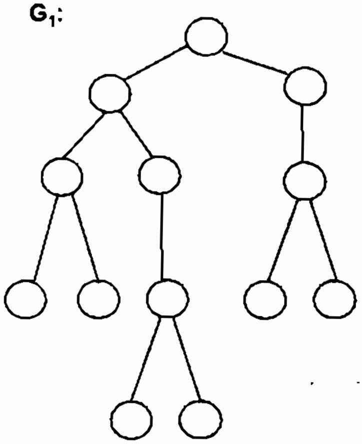
Giải. Theo Định lý 3 (phần 2) thì

$$l = \frac{(m-1)n+1}{m} = \frac{(3-1)100+1}{3} = 67 \text{ lá.}$$

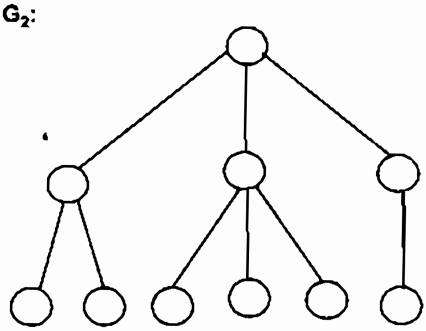
9. Cây m – phân có gốc và độ cao h được gọi là cây cân đối nếu tất cả các lá đều ở mức h hoặc h – 1.

Cây nào trong các cây dưới đây là cân đối:

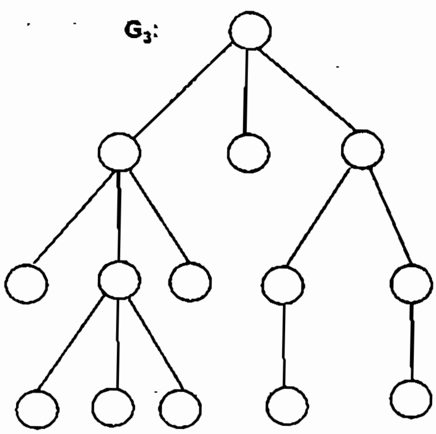
G_1:



G_2:



G_3:



www.thuvien247.net

Giải. G_1 là cân đối vì các lá hoặc ở mức h hoặc ở mức h – 1, ở đây độ cao của G_1 là h = 4. G_2 có tất cả các lá đều ở mức h = 2 nên G_2 là cân đối. G_3 không cân đối vì có 1 lá nằm ở mức h – 2, ở đây h = 3.

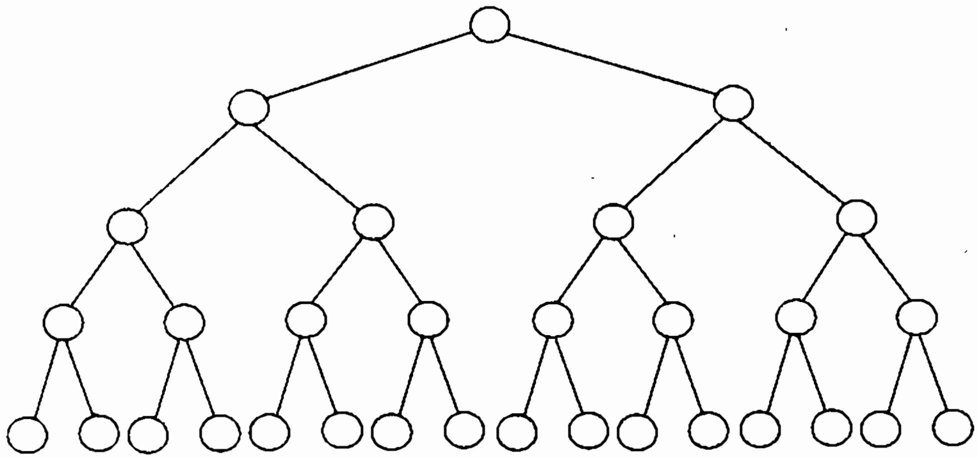
10. Cây m – phân hoàn toàn là cây m – phân đầy đủ trong đó mọi lá đều nằm ở mức cao nhất của cây.

a) Xây dựng cây nhị phân hoàn toàn T có chiều cao h = 4.

b) Kiểm tra tính đúng đắn của các Định lý 1, 2, 3, 4, 5 đối với cây T trong câu a.

Giải

a) Cây nhị phân hoàn toàn T có h = 4 là:



Mức 0: có $2^0 = 1$ đỉnh (đỉnh gốc).

Mức 1: có $2^1 = 2$ đỉnh (trong).

Mức 2: có $2^2 = 4$.đỉnh (trong).

Mức 3: có $2^3 = 8$ đỉnh (trong).

Mức 4: có $2^4 = 16$ đỉnh (lá).

Cây T có số đỉnh là 31, trong đó 15 đỉnh trong, 16 đỉnh ngoài (lá).

b) • Định lý 1 có 6 tính chất của cây đúng với T.

- Định lý 2 cũng đúng vì T có 16 đỉnh treo ≥ 2.
- Đối với Định lý 3 cũng đúng vì:

– Biết n = 31, ta có số đỉnh trong $i = \frac{31-1}{2} = 15$ đỉnh trong (đáy) và số đỉnh ngoài (lá $l = \frac{(m-1)n+1}{n} = \frac{(2-1)31+1}{2} = 16$ lá (đúng).

– Biết i = 15, ta có n = 2.i + 1 = 2.15 + 1 = 31 đỉnh (đúng) và $l = (m-1)i + 1 = i + 1 = 15 + 1 = 16$ lá (đúng).

www.thuvien247.net

– $n = \frac{ml - 1}{m - 1} = \frac{2.16 - 1}{2 - 1} = 31$ đỉnh (đúng)

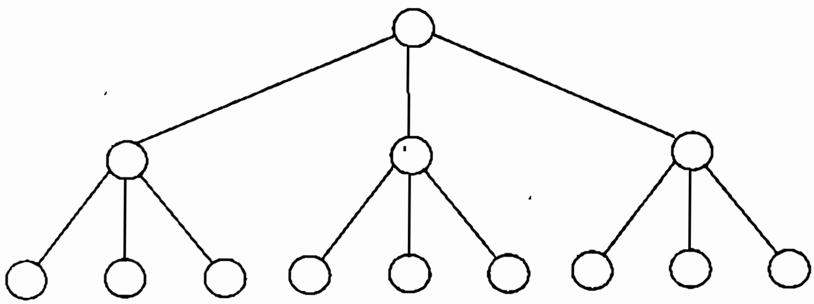
$i = \frac{l - 1}{m - 1} = \frac{16 - 1}{2 - 1} = 15$ đỉnh trong (đúng).

- Định lý 4 cũng đúng vì trong T số các lá (các đỉnh nằm trên mức 4) đúng bằng $2^h = 2^4 = 16$, $h = 4 = \log_2 2^4$.
- Định lý 5 cũng đúng vì $h = \log_2(n + 1) - 1 = \log_2(31 + 1) - 1 = \log_2(2^5) - 1 = 5 - 1 = 4$ là chiều cao của T.

11. Cây m – phân hoàn toàn T với chiều cao h có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu lá? Kiểm tra đối với cây tam phân hoàn toàn có chiều cao h = 2.

Giải

- Theo Định lý 4 thì số lá của cây m – phân hoàn toàn với độ cao h là $l = m^h$. Theo Định lý 3 ta có $n = \frac{ml - 1}{m - 1} = \frac{m.m^h - 1}{m - 1} = \frac{m^{h+1} - 1}{m - 1}$ đỉnh đối với câu m – phân hoàn toàn T với chiều cao h.
- Cây tam phân hoàn toàn với h = 2 có dạng:



Cây tam phân hoàn toàn có n = 13 đỉnh và $l = 9$ lá.

Áp dụng công thức trên ta có: $l = 3^2 = 9$ lá.

$$n = \frac{9^{h+1} - 1}{2} = \frac{3^3 - 1}{2} = \frac{27 - 1}{2} = 13 \text{ đỉnh.}$$

12. Chứng minh phần 3 và phần 4 của Định lý 3.

Cụ thể đối với cây m – phân đầy đủ ta có

a) i đỉnh trong, có n = mi + 1 đỉnh và $l = (m - 1)i + 1$ lá.

b) $n = \frac{ml - 1}{m - 1}$ đỉnh và $i = \frac{l - 1}{m - 1}$ đỉnh trong.

Giải

a) Theo phần 1 của Định lý 3 thì n = m.i + 1. Vì $i + l = n$ nên ta có

$$l = (mi + 1) - i = (m - 1)i + 1.$$

www.thuvien247.net

b) Theo phần 1 của Định lý 3 ta có n = m.i + 1, đồng thời i = n – l nên n = m(n – l) + 1. Giải ra đối với n ta có $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ đỉnh. Từ i = n – l ta nhận được $i = \dfrac{ml-1}{m-1} - 1 = \dfrac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.

13. Một rừng có k cây với tổng số n đỉnh thì có bao nhiêu cạnh?

Giải. Giả sử G = <X, U> là một rừng được tạo nên từ k cây $G_i = \langle X_i, U_i \rangle$ (i = 1, 2, ..., k) với $|X_i| = n_i$ (i = 1, 2, ..., k) và $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, $U = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$, ở đây $X_i \cap X_j = \varnothing$, $U_i \cap U_j = \varnothing$ với $i \neq j$.

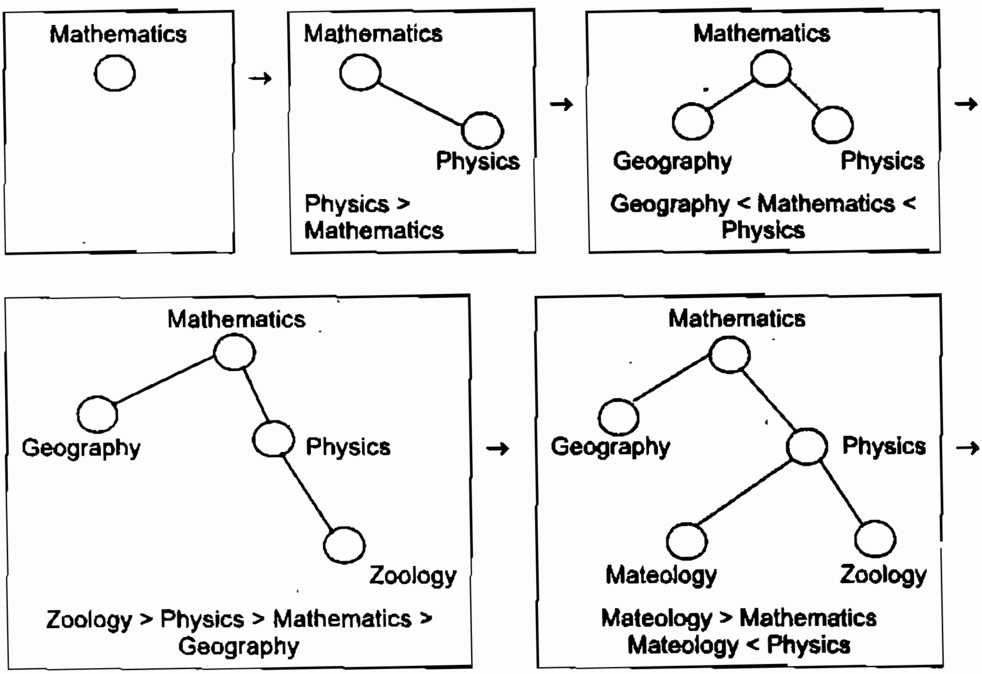
Theo Định lý 1 phần 2 thì $|U_i| = n_i - 1$ (i = 1, 2, ..., k) và

$$|U| = \sum_{i=1}^{k} |U_i| = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = n - k.$$

Hay rừng có k cây với tổng số đỉnh n có n – k cạnh.

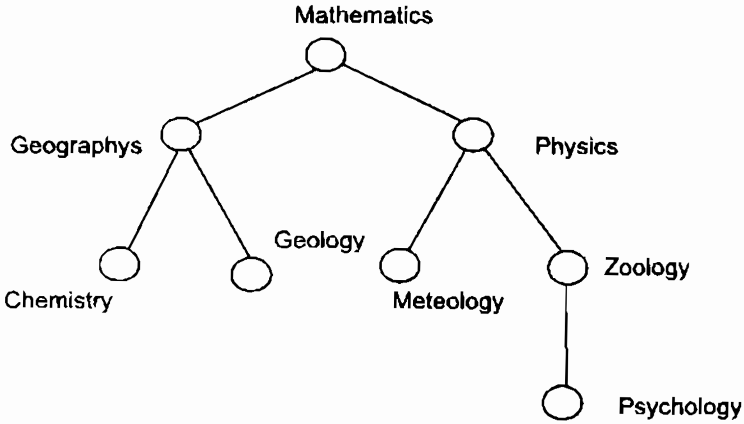
14. Hãy tạo cây tìm kiếm nhị phân sao cho các từ sau: mathematics, physics, geography, zoology, meteology, geology, psychology và chemistry (theo thứ tự từ điển)

Giải. Thủ tục tạo dựng cây tìm kiếm nhị phân theo thứ tự từ điển từ danh sách trên được mô tả thông qua các bước dưới đây:



www.thuvien247.net

... và cuối cùng ta có cây tìm kiếm nhị phân của danh sách trên theo thứ tự từ điển tiếng Anh là:



(Chemistry < Geographys < Geology < Mathematics < Meteology < Physics < Psychology < Zoology)

15. Để định vị một phần tử ta thử thêm nó vào cây tìm kiếm nhị phân và sẽ định vị được nó nếu nó có trong cây. Hãy xây dựng thuật toán dưới dạng giả mã cho phép định vị một phần tử trong cây tìm kiếm nhị phân và thêm đỉnh mới với phần tử này là khóa của nó nếu nó chưa có trong cây. Thuật toán sẽ định vị được x nếu nó là khóa của một đỉnh. Khi x không là khóa của bất cứ đỉnh nào thì một đỉnh mới với khóa x được thêm vào cây.

Trong dạng giả mã của thuật toán dưới đây, đỉnh v có khóa là x và label(v) biểu thị khóa của đỉnh v:

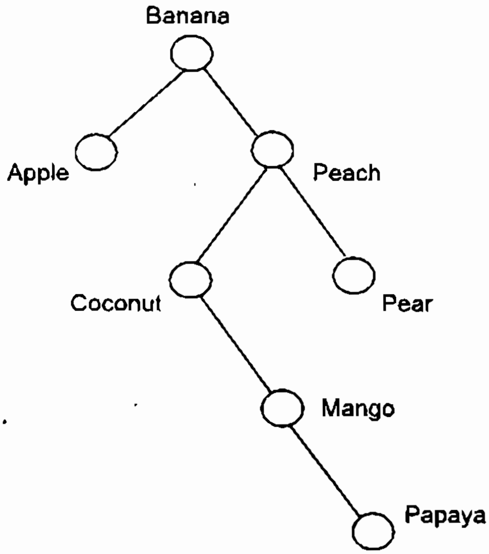
Thuật toán (tìm kiếm nhị phân)

```
Procedure insertion (T : Cây tìm kiếm nhị phân, x : phần tử)
v := gốc của T {đỉnh không có trong T sẽ có giá trị bằng null}
While v ≠ null và label (v) ≠ x
begin
        if x < label(v) then
                if con bên trái của v ≠ null then v := con bên trái của v
                else thêm đỉnh mới là con trái của v và đặt v := null
        else
                if con bên phải của v ≠ null then v := con bên phải của v
                else thêm đỉnh mới là con bên trái của v và đặt v := null
end
if gốc của T = null then thêm đỉnh r vào cây và gán cho nó nhãn x.
else if label(v) ≠ x then gán nhãn cho đỉnh mới là x
{v = vị trí của x}.
```

www.thuvien247.net

16. Xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho các từ banana, peach, apple, pear, coconut, mango và papaya theo thứ tự từ điển.

Giải. Thủ tục như bài 14 ta có cây tìm kiếm nhị phân cần tìm có dạng:



17. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng một chiếc cân 2 đĩa để tìm đồng xu giả trong 4 đồng xu (có 3 đồng thật, một đồng giả). Biết đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn hoặc nặng hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần cân tìm được.

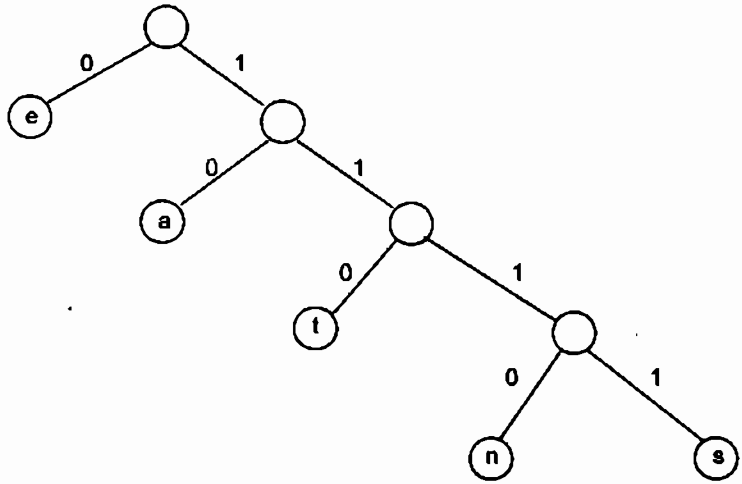
Giải. Có ba khả năng xảy ra đối với mỗi lần cân: 2 đĩa có trọng lượng như nhau, đĩa thứ nhất nặng hơn đĩa thứ hai và đĩa thứ nhất nhẹ hơn đĩa thứ 2. Do đó cây quyết định cho một dãy các lần cân là cây 3 – phân, và có ít nhất 4 lá trong cây quyết định vì có 4 kết cục có thể và mỗi kết cục phải được biểu diễn bằng ít nhất 1 lá. Số lần cân nhiều nhất để xác định đồng xu giả là chiều cao của cây 3 – phân. Theo Định lý 4 phần 2 thì $h = [\log_3 l] = [\log_3 4] = 2$. Thủ tục cân như sau:

- Đầu tiên cân đồng xu 1 với đồng xu 2, nếu chúng bằng nhau thì cân đồng xu 1 với đồng xu 3. Nếu đồng xu 1 và 3 bằng nhau thì đồng xu giả là đồng xu 4. Nếu đồng xu 1 khác đồng xu 3 thì đồng xu 3 là giả.
- Nếu đồng xu 1 khác đồng xu 2 thì ta cân đồng xu 1 với đồng xu 3. Nếu đồng xu 1 và đồng xu 3 bằng nhau thì đồng xu 2 là giả. Còn nếu không cân bằng thì đồng xu 1 là giả.

18. Xây dựng cây nhị phân mã tiền tố của các chữ e mã bằng 0, chữ a mã bằng 10, chữ t mã bằng 110, chữ n mã bằng 1110 và chữ s mã bằng 1111. Dùng cây nhị phân vừa xây dựng giải mã từ có mã tiền tố là: 11111011100.

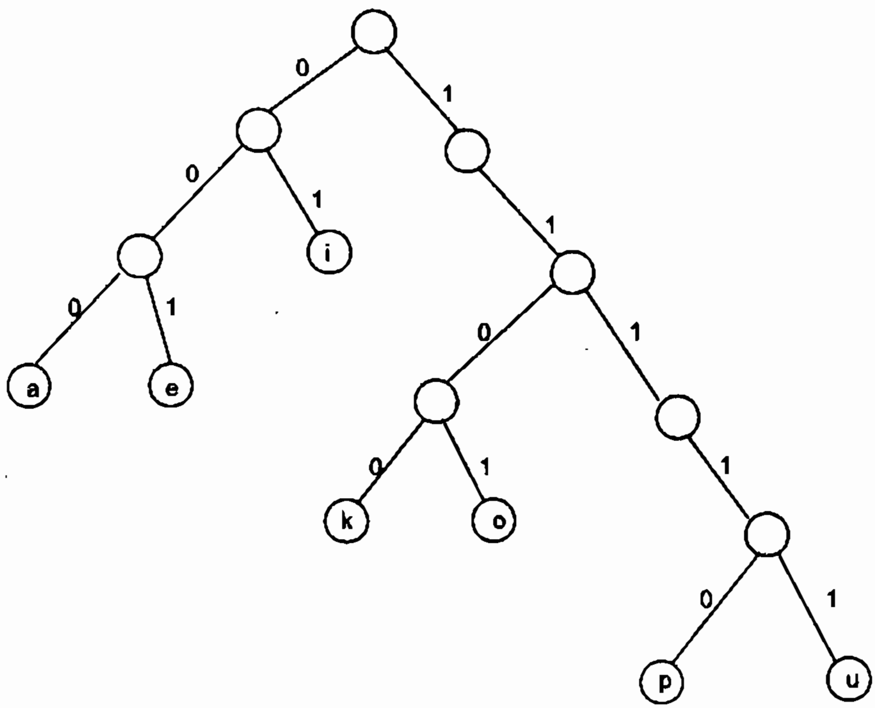
www.thuvien247.net

Giải. Theo định nghĩa cây nhị phân mã tiền tố ta có cây nhị phân cần xác định là:



Giải mã xâu 11111011100 như sau: 1111 là xâu đi từ gốc tới lá s, hay xâu 1111 là mã của chữ s. Tiếp theo xét bit thứ 5 và 6 là 10, đi từ gốc thì 10 là mã của chữ a. Tiếp theo là từ bit 7 đến bis thứ 10 là 1110, đi từ gốc dẫn tới lá n, hay n có mã tiền tố là 1110. Bit thứ 11 trong dãy là o, bit này đi từ gốc sẽ dẫn tới lá e. Vậy xâu 11111011100 là mã của xâu ký tự sane.

19. Hãy xác định mã tiền tố của a, e, i, k, o, p và u nếu sơ đồ mã được cho bởi cây nhị phân dưới đây:



www.thuvien247.net

Giải

a có mã là 000 e có mã là 001

i có mã là 01 k có mã là 1100

o có mã là 1101 p có mã là 11110

u có mã là 11111.

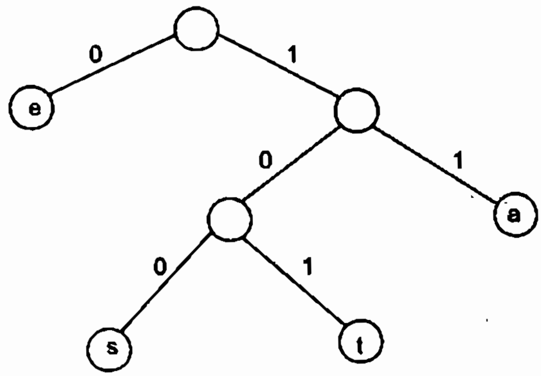
20. Xây dựng cây nhị phân với mã tiền tố biểu diễn các lược đồ mã hóa sau đây:

a) a : 11, e : 0, t : 101, s : 100;

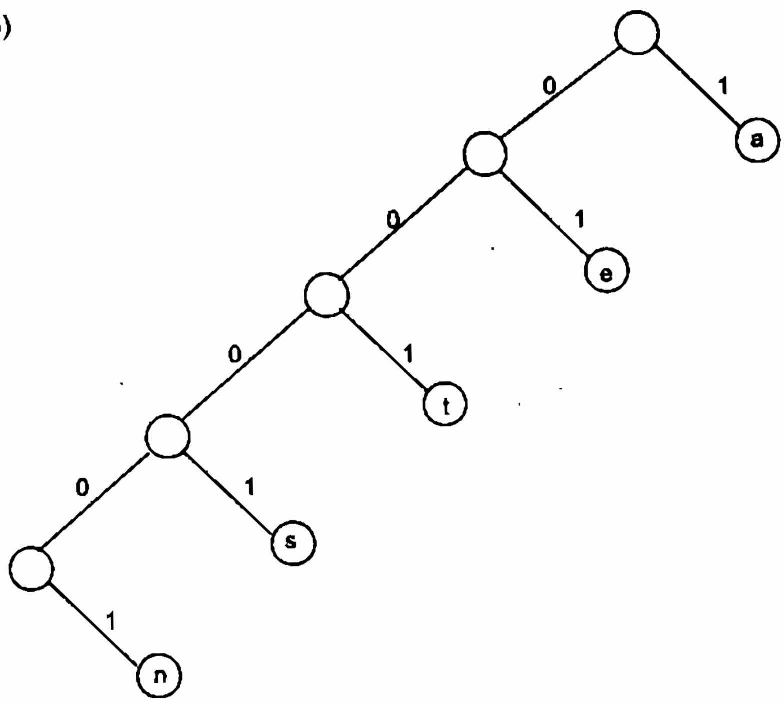
b) a : 1, e : 01, t : 001, s : 0001, n : 00001.

Giải

a)



b)



www.thuvien247.net

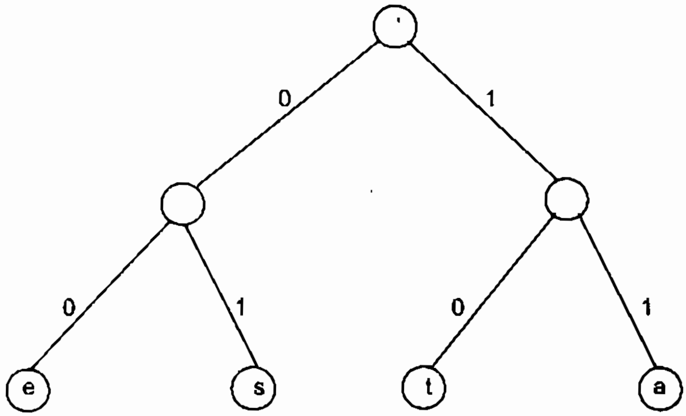
21. Xác định cái nào là mã tiền tố trong các sơ đồ mã sau đây:

a) a : 11, e : 00, t : 10, s : 01;

b) a : 0, e : 1, t : 01, s : 001.

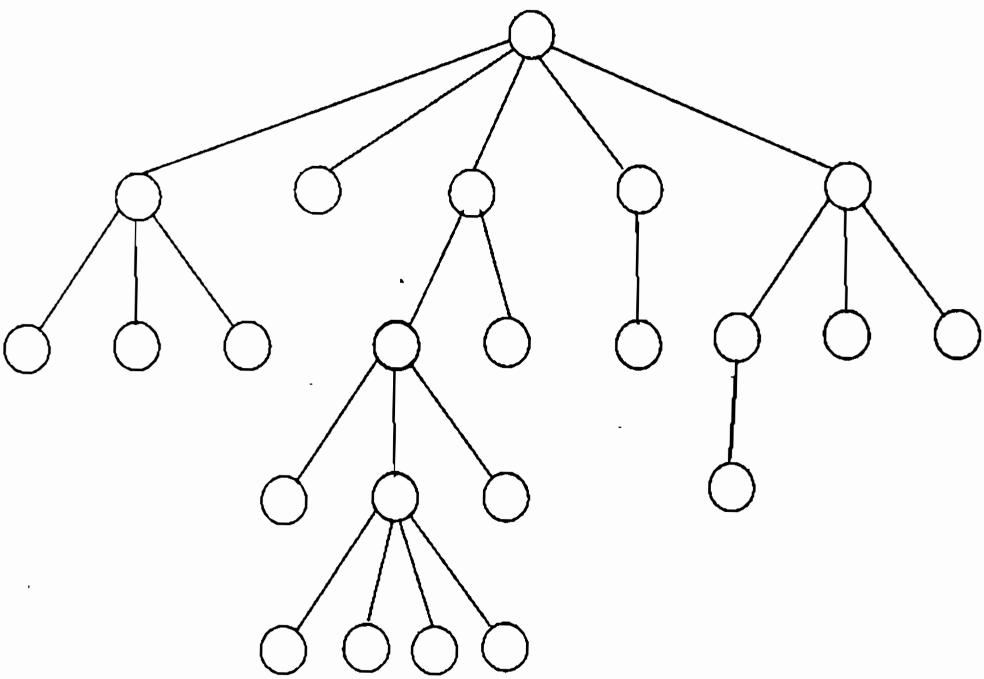
Giải

a) Có vì cây nhị phân mã tiền tố là:



b) Không vì cây nhị phân mã tiền tố không tồn tại.

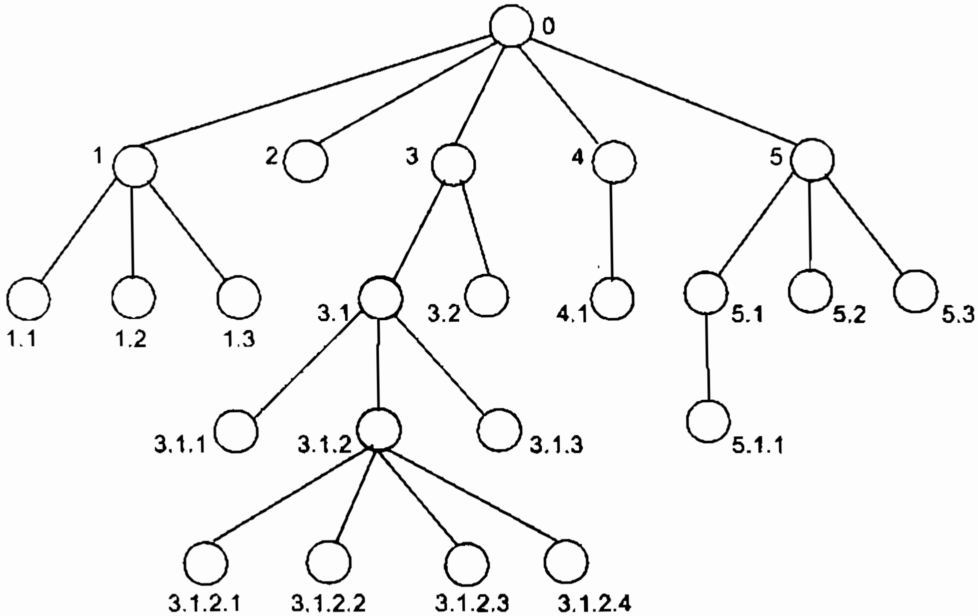
22. Cho cây ngũ nguyên dưới đây



Hãy gán nhãn theo địa chỉ phổ dụng cho tất cả các đỉnh của cây trên.

www.thuvien247.net

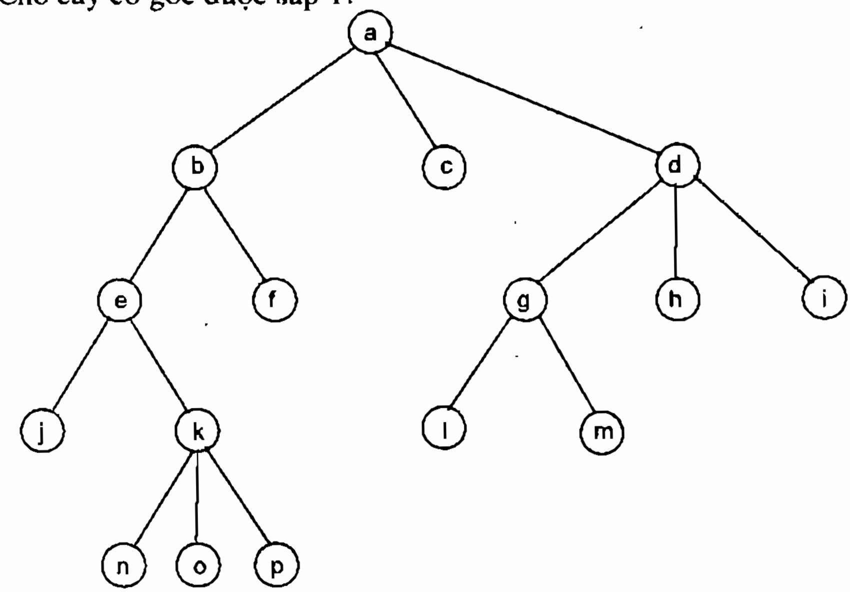
Giải. Cây gán nhãn cần tìm có dạng



Rõ ràng thứ tự từ điển của các nhãn là:

0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.3 < 2 < 3 < 3.1 < 3.1.1 < 3.1.2 < 3.1.2.1 < 3.1.2.2 < 3.1.2.3 < 3.1.2.4 < 3.1.3 < 3.2 < 4 < 4.1 < 5 < 5.1 < 5.1.1 < 5.2 < 5.3.

23. Cho cây có gốc được sắp T:



Cách duyệt tiền thứ tự cây có gốc được sắp T theo thứ tự nào?

Giải. Thứ tự là: a, b, e, j, k, n, o, p, f, c, d, g, l, m, h, i.

www.thuvien247.net

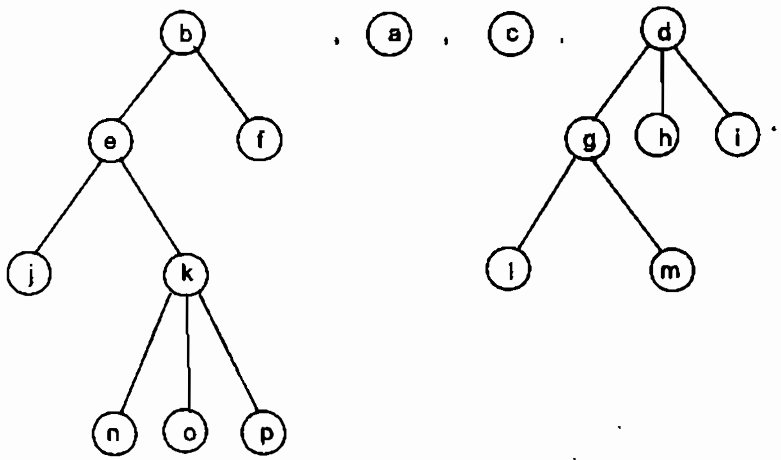
24. Viết thuật toán Duyệt kiểu tiền thứ tự dưới dạng giả mã đối với cây T có gốc và được sắp.

Thuật toán:

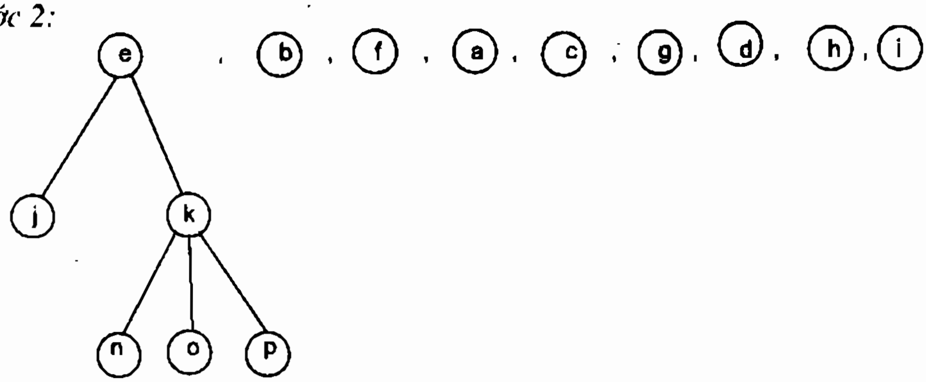
Procedure preorder (T: cây có gốc và được sắp);
r := gốc của cây T;
liệt kê r;
for mỗi cây con c của r từ trái sang phải
begin
    T(c) := cây con với gốc c;
    preorder (T(c))
end.

25. Cho cây có gốc và được sắp trong bài tập 23. Cách duyệt trung thứ tự sẽ viếng thăm các đỉnh của cây có gốc và được sắp trong bài tập 23 theo thứ tự nào?

Giải. Bước 1: Duyệt theo kiểu trung thứ tự: Viếng thăm cây con cực trái, thăm gốc, thăm các cây con khác từ trái sang phải lần lượt theo các bước sau đây đối với cây T trong bài tập 23 ta được:

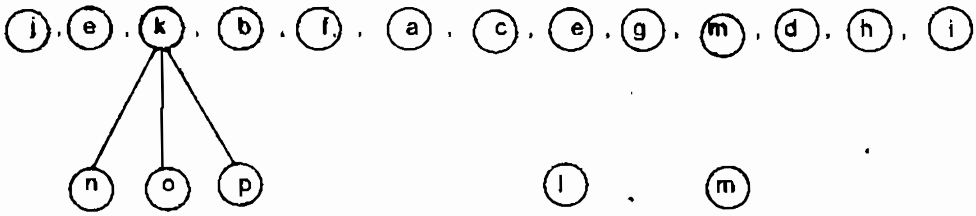


Bước 2:



www.thuvien247.net

Bước 3:



Bước 4

j, e, n, k, o, p, b, f, a, c, l, g, m, d, h, i

Tóm lại, duyệt trung thứ tự cây trong bài tập 23 là lần lượt viếng thăm các đỉnh được liệt kê từ j đến i trong bước 4.

26. Xây dựng thuật toán duyệt kiểu trung thứ tự dưới dạng giả mã đối với cây T có gốc và được sắp.

Thuật toán

Procedure inorder (T): cây có gốc và được sắp;

r := gốc của cây T;

if t là lá then liệt kê r

else

begin

l := con đầu tiên từ trái sang phải của r;

T(*l*) := Cây con với gốc I;

inorder (T(*l*));

liệt kê r;

for mỗi cây con c của r từ trái sang phải trừ l

T(c) := Cây con với gốc c;

inorder (T(c))

end.

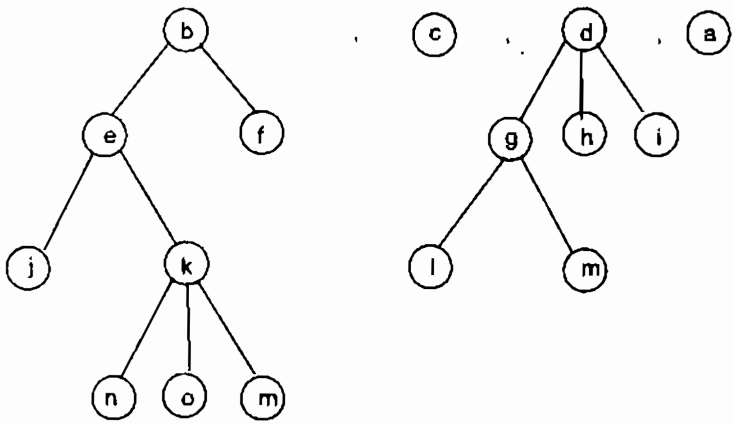
27. Cách duyệt kiểu hậu thứ tự đối với cây có gốc và được sắp cho trong bài tập 23 được cho theo thứ tự nào?

Giải. Duyệt kiểu hậu thứ tự (đối với cây trong bài tập 23) bắt đầu bằng cách duyệt hậu thứ tự cây con với gốc b, duyệt hậu thứ tự cây con với gốc c (chính là c) và duyệt hậu thứ tự cây con với gốc d và cuối cùng là gốc a.

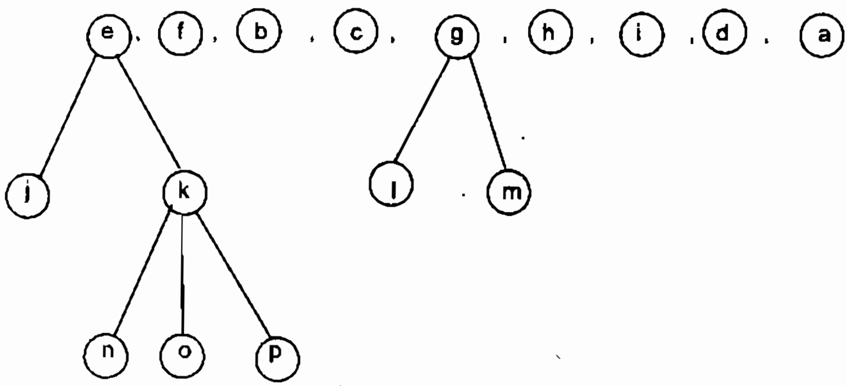
Cụ thể gồm các bước duyệt như sau:

www.thuvien247.net

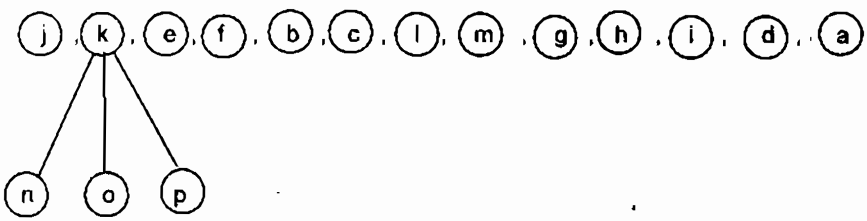
Bước 1:



Bước 2:



Bước 3:



Bước 4

j, n, o, p, k, e, f, b, c, l, m, g, h, i, d, a

là kết quả duyệt theo kiểu hậu thứ tự đối với cây T trong bài tập 23.

28. Xây dựng thuật toán duyệt theo kiểu hậu thứ tự đối với cây có gốc và được sắp T dưới dạng giả mã.

www.thuvien247.net

Giải. Thuật toán:

```
Procedure postorder (T: Cây có gốc và được sắp);
r := gốc của T;
for mỗi cây con c của r từ trái sang phải
begin
        T(c) := cây con với gốc c;
        Postorder (T(c))
end.
```

29. Để biểu diễn biểu thức số học chứa các toán tử + (cộng), – (trừ), * (nhân), / (chia) và $\uparrow$ (lũy thừa) (ta dùng các dấu ngoặc biểu thị thứ tự các phép toán) bằng cây có gốc được sắp, trong đó các đỉnh trong biểu thị các phép toán, các lá biểu thị các số hay các biến. Mỗi một phép toán tác động lên các cây con bên trái và cây con bên phải của nó đều theo thứ tự này.

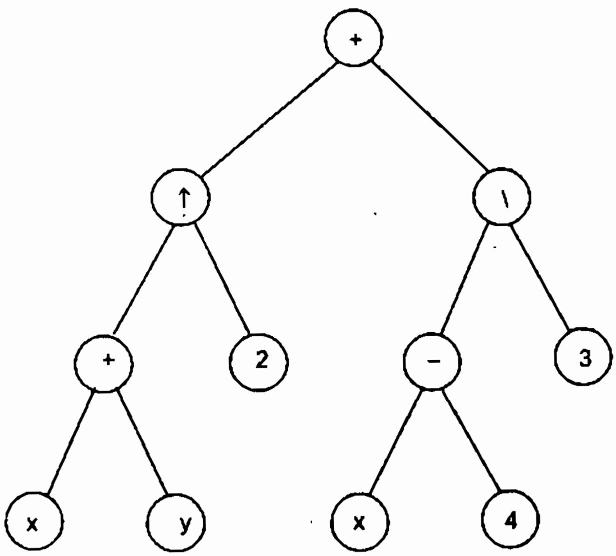
a) Tìm cây có gốc biểu diễn biểu thức: $((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3)$.

b) Tìm dạng tiền tố của biểu thức trên.

c) Tìm dạng hậu tố của biểu thức trên.

Giải

a) Cây nhị phân cho biểu thức này được xây dựng từ dưới lên. Trước tiên xây dựng cây con cho biểu thức x + y. Sau đó kết hợp thành cây con lớn hơn đối với $(x + 2)\uparrow 2$. Cũng như vậy, ta xây dựng cây con $(x - 4)$ và sau đó kết hợp thành cây con $(x - 4)/3$. Cuối cùng 2 cây con biểu thị $(x + y)\uparrow 2$ và $(x - 4)/3$ kết hợp với nhau để nhận được cây có gốc được sắp biểu diễn $((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3)$. Cây nhận được trong các bước trên có dạng:



www.thuvien247.net

b) Tìm dạng tiền tố của biểu thức đã cho bằng cách duyệt cây nhị phân biểu diễn nó theo kiểu tiền thứ tự ta nhận được:

$$+ \uparrow + x\ y\ 2\ / - x\ 4\ 3.$$

c) Dạng hậu tố của biểu thức $((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3)$ nhận được bằng cách duyệt theo kiểu hậu thứ tự cây nhị phân biểu diễn nó ta được:

$$x\ y + 2 \uparrow x\ 4 - 3\ / +.$$

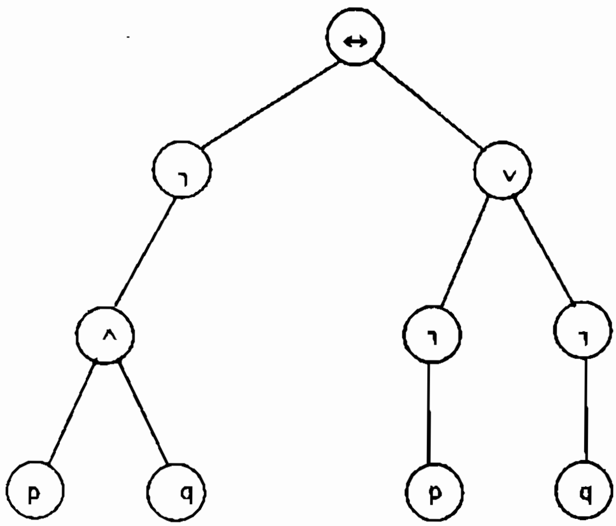
30. a) Hãy tìm cây có gốc và được sắp biểu diễn mệnh đề lôgic phức hợp:

$$(\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

b) Tìm dạng tiền tố, hậu tố và trung tố của biểu thức trên.

Giải

a) Cây có gốc ứng với mệnh đề phức hợp này được xây dựng từ dưới lên. Trước hết tạo các cây con $\neg p$ và $\neg q$. Tương tự xây dựng cây con $p \wedge q$, sau đó là các cây con $\neg (p \wedge q)$ và $(\neg p) \vee (\neg q)$ được xây dựng. Cuối cùng dùng hai cây con này tạo cây có gốc cần tìm dưới đây:



b) Tìm dạng tiền tố, hậu tố và trung tố của biểu thức thông qua duyệt cây trên của nó xây dựng trong a tương ứng theo kiểu tiền, hậu và trung thứ tự (kể cả các dấu ngoặc). Kết quả nhận được:

$\leftrightarrow \neg\ \wedge\ p\,q\ \vee\ \neg\ \ p\,\neg\ \ q$, $p\,q\ \wedge \neg p \neg q \neg\ \ \vee\ \leftrightarrow$ và

$(\neg\ \ (p \wedge q)) \leftrightarrow\ ((\neg p) \vee\ \ (\neg q))$ tương ứng.

31. a) Tìm giá trị của biểu thức tiền tố: $+ - * 2\ 3\ 5 / \uparrow 2\ 3\ 4$.

b) Tìm giá trị của biểu thức hậu tố: $7\ 2\ 3 * - 4 \uparrow 9\ 3 / +$.

Giải

a) Các bước để tính giá trị của biểu thức này được tiến hành từ phải sang trái và thực hiện các phép toán với các toán hạng ở bên phải nó, như các bước dưới đây:

www.thuvien247.net

$+ - * 2\ 3\ 5 / \uparrow 2\ 3\ \ 4$

$2 \uparrow 3 = 8$

$+ - * 2\ 3\ 5 / 8\ \ 4$

$8 / 4 = 2$

$+ - * 2\ 3\ \ 5\ 2$

$2 * 3 = 6$

$+ - 6\ 5\ 2$

$6 - 5 = 1$

$+ 1\ 2$

$1 + 2 = 3$

Vậy giá trị của biểu thức tiền tố là 3.

b) Các bước tính giá trị của biểu thức được tiến hành từ bên trái và thực hiện các phép toán với hai toán hạng ở bên trái toán tử như các bước dưới đây với kết quả nhận được là 4:

$7\ 2\ 3\ * \ -4 \uparrow 9\ 3 / 4$

$2*3=6$

$7\ 6\ -\ 4 \uparrow 9\ 3 / +$

$7-6=1$

$1\ 4 \uparrow 9\ 3 / +$

$1^4 = 1$

$1\ 9\ 3 / +$

$9/3=3$

$1\ 3\ +$

$1+4=4$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

32. Chứng minh các Định lý 1, 2 và 3.

33. Chứng minh các Định lý 4 và 5.

34. Trong các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{n,m}$, với n, m như thế nào thì $K_{n,m}$ là cây.

www.thuvien247.net

35. Hoặc là vẽ cây m – phân đầy đủ với 84 lá và có chiều cao bằng 3 hoặc chỉ ra không tồn tại cây như vậy.

36. Cho cây m – phân đầy đủ T với 81 lá và có chiều cao bằng 4.

a) Tìm cận trên và cận dưới của m.

b) Giá trị m là bao nhiêu nếu T là cây cân đối.

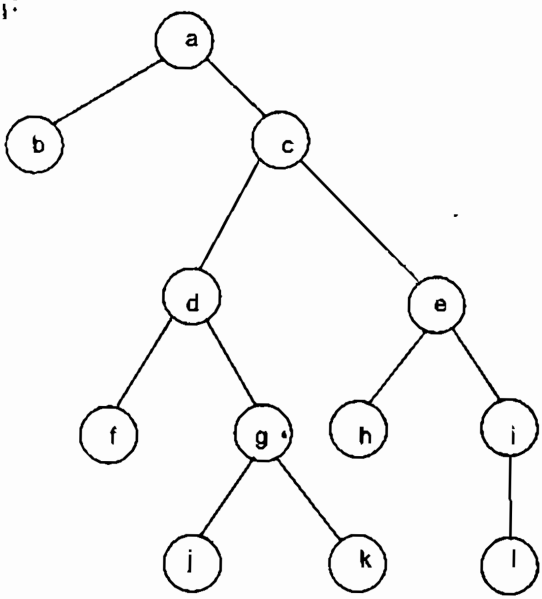
37. Cây m – phân hoàn toàn với chiều cao bằng h có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu lá.

38. Vẽ cây nhị phân hoàn toàn có 15 đỉnh biểu thị mạng kết nối cây có 15 bộ xử lý.

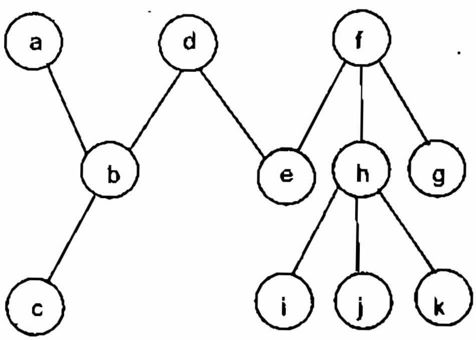
39. Tâm sai của một đỉnh trong cây không gốc là độ dài của đường đi đơn dài nhất bắt đầu từ đỉnh này.

Một đỉnh gọi là tâm nếu không có đỉnh nào trong cây có tâm sai nhỏ hơn tâm sai của đỉnh này.

Cho cây T_1:



và T_2:



Tìm mọi đỉnh là tâm trong các cây T_1, T_2 ở trên.

www.thuvien247.net

40. Chứng tỏ rằng một cây hoặc có 1 tâm hoặc có 2 tâm liền kề nhau.

41. Xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho các từ: oenology, phrenology, campanology, ornithology, ichthyology, limnology, alchemy và astrology theo thứ tự từ điển.

42. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng chiếc cân 2 đĩa để tìm đồng xu giả trong 12 đồng xu? Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần vừa tìm được.

43. Xác định cái nào là mã tiền tố trong các sơ đồ mã sau:

a) a : 101, e : 11, t : 001, s : 011, n : 010;

b) a : 010, e : 11, t : 011, s : 1011, n : 1001, i : 10101

44. Dựng cây nhị phân với mã tiền tố biểu diễn các lược đồ mã hóa sau:

a : 1010, e : 0, t : 11, s : 1011, n : 1001, i : 100001.

45. Cho sơ đồ mã

a : 001, b : 0001, e : 1, r : 0000, s : 0100, t : 011, x : 01010.

Hãy tìm các từ được biểu diễn bởi

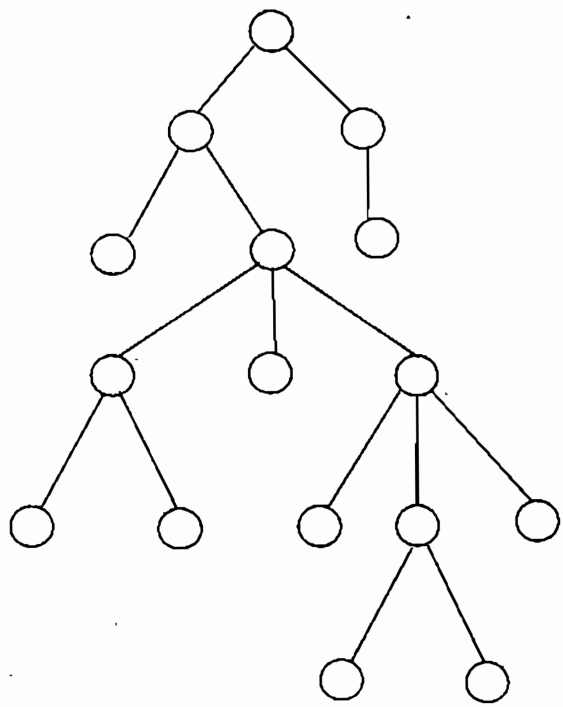
a) 01110100011;

b) 0001110000;

c) 0100101010;

d) 01100101010.

46. Xây dựng hệ địa chỉ phổ dụng cho cây có gốc và được sắp sau:



www.thuvien247.net

47. Các lá của cây có gốc và được sắp có thể có danh sách địa chỉ phổ dụng như sau được không? Nếu có, hãy xây dựng cây có gốc đó:

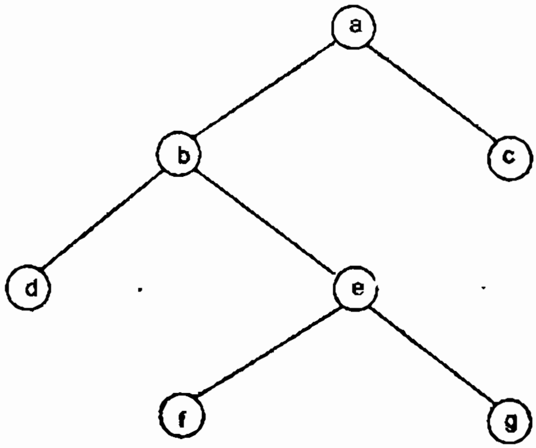
a) 1.1.1, 1.1.2, 1.2, 2.1.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2, 3.1.1, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.2;

b) 1.1, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 2.1, 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.2.1, 2.4.2.2, 3.1, 3.2.1, 3.2.2;

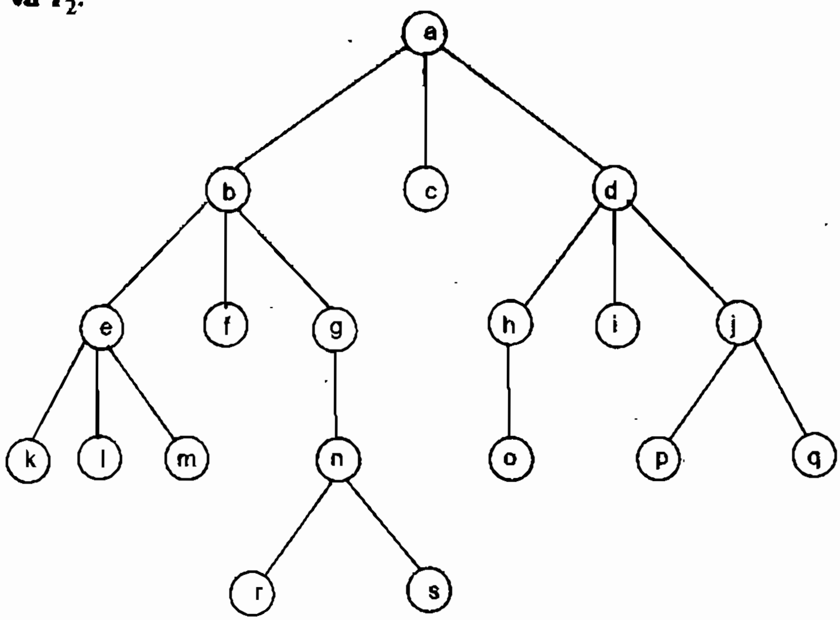
c) 1.1, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.2.1, 1.3, 1.4, 2, 3.1, 3.2, 4.1.1.1.

48. Cho hai cây có gốc và được sắp:

T_1:



và T_2:



Hãy xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu tiền thứ tự.

www.thuvien247.net

49. Xác định thứ tự mà các đỉnh của hai cây trong bài tập 48 nếu ta duyệt nó theo kiểu:
a) Tiền thứ tự;
b) Trung thứ tự;
c) Hậu thứ tự.

50. a) Biểu diễn các biểu thức: $(x + xy) + (x/y)$ và $x + ((xy + x)/y)$ bằng các cây nhị phân.
b) Hãy viết biểu thức trong a dưới dạng tiền tố, trung tố và hậu tố.

51. a) Biểu diễn các mệnh đề phức hợp

$$(\rceil(p \wedge q) \leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q) \text{ và } (\rceil p \wedge (q \leftrightarrow \rceil p)) \vee \rceil q$$

bằng các cây có gốc và được sắp.
b) Hãy viết biểu thức trong a dưới dạng tiền tố, trung tố và hậu tố.

52. a) Hãy biểu diễn $(A \cap B) - (A \cup (B - A))$ bằng cây có gốc được sắp.
b) Viết biểu thức trong a dưới dạng tiền tố, trung tố và hậu tố.

§5. CÂY VÀ CÁC BÀI TOÁN SẮP XẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bài toán sắp xếp các phần tử của một tập hợp được ứng dụng nhiều và thường gặp trong cuộc sống. Chẳng hạn, để lập danh bạ điện thoại cần phải sắp xếp tên của những người thuê bao theo thứ tự từ điển...

Sắp xếp là sự sắp đặt lại các phần tử vào một danh sách theo thứ tự nào đó. Ví dụ, sắp xếp các phần tử 7, 2, 4, 3, 1, 6, 5 thành một danh sách theo thứ tự tăng dần: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hay sắp xếp các chữ cái d, h, c, a, f theo thứ tự từ điển ta được a, c, d, f, h.

1. Thuật toán sắp xếp

Phần lớn các công việc của máy tính là sắp xếp lại các đối tượng thuộc các loại khác nhau. Chính vì vậy, các nhà nghiên cứu không thể không nghiên cứu và phát triển thuật toán sắp xếp sao cho có hiệu quả nhất. Chẳng hạn, thuật toán sắp xếp một tập gồm n phần tử dựa trên so sánh nhị nguyên được biểu diễn bằng cây quyết định nhị phân với các đỉnh trong chứa các phép so sánh hai phần tử, còn đỉnh ngoài (lá) chứa một trong n! hoán vị của n phần tử.

Độ phức tạp sắp xếp dựa trên so sánh nhị nguyên tính bằng số các phép toán so sánh được sử dụng. Số tối đa các phép so sánh cần dùng để sắp xếp một danh sách có n phần tử chính là trường hợp tồi tệ nhất của thuật toán. Số tối đa các phép so sánh cần dùng bằng chiều cao của cây quyết định theo Định lý 4 phần 2 của §2 ta có:

Định lý 6. Thuật toán sắp xếp dựa trên so sánh nhị nguyên đòi hỏi ít nhất $\lceil \log n! \rceil$ phép so sánh.

www.thuvien247.net

Từ định lý trên ta có:

Hệ quả 1. Thuật toán sắp xếp có hiệu quả tốt nhất khi độ phức tạp thời gian của nó là O(nlogn).

2. Thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt

Sắp xếp kiểu nổi bọt bao gồm các thao tác cơ bản:

– Đổi chỗ phần tử lớn hơn với phần tử nhỏ hơn đi sau bắt đầu từ đầu danh sách và duyệt qua toàn bộ danh sách.

– Thủ tục trên lặp lại cho tới khi việc sắp xếp hoàn thành.

Chú ý: Ta hãy tưởng tượng khi các phần tử được đặt vào một cột thì sắp xếp kiểu nổi bọt các phần tử nhỏ hơn sẽ nổi lên trên, vì chúng đổi chỗ với các phần tử lớn hơn. Các phần tử lớn hơn sẽ "chìm" xuống đáy cột.

Định lý 7. Thuật toán sắp xếp nổi bọt có độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất là $O(n^2)$.

Vì với mọi c > 0, ta luôn có $\frac{n(n-1)}{2} > c\, n\log n$, với n đủ lớn ta có:

Hệ quả 2. Sắp xếp kiểu nổi bọt không có O(nlogn) như là độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất.

3. Thuật toán sắp xếp kiểu hòa nhập

Thuật toán này được thực hiện theo các bước sau đây:

Phân đôi liên tiếp các danh sách thành hai danh sách con bằng nhau (hoặc hơn kém nhau một phần tử) cho tới khi mỗi danh sách con chỉ gồm một phần tử.

Dãy các danh sách con được biểu diễn bằng cây nhị phân cân đối.

Tiếp tục hòa nhập lần lượt các cặp danh sách đã có thứ tự tăng dần thành một danh sách lớn với các phần tử được sắp theo thứ tự tăng dần cho tới khi toàn bộ danh sách ban đầu được sắp theo thứ tự tăng dần.

Dãy danh sách hòa nhập được biểu diễn bằng cây nhị phân cân đối (ngược với cây nhị phân trong bước một).

Định lý 8. Số các phép so sánh cần thiết trong thuật toán sắp xếp kiểu hòa nhập một danh sách n phần tử là O(nlogn).

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Hãy sắp xếp 3, 2, 4, 1, 5 theo thứ tự tăng dần bằng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt. Hãy chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

Giải

Bước 1. So sánh 3 và 2, vì 3 > 2 không đúng vị trí nên đổi chỗ 3 và 2 cho nhau ta được 2, 3, 4, 1, 5. Vì 3 < 4 đúng vị trí nên tiếp tục so sánh 4

www.thuvien247.net

với 1. Vì 4 > 1 không đúng vị trí nên đổi cho 4 và 1 ta được 2, 3, 1, 4, 5. Vì 4 < 5 đúng vị trí nên bước 1 được hoàn thành và 5 là phần tử lớn nhất được đặt đúng vị trí trong dãy.

Bước 1 được mô tả bằng sơ đồ cột với ký hiệu:

$\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$: đổi chỗ x và y, $\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$: đúng vị trí.

3	2	2	2
2	3	3	3
4	4	4	1
1	1	1	4
5	5	5	$\boxed{5}$

Bước 2. So sánh 2 và 3, vì 2 < 3 đúng vị trí nên so sánh tiếp 3 và 1. Vì 3 > 1 không đúng vị trí nên đổi chỗ 3 và 1 ta được 2, 1, 3, 4, 5. So sánh 3 và 4. Vì 3 < 4 đúng vị trí nên so sánh tiếp 4 và 5. Vì 4 < 5 đúng vị trí nên bước 2 được hoàn thành và 4 được đặt đúng vị trí trong dãy.

Bước 2 được mô tả bằng sơ đồ cột:

2	2	2
3	3	1
1	1	3
4	4	4
$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$

Bước 3. So sánh 2 và 1, vì 2 > 1 không đúng vị trí nên đổi chỗ chúng cho nhau ta được: 1, 2, 3, 4, 5. Vì 2 < 3 đúng vị trí nên không cần tiếp tục so sánh 3 với 4 và 4 với 5 nữa (vì chúng đã đúng vị trí).

Bước 3 được hoàn thành với 3 đặt đúng vị trí.

$$\begin{matrix}2\\1\\3\\\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1\\2\\3\\\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\end{matrix}$$

Bước 4. So sánh 1 và 2, vì 1 < 2 đúng vị trí nên không phải so sánh 2 với 3 nữa, vì 2 đã đặt đúng vị trí. Bước 4 được hoàn thành.

Bước 4 được mô tả bằng sơ đồ cột là : $\begin{matrix}1\\2\\\boxed{\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}}\end{matrix}$

www.thuvien247.net

2. Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt hãy sắp xếp danh sách 3, 1, 5, 7, 4 theo thứ tự tăng dần. Hãy chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

Giải. Tương tự như bài tập 1 ta có các bước của thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt dưới dạng sơ đồ cột sau:

Bước 1

3	1	1	1	1
1	3	3	3	3
5	5	5	5	5
7	7	7	7	4
4	4	4	4	$\boxed{7}$

Bước 2

1	1	1	1
3	3	3	3
5	5	5	4
4	4	4	$\boxed{5}$
$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$

Bước 3

1	1	1
3	3	3
4	4	$\boxed{4}$
$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$
$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$

Bước 4

1
3
$\boxed{4}$
$\boxed{5}$
$\boxed{7}$

3. Viết thuật toán sắp xếp theo kiểu nổi bọt dưới dạng giả mã.

Giải. *Thuật toán*

Procedure bubblesort ($a_1, a_2, ..., a_n$)
for i := 1 to n − 1
begin
    for j := 1 to n − i
        if $a_j > a_{j+1}$ then đổi chỗ a_j và a_{j+1}
end   {$a_1, a_2, ..., a_n$ được sắp theo thứ tự tăng dần}

www.thuvien247.net

4. Sắp xếp kiểu hòa nhập theo bảng:

a) Mô tả cách hòa nhập hai danh sách có thứ tự L_1 và L_2 vào một danh sách có thứ tự L và viết thuật toán dưới dạng giả mã.

b) Áp dụng: Cho $L_1 = \{2, 3, 5, 6\}$ và $L_2 = \{1, 4\}$. Hòa nhập L_1 và L_2 để được danh sách $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ theo thuật toán mô tả trong a.

Giải

a) Bắt đầu $L = \varnothing$. So sánh hai phần tử nhỏ nhất trong L_1 và L_2. Đặt phần tử nhỏ nhất trong hai phần tử này vào cuối danh sách L và xoá nó khỏi danh sách mà nó có mặt. Tiếp theo, nếu một trong hai danh sách L_1 và L_2 là rỗng thì nối danh sách kia (danh sách không rỗng) vào cuối L. Thủ tục hòa nhập kết thúc.

Trường hợp L_1 và L_2 không rỗng thì lặp lại quá trình trên.

Thuật toán (hòa nhập hai danh sách)

```
Procedure merge (L1, L2 : danh sách)
        L := danh sách rỗng
While cả L1 và L2 đều không rỗng
begin
        Xóa phần tử nhỏ hơn trong hai phần tử đầu của L1 và L2 của
        danh sách chứa nó và đặt nó vào cuối danh sách hoà nhập L.
        if    việc xoá một phần tử làm cho một danh sách thành rỗng
        then  xoá tất cả các phần tử khỏi danh sách kia và nối chúng
              vào cuối L
end
{L là danh sách hòa nhập với các phần tử được sắp theo thứ tự tăng dần}
```

b) Kết quả áp dụng thuật toán trên đối với L_1 : 2, 3, 5, 6 và L_2 : 1, 4 được cho dưới bảng dưới đây:

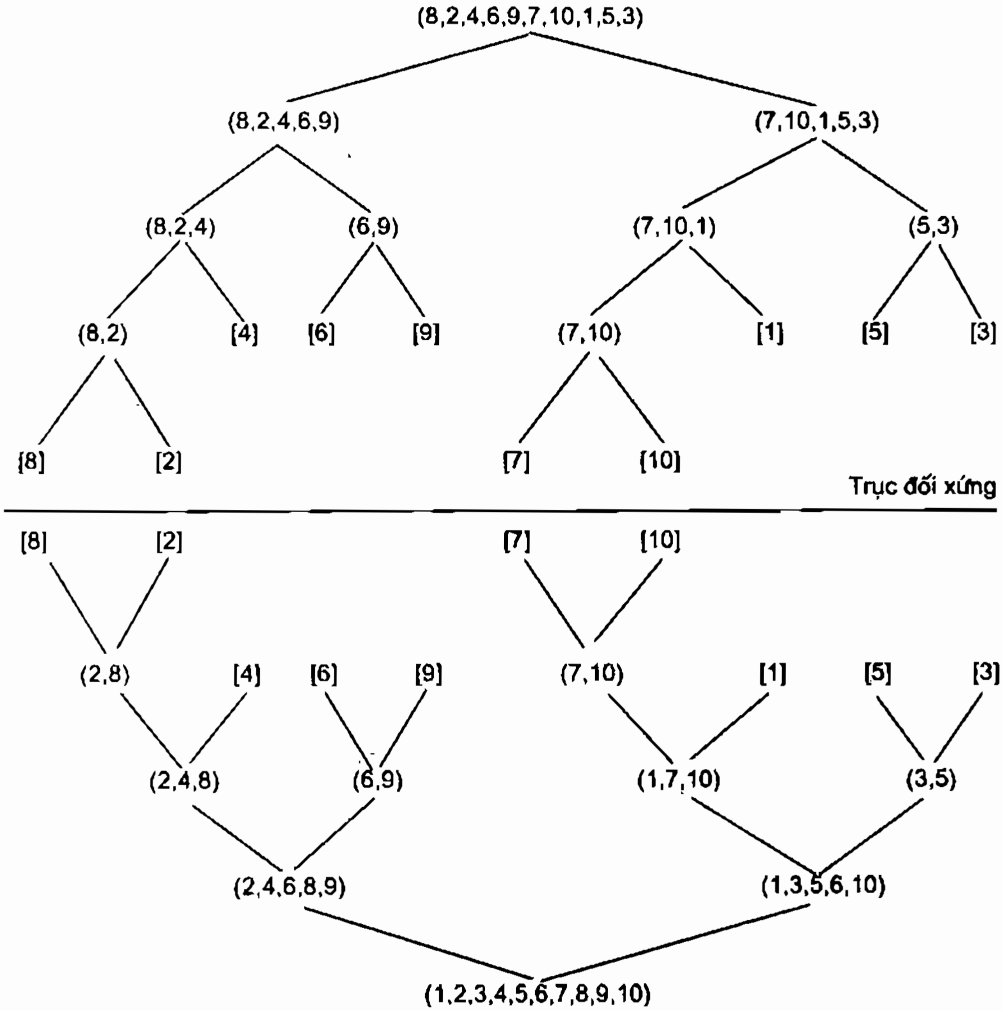
Bảng hoà nhập danh sách L_1 : 2, 3, 5, 6 và L_2: 1, 4

Danh sách L_1	Danh sách L_2	Danh sách hòa nhập L	So sánh
2 3 5 6	1 4		1 < 2
2 3 5 6	4	1	2 < 4
3 5 6	4	1 2	3 < 4
5 6	4	1 2 3	4 < 5
5 6		1 2 3 4	
		1 2 3 4 5 6	

www.thuvien247.net

5. Sắp xếp danh sách L: 8, 2, 4, 6, 9, 7, 10, 1, 5, 3 theo thứ tự tăng dần bằng cách chia đôi danh sách đã cho thành hai danh sách con có số phần tử bằng nhau hoặc hơn kém nhau một phần tử và biểu diễn các dãy con như vậy bởi cây nhị phân cân đối.

Giải. Gốc của cây nhị phân là L. Giả sử L được chia thành hai danh sách con là L_1 và L_2 với đỉnh con bên trái và đỉnh con bên phải tương ứng. Thủ tục đó dừng lại khi cây nhị phân có các lá là các phần tử trong danh sách L (|L| = số lá của cây nhị phân) lấy cây nhị phân đối ngẫu (đối xứng) với cây nhị phân xây dựng ở trên thì đỉnh gốc của cây nhị phân đối xứng chứa danh sách L được sắp theo thứ tự tăng dần (xem hình dưới). Ký hiệu (...) chỉ đỉnh trong, [...] chỉ lá.



Kết quả L: 8, 2, 4, 6, 9, 7, 10, 1, 5, 3 cho ta danh sách được sắp là:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

www.thuvien247.net

6. Dùng thuật toán hòa nhập hai danh sách L_1 : 1, 2, 5 và L_2 : 4, 3 theo bảng.

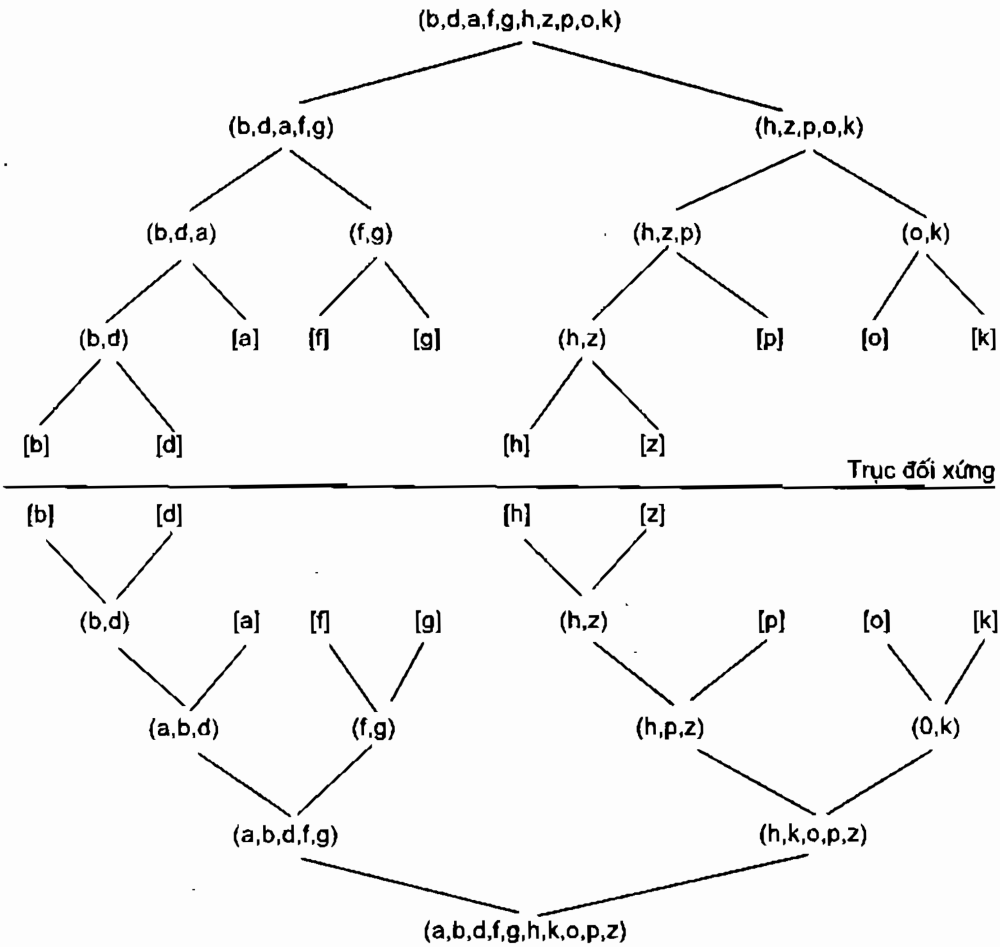
Giải

Bảng hoà nhập danh sách L_1 : 1, 2, 5, 6 và L_2: 4, 3			
Danh sách L_1	Danh sách L_2	Danh sách hòa nhập L	So sánh
1 2 5	4 3		1 < 2
6	4 3	1	2 < 3
2 5 6	4 3	1 2	3 < 4
5 6	4	1 2 3	4 < 5
5 6		1 2 3 4	
5 6		1 2 3 4 5	
6		1 2 3 4 5 6	

7. Dùng thuật toán trong bài tập 5 để sắp xếp danh sách

L := b, d, a, f, g, h, z, p, o, k theo thứ tự từ điển.

Giải



www.thuvien247.net

Kết quả sắp xếp L theo thứ thự từ điển ta được danh sách:

a, b, d, f, g, h, k, o, p, z.

8. *Sắp xếp kiểu chọn lọc:* Bắt đầu bằng việc chọn phần tử nhỏ nhất trong danh sách. Phần tử này được xếp lên đầu danh sách. Tiếp theo chọn phần tử nhỏ nhất trong danh sách còn lại và đặt phần tử đó sau phần tử nhỏ nhất ở bước 1. Thủ tục này được lặp lại cho đến khi toàn bộ danh sách được sắp xếp.

Áp dụng: Sắp xếp danh sách sau đây bằng thuật toán sắp xếp kiểu chọn lọc:

a) 3, 5, 4, 1, 2; b) 5, 4, 3, 2, 1.

Giải

a) *Bước 1:* Đặt 1 lên đầu danh sách ta được 1, 3, 5, 4, 2.

Bước 2: Đặt 2 sau 1 ta được danh sách: 1, 2, 3, 5, 4.

Bước 3: Vì 3 đã đứng sau 1, 2 nên danh sách ở bước 3 là: 1, 2, 3, 5, 4.

Bước 4: Đặt 4 sau 1, 2, 3 ta được danh sách: 1, 2, 3, 4, 5.

Kết quả của bước 4 là kết quả cần tìm.

b) *Bước 1:* Đặt 1 lên đầu danh sách ta được: 1, 5, 4, 3, 2.

Bước 2: Đặt 2 sau 1 ta được danh sách: 1, 2, 5, 4, 3

Bước 3: Đặt 3 đứng sau 2 ta được danh sách: 1, 2, 3, 5, 4

Bước 4: Đặt 4 đứng sau 3 ta được danh sách: 1, 2, 3, 4, 5.

Kết quả của bước 4 là kết quả cần tìm.

9. *Sắp xếp nhanh:* Để sắp xếp L: $a_1, a_2, ..., a_n$, thuật toán bắt đầu bằng việc lấy ra phần tử a_1 và tạo ra hai danh sách L_1 gồm các phần tử nhỏ hơn a_1 theo thứ tự xuất hiện của chúng trong L, L_2 gồm các phần tử lớn hơn a_1 theo thứ tự xuất hiện của chúng trong L. Khi đó a_1 được đặt ở cuối danh sách L_1. Thủ tục này được lặp lại một cách đệ quy cho mỗi danh sách con cho đến khi mỗi danh sách chứa chỉ một phần tử theo thứ tự xuất hiện của chúng.

Áp dụng: Cho L : 3, 5, 7, 8, 1, 9, 2, 4, 6. Dùng thuật toán sắp xếp nhanh để sắp L theo thứ tự tăng dần.

Giải

Bước 1: Tập các phần tử nhỏ hơn 3 là L_1: 1, 2.

Tập các phần tử lớn hơn 3 là L_2 : 5, 7, 8, 9, 4, 6

Đặt 3 vào cuối danh sách L_1 được L_1 : 1, 2, 3.

Bước 2: Đối với danh sách L_2: 5, 7, 8, 9, 4, 6 (trong bước 1)

Tập các phần tử nhỏ hơn 5 là L_1 : 4

Tập các phần tử lớn hơn 5 là L_2 : 7, 8, 9, 6.

Đặt 5 vào cuối danh sách L_1 được L_1 : 4, 5.

www.thuvien247.net

Bước 3: Đối với danh sách L_2: 7, 8, 9, 6 (trong bước 2)

Tập các phần tử nhỏ hơn 7 là L_1 : 6

Tập các phần tử lớn hơn 7 là L_2 : 8, 9.

Đặt 7 vào cuối danh sách L_1 được L_1 : 6, 7.

Bước 4: Đối với danh sách L_2: 8, 9 (trong bước 3)

Tập các phần tử nhỏ hơn 8 là L_1 : rỗng.

Tập các phần tử lớn hơn 8 là L_2 : 9.

Đặt 8 vào cuối danh sách L_1 được L_1 : 8.

Vậy danh sách được sắp xếp theo thuật toán sắp xếp nhanh là: L : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ở đây: 1, 2, 3 do bước 1 tạo ra; 4, 5 do bước 2 tạo ra; 6, 7 do bước 3 tạo ra; còn 8, 9 do bước 4 tạo ra.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

10. a) Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt, hãy sắp xếp danh sách L: 3, 1, 5, 7, 4, 6 và chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

a) Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt, hãy sắp xếp danh sách L: d, f, m, k, a, b và chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

11. Dùng thuật toán hoà nhập hai danh sách, hãy hoà nhập hai danh sách L_1: 1, 3, 5, 7, 9 và L_2: 2, 4, 6, 8, 10 bằng phương pháp lập bảng.

12. Dùng thuật toán trong bài tập 5, hãy sắp xếp danh sách dưới dạng cây nhị phân cân đối trong cắc trường hợp sau:

a) L: 1, 9, 10, 2, 8, 3, 4, 5, 6, 7;

b) L : c, b, a, d, u, p, q, o, f, z.

13. Có bao nhiêu phép so sánh để hòa nhập các danh sách sau đây bằng thuật toán hòa nhập hai danh sách (bài tập 4):

L_1: 1, 5, 6, 7, 8 và L_2: 2, 3, 4, 9, 10?

14. Sắp xếp danh sách sau đây bằng thuật toán sắp xếp kiểu chọn lọc (bài tập 8):

a) 4, 1, 3, 2, 5;

b) 1, 2, 3, 4, 5.

15. Hãy viết thuật toán sắp xếp kiểu chọn lọc ở dạng giả mã.

16. Sắp xếp danh sách 7, 8, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 9 bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

17. Mô tả thuật toán sắp xếp nhanh dưới dạng giả mã.

18. a) Tính số lớn nhất các phép so sánh cần thiết để sắp xếp một danh sách có 4 phần tử bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

b) Tìm số ít nhất các phép so sánh cần thiết để sắp xếp một danh sách có 4 phần tử bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

www.thuvien247.net

§6. CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Cây khung của đồ thị không có trọng số

Cho $G = <X, U>$ là một đồ thị vô hướng. Nếu đồ thị bộ phận $G' = <X, U'>$ của $G = <X, U>$ ($U' \subseteq U$) là một cây, tức là G' liên thông không có chu trình thì ta nói $G' = <X, U>$ là cây khung của đồ thị $G = <X, U>$.

Định lý 1. Đồ thị vô hướng $G = <X, U>$ với $|X| = n \geq 2$ có cây khung khi và chỉ khi nó liên thông.

Kết quả dưới đây cho thấy số lượng cây khung của một đồ thị là rất lớn.

***Định lý 2** (Cayley).* Số cây khung của đồ thị K_n ($n \geq 2$) là n^{n-2}.

Dưới đây ta xét hai thuật toán tìm kiếm cây khung của đồ thị không trọng số.

Thuật toán 1 (Thuật toán ưu tiên chiều sâu)

Cho $G = <X, U>$ là một đồ thị vô hướng liên thông. Thuật toán ưu tiên chiều sâu tìm cây khung của $G = <X, U>$ thực hiện theo các bước sau đây:

- Chọn tùy ý một đỉnh trong $G = <X, U>$ làm gốc của cây.
- Xây dựng đường đi từ đỉnh này bằng cách lần lượt ghép các cạnh vào, sao cho mỗi cạnh mới ghép sẽ nối đỉnh cuối cùng trên đường đi với một đỉnh còn chưa thuộc đường đi. Thủ tục này chỉ dừng lại khi không thể ghép thêm vào bất kỳ cạnh khác được nữa, vì nếu ghép sẽ tạo ra chu trình.
- Nếu cây được tạo ra bởi các bước trên có tập đỉnh là tập đỉnh X của G thì cây đó là cây khung của đồ thị G.
- Trường hợp ngược lại, lùi lại một đỉnh trước đỉnh dừng lại cuối cùng của đường đi và nếu có thể được thì xây dựng đường đi mới xuất phát từ đỉnh này đi qua các đỉnh còn chưa thuộc đường đi. Nếu điều đó không thể làm được thì lùi tiếp lại một đỉnh nữa và tại điểm này lại xây dựng đường đi mới.
- Các thủ tục trên sau một số bước sẽ dừng lại và cho ta cây khung của $G = <X, U>$.

Thuật toán 2 (Thuật toán ưu tiên chiều rộng)

- Chọn một đỉnh bất kỳ trong đồ thị vô hướng liên thông $G = <X, U>$ làm gốc của cây khung, gốc gán mức 0.
- Ghép tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh gốc sao cho các đỉnh kề với đỉnh gốc nằm ở mức 1 với thứ tự tùy ý.
- Tiếp tục với mỗi đỉnh ở mức 1, ta ghép các cạnh liên thuộc với chúng sao cho các đỉnh kề với các đỉnh có mức 1 không tạo ra chu trình và được nằm ở mức 2 của cây với thứ tự tùy ý.

www.thuvien247.net

- Quá trình này dừng lại sau một số bước làm việc (do tính hữu hạn của đồ thị) và tất cả các đỉnh của đồ thị G = <X, U> đã được ghép vào cây.

Thuật toán 3 (Xóa cạnh tạo ra chu trình)

Giả sử G = <X, U> là đơn đồ thị liên thông.

- Nếu G = <X, U> không có chu trình thì G = <X, U> là cây khung.
- Nếu G = <X, U> có chu trình thì bỏ đi một cạnh của chu trình trong đồ thị đó. Thủ tục bỏ đi các cạnh trong chu trình chỉ dừng lại khi đồ thị nhận được không còn chu trình nữa. Do đồ thị có hữu hạn cạnh nên sau một số hữu hạn bước thuật toán dừng và cho cây khung của đồ thị G = <X, U>.

Chú ý: Thuật toán 1 và 2 tạo ra cây khung của đồ thị dưới dạng cây có gốc. Thuật toán ưu tiên chiều sâu càng nhiều cạnh càng tốt trong mỗi bước thực hiện các thuật toán. Còn thuật toán ưu tiên chiều rộng thì cây có mức, mức càng nhiều đỉnh càng tốt.

2. Cây khung của đồ thị có trọng số

Cho G = <X, U> là một đồ thị liên thông có trọng số (không âm). Theo Định lý 2 (Cayley) thì G có thể có nhiều cây khung.

Trọng số của đồ thị G là $l(G) = \sum_{u \in X} l(u)$, ở đây l(u) là trọng số của cạnh u.

Khi đó cây khung nhỏ nhất của G = <X, U> là cây khung có trọng số bé nhất trong tất cả các cây khung của đồ thị G = <X, U>.

Dưới đây trình bày hai thuật toán tìm cây khung bé nhất của đồ thị có trọng số liên thông.

a) Thuật toán 1 (PRIM)

Bài toán: input: G = <X, U> có trọng số và liên thông với |X| = n đỉnh;

output: Cây khung G_0 có trọng số bé nhất.

- Chọn một cạnh bất kỳ có trọng số bé nhất trong U, chẳng hạn đó là cạnh u_1, đặt $U_1 = \{u_1\}$.
- Chọn cạnh có trọng số bé nhất trong số $U - U_1$ các cạnh liền kề với u_1 không tạo ra chu trình với U_1, chẳng hạn đó là u_2, đặt $U_2 = U_1 \cup \{u_2\} = \{u_1, u_2\}$.
- Chọn cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh $U - U_2$ liền kề với các cạnh trong U_2 mà không tạo ra chu trình, chẳng hạn đó là u_3, đặt $U_3 = U_2 \cup \{u_3\} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

...

www.thuvien247.net

Thủ tục trên dừng lại khi đã chọn đủ n – 1 cạnh, tức là ở bước thứ n – 1 xây dựng được tập $U_{n-1} = U_{n-2} \cup \{u_{n-1}\} = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}\}$, ở đây cạnh u_{n-1} là cạnh có trọng số bé nhất trong số các cạnh $U - U_{n-2}$ liền kề và không tạo ra chu trình với các cạnh được chọn.

Định lý 3. Cây khung tạo ra theo thuật toán 1 (thuật toán PRIM) là cây khung bé nhất của đồ thị liên thông có trọng số G = <X, U> với |X| = n đỉnh.

b) Thuật toán 2 (KRUSKAL)

Bài toán: input: G = <X, U> liên thông có trọng số với |X| = n đỉnh;

output: G_o = <X, U'> cây khung có trọng số bé nhất.

- Chọn cạnh có cùng trọng số nhỏ nhất của đồ thị G = <X, U> làm cạnh của cây khung, miễn là các cạnh đó không tạo ra chu trình.
- Ghép thêm các cạnh có cùng trọng số bé nhất trong số các cạnh còn lại vào cây khung, miễn là chúng không tạo ra chu trình với các cạnh đã cho.
- Thủ tục ghép như vậy sẽ dừng lại nếu n – 1 cạnh đã được chọn.

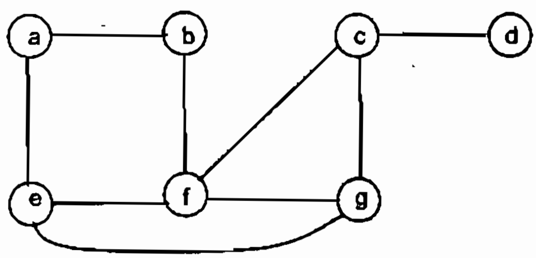
Định lý 4. Cây khung tạo ra theo thuật toán 2 (thuật toán KRUSKAL) là cây khung bé nhất của đồ thị liên thông có trọng số G = <X, U> với |X| = n đỉnh.

Chú ý: Nếu đồ thị G = <X, U> liên thông và có trọng số các cạnh khác nhau từng cặp thì G = <X, U> có duy nhất một cây khung bé nhất. Trong trường hợp này các bước làm việc của thuật toán PRIM và thuật toán KRUSKAL là như nhau.

Trường hợp ngược lại, G = <X, U> trọng số các cạnh không nhất thiết khác nhau từng cặp thì G = <X, U> có thể có nhiều cây khung khác nhau về cấu trúc nhưng cùng một trọng số bé nhất.

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

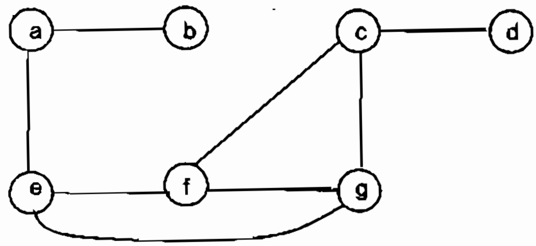
1. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



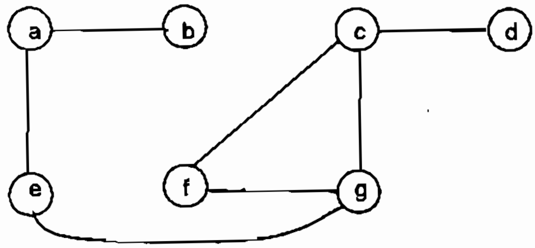
Tìm cây khung của đồ thị trên bằng cách xóa cạnh tạo ra chu trình.

Giải. Trước hết khẳng định G có cây khung vì G liên thông. Bỏ cạnh (b, f) ta bỏ được một chu trình và nhận được G_1 dưới dạng

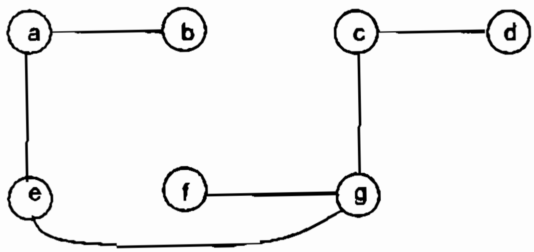
www.thuvien247.net



Xóa tiếp cạnh (e, f) ta được G_2 dưới dạng



Xóa tiếp cạnh (f, c) ta được G_3 dưới dạng



Đây là cây khung của đồ thị G.

Chú ý: Nếu trong G_2 không xóa cạnh (f, c) mà xóa cạnh (f, g) hoặc (c, g) thì ta có các cây khung khác ngoài cây khung G_3.

2. Chứng minh rằng một đơn đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó có cây khung.

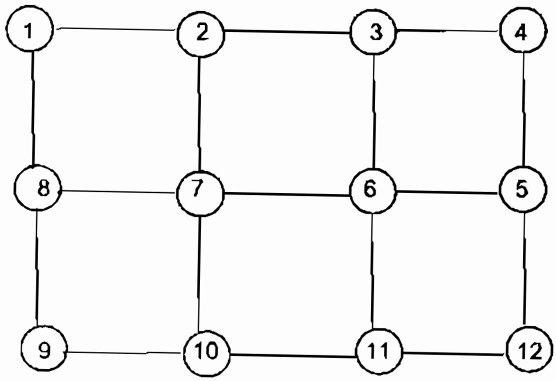
Giải. Giả sử G là đơn đồ thị có cây khung G_0 chứa tất cả các đỉnh của G. Vì G_0 là một cây nên G_0 liên thông không có chu trình. Do G_0 là đồ thị bộ phận của G mà G_0 liên thông nên G phải liên thông.

Giả sử G là liên thông. Nếu G không phải là một cây thì G phải có chu trình. Xóa một cạnh của chu trình trong G ta nhận được đồ thị G_1 có cùng số đỉnh nhưng cạnh ít hơn đồ thị G và G vẫn liên thông. Nếu G_1 vẫn chưa phải là cây thì trong G_1 vẫn còn chu trình, lặp lại thủ tục xóa cạnh của chu trình trong G_1 cho tới khi nhận được đồ thị liên thông vẫn chứa tất cả các đỉnh của G và không còn chu trình. Đó là cây khung của G.

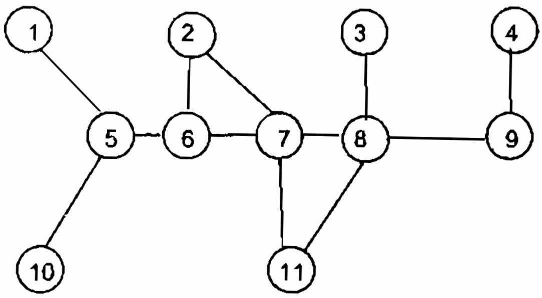
www.thuvien247.net

3. Dùng thuật toán ưu tiên chiều xâu, tìm cây khung của các đồ thị;

G_1:



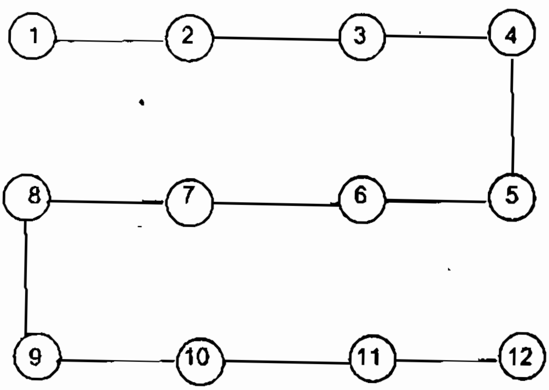
và G_2:



Giải

- Với G_1: Xuất phát từ đỉnh 1 đi đến đỉnh 12 và dừng lại ta được cây khung của G_1 có dạng:

G_1:

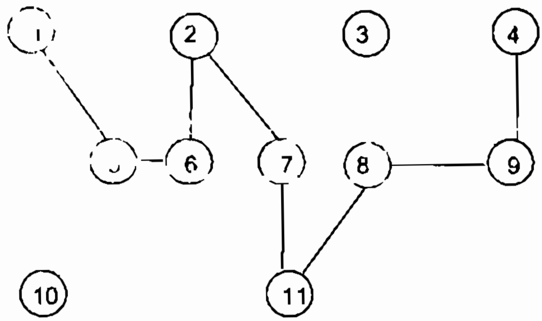


Cây khung này thực hiện đúng một bước theo thuật toán ưu tiên chiều sâu.

- Với G_2: Chẳng hạn xuất phát từ đỉnh 1 ta có các cây tạo ra của từng bước như sau:

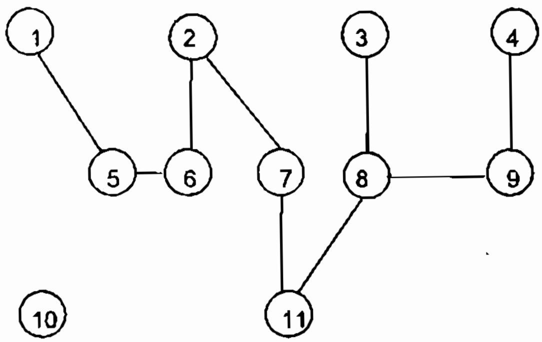
www.thuvien247.net

Bước 1

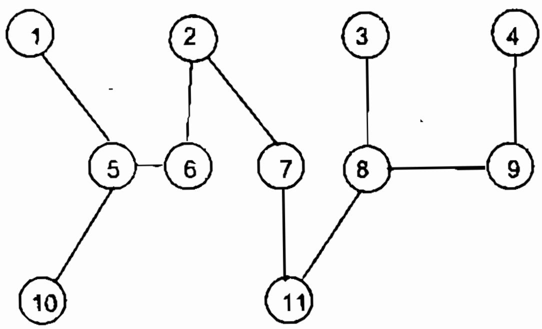


Cây T_1 chưa phải là cây khung vì còn hai đỉnh 3 và 10 nằm ngoài.

Bước 2. Ta đang ở đỉnh 4, lùi lại đỉnh 9 không tạo ra cây mới. Lùi tiếp về 8 và vẽ cạnh nối với đỉnh 3 ta được T_2 nhưng T_2 vẫn chưa là cây khung do còn điểm 10 vẫn nằm ngoài T_2



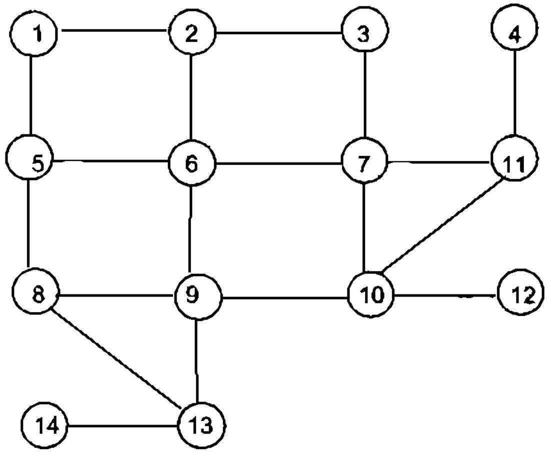
Bước 3. Ta đang ở đỉnh 3 trong T_2. Lùi từ 3 về 8, lùi từ 8 về 11, lùi từ 11 về 7, lùi từ 7 về 2, lùi từ 2 về 6 và lùi từ 6 về 5. Đến đây ghép cạnh (5, 10) vào cây T_2 ta được cây khung của G_2 có dạng:



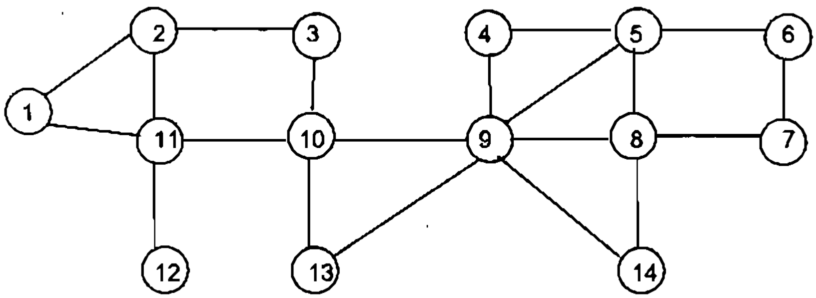
4. Dùng thuật toán ưu tiên chiều rộng tìm cây khung của các đồ thị cho dưới đây:

www.thuvien247.net

a) G_1:



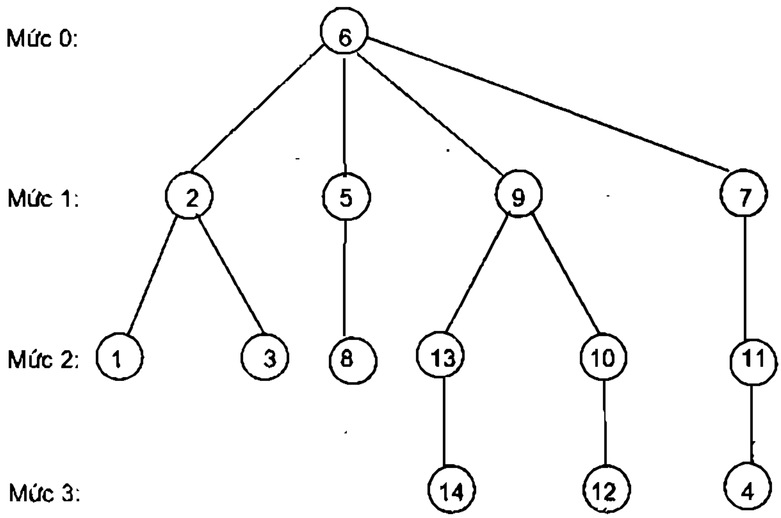
b) G_2:



Giải. a) Chọn đỉnh 6 làm gốc (gán nhãn 0). Ghép các cạnh liền kề với 6 và các đỉnh 2, 5, 7, 9 nằm trên mức 1. Xét các đỉnh trên mức 1 thì các đỉnh 1, 3, 8, 13, 10, 11 có mức 2. Đối với các đỉnh có mức 2 thì các đỉnh nằm trên mức 3 là 14, 12, 4.

Cây có gốc T_1 dưới đây chứa đầy đủ các đỉnh của G_1 có dạng:

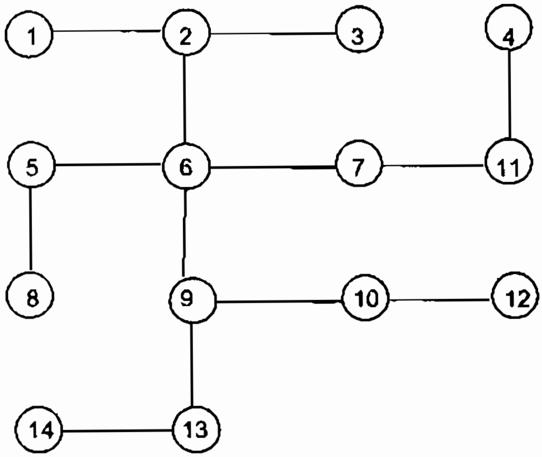
T_1:



www.thuvien247.net

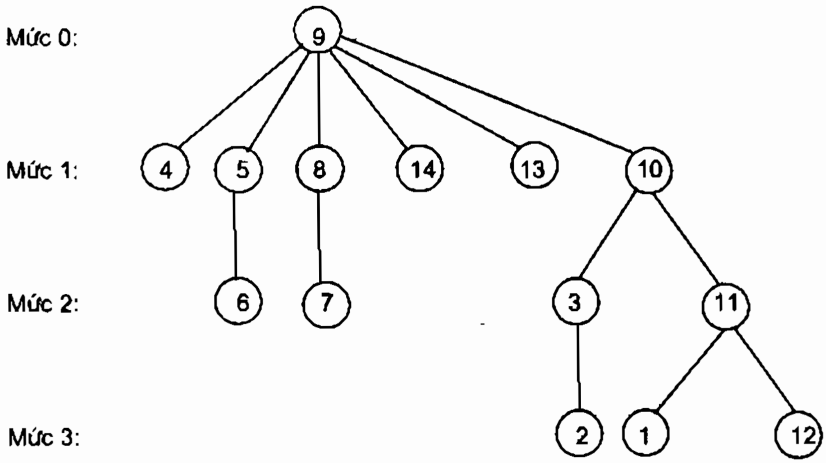
T_1 chính là cây khung của G_1. Hay T_1 viết dưới dạng có cấu trúc vị trí đỉnh của G_1 là

G_1:

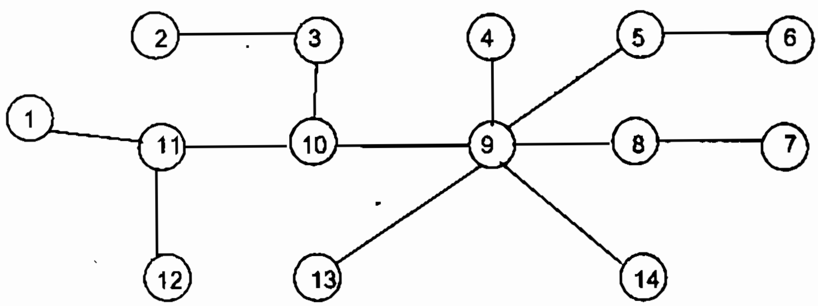


b) Chọn 9 làm gốc. Tương tự như câu a ta có cây khung của G_2 là T_2 có dạng:

T_2:



Hay T_2 có cấu trúc vị trí đỉnh của G_2 là:

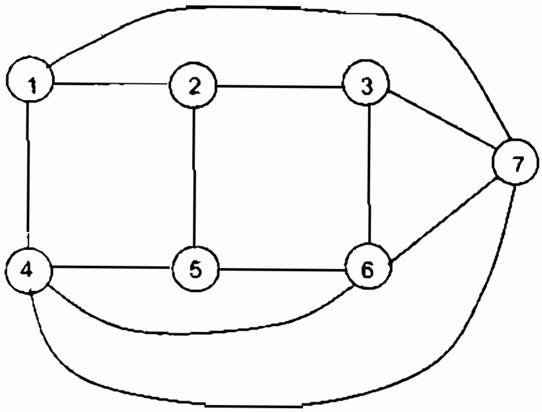


www.thuvien247.net

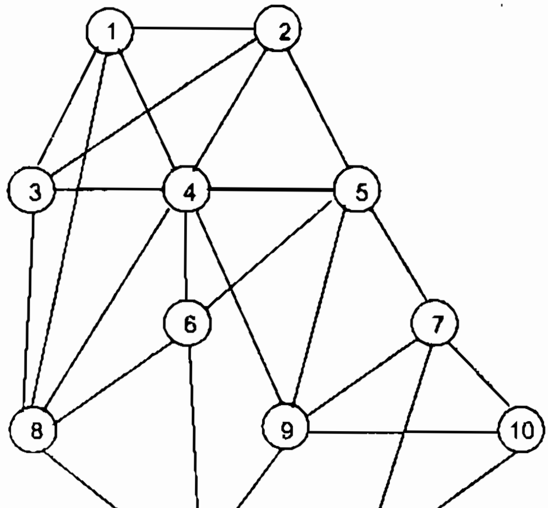
5. Trong các đồ thị dưới, hãy tìm cây khung của nó bằng cách xóa các cạnh trong các chu trình của đồ thị.

a)

G_1:



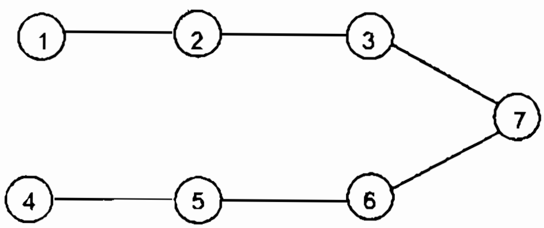
b) G_2:



Giải

a) Như cách giải của bài tập 1, chọn gốc là đỉnh 1 ta có cây khung T_1 của G_1 là:

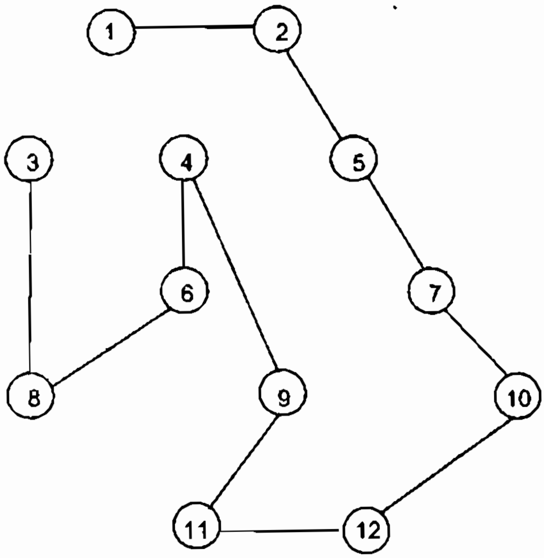
T_1:



www.thuvien247.net

b) Cây khung T_2 của G_2 với gốc ta chọn là đỉnh 1 có dạng:

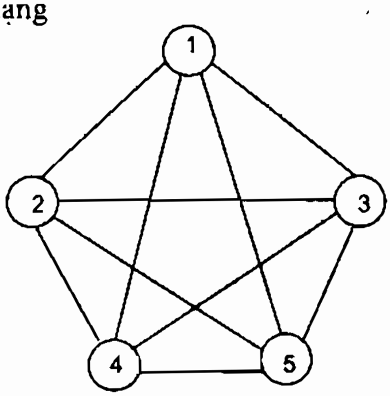
T_2:



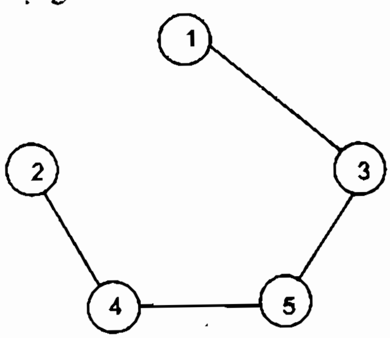
6. Tìm cây khung của các đồ thị K_5, $K_{4,4}$ và $K_{1,6}$.

Giải

- K_5 có dạng

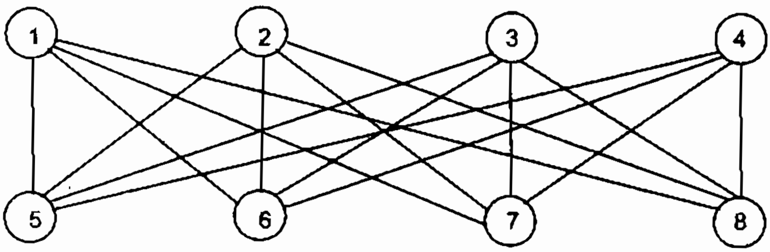


Áp dụng thuật toán ưu tiên chiều sâu bắt đầu đỉnh 1 là gốc ta có cây khung có dạng

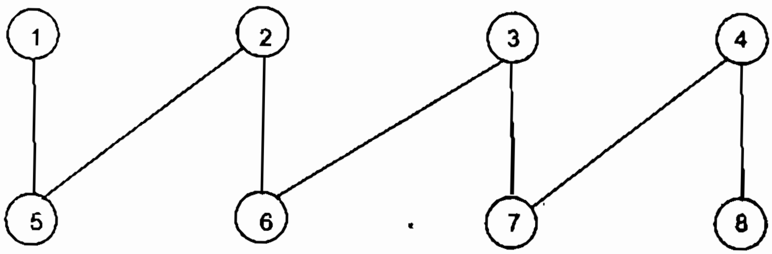


www.thuvien247.net

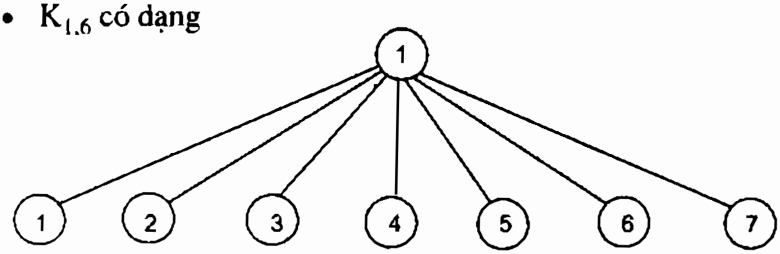
- $K_{4,4}$ có dạng:



Áp dụng thuật toán ưu tiên chiều sâu bắt đầu lấy đỉnh 1 làm gốc ta có cây khung dạng:



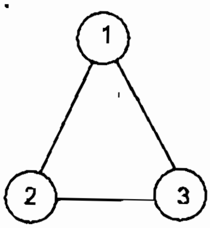
- $K_{1,6}$ có dạng



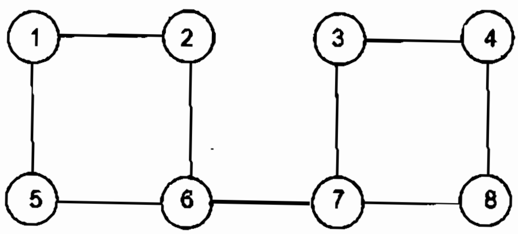
và chính $K_{1,6}$ là cây khung của nó.

7. Vẽ tất cả các cây khung của mỗi đồ thị dưới đây:

a) G_1:

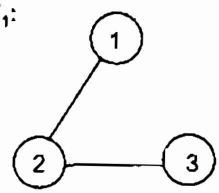


b) G_2:

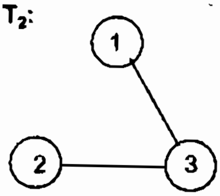


Giải (áp dụng phương pháp bỏ cạnh trong chu trình của đồ thị)

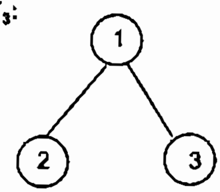
a) T_1:



T_2:



T_3:

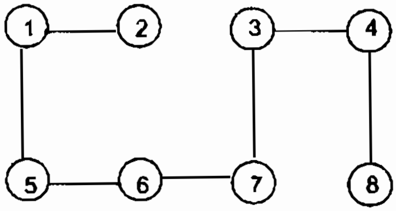


www.thuvien247.net

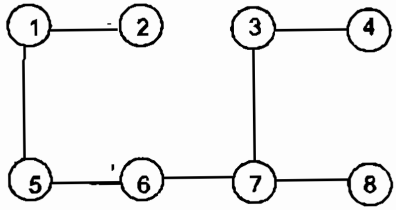
Có 3 cây khung vì G_1 có 3 cách phá vỡ chu trình (xem Định lý 2 (Cayley)).

b) G_2 có 16 cây khung sau đây:

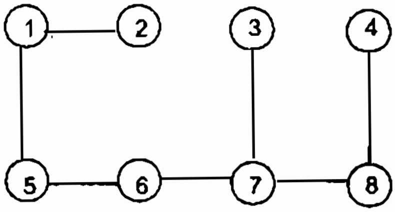
T_1:



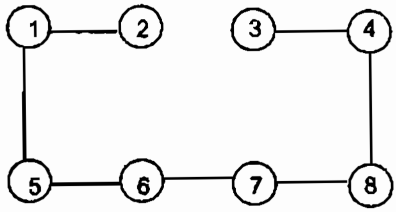
T_2:



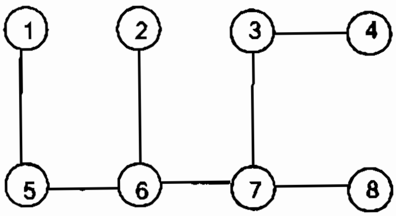
T_3:



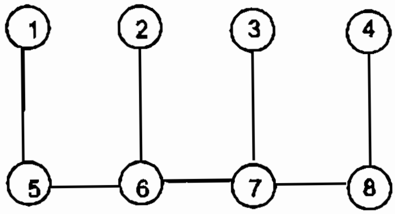
T_4:



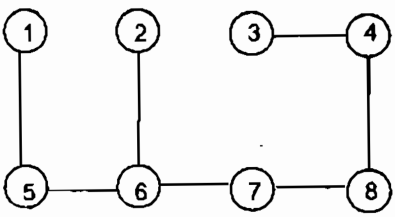
T_5:



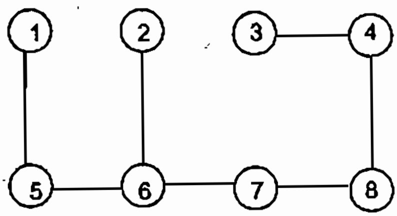
T_6:



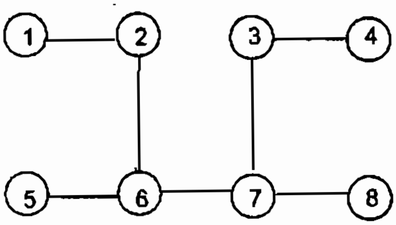
T_7:



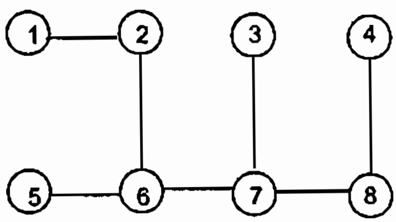
T_8:



T_9:

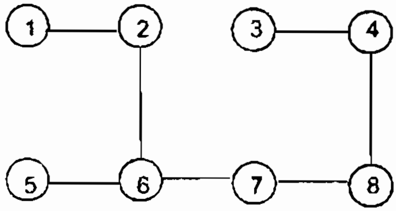


T_{10}:

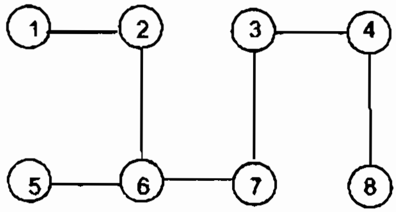


www.thuvien247.net

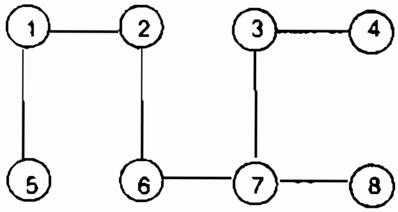
T_{11}:



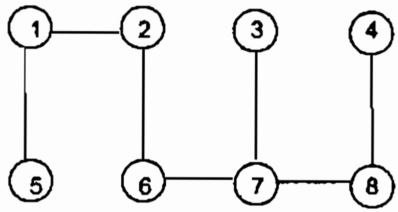
T_{12}:



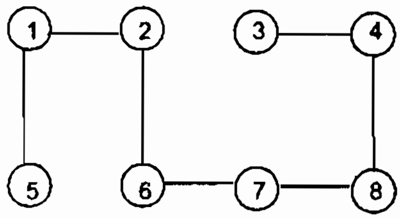
T_{13}:



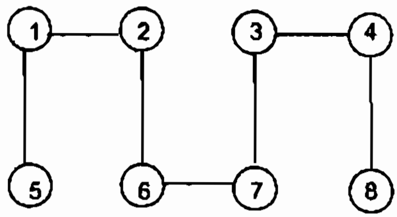
T_{14}:



T_{15}:



T_{16}:



8. Các đồ thị sau đây có bao nhiêu cây khung khác nhau?

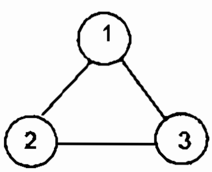
a) K_n $(n \geq 2)$;

b) C_n $(n \geq 3)$.

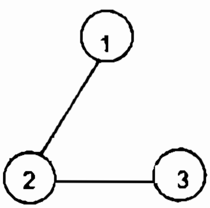
Giải

a) Theo Định lý 2 (Cayley) thì K_n có n^{n-2} cây khung. Chẳng hạn K_2 là một cây khung $(2^{2-2} = 1)$ 

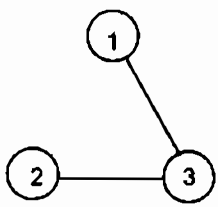
K_3:



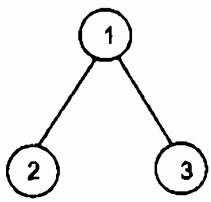
có 3 cây khung khác nhau $(3^{3-2} = 3)$ là



;

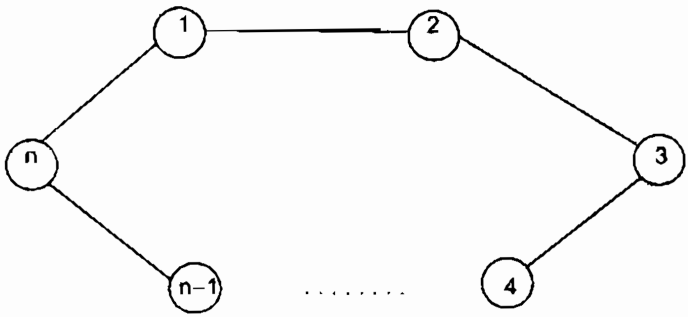


và



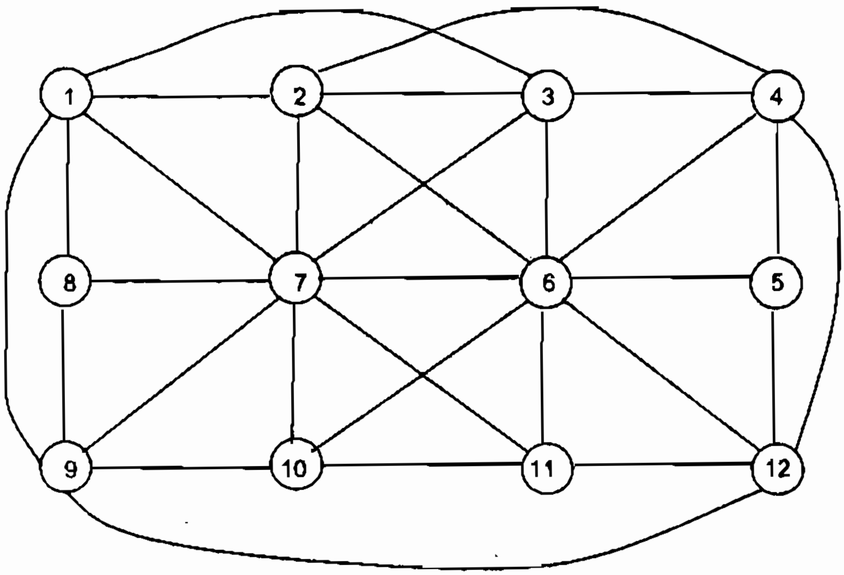
www.thuvien247.net

b) C_n có n cây khung khác nhau. Vì C_n là một đồ thị chu trình n đỉnh n cạnh:



Mỗi lần bỏ đi một cạnh ta được một cây khung. Vậy C_n có n cây khung khác nhau.

9. Giả sử hãng hàng không cần giảm bớt lịch bay để tiết kiệm tiền. Nếu ban đầu các đường bay được minh họa trong hình vẽ dưới. Có thể hủy bỏ các chuyến bay nào mà vẫn giữ được giao thông giữa hai thành phố bất kỳ.

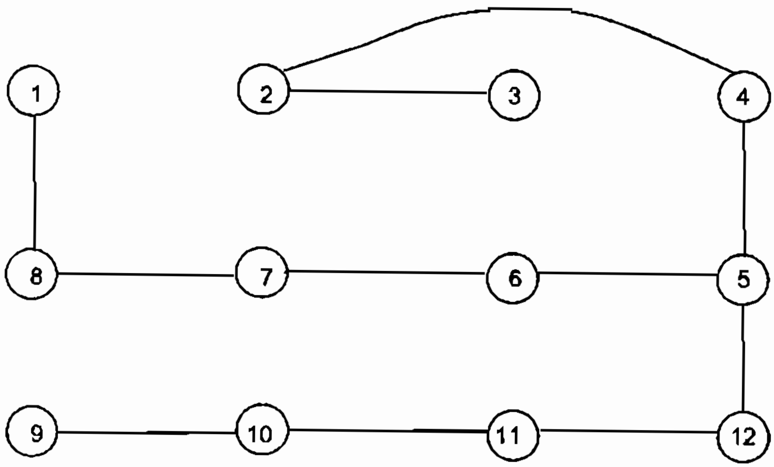


12 thành phố đánh số từ 1 đến 12 (mỗi đỉnh là một thành phố). Cạnh nối giữa các đỉnh là đường bay giữa các thành phố với nhau.

Giải. Dưới đây là một phương án cắt giảm đường bay giữa các thủ đô nhưng vẫn đảm bảo bất kỳ 2 thủ đô nào cũng có đường hàng không nối với nhau.

Dùng thuật toán ưu tiên chiều sâu với đỉnh cần chọn là đỉnh 1 ta được cây khung có dạng:

www.thuvien247.net



Tất cả các đường bay không có mặt trong cây khung trên đều bị cắt bỏ.

10. Chứng minh rằng độ dài của đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh x, y trong một đơn đồ thị liên thông bằng số mức của x trong cây khung ưu tiên chiều rộng của đồ thị G với gốc chọn là đỉnh y.

Giải (dùng quy nạp theo độ dài đường đi từ đỉnh y sang đỉnh x)

- Nếu l(y, x) = 1 (trường hợp l(y, x) = 0 không xảy ra do đồ thị là đơn) thì y, x là 2 đỉnh kề nhau. Mức y là 0 (do y là gốc của cây) thì mức của x là 1.
- Giả sử đã đúng cho l(y, x) = k > 1, tức là x có mức k. Xét đường đi độ dài k + 1. Giả sử x là đỉnh giáp cuối trong đường đi ngắn nhất từ y đến x. Theo giả thiết quy nạp thì x ở mức k trong cây khung ưu tiên chiều rộng. Nếu x ở mức không quá k thì rõ ràng độ dài của đường đi ngắn nhất từ y đến x cũng không vượt quá k. Nếu thế thì đỉnh x còn chưa được ghép vào cây khung ưu tiên chiều rộng sau khi các đỉnh ở mức k đã được gộp vào. Vì x là liền kề với x' nên nó sẽ được ghép thêm vào mức k + 1 (mặc dù cạnh nối giữa x' với x không cần ghép vào). Đó là điều cần chứng minh.

11. Kiểm tra lại tính đúng đắn của bài tập 10 đối với hai đồ thị G_1 và G_2 trong bài tập 4.

Giải. Nhìn vào đồ thị G_1 trong bài tập 4 thì đường đi ngắn nhất từ đỉnh 6 đến đỉnh 4 là 3, đó là đường 6, 7, 11, 4. Rõ ràng trong cây ưu tiên chiều rộng của G_1 với gốc của cây T_1 là 6 thì đỉnh 4 nằm ở mức 3. Ta có thể nói độ dài ngắn nhất từ đỉnh 6 đến đỉnh 4, đỉnh 12 và đỉnh 14 là 3.

Hoàn toàn tương tự ta thấy độ dài ngắn nhất từ đỉnh 9 đến các đỉnh 4, 5, 8, 14, 13, 10 là 1, còn đến các đỉnh 3, 6, 7, 11 là 2 và đến các đỉnh 1, 2 và 12 là 3.

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

12. Hãy viết thủ tục tìm kiếm ưu tiên chiều sâu dưới dạng giả mã.

Giải. Đối với đơn đồ thị G = <X, U> có các đỉnh được sắp thứ tự, thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu dưới dạng giả mã được viết như sau:

Procedure (depth first search (G: đơn đồ thị với các đỉnh được sắp thứ tự $v_1, v_2, ..., v_n$))

T := cây có gốc v_1 và không có đỉnh nào khác

visit (v_1)

{T là cây cần có}

Procedure visit (v)

for mỗi láng giềng u của v

begin

    if u không thuộc T then

    begin

        đặt đỉnh u và cạnh (v, u) vào T

        visit (u)

    end

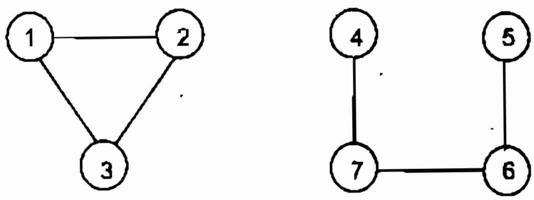
end

13. Rừng khung của đồ thị G là rừng chứa mọi đỉnh của G sao cho hai đỉnh thuộc cùng một cây của rừng nếu giữa chúng có một đường đi trong G.

Chứng minh rằng mọi đơn đồ thị hữu hạn đều có rừng khung.

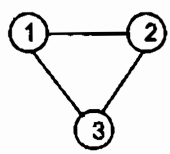
Giải. Giả sử G là đơn đồ thị có k thành phần liên thông $G_1, G_2, ..., G_k$. Mỗi G_i là một đơn đồ thị liên thông (i = 1, 2, ..., k), do đó G_i có các cây khung khác nhau T_{i_l} (l = 1, 2, ..., r). Đem hợp tất cả các cây khung của các thành phần liên thông lại với nhau ta được rừng khung của G.

14. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



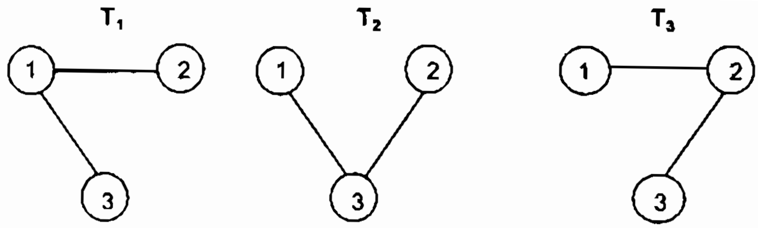
Tìm rừng khung của nó.

Giải

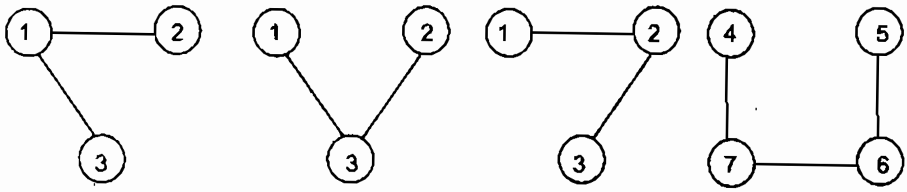
Cây khung của thành phần liên thông 

là

www.thuvien247.net



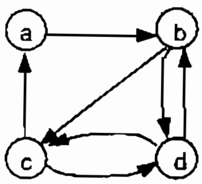
Do đó rừng khung của G là



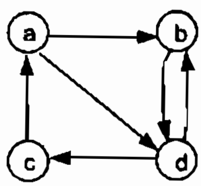
15. Cây khung có gốc của một đồ thị có hướng được định nghĩa là cây có gốc chứa các cạnh của đồ thị sao cho mọi đỉnh của đồ thị đều là một điểm đầu mút của một trong các cạnh của cây.

Tìm cây khung có gốc của các đồ thị cho dưới đây:

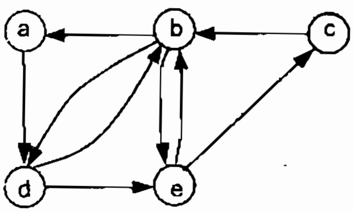
a)



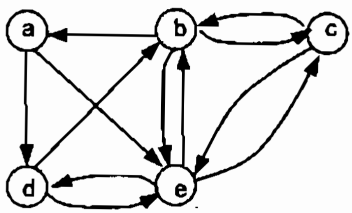
b)



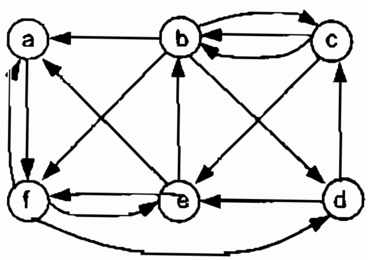
c)



c)



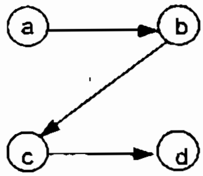
d)



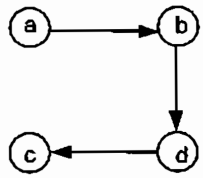
www.thuvien247.net

Giải

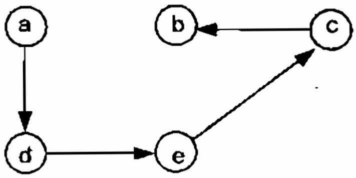
a) Cây khung có gốc a:



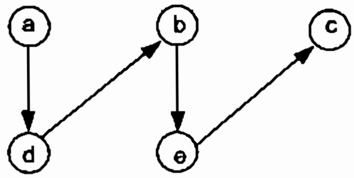
b) Cây khung có gốc là a:



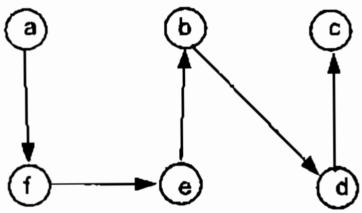
c) Cây khung có gốc là a:



d) Cây khung có gốc a là

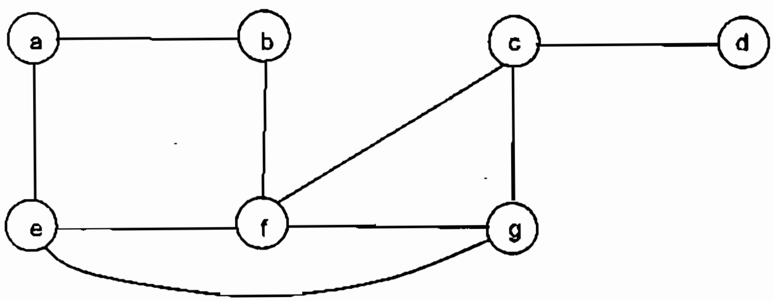


e) Cây khung có gốc a là



16. Gọi T_1 và T_2 là 2 cây khung của đồ thị G = <X, U>. Khoảng cách giữa T_1 và T_2 được định nghĩa là số các cạnh trong T_1 và T_2 mà không là cạnh chung của chúng.

Cho đồ thị G = <X, U> có dạng



a) Chỉ ra 5 cây khung của G

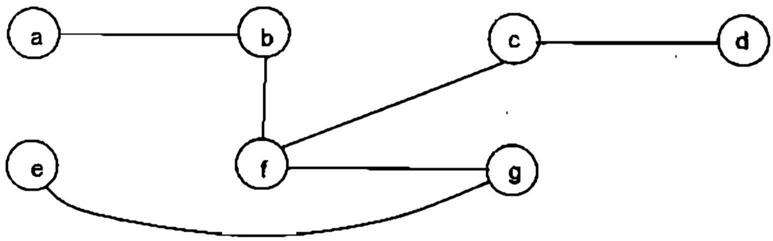
b) Hãy chỉ ra khoảng cách giữa các cặp cây khung đó.

Giải

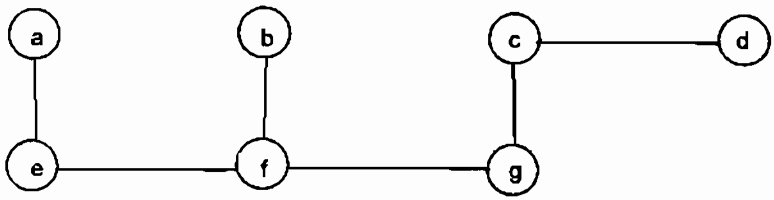
a) 5 cây khung là

www.thuvien247.net

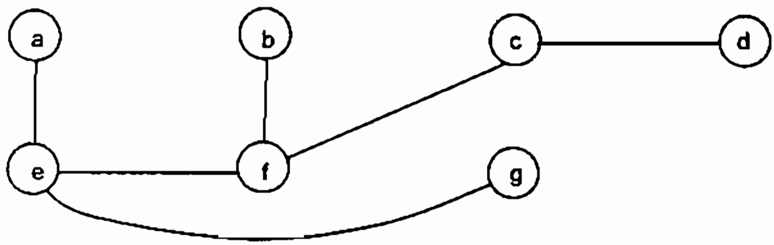
T_1:



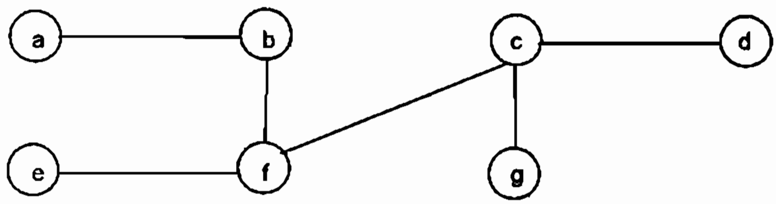
T_2:



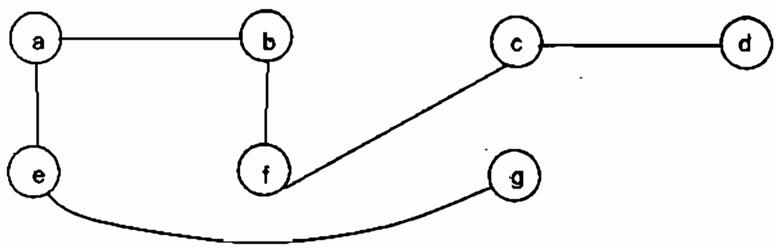
T_3:



T_4:



T_5:



Tạo ra 5 cây khung trên bằng cách dùng thuật toán bỏ cạnh trong chu trình của G.

b) Ta ký hiệu d(T, T') để chỉ khoảng cách giữa hai cây khung T và T' của đồ thị.

www.thuvien247.net

Ta có: $d(T_1, T_2) = 6$, $d(T_1, T_3) = 4$, $d(T_1, T_4) = 4$, $d(T_1, T_5) = d(T_2, T_3) = 4$, $d(T_2, T_4) = 4$. $d(T_2, T_5) = 6$, $d(T_3, T_4) = 4$, $d(T_3, T_5) = 2$, $d(T_4, T_5) = 4$.

17. Viết thuật toán Prim dưới dạng giả mã.

Giải. Thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh có dạng:

Procedure Prim (G: đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh)

T := cạnh có trọng số nhỏ nhất.

for i := 1 to n – 1

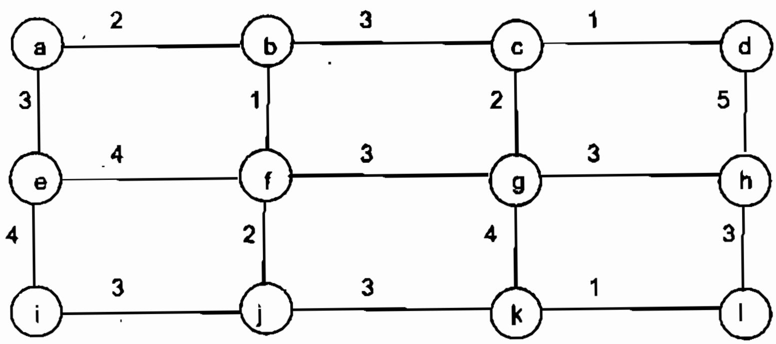
begin

  u := cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh trong T và không tạo ra chu trình trong T nếu ghép nó vào T.

  T := T với u được ghép vào.

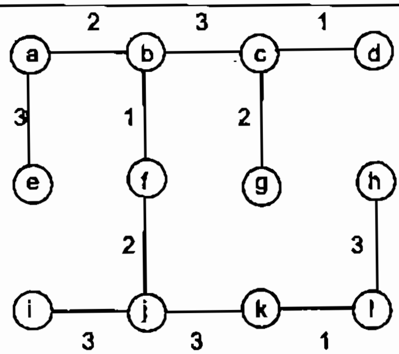
end {T là cây khung nhỏ nhất của G}.

18. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



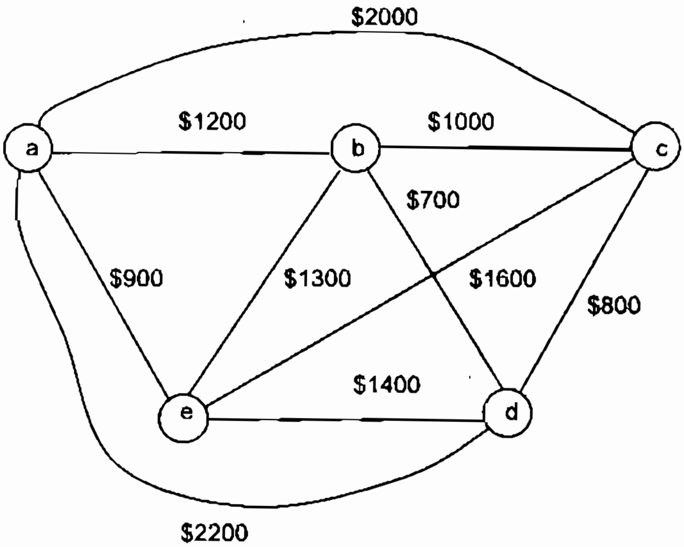
Tìm cây khung nhỏ nhất theo thuật toán Prim.

Giải (ta trình bày thuật toán Prim theo dạng bảng)

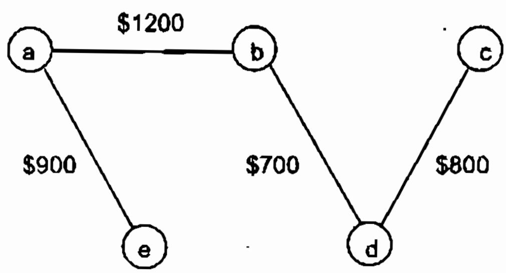
Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(c, d)	1	 $l(G_o) = 24$.
2	(c, g)	2	
3	(c, b)	3	
4	(b, f)	1	
5	(b, a)	2	
6	(f, j)	2	
7	(j, k)	3	
8	(k, l)	1	
9	(j, i)	3	
10	(a, e)	3	
11	(l, h)	3	

www.thuvien247.net

19. Dùng thuật toán Prim thiết kế một mạng truyền thông có giá trị tối thiểu để nối các trung tâm máy tính được biểu diễn bởi đồ thị với đỉnh là trung tâm máy tính, còn cạnh nối giữa 2 đỉnh là đường truyền thông nối hai trung tâm máy tính tương ứng với 2 đỉnh đó và trọng số của cạnh là tiền thuê bao phải trả hàng tháng.



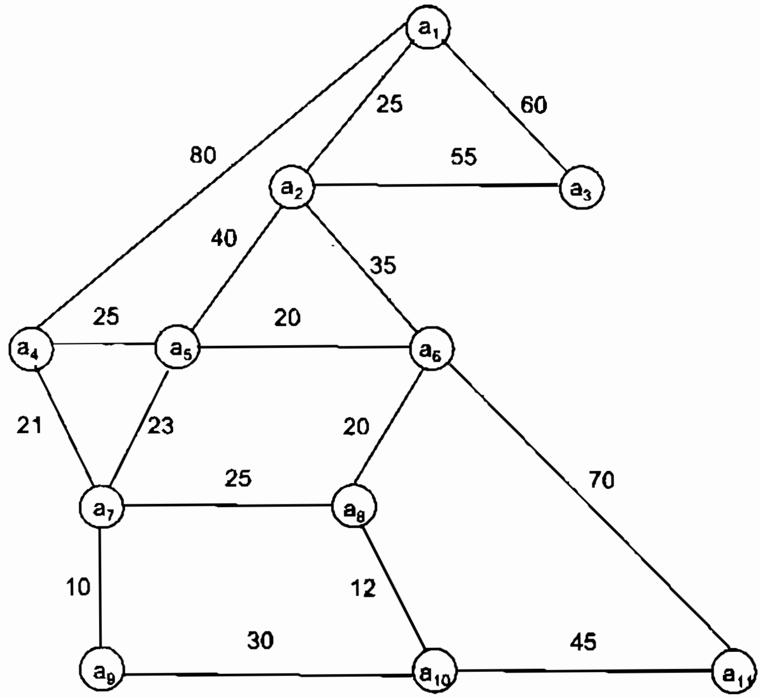
Giải

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(b, d)	$700	
2	(d, c)	$800	
3	(b, a)	$1200	
4	(e, a)	$900	$l(G_o) = \$3600$

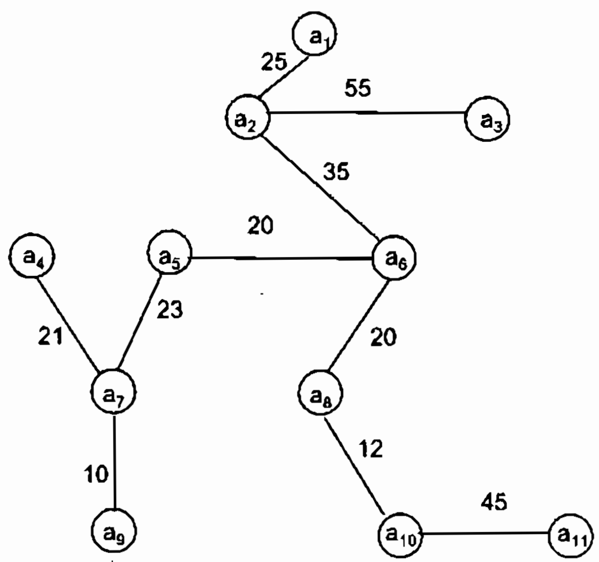
20. Các con đường được biểu diễn trên đồ thị dưới đây là hoàn toàn chưa được trải nhựa. Độ dài của con đường được biểu thị bằng trọng số của cạnh (km). Cần phải trải nhựa những đoạn nào để vẫn có đường đi được trải nhựa giữa 2 thành phố bất kỳ mà độ dài đường trải nhựa là tối thiểu?

(Mỗi thành phố là một đỉnh)

www.thuvien247.net



Giải (Dùng thuật toán Prim) (xem bảng dưới)

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất
1	(a_7, a_9)	10	
2	(a_7, a_4)	21	
3	(a_7, a_5)	23	
4	(a_5, a_6)	20	
5	(a_6, a_8)	20	
6	(a_8, a_{10})	12	
7	(a_6, a_2)	35	
8	(a_2, a_1)	25	
9	(a_{10}, a_{11})	45	
10	(a_2, a_3)	55	$l(G_o) = 266$ km

www.thuvien247.net

21. Viết thuật toán Kruskal dưới dạng giả mã.

Giải

Procedure Kruskal (G: đồ thị n đỉnh, liên thông có trọng số)

T := đồ thị rỗng

for i := 1 to n – 1

begin

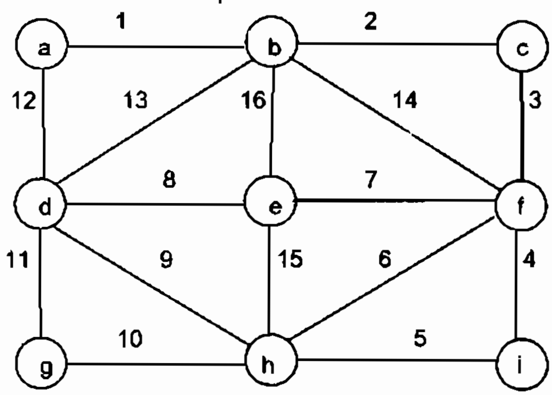
u := một cạnh bất kỳ của G với trọng số nhỏ nhất và không tạo ra chu trình khi ghép nó vào T.

T := T với cạnh u đã được ghép thêm vào

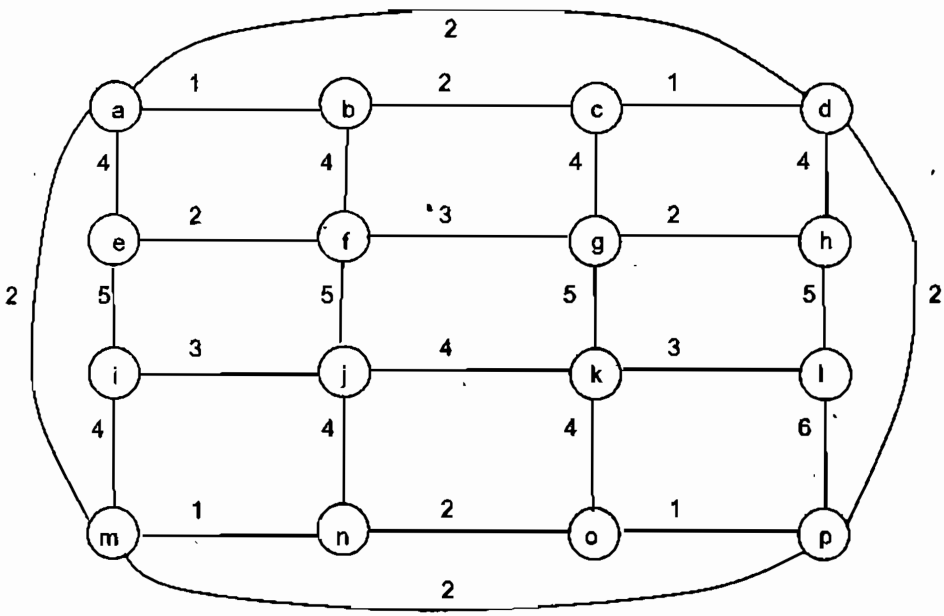
end {T là cạnh khung nhỏ nhất}

22. Dùng thuật toán:

a) Kruskal đối với G_1



b) Prim và Kruskal đối với G_2

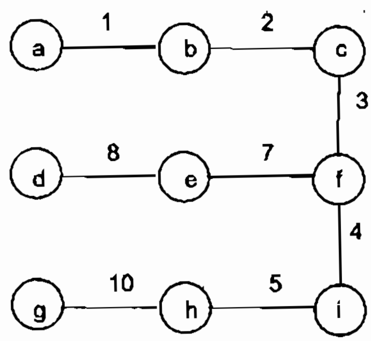


www.thuvien247.net

Giải

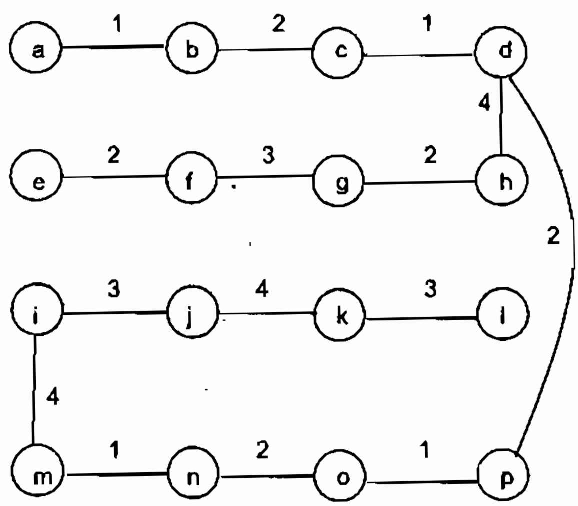
a) Kết quả áp dụng thuật toán Kruskal đối với G_1 để tìm cây khung bé nhất cho ở bảng 1 dưới đây:

Bảng 1

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung nhỏ nhất G_o
1	(a, b)	1	
2	(b, c)	2	
3	(c, f)	3	
4	(f, i)	4	
5	(i, h)	5	
6	(f, e)	7	
7	(e, d)	8	
8	(h, g	10	$l(G_o) = 40$

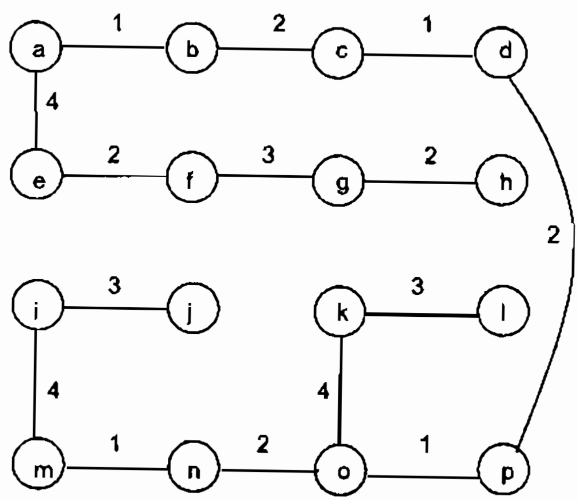
b) Kết quả áp dụng thuật toán Prim đối với G_2 (xem bảng 2) và áp dụng thuật toán Kruscal đối với G_2 (xem bảng 3) dưới đây:

Bảng 2

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(a, b)	1	
2	(b, c)	2	
3	(c, d)	1	
4	(d, p)	2	
5	(p, o)	1	
6	(o, n)	2	
7	(n, m)	1	
8	(m, i)	4	
9	(d, h)	4	
10	(h, g)	2	
11	(g, f)	3	
12	(f, e)	2	
13	(i, j)	3	$l(G_o) = 35$
14	(j, k)	4	
15	(k, e)	3	

www.thuvien247.net

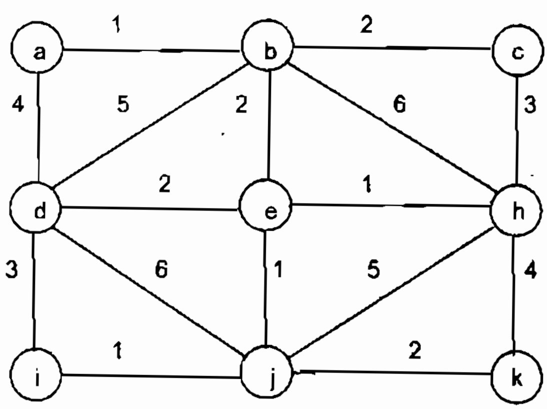
Bảng 3

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(a, b)	1	
	(c, d)	1	
	(m, n)	1	
	(o, p)	1	
2	(e, f)	2	
	(g, h)	2	
	(b, c)	2	
	(n, o)	2	
	(d, p)	2	
3	(f, g)	3	
	(i, j)	3	
	(k, e)	3	
4	(m, i)	4	
	(k, o)	4	
	(a, e)	4	$l(G'_o) = 35$

23. Cây khung cực đại của một đồ thị liên thông có trọng số là cây khung có trọng số lớn nhất.

a) Hãy đề xuất một thuật toán tương tự như thuật toán Prim xây dựng cây khung có trọng số lớn nhất trong đồ thị liên thông có trọng số.

b) Cho đồ thị G = <X, U> dưới đây:



Áp dụng thuật toán vừa xây dựng trong phần a, hãy tìm cây khung cực đại của đồ thị liên thông có trọng số trên.

www.thuvien247.net

Giải

a) Thuật toán tìm cây khung cực đại xây dựng tương tự như thuật toán Prim:

Procedure tựa Prim (G: đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh)

T := cạnh có trọng số lớn nhất.

for i := 1 to n – 1

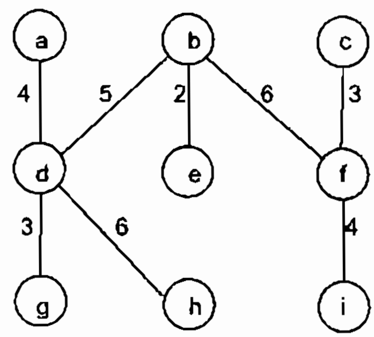
begin

u := cạnh có trọng số lớn nhất liên thuộc với một đỉnh trong T và không tạo ra chu trình trong T nếu ghép nó vào T.

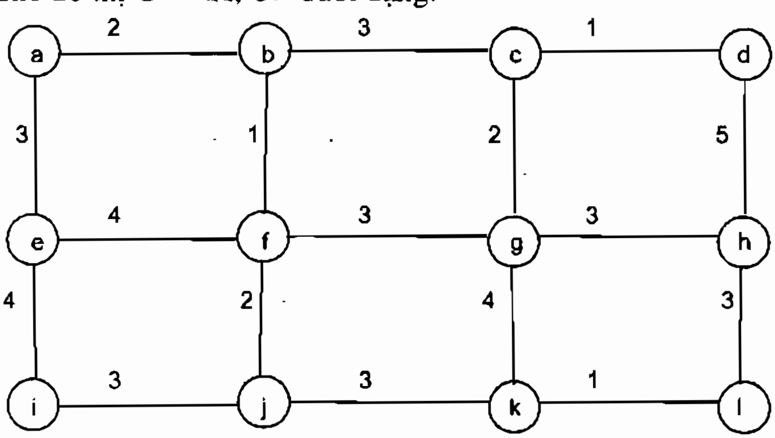
T := T với u được ghép vào

end {T là cây khung cực đại của G}.

b) Kết quả cây khung cực đại cho trong bảng dưới đây:

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung cực đại G_o
1	(b, h)	6	
2	(b, d)	5	
3	(d, j)	6	
4	(d, a)	4	
5	(h, k)	4	
6	(h, c)	3	
7	(d, i)	3	
8	(b, e)	2	
			$l(G_o) = 33$

24. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng:



a) Tìm cây khung bé nhất có chứa các cạnh (e, i) với trọng số 4 và (g, k) với trọng số 4.

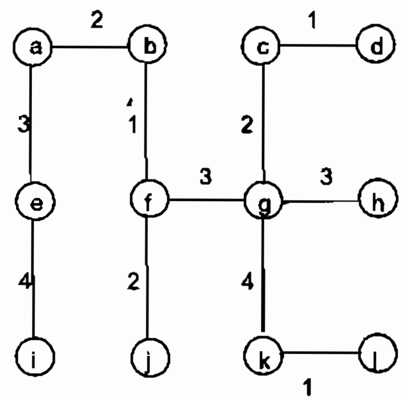
www.thuvien247.net

b) Tìm cây khung cực đại của đồ thị trên theo thuật toán tựa Kruscal.

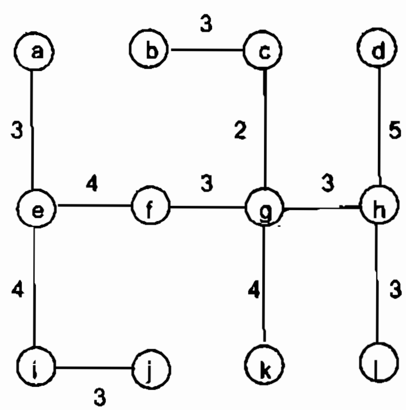
c) Tìm cây khung bé nhất theo thuật toán Prim đối với đồ thị trên.

Giải

a) Xem bảng dưới đây áp dụng thuật toán Prim đối với đồ thị trên:

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(l, i)	4	
2	(g, k)	4	
3	(k, e)	1	
4	(g, c)	2	
5	(c, d)	1	
6	(g, h)	3	
7	(g, f)	3	
8	(f, b)	1	
9	(b, a)	2	
10	(f, j)	2	
11	(a, e)	2	$l(G_o) = 26.$

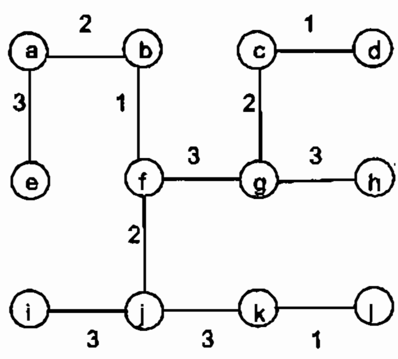
b) Xem bảng dưới đây áp dụng thuật toán tìm cây khung cực đại đối với đồ thị trên theo thuật toán tựa Kruskal:

Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung cực đại G_o
1	(d, h)	5	
2	(e, i)	4	
	(e, f)	4	
	(g, k)	4	
3	(b, c)	3	
	(h, l)	3	
	(h, g)	3	
	(f, g)	3	
	(a, e)	3	
	(i, j)	3	
4	(c, g)	2	$l(G_o) = 37.$

www.thuvien247.net

c) Áp dụng thuật toán Prim tìm cây khung bé nhất của đồ thị trên theo bảng sau đây:

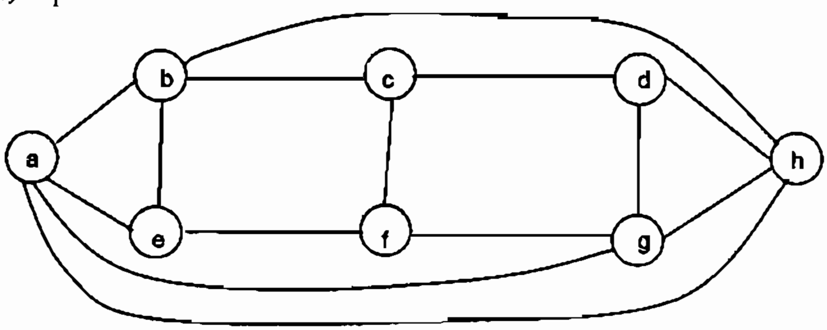
Bước chọn	Cạnh chọn	Trọng số cạnh chọn	Cây khung bé nhất G_o
1	(c, d)	1	
2	(c, g)	2	
3	(g, f)	3	
4	(f, b)	1	
5	(b, a)	2	
6	(f, j)	2	
7	(j, k)	3	
8	(k, l)	1	
9	(j, l)	3	
10	(a, e)	3	
11	(g, h)	3	$l(G_o) = 24.$



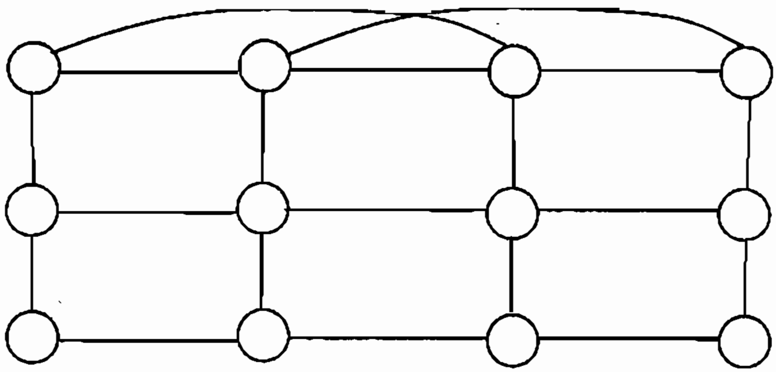
C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

25. Hãy tạo ra cây khung của các đồ thị sau đây bằng cách xóa cạnh tạo ra chu trình trong đồ thị:

a) G_1:



b)



www.thuvien247.net

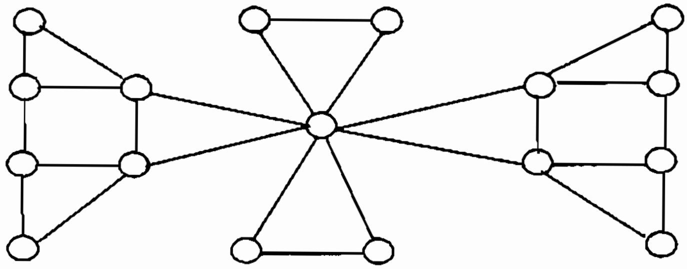
26. a) Cần phải xóa đi bao nhiêu cạnh khỏi đồ thị liên thông với n đỉnh và m cạnh để nhận được một cây khung?

b) Hãy tìm cây khung cho mỗi đồ thị sau: K_5, $K_{4,4}$, $K_{1,6}$, C_5 và W_5.

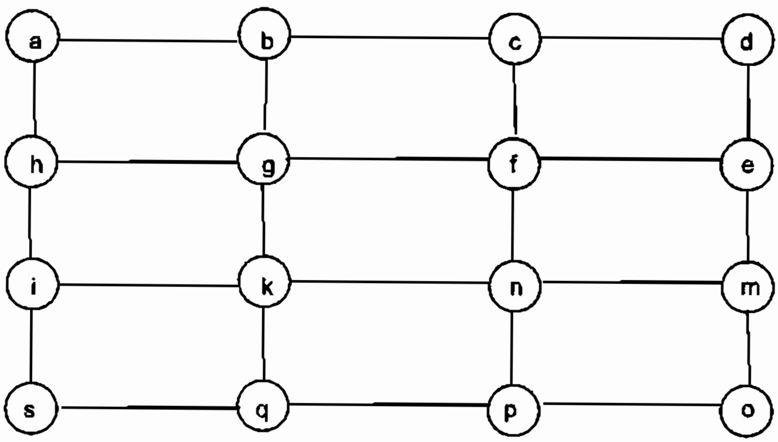
c) Mỗi đồ thị K_3, K_4, $K_{2,2}$ và C_5 có bao nhiêu cây khung khác nhau?

27. Tìm cây khung của đồ thị đơn liên thông dưới đây theo thuật toán ưu tiên chiều sâu:

a)



b)



28. a) Dùng thuật toán ưu tiên chiều rộng hãy xây dựng cây khung cho các đồ thị trong bài tập 27.

b) Hãy viết thủ tục tìm kiếm ưu tiên chiều rộng dưới dạng giả mã.

c) Khi nào một cạnh của đơn đồ thị liên thông cần phải có trong mọi cây khung của đồ thị này?

d) Đơn đồ thị liên thông nào có đúng một cây khung?

29. Hãy giải thích cách dùng kỹ thuật quay lui để tìm đường đi hoặc chu trình Hamilton trong một đồ thị.

30. Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng rừng khung của một đồ thị bằng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu và chiều rộng.

31. Giả sử T_1, T_2, T_3 là các cây khung của đồ thị G. Chứng minh rằng khoảng cách giữa T_1 và T_3 không vượt quá tổng khoảng cách giữa T_1 và T_2 và khoảng cách giữa T_2 và T_3.

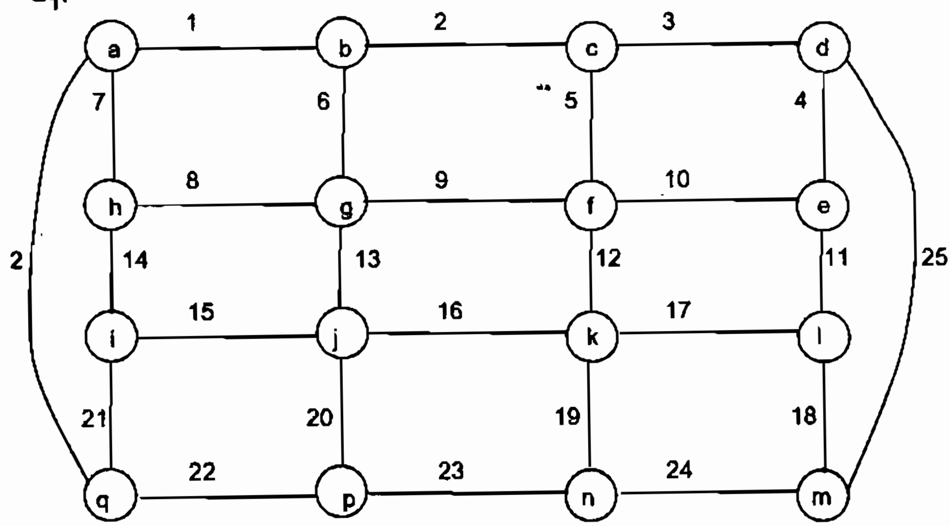
www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

32. a) Chỉ ra rằng đồ thị có hướng liên thông trong đó mỗi đỉnh có bậc ra và bậc vào như nhau sẽ có cây khung có gốc.

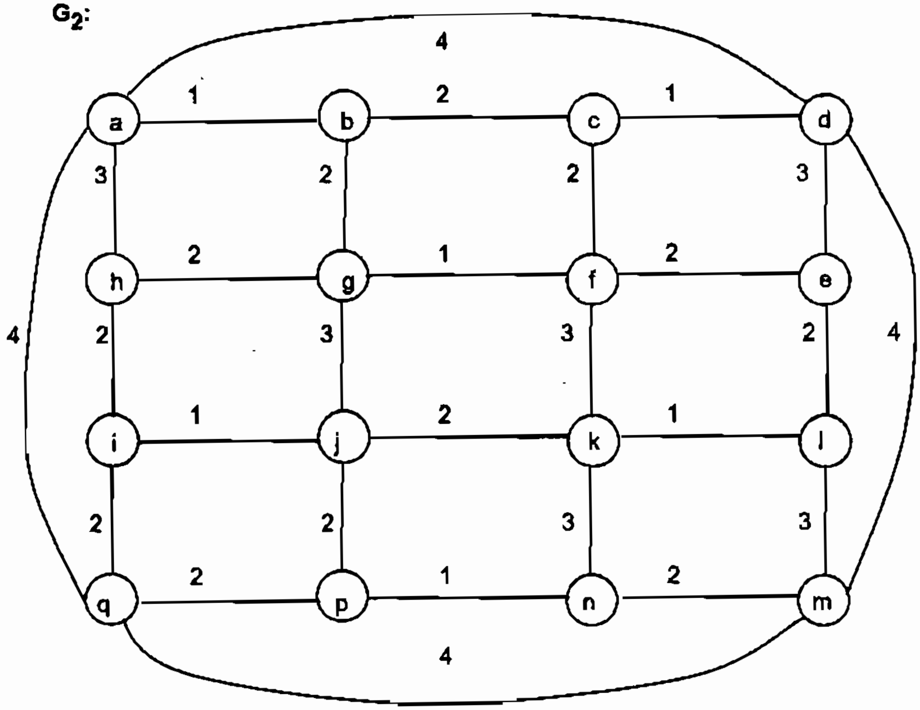
b) Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng cây khung có gốc của một đồ thị có hướng liên thông trong đó mỗi đỉnh có bậc ra và bậc vào bằng nhau.

33. a) Dùng thuật toán Prim, tìm cây khung nhỏ nhất của mỗi đồ thị cho dưới đây:

G_1:



G_2:



www.thuvien247.net

b) Dùng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất trong đồ thị G đi qua hai cạnh (a, d) có trọng số 4 và (q, m) có trọng số 4.

34. Cho đồ thị G_1 và G_2 như trong bài tập 33. Cũng hỏi như vậy, nhưng đối với thuật toán Kruskal.

35. Tìm một đơn đồ thị liên thông có trọng số với một số tối thiểu các cạnh sao cho nó có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất.

36. a) Hãy đề xuất một thuật toán tương tự như thuật toán Kruskal để tìm cây khung cực đại trong đồ thị liên thông có trọng số.

b) Áp dụng thuật toán vừa xây dựng, tìm cây khung cực đại của đồ thị G_1, G_2 trong bài tập 33.

37. Hãy viết thuật toán tìm cây khung bé nhất trong đồ thị chứa một tập xác định các cạnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông và có trọng số.

38. Hãy chỉ ra rằng có duy nhất một cây khung nhỏ nhất trong đồ thị liên thông có trọng số nếu trọng số của các cạnh khác nhau từng cặp.

39. a) Cho mạng máy tính ở bài tập 19. Hãy thiết kế lại mạng máy tính này sao cho mạng mới chứa đường thuê bao nối trung tâm máy tính e với trung tâm máy tính c sao cho tiền thuê bao phải trả hàng tháng là ít nhất.

b) Cho đồ thị có trọng số như trong bài tập 20. Hãy tìm cây khung bé thứ hai (sau cây khung bé nhất) trong đồ thị.

40. Ba cặp vợ chồng đi tới bờ một con sông. Mỗi bà vợ đều hay ghen và không tin chồng khi để anh ta đứng một mình với các bà kia. Làm thế nào 6 người có thể qua sông bằng một chiếc thuyền chỉ chở được không quá 2 người, sao cho không có ông chồng nào ở một mình với các bà không là vợ mình? Hãy dùng lý thuyết đồ thị mô hình giải bài toán trên.

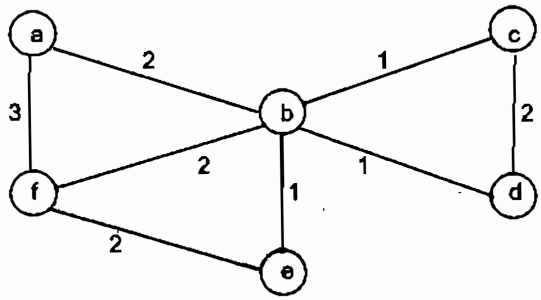
41. Giả sử $u \in U$ là một cạnh của đồ thị $G = \langle X, U \rangle$, cạnh này liên thuộc với đỉnh $x \in X$ sao cho trọng số của cạnh u không vượt quá trọng số của bất kỳ cạnh nào khác liên thuộc với đỉnh x. Chỉ ra rằng có cây khung bé nhất chứa cạnh u trong đồ thị liên thông G ở trên.

42. Cây khung hạn chế một đồ thị đơn $G = \langle X, U \rangle$ là cây khung có tính chất: bậc của một đỉnh trong cây này không thể vượt quá một giới hạn xác định nào đó. Cây khung như vậy có nhiều ứng dụng trong thực tế.

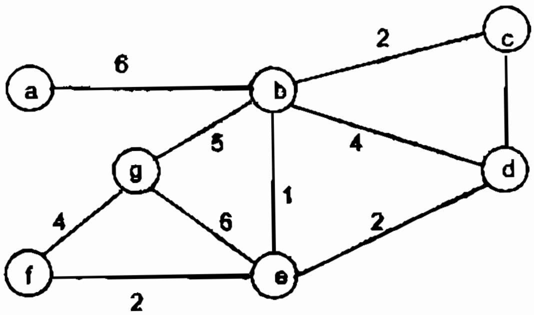
Hãy tìm cây khung nhỏ nhất của mỗi một trong các đồ thị có trọng số sau đây, trong đó bậc của mỗi đỉnh trong cây khung nhỏ nhất không vượt quá 2.

www.thuvien247.net

G_1:



G_2:



43. Rừng khung nhỏ nhất trong một đồ thị có trọng số là một rừng khung có trọng số nhỏ nhất. Hãy sửa đổi các thuật toán Prim và thuật toán Kruskal để xây dựng rừng khung nhỏ nhất.

www.thuvien247.net

PHẦN 3
LÔGIC VÀ ỨNG DỤNG

Chương 10
LÔGIC MỆNH ĐỀ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. CÔNG THỨC VÀ CÁC LUẬT TRONG LÔGIC MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề nguyên thủy và mệnh đề phức hợp

Trong toán học, người ta quan tâm tới những khẳng định có giá trị chân lý xác định là hoặc đúng, hoặc sai nhưng không thể vừa đúng vừa sai hoặc không thể khẳng định tính đúng, sai của nó. Những khẳng định đó gọi là các mệnh đề.

Mệnh đề không có các liên từ "và", "hoặc", "không", "nếu ... thì ...", được gọi là mệnh đề nguyên thủy hay mệnh đề sơ cấp. Mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên thủy gọi là mệnh đề phức hợp.

Ví dụ: "Hôm nay tôi đi họp", "3 là số nguyên tố" là các mệnh đề nguyên thủy. Còn "Nếu trời nắng thì tôi đi chơi", "Tôi và bạn tôi cùng đi chơi", "Tôi hoặc vợ tôi ở nhà tiếp khách" là các mệnh đề phức hợp.

Các mệnh đề nguyên thủy được ký hiệu là X, Y, Z (có thể cả chỉ số nữa) và gọi là biến mệnh đề. Trong lôgic mệnh đề, giá trị chân lý đúng ký hiệu là 1, giá trị chân lý sai ký hiệu là 0.

2. Định nghĩa các phép toán lôgic trên các mệnh đề

Bốn phép toán: hội ($\wedge$), tuyển ($\vee$), phủ định ($-$) và kéo theo ($\rightarrow$) được định nghĩa thông qua bảng dưới đây:

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$\overline{X}$	$X \rightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

www.thuvien247.net

3. Công thức lôgic trong mệnh đề

- Mỗi biến mệnh đề X, Y, Z (có thể cả chỉ số nữa) là một công thức.
- Giả sử A, B là hai công thức, khi đó dãy ký hiệu $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(\overline{A})$, $(A \rightarrow B)$ cũng là một công thức.

4. Công thức đồng nhất đúng, đồng nhất sai và đồng nhất bằng nhau

- Ta nói công thức A là đồng nhất đúng (ký hiệu $A \equiv 1$) khi và chỉ khi A luôn luôn nhận giá trị đúng với mọi bộ giá trị đúng, sai có thể của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A. Công thức $A \equiv 1$ còn gọi là hằng đúng.
- Ta nói công thức A là đồng nhất sai (hằng sai) (ký hiệu $A \equiv 0$) khi và chỉ khi A luôn luôn nhận giá trị sai với mọi bộ giá trị đúng, sai có thể của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A.
- Ta nói công thức A là thực hiện được khi và chỉ khi có tồn tại một bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A để A nhận giá trị đúng.
- Hai công thức A và B là đồng nhất bằng nhau ($A \equiv B$) khi và chỉ khi A và B cùng nhận giá trị đúng, sai như nhau đối với mọi bộ giá trị đúng sai của các biến mệnh đề có mặt trong A và B (trong trường hợp này ta cũng nói A và B là tương đương nhau).

5. Các công thức đồng nhất đúng (luật đồng nhất đúng)

[1] $A \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv 1$

[2] $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv 1$

[3] $(A \wedge B) \rightarrow A \equiv 1$

[4] $(A \wedge B) \rightarrow B \equiv 1$

[5] $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))) \equiv 1$

[6] $A \rightarrow (A \vee B) \equiv 1$

[7] $B \rightarrow (A \vee B) \equiv 1$

[8] $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \equiv 1$

[9] $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \equiv 1$

[10] $A \rightarrow \overline{\overline{A}} \equiv 1$

[11] $\overline{\overline{A}} \rightarrow A \equiv 1$.

Chú ý: Các công thức trên là hệ tiên đề mà người ta dùng nó để nghiên cứu các tính chất tổng quát nhất của lôgic mệnh đề (xem *Toán rời rạc*, NXB ĐHQG HN, 2004 (cùng tác giả), từ tr. 420 đến tr. 478).

www.thuvien247.net

6. Luật đối ngẫu, luật thay thế và luật kết luận trong lôgic mệnh đề

Giả sử A là một công thức chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\wedge$ và $-$ mà không chứa phép toán kéo theo. Trong A đổi chỗ $\vee$ và $\wedge$ cho nhau ta được công thức mới A* và A* gọi là công thức đối ngẫu của A.

Định lý 1. Giả sử $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ là công thức không có phép toán kéo theo. Khi đó ta có $A^*(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv \overline{A}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_n)$.

Định lý 1 còn gọi là luật đối ngẫu của công thức.

Giả sử A(X) là công thức có chứa biến mệnh đề X. Nếu ta thay X bởi công thức bất kỳ E thì ta được công thức A(E). Luật thay thế được phát biểu dưới dạng định lý sau đây:

Định lý 2. Nếu $A(X) \equiv 1$ thì $A(E) \equiv 1$ với E là công thức bất kỳ.

Luật kết luận được phát biểu bởi định lý sau:

Định lý 3. Nếu $A \equiv 1$ và $A \to B \equiv 1$ thì $B \equiv 1$.

7. Các công thức đồng nhất bằng nhau (hay còn gọi là các luật tương đương trong lôgic mệnh đề)

[1] $\overline{\overline{A}} \equiv A$ (luật phủ định kép)

[2] $A \vee B \equiv B \vee A$ (luật giao hoán đối với phép tuyển)

[3] $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (luật giao hoán đối với phép hội)

[4] $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$ (luật kết hợp đối với phép tuyển)

[5] $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$ (luật kết hợp đối với phép hội)

[6] $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ (luật De Morgan đối với phép tuyển)

[7] $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ (luật De Morgan đối với phép hội)

[8] $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(luật phân bố giữa phép tuyển đối với phép hội)

[9] $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(luật phân phối giữa phép hội đối với phép tuyển)

[10] $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (luật hấp thụ giữa phép tuyển với phép hội)

[11] $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (luật hấp thụ giữa phép hội với phép tuyển)

[12] $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$ (luật khử phép kéo theo)

[13] $A \vee A \equiv A$ (luật lũy đẳng đối với phép tuyển)

[14] $A \wedge A \equiv A$ (luật lũy đẳng đối với phép hội)

[15] $A \vee 0 \equiv A$ (luật trung hòa đối với hằng sai)

[16] $A \wedge 1 \equiv A$ (luật trung hòa đối với hằng đúng)

www.thuvien247.net

[17] $A \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ (luật thống trị đối với hằng đúng)

[18] $A \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$ (luật thống trị đối với hằng sai)

[19] $A \vee \overline{A} \equiv \mathbf{1}$ (luật phần tử bù đối với phép tuyển)

[20] $A \wedge \overline{A} \equiv \mathbf{0}$ (luật phần tử bù đối với phép hội).

Chú ý: Các công thức đồng nhất bằng nhau từ [1] đến [20] cho phép ta khẳng định một công thức A bất kỳ là hằng đúng hay hằng sai, hoặc thực hiện được hay không và nó được ứng dụng để tìm dạng chuẩn tắc hội, dạng chuẩn tắc tuyển của công thức trong §2 dưới đây.

§2. DẠNG CHUẨN TẮC HỘI VÀ DẠNG CHUẨN TẮC TUYỂN CỦA CÔNG THỨC

1. Tuyển sơ cấp và hội sơ cấp

- Tuyển sơ cấp (TSC) là tuyển của các biến mệnh đề $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (có thể cả chỉ số nữa).
- Hội sơ cấp (HSC) là hội của các biến mệnh đề $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (có thể cả chỉ số nữa).

Chú ý: Theo luật luỹ đẳng thì mỗi biến mệnh đề để vừa là HSC, vừa là TSC.

Định lý 4. Điều kiện cần và đủ để TSC (HSC) đồng nhất đúng (đồng nhất sai) là trong TSC (HSC) có chứa một biến đồng thời với phủ định của nó.

2. Dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển của công thức

- Dạng chuẩn tắc hội (DCTH) là hội của các TSC, hay

$$\text{DCTH} \equiv (\text{TSC})_1 \wedge (\text{TSC})_2 \wedge \ldots \wedge (\text{TSC})_n \quad (n \geq 1).$$

- Dạng chuẩn tắc tuyển (DCTT) là tuyển của các HSC, hay

$$\text{DCTT} \equiv (\text{HSC})_1 \vee (\text{HSC})_2 \vee \ldots \vee (\text{HSC})_m \ (m \geq 1).$$

- Ta nói công thức A có DCTH (DCTT) B là khi và chỉ khi

$$A \equiv B \text{ với } B \equiv (\text{TSC})_1 \wedge (\text{TSC})_2 \wedge \ldots \wedge (\text{TSC})_n$$

$$(B \equiv (\text{HSC})_1 \vee (\text{HSC})_2 \vee \ldots \vee (\text{HSC})_m).$$

Định lý 5. Mọi công thức A trong lôgic mệnh đề đều có dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển.

Từ Định lý 4 và Định lý 5 ta có:

Định lý 6. Điều kiện cần và đủ để công thức $A \equiv \mathbf{1}$ ($A \equiv \mathbf{0}$) là trong DCTH của A (trong DCTT của A) mỗi TSC (mỗi HSC) có chứa một biến mệnh đề cùng với phủ định của nó.

www.thuvien247.net

§3. CÁC PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA TÍNH HẰNG ĐÚNG, HẰNG SAI CỦA CÔNG THỨC

1. Phương pháp lập bảng

Giả sử $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ là công thức của n biến $X_1, X_2, ..., X_n$ trong lôgic mệnh đề. Để tìm giá trị chân lý của A đối với mỗi bộ giá trị đúng, sai của n biến, ta lập bảng gồm 2^n hàng, với cột đầu tiên là cột các giá trị chân lý của các biến $X_1, X_2, ..., X_n$, các cột tiếp theo dùng để tính giá trị chân lý của các công thức con trong công thức $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ và cột cuối cùng là cột tính giá trị chân lý của $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ (xem bảng dưới).

X_1	X_2	...	X_n	A_1	....	$A(X_1, X_2, ..., X_n)$
0	0	...	0			A(0, 0, ..., 0)
1	0	...	0			A(1, 0, ..., 0)
		...				...
0	1	...	1			A(0, 1, ..., 1)
1	1	...	1			A(1, 1, ..., 1)

- Nếu cột cuối cùng chứa toàn số 1 thì $A(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv \mathbf{1}$ (hằng đúng).
- Nếu cột cuối cùng chứa toàn số 0 thì $A(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv \mathbf{0}$ (hằng sai).
- Nếu cột cuối cùng có cả 0 lẫn 1 thì $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ thực hiện được.

2. Phương pháp biến đổi tương đương (thuật toán tìm DCTH, DCTT của A)

Bài toán:

– input: A là công thức trong lôgic mệnh đề.

– output: A hằng đúng (hằng sai), hay A thực hiện được?

Thuật toán:

Bước 1. Trong A ta khử phép kéo theo (nếu có) bằng cách áp dụng luật khử phép kéo theo ($X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$) ta được $A \equiv A_1$ (A_1 không còn phép kéo theo).

Bước 2. Trong A_1, ta đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan tới từng biến mệnh đề ta được A_2 bằng cách áp dụng luật De Morgan ($\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ hoặc $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$).

Bước 3. Đưa A_2 về DCTH (DCTT) bằng cách áp dụng luật phân bố

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

$$((X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)).$$

ta được $A_2 \equiv A_3$ ($\equiv A_4$), ở đây

$$A_3 \equiv \text{DCTH} \equiv (\text{TSC})_1 \wedge (\text{TSC})_2 \wedge ... \wedge (\text{TSC})_n$$

$$(A_4 \equiv \text{DCTT} \equiv (\text{HSC})_1 \vee (\text{HSC})_2 \vee ... \vee (\text{HSC})_m).$$

www.thuvien247.net

Bước 4. a) Nếu trong $A_3 \equiv$ DCTH của A mà mỗi TSC có chứa X và $\overline{X}$ thì $A \equiv \mathbf{1}$ (hằng đúng).

b) Nếu trong $A_4 \equiv$ DCTT của A mà mỗi HSC có chứa X và $\overline{X}$ thì $A \equiv \mathbf{0}$ (hằng sai).

c) Ngược lại A không hằng sai thì A thực hiện được.

Chú ý: Phương pháp lập bảng tính giá trị chân lý công thức $A(X_1, X_2, ..., X_n)$ có độ phức tạp lũy thừa đối với n (số biến của công thức A). Phương pháp này chỉ thích hợp đối với công thức có số biến mệnh đề không nhiều hơn 4. Đối với công thức $A(X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_n)$ với $n > 4$ thì phương pháp biến đổi tương đương thường được áp dụng có hiệu quả tốt hơn so với phương pháp lập bảng. Ngoài hai phương pháp trên, dưới đây sẽ trình bày thêm phương pháp suy diễn, phương pháp này có hiệu quả tốt hơn so với hai phương pháp trên.

3. Phương pháp suy diễn

a) Mô hình suy diễn

Một hệ thống toán học bao gồm các tiên đề, các định nghĩa và những khái niệm không được định nghĩa. Các tiên đề được giả định là đúng. Các định nghĩa được sử dụng để xây dựng các khái niệm mới trên cơ sở những khái niệm đã có. Còn khái niệm không định nghĩa, được ngầm định nghĩa bởi các tiên đề. Trong hệ thống toán học ta có thể suy ra được định lý (định lý là một khẳng định đã được chứng minh) và các bổ đề cũng như các hệ quả của nó.

Một lập luận chỉ ra được tính đúng đắn của một mệnh đề phát biểu trong định lý được gọi là một chứng minh.

Lôgic có thể xem là một công cụ cho phép phân tích tính đúng đắn của các chứng minh đó.

Các quy tắc suy diễn trong lôgic là cơ sở để biết được một lập luận hay một chứng minh là đúng hay sai.

Một trong những phương pháp dùng để chứng minh một mệnh đề toán học là đúng, thường có dạng lý luận với dẫn xuất sau đây:

Nếu A_1 và A_2 và ... và A_n thì B.

Dạng lý luận này được xem là hợp lý nếu công thức

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B \equiv \mathbf{1} \text{ (hằng đúng).}$$

Mô hình suy diễn của công thức $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$ có dạng:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array}$$

www.thuvien247.net

(đọc: nếu A_1 đúng và A_2 đúng và ... và A_n đúng thì B đúng). A_i ($i = \overline{1,n}$) gọi là giả thiết, còn B gọi là kết luận, ký hiệu $\therefore$ đọc là "thì".

b) Các quy tắc suy diễn cơ bản trong lôgic mệnh đề

- *Quy tắc suy diễn 1* (luật cộng: cg)

  Công thức cơ sở: $A \to (A \vee B) \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{A}{\therefore\ A \vee B}$.

- *Quy tắc suy diễn 2* (luật rút gọn: rg)

  Công thức cơ sở: $(A \wedge B) \to A \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}{\therefore\ A}$.

- *Quy tắc suy diễn 3* (luật Modus ponens (khẳng định): kđ)

  Công thức cơ sở: $(A \wedge (A \to B)) \to B \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix}A\\A \to B\end{matrix}}{\therefore\ B}$.

- *Quy tắc suy diễn 4* (luật Modus tollens (phủ định): pđ)

  Công thức cơ sở: $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A} \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix}A \to B\\\overline{B}\end{matrix}}{\therefore\ \overline{A}}$.

- *Quy tắc suy diễn 5* (luật tam đoạn luật tuyển: tđlt)

  Công thức cơ sở: $((A \vee B) \wedge \overline{A}) \to B \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix}A \vee B\\\overline{A}\end{matrix}}{\therefore\ B}$.

- *Quy tắc suy diễn 6* (luật bắc cầu: bc)

  Công thức cơ sở: $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C) \equiv 1$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix}A \to B\\B \to C\end{matrix}}{\therefore\ A \to C}$.

www.thuvien247.net

- *Quy tắc suy diễn 7* (luật mâu thuẫn: mt)

  Công thức cơ sở:

  $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}) \rightarrow 0 \equiv 1.$

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}}{\therefore\ B} \equiv \dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \overline{B} \end{matrix}}{\therefore\ 0}.$

- *Quy tắc suy diễn 8* (luật từng trường hợp: tth)

  Công thức cơ sở: $(A \rightarrow B) \wedge (D \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee D) \rightarrow B) \equiv 1.$

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ D \rightarrow B \end{matrix}}{\therefore\ (A \vee D) \rightarrow B}.$

c) Quan hệ giữa công thức cơ sở với mô hình suy diễn của nó

Công thức cơ sở $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$ hằng đúng khi và chỉ khi mô hình suy diễn $\dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{matrix}}{\therefore B}$ là đúng.

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. Các khẳng định sau, cho biết khẳng định nào là mệnh đề:

a) Bác Hồ của chúng ta mất khi Người 79 tuổi;

b) 9 là một số chẵn;

c) 3 là số nguyên tố;

d) x là số nguyên tố;

e) Hôm nay trời đẹp làm sao!

h) Nếu hôm nay trời nắng thì tôi đi thăm bạn;

i) 2 + 2 = 4;

j) 7 không phải là số nguyên tố;

k) Phương trình 2x + 1 = 0 có nghiệm không?

Giải

a) Là mệnh đề; b) Là mệnh đề;

c) Là mệnh đề; d) Không là mệnh đề;

e) Không là mệnh đề; h) Là mệnh đề phức hợp;

www.thuvien247.net

i) Là mệnh đề; j) Là mệnh đề;

k) Không phải là mệnh đề.

2. Đặt X là mệnh đề: "Minh giỏi toán"; Y là mệnh đề: "Minh yếu Anh văn". Hãy viết lại các mệnh đề phức hợp sau dưới dạng công thức trong lôgic mệnh đề:

a) "Minh giỏi toán nhưng yếu Anh văn";

b) "Minh yếu cả toán lẫn Anh văn";

c) "Minh giỏi toán hay Minh vừa giỏi Anh văn vừa yếu toán";

d) "Nếu Minh giỏi toán thì Minh giỏi Anh văn";

e) "Minh giỏi toán và Anh văn hay Minh yếu toán nhưng giỏi Anh văn".

Giải

a) $X \wedge Y$; b) $\overline{X} \wedge Y$;

c) $X \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X})$; d) $X \to \overline{Y}$;

e) $(X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$.

3. Giả sử mệnh đề $X \to Y$ sai. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $X \wedge Y$; b) $\overline{X} \vee Y$; c) $Y \to X$.

Giải

$X \to Y$ sai khi X đúng và Y sai. Vì vậy:

a) $X \wedge Y$: sai; b) $\overline{X} \vee Y$: sai; c) $Y \to X$: đúng.

4. Cho mệnh đề $A \to B$. Mệnh đề đảo của mệnh đề $A \to B$ là mệnh đề $B \to A$. Mệnh đề phản đảo của $A \to B$ là mệnh đề $\overline{B} \to \overline{A}$.

a) Cho mệnh đề $(X \wedge Y) \to (X \vee Y)$. Tìm mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề đã cho.

b) Cho mệnh đề: "Nếu hôm nay là thứ 5, thì hôm nay tôi sẽ có cuộc tiếp khách ở bộ môn". Viết mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề trên.

c) Chứng minh các công thức dưới đây là hằng đúng:

- $(\overline{X} \wedge (X \vee Y)) \to Y$;
- $((X \to Y) \wedge (\overline{X} \to Y)) \to Y$;
- $((\overline{X} \to (Y \wedge \overline{Y})) \to X$;
- $((\overline{X} \to Y) \wedge (\overline{X} \to \overline{Y})) \to X$.

Giải

a) Mệnh đề $(X \vee Y) \to (X \wedge Y)$ là mệnh đề đảo của mệnh đề

$$(X \wedge Y) \to (X \vee Y).$$

Mệnh đề $\overline{X \vee Y} \to \overline{X \wedge Y} \equiv (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (\overline{X} \vee \overline{Y})$ là mệnh đề phản đảo của mệnh đề $(X \wedge Y) \to (X \vee Y)$.

www.thuvien247.net

b) Mệnh đề đảo của mệnh đề trong câu b là mệnh đề: "Nếu hôm nay tôi có cuộc tiếp khách ở bộ môn, thì hôm nay là thứ 5".

Mệnh đề phản đảo của mệnh đề trong câu b là mệnh đề: "Nếu hôm nay tôi không tiếp khách ở bộ môn, thì hôm nay không phải là thứ 5".

c) • $(\overline{X} \wedge (X \vee Y)) \rightarrow Y \equiv (X \vee \overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Y \equiv (X \vee \overline{X}) \wedge (X \vee \overline{Y}) \vee Y$

$$\equiv (X \vee \overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Y) \equiv \mathbf{1}.$$

• $((X \rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \rightarrow Y)) \rightarrow Y \equiv \overline{(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Y)} \vee Y$

$$\equiv ((X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})) \vee Y \equiv (X \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y} \vee Y \equiv \overline{Y} \vee Y \equiv \mathbf{1}.$$

• $(\overline{X} \rightarrow (Y \wedge \overline{Y})) \rightarrow X \equiv \overline{X \vee 0} \vee X \equiv \overline{X} \vee X \equiv \mathbf{1}.$

• $((\overline{X} \rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \rightarrow \overline{Y}) \rightarrow X \equiv ((X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})) \rightarrow X$

$$\equiv (X \vee (Y \wedge \overline{Y})) \rightarrow X \equiv X \rightarrow X \equiv \overline{X} \vee X \equiv \mathbf{1}.$$

5. Dùng phương pháp lập bảng và phương pháp biến đổi tương đương để chứng minh các công thức trong mục 5, §1 đều là các hằng đúng. Các công thức [3], [4], [6], [7], [10], [11] độc giả tự kiểm tra.

Giải

[1] $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Lập bảng giá trị của [1]:

A	B	B → A	[1]
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Vậy $A \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv \mathbf{1}$ hay [1] $\equiv \mathbf{1}$.

Dùng thuật toán tìm DCTH:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee A \equiv \mathbf{1}.$$

[2] $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Lập bảng giá trị của [2]:

A	B	C	B → C	A → (B → C)	A → B	A → C	(A → B) → (A → C)	[2]
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

www.thuvien247.net

Vậy [2] ≡ **1**.

Thuật toán tìm DCTH của [2]:

$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \equiv$

$\equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C} \vee \overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{A} \vee C \equiv A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \vee C$

$\equiv (A \wedge B \wedge C) \wedge (\overline{C} \vee C) \vee (A \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A}) \equiv A \wedge B \vee C \vee \overline{B} \vee \overline{A}$

$\equiv (A \wedge B) \vee \overline{A \wedge B} \vee C \equiv \mathbf{1}.$

[5] $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

Lập bảng giá trị của [5]:

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$(A \to C) \to ((A \to (B \wedge C))$	[5]
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Vậy [5] ≡ **1**.

Thuật toán tìm DCTH của [5]:

[5] $\equiv \overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{A} \vee (B \wedge C)$ (do [7])

$\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \wedge C)$ (do [1] và [4])

$\equiv (A \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \wedge C)) \wedge (\overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \wedge C))$ (do [5])

$\equiv \overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \wedge C)$ (do [9])

$\equiv (\overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C)$ (do [5])

$\equiv \overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee (A \wedge \overline{C})$ (do [9] và [2])

$\equiv (\overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee \overline{C})$ (do [5]) ≡ DCTH ≡ 1 (do [11])

[8] $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Lập bảng giá trị của [8]:

A	B	C	$A \to C$	$B \to C$	$A \vee B$	$(A \vee B) \to C$	$(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$	[8]
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

www.thuvien247.net

Vậy [8] ≡ **1**.

Thuật toán tìm DCTH của [8]:

$[8] \equiv (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

$\equiv \overline{\bar{A} \vee C} \vee \overline{\bar{B} \vee C} \vee \overline{A \vee B} \vee C$ (do [7])

$\equiv (A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C$ (do [4])

$\equiv (A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C) \wedge (\bar{C} \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C)$ (do [5])

$\equiv (A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee C \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ (do [9])

$\equiv (A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee C \vee \bar{A}) \wedge (A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee C \vee \bar{B})$ (do [5])

$\equiv (A \vee C \vee \bar{B} \vee (B \wedge \bar{C}))$ (do [9])

$\equiv (A \vee C \vee \bar{B} \vee B) \wedge (A \vee C \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \equiv$ DCTH (do [5]) ≡ **1**.

Vậy [8] cũng hằng đúng.

[9] $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Lập bảng giá trị của [9]:

A	B	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$A \to B$	$\bar{B} \to \bar{A}$	[9]
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Vậy [9] ≡ **1**.

Thuật toán tìm DCTH của [9]:

[9] $\equiv (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

$\equiv \overline{\bar{A} \vee B} \vee B \vee \bar{A}$ (do [7] và [1])

$\equiv (A \wedge \bar{B}) \vee B \vee \bar{A}$ (do [4] và [1])

$\equiv (A \vee B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{B} \vee B \vee A)$ (do [5])

≡ DCTH ≡ **1**.

6. Chỉ ra công thức

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to (C \to B)) \to (A \to (B \to C))) \equiv \mathbf{1}.$$

Giải. Nhận xét: Công thức trên nhận được từ công thức $A \equiv X \to (Y \to X)$ bằng cách thay X bởi $A \to (B \to C)$, còn thay Y bởi $A \to (C \to B)$ nên theo Định lý 2 (luật thay thế) ta có điều cần chứng minh.

7. Cho công thức $A \equiv (X \vee Y \vee Z_1) \wedge Z_2$. Tìm công thức đối ngẫu A* theo định nghĩa và theo luật đối ngẫu.

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Giải. Theo định nghĩa thì $A^* = (X \wedge Y \wedge Z_1) \vee Z_2$. Theo luật đối ngẫu thì

$$A^* \equiv \overline{(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}_1) \wedge \overline{Z}_2} \equiv (X \wedge Y \wedge Z_1) \vee Z_2$$

(công thức đối ngẫu của A theo định nghĩa).

8. Chứng minh các công thức đồng nhất bằng nhau sau đây bằng hai phương pháp lập bảng và biến đổi tương đương:

a) $X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$;

b) $X \to (Y \to Z) \equiv (X \wedge Y) \to Z$;

c) $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \equiv X \to (Y \wedge Z)$;

d) $((X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y})) \wedge \overline{X} \equiv 0$.

Giải

a) Lập bảng giá trị

X	Y	Z	$Y \to Z$	$X \to (Y \to Z)$	$X \to Z$	$Y \to (X \to Z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Vậy $X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$

Dùng phép biến đổi tương đương trong mục 7, §1:

$$X \to (Y \to Z) \equiv \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \text{ (do [7])};$$

$$Y \to (X \to Z) \equiv \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \text{ (do [7])} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \text{ (do [2])},$$

đó là điều cần chỉ ra.

b) Lập bảng giá trị

X	Y	Z	$Y \to Z$	$X \to (Y \to Z)$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to Z$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

www.thuvien247.net

Vậy $X \to (Y \to Z) \equiv (X \wedge Y) \to Z$.

Dùng phép biến đổi tương đương trong mục 7, §1:

$$X \to (Y \to Z) \equiv \bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z \text{ (do [7]);}$$

$$(X \wedge Y) \to Z \equiv \overline{X \wedge Y} \vee Z \equiv \bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z,$$

đó là điều cần chỉ ra.

c) Lập bảng giá trị

X	Y	Z	$X \to Y$	$X \to Z$	$(X \to Y) \wedge (X \to Z)$	$Y \wedge Z$	$X \to (Y \wedge Z)$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Vậy $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \equiv X \to (Y \wedge Z)$.

Dùng phép biến đổi tương đương trong mục 7, §1:

$(X \to Y) \wedge (X \to Z) \equiv (\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z)$ (do [7]);

$X \to (Y \wedge Z) \equiv \bar{X} \vee (Y \wedge Z)$ (do (7)) $\equiv (\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z)$ (do [5]).

Vậy $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \equiv X \to (Y \wedge Z)$.

d) Lập bảng giá trị

X	Y	$X \wedge Y$	$\bar{Y}$	$\bar{X}$	$X \wedge \bar{Y}$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})$	$((X \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})) \wedge \bar{X}$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

Vậy $((X \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})) \wedge \bar{X} \equiv 0$.

Dùng phép biến đổi tương đương

$$((X \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})) \wedge \bar{X} \equiv (X \wedge Y \vee X) \wedge (X \wedge Y \vee \bar{Y}) \wedge \bar{X}$$

$$\equiv X \wedge (X \wedge Y \vee \bar{Y}) \wedge \bar{X} \equiv 0.$$

9. a) Chỉ ra công thức

$$A \equiv ((X \to Y) \wedge ((X \to Y) \to (\bar{Z}_1 \vee Z_2))) \to (\bar{Z}_1 \vee Z_2) \equiv 1$$

bằng phương pháp tương đương.

b) Chỉ ra $(X \wedge Y) \to Z \equiv X \to (Y \to Z)$ bằng phương pháp tương đương và phương pháp lập bảng.

www.thuvien247.net

Giải

a) $A \equiv ((X \to Y) \wedge ((X \to Y) \to (\overline{Z}_1 \vee Z_2))) \to (\overline{Z}_1 \vee Z_2)$.

Đặt $\overline{Z}_1 \vee Z_2 \equiv Z$, $X \to Y \equiv Z_0$ khi đó công thức trên là

$$A \equiv (Z_0 \wedge (Z_0 \to Z)) \to Z \equiv \overline{Z_0 \wedge (\overline{Z}_0 \vee Z)} \vee Z$$

$$\equiv \overline{Z}_0 \vee (Z_0 \wedge \overline{Z}) \vee Z \text{ (do [1] và [4] trong mục 7, §1)}$$

$$\equiv (Z_0 \vee \overline{Z}_0 \vee Z) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{Z}_0 \vee Z) \equiv \text{DCTH} \equiv 1 \text{ (do mỗi TSC} \equiv 1).$$

b) $(X \wedge Y) \to Z \equiv \overline{X \wedge Y} \vee Z$ (do (7)) $\equiv \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \equiv X \to (Y \to Z)$.

Lập bảng:

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$Y \to Z$	$X \wedge Y \to Z$	$X \to (Y \to Z)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Vậy $(X \wedge Y) \to Z \equiv X \to (Y \to Z)$.

10. Cho $A \equiv \overline{(X \to Y) \to (X \to Z)} \to \overline{(X \to (Y \to Z))}$.

Chứng minh $A \equiv 1$ theo hai phương pháp:

a) Phương pháp tương đương.

b) Phương pháp lập bảng.

Giải

a) $A \equiv \overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee \overline{\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z}$

$$\equiv (X \wedge \overline{Y}) \vee \overline{X} \vee Z \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z})$$

$$\equiv (X \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X}) \vee Z \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z})$$

$$\equiv \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z})$$

$$\equiv (\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee X) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee \overline{Z})$$

$\equiv$ DCTC $\equiv 1$ (do mỗi TSC có chứa một biến đồng thời với phủ định của nó).

b) Lập bảng

www.thuvien247.net

X Y Z	Y→Z	X→(Y→Z)	X→Y	X→Z	(X→Y)→(X→Z)	$\overline{(X\to Y)\to(X\to Z)}$	$\overline{X\to(Y\to Z)}$	A
0 0 0	1	1	1	1	1	0	0	1
0 0 1	1	1	1	1	1	0	0	1
0 1 0	0	1	1	1	1	0	0	1
1 0 0	1	1	0	0	1	0	0	1
1 1 0	0	0	1	0	0	1	1	1
1 0 1	1	1	0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	1	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	0	0	1

Vậy $A \equiv 1$.

11. Chứng minh rằng nếu $A \equiv B$ thì $(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv 1$, cho ví dụ minh họa.

Giải. $A \equiv B$ khi và chỉ khi A, B cùng nhận giá trị đúng, sai như nhau đối với mọi bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề có mặt trong A và B. Điều này tương đương với $A \to B \equiv 1$ và $B \to A \equiv 1$, hay $(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv 1$.

Ví dụ: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Lập bảng giá trị ta có:

A	B	C	B ∨ C	A ∧ B	A ∧ C	A ∧ (B ∨ C)	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị (chú ý 2 cột cuối) ta có ngay công thức

$$(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \equiv 1$$

và $$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \vee C)) \equiv 1,$$

hay hội hai công thức này là hằng đúng.

12. Áp dụng các luật lôgic mệnh đề, chứng minh rằng:

a) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \bar{Y}) \vee Y \equiv X \vee Y$;

b) $\overline{X \vee Y} \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee \bar{Y} \equiv \overline{Y \wedge X}$;

c) $(X \to Y) \wedge ((\bar{Y} \wedge (X \vee \bar{Y})) \equiv \overline{Y \vee X}$.

www.thuvien247.net

Giải

a) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \bar{Y}) \vee Y \equiv (X \vee Y \vee Y) \wedge (X \wedge \bar{Y} \vee Y)$ (do [5])

$\equiv (X \vee Y) \wedge 1 \equiv X \vee Y$ (do [8] và [9]).

b) $\overline{X \vee Y} \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee \bar{Y} \equiv \overline{X \vee Y} \vee (\bar{X} \vee \bar{Y}) \wedge (Y \vee \bar{Y})$ (do [5])

$\equiv \overline{X \vee Y} \vee \bar{X} \vee \bar{Y}$ (do [9]) $\equiv (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee \bar{X} \vee \bar{Y}$ (do [4])

$\equiv \left(\bar{X} \vee \bar{X} \vee \bar{Y}\right) \wedge \left(\bar{Y} \vee \bar{X} \vee \bar{Y}\right) \equiv \left(\bar{X} \vee \bar{Y}\right) \wedge \left(\bar{X} \vee \bar{Y}\right) \equiv \bar{X} \vee \bar{Y} \equiv \overline{X \wedge Y}$

(do [5], [8], [4]).

c) $(X \to Y) \wedge \left(\bar{Y} \wedge (X \vee \bar{Y})\right) \equiv \left(\bar{X} \vee Y\right) \wedge \bar{Y} \wedge (X \vee \bar{Y})$ (do [7])

$\equiv \left(\bar{X} \wedge \bar{Y} \vee Y \wedge \bar{Y}\right) \wedge (X \vee \bar{Y})$ (do [7] $\equiv \left(\bar{X} \wedge \bar{Y}\right) \wedge \left(X \vee \bar{Y}\right)$ (do [9], [11])

$\equiv \bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge X \vee \bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Y}$ (do [5])

$\equiv \bar{X} \wedge \bar{Y} \equiv \overline{X \vee Y}$ (do [5], [10], [9], [8], [4]).

13.a) Tìm đối ngẫu của công thức:

$$A \equiv (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee X \vee (Y \wedge X).$$

b) Chứng minh $(A^*)^* \equiv A$. Áp dụng đối với công thức A trong câu a.

Giải

a) $A^* \equiv (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \wedge X \wedge (Y \vee X)$.

b) $(A^*)^* \equiv A$ (do định nghĩa công thức đối ngẫu của công thức A không chứa phép toán kéo theo).

Áp dụng với A trong câu a: $(A^*)^* \equiv ((X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \wedge X \wedge (Y \vee X))^*$

$\equiv (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee X \vee (Y \wedge X) \equiv A$.

14. Cho công thức $A \equiv (X \to (Y \to Z)) \to ((Y \to Z) \to X)$, chứng minh rằng nếu trong A ta thay $Y \to Z$ bởi $\bar{Z} \to \bar{Y}$ thì ta nhận được công thức $A' \equiv (X \to (\bar{Z} \to \bar{Y})) \to ((\bar{Z} \to \bar{Y}) \to X)$ vẫn đồng nhất bằng A.

Giải

$A' \equiv (X \to (\bar{Z} \to \bar{Y})) \to ((\bar{Z} \to \bar{Y}) \to X) \equiv \overline{\bar{X} \vee Z \vee \bar{Y}} \vee \overline{Z \vee \bar{Y}} \vee X$

$\equiv (X \wedge \bar{Z} \wedge Y) \vee (\bar{Z} \wedge Y) \vee X$.

Mặt khác

$A \equiv (X \to (Y \to Z)) \to ((Y \to Z) \to X)$

$\equiv \overline{\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z} \vee \overline{\bar{Y} \vee Z} \vee X \equiv (X \wedge Y \wedge \bar{Z}) \vee (Y \wedge \bar{Z}) \vee X$

$\equiv (X \wedge \bar{Z} \wedge Y) \vee (\bar{Z} \wedge Y) \vee X \equiv A'$. Đó là điều cần chứng minh.

www.thuvien247.net

Chú ý: Bài tập 14 có thể phát biểu dưới dạng tổng quát như sau: Nếu trong công thức A có chứa công thức con A_i mà ta thay A_i bởi công thức tương đương với nó thì ta nhận được công thức A' ≡ A, ở đây công thức con hiểu theo nghĩa nó là một công thức nằm trong A và nó góp phần tạo nên công thức A thông qua các phép toán lôgic.

15. Một tập hợp các phép toán lôgic được gọi là đầy đủ, nếu với mỗi công thức A bất kỳ đều tồn tại công thức B ≡ A mà trong B chỉ chứa các phép toán lôgic đó.

Chứng minh rằng, trong lôgic mệnh đề phép toán hội và phép toán phủ định là đầy đủ.

Giải. Mọi công thức A đều có dạng chuẩn tắc hội B, A ≡ B trong B chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\wedge$ và $-$ (phép phủ định liên quan trực tiếp tới từng biến mệnh đề). Mặt khác B có thể đưa về B' ≡ B, trong đó B' chỉ chứa hai phép toán $\wedge$ và $-$ bằng cách áp dụng luật De Morgan $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$. Đó là điều cần chứng minh.

16. Chỉ ra các công thức cơ sở của các mô hình suy diễn trong mục 3, §3 là hằng đúng bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Giải

- $A \to (A \vee B) \equiv \overline{A} \vee A \vee B \equiv 1 \vee B \equiv \mathbf{1}$ (luật cộng).
- $(A \wedge B) \to A \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee A \equiv 1 \vee \overline{B} \equiv \mathbf{1}$ (luật rút gọn).
- $(A \wedge (A \to B)) \to B \equiv \overline{A \wedge (\overline{A} \vee B)} \vee B \equiv \overline{A} \vee (A \wedge \overline{B}) \vee B$

  $\equiv (\overline{A} \vee B \vee A) \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{B})$

  $\equiv (1 \vee B) \wedge (\overline{A} \vee 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv \mathbf{1}$ (luật khẳng định).
- $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A} \equiv \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge \overline{B}} \vee \overline{A}$

  $\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee B \vee \overline{A} \equiv (A \vee B \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \vee B \vee \overline{A})$

  $\equiv (1 \vee B) \wedge (1 \vee A) \equiv \mathbf{1}$ (luật phủ định).
- $((A \vee B) \wedge \overline{A}) \to B \equiv \overline{(A \vee B) \wedge \overline{A}} \vee B \equiv (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee A \vee B$

  $\equiv (\overline{A} \vee A \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A \vee B) \equiv \mathbf{1}$ (luật tam đoạn luận tuyển)
- $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C) \equiv \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C)} \vee (\overline{A} \vee C)$

  $\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C$

  $\equiv (A \vee (B \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee (B \wedge \overline{C}) \vee C \vee \overline{A})$

  $\equiv (B \wedge \overline{C}) \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{A} \equiv (B \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{A}) \wedge (\overline{C} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{A}) \equiv \mathbf{1}$

  (luật bắc cầu).

www.thuvien247.net

- $((A \to B) \wedge (D \to B)) \to ((A \vee D) \to B) \equiv$

$$\equiv \overline{(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{D} \vee B)} \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}) \vee B \equiv$$

$$\equiv (A \wedge \bar{B}) \vee (D \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}) \vee B$$

$$\equiv (A \vee (D \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}) \vee B) \wedge (\bar{B} \vee (D \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}) \vee B)$$

$$\equiv (A \vee D \vee (\bar{A} \vee \bar{D}) \vee B) \wedge (A \vee \bar{B} \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}) \vee B)$$

$$\equiv (A \vee D \vee B \vee \bar{A}) \wedge (A \vee D \vee B \vee \bar{D}) \equiv \mathbf{1}$$

(luật chứng minh theo từng trường hợp).

17. Cho công thức cơ sở và mô hình suy diễn dưới đây:

a) Công thức cơ sở: $((A \wedge B) \to D) \to (A \to (B \to D))$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{(A \wedge B) \to D}{\therefore \quad A \to (B \to D)}$.

b) Công thức cơ sở: $((A \wedge \bar{B}) \to \bar{A}) \to (A \to B)$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{(A \wedge \bar{B}) \to \bar{A}}{\therefore \quad A \to B}$.

c) Công thức cơ sở: $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \to C \end{array}}{\therefore \quad A \to (B \wedge C)}$.

d) Công thức cơ sở: $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \vee C) \to (B \vee D))$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \end{array}}{\therefore \quad (A \vee C) \to (B \vee D)}$.

e) Công thức cơ sở: $((A \wedge \bar{B}) \to (C \wedge \bar{C})) \to (A \to B)$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{(A \wedge \bar{B}) \to (C \wedge \bar{C})}{\therefore \quad (A \to B)}$.

f) Công thức cơ sở: $((A \to B) \wedge (\bar{A} \to B)) \to B$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ \bar{A} \to B \end{array}}{\therefore \quad B}$.

g) Công thức cơ sở: $(\bar{A} \to (B \wedge \bar{B})) \to A$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{\bar{A} \to (B \wedge \bar{B})}{\therefore \quad A}$.

www.thuvien247.net

h) Công thức cơ sở: $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Mô hình suy diễn: $\dfrac{A \to B}{\therefore \quad \overline{B} \to \overline{A}}$.

Hãy chỉ ra các mô hình suy diễn trên là đúng bằng cách chứng minh các công thức cơ sở của mô hình là hằng đúng.

Giải

a) $((A \wedge B) \to D) \to (A \to (B \to D)) \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee D} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee D$

$\equiv (A \wedge B \wedge \overline{D}) \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee D$

$\equiv (A \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee D) \wedge (B \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee D) \wedge (\overline{D} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee D) \equiv 1.$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

b) $((A \wedge \overline{B}) \to \overline{A}) \to (A \to B) \equiv \overline{\overline{A} \vee B \vee \overline{A}} \vee \overline{A} \vee B \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee \overline{A} \vee B$

$\equiv (A \vee \overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee B) \equiv 1$. Vậy mô hình suy diễn là đúng.

c) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C)) \equiv$

$\equiv \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C)} \vee \overline{A} \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee (B \wedge C)$

$\equiv ((A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee B) \wedge ((A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C)$

$\equiv (A \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee B) \wedge (A \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C) \wedge$

$\wedge (\overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C) \equiv \overline{B} \vee (A \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \vee C$

$\equiv (\overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee A) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee \overline{C}) \equiv 1.$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

d) $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \vee C) \to (B \vee D)) \equiv$

$\equiv \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{C} \vee D)} \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D$

$\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D$

$\equiv (A \vee (C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D) \wedge (\overline{B} \vee (C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D)$

$\equiv A \vee ((C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D$

$\equiv (A \vee C \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D) \wedge (A \vee \overline{D} \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D)$

$\equiv A \vee C \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee B \vee D$

$\equiv (A \vee C \vee \overline{A} \vee B \vee D) \wedge (A \vee C \vee \overline{C} \vee B \vee D) \equiv 1.$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

e) $((A \wedge \overline{B}) \to (C \wedge \overline{C})) \to (A \to B) \equiv \overline{\overline{A} \vee B \vee (C \wedge \overline{C})} \vee \overline{A} \vee B$

$\equiv (A \wedge \overline{B} \wedge 1) \vee \overline{A} \vee B \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee \overline{A} \vee B \equiv (A \vee \overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{A} \vee B) \equiv 1$.

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

www.thuvien247.net

f) $((A \to B) \wedge (\overline{A} \to B)) \to B \equiv \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee B)} \vee B$

$$\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee B \equiv (A \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee B) \wedge (\overline{B} \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee B)$$

$$\equiv (A \vee \overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B} \vee B) \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

g) $\left(\overline{A} \to (B \wedge \overline{B})\right) \to A \equiv \overline{A \vee 0} \vee A \equiv \overline{A} \vee A \equiv \mathbf{1}.$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

h) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}) \equiv \overline{\overline{A} \vee B} \vee B \vee \overline{A} \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee B \vee \overline{A}$

$$\equiv (A \vee B \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \vee B \vee \overline{A}) \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

18. Hãy nêu những ví dụ suy luận trong cuộc sống có vận dụng những mô hình suy diễn sau:

a) $\dfrac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{\therefore\ B}$; b) $\dfrac{\begin{array}{l} A \to B \\ \overline{B} \end{array}}{\therefore\ \overline{A}}$;

c) $\dfrac{\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \end{array}}{\therefore\ A \to C}$; d) $\dfrac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \overline{A} \end{array}}{\therefore\ B}$.

Giải. a) Là phi công thì phải biết lái máy bay. An là phi công nên An biết lái máy bay.

b) Nếu là sinh viên CNTT của trường ĐHCN thì phải học Toán rời rạc. An không học Toán rời rạc nên An không phải sinh viên CNTT của trường ĐHCN.

c) Trường chất lượng cao thì có cán bộ giảng dạy giỏi. Trường có cán bộ giảng dạy giỏi thì có sinh viên giỏi. Vậy trường chất lượng cao thì có sinh viên giỏi.

d) Được khen thưởng nếu học giỏi hoặc công tác tốt. An được khen thưởng, nhưng An không học giỏi nên An phải công tác tốt.

19. Xét suy luận sau đây: Nếu một danh sách L khác rỗng thì có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách. Vì ta không thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L nên danh sách L là danh sách rỗng.

Hãy chỉ ra mô hình suy diễn để chứng minh suy luận trên là đúng.

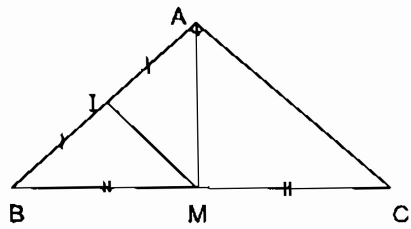
Giải. Đặt X là mệnh đề "Danh sách L khác rỗng" và Y là mệnh đề "Ta có thể lấy ra phần tử đầu trong danh sách L". Khi đó suy luận trên tương đương với mô hình suy diễn $\dfrac{\begin{array}{l} X \to Y \\ \overline{Y} \end{array}}{\therefore \overline{X}}$.

www.thuvien247.net

Mô hình suy diễn này là đúng nên suy luận trên là chính xác.

20. Chứng minh rằng, trong một tam giác vuông, trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. Chỉ ra mô hình suy diễn được áp dụng trong chứng minh trên.

Giải. Giả sử ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC.



Ta chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$. Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó MI là đường trung bình của ΔABC và MI//AC. Vì $CA \perp AB$ nên $MI \perp AB$. ΔMAB có MI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔMAB cân tại M. Từ đó ta có

$$MA = MB = MC = \frac{1}{2}BC. \qquad (*)$$

Trong chứng minh trên, sử dụng các bước suy luận sau đây:

– Suy luận 1:

$$\frac{A_1 : AM \text{ là trung tuyến}}{\therefore\ A_2 : MB = MC}$$

– Suy luận 2:

$$\frac{\begin{array}{l} A_2: MB = MC \\ A_3: IA = IB \end{array}}{\therefore\ A_4: MI \text{ là đường trung bình } \Delta ABC}$$

– Suy luận 3:

$$\frac{A_4: MI \text{ là đường trung bình của } \Delta ABC}{\therefore\ A_5: MI \,//\, CA}$$

– Suy luận 4:

$$\frac{\begin{array}{l} A_5: MI \,//\, CA \\ A_6: CA \perp AB \end{array}}{\therefore\ A_7: MI \perp AB}$$

– Suy luận 5:

$$\frac{\begin{array}{l} A_3: IA = IB \\ A_7: MI \perp AB \end{array}}{\therefore\ A_8: \Delta MAB \text{ cân tại } M}$$

– Suy luận 6:

$$\frac{A_8: \Delta MAB \text{ cân tại } M}{\therefore\ A_9: MA = MB}$$

www.thuvien247.net

– Suy luận 7:

$$\begin{array}{l} A_2\text{: } MB = MC \\ \underline{A_9\text{: } MA = MB} \\ \therefore A_{10}\text{: } AM = \dfrac{1}{2}BC \end{array}$$

Từ 7 suy luận trên, ta có bước suy luận 8 dưới dạng mô hình suy diễn:

– Suy diễn 8:

$$\begin{array}{l} A_1 \to A_2 \\ A_2 \to A_4 \\ A_4 \to A_5 \\ A_5 \to A_7 \\ A_7 \to A_8 \\ A_8 \to A_9 \end{array}$$

$$\frac{A_9 \to A_{10}}{\therefore A_1 \to A_{10}} \equiv \frac{A_1 \to A_{10}}{\therefore A_1 \to A_{10}} \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy chứng minh (*) là đúng.

21. a) Dùng quy tắc suy diễn chỉ ra công thức dưới đây là hằng đúng:

$$(A \wedge B) \to (\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}).$$

b) Chứng minh công thức

$$A \equiv ((X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{\overline{X_1 \vee X_2} \vee \overline{X_3 \wedge X_4}})) \to (\bar{X}_3 \vee \bar{X}_4) \equiv \mathbf{1}$$

bằng phương pháp biến đổi tương đương và mô hình suy diễn.

Giải

a) $$(A \wedge B) \to \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} \equiv \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\therefore A \vee B} \equiv \frac{A}{\therefore A \vee B} \equiv \mathbf{1} \text{ (luật cộng).}$$

b) Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} A &\equiv (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \wedge X_4) \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \\ &\equiv \left((\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_1 \vee X_2\right) \wedge \left((\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee (X_3 \wedge X_4)\right) \\ &\equiv (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_1 \vee X_2) \wedge \\ &\qquad \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee (X_3 \wedge X_4)) \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee (X_3 \wedge X_4)) \\ &\equiv (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_4) \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_3) \wedge \\ &\qquad \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_4) \equiv \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Mô hình suy diễn:

$$\dfrac{\begin{array}{l}(X_1 \vee X_2) \\ \overline{\overline{(X_1 \vee X_2)} \vee \overline{\overline{X_3 \wedge X_4}}}\end{array}}{\therefore\ \overline{X}_3 \vee \overline{X}_4} \equiv \dfrac{\overline{X_3 \wedge X_4}}{\therefore\ \overline{X_3 \wedge X_4}} \equiv \dfrac{\begin{array}{c}\overline{X_3 \wedge X_4} \\ X_3 \wedge X_4\end{array}}{\therefore\ \ 0} \equiv \dfrac{0}{\therefore\ \ 0} \equiv \mathbf{1}.$$

22. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l}\overline{A} \vee B \\ \overline{B} \vee C \\ \overline{C} \vee D \\ \overline{D} \vee E \\ \overline{E} \\ \hline \therefore\ \ \overline{A}\end{array} \qquad (1)$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên.

b) Mô hình suy diễn trên có đúng không?

Giải

a) Công thức cơ sở là $\left((\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C) \wedge (\overline{C} \vee D) \wedge (\overline{D} \vee E) \wedge \overline{E}\right) \rightarrow \overline{A}$.

b) Mô hình (1) tương đương với mô hình

$$(1) \equiv \dfrac{\begin{array}{l}\overline{A} \vee B \\ \overline{B} \vee C \\ \begin{cases}\overline{C} \vee D \\ \overline{D}\end{cases}\end{array}}{\therefore\ \ \overline{A}} \equiv \dfrac{\begin{array}{l}\overline{A} \vee B \\ \begin{cases}\overline{B} \vee C \\ \overline{C}\end{cases}\end{array}}{\therefore\ \ \overline{A}} \equiv \dfrac{\begin{cases}\overline{A} \vee B \\ \overline{B}\end{cases}}{\therefore\ \ \overline{A}} \equiv \dfrac{\overline{A}}{\therefore\ \overline{A}} \equiv \mathbf{1}.$$

23. Chỉ ra công thức: $\left((A \rightarrow B) \wedge (A \vee C) \wedge (\overline{C} \vee D)\right) \rightarrow (B \vee D) \equiv \mathbf{1}$ bằng cách:

a) Dùng phương pháp biến đổi tương đương.

b) Dùng mô hình suy diễn.

Giải

a) $\overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\overline{C} \vee D)} \vee B \vee D \equiv$

$\equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (C \wedge \overline{D}) \vee B \vee D$

$\equiv (A \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (C \wedge \overline{D}) \vee B \vee D) \wedge (\overline{B} \vee (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (C \wedge \overline{D}) \vee B \vee D)$

$\equiv (A \vee \overline{A} \vee (C \wedge \overline{D}) \vee B \vee D) \wedge (A \vee \overline{C} \vee (C \wedge \overline{D}) \vee B \vee D)$

$\equiv (A \vee \overline{C} \vee C \vee B \vee D) \wedge (A \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee B \vee D) \equiv \mathbf{1}.$

www.thuvien247.net

b)

$$\dfrac{\begin{array}{l}A\to B\\ A\vee C\\ \bar{C}\vee D\end{array}}{\therefore\ B\vee D}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases}\bar{B}\\ A\to B\end{cases}\\ A\vee C\\ \begin{cases}\bar{C}\vee D\\ \bar{D}\end{cases}\end{array}}{\therefore\ 0}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\bar{A}\\ \begin{cases}A\vee C\\ \bar{C}\end{cases}\end{array}}{\therefore\ 0}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\bar{A}\\ A\end{array}}{\therefore\ 0}\equiv\dfrac{0}{\therefore\ 0}\equiv \mathbf{1}.$$

24. Mô hình suy diễn dưới đây có đúng không?

$$\dfrac{\begin{array}{l}\bar{X}\vee Y\\ \bar{Z}\to X\\ \bar{Z}\vee Z_1\end{array}}{\therefore\ Y\vee Z_1}$$

Giải

$$\dfrac{\begin{array}{l}\bar{X}\vee Y\\ \bar{Z}\to X\\ \bar{Z}\vee Z_1\end{array}}{\therefore\ Y\vee Z_1}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases}\bar{X}\vee Y\\ \bar{Y}\end{cases}\\ \bar{Z}\to X\\ \begin{cases}\bar{Z}\vee Z_1\\ \bar{Z}_1\end{cases}\end{array}}{\therefore\ 0}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases}\bar{X}\\ \bar{Z}\to X\end{cases}\\ \bar{\bar{Z}}\end{array}}{\therefore\ 0}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}Z\\ \bar{Z}\end{array}}{\therefore 0}\equiv\dfrac{Z\wedge\bar{Z}}{\therefore 0}\equiv\dfrac{0}{\therefore\ 0}\equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình đã cho là đúng.

25. Cho mô hình suy diễn

$$\dfrac{\begin{array}{l}\bar{X}_3\to\overline{(X_1\wedge X_2)}\\ \bar{X}_4\to\bar{X}_3\\ \bar{X}_4\end{array}}{\therefore\ \bar{X}_1\vee\bar{X}_2}.$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên và chứng minh nó đúng bằng phương pháp tương đương.

b) Chỉ ra mô hình suy diễn trên là đúng.

Giải

a) $A\ \equiv\Big((\bar{X}_3\to\overline{X_1\wedge X_2})\wedge(\bar{X}_4\to\bar{X}_3)\wedge\bar{X}_4\Big)\to(\bar{X}_1\vee\bar{X}_2)\equiv$

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

$$\equiv \overline{(X_3 \vee \overline{X_1 \wedge X_2}) \wedge (X_4 \vee \bar{X}_3) \wedge \bar{X}_4} \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2$$

$$\equiv (\bar{X}_3 \wedge X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_4 \wedge X_3) \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \equiv$$

$$\equiv (\bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \wedge X_3 \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \wedge (X_1 \vee (\bar{X}_4 \wedge X_3) \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \wedge$$

$$\wedge (X_2 \vee \bar{X}_4 \wedge X_3 \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)$$

$$\equiv (\bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \wedge (\bar{X}_3 \vee X_3 \vee X_4 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \equiv \mathbf{1}.$$

b)

$$\frac{\begin{array}{l} \bar{X}_3 \to \overline{X_1 \wedge X_2} \\ \begin{cases} \bar{X}_4 \to \bar{X}_3 \\ \bar{X}_4 \end{cases} \end{array}}{\therefore \quad \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2} \equiv \frac{\begin{cases} \bar{X}_3 \to \overline{X_1 \wedge X_2} \\ \bar{X}_3 \end{cases}}{\therefore \quad \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2} \equiv \frac{\overline{X_1 \wedge X_2}}{\therefore \quad \overline{\overline{X_1 \wedge X_2}}} \equiv \frac{\begin{array}{c} \overline{X_1 \wedge X_2} \\ X_1 \wedge X_2 \end{array}}{\therefore \quad 0} \equiv \frac{0}{\therefore \quad 0} \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình suy diễn cũng đúng.

26. Cho công thức

$$A \equiv \big((\bar{X}_2 \to \bar{X}_1) \wedge (\bar{X}_4 \to \bar{X}_3) \wedge ((X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5)) \wedge (X_5 \to \bar{X}_1)\big) \to (\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1).$$

Chứng minh A hằng đúng bằng cách chỉ ra mô hình suy diễn của A là đúng.

Chứng minh

Mô hình suy diễn của A là:

$$\frac{\begin{array}{l} \bar{X}_2 \to \bar{X}_1 \\ \bar{X}_4 \to \bar{X}_3 \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \\ X_5 \to \bar{X}_1 \end{array}}{\therefore \quad \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1} \equiv \frac{\begin{array}{l} \begin{cases} \bar{X}_2 \to \bar{X}_1 \\ X_1 \end{cases} \\ \begin{cases} \bar{X}_4 \to \bar{X}_3 \\ X_3 \end{cases} \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \\ X_5 \to \bar{X}_1 \end{array}}{\therefore \quad 0}$$

$$\equiv \frac{\begin{array}{l} \begin{cases} X_2 \wedge X_4 \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \end{cases} \\ X_5 \to \bar{X}_1 \end{array}}{\therefore \quad 0} \equiv \frac{\begin{array}{l} X_1 \\ \begin{cases} X_5 \\ X_5 \to \bar{X}_1 \end{cases} \end{array}}{\therefore \quad 0} \equiv \frac{\begin{array}{c} X_1 \\ \bar{X}_1 \end{array}}{\therefore \quad 0} \equiv \frac{0}{\therefore \quad 0} \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình suy diễn đúng hay công thức A là hằng đúng.

www.thuvien247.net

27. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l}
\overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\
\overline{X}_4 \to \overline{X}_3 \\
\overline{X_1 \wedge X_5} \to \overline{X_4 \wedge X_2} \\
\overline{X}_5 \vee \overline{X}_1 \\
\hline
\therefore \quad X_3 \to \overline{X}_1
\end{array} \qquad (*)$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên.

b) Mô hình suy diễn trên có hằng đúng không? Nếu nó đúng thì những quy tắc suy diễn nào được áp dụng?

Giải. a)

$$\left((\overline{X}_2 \to \overline{X}_1) \wedge (\overline{X}_4 \to \overline{X}_3) \wedge \left(\overline{X_1 \wedge X_5} \to \overline{X_4 \wedge X_2}\right) \wedge \left(\overline{X}_5 \vee \overline{X}_1\right)\right) \to (X_3 \to \overline{X}_1)$$

là công thức cơ sở của (*).

$$\text{b) } (*) \equiv \begin{array}{l}
\begin{cases} \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ X_1 \end{cases} \\
\begin{cases} \overline{X}_4 \to \overline{X}_3 \\ X_3 \end{cases} \\
\overline{X_1 \wedge X_5} \to \overline{X_4 \wedge X_2} \\
X_5 \to \overline{X}_1 \\
\hline
\therefore \quad 0
\end{array} \equiv \begin{array}{l}
\begin{cases} X_4 \wedge X_2 \\ \overline{X_1 \wedge X_5} \to \overline{X_4 \wedge X_2} \end{cases} \\
X_5 \to \overline{X}_1 \\
\hline
\therefore \quad 0
\end{array} \equiv \begin{array}{l}
X_1 \\
\begin{cases} X_5 \\ X_5 \to \overline{X}_1 \end{cases} \\
\hline
\therefore \quad 0
\end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{c} X_1 \wedge \overline{X}_1 \\ \hline \therefore \quad 0 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 0 \\ \hline \therefore \quad 0 \end{array} \equiv 1.$$

Vậy mô hình suy diễn trên là đúng, các quy tắc suy diễn mâu thuẫn và quy tắc suy diễn phủ định được áp dụng.

28. Mô hình suy diễn dưới đây có đúng không và quy tắc suy diễn nào được áp dụng:

$$\begin{array}{l}
X_2 \vee \overline{X}_1 \\
X_4 \vee \overline{X}_3 \\
\overline{X_2 \vee X_4} \vee X_5 \\
\overline{X}_5 \\
\hline
\therefore \quad \overline{X_1 \vee X_3}
\end{array} \qquad (*)$$

www.thuvien247.net

Giải

$$\begin{array}{l} X_2 \vee \bar{X}_1 \\ X_4 \vee \bar{X}_3 \\ \begin{cases} \overline{X_2 \vee X_4} \vee X_5 \\ \bar{X}_5 \end{cases} \\ \hline \therefore \ \overline{X_1 \vee X_3} \end{array} \equiv \begin{array}{l} X_1 \vee \bar{X}_1 \\ X_4 \vee \bar{X}_3 \\ \overline{X_2 \vee X_4} \\ \hline \therefore \ \overline{X_1 \vee X_3} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} X_2 \vee \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{cases} \\ \begin{cases} X_4 \vee \bar{X}_3 \\ \bar{X}_4 \end{cases} \\ \hline \therefore \ \overline{X_1 \vee X_3} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_3 \\ \hline \therefore \ \overline{X_1 \vee X_3} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{X_1 \vee X_3} \\ \hline \therefore \ \overline{X_1 \vee X_3} \end{array} \equiv 1.$$

Vậy mô hình suy diễn trên là đúng và các quy tắc suy diễn tam đoạn luận rời được áp dụng.

29. Chứng minh công thức

$$A \equiv ((X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge (Z \to Z_1) \wedge (Z_1 \to Z_2) \wedge \bar{Z}_2) \to \bar{X} \equiv 1$$

bằng cách viết A dưới dạng mô hình suy diễn và chỉ ra mô hình đó là đúng.

Chứng minh

$$\begin{array}{l} \begin{cases} X \to Y \\ Y \to Z \\ Z \to Z_1 \\ Z_1 \to Z_2 \end{cases} \\ \bar{Z}_2 \\ \hline \therefore \ \bar{X} \end{array} \equiv \begin{array}{l} X \to Z_2 \\ \bar{Z}_2 \\ \hline \therefore \ \bar{X} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \bar{X} \\ \hline \therefore \ \bar{X} \end{array} \equiv 1.$$

Mô hình suy diễn của A đúng, quy tắc bắc cầu và quy tắc phủ định được áp dụng.

30. Chỉ ra suy luận dưới đây là đúng:

$$\begin{array}{l} \bar{Y} \to \bar{X} \\ \bar{Z} \to X \\ \bar{Z}_1 \to \bar{Z} \\ \hline \therefore \ Z_1 \vee Y \end{array}$$

Giải

$$\begin{array}{l} \bar{Y} \to \bar{X} \\ \bar{Z} \to X \\ \bar{Z}_1 \to \bar{Z} \\ \hline \therefore \ Z_1 \vee Y \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} \bar{Y} \to \bar{X} \\ \bar{Y} \end{cases} \\ \bar{Z} \to X \\ \begin{cases} \bar{Z}_1 \to \bar{Z} \\ \bar{Z}_1 \end{cases} \\ \hline \therefore \ 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} \bar{X} \\ \bar{Z} \to X \end{cases} \\ \bar{Z} \\ \hline \therefore \ 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} Z \\ \bar{Z} \\ \hline \therefore \ 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} 0 \\ \hline \therefore \ 0 \end{array} \equiv 1.$$

www.thuvien247.net

31. Cho công thức

$A \equiv \left((\bar{X}_3 \to (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)) \wedge (X_3 \to X_2) \wedge (X_2 \to X_4) \wedge \bar{X}_4\right) \to \overline{X_1 \wedge X_2}$.

Đưa A về dạng mô hình suy diễn và chỉ ra mô hình suy diễn đó là đúng và những quy tắc suy diễn nào được áp dụng?

Giải

$$\frac{\begin{array}{l}\bar{X}_3 \to (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)\\ (X_3 \to X_2) \wedge (X_2 \to X_4)\\ \bar{X}_4\end{array}}{\therefore\ \overline{X_1 \wedge X_2}} \equiv \frac{\begin{array}{l}\bar{X}_3 \to (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)\\ \begin{cases} X_3 \to X_4 \\ \bar{X}_4 \end{cases}\end{array}}{\therefore\ \overline{X_1 \wedge X_2}} \equiv \frac{\begin{array}{l}\bar{X}_3 \to (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)\\ \begin{cases} X_3 \to X_4 \\ \bar{X}_4 \end{cases}\end{array}}{\therefore\ \overline{X_1 \wedge X_2}}$$

$$\equiv \frac{\begin{array}{l}\bar{X}_3 \to (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)\\ \bar{X}_3\end{array}}{\therefore\ \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2} \equiv \frac{\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2}{\therefore\ \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2} \equiv \mathbf{1}.$$

Các quy tắc được áp dụng là quy tắc suy diễn bắc cầu, quy tắc suy diễn khẳng định và quy tắc suy diễn phủ định.

32. Tìm các phản ví dụ cho các mô hình suy diễn dưới đây:

a)
$$\frac{\begin{array}{l}\bar{Z}_1 \to \bar{Y}\\ \bar{Z}_1 \to \bar{Z}_2\\ Z_2 \vee Y\\ X \equiv Y\end{array}}{\therefore\ Z_2};$$

b)
$$\frac{\begin{array}{l}X_1\\ \bar{X}_1 \vee X_2\\ X_1 \to (X_3 \vee \bar{X}_2)\\ X_3 \to \bar{X}_4\end{array}}{\therefore\ X_4};$$

c)
$$\frac{\begin{array}{l}X_1 \vee X_2\\ \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4\\ \bar{X}_5 \vee X_3\\ X_1\end{array}}{\therefore\ X_4 \vee \bar{X}_5}.$$

Giải. Các mô hình suy diễn trên đều sai vì ta có thể chọn được bộ giá trị đúng, sai của các biến để cho công thức cơ sở sai:

a) Lấy $X = Y = 1$ thì $Z_1 = 1$ và $Z_2 = 0$. Với bộ giá trị này thì công thức cơ sở của mô hình $\left((\bar{Z}_1 \to \bar{Y}) \wedge (\bar{Z}_1 \to \bar{Z}_2) \wedge (Z_2 \vee Y) \wedge X \equiv Y)\right) \to Z_2$ nhận giá trị sai (do giả thiết đúng mà kết luận sai).

b) Lấy $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ còn $X_4 = 0$. Với bộ giá trị này công thức cơ sở $(X_1 \wedge (\bar{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \to (X_3 \vee \bar{X}_2)) \wedge (X_3 \to \bar{X}_4)) \to X_4$ nhận giá trị sai (do giả thiết đúng nhưng kết luận sai).

c) Lấy $X_4 = 0$ và $X_5 = 1$ thì kết luận trong công thức cơ sở là $X_4 \vee \bar{X}_5$ nhận giá trị sai, còn giả thiết nhận giá trị đúng nếu ta lấy $X_3 = X_1 = 1$ và $X_2 = 0$, ở đây công thức cơ sở là

$$A \equiv \left((X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4) \wedge (\bar{X}_5 \vee X_3) \wedge X_1\right) \to (X_4 \vee \bar{X}_5).$$

www.thuvien247.net

33. Suy luận của mô hình suy diễn dưới đây có đúng không và những quy tắc nào được áp dụng?

$$\frac{\begin{array}{l}(X_1 \to X_2) \to X_3\\ X_3 \to (\bar{X}_4 \to X_5)\\ \overline{X_4 \vee X_6}\\ X_5 \to X_6\end{array}}{\therefore\ X_1} \qquad (*)$$

Giải. Mô hình (*) tương đương với:

$$\frac{\begin{array}{l}(X_1 \to X_2) \to (\bar{X}_4 \to X_5)\\ \bar{X}_4\\ \begin{cases}X_5 \to X_6\\ \bar{X}_6\end{cases}\end{array}}{\therefore\ X_1} \equiv \frac{\begin{array}{l}(X_1 \to X_2) \to (X_4 \vee X_5)\\ \bar{X}_4 \wedge \bar{X}_5 \equiv \overline{X_4 \vee X_5}\end{array}}{\therefore\ X_1} \equiv \frac{\overline{X_1 \to X_2}}{\therefore\ X_1} \equiv \frac{X_1 \wedge \bar{X}_2}{\therefore\ X_1} \equiv 1.$$

Các quy tắc bắc cầu, phủ định và rút gọn được áp dụng.

34. Cho công thức

$$A \equiv ((X_1 \to X_2) \wedge (X_3 \to X_4) \wedge (\bar{X}_1 \to X_3)) \to (X_2 \vee X_4).$$

Chỉ ra $A \equiv \mathbf{1}$ bằng mô hình suy diễn.

Giải. A có mô hình suy diễn là

$$\frac{\begin{array}{l}X_1 \to X_2\\ X_3 \to X_4\\ \bar{X}_1 \to X_3\end{array}}{\therefore\ X_2 \vee X_4} \equiv \frac{\begin{array}{l}\begin{cases}X_1 \to X_2\\ \bar{X}_2\end{cases}\\ \begin{cases}X_3 \to X_4\\ \bar{X}_4\end{cases}\\ \bar{X}_1 \to X_3\end{array}}{\therefore\ 0} \equiv \frac{\begin{array}{l}\bar{X}_1\\ \begin{cases}\bar{X}_3\\ \bar{X}_1 \to X_3\end{cases}\end{array}}{\therefore\ 0} \equiv \frac{\begin{array}{l}\bar{X}_1\\ X_1\end{array}}{\therefore\ 0} \equiv \frac{\bar{X}_1 \wedge X_1}{\therefore\ 0} \equiv \frac{0}{\therefore\ 0} \equiv 1.$$

35. Nếu An đi chơi thì An không học Toán rời rạc. An không học Toán rời rạc thì An thi trượt Toán rời rạc. Mà An lại đi chơi. Vậy An thi trượt Toán rời rạc.

Suy luận trên có lôgic không và quy tắc suy diễn nào được áp dụng?

Giải

Đặt: X là mệnh đề: "An đi chơi";

Y là mệnh đề: "An học Toán rời rạc";

Z là mệnh đề: "An thi đạt Toán rời rạc".

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn sau:

www.thuvien247.net

$$\frac{\begin{array}{l}X \to \bar{Y}\\ \bar{Y} \to \bar{Z}\\ X\end{array}}{\therefore\ \bar{Z}} \equiv \frac{\begin{array}{l}\begin{cases}X \to \bar{Y}\\ X\end{cases}\\ \bar{Y} \to \bar{Z}\end{array}}{\therefore\ \bar{Z}} \equiv \frac{\begin{cases}\bar{Y}\\ \bar{Y} \to \bar{Z}\end{cases}}{\therefore\ \bar{Z}} \equiv \frac{\bar{Z}}{\therefore\ \bar{Z}} \equiv 1.$$

Suy luận trên là lôgic và quy tắc khẳng định được áp dụng.

36. Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và quy tắc nào được áp dụng:

a) Điều kiện đủ để Đội tuyển bóng đá Quốc gia Việt Nam thắng trận là đối thủ đừng gỡ lại vào phút cuối. Mà Đội tuyển bóng đá Quốc gia Việt Nam đã thắng trận. Vậy đối thủ của Đội tuyển bóng đá Quốc gia Việt Nam không gỡ lại vào phút cuối.

b) Nếu An giải được bài toán thứ tư thì An đã nộp bài trước giờ quy định. Mà An không nộp bài trước giờ quy định. Vậy An không giải được bài toán thứ tư.

Giải

a) Đặt: X là mệnh đề: "Đội tuyển Bóng đá Quốc gia Việt Nam thắng đối thủ"; Y là mệnh đề: "Đối thủ gỡ lại bàn vào phút cuối".

Nội dung của a) dịch ra công thức có mô hình suy diễn $\dfrac{\begin{cases}\bar{Y} \to X\\ X\end{cases}}{\therefore\ \bar{Y}}$ là sai, vì chọn Y = 1, X = 1 thì giả thiết đúng nhưng kết luận sai.

Vậy suy luận trong câu a là sai.

b) Đặt: X là mệnh đề: "An giải được bài toán thứ tư";

Y là mệnh đề: "An nộp bài trước giờ quy định".

Nội dung trong b) dịch ra công thức có mô hình suy diễn sau:

$$\frac{\begin{array}{l}X \to Y\\ \bar{Y}\end{array}}{\therefore\ \bar{X}} \equiv \frac{\bar{X}}{\therefore\ \bar{X}} \equiv 1.$$

Vậy nội dung trong câu b là đúng và quy tắc phủ định được áp dụng trong mô hình trên.

37. Nếu được thưởng cuối năm, An sẽ đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An sẽ thăm Thiền Viện. Mà An không thăm Thiền Viện. Vậy An không được thưởng cuối năm.

Suy luận trên có đúng không? Quy tắc suy diễn nào được áp dụng?

Giải

Đặt: X_1 là mệnh đề: "An được thưởng cuối năm";

X_2 là mệnh đề: "An đi Đà Lạt";

X_3 là mệnh đề: "An thăm Thiền Viện".

www.thuvien247.net

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn dưới đây:

$$\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ X_2 \to X_3 \\ \overline{X}_3 \\ \hline \therefore \overline{X}_1 \end{array} \qquad (*)$$

Ta chỉ ra mô hình suy diễn (*) là đúng. Thật vậy

$$(*) \equiv \frac{\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ \begin{cases} X_2 \to X_3 \\ \overline{X}_3 \end{cases} \end{array}}{\therefore \overline{X}_1} \equiv \frac{\begin{cases} X_1 \to X_2 \\ \overline{X}_2 \end{cases}}{\therefore \overline{X}_1} \equiv \frac{\overline{X}_1}{\therefore \overline{X}_1} \equiv \overline{X}_1 \to \overline{X}_1 \equiv X_1 \vee \overline{X}_1 \equiv 1.$$

Vậy suy luận trên là đúng. Quy tắc phủ định được áp dụng.

38. Nếu muốn đi họp sáng thứ ba thì An phải dậy sớm. Nếu An đi nghe nhạc tối thứ hai thì An sẽ về muộn. Nếu An về muộn và thức dậy sớm thì An phải đi họp sáng thứ ba và chỉ được ngủ dưới 7 giờ trong một ngày. Nhưng không thể đi họp nếu chỉ ngủ dưới 7 giờ. Vậy An không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc An phải bỏ họp sáng thứ ba.

a) Chỉ ra rằng suy luận trên là đúng và quy tắc nào được áp dụng.

b) Nếu trong suy luận trên mà thay chữ "hoặc" bằng chữ "và" trong câu cuối cùng của đoạn văn thì suy luận có còn đúng nữa không, vì sao?

Giải

a) Đặt: X_1 là mệnh đề: "An đi họp sáng thứ ba";

X_2 là mệnh đề: "An dậy sớm";

X_3 là mệnh đề: "An nghe nhạc tối thứ hai";

X_4 là mệnh đề: "An về muộn";

X_5 là mệnh đề: "An ngủ dưới 7 giờ trong một ngày".

Suy luận trên tương đương với mô hình suy diễn sau

$$\frac{\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ X_3 \to X_4 \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \\ X_5 \to \overline{X}_1 \end{array}}{\therefore \overline{X}_3 \vee \overline{X}_1} \equiv \frac{\begin{array}{l} \begin{cases} X_1 \to X_2 \\ X_1 \end{cases} \\ \begin{cases} X_3 \to X_4 \\ X_3 \end{cases} \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_2) \\ X_5 \to \overline{X}_1 \end{array}}{\therefore 0} \equiv$$

$$\equiv \frac{\begin{matrix}\begin{cases} X_4 \wedge X_2 \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \end{cases} \\ \begin{cases} X_5 \to \overline{X_1} \\ X_1 \equiv \overline{\overline{X_1}} \end{cases}\end{matrix}}{\therefore 0} \equiv \frac{\begin{matrix} X_1 \wedge X_5 \\ \overline{X_5} \end{matrix}}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore 0} \equiv 1.$$

Vậy suy luận trên là đúng. Các quy tắc suy diễn mâu thuẫn, khẳng định và phủ định được áp dụng.

b) Trong đoạn văn trên nếu ta thay câu: "Vậy An không nghe nhạc sáng thứ hai hoặc An phải bỏ họp sáng thứ ba" bằng câu "Vậy An không nghe nhạc sáng thứ hai và An phải bỏ họp sáng thứ ba", còn các câu khác giữ nguyên thì suy luận của đoạn văn trên không còn đúng nữa.

Thật vậy, mô hình suy diễn của đoạn văn mới có dạng:

$$\frac{\begin{matrix} X_1 \to X_2 \\ X_3 \to X_4 \\ (X_4 \wedge X_2) \to (X_1 \wedge X_5) \\ X_5 \to \overline{X_1} \end{matrix}}{\therefore \overline{X_3} \wedge \overline{X_1}}$$

không còn đúng nữa nếu ta chọn $X_1 = X_2 = 1$, $X_3 = X_4 = X_5 = 0$. Với bộ giá trị trên thì giả thiết đúng, kết luận sai. Hay mô hình trên là sai.

39. Nếu An đi làm về muộn thì vợ An sẽ rất giận dữ. Nếu Bình thường xuyên vắng nhà thì vợ Bình cũng rất giận dữ. Vợ Bình hoặc vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ sẽ nhận được lời than phiền. Mà cô Hà không nhận được lời than phiền. Vậy An đi làm về sớm và Bình rất ít khi vắng nhà. Chỉ ra suy luận của đoạn văn trên là đúng. Những quy tắc suy diễn nào được áp dụng?

Giải. Đặt: X_1 là mệnh đề: "An đi làm về muộn";

X_2 là mệnh đề: "Vợ An sẽ rất giận dữ";

X_3 là mệnh đề: "Bình thường xuyên vắng nhà";

X_4 là mệnh đề: "Vợ Bình cũng rất giận dữ";

X_5 là mệnh đề: "Cô Hà bạn họ nhận được lời than phiền".

Khi đó đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn sau

$$\frac{\begin{matrix} X_1 \to X_2 \\ X_3 \to X_4 \\ \begin{cases} (X_2 \wedge X_4) \to X_5 \\ \overline{X_5} \end{cases} \end{matrix}}{\therefore \overline{X_1} \wedge \overline{X_3}} \equiv \frac{\begin{matrix} X_1 \to X_2 \\ X_3 \to X_4 \\ \overline{X_2 \wedge X_4} \end{matrix}}{\therefore \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}} \equiv \frac{\begin{matrix} \begin{cases} X_1 \to X_2 \\ \overline{X_2} \end{cases} \\ \begin{cases} X_3 \to X_4 \\ \overline{X_4} \end{cases} \end{matrix}}{\therefore \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}} \equiv$$

www.thuvien247.net

$$\equiv \frac{\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_3}{\therefore \overline{X}_1 \wedge \overline{X}_3} \equiv (X_1 \wedge \overline{X}_3) \to (\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_3) \equiv \overline{X_1 \wedge \overline{X}_2} \vee X_1 \wedge \overline{X}_2 \equiv \mathbf{1.}$$

Vậy suy luận của đoạn văn trên là đúng. Quy tắc phủ định được áp dụng.

40. Ông Minh khẳng định rằng, nếu không được tăng lương thì ông sẽ xin nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ta nghỉ việc mà vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe máy. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm muộn thì sẽ mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương. Vậy ông Minh không bán xe máy thì vợ ông ta không đi làm muộn.

Chỉ ra suy luận của đoạn văn trên là không đúng.

Giải. a) Đặt: X_1 là mệnh đề: "Ông Minh được tăng lương";

X_2 là mệnh đề: "Ông minh xin nghỉ việc";

X_3 là mệnh đề: "Vợ ông Minh bị mất việc";

X_4 là mệnh đề: "Ông Minh phải bán xe máy";

X_5 là mệnh đề: "Vợ ông Minh hay đi làm muộn".

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn sau đây:

$$\begin{array}{l} \overline{X}_1 \to X_2 \\ (X_2 \wedge X_3) \to X_4 \\ X_5 \to X_3 \\ X_1 \\ \hline \therefore \overline{X}_4 \to \overline{X}_5 \end{array}$$

Ta cho bộ giá trị cho các biến mệnh đề X_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) sao cho giả thiết đúng, còn kết luận sai như sau: $X_4 = 0$ và $X_5 = 1$ thì kết luận sai.

Từ $X_4 = 0$ và $X_5 = 1$, nếu ta chọn $X_3 = 1$, $X_2 = 0$ và $X_1 = 1$ thì giả thiết sẽ đúng. Khi đó mô hình suy diễn sai, hay suy luận của đoạn văn là sai.

41. Chứng minh công thức

$$((\overline{X}_2 \to \overline{X}_1) \wedge (X_3 \to X_4) \wedge (\overline{X}_3 \to X_1) \wedge (X_1 \to X_1)) \to (\overline{X}_4 \to X_2)$$

là hằng đúng bằng cách chỉ ra mô hình suy diễn của công thức trên là đúng.

Chứng minh. Mô hình suy diễn của công thức trên là

$$\begin{array}{l} \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ X_3 \to X_4 \\ \begin{cases} \overline{X}_3 \to X_1 \\ X_1 \to X_1 \end{cases} \\ \hline \therefore \overline{X}_4 \to X_2 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ X_3 \to X_4 \\ \overline{X}_3 \to X_1 \\ \hline \therefore \overline{X}_4 \to X_2 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{cases} \\ \begin{cases} X_3 \to X_4 \\ \overline{X}_4 \end{cases} \\ \overline{X}_3 \to X_1 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_3 \to X_1 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{X}_1 \\ X_1 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} 0 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \mathbf{1.}$$

Vậy công thức trên là hằng đúng.

www.thuvien247.net

42. Cho mô hình suy diễn (*) dưới đây

$$\frac{\begin{array}{l} X_1 \\ \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ \overline{X}_4 \to X_3 \\ (X_4 \to X_5) \wedge (X_5 \to \overline{X}_2) \end{array}}{\therefore X_3 \vee X_5} \qquad (*)$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình (*).

b) Chứng minh công thức cơ sở đó là hằng đúng bằng cách chỉ ra mô hình suy diễn (*) là đúng và những quy tắc nào được áp dụng.

Giải

a) Công thức cơ sở của A là

$A \equiv (X_1 \wedge (\overline{X}_2 \to \overline{X}_1) \wedge (\overline{X}_4 \to X_3) \wedge (X_4 \to X_5) \wedge (X_5 \to \overline{X}_2)) \to (X_3 \vee X_5)$.

b) Mô hình (*) là đúng vì:

$$\frac{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} X_1 \\ \overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \end{array}\right. \\ \overline{X}_4 \to X_3 \\ (X_4 \to X_5) \wedge (X_5 \to \overline{X}_2) \end{array}}{\therefore X_3 \vee X_5} \equiv \frac{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} X_2 \\ X_4 \to \overline{X}_2 \end{array}\right. \\ \overline{X}_4 \to X_3 \end{array}}{\therefore X_3 \vee X_5} \equiv \frac{\left\{\begin{array}{l} \overline{X}_4 \\ \overline{X}_4 \to X_3 \end{array}\right.}{\therefore X_3 \vee X_5} \equiv \frac{X_3}{\therefore X_3 \vee X_5}$$

$\equiv X_3 \to (X_3 \vee X_5) \equiv \overline{X}_3 \vee X_3 \vee X_5 \equiv \mathbf{1} \vee X_5 \equiv \mathbf{1}$. Vậy $(*) \equiv \mathbf{1}$.

Các quy tắc phủ định, khẳng định, bắc cầu và quy tắc cộng được áp dụng.

43. Ba vương quốc láng giềng vừa ký một Hiệp định liên minh quân sự phòng thủ khi chiến tranh xảy ra. Họ cam kết:

a) Nếu vương quốc A không tham chiến, thì vương quốc B cũng không tham chiến;

b) Nếu vương quốc A tham chiến thì cả vương quốc B và C cũng tham chiến.

Với điều kiện trên của Hiệp định, liệu C có tham chiến hay không khi B tham chiến?

Giải

Đặt: A là mệnh đề: "Vương quốc A tham chiến";

B là mệnh đề: "Vương quốc B tham chiến";

C là mệnh đề: "Vương quốc C tham chiến".

Theo cam kết giữa ba vương quốc thì ta có các công thức: $\overline{A} \to \overline{B}$ (1) và $A \to (B \wedge C)$ (2). Do mô hình suy diễn h) trong bài tập 17 thì

$$\overline{A} \to \overline{B} \equiv B \to A \qquad (3).$$

www.thuvien247.net

Từ (2) và (3), theo mô hình suy diễn bắc cầu thì ta có $B \to (B \wedge C)$. Nhưng theo mô hình suy diễn c) trong bài tập 17 thì

$$B \to (B \wedge C) \equiv (B \to B) \wedge (B \to C) \equiv B \to C,$$

tức là nếu vương quốc B tham chiến thì vương quốc C cũng tham chiến.

44. Trong bản báo cáo tổng kết về công tác Vệ sinh phòng dịch (VSPD) của nhà trường có đoạn viết: "Học sinh muốn học tập tốt cần phải có sức khỏe tốt. Những học sinh không chấp hành nghiêm chỉnh các quy định về VSPD đều không có sức khỏe tốt và nguyên nhân là do cô giáo không dạy cho học sinh đầy đủ những quy định VSPD. Muốn giáo viên dạy tốt những quy định này nhà trường phải có đầy đủ tài liệu phục vụ giảng dạy cho giáo viên. Vậy, học sinh muốn học tập tốt, thì nhà trường phải có đủ tài liệu phục vụ giảng dạy cho giáo viên". Dùng mô hình suy diễn chỉ ra đoạn văn trên là đúng.

Giải. Chọn biến mệnh đề:

X_1 là mệnh đề: "Học sinh muốn học tập tốt";

X_2 là mệnh đề: "Học sinh có sức khỏe tốt";

X_3 là mệnh đề: "Học sinh chấp hành những quy định về VSPD";

X_4 là mệnh đề: "Cô giáo giảng dạy cho học sinh đầy đủ những quy định về VSPD";

X_5 là mệnh đề: "Nhà trường có đầy đủ tài liệu phục vụ cho giáo viên".

Từ đó nội dung của đoạn văn báo cáo tóm tắt trên có thể viết dưới dạng mô hình suy diễn sau:

$$\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ \overline{X_3} \to \overline{X_2} \\ \overline{X_4} \to \overline{X_3} \\ X_4 \to X_5 \\ \hline \therefore X_1 \to X_5 \end{array} \equiv \begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ X_2 \to X_3 \\ X_3 \to X_4 \\ X_4 \to X_5 \\ \hline \therefore X_1 \to X_5 \end{array} \text{ (do bài tập 17 phần h)}$$

$$\equiv \begin{array}{l} X_1 \to X_5 \\ \hline \therefore X_1 \to X_5 \end{array} \text{ (quy tắc suy diễn bắc cầu)}$$

$$\equiv (X_1 \to X_5) \to (X_1 \to X_5) \equiv \overline{\overline{X_1} \vee X_5} \vee \overline{X_1} \vee X_5$$

$$\equiv X_1 \wedge \overline{X_5} \vee \overline{X_1} \vee X_5 \equiv (X_1 \vee \overline{X_1} \vee X_5) \wedge (\overline{X_5} \vee X_1 \vee X_5) \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy báo cáo trên là đúng.

45. Tại một lớp mẫu giáo có ba cháu An, Bình và Minh ngồi học xung quanh một cái bàn được trải khăn mới. Khi phát hiện có vết mực trên khăn trải bàn, cô giáo hỏi ba cháu thì các cháu lần lượt trả lời như sau:

www.thuvien247.net

Cháu An nói: "Em không làm đổ mực, đấy là do bạn Bình làm đổ mực". Cháu Bình nói: "Bạn Minh làm đổ mực còn bạn An không làm đổ mực". Còn cháu Minh nói: "Thưa cô, bạn Bình không làm đổ mực, còn em hôm nay không phải chuẩn bị bài". Biết rằng trong ba cháu thì có hai cháu nói đúng, còn một cháu nói sai.

Hãy dịch các câu nói của các cháu ra các công thức lôgic mệnh đề, dựa vào các giả thiết của bài toán và dựa vào các phép biến đổi tương đương đã học để tìm ra cháu nào làm đổ mực.

Giải. Đặt: X_1 là mệnh đề: "An làm đổ mực";

X_2 là mệnh đề: "Bình làm đổ mực";

X_3 là mệnh đề: "Minh làm đổ mực".

Câu nói của cháu An tương đương với công thức: $\overline{X}_1 \wedge X_2 \equiv A_1$.

Câu nói của cháu Bình tương đương với công thức: $X_3 \wedge \overline{X}_1 \equiv A_2$.

Câu nói của cháu Minh tương đương với công thức:

$$\overline{X}_2 \wedge X_3 \vee \overline{X}_2 \wedge \overline{X}_3 \equiv A_3.$$

Do điều kiện hai cháu nói đúng, còn một cháu nói sai, nên nếu ta tuyển từng cặp các công thức trên thì mỗi công thức mới: $D \equiv A_1 \vee A_2 \equiv \mathbf{1}$, $H \equiv A_1 \vee A_3 \equiv \mathbf{1}$, $K \equiv A_2 \vee A_3 \equiv \mathbf{1}$ (Vì mỗi cặp đều có một công thức đúng).

Chú ý: $A_3 \equiv \overline{X}_2 \wedge X_3 \vee \overline{X}_2 \wedge \overline{X}_3 \equiv \overline{X}_2 \wedge (X_3 \vee \overline{X}_3) \equiv \overline{X}_2$;

$$H \equiv (\overline{X}_1 \wedge X_2) \vee \overline{X}_2 \equiv (\overline{X}_2 \vee \overline{X}_1) \wedge (\overline{X}_2 \wedge X_2) \equiv \overline{X}_2 \vee \overline{X}_1;$$

$$D \equiv (X_2 \wedge \overline{X}_1) \vee (X_3 \wedge \overline{X}_1) \text{ và } K \equiv (X_3 \wedge \overline{X}_1) \vee \overline{X}_2.$$

Vì $D \equiv \mathbf{1}$, $H \equiv \mathbf{1}$ và $K \equiv \mathbf{1}$ nên $D \wedge H \wedge K \equiv \mathbf{1}$, hay

$$D \wedge H \wedge K \equiv ((X_2 \wedge \overline{X}_1) \vee (X_3 \wedge \overline{X}_1)) \wedge (\overline{X}_2 \vee \overline{X}_1) \wedge ((X_3 \wedge \overline{X}_1) \vee \overline{X}_2)$$

$$\equiv X_3 \wedge \overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2) \equiv \mathbf{1} \Leftrightarrow \begin{cases} X_3 = 1 \\ X_1 = 0, \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

hay Minh đánh đổ mực, còn An và Bình không đánh đổ mực.

46. Sáu học sinh An, Bình, Minh, Định, Công và Liên tham gia thi học sinh giỏi Toán toàn quốc. Trong cuộc thi này, có hai học sinh làm đúng hết đề thi. Khi hỏi ai là học sinh làm đúng hết đề thi, thì nhận được 5 câu trả lời sau đây:

1) An và Công làm đúng hết đề thi;
2) Chỉ có Bình và Liên làm đúng hết đề thi;
3) Minh và Bình làm đúng hết đề thi;
4) An và Minh làm đúng hết đề thi;
5) An và Định làm đúng hết đề thi.

www.thuvien247.net

Nhưng thực tế cho thấy: có 4 câu trả lời, với mỗi câu có đúng tên của một học sinh giải đúng hết đề thi; còn một câu trả lời sai tên hai học sinh giải đúng hết đề thi.

Dịch 5 câu trên ra công thức lôgic mệnh đề và dựa vào các giả thiết của bài toán, hãy chỉ ra tên những học sinh làm đúng hết đề thi trên cơ sở áp dụng các công thức biến đổi tương đương đã học.

Giải. Đặt các biến mệnh đề: X_1 là câu: "An làm đúng hết đề thi";

X_2 là câu: "Bình làm đúng hết đề thi";

X_3 là câu: "Công làm đúng hết đề thi";

X_4 là câu: "Định làm đúng hết đề thi";

X_5 là câu: "Liên làm đúng hết đề thi";

X_6 là câu: "Minh làm đúng hết đề thi".

Câu trả lời 1 tương đương với công thức: $X_1 \wedge X_3$. Câu trả lời 2 tương đương với công thức: $X_2 \wedge X_5$. Câu trả lời 3 tương đương với công thức: $X_6 \wedge X_2$. Câu trả lời 4 tương đương với công thức: $X_1 \wedge X_6$. Câu trả lời 5 tương đương với công thức: $X_1 \wedge X_4$.

Theo giả thiết bài toán thì

$$X_1 \wedge X_3 \equiv X_2 \wedge X_5 \equiv X_6 \wedge X_2 \equiv X_1 \wedge X_6 \equiv X_1 \wedge X_4 \equiv \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Mặt khác, nếu lập 5 tuyển tương ứng với 5 câu trả lời thì bốn trong năm tuyển sau đây là đúng:

$$X_1 \vee X_3 \equiv E,\ X_2 \vee X_5 \equiv F,\ X_6 \vee X_2 \equiv I,\ X_1 \vee X_6 \equiv K,\ X_1 \vee X_4 \equiv T, \qquad (2)$$

còn $E \wedge F \wedge I \wedge K \wedge T \equiv \mathbf{0}$. (3)

Ta có:

$E \wedge F \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_5) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_5) \vee (X_3 \wedge X_5)$;

$E \wedge F \wedge I \equiv ((X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_5) \vee (X_3 \wedge X_5)) \wedge (X_6 \vee X_2)$

$\equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3)$;

$E \wedge F \wedge I \wedge K \equiv ((X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3)) \wedge (X_1 \vee X_6) = X_1 \wedge X_2$;

$E \wedge F \wedge I \wedge K \wedge T \equiv (X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \vee X_4) \equiv X_1 \wedge X_2 \vee X_1 \wedge X_2 \wedge X_4$

$\equiv X_1 \wedge X_2 \equiv \mathbf{0}$. (4)

Lập hội từ các tuyển thuộc dãy (2), mà mỗi hội này có đúng bốn tuyển. Vì bốn trong năm tuyển thuộc dãy (2) bằng **1**, nên chỉ có một trong năm hội này nhận giá trị **1**.

$\alpha \equiv E \wedge F \wedge I \wedge K \equiv X_1 \wedge X_2 \equiv \mathbf{0}$ (do [4]);

$\beta \equiv E \wedge F \wedge I \wedge T \equiv ((X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3)) \wedge (X_1 \vee X_4)$

$\equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_4) \vee (X_2 \wedge X_3 \wedge X_4)$

$\equiv X_1 \wedge X_2 \equiv \mathbf{0}$ (theo 4);

www.thuvien247.net

$\gamma \quad \equiv E \wedge D \wedge K \wedge T \equiv ((X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_5) \vee (X_3 \wedge X_5))$
$\wedge (X_1 \vee X_6) \wedge X_1 \vee X_4 \equiv X_1 \wedge X_5$ (theo (4));

$\sigma \quad \equiv E \wedge F \wedge K \wedge T \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_6 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_6) \wedge (X_1 \vee X_4) \equiv \ldots$
$\equiv X_1 \wedge X_2 \equiv \mathbf{0}$ (theo (4));

$\omega \quad \equiv F \wedge I \wedge K \wedge T \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_6 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_6) \wedge (X_1 \vee X_4) \equiv \ldots$
$\equiv X_1 \wedge X_2 \equiv \mathbf{0}$ (theo (4)).

Do $\alpha \equiv \beta \equiv \sigma \equiv \omega \equiv \mathbf{0}$ nên $\gamma \equiv X_1 \wedge X_5 \equiv \mathbf{1} \Leftrightarrow X_1 \equiv X_5 \equiv 1$.

Vậy An và Liên là hai học sinh làm đúng hết đề thi.

47. Năm em An, Định, Công, Tiến, Hóa chơi cạnh hội trường. Một trong năm em làm vỡ cửa kính. Thầy giáo chủ nhiệm hỏi, thì các em đã trả lời như sau:

Em An nói: "Chỉ có thể là Hóa hoặc Tiến làm vỡ kính";

Em Hóa cãi lại: "Em không đánh vỡ kính, bạn Công cũng không";

Em Tiến khẳng định: "Cả hai bạn trên đều nói sai";

Em Định nói: "Không Tiến ạ, một trong hai bạn trên nói đúng";

Em Công xen vào: "Bạn Định ạ, bạn nói không đúng".

Thầy chủ nhiệm đã biết rõ tính tình của các em, nên tin rằng trong năm em trên có ba em nói đúng. Vậy ai là người đánh vỡ cửa kính?

Giải. Để cho tiện, ta dùng chữ cái đầu tiên tên của em X làm ký hiệu biến mệnh đề "Em X làm vỡ cửa kính". Khi đó mệnh đề "Em X không làm vỡ kính" sẽ được ký hiệu bởi phủ định chữ cái đầu tiên tên của em X. Cụ thể lời phát biểu của từng em được diễn đạt bởi các công thức mệnh đề sau đây:

An: $\quad A \equiv H \vee T;$

Hóa: $\quad H \equiv \bar{H} \wedge \bar{C};$

Tiến: $\quad T \equiv \bar{A} \wedge \bar{H} \equiv \overline{H \vee T} \wedge \overline{\bar{H} \wedge \bar{C}} \equiv \bar{H} \wedge \bar{T} \wedge (H \vee C) \equiv \bar{H} \wedge \bar{T} \wedge C;$

Định: $\quad Đ \equiv (A \wedge \bar{H}) \vee (\bar{A} \wedge H) \equiv (H \vee T) \wedge (\overline{\bar{H} \wedge \bar{C}}) \vee (\overline{H \vee T}) \wedge (\bar{H} \wedge \bar{C})$

$\equiv (H \vee T) \wedge (H \vee C) \wedge \bar{H} \wedge \bar{T} \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \equiv H \vee C \wedge T \vee \bar{H} \wedge \bar{C} \wedge \bar{T}$

Công: $\quad C \equiv \bar{Đ} \equiv \overline{H \vee C \wedge T \vee \bar{H} \wedge \bar{C} \wedge \bar{T}}$

$\equiv (\bar{H} \wedge \overline{C \wedge T}) \wedge \overline{\bar{H} \wedge \bar{C} \wedge \bar{T}} \equiv \bar{H} \wedge (\bar{C} \vee \bar{T}) \wedge (H \vee C \vee T)$

$\equiv (\bar{H} \wedge (\bar{C} \vee \bar{H}) \wedge \bar{T}) \wedge (H \vee C \vee T) \equiv (H \vee C \vee T) \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \vee (H \vee C \vee T) \wedge \bar{H} \wedge \bar{T}$

$\equiv H \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \vee C \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \vee T \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \vee H \wedge \bar{H} \wedge \bar{T} \vee C \wedge \bar{H} \wedge \bar{T} \vee T \wedge \bar{H} \wedge \bar{T}$

$\equiv T \wedge \bar{H} \wedge \bar{C} \vee C \wedge \bar{H} \wedge \bar{T} \equiv \bar{H} \wedge (\bar{C} \wedge T \vee C \wedge \bar{T}).$

Mặt khác, vì ba em nói đúng, nên trong năm công thức A, H, T, Đ, C có ba công thức nhận giá trị đúng, nên khi lập hội gồm ba trong năm công thức sẽ có một hội nhận giá trị đúng. Cụ thể ta có các hội sau đây:

www.thuvien247.net

$A \wedge H \wedge T \equiv A \wedge H \wedge T \wedge \overline{H} \equiv 0;$

$A \wedge H \wedge Đ \equiv A \wedge H \wedge (A \wedge \overline{H} \vee \overline{A} \wedge H)$

$\equiv A \wedge H \wedge A \wedge \overline{H} \vee A \wedge H \wedge \overline{A} \wedge H \equiv 0;$

$A \wedge T \wedge Đ \equiv A \wedge \overline{A} \wedge \overline{H} \wedge Đ \equiv 0;$

$A \wedge T \wedge C \equiv A \wedge \overline{A} \wedge \overline{H} \wedge C \equiv 0;$

$A \wedge Đ \wedge C \equiv A \wedge Đ \wedge \overline{Đ} \equiv 0;$

$H \wedge T \wedge Đ \equiv H \wedge \overline{A} \wedge \overline{H} \equiv 0;$

$T \wedge Đ \wedge C \equiv T \wedge Đ \wedge \overline{Đ} \equiv 0$ và $A \wedge H \wedge C \equiv 1.$

Do đó phương trình:

$$(H \vee T) \wedge (\overline{H} \wedge C) \wedge \overline{H} \wedge (\overline{C} \wedge T \vee C \wedge \overline{T}) \equiv \overline{H} \wedge \overline{C} \wedge T \wedge \overline{H} \wedge (\overline{C} \wedge T \vee C \wedge \overline{T})$$

$$\equiv \overline{H} \wedge \overline{C} \wedge T \vee \overline{H} \wedge \overline{C} \wedge T \vee \overline{H} \wedge \overline{C} \wedge T \wedge C \wedge T \equiv 1.$$

Hay $\overline{H} \wedge \overline{C} \wedge T \equiv 1 \Leftrightarrow H \equiv C \equiv 0$ và $T \equiv 1$. Vậy, kết luận Tiến là em đánh vỡ cửa kính.

48. Lớp 5A được phân công dọn hội trường. Lớp quy ước như sau:

1) Nếu tổ 1 tham gia, thì tổ 2 không tham gia;

2) Nếu cả tổ 2 và 3 tham gia thì tổ 1 cũng phải tham gia.

Hỏi, nếu quy ước trên là bắt buộc thì khi tổ 2 tham gia, tổ 1 và tổ 3 có phải tham gia không?

Giải

Dùng: a để ký hiệu mệnh đề: "Tổ 1 tham gia dọn hội trường";

b để ký hiệu mệnh đề: "Tổ 2 tham gia dọn hội trường";

c để ký hiệu mệnh đề: "Tổ 3 tham gia dọn hội trường".

Khi đó quy ước 1 và 2 tương đương với các công thức sau:

$$A \equiv a \to \overline{b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b};$$

$$B \equiv (b \wedge c) \to a \equiv \overline{b} \vee \overline{c} \vee a.$$

Do quy ước trên là bắt buộc nên $A \equiv 1$ và $B \equiv 1$, hay $\overline{a} \vee \overline{b} \equiv 1$ và $\overline{b} \vee \overline{c} \vee a \equiv 1$.

Nếu tổ 2 tham gia thì $b \equiv 1$ nên $b \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \equiv 1$ (*)

(do $(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \equiv 1$).

Xét

$$(*) \equiv (b \wedge \overline{a} \vee b \wedge \overline{b}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \equiv (b \wedge \overline{a}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \text{ (do } b \wedge \overline{b} \equiv 0)$$

$$\equiv (b \wedge \overline{a} \wedge a) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{c}) \equiv b \wedge \overline{a} \wedge \overline{c} \equiv 1$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$, hay khi tổ 2 tham gia thì tổ 1 và tổ 3 không tham gia.

www.thuvien247.net

49. Một học sinh trả thi trên máy tính. Trên màn hình ghi năm câu hỏi, với mỗi câu hỏi này, học sinh chỉ cần trả lời "có" hoặc "không". Mỗi câu trả lời đúng được 1 điểm.

Học sinh không biết trả lời chính xác cho bất kỳ câu hỏi nào, nhưng anh ta biết rằng:

1) Câu hỏi thứ nhất và câu hỏi cuối cùng đòi hỏi trả lời trái ngược nhau;

2) Câu hỏi thứ hai và câu hỏi thứ tư cần trả lời như nhau;

3) Ít nhất một trong hai câu hỏi đầu cần trả lời một cách khẳng định;

4) Nếu câu hỏi thứ tư trả lời "có" thì câu hỏi thứ năm trả lời "không".

5) Kinh nghiệm cho học sinh này thấy rằng, máy đặt câu hỏi cần trả lời "có" nhiều hơn những câu hỏi cần trả lời "không".

Hãy xác định xem những câu hỏi nào cần trả lời "có" và những câu hỏi nào cần trả lời "không".

Giải. Dùng các ký tự a, b, c, d, e để ký hiệu các câu trả lời đúng tương ứng với năm câu hỏi 1, 2, 3, 4, 5 trên máy tính. Khi đó $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}$ là các câu hỏi trả lời sai đối với năm câu hỏi trên, và sự hiểu biết của học sinh về cách trả lời các câu hỏi được diễn đạt bằng các biểu thức sau:

$$T_1 \equiv a \wedge \overline{e} \vee \overline{a} \wedge e;$$

$$T_2 \equiv b \wedge d \vee \overline{b} \wedge \overline{d};$$

$$T_3 \equiv a \vee b;$$

$$T_4 \equiv d \rightarrow \overline{e} \equiv \overline{d} \vee \overline{e}.$$

Do mỗi phương án trả lời trên đối với học sinh đều chính xác, nên bốn phương án trên đều đúng, hay $T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4 \equiv 1$.

$$\text{Do } T_1 \wedge T_4 \equiv (a \wedge \overline{e} \vee \overline{a} \wedge e) \wedge (\overline{d} \vee \overline{e}) \equiv (a \wedge \overline{e} \wedge \overline{d}) \vee (a \wedge \overline{e}) \vee (\overline{a} \wedge \overline{d} \wedge e)$$
$$\equiv (a \wedge \overline{e}) \vee \overline{a} \wedge \overline{d} \wedge e;$$

$$T_2 \wedge T_3 \equiv (b \wedge d \vee \overline{b} \wedge \overline{d}) \wedge (a \vee b) \equiv a \wedge b \wedge d \vee b \wedge d \vee a \wedge \overline{b} \wedge \overline{d}$$
$$\equiv b \wedge d \vee a \wedge \overline{b} \wedge \overline{d} \text{ nên } T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4 \equiv a \wedge \overline{e} \wedge (b \wedge d \vee \overline{b} \wedge \overline{d}) \equiv 1.$$

Từ đó ta có a = 1, e = 0 và $b \wedge d \vee \overline{b} \wedge \overline{d}$ có hai nghiệm: b = d = 1 hoặc b = d = 0 (trường hợp b = d = 0 bị loại do mâu thuẫn với giả thiết của bài toán). Tóm lại: a = 1, b = 1, d = 1, c = 0, e = 0.

Vậy câu 1, 2 và 4 trả lời "có", còn câu 3 và 5 trả lời "không".

50. Bốn em An, Bình, Cẩm, Dinh đi thi học sinh giỏi, khi hỏi kết quả xếp hạng, người ta nhận được kết quả trả lời như sau:

1) An nhất, Bình nhì;

2) An nhì, Cẩm ba;

3) Dinh nhì, Cẩm tư.

www.thuvien247.net

Thực tế những câu trả trên chỉ đúng một nửa. Hãy xác định thứ tự xếp hạng của các em An, Bình, Cẩm và Dinh.

Giải. Dùng chữ cái đầu tiên tên của em X với chỉ số i để ký hiệu mệnh đề: "Em X xếp thứ i ($1 \le i \le 4$)". Khi đó mệnh đề "Em X không xếp thứ i" được ký hiệu bởi phủ định chữ cái đầu tiên của tên em X kèm theo chỉ số i.

Các câu trả lời 1, 2 và 3 tương đương với các công thức đúng sau đây:

Câu 1 có công thức $T_1 \equiv a_1 \wedge \overline{b}_2 \vee \overline{a}_1 \wedge b_2 \equiv \mathbf{1}$;

Câu 2 có công thức $T_2 \equiv a_2 \wedge \overline{c}_3 \vee \overline{a}_2 \wedge c_3 \equiv \mathbf{1}$;

Câu 3 có công thức $T_3 \equiv d_2 \wedge \overline{c}_4 \vee c_4 \wedge \overline{d}_2 \equiv \mathbf{1}$.

Vì một em không thể đồng thời xếp hạng ở hai vị trí và hai em không thể xếp đồng thời một vị trí nên ta có:

$$T_1 \wedge T_2 \equiv (a_1 \wedge \overline{b}_2 \vee \overline{a}_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge \overline{c}_3 \vee \overline{a}_2 \wedge c_3)$$
$$\equiv a_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge \overline{b}_2 \wedge c_3 \vee \overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge b_3 \wedge c_3;$$

$$T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \equiv (a_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge \overline{b}_2 \wedge c_3 \vee \overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge b_2 \wedge c_3) \wedge (d_2 \wedge \overline{c}_4 \vee \overline{d}_2 \wedge c_4) \wedge$$
$$\wedge\ c_3 \wedge d_2 \wedge \overline{c}_4 \vee \overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge b_2 \wedge c_3 \wedge \overline{d}_2 \wedge c_4 \equiv a_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge \overline{b}_2 \wedge c_3 \wedge d_2 \wedge \overline{c}_4.$$

Vì $T_1 \equiv T_2 \equiv T_3 \equiv \mathbf{1}$ nên ta có:

$$a_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge \overline{b}_2 \wedge c_3 \wedge d_2 \wedge \overline{c}_4 \equiv \mathbf{1} \Leftrightarrow a_1 = \overline{a}_2 = \overline{b}_2 = c_3 = d_2 = \overline{c}_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \equiv 1 \\ a_2 \equiv 0 \\ b_2 \equiv 0 \\ c_3 \equiv 1 \\ d_2 \equiv 1 \\ c_4 \equiv 0 \end{cases},$$

hay: An xếp thứ nhất, Dinh xếp thứ nhì, Cẩm xếp thứ ba, Bình xếp thứ tư.

51. Để giải bài toán T bằng cách thông qua đồ thị cần thực hiện lần lượt các bước sau đây:

a) Xây dựng đồ thị G = <X, U> mô tả quan hệ của bài toán T:

– Lấy các điểm trên mặt phẳng và đặt tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán T. Dùng các ký hiệu đối tượng để ghi nhãn các đỉnh tại các điểm trên mặt phẳng.

– Cặp điểm x, y được nối với nhau bằng một cạnh với "đặc điểm t" khi và chỉ khi các đối tượng x, y có quan hệ t với nhau. Khi đó bài toán T đã được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

b) Dựa vào kết quả của lý thuyết đồ thị mà suy ra đáp án của bài toán D. Nếu đáp án của bài toán D còn thể hiện dưới dạng ngôn ngữ đồ thị, thì

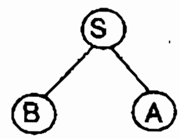
www.thuvien247.net

căn cứ vào phép đặt tương đương khi xây dựng đồ thị mà diễn đạt thành đáp án bằng ngôn ngữ lôgic thông thường (tức là đáp án của bài toán T).

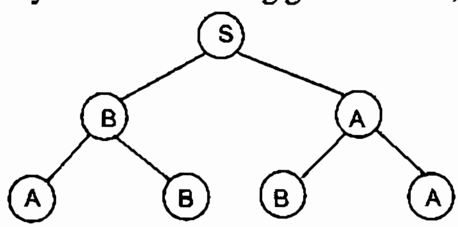
Ví dụ: Trong một cuộc thi đấu bóng bàn, An và Bình quy ước với nhau: Người thắng cuộc là người đầu tiên ghi được ba bàn thắng hoặc là người ghi hai bàn thắng liên tiếp. Hãy xác định số khả năng An và Bình có thể trở thành người thắng cuộc.

Giải. Dùng A để ký hiệu An thắng và B để ký hiệu Bình thắng. Dùng đồ thị cho dưới dạng cây có gốc nhị phân để mô tả các khả năng thắng của hai đấu thủ An và Bình theo các nguyên tắc sau đây: Lấy S làm gốc của cây: S

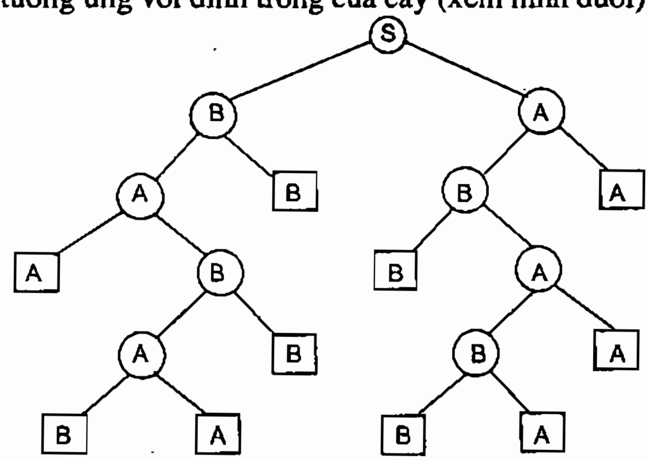
– Ván đầu tiên có hai khả năng: An thắng hoặc Bình thắng. Hai đỉnh liền kề với S là hai đỉnh A và B, nối S với A để chỉ A thắng, nối S với B để biểu thị B thắng (xem hình bên).



– Ván thứ hai lại có hai khả năng: An thắng hoặc Bình thắng; xuất phát từ A cũng lấy hai đỉnh mới và ghi nhãn A, B tương ứng và xuất phát từ B lấy hai đỉnh mới cũng ghi nhãn là A, B (xem hình dưới).



– Thủ tục xây dựng cây có gốc nhị phân như trên, do quy ước của An và Bình thì những đường xuất phát từ gốc S sẽ xuất hiện hoặc hai đỉnh A liên tiếp, hoặc hai đỉnh B liên tiếp, hoặc có ba đỉnh A, hoặc ba đỉnh B thì phải dừng lại không được kéo dài đường đi từ S nữa. Sở dĩ như vậy là vì An, Bình đấu với nhau năm ván, thì hoặc có người thắng hai ván liên tiếp hoặc có người thắng ba ván. Vì vậy trong cây có gốc trên, độ dài không vượt quá 5. Hay mức của cây là 5. Lá của cây tương ứng với đỉnh hình chữ nhật □, vòng tròn ○ tương ứng với đỉnh trong của cây (xem hình dưới)



www.thuvien247.net

Cây trên có 10 lá, nên số khả năng An và Bình trở thành người thắng cuộc là 10.

b) Tại một giải bóng đá có bốn đội: Anh, Đan Mạch, Hà Lan, Thụy Điển vào bán kết. Có mấy dự đoán xếp hạng như sau:

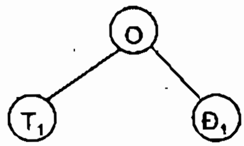
1) Đam Mạch vô địch, Thụy Điển nhì;

2) Đan Mạch nhì, Hà Lan ba;

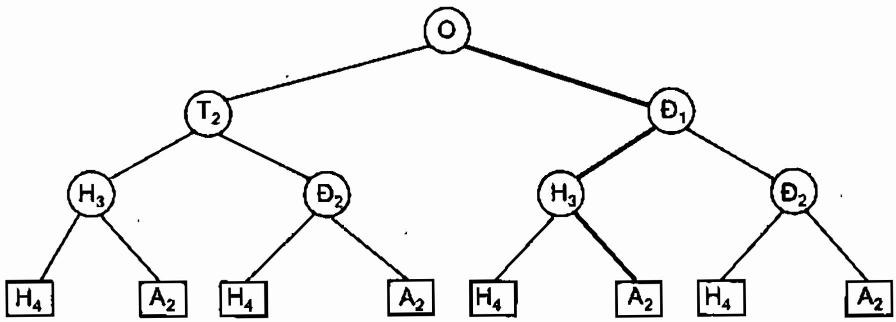
3) Anh nhì, Hà Lan tư.

Kết quả là mỗi dự đoán trên có một dự đoán đúng. Hãy cho biết kết quả xếp hạng của các đội tham gia bán kết.

Giải. Dùng x_i để ký hiệu đội x được xếp hạng i ($1 \le i \le 4$). Ta xây dựng cây nhị phân với gốc là O theo dự đoán 1:



Từ mỗi đỉnh liền kề với gốc O có 2 nhánh đi ra theo dự đoán 2 và mỗi đỉnh liền kề với các đỉnh T_2, $Đ_1$ là các đỉnh H_3, $Đ_2$ được ghi theo dự đoán 3 ta được cây nhị phân đầy đủ có dạng:



Cây nhị phân trên được xây dựng tuân thủ:

– Một đội không thể xếp hai hạng khác nhau;

– Hai đội không thể xếp vào cùng một hạng.

Vì vậy, trong cây nhị phân đầy đủ ở trên chỉ có đường đi $Đ_1H_3A_2$ (đường in đậm) là thỏa mãn yêu cầu trên, nên bảng xếp hạng bốn đội bán kết là: Đan Mạch vô địch, Anh thứ nhì, Hà Lan thứ ba, Thụy Điển thứ tư.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

52. Trong các khẳng định sau, cho biết khẳng định nào là mệnh đề và nếu là mệnh đề thì mệnh đề nào nhận giá trị đúng, sai?

a) $x + 5 = 10$.

b) Tìm x biết $x^2 = 16$.

c) Thứ 2 ngày 17.

d) $2 + 5 = 7$.

www.thuvien247.net

e) $3 + 5 \neq 8$.

f) Tam giác đều có ba góc bằng nhau.

g) Anh ta rất thông minh.

h) H_2O là một axit.

i) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

53. Cho các mệnh đề:

– "Hôm nay là thứ năm" (ký hiệu là mệnh đề X);

– "Hôm nay trời mưa" (ký hiệu là mệnh đề Y).

a) Phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề "Hôm nay là thứ năm" và "Hôm nay trời mưa".

b) Phát biểu bằng lời các mệnh đề phức hợp nhận được từ hai mệnh đề trên bằng cách dùng các phép toán tuyển: $X \vee Y$, phép toán hội: $X \wedge Y$ và phép toán kéo theo: $X \rightarrow Y$.

c) Lập bảng giá trị chân lý của các mệnh đề phức hợp nhận được trong câu a và b với điều kiện mệnh đề X và Y là đúng.

54. Cho X, Y là hai mệnh đề: "Hôm nay là thứ năm" và "Hôm nay trời mưa" tương ứng (như bài tập 53). Diễn đạt các mệnh đề sau đây bằng các câu thông thường:

a) $\overline{X}, \overline{Y}$;

b) $\overline{X} \vee Y$, $\overline{X \vee Y}$, $\overline{X} \wedge \overline{Y}$;

c) $\overline{X} \wedge Y$, $\overline{X \wedge Y}$, $\overline{X} \vee \overline{Y}$;

d) $\overline{X} \rightarrow Y$, $\overline{X \rightarrow Y}$, $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$.

55. Cho: X là mệnh đề: "Hôm nay là thứ năm";

Y là mện đề: "Hôm nay trời mưa" (như bài tập 53).

Giả sử mệnh đề $X \rightarrow Y$ sai.

a) Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề:

$$X \wedge Y,\ X \vee Y,\ X \rightarrow Y,\ Y \rightarrow X \text{ và } \overline{Y} \rightarrow \overline{X}.$$

b) Phát biểu các mệnh đề phức hợp trên bằng ngôn ngữ thông thường.

56. Gọi X, Y, Z là các mệnh đề: X: "Bình đang học Toán";

Y: "Bình đang học Tin học";

Z: "Bình đang học Anh văn".

Hãy viết các mệnh đề dưới đây dưới dạng công thức trong lôgic mệnh đề:

a) "Bình đang học Toán và Anh văn nhưng không học Tin học".

b) "Bình đang học Toán và Tin học nhưng không học cùng một lúc Tin học và Anh văn".

c) "Không đúng là Bình đang học Anh văn mà không học Toán".

d) "Không đúng là Bình đang học Anh văn hay Tin học mà không học Toán.

57. Cho biết giá trị chân lý của các mệnh đề:

a) "$\pi = 2$ và tổng các góc của một tam giá là 180^o".

b) "Nếu $3 + 4 = 12$ thì $3 + 2 = 6$".

www.thuvien247.net

c) "Nếu 1 + 1 = 2 thì 1 + 2 = 3".

d) "Nếu 1 + 1 = 2 thì 1 + 2 = 4".

e) "Nếu 2 > 3 thì nước sôi ở 100°C".

58. a) Giả sử mệnh đề X_1 có giá trị đúng. Hãy xác định tất cả các giá trị của các biến X_2, X_3, X_4 để cho mệnh đề sau nhận giá trị đúng:

$$(X_1 \to ((\overline{X_2} \vee X_3) \wedge \overline{X_4})) \wedge (\overline{X_4} \to (\overline{X_3} \wedge X_1)).$$

b) Câu hỏi tương tự cho trường hợp X_1 có giá trị sai.

59. Bằng phương pháp lập bảng và phương pháp biến đổi tương đương hãy chỉ ra:

a) Các mệnh đề phức hợp sau đây là hằng đúng:

- $(\overline{X} \wedge (X \vee Y)) \to Y$;
- $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$;
- $(X \wedge (X \to Y)) \to Y$;
- $((X \vee Y) \wedge (X \to Z) \wedge (Y \to Z)) \to Z$.

b) Cách mệnh đề phức hợp sau đây là tương đương (đồng nhất bằng nhau):

- $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \equiv (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$;
- $(X \wedge (X \to Y)) \to Y \equiv (\overline{X} \wedge (X \vee Y)) \to Y$;
- $(\overline{X} \wedge (X \vee Y)) \to Y \equiv ((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$;
- $((X \vee Y) \wedge (X \to Z) \wedge (Y \to Z)) \to Z \equiv Z \to (Y \to Z)$.

60. a) Tìm công thức đối ngẫu của các công thức:

- $X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee \overline{X} \vee Y \vee Z$;
- $\overline{(X \wedge Y \wedge Z) \vee Z_1}$;
- $(X \vee 0) \wedge (Y \vee 1)$

bằng định nghĩa và bằng luật đối ngẫu.

b) Chứng minh rằng: $((A)^*)^* \equiv A$, ở đây A là công thức không chứa phép toán kéo theo.

61. Tại sao đối ngẫu của hai công thức tương đương cũng là hai công thức tương đương (nếu các công thức tương đương đó chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\wedge$ và $-$)?

62. Lập một công thức chứa các biến mệnh đề X, Y, Z sao cho nó chỉ đúng khi hai trong ba mệnh đề trên là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại.

63. Dùng luật thay thế để kiểm tra các công thức sau đây là hằng đúng:

- $((X \vee Y) \to Z) \to ((X \to (Y \to Z)) \to ((X \vee Y) \to Z))$;
- $((X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to (Y \wedge Z)))) \to ((X \to Z) \to$
  $((X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to (Y \wedge Z)))).$

www.thuvien247.net

64. Chứng minh rằng trong lôgic mệnh đề tập các phép toán $\{\vee, -\}$ là đầy đủ.

65. Tìm DCTH và DCTT của các công thức sau đây, từ đó hãy chỉ ra công thức nào hằng đúng, công thức nào hằng sai và công thức nào thực hiện được:

a) $A \equiv \overline{X \to (Y \to Z)} \vee (X \to Y) \to (X \to Z)$;

b) $A \equiv \overline{(X \to Y) \to (X \to Z)} \to \overline{(X \to (Y \to Z))}$;

c) $A \equiv \overline{X \to Z} \vee \overline{Y \to Z} \vee (X \vee Y) \to Z$;

d) $A \equiv \overline{(X \to Y) \to (\overline{X \to Z} \vee X \to (Y \wedge Z))}$;

e) $A \equiv ((X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to (X \to (Y \to Z))$;

f) $A \equiv (X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (Z \to X))$.

66. Hãy điền mệnh đề thích hợp vào chỗ trống để cho các suy luận sau đây theo quy tắc khẳng định và phủ định là đúng:

a) Nếu xe của Minh không khởi động được thì Minh phải kiểm tra bugi. Mà xe của Minh không khởi động được. Vậy Minh . . . .

b) Nếu Minh làm bài đúng thì Minh được điểm cao. Mà Minh không được điểm cao. Vậy Minh . . . .

c) Nếu chiều nay Minh đá bóng thì minh không được xem tivi buổi tối. Mà . . . . Vậy Minh không đá bóng chiều nay.

67. Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và quy tắc suy diễn nào đã được áp dụng:

a) Nếu Minh giải được bài toán thứ tư thì Minh đã nộp bài trước giờ quy định. Mà Minh đã không nộp bài trước giờ quy định. Vậy Minh không giải được bài toán thứ tư.

b) Nếu lãi xuất giảm thì số người gửi tiền tiết kiệm sẽ giảm. Mà lãi xuất không giảm. Vậy số người gửi tiền tiết kiệm không giảm.

c) Nếu được thưởng cuối năm Minh sẽ thăm Đà Lạt. Nếu thăm Đà Lạt, Minh sẽ thăm suối Vàng. Do đó nếu được thưởng cuối năm Minh sẽ thăm suối Vàng.

68. Cho các mô hình suy diễn dưới đây:

$$1)\ \frac{\begin{array}{c}\overline{X}_1 \to X_2 \\ (X_3 \wedge X_4) \to \overline{(\overline{X}_1 \to X_2)}\end{array}}{\therefore \overline{X}_3 \to \overline{X}_4}; \quad 2)\ \frac{\begin{array}{c}\overline{X}_2 \to \overline{X}_1 \\ X_3 \vee \overline{X}_2 \\ X_1\end{array}}{\therefore X_3}; \quad 3)\ \frac{\begin{array}{c}(\overline{X} \vee Y) \to Z_1 \\ Z_1 \to (Z_2 \vee Z_3) \\ \overline{Z}_2 \wedge \overline{Z}_4 \\ \overline{Z}_4 \to \overline{Z}_2\end{array}}{\therefore X};$$

www.thuvien247.net

$$4)\ \begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ \overline{Z}_1 \vee Z_2 \\ X \vee Z_1 \\ \hline \therefore \overline{Y} \rightarrow Z_2 \end{array};\qquad 5)\ \begin{array}{l} X \wedge Y \\ X \rightarrow (Z_1 \wedge Y) \\ Z_1 \rightarrow (Z_2 \vee Z_3) \\ \overline{Z}_2 \\ \hline \therefore Z_3 \end{array};\qquad 6)\ \begin{array}{l} \overline{X}_1 \vee X_2 \\ \overline{X}_3 \rightarrow \overline{X}_2 \\ X_3 \rightarrow X_4 \\ \overline{X}_4 \vee X_5 \\ \overline{X}_5 \\ \hline \therefore \overline{X}_1 \end{array};$$

$$7)\ \begin{array}{l} X \rightarrow (Y \rightarrow Z_1) \\ X \vee Z_2 \\ Z_3 \rightarrow Y \\ \overline{Z}_2 \\ \hline \therefore \overline{Z}_1 \rightarrow \overline{Z}_3 \end{array};\qquad 8)\ \begin{array}{l} X \vee Y \\ \overline{X} \vee Z \\ \overline{Z} \\ \hline \therefore Y \end{array}.$$

a) Viết công thức cơ sở của các mô hình suy diễn từ (1) đến (8).

b) Kiểm tra tính đúng đắn của các mô hình suy diễn trên và nói rõ luật suy diễn nào được áp dụng.

c) Kiểm tra tính đúng đắn của các mô hình suy diễn trên thông qua việc kiểm tra tính hằng đúng của công thức cơ sở bằng phương pháp lập bảng và phương pháp biến đổi tương đương.

69. Cho các công thức sau đây:

$A_1 \equiv ((X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (\overline{X}_3 \vee X_4)) \rightarrow (X_2 \vee X_4);$

$A_2 \equiv ((\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee X_3) \wedge (\overline{X}_4 \rightarrow \overline{X}_3) \wedge \overline{X}_4) \rightarrow \overline{(X_1 \wedge X_2)};$

$A_3 \equiv (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_4 \vee \overline{X}_3) \wedge (\overline{X}_5 \vee \overline{X}_1) \wedge (\overline{X_4 \wedge X_2} \vee (X_1 \wedge X_5))$
$\rightarrow (\overline{X}_3 \vee \overline{X}_1);$

$A_4 \equiv (X \wedge (X \rightarrow Y) \wedge (Z_1 \vee Z_2) \wedge (Z_2 \rightarrow \overline{Y})) \rightarrow (Z_1 \vee Z_3);$

$A_5 \equiv (((\overline{X} \vee Y) \rightarrow Z_1) \wedge (Z_1 \rightarrow (Z_2 \vee Z_3)) \wedge (\overline{Z}_2 \wedge \overline{Z}_4) \wedge (\overline{Z}_4 \rightarrow \overline{Z}_3)) \rightarrow X;$

$A_6 \equiv ((X \rightarrow Y) \wedge (\overline{Z}_1 \vee \overline{Z}_2) \wedge (X \vee Z_1)) \rightarrow (\overline{Y} \rightarrow Z_2).$

a) Kiểm tra các công thức A_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) có hằng đúng không bằng phương pháp lập bảng cũng như phương pháp biến đổi tương đương.

b) Viết mô hình suy diễn tương ứng với các công thức cơ sở A_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) và dùng các quy tắc suy diễn đã biết để kiểm tra tính đúng đắn của các mô hình suy diễn trên.

70. Nếu NSND X không trình diễn hay (số vé bán ra ít hơn 50) thì đêm biểu diễn ở Công viên Hồ Tây bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn. Nếu đêm biểu diễn bị huỷ bỏ thì phải trả lại tiền vé cho người mua. Mà tiền vé đã không trả lại cho người mua. Vậy NSND X đã trình diễn.

www.thuvien247.net

a) Viết đoạn văn trên dưới dạng mô hình suy diễn và chỉ ra mô hình suy diễn là đúng.
b) Viết công thức cơ sở của mô hình trong câu a và chỉ ra công thức cơ sở đó là hằng đúng bằng phương pháp lập bảng và phương pháp biến đổi tương đương.

71. Suy luận sau đây có đúng không và vì sao?
Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ thì phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m, n. Nếu phương trình $m^2 = 2n^2$ có nghiệm nguyên dương m, n thì ta có mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

72. Giả sử X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 là các biến mệnh đề thỏa mãn các công thức sau đây là đúng: $X_1 \to X_2$; $X_2 \to X_3$; $X_4 \vee \overline{X_3}$; $\overline{X_4} \vee X_5$; $\overline{X_5}$. Chỉ ra rằng, mệnh đề X_1 là đúng bằng cách sử dụng các quy tắc suy diễn đã biết.

73. Cho các mô hình suy diễn:

$$1)\ \begin{array}{l} X \to Y \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \\ \hline \therefore \overline{X \vee Z} \end{array}; \qquad 2)\ \begin{array}{l} X \to Y \\ Z \to \overline{Y} \\ Z \\ \hline \therefore \overline{X} \end{array}; \qquad 3)\ \begin{array}{l} X \to (Y \to Z) \\ \overline{Y} \to \overline{X} \\ X \\ \hline \therefore Z \end{array};$$

$$4)\ \begin{array}{l} X \equiv Y \\ Y \to Z_1 \\ Z_1 \vee \overline{Z_2} \\ \overline{Z_2} \to Y \\ \hline \therefore Z_2 \end{array}; \qquad 5)\ \begin{array}{l} X \\ X \to Z_1 \\ X \to (Y \vee Z_1) \\ \overline{Y} \to \overline{Z_2} \\ \hline \therefore Z_2 \end{array}; \qquad 6)\ \begin{array}{l} X \wedge Y \\ X \to (Z_1 \wedge Y) \\ Z_1 \to (Z_2 \vee Z_3) \\ \overline{Z_2} \\ \hline \therefore Z_2 \end{array};$$

$$7)\ \begin{array}{l} X \to (Y \to Z_1) \\ X \vee Z_2 \\ Z_3 \to Y \\ \overline{Z_2} \\ \hline \therefore \overline{Z_1} \to Z_3 \end{array}; \qquad 8)\ \begin{array}{l} X \vee Y \\ \overline{X} \vee Z \\ \overline{Z} \\ \hline \therefore Y \end{array}.$$

Mô hình suy diễn nào đúng? Nếu mô hình suy diễn không đúng thì hãy chỉ ra một bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề sao cho giả thiết đúng nhưng kết luận sai.

74. Trong các bài tập giải mẫu 37, 38, 39, 41, 42, hãy chỉ ra các công thức cơ sở của các mô hình suy diễn trong các bài tập giải mẫu trên là hằng đúng bằng cách áp dụng phương pháp tương đương.

www.thuvien247.net

75. a) Hãy chỉ ra công thức cơ sở của mô hình suy diễn trong bài tập 40 là không hằng đúng bằng cách lập bảng; hoặc bằng cách chỉ ra một bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề có mặt trong công thức cơ sở để công thức cơ sở đó nhận giá trị sai.

b) Chứng minh các công thức cơ sở trong các bài tập 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34 là hằng đúng bằng cách áp dụng phương pháp lập bảng và phương pháp biến đổi tương đương.

76. Dùng phương pháp tương đương để giải bài toán: Tại một lớp mẫu giáo các bé Tùng, Bách, Dương bị nghi ngờ là đã hái hoa ở bồn hoa trong sân trường. Cô giáo hỏi để biết bé nào nói đúng:

– Bé Tùng nói: "Bách nói không đúng";

– Bé Bách nói: "Dương nói không đúng";

– Bé Dương nói: "Cả Tùng và Bách đều nói không đúng".

Hỏi bé nào đã nói đúng.

77. Bốn người bạn Hùng, Nhàn, Nam, Tâm quyết định đi du lịch ở bốn địa danh khác nhau: Vịnh Hạ Long, Đồ Sơn, Sầm Sơn, Hội An để sau đó trao đổi cảm tưởng của mình ở mỗi nơi đã đi. Hỏi ai sẽ đi du lịch ở đâu? Biết rằng họ thoả thuận với nhau:

1) Nếu Hùng không đi Vịnh hạ Long thì Nam không đi Đồ Sơn;

2) Nếu Nhàn không đi Vịnh Hạ Long và Hội An thì Hùng đi Hạ Long;

3) Nếu Nam không đi Hội An thì Nhàn đi Sầm Sơn;

4) Nếu Tâm không đi Vịnh Hạ Long thì Nhàn đi Vịnh Hạ Long;

5) Nếu Tâm không đi Đồ Sơn thì Nhàn không đi Vịnh Hạ Long.

Dùng phương pháp biến đổi tương đương để giải bài toán trên.

78. Thầy Nghiêm vừa đưa các học sinh: Hùng, Dũng, Vinh, Cường đi thi đấu cờ vua về đến trường. Mọi người hỏi kết quả, thầy Nghiêm trả lời: "Một bạn trong trường ta đạt giải nhất". Được hỏi dự đoán:

– Thủy nói: "Theo em thì Hùng hoặc Dũng đạt giải nhất";

– Hải nói: "Dũng hoặc Vinh nhất";

– Giang nói: "Theo em thì Vinh hoặc Cường nhất".

Nghe xong, thầy Nghiêm mỉm cười và nói: "Chỉ có Giang đoán đúng một bạn, còn hai bạn kia đều nói sai cả".

Dùng phương pháp biến đổi tương đương để xem ai đạt giải nhất.

www.thuvien247.net

Chương 11
LÔGIC VỊ TỪ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. CÔNG THỨC TRONG LÔGIC VỊ TỪ

1. Vị từ và giá trị chân lý của vị từ

Biểu thức $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ($n \geq 1$, với x_i lấy giá trị trên tập M_i ($i = 1, 2..., n$)) được gọi là vị từ n biến xác định trên trường $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ khi và chỉ khi biểu thức $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ không phải là một mệnh đề hoặc đúng hoặc sai. Nhưng nếu ta thay biến x_i bởi phần tử $a_i \in M_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) ta được $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một mệnh đề hoặc đúng hoặc sai. Người ta thường ký hiệu vị từ bởi các chữ P, Q, R, F, ... (có thể cả chỉ số nữa) và gọi là các biến vị từ. Vị từ một biến được gọi là vị từ cấp 1.

2. Các phép toán trên vị từ một biến

Cho vị từ một biến P(x), Q(x) trên trường M.

- Phủ định (–) của P(x) ký hiệu là $\overline{P}(x)$ cũng là một vị từ trên trường M mà khi thay $x = a \in M$ ta được mệnh đề $\overline{P}(a)$ nhận giá trị đúng khi P(a) nhận giá trị sai hoặc ngược lại.
- Hội ($\wedge$) vị từ P(x) với vị từ Q(x) ta được vị từ $P(x) \wedge Q(x)$ trên trường M mà khi thay $x = a \in M$ ta được mệnh đề $P(a) \wedge Q(a)$ nhận giá trị đúng khi P(a) và Q(a) cùng đúng, sai trong các trường hợp còn lại.
- Tuyển ($\vee$) vị từ P(x) với vị từ Q(x) là một vị từ $P(x) \vee Q(x)$ trên trường M mà khi thay $x = a \in M$ ta được mệnh đề $P(a) \vee Q(a)$ nhận giá trị đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề P(a), Q(a) đúng và sai khi cả hai mệnh đề P(a) và Q(a) cùng sai.
- Vị từ P(x) suy ra ($\rightarrow$) vị từ Q(x) là vị từ $P(x) \rightarrow Q(x)$ trên trường M mà khi thay $x = a \in M$ ta được mệnh đề $P(a) \rightarrow Q(a)$ nhận giá trị đúng khi P(a) sai hoặc P(a) và Q(a) đúng. Mệnh đề này sai khi giả thiết P(a) đúng còn kết luận Q(a) sai.

3. Ý nghĩa vị từ theo lý thuyết tập hợp

- P(x) là vị từ cấp 1 trên trường $M \neq \emptyset$. Tập tất cả các giá trị $x \in M$ mà P(x) đúng được ký hiệu bởi $E_P = \{x \in M \mid P(x) \text{ đúng}\}$. Ứng với

www.thuvien247.net

mỗi vị từ P(x) trên trường M ta có $E_p \subseteq M$. Ngược lại cũng đúng, tức là ứng với mỗi tập con $E \subseteq M$ có tồn tại vị từ P(x) xác định trên M sao cho $E = E_p$. Chẳng hạn, P(x) = "$x \in E$" mà P(x) đúng nếu $x \in E$, P(x) sai nếu $x \notin E$. Rõ ràng $E_p = E$.

- Cho $P_1(x)$, $P_2(x)$ là hai vị từ cấp 1 trên trường M. Đặt

$$P(x) = P_1(x) \vee P_2(x),\ Q(x) = P_1(x) \wedge P_2(x),$$

ở đây $E_{P_1} = \{x \in M \mid P_1(x) \text{ đúng}\}$, $E_{P_2} = \{x \in M \mid P_2(x) \text{ đúng}\}$.

Ta có các công thức sau:

$$E_P = E_{P_1} \cup E_{P_2}\ ; \qquad (1)$$

$$E_Q = E_{P_1} \cap E_{P_2}\ ; \qquad (2)$$

và $$E_{\overline{F}} = M \setminus E_F, \qquad (3)$$

ở đây F(x) là vị từ trên trường M sao cho $E_F = \{x \in M \mid F(x) \text{ đúng}\}$.

Chú ý: Dưới đây ta gọi $E_P = \{x \in M \mid P(x) \text{ đúng}\}$ là miền đúng của vị từ P(x) trên trường M, còn $E_{\overline{P}} = M \setminus E_P$ là miền sai của P(x) trên trường M, ở đây ta có $E_P \cup E_{\overline{P}} = M$ và $E_P \cap E_{\overline{P}} = \varnothing$.

4. Định nghĩa công thức trong lôgic vị từ

- Mỗi biến mệnh đề X, Y, Z (có thể cả chỉ số nữa) hoặc mỗi biến vị từ P, Q, R, F (có thể cả chỉ số nữa) gọi là một công thức.
- Nếu A, B là hai công thức thì biểu thức: $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \to B)$, $(\overline{A})$ cũng là công thức.
- Nếu A là một công thức thì $(\forall x)A$ và $(\exists x)A$ cũng là công thức.

Từ định nghĩa ta thấy, trong lôgic vị từ gồm các phép toán hội ($\wedge$), phép toán tuyển ($\vee$), phép toán kéo theo ($\to$), phép toán phủ định (–) được định nghĩa như trong lôgic mệnh đề. Hai ký hiệu $\forall$, $\exists$ gọi là các lượng từ và được định nghĩa:

Giả sử A là một công thức xác định trên trường M. Khi đó:

- $(\forall x)A$ là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng khi A đúng với mọi giá trị x trên trường M và sai trong trường hợp ngược lại. Mệnh đề $(\forall x)A$ không phụ thuộc vào x và được diễn đạt bằng lời: "đối với mọi x, A". Ký hiệu $\forall$ gọi là lượng từ với mọi (hay lượng từ phổ dụng).
- $(\exists x)A$ là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng khi và chỉ có một phần tử trong M để A đúng và sai trong trường hợp ngược lại. Biểu diễn $(\exists x)A$ bằng lời: "tồn tại x, A". Lượng từ $\exists$ phụ thuộc vào x và gọi là lượng từ tồn tại.

www.thuvien247.net

Các mệnh đề $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ được gọi là lượng từ hóa của vị từ A bởi lượng từ phổ dụng ($\forall$) và lượng từ tồn tại ($\exists$).

Chú ý. Trong công thức $(\forall x)A$ ($(\exists x)A$) thì A là miền tác dụng của lượng từ phổ dụng (lượng từ tồn tại).

Nếu P(x) là vị từ xác định trên trường $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì ta luôn có:

$(\forall x)P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$;

$(\exists x)P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$ (do định nghĩa giá trị chân lý của nó).

5. Công thức đồng nhất bằng nhau, công thức hằng đúng và công thức hằng sai

- Công thức A đồng nhất bằng công thức B ($A \equiv B$) trên trường M khi và chỉ khi A, B cùng nhận giá trị đúng, sai như nhau đối với mọi bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề và các vị từ cụ thể có mặt trong A và B.
- Công thức A là hằng đúng ($A \equiv 1$) trên trường M khi và chỉ khi A luôn luôn nhận giá trị đúng với mọi bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề và các vị từ cụ thể có mặt trong A.
- Công thức A là hằng sai ($A \equiv 0$) trên trường M khi và chỉ khi A luôn luôn nhận giá trị sai với mọi bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề và các vị từ cụ thể có mặt trong A.

Chú ý: Từ định nghĩa, ta thấy lôgic mệnh đề là một trường hợp riêng của lôgic vị từ. Vì vậy các công thức đồng nhất bằng nhau, các công thức hằng đúng, hằng sai trong lôgic mệnh đề vẫn đúng trong lôgic vị từ.

Vị từ cụ thể là vị từ mà các biến của nó được thay bởi giá trị cụ thể trên trường xác định của nó.

§2. DẠNG CHUẨN TẮC, DẠNG CHUẨN TẮC HỘI VÀ DẠNG CHUẨN TẮC TUYỂN CỦA CÔNG THỨC

1. Dạng chuẩn tắc (DCT)

Cho A là một công thức trong lôgic vị từ. Công thức B được gọi là DCT của A nếu $B \equiv A$ và trong B không có phép kéo theo, các lượng từ $\forall$ và $\exists$ đều đứng trước các phép toán lôgic $\vee, \wedge, -$.

Định lý 1. Trong lôgic vị từ mọi công thức đều có DCT.

2. Dạng chuẩn tắc hội (DCTH) và dạng chuẩn tắc tuyển (DCTT) của công thức A

Nếu trong DCT B của A mà phần đứng sau các lượng từ đều có DCTH (DCTT) như trong lôgic mệnh đề thì ta nói B là DCTH (B là DCTT) của A.

www.thuvien247.net

mỗi vị từ P(x) trên trường M ta có $E_p \subseteq M$. Ngược lại cũng đúng, tức là ứng với mỗi tập con $E \subseteq M$ có tồn tại vị từ P(x) xác định trên M sao cho $E = E_p$. Chẳng hạn, P(x) = "$x \in E$" mà P(x) đúng nếu $x \in E$, P(x) sai nếu $x \notin E$. Rõ ràng $E_p = E$.

- Cho $P_1(x)$, $P_2(x)$ là hai vị từ cấp 1 trên trường M. Đặt

$$P(x) = P_1(x) \vee P_2(x),\ Q(x) = P_1(x) \wedge P_2(x),$$

ở đây $E_{P_1} = \{x \in M \mid P_1(x) \text{ đúng}\}$, $E_{P_2} = \{x \in M \mid P_2(x) \text{ đúng}\}$.

Ta có các công thức sau:

$$E_P = E_{P_1} \cup E_{P_2}\ ; \quad (1)$$

$$E_Q = E_{P_1} \cap E_{P_2}\ ; \quad (2)$$

và $$E_{\overline{F}} = M \setminus E_F, \quad (3)$$

ở đây F(x) là vị từ trên trường M sao cho $E_F = \{x \in M \mid F(x) \text{ đúng}\}$.

Chú ý: Dưới đây ta gọi $E_P = \{x \in M \mid P(x) \text{ đúng}\}$ là miền đúng của vị từ P(x) trên trường M, còn $E_{\overline{P}} = M \setminus E_P$ là miền sai của P(x) trên trường M, ở đây ta có $E_P \cup E_{\overline{P}} = M$ và $E_P \cap E_{\overline{P}} = \varnothing$.

4. Định nghĩa công thức trong lôgic vị từ

- Mỗi biến mệnh đề X, Y, Z (có thể cả chỉ số nữa) hoặc mỗi biến vị từ P, Q, R, F (có thể cả chỉ số nữa) gọi là một công thức.
- Nếu A, B là hai công thức thì biểu thức: $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\overline{A})$ cũng là công thức.
- Nếu A là một công thức thì $(\forall x)A$ và $(\exists x)A$ cũng là công thức.

Từ định nghĩa ta thấy, trong lôgic vị từ gồm các phép toán hội ($\wedge$), phép toán tuyển ($\vee$), phép toán kéo theo ($\rightarrow$), phép toán phủ định ($-$) được định nghĩa như trong lôgic mệnh đề. Hai ký hiệu $\forall$, $\exists$ gọi là các lượng từ và được định nghĩa:

Giả sử A là một công thức xác định trên trường M. Khi đó:

- $(\forall x)A$ là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng khi A đúng với mọi giá trị x trên trường M và sai trong trường hợp ngược lại. Mệnh đề $(\forall x)A$ không phụ thuộc vào x và được diễn đạt bằng lời: "đối với mọi x, A". Ký hiệu $\forall$ gọi là lượng từ với mọi (hay lượng từ phổ dụng).
- $(\exists x)A$ là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng khi và chỉ có một phần tử trong M để A đúng và sai trong trường hợp ngược lại. Biểu diễn $(\exists x)A$ bằng lời: "tồn tại x, A". Lượng từ $\exists$ phụ thuộc vào x và gọi là lượng từ tồn tại.

www.thuvien247.net

Dưới đây ta chỉ xét vị từ cấp 1, tức là vị từ chỉ chứa một biến.

Định lý 2. Trong lôgic vị từ cấp 1, mọi công thức đều có DCTH và DCTT.

§3. CÁC PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA TÍNH HẰNG ĐÚNG VÀ TÍNH HẰNG SAI CỦA CÔNG THỨC TRONG LÔGIC VỊ TỪ CẤP 1

1. Bảng các công thức đồng nhất bằng nhau (tương đương) trong lôgic vị từ cấp 1 (luật tương đương trong lôgic vị từ cấp 1)

[1] $\overline{\overline{A}} \equiv A$;

[2] $A \vee B \equiv B \vee A$;

[3] $A \wedge B \equiv B \vee A$;

[4] $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$;

[5] $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$;

[6] $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;

[7] $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$;

[8] $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

[9] $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

[10] $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;

[11] $A \wedge A \equiv A$;

[12] $A \vee A \equiv A$;

[13] $A \wedge \mathbf{1} \equiv A$;

[14] $A \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$;

[15] $A \vee \overline{A} \equiv \mathbf{1}$;

[16 $A \wedge \overline{A} \equiv \mathbf{0}$;

[17] $A \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$;

[18] $A \vee \mathbf{0} \equiv A$;

[19] $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;

[20] $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;

[21] $\overline{(\forall x)A} \equiv (\exists x)\overline{A}$;

[22] $\overline{(\exists x)A} \equiv (\forall x)\overline{A}$;

[23] $(\forall x)A \vee H \equiv (\forall x)(A \vee H)$;

www.thuvien247.net

[24] $(\forall x)A \wedge H \equiv (\forall x)(A \wedge H);$

[25] $(\exists x)A \vee H \equiv (\exists x)(A \vee H);$

[26] $(\exists x)A \wedge H \equiv (\exists x)(A \wedge H);$

[27] $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x));$

[28] $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x));$

[29] $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y));$

[30] $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y));$

[31] $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y));$

[32] $(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y));$

[33] $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y));$

[34] $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \vee Q(y)).$

Chú ý. Công thức H trong các công thức [23], [24], [25] và [26] không chứa các vị từ (hay H là công thức trong lôgic mệnh đề).

2. Bảng tính giá trị chân lý của các vị từ cấp 1 và cấp 2

Bảng 1. **Phủ định các lượng từ một biến và giá trị chân lý của nó**

Phủ định	Mệnh đề tương đương	Khi nào phủ định đúng?	Khi nào sai?
$\overline{(\exists x)P(x)}$	$(\forall x)\overline{P(x)}$	P(x) sai với mọi x	Có một x để P(x) đúng
$\overline{(\forall x)P(x)}$	$(\exists x)\overline{P(x)}$	Có một x để P(x) sai	P(x) đúng với mọi x

Bảng 2. **Các lượng từ một biến và giá trị chân lý của nó**

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$(\forall x)P(x)$	P(x) đúng với mọi x	Có một x để P(x) sai
$(\exists x)P(x)$	Có một x để P(x) đúng	P(x) sai với mọi x

Bảng 3: **Các lượng từ hai biến và giá trị chân lý của nó**

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ $(\forall y)(\forall x)P(x, y)$	P(x, y) đúng với mọi cặp (x, y)	Có một cặp (x, y) để P(x, y) sai
$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$	Với mọi x có một y để P(x, y) đúng	Có một x với mọi y để P(x, y) sai
$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$	Có một x để P(x, y) đúng với mọi y	Với mọi x có một y để P(x, y) sai
$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$ $(\exists y)(\exists x)P(x, y)$	Có một cặp (x, y) để P(x, y) đúng	P(x, y) sai với mọi cặp

www.thuvien247.net

3. Thuật toán tìm DCTH và DCTT của công thức trong lôgic vị từ cấp 1 (phương pháp biến đổi tương đương)

Bài toán: input: A công thức bất kỳ;
output: DCTH và DCTT của A.

Thuật toán:

Bước 1. Khử tất cả các phép kéo theo ($\rightarrow$) trong A được công thức A_1 ($\equiv$ A) bằng cách áp dụng công thức đồng nhất bằng nhau $X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$.

Bước 2. Đưa phép toán phủ định (–) trong A_1 về liên quan trực tiếp tới từng biến mệnh đề X, Y, Z và từng biến vị từ P, Q, R, F có mặt trong A_1 ta được công thức mới A_2 ($\equiv A_1 \equiv A$) bằng cách áp dụng các công thức đồng nhất bằng nhau: $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$, $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$, $\overline{(\forall x)\, B} \equiv (\exists x)\, \overline{B}$ và $\overline{(\exists x)\, B} \equiv (\forall x)\, \overline{B}$.

Bước 3. Đưa các ký hiệu lượng từ $\forall, \exists$ trong A_2 lên trước mọi phép toán $\vee, \wedge, -$ ta được công thức mới A_3 ($\equiv A_2 \equiv A_1 \equiv A$) bằng cách áp dụng các công thức đồng nhất bằng nhau (từ công thức [23] đến [34] trong mục 1, §3):

$(\forall x)B \vee H \equiv (\forall x)(B \vee H)$; $(\forall x)B \wedge H \equiv (\forall x)(B \wedge H)$;
$(\exists x)B \vee H \equiv (\exists x)(B \vee H)$; $(\exists x)B \wedge H \equiv (\exists x)(B \wedge H)$
(với H là công thức trong lôgic mệnh đề)

và $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;
$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$;
$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$;
$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$;
$(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$;
$(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y))$.

Nếu trong A_3 phần công thức đứng sau các ký hiệu lượng từ $\forall, \exists$ ta ký hiệu qua A_0 thì $A_3 \equiv (\forall, \exists)A_0$.

Bước 4. a) Trong A_0 của A_3, nếu ta áp dụng công thức đồng nhất bằng nhau $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ ta sẽ được $A^*_0 \equiv A_0$, với A^*_0 là DCTH của A_0, hay $A_4 \equiv$ (lượng từ) A^*_0 ($\equiv$ A) là DCTH của A.

b) Trong A_0 của A_3, áp dụng công thức $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ ta được $A_0^+ \equiv A_0$, với A_0^+ là DCTT của A_0, hay $A_4 \equiv$ (lượng từ) A_0^+ ($\equiv$ A) là DCTT của A.

Bước 5. a) Nếu trong DCTH của A mà mỗi TSC đều chứa một biến đồng nhất với phủ định của nó thì A là hằng đúng.

b) Nếu trong DCTT của A mà mỗi hội sơ cấp đều chứa một biến đồng thời với phủ định của nó thì A là hằng sai.

www.thuvien247.net

4. Quy tắc và mô hình suy diễn trong lôgic vị từ cấp 1

Lôgic mệnh đề là trường hợp riêng của lôgic vị từ cấp 1. Vì vậy mọi công thức hằng đúng (hằng sai) trong lôgic mệnh đề cũng là công thức hằng đúng (hằng sai) trong lôgic vị từ cấp 1, và mọi mô hình suy diễn đúng trong lôgic mệnh đề cũng đúng trong lôgic vị từ cấp 1.

Các quy tắc suy diễn trong lôgic vị từ cấp 1

- *Quy tắc suy diễn 1* (rút gọn)

  Công thức cơ sở: $(A \wedge B) \rightarrow A \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{\therefore \quad A}$.

- *Quy tắc suy diễn 2* (cộng)

  Công thức cơ sở: $A \rightarrow (A \vee B) \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{A}{\therefore \quad A \vee B}$

- *Quy tắc suy diễn 3* (khẳng định)

  Công thức cơ sở: $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A \\ A \rightarrow B \end{matrix}}{\therefore \quad B}$.

- *Quy tắc suy diễn 4* (phủ định)

  Công thức cơ sở: $((A \rightarrow B) \wedge \overline{B}) \rightarrow \overline{A} \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ \overline{B} \end{matrix}}{\therefore \quad \overline{A}}$.

- *Quy tắc suy diễn 5* (bắc cầu)

  Công thức cơ sở: $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix}}{\therefore \quad A \rightarrow C}$.

- *Quy tắc suy diễn 6* (tam đoạn luận tuyển)

  Công thức cơ sở: $(\overline{A} \wedge (A \vee B)) \rightarrow B \equiv \mathbf{1}$.

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{\begin{matrix} \overline{A} \\ A \vee B \end{matrix}}{\therefore \quad B}$.

www.thuvien247.net

- *Quy tắc suy diễn 7* (mâu thuẫn)

  Công thức cơ sở:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{B}) \to 0 \equiv 1$$

  Mô hình suy diễn:
$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore\ B \end{array} \equiv \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ \overline{B} \\ \hline \therefore\ 0 \end{array}.$$

- *Quy tắc suy diễn 8* (theo từng trường hợp)

  Công thức cơ sở: $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C) \equiv 1.$

  Mô hình suy diễn:
$$\begin{array}{l} A \to C \\ B \to C \\ \hline \therefore\ (A \vee B) \to C \end{array}.$$

- *Quy tắc suy diễn 9* (đặc biệt hóa phổ dụng)

  Nếu mệnh đề $(\forall x)P(x)$ đúng trên trường M thì khi thay x bởi phần tử a bất kỳ trong M ta được mệnh đề P(a) cũng đúng.

  Công thức cơ sở: $(\forall x)\ P(x) \to P(a) \equiv 1.$

  Mô hình suy diễn: $\dfrac{(\forall x)P(x)}{\therefore\ P(a)}$ (với a là phần tử cố định bất kỳ trong M).

- *Quy tắc suy diễn 10* (tổng quát hóa phổ dụng)

  Cho mệnh đề $(\forall x)P(x)$ trên trường M. Khi đó, nếu P(a) đúng với mọi phần tử a trên trường M thì mệnh đề $(\forall x)P(x)$ cũng đúng trên trường M.

  Công thức cơ sở: $P(a) \to (\forall x)\ P(x) \equiv 1.$

  Mô hình suy diễn $\dfrac{P(a)}{\therefore\ (\forall x)P(x)}$ (với a là phần tử bất kỳ trong M).

- *Quy tắc suy diễn 11*

  Công thức cơ sở: $((\forall x)\ (P(x) \to Q(x)) \wedge P(a)) \to Q(a) \equiv 1$, $a \in M$ mà P(a) đúng.

www.thuvien247.net

$$\text{Mô hình suy diễn: } \frac{\begin{array}{l}(\forall x)\,(P(x) \to Q(x))\\ P(a)\end{array}}{\therefore\ Q(a)}.$$

- *Quy tắc suy diễn 12*

  Công thức cơ sở:

$$((\forall x)\,(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)\,(Q(x) \to R(x)) \to (\forall x)\,(P(x) \to R(x)) \equiv 1.$$

$$\text{Mô hình suy diễn: } \frac{\begin{array}{l}(\forall x)\,(P(x) \to Q(x))\\ (\forall x)\,(Q(x) \to R(x))\end{array}}{\therefore\ (\forall x)\,(P(x) \to R(x))}.$$

- *Quy tắc suy diễn 13* (mở rộng của quy tắc suy diễn theo từng trường hợp)

  Công thức cơ sở:

$$((\forall x \in M_1))P(x) \wedge (\forall x \in M_2)P(x) \wedge \ldots \wedge (\forall x \in M_n)P(x)) \to (\forall x \in M)\,P(x) \equiv 1.$$

$$\text{Mô hình suy diễn: } \frac{\begin{array}{l}(\forall x \in M_1)\,P(x)\\ (\forall x \in M_2)\,P(x)\\ \vdots\\ (\forall x \in M_n)\,P(x)\end{array}}{\therefore\ (\forall x \in M)\,P(x)},$$

ở đây: $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$, với $M_i \cap M_j = \varnothing\ (i \neq j)$.

5. Phương pháp chứng minh bằng phép quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$ trên trường số tự nhiên $\mathbb{N}$. Ta thực hiện các bước sau:

– Chỉ ra $P(n_0)$ đúng.

– Giả sử $P(k)$ đúng với $k \geq n_0$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng.

Khi đó kết luận $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Cơ sở để khẳng định các bước chứng minh ở trên đúng xuất phát từ công thức cơ sở trong lôgic vị từ cấp 1 sau đây trên trường số tự nhiên:

$$(P(n_0) \wedge ((\forall n \geq n_0)(P(n) \to P(n + 1))) \to (\forall n \geq n_0)P(n).$$

Mô hình suy diễn của công thức trên là:

$$\frac{\begin{array}{l}P(n_0)\\ (\forall n \geq n_0)(P(n) \to P(n + 1))\end{array}}{\therefore\ (\forall n \geq n_0)\,P(n)}.$$

www.thuvien247.net

B. BÀI TẬP GIẢI MẪU

1. a) Cho vị từ P(x) xác định trên trường M. Chứng minh các vị từ dưới đây:

a_1) $Q(x) \equiv P(x) \vee \overline{P}(x) \equiv \mathbf{1}$ trên M.

a_2) $F(x) \equiv P(x) \wedge \overline{P}(x) \equiv \mathbf{0}$ trên M.

a_3) $R_1(x, y) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \overline{P}(y)) \equiv (\forall y)(\exists x)(P(x) \vee \overline{P}(y)) \equiv \mathbf{1}$ trên M.

a_4) $R_2(x, y) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge \overline{P}(y)) \equiv (\forall y)(\exists x)(P(x) \wedge \overline{P}(y)) \equiv \mathbf{0}$ trên M.

b) Cho các vị từ: P(x) ≡ "x ≤ 5", Q(x) ≡ "x + 3 chẵn", R(x) ≡ "x > 0" trên trường các số nguyên M = {0, ± 1, ± 2, ...}. Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau đây:

$$P(1),\ Q(1),\ \overline{P}(2),\ Q(3),\ P(6) \vee Q(6),\ \overline{P(-1) \vee Q(-1)};$$

$$P(2) \wedge \overline{Q}(2) \vee \overline{R}(2)),\ P(3) \to (Q(3) \to R(3));$$

$$(P(3) \wedge Q(3)) \to R(3) \text{ và } P(1) \to (Q(1) \equiv R(1)).$$

Giải. a)

a_1) Thay x = a ∈ M, với a là phần tử bất kỳ trong M, ta luôn có mệnh đề $Q(a) \equiv P(a) \vee \overline{P}(a)$ là mệnh đề đúng trên M. Hay $Q(x) \equiv P(x) \vee \overline{P}(x)$ là hằng đúng trên M.

a_2) Thay x = a ∈ M, với a là phần tử bất kỳ trong M, ta luôn có mệnh đề $F(a) \equiv P(a) \wedge \overline{P}(a)$ là sai trên M. Hay $F(x) \equiv P(x) \wedge \overline{P}(x)$ là hằng sai trên M.

a_3) Không giảm tính tổng quát, trong a_3 và a_4 ta chỉ xét M = {a, b}. Với

$$R_1(x, y) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \overline{P}(y)) \equiv (\forall y)(P(a) \vee \overline{P}(y)) \vee (\forall y)(P(b) \vee \overline{P}(y))$$

$$\equiv (P(a) \vee \overline{P}(a)) \wedge (P(a) \vee \overline{P}(b)) \vee (P(b) \vee \overline{P}(a)) \wedge (P(b) \vee \overline{P}(b))$$

$$\equiv (P(a) \vee \overline{P}(b)) \vee (P(b) \vee \overline{P}(a))$$

$$\equiv (P(a) \vee \overline{P}(a)) \vee (\overline{P}(b) \vee P(b)) \equiv \mathbf{1} \text{ (do } a_1).$$

Phần còn lại chứng minh $(\forall y)(\exists x)(P(x) \vee \overline{P}(y)) \equiv \mathbf{1}$ tương tự.

a_4) Với:

$$R_2(x, y) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge \overline{P}(y)) \equiv (\forall y)(P(a) \wedge \overline{P}(y)) \vee (\forall y)(P(b) \wedge \overline{P}(y))$$

$$\equiv (P(a) \wedge \overline{P}(a)) \wedge (P(a) \wedge \overline{P}(b)) \vee (P(b) \wedge \overline{P}(a)) \wedge (P(b) \wedge \overline{P}(b))$$

$$\equiv P(a) \wedge \overline{P}(b) \wedge (\overline{P}(a) \wedge P(a)) \vee P(b) \wedge \overline{P}(a) \wedge (P(b) \wedge \overline{P}(b))$$

$$\equiv P(a) \wedge \overline{P}(b) \wedge 0 \vee P(b) \wedge \overline{P}(a) \wedge 0 \equiv \mathbf{0} \text{ (do } a_2).$$

www.thuvien247.net

Phần còn lại chứng minh $(\forall y)(\exists x)(P(x) \wedge \overline{P}(y)) \equiv \mathbf{0}$ tương tự.

b) • $P(1) \equiv (1 \leq 5) \equiv 1$ (đúng).

- $Q(1) \equiv (1 + 3 \text{ chẵn}) \equiv 1$ (đúng).
- $\overline{P}(2) \equiv \overline{(2 \leq 5)} \equiv \overline{1} \equiv 0$ (sai).
- $Q(3) \equiv (3 + 3 \text{ chẵn}) \equiv 1$ (đúng).
- $P(6) \vee Q(6) \equiv (6 \leq 5) \vee (6 + 3 \text{ chẵn}) \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ (sai).
- $\overline{P(-1) \vee \overline{Q}(-1)} \equiv \overline{(-1 \leq 5) \vee \overline{(-1+3 \text{ chẵn})}} \equiv \overline{1 \vee 1} \equiv \overline{1} \equiv 0$ (sai).
- $P(2) \wedge (\overline{Q}(2) \vee \overline{R}(2)) \equiv (2 \leq 5) \wedge \left(\overline{(2+3 \text{chẵn})} \vee \overline{(2>0)}\right)$

$$\equiv 1 \wedge (1 \vee 0) \equiv 1 \text{ (đúng)}.$$

- $P(3) \rightarrow (Q(3) \rightarrow R(3)) \equiv (3 \leq 5) \rightarrow ((3 + 3 \text{ chẵn}) \rightarrow (3 > 0))$

$$\equiv 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) \equiv 1 \text{ (đúng)}.$$

- $(P(3) \wedge Q(3)) \rightarrow R(3) \equiv ((3 \leq 5) \wedge (3 + 3 \text{ chẵn})) \rightarrow (3 > 0)$

$$\equiv (1 \wedge 1) \rightarrow 1 \equiv 1 \text{ (đúng)}.$$

- $P(1) \rightarrow (Q(1) \equiv R(1)) \equiv (1 \leq 5) \rightarrow ((1 + 1 \text{ chẵn}) \equiv (1 > 0))$

$$\equiv 1 \rightarrow 1 \equiv 1 \text{ (đúng)}.$$

2. Cho vị từ $P(x) \equiv "x^2 - 3x + 2 = 0"$ trên trường số thực và tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $P(0)$; b) $P(1)$;

c) $P(2)$; d) $(\exists x)\ P(x)$ và $(\forall x)\ P(x)$.

Giải. a) $P(0) \equiv (2 = 0) \equiv 0$ (sai).

b) $P(1) \equiv (1^2 - 3.1 + 2 = 0) \equiv 1$ (đúng).

c) $P(2) \equiv (2^2 - 3.2 + 2 = 0) \equiv 1$ (đúng).

d) $(\exists x)P(x) \equiv 1$ (đúng) (vì có một giá trị $x = 1$ để $P(1)$ đúng (do b)).

$(\forall x)P(x) \equiv 0$ (vì có một $x = 0$ để $P(0)$ sai (do a)).

3. Cho các vị từ hai biến:

$P(x, y) \equiv "x^2 \geq y"$;

$Q(x, y) \equiv "x + 1 < y"$, trong đó x, y là các biến thực.

Cho biết giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a) $P(2, 4)$;

b) $Q(2, \pi)$;

c) $(P(-3, 7) \wedge Q(1, 2)) \rightarrow (P(-2, 1) \vee \overline{Q}(-1,-1)$;

www.thuvien247.net

d) $(Q(1, 1) \to P(1, 1)) \wedge (P(1, 1) \to Q(1, 1))$;

e) $P(2, 5) \equiv \overline{Q}(2, 5)$.

Giải. a) $P(2, 4) \equiv (2^2 \geq 4) \equiv (4 \geq 4) \equiv 1$ (đúng).

b) $Q(2, \pi) \equiv (2 + 1 < \pi) \equiv 1$ (đúng).

c) $P(-3, 7) \equiv (9 \geq 7) \equiv 1$ (đúng), $Q(1, 2) \equiv (2 < 2) \equiv 0$ (sai).

Vậy $(P(-3, 7) \wedge Q(1, 2) \equiv 1 \wedge 0 \equiv$ (sai). Từ đó ta có

$$(P(-3, 7) \wedge Q(1, 2), \to (P(-2, 1) \vee \overline{Q}(-1,-1)) \equiv 1 \text{ (đúng)}.$$

d) $Q(1, 1) \equiv (2 < 1) \equiv 0$ (sai), nên $Q(1, 1) \to P(1, 1) \equiv 1$ (đúng).

$P(1, 1) \equiv (1^2 \geq 1) \equiv 1$ (đúng), $Q(1, 1) \equiv 0$ (sai) nên

$P(1, 1) \to Q(1, 1) \equiv 0$ và $Q(1, 1) \to P(1, 1) \equiv 1$ (đúng).

$(Q(1, 1) \to P(1, 1)) \wedge (P(1, 1) \to Q(1, 1)) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ (sai).

e) $P(2, 5) \equiv (4 \geq 5) \equiv 0$ (sai).

$Q(2, 5) \equiv (3 < 5) \equiv 1$ (đúng).

Vậy $P(2, 5) \equiv \overline{Q}(2,5)$ là đúng.

4. Cho vị từ hai biến $(P(x, y) \equiv$ "x là ước của y" trên trường

$$M = \{\pm 1, \pm 2, ...\}.$$

Xác định giá trị của các mệnh đề sau:

a) $\overline{P(2,3)}$; b) $\overline{P(2, 6)}$;

c) $(\forall y)\, P(2, y)$; d) $\overline{(\forall x)\, P(x, x)}$;

e) $(\forall y)\, (\exists x)\, P(x, y)$; f) $\overline{(\exists y)(\forall x)\, P(x, y)}$;

g) $(\forall x)\, (\forall y)\, (P(x, y) \wedge P(y, x)) \to (x = y)$;

h) $(\forall x)\, (\forall y)\, (\forall z)\, ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \to P(x, z))$.

Giải

a) $\overline{P(2, 3)} = \overline{0} \equiv 1$ (đúng).

b) $\overline{P(2, 6)} \equiv \overline{1} \equiv 0$ (sai).

c) $(\forall y)\, P(2, y) \equiv 0$ (sai) vì có tồn tại $y = 3$ để 2 không phải là ước của 3.

d) $\overline{(\forall x)\, P(x, x)} \equiv \overline{1} \equiv 0$ (sai).

e) $(\forall y)\, (\exists x)\, P(x, y) \equiv 1$ (đúng) (vì với mỗi y ta lấy $x = y$ thì x là ước của y).

f) $\overline{(\exists y)\, (\forall x)\, P(x, y)} \equiv (\forall y)\, (\exists x)\, \overline{P}(x, y) \equiv 1$ (vì với mọi y bao giờ cũng có một $x = y + 1$ không phải là ước của y).

g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \to (x = y) \equiv 1$ (đúng) (vì do x là ước của y và y cũng là ước của x nên $x = y$).

www.thuvien247.net

h) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \equiv 1$ (đúng) (vì x là ước của y, y là ước của z thì x là ước của z).

5. Cho vị từ ba biến $P(x, y, z) \equiv$ "$x + y = z$" trên trường số thực.

a) Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z)$ và $(\exists z)(\forall x)(\forall y)P(x, y, z)$.

b) Dịch hai mệnh đề trong câu a ra câu nói thông thường.

c) Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề trong C_1, C_2, C_3 sau:

C_1: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(z, y, z) \vee (\exists z)(\forall x)(\forall y)P(x, y, z)$;

C_2: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z) \rightarrow (\exists z)(\forall x)(\forall y)P(x, y, z)$;

C_3: $(\exists z)(\forall x)(\forall y)P(x, y, z) \rightarrow \overline{(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x, y, z)}$.

Giải

a) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + y = z)$ là mệnh đề đúng (vì lấy $z = (x + y)$).

$(\exists z)(\forall x)(\forall y)(x + y = z)$ là mệnh đề sai vì không thể có một z mà với mọi x, y ta có $x + y = z$.

b) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + y = z) \equiv$ "Với mọi số thực x và số thực y, bao giờ cũng có một số thực z sao cho $x + y = z$". Mệnh đề này đúng.

$(\exists z)(\forall x)(\forall y)(x + y = z) \equiv$ "Có một số thực z sao cho đối với mọi số thực x và mọi số thực y ta có $x + y = z$". Mệnh đề này sai, vì không có một giá trị thực nào của z lại thỏa mãn phương trình $x + y = z$ với mọi x và y.

c) C_1 là mệnh đề đúng (vì trong C_1 có số hạng thứ nhất đúng).

C_2 là mệnh đề sai (vì giả thiết đúng nhưng kết luận sai).

C_3 là mệnh đề đúng (vì giả thiết sai).

6. Cho các mệnh đề sau đây trên trường số thực:

a) $(\forall x)(x^2 + 1 \geq 0)$;

b) $(\forall x)(2x + 1 = 0)$;

c) $(\exists x)(2x + 5) = 0$;

d) $(\forall x)(\forall y)(x < y)$;

e) $(\exists x)(\forall y)(x < y)$;

f) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$;

g) $(\exists x)(\exists y)(x < y)$.

Dịch các mệnh đề trên ra câu nói thông thường, lấy phủ định các mệnh đề và tìm giá trị chân lý các mệnh đề đó.

Giải

a) "Với mỗi x trên trường số thực ta có $x^2 + 1 \geq 0$" là mệnh đề đúng.

$\overline{(\forall x)(x^2 + 1 \geq 0)} \equiv (\exists x)(x^2 + 1 < 0)$ $\equiv$ "Có một giá trị thực x sao cho $x^2 + 1 < 0$" là mệnh đề sai.

b) $(\forall x)(2x + 1 = 0) \equiv$ "Với mỗi giá trị thực x ta có $2x + 1 = 0$" là mệnh đề sai.

www.thuvien247.net

$\overline{(\forall x)(2x+1=0)} \equiv (\exists x)(2x+1 \neq 0)$ ≡ "Có một giá trị thực x sao cho $2x + 1 \neq 0$" là mệnh đề đúng.

c) $(\exists x)(2x + 5 = 0)$ ≡ "Có một giá trị thực x, sao cho $2x + 5 = 0$" là mệnh đề đúng.

$\overline{(\exists x)(2x+5=0)} \equiv (\forall x)(2x+5 \neq 0)$ ≡ "Với mọi giá trị thực x ta có $2x + 5 \neq 0$" là mệnh đề sai.

d) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x < y)$ ≡ "Với mọi các số thực x, y ta có $x < y$" là mệnh đề sai.

$\overline{(\forall x)(\forall y)(x < y)} \equiv (\exists x)(\exists y)(x \geq y)$ ≡ "Có tồn tại các số thực x, y sao cho $x \geq y$" là mệnh đề đúng.

e) $(\exists x)(\forall y)(x < y)$ ≡ "Có một số thực x sao cho với mọi số thực y ta có $x < y$" là mệnh đề sai.

$\overline{(\exists x)(\forall y)(x < y)} \equiv (\forall x)(\exists y)\ (x \geq y)$ ≡ "Với mọi số thực x có một số thực y sao cho $x \geq y$" là mệnh đề đúng.

f) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x < y)$ ≡ "Với mọi số thực x có một số thực y sao cho $x < y$" là mệnh đề đúng.

$\overline{(\forall x)(\exists y)(x < y)} \equiv (\exists x)(\forall y)\ (x \geq y)$ ≡ "Có một số thực x sao cho với mọi số thực y ta có $x \geq y$" là mệnh đề sai.

g) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x < y)$ ≡ "Có một số thực x và một số thực y sao cho $x < y$" là mệnh đề đúng.

$\overline{(\exists x)(\exists y)(x < y)} \equiv (\forall x)(\forall y)\ (x \geq y)$ ≡ "Với mọi số thực x, và với mọi số thực y ta có $x \geq y$" là mệnh đề sai.

7. Cho các biểu thức toán học sau đây:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

b) $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$.

Hãy chỉ ra các biểu thức trên là công thức đúng trong lôgic vị từ.

Giải

a) Trong lôgic vị từ thì công thức $(\forall x)(\forall y)((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$ là hằng đúng trên trường số thực. Theo quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng thì công thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ là đúng trên trường số thực, ở đây $x = a$, $y = b$ cố định tùy ý cho trước.

b) Trong lôgic vị từ công thức $(\forall x)(\forall y)\left(\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}\right)$ là đúng trên tập các số thực không âm.

www.thuvien247.net

Theo quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng, thay $x = a \geq 0$, $y = b \geq 0$ thì mệnh đề $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ cũng đúng.

8. a) Tìm miền đúng của vị từ $P_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) trên trường số tự nhiên $\mathbb{N}$ với:

$P_1(x) \equiv$ "x chia hết cho 2"; $P_2(x) \equiv$ "x chia hết cho 3";

$P_3(x) \equiv$ "x là ước của 12"; $P_4(x) \equiv$ "$x(2x^2 - 3x + 1) = 0$";

$P_5(x) \equiv$ "$x^2 - 4x + 3 = 0$".

b) Tìm miền đúng của $(P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge P_4(x)) \vee (P_3(x) \wedge P_5(x)) \equiv P(x)$ và $\overline{P}(x)$.

c) Tìm miền đúng của các vị từ $P_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) trên tập số thực $\mathbb{R}$, ở đây: $P_1(x, y) \equiv$ "$x = y$"; $P_2(x, y) \equiv$ "$xy \geq 0$"; $P_3(x, y) \equiv$ "$x \leq y$".

d) Tìm miền đúng của vị từ $\overline{P}_2(x)$, $\overline{P}_3(x)$ và $P_1(x, y) \wedge P_2(x, y) \wedge P_3(x, y)$.

Giải

a) $E_{P_1} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$; $E_{P_2} = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$; $E_{P_3} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

$E_{P_4} = \{0, 1\}$ và $E_{P_4} = \{1, 3\}$.

b) $E_P = E_{P_1} \cap E_{P_2} \cap E_{P_4} \cup E_{P_3} \cap E_{P_5}$

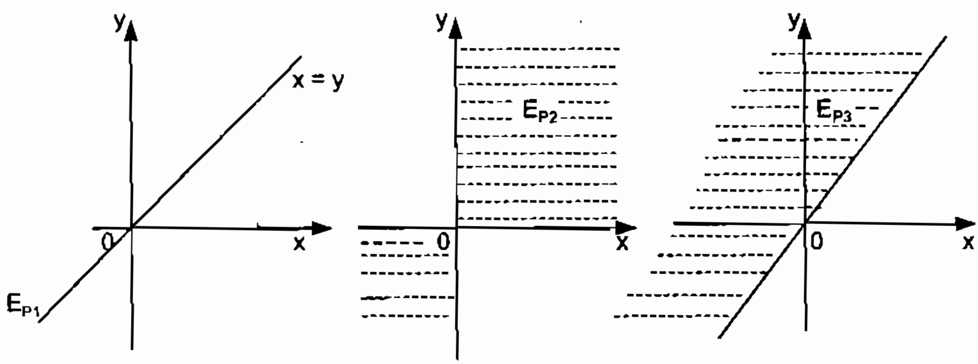
$= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{3x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{0, 1\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 3\}$

$= \{0\} \cup \{1, 3\} = \{0, 1, 3\}$.

$E_{\overline{P}} \equiv \mathbb{N} - E_p = \{4, 5, 6, 7, ...\}$.

c) $E_{P_1} = \{(x, y) \mid x = y\}$; $E_{P_2} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x \leq 0$ và $y \leq 0\}$;

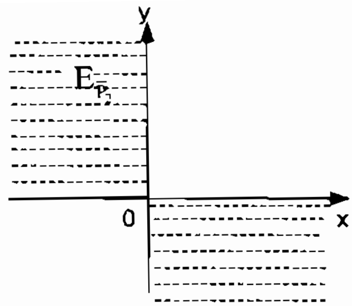
$E_{P_3} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ (xem các hình dưới)



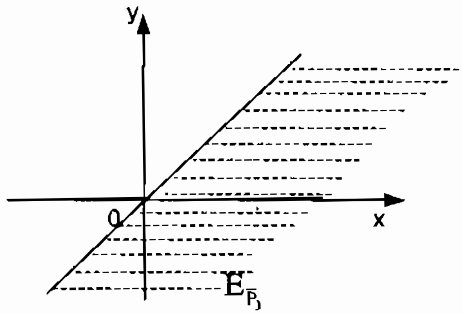
d) $E_{\overline{P}_2} = \{(x, y)/xy < 0\}$.

$E_{\overline{P}_3} = \{(x, y)/x > y\}$, ở đây $E_{\overline{P}_2}$ và $E_{\overline{P}_1}$ tương ứng với phần mặt phẳng kẻ sọc dưới đây:

www.thuvien247.net



(Không kể gốc tọa độ)



(Không kể đường phân giác y = x)

$E_{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3} = E_{P_1} \cap E_{P_2} \cap E_{P_3}$

$= \{(x, y) \mid x = y\} \cap \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x \leq 0$ và $y \leq 0\} \cap \{(x, y) \mid x \leq y\}$

$= \{(x, y) \mid x = y\}$ chính là đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

9. Dùng phương pháp biến đổi tương đương, chứng minh các công thức cơ sở của các mô hình suy diễn [9], [10], [12] và [13] trong §3 là công thức hằng đúng (các công thức cơ sở còn lại đã được chứng minh là hằng đúng trong bài tập giải mẫu số 16 phần lôgic mệnh đề).

Giải. Không giảm tính tổng quát, giả sử trường xác định của vị từ P(x), Q(x), R(x) là M = {a, b, c}.

- Đối với mô hình suy diễn [9], công thức cơ sở có dạng:

$$A \equiv (\forall x)P(x) \rightarrow P(a) \equiv (\exists x)\overline{P}(x) \vee P(a) \equiv (\exists x)(\overline{P}(x) \vee P(a))$$

(do công thức [25], §3).

Mặt khác

$$A \equiv (\exists x)(\overline{P}(x) \vee P(a)) \equiv (\overline{P}(a) \vee P(a)) \vee (\overline{P}(b) \vee P(a)) \vee (\overline{P}(c) \vee P(a)) \equiv \mathbf{1}.$$

- Đối với mô hình suy diễn [10], công thức cơ sở có dạng:

$$A \equiv P(a) \rightarrow (\forall x)P(x) \equiv \overline{P}(a) \vee (\forall x)P(x) \equiv (\forall x)(\overline{P}(a) \vee P(x))$$

(do công thức [23], §3)

$$\equiv (\overline{P}(a) \vee P(a)) \wedge (\overline{P}(a) \vee P(b)) \wedge (\overline{P}(a) \vee P(c)) \equiv \mathbf{1}$$

(do P(a), P(b), P(c) đúng theo giả thiết).

- Đối với mô hình suy diễn [12], công thức cơ sở có dạng:

$$A \equiv ((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$\equiv \overline{(\forall x)(\overline{P}(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(\overline{Q}(x) \vee R(x))} \vee (\forall x)(\overline{P}(x) \vee R(x))$$

$$\equiv (\exists x)((P(x) \wedge \overline{Q}(x)) \vee (Q(x) \wedge \overline{R}(x))) \vee (\forall x)(\overline{P}(x) \vee R(x))$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge \overline{Q}(x) \vee Q(x) \wedge \overline{R}(x) \vee \overline{P}(y) \vee R(y)) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)((P(x) \vee \overline{P}(y)) \wedge (\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(y)) \vee (Q(x) \vee R(y)) \wedge (\overline{R}(x) \vee R(y)))$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)((\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(y) \vee Q(x) \vee R(y)) \equiv \mathbf{1}$$ (do bài tập 1).

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

- Đối với mô hình suy diễn [13], công thức cơ sở có dạng:

$$A \equiv (\forall x \in M_1)P(x) \wedge (\forall x \in M_2)P(x) \wedge \ldots \wedge (\forall x \in M_n)P(x) \rightarrow (\forall x \in M)P(x)$$

$$\equiv (\exists x \in M_1)\overline{P}(x) \vee (\exists x \in M_2)\overline{P}(x) \vee \ldots \vee (\exists x \in M_n)\overline{P}(x) \vee (\forall x \in M)P(x)$$

$$\equiv (\forall x \in M)\overline{P}(x) \vee (\forall x \in M)\overline{P}(x) \equiv (\forall x \in M)(\overline{P}(x) \vee P(x)) \equiv 1$$

(do bài giải mẫu số 1).

10. Cho các vị từ $P(x) \equiv$ "$x \leq 5$", $Q(x) \equiv$ "$x + 3$ chẵn" và $R(x) \equiv$ "$x > 0$", với x là biến trong $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của x để $P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)$ đúng.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của x để $P(x) \rightarrow \left(\overline{Q}(x) \wedge E(x)\right)$ đúng.

c) Tìm giá trị chân lý của các công thức sau:

c_1) $P(2) \vee Q(2) \vee R(2)$;

c_2) $P(2) \wedge (\overline{Q}(2) \vee \overline{R}(2))$;

c_3) $P(3) \rightarrow (Q(3) \rightarrow R(3))$;

c_4) $(P(3) \wedge Q(3)) \rightarrow R(3)$.

Giải

a) $E_{P\wedge Q\wedge R} = E_P \cap E_Q \cap E_R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \cap \{1, 2, 3, \ldots\}$

$= \{1, 3, 5\}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của x để $P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)$ đúng là 1 (5).

b) $P(x) \rightarrow (\overline{Q}(x) \wedge R(x)) \equiv \overline{P}(x) \vee (\overline{Q}(x) \wedge R(x))$.

$$E_{\overline{P}\vee(\overline{Q}\wedge R)} = E_{\overline{P}} \cup \left(E_{\overline{Q}} \cap E_R\right) = (Z - E_P) \cup ((Z - E_Q) \cap E_R)$$

$$= \{6, 7, 8, \ldots\} \cup \{0\} \cap \{1, 2, 3, \ldots\} = \{6, 7, 8, \ldots\}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất để $P(x) \rightarrow \left(\overline{Q}(x) \wedge R(x)\right)$ đúng là $x = 6$ và không có giá trị lớn nhất.

c) c_1) $P(2) \vee Q(2) \vee R(2)$ đúng vì $P(2)$ đúng (do $2 < 5$).

c_2) $P(2) \wedge \left(\overline{Q}(2) \vee \overline{R}(2)\right)$ đúng vì $P(2)$ đúng và $\overline{Q}(2)$ đúng.

c_3) $P(3) \rightarrow (Q(3) \rightarrow R(3))$ đúng vì $P(3)$, $Q(3)$, $R(3)$ đều đúng.

c_4) $(P(3) \wedge Q(3)) \rightarrow R(3)$ đúng do câu c_3.

11. Giả sử $P(x)$ là vị từ một biến trên trường M. Khi đó mệnh đề lượng tử hóa $(\exists!x)P(x)$ được định nghĩa như sau: "tồn tại phần tử a duy nhất trong M để $P(a)$ đúng".

a) Hãy viết công thức trong lôgic vị từ cấp 1 của $(\exists!x)P(x)$ theo định nghĩa trên.

www.thuvien247.net

b) Từ đó hãy viết công thức trong lôgic vị từ cấp 1 của các mệnh đề sau đây:

- "Mọi số thực khác 0 có nghịch đảo duy nhất";
- "Với mọi số thực x, y tồn tại duy nhất số thực z sao cho z = x + y";
- "Với mọi số thực x, tồn tại duy nhất số thực y sao cho y = 3x + 7".

c) Giả sử P(x, y) là vị từ $y = -2x$ trên trường số nguyên. Hãy cho biết giá trị chân lý của các công thức sau:

- $(\forall x)\ (\exists! y)\ P(x, y) \rightarrow (\exists! y)\ (\forall x)\ P(x, y)$;
- $(\exists! y)\ (\forall x)\ P(x, y) \rightarrow (\forall x)\ (\exists! y)\ P(x, y)$.

d) Xét mệnh đề $(\exists! x)(x > 1)$ trên trường số tự nhiên. Tìm $E_{P(x)}$ để $P(x) \equiv$ "$(\exists! x)\ (x > 1)$" đúng (sai).

Giải

a) $(\exists x)P(x) \wedge ((\forall x)\ (\forall y)\ (P(x) \wedge P(y))) \rightarrow (x = y) \equiv (\exists! x)\ P(x)$.

b) • "Mọi số thực khác 0 có nghịch đảo duy nhất"

$$\equiv (\forall x)((x \neq 0) \rightarrow (\exists! x')(xx' = 1));$$

• "Với mọi số thực x, y tồn tại duy nhất một số thực z sao cho z = x + y"

$$\equiv (\forall x)(\forall y)((\exists! z)(z = x + y));$$

• "Với mọi số thực x, tồn tại duy nhất số thực y sao cho y = 3x + 7"

$$\equiv (\forall x)\ (\exists! y)(y = 3x + 7).$$

c) Với $P(x, y) \equiv$ "$y = -2x$" trên trường số nguyên, mệnh đề:

- $(\forall x)(\exists! y)P(x, y) \rightarrow (\exists! y)(\forall x)P(x, y)$ sai, vì giả thiết đúng, kết luận sai;
- $(\exists! y)(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists! y)P(x, y)$ đúng, vì giả thiết sai.

d) Chọn $E_{P(x)} = \{1, 2\}$ thì $P(x) \equiv (\exists! x)(x > 1)$ là đúng. Còn nếu chọn $E_{P(x)} = \{1, 2, 3\}$ thì $P(x) \equiv (\exists! x)(x > 1)$ là sai.

12. Dịch các câu và các định nghĩa sau đây ra công thức trong lôgic vị từ:

a) "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất".

b) "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó".

c) Dịch định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ra công thức trong lôgic vị từ trên trường số thực.

d) Dịch định nghĩa hàm f(x) liên tục tại điểm x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ra công thức trong lôgic vị từ trên trường số thực.

e) Lấy phủ định các công thức trong a, b, c, d cho ở trên.

Giải

a) Đặt vị từ P(x, y) là câu: "y là bạn tốt nhất của x". Khi đó câu a được dịch ra công thức trong lôgic vị từ có dạng:

$(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,(P(x, y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \overline{P}(x, z)))$ trên trường loài người.

b) Đặt P(x) là câu "x là phụ nữ", F(x) là câu "x đã sinh đẻ" và R(x, y) là câu "x là mẹ của y" trên trường loài người.

Khi đó công thức vị từ xác định trên trường loài người được dịch ra từ câu b là: $(\forall x)((P(x) \wedge F(x)) \rightarrow (\exists y)R(x, y))$.

c) Công thức trong lôgic vị từ tương đương với định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ có dạng:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \text{ trên trường số thực.}$$

d) Định nghĩa hàm f(x) liên tục tại điểm x_0 tương ứng với công thức trong lôgic vị từ trên trường số thực dịch ra công thức trong lôgic vị từ là

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,((|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)).$$

e) • $\overline{(\forall x)(\exists y)(\forall z)\,(P(x, y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \overline{P}(x, z)))}$

$$\equiv (\exists x)\,(\forall y)\,(\exists z)\,(\overline{P}(x, y) \vee ((z \neq y) \wedge P(x, z)).$$

• $\overline{(\forall x)((P(x) \wedge F(x)) \rightarrow (\exists y)R(x, y))} \equiv$

$$\equiv \overline{(\forall x)\overline{(P(x) \wedge F(x))} \vee (\exists y)R(x, y))}$$

$$\equiv (\exists x)\,((P(x) \wedge F(x) \wedge (\forall y)\,\overline{R}(x, y)).$$

• $\overline{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)(\forall x)\,(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)}$

$$\equiv (\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x)((0 < |x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - L| \geq \varepsilon)).$$

• $\overline{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)((|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))}$

$$\equiv (\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x)\,((|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)).$$

13. Chứng minh:

a) $(\forall x)\,(\forall y)\,P(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x, y)$;

b) $(\exists x)\,(\exists y)\,P(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x, y)$;

c) $(\exists x)\,(\forall y)\,P(x, y) \not\equiv (\forall y)(\exists x)P(x, y)$.

Giải. Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét trường $M = \{a, b\} \times \{c, d\}$.

a) $VT \equiv (\forall x)\,(\forall y)\,P(x, y) \equiv (\forall y)\,P(a, y) \wedge (\forall y)\,P(b, y)$

$$\equiv P(a, c) \wedge P(a, d) \wedge P(b, c) \wedge P(b, d). \quad (1)$$

$VP \equiv (\forall y)\,(\forall x)\,P(x, y) \equiv (\forall x)\,P(x, c) \wedge (\forall x)\,P(x, d)$

$$\equiv P(a, c) \wedge P(b, c) \wedge P(a, d) \wedge P(b, d). \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) do phép hội có tính giao hoán nên $VT \equiv VP$.

b) $VT \equiv (\exists x)\,(\exists y)\,P(x, y) \equiv (\exists y)\,P(a, y) \vee (\exists y)\,P(b, y)$

$$\equiv P(a, c) \vee P(a, d) \vee P(b, c) \vee P(b, d). \quad (3)$$

$VP \equiv (\exists y)\,(\exists x)\,P(x, y) \equiv (\exists x)\,P(x, c) \vee (\exists x)\,P(x, d)$

$$\equiv P(a, c) \vee P(b, c) \vee P(a, d) \vee P(b, d). \quad (4)$$

www.thuvien247.net

www.thuvien247.net

So sánh (3) và (4) và do phép toán tuyển có tính giao hoán nên VT ≡ VP.

c) $VT \equiv (\exists x)(\forall y) P(x, y) \equiv (\forall y) P(a, y) \vee (\forall y) P(b, y)$

$\equiv P(a, c) \wedge P(a, d) \vee P(b, c) \wedge P(b, d)$

$VP \equiv (\forall y)(\exists x) P(x, y) \equiv (\exists x) P(x, c) \wedge (\exists x) P(x, d)$

$\equiv (P(a, c) \vee P(b, c)) \wedge (P(a, d) \vee P(b, d))$

$\equiv (P(a, c) \vee P(b, c)) \wedge P(a, d) \vee (P(a, c) \vee P(b, c)) \wedge P(b, d)$

$\equiv P(a, c) \wedge P(a, d) \vee P(b, c) \wedge P(a, d) \vee P(a, c) \wedge P(b, d) \vee P(b, c) \wedge P(b, d)$

$\equiv (P(a, c) \wedge P(a, d) \vee P(b, c) \wedge P(b, d)) \vee P(b, c) \wedge P(a, d) \vee P(a, c) \wedge P(b, d)$

$\equiv VT \vee P(b, c) \wedge P(a, d) \vee P(a, c) \wedge P(b, d)$. Hay $VT \not\equiv VP$.

14. Chứng minh các công thức:

a) $(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;

b) $(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$;

c) $(\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)$

trên trường $M = \{a, b, c\}$.

Giải

a) $VT \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$.

$VP \equiv (P(a) \wedge Q(a)) \wedge (P(b) \wedge Q(b)) \wedge (P(c) \wedge Q(c))$

$\equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)) \equiv VT$.

b) $VT \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \vee Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)$

$VP \equiv (\forall y)(P(a) \vee Q(y)) \wedge (\forall y)(P(b) \vee Q(y)) \wedge (\forall y)(P(c) \vee Q(y))$

$\equiv (P(a) \vee Q(a)) \wedge (P(a) \vee Q(b)) \wedge (P(a) \vee Q(c)) \wedge (P(b) \vee Q(a)) \wedge$

$\wedge (P(b) \vee Q(b)) \wedge (P(b) \vee Q(c)) \wedge (P(c) \vee Q(a)) \wedge (P(c) \vee$

$\vee Q(b)) \wedge (P(c) \vee Q(c))$.

Ta biến đổi VT về VP bằng cách áp dụng luật phân bố giữa phép tuyển và phép hội:

$VT \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(a) \vee Q(a)) \wedge (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \vee Q(b)) \wedge$

$\wedge (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \vee Q(c)) \equiv (P(a) \vee Q(a)) \wedge (P(b) \vee Q(a)) \wedge$

$\wedge (P(c) \vee Q(a)) \wedge (P(a) \vee Q(b)) \wedge (P(b) \vee Q(b) \vee Q(b)) \wedge (P(c) \vee$

$\vee Q(b)) \wedge (P(a) \vee Q(c)) \wedge (P(b) \vee Q(c)) \wedge (P(c) \vee Q(c)) \equiv VP$

(do tính giao hoán của phép hội).

c) $VP \equiv P(a) \wedge Q(a) \vee P(a) \wedge Q(b) \vee P(a) \wedge Q(c) \vee P(b) \wedge Q(a) \vee P(b) \wedge$

$\wedge Q(b) \vee P(b) \wedge Q(c) \vee P(c) \wedge Q(a) \vee P(c) \wedge Q(b) \vee P(c) \wedge Q(c)$ (1)

$VT \equiv (P(a) \vee P(b) \vee P(b) \vee P(c)) \wedge (A(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$

$\equiv (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \wedge Q(a) \vee (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \wedge Q(b) \vee$

$\vee (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \wedge Q(c) \equiv P(a) \wedge Q(a) \vee P(b) \wedge Q(a) \vee$

$\vee P(c) \wedge Q(a) \vee P(a) \wedge Q(b) \vee P(b) \wedge Q(b) \vee P(c) \wedge Q(b) \vee$

$\vee P(a) \wedge Q(c) \vee P(b) \wedge Q(c) \vee P(c) \wedge Q(c)$ (2)

www.thuvien247.net

So sánh (1) (2) ta có điều cần chứng minh.

15. Chứng minh:

a) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \not\equiv (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$.

b) $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \vee Q(y))$ trên $M = \{a, b, c\}$.

c) $(\forall x)P(x) \wedge H \equiv (\forall x)(P(x) \wedge H)$ trên $M = \{a, b, c\}$, ở đây H là công thức trong lôgic mệnh đề.

Giải

a) Chọn $P(x) \equiv$ "$x > 0$", $Q(x) \equiv$ "$x < 0$", khi đó

$VT \equiv (\exists x)(x > 0) \wedge (\exists x)(x < 0)$ là đúng, nhưng $VP \equiv (\exists x)((x > 0) \wedge (x < 0))$ là sai. Vậy $VT \not\equiv VP$.

b) $VT \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c) \equiv (P(a) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee$
$\vee Q(c)) \wedge (P(b) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c)) \wedge (P(c) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$.

$VP \equiv (\exists y)(P(a) \vee Q(y)) \wedge (\exists y)(P(b) \vee Q(y)) \wedge (\exists y)(P(c) \vee Q(y))$
$\equiv (P(a) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c)) \wedge (P(b) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c)) \wedge$
$\wedge (P(c) \vee Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c)) \equiv VT$ đó là điều cần chứng minh.

c) $VT \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge H \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge H)$.

$VP \equiv (P(a) \wedge H) \wedge (P(b) \wedge H) \wedge (P(c) \wedge H) \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge H) \equiv VT$
(do $H \wedge H \wedge H \equiv H$).

16. Cho vị từ hai biến $P(x, y)$ trên trường $M = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

1) Dùng các phép hội và phép tuyển để viết các mệnh đề sau đây dưới dạng vị từ cụ thể:

a) $(\exists x) P(x, 3)$;

b) $(\forall y) P(1, y)$;

c) $(\forall x)(\forall y) P(x, y)$;

d) $(\exists x)(\exists y) P(x, y)$;

e) $(\exists x)(\forall y) P(x, y)$.

2) Cũng yêu cầu như trong câu 1 đối với các mệnh đề phủ định của a, b, c), d và e.

Giải

1) a) $P(1, 3) \vee P(2, 3) \vee P(3, 3)$.

b) $P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(1, 3)$.

c) $(\forall y)P(1, y) \wedge (\forall y)P(2, y) \wedge (\forall y)P(3, y) \equiv P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge$
$\wedge P(1, 3) \wedge P(2, 1) \wedge P(2, 2) \wedge P(2, 3) \wedge P(3, 1) \wedge P(3, 2) \wedge P(3, 3)$.

d) $(\exists y)P(1, y) \vee (\exists y)P(2, y) \vee (\exists y)P(3, y) \equiv P(1, 1) \vee P(1, 2) \vee P(1, 3) \vee$
$\vee P(2, 1) \vee P(2, 2) \vee P(2, 3) \vee P(3, 1) \vee P(3, 2) \vee P(3, 3)$.

e) $(\forall y)P(1, y) \vee (\forall y)P(2, y) \vee (\forall y)P(3, y) \equiv P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge$
$\wedge P(1, 3) \vee P(2, 1) \wedge P(2, 2) \wedge P(2, 3) \vee P(3, 1) \wedge P(3, 2) \wedge P(3, 3)$.

2) a) $\overline{(\exists x)P(x, 3)} \equiv (\forall x)\overline{P}(x,3) \equiv \overline{P}(1,3) \wedge \overline{P}(2,3) \wedge \overline{P}(3,3)$.

www.thuvien247.net

b) $\overline{(\forall y)P(1, y)} \equiv (\exists y)\ \overline{P}(1,y) \equiv \overline{P}(1,1) \vee \overline{P}(1,2) \vee \overline{P}(1,3)$.

c) $\overline{(\forall x)\ (\forall y)P(x, y)} \equiv (\exists x)(\exists y)\ \overline{P}(x,y) \equiv \overline{P}(1,1) \vee \overline{P}(1,2) \vee \overline{P}(1,3) \vee$

$\vee\ \overline{P}(2, 1) \vee \overline{P}(2, 2) \vee \overline{P}(2, 3) \vee \overline{P}(3, 1) \vee \overline{P}(3, 2) \vee \overline{P}(3, 3)$.

d) $\overline{(\exists x)(\exists y)P(x, y)} \equiv (\forall x)(\forall y)\ \overline{P}(x,y) \equiv \overline{P}(1,1) \wedge \overline{P}(1,2) \wedge \overline{P}(1, 3) \wedge$

$\wedge\ \overline{P}(2, 1) \wedge \overline{P}(2, 2) \wedge \overline{P}(2, 3) \wedge \overline{P}(3, 1) \wedge \overline{P}(3, 2) \wedge \overline{P}(3, 3)$.

e) $\overline{(\exists x)(\forall y)P(x, y)} \equiv (\forall x)(\exists y)\ \overline{P}(x,y) \equiv \left(\overline{P}(1,1) \vee \overline{P}(1,2) \vee \overline{P}(1, 3)\right) \wedge$

$\wedge \left(\overline{P}(2, 1) \vee \overline{P}(2, 2) \vee \overline{P}(2, 3)\right) \wedge \left(\overline{P}(3, 1) \vee \overline{P}(3, 2) \vee \overline{P}(3, 3)\right)$.

Chú ý: Dưới đây khi giải các bài toán tìm DCTH, DCTT của công thức, chúng tôi áp dụng các công thức đồng nhất bằng nhau, nhưng không chỉ ra cụ thể công thức nào, việc tìm các công thức áp dụng dành cho bạn đọc.

17. Cho công thức:

$$A \equiv ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \rightarrow ((\forall x)R(x) \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow X))).$$

a) Tìm DCTH, DCTT của A. Từ đó suy ra A hằng đúng.

b) Tìm DCTH, DCTT của $\overline{A}$. Từ đó suy ra $\overline{A}$ hằng sai.

c) Viết A dưới dạng không còn các lượng từ ∀, ∃, chỉ có các biến mệnh đề, các vị từ cụ thể và các phép toán hội, tuyển và phủ định, riêng phủ định chỉ liên quan từng biến mệnh đề và từng vị từ cụ thể trên trường M = {a, b}.

Giải

a) $A \equiv \overline{(\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)\ Q(x)} \vee \overline{(\forall x)\ R(x)} \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X$

$\equiv (\forall x)\ (\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)) \vee (\exists x)\left(\overline{R}(x) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right)$

$\equiv (\forall x)\ (\exists y)\ \left(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \equiv$ DCTT

$\equiv (\forall x)(\exists y)\left(\left(\overline{P}(x) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \wedge \left(\overline{Q}(x) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right)\right)$

≡ DCTH của A (*). Do các TSC hằng đúng nên A hằng đúng.

b) $\overline{A} \equiv (\exists x)\ (\forall y)\left(\left(P(x) \vee Q(x)\right) \wedge R(y) \wedge X \wedge Y \wedge \overline{X}\right)$.

$\overline{A} \equiv (\exists x)(\forall y)\left(\left(P(x) \wedge R(y) \wedge X \wedge Y \wedge \overline{X}\right) \vee (Q(x) \wedge R(y) \wedge X \wedge Y \wedge \overline{X})\right)$

≡ DCTT của $\overline{A}$. Do các HSC hằng sai nên $\overline{A}$ hằng sai.

c) $A \equiv (\exists y)\left(\left(\overline{P}(a) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \wedge \left(\overline{Q}(a) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right)\right)$

$\wedge (\exists y)\left(\left(\overline{P}(b) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \wedge \left(\overline{Q}(b) \vee \overline{R}(y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right)\right)$

$\equiv \left(\left(\overline{P}(a) \vee \overline{R}(a) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \wedge \left(\overline{Q}(a) \vee \overline{R}(a) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \vee X\right) \vee\right.$

www.thuvien247.net

$$\vee\left(\overline{P}(a)\vee\overline{R}(b)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\wedge\left(\overline{Q}(a)\vee\overline{R}(b)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\Big)\wedge$$

$$\wedge\Big(\left(\overline{P}(b)\vee\overline{R}(a)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\wedge\left(\overline{Q}(b)\vee\overline{R}(a)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\vee$$

$$\vee\left(\overline{P}(b)\vee\overline{R}(b)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\wedge\left(\overline{Q}(b)\vee\overline{R}(b)\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\right)\Big).\ (**)$$

Chú ý: Công thức A trong lôgic vị từ là (*) hay trong lôgic mệnh đề là (**) đều khẳng định A là hằng đúng.

18. Cho $A \equiv ((\forall x)\,P(x) \wedge (\forall x)\,Q(x) \vee (\exists x)\,P(x) \vee (\exists x)\,(Q(x) \wedge \overline{P}(x)))$
$\rightarrow (Y \rightarrow ((Y \vee Z) \rightarrow X))$.

Thực hiện các phép biến đổi sau đây đối với công thức A:

a) Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$).

b) Đưa dấu phủ định ($-$) về trực tiếp liên quan tới từng biến mệnh đề X, Y, Z và từng vị từ một biến P(x), Q(x).

c) Đưa các lượng từ $\forall$, $\exists$ lên đứng trước mọi phép toán lôgic $\wedge$, $\vee$, $-$.

d) Đưa phần công thức sau các lượng từ $\forall$, $\exists$ về DCTT và DCTH để được DCTT và DCTH của A như định nghĩa.

Giải

a) $A\equiv\overline{(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\vee(\exists x)P(x)\vee(\exists x)(Q(x)\wedge\overline{P}(x))}\vee\overline{Y}\vee\overline{Y\wedge Z}\vee X.$

b) $A\equiv\left((\exists x)\overline{P}(x)\vee(\exists x)\overline{Q}(x)\right)\wedge\left((\forall x)\overline{P}(x)\wedge(\forall x)\left(\overline{Q}(x)\vee P(x)\right)\right)\vee\overline{Y}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X.$

c) $A\equiv(\exists x)\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\right)\wedge(\forall x)\left(\overline{P}(x)\wedge\left(\overline{Q}(x)\vee P(x)\right)\right)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X$

$\equiv(\exists x)(\forall y)\left(\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\right)\wedge\overline{P}(y)\wedge\left(\overline{Q}(y)\vee P(y)\right)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right).$

d) $A\equiv(\exists x)(\forall y)\left(\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\right)\wedge\left(\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\right)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)$

$\equiv(\exists x)(\forall y)\left(\left(\overline{P}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\right)\vee\left(\overline{Q}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\right)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)$

$\equiv$ DCTT của A.

$$A\equiv(\exists x)(\forall y)\Big(\left(\overline{P}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\right)\vee\left(\overline{Q}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)$$

$$\wedge\left(\overline{Q}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\Big)\equiv(\exists x)\,(\forall y)\Big(\left(\overline{P}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\vee\overline{Q}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overline{P}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\vee\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(x)\wedge\overline{P}(y)\wedge\overline{Q}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\Big)$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\Big(\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(y)\vee\overline{Q}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overline{Q}(y)\vee\overline{Q}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(x)\vee\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge$$

www.thuvien247.net

$$\wedge\left(\overline{Q}(y)\vee\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\wedge\left(\overline{P}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)$$

$$\wedge\left(\overline{Q}(y)\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\vee X\right)\Big)\ \equiv \text{DCTH}.$$

19. Cho công thức

$$A\equiv((\forall x)((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow R(x))\wedge R(x))\wedge(\forall x)\,(R(x)\rightarrow F(x))\wedge(\exists x)\ \overline{F}(x))$$
$$\rightarrow(\exists x)\,(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)).$$

Tìm DCTH và DCTT của A. Có nhận xét gì về A?

Giải

$$A\equiv\overline{(\forall x)\left(\overline{P(x)\wedge Q(x)}\vee R(x)\right)\wedge(\forall x)\left(\overline{R}(x)\vee F(x)\right)\wedge(\exists x)\overline{F}(x)}\vee(\exists x)\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\right)$$

$$\equiv(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)\wedge\overline{R}(x))\vee(\exists x)(R(x)\wedge\overline{F}(x))\vee(\forall x)F(x)\vee(\exists x)\left(\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\right)$$

$$\equiv(\exists x)((P(x)\wedge Q(x)\wedge\overline{R}(x)\vee R(x)\wedge\overline{F}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x))\vee(\forall x)F(x)$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\left(P(x)\wedge Q(x)\wedge\overline{R}(x)\vee R(x)\wedge\overline{F}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\right)$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\left[P(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\right)\wedge\left(Q(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overline{R}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\right)\vee R(x)\wedge\overline{F}(x)$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\left(\left(\overline{R}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\vee R(x)\right)\wedge\left(\overline{R}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\vee\overline{F}(x)\right)\right)\qquad(*)$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\left(\overline{R}(x)\vee\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)\vee F(y)\vee\overline{F}(x)\right)\equiv \text{DCTH}\equiv\text{DCTT của } A$$

(do a_1, a_3 trong bài tập 1).

Vì phần công thức đứng sau các lượng từ $\exists$, $\forall$ trong DCTH của A có chứa phần $F(y)\vee\overline{F}(x)$ nên theo bài tập 1 phần a_3 ta có $A\equiv\mathbf{1}$.

20. Cho

$$A\equiv((\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(R(x)\rightarrow F(x))\wedge(\forall x)((Q(x)\vee F(x))$$
$$\rightarrow H(x))\wedge(\forall x)\overline{H}(x))\rightarrow(\forall x)(\overline{P}(x)\wedge\overline{R}(x)).$$

a) Tìm DCTH, DCTT của A.

b) Chỉ ra công thức A hằng đúng trên tập M = {a, b}.

Giải

a) $A\ \equiv(\exists x)(P(x)\wedge\overline{Q}(x)\vee R(x)\wedge\overline{F}(x)\ \vee Q(x)\wedge\overline{H}(x)\ \vee F(x)\wedge$
$$\wedge\overline{H}(x)\ \vee\ H(x))\vee(\forall x)(\overline{P}(x)\wedge\overline{R}(x))$$

$$\equiv(\exists x)(\forall y)\,(P(x)\wedge\overline{Q}(x)\ \vee\ R(x)\wedge\overline{F}(x)\vee Q(x)\wedge\overline{H}(x)\ \vee F(x)\vee$$
$$\vee H(x)\vee\overline{P}(y)\wedge\overline{R}(x))\ \equiv$$

www.thuvien247.net

$\equiv$ DCTT (do $H(x) \vee \overline{H}(x) \equiv \mathbf{1}$)

$\equiv (\exists x)(\forall y)\,(P(x) \vee Q(x) \vee R(x) \vee F(x) \vee H(x) \vee \overline{P}(y) \wedge \overline{R}(y))$

$\equiv (\exists x)(\forall y)((P(x) \vee Q(x) \vee R(x) \vee F(x) \vee H(x) \vee \overline{P}(y)) \wedge (P(x) \vee$

$\vee\, Q(x) \vee R(x) \vee F(x) \vee H(x) \vee \overline{R}(y))$

$\equiv$ DCTH của A (do bài tập 1 phần a_1 và a_3).

b) Trong DCTH phần công thức đứng sau các lượng từ $\exists$, $\forall$ là hội của hai TSC mà mỗi TSC chứa phần công thức $P(x) \vee \overline{P}(y)$ và $R(x) \vee \overline{R}(y)$ nên theo bài tập 1 phần a_3 thì DCTH của A là hằng đúng. Hay $A \equiv \mathbf{1}$.

21. Cho $A \equiv ((\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)) \wedge (\forall x)(P_1(x) \vee P_3(x)))$

$\to (\forall x)\,(\overline{P}_2(x) \to P_4(x))$.

a) Tìm DCTH và DCTT của A.

b) Chỉ ra A là hằng đúng.

Giải

a) $A \equiv \overline{(\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)\right) \wedge (\forall x)\left(P_1(x) \vee P_3(x)\right)} \vee$

$\vee\, (\forall x)(\,\overline{P}_2(x)) \vee P_4(x))$

$\equiv (\exists x)\,\left(P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x) \vee P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x) \vee (\forall x)(\overline{P}_2(x) \vee P_4(x))\right)$

$\equiv (\exists x)\,(\forall y)\,\left(P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x) \vee P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x) \vee \overline{P}_2(y) \vee P_4(y)\right)$

$\equiv$ DCTT

$\equiv (\exists x)(\forall y)\left((P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x) \vee P_2(y)) \vee (P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x) \vee P_4(y)) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right)$

$\equiv (\exists x)(\forall y)\left[(P_1(x) \vee P_2(y)) \wedge (\overline{P}_2(x) \vee P_2(y)) \vee (P_3(x) \vee P_4(y)) \wedge (\overline{P}_4(x) \vee P_4(y)) \vee\right.$

$\left.\vee\, \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \equiv (\exists x)(\forall y)\,\left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right)$

$\equiv (\exists x)(\forall y)\left(\left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_1(x)\right) \wedge\right.$

$\left.\wedge\, \left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_3(x)\right)\right) \equiv$ DCTH

(do bài tập 1 phần a_1 và a_3)

b) $A \equiv \mathbf{1}$ (do phần công thức đứng sau các lượng từ $\exists$, $\forall$ là hội của hai TSC đúng).

22. Cho

$A \equiv ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \to ((\exists x)(P(x) \to Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x)))$.

www.thuvien247.net

a) Tìm DCTH, DCTT của A.

b) Chỉ ra A ≡ **1**.

Giải

$$A \equiv (\forall x)\overline{P}(x) \wedge (\forall x)\overline{Q}(x) \vee (\exists x)(\overline{P}(x) \vee Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$\equiv (\forall x)\left(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)\right) \vee (\exists x)\left(\overline{P}(x) \vee Q(x) \vee P(x)\right)$$

$$\equiv (\forall x)(\exists y)\left((\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x) \vee \overline{P}(y) \vee Q(y) \vee P(y)\right) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\exists y)\left((\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee Q(y) \vee P(y)) \wedge (\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(y) \vee Q(y) \vee P(y)\right)$$

≡ DCTH.

b) $A \equiv \mathbf{1}$ vì $\overline{P}(y) \vee P(y) \equiv \mathbf{1}$ (bài tập 1 phần a_1) nên DCTH của A là hằng đúng.

23. Xác định các suy luận đúng trong số các suy luận dưới đây:

a) Mọi người đưa thư đều mang theo túi thư. An là người đưa thư. Vậy An mang theo túi thư.

b) Mọi công dân tốt đều đóng thuế. Ông Bình đã đóng thuế. Vậy ông Bình là một công dân tốt.

c) Mọi người quan tâm đến môi trường đều để riêng túi nhựa bỏ đi vào một chỗ. Hà không quan tâm tới môi trường. Vậy Hà không để riêng túi nhựa bỏ đi vào một chỗ.

d) Mọi sinh viên nghiêm túc đều không nộp bài chưa làm xong. Minh không nộp bài chưa làm xong. Vậy Minh là sinh viên nghiêm túc.

Giải

a) Lấy hai vị từ P(x) là "x là người đưa thư" và Q(x) là "x là người mang túi thư". Khi đó mô hình suy luận trong câu a có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ P(AN) \\ \hline \therefore\ Q(AN) \end{array}.$$

Theo quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng và quy tắc khẳng định ta có:

$$\begin{array}{l} P(AN) \to Q(AN) \\ P(AN) \\ \hline \therefore\ Q(AN) \end{array} \equiv \begin{array}{l} Q(AN) \\ \hline \therefore\ Q(AN) \end{array} \equiv \mathbf{1}.$$ Vậy a là suy luận đúng.

b) Sai: Có thể ông Bình đã đóng thuế nhưng vẫn không là công dân tốt (vì ông Bình buôn ma túy chẳng hạn).

c) Sai: Có thể Hà không quan tâm tới môi trường nhưng vẫn để riêng túi nhựa bỏ đi (do Hà muốn giúp người đổ rác chẳng hạn).

d) Sai: Có thể Minh không nộp bài chưa làm xong vì không chịu làm bài. Vì vậy Minh không phải là sinh viên nghiêm túc.

www.thuvien247.net

24. a) Hãy nêu những ví dụ suy luận trong toán học hoặc trong cuộc sống có vận dụng quy tắc suy diễn [11], [12] và [13] trong mục 4, §3.

b) Cho hai công thức A_1 và A_2 dưới đây:

$$A_1 \equiv ((\forall x)((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \to F(x)) \wedge (\exists x)\overline{F}(x)) \to (\exists x)(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x));$$

$$A_2 \equiv ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \to F(x)) \wedge (\forall x)((Q(x) \vee F(x)) \to H(x)) \wedge (\forall x)\overline{H}(x)) \to (\forall x)(\overline{P}(x) \wedge \overline{R}(x)).$$

Hãy chỉ ra các công thức A_1, A_2 là các công thức hằng đúng trên trường M bằng cách dùng mô hình suy diễn trong lôgic vị từ.

Giải

a) • Quy tắc suy diễn [11]:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ \underline{P(a) \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore \quad Q(a) \end{array}.$$

Xem ví dụ trong câu a của bài tập 23.

• Quy tắc suy diễn [12]:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x) \\ \underline{(\forall x)(Q(x) \to R(x))} \\ \therefore \quad (\forall x)(P(x) \to R(x)) \end{array}.$$

Xét ví dụ: Khi giải phương trình $4x - 5 = 15$ ta lý luận như sau:

– Giả sử $4x - 5 = 15$, khi ấy $4x = 20$;

– Giả sử $4x = 20$, khi ấy $x = 5$;

– Như vậy, nếu $4x - 5 = 15$ thì $x = 5$.

Đặt $P(x) \equiv$ "$4x - 5 = 15$", $Q(x) \equiv$ "$4x = 20$", $R(x) \equiv$ "$x = 5$". Khi đó lý luận trên có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ \underline{(\forall x)(Q(x) \to R(x))} \\ \therefore \quad (\forall x)(P(x) \to R(x)) \end{array}.$$

• Quy tắc suy diễn [13]:

$$\begin{array}{l} (\forall x \in M_1)\, P(x) \\ (\forall x \in M_2)\, P(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{(\forall x \in M_n)\, P(x)} \\ \therefore \quad (\forall x \in M)\, P(x) \end{array},$$

ở đây $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ ($M_i \cap M_j = \varnothing$ $(i \neq j)$).

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

Xét ví dụ: Chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$ (số thực) ta có

$$P(x) \equiv x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Chia tập số thực $\mathbb{R}$ thành hai khoảng: $M_1 = (-\infty, 1)$, $M_2 = [1, +\infty)$ ta có $R = M_1 \cup M_2$ và $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Vì $P(x) \equiv x^6 + x^2(1 - x) + (1 - x)$ nên $P(x) > 0$ với mọi $x \in M_1$. Mặt khác $P(x) \equiv x^3(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1$ nên cũng có $P(x) > 0$ với mọi $x \in M_2$. Vậy $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Cách suy luận này là ứng dụng của quy tắc suy diễn [13].

b) • Mô hình suy diễn của công thức A_1 có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)) \\ (\forall x)\,(R(x) \to F(x)) \\ (\exists x)\,\overline{F}(x) \\ \hline \therefore\ (\exists x)\,(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x) \end{array} \quad \text{trên trường M.} \qquad (*)$$

Lấy $a \in M$ sao cho $\overline{F}(a)$ đúng. Theo quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng thì mô hình (*) viết dưới dạng công thức mệnh đề là

$$\begin{array}{l} (P(a) \wedge Q(a) \to R(a) \\ \begin{cases} R(a) \to F(a) \\ \overline{F}(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}(a) \vee \overline{Q}(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P(a) \wedge Q(a) \to R(a) \\ \overline{R}(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}(a) \vee \overline{Q}(a) \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{l} \overline{P(a) \wedge Q(a)} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}(a) \vee \overline{Q}(a) \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{l} \overline{P}(a) \vee \overline{Q}(a) \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}(a) \vee \overline{Q}(a) \end{array} \equiv \mathbf{1}.$$

Vậy $A \equiv \mathbf{1}$.

• Mô hình suy diễn của công thức A_2 có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(R(x) \to F(x)) \\ (\forall x)((Q(x) \vee F(x)) \to H(x)) \\ (\forall x)\,\overline{H}(x) \\ \hline \therefore\ \ (\forall x)\left(\overline{P}(x) \wedge \overline{R}(x)\right) \end{array} \quad \text{trên M nào đó.} \qquad (*)$$

Lấy a là phần tử (cố định) bất kỳ trong M. Thay x = a vào mô hình trên ta có mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề:

www.thuvien247.net

$$\begin{array}{l} P(a) \to Q(a) \\ R(a) \to F(a) \\ \begin{cases} (Q(a) \vee F(a)) \to H(a) \\ \overline{H}(a) \end{cases} \\ \hline \therefore \quad \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} P(a) \to Q(a) \\ R(a) \to F(a) \\ \overline{Q(a) \vee F(a)} \\ \hline \therefore \quad \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P(a) \to Q(a) \\ \overline{Q}(a) \end{cases} \\ \begin{cases} R(a) \to F(a) \\ \overline{F}(a) \end{cases} \\ \hline \therefore \quad \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{l} \overline{P}(a) \\ \overline{R}(a) \\ \hline \therefore \quad \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \\ \hline \therefore \quad \overline{P}(a) \wedge \overline{R}(a) \end{array} \equiv 1.$$

Vậy theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng thì (*) là đúng.

25. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\,(P_1(x) \to P_2(x)) \\ (\forall x)\,\left(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)\right) \\ (\forall x)\,(P_1(x) \vee P_3(x)) \\ \hline \therefore \quad (\forall x)\,\left(\overline{P}_2(x) \to P_4(x)\right) \end{array} \quad \text{trên trường M.} \qquad (*)$$

a) Viết công thức cơ sở của (*) và chứng minh công thức đó hằng đúng.

b) Chứng minh mô hình suy diễn (*) là đúng bằng cách áp dụng các quy tắc suy diễn.

Giải

a) $A \equiv ((\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)) \wedge (\forall x)(P_1(x) \vee P_3(x)))$

$$\to (\forall x)(\overline{P}_2(x) \to P_4(x))$$

là công thức cơ sở của (*) và công thức cơ sở này là hằng đúng (bài tập 21).

b) Lấy a là phần tử (cố định) bất kỳ trong M, thay x = a vào (*) ta có:

$$\begin{array}{l} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore \quad \overline{P}_2(a) \to P_4(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore \quad P_2(a) \vee P_4(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{P}_4(a) \\ \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \end{cases} \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv$$

www.thuvien247.net

$$\equiv \frac{\begin{matrix}\overline{P}_1(a)\\ \begin{cases}\overline{P}_3(a)\\ P_1(a) \vee P_3(a)\end{cases}\end{matrix}}{\therefore 0} \equiv \frac{\begin{cases}\overline{P}_1(a)\\ P_1(a)\end{cases}}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore \ 0} \equiv 1.$$

Vậy theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng thì mô hình (*) là đúng.

26. Cho

$A \equiv ((\forall x)\,((\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)) \to P_3(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x) \vee P_5(x)) \wedge$
$\wedge (\forall x)((\overline{P}_4(x) \wedge \overline{P}_6(x) \wedge (\overline{P}_6(x) \to \overline{P}_5(x))) \wedge (\forall x)\overline{H}(x)) \to (\forall x)P_1(x).$

Viết mô hình suy diễn của A và chỉ ra mô hình suy diễn đó là đúng.

Giải. Mô hình suy diễn của A là

$$\frac{\begin{matrix}(\forall x)\left(\left(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\right) \to P_3(x)\right)\\ (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x) \vee P_5(x)\right)\\ (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \wedge \overline{P}_6(x) \wedge (\overline{P}_6(x) \to \overline{P}_5(x))\right)\\ (\forall x)\overline{H}(x)\end{matrix}}{\therefore \quad (\forall x)\,P_1(x)} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Lấy $a \in M$ bất kỳ, thay $x = a$, từ (*) ta được mô hình suy diễn của (*) trong lôgic mệnh đề là:

$$\frac{\begin{matrix}\left(\overline{P}_1(a) \vee P_2(a)\right) \to P_3(a)\\ \begin{cases}\overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \vee P_5(a)\\ \overline{P}_4(a) \wedge \overline{P}_6(a) \wedge \left(\overline{P}_6(a) \to \overline{P}_5(a)\right)\end{cases}\\ \overline{H}(a)\end{matrix}}{\therefore \quad P_1(a)} \ (^{**}) \equiv \frac{\begin{matrix}\left(\overline{P}_1(a) \vee P_2(a)\right) \to P_3(a)\\ \begin{cases}\overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \vee P_5(a)\\ \overline{P}_4(a)\end{cases}\\ \overline{P}_5(a)\\ \overline{H}(a)\end{matrix}}{\therefore \quad P_1(a)}$$

$$\equiv \frac{\begin{matrix}\left(\overline{P}_1(a) \vee P_2(a)\right) \to P_3(a)\\ \begin{cases}\overline{P}_3(a) \vee P_5(a)\\ \overline{P}_5(a)\end{cases}\\ \overline{H}(a)\end{matrix}}{\therefore \quad P_1(a)} \equiv \frac{\begin{matrix}\begin{cases}\left(\overline{P}_1(a) \vee P_2(a)\right) \to P_3(a)\\ \overline{P}_3(a)\end{cases}\\ \overline{H}(a)\end{matrix}}{\therefore \quad P_1(a)} \equiv$$

www.thuvien247.net

$$\equiv \frac{P_1(a) \wedge \left(\overline{P}_2(a) \wedge \overline{H}(a)\right)}{\therefore \quad P_1(a)} \equiv \frac{P_1(a)}{\therefore \quad P_1(a)} \equiv 1.$$

Hay mô hình suy diễn trên là đúng. Vì (**) đúng với a ∈ M nên theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng thì (*) là đúng.

27. Mô hình suy diễn dưới đây có đúng không và những quy tắc nào được áp dụng?

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)\left[(\overline{Q}(x) \vee \overline{R}(x)) \to \overline{P}(x)\right] \\ (\forall x)(P(x) \wedge S(x))\end{array}}{\therefore \quad (\forall x)\,(R(x) \wedge S(x))} \text{ trên trường M} \qquad (*)$$

Giải. Lấy a ∈ M là phần tử bất kỳ trong M. Khi đó thay x trong (*) bằng a ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề:

$$(*) \equiv \frac{\begin{array}{l}\left(\overline{Q}(a) \vee \overline{R}(a)\right) \to \overline{P}(a) \\ P(a) \wedge S(a)\end{array}}{\therefore \quad R(a) \wedge S(a)} \equiv \frac{\begin{array}{l}\overline{\overline{Q}(a) \vee \overline{R}(a)} \\ S(a)\end{array}}{\therefore \quad R(a) \wedge S(a)} \equiv \frac{Q(a) \wedge (R(a) \wedge S(a))}{\therefore \quad R(a) \wedge S(a)} \equiv 1$$

(do quy tắc phủ định và theo quy tắc rút gọn).

28. Cho mô hình suy diễn

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)\,(P(x) \vee Q(x)) \\ (\exists x)\,\overline{P}(x) \\ (\forall x)\left(\overline{Q}(x) \vee R(x)\right) \\ (\forall x)\left(S(x) \to \overline{R}(x)\right)\end{array}}{\therefore \quad (\exists x)\,\overline{S}(x)} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Hãy chỉ ra (*) là đúng và những quy tắc nào được áp dụng?

Giải. Lấy a ∈ M sao cho công thức $(\exists x)\overline{P}(x)$ đúng. Khi đó thay x = a trong (*) ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề:

$$\frac{\begin{array}{l}\begin{cases}P(a) \vee Q(a) \\ \overline{P}(a)\end{cases} \\ \overline{Q}(a) \vee R(a) \\ S(a) \to \overline{R}(a)\end{array}}{\therefore \quad \overline{S}(a)} \equiv \frac{\begin{array}{l}\begin{cases}Q(a) \\ \overline{Q}(a) \vee R(a)\end{cases} \\ S(a) \to \overline{R}(a)\end{array}}{\therefore \quad \overline{S}(a)} \equiv \frac{\begin{cases}R(a) \\ S(a) \to \overline{R}(a)\end{cases}}{\therefore \quad \overline{S}(a)} \equiv \frac{\overline{S}(a)}{\therefore \quad \overline{S}(a)} \equiv 1.$$

Các quy tắc tam đoạn luận tuyển và quy tắc phủ định được áp dụng.

www.thuvien247.net

29. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll}
(\forall x)\left(\overline{P}(x) \vee Q(x)\right) & \\
(\forall x)\left(\overline{F}(x) \to \overline{R}(x)\right) & \\
(\forall x)\left(\overline{P(x) \wedge H(x)} \to \overline{F(x) \wedge Q(x)}\right) & \\
(\forall x)\left(P(x) \to \overline{H}(x)\right) & \\
\hline
\therefore \quad (\forall x)\left(\overline{R}(x) \vee \overline{P}(x)\right) & \text{trên trường M.} \qquad (*)
\end{array}$$

Mô hình (*) có đúng không?

Giải. Lấy $a \in M$ là một phần tử cố định bất kỳ trong M, thay $x = a$ vào (*) ta được:

$$\begin{cases}\overline{P}(a) \vee Q(a)\\ P(a)\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
\overline{P}(a) \vee Q(a)\\
\overline{F}(a) \to \overline{R}(a)\\
\overline{P(a) \wedge H(a)} \to \overline{F(a) \wedge Q(a)}\\
P(a) \to \overline{H}(a)\\
\hline
\therefore \quad \overline{R}(a) \vee \overline{P}(a)
\end{array}
\equiv
\begin{array}{l}
\begin{cases}\overline{F}(a) \to \overline{R}(a)\\ R(a)\end{cases}\\
\overline{P(a) \wedge H(a)} \to \overline{F(a) \wedge Q(a)}\\
P(a) \to \overline{H}(a)\\
\hline
\therefore 0
\end{array}$$

$$\equiv
\begin{array}{l}
\begin{cases}F(a) \wedge Q(a)\\ \overline{P(a) \wedge H(a)} \to \overline{F(a) \wedge Q(a)}\end{cases}\\
P(a) \to \overline{H}(a)\\
\hline
\therefore 0
\end{array}
\equiv
\begin{array}{l}
H(a)\\
\begin{cases}P(a)\\ P(a) \to \overline{H}(a)\end{cases}\\
\hline
\therefore 0
\end{array}
\equiv
\begin{array}{l}
H(a) \wedge \overline{H}(a)\\
\hline
\therefore 0
\end{array}
\equiv
\begin{array}{l}
0\\
\hline
\therefore 0
\end{array}
\equiv \mathbf{1}.$$

Vậy mô hình suy diễn trên là đúng theo quy tắc tổng quát phổ dụng.

30. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll}
(\forall x)(P(x) \to Q(x)) & \\
(\forall x)(R(x) \to F(x)) & \\
(\forall x)\left(\left(F(x) \wedge Q(x)\right) \to \left(P(x) \wedge H(x)\right)\right) & \\
(\forall x)\left(H(x) \to \overline{P}(x)\right) & \\
\hline
\therefore \quad (\forall x)\left(\overline{P}(x) \vee \overline{R}(x)\right) & \text{trên trường M.} \qquad (*)
\end{array}$$

a) Mô hình suy diễn trên có đúng không.

b) Viết công thức cơ sở của mô hình trên.

www.thuvien247.net

Giải

a) Lấy $a \in M$ là phần tử bất kỳ (cố định) và thay $x = a$ vào (*) ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề:

$$\begin{array}{l} P(a)\to Q(a)\\ R(a)\to F(a)\\ (F(a)\wedge Q(a))\to(P(a)\wedge H(a))\\ H(a)\to\overline{P}(a)\\ \hline \therefore\quad \overline{P}(a)\vee\overline{R}(a)\end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases}P(a)\to Q(a)\\ P(a)\end{cases}\\ \begin{cases}R(a)\to F(a)\\ R(a)\end{cases}\\ (F(a)\wedge Q(a))\to(P(a)\wedge H(a))\\ H(a)\to\overline{P}(a)\\ \hline \therefore 0\end{array} \equiv$$

$$\equiv \begin{array}{l} \begin{cases}F(a)\wedge Q(a)\\ (F(a)\wedge Q(a))\to(P(a)\wedge H(a))\end{cases}\\ H(a)\to\overline{P}(a)\\ \hline \therefore 0\end{array} \equiv \begin{array}{l} P(a)\wedge H(a)\\ H(a)\to\overline{P}(a)\\ \hline \therefore 0\end{array} \equiv \begin{array}{l} P(a)\\ \begin{cases}H(a)\\ H(a)\to\overline{P}(a)\end{cases}\\ \hline \therefore 0\end{array}$$

$$\equiv \frac{P(a)\wedge\overline{P}(a)}{\therefore 0} \equiv \frac{0}{\therefore\ 0} \equiv 1.$$

Theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng thì mô hình (*) là đúng.

b) $A \equiv ((\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge(\forall x)(R(x)\to F(x))\wedge(\forall x)((F(x)\wedge Q(x))$
$\to (P(x)\wedge H(x)))\wedge(\forall x)(H(x)\to\overline{F}(x)))\to(\forall x)(\overline{P}(x)\vee\overline{R}(x))$.

31. **Chỉ ra mô hình suy diễn dưới đây là đúng trên trường M:**

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{Q}(x)\to P(x)\right)\\ (\exists x)\overline{P}(x)\\ (\forall x)\left(\overline{R}(x)\to\overline{Q}(x)\right)\\ (\forall x)\left(R(x)\to\overline{S}(x)\right)\\ \hline \therefore\quad (\exists x)\overline{S}(x)\end{array} \qquad (*)$$

Giải. Chọn $a \in M$ sao cho $\overline{P}(a)$ đúng. Theo quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng khi thay $x = a$ vào mô hình trên ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề:

$$\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases}\overline{Q}(a)\to P(a)\\ \overline{P}(a)\end{cases}\\ \overline{R}(a)\to\overline{Q}(a)\\ R(a)\to\overline{S}(a)\end{array}}{\therefore\ \overline{S}(a)}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}\begin{cases}Q(a)\\ \overline{R}(a)\to\overline{Q}(a)\end{cases}\\ R(a)\to\overline{S}(a)\end{array}}{\therefore\ \overline{S}(a)}\equiv\dfrac{\begin{cases}R(a)\\ R(a)\to\overline{S}(a)\end{cases}}{\therefore\ \overline{S}(a)}\equiv\dfrac{\overline{S}(a)}{\therefore\ \overline{S}(a)}\equiv 1.$$

Vậy mô hình (*) là đúng trên M.

32. Cho công thức

$$A\equiv((\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge(\forall x)(\overline{Q}(x)\vee R(x))\wedge(\forall x)(\overline{R}(x)\vee F(x))\wedge$$
$$\wedge(\forall x)(\overline{F}(x)\vee H(x))\wedge(\exists x)\overline{H}(x))\to(\exists x)\overline{P}(x).$$

Chứng minh công thức A hằng đúng bằng hai phương pháp:

a) Chỉ ra mô hình suy diễn của A là đúng.

b) Chỉ ra công thức A hằng đúng bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Giải

a) Mô hình suy diễn của A có dạng

$$\dfrac{\begin{array}{l}(\forall x)(P(x)\to Q(x))\\ (\forall x)\left(\overline{Q}(x)\vee R(x)\right)\\ (\forall x)\left(\overline{R}(x)\vee F(x)\right)\\ (\forall x)\left(\overline{F}(x)\vee H(x)\right)\\ (\exists x)\overline{H}(x)\end{array}}{\therefore\ (\exists x)\,\overline{P}(x)}\ \text{trên trường M.}\qquad(*)$$

Giả sử $a\in M$ là phần tử mà mệnh đề $\overline{H}(a)$ đúng. Thay x trong (*) bởi a ta được mô hình suy diễn của công thức A trong lôgic mệnh đề:

$$\dfrac{\begin{array}{l}P(a)\to Q(a)\\ \overline{Q}(a)\vee R(a)\\ \overline{R}(a)\vee F(a)\\ \begin{cases}\overline{F}(a)\vee H(a)\\ \overline{H}(a)\end{cases}\end{array}}{\therefore\ \overline{P}(a)}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}P(a)\to Q(a)\\ \overline{Q}(a)\vee R(a)\\ \begin{cases}\overline{R}(a)\vee F(a)\\ \overline{F}(a)\end{cases}\end{array}}{\therefore\ \overline{P}(a)}\equiv\dfrac{\begin{array}{l}P(a)\to Q(a)\\ \begin{cases}\overline{Q}(a)\vee R(a)\\ \overline{R}(a)\end{cases}\end{array}}{\therefore\ \overline{P}(a)}\equiv\dfrac{\begin{cases}P(a)\to Q(a)\\ \overline{Q}(a)\end{cases}}{\therefore\ \overline{P}(a)}$$

$$\equiv\dfrac{\overline{P}(a)}{\therefore\ \overline{P}(a)}\equiv 1.$$

Vậy mô hình suy diễn (*) là đúng do quy tắc tổng quát hoá phổ dụng.

www.thuvien247.net

b) $A \equiv (\exists x)(P(x) \wedge \overline{Q}(x)) \vee (\exists x)(Q(x) \wedge \overline{R}(x)) \vee (\exists x)(R(x) \wedge \overline{F}(x)) \vee$
$\vee (\exists x)(F(x) \wedge \overline{H}(x)) \vee (\forall x)H(x) \vee (\exists x)\overline{P}(x)$

$$\equiv (\exists x)\left((P(x) \wedge \overline{Q}(x)) \vee (Q(x) \wedge \overline{R}(x)) \vee (R(x) \wedge \overline{F}(x)) \vee (F(x) \wedge \overline{H}(x)) \vee \overline{P}(x)\right) \vee (\forall x)H(x)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left(P(x) \wedge \overline{Q}(x) \vee Q(x) \wedge \overline{R}(x) \vee R(x) \wedge \overline{F}(x) \vee F(x) \wedge \overline{H}(x) \vee \overline{P}(x) \vee H(y)\right)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)((P(x) \vee \overline{P}(x)) \wedge (\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(x)) \vee (F(x) \vee H(y)) \wedge (\overline{H}(x) \vee H(y)) \vee \vee \left(Q(x) \vee R(x) \wedge \overline{F}(x)\right) \wedge \left(\overline{R}(x) \vee R(x) \wedge \overline{F}(x)\right)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left(\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(x) \vee F(x) \vee H(y) \vee Q(x) \vee R(x) \wedge \overline{F}(x)\right)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left((\overline{Q}(x) \vee Q(x)) \vee \overline{P}(x) \vee F(x) \vee H(y) \vee R(x) \wedge \overline{F}(x)\right) \equiv 1.$$

33. Cho

$$A \equiv ((\forall x)(p_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_1(x) \to P_3(x)) \wedge (\forall x)(P_3(x) \to P_4(x))) \to (\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \to P_4(x)\right).$$

Chứng minh A hằng đúng bằng hai phương pháp:
a) Chỉ ra mô hình suy diễn của A là đúng.
b) Bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Giải

a) Mô hình suy diễn của A có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P_1(x) \to F_2(x)) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \to P_3(x)\right) \\ (\forall x)(P_3(x) \to P_4(x)) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \to P_4(x)\right) \end{array} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Lấy $a \in M$ là phần tử bất kỳ trên M, thay $x = a$ trong (*) ta được mô hình suy diễn của A trong lôgic mệnh đề là

$$\begin{array}{l} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_1(a) \to P_3(a) \\ P_3(a) \to P_4(a) \\ \hline \therefore\ \overline{P}_2(a) \to P_4(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \end{cases} \\ \overline{P}_1(a) \to P_3(a) \\ \begin{cases} P_3(a) \to P_4(a) \\ \overline{P}_4(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} \overline{P}_1(a) \\ \overline{P}_1(a) \to P_3(a) \end{cases} \\ \overline{P}_3(a) \\ \hline \therefore\ 0 \end{array} \equiv$$

www.thuvien247.net

$$\equiv \frac{P_3(a) \wedge \overline{P}_3(a)}{\therefore\ 0} \equiv \frac{0}{\therefore\ \ 0} \equiv 1. \text{ Vậy } A \equiv 1.$$

b)

$$A \equiv (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\right) \wedge (\forall x)(P_1(x) \vee P_3(a)) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)\right) \vee$$
$$\vee\, (\forall x)(P_2(x) \vee P_4(x))$$
$$\equiv (\exists x)\Big((P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x)) \vee \left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \vee \left(P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x)\right) \vee (\forall x)(P_2(x) \vee P_4(x)\Big)$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)\Big(\left(P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x)\right) \vee \left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \vee \left(P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x)\right) \vee P_2(y) \vee P_4(y)\Big)$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)\Big((P_1(x) \vee P_2(y) \wedge \left(\overline{P}_2(x) \vee P_2(y)\right) \vee \left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \vee (P_3(x) \vee P_4(y))$$
$$\wedge \left(\overline{P}_4(x) \vee P_4(y)\right)\Big)$$ (do bài tập 1 phần a_1 trong lôgic vị từ)

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\Big((P_1(x) \vee P_2(y) \vee \left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \vee (P_3(x) \vee P_4(y))\Big) \equiv$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)\Big(\left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_1(x)\right) \wedge$$
$$\wedge \left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_3(x)\right)\Big) \equiv 1$$

(do bài tập 1 phần a_1 trong lôgic vị từ).

34. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\right) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \rightarrow \overline{P}_3(x)\right) \\ (\forall x)\left((\overline{P}_2(x) \rightarrow P_4(x)) \rightarrow P_5(x)\right) \\ (\forall x)\overline{P}_5(x) \\ \hline \therefore\ \ (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right) \end{array} \quad \text{trên trường M.} \qquad (*)$$

Chỉ ra mô hình suy diễn trên là đúng.

Giải. Lấy $a \in M$ là phần tử bất kỳ, thay $x = a$ vào (*) ta có mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề là

$$\begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_4(a) \rightarrow \overline{P}_3(a) \\ \left\{\begin{array}{l} \left(\overline{P}_2(a) \rightarrow P_4(a)\right) \rightarrow P_5(a) \\ \overline{P}_5(a) \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \wedge \overline{P}_3(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_4(a) \rightarrow \overline{P}_3(a) \\ \hline \overline{P}_2(a) \rightarrow P_4(a) \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \wedge \overline{P}_3(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \overline{P}_4(a) \rightarrow \overline{P}_3(a) \\ \overline{P}_4(a) \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \wedge \overline{P}_3(a) \end{array} \equiv$$

www.thuvien247.net

$$\equiv \frac{\begin{matrix}\overline{P}_1(a)\\ \overline{P}_3(a)\end{matrix}}{\therefore\ \overline{P_1(a)\wedge\overline{P}_3(a)}} \equiv \frac{\overline{P}_1(a)\wedge\overline{P}_3(a)}{\therefore\ \overline{P_1(a)\wedge\overline{P}_3(a)}} \equiv 1.$$

Vì a là bất kỳ, nên theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng ta có (*) là đúng trên M.

35. Cho mô hình suy diễn:

$$\frac{\begin{matrix}(\forall x)\Big(\big(\overline{P}_1(x)\vee P_2(x)\big)\to P_3(x)\Big)\\ (\forall x)\big(P_3(x)\to(P_4(x)\vee P_5(x))\big)\\ (\forall x)\big(\overline{P}_4(x)\wedge\overline{P}_6(x)\big)\\ (\forall x)\big(\overline{P}_6(x)\to\overline{P}_5(x)\big)\end{matrix}}{\therefore\ (\forall x)P(x)} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Chỉ ra mô hình (*) là đúng trên M.

Giải. Lấy $a \in M$ là phần tử bất kỳ, thay $x = a$ vào (*) ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề là

$$\frac{\begin{cases}\big(\overline{P}_1(a)\vee P_2(a)\big)\to P_3(a)\\ P_3(a)\to(P_4(a)\vee P_5(a))\end{cases}\\ \begin{cases}\overline{P}_4(a)\wedge\overline{P}_6(a)\\ \overline{P}_6(a)\to\overline{P}_5(a)\end{cases}}{\therefore\ P_1(a)} \equiv \frac{\begin{matrix}\big(\overline{P}_1(a)\vee P_2(a)\big)\to\big(P_4(a)\vee P_5(a)\big)\\ \overline{P}_4(a)\\ \overline{P}_5(a)\end{matrix}}{\therefore\ P_1(a)}$$

$$\equiv \frac{\begin{cases}P_1(a)\wedge\overline{P}_2(a)\vee P_4(a)\vee P_5(a)\\ \overline{P}_4(a)\end{cases}\\ \overline{P}_5(a)}{\therefore\ P_1(a)} \equiv \frac{\begin{cases}\overline{P}_5(a)\\ P_1(a)\wedge\overline{P}_2(a)\vee P_5(a)\end{cases}}{\therefore\ P_1(a)}$$

$$\equiv \frac{P_1(a)\wedge\overline{P}_2(a)}{\therefore\ P_1(a)} \equiv \big(P_1(a)\wedge\overline{P}_2(a)\big)\to P_1(a) \equiv \overline{P}_1(a)\vee P_1(a)\vee\overline{P}_2(a) \equiv 1.$$

Vậy theo quy tắc tắc tổng quát hóa phổ dụng thì (*) là đúng.

36. Cho công thức

$$A \equiv ((\forall x)(P_1(x)\to P_2(x))\wedge(\forall x)(\overline{P}_3(x)\vee P_4(x))\wedge(\forall x)(P_1(x)\vee P_3(x))) \to (\forall x)\big(\overline{P}_2(x)\to P_4(x)\big).$$

www.thuvien247.net

Chứng minh công thức A hằng đúng bằng cách:

a) Chỉ ra mô hình suy diễn của A là đúng.

b) Chỉ ra bằng cách biến đổi tương đương.

Giải

a) Mô hình suy diễn có dạng

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)\right) \\ (\forall x)(P_1(x) \vee P_3(x)) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \to P_4(x)\right) \end{array} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Lấy a là phần tử bất kỳ trên M, thay x = a trong (*) ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề

$$\begin{array}{l} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore\ \overline{P}_2(a) \to P_4(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} P_1(a) \to P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ \overline{P}_4(a) \end{cases} \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \\ \overline{P}_3(a) \\ P_1(a) \vee P_3(a) \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{l} \overline{P}_3(a) \\ \begin{cases} \overline{P}_1(a) \\ P_1(a) \vee P_3(a) \end{cases} \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_3(a) \\ P_3(a) \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_3(a) \wedge P_3(a) \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} 0 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \equiv 1.$$

Vậy mô hình suy diễn (*) là đúng do quy tắc tổng quát hóa phổ dụng.

b) $A \equiv ((\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)) \wedge (\forall x)(P_1(x) \vee P_3(x)))$

$$\to (\forall x)(\overline{P}_2(x) \to P_4(x))$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left[P_1(x) \wedge \overline{P}_2(x) \vee P_3(x) \wedge \overline{P}_4(x) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x) \vee P_2(y) \vee P_4(y)\right]$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left((P_1(x) \vee P_2(y)) \wedge \left(\overline{P}_2(x) \vee P_2(y)\right) \vee (P_3(x) \vee P_4(y)) \wedge \left(\overline{P}_4(x) \vee P_4(y)\right) \vee \overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\left(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \left(\overline{P}_1(x) \wedge \overline{P}_3(x)\right)\right)$$

(do bài tập 1, phần a_1)

www.thuvien247.net

$$\equiv (\exists x)(\forall y)\Big((P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_1(x)) \wedge$$

$$\wedge\Big(P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_3(x) \vee P_4(y) \vee \overline{P}_3(x)\Big)\Big) \equiv 1$$ (do bài tập 1, phần a_1).

37. Cho phản ví dụ về mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)P(x) \\ (\forall x)(P(x) \to R(x)) \\ (\forall x)\Big(P(x) \to \big(Q(x) \vee \overline{R}(x)\big)\Big) \\ (\forall x)\big(\overline{Q}(x) \vee \overline{F}(x)\big) \\ \hline \therefore\ (\forall x)F(x) \end{array} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Giải. Lấy a ∈ M, khi đó trong (*) thay x = a ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề có dạng

$$\begin{array}{l} P(a) \\ P(a) \to R(a) \\ P(a) \to \big(Q(a) \vee \overline{R}(a)\big) \\ \overline{Q}(a) \vee \overline{F}(a) \\ \hline \therefore\ F(a) \end{array} . \qquad (*')$$

Ta chọn P(a) = 1, Q(a) = 1, R(a) = 1 và F(a) = 0 thì giả thiết đúng, nhưng kết luận sai. Chứng tỏ mô hình suy diễn (*') là không đúng, hay mô hình (*) là sai.

38. Cho phản ví dụ về mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\big(\overline{P}_1(x) \to P_2(x)\big) \\ (\forall x)(P_2(x) \wedge P_3(x)) \to P_4(x)) \\ (\forall x)(P_5(x) \to P_3(x)) \\ (\exists x)P_1(x) \\ \hline \therefore\ (\exists x)\big(P_4(x) \vee \overline{P}_5(x)\big) \end{array} \text{ trên trường M.} \qquad (*)$$

Giải. Lấy a ∈ M sao cho $P_1(a)$ đúng, thay x = a trong (*) ta được

$$\begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \to P_2(a) \\ P_2(a) \wedge P_3(a) \to P_4(a) \\ P_5(a) \to P_3(a) \\ P_1(a) \\ \hline \therefore\ P_4(a) \vee \overline{P}_5(a) \end{array} \qquad (*')$$

www.thuvien247.net

Chọn $P_4(a) = 0$ và $P_5(a) = 1$ thì kết luận sai.

Từ $P_4(a) = 0$, $P_5(a) = 1$ ta có $P_3(a) = 1$, $P_2(a) = 0$, $P_1(a) = 1$ và giả thiết đúng. Vậy (*') sai, hay mô hình (*) là sai.

39. Cho công thức

$$\Big((\forall x)\big(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\overline{P}_2(x) \vee P_3(x)\big) \wedge (\forall x)\big(P_4(x) \vee \overline{P}_3(x)\big) \wedge$$
$$\wedge (\forall x)\big(\overline{P}_4(x) \vee P_5(x)\big) \wedge (\forall x)\overline{P}_5(x)\Big) \rightarrow (\forall x)\overline{P}_1(x).$$

Viết mô hình suy diễn của A và chứng minh A hằng đúng bằng cách chỉ ra mô hình suy diễn là đúng.

Giải. Mô hình suy diễn của A là

$$\begin{array}{l} (\forall x)\big(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\big) \\ (\forall x)\big(\overline{P}_2(x) \vee P_3(x)\big) \\ (\forall x)\big(\overline{P}_3(x) \vee P_4(x)\big) \\ (\forall x)\big(\overline{P}_4(x) \vee P_5(x)\big) \\ (\forall x)\,\overline{P}_5(x) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\overline{P}_1(x) \end{array} \quad \text{trên trường M.} \qquad (*)$$

Giả sử $a \in M$ là phần tử bất kỳ, thay phần tử a bởi x trong (*) ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề là

$$\begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \vee P_3(a) \\ \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ \begin{cases} \overline{P}_4(a) \vee P_5(a) \\ \overline{P}_5(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \end{array} (**) \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \vee P_3(a) \\ \begin{cases} \overline{P}_3(a) \vee P_4(a) \\ \overline{P}_4(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \begin{cases} \overline{P}_2(a) \vee P_3(a) \\ \overline{P}_3(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \end{array} \equiv \begin{array}{l} \begin{cases} \overline{P}_1(a) \vee P_2(a) \\ \overline{P}_2(a) \end{cases} \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{l} \overline{P}_1(a) \\ \hline \therefore\ \ \overline{P}_1(a) \end{array} \equiv 1.$$

Do (**) đúng với mọi $x = a \in M$ nên (*) đúng trên M theo quy tắc tổng quát hóa phổ dụng.

40. Xét đoạn chương trình bằng Pascal:

www.thuvien247.net

```
While n < > 0 do
    Begin
        x:= x * y;
        n:= n – 1
    End;
Ket_qua := x;
```

Hãy kiểm tra rằng, khi gọi đoạn chương trình trên mà các biến có giá trị x, y, n với n là số tự nhiên thì khi ra khỏi chương trình, biến x sẽ có giá trị xy^n. Dùng phương pháp quy nạp toán học để kiểm tra kết quả trên.

Giải. Đặt P(n) là vị từ "Với bất kỳ số thực x, y; nếu khi con trỏ điều khiển chương trình trở về dòng lệnh while với các giá trị của các biến là x, y, n thì khi ra khỏi chương trình biến x có giá trị xy^n".

Bước 1: P(0): Khi trở về dòng lệnh while với các giá trị của biến là x, y, 0 thì vòng lặp không được thực hiện tiếp và ra khỏi chương trình với giá trị biến x là $x = xy^0$.

Bước 2: Với n = k là một số tự nhiên tùy ý. Ta giả sử P(k) đúng, ta chứng minh P(k + 1) cũng đúng.

Thật vậy, gọi x, y là các số thực tùy ý và giả sử ta trở về dòng lệnh while với giá trị của các biến là x, y, n = k + 1. Do $k \geq 0$ nên $k + 1 > 0$. Như vậy vòng lặp while được thực hiện thêm ít nhất một lần nữa. Sau lần đầu tiên thực hiện ta trở về dòng lệnh while với giá trị các biến là x * y, y, n = k. Do P(k) đúng nên khi ra khỏi chương trình, biến x sẽ có giá trị: $(x * y) * y^k = x * (y^{k+1})$, nghĩa là P(k + 1) cũng đúng. Hay $(\forall n)P(n)$ đúng, tức là khi ta gọi đoạn chương trình trên với các biến lấy giá trị x, y, n thì khi ra khỏi chương trình biến x sẽ có giá trị xy^n.

41. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (*)$$

Giải. Đặt vị từ P(n) là biểu thức (*).

Bước 1: $P(1) \equiv$ "$1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$" là đúng.

Bước 2: Giả sử $P(n) \equiv$ "$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$". Ta chỉ ra P(n + 1) cũng đúng, tức là chỉ ra biểu thức:

$$P(n+1) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ đúng. Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

www.thuvien247.net

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

42. Cho các vị từ $P_1(x) \equiv$ "$x + 1 > x$", $P_2(x) \equiv$ "$x < 2$" và $P_3(x) \equiv$ "$x^2 < 10$" trên trường số $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Tìm giá trị chân lý của các công thức $(\forall x)P_1(x)$, $(\forall x)P_2(x)$, $(\forall x)P_3(x)$ và $(\exists x)P_3(x)$.

b) Tìm miền giá trị đúng E_{P_1}, E_{P_2}, E_{P_3}, $E_{\overline{P_1}}$, $E_{\overline{P_2}}$, $E_{\overline{P_3}}$.

c) Tìm giá trị bé nhất và lớn nhất để công thức $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge P_3(x)$ đúng trên trường số thực.

d) Tìm miền đúng của công thức $\overline{P_1}(x) \wedge \overline{P_2}(x) \wedge \overline{P_3}(x)$.

43. Với mỗi mệnh đề dưới đây, cho biết giá trị chân lý của nó. Phủ định kèm theo có đúng không? Nếu không hãy thay bằng phủ định đúng.

a) Với mọi số thực x, y, nếu $x^2 > y^2$ thì $x > y$.

Phủ định: Tồn tại số x, y sao cho $x^2 > y^2$ nhưng $x \leq y$.

b) Với mọi số thực x, nếu $x \neq 0$ thì x có nghịch đảo.

Phủ định: Tồn tại số thực $x \neq 0$ mà không có nghịch đảo.

c) Tồn tại hai số nguyên lẻ có tích là số lẻ.

Phủ định: Tích của hai số lẻ bất kỳ là số lẻ.

d) Bình phương của mọi số hữu tỷ là số hữu tỷ.

Phủ định: Tồn tại số thực x sao cho nếu x vô tỷ thì x^2 vô tỷ.

44. Viết các mệnh đề và phủ định của nó trong bài tập 43 dưới dạng công thức trong lôgic vị từ.

45. Cho $P(x) \equiv$ "x chia hết cho 2" và $Q(x) \equiv$ "x chia hết cho 3" trên trường số tự nhiên.

a) Phát biểu bằng lời các mệnh đề:

$$\overline{P}(x),\ P(x) \vee Q(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \to Q(x) \text{ và } P(x) \equiv Q(x).$$

b) Tìm các miền đúng: $E_{\overline{P}}$, $E_{P \vee Q}$, $E_{P \wedge Q}$, $E_{P \to Q}$ và $E_{P \equiv Q}$.

45. Chứng minh:

$$\text{a) } \overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\,\overline{P}(x);$$

$$\text{b) } \overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\,\overline{P}(x)$$

dựa trên khái niệm miền đúng E_p, $E_{\overline{P}}$ của P.

47. Tìm miền đúng của các mệnh đề:

a) "n chia hết cho 2 và 3"; "n chia hết cho 5"; "n là ước của 12"; "$n(2n^2 - 3n + 1) = 0$" trên trường số tự nhiên.

b) "$x = y$"; "$x.y \geq 0$"; "$x \leq y$"; $|x + y| = 1$ trên trường số thực.

www.thuvien247.net

48. 1) Cho hai mệnh đề xác định trên trường số thực:

$$P(x) \equiv "x - 3 \geq 0" \text{ và } Q(x) \equiv "x^2 - 7x + 10 \leq 0".$$

Tìm giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất để các mệnh đề: $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$ và $P(x) \equiv Q(x)$ đúng.

2) Cho hai mệnh đề sau trên trường số thực:

$$P(x, y) \equiv "x + y = 2" \text{ và } Q(x, y) \equiv "2x + y = 3".$$

Hãy xác định miền đúng của các mệnh đề phức hợp: $P(x, y) \wedge Q(x, y)$, $P(x, y) \vee Q(x, y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

3) Cho $P(x) \equiv "5x^2 - 3x + 2"$ và $Q(x) \equiv "x^2 - 2x"$ trên trường số thực.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các mệnh đề:

$P(x) \leq 0$, $Q(x) \leq 0$, $(P(x) \leq 0) \wedge (Q(x) \leq 0)$,
$(P(x) \leq 0) \vee (Q(x) \leq 0)$, $(P(x) \leq 0) \rightarrow (Q(x) \leq 0)$ và
$(P(x) \leq 0) \equiv (Q(x) \leq 0)$ trên trường trường số thực.

b) Xét tính đúng, sai dựa trên khái niệm miền đúng của các mệnh đề sau: $(\exists x)(P(x) = 0)$, $(\exists x)(Q(x) = 0)$, $(\forall x)(|P(0)| > 0)$ và $(\forall x)(|P(x)| + |Q(x)| > 0)$.

49. Diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường và xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $(\forall x)(|x| > 0)$; b) $(\exists x)(|x| \leq 0)$;
c) $(\exists x)(\forall x)(x + y) = 1)$; d) $(\forall y)(\exists x)\ (x + y = 1)$;
e) $(\forall n)(\exists m)\ (n < m)$; f) $(\exists n)(\forall m)\ (n \leq m)$.

trên trường số thực đối với a, b, c, d và trên trường số tự nhiên đối với e và f.

50. Chứng minh tính đúng đắn của công thức [21] đến công thức [34] trong mục 1, §3 của lôgic vị từ (trừ các công thức đã được chứng minh trong bài tập giải mẫu).

51. Chứng minh rằng:

a) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \not\equiv (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$;
b) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \not\equiv (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$;
c) $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)\ Q(x) \not\equiv (\forall x)(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$.

52. Xác định giá trị chân lý của các công thức dưới đây trên trường số thực:

a) $(\exists! x)\ (x > 1)$; b) $(\exists! x)\ (x^2 = 1)$;
c) $(\exists! x)\ (x + 3 = 2x)$; d) $(\exists! x)\ (x = x + 1)$;
e) $(\exists! x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$; f) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists! x)P(x)$;
h) $(\exists! x)\overline{P}(x) \rightarrow (\exists x)\overline{P}(x)$.

53. Cho các mệnh đề trên trường $M = \{a, b, c\}$:

a) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)F(x, y, z) \rightarrow (\exists z)(\forall x)(\forall y)\ F(x, y, z))$;

www.thuvien247.net

b) $((\forall x)(\forall y)\,P(x,y) \vee (\exists x)(\exists y)\,Q(x,y)) \to ((\forall x)R(x) \to (\exists x)F(x))$.
Hãy đưa các mệnh đề trên về mệnh đề tương đương không còn các lượng từ $\forall$, $\exists$, chỉ có các phép toán $\vee$, $\wedge$, $-$, riêng phủ định chỉ liên quan trực tiếp tới từng vị từ cụ thể trên trường M và mệnh đề tương đương đó có DCTH và DCTT.

54. Cho công thức

$$A \equiv ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \to ((\exists x)(P(x) \to Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee \overline{Q}(x))).$$

Thực hiện các phép biến đổi tương đương sau đây đối với A:

a) Khử phép toán kéo theo ($\to$).

b) Đưa phép toán phủ định ($-$) về trực tiếp liên quan tới từng biến vị từ P, Q.

c) Đưa các lượng từ $\forall$, $\exists$ lên trước các phép toán lôgic $\vee$, $\wedge$, $-$.

Công thức nhận được sau khi thực hiện a), b) và c) gọi là công thức dạng chuẩn của A. Tìm công thức dạng chuẩn của $\overline{A}$.

55. Cho công thức

$$A \equiv ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall x)\left(\overline{P(x) \vee Q(x)}\right)).$$

a) Tìm DCTH và DCTT của A.

b) Từ câu a hãy tìm DCTH, DCTT của $\overline{A}$.

56. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\left(\overline{P}_1(x) \vee P_2(x)\right) \to \left(P_3(x) \wedge P_4(x)\right)\right) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \vee P_5(x)\right) \\ (\exists x)\,\overline{P}_5(x) \\ \hline \therefore\quad (\exists x)\,P_1(x) \end{array}$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên.

b) Kiểm tra tính đúng đắn của mô hình trên thông qua kiểm tra tính hằng đúng của công thức cơ sở trong câu a.

c) Trực tiếp kiểm tra mô hình trên bằng các quy tắc suy diễn.

57. a) Cho công thức

$$A \equiv ((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \to ((X \to (Y \to X)) \vee ((\forall x)\overline{P}(x) \wedge (\forall x)\overline{Q}(x))).$$

Công thức A có hằng đúng không? Hãy trả lời câu hỏi trên bằng phương pháp biến đổi tương đương.

b) Chứng minh công thức A trong bài tập 19 là hằng đúng bằng cách áp dụng mô hình suy diễn.

58. a) Cho công thức

$$A \equiv (\forall x)((P_1(x) \to P_3(x)) \wedge (P_2(x) \to P_3(x))) \to (\forall x)((P_1(x) \vee P_2(x)) \to P_3(x))$$

Công thức A có hằng đúng không? Hãy trả lời câu hỏi trên bằng cách kiểm tra mô hình suy diễn của công thức A.

www.thuvien247.net

b) Chứng minh công thức A trong bài tập 20 là hằng đúng bằng cách áp dụng mô hình suy diễn.

59. a) Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\ (\forall x)(P_3(x) \to P_4(x)) \\ (\forall x)\overline{P}_5(x) \\ \underline{(\forall x)\left(\left(\overline{P}_2(x) \to P_4(x)\right) \to P_5(x)\right)} \\ \therefore\quad (\forall x)\left(\overline{\overline{P}_1(x) \to P_3(x)}\right) \end{array}$$

Kiểm tra tính đúng đắn của mô hình trên bằng phương pháp biến đổi tương đương và phương pháp mô hình suy diễn.

b) Kiểm tra tính hằng đúng của công thức A trong bài tập 21 bằng mô hình suy diễn.

60. a) Cho công thức

$$A \equiv \left((\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \to P_2(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \vee P_3(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \to \overline{P}_3(x)\right) \wedge (\forall x)\left(P_4(x) \to P_5(x)\right) \wedge (\exists x)\overline{P}_5(x)\right) \to (\exists x)\overline{P}_1(x).$$

Kiểm tra tính hằng đúng của công thức A bằng mô hình suy diễn và bằng phép biến đổi tương đương.

b) Dùng mô hình suy diễn, hãy chứng minh công thức A trong bài tập 22 là hằng đúng.

61. Cho công thức

$$A \equiv \left((\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \to \overline{P}_1(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \to P_1(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \to \overline{P}_3(x)\right)\right) \to$$
$$\to (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \to \overline{P}_2(x)\right)$$

a) Viết mô hình suy diễn của A.

b) Kiểm tra tính hằng đúng của A bằng phương pháp biến đổi tương đương và phương pháp mô hình suy diễn.

62. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{P}(x) \vee \overline{\left(\overline{Q}(x) \vee \overline{R}(x)\right)}\right) \\ \underline{(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)R(x)} \\ \therefore\quad (\forall x)(R(x) \wedge F(x)) \end{array}$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên.

b) Chỉ ra mô hình trên là đúng bằng cách chứng minh công thức cơ sở của nó là hằng đúng.

www.thuvien247.net

63. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \to P_2(x)\right) \\ (\forall x)\overline{P}_1(x) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \to \overline{P}_2(x)\right) \\ (\forall x)(P_3(x) \to \overline{P}_4(x) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\,\overline{P}_4(x) \end{array}.$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình suy diễn trên và chứng minh công thức cơ sở của nó là hằng đúng.

b) Chỉ ra mô hình suy diễn trên là đúng bằng cách áp dụng quy tắc suy diễn.

64. Hãy kiểm tra các mô hình suy diễn sau đây bằng cả hai phương pháp suy diễn và biến đổi tương đương:

a) $$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)\,\overline{Q}(x) \\ (\forall x)\,\overline{R}(x) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\left(\overline{P}(x) \wedge \overline{R}(x)\right) \end{array};$$

b) $$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)\left(R(x) \to \overline{Q}(x)\right) \\ (\exists x)\,R(x) \\ \hline \therefore\ (\exists x)\,\overline{P}(x) \end{array};$$

c) $$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) \\ (\forall x)\left(Q(x) \vee \overline{P}(x)\right) \\ (\forall x)\,P(x) \\ \hline \therefore\ (\forall x)R(x) \end{array};$$

d) $$\begin{array}{l} (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \\ (\forall x)\left(P(x) \to (R(x) \wedge Q(x))\right) \\ (\forall x)\,(R(x) \to (S(x) \vee F(x))) \\ (\exists x)\,\overline{S}(x) \\ \hline \therefore\ (\exists x)F(x) \end{array};$$

e) $$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x) \vee R(x)\right) \\ (\forall x)\left(P(x) \vee (S(x))\right) \\ (\forall x)\,(\overline{F}(x) \to Q(x))) \\ (\exists x)\,\overline{S}(x) \\ \hline \therefore\ (\exists x)\,(F(x) \to R(x)) \end{array};$$

f) $$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{Q}(x) \to P(x)\right) \\ (\forall x)\left(\overline{R}(x) \to \overline{P}(x)\right) \\ (\forall x)\overline{R}(x) \\ \hline \therefore\ (\forall x)Q(x) \end{array}.$$

65. Cho công thức

$$A \equiv \left((\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \to P_1(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \to P_3(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \to P_3(x)\right)\right) \to (\forall x)\left(\overline{P}_4(x) \to P_2(x)\right).$$

www.thuvien247.net

a) Viết mô hình suy diễn của A và chỉ ra mô hình suy diễn là đúng.
b) Chứng minh A hằng đúng bằng phương pháp biến đổi tương đương.

66. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l}
(\forall x)\left(\overline{P_2}(x) \to \overline{P_1}(x)\right) \\
(\forall x)\left(\overline{P_4}(x) \to \overline{P_3}(x)\right) \\
(\forall x)\,(P_1(x) \to \overline{P_5}(x) \\
(\forall x)\left(\overline{P_1(x) \wedge P_5(x)} \to \left(\overline{P_4}(x) \vee \overline{P_2}(x)\right)\right) \\
\hline
\therefore\ (\forall x)\,\overline{P_3(x) \wedge P_1(x)}
\end{array}.$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình trên và kiểm tra tính đúng đắn của mô hình đó bằng phương pháp biến đổi tương đương.
b) Mô hình suy diễn trên có đúng không?

67. Cho công thức

$$\begin{array}{l}
(\forall x)\left(\overline{P_2}(x) \to \overline{P_1}(x)\right) \\
(\forall x)\,(P_1(x) \vee P_3(x)) \\
(\forall x)\left(\overline{P_4}(x) \to \overline{P_3}(x)\right) \\
\hline
\therefore\ (\forall x)\left(\overline{P_4}(x) \to P_2(x)\right)
\end{array}.$$

a) Viết công thức cơ sở của mô hình.
b) Chứng minh mô hình trên đúng bằng cách chỉ ra công thức cơ sở là hằng đúng.

68. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l}
(\forall x)\left(P_1(x) \wedge P_2(x)\right) \\
(\forall x)\,(P_1(x) \to (P_3(x) \wedge P_2(x)) \\
(\forall x)\left(\overline{P_3}(x) \vee P_4(x) \vee P_5(x)\right) \\
(\exists x)\,\overline{P_4}(x) \\
\hline
\therefore\ (\exists x)\,P_5(x)
\end{array}.$$

a) Mô hình suy diễn trên có đúng không?
b) Nếu đúng thì khẳng định một lần nữa thông qua chứng minh công thức cơ sở của nó cũng là hằng đúng.

69. a) Chứng minh công thức sau là hằng đúng:

$$A \equiv \left((\forall x)\left(\overline{P_2}(x) \to \overline{P_1}(x)\right) \wedge (\forall x)\left(P_3(x) \to P_4(x)\right) \wedge (\forall x)\left(\overline{P_1}(x) \to P_3(x)\right)\right) \to (\forall x)\left(\overline{P_4}(x) \to P_2(x)\right).$$

www.thuvien247.net

b) Viết mô hình suy diễn của công thức trên và chỉ ra mô hình suy diễn của nó cũng đúng.

70. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\,(P_1(x) \equiv P_2(x)) \\ (\forall x)\,(P_2(x) \rightarrow P_3(x)) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_3(x) \rightarrow \overline{P}_4(x)\right) \\ (\forall x)\left(\overline{P}_2(x) \rightarrow P_4(x)\right) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\,P_4(x) \end{array}$$

a) Chỉ ra mô hình suy diễn không đúng bằng cách chọn một bộ giá trị đúng, sai của các vị từ cụ thể có mặt trong mô hình trên mà giả thiết đúng nhưng kết luận sai.

b) Khẳng định một lần nữa bằng cách thông qua việc chỉ ra công thức cơ sở của mô hình trên là không hằng đúng bằng cách áp dụng phương pháp biến đổi tương đương.

71. Cho công thức

$$A \equiv \Big((\forall x)\,P_1(x) \wedge (\forall x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \wedge (\forall x)\big[P_1(x) \rightarrow \big(P_3(x) \vee \overline{P}_2(x)\big)\big] \wedge$$
$$\rightarrow (\forall x)\big(\overline{P}_3(x) \vee \overline{P}_4(x)\big)\Big) \rightarrow (\forall x)P_4(x).$$

a) Chỉ ra công thức A là không hằng đúng.

b) Khẳng định một lần nữa bằng cách chỉ ra mô hình suy diễn của công thức trên cũng không đúng.

72. Cho mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} (\forall x)\left(\overline{P}_1(x) \rightarrow P_2(x)\right) \\ (\forall x)((P_2(x) \wedge P_3(x)) \rightarrow P_4(x)) \\ (\forall x)\,(P_5(x) \rightarrow P_3(x)) \\ (\forall x)\,P_1(x) \\ \hline \therefore\ (P_5(x) \rightarrow P_4(x)) \end{array}$$

a) Chỉ ra mô hình suy diễn trên không đúng.

b) Khẳng định một lần nữa bằng cách chỉ ra công thức cơ sở của mô hình suy diễn là không hằng đúng.

73. Dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh rằng:

a) $0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

www.thuvien247.net

b) $1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

c) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$;

d) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

74. Xét vị từ P(n) ≡ "n vật bất kỳ thì đồng nhất với nhau, trong đó n là biến nguyên, $n \geq 1$".

Chứng minh: $(\forall n \geq 1)P(n)$ đúng.

75. Đặt các số 1, 2, ..., 25 trên một vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn luôn có ba số liên tiếp có tổng ≥ 39.

76. Chứng minh các bất đẳng thức sau với $n \in \mathbb{N}$:

a) Nếu $n > 3$ thì $2^n < n!$; b) Nếu $n > 4$ thì $n^2 < 2^n$;

c) Nếu $n > 9$ thì $n^3 < 2^n$.

77. Chứng minh rằng tích ba số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 6.

78. Chứng minh các đẳng thức sau với $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$;

b) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

79. Xét các tổng:

$1 = 1$;

$2 + 3 + 4 = 1 + 8$;

$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$;

$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$.

Từ đó suy ra một công thức tổng quát dưới dạng vị từ theo một biến nguyên và chứng minh công thức này.

80. Xét đoạn chương trình Pascal:

```
While n < > 0 do
Begin
    x: x + y;
    n:= n – 1
End;
Ket_qua: x;
```

Chứng minh rằng, khi gọi đoạn chương trình trên với các biến x, y lấy giá trị thực và biến n là số tự nhiên thì khi ra khỏi đoạn chương trình, biến Ket_qua được gán giá trị x + ny.

www.thuvien247.net

PHỤ LỤC

MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC (ĐHQGHN)

Môn thi: CƠ BẢN – NGÀNH CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NĂM 2000

(Thời gian 180 phút)

Câu 1: 1. Hãy lập bảng giá trị của công thức mệnh đề sau:

$$((P \to Q) \to R) \to S.$$

2. Hãy biến đổi tương đương để đưa công thức sau về dạng: không có các dấu tương đương ($\cong$); không có các dấu kéo theo ($\to$); không kể các dấu lượng từ thì nó là tuyển của các thành phần, mà mỗi thành phần này lại là hội của các công thức không chứa dấu tuyển ($\vee$) và dấu hội ($\wedge$):

$\sim(\forall x)P(x, y) \cong Q(y)$, ở đây dấu $\sim$ chỉ toán tử phủ định.

Câu 2: Cho ngôn ngữ chính quy trên bảng chữ cái {0, 1}, gồm tất cả các từ chứa ít nhất một ký hiệu 1.

1. Hãy biểu diễn ngôn ngữ đó bởi biểu thức chính quy.
2. Hãy tìm văn phạm tuyến tính sinh ra ngôn ngữ đó.
3. Hãy xác định ôtômat hữu hạn đoán nhận ngôn ngữ đó.

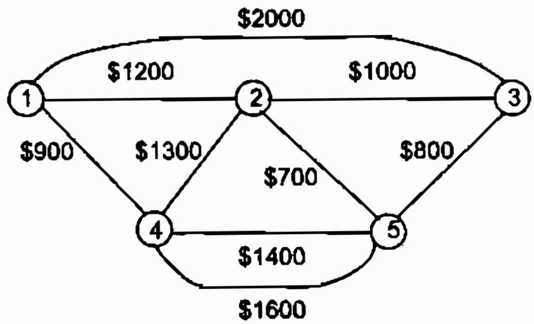
Câu 3: Cho ngôn ngữ phi ngữ cảnh $L = \{a^n0^kb^nc^md^m \mid n, m > 0, k \geq 0\}$.

1. Hãy tìm văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra ngôn ngữ L.
2. Hãy đưa ra một dẫn suất chứng tỏ từ $a^30^2b^3c^2d^2$ được sinh ra bởi văn phạm vừa tìm được ở trên.

Câu 4: 1. Định nghĩa cây khung nhỏ nhất trong đồ thị liên thông có trọng số.

2. Mô tả các bước làm việc của thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị liên thông có trọng số.

3. Cho đồ thị G = <X, U> liên thông có trọng số (hình 1). Mỗi đỉnh i là một trung tâm máy tính (i = 1, 2, 3, 4, 5). Mỗi cạnh là một đường truyền thông được thuê bao, còn trọng số của mỗi cạnh là tiền thuê bao hàng tháng (tính bằng đôla) của đường truyền thông được biểu thị bằng cạnh đó. Hãy thiết kế lại mạng truyền thông nối 5 trung tâm máy tính trên sao cho tiền thuê bao hàng tháng là tối thiểu.



Hình 1

4. Hãy tìm cây khung nhỏ nhất đi qua cạnh nối đỉnh 4 và 5 với trọng số cạnh là $1600 của đồ thị G = <X, U> trên.

Câu 5: 1. Mô tả các bước làm việc của thuật toán tìm cây khung cực đại trong đồ thị liên thông có trọng số, ở đây cây khung cực đại của đồ thị liên thông có trọng số là cây khung có trọng số lớn nhất trong tất cả các cây khung có trọng số của đồ thị.

2. Tìm cây khung cực đại của đồ thị cho trong phần 3 của câu 4.

www.thuvien247.net

NĂM 2002

(Thời gian 180 phút)

Câu 1: 1. Cho công thức $(\forall x)P(x, 4) \vee \overline{(\forall x)(\exists y)P(x,y)}$, với $x \in \{1, 2, 3\}$. Hãy biến đổi tương đương công thức trên thành công thức không còn các lượng từ, mà chỉ có các phép toán hội ($\wedge$), tuyển ($\vee$) và phép phủ định ($-$). Riêng phép phủ định chỉ liên quan trực tiếp tới các vị từ cụ thể trên trường $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$.

2. Cho công thức

$$A \equiv ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \vee (X \rightarrow (Y \rightarrow X))) \rightarrow \overline{(\forall x)(P(x) \vee Q(x))}$$

với $P(x)$, $Q(x)$ là vị từ một biến; còn X, Y là các mệnh đề sơ cấp. Thực hiện các phép biến đổi tương đương sau đây đối với A:

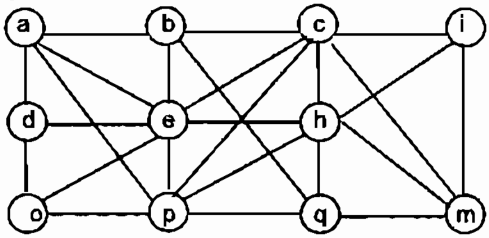
a) Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$).

b) Đưa phép toán phủ định ($-$) về trực tiếp liên quan tới các vị từ và các mệnh đề sơ cấp.

c) Đưa lượng từ $\forall$, $\exists$ lên đứng trước mọi phép toán lôgic khác.

Câu 2: 1. Phát biểu (không chứng minh) điều kiện cần và đủ để một đồ thị vô hướng có chu trình Euler. Cho ví dụ minh họa.

2. Cho đồ thị như hình 1 và cho công thức Euler $r = e - v + 2$, ở đây e là số cạnh, v là số đỉnh của đồ thị đơn, phẳng và liên thông G, còn r là số miền trong biểu diễn phẳng của G. Tìm r có đồ thị cho ở hình 1.



Hình 1

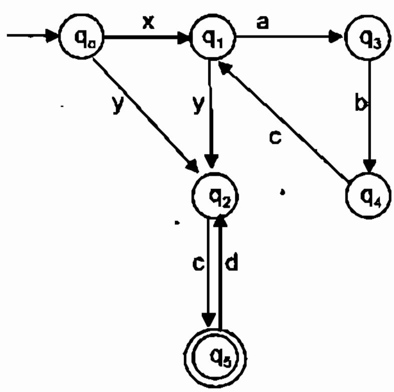
3. Phát biểu thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y trong đồ thị liên thông không có trọng số, ở đây độ dài của đường đi từ đỉnh x đến đỉnh y là số cạnh có mặt trong đường đó. Áp dụng thuật toán vừa phát biểu ở trên, hãy chỉ ra đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh m trong đồ thị (hình 1). Có bao nhiêu đường như vậy.

Câu 3: Cho ôtômat hữu hạn trạng thái M với hàm chuyển trạng thái như hình 2.

1. Tìm ngôn ngữ đoán nhận L(M) của M.

2. Xây dựng văn phạm chính quy $G = \langle \Sigma, \Delta, I, R \rangle$ sao cho ngôn ngữ sinh $L(G) = L(M)$ (văn phạm chính quy là văn phạm có tập quy tắc $R = \{A \rightarrow aB, D \rightarrow b \mid A, B, D \in \Delta;\ a, b \in \Sigma$ và $\Sigma \cap \Delta = \varnothing\}$, ở đây Δ là tập các ký tự không kết thúc, Σ là tập các ký tự kết thúc, $I \in \Delta$ là ký tự ban đầu của văn phạm).

3. Cho xâu ω = xabcycdc. Hãy chỉ ra xâu ω do văn phạm chính quy G sinh ra và M đoán nhận xâu đó.



Hình 2

www.thuvien247.net

NĂM 2002

(Thời gian 180 phút) – Dự trữ

Câu 1: 1. Cho công thức

$$A \equiv ((\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow ((\forall x)F(x) \wedge (\exists x)(R(x) \rightarrow \overline{P}(x))).$$

Thực hiện các phép biến đổi tương đương sau đây đối với A:

a) Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$).

b) Đưa phép toán phủ định ($-$) về trực tiếp liên quan tới từng biến vị từ P, Q, R, F.

c) Đưa các lượng từ $\forall, \exists$ lên trước các phép toán $\wedge, \vee, -$.

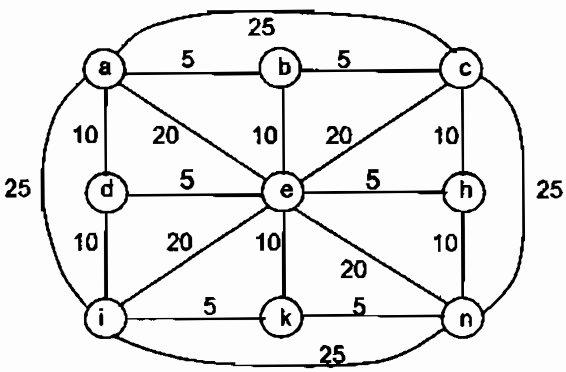
d) Tìm dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của A.

2. Chỉ ra trên trường M = {a, b, c} ta luôn có:

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)).$$

3. Suy luận dưới đây có đúng không? Những quy tắc suy diễn nào được áp dụng:

$$\begin{array}{l} \overline{X}_1 \vee X_2 \\ X_3 \vee \overline{X}_2 \\ X_4 \vee \overline{X}_3 \\ \underline{(\overline{X}_4 \vee X_5) \wedge \overline{X}_5} \\ \therefore \overline{X}_1 \end{array}$$



Hình 1

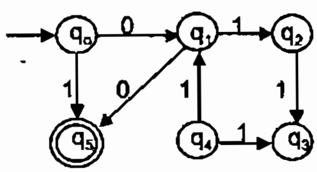
Câu 2: 1. Chứng minh rằng, nếu trong đồ thị vô hướng G = <X, U> có số đỉnh |X| = n ≥ 2 và có tổng bậc của hai đỉnh bất kỳ đều không nhỏ hơn n thì G = <X, U> là đồ thị liên thông.

2. Cho đồ thị đơn liên thông có trọng số như hình 1. Áp dụng thuật toán Prim tìm cây khung bé nhất của đồ thị đó.

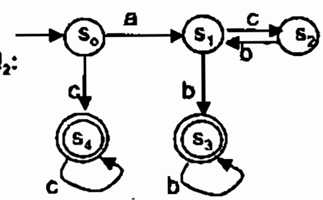
3. Cây khung cực đại của đồ thị vô hướng liên thông có trọng số là cây khung có trọng số lớn nhất trong tất cả các cây khung có trọng số của đồ thị. Hãy đề xuất thuật toán tương tự như thuật toán Prim để tìm cây khung cực đại của đồ thị vô hướng liên thông có trọng số. Áp dụng tìm cây khung cực đại của đồ thị cho ở hình 1.

Câu 3: Cho hai ôtômat sau đây:

M_1:



M_2:



1. Tìm ngôn ngữ đoán nhận $L(M_1)$ của M_1 và ngôn ngữ đoán nhận $L(M_2)$ của M_2.

2. Xây dựng ôtômat M từ ôtômat M_1 và ôtômat M_2 (theo thuật toán Thompson) sao cho: $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.

3. Xây dựng văn phạm chính quy G_1 và G_2 sao cho: $L(G_1) = L(M_1)$ và $L(G_2) = L(M_2)$.

www.thuvien247.net

NĂM 2003

(Thời gian 180 phút)

Câu 1: 1. Cho công thức

$$A \equiv \overline{((\forall x)P(x) \to (\exists x)(\overline{P}(x) \land Q(x))) \to ((\forall x)(R(x) \to F(x)) \land (\forall x)F(x)) \lor (X \to X)}.$$

Thực hiện các phép biến đổi tương đương sau đây đối với A:

a) Khử phép toán kéo theo ($\to$).

b) Đưa phép toán phủ định ($-$) về trực tiếp liên quan tới từng biến mệnh đề X và từng biến vị từ P, Q, R, F.

c) Đưa các lượng từ $\forall$, $\exists$ lên trước các phép toán lôgic $\land$, $\lor$, $-$.

d) Tìm dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển của A, từ đó viết dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của $\overline{A}$..

2. Cho các vị từ P(x): "$3 \le x \le 5$"; Q(x): "$x \ge 2$" và F(x): "$x \le 8$" trên trường M = {1, 2, 3...}.

a) Tìm tập các giá trị của x trên trường M để công thức $P(x) \land Q(x) \land F(x)$ đúng.

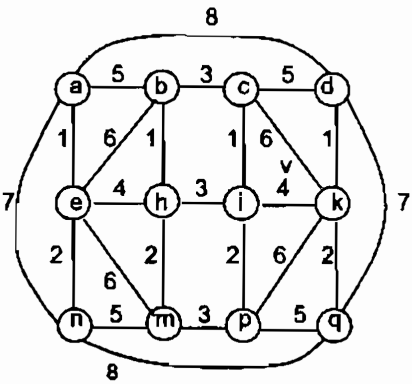
b) Tìm giá trị bé nhất của x trên trường M để công thức $(\forall x)P(x) \to (F(x) \land Q(x))$ đúng.

3. a) Chỉ ra suy diễn dưới đây là đúng:

$$\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ \overline{X}_1 \to X_3 \\ X_3 \to X_4 \\ \hline \therefore \overline{X}_2 \to X_4 \end{array}.$$

b) Chuyển mô hình suy diễn trên về dạng công thức hằng đúng tương đương.

Câu 2: 1. Chứng tỏ rằng, nếu đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh bậc lẻ này phải liên thông.



Hình 1

2. Cho mạng truyền thông như hình 1. Trong mạng truyền thông này, mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, mỗi cạnh nối hai đỉnh là một đường thuê bao và trọng số của mỗi cạnh là tiền thuê bao phải trả hàng tháng giữa hai trung tâm máy tính tương ứng với hai đỉnh đó. Áp dụng thuật toán Prim để thiết kế lại mạng truyền thông cho ở hình 1, sao cho tiền thuê bao hàng tháng phải trả là ít nhất.

3. Xem mạng truyền thông ở hình 1 như là một đồ thị. Tìm số màu tối thiểu để tô màu các đỉnh của đồ thị trong hình 1, sao cho hai đỉnh kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau.

Câu 3: Cho ngôn ngữ phi ngữ cảnh L = {$\omega d \hat{\omega}$ | $\omega \in \{a,b,c\}^*$ & $\hat{\omega}$ là ảnh gương của xâu ω}, ở đây $\hat{\omega}$ nhận được từ ω bằng cách viết theo thứ tự ngược lại.

1. Xây dựng văn phạm phi ngữ cảnh G = <Σ, Δ, I, R> (đầy đủ theo định nghĩa) sao cho ngôn ngữ sinh L(G) = L.

2. Xây dựng ôtômat đẩy xuống (Pushdown Automata) M, sao cho ngôn ngữ đoán nhận L(M) = L(G) = L theo ngăn xếp rỗng, với L(M) là ngôn ngữ đoán nhận của ôtômat đẩy xuống M.

3. Cho hai xâu: ω_1 = aababbccdccbbabaa và ω_2 = ababbcccdcccbbabaa.

Chỉ ra $\omega_1 \in L(G)$ và $\omega_1 \in L(PA)$, còn xâu $\omega_2 \notin L(G)$ và $\omega_2 \notin L(PA)$.

4. Xây dựng cây cú pháp của xâu ω_1 đối với văn phạm phi ngữ cảnh G cho ở trên.

www.thuvien247.net

NĂM 2004

(Thời gian 180 phút)

Câu 1: 1. Cho mô hình suy diễn trong lôgic vị từ:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(\overline{P}(x)\rightarrow Q(x)) \\ (\exists x)\overline{P}(x) \\ (\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x)) \\ \underline{(\forall x)(S(x)\rightarrow \overline{R}(x))} \\ \therefore (\exists x)S(x) \end{array} \qquad (*)$$

ở đây P(x), Q(x), R(x), S(x) là các vị từ một biến sinh ra trên trường M.

a) Viết công thức cơ sở của mô hình suy diễn (*) và tìm dạng chuẩn tắc tuyển của công thức cơ sở đó.

b) Mô hình suy diễn trên có đúng trên trường M không, những quy tắc suy diễn nào được áp dụng trong mô hình đó?

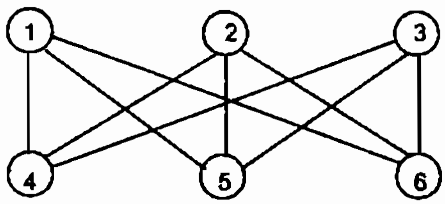
2. Hãy diễn đạt định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ dưới dạng một công thức vị từ.

3. Chỉ ra rằng công thức $\overline{(\forall x)P(x)}$ tương đương với công thức $(\exists x)\overline{P}(x)$ trên trường $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Câu 2: 1. Định nghĩa đồ thị đơn, đồ thị phẳng, các khái niệm liên thông đối với đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng.

2. Cho G = <X, U> là đồ thị đơn, phẳng và liên thông, có m cạnh, n đỉnh và không có chu trình độ dài 3. Chứng minh rằng ta luôn có $m \le 2n - 4$ nếu $n \ge 3$.

3. Cho đồ thị G = <X, U> dưới dạng



Hình 1

Bằng cách áp dụng phần 2 câu 2 chứng minh rằng đồ thị G = <X, U> cho ở hình 1 là không phẳng.

Câu 3: 1. Cho văn phạm phi ngữ cảnh G = <Σ, Δ, I, R>, với tập quy tắc sinh R = {I → aIa, I → bIb, I → cIc, I → d}. Hãy viết đầy đủ văn phạm G theo định nghĩa và tìm ngôn ngữ sinh L(G) của G.

2. Xây dựng văn phạm phi ngữ cảnh chuẩn G* = <Σ, Δ*, I, R*> tương đương với văn phạm G = <Σ, Δ, I, R> với tập quy tắc sinh R cho ở trên.

3. Xây dựng ôtômat đẩy xuống (Pushdown Automata) M đoán nhận ngôn ngữ L(G) trong phần 1, câu 3 theo ngăn xếp rỗng và thỏa mãn ngôn ngữ đoán nhận L(M) = L(G).

www.thuvien247.net

TÀI LIỆU THAM KHẢO CHÍNH

[1] *Toán rời rạc ứng dụng trong Tin học* (dịch từ : Mc Graw – Hill. *Discrete Mathematics its Applications,* 1994). NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.

[2] *Toán rời rạc cho các nhà khoa học máy tính* (tài liệu dịch từ : *Discrete Mathematics for Computer Scientits*). Khoa CNTT – Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (ĐHQG Hà Nội), 1998.

[3] Nguyễn Hữu Anh. *Toán rời rạc*. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1999.

[4] Nguyễn Văn Ba. *Ngôn ngữ hình thức*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.

[5] Phan Đình Diệu. *Lý thuyết ôtômat và thuật toán*. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1977.

[6] Nguyễn Hữu Ngự. *Lý thuyết đồ thị*. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2001.

[7] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Hữu Nghĩa. *Toán rời rạc*. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1997.

[8] Đặng Huy Ruận. *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.

[9] Đặng Huy Ruận. *Lý thuyết ngôn ngữ hình thức và ôtômat*. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2002.

[10] Đặng Huy Ruận. *Bảy phương pháp giải các bài toán lôgic*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.

[11] Đỗ Đức Giáo, Đặng Huy Ruận. *Văn phạm và ngôn ngữ hình thức*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1991.

[12] Đỗ Đức Giáo. *Cơ sở toán trong lập trình*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[13] Đỗ Đức Giáo. *Toán rời rạc*. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2004.

www.thuvien247.net

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc CT CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

Trình bày và chế bản :
HỒNG THỦY

www.thuvien247.net
www.thuvien247.net

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

Mã số: 7K678y9 – DAI

In 1.500 bản (QĐ : 45), khổ 16 x 24 cm. In tại Công ty Cổ phần In Phúc Yên.

Địa chỉ : Đường Trần Phú, thị xã Phúc Yên, Vĩnh Phúc.

Số ĐKKH xuất bản : 04 – 2009/CXB/453 – 2117/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2009.

www.thuvien247.net

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn; Tel : 043. 9724715

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO VỀ TOÁN – TIN
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

1. Toán học cao cấp (tập 1, 2, 3)	*Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)*
2. Bài tập Toán học cao cấp (tập 1, 2, 3)	*Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)*
3. Đại số tuyến tính và hình học giải tích	*PGS. TS. Trần Trọng Huệ*
4. Đồ thị và các thuật toán	*PGS. TS. Hoàng Chí Thành*
5. Hướng dẫn giải Bài tập Toán rời rạc	*PGS. TS. Đỗ Đức Giáo*
6. Phương pháp tính	*Tạ Văn Đĩnh*
7. Toán học tính toán	*Doãn Tam Hoè*
8. Cấu trúc máy tính	*TS. Trần Quang Vinh*
9. Lập trình bằng ngôn ngữ Assembly cho máy tính	*TS. Nguyễn Mạnh Giang*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;
Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;
Tại Thành phố Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ;
240 Trần Bình Trọng – Quận 5 ;
Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4 ;
Website : www.nxbgd.com.vn

8934980938256

Giá: 44.000 đ