

Тема “Введение в математический анализ”

1. Как соотносятся понятия “множество” и “последовательность”? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т. д.)

Множество состоит из элементов объединенных общим свойством.

- порядок записи элементов множества не влияет на само множество {5,10}={10,5}
- для множества не определено число вхождений одинаковых элементов
- множество может быть пустым и непустым, упорядоченным и неупорядоченным, конечным и бесконечным

Последовательность это частный случай множества, в котором набор объектов пронумерован, допускаются повторения объектов и порядок объектов имеет значение.

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

1. $\forall y \in [0;1]: \operatorname{sgn}(y) = 1$

- Для любого у принадлежащего отрезку [0;1] функция sgn(y) имеет значение 1 ЛОЖНО, так как $\operatorname{sgn}(0)=0$
- отрицание $\exists y \in [0;1] \rightarrow \operatorname{sgn}(y) \neq 1$ существуют такие у из отрезка [0;1] что функция sgn(y) не равна 1 ИСТИНА

2. $\forall n \in \mathbb{N} > 2: \exists x,y,z \in \mathbb{N}: x^{\wedge}n=y^{\wedge}n + z^{\wedge}n$

- Для любого натурального n>2 существуют натуральные х,y,z что выполняется равенство $x^{\wedge}n=y^{\wedge}n + z^{\wedge}n$ сложно оценить на истинность
- отрицание $\exists n \in \mathbb{N} > 2: \forall x,y,z \in \mathbb{N} \rightarrow x^{\wedge}n = y^{\wedge}n + z^{\wedge}n$ существуют натуральные n>2 что при любых натуральных х,y,z не выполняется равенство $x^n = y^n + z^n$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R}: X < x$

- Для любого рационального числа существует подмножество рациональных чисел, такое что подмножество больше чем число ЛОЖНО, так как может быть X=x, если X - множество из 1 элемента x
- отрицание $\exists x \in \mathbb{R} \forall X \in \mathbb{R} \rightarrow X < x$ существуют рациональное число из любого подмножества рациональных чисел, такое что подмножество меньше или равно числу. ИСТИНА

4. $\forall x \in \mathbb{C} \exists y \in \mathbb{C}: x > y || x < y$

- Для любого комплексного числа не существует другое комплексное число, которые можно было бы сравнить ЛОЖНО, 5>4 тоже комплексные числа.
- отрицание $\exists x \in \mathbb{C} \forall y \in \mathbb{C} \rightarrow x = y$ существуют комплексное число для любого комплексского числа, такие что числа равны. ИСТИНА

5. $\forall y \in [0;\pi/2] \exists \epsilon > 0: \sin(y) < \sin(y+\epsilon)$

- Для любого у из отрезка от 0 до $\pi/2$ существует такое положительное ϵ при котором $\sin(y) < \sin(y+\epsilon)$ ЛОЖНО, так как $\sin(\pi/2) > \sin(\pi/2 + \epsilon)$
- отрицание $\exists y \in [0;\pi/2] \forall \epsilon > 0: \sin(y) > = \sin(y+\epsilon)$ существует у из отрезка от 0 до $\pi/2$, что при любом положительном ϵ выполняется неравенство $\sin(y) > = \sin(y+\epsilon)$ ИСТИНА

6. $\forall y \in [0;\pi] \exists \epsilon > 0: \cos(y) > \cos(y+\epsilon)$

- Для любого у из интервала от 0 (вкл.) до π существует такое положительное ϵ при котором $\cos(y) > \cos(y+\epsilon)$ ИСТИНА
- отрицание $\exists y \in [0;\pi] \forall \epsilon > 0: \cos(y) < = \cos(y+\epsilon)$ существует у из интервала от 0 (вкл.) до π , что при любом положительном ϵ выполняется неравенство $\cos(y) < = \cos(y+\epsilon)$ ЛОЖНО

7. $\exists x: x \notin \{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$

- Существует число которое не принадлежит множествам $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ИСТИНА число может быть гиперкомплексным
- отрицание $\forall x: x \in \{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$ любое число принадлежит множествам $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ЛОЖНО

Тема “Множество”

1. Даны три множества a, b и c. Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

In [2]:	<pre>#Зададим множества A и B. Не обязательно числовые a = {1, 2, 3, 4, "четыре", "пять"} b = {1, 3, 4, 5, 6, "семь", "восемь"} c = {4, 6, 8, 9, 10, 'сто'}</pre>
In [3]:	<pre># операция объединение (логическое И) print(f'Пересечение a & b = {a & b}') print(f'Пересечение a & c = {a & c}') print(f'Пересечение b & c = {b & c}') print(f'Пересечение a & b & c = {a & b & c}')</pre> <p>Пересечение a & b = {1, 3, 4} Пересечение a & c = {4} Пересечение b & c = {4, 6} Пересечение a & b & c = {4}</p>
In [4]:	<pre># операция объединение (логическое ИЛИ) print(f'Объединение a b = {a b}') print(f'Объединение a c = {a c}') print(f'Объединение b c = {b c}') print(f'Объединение a b c = {a b c}')</pre> <p>Объединение a b = {1, 2, 3, 4, 'четыре', 'восемь', 5, 6, 'пять', 'семь'} Объединение a c = {1, 2, 3, 4, 'четыре', 6, 8, 9, 10, 'пять', 'сто'} Объединение b c = {1, 'восемь', 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 'семь', 'сто'} Объединение a b c = {1, 2, 3, 4, 'четыре', 'восемь', 5, 6, 8, 9, 10, 'пять', 'семь', 'сто'}</p>
In [5]:	<pre># операция разность print(f'Разность a - b = {a - b}') print(f'Разность a - c = {a - c}') print(f'Разность b - c = {b - c}') print(f'Разность b - a = {b - a}') print(f'Разность c - a = {c - a}') print(f'Разность c - b = {c - b}') print(f'Разность a - b - c = {a - b - c}') print(f'Разность b - a - c = {b - a - c}') print(f'Разность c - a - c = {c - a - b}')</pre> <p>Разность a - b = {2, 'четыре', 'пять'} Разность a - c = {1, 2, 3, 'четыре', 'пять'} Разность b - c = {1, 'восемь', 3, 5, 'семь'} Разность b - a = {'восемь', 'семь', 5, 6} Разность c - a = {6, 8, 9, 10, 'сто'} Разность c - b = {8, 9, 10, 'сто'} Разность a - b - c = {2, 'четыре', 'пять'} Разность b - a - c = {'восемь', 'семь', 5} Разность c - a - c = {8, 9, 10, 'сто'}</p>
In [6]:	<pre># операция симметрическая разность print(f'Симметрическая разность a ^ b = {a ^ b}') print(f'Симметрическая разность a ^ c = {a ^ c}') print(f'Симметрическая разность b ^ c = {b ^ c}') print(f'Симметрическая разность a ^ b ^ c = {a ^ b ^ c}')</pre> <p>Симметрическая разность a ^ b = {'восемь', 2, 5, 6, 'четыре', 'пять', 'семь'} Симметрическая разность a ^ c = {1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 'пять', 'сто', 'четыре'} Симметрическая разность b ^ c = {1, 'восемь', 3, 5, 8, 9, 10, 'сто', 'семь'} Симметрическая разность a ^ b ^ c = {'восемь', 2, 4, 5, 8, 9, 10, 'пять', 'сто', 'четыре', 'семь'}</p>
In [7]:	<pre># операция декартово произведение from itertools import product print(f'Декартово произведение a X b = ') print(list(product(a, b))), print(len(a), end= ' '), print(len(b), end= '), print(len(list(product(a, b)))) print(f'\ndекартово произведение a X c = ') print(list(product(a, c))), print(len(list(product(a, c)))) print(f'\ndекартово произведение b X c = ') print(list(product(b, c))), print(len(list(product(b, c)))) print(f'\ndекартово произведение a X b X c = ') print(list(product(a, b, c))), print(len(a), end= ' '), print(len(b), end= ' '), print(len(c), end= '), print(len(list(product(a, b, c))))</pre> <p>Декартово произведение a X b = [(1, 1), (1, 'сто'), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 'семь'), (2, 1), (2, 'восемь'), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 'семь'), (3, 1), (3, 'восемь'), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 'семь'), (4, 1), (4, 'восемь'), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 'семь'), (5, 'сто'), (6, 'восемь'), (7, 'семь'), (8, 'сто'), (9, 'сто'), (10, 'сто')] Декартово произведение a X c = [(1, 'сто'), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (2, 'сто'), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (3, 'сто'), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (4, 'сто'), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (4, 10), ('четыре', 'сто'), ('четыре', 4), ('четыре', 6), ('четыре', 8), ('четыре', 9), ('четыре', 10), ('пять', 'сто'), ('пять', 4), ('пять', 6), ('пять', 8), ('пять', 9), ('пять', 10)] 36 Декартово произведение b X c = [(1, 'сто'), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (1, 10), ('восемь', 'сто'), ('восемь', 4), ('восемь', 6), ('восемь', 8), ('восемь', 9), ('восемь', 10), (3, 'сто'), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (4, 'сто'), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (5, 'сто'), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (6, 'сто'), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (6, 9), (6, 10), ('семь', 'сто'), ('семь', 4), ('семь', 6), ('семь', 8), ('семь', 9), ('семь', 10)] 42 Декартово произведение a X b X c = [(1, 1, 'сто'), (1, 1, 4), (1, 1, 6), (1, 1, 8), (1, 1, 9), (1, 1, 10), (1, 'восемь', 'сто'), (1, 'восемь', 4), (1, 'восемь', 6), (1, 'восемь', 8), (1, 'восемь', 9), (1, 'восемь', 10), (1, 3, 'сто'), (1, 3, 4), (1, 3, 6), (1, 3, 8), (1, 3, 9), (1, 3, 10), (1, 4, 'сто'), (1, 4, 4), (1, 4, 6), (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 4, 10), (1, 5, 'сто'), (1, 5, 4), (1, 5, 6), (1, 5, 8), (1, 5, 9), (1, 5, 10), (1, 6, 'сто'), (1, 6, 4), (1, 6, 6), (1, 6, 8), (1, 6, 9), (1, 6, 10), (1, 'семь', 'сто'), (1, 'семь', 4), (1, 'семь', 6), (1, 'семь', 8), (1, 'семь', 9), (1, 'семь', 10), (2, 'сто'), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 'восемь', 'сто'), (2, 'восемь', 4), (2, 'восемь', 6), (2, 'восемь', 8), (2, 'восемь', 9), (2, 'восемь', 10), (2, 3, 'сто'), (2, 3, 4), (2, 3, 6), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 3, 10), (2, 4, 'сто'), (2, 4, 4), (2, 4, 6), (2, 4, 8), (2, 4, 9), (2, 4, 10), (2, 5, 'сто'), (2, 5, 4), (2, 5, 6), (2, 5, 8), (2, 5, 9), (2, 5, 10), (2, 6, 'сто'), (2, 6, 4), (2, 6, 6), (2, 6, 8), (2, 6, 9), (2, 6, 10), (2, 'семь', 'сто'), (2, 'семь', 4), (2, 'семь', 6), (2, 'семь', 8), (2, 'семь', 9), (2, 'семь', 10), (3, 1, 'сто'), (3, 1, 4), (3, 1, 6), (3, 1, 8), (3, 1, 9), (3, 1, 10), (3, 'восемь', 'сто'), (3, 'восемь', 4), (3, 'восемь', 6), (3, 'восемь', 8), (3, 'восемь', 9), (3, 'восемь', 10), (3, 3, 'сто'), (3, 3, 4), (3, 3, 6), (3, 3, 8), (3, 3, 9), (3, 3, 10), (3, 4, 'сто'), (3, 4, 4), (3, 4, 6), (3, 4, 8), (3, 4, 9), (3, 4, 10), (3, 5, 'сто'), (3, 5, 4), (3, 5, 6), (3, 5, 8), (3, 5, 9), (3, 5, 10), (3, 6, 'сто'), (3, 6, 4), (3, 6, 6), (3, 6, 8), (3, 6, 9), (3, 6, 10), (3, 'семь', 'сто'), (3, 'семь', 4), (3, 'семь', 6), (3, 'семь', 8), (3, 'семь', 9), (3, 'семь', 10), (4, 1, 'сто'), (4, 1, 4), (4, 1, 6), (4, 1, 8), (4, 1, 9), (4, 1, 10), (4, 'восемь', 'сто'), (4, 'восемь', 4), (4, 'восемь', 6), (4, 'восемь', 8), (4, 'восемь', 9), (4, 'восемь', 10), (4, 3, 'сто'), (4, 3, 4), (4, 3, 6), (4, 3, 8), (4, 3, 9), (4, 3, 10), (4, 4, 'сто'), (4, 4, 4), (4, 4, 6), (4, 4, 8), (4, 4, 9), (4, 4, 10), (4, 5, 'сто'), (4, 5, 4), (4, 5, 6), (4, 5, 8), (4, 5, 9), (4, 5, 10), (4, 6, 'сто'), (4, 6, 4), (4, 6, 6), (4, 6, 8), (4, 6, 9), (4, 6, 10), (4, 'семь', 'сто'), (4, 'семь', 4), (4, 'семь', 6), (4, 'семь', 8), (4, 'семь', 9), (4, 'семь', 10), ('четыре', 1, 'сто'), ('четыре', 1, 4), ('четыре', 1, 6), ('четыре', 1, 8), ('четыре', 1, 9), ('четыре', 1, 10), ('восемь', 'сто'), ('восемь', 4), ('восемь', 6), ('восемь', 8), ('восемь', 9), ('восемь', 10), ('пять', 1, 'сто'), ('пять', 1, 4), ('пять', 1, 6), ('пять', 1, 8), ('пять', 1, 9), ('пять', 1, 10), ('пять', 'восемь', 'сто'), ('пять', 'восемь', 4), ('пять', 'восемь', 6), ('пять', 'восемь', 8), ('пять', 'восемь', 9), ('пять', 'восемь', 10), ('пять', 3, 'сто'), ('пять', 3, 4), ('пять', 3, 6), ('пять', 3, 8), ('пять', 3, 9), ('пять', 3, 10), ('пять', 4, 'сто'), ('пять', 4, 4), ('пять', 4, 6), ('пять', 4, 8), ('пять', 4, 9), ('пять', 4, 10), ('пять', 5, 'сто'), ('пять', 5, 4), ('пять', 5, 6), ('пять', 5, 8), ('пять', 5, 9), ('пять', 5, 10), ('пять', 6, 'сто'), ('пять', 6, 4), ('пять', 6, 6), ('пять', 6, 8), ('пять', 6, 9), ('пять', 6, 10), ('пять', 'семь', 'сто'), ('пять', 'семь', 4), ('пять', 'семь', 6), ('пять', 'семь', 8), ('пять', 'семь', 9), ('пять', 'семь', 10)] 6 * 7 * 6 = 252 (None, None, None, None)</p>
Out[7]:	

Тема 3 “Последовательность”

1. Даны 4 последовательности. Необходимо:

- исследовать их на монотонность;
- исследовать на ограниченность;
- найти пятый по счету член.

1.

- $a_n \cdot a_{n+1} = 2^n \cdot n \cdot 2^{n+1} + n + 1 = 2^n \cdot 2^{n+1} + 1 < 0$ для любых n - последовательность монотонно возрастает
- последовательность ограничена снизу $a_1 = 2^1 \cdot 1 = 1$
- $a_5 = 2^5 \cdot 5 = 27$

2.

- $b_n \cdot b_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 0$ для любых n $> = 2$ - последовательность монотонно возрастает
- последовательность ограничена снизу $\frac{1}{2}$ и сверху 0
- $b_5 = \frac{1}{1 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

3.

- $c_n \cdot c_{n+1} = 1^n + \sqrt{2n+1}^{n+1} \cdot \sqrt{2n+2} < 0$ для любых n $> = 1$ - последовательность монотонно возрастает
- последовательность ограничена снизу -1 и сверху $\sqrt{2}$
- $c_5 = 1^5 + \sqrt{10} = 2.16$

4.

- $d_n = d_{n+1} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} - (-1)^{2n+2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ для любых n $> = 1$ - последовательность монотонно убывает
- последовательность ограничена снизу 1 и сверху 2
- $d_5 = (-1)^{10} + \frac{1}{25} = 1.04$

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$a_{12} = 128 + (6 * 12) = 200$

In [10]:	<pre>a1 = 128 d = 6 # a(n) = a1 + (n - 1) * d a12 = a1 + (12 - 1) * d print(f'a12: {a12}')</pre> <p>a12: 194</p>
In [11]:	<pre>a1 = 128 d = 6 a12 = a1 for _ in range(11): a12 += d print(f'a12: {a12}')</pre> <p>a12: 194</p> <p>1. На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью $\epsilon = 10^{-7}$ — 7) 2. Предложить оптимизацию алгоритма,полученного в задании 5, ускоряющую его сходимость.</p>
In [12]:	<pre># n / (n! ** (1 / n)) # n = 1, +oo import numpy as np import random import math import itertools from sympy import factorial def f(n): return n / pow(factorial(n), 1 / n)</pre>
In [13]:	<pre>%time eps = 10 ** -7 i = 1 n = 1 x0 = f(n) while True: i += 1 n += 1 x1 = f(n) if abs(x0 - x1) <= eps: break x0 = x1 print(f'n_iter: {i}') print(f'f(n) = {x0}')</pre> <p>n_iter: 11779 f(n) = 2.71698832372746 CPU times: total: 6 s Wall time: 15.6 s</p>
In [14]:	<pre>%time eps = 10 ** -7 i = 1 n = 1 x0 = f(n) while True: i += 1 n += random.randint(1, 100) x1 = f(n) if abs(x0 - x1) <= eps: break x0 = x1 print(f'n_iter: {i}') print(f'f(n) = {x0}')</pre> <p>n_iter: 250 f(n) = 2.71704864195182 CPU times: total: 15.6 ms Wall time: 381 ms</p>
In []:	