Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

Институт информатики и кибернетики

Кафедра технической кибернетики

**Отчет по курсовой работе**
Дисциплина: «Численные методы математической физики»

Тема: **«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Вариант № 16

Выполнил студент: Хорошев Д.Г.

Группа: 6408-010302D

Преподаватель: Дегтярев А.А.

2022

**Исходные данные и задание к курсовой работе**

**Тема:** Численные методы решения краевых задач математической физики.

**Цель курсовой работы** – получение практических навыков построения и исследования разностных схем для задач математической физики, разработки вычислительных алгоритмов и компьютерных программ для их решения.

**Исходные данные** – вариант работы №16, значения физических и геометрических параметров.

**Задание к курсовой работе**

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.
5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.

6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Исследование сходимости необходимо провести в два этапа. На первом этапе следует убедиться в том, что при измельчении сетки графики разностного решения приближаются (вплоть до исчезновения визуальных различий) к соответствующим графикам точного решения. На втором этапе необходимо, проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.
7. Оформить отчет о проделанной работе в соответствии с требованиями, изложенными в подразделе 3.2 настоящих методических указаний [1].

**Условие задачи:**

**Вариант 16**

На вход слабопоглощающего оптического элемента, представляющего собой цилиндрический фрагмент оптоволокна кругового сечения длиной $l$ и радиусом $R$, подаётся лазерное излучение с распределением интенсивности $I_0(r)$. Ослабление (затухание) монохроматического лазерного пучка при его распределении в поглощающей среде описывается законом Бугера

$$I(z,r) = I_0(r)\exp(-\beta z),$$

где $I(z,r)$ – интенсивность излучения, прошедшего через слой вещества толщиной $z$; $\beta$ – коэффициент поглощения энергии излучения.

В результате поглощения части энергии излучения оптический элемент нагревается.

Оптический элемент выполнен из однородного материала, характеризуемого коэффициентом поглощения $\beta$, теплопроводности $\tilde{k}$, объёмной теплоёмкости $c$. Пучок света обладает круговой симметрией и падает нормально на входную грань оптоволокна, причём оси пучка и оптического элемента совпадают.

Между поверхностями $r = R,\ z = 0$ и $z = l$ оптического элемента и окружающей средой имеет место теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена $\alpha$.

В момент включения лазера $t = 0$ температура оптического элемента предполагается одинаковой во всех точках и равной температуре окружающей среды $u_0$.

Разработать программу расчёта среднего по радиусу значения температуры оптического элемента на временном промежутке $0 < t \leqslant T$. Для проведения расчётов использовать следующие разностные схемы:

- простейшую явную конечно-разностную схему (Кусакина Д.С.);
- простейшую неявную конечно-разностную схему (Воротникова О.Г.);
- модифицированную неявную конечно-разностную схему (Хорошев Д.Г.).

При проведении расчётов использовать значения параметров $l, R, \beta, \tilde{k}, c, \alpha, T, u_0$ и выражение функции $I_0(r)$, указанные преподавателем.

Значения параметров, указанные преподавателем:

- $l = 4$;
- $T = 150$;
- $R = 3$;
- $u_0 = 0$;
- $\tilde{k} = 0{,}01$;
- $c = 1{,}65$;
- $\alpha = 0{,}005$;
- $\beta = 0{,}25$;
- $I_0(x) = \begin{cases} 800, \text{ при } 0 \le r \le \frac{R}{5}; \\ 0, \text{ при } \frac{R}{5} < r \le R. \end{cases}$

## РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 30 с., 4 рисунка, 2 таблицы, 2 источника, 1 приложение.

*УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, МЕТОД ПРОГОНКИ, МОДИФИЦИРОВАННЯ НЕЯВНАЯ СХЕМА, МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ.*

Целью курсовой работы является построение и исследование разностной схемы для решения краевой задачи, описывающей процесс нагревания оптического элемента, представляющего собой цилиндрический фрагмент оптоволокна кругового сечения (стержень).

Для решения задачи использованы простейшая неявная конечно-разностная схема и модифицированная неявная конечно-разностная схема. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости модифицированной неявной разностной схемы.

Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки и позволяющая рассчитывать решение сеточной задачи.

Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности.

Программа написана на языке Python в среде разработки PyCharm.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост количества вычислений при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи теплопроводности. Вычислительный алгоритм основан на использовании модифицированной неявной конечно-разностной схемы. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости модифицированной неявной разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи нагревания оптического элемента с помощью лазерного излучения.

## 1 Математическая постановка задачи

Общий вид уравнения теплопроводности:

$$c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{k} \cdot \Delta u + I(z, r), \tag{1.1}$$

где $u(t, x, r)$ – температура в момент времени $t$.

Перейдем к цилиндрическим координатам.

$$c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + I_0(\,r)e^{-\beta \cdot z}. \tag{1.2}$$

Так как в момент включения лазера $(t = 0)$ температура оптического элемента равна температуре окружающей среды $(u_0)$ и одинакова во всех точках, то получим следующее начальное условие:

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant R, \qquad 0 \leqslant z \leqslant l. \tag{1.3}$$

Учитывая, что по условию между поверхностями $r = R,\ z = 0$ и $z = l$ происходит теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом $\alpha$, поучим систему краевых условий:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{z=0} = \left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{z=0}; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l} = -\left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{z=l}; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = -\left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{r=R}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда краевая задача представима в виде:

$$\begin{cases} c \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} = \tilde{k}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + I_0(\,r)e^{-\beta \cdot z}; \\ u|_{t=0} = u_0; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{z=0} = \left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{z=0}; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l} = -\left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{z=l}; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = -\left.\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(u - u_0)\right|_{r=R}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Далее, согласно условию, необходимо избавиться от переменной $r$. Для этого проведем интегральное усреднение:

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} u(z,x,y,t)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R u\,(z,r,\varphi,t)r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi R^2}\int\limits_0^R u(z,r,t)r\,dr = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^R u(z,r,t)r\,dr = v(z,t).$$

Усредняя левую часть первого уравнения системы (1.5), получим:

$$\frac{2c}{R^2}\int\limits_0^R u_t' r\,dr = \left[\int\limits_a^b f_\alpha'(x,\alpha)\,dx = \left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)_\alpha'\right] = c\left(\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R ur\,dr\right)_t' =$$

$$= c\cdot v_t'.$$

Усредняя слагаемые правой части того же уравнения, получим:

$$\frac{2\tilde{k}}{R^2}\int\limits_0^R u_{zz}'' r\,dr = \tilde{k}\left(\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R ur\,dr\right)_{zz}'' = \tilde{k}\cdot v_{zz}'';$$

$$\frac{2\tilde{k}}{R^2}\int\limits_0^R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right]\cdot r\,dr = \frac{2\tilde{k}}{R^2}\int\limits_0^R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr = \frac{2\tilde{k}}{R^2}(ru_r')\Big|_0^R = \frac{2\tilde{k}}{R}u_r'\Big|_{r=R} =$$

$$= [\text{из пятого условия (1.5)}] = -\frac{2\alpha}{R}(u-u_0)\Big|_{r=R} = -\frac{2\alpha}{R}(v-u_0).$$

Усредняя второе уравнение системы (1.5) получим:

$$v(z,0) = u_0.$$

Усредняя третье уравнение системы (1.5) получим:

$$v_z'(0,t) = \frac{\alpha}{\tilde{k}}(v(0,t)-u_0).$$

Усредняя четвертое уравнение системы (1.5) получим:

$$v_z'(l,t) = -\frac{\alpha}{\tilde{k}}(v(l,t)-u_0).$$

После усреднения получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} c \cdot v'_t = \tilde{k} \cdot v''_{zz} - \dfrac{2\alpha}{R}(v - u_0) + \dfrac{2e^{-\beta \cdot z}}{R^2} \displaystyle\int\limits_0^R I_0(r) r \, dr, \\ 0 \leqslant z \leqslant l, \qquad 0 < t \leqslant T; \\ v(z,0) = u_0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant l; \\ v'_z(0,t) = \dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(v(0,t) - u_0), \qquad 0 < t \leqslant T; \\ v'_z(l,t) = -\dfrac{\alpha}{\tilde{k}}(v(l,t) - u_0), \qquad 0 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{1.6}$$

Пусть $v = w + u_0$, тогда задача относительно $w$ примет вид:

$$\begin{cases} c \cdot w'_t = \tilde{k} \cdot w''_{zz} - \dfrac{2\alpha}{R}(w) + \dfrac{2e^{-\beta \cdot z}}{R^2} \displaystyle\int\limits_0^R I_0(r) r \, dr, \\ 0 \leqslant z \leqslant l, \qquad 0 < t \leqslant T; \\ w(z,0) = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant l; \\ w'_z(0,t) = \dfrac{\alpha}{\tilde{k}} w(0,t), \qquad 0 < t \leqslant T; \\ w'_z(l,t) = -\dfrac{\alpha}{\tilde{k}} w(l,t), \qquad 0 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{1.7}$$

# 2 Построение модифицированной неявной конечно-разностной схемы

## 2.1 Построение простейшей неявной схемы

Для построения неявной схемы определим равномерную сетку как множество узлов $(z_i, t_k)$

$$z_i = ih_z, \qquad i = \overline{0, I}, \qquad h_z = \frac{l}{I},$$

$$t_k = kh_t, \qquad k = \overline{0, K}, \qquad h_t = \frac{T}{K},$$

где $h_z$, $h_t$ – шаги разбиения по $z$ и $t$ соответственно; $K$, $I$ – число интервалов разбиения промежутка $0 < t \leq T$ и $0 \leq z \leq l$ соответственно.

Функции непрерывных аргументов заменим их сеточными аналогами.

Заменим производные системы (1.7) следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial w(z_i,t_k)}{\partial t} \approx \frac{w(z_i,t_{k+1}) - w(z_i,t_k)}{h_t},$$

$$\frac{\partial^2 w(z_i,t_k)}{\partial z^2} \approx \frac{w(z_{i+1},t_k) - 2w(z_i,t_k) + w(z_{i-1},t_k)}{h_z^2},$$

$$\frac{\partial w(z_i,t_k)}{\partial z} \approx \frac{w(z_{i+1},t_k) - w(z_i,t_k)}{h_z},$$

$$\frac{\partial w(z_i,t_k)}{\partial z} \approx \frac{w(z_i,t_k) - w(z_{i-1},t_k)}{h_z}.$$

В результате получаем простейшую неявную схему:

$$\begin{cases} c\,\dfrac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \tilde{k}\,\dfrac{w_{i+1}^k - 2\,w_i^k + w_{i-1}^k}{h_z^2} - \dfrac{2\alpha}{R}\,w_i^k + \dfrac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\displaystyle\int_0^R I_0(r) r\,dr\,, \\ i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1,K}; \\ w_i^0 = 0, \qquad i = \overline{0,I}; \\ \dfrac{w_1^k - w_0^k}{h_z} = \dfrac{\alpha}{\tilde{k}} \cdot w_0^k, \qquad k = \overline{1,K}; \\ \dfrac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_z} = -\dfrac{\alpha}{\tilde{k}} \cdot w_I^k, \qquad k = \overline{1,K}. \end{cases} \tag{2.1}$$

### 2.2 Модификация простейшей неявной схемы

В качестве модификации простейшей неявной схемы повысим порядок аппроксимации граничных условий. Исследуем свойство аппроксимации четвертого уравнения системы (2.1), для чего запишем невязку

$$\delta f_h|_{z_I,t_k} = \{L_h[w]_h - f_h\}_{z_I,t_k} = \frac{w(z_I,t_k) - w(z_{I-1},t_k)}{h_z} + \frac{\alpha}{\tilde{k}} w(z_I,t_k) =$$

$$= \frac{w(z_I,t_k) - w(z_I,t_k) + \dfrac{\partial w(z_I,t_k)}{\partial z} h_z - \dfrac{\partial^2 w(z_I,t_k)}{\partial z^2} \cdot \dfrac{{h_z}^2}{2} + O({h_z}^3)}{h_z} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\tilde{k}} w(z_I,t_k) = \frac{\partial w(z_I,t_k)}{\partial z} - \frac{\partial^2 w(z_I,t_k)}{\partial z^2} \cdot \frac{h_z}{2} + \frac{\alpha}{\tilde{k}} w(z_I,t_k) + O({h_z}^2).$$

Если учесть четвертое равенство из (1.7), то получим:

$$\delta f_h|_{z_I,t_k} = -\frac{\partial^2 w(z_I,t_k)}{\partial z^2} \cdot \frac{h_z}{2} + O({h_z}^2).$$

То есть сеточное соотношение обладает первым порядком аппроксимации относительно шага $h_z$.

Для повышения шага аппроксимации запишем сеточный аналог четвертого условия из системы (2.1) в следующем виде:

$$\frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_z} = -\frac{\alpha}{\tilde{k}} \cdot w_I^k + P_I^k.$$

где $P_I^k$ – неизвестная сеточная функция, которую будем искать, исходя из требования квадратичной аппроксимации.

Невязка может быть приведена к виду:

$$\delta f_h|_{z_I,t_k} = \left\{-\frac{\partial^2 w(z_I,t_k)}{\partial z^2} \cdot \frac{h_z}{2} + O\left({h_z}^2\right)\right\}_{z_I,t_k} - P_I^k.$$

Квадратичная аппроксимация будет обеспечена, если гарантировать выполнение условия

$$P_I^k = -\frac{\partial^2 w(z_I,t_k)}{\partial z^2} \cdot \frac{h_z}{2}. \tag{2.2}$$

Выразим вторую производную по $z$ из первого уравнения (1.7):

$$c \cdot w_t' = \tilde{k} \cdot w_{zz}'' - \frac{2\alpha}{R}(w) + \frac{2e^{-\beta z}}{R^2} \int_0^R I_0(r) r\, dr.$$

Учтем ее в (2.2). В результате получим:

$$P_I^k = -\frac{h_z}{2} \left\{ \frac{c}{\tilde{k}} \cdot \frac{\partial w(z_I,t_k)}{\partial t} + \frac{2\alpha}{\tilde{k}R} w(z_I,t_k) - \frac{2e^{-\beta z_I}}{\tilde{k}R^2} \int_0^R I_0(r) r\, dr \right\}_{z_I,t_k}.$$

Производную заменим разностным соотношением:

$$P_I^k = -\frac{h_z}{2} \left( \frac{c}{\tilde{k}} \cdot \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} + \frac{2\alpha}{\tilde{k}R} w_I^k - \frac{2e^{-\beta I h_z}}{\tilde{k}R^2} \int_0^R I_0(r) r\, dr \right).$$

Тогда четвёртое условие системы (2.1) примет вид

$$\frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_z} = -\frac{\alpha}{\tilde{k}} w_I^k - \frac{h_z}{2} \left( \frac{c}{\tilde{k}} \cdot \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} + \frac{2\alpha}{\tilde{k}R} w_I^k - \frac{2e^{-\beta I h_z}}{\tilde{k}R^2} \int_0^R I_0(r) r\, dr \right).$$

Аналогично для третьего условия системы (2.1) получим:

$$\frac{w_1^k - w_0^k}{h_z} = \frac{\alpha}{\tilde{k}} w_0^k + \frac{h_z}{2}\left(\frac{c}{\tilde{k}} \cdot \frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} + \frac{2\alpha}{\tilde{k}R} w_0^k - \frac{2}{\tilde{k}R^2}\int\limits_0^R I_0(r) r\, dr\right).$$

В итоге получаем неявную модифицированную конечно-разностную схему:

$$\begin{cases} c \cdot \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \tilde{k} \cdot \frac{w_{i+1}^k - 2\, w_i^k + w_{i-1}^k}{h_z^2} - \frac{2\alpha}{R} w_i^k + \frac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r) r\, dr, \\ i = \overline{1, I-1},\ k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = 0,\ i = \overline{0, I}; \\ \frac{w_1^k - w_0^k}{h_z} = \frac{\alpha}{\tilde{k}} w_0^k + \frac{h_z}{2\tilde{k}}\left(c\frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} + \frac{2\alpha}{R} w_0^k - \frac{2}{R^2}\int_0^R I_0(r) r\, dr\right), \\ k = \overline{1, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_z} = -\frac{\alpha}{\tilde{k}} w_I^k - \frac{h_z}{2\tilde{k}}\left(c\frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} + \frac{2\alpha}{R} w_I^k - \frac{2e^{-\beta I h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r) r\, dr\right), \\ k = \overline{1, K}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

## 3 Исследование аппроксимации модифицированной неявной разностной схемы

Невязка для схемы (2.3) будет иметь следующую структуру:

$$\delta \hat{f}_h = \begin{Bmatrix} \delta \hat{f}_h^1 \\ \delta \hat{f}_h^2 \\ \delta \hat{f}_h^3 \\ \delta \hat{f}_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[w]_h - f_h^1 \\ L_h^2[w]_h - f_h^2 \\ L_h^3[w]_h - f_h^3 \\ L_h^4[w]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \qquad \begin{matrix} (3.1) \\ (3.2) \\ (3.3) \\ (3.4) \end{matrix}$$

Рассмотрим отдельно каждую компоненту невязки.

$$\left\{\delta \hat{f}_h^1\right\}_{z=z_i}^{t=t_k} = \left\{L_h^1[w]_h - f_h^1\right\}_{z=z_i}^{t=t_k} = \frac{c}{h_t} w(z_i, t_k) - \frac{c}{h_t} w(z_i, t_{k-1})$$

$$-\frac{\tilde{k}}{h_z^2} w(z_{i+1}, t_k) + \frac{2\tilde{k}}{h_z^2} w(z_i, t_k) - \frac{\tilde{k}}{h_z^2} w(z_{i-1}, t_k) + \frac{2\alpha}{R} w(z_i, t_k)$$

$$-\frac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r) r\, dr + \frac{2\alpha}{R} w(z_i, t_k) - \frac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r) r\, dr =$$

$$\frac{c}{h_t} w(z_i, t_k) - \left\{\frac{c}{h_t}\left[w - w_t' h_t + w_{tt}'' \frac{h_t^2}{2} - w_{t^3}''' \frac{h_t^3}{6} + w_{t^4}'''' \frac{h_t^4}{24} + O(h_t^5)\right]\right\}_{z=z_i}^{t=t_k}$$

$$-\left\{\frac{\tilde{k}}{h_z^2}\left[w + w_z' h_z + w_{zz}'' \frac{h_z^2}{2} + w_{z^3}''' \frac{h_z^3}{6} + w_{z^4}'''' \frac{h_z^4}{24} + O(h_z^5)\right]\right\}_{z=z_i}^{t=t_k} +$$

$$\frac{2\tilde{k}}{h_z^2} w(z_i, t_k) - \left\{\frac{\tilde{k}}{h_z^2}\left[w - w_z' h_z + w_{zz}'' \frac{h_z^2}{2} - w_{z^3}''' \frac{h_z^3}{6} + w_{z^4}'''' \frac{h_z^4}{24} + O(h_z^5)\right]\right\}_{z=z_i}^{t=t_k}$$

$$+\frac{2\alpha}{R}w(z_i,t_k)-\frac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r)rdr \ = \Big\{cw'_t - cw''_{tt}\frac{h_t}{2} + cw'''_{t^3}\frac{h_t^2}{6} -$$

$$cw''''_{t^4}\frac{h_t^3}{24} + O(h_t^4) - \frac{2\tilde{k}}{h_z^2}w - \tilde{k}w''_{zz} - \tilde{k}w''''_{z^4}\frac{h_z^2}{12} + O(h_z^3) + \frac{2\tilde{k}}{h_z^2}w + \frac{2\alpha}{R}w -$$

$$\frac{2e^{-\beta i h_z}}{R^2}\int_0^R I_0(r)rdr\Big\}_{z=z_i}^{t=t_k} = [\text{Из первого уравнения системы (1.7)}] = \Big\{cw'_t -$$

$$-cw''_{tt}\frac{h_t}{2} + cw'''_{t^3}\frac{h_t^2}{6} - cw''''_{t^4}\frac{h_t^3}{24} + \ O(h_t^4) - \tilde{k}w''_{zz} - \tilde{k}w''''_{z^4}\frac{h_z^2}{12} + O(h_z^3) + \tilde{k}w''_{zz} -$$

$$cw'_t\Big\}_{z=z_i}^{t=t_k} = -cw''_{tt}\frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \tilde{k}w''''_{z^4}\frac{h_z^2}{12} + O(h_z^3) = O(h_z^2, h_t).$$

Перейдём ко второй компоненте невязки:

$$\big\{\delta\hat{f}_h^2\big\}_{z=z_i}^{t=t_0} = \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{z=z_i}^{t=t_0} = w(z_i,0) - 0 =$$

$$= [\text{Из второго уравнения системы (1.7)}] = 0.$$

Модификация простейшей неявной разностной схемы заключалась в повышении порядка аппроксимации краевых условий. Проверим, повысился ли порядок.

Для третьей компоненты невязки получим:

$$\big\{\delta\hat{f}_h^3\big\}_{z=z_0}^{t=t_k} = \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{z=z_0}^{t=t_k} = \frac{1}{h_z}w(z_1,t_k) - \frac{1}{h_z}w(z_0,t_k) -$$

$$-\frac{\alpha}{\tilde{k}}w(z_0,t_k) - \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t}w(z_0,t_k) + \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t}w(z_0,t_{k-1}) - \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}R}w(z_0,t_k) +$$

$$+\frac{h_z}{\tilde{k}R^2}\int_0^R I_0(r)rdr = \Big\{\frac{1}{h_z}\Big[w + w'_z h_z + w''_{zz}\frac{h_z^2}{2} + w'''_{zzz}\frac{h_z^3}{6} + O(h_z^4) - w\Big]\Big\}_{z=z_0}^{t=t_k} -$$

$$-\frac{\alpha}{\tilde{k}}w(z_0,t_k) - \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t}w(z_0,t_k) + \Big\{\frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t}\Big(w - w'_t h_t + w''_{tt}\frac{h_t^2}{2} - w'''_{ttt}\frac{h_t^3}{6} +$$

$$+O(h_t^4)\Big)\Big\}_{z=z_0}^{t=t_k} - \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}R}w(z_0,t_k) + \frac{h_z}{\tilde{k}R^2}\int_0^R I_0(r)rdr =$$

$$= [\text{Из первого и третьего уравнения системы (1.7)}] =$$

$$= \Big\{w'_z + w''_{zz}\frac{h_z}{2} + w'''_{zzz}\frac{h_z^2}{6} + O(h_z^3) - w'_z - \frac{ch_z}{2\tilde{k}}w'_t + \frac{ch_z h_t}{4\tilde{k}}w''_{tt} - \frac{ch_z h_t^2}{12\tilde{k}}w'''_{ttt} + O(h_t^3)$$

$$+\frac{ch_z}{2\tilde{k}}w'_t - w''_{zz}\frac{h_z}{2}\Big\}_{z=z_I}^{t=t_k} = \Big\{w'''_{zzz}\frac{h_z^2}{6} + O(h_z^3) + \frac{ch_z h_t}{4\tilde{k}}w''_{tt} - \frac{ch_z h_t^2}{12\tilde{k}}w'''_{ttt} +$$

$$+O(h_t^3)\Big\}_{z=z_I}^{t=t_k} = O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t).$$

Для четвертой компоненты невязки получим:

$$\left\{\delta \hat{f}_h^4\right\}_{z=z_I}^{t=t_k} = \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{z=z_l}^{t=t_k} = \frac{1}{h_z} w(z_I, t_k) - \frac{1}{h_z} w(z_{I-1}, t_k) +$$

$$+ \frac{\alpha}{\tilde{k}} w(z_I, t_k) + \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t} w(z_I, t_k) - \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t} w(z_I, t_{k-1}) + \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}R} w(z_I, t_k) -$$

$$\frac{h_z e^{-\beta I h_z}}{\tilde{k}R^2} \int_0^R I_0(r) r dr = \left\{\frac{1}{h_z}\left[w - w + w_z' h_z - w_{zz}'' \frac{h_z^2}{2} + w_{zzz}''' \frac{h_z^3}{6} + O(h_z^4)\right]\right\}_{z=z_I}^{t=t_k} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\tilde{k}} w(z_l, t_k) + \frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t} w(z_I, t_k) + \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}R} w(z_I, t_k) - \frac{h_z e^{-\beta I h_z}}{\tilde{k}R^2} \int_0^R I_0(r) r dr -$$

$$- \left\{\frac{ch_z}{2\tilde{k}h_t}\left(w - w_t' h_t + w_{tt}'' \frac{h_t^2}{2} - w_{ttt}''' \frac{h_t^3}{6} + O(h_t^4)\right)\right\}_{z=z_I}^{t=t_k} =$$

[Из первого и четвёртого уравнения системы (1.7)] =

$$= \left\{w_z' - w_{zz}'' \frac{h_z}{2} + w_{zzz}''' \frac{h_z^2}{6} + O(h_z^3) - w_z' + \frac{ch_z}{2\tilde{k}} w_t' - \frac{ch_z h_t}{4\tilde{k}} w_{tt}'' + \frac{ch_z h_t^2}{12\tilde{k}} w_{ttt}''' + O(h_t^3)\right.$$

$$\left. - \frac{ch_z}{2\tilde{k}} w_t' + w_{zz}'' \frac{h_z}{2}\right\}_{z=z_I}^{t=t_k} = \left\{w_{zzz}''' \frac{h_z^2}{6} + O(h_z^3) - \frac{ch_z h_t}{4\tilde{k}} w_{tt}'' + \frac{ch_z h_t^2}{12\tilde{k}} w_{ttt}''' +\right.$$

$$\left. + O(h_t^3)\right\}_{z=z_I}^{t=t_k} = O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t).$$

В итоге получили:

$$\delta \hat{f}_h = \begin{Bmatrix} \delta \hat{f}_h^1 \\ \delta \hat{f}_h^2 \\ \delta \hat{f}_h^3 \\ \delta \hat{f}_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O(h_z^2, h_t) \\ 0 \\ O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t) \\ O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t) \end{Bmatrix}.$$

Определим норму в пространстве $F_h$ как:

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1,I-1} \\ k=\overline{1,K}}} \left|\{f_h^1\}_{z_i}^{t_k}\right| + \max_{i=\overline{0,I}} \left|\{f_h^2\}_{z_i}^{t_0}\right| + \max_{k=\overline{1,K}} \left|\{f_h^3\}_{z_0}^{t_k}\right| + \max_{k=\overline{1,K}} \left|\{f_h^4\}_{z_I}^{t_k}\right| \quad (3.5)$$

Тогда погрешность аппроксимации модифицированной неявной схемы в соответствии с формулой (3.5) будет иметь вид:

$$\left\|\delta \hat{f}_h\right\|_{F_h} = O(h_z^2, h_t) + 0 + O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t) + O(h_z^2, h_t^2, h_z h_t) = O(h_z^2, h_t).$$

Таким образом, модифицированная неявная разностная схема (2.3) аппроксимирует краевую задачу (1.7) с первым порядком относительно шага $h_t$ и со вторым порядком относительно шага $h_z$.

## 4 Исследование устойчивости модифицированной неявной разностной схемы

Проведем исследование устойчивости модифицированной неявной разностной схемы. Для этого запишем систему (2.3) относительно возмущений:

$$\begin{cases} c \cdot \frac{(w_i^k - w_i^{k-1})}{h_t} - \tilde{k} \cdot \frac{w_{i+1}^k - 2\,w_i^k + w_{i-1}^k}{h_z^2} + \frac{2\alpha}{R} w_i^k = \varphi_i^k,\ i = \overline{1, I-1},\ k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i,\ i = \overline{0, I}; \\ \frac{w_1^k - w_0^k}{h_z} = \frac{\alpha}{\tilde{k}} w_0^k + \frac{c h_z}{2\tilde{k} h_t}\left(w_0^k - w_0^{k-1}\right) + \frac{\alpha h_z}{\tilde{k} R} w_0^k - \frac{h_z}{2\tilde{k}} \varphi_0^k,\ k = \overline{1, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_z} = -\frac{\alpha}{\tilde{k}} w_I^k - \frac{c h_z}{2\tilde{k} h_t}\left(w_I^k - w_I^{k-1}\right) - \frac{\alpha h_z}{\tilde{k} R} w_I^k + \frac{h_z}{2\tilde{k}} \varphi_I^k,\ k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{4.1}$$

По определению линейная разностная схема называется устойчивой, если существуют такие числа $C > 0, h_0 > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и для любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются условия:

1) решение существует и единственно;
2) справедливо неравенство:

$$\|w_h\|_{U_h} \le C \|f_h\|_{F_h}. \tag{4.2}$$

Неявная схема представляет собой систему линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей. Решение этой системы существует и единственно при произвольных правых частях и может быть получено прогонкой. Следовательно, для доказательства устойчивости неявной схемы осталось убедиться в справедливости неравенства $\|w_h\|_{U_h} \le C \|f_h\|_{F_h}$.

Определим нормы в пространствах $U_h$ и $F_h$ следующим образом:

$$\|w_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{0,I} \\ k=\overline{1,K}}} \left|w_i^k\right|,$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{0,I} \\ k=\overline{1,K}}} \left|\varphi_i^k\right| + \max_{i=\overline{0,I}} |\psi_i|.$$

Перепишем первое уравнение системы (4.1) в следующем виде, сделав замену $\gamma = \frac{h_t \tilde{k}}{c h_z^2}$:

$$w_i^k - w_i^{k-1} = \gamma\left(w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k\right) - \frac{2\alpha h_t}{cR} w_i^k + \frac{h_t}{c}\varphi_i^k, i = \overline{1, I-1},$$

$$k = \overline{1, K};$$

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right) w_i^k = w_i^{k-1} + \gamma w_{i+1}^k + \gamma w_{i-1}^k + \frac{h_t}{c}\varphi_i^k,$$

$$i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}.$$

После применения неравенства треугольника будем иметь:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right) \left|w_i^k\right| \le \left|w_i^{k-1}\right| + \gamma\left|w_{i+1}^k\right| + \gamma\left|w_{i-1}^k\right| + \frac{h_t}{c}\left|\varphi_i^k\right|,$$

$$i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}.$$

Воспользуемся следующими оценками:

$$\left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}} \left|w_j^k\right|, \qquad i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{0, K}; \tag{4.3}$$

$$\left|\varphi_i^k\right| \le \|f_h\|_{F_h}, \qquad i = \overline{0, I}, \qquad k = \overline{1, K}. \tag{4.4}$$

В результате получим неравенство:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right) \left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}} \left|w_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=\overline{0,I}} \left|w_j^k\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h},$$

$$i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}.$$

Так как правая часть не зависит от индекса $i$, то в левой части можно записать максимальное значение по $i$:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right) \max_{i=\overline{1,I-1}} \left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}} \left|w_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=\overline{0,I}} \left|w_j^k\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, \tag{4.5}$$

$$k = \overline{1, K}.$$

Рассмотрим узел $i = 0$. Для этого обратимся к третьему уравнению системы (4.1), умножив всё уравнение на $h_z$:

$$w_1^k - w_0^k = \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}} w_0^k + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t}\left(w_0^k - w_0^{k-1}\right) + \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R} w_0^k - \frac{h_z^2}{2\tilde{k}}\varphi_0^k, \qquad k = \overline{1, K};$$

$$\left(1 + \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}} + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t} + \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R}\right) w_0^k = w_1^k + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t} w_0^{k-1} + \frac{h_z^2}{2\tilde{k}}\varphi_0^k, \qquad k = \overline{1, K}.$$

После применения неравенства треугольника будем иметь:

$$\left(1 + \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}} + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t} + \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R}\right) \left|w_0^k\right| \le \left|w_1^k\right| + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t}\left|w_0^{k-1}\right| + \frac{h_z^2}{2\tilde{k}}\left|\varphi_0^k\right|, \qquad k = \overline{1, K}.$$

Так как $\gamma = \frac{h_t \tilde{k}}{ch_z^2} > 0$, умножим обе части неравенства на $2\gamma$:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR} + \frac{2\alpha h_t}{ch_z}\right)\left|w_0^k\right| \le 2\gamma\left|w_1^k\right| + \left|w_0^{k-1}\right| + \frac{h_t}{c}\left|\varphi_0^k\right|, \qquad k = \overline{1,K}.$$

Из оценок (4.3) и (4.4) получим:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR} + \frac{2\alpha h_t}{ch_z}\right)\left|w_0^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^k\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, \quad (4.6)$$

$$k = \overline{1,K}.$$

Аналогично для узла $i = I$ из четвёртого уравнения системы (4.1) получим:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR} + \frac{2\alpha h_t}{ch_z}\right)\left|w_I^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^k\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, \quad (4.7)$$

$$k = \overline{1,K}.$$

Проанализировав результаты неравенств (4.6) и (4.7) получим, что неравенство (4.5) также верно для узлов $i = 0$ и $i = I$:

$$\left(1 + 2\gamma + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right)\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^k\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, k = \overline{1,K};$$

$$\left(1 + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right)\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^{k-1}\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, \qquad k = \overline{1,K}.$$

Так как $\frac{2\alpha h_t}{cR} \ge 0$, то справедливо неравенство:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^k\right| \le \left(1 + \frac{2\alpha h_t}{cR}\right)\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^k\right|, \qquad k = \overline{1,K}.$$

Объединим два последних неравенства, получим:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^{k-1}\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}, \qquad k = \overline{1,K}. \quad (4.8)$$

Запишем неравенство (4.8) при $k = 1$ и учтём начальное условие из системы (4.1). В результате имеем:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^1\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^0\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h}.$$

Так как $\left|\psi_i^0\right| \le \|f_h\|_{F_h}, i = \overline{0,I}$, получим:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^1\right| \le \left(1 + \frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h}.$$

При $k = 2$:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^2\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^1\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h} \le \left(1 + \frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h} + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h};$$

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^2\right| \le \left(1 + 2\frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h}.$$

При $k = 3$:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^3\right| \le \max_{j=\overline{0,I}}\left|w_j^2\right| + \frac{h_t}{c}\|f_h\|_{F_h} \le \left(1 + 3\frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h}.$$

…

При $k = K$:

$$\max_{i=\overline{0,I}}\left|w_i^K\right| \le \left(1 + K\frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h}.$$

Таким образом получаем:

$$\|w_h\|_{U_h} \le \left(1 + K\frac{h_t}{c}\right)\|f_h\|_{F_h} = \left(1 + \frac{T}{c}\right)\|f_h\|_{F_h}.$$

Так как $1 + \frac{T}{c}$ является константой, которая не зависит от шагов дискретизации, то неравенство (4.2) выполняется, оба условия устойчивости соблюдены. А это значит, что модифицированная неявная разностная схема (2.3) абсолютно устойчива по определению.

## 5 Решение модифицированной неявной разностной схемы

Для реализации решения схемы нужно выполнить прогонку. Рассмотрим первое уравнение системы (2.3):

$$w_i^k - w_i^{k-1} = \frac{\tilde{k}h_t}{ch_z^2}\left(w_{i+1}^k - 2\,w_i^k + w_{i-1}^k\right) - \frac{2\alpha h_t}{cR}w_i^k + \frac{2h_t e^{-\beta i h_z}}{cR^2}\int_0^R I_0(r) r\,dr.$$

Введем замену:

$$\frac{\tilde{k}h_t}{ch_z^2} = \gamma, \qquad \frac{2\alpha h_2}{cR} = \mu, \qquad \frac{2h_t}{cR^2}\int_0^R I_0(r) r\,dr = \theta.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$w_i^k - w_i^{k-1} = \gamma w_{i+1}^k - 2\gamma\, w_i^k + \gamma w_{i-1}^k - \mu w_i^k + \theta e^{-\beta i h_z};$$

$$w_i^{k-1} = -\gamma w_{i+1}^k + (1 + 2\gamma + \mu) w_i^k - \gamma w_{i-1}^k - \theta e^{-\beta i h_z}, \tag{5.1}$$
$$i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}.$$

Для реализации решения предположим, что выполняется следующее соотношение:

$$w_i^k = p_i w_{i+1}^k + q_i^k, \qquad i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}. \tag{5.2}$$

Воспользуемся соотношением (5.2) в уравнении (5.1), получим:

$$w_i^{k-1} = -\gamma w_{i+1}^k + (1 + 2\gamma + \mu)\left(p_i w_{i+1}^k + q_i^k\right) - \gamma\left(p_{i-1}\left(p_i w_{i+1}^k + q_i^k\right) + q_{i-1}^k\right) - \theta e^{-\beta i h_z}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$w_i^{k-1} = -\gamma w_{i+1}^k + p_i w_{i+1}^k + q_i^k + 2\gamma p_i w_{i+1}^k + 2\gamma q_i^k + \mu p_i w_{i+1}^k + \mu q_i^k - \gamma p_{i-1} p_i w_{i+1}^k - \gamma p_{i-1} q_i^k - \gamma q_{i-1}^k - \theta e^{-\beta i h_z};$$

$$w_i^{k-1} = (-\gamma + p_i + 2\gamma p_i + \mu p_i - \gamma p_{i-1} p_i) w_{i+1}^k + \left((1 + 2\gamma + \mu - \gamma p_{i-1}) q_i^k - \gamma q_{i-1}^k\right) - \theta e^{-\beta i h_z}.$$

Данное соотношение будет выполняться только в том случае, если

$$\begin{cases} (1 + 2\gamma + \mu - \gamma p_{i-1}) p_i = \gamma; \\ (1 + 2\gamma + \mu - \gamma p_{i-1}) q_i^k = w_i^{k-1} + \gamma q_{i-1}^k + \theta e^{-\beta i h_z}. \end{cases}$$

Таким образом мы получили формулы для вычисления прогоночных коэффициентов:

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\gamma}{1 + 2\gamma + \mu - \gamma p_{i-1}}, \qquad i = \overline{1, I-1}; \\ q_i^k = \dfrac{w_i^{k-1} + \gamma q_{i-1}^k + \theta e^{-\beta i h_z}}{1 + 2\gamma + \mu - \gamma p_{i-1}}, \qquad i = \overline{1, I-1}, \qquad k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Перепишем третье уравнение системы (2.3) в виде:

$$w_1^k - w_0^k = \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}} w_0^k + \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t}\left(w_0^k - w_0^{k-1}\right) + \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R} w_0^k - \frac{h_z^2}{\tilde{k} R^2} \int_0^R I_0(r) r \, dr.$$

Введем замену:

$$\rho = \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t}, \qquad \sigma = \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R}, \qquad \tau = \frac{h_z^2}{\tilde{k} R^2} \int_0^R I_0(r) r \, dr, \qquad \vartheta = \frac{\alpha h_z}{\tilde{k}}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$w_1^k - w_0^k = \vartheta w_0^k + \rho\left(w_0^k - w_0^{k-1}\right) + \sigma w_0^k - \tau;$$
$$\rho w_0^{k-1} = -w_1^k + (1 + \vartheta + \rho + \sigma) w_0^k - \tau.$$

Подставим в $w_0^k$ соотношение (5.2), получим:

$$\rho w_0^{k-1} = \left(-1 + p_0(1 + \vartheta + \rho + \sigma)\right) w_1^k + q_0^k(1 + \vartheta + \rho + \sigma) - \tau.$$

Данное соотношение будет выполняться только в том случае, если:

$$\begin{cases} -1 + p_0(1 + \vartheta + \rho + \sigma) = 0; \\ q_0^k(1 + \vartheta + \rho + \sigma) - \tau = \rho w_0^{k-1}. \end{cases}$$

Выделим из данной системы $p_0$ и $q_0^k$:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{1 + \vartheta + \rho + \sigma}; \\ q_0^k = \dfrac{\rho w_0^{k-1} + \tau}{1 + \vartheta + \rho + \sigma}, \qquad k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Теперь найдем формулу для вычисления правого краевого узла $w_I^k$.

Перепишем четвертое уравнение системы (2.3) в виде:

$$w_I^k - w_{I-1}^k = -\frac{\alpha h_z}{\tilde{k}} w_I^k - \frac{c h_z^2}{2\tilde{k} h_t}\left(w_I^k - w_I^{k-1}\right) + \frac{\alpha h_z^2}{\tilde{k} R} w_I^k - \frac{h_t^2 e^{-\beta I h_z}}{\tilde{k} R^2} \int_0^R I_0(r) r\, dr.$$

Видоизменим уравнение, воспользовавшись прошлой заменой:

$$w_I^k - w_{I-1}^k = -\vartheta w_I^k - \rho\left(w_I^k - w_I^{k-1}\right) + \sigma w_I^k - \tau e^{-\beta I h_z};$$
$$(1 + \vartheta + \rho - \sigma) w_I^k = w_{I-1}^k + \rho w_I^{k-1} - \tau e^{-\beta I h_z}.$$

Выделим отсюда $w_I^k$:

$$w_I^k = \frac{w_{I-1}^k + \rho w_I^{k-1} - \tau e^{-\beta I h_z}}{1 + \vartheta + \rho - \sigma}, \qquad k = \overline{1, K}. \tag{5.5}$$

## 6 Алгоритм решения схемы

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1) заполнить начальный временной слой (при $k = 0$), используя начальное условие из схемы (2.3);
2) по формулам из системы (5.4) рассчитать начальные прогоночные коэффициенты $p_0$ и $q_0^k$ ($k = \overline{1, K}$);

3) по первой формуле из системы (5.3) рассчитать оставшиеся прогоночные коэффициенты $p_i$ $(i = \overline{1, I-1})$, так как для каждого временного слоя они одинаковы;
4) для реализации метода прогонки на каждом временном слое (при $k = \overline{1, K}$) рассчитать правый краевой узел $w_I^k$ по формуле (5.5) и прогоночные коэффициенты $q_i^k$ $(i = \overline{1, I-1})$. Далее по формуле (5.2) находим все остальные узлы.

## 7 Результаты вычислительных экспериментов

### 7.1 Графическая демонстрация динамики теплового процесса

Для решения разностной схемы была написана программа на языке Python, представленная в приложениях …

На рисунке 7.1 представлен график зависимости температуры от точки на стержне в различные моменты времени $t$, расчет производился на сетке $I = 50, K = 200$.

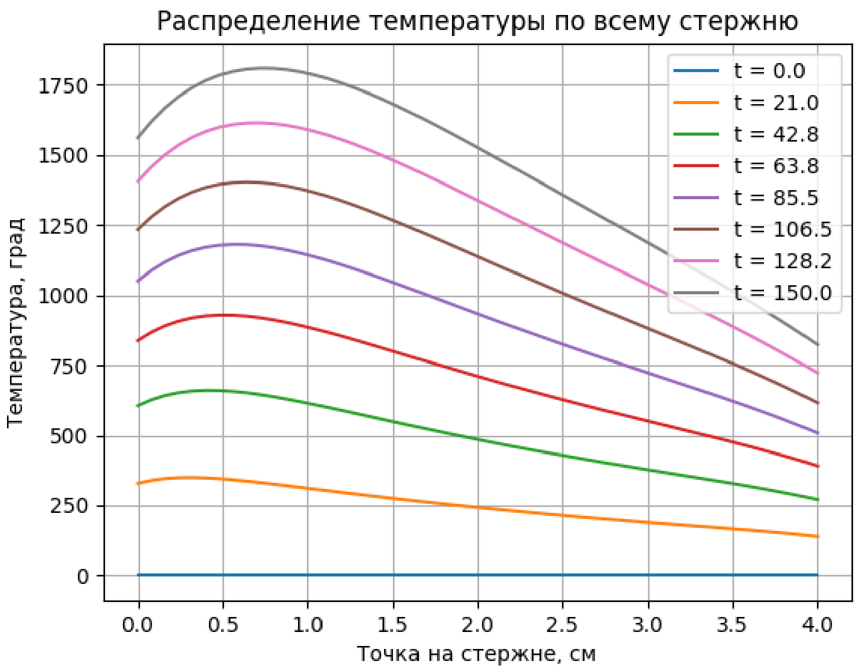


Рисунок 7.1 – График зависимости температуры от точки на стержне в различные моменты времени

На рисунке 7.2 представлен график зависимости температуры от времени в различных точках стержня.

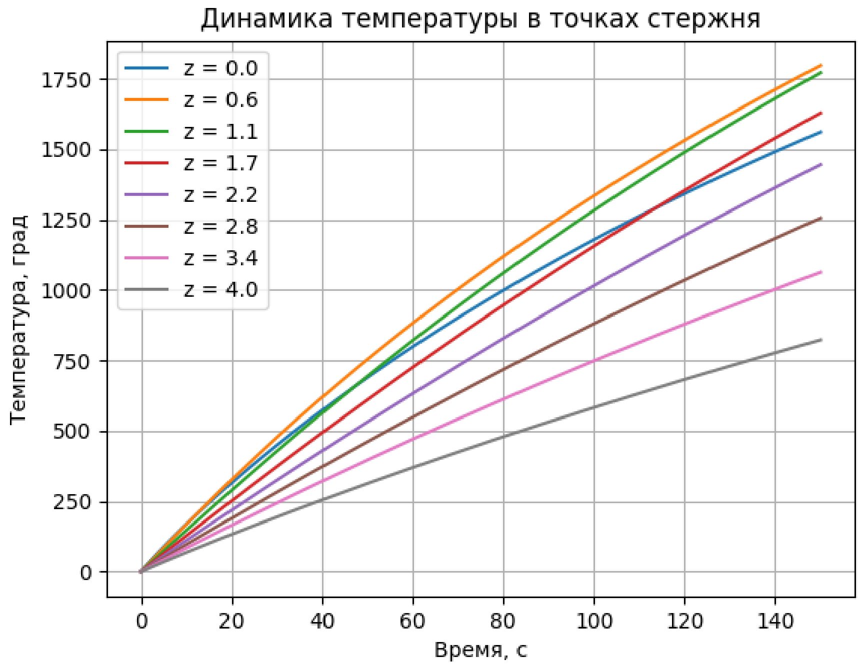


Рисунок 7.2 – График зависимости температуры от времени в различных точках стержня

Анализируя графики, можно сделать вывод о том, что с течением времени мы наблюдаем процесс нагревания.

### 7.2 Графическое подтверждение сходимости разностного уравнения

На рисунках 7.3 и 7.4 приведены графики, подтверждающие сходимость разностного уравнения решения дискретной задачи (2.3) на сгущающихся сетках.

Для этого необходимо зафиксировать значение времени и пространства. Для данного эксперимента зафиксировано $t = 150$, $z = 0{,}6$. Рисунки 7.3 и 7.4 содержат графическое подтверждение сходимости на сгущающихся сетках. На графиках видно, что решение на грубой сетке (синий график, $I = 8, K = 5$) сильно отличается от решения на мелкой сетке (коричневый график, $I = 256, K = 5120$). С последующим измельчением сетки различие между графиками становится почти незаметным.

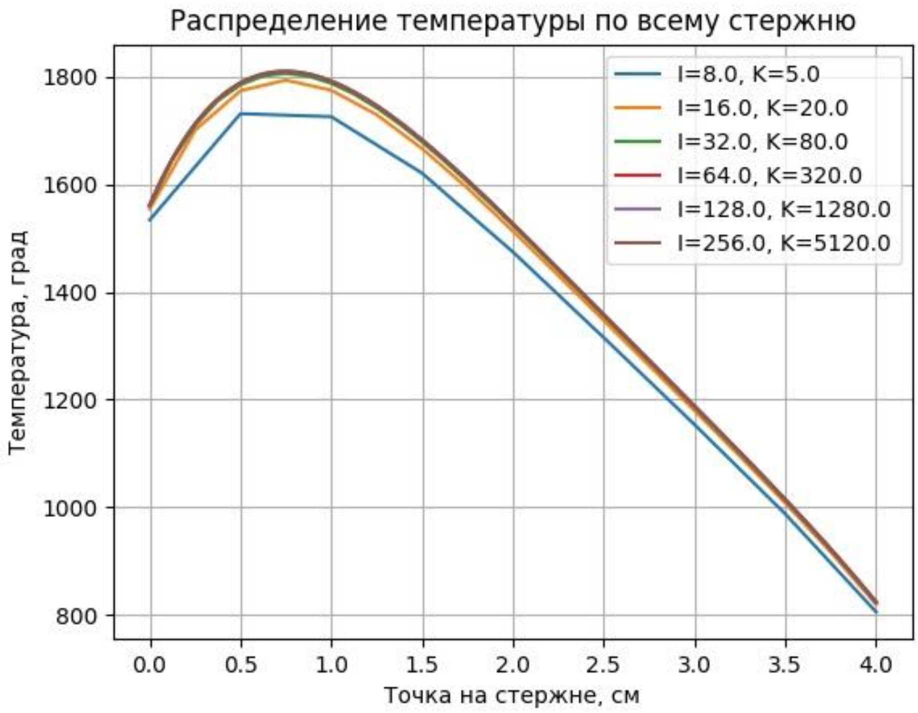


Рисунок 7.3 – График, демонстрирующий сходимости решения в фиксированный момент времени $t = 150$

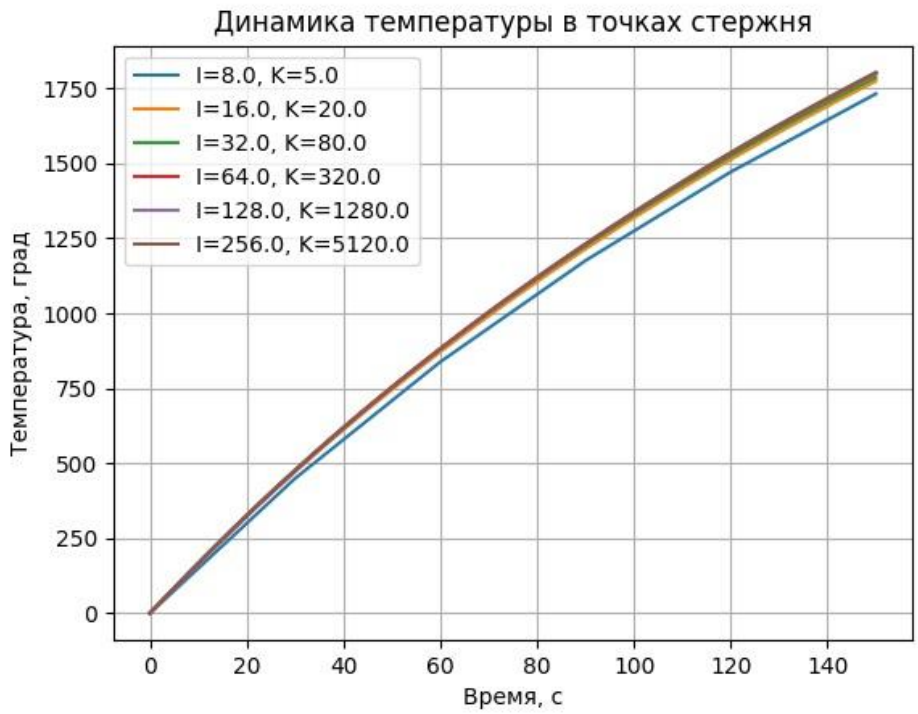


Рисунок 7.4 – График, демонстрирующий сходимость решения в фиксированной пространственной координате $z = 0{,}6$

## 7.3 Исследование зависимости погрешности от шагов дискретизации

В результате исследования разностной схемы установлено, что она аппроксимирует задачу с погрешностью $O(h_z^2, h_t)$ и является абсолютно устойчивой. Следовательно, на основании теоремы о сходимости эта схема сходится и погрешность разностного решения имеет вид $O(h_z^2, h_t)$. Тогда для погрешности в узлах сетки можно записать:

$$\left\{\varepsilon_{h_z h_t}\right\}_{z_i,t_k} = \left\{w_{h_z h_t} - [w]_{h_z h_t}\right\}_{z_i,t_k} = ah_t + bh_z^2 + O(h_z^3, h_t^2).$$

Тогда

$$\left\{w_{h_z h_t}\right\}_{z_i,t_k} = \left\{[w]_{h_z h_t}\right\}_{z_i,t_k} + ah_t + bh_z^2 + O(h_z^3, h_t^2). \quad (7.5)$$

Рассмотрим сетку с шагами $h_t/4$ и $h_z/2$. Для такой сетки можно записать:

$$\left\{w_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}\right\}_{z_i,t_k} = \left\{[w]_{h_z h_t}\right\}_{z_i,t_k} + \frac{ah_t}{4} + b\frac{h_z}{4} + O_1(h_z^3, h_t^2). \quad (7.6)$$

Из (7.5) и (7.6) получим:

$$\left\{\Delta_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}\right\}_{z_i,t_k} = \left\{w_{h_z h_t} - w_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}\right\}_{z_i,t_k} = \frac{3a}{4}h_t + \frac{3b}{4}h_z^2 + O_2(h_z^3, h_t^2). \quad (7.7)$$

Проведем ещё большее измельчение сетки:

$$\left\{\Delta_{\frac{h_z}{4},\frac{h_t}{16}}\right\}_{z_i,t_k} = \left\{w_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}} - w_{\frac{h_z}{4},\frac{h_t}{16}}\right\}_{z_i,t_k} = \frac{3a}{16}h_t + \frac{3b}{16}h_z^2 + O_3(h_z^3, h_t^2). \quad (7.8)$$

Из (7.7) и (7.8) вытекает, что

$$\delta = \left\{\Delta_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}\right\}_{z_i,t_k} \Big/ \left\{\Delta_{\frac{h_z}{4},\frac{h_t}{16}}\right\}_{z_i,t_k} \approx 4.$$

Будем измельчать сетку как показано выше и представим полученные данные в таблицах 1 и 2.

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что при измельчении сетки отношение $\delta$ становится близким к 4. Видим, что на тестовом примере результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с результатами теоретического исследования сходимости модифицированной неявной схемы для различных равномерных сеток.

Таблица 1 – Результаты вычислительного эксперимента ($t = 150, z = 4$)

| $K$ | $I$ | $\Delta_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}$ | $\Delta_{\frac{h_z}{4},\frac{h_t}{16}}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 13,9373855637 | 3,4870115337 | 3,9969427772 |
| 20 | 16 | 3,4870115337 | 0,8698069727 | 4,0089487014 |
| 80 | 32 | 0,8698069727 | 0,2172776949 | 4,0032041628 |
| 320 | 64 | 0,2172776949 | 0,0543076135 | 4,0008698746 |
| 1280 | 128 | 0,0543076135 | 0,0135761484 | 4,0002224398 |
| 5120 | 256 | 0,0135761484 | 0,0033939985 | 4,0000454833 |

Таблица 2 – Результаты вычислительного эксперимента ($t = 150, z = 2$)

| $K$ | $I$ | $\Delta_{\frac{h_z}{2},\frac{h_t}{4}}$ | $\Delta_{\frac{h_z}{4},\frac{h_t}{16}}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 38,9823912969 | 10,3167706397 | 3,7785458898 |
| 20 | 16 | 10,3167706397 | 2,6196282518 | 3,9382575113 |
| 80 | 32 | 2,6196282518 | 0,6575197265 | 3,9841059455 |
| 320 | 64 | 0,6575197265 | 0,1645445975 | 3,9959970524 |
| 1280 | 128 | 0,1645445975 | 0,0411464593 | 3,9989977290 |
| 5120 | 256 | 0,0411464593 | 0,0102872763 | 3,9997428136 |

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в стержне. Для численного решения краевой задачи построены две схемы: простейшая неявная и модифицированная неявная схема.

Проведено теоретическое исследование модифицированной неявной схемы, в результате которого установлено, что модифицированная неявная схема аппроксимирует исходную краевую задачу со вторым порядком относительно шага $h_z$ и первым относительно шага $h_t$. Также в результате исследования установлено, что модифицированная неявная схема является абсолютно устойчивой.

Для получения графиков найденных результатов была написана программа на языке Python. Выяснилось, что при измельчении сетки

Также в результате серии вычислительных экспериментов было установлено, что погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью модифицированной неявной схемы, убывает с измельчением сетки.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Дягтерев, А.А. Численные методы решения краевых задач математической физики [Текст]: методические указания / А.А. Дягтерев. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2021. – 61 с.

2 Дягтерев, А.А. Метод конечных разностей [Текст]: учебное пособие / А.А. Дягтерев. – Самар. ун-т.; Самара, 2022. – 129 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Программная реализация численного решения модифицированной неявной схемы

```python
import math
import numpy as np

from chmmf.parameters import (INTEGRAL)

np.seterr(all='raise')


INTEGRAL = 144  # that is the definite integral from 0 to R of [I_0(r)r]dr


def calculate_implicit_modified_scheme(K, I, l, T, k, c, alpha, beta, R,
progress=None):
    h_z = l / I
    h_t = T / K

    # константы для основного уравнения
    gamma = k * h_t / (c * (h_z ** 2))
    mu = 2 * alpha * h_t / (c * R)
    nu = 2 * h_t * INTEGRAL / (c * (R ** 2))

    # константы для краевых условий
    var_theta = alpha * h_z / k
    rho = c * (h_z ** 2) / (2 * k * h_t)
    sigma = alpha * (h_z ** 2) / (k * R)
    tau = (h_z ** 2) * INTEGRAL / (k * (R ** 2))

    p_i = np.zeros(I)
    q_i_n = np.zeros((K + 1, I))
    w_i_n = np.zeros((K + 1, I + 1))

    # p_0 got from left bound condition
    p_i[0] = 1 / (1 + var_theta + rho + sigma)
    # calculating p_i coefficients, that the same for each n
    for i in range(1, I):
        p_i[i] = gamma / (1 + mu + gamma * (2 - p_i[i - 1]))

    try:
        for n in range(1, K + 1):
            if progress:
                progress.value = n

            # q_0_n got from left bound condition
            q_i_n[n][0] = (rho * w_i_n[n - 1][0] + tau) / (1 + var_theta +
rho + sigma)
            for i in range(1, I):
                numerator = w_i_n[n - 1][i] + gamma * q_i_n[n][i - 1] + nu *
np.exp(-beta * i * h_z)
                denominator = 1 + mu + gamma * (2 - p_i[i - 1])
                q_i_n[n][i] = numerator / denominator

            # start calculate w_i_n from point i = I
            w_I_n_numerator = rho * w_i_n[n - 1][I] + q_i_n[n][I - 1] + tau *
np.exp(-beta * I * h_z)
            w_I_n_denominator = 1 +var_theta + rho + sigma - p_i[I - 1]
            w_i_n[n][I] = w_I_n_numerator / w_I_n_denominator
```

```python
        for i in range(I - 1, -1, -1):
            w_i_n[n][i] = p_i[i] * w_i_n[n][i + 1] + q_i_n[n][i]

except IndexError as index_error:
    print(index_error)
    exit(-1)
if progress:
    progress.value = 0
return w_i_n
```