Projet probabilité
Exercice 4:

1)
Si $X = (X_1, . . . , X_n)$ est un vecteur gaussien alors $<a, X>$ =somme des i allant de 1 a n suit une loi a_iX_i suit une loi normale de paramaetres
$E[<a, X>] = E[a_1X_1 + \cdot\cdot\cdot + a_nX_n] = a_1E[X_1] + \cdot\cdot\cdot + a_nE[X_n] = <a, E[X]>$
$Var(<a, X>) = Var(a_1X_1 + \cdot\cdot\cdot + a_nX_n)$ = somme des i,j=1 a de($a_ia_j Cov(X_i, X_j)$ = at Cov(X)a.
La v.a. $<a, X>$ suit donc la loi N ($<a, E[X]>$, at Cov(X)a), sa fonction caract´eristique est
donnee par:
$\varphi_{<a,X>}(x) = \exp($
$ix<a, E[X] >- 1/2(at Cov(X)a)x^{**2})$
On peut en deduire que pour un vecteur gaussien X de moyenne b et de matrice de variance V la fonction s'ecrit:
$\varphi_x(u)=\exp<u,b>-1/2<u,vu>$
2)
Pour tout $t \in R$,
$\phi_{\varepsilon X}(t) = E(\exp(it\varepsilon X))$=double integralle($\exp(itux)\ P_\varepsilon(du)\ P_X(dx)$)
=integralle $E(\exp(itux))P_\varepsilon(du)$
$= E(e(itX)P(\varepsilon = 1) + E(\exp(-itX)P (\varepsilon = -1)$
$= E(\exp(itX)= \phi_X(t)$.
Notons que $P_X = P_{-X}$ si et seulement si ϕ_X est une fonction paire sur R, ce qui est le cas
si par exemple X admet une fonction de densité qui est symétrique sur R.
3)
Si le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X existe,
alors la fonction caractéristique de X est k fois dérivable et : $E(X^k) = 1\ i^k$
$\phi^{(k)}(0)$.
Preuve. On considère ici le cas réel. La démonstration est similaire dans le cas dénombrable.
On suppose que X admet une densité f. Si $E(X^k)$ existe, la fonction $x \to (ix)^k$ $\exp(itx)\ f(x)$ est
uniformément intégrable et d'après les propriétés des intégrales, ϕ_X est k fois dérivable et
$\phi^{(k)}(t)$ = integralle (entre$+\infty$ et $-\infty$)de $(ix)^k \exp(itx)\ f(x)\ dx$,
c'est-à-dire, pour tout $t \in R$: $\phi^{(k)}(t) = E((iX)^k\exp(itX))$.
En particulier, pour t = 0 : $\phi_x^{(k)}(0) = E(i^k X^k \exp(0)) = i^k E(X^k)$,pour k=1,...,p.