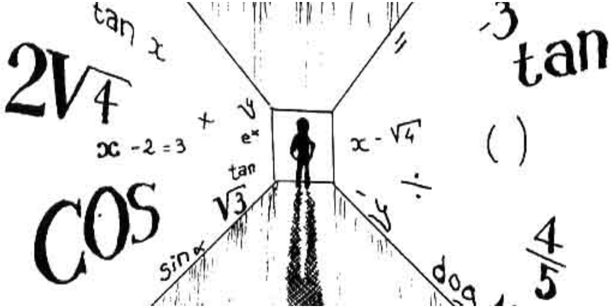
esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Formes bilinéaires et formes quadratiques

AA2: Formes bilinéaires symétriques



Formes bilinéaires symétriques

Définition: Formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle forme bilinéaire sur E toute application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que:

- Pour y fixé dans E, l'application $x \mapsto b(x, y)$ est une forme linéaire sur E. c'est-à-dire

$$\forall x, x', y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad b(\lambda x + x', y) = \lambda b(x, y) + b(x', y)$$

- Pour x fixé dans E, l'application $y \mapsto b(x, y)$ est une forme linéaire sur E. c'est-à-dire

$$\forall x, y, y' \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad b(x, \lambda y + y') = \lambda b(x, y) + b(x, y')$$

Formes bilinéaires symétriques

Définition: Formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle forme bilinéaire sur E toute application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que:

- Pour y fixé dans E, l'application $x \mapsto b(x,y)$ est une forme linéaire sur E. c'est-à-dire

$$\forall x,\, x',\, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad b(\lambda x + x', y) = \lambda b(x,y) + b(x',y)$$

- Pour x fixé dans E, l'application $y \mapsto b(x,y)$ est une forme linéaire sur E. c'est-à-dire

$$\forall x,\, y,\, y' \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad b(x, \lambda y + y') = \lambda b(x,y) + b(x,y')$$

bilinéarité= linéarité par rapport à la première variable

+ linéarité par rapport à la deuxième variable.

Exercice1

Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$:

1. $b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
2. $b_2(x, y) = 2 + x_1 y_1 + 3x_2 y_2$.
3. $b_3(x, y) = x_1 x_2 + 8x_2 y_1$.

Correction

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_1 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$. est une forme bilinéaire. En effet

Correction

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_1 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$. est une forme bilinéaire. En effet

Correction

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_1 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$. est une forme bilinéaire. En effet
   - linéarité par rapport à x:
     Pour tout $x' = (x'_1, x'_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} b_1(\lambda x + x', y) &= (\lambda x_1 + x'_1)y_1 + (\lambda x_2 + x'_2)y_2 = \lambda x_1y_1 + x'_1y_1 + \lambda x_2y_2 + x'_2y_2. \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + x'_1y_1 + x'_2y_2 \\ &= \lambda b_1(x, y) + b_1(x', y) \end{aligned}$$

Correction

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_1 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$. est une forme bilinéaire. En effet
   - linéarité par rapport à x:
     Pour tout $x' = (x'_1, x'_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} b_1(\lambda x + x', y) &= (\lambda x_1 + x'_1) y_1 + (\lambda x_2 + x'_2) y_2 = \lambda x_1 y_1 + x'_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + x'_2 y_2. \\ &= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2) + x'_1 y_1 + x'_2 y_2 \\ &= \lambda b_1(x, y) + b_1(x', y) \end{aligned}$$

Correction

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_1 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$. est une forme bilinéaire. En effet
   - linéarité par rapport à x:
     Pour tout $x' = (x'_1, x'_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} b_1(\lambda x + x', y) &= (\lambda x_1 + x'_1)y_1 + (\lambda x_2 + x'_2)y_2 = \lambda x_1y_1 + x'_1y_1 + \lambda x_2y_2 + x'_2y_2. \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + x'_1y_1 + x'_2y_2 \\ &= \lambda b_1(x, y) + b_1(x', y) \end{aligned}$$

   - linéarité par rapport à y:
     Pour tout $y' = (y'_1, y'_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} b_1(x, \lambda y + y') &= x_1(\lambda y_1 + y'_1) + x_2(\lambda y_2 + y'_2) = \lambda x_1y_1 + x_1y'_1 + \lambda x_2y_2 + x_2y'_2. \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + x_1y'_1 + x_2y'_2 \\ &= \lambda b_1(x, y) + b_1(x, y') \end{aligned}$$

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_2 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_2(x, y) = 2 + x_1 y_1 + 3x_2 y_2$.

1. **Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_2 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_2(x, y) = 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2$.**
   - Soit $x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} b_2(x + x', y) &= 2 + (x_1 + x'_1)y_1 + 3(x_2 + x'_2)y_2 \\ &= 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2 + x'_1y_1 + 3x'_2y_2 \\ &\neq b_2(x, y) + b_2(x', y) \end{aligned}$$

1. **Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_2 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_2(x, y) = 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2$.**
   - Soit $x' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} b_2(x + x', y) &= 2 + (x_1 + x_1')y_1 + 3(x_2 + x_2')y_2 \\ &= 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1'y_1 + 3x_2'y_2 \\ &\neq b_2(x, y) + b_2(x', y) \end{aligned}$$

   Alors, b_2 n'est pas linéaire par rapport à la première variable x et donc b_2 n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_2 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_2(x, y) = 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2$.
   - Soit $x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} b_2(x + x', y) &= 2 + (x_1 + x'_1)y_1 + 3(x_2 + x'_2)y_2 \\ &= 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2 + x'_1y_1 + 3x'_2y_2 \\ &\neq b_2(x, y) + b_2(x', y) \end{aligned}$$

   Alors, b_2 n'est pas linéaire par rapport à la première variable x et donc b_2 n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_3 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_3(x, y) = x_1x_2 + 8x_2y_1$.

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_2 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_2(x, y) = 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2$.
   - Soit $x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

   $$\begin{aligned} b_2(x + x', y) &= 2 + (x_1 + x'_1)y_1 + 3(x_2 + x'_2)y_2 \\ &= 2 + x_1y_1 + 3x_2y_2 + x'_1y_1 + 3x'_2y_2 \\ &\neq b_2(x, y) + b_2(x', y) \end{aligned}$$

   Alors, b_2 n'est pas linéaire par rapport à la première variable x et donc b_2 n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b_3 l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par $b_3(x, y) = x_1x_2 + 8x_2y_1$.
   - Soit $\lambda = -1$, on a $b_3(-x, y) = x_1x_2 - 8x_2y_1 \neq -b_3(x, y)$.
   Alors, b_3 n'est pas linéaire par rapport à la première variable x et donc b_2 n'est pas une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Définition: forme bilinéaire symétrique:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire sur E est dite symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, b(x, y) = b(y, x).$$

Exemples

1. b_1 est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$. On a déjà vu au paragraphe précédent que c'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, de plus

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = b_1(y, x)$$

Exemples

1. b_1 est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$. On a déjà vu au paragraphe précédent que c'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, de plus

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, b_1(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = b_1(y,x)$$

2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et b l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$b(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2.$$

C'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ (vérification immédiate).
Ce n'est pas une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$. En effet
Soit $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.
Alors, $b(x,y) = 2$ et $b(y,x) = -2$

Écriture matricielle d'une forme bilinéaire

proposition

Soient b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. On appelle la matrice de b relative à la base B la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$M_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Soint $x, y \in E$. Si X et Y désignent respectivement les matrices colonnes composées des coordonnées de x et y dans la base B, alors on a

$$b(x, y) = {}^tXMY = {}^tYMX.$$

Exercice

1. Écrire la matrice de la forme bilinéaire $b(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2$.
2. Calculer $b(X,Y)$ pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ de deux manières:

   $a)$ En utilisant l'expression de b.
   $b)$ Avec le produit matriciel.

Solution

① **Écrire la matrice de la forme bilinéaire** $b(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Solution

① **Écrire la matrice de la forme bilinéaire** $b(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

$$\mathbf{M}_{1,1} = b(e_1, e_1) = 1\times 1 + 0\times 0 = 1$$
$$\mathbf{M}_{1,2} = b(e_1, e_2) = 1\times 0 + 0\times 1 = 0$$
$$\mathbf{M}_{2,1} = b(e_2, e_1) = 0\times 1 + 1\times 0 = 0$$
$$\mathbf{M}_{2,2} = b(e_2, e_2) = 0\times 0 + 1\times 1 = 1$$

☛ **la matrice de la forme bilinéaire b:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

② **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant l'expression de** b.

Solution

② **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant l'expression de** b.

☛ $b(X,Y) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$

Solution

② **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant l'expression de** b.

☛ $b(X,Y) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$

③ **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant le produit matriciel.**

Solution

② **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant l'expression de** b.

☛ $b(X,Y) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$

③ **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en utilisant le produit matriciel.**

☛ $b(X,Y) =^t YMX = (2 - 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 - 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Exercice

Soient les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B.
2. Lesquelles sont symétriques ?

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice A est:**

$$b_1(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice A est:**

$$b_1(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice B est:**

$$b_2(X,Y) = x_1y_1 + 4x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + 4x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

② **Lesquelles sont symétriques** ?

② **Lesquelles sont symétriques ?**

☛

$$b_1(Y, X) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3 + y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 \neq b_1(X, Y)$$

Donc, b_1 n'est pas symétrique.

② Lesquelles sont symétriques ?

☛

$$b_1(Y,X) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3 + y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 \neq b_1(X,Y)$$

Donc, b_1 n'est pas symétrique.

☛

$$b_2(Y,X) = y_1x_1 + 4y_1x_3 + y_2x_2 + y_2x_3 + 4y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 = b_2(X,Y)$$

Donc, b_2 est symétrique.