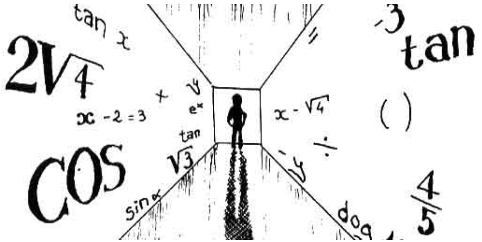
FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

AA4: Écriture matricielle d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique



Écriture matricielle d'une forme bilinéaire

proposition

Soient b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. On appelle la matrice de b relative à la base B la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$M_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Soint $x, y \in E$. Si X et Y désignent respectivement les matrices colonnes composées des coordonnées de x et y dans la base B, alors on a

$$b(x, y) = {}^tXMY = {}^tYMX.$$

Exercice

1. Écrire la matrice de la forme bilinéaire $b(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2$.
2. Calculer $b(X,Y)$ pour $X = (1,2)$ et $Y = (2,1)$ de deux manières:
   $a)$ En utilisant l'expression de b.
   $b)$ Avec le produit matriciel.

Solution

① **Écrire la matrice de la forme bilinéaire** $b(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Solution

① **Écrire la matrice de la forme bilinéaire** $b(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,1} &= b(e_1, e_1) = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \\
\mathbf{M}_{1,2} &= b(e_1, e_2) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \\
\mathbf{M}_{2,1} &= b(e_2, e_1) = 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0 \\
\mathbf{M}_{2,2} &= b(e_2, e_2) = 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

☛ **la matrice de la forme bilinéaire b:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

② **Calculer** $b(X, Y)$ **pour** $X = (1, 2)$ **et** $Y = (2, 1)$ **en utilisant l'expression de** b.

Solution

② **Calculer** $b(X,Y)$ **pour** $X=(1,2)$ **et** $Y=(2,1)$ **en utilisant l'expression de** b.

☛ $b(X,Y)=1\times 2+2\times(-1)=0$

Solution

② **Calculer $b(X,Y)$ pour $X=(1,2)$ et $Y=(2,1)$ en utilisant l'expression de b.**

☛ $b(X,Y) = 1\times 2 + 2\times(-1) = 0$

③ **Calculer $b(X,Y)$ pour $X=(1,2)$ et $Y=(2,1)$ en utilisant le produit matriciel.**

Solution

② **Calculer $b(X,Y)$ pour $X=(1,2)$ et $Y=(2,1)$ en utilisant l'expression de b.**

☛ $b(X,Y)=1\times 2+2\times(-1)=0$

③ **Calculer $b(X,Y)$ pour $X=(1,2)$ et $Y=(2,1)$ en utilisant le produit matriciel.**

☛ $$b(X,Y)={}^tYMX=(2-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=(2-1)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=0$$

Exercice

Soient les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B.
2. Lesquelles sont symétriques ?

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice A est:**

$$b_1(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

Solution

① **Calculer Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices A et B**

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice A est:**

$$b_1(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

☛ **La forme bilinéaire associée à la matrice B est:**

$$b_2(X,Y) = x_1y_1 + 4x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + 4x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

② Lesquelles sont symétriques ?

② Lesquelles sont symétriques ?

☛

$$b_1(Y,X) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3 + y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 \neq b_1(X,Y)$$

Donc, b_1 n'est pas symétrique.

② **Lesquelles sont symétriques** ?

☛

$$b_1(Y,X) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3 + y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 \neq b_1(X,Y)$$

Donc, b_1 n'est pas symétrique.

☛

$$b_2(Y,X) = y_1x_1 + 4y_1x_3 + y_2x_2 + y_2x_3 + 4y_3x_1 + y_3x_2 + 2y_3x_3 = b_2(X,Y)$$

Donc, b_2 est symétrique.

proposition

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, b la forme polaire associée à q et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$.
La matrice de la forme quadratique q dans la base B est la matrice de la forme bilinéaire b dans la base B (i.e $M_{ij} = b(e_i, e_j)$).

Soient $x \in \mathbb{E}$ et X la matrice colonne composée par les coordonnées de x dans la base B. Comme $q(x) = b(x, x)$, alors

$$q(x) = {}^tXMX$$

Exercice

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$q(X) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

1. Déterminer la forme polaire b de q.
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
3. Soit $x = (3, 1)$, calculer $q(x)$ de deux manières.

Solution

① **Déterminer la forme polaire b de q.**

Solution

① **Déterminer la forme polaire b de q.**

$$b(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+Y) - q(X) - q(Y)]$$

Solution

① **Déterminer la forme polaire b de q.**

$$
\begin{array}{rcl}
b(X,Y) & = & \dfrac{1}{2}[q(X+Y)-q(X)-q(Y)] \\
 & = & \dfrac{1}{2}[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+4(x_1+y_1)(x_2+y_2)-(x_1^2+x_2^2+4x_1x_2) \\
 & - & (y_1^2+y_2^2+4y_1y_2)] \\
 & = & \dfrac{1}{2}[2x_1y_1+2x_2y_2+4x_1y_2+4x_2y_1] \\
 & = & x_1y_1+x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1
\end{array}
$$

Solution

② **Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.**

Solution

② **Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.**

La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

② **Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.**

La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

③ **Soit $x = (3,1)$, calculer $q(x)$ de deux manières.**

Solution

② **Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.**

La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

③ **Soit $x = (3,1)$, calculer $q(x)$ de deux manières.**
$q((3,1)) = 9 + 1 + 12 = 22;$

$$q((3,1)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 22$$