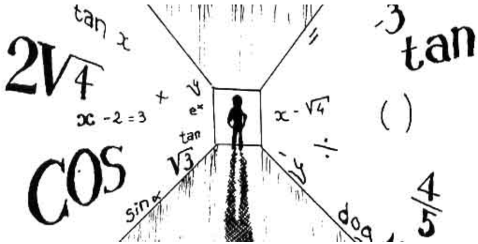
DIAGONALISATION DES MATRICES

Calcul des puissances d'une matrice carrée



Mathématiques de Base 3 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2021/2022

Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2, A^3 et A^4.

Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2, A^3 et A^4.
- On se rend compte que les calculs sont pénibles.

Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2, A^3 et A^4.
- On se rend compte que les calculs sont pénibles.
- Si A est diagonalisable, les calculs peuvent se simplifier énormément.

Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2, A^3 et A^4.
- On se rend compte que les calculs sont pénibles.
- Si A est diagonalisable, les calculs peuvent se simplifier énormément.
- Vérifions que A est diagonalisable.

- $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

- $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$\Rightarrow$ χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ $\quad (1)$

- $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$\Rightarrow$ χ_A **est scindé sur** $\mathbb{R}$ $\quad (1)$

- $E_1 = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, E_{-1} = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$\Rightarrow$ χ_A **est scindé sur** $\mathbb{R}$ $\qquad (1)$

- $E_1 = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, E_{-1} = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ $dimE_1 = 1 = m_1$ **et** $dimE_{-1} = m_{-1} \qquad (2)$

- $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$\Rightarrow$ χ_A **est scindé sur** $\mathbb{R}$ $\quad (1)$

- $E_1 = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $E_{-1} = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ $dimE_1 = 1 = m_1$ **et** $dimE_{-1} = m_{-1}$ $\quad (2)$

- (1) **et** $(2) \Rightarrow A$ **est diagonalisable.**

$\Rightarrow$ Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = P.D.P^{-1}$;

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4

⇒ Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = P.D.P^{-1}$;

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Calculons** A^n
- **Etape 1:** $D^n == \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

- **Calculons** A^n
- **Etape 1:** $D^n == \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
- **Etape 2:** $n = 0, A^0 = I_3 = PD^0P^{-1},$
  $n = 1, A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$
  $n = 2, A^2 = A.A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$

- **Calculons** A^n
- **Etape 1:** $D^n == \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
- **Etape 2:** $n = 0, A^0 = I_3 = PD^0P^{-1}$,
  $n = 1, A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$
  $n = 2, A^2 = A.A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.
- **Montrons par récurence que** $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Calculons** A^n
- **Etape 1:** $D^n == \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
- **Etape 2:** $n = 0, A^0 = I_3 = PD^0P^{-1},$
  $n = 1, A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$
  $n = 2, A^2 = A.A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$
- **Montrons par récurence que** $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$
  $n = 0, A^0 = PD^0P^{-1} = I_3$, **vrai**
  $n = 1, A = PDP^{-1}$, **vrai**

- **Calculons** A^n
- **Etape 1:** $D^n == \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$
- **Etape 2:** $n = 0, A^0 = I_3 = PD^0P^{-1},$
  $n = 1, A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$
  $n = 2, A^2 = A.A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$
- **Montrons par récurence que** $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$
  $n = 0, A^0 = PD^0P^{-1} = I_3$, **vrai**
  $n = 1, A = PDP^{-1}$, **vrai**
  Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ **et montrons que** $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

- $A^{n+1} = A^n.A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

- $A^{n+1} = A^n.A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$\Rightarrow$ **On concult par récurence, que** $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

- $A^{n+1} = A^n.A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$\Rightarrow$ **On concult par récurence, que** $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $A^n = \begin{pmatrix} 1+2(-1)^n & 1-(1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$