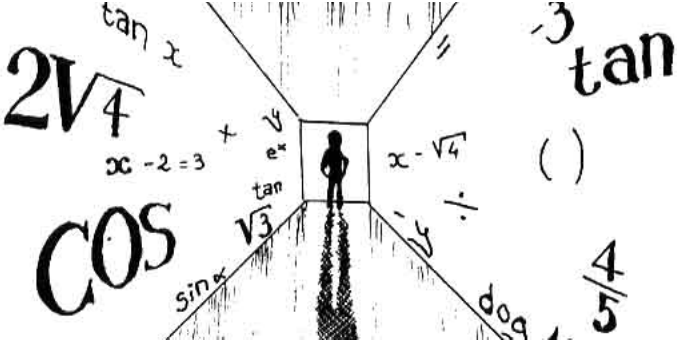
FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

AA3:Définition d'une Forme Quadratique



Formes Quadratiques

Les formes quadratiques sont naturellement liées aux formes bilinéaires symétriques.

Définition

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application

$$q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les deux conditions suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{E}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. L'application $(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique.

Formes Quadratiques

Les formes quadratiques sont naturellement liées aux formes bilinéaires symétriques.

Définition

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application

$$q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les deux conditions suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{E}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. L'application $(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique.

Exercice

Soit $P(x_1, x_2, x_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note d la distance OP et on pose $q = d^2$.

1. *Déterminer l'expression de q en fonction de x_1, x_2 et x_3.*
2. *Vérifier que q et une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*

Solution:

1. On a $q = d^2 = OP^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$q(\lambda x) = q(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}) = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 = \lambda^2 q(x)$$

En outre, soit $b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ tel que $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

b est elle symétrique ?
On a $b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = b(y,x)$. Donc b est symétrique.

b est elle bilinéaire ?

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} b(\lambda x + x', y) &= (\lambda x_1 + x'_1)y_1 + (\lambda x_2 + x'_2)y_2 + (\lambda x_3 + x'_3)y_3 \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + x'_3y_3) \\ &= \lambda b(x,y) + b(x',y) \end{aligned}$$

Alors b est linéaire par rapport à la première variable x.
Aussi b est linéaire par rapport à la deuxième variable y (i.e $b(x, \lambda y + y') = \lambda b(x,y) + b(x,y')$) puisque b est symétrique. Ainsi, b est une forme bilinéaire.
Conclusion: q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Soit q *une forme quadratique sur* $\mathbb{E}$*, il existe une unique forme bilinéaire symétrique* b *telle que*

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

Cette forme est appelée la forme bilinéaire symetrique associée à q *ou la forme polaire associée à* q*.*

Proposition

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique b telle que

$$b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)].$$

Cette forme est appelée la forme bilinéaire symetrique associée à q ou la forme polaire associée à q.

Exercice

Soit le polynôme q suivant:

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. *Montrer que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer la forme bilinéaire associée à q.*

Solution:

1. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= q(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}) \\ &= (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + 4(\lambda x_1)(\lambda x_2) + 4(\lambda x_1)(\lambda x_3) + 2(\lambda x_2)(\lambda x_3) = \lambda^2 q(x) \end{aligned}$$

En outre, soit $b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ tel que $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
b(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)],\\
&= \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+4(x_1+y_1)(x_2+y_2)+4(x_1+y_1)(x_3+y_3)+\\
&+ 2(x_2+y_2)(x_3+y_3)-x_1^2-x_2^2-4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3-y_1^2-y_2^2-\\
&- 4y_1y_2-4y_1y_3-2y_2y_3],\\
&= \frac{1}{2}[x_1^2+y_1^2+2x_1y_1+x_2^2+y_2^2+2x_2y_2+4x_1x_2+4x_1y_2+4y_1x_2+\\
&+ 4y_1y_2+4x_1x_3+4x_1y_3+4y_1x_3+4y_1y_3+2x_2x_3+2y_2x_3+2x_2y_3+2y_2y_3-\\
&- x_1^2-x_2^2-4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3-y_1^2-y_2^2-4y_1y_2-4y_1y_3-2y_2y_3],\\
&= x_1y_1+x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_1y_3+2y_1x_3+y_2x_3+x_2y_3.
\end{aligned}
$$

b est elle symétrique ?

On a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2y_1x_3 + y_2x_3 + x_2y_3 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + 2y_2x_1 + 2y_1x_2 + 2y_3x_1 + 2x_3y_1 + x_3y_2 + y_3x_2 \\ &= b(y,x). \end{aligned}$$

Donc b est symétrique.

b est elle bilinéaire ?

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} b(\lambda x + x', y) &= (\lambda x_1 + x'_1)y_1 + (\lambda x_2 + x'_2)y_2 + 2(\lambda x_1 + x'_1)y_2 + 2(\lambda x_2 + x'_2)y_1 \\ &+ 2(\lambda x_1 + x'_1)y_3 + 2(\lambda x_3 + x'_3)y_1 + (\lambda x_3 + x'_3)y_2 + (\lambda x_2 + x'_2)y_3 \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2y_1x_3 + y_2x_3 + x_2y_3) \\ &+ x'_1y_1 + x'_2y_2 + 2x'_1y_2 + 2x'_2y_1 + 2x'_1y_3 + 2y_1x'_3 + y_2x'_3 + x'_2y_3 \\ &= \lambda b(x,y) + b(x',y) \end{aligned}$$

Alors b est linéaire par rapport à la première variable x.
Aussi b est linéaire par rapport à la deuxième variable y (i.e $b(x, \lambda y + y') = \lambda b(x, y) + b(x, y')$) puisque b est symétrique. Ainsi, b est une forme bilinéaire.
Concusion: q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

2. On a

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2y_1x_3 + y_2x_3 + x_2y_3 \end{aligned}$$

Définition

Une forme quadrature sur $\mathbb{E}$ est une application $q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad q(x) = b(x, x).$$

Exercice

Soient les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}$ *suivantes:*

$$\begin{aligned} b_1(x,y) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2. \\ b_2(x,y) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_3 \end{aligned}$$

Donner les formes quadratiques q_1 *et* q_2 *associées aux formes bilinéaire* b_1 *et* b_2*.*

Solution:

On a

- $q_1(x) = b_1(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
- $q_2(x) = b_2(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Question: Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Quelle est la valeur de $q(0)$?

- $\forall x \in \mathbb{E}, q(x) = 0.$