

### Bài tập chương 3

1. Cho  $V = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Xét xem  $V$  có phải là không gian véctơ trên  $\mathbb{R}$  với phép cộng và phép nhân vô hướng sau không?

$$\begin{aligned} 1) \quad (+): \quad & (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ & (\bullet): \quad \lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2); \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (+): \quad & (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ & (\bullet): \quad \lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2); \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**2.** Hãy biểu diễn véctơ  $x$  thành tổ hợp tuyến tính của các véctơ  $u, v, w$

1)  $x = (7, -2, 15); u = (2, 3, 5); v = (3, 7, 8); w = (1, -6, 1)$

2)  $x = 5 + 9t + 5t^2; u = 2 + t + 4t^2; v = 1 - t - 3t^2; w = 3 + 2t + 5t^2$

**3.** Hãy xác định  $\lambda$  sao cho  $x$  là tổ hợp tuyến tính của  $u, v, w$

1)  $x = (7, -2, \lambda); u = (2, 3, 5); v = (3, 7, 8); w = (1, -6, 1)$

2)  $x = \lambda + 9t + 5t^2; u = 2 + 2t + 4t^2; v = 1 - t - 3t^2; w = 3 + 3t + 6t^2$

4. Cho  $x, y, z$  là ba vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ  $V$ . Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ sau:

$$1) \quad S = \{u = x + y - 2z; v = x - y; w = 3y + z\}$$

$$2) \quad S = \{u = x + y - 3z; v = x + 3y - z; w = y + mz\}$$

**5.** Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véc tơ sau:

1)  $S = \{x^2 + x + 1; 2x^2 + x + 2; 3x^2 + mx + 3\}$  trong  $P_2[x]$

2)  $S = \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 4 & m \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$  trong  $M_2(\mathbb{R})$

**6.** Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau trong các không gian véctơ tương ứng. Tìm hạng cũng như hệ véctơ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ véctơ đó.

1)  $\{u_1 = (1, 2, 3, 4); u_2 = (2, 3, 4, 1); u_3 = (3, 4, 5, 6); u_4 = (4, 5, 6, 7)\}$  trong  $\mathbb{R}^4$

2)  $\{u_1 = (1, 0, 0, 0); u_2 = (0, 1, 0, 0); u_3 = (0, 0, a, 0)\}$  trong  $\mathbb{R}^4$

**7.** Hệ nào sau đây là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$

1)  $S = \{u_1 = (3, 2, 2); u_2 = (4, 8, 1)\}$

2)  $S = \{u_1 = (4, 1, 2); u_2 = (2, 0, 1); u_3 = (1, 3, 2); u_4 = (1, 1, 3)\}$

3)  $S = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (2, 2, 0); u_3 = (3, 3, 3)\}$

**8.** Hệ vectơ sau có sinh ra  $\mathbb{R}^3$  không?

1)  $\{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (2, 2, 0); u_3 = (3, 0, 0)\}$

2)  $\{u_1 = (2, -1, 3); u_2 = (4, 1, 2); u_3 = (8, -1, 8)\}$

3)  $\{u_1 = (3, 1, 4); u_2 = (2, -3, 5); u_3 = (5, -2, 9); u_4 = (1, 4, -1)\}$

4)  $\{u_1 = (1, 3, 3); u_2 = (1, 3, 4); u_3 = (1, 4, 3); u_4 = (6, 2, 1)\}$

**9.** Chứng minh rằng hệ  $E = \{1 + x + x^2, 1 + 2x, 1 + 3x + 2x^2\}$  là một cơ sở của  $P_2[x]$  và tìm tọa độ của vectơ  $u = 3x^2 - x + 7$  đối với cơ sở  $E$ .

**10.** Trong  $\mathbb{R}^3$  cho hai hệ véctor

$$B = \{u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (1, 1, 2); u_3 = (1, 1, 1)\}$$

$$E = \{v_1 = (2, 1, -1); v_2 = (3, 2, -5); v_3 = (1, -1, m)\}$$

1) Chứng minh B là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . Xác định m để E là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E

3) Cho  $[x]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; [y]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Tìm véctor x;  $[3x + 2y]_E; [x]_B$



**11.** Cho  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  và các véctor  $v_1, v_2, v_3$  có tọa độ đối với cơ sở  $B$  lần lượt là

$$[v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; [v_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; [v_3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Chứng minh  $E = \{v_1, v_2, v_3\}$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . Tìm  $v_1, v_2, v_3$  theo  $u_1, u_2, u_3$
- 2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở  $E$  sang  $B$ .

**12.** Trong các trường hợp sau, xét xem  $W$  có là không gian con của  $\mathbb{R}^n$  không?

1)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$

2)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 = x_3\}$

3)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$

4)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$

5)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$

**13.** Trong không gian  $\mathbb{R}^4$  cho các tập

$$W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 2x_3; x_1 - x_2 = 2x_4 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 \right\}$$

- 1) Chứng minh rằng  $W_1, W_2$  là các không gian con của  $\mathbb{R}^4$
- 2) Tìm một cơ sở của  $W_1$ , một cơ sở của  $W_2$

**14.** Trong  $\mathbb{R}^4$  cho các véctor

$$u_1 = (1, -1, -4, 0); u_2 = (1, 1, 2, 4); u_3 = (2, 1, 1, 6); u_4 = (2, -1, -5, 2)$$

$$\text{Đặt } W = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$$

- 1) Tìm hạng của hệ véctor  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
- 2) Hệ  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?
- 3) Tìm một cơ sở và số chiều của  $W$
- 4) Véctor  $u = (6, 2, 0, 16)$  có thuộc  $W$  không? Nếu  $u \in W$  thì tìm tọa độ của  $u$  đối với cơ sở vừa tìm được ở câu 3)
- 5) Hãy bổ sung vào cơ sở ở câu 3) để được một cơ sở của  $\mathbb{R}^4$

**15.** Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4) AX = 0 \text{ với } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

**16.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  xét tích vô hướng Euclide. Hãy áp dụng quá trình trực giao hóa Gram – Schmidt để biến cơ sở  $\{e_1, e_2, e_3\}$  thành cơ sở trực chuẩn

1)  $e_1 = (1, 1, 1); e_2 = (1, -1, 0); e_3 = (1, 2, 1)$

2)  $e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (3, 1, -2); e_3 = (0, 1, 1)$

**17.** Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con của  $\mathbb{R}^3$  sau

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 = 5x_3 \right\}$$

## Bài tập tự làm:

1. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau:

1)  $S = \{(1, 2, 3); (3, 6, 7)\}$  trong  $\mathbb{R}^3$

2)  $S = \{(4, -2, 6); (6, -3, 9)\}$  trong  $\mathbb{R}^3$

3)  $S = \{(2, -3, m); (3, -1, 5); (1, -4, 3)\}$  trong  $\mathbb{R}^3$

4)  $S = \{(4, -5, 2, 6); (2, -2, 1, 3); (6, -3, 3, 9); (4, -1, 5, 6)\}$  trong  $\mathbb{R}^4$

5)  $S = \{(1, 0, 1, 1); (0, 1, 1, 1); (1, 1, 0, 1); (1, 1, 1, m)\}$  trong  $\mathbb{R}^4$

**2.** Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau trong các không gian véctơ tương ứng. Tìm hạng cũng như hệ véctơ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ véctơ đó.

$$1) \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}; u_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ trong } M_2(\mathbb{R})$$

$$2) \left\{ u_1 = x^2 - 2x + 2; u_2 = x^2 - 1; u_3 = x^3 + 2x^2 - 2x; u_4 = x^3 + 1 \right\} \text{ trong } P_3[x]$$



3. Trong  $\mathbb{R}^4$  cho hệ véctor

$$E = \{(1, 2, -1, -2); (2, 3, 0, -1); (1, 2, 1, 4); (1, 3, -1, 0)\}$$

Chứng minh rằng E là một cơ sở của  $\mathbb{R}^4$  và tìm tọa độ của véctor  $x = (7, 14, -1, 2)$  đối với cơ sở E.

**4.** Xác định  $m$  để:

- 1)  $S = \{(0, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 3, m)\}$  sinh ra  $\mathbb{R}^3$
- 2)  $S = \{(1, 2, -1); (0, 3, 1); (1, 5, 0); (3, 9, m)\}$  không sinh ra  $\mathbb{R}^3$
- 3)  $S = \{(m, 3, 1); (0, m-1, 2); (0, 0, m+1)\}$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$

**5.** Cho  $E = \{u_1, u_2, u_3\}$  là một cơ sở của không gian véctor  $V$  trên  $\mathbb{R}$ , đặt

$$F = \{v_1 = mu_1 + u_2 + 3u_3, v_2 = mu_1 - 2u_2 + u_3, v_3 = u_1 - u_2 + u_3\}$$

- 1) Xác định  $m$  để  $F$  là cơ sở của  $V$
- 2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở  $E$  sang  $F$

6. Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho

$$B = \{v_1 = (1, 0, 1); v_2 = (1, 2, 2); v_3 = (0, -1, -1)\}$$

$$E = \{u_1 = (1, 0, -1); u_2 = (1, 1, 1); u_3 = (-1, 2, 2)\}$$

1) Chứng minh B, E là các cơ sở của  $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E. Cho  $u = (1, 2, 3)$ .

Tìm  $[u]_B; [u]_E$

3) Tìm ma trận chuyển từ E sang B. Cho  $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Tìm  $v; [v]_E$

7. Trong không gian  $P_2[x]$  các đa thức thực bậc bé hơn hoặc bằng 2, cho B là cơ sở chính tắc của  $P_2[x]$  và

$$E = \{v_1 = 1 + 3x; v_2 = x + 2x^2; v_3 = 1 + x + x^2\}$$

- 1) Chứng minh E là các cơ sở của  $P_2[x]$
- 2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E

3) Cho  $[v]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Tìm  $v; [v]_B$