

Штормовая мореходность корабля (вычислительный эксперимент)

Vessel on Stormy Waves (computational experiment)

Рабочие записи

Математические и алгоритмические модели прямых вычислительных экспериментов в штормовой гидромеханике корабля

В теоретической и алгоритмической части настоящей работы представляется и обсуждается математический инструментарий практического построения прямых вычислительных экспериментов с возможностью визуально наглядных компьютерных испытаний штормовой мореходности корабля, полезных на этапах инженерных изысканий в проектировании оптимальных обводов и общекорабельной архитектуры кораблей и судов повышенной штормовой мореходности, и также в целях практического опробования режимов эффективного и безопасного маневрирования кораблей и судов флота действующего.

В прорабатываемых прямых вычислительных экспериментах задействуются три модели морского волнения: 1) штормовое волнение с чисто математическим описанием групповых структур волн и подповерхностных течений; 2) моделирование в дифференциальных разностях вертикальных колебаний частиц жидкости – поверхностных волн в полных потоках; 3) прямой вычислительный эксперимент с полноценным трохоидальным волнением на море, в том числе с учётом стратификации дрейфовых течений и дисперсии видимых и групповых скоростей волновых структур.


Геометрические и динамические параметры штормовых волн для опытов с надводным кораблём воссоздаются сообразно наблюдениями за реальным штормовым волнением на море, которое наяву представляется ячеистыми структурами пакетов волн с быстро оседающими – условно стоячими девятью валами. При уменьшении крутизны и выполаживании волновых склонов, внутри пакетов удлиняется относительная протяженность волновых фронтов. Достоинством такой квазитрёхмерной модели является формальное соблюдение требований сплошности жидкости с недопущением строго периодического воздействия гребней штормовых волн, что важно в моделировании пространственной динамики воздействия сил волновой природы на корпус корабля в свободном надводном плавании.

В штормовом вычислительном эксперименте с движущимся произвольным курсом и скоростью кораблём встраивается пять моделей

штормовой гидромеханики, с разделением и развитием опытовых изысканий от простого к сложному; от базовых законов волнового воздействия, до комплексных силовых влияний объёмной гидростатики и распределения давлений по обводам корабля с учётом ходового набегающего и волнового потоков со стратификацией скоростей течений по глубине: 1) – инерционное скольжение корпуса по взволнованной поверхности моря с условно естественным интерактивным управлением курсом и скоростью хода корабля; 2) – гидростатическая постановка основана на сопоставлении исходного водоизмещения с мгновенным распределением подводного объёма корпуса под поверхностью волн, с тем же управлением курсом и скоростью хода; 3) – поверхностное интегрирование величин давления жидкости на элементарных фрагментах бортовой обшивки, с учётом эксцентриситета точек концентрации сил давления; 4) – вовлечение в распределение давлений поправок по касательным и отражаемым компонентам ходового набегающего потока, для чего задействуются компенсирующие вихреисточники по всей поверхности судовых обводов; 5) – включение в гидродинамическое моделирование мгновенное распределение течений жидкости под склонами штормовых волн, по тем же правилам формирующих вихреисточники с интенсивностями касательно-скользящих и нормально-отражаемых компонент, **++** с особой отработкой визуально-наглядных вариантов отражения штормовых волн от корпуса корабля при дифференциально-разностном моделировании морского волнения вблизи обшивки и на удалении от корпуса корабля **++**.

Полагая предназначение вычислительного инструментария к открытому использованию в задачах проектирования с обоснованием мореходных качеств нового корабля, а также в составе штурманских бортовых счётно-решающих аппаратов для поиска и обоснования наиболее эффективных и безопасных вариантов штормового хода или пассивного штормования флота действующего, в проработке математических моделей и алгоритмических вычислений приоритетными стали наиболее быстрые расчётные процессы без особых запросов компьютерных ресурсов. Разработки ориентированы на персональные компьютеры среднего класса, что весьма важно для внедрения виртуальных мореходных экспериментов в конструкторские и корабельные счётно-решающие устройства относительно невысокой производительности.

Оглавление

Математические и алгоритмические модели прямых вычислительных экспериментов в штормовой гидромеханике корабля	1
<i>Алгоритмы построения цифровой модели корпуса корабля</i>	<i>4</i>
Геометрия обводов и алгоритмы представления корпуса корабля	4
Основные элементы числовой структуры для описания формы корпуса	5
Параметры графической визуализации корпуса	6
Настройки графической сцены визуализации вычислительного эксперимента	10
<i>Гидродинамика корабля в условиях штормового плавания.....</i>	<i>11</i>
Список обозначений в штормовой гидромеханике корабля	12
Об интерактивном выборе вариантов построения вычислительных экспериментов.....	13
Вычисление геометрических характеристик корпуса корабля.....	16
Метацентрические характеристики в экспресс оценках текущего состояния корабля.....	21
Углы Крылова в визуальном представлении состояния корабля	23
Гидростатические компоненты плавучести на штормовой волне.....	26
Ходовой и волновой поток вблизи судовой обшивки.....	29
Гидростатическая асимметрия объёмных интегралов на волновом склоне.....	33
<i>Алгоритмы гидромеханики качки и ходкости корабля на интенсивном волнении </i>	<i>35</i>
Демпфирование инерционных сил и моментов по штормовой качке и дрейфу корпуса	37
Алгоритмы моделей движения и демпфирования колебаний корпуса.....	41
Автоматическое регулирование и адаптивное управление курсом и скоростью хода.....	45
Вычислительная модель групповых структур морского волнения.....	47
Основные зависимости и обозначения из теории волн	48
О моделировании трохойдального штормового волнения.....	49
Геометрическая кинематика морского и прибрежного волнения	53
Математическая и вычислительная модели трохойдального волнения	54
Видимые (фазовые) и групповые скорости гравитационных волн	57
Вычислительная модель генерации прогрессивных волн	58
Алгоритмическое представление моделей штормового волнения	58
О вычислительных опытах с моделями морского волнения.....	61
<i>Использованные литературные источники</i>	<i>63</i>

Алгоритмы построения цифровой модели корпуса корабля

Цифровая модель корпуса корабля, в качестве числового объекта образуется таблицей плазовых ординат, дополняемой абсциссами штевной с транцевыми расширениями, и формируется в оперативной памяти с помощью производного объекта [7, «Hull», 2010] – класса Hull, включающего интерфейс Base [4, «Тензор», 2013] для связывания локальных внутрикорабельных координат с внешней морской системой отсчёта для маневрирующего корабля; для динамической визуализации в котором задействуются однородные координаты в графическом окружении Window:Place [8, «Контекстная графика», 2010] – обеспечивающем интерактивное управление вычислительным экспериментом в трехмерной графической среде программирования на основе OpenGL.

Геометрия обводов и алгоритмы представления корпуса корабля

class **Hull** – определение структур данных и операций по корпусу корабля:

Base – корабельный базис ориентации с местоположением миделя;

View – сцена графического окна в однородных координатах OpenGL.

Константы:

L~Length, B~Breadth и T~Draught – расчётные длина, ширина и осадка;
Nframes и Mid – общее количество и номер мидельшпангоута.

Скаляры { i }:

iV~Volume – текущий погруженный объём и исходное водоизмещение;

iF~Floatage – площадь ватерлинии действующая и на тихой воде;

iS~Surface – смоченная и изначально погруженная поверхность обшивки;

Course, dCs – курс корабля действующий и заданный в полуциркуляции;

Speed, cSp – действующий и устанавливаемый по тихой воде ход корабля;

h_x – фиксируемая метацентрическая высота по начальной остойчивости.

Векторы { v }:

Gravity – центр тяжести в локальных корабельных координатах;

vB~Buoyancy – координаты центра величины, центра плавучести корпуса;

vF~Floatable – центр площади текущей и начальной ватерлинии;

vM~Metacenter – текущая и заданная аппликата поперечного метацентра;

Locate – местоположение корабля во внешней морской системе координат.

Тензоры { m }:

mW~inWater – моменты инерции площади действующей ватерлинии

mM_{inMass} – тензор массовых (пространственных) моментов инерции корпуса по качке и рысканию корабля.

Маршрутные записи { flex }:

Route – траектория хода корабля в морской системе отсчёта [м]

Rate – вектор скорости движения корпуса в корабельном базисе [м/с]

Swing – ориентация корпуса во внешнем пространстве в углах Крылова [рад]

Whirl – угловые скорости вращения относительно корабельных осей [рад/с]

На каждом шаге вычислительного эксперимента заново вычисляются геометрические характеристики и гидродинамические параметры движения корабля на интенсивном волнении, с явным учётом кинематики корпуса относительно взволнованной поверхности моря (*отмеченные выше двухсимвольными переменными*), при этом, в начальный момент времени вычислительного эксперимента, на первом расчётном цикле волновое поле не создается, и все начальные числовые величины переприсваиваются исходным числовым объектам (*отмечены словами*) для фиксации массовых, инерционных и всех гидростатических параметров корабля на тихой воде без качки.

Основные элементы числовой структуры для описания формы корпуса

Основные имена структур и операций:

Stern[*], Frame[Nframes+2][*] и Stem[*] – контуры ахтерштевня, шпангоутов и форштевня;

Keel[Nframes+2] – местоположение шпангоутов на килевой дорожке.

Shell[Nframes+1][*] – индексные последовательности для построения треугольников в пределах шпаций и окончностей.

Отсчёты индексов относительно килевой дорожки: 0 – ахтерштевень; Frame[1...Nframes] – шпангоуты по проекции корпус теоретического чертежа; Nframes+1 – форштевень. При считывании контуры Stern и Stem дополняют шпангоуты, но они сохраняются для замыкания транцевых расширений и утолщений на штевнях.

Основная часть корпуса описывается с помощью параметрического задания шпангоутов Frame(z,y), зафиксированных по таблице ординат на абсциссах основной линии Keel(x); и штевней корпуса корабля Stem(x,y,z) и Stern(x,y,z), синтезирующих раздельное считывание ординат и абсцисс в

контурные пространственные координаты $\{x, y, z\}$. На штевнях могут указываться их утолщения в оконечностях и транцевые расширения, ширину плоскостей днища или палубы:

- $y = 0$ – заостренный штевень или слом по линии киля на днище;
- $y > 0$ – ширина до слома на транце, ширестреке или плоском киле.
- $y < 0$ – закруглённое окончание на штевнях (пока не отработано).

При считывании двух строк с описанием штевня происходит интерполирование абсцисс контуров диаметральной плоскости с ординатами соответствующих транцевых расширений (или радиусов бульбовых скруглений).

Параметры графической визуализации корпуса

Триангуляционное покрытие выстраивается с помощью матрицы индексов: `Shell[Nframes+3][1+*]`, где добавляются граничные контуры к покрытию шпаций в оконечностях `Shell[1]` и `[Nframes+1]`, а также транцевые расширения `Shell[0]` и `[Nframes+2]`, с прилегающими к штевням сшивками на днище, палубах и надстройках.

В старших битах каждого отсчёта в индексном массиве хранятся признаки вершин треугольников:

```
FramePost 0xE000 0000 // общая маска особого шпангоутного индекса
LeftFrame 0x8000 0000 // точки смежного левого (в корму) шпангоута
SternPost 0x4000 0000 // индексная маска шпаций близи ахтерштевня
StemPost 0x2000 0000 // и форштевня в шпангоутных треугольниках
```

Выборка фрагмента контура штевня внутри шпации:

```
K[n]<=S[j]x && S[l]x<=K[n+1]
```

...или по индексам от j до l включительно.

Точки на шпангоутах последовательно соединяются либо отрезками прямых линий, либо гладкими параметрическими кривыми, что в оригинальных теоретических чертежах выполняется сплайновыми функциями, аналогичными используемым в электронном кульмане (DesignCAD), где повторение точек с одинаковыми координатами служит признаком слома на гладкой кривой.

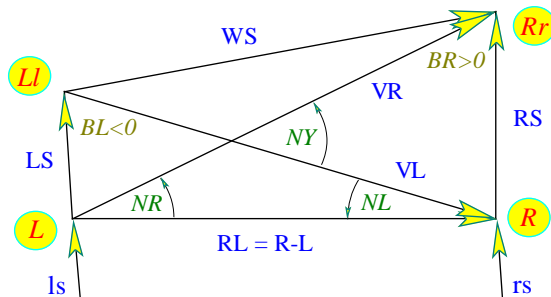


Рис. 1. Разметка оптимизируемых треугольников на обшивке корпуса.

Простейшим оптимизационным алгоритмом стал выбор минимальной длины диагоналей четырехугольника VR, VL , при этом особо отрабатываются совпадающие точки, сломы шпангоутов и большие разности углов нормалей в последовательностях смежных треугольников в полосе расчётной шпации между смежными шпангоутами.

Альтернативным алгоритмом реализован двухпроходный анализ двух смежных четырехугольников.

Построение поверхности из треугольников ведется сначала по гладкой поверхности обводов ниже ватерлинии, затем включается поиск ограничивающих засечек по сломам на шпангоутах, в частности на палубном ширстреке, а также по дублирующимся точками, как по извне установленным точкам обязательных сломов борта.

Ускоренная обработка элементарных фрагментов судовой обшивки выполняется с помощью оптимизированного двумерного массива индексов $Shell[y][z]$, регуляризованных для последовательной выборки поверхностных треугольников с предустановленной ориентацией векторного произведения в направлении внешней нормали. Выборка треугольников выполняется с помощью процедуры $Select(y, z)$.

а) – абсциссы штевней и шпангоутов локализуются от нуля до средней величины шпации;

б) – все разности ординат для точек на смежных шпангоутах уменьшаются в три раза;

1 к ранее отмеченным нулевым разностям на сломашпангоутов добавляется целый четырехугольник с оптимизированной парой треугольников;

2 к новой нулевой разности добавляется смежный треугольник, а в случае двух сломов выполняется поиск другой ненулевой пары разностей;

3 ??? проверяется наклон диагоналей, который не должен превышать 20°;

4 выявляются сломы шпангоутов на 8°30' и либо добавляется смежный треугольник, либо по двум сломам достраивается четырехугольник;

5) сравниваются нормали новых треугольников с последним ранее установленным.



Виртуальная процедура Draw подготавливает графическую среду для изображения корпуса с предварительной настройкой графической сцены, и оптимизированная и контекстно независимая Drawing – выполняет прямую прорисовку корпуса без масштабирования – «как есть».

Режим изображения задаются горячей клавишей «**Tab**» и управляется маской DrawMode:

- 0 – прозрачный корпус с проявлением гидростатических центров;
- 1 – поверхность ватерлинии с контурами штевной и шпангоутов;
- 2 – к действующей ватерлинии добавляются подводные обводы;
- 3 – корпус изображается целиком, но без штевной и шпангоутов.

Переключение «**Space**» (пробел) заменяет закраску рёбрами элементарных треугольников:

0x4 – те же режимы 0÷3, но только с триангуляционными ребрами

Динамика корабля моделируется при вызове процедуры Floating – свободное плавание на взволнованной поверхности моря; и процедуры Moving – смещение корпуса корабля под действием внешних сил за тот же расчётный интервал времени dT .

Признаком необходимости вычисления и фиксации расчётных значений на тихой воде в качестве исходных величин является отсутствие водоизмещения ($Volume=0.0$ и/или счётчик расчётных циклов во времени $Kt=0 \rightarrow$ обновление).

Для разделения элементарных элементов обшивки – треугольников на прилегающие к штевням, правому или левому борту (**Board**), и обозначения принадлежности к подводным обводам, к поверхности на воде (ватерлинии) и, к надводным ветвям шпангоутов и палубе (**Level**):

`int Board, // '0' штевни; '-' левый или '+' правый борт`

`Level; // -2 – подводные обводы; -1 – смоченный борт выше теоретической ватерлинии; 0 – поверхность действующей ватерлинии; +1 – осушенный борт ниже теоретической осадки; +2 – надводный борт выше ватерлинии.`

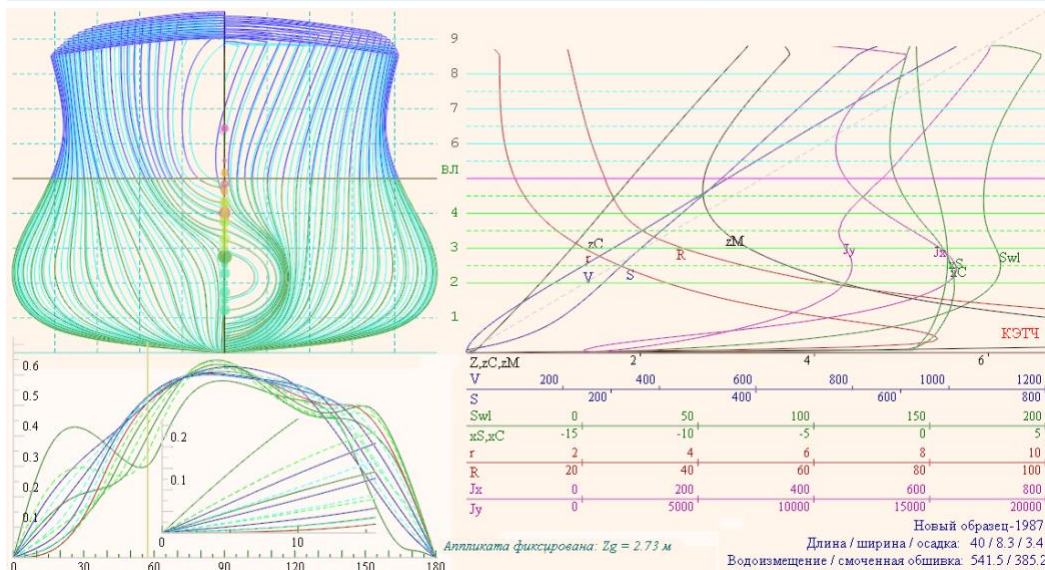
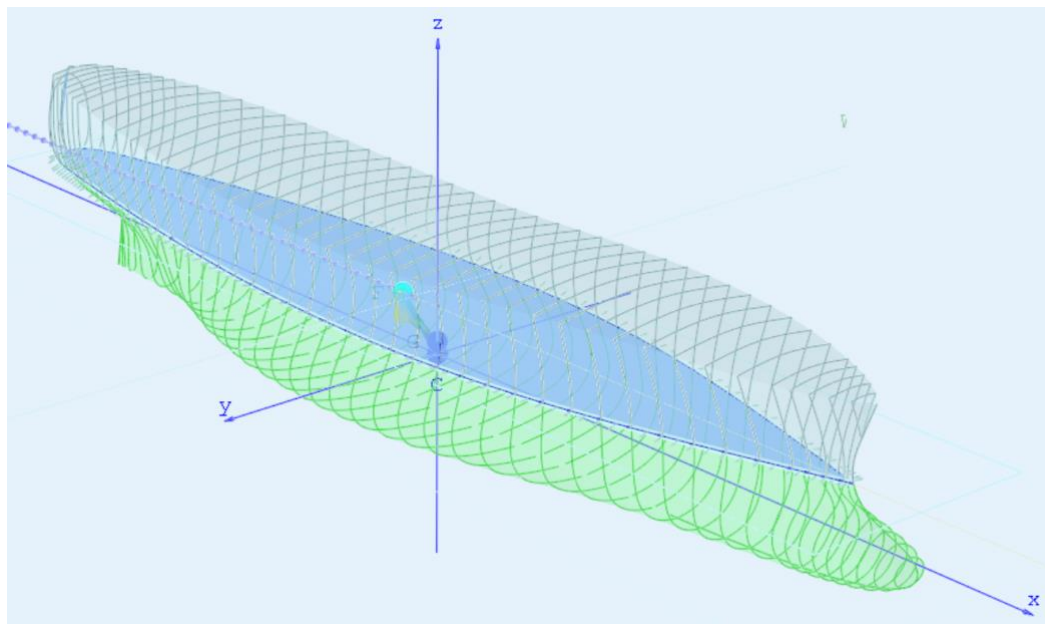


Рис. 2. Важными компонентами вычислительного эксперимента являются средства визуализации гидростатических характеристик корпуса и остойчивости корабля, с различными вариантами трёхмерной прорисовки корпуса для анализа проектных решений. Слева, под проекцией корпус показаны кривые остойчивости при различных осадках для нулевой метацентрической высоты при фиксированной аппликате центра тяжести, что соответствует реальной динамике корабля в штормовых условиях. Правее приведен комплекс гидростатических кривых для всех осадок от киля до палубы.

Размерности корпуса определяются в естественном масштабе, все геометрические величины, площади, объёмы и моменты инерции исчисляются в локальной/корабельной системе координат, с нулевой точкой отсчёта на мидельшпангоуте на уровне ватерлинии по заданной осадке.

Настройки графической сцены визуализации вычислительного эксперимента

В заключение рассмотрим некоторые параметры визуализации в случае независимого представления корпуса корабля в автономной процедуре Draw, опирающуюся на графическую среду программирования OpenGL. eye, look – угловые отсчёты направлений от точки обзора и на смещение сцены; Distance – расстояние от точки наблюдения до центра сцены в масштабных величинах вычислительного эксперимента, в метрах.

В прорисовке корпуса предусматривается несколько вариантов, визуализации [0÷4], с возможностью переключения простого изображения на однократный динамический перерасчёт всех параметров корпуса:

onlyDraw – однократная разблокировка графических процедур без задействования моделирующих операций: всякие расчёты перемещений и гидромеханика корабля на волне пропускаются, (...) а вместо моделирования отражения волн от обшивки корпуса остается только прорисовка нормалей к действующей (переменной) ватерлинии.

Гидродинамика корабля в условиях штормового плавания

Вычислительный эксперимент строится с разделением решений по независимым физическим процессам, что полагает возможным интерактивное управление параметрами морского волнения и характером силового взаимодействия корпуса корабля со штормовой стихией. Управление курсом и ходом модели корабля в условиях интенсивного волнения осуществляется в дифференциальных экстраполяциях с получением плавной кинематики корпуса под управлением динамически подобных тяговых движителей и кормовых рулей.

Движущаяся цифровая модель корабля отдельно взаимодействует с каждой из базовых волновых структур, что гидродинамически корректно воспроизводит главную часть процесса отражения трохоидальных волн от корпуса корабля. Результирующее волновое поле и пространственное распределение скоростей подводных течений получается векторным суммированием (простой суперпозицией¹) независимых трохоидальных процессов, и служит для вычисления гидродинамических сил и реакций общего воздействия гребней штормовых волн, в целом, определяя штормовую гидромеханику корабля на ходу произвольными курсами относительно волновых фронтов.

Ускорению вычислений служат упорядоченные по шпациям числовые структуры для описания поверхностей судовой обшивки, что также даёт возможность включения реинтерабельных алгоритмов для распараллеливания всего процесса вычислений. На каждом шаге эксперимента заново интерполируются точки пересечения волновых склонов и ставятся бимсы для динамического построения поверхности ватерлинии с разделением подводного и надводного объёмов корпуса. По подводном обводам вычисляются новые объёмы со смещёнными центрами величины (моментами инерции), с использованием градиентов наклона волновой поверхности усредняется интегральное направление действия архимедовых сил всплытия.

Метацентрические характеристики корпуса вычисляются, но используются только для визуального контроля динамики корабля в традиционных представлениях теории корабля, для чего дополнительно вычисляются площадь, положение центра и моменты инерции площади

¹ В простой суперпозиции не контролируется возможное обрушение гребня суммарной волны, что формально приведет к усиленному силовому воздействию на корпус корабля, или к оценке в «опасную сторону».

действующей ватерлинии, метacentрические радиусы и положение метacentров по вертикали от изменчивого центра величины погруженной части корпуса.

Список обозначений в штормовой гидромеханике корабля

$Volume [M^3]$ и $Surface [M^2]$ – водоизмещение и площадь смоченной обшивки корпуса на тихой воде; $iV [M^3]$ – погруженный объём корпуса в условиях качки на волнении; $Buoancy$ и $vB^o [M]$ – центр величины на тихой воде и волнении; $\gamma \cdot B = g \cdot \rho \cdot B [кг \cdot м/с^2]$ – вектор архимедовых сил всплытия; $Floatable$ и $vF^o [M]$ – центр площади ватерлинии на тихой воде и волнении; $vW [\delta]$ – вектор нормали к склону волны; $vS^o [H/\rho]$ и $vR^o [H \cdot м/\rho]$ – и векторы сил и моментов по площадкам судовой обшивки, с учётом давления под вертикалью волнового склона со спадом на величину касательной скорости по Бернулли: $\delta h_z = 0.5 \cdot (\delta V)^2 / g^o [M]$.

$G \{ \xi, \eta, \zeta \}$ (x-surge, y-sway, z-heavy) [M] – координаты центра тяжести в подвижных корабельных координатах;

$\Omega \{ \theta, \psi, \nu \}$ (x-roll, y-pitch, z-yaw) [°] –

направление курса – поворотов по осям крена,

дифферента и рыскания; $V [M/c]$ – век-

тор скоростей поступательных и

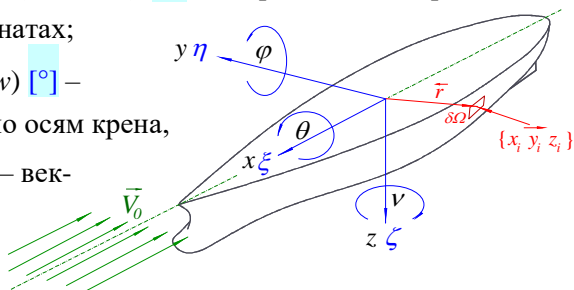
$\omega [°/c]$ – скоростей угловых

колебаний; $r [δ^3]$ – корабельный базис, как безразмерный и нормализованный

тензор чистого поворота; $\rho \cdot inMass [кг \cdot м^2]$ – массовый (объёмный [M⁵]) тензор

инерции корабля; $L [M]$ – плечо расхождения центров величины и тяжести.

Преимущественно применяются обозначения строчными буквами для объектов в подвижной локальной – корабельной системе отсчёта, либо заглавными – для величин в неподвижной глобальной – морской системе координат. Векторные величины измеряются в локальном корабельном базисе с отметкой стрелочкой влево: $\leftarrow a$, либо в глобальной неподвижной морской системе координат $\rightarrow A$ со стрелочкой вправо, где отмеряются склоны и гребни морских волн и происходит их графическая визуализация совместно с кораблём в штормовом море. Проекции свободных векторов соотносятся операциями



произведения с ортогональным, ортонормированным тензором² корабельного базиса (или – тензором ориентации) $\overset{\times}{\mathbf{r}} = \overset{\wedge}{\mathbf{r}} = \overset{\vee}{\mathbf{r}}^T$:

$$\vec{A} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\leftarrow}{a}$$

– из корабельного базиса в глобальную систему координат;

$$\overset{\leftarrow}{a} = \vec{A} / \overset{\times}{\mathbf{r}}$$

– возврат свободного пространственного вектора к ориентации относительно локального корабельного базиса,

что справедливо как для векторов местоположения и скоростей перемещения, так и для угловых векторов и скоростей вращения.

Соответственно полный пересчёт связанных с местоположением \vec{R} векторов в корабельной и глобальной системах координат:

$$\vec{A} = \vec{R} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{r}} \cdot \overset{\leftarrow}{a}$$

– переход из корабельной в неподвижную глобальную морскую систему координат;

$$\overset{\leftarrow}{a} = (\vec{R} - \vec{A}) / \overset{\times}{\mathbf{r}}$$

– возврат к отсчётам относительно подвижного корабельного базиса.

Аналогичные операции по смене локальных базисов без смещений справедливы в случаях преобразования координатных компонент для пространственных векторов поворота и угловых скоростей.

Традиционные определения видов качки ():

1 – бортовая (roll) – (х, крен на +правый и –левый борт, $\theta \vee \vartheta$)

2 – килевая (pitch) – (у, дифферент на +корму, на –нос, $\phi \vee \psi$)

3 – рыскание (yaw) – (z, уход с курса +вправо, –влево, $\chi \vee \xi$)

4 – продольно-горизонтальная (surge) – (х, +разгон и –потеря, ξ)

5 – поперечно-горизонтальная (sway) – (у, +вправо и –влево, η)

6 – вертикальная (heave) – (z, +погружение и –всплытие, ζ)

Об интерактивном выборе вариантов построения вычислительных экспериментов

Числовая модель корабля строится в полномасштабных цифровых теоретических чертежах, с охватом надводной общекорабельной архитектуры, с

² Операции тензорной математики [5,4] из гидромеханики сплошных сред обладают наивысшей вычислительной эффективностью в пространственных перерасчётах.

соблюдением массовых и динамических характеристик корпуса, пульсаций скорости и периодов качки настоящего корабля, в том числе с включением тяги условных движителей и моментов от рулевых устройств, для воссоздания условий управляемого маневрирования корабля под воздействием интенсивного штормового волнения.

Маневры корабля в вычислительном эксперименте проходят по плавным траекториям циркуляции; также плавно происходит набор и потеря хода, что в целом соответствует реальной гидромеханике со всеми шестью степенями свободы по угловым и поступательным видам качки; с проявлением крена на циркуляции и ходовым дифферентом при разгоне и торможении корабля; и что особо важно – с переменчивой скоростью хода в зависимости от характера силового взаимодействия корпуса с конкретными гребнями штормовых волн, включая возможность дельфинирования, или захвата корпуса волной и брочинга, с опрокидыванием на попутной волне.

Предусматривается интерактивное изменение факторов демпфирования качки и метацентрической высоты h_x для корпуса на тихой воде, для чего относительно метacentра m_x фиксируется иная аппликата центра тяжести ($G_z = m_x - h_x$), что требуется для оценок крена на циркуляции и качки на штормовом волнении, и может применяться для постановки на киль в случае аварийного опрокидывания.

Циркуляция корабля управляется указанием нового курса в румбах с перекладкой руля «на борт», на «полборта» и при работе авторулевого с перекладкой «по малу», как это обычно делается в штормовых условиях для сбережения рулевой машины, допуская свободное рыскание с отклонением от курса под интенсивным воздействием штормового волнения (*угловая скорость на циркуляции здесь не зависит от скорости хода*).

Плавное изменение скорости хода регулируется тягой движителей с сопротивлением движению по условно «тихой воде», что допускает как потерю штормового хода на интенсивном волнении, так и разгон с дельфинированием на гребнях попутных волн (*при остановленных машинах демпфирование хода применяться к полной скорости остаточного движения*).

Также как и при моделировании морского волнения в вычислительном эксперименте задействуются различные по сложности гидродинамические модели качки корабля.

1. Простейший или тестовый вариант строится на кинематическом скольжении корпуса корабля относительно двух пар точек вдоль и поперек

корпуса. По чисто математического волновому полю шаг по времени соответствует темпу графической визуализации.

2. В относительно быстром варианте моделирования вычисляется погруженный объём корпуса, переменная составляющая которого создает вертикальную Архимедову силу всплытия и погружения. Чисто вертикальная или гравитационная компонента этих сил вызывает килевую, бортовую и вертикальную качку. Дополнительные горизонтальные компоненты обуславливаются интегрально осредненным наклоном ватерлинии и поверхностей равных давлений воды, отчего образуются перепады гидростатических сил на противоположных бортах корпуса корабля. Задействование всех внешних сил и моментов означает воссоздание в моделировании всех шести компонент угловой и поступательной динамики корпуса корабля в условиях штормового волнения.

3. Вместо расчётов погруженного объёма корпуса выполняется интегрирование гидростатических давлений по смоченной поверхности судовой обшивки под взволнованной поверхностью моря. В таком векторном интегрировании вычисляются в точности аналогичные силы всплытия, создающие такие же поступательные и угловые ускорения для моделирования всех шести компонент штормовой качки корабля.

4. Предыдущий вариант дополняется учётом подповерхностных скоростей течений, касательные компоненты которых несколько снижают давление воды на поверхности судовой обшивки, а отражаемые корпусом нормальные компоненты набегающих потоков создают антисимметричные импульсы сил, усугубляющих рыскание, слеминг и опасность захвата корпуса гребнем штормовой волны.

Достоинством геометрических алгоритмов является то, что вычисление погруженного объёма корпуса выполняется по элементарным тетраэдрам, которые являются основаниями треугольников с распределёнными давлениями воды на смоченной поверхности судовой обшивки, отчего эффективность интегрирования объёмных или поверхностных сил всплытия вполне соизмерима. Несколько большие вычислительные ресурсы востребуются для явного учёта компонент внешних течений вдоль судовой обшивки, и потоков отражаемых от движущегося корпуса, но всё же, и здесь замедление вычислительного эксперимента критическим не оценивается.

...в отладке: Полное дифференциально-разностное моделирование штормового волнения не востребует эмпирики вихреисточников для учёта и компенсации больших скоростей, протекающих сквозь судовую обшивку, так как изменение гидродинамического давления становится составной частью

математической модели. Однако здесь несколько затрудняются корректные оценки гидростатического давления под быстроменяющимся контуром действующей ватерлинии. В вариантах с глубоководными трохоидальными пакетами штормовых волн с дисперсионными свойствами, также как и в длинноволновых моделях морского волнения в полных потоках, независимо от алгоритмов генерации привходящих волн в расчётах задействуется дополнительный комплекс дифференциально-разностных операций на адаптивных сеточных пространствах по всей относительно большой морской акватории, и в таком случае значительно возрастает востребованность оперативной памяти и вычислительных ресурсов для параллельного моделирования гидродинамики и независимого распространения корабельных волн с наложениями отраженных от корпуса корабля внешних пакетов штормовых волн.

Вычисление геометрических характеристик корпуса корабля

Модель корпуса строится в естественном масштабе корабельных координат с начальным отсчётом от мидельшпангоута на уровне ватерлинии при заданной осадке.

Алгоритм настроен на последовательную переборку треугольников $\Delta\{a, b, c\}$ между расчётными шпангоутами внутри шпаций бортовой обшивки. Особая предустановка углов треугольника выполняется для действующей ватерлинии, где первые две вершины образуют сторону a, b вдоль ватерлинии, с третьим углом c для пары межбортовых бимсов.

Вычисления разделяются на этапы: сначала по подводным обводам ($Level < 0$); затем по поверхности действующей ватерлинии ($Level = 0$), и затем – по замкнутым контурам надводного борта ($Level > 0$) с обобщенными элементами общекорабельной архитектуры.

На каждом шаге собственно вычислительного эксперимента ведётся полный пересмотр всех элементарных треугольников в погруженной под воду части бортовой обшивки и на уровне действующей ватерлинии, в котором вместо графической визуализации производится ускоренный перерасчёт геометрических характеристик корпуса с учётом быстрой кинематики взволнованной поверхности моря. Для этого задействуются те же самые алгоритмы выборки узлов по шпациям, с перестроением треугольников на уровне действующей ватерлинии.

Совмещение алгоритмов трёхмерной визуализации с исчислением геометрических интегралов по корабельным обводам изначально предусматривались проектом вычислительного эксперимента, что считалось важным для сквозного визуального контроля корректности геометрических вычислений совместно с оценками адекватности моделирования гидродинамических явлений в условиях разделения независимых процессов штормовой гидромеханики корабля.

Свободный вектор нормали с площадью треугольника в корабельной системе координат:

$$\overleftarrow{S} = (\overleftarrow{a} - \overleftarrow{c}) \times (\overleftarrow{b} - \overleftarrow{c}) / 2 = [\overleftarrow{ac} \times \overleftarrow{bc}] / 2, \quad [\text{м}^2]$$

и соответственно площадь этого треугольника: $W = |\overleftarrow{S}|$.

Центр площади треугольника задаётся определенным вектором с привязкой к началу корабельной системы координат (на конструктивной ватерлинии и мидельшпангоуте):

$$\overleftarrow{L}_s = (\overleftarrow{a} + \overleftarrow{b} + \overleftarrow{c}) / 3 = \overleftarrow{c} + (\overleftarrow{ac} + \overleftarrow{bc}) / 3, \quad [\text{м}]$$

Определённый вектор для центра объёма элементарного тетраэдра того же элемента бортовой обшивки в корабельном базисе:

$$\overleftarrow{L}_v = (\overleftarrow{a} + \overleftarrow{b} + \overleftarrow{c}) / 4, \quad [\text{м}]$$

объём этого тетраэдра получается скалярным (смешанным) произведением:

$$V = \overleftarrow{c} \cdot \overleftarrow{S} / 3 = \overleftarrow{c} \cdot [\overleftarrow{ac} \times \overleftarrow{bc}] / 6. \quad [\text{м}^3]$$

Интегрированием всей поверхности судовой обшивки получаются геометрические характеристики погруженных обводов корпуса. Площадь смоченной поверхности, погруженный объём корпуса (объёмное водоизмещение) и корабельные координаты центра величины корпуса:

$$iS = \sum W; \quad iV = \sum V; \quad \overleftarrow{vB} = \frac{\sum \overleftarrow{V} \cdot \overleftarrow{M}}{iV},$$

или поэлементным алгоритмом:

площадь обшивки: $Surface \ iS = \sum_{\Delta} |\vec{S}| = \sum_{\Delta} \frac{(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})}{2};$ [м²]

водоизмещение: $Volume \ iV = \sum_{\Delta} \frac{\vec{S} \cdot \vec{c}}{3} = \sum_{\Delta} \frac{[(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})] \cdot \vec{c}}{6};$ [м³]

центр величины: $Buoyancy \ vB = \frac{\sum_{\Delta} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \{[(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})] \cdot \vec{c}\}}{24 \cdot V},$ [м]

где \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} – три вершины треугольника в корабельном базисе.

Поступательные ускорения и приращения скорости в движении корабля определяются инерционными реакциями массы/объёма корпуса, в то время как компоненты угловых ускорений на качке и рыскании – с подобными массовыми/объёмными реакциями от тензора инерции.

Пространственный тензор инерции представляется компонентами осевых и центробежных моментов, формализуемых симметричными матрицами, как:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \rho \cdot \int_{\omega} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -x \cdot y & x^2 + z^2 & -y \cdot z \\ -x \cdot z & -y \cdot z & y^2 + x^2 \end{pmatrix} d\omega \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

где: ρ – плотность жидкости, ω – элемент объёма, здесь это V – тетраэдр.

Тензор инерции для объёма/массы корпуса вычисляется по сопряженным с судовой обшивкой тетраэдрам, имеющим общие вершины в основании корабельного базиса на мидельшпангоуте и конструктивной ватерлинии:

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= a \cdot y^2 + b \cdot y^2 + c \cdot y^2 + a \cdot z^2 + b \cdot z^2 + c \cdot z^2 + \\
 &\quad + a \cdot y \cdot b \cdot y + a \cdot y \cdot c \cdot y + b \cdot y \cdot c \cdot y + a \cdot z \cdot b \cdot z + a \cdot z \cdot c \cdot z + b \cdot z \cdot c \cdot z; \\
 J_{yy} &= a \cdot x^2 + b \cdot x^2 + c \cdot x^2 + a \cdot z^2 + b \cdot z^2 + c \cdot z^2 + \\
 &\quad + a \cdot x \cdot b \cdot x + a \cdot x \cdot c \cdot x + b \cdot x \cdot c \cdot x + a \cdot z \cdot b \cdot z + a \cdot z \cdot c \cdot z + b \cdot z \cdot c \cdot z; \\
 J_{zz} &= a \cdot x^2 + b \cdot x^2 + c \cdot x^2 + a \cdot y^2 + b \cdot y^2 + c \cdot y^2 + \\
 &\quad + a \cdot x \cdot b \cdot x + a \cdot x \cdot c \cdot x + b \cdot x \cdot c \cdot x + a \cdot y \cdot b \cdot y + a \cdot y \cdot c \cdot y + b \cdot y \cdot c \cdot y; \\
 J_{xy} &= J_{yx} = (2 \cdot a \cdot x \cdot a \cdot y + 2 \cdot b \cdot x \cdot b \cdot y + 2 \cdot c \cdot x \cdot c \cdot y + \\
 &\quad + a \cdot x \cdot b \cdot y + a \cdot x \cdot c \cdot y + b \cdot x \cdot c \cdot y + a \cdot y \cdot b \cdot x + a \cdot y \cdot c \cdot x + b \cdot y \cdot c \cdot x) / -2; \\
 J_{xz} &= J_{zx} = (2 \cdot a \cdot x \cdot a \cdot z + 2 \cdot b \cdot x \cdot b \cdot z + 2 \cdot c \cdot x \cdot c \cdot z + \\
 &\quad + a \cdot x \cdot b \cdot z + a \cdot x \cdot c \cdot z + b \cdot x \cdot c \cdot z + a \cdot z \cdot b \cdot x + a \cdot z \cdot c \cdot x + b \cdot z \cdot c \cdot x) / -2; \\
 J_{yz} &= J_{zy} = (2 \cdot a \cdot y \cdot a \cdot z + 2 \cdot b \cdot y \cdot b \cdot z + 2 \cdot c \cdot y \cdot c \cdot z + \\
 &\quad + a \cdot y \cdot b \cdot z + a \cdot y \cdot c \cdot z + b \cdot y \cdot c \cdot z + a \cdot z \cdot b \cdot y + a \cdot z \cdot c \cdot y + b \cdot z \cdot c \cdot y) / -2, \quad [M^2] \\
 \text{inMass} &= \rho \cdot V \cdot \mathbf{J} / 10 \quad [кг \cdot м^2]
 \end{aligned}$$

В реальной практике тензор инерции inMass должен относиться к распределению масс по корпусу, по грузам и бортовому оборудованию, что существенно для расчётов нагрузок и обеспечения прочности корпуса. В оценочной и однообразной формализации характеристик различных кораблей и судов в условиях интенсивного внешнего волнового воздействия можно воспользоваться вышеуказанным условным распределением масс по равномерно заполненному водой корпусу, с последующим смещением к специально определяемому центру масс корабля.

Для приведения тензора инерции к центру тяжести корабля, предвычисляемого по метацентрической высоте под аппликацией метacentра на тихой воде: $G \cdot z = m \cdot z - h_x$, используется теорема Христиана Гюйгенса – Якоба Штейнера (*Huygens–Steiner theorem*) о параллельном смещении осей вращения (*parallel axis*) или центра масс, где метод перерасчёта синтезируется как:

$$J_{ij} = I_{ij} + \rho \cdot V \cdot (L^2 \delta_{ij} - R_i R_j), \quad \text{где } L\{x, y, z\} = \overleftarrow{G} \text{ – вектор смещения осей вращения от действующего центра масс, } \delta_{ij} \text{ – единичная матрица.}$$

В композиции с диадой и шаровым тензором такая поправка формулируется как:

$$|L|^2[\delta_{ij}] - [L \cdot L^T] = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & x \cdot y & x \cdot z \\ y \cdot x & y^2 & y \cdot z \\ z \cdot x & z \cdot y & z^2 \end{bmatrix}, \quad [M^2]$$

или иная эвристика с анти(косо)симметричной матрицей местоположения:

$$-[L][L] = - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -y \cdot x & x^2 + z^2 & -y \cdot z \\ -z \cdot x & -z \cdot y & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad [M^2]$$

В вычислительном эксперименте по моделированию штормовой гидромеханики корабля задействуются объёмные интегралы по корпусу, либо поверхностные – по векторам градиентов давлений (и напряжений) на судовой обшивке. Относительно корабельного базиса внешнее воздействие штормовых волн приводится к центру величины $\leftarrow \nu B$, в то время как инерционные или массовые реакции сдвигаются по аппликате – к центру тяжести $\leftarrow G$, определяемому в начальных условиях с помощью поперечной метацентрической высоты h_x для тихой воды.

После самого первого подготовительного шага вычислительного эксперимента результаты расчётов на тихой воде переписываются исходным числовым объектам: $\leftarrow Floatage = iF$, $\leftarrow Surface = iS$, $\leftarrow Volume = iV$, $\leftarrow Buoyancy = \nu B$, $\times inMass = m \times M$ и др. для фиксации геометрических, инерционных и гидростатических параметров корабля на тихой воде без качки.

Движущийся корабль представляет собой сложный конгломерат условно твердого тела со своим динамическим центром тяжести, в окружении тяжелой воды с геометрическим центром величины, но при этом плечо реактивных сил должно опираться на некий центр бокового сопротивления, в свою очередь определяемого по весьма непростым гидростатическим зависимостям для реальной поверхности судовых обводов в условиях интенсивного морского волнения.

Метацентрические характеристики в экспресс оценках текущего состояния корабля

Метацентрические формулы никак не задействуются в вычислительном эксперименте, однако традиционные представления об остойчивости на больших углах крена и дифферента весьма любопытны для визуальных экспресс оценок состояния корабля в условиях интенсивного штормового волнения. Вычисления метацентрических характеристик с использованием поверхности действующей ватерлинии выделяются в особый блок, приносящий излишнюю вычислительную нагрузку, результаты расчётов которого используются только в графических операциях при визуализации корпуса корабля в условиях морского волнения.

Площадь действующей ватерлинии iF и интегрально осреднённый вектор нормали к поверхности воды $\overleftarrow{\nu W}$ внутри контура действующей ватерлинии, или иначе, $\overleftarrow{\nu W}$ – вектор интегрально осредненного наклона волнового склона, рассекаемого корпусом корабля, отличающийся некоторым уменьшением активной величины за счёт искривления поверхности действующей ватерлинии:

$$iF = \sum W; \quad \overleftarrow{\nu W} = \frac{\sum \overleftarrow{S}}{iF},$$

где $\overleftarrow{W} = |\overleftarrow{S}|$ – площадь элементарного треугольника на поверхности ватерлинии.

Центр элементарного треугольника на поверхности ватерлинии отличается от центра объёма тетраэдра с нулевым базисом лишь константой 4/3, что можно использовать во избежание повторов векторных сумм при вычислении центра площади ватерлинии:

$$\overleftarrow{\nu F} = \frac{\sum W \cdot \overleftarrow{L}_s}{iF} = \frac{\sum W \cdot (\overleftarrow{a} + \overleftarrow{b} + \overleftarrow{c})/3}{iF}$$

Метацентрические формулы выражаются в подвижном корабельном базисе, в то время как внешние силовые воздействия определяются в глобальной морской системе координат. Без специальной математики (тензорного исчисления) метацентрическая теория корректна лишь в случаях малых углов крена и дифферента, то есть, справедлива лишь в представлении начальной остойчивости. Метацентрические оценки остойчивости весьма коварны, так как усиление (начальной) остойчивости отзывается интенсивной или опасной

реакцией на прямое действие склонов и гребней морских волн, даже в случае относительно слабого или умеренного штормового волнения.

Динамически корректно метацинтр ориентировать по вертикали относительно площади действующей ватерлинии, которая стремительно меняется в процессе килевой и бортовой качки, и, соответственно, метацинтрические расчёты рушатся при полном погружении или выходе корпуса корабля из воды.

Вновь замечая, что в вычислительном эксперименте эти расчёты не используются, для формального расчёта метацинтрического радиуса воспользуемся осевым моментом инерции площади действующей ватерлинии относительно продольной оси (оси абсцисс), по отдалению точек на действующей ватерлинии:

$$a.r = \sqrt{a.z^2 + a.y^2}.$$

Проекция площади элементарного треугольника в плоскости конструктивной ватерлинии будет **без смены знака или обнуления**:

$$W_F = | a.x \cdot b.r - a.r \cdot b.x | / 2,$$

и четыре компоненты тензора инерции площади ватерлинии с отсчётами от мидельшпангоута на диаметральной плоскости с уровнем ватерлинии:

$$I_{xy} = I_{yx} += (a.x \cdot b.r + 2 \cdot a.x \cdot a.r + 2 \cdot b.x \cdot b.r + b.x \cdot a.r) \cdot W_F / 12;$$

$$I_x += (a.r \cdot a.r + a.r \cdot b.r + b.r \cdot b.r) \cdot W_F / 6;$$

$$I_y += (a.x \cdot a.x + a.x \cdot b.x + b.x \cdot b.x) \cdot W_F / 6.$$

Сильное искривление поверхности ватерлинии на волновых склонах будет отчасти завышать мгновенные величины метацинтрических радиусов: $r = I_x / Volume$, в целом корректно характеризуюа мгновенные оценки традиционной метацинтрической остойчивости в условиях крупного волнения.

Соответственно, метацинтрические радиусы получаются частным от деления на текущее водоизмещение, с учётом изменения водоизмещения на волновых склонах³:

$$r = I_x / iV - \text{поперечный метацинтрический радиус (под крен);}$$

$$R = I_y / iV - \text{продольный метацинтрический радиус (дифферент).}$$

³ Метацинтрические воззрения используются только в визуализации результатов, – в моделировании динамики корабля оценки по тихой воде корректны лишь условно.

Небольшая корректировка метацентрических радиусов на снижение остойчивости при сильно искривленной поверхности действующей ватерлинии может быть выполнена с помощью осредненного вектора нормали к площади ватерлинии: $\nu W_z = (W_{\text{аппликаты}}/F_{\text{полная площадь}})$:

$$r \times = / \nu W_z /; \quad R \times = / \nu W_z /.$$

Центр тяжести \overleftarrow{G} – приводится к вертикали центра величины \overleftarrow{B} без качки на тихой воде, с переустановкой аппликаты ниже поперечного метацентра \overleftarrow{M} на величину заданной метацентрической высоты: h_x .

$$\overleftarrow{G} = \{ B.x, B.y, m.x - h_x \}.$$

Результаты метацентрических расчётов используются в графиках и надписях с информацией о текущем состоянии корабля, что полезно при быстрых прогнозах безопасности корабля по традиционным представлениям о метацентрической высоте h_x в условиях интенсивной качки на крупном волнении. Метацентр изображается *не в точке его действия над центром ватерлинии*, а по вертикали метацентрического радиуса над центром величины во внешней морской системе отсчёта, в зависимости от величины метацентрической высоты h_x он подкрашивается **зеленым** цветом при увеличении относительно начальной остойчивости; **жёлтым** – при уменьшении; и **красным** – если такая остойчивость исчисляется отрицательной.

Углы Крылова в визуальном представлении состояния корабля

В работе используются углы Крылова в последовательности z-y-x (рыскание–дифферент–крен) с навигационными отсчётами по часовой стрелке. Угловые величины накапливаются дифференциальными дополнениями в темпе вычислительного шага во времени (*вместо однозначных тензорных произведений*), отчего востребуется постоянная корректировка углов Крылова для согласования с тензорным базисом корабельных координат.

Переопределённость в применении трёх угловых величин служит неоднозначностям в последовательностях трёх поворотов⁴, что лишь отчасти

⁴ ... если первый поворот в морском базисе по вертикали Z; второй – в корабельной системе отсчета по абсциссе x; третий – включает проекции двух первых – на траверз

исправляется малыми дифференциальными приращениями в операциях интегрирования угловых скоростей, и систематические погрешности рассогласуют независимое счисление углов и матриц поворота.

Собственно в динамике корабля вполне достаточно применения тензорных произведений, как с координатными, так и с угловыми приращениями при относительно малых шагах интегрирования во времени. Тогда как для контроля состояния корабля и визуализации маршрута его движения в традиционных географических измерениях необходимо выбрать стандартный метод выборки текущих абсолютных (больших) угловых величин курса, крена и дифферента корабля.

Пусть последовательность вычисления величин никак не влияет на исходную матрицу и на величины искомых угловых отсчётов, тогда синтез вектора ориентации корпуса корабля получится с помощью трёх независимых операций.

Можно ввести определения. Все динамические расчёты выполняются в локальной системе координат, образованной тензором ориентации⁵ $\overset{\wedge}{\mathbf{r}} = \overset{\vee}{\mathbf{r}}^{-1} = | \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} |$, образуемым тройцей столбцов матрицы, которые в корабельном базисе являются ортонормированными (единичными) векторами: $\overset{\leftarrow}{x}$ – абсциссы; $\overset{\leftarrow}{y}$ – ординаты; $\overset{\leftarrow}{z}$ – аппликаты. Тогда в глобальной морской системе координат будут определяться отчасти зависимые направления, как: \vec{Z} – вертикаль – первый базовый вектор вертикальной ориентации к зениту в глобальной морской системе координат, по оси которой отмеряется курс корабля относительно географического меридиана; $\vec{Y} = \vec{e}\{\vec{x} \times \vec{Z}\}$ – траверз правого борта, по оси которого отмечается дифферент корабля, становится неопределённым, если ось абсцисс сближается с вертикалью $(\vec{x} \times \vec{Z}) \neq 0$; и в таком случае направление курса корабля будет допускать измерение произвольного крена, включая опрокидывание или вращение корпуса на внутренней оси абсцисс:

$Y(y)$, что корректно для выбора курса, и только в малых угловых приращениях сохраняются суть предопределений как: рыскание–удифферентовка–накренение.

⁵ Обратная матрица ориентации $\overset{\vee}{\mathbf{r}}$ с локальными векторами – строками $| \overset{\leftarrow}{x}, \overset{\leftarrow}{y}, \overset{\leftarrow}{z} |$ задаёт точные и однозначные кинематические решения, где в случае больших углов теряется смысл востребуемых здесь корабельных терминов для «курса», «крена» и «дифферента».

$\vec{X} = \vec{e}\{\vec{Z} \times [\vec{x} \times \vec{Z}]\}$. Здесь векторная функция $\vec{e}\{\vec{r}\}$ – означает единичную нормировку вектора.

1) – курс корабля ν оценивается по следу корабельной оси абсцисс \vec{x}^{\leftarrow} , вертикально спроецированной на горизонтальную поверхность водной глади:

$$\vec{X} = \vec{Z} \times [\vec{x} \times \vec{Z}]; \quad \nu = \text{atan2}(X.y, X.x).$$

2) – для получения дифферента такая ориентация курса в горизонтальной плоскости переводится в локальный корабельный базис, тогда обратное измерение угла будет отмечать дифферент корпуса без учёта текущего угла крена:

$$\vec{x}^{\leftarrow} = \vec{X} / \hat{\mathbf{r}}; \quad \varphi = \text{atan2}(x.z, x.x).$$

3) – угловая величина крена получается переводом видимой вертикали – зенита в корабельный базис, что позволяет оценивать крен по наблюдаемому с борта корабля наклону палубы, в предположении, конечно, что угол дифферента меньше прямого:

$$\vec{z}^{\leftarrow} = \vec{Z} / \hat{\mathbf{r}}; \quad \vartheta = \text{atan2}(z.y, z.z).$$

Кинематические процессы в вычислительном эксперименте основаны на строго однозначных тензорных произведениях, а угловые величины синтезируются для использования в законах управления курсом и ходом корабля, а также для визуализации графиков и цифровых надписей, и на практике задействуются в прокладках маршрута корабля.

Обратное преобразование становится правилом выбора последовательности поворотов локального корабельного базиса, в которых желательно использование независимых операций, где каждый поворот не влияет на ориентацию по двум другим ортогональным осям, или иначе говоря – строго по трём операциям из возможных шести вариантов вращения твёрдого тела.

Можно воспользоваться стандартной функцией поворота корабельного базиса относительно произвольной пространственной оси $\hat{\mathbf{rot}}(\alpha, \vec{r})$, где α – величина угла поворота, и \vec{r} – вектор ориентации оси вращения.

1) – установка нового курса – изменение угла рыскания $\delta \nu$ выполняется относительно вертикального вектора направления к зениту в глобальной морской систем координат:

$$\hat{\text{rot}}(\delta v, \vec{Z});$$

2) – изменение угла крена $\delta\vartheta$ по оси базисного вектора абсцисс в отсчётах морского базиса, то есть – поворот в локальном базисе:

$$\hat{\text{rot}}(\delta\vartheta, \vec{x});$$

3) – при изменении угла дифферента $\delta\varphi$ требуется выполнение условий неизменности углов курса и дифферента, отчего поворот осуществляется в условно смешанном базисе, по проекции локальной оси ординат \vec{y} на горизонтальную поверхность водной глади:

$$\hat{\text{rot}}(\delta\varphi, \vec{Z} \times [\vec{y} \times \vec{Z}]).$$

В приведённых геометрических операциях и преобразованиях допускается работа с произвольными углами поворота или полного разворота по курсу-рысканию и крену-опрокидыванию, кроме дифферента, который ни при каких условиях не должен превышать 90° . В вычислительном эксперименте установлено ограничение до 84° .

Гидростатические компоненты плавучести на штормовой волне

В гидростатическом моделировании распределённых по обшивке корабля давлений воды результат не отличается от расчётов объёмной архимедовой плавучести, однако в таком варианте возможно внесение поправок для учёта проскальзывания и отражения скоростных потоков набегающей жидкости. Воспользуемся правилом соотнесения силы давления воды к центру элементарного треугольника на бортовой обшивке, которая в качестве свободного вектора применяется без учёта точки приложения:

$$\vec{f} = (p_i + \rho \cdot g \cdot h_z) \cdot \vec{s} \quad [\text{Н, кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2]$$

где p_i – избыточное и гидродинамическое давление, например – на поверхности моря или под воздействием локальных скоростных потоков жидкости; h_z – аппликата погружения центра площади треугольника; \vec{s} – вектор нормали с площадью элементарного треугольника в корабельном базисе.

Как вариант, свободный или главный вектор сил давления на смоченную обшивку корпуса⁶ просуммируется:

$$\overleftarrow{v}S = \sum_{\Delta} g \cdot h_z \overleftarrow{\delta} s \quad [\text{Н}/\rho, \text{м}^4/\text{с}^2]$$

Аппликата точки приложения силы от гидростатического давления воды вычисляется с использованием момента инерции площади по секущим хордам – сторонам треугольника в проекциях на вертикальную плоскость.

$$h_{\Delta} = h_z + \frac{I_c}{h_z \cdot s_z} \quad [\text{м}]$$

где s_z – проекция площади элементарного треугольника на вертикальную плоскость; $h_z = (z_0 + z_1 + z_2)/3$ – аппликата центра площади треугольника. В случае почти горизонтальных площадок поправка к аппликате h_{Δ} будет обнуляться, а сила от давления просто сведётся к центру площади расчётного треугольника h_z .

В вычислении осевого момента инерции треугольника s_z в проекциях на вертикальную плоскость участвуют только величины его аппликат с величиной его площади:

$$I_s = s_z \cdot \left[(z_1^2 + z_2^2 + 3z_0 \cdot (z_0 - z_1 - z_2) + z_1 \cdot z_2) / 6 - (z_0 - h_z)^2 \right] \quad [\text{м}^4]$$

с приведением к центру площади расчётного треугольника; – нижние индексы отмечают три его вершины.

Соответственно, аппликата точки приложения сил давления воды на элементарном треугольнике смоченной судовой обшивки:

$$h_{\Delta} = h_z - \frac{(z_0 - h_z)^2}{h_z} + \frac{z_1^2 + z_2^2 + 3z_0 \cdot (z_0 - z_1 - z_2) + z_1 \cdot z_2}{6h_z}, \quad [\text{м}]$$

и, судя по всему, применение этой формулы вполне безопасно, так как для погруженного под воду треугольника с площадью $s_z > 0$ аппликата его центра h_z при отсчётах от уровня воды не может обнуляться. Обратим внимание на геометрические особенности точки приложения силы давления. Для треугольника с двумя точками на ватерлинии $\Delta.z\{0,0,1\}$ такой центр на половине вертикали:

⁶ В уравнениях движения в делителе всегда присутствует масса или момент инерции, что формально позволяет опускать множитель ρ – плотность воды.

$h_{\Delta} = 0,5$ ($h_z = 1/3$); – если наверху только одна точка $\Delta.z\{0,1,1\}$, то центр силы опускается $h_{\Delta} = 0,75$ ($h_z = 2/3$); – для двух треугольников – параллелограмма: $\square.z\{0,0,1,1\}$ – $h_{\Delta} = 0,625$ ($h_z = 0,5$). При заглублении точка концентрации силы давления сближается с центром площади.

Для приведения вертикальной точки к поверхности треугольника можно выполнить двойное векторное произведение с нормировкой относительно разности $\delta h = h_z - h_{\Delta}$.

$$\vec{r}_{\Delta} = \vec{r}_z - \delta h \cdot \vec{n}_s \times \frac{\text{dir}[\vec{z} \times \vec{n}_s]}{|\vec{z} \times \vec{n}_s|},$$

где: \vec{r} – координаты центра площади треугольника в глобальной (морской) системе координат; \vec{n}_s – нормаль к площади треугольника; \vec{z} – вертикаль.

Однако, остаются вопросы корректности отсчётов строго по вертикали от *локального уровня под гребнями волн* вместо исходно-теоретического уровня тихой воды. Так, интегральный вектор главной силы воздействует на фиксированный центр масс корабля \overleftarrow{G} , отчего востребуется дополнительное плечо поворотного момента относительно условного центра бокового сопротивления корпуса с интегральной аппликацией $\sum h_{\Delta}$, весьма непростой и не особо корректной при вычислениях по поверхности корпуса в условиях сильно взволнованной поверхности моря.

Но, можно воспользоваться главным минимальным моментом (нет).

Пусть в качестве начального центра бокового сопротивления выбирается мгновенный центр погруженного объёма корпуса $\overleftarrow{\nu B}$ [м] – динамический центр величины, относительного которого поворотные моменты вычисляются с условно малыми поправками как:

$$\overleftarrow{\nu R} = g \cdot \sum_{\Delta} h_z \cdot (\overleftarrow{r}_{\Delta} - \overleftarrow{\nu B}) \times \overleftarrow{\delta s}, \quad [\text{Н} \cdot \text{м} / \rho, \text{ м}^5 / \text{с}^2]$$

где: $\overleftarrow{r}_{\Delta}$ – координаты центра треугольника с поправкой по аппликате относительно h_z

Учитывая единый источник главной силы и момента, будет корректным «приведение к динамо» или определение минимального или $\overleftarrow{\text{реально}}$ действующего момента с учётом ориентации главного вектора сил $\overleftarrow{\nu S}$, что

позволяет обойти построение определённой (или скользящей) главной оси внешнего момента поворота корабля (приведение к динаме):

$$\overleftarrow{vR} = \overleftarrow{vR} \frac{\overleftarrow{(vR \cdot vS)}}{|\overleftarrow{vR \cdot vS}|}, \quad [\text{м}^5/\text{с}^2]$$

где вектор главный сил всплытия \overrightarrow{vS} в морской системе координат всегда направлен в сторону вертикали вверх **(!!! – видимо здесь из вектора сил необходимо вычистить гравитационную составляющую)**, и не обращается в ноль, если весь корпус не выходит из воды.

Ходовой и волновой поток вблизи судовой обшивки

Интегрирование распределённых давлений, в отличие от прямых оценок погруженного объёма, позволяет совмещать гидростатические эффекты в едином процессе гидродинамического моделирования с учётом ходового набегающего потока совместно с оценками импульсных воздействий подповерхностных течений в условиях интенсивного морского волнения.

Каждый элемент судовой обшивки $\overleftarrow{\delta S}$ $[\text{м}^2]$ оmyвается локальным потоком жидкости со скоростью \overleftarrow{v} $[\text{м/с}]$, обусловленной поступательной \overleftarrow{V} и угловой \overleftarrow{W} интенсивностью качки в отсчётах относительно центра масс корабля \overleftarrow{G} , зафиксированного на вертикали поперечного метацентра тихой воды \overleftarrow{M} с отступом по аппликате на величину метacentрической высоты h_x в корабельной системе координат.

$$\overleftarrow{v_s} = \overleftarrow{V} + \overleftarrow{W} \times (\overleftarrow{L} - \overleftarrow{G}), \quad [\text{м/с}]$$

где \overleftarrow{L} $[\text{м}]$ – корабельные координаты центра элементарного треугольника. **Вычислительная модель внешнего волнового воздействия строится с использованием скорости течений жидкости вблизи элементарной площадки судовой обшивки, без учёта относительно малого локального или собственного вращения в соприкосновении с корпусом корабля.**

В работах с полями давлений по поверхности судовой обшивки обязательно востребуются уточнения по давлению жидкости в рамках гидродинамических зависимостей закона Бернулли, устанавливающего неизменность «полного давления» в жидкости:

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g \cdot h_z + p_a = const \quad [\text{кг/м}^3] \quad [\text{м/с}] \quad [\text{кг/м}^2/\text{с}^2]$$

где $\rho = 1025$ [кг/м³] – плотность морской воды; v [м/с] – вызванная скорость течения вблизи судовой обшивки *без учёта скорости хода корабля*; p_a – давление атмосферы. Полное давление, в случае необходимости, фиксируется для случая судна без хода, без качки и без воздействия на него внешнего морского волнения как: $p_g = \rho g \cdot h_z$, давление атмосферы исключается.

Полная вычислительная модель в малых конечных объёмах строится на принципах непротекания смоченной обшивки корпуса, на которой вызванные волнами скользящие потоки будут влиять на изменение локального давления. При локальной скорости более скорости хода давление снижается, при подтормаживании потока – давление будет немного возрастать:

$$\delta p = \rho (V_v^2 - V_w^2) / 2 = p_v - \rho V_w^2 / 2, \quad [\text{кг/м}^2/\text{с}^2]$$

где V_v – скорость хода корабля, V_w – скорость потока, скользящего в плоскости элементарного треугольника.

Относительная скорость потока вблизи судовой обшивки вычисляется векторным сложением скоростей волнового потока и собственной скорости элемента обшивки на подвижном корпусе в локальной корабельной системе отсчёта: $\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow$ $v = V_w - v_s$ [м/с], где v_s – поступательное движение площадки судовой

обшивки; \leftarrow V_w – скорость волнового потока, переведенного в корабельный базис: $\leftarrow \rightarrow \times$ $V_w = V_w / \mathbf{r}$.

В случае вычислительных моделей конечного объёма такая относительная скорость участвует в малой интерполяционной деформации крупных частиц жидкости относительно смежных сеточных ячеек, а в случае неискажаемых трохоидальных волн аналогичные алгоритмы будут применяться к длинным аналитическим векторам скоростей волновых течений. Так, зеркальное отражение \leftarrow строится на разложении действующего суммарного вектора v по компонентам ортогонального базиса с единичной нормалью \leftarrow n к судовой обшивке.

Нормальный компонент вектора полной скорости получается двойным скалярным произведением с единичной нормалью:

$$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow$$

$$v_n = (n \cdot v) \cdot n. \quad [\text{м/с}]$$

Скользящий вектор скорости потока по поверхности судовой обшивке получается аналогичным по форме двойным векторным произведением:

$$\overleftarrow{v}_s = [\overleftarrow{n} \times \overleftarrow{v}] \times \overleftarrow{n} = \overleftarrow{v} - v_n \cdot \overleftarrow{n} . \quad [\text{м/с}]$$

Изменяя знак (порядок) в последнем векторном произведении можно построить вектор \overleftarrow{v}_\perp для зеркального отражения скорости от плоскости \overleftarrow{n} :

$$\overleftarrow{v}_\perp = (\overleftarrow{n} \cdot \overleftarrow{v}) \cdot \overleftarrow{n} + \overleftarrow{n} \times [\overleftarrow{n} \times \overleftarrow{v}] = v_n \cdot \overleftarrow{n} - \overleftarrow{v}_s . \quad [\text{м/с}]$$

Эвристические решения уместны для вычислительного эксперимента с использованием чисто математической недеформируемой моделью трохоидального морского волнения. Формально вся гидромеханика волновых потоков и обтекания корпуса корабля вполне адекватна полноценным дифференциальным решениям на основе прямого вычислительного эксперимента в рамках нестационарных моделей методов конечного объёма (крупных частиц жидкости) в нотации той же самой тензорной математики. В то же время, математическая модель недеформируемого трохоидального волнения весьма полезна для визуальной отладки и контроля корректности геометрических явлений и гидромеханических процессов, происходящих в зонах интенсивной трансформации набегающих и волновых потоков вблизи корабельной обшивки.

Если в вычислительном эксперименте не реализуется полная гидромеханическая задача, то для недеформируемого волнового поля достаточно рассмотрения скалярных распределений давлений и скоростей течений вблизи бортовой обшивки корабля, для чего вместо вышеописанных двойных скалярных и векторных произведений, достаточно их простых соотношений элементарными треугольниками бортовой обшивки.

Нормальная компонента набегающего потока отражается от расчётного элемента обшивки, что согласуется условиями непротекания. Величина вектора отражаемого внешнего потока применяется в качестве обратной зависимости для давления по аналогии с законом Торричелли, в котором гидравлический напор (давление) становится повышенным при встречном течении и вычисляемом в скалярном произведении, и, соответственно, отрицательным при обратном течении – как бы при «отсосе жидкости» от бортовой обшивки.

$$\frac{\delta \overleftarrow{f}_n}{\rho} = \frac{\Delta p_n}{\rho} \cdot \overleftarrow{\delta}_s = \frac{(\overleftarrow{n} \cdot \overleftarrow{v}_n) \cdot |\overleftarrow{n} \cdot \overleftarrow{v}_n|}{2} \overleftarrow{\delta}_s , \quad [\text{м}^2/\text{с}^2]$$

наиболее широкой части корпуса (в районе мидельшпангоута). Отражаемая \vec{v}_n , или компонента скорости непротекания всегда создает отрицательный дифференцирующий момент движущемуся кораблю с придавливанием кормового подзора к поверхности воды, и может служить для оценок условий выхода на глиссирование над волнами для специально сформированных обводов корпуса.

(* * *)

Собственно и сам алгоритм с перерасчётами векторов скоростей и поправок к давлениям забортной жидкости на элементарных треугольниках судовой обшивки составляет основу прямого и расширенного моделирования воздействий на корпус встречных и волновых потоков воды. Корабельное волнообразование в вычислительном эксперименте дополняется импульсами отражения штормовых волн совместно с практической гидромеханикой силовых воздействий и реакций по ходкости и качке корабля.

Математическая модель для потоков воды особо не различается в вариантах моделирования неискажаемых трохoidalных волн или волнения, свободно трансформирующегося в дифференциальных схемах конечных объёмов (*разностей*), однако, упрощенная модель не только служит отладке ключевых алгоритмов, но и вполне приемлема для корректных экспресс оценок мореходности с помощью наблюдений за позиционированием и маневрированием корабля на интенсивном волнении в реальном времени.

.....

Гидростатическая асимметрия объёмных интегралов на волновом склоне

Использование только объёмных интегралов сводится к наиболее устойчивым, быстрым – эффективным алгоритмам вычислительного эксперимента в штормовой гидромеханике корабля. В моделировании выполняется векторное сопоставление встречных сил и плеч их рассогласования от изменчивого водоизмещения и фиксированного гравитационного веса корпуса, Вектор архимедовых сил всплытия ориентируется направляется по интегрально осредненным градиентам волновых склонов, как по поверхностям равных

давлений в пределах контура действующей ватерлинии, что формально включает в динамику движения все шесть компонент штормовой качки, с дрейфом и потерями хода.

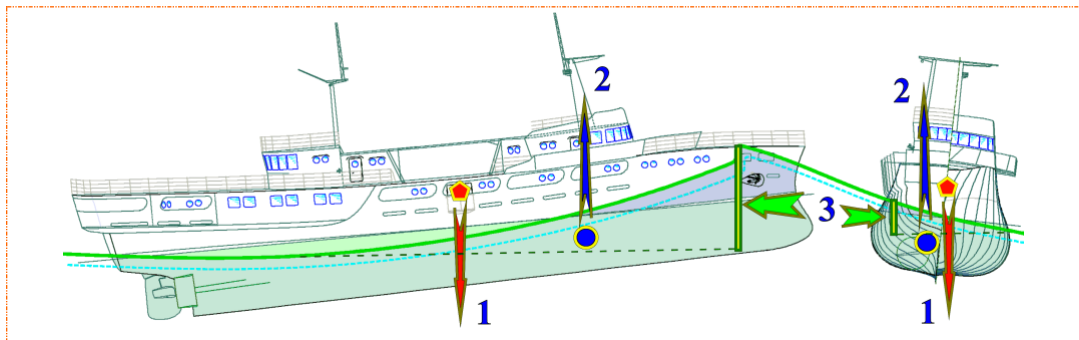


Рис. 4. Гидростатические силы на корпусе корабля в условиях интенсивного штормового волнения. 1 – гравитационная масса корабля фиксируется под метacentром для заданной начальной остойчивости; 2 – гидростатическая сила плавучести создает динамическую разность с гравитационной массой, с образованием кренящего и дифференцирующего плеча; 3 – интегральный перепад уровней воды в оконечностях и по бортам корпуса (с учётом крена и дифферента корабля), создают силы для горизонтальных смещений и поворотов корпуса относительно мгновенного центра площади действующей ватерлинии, а также дополнительные пары сил с центром масс корпуса, в том числе приводящие к рысканию по курсу.

В такой постановке недостает учёта быстроменяющегося момента инерции по объёму погруженной части корпуса (*≈ на предстоящую проработку*). Взамен пока добавляются гидростатические силы и моменты (**Рис. 4**), возникающие от перепадов уровня воды по контуру действующей ватерлинии.

В алгоритме для поверхности ватерлинии выстраивается последовательность выборки по две точки a и b – вдоль ватерлинии, с третьей точкой c – на противоположном борту. В морской системе координат получится: $\delta h_y = 0,5 \cdot (a + b) \cdot Z - c \cdot Z$ – перепад уровней воды и бортового давления для расчётов крена и рыскания, $\delta h_x = (a - b) \cdot Z$ – продольный перепад уровней воды к расчётам килевой качки, потери хода или дельфинирования.

$$\vec{\delta f} = \rho \cdot g \cdot \{ S_x \cdot \delta h_x, \vec{S}_y \cdot \delta h_y, 0 \} / 2, \quad [\text{Н, кг} \cdot \text{м/сек}^2]$$

где $\vec{\delta f}$ – горизонтальный импульс силы по одному расчётному треугольнику на поверхности действующей ватерлинии в морской системе координат.

Уточняющие гидростатические моменты получаются векторным произведением с направлением на общую точку в плоскости действующей ватерлинии, к примеру, относительно центра её площади (*на тихой воде*):

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\nu S} &= \sum \overleftarrow{\delta f} & [\text{Н, кг·м/сек}^2] \\ \overleftarrow{\nu R} &= \sum \overleftarrow{r} \times \overleftarrow{\delta f} & [\text{Н·м, кг·м}^2/\text{сек}^2]\end{aligned}$$

где $\overleftarrow{\nu S}$ – продольная и бортовая компоненты дрейфовых сил за счёт перепадов уровня моря у борта корабля; Точкой концентрации дрейфовых сил выбирается $\overleftarrow{\nu F}$ – центр площади действующей ватерлинии. $\overleftarrow{\nu R}$ – свободный вектор добавочных моментов дифферента и рыскания, обусловленных пропеллерным искривлением поверхности действующей ватерлинии (*низший порядок малости*).

В практике проводимых вычислительных экспериментов такая поправка на перепады давлений по действующей ватерлинии представляется незначительной⁷, и для ускорения вычислений или с целью быстрых оценок мореходности корабля может не задействоваться.

Алгоритмы гидромеханики качки и ходкости корабля на интенсивном волнении (+)

Движущаяся модель корабля раздельно взаимодействует с каждым из волновых полей с предопределёнными фазовыми скоростями и длинами волн, что гидродинамически адекватно воссоздает геометрические трансформации и кинематические процессы отражения волн от бортовой обшивки в условно узкой полосе на действующей ватерлинии (??омываемого борта корабля). Результирующее волновое поле (Рис. 7) получается суммированием уровней моря и векторов скоростей подповерхностных течений, и формально может применяться для перерасчётов мгновенных силовых воздействий на весь корпус, включая надводный борт с перехлестом гребней волн через палубы и надстройки.

Каждый шаг корабля во времени отслеживается с помощью последовательности (массива) векторных отсчётов, которые при необходимости

⁷ В версии вычислительного эксперимента Vessel поправка по асимметрии ватерлинии, в предположении её незначительности, интерактивно исключаться не может.

легко задействуются для уточнения локальных динамических параметров движения корабля:

Route – маршрут – траектория контролируемого хода корабля [м];

Rate – скорость движения корпуса в корабельном базисе [м/с];

Swing – мгновенные значения крена, дифферента и рыскания [рад];

Whirl – угловые скорости качки локальных углах Крылова [рад/с].

Вычислительный эксперимент образуется последовательностью алгоритмов с векторными и тензорными величинами.

В случае гидростатической постановки корпуса на волну, гидродинамика корабля под действием внешних сил может рассматриваться в допущениях законов о движении твердого тела. Формально это означает необходимость вычисления только суммарного вектора сил и точки его приложения. Для случая пространственных гидростатических вычислений это объём за смоченной обшивкой корпуса с точкой концентрации архимедовой силы плавучести в мгновенном центре величины. В качестве вектора всплытия он направляется по нормали к осредненной поверхности волнового склона, рассекаемого корпусом корабля:

$$\overleftarrow{B} = iV \cdot \overleftarrow{v} W. \quad [M^3]$$

Вертикальный вектор гравитационной массы/объёма корпуса синтезируется в глобальной системе координат:

$$\overrightarrow{W} = \{0, 0, Volume\}. \quad [M^3]$$

Изменение скорости поступательных перемещений корпуса в корабельной системе координат, без учёта ослабления при действии вращательного момента с плечом рассогласования центров величины и массовой тяжести корабля:

$$\overleftarrow{V} += \overleftarrow{g} \cdot (\overleftarrow{B} + \overleftarrow{W} / \mathbf{r}) \cdot \overrightarrow{\delta t} / Volume. \quad [M/C]$$

где: \overleftarrow{g} – ускорение свободного падения; деление на корабельный базис \mathbf{r} означает перевод вектора из глобальной морской системы координат к локальному корабельному базису.

Демпфирование инерционных сил и моментов по штормовой качке и дрейфу корпуса

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний корпуса включает инерционные и демпфирующие компоненты для локальных восстанавливающих и дрейфовых сил и моментов [1, 1985, Справочник..., Войткунский], для примера по бортовой, килевой и вертикальной качке:

$$(I_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \ddot{\vartheta} + \mu_{44} \cdot \dot{\vartheta} + g \cdot M \cdot h_0 \cdot \vartheta = 0, \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2]$$

$$(I_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \ddot{\psi} + \mu_{55} \cdot \dot{\psi} + g \cdot M \cdot H_0 \cdot \psi = 0, \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2]$$

$$(M + \lambda_{33}) \cdot \ddot{\zeta}_g + \mu_{33} \cdot \dot{\zeta}_g + g \cdot \rho \cdot S \cdot \zeta_g = 0, \quad [\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2]$$

или после приведения к каноническому виду:

$$\ddot{\vartheta} + 2 \cdot \nu_g \cdot \dot{\vartheta} + \omega_g^2 \cdot \vartheta = 0, \quad [\text{рад}/\text{с}^2]$$

$$\ddot{\psi} + 2 \cdot \nu_\psi \cdot \dot{\psi} + \omega_\psi^2 \cdot \psi = 0, \quad [\text{рад}/\text{с}^2]$$

$$\ddot{\zeta}_g + 2 \cdot \nu_g \cdot \dot{\zeta}_g + \omega_g^2 \cdot \zeta_g = 0. \quad [\text{м}/\text{с}^2]$$

На основании этих выражений строятся основные определения затухающих процессов угловой (ϑ – бортовой и ψ – килевой) и поступательной (ζ – вертикальной) качки корпуса.

Относительные коэффициенты демпфирования бортовой, килевой и вертикальной качки:

$$\nu_g = \frac{\mu_{44}}{2 \cdot (I_{xx} + \lambda_{44})}, \quad \nu_\psi = \frac{\mu_{55}}{2 \cdot (I_{yy} + \lambda_{55})}, \quad \nu_\zeta = \frac{\mu_{33}}{2 \cdot (M + \lambda_{33})} \quad [\text{с}^{-1}]$$

Собственные круговые частоты бортовой и вертикальной качки инерционного характера:

$$\omega_g = \sqrt{g \cdot M \cdot h_0 / (I_{xx} + \lambda_{44})} \quad \text{и} \quad \omega_\zeta = \sqrt{g \cdot \rho \cdot S / (M + \lambda_{33})} \quad [\text{с}^{-1}]$$

Эмпирические или сокращённые выражения для собственных колебаний корпуса записываются относительно периодов качки $\tau = 2\pi/\omega$ [сек], как капитанская формула: $\tau_g = k \cdot B / \sqrt{h_0}$ [сек] с коэффициентом $k \approx 0,78$ [с/м^{1/2}] для малых и средних судов, до его величины $k \approx 0,9$ [с/м^{1/2}] для крупных судов или транспортов с полным грузом. Аналогичная оценка собственного периода для

вертикальной качки: $\tau_{\zeta} = 2,5 \cdot \sqrt{T}$ [сек], и также по килевой качке $\tau_{\psi} = 2,4 \cdot \sqrt{T}$ [сек]: где: T [м] – осадка; B [м] – ширина корпуса по действующей ватерлинии; S [м²] – площадь действующей ватерлинии; h_0 [м] – метацентрическая высота; $M = \rho \cdot W$ [кг] – масса корпуса; $D = \rho \cdot g \cdot W$ [кг·м/с²] – гравитационная сила тяжести корпуса; W [м³] – объёмное водоизмещение; $\gamma = \rho \cdot g = 1025$ [кг/м²/с²] – массовая плотность воды; μ_{ϑ} [кг·м²/с] – обобщенный коэффициент демпфирования угловой скорости и μ_{ζ} [кг/с] – в случае со скоростью поступательной.

Во всех трёх дифференциальных уравнениях движения присутствует восстанавливающие моменты ω_{ϑ} , ω_{ψ} и силы ω_{ζ} с инерционной нормировкой, которые $\omega^2 \gg \nu^2$ значительно превышают демпфирующие компоненты в дискриминанте характеристического уравнения $\sqrt{\nu^2 - \omega^2} \approx i \cdot \omega$, что соответствует решениям с осциллирующими свойствами для собственных периодов малых колебаний корпуса, без начальной угловой скорости.

$$\vartheta = \vartheta_0 \cdot e^{-\nu_{\vartheta} \cdot t} \cdot \cos \omega_{\vartheta} t \text{ – бортовая качка,} \quad [\text{рад}]$$

$$\psi = \psi_0 \cdot e^{-\nu_{\psi} \cdot t} \cdot \cos \omega_{\psi} t \text{ – килевая качка,} \quad [\text{рад}]$$

$$\zeta = \zeta_0 \cdot e^{-\nu_{\zeta} \cdot t} \cdot \cos \omega_{\zeta} t \text{ – вертикальная.} \quad [\text{рад}]$$

Полученные решения дифференциальных уравнений второго порядка, с восстанавливающими исходное положение и демпфирующими скорость движения компонентами, могут и должны быть использованы для проверки результатов вычислительного эксперимента в условиях свободных и затухающих колебаниях корпуса корабля на тихой воде.

В условиях интенсивного морского волнения собственные колебания корпуса, исчисляемые по начальным метацентрическим зависимостям, сами по себе должны считаться несущественными в сравнении с воздействием крутых склонов крупных морских волн с непредсказуемой периодичностью. В прямом вычислительном эксперименте такое гидростатическое воздействие оценивается значительно более точными геометрическими алгоритмами, с естественным совмещением не меньших гидродинамических эффектов, с большими углами и быстрыми вертикальными смещениями уровня моря под внешним штормовым воздействием сколь угодно большой интенсивности.

Пересмотрим вышесказанное на примерах оставшихся трёх компонент качки: χ – рыскания; η – поперечных колебаний и ξ – продольных пульсаций скорости хода.

$$(I_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \ddot{\chi} + \mu_{66} \cdot \dot{\chi} = 0, \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2]$$

$$(M + \lambda_{11}) \cdot \ddot{\xi} + \mu_{11} \cdot (\dot{\xi} - \dot{\xi}_i) = 0, \quad (M + \lambda_{22}) \cdot \ddot{\eta} + \mu_{22} \cdot \dot{\eta} = 0, \quad [\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2]$$

и три канонические формы этих угасающих движений:

$$\ddot{\chi} + 2 \cdot \nu_{\chi} \cdot \dot{\chi} = 0, \quad [\text{рад} / \text{с}^2]; \quad \ddot{\xi} + 2 \cdot \nu_{\xi} \cdot \Delta \dot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} + 2 \cdot \nu_{\eta} \cdot \dot{\eta} = 0, \quad [\text{м} / \text{с}^2]$$

где: $\dot{\xi}_i$ – скорость хода по индикаторной мощности двигателей на тихой воде, $\Delta \dot{\xi} = \dot{\xi} - \dot{\xi}_i$ – колебания скорости хода относительно ходкости на тихой воде.

В дискриминанте канонического уравнения движения остается только положительная величина демпфирования $\sqrt{\nu^2} = |\nu|$, значит, фундаментальное решение в целом сводится к затухающим колебаниям угловых и поступательных скоростей движения корпуса, что в локальных координатах справедливо для всех шести компонент моделируемого движения.

$$+^{\xi} += \dot{\xi}_i \cdot \delta t + \frac{\Delta \dot{\xi}}{2 \nu_{\xi}} \left(1 - e^{-2 \nu_{\xi} \cdot \delta t} \right), \quad [\text{м}]$$

$$+^{\eta} += \frac{\dot{\eta}}{2 \nu_{\eta}} \left(1 - e^{-2 \nu_{\eta} \cdot \delta t} \right), \quad +^{\zeta} += \frac{\dot{\zeta}}{2 \nu_{\zeta}} \left(1 - e^{-2 \nu_{\zeta} \cdot \delta t} \right), \quad [\text{м}]$$

где: δt – расчётный интервал времени одного шага вычислительного эксперимента, $+^{\xi}$, $+^{\eta}$ и $+^{\zeta}$ – местоположение центра масс корабля по истечении расчётного интервала времени δt .

$$+^g += \frac{\dot{g}}{2 \nu_g} \left(1 - e^{-2 \nu_g \cdot \delta t} \right) - \text{крен}, \quad [\text{рад}]$$

$$+^{\psi} += \frac{\dot{\psi}}{2 \nu_{\psi}} \left(1 - e^{-2 \nu_{\psi} \cdot \delta t} \right) - \text{дифферент}, \quad [\text{рад}]$$

$$+^{\chi} += \frac{\dot{\chi}}{2 \nu_{\chi}} \left(1 - e^{-2 \nu_{\chi} \cdot \delta t} \right) - \text{рыскание}. \quad [\text{рад}]$$

Полученные подтормаживания угловых и поступательных скоростей удовлетворяют базовым дифференциальным уравнениям движения, которые предполагают безусловно малые колебания и отклонения от исходных скоростей движения. Формально здесь можно применять уточняющие математические модели более высокого второго или третьего порядка влияния на скорости вынужденных движений корпуса корабля на волнении.

Гидромеханическим парадоксом в качке корабля можно называть обратное действие вязкости жидкости, в штормовом море именно скоростные потоки в толще воды под гребнями волн усиливают внешнее воздействие на раскачивание корабля, что особо существенно при наличии днищевых и бортовых килей, крыльев-успокоителей, рулей, плавника кормового подзора и других выступающих частей.

Поэтому целесообразно оставить линейные зависимости демпфирования качки только для малых, начальных поступательных и угловых скоростей. При значительном ускорении качки пусть будет включаться кубическое гашение скоростей в двукратном пределе.

$$V \dot{=} (1 - 0.5 \tanh(\mu V^2 \cdot \delta t)) \frac{(1 - \exp(\mu \delta t))}{\mu},$$

где V – условная скорость качки; μ – фактор демпфирования; δt – расчетный шаг времени.

Однако, в случае прямого вычислительного эксперимента предпочтительно непосредственное задействование сил вязкого трения элементарных площадках смоченной бортовой обшивки, как участвующих в собственном движении корабля, так и подверженных внешним волновым воздействиям, и соответственно, отчасти ослабляющих собственные колебания или ускоряющихся под силовым влиянием штормовых волн. С этой целью воспользуемся выражениями для расчетов сил сопротивления трения по эквивалентной гладкой пластине, воспринимающей турбулентное обтекание жидкости с большими числами Рейнольдса: $Re = V \cdot L / \nu$, где V [м/с] – условная скорость хода, L [м] – длина корпуса корабля; $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6}$ [м²/с] – оценка кинематической вязкости для стандартной температуры воды 4°C. Тогда эмпирический коэффициент касательного напряжения (по формуле Прандтля-Шлихтинга) будет определяться как $\zeta_{\text{тр}} = 0,455 \cdot \log_{10}(Re)^{-2,58} \approx (1,5 \div 2,3) \cdot 10^{-3}$.

Собственно величина сил трения будет определяться как $R_T = 0,5 \cdot (\zeta_{\text{тп}} + \zeta_{\text{ш}}) \cdot \rho \cdot V^2 \cdot \Omega$, где Ω – площадь эквивалентной пластины; $\zeta_{\text{ш}} \approx (0,3 \div 0,6) \cdot 10^{-3}$ – поправка для учета шероховатости.



Алгоритмы моделей движения и демпфирования колебаний корпуса

Фактор демпфирования скорости μ связан с величиной отклонений скорости от установившейся или нейтральной величины, и формально учитывает влияние гидродинамически необратимых процессов, присоединенных масс и вязкости жидкости.

$${}^{\leftarrow}V \&= {}^{\leftrightarrow} damp, \quad [\text{м/с}]$$

здесь операция $\&=$ означает покомпонентное умножение величин скорости на соответствующие безразмерные параметры демпфирования: $damp$ – зависящего от фактора демпфирования и шага вычислительного эксперимента во времени:

$$damp = \frac{1 - e^{-2\nu \cdot \delta t}}{2\nu \cdot \delta t}.$$

Демпфирование бортовой качки усиливается на больших угла крена, так при моделировании опрокидывания фактор демпфирования параболически возрастает в четыре раза.

$$damp_{\xi} \times = (1,0 - 0,5625 \cdot \vartheta / \pi)^2,$$

где ϑ – угол крена в радианах.

В моделировании поступательных движений корабля также применяются полные значения скорости для центра масс корпуса, с простым исключением маршевого хода под тягой судовых машин без внесения дополнительных нелинейных поправок: $\dot{\xi} = \dot{\xi}_i - \dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_i - Speed$.

Факторы демпфирования могут интерактивно изменяться в процессе вычислительного эксперимента. В начальных условиях инициализируются числовыми векторами, как:

$v_{\xi,\eta,\zeta} = \{ 0.05, 0.4, 0.3 \}$ – продольной, поперечной и вертикальной качки

$v_{\vartheta,\psi,\chi} = \{ 0.1, 0.3, 0.4 \}$ – для бортовой, килевой качки и рыскания.

В составе моделирующих алгоритмов:

$\mu F = \{ 0.1, 0.8, 0.6 \}$ – продольной, поперечной и вертикальной качки

$\mu M = \{ 0.2, 0.6, 0.8 \}$ – для бортовой, килевой качки и рыскания.

Для перехода к относительным коэффициентам демпфирования в инерционной нормировке не включаются в явной форме присоединённые массы для неустановившихся режимов обтекания корпуса. В процессе интенсивной штормовой качки значительно изменяется площадь смоченной обшивки, вплоть до отрыва корпуса поверхности моря при слеминге, и до полного погружения под воду и с перехлёстами верхних палуб гребнями волн. В силу проводимого учёта скоростей потоков с гидромеханикой изменения давлений вблизи поверхности корпуса, необходимость или возможность вовлечения эффектов присоединённых масс в таких условиях требует дополнительных исследований и практических обоснований.

Отметим также, что полные уравнения движения моделируют движение корабля в целом, а не только его затухающие колебания под внешним волновым воздействием, и где чего задействуются тензоры инерции для взаимосвязных поступательных и угловых движений, потому в промежуточном алгоритме с коэффициентами демпфирования инерционная нормировка полагается преждевременной:

$$v_{\xi,\eta,\zeta} = \frac{\mu_{\xi,\eta,\zeta}}{2 \cdot M} \Rightarrow \frac{\mu_{\xi,\eta,\zeta}}{2}; \quad [\text{м}^3/\text{с}]$$

$$v_{\vartheta,\psi,\chi} = \frac{\mu_{\vartheta,\psi,\chi}}{2 \cdot I_{44,55,66}} \Rightarrow \frac{\mu_{\vartheta,\psi,\chi}}{2} \quad [\text{м}^5/\text{с}]$$

Факторы демпфирования, также как и основные уравнения движения, могут применяться без множителя с плотностью жидкости, что изначально принято в реализации вычислительных экспериментов «Аугога». В алгоритмах с оценками собственных угловых и поступательных колебаний корпуса потребуется вернуть инерционные параметры в размерном виде, и применять модели с радикалами для плотности жидкости.

... вернуть все массовые величины к объёмным, если это возможно...

Для продольных пульсаций скорости хода демпфируется только различие текущей скорости $V.x$ от заданной $Speed$, как бы по условиям тяги двигателей на тихой воде.

Скорость поступательных движений корпуса измеряется в корабельной системе отсчёта, что требуется для динамической синхронизации хода и тяги маршевых двигателей:

$$Speed = V.x. \quad [м/с]$$

В случае прекращения тяги двигателей, коэффициент демпфирования применяется непосредственно к величине скорости хода:

$$Speed \times = dumpF.x. \quad [м/с]$$

Во избежание некорректного подтормаживания в маршрутном массиве скоростей продольный компонент обнуляется и не влияет на регулирование скорости хода⁸.

$$^{+}Rate = \{0, V_y^{\leftarrow}, V_z^{\leftarrow}\}, \quad [м/с]$$

где (+) верхний левый индекс отмечает новый шаг во времени, следующий элемент в массиве скоростей.

Согласованный таким образом свободный вектор локальной скорости переводится в глобальную систему координат и задействуется в расчёте местоположения корабля на следующий момент времени:

$$^{+}Route += \vec{r} \cdot V^{\leftarrow} \cdot \delta t, \quad [м]$$

и вычисленная компонента вертикальной качки переносится в корабельный базис: $r.Z = Route.z$, где прописная Z отмечает аппликату центра масс в глобальной системе координат (*строчная z – локальная аппликата*).

Разделенный этап моделирования угловых моментов сил и вращательный реакций корпуса предварительно строится в предположении фиксированного центра масс корабля, относительно которого моделируется динамика крена, дифферента и рыскания. Возможно это несколько усиливает как поступательные, так и вращательные движения корабля на штормовом волнении, однако

⁸ Нотация обозначений в пространстве и времени из тензорной математики [5].

соответствует правилу привносимых погрешностей в сторону большей «опасности» (*т.е. – требуется доработка*).

Плечо момента архимедовых сил всплытия в корабельной системе координат:

$$\overleftarrow{R} = \overleftarrow{v} \overleftarrow{B} - \overleftarrow{Gravity}$$

[м]

Образуется импульс момента проворачивающих сил за время δt , также в корабельном базисе:

$$\overleftarrow{M} = g \cdot (\overleftarrow{R} \times \overleftarrow{B}) \cdot \delta t$$

[м⁵/с]

Любое ускорение центра масс корабля откликается моментам сил относительно условного центра бокового сопротивления корпуса на воде (*пусть им будет тот же центр величины*). Требуемое ускорение проще получить численно дифференцированием маршрута движения корабля с приведением к корабельному базису:

$$\overleftarrow{M} += \overleftarrow{R} \times [(\overrightarrow{-1Route} - 2 \cdot \overrightarrow{-2Route} + \overrightarrow{-3Route}) / \mathbf{r}] \cdot Volume / \delta t$$

[м⁵/с]

Обновленный вектор угловой скорости на качке корабля также определяется в локальном корабельном базисе:

$$\overleftarrow{\Omega} += \overleftarrow{M} \cdot \delta t / \mathbf{inMass},$$

[рад/с]

после применения демпфирования к компонентам угловых скоростей:

$$\overleftarrow{\Omega} \&= \overleftrightarrow{dump} \overleftarrow{M},$$

[рад/с]

где изначальные величины устанавливаются как: $M = \{ 0.9; 0.8; 0.7 \}$, можно определиться с текущим углами крена, дифферента и рыскания:

$$\overleftarrow{K} += \overleftarrow{\Omega} \cdot \delta t.$$

[рад]

В вычислительном эксперименте может проявляться эффект цифрового демпфирования с усилением внешнего силового воздействия, когда под воздействием крупного волнения могут появляться неадекватно большие ускорения по всем шести компонентам качки. В частности, представляется полезным ограничение угловой скорости опрокидывания корабля величиной

времени **не более 6 секунд**, что полезно в плане исключения необоснованно больших линейных ускорений, возникающих от запаздывающего интервала отсчётов времени в интегралах движения по линейным дифференциалам Эйлера.

$$\overset{\leftarrow}{|\Omega|}_x \leq \pi / 6$$

[рад/с]

Полагая, что килевая качка и рыскание не подвержены резонансным эффектам под ударами гребней регулярного волнения, такие ограничения угловых скоростей не вводятся.

Форма цифровой модели корпуса корабля в надводной части может иметь большие плоскости и возвышенные надстройки, на которых концентрируются ударные гидродинамические нагрузки в случае большого угла крена и в моменты опрокидывания корпуса. Для поддержания устойчивости вычислительного процесса скорость накренения искусственно ограничивается так, чтобы опрокидывание происходило не быстрее чем за 10 секунд. Одновременно вчетверо усиливается фактор демпфирования бортовой качки для положения корпуса кверху килем:

$${}^+\dot{\vartheta} \times = 1 - (0,5625 \vartheta / \pi)^2.$$

В построении вычислительного эксперимента используются углы Крылова (Эйлера) для которых характерно наличие критического направления, которое в расчетах обуславливается достижением вертикального дифферента для корпуса корабля. Во избежание разрывных геометрических решений величина дифферента ограничивается искусственно до 84°.

(+++)

Автоматическое регулирование и адаптивное управление курсом и скоростью хода

Важной функцией вычислительного эксперимента является плавное регулирование набора скорости хода, а также ограничение скорости циркуляции при выходе на заданный курс, при которых не ограничивается свободная динамика ходкости и рыскание на курсе под воздействием штормового волнения.

В вычислительном эксперименте вышеописанная операция линейного демпфирования вполне адекватно задействуется для небольших отклонений от

заданной ходкости на спокойной воде $\dot{\xi}_i$ для моделируемых условий штормового плавания. Возможно ускоренное приведение к заданной скорости в случае больших рассогласований заданной и текущей скорости хода, без особого влияния на её малые пульсации, для чего алгоритмом предусматривается небольшое усиление фактора демпфирования.

$$+ \dot{\xi} / = (1 - \tanh^2(\dot{\xi}_i - \dot{\xi}) / 16) / 24.$$

Управление курсом корабля выполняется малыми приращениями угла направления $\delta\chi$, которые на тихой воде обеспечивают полную циркуляцию в одном из трёх режимов: «Руль на борт» – за 1 минуты; «Полборта» – 2 минуты; и «Помалу» – за 4 минуты. В штормовом плавании режим «Помалу» включается автоматически при отклонении от заданного курса на 1 румб ($11^\circ 15'$), однако это может быть недостаточно для возвращения корабля на заданный курс. Для ускорения циркуляции и выхода на заданный курс можно задействовать ручное управление с выбором режимов «Руль на борт» или «Полборта». После выхода корабля на указанный курс руль автоматически ставится прямо, с повторением автоматического управления с перекладками руля «Помалу».

(???) При подаче команды на поддержание заданной скорости хода включается ограничение ускорения с помощью эмпирической константы 0,03, приведенной к требуемой физической размерности с помощью нормировки площади смоченной поверхности корпуса *Surface* к исходному водоизмещению *Volume*:

$$+ \vec{V} += 0,03 \cdot \delta \vec{V} \cdot | \delta \vec{V} | \cdot \delta t \cdot Surface / Volume ,$$

где $\delta \vec{V}$ – разность между заданной и текущей скоростью хода, δt – интервал одного расчётного такта во времени.

Демпфирование продольной качки применяется к разнице между заданной и текущей скоростью хода $\delta \vec{V}$, что также способствует плавному регулированию ходкости, допуская дельфинирование и существенных потери хода, вплоть до обратного дрейфа, характерного для реальных условий штормования корабля на курсе «носом на волну».

Изменение курса также выполняется с должным одерживанием в трёх режимах циркуляции как: «помалу», «полборта» и «руль на борт»:

$${}^+K.z += \min \max(-\delta A, \delta K.z, \delta A),$$

где: $\delta A = \delta t \cdot (\pi/120, \pi/60$ или $\pi/30)$ – угол изменения курса за один шаг времени с полной циркуляцией за 4, 2 или одну минуту.

Автоматическое регулирование возвращения на заданный курс осуществляется при отклонении на величину 0,1 радиана ($\approx 5^\circ 43'$), с установкой угловой скорости «по малу»: $\Omega.z = \pi/120$ [рад/с] (полный круг за 4 минуты). На крупной волне такой скорости может быть недостаточно и рыскание легко превышает критические углы, характерные выхода лагом к волне, или для захвата корпуса с опасным брочингом. В вариантах интерактивного управления скорость циркуляции может выбираться как «полборта»: $\Omega.z = \pi/60$ [рад/с] (≈ 2 мин.), или «руль на борт»: $\Omega.z = \pi/30$ [рад/с] (≈ 1 мин.), что, как правило, вполне достаточно для ускоренного восстановления выбранного курса.

Управление ходом с помощью тяги двигателя и плавное регулирование курса позволяют моделировать возникновение крена на циркуляции с адекватным ходовым дифферентом при разгоне и торможении; а также проявление потерь хода на штормовом волнении; дельфинирование при захвате корпуса попутной волной и другие эффекты качки и ходкости по всем шести степеням свободного маневрирования корабля.

(+++)

...заменено: Для наглядности положение двух метацентров изображаются в диаметральной плоскости корабля, с дискретной сменой знака при крене на борт и опрокидывании. В числовых структурах метацентрические компоненты сохраняются в искусственно синтезированном векторе: vM :

$vM.x = vB.z + r$ – аппликата поперечного метацентра;

$vM.y = vB.z + R$ – аппликата продольного метацентра;

$vM.z = ih = r - Gravity.z$ – метацентрическая высота.

Вычислительная модель групповых структур морского волнения

Корабельная гидромеханика и волновые процессы на поверхности глубокого моря не изобилуют разнообразием геометрических форм или множественностью физических проявлений. Силовое взаимодействия корабля, океана и атмосферы связаны законами неразрывности тяжелой жидкости, условиями сохранения и равномерного распределения энергии гравитационных волн, возбуждаемых ветровыми напряжениями на водной поверхности.

В основе вычислительных моделей штормового моря используются теоретические результаты и вычислительные модели для трохоидаальных волн

большой высоты [3, Поисковые..., 2018], в которых параметрическая запись кинематики частиц жидкости по аргументу времени представляется кинематическими траекториями в сплошной среде в силовом гравитационном поле морского волнообразования, распространения и трансформации групповых структур и волновых пакетов, с математическим построением в строго аналитической форме и в форме чисто дифференциально-разностных вычислительных алгоритмов.

Основные зависимости и обозначения из теории волн

$\tau = 2\pi / \omega$ [с] – текущий период волны; $\lambda = 2\pi / k$ [м] – видимая длина волны;
 $\rho = 1025$ [кг/м³] – плотность жидкости; g – гравитационное ускорение [м/с²];
 $\sigma = 0,072.86$ [кг/с²] – коэффициент капиллярного натяжения на поверхности воды при температуре 20°C;

$C_w = \lambda / \tau = \omega / k$ [м/с] – фазовая/видимая скорость в длинах и частотах волны;

$C_w = \sqrt{g / k} = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$ – фазовая скорость волны на глубокой воде;

$C_w = \sqrt{\sigma \cdot k / \rho}$ – капиллярной: $C_{cg} = 0,232$ м/с; $\lambda_{cg} \approx 1,73$ см $\leftrightarrow \{ g/k \Leftrightarrow \sigma \cdot k / \rho \}$

$C_w = \sqrt{g \cdot H}$ – скорость длинной волны (на мелкой воде), H [м] – глубина;

$C_w = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} \cdot k \right) \cdot \text{th}(kH)} = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda} \right) \cdot \text{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$ – скорость

гравитационной волны с учётом всех трех реологических факторов состояния жидкости: λ [м] – длина волны, σ [кг/с²] – поверхностное натяжение и H [м] – глубина моря;

r_w [м] – локальный радиус для трохоиды в волновых движениях жидкости;

$r_z = r_w \cdot e^{k \cdot z} = r_w \cdot e^{2\pi z / \lambda}$ – радиус трохоиды, где: z [м] $\in [0 \div -\infty]$ – глубина;

$\varphi_w = 2\pi \cdot (s + t \cdot C_w) / \lambda_w$ – отсчёт фазового угла для трохоидальной волны,

где: s [м] – отстояние, t [с] – отсчёты времени при скорости C_w [м/с];

$\omega = 2\pi \cdot C_w / \lambda = 2\pi / \tau = \sqrt{g \cdot 2\pi / \lambda}$ [1/с] – круговая частота волновых колебаний;

$\vec{\zeta}$ [м] – вектор смещений частицы жидкости в вертикальной плоскости;

$\vec{v}_z = \omega \times \vec{r}_z$ [м/с] – скорость частицы на трохоидальной траектории;

$h = 2 \cdot r_w$ [м] – условная высота волны как удвоенный радиус трохоиды;

$H_w = 8/3 \cdot \pi \cdot h / \lambda$ – коэффициент высоты относительно экстремального гребня волны с обрушением.

О моделировании трохoidalного штормового волнения

Строгое и фактически единственное теоретическое решение о гравитационных волнах большой высоты на поверхности идеальной тяжелой жидкости получено в 1802 году [12, *Theorie der Wellen*, 1802] Францем Герстнером, профессором Пражского университета. Обобщаемая в рамках корпускулярных вычислительных схем трохoidalная модель морского волнения обладает – сильной дисперсией [6, БД «Vessel», 2015], проявляющейся зависимостью скорости распространения гребней волн от их длины и периода, и как следствие:

- двукратное снижение скорости распространения волновой энергии в целом по отношению к видимой фазовой скорости отдельных волновых гребней, отчего:

- фронт волны пребывает в состоянии непрерывного изменения фазы первого вступления, и вследствие чего:

- происходит квантование волновых пакетов с формированием практически стоячих центральных или «девярых» валов с обрушающимися гребнями большой крутизны, что математически проявляется как:

- гидромеханика трансформации и свободного распространения групповых структур морского волнения, и определяется сугубо нестационарными процессами на море, и – в прямом вычислительном эксперименте.

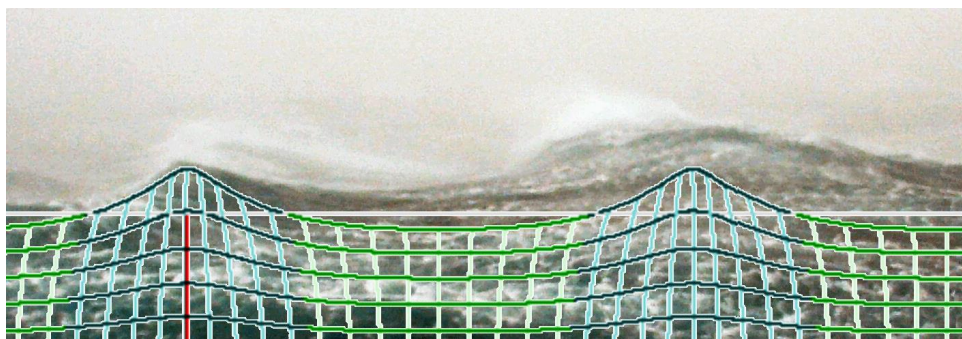


Рис. 5. Характерная форма трохoidalной прогрессивной волны. Угол склона вблизи вершины достигает 30° . При длине волны $\lambda = 100$ м (период 8 сек.), суммарная высота от впадины до вершины порядка 12 м (прилив/отлив $+9 / -3$ м), а скорость набегающего потока в гребне достигает 20 узлов

Трохoidalная или гравитационная волна Герстнера на глубокой и ограниченной глубине в полной мере удовлетворяет условию неразрывности

жидкости, определяется угасающим по вертикали полем скорости, и задается параметрическим описанием траекторий частиц жидкости, движущихся в локальных (лагранжевых) координатах по трохоидам с радиусом, уменьшающимся с глубиной.

На поверхности штормового моря возникают визуально регулярные ячейистые распределения ромбических пакетов с гребнями ветровых волн и выположенными склонами длиннопериодной зыби, независимо распространяющимися в групповых структурах с девятью валами в условиях простой взаимной амплитудной модуляции. **Рис. 5** приводит трохоидальный профиль на фоне фотографии с гребнями ветровых волн, бегущих поверх зыби соизмеримой высоты. На пологих склонах зыби сохраняется динамика проявления девятых валов ветровых волн, однако, отчасти сбивается ритм обрушения их гребней, отчего отчасти сбивается видимость строгой регулярности групповых структур.

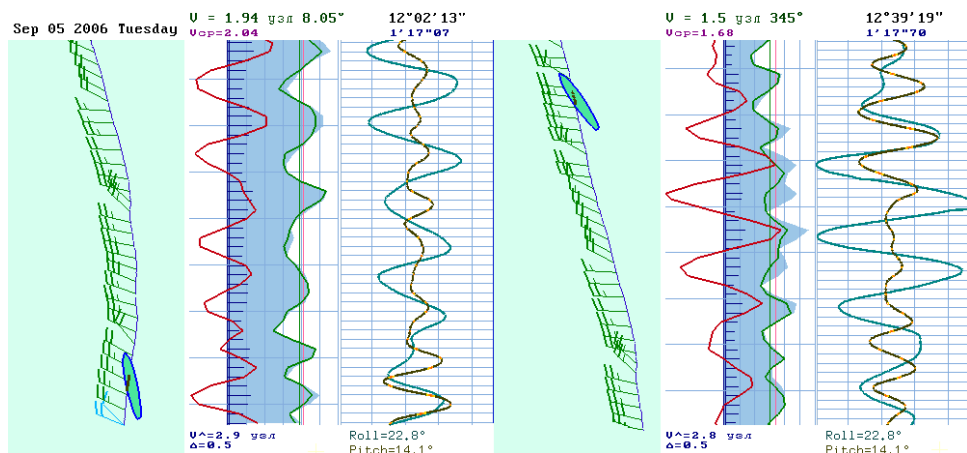


Рис. 6. Два примера регистрации динамики качки и ходкости морского судна на переходе по сахалинскому шельфу в свежую погоду. На кривых в правой стороне показано изменение крена и дифферента судна, которое сопоставляется с величиной отклонения от курса (на центральной кривой), измеряемой с помощью приемника GPS. На левом поле приведены маршруты судна, на которых показаны ежеминутные отметки направления и скорости ветра, достигающего 10-12 м/с.

Приборная регистрация профилей морских волн (**Рис. 6**) в открытом глубоком море с борта судна неплохо подтверждает достоверность предположений о волновых структурах с пакетами по девять волн (с центральными девятью валами).

Вычислительная модель морских волн и волновых потоков получается в последовательном алгоритмическом построении линий тока и траекторий движения элементарных частиц жидкости, для которых трохоидальное проворачивание привносит дисперсионные свойства в виде удвоения скорости гребней, а при встречном раскручивании – к подтормаживанию фазовых скоростей, что моделирует полуторное ускорение распространения волновой энергии под влиянием капиллярных эффектов – сил поверхностного натяжения.

Морское волнение на открытых акваториях проявляется протяженными на поверхности волновыми фронтами, что делает возможным математическое описание волн с использованием двумерных профилей трохоидального волнения⁹ в плоскости локальных координат по направлению распространения, в которых горизонтальные и вертикальные смещения частиц жидкости сопоставимы по размаху колебаний.

Трохоидальные колебания качественно связываются аналитическими зависимостями для скоростей течений в плоскости направления распространения и гравитационной вертикали, однако, построение соответствующих разностных схем для трансформации морских волн при отражении от обшивки корабля пока затруднительно.

Практическое моделирование проводится с использованием уравнений с фиксированной скоростью волновых фронтов $C_w = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$ и задействованием разностных схем в полных потоках¹⁰, моделирующих свободное распространение волновых импульсов произвольной формы. Включение в граничные условия генерации привходящих трохоидальных волн послужит автоматическому воспроизведению групповых структур штормового волнения и локальных течений по всей акватории вычислительного эксперимента.

Для воссоздания динамически подобной обстановки в штормовом море возможно наложение независимых решений по нескольким волновым структурам с произвольными векторами движения и амплитудно-частотными характеристиками. Для открытого океана это могут быть предельно крутые

⁹ Гармонические синусоидальные профили волн представляются частным случаем трохоидальных, при условии исчезающе малой высоты волн: $h=2r_w$.

¹⁰ Волновые уравнения связываются скоростью распространения импульса, зависящей от локальной реологии состояния частиц жидкости. В длинноволновых уравнениях это глубина моря, в газовой динамике – плотность воздуха, и т.п.

ветровые волны, и одна-две дополнительные системы зыби меньшей интенсивности от удалённых штормов.

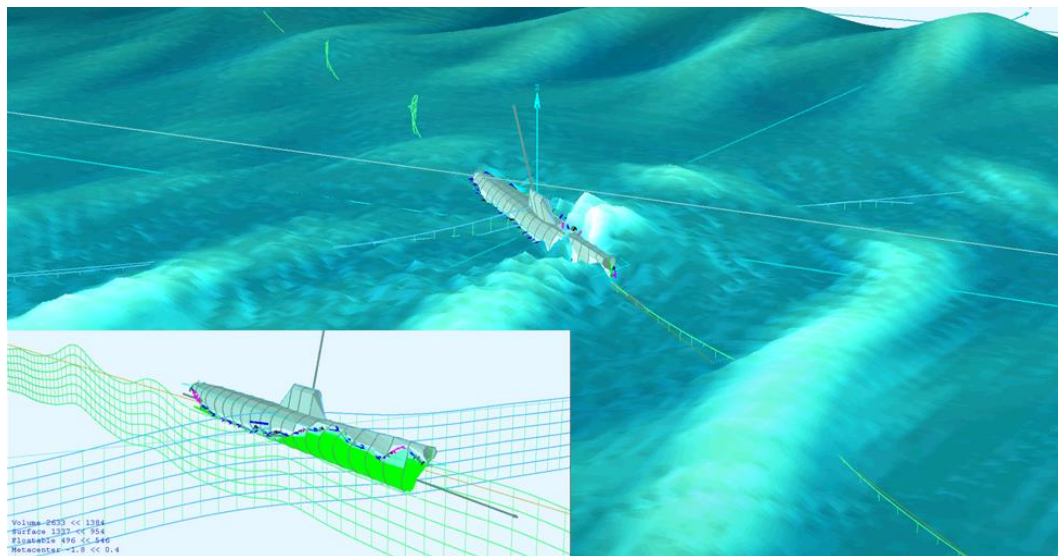


Рис. 7. В вычислительном эксперименте выполняется визуализация всех трех монохроматических полей, и их суммарного представления во взаимодействии с корпусом корабля. В отдельном окне представляется динамика собственно корпуса корабля и в окружении только профилей морского волнения.

В вычислительном эксперименте каждое волновое поле моделируется пакетами прогрессивных волн (Рис. 7), разделённых на ромбические ячейки в цугах по девять, со смещением фазы на треть π по смежным граням, и с обратной фазой $+\pi$ в угловых сопряжениях цепочек последовательных цуг волн.

В навигационной практике, как и на бортовых гидрометеостанциях, для срочных телеграмм визуально фиксируются ветровое волнение на фоне одной-двух одновременно действующих структур зыби от удалённых штормов. В программе «Ангога» принимаются к моделированию следующие волновые структуры штормовых волн:

Wind – свежее ветровое волнение, развивающееся под действием ветров. Период волн порядка 6 – 8 секунд для морских акваторий, и может достигать 10 – 12 секунд в открытом океане. Высота конкретных волн предельно высокая, что визуально, на фоне относительно пологой зыби, отмечается крутыми гребнями с высотой более 5 – 6 метров, разгоняющихся под ветровым напряжением шестибального шторма.

Swell – свежая штормовая зыбь. При усилении шторма в северном полушарии ветер заходит влево против часовой стрелки, при ослаблении отходит к востоку по часовой стрелке. На море всегда присутствует относительно свежая зыбь, отклоняющаяся от направления ветра на угол порядка 30 градусов. Высота волн зыби соизмерима со свежим ветровым волнением, длина в полтора-два раза большая, и крутизна не грозит обрушением гребней. На вершинах штормовой зыби происходит обрушение гребней ветровых волн.

Surge – длинная волна далекой зыби наблюдается в открытом океане, обычно она приходит из более высоких штормовых широт. Высоту волн далекой зыби можно полагать вдвое меньше свежей зыби, а направление близкое к меридиональному, т. е. в северных широтах¹¹ – южное, в южных – на север, в сторону экватора.

При неблагоприятном сложении всех волн можно ожидать экстремальную высоту до 13 – 15 метров, с преобладающей крутизной гребней в диапазоне 8 – 10 метров. В групповой структуре трохоидальных волн присутствуют «девятые валы» с удвоенной высотой, всегда выделяющиеся белизной обрушающихся гребней на подветренных склонах круче 45°.

Геометрическая кинематика морского и прибрежного волнения

Пространственный волновой процесс может быть синтезирован по геометрическим правилам интенсивного трохоидального волнения моря, для которого основные законы гидромеханики, условия неразрывности и сохранения энергии согласовываются на этапах аналитического решения исходной задачи. При соблюдении аппроксимационных критериев, контролирующих гладкость и неразрывность градиентов моделируемых функций, можно полагать, что свойства исходных аналитических решений распространяются на гидромеханику моделируемого морского волнения, включая нестационарные процессы и сложные волновые явления, проявляющихся в прямых вычислительных экспериментах аналогично естественным волновым процессам открытого моря.

Пусть исходными условиями вычислительного эксперимента фиксируется длина одиночных волн λ [м] в групповых структурах, дисперсионными соотношениями будет определяться $C_w = \lambda / \tau$ [м/сек] – фазовая или видимая

¹¹ Ветер дует в картушку компаса, волны движутся по направлению из картушки.

скорость перемещения гребня конкретной волны на глубоком море слева, и мелководье – справа:

$$C_w = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}} \Rightarrow \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi \cdot H}{\lambda}} \Leftarrow \sqrt{g \cdot H} \qquad \text{[м/сек]}$$

где: λ [м] – длина волны; H [м] – глубина море; τ [сек] – видимый период волны относительно поверхности условно неподвижной воды; C_w [м/с] – фазовая скорость свободного распространения одиночной волны.

Период волны фиксируется относительно условно неподвижной точки в пространстве для глубокого моря, или точки на дне моря мелкого:

$$\tau = \frac{\lambda}{C_w} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot \lambda}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi \cdot \lambda}{g} \cdot \operatorname{cth} \frac{2\pi \cdot H}{\lambda}} \Leftarrow \frac{\lambda}{\sqrt{g \cdot H}} = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \text{[сек]}$$

где ω [сек⁻¹]- частота проявлений волн времени.

Математическая и вычислительная модели трохоидаьного волнения

Математическая модель трохоидаьного волнения $\overset{\rightarrow}{\zeta}(t, s, z)$ [м] записывается в векторной форме на плоскости профиля $w \in \{s, z\}$ по направлению распространения фронта волны s [м] с гравитационной вертикалью z [м]. Фазовый отсчёт фронта волны в вычислительном эксперименте исходит из нулевого начального времени t [сек] и полудлины диагонали модельной акватории Lb [м].

$$\varphi_w = 2\pi \frac{t \cdot C_w - s - Lb/2}{\lambda} \qquad \text{[рад]} \qquad (1)$$

где: λ [м] – длина волны, движущейся со скоростью C_w [м/с], в плоскости профиля $w \in \{s, z\}$ на момент времени t [сек], из исходного местоположения s [м], с учётом центровки начальных отсчётов относительно половины диагонали опытового бассейна Lb [м].

Граничными условиями вокруг прямоугольной расчётной акватории предопределяется полувысота волны с помощью трохоидаьного радиуса r_w [м] на уровне невозмущенной поверхности моря $z=0$ [м], от которой выполняется уточнение этого орбитального радиуса движения для каждой элементарной

частицы жидкости, в зависимости от её мгновенной глубины под поверхностью воды r_z [м]:

$$r_z \times = \exp(2\pi \cdot z / \lambda) \text{ [м]}. \quad (2)$$

Максимальная амплитуда в гребне волны [3, Поисковые..., 2018] оценивается приближенно как: $R^{up} \approx 1,134 \cdot r_w$, что по величине заметно больше сопутствующего отлива во впадине $R^{dn} \approx 0,614 \cdot r_w$. Таким образом, высота трохoidalной волны отличается от размерений длины пробега циклоиды $h = \lambda / \pi$ или $r_w = \lambda / 2\pi$, и принимается в расчётах приближенно как: $h \cdot k \approx 0,75$ или $\lambda / h \approx \pi \cdot 8 / 3 \approx 8,38$, где h – видимая высота чисто прогрессивной волны от подошвы до гребня.

В алгоритмических моделях волновых процессов удобно использовать коэффициент: $H_w = 8/3 \cdot \pi \cdot h / \lambda$, нормированный относительно максимально допустимой высоты обрушающихся трохoidalных волн, где: $h = 2 \cdot r_w$ [м] – предельная высота волны в качестве удвоенного радиуса поверхностной трохойды.

Полагаем движение частиц жидкости по собственным трохoidalным траекториям под поверхностью воды, где давление волны выравнивается соотношениями глубины и локальной скорости этих частиц под волновыми склонами. Симметричная поправка относительно фазы волны $Cr \approx [0 \div H_w \div 1]$ к локальному заглублению r_z отчасти согласует осреднённый или равнообъёмный уровень воды для гребней с заострёнными вершинами и гребней кноидальных волн.

Симметричная поправка относительно фазы волны $Cr \approx [0 \div H_w \div 1]$ к локальному заглублению r_z , отчасти компенсирует потерю объёма жидкости при образовании заострённых вершин кноидальных волн.

$$r_z \times = \exp(2\pi \cdot r_z \cdot Cr \cdot \cos \varphi_w / \lambda) \text{ [м]}, \quad (3)$$

!!! и этот интеграл равнообъёмного уровня -!- взять аналитически ...

По наблюдениям моделируемых в вычислительных экспериментах волновых процессов, поправка на средний уровень будет служить в качестве коэффициента крутизны волны: $Cr \approx H_w$.

При необходимости вводится дополнительная ассиметричная поправка к профилю волны для учёта ветровых напряжений: $Wd [0 \div \sqrt{0,5} \div 1]$:

$$r_z \times = \exp(2\pi \cdot r_z \cdot Wd \cdot (\sin \varphi_w - 1) / \lambda) \text{ [м]}, \quad (4)$$

которая может применяться исключительно к ветровому волнению с осреднённо значимым сдвигом, как: $Wd \approx \sqrt{0,5} \approx 0,7071$.

Групповые структуры волнения образуют ромбические ячейки с вытянутостью в направлении распространения гребней: $L_g = \lambda \cdot 8.89$ [м], а наибольшая протяжённостью фронта – ширина ромбического фрагмента акватории: $F_g = 2\pi \cdot \lambda / H_w$ [м] обратно пропорциональна относительной высоте девятого вала в центре групповой структуры волн.

При использовании математической модели трохоидальных волн настраивается вдвое меньшая скорость распространения оконтуривающей групповой структуры, нежели фазовые скорости волновых фронтов внутри неё. В случае прямого вычислительного эксперимента с конечноразностным построением дисперсионных свойств волновых процессов, вышеприведенные поправки неприменимы, как некорректно воссоздающие потоки воды под склонами волн, и как несоответствующие исходным теоретическим решениям для трохоидальных волн Герстнера. /.../

Собственно профиль математической модели поверхностной волны строится в векторной форме на основе локального радиуса r_z , применяемого для простого гармонического смещения частиц воды от их исходно нейтрального положения:

$$\vec{\zeta} += r_z \cdot \{ -\cos \varphi_w, \sin \varphi_w \}. \quad [м] \quad (5)$$

В гравитационной волне частицы жидкости движутся по трохоидальным орбитам со строго одинаковыми угловыми скоростями: $V_r = \omega \cdot r_z$ [м/с], определяющими фазовую скорость свободного движения гребня прогрессивной волны: $C_w = \lambda / \tau = \omega / k$ [м/с]. Принимая надводное пространство (воздух) условно невесомым, погружение частицы жидкости отсчитывается от уровня действующих волновых склонов, тогда как радиусы трохоид и кривизна траекторий частиц масштабируются в геометрических пропорциях трохоидальной волны в целом (2) и (3):

$$V_r = \omega \cdot r_z = \omega \cdot r_w \cdot e^{kz},$$

или, для поверхности моря:

$$V_w = \omega \cdot r_w \cdot \exp(2\pi / \lambda \cdot (z + r_w \cdot (\sin \varphi - 1))), \quad [м/с] \quad (6)$$

где: z – аппликата в глобальной декартовой системе отсчёта.

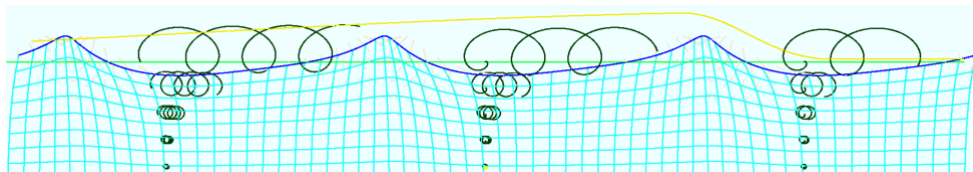


Рис. 8. Моделирование регулярных трохоидальных волн под действием напряжения приводного ветра с поправкой на смещение среднего уровня моря. Сетка под волной иллюстрирует дрейфовые смещение частиц и линии равного давления под поверхностью волны. Над волной показаны квазитрохоидальные траектории частиц жидкости в движении со строго фиксированными угловыми скоростями, определяющими фазовую скорость волны, но с изменяющимися радиусами локальных скоростей, уменьшающихся с глубиной погружения частицы под поверхностью воды.

На **Рис. 8** приведены трохоидальные траектории дрейфовых течений в зависимости от относительной высоты гребня волны и заглубления частицы жидкости. Максимальная скорость поверхностных течений достигается в гребне обрушающейся прогрессивной волны, и может приближаться по величине к фазовой скорости прогрессивной волны.

Видимые (фазовые) и групповые скорости гравитационных волн

Гравитационные волны на поверхности тяжелой жидкости обладают своеобразными дисперсионными свойствами, которые видимы при первом вхождении свободно распространяющейся волновой энергии, когда фаза волнового фронта постоянно изменяется. На глубокой воде фазовая скорость волны вдвое быстрее групповой, а под действием поверхностного натяжения в реальной жидкости одиночные волны отстают от видимой скорости продвижения волнового фронта.

По определению, волновая дисперсия связывается соотношением фазовой скорости волны к её длине [11, Механика., 1949, стр. 235]:

$$U = C_w + k \frac{dC_w}{dk} = C_w - \lambda \frac{dC_w}{d\lambda},$$

следовательно, у длинной волны $C_w = \sqrt{g \cdot H}$ скорость фронта зависит от глубины моря H [м], и распространение волновой энергии происходит со скоростью видимого фронта, дисперсия – отсутствует.

Волна на глубокой воде $C_w = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$, что после дифференцирование приводит к соотношению: $U = C_w / 2$. Скорость капиллярных волн зависят от

плотности и поверхностного натяжения – реологических свойств жидкости:

$$V = \sqrt{\frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi}{\rho \cdot \lambda}} \quad \text{или} \quad U = 1,5 \cdot C_w. \quad \text{При длине волны } \lambda_{cg} \approx 1,73 \text{ см}$$

капиллярных волн выравниваются с глубоководными, в таком случае дисперсионные соотношения усложняются соотношениями трохидальных волн с капиллярными. Аналогично, близбереговые расчёты могут ориентироваться

соотношение: $\frac{U}{C_w} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \cdot k \cdot H}{sh(2 \cdot k \cdot H)} \right)$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Для построения визуальной кинематики профилей трохидальных волн с дисперсией можно воспользоваться оператором для удвоенного вращения расчётных частиц жидкости – расчётных точек на волновых профилях по трохидальным радиусам: $\vec{\zeta} \cdot rot(\omega t)$, при этом в вычислениях вместо фазовой скорости C_w должна использоваться групповая U . По аналогии, в случае капиллярных волн дисперсионное соотношение согласуется простым изменением знака перед круговой скоростью $\vec{\zeta} \cdot rot(-\omega t/2)$. Положительное приращение фазового угла: $\varphi_w += \omega t$ для глубоководной волны, и с обратным знаком замедление вдвое: $\varphi_w = \omega t/2$ – в точности моделирует кинематику для волн капиллярных.

Вычислительная модель генерации прогрессивных волн

В вычислительном эксперименте задействуются два варианта генерации трохидального волнения, включающих построение взволнованной поверхности моря с пространственным распределением скоростей течений жидкости на всю расчётную глубину.

1) при моделировании морского волнения на основе разностных уравнений гиперболического типа исходные аналитические выражения применяются на свободных границах расчётной акватории, вне зависимости от математических и алгоритмических особенностей

Алгоритмическое представление моделей штормового волнения

Построению вычислительной модели в конечных разностях предшествует анализ устойчивости вычислительных процессов во времени и предварительное

согласование аппроксимационной гладкости моделируемых гидродинамических полей.

Устойчивость волновых уравнений вполне надежно контролируется с помощью критериев Куранта, суть которого в недопущении пересечения моделируемых возмущений расчётной ячейки целиком за один расчётный такт по времени.

$$C_w < \delta s / \delta t, \quad (7)$$

где: C_w [м/с] – заданная фазовая скорость моделируемой волны; δs [м] – шаг сетки здесь предполагается одинаковым по всей расчётной области; δt [сек] – шаг времени для одного цикла вычислительного эксперимента.

Для достижения равной эффективности в моделировании трех волновых полей с различающимися длинами волн можно в качестве начальных условия установить расчётный шаг во времени δt [сек], что естественным образом будет соотноситься с представлениями об аппроксимационной гладкости волновых процессов, период собственных колебаний которых должен быть хотя бы на порядок больше. Тогда именно шаг пространственной сетки будет назначаться динамически, как $\delta s = C_w \cdot \delta t$ [м], что создаст одинаково оптимальные условия моделирования для независимых волновых полей с наперед заданным фазовыми скоростями.

На практике для устойчивого решения приходится немного уменьшать расчётный шаг во времени δt [с]. Для прямоугольной сетке обычно достаточно приводить пересечение волновым фронтом одной ячейки по диагонали за два шага во времени: $tKrat \approx \sqrt{2}$ – кратность дробления шага во времени. В вычислительном эксперименте изменение расчётного шага во времени не приводит к видимым изменениям результатов моделировании, кроме немного негативного влияния на условия излучения волн на свободных границах – условиях излучения по Зоммерфельду, в котором для нормальной компоненты излучаемой волны необходимо привнести поправку к шагу по времени в виде: $tK = tKrat / (tKrat + 1)$.

Для упрощения алгоритмической записи вводится безразмерный параметр-характеристика волны как: $kW = C_w \cdot \delta t / \delta s / tKrat$ – отношение скорости волны к скорости прохода по сетке.

Экстраполяционные условия по Зоммерфельду определяются на свободных границах для свободного излучения прогрессивных волн с

предопределенной величиной фазовой скорости C_w , и применяются в расчётах смещения нормальной компоненты склона убегающей волны:

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_{0+} &= kW \cdot (\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_0) \cdot tK = C_w \cdot \frac{\delta t \cdot (\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_0)}{\delta s \cdot (tKrat + 1)} \quad [M], \\ \vec{\zeta}_{n+} &= kW \cdot (\vec{\zeta}_{n-1} - \vec{\zeta}_n) \cdot tK = C_w \cdot \frac{\delta t \cdot (\vec{\zeta}_{n-1} - \vec{\zeta}_n)}{\delta s \cdot (tKrat + 1)} \end{aligned} \quad (8)$$

где: n – нижние левые индексы используются для отметки используемых узлов сетки; символ (+) в качестве левого верхнего индекса показывает следующий отсчёт времени.

Динамика частиц жидкости строится в вертикальной плоскости волнового профиля, где разделенные на половину пространственного шага сеточные разности обеспечивают синхронное взаимодействие векторов смещений частиц жидкости $\vec{\zeta}$ [М] с их локальными скоростями \vec{v} [М/с] с привязкой к фазовой скорости распространения волны C_w [М/с] и углового вращения составляющих её частиц ω [1/с] :

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_s^+ &= kW \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_{s-1}) / \omega = C_w \cdot \frac{\delta t \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_{s-1})}{\delta s \cdot tKrat} / \omega \quad \{s \in 1 \div n-1\} \quad [M] \\ \vec{v}_s^+ &= kW \cdot (\vec{\zeta}_{s+1} - \vec{\zeta}_s) \cdot \omega = C_w \cdot \frac{\delta t \cdot (\vec{\zeta}_{s+1} - \vec{\zeta}_s)}{\delta s \cdot tKrat} \cdot \omega \quad \{s \in 1 \div n\} \quad [M/c] \end{aligned} \quad (9)$$

где крайние узлы с колебаниями уровня и дрейфа частиц жидкости $\vec{\zeta}_s^+$ экстраполируются по текущим полям в граничных условиях (8).

Дисперсионные эффекты трохоидаальных волн проявляются при рассмотрении вращения ω_z частиц жидкости относительно центров трохоидаальных радиусов. При попутном вращении $+\omega$ моделируется удвоенная фазовая скорость относительно скорости распространения пакетов волн, при обратном знаке $-\omega$ групповая скорость возрастает в 1,5 раза относительно видимой скорости волновых фронтов, что характерно для капиллярных волн поверхностного натяжения. В обоих случаях дисперсионных влияний визуально меняется фаза первого вступления волны по линии фронта невозмущенной акватории:

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{+}\zeta &= \delta t \cdot \omega \{ -\overset{\rightarrow}{\zeta_z}, \overset{\rightarrow}{\zeta_x} \} = \delta t \cdot \omega \{ -\zeta_z + \zeta_x \cdot \delta t \cdot \omega / 2, \zeta_x + \zeta_z \cdot \delta t \cdot \omega / 2 \} \\ \overset{\rightarrow}{+}v &= \delta t \cdot \omega \{ -\overset{\rightarrow}{v_z}, \overset{\rightarrow}{v_x} \} = \delta t \cdot \omega \{ -v_z + v_x \cdot \delta t \cdot \omega / 2, v_x + v_z \cdot \delta t \cdot \omega / 2 \} \end{aligned} \quad (10)$$

...

О вычислительных опытах с моделями морского волнения

Достоинством вычислительных экспериментов в гидромеханике видится возможность предварительного или интерактивного выбора различных математических моделей, что может востребоваться как для быстрой оценки штормовых явлений на море, так и для отработки поэлементных или комплексных процессов гидромеханики штормовой ходкости и безопасности плавания корабля. Разнообразие встроенных методов моделирования морского волнения безусловно полезно при отладке собственно программного комплекса, так же как и для прояснения тонких эффектов и особенностей гидромеханики корабля в опытах вычислительного эксперимента.

Следующие варианты вычислительных моделей штормового волнения задействованы в программном комплексе «Aurora» (+++):

1. Вариант штилевого моря без волнения необходим для экспериментов с удифферентованием корабля при наборе хода и активном торможении; при моделировании крена и качки корабля на ходу на циркуляции; для визуализации свободных или остаточных колебаний корпуса при мгновенном исключении из расчётов морского волнения; а также для наблюдений качки под действием внешних импульсных кренящих моментов.

2. Чисто математическое волновое поле полноценных трохoidalных волн (варианты 2,3,4) и подповерхностных скоростей течений на неравномерных регуляризованных расчётных узлах. Такая модель недеформируемого штормового моря позволяет детально отрабатывать динамику штормовой ходкости и качки корабля без усложненного влияния отражаемых от бортовой обшивки волн большой высоты.

3. Такое же математическое волновое поле на строго равномерных узлах с одинаковыми расчётными ячейками. В таком варианте сразу моделируется результирующее волновое поле без задействования лишних слоев с фиксированными длинами волн. В оптимизированном моделировании морского волнения используется единственный векторных массив, в котором компонента z

включает уровень моря, а по горизонтальным осям $\{x, y\}$ – осредненные скорости подповерхностных течений. Таким образом реализуется вариант моделирования с минимальным использованием компьютерных вычислительных ресурсов.

4. Вычислительный эксперимент с использованием волнового режима в полных потоках на равномерных сеточных узлах, с гарантированным соблюдением критериев устойчивости и аппроксимационной гладкости дифференциальных аппроксимаций. Таким образом оптимизируются и значительно снижаются запросы вычислительных ресурсов компьютера, и при этом определяющая часть гидродинамических процессов в эксперименте реализуется вполне корректно.

5. Полноформатный прямой вычислительный эксперимент с трохоидальным волнением на неравномерных регуляризованных узлах, с возможностью включения дисперсии для фазовых и групповых скоростей, с проявлением корабельного волнообразования, и полноценным отражением внешних штормовых волн от бортовой обшивки корабля.

6. Тот же вычислительный эксперимент с учётом подповерхностных скоростей течений, отчасти снижающих силовые воздействия штормовых волн на корпус корабля за счёт уменьшения давления воды при учёте вызванных течений вблизи бортовой обшивки корабля. В таком варианте максимально задействуются вычислительные ресурсы компьютера.

...

Собственно теория трохоидальных волн содержит наглядную интерпретацию вычислительных процессов с использованием движения частиц жидкости в подвижных Лагранжевых координатах, что естественным образом представляется на корпускулярном этапе прямого вычислительного эксперимента с использованием численных методов тензорной математики, метода крупных частиц жидкости. Дрейфовое течение в верхних слоях жидкости моделируется изменением кривизны траектории движения частиц в зависимости от мгновенного изменения уровня в волновом профиле. Таким образом, вычислительная модель изначально предусматривает рассмотрение нестационарной гидромеханики корабля в штормовом море. Вычислительные ресурсы современных компьютеров вполне достаточны для реализации прямых вычислительных экспериментов в реальном времени, в том числе на борту корабля в открытом море, что может быть востребовано при выборе оптимальных и эффективных режимов штормового плавания.

Использованные литературные источники

1. Справочник по теории корабля. Том 1. Гидромеханика. Сопротивление движению судов. Судовые движители. – 768 с. Том 2. Статика судов. Качка судов. – 440 с. / Под редакцией *Я. И. Войткунского*. – Л.: Судостроение, 1985.
2. *Кильчевский Н. А.* Элементы тензорного исчисления и его приложения в механике (*Физико-математическая библиотека инженера*). – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954, – 168 с.
3. *Храмушин В. Н.* Поисковые исследования штормовой мореходности корабля. История эволюционного становления корабельного дела, о единении морских инженерных наук и хорошей морской практики. Lambert Academic Publishing. ISBN-13: 978-613-8-23643-6, 2018. – 470 с.
shipdesign.ru/Khram/History-III.pdf
4. *Храмушин В. Н.* «Тензор» – Программа для построения числовых объектов и функций трехмерной тензорной математики при реализации вычислительных экспериментов в гидромеханике. Роспатент. Программа СПбГУ № 2013619727 от 2013-10-14.
5. *Храмушин В. Н.* Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике. – Владивосток: ДВО РАН 2005. – 212с.
shipdesign.ru/Khram/Tensor_Mathematics-2005.pdf
6. *Богданов А. В., Храмушин В. Н.* База данных: «Vessel» – Цифровые теоретические чертежи для проектного анализа гидростатических характеристик, остойчивости и ходкости корабля. Роспатент. База данных СПбГУ № 2015621368 от 2015.09.08.
shipdesign.ru/SoftWare/2015621368.html
7. *Храмушин В. Н.* «Hull» – Построение аналитической формы корпуса корабля, расчёты волнового сопротивления, кривых элементов теоретического чертежа и диаграмм остойчивости морских судов. Роспатент. Программа СахГУ № 2010615849 от 2010-09-08.
shipdesign.ru/SoftWare/2010615849.html

8. *Храмушин В. Н.* «Контекстная графика» (Window-Place) – Контекстно-зависимая среда построения трехмерной графики OpenGL с использованием виртуальных процедур C++ и многооконного интерфейса Windows со стекowym наложением графических и текстовых фрагментов. Роспатент. Программа СахГУ № 2010615850 от 2010-09-08.
shipdesign.ru/SoftWare/2010615850.html
9. *Дегтярев А. Б., Богданов А. В. Храмушин В. Н.* «Волна» – Интерактивный графический программный комплекс для построения и визуального анализа штормовой поверхности моря. Роспатент. СПбГУ № 2013619728.
shipdesign.ru/SoftWare/2013619728.html.
10. *Mr. J. H. Michell* on the Wave-Resistance of a Ship. (*Джон Генри Мичелл.* Волновое сопротивление корабля) *Philosophical Magazine*, 1898, vol.45, Ser.5, pp.106–123. shipdesign.ru/JHM-rus.html
11. *Sommerfeld Arnold.* Mechanik der deformierbaren medien. Leipzig.: Zweite, neuberbeitete Auflage. 1949. (*Арнольд Зоммерфельд.* Механика деформируемых сред. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 491 с.)
12. *Gerstner Franz Joseph:* 1802 “Theorie der Wellen,” Böhmsche Gesellschaft der Wissenschaften, *Abhandlungen*; 1804 “Theorie der wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile”. *Теория волн вместе с основанной на ней теорией волновых профилей* (Prague: Gottlieb Haase); sowie 1809 in *Annalen der Physik*, 32, 412–445.
13. *Войткунский Я. И., Фадеев Ю. И., Федяевский К. К.* Гидромеханика. Л. Судостроение, 1968. – 568 с.
14. *Людвиг Прандтль.* Гидроаэромеханика. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 520 с. (*Führer durch die Strömungslehre. Von Dr. Ludwig Prandtl.* 1944, предисловие автора: Геттинген–1942)

Архив исполняемых модулей программ с подборкой цифровых теоретических чертежей различных кораблей и судов, доступны по адресам в интернет: ShipDesign.ru/SoftWare/Ship.zip,
руководство к программам «Auroga» и «Hull»: ShipDesign.ru/SoftWare/Vessel-action.pdf,
математические модели и алгоритмы: Vessel-master.pdf,
мореходные эксперименты и проектирование корабля: Vessel-praxis.pdf .
исходные тексты программ и помощь в их освоении: [GitHub.com/Khram-V/Vessel](https://github.com/Khram-V/Vessel) и Khram@mail.ru .