1. Свободные и связанные переменные.

$\lambda x.x + y$

Переменная x является связанной, так как она входит в выражение функции (λx).
Переменная y является свободной, так как она не входит в выражение функции (λx), то есть определена вне функции.

Та же самая логика относится к выражению $\lambda y.x\ y$. Обрати внимание, что переменная x не входит в выражение функции (λy), то есть определена вне области видимости функции.

По сути своей свободная переменная - глобальная переменная, связанная - локальная.

Термы, все переменные которых связаны, называются комбинаторами. То есть в выражениях этих термов нет глобальных переменных, которые видны вне функции.

2. Нормальная форма.

Если в выражении нет подвыражений, которые можно редуцировать, то есть сократить по длине, то это выражение называется нормальной формой.

Аппликативная стратегия: в выражении (λx.xx)((λxy.x) 1 0) сначала берем подвыражение (λxy.x) 1 0. Это подвыражение по сути возвращает первый элемент x из пары (x y). В данном случае это 1. Получаем: (λx.xx)(1). Далее подставляем 1 вместо x, получаем:

(λx.xx)(1) → 11

В нормальной стратегии просто идем слева:

((λxy.x) 1 0)((λxy.x) 1 0) → (1)((λxy.x) 1 0)

Первое подвыражение (λxy.x) 1 0) означает то. что функция двух переменных возвращает первый элемент x из пары x y.
Второе подвыражение упрощается по тому же принципу.

3. Базовые программные конструкции.

TRUE = λxy.x
FALSE = λxy.y

Выражение TRUE эквивалентно функции, которая из пары x y возвращает первый аргумент.
Выражение FALSE эквивалентно функции, которая из пары x y возвращает первый аргумент.

Функция
IF = λc.λa.λb.X = λcab.X

Запись λcab.X означает, что в функцию трех аргументов c, a, b передается аргумент X.

Запишем выражение IF с аргументом c = TRUE:
IF true THEN a ELSE b = λxy.x a b
то есть функция λxy.x применяется к паре (a,b), возвращая a.

По той же логике работает выражение IF с аргументом c = FALSE:
IF false THEN a ELSE b = λxy.y a b = b

Если записывать в форме редукций, то:
IF TRUE → λcab.c a b
Вместо c подставляем λab.a:
λab.(λab.a)ab → λab.a

Примеры
c = FALSE = λxy.y
IF c 1 0 = (λcab.cab) (λxy.y) 1 0
Подставляем c = λxy.y, получаем:
(λab.(λxy.y)ab) 1 0
Первый вариант упрощения:
подставляем x=a, y=b в подвыражение λxy.y (получаем b), получаем (λab.b) 1 0 → 0
Второй вариант упрощения:
Подставляем a = 1, b = 0, получаем (λxy.y) 1 0 → 0

NOT = λcab.cba
По сути функция меняет местами значения a и b.

NOT TRUE = (λcab.cba) TRUE
Вместо c подставляем TRUE, получаем:
(λab.(λxy.x) ba)
Далее применяем (λxy.x) к значениям b a, получаем b:
(λab.b) = FALSE

Та же логика:
AND = λab.aba
OR = λab.aab

not p = if p then false else true
p and q = if p then q else false
p or q = if p then true else q

4. Пары, кортежи, списки.

Выражение
pair = λb.b p q или λxyf.fxy
создает пару (x,y).

Покажем это на примере.
pair 4 5 → (λxyf.fxy) 4 5
Подставляем x = 4, получаем:
(λyf.f 4 y) 5
Подставляем y = 5, получаем:
λf.f 4 5
Это и есть пара (4,5).

first (p, q) = (p, q) true = (λb.b p q) true = true p q = (λxy. x) p q = p

Пояснение:
first (p, q) = (p, q) true
Подставляем (p, q) = λb.b p q, получаем:
(λb.b p q) true
Подставляем b = true, получаем:
true p q
Подставляем true = λxy.x, получаем:
(λxy. x) p q
Подставляем x = p, y = q, получаем:
P

second (p, q) = (p, q) false = (λb.b p q) false = false p q = (λxy.y) p q = q

Пояснение:
second (p, q) = (p, q) false
Подставляем (p, q) = λb.b p q, получаем:
(λb.b p q) false
Подставляем f = false, получаем:
false p q
Подставляем false = λxy.y, получаем:
(λxy.y) p q
Подставляем x = p, y = q, получаем:
q

Применим функцию second = λp.p false к паре (4, 5):
second (λf.f 4 5) → (λp.p false) (λf.f 4 5)
Подставляем вместо p = λf.f 4 5:
(λf.f 4 5) false
Подставляем вместо f = false:
false 4 5
Подставляем false = λxy.y
(λxy.y) 4 5
Подставляем x = 4, y = 5, получаем:
5

Логика абсолютно идентична преобразованиям:
second (p, q) = (p, q) false = (λb.b p q) false = false p q = (λxy.y) p q = q

5. Числа в нумерации Черча.

0 = FALSE = λfx.x
1 = λfx.fx
2 = λfx.f (fx)
3 = λfx.f (f (fx))
...
n = λfx.f(...<n раз>...(fx)...) ≡ λfx. f^n x,
f^n – условная запись, означающая то, что f записывается n раз.

λn f x. n f (f x)

(λn f x. n f (f x))(λf x. f^n x) = λf x. (λf x. f^n x)f (f x) = λf x. (λx. f^n x)(f x) = λf x. f^n (f x) = λf x. f^{n+1} x = n + 1

Увеличение нумерала Черча на единицу выполняется функцией λnfx.n f (f x).
Применим эту функцию к числу n:
(λnfx.n f (f x)) (λfx.f^m x)
Вместо n в λnfx.n f (f x) слева подставляем n = λfx.f^m x, получаем:
λfx.(λfx.f^m x) f (f x)
Подставим f на место первого аргумента в выражение (λfx.f^m x) f (f x), получаем:
λfx.(λx.f^m x) (f x)
Упрощаем выражение:
λfx.f^m (f x)
Записываем условным образом то, что количество записей f увеличилось на 1:
λfx.f^{n+1} x
Если сравнить с записью n = λfx. f^n x, т видно, что количество записанных f увеличилось на 1, то есть получили:
n + 1

Проверка n на равенство нулю выполняется функцией: λn.n (λx. false) true

Проверим 0 на равенство нулю, то есть применим эту функцию к нулю (0 = FALSE = λfx.x):
(λn.n (λx.FALSE) TRUE) 0
Подставим n = 0, получим:
0 (λx.FALSE) TRUE
Подставляем 0 = FALSE = λfx.x, получаем:
λfx.x (λx.FALSE) TRUE
Подставим f = λx.FALSE. получаем:
(λx.λab.b) TRUE
TRUE

Проверим 1 на равенство нулю:
(λn.n (λx.FALSE) TRUE) 1
Подставим n = 0, получим:
1 (λx.FALSE) TRUE
Подставим 1 = λfx.fx, получаем:
λfx.fx (λx.FALSE) TRUE
Подставим f = λx.FALSE, получаем:
(λx.FALSE) TRUE
Подставим FALSE = λab.b, получаем:
(λx.λab.b) TRUE
Подставляем x = TRUE, получаем:
λab.b = FALSE

Сложение нумералов Черча:
m+n = λfx.m f (n f x)

$$\begin{aligned}
m+n &= \lambda f\ x.m\ f\ (n\ f\ x) = \\
&= \lambda f\ x.(\lambda f\ x.f^m\ x)\ f\ (n\ f\ x) = \\
&= \lambda f\ x.(\lambda x.f^m\ x)\ (n\ f\ x) = \\
&= \lambda f\ x.f^m\ (n\ f\ x) = \\
&= \lambda f\ x.f^m\ ((\lambda f\ x.f^n\ x)\ f\ x) = \\
&= \lambda f\ x.f^m\ ((\lambda x.f^n\ x)\ x) = \\
&= \lambda f\ x.f^m\ (f^n\ x) = \\
&= \lambda f\ x.f^{m+n}\ x
\end{aligned}$$

Произведение нумералов Черча:
m ∗ n = λf x. m (n f) x

$$\begin{aligned}
m*n &= \lambda f\ x.m\ (n\ f)\ x = \\
&= \lambda f\ x.(\lambda f\ x.f^m\ x)\ (n\ f)\ x = \\
&= \lambda f\ x.(\lambda x.(n\ f)^m\ x)\ x = \\
&= \lambda f\ x.(n\ f)^m\ x = \\
&= \lambda f\ x.((\lambda f\ x.f^n\ x)\ f)^m\ x = \\
&= \lambda f\ x.(\lambda x.f^n\ x)^m\ x = \\
&= \lambda f\ x.(f^n)^m\ x = \\
&= \lambda f\ x.f^{mn}\ x
\end{aligned}$$