

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ  
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

**С. А. Владимиров**

**ОПТИМИЗАЦИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

**Лабораторный практикум**

**СПб ГУТ)))**

**Санкт-Петербург  
2019**

УДК 519.86 (076)

ББК 22.18 я73

В 57

Рецензенты

доктор технических наук,  
профессор кафедры СС и ПД *О. С. Когновицкий*

*Рекомендован к печати редакционно-издательским советом СПбГУТ*

**Владимиров, С. А.**

В 57      Оптимизация и математические методы принятия решений : лабораторный практикум / С. А. Владимиров ; СПбГУТ. — СПб, 2019. — 93 с.

Учебное пособие призвано ознакомить учащихся с основами теории принятия решений, включая методы оптимизации и математические методы принятия решений. Представленный материал служит справочным и методическим пособием при выполнении курса лабораторных работ по дисциплинам «Теория принятия решений» и «Оптимизация и математические методы принятия решений».

Предназначено для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

**УДК 519.86 (076)**

**ББК 22.18 я73**

© Владимиров С. А., 2019

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2019

## *Содержание*

Лабораторная работа 1. Ознакомление с системой численных вычислений Octave .....	4
Лабораторная работа 2. Нахождение целевой функции и оптимального решения симплекс-методом с использованием пакета Octave. Решение двойственной задачи .....	15
Лабораторная работа 3. Принятие решения по оптимизации размещения узла доступа на сети связи района .....	24
Лабораторная работа 4. Оптимизация работ методом сетевого планирования и управления .....	30
Лабораторная работа 5. Решение задач оптимизации методом динамического программирования .....	38
Лабораторная работа 6. Решение многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации .....	45
Лабораторная работа 7. Оценка эффективности моделей аппроксимации стохастических данных .....	59
Приложение. Образец титульного листа .....	92

# Лабораторная работа 1

## *Ознакомление с системой численных вычислений Octave*

### 1.1. Цели работы

Ознакомиться с общими принципами работы в системе компьютерной алгебры Octave, приобрести начальные навыки программирования во встроенном интерпретаторе и составить программу выполнения задания с получением результатов своего варианта.

### 1.2. Рекомендуемая литература

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.

2. Documentation // Octave-Forge.

URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>

### 1.3. Теоретическая справка

Раздел написан для ОС Debian Linux, использующейся в лабораториях кафедры, с учётом возможного интерфейса пользователя.

#### *1.3.1. Запуск системы Octave в окне терминала*

Программа Octave запускается в терминальном окне. Для вызова окна терминала используется пункт главного меню «Терминал».

Команда для вызова Octave<sup>1</sup>

---

```
user@host: [~]$ octave -cli -q
```

---

Флаг -q, применяемый после имени команды, указывает программе Octave не выводить приветствие и сразу переходить в командный режим.

В этом режиме пользователь должен последовательно вводить команды с клавиатуры, отправляя их на выполнение нажатием клавиши «Enter».

При работе в терминальном режиме пользователь может записать программу-скрипт на языке программирования Octave и передать файл с ней в качестве параметра при запуске программы. В этом случае Octave выполнит все команды из скрипта и завершит работу.

---

```
user@host: [~]$ octave -cli -q program.m
```

---

Для Octave, как и для системы Matlab, скрипт должен иметь расширение \*.m.

---

<sup>1</sup>Фрагмент «user@host: [~]\$» является приглашением командной строки Linux. Его не нужно вводить.

### 1.3.2. Запуск системы Octave в графическом режиме

Для запуска системы Octave в графическом режиме необходимо использовать соответствующий пункт главного меню.

Возможен вариант запуска программы через терминал командой

---

```
user@host:[~]$ octave &
```

---

Окно терминала после этого закрывать нельзя.

В системе Linux рабочим каталогом графической версии Octave по умолчанию является домашний каталог пользователя (на лабораторных компьютерах это каталог /home/student). Сменить текущий рабочий каталог можно в «Диспетчере файлов» (обычно левый верхний угол окна программы).

Основная рабочая область окна Octave имеет три вкладки. Первая вкладка «Командное окно» предназначена для ввода команд и вывода результатов их выполнения. Также сюда выводится результат выполнения скриптов, написанных/открытых в «Редакторе».

Вторая вкладка «Редактор» предназначена для работы со скриптами. Написанный/открытый в редакторе скрипт должен располагаться в рабочем каталоге Octave (см. «Диспетчер файлов»). Для запуска скрипта на выполнение используется кнопка меню редактора «Сохранить файл и запустить» (желтая стрелка в шестеренке).

Третья вкладка предназначена для документации. На рабочих компьютерах лаборатории эта документация может отсутствовать.

### 1.3.3. Функции Octave

Функции Octave имеют вид<sup>2</sup>

---

```
> function(par1, par2, ...);
```

---

Если функция завершается символом «;», то результат работы функции не будет выводиться на экран. В противном случае результат будет выведен.

Функции можно передавать как параметры

---

```
> func1(func2(par1))
```

---

В этом случае результат вычисления функции func2(par1) передаётся в функцию func1() в качестве параметра. Поскольку точки-с-запятой в конце нет, результат вычислений будет выведен на экран.

Справку по функции Octave можно получить, введя команду

---

```
> help function-name
```

---

---

<sup>2</sup>Фрагмент «>» — это приглашение ко вводу командной строки Octave. Его не нужно вводить.

### 1.3.4. Ввод чисел, задание значений переменных, указание формата числа

Ввод числа выполняется непосредственно в командном окне Octave обычным способом с применением десятичной точки разделения дробной части числа и позволяет выполнять над ними допустимые в системе операции.

Например, обычные арифметические операции в Octave выполняются с помощью следующих операторов:

- + сложение;
- - вычитание;
- \* умножение;
- / деление слева направо;
- \ деление справа налево;
- ^ возведение в степень.

Пример ввода числа  $1234509876_{10}$  и присвоения его в качестве значения переменной «a»:

---

```
> a=1234509876
```

---

В Octave предусмотрены следующие форматы чисел:

- Short — краткая запись, применяется по умолчанию,
- Long — длинная запись.

Для операций вывода данных в файл и их отображения в графических окнах необходимо применять встроенные в эти команды и функции приемы форматирования.

### 1.3.5. Ввод матриц и векторов

Ввод матриц и векторов рассмотрим на примере.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 12 & 6 \\ 7 & -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

вводится как

---

```
> A=[1 3 5 -3 ; 3 5 12 6 ; 7 -4 -8 2]
```

---

A =

1	3	5	-3
3	5	12	6
7	-4	-8	2

---

Вектор

$$Q = [2 \ 4 \ 5 \ 3 \ 2]$$

записывается как вектор-строка чисел

---

```
> Q=[2 4 5 3 2]
Q =
     2     4     5     3     2
```

---

### ***1.3.6. Операции с матрицами и векторами***

Операции с матрицами производятся аналогично операциям с числами. Для транспонирования матриц используется унарная операция «'».

---

```
> A'
ans =
     1     3     7
     3     5    -4
     5    12    -8
    -3     6     2
```

---

Для вычисления обратной матрицы используется операция возведения в степень  $-1$ . Обратную матрицу можно вычислить только для квадратной матрицы.

---

```
> A^(-1)
```

---

### ***1.3.7. Служебные функции очистки***

При написании скриптов Octave в ряде случаев удобно использовать функции очистки. К таким функциям относятся:

- `clc`; — очистка командного окна;
- `clear all`; — очистка области переменных и имен пользовательских функций;
- `close all`; — закрытие ранее открытых окон графика.

### ***1.3.8. Построение двумерного графика функции***

Для построения двумерного графика функции  $f(x)$  используется функция

---

```
plot(x,y)
```

---

где  $x$  — массив координат по оси абсцисс, а  $y$  — массив значений функции (координаты по оси ординат).

При необходимости построения нескольких графиков на одной координатной сетке в функцию `plot` можно передать сразу несколько функций:

---

```
plot(x1,y1,x2,y2, ...)
```

---

Также в функцию `plot` можно передавать параметры, определяющие вид кривой графика функции. Например, для отрисовки первого графика

красной линией, а второго — синими точками, необходимо использовать функцию

---

```
plot(x1, y1, "r", x2, y2, "b.", ...)
```

---

### ***1.3.9. Способы задания массивов данных***

Основной способ задания массива данных:

---

```
x=b:s:e
```

---

где  $b$  и  $e$  — начальное и конечное значения, а  $s$  — шаг изменения. Например, для того чтобы задать массив значений  $x$  от 12 до 23 с шагом 0,25, необходимо использовать функцию

---

```
x=12:0.25:23
```

---

Также существует функция `linspace`, которая создает вектор равномерных интервалов (иногда также называемый вектором «линейно распределенных значений»).

Общий вид функции:

---

```
linspace(b, e, c)
```

---

где  $b$  и  $e$  — начальное и конечное значения, а  $c$  — количество точек между  $b$  и  $e$ . Например, для того чтобы задать массив значений  $x$  из 200 точек от 0 до  $3\pi$ , необходимо использовать функцию

---

```
x=linspace(0, 3*pi, 200)
```

---

### ***1.3.10. Подписи осей***

Для создания подписей осей координат используются функции

---

```
xlabel("x");  
ylabel("y");  
zlabel("z");
```

---

Эти функции необходимо размещать после функции `plot`.

### ***1.3.11. Название графика***

Для вывода названия графика используется функция

---

```
title("Name of the plot");
```

---

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.



### ***1.3.12. Легенда графика***

Для вывода легенды используется функция

---

```
legend("Legend 1", "Legend 2", ..., m);
```

---

Параметр *m* определяет месторасположение легенды в графическом окне: 1 — в правом верхнем углу графика (значение по умолчанию); 2 — в левом верхнем углу графика; 3 — в левом нижнем углу графика; 4 — в правом нижнем углу графика.

Эту функцию необходимо размещать после функции plot.

### ***1.3.13. Размещение надписи (метки)***

Для размещения на графике произвольной надписи в заданных координатах используется функция

---

```
text(x, y, "Text of the label");
```

---

где *x* и *y* — координаты по соответствующим осям, левее которых будет выведена надпись.

Эту функцию необходимо размещать после функции plot.

### ***1.3.14. Размещение нескольких графиков в одном окне***

Для размещения нескольких графиков в одном окне перед каждой функцией plot используется функция

---

```
subplot(Number of rows, Num of columns, Position)
```

---

где «Number of rows» и «Num of columns» указывают число строк и столбцов, на которые делится окно графика, а «Position» — расположение текущего графика.

Например, для размещения в окне шести графиков — два по горизонтали, три по вертикали — используется функция

---

```
subplot(3, 2, Position)
```

---

«Position» может принимать значения от 1 до 6. Отсчет идет с левого верхнего графика обычным способом — слева-направо, сверху-вниз.

### ***1.3.15. Ограничение графика по осям***

Для ограничения графика по оси абсцисс используется функция

---

```
xlim([X1, X2]);
```

---

где *X1* и *X2* — нижняя и верхняя границы диапазона.

Для ограничения графика по оси ординат используется функция

---

```
ylim([Y1, Y2]);
```

---

где  $Y1$  и  $Y2$  — нижняя и верхняя границы диапазона.

Эти функции необходимо размещать после функции `plot`.

### ***1.3.16. Вывод сетки***

Для вывода сетки с заданными диапазоном и шагом используется функция

---

```
set(gca, 'XTick', X1:Xs:X2)  
set(gca, 'YTick', Y1:Ys:Y2)  
grid
```

---

где  $X1$  и  $X2$  — нижняя и верхняя границы диапазона по оси абсцисс, а  $Xs$  — шаг сетки. Для оси ординат аналогично.

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.

## **1.4. Порядок выполнения задания**

Задание выполняется каждым учащимся **индивидуально**.

Отчёт сдается преподавателю **в печатном виде**.

### ***1.4.1. Ход работы***

Вариант задания выбирается в соответствии с номером учащегося в журнале группы. Исходные данные варианта формируются в процессе исполнения программного скрипта, выложенного на сайте <http://opds.spbsut.ru/> и приведенного в тексте ниже.

---

```
Lab_rabota_1.m
```

---

---

```
% Пример Лабораторная работа  
clc;  
close all;  
clear all;  
Aish=[3 4 3 8 9;5 2 1 4 3;4 9 4 6 7;3 4 11 5 4;8 9 8 7 1];  
Bish=[61;43;79;87;58];  
disp('Введите номер варианта [1 . . . 30] ');  
n=input('n=');  
if n<=0;  
n=1;  
elseif n>30;  
n=30;  
end  
disp('Исходные данные варианта');disp(n);  
A=Aish.+(2*n-1)
```

---

```

B=Bish.+(9*n-4)
% Векторные и матричные вычисления
disp('Транспонированные матрицы A и B');
Bt=B'
At=A'
disp('Обратная матрица A с проверкой');
Aobr=inv(A)
provA=A*Aobr
disp('Проверка матрицы A на ортогональность');
Eort=At-Aobr
disp('Матрица нормированных коэфф. CNорм=(Bt)');
C=(Bt.-min(Bt))/(max(Bt)-min(Bt))
disp('Результат умнож. матриц FcbC=*B');
Fcb=C*B
disp('Результат умнож. матриц Fbc=B*C');
Fbc=B*C
disp('Определитель матрицы Fbc');
OFbc=det(Fbc)
disp('Находим минор M[1,2] матрицы Fbc');
MFbc12=[Fbc(2:5,1),Fbc(2:5,3:5)]
M12_Fbc=det(MFbc12)
disp('Решаем СЛАУ Ax=B методом Гаусса');
AGs=rref([A B])
r=size(AGs)
disp('Вектор значений переменных [X] СЛАУ Ax=b');
XGs=AGs(:,r(2))
disp('Проверяем решение СЛАУ Ax-B=0');
EpsGs=A*XGs-B
disp('Решаем СЛАУ Ax=B методом обратной матрицы');
Xom=inv(A)*B
disp('Проверяем решение СЛАУ Ax-B=0');
Epsom=A*Xom-B
% Запись результатов в файл
f_stud_N19=fopen('Lab_rabota_1_stud_N19.txt','wt');
fprintf(f_stud_N19,"Исходные данные варианта \t%u\n\n",n);
fprintf(f_stud_N19,'Матрица A \n');
dlmwrite(f_stud_N19,A,'\t'); fprintf(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Матрица B \n');
dlmwrite(f_stud_N19,B,'\t'); fprintf(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Транспонированная матрица A \n');
dlmwrite(f_stud_N19,At,'\t'); fprintf(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Транспонированная матрица B \n');
dlmwrite(f_stud_N19,Bt,'\t'); fprintf(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Обратная матрица A \n');
dlmwrite(f_stud_N19,Aobr,'\t',"precision","%3.5e"); fprintf(
    f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Проверка обратной матрицы A \n');
dlmwrite(f_stud_N19,provA,'\t',"precision","%3.3e"); fprintf(
    f_stud_N19,'\n');

```

```

fprintf(f_stud_N19,'Проверка матрицы A на ортогональность =[0] \n')
;
dlmwrite(f_stud_N19,Eort,'\t\t','precision','%3.3f'); fprintf
(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,'Матрица нормированных коэфф. CНорм=(Bt) \n');
dlmwrite(f_stud_N19,C,'\t','precision','%3.3g'); fprintf(
f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,"Результат умнож. матриц FcbC=*B= \t%f\n\n",
Fcb);
fprintf(f_stud_N19,'Продолжаем вывод результатов модифицируя пример .
. \n');
fclose(f_stud_N19);
% Построение графика
% Задаем область значений аргумента
AAx=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
23 24 25];
% Вычисляем значение функции
muAAx=(AAx.-1)./(AAx*(n+39)/(n+31));
AAx1=[0 0.99]; % Добавляем недостающее нач. знач. арг.
muAAx1=[0 0]; % Добавляем недостающее нач. знач. функ.
% рисуем и сохраняем в файл pdf
hf = figure ();
hold on;
plot(AAx,muAAx,'b','linewidth',4,AAx1,muAAx1,'b','linewidth'
,4);
set(gcf,'position',[100 100 600 300]); % Положение нижн. лев.
угла и разм окна в пикселях
set(gca,'fontname','Liberation Serif'); % Тип шрифта знач.
графика
set(gca,'fontsize',20); % Размер шрифта знач. графика
set(gca,'xtick',[0 5 10 15 20 25],'xlim',[0 25],'linewidth'
,1.8); % позиции сетки на X
set(gca,'ytick',[0 0.25 0.5 0.75 1],'ylim',[0 1]); % позиции
сетки на Y
% вкл. сетку и подписываем оси
grid on; xlabel("AA",'fontsize',20); ylabel("\mu(AA)",'
fontsize',20);
% Записываем график в файл
print (hf, "Graf_LabRab_1.pdf", "-dpdf","-S600,300"); % сохр.
в PDF
print (hf, "fig_LabRab_1.jpg", "-djpg","-S550,304"); % сохр.
в jpg
% Нахождение значения целевой функции графическим способом
k=round(((32-n)/(41-n))*n)
w=round((n-k+6)/(n+1))
t=-4*pi:0.1:3*pi;
V1=k*cos(w*t)+(n/(n+3))*cos(3*w*t);
V2=k/2+w*t-1;
hf = figure ();
hold on;

```

```

plot(t,V1,'b','linewidth',4,t,V2,'g','linewidth',4);
set(gcf,'position',[200 200 600 300]);
set(gca,'fontsize',18);
grid on;
print (hf, "Resh_LabRab_1.pdf", "-dpdf","-S600,300"); % сохр.
    в PDF
% Дописываем в файл значения k и w
f_stud_N19=fopen('Lab_rabota_1_stud_N19.txt','at');
fprintf(f_stud_N19,'\n');
fprintf(f_stud_N19,"k= \t%f\n\n",k);
fprintf(f_stud_N19,"w= \t%f\n\n",w);
fclose(f_stud_N19);

```

---

Работа выполняется путем модификации скрипта-примера под исходные данные и задание своего варианта.

В примере скрипта формируются исходные задания вариантов, открывается текстовый файл «Lab\_rabota\_1\_stud\_N19.txt», в него выполняется запись получаемых в примере результатов для включения их в печатный отчет. В примере открываются и формируются файлы «Graf\_LabRab\_1.pdf», «fig\_LabRab\_1.jpg», «Resh\_LabRab\_1.pdf» для сохранения графиков и графических решений.

**Не рекомендуется** производить исправления, влияющие на исходные данные варианта задания, а именно: **Aish, Bish, A, B, n, k, w, V1, V2**. Значение параметра переменной **t** возможно изменять в рамках получаемого диапазона величин для отображения доказательства и наглядности графического решения. **В случае повреждения исходных данных варианта выполнить их восстановление по приведенному в методичке тексту скрипта самостоятельно.**

### 1.4.2. Задание и исходные данные

Для заданных скриптом исходных данных (матрицы *A* и *B*) осуществить следующие операции и включить результаты в представляемый отчет.

1. Получить исходные матрицы *A* и *B*.
2. Транспонировать матрицы *A* и *B*.
3. Вычислить обратную матрицу *A* и выполнить проверку полученного результата.
4. Выполнить проверку матрицы *A* на ортогональность.
5. Получить матрицу отнормированных коэффициентов  $C = [f_{norm}(Bt)]$ .
6. Выполнить умножение матриц  $[C * B]$  и  $[B * C]$ .
7. Найти определители матриц  $[B * C]$  и *A*.
8. Найти все главные (угловые или диагональные) миноры матрицы *A* и привести в отчете с исходной матрицей для нахождения алгебраического дополнения ( $MA_{i,j} = (-1)^{(i+j)} * \det[f_{alg dop}[A_{i,j}^{(n-1)}]$ ).

9. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = B$  методом Гаусса и проверить найденный результат.

10. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = B$  методом обратной матрицы и проверить решение.

11. Представить графически заданную на интервале аналитическую функцию принадлежности.

12. Найти графическим способом решение целевой функции (для нечетных вариантов — MIN, для четных вариантов — MAX).

$$F(t) = \min(\max) \begin{cases} V_1 = k * \cos(wt) + (\frac{n}{(n+3)}) * \cos(3wt), \\ V_2 = \frac{k}{2} + wt - 1, \end{cases} ; \quad -4\pi \leq t \leq 3\pi.$$

### **1.4.3. Порядок защиты лабораторной работы**

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

### **1.4.4. Контрольные вопросы**

1. Поясните транспонирование матриц.
2. Что такое обратная матрица?
3. Как формируется алгебраическое дополнение матрицы?
4. Объясните полученное графическое решение.
5. Как получить минор(ы) матрицы?

## Лабораторная работа 2

### *Нахождение целевой функции и оптимального решения симплекс-методом с использованием пакета Octave.*

### *Решение двойственной задачи*

#### 2.1. Цели работы

Научиться применять симплекс метод для решения задач нахождения оптимального плана. Сформировать целевую функцию, поставить прямую и двойственную задачи. Найти решение прямой и двойственной задачи с использованием современных методов программирования пакета Octave.

#### 2.2. Рекомендуемая литература

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова // НОУ ИНТУИТ. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info>
4. Лекции по дисциплине.

#### 2.3. Теоретическая справка

##### *2.3.1. Задача о планировании производства*

Для выпуска двух типов продукции используется три вида сырья. Производственные коэффициенты (количество сырья, требующееся для производства единицы продукции), объёмы запасов и рыночные цены на продукцию приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

*Исходные данные задачи планирования производства*

Продукция	Сырьё			Цена
<i>A</i>	7	6	1	2
<i>B</i>	3	9	5	1
Объём запасов	60	80	35	

Требуется, предполагая отсутствие насыщенности рынка этими товарами, составить такой план производства  $x = (x_1, x_2)$ , при котором выручка от продаж будет максимальна.

Определить значимость решений задачи в предположении, что  $x$  может иметь любые или только целочисленные значения.

## Формальная постановка задачи

$$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 60, \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 80, \\ x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ x_1, x_2 > 0. \end{cases}$$

### 2.3.2. Двойственная задача в линейном программировании

Таблица 2.2

Двойственная задача в линейном программировании

Первая задача	Определения	Вторая задача
Прямая или исходная	Задача	Двойственная
Максимизировать $W(x_j)$	Целевая функция	Минимизировать $P(y_i)$
$W_{\max} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	$\Longleftrightarrow$	$P_{\min} = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
Все $x_j \geq 0$	Ограничения	Все $y_i \geq 0$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m})$	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq c_j \ (j = \overline{1, n})$
$i$ -строки, $j$ -столбцы	$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Longleftrightarrow [a_{ji}]_{n \times m} = A^T$	$j$ -строки, $i$ -столбцы
Пример		
$x_1 + 3x_2 \leq 90$	Ограничения	$y_1 + 10y_2 \geq 1$
$10x_1 + 7x_2 \leq 440$		$3y_1 + 7y_2 \geq 1$
$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$		$y_i \geq 0, (i = \overline{1, m})$
$\max W = x_1 + x_2$	Целевая функция	$\min P = 90y_1 + 440y_2$

1. Если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации.

2. Коэффициенты целевой функции  $c_1, c_2, \dots, c_n$  прямой задачи становятся свободными членами системы ограничений двойственной задачи (или значениями функции ограничения).

3. Свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

4. Матрицу ограничений  $(a_{ji})_{n \times m}$  двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.

5. Знаки неравенств в ограничениях изменяются на обратные.

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу пе-



ременных прямой задачи. В случае когда исходная задача будет общего вида, добавляется следующий пункт.

7. Каждому  $i$ -му ограничению–неравенству исходной задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности ( $y_i \geq 0$ ), а равенству — переменная  $y_i$  без ограничений на знак (произвольная).

Наоборот, неотрицательной переменной ( $x_k \geq 0$ ) соответствует в двойственной задаче  $k$ -е ограничение–неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Рассмотренные связи между прямой и двойственной задачами лучше видны при их экономической интерпретации.

**Прямая задача.** Сколько и какой продукции  $x_j (j = \overline{1, n})$  необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях  $c_j (j = \overline{1, n})$  единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов  $b_i (i = \overline{1, m})$  максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

**Двойственная задача.** Какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов  $y_i (i = \overline{1, m})$ , чтобы при заданном количестве ресурсов  $b_i (i = \overline{1, m})$  и величине стоимости единицы продукции  $c_j (j = \overline{1, n})$  минимизировать общую стоимость продажи ресурсов (сырья), но получить при этом не меньшую прибыль, как если бы из проданных ресурсов была изготовлена продукция?

Переменные  $y_i (i = \overline{1, m})$  называются двойственными оценками ресурсных ограничений или учетными (теневыми) ценами.

### 2.3.3. Задача линейного программирования с ограничениями-равенствами

#### Пример

1. Требуется решить задачу

$$f \equiv c^T x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad 0 \leq x \leq u,$$

где

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 60 \\ 80 \\ 35 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

2. Сформулировать и решить двойственную задачу.

### 2.3.4. Функция *glpk*

Для решения задач линейного программирования (в том числе, целочисленного и смешанного линейного программирования) в Octave служит функция *glpk*. При вызове с тремя параметрами *glpk*(*c*, *A*, *b*) решает задачу

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \min \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Формат функции *glpk* (пишется в одну строку):

---

```
[xopt, fopt, errnum, extra] = glpk(c, A, b, lb, ub, stype, vartype, sense, param)
```

---

Передача функции дополнительных параметров позволяет решать задачи с нестрогими ограничениями, устанавливать тип искомого экстремума (минимум или максимум).

#### **Полный перечень параметров функции**

- *c* — вектор-столбец коэффициентов целевой функции.
- *A* — матрица с коэффициентами функций ограничения.
- *b* — вектор-столбец со значениями свободных членов.
- *lb* — вектор-столбец с нижними границами для каждой переменной (по умолчанию, 0).
- *ub* — вектор-столбец с верхними границами для каждой переменной (если нет, то переменные считаются не ограниченными сверху). Находятся для каждой переменной как *max*-значение переменной из решений всех функций ограничения (уравнений или неравенств) при условии, что все остальные переменные принимают значение нижней границы (по умолчанию, 0).
- *stype* — массив символов с типами ограничений. Элементы массива интерпретируются следующим образом:
  - F — свободное ограничение (ограничение будет проигнорировано при решении задачи);
  - U — ограничение сверху (если этот символ стоит в позиции *i* параметра *stype*, *A*(*i*, :) обозначает *i* строку матрицы с коэффициентами ограничений *A*, а *b*(*i*) обозначает *i* элемент вектора *b*, то для допустимого решения должно выполняться условие  $A(i, :) \cdot x \leq b(i)$ );
  - S — равенство ( $A(i, :) \cdot x = b(i)$ );
  - L — ограничение снизу ( $A(i, :) \cdot x \geq b(i)$ );
  - D — двухстороннее ограничение:  $A(i, :) \cdot x \geq -b(i)$  и  $A(i, :) \cdot x \leq b(i)$ .
- *vartype* — строка с типами переменных:
  - C — непрерывная переменная;

- `I` — дискретная переменная.
- `sense` — если параметр `sense` принимает значение 1 (по умолчанию), то решается задача минимизации, а если параметр `sense` принимает значение  $-1$ , то решается задача максимизации.
- `param` — позволяет в определенных рамках настроить то, как именно должна быть решена задача: какой использовать метод, применять ли масштабирование переменных, сколько итераций симплекс-метода проделать и т. п. Подробную информацию о возможных настройках можно получить, введя `help glpk` в командной строке Octave.

### ***Результаты, возвращаемые функцией***

- `hopt` — значения переменных, соответствующие оптимальному значению целевой функции (для направления оптимизации согласно параметру `sense`).
- `fopt` — оптимальное значение целевой функции.
- `errnum` — код ошибки. Некоторые, наиболее часто встречающиеся коды ошибок:
  - 0 — нет ошибки, найдено решение (дополнительные характеристики найденного решения содержатся в поле `extra.status`);
  - 2 — матрица коэффициентов ограничений вырождена;
  - 10 — (прямая) задача не имеет допустимых решений;
  - 11 — двойственная задача не имеет допустимых решений (следовательно, в прямой задаче функция неограниченно возрастает или убывает в зависимости от направления оптимизации);
  - 15 — ни прямая, ни двойственная задачи не имеют допустимых решений.
- `extra` — структура данных, позволяющая получить дополнительную информацию о решении. Структура содержит следующие поля:
  - `lambda` — теневые цены (значения двойственных переменных).
  - `redcosts` — приведенные цены.
  - `time` — время (в секундах), затраченное на решение задачи.
  - `status` — статус решения задачи (содержащегося в `hopt` и `fopt`):
    - \* 1 — решение не определено;
    - \* 2 — допустимое решение;
    - \* 3 — недопустимое решение;
    - \* 4 — задача не имеет допустимых решений;
    - \* 5 — оптимальное решение;
    - \* 6 — задача не имеет конечного решения.

### 2.3.5. Пример решения задачи в системе Octave

На листинге 2.1 приведен пример решения задачи о планировании производства в системе Octave с использованием функции `glpk`.

**Важно:** Напрямую копировать текст программы из PDF документа в редактор Octave не получится. Скопированный текст программы потребует правок. В частности, необходимо будет исправить символы апострофа и кавычек, а также, при необходимости, удалить лишние пробелы.

Листинг 2.1

#### Задача о планировании производства

```
1 %          Задача о планировании производства
2 % Для выпуска двух типов продукции используется три вида сырья.
3 % Производственные коэффициенты (количество сырья, требующееся для производства
4 % единицы продукции), объёмы запасов
5 % и рыночные цены на продукции приведены в таблице:
6 %   Продукция          Сырьё   Цена
7 %   A              7   6   1   2
8 %   B              3   9   5   1
9 % Объем запасов   60   80   35
10 %
11 % Требуется, предполагая ненасыщенность рынка, составить такой план производства
12 %  $x = (x_1, x_2)$ , при котором выручка от продаж будет максимальна.
13 % Как изменится решение в предположении, что  $x$  может иметь только
14 % целочисленные значения?
15 % Формальная постановка задачи
16 %   цель    $2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ 
17 %   /  $7x_1 + 3x_2 \leq 60$ 
18 %   |  $6x_1 + 9x_2 \leq 80$ 
19 %   |  $x_1 + 5x_2 \leq 35$ 
20 %   \  $x_1, x_2 \geq 0$ 
21 % Задача ЛП с ограничениями равенствами
22 % Двойственная задача  $z = [b^T, h^T]y \rightarrow \min, [A^T, E]y \geq c, y_{4,5,6,7,8} \geq 0$ 
23 % Исходная задача  $F = c^T x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq u$ 
24 c=[ 2; 1; 0; 0; 0];
25 u=[35, 20, 60, 80, 35];
26 b=[60; 80; 35];
27 A=[ 7, 3, 1, 0, 0;
28     6, 9, 0, 1, 0;
29     1, 5, 0, 0, 1];
30 printf("Решение задачи и значение целевой функции\n")
31 [Xopt,Fval] = glpk(c,A,b,[],u,'SSS','CCCCC',-1)
32 printf("Решение задачи целочисленного программирования\n")
33 [Xopt,Fval] = glpk(c,[A;eye(5)],[b;u'],[],[],'SSSUUUU','IIIII',-1)
34 printf("Решение двойственной задачи\n")
35 [Yopt,Zval,extra,redcosts] = glpk([b;u'], [A',eye(5)], c, [-Inf(1,3),
    zeros(1,5)], [], 'LLLLL', 'CCCCCCCC')
36 printf("Решение целочисленной двойственной задачи\n")
37 [Yopt,Zval,extra,redcosts] = glpk([b;u'], [A',eye(5)], c, [-Inf(1,3),
    zeros(1,5)], [], 'LLLLL', 'IIICCCCC')
```

Результат выполнения программы (лист. 2.1) в системе Octave приведен на листинге 2.2.

Листинг 2.2

*Решение задачи о планировании производства*

---

```
1 Решение задачи и значение целевой функции
2 Xopt =
3
4     6.66667
5     4.44444
6     0.00000
7     0.00000
8     6.11111
9
10 Fopt = 17.778
11 Решение задачи целочисленного программирования
12 Xopt =
13
14     8
15     1
16     1
17    23
18    22
19
20 Fopt = 17
21 Решение двойственной задачи
22 Yopt =
23
24     0.26667
25     0.02222
26     0.00000
27     0.00000
28     0.00000
29     0.00000
30     0.00000
31     0.00000
32
33 Zopt = 17.778
```

---

## 2.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру в журнале группы или номеру бригады.

### **Задача для нечетных вариантов (1, 3, ...)**

Для изготовления двух видов продукции  $P_1$  и  $P_2$  используют три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ . Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Исходные данные задачи для нечетных вариантов (1, 3, ...)

Вид сырья	Запас сырья	Единиц сырья на ед. прод.	
		$P_1$	$P_2$
$S_1$	20	2	5
$S_2$	40	8	5
$S_3$	30	5	6
Прибыль от ед. прод.		50	40

Построить математическую модель рассматриваемой экономической задачи, руководствуясь целью получить максимальную прибыль при реализации получаемой продукции. Решить прямую и двойственную задачи.

### Задача для четных вариантов (2, 4, ...)

Предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкономленного сырья в трех видах  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Из этого сырья может быть изготовлено 2 вида изделий  $Q_1$  и  $Q_2$ . Количество единиц сырья, идущего на изготовление единицы вида изделия, и доход от реализации одной единицы каждого вида изделия, приведены в табл. 2.4.

Требуется сформулировать математически задачу линейного программирования, руководствуясь целью получить максимальный доход при реализации дополнительной продукции предприятия. Решить прямую и двойственную задачи.

Таблица 2.4

Исходные данные задачи для четных вариантов (2, 4, ...)

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на изделие	
		$Q_1$	$Q_2$
$S_1$	21	3	1
$S_2$	30	2	2
$S_3$	16	0	3
Прибыль от ед. издел.		3	2

## 2.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

### 2.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).

2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Выполнить постановку прямой и двойственной задачи (целевые функции) и записать условия ограничения переменных неравенствами.
4. Привести задачу к уравнениям и решить ее с использованием системы Octave, аналогично приведенному в пункте 2.3.5 примеру.
5. При решении использовать систему вычислений Octave.
6. Оформить отчет по лабораторной работе.
7. Защитить лабораторную работу.

### ***2.5.2. Содержание отчета***

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
- 2) цель работы;
- 3) формулировку задания;
- 4) аналитическое решение задачи своего варианта;
- 5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
- 6) при наличии — программный код решения задачи;
- 7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
- 8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
- 9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

### ***2.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

### ***2.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Сформулируйте типовую задачу линейного программирования.
2. Напишите в различных формах типовую математическую модель задачи линейного программирования.
3. Дайте определение плана, невырожденного и вырожденного опорного плана, оптимального плана.
4. Как экономически интерпретировать двойственную задачу?
5. В чем состоит двойственность в линейном программировании?

## Лабораторная работа 3

### *Принятие решения по оптимизации размещения узла доступа на сети связи района*

#### 3.1. Цели работы

Изучить варианты постановки задач размещения объектов связи, освоить применение критериев оптимальности, решить задачу размещения узла радиодоступа с точки зрения оптимизации расстояний до самых удаленных населенных пунктов, решить задачу размещения узла проводного (кабельного) доступа с точки зрения оптимизации строительства линейных сооружений.

#### 3.2. Рекомендуемая литература

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова // НОУ ИНТУИТ. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info>
4. Кристофидес, Н. Теория графов / Н. Кристофидес. М. : Мир, 1978.
5. Лекции по дисциплине.

#### 3.3. Теоретическая справка

##### *3.3.1. Задача размещения узла доступа на сети связи района*

При планировании сети связи любого уровня для компаний-операторов часто возникает задача правильного размещения узла доступа, в котором находится оборудование для предоставления услуг связи. Задача представляется в виде модели неориентированного графа с привязкой к географическому положению населенных пунктов и выражается в том, что необходимо разместить узел доступа (объект связи) таким образом, чтобы расстояние до абонентов сети было оптимально. Это важно как с точки зрения минимизации затрат при строительстве линейных сооружений, так и при планировании радиосетей. Всегда рассматривают две ситуации:

1. Для **радиосетей** требуется минимальное расстояние до наиболее удаленных объектов обслуживания (**минимаксная задача**). В этом случае критерий оптимальности заключается в минимизации расстояния от узла радиодоступа до «наихудшего варианта» графа (самого удаленного населенного пункта), а сама задача **сводится к определению вершины — центра графа**. К однотипным задачам относятся задачи размещения пунктов скорой



медицинской помощи, пожарной охраны, полицейских участков, аварийных служб.

2. Для проводных или кабельных сетей доступа требуются минимальные суммы расстояний от места размещения узла доступа до абонентов (**минисуммная задача**). При такой задаче критерием оптимальности будет минимизация суммы всех расстояний с учетом количества абонентов в каждом населенном пункте, и результатом решения задачи будет **нахождение вершины — медианы графа**. Аналогичными будут задачи размещения подстанций в электросетях, баз снабжения и складов или отделов сортировки почтовой связи в сети дорог и подобные этим задачи.

### 3.3.2. Формулировка задачи в общем виде

Дана сеть — граф с  $n$  вершинами  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ), которым сопоставлены веса  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Найти точку  $U$  — вершину графа на сети — такую, чтобы соответствовала оптимальному значению целевой функции

#### 1. Для узлов радиодоступа

$$F_i = \max(d_{iU}) \longrightarrow \min = \min[\max_{i \neq j=1}^n (d_{ij})]. \quad (3.1)$$

#### 2. Для проводных или кабельных узлов доступа

$$F_i = \sum_{i=1}^n d_{iU} p_i \longrightarrow \min = \min[\sum_{i \neq j=1}^n d_{ij} p_i], \quad (3.2)$$

где  $d_{iU}$  — расстояние от  $i$  вершины до точки  $U$ .

### 3.3.3. Пример

Дана сеть — граф с семью вершинами (рис. 3.1), где вершины — населенные пункты, в которых проживают потенциальные абоненты оператора. Число предполагаемых абонентов в вершинах задано вектор-строкой весов

$$\mathbf{P} = (80, 100, 140, 90, 60, 50, 40)$$

В графе на ребрах указаны расстояния в км между населенными пунктами. Необходимо определить населенные пункты, в которых размещение узла доступа (объекта связи) будет оптимально с учетом двух задач — для радиосети и для проводной или кабельной сети.

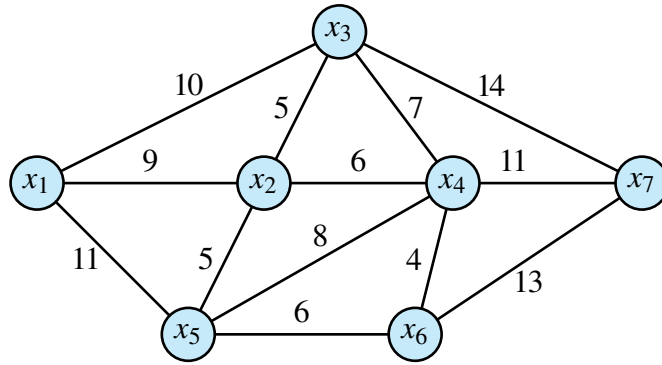


Рис. 3.1. Граф сети населенных пунктов

### Решение

Построить матрицу кратчайших расстояний  $d_{ij}$  из каждой вершины в каждую (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Матрица кратчайших расстояний  $d_{ij}$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$\max d_{ij}$	$\min[\max d_{ij}]$
$x_1$	0	9	10	15	11	17	24	24	
$x_2$	9	0	5	6	5	10	17	17	
$x_3$	10	5	0	7	10	11	14	14	14
$x_4$	15	6	7	0	8	4	11	15	
$x_5$	11	5	10	8	0	6	19	19	
$x_6$	17	10	11	4	6	0	13	17	
$x_7$	24	17	14	11	19	13	0	24	

Для решения первой задачи, используя полученную матрицу кратчайших расстояний  $d_{ij}$ , определяем максимумы в каждой строке и минимум по столбцу  $\max d_{ij}$ , находим оптимальную вершину — центр графа — населенный пункт для размещения узла радиодоступа  $F_3$ , который соответствует критерию оптимальности минимаксной задачи.

Для второй задачи находим значения функции  $F_i$  по формуле (3.2) в каждой вершине.

$$F_1 = 80 \cdot 0 + 9 \cdot 100 + 10 \cdot 140 + 15 \cdot 90 + 11 \cdot 60 + 17 \cdot 50 + 24 \cdot 40 = 6120$$

$$F_2 = 9 \cdot 80 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 140 + 6 \cdot 90 + 5 \cdot 60 + 10 \cdot 50 + 17 \cdot 40 = 3440$$

$$F_3 = 10 \cdot 80 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 140 + 7 \cdot 90 + 10 \cdot 60 + 11 \cdot 50 + 14 \cdot 40 = 3640$$

$$F_4 = 15 \cdot 80 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 140 + 0 \cdot 90 + 8 \cdot 60 + 4 \cdot 50 + 11 \cdot 40 = 3800$$

$$F_5 = 11 \cdot 80 + 5 \cdot 100 + 10 \cdot 140 + 8 \cdot 90 + 0 \cdot 60 + 6 \cdot 50 + 19 \cdot 40 = 4560$$

$$F_6 = 17 \cdot 80 + 10 \cdot 100 + 11 \cdot 140 + 4 \cdot 90 + 6 \cdot 60 + 0 \cdot 50 + 13 \cdot 40 = 4930$$

$$F_7 = 24 \cdot 80 + 17 \cdot 100 + 14 \cdot 140 + 11 \cdot 90 + 19 \cdot 60 + 13 \cdot 50 + 0 \cdot 40 = 8360$$

Среди найденных значений функции  $F_i$  выбираем минимальное, что и соответствует решению минисуммной задачи.

$$F_{\min} = \min(F_i) = F_2 = 3440.$$

**Ответ:** Узел радиодоступа необходимо разместить в третьей вершине графа. Проводной или кабельный узел доступа необходимо разместить во второй вершине графа.

### 3.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру в журнале группы.

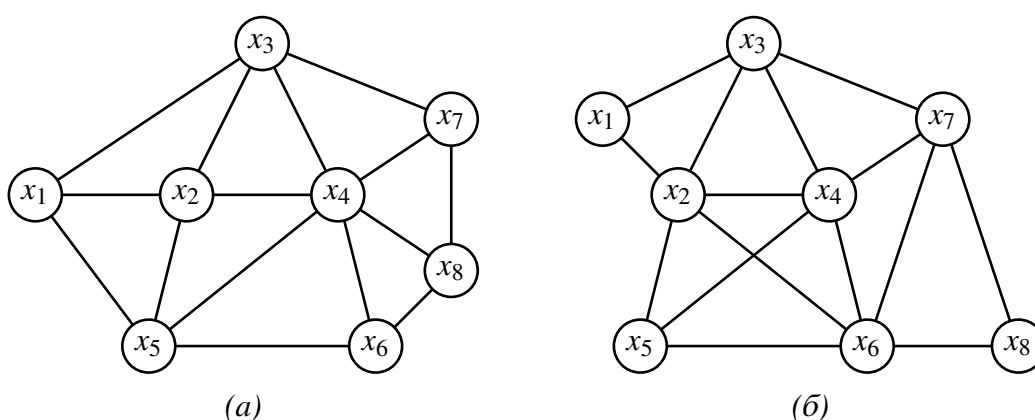


Рис. 3.2. Граф сети населенных пунктов:

(a) нечетные варианты (1, 3, ...); (б) четные варианты (2, 4, ...)

Таблица 3.2

Количество абонентов в населенных пунктах (веса узлов графа)

№ вар.	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
1	70	60	60	70	130	40	60	80
2	90	80	90	100	100	90	130	60
3	140	100	50	70	110	80	110	110
4	50	70	90	50	70	140	80	110
5	100	80	50	110	130	50	90	110
6	90	140	130	140	50	70	70	40
7	60	80	120	90	40	80	110	120
8	80	120	120	90	90	130	70	90
9	140	70	50	130	60	70	90	80
10	90	100	110	70	50	60	80	100
11	40	100	120	50	110	110	140	50
12	90	80	40	130	70	140	50	140
13	100	110	90	40	100	60	90	110
14	50	70	140	120	90	80	80	40

Количество абонентов в населенных пунктах (веса узлов графа)

№ вар.	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
15	50	120	70	90	100	130	120	80
16	140	110	60	110	120	40	50	130
17	110	140	130	140	80	60	60	60
18	50	60	140	120	60	80	60	60
19	50	40	140	90	130	60	60	140
20	110	100	100	80	120	140	80	70
21	120	90	90	50	120	40	40	60
22	60	80	100	80	90	40	80	40
23	120	90	70	110	110	140	130	60
24	130	60	40	110	110	90	140	110
25	80	80	100	60	140	70	80	60
26	60	60	140	120	120	120	80	110
27	100	100	40	100	100	110	140	80
28	120	70	50	140	60	120	100	60
29	130	80	60	90	80	50	60	40
30	70	80	60	50	40	60	40	90

Расстояния между населенными пунктами (длины ребер графа) учащиеся назначают самостоятельно из диапазона 3–15 км.

### 3.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

#### 3.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Выполнить постановку задач для своего варианта и аналитически решить задачи размещения узлов доступа.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

### ***3.5.2. Содержание отчета***

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
- 2) цель работы;
- 3) формулировку задания;
- 4) аналитическое решение задачи своего варианта;
- 5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
- 6) при наличии — программный код решения задачи;
- 7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
- 8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
- 9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

### ***3.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

### ***3.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Какого типа задачи относятся к задачам размещения объектов?
2. Сформулируйте задачу размещения в общем виде.
3. Какие критерии применяются в задаче для принятия оптимального решения?

## **Лабораторная работа 4**

### ***Оптимизация работ методом сетевого планирования и управления***

#### **4.1. Цели работы**

Приобретение навыков решения задач и их оптимизации методом сетевого планирования и управления. Определить параметры и найти оптимальное решение технологической задачи по сетевой модели своего варианта.

#### **4.2. Рекомендуемая литература**

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова // НОУ ИНТУИТ. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info>
4. Лекции по дисциплине.

#### **4.3. Теоретическая справка**

##### ***4.3.1. Метод сетевого планирования и управления***

Сетевое планирование применяется для создания оптимального плана выполнения работ в сфере промышленного производства, строительства, организации научно-исследовательских работ и в других отраслях в рамках задачи управления технологическими процессами. Исходными данными для задачи сетевого планирования является программа выполнения работ, которая содержит перечень работ с указанием длительности выполнения каждой. На основании этих данных строится сетевая модель (график).

Сетевая модель — графическое отображение выполняемых работ в их технологической последовательности с указанием времени выполнения каждой работы (рис. 4.1).

Основными элементами сетевой модели являются:

1. Событие — фиксируемый момент времени завершения  $i$ -й работы и начало выполнения  $(i + 1)$ -й работы. На сетевом графике событие обозначается вершиной с порядковым номером.
2. Работа — это активные действия по созданию материального или интеллектуального продукта с привлечением различных ресурсов: финансовых, материальных, энергетических и прочих.

Различают несколько видов работ:

- действительная работа, определение дано выше (на сетевом графике изображается сплошной линией со стрелкой);
- фиктивная работа — логическая связь между событиями, не требующая затрат каких-либо ресурсов (изображается на сетевом графике пунктирной линией).

3. Путь — это непрерывная последовательность событий и работ, которые включаются (исполняются) только один раз.

4. Критический путь — это путь, который содержит наибольшее количество работ, не имеющих резерва по времени для своей реализации. Работы, имеющие резерв по времени, называются некритическими.

5. Исходное событие. Любая сетевая модель всегда имеет одно исходное событие, из которого вытекает одна или несколько работ. Исходное событие никогда не имеет входящих работ.

6. Завершающее событие. Каждая сетевая модель всегда имеет одно завершающее событие, в котором заканчивается одна или несколько работ. Завершающее событие никогда не имеет исходящих работ.

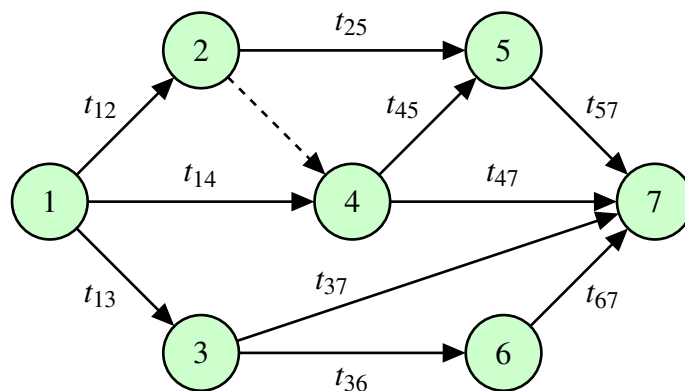


Рис. 4.1. Сетевая модель работ

#### 4.3.2. Расчет временных параметров сетевой модели

Главной характеристикой сетевого графика является длина критического пути. Расчет критического пути выполняют в два этапа (от начала к концу сетевого графика и от конца к началу сетевого графика). На первом этапе определяют ранние сроки наступления событий, а на втором — поздние сроки наступления событий.

1. Ранние сроки наступления событий вычисляются по формуле (4.1).

$$t_p(j) = \max[t_p(i) + t(i, j)], \quad (4.1)$$

где  $t_p(i)$  и  $t_p(j)$  — соответственно ранние сроки свершения предыдущего и последующего событий;  $t(i, j)$  — время выполнения работ. Ранний срок события определяет время, ранее которого событие наступить не может.

2. Поздние сроки наступления событий вычисляются по формуле (4.2).

$$t_{\text{п}}(i) = \min[t_{\text{п}}(j) - t(i, j)], \quad (4.2)$$

где  $t_{\text{п}}(i)$  и  $t_{\text{п}}(j)$  — соответственно поздние сроки свершения предыдущего и последующего событий;  $t(i, j)$  — время выполнения работ. *Поздний срок* события определяет время, после которого событие совершиться не может.

3. Полный резерв времени события вычисляется как разница сроков по формуле (4.3)

$$R(j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(j). \quad (4.3)$$

Для оперативного контроля полученные параметры наносят на сетевую модель, где каждое событие представляется в виде рис. 4.2.

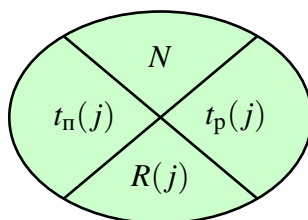


Рис. 4.2. Обозначение события сетевой модели с параметрами

### Пример 4.1

На основании технологической последовательности выполнения работ и предварительных расчетов построена сетевая модель (рис. 4.3). Требуется определить величину критического пути и полный резерв времени.

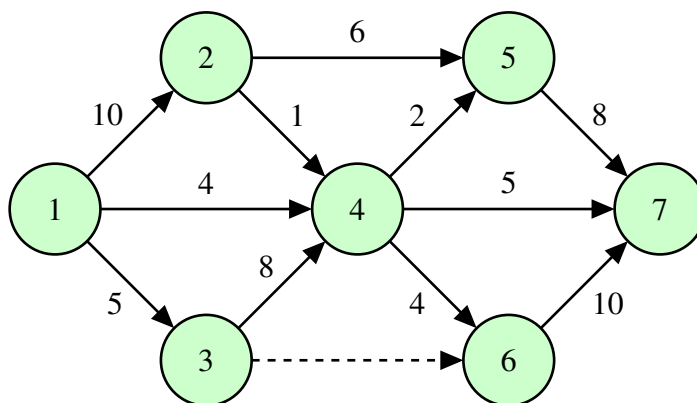


Рис. 4.3. Сетевая модель технологической последовательности выполнения работ



**Решение:**

1. Вычислим ранние сроки свершения событий по формуле 4.1:

$$t_p(1) = 0$$

$$t_p(2) = \max[t_p(1) + t_{12}] = \max[0 + 10] = 10$$

$$t_p(3) = \max[t_p(1) + t_{13}] = \max[0 + 5] = 5$$

$$t_p(4) = \max \begin{bmatrix} t_p(1) + t_{14} \\ t_p(2) + t_{24} \\ t_p(3) + t_{34} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0 + 4 \\ 10 + 1 \\ 5 + 8 \end{bmatrix} = 13$$

$$t_p(5) = \max \begin{bmatrix} t_p(2) + t_{25} \\ t_p(4) + t_{45} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 10 + 6 \\ 13 + 2 \end{bmatrix} = 16$$

$$t_p(6) = \max \begin{bmatrix} t_p(3) + t_{36} \\ t_p(4) + t_{46} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 5 + 0 \\ 13 + 4 \end{bmatrix} = 17$$

$$t_p(7) = \max \begin{bmatrix} t_p(4) + t_{47} \\ t_p(5) + t_{57} \\ t_p(6) + t_{67} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 13 + 5 \\ 16 + 8 \\ 17 + 10 \end{bmatrix} = 27$$

2. Вычислим поздние сроки свершения событий по формуле 4.2:

$$t_n(7) = t_p(7) = 27$$

$$t_n(6) = \min[t_n(7) - t_{67}] = \min[27 - 10] = 17$$

$$t_n(5) = \min[t_n(7) - t_{57}] = \min[27 - 8] = 19$$

$$t_n(4) = \min \begin{bmatrix} t_n(7) - t_{47} \\ t_n(6) - t_{46} \\ t_n(5) - t_{45} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 27 - 5 \\ 17 - 4 \\ 19 - 2 \end{bmatrix} = 13$$

$$t_n(3) = \min \begin{bmatrix} t_n(6) - t_{36} \\ t_n(4) - t_{34} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 17 - 0 \\ 13 - 8 \end{bmatrix} = 5$$

$$t_n(2) = \min \begin{bmatrix} t_n(5) - t_{25} \\ t_n(4) - t_{24} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 19 - 6 \\ 13 - 1 \end{bmatrix} = 12$$

$$t_n(1) = \min \begin{bmatrix} t_n(4) - t_{14} \\ t_n(3) - t_{13} \\ t_n(2) - t_{12} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 13 - 4 \\ 5 - 5 \\ 12 - 10 \end{bmatrix} = 0$$

3. Вычислим полный резерв времени каждого события по формуле 4.3:

$$R(1) = 0 - 0 = 0 \qquad R(5) = 19 - 16 = 3$$

$$R(2) = 12 - 10 = 2 \qquad R(6) = 17 - 17 = 0$$

$$R(3) = 5 - 5 = 0 \qquad R(7) = 27 - 27 = 0$$

$$R(4) = 13 - 13 = 0$$

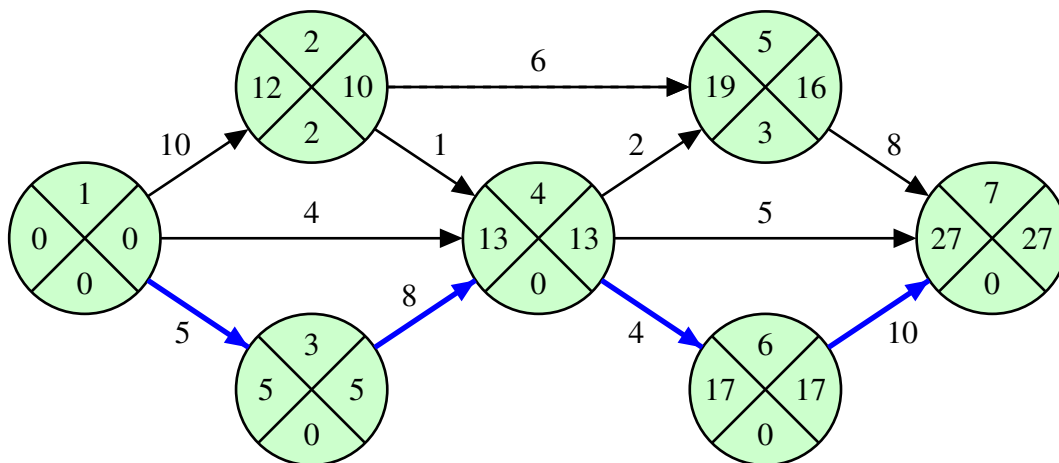


Рис. 4.4. Сетевая модель с нанесенными временными параметрами

Обозначим все параметры на сетевой модели (рис. 4.4).

**Ответ:** Длина критического пути равна 27. На критическом пути находятся события: 1, 3, 4, 6, 7.

#### 4.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру бригады в журнале группы.

Рассчитать непосредственно на предложенном сетевом графике технологического комплекса работ согласно своему варианту (табл. 4.1):

- ранние и поздние сроки свершения событий,
- резервы времени событий,
- минимальное время выполнения всего комплекса (критический срок).

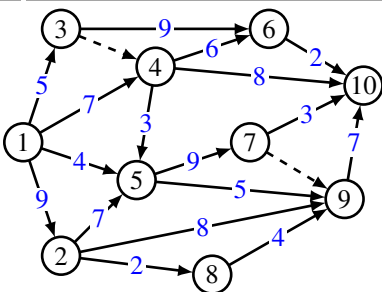
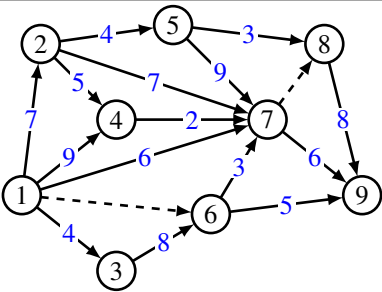
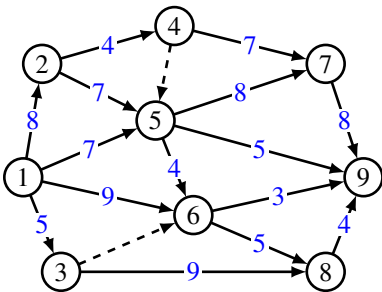
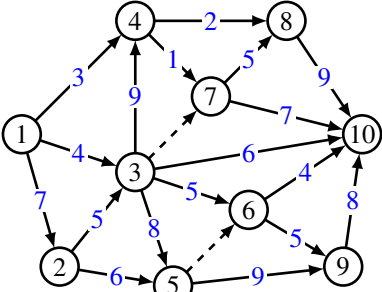
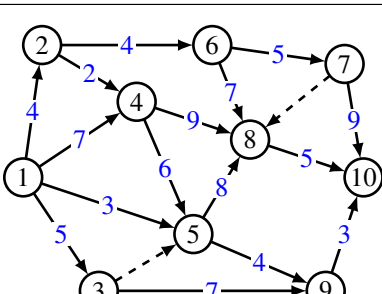
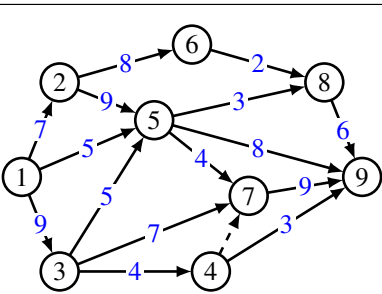
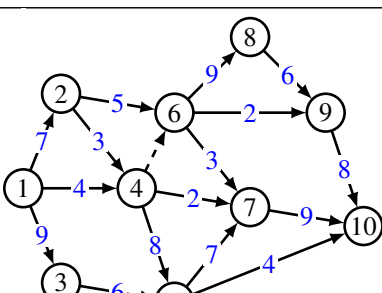
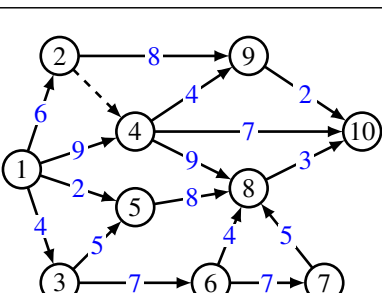
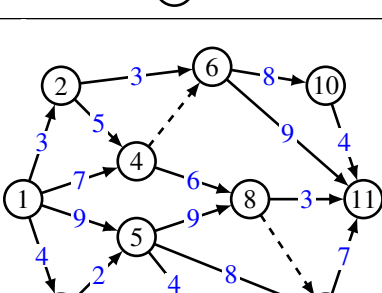
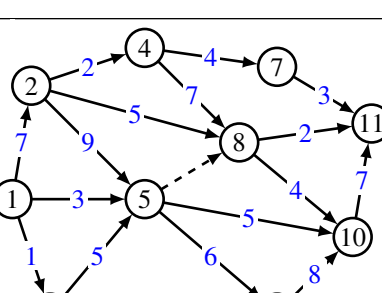
Выделить на сетевом графике критический путь.

Таблица 4.1

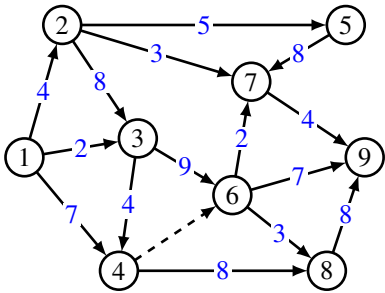
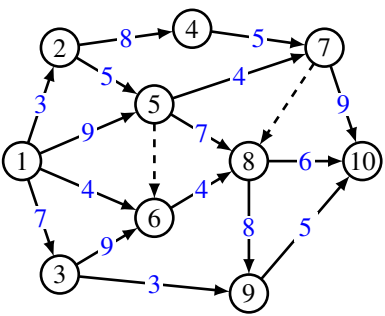
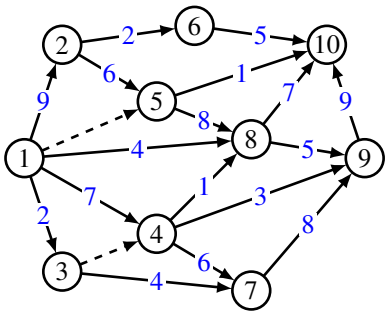
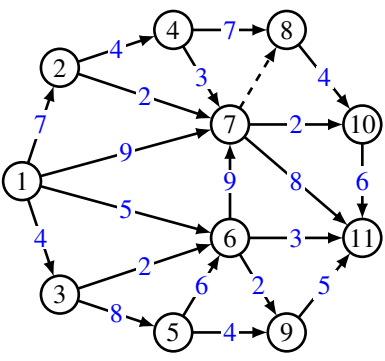
Варианты заданий для лабораторной работы  
(выбирается по номеру бригады в журнале группы)

Вар-т	Сетевая модель	Вар-т	Сетевая модель
1		2	

Варианты заданий для лабораторной работы  
(выбирается по номеру бригады в журнале группы)

Вар-т	Сетевая модель	Вар-т	Сетевая модель
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	

*Варианты заданий для лабораторной работы  
(выбирается по номеру бригады в журнале группы)*

Вар-т	Сетевая модель	Вар-т	Сетевая модель
13		14	
15		16	

### 4.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

#### 4.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Решить задачу методом сетевого планирования и управления аналитически.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

#### 4.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);

- 2) цель работы;
- 3) формулировку задания;
- 4) аналитическое решение задачи своего варианта;
- 5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
- 6) при наличии — программный код решения задачи;
- 7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
- 8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
- 9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

#### ***4.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

#### ***4.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Что такое событие?
2. Какая работа называется действительной, фиктивной работой?
3. Дайте определение исходному событию, завершающему событию?
4. Чем отличается критический путь от любого другого пути?
5. Какие работы и события называются критическими?
6. Что называется сетевой моделью?
7. Основные правила построения сетевой модели.
8. Как вычисляются ранние сроки свершения событий?
9. Как вычисляются поздние сроки свершения событий?
10. Что такое резервы времени, и как они определяются?

## **Лабораторная работа 5**

### ***Решение задач оптимизации методом динамического программирования***

#### **5.1. Цель работы**

Приобрести навыки постановки и решения задач оптимизации методом динамического программирования.

#### **5.2. Рекомендуемая литература**

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова // НОУ ИНТУИТ. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info>
4. Лекции по дисциплине.

#### **5.3. Теоретическая справка**

##### ***5.3.1. Метод динамического программирования***

Динамическое программирование предназначено для изучения и моделирования многошаговых процессов, обладающих определенными свойствами инвариантности, и представляет собой один из методов численного решения многомерных вариационных задач.

Под динамическим программированием понимают некоторый специальный метод оптимизации, суть которого состоит в отыскании оптимального решения путем выполнения вычислений в несколько шагов (этапов). Вся задача оптимизации разделяется на несколько шагов, которые могут быть как уникальными, так и типовыми (одинаковыми). Такие шаги могут чередоваться друг с другом.

При использовании динамического программирования многошаговая задача при обратном прогоне решается дважды: от конца к началу (определение условно-оптимального решения) и от начала к концу (определение безусловно-оптимального решения). Первый этап длительный и трудоемкий, второй — короткий и уточняющий решение первого этапа.

##### ***5.3.2. Основное функциональное уравнение динамического программирования***

$$F_i(x_{i-1}; U_i) = \text{extr}_{U_i}(Z_i(x_{i-1}; U_i) + F_{i+1}(x_i)), \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.1)$$

где  $x_{i-1}$  — множество состояний, в которых система находится перед  $i$ -м шагом;  $x_i$  — множество состояний системы в конце  $i$ -го шага;  $U_i$  — множество управлений на  $i$ -ом шаге, под воздействием которых система переходит в одно из состояний множества  $x_i$ ;  $F_i(x_{i-1}; U_i)$  — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от  $i$ -го до  $N$ -го шага включительно;  $Z_i(x_{i-1}; U_i)$  — значение целевой функции на  $i$ -ом шаге для всех управлений из множества  $U_i$ ;  $F_{i+1}(x_i)$  — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от  $(i+1)$ -го шага до  $N$ -го включительно.

На последнем  $N$  шаге справедлива следующая формула:

$$F_N(x_{N-1}; U_N) = \text{extr}_{U_N}(Z_N(x_{N-1}; U_N)) \quad (5.2)$$

### Пример 5.1.

На районной сети дорог (5.1) перевозчиком указаны стоимости доставки единицы груза из одного населенного пункта в соседние пункты. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

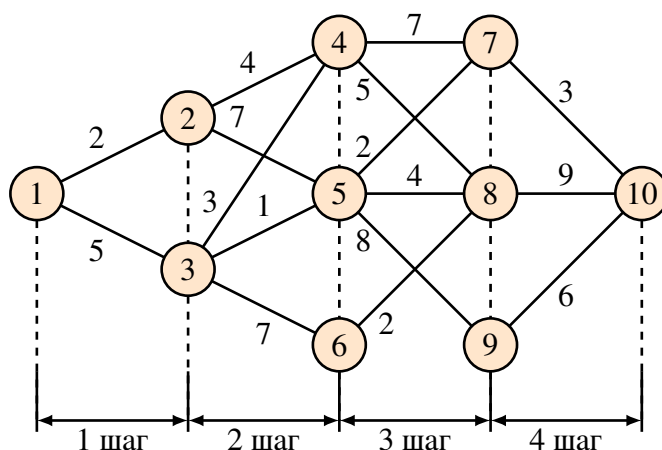


Рис. 5.1. Районная сеть дорог и стоимость доставки груза между населенными пунктами

### Решение.

Разобьем все пункты района на группы (табл. 5.1). К группе I отнесем пункт 1, к группе II — пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (пункты 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (4, 5 и 6) и т. д. В результате, движение транспорта с грузом из пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс.

В качестве перевозчика выступает автотранспорт, перемещающий груз из начала маршрута (пункта 1) в конечную точку маршрута (пункт 10) по сети районных дорог. Множество  $x_i$  — множество пунктов назначения на  $i$ -м шаге. Действие оператора управления  $U_i$  на  $i$ -м шаге состоит в выборе дороги  $(i, j)$ ,

по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту 10. Значение  $z_i$  целевой функции на  $i$ -м шаге — это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

Таблица 5.1

Разбиение районной сети дорог на группы

I	II	III	IV	V
	2	4	7	
1	3	5	8	10
		6	9	

**Первый этап** условной оптимизации начнем с анализа четвертого шага.  $i = N = 4$ , функциональное уравнение имеет вид (5.3):

$$F_4(x_3, u_4) = \min_{u_4} (z_4(x_3, u_4)), \quad (5.3)$$

где  $x_4 = \{c_{10}\}$ ;  $x_3 = \{c_7, c_8, c_9\}$ ;  $u_4 = \{(7, 10), (8, 10), (9, 10)\}$ ;  $z_4 = \{3, 9, 6\}$ .

Анализ четвертого шага оформим в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Первый этап условной оптимизации

$X_3$	$U_4$	$X_4$	$F_4$
<b>C<sub>7</sub></b>	<b>(7, 10)</b>	<b>C<sub>10</sub></b>	<b>3</b>
$C_8$	(8, 10)	$C_{10}$	9
$C_9$	(9, 10)	$C_{10}$	6

Переходим ко **второму этапу** условной оптимизации — анализу третьего шага (табл. 5.3).

Запишем функциональное уравнение при  $i = N - 1 = 3$  (5.4):

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{u_3} (z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \quad (5.4)$$

Таблица 5.3

Второй этап условной оптимизации

$X_2$	$U_3$	$X_3$	$Z_3$	$F_4$	$Z_3 + F_4$	$F_3$
$C_4$	(4, 7)	$C_7$	7	3	10	10
	(4, 8)	$C_8$	5	9	14	—
<b>C<sub>5</sub></b>	<b>(5, 7)</b>	<b>C<sub>7</sub></b>	2	3	5	<b>5</b>
	(5, 8)	$C_8$	4	9	13	—
	(5, 9)	$C_9$	8	6	14	—
$C_6$	(6, 8)	$C_8$	2	9	11	11



**Третий этап** условной оптимизации — анализ второго шага — осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме (5.5),  $i = 2$ .

$$F_2(x_1, u_2) = \min_{u_2} (z_2(x_1, u_2) + F_3(x_2)). \quad (5.5)$$

Анализ второго шага рассмотрим в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Третий этап условной оптимизации

$X_1$	$U_2$	$X_2$	$Z_2$	$F_3$	$Z_2 + F_3$	$F_2$
$C_2$	(2, 4)	$C_4$	4	10	14	—
	(2, 5)	$C_5$	7	5	12	12
<b><math>C_3</math></b>	(3, 4)	$C_4$	3	10	13	—
	<b>(3, 5)</b>	<b><math>C_5</math></b>	<b>1</b>	5	6	<b>6</b>
	(3, 6)	$C_6$	7	11	18	—

**Заключительным этапом** процедуры условной оптимизации является анализ первого шага.

Функциональное уравнение для этого шага имеет вид (5.6),  $i = 1$ .

$$F_1(x_0, u_1) = \min_{u_1} (z_1(x_0, u_1) + F_2(x_1)). \quad (5.6)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Четвертый этап условной оптимизации

$X_0$	$U_1$	$X_1$	$Z_1$	$F_2$	$Z_1 + F_2$	$F_1$
<b><math>C_1</math></b>	(1, 2)	$C_2$	2	12	14	—
	<b>(1, 3)</b>	<b><math>C_3</math></b>	5	6	12	<b>11</b>

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление, которое будет составлено из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений.

**Ответ:** таким образом, рассматривая таблицы решения с последней по первую, получаем наиболее экономный маршрут перевозки, который проходит через пункты 1, 3, 5, 7, 10, при этом транспортные расходы составляют 11 денежных единиц на единицу груза.

## 5.4. Задания для лабораторной работы

На региональной сети дорог (рис. 5.2) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставить груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости  $c_{ij}$  перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1. Методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и определить соответствующие ему затраты.

2. Выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать соответствующие им минимальные затраты на доставку.

3. При аналитическом решении вручную привести формулы и таблицы оптимизации по этапам, при программном решении сопроводить скриптовый код подробными комментариями.

4. Результаты работы оформить в виде таблицы или колонок с данными: н. п. «А» — н. п. «Б» — ОПТИМАЛЬНЫЙ МАРШРУТ — затраты.

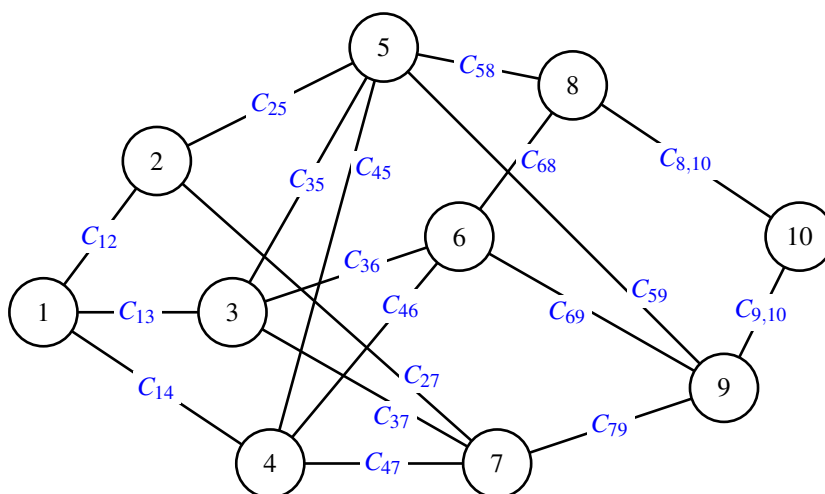


Рис. 5.2. Региональная сеть дорог с тарифами на перевозку груза

Все необходимые числовые данные вариантов 1–15 приведены в табл. 5.6. Номер варианта выбирается учащимися по номеру бригады в журнале группы.

Таблица 5.6

Стоимости перевозки груза между пунктами на региональной сети дорог (тарифы)

Тариф	Номер варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$C_{12}$	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	2	4	5	3	3
$C_{13}$	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	5	6	2	5	5
$C_{14}$	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	7	7	4	7	6
$C_{25}$	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	9	8	6	9	4
$C_{27}$	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	4	4	7	2	3

Окончание табл. 5.6

Стоимости перевозки груза между пунктами на региональной сети дорог (тарифы)

Тариф	Номер варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$C_{35}$	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	6	6	8	5	7
$C_{36}$	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	2	7	1	8	9
$C_{37}$	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	1	8	4	1	4
$C_{45}$	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	3	2	5	4	6
$C_{46}$	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5	5	1	7	8	7
$C_{47}$	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	2	8	8	3	4
$C_{58}$	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1	6	9	5	5	3
$C_{59}$	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8	7	3	3	7	1
$C_{68}$	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2	8	5	4	9	2
$C_{69}$	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3	2	7	1	1	3
$C_{79}$	4	1	5	4	9	2	8	6	9	5	6	3	4	3	4
$C_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	1	3	7	2	5	2	5
$C_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8	9	3	9	1	8

### 5.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

#### 5.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Выполнить постановку задачи и решить ее аналитически методом динамического программирования.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

#### 5.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
- 2) цель работы;
- 3) формулировку задания;
- 4) аналитическое решение задачи своего варианта;
- 5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
- 6) при наличии — программный код решения задачи;
- 7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;

- 8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
- 9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работ.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно исходя из логики задания.

### ***5.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

### ***5.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Что понимается под динамическим программированием?
2. Какие задачи можно решать методом динамического программирования?
3. Объяснить алгоритм решения задач методом динамического программирования.
4. Основное функциональное уравнение динамического программирования.
5. На какие 2 этапа распадается вычислительная процедура метода динамического программирования? В чем заключаются эти этапы?

## **Лабораторная работа 6**

### ***Решение многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации***

#### **6.1. Цели работы**

Приобрести навык постановки и решения многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации. Освоить способы нормирования данных.

#### **6.2. Рекомендуемая литература**

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова // НОУ ИНТУИТ. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info>
4. Лекции по дисциплине.

#### **6.3. Теоретическая справка**

##### ***6.3.1. Многокритериальная задача выбора оптимального решения***

Математические модели исследуемых явлений или процессов для анализа и принятия решения часто могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях, параметры значимых величин и другие условия, важные с точки зрения принятия решения по конкретной задаче.

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких стратегически важных или значимых критериев является ***задачей многокритериальной***.

Один из подходов к решению таких многокритериальных задач управления или выбора решений связан с процедурой образования обобщенной функции

$$F_i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

монотонно зависящей от критериев —  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ .

Данная процедура называется ***процедурой (методом) свертывания критериев***. Существует несколько методов свертывания, один из них — метод аддитивной оптимизации.

### 6.3.2. Метод аддитивной оптимизации свертывания критериев

Аддитивный критерий оптимальности определяется по формуле 6.1.

$$F_i[a_{ij}] = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1)$$

где  $a_{ij}$  — частные критерии;  $\lambda_j$  — весовые коэффициенты.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0. \quad (6.2)$$

Обобщенная целевая функция (6.1) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные критерии количественно соизмеримы по важности;
- частные критерии являются однородными.

Если частные критерии не однородны, т. е. имеют различные единицы измерения, то в этом случае требуется нормализация критериев. Под **нормализацией критериев** понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. Рассмотрим некоторые способы нормализации.

Определим максимум и минимум каждого частного критерия, т. е.

$$a_j^+ = \max(a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.3)$$

$$a_j^- = \min(a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.4)$$

Выделим группу критериев  $a_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев  $a_j$ ,  $j = \overline{k+1, n}$ , которые минимизируются при решении задачи.

В соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из соотношений (6.5), (6.6), (6.7), (6.8).

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6.5)$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{k+1, n} \quad (6.6)$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_{ij} - a_j^-)}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6.7)$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_j^+ - a_{ij})}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{k+1, n}. \quad (6.8)$$

Оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает максимальное значение целевой функции:

$$F_i[a_{ij}] = \max \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{a}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.9)$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются соотношениями (6.10), (6.11), (6.12), (6.13).

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6.10)$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (6.11)$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_j^+ - a_{ij})}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (6.12)$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_{ij} - a_j^-)}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (6.13)$$

При этом оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает минимальное значение целевой функции:

$$F_i[a_{ij}] = \min \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{a}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.14)$$

### Пример 6.1

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования, выпускаемого тремя заводами-изготовителями. На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев. Все данные приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Данные примера

Варианты оборудования	Частные критерии			
	Производительность, д.е.	Стоимость, д.е.	Энергоемкость, у.е.	Надежность, у.е.
Оборудование завода 1	5	7	5	6
Оборудование завода 2	3	4	7	3
Оборудование завода 3	4	6	2	4
Весовые коэффициенты	0,4	0,2	0,1	0,3

**Решение.**

1. Определим максимум каждого частного критерия:  $a_{15}$ ,  $a_{27}$ ,  $a_{37}$ ,  $a_{46}$ .
2. При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость) и третий (энергоемкость) критерии.
3. Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии, используя формулы (6.5), (6.6):

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1$	$\hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0,6$	$\hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0,8$
---	---	---

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$\hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1$	$\hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0,5$	$\hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
---	---	---

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$\hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} =$ $= 1 - \frac{7}{7} = 0$	$\hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} =$ $= 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$	$\hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} =$ $= 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$
$\hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} =$ $= 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$	$\hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} =$ $= 1 - \frac{7}{7} = 0$	$\hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} =$ $= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$



4. Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту, используя формулу (6.9).

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_1 \hat{a}_{11} + \lambda_2 \hat{a}_{12} + \lambda_3 \hat{a}_{13} + \lambda_4 \hat{a}_{14} = \\ &= 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 1 \approx 0,729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \lambda_1 \hat{a}_{21} + \lambda_2 \hat{a}_{22} + \lambda_3 \hat{a}_{23} + \lambda_4 \hat{a}_{24} = \\ &= 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot \frac{3}{7} + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,476 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \lambda_1 \hat{a}_{31} + \lambda_2 \hat{a}_{32} + \lambda_3 \hat{a}_{33} + \lambda_4 \hat{a}_{34} = \\ &= 0,4 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot \frac{1}{7} + 0,1 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,603 \end{aligned}$$

5. Оптимальным является первый вариант оборудования, так как

$$F_{\max} = F_1 = 0,729.$$

#### 6.4. Задания для лабораторной работы

Номер варианта выбирается учащимися по номеру бригады в журнале группы.

##### *Вариант №1*

Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовых коэффициентов приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

*Показатели транспортных устройств*

Варианты транспортных устройств	Скорости	Прочности	ПЕРЕГРУЗКИ	Устойчивости	Металлоемкости	Мощности
	(K1)	(K2)	(K3)	(K4)	(K5)	(K6)
1	1,1	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
2	1,0	1,1	0,65	0,92	0,94	0,92
3	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
4	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
6	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	1,0
Весовые коэф.	0,21	0,195	0,174	0,157	0,124	0,14

Найти и выбрать оптимальное транспортное устройство.

### **Вариант №2**

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

*Локальные критерии эффективности оборудования*

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти, у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Весовые коэф.	0,25	0,2	0,32	0,23

Определить и выбрать оптимальный вариант поставки оборудования

### **Вариант №3**

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и весовые коэффициенты единичных показателей.

Численные значения единичных показателей и весовых коэффициентов приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

*Показатели проектов технических систем*

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	сложности	веса	времени подготовки	автоматизации	мощности	унификации
I	1,0	0,88	1,0	1,0	0,72	0,614
II	0,72	1,2	0,8	0,78	0,81	0,42
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,97	0,755	0,7	0,98	0,31
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,65
Весовые коэф.	0,157	0,124	0,21	0,195	0,174	0,14

Определить оптимальный проект технической системы.

### **Вариант №4**

Абсолютные показатели качества различных вариантов двигателей приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

*Показатели качества двигателей*

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс·м	масса, кг
1	180	67	850
2	176	70	1002
3	176	68	860
4	181	67	818
5	177	68	860
6	180	66	801
Весовые коэф.	0,4	0,24	0,36

Выбрать из предложенных вариантов оптимальный двигатель.

### **Вариант №5**

Экономические показатели эффективности работы предприятий приведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6

*Показатели эффективности работы предприятий*

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	30,0	40,0	20,0	0,2	300
2	25,0	20,0	30,0	0,3	200
3	40,0	45,0	54,0	0,1	250
4	28,0	30,0	35,0	0,4	160
5	15,0	12,0	20,0	0,25	280
6	50,0	30,0	40,0	0,21	120
Весов. коэф.	0,32	0,23	0,15	0,2	0,1

Определить и выбрать наиболее эффективно работающее предприятие.

### ***Вариант №6***

Для пяти проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.7

*Показатели транспортных устройств*

Вар-ты транспортных устр-в	Скорость (К1)	Прочность (К2)	ПЕРЕГРУЗКА (К3)	Устойчивость (К4)	Мощность (К6)
1	0,78	0,98	0,72	1,0	0,87
2	1,0	1,0	0,65	0,9	0,94
3	0,89	0,93	0,92	1,0	0,96
4	0,87	0,95	0,81	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,3	0,90	0,82
Весовые коэф.	0,31	0,19	0,173	0,147	0,18

Определить вариант проекта оптимального транспортного устройства.

### ***Вариант №7***

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии эффективности функционирования вариантов необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 6.8.

Таблица 6.8

*Локальные критерии эффективности оборудования*

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти, у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
V	130	5	7	7
Весовые коэф.	0,20	0,25	0,23	0,32

Выбрать наиболее эффективный вариант поставки оборудования.

### **Вариант №8**

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

*Показатели качества двигателей*

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л. с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг
1	183	71	857
2	186	72	902
3	172	69	840
4	181	66	828
5	175	68	860
6	180	66	803
7	175	67	1005
Весовые коэф.	0,26	0,40	0,34

Найти и рекомендовать оптимальный вариант двигателя.

### **Вариант №9**

Показатели эффективности работы предприятий приведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10

*Показатели эффективности работы предприятий*

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	32,0	43,0	30,0	0,1	200
2	27,0	25,0	40,0	0,4	300
3	30,0	40,0	44,0	0,3	260
4	28,0	37,0	37,0	0,25	280
5	17,0	22,0	35,0	0,25	250
Весовые коэф.	0,2	0,3	0,15	0,25	0,10

Выбрать наиболее эффективно работающее предприятие.

### **Вариант №10**

Для семи проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в табл. 6.11.

Таблица 6.11

*Показатели транспортных устройств*

Варианты транспортных устройств	Скорость (К1)	Прочность (К2)	ПЕРЕГРУЗКА (К3)	Мощность (К6)
1	0,89	0,78	0,82	0,77
2	1,2	1,0	0,65	0,94
3	1,0	0,94	0,92	0,95
4	0,97	0,95	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,86
6	0,98	0,88	0,85	1,0
Весовые коэф.	0,22	0,185	0,165	0,430

Выбрать оптимальное транспортное устройство.

### **Вариант №11**

Показатели экономической эффективности работы предприятий приведены в табл. 6.12.

Таблица 6.12

*Показатели экономической эффективности работы предприятий*

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	40,0	43,0	26,0	0,4	200
2	35,0	23,0	40,0	0,35	300
3	45,0	42,0	56,0	0,15	260
4	38,0	35,0	45,0	0,2	180
5	25,0	22,0	26,0	0,24	260
Весовые коэф.	0,23	0,33	0,14	0,1	0,2

Определить наиболее эффективно работающее предприятие.

### **Вариант №12**

Технические и эксплуатационные характеристики различных вариантов двигателей приведены в табл. 6.13.

Таблица 6.13

*Технические и эксплуатационные характеристики двигателей*

Варианты двигателей	Параметры двигателей			
	Мощность, л. с.	Прочность	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг
1	170	0,92	67	950
2	186	0,95	70	1000
3	176	0,96	68	960
4	183	0,89	67	920
5	187	0,93	68	960
6	180	0,90	66	800
7	175	0,89	69	880
Весовые коэф.	0,34	0,16	0,24	0,26

Определить и выбрать оптимальный вариант двигателя.

### **Вариант №13**

Для пяти проектов технических систем определены относительные параметры технического совершенства конструкции.

Значения параметров и весовых коэффициентов приведены в табл. 6.14.

Таблица 6.14

*Параметры проектов технических систем*

Вариант технической системы	Сложность конструкции	Масса и габарит	Время подготовки к работе	Уровень автоматизации	Мощность
I	0,542	0,881	1,0	0,79	0,82
II	0,623	1,0	0,91	0,88	0,81
III	0,558	0,558	0,965	0,82	0,65
IV	0,525	0,972	0,851	0,71	0,98
V	0,567	0,565	0,867	0,77	0,86
Весовые коэф.	0,177	0,124	0,24	0,295	0,164

Выбрать оптимальный проект технической системы.

### **Вариант №14**

Для четырех вариантов проектов технических систем определены относительные параметры технического совершенства конструкции.

Значения параметров и весовых коэффициентов приведены в табл. 6.15.

Таблица 6.15

*Параметры проектов технических систем*

Вариант технической системы	Сложность конструкции	Масса и габарит	Время подготовки к работе	Уровень автоматизации	Мощность	Уровень унификации
I	0,84	0,98	1,0	1,0	0,72	0,612
II	0,82	1,0	0,78	0,78	0,82	0,618
III	0,65	0,88	0,76	0,78	0,625	0,917
IV	0,58	0,97	0,75	0,72	0,98	0,711
Весовые коэф.	0,124	0,157	0,21	0,174	0,195	0,14

Выбрать оптимальный проект технической системы.

### **Вариант №15**

Одной из фирм требуется выбрать оптимальный вариант по техническому обеспечению производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации разных заводов-изготовителей были определены необходимые критерии эффективности функционирования поставляемого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 6.16.

Таблица 6.16

*Критерии эффективности оборудования*

Варианты поставки оборудования	Критерии эффективности оборудования			
	Производительность, д. е.	Стоимость оборудования, д. е.	Объем памяти, у. е.	Надежность, у. е.
I	200	6,5	6	7
II	170	6	8	5
III	130	5	6,5	5,8
IV	220	7	7	6
V	150	4,5	7	7
VI	180	4	6	5
Весовые коэф.	0,32	0,25	0,23	0,20

Определить и рекомендовать оптимальный вариант поставки оборудования.



## **6.5. Порядок выполнения задания**

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

### ***6.5.1. Ход работы***

1. Изучить теоретически и проработать на примере материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Сформулировать, записать исходные данные и решить аналитически многокритериальную задачу методом аддитивной оптимизации.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

### ***6.5.2. Содержание отчета***

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
- 2) цель работы;
- 3) формулировку задания;
- 4) аналитическое решение задачи своего варианта;
- 5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
- 6) при наличии — программный код решения задачи;
- 7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
- 8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
- 9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

### ***6.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

#### ***6.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Математическая модель задач принятия решений в условиях определенности.
2. Какие задачи называются многокритериальными?
3. Какие существуют методы свертывания критериев в многокритериальных задачах?
4. В чем заключается метод аддитивной оптимизации?
5. Что такое весовой коэффициент?
6. Как определяется обобщенная целевая функция в методе аддитивной оптимизации?
7. В чем заключается алгоритм нормализации критериев?

## **Лабораторная работа 7**

### ***Оценка эффективности моделей аппроксимации стохастических данных***

#### **7.1. Цели работы**

Научиться оценивать получаемые результаты математического моделирования. Приобрести навык проведения оценок эффективности и пригодности имитационных математических моделей. Освоить методики принятия решений по результатам статистического анализа стохастических данных произвольной природы в рамках их аппроксимации математическими моделями скользящего среднего и авторегрессии и скользящего среднего. Получить навык анализа статистических характеристик и применения общих критериев согласия при выполнении задания своего варианта.

#### **7.2. Рекомендуемая литература**

1. Алексеев, Е. Р. Введение в Octave для инженеров и математиков / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. М. : ALT Linux, 2012. 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.  
URL: <http://octave.sourceforge.net/docs.html>
3. Лекции по дисциплине.
4. Монаков, А. А. Математическое моделирование радиотехнических систем: Учебное пособие / А. А. Монаков. СПб. : Лань, 2016. 148 с.
5. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.
6. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. М. : Издательство стандартов, 2002. 87 с.
7. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. М. : Издательство стандартов, 2002. 64 с.

#### **7.3. Теоретическая справка**

##### ***7.3.1. Обработка стохастических данных***

Предполагая практическое применение методов теории вероятностей и математической статистики, очень важным моментом для исследователя является знание закона распределения вероятностей. Реализации данных, по-

лучаемые в ходе какого-либо эксперимента, в общем представлены только законом распределения своих значений. Поэтому любая обработка полученных данных должна предполагать в ходе своего проведения определение закона распределения случайной величины. Попытка применения методов анализа результатов, которые предполагают конкретный закон распределения при условиях, когда реальное распределение отличается от гипотетического, является самой распространенной на практике ошибкой, которая может привести к весьма значимым материальным потерям и затратам времени. Также и в задачах имитационного математического моделирования, когда проверка предполагаемой статистической гипотезы должна найти подтверждение в результатах, получаемых в процессе исследования такой модели, или, если говорить иначе, подтвердить или опровергнуть предполагаемые гипотезы, используемый математический аппарат модели, реализованные методы и полученные результаты моделирования.

Проверка статистической гипотезы обычно сводится к расчету по выборочным данным некоторого статистического критерия, направленного на оценку качества или свойства одного или нескольких следующих показателей.

**1. Состоятельность.** Полученная оценка  $\hat{x}$  называется состоятельной, если вероятность ее отклонения от истинного значения оцениваемого параметра  $x$  при увеличении размера выборки данных  $N$  стремится к нулю, т.е. выполняется следующее условие:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{|\hat{x} - x| > \varepsilon\} = 0, \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon$  — произвольно положительное, сколь угодно малое число. Смысл условия (7.1) состоит в том, что для состоятельной оценки при увеличении объема наблюдений значения оценки ближе и ближе группируются вокруг истинного значения параметра.

**2. Смещенность.** Смещением  $b_i$  оценки  $\hat{x}$  называется разность

$$b_i = M\{\hat{x}\} - x, \quad (7.2)$$

где  $M\{\hat{x}\}$  — математическое ожидание оценки. Оценка называется *несмещенной*, если  $b_i = 0$ . Это означает, что центр группирования полученных оценок  $\hat{x}$  совпадает со значением оцениваемого параметра  $x$ .

**3. Эффективность.** Обычно, при фиксированном значении размера выборки  $N$ , оказывается, что дисперсия оценки  $\hat{x}$  не может быть меньше, чем некоторая расчетная величина  $D_{CRB}$ :

$$D\{\hat{x}\} \geq D_{CRB}, \quad (7.3)$$

Это условие (7.3) называется неравенством Крамера–Рао, а величина  $D_{CRB}$  — границей Крамера–Рао, которую можно вычислить по формуле

$$D_{CRB} = \frac{(1 - \frac{db_i}{dx})^2}{M(\frac{d^2}{dx^2} L(r | x))}, \quad (7.4)$$

где  $L(r | x)$  — логарифм функции правдоподобия наблюдаемой выборки  $r = (r_1, \dots, r_N)^T$ ;  $M(\dots)$  — оператор вычисления математического ожидания. За меру эффективности оценки  $\hat{x}$  принимается  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{D_{CRB}}{D\{\hat{x}\}}. \quad (7.5)$$

В силу неравенства Крамера–Рао  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Оценка называется *эффективной*, если  $\varepsilon = 1$ , т. е. ее дисперсия минимальна и равна границе Крамера–Рао.

При обработке результатов измерений стремятся к использованию состоятельных, несмещенных и эффективных оценок. Получается это далеко не всегда, и поэтому приведенные выше требования смягчают, подменяя свойства несмещенности и эффективности, на асимптотические свойства.

#### 4. Асимптотическая несмещенность:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_i = 0. \quad (7.6)$$

#### 5. Асимптотическая эффективность:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon = 1. \quad (7.7)$$

Далее рассмотрим обобщенный перечень задач математической обработки экспериментальных данных, необходимых для получения оценок результатов при имитационном математическом моделировании:

- определение эмпирического закона распределения вероятности полученных данных;
- проверка соответствия эмпирического закона распределения вероятности и гипотетического модельного распределения;
- оценка начальных и центральных моментов данных распределений, получаемых в ходе эксперимента и имитационного моделирования;
- оценка корреляционных и спектральных функций наблюдаемых и аппроксимируемых данных, сигналов и случайных процессов.

### 7.3.2. Оценка закона распределения вероятностей

Результатом проведенного эксперимента или измерения наблюдаемого параметра  $x$  является ограниченный ряд полученных оценок  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Такой ряд называется *выборкой* объема или размера  $N$ . Для проведения оценки

эмпирического (или выборочного) распределения вероятности полученных данных существуют два способа:

- оценка плотности распределения вероятности;
- оценка функции распределения вероятности.

Выполняя оценку плотности распределения вероятности (дифференциальной функции распределения вероятности), весь интервал полученных значений оценки параметра  $x$  разбивают на  $K$  интервалов. В общем случае длины интервалов не обязательно должны быть равными, но обычно при расчетах выполняют равномерное разбиение интервалов. Далее подсчитывают количество попаданий полученных выборочных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в каждый из  $K$  интервалов, равное  $m_k$ , где  $k = \overline{1, K}$ , и определяют частоту попадания в интервал:

$$v_k = \frac{m_k}{N}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Для  $k$ -го интервала с длиной  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  за оценку значения плотности распределения вероятности  $f(x)$  на этом интервале принимают величину

$$f(x) = \frac{v_k}{\Delta x_k} = \frac{m_k}{N * \Delta x_k}, \quad x_{k-1} \leq x < x_k,$$

где  $x_{k-1}$  и  $x_k$  — границы  $k$ -го интервала. Полученная оценка  $f(x)$  имеет вид ступенчатой функции или *гистограммы*, а сам метод называется *методом гистограмм*.

Одним из важных вопросов при использовании метода гистограмм является выбор количества интервалов  $K$ . На этот счет существует достаточно большое количество рекомендаций, часть из которых носит эвристический характер, а часть имеет теоретическое обоснование. Например считается, что для получения приемлемых результатов требуется попадание в каждый интервал не менее 8 значений случайной величины  $x$ . Но реализовать на практике такое требование часто не удастся. Совершенно очевидным является предположение — выбор количества интервалов  $K$  должен зависеть от размера выборки  $N$ , поскольку при фиксированном  $N$  малое значение  $K$  приведет к излишнему сглаживанию гистограммы, а при большом  $K$  будут большие случайные ошибки оценивания.

В 1926 году Стёрджес предложил свое эмпирическое правило, что число интервалов гистограммы  $K$  и объем выборки  $N$  должны быть связаны соотношением:

$$K = 1 + \log_2 N.$$

В ходе применения **правило Стёрджеса** показало излишнее сглаживание гистограммы, но это правило входит в состав рекомендованных к применению

[7]. Специалистами в математической статистике был произведен поиск с целью определения оптимального при данном размере выборки количества интервалов. В 1950 году советский математик Н. В. Смирнов показал, что отклонение гистограммы от графика неизвестной плотности вероятности обратно пропорционально  $\sqrt[3]{N}$ . В настоящее время известны и рекомендованы следующие правила выбора числа интервалов (приведены некоторые из них):

- **правило Штюргеса** (рек. [7])

$$K = 1 + 3,32 * \log_{10} N;$$

- **правило Райса**

$$K = 2\sqrt[3]{N};$$

- **формула Доана**

$$K = 1 + \log_2 N + \log_2 \left( 1 + \frac{|\beta|}{\sigma_\beta} \right),$$

где  $\beta$  — коэффициент асимметрии распределения случайной величины,

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}};$$

- **правило Брукса и Каррузера** (рек. [7])

$$K = 5 * \log_{10} N.$$

В качестве общей рекомендации (в том числе и согласно [7]) при построении гистограмм предлагается не превышать число интервалов  $K \leq \frac{N}{5}$ .

Чтобы провести оценку функции распределения вероятности (интегральной функции распределения), расположим результаты эксперимента  $x_1, x_2, \dots, x_N$   $i = 1, 2, \dots, N$  в порядке возрастания. В результате ранжирования данных получим *вариационный ряд*

$$x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, \dots, x'_N \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (7.8)$$

*Эмпирической частотой* называется количество членов вариационного ряда (7.8) меньших текущего  $x$

$$v(x) = m, \quad x'_m < x, \quad m = 1, \dots, N.$$

*Эмпирической функцией распределения* случайной величины  $x$  называется функция

$$F(x) = \frac{v(x)}{N} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x'_1; \\ \frac{m}{N}, & \text{при } x'_m \leq x < x'_{m+1}, \quad 1 \leq m \leq N-1; \\ 1, & \text{при } x \geq x'_N. \end{cases} \quad (7.9)$$

Функция  $F(x)$  имеет ступенчатый вид и изменяется от 0 до 1. Скачки функции, равные  $\frac{1}{N}$ , приходятся на каждое ранжированное выборочное значение. В математической статистике доказана теорема Гливенко, подтверждающая, что представленная эмпирическая функция распределения (7.9)  $F(x)$  — состоятельная и несмещенная оценка интегральной функции распределения случайной величины  $x$ .

Возможен еще один вариант построения более сглаженной эмпирической функции распределения по точкам полученной гистограммы.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < \min(x); \\ \frac{1}{N}, & \text{при } x = \min(x); \\ \frac{\sum_{k=1}^K m_k}{N}, & \text{при } \frac{\Delta x_1}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x_K}{2}, \quad 1 \leq k \leq K; \\ 1, & \text{при } x = \max(x). \end{cases}$$

### 7.3.3. Проверка соответствия выбранной модели распределения данным эксперимента

В случае имитационного математического моделирования исследователь вначале проводит предварительный анализ и обработку результатов выборочных данных, полученных в результате эксперимента  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , и, используя полученные результаты, составляет имитационную математическую модель — формулу, предназначенную для аппроксимации экспериментальных данных. Далее используя полученную модель, выполняет математическое моделирование и получает аппроксимацию данных выборки  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$ , для которых необходимо принять решение о соответствии или несоответствии сделанного модельного предположения данным эксперимента. Задача такой проверки соответствия выбранной модели распределения и данных эксперимента решается с применением *критериев согласия*.

Для этого вводится понятие статистической гипотезы. *Статистической гипотезой* называется предположение, выдвигаемое относительно особенностей распределения вероятностей случайной величины, которое проверяется по результатам наблюдения над ней.

Нулевая гипотеза  $H_0$  при применении общих критериев согласия формулируется в виде

$$H_0 : F(x) = F(\hat{x}),$$

где  $F(x)$  — эмпирическая функция распределения вероятностей;  $F(\hat{x})$  — гипотетическая функция распределения вероятностей.



Все известные общие критерии согласия можно разбить на следующие основные группы:

- критерии, основанные на изучении разницы между теоретической плотностью распределения и эмпирической гистограммой;
- критерии, основанные на расстоянии между теоретической и эмпирической функциями распределения вероятности;
- корреляционно-регрессионные критерии, основанные на изучении корреляционных и регрессионных связей между теоретическими и эмпирическими порядковыми статистиками;
- критерии, основанные на использовании специфических характеристических свойств различных распределений.

### ***Пояснения при проведении проверок для всех критериев согласия***

Предположим, что  $H_0$  — гипотеза о том, что полученное эмпирическое распределение выборки  $x_1, x_2, \dots, x_N$  согласуется с модельным  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$ . Для подтверждения или отрицания гипотезы  $H_0$  выбирают некоторую функцию  $U$ , заданную на множестве эмпирических и модельных распределений. Величина  $U$ , вычисленная на полученном эмпирическом и выбранном модельном распределении по выборочным реализациям, сама является случайной и называется *решающей статистикой или статистикой критерия*. Поэтому суждения по гипотезе на основе статистики критерия могут носить только вероятностный характер. *Уровнем значимости* определяется критическое значение статистики критерия. При этом *уровень значимости* — это наибольшее значение вероятности, несовместимое с признанием соответствия вычисленным модельным значениям, и, наоборот, модель признается *значимой*, если рассчитанная решающая статистика меньше, чем принятый уровень значимости.

$$U < U_0,$$

где  $U_0$  — порог сравнения, который вычисляется на основании параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , выбор значений которых определяется условиями эксперимента и требованиями к достоверности суждения по проверяемой гипотезе. Обычно на практике используются значения  $\alpha$  и  $\beta$ , равные 0,1; 0,05; 0,01. Параметр  $\alpha$  — это вероятность ошибки первого рода, заключающейся в отклонении верной гипотезы — обычно совпадает с уровнем значимости (по крайней мере не выше). Параметр  $\beta$  — это вероятность ошибки второго рода, заключающейся в принятии ложной гипотезы. Эффективность статистического критерия проверки гипотезы оценивается его мощностью  $1 - \beta$ , равной вероятности отклонения ложной гипотезы. Критерии согласия различаются по виду решающей статистики. Рассмотрим некоторые из них.

### 7.3.3.1 Критерий Колмогорова–Смирнова

Рассматриваем экспериментальную и модельную выборки случайных величин

$$x: x_1, x_2, \dots, x_N \text{ и } \hat{x}: \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N.$$

Критерий пытается ответить на вопрос: обе ли выборки извлечены из совокупности с одним и тем же законом распределения вероятностей? Он проверяет нулевую гипотезу о совпадении функций распределения вероятностей в двух выборках:

$$H_0: F(x) = F(\hat{x}).$$

Статистика критерия равна

$$D = \max |F(x) - F(\hat{x})|.$$

Она определяется разностью двух эмпирических функций распределения вероятностей. Критерием рекомендуется пользоваться для выборок объемом  $N \geq 100$ . Рассчитываем вероятность гипотезы о неразличимости функций распределения в обеих выборках

$$P\left(\sqrt{\frac{N_1 * N_2}{N_1 + N_2}} * \max |F(x) - F(\hat{x})| < z\right) = 1 - e^{-2z^2},$$

где  $z$  — максимальное расхождение функций распределения вероятностей.

Если полученная величина вероятности превышает  $\alpha = 0,1$  (уровень значимости), то нулевая гипотеза о совпадении закона распределения вероятностей отклоняется.

Функция Octave — `kolmogorov_smirnov_test_2.m` рассчитывает и возвращает три параметра: вероятность нулевой гипотезы, значение тестовой статистики Колмогорова–Смирнова и значение тестовой статистики, которая является максимальным вертикальным расстоянием между двумя эмпирическими функциями распределения.

### 7.3.3.2 Критерий $\chi^2$ (Хи-квадрат)

Критерий основан на сравнении эмпирической гистограммы распределения случайной величины (экспериментальные данные) с теоретической (гипотетической) плотностью (модельные данные). Диапазон изменения экспериментальных данных разбивается на  $K$  интервалов, и подсчитывается статистика

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - N * p_k)^2}{N * p_k},$$

где  $n_k$  — количество значений случайной величины, попавшей в  $k$ -й интервал;  
 $N = \sum_{k=1}^K n_k$  — объем выборки;  $F(\hat{x})$  — гипотетический теоретический закон  
 распределения вероятностей случайной величины;  $p_k = F(\hat{x}_{k+1}) - F(\hat{x}_k)$  — ги-  
 потетическая вероятность попадания случайной величины в  $k$ -й интервал.

Выбор числа интервалов гистограммы  $K$  производить согласно указа-  
 ний, приведенных в разделе 7.3.2.

Статистика  $\chi^2$  имеет распределение хи-квадрат с  $f = N - 1$  степеня-  
 ми свободы в том случае, когда проверяется простая нулевая гипотеза  $H_0$ , то  
 есть, когда гипотетическое распределение, на соответствие которому прове-  
 ряется эмпирический ряд данных, известно с точностью до своих параметров.  
 Если гипотеза сложная, и параметры гипотетического распределения оцени-  
 ваются по самой выборке (наш случай), то число степеней свободы уменьша-  
 ется на число оцениваемых параметров  $m$  и становится равным  $f = K - 1 - m$ .

Правило проверки гипотезы следующее. Если

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - N * p_k)^2}{N * p_k} > \chi_{\alpha}^2(f),$$

то на уровне значимости  $\alpha$ , то есть с достоверностью  $(1 - \alpha)$ , гипотеза  $H_0$   
 отклоняется.

Функция Octave — `chisquare_test_homogeneity.m` рассчитывает и воз-  
 вращает три параметра: статистику  $p = \chi^2$  для эмпирической гистограммы  
 (экспериментальных данных), статистику  $chisq = \chi_{\alpha}^2$  для гипотетической ги-  
 стограммы (модельных данных) и число степеней свободы для тестовой ста-  
 тистики.

### 7.3.3.3 Критерий Пирсона (коэффициент корреляции Пирсона)

Корреляционный анализ предполагает изучение зависимости между слу-  
 чайными величинами с одновременной количественной оценкой степени  
 неслучайности их совместного изменения.

Изменения случайной величины  $y$ , соответствующие изменению случай-  
 ной величины  $x$ , можно условно разбить на две составляющие:

- статистическую, связанную с неслучайной зависимостью  $y$  от  $x$ ,
- стохастическую, связанную со случайным характером поведения са-  
 мих  $y$  и  $x$ .

Статистическую составляющую связи между  $y$  и  $x$  выражает коэффици-  
 ент корреляции

$$\rho = \frac{M[(x - M(x))(y - M(y))]}{\sqrt{D(x)D(y)}},$$

где  $M(x)$ ,  $M(y)$  и  $D(x)$ ,  $D(y)$  — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайных величин  $x$  и  $y$ . Коэффициент корреляции показывает, насколько связь между величинами близка к линейной. Значение  $\rho = 0$  указывает на отсутствие связи,  $\rho = \pm 1$  соответствует строго линейной связи между  $x$  и  $y$ , а знак указывает направление связи.

При этом коэффициент корреляции  $\rho$  не учитывает возможных нелинейных или криволинейных связей между случайными величинами. Чтобы учитывать такие возможные связи, К. Пирсон ввел свое корреляционное отношение (статистику), когда на каждом уровне одной переменной  $y_i$  наблюдается  $n_i$  значений другой переменной  $x_{i,j}$  ( $j = 1, \dots, n_i$ )

$$\eta_{xy}^2 = \frac{S_0^2}{S^2},$$

где  $S_0^2$  — дисперсия рассеяния значений  $x_{i,j}$ , связанная с влиянием группировки значений  $x_{i,j}$  по уровням переменной  $y$ ;  $S^2$  — дисперсия рассеяния значений  $x_{i,j}$  без учета их группировки по уровням переменной  $y$ . Возможна перестановка переменных местами, при этом в общем случае  $\eta_{xy}^2 \neq \eta_{yx}^2$ .

Для любого случая имеет место неравенство  $0 \leq \rho^2 \leq \eta^2 \leq 1$ . Равенство  $\rho^2 = \eta^2 = 1$  будет только при строго линейной связи  $x$  и  $y$ . При нелинейной связи  $\rho^2 < \eta^2 < 1$ , и при существовании какой-либо линейной связи (например, наличие весового коэффициента)  $\rho^2 = \eta^2 < 1$ .

Рассматриваемый критерий относится к критериям проверки гипотез о значимости корреляционной связи между случайными величинами.

В нашем случае для  $[x: x_1, x_2, \dots, x_N]$  и  $[\hat{x}: \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N]$  выборочная оценка корреляции рассчитывается

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})^2}},$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ;  $\bar{\hat{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i$  — матожидание;  $N$  — объем выборки.

Для выборок  $N > 200$  просчитывают

$$M(r) = \rho; \quad D(r) = \frac{1 - \rho}{N - 1}.$$

Далее аппроксимацией по Стьюденту с  $f = N - 2$  степенями свободы выстраивают распределение выборочного коэффициента корреляции

$$t(r) = \frac{(r - \rho)\sqrt{N - 2}}{\sqrt{(1 - r^2)(1 - \rho^2)}}.$$

Полученные аппроксимации распределения выборочного коэффициента корреляции позволяют строить статистические критерии для проверки гипотез о существовании корреляционной связи и о возможных значениях коэффициента корреляции.

Затем решаем задачу проверки гипотезы о значимости корреляционной связи между случайными величинами, а именно значимости отклонения коэффициента корреляции от нуля. Проверяем нулевую гипотезу  $H_0 : |p| = 0$  против альтернативы  $H_1 : |p| \neq 0$ . Гипотеза проверяется сравнением выборочного значения коэффициента корреляции  $r$  с его критическим значением  $r_\alpha$ , являющимся  $\alpha$ -квантилью распределения Стьюдента  $t(r)$  при  $p = 0$ . Корреляция признается значимой, если  $|r| \geq r_\alpha$ .

Функция Octave — `cor_test.m` рассчитывает значимость отклонения нулевого критерия и возвращает шесть параметров:

- `method` — метод тестирования (какой коэффициент корреляции используется), по умолчанию используется обычный коэффициент корреляции Пирсона, еще в этом тесте возможны проверки коэффициента ранговой корреляции Кендалла и ранга корреляции Спирмена;
- `params` — параметр нулевого распределения тестовой статистики — для определения значения  $r_\alpha$ ;
- `stat` — вычисленное значение тестовой статистики;
- `dist` — тип распределения ( $t$ -распределение Стьюдента);
- `pval` — результат проверки нулевой гипотезы  $H_0 : |p| = 0$  против альтернативы  $H_1 : |p| \neq 0$ ;
- `alternative` — тип гипотезы, если «!=» — проверка на «не ноль» (по умолчанию), возможен «>» — «больше 0» или «<» — «меньше 0».

### 7.3.3.4 Парный критерий сравнения средних

Для двух выборок независимых случайных величин одинакового объема  $N$ ,  $[x : x_1, x_2, \dots, x_N]$  и  $[\hat{x} : \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N]$ , с неизвестными средними и дисперсиями, которые расположены в порядке их наблюдения, проверяется нулевая гипотеза равенства средних  $H_0 : M(x) = M(\hat{x})$ , против альтернатив  $H_1 : M(x) \neq M(\hat{x})$ ,  $M(x) > M(\hat{x})$ ,  $M(x) < M(\hat{x})$ . При такой постановке двухвыборочная задача формулируется как одновыборочная, если в качестве случайной величины рассматривать разности  $y_i = x_i - \hat{x}_i$  для соответствующих пар  $[x_i, \hat{x}_i]$ .

Критерий относится к критериям проверки гипотез сравнения параметров распределений.

Статистика критерия аналогична обычной статистике Стьюдента

$$t = \frac{M_y}{\sigma_y} \sqrt{N}, \quad \text{где} \quad M_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i; \quad D_y = \sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - M_y)^2.$$

Проверка нулевой гипотезы аналогична обычному критерию Стьюдента, при этом уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

Функция Octave — `ttest.m` рассчитывает значимость отклонения нулевой гипотезы равенства средних и возвращает четыре параметра:

- параметр выбора  $h$ , если ( $h = 0$ ) — нулевая гипотеза принимается; если ( $h = 1$ ) — нулевая гипотеза отклоняется;
- значение вероятности статистики  $t$ -теста ( $p = pval$ );
- вычисленное значение доверительного интервала возвращается в массив `[ci]`;
- `stats` — структура данных из значений статистики теста (`tstat`), степени свободы (`df`) и стандартного отклонения (`sd`).

### 7.3.3.5 Медианный критерий

Имеется выборка значений случайной величины  $[x : x_1, x_2, \dots, x_N]$  (экспериментальные данные в порядке их появления) и выборочная медиана —  $[Med(\hat{x}) : Med(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)]$ , полученная из модельных данных. Значения  $x_i \geq Med(\hat{x})$  обозначаем символом  $a$ , а значения  $x_i < Med(\hat{x})$  обозначаем символом  $b$ . Статистикой критерия  $w$  — является общее число полученных серий элементов  $a$  и  $b$ .

Гипотеза случайности ряда принимается с вероятностью  $\alpha$ , если  $n_1(\alpha) < w < n_2(\alpha)$ ; в ином случае она отклоняется в пользу альтернативы неслучайности ряда.

Подсчитываются значения  $m$  и  $n$  в соответствии с количеством элементов  $a$  и  $b$  в последовательности. Выполняется аппроксимация

$$W = \frac{w - \left( \frac{2mn}{m+n} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2(m+n-1)}}},$$

имеющая стандартное нормальное распределение. Тогда нулевая гипотеза отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $|W| > U_{\frac{1+\alpha}{2}}$ .

Критерий относится к критериям проверки гипотезы соответствия указанного тренда (выявление тренда и проверка на соответствие) и случайности расположения полученных выборочных данных, то есть отсутствия взаимо-

связи между значениями реализаций случайной величины и их номерами в выборочной последовательности.

Функция Octave — `signtest.m` рассчитывает значимость отклонения нулевой гипотезы соответствия того, что распределение  $F(x - y)$  имеет нулевую медиану и возвращает три параметра:

- значение вероятности статистики теста ( $p = pval$ );
- параметр выбора  $h$ , если ( $h = 0$ ) — нулевая гипотеза принимается; если ( $h = 1$ ) — нулевая гипотеза отклоняется;
- `stats` — структура данных статистики теста (`sign`) — (знак) и значение статистики (`zval`) — (вычисляется только тогда, когда метод является «приблизительным»).

### 7.3.3.6 Критерий Манна–Уитни–Вилкоксона

Для двух полученных выборок:

- экспериментальной  $[x : x_1, x_2, \dots, x_N]$ ,
- модельной  $[\hat{x} : \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_M]$ ,

выполняем операцию ранжирования по возрастанию. Далее для проверки сформулированной для неизвестных плотностей вероятностей  $f(x)$  и  $f(\hat{x})$  гипотезы сдвига  $H_0 : [f(x) = f(\hat{x}) \text{ или } (\Delta = 0)]$  против альтернативы  $H_1 : [f(x) = f(\hat{x} - \Delta) \text{ или } (\Delta \neq 0)]$ , где  $\Delta$  — сдвиг, определяемый разностью параметров положения распределений, Манн и Уитни предложили использовать ранговый критерий, основанный на статистике вычисления точного числа пар значений  $x_i$  и  $\hat{x}_j$ , для которых  $x_i < \hat{x}_j$ :

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M h_{ij}, \quad \text{где} \quad h_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i < \hat{x}_j; \\ 0, & x_i > \hat{x}_j. \end{cases}$$

При этом, если  $U_1(\alpha) \leq U \leq U_2(\alpha)$ , гипотеза сдвига отклоняется ( $U_1(\alpha)$  и  $U_2(\alpha)$  — критические значения).

Поскольку с  $U$ -статистикой Манна–Уитни связана статистика Вилкоксона, которая определяется суммой рангов элементов одной выборки (например  $x_i$  объемом  $N$ ), то в общей упорядоченной по возрастанию последовательности элементов совместной выборки объема  $(N + M)$ :

$$R = MN + \frac{N(N+1)}{2} - U.$$

При  $N > 20$  и  $M > 20$  применяется аппроксимация обобщенной статистики

$$W = \frac{R - \frac{N(N+M+1)}{2}}{\sqrt{\frac{NM(N+M+1)}{12}}}.$$

Полученная статистика  $W$  аппроксимируется нормальным распределением, и гипотеза сдвига отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $|W| > U_{\frac{1+\alpha}{2}}$ .

Критерий относится к непараметрическим (свободным от распределения) критериям однородности статистических данных, но отклонение закона распределения вероятностей могут привести к искажению полученных выводов (вплоть до принятия решений противоположных правдоподобному). Но если распределение неизвестно, то такие непараметрические критерии являются единственно возможными критериями для проверки гипотез, поэтому их эффективности по сравнению со значимыми параметрическими критериями достаточно высоки — большая часть не хуже  $\approx 93 \div 95\%$  (ниже  $86\%$  нет).

Функция Octave — `u_test.m` рассчитывает значимость отклонения нулевой гипотезы сдвига по тесту Манна–Уитни–Вилкоксона и возвращает два параметра: вероятность отклонения гипотезы сдвига  $p$  (если  $p > 0,95$  или  $0,9$ , гипотеза сдвига отклоняется) и значение тестовой статистики Манна–Уитни–Вилкоксона  $z$  (если  $z > 0,525$ , гипотеза сдвига отклоняется).

### 7.3.4. Оценка моментов распределения

При описании функций распределения вероятностей используются специальные меры или параметры, называемые *моментами*. Отдельные моменты и их комбинации характеризуют такие важные в практическом отношении характеристики распределения вероятностей, как центр группирования данных, степень их рассеяния относительно центра, поведение случайных величин в районе центра группирования, симметричность распределения вероятностей.

Для случайных величин в теории вероятностей вводятся начальные моменты

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx, \quad p = 1, 2, \dots$$

и центральные моменты

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^p f(x) dx, \quad p = 2, 3, \dots,$$



где  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  — плотность распределения вероятности случайной величины  $x$ .

В ходе анализа результатов эксперимента или моделирования оцениваются и чаще всего используются следующие величины:

1. *Математическое ожидание* — центр группирования результатов эксперимента, вычисляется как среднее значение и равно первому начальному моменту.

2. *Дисперсия* — рассеяние случайных величин вокруг центра группирования. Вычисляется как матожидание квадрата отклонения случайной величины от среднего значения и соответствует второму центральному моменту.

3. *Медиана* — 50% квантиль распределения на интервале или выборке (делит площадь под функцией плотности распределения  $f(x)$  на две равные части). На полной выборке может быть равен матожиданию.

4. *Мода* — обычно соответствует значению  $x$  случайной величины, для которого  $f(x) = \max$ . Законы распределения можно разделить на безмодальные (равномерное или трапецеидальное распределение), одномодальные, двухмодальные и полимодальные. Обычно полагают, что трехмодальные распределения и распределения с большим количеством мод вызваны случайностью малой выборки экспериментальных данных, а генеральная совокупность случайной величины имеет плавное распределение, и количество мод не превышает двух.

5. *Квантили* — абсциссы вертикальных линий, разделяющие площадь под кривой плотности вероятности распределения (по правилу нормирования равна единице и отражает вероятность всех возможных значений случайной величины). Так между *нижним квантилем* (*1-квантилем*) (25% квантиль распределения на интервале или выборке) и *верхним квантилем* (*3-квантилем*) (75% квантиль распределения на интервале или выборке) рассматриваемого распределения заключено 50% всех возможных значений случайной величины. Интервал значений случайной величины между 5% и 95% квантилями называется интерквантильным промежутком  $d_d$  с 90% вероятностью. На основании такого подхода вводится понятие квантильных оценок случайной величины, т.е. значений случайной величины с заданной *доверительной вероятностью*  $p_d$ , как границ интервала неопределенности ( $\pm \Delta_d = \pm \frac{d_d}{2}$ ), на протяжении которого встречается  $p_d$  процентов всех значений случайной величины, а  $(1 - p_d)$  процентов значений остаются за границами этого интервала.

6. *Стандартное отклонение* — обычно квадратный корень из дисперсии (не всегда).

7. *Коэффициент вариации* — отношение стандартного отклонения к матожиданию.

8. *Размах* — вычисляемая разница между *max* и *min*. При анализе результатов значения *max* и *min* часто рассматриваются как отдельные моменты распределения.

9. *Коэффициент асимметрии* — характеризует симметричность распределения. Если равен 0 — распределение симметрично, если меньше 0 — распределение имеет левую асимметрию, если больше 0 — распределение имеет правую асимметрию.

10. *Экссесс* — характеризует особенности поведения случайной величины в области максимума плотности вероятности. За равенство 3 принят эксцесс нормального (гауссовского) распределения, если меньше 3 — распределение имеет более плоскую вершину, чем нормальное, если больше 3 — распределение имеет более острую вершину, чем нормальное.

### 7.3.5. Оценка корреляционной функции случайного процесса

Оценка одномерной плотности вероятности случайной величины и связанных с ней статистических числовых характеристик — моментов позволяют получить важную информацию о свойствах случайного процесса. Но для решения многих задач таких оценок недостаточно, так как они представляют случайный процесс статически (фиксированным в отдельные моменты времени) и не характеризуют его изменения во времени. Для получения временных характеристик случайных процессов необходимо проводить оценку корреляционных функций и спектральных характеристик исследуемых и моделируемых процессов.

Рассматривая два сечения случайного процесса в произвольные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , можно говорить, что совокупность этих двух сечений образует двумерную случайную величину  $[X(t_1), X(t_2)]$ , которую можно охарактеризовать двумерной плотностью вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ . Произведение  $p(x_1, x_2, t_1, t_2) * dx_1 * dx_2$  представляет собой вероятность того, что реализация случайного процесса  $X(t)$  в момент времени  $t_1$  попадает в бесконечно малый интервал шириной  $dx_1$  в окрестности точки  $x_1$ , а в момент времени  $t_2$  — в бесконечно малый интервал шириной  $dx_2$  в окрестности точки  $x_2$ :

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = P \left\{ |X(t_1) - x_1| \leq \frac{dx_1}{2}, |X(t_2) - x_2| \leq \frac{dx_2}{2} \right\}.$$

Проводя дальнейшее обобщение этого функционала при  $N$ -мерном сечении для всего процесса, получаем  $N$ -мерную плотность вероятности  $p(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$  и при  $N \rightarrow \infty$  получаем функцию, которая будет исчерпывающей вероятностной характеристикой случайного процесса (понятно, что получение такой функции сопряжено с серьезными математиче-

скими трудностями). Поэтому для многих задач вполне подходят двумерные плотности вероятности.

А именно, задание двумерной плотности вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$  позволяет получить *ковариационную функцию* случайного процесса

$$K_x(t_1, t_2) = M \{x(t_1), x(t_2)\},$$

которая представляет собой усредненное произведение значений функции  $X(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Для каждой из двух реализаций случайного процесса произведение  $x_{1,2}(t_1)$  и  $x_{1,2}(t_2)$  будет числом. Совокупность этих реализаций образует множество таких случайных чисел, распределение которых характеризуется двумерной плотностью вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ . Значит, при известной плотности вероятности усреднение производим по формуле для *взаимной ковариационной функции*

$$K_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

В случае, если интерес представляет только флуктуационная составляющая случайного процесса, то применяется *корреляционная функция*, которая представляет собой статистически усредненное произведение значений центрированной случайной функции  $(X(t) - m_x(t))$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$R_x(t_1, t_2) = M \{[x(t_1) - m_x(t_1)], [x(t_2) - m_x(t_2)]\};$$

$$R_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)] [x_2 - m_{x_2}(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2;$$

$$R_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = K_x(x_1, x_2, t_1, t_2) - m_{x_1}(t_1) m_{x_2}(t_2).$$

При  $t_1 = t_2 = t$  корреляционная функция равна дисперсии случайного процесса.

*Автокорреляционная функция* служит мерой корреляции между отсчетами случайной последовательности и представляет из себя интеграл от произведения двух копий последовательности (сигналов), сдвинутых друг относительно друга на время  $\tau$ :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x(t - \tau) dt.$$

Значение автокорреляционной функции при  $\tau = 0$  является максимально возможным значением  $|R(\tau)| \leq R(0) = D$ .

*Взаимная корреляционная функция* показывает степень сходства между двумя разными случайными последовательностями (сигналами) и определяется как

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) * x_2(t - \tau) dt.$$

Совершенно очевидно, что автокорреляционная функция является частным случаем взаимной корреляционной функции, когда оба случайных процесса (или сигнала) одинаковы  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ .

Корреляционные характеристики процессов позволяют определить стационарность случайных процессов, которая в свою очередь характеризует одинаковость статистических характеристик процесса во всех временных сечениях.

Случайный процесс *строго стационарен* (*стационарен в узком смысле*), если его многомерная плотность вероятности  $p(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$  произвольной размерности  $N$  не изменяется при одновременном сдвиге всех временных сечений  $t_1, t_2, \dots, t_N$  вдоль оси времени на одинаковую величину  $\tau$ :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N) = p(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau),$$

при любом  $\tau$ .

Если уменьшить требования так, чтобы от временного сдвига не зависели только одномерная и двумерная плотности вероятности, то такой случайный процесс будет *стационарен в широком смысле*. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Для стационарных случайных процессов вводится понятие *эргодичности* процесса. Стационарный случайный процесс будет *эргодическим*, если любые его статистические характеристики, усредненные по множеству различных реализаций этого процесса, будут эквивалентны таким же характеристикам усредненной по времени одной бесконечной (длинной) реализации. Эргодический случайный процесс обязательно является и стационарным, но не наоборот. Матожидание эргодического процесса равно постоянной составляющей любой его реализации, а дисперсия имеет физический смысл мощности флуктуационной составляющей.

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - m_x^2,$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau) dt - m_x^2.$$

Достаточное условие эргодичности случайного процесса, стационарного в широком смысле, формулируется как стремление к нулю его корреляционной функции с ростом временного сдвига  $\tau$ , а именно  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$ .

Для стационарного случайного процесса матожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит не от самих моментов времени, а только от интервала между ними  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau).$$

При стационарном случайном процессе корреляционная функция является четной

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau).$$

На практике часто пользуются коэффициентом корреляции (нормированной корреляционной функцией)

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}.$$

Для коэффициента корреляции так же остаются справедливыми отношения  $r_x(0) = 1$ ,  $|r_x(\tau)| \leq 1$ ,  $r_x(-\tau) = r_x(\tau)$ .

При этом, чем быстрее убывает  $R(\tau)$  или  $r_x(\tau)$ , тем слабее статистическая связь между значениями случайного процесса. Оценкой скорости изменения реализаций случайного процесса и его числовой характеристикой является *интервал корреляции*

$$\tau_K = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau.$$

Эта числовая характеристика говорит о том, что если известна реализация случайного процесса до некоторого времени  $T$ , то далее возможен вероятностный прогноз этого случайного процесса на время порядка  $\tau_K$ .

Корреляционная функция может быть найдена при использовании несмещенной и смещенной оценок. Несмещенная оценка

$$R_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^*, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad M \leq N-1.$$

Оценки для отрицательных задержек находятся в соответствии с  $R_x(-m) = R_x^*(m)$ . На практике чаще применяется смещенная оценка

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^*, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad M \leq N-1,$$

получаемая умножением несмещенной оценки на треугольное весовое окно (окно Барлетта)  $w[m] = (1 - \frac{|m|}{N})$ , значения которого убывают с увеличением  $m$  — индекса сдвига отсчетов от нулевого. Несмещенная оценка имеет один, но очень значительный недостаток — с ростом  $m$  значительно вырастет дисперсия  $R[m]$  по причине уменьшения количества произведений в сумме и, соответственно, ухудшения качества усреднения. При этом несмещенная оценка корреляционной функции к краям может достигать функционально значимых величин, реально не подтвержденных свойствами случайного процесса.

### 7.3.6. Оценка спектральной плотности мощности случайного процесса

Для случайного процесса вводят понятие *спектральной плотности мощности*, которая позволяет судить о частотных свойствах случайного процесса и характеризует интенсивность (иначе среднюю мощность) этого процесса, приходящуюся на единицу полосы частот. С физической точки зрения это частотная функция, определяющая частотный состав, или *спектр случайного процесса*, или распределение мощности случайного процесса (сигнала) по частотам спектра (частотам рассматриваемого диапазона).

Традиционные методы спектрального оценивания реализованы, как правило, на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) и характеризуются принятием различных компромиссных допущений для получения статистически надежных спектральных оценок. В основном эти допущения касаются выбора весовых функций (функций весового окна) и усреднения дискретных данных случайных процессов во временной и частотной областях, используемых для того, чтобы сбалансировать требования к точности получаемых оценок и обеспечить приемлемое частотное разрешение.

Для изложения основ спектрального анализа рассмотрим вначале случай детерминированного непрерывного случайного процесса (аналогового сигнала), представленного как функция времени  $x(t)$ . Для большего обобщения полагаем эту функцию комплексной, и если  $x(t)$  абсолютно интегрируема, то есть имеет конечную энергию, то для нее существует непрерывное преобразование Фурье (НПФ)  $X(f)$  функции  $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (7.10)$$

Квадрат модуля такого преобразования называется спектром функции (сигнала)  $x(t)$

$$s(f) = |X(f)|^2. \quad (7.11)$$

### Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (7.12)$$

представляет собой формулировку закона сохранения энергии — энергия функции (сигнала) во временной области равна энергии его преобразования в частотную область. Следовательно,  $s(f)$  — энергетическая спектральная плотность, которая характеризует распределение энергии функции (сигнала) по частоте.

Непрерывную функцию  $x(t)$  дискретизируем по времени с интервалом  $\Delta t$  и получаем дискретную последовательность  $x_n = x(n\Delta t)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , которую можно представить, как произведение исходной временной функции  $x(t)$  и бесконечного количества дельта-функций Дирака  $\delta(t)$ . Тогда согласно (7.10) получаем

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - n\Delta t) \Delta t \right] e^{-j2\pi ft} dt = \Delta t \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi fn\Delta t}, \quad (7.13)$$

что соответствует аппроксимации преобразования (7.10) с помощью прямоугольников, и множитель  $\Delta t$  обеспечивает сохранение области интегрирования при переходе от (7.10) к (7.13) при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Формула (7.13) идентична (7.10) для преобразования  $X(f)$  на интервале  $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$  с условием, что функция  $x(t)$  имеет ограниченную полосу, и все ее частотные составляющие расположены в этом интервале. Тогда ее энергетическая спектральная плотность

$$\hat{s}(f) = |\hat{X}(f)|^2 \quad (7.14)$$

идентична (7.11) только для дискретных данных, полученных для процесса с ограниченной полосой частот.

Далее, если последовательность данных  $x_n$  рассчитывается с помощью конечного временного окна длительностью от  $n = 0$  до  $n = N - 1$  и ее преобразование Фурье формируется из  $N$  отсчетов на частотах  $f = m\Delta f$ , где  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  и  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ , получаем *дискретное преобразование Фурье (ДПФ)*

$$X_m = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi m\Delta f n\Delta t} = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{j2\pi mn}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.15)$$

Приведенное прямое ДПФ (7.15) и соответствующее ему обратное преобразование (ОДПФ)

$$x_n = \Delta f \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{\frac{+j2\pi mn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.16)$$

будут циклическими преобразованиями с периодом  $N$ . Теорема Парсеваля запишется как  $\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \Delta t = \sum_{m=0}^{N-1} |X_m|^2 \Delta f$ . Соответственно дискретная энергетическая спектральная плотность равна

$$s_m = |X_m|^2, \quad \text{где} \quad 0 \leq m \leq N-1. \quad (7.17)$$

Определенные выше дискретная энергетическая спектральная плотность  $s_m$  и непрерывная энергетическая спектральная плотность  $\dot{s}(f)$  называются спектральными оценками на основе *периодограммы*.

**Примечание.** При этом значения  $s_m$  и  $\dot{s}(f)$ , вычисленные на частоте  $f = \frac{m}{N\Delta f}$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , не совпадают, так как  $\dot{s}(f)$  — это дискретизированный вариант спектра, определяемого по свертке спектра  $X(f)$  с преобразованием прямоугольного окна, в котором находятся отсчеты данных. И соответственно дискретный спектр  $s_m$ , полученный по конечной последовательности данных, будет искаженной версией непрерывного спектра  $\dot{s}(f)$ , соответствующего бесконечной последовательности данных.

В случае, если исходный процесс  $x(t)$  представляет собой стационарный в широком смысле случайный процесс, то следует учитывать следующие моменты:

- энергия случайного процесса обычно бесконечна, поэтому искомой величиной в этом случае будет частотное распределение мощности (средняя по времени плотность энергии);
- интегралы по типу приведенного в формуле (7.10) для случайных процессов обычно не существуют.

Тогда основой для спектрального анализа становится не сам случайный процесс, а его автокорреляционная функция

$$R_x(\tau) = M [x(t + \tau) x^*(t)] \quad (7.18)$$

которая при помощи теоремы Винера–Хинчина преобразованием Фурье связана со спектральной плотностью мощности

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (7.19)$$



Но в практических задачах статистическая автокорреляционная функция обычно не известна, и поэтому принимается следующее допущение о том, что случайный процесс эргодичен относительно первого и второго моментов. Это свойство позволяет заменить усреднение по ансамблю реализаций усреднением по времени. Тогда автокорреляция определяется как

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) x^*(t) dt, \quad (7.20)$$

а спектр как

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right\}. \quad (7.21)$$

Оператор математического ожидания подтверждает эргодичность (она не связана с преобразованием Фурье) и дает сходимость пределу в любом статистическом смысле.

Современный вариант периодограммы представляет собой прямой метод спектрального оценивания для дискретных данных  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ ,

$$S_m = \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f_n \Delta t} \right|^2 = \frac{1}{N\Delta t} |X_m|^2, \quad (7.22)$$

определяется на частотном интервале  $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$  и производит оценку с использованием БПФ на дискретном множестве из  $N$  эквидистантных частот  $f_m = m\Delta f$  Гц,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ .  $X_m$  — ДПФ по (7.15).

В работе используется один из самых эффективных на практике методов: классический метод цифрового спектрального анализа на базе БПФ — метод Уэлча, когда выборка анализируемого процесса разбивается на 50% перекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим усреднением периодограмм этих множеств в весовом окне.

### 7.3.7. Математическое моделирование случайного процесса

Технологические процессы в телекоммуникационных и вычислительных сетях и системах традиционно описываются в виде дискретных случайных процессов с использованием вероятностных методов. Анализ работы таких систем обычно производится аналитическими, численными и статистическими методами с широким использованием имитационных математических

моделей. Исследования на таких моделях позволяют определить необходимые функциональные характеристики, произвести их оценку и получить адекватное представление о свойствах соответствующих им реальных систем.

Настоящая работа направлена на проведение оценок аппроксимирующих свойств двух моделей случайного процесса и получение методологического опыта их сравнения для разных исходных данных с использованием трех подходов — численного (построение конечной последовательности действий над числами), аналитического (построение математической модели с последовательным применением математических правил) и имитационного (формализованное представление, отражающее процесс функционирования). Поэтому процедура математического моделирования представлена в работе без углубленного рассмотрения и анализа, в основном на базе двух широко применяемых линейных моделей стационарного случайного процесса — скользящего среднего (СС) и авторегрессии и скользящего среднего (АРСС), рассматриваемых в рамках теоретической подготовки лекционного курса. Как показала практика, эти параметрические модели хорошо аппроксимируют многие случайные и детерминированные процессы с дискретным временем.

В качестве входных данных в работе предлагается использовать две случайные одномерные последовательности, заданные в виде одномерных дискретных векторов и записанные в виде двух текстовых файлов. Эти последовательности имеют разные, априорно неизвестные, законы распределения случайной величины.

Заранее предполагаем, что данные случайного процесса, полученные в качестве исходных, состоят из аддитивной и, возможно, мультипликативной смеси шумовых и периодических процессов. Это предположение и будем в дальнейшем учитывать при описании и составлении аппроксимирующих моделей.

В качестве предварительного анализа рассчитаем моменты для полученного случайного процесса, а именно: минимум, 1-квартиль (нижний квантиль на уровне 0,25), медиану (средний квантиль на уровне 0,5), 3-квартиль (верхний квантиль на уровне 0,75), максимум, математическое ожидание (среднее арифметическое), среднеквадратичное отклонение (СКО), асимметрию, эксцесс, дисперсию. Далее построим гистограмму данных, из нее получим функцию плотности распределения (рис. 7.1) и две эмпирические функции распределения (ЭФР) — полную и сглаженную (по гистограмме) (рис. 7.2, синий график — полная ЭФР, зеленый — сглаженная ЭФР). По полученным данным делаем предварительный вывод о близости полученных характеристик к одному из известных видов распределений случайной величины (нормальному или равномерному).

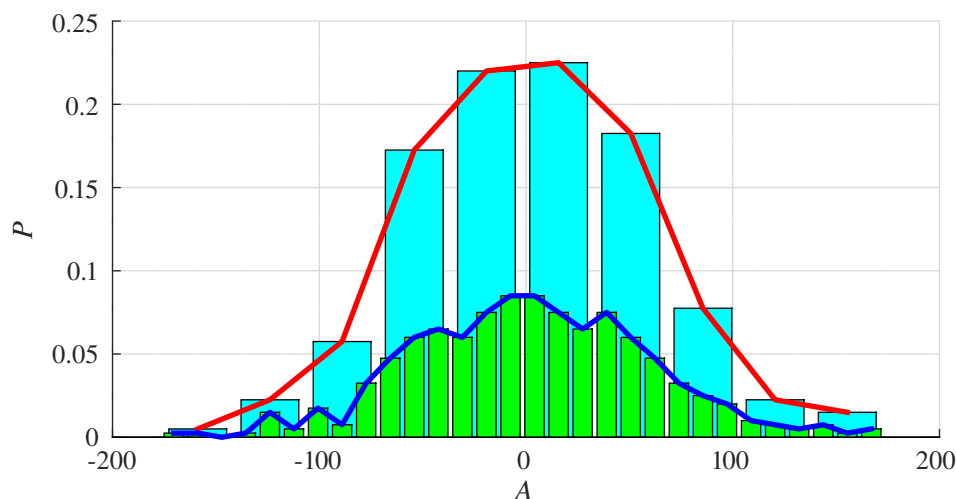


Рис. 7.1. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
Функция плотности вероятности

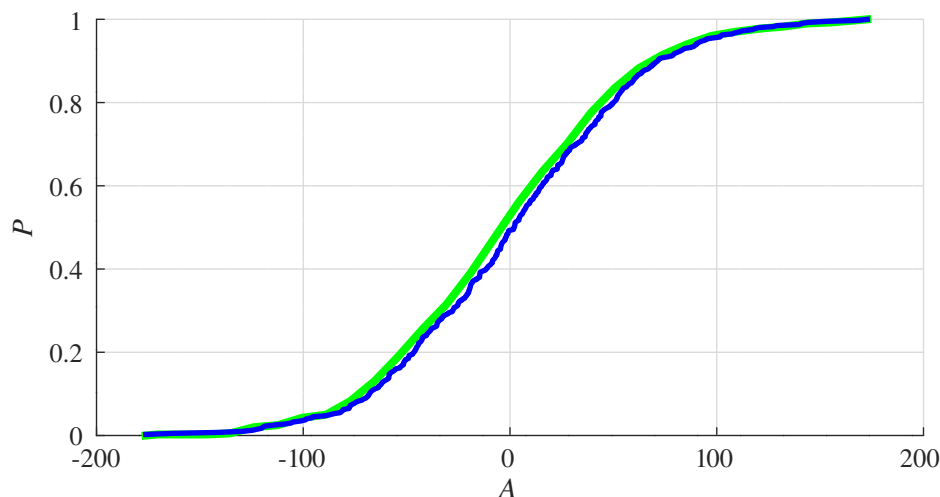


Рис. 7.2. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
Функция распределения

Далее по корреляционным функциям: АКФ по всей реализации (рис. 7.3) и ВКФ по двум равным частям данных (рис. 7.4), делаем следующий предварительный вывод о стационарности (по возможности в узком или широком смысле) и эргодичности процесса.

Проводим вычисление знаковой статистики по исходным данным без постоянной составляющей (вычитаем из данных матожидание) и получаем знаковую функцию от времени для всей реализации.

$$\text{Sign}_x(n) = \text{sign}(x_n - M_x), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Затем, используя два самых распространенных параметрических метода формализации случайного процесса: один — скользящего среднего (СС)

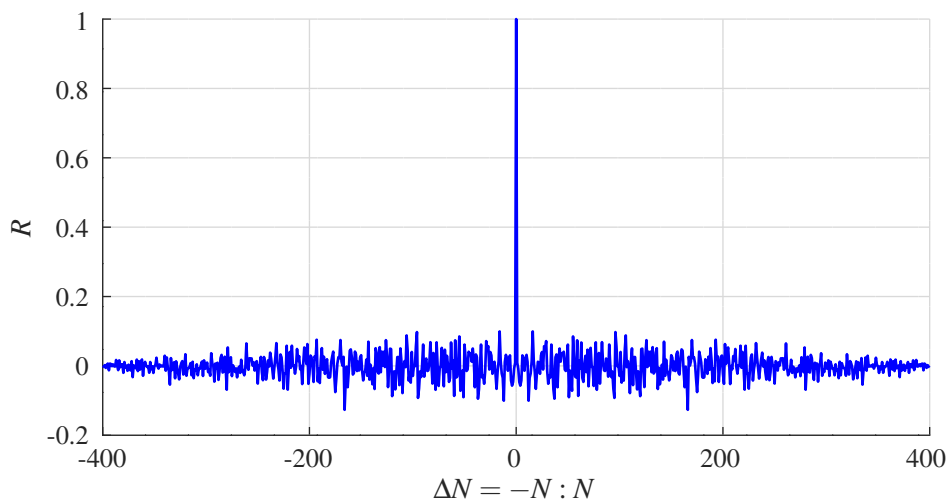


Рис. 7.3. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
Автокорреляционная функция

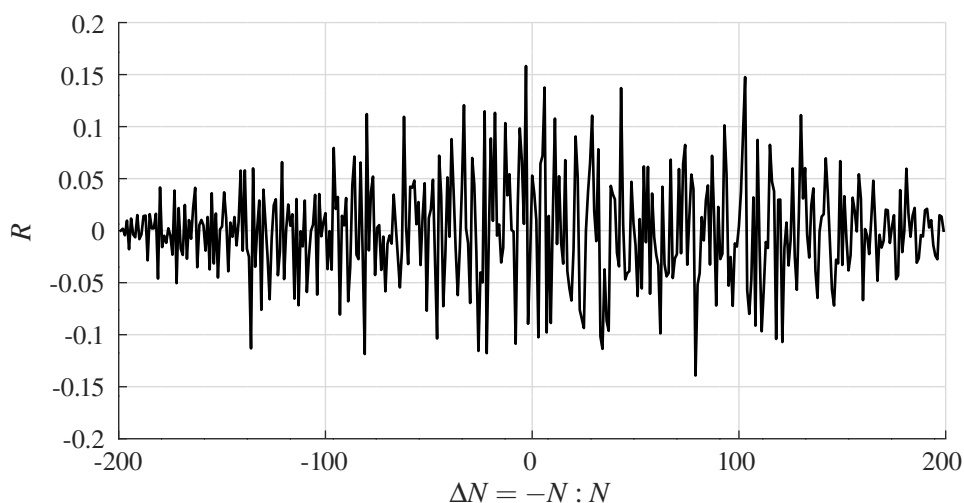


Рис. 7.4. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
ВКФ по двум половинам входных данных

и второй — авторегрессии и скользящего среднего (АРСС), вычисляем соответствующие оценки (функции) для входной реализации без постоянной составляющей (рис. 7.5).

Общая линейная модель АРСС:

$$y_{APCC}(n) = \sum_{l=0}^q b_l x_{n-l} - \sum_{k=0}^p a_k y_{n-k}, \quad (7.23)$$

где  $q$  — порядок скользящего среднего, и  $p$  — порядок авторегрессии.

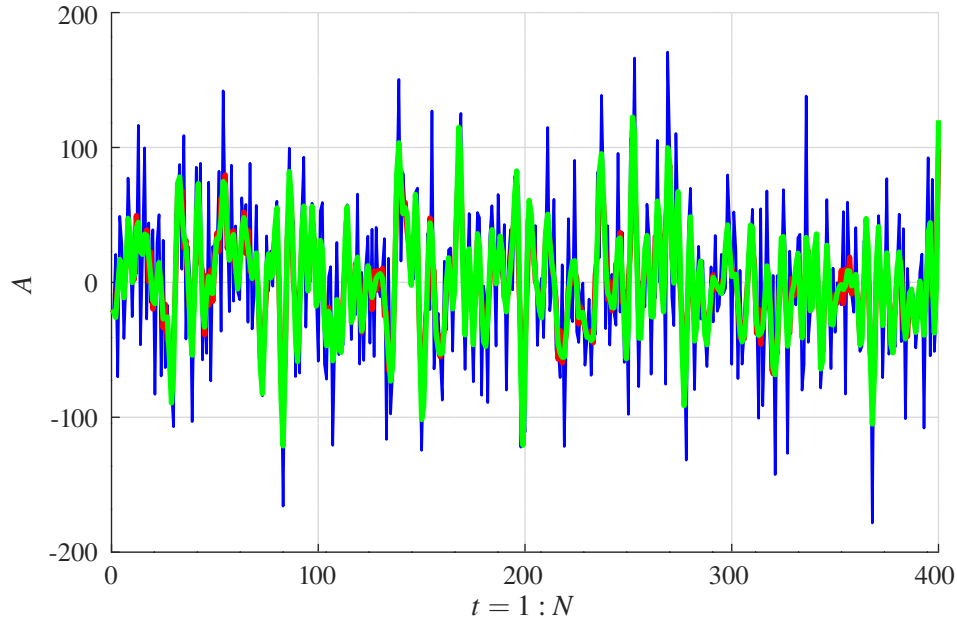


Рис. 7.5. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
Графики «BX-A0», «CC», «APCC»

Если все коэффициенты  $a_k$ , за исключением  $a_0 = 1$ , стремятся к нулю, то процесс будет строгим процессом скользящего среднего с порядком  $q$ :

$$y_{CC}(n) = \sum_{l=0}^q b_l x_{n-l}, \quad (7.24)$$

и будет зависеть только от входных отсчетов  $x(n)$ .

Если все коэффициенты  $b_k$ , за исключением  $b_0 = 1$ , стремятся к нулю, то процесс будет строгим процессом авторегрессии с порядком  $p$ :

$$y_{AP}(n) = \sum_{k=0}^p a_k y_{n-k} + \varepsilon_n. \quad (7.25)$$

Процесс называется авторегрессионным процессом (АР) в том смысле, что выходной процесс  $y(n)$  регрессирует сам на себя и  $\varepsilon_n$  представляет собой ошибку. При использовании этой модели текущее значение процесса выражается через взвешенную сумму его же предыдущих значений и шумовую составляющую. В настоящей работе АР-модель не рассматривается.

**Примечание.** Существует теорема декомпозиции Уолда, связывающая АРСС-, СС- и АР-модели, которая утверждает, что любой стационарный АРСС- или СС-процесс с конечной дисперсией можно представить единственной АР-моделью, возможно, бесконечного порядка; и, аналогично, любой АРСС- или АР-процесс можно представить как СС-процесс некоторого (возможно бесконечного) порядка. Особенность и важность этой теоремы заключена в том, что если мы из этих трех моделей выбираем наименее подходящую

модель, то мы все же можем получить приемлемую аппроксимацию, увеличив порядок модели.

Интерес к подобным моделям определяется их связью с линейными фильтрами. АРСС-модели аналогичны БИХ-фильтрам (фильтрам с бесконечной импульсной характеристикой), и СС-модели аналогичны КИХ-фильтрам (фильтрам с конечной импульсной характеристикой).

В настоящей работе при вычислении СС-модели все коэффициенты приняты  $b_l = 1$ , при вычислении АРСС-модели коэффициенты  $a_k$  и  $b_l$  рассчитаны согласно БИХ-фильтрации по Баттерворту. Порядок  $q$  и  $p$  в моделях определяет количество отсчетов, участвующих в вычислении выходной функции  $y(n)$ .

Для полученных согласно СС- и АРСС-моделям аппроксимирующих функций  $y_{CC}(n)$  и  $y_{APCC}(n)$  выполняем оценку спектральной плотности мощности (СПМ) по Уэлчу и сравниваем спектры моделей по результатам (рис. 7.6, красный график СПМ — модель СС, зеленый — модель АРСС). Далее производим частотную (спектральное ДПФ на основе косинусов) свертку полученных функций СС- и АРСС-моделей, используя дискретное косинусное преобразование (ДКП):

$$Y_{APCC(cc)}(m) = \frac{2C(m)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_{APCC(cc)}(n) \cos[\pi(2n+1)\frac{m}{2N}], \quad (7.26)$$

где

$$C(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } m = 0; \\ 1, & \text{при } m = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

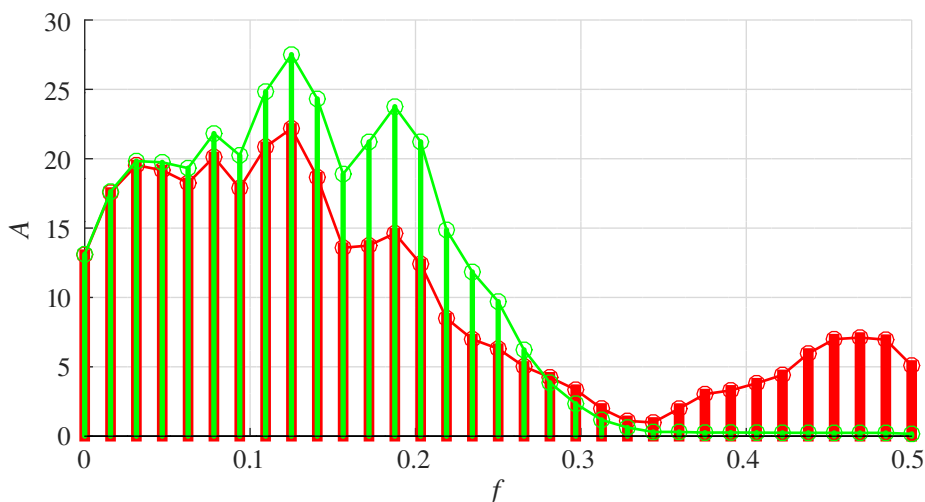


Рис. 7.6. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
График СПМ моделей «СС» и «АРСС»

В моделях используем обратное ДКП (ОДКП) как аналитическую аппроксимирующую функцию АРСС- и СС-моделей, предварительно оценив ошибки обратного преобразования. ОДКП вычисляется следующим способом:

$$y_{APCC(cc)}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} Y_{APCC(cc)}(m) \cos[\pi(2n+1)\frac{m}{2N}], \quad n = 1, \dots, N. \quad (7.27)$$

Используя полученные из входной последовательности моменты, параметры, характеристики и функции, составляются аппроксимирующие (экстраполирующие) аддитивные модели случайного процесса (рис. ??):

- для модели авторегрессии и скользящего среднего:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{APCC}(n) = & M(x_n) + y_{APCC}(n) + \\ & + 0,7 \text{Sign}_x(n) \sqrt{D(x_n - M(x_n) - y_{APCC}(n))} + \\ & + 0,3 \sqrt{D(x_n - M(x_n) - y_{APCC}(n))} * F_n[\text{Pr}_{\text{норм}}(N)], \quad n = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (7.28)$$

- для модели скользящего среднего:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{CC}(n) = & M(x_n) + y_{CC}(n) + 0,7 \text{Sign}_x(n) \sqrt{D(x_n - M(x_n) - y_{CC}(n))} + \\ & + 0,3 \sqrt{D(x_n - M(x_n) - y_{CC}(n))} * F_n[\text{Pr}_{\text{норм}}(N)], \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.29)$$

где  $M(x_n)$  — матожидание входной случайной последовательности;  $y_{APCC}(n)$  и  $y_{CC}(n)$  — аналитическая аппроксимирующая функция АРСС- или СС-модели (см. (7.27));  $\text{Sign}_x(n)$  — знаковая функция  $\text{sign}(x_n - M_x)$  входной последовательности;  $F_n[\text{Pr}_{\text{норм}}(N)]$  — нормированная шумовая функция на базе нормального распределения;  $\sqrt{D(x_n - M(x_n) - y_{CC}(n))}$  — СКО шумового остатка входной случайной последовательности минус матожидание, минус аналитическая аппроксимирующая функция АРСС- или СС-модели.

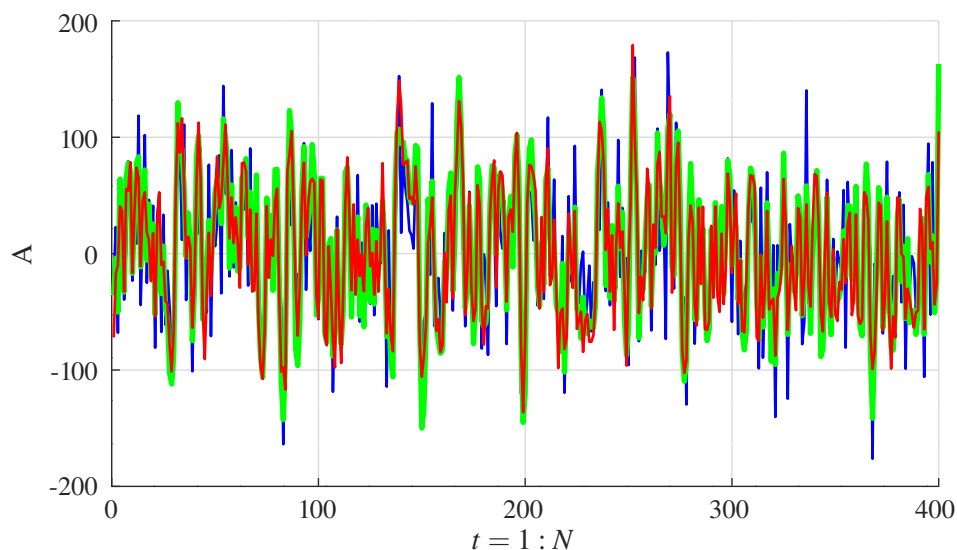


Рис. 7.7. Примеры построения графиков в лабораторной работе.  
Исходные и экстраполированные данные по моделям «СС» и «АРСС»

#### 7.4. Задания для лабораторной работы

Программа для выполнения лабораторной работы и файлы с исходными данными варианта индивидуального задания выдаются преподавателем после сдачи предварительного теоретического зачета (запись на устройство флеш-памяти или отправка по электронной почте).

#### 7.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется индивидуально. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

Исходные данные для работы представлены в виде одномерных массивов случайной последовательности с разными типами распределений случайной величины (тип указан в наименовании файла данных первой буквой — «А», «В» и т. д.; последними цифрами указаны номера вариантов). В полученной программе необходимо задать наименование файла с исходными данными (смотрите комментарии в программе). Других модификаций программы в рамках исполнения этой работы не требуется, кроме возможностей применить по желанию для расчетов числа колонок гистограммы другую формулу вычисления (по умолчанию применяется 1-я — правило Штюргеса).

Программа исполняет все необходимые расчеты, строит графики и выводит результаты в командном окне системы вычислений Octave. За один проход программы выполняется полный цикл получения результатов и графиков по двум моделям аппроксимации СС- и АРСС-модели для заданного исходного файла случайной последовательности. За каждый следующий прогон



программа выполняет расчет новой СС- и АРСС-модели аппроксимации, поэтому результаты текущего прогона будут отличаться от предыдущего. Для каждого нового прогона необходимо анализировать результаты, принимать решения по критериям, моментам и графикам, делать заключения и выводы о пригодности математической имитационной модели для аппроксимации исходных последовательностей.

По ходу работы необходимо комментировать каждый из выводимых графиков с учетом получаемых характеристик, давать оценки и делать выводы. Сопоставлять получаемые результаты расчетов статистик, параметров вероятности и моментов случайной последовательности с данными графиков.

Используя графики корреляционных функций и моменты распределения случайной величины, дать заключение о стационарности и эргодичности моделируемого процесса.

Используя различные статистики в критериях оценок согласия статистических гипотез, выполнить оценку двух модельных полученных аппроксимаций в сравнении с исходной входной случайной последовательностью на соответствие «нулевой гипотезы» по предложенным в работе критериям:

- критерию Колмогорова–Смирнова;
- критерию хи–квадрат;
- корреляционному критерию Пирсона;
- парному критерию сравнения средних;
- медианному критерию;
- критерию Манна–Уитни–Вилкоксона.

Сделать собственное заключение о соответствии или несоответствии «нулевой гипотезы» согласно предложенным критериям оценки. Выполнить анализ полученных оценок и статистических характеристик с проведением общей оценки для каждой из аппроксимирующих моделей, и дать заключение об их пригодности или непригодности к моделированию полученных исходных данных.

### ***7.5.1. Ход работы***

1. Самостоятельно теоретически изучить и методически проработать учебные материалы по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).

2. Сдать преподавателю предварительный теоретический зачет и получить допуск к выполнению работы, программу и исходные данные своего варианта.

3. Согласно номеру своего варианта выполнить лабораторную работу по полученной программе и исходным данным.

4. Используя по очереди полученные файлы с данными, выполнить расчеты, предусмотренные программой, проанализировать полученные числовые результаты и графики, принять решения по всем критериям, сделать необходимые заключения о моделях аппроксимации.

5. При решении использовать систему вычислений Octave.

6. Оформить отчет по лабораторной работе.

7. Защитить лабораторную работу.

### ***7.5.2. Содержание отчета***

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);

2) цель работы;

3) формулировку задания, формулы и другие пояснения для критериев, необходимые для защиты;

4) аналитическое принятие решения на пригодность двух используемых имитационных математических моделей по каждому из 6 критериев для двух файлов данных своего варианта;

5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;

6) при наличии — программный код решения задачи;

7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;

8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;

9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 3, 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

### ***7.5.3. Порядок защиты лабораторной работы***

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.

2. Тестирование по теме работы.

3. Задача по теме работы.

4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

### ***7.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы***

1. Поясните математическую модель задачи для принятия решений по оценке эффективности имитационных моделей аппроксимаций стохастических данных.

2. Какую нулевую гипотезу оценивает критерий Колмогорова–Смирнова?

3. Что оценивает критерий хи-квадрат?
4. Является ли парный критерий сравнения средних свободным от распределения?
5. Какую корреляцию оценивает корреляционный критерий Пирсона?
6. К каким критериям относится медианный критерий и почему?
7. Как производится оценка по непараметрическому критерию Манна–Уитни–Вилкоксона?
8. Охарактеризуйте свойства случайного процесса с точки зрения оценки стационарности и эргодичности.

# **ПРИЛОЖЕНИЕ**

## **Образец титульного листа**

Федеральное агентство связи  
ФГБОУ ВО СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Кафедра Сетей связи и передачи данных

Дисциплина: Оптимизация и математические методы принятия решений

Лабораторная работа № 1

Вариант № 1

Название лабораторной работы

Группа: ИКХХ-00  
Студент(ы): Петров Василий Иванович  
Иванов Иван Петрович  
Преподаватель: ст.преп. Владимиров С.А.

Санкт-Петербург  
2018

**Владимиров Сергей Александрович**

**ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ  
РЕШЕНИЙ**

**Лабораторный практикум**

Редактор Х. Х. Хxxxxxxxxx

План изданий 2019 г., п. ХХ

Подписано к печати ХХ.ХХ.20ХХ  
Объем 5,75 усл.-печ. л. Тираж ХХ экз. Заказ ХХХ

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ  
193232 СПб., пр. Большевиков, 22  
Отпечатано в СПбГУТ