ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
«ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Цели лабораторной работы. Исследование характеристик одноканальной системы массового обслуживания, используя аналитический и имитационный методы моделирования. Изучение особенностей работы и получение практических навыков постановки, отладки и получения результатов с помощью пакета моделирования Anylogic.

Трудоемкость лабораторной работы: 9 ч (6 ч – аудиторных, 3 ч – самостоятельная работа студента)**.**

Компетенции студента, формируемые в результате выполнения лабораторной работы.

– способность проводить моделирование процессов и систем (ПК-5);

– способность обосновывать правильность выбранной модели, сопоставляя результаты экспериментальных данных и полученных решений (ПК-25).

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим модель системы, состоящей из одного канала обслуживания запросов, поступающих на вход системы (одноканальная СМО), используя аналитический и имитационный подход.

<u>Аналитическая модель одноканальной СМО</u>

При ряде упрощающих предположений (допущение об отсутствии последействия) для оценки вероятностно-временных характеристик процесса обслуживания можно использовать дискретно-событийный подход к моделированию. Самая известная модель – это СМО типа М/М/1, где М – процессы поступления и обслуживания заявок, интервалы времени которых распределены по экспоненциальному закону, 1 – число обслуживающих устройств. При этом предполагается, что поток входных заявок является простейшим.

Простейший поток обладает следующими свойствами:

стационарностью – вероятность характеристик потока не зависит от времени*;*

отсутствием последействия – заявки поступают не зависимо друг от друга, длина интервала времени до момента поступления следующей заявки не зависит от того, поступила в начальный момент заявка или нет;

ординарностью – в каждый момент времени в систему может поступить не более одной заявки.

Для простейшего потока число заявок, поступающих в систему за промежуток времени t, описывается распределением Пуассона.

$$P(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}, \tag{14}$$

вероятность того, что за время t в систему поступит точно n заявок; λ – интенсивность потока заявок.

Для того, чтобы при моделировании задать пуассоновский поток заявок в систему, достаточно задать экспоненциальное распределение интервалов времени поступления для соседних заявок.

Длительность обслуживания экспоненциально распределена с плотностью

$$f(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \tag{15}$$

μ – интенсивность обслуживания – количество заявок, которое может быть обслужено в единицу времени.

Соответственно

$a = 1/\lambda$ – средний интервал времени между поступлением заявок;

$b = 1/\mu$ – среднее время обслуживания заявок.

Для стационарного режима (λ<<μ) справедливо рекуррентное соотношение для расчета вероятностей

$$(1+\rho)\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n=1} + \rho \cdot \mathrm{P}_{n-1}, \ \mathrm{n}>1, \ \ \mathrm{P}_1 = \rho \cdot \mathrm{P}_0, \tag{16}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – загрузка системы (характеристика качества функционирования системы),

Так как $\mathrm{P}_0 = 1-\rho$ – вероятность того, что заявки в системе отсутствуют, то

$$\mathrm{P}_n = \rho^n \cdot (1-\rho). \tag{17}$$

вероятность того, что в системе находится n – заявок.

Среднее и дисперсия числа заявок в системе определяются как:

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = (1-\rho) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{18}$$

$$\sigma_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n-m)^2 \cdot P_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \tag{19}$$

Среднее и дисперсия числа заявок, находящихся в очереди к прибору, соответственно равны:

$$l = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = (1-\rho) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^n = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{20}$$

$$\sigma_l^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n-m)\cdot P_n - m^2 = \frac{\rho^2\cdot(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}. \quad (21)$$

Вероятность того, что время пребывания заявки в системе T не превосходит t при условии, что длина очереди l=n определяется из условия

$$P(T < t|l = n) = \int_0^t \frac{\mu^{n+1}\cdot\tau^n\cdot e^{-\mu\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau, \quad (22)$$

где Г(n) – гамма-функция.

По формуле полной вероятности можно определить вероятность того, что время пребывания заявки в системе T не превосходит t

$$Q(t) = P(T \le t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T \le t|l = n)\cdot\rho\cdot(1-\rho) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}. \quad (23)$$

Среднее и дисперсия времени пребывания заявки в системе рассчитывается по формулам

$$u = \int_0^{\infty} t dQ(t) = \frac{1}{\mu\cdot(1-\rho)}, \quad (24)$$

$$\sigma_u^2 = \int_0^{\infty}(t-u)^2 dQ(t) = \frac{1}{(\mu\cdot(1-\rho))}. \quad (25)$$

Возможности оценки характеристик стохастических систем при помощи аналитических моделей ограничены по сравнению с имитационными моделями, созданными в специализированных пакетах моделирования (GPSS World, Anylogic, Matlab Simulink, и др.) или использующими специально разработанные языки моделирования (GPSS, UML). Эти ограничения вызваны:

– различием в обслуживании заявок разных типов, например, связанных с наличием приоритетов;

– невозможностью представления в аналитических моделях обслуживания заявок одновременно несколькими приборами;

– трудностями получения зависимостей в явной аналитической форме при большом числе систем в сети; сети, содержащие более трех систем, уже не поддаются аналитическому исследованию [4,5].

Минимальное время моделирования, можно определить из следующей зависимости

$$\Delta t = (a + b). \quad (26)$$

Имитационная модель одноканальной СМО

Имитационная модель представляет собой систему, отображающую структуру и функционирование исходного объекта в виде алгоритма, связывающего входные и выходные переменные, принятые в качестве характеристик исследуемого объекта. При ее реализации на ЭВМ производится накопление статистических данных по тем атрибутам модели, характеристики которых являются предметом исследований. По окончании моделирования накопленная статистика обрабатывается, и результаты моделирования получаются в виде выборочных распределений исследуемых величин [1,3,5].

Библиотека Моделирования Процессов AnyLogic поддерживает дискретно-событийный ("процессный") подход моделирования. С помощью объектов Библиотеки Моделирования Процессов вы можете моделировать системы реального мира, динамика которых представляется как последовательность операций (прибытие, задержка, захват ресурса, разделение, ...) над агентами, представляющими клиентов, документы, звонки, пакеты данных, транспортные средства и т.п. Эти агенты могут обладать определёнными атрибутами, влияющими на процесс их обработки (например, тип звонка, сложность работы) или накапливающими статистику (общее время ожидания, стоимость).

Процессы задаются в форме потоковых диаграмм (блок-схем) - графическом представлении, принятом во многих областях: производстве, бизнес-процессах, центрах обработки звонков, логистике, здравоохранении и т.д. Потоковые диаграммы AnyLogic иерархичны, масштабируемы, расширяемы и объектно-ориентированы, что позволяет пользователю моделировать сложные системы любого уровня детальности.

Пример процесса создания дискретно-событийной модели и сбора статистики в программе AnyLogic приведен в Приложении А.

Одноканальная экспоненциальная СМО содержит

– блок *Source* (источник заявок), в параметрах которого следует задать экспоненциальный закон распределения интервала поступления заявок;

– блок *Queue* (очередь), в параметрах которого следует установить вместимость накопителя;

– блок *Delay* (задержка), моделирующий работу одного прибора, в его параметрах следует также задать экспоненциальный закон распределения времени обработки заявок;

– блок *Sink* (уничтожает обработанные заявки).

Полная последовательность блоков описания модели приведена в Таблице 2.

Таблица 2 – Блоки описания модели с учетом блоков сбора статистики

№ блока	**Имя блока**	**Параметры блока**	**Комментарии**
1	Source	интенсивность (или интервал) поступления заявок, закон распределения интервалов поступления заявок	интенсивность λ обратнопропорциональна интервалу a
2	Queue	вместимость очереди	поставить заявку в очередь к прибору
3	Delay	интенсивность (или время задержки) обслуживания, закон распределения интервалов обслуживания заявок	интенсивность μ обратнопропорциональна времени задержки b
4	Sink		

Программа и методика выполнения работы.

1. Оценить аналитическими методами вероятность нахождения в системе n заявок P_n (3) для n = 0,1,2,…,10, среднее число и дисперсию числа заявок в системе и в очереди (5,6,7,8).

2. Построить графики функции распределения времени пребывания заявки в системе $Q(t)$ (9), (10) для $t = 0,\ \Delta t,\ 2{*}\Delta t,\ldots,10{*}\Delta t$.

3. Оценить среднее и дисперсию времени пребывания заявки в системе (11), (12).

4. Запрограммировать модель одноканальной СМО, в соответствии с требованиями программы моделирования (Приложение А). Подставить в нее исходные данные (для источника и обслуживающего прибора) согласно варианту задания. Вывести всю необходимую статистику и сохранить ее для дальнейшего анализа.

5. Повторить п.4, введя в программу снятие статистики об ожидании в очереди при обслуживании устройством. Сопоставить полученные файлы результатов. Определить среднее время пребывания заявки в системе u.

6. Повторить п.4 для значений $t = \Delta t,\ 5{*}\Delta t,\ldots,50{*}\Delta t$. Определить u. Построить график зависимости u и коэффициента использования прибора (загрузки системы ρ).

7. Сравнить результаты моделирования с расчетами по аналитическим зависимостям. Сделать выводы.

8. Оформить отчет по работе.

Таблица 2 – Варианты задания

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ, с$^{-1}$	*3,5*	*2,4*	*1,5*	*0,8*	*3,0*	*4,5*	*3,0*	*9,0*	*20*	*30*
μ, с$^{-1}$	*7,0*	*4,0*	*2,0*	*1,0*	*5,0*	*5,0*	*4,0*	*10*	*25*	*40*
№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
λ, с$^{-1}$	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
***b*, с**	*9,5*	*3,0*	*2,5*	*2,0*	*1,0*	*1,5*	*0,5*	*1,0*	*1,0*	*0,8*
№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
***a*, с**	*2,0*	*5,0*	*3,5*	*2,5*	*2,0*	*1,6*	*1,25*	*1,0*	*0,6*	*0,5*
***b*, с**	*0,1*	*2,5*	*3,0*	*2,0*	*1,5*	*1,0*	*1,0*	*0,7*	*0,2*	*0,1*

Описание лабораторной установки.

При выполнении лабораторной работы используется компьютер с установленным программным пакетом Anylogic. Пример создания дискретно-событийной модели приведен в приложении А.

Результаты экспериментальных исследований.

После прогона модели будет получена статистика об использовании устройства и состоянии очереди на входе устройства. Оценкой среднего времени пребывания заявки в системе по имитационной модели может служить величина *u*, рассчитываемая по формуле (24).

Сопоставляя результаты моделирования с расчетами по аналитическим зависимостям:

– среднего время пребывания заявки в системе,
– значений загрузки системы,
– наличия очереди и ее характеристик,

можно на примере простейшей СМО качественно оценить пригодность использования аппарата имитационного моделирования.

Содержание отчета.

Отчет по выполняемой лабораторной работе выполняется каждым студентом индивидуально на листах формата А4 в рукописном или машинном варианте исполнения и должен содержать:

– название работы;
– цель и задачи исследований;
– результаты расчетов (таблицы, графики) по аналитическим зависимостям;
– структурная схема модели;
– графики зависимости длины очереди, загрузки и среднего времени пребывания заявки в системе от времени моделирования Δt;
– выводы по работе.

Контрольные вопросы

– Какие математические модели применяются для аналитического моделирования дискретных систем? Чем отличаются эти модели?
– Какими основными характеристиками пользуются для моделирования СМО и СеМО?
– Что такое поток событий?
– К каким классам задач, применим аппарат имитационного моделирования?
– Свойства простейшего потока событий.
– Граф состояний одноканальной СМО с очередью.
– Для чего применяется программа Anylogic?
– Каково назначение блока delay?
– Как описывают устройства обслуживания и очереди в Anylogic?
– Каким образом производится генерация случайных чисел с заданным законом распределения в программе Anylogic?

Библиографический список рекомендуемой литературы

1. Салмина Н.Ю. Имитационное моделирование [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Салмина Н.Ю.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Эль

Контент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.— 90 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13930.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

2. Замятина О.М. Моделирование сетей [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Замятина О.М.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский политехнический университет, 2012.— 160 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/34683.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

3. Шелухин О.И. Моделирование информационных систем [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Шелухин О.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: Горячая линия - Телеком, 2012.— 536 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12002.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.