СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Определенный интеграл как предел интегральных сумм,

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и не этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, ... x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ - выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i, $i = \overline{1,n}$..

Сумма вида $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt;$

4) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;$

5) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx;$ 7) $(\int\limits_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$

8) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$ где $c \in [a;b]$ (теорема о среднем);

9) Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$;

10) Если М- наибольшее, m- наименьшее значения $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;

Формула Ньютона Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$.

Интегрирование четных и нечетных функций

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \ \ \textit{если } f(x) - \textit{нечетная функция}; \\ 2\int\limits_0^a f(x)dx, \ \textit{если } f(x) - \textit{четная функция}. \end{cases} \qquad (3)$$

Интегрирование по частям

Если функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b U(x)dV(x) = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x) \qquad (4)$$

Интегрирование подстановкой

Пусть $x=\varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами (1 рода)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \mathop{Lim}_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \mathop{Lim}_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx. \qquad (6)$$

Несобственные интегралы 1 рода называются сходящимися, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (6).

Интегралы от неограниченных функций (2 рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a;b]$ и имеет разрыв 2 рода при $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (7)$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad (8)$$

Если предел, стоящий в правой части равенств (7) или (8) существует, то несобственный интеграл 2 рода называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Если функция $y = f(x)$ терпит разрыв 2 рода во внутренней точке $c \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

В этом случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры (геометрический смысл определенного интеграла)

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу - отрезком $[a;b]$ оси ох, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (9)$$

Если $f(x) \le 0$ при , $x \in [a;b]$ то $S = -\int_a^b f(x)dx.$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, прямыми $x = a,\ x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (10)$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = g(y)$, прямыми $y = c,\ y = d$ и отрезком $[c;d]$ оси оу, то площадь этой трапеции вычисляется по формуле $S = \int_c^d g(y)dy.$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \ge 0,\ t \in [t_1;t_2],$, прямыми $x = a$ и $x = b,$ и отрезком $[a;b]$ оси ох, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (11)$$

где $t_1,\ t_2$ определяются из равенств $a = x(t_1),\ b = x(t_2).$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta\ \ (\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi, \qquad (12)$$

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки A(a; c), B(b; d). Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле:

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \qquad (13)$$

$$l = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + (x')^2}\,dy \qquad (14)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1; t_2]$, то длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt \qquad (15)$$

Усли кривая задана уравнением в полярних координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi \qquad (16)$$

Объем тела вращения

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой

$y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \tag{17}$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$. и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d$, то объем тела вращения равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \tag{18}$$

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+3x^3} dx$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+3x^3} dx = [\sqrt{1+3x^3} = t,\ 1+3x^3 = t^2,\ 9x^2 dx = 2tdt,$$

$$x^2 dx = \frac{2}{9} tdt,\ x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = 1 \Rightarrow t = 2] = \frac{2}{9} \int_1^2 t \cdot tdt = \frac{2}{9} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{27}(8-1) = \frac{14}{27}$$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 (x^2-3x)\cos 4x dx$$

Применим формулу интегрирования по частям (4).

$$\int_0^1 (x^2-3x)\cos 4x dx = \begin{bmatrix} U = x^2-3x; & dU = (2x-3)dx \\ V = \cos 4x dx; & V = \frac{1}{4}\sin 4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-3x)\sin 4x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 (2x-3)\sin 4x dx = -\frac{1}{2}\sin 4 -$$

$$-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} U = 2x-3; & dU = 2dx \\ dV = \sin 4x dx; & V = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 4 +$$

$$+\frac{1}{16}(2x-3)\cos 4x\Big|_0^1 - \frac{2}{16}\int_0^1 \cos 4x dx = -\frac{1}{2}\sin 4 - \frac{1}{16}\cos 4 + \frac{3}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\sin 4x\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\sin 4 - \frac{1}{16}\cos 4 + \frac{3}{16} - \frac{1}{32}\sin 4 =$$

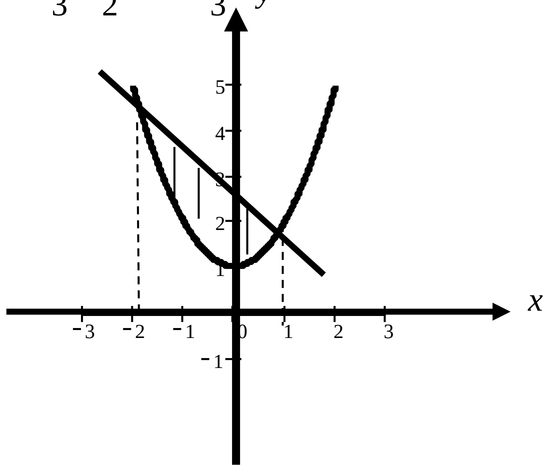
$$= -\frac{17}{32}\sin 4 - \frac{1}{16}\cos 4 + \frac{3}{16}$$

Задача 3. а) Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2+1$ и прямой $y + x = 3$. Выполнить чертеж.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2+1; \\ y + x = 3. \end{cases}$ Решая систему, получим $x_1 = 1,\ x_2 = -2.$ Искомая площадь по формуле (10) равна:

$$S=\int_{-2}^{1}((3-x)-(x^2+1))dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\Bigg|_{-2}^{1}=$$

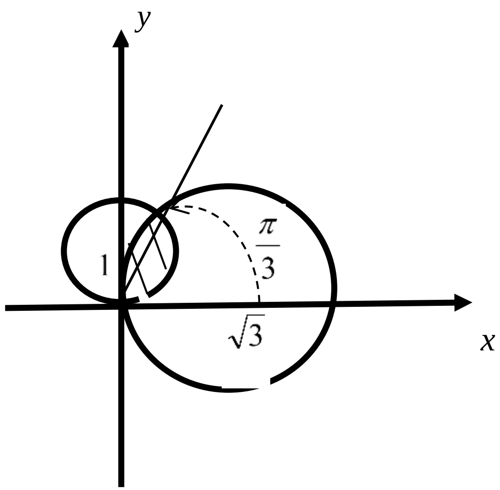
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-(\frac{8}{3}-2-4)=4{,}5.$$



б) Вычислить площадь, ограниченную линиями $r=2\sin\phi$ и $r=2\sqrt{3}\cos\phi$.

Для построения чертежа преобразуем уравнения кривых из полярных координат в декартовые.

$r=2\sin\phi$	$r=2\sqrt{3}\cos\phi$
$r^2=2r\sin\varphi$	$r^2=2\sqrt{3}r\cos\phi$
$x^2+y^2=2y$	$x^2+y^2=2\sqrt{3}x$
$x^2+y^2-2y+1=1$	$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2=3$
$x^2+(y-1)^2=1$	$(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$



Найдем точки пересечения окружностей.

$$\begin{cases} r = 2\sin\phi, \\ r = 2\sqrt{3}\cos\phi, \end{cases} \qquad 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} tg\varphi, \quad tg\varphi = \sqrt{3}, \;\; \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

По формуле (12) получим:

$$S = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2\phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 12\cos^2\phi d\phi\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2\phi d\phi + 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\phi d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\phi)d\phi + 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\phi)d\phi = (\phi - \frac{1}{2}\sin\,2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} +$$

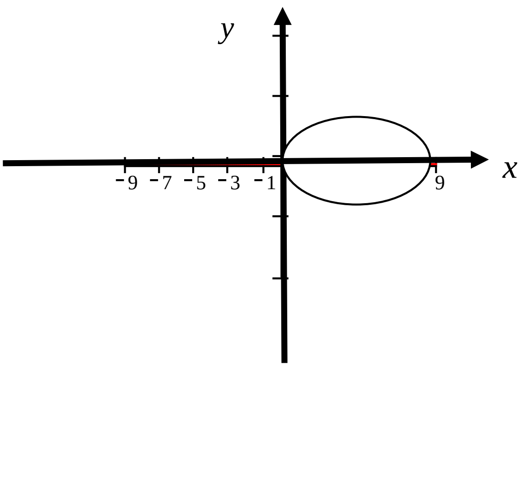
$$+3(\phi + \frac{1}{2}\sin\,2\phi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\,\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{3}{2}\sin\,\frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$$

в)Найти площадь петли $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$.

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями. Имеем: $x = 0$ при $t = 0$; $y = 0$ при $t = 0,\ t = \pm\sqrt{3}.$

При $0 \le t \le \sqrt{3},\ \ x \ge 0.$ Площадь фигуры находим по формуле (11).

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3)6tdt = \int_0^{\sqrt{3}} (18t^2 - 6t^4)dt = (6t^3 - \frac{6t^5}{5})\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{5}.$$



Задача 4.

а) Вычислить длину дуги кривой $y = Lnx$ на участке от

$x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{24}$.

По формуле (13) получим:

$$L = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}} \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}\, dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{1+x^2} = t, & dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}, \\ x = \sqrt{t^2-1}, & 2 \le t \le 5 \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_2^5 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int\limits_2^5 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = \int\limits_2^5 (1 + \frac{1}{t^2-1}) dt = t + \frac{1}{2} Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^5 =$$

$$= 5 + \frac{1}{2} Ln\frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{2} Ln\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{2} Ln2$$

б) Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \sin\varphi)$.

Имеем: $r \ge 0$, $r' = a\cos\varphi$. По формуле (16)

$$L = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1+\sin\varphi)^2 + a^2\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2\varphi + 2\sin\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = 2a \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\sin\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}) d\varphi = 2\sqrt{2}a(2\sin\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8\sqrt{2}a\sin\frac{\pi}{4} = 8a.$$

Найти площадь одного лепестка „розы" $r = a\cos 2\varphi,\ \ a > 0.$

$$r \geq 0,\ \ a\cos 2\varphi \geq 0,\ \ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}(\varphi + \frac{1}{4}\sin\ 4\varphi)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Задача 5. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $yx = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси ox .

По формуле (17) : $V_x = \pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}dx = -16\pi\frac{1}{x}\Big|_1^4 = -16\pi(\frac{1}{4}-1) = 12\pi$

Задача 6. Следующие несобственные интегралы исследовать на сходимость и в случае сходимости указать значения интегралов

а) $\int_7^{\infty}\frac{dx}{x^2-36}$

По определению несобственного интеграла первого рода (6) имеем:

$$\int_{7}^{\infty}\frac{dx}{x^2-36}=\lim_{b\to\infty}\int_{7}^{b}\frac{dx}{x^2-36}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{12}Ln\left|\frac{x-6}{x+6}\right|\Bigg|_{7}^{b}=$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{b\to\infty}(Ln\left|\frac{b-6}{b+6}\right|-Ln\frac{1}{13})=\frac{1}{12}\lim_{b\to\infty}(Ln1-Ln\frac{1}{13})=\frac{1}{12}Ln13,$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{1}{12}Ln13$.

б) $\int_{0}^{10}\frac{dx}{x-10}$

Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=10$, т. к. $\lim_{x\to10}\frac{1}{x-10}=\infty$. Согласно формуле (7) имеем

$$\int_{0}^{10}\frac{dx}{x-10}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0}^{10-\varepsilon}\frac{dx}{x-10}=\lim_{\varepsilon\to0}Ln|x-10|\Big|_{0}^{10-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}(Ln|10-\varepsilon-10|-Ln10)=-\infty$$

Интеграл расходится.

3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Задача 1 Вычислить определенный интеграл

1.1 $\int_{1}^{e}\frac{1+Lnx}{x}dx$

1.16 $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^4}dx$

1.2 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{5+3\sin x}dx$

1.17 $\int_{0}^{\sin 1}\frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.3 $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{(Lnx)^3}{3x} dx$

1.4 $\int\limits_{0}^{1} \frac{2arctgx - x}{1 + x^2} dx$

1.5 $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin Lnx}{x} dx$

1.6 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{6 - 5\cos x} dx$

1.7 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

1.8 $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$

1.9 $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

1.10 $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x(1 + Ln^2 x)} dx$

1.11 $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$

1.18 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx$

1.19 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$

1.20 $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx$

1.21 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x - (arctgx)^4}{1 + x^2} dx$

1.22 $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + x^2}} dx$

1.23 $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

1.24 $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{1 + Lnx}}{x} dx$

1.25 $\int\limits_{0}^{1} \frac{arctgx + x}{1 + x^2} dx$

1.26 $\int\limits_{0}^{2} \frac{3x}{1 + x^4} dx$

1.12 $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{3+2x^8} dx$

1.13 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$

1.14 $\int^{e} \frac{\sin Lnx}{x} dx$

1.15 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos x}{6-5\sin x} dx$

1.27 $\int\limits_{1}^{e} \frac{(Lnx)^2}{6x} dx$

1.28 $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$

1.29 $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+Lnx}{x} dx$

1.30 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Задача 2 Вычислить определенный интеграл

2.1 $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2x dx$

2.2 $\int\limits_{-1}^{0} (x^2+4x+3)\sin 4x dx$

2.3 $\int\limits_{0}^{\pi} (2-3x^2)\cos 4x dx$

2.4 $\int\limits_{0}^{\pi} (-4x^2+6)\cos 5x dx$

2.16 $\int_0^{\pi/2} (x^2+3) sin 2x dx$

2.17 $\int\limits_{-1}^{0} (x^2-2x-3)\cos 3x dx$

2.18 $\int\limits_{-3}^{0} (x^3+4x+3)\sin x dx$

2.19 $\int\limits_{-1}^{0} (5-3x^2)\sin 5x dx$

2.5 $\int_{-2}^{1}(x^2+4x+4)\cos x dx$

2.20 $\int_{-1}^{2}(6x-x^2)\sin 6x dx$

2.6 $\int_{1}^{2} xLnx dx$

2.21 $\int_{0}^{1} \arccos x dx$

2.7 $\int_{0}^{1}(x+1)Ln(x+1)dx$

2.22 $\int_{0}^{1} \arcsin x dx$

2.8 $\int_{0}^{2}(x+1)^2 Ln(x+1)dx$

2.23 $\int_{0}^{3} arctg\sqrt{x}dx$

2.9 $\int_{1}^{e}\sqrt{x}Lnx dx$

2.24 $\int_{0}^{1} xarctgx dx$

2.10 $\int_{1}^{2} x^2 Lnx dx$

2.25 $\int_{-1}^{0} \arccos x dx$

2.11 $\int_{-2}^{0}(x^2+2x)e^{3x}dx$

2.26 $\int_{2}^{4}(2-3x^2)\cos 3x dx$

2.12 $\int_{1}^{2}(-2x^2-5x)e^{-2x}dx$

2.27 $\int_{0}^{1}(x^2+6)\sin 2x dx$

2.13 $\int_{0}^{e}(3x^2-2x)e^{4x}dx$

2.28 $\int_{1}^{3}(2-x^2)e^{4x}dx$

2.14 $\int_{-1}^{0}(x^2+2)e^{-3x}dx$

2.29 $\int_{4}^{5}(x-3)Ln(x-3)dx$

2.15 $\int\limits_{-2}^{-1}(2-3x^2)e^{3x}dx$ 2.30 $\int\limits_{0}^{1}x\arcsin 2x dx$

Задача 3 Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями. Выполнить чертеж.

3.1 а) $y=\dfrac{1}{x},\ y=0,\ x=2,\ x=3;$

б) $r=2\cos\phi,\ r=\cos\varphi;$

в) $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=6\sin t.\end{cases}$

3.2 а) $y=4-x^2,\ y=x^2-2x;$

б) $r=\sin 3\phi;$

в) $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t).\end{cases}$

3.3а) $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0;$

б) $r=\sin\phi,\ r=2\sin\phi;$

в) $\begin{cases}x=3\cos^3 t,\ \ x=1,\ x\ge 1,\\ y=3\sin^3 t.\end{cases}$

3.4 а) $y=x^2,\ y=2-x^2;$

б) $r=2\cos\phi,\ r=3\cos\phi;$

в) $\begin{cases}x=t-\sin t, 0<x<2\pi\\ y=1-\cos t.\end{cases}$

3.5а) $y=Lnx,\ x=e,\ \ y=0;$

б) $r=\sin\phi,\ r=\cos\phi;$

3.16 а) $y=4-x^2,\ y=0;$

б) $r=\cos\phi,\ r=4\cos\phi;$

в) $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

3.17 а) $x=(y-2)^2, y=4x-8;$

б) $r=2\sin\phi,\ r=4\sin\phi;$

в) $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=2\sqrt{2}\sin t.\end{cases}$

3.18 а) $x=4-y^2,\ x=0;$

б) $r=3\cos\phi,\ r=2\cos\phi;$

в) $\begin{cases}x=9\cos t,\\ y=4\sin t.\end{cases}$

3.19 а) $x=(y-2)^2, y=4x-8;$

б) $r=2\cos\phi,\ r=2;$

в) $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=6\sin^3 t.\end{cases}$

3.20 а) $y=\dfrac{2}{x},\ y=x, y=\dfrac{x}{2};$

б) $r=1,\ r=1-\sin\phi;$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \ \textit{петля}, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

3.6а) $y = x^2 + 4x, \ y = x + 4;$

б) $r = \cos 2\phi;$

в) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, x = 1, \ x \geq 1 \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$

3.21 а) $y^2 = 2x + 1, \ y = x - 1;$

б) $r = 3(1 + \sin\phi), -\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq 0;$

в) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

3.7а) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$

б) $r = 5\cos\phi;$

в) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \ \textit{петля}, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

3.22 а) $y = -x^3, \ y = -9x,;$

б) $r = 3\sin\phi, \ r = \sqrt{3}\cos\phi;$

в) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t). \end{cases}$

3.8а) $y = 4x + x^2 + 5, \quad x = 0$

$y = 0, \ y = 1;$

б) $r = \sqrt{3}\sin\phi;$

в) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, x = 1, \ x \geq 1 \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

3.23 а) $y = \sin x, \ y = 2\sin x,$

$x = 0, x = \frac{3\pi}{4};$

б) $r = 6(1 - \sin\phi);$

в) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t. \end{cases}$

3.9а) $y = 4x - 8, \quad y = (x - 2)^3;$

б) $r = \cos 2\phi;$

в) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

3.24 а) $y = \sin x, \ y = 2\sin x,$

б) $r = 3(1 + \sin\phi);$

в) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t. \end{cases}$

3.10а) $y = 4 - x^2, \ y = x^2 - 2x;$

б) $r = 2(1 - \cos\phi);$

3.25 а) $y^2 = 2x + 1, \ y = x - 1;$

б) $r = 3\sin 3\phi;$

в) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, x = 1,\ x \ge 1 \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 3t^2,\ \textit{петля}, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

3.11а) $y = 6x - x^2, \quad y = 0;$
б) $r = 4(1 + \cos\phi);$
в) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), y = 2, y \ge 2. \end{cases}$

3.26 а) $y = -x^3,\ y = -9x,;$
б) $r = 4(1 - \sin\phi);$
в) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 6\sin t. \end{cases}$

3.12а) $y = 6x - x^2 - 8, \quad y = 0$
б) $r = \cos 3\phi;$
в) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, y = 4, y \ge 4. \end{cases}$

3.27 а) $y = 8x + x^2 - 12, \quad x = 0$
б) $r = 1 - \sin\phi, r = 1;$
в) $\begin{cases} x = t^2,\ \textit{петля}, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

3.13а) $y = (x-2)^2,$
$x = 4y - 8,$
б) $r = 2(1 - \cos\phi), r = 2;$
в) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, y = 3, y \ge 3. \end{cases}$

3.28 а) $y = \cos x,\ y = 0,$
$y = 0,\ y = -3$
б) $r = 2\cos\phi, r = \sin\phi;$
в) $\begin{cases} x = t^2 + 1,\ \textit{петля}, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

3.14а) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4;$
б) $r = \cos 2\phi;$
в) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, x = 1,\ x \ge 1 \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$

3.29 а) $y^2 = 2x + 1,\ y = x - 1;$
б) $r = 1,\ r = 1 - \sin\phi;$
в) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

3.15а) $xy = 8,\ y = 8x^3, y = 27;$
б) $r = 2\cos\phi,\ r = 4;$

3.30 а) $y = x^3, y = x^2,$
$x = -2, x = 1,$
б) $r = 2(1 - \cos\phi), r = 2;$

в) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

Задача 4. Вычислить длины дуг кривых

4.1 $y = 1 - Ln\sin x,\ x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

4.2 $r = 2(1 - \cos\phi);$

4.3 $y = Ln(1 - x^2),\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

4.4 $y = 2x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 11,$

4.5 $y = \arcsin e^x,$

$x \in [-Ln7, -Ln2]$

4.6 $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}},\ 0 \le x \le 9,$

4.7 $y^2 = 9 - x, y = -3,\ \ y = 0,$

4.8 $y = Ln(1 - x^2),\ x \in [0, \frac{3}{4}]$

4.9 $y = Ln\frac{e}{cosx},\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

4.16 $y = Ln(x^2 - 1),\ x \in [2, 3]$

4.17 $y = Ln\sin x,\ x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

4.18 $\begin{cases} y = e^t\cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x = e^t\sin t. \end{cases}$

4.19 $y = \frac{x^2}{4},\ 0 \le x \le 2,$

4.20 $y = \frac{x^2}{2} - \frac{Lnx}{4},\ 1 \le x \le 3,$

4.21 $y = 4 - \frac{x^2}{2},\ y \ge 0,$

4.22 $y = \sqrt{x - 1},\ 1 \le x \le 2,$

4.23 $y = 5e^{\frac{5}{12}\phi},\ \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

4.24 $y = Ln7 - Lnx,$

$x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

4.10 $y = 1 - Ln\sin x,\ x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

4.11 $y = 2x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 11,$

4.12 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, t \in [0,\pi] \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

4.13 $y = Ln\cos x,\ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

4.14 $y = Ln(1 - x^2),\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

4.15 $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}},\ 0 \le x \le 8,$

4.25 $y = Ln\sin x,\ x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

4.26 $y = \frac{x^2}{2} - \frac{Lnx}{4},\ 1 \le x \le 3,$

4.27 $\begin{cases} x = t - \sin t,\ t \in [0,2\pi] \\ y = 1 - \cos t,\ \ y = 0. \end{cases}$

4.28 $y^2 = 9 - x, y = -3,\ \ y = 0,$

4.29 $y = 4 - \frac{x^2}{2},\ y \ge 0,$

4.30 $y = \sqrt{x-1}, 1 \le x \le 2,$

Задача 5. Найти объем тела, полученного вращением указанных линий. Выполнить чертеж.

5.1 $xy = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 4,\ \ y = 0\ (ox);$

5.2 $(y-3)^2 + 3x = 0,\ \ \ x = -3\ (ox);$

5.3 $y^2 = 16 - x,\ x = 0\ (oy);$

5.4 $y = x^3, x = 0\ \ \ y = 8,\ (oy);$

5.5 $y^2 = 4 - x,\ x = 0\ (oy);$

5.6 $y = x^2,\ \ \ y = 4\ (oy);$

5.7 $y = x^3,\ y = x^2\ (oy);$

5.8 $y = 2\sin x,\ 0 \le x \le \pi\ \ (ox);$

5.9 $y^2 = 6x,\ x = 3,\ \ x = 5\ \ (ox);$

5.10 $3x - 4y = 0,\ 3x - y = 0,\ \ y = 3\ (ox);$

5.11 $2y = 16 - x^2,\ y - 4 = 0,\ \ y = 0\ \ (oy)$

5.12 $y = 4x + x^2 + 4, \quad y = 2 \ (oy)$

5.13 $y = 2x - x^2, \ y = 0 \ (oy)$

5.14 $2y = x^2, \quad 2y + 2x - 3 = 0 \quad (ox)$

5.15 $xy = 8, \ x = 2, \ x = 4, \ y = 0 \ (ox);$

5.16 $y = x^2 - 2x + 1, \quad y = 0, \ x - 2 = 0 \ (oy)$

5.17 $y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x = 0, \ x = 1 \ (oy)$

5.18 $y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0 \quad (ox)$

5.19 $y = x(4 - x), \quad y = 0 (oy)$

5.20 $y^2 = 4 - x, \ x = 0 \ (oy);$

5.21 $2y = x^2, \quad y + 2x - 3 = 0 \quad (ox)$

5.22 $y = x^2, \quad y = 2x^2, \ x = 1 \ (ox)$

5.23 $y = x, \ y = 2x, \quad x = 2 \ (ox)$

5.24 $xy = 5, \ x = 1, \ x = 2, \ y = 0 \ (ox);$

5.25 $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \ x = 0 \ (ox)$

5.26 $3y = 6x + x^2 + 9, \quad y = 3 \ (oy)$

5.27 $y = x^3, \quad y = x^2 \ (ox)$

5.28 $y = x^2 + 1, \quad y = 2x, \quad x = 0 (oy)$

5.29 $2y = 4x + x^2 + 3, \quad y = 0 \ (oy)$

5.30 $xy = 5, \ x = 1, \ x = 5, \ y = 0 \ (ox);$

Задача 6. Следующие несобственные интегралы исследовать на сходимость и в случае сходимости указать значения интегралов.

6.1а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; 6.16 а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2}$; б) $\int\limits_2^{3} \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$;

6.2 а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; б) $\int\limits_{-5}^{3} \frac{dx}{x+5}$; 6.17 а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2+2x+1}$;

6.3а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x^2-16}$; 6.18а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

6.4а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 6.19а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

6.5а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}$; б) $\int\limits_0^{6} \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$; 6.20 а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4}$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+4}$;

6.6а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x^2-16}$; 6.21а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+6}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

6.7а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x-4}$; 6.22а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

6.8а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; б) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{x^2+6x+9}$; 6.23а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{9} \frac{dx}{x-9}$;

6.9а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6}$; б) $\int\limits_0^{5} \frac{dx}{x^2-25}$; 6.24а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

6.10а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-5}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x-3}$; 6.25а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$; б) $\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2+2x+1}$;

6.11а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x^2-16}$; 6.26а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+7}$; б) $\int\limits_0^{5} \frac{dx}{5-x}$;

6.12а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x-2}$; б) $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{x^2+4x+4}$; 6.27а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2-7}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

6.13а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+5}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; 6.28а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{7} \frac{dx}{x-7}$;

6.14а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{9} \frac{dx}{x-9}$; 6.29а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2-2}$; б) $\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2+2x+1}$;

6.15а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4}$; 6.30а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{4-x}$;

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1: Учеб. Пособие для втузов./Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимиов А.В. и др. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- 2-е изд.- М.: Наука, 1986г.-464с.
2. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике.- М.: Рольф, 2001.-576с., с илл.