Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Севастопольский национальный технический университет

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»
студентов инженерных и экономических специальностей

Севастополь
2011

УДК 51
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» студентов инженерных и экономических специальностей / Сост. Н.Г. Плаксина. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. – 48 с.

Целью настоящих методических указаний является помощь студенту при изучении темы: «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» курса высшей математики. В них приведены варианты 30 индивидуальных заданий и подробное решение варианта-образца.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения инженерных и экономических специальностей.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 8 от 24.03.2011 г.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим Советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензенты: Амелькович В.Г., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики СевНТУ;

Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики СевНТУ.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Содержание варианта-образца ………………………..4
2. Решение варианта-образца ……………………………5
3. Варианты индивидуальных заданий …………………24
Библиографический список
использованной литературы ……………………………..47

Для выполнения предложенных заданий необходимо освоить соответствующие теоретические вопросы дифференциального исчисления функций многих переменных ([1], гл.8, §8.1 – 8.19 или [2], гл. 8, §1-19)

СОДЕРЖАНИЕ ВАРИАНТА-ОБРАЗЦА

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций:

а) $z=\sqrt{\ln\dfrac{x^2}{y-1}}$; б) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\log_2(2-x^2-2y^2)}$

2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z=x^2+y^2-2xy+2x-3y+4$ в точке $M_0(2;-1)$ при $\Delta x=0{,}02$ и $\Delta y=0{,}01$. Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

3. Показать, что данная функция $z=e^{-\cos(x+2y)}$ удовлетворяет данному уравнению $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Найти производную сложной функции:

а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+y}{2}+\ln(x+y^2)$,

где $x=u^2v^3$, $y=u^3-v^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\sin^2\dfrac{1}{y}\sqrt{\operatorname{tg}2^x}$, где $y=e^{-\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{dz}{dx}-?$

5. При каких значениях постоянной $a(a\neq 0)$ функция $z=2a^2x^3y-2xy^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$?

6. Найти экстремум функции $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

7. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если $xy = 4$, методом множителей Лагранжа.

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D, ограниченной линиями $x = 0, \quad y = 0{,}2x + 3y - 12 = 0$.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$ в точке $M_0(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0)$.

10. Найти производную функции $z = \ln^2(x^2 + 2xy)$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении:

а) указанного вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$; б) ее градиента.

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y, приведенным в таблице

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА-ОБРАЗЦА

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций:

а) $z = \sqrt{\ln \frac{x^2}{y-1}}$; б) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\log_2(2 - x^2 - 2y^2)}$

а) $z = \sqrt{\ln \frac{x^2}{y-1}}$.

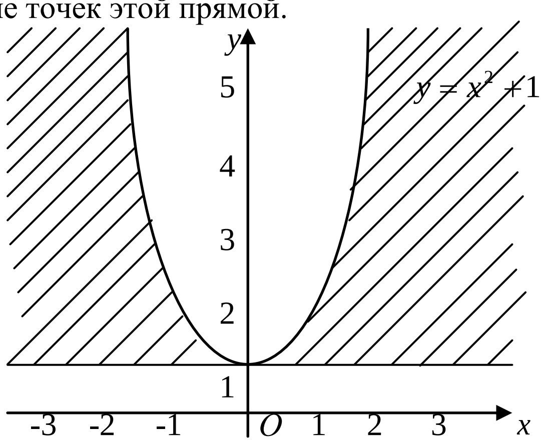
Решение

Область определения данной функции определяется из условий:

$$\begin{cases}\ln\dfrac{x^2}{y-1}\ge 0\\ y-1>0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{y-1}\ge 1\\ y>1\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-y+1}{y-1}\ge 0\\ y>1\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y+1\ge 0\\ y>1\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le x^2+1\\ y>1\\ x\ne 0\end{cases}.$$

Этим условиям удовлетворяет множество точек плоскости xOy, лежащих вне параболы $y=x^2+1$, включая точки самой параболы, кроме вершины, и выше прямой $y=1$, кроме точек этой прямой.



б) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\log_2(2-x^2-2y^2)}$

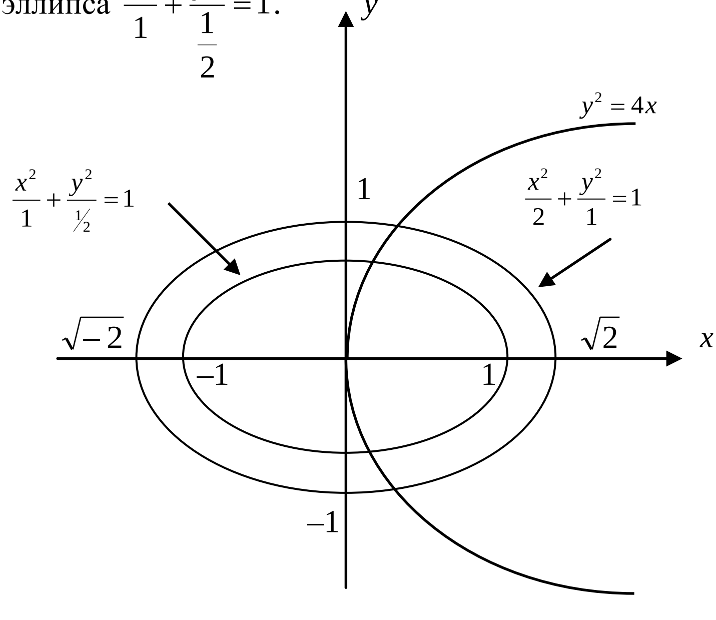
Решение

Область существования этой функции определена следующими условиями:

$$\begin{cases} 4x - y^2 \ge 0 \\ 2 - x^2 - 2y^2 > 0 \\ \log_2(2 - x^2 - 2y^2) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le 4x \\ x^2 + 2y^2 < 2 \\ 2 - x^2 - 2y^2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le 4x \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} < 1 \\ x^2 + 2y^2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le 4x \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} < 1 \\ \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} \ne 1 \end{cases},$$

которым удовлетворяет множество точек плоскости xOy, лежащих между параболой $y^2 = 4x$ и эллипсом $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, включая точки параболы и исключая точки этого эллипса, а также эллипса $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.



2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 3y + 4$ в точке $M_0(2;-1)$ при $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = 0{,}01$. Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

Решение

По определению полное приращение функции

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y).$$

Для данной функции $\Delta z = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - 2(x+\Delta x)\ (y+\Delta y) + 2(x+\Delta x) - 3(y+\Delta y) + 4 - \ (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 3y + 4) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2xy - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 2x + 2\Delta x - 3y - 3\Delta y + 4 - x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 3y - 4 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x - 3\Delta y = (2x - 2y + 2)\Delta x + (2y - 2x - 3)\Delta y + (\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta y\Delta x).$

Согласно определению $dz = (2x - 2y + 2)\Delta x + (2y - 2x - 3)\Delta y$. Обратим внимание на то, что полный дифференциал $dz -$ главная часть полного приращения Δz, линейная относительно Δx и Δy. Так как $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$, то $dz = (2x - 2y + 2)dx + (2y - 2x - 3)dy$.

Поэтому $\Delta z = dz + (\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y)$, очевидно, что $\Delta z \neq dz$ при $\Delta x \neq \Delta y$. dz отличается от Δz на величину $(\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y) = (\Delta x - \Delta y)^2$, которая при $\Delta x \neq \Delta y$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx и Δy. Поэтому в приближенных вычислениях можно заменять Δz на dz. Величина $|\Delta z - dz|$ является абсолютной погрешностью, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

$|\Delta z - dz| = |\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y| = (\Delta x - \Delta y)^2$ при $\Delta x \neq \Delta y$.

Вычислим Δz, dz и абсолютную погрешность $|\Delta z - dz|$ в точке $M_0(2;-1)$ при заданных $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = 0{,}01$.

$$\Delta z = (2\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 2)\cdot 0{,}02 + (2\cdot(-1) - 2\cdot 2 - 3)\cdot 0{,}01 + (0{,}02^2 +$$
$$+ 0{,}01^2 - 2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}01) = 8\cdot 0{,}02 - 9\cdot 0{,}01 + 0{,}0004 + 0{,}0001 -$$
$$- 0{,}0004 = 0{,}0701;$$
$$dz = 8\cdot 0{,}02 - 9\cdot 0{,}01 = 0{,}07.$$
$$|\Delta z - dz| = 0{,}0701 - 0{,}07 = 0{,}0001.$$

Обратим внимание на то, что вычисление Δz – более громоздкая задача, чем вычисление dz. Поэтому понятно, почему на практике при малых приращениях независимых переменных Δx и Δy значение Δz с достаточной точностью заменяют значением dz.

Ответ: $\Delta z = 0{,}0701$, $dz = 0{,}07$, $|\Delta z - dz| = 0{,}0001$.

3. Показать, что данная функция $z = e^{-\cos(x+2y)}$ удовлетворяет данному уравнению $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение

$z = e^{-\cos(x+2y)}$. $\qquad 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Убедимся в том, что функция z является решением данного уравнения, т.е. обращает ее в тождество. Для этого вычислим $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$.

Используя правило нахождения частных производных функции $z = f(x, y)$:

$$z'_x = e^{-\cos(x+2y)}\cdot(-\cos(x+2y))'_x = e^{-\cos(x+2y)}\cdot\sin(x+2y)\cdot 1;$$
$$z''_{xx} = (e^{-\cos(x+2y)})'_x\cdot\sin(x+2y) + e^{-\cos(x+2y)}\cdot(\sin(x+2y))'_x =$$
$$= e^{-\cos(x+2y)}\cdot\sin(x+2y)\sin(x+2y) + e^{-\cos(x+2y)}\cdot\cos(x+2y) =$$
$$= e^{-\cos(x+2y)}\cdot(\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y));$$
$$z'_y = e^{-\cos(x+2y)}\cdot(-\cos(x+2y))'_y = e^{-\cos(x+2y)}\cdot\sin(x+2y)\cdot 2;$$
$$z''_{yy} = (e^{-\cos(x+2y)})'_y\sin(x+2y)\cdot 2 + e^{-\cos(x+2y)}\cdot\cos(x+2y)\cdot 4 =$$

$= 4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y))$.

Обратим внимание на то, что при вычислении $z'_x (z'_y)$ $y = \text{const}(x = \text{const})$.

Подставим выражения z''_{xx} и z''_{yy} в данное уравнение:

$$4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)) \equiv$$
$$\equiv 4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)).$$

Значит, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Найти производную сложной функции:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+y}{2} + \ln(x+y^2)$,

где $x = u^2v^3,\ \ y = u^3 - v^2,\ \ \dfrac{\partial z}{\partial u} - ?\ \ \dfrac{\partial z}{\partial v} - ?$

Решение

Функция $z = f(x,y)$ является функцией двух переменных x и y, которые в свою очередь зависят от u и v. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

(Формулы аналогичны формуле производной сложной функции одной переменной).

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+y}{2}\right)^2}\cdot x + \frac{1}{x+y^2}\right)\cdot 2uv^3 + \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+y}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+y^2}\right)\cdot 3u^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{1}{1+\left(\dfrac{x^2+y}{2}\right)^2}\cdot x+\frac{1}{x+y^2}\right)\cdot 3u^2v^2+\left(\frac{1}{1+\left(\dfrac{x^2+y}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2y}{x+y^2}\right)\cdot(-2v).$$

б) $z=\sin^2\dfrac{1}{y}\sqrt{\mathrm{tg}2^x}$, где $y=e^{-\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{dz}{dx}-?$

Решение

Функция $z=f(x,y)$ зависит от двух переменных x и y, а y в свою очередь зависит от x. Поэтому можно найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, полагая $y=\mathrm{const}$, и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$ по формуле $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin^2\frac{1}{y}(\sqrt{\mathrm{tg}2^x})'_x=\sin^2\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}2^x}}\cdot(\mathrm{tg}2^x)'=$$

$$=\sin^2\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}2^x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 2^x}\cdot 2^x\cdot\ln 2;$$

$$\frac{dz}{dx}=\sin^2\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}2^x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 2^x}\cdot 2^x\cdot\ln 2+$$

$$+\sqrt{\mathrm{tg}2^x}\cdot 2\sin\frac{1}{y}\cos\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{\sin^2\left(\dfrac{x}{y}\right)2^{x-1}\ln 2}{\cos^2 2^x\sqrt{\mathrm{tg}2^x}}+\frac{\sqrt{\mathrm{tg}2^x}\sin\dfrac{2}{y}}{2\sqrt{x}y^2e^{\sqrt{x}}}.$$

5. При каких значениях постоянной $a(a\neq 0)$ функция $z=2a^2x^3y-2xy^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$?

Решение

$z = 2a^2x^3y - 2xy^3$

Вычислим z''_{xx} и z''_{yy} и подставим их в уравнение Лапласа:

$z'_x = 6a^2x^2y - 2y^2, \qquad z''_{xx} = 12a^2xy,$

$z'_y = 2a^2x^3 - 6xy^2, \qquad z''_{yy} = -12xy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \qquad 12a^2xy - 12xy = 0,$$

$a^2 - 1 = 0, \quad a = \pm 1.$

Ответ: $a = \pm 1.$

6. Найти экстремум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение.

$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Данную функцию будем исследовать на экстремум по следующему правилу:

1) найдем область определения функции z;
2) найдем z'_x и z'_y; рассмотрим случаи, когда z'_x и z'_y равны 0 или не существуют;
3) для каждой точки M_0 вычисляем

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

$A = z''_{xx}(M_0), \quad C = z''_{yy}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0).$

Если $AC - B^2 > 0$, то в критической точке M_0 есть экстремум, а именно максимум, если A и $C < 0$, и минимум, если A и $C > 0$.

Если $AC - B^2 < 0$, то в критической точке нет экстремумов.

Если $AC - B^2 = 0$, то никакого заключения о характере критической точки сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

4) вычислим значение z в каждой точке экстремума.

Для данной функции вся координатная плоскость является областью определения.

Найдем z'_x и z'_y: $z'_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$.

Так как функция z дифференцируема всюду на xOy, то образуем систему:

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ (случай, когда z'_x и z'_y не существуют, отсутствует);

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}.$$

После сложения уравнений имеем $4x^3 + 4y^3 = 0$ или $x = -y$.

Подставим значение x в первое уравнение системы:

$-4y^3 + 4y + 4y = 0, \quad y(2 - y^2) = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{2}.$

Тогда $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \mp\sqrt{2}.$

Итак, получим три критические точки:

$P_1(0;0), \quad P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2}), \quad P_3(-\sqrt{2};\sqrt{2}).$

Вычислим производные второго порядка:

$z''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z''_{xy} = 4, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 4.$

Посчитаем $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ для каждой критической точки:

а) $P_1(0;0)$: $A = z''_{xx}(0;0) = -4;\ C = z''_{yy}(0;0) = -4;\ B = 4.$

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 -$ никакого заключения о точке $P_1(0;0)$ по этому правилу сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

б) $P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$: $A = z''_{xx}(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 4 = 20;\ B = 4;$

$C = z''_{yy}(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = 12\cdot 2 - 4 = 20;$ $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$ – в точке P_2 есть экстремум, а именно минимум, так как A и $C > 0$.

в) $P_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$: $A = z''_{xx}(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = 20;$ $B = 4;$

$C = z''_{yy}(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = 20;$ $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$ – в точке P_3 есть экстремум, а именно минимум, так как A и $C > 0$.

В заключение вычислим $z_{\min} = z(P_2) = z(P_3) = 4 + 4 - 4 + + 4\cdot(-2) - 2\cdot 2 = -8.$

Ответ: $z_{\min} = -8.$

7. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если $xy = 4$, методом множителей Лагранжа.

Решение

Данную функцию исследуем на условный экстремум методом множителей Лагранжа, согласно которому:

1) образуем функцию Лагранжа $z^*(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y) = 0 -$ уравнение связи между независимыми переменными x и y;
2) составим необходимые условия экстремума
$$\begin{cases} z^{*\prime}_x = 0 \\ z^{*\prime}_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}.$$

В результате решения этой системы получаются критические точки.

3) Составим выражение для d^2z по формуле:
$$d^2z = z^{*\prime\prime}_{xx}\,dx^2 + 2z^{*\prime\prime}_{xy}\,dxdy + z^{*\prime\prime}_{yy}\,dy^2.$$

Определим знак d^2z^* в каждой критической точке M_0.

Если $d^2z^*(M_0) > 0$, то критическая точка M_0 является точкой условного минимума; если $d^2z^*(M_0) < 0$, то критическая точка M_0 является точкой условного максимума; если $d^2z*(M_0)=0$, то требуется дополнительное исследование этой критической точки.

4) Вычислим значение z в точках условного экстремума.

В данной задаче $z=\underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)}$ и уравнение связи $\underbrace{xy-4}_{\varphi(x,y)}=0$.

Составим функцию Лагранжа:

$z*(x,y)=x^2+y^2+\lambda(xy-4)$, где $\lambda-$ множитель Лагранжа.

2. Составим систему необходимых условий условного экстремума:

$$\begin{cases} z*'_x=2x+\lambda y=0 \\ z*'_y=2y+\lambda x=0 \\ xy-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\dfrac{2x}{y} \\ \lambda=-\dfrac{2y}{x} \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y}=\dfrac{2y}{x} \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2y^2=4^2 \end{cases}$$

или $\begin{cases} |x|=|y| \\ x^4=16 \end{cases}$.

Отсюда $x=\pm2,\ y=\pm2$.

Обратим внимание на то, что из первого и второго уравнения определяем λ, их значение приравниваем и сводим систему трех уравнений к системе двух уравнений.

В результате получим две критические точки $M_1(2;2)$ и $M_2(-2;-2)$.

3. Составим выражение d^2z*:

$z*''_{xx}=2;\ z*''_{xy}=\lambda;\ z*''_{yy}=2;$

$$d^2z*=2dx^2+2\lambda dxdy+2dy^2=2(dx^2+dy^2)+2\lambda dxdy.$$

Знак d^2z* зависит от знака выражения $2\lambda dxdy$.

Зависимость между dx и dy можно найти, вычислив $d\varphi$:

$$d\varphi=d(xy-4)=(xy-4)'_x dx+(xy-4)'_y dy=ydx+xdy;$$

$ydx+xdy=0$, т.к. $\varphi(x,y)=0$.

$$dx = -\frac{xdy}{y},\ \ y \neq 0.$$

$$d^2z^* = 2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda(-\frac{x}{y})dy^2.$$

В точке $M_1(2;2)$ имеем: $\lambda = -\frac{2\cdot 2}{2} = -2.$

$$d^2z^*(M_1) = 2(dx^2 + dy^2) - 4(-\frac{2}{2})dy^2 = 2dx^2 + 6dy^2 > 0.$$

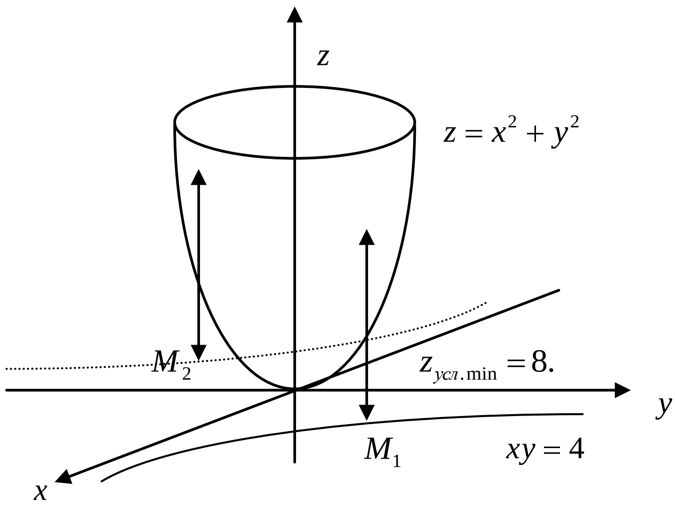
Значит, точка $M_1(2;2)$ является точкой условного минимума.

В точке $M_2(-2;-2)$ имеем: $\lambda = -\frac{2\cdot(-2)}{-2} = -2.$

$$d^2z^*(M_2) = 2(dx^2 + dy^2) - 4(-\frac{-2}{-2})dy^2 = 2dx^2 + 6dy^2 > 0.$$

Значит, точка $M_2(-2;-2)$ является точкой условного минимума.
В заключение вычислим $z_{усл.\min} = z(M_1) = z(M_2) = 4 + 4 = 8.$

Построим график $z = x^2 + y^2$ и укажем точки условного минимума.



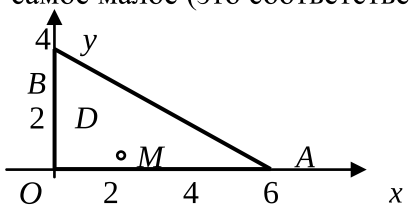
Ответ: $z_{усл.\min} = 8.$

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D, ограниченной линиями: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ 2x + 3y - 12 = 0$.

Решение

Наименьшее и наибольшее значения данной функции в заданной области D определим по правилу:

1) Найти критические точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум и какой).
2) Найти наибольшие и наименьшие значения функции на линиях, образующих границу области D.
3) Из всех найденных значений выбрать самое большое и самое малое (это соответственно будут $z_{наиб.}$ и $z_{наим.}$).



1) Найдем z'_x и z'_y, и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y - 4 = 0; \\ z'_y = -x + 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y; \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Получим критическую точку $M(\frac{8}{3}; \frac{4}{3})$, принадлежащую области D.

$$z(M) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}.$$

2) Теперь найдем наибольшие и наименьшие значения данной функции $z = f(x, y)$ на линиях, образующих границу области D. Граница есть $[OB] + [BA] + [OA]$.

$[OB]: x = 0,\ \ z(0, y) = y^2,$ где $y \in [0,4]$.

Решим задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $z(0,y)$ на отрезке $[0;4]$:

$z'_y(0;y)=(y^2)'=2y,\quad z'_y(0;y)=0 \Rightarrow y=0,\ \ z(0;0)=\underline{0},\ \ z(0,4)=\underline{16}.$

$[BA]: x=\frac{1}{2}(12-3y)$, где $y\in[0;4]$.

$$z(x,y)=z(\frac{1}{2}(12-3y),y)=\frac{1}{4}(12-3y)^2-\frac{1}{2}(12-3y)\cdot y+y^2-$$

$$-4\cdot\frac{1}{2}(12-3y)=\frac{19}{4}y^2-18y+12,\text{ где } y\in[0;4].$$

$z'_y=\frac{19}{2}y-18=0,\quad y=\frac{36}{19}-$ критическая точка, принадлежащая $[0;4]$.

Находим $z\left(\frac{60}{19};\frac{36}{19}\right)=-\underline{\frac{96}{19}},\quad z(6;0)=\underline{12},\quad z(0;4)=\underline{16}.$

$[OA]: y=0,\quad x\in[0;6];$

$z(x,0)=x^2-4x,$ где $x\in[0;6];$

$z'_x(x,0)=2x-4=0,\quad x=2-$ критическая точка.

$z(2,0)=4-4\cdot 2=\underline{-4},\quad z(0,0)=\underline{0},\quad z(6,0)=\underline{12}.$

Из всех подчеркнутых значений самое маленькое - $\left(-\frac{96}{19}\right)$, а самое большое -16.

Значит, $z_{наиб}=z(0,4)=z(B)=16$ (на границе области),

$$z_{наим}=-\frac{16}{3}.\text{ (внутри области).}$$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$ в точке $M_0\left(\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right)$.

Решение.

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, а точка $M_0\left(\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right)$ лежит на поверхности, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

а нормаль к этой поверхности в той же точке определяется уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

В данной задаче $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}-1$.

Вычислим $F'_x,\ F'_y,\ F'_z,$ в точке M_0:

$$F'_x(M_0)=\frac{1}{2}x\Big|_{M_0}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$F'_y(M_0)=\frac{2}{9}y\Big|_{M_0}=\frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{9\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$F'_z(M_0)=-2z\Big|_{M_0}=0.$$

Составим уравнение касательной плоскости к заданной поверхности в заданной точке M_0:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(y-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+0(z-0)=0,$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x-1+\frac{\sqrt{2}}{3}y-1=0,\ \ 3x+2y-6\sqrt{2}=0$ (касательная плоскость оказалась параллельной оси Oz).

Нормаль к данной поверхности в точке M_0 определяется уравнениями: $\dfrac{x-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{y-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{z}{0}$.

10. Найти производную функции $z = \ln^2(x^2 + 2xy)$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении: а) указанного вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$; б) ее градиента.

Решение.

Производную функции $z = f(x, y)$ в направлении $\bar{l}$ можно вычислить по формуле: $\dfrac{\partial z}{\partial l} = z'_x \cos\alpha + z'_y \sin\alpha$, где – угол между направлением $\bar{l}$ и осью Ox.

Для данной функции

$$z'_x = 2\ln(x^2 + 2xy) \cdot \frac{1}{x^2 + 2xy} \cdot (2x + 2y) = 4\frac{(x + y)\ln(x^2 + 2xy)}{x(x + 2y)};$$

$$z'_y = 2\ln(x^2 + 2xy) \cdot \frac{1}{x^2 + 2xy} \cdot 2x = 4\frac{\ln(x^2 + 2xy)}{x + 2y}.$$

Рассмотрим два случая:

а) пусть направление $\bar{l}$ совпадает с вектором $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

$$|\bar{a}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$z'_x(M_0) = 4\frac{\ln(1 + 4)}{1 + 4} \cdot (1 + 2) = \frac{12}{5}\ln 5, \quad z'_y(M_0) = 4\frac{\ln 5}{5} = \frac{4}{5}\ln 5,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_{M_0} = \frac{12}{5}\ln 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{4}{5}\ln 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{65}\ln 5$$

(это скорость изменения скалярного поля, заданного функцией z, в направлении вектора $\bar{a}$.

б) Теперь вычислим производную данной функции в точке M_0 в направлении градиента этой функции. Градиент – это вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и по длине равный $\dfrac{\partial z}{\partial l}$. Поэтому $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \left|\overline{grad\, z}\right|$.

$$\left.\overline{grad\, z}\right|_{M_0} = \left(z'_x(M_0), z'_y(M_0)\right) = \left(\frac{12}{5}\ln 5; \frac{4}{5}\ln 5\right),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left|\overline{grad\, z}\right|_{M_0} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\ln 5\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\ln 5\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ln 5,$$

если $\bar{l}$ совпадает с направлением градиента функции $z = \ln^2\left(x^2 + 2xy\right)$.

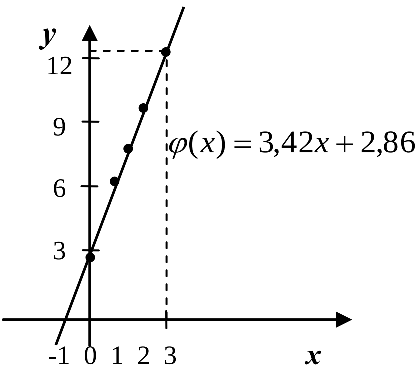
Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_{M_0} = \frac{12\sqrt{13}}{65}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ln 9$.

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y, приведенным в таблице

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

Построим точки $(x_i, y_i)\left(i = \overline{1,5}\right)$ на координатной плоскости xOy. Они оказались расположенными примерно на одной прямой. Это означает, что между переменными x и y выполняется линейная зависимость и искомая функция (аппроксимирующая) отыскивается в виде $\varphi(x) = a_1 \cdot x + a_0$.



Чтобы прямая $\varphi(x) = a_1 \cdot x + a_0$ лежала по возможности ближе к каждой точке, необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1 x_i + a_0 - y_i\right)^2 = F\left(a_1, a_0\right) \to \min.$$

В точке минимума выполняются необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} F'_{a_1} = 0, \\ F'_{a0} = 0. \end{cases}$$

Эта система в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$ и называется системой нормальных уравнений для нахождения a_1 и a_0. Для данной задачи все промежуточные вычисления сведем в таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,9	0	0,00
2	1	6,3	1	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3	13,2	9,00	36,90
	$\sum = 7{,}6$	$\sum = 40{,}3$	$\sum = 16{,}66$	$\sum = 78{,}75$

Составим систему нормальных уравнений для нахождения a_1 и a_0:

$$\begin{cases} 16{,}66 a_1 + 7{,}6 a_0 = 78{,}75, \\ 7{,}6 a_1 + 5 a_0 = 40{,}3. \end{cases}$$

Применим формулы Крамера: $a_0 = \dfrac{\Delta_{a_0}}{\Delta}$; $a_1 = \dfrac{\Delta_{a_1}}{\Delta}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16{,}66 & 7{,}6 \\ 7{,}6 & 5 \end{vmatrix} = 25{,}540; \ \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 16{,}66 & 78{,}75 \\ 7{,}6 & 40{,}3 \end{vmatrix} = 72{,}898;$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 78{,}75 & 7{,}6 \\ 40{,}3 & 5 \end{vmatrix} = 87{,}470.$$

Отсюда $a_0 = 2{,}86$; $a_1 = 3{,}42$.

Таким образом, искомая функция имеет вид $\varphi(x) = 3{,}42x + 2{,}86$.

Качество эмпирической формулы, т.е. степень соответствия ее опытным данным оценивается средней квадратичной погрешностью:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}}, \text{ где } v_i = \varphi(x_i) - y_i = (a_i x_i + a_0) - y_i .$$

Вычисления сведем в таблицу:

i	x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	v_i	$v^2{}_i$
1	0	2,9	2,86	-0,04	0,0016
2	1,0	6,3	6,28	-0,02	0,0004
3	1,5	7,9	7,99	0,09	0,0081
4	2,1	10,0	10,04	0,04	0,0016
5	3,0	13,2	13,12	-0,08	0,0064

$$\sum_{i=1}^{5} v_i^2 = 0{,}0016 + 0{,}0004 + 0{,}0081 + 0{,}0016 + 0{,}0064 = 0{,}0181,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{v_i^2}{5} = 0{,}0036; \quad \delta = \sqrt{0{,}0036} = 0{,}06.$$

В заключение можно построить прямую $\varphi(x) = 3{,}42x + 2{,}86$ на одном чертеже с экспериментальными точками.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Структура задания

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функции $z = f(x, y)$.

2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при заданных Δx и Δy. Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

3. Показать, что заданная функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет данному уравнению.

4. Найти производную сложной функции.

5. При каком значении постоянной $a\,(a \neq 0)$ функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$?

6. Найти экстремум функции $z = f(x, y)$.

7. Найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ методом множителей Лагранжа.

8. Найти наименьшее и набольшее значения функции $z = f(x, y)$ в заданной замкнутой области D.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке M_0

10. Найти производную функции $z = f(x, y)$ точке M_0 в направлении: а) указанного вектора $\bar{a}$; б) ее градиента.

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y, приведенным в таблице. На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

ВАРИАНТ 1

1. а) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; б) $z=\arcsin(x+y)$.

2. $z=2x^2+y^2+10x$, $M_0(1;2)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=y\,\mathrm{tg}(x^2-y^2)$; $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

4. а) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $x=\arcsin t$, $y=e^{-t^2}$. $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

б) $z=x^2e^y$, где $y=\sin^2 2x$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{dz}{dx}$ – ?

5. $z=x^3+axy^2$.

6. $z=2x^2+5y^2+3x+2y-1$.

7. $z=\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$.

8. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$, $D: 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2$.

9. $x^2+2z^2-4y^2=6$, $M_0(2;2;3)$.

10. $z=e^x+xy+y^2$, $M_0(0;1)$, $\bar{a}=2\bar{i}-j$.

11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,3
y	1,2	2,4	4,9	5,4	6,5

ВАРИАНТ 2

1. а) $z=x+\arcsin y$; б) $z=\sqrt{\ln(x+y)}$.

2. $z=x^2-3xy+y$, $M_0(-1;1)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=\ln(e^x+e^y)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

4. а) $z=x^2+xy+y^2$, где $x=\sin^2 t$, $y=\cos 2t$. $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

б) $z=x\sin^2 2y-y\cos^2 2x$, где $y=\sqrt[3]{x^4}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – ? $\dfrac{dz}{dx}$ – ?

5. $z = ax^2y - y^3$.

6. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

7. $z = 2x^2 + y^2$, если $x + y = 1$.

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 1$.

9. $x^2 + z^2 + y^2 = 1,\quad M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10. $z = \sqrt{xy} + y^2 + x,\ M_0(1;4),\ \bar{a} = \overline{M_0N},$ где $N(2;1)$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,3	4,8	5,3	6,4

ВАРИАНТ 3

1. а) $z = \sqrt{y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; б) $z = \ln x + \ln\sin y$.

2. $z = 8y - x^2 - y^2$, $M_0(-1;2)$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $\quad y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{y}$.

4. а) $z = \operatorname{arctg}(xy)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = t - \sqrt{t}$. $\dfrac{dz}{dt} - ?$

б) $z = x^2 \ln y$, где $x = \dfrac{u}{1 - v}$, $y = 3u - 3v$. $\dfrac{\partial z}{\partial u} - ?\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} - ?$

5. $z = x^4 + y^4 + ax^2y^2$.

6. $z = 5x^2 - 3y^2 + 2x - 3y + 1$.

7. $z = xy$, если $x - 3y = 6$.

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: 1 \leq x \leq 6;\ y \geq 0;\ x - y \geq 1$.

9. $e^z - z + xy = 3,\quad M_0(2;1;0)$.

10. $z = \ln(2x^2 + 3y^2),\ M_0(1;1),\ \bar{a} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,2
y	1,3	2,3	4,5	5,1	6,4

ВАРИАНТ 4

1. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}$;   б) $z=\sqrt{x\sin y}$.

2. $z=3x^2+y^2+xy$, $M_0(1;-2)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=y\ln(x^2-y^2)$; $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y\cdot\partial y}\dfrac{\partial z}{}=\dfrac{z}{y^2}$.

4. а) $z=xe^y+ye^{-x}$, где $x=\dfrac{\sqrt{u}}{v}$, $y=\dfrac{u}{\sqrt{v}}$. $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, где $y=\sqrt[3]{x^2+1}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=y^3+ax^2y$.

6. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

7. $z=x^2-y$, если $x-2y=4$.

8. $z=x^2+2xy-y^2-4x$, $D: y=x+1,\ y=0,\ x=3$.

9. $z^2+z-2x+y^2-4=0$, $M_0(1;2;1)$.

10. $z=\sin x+y-3$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$, $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,2
y	1,4	2,2	4,6	5,3	6,5

ВАРИАНТ 5

1. а) $z=\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$;   б) $z=\sqrt{x-y+2}\cdot\ln(x+y)$.

2. $z=2y^2-4x-x^2$, $M_0(-1;-2)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$; $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{y}$.

4. а) $z=x^y+y^x$, где $x=t^2+5$, $y=\sqrt{3t-1}$. $\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z = \sin\frac{\sqrt{y}}{x} - \cos^2\frac{x}{1-y}$, где $y = 2^{-x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = ayx^2 - a^2y^3$.

6. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

7. $z = x + 2y$, если $x^2 + y^2 = 5$.

8. $z = x^2 + xy - 2$, $D: y \geq 4x^2 - 4,\ y \leq 0$.

9. $z^2 - 6x + y^2 + 1 = 0,\quad M_0(1;2;1)$.

10. $z = e^{xy} + \arcsin y + \cos x + 2x + y,\ M_0(0;0),\ \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,3	2,4	4,7	5,4	6,5

ВАРИАНТ 6

1. а) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \frac{1}{x+1}$; б) $z = \sqrt{(1+y)(1-x^2)}$.

2. $z = x^2 + y^2 + 2xy$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}1$.

3. $z = \frac{xy}{x+y}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

4. а) $z = xy + y^2 - \frac{3}{x}$, где $x = \cos 5t,\ y = \mathrm{tg}\,3t$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \sin^3\sqrt{x-y} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$, где $y = \arcsin e^{-x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = axy^2 - a^2x^3$.

6. $z = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

7. $z = 3x^2 + 2y^2$, если $x - 2y = 2$.

8. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$, $D: 2y \leq 4 - x,\ x \geq 0,\ 2y \geq x - 4$.

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 2,\quad M_0(1;1;-1)$.

10. $z=\arccos(xy)$, $M_0(\frac{1}{2};-\frac{1}{3})$, $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,5	3,9	5,2	6,4

ВАРИАНТ 7

1. а) $z=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-y^2}$; б) $z=\ln\left(\frac{\ln(y-1)}{x}\right)$.

2. $z=4-x^2+y^2+2x-4y$, $M_0(1;3)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=\cos^2(2x-3y)$; $3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=y^2\ln x$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=u-v$. $\frac{\partial z}{\partial u}-?$ $\frac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\sin\sqrt{xy^3-y^2}$, где $y=e^{-x}+x$. $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{dz}{dx}-?$

5. $z=2axy^2+2a^2x^3$.

6. $z=x^2-xy+y^2-3x-2y+1$.

7. $z=x+2y$, если $x^2+y^2=5$.

8. $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $D: y=x^2$, $y=4$..

9. $x^2-y^2+z^2=4$, $M_0(1;1;2)$.

10. $z=\arcsin\frac{x^2}{y}$, $M_0(1;2)$, $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,3	2,5	3,8	5,3	6,6

ВАРИАНТ 8

1. а) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1}$; б) $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

2. $z=x^2+4y+3y^2-12y$, $M_0(-1;-2)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=\sqrt{\operatorname{tg}(3x-2y)}$; $\quad 3\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=x^2+xy^2$, где $x=e^{2t}$, $y=\sin t$. $\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\sqrt{x^2-y^2}+x^2y$, где $x=\sqrt{u}v^2, y=\dfrac{u}{\sqrt{v}}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u}-? \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

5. $z=a^2yx^2+ay^3$.

6. $z=x^2+2y^2-2\ln x-18\ln y$.

7. $z=xy$, если $2x+3y=12$.

8. $z=x^2-y^2$, $D: x^2+y^2\le 1$..

9. $z=y+\ln\dfrac{x}{z}$, $\quad M_0(1;1;1)$.

10. $z=e^{xy}+y^2-x+x^2$, $M_0(0;1)$, $\bar{a}=\overline{M_0N}$, где $N(1;2)$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,4	4,5	5,6	6,4

ВАРИАНТ 9

1. а) $z=\arcsin(x+y)+\arccos(1-x)$; $\quad$ б) $z=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

2. $z=x^2+9x-y^2+2xy$, $M_0(1;2)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=\dfrac{x}{2x-3y}$; $\quad x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=e^{xy}(x-y)$, где $x=u^2+v$, $y=uv^2$. $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\cos^2\dfrac{x}{y}+x^y$, где $y=\sqrt{x}-x^2$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-? \quad \dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=a^2x^4+a^2y^4+ax^2y^2$.

6. $z=x^3+8y^3-6xy+4$.

7. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, если $x+\dfrac{\pi}{4}=y$.

8. $z=xy(x+y+1)$, $D: y=\dfrac{1}{x}, x=1, y=0, x=2.$.

9. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0,\quad M_0\left(2;1;\sqrt{5}\right)$.

10. $z=\ln xy+x^2-y^2-2,\ M_0(1;1),\ \bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,8	2,6	3,9	5,1	6,2

ВАРИАНТ 10

1. а) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2-1}$;

б) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x}$.

2. $z=x^2+y^2-2xy$, $M_0(2;1), \Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=y\ln\left(x^2-y^2\right);\quad y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$.

4. а) $z=\cos xy+x^2-y$, где $x=2t^2,\ y=1-2t^2$. $\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$, где $u=\dfrac{x}{\sqrt{y-1}}, v=\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

5. $z=a^2x^4+a^2y^4-2ax^2y^2$.

6. $z=x^3-3x^2-y^2+6xy+15x-2y+3$.

7. $z=3x+2y+6$, если $x^2+y^2=1$.

8. $z=x^2-xy+y^2-4x,\quad D: x=0,\quad y=0{,}2x+3y-12=0$.

9. $x^3+2y^2+z^3-3xyz-1=0,\quad M_0(1;1;1)$.

10. $z=x^2-y^2,\ M_0(1;1),\ \bar{a}=\bar{i}-3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,7	2,7	3,7	4,9	5,9

ВАРИАНТ 11

1. а) $z=\sqrt{1-x^2+y}+\sqrt{1-x^2-y}$;

   б) $z=\ln(4x-y^2-8)\ln(4-x)$.

2. $z=x^2+y^2+x+4-xy$, M_0 $(2;1)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta x=0{,}1$.

3. $z=x\sin\dfrac{y}{x}-x^2-y^2$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

4. а) $z=2x^2-xy^2+y$, где $x=2u-v$, $y=u+v$.

   $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

   б) $z=\cos\dfrac{u}{v}$, где $u=\sqrt[3]{t}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. $\dfrac{dz}{dt}-?$

5. $z=5ax^2y-y^3$.

6. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

7. $z=\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$.

8. $z=x^2+3y^2+x-y$, D: $x=1$, $y=1$ $x+y=1$.

9. $z=\ln z-x-y+4$, M_0 $(1;2;1)$.

10. $z=x^3+xy-y^2$, M_0 $(2;-1)$, $\bar{a}=\overline{M_0N}$, где $N(1;1)$.

11.

x	1,2	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,6	2,7	4,1	5,2	6,1

ВАРИАНТ 12

1. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; б). $z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

2. $z=4-x^2-y^2+xy$, $M_0(1;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

4. а) $z=\operatorname{arctg}(xy);$, где $x=t^2+1,\ y=t^3.\ \dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\sin^2\dfrac{u}{v}$, где $u=\sqrt{x}, v=\sqrt[3]{y}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

5. $z=x^2y+xy^3+ax^3+ay^3$.

6. $z=x^3+y^3-6xy$.

7. $z=xy$, если $2x-y=4$.

8. $z=x^2+2xy-y^2-6x+2y-1,\ D: x=3; y=0, y=x+2.$

9. $xz+z^2-2y^2-4y^2x-2=0,\quad M_0(1;2;1)$.

10. $z=xy-y^2,\ M_0(2;3),\ \bar{a}=-2\bar{i}+j$.

11.

x	1,2	2,3	3,4	4,2	5,3
y	1,8	2,7	3,9	4,9	5,8

ВАРИАНТ 13

1. а) $z=e^{\frac{1}{x-y}}+\sqrt{xy}$; б). $z=\ln\big((x-1)(y+1)\big)$

2. $z=x^2+y^2+2xy-2x,\ M_0(2;2),\ \Delta x=0{,}2,\ \ \Delta y=0{,}1$.

3. $z=\sin^2(3x-4y);$ $\qquad 4\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=\arcsin(4x^2-t+y^3);$, где $x=\sqrt{3t},\ y=\dfrac{1}{t}.\ \dfrac{\partial z}{\partial t}-?\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\cos\sqrt{uv}$, где $u=e^{-x+y}, v=\dfrac{1}{x-y}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

5. $z=3x^3+3y^3-a(x^2y+xy^2)$.

6. $z=x^2+3y^2-x+18y-4$.

7. $z=x^2+y^2$, если $x+y=2$.

8. $z=x^2-2xy-4x+8y,\ D: x\ge 0; y\ge 0, x\le 16, y\le 2.$

9. $3xyz-z^3=8,\quad M_0(0;2;-2)$.

10. $z=\ln x+tg(x^2+y^2),\ M_0(1;1),\ \bar{a}=-3\bar{i}+j$.

11.

x	1,2	2,3	3,4	4,3	5,2
y	1,8	2,7	3,8	4,8	5,7

ВАРИАНТ 14

1. а) $z=\sqrt{x}+\arcsin y$; б). $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$

2. $z=2x^2-y^2+2x-3y+5$, $M_0(1;-1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=e^{xy}$; $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyz$.

4. а) $z=\ln(x^2-y^2)$, где $x=u\sin v$, $y=u\cos v$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?\,\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=arctg\dfrac{x-y}{2}$, где $y=2^{-x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=a^2(x^2y+xy^2)-4x^3-4y^3$.

6. $z=xy-3x^2-2y^2+10$.

7. $z=2x-y+3$, если $x^2+y^2=1$.

8. $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$, $D: x\ge 0; y\ge 0, x+y\le 1$.

9. $e^{-3z}-6z+3xy=10$, $M_0(3;1;0)$.

10. $z=5x+10x^2y+y^5$, $M_0(1;2)$ $\bar{a}=\overline{M_0N}$, где $N(5;1)$.

11.

x	1,2	2,3	3,5	4,2	5,3
y	1,8	2,9	3,9	4,8	5,6

ВАРИАНТ 15

1. а) $z=\sqrt{x-y+2}\cdot\ln(x+y)$; б). $z=\sqrt{x\sin y}$

2. $z=xy-x^2+y^2+4$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=e^{-3y-x}\sin(x+3y)$; $\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-3\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $x=uv,\ y=\dfrac{u}{v},\ \dfrac{\partial z}{\partial u}-?\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\cos\left(\sqrt{t}+\dfrac{x}{y}\right)$, где $x=tgt^2, y=tg^2t,\ \dfrac{\partial z}{\partial t}-?\quad \dfrac{dz}{dt}-?$

5. $z=2a(x^4+y^4)+x^2y^2$.

6. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

7. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, если $x+y=2$.

8. $z=x^2+xy-2$, $D:-y^2\ge 4x-4; y\le 0.$

9. $3xyz-z^3=a^3$, $M_0(0;a;-a)$.

10. $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $M_0(1;2)$, $\bar{a}=\bar{i}+2j$.

11.

x	1,1	2,2	3,1	4,2	5,4
y	1,9	3,1	4,2	5,1	6,1

ВАРИАНТ 16

1. а) $z=\ln(\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-1)+\sqrt{x}$; б). $z=\arcsin\dfrac{x+2}{y}$.

2. $z=x^2+y^2-4xy$, $M_0(1;2)$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=u+3v,\ y=\dfrac{u}{2v},\ \dfrac{\partial z}{\partial u}-?\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\sin^2(y-x)$, где $y=\cos x^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?\quad \dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=a^2(x^3+y^3)-x^2y-y^2x$.

6. $z=x^2+2xy+4y^2-x+2y+1$.

7. $z=\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$.

8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: 0 \le x \le 2; 0 \le x \le 3$.

9. $e^{-3x} - 6z + 3xy = 10$, $M_0(3;1;0)$.

10. $z = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = \overline{M_0N}$,где $N(5;1)$.

11.

x	1,2	2,1	3,2	4,3	5,2
y	1,9	3,1	4,2	5,1	6,1

ВАРИАНТ 17

1. а) $z = \arcsin(x - 2y) + \dfrac{1}{x - y}$; б). $z = \dfrac{\ln(y+1)}{\sqrt{x - y}}$.

2. $z = 4 - x^2 - y^2 - x - y$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3. $z = \mathrm{tg}^3(2x - 3y)$; $3 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = e^x(y - x)$;, где $x = \sin^2 t$, $y = \cos t^2$, $\dfrac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \dfrac{\sqrt{u - v}}{u}$, где $u = \dfrac{1}{x + y}$, $v = \sqrt[3]{x - y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = a(x^3 + y^3) + x^2y + y^2x + 5$.

6. $z = 2x^2 + 5y^2 + 3x + 2y - 1$.

7. $z = xy$, если $x^2 + y^2 = 2$.

8. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: y = x + 1; y = 0, x = 3$.

9. $z^2 + 2xy - y^2 + 4z = 1$;, $M_0(1;1;-4)$.

10. $z = \ln(x^2 + x + y^2 + xy)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4j$.

11. x	1,3	2,4	3,2	4,4	5,4
y	2,1	3,1	4,2	4,9	6,2

ВАРИАНТ 18

1. а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{x - y}$; б). $z = \ln x + \ln \sin y$.

2. $z = x^2 + y^2 - 2xy$, $M_0(1;2)$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}1$.

3. $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$; $\quad y^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

4. а) $z = \dfrac{x+y}{2x-y}$, где $x = e^{t^2} t$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \dfrac{u - e^{-v}}{v + e^u}$, где $u = \dfrac{1}{x-y}, v = \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = 5x^3 + 5y^3 - a^2 xy(x+y)$.

6. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

7. $z = x^2 + 3y^2$, если $x + 2y = 6$.

8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: x + y = 1; x = -3, y = 0$.

9. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 4 = 0;$, $M_0(1;1;1)$.

10. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4j$.

11.

x	1,3	2,4	3,2	4,4	5,4
y	2,1	3,0	3,1	5,1	6,1

ВАРИАНТ 19

1. а) $z = \ln(x^2 - 3y) + \sqrt{x+2}$; $\quad$ б). $z = \sqrt{\sin x}$.

2. $z = 2x^2 + 3y^2 + xy + x - 2$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\quad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4.а) $z = \cos(x + 2y) - \sin(2x - y)$,

где $x = u^2 - v, y = v^2 - u, \dfrac{\partial z}{\partial u} - ?, \dfrac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \dfrac{1}{3x - 2y + t^2}$, где $y = \sqrt[3]{t}, x = tg^3 t$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} - ?$ $\quad \dfrac{dz}{dt} - ?$

5. $z = 2y^3 - 5a^2 yx^2$.

6. $z = x^3 + y^3 + 9xy + 3$.

7. $z = x^2 + y^2$, если $2x + y = 2$.

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

$D: x = 0; y = 0, y = 0.2x + 3y = 12$.

9. $2xz + z^2 - y^2 + x^2 - 3 = 0;$, $M_0(1;1;1)$.

10. $z = xy^2 - x^2$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - 3j$.

11.

x	1,2	2,5	3,6	4,2	5,5
y	2,0	3,1	4,2	5,1	6,2

ВАРИАНТ 20

. а) $z = \arccos\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;   б). $z = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)(x^2 - 1)}}$.

2. $z = x^2 + y^2 + x - 2y$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}1$.

3. $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$; $3y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = \cos(xy)$, где $x = \frac{u + v}{2}$, $y = \frac{u - v}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?, \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = tg^3\,\frac{x}{y}$, где $x = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?, \frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 3y^3 + 7ayx^2$.

6. $z = x^3 - 3xy - y^3 + 5$.

7. $z = xy$, если $x + 2y = 7$.

8. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = 3$.

9. $x^2 - 3xz^2 + z - y^2 = -2;$, $M_0(2;1;1)$.

10. $z = \ln(x + y^2)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 2j$.

11.

x	1,1	2,3	3,2	4,4	5,3
y	2,1	3,2	4,9	5,1	6,3

ВАРИАНТ 21

. а) $z=\ln(x-y)+e^{\frac{1}{x-2}}$; б). $z=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

2. $z=x^2+\dfrac{1}{2}y^2+2x+3y-12$, $M_0(-1-;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=xy+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. а) $z=y\ln(x^2-2)$, где $x=e^{2t}+1$, $y=3e^t-2$, $\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, где $x=\sin^2 v, y=\cos u^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?,\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

5. $z=3x^3-a^2xy^2$.

6. $z=(x^2-2)^2-2y^2$.

7. $z=xy^2$, если $2y-3x=1$.

8. $z=x^2-2xy-y^2+4x+8$, $D: x=2,\ y=4, x+y=2, x=0$

9. $z^3-3xyz=8;$, $M_0(2;0;2)$

10. $z=2\sin 2x-y^2+4x$, $M_0(0;1)$, $\bar{a}=5\bar{i}-2j$

11.

x	1,2	2,2	3,3	4,2	5,4
y	2,2	3,1	4,4	5,2	6,1

ВАРИАНТ 22

1. а) $z=\dfrac{\sqrt{2x+3y-1}}{x-y}+\arccos(x+1)$; б). $z=\ln y+\ln\sin x$

2. $z=2x^2+3x-y^2-xy$, $M_0(2;-2)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=\ln(x^2-y^2)$; $\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x+y}$.

4. а) $z=e^{xy}(2-x-y)$,

где $x=\sin(u+v),\ y=u^2v,\ \dfrac{\partial z}{\partial u}-?\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=tg\sqrt[3]{x}\left(x-arctg^2y\right)$, где $y=\dfrac{1}{\ln x},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}-?\quad \dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=3y^3+6a^3yx^2;$

6. $z=4xy-\dfrac{25}{x}-\dfrac{10}{y};$

7. $z=x^2+y^2$, если $x-y=3$.

8. $z=x^2-2y^2+4xy-6x,\ D:\ x=0;\ y=0, x+y=2.$

9. $z^3-2xyz-2y-4+x^3+y^3=0,\ M_0(1;1;2)$

10. $z=\dfrac{x}{y}+xy,\ M_0(2;1),\ \bar{a}=\overline{M_0N}$,где $N(0;5)$

11.

x	1,2	2,5	3,3	4,2	5,1
y	2,1	3,0	4,1	5,2	6,3

ВАРИАНТ 23

1. а) $z=\arcsin 2x+\sqrt{y^2-x-1};$ б). $z=\ln(x-1)+\ln(y^2-4)$

2. $z=x^2+y^2+10xy,\ M_0(1;1),\ \Delta x=0{,}1,\ \ \Delta y=0{,}2$.

3. $z=\dfrac{x^3+y^3}{3}+\dfrac{x^2y+xy^2}{2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}+\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x+y\right)^2+\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

4. а) $z=\sin(x^2y)+3\sin(x-y)$, где $x=e^{t^2}+2,\ y=\dfrac{1}{t},\ \dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\sqrt{x^2-y^2}$, где $x=\arcsin\dfrac{v}{u}, y=\arcsin\dfrac{u}{v},\quad \dfrac{\partial z}{\partial u}-?$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

5. $z=a^2x^3y+2axy^3$.

6. $z=2x^2+3xy+2y^2-7\ln x-7\ln y$.

7. $z = xy^2$, если $y - 2x = 3$.

8. $z = x^2 + xy$, $D: -1 \le x \le 1; 0 \le y \le 3$.

9. $z = y\ln(x+z) - 1$, $M_0(2;3;-1)$.

10. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, $M_0(1;3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - j$.

11.

x	1,2	2,4	3,4	4,1	5,2
y	1,9	2,8	3,9	4,5	6,1

ВАРИАНТ 24

1. а) $z = \arccos(x+1) + \dfrac{1}{y-2}$; б). $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

2. $z = 4 - y^2 + xy + x^2$, $M_0(2;1)$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}1$.

3. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $(x - y)\cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. а) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$, где $x = \sqrt{t+1}, y = t^2$ $\dfrac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \operatorname{arctg}^3 \dfrac{y - x}{x + y}$, где $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\dfrac{dz}{dx} - ?$

5. $z = ax^3 y - 2xy^3$.

6. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

7. $z = x - 2y - 4$, если $x^2 + y^2 = 1$.

8. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $D: -y = 1; y = -1; x = 0; x = 2$.

9. $z - 5x^2 y + 3xy^2 z + 13 = 0$, $M_0(2;1;1)$.

10. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $M_0(2;3)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3j$.

11.

x	1,2	2,4	3,3	4,5	5,3
y	2,1	3,2	3,9	4,9	6,1

ВАРИАНТ 25

1. а) $z = \ln x \ln y + \dfrac{1}{x+2}$; б). $z = \arcsin \dfrac{x-2}{y}$.

2. $z = x^2 + y^2 + 2x - 4$, $M_0(1;3)$, $\Delta x = 0{,}1$ $\Delta y = 0{,}2$.

3. $z = \dfrac{x}{y}$; $x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4.а) $z = \cos(x^2 + y^2) - 5xy$, где $x = u - 5y, y = \dfrac{u}{v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial u} - ?, \dfrac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \sin(e^{-t}) + t \sin x$, где $t = \sqrt[3]{x} \cos x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} - ?, \dfrac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 5x^4 - a^2 x^2 y^2 + 5y^4$.

6. $z = e^{x-4y}(x^2 + 2y^2)$.

7. $z = x^2 y$, если $x - 2y = -1$.

8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $D: x \le 0;\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0$.

9. $3xz + z^2 + y^2 - 5z = -3$; $M_0(-1;2;1)$.

10. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \overline{M_0 N}$,где $N(4;3)$

11.

x	1,1	2,4	3,3	4,6	5,2
y	2,2	3,1	4,2	5,3	6,4

ВАРИАНТ 26

1. а) $z = \ln\left(x \ln\left(y - x - 1\right)\right)$; б). $z = \sqrt{\dfrac{y - x - 1}{\ln(x+4)}}$.

2. $z = x^2 + y^2 + y - xy$, $M_0(2;1)$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$.

3. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. а) $z = \sin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right) + \log_2(x^3 y - 5x)$, где $x = \dfrac{u}{3v}, y = u^2 v,$

$\frac{\partial z}{\partial u}-?, \frac{\partial z}{\partial v}-?$

б) $z=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+e^{-2y}}}$, где $x=ctg^3\left(\sqrt{t}\right), y=tg^2\left(\sqrt[3]{t}\right), \frac{dz}{dt}-?$

5. $z=ay^2x-x^3$.

6. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

7. $z=x^2+y^2$, если $3x+2y=6$.

8. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $D:0\le x\le\frac{\pi}{2};:0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

9. $z^2-2x^2z+4y^3=3;$, $M_0(1;1;1)$.

10. $z=xe^y$, $M_0(2;2)$, $\bar{a}$ совпадает с направлением биссектрисы I координатного угла.

11.

x	1,4	2,3	3,6	4,8	5,6
y	2,2	3,4	4,7	5,2	6,6

ВАРИАНТ 27

1. а) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\log_2(2-x^2-2y^2)}$; б). $z=\sqrt{\ln x\cos y}$.

2. $z=4-y^2+y+\frac{1}{2}x^2$, $M_0(1;-1)$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}02$.

3. $z=xe^x$; $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4. а) $z=x^2\cos(x^2-y)+e^{\frac{x}{y}};$, где $x=tgt^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$, $\frac{dz}{dt}-?$

б) $z=\sqrt[3]{\sin^2 y+y\arcsin x^2}$, где $y=\sqrt[5]{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{dz}{dx}-?$

5. $z=2yx^3+2xy^3a$.

6. $z=1-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$.

7. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, если $y=x+\dfrac{\pi}{4}$.

8. $z=x^3+y^3-3xy$, $D: 0\le x\le 2; -1\le y\le 2$.

9. $y^2z-x^2+z^3+11=0$, $M_0(1;1;-2)$.

10. $z=e^{x^2+y^2}(2x-y)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a}=4\bar{i}-2j$

11.

x	1,5	2,2	3,4	4,6	5,7
y	2,1	3,1	4,2	5,3	6,4

ВАРИАНТ 28

1. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; б). $z=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

2. $z=3+x^2-2xy-2y^2$, $M_0(1;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=\dfrac{y^2}{5x}+\operatorname{arctg}(xy)$; $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{y^2}{5x^2}=\dfrac{2y}{5x}$.

4. а) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, где $x=t^2+1$, $y=t^3-t$, $\dfrac{dz}{dt}-?$

б) $z=\cos^2\dfrac{u}{v}$, где $u=\sqrt[3]{x}, v=\sqrt{x-y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

5. $z=x^3y^2+xy^2+ax^3+ay^3$.

6. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$.

7. $z=xy$, если $x+y=1$.

8. $z=x^2+xy-y^2-4x+2y$, $D: x=3$, $y=0$, $y=x+2$.

9. $x^2z+z^2-6y^2z+4y^2+2x=0$, $M_0(1;1;2)$.

10. $z=4-x^2-y^2$, $M_0(2;3)$, $\bar{a}=-3\bar{i}+2j$

11.

x	1,3	2,2	3,4	4,2	5,4
y	1,8	2,4	3,6	4,8	5,7

ВАРИАНТ 29

1. а) $z=\dfrac{\ln(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$; б). $z=\sqrt{x}\,\dfrac{\sqrt{1-y}}{x^2+y^2-9}$.

2. $z=x^3+2xy^2-y^3$, $M_0(1;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$.

3. $z=y\ln(x^2-y^2)$; $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$.

4. а) $z=e^{xy}(x+2y)$, где $x=u^2+v$, $y=uv$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

   б) $z=\sin^2(xy)+x^y$, где $y=x^2+x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$ $\dfrac{dz}{dx}-?$

5. $z=a^2x^4+a^2y^4+ax^2y^2$.

6. $z=xy-x^2y-xy^2$.

7. $z=3x+2y+1$, если $x^2+y^2=1$.

8. $z=xy$, если $x-2y=4$.

9. $e^z-z+x^2y=3$, $M_0(1;2;0)$.

10. $z=(x-y)^2$, $M_0(0;3)$, $\bar{a}=2\bar{i}+j$

11.

x	1,2	2,1	3,0	4,2	5,1
y	1,4	2,3	3,6	4,5	5,3

ВАРИАНТ 30

1. а) $z=\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2+y^2}$; б). $z=\ln y+\ln\sin x$.

2. $z=x^2+2xy+y^3$, $M_0(1;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3. $z=y\ln(x^2-y^2)$; $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

4. а) $z=x^2-y^2$, где $x=\sin 2t$, $y=\sin^2 t$, $\dfrac{dz}{dt}-?$

   б) $z=e^{x-\sqrt{y}}$, где $x=\dfrac{u}{v}, y=u^2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}-?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

5. $z=4x^4+4y^4+ax^2y^2$.

6. $z = 2xy - 4x + 2y$.

7. $z = xy$, если $x + y = 2$.

8. $z = x^2 - 2xy - 4x + 8y$, если $D: x \geq 0; y \geq 0, x \leq 10, y \leq 3$.

9. $z = \ln z - 2x + y + 1$, $M_0(1;2;1)$.

10. $z = y^2 + xy - 3x$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = -2\bar{i} + j$

11.

x	-2	0	1	2	4
y	0.5	1	1.5	2	3

Библиографический список использованной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 1985 - т.1-4. - 29 с.

2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.: Наука,1988 - 431 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под. ред. А.В. Ефимова, Б.Б. Демидовича.- М.: Наука, 1981.- т.1-4. - 62 с.

4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. - М.: Высш. школа, 1986 - ч.1 - 303 с.

5.Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е.И. Гурского. - Минск: Вышейна школа, 1989 - ч.1 - 348 с.

6. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин и др.; Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

7. Красс М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2007. – 464 с.

Заказ № _______ от ___________ 2011 г. Тираж ________ экз.
Изд-во СевНТУ