МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Севастопольский государственный университет»

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы по дисциплинам
«Высшая математика», «Математика» студентов
технических и экономических специальностей

Севастополь
СевГУ
2015

УДК 512
ББК 22.14

Комплексные числа. Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы по дисциплинам «Высшая математика», «Математика» студентов технических и экономических специальностей / Сост. Л.Н. Григорюк, Е.Г. Бойко. – Севастополь: СевГУ, 2015. – 44 с.

Целью методических указаний является усвоение студентами основных теоретических сведений о комплексных числах и привитие практических навыков при решении инженерных задач.

В помощь студентам приведено решение типовых задач, предлагаемых для изучения темы «Комплексные числа».

В каждом задании по 30 вариантов задач.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей и форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены к переизданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 3 от 25.05.2015 г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика» СевГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Комплексным числом называется упорядоченная пара $(x; y)$ действительных чисел.

Алгебраическая форма комплексного числа $(x; y)$ имеет вид

$$z = x + iy,$$

где $x, y -$ действительные числа, $i -$ мнимая единица, для которой $i \cdot i = i^2 = -1$. Число x называется действительной частью комплексного числа, обозначается $\operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью и обозначается $\operatorname{Im} z$. На плоскости ось Ox называется действительной осью, а ось Oy – мнимой осью.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости или радиусом-вектором этой точки (вектором, начало которого находится в точке (0;0), а конец в точке $M(x, y)$).

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняются по правилам сложения, вычитания и умножения двучленов вида $x + iy$ с заменой каждый раз i^2 на (-1).

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1)$$

где длину радиус-вектора числа z (модуль) находим по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \text{ – модуль числа } z. \qquad (2)$$

$\varphi -$ аргумент числа z $(\varphi = \operatorname{Arg} z)$ – это величина угла между радиусом-вектором точки z и положительным направлением оси Ox, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведется по часовой стрелке.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

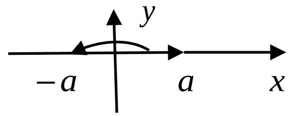
$\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями:

$$-\pi < \arg z \le \pi, \tag{3}$$

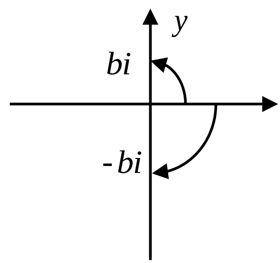
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, \ \ y \ge 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, \ \ y < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Значения аргумента действительных и чисто мнимых чисел лучше находить из геометрической интерпретации чисел.

$$z = x, \qquad \arg x = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0; \\ \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



$$z = iy, \qquad \arg iy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y > 0; \\ \dfrac{\pi}{-2}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$



Показательная форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид

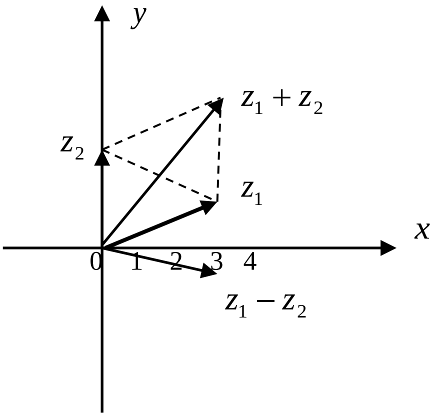
$$z = re^{i\varphi},$$

где r и φ вычисляются по формулам, приведенным выше.

Пример выполнения задания I.

Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 3+i$ и $z_2 = 2i$, изобразить на плоскости данные числа и результаты операций, пользуясь векторным представлением.

$z_1 + z_2 = (3+i) + 2i = 3+3i$. Изобразим все числа на координатной плоскости.



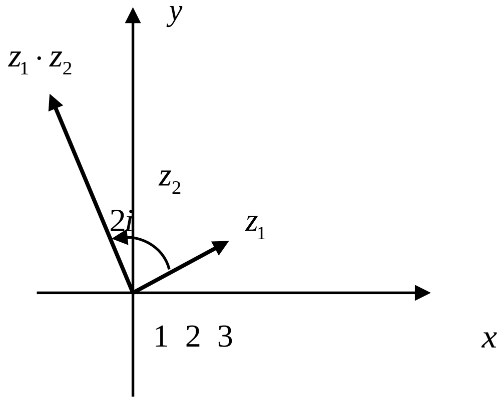
Геометрические операции сложения (вычитания) выполняются по правилу сложения (вычитания) векторов.

Вектор, соответствующий числу $z_1 + z_2 = 3+3i$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах, соответствующих числам $z_1 = 3+i$ и $z_2 = 2i$.

Найдем разность $z_1 - z_2 = (3+i) - 2i = 3-i$ и изобразим число $z_1 - z_2 = 3-i$ на плоскости. (Соответствующий вектор параллелен второй диагонали параллелограмма).

Найдем произведение $z_1 \cdot z_2 = (3+i)2i = 6i + 2i^2 =$ $= 6i - 2 = -2 + 6i$.

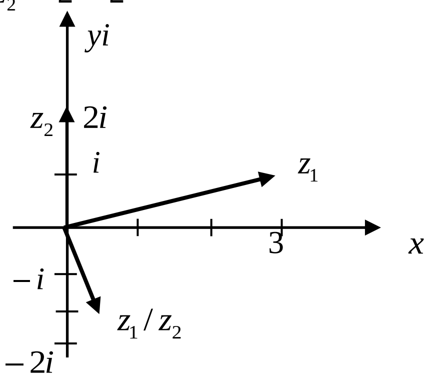
При умножении на $z_2 = 2i$ вектор, соответствующий числу $z_1 = 3+i$ повернули против часовой стрелки на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и растянули вектор в два раза, так как для числа $2i$ аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, а модуль равен 2.



Найдем число $\frac{z_1}{z_2}$. Деление числа $z_1 = x_1 + iy_1$ выполняется по формуле $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$, где $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$, сопряженное числу $z_2 = x_2 + iy_2$. В нашем случае для числа $z_2 = 2i$ сопряженным будет $\bar{z}_2 = -2i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{1-3i}{2}$. (Можно было домножить на $(-i)$).

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, изобразим это число на координатной плоскости.



При делении числа $z_1 = 3 + i$ на число $z_2 = 2i$ повернули вектор, соответствующий z_1 на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке и разделили вектор на 2. Из чертежа видно, что модуль уменьшился в 2 раза и произошел поворот на $-\frac{\pi}{2}$.

Пример выполнения задания II.

Вычислить:

$$A = \frac{(i^7 + 1)^2}{(3 + i^9)} + \mathrm{Re}((\overline{2 - 3i})(1 + i)) + \frac{5}{i^8}.$$

Решим пример по действиям. Вычислим $(i^7 + 1)^2$.

Учитывая, что $i^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 4k, \\ i, & \text{при } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{при } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{при } n = 4k + 3, \quad n, k \in Z. \end{cases}$

$i^7 = i^{3+4} = i^3 \cdot i^4 = (i)^3 = -i$. выделили в показателе степени слагаемое, кратное четырем, 7=3+4, использовали 4 строку формулы и получили $i^7 = -i,\ i^7 + 1 = -i + 1$.

$(i^7 + 1)^2 = (-i + 1)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

$3 + i^9 = 3 + i^{2 \cdot 4 + 1} = 3 + i$

$$\frac{(i^7 + 1)^2}{3 + i^9} = \frac{-2i}{3 + i} = \frac{-2i(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{-6i + 2i^2}{9 + 1} = \frac{-2 - 6i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Вычисляем:

$\mathrm{Re}((\overline{2 - 3i})(1 + i)) = \mathrm{Re}((2 + 3i)(1 + i)) = \mathrm{Re}(-1 + 5i) = -1.$

Так как $i^8 = 1$, то $\frac{5}{i^8} = 5$.

$$A = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i - 1 + 5 = \frac{19}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Пример выполнения задания III.

Вычертить область, заданную неравенством:

$$\begin{cases} |z-3+i| \geq 2, & (a) \\ |\operatorname{Re} z| \leq 2, & (б) \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{4}. & (в) \end{cases}$$

а) Изобразим множество точек, определяемое условием

$$|z-3+i| \geq 2.$$

Так как $z = x+iy$, то $|z-3+i| = |x+iy-3+i| = |(x-3)+$ $+i(y+1)|$. Пользуясь определением модуля, получим

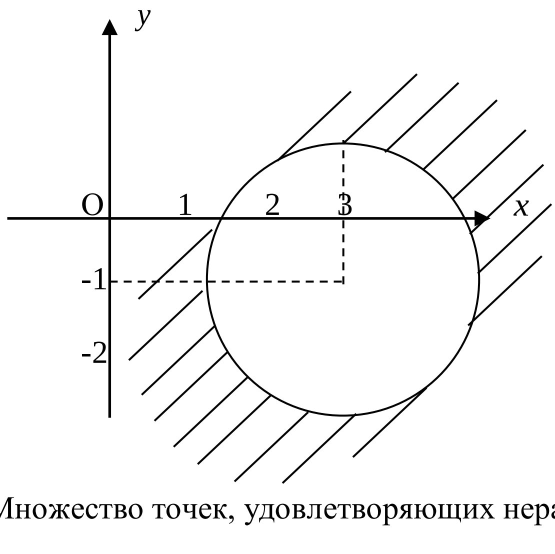
$$|(x-3)+i(y+1)| = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2},$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} \geq 2.$$

Возводим обе части неравенства в квадрат (обе части неотрицательные):

$$(x-3)^2+(y+1)^2 \geq 2^2.$$

Строим границу области $(x-3)^2+(y+1)^2=4$. Это окружность с центром в точке $(3;-1)$, радиус равен 2.

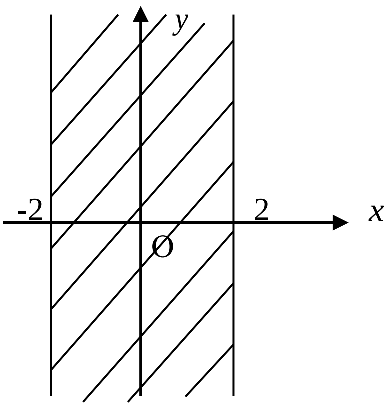


Множество точек, удовлетворяющих неравенству $(x-3)^2+$

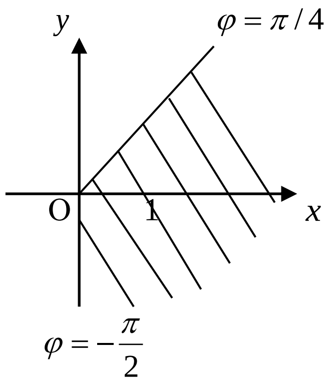
$+(y+1)^2 \geq 2^2$ лежат вне круга с границей $(x-3)^2+(y+1)^2 = = 2^2$. Точки, лежащие на окружности $(x-3)^2+(y+1)^2 = 4$ также удовлетворяют неравенству а).

б) $|\operatorname{Re} z| \leq 2$.

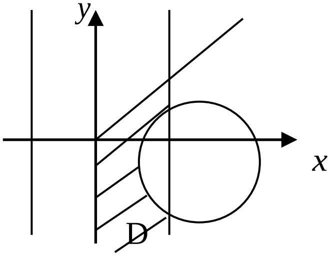
$z = x+iy, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad |x| \leq 2, \quad -2 \leq x \leq 2$.



в) Неравенству $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ удовлетворяют точки z, лежащие внутри угла, равного $\frac{3\pi}{4}$ и с вершиной в начале координат $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$:



Поскольку искомая область определяется тремя неравенствами, то строим на одной комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющее всем трем неравенствам.



Ответом будет область D.

Пример выполнения задания IV.

Изобразить числа z точками на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической форме. Для задания а), б), в), г) модуль числа и главное значение аргумента z находим, используя геометрическую интерпретацию чисел.

а) $z_1 = 8$, б) $z_2 = -7$, в) $z_3 = 5i$, г) $z_4 = -3i$,

д) $z_5 = -\sqrt{3} + i$, е) $z_6 = -i$.

Решение:

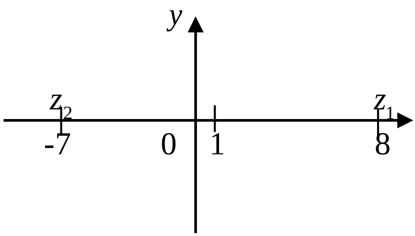
$z = x + iy$,

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

показательная форма $z = |z| e^{i\varphi}$.

а)



$z_1 = 8, \quad |z_1| = 8$

$\varphi = \arg z$

$\varphi -$ это угол, который образует радиус-вектор точки z с положительным направлением оси Ox.

Из рисунка видно, что радиус-вектор точки z_1 образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = 0$. Значит, $\arg z_1 = 0$.

Тригонометрическая форма:

$z_1 = 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$

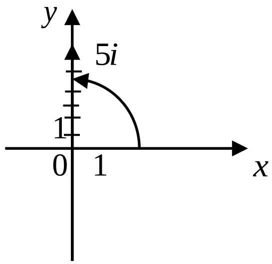
и показательная форма $z_1 = 8e^{0i}$.

б) $z_2 = -7,\quad |z_2| = 7,$ радиус-вектор точки z_2 образует угол $\varphi = \pi$ с положительным направлением оси Ox, $\arg z_2 = \pi$,

$-7 = 7(\cos \pi + i \sin \pi),\qquad -7 = 7e^{i\pi}$.

в) $z_3 = 5i \qquad |z_3| = 5$

(точка z_3 находится от начала координат на расстоянии 5 единиц)



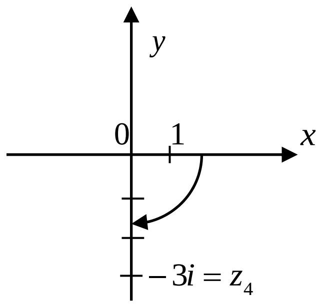
$\arg z_3 = \varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$

$5i = 5(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2})$ – тригонометрическая форма.

$5i = 5e^{\frac{\pi}{2} i}$ – показательная форма.

г) $z_4 = -3i,\quad |z_4| = 3$

Радиус-вектор точки z_4 образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

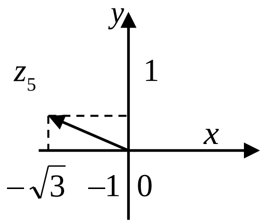


$\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$

$3i = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i \sin(-\dfrac{\pi}{2})),\qquad -3i = 3e^{-\frac{\pi}{2} i}$.

Для заданий д), е) используем формулы (2), (3), (4)

д) $z_5 = -\sqrt{3} + i$



$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z_5| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Так как число расположено во II четверти, то для отыскания аргумента воспользуемся формулой

$z = x + iy, \quad x < 0, \quad y > 0,$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$$

Для нашего случая $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$.

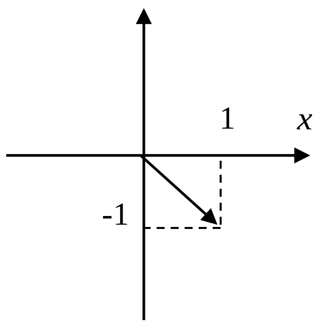
$$\varphi = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Представим z_5 в тригонометрической форме:

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$$

и в показательной форме $-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

е) $z_6 = 1 - i$



$|z_6| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

Число z расположено в IV четверти, поэтому:

$$\varphi = \arg z_6 = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда $1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$,

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

При записи чисел в тригонометрической форме не следует преобразовывать запись $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ таким образом $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$, так как полученное выражение не будет тригонометрической формой числа $1-i$, а просто комплексным числом, равным $1-i$. А при различных вычислениях эти преобразования возможны.

Пример выполнения задания V.

Вычислить, пользуясь представлением комплексного числа в тригонометрической форме и формулой Муавра. Решение:

При возведении в степень используем формулу Муавра

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\quad \forall n\in N.$$

$(-2-2\sqrt{3}i)^{60},\quad z=-2-2\sqrt{3}i.$

Представим число z в тригонометрической форме $|z|=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4,$ так как $x<0, y<0,$ то воспользуемся формулой

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}}{-2}-\pi=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

$$-2-2\sqrt{3}=4(\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})).$$

Тогда используем формулу Муавра $z^n=|z|^n(\cos\varphi+i\sin\varphi),$

$$(-2-2\sqrt{3}i)^{60}=4^{60}(\cos(-\frac{60\cdot 2\pi}{3})+i\sin(-\frac{60\cdot 2\pi}{3}))=$$

$$=4^{60}(\cos(-40\pi)+i\sin(-40\pi))=4^{60}(1+i\cdot 0)=4^{60}.$$

Пример выполнения задания VI.

Представить число $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{-2-2i} \right)^{24}$ в показательной форме.

Решение:

Представим комплексные числа $\sqrt{15} + \sqrt{5}i$ и $-2-2i$ в показательной форме $|\sqrt{15} + \sqrt{5}i| = \sqrt{15+5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Найдем аргумент этого числа, расположенного в I четверти

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}; \qquad \sqrt{15} + \sqrt{5}i = 2\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

$|-2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

Число $-2-2i$ расположено в III четверти

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-2}{-2} - \pi = \operatorname{arctg}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}; \quad -2-2i = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}i}{-2-2i} = \frac{2\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{6}i}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)i} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}i}{-2-2i} \right)^{24} = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}e^{\frac{11\pi}{12}i} \right)^{24} = \left(\frac{5}{2} \right)^{12} e^{22\pi i}.$$

Не следует преобразовывать число $\dfrac{\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{-2-2i}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю. Это может затруднить решение задачи.

Пример решения задачи VII.

Найти действительные решения уравнения

$$(2+3i)x + (4-i)y = 8+5i.$$

Решение: Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части

$(2+3i)x + (4-i)y = (2x+4y) + i(3x-y).$

Тогда $(2x+4y) + i(3x-y) = 8+5i.$

Согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем систему:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 2,\ \ y = 1.$

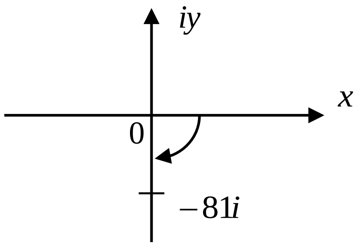
Пример решения задачи VIII.

Найти все решения уравнения $z^4 + 81i = 0$ и изобразить их точками на комплексной плоскости.

Решение:

Запишем уравнение $z^4 = -81i.$

Для отыскания корней уравнения нужно извлечь корень четвертой степени из числа $-81i$. Представим число в тригонометрической форме (можно и в показательной). Используем геометрическую интерпретацию этого числа.



Расстояние от начала координат до точки $-81i$ составляет 81 единицу, т.е. $|-81i| = 81$. $\varphi = \arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ (Исходя из рисунка).

Корень $n-$й степени из комплексного числа z найдем по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ \ k = 0,1,\ldots,n-1$$

Для нашей задачи

$$\sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81}(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4}) \qquad k = 0,1,2,3$$

$k=0,\quad z_0=3(\cos(-\frac{\pi}{8})+i\sin(-\frac{\pi}{8}))$

$k=1,\quad z_1=3(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8})$

$k=2,\quad z_2=3(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8})$

$k=3,\quad z_3=3(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8})$

Изобразим полученные значения z_0, z_1, z_2, z_3 на комплексной плоскости. Проведем такие преобразования:

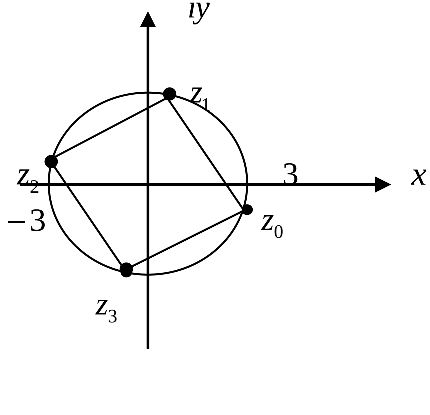
$$z_0=3(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right))=3(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})=3\cos\frac{\pi}{8}-i3\sin\frac{\pi}{8}.$$

Так как $3\cos\frac{\pi}{8}>0,$ то число z_0 расположено в IV четверти.

$z_1=3(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}),\quad \cos\frac{3\pi}{8}>0,\quad \sin\frac{3\pi}{8}>0,$ число z_1 расположено в I четверти.

$z_2=3(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}),\quad \cos\frac{7\pi}{8}<0,\quad \sin\frac{7\pi}{8}>0,$ число z_2 расположено во II четверти.

$z_3=3(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}),\quad \cos\frac{11\pi}{8}<0,\quad \sin\frac{11\pi}{8}<0,$ число z_3 расположено в III четверти.



Значения z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 3, с центром в начале координат.

Пример решения задачи IX.

Решить биквадратное уравнение $z^4+8z^2+1=0$.

Решение.

Введем новую переменную $z^2=t$. Получим

$$t^2+8t+1=0.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем

$$t_1=-1,\ t_2=-7.$$

Возвратимся к прежней переменной

$$\left[\begin{array}{l} z^2=-1 \\ z^2=-7 \end{array}\right. \quad \text{тогда} \quad \left[\begin{array}{l} z_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i, \\ z_{3,4}=\sqrt{-7}=\pm i\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm i,\ \pm i\sqrt{7}$.

Пример решения задачи X.

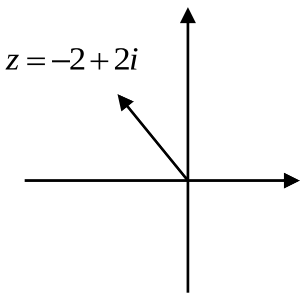
Найти все решения корня $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Решение:

Представим число $z=-2+2i$ в показательной форме

$$z=|z|e^{i\varphi}$$

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}.$$



Так как число $z=-2+2i$ расположено во II четверти, то

$$\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right)=\pi-\operatorname{arctg}1.$$

$$\arg z=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},\quad \varphi=\frac{3\pi}{4},$$

$$-2+2i=2^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Найдем все значения корня, используя формулу

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\quad k=0,1,2...n-1\qquad \varphi=\arg z.$$

Для нашего случая $k=0,1,2$.

$$w_k = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}}},$$

$$k=0, \quad w_0 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{12} i} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i},$$

$$k=1, \quad w_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\right)}{3}} = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}},$$

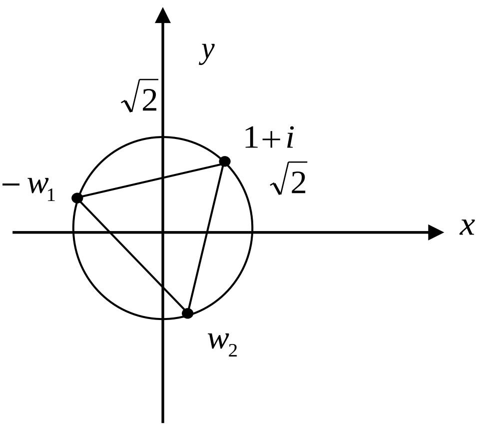
$$k=2, \quad w_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot 2\right)}{3}} = \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

Можно представить числа w_0, w_1, w_2 в тригонометрической форме:

$$w_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i,$$

$w_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$. Так как $\frac{\pi}{2} < \frac{11\pi}{2} < \pi,$ то число w_1 расположено во II четверти.

$w_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$, $\frac{3\pi}{2} < \frac{19\pi}{2} < 2\pi,$ число w_2 расположено в IV четверти. Так как модули чисел w_0, w_1, w_2 равны между собой и равны $\sqrt{2}$, то эти числа располагаются на окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат в вершинах правильного треугольника, вписанного в эту окружность.



Пример решения задачи XI.

При решении задачи №11 следует помнить, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, знать определение модуля z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$; затем, используя и навыки действий с комплексными числами и элементарные тождественные преобразования функций, получить уравнение кривой.

Пример. Определить, какая линия определяется уравнением

$$|z| - \operatorname{Re} z = 12.$$

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re} z = x$, получим $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 12 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 12.$

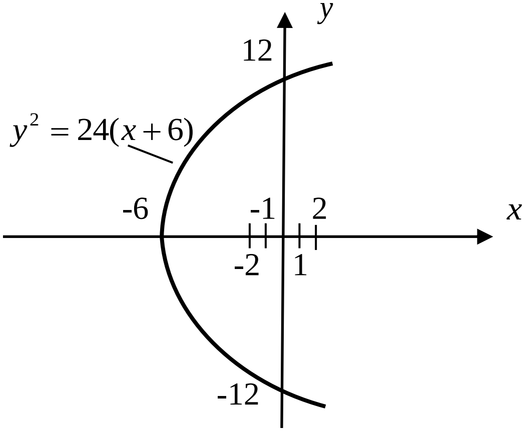
Так как $\sqrt{x^2 + y^2}$ – величина неотрицательная, то запишем ограничения $x + 12 \geq 0$. После этого можно возвести обе части равенства в квадрат.

$$x^2 + y^2 = x^2 + 24x + 144 \Rightarrow 24x = y^2 - 144$$

$$y^2 = 24x + 144$$

$$y^2 = 24(x + 6)$$

Это парабола, осью симметрии является ось Ox.



Пример решения задачи XII.

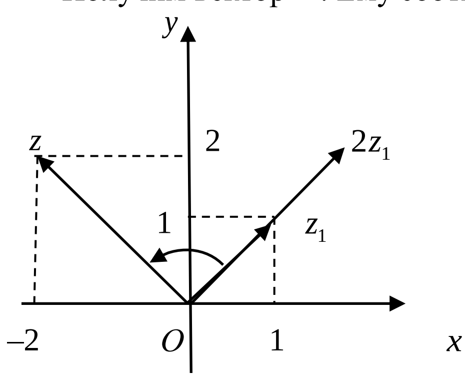
Дан вектор изображающий комплексное число z_1. Его растянули в два раза и повернули на угол $\frac{\pi}{2}$. Найти комплексное число z, соответствующее новому вектору

$$z_1 = 1 + i, \quad t = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

Строим радиус-вектор числа $z_1 = 1 + i$. Растягиваем его в два раза и поворачиваем на угол $\frac{\pi}{2}$.

Получим вектор z. Ему соответствует число $z = -2 + 2i$.



Эту задачу можно решить иначе.

При умножении чисел в тригонометрической или показательной формах их модули перемножаются, аргументы складываются. Геометрически умножение одного комплексного числа на другое комплексное число, отличное от нуля, означает поворот радиуса-вектора числа z_1 против часовой стрелки на угол, равный аргументу числа z_2 и умножение этого вектора на модуль числа z_2. Представим число $z_1 = 1 + i$ в тригонометрической и показательной формах.

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Найдем число z. Учитывая условие задачи $|z_2| = 2$, нужно растянуть вектор в два раза; аргумент z_2 будет равен $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, а

$$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Тогда $z = z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)i} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Запишем полученное число в алгебраической форме, используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

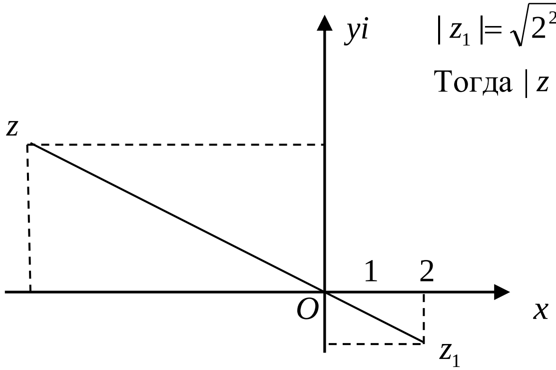
$$2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i,$$

так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

При выполнении этого задания могут возникнуть трудности при отыскании аргумента числа z. В этом случае лучше воспользоваться первым способом решения задачи.

Например.

Дано число $z_1 = 2 - i$. Вектор, соответствующий этому числу растянули в $\sqrt{5}$ раз и повернули на угол π.



$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Тогда $|z| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5.$

Отмечаем число z_1 на комплексной плоскости и строим радиус-вектор точки z_1. Поворачиваем вектор на угол π. Расположение точки z находим, учитывая, что длина нового вектора должна быть равна 5.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача I.. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2, изобразить на плоскости данные числа и результаты операций, пользуясь векторным представлением.

1. $z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - i;$
2. $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -2 - 3i;$
3. $z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = -3 - 2i;$
4. $z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = -1 + 2i;$
5. $z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = -1 + i;$
6. $z_1 = 1 - 4i, \quad z_2 = -2 - 3i;$
7. $z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 1 + i;$
8. $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -3 - i;$
9. $z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 1 - 2i;$
10. $z_1 = 3 + i, \quad z_2 = -1 + 2i;$
11. $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -1 - 2i;$
12. $z_1 = 5 + 3i, \quad z_2 = 1 - i;$
13. $z_1 = -5 - 2i, \quad z_2 = 3 + i;$
14. $z_1 = 6 + i, \quad z_2 = -1 + i;$
15. $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 3 - i;$
16. $z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = -3 + i;$
17. $z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = -2 - 4i;$
18. $z_1 = -2 + 4i, \quad z_2 = 1 + 3i;$
19. $z_1 = -1 - 5i, \quad z_2 = -1 + 3i;$
20. $z_1 = -2 + 4i, \quad z_2 = -1 - 2i;$
21. $z_1 = -3 + i, \quad z_2 = 2 + 3i;$
22. $z_1 = 3 - i, \quad z_2 = -4 - i;$
23. $z_1 = -1 + 4i, \quad z_2 = 2 - 3i;$

24. $z_1 = -2-3i, \quad z_2 = 2+i;$

25. $z_1 = 2-4i, \quad z_2 = -3+i;$

26. $z_1 = 1-5i, \quad z_2 = -1+3i;$

27. $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 4-i;$

28. $z_1 = 5-2i, \quad z_2 = -1+2i;$

29. $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 3-2i;$

30. $z_1 = 1+5i, \quad z_2 = -i+2.$

Задача II. Выполнить действия и представить результат в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

1. $4\operatorname{Re}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right) + (\overline{i^6 - \sqrt{3}i});$

2. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right) + (\overline{i-1)^2} + (1+i)\cdot i^3;$

3. $5i^5\left(\dfrac{\overline{1-i}}{1+2i}\right) + \operatorname{Re}(2-i)^2;$

4. $\dfrac{(1-2i)(2+i)^2}{5i} + \operatorname{Im}(2-i)^2 + i^9;$

5. $\dfrac{(1-i)^3}{1+i} + (\overline{2-i}) + \operatorname{Im}(i^7);$

6. $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\overline{(1-i)^2}}{i^3} - \operatorname{Re}(\sqrt{3}+i)^2;$

7. $(-1+i\sqrt{3})^3 \cdot \left(\dfrac{i}{2}\right) \cdot \operatorname{Im}(1-i)^2;$

8. $\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)^2 \cdot (\overline{-2-i}) \operatorname{Im}(1+2i)^2 + 10i^9;$

9. $\dfrac{\operatorname{Im}(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^2} + \dfrac{\overline{(-\sqrt{3}+i^3)}}{2} i^5;$

10. $$\frac{\operatorname{Re}(2-3i)^2+(\overline{5i})}{1-i}\,i^{12};$$

11. $$\frac{\operatorname{Im}\overline{(1-i)^3}\,\operatorname{Re}(2+3i)^2}{2+i}+2i^8;$$

12. $$\frac{(2-i)^3-(\overline{2+i})-10}{\operatorname{Re}(2+i)^2+2};$$

13. $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3+\operatorname{Im}(1+i)^2-\operatorname{Re}(i)^8;$$

14. $$\left(\frac{i^5+2}{i^3+1}\right)^2+\operatorname{Re}(-2+i)^2+\frac{1}{4}i^3;$$

15. $$\frac{(1-i)^3-(1+i)^3}{i^4\operatorname{Re}(2-i)}+(\overline{3-5i});$$

16. $$\frac{(1+2i)^2(1-2i)}{(\overline{2+i})}-\frac{5}{3}\operatorname{Re}(2-i)^2;$$

17. $$7\operatorname{Im}\frac{(1+i)(2+i)}{3-i}+\overline{(3-2i)^2};$$

18. $$\frac{(2i+i^2)^2}{\operatorname{Re}(2+i)^3}+(\overline{\frac{1}{2}-i});$$

19. $$\frac{\operatorname{Im}(1-3i)}{1-i}+\overline{(1+i)^3};$$

20. $$\operatorname{Re}\frac{(2-i^3)(\overline{3-i})}{1+i}+(2+3i)^3;$$

21. $$\frac{(1-i)^3\operatorname{Re}(2-i)^2}{(1+i)^3\operatorname{Im}(2+i)}\,i^7;$$

22. $$\frac{(2-i)(\overline{1-2i})}{\operatorname{Im}(1-i)^2}-(i^2+\frac{i^3}{2});$$

23. $$\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(1-i\sqrt{2})^2}\cdot i^5+\operatorname{Re}\overline{(\sqrt{2}-i)^2};$$

24. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-i\sqrt{3}\right)^2-\dfrac{\overline{(3+i)i^9}}{\operatorname{Im}(2+i)^2-1}$;

25. $\dfrac{5(i^3-1)^2}{(2+i^3)}+\operatorname{Re}(\sqrt{3}+i)^2$;

26. $\dfrac{[\operatorname{Im}(3+i)^2](\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}}+i^{13}\operatorname{Re}(\overline{5i-\sqrt{3}})$;

27. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{(3-i)(\overline{2+i})}{1+i}\right)+i^{21}\operatorname{Im}(2-3i)^2$;

28. $\left(\dfrac{3+i}{1-i}\right)^2(4-i)\operatorname{Im}(2+i)^2+5i^7$;

29. $(2-i)^3\operatorname{Re}(\overline{\sqrt{3}i-1})+i^{25}\operatorname{Im}(4-1)^2$;

30. $(\overline{i^9+i\sqrt{3}})\operatorname{Im}\left(\dfrac{(2-i)(3+i)}{4+i}\right)+i^{17}\operatorname{Re}(5-3i)$.

Задача III. Вычертить область, заданную неравенствами.

1. $\begin{cases} z\cdot\bar{z}\le 2; \\ \operatorname{Re} z<1; \\ \operatorname{Im} z>-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} |z-2i|\ge 1; \\ \operatorname{Im} z>2; \\ 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 1<z\cdot\bar{z}<3; \\ \operatorname{Re} z>0; \\ 0\le\operatorname{Im} z\le 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} |z-2-i|\ge 1; \\ 1\le\operatorname{Re} z<3; \\ 0<\operatorname{Im} z\le 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} |z-1|>1; \\ -3\le\operatorname{Im} z<0; \\ 0<\operatorname{Re} z<3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 1\le|z+2+i|<2; \\ \operatorname{Im} z<0; \\ -\dfrac{5\pi}{6}<\arg z<-\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} |z-2i| \le 2; \\ \operatorname{Im} z > 0; \\ 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |z-2| \ge \dfrac{1}{2}; \\ |\operatorname{Im} z| \le 1; \\ -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z+i| > 1; \\ \operatorname{Re} z > 0; \\ -\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 1 < |z-1| < 2; \\ \operatorname{Re} z \ge 0; \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} |z-i| < 2; \\ \operatorname{Im} z \le 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} |z-2-i| \le 2; \\ 1 < \operatorname{Re} z < 2; \\ \operatorname{Im} z \ge 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} |z-1+i| \le 3; \\ \operatorname{Re} z > 1; \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 1 \le |z-2+i| < 2; \\ \operatorname{Im} z \ge 0; \\ \dfrac{\pi}{6} \le \arg z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} |z| \ge 2; \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 2; \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z+1-i| \le 2; \\ -2 \le \operatorname{Re} z < 0; \\ 0 < \arg z \le \pi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} |z-i| \le 3; \\ \operatorname{Im} z \ge 1; \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} |z-i| \le 2; \\ 0 < \operatorname{Re} z < 2; \\ -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} |z-1|<2; \\ |\operatorname{Re} z|\le 3; \\ -\pi<\arg z\le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} |z+2i|>1; \\ \operatorname{Im} z<0; \\ -\dfrac{3\pi}{4}<\arg z<0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} |z-3|\le 2; \\ 0\le \arg z<\dfrac{1}{2}; \\ \operatorname{Re} z>2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z+2i|>1; \\ \operatorname{Im} z>2; \\ 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} |z-i|<3; \\ \operatorname{Re} z<2; \\ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 1\le |z-1|\le 3; \\ -1\le \operatorname{Re} z<2; \\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<-\pi. \end{cases}$

25. $\begin{cases} |z-1|\le 3; \\ 0\le \operatorname{Im} z\le 3; \\ 0\le \arg z\le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} |z-2+i|<2; \\ \operatorname{Im} z<0; \\ -\dfrac{\pi}{3}\le \arg z<0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 1\le |z-i|<3; \\ \operatorname{Re} z>-1; \\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi. \end{cases}$

28. $\begin{cases} |z-2+2i|\ge 1; \\ 1>\operatorname{Re} z<2; \\ -\dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} |z-2+i|>1; \\ |\operatorname{Im} z|\ge -3; \\ -\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \pi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} |z+i|>2; \\ |\operatorname{Im} z|<1; \\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z\le \pi. \end{cases}$

Задача IV. Изобразить числа точками на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической и показательной формах. Для заданий а), б), в), г) главное значение аргумента находим, используя геометрическую интерпретацию чисел.

1. а) $z_1 = -3,$ б) $z_2 = 5,$ в) $z_3 = 4i,$ г) $z_4 = -7i,$
   д) $z_5 = 1 - i\sqrt{3},$ е) $z_6 = -2 - 2i.$
2. а) $z_1 = 2,$ б) $z_2 = -8,$ в) $z_3 = 3i,$ г) $z_4 = -5i,$
   д) $z_5 = -\sqrt{3} - i,$ е) $z_6 = -6 + 6i.$
3. а) $z_1 = -4,$ б) $z_2 = 3,$ в) $z_3 = -2i,$ г) $z_4 = 7i,$
   д) $z_5 = 2\sqrt{3} - 2i,$ е) $z_6 = 4 - 4i.$
4. а) $z_1 = -2,$ б) $z_2 = 4,$ в) $z_3 = 6i,$ г) $z_4 = -3i,$
   д) $z_5 = -3 + 3i,$ е) $z_6 = -2 + i\sqrt{3}.$
5. а) $z_1 = -5,$ б) $z_2 = 6,$ в) $z_3 = 2i,$ г) $z_4 = -8i,$
   д) $z_5 = -1 + i\sqrt{3},$ е) $z_6 = -3 - 3i.$
6. а) $z_1 = -7,$ б) $z_2 = 6,$ в) $z_3 = -5i,$ г)
   $z_4 = 7i,$ д) $z_5 = 2 - 2i,$ е) $z_6 = -3\sqrt{3} + i3.$
7. а) $z_1 = -6,$ б) $z_2 = 9,$ в) $z_3 = -4i,$ г) $z_4 = 8i,$
   д) $z_5 = \sqrt{3} - i,$ е) $z_6 = -5 - 5i.$
8. а) $z_1 = 1{,}5,$ б) $z_2 = -9,$ в) $z_3 = -9i,$ г) $z_4 = 7{,}5i,$
   д) $z_5 = -2 - 2i\sqrt{3},$ е) $z_6 = 6 - 6i.$
9. а) $z_1 = -0{,}5,$ б) $z_2 = 10,$ в) $z_3 = -6i,$ г) $z_4 = 7i,$
   д) $z_5 = 3 - 3i,$ е) $z_6 = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}.$
10. а) $z_1 = 9,$ б) $z_2 = -2{,}5,$ в) $z_3 = -1{,}5i,$ г) $z_4 = 7{,}5i,$
    д) $z_5 = -7 - 7i,$ е) $z_6 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}.$
11. а) $z_1 = 3{,}5,$ б) $z_2 = -5,$ в) $z_3 = 8i,$ г) $z_4 = 2{,}5i,$
    д) $z_5 = 4{,}5 - 4{,}5i,$ е) $z_6 = -4\sqrt{3} + 4i.$

12. а) $z_1 = 6,$ б) $z_2 = -3{,}5,$ в) $z_3 = 4{,}5i,$ г) $z_4 = -6{,}5i,$
    д) $z_5 = -4 - 4i,$ е) $z_6 = -\sqrt{15} + i\sqrt{5}.$
13. а) $z_1 = -4{,}5,$ б) $z_2 = 4,$ в) $z_3 = -8i,$ г) $z_4 = 5{,}5i,$
    д) $z_5 = 7 - 7i,$ е) $z_6 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}.$
14. а) $z_1 = 5{,}5,$ б) $z_2 = -2,$ в) $z_3 = 3i,$ г) $z_4 = -2{,}5i,$
    д) $z_5 = -1 - i\sqrt{3},$ е) $z_6 = -4{,}5 - i4{,}5.$

15. а) $z_1 = -5{,}5,$ б) $z_2 = 3,$ в) $z_3 = 6i,$ г) $z_4 = -2{,}5i,$
    д) $z_5 = -2\sqrt{3} - 2i,$ е) $z_6 = \sqrt{5} + i\sqrt{15}.$
16. а) $z_1 = -7{,}5,$ б) $z_2 = 4{,}5,$ в) $z_3 = 10i,$ г) $z_4 = -3{,}5i,$
    д) $z_5 = -1{,}5 + 1{,}5i,$ е) $z_6 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}.$
17. а) $z_1 = -4,$ б) $z_2 = 8{,}5,$ в) $z_3 = -6i,$ г) $z_4 = 1{,}5i,$
    д) $z_5 = -6 - 6i,$ е) $z_6 = \sqrt{6} - i\sqrt{3}.$
18. а) $z_1 = 5,$ б) $z_2 = -10,$ в) $z_3 = -4i,$ г) $z_4 = 6{,}5i,$
    д) $z_5 = -7 + 7i,$ е) $z_6 = 3\sqrt{3} + i3.$
19. а) $z_1 = 2,$ б) $z_2 = -8{,}5,$ в) $z_3 = -9i,$ г) $z_4 = 5{,}5i,$
    д) $z_5 = -4 + 4i,$ е) $z_6 = -\sqrt{6} - i\sqrt{3}.$
20. а) $z_1 = 6{,}5,$ б) $z_2 = -1{,}5,$ в) $z_3 = 8i,$ г) $z_4 = -5{,}5i,$
    д) $z_5 = -4{,}5 + i4{,}5,$ е) $z_6 = 3 - i3\sqrt{3}.$
21. а) $z_1 = -9{,}5,$ б) $z_2 = 2{,}5,$ в) $z_3 = 10i,$ г) $z_4 = -2{,}5i,$
    д) $z_5 = 1{,}5 - 1{,}5i,$ е) $z_6 = -4\sqrt{3} - 4i.$
22. а) $z_1 = -8,$ б) $z_2 = 3{,}5,$ в) $z_3 = 9i,$ г) $z_4 = -2{,}5i,$
    д) $z_5 = -3{,}5 + 3{,}5i,$ е) $z_6 = 2 + i2\sqrt{3}.$
23. а) $z_1 = 7,$ б) $z_2 = -5{,}5,$ в) $z_3 = -8i,$ г) $z_4 = 4{,}5i,$
    д) $z_5 = 2{,}5 + 2{,}5i,$ е) $z_6 = -3 + i3\sqrt{3}.$
24. а) $z_1 = -3,$ б) $z_2 = 7{,}5,$ в) $z_3 = -2i,$ г) $z_4 = 5i,$
    д) $z_5 = -1{,}5 - 1{,}5i,$ е) $z_6 = 3\sqrt{3} - 3i.$

25) а) $z_1 = 4$; б) $z_2 = -6{,}5$; в) $z_3 = -9i$; г) $z_4 = 1{,}5i$;

д) $z_5 = -2\sqrt{3} + 2i$; е) $z_6 = 5 - 5i$.

26) а) $z_1 = -6$; б) $z_2 = 4{,}5$; в) $z_3 = -2i$; г) $z_4 = 3{,}5i$;

д) $z_5 = -2 + 2i$; е) $z_6 = -3\sqrt{3} - 3i$.

27) а) $z_1 = 7{,}5$; б) $z_2 = -10$; в) $z_3 = -1{,}5i$; г) $z_4 = 2{,}5i$;

д) $z_5 = -\sqrt{3} + i$; е) $z_6 = 2{,}5 - 2{,}5i$.

28) а) $z_1 = -9$; б) $z_2 = 9{,}5$; в) $z_3 = 4i$; г) $z_4 = -7i$;

д) $z_5 = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}$; е) $z_6 = -5 + 5i$.

29) а) $z_1 = -3{,}5$; б) $z_2 = 6{,}5$; в) $z_3 = -10i$; г) $z_4 = 5{,}5i$;

д) $z_5 = -2{,}5 - i \cdot 2{,}5$; е) $z_6 = -3 - i \cdot 3\sqrt{3}$.

30) а) $z_1 = 9$; б) $z_2 = -4{,}5$; в) $z_3 = -7i$; г) $z_4 = 2{,}5i$;

д) $z_5 = -3{,}5 - i \cdot 3{,}5$; е) $z_6 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Задача V. Вычислить, пользуясь представлением комплексного числа в тригонометрической форме и формулой Муавра.

1) $(-2+2i)^{10}$; 2) $(-\sqrt{12}-2i)^{20}$; 3) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{8}$;

4) $(3\sqrt{3}+9i)^{15}$; 5) $(-\sqrt{6}+i\sqrt{2})^{18}$; 6) $(5-5i)^{20}$;

7) $(6\sqrt{3}-6i)^{35}$; 8) $(-3-3\sqrt{3}i)^{24}$; 9) $(-4-4i)^{22}$;

10) $(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{10}$; 11) $(4+4i)^{44}$; 12) $(\sqrt{3}-i)^{48}$;

13) $(-6+2\sqrt{3}i)^{18}$; 14) $(\sqrt{3}+3i)^{27}$; 15) $(4-4\sqrt{3}i)^{33}$;

16) $(-7+7i)^{52}$; 17) $(-2\sqrt{3}-2i)^{42}$; 18) $(-3-i\sqrt{3})^{40}$;

19) $(8+8\sqrt{3}i)^{45}$; 20) $(-12-12i)^{28}$; 21) $(1-i\sqrt{3})^{51}$;

22) $(-9+9i)^{48}$; 23) $(11-11i)^{34}$; 24) $(-5-5\sqrt{3}i)^{45}$;

25) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{66}$; 26) $(-1+i\sqrt{3})^{54}$; 27) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{21}$;

28) $(\sqrt{3}-i\sqrt{3})^{60}$; 29) $(-\sqrt{3}+i)^{28}$; 30) $(-5\sqrt{3}-15)^{39}$;

Задача VI. Представить числа в показательной форме.

1. $z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{1+i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-4+4i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12};$

2. $z_1 = \dfrac{-5+5i}{1+\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{6-i6\sqrt{3}}{-5-5i}\right)^{20};$

3. $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{-3+3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2+2i}\right)^{28};$

4. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{-2-2i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-\sqrt{6}+i\sqrt{3}}{-4-4i}\right)^{24};$

5. $z_1 = \dfrac{-5\sqrt{3}-15i}{3-3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{3\sqrt{3}+9i}{-2+2i}\right)^{20};$

6. $z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2-2i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-12+12i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}\right)^{12};$

7. $z_1 = \dfrac{5-5i}{2+2\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4+4i}\right)^{20};$

8. $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3}+i3}{1-i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-8+i8\sqrt{3}}{-7-7i}\right)^{10};$

9. $z_1 = \dfrac{4+4\sqrt{3}i}{-1-i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{3+3i}\right)^{24};$

10. $z_1 = \dfrac{-1+i}{3\sqrt{3}+3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}+15i}{4-4i}\right)^{28};$

11. $z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{-1+i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-9+9i}{\sqrt{3}+i}\right)^{24};$

12. $z_1 = \dfrac{-8\sqrt{3}+8i}{5+5i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{-7+7i}\right)^{46};$

13. $z_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{7-7i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}-15i}{-11-11i}\right)^{20};$

14. $z_1 = \dfrac{-12-12i}{7+7\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{7+7i}\right)^{28};$

15. $z_1 = \dfrac{8+8\sqrt{3}i}{-3-3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5+5i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}\right)^{30};$

16. $z_1 = \dfrac{5+i5\sqrt{3}}{-7+7i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}+15i}{4-4i}\right)^{24};$

17. $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{-5+5i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{7-7\sqrt{3}i}{-6-6i}\right)^{28};$

18. $z_1 = \dfrac{-6+6i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{8-8\sqrt{3}i}{11+11i}\right)^{24};$

19. $z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}-3i}{-7-7i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-12-12i}{\sqrt{3}+i}\right)^{40};$

20. $z_1 = \dfrac{-11+11i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}-15i}{2-2i}\right)^{28};$

21. $z_1 = \dfrac{-8-8\sqrt{3}i}{3+3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-11+11i}{-3-i\sqrt{3}}\right)^{20};$

22. $z_1 = \dfrac{-9+9i}{1-i\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}+15i}{8-8i}\right)^{60};$

23. $z_1 = \dfrac{6-2\sqrt{3}i}{5+5i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}-15i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{48};$

24. $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5}i}{-1-i\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-2\sqrt{3}-2i}{-1-i}\right)^{42};$

25. $z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{-5+5i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-12-i4\sqrt{3}}{3-3i}\right)^{10};$

26. $z_1 = \dfrac{-4+4\sqrt{3}i}{-3-3i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+i\sqrt{15}}{6-6i}\right)^{24};$

27. $z_1 = \dfrac{-7+7i}{8-8\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5+5i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^{20};$

28. $z_1 = \dfrac{-12-12i}{1-\sqrt{3}i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}+15i}{2-2i}\right)^{10};$

29. $z_1 = \dfrac{5\sqrt{3}-15i}{2+2i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{-\sqrt{15}+i\sqrt{5}}{4-4i}\right)^{28};$

30. $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3}+3i}{-4-4i}, \qquad z_2 = \left(\dfrac{5+5i}{-6\sqrt{3}-6i}\right)^{20}.$

Задача VII. Найти действительные решения уравнений.

1. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i;$
2. $12[(2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)]=17+6i;$
3. $(4+2i)x+(5-3i)y=13+i;$
4. $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i;$
5. $(2+i)x-(1-i)y=7+8i;$
6. $(-2+3i)x+(3-5i)y=-9+14i;$
7. $(x-2i)(3+i)+(7-i)(x-y)=2-i;$
8. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i;$
9. $(x-iy)i^2+(2-3i)(x+y)=3-i;$
10. $(x+i)(i-1)-y(x+1)=5+3i;$
11. $(3x-i)(2-i)+(x-iy)(1+2i)=3+6i;$
12. $2(x-yi)(1-3i)=20i^5;$
13. $(4+2i)x+(5-3i)y=17+i;$

14. $(2-yi)x+(4+i)xi=6+2i;$
15. $3x(-1+i)-(x+y)(2-i)=7-2i;$
16. $(2x-i)(3+i)-(y-x)(5-2i)=-2+7i;$
17. $xi+(2x-i)(3+i)-y(1+i)=10-6i;$
18. $(-3+i)(x-2y)+y(-1+2i)=i^3+8;$
19. $(2+i)(i^3-1)x+(5-i)(y+2i)=12i^9;$
20. $(x-yi)(2+i)+i^2(-y+i)=5;$
21. $(3-2i)x+(i-1)(y+1)=3-5i;$
22. $(4-3i)(x+y)+(2+i)(x-y)=10i;$
23. $xy(1-i)+x(2-3i)+y(i-x)=4-i;$
24. $(x+2i)(3-i)+y(i^3-3i^4)=-1+i;$
25. $(2+i)(x-yi)-(1+i)(y-xi)=-6+3i;$
26. $(2-3i)x+(2+3i)(x-yi)=-1-2i;$
27. $(1-i)(x-3i)+y(2-i)+xi=2-i;$
28. $(1-i)(x+3)-(2+i)(y-2)=-2+2i;$
29. $(2x+i)(1-i)+yi^3(i-4)=6+11i;$
30. $(y+xi)(5-2i)+(x-y)(2-3i)=5-i.$

Задача VIII. Найти все значения корней уравнения и изобразить их точками на комплексной плоскости.

1. $z^3+8i=0;$
2. $z^3+\frac{1}{8}=0;$
3. $z^3+27=0;$
4. $z^3-8i=0;$
5. $z^3-\frac{i}{125}=0;$
16. $z^3-\frac{i}{216}=0;$
17. $z^3+\frac{i}{64}=0;$
18. $z^3+216i=0;$
19. $z^4+16=0;$
20. $z^3+64i=0;$

6. $z^4 + 81 = 0;$

7. $z^3 + 125i = 0;$

8. $z^3 + \frac{i}{8} = 0;$

9. $z^3 + 27i = 0;$

10. $z^4 + 256 = 0;$

11. $z^3 - 216i = 0;$

12. $z^3 + 125 = 0;$

13. $z^3 - 27i = 0;$

14. $z^3 - 125i = 0;$

15. $z^4 + 64 = 0;$

21. $z^3 + \frac{i}{125} = 0;$

22. $z^3 - \frac{i}{8} = 0;$

23. $z^3 - 64i = 0;$

24. $z^3 + \frac{i}{27} = 0;$

25. $z^3 - \frac{i}{64} = 0;$

26. $z^4 + 16i = 0;$

27. $z^4 + \frac{1}{64} = 0;$

28. $z^3 - \frac{i}{27} = 0;$

29. $z^3 + \frac{i}{216} = 0;$

30. $z^3 + \frac{1}{125} = 0.$

Задача IX. Решить биквадратные уравнения.

1. $2z^4 + z^2 - 3 = 0;$
2. $z^4 + 7z^2 + 6 = 0;$
3. $z^4 - z^2 - 2 = 0;$
4. $3z^4 + 4z^2 + 1 = 0;$
5. $z^4 + 4z^2 + 3 = 0;$
6. $5z^4 - z^2 - 4 = 0;$
7. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0;$
8. $z^4 - z^2 - 6 = 0;$

16. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0;$
17. $z^4 + 11z^2 + 24 = 0;$
18. $6z^4 + 5z^2 + 1 = 0;$
19. $z^4 - 4z^2 - 12 = 0;$
20. $4z^4 - 3z^2 - 1 = 0;$
21. $4z^4 + z^2 - 5 = 0;$
22. $z^4 - 2z^2 - 8 = 0;$
23. $z^4 + 6z^2 - 7 = 0;$

9. $z^4+8z^2-20=0$;
10. $2z^4-3z^2-2=0$;
11. $z^4+3z^2-10=0$;
12. $3z^4-2z^2-8=0$;
13. $2z^4-z^2-6=0$;
14. $6z^4+z^2-2=0$;
15. $z^4+5z^2-6=0$;
24. $z^4+3z^2-18=0$;
25. $z^4-2z^2-15=0$;
26. $z^4+5z^2+4=0$;
27. $3z^4-7z^2+4=0$;
28. $9z^4-8z^2-1=0$;
29. $z^4+8z^2-9=0$;
30. $z^4+5z^2-36=0$.

Задача X. Найти все значения корня.

1. $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$;
2. $\sqrt[4]{8-i8\sqrt{3}}$;
3. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$;
4. $\sqrt[4]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{32}}$;
5. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$;
6. $\sqrt[4]{-4-i4\sqrt{3}}$;
7. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$;
8. $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{32}}$;
9. $\sqrt[4]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$;
10. $\sqrt[3]{-2-2i}$;
11. $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$;
12. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$;
13. $\sqrt[4]{-3\sqrt{3}+3i}$;
14. $\sqrt[4]{8+i8\sqrt{3}}$;
15. $\sqrt[3]{-4+i4\sqrt{3}}$;
16. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$;
17. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$;
18. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}$;
19. $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{5}-i\cdot 13{,}5\cdot\sqrt{2}}$;
20. $\sqrt[4]{128-i\sqrt{3}\cdot 128}$;
21. $\sqrt[4]{8-i8\sqrt{3}}$;
22. $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$;
23. $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i}$;
24. $\sqrt[4]{-15+i5\sqrt{3}}$;
25. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$;
26. $\sqrt[4]{4-i4\sqrt{3}}$;
27. $\sqrt[3]{2+2i}$;
28. $\sqrt[4]{-6+i6\sqrt{3}}$;
29. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$;
30. $\sqrt[4]{-6\sqrt{3}+6i}$.

Задача XI. Указать какие линии определяются уравнением:

1) $|z|-3\operatorname{Im} z=6;$
2) $|z-i|+|z+i|=4;$
3) $|z|=1+\operatorname{Re} z;$
4) $|z+2|=2|z-i|;$
5) $|z-i|=|z+2|;$
6) $\operatorname{Re}(1+z)-|z|=0;$
7) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1;$
8) $|\operatorname{Re} z|=\operatorname{Im} z;$
9) $|z-1|+|z+1|=4;$
10) $\operatorname{Re}(z^2-z)=0;$
11) $\dfrac{1}{\operatorname{Re} z^2}=2;$
12) $\operatorname{Im} z^2=2;$
13) $|z+3|=2|z-2|;$
14) $|z-i|=|z+1|;$
15) $2\operatorname{Re} z+\operatorname{Im}\bar{z}=1;$
16) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2};$
17) $2\operatorname{Im} z+|z|^2=0;$
18) $z^2+\bar{z}^2=1;$
19) $\left|\dfrac{z+2i}{z-2i}\right|=\sqrt{2};$
20) $\operatorname{Re} z=|z|+1;$
21) $\operatorname{Re}\bar{z}^2+2\operatorname{Re} z=3;$
22) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{4};$
23) $|z+2|+|\bar{z}+2|=4;$
24) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=2;$
25) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6};$
26) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{2};$
27) $1-z^2=\bar{z}^2;$
28) $|\bar{z}-2|+|\bar{z}+2|=4;$
29) $\operatorname{Im}\bar{z}^2+2=0;$
30) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{8}.$

Задача XII. Дан вектор, изображающий комплексное число z_1. Его растянули в t раз и повернули на угол φ. Найдите комплексное число z_2, соответствующее новому вектору. Постройте полученные векторы.

1) $z_1=1+i,\qquad t=\sqrt{2},\qquad \varphi=\dfrac{\pi}{4};$

2) $z_1 = 2 + 3i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

3) $z_1 = -2 + i, \qquad t = 3, \qquad \varphi = \pi;$

4) $z_1 = -1 + 2i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

5) $z_1 = -1 - i, \qquad t = \sqrt{2}, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{3};$

6) $z_1 = -1 + i, \qquad t = \sqrt{2}, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{3};$

7) $z_1 = 2 + i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

8) $z_1 = 3 + 2i, \qquad t = 3, \qquad \varphi = \pi;$

9) $z_1 = -2 - i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

10) $z_1 = 2 + i, \qquad t = 3, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

11) $z_1 = 1 - i, \qquad t = 2\sqrt{2}, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{3};$

12) $z_1 = 1 - 2i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

13) $z_1 = -3 + 2i, \qquad t = 1{,}5, \qquad \varphi = -\pi;$

14) $z_1 = 2 - i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

15) $z_1 = -3 - 2i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = \pi;$

16) $z_1 = -2 - i, \qquad t = 3, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

17) $z_1 = -2 + 3i, \qquad t = 1{,}5, \qquad \varphi = \pi;$

18) $z_1 = 2 + 2i, \qquad t = \sqrt{2}, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{4};$

19) $z_1 = -2 + 3i, \qquad t = 2, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

20) $z_1 = -3+3i, \qquad t=\sqrt{2}, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{4};$

21) $z_1 = -2-3i, \qquad t=2, \qquad \varphi = \pi;$

22) $z_1 = -2+2i, \qquad t=2\sqrt{2}, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{4};$

23) $z_1 = 4+3i, \qquad t=2, \qquad \varphi = -\pi;$

24) $z_1 = 3-3i, \qquad t=2\sqrt{2}, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{4};$

25) $z_1 = -4+3i, \qquad t=1{,}5, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

26) $z_1 = -2-2i, \qquad t=\sqrt{2}, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{4};$

27) $z_1 = -4-3i, \qquad t=2, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2};$

28) $z_1 = -3-3i, \qquad t=\sqrt{2}, \qquad \varphi = -\pi;$

29) $z_1 = 2-2i, \qquad t=2\sqrt{2}, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{4};$

30) $z_1 = 4-3i, \qquad t=2, \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2}.$

Задача XIII.

1) При каком условии сумма двух комплексных чисел есть действительное число?

2) Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

3) При каком условии разность двух комплексных чисел есть действительное число?

4) Могут ли быть сопряженными действительное и мнимое число?

5) При каком условии сумма двух комплексных чисел есть чисто мнимое число?

6) Какое число сопряжено с $\bar{z}$?

7) Могут ли быть сопряженными два чисто мнимых числа?

8) При каком условии разность двух комплексных чисел есть чисто мнимое число?

9) Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

10) Что можно сказать о модулях двух сопряженных комплексных чисел?

11) Пусть $\arg z = \varphi$. Чему равен $\arg \bar{z}; \arg(-z)$?

12) Какое множество точек комплексной плоскости задается условием: $\arg z = 0$?

13) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в I четверти?

14) Чему равен аргумент любого отрицательного числа?

15) Чему равен аргумент нуля?

16) Чему равен аргумент чисто мнимого числа?

17) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного во второй четверти?

18) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в III четверти?

19) Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен сумме их модулей?

20) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в IV четверти?

21) Приведите пример комплексных чисел, которым соответствуют два перпендикулярных вектора.

22) Напишите условие того, что точка z_1 находится на расстоянии 2 от точки z_2.

23) Чему равен аргумент любого положительного числа?

24) Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $\arg z = \pi$?

25) При каком условии квадрат комплексного числа $x + iy$ является чисто мнимым числом?

26) Может ли квадратное уравнение с действительными коэффициентами иметь корни $1+i$ и $1+2i$?

27) Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на прямой, параллельной оси y ?

28) Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен разности модулей?

29) Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на прямой, параллельной оси x?

30) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения его на $2i$?

31) При каких условиях модуль разности двух комплексных чисел равен сумме модулей уменьшаемого и вычитаемого?

32) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения его на $(-3i)$?

33) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате деления его на $4i$?

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / М.Л. Краснов, А.И. Кисилев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 485 с.

2. Гурский Г.И. Руководство к решению задач по высшей математике. / Г.И. Гурский. – Ч.1. – Минск: Высшая школа, 1990. – 400 с.

РИИЦМ ФГАОУВО «Севастопольский государственный университет»