Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Севастопольский национальный технический университет

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Методические указания
для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»
студентов инженерных и экономических специальностей
дневной формы обучения

Севастополь
2011

УДК 51

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» студентов инженерных и экономических специальностей дневной формы обучения / Сост. Н.Г. Плаксина.– Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. – 68 с.

Целью настоящих методических указаний является помощь студенту при изучении раздела «Обыкновенные дифференциальные уравнения» дисциплины «Высшая математика». Рекомендуется параллельно в работе над этой темой пользоваться литературой, приведенной в конце методических указаний. Большое внимание уделено вопросу составления дифференциальных уравнений по условию задачи.

Кроме методических указаний по решению дифференциальных уравнений первого и высших порядков, данная работа содержит вопросы для самопроверки, отдельные упражнения и расчетную часть - варианты индивидуальных заданий, которые можно использовать для проведения индивидуализированных практических занятий по этой теме и для модульного контроля.

Методические указания предназначены для студентов дневной формы обучения инженерных и экономических специальностей.

Методические указания утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 8 от 24.03.2011 г.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензенты – Попов И.В., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики;

Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И К ИХ СОСТАВЛЕНИЮ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

Из теории студенту должно быть известно, что обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (ОДУ-I) называется уравнение вида $$y' = f(x, y),$$

где x - независимая переменная, y и y' - неизвестная функция и ее производная (в неявном виде: $F(x, y, y') = 0$). Решением или интегралом ОДУ-I называется дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. Дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение уравнения, достаточно задать начальное условие

$$y(x_0) = y_0.$$

Студент должен обратить внимание на теорему Коши о существовании и единственности решения:

Если функция $f(x, y)$ *непрерывна в области, содержащей точку* $M_0(x_0, y_0)$*, то уравнение* $y' = f(x, y)$ *имеет решение* $y = y(x)$ *такое, что* $y(x_0) = y_0$*. Если, кроме того , непрерывна и частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *, то это решение уравнения единственно.*

Это принципиально важная теорема теории ОДУ-I допускает простое геометрическое истолкование: если выполняются условия теоремы, то из семейства интегральных кривых всегда можно выделить, и притом только одну, кривую семейства, которая проходит через данную точку $(x_0; y_0)$.

Нахождение частного решения (частного интеграла) ОДУ-I составляет содержание задачи Коши.

Основными типами ОДУ-I являются:

1)<u>Уравнение с разделенными переменными вида</u>

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0.$$

Преобразуем уравнение: $f_2(y)dy = -f_1(x)dx$.

После интегрирования обеих частей равенства получим общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$.

2) Уравнение с разделяющимися переменными $y' = f_1(x) f_2(y)$ (или $M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0$), приводящееся к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей равенства на произведение «лишних» для каждого дифференциала сомножителей.

Преобразуем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y); \qquad dy = f_1(x) f_2(y) dx.$$

Разделим обе части на «лишний» для dx множитель $f_2(y)$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx .$$

Получили уравнение с разделенными переменными.
Проинтегрируем обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx .$$

В результате получим общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$.

Задача. Найти частное решение уравнения $y\mathrm{tg}x dx + dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$.

Решение

$y\mathrm{tg}x dx + dy = 0$, разделим обе части равенства на «лишний» для dx множитель y. В результате получим уравнение с разделенными переменными

$$tgx dx = -\frac{dy}{y}$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \mathrm{tg} x dx = -\int \frac{dy}{y}$$

$$-\ln|\cos x| = -\ln|y| + \ln|C| ; \qquad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|.$$

$y = C \cdot \cos x$ - общее решение данного уравнения.

Подставим начальное условие и определим C:

$$4 = C\cos\frac{\pi}{3}; \quad 4 = C\frac{1}{2}; \quad C = 8 .$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $y = 8\cos x$.

Ответ: $y = 8\cos x$.

3) Однородное уравнение $y' = f(x, y)$, особенностью которого является то, что оно не меняется при замене x и y соответственно на tx и ty, где $t \neq 0$.

При помощи подстановки $y = xu(x)$, где $u(x)$ - новая неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Задача. Найти общий интеграл уравнения:

$$2x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2y\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx + xdx = 0.$$

Решение

Если подставить вместо x и y соответственно tx и ty, где $t \neq 0$, то уравнение не изменится. Значит, оно однородное и решается при помощи подстановки $y = xu$.

Тогда $y' = u + xu'$.

Подставим y и y' в данное уравнение:

$$2x\cos u(u + xu') = 2xu\cos u - x;$$

$$2x\cos u u + 2x^2\cos u \cdot u' = 2xu\cos u - x;$$

$2x\cos u \cdot u' = -1; \qquad 2x\cos u \cdot \dfrac{du}{dx} = -1$ - получили уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$. Разделим переменные: $2\cos u du = -\dfrac{dx}{x}$. Проинтегрируем обе части равенства и заменим $u(x)$ на $\dfrac{y}{x}$, в результате чего получим общий интеграл уравнения:

$2\sin u = -\ln|x| + \ln|C|; \quad u = \dfrac{y}{x}; \; 2\sin\dfrac{y}{x} = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$ - общий интеграл.

Ответ: $2\sin\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

4) Линейное уравнение $y'+P(x)y=Q(x)$, содержащее y и y' в первой степени и не содержащее произведения $y\cdot y'$.

Для его решения можно использовать подстановку $y=u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$-новые неизвестные функции, причем одна из них выбирается произвольно, а вторая должна быть определена в зависимости от первой таким образом, чтобы их произведение $u\cdot v$ удовлетворяло данному линейному уравнению.

Рассмотрим решение линейного уравнения на примере $y=x(y'-x\cos x)$.

Это уравнение содержит y и y' в первой степени, в уравнении нет произведения $y\cdot y'$, значит, оно линейное.

Используем подстановку $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$.

Подставим y и y' в уравнение:

$$u\cdot v=x(u'v+uv'-x\cos x);$$

$$u\cdot v-xu'v=xuv'-x^2\cos x;$$

$$v(u-xu')=xuv'-x^2\cos x.$$

Выберем в качестве $u(x)$ одно из частных решений уравнения $u-xu'=0$.

Тогда для отыскания второй неизвестной функции $v(x)$ получим уравнение $0=xuv'-x^2\cos x$.

Решим первое уравнение $u-xu'=0$ (оно обязательно должно быть уравнением с разделяющимися переменными).

$$\frac{xdu}{dx}=u\ ; \qquad xdu=udx\ .$$

Разделим обе части равенства на произведение xu: $\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}$, после интегрирования получим $\ln|u|=\ln|x|$, откуда $u=x$.

Подставим $u=x$ во второе уравнение (оно должно быть уравнением с разделяющимися переменными) :

$$0 = xuv' - x^2\cos x\,; \qquad x^2v' = x^2\cos x\,;$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x\,; \qquad dv = \cos x\,dx.$$

Проинтегрируем обе части неравенства: $v = \sin x + C.$

Значения $u(x)$ и $v(x)$ подставим в выражение $y = uv$:
$y = x(\sin x + C)$ - общее решение данного линейного уравнения.

Ответ: $y = x(\sin x + C)$.

5) <u>Уравнение Бернулли</u>, $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $n \neq 0$ $n \neq 1$.

Это уравнение , кроме y и y' в первой степени, содержит y^n, где $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

При $n = 0$ уравнение Бернулли превращается в линейное ,а при $n = 1$ - в уравнение с разделяющимися переменными.

При других значениях n оно сводится к линейному при помощи следующего приема: делим обе части уравнения на y^n : $y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$,

введем вспомогательную неизвестную функцию $y^{-n+1} = z$, тогда

$z' = (-n+1)y^{-n}y'$ и уравнение примет вид:

$$z' + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x).$$

Это линейное уравнение ; решив его, перейдем от z к y и получим общий интеграл уравнения Бернулли. С учетом вышеизложенного, можно непосредственно для решения уравнения Бернулли применить подстановку $y = uv$, которая применяется в линейных уравнениях.

Задача. Найти общий интеграл уравнения $y' + 2y = y^2e^x$.

Решение

Это уравнение Бернулли, так как оно содержит y и y' в первой степени и содержит $y^2\ (n = 2)$.

Применяем подстановку: $y = u\cdot v$; $y' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + 2uv = u^2v^2e^x\,; \qquad (u'v + 2uv) + uv' = u^2v^2e^x\,;$$

$$v(u' + 2u) + uv' = u^2v^2e^x.$$

Выберем в качестве $u(x)$ одно из частных решений уравнения $u' + 2u = 0$.

В результате этого для нахождения второй функции $v(x)$ получим уравнение

$$uv' = u^2 v^2 e^x \quad .$$

Решаем первое уравнение: $\dfrac{du}{dx} + 2u = 0$, $du = -2udx$; $\dfrac{du}{u} = -2dx$;

после интегрирования получим $\ln|u| = -2x$, откуда $u = e^{-2x}$.

Подставим $u = e^{-2x}$ во второе уравнение :

$$v' = uv^2 e^x \;;\quad v' = e^{-2x} v^2 e^x \;;\quad v' = v^2 e^{-x} \;;\quad dv = v^2 e^{-x} dx .$$

$\dfrac{dv}{v^2} = e^{-x} dx$ после интегрирования получаем:

$$-\frac{1}{v} = -e^x + C \;; \qquad v = \frac{1}{e^{-x} - C} \;;$$

$$y = uv = e^{-2x} \frac{1}{e^{-x} - C} = e^{-2x} \frac{e^x}{1 - Ce^x} \;;$$

$y = \dfrac{e^{-x}}{1 - Ce^x}$ или $y = \dfrac{1}{e^x - Ce^{2x}}$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = \dfrac{1}{e^x - Ce^{2x}}$.

6) <u>Уравнение в полных дифференциалах</u> $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$

Признаком такого уравнения является выполнение условия $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$: $du = u'_x dx + u'_y dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Отсюда $u'_x = P(x,y)$ и $u'_y = Q(x,y)$. Эти условия дают возможность найти функцию $u(x,y)$, которая равна произвольной постоянной C, так как $du = 0$.

Задача. Найти частный интеграл уравнения $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$, удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 2$.

Решение

$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$ Сравнивая данное уравнение с уравнением в общем виде, получаем, что $P(x,y) = x + e^{\frac{x}{y}}$, $Q(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

Найдем $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$ и

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\right)'_x = e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное уравнение в полных дифференциалах. Это означает, что левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $du = 0$, а сама функция $u(x,y) = C$.

Для нахождения функции $u(x,y)$ запишем условия $u_x' = x + e^{\frac{x}{y}}$ и $u_y' = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

Интегрируем по x первое равенство:

$$u(x,y) = \int\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + C(y), \quad C(y) - ?$$

Найдем u_y' и подставим во второе равенство :

$$e^{\frac{x}{y}} + ye^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + C'(y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) \;;$$

$$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} \cdot e^{\frac{x}{y}} + C'(y) = e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}\,\frac{x}{y} \;; \qquad C'(y) = 0.$$

Интегрируем это уравнение и получаем $C(y) = C = const$.

Значит, общий интеграл данного уравнения имеет вид: $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

Подставим начальное условие $y(0) = 2$: $\quad 2 = C$.

Частный интеграл данного уравнения имеет вид: $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$.

Ответ: $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$.

Перечисление типов уравнений первого порядка и способов их решения говорит о том, как важно научиться распознавать дифференциальные уравнения того или иного вида. Студенту рекомендуется определить тип следующих уравнений.

1. $y' = \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y$; 2. $xyy' = y^2 + 2x^2$;

3. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$; 4. $\dfrac{xy' - y}{x} = tg\dfrac{y}{x}$;

5. $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$;

6. $y^2\sqrt{1+x^2}dy - x\left(1+y^3\right)dx = 0$;

7. $(x-y)dx + (y-2x)dy = 0$; 8. $\left(1+x^2\right)dy + ydx = 0$;

9. $y' = e^{2x} - ye^x$; 10. $xy' = \sqrt{xy} - y$;

11. $y' - y\mathrm{ctg}x = \sin 2x$;

12. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)ydy = 0$.

Применение к этим уравнениям рассмотренных выше определений поможет студенту правильно определить их тип. В результате оказалось, что уравнениями с разделяющимися переменными являются 1,6,8; однородными-2,4,7,10; линейными-9, 11; уравнениями Бернулли-2 (его можно переписать в виде $xy' = y + 2x^2y^{-1}$) , 3, 10 (его можно переписать в виде $xy' + y = \sqrt{x}y^{\frac{1}{2}}$); уравнениями в полных дифференциалах являются 5,12.

Как уже упоминалось, вопросу составления дифференциальных уравнений будет уделено большое внимание. Остановимся на этом подробнее. Каких-либо общих правил для составления уравнений не существует. Условия задачи должны быть таковы, чтобы позволяли составить соотношение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производную (или производные).Если задача геометрического характера, то часто может быть использован геометрический смысл производной как тангенса угла, образованного касательной к кривой с положительным направлением оси $0X$. В других случаях используется геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции или длины дуги кривой. При этом непосредственно из условий задачи получается интегральное уравнение, поскольку искомая функция содержится под знаком интеграла.

Однако после дифференцирования обеих его частей получается дифференциальное уравнение.

Рекомендуем студенту разобрать решение всех задач, приведенных в данной работе.

Задача 1. Найти кривую, обладающую тем свойством, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой кривой, равна длине самой дуги. Кривая проходит через точку $(0;1)$.

Решение

Выразим площадь криволинейной трапеции и длину соответствующей дуги кривой с помощью определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$\int\limits_0^x y(x)dx = \int\limits_0^x \sqrt{1+(y')^2}dx$. После дифференцирования получаем $y = \sqrt{1+(y')^2}$. Разрешаем уравнение относительно y' : $y' = \pm\sqrt{y^2-1}$. Получили уравнение с разделяющими переменными. Преобразуем его: $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx$.

После интегрирования получаем: $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right| = \pm x + C$.

Подставим начальное условие в общий интеграл уравнения :

$\ln 1 = C$; $C = 0$. Частный интеграл имеет вид : $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right| = \pm x$.

Выполним следующие преобразования :

$$y+\sqrt{y^2-1} = e^{\pm x}; \qquad \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} = e^{\mp x};$$

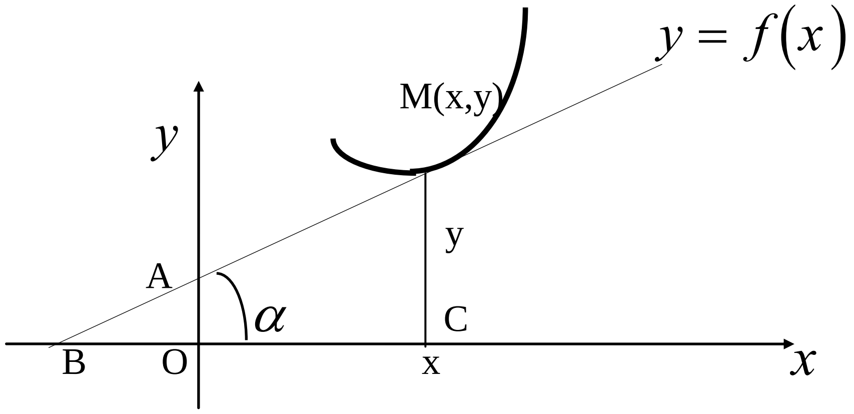
$$\frac{y-\sqrt{y^2-1}}{y^2-y^2-1} = e^{\mp x}; \quad y-\sqrt{y^2-1} = e^{\mp x}.$$

Сложим два уравнения $y+\sqrt{y^2-1} = e^{\pm x}$ и $y-\sqrt{y^2-1} = e^{\mp x}$. В результате получили уравнение цепной линии: $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Ответ: $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Задача 2. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси OY, равен квадрату ординаты точки касания.

Решение



По условию задачи $OA = y^2$. Из подобия ΔBAO и ΔBMC имеем :

$$\frac{AO}{BO} = \frac{MC}{BC}\ ;\ \frac{y^2}{BO} = \frac{y}{BO + x};y \neq 0;$$

$y(BO + x) = BO$.Из ΔBAO: $tg\alpha = y' = \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{y^2}{BO}$;

$BO = \dfrac{y^2}{y'}$. Подставим значение BO в уравнение $y(BO + x) = BO$:

$$y\left(\frac{y^2}{y'} + x\right) = \frac{y^2}{y'};\qquad \frac{y^2}{y'} + x = \frac{y}{y'};\qquad \frac{y^2 - y}{y'} = -x;$$

$y - y^2 = xy'$-ДУ-I с разделяющимися переменными . Преобразуем его:

$$\frac{xdy}{dx} = y(1 - y)\ ;\qquad xdy = y(1 - y)dx;$$

$\dfrac{dy}{y(1 - y)} = \dfrac{dx}{x}$. После интегрирования получаем:

$$\int \frac{(1 - y) + y}{y(1 - y)} dy = \int \frac{dx}{x};\qquad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y - 1} = \int \frac{dx}{x}\ ;$$

$$\ln|y| - \ln|y-1| = \ln|x| + \ln|C|;\ \frac{y}{y-1} = Cx$$ - общий интеграл уравнения или семейство интегральных кривых, обладающих свойством , о котором идет речь в условии задачи.

Ответ: $\frac{y}{y-1} = Cx$.

В задачах механического или физического характера важное значение имеет знание законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике это могут быть законы Ньютона, в электротехнике- законы Кирхгофа, в химии- закон действия масс, согласно которому скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции, и т.д. Если в задаче задается скорость какого-либо процесса, то бывает возможно сразу же написать соответствующее дифференциальное уравнение.

Задача3. На тело массой 1г действует сила, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности k_1.Кроме того, тело испытывает противодействие среды, пропорциональное скорости тела с коэффициентом пропорциональности k_2. Найти закон движения тела.

Решение

По второму закону Ньютона $ma = k_1 t - k_2 v$. По условию $m = 1$ г. Известно, что $a = v'$. Тогда $v' = k_1 t - k_2 v$. Получилось линейное уравнение относительно функции $v(t)$. Применяем подстановку $v = u(x) \cdot z(x)$, где одна из функций выбирается произвольно. $v = u'z + uz'$.

Подставим v и v' в уравнение:

$$u'z + uz' = k_1 t - k_2 uz;\quad z(u' + k_2 u) + uz' = k_1 t.$$

В качестве $u(x)$ возьмем одно из частных решений уравнения $u' + k_2 u = 0$, тогда $uz' = k_1 t$. Решим первое уравнение: $\frac{du}{dt} = -k_2 u$;

$$\frac{du}{u} = -k_2 dt;\ \int \frac{du}{u} = -k_2 \int dt;$$

$\ln|u| = -k_2 t;$ $\underline{u = e^{-k_2 t}}$; подставим это значение во второе уравнение:

$$e^{-k_2 t} \cdot z' = k_1 t; \quad \frac{dz}{dt} = k_1 t e^{k_2 t};$$

$$dz = k_1 t e^{k_2 t} dt; \qquad z = k_1 \int t e^{k_2 t} dt =$$

$$= k_1 \left[\begin{array}{ll|l} u_1 = t & du_1 & = dt \\ dv_1 = e^{k_2 t} dt & v_1 = & \dfrac{1}{k_2} e^{k_2 t} \end{array} \right] =$$

$$= k_1 \left(\frac{t}{k_2} e^{k_2 t} - \int \frac{1}{k_2} e^{k_2 t} dt \right) = \frac{k_1}{k_2} t e^{k_2 t} -$$

$$- \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{k_2} e^{k_2 t} + C_1;$$

Составим общее решение уравнения:

$$v(t) = e^{-k_2 t} \left(\frac{k_1}{k_2} t e^{k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^{\,2}} e^{k_2 t} + C_1 \right);$$

$$v(t) = \frac{k_1}{k_2} t - \frac{k_1}{k_2^{\,2}} + C_1 e^{-k_2 t}$$ - зависимость скорости движения от времени.

Закон движения- это зависимость пути от времени. Известно, что $v(t) = S'(t)$. Поэтому получим еще одно ОДУ-I

относительно функции $S(t)$: $S'(t) = \dfrac{k_1}{k_2} t - \dfrac{k_1}{k_2^{\,2}} + C_1 e^{-k_2 t}$. Это

уравнение с разделяющимися переменными. После интегрирования получим закон движения:

$$S(t) = \frac{k_1}{2k_2} t^2 - \frac{k_1}{k_2^{\,2}} t - \frac{C_1}{k_2} e^{-k_2 t} + C_2.$$

Ответ: $S(t) = \dfrac{k_1}{2k_2} t^2 - \dfrac{k_1}{k_2^{\,2}} t - \dfrac{C_1}{k_2} e^{-k_2 t} + C_2.$

Задача 4. Пуля массой 10 г, двигавшаяся со скоростью $V_0 = 200$ м/с, врезалась в доску и углубилась в нее на расстояние $l = 4$ см. Определить среднюю силу сопротивления доски и время движения пули в доске, считая движение пули внутри доски равномерно замедленным.

Решение

Так как движение равномерно замедленное, то сила сопротивления постоянна и направлена против движения. Поэтому $F = -ma$, $a = \dfrac{dv}{dt}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными :$Fdt = -mdv$. Интегрируем: $Ft = -mv + C_1$.

Определим C_1 с помощью условия $v(0) = v_0$:

$$0 = -mv_0 + C_1; \qquad C_1 = mv_0; \qquad Ft = mv_0 - mv.$$

$v = \dfrac{mv_0 - Ft}{m}$ - частное решение уравнения.

Принимая во внимание, что $v = \dfrac{ds}{dt}$, получим $ds = \dfrac{mv_0 - Ft}{m} dt$.

После интегрирования имеем: $S = -\dfrac{1}{Fm}\dfrac{(mv_0 - Ft)^2}{2} + C_2$.

Определим C_2 при помощи условия $S(0) = 0$. $0 = -\dfrac{1}{Fm}\dfrac{m^2 v_0^2}{2} + C_2$;

$C_2 = \dfrac{mv_0^2}{2F}$, $\quad S = -\dfrac{1}{Fm}\dfrac{(mv_0 - Ft)^2}{2} + \dfrac{mv_0^2}{2F}$ - частное решение.

Для определения силы сопротивления F и времени движения t пули в доске используем конечные условия: $S(t) = l$, $v(t) = 0$. $0 = mv_0 - Ft$,

$$t = \frac{mv_0}{F}. \qquad l = -\frac{1}{Fm}\frac{(mv_0 - Ft)^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2F},$$

$$l = \frac{mv_0^2}{2F}, \quad F = \frac{mv_0^2}{2l}.$$

Подставим выражение F в t: $t = \dfrac{2l}{v_0}$.

Определим силу сопротивления и время движения пули в доске при:

$m = 0{,}01$ кг, $l = 0{,}04$ м, $V_0 = 200$ м/с:

$F = 5 \cdot 10^4$ кг м/с^2 $= 5 \cdot 10^4$ Н , $t = 4 \cdot 10^{-4}$ с.

Ответ: $F = 5 \cdot 10^4$ Н, $t = 4 \cdot 10^{-4}$ с.

Для некоторых задач не существует готовых законов механики или физики, устанавливающих дифференциальные соотношения между величинами, данными в условии. В этом случае ОДУ составляют так. Предполагают, что в некоторый промежуточный момент времени t искомая величина равна, например, x. Считая далее, что в течение достаточно малого времени dt все остальные величины остаются постоянными, находят dx, т.е. определяют, на сколько изменится искомая величина за время dt. Полученное соотношение между величинами и их дифференциалами и будет дифференциальным уравнением.

Задача 5. В резервуаре находится 50 л раствора, содержащего 4 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 6 л/мин, а смесь вытекает со скоростью 4 л/мин, причем концентрация поддерживается равномерной путем перемешивания. Сколько соли останется в резервуаре по истечении 25 мин?

Решение

Предположим, что в некоторый момент времени t в резервуаре содержится x **кг** соли. За время t в резервуар вольется $6\,t$ л воды и вытечет $4\,t$ л смеси. Всего к моменту t в резервуаре будет $50 + 6t - 4t = (50 + 2t)$ л раствора.

Чтобы найти, сколько соли содержит 1 л раствора в момент t, надо количество соли разделить на количество раствора : $\dfrac{x}{50 + 2t}$. За время dt втечет $4\,dt$ л раствора и с ним $\dfrac{x}{50 + 2t} \cdot 4dt$ кг соли. За время dt количество соли в резервуаре уменьшится на $dx = -\dfrac{2xdt}{25 + t}$, знак минус указывает на уменьшение количества соли с увеличением времени.

Получили уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2dt}{25 + t}$.

$$\ln|x| = -2\ln|25+t| + \ln C,\ x = \frac{C}{(25+t)^2};$$

Определим C из условия $x(0) = 4$. $\quad 4 = \frac{C}{25^2};$

$$C = 4 \cdot 25^2; \quad x = 4\left(\frac{25}{25+t}\right)^2.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, подставим конечное условие:

$$x(25) = x, \qquad x = 4\left(\frac{25}{25+25}\right)^2 = 1\text{кг}$$

Ответ: $x = 1\text{кг}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется общим решением ОДУ-I ? В чем его геометрический смысл?
2. В чем состоит начальное условие ОДУ-I ? Дать определение и геометрическую иллюстрацию частного решения уравнения.
3. Дать определение ОДУ -I с разделяющимися переменными и указать метод его интегрирования.
4. Какое ОДУ-I называется однородным, как оно решается и к какому типу приводится?
5. Какое ОДУ-I называется линейным? В чем метод его решения?
6. Написать в общем виде уравнение Бернулли. Как оно решается?
7. Определить тип уравнений:

1) $\sqrt{1+x^2}\,dy = xy\,dx$; 2) $y' - y = 2x - 3$;

3) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$;

4) $y' + 2xy = 4\sqrt{y}$; 5) $2xy' = y^3 + xy$;

6) $(x + 5y)dx + 5x\,dy = 0$; 7) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$;

8) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \sec x$.

2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрение лишь ОДУ-I недостаточно, так как многие задачи механики, физики, а также технических дисциплин приводят к понятию ОДУ, содержащих производные второго, третьего и более высоких порядков.

Рассмотрим необходимые сведения из теории. По аналогии с определением ОДУ-I обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (ОДУ-II) называется уравнение вида $y'' = f\left(x, y, y'\right)$, содержащее независимую переменную, функцию и ее производные (в неявном виде ОДУ-II выглядит так: $F(x, y, y', y'') = 0$). Общее решение этого уравнения содержит две произвольные и имеет вид: $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$(общий интеграл ОДУ-II: $\Phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0$).

Чтобы определить C_1 и C_2, задают начальные условия $y\left(x_0\right) = y_0$ и $y'\left(x_0\right) = y_0'$. Опыт показывает, что студент испытывает определенные трудности при нахождении частного решения (частного интеграла) ОДУ-II. Поэтому на этот факт рекомендуется обратить внимание при рассмотрении ниже приведенных решений ОДУ-II, допускающих понижение порядка.

1) Уравнение вида $y'' = f\left(x, y'\right)$ в котором отсутствует y.

Используется подстановка $\underline{y' = p\left(x\right)}$, из которой следует, что $y'' = p'\left(x\right)$.

Задача. Найти частный интеграл уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$, удовлетворяющий начальным условиям $y\left(1\right) = \dfrac{1}{3}$; $y'\left(1\right) = 1$.

Решение $y' = p\left(x\right)$, $y'' = p'\left(x\right)$. Подставим y' и y'' в уравнение: $p' = \dfrac{p}{x} + x$ – ОДУ-I линейное относительно функции $p\left(x\right)$.

Используем подстановку $p = u \cdot v$, из которой $p = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$u' \cdot v + u \cdot v' = \dfrac{uv}{x} + x$; $v\left(u' - \dfrac{u}{x}\right) + uv' = x$. Функцию $u\left(x\right)$ находим

как одно из частных решений уравнения $u' - \frac{u}{x} = 0$; $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$; $x\,du = u\,dx$;
$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = \ln|x|$; $\underline{u = x}$.

Находим $v(x)$ из уравнения $uv' = x$, где $u = x$. Тогда $v' = 1$; $dv = dx$; $v = x + C_1$, $p(x) = u \cdot v = x(x + C_1)$. Заменим $p(x)$ на y' и по начальным условиям определяем C_1:

$y' = x(x + C_1)$; $1 = 1 + C_1$; $C_1 = 0$.

$y' = x^2$ - второе ОДУ-I с разделяющимися переменными относительно функции $y(x)$. $dy = x^2 dx$; $y = \frac{x^3}{3} + C_2$.

Подставим начальные условия : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + C_2$; $C_2 = 0$.

Частное решение имеет вид $y = \frac{x^3}{3}$.

Ответ: $y = \frac{1}{3}x^3$

2) <u>Уравнение вида</u> $y'' = f(y, y')$, <u>в котором отсутствует</u> x .

Используется подстановка $\underline{y' = p(y)}$, из которой следует , что $y'' = p\frac{dp}{dy}$, т.к. функция $p(y)$-сложная.

Задача. Найти частный интеграл уравнения $y \cdot y'' = (y')^2$, удовлетворяющий начальным условиям: $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Решение

$y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Подставим y' и y'' в уравнение: $y \cdot p\dfrac{dp}{dy} = p^2$;

$p\left(y \cdot \dfrac{dp}{dy} - p\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l} p = 0 \\ ydp = pdy \end{array}\right.$. $\left[\begin{array}{l} y' = 0 \\ \dfrac{dp}{p} = \dfrac{dy}{y} \end{array}\right.$;

$y = const = C$.

$\int \dfrac{dp}{p} = \int \dfrac{dy}{y}$; $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$.

$p = C_1 y$

Подставим $p = y' : y' = C_1 y$.; Подставим начальные условия $2 = C_1 \cdot 1$; $C_1 = 2$.

$\dfrac{dy}{y} = 2dx$: после интегрирования имеем $\ln|y| = 2x + C_2$. Отсюда $y = e^{2x + C_2}$; подставим $y(0) = 1$; $1 = e^{C_2}$, $C_2 = 0$; $y = e^{2x}$ - частное решение данного уравнения.

Ответ: $y = e^{2x}$; $y = C$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти общий интеграл уравнений:

а) $xy'' = y'$; в) $(y')^2 + 2yy'' = 0$;

б) $y'' = y' + x$; г) $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

2. Найти частный интеграл уравнений:

а) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

б) $yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется ОДУ-II?

2. Записать в общем виде уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Каковы особенности этих уравнений?
3. Как решается уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в случаях, когда правая часть не содержит:

1) y и y';
2) y;
3) x?

4. Каковы начальные условия ОДУ-II? Каков их геометрический смысл? Как находить частные решения для ОДУ-II, допускающих понижение порядка?

3. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА (И ВЫСШИХ) С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В общем виде такие уравнения записываются следующим образом : $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q - числа. Из теории студенту должно быть известно, что общее решение линейного уравнения $\underline{y}$ является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения $\bar{y}$ и любого частного решения y^* данного неоднородного уравнения , т.е. $y = \bar{y} + y^*$. Отыскание $\bar{y}$ и y^* изложим без обоснования, рецептурно.

А <u>Отыскание $\bar{y}$</u>. Обратим внимание на то, что:

<u>1)</u> решением однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является функция $y = e^{kx}$, так как только она при дифференцировании дает себе подобную;

<u>2)</u> выражение $\bar{y}$ зависит от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (какова связь между однородным уравнением и характеристическим?). Согласно теореме об общем решении однородного уравнения $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимые частные решения этого уравнения.

Рассмотрим случаи решения характеристического уравнения и соответствующие формулы $\bar{y}$.

а) Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 - действительные и неравные между собой (дискриминант $D > 0$), то $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

б) Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 - действительные и равные между собой $(k_1 = k_2 = k)$ $(D = 0)$, то $\bar{y} = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} x$.

в) Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 - комплексно-сопряженные $\left(k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i\right)$, то $\bar{y} = e^{\alpha \cdot x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

Проиллюстрируем сказанное на примерах:

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$

Характеристическое уравнение : $k^2 + 4k + 3 = 0$;

$D > 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = -3$; $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$

$D = 0$, $k_1 = k_2 = 3$; $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$;

$D < 0$; $k_{1,2} = -1 \pm 2 \cdot i$; $\bar{y} = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

Замечание. Если однородное уравнение высшего порядка, то $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, где y_i $(i = 1, \ldots, n)$- образуют фундаментальную систему решений этого уравнения. Выражение $y_i(x)$ $(i = 1 \ldots n)$ зависит от вида корней характеристического уравнения. Рассмотрим некоторые примеры :

1. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

Характеристическое уравнение : $k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$;

$(k-2)^3 = 0$; $k_1 = k_2 = k_3 = k = 2$ Частные решения: $y_1(x) = e^{2x}$;

$y_2(x) = xe^{2x}$; $y_3(x) = x^2 e^{2x}$; $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$.

2. $y^{(IV)} - 4y = 0$

Характеристическое уравнение: $k^4 - 4 = 0$;

$\left(k^2 - 2\right)\left(k^2 + 2\right) = 0$; $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $k_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$;

Частные решения: $y_1(x)=e^{\sqrt{2}x}$; $y_2(x)=e^{-\sqrt{2}x}$; $y_3(x)=\cos\sqrt{2}x$; $y_4(x)=\sin\sqrt{2}x$

$$\bar{y}=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x.$$

3. $y'''-2y''-5y'+6y=0$

Характеристическое уравнение: $k^3-2k^2-5k+6=0$;

$(k+2)(k-1)(k-3)=0$; $k_1=-2$; $k_2=1$ $k_3=3$;

Частные решения: $y_1(x)=e^{-2x}$; $y_2(x)=e^x$; $y_3(x)=e^{3x}$;

$$\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{3x}.$$

4. $y^{(IV)}+18y''+81y=0$

Характеристическое уравнение: $k^4+18k^2+81=0$;

$(k^2+9)^2=0$; $k_{1,2}=\pm 3i$; $k_{3,4}=\pm 3i$;

Частные решения: $y_1(x)=\cos 3x$; $y_2(x)=\sin 3x$; $y_3(x)=x\cos 3x$;

$y_4(x)=x\sin 3x$;

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(C_3\cos 3x+C_4\sin 3x).$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. $y'''-3y''+2y'=0$;
2. $y''-2y'+10y=0$;
3. $y''-25y=0$;
4. $y''-4y'+4y=0$;
5. $y'''+9y'=0$;
6. $y^{(IV)}-16y=0$.

Вопросы для самоподготовки

1. Написать в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
2. Какой вид имеет формула общего решения этого уравнения?
3. Какой вид имеет его частное решение и почему?
4. Какие частные решения этого уравнения называются линейно независимыми?
5. Какое уравнение называется характеристическим? Как оно составляется?

6. Указать вид общего решения рассматриваемого уравнения при действительных и различных корнях характеристического уравнения, при действительных и равных, при комплексно-сопряженных.

В. Отыскание y^*.Для достижения этой цели существует два способа:

1)метод неопределенных коэффициентов, применяемый только в случае специальной правой части $f(x)$ уравнения;

2) метод вариации произвольных постоянных, применяемый при произвольной правой части $f(x)$.

Рассмотрим частные случаи $f(x)$ в первом способе.

I . $f(x)=e^{\alpha\cdot x}P_n(x)$, где $P_n(x)$- многочлен "n" –ой степени . Тогда частное решение y^* имеет вид: $y^* = e^{\alpha\cdot x}Q_n(x)x^r$, где Q_n- многочлен той же "n"-ой степени, что $P_n(x)$,но записанной в общем виде; r принимает значения $0\,;1\,;\ 2$, в зависимости от того, сколько раз число α из функции $e^{\alpha\cdot x}$ встречается среди корней характеристического уравнения.

Принимая решение в указанной форме, мы находим неизвестные коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ по методу неопределенных коэффициентов.

Обратим внимание на то, что правило сохраняет свою силу и в том случае, когда $\alpha=0$.В частных случаях $P_n(x)$ может быть многочленом нулевой степени, т.е. постоянной величиной.

Проиллюстрируем правило на примерах:

1) $y''-6y'+5y=xe^x$,

$$f(x)=xe^x \quad \Rightarrow \alpha=1;\ \ n=1.$$

Можно убедиться в том, что корнями характеристического уравнения являются 1 и 5. Значит, $r=1$.

Составим частное решение y^*:

$$y^*=e^x(Ax+B)x.$$

2) $y''-y'=e^{2x}$,

$$f(x)=e^{2x}\ \Rightarrow\ \alpha=2;\ n=0.$$

Корни характеристического уравнения 0 и 1.

Значит, $r = 0$.

Составим частное решение $y^* : y^* = Ae^{2x}$.

3) $y'' - 6y' + 8y = x^2 - x + 3$.

$f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow \alpha = 0;\ n = 2.$

$k_1 = 2;\ k_2 = 4;\ r = 0;$

Составим частное решение $y^* : y^* = Ax^2 + Bx + C$.

II. $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$, где M и N - числа, одно из которых может обращаться в 0. Тогда $y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, если числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, и $y^* = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x$, если числа $\pm\beta i$ служат корнями характеристического уравнения.

Проиллюстрируем на примерах:

1) $y'' - y' = 3\cos 2x$

$f(x) = 3\cos 2x \Rightarrow \beta = 2$; корни характеристического уравнения 0 и 1; числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения. Значит, $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$.

2) $y'' + 4y = 5\sin 2x$

$f(x) = 5\sin 2x \Rightarrow \beta = 2$; корни характеристического уравнения $\pm 2i$; числа $\pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения.

Значит, $y^* = (A\cos 2x + B\sin 2x)x$.

<u>Замечание</u>. Если правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ равна сумме указанных выше правых частей специального вида, то имеет место теорема суперпозиции частных решений.

Покажем подробно действия метода:

Найти частное решение уравнения $y'' - 7y' + 10y = xe^{5x}$ при заданных начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{1}{9}$.

Решение

Общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + y^*$

1) Найдем $\bar{y}$.

Составим для данного уравнения соответствующее однородное уравнение: $y'' - 7y' + 10y = 0$.Решаем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 - 7k + 10 = 0$, его корни $k_1 = 2\,, k_2 = 5$. Поэтому $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

2) Найдем y^*.

Рассмотрим $f(x) = xe^{5x}$ и сравним с $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

Получим, что $\alpha = 5$, $n = 1$.

Поэтому $y^* = e^{5x}(Ax + B)x$.

Найдем неопределенные коэффициенты A и B.

Для этого y^* подставим в данное уравнение.

$$y^{*'} = 5e^{5x}(Ax + B)x + e^{5x}Ax + e^{5x}(Ax + B)$$

$$y^{*''} = 25e^{5x}(Ax + B)x + 5e^{5x}Ax + 5e^{5x}(Ax + B) + 5e^{5x}Ax +$$
$$+ Ae^{5x} + 5e^{5x}(Ax + B) + e^{5x}A = 25e^{5x}(Ax + B)x + 10e^{5x}(Ax + B) +$$
$$+ 10e^{5x}Ax + +2Ae^{5x}.$$

$$25e^{5x}(Ax + B)x + 10e^{5x}(Ax + B) + 10e^{5x}Ax +$$
$$+ 2Ae^{5x} - 35e^{5x}(Ax + B)x - 7e^{5x}Ax - 7e^{5x}(Ax + B) +$$
$$+ 10e^{5x}(Ax + B)x = xe^{5x}.$$

$$3e^{5x}(Ax + B) + 3e^{5x}Ax + 2Ae^{5x} = xe^{5x}$$

$$3Ax + 3B + 3Ax + 2A = x.$$

$$\begin{array}{l|ll} x & 6A = 1 \quad , & A = \dfrac{1}{6}, \\ x^0 & 3B + 2A = 0 \quad , & B = -\dfrac{1}{9}. \end{array}$$

$$y^* = x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{5x}.$$

Суммируя $\overline{y}$ и y^*, получим общее решение данного уравнения:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{5x}.$$

Найдем частное решение при заданных начальных условиях $y(0) = 1$ и $y'(0) = -\frac{1}{9}$.

Вычислим предварительно y':

$$y' = 2C_1e^{2x} + 5C_2e^{5x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{5x} + x\frac{1}{6}e^{5x} + 5x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{5x}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -\dfrac{1}{9} = 2C_1 + 5C_2 - \dfrac{1}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow C_1 = \frac{5}{3};\ C_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$y = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{5x} + x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^{5x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{5}{3}e^{2x} - \dfrac{2}{3}e^{5x} + x\left(\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{9}\right)e^{5x}.$

Задача. Пусть груз массы m покоится на пружинной рессоре. Отклонение груза от положения равновесия обозначим через y. Отклонение вниз будем считать положительным, вверх отрицательным. В положении равновесия сила уравновешивается упругостью пружины. Предположим, что сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, пропорциональна отклонению, т.е. ky, где k – некоторая постоянная для данной рессоры величина. Также предположим, что сопротивление движению груза отсутствует, а нижняя точка (опора) рессоры совершает колебание по закону $l\sin\omega t$, т.е. колебания груза совершаются при наличии внешней периодической силы. Найти закон колебания груза.

Решение

Так как колебания груза совершаются при наличии внешней периодической силы, то сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, будет равна

$k(y + l\sin\omega t)$. На основании второго закона Ньютона имеем $k(y + l\sin\omega t) = -ma$.

Уравнение перепишем так: $y'' + qy = a\sin\omega t$, $q = \dfrac{k}{m}$, $a = -\dfrac{kl}{m}$.

Решаем рассмотренным выше методом:

$a)$ Отыскание y. $u^2 + q = 0$ - характеристическое уравнение.

Так как $q > 0$, то общее решение y уравнения без первой части будет

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{q}i = \pm\beta\, i,\ y = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t = C\sin(\beta t + \varphi_0).$$

б) Отыскание y^*.

Случай первый: $\beta \neq \omega$, т.е. частота внешней силы не равна частоте собственных колебаний. $f(x) = a\sin\omega t \quad \Rightarrow A = \omega$.

Числа $\pm ni = \pm\omega\, i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$y^* = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Подставим его в данное уравнение

$$y^{*\prime} = -\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$y^{*\prime\prime} = -\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t$$

$$-\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t + qA\cos\omega t + qB\sin\omega t = a\sin\omega t$$

$$\begin{array}{l|l} \cos\omega t & A(q-\omega^2) = 0, \\ \sin\omega t & B(q-\omega^2) = a, \end{array} \qquad A = 0,\quad B = \frac{a}{q-\omega^2}.$$

$y^* = \dfrac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t$, $y = C\sin(\beta t + \varphi_0) + \dfrac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t$-общее решение, т.е. закон колебаний груза, когда $\beta \neq \omega$.

Таким образом , колебания груза получаются в результате наложения собственного колебания с частотой β и вынужденного колебания с частотой ω.

Второй случай. $\beta = \omega$,т.е. частота внешней силы равна частоте собственных колебаний.

Числа $\pm ni = \pm\omega\, i$ являются корнями характеристического уравнения., поэтому

$$y^* = t(A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t).$$

Подставим его в данное уравнение.

$$y^{*'} = (A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t) + t(-A\omega\sin\omega\, t + B\omega\cos\omega\, t),$$

$$y^{*''} = (-\omega A\sin\omega\, t + \omega B\cos\omega\, t)2 + t\left(-A\omega^2\cos\omega\, t - B\omega^2\sin\omega\, t\right),$$

$$2(-\omega A\sin\omega\, t + \omega B\cos\omega\, t) + t\left(-A\omega^2\cos\omega\, t - B\omega^2\sin\omega\, t\right) +$$
$$+ qt(A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t) = a\sin\omega\, t.$$

$$\begin{array}{l|l} \sin\omega\, t & -2\omega A = a, \\ \cos\omega\, t & 2\omega B = 0, \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = -\dfrac{a}{\omega^2}, \\ B = 0. \end{array}$$

$$y^* = -\frac{a}{2\omega}t\cos\omega\, t,\ y = C\sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega}t\cos\omega\, t -$$

общее решение, т.е. закон колебаний груза.

Второе слагаемое в правой части показывает, что в этом случае амплитуда (размах) колебания неограниченно возрастает при возрастании времени t. Это явление, имеющее место при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой внешней силы, называется резонансом.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $y'' - 5y' = x^2$;
2. $y'' + y = \cos 2x$;
3. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
4. $y'' - 3y' = 1 + \cos x$;

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правила отыскания частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с правой частью одного и другого специального вида.
2. Как можно находить решение уравнения, если правая часть его представлена в виде суммы нескольких функций?

Кроме метода неопределенных коэффициентов, существует общий метод нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда функция $f(x)$- произвольная. Он называется методом вариации произвольных постоянных и состоит в том, что частное решение можно найти из общего решения соответствующего однородного уравнения при условии, что произвольные постоянные являются функциями независимой переменной.

Пусть $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$- общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего неоднородному. Если считать, что $C_1 = C_1(x)$, а $C_2 = C_2(x)$, то $y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$- частное решение данного неоднородного уравнения.

Функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

После интегрирования получаем значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$, т.е. частное решение y^* определяется. Суммируя $\bar{y}$ и y^*, найдем общее решение y.

Проиллюстрируем сказанное на примере:

$$y'' + y = (\cos x)^{-3}.$$

$$y = \bar{y} + y^*$$

1) $\bar{y} - ?$

Записываем однородное уравнение $y'' + y = 0$, для него составляем характеристическое: $k^2 + 1 = 0$, корни $k_{1,2} = \pm i$.

Тогда $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$.

2) $y^* - ?$

Согласно методу вариации произвольных постоянных

$$y^* = C_1(x) \cos x + C_2(y) \sin x.$$

Функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = (\cos x)^{-3} \end{cases}$$

Систему решаем по методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ (\cos x)^{-3} & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x(\cos x)^{-3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & (\cos x)^{-3} \end{vmatrix} = (\cos x)^{-2}.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x};\, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Найдем интегрированием $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \cos^{-3} x d(\cos x) = \frac{\cos^{-2} x}{-2} = -\frac{1}{2\cos^2 x};$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$$

Тогда $y^* = -\frac{1}{2\cos^2 x}\cos x + \mathrm{tg}x \sin x = -\frac{1}{2\cos x} + \mathrm{tg}x \sin x.$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2\cos x} + tgx \sin x$ - общее решение.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

2) $y'' + y = \sec x$.

Вопросы для самопроверки

1) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных?

2) Написать систему уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

4. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать решение только одного вида систем - нормальной, в которой каждое уравнение разрешено относительно производной первого порядка, а правые части не содержат производных, и только одним методом-сведением системы к однородному уравнению второго порядка(если уравнений в системе два). В обычно встречающихся случаях нормальная система дифференциальных уравнений может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы. Именно на это должен обратить внимание студент, решая систему дифференциальных уравнений предложенным способом. Рассмотрим его на примере:

$$\begin{cases} x_t' = 5x - 2y \\ y_t' = x + 3y \end{cases}$$

В системе $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Продифференцируем второе уравнение и подставим в результат выражение x_t', после чего избавимся от x, определив его из второго уравнения:

$y'' = x' + 3y'$; $y'' = 5x - 2y + 3y'$; $x = y' - 3y$;

$y'' = 5y' - 15y - 2y + 3y'$; $y'' - 8y' + 17y = 0$- получили линейное однородное уравнение второго порядка.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 8k + 17 = 0$, $k_{1,2} = 4 \pm i$.

Значит, $y = e^{4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Но $x = y' - 3y$, поэтому

$$x = 4e^{4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{4t}(-C_1 \cos t + C_2 \sin t) -$$

$$-3e^{4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{4t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t).$$

Общее решение системы будем записывать в виде:

$$\begin{cases} x = e^{4t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t) \\ y = e^{4t}((C_1 \cos t + C_2 \sin t)) \end{cases}$$

При разборе решения системы студент должен обратить внимание на то, что решением ее является пара функций, обращающих каждое уравнение системы в тождество.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x \end{cases}$.

Вопросы для самопроверки

1) Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
2) Описать приемы сведения нормальной системы к одному уравнению высшего порядка.
3) Какой вид имеет общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений?

К рассмотренным методическим указаниям даны варианты индивидуальных заданий. Они охватывают все основные разделы темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения», предусмотренной программой.

При внимательном рассмотрении вариантов можно заметить, что вначале идут дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными (1-3); однородные (4-6); линейные уравнения Бернулли (7-10); уравнение в полных дифференциалах (11);
уравнения второго порядка, разрешенные относительно второй производной и допускающие понижение порядка (12,13); линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью, которые надо решить методом неопределенных коэффициентов (14-17) и методом вариации произвольных постоянных (18-19).

Приведены задачи механического (физического) и геометрического содержания, а также две системы, которые сводятся к одному уравнению второго порядка.

Методические указания можно использовать параллельно с учебными пособиями на практических занятиях, а также во время самостоятельной работы студентов под руководством преподавателя. Формы их применения могут быть различными, но в любом случае будут зависеть от опыта преподавателя.

5. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Условия заданий:
1.Найти общие и частные интегралы уравнений.
2. Решить задачи.
3. Решить системы.

Вариант 1

1. 1) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$;

2) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$;

3) $xy' - y^2 = 0 \ y(1) = 1$; 4) $\dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{y-x}$;

5) $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$; 6) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{x}{y}$, $y(1) = 1$;

7) $y' + y\sin x = \sin x \cos x$; 8) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$;

9) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$; 10) $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$;

11) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$; 12) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

13) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2 \ y(0) = y(1) = 1$;

14) $y'' + 9y = \sin 3x + 2e^x$;

15) $y'' - 4y' + 5y = (16 - 2x)e^{-x} + x^2$;

16) $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$;

17) $y'' - 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

19) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.1)Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и если это тело проходит 100м в 10с и 200 м в 15 с.

2) Найти кривую, у которой подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания и проходит через т. $(4;1)$.

3.1) $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = y - 2x \end{cases}$.

Вариант 2

1.1) $\left(x^2 - 1\right)dy + \left(1 - y^2\right)dx = 0$; 2) $\sqrt{4 + y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$;

3) $\left(1 + y^2\right)dx = xydy, y(2) = 1$; 4) $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$;

5) $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

6) $(xy' + y)arctg\,\frac{y}{x} = x, y(1) = 0$;

7) $y' = e^{-x}\,\frac{y}{1 + x}$; 8) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

9) $y'\cos^2 x - y = \mathrm{tg}x, y(0) = -1$;

10) $xy' + y = 2y^2\ln x$;

11) $\left(2 - 9xy^2x\right)dx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0$;

12) $yy'' = 2(y')^2$;

13) $y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1),\ y(2) = 1, y'(2) = -1$;

14) $y'' + 5y' + 4y = 3\sin x + e^{-x}$; 15) $y'' + 4y = xe^{2x} + 5$;

16) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$;

17) $y'' + 9y = \cos x,\ y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = \sec x$;

19) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}},\ y(0) = 1 + 8\ln 2,\ y'(0) = 14\ln 2$.

2. 1) Известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела T_T и температурой окружающей среды Tc. Найти зависимость температуры тела T_T от времени t, если $T_T(0)=T_0$.

2) Найти кривую, проходящую через точку $(2;0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

3. 1) $\begin{cases} x'=-3x-y \\ y'=x-y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x'=x+5y \\ y'=-x-3y \end{cases}$.

Вариант 3.

1. 1) $x^2dy+(y-5)dx=0$; 2) $x^2y^2y'+1=y$;

3) $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$; 4) $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$;

5) $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$;

6) $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right),\ y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$;

7) $y'-yctgx=2x\sin x$; 8) $(xy+e^x)dx-xdy=0$;

9) $y'\cos^2x+y=\mathrm{tg}x\ ,y(0)=0$; 10) $x^2y'=y^2+xy$;

11) $e^ydx-(2y+xe^y)dy=0$; 12) $y''x\ln x=y'$;

13) $y''=y'e^y,y(0)=0,\ y'(0)=1$; 14) $y''-4y'=8x^3+e^{2x}$;

15) $y''+2y'+5y=10\cos x+xe^{-x}$;

16) $y''-4y'+3y=e^{5x},\ y(0)=3,\ y'(0)=9$;

17) $y''-4y'=\sin 2x,y(0)=y'(0)=1$;

18) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$;

19) $y''+9y=9\sec 3x,\ y(0)=1,y'(0)=0$.

2. 1) Тело массой m падает под действием силы тяжести и тормозящей силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости. Найти закон изменения скорости падения тела, если $v(0)=0$.

2)Найти кривую, проходящую через точку $(-a;a)$ если отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится точкой касательной пополам.

3. 1) $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = -9y \\ y' = x \end{cases}$.

Вариант 4.

1.1) $(x^2 + x)dy = (2y+1)dx$; 2) $(e^{2x} + 5)dy - + ye^{2x}dx = 0$;

3) $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$, $y(0) = 1$;

4) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}$; 5) $xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$;

6) $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ $y(1) = 2$;

7) $y' + ytgx = \cos^2 x$; 8) $(9 + x^2)y' + xy = 1$;

9) $(1-x^2)y' - xy = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$; $y(0) = 0$;

10) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$;

11) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$; 12) $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$;

13) $y''y - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

14) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x + e^{2x}$;

15) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + xe^x$;

16) $2y'' - y' = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

17) $y'' + y = 2\cos 7x, y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$;

19) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

2. 1) Материальная точка движется прямолинейно, причем так, что ее кинетическая энергия в момент t прямо пропорциональна средней скорости движения в интервале от 0 до t. Известно, что при $t = 0$ путь $S = 0$. Показать, что движение равномерно.

2)Найти кривую, проходящую через точку $(-1;1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

3. 1) $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' + 3x + 2y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases}$.

Вариант 5.

1.1) $y' = e^{x-2y}$; 2) $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$;

3) $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $y' = \dfrac{x+2y}{x}$; 5) $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

6) $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$;

7) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$; 8) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 + \sin x$;

9) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, (x > 0)$, $y(1) = 1$;

10) $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2$;

11) $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0$;

12) $y'' - 2y'\mathrm{ctg}x = \sin^3 x$;

13) $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

14) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x + 2x$;

15) $y'' - 4y' + 8y = e^x + (x^2 + 1)$;

16) $y'' - 3y' = x + 2\cos x, y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$;

17) $y'' + 2y' + 5y = 20\cos x \sin x + 3,\ y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$;

19) $y'' - 4y = 4\mathrm{ctg}x2x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3, y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

2. 1) Тело массой m брошено вертикально вверх с начальной скоростью V_0.Определить, через какое время оно достигнет своего наивысшего положения, если сила сопротивления воздуха равна kV .

2) Найти кривую, проходящую через точку $(1;2)$, у которой отрезок нормали в любой точке кривой, заключенной между осями координат, делится пополам в этой точке кривой.

3 1.) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$.

Вариант 6.

1. 1) $x + xy = -(y + xy)y'$; 2) $x\sqrt{6 + y^2}dx + y\sqrt{5 + x^2}dy = 0$;

3) $2y'\sqrt{x} = 4, y(4) = 1$; 4) $x^2 + y^2 = 2xyy'$;

5) $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$; 6) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0\ \ y(1) = 0$;

7) $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x$; 8) $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2}y = 5$;

9) $t^2\dfrac{ds}{dt} = 2ts - 3,\ s(-1) = 1$; 10) $(xy' + y) = y^2\ln x$;

11) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)dx + \sqrt{x^2 - 1}dy = 0$;

12) $2yy'' = (y')^2$;

13) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$;. $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

14) $y'' - 2y = xe^{-x} + \sin 2x$; 15) $y'' + 2y' = 4e^x + (x^2 + 1)$;

16) $y'' + 4y = \sin 2x + 1,\ y(0) = \dfrac{1}{4},\ y'(0) = 0$;

17) $y'' + y' = x^3 - x,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = ctgx$;

19) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}, y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

2. 1) Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 м/с , а вылетает из доски , пробив ее, со скоростью 80 м/с. Считая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения , найти время движения пули через доску.

2) Найти кривую, проходящую через точку $(-1;-2)$, если поднормаль ее в каждой точке равна 2.

3. 1) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$.

Вариант 7

1. 1) $\operatorname{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$; 2) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

3) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$; 4) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;

5) $y' = 2 + 4\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$;

6) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 = e^x$, $y(2) = 4$;

7) $y' - \dfrac{y}{x} = x$; 8) $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$;

9) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$;

10) $2y' + y\cos x = \dfrac{(1+\sin x)\cos x}{y}$;

11) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$;

12) $xy'' + y' = 0$; 13) $y''y^3 = 1, y\left(\dfrac{1}{2}\right) = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

14) $y'' + y' - 6y = xe^{2x} + x^2$; 15) $y'' - 2y' = 2ch2x$;

16) $y'' + 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1$;

17) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x + x, y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = \mathrm{tg} x$;

19) $y'' - y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$; $y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1$.

2. 1) Тело массой m падает вертикально вниз под действием силы тяжести и тормозящей силы сопротивления воздуха, пропорциональной скорости. Найти закон изменения скорости падения этого тела, если в момент времени $t = 0\, V = 0$.

2) Найти кривую, проходящую через точку $(2;2)$, если подкасательная в любой точке равна удвоенной абсциссе точки касания.

3.1) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

Вариант 8

1.1) $2xy' + y^2 = 0$; 2) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$;

3) $(1-x)dy - ydx = 0,\ y(0) = 1$;

4) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x} + y$; 5) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

6) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 4$;

7) $xy' - y = x\sin x$; 8) $y'ctgx - y = 2\cos^2 x\mathrm{ctg}x$;

9) $xy' - y - e^{\frac{1}{x}} = 0,\ y(a) = b$;

10) $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}\left(1 - x^3\right)$;

11) $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$;

12) $xy'' - y' = x^2 e^x$; 13) $y''y^5 + 2 = 0 \quad y(0) = y'(0) = 1$;

14) $4y'' - y = \left(x^3 - 24x\right) + e^x$; 15) $y'' - 5y' = 2\operatorname{ch}5x$;

16) $y'' - 3y' = x + \cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\dfrac{1}{9}$;

17) $y'' + 2y' + y = 3\sin 7x,\ y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$;

19) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}, y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3,\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3\pi$.

2. 1) Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы прямо пропорциональной времени от начала движения и обратно пропорциональной скорости движения. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t = 0\ V = V_0$.

2)Найти кривую, у которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат и которая проходит через точку $(5;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y - 2x \end{cases}$.

Вариант 9

1. 1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$; 2) $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$;

3) $y' = y\cos x, y(0) = 1$; 4) $y' = -\dfrac{x + y}{x}$;

5) $2y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

6) $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0, y(1) = 0$;

7) $\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x$; 8) $y'+\dfrac{2}{x}y=x^3$;

9) $y'-\dfrac{2y}{1-x^2}-1-x=0, y(0)=0$;

10) $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2}$;

11) $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$;

12) $y''(1+y)=5(y')^2$;

13) $y'''(x-1)-y''=0,\ y(2)=2,\ y'(2)=y''(2)=1$;

14) $y''-4y'+4y=e^{3x}+x^2$;

15) $y''+9y=-36\sin 3x-18e^x$;

16) $y''+4y=8\cos 2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

17) $y''-y'=x^2+1,\ y(0)=y'(0)=1$;

18) $y''-2y'=4x^2e^{2x}$;

19) $y''+\pi^2y=\dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1, y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

2 1) Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения V на время t. Установить зависимость между скоростью движения V и временем t, если при $t=0\ V=V_0$.

2) Найти кривую, у которой подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания и которая проходит через точку $(4;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x'=5x+3y \\ y'=-3x-y \end{cases}$.

Вариант 10

1. 1) $y'=\dfrac{y-1}{x+1}$; 2) $\left(e^x+2\right)dy-y^2e^xdx=0$;

3) $xdy - ydx = 0; y(1) = 1$; 4) $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$;

5) $xy' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y$;

6) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0, y(1) = 2$;

7) $y' + y = \frac{1}{e^x}$; 8) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;

9) $y' + y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1$; 10) $2xy' - 3y = -\left(5x^2 + 3\right)y^3$;

11) $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$; 12) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$;

13) $y'' - \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right) = 0, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = e$;

14) $y'' + 4y' + 4y = 25\sin x + e^{-2x}$;

15) $y'' - 4y' = 16\mathrm{sh}4x$;

16) $y'' - y = 9xe^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -5$;

17) $y'' + 9y = \sin 3x, y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;

19) $y'' + 4y = 8\mathrm{ctg}2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

2. 1) Материальная точка массой $m = 1$ движется прямолинейно, приближаясь к центру , отталкивающему ее с силой, равной k^2x (x-расстояние точки от центра) При $t = 0$ $x = a$, $x'(t) = ka$. Найти закон движения.

2) Найти кривую, у которой длина нормали есть постоянная величина a и которая проходит через точку $(0; a)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$.

Вариант 11

1. 1) $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y^2-x^2y^2\right)dy=0$; 2) $\left(4+e^{2x}\right)yy'=e^{2x}$;

3) $\left(1+y^2\right)dx-xydy=0, y(2)=1$; 4) $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$;

5) $y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$;

6) $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0, y(4)=0$; 7) $y'-y\operatorname{ctg}x=2x\sin x$;

8) $y'-\frac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2$; 9) $xy'-x=2y, y(1)=0$;

10) $3xy'+5y=(4x-5)y^4$;

11) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

12) $y''=(y')^2-y, y(0)=0, y'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

13) $y''(1+\ln x)+\frac{y'}{x}=2+\ln x$; $y(1)=\frac{1}{2}$, $y(1)=1$;

14) $y''+7y'+10y=e^{2x}+x^2$;

15) $y''+2y'+5y=2\sin x+xe^x$;

16) $y''+y=2\sin x-6\cos x, y(0)=y'(0)=1$;

17) $y''-2y'=e^{2x}-1$, $y(0)=\frac{1}{8}$, $y'(0)=1$;

18) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$;

19) $y''+y'=4\operatorname{ctg}x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

2 1)Распад радия происходит таким образом, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия с течением времени, если известно, что через 1600 лет останется половина количества радия.

2) Найти кривую, проходящую через точку $(1;1)$ и обладающую в каждой точке свойством, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

3. 1) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$.

Вариант 12

1. 1) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$; 2) $\sqrt{4 - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$;

3) $2\sqrt{xy}dx = dy$, $y(1) = 1$; 4) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$;

5) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$; 6) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 2$;

7) $y' + y = xy^3$; 8) $y' = 3x - \dfrac{y}{x}$;

9) $y' = x + 2y,\ y(1) = 1$; 10) $2y' + 2y = xy^2$;

11) $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2xydy = 0$;

12) $(y')^2 + 1 = yy''$;

13) $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, y(0) = y'(0) = 1$;

14) $y'' - 8y' + 7y = 14 + xe^x$; 15) $y'' - 5y' = \sin x + x^2$;

16) $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x},\ y(0) = y'(0) = 1$;

17) $y'' + 4y' + 4y = \sin 2x + 2,\ y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' - y' = ch2x$;

19) $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}},\ y(0) = y'(0) = 0$.

2. 1) Моторная лодка массой 300кг движется прямолинейно с начальной скоростью 16м/с . Сопротивление воды пропорционально скорости движения и равно 10кг при скорости 1м/с. Какое расстояние пройдет лодка, прежде чем ее скорость станет 8м/с?

2) Найти семейство кривых, подкасательная которых есть среднее арифметическое координат точек касания. Выделить из семейства кривую, проходящую через точку $(2;1)$.

3\. 1) $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Вариант 13

1.1) $yy' + x + 1 = 0$; 2) $y'x\ln x = y$;

3) $y'\sin x - \ln y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;

4) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; 5) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$;

6) $xdy + ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx, y(2) = 0$;

7) $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$;

8) $y' + \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^2}$;

9) $y' - y = e^x, y(0) = 1$; 10) $y' + y = x\sqrt{y}$;

11) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$;

12) $yy'' = y^2y' + (y')^2$;

13) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$;

14) $y'' - y' + y = x^3 + 6$; 15) $y'' + y' = 2shx + 3$;

16) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin x$;

17) $y'' - 4y' - 4y = \cos 2x + e^{2x},\ y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' - 4y' = 2\mathrm{sh}2x$;

19) $y'' + 3y' = \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}, y(0) = \ln 4, y'(0) = 3(1 - \ln 2)$

2. 1) Материальная точка массой 20г медленно погружается в жидкость. Найти закон движения, считая, что при медленном погружении сопротивление жидкости пропорционально скорости погружения (коэффициент пропорциональности равен 2)

2) Найти кривую, радиус-вектор любой точки которой равен отрезку нормали между кривой и осью абсцисс и которая проходит через точку $(1;3)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$.

Вариант 14

1. 1) $\mathrm{tg}y dx + \mathrm{tg}x dy = 0$; 2) $\left(1 + e^{2x}\right)yy' = e^{2x}$;

3) $\left(1 + x^2\right)y' = x\left(1 + y^2\right), y(1) = 1$;

4) $(6x + y)dx + (4y + x)dy = 0$;

5) $y' = \dfrac{x^2 + 3yx - y^2}{3x^2 - 2xy}$; 6) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, y(1) = 1$;

7) $y' = a\sin x + by$; 8) $y' + xy = -3x^3$;

9) $y' + \dfrac{y}{1 + x} + x^2 = 0, y(0) = 0$;

10) $xy' + y = xy^2$;

11) $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3y - x^2y\right)dy = 0$;

12) $yy'' + (y')^2 = 0$; 13) $xy'' = y'$; $y(1) = 0$ $y'(1) = 1$;

14) $y'' - 7y' + 12y = e^{3x} + 4$;

15) $y'' - 6y' + 9y = 3xe^{2x} + e^{2x}$;

16) $y'' + 4y' + y = -8\sin 2x + 32\cos 2x$;

17) $y'' + y = \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

18) $y'' - y = 2\mathrm{sh}x$;

19) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2+e^{-2x}}, y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 10\ln 3.$

2. 1) Моторная лодка массой движется в спокойной воде со скоростью 20км/ч. На полном ходу ее мотор выключен и через 40с скорость лодки уменьшилась до 8км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки 20мин после остановки мотора.

2) Найти линию, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке, пропорционален кубу ординаты точки касания и которая проходит через точку $(1;4)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$.

Вариант 15

1. 1) $e^y\left(\dfrac{dy}{dx} + 1\right) = 1$; 2) $xdx + ydy = yx^2dy - xy^2dx$;

3) $(2x+1)dy + y^2dx = 0,\ y(0) = 1$;

4) $\left(\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$; 5) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$;

6) $\left(y^2 - 9x^2\right)dx + 2xydy = 0,\quad y(1) = 1$;

7) $y' + 2xy = -2x^3$; 8) $y' - y\cos x = -\sin 2x$;

9) $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1, y(0) = 2$; 10) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

11) $e^ydx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$; 12) $y'' = -\dfrac{x}{y'}$;

13) $yy'' + (y')^2 = 2,\ y(0) = y'(0) = 1$;

14) $y'' + y' = x^2 + 4 + e^x$;

15) $y'' - 4y' + 8y = 5\sin x - 3\cos x$;

16) $y'' + y = 2e^x + \cos x$;

17) $y'' - 4y' + 4y = \sin x + e^{2x}, y(0) = y'(0) = 1$;

18) $y'' + y = x\cos^2 x$;

19) $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

2.1) Известно, что скорость точки, движущейся вдоль прямой, пропорциональна кубу времени. Через $2с$ после начала движения точка удалилась на $20м$. Найти закон движения точки.

2) Найти кривую, для которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна a^2 и которая проходит через точку $(a; a)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x' - 3x - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 3x + y \end{cases}$.

Вариант 16

1 . 1) $(1 - 5x)dy = 3ydx$; 2) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0$;

3) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$; 4) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

5) $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$;

6) $(x^2 + 3y^2)dx = 2xydy$, $y(2) = 0$;

7) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$; 8) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$;

9) $\dfrac{y'}{x} = e^{\frac{x^2}{2}}$, $y(0) = 1$; 10) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

11) $(10xy - 8y + 1)d + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$; 12) $xy'' + y' = 0$;

13) $y''y^2 = (y')^3, y(1) = 1, y'(1) = 2$;

14) $y'' + 4y = 8\sin 2x + x^2$; 15) $y'' + 2y' = xe^x + 3$;

16) $y'' - 9y + 8y = e^x x + \sin x$;

17) $y'' - 9y = 2 - \cos x,\ y(0) = 1, y(0) = 2$;

18) $y'' - y = 2\mathrm{sh}x$;

19) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x},\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

2. 1) Материальная точка массой 1г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от начала движения, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент времени $t = 10\text{с}$ скорость равнялась $0{,}5\text{м/с}$, а сила - $4 \cdot 10^5\,\text{Н}$. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

2) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(-3;5)$, для которой отрезок любой касательной, заключенный между координатами осями, делится пополам в точке касания.

3. 1) $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}$.

Вариант 17

1.1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}+1} = 0$; 2) $y\ln y + xy' = 0$;

3) $y'\mathrm{ctg}x + y = 2;\ y(0) = 3$; 4) $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$;

5) $xyy' = x^2 + y^2$;

6) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0, y(1) = 0$;

7) $y' + 3y\mathrm{tg}3x = \sin 6x$; 8) $y' + 2xy = \dfrac{x\sin x}{e^{x^2}}$;

9) $y' - y\mathrm{tg}x = \sec x$; 10) $xy' + y = y^2 \ln x$;

11) $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$;

12) $1 + (y')^2 \operatorname{tg} x = yy''$;

13) $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$, $y(1) = \dfrac{1}{2}, y'(1) = 1$;

14) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x + 5$;

15) $y'' + 16y = \operatorname{sh} 4x$;   16) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} + x$;

17) $y'' + y' = e^{-x}(x - 1) + \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

18) $y'' - y' = \operatorname{sh} 2x$;   19) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, y(0) = 3, y'(0) = 0$.

2. 1) Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и воздуха. Найти зависимость температуры тела от времени, если за 10мин, температура тела снизилась от до 100° до 60°, а температура воздуха была постоянной и равнялась 20°.

2) Найти кривую, проходящую через точку $M\ (4;3)$, если подкасательная любой точки есть среднее арифметическое координат точки касания.

3. 1) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$;   2) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Вариант 18

1. 1) $2x\sqrt{1 - y^2}dx + ydy = 0$;   2) $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{4 - x^2} = 0$;

3) $e^y(y' + 1) = 2,\ y(0) = 0$;   4) $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

5) $x\sin\dfrac{y}{x}y' + x = y\sin\dfrac{y}{x}$;   6) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x},\ y(1) = 1$;

7) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{12}{x^4}$;   8) $y' = \dfrac{y}{x + 1} + \dfrac{y^2}{x - 1}$;

9) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{3}{x^3},\ y(1) = 1$;

10) $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}$;

11) $(5x+y)dx+(x-7y)dy=0$; 12) $(1-x^2)y''-xy'=2$;

13) $y''y^3=1$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$;

14) $y''-6y'+8y=2x+1+\sin 2x$; 15) $y''-y'=e^2+x^2$;

16) $y''-6y'+9y=\cos x+2\cos 2x$;

17) $y''+y=\sin 2x+3$, $y(\pi)=y'(\pi)=1$;

18) $y''-y'=\mathrm{ch}2x$;

19) $y''-9y'+18y=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$, $y(0)=y'(0)=1$.

2. 1) Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

2) Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в соотношении $1:2$. Выделить кривую, проходящую через точку $(1;2)$.

3. 1) $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=3y-2x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x'+9y=0 \\ y'=x \end{cases}$.

Вариант 19

1. 1) $(x^3+2)y'=3y+1$; 2) $\sqrt{4+y^2}+\sqrt{2-x^2}\,yy'=0$;

3) $(1+y^2)dx=xydy$, $y(\sqrt{2})=1$; 4) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$;

5) $y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{2x^2-6xy}$; 6) $(xy'-y)\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=x$, $y(1)=0$;

7) $y'=e^{-x}-\dfrac{y}{1+x}$; 8) $y'+4xy=4x^3$;

9) $(1+y^2)y'-xy=xy^2$, $y(0)=\dfrac{1}{2}$;

10) $4y' + x^3 y = \left(x^3 + 8\right)e^{-2x} y^2$;

11) $5xydx + \left(\dfrac{5}{2}x^2 - y^2\right)dy = 0$; 12) $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$;

13) $y''e^{y} = y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

14) $y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x + 4$; 15) $y'' - 4y' = e^{2x} + x^2 - 1$;

16) $y'' + 9y = \cos 3x + e^{3x}$;

17) $y'' - 4y' + 3y = e^{x} + x - 3$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

18) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

19) $y'' + 4y = 4\mathrm{ctg}2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

2. 1) В любой момент времени скорость V точки превышает среднюю скорость за время t с начала движения на величину t^2. Найти закон движения, если при $t = 0$ $S = S_0, V = 0$.

2) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3;1)$ и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью OX делится пополам в точке пересеченья с осью OY.

3. 1) $\begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

Вариант 20

1. 1) $2xy' + y^2 = 1$; 2) $2x + 2xy^2 + \sqrt{1-x}\,y' = 0$;

3) $y' = y\cos x$, $y(0) = 1$; 4) $xy' - y = x\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

5) $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$;

6) $\left(x^2 + 2y^2\right)dx - 2xydy = 0$, $y(1) = 1$;

7) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$; 8) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;

9) $y'\mathrm{ctg}x + \mathrm{y} = 2,\ y(0) = 4$;

10) $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$;

11) $3x^2 e^y dx + (x^2 e^y - 1)dy = 0$;

12) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$;

13) $y''(x-1) = y',\ y(2) = 2, y'(2) = 1$;

14) $y'' - y = (5x+2)e^x + 4$;

15) $y'' - 6y' + 5y = \cos x + e^{2x}$; 16) $y'' + 25y = \sin 5x + x + 5$;

17) $y'' - y' = 2\sin 2x + 3\cos 3x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

18) $y'' + 4y = 2\mathrm{tg}x$;

19) $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, y(0) = \ln 4,\ y'(0) = \ln 4 - 2$.

2. 1) Распад радия происходит таким образом, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества , если за 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества.

   2) Найти уравнение кривой, которая проходит через точку $(1;3)$, если угловой коэффициент касательной к ней вдвое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

3. 3. 1) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$.

Вариант 21

1.1) $e^{2-y}y' = 1$; 2) $6xdx - ydy = yx^2dy - 2xy^2dx$;

3) $y' = \dfrac{y+1}{x^2}, y(1) = 0$; 4) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;

5) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$; 6) $\left(x^2 + 5y^2\right)dx - 2xydy = 0,\ y(1) = 1$;

7) $y' + 2xy = xe^{x^2}$; 8) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+5}{x}e^x$;

9) $xy' - y = x^2e^x,\ y(a) = b$; 10) $y' + xy = (x-1)e^x y^2$;

11) $xy^2dx + y\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$; 12) $y\ln yy'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$;

13) $y'' - \frac{y'}{x+1} = x^2(x-1),\ y(0) = y'(0) = 1$;

14) $y'' + 9y' + 20y = 6x + 1 + \sin 2x$;

15) $y'' + 9y' + 8y = xe^x + \cos 2x$; 16) $y'' + 4y = \sin 2x + 5$;

17) $y'' + y' = \sin x + e^{2x}, y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$;

18) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$;

19) $4y'' + y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = \frac{1}{2}$.

2. 1) Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/с , а вылетает из бруса , пробив его, со скоростью 60 м/с. Брус сопротивляется движению пули с силой, пропорциональной квадрату скорости движения. Найти время движения пули через брус.

2) Нормаль отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату радиус-вектора любой точки кривой. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(0;3)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$.

Вариант 22

1.1) $\left(xy^2 + x\right)dx - \left(y - x^2y\right)dy = 0$;

2) $3x + 3xy^2\sqrt{3 - x^2}\,y' = 0$; 3) $\left(1 + y^2\right)dx - xydy = 0,\ y(2) = 1$;

4) $y' = 4 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x}$; 5) $xy' = 6\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

6) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$, $y(1) = 2$;

7) $y' + 2xy = -4x^5$; 8) $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$;

9) $y' + y = \cos x,\ y(0) = 1$; 10) $4xy' + 3y = e^x x^4 y^5$;

11) $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0$; 12) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;

13) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2,\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$;

14) $y'' + 4y = 2\cos 2x + x$; 15) $y'' - 5y' = x^2 + e^{-2x}x$;

16) $y'' + 5y' + 4y = \sin x + 5x$;

17) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x} + 3,\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 9$;

18) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$;

19) $y'' + y = \dfrac{e^x}{2 + e^x},\ y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9$.

2. 1) Если тело медленно погружается в воду, то его скорость V и ускорение a приближенно связаны уравнением $a = g - kv$, где g и k - постоянные. Установить зависимость между пройденным путем S и временем t, если при $t = 0$ $S = V = 0$.

2) Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a. Найти кривую, проходящую через точку $(a;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x' + x - 5y = 0 \\ y' = x + y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$.

Вариант 23

1. 1) $yy' = 1 + 2x$; 2) $\sqrt{9 - x^2}\, y' + x^2 (y + 1) = 0$;

3) $y' \sin x = y \ln^2 y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$; 4) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$;

5) $xy' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y$; 6) $(x^2 + 3y^2)dx + 2xydy = 0$, $y(1) = 1$;

7) $y' - y \cos x = -\sin 2x$; 8) $y' - \dfrac{y}{x} = 3x^4$;

9) $xy' + y = xe^x$, $y(1) = 2$; 10) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$;

11) $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$;

12) $(y'')^2 = (y')^2 + 1$, $y' = p(y)$;

13) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$, $y(1) = 2$, $y'(0) = 3$;

14) $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x} + 4$; 15) $y'' + 5y' = \sin 5x + 3x^3$;

16) $y'' - 5y' + 4y = e^{2x} + x^2$;

17) $y'' + y = 4\cos x + 2$, $y(\pi) = y'(\pi) = 0$;

18) $y'' + 4y = ctg 2x$; 19) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2. 1) Изолированному проводнику сообщается заряд $Q = Q_0$. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент времени t пропорциональна наличному заряду проводника. Найти закон изменения заряда.

2) Найти кривую, у которой сумма длин касательной и подкасательной в любой ее точке пропорционально произведению координат точки касания. Определить кривую, проходящую через точку $(1;0)$, если коэффициент пропорциональности $k = 2$.

3. 1) $\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = y - 4x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - 2y \end{cases}$.

Вариант 24

1. 1) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+ydx=0$; 2) $\left(1-2e^{x}\right)yy'=e^{x}$;

3) $2\sqrt{y}dx=(x+1)dy$ $y(1)=0$; 4) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$;

5) $xy'=\dfrac{2y^3+4yx^2}{3y^2+6x^2}$; 6) $y'=\dfrac{2x}{y}-\dfrac{y}{2x},y(-1)=0$;

7) $xy'-y=x^2\cos x$; 8) $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{x^2}$;

9) $y'-2y=-x^2,y(0)=1$; 10) $y'-ytgx=-\dfrac{2}{3}y^4\sin x$;

11) $\left(3x^2y+2y+3\right)dx-\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$; 12) $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$;

13) $\left(1+x^2\right)+2xy'=0,y(0)=0,y'(0)=3$;

14) $y''+4y=2\sin 2x+x^2$; 15) $y''+2y'-3y=xe^{x}+\cos x$;

16) $y''+4y'+4y=3+\cos x$;

17) $y''-y=e^{x}+x-1,y(0)=y'(0)=\dfrac{1}{2}$;

18) $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$;

19) $y''+y=\operatorname{cosec}x,y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 1)Сила тока в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией λ и электродвижущей силой $\mathcal{E}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\lambda\dfrac{di}{dt}+R_i=\mathcal{E}$. Найти зависимость силы тока от времени t, считая R и λ постоянными, если электродвижущая сила пропорциональна времени, т.е. $\mathcal{E}=kt$, сила тока в начальный момент равна 0.

2) Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания и которая проходит через точку $(1;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = -y - 3x \\ y' = -x - 5y \end{cases}$.

Вариант 25

1.1) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + xdx = 0$; 2) $\left(e^x + 6\right)dy - y^3 e^{2x} dx = 0$;

3) $e^{2x-y} y' = 1, y(1) = 2$; 4) $\left(x^2 + y^2\right)dx - yxdy = 0$;

5) $xy' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y$; 6) $y' = \dfrac{3y}{x} - \dfrac{x}{3y}, \quad y(1) = 1$;

7) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; 8) $y' - 8xy = -8x^3$;

9) $y' + y = e^{3x}, \ y(0) = \dfrac{1}{2}$; 10) $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$;

11) $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0$;

12) $1 + (y')^2 = -yy''$; 13) $xy'' - 1 = y'$, $y(1) = y'(1) = 1$;

14) $y'' + y' - 2y = 4\sin 2x + e^x$;

15) $y'' + 3y' = xe^x + x^2$; 16) $y'' + 5y' + 4y = \cos x + 4$;

17) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + \sin 2x, y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

18) $y'' - y = sh2x$; 19) $y'' + 4y = \sec 2x, \ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$.

2. 1)Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру 70°, через 10 мин температура воды стала 65°, температура окружающей резервуар среды 15°. Определить температуру воды в резервуаре через 30мин от начала момента; момент времени, когда температура воды в резервуаре станет равной 20°.

2) Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси OX к радиусу-вектору точки касания есть величина постоянная, равная k и которая проходит через точку $(0;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x + 6y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$.

Вариант 26

1.1) $e^{y}\left(y'+2\right)=3$; 2) $6x^3dx+y^2dy=yx^3dx-y^2xdy$;

3) $(4x+1)dy+y^2dx=0,\quad y(2)=1$;

4) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$; 5) $xy'=\sqrt{3x^2+y^2}+y$;

6) $\left(y^2-9x^2\right)dx+4xydy=0$, $y(1)=1$;

7) $y'+2y\operatorname{tg}x=x^2\cos^2 x$; 8) $y'-2xy=-2x^3$;

9) $y'-2y=-x^2,\ y(0)=\dfrac{1}{4}$; 10) $y'+2\dfrac{y}{x}=2\sqrt{y}\cos x$;

11) $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0$; 12) $xy''-y'=x^2e^x$;

13) $yy''-\left(y'\right)^2=2, y(0)=y'(0)=1$;

14) $y''+9y'=6e^{3x}+\cos x$; 15) $y''+y=\sin x+x^2$;

16) $y''+4y=\cos 2x+5$;

17) $y''+6y'+9y=3e^{-3x}+x-2,\ y(0)=y'(0)=2$;

18) $y''+4y=x\sin^2 x$;

19) $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}, y(0)=1+2\ln 2;\ y'(0)=6\ln 2$.

2. 1)Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости. В какой момент времени скорость диска окажется равной 2рад/с, если при $t=0$ он вращается со скоростью 20рад/с, а при $t=8$ с- со скоростью 16 рад/с?

2) Найти кривую, у которой отношение отрезка , отсекаемому нормалью на оси OY к отрезку, , отсекаемому нормалью на оси OX есть величина постоянная., и равная k.

3. 1) $\begin{cases} x'=5x+3y \\ y'=-3x-y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y-2x \end{cases}$.

Вариант 27

1. 1) $xy' - y = y^3$; 2) $y' = 10^{x-y}$;

3) $(1+e^x)yy' = e^x, \ y(0) = 1$; 4) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

5) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; 6) $x(y' - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}) = y, \ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

7) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$; 8) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$;

9) $y' - 2y = e^x, \ y(0) = 1$; 10) $y'x + y = -xy^2$;

11) $2xe^y dx + (x^2 e^y + 1)dy = 0$; 12) $y'' - \dfrac{3y'}{x} = x$;

13) $y''y^3 = 2, \ y(1) = y'(1) = 1$; 14) $y'' - 4y' + 4y = x^2 + xe^{2x}$;

15) $y'' - 8y' + 7y = 2e^x + x^2$; 16) $y'' + 4y = \sin 2x + x$;

17) $y'' - y = \sin x, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; 18) $y'' - 2y' = \operatorname{ch} 2x$;

19) $4y'' + y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

2. 1) Известно, что скорость точки, движущейся вдоль прямой, пропорциональна кубу времени. Через 3с после начала движения точка удалилась на 30м. Найти закон движения точки.

2) Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания и которая проходит через т. $(1;1)$

3. 1) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1. \end{cases}$

Вариант 28

1. 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$;

3) $yy' = x\sqrt{y^2 + 1}, \ y(0) = 1$; 4) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;

5) $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$; 6) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}, \ y(1) = 1$;

7) $y' - y = e^{x}$;

8) $y' = x + y$;

9) $y'\mathrm{ctg}x + y = 5,\ \ y(0) = 2$;

10) $xy' + 2y = x^{5}y^{2}$;

11) $(x + y + 1)dx + (x - 2y^{2} + 3)dy = 0$;

12) $x(y'' + 1) + y' = 0$;

13) $2y(y')^{3} + y'' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -3$;

14) $y'' - 7y' + 6y = 12 + xe^{x}$;

15) $y'' - 6y' + 9y = 9x - e^{-x}$;

16 $y'' + 3y' = x^{2} + \sin 3x$;

17) $y'' + y = \sin 2x + \cos 2x,\ \ y(0) = y'(0) = 0$;

18 $y'' - 2y = \mathrm{sh}x$;

19) $y'' + 2y = \dfrac{1}{\cos^{3} x},\ \ y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. 1) За 30дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% первоначального количества?

2) Найти кривую, у которой подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания и которая проходит через т. $(9;1)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x' - 3x - y \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}$.

Вариант 29

1. 1) $xyy' = 1 - x^{2}$;

2) $2x^{2}yy' + y^{2} = 2$;

3) $x^{2}y' + y^{2} = 0,\ \ y(-4) = 1$;

4) $ydy + (x - 2y)dx = 0$;

5) $\dfrac{y}{x} = y' - e^{\frac{y}{x}}$;

6) $y' = \dfrac{y^{2}}{x^{2}} - 1,\ \ y(1) = 1$;

7) $y' + 2y = e^{x}$;

8) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^{3} + 2x$;

9) $xy' - y = x^{2},\ \ y(1) = 1$;

10) $y' + y = xy^{3}$;

11) $(1 + 4y^{2})dx + (8xy - 1)dy = 0$;

12) $y''' = e^{2x} + e^{-2x}$;

13) $yy'' - 3(y')^{2} = y^{2},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$;

14 $y'' - 3y' + 2y = e^x + x^2;$

15) $y'' + 2y' = 2x^2 - xe^x;$ 16) $y'' + y = \cos 2x + (x+1);$

17) $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \sin x, \ \ y(0) = y'(0) = 0;$

18) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x;$

19) $y'' + y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}, \ \ y(0) = \ln 2, \ \ y'(0) = 2 - \ln 2.$

2. 1) Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения V на время t. Установить зависимость между скоростью движения V и временем t, если $V(0) = V_0$.

2) Найти кривую, проходящую через т. $M(4;3)$, если подкасательная любой её точки равно среднеарифметическому координат точки касания.

3. 1) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases};$ 2) $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}.$

Вариант 30

1. 1) $y - xy' = 1 + x^2 y';$ 2) $yy' + x = 1;$

2) $2y'\sqrt{x} = y, \ \ y(4) = 1;$ 4) $(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0;$

5) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x};$ 6) $y' = \dfrac{3x^2 + 2y^2}{x^2}, \ \ y(2) = 1;$

7) $xy' = y + x^2;$ 8) $y' + y = \cos x;$

9) $y' + 3y = e^{2x}, \ \ y(0) = 0;$ 10) $y' + xy = xy^3;$

11) $(3x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0;$

12) $(y'')^2 = (y')^2 + 1, \ \ y' = p(y);$

13) $(y''x - y')y' = x^3, \ \ y(1) = 1, \ \ y'(1) = 0;$

14) $y'' + 3y' + 2y = 6e^x + x;$

15) $y'' + 3y' = 3x - x^2;$

16) $y'' - 10y' + 25y = xe^{-x} + 5;$

17) $y'' + 2y = \sin 2x + \cos x, \ \ y(0) = y'(0) = 0;$

18) $y'' + 2y = \mathrm{tg}\, 2x;$

19) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \;\; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, \;\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi.$

2. 1) Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и если это тело проходит $100 м$ в $10 с$ и $200 м$ в $15 с$.

2) Найти кривую, для которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна 25 и которая проходит через точку $(5;5)$.

3. 1) $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases};$ 2) $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}.$

Библиографический список использованной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления./ Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1980. – Т 2. – 575 с.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович – М.: Наука, 1971. – 735 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 414 с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов. – М.: Высш.шк., 1983. – 175 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1979. – 128с.
6. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин и др.; Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
7. Красс М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2007. – 464 с.

Заказ № ______ от __________ 2011 г. Тираж _______ экз.

Изд-во СевНТУ